UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

DOCTORAT EN DIDÀCTIQUES ESPECÍFIQUES

La enseñanza de la resolución algebraica de problemas verbales mediante un sistema tutorial inteligente

Tesis Doctoral

PRESENTADA POR:

José Antonio González-Calero Somoza

DIRIGIDA POR:

David Arnau Vera

Luis Puig Espinosa

València 2014

A mis padres.

A mis hermanas.

A Pola y Carla.

Abstract

Technology has usually been considered (perhaps with frequency, without a sound theoretical base) an instrument which facilitates learning in practically every educational field. In this respect, intelligent tutoring systems (ITS) stood out for the great expectations generated in their birth, based on the didactic possibilities that the one-to-one teaching situations offer (a teacher working with a single student). The field of algebraic solving of word problems, on which the present work is focused, is not an exception. In fact, the use of computer environments for the teaching and learning in the solving of word problems has been a regular topic of research in educational mathematics. Some of these programs have tried to replace some teacher's tasks; others offered environments in which the solver could recourse to different systems of representation or could get rid of monotonous tasks such as the calculation of arithmetic operations. Numerous studies have described environments that had this intention and the consequences of its use with educational aims. Some examples would be: Word Problem Assistant (Thompson, 1989), ANIMATE (Nathan, 1990), HERON (Reusser, 1993), PAT (Koedinger, & Anderson, 1998), AnimalWatch (Beal & Arroyo, 2002) and MathCAL (Chang, Sung, & Lin, 2006).

Arnau, Arevalillo-Hérraez and Puig (2011) pointed out that the interactive learning environments (ITS would be included here) for the solving of word problems designed to that date, had not achieved to combine flexibility when allowing the solver to follow any valid resolution path and being able to verify their actions. Among those which actually supervised the solving process, the lack of flexibility was reflected in: a problem was associated with a resolution; a quantity was associated with an expression; and each problem was associated with some error messages. These limitations of the existing systems could constitute an explanation to the fact that the educational impact of the ITS would not have been as high as it was expected at first.

In view of this outlook, this work intended to give an answer to two questions:

1) How does the teaching of algebraic solving of word problems by using an intelligent tutoring system influence the proficiency of secondary school students in solving word problems with pencil and paper?
2) What are the performances of students when they solve word problems in an intelligent tutoring system after being instructed in algebraic solving of word problems using the system?

In this study, the ITS Hypergraph Based Problem Solver (HBPS) was used (Arnau et al., 2011; Arnau, Arevalillo-Herráez, Puig, & González-Calero, 2013). This ITS is characterized by being able to supervise the solving of arithmetic-algebraic word

problems. Unlike other systems, HBPS offers a greater flexibility with regard to the decision-making of the solver. Concretely, and in relation to the flexibility in the supervision of solver's actions, HBPS meets the following criteria:

- Independence with respect to the solving method. The ITS lets students solve problems in an arithmetical or an algebraic way.
- Independence with respect to the use of one or a system of equations. When a problem is solved in an algebraic way, the use of one or more letters is possible and, consequently, the use of one or more equations.
- Independence between quantity and its representation. The program does not store a predetermined assignment between a quantity and its representation, but it checks the validity of an expression in accordance with the problem restrictions and the solver's decisions.
- Independence in the ITS operation with respect to the problem. The verification of the mathematical expressions that are introduced and the error and (basic) help messages that the ITS provides are independent of the specific problem that is being solved.

(Arnau et al., 2011, p. 259)

In this study, we adopt the theoretical and methodological perspective of Local Theoretical Models (LTM) (Filloy, 1999; Filloy, Rojano, & Puig, 2008, Kieran, & Filloy, 1989). This framework is especially suitable for the study of learning phenomena, considering the essential elements of the whole process of teaching and learning. These elements are considered in terms of four interrelated component: a teaching model, a model for the cognitive processes, a model of formal competence and a model of communication. To be precise, and in relation to the model of formal competence, our study required to embrace two fundamental aspects: on the one hand, the algebraic solving of word problems with pencil and paper, and on the other hand, the algebraic solving of word problems using the ITS. For this reason, the study takes the Cartesian Method (CM) as reference for the algebraic solving of arithmetic-algebraic word problems. From this method, the model of competence was determined for the algebraic solving of word problems in HBPS, paying special attention to how the different elements of competence are affected when solving a word problem in this environment in comparison with the pencil and paper environment. With regard to the teaching model, it was required to build a teaching sequence on the algebraic solving of word problems in HBPS, comparable to a parallel sequence of teaching to be developed with pencil and paper.

With the aim of giving an answer to the first research question, we conducted a group study. The population of this study consisted of a group of 56 students in the fourth year of secondary school (15-16 years old) in a Spanish public secondary school. The choice of the population responded to our intention to work with students previously instructed in the algebraic solving of word problems but who would not had reached full competence in the field. At this stage, students were randomly divided into three groups; each of them was instructed using different teaching sequences. The sequencing at this experimental stage was identical in the three groups: 1) pre-test, 2) teaching sequence and, 3) post-test. The problems in pre and post-test and those that were used through the teaching sequence were the same in the three groups. All the problems used were characterized by being usually solved in an algebraic way. Each problem used in the post-test was isomorph to one of the problems in the pre-test, i.e. they had the same structure of relations in their analytical readings. In addition, problems of pre-test and post-test were structurally different from the ones used in the teaching sequences. In the three groups, the teaching was practically limited for students to solve a set of problems without any human help. A group of students was entirely taught in a paper and pencil environment (group PP); another group worked with a complete version of HBPS (group CT); and a third group worked with a limited version of the system that did not provide explicit helps (group RT). Being concrete, the version with which group CT worked offered a set of strategies to support the resolution process and, when demanded by the user, provided aids that always let the student continue the solving process informing him about how to perform the next step. However, the version of group RT offered support strategies but the user was never told exactly what to do in case of error. In both versions, the system offered to the user a structuring of the resolution process using the CM as skeleton and validated the correctness of the user's actions at each moment. Hints on demand provided by the complete version of HBPS follow a three-level structure. At the first level, the system provided aids about the resolution method with no information related to the problem content. At the second and third levels, help messages were contextualized within the problem being solved. In fact, at the last level, help messages offer the user detailed instructions about how to continue in the solving process.

Given the fact that the group study tried to determine the effect of the different types of teaching on the students' proficiency of solving word problems in an algebraic way, the number of problems that students were able to be solved correctly before being instructed (pre-test) and immediately after (post-test) was analysed. The results of this study show a statistically significant improvement in the proficiency of the algebraic solving of word problems with pencil and paper in group CT, compared to groups RT and PP. In spite of the existence of studies that point out that the systems offering too much help to the solver can generate limited learning (e.g. Baker, Corbett, Koedinger, & Wagner, 2004; Shute, Woltz, & Regian, 1989; Walonoski, & Heffernan, 2006). These results highlight that the higher level of help offered to group CT gave rise to a higher improvement of the proficiency in the algebraic solving of word problems. These results discard the possibility of the fact that the students from group CT used *gaming* strategies (e.g., Walonoski, & Heffernan, 2006) intensively throughout the teaching sequence. This possibility is a risk always associated to ITS that offer a high level of help and a fine supervision of the user's actions. In general, these results confirmed the thesis of Koedinger and Aleven (2007) that effective tutoring is more related to strategies that provide information rather than other methods that attempt to withhold it. At the same time, the group study did not show significant differences between groups PP and RT. This fact seems to emphasise that the mere structuring and sequencing of the ideal steps that a solver must undertake in order to solve a word problem and informing students about the correctness of each step are not sufficient to generate an improvement in the proficiency of the algebraic solving of this type of problems.

The group study was also used with the intention of classifying the students who belong to the groups that worked with HBPS during the teaching sequence (groups CT and RT) and, therefore, being able to select the pairs that would take part in the following stage of the research: the case study. This stage intended to give an answer to the second of the research questions. Thus, the case study tried to describe and analyse the students' performances when they solved arithmetic-algebraic word problems using the tutor HBPS, considering not only correct resolution strategies but also incorrect ones. Seven pairs of students took part in this experimentation stage. Each of them solved a variable number of problems, according to the ones that they were able to solve within 35 minutes. Basically, the problems proposed at this stage were selected from the group study. In fact, students were grouped in pairs according to their level of proficiency and to the fact that the students had shown similar difficulties in the same problems of the post-test.

The case study allows us to create a catalogue of student performances. From this catalogue we should highlight the following: 1) the difficulty in interpreting the names of the quantities that HBPS proposes; 2) the reinterpretation of names provided by HBPS over the resolution process; 3) the tendency to isolate propositions from the statement in which relations between quantities are described and to translate these isolated propositions into algebraic language without interpreting the relation in the context of the situation described by the statement; 4) the tendency to assign a letter to the quantity demanded in the statement and how it leads to generate difficulties in the step 4 of CM; 5) the tendency to make direct translations from the natural language to the algebraic language, causing reversal errors; 6) the tendency to build equations in the form $x = f(x)$; by expressing the equation in this way, some students considered that it was possible to calculate the value of the isolated quantity; and, 7) the interpretation of equations as a representation of the association among related quantities.

As the group study indicates that the HBPS can be an useful instrument in the teaching of the algebraic solving of word problems, the case study also reveals the appearance of undesirable performances when secondary school students solve problems in such environment. Some of the performances could have their origin in the design characteristics of HBPS and they should be taken into consideration when developing new versions of the ITS. The results of this research suggest that the evolution of this ITS should be orientated towards a greater level of adaptability to the individual characteristics of each student.

Índice

Capítulo 5

1. La problemática

> Despite my lucid explanations of how to translate from English to algebra, my firm insistence that students write out their assignment of letters to variables in the problem, my helpful suggestions that they use tables to organize the variables and diagrams to represent relationships, and my rigid requirement that the last part of the solution be an English sentence that responded to the question posed in the problem statement, my students nonetheless moaned with pain when the word-problem sections of our textbook rolled around and stared with incomprehension and chagrin when we discussed the word problems they had failed to solve on their homework or a test.
>
> Kilpatrick (1985)

1.1. JUSTIFICACIÓN Y PROPÓSITO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1.1. LA PROBLEMÁTICA

El presente trabajo aborda la problemática de los problemas verbales, o para ser exactos aborda (parcialmente) el problema (de la enseñanza y aprendizaje) de los problemas verbales (aritmético-algebraicos). La redundancia con la que abrimos este capítulo pretende enfatizar el hecho de que los problemas verbales han constituido –y constituyen– una fuente importante de dificultades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En el campo del álgebra educativo así lo atestiguan multitud de trabajos de investigación, los cuales han documentado diferentes dificultades relacionadas con la resolución de este tipo de problemas, prestando especial atención a la transición entre la aritmética y el álgebra. Entre este conjunto de trabajos destacamos, atendiendo a su relevancia, las siguientes dificultades o los errores observados en alumnos durante los primeros cursos de instrucción algebraica: 1) la dificultad para dar significado correcto al signo igual, ya sea interpretando este signo como una señal de "hacer algo" (Kieran, 1981) o como una asociación entre cantidades (Clement, Lochhead y Monk, 1981); 2) dificultades asociadas por los diferentes usos de las letras entre la aritmética y el álgebra (Küchemann, 1978); o 3) las dificultades para operar con lo desconocido (Filloy y Rojano, 1989; Filloy, Rojano y Puig, 2008). Centrándonos específicamente en los problemas verbales, las dificultades para traducir la información recogida en un enunciado verbal a expresiones y ecuaciones algebraicas ha sido investigada en profundidad (p. ej., Clement, 1982; Clement, Lochhead et al., 1981; Clement, Lochhead y Soloway, 1980; Kücheman, 1978; MacGregor y Stacey, 1993). También ha sido documentada la predisposición del alumnado de secundaria a evitar los métodos algebraicos de resolución de problemas (Filloy, Rojano y Rubio, 2001), lo que puede conducir a rutas no algebraicas de resolución como sería una vuelta a la resolución aritmética o a estrategias de ensayo y error (Stacey y MacGregor, 2000). Como resultado de la palpable dificultad que generan los problemas verbales, un grupo de investigaciones han tratado de identificar los factores que hacen de un problema verbal más o menos difícil (p. ej., Bednarz y Janvier, 1996; Cerdán, 2008; Kirshner, Awtry, McDonald y Gray, 1991; Lewis y Mayer, 1987). Por otro lado, una línea de investigación paralela abordó el desarrollo de métodos provisionales para la resolución de problemas verbales, considerando que estos métodos podrían actuar como mediadores entre la resolución aritmética y algebraica. Algunos de estos métodos provisionales son: el método de la hoja de cálculo (Arnau, 2010; Filloy, Rojano et al., 2008; Filloy, Rojano et al., 2001; Rojano, 1996; Rojano y Sutherland, 1993, 1997; Sutherland y Rojano, 1993), el método analítico de exploraciones sucesivas (MAES) (Filloy, Rojano et al., 2008; Filloy, Rojano et al., 2001; Rubio, 1994) o el método de modelización (Kho, 1987; Ng y Lee, 2009). En general, estos métodos pretenden realizar una aproximación al método por excelencia para la resolución algebraica de los problemas verbales: el método cartesiano. Para ello, con el objeto de resultar más accesibles para el alumnado, se estructuran sobre un nivel de abstracción menor en el que se evita intencionalmente elementos del algebra que resultan particularmente difíciles para los estudiantes, como por ejemplo, el lenguaje algebraico.

En paralelo a las investigaciones mencionadas en el párrafo anterior, debemos considerar cómo el panorama investigador ha visto ampliado sus horizontes (o al menos modificado) como resultado del desarrollo de los ordenadores. En realidad, ya hemos ofrecido un pequeño anticipo en relación con los ordenadores y la enseñanza del álgebra al mencionar el método de la hoja de cálculo, método que aprovecha las características y el lenguaje de una herramienta ofimática para paliar ciertas dificultades asociadas a la introducción del algebra. En general, la tecnología ha sido considerada como un instrumento que podría facilitar el aprendizaje en, prácticamente, cualquier ámbito educativo. El álgebra y, de manera más concreta, los problemas verbales aritmético-algebraicos no han sido una excepción, pues desde la década de los ochenta se han desarrollado diferentes entornos para asistir en el proceso de enseñanza de la resolución de este tipo de problemas. Algunos de estos entornos estaban concebidos con el fin de facilitar la comprensión de las relaciones entre cantidades expresadas en el enunciado y para ello se apoyaban en diferentes modelos de representación visual de la estructura de las relaciones. En este tipo de entornos podríamos encuadrar al Story Problem Solver (Marshall, 1995), en el cual se planteaban problemas aritméticos acompañados de un diagrama que representaba la estructura conceptual involucrada en el problema, de tal forma que el resolutor debía asignar la cantidad que correspondiera a cada elemento del diagrama. Una vez construido el modelo, el estudiante debía resolver el problema. En una línea parecida, situaríamos el tutor ANIMATE (Natham, 1990; Nathan, Kintsch y Young, 1990), que operaba en un principio exclusivamente para problemas de móviles (que se caracterizaban por la necesidad de usar en su resolución la estructura conceptual espacio = velocidad × tiempo). El resolutor debía construir inicialmente una ecuación con la que plasmase en el lenguaje algebraico la situación descrita en el problema. A partir de la ecuación, el sistema generaba una simulación de la situación modelizada por el estudiante. Tomando en consideración la simulación, el estudiante debía decidir si su ecuación propuesta era correcta pues el tutor no realizaba validación sobre la corrección de la ecuación escrita por el estudiante. Otro sistema que se apoya en la representación del problema verbal (ya sea de la estructura de relaciones o de la situación) para la enseñanza de la resolución de este tipo de problemas, es HERON (Reusser, 1993). Este programa ofrece un entorno en el cual el resolutor ha de plantear la resolución del problema mediante una cadena de diagramas de árbol. El entramado de cantidades en diagrama de árbol constituye un medio esquemático de representar la semántica del problema, y a partir de la representación, iniciar el proceso de resolución. Sin embargo, este tutor está limitado a la resolución de aquellos problemas que únicamente puedan ser representados mediante una secuencia de diagramas de árbol, por lo que queda fuera de su ámbito las lecturas de problemas que deriven en una (o varias) ecuaciones algebraicas[1].

En el campo del *software* educativo, como es lógico, es posible realizar múltiples clasificaciones atendiendo a diversos criterios y propósitos. Si atendemos al tipo de tutorización que ofrece el programa aparecen básicamente dos categorías: *computer-aided instruction*[2] (en adelante, CAI) e *intelligent tutoring systems*. Los sistemas de la primera categoría se caracterizan por ofrecer retroalimentación y ayudas sobre la respuesta final del estudiante a la tarea encomendada. En cambio, los sistemas tutoriales inteligentes (en adelante, STI) tienen la capacidad de ofrecer ayudas a los resolutores a lo largo de los diferentes pasos que constituyen la tarea o el problema (VanLehn, 2011)[3]. Sobre esta característica, en realidad, subyacen elementos más complejos que caracterizan un STI como sería la posibilidad de realizar por sí mismo la tarea encomendada al usuario o al menos analizar las actuaciones del usuario, de tal forma que la monitorización de las acciones podría determinar la tutorización o la instrucción que se ofrece (Woolf, 2009). La consideración global de estos aspectos invita a pensar que los STI pueden alcanzar mejores rendimientos educativos en comparación con los CAI, como se deduce de la comparación de los resultados de Kulik y Kulik (1991) y Anderson, Corbett, Koedinger y Pelletier (1995). En relación con los problemas verbales, han sido numerosos los STI que abordaban la enseñanza de este tema. A modo de ejemplo, mencionamos los sistemas AnimalWatch (Beal y Arroyo, 2002) y PAT (Koedinger y Anderson, 1998). El primero constituye un entorno para la resolución de problemas aritméticos propuestos bajo una línea temática (especies animales en peligro de extinción) y orientado a estudiantes de últimos cursos de primaria y primeros de secundaria. AnimalWatch utiliza la información recabada para cada estudiante a la hora de determinar el siguiente problema a resolver por el alumno. Por su lado, PAT está dirigido a estudiantes de secundaria (12-15 años), planteándoles situaciones problemáticas que pueden explorar mediante el uso de tablas, gráficas o representaciones simbólicas. Precisamente, uno de los principales objetivos del tutor es la comprensión y uso de múltiples sistemas de representación.

---

[1] Llamamos ecuaciones algebraicas para referirnos a las que Filloy y Rojano (1985a) denominaron ecuaciones no aritméticas. Estas ecuaciones son aquéllas en las que es necesario operar con la incógnita para resolverlas. Puig y Cerdán (1990) establecieron una correspondencia entre la resolución de problemas aritméticos-escolares y el tipo de ecuaciones resultantes. En concreto, mostraron cómo en aquellos problemas donde en la representación del diagrama de análisis-síntesis no es posible calcular la incógnita a partir de los datos, dicho diagrama conduce a la formulación de una ecuación algebraica.

[2] Esta categoría recibe múltiples denominaciones: *Computer-Based Instruction, Computer-Aided Learning* o *Computer-Based Training* (VanLehn, 2011).

[3] En Woolf (2009) se indica que entre los expertos no existe un acuerdo sobre una serie de características que definan unívocamente un sistema tutorial inteligente. Sin embargo, en este texto adoptaremos como característica fundamental para distinguir estos sistemas de los *computer-aided instruction*, el criterio de VanLehn (2011) que fija la distinción sobre si la tutorización recae sobre la respuesta final o sobre las subtareas que componen el problema.

A pesar de los numerosos intentos de crear un sistema tutorial que pudiera en último término sustituir al docente en la enseñanza de la resolución de problemas verbales, los sistemas desarrollados no han sido capaces de cubrir estas expectativas. Arnau, Arevalillo-Herráez y Puig (2011) indican que este fracaso se debe a la incapacidad de conciliar dos aspectos característicos de la tutorización humana: la flexibilidad del usuario en la toma de decisiones a la hora de resolver un problema y la capacidad de tutorizar el proceso con independencia de las decisiones del resolutor. El segundo de los elementos, la capacidad de tutorizar, es una característica intrínseca a los STI y que, por tanto, forma parte de la definición de este tipo de sistemas. No obstante, la flexibilidad en cuanto a la toma de decisiones del usuario no debe ser considerada un asunto menor. De hecho, la capacidad para soportar múltiples rutas de resolución es necesaria en aquellos dominios donde los problemas pueden ser resueltos haciendo uso de diferentes estrategias y esta flexibilidad suele considerarse que ayuda a los estudiantes a aprender de manera más eficaz (Waalkens, Aleven y Taatgen, 2013). Sin embargo, como los autores indican, esta funcionalidad dispara la complejidad de los sistemas en comparación con aquellos sistemas que, simplemente, soportan una vía de resolución predeterminada por los autores de la herramienta. Como consecuencia, son muy escasos los STI que ofrezcan libertad al resolutor, más aún si consideramos que son numerosos los ámbitos donde los problemas pueden ser resueltos mediante diferentes estrategias. Éste es el caso de los problemas aritmético-algebraicos donde la propia denominación esconde una dualidad, no únicamente relativa a la estructura de los problemas, sino a la lectura que el resolutor hace de los mismos[4]. Por ende, se pone de manifiesto el hecho de que esta familia de problemas alberga la posibilidad de ser resueltos, como mínimo, mediante dos métodos de resolución diferentes. Además, si nos ceñimos en exclusividad a una lectura algebraica de un determinado problema, las posibilidades de un resolutor a la hora de dar solución al problema por diferentes rutas dentro de esa misma lectura continúan siendo muy variadas. Piénsese, por ejemplo, en que el resolutor ha de tomar decisiones que determinan la ruta de la resolución tales como: usar una o varias letras para designar cantidades desconocidas; seleccionar qué cantidades desconocidas van a ser representadas por letras y, en consecuencia, cuáles lo serán mediante expresiones algebraicas; decidir qué relaciones se usarán en la simbolización entre aquellas cantidades que serán representadas con expresiones algebraicas; o seleccionar la cantidad (o cantidades) sobre las que se construirá la ecuación (o ecuaciones).

Ante esta situación, planteamos una investigación en la que se aborda la enseñanza de la resolución algebraica de problemas verbales mediante un sistema tutorial inteligente capaz de combinar en gran medida el respeto a la libertad en la toma de decisiones del resolutor y la tutorización del proceso de resolución. A tenor de lo anteriormente expuesto, consideramos que la investigación puede revestir un doble interés. Por un lado, explora las posibilidades educativas de un sistema tutorial en un dominio complejo de conocimiento como es la resolución algebraica de problemas verbales. Por otro lado, aborda la enseñanza de una tipología de problemas presente en prácticamente la totalidad de currículos de matemáticas en secundaria y que, además, las investigaciones reconocen como un componente generador de dificultades entre el alumnado. Ante esta doble vertiente deseamos establecer claramente el orden de las prioridades a las que atiende este trabajo. Nuestro planteamiento, similar a otras

[4] En el capítulo 2 se desarrolla con detalle esta idea, recogiendo el trabajo de Puig y Cerdán (1990), quienes dan una respuesta inicial, desarrollada en trabajos posteriores, a la pregunta de investigación planteada por Wagner y Kieran (1989) de qué es un problema algebraico.

investigaciones citadas anteriormente, se cimenta en el uso de un método provisional que aspira a que los estudiantes alcancen un aprendizaje sobre la resolución algebraica mediante el método cartesiano. Este método edificado alrededor de un sistema tutorial inteligente, dado su carácter de provisionalidad, deberá ser abandonado en algún momento dando paso al trabajo sobre el método definitivo, por lo que interesa que esté modelado sobre el método al que se desea llegar[5]. Al mismo tiempo, es importante que el método provisional sea diseñado de tal modo que su abandono, en el momento que corresponda, no sea traumática, es decir no derive en actuaciones no deseadas por parte de los estudiantes.

El método provisional que en este trabajo se propone está construido sobre un sistema tutorial concreto, lo que hace inevitable una evaluación acerca de la efectividad de este sistema como instrumento, considerando sus posibilidades y sus limitaciones. No obstante, nos vemos obligados a especificar que el objetivo primigenio del uso del tutor es la competencia en el método cartesiano y no en el instrumento en sí. En este contexto, planteamos el diseño de una secuencia de enseñanza basada en la resolución algebraica de problemas verbales mediante un sistema tutorial inteligente. Esta secuencia de enseñanza se aplicó en la instrucción de estudiantes de secundaria ya familiarizados con la resolución algebraica de problemas verbales, tras lo cual se realizó un análisis de los efectos de esta instrucción en relación con el modelo de competencia.

Este trabajo se enmarca dentro de la línea de investigación "Análisis didáctico, histórico y epistemológico de las matemáticas escolares" que viene desarrollándose en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universitat de València desde hace décadas. A esta línea han realizado aportaciones un grupo extenso de investigadores coordinados por Luis Puig y cuyos trabajos se han centrado principalmente en la resolución de problemas, la aritmética, el álgebra y la modelización. En el desarrollo de esta línea de trabajo han ocupado un papel muy relevante las colaboraciones realizadas entre investigadores de la Universitat de València e investigadores del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV) de México, fruto de un convenio de colaboración entre ambas entidades.

En relación con las investigaciones enfocadas en el álgebra escolar y la resolución de problemas, resulta imprescindible reseñar las aportaciones de los trabajos de Fernando Cerdán y Luis Puig de la Universitat de València y de Teresa Rojano y Eugenio Filloy por parte del CINVESTAV. Una interesante recapitulación de muchas de sus ideas acerca del álgebra escolar puede encontrarte en Filloy, Rojano et al. (2008). Ahora bien, las contribuciones de este equipo de trabajo no se circunscriben únicamente al estudio de fenómenos didácticos en el ámbito de la matemática escolar sino que también se han traducido en la creación de un marco teórico y metodológico propio para la investigación de estos fenómenos, los Modelos Teóricos Locales (MTL). Este marco fue esbozado por Eugenio Filloy a finales de la década de los ochenta (Filloy; 1990; Kieran y Filloy, 1989) y ha sido detallado y reelaborado en el transcurso de los años siguientes (véase Filloy, Rojano et al., 2008, para una descripción detallada). El hecho de que los MTL pongan especial énfasis en la descripción y análisis de las actuaciones de los estudiantes, ha constituido un eje conductor de los trabajos incluidos dentro de

[5] En el capítulo 3 se justifica y presenta el método cartesiano como modelo de competencia. A su vez, se describe cómo el método provisional usando el sistema tutorial inteligente se elabora sobre la base del método cartesiano.

esta línea de investigación dotándolos, en cierta medida, de un marco y un lenguaje común para el estudio de las problemáticas asociadas a los fenómenos educativos.

1.1.2. OBJETIVOS

La investigación que proponemos pretende responder las siguientes preguntas de investigación:

1) ¿Cómo influye la enseñanza de la resolución algebraica de problemas verbales mediante un sistema tutorial inteligente en la competencia[6] de estudiantes de secundaria cuando resuelven problemas verbales en lápiz y papel?
2) ¿Cuáles son las actuaciones de los estudiantes cuando resuelven problemas verbales en un sistema tutorial inteligente tras haber sido instruidos previamente en la resolución algebraica de problemas verbales mediante dicho sistema?

1.2. MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En la presente investigación tomaremos como marco teórico y metodológico los Modelos Teóricos Locales (Filloy, 1999; Filloy, Rojano et al., 2008, Kieran y Filloy, 1989). En Puig (2006) se presenta una explicación del carácter local y de modelo de los Modelos Teóricos Locales (en adelante, MTL):

> El carácter local viene dado por el hecho de que el modelo se elabora para dar cuenta de los fenómenos que se producen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de unos contenidos matemáticos concretos a unos alumnos concretos y sólo se pretende que el modelo sea adecuado para los fenómenos observados. El carácter de modelo viene dado, entre otras cosas, por el hecho de que no se hace la afirmación fuerte de que las cosas son tal y como las caracteriza el modelo, sino sólo que, si las cosas fueran como las caracteriza el modelo, los fenómenos se producirían como se han descrito. El modelo tiene pues carácter descriptivo, explicativo y predictivo, pero no excluye que los mismos fenómenos puedan describirse, explicarse y predecirse de otra manera (mediante otro modelo). En esto se diferencia la pretensión de la elaboración del modelo de la que suele acompañar la elaboración de una teoría, que implica la exclusión de cualquier otra teoría que se avance para explicar los mismos hechos, a la que se combatirá como errónea. (Puig, 2006, p. 2)

Un MTL se elabora para interpretar fenómenos que tienen lugar en situaciones de enseñanza y aprendizaje, entendiendo estas situaciones como unas situaciones donde lo que acontece principalmente es un proceso comunicativo. Bajo esta idea, contemplamos los procesos de enseñanza y aprendizaje desde un enfoque semiótico, en donde el modelo de enseñanza es, en esencia, una cadena de lecturas y transformaciones de textos (Puig, 2003a). Este hecho nos conduce a emplear la noción de sistema matemático de signos (SMS) para interpretar los diferentes fenómenos tanto desde el punto de vista de la matemática formal como informal que tiene lugar en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Puig (2003a) enfatiza el cambio de enfoque que subyace en el uso de la noción de SMS:

[6] Optamos por emplear la palabra *competencia* pues una de las acepciones de esta palabra se corresponde con el sentido que aquí la usamos. En concreto, según el DRAE, tenemos que *competencia* refiere a la *pericia para hacer algo*. Somos conscientes que el uso de este término acarrea ciertas ambigüedades, básicamente generadas por el uso de la palabra *competencia* en las traducciones del informe PISA. En Puig (2008) se presenta una interesante discusión de este asunto en la cual el autor señala cómo en la traducción al castellano se usa la palabra *competencia* para dar cuenta de conceptos distintos, que en inglés se identifican con vocablos distintos. El uso que aquí hacemos de competencia se correspondería en inglés con el término *proficiency*, que considera la evaluación de las actuaciones de los alumnos.

> Lo que entonces aparece como crucial es el sistema de signos tomado en su conjunto y lo que hay que calificar de matemático es el sistema y no los signos, porque es el sistema el responsable del significado de los textos. Hay que hablar pues de sistemas matemáticos de signos y no de sistemas de signos matemáticos, subrayando con la colocación del adjetivo 'matemáticos' que lo que tiene el carácter matemático es el sistema y no meramente los signos individuales, y que, por tanto, lo que nos interesa para el desarrollo de la matemática educativa es estudiar cuáles son las características de esos sistemas (matemáticos) de signos debidas no sólo a que son sistemas de signos sino a que son precisamente sistemas matemáticos. (Puig, 2003a, p. 181–182)

En consecuencia, la idea de SMS permite la interpretación de una expresión, con independencia de que en el aparezcan signos no matemáticos, para darle sentido como un mensaje de contenido matemático. Asimismo, dado que este marco permite la observación y el análisis de los fenómenos que tienen lugar en los procesos de enseñanza y aprendizaje, deberá tomar en consideración los personajes esenciales que intervienen en dichos procesos: el estudiante, el profesor y las matemáticas. Esto hace que se deban contemplar los siguientes elementos: la enseñanza, los sujetos que aprenden, los conceptos matemáticos involucrados y la comunicación establecida. Desde la perspectiva de los MTL, esto se traduce en constituir nuestro modelo a partir de cuatro componentes: un componente de competencia, un componente de actuación (o de los procesos cognitivos), un componente de enseñanza y un componente de comunicación.

El componente de competencia incluye tanto el conocimiento propio del dominio matemático puesto en juego como la descripción de un SMS lo suficiente abstracto que permita descodificar todos los textos que se producen en las situaciones de enseñanza-aprendizaje asociadas. En nuestro caso debe recoger dos elementos fundamentales: por un lado, la resolución algebraica de problemas verbales en lápiz y papel, y por otro, la resolución algebraica de problemas verbales en el sistema tutorial inteligente. Para dar cuenta del primer elemento, emplearemos el modelo de competencia de referencia en la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos: el método cartesiano. En cuanto al modelo de competencia en el STI será necesario desarrollar un modelo *ad hoc* basándonos en el proceso de resolución de un resolutor ideal al trabajar con el tutor.

El componente de actuación pretende dar cuenta de las acciones que realiza un estudiante cuando se enfrenta a una tarea matemática con la finalidad de caracterizar las estrategias que utiliza, los obstáculos que encuentra y los errores que comete. Durante el proceso de aprendizaje los estudiantes manifiestan unas tendencias cognitivas que podremos calificar de positivas o negativas según tiendan o no a las que llevaría a cabo un sujeto competente. Este componente se articulará principalmente mediante dos vías: una revisión bibliográfica sobre el modelo de actuación cuando se resuelven problemas verbales en otros entornos, y la descripción de las actuaciones de los estudiantes al usar el STI.

El componente de enseñanza tiene como fuente el conocimiento matemático, el currículo y los libros de textos y tiene por misión, dentro de un sistema escolar, lograr que las actuaciones de los estudiantes se aproximen a las de los sujetos competentes. Este componente se plasmará en el diseño de una secuencia de enseñanza en la que se integrarán en el sistema tutorial los diferentes elementos comentados anteriormente. Finalmente, el componente de comunicación pretende dar cuenta del intercambio de mensajes entre sujetos con diversos grados de competencia en el uso de los SMS.

1.3. DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

El planteamiento de la investigación requería contar con estudiantes instruidos previamente en la resolución algebraica de problemas verbales y que, al mismo tiempo, no hubieran alcanzado plena competencia en este campo. Esto es debido a que teníamos la intención de incluir en la investigación problemas representativos de diferentes familias (móviles, mezclas, etc.), por lo que consideramos necesario garantizar que la intervención no fuera la primera vez que eran expuestos a este tipo de problemas. A tenor de lo anterior, empleamos un grupo de 56 estudiantes de cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria, que en ese año académico aún no habían recibido ninguna instrucción relativa con la resolución de problemas aritmético-algebraicos pero sí en años anteriores.

Con el fin de poder dar respuesta a los objetivos de la investigación, realizamos un estudio de casos y un estudio de grupo. El estudio de grupo pretendía abordar el primero de los objetivos. En él participaron tres grupos de estudiantes pertenecientes al mismo curso de un centro de secundaria. En este estudio se llevó a cabo una misma secuenciación de etapas en los tres grupos: realización de un cuestionario inicial, secuencia de enseñanza y realización de un cuestionario final. La secuencia de enseñanza fue el único elemento que difirió para cada uno de los grupos En dos grupos se planteó una secuencia de enseñanza empleando diferentes versiones del sistema tutorial inteligente mientras que el tercer grupo usó exclusivamente lápiz y papel. Los resultados del estudio de grupo fueron analizados desde una doble perspectiva, pues se combinó un análisis cuantitativo de los mismos con uno cualitativo, que permitió tanto interpretar los resultados como conformar las parejas que participaron en el estudio de casos. En los tres grupos se emplearon los mismos problemas durante la secuencia de enseñanza. De la misma manera, los cuestionarios inicial y final fueron los mismos en los diferentes grupos. Los problemas de los cuestionarios inicial y final eran isomorfos entre sí y estructuralmente distintos a los empleados en las secuencias de enseñanza.

El estudio de casos, orientado a dar respuesta al segundo de los objetivos de la investigación, se llevó a cabo una vez finalizó el estudio de grupo. Este estudio, de carácter principalmente exploratorio, permitió documentar actuaciones de parejas de estudiantes resolviendo problemas de manera algebraica mediante el sistema tutorial inteligente. Por un lado, estas actuaciones podrían ofrecer un marco de interpretación acerca de los resultados obtenidos en el estudio de grupos y de aquellos elementos o funcionalidades del sistema que podrían afectar en mayor medida al desempeño de los estudiantes o a la manera en que estos resuelven los problemas verbales. Adicionalmente, las actuaciones nos permitieron documentar tendencias de los estudiantes cuando resuelven problemas mediante un sistema tutorial, comparando cómo este instrumento privilegia determinados comportamientos en relación con actuaciones documentadas en investigaciones previas en otros entornos.

La Figura 1.1 muestra una representación de las diferentes etapas del trabajo de investigación mediante un diagrama de flujos. Éste es una adaptación para nuestro estudio del elaborado por Fernández (2009), que a su vez emana del trabajo de Filloy (1999). Este diagrama no sólo sintetiza la estructura de la investigación, sino que permite observar algunas de las características fundamentales de un MTL. Así, el diagrama evidencia el carácter recursivo que posee cualquier MTL, pues éste se construye para estudiar una situación problemática cuya definición se verá precisada o modificada por los resultados de la investigación con el fin de poder explicar las nuevas evidencias. Las siguientes líneas se dedican a describir resumidamente la cronología de

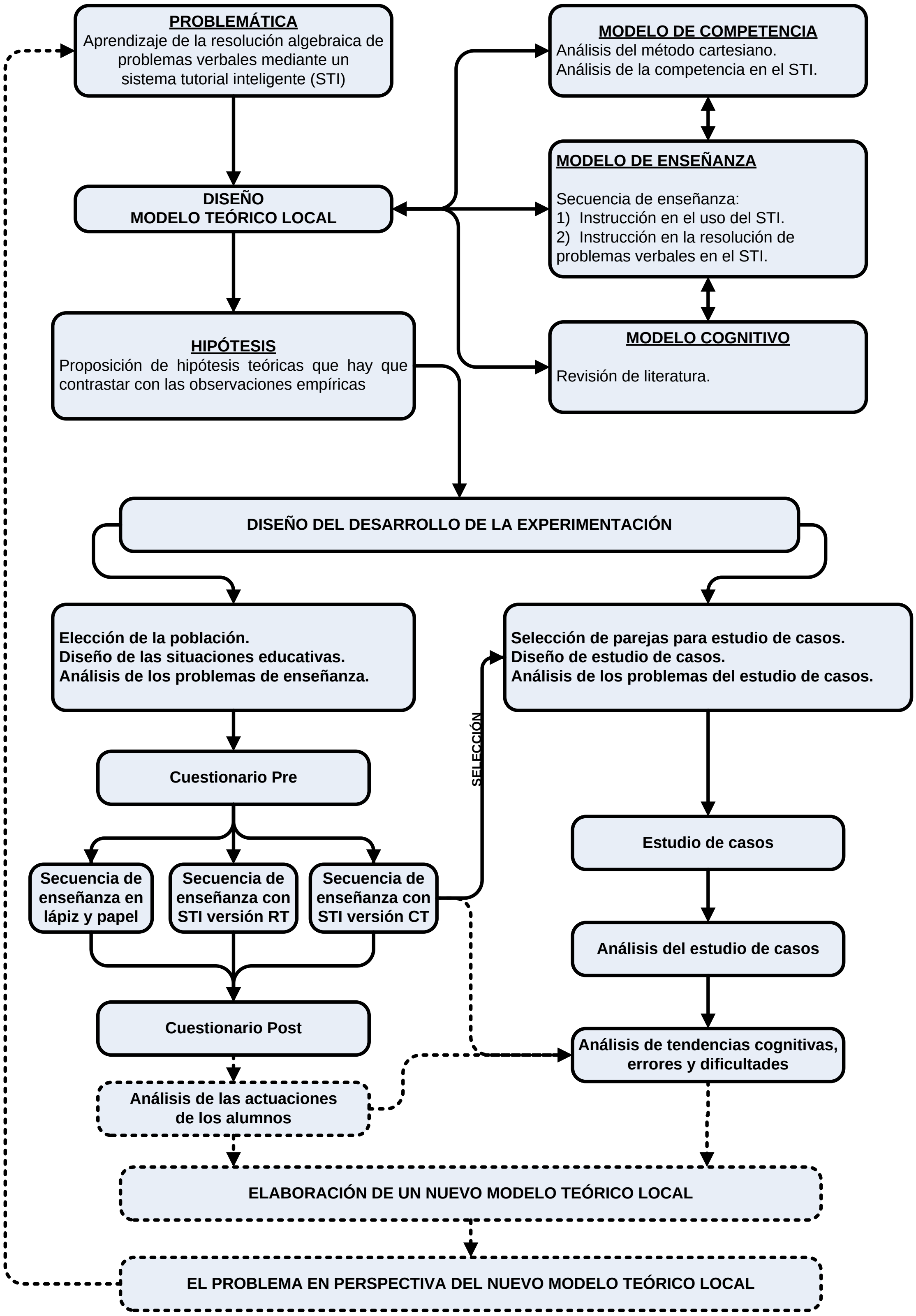


Figura 1.1. Esquema de diseño y desarrollo de la investigación.

las principales etapas de la fase experimental, en especial aquellas que implicaban la participación de los estudiantes.

En primer lugar, se administró un cuestionario cuyo objetivo era determinar la competencia de los estudiantes cuando resolvían problemas verbales aritmético-algebraicos en lápiz y papel. El cuestionario previo (en adelante, cuestionario Pre) estaba formado por catorce problemas verbales que, en general, suelen ser resueltos algebraicamente. Además, a los estudiantes se les dio instrucciones de que debían plantear los problemas de manera algebraica. Tras la administración de este cuestionario, se procedió a dividir la población de 56 estudiantes en tres grupos, cada uno de los cuales sería expuesto a diferentes secuencias de enseñanza. La clasificación de los estudiantes en grupos se realizó aleatoriamente, pues teníamos la intención de disponer de grupos heterogéneos de estudiantes y comparables entre sí. Una vez distribuidos los alumnos en grupos, nos aseguramos de que la distribución cumpliera estos requisitos por dos vías. Por un lado, sometimos las agrupaciones a la supervisión del profesor de matemáticas del curso, quien tenía un conocimiento profundo de los estudiantes pues era tutor del curso y había dado clase de matemáticas a este grupo de estudiantes en los dos últimos años. Por otro lado, los resultados en el cuestionario Pre nos permitieron verificar estadísticamente que la distribución aleatoria generaba grupos comparables en relación con la competencia en la resolución algebraica de problemas verbales. A continuación, se llevo a cabo en paralelo una secuencia de enseñanza de la resolución algebraica de problemas verbales diferente para cada uno de los grupos. La instrucción sobre la resolución algebraica de problemas verbales se orquestó en torno a una misma colección de doce problemas en los tres grupos. Como comentamos anteriormente, la principal diferencia en la instrucción que recibió cada grupo estribó en el entorno de resolución: uno de los grupos realizó la misma íntegramente en lápiz y papel (a este grupo lo denominaremos grupo PP); otro grupo trabajó con una versión con todas las funcionalidades del STI (al que llamaremos grupo CT); y finalmente, el tercer grupo trabajó con una versión limitada del STI[7] (en adelante, grupo RT). A pesar de que la instrucción fue diferente según el grupo, las tres secuencias tuvieron idéntica duración: tres sesiones de sesenta minutos. Tras la fase de intervención, todos los estudiantes completaron un último cuestionario (en adelante, cuestionario Post) compuesto por catorce problemas isomorfos a los del cuestionario Pre. La comparación de los cuestionarios Pre y Post permitiría dar respuesta al primero de los objetivos de investigación.

En último lugar, se realizó un estudio de casos en el que participaron una selección de los estudiantes que habían trabajado con el sistema tutorial, preferiblemente con la versión completa del mismo. Para la conformación de las parejas, se adoptó el criterio de seleccionar estudiantes de un nivel similar de competencia en la resolución algebraica de problemas verbales atendiendo a los resultados del cuestionario Post. Otros criterios adicionales que se adoptaron fue conformar parejas en las que los dos miembros hubieran tenido dificultades similares en la realización del cuestionario Post, o bien incluir a estudiantes que hubieran ofrecido actuaciones de interés durante las etapas previas al estudio de casos

[7] En el capítulo 3 se detallan las características de las dos versiones empleadas del STI.

1.4. DESCRIPCIÓN DE LOS CAPÍTULOS

A continuación se ofrece una sinopsis de la estructura y contenido de los capítulos que integran este trabajo. De este modo, se facilita al lector la posibilidad de conocer, de manera fugaz, los asuntos que se abordan en cada uno de los capítulos.

Este primer capítulo establece los objetivos del presente trabajo y su interés dentro del actual panorama investigador. En él también se establece el marco teórico y metodológico empleado así como una breve descripción de las fases en que se desarrolla la experimentación.

El capítulo 2 comprende una revisión bibliográfica de los trabajos relevantes a tenor de la problemática que abordamos. El estudio de las investigaciones anteriores permite delimitar qué se sabe al respecto de dicho problema y establecer una base sobre la que analizar y describir los datos recogidos en nuestra experimentación.

El capítulo 3 describen los modelos de competencia de interés en el marco de este trabajo de investigación. En primer lugar, se presenta el modelo de competencia por excelencia en la resolución algebraica de problemas verbales (apartado 3.1.) y el cual constituye el objetivo último de las secuencias de enseñanza utilizadas en la fase experimental. El apartado 3.2. introduce una explicación sobre los hipergrafos, un tipo de representación de las lecturas de los problemas, que será intensamente utilizado en diferentes análisis a lo largo del texto. Tras ello, se realiza una descripción de la adaptación del modelo cartesiano al entorno del sistema tutorial inteligente empleado en esta investigación, enfatizándose las diferencias entre ambos métodos y las limitaciones del método provisional en el sistema (apartado 3.3.5.). Esto nos obliga a previamente presentar las características técnicas más relevantes del sistema (apartados 3.3.1., 3.3.2 y 3.3.3.) así como las estrategias de tutorización implementadas (apartado 3.3.4.)

El capítulo 4 está dedicado a describir los diferentes tipos de enseñanza usados en la experimentación, prestando especial atención a las diferencias entre las secuencias. El apartado 4.1. tiene como objeto describir la población objeto de estudio. El apartado 4.2. se emplea en detallar las diferentes etapas de las secuencias de enseñanza así como los problemas utilizados en ellas.

Los capítulos 5 y 6 están destinados a describir en detalle las acciones realizadas sobre los participantes en la investigación. El capítulo 5 se ocupa del estudio de grupo. El apartado 5.1. refleja los propósitos del estudio de grupo mientras que los apartados 5.2. y 5.3. se dedican a la descripción de los cuestionarios Pre y Post y a un análisis teórico de los problemas incluidos en dichos cuestionarios, respectivamente. El apartado 5.4. recoge el análisis cuantitativo de las producciones de los estudiantes al resolver los cuestionarios Pre y Post. En concreto, el apartado 5.4.1. detalla la forma en que se codificaron las producciones de los estudiantes para el análisis posterior. El apartado 5.4.2. se dedica a explicar cómo los resultados en el cuestionario Pre fueron utilizados para clasificar la población en tres niveles de competencia previa en la resolución algebraica de problemas verbales. El apartado 5.4.3. muestra un análisis comparativo de los resultados de los cuestionario Pre y Post para las diferentes subfamilias de problemas consideradas en la investigación. Finalmente, el apartado 5.4.4. acomete un análisis comparativo global entre los resultados de los cuestionarios inicial y final, que permitirá cuantificar y comparar la efectividad de las distintas secuencias de enseñanza.

El capítulo 6 se centra en el estudio de casos. Los apartados 6.1., 6.2., 6.3. y 6.4. dan cuenta del propósito del estudio de casos, la técnica de obtención de los datos, la selección de los participantes y la de los problemas, respectivamente. Finalmente, el apartado 6.5. recoge una reconstrucción de las resoluciones de los estudiantes en el estudio de casos a partir de un análisis de los protocolos escritos obtenidos de las grabaciones de las actuaciones de los participantes en el estudio.

El capítulo 7 constituye el capítulo final en el cual se dan respuesta a los objetivos de la investigación. El apartado 7.1. analiza cómo se ve afectada la competencia en la resolución algebraica de problemas verbales en lápiz y papel de estudiantes de secundaria tras ser instruidos mediante un sistema tutorial inteligente, para lo cual se basa en en los resultados empíricos del estudio de grupo. Por otro lado, el apartado 7.2., a partir de las observaciones en el estudio de casos, proporciona un catálogo de actuaciones acerca de cómo estudiantes de secundaria resuelven problemas verbales en un sistema tutorial inteligente tras haber sido instruidos previamente en la resolución algebraica de problemas verbales usando esa herramienta.

2. Antecedentes

Cada mañana,
alguien lo descubre:
todo lo que está escrito pertenece al futuro.

Benjamín Prado (1998)

Tras exponer los objetivos de nuestro trabajo, presentamos una revisión de las investigaciones relevantes en relación con la problemática que nos ocupa. El análisis de las investigaciones previas nos permitirá acotar qué se sabe al respecto y establecer una base sobre la que analizar y describir los datos recogidos.

El capítulo se divide en tres secciones: 1) la transición de la aritmética al álgebra; 2) los problemas verbales aritmético-algebraicos; y 3) los sistemas tutoriales inteligentes en la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos. Los dos primeros apartados abordan por separado dos de los principales componentes de lo que Puig (2010b) llamó *el proyecto algebraico*. El primero toma como referencia el sistema matemático de signos del álgebra, prestando especial atención a aquellos trabajos que estudian el uso distintos estratos del sistema matemático de signos del álgebra por estudiantes habituados a utilizar el sistema matemático de signos de la aritmética. El segundo apartado se centra en las investigaciones sobre la resolución de los problemas verbales aritmético-algebraicos y, más concretamente, en el proceso de traducción del enunciado de un problema a una ecuación (o ecuaciones linealmente independientes). Finalmente, el último de los apartados se centra en una revisión de los sistemas tutoriales inteligentes diseñados para la enseñanza de la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos.

2.1. LA TRANSICIÓN DE LA ARITMÉTICA AL ALGEBRA

Durante los últimas décadas numerosos trabajos han estudiado las diferencias entre el pensamiento aritmético y algebraico. Así se ha constatado que emergen dificultades ligadas al uso compartido que hacen la aritmética y el álgebra de las cuatro operaciones básicas o el signo igual y las letras, pues los estudiantes de primaria están familiarizados con el empleo de fórmulas (por ejemplo, para el cálculo del área de figuras planas) que contienen todos estos elementos. En esta línea, Freudenthal (1983) explora las relaciones entre los sistemas de signos de la aritmética y del lenguaje natural con el del lenguaje del álgebra, mostrando la dificultad de establecer una frontera claramente delimitada en el uso que se hace de los símbolos entre la aritmética y el álgebra. Al respecto, Kieran (2006) indica que son necesarias importantes adaptaciones conceptuales en la transición de la aritmética al algebra debido al cambio de significado de signos y símbolos entre ambos campos. Atendiendo al trabajo de Freudenthal (1983), el paso de la aritmética al algebra no se reduce a un cambio de significado de los símbolos, sino más bien a una extensión de las operaciones y relaciones. En consecuencia, la interpretación que, en cada momento, se haga de los símbolos, depende de la tarea particular en cuestión, más que del dominio aritmético o algebraico en el que pueda acotarse la misma. A continuación, se presenta una revisión de trabajos que abordan aspectos donde se produce, en cierta medida, solapamiento entre el sistema de signos de la aritmética y del álgebra, y cómo este hecho puede acarrear dificultades para los estudiantes.

En primer lugar abordamos los trabajos que han estudiado las implicaciones de la ampliación del significado del signo igual entre la aritmética y el álgebra. No es extraño encontrar en la literatura referencias al cambio de significado del signo igual que se produce en el tránsito de la aritmética y el algebra. Bajo la hipótesis de una transformación del significado, sería plausible hablar de un igual aritmético y de un igual algebraico en función de cual sea el dominio en el que nos encontremos. Sin embargo, como veremos en breve, el asunto no es tan sencillo y no permite tal dicotomía.

Behr, Erlwanger y Nichols (1976) realizaron un estudio con estudiantes de primero a sexto de primaria en el que se mostraba que éstos interpretaban el signo igual como una señal de “hacer algo”. Igualmente señalaban la fuerte tendencia entre los estudiantes de primaria a considerar aceptable el signo igual sólo en aquellos casos en los que éste viene precedido por una o más operaciones aritméticas. Especialmente singular resultaba el hecho de que Behr et al. (1976) no detectaran un incremento de la interpretación en términos relacionales del signo igual al estudiar cursos superiores de primaria. Es más, sus resultados parecían indicar mayor pobreza en la interpretación del signo igual en los cursos superiores. Kieran (1981) confirmó la tendencia de los estudiantes desde preescolar hasta cursos universitarios a interpretar el signo igual como un operador, es decir como una señal de acometer una acción. Sin embargo, a diferencia de Behr et al. (1976), sí que observó cierta evolución en el pensamiento de los estudiantes en cursos superiores. En consecuencia, los estudiantes de secundaria serían capaces de aceptar usos operacionales más complejos (por ejemplo, los estudiantes parecían no mostrar incomodidad ante identidades aritméticas en las que aparecían operaciones a ambos lados de la igualdad, p. ej. $2 + 3 = 3 + 2$ ó $2 + 3 = 1 + 4$).

En la línea de lo anteriormente comentado, son numerosos los trabajos que sostienen que la génesis de esta visión limitada del signo igual se produce en educación primaria donde se produce una traducción de este signo “y la solución es…” (Ball, Thames y Phelps, 2008; Baroudi, 2006; Jacobs, Franke, Carpenter, Levi y Battey, 2007; Kieran, 1980, 1981; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg, y Stephens, 2011; Van Dooren, Verschaffel y Onghena, 2002; Welder, 2007). A este respecto, Kieran (1981) afirmaba que esta interpretación del signo igual se plasmaba en que los alumnos tenían dificultades a la hora de comprender expresiones aritméticas que no concordasen con el orden de sus cálculos. En un estudio con estudiantes de educación secundaria, Knuth, Stephens, McNeil y Alibali (2006) examinaron la compresión de los estudiantes acerca del signo igual y su relación con la competencia en la resolución de ecuaciones algebraicas. Sus resultados eran consistentes con Behr et al. (1976) al constatar que el número de estudiantes que dan un carácter relacional al signo igual es relativamente bajo y al no apreciar una mejora a lo largo de los cursos estudiados. Los autores denominaban carácter relacional del signo igual a la interpretación bajo la cual el signo igual relaciona dos maneras diferentes de representar una misma cosa. La principal aportación de Knuth et al. (2006) consistió en mostrar la fuerte correlación entre una interpretación relacional del signo igual y la competencia en la resolución de ecuaciones. Kieran (1992) ya indicaba que uno de los requisitos fundamentales para “interpretar adecuadamente las representaciones estructurales es la concepción del carácter simétrico y transitivo de la igualdad” (p. 398). Los resultados de Knuth et al. (2006) señalan que una interpretación relacional del signo igual es necesaria tanto para la generación e interpretación de ecuaciones como para su resolución. Adicionalmente, en esta investigación se observó que este efecto no se restringía a alumnos que hubiera recibido instrucción previa en el lenguaje algebraico y sus transformaciones sino que también se producía en estudiantes de cursos inferiores, que, en consecuencia, se veían abocados a la resolución de las ecuaciones por métodos prealgebraicos como, por ejemplo, prueba y error.

A partir de los trabajos citados anteriormente podría inferirse una acepción del signo igual en el lenguaje aritmético como la transformación de una expresión dada en un resultado. En contraposición, el lenguaje algebraico parece remitir a que el signo igual relaciona dos representaciones de una misma cantidad (o dos nombres de una misma cosa usando las palabras de Freudenthal (1983)). Sin embargo, Freudenthal (1983) muestra cómo ese llamado carácter aritmético del signo igual aflora en típicos ejercicios algebraicos escolares como $(a + b)\ (a - b) = ...$ De igual forma, identidades aritméticas tales como $4 + 3 = 3 + 4$ muestran la imposibilidad de acotar el carácter simétrico del signo igual al dominio del algebra.

Estrechamente relacionado con lo que acabamos de relatar sobre el signo igual, aunque ampliando el espectro a las operaciones aritméticas, Kieran (1992) introduce dos concepciones para las expresiones matemáticas: procedimental y estructural. Procedimental hace referencia a las operaciones aritméticas que se realizan sobre números con el fin de obtener otros números. En cambio, el término estructural refiere a operaciones que se realizan no sobre números sino sobre objetos matemáticos como las expresiones algebraicas. La autora indica que en el tránsito de la aritmética al algebra el estudiante debe “ser capaz de desarrollar un sentido de las operaciones sobre expresiones algebraicas, como objetos que tienen existencia propia” (p. 6). Ligado a la concepción procedimental aparece lo que Collis (1974, 1975) define como dificultad para aceptar la falta de clausura de las expresiones algebraicas. Esta dificultad consiste en la necesidad que presentan determinados estudiantes (especialmente aquéllos que acaban de ser iniciados en la instrucción algebraica) de realizar operaciones entre subexpresiones de una expresión algebraica que violan las reglas del álgebra. Según Matz (1980) este comportamiento viene determinado por las experiencias previas de los estudiantes en el mundo de la aritmética y, más concretamente, de lo que lo que los estudiantes entienden por la forma correcta que ha de presentar la solución a una tarea matemática. Booth (1984) documentó esta dificultad al mostrar como estudiantes de catorce años de edad tendían a “simplificar” la expresión algebraica $2a + 5b$ a 7ab. De manera similar, Dede (2004) verificó como estudiantes también de catorce años simplifican frecuentemente la expresión algebraica $2 + 5x$ a $7x$. Este tipo de dificultad era interpretada por Davis (1975) bajo lo que el autor denominó *dilema proceso-producto* según el cual una expresión puede representar la relación mediante la que se obtiene la solución o la solución por sí misma. Por ejemplo, los estudiantes suelen interpretar el binomio $x + 3$ como una instrucción (sumar 3 a x) en vez de una solución final (que representa un número 3 unidades mayor que x). Adicionalmente, en Booth

(1984) se muestran más comportamientos que documentan dificultades para interpretar adecuadamente la notación y convenciones algebraicas. Por ejemplo, se señala la fuerte tendencia de los estudiantes que se inician en el álgebra a ver la expresión $3n$ como la suma en vez del producto, quizá como resultado de traducir $3n$ en "3 y n". Incluso documentan la existencia de estudiantes que consideran la expresión $3n$ desde la idea de valor posicional, es decir que $3n = 3{\cdot}10 + n$, y donde por tanto la expresión algebraica estaría representando un número de dos cifras. Booth (1984) también muestra actuaciones de estudiantes donde se demuestra que los estudiantes que se inician en el álgebra tienen dificultades para reconocer la necesidad de paréntesis a la hora de construir expresiones algebraicas.

En la introducción de este apartado comentábamos que una de las principales diferencias entre aritmética y algebra viene dado por el diferente uso de las letras entre ambos campos. Así, el estudiante de primaria está familiarizado con el uso de letras aunque los usos a los que está habituado suelen reducirse a: 1) aplicación de fórmulas (por ejemplo, cálculo de áreas de figuras planas); 2) representación de unidades de magnitud; y 3) representación de cantidades que pueden ser determinadas directamente a partir de otras cantidades que son conocidas, muy habitual en la resolución aritmética de problemas verbales. Sin embargo, en el mundo del algebra las letras pueden referir a usos más diversos. Küchemann (1978) identifica seis categorías para dar cuenta de los diferentes usos que los estudiantes hacen de las letras: 1) letra evaluada, donde no existe la necesidad de realizar transformaciones u operar sobre la letra para calcular el valor representado por la misma; 2) letra ignorada, da cuenta de aquellas situaciones donde no existe necesidad de manipular, transformar o calcular las letras para resolver la tarea (por ejemplo, $a + b = 43$; $a + b + 2 = \ldots$); 3) letra usada como objeto, donde la letra no representa una cantidad desconocida sino un objeto o una abreviación para el objeto; 4) letra usada como una incógnita específica, donde la letra representa una cantidad determinada y desconocida; 5) letra usada como un número generalizado, donde la letra representa una cantidad indeterminada, es decir no representa una única cantidad sino un conjunto de valores; y 6) letra usada como variable, donde existe una o varias relaciones funcionales entre las letras, de tal manera que los valores que toman están sujetas a las restricciones impuestas por la relación o relaciones. La anterior clasificación refleja como en la notación algebraica los mismos literales pueden referir a diferentes significados (por ejemplo, x puede representar una incógnita o una variable) y este aspecto constituye una fuente de dificultades para los estudiantes (Malisani y Spagnolo, 2008).

El trabajo de Küchemann (1978) realizado con estudiantes de secundaria (de 11 a 16 años de edad) detectó que éstos tenían dificultades en las actividades que involucraban usos de las letras como números generalizados, incógnitas específicas o variables. En la misma línea, Booth (1984) también observó una importante resistencia por parte de estudiantes de secundaria, especialmente en los de 12 a 13 años de edad, a aceptar la idea de que un literal pudiera representar un conjunto de valores o que un mismo valor puede ser arbitrariamente representado por distintas letras. Posteriormente, MacGregor y Stacey (1997), en una investigación con estudiantes de 11 a 15 años de edad, observaron una fuerte tendencia a interpretar las letras como símbolos que representan objetos, generalmente funcionando como etiquetas o abreviaciones de los nombres que designan estos objetos en el lenguaje natural. Además, en este trabajo documentaron una interpretación alfabética de las letras por parte de los estudiantes. Esta conducta implica pensar que existe una correspondencia entre la ordenación del alfabeto y el valor numérico que toman las letras. Así, bajo esta interpretación, algunos estudiantes creen que la letra *z* ha de tomar un valor mayor que la letra *x*, por ejemplo.

En la investigación sobre la transición del pensamiento aritmético al algebraico los trabajos de Filloy y Rojano (1984, 1985a, 1985b, 1989) tienen un carácter fundamental. No sólo pusieron de manifiesto dificultades muy relevantes en el aprendizaje del lenguaje algebraico sino que a su vez, como Puig (2010a) señala, estos trabajos sentaron las bases para una línea de investigación que desarrollaría elementos teóricos sobre los que poder analizar más adecuadamente el fenómeno del paso de la aritmética al algebra. En estas investigaciones, Filloy y Rojano documentaron la existencia de un primer corte didáctico en el aprendizaje del lenguaje algebraico asociado con la operación con la incógnita. En concreto, observaron que los estudiantes, enfrentados a la resolución de ecuaciones lineales donde la incógnita aparecía en ambos miembros, mostraban dificultades para operar en términos de la incógnita (véase p. ej., Filloy y Rojano, 1984, 1985a, 1989). Esto contrastaba con la actuación de los estudiantes ante ecuaciones donde sólo había una ocurrencia de la incógnita y, por tanto, no era necesario operar con ella para resolver la ecuación. Así, los autores establecían que se producía un corte entre ecuaciones del tipo $Ax \pm B = C$, $A(Bx \pm C) = D$, $\frac{x}{A} = B$ ó $\frac{x}{A} = \frac{B}{C}$, que denominaban ecuaciones aritméticas y las ecuaciones $Ax \pm B = Cx$, $Ax \pm B = Cx \pm D$, que denominaban ecuaciones no aritméticas. A diferencia de las primeras, las ecuaciones no aritméticas requieren operar con la incógnita para su resolución. En un modo similar, Herscovics y Linchevski (1994) hablan de un salto cognitivo[1] para referirse a la incapacidad de los estudiantes para operar espontáneamente con la incógnita.

Los trabajos de Filloy y Rojano también describieron actuaciones de estudiantes en las que se observaban diversas tendencias relacionadas con la dificultad para operar con la incógnita. Entre estas manifestaciones destaca la que los autores denominaron polisemia de la letra *x*. Este fenómeno consiste en que los estudiantes, usualmente aquéllos que se inician en el álgebra, ante ecuaciones del tipo $x + \frac{x}{4} = 6 + \frac{x}{4}$ responden que la primera de las *x* ha de tomar el valor 6, mientras que las otras *x* (las de las fracciones de ambos miembros) pueden tomar cualquier valor pero que deben ser iguales. Esta doble ecualización revela una doble interpretación de la letra *x*; en la primera como incógnita y en la segunda como número generalizado. Aunque en nuestro trabajo no profundicemos en las dificultades que emergen asociadas a la manipulación y resolución de expresiones algebraicas[2], la dificultad para operar con lo desconocido transciende a las manipulaciones algebraicas y, obviamente, afecta a la resolución algebraica de los problemas verbales (véase, por ejemplo, Arnau, 2010).

2.2. LOS PROBLEMAS VERBALES ARITMÉTICO-ALGEBRAICOS

En Bednarz, Kieran y Lee (1996) se analizan cuatro accesos para la introducción del algebra escolar: generalización, resolución de problemas, modelización y funcional. En ese momento las autoras apuntaban que en las décadas anteriores había sido muy frecuente limitar la introducción al álgebra a la enseñanza de las reglas para la transformación y resolución de ecuaciones, con la considerable reducción del álgebra

[1] Los autores utilizan la denominación en inglés *cognitive gap*.

[2] El motivo principal por el que no se aborda una revisión bibliográfica de este asunto es que dentro nuestro trabajo no estudiamos la etapa de la resolución algebraica de los problemas verbales que comprende la resolución de la ecuación (o ecuaciones) planteada.

que este enfoque conllevaba. En este sentido, las autoras apuntaban que las decisiones curriculares sobre las que se estructura la enseñanza del álgebra escolar determinan en gran medida las concepciones de los estudiantes y, en consecuencia, las dificultades que emergen durante el proceso de aprendizaje. Aunque nuestro trabajo tiene como objetivo el estudio (parcial) del acceso construido sobre la resolución de problemas y, de una manera particular, en los problemas verbales, no consideramos que la enseñanza del álgebra deba limitarse o rotar sobre la enseñanza de la resolución algebraica de problemas verbales. En este sentido, nos alineamos con la tesis de Puig (2012), quien defiende que los diferentes enfoques del álgebra no deben ser tratados como alternativas sino como aspectos complementarios, debiéndose trabajar todos y tomando en consideración las relaciones entre ellos. En concreto, el autor señala:

> …el álgebra en el currículo de secundaria (y, en cierta medida que no discutiré aquí, en el de primaria) ha de presentarse, al menos, desde tres puntos de vista: el álgebra como un sistema de signos en que realizar los procesos de generalización, abstracción y demostración; el álgebra como un instrumento para la resolución de problemas a través de la traducción de éstos a sistemas de ecuaciones o gráficas de funciones, y el álgebra como sistema de signos que permite que los fenómenos modelados mediante funciones se organicen en familias, cuyas características se establecen y se estudian en el plano de la expresión. (Puig, 2012, p. 10)

Ya centrándonos en la resolución de problemas, debemos hacer una primera disquisición con el fin de acotar nuestro objetivo de estudio. Bajo la denominación resolución de problemas es posible englobar actividades de muy diferente naturaleza y que han dado pie al desarrollo de líneas de investigación muy diversas dentro de la matemática educativa. Así, por ejemplo Bell (1996) enfoca la resolución de problemas más allá de lo que él denomina *sentido estrecho* del término, el cual haría referencia a la resolución de problemas mediante la formulación y resolución de ecuaciones. Así, el autor habla de *sentido amplio* del término para dar cabida a procesos matemáticos más generales y a actividades de generalización y modelización funcional, por ejemplo. En esta tesis nos centraremos en exclusividad en la resolución de problemas verbales como acceso al álgebra, lo cual podríamos decir que, en cierto modo, ha sido una ruta clásica en la enseñanza de esta rama de las matemáticas. Siendo aún más concretos, nos centraremos en la familia de problemas aritmético-algebraicos considerando la definición que de esta familia se da en Cerdán (2008):

> La familia de problemas aritmético-algebraicos se concibe como la familia de problemas que acoge a problemas que en el ámbito escolar se resuelven mediante el recurso a varias operaciones aritméticas elementales, que se van combinando hasta obtener el resultado del problema, o bien mediante el planteamiento de ecuaciones, que posteriormente se resuelven hasta obtener el resultado. (Cerdán, 2008, p. 27)

Arrancamos esta revisión desde el trabajo fundamental de Polya (1945) donde se presentó su famoso modelo en el cual se caracteriza las diferentes etapas que un resolutor ideal recorrería linealmente durante la resolución de un problema. Estas cuatro etapas o fases serían: comprender el problema, concebir un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva. Además en Polya (1962, 1965) se presentan métodos generales que permiten elaborar planes de resolución de tipologías de problemas concretos. Uno de estos métodos es el método cartesiano, el cual desarrollaremos en detalle en el capítulo 3, y que permite abordar la resolución de la familia de problemas aritmético-algebraicos. Tal y como se recoge en Puig (1998) una etapa crucial en la resolución de este tipo de problemas lo constituye la traducción del enunciado al lenguaje algebraico, lo que el autor llama *poner un problema en ecuaciones*. Una vez que el problema ha sido traducido a una ecuación o ecuaciones, quedaría resolver la ecuación o sistema de ecuaciones y finalmente comprobar que el resultado satisface las condiciones del problema.

Dada la importancia que alberga la traducción del enunciado desde el lenguaje natural al lenguaje algebraico, y que el estudio que aquí se presenta se centra en esta etapa del proceso de resolución, realizamos una revisión de los trabajos que tratan las dificultades que aparecen en este proceso de traducción. En primer lugar destacamos el trabajo de Küchemann (1978, 1981) quien en el curso de una investigación planteo la siguiente tarea a un grupo de estudiantes de secundaria:

> Los lápices azules cuestan 5 peniques cada uno y los lápices rojos cuestan 6 peniques cada uno. Compro algunos lápices azules y algunos rojos y juntos me cuestan 90 peniques. Si b es el número de lápices azules comprados, y r el número de lápices rojos comprados, ¿qué puedes escribir sobre b y r? (Küchemann, 1978, p. 26)

En la traducción de este enunciado al lenguaje algebraico la respuesta errónea más frecuente fue $b + r = 90$. Küchemann dio sentido a estas actuaciones desde las dificultades, ya abordadas en el apartado anterior, para interpretar correctamente el uso de las letras en el ámbito algebraico. En este caso, a juicio del autor, los estudiantes que construyeron la ecuación errónea podrían considerar que las letras b y r funcionan como etiquetas y que designan los conjuntos de lápices azules (blue pencils) y lápices rojos (red pencils), respectivamente.

En los trabajos de Clement (1982); Clement et al. (1981) y Clement et al. (1980) se describieron los resultados de una investigación en la que participaron 150 estudiantes de primer curso de ingeniería en la que se pretendía determinar dificultades y errores cuando traducían proposiciones verbales al lenguaje del álgebra. En una primera fase, les propusieron seis problemas, entre los que se encontraba el titulado *Students and Professors*. Este problema decía así: "Escribe una ecuación usando las variables S y P para representar el enunciado siguiente: 'Hay seis veces tantos estudiantes como profesores en esta universidad'. Usa S para el número de estudiantes y P para el número de profesores" (Clement et al., 1981, p. 288). Encontraron que sólo el 63% de los estudiantes dieron la respuesta correcta y que la mayoría de las respuestas incorrectas fueron $6 \cdot S = P$. A este tipo de respuesta incorrecta la llamaron error de inversión, y constituye desde entonces uno de los errores clásicos dentro del campo de traducción de enunciados a ecuaciones.

En una segunda fase, los autores grabaron las actuaciones de 15 estudiantes, a quienes se les solicitó que razonasen en voz alta mientras resolvían problemas similares a *Students and Professors*. Estas entrevistas permitieron descartar que el error de inversión se debiese a descuidos por falta de atención y, confirmaron la existencia de problemas conceptuales relevantes. A partir del análisis de las transcripciones de las entrevistas, los autores identificaron dos fuentes independientes, aunque no necesariamente excluyentes, del error de inversión (véase Clement et al., 1981). En la primera se planteaba una conversión literal de las palabras a símbolos del álgebra a la que llamaron *word order matching* y que interpretaron como una aplicación incorrecta de lo que Paige y Simon (1966) habían llamado traducción sintáctica. Esta traducción sintáctica supone una traducción lineal del enunciado de izquierda a derecha, término por término, desde el lenguaje natural al algebraico y proporciona una explicación plausible a que de "Hay seis veces tantos estudiantes como profesores" se dé la respuesta incorrecta $6 \cdot S = P$. La segunda interpretación, a la que llamaron comparación estática, partía de que el estudiante comprende que el número de estudiantes es mayor que el de profesores, y considera que la expresión $6 \cdot S$ daría cuenta de la agrupación mayor y *P* de la menor. En este caso, la letra *S* no estaría siendo considerada como una variable que representa el número de estudiantes, sino como una etiqueta o unidad ligada al número seis (misma fundamentación que la mostrada anteriormente por Küchemann (1978)); mientras que el signo igual representaría una comparación o una asociación, no una equivalencia exacta.

En Davis (1984) se sugería que el error de inversión podría deberse a que los estudiantes estén usando las letras *P* y *S* como etiquetas. Bajo este sentido de uso, podría considerarse correcta la expresión $1P = 6S$, para reflejar que por cada profesor se han de tener seis estudiantes. Sobre estas base, Cooper (1986) planteó la hipótesis de que si el origen del error de inversión proviniera del uso de letras como etiquetas, entonces al cambiar las letras *S* y *P* por otras neutrales como *x* e *y*, debería constatarse una disminución del error de inversión. Sin embargo, observó que el uso de letras neutrales apenas tenía reflejo en una disminución del error de inversión. Para esclarecer si los estudiantes utilizaban las letras *S* y *P* como etiquetas en lugar de representar cantidades, Rosnick (1981) diseñó un experimento que le permitió concluir que el 40% de los estudiantes que resolvían la tarea *Students and Professors* no identificaban la letra *P* con el "número de profesores". Siguiendo esta línea, Fisher (1988) planteó una experimentación en el que propuso a los estudiantes usar las letras *Ns* y *Np*; ya que "es más probable que *Ns* se lea como número de estudiantes y *Np* como número de profesores que las notaciones correspondientes más simples, *S* y *P*" (p. 260). Sin embargo, obtuvo un mayor número de errores de inversión en los estudiantes que resolvieron el problema con la notación *Ns-Np* que con la notación *S-P*. Como posible causa apuntó que los procesos mentales en ambos casos son los mismos y que la complejidad de la notación *Ns-Np* incrementa el número de errores. Además, sugirió que era posible que la nueva notación redujera los errores debidos a la traducción sintáctica, pero que permanecieran los errores por comparación estática. Sin embargo, señaló que esta explicación no podía ser respaldada por los datos que había recogido.

En relación también con el error de inversión, otro tipo de estudios se centraron en investigar la influencia de la presencia o no en el enunciado de pistas contextuales que permiten identificar cuál de las cantidades comparadas es mayor. Así, por ejemplo, en los estudios de Cohen y Kanim (2005) y Wollman (1983) se concluyó que el éxito en la tarea o la aparición del error de inversión no se veían influidos por la posibilidad de determinar a partir del contexto qué cantidad era mayor.

En contraposición a los estudios anteriores los cuales presentan resultados que defienden la validez de la traducción sintáctica como fuente del error de inversión, MacGregor y Stacey (1993) realizaron un estudio con 281 alumnos de Educación secundaria en la que concluyeron que la mayoría de los alumnos no usaba la traducción sintáctica para la construcción de ecuaciones lineales. El diseño de la investigación pretendía analizar la validez de todas las posibles explicaciones del error de inversión presentadas hasta la fecha, y ante los resultados del mismo, las autoras estimaban necesario exponer un nuevo planteamiento que justificara la aparición del error de inversión. Así, plantearon el modelo cognitivo de cantidades desiguales comparadas. Según este modelo, en "*s* es ocho veces mayor que *t*", el estudiante asocia el 8 con *s* (la cantidad mayor), en vez de con *t* (la cantidad menor), conduciéndolo a ecuaciones invertidas $8s = t$. En el caso del problema "Estudiantes y profesores", ante "Hay seis veces más estudiantes que profesores en esta universidad", el resolutor asocia el 6 con *S* (la cantidad mayor), dando lugar al error de inversión. MacGregor y Stacey (1993), apoyándose en Kirshner et al. (1991), justifican los resultados de otras investigaciones, alegando que estos pudieran estar condicionados por la obtención de datos mediante entrevistas, en las que la traducción directa apareciera sólo a posteriori para justificar la respuesta. Además, el trabajo de MacGregor y Stacey (1993) muestra que el error de inversión también se produce en la traducción de enunciados que dan cuenta de relaciones aditivas, aunque bien es cierto, que con una incidencia menor en comparación a las relaciones multiplicativas.

Por otro lado, Crowley, Thomas y Tall (1994) no consideran que todos los estudiantes operen bajo modelos cognitivos fijos e invariables en todas las circunstancias sino que abogan por que los modelos que los estudiantes usan son resultado en gran parte de sus experiencias previas en el aprendizaje de las matemáticas en general y más concretamente en los usos de las letras. De este modo, los autores observaron como conforme los enunciados aumentan en complejidad y pierden la similitud sintáctica con la formulación algebraica aumenta el número de estudiantes que tienden a construir la ecuación ubicando la operación a la izquierda del signo igual y el resultado en el segundo miembro. Aunque el trabajo reconoce la necesidad de un estudio de casos que permita indagar con mayor profundidad en las causas de estas actuaciones, los investigadores hipotetizaron que el origen parece más ligado a una complejidad cognitiva más que a una traducción sintáctica errónea. Específicamente, apuntan que esta complejidad pudiera deberse a que los estudiantes ante situaciones donde no puedan emplear la traducción sintáctica, recurren a constructos aritméticos y algebraicos relacionados con su etapa de madurez algebraica.

Lopez-Real (1995) introdujo como elemento de análisis la contigüidad de las cantidades en el enunciado. Según este autor, al descomponer la oración "*p* es seis más que *q*" se pueden producir segmentaciones del tipo "*p* es 6 más" que puedan ser interpretadas como $p + 6$. En un estudio realizado con 577 alumnos de secundaria observó que en la traducción de la comparación aditiva "*p* y *q* son números. *p* es 6 más que *q*" se producía un 49% de error de inversión frente a un 11% en y "*p* y *q* son números. 6 más que *q* es lo mismo que *p*". En la misma línea, Landy y Goldstone (2007) señalaron que en la proposición "El número de estudiantes es seis veces el número de profesores" la cantidad *número de estudiantes* se encuentra más cerca de *seis* que la cantidad *número de profesores*, lo que podría provocar una agrupación entre *6* y *S*, la cual se igualara a *P* dando lugar al error de inversión.

Por otro lado, el trabajo de Fisher, Borchert y Bassok (2011) incorpora una variable adicional a las estudiadas anteriormente en relación con el error de inversión. En concreto, diseñaron un estudio en el que obligaban a estudiantes universitarios a construir ecuaciones algebraicas en forma no estándar (p. ej. en *Students and Professors* la ecuación correcta no estándar podría ser $S/P = 6$) y a otro grupo en forma estándar ($6 \cdot P = S$). Los resultados mostraron un porcentaje menor de respuestas con errores de inversión en las ecuaciones no estándar. Este hecho parece reforzar como modelo explicativo la traducción sintáctica, puesto que las ecuaciones en que se emplea la operación inversa a la inducida por la traducción directa del enunciado no podrían ser el resultado de lectura lineal del enunciado.

Hasta el momento hemos hecho continua referencia a la familia de problemas aritmético-algebraicos, sin hacer distinción en ningún momento entre problemas aritméticos y algebraicos. No obstante, esta diferenciación es muy habitual en el ámbito educativo, incluso es frecuente la identificación de los problemas aritméticos con la enseñanza primaria y de los problemas algebraicos con la etapa correspondiente a educación secundaria. Sin embargo, rara vez se hace explícita la definición de a qué nos referimos cuando hablamos de problemas algebraicos. Esta cuestión no es baladí y mucho menos en este texto dada la naturaleza de los asuntos que trata. Prueba de la importancia de esta pregunta es el hecho de que Wagner y Kieran (1989) la planteasen entre las preguntas de investigación que definieron dentro de *An agenda for research on the learning and teaching of algebra.* En esta agenda, en relación con los problemas verbales, las autoras plantearon la pregunta de qué es un problema algebraico, y cómo apéndices a esta pregunta añadieron:

> ¿Existen problemas verbales que son intrínsecamente algebraicos en vez de aritméticos?
>
> ¿Qué hace un método de resolución de problemas verbales más algebraico que aritmético? (Wagner y Kieran, 1989, p. 226)

En Bednarz y Janvier (1996) se ofreció una manera de clasificar los problemas verbales en aritméticos o algebraicos atendiendo a tres variables[3]: la naturaleza de las relaciones entre cantidades, el carácter de las cantidades (conocidas y desconocidas) y la unión entre las relaciones. Mediante este análisis presentaron una suerte de caracterización de lo que serían problemas algebraicos y aritméticos. Por un lado, señalaron:

> En aritmética, los problemas que suelen ser presentados a los estudiantes son problemas que llamaremos “conectados”. Una relación puede ser fácilmente establecida entre dos datos conocidos (…), permitiendo de este modo la posibilidad de un razonamiento aritmético (desde lo conocido hasta lo desconocido al final del proceso).
>
> ...
>
> Por el contrario, en álgebra los problemas que generalmente se presentan a los estudiantes son aquellos que calificamos como “desconectados”: ninguna conexión directa puede ser establecida entre los datos conocidos. (Bednarz y Janvier, 1996, p. 123)

El principal inconveniente que se puede achacar a la toma de posición de estos autores es el de que su argumentación no nace del análisis de cada uno de los problemas sino de una de las lecturas posibles de éstos. En capítulos posteriores abordaremos con detalle a qué nos referimos por lectura de un problema, simplemente señalando para lo que aquí nos ocupa que podemos sustituir el término *lectura* por la conversión del enunciado en lenguaje natural a un conjunto de cantidades y de relaciones entre dichas cantidades. En cambio, en el trabajo de Puig y Cerdán (1990) se aborda la tarea de responder a las preguntas de Wagner y Kieran de este modo:

> La vía que nosotros vamos a explorar parte de lo siguiente: a) En el proceso de resolución de un problema verbal, aritmético o algebraico, la fase crucial es la traducción del enunciado del problema a la expresión aritmética o algebraica que proporciona su solución. Las características del proceso de traducción será entonces lo que hay que dilucidar. b) Los problemas cuyo proceso de traducción hay que estudiar son los problemas verbales de varias operaciones combinadas (PAVOC), y esto por dos razones: la primera, porque el proceso de traducción de éstos es cualitativamente diferente del de los problemas de una etapa; la segunda, porque los problemas de una etapa se resuelven siempre por procedimientos que son puramente aritméticos, incluso si aparecen disfrazados con rasgos algebraicos. c) Dos métodos generales de resolución de problemas, que en dos épocas de la historia pretendieron ser métodos universales —

[3] En este trabajo se comenta en una nota al pie de página que otras variables (contexto, redacción del enunciado, etc.) también fueron consideradas en el diseño de la investigación aunque no se reflejan en dicho trabajo resultados al respecto.

> el método de análisis y síntesis y el modelo cartesiano — pueden usarse como instrumento de análisis del proceso de traducción de los PAVOC. Por su situación en la historia de las matemáticas y su voluntad explícita, el modelo cartesiano produce un proceso de traducción algebraico; el método de análisis-síntesis, por su parte, cuando se aplica a los PAVOC conduce a un proceso de traducción de naturaleza aritmética. (Puig y Cerdán, 1990, p. 2)

Los elementos considerados por Puig y Cerdán (1990) les conduce a reformular la pregunta y a precisar que en realidad no es posible calificar de aritmético o algebraico un determinado problema sino el proceso de traducción que se realiza sobre éste, y "sólo será posible decir que un problema es más algebraico que aritmético en función de que presente características que impidan que se pueda dar el proceso de traducción modelado por el método de análisis-síntesis." (p. 2). En trabajos posteriores de Puig esta idea ha sido reelaborada y precisada. Así, en Filloy, Rojano et al. (2008) se señala que lo que puede ser calificado de aritmético o algebraico será el método de resolución (método de análisis-síntesis o método cartesiano), la lectura analítica o la ecuación (o ecuaciones) que traducen el enunciado, no el problema en sí.

En cuanto a la pregunta sobre qué hace que un método de resolución sea más algebraico que aritmético, la disponibilidad de dos modelo de resolución de referencia como son el método cartesiano y el método de análisis-síntesis permiten disponer de modelos ideales de lo que serían métodos de resoluciones algebraicas y aritméticas, respectivamente. No obstante, de igual manera que en la contestación a la primera de las preguntas, no es posible dar una respuesta sin antes considerar los diferentes elementos comprendidos en un método de resolución. Tal y como comentábamos anteriormente, en un elevado número de problemas es posible realizar, para un mismo problema, esbozos lógicos-semióticos que conduzcan tanto a una lectura aritmética como una algebraica. Filloy, Rojano et al. (2008) y Puig (2010a) añaden, además, que el esbozo lógico-semiótico influye notablemente en la elección del sistema matemático de signos a emplear durante la resolución y, por tanto, ejerce una clara influencia sobre la naturaleza algebraica o aritmética de la resolución. No obstante, consideramos importante reseñar que nuevamente nos encontramos en un terreno difuso donde el tipo de lectura aritmética o algebraica no vincula al resolutor a usar un determinado sistema de signos aritmético o algebraico. Así, por ejemplo, es perfectamente factible que en un problema un resolutor realice una lectura algebraica y, a partir de ella, emplee el método de ensayo y error para obtener la solución del mismo. Así, si se tiene, por las razones que sean, interés en especificar la naturaleza (aritmética o algebraica) de una resolución, podríamos calificar de resoluciones aritméticas aquellas que aúnan lectura aritmética y lenguaje aritmético y resolución algebraica la que hace lo propio con una lectura y el lenguaje algebraico[4].

El solapamiento que se produce entre aritmética y algebra puede ser el desencadenante de que las experiencias previas de los estudiantes en el campo de la aritmética condicionen el aprendizaje de la resolución algebraica de problemas verbales. En esta línea son numerosos los trabajos que tratan de interpretar las dificultades que muestran los estudiantes en la resolución algebraica desde las tendencias aritméticas en las resoluciones. En Verschaffel, Greer y De Corte (2000) se muestra la tendencia de estudiantes de 12 años a aplicar razonamiento proporcional en situaciones no lineales o en los que era necesario el recurso a resoluciones algebraicas. Stacey y MacGregor (2000) subrayan que el bagaje aritmético de los estudiantes se traduce en una compulsión por calcular lo que a su vez se manifiesta en: 1) el significado que le dan a

[4] En González-Calero, Arnau y Puig (2011) se aborda este asunto con mayor detalle.

la incógnita; 2) su interpretación de qué es una ecuación; y 3) los métodos empleados para resolver ecuaciones. La investigación se nutría de resoluciones escritas de aproximadamente 900 estudiantes de entre 13 y 16 años (la mayoría en su tercer o cuarto curso de instrucción algebraica) y un posterior estudio de casos con 30 de estos alumnos. Los resultados obtenidos indicaron que un alto número de estudiantes: 1) no identifica la construcción de una ecuación o ecuaciones como un paso conducente a dar respuesta a un problema; 2) manifiesta usos incorrectos del lenguaje algebraico como: una misma letra refiere a distintas cantidades en la misma ecuación, una misma letra refiere a distintas cantidades a lo largo del proceso de resolución o una misma letra referencia a cualquier cantidad desconocida o combinación de cantidades desconocidas durante la resolución; y 3) interpreta la ecuación como una fórmula a partir de la cual obtener directamente la solución del problema. Los autores enfatizan el hecho de que las dificultades para congeniar las resoluciones aritmética y algebraica de problemas verbales impide en muchos casos que los estudiantes realicen planteamientos algebraicos o bien invita a que abandonen el método algebraico que han iniciado previamente.

Este último aspecto apunta a la posibilidad de diseñar o utilizar métodos provisionales que suavicen la transición entre los métodos de resolución aritmética y la manera algebraica de resolver problemas verbales. Estos métodos pueden apoyarse en: el uso de nuevas tecnologías (lo cual se abordará en el apartado 2.3), la utilización de métodos intermedios entre la aritmética y el algebra, o el perfeccionamiento de métodos espontáneos observados en las resoluciones de los estudiantes. Entre aquellos métodos provisionales orientados a la adquisición final de la competencia en el modelo cartesiano y que pertenecen al espacio donde aritmética y algebra se solapan destaca los estudios sobre el método analítico de exploraciones sucesivas (MAES) (Filloy, Rojano et al., 2008; Filloy, Rojano et al., 2001; Rubio, 1994). El uso del MAES se fundamenta en un proceso de exploración iterativo en el que la cantidad que se desea calcular va tomando diferentes valores concretos. El objetivo es que el estudiante sea capaz de detectar la estructura matemática que subyace en el problema al tiempo que se evita el uso de letras para designar cantidades desconocidas. Este método tiene vocación de que este constructo sea temporal y facilite dotar de sentido al uso de letras pues la finalidad del método es que los alumnos acaben planteando una ecuación, no resolver los problemas por ensayo y error. Otros métodos plantean la posibilidad de emplear una heurística como nexo entre la resolución de los problemas verbales aritméticos y los algebraicos. En Kho (1987) se expone que el uso de una representación pictórica para modelizar la situación descrita en el problema puede hacer visible la estructura matemática del problema siendo un método en el que se amortigua la discontinuidad entre la resolución aritmética y algebraica. Así, Cai, Ng, y Moyer (2011) describen un método bajo el nombre *model method* que, según indican, se emplea en el currículo singapurense. El método consiste en la construcción de una representación pictórica que muestre la información del problema como un todo, en vez de cómo partes independientes. Para obtener la solución los estudiantes deben deshacer las operaciones implicadas en la representación pictórica. El recurso a este método persigue “proveer una transición desde la operación con incógnitas en una forma menos abstracta a el más abstracto uso de letras en el algebra formal de la educación secundaria” (Cai et al., 2011, p. 33). La principal restricción de este método apunta al tipo de problemas que pueden ser representados pictóricamente.

En cuanto a la articulación de estrategias espontáneas de los estudiantes hacia el método cartesiano, podemos destacar el trabajo de Van Amerom (2003) que pretendía analizar si la evolución de la notación intuitiva de los estudiantes de últimos cursos de primaria y primeros de secundaria mostraba similitudes con la evolución histórica del algebra (desde las representaciones retóricas hasta el uso del simbolismo pasando por el lenguaje sincopado). Aunque la investigación evidenció cierto paralelismo entre la evolución histórica y la contemporánea en el aprendizaje, se presentaron dificultades ligadas a diferentes grados de maduración de razonamiento y capacidad de simbolización. A modo de ejemplo, se detectaron actuaciones en que los alumnos construían correctamente sistemas de ecuaciones pero en los que se manifestaban incapaces de resolverlos o en los que incluso recurrían a descripciones verbales de la resolución del sistema.

Una vez planteadas las consideraciones necesarias cuando nos referimos a problemas algebraicos, abordamos los estudios que tratan de indagar en la dificultad que presentan los problemas algebraicos a los estudiantes. Nos centramos ahora en aquellos estudios que analizan las características de los problemas dejando en un segundo plano, al menos momentáneamente, otros elementos como el resolutor o el método de resolución. Dentro de este tipo de investigaciones prestaremos especial interés a aquellas que, a partir del análisis de los problemas, tratan de contestar a la pregunta que formulaba Mayer (1982): "¿por qué los problemas verbales algebraicos son tan difíciles de resolver?" (p. 199) y que aportan conocimiento en relación con la complejidad de los problemas verbales algebraicos.

A la hora de analizar los diferentes elementos que caracterizan un problema, Kilpatrick (1978) diferenciaba tres categorías de variables: de contexto, estructurales y de formato. Las variables de contexto incluyen la situación física descrita en el enunciado del problema así como el lenguaje utilizado en el mismo. Las variables estructurales se refieren a la estructura matemática intrínseca del problema. Finalmente, las variables de formato consideran las diferentes formas o configuraciones en que un problema puede ser planteado. En Goldin (1979) se perfila esta clasificación en cuatro variables de tarea: a) las variables de sintaxis, que consideran la disposición y relaciones entre las palabras y símbolos en el problema; b) las variables de contenido, que hacen referencia al contenido matemático del problema; c) las variables de contexto, que da cuenta los significados no matemáticos presentes en el enunciado del problema; y d) variables estructurales, que hace referencia a la organización de las relaciones matemáticas entre todos los elementos del problema.

Entre de las variables de sintaxis es posible establecer muy diversas categorías sintácticas: longitud del problema, complejidad gramatical, formatos de las cantidades en el enunciado, formato y situación de la pregunta o secuencia de cantidades en el enunciado. Diversos estudios han medido parcial o globalmente cómo influyen estas variables en el nivel de dificultad asociado a la resolución de estos problemas (Barnett, 1979; Cook, 1973; Jerman y Ress, 1972; Nesher, 1976). Por otro lado, las variables de contenido han permitido la clasificación de los problemas en diferentes familias en función del nivel de precisión. Por ejemplo, si acotamos según los diferentes dominios matemáticos es posible hablar de problemas geométricos, algebraicos, probabilidad, etc. mientras que si lleva el análisis a un nivel inferior es posible hablar de tipologías de problemas concretos. A su vez, dentro de los llamados problemas algebraicos es posible una organización sobre la base de las estructuras conceptuales involucradas en el problema (aunque éstas pueda no ser explícito en el enunciado) que dé lugar a subfamilias de problemas: problemas de edades, de mezclas, de móviles, etc. Igualmente, las variables contextuales habilitan una nueva clasificación en tipos de problemas como, por ejemplo: factual abstracto, hipotético abstracto, factual concreto e hipotético concreto (Caldwell y Goldin, 1979). Los problemas concretos son aquellos que relatan una situación de la realidad; los abstractos, son los denominados problemas de ábaco, es decir aquellos en que “las historias que se narran tratan sobre números y los acontecimientos que se producen son operaciones aritméticas” (Puig, 1997, p. 116); y los hipotéticos, aquellos que plantean situaciones condicionales. En un estudio con alumnos de primaria y otro con estudiantes secundaria, Caldwell y Goldin (1979, 1987) compararon la dificultad de los problemas en función de la clasificación anterior. Sus resultados señalaron que los estudiantes de ambas etapas educativas mostraban menores dificultades en los problemas concretos que en los abstractos, aunque las diferencias entre ambos tipos de problemas se reducían conforme se aumentaba la edad de los estudiantes. En cuanto a la pareja factual-hipotético, sí que se detectaron diferentes comportamientos entre primaria y secundaria. Mientras en primaria los problemas factuales presentaron mayores niveles de dificultad, en secundaria se invirtió este hecho, presentándose mejores resultados para los problemas hipotéticos.

Otros estudios han intentado evaluar la dificultad de los problemas desde el análisis de variables estructurales. A este respecto, Cerdán (2008) señala que el estudio de la estructura de los problemas, atendiendo a las diferentes resoluciones de los mismos, proporciona una información valiosa pues toma en consideración elementos fundamentales de los problemas como son las cantidades y las relaciones entre ellos. De hecho, esta idea permitió a Puig y Cerdán (1988) hablar de la complejidad de problemas aritméticos de varias etapas, apoyándose en el estudio de los diagramas de análisis-síntesis como representación de la estructura de las resoluciones aritméticas.

Bednarz y Janvier (1994) analizaron la estructura de los problemas a partir de la naturaleza de las relaciones entre las cantidades involucradas en el problema, la naturaleza de las cantidades y las conexiones entre las relaciones con el fin de dimensionar la complejidad de los problemas algebraicos. La reflexión sobre la naturaleza de cantidades y relaciones les llevó a distinguir diferentes tipologías de problemas en los libros de texto, como por ejemplo: problemas de reparto no equitativo, problemas que implican un cambio de magnitud, y problemas que incluyen relaciones entre dos magnitudes no homogéneas y razones externas. En este trabajo, los autores realizaron un estudio empírico sobre los problemas de reparto no equitativo con estudiantes de diferentes cursos consecutivos de secundaria; desde primer curso (12-13 años) donde los alumnos no habían recibido aún ninguna instrucción algebraica hasta cuarto curso (15-16 años). Los resultados experimentales les permitieron confirmar la influencia de los factores de análisis en el grado de complejidad asociado a los problemas. A modo de síntesis, los resultados mostraron que los problemas de reparto no equitativo en los que las dos relaciones involucradas no son homogéneas (es decir, una aditiva y otra multiplicativa) presentan una dificultad mayor que los casos en que ambas relaciones tienen la misma naturaleza (aditiva-aditiva o multiplicativa-multiplicativa). En la comparación entre problemas con parejas de relaciones homogéneas la dificultad dependía del tipo de resolución (aritmética o algebraica). En las resoluciones aritméticas los problemas aditivos homogéneos fueron realizados menos exitosamente que los problemas multiplicativos homogéneos mientras que para las resoluciones algebraicas no se apreció diferente tasa de dificultad. En relación con la forma en que se conectan las relaciones los resultados mostraron una clara incidencia de este factor. Así, los problemas que se conectan de forma lineal (por ejemplo, en el caso de problemas homogéneos multiplicativos esta secuenciación implica la composición de dos relaciones multiplicativas) parecen ser menos complejos que aquellos no lineales (donde la composición de relaciones no es explícita), especialmente en aquellos casos donde no es sencillo para los estudiantes representar todas las cantidades desconocidas en función de una única letra.

Nesher, Hershkovitz y Novotna (2003) presentaron un modelo de análisis de complejidad para una subfamilia de los problemas estudiados en Bednarz y Janvier (1994). En particular, estudiaron los problemas multiplicativos con tres cantidades desconocidas cuya suma es conocida. El modelo considera las siguientes variables: 1) la razón entre el número de cantidades diferentes que son objeto de una comparación multiplicativa (cantidades comparadas) y el número de cantidades diferentes con las que las anteriores cantidades se comparan (cantidades de referencia); 2) el esquema de situación, en donde se recoge la manera en que se conectan las relaciones; 3) el orden de aparición de las relaciones en el enunciado; y 4) las palabras empleadas para describir la relaciones, donde se contemplaban dos opciones: "*n* veces más que" o "*n* veces menos". En este trabajo el modelo es empleado como instrumento para graduar la complejidad de los problemas a partir de las resoluciones llevadas a cabos por profesores de primaria y estudiantes de 15 años. El estudio prestaba especial atención a analizar cómo influyen las variables del modelo en la selección de la cantidad designada mediante una letra y a partir de la cual se designan las otras dos cantidades desconocidas. Los resultados apuntan a que la secuenciación de la información en el enunciado influye en la estrategia de resolución empleada. Del mismo modo, la forma en que se embridan las relaciones es un factor determinante pues los resolutores suelen seleccionar como cantidad de referencia, a la que asignan una letra, la cantidad menor con el objeto de evitar la aparición de números racionales en las ecuaciones. Sin embargo, comparando los resultados entre estudiantes y profesores, se observó que esta tendencia era más poderosa entre los profesores, a pesar de que esta estrategia conllevase en determinados problemas tener que reformular las comparaciones para poder plasmarlas en lenguaje algebraico. En comparación, los estudiantes abogaban en mayor medida por una traducción más directa del enunciado, aunque esto condujese a la escritura de ecuaciones en las que aparecían fracciones. A modo de cierre, los autores señalaron la importancia que considerar las variables sintácticas a la hora de analizar la resolución de problemas ya que en sus resultados se puso de manifiesto la incidencia de: a) el orden de aparición de las comparaciones; b) la estructura sintáctica de las oraciones; y c) el uso de determinados términos en la descripción verbal de la comparación.

Los anteriores trabajos relativos a la complejidad de los problemas abordaron parcialmente, ya sea por el tipo de problemas considerados o por las variables de análisis, el estudio de la complejidad de los problemas algebraicos. En cambio, la tesis doctoral de Cerdán (2008) aborda el estudio de la complejidad de la familia de problemas verbales aritmético-algebraicos en su conjunto. En dicho trabajo, el autor definió la complejidad de un problema considerando cuatro variables: la complejidad relacional, la complejidad en cuanto a lo desconocido, la complejidad de la intervención de lo desconocido en las relaciones y la complejidad del entretejido de las relaciones. Al igual que en Puig y Cerdán (1988) para las resoluciones aritméticas, la discusión de la complejidad de un problema se cimenta sobre el análisis de la estructura de las posibles lecturas analíticas. En este caso, para las resoluciones aritmético-algebraicas, Cerdán (2008) emplea la representación mediante grafos trinomiales. Así, Cerdán (2008) sintetizó las cuatro variables que determinan la complejidad de un problema en una 7-tupla de números definidos a partir del grafo trinomial orientado de una lectura analítica del mismo. Esta 7-tupla considera: el número de aristas del grafo trinomial; el número de aristas multiplicativas; el número de vértices claros (cantidades desconocidas); el número de datos (cantidades conocidas); el número de aristas de género 2 (refiriendo el género al número de vértices claros de una arista); el número de aristas de género 3; el orden del nodo del grafo de mayor orden[5]. La parte empírica del trabajo de Cerdán (2008) exploró, entre otros aspectos, si existía una correspondencia entre la complejidad de los problemas, fruto del análisis teórico de las lecturas analíticas, y la dificultad que los estudiantes encontraban al resolverlos. Los resultados obtenidos con estudiantes de secundaria apuntaron en esa dirección pues para problemas de complejidad relacional creciente se observó que los valores de dificultad de la solución y de la dificultad del proceso de traducción algebraica seguían un orden creciente.

2.3. LOS SISTEMAS TUTORIALES INTELIGENTES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES ARITMÉTICO-ALGEBRAICOS

2.3.1. LOS ORÍGENES DE LOS SISTEMAS TUTORIALES INTELIGENTES

En primer lugar realizaremos un breve repaso a los orígenes de los sistemas tutoriales inteligentes (STI) y presentaremos los aspectos fundamentales que caracterizan estos sistemas. Esta introducción nos conducirá a justificar el uso del adjetivo *inteligente* para definir determinados sistemas y como bajo el uso de este término subyace una distinción con otro tipo de sistemas tutoriales, también muy extendidos en ámbitos educativos, como son los denominados *computer-aided instruction* (CAI).

Las bases de los STI se encuentran en los primeros trabajos en el campo de la inteligencia artificial a finales de la década de los cincuenta. Urban-Lurain (1996) plantea como en los inicios de este campo se esperaba un desarrollo mucho más rápido de esta tecnología:

> Entonces, autores tales como Alan Turing, Marvin Minsky, John McCarthy y Allen Newell pensaban que los ordenadores que pudieran “pensar” como humanos estaban a la vuelta de la esquina. Muchos pensaban que el principal impedimento para alcanzar este hecho estribaba en la creación de ordenadores más rápidos y grandes. Parecía razonable asumir, que una vez creados ordenadores que pudieran pensar, éstos podrían realizar cualquier tarea que asociemos con el pensamiento humano, tales como la instrucción. (sección *Artificial Intelligence and Behaviorism*, parr. 1)

Sin embargo, pronto se constató que las dificultades para desarrollar sistemas inteligentes no estaban fundadas únicamente en limitaciones técnicas. De hecho, Woolf afirma que “aunque la velocidad de los ordenadores aproximadamente se dobla cada dos años, la inteligencia de los sistemas informáticos, con independencia de cómo sea medida, avanza a paso de caracol” (2009, p. 11). Quizá propiciado por las dificultades para construir sistemas inteligentes, la década de los sesenta contempló el desarrollo de un buen número de sistemas CAI. Habitualmente este tipo de sistemas se caracteriza por plantear problemas al usuario, y a partir de las respuestas del mismo, de manera inmediata, ofrece pistas y retroalimentación (VanLehn, 2011). Generalmente, los sistemas tutoriales CAI operan sobre bloques o plantillas *ad hoc* de material, que han de ser preparados previamente por el humano experto. Los bloques pueden tomar diferentes formatos aunque es habitual que dispongan párrafos en lenguaje natural en los cuales se plantean preguntas específicas, con frecuencia de opción múltiple o de verdadero o falso, y en las que el sistema dispone de las respuestas correctas y, quizá,

[5] Cerdán (2008) define el orden del nodo de la siguiente forma: “Si en el nodo concurren *k* aristas, siendo *k*>1, diremos que el nodo es un nodo de orden *k*; si el vértice es terminal, asignaremos a los vértices claros el orden uno, y a los oscuros el orden cero” (p. 53).

algunas respuestas incorrectas esperables, palabras clave y líneas de acción para un número limitado de respuestas esperables por parte de los estudiantes (Carbonell, 1970). Este autor también señalaba que los sistemas CAI eran bastante rígidos, relegando al estudiante a un papel pasivo. El principal problema de estos primeros sistemas residía en su incapacidad de suministrar retroalimentación de calidad o individualizar su funcionamiento según el usuario porque como señaló Nwana (1990) “estos [sistemas] no estaban diseñados para saber qué estaban enseñando, a quién estaban enseñando o cómo enseñarlo” (p. 254).

Las debilidades de los primeros sistemas propiciaron una evolución en el diseño de los sistemas tutoriales, dejando de limitarse al planteamiento más o menos automatizado de colecciones de tareas y pasando a tomar en consideración el papel del estudiante en el funcionamiento del sistema (Suppes, 1967). Así, en la década de los setenta proliferaron sistemas en los que el funcionamiento de los mismos (por ejemplo, la propuesta de una nueva tarea) se apoyaba en las respuestas previas del usuario. Estos programas necesitaban conocer por anticipado el tipo de respuestas posibles por parte de los estudiantes, siendo esta información la que determinaba en última instancia la manera de operar del sistema en respuesta a las acciones de los estudiantes. A pesar de que estos sistemas son considerados los precursores de los STI, ya que ofrecían un funcionamiento individualizado y una retroalimentación mejorada, aún poseían importantes limitaciones, especialmente una superficial representación del conocimiento (Nwana, 1990). Al respecto, Yazdani señala que “ninguno de estos sistemas tiene un conocimiento del dominio que está enseñando parecido al conocimiento humano, ninguno puede responder preguntas complejas de los estudiantes en cuanto a ‘por qué’ y ‘cómo’ se realiza la tarea” (1986, p. 44). Dado que estos sistemas no tenían suficiente conocimiento de la materia para la que estaban diseñados, no tenían capacidad de realizar una tutorización fina de las acciones de los estudiantes. Esto les llevaba a presuponer, por exceso o por defecto, el nivel de competencia de los estudiantes durante el desarrollo de la tarea, siendo imposible un diagnóstico fiable de las dificultades que encontraban los estudiantes a la hora de realizarla (Nwana, 1990). Más allá de las limitaciones de este tipo de programas, se ha de subrayar el hecho de que fueron los primeros intentos de modelizar realmente a los estudiantes, aunque esta modelización estuviese referida a las acciones de los estudiantes en vez de a los estados de conocimiento de los mismos. Adicionalmente, los sistemas demostraron ser efectivos en la enseñanza de habilidades y en la transmisión de conocimientos que los estudiantes debían memorizar (Urban-Lurain, 1996).

Quizá los primeros resultados generaran unas expectativas demasiado elevadas en cuanto al impacto que tendría en la educación el desarrollo de STI. Sea como fuere, resultaba evidente que el potencial de los STI era prometedor. En especial se ponderaban las posibilidades que podría ofrecer el desarrollo del modelo de estudiante, tal y como se refleja en Self (1999) a propósito de una revisión de Self (1974):

> Hasta la fecha un modelo de estudiante había sido considerado como una estructura de datos, en la que se representan características de un estudiante y de su competencia en la resolución de problemas. Sin embargo, si [el modelo de estudiante] pudiera ser considerado como un programa, en el que se describen los pasos mediante los que un estudiante resuelve problemas, entonces podría ser utilizado no sólo descriptivamente sino también de manera predictiva, para predecir cómo un estudiante resolvería problemas en el futuro (si el modelo es adecuado, por supuesto). Esto proporcionaría potenciales beneficios en términos de monitorización la competencia en resolución de

> problemas, proporcionando feedback detallado y desarrollando estrategias flexibles de tutorización. (p. 351)

En este contexto de altas expectativas nace el primer STI, SCHOLAR (Carbonell, 1970). Este sistema era capaz de examinar el conocimiento del usuario sobre un determinado tema (en concreto, la geografía de Sudamérica) mediante una secuencia de preguntas y respuestas. El tutor estaba capacitado tanto para la formulación de preguntas como para responderlas. En concreto, el sistema podía dirigirse al estudiante con las siguientes opciones: indicar al estudiante que no entendía el último mensaje formulado por el usuario; detectar errores de ortografía; y responder a las preguntas en un inglés aceptable. Adicionalmente, el sistema podía generar preguntas y evaluar la corrección de las respuestas de los estudiantes en tres niveles: correcta, incorrecta o parcialmente correcta, tomando posteriormente decisiones condicionadas a la respuesta dada por el estudiante (Carbonell, 1970). Este sistema se diferenciaba de los sistemas CAI existentes hasta la fecha en su capacidad para dar una respuesta individualizada a las declaraciones de los estudiantes gracias a una red semántica de conocimiento geográfico. El modelo de redes semánticas supuso un hito en el campo de la inteligencia artificial, especialmente en relación con el uso de diálogos y del razonamiento inferencial (Corbett, Koedinger y Anderson, 1997).

Dado que a partir de este momento nos centraremos en una revisión de los STI orientados a la educación matemática y, en especial a aquellos sistemas dedicados a la resolución aritmético-algebraica de problemas, no profundizaremos en el conjunto de investigaciones que abordaron la construcción de tutores capaces de comunicarse con el usuario mediante diálogos surgidos a raíz del trabajo seminal de Carbonell (1970). Antes de abordar la citada revisión, procede definir de una manera más precisa qué se entiende por un sistema tutorial inteligente. En Nwana (1990) se define los STI como aquellos programas informáticos diseñados para tutorizar bajo el enfoque de que estos sistemas saben lo que enseñan, a quién lo enseñan y cómo lo enseñan. Freedman (2000) señaló que bajo la denominación de STI se encuadraría cualquier programa que contenga alguna inteligencia y pueda ser usado en la enseñanza. El término *inteligencia* en el ámbito de los STI refiere a la capacidad de hacer cosas que serían consideradas inteligentes si fuesen llevadas a cabo por humanos (Woolf, 2009). En Self (1974), hace ya cuarenta años, se asumen tres componentes característicos de la arquitectura de los STI (y que implícitamente están presentes en la definición anterior de Nwana (1990)): en relación con qué enseñar (el modelo de conocimiento experto), en relación con a quién enseñar (el modelo de estudiante) y en relación con cómo enseñar (el modelo de tutorización). De hecho, la arquitectura típica de los STI a día de hoy consta de los tres elementos recién enunciados con la inclusión de un componente adicional, la interfaz gráfica de usuario (Shute y Psotka, 1996). De este modo, los componentes que constituyen la estructura típica de un STI son: 1) la interfaz gráfica de usuario, 2) el modelo de conocimiento experto, 3) el modelo de estudiante y 4) el modelo de tutorización. La interfaz gráfica de usuario permite al sistema interactuar con el usuario. El modelo de conocimiento experto (también llamado modelo cognitivo o componente de dominio) controla el proceso de resolución y persigue tomar en consideración todos los pasos posible a la hora de resolver una tarea. Este componente comprende los conceptos, reglas y estrategias de resolución del dominio a enseñar. Puede desempeñar diversos papeles al poder operar como fuente de conocimiento experto o como un modelo de comparación para evaluar la competencia del usuario y detectar errores (Nkambou, Mizoguchi y Bourdeau, 2010). El modelo de estudiante almacena información sobre el conocimiento actual del estudiante, pudiendo trazar la evolución del mismo a lo largo de la enseñanza y permitiendo al sistema adaptar sus acciones al usuario. Finalmente, la componente de tutorización controla el proceso de instrucción y nutriéndose de información de los otros tres componentes toma decisiones sobre las estrategias de enseñanza a emplear en cada momento. Las capacidades que ofrecen estos componentes, especialmente el de conocimiento experto, habilitan una delimitación más refinada de STI, en la que se evita la subjetividad inherente a la determinación de qué clase de actuaciones son consideradas inteligentes. En concreto, VanLehn (2011) identifica los STI como aquellos sistemas con la capacidad de tutorizar las diferentes etapas que constituyen la tarea o el problema, ofreciendo diferentes tipos de ayuda al resolutor sobre los diferentes pasos que éste ha de acometer y no solamente sobre la respuesta final.

2.3.2. LOS STI PARA LA ENSEÑANZA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES

Este apartado aspira a realizar un recorrido por los principales STI orientados a la enseñanza del algebra y de la resolución de problemas verbales. Aún centrándonos en el álgebra escolar, el abanico de programas desarrollados a propósito de este dominio continúa siendo demasiado amplio, dado que se ha de considerar la existencia de sistemas diseñados con objetivos muy diversos. A modo de ejemplo, podemos citar: MiGen (Noss et al., 2012), diseñado para asistir tareas de generalización de patrones; SimCalc (Kaput y Schorr, 2008); concebido para que los estudiantes empleen diferentes sistemas de representación en la modelización de fenómenos; o Aplusix (Nicaud, Bouhineau y Chaachoua, 2004) dedicado a la enseñanza de la manipulación de expresiones algebraicas.

A pesar de que, dado el propósito de nuestro trabajo, centraremos la revisión en aquellos sistemas dedicados a los problemas verbales, y muy especialmente en aquellas aplicaciones que abordan la resolución algebraica de este tipo de problemas, dedicamos unas breves líneas al proyecto Migen, pues aunque esté centrado en accesos diferentes del álgebra escolar de los que esta tesis aborda, estimamos relevante el planteamiento didáctico que representa. El sistema Migen consta de diferentes herramientas, entre las que destaca el micromundo eXpresser, concebido para ayudar al estudiante en la realización de tareas de generalización de patrones[6]. Concretamente, en eXpresser los estudiantes pueden construir y animar modelos que representan tareas de generalización de patrones con baldosas. El sistema pretende favorecer la compresión de las estructuras subyacentes en dichos patrones, de tal forma que finalmente, ya en lápiz y papel, los estudiantes sean capaces de expresar simbólicamente la generalización algebraica (Noss et al., 2012), es decir deben representar el número de baldosas total (variable dependiente) en función del número de repeticiones de un determinado motivo de baldosas (variable independiente). El sistema ofrece retroalimentación visual instantánea acerca de si el modelo construido por el estudiante es correcto. Más allá de consideraciones técnicas, lo que aquí nos interesa subrayar es el carácter mediador del sistema entre el sistema matemático de signos de la aritmética y el del algebra. Así, en Guerrero et al. (2011) se indica que el sistema, a partir del modelo construido por el alumno, permite manejar al estudiante un sistema matemático de signos figurativo intermedio entra la aritmética y el álgebra, que facilite la representación de relaciones y una posterior formalización en el lenguaje algebraico. Por ejemplo, en eXpresser el

[6] En Gutiérrez-Santos, Geraniou, Pearce-Lazard y Poulovassilis (2012) y Noss et al. (2012) puede consultarse una descripción detallada de los componentes del sistema Migen así como de sus diferentes funcionalidades.

estudiante, a partir de una situación concreta, donde una cantidad toma un valor específico, es posible explorar que sucede cuando esta cantidad toma diversos valores, o dar un nombre a dicha cantidad. De esta manera, se intenta que el estudiante progresivamente haga uso de un sistema matemático de signos más abstracto y desarrolle y distinga las nociones de variable dependiente e independiente (Guerrero et al., 2011).

Centrándonos a partir de este punto en los STI orientados a los problemas verbales, recordamos que en este capítulo ya se ha presentado la inconveniencia de clasificar dicotómicamente los problemas verbales en aritmético y algebraicos pues realmente la distinción ha de edificarse sobre la lectura del problema que un sujeto realiza y no del problema en sí. Sin embargo, al respecto de los sistemas tutoriales, sí que se produce una clara diferenciación entre aquellas aplicaciones capaces de tutorizar la resolución algebraica de problemas verbales y aquellos orientados a la resolución aritmética. Estos últimos son mayoría, básicamente porque la tutorización de la resolución aritmética de problemas verbales es objetivamente más sencilla que la algebraica[7], siendo más simple traducir este proceso de resolución en un conjunto de reglas programables.

El primero de los sistemas que estudiamos dedicado a la tutorización de problemas verbales es el llamado Word Problem Assistant (Thompson, 1989). Aunque bien es cierto que SHOLAR, el primer STI, data de la década de los setenta, la producción intensiva de STI acontece en la década posterior, muy ligada a la aparición de los ordenadores personales y, en consecuencia, a la posibilidad real de expandir el uso de estas aplicaciones a contextos educativos. El objetivo de Word Problem Assistant (en adelante, WPA) era ayudar a los estudiantes en el planteamiento de problemas verbales aritmético-algebraicos mediante la declaración explícita de las cantidades implicadas y las relaciones entre cantidades. En esta aplicación el estudiante, ante un problema verbal planteado por el tutor, debe en primer lugar representar las cantidades involucradas. Para ello la aplicación ofrece al usuario un menú con cuatro posibilidades a la hora de declarar una cantidad: 1) número de cosas, refiriéndose mediante esta ambigua denominación a las cantidades extensivas; 2) *rate*, para designar la razón entre dos cantidades de diferentes magnitudes (por ejemplo, la velocidad); 3) *ratio*[8], para designar la razón entre dos cantidades de una misma magnitud (por ejemplo, una relación parte-todo); y 4) diferencia, para representar cantidades que dan cuenta de la diferencia entre dos cantidades. Para cada cantidad, una vez identificado el tipo de cantidad entre las cuatro anteriores, el estudiante debe introducir la unidad de medida en que se expresa esa cantidad en el problema, así como nombrar mediante una descripción en lenguaje natural la cantidad. Tras este paso se genera un icono por cantidad, en donde aparecen para los datos anteriormente introducidos, un identificador del tipo de cantidad y dos campos adicionales, la expresión (aritmética o algebraica) que representa la cantidad y el valor numérico que toma la misma. Estos últimos campos deberán ser introducidos por el usuario o bien, completados automáticamente por WPA cuando disponga suficiente información para ello. Por ejemplo, el programa inferirá la expresión algebraica para una cantidad cuando esté relacionada con otras dos cuyas expresiones simbólicas son conocidas o calculará el valor que toma una cantidad a partir de una expresión aritmética introducida por el usuario. El programa permite al estudiante

[7] De hecho, es posible considerar la resolución aritmética como un caso particular de la resolución algebraica de problemas verbales.

[8] Se ha optado por mantener los términos *rate* y *ratio* que son los que ofrecía el sistema, en vez de emplear las designaciones *razón externa* e *interna*, que serían las equivalentes en lengua castellana.

representar relaciones ternarias mediante la unión con flechas de los iconos de las tres cantidades involucradas en la relación. El estudiante realmente no especifica de qué manera están relacionadas las cantidades sino que sólo indica que existe una relación al unirlas, siendo el programa mediante un análisis dimensional de las cantidades quien infiere el tipo de relación. Una vez que el estudiante completa, con la colaboración de las inferencias de WPA, la representación de una lectura del problema a través de una red de iconos, el programa permite emplear esta estructura para estudiar variaciones del problema (p. ej. modificar el valor de las cantidades conocidas o cambiar las cantidades que son conocidas). El sistema permite emplear letras para simbolizar cantidades, ya sean conocidas o desconocidas, lo que posibilita trabajar los conceptos tanto de incógnita como de parámetro. En aquellos problemas donde el estudiante ha planteado una única ecuación, el programa ofrece la funcionalidad de resolverla.

En realidad, la tutorización ofrecida por esta aplicación era bastante escasa y se limitaba a establecer ciertas restricciones en función de las decisiones previas del estudiante. Por ejemplo, si un alumno creaba una cantidad de tipo *rate* o *ratio*, posteriormente debía asignarle unas unidades de medida coherentes a este tipo de cantidades. Igualmente WPA validaba mediante análisis dimensional la compatibilidad de las unidades de medida de las cantidades relacionadas por el estudiante y, en caso de no poder producirse homogeneidad, informaba al estudiante de que la relación no era correcta. Sin embargo, a tenor de lo publicado en Thompson (1989), WPA parece no tener capacidad de tutorizar el proceso de resolución más allá de estas dos validaciones dimensionales. De hecho, sería incapaz de supervisar aspectos como que la asignación de valor a una cantidad sea correcto o no. Según Thompson (1989), el enfoque del tutor es permitir al estudiante centrarse en la representación de las cantidades y sus relaciones, más allá de la búsqueda de una fórmula. Sin embargo, el tutor no dispone de conocimiento sobre el problema ni sobre cómo resolverlo, de ahí que las validaciones se vertebren sobre la representación de cantidades por parte del estudiante, donde ciertos elementos de este planteamiento no pueden ser analizados por el tutor.

El siguiente sistema que describimos tampoco pertenece a la categoría de STI, fue bautizado como HERON (Reusser et al., 1990; Reusser, 1993). Esta aplicación se diseñó para la tutorización de aquellos problemas verbales aritméticos que pudieran modelizarse mediante una estructura de árbol. El objetivo del programa era usar esta representación para mediar entre la comprensión del texto y la construcción de una representación del problema en lenguaje matemático. Cuando un problema es seleccionado en la aplicación, el estudiante debe identificar la información cuantitativa a usar en la resolución del problema. Para ello deben resaltar con el ratón los datos en el enunciado del problema. Cada vez que seleccionan una cantidad conocida, el sistema genera un bloque o elemento gráfico para representar este dato. Para cada bloque (o cantidad conocida) el estudiante debe asignar una unidad de medida y un nombre, el cual puede ser elegido de una lista ofrecida por el tutor o ser compuesto mediante una combinación de palabras ofrecidas igualmente por el programa. El tutor se caracterizaba por poder ser configurado en dos modos (estudiantes inexpertos o estudiantes ya iniciados) y ofrecer diferente comportamiento en función del perfil del estudiante. Los estudiantes inexpertos recibían notificaciones de error si seleccionaban cantidades no necesarias para la resolución del problema o si olvidaban seleccionar alguna. En cambio, en el modo orientado a estudiantes más avanzados, no se realizaba supervisión y el estudiante disponía de libertad para crear la estructura de árbol. Una vez que el estudiante ha cubierto esta primera etapa de definición de cantidades conocidas, está en disposición de construir la estructura de árbol de la solución. Los estudiantes haciendo uso del ratón pueden vincular dos cantidades conocidas e indicar la operación a realizar con éstas para dar lugar a una tercera, de manera que la aplicación está limitada a la formulación de relaciones ternarias. Cada vez que se genera una nueva cantidad el estudiante debe nombrarla e indicar la unidad de medida correspondiente. A su vez, el estudiante puede decidir si desea calcular la cantidad en ese momento o posteriormente. Existe la posibilidad de que el sistema asista el cálculo de la cantidad. Las nuevas cantidades que el estudiante genera, pueden ser empleadas en plasmar nuevas relaciones. Cuando la representación en forma de árbol está finalizada, el estudiante puede seleccionar cualquier cantidad y generar una igualdad matemática entre el valor de esa cantidad y una expresión matemática conteniendo al resto de cantidades del árbol.

Los estudiantes pueden pedir ayudar al sistema en cualquiera de las etapas de la tarea. Las ayudas a la primera etapa consisten básicamente en la explicación del significado de determinadas palabras del enunciado, reelaboración de oraciones y ofrecer ayudas sobre qué fragmentos del texto están relacionados y deben ser considerados conjuntamente. En relación con la construcción de la estructura de árbol, el tutor además de ofrecer asistencia técnica sobre el funcionamiento de la herramienta, provee pistas graduales sobre el siguiente paso a dar, llegando en último término a indicar exactamente la operación a realizar. Para poder ofrecer esta asistencia, HERON posee un conocimiento del problema (relaciones entre cantidades, unidades de medida y descripciones válidas para cada cantidad). Este hecho permite a la aplicación monitorizar el proceso de resolución y ofrecer notificaciones de error en cuatro situaciones: a) elección errónea de la operación que conecta dos cantidades relacionadas; b) asignación de nombre incorrecto a una determinada cantidad; c) elección errónea de unidad de medida para una cantidad; y d) inclusión errónea u omisión de relaciones en la estructura de árbol.

Otro sistema tutorial diseñado para la enseñanza de la resolución aritmética de los problemas es TiPS (Derry, 2001), construido con el objetivo de mejorar las prestaciones de otra aplicación, Story Problem Solver (SPS) (Marshall, 1995). Este programa brindaba ayudas al resolutor mediante una representación auxiliar. Concretamente, según la categoría semántica del problema, el programa ofrecía un diagrama esquemático diferente. TiPS continúa esta línea de tutorización y dispone de cinco tipos de diagramas (tres para problemas aditivos y dos para multiplicativos). El sistema dispone de diferentes lecciones, cada una de las cuales consta de una serie de ejemplos resueltos acompañados de explicaciones didácticas grabadas en audio. Estos ejemplos ilustran el uso de los diagramas en la resolución de problemas verbales. Igualmente, cada lección cuenta con una colección de problemas que el estudiante debe resolver por sí mismo. El tutor ofrece pistas y retroalimentación con el fin de fomentar el aprendizaje de la resolución aritmética de cada tipo de problemas. A diferencia de las aplicaciones anteriormente comentadas, este programa posee dos niveles para la diagnosis de la resolución en curso por el estudiante. Por un lado, un componente local que, por ejemplo, actúa de manera similar a la monitorización ofrecida en HERON, es decir se basa en el conocimiento que el tutor dispone del problema para determinar si las acciones realizadas por el usuario son correctas o no y ofrecer asistencia en consecuencia. Por otro lado, TiPS dispone de una un componente global consistente en ir construyendo un modelo de estudiante conforme el usuario avanza a lo largo de las diferentes lecciones. En este modelo se almacena información sobre el nivel de competencia del estudiante y sobre la evolución de su comportamiento. Este componente se cimenta en una modelo bayesiano y permite adaptar la tutorización del sistema a las características de cada usuario. Así, el tutor tiene capacidad de recomendar qué problema resolver o graduar las ayudas en función de la competencia del estudiante. Atkinson (2003) acometió una doble evaluación (cualitativa y cuantitativa) de la efectividad del modelo de estudiante bayesiano de TiPS. Los resultados de la evaluación cualitativa señalaron un funcionamiento adecuado del modelo a la hora de determinar la evolución del nivel de competencia del estudiante mediante el cual el sistema descartaba problemas de una secuencia inicial de problemas verbales. Sin embargo, el estudio también evidenció que el modelo no contempla las ayudas solicitadas por el estudiante a la hora de evaluar la competencia del estudiante. Este aspecto habilita que en aquellas circunstancias donde un estudiante abusa de las estrategias de ayuda, incluso llegando al extremo de ni siquiera leer los problemas y limitarse a solicitar ayudas de manera sistemática, fuera a todos los efectos catalogado erróneamente como alumno de nivel competencia alta. A pesar de las limitaciones señaladas por el análisis cualitativo, el estudio cuantitativo reveló un efecto positivo estadísticamente significativo de una instrucción en la resolución basada en TiPS. No obstante, es necesario reseñar algunos aspectos de diseño del trabajo que obligan a ponderar las conclusiones del mismo. La investigación no fue realizada con alumnos de educación primaria o secundaria, que sería los usuarios para los que fue diseñada la herramienta, sino con estudiantes universitarios de nivel matemático bajo. Además, dado el carácter de la población, los investigadores dieron mayor peso a la hora de diseñar los instrumentos de medida a los problemas multiplicativos.

Cerramos la revisión de los sistemas que se centran en enseñanza de la resolución aritmética con dos STI: MathCAL (Chang, Sung y Lin, 2006) y AnimalWatch (Beal y Arroyo, 2002; Beal, Arroyo, Cohen y Woolf, 2010).

El diseño de MathCAL se basa en las cuatro fases de trabajo propuestas por Polya (1945) para la resolución de un problema: 1) comprender el problema; 2) concebir un plan; 3) ejecutar el plan; y 4) revisar la solución. El tutor incluso dispone de una interfaz diferente para cada una de estas fases, en cada una de las cuales verifica que se haya alcanzado el objetivo de la misma. A continuación se repasa brevemente el funcionamiento de MathCAL para cada una de las etapas. En la primera de ellas, el usuario debe subrayar en el enunciado los fragmentos de texto que contienen información importante para la resolución del problema. En la segunda fase, el resolutor dictamina el orden en que planea calcular las cantidades desconocidas a partir de una relación de preguntas propuesta por el tutor. Si el plan propuesto por el estudiante no coincide con la almacenada en el tutor, entonces el STI ofrece una recomendación para que el resolutor reelabore su plan. Una vez que el tutor ha validado el plan, el STI muestra en pantalla un esquema vacío en forma de árbol, similar al descrito en HERON, que el resolutor debe completar indicando las cantidades y operaciones. Cada esquema vacío representa una relación ternaria y se ofrecen tantos esquemas vacíos como cantidades a calcular se hubiera fijado en el plan. De este modo, cuando el resolutor ha representado en este tipo de esquemas cómo calcular cada una de las cantidades desconocidas, el STI combina los diferentes esquemas generando una estructura en forma de árbol. Tras este paso, el estudiante debe completar el esquema, introduciendo los valores que toman las cantidades conocidas y calculando todas las desconocidas al recorrer el esquema. Al finalizar el sistema verifica que todas las cantidades han sido calculadas correctamente. En caso contrario el tutor muestra un mensaje informativo. Además, el estudiante siempre puede solicitar que el programa le informe de los pasos correctos en los que se debería descomponer el problema. MatchCAL fue evaluado en una experimentación en la que participaron 132 alumnos de quinto grado, de los que se seleccionaron 49 estudiantes, aquellos de nivel inferior (Chang et al., 2006). Los estudiantes que trabajaron con el STI mostraron una diferencia estadísticamente significativa tanto en la comparación intra-grupo entre el post y el pretest como en la comparación entre los post-test en relación con el grupo de control.

AnimalWatch está orientado a alumnos de 10 a 12 años, y se basa en plantear secuencias de problemas que han de ser resueltos aritméticamente. Con la intención de aumentar la motivación de los alumnos, los problemas versan sobre animales en peligro de extinción. Cada problema es ilustrado con una representación adicional al enunciado (p. ej. una imagen, una tabla, un gráfico, etc.) donde se recoge información necesaria para la resolución. La aplicación pone especial énfasis en determinar el modelo de estudiante, y sobre la base de este modelo proponer el siguiente problema a resolver por el usuario. De este modo, el programa es capaz de ofrecer problemas difíciles pero al mismo tiempo accesibles para el nivel de competencia de los estudiantes, más aún considerando las ayudas proporcionadas por el sistema. Este enfoque se cimenta en "estudios en otros campos que sugieren que la instrucción personalizada puede acelerar drásticamente el aprendizaje, porque el estudiante trabaja al límite de su comprensión, mientras la instrucción tradicional se desarrolla demasiado deprisa o demasiado lenta" (Beal y Arroyo, 2002, p. 6). Adicionalmente a la secuenciación individualizada de tareas, AnimalWatch ofrece mensajes de error cuando el estudiante se equivoca. En AnimalWatch los mensajes se gradúan de tal modo que en último término, si el estudiante no ha sido capaz de dar respuesta al problema, el tutor llega al extremo de darle como pista la solución final. Sin embargo, se debe subrayar que AnimalWatch no es capaz de realizar una diagnosis sobre los errores que comete el estudiante, es decir se limita a identificar que la respuesta no es correcta pero no tiene capacidad de realizar inferencias en función del comportamiento del estudiante (Beal, 2013). En consecuencia, actualmente este STI no tiene capacidad de ofrecer una retroalimentación individualizada para cada usuario y basa su tutorización en la respuesta final que introduce el mismo, no en los pasos intermedios que pudieran constituir el proceso de resolución. Por otro lado, además de las ayudas ya reseñadas, las últimas versiones de AnimalWatch incorporan estrategias basadas en habilidades de autorregulación de los estudiantes para identificar la idoneidad del problema propuesto en cada momento. Así, cuando un alumno está resolviendo un problema, siempre tiene la opción de identificar éste como "demasiado difícil" y decidir si desea continuar con él o si, en cambio, prefiere cambiar a un problema más sencillo (Beal, 2013).

AnimalWatch es un STI que ha sido sometido a un amplio espectro de evaluaciones, con muy diversos enfoques tales como analizar el incremento del autoconcepto de los estudiantes en relación con las matemáticas tras trabajar con el STI o estudiar el impacto de AnimalWatch en estudiantes de diferente nivel de destreza en la lengua inglesa (p. ej., Arroyo, Murray, Beck, Woolf y Beal, 2003; Beck, Arroyo, Woolf, y Beal, 1999). En este texto nos centraremos en repasar aquellos que atañen a la competencia en la resolución de problemas verbales. En este sentido, los primeros trabajos mostraron una reducción del número de errores cometidos por los estudiantes tras ser instruidos en la resolución de problemas con AnimalWatch (Arroyo, 2003; Arroyo et al., 2003). Estudios posteriores indagaron no sólo en si este STI tenía capacidad de producir aprendizaje, sino en la efectividad del sistema en comparación con un tutor humano (Beal, Shaw y Birch, 2007). Los resultados de esta investigación señalaban que los estudiantes que compaginaban instrucción por parte del tutor humano y de AnimalWatch (50% del tiempo con cada tutor de un total de 12 horas) mejoraban en mayor medida que aquellos que eran instruidos exclusivamente por un tutor humano. Es necesario especificar que en este último experimento, los alumnos que trabajaban con el tutor humano no lo hacían de manera individual sino encuadrados en grupos de cuatro a seis estudiantes, es decir, realmente no se estaba comparando el STI con lo equivalente en tutorización humana (un tutor para un estudiante). En otro estudio, se analizó la mejora de estudiantes que asistían a tres sesiones de AnimalWatch en comparación con estudiantes que proseguían con la instrucción tradicional en el aula (Beal et al., 2010). Los resultados no mostraron mejoras significativas en ninguno de los dos grupos, lo cual fue achacado por los autores al escaso número de sesiones de trabajo.

El primero de los STI centrados en la enseñanza del álgebra que abordaremos es el llamado Pump Algebra Tutor (PAT) (Koedinger, Anderson, Hadley y Mark, 1997), construido sobre el modelo cognitivo Adaptative Character of Thought (ACT) (Anderson, 1983). PAT está orientado a estudiantes de enseñanza secundaria entre los 12 y los 16 años. Este STI ayuda a los estudiantes a modelizar problemas (algebraicos) ligados a un contexto cotidiano, sobre la premisa de que este enfoque realístico hace el conocimiento matemático más significativo y accesible. Este STI está escrito sobre un conjunto de reglas de producción del tipo *if-then* que permiten al sistema generar los diferentes itinerarios de resolución, así como los típicos errores que suelen cometer los estudiantes en cada paso (Koedinger, 2001). El tutor se fundamenta en dos técnicas de modelización del comportamiento del estudiante. Por un lado, el conocido como *model tracing*, en el que básicamente se contrastan todas las acciones del estudiante con un modelo de referencia. A diferencia del funcionamiento de, por ejemplo, AnimalWatch que basa su comportamiento en la respuesta final del estudiante, la comparación que efectúa PAT permite conocer en cada momento en qué paso se encuentra el estudiante y ofrecer ayudas adaptadas a la situación a la que se enfrenta el estudiante. Los tutores *model tracing* son adecuados para la enseñanza de problemas complejos, que constan de varias etapas (Woolf, 2009), como podría ser considerada la resolución algebraica de problemas verbales en comparación con la aritmética, en especial cuando el problema es de una etapa. Por otra parte, PAT emplea un modelo bayesiano de *knowledge tracing* (Corbett y Anderson, 1992) para la monitorización del aprendizaje de los estudiantes a medida que van resolviendo problemas. Este modelo permite identificar las fortalezas y debilidades de los estudiantes y, a partir de estos datos, adaptar la secuencia de problemas para cada estudiante.

En PAT al estudiante se le presentan problemas mediante la descripción de una situación en lenguaje natural. Cada problema va acompañado de una serie de preguntas que pretenden guiar el proceso de resolución de la tarea. En concreto, los problemas requieren la modelización de situaciones, mediante una secuencia de preguntas que finalmente obligan a plantear una ecuación aritmética. El estudiante para dar respuesta al problema dispone de diferentes herramientas (una hoja de cálculo, un generador de gráficas y una calculadora simbólica) concebidas con la idea que el estudiante resuelva los problemas mediante el uso de varios sistemas de representación. PAT es capaz de ofrecer retroalimentación inmediata sobre cualquier acción que realiza el usuario, es decir en cuanto un estudiante comete un error, el STI informa de que la acción no es correcta, sin aportar necesariamente información sobre cómo subsanar el error. Para aquellos errores más frecuentes, PAT tiene la posibilidad de almacenar mensajes prefijados en los que se informe de la naturaleza del error o una pista sobre cómo acometer el siguiente paso. Adicionalmente, el usuario puede solicitar ayuda en cualquier momento durante la resolución y el STI ofrece una pista sobre cuál sería la acción más recomendable en ese instante basándose en qué actividad estaba centrado el estudiante cuando pidió ayuda y en el modelo de producción del sistema.

La efectividad de PAT ha sido evaluada mediante la comparación de los resultados alcanzados en la resolución de problemas verbales por estudiantes de enseñanza secundaria, comparándose grupos de estudiantes instruidos con PAT en combinación con la instrucción tradicional en el aula con grupos que trabajaron exclusivamente según la instrucción tradicional (Koedinger et al., 1997). Este trabajo mostró una mejora en habilidades básicas superior al 15% en comparación con la obtenida por el grupo de control y sobre el 100% en resolución de problemas.

Entre los programas centrados en el proceso de traducción del enunciado al lenguaje del algebra se encuentra el programa ANIMATE (Nathan, Kintsch y Lewis, 1988; Nathan et al., 1990). Este sistema pretendía favorecer la compresión de problemas verbales de móviles al generar animaciones que den cuenta de la situación descrita en el enunciado a partir de un modelo esquemático a modo de grafo del problema planteado por el estudiante. El objetivo del programa es que el modelo esquemático actúe de mediador antes de formular la ecuación o sistema de ecuaciones que modelizan el problema. En ANIMATE la tutorización se basa “en hacer explícita la estructura [de los problemas verbales] mediante su representación gráfica, para que los estudiantes obtengan una clara comprensión de las estructuras conceptuales en un problema verbal” (Nathan et al., 1988, p. 20). En realidad, ANIMATE no tiene ningún conocimiento sobre el modelo correcto que resuelve el problema, de ahí que no sea un STI. El sistema únicamente interpreta el modelo del problema planteado por el estudiante y genera una animación del mismo. El enfoque didáctico del programa se sustenta en dos ideas. Por un lado, al forzar al estudiante a traducir el enunciado en un modelo esquemático, las propias restricciones impuestas por el modelo de grafo[9] pueden hacer llegar al estudiante al modelo correcto. Por otro lado, y posiblemente más relevante, ANIMATE permite al estudiante visualizar una animación de cómo se moverían los móviles según el grafo planteado. La confrontación entre esta representación y el modelo mental de situación puede ayudar a decidir si el esquema creado es correcto. En el caso que así lo determine el estudiante, éste podrá intentar plasmar el modelo en el lenguaje algebraico. Dado que ANIMATE no dispone ningún conocimiento sobre el problema o sobre el método en que se resuelve, es incapaz de ofrecer ayudas sobre el origen de los errores cometidos por el estudiante o sobre la acción que debería acometerse para avanzar en la resolución. En Nathan et al. (1990) se presenta una evaluación de la efectividad de ANIMATE en la que participaron estudiantes universitarios. Los resultados de este estudio señalaron un mayor incremento en la competencia para resolver problemas de móviles en aquellos estudiantes que trabajaron con el programa ANIMATE en comparación con los grupos de control.

Ms. Lindquist (Heffernan, 2001; Heffernan y Koedinger, 2000, 2002) es otro ejemplo de programa que se ocupa de la traducción de problemas verbales al lenguaje algebraico. Ms. Lindquist es un STI que tutoriza exclusivamente el proceso de construcción de expresiones algebraicas mediante diálogos entre el estudiante y el tutor. El programa funciona planteando una proposición verbal al estudiante y solicitándole

[9] El modelo mediador para representar el problema tiene similitudes con los grafos trinomiales que presentaremos en el capítulo 3. Las cantidades se representan mediantes pequeños circunferencias en cuyo interior se escribe la representación simbólica de la cantidad. Las cantidades se unen mediante aristas que simbolizan las relaciones entre cantidades. En los esquemas usados por Nathan et al. (1988) en cada arista se explicita el operador matemático que corresponde a la relación matemática representada. Por tanto, si se desea representar la relación $a \cdot b = c$, en la arista que une las cantidades a y b se anotará el operador “·” y en la arista que une las cantidades b y c se hará lo propio con el signo “=”.

que simbolice una de las cantidades involucrada. Por ejemplo, “Cathy da un paseo en bicicleta de *m* millas. Rodó a una velocidad de *s* millas por hora. Se detuvo para un descanso de *b* horas. Escribe una expresión para cuánto duró el paseo.” (Heffernan, 2001, p. 39). La tarea ya muestra algunas de las limitaciones del sistema, como son el carácter muy local de la tarea dentro de la resolución de problemas verbales o el hecho de que se restrinjan las decisiones del alumno al prefijar la representación de las cantidades a letras concretas. En cuanto el modo de funcionamiento de Ms. Lindquist, ante la respuesta del usuario a una tarea, el tutor es capaz de determinar la existencia de elementos correctos e incorrectos en la expresión algebraica. Ms. Lindquist emplea esta información para decidir cómo orientar la conversación. El tutor utiliza diversas estrategias para ayudar al estudiante en el proceso de construcción de la cantidad. Por ejemplo, puede plantear una situación hipotética en la que la cantidad se deba representar a partir de cantidades conocidas, para posteriormente recomendar al estudiante que sustituya los valores de estas cantidades por las letras que las simbolizan en el problema original. Otras opciones de ayuda intentan reducir la complejidad de la tarea dividiéndola en una serie de pasos intermedios. Por ejemplo, puede sugerir un cambio de variable a la hora de construir una expresión, de tal forma que la expresión se construya en dos pasos en vez de uno. Una tercera estrategia consiste en solicitar al estudiante que describa en lenguaje natural cómo calcularía la cantidad que se desea representar. Esta estrategia se sustenta en la hipótesis de que la descripción en lenguaje natural facilitará la posterior representación en lenguaje algebraico, de una manera similar a como el uso de cantidades conocidas en vez de desconocidas media en la representación de expresiones algebraicas. Al igual que en otros sistemas, el estudiante puede solicitar ayudas siempre que lo deseé. Ms. Lindquist ofrece ayudas en las que reelabora la pregunta, de tal manera que progresivamente va a haciendo más evidente qué debe hacer exactamente el estudiante.

En Heffernan (2001) se presenta una evaluación de Ms. Lindquist en la que participaron 20 estudiantes de secundaria. El estudio mostró un efecto significativo en la habilidad para traducir al lenguaje del álgebra proposiciones en escritas en lenguaje natural del grupo que trabajo con Ms. Lindquist en comparación con el grupo de control. En un estudio posterior (Heffernan, 2003) se apuntaba que estos resultados podrían estar fundamentados en que una tutorización construida sobre diálogos producía una mayor motivación del estudiante. En otro trabajo se exploró la efectividad de la estrategia de ayuda consistente en plantear una situación análoga con cantidades conocidas como paso previo a la simbolización de esa situación con cantidades desconocidas (Heffernan y Crouteau, 2004). Con este fin, un grupo de 76 estudiantes de educación secundaria empleó Ms. Lindquist como herramienta para completar las tareas de clase. El grupo experimental manejó una versión del tutor que sólo disponía de la mencionada estrategia de tutorización mientras que el grupo de control simplemente era informado de si la respuesta dada era correcta o no, para dar paso al siguiente problema. Los resultados mostraron un efecto estadísticamente significativo a favor del grupo experimental, concretamente con un tamaño del efecto de 0,56 desviaciones típicas. El experimento permitió constatar un mayor aprendizaje en los alumnos del grupo experimental a pesar de que el número de problemas abordados por los alumnos pertenecientes a este grupo era significativamente menor.

A pesar del considerable desarrollo en el campo de la inteligencia artificial, los sistemas que han abordado la enseñanza de la resolución de problemas verbales, especialmente en el caso de la resolución algebraica, se han visto obligados a decidir entre permitir flexibilidad al estudiante en la toma de decisiones o realizar una tutorización, incluyendo una supervisión, de sus acciones (Arnau et al., 2011). Los autores señalaron que aquellas aplicaciones que apostaban por la segunda opción, operan asociando una solución a un problema y una cantidad a una representación. A su vez, determinados errores, considerados los más frecuentes, son asociados a una serie de mensajes de errores prefijados. Este hecho explica también la existencia de un mayor número de aplicaciones dedicadas a la resolución aritmética de problemas verbales, donde el espacio del problema es menor que en la resolución algebraica,

En cuanto a la efectividad de los STI, un elevado potencial educativo ha sido considerado consustancial a este tipo de sistemas desde sus orígenes. Sin embargo, y tal como anticipábamos pocas páginas atrás, estas expectativas no llegaron a plasmarse en hechos. De hecho, McArthur y Lewis (1998) afirmaron que la construcción de un sistema capaz de adaptar las experiencias de aprendizaje a las necesidades de los estudiantes se había convertido en la particular búsqueda del Santo Grial de la tecnología educativa. Estas expectativas, fundadas o no, se apoyaban en las siguientes ideas: 1) los STI podrán ofrecer secuencias de enseñanza al estudiante y comunicarse con ellos de manera natural, con el añadido de una paciencia inagotable; 2) los STI podrán ofrecer ayudas y retroalimentación individualizadas para cada estudiante; y 3) la predisposición positiva de los estudiantes a realizar tareas, otrora monótonas y tediosas, en estos entornos interactivos (Nathan et al., 1988). En realidad, detrás del énfasis en estas posibilidades de desarrollo que se le presuponían a los STI lo que subyacía era el interés en poder emular el comportamiento de los tutores humanos expertos. Históricamente, la tutorización humana (un profesor para un estudiante) ha sido considerado como el método de instrucción más efectivo (véase, p. ej., Graesser, VanLehn, Rose, Jordan, y Harter, 2001). Obviamente, la tutorización uno a uno conlleva un elevado coste económico. Ante este panorama, los STI prometían una aproximación económicamente viable al modelo de tutorización humana. De ahí la gran proliferación de este tipo de sistemas durante las décadas de los setenta y ochenta. En cambio, los estudios de evaluación de los primeros STI mostraron unos rendimientos muy lejanos a los esperados. En este sentido, conviene aclara que habitualmente se usaba como patrón los resultados experimentales expuestos por Bloom (1984) en los que se cuantificaba el efecto de la tutorización humana uno a uno frente a la instrucción habitual de un profesor para un grupo. En concreto, Bloom (1984) cuantificó en dos desviaciones típicas la ventaja de la tutorización humana uno a uno respecto a la enseñanza tradicional. Esta cantidad se convirtió en el patrón de referencia con el que comparar los STI, y por tanto, durante muchos años, alcanzar la meta de dos desviaciones típicas fue la meta para este tipo de sistemas. Sin embargo, las evaluaciones de STI revelaron estar lejos de lograr este objetivo (p. ej., Beal et al., 2010; Kulik, 1994). Si bien los resultados del trabajo de Bloom (1984) estimularon el desarrollo de múltiples trabajos en el desarrollo de STI, los datos presentados en este trabajo han sido puestos en duda en VanLehn (2011). Concretamente, el autor adujo que, en realidad, el trabajo de Bloom comparaba la efectividad de tres tipos de instrucción: la tradicional en el aula, una tradicional en el aula acompañada de una estrategia denominada *mastery learning* y una tercera consistente en tutorización un profesor para un estudiante más mastery learning. Básicamente, el mastery learning consiste en que cada vez que un estudiante terminaba la instrucción en un determinado tema, debía realizar un test y en el caso de no acreditar un dominio mínimo de lo estudiado, el alumno debía retomar el estudio del tema hasta conseguir superar el test. A tenor de lo cual, parece evidente que las condiciones experimentales de las tres configuraciones que se pretendían estudiar no eran comparables. Es más, en los test que debían completar los estudiantes de la configuración grupo con mastery learning debían conseguir un 80% de dominio mientras que el los del grupo de tutorización uno a uno requerían un nivel del 90% (VanLehn, 2011). Los resultados publicados por Bloom (1984) indicaban un mejor aprendizaje del grupo con mastery learning respecto a la instrucción tradicional en el aula con un tamaño del efecto de una desviación típica, mientras que la comparación tutor uno a uno con mastery learning se cuantificaba en una mayor efectividad de dos desviaciones típicas. Dadas las diferentes condiciones, VanLehn (2011) argumentó que, en realidad, el artículo de Bloom (1984) “es una demostración del potencial del mastery learning en vez de una demostración de la efectividad de la tutorización humana” (p. 213). En este mismo trabajo, el autor realiza un meta-análisis a partir del cual intenta ofrece una medida más fiable de la efectividad de los diferentes métodos de instrucción. Sobre la base de este trabajo, VanLehn (2011) establece un tamaño del efecto medio de 0,79 desviaciones típicas para la tutorización humana uno a uno, lo cual sigue siendo un efecto considerable. En cuanto a los sistemas interactivos, el autor cifra los rendimientos de los CAI en un tamaño medio del efecto de 0,31 desviaciones típicas mientras que los estudios de evaluación de STI reportaban un tamaño medio de 0,76 desviaciones respecto a la instrucción tradicional. El trabajo de VanLehn (2011) pone de manifiesto varios aspectos relevantes en relación con el desarrollo de STI. Por un lado, aún reconociendo que actualmente no es asumible considerar los STI como un sustituto al profesor sino que debe ser considerado un complemento, el análisis realizado mostró que no existía una diferencia insalvable entre la tutorización humana y los STI, teniendo estos sistemas un amplio margen de mejora. A su vez, VanLehn (2011) acreditó importantes beneficios de los STI en comparación con los sistemas CAI, sugiriendo que la investigación debía avanzar en mejorar las posibilidades de los STI de hacer una monitorización fina de las acciones de los estudiantes.

3. El modelo de competencia

El modelo de competencia está ligado a otros componentes del MTL como son el modelo de enseñanza y el modelo de actuación (véase el capítulo 1). Por un lado, el análisis de las actuaciones de los estudiantes se hace respecto a aquéllas que, en su lugar, acometería un resolutor ideal. Por otro lado, el modelo de enseñanza persigue que el estudiante alcance el nivel de competencia tal y como es definido en el modelo de competencia (Puig, 2006). Así, buena parte de las investigaciones desde los MTL tienen como objetivo evaluar el modelo de enseñanza, a través de las evidencias que ofrece el modelo de actuación al ser observado desde el punto de vista del modelo de competencia. A tenor de lo anteriormente expuesto, es necesario empezar presentando el modelo de competencia, que es específico de los problemas verbales aritmético-algebraicos. En este trabajo, además, se ha de considerar dentro de nuestro modelo teórico local las características del instrumento tecnológico sobre el que se orquesta el modelo de enseñanza. El uso de HBPS en la secuencia de enseñanza, o casi como modelo de enseñanza si desatendemos determinadas consideraciones, nos obliga a contemplar cómo se redefine el modelo de competencia al ser exportado a un entorno diferente al clásico de lápiz y papel. Así, este capítulo aborda una descripción de los modelos de competencia (locales) tomados en consideración en el presente trabajo. Por un lado, se presenta un modelo de competencia en la resolución algebraica de problemas verbales que podríamos calificar como canónico y que es el objetivo último, desde el punto de vista de la competencia de los estudiantes, hacia el que debe conducir la enseñanza. Por otro lado, se ofrece un modelo en la resolución algebraica de problemas verbales en el entorno HBPS, que, más allá de las similitudes que pueda tener con el modelo de competencia final y que serán puestas de manifiesto en este capítulo, tiene (en nuestro propósito) un carácter de provisionalidad. Este carácter se debe a que el modelo de competencia en HBPS es un modelo mediador, bajo el cual se construye una enseñanza diseñada para formar un alumno competente en los elementos que definen este modelo de competencia temporal. Sin embargo, en un determinado momento, ciertos elementos de competencia ligados al entorno HBPS, no a la competencia algebraica, deberán serán abandonados.

En relación con lo anteriormente expuesto, el presente capítulo presenta una descripción de las principales características de diseño del sistema tutorial inteligente HBPS, así como del modo de funcionamiento del tutor tanto en la resolución aritmética como algebraica de problemas verbales. En primer lugar, es necesario describir el sistema de representación del conocimiento en el que se basa el tutor HBPS, y que permite el cálculo sistemático de todas las soluciones posibles de un problema. Igualmente se expone la implementación de este sistema de representación en HBPS, enfatizando en el procedimiento para generar y almacenar nuevos problemas en el tutor. Tras esto, se presenta una breve descripción de las características de diseño de la interfaz gráfica de usuario. Posteriormente, se aborda una explicación de las diferentes estrategias de ayuda que ofrece el sistema al estudiante. Con este propósito se plantea un ejemplo detallado de una resolución algebraica en HBPS, que permite ilustrar tanto el funcionamiento del tutor como las diferentes ayudas del sistema. El capítulo se cierra con la exposición de los resultados de los diferentes trabajos de evaluación de HBPS.

3.1. EL MÉTODO CARTESIANO

El modelo de competencia para la resolución algebraica de problemas verbales aritmético-algebraico es el método cartesiano (en adelante, MC). El MC es el "método cartesiano por excelencia y puede ser considerado el canon de los métodos enseñados tradicionalmente en los sistemas escolares"[1] (Puig y Rojano, 2004, p. 191). El MC aglutina elementos de naturaleza diferente, de lo que se deriva que el resolutor ideal debe ser competente en distintos dominios. En concreto, la resolución algebraica de problemas verbales requiere competencia en: 1) el lenguaje natural en el que se presenta el enunciado; 2) el lenguaje algebraico en el que se escribe la ecuación (o el sistema de ecuaciones) que resuelve el problema; y 3) la traducción desde el texto en lenguaje natural al lenguaje algebraico (Filloy, Puig y Rojano, 2008). El MC permite la descomposición de la resolución algebraica de un problema verbal en una secuencia (ideal) ordenada de pasos (ideales). Puig (2003b) y Puig y Rojano (2004), a partir de un análisis histórico del método algebraico, establecen una descripción de los pasos del MC, lo que a su vez permite considerarlos como elementos de competencia cuando se ven desde las actuaciones de los sujetos. A continuación presentamos el MC desglosado en una secuencia ordenada de pasos:

1) Una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades.
2) Elección de una cantidad que se va a representar con una letra (o de unas cuantas cantidades que se van a representar con letras distintas).
3) Representación de otras cantidades mediante expresiones algebraicas que describen la relación (aritmética) que esas cantidades tienen con otras que ya han sido previamente representadas por una letra o una expresión algebraica.
4) Establecimiento de una ecuación (o tantas como letras distintas se haya decidido introducir en el segundo paso), igualando dos expresiones, de las que se han escrito en el tercer paso, que representen la misma cantidad.
5) Transformación de la ecuación en una forma canónica.
6) Aplicación de la fórmula o algoritmo de solución a la ecuación en forma canónica.
7) Interpretación del resultado de la ecuación en términos del problema.

(Filloy, Puig et al., 2008, p. 330)

[1] En la traducción desde la fuente original, en lengua inglesa, hemos optado por mantener el vocablo *canon* en la traducción de esta palabra cognada. Interpretamos que la acepción de canon como "modelo de características perfectas" según la Real Academia de la Lengua Española, refiere con precisión lo que es el método cartesiano, un modelo de competencia.

El MC está elaborado de esta manera a partir del capítulo "El patrón cartesiano" del libro *Mathematical Discovery* de Polya (1962, 1965), en donde se reescriben aquellas reglas cartesianas que consideran la tarea de traducir un problema aritmético-algebraico al lenguaje del álgebra. En concreto, los cinco primeros pasos del MC tienen su origen en los trabajos de Descartes: los cuatro primeros de las *Regulae ad directionem ingenii* y el quinto en *La Géométrie* (Puig, 2003b), derivándose el sexto paso de manera natural del quinto. El último paso, que completa el método, fue elaborado por Filloy, Puig et al. (2008). A continuación recogemos una breve explicación del significado de cada uno los pasos. En Filloy, Puig et al. (2008) puede consultarse una descripción en mayor detalle de los diferentes pasos.

El primer paso del MC implica la traducción vía una lectura analítica del enunciado del problema en otro texto en lenguaje natural donde sólo se incluyen cantidades y relaciones entre cantidades. Este proceso de conversión puede implicar la búsqueda de cantidades y relaciones no explicitadas en el enunciado, así como la eliminación de información superflua presente en éste. En los tres pasos siguientes (pasos segundos a cuarto), se produce una traducción del texto en lenguaje natural a otro texto en el sistema de signos del álgebra. Para dar cuenta de estos pasos el resolutor deberá ser competente en el lenguaje algebraico o, más concretamente, en la construcción de expresiones algebraicas. A su vez, debe ser capaz de que el nuevo texto formado en el sistema matemático de signos del álgebra mantenga la semántica del enunciado, lo que implica necesariamente ser capaz de "lo que Descartes llamaba 'expresar una cantidad de dos maneras diferentes' (Descartes, 1701, p. 66), que es lo que da sentido a la construcción de la ecuación, y constituye el significado algebraico del signo igual en una ecuación" (Filloy, Puig et al., 2008, p. 330). Finalmente, los pasos quinto y sexto exigen transformar la ecuación (o sistema de ecuaciones) construido, que constituyen un texto puramente algebraico, a una de las formas canónicas posibles. A partir de este punto, mediante una serie de transformaciones algebraicas, es posible calcular una de las cantidades representadas mediante una letra y, a partir de su valor, determinar el resto de cantidades desconocidas.

El MC describe los elementos de competencias más importantes en la resolución algebraica de problemas pero, obviamente, no puede involucrar todas las competencias que pueden ser necesarias a la hora de resolver un problema. Por ejemplo, la lectura analítica de un problema puede requerir poner en juego estructuras conceptuales que son específicas de una determinada familia de problemas verbales y que, lógicamente, el resolutor ha de invocar durante la aplicación del MC.

3.2. LOS HIPERGRAFOS: UNA ESTRUCTURA PARA LA REPRESENTACIÓN DE LAS LECTURAS ANALÍTICAS DE LOS PROBLEMAS

En el presente apartado se presentan un tipo de diagramas para la representación de la estructura de los problemas, que destacan por ser especialmente adecuados para expresar lecturas que conducen necesariamente al uso del algebra. Anteriormente decíamos que el primero de los pasos del MC implica realizar una lectura analítica del problema mediante la cual se traduce el enunciado a una serie de cantidades y relaciones entre éstas. Tal y como indica Puig (2010a) "esta lista [de relaciones] no es una [lista] desestructurada: las relaciones están unidas a través de cantidades compartidas formando una red" (p. 8). Para la representación de esta red de relaciones y cantidades, usamos una adaptación de la idea de grafo trinomial formulada en el trabajo de Fridman (1990). Estos hipergrafos son diagramas que se pueden usar para representar la lectura analítica de un problema verbal. Los vértices representan cantidades mientras que las aristas hacen lo propio con las relaciones entre cantidades. Para diferenciar entre cantidades conocidas y desconocidas, las primeras se representan mediante círculos negros mientras que para las segundas empleamos cuadrados vacíos. Las aristas pueden unir cualquier número de vértices en función de las cantidades relacionadas. Sin embargo, lo más habitual es encontrar aristas de dos vértices (relaciones binarias de igualdad), aristas de tres vértices (relaciones ternarias aditivas y multiplicativas), aristas de cuatro vértices (relaciones de proporcionalidad) y aristas de seis vértices (relaciones de proporcionalidad compuesta). También es posible encontrar aristas con un número variable de vértices, ligadas a relaciones procedentes de estructuras conceptuales con una relación aditiva entre las partes y el todo (Arnau, 2010; Filloy, Rojano et al., 2008).

En resumen, el hipergrafo es una representación topológica de las relaciones entre cantidades. Por norma general, siempre que sea posible, adoptamos un protocolo a la hora de construir el hipergrafo que permita inferir la manera en que están relacionadas la cantidades unidas mediante una arista sin la necesidad de incluir en el diagrama operadores aritméticos. En Nathan et al. (1988), los autores utilizan una representación esquemática de los problemas mediante los hipergrafos (véase Figura 3.1 a modo de ejemplo), pero optan por etiquetar cada arista con la operación aritmética y/o el signo igual. Por otro lado, no nos consta que estos autores hagan un uso de estas representaciones esquemáticas en la línea que nosotros lo hacemos, tanto para el análisis de la diferentes lecturas de los problemas aritmético-algebraicos como de sus resoluciones.

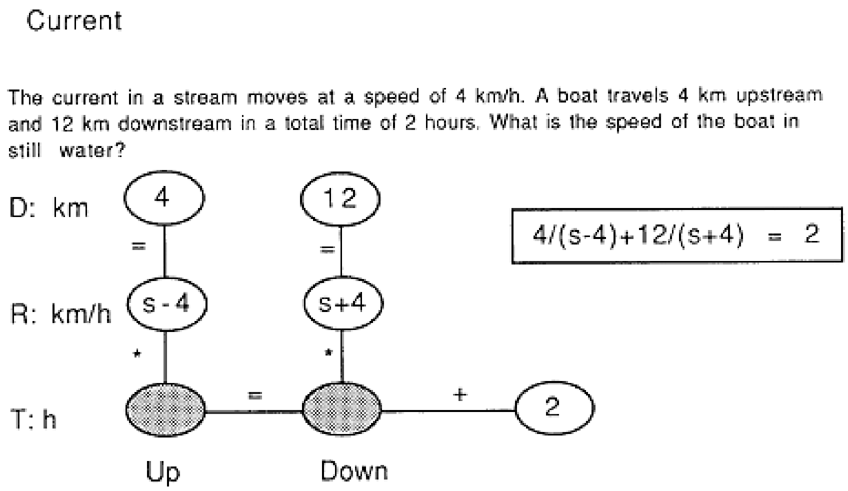


Figura 3.1. Ejemplo de uso de diagrama para representación de problemas verbales (Nathan et al., 1988, p. 39).

En la representación mediante hipergrafos, usaremos el convenio tomado de Arnau (2010) de representar las relaciones aditivas y las multiplicativas mediante aristas verticales y horizontales, respectivamente. En el caso de las relaciones aditivas, se intentará que aquella cantidad que ocupe la posición más inferior en la arista sea aquella que se calcula como suma de las otras cantidades relacionadas. En las relaciones multiplicativas, se procurará que la cantidad que se calcula como el producto entre las otras cantidades relacionadas, esté ubicada más a la derecha que dichas cantidades. En determinados problemas, puede ser inviable plasmar este convenio en un hipergrafo ya que por las relaciones existentes entre cantidades puede ser imposible representar todas las relaciones aditivas mediante aristas verticales y las multiplicativas con aristas horizontales. En estos casos, distinguiremos el tipo de relación por la zona que entra o sale la arista del vértice. Si la arista entra o/y sale verticalmente, estará representándose una relación aditiva. En el caso de que lo haga horizontalmente, dará cuenta de una relación multiplicativa. Las relaciones de igualdad, dado que son las únicas en que se relacionan únicamente dos cantidades, no necesitarán una orientación distintiva.

A continuación planteamos un ejemplo del uso de los hipergrafos para la representación de problemas verbales. En concreto, mediante el problema *Conejos y gallinas* (usado en la investigación), representaremos dos lecturas analíticas, una algebraica y otra aritmética.

<u>*Conejos y gallinas*</u>

En una granja, entre gallinas y conejos hay 20 cabezas y 52 patas. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay en la granja?

Una posible lectura de este problema comprende considerar las siguientes cantidades conocidas: número de patas de un conejo (*Ppc*, 4), número de patas de una gallina (*Ppg*, 2), número de cabezas (*C*, 20) y número de patas (*P*, 52). Las cantidades desconocidas consideradas en esta lectura serían: número de conejos (*Nc*), número de gallinas (*Ng*), número de patas de conejo (*Pc*) y número de patas de gallina (*Pg*). Las relaciones entre estas cantidades serían: $C = Nc + Ng$; $P = Pc + Pg$; $Pc = Nc \cdot Ppc$; y, $Pg = Ng \cdot Ppg$. La Figura 3.2 representa esta lectura analítica, que designamos como lectura 1.

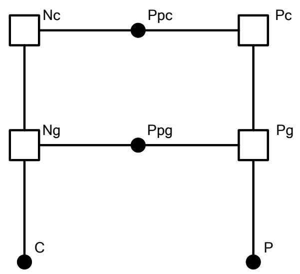


Figura 3.2. Hipergrafo asociado a la lectura 1 del problema *Conejos y gallinas*.

Otra posible lectura de este problema se describe a continuación. Imaginemos la situación hipotética en que sólo hubiera gallinas en el corral. Para determinar el número de gallinas en esta situación hipotética (*Gh*) dividimos el número de patas de los animales (*P*) de la granja entre el número de patas que tiene cada gallina (*Ppg*) (52/2 = 26). Dado que todos los animales tienen una cabeza en cualquier estado posible del mundo, el hecho de que haya 20 cabezas en la granja, se traduce en que hay 20 animales. El número de gallinas calculadas en la situación hipotética (*Gh*, 26) supera el número de animales que hay en la granja (*C*, 20). Como la parte no puede ser mayor que el todo, concluimos que sobran gallinas (*Egh*), 26 – 20 = 6, con sus correspondientes 12 patas. Estas 12 patas forman 6 grupos de dos patas que uniremos a 6 gallinas de las 20 que quedan para obtener 6 animales de cuatro patas, es decir, 6 conejos (*Nc*) con sus correspondientes 24 patas. Por último, calcularemos el número de gallinas (*Ng*) restando el número de conejos al número de animales (20 – 6 = 14). En resumen, las relaciones serían: $P = Gh \cdot Ppg$; $Egh + C = Gh$; $Egh = Nc$; y, $Nc + Ng = C$. La Figura 3.3 representa esta lectura analítica, que designamos como lectura 2.

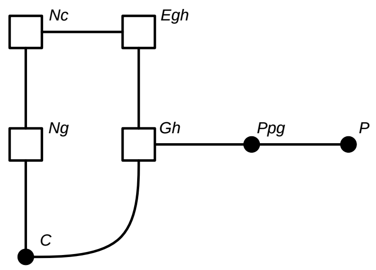


Figura 3.3. Hipergrafo asociado al paso 1 de la lectura 2 del problema *Conejos y gallinas*.

En la primera de las lecturas del problema *Conejos y gallinas*, obsérvese que no es posible calcular ninguna cantidad desconocida a partir de las conocidas. Esto se traduce en el hipergrafo en que no disponemos de ninguna arista ternaria con dos vértices oscuros, a partir de los cuales se pueda oscurecer la tercera cantidad (lo que sería equivalente a calcularla), para sucesivamente ir oscureciendo el resto de cantidades desconocidas del hipergrafo. En estas situaciones, en las que no podemos oscurecer sucesivamente todos los vértices, diremos que estamos ante una lectura algebraica (Filloy, Puig et al., 2008). En estos casos nos vemos obligados a designar alguna de las cantidades desconocidas mediante una letra para poder resolver el problema. En cambio, en la lectura 2 sí que tenemos una arista con un único vértice claro, el correspondiente a la relación ($P = Gh{\cdot}Ppg$), lo que hace posible calcular una cantidad desconocida a partir de dos cantidades conocidas y, de forma recurrente, ir procediendo de igual manera con el resto de aristas hasta calcular el resto de cantidades desconocidas. En la misma línea, podemos calificar como aritmética la lectura 2, es decir aquellas situaciones en las que podemos oscurecer todos los vértices sin necesidad de recurrir a letras para representar ninguna cantidad (Filloy, Puig et al., 2008). Nótese que una de las cualidades de los hipergrafos como herramienta para la representación y análisis de los problemas verbales es que permite identificar de manera casi automática el carácter aritmético o algebraico de la lectura. Las dos lecturas mostradas del problema *Conejos y gallinas* enfatizan la imposibilidad de calificar el problema como aritmético o algebraico, es la lectura analítica del problema lo que podríamos distinguir de esta manera.

El potencial de la representación mediante hipergrafos no sólo reside en suponer la base de un sistema de codificación de las posibles lecturas que resuelven un problema. Además, los pasos restantes del MC hasta el planteamiento de la ecuación también pueden representarse mediante acciones en los hipergrafos. A continuación utilizamos el problema de *Conejos y gallinas* para ejemplificar la representación de los pasos 2, 3 y 4 del MC. El paso 2 implica seleccionar al menos una cantidad desconocida y representarla mediante una letra. Esto se traduce en el hipergrafo en el oscurecimiento del vértice (o vértices) que representan la cantidad (o cantidades) (véase Figura 3.4).

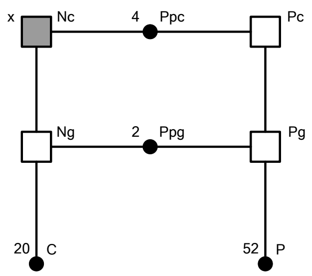


Figura 3.4. Hipergrafo asociado al paso 2 en la lectura 1 del problema *Conejos y gallinas*.

En el tercer paso se construyen expresiones algebraicas para representar el resto de cantidades desconocidas, lo cual también se traduce en el hipergrafo en el oscurecimiento sucesivo de los vértices involucrados (véase Figura 3.5). En la Figura 3.5. se ha marcado con trazo discontinuo las aristas utilizadas.

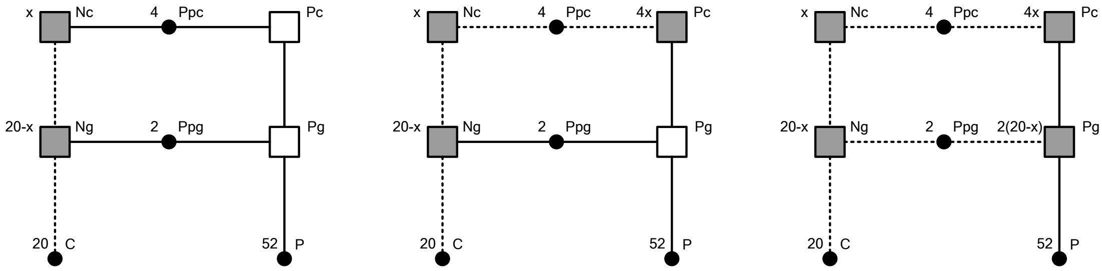


Figura 3.5. Hipergrafos asociados al paso 3 en la lectura 1 del problema *Conejos y gallinas*.

Nótese que ha sido posible oscurecer todos los vértices sin la necesidad de emplear todas las aristas (o relaciones). En concreto, no se ha empleado la relación aditiva que relaciona el número de patas total (*P*) con el número de patas de conejo (*Pc*) y el número de patas de gallina (*Pg*); $P = Pc + Pg$. La arista no usada permite representar una única cantidad de dos formas distintas, lo que significa poder plantear una ecuación (paso 4 del MC, véase Figura 3.6)

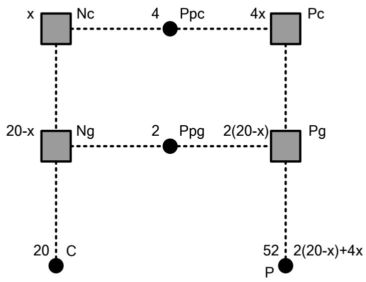


Figura 3.6. Hipergrafo asociado al paso 4 en la lectura 1 del problema *Conejos y gallinas*.

La representación en hipergrafos es flexible ante las decisiones del resolutor. Supongamos que en el problema que nos ocupa, el resolutor decide resolver el problema empleando dos letras, una para designar el número de conejos (*Nc*) y otra para designar el número de gallinas (*Ng*) (véase Figura 3.7).

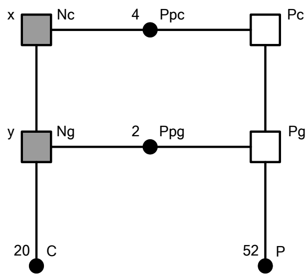


Figura 3.7. Hipergrafo asociado al paso 2 en la lectura 1 con dos letras del problema *Conejos y gallinas*.

El tercer paso se representa de manera análoga al caso anterior en el que sólo se usó una letra. A partir de los vértices oscuros, se construyen expresiones algebraicas para denotar el resto de cantidades desconocidas, traduciéndose en el oscurecimiento sucesivo de los diferentes vértices (véase Figura 3.8).

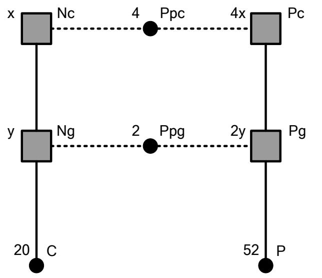


Figura 3.8. Hipergrafo asociado al paso 3 en la lectura 1 con dos letras del problema *Conejos y gallinas*.

En este caso, se han oscurecido todos los vértices sin usar las dos relaciones aditivas. Lógicamente, al usar dos letras será necesario construir dos ecuaciones para dar solución al problema. Estas dos ecuaciones se derivan del uso de las dos aristas no usadas (véase Figura 3.9).

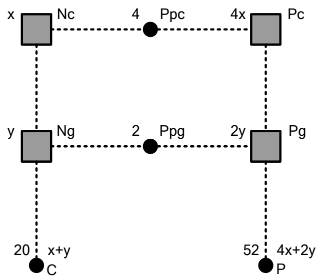


Figura 3.9. Hipergrafo asociado al paso 4 en la lectura 1 con dos letras del problema *Conejos y gallinas*.

A pesar de que este capítulo se ocupa del modelo de competencia de la resolución algebraica de problemas verbales, estimamos oportuno dedicar unas líneas al modelo de competencia de la resolución aritmética de problemas verbales que, en este caso, viene modelada por el método de análisis-síntesis (véase Puig y Cerdán, 1988, para una explicación detallada del método). Cerramos esta breve descripción del uso de hipergrafos para la representación de las lecturas analíticas de un problema y de los diferentes pasos de la resolución con un ejemplo de cómo se plasmaría en este metalenguaje una resolución aritmética. Para ello recurrimos nuevamente el problema *Conejos y gallinas*, en este caso haciendo uso de la lectura aritmética descrita con anterioridad (lectura 2). Dado que existe una arista en la cual sólo hay un vértice claro, es posible calcular directamente la cantidad desconocida correspondiente a este vértice, lo que se traduce en oscurecerlo. Sucesivamente se repite el proceso, calculando de este modo todas las cantidades desconocidas identificadas en la lectura analítica (véanse Figura 3.10 y Figura 3.11).

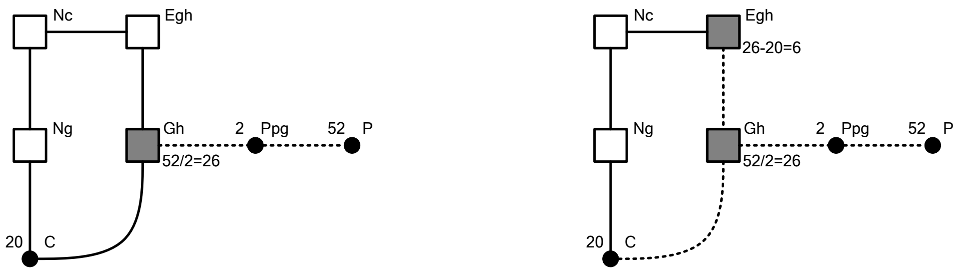
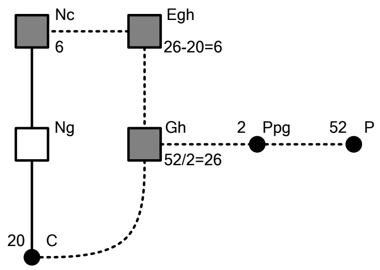


Figura 3.10. Hipergrafos asociados a la resolución de la lectura 2 del problema *Conejos y gallinas*.



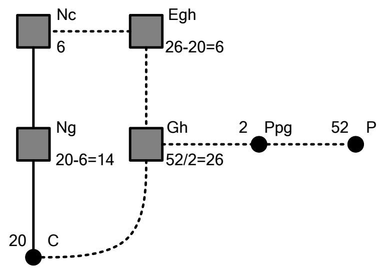


Figura 3.11. Hipergrafos asociados a la resolución de la lectura 2 del problema *Conejos y gallinas*.

3.3. EL SISTEMA TUTORIAL HBPS

En el presente capítulo, hasta el momento, se ha presentado, por un lado, un modelo de competencia para la resolución algebraica de problemas verbales, que queda estrictamente definido mediante un método estructurado en una secuencia de pasos ordenados. Por otro lado, se ha descrito un sistema de representación del conocimiento que permite la representación de los cuatro primeros pasos del mencionado método. Estos dos aspectos inspiraron la posibilidad de crear un STI dedicado a la tutorización de la resolución algebraica de problemas verbales. Este sistema se bautizó con el nombre de Hypergraph Based Problem Solver (HBPS) en honor al sistema de representación de conocimiento sobre el que ha sido construido. El potencial que otorga poder representar los cuatro primeros pasos del MC mediante hipergrafos, permite la construcción de un motor para HBPS capaz de resolver los problemas verbales a partir de una lectura del problema, y en consecuencia, monitorizar las acciones de los estudiantes y determinar la validez de las mismas. Además, dado que los hipergrafos permiten igualmente la representación de resoluciones aritméticas, HBPS trabaja indistintamente tanto con resoluciones aritméticas como algebraicas. Así, el sistema HBPS es un STI capaz de supervisar la resolución de aquellos problemas verbales aritmético-algebraicos que puedan reducirse a un conjunto de relaciones entre cantidades (Arnau et al., 2011). Aunque el sistema sea capaz de supervisar resoluciones aritméticas, HBPS fue diseñado con el objetivo de incrementar la competencia en la resolución algebraica de problemas verbales. Por ello, fue construido tomándose como referencia el modelo de competencia en este dominio: el método cartesiano. Para ser precisos, en realidad HBPS se ocupa de una gran parte de los elementos de competencia implicados en la traducción de los problemas al lenguaje algebraico, por lo que no considera los elementos de competencia comprendidos más allá del paso cuarto del MC.

A continuación se exponen las características de HBPS que le diferencian de otros STI y que, teóricamente, invitan a considerar que esta herramienta puede ser útil en la enseñanza de la resolución algebraica de problemas verbales.

- Independencia respecto al método de resolución. El problema permite resolver problemas de manera aritmética y de manera algebraica.
- Independencia respecto al uso de una o más ecuaciones. Cuando se resuelve de manera algebraica, es posible el uso de una o más letras y el consiguiente recurso a una o más ecuaciones.
- Independencia entre cantidad y su representación. El programa no supone una asignación predeterminada entre una cantidad y su representación, sino que comprueba la validez de una expresión atendiendo a las restricciones del problema y a las decisiones del resolutor.

- Independencia de funcionamiento del STI respecto del problema. La verificación de la validez de las expresiones matemáticas que se introducen y los mensajes (básicos) de error y ayuda que proporcionará el STI son independientes del problema concreto que se está resolviendo.

(Arnau et al., 2011, p. 259).

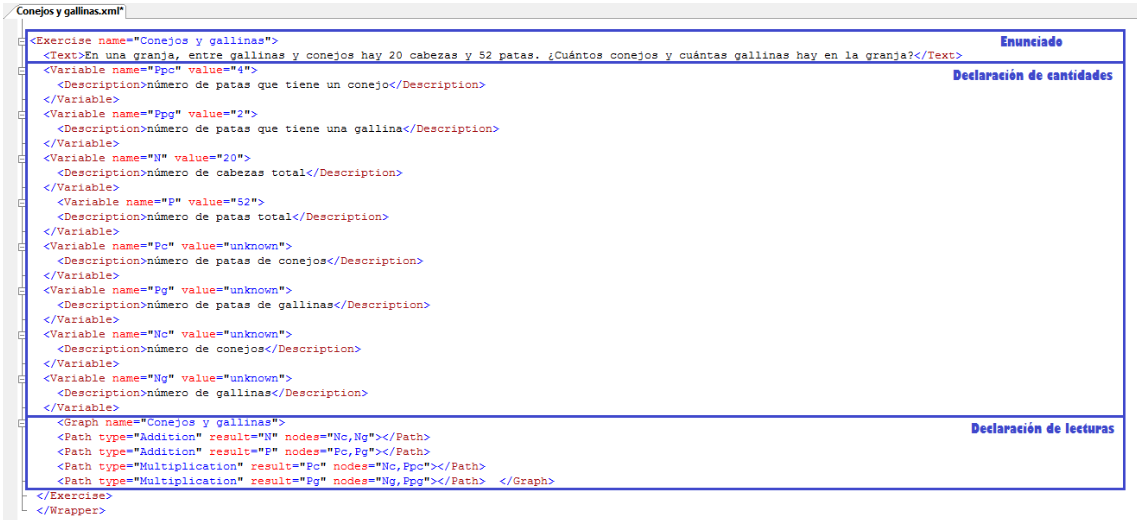
El objetivo principal de este apartado es exponer el modelo de competencia para la resolución algebraica de problemas verbales en el entorno HBPS. Sin embargo, en línea con la idea recién expuesta de que la resolución algebraica de un problema verbal comprende más competencias que aquellas que hace explícitas el MC, nos encontramos con que el entorno de resolución impone un conjunto de restricciones al proceso. Este aspecto nos lleva a considerar los elementos de competencia específicos que se derivan del uso de HBPS. Por este hecho, con antelación a proceder a describir el modelo de competencia en el sistema HBPS, se presenta una descripción de las principales características de diseño del sistema, así como del modo de funcionamiento del STI en la resolución algebraica de problemas verbales. Para ello, es necesario primero describir el sistema de representación del conocimiento en el que se basa HBPS, y que permite el cálculo sistemático de todas las soluciones posibles de un problema y, como derivada interesante para la enseñanza, la tutorización de las resoluciones de los estudiantes. Igualmente se expone la implementación de este sistema de representación en HBPS, prestando atención al procedimiento para generar y almacenar nuevos problemas en el tutor. Tras esto, se presenta una breve descripción de las características de diseño de la interfaz gráfica de usuario. Posteriormente, se aborda una explicación de las diferentes estrategias de ayuda que ofrece el sistema al estudiante. Con este propósito se plantea un ejemplo detallado de una resolución algebraica en HBPS, que permite ilustrar tanto el funcionamiento del tutor como las diferentes ayudas del sistema. Finalmente, el apartado se cierra con una descripción de los pasos que componen el modelo de competencia en HBPS.

3.3.1. LA REPRESENTACIÓN DE LOS PROBLEMAS EN HBPS

El anterior apartado se ha dedicado a la representación de las lecturas de problemas verbales mediante un metalenguaje gráfico basado en hipergrafos y a mostrar la viabilidad de expresar mediante acciones sobre los hipergrafos los cuatro primeros pasos del MC. A continuación, describimos la manera en que se codifica la información expresada en los hipergrafos para que pudiera ser manejada por HBPS. Nos gustaría subrayar la palabra *internamente*, ya que este apartado no se destina a explicar la manera en que los estudiantes representan la lectura de un problema en HBPS sino que se ocupa de cómo HBPS almacena las lecturas de los problemas y cómo las usa para resolver (y tutorizar) los mismos. En Arnau, Arevalillo-Herráez, Puig y González-Calero (2013) puede encontrarse una explicación en detalle del tema.

A tenor de lo comentado anteriormente, cualquier relación ternaria puede ser expresada en la forma $a = b * c$, donde las letras a, b y c representan cantidades, y el símbolo * da cuenta de las operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división). Sin embargo, si se realizan las transformaciones algebraicas pertinentes es posible reducir el conjunto de operaciones básicas a la suma y la multiplicación. Así, tanto en la representación mediante grafos como en el lenguaje interno de HBPS los operadores aritméticos empleados son exclusivamente la suma y la multiplicación, con lo que las relaciones quedan representadas de forma unívoca. Además, este proceder es coherente con la manera en que Puig y Cerdán (1988) clasifican los problemas aritméticos[2]. Por una cuestión de economía, emplearemos nuevamente el problema *Conejos y gallinas* para ejemplificarlo.

La información ligada a cada problema se almacena en un archivo con formato XML. Este formato permite estructurar la información de una manera sencilla y posibilita su modificación para incluir nuevas lecturas o mensajes de ayuda específicos del problema. Una característica relevante en HBPS es que el almacenamiento de los problemas y el motor de inferencia son dos módulos independientes. El primero corresponde a un repositorio de problemas, donde el profesor o un usuario experto ubican ficheros XML con la información relativa a los problemas. El segundo módulo es capaz de procesar estos archivos y sobre la base de éstos, tanto resolver autónomamente los problemas como tutorizar las resoluciones del usuario. La Figura 3.12 corresponde al XML del problema *Conejos y gallinas*. En este caso, sólo se ha incluido la lectura 1 del problema en XML aunque sería posible añadir tantas lecturas como deseáramos, o fuéramos capaces de hacer, del problema.




```xml
<Exercise name="Conejos y gallinas">
  <Text>En una granja, entre gallinas y conejos hay 20 cabezas y 52 patas. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay en la granja?</Text>
  <Variable name="Ppc" value="4">
    <Description>número de patas que tiene un conejo</Description>
  </Variable>
  <Variable name="Ppg" value="2">
    <Description>número de patas que tiene una gallina</Description>
  </Variable>
  <Variable name="N" value="20">
    <Description>número de cabezas total</Description>
  </Variable>
    <Variable name="P" value="52">
    <Description>número de patas total</Description>
  </Variable>
  <Variable name="Pc" value="unknown">
    <Description>número de patas de conejos</Description>
  </Variable>
  <Variable name="Pg" value="unknown">
    <Description>número de patas de gallinas</Description>
  </Variable>
  <Variable name="Nc" value="unknown">
    <Description>número de conejos</Description>
  </Variable>
  <Variable name="Ng" value="unknown">
    <Description>número de gallinas</Description>
  </Variable>
    <Graph name="Conejos y gallinas">
    <Path type="Addition" result="N" nodes="Nc,Ng"></Path>
    <Path type="Addition" result="P" nodes="Pc,Pg"></Path>
    <Path type="Multiplication" result="Pc" nodes="Nc,Ppc"></Path>
    <Path type="Multiplication" result="Pg" nodes="Ng,Ppg"></Path>  </Graph>
 </Exercise>
 </Wrapper>
```

Figura 3.12. Representación interna del hipergrafo asociado al problema *Conejos y gallinas*.

En la Figura 3.12 se puede observar que el fichero se estructura en tres partes obligatorias: 1) el enunciado del problema; 2) la declaración de cantidades, en la que aparecen todas las cantidades presentes en las lecturas que se vayan a introducir; y 3) la declaración de las lecturas analíticas. En el fichero XML es posible asignar una etiqueta semántica a las cantidades. Esta información puede ser usada HBPS para generar mensajes de ayuda de mayor calidad. A su vez, siempre que el autor del problema lo considere oportuno, es posible codificar en el archivo *buggy-rules* o mensajes predefinidos, que HBPS muestra cuando se cometen determinados errores. Generalmente este tipo de mensajes se emplean para errores muy comunes y que suelen responder a algún rasgo específico del problema en particular. A modo de ejemplo, supongamos el caso hipotético en que un profesor detectase que sus alumnos, con cierta frecuencia, pretenden representar el número total de patas (*P*) mediante la suma de las cantidades *Ppc* y *Ppg*, en vez de *Pc* y *Pg*. En ese supuesto, el profesor podría introducir

[2] Puig y Cerdán (1988) exponen que no es pertinente diferenciar entre problemas de sumar y de restar pues la operación que el resolutor emplee para dar solución al problema no caracteriza estructuralmente al mismo. Un razonamiento análogo es aplicable a los problemas multiplicativos.

mensaje específico para estas situaciones con el objeto de inducir a los estudiantes a considerar la relación correcta (véase Figura 3.13).

```
 </Variable>
   <Graph name="Conejos y gallinas">
   <Path type="Addition" result="N" nodes="Nc,Ng"></Path>
   <Path type="Addition" result="P" nodes="Pc,Pg"></Path>
   <Path type="Multiplication" result="Pc" nodes="Nc,Ppc"></Path>
   <Path type="Multiplication" result="Pg" nodes="Ng,Ppg"></Path>  </Graph>
 <CommonMistake type="Addition" result="P" nodes="Ppg,Ppc">
     message="Estás intentando calcular el número total de patas en la granja sumando las patas de UN conejo y las de UNA gallina. Sin embargo,
        del enunciado sabemos que en la granja hay 20 animales.">
 <CommonMistake>
</Exercise>
</Wrapper>
```

Figura 3.13. Ejemplo de buggy rule en el problema *Conejos y gallinas*.

3.3.2. El motor de inferencia en HBPS

Bajo la definición de motor de inferencia englobamos el módulo de HBPS que hace posible tanto la resolución de un problema por el propio sistema como la capacidad de supervisar el proceso de resolución de un estudiante. Dado el carácter de este texto se evitará un enfoque técnico del funcionamiento del sistema y nos centraremos en explicar cómo el sistema es, sobre la base de la representación mediante hipergrafos (adaptada a un lenguaje de programación), capaz de determinar la corrección de cada una de las acciones del usuario.

Cuando un problema es cargado en HBPS, automáticamente el sistema construye dos tablas: una para almacenar las cantidades y otra para las relaciones. La primera tabla dispone de un campo donde se almacena la representación de cada cantidad y que se va completando durante el proceso de resolución. En la tabla correspondiente a las relaciones, existe un campo para cada relación que permite identificar si el usuario la ha empleado correctamente. A grandes rasgos, cada acción que el usuario realiza desde la interfaz gráfica de usuario es utilizada para actualizar el hipergrafo interno de la resolución del problema. Cuando un usuario realiza una acción, HBPS determina si ésta es correcta y si es así, actualiza el hipergrafo de la resolución. A continuación mediante un ejemplo veremos los parámetros bajo los que HBPS identifica si una acción es correcta o no. La actualización continua del hipergrafo permite al sistema saber en cada momento el paso en que se encuentra la resolución y evaluar correctamente las acciones del estudiante. A diferencia de otros STI, HBPS no presupone en modo alguno las acciones concretas que realizará el resolutor. Por ello, el protocolo de funcionamiento basado en el hipergrafo da libertad al resolutor en cuanto a las decisiones que toma a lo largo del proceso, por ejemplo, el número de letras que desea usar, a las cantidades a las que se les asignan o la expresión concreta en que se materializa una relación entre cantidades. Como comentábamos, ilustraremos el funcionamiento del tutor mediante un ejemplo de resolución del problema *Conejos y gallinas*, al tiempo que presentamos la interfaz gráfica de usuario.

3.3.3. La interfaz gráfica de usuario

Este subapartado se dedica a describir detalladamente la interfaz gráfica de usuario, a la que de aquí en adelante, nos referiremos como GUI, acrónimo habitual en los STI y que proviene de la lengua inglesa: *graphical user interface*. La GUI es el entorno gráfico mediante el cual se produce la comunicación entre el usuario y la aplicación. En Arnau et al. (2013) se enumeran las principales características de la GUI del sistema HBPS: 1) establecer una clara separación entre los pasos del MC, con el objeto de enfatizar el MC como instrumento sobre el que organizar el proceso de resolución algebraica de problemas verbales; 2) permitir tanto resoluciones aritméticas como algebraicas, enfatizando lo que ambas resoluciones tienen en común, con el fin de suavizar el difícil tránsito entre aritmética y algebra; 3) permitir la supervisión de cada una de las acciones del resolutor, que suele ser considerado más beneficioso que realizar la supervisión sobre la respuesta final al problema; 4) construir todas las expresiones matemáticas mediante botones, en un intento de reducir las dificultades asociadas al manejo del lenguaje algebraico; 5) ofrecer ayuda cuando el usuario la solicite; y 6) expresar todos los mensajes destinados al usuario en lenguaje natural, con la idea de asemejar los mensajes con aquellos que daría un tutor humano.

Cuando un usuario inicia el trabajo en HBPS, su primera decisión pasa por seleccionar el problema que desea resolver. Este paso es muy sencillo, pues el usuario no tiene más que desde el menú *Archivo* seleccionar el fichero XML correspondiente al problema o conjunto de problemas con los que desea trabajar. Tras ello, en el menú *Problemas* aparecerá el nombre del problema o problemas preparados para trabajar en HBPS, entre los cuales el usuario deberá escoger uno de ellos. En cuanto el usuario selecciona el problema, en la ventana aparecerá en la parte superior el enunciado del mismo. En la parte inferior izquierda se muestra el panel de declaración de cantidades, que recoge las opciones posibles que tiene el usuario para iniciar la resolución. El usuario puede seleccionar la cantidad a la que desea realizar una asignación de valor o expresión de un menú desplegable. Las cantidades que aparecen en la lista se corresponden con las existentes en la lectura o lecturas almacenadas en el HBPS. Tal y como se ha comentado anteriormente, HBPS permite trabajar simultáneamente varias lecturas. No obstante, en este trabajo para cada problema se optó por cargar una única lectura. Daremos una descripción detallada de este punto en el capítulo 4, especificando la lectura empleada para cada problema. Así, cuando un problema es cargado en HBPS, cada cantidad tiene asignada por defecto un nombre que la identifica. Para cada cantidad el usuario tiene tres opciones: 1) asignarle un valor numérico, 2) asignarle una letra o 3) asignarle una expresión (aritmética o algebraica) (véase la Figura 3.14).

Figura 3.14. Interfaz de usuario al iniciar el problema *Conejos y gallinas*.

Retomamos el problema *Conejos y gallinas* para ejemplificar el funcionamiento de HBPS. En nuestro ejemplo, supongamos que el resolutor inicia el problema asignando valor a las cantidades conocidas, lo cual es una suposición más que razonable[3]. El programa validaría que, efectivamente, el valor asignado se corresponda con el descrito en el enunciado. La Figura 3.15 muestra el aspecto de la GUI tras la definición por parte del usuario de las cantidades conocidas. Dado que ninguna de las cantidades pendientes de definir puede ser calculada mediante una expresión aritmética, nuestro resolutor hipotético sólo podría continuar mediante la representación de una (o varias) cantidad(es) con una letra (o letras). HBPS siempre considera válida la opción de asignar una letra a una cantidad desconocida. Internamente asigna la letra escogida por el usuario en la tabla de cantidades, y pasa a considerar esta cantidad como conocida. Consideremos que en la resolución que llevamos en curso, el usuario decide usar una única letra; por ejemplo, opta por representar la cantidad número de conejos (*Nc*) mediante la letra *equis*. La Figura 3.16 representa la GUI tras realizar dicha asignación y la Figura 3.17 el estado actualizado del hipergrafo interno que maneja HBPS para monitorizar el proceso de resolución. La Figura 3.16 permite visualizar cómo para la construcción de expresiones matemáticas HBPS habilita un teclado parecido al de una calculadora, con tantos botones como cantidades han sido definidas previamente más un botón para cada una de las operaciones aritméticas. Esta característica obliga a definir con antelación aquellas cantidades involucradas en aquella relación que se desee introducir en el sistema. En el instante que una cantidad es definida, automáticamente se genera un botón para dicha cantidad. Este botón estará disponible tanto para la construcción de expresiones como para la construcción de ecuaciones, como veremos posteriormente.

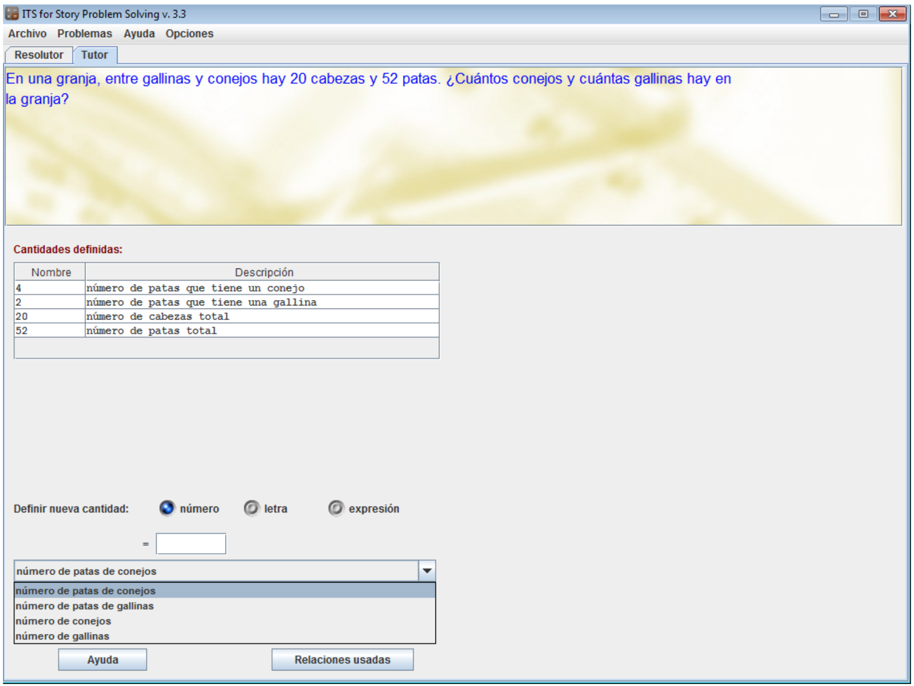


Figura 3.15. Interfaz de usuario tras dar valor a las cantidades conocidas en *Conejos y gallinas*.

[3] En versiones posteriores de HBPS se omite este paso y el estudiante sólo debe representar las cantidades desconocidas.

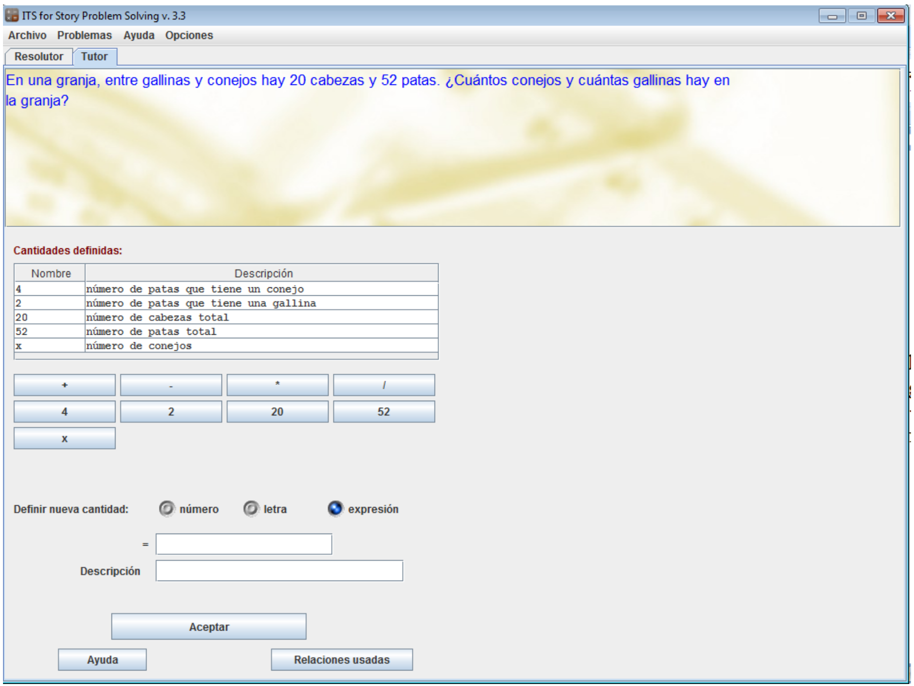


Figura 3.16. Interfaz de usuario tras completar el paso 2 del MC en *Conejos y gallinas*.

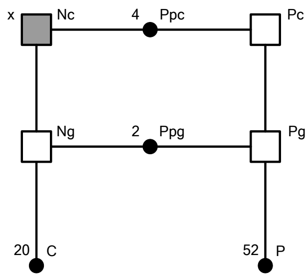


Figura 3.17. Hipergrafo tras la asignación de *equis* a la cantidad *Nc* (paso 2 del MC).

Como comentábamos, los botones muestran la representación asignada por el usuario a la cantidad, ya sea valor numérico, letra o expresión (aritmética o algebraica). Si el usuario mantiene el ratón sobre cualquiera de los botones unos segundos, el sistema muestra una etiqueta con la descripción de la cantidad.

Durante el paso 3 del MC, cuando el resolutor introduce una expresión en HBPS, el sistema realiza una búsqueda sobre el hipergrafo con el fin de encontrar alguna relación pendiente de usar que coincida con la relación planteada por el usuario. Para ello el motor de inferencia realiza una búsqueda sobre todas las aristas del hipergrafo con un vértice claro, y comprueba si las cantidades usadas en la expresión del usuario coinciden con las cantidades conocidas de cada una de estas aristas. Si se cumple esta condición en alguna de las aristas, el motor comprobará si el operador y el orden en que el usuario ha expresado las cantidades son correctos. En caso de que sea así, el hipergrafo es actualizado: la cantidad representada por la expresión es oscurecida, pasa a ser considerada una cantidad conocida y la arista correspondiente a la relación empleada es marcada como usada. Imaginemos que en nuestro ejemplo de *Conejos y gallinas* el usuario desea expresar el número de gallinas (*Ng*) como la diferencia entre el número total de animales (*C*) y el número de conejos (*Nc*), para lo que construye la expresión $20 - x$. En el momento que el usuario introduce esta expresión y pulsa el botón *Aceptar*, HBPS identifica las aristas (relaciones) que podrían ser usadas para construir una expresión. El criterio es que sólo contengan una cantidad desconocida. Por tanto, las aristas candidatas son las marcadas con trazo grueso en la Figura 3.18, es decir, las correspondientes a las relaciones *Pc=Nc·Ppc* y *C=Nc+Ng*.

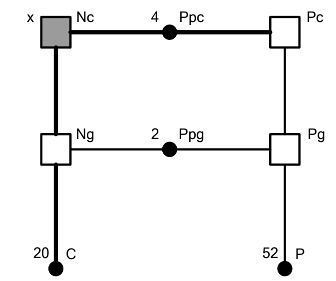


Figura 3.18. Hipergrafo tras el paso 2 del MC. Aristas utilizables para el paso 3.

La primera de las relaciones sería descartada porque no existe coincidencia entre las cantidades conocidas de la arista (*Nc*, *Ppc*) y la expresión del usuario (*C*, *Nc*). La segunda de las aristas muestra coincidencia en este sentido y, adicionalmente, se verifica que el orden de las cantidades y la operación utilizada en la expresión concuerdan con ésta. En consecuencia, HBPS considera que el resolutor desea representar la cantidad *Ng*, le asigna la expresión escrita por el usuario $20 - x$, oscurece el vértice correspondiente y marca como usada la arista de la relación *C=Nc+Ng* (véase Figura 3.19). Tras este proceso, HBPS genera de forma automática un botón para la cantidad *Ng*, la cual pasa a ser considerada a todos los efectos como una cantidad conocida (véase Figura 3.20). De este modo, ahora el resolutor podría construir una expresión tanto para *Pc* como para *Pg*, pues la relación *Pg=Ng·Ppg* pasa a ser utilizable tras la definición de la cantidad *Ng* (véase Figura 3.19)

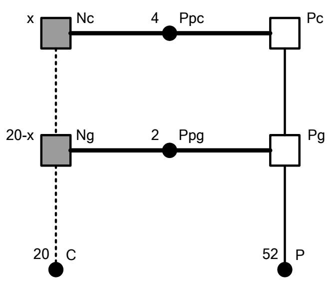


Figura 3.19. Hipergrafo tras la definición de la cantidad *Ng* (paso 3 del MC).

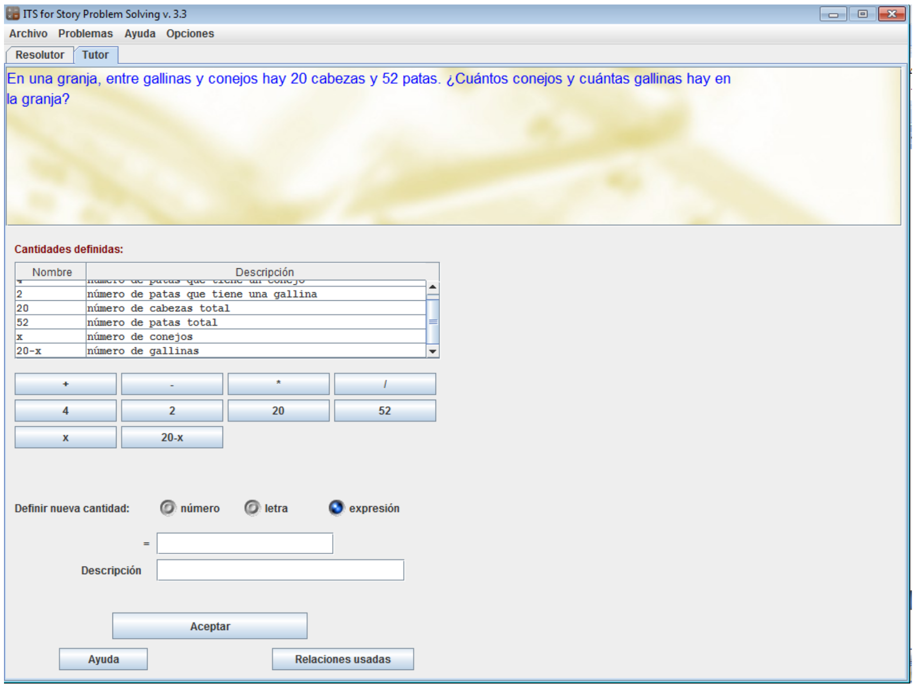


Figura 3.20. Interfaz de usuario durante el paso 3 del MC en *Conejos y gallinas*.

Siguiendo con nuestra resolución ficticia de *Conejos y gallinas*, supongamos que el usuario completa el tercer paso del MC construyendo las expresiones $4x$ y $2(20 - x)$ para *Pc* y *Pg*, respectivamente. El hipergrafo actualizado de la resolución y la apariencia de la GUI en dicho instante se muestra en las Figura 3.21 y la 3.22, respectivamente. En el momento en que se han definido las cantidades necesarias para construir una ecuación, HBPS activa automáticamente el panel de construcción de ecuaciones en la parte inferior derecha de la GUI (véase Figura 3.22). El aspecto de este panel es muy similar al utilizado para construir una expresión matemática en el panel de declaración de cantidades. En este caso aparecerán un botón para cada cantidad definida, un botón para cada operación básica y un botón adicional para el signo igual.

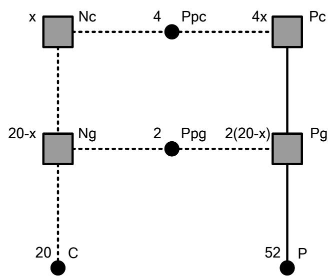


Figura 3.21. Hipergrafo tras completarse el paso 3 del MC.

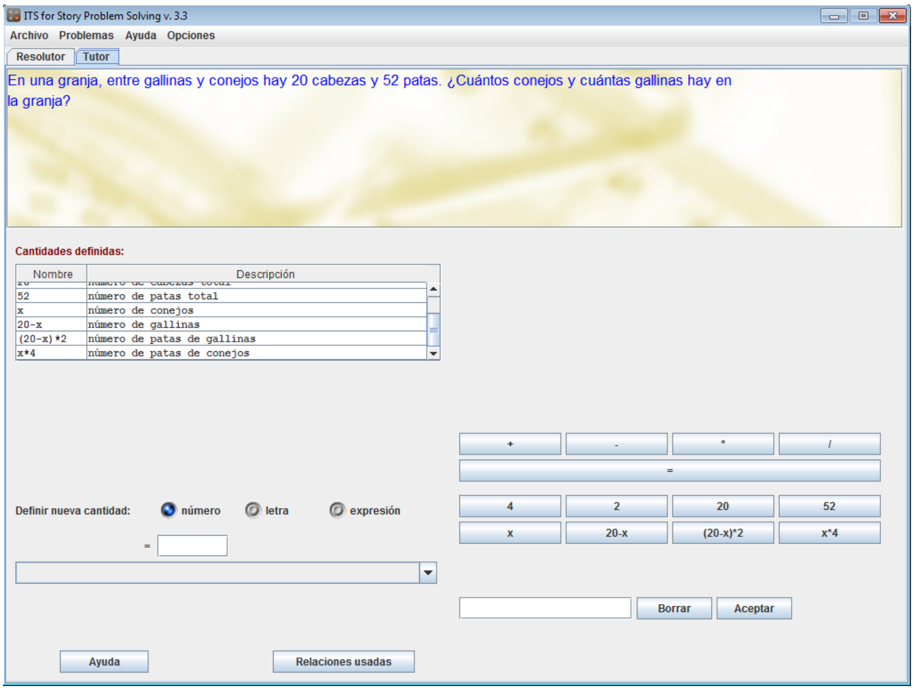


Figura 3.22. Hipergrafo tras completarse el paso 3 del MC.

Tanto para la construcción de expresiones (aritméticas o algebraicas) como para la de ecuaciones, HBPS gestiona automáticamente la necesidad de usar paréntesis. Esta decisión se fundamenta en un intento de que el estudiante focalice sus esfuerzos en las relaciones entre cantidades, más allá de las dificultades propias del lenguaje algebraico. A continuación explicamos las validaciones que realiza HBPS ante una ecuación introducida por el usuario. En primer lugar, HBPS lista las aristas del hipergrafo no usadas y donde todas las cantidades son conocidas. Entre las aristas que cumplan este criterio, HBPS busca si existe una coincidencia entre ecuación expresada por el usuario y las cantidades, la operación y el orden en que se relacionan las cantidades de la arista. Nótese que si HBPS permite al usuario introducir una ecuación es porque al menos existe una arista sobre la que se podría construir una ecuación, es decir una arista no usada con todas las cantidades oscurecidas. En el ejemplo de *Conejos y gallinas* que estamos desarrollando, supongamos que el usuario introduce la ecuación $2(20-x)+4x=52$. La construcción de una ecuación supone representar una misma cantidad mediante dos expresiones no equivalentes. En el caso que nos ocupa, el resolutor sólo tiene una relación pendiente de usar, la que vincula el número total de patas (P) con el número total de patas de conejo (Pc) y el número total de patas de gallina (Pg). Cuando el usuario introduce la ecuación comentada, HBPS chequea si existe correspondencia entre dicha ecuación y la arista pendiente de usar. Como así es el caso, HBPS valida la ecuación y marca la arista como utilizada (véase Figura 3.23).

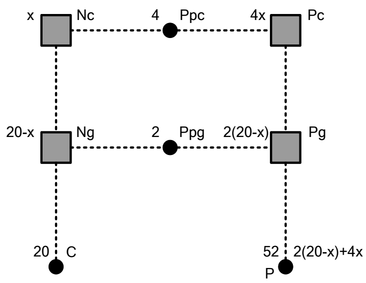


Figura 3.23. Hipergrafo asociado al paso 4 en la lectura 1 del problema *Conejos y gallinas*.

El sistema considera que el problema ha sido completado cuando en alguna de las lecturas del problema se han definido correctamente todas las cantidades y recorrido todas las aristas del hipergrafo correspondiente. La Figura 3.24 muestra la apariencia de la GUI al finalizar la resolución. El sistema informa que el problema ha sido planteado correctamente y aparece un cuadro a modo de resumen donde se recoge las representaciones de cada una de las cantidades utilizadas, así como las ecuaciones formuladas. Adicionalmente, el sistema asigna una puntuación al resolutor a partir de las acciones realizadas durante la resolución del problema. La puntuación se calcula como la media de dos puntuaciones parciales, una primera que cuantifica el desempeño del estudiante en el paso 2 y paso 3 del MC y una segunda que se centra en la construcción de ecuación (o ecuaciones). En el ejemplo usado el resolutor no ha cometido ningún error durante el proceso por lo que recibe la máxima puntuación.

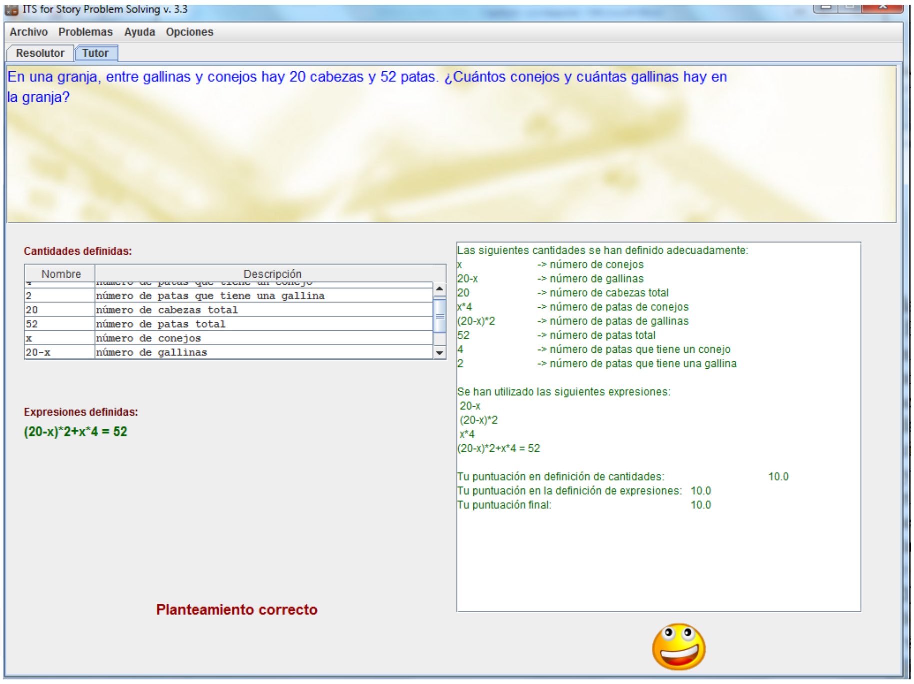


Figura 3.24. Aspecto de HBPS tras la resolución del problema *Conejos y gallinas*.

3.3.4. ESTRATEGIAS DE AYUDA EN HBPS

En este apartado describiremos las estrategias de ayuda implementadas en la versión de HBPS empleada en este trabajo. En líneas generales, los STI con propósitos educativos pretenden emular alguna o algunas de las tareas que un tutor humano realiza cuando supervisa el trabajo de un estudiante. VanLehn (2011) analizó qué tareas realizaban los tutores humanos y qué no hacían o no eran capaces de hacer los entornos interactivos, y que podrían explicar la mayor efectividad de los tutores humanos. En dicho estudio el autor analizó si las siguientes subtareas durante el proceso de resolución o características del tutor podían explicar la bondad de la tutorización humana: 1) diagnosis de la competencia y los concepciones erróneas de los alumnos a través de sus actuaciones; 2) generación de secuencias de enseñanza individualizadas; 3) uso de estrategias de tutorización complejas (p. ej., el método socrático); 4) comunicación no sujeta a restricciones, dando plena libertad al estudiante a exponer sus dudas o conducir el diálogo con el tutor; 5) dominio más profundo y amplio de conocimientos que el que pueda tener un sistema, que normalmente suele ser muy local; 6) incremento la motivación de los estudiantes; 7) ofrecer retroalimentación[4] supervisando y ayudando al estudiante cuando lo requiere; y 8) el ofrecer andamiaje[5] al razonamiento del estudiante. En realidad, las estrategias de retroalimentación y andamiaje están estrechamente relacionadas, hasta el punto de que es frecuente considerar la retroalimentación como un caso específico de andamiaje. Sin embargo, este autor justifica la diferenciación aludiendo que la retroalimentación es reactiva, que se produce cuando el estudiante comete un error o no avanza en el proceso de resolución, mientras que el andamiaje se sustenta en una concepción más proactiva, que busca que el estudiante profundice en una línea de razonamiento. Más allá de esta consideración, el autor reconoce que estas dos categorías responden a las dos caras (una reactiva y otra proactiva) de una misma moneda, del mismo tipo de ayuda al estudiante. Tras una revisión profunda de múltiples trabajos, VanLehn (2011) concluyó que sólo existían evidencias sólidas de que la retroalimentación y el andamiaje pudieran explicar las diferencias entre la tutorización humana y la digital. Estos resultados apuntaban en la misma dirección que otros trabajos de revisión previos (Chi, Siler, Jeong, Yamauchi y Hausmann, 2001; Graesser, Person y Magliano, 1995; Merrill, Reiser, Ranney y Trafton, 1992). En la versión de HBPS empleada en esta investigación las diferentes ayudas implementadas podrían catalogarse dentro de las categorías de andamiaje y retroalimentación. No es nuestra intención en este texto entrar en disquisiciones sobre las clasificaciones de los diferentes tipos de ayuda que puede ofrecer un STI. Simplemente se desea enfatizar la existencia de estudios previos que apoyan la elección de las estrategias de HBPS. No obstante, los trabajos citados ofrecen unas indicaciones de carácter general, que no garantizan efectividad en cualquier dominio de conocimiento. De hecho, en este sentido, Collins (2012) afirmaba que la mejor manera de tutorizar cuando existe un método canónico de resolución no tiene por qué ser extrapolable a otras situaciones. A continuación se describen las estrategias de ayudas ofrecidas por HBPS al estudiante.

3.3.4.1. Estructuración del proceso de resolución

HBPS emplea el método cartesiano como armazón sobre el que estructurar la resolución algebraica de problemas verbales. En concreto, el programa obliga al estudiante a completar un paso del método antes de pasar al siguiente. A pesar de que en la descripción del MC realizada en este capítulo se enumeraba la secuencia ordenada de pasos que constituye el método, este hecho no implica que un resolutor (ya sea competente o no) deba obligatoriamente dar cuenta en este orden estricto de los pasos. Así, es habitual en lápiz y papel que el resolutor represente cantidades mediante expresiones algebraicas (paso 3) al tiempo que construye la ecuación o ecuaciones (paso 4). En cambio, el sistema HBPS sólo da acceso a un paso cuando el anterior está completado. Así, un estudiante sólo podría usar una ecuación cuando las cantidades que desea involucrar en ella, hayan sido previamente representadas. Esta ayuda se basa en la idea de que una resolución paso a paso puede mejorar la competencia de los estudiantes en la resolución algebraica al explicitar las fases de las que consta el proceso. La idea se base en restringir las acciones del resolutor para estructurar el proceso de resolución (Van Merriënboer y Sweller, 2005).

[4] Optamos por emplear el término *retroalimentación* en vez del anglosajón *feedback*, a pesar de que éste último esté cada vez más extendido y habitual entre castellano-parlantes.

[5] Usamos el término *andamiaje* para traducir *scaffolding*, habitual en la literatura investigadora en lengua inglesa.

3.3.4.2. Facilitación de la lectura analítica del problema

El primer paso del MC consiste en realizar una lectura analítica del problema mediante la cual se transforma el enunciado en un conjunto de cantidades y relaciones. Estas relaciones reflejan diferentes estructuras conceptuales, a menudo ligadas al contexto específico del problema. Además, las cantidades involucradas en una determinada lectura pueden ser clasificadas de diferentes formas. Por un lado, se podrían clasificar en aquellas cantidades que son explícitamente mencionadas en el enunciado del problema y aquellas cantidades que no son mencionadas (p. ej., Cerdán, 2008). Obviamente, a esta clasificación se le puede sumar aquella que divide las cantidades en conocidas y desconocidas. Existen estructuras conceptuales, muy habituales en la resolución de problemas verbales, que ligan cantidades mencionadas y no mencionadas, y que facilitan al resolutor involucrar en la lectura cantidades no mencionadas en comparación con otras cantidades no mencionadas que no están ligadas por estructuras conceptuales recurrentes. De una manera análoga, para los estudiantes acarrea mayor dificultad emplear estructuras conceptuales donde están involucradas cantidades no mencionadas en el enunciado que aquéllas en las que todas las cantidades involucradas son aludidas en el problema.

Con el fin de ayudar en el proceso de identificación de las cantidades necesarias para resolver el problema y permitir la inferencia de esquemas conceptuales, el tutor ofrece un menú desplegable con una relación de los nombres de las cantidades pertenecientes a las lecturas almacenadas en HBPS, haciendo visible las cantidades necesarias para resolver el problema. Este hecho es especialmente relevante en el caso de cantidades no mencionadas. De este modo, la complejidad del proceso de traducción se reduce al guiar al estudiante hacia la lectura o lecturas establecidas. A su vez, el sistema favorece la identificación de estructuras conceptuales pues permite centrarse exclusivamente en las relaciones existentes entre cantidades. A continuación, ilustramos mediante un ejemplo la manera en que esta estrategia restringe el proceso de resolución. Para ello, usaremos el problema *Las naranjas*, también usado en esta investigación. El problema dice así:

<u>*Las naranjas*</u>

Antonio ha comprado 180 naranjas en dos sacos; pero en uno de ellos hay 30 naranjas más que en el otro; ¿cuántas naranjas corresponden a cada saco?

Ante este problema, un alumno de Primaria, o un alumno de Secundaria poco competente en la resolución algebraica de problemas verbales, es muy probable que plantease una lectura del estilo (aritmético) que describimos a continuación. Una lectura en la que se considerarían las siguientes cantidades conocidas: número de naranjas compradas (N, 180), número de naranjas de más en un saco (Mgp, 30) y número de sacos (S, 2). Las únicas cantidades desconocidas serían: número de naranjas en el saco que más tiene (Ng), número de naranjas en el saco que menos tiene (Np) y número de naranjas si eliminamos el exceso de naranjas del saco grande (Nqe). Las relaciones entre cantidades serían: $N = Ng + Np$; $N = Nqe + Mgp$; y, $Nque = S{\cdot}Np$. La Figura 3.25 muestra el hipergrafo asociado a esta lectura.

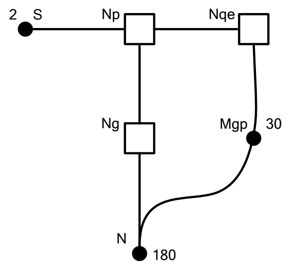


Figura 3.25. Hipergrafo asociado a una lectura aritmética del problema *Las naranjas*.

Sin embargo, supongamos que estamos interesados en que el estudiante resuelva este problema algebraicamente pues, por ejemplo, se está iniciando al mismo en la resolución algebraica de problemas verbales. El sistema HBPS permite filtrar las lecturas, si así se desea, de tal manera que el resolutor sólo pueda plasmar lecturas aritméticas o algebraicas (véase Figura 3.26). Si para este problema, sólo se permitiesen lecturas algebraicas, entonces cuando el resolutor desplegase la lista de cantidades se mostrarían los nombres de las siguientes cantidades: número de naranjas compradas (N), número de naranjas en el saco que más tiene (Ng), número de naranjas en el saco que menos tiene (Np) y número de naranjas de más en un saco (Mgp). Al poder usar sólo estas cantidades, el estudiante puede verse inducido a desarrollar una lectura que contuviera dichas cantidades relacionadas mediante: $N = Ng + Np$; $Ng = Np + Mgp$ (véase Figura 3.27).

Así, el sistema HBPS limita la libertad del usuario en la toma de decisiones con el fin de guiar el proceso de resolución. Este tipo de estrategias es sugerida por autores como Quintana et al. (2004), quien señala que los sistemas “deben estructurar las tareas de los estudiantes y las características de las herramientas deben estructurarse para ayudar a los estudiantes a ver qué pasos son posibles, relevantes y productivos.” (p. 359).

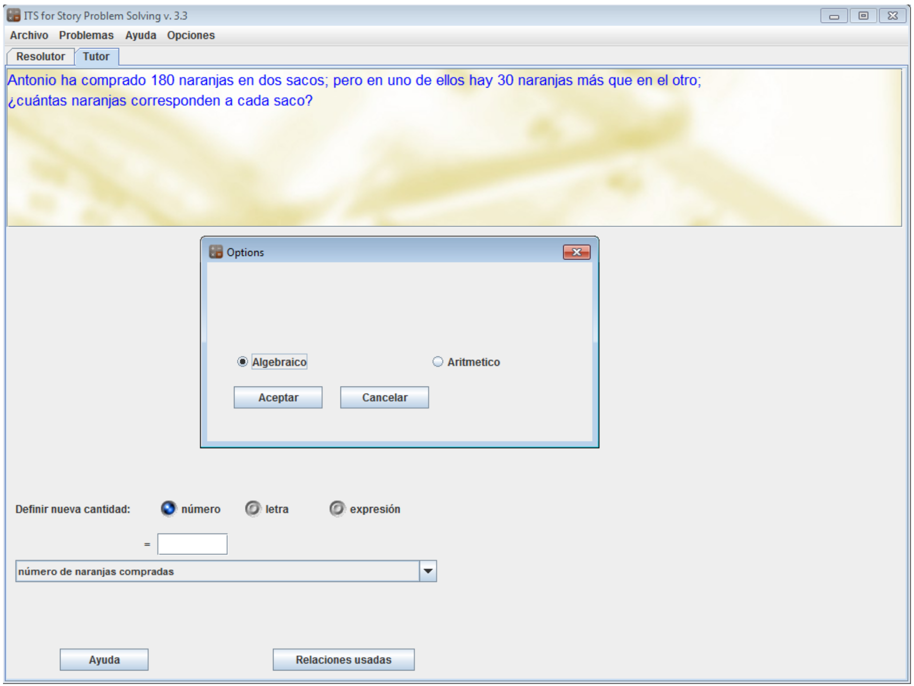


Figura 3.26. Filtrado de lecturas en el problema *Las naranjas*.

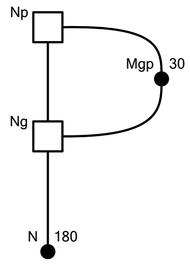


Figura 3.27. Hipergrafo asociado a una lectura algebraica del problema *Las naranjas*.

3.3.4.3. Validación de las acciones del usuario.

El sistema supervisa todas las acciones del estudiante, siendo capaz en todo momento de identificar si la acción es correcta o no. En el caso de que la acción sea correcta, no se muestra ningún mensaje y la acción es validada automáticamente permitiendo al usuario continuar. Cuando la acción es errónea, aparece automáticamente en ventana un mensaje informativo que alerta al estudiante de que la acción no es válida y le insta a continuar. En la Figura 3.28 se muestra un mensaje de error del sistema cuando en el problema *Las naranjas* se intenta representar una cantidad mediante una expresión algebraica errónea.

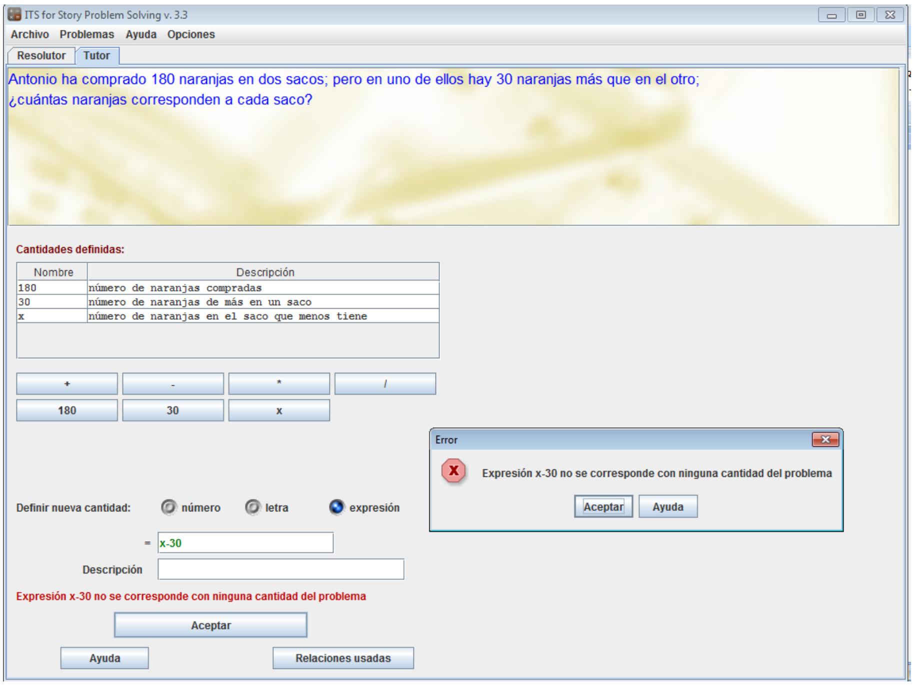


Figura 3.28. Mensaje de error durante el paso 3 en el problema *Las naranjas*.

HBPS no ofrece ninguna información adicional que pueda ayudar al usuario a corregir su error, a no ser que el propio usuario la solicite expresamente. Sin embargo, la autocorrección de errores por parte del estudiante es posible aunque éste no reciba información adicional. VanLehn (2011) señala que esto sucede especialmente en aquellos sistemas que se caracterizan por una granularidad fina. La granularidad viene definida por la interfaz de usuario y refiere a la cantidad de razonamiento que debe realizar el estudiante entre las oportunidades de interactuar con el sistema y, por tanto, de la posibilidad de ser supervisado. Cuanto más fina es la granularidad, menos razonamientos acomete el resolutor sin ser supervisado. De esta manera es más sencillo que el estudiante detecte la fuente de error en sus acciones y lo subsane. Al respecto, HBPS es un tutor con una granularidad fina, capaz de supervisar cada acción que se introduce en el sistema y de notificar cada error. Esta supervisión continua puede conducir a que los estudiantes superen dificultades durante el proceso de resolución por sí mismos y mejoren su competencia en la resolución algebraica de problemas verbales.

3.3.4.4. Generación de mensajes de ayuda

Según Nathan et al. (1988) el proceso crucial y de mayor dificultad en la resolución algebraica de un problema verbal es el de la traducción del enunciado en una estructura conceptual formal. La identificación de qué estructuras conceptuales deben usarse no es una tarea sencilla para los estudiantes. De hecho, ante dificultades en este sentido, normalmente el estudiante necesita una ayuda específica para poder progresar y continuar en el proceso de resolución. En HBPS el estudiante puede solicitar en el instante que lo considere conveniente ayudas o “pistas” sin más que pulsar el botón *Ayuda*. HBPS estructura las ayudas en tres niveles en orden de concreción creciente. Cuando el usuario solicita una ayuda por primera vez en una etapa de la resolución, el sistema ofrece una ayuda de primer nivel, que consiste en un mensaje con información relacionada con el método de resolución, es decir, con qué acción debe ejecutar el usuario en el momento que se encuentra. Sin embargo, no se ofrece ninguna información específica del problema que se esté resolviendo. Si el usuario vuelve a pedir ayuda, el sistema ofrecerá un mensaje con información relativa al problema (2º nivel). En última instancia, si el usuario solicita ayuda nuevamente (3er nivel), HBPS mostrará un mensaje informando al usuario de exactamente qué debe hacer para continuar el proceso.

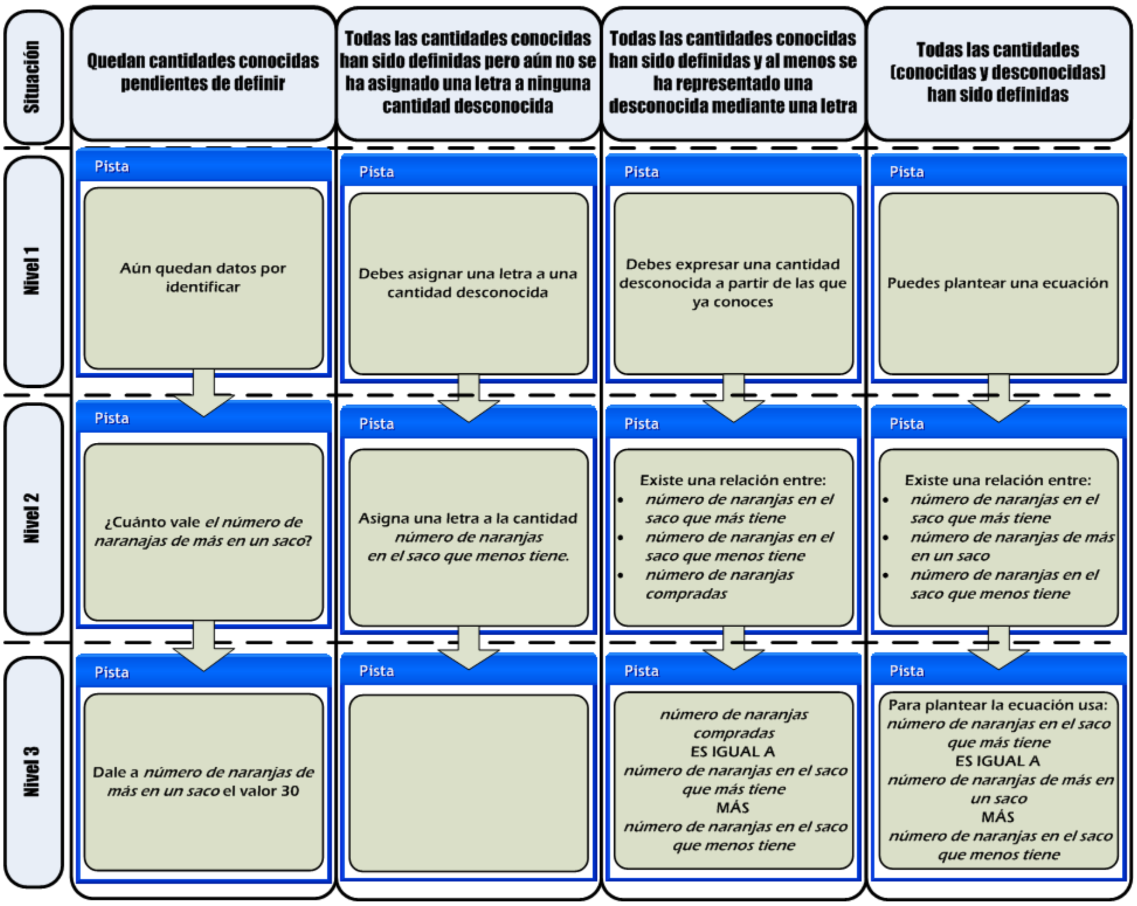


Figura 3.29. Mensajes de ayuda en el problema *Las naranjas*.

La Figura 3.29 muestra una tabla con ejemplos de mensajes de los tres niveles en los diferentes pasos del MC en el problema *Las naranjas*. La estrategia de ofrecer ayudas específicas permite al estudiante superar las dificultades conceptuales y aumentar o reparar su conocimiento. Adicionalmente, al posibilitar que el estudiante prosiga en la resolución es plausible que aumenten las oportunidades de aprendizaje.

3.3.5. EL MODELO DE COMPETENCIA EN HBPS

Tras presentar las características de funcionamiento de HBPS estamos en situación de describir el modelo de competencia en dicho entorno. El modelo de competencia que aquí describimos es una adaptación del MC a las restricciones que impone el STI. A pesar de que los diseñadores de HBPS concibieron este sistema como la implementación del MC a un STI y, de hecho, no existen grandes diferencias entre el modelo de competencia en HBPS y el MC, la exportación pura a un entorno interactivo es compleja.

Al igual que cuando expusimos el MC, presentaremos el modelo a partir de una secuencia de pasos ordenados que describiría las acciones que un resolutor ideal acometería para dar solución a un problema. Sin embargo, a diferencia del MC, en este caso el orden en que se describen los pasos sí determina la secuencia en que realizaría las acciones el resolutor ideal pues HBPS fuerza al resolutor a ejecutar los pasos secuencialmente. Al tiempo que exponemos los diferentes pasos del MC en HBPS haremos un breve análisis sobre aquello que, de un modo u otro, diferencia el paso con respecto al del MC. Los pasos ideales del MC en HBPS serían:

1) Una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades. HBPS ofrece una lista de cantidades representadas mediante un nombre asignado por el sistema. El usuario deberá usar obligatoriamente cantidades de esta lista para solucionar el problema. Por tanto, el resolutor debe verificar que su lectura analítica esbozada es viable en HBPS considerando las cantidades que el sistema muestra en la lista. En caso de que la lectura pensada inicialmente por el resolutor no pudiera ser plasmada en el sistema, deberá repensar una nueva lectura analítica.
2) Elección de una cantidad que se va a representar con una letra (o de varias cantidades que se van a representar con letras distintas).
3) Representación del resto de mediante expresiones (algebraicas o aritméticas) que describen la relación (aritmética) que esas cantidades tienen con otras que ya han sido previamente representadas.
4) Establecimiento de una ecuación (o tantas como letras distintas se haya decidido introducir en el segundo paso), igualando dos expresiones, de las que se han escrito en el tercer paso, que representen la misma cantidad. La escritura de la ecuación exige emplear exactamente las expresiones definidas en el paso 3, no permitiéndose reescrituras de las mismas en expresiones equivalentes.

El primer paso del MC en HBPS implica realizar una lectura analítica al igual que en el MC. A pesar de ello, un resolutor podría realizar lecturas analíticas diferentes en cada caso, sujeto a las características de cada entorno de resolución. Además, en HBPS el resolutor dispone de una menor libertad a la hora de realizar la lectura analítica pues debe comprobar que la lectura analítica que idee, sea la que esté almacenada en HBPS.

Por otro lado, el MC en HBPS es un método estrictamente secuenciado donde a diferencia del MC no se permite la creación de nuevas cantidades durante el proceso de escritura de expresiones para representar una cantidad o durante la construcción de una ecuación. Este aspecto introduce diferencias en los pasos tercero y cuarto del MC en HBPS con respecto al MC. En HBPS un resolutor sólo puede construir una ecuación si las cantidades que participan en la ecuación han sido ya representadas, es decir el sistema ya ha generado un botón para cada una de las cantidades. De igual modo, sólo se pueden construir expresiones (aritméticas o algebraicas) si las cantidades necesarias han sido ya introducidas en el sistema por el usuario, lo que se refleja nuevamente en tener un botón para cada cantidad. Por el contrario, el MC es un proceso más dinámico donde el resolutor puede realizar un continuo vaivén entre los pasos segundo, tercero y cuarto. Así, por ejemplo, puede introducir nuevas letras o representar cantidades mediante expresiones algebraicas mientras construye una ecuación.

Finalmente, nótese que hemos concluido el MC en HBPS con el paso cuarto. Esto se debe a que este STI no se ocupa de lo que sucede más allá de este paso. Obviamente, el resolutor llegado a este punto, podría trasladar la ecuación (o ecuaciones planteadas) al lápiz y papel y proseguir desde el paso 5 del MC. Sin embargo, estos pasos quedan fuera del propósito de este trabajo de este investigación y de HBPS, por lo que, lógicamente, no han sido contemplados en este modelo de competencia.

Filloy, Puig et al. (2008) describen el MC como una descripción macroscópica del proceso de resolución algebraica y que, en consecuencia, contempla todos los elementos de competencia más importantes del proceso pero no todos. La transposición del método a HBPS implica la reducción, o cuanto menos la modificación, de estos elementos de competencia. A lo largo del capítulo, mediante la descripción del funcionamiento de HBPS, hemos ido exponiendo cómo determinados elementos de competencia se ven afectados en el entorno del STI. Sin embargo, consideramos adecuado cerrar el capítulo con una comparativa entre el modelo de competencia en lápiz y papel y en HBPS, tomando como referencia los elementos de competencia del MC y analizando las posibles modificaciones en HBPS:

La lectura analítica del problema

Cuando un resolutor aplica el MC para resolución de un problema aritmético-algebraico, la primera de las tareas que aborda es la transformación del texto del enunciado en otro donde sólo aparecen cantidades y relaciones. En lápiz y papel el resolutor tiene plena libertad para involucrar en la lectura cualquier cantidad o estructura conceptual que estime oportuno. En cambio, HBPS contiene un número limitado de lecturas de cada problema[6]. En consecuencia, HBPS exige al resolutor adaptar su lectura a aquella contenida en el sistema. Esto supone una primera restricción sobre el paso 1 del MC en HBPS. Por otro lado, en HBPS el resolutor dispone de una lista de cantidades en las que aparece el nombre de las cantidades que ha de incorporar en su lectura. Obviamente, esta información condiciona la competencia necesaria para transformar el texto en lenguaje natural a un entramado de cantidades y relaciones, por lo que se podría hablar de que se produce una reducción de la complejidad de este elemento de competencia.

[6] De hecho, en el presente trabajo, tal y como se detallará en el próximo capítulo, el sistema almacenaba una única lectura de cada problema. Si bien es cierto que esta lectura fue la considerada por el investigador la más natural a la luz del enunciado del problema, es perfectamente posible que un resolutor concibiera lecturas diferentes a la precargada en HBPS.

El orden de los pasos

El MC, como hemos indicado repetidamente, precisa una descripción de las competencias más relevantes a la hora de resolver algebraicamente un problema verbal. No obstante, la descripción del mismo en pasos no indica que éstos deban ser acometidos linealmente. De hecho, es habitual que un resolutor competente dé cuenta del paso tercero mientras construye la ecuación (paso cuarto). Obviamente, existe una secuencia lógica que impide que, por ejemplo, la transformación de las ecuaciones a una forma canónica (paso quinto) se acometa antes de plantearlas (paso cuarto). Sin embargo, los pasos relacionados con la representación de la semántica del problema en el sistema matemático de signos del álgebra puede ser realizados de manera simultánea en lápiz y papel. En cambio, el MC en HBPS exige la consumación de cada paso del método en el orden estricto en que están definidos los pasos. En sí, esto no se traduce en una modificación de los elementos de competencia necesarios para completar el método, pero establece una restricción sobre la flexibilidad en la toma de decisiones del resolutor durante el proceso de resolución. Esta funcionalidad aumenta la visibilidad de cada uno de los pasos del MC dentro del proceso, con la expectativa de que un mayor conocimiento de las tareas necesarias para resolver algebraicamente problema pueda traducirse en mejores resultados por parte de los estudiantes.

El nombre de las cantidades

Con independencia de que el nombre de las cantidades, que es dado en HBPS, pueda facilitar la lectura analítica del problema, el nombrado adecuado de las cantidades supone en sí mismo un elemento de competencia. Esta cuestión puede no ser baladí en relación con el éxito del proceso de resolución. Puig (2012) explica que el método cartesiano precisa que las cantidades se nombren con nombres propios y no con nombres comunes. El lenguaje natural tiene mecanismos para convertir los nombres comunes como “precio”, por ejemplo, en nombres propios como “el precio de una silla”, en este caso el artículo determinado y el genitivo “de una silla”. En caso de que el resolutor no elabore un nombre propio distinto para cada cantidad o use un nombre abreviado que pueda dar lugar a ambigüedades, el nombre puede funcionar como un nombre común que puede referirse al mismo tiempo a varias de las cantidades, y puede ser origen de dificultades en el proceso de resolución[7]. En HBPS el resolutor no lidia con este aspecto, dado que el programa nombra de partida todas las cantidades a utilizarse. Este hecho que parece factible pudiera ser interpretado como una disminución de la dificultad de la tarea a la hora de encarar la resolución del problema, pudiera ser también foco de las dificultades de los alumnos. Esto se debe a que obliga al resolutor a interpretar correctamente el nombre de las cantidades, que pudiera no coincidir con las designaciones que él emplearía y, al igual que en el caso de la lectura analítica, obligándolo a adaptar sus decisiones a las predefinidas por HBPS.

El uso del lenguaje algebraico

El sistema tutorial HBPS modifica la forma en qué el resolutor hace uso del lenguaje algebraico e impone algunos condicionantes que conviene tomar en consideración. Tal y como comentamos anteriormente, en HBPS cuando una cantidad es definida (mediante un número, letra o expresión algebraica), se crea un botón que representa

[7] En González-Calero, Arnau y Puig (2013) se describe un estudio sobre la resolución algebraica de problemas verbales en la hoja de cálculo. Es este trabajo se ofrecen evidencias de cómo el nombrado poco adecuado cantidades deriva en dificultades en el proceso de resolución.

dicha cantidad. A partir de ese momento, cualquier uso que se deseé hacer de dicha cantidad, obligará a emplear el botón, es decir el resolutor pulsará el botón y el programa automáticamente escribirá la cantidad (con la representación que hubiera creado el resolutor) introduciendo los paréntesis necesarios. En cambio, en lápiz y papel el resolutor deberá reescribir la cantidad siempre que deseé usarla y deberá gestionar él mismo la necesidad de paréntesis en función del significado de la expresión que esté formulando.

Presentemos un ejemplo que permita clarificar el asunto. Imaginemos que en el problema *Conejos y gallinas* un resolutor define el número de gallinas, número de conejos y número de patas de un conejo como x, $20 - x$ y 4, respectivamente. En HBPS esto se traduciría en que se habrían creado tres botones en cuyo interior serían visibles esas expresiones. Ahora, supongamos que nuestro resolutor ficticio deseara expresar el número total de patas de conejo mediante la multiplicación del número de conejos y el número de patas por conejo. En lápiz y papel, el resolutor deberá conocer las reglas que rigen la gramática del lenguaje algebraico para construir, por ejemplo, la expresión algebraica $4(20 - x)$, en donde la competencia en las reglas para generar expresiones algebraicas bien formadas permite que la expresión dé cuenta correctamente de la semántica de la relación. En cambio, en HBPS, con el objetivo de que el resolutor focalice sus esfuerzos en las relaciones entre cantidades, es el propio sistema quien gestiona la necesidad de paréntesis. Así, en el ejemplo, el resolutor sólo deberá pulsar el botón creado para la cantidad donde aparece 4, el botón de la operación multiplicar y el botón de la cantidad $20 - x$ en este orden para que el sistema genera la expresión $4*(20-x)$. En resumen, en HBPS, intencionalmente, se reduce el nivel de competencia necesario en relación con el conocimiento de las reglas necesarias del lenguaje algebraico a la hora de construir expresiones algebraicas bien formadas.

4. Los modelos de enseñanza

El objetivo de cualquier secuencia de enseñanza es propiciar un incremento de la competencia de los estudiantes a los que se instruye en un determinado dominio. Entre otros asuntos, los MTL nos permite dotar de mayor precisión a la anterior afirmación. En concreto, el modelo de enseñanza, o más bien modelos, que en este capítulo presentamos, pretenden conseguir la competencia de los estudiantes participantes en el estudio en la resolución algebraica de problemas verbales, entendiendo tal competencia como lo define el modelo correspondiente. Hablamos de modelos de enseñanza pues, tal y como se indicó en el capítulo 1, el presente trabajo contempla una diferente instrucción en tres grupos de estudiantes. Si bien es cierto que las secuencias de enseñanza que se utilizaron en los tres grupos tienen importantes similitudes, como es el hecho de que se utilizasen los mismos problemas durante esta fase de intervención, no podemos hablar de un mismo modelo de enseñanza, ya que cada grupo fue instruido en un entorno de resolución diferente. Cada entorno particular está sujeto a una serie de potencialidades y restricciones en función de sus características y esto condiciona las actuaciones de los estudiantes. Así, uno de los grupos realizó la misma íntegramente en lápiz y papel (grupo PP); otro grupo trabajó con una versión con todas las funcionalidades de HBPS (grupo CT); y finalmente, el tercer grupo trabajó con una versión limitada del STI (grupo RT). A pesar de que las secuencias tuvieron exactamente la misma duración, tres sesiones de sesenta minutos, y se empleó la misma colección de problemas en los tres grupos, el modelo de enseñanza debía contemplar las características de cada entorno. Así, en los dos grupos que trabajaron con HBPS, el modelo debía recoger aquellos elementos de competencia específicos del propio entorno, y que requerían una instrucción para que los estudiantes estuvieran en condiciones de resolver problemas aritmético-algebraicos en HBPS. Igualmente, el capítulo mostrará las diferencias existentes entre las versiones de HBPS utilizadas por el grupo CT y el grupo RT, que se distinguen por el nivel de ayudas a disposición del estudiante durante el proceso de resolución.

En resumen, este capítulo se ocupa de exponer los tres modelos de enseñanza utilizados en la investigación, enfatizando las diferencias entre ambos. A su vez, se presenta la forma en que fueron aplicados. Igualmente, aprovecharemos para describir la población objeto de estudio, pues éste es el primer momento del texto donde se habla explícitamente de los estudiantes.

4.1. LA POBLACIÓN

La población de esta investigación estaba formada por un grupo de 56 estudiantes de cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria de un centro público de Castilla-La

Mancha. Los estudiantes tenían una edad de entre 15 y 16 años. El grupo estaba integrado por 29 alumnas y 27 alumnos. El grupo de estudiantes cursaba la opción B de la asignatura de Matemáticas, concebida para estudiantes que normalmente continúan su formación con un bachillerato científico-tecnológico. El grupo de estudiantes se correspondía a un grupo natural, que se distribuía en dos clases de forma variable en función de la asignatura. Esto era debido a que alrededor de la mitad de los alumnos participaban en un programa bilingüe en el cual aproximadamente la mitad de las asignaturas eran impartidas en lengua inglesa (entre las que se encontraba la asignatura de Matemáticas). De esta forma, los 56 alumnos se distribuían en dos configuraciones diferentes según la asignatura se impartiese en inglés o en castellano. Cada alumno fue identificado con un número del 1 al 56. De acuerdo a los propósitos de la investigación distribuimos a los alumnos aleatoriamente en tres grupos, quedando configurados en la siguiente forma: 19 alumnos asignados al grupo CT (numerados del 1 al 19), 18 alumnos asignados al grupo RT (numerados del 20 al 37) y 19 sujetos en el grupo PP (numerados del 38 al 56).

La elección del curso respondió a nuestro propósito de trabajar con estudiantes previamente instruidos en la resolución algebraica de problemas verbales pero que aún no hubieran alcanzado plena competencia en el campo. Además, nuestra intención de incluir en la investigación problemas pertenecientes a varias familias de problemas aritmético-algebraicos (móviles, compra-venta, mezclas, etc.) aconsejaba descartar los primeros cursos de la enseñanza secundaria obligatoria. La elección del grupo concreto no respondió a ningún motivo en particular más allá de que el perfil de la población se ajustaba a las necesidades de la investigación y que contamos con la plena colaboración del Centro y los profesores del Departamento de Matemáticas para proporcionarnos tanto el tiempo como los espacios necesarios para el correcto desarrollo de trabajo. El momento en que se desarrolló la investigación fue intencionalmente escogido, de tal forma que el estudio experimental se desarrolló en el momento posterior a que los estudiantes hubiesen sido instruidos en el lenguaje algebraico y sus transformaciones pero sin que hubieran recibido instrucción alguna en la resolución algebraica de problemas aritmético-algebraicos. Así, los alumnos habían sido introducidos en la resolución algebraica de problemas verbales en los dos cursos anteriores, pero aún no en el curso que se llevó a cabo la investigación.

4.2. LAS SECUENCIAS DE ENSEÑANZA

La secuencia de enseñanza constó de tres sesiones de 60 minutos en los tres grupos, con una frecuencia de una sesión semanal en cada uno de ellos. De esta forma, la fase de enseñanza tuvo una extensión de tres semanas. El diseño experimental de nuestra investigación exigía intentar minimizar las diferencias entre los modelos de enseñanza de cada grupo, de tal manera que las diferencias existentes se debieran a las características específicas de cada entorno de resolución. Con este propósito, organizamos tres secuencias de enseñanza de igual duración, en los que se trabajasen los mismos problemas y en los que el profesor-investigador asumiese el mismo rol, con las especificidades de cada entorno. La Figura 4.1 representa un esquema de la organización y propósito de las tres sesiones en cada grupo.

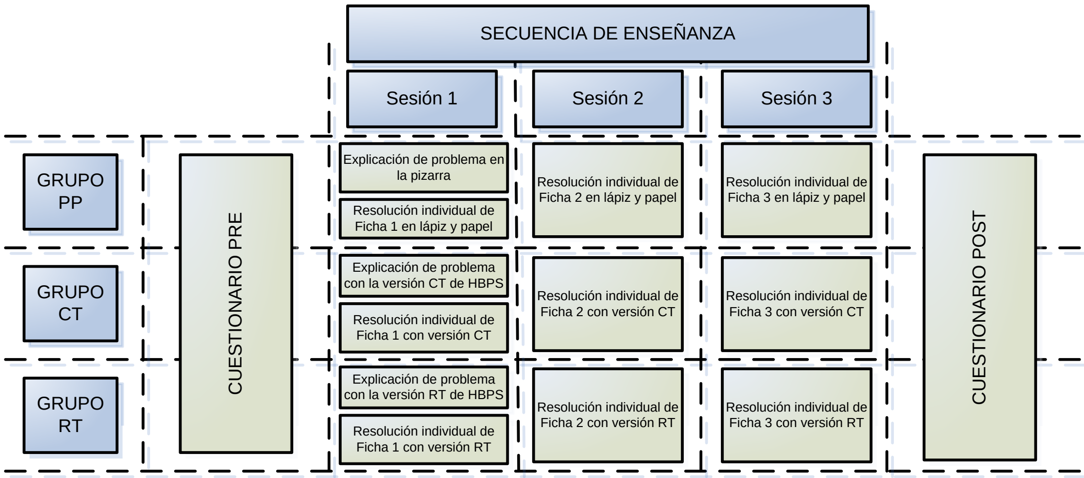


Figura 4.1. Etapas de la fase experimental.

El grupo PP trabajó en una de las aulas del Centro donde solían recibir las clases de matemáticas. Los alumnos del grupo PP se sentaban en pupitres separados del mismo modo que harían si estuvieran realizando un examen. Así, se pretendía que los estudiantes trabajasen individualmente a lo largo de la secuencia de enseñanza. En cuanto a los grupos RT y CT, aquellos que trabajaron con HBPS, ambos realizaron la secuencia en el aula de informática del Centro. Esta aula disponía de 16 ordenadores personales con sistema operativo Windows XP, y con potencia suficiente para soportar los requerimientos técnicos requeridos para el correcto funcionamiento de HBPS. Dado que se pretendía que los estudiantes trabajaran individualmente, en condiciones análogas al grupo PP, se complementó el aula de informática con cuatro ordenadores portátiles, también con Windows XP, todos con ratón, de tal forma que la manera de interaccionar con el sistema HBPS era idéntica en cualquiera de los equipos del aula. En resumen, cada miembro del grupo CT o del grupo RT dispuso de un ordenador a lo largo de la secuencia de enseñanza. Además, los equipos estaban suficientemente separados para que los estudiantes trabajaran de manera individual, y no acometieran las resoluciones por parejas.

A grandes rasgos, las secuencias de enseñanza consistieron en un colección de tres fichas de problemas, una por sesión, que los alumnos debían resolver en el entorno que tuvieran asignado según su grupo de pertenencia. Bajo este prisma, una vez que ya hemos comentado que los alumnos habían sido instruidos en cursos anteriores en la resolución algebraica de problemas verbales, podría pensarse que la secuencia de enseñanza podría reducirse a la resolución de manera individual de la colección de cada problema por parte de cada estudiante. Sin embargo, en los grupos CT y RT era necesaria una fase de instrucción de los estudiantes en la resolución algebraica en HBPS. A pesar de que este STI ha sido diseñado para tener un funcionamiento intuitivo y amigable para los usuarios, era pertinente mostrar a los estudiantes la manera en que se resuelven algebraicamente los problemas en dicho entorno. Con este fin, el profesor-investigador resolvió un problema-ejemplo al inicio de la primera sesión. Con el objeto de mantener unas condiciones comparables entre los tres grupos, el mismo problema fue resuelto igualmente al iniciar la secuencia de enseñanza en el grupo PP. En este grupo el profesor-investigador resolvió el problema-ejemplo en la pizarra del aula mientras que en los otros dos grupos utilizó un ordenador conectado a un proyector que permitía seguir la resolución a todos los alumnos. Lógicamente, en cada uno de estos grupos el profesor-investigador usó la misma versión de HBPS que usaban los alumnos. A partir de la resolución de este problema-ejemplo, el profesor-investigador se limitó a solventar dificultades técnicas que los estudiantes tuvieran en relación con el funcionamiento del programa. Por ejemplo, fue habitual que los estudiantes no recordaran cómo cargar un problema en HBPS al iniciarse la sesión. En dicho caso, el profesor se limitaba a recordarles el procedimiento. Bajo ningún concepto, en ninguno de los grupos, el profesor atendió dudas ligadas a la resolución de los problemas.

Tras la resolución del problema-ejemplo a cada alumno se le entregaba una colección de cuatro problemas cada día, que los alumnos debían resolver individualmente. Al finalizar cada sesión, el documento con la colección de problemas era recogido.

Dado que la principal diferencia entre las secuencias de enseñanza estriba en el entorno de resolución y esto se puso de manifiesto claramente en el medio utilizado por el profesor-investigador para explicar el problema-ejemplo, exponemos a continuación por separado para los grupos CT y RT por un lado, y para el grupo PP por otro, las explicaciones que se dieron al hilo de la resolución del ejemplo.

4.2.1. EL PROBLEMA-EJEMPLO EN LOS GRUPOS RT Y CT

Al inicio de la primera sesión en los grupos CT y RT, el profesor-investigador explicó el problema *Las naranjas* para toda la clase. El problema, ya usado en el capítulo 3, dice así:

Las naranjas

Antonio ha comprado 180 naranjas en dos sacos; pero en uno de ellos hay 30 naranjas más que en el otro; ¿cuántas naranjas corresponden a cada saco?

Recuperamos una lectura algebraica posible presentada ya en el capítulo anterior y que, de hecho, era la lectura almacenada en HBPS de este problema. La lectura considera las siguientes cantidades: número de naranjas compradas (N), número de naranjas en el saco que más tiene (Ng), número de naranjas en el saco que menos tiene (Np) y número de naranjas de más en un saco (Mgp). Estas cantidades se relacionan mediante: $N = Ng + Np$; $Ng = Np + Mgp$.

A continuación, resumimos las indicaciones que dio el profesor-investigador durante la explicación del problema, a partir del cual los alumnos deberían trabajar de forma autónoma. La explicación pretende recrear con fidelidad la manera en que se hizo durante la secuencia de enseñanza y, en esta línea, optamos por plasmar las instrucciones dadas a los estudiantes en una forma parecida a cómo se produjo en realidad. Así, en el apartado siguiente, el discurso es planteado considerando al profesor como emisor y a los estudiantes como receptores del mensaje. En el caso de que deseemos introducir alguna aclaración sobre las explicaciones dadas por el profesor, éstas serán escritas entre corchetes con el objeto de diferenciar la información que fue dada a los estudiantes de la que no. Dado que el grupo RT utilizó una versión de HBPS cuya única diferencia con la versión completa era que las funcionalidades de ayuda no estaban disponibles, las explicaciones del profesor-investigador fueron prácticamente idénticas con la excepción de aquellas explicaciones que referían a las ayudas de HBPS. A lo largo de la exposición de la explicación del profesor remarcaremos aquellos instantes en que algo no aplicase al grupo RT, lo cual permitirá identificar las diferencias entre ambas versiones de HBPS.

Explicación del profesor-investigador

Para iniciar el sistema tutorial inteligente es suficiente con ejecutar el archivo con nombre *Tutor.jar* que tenéis en la carpeta *Tutor* en el escritorio de vuestro ordenador. Tras ello se iniciará el programa y aparecerá en pantalla [véase Figura 4.2]. El programa cuenta con dos pestañas: *Resolutor* y *Tutor*. La pestaña *Resolutor* permite cargar un problema y que HBPS lo resuelva directamente. Esta opción no está disponible en la versión que estáis utilizando, pues sois vosotros quienes debéis resolver los problemas. Por tanto, debéis seleccionar la pestaña *Tutor* siempre que se inicie el programa.

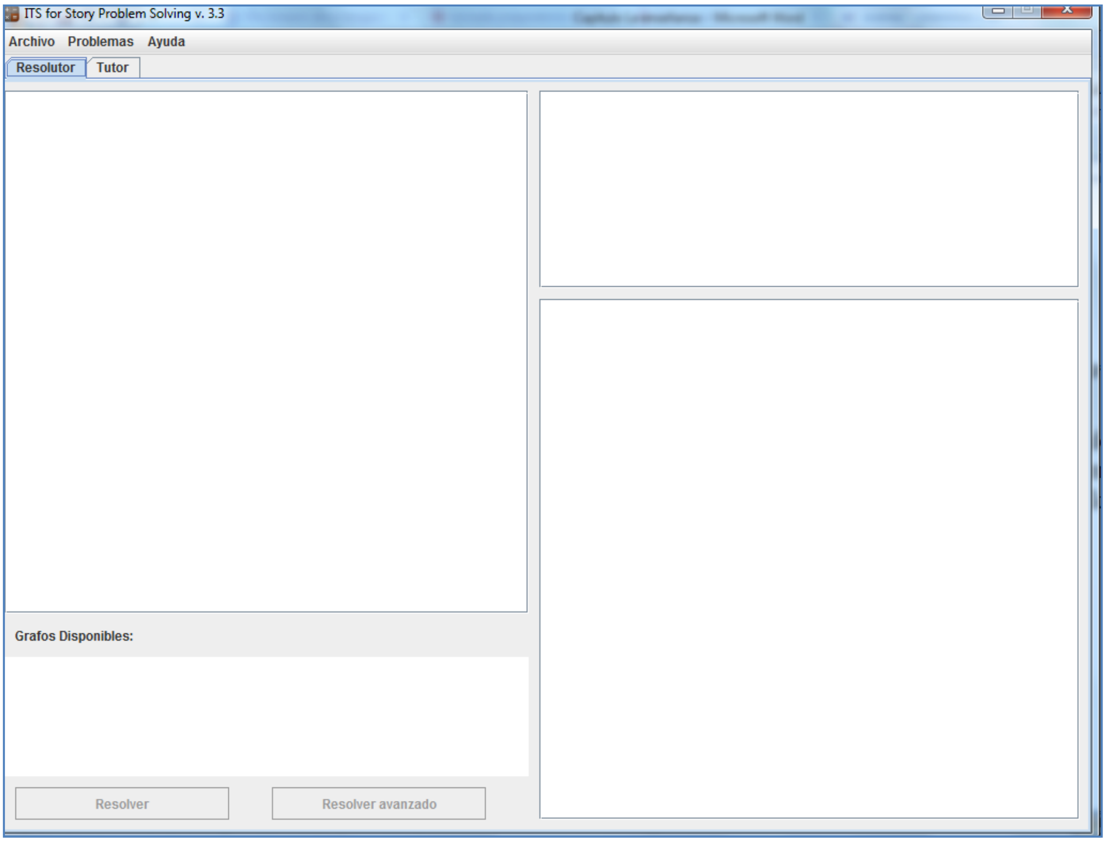


Figura 4.2. Apariencia de HBPS al ejecutarse.

Una vez arrancado el programa, es necesario cargar en el sistema el problema con el que deseáis trabajar. Para ello debéis ejecutar la opción *Abrir* desde el menú *Archivo* y aparecerá una ventana flotante para que seleccionéis el archivo con el nombre del problema en cuestión [véase Figura 4.3].

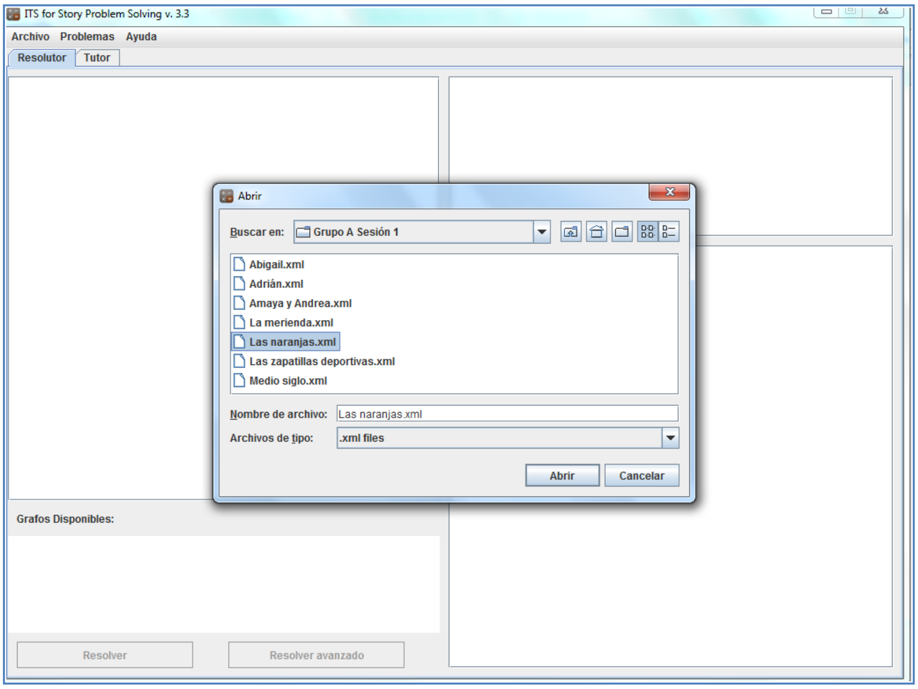


Figura 4.3. Selección del problema *Las naranjas* en HBPS.

Una vez abierto el problema, basta pulsar en el menú *Problemas* el título del problema a resolver y automáticamente el problema se carga en HBPS, apareciendo el enunciado y habilitando el entorno para iniciarse la resolución [véase Figura 4.4].

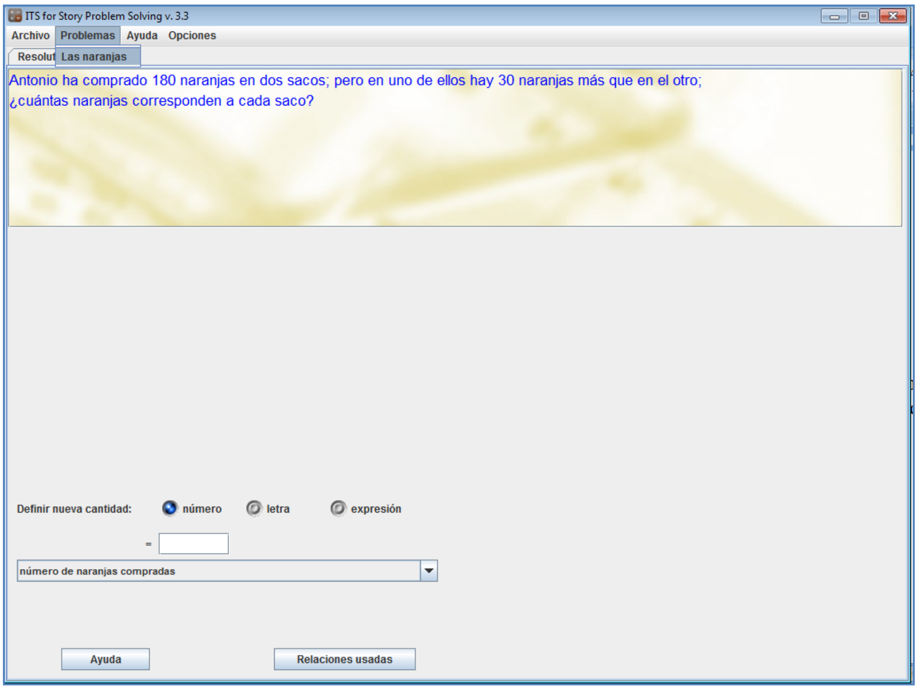


Figura 4.4. HBPS tras la carga del problema *Las naranjas*.

En este caso voy a resolver el problema *Las naranjas*. Como podéis ver, cuando se carga un problema el enunciado del problema aparece en la parte superior de la pantalla. Inicialmente sólo se activa la parte inferior izquierda de la ventana, que es la parte dedicada a definir las cantidades. En esa zona hay un menú desplegable con la lista de cantidades necesarias para resolver el problema [véase Figura 4.5]. A la hora de definir una cantidad el programa me permite tres opciones: asignarle un valor, una letra o una expresión (aritmética o algebraica). Además, tenemos dos botones, uno de *Ayuda* y otro de *Relaciones usadas*. Sus nombres son bastantes descriptivos. El primero nos ofrecerá pistas si tenemos dificultades para avanzar y el segundo nos informará de las relaciones gastadas. Posteriormente veremos con mayor detalle cómo funcionan. [La versión con la que trabajó el grupo RT no disponía del botón *Ayuda*, por lo que en ese grupo no se hizo alusión alguna en este sentido].

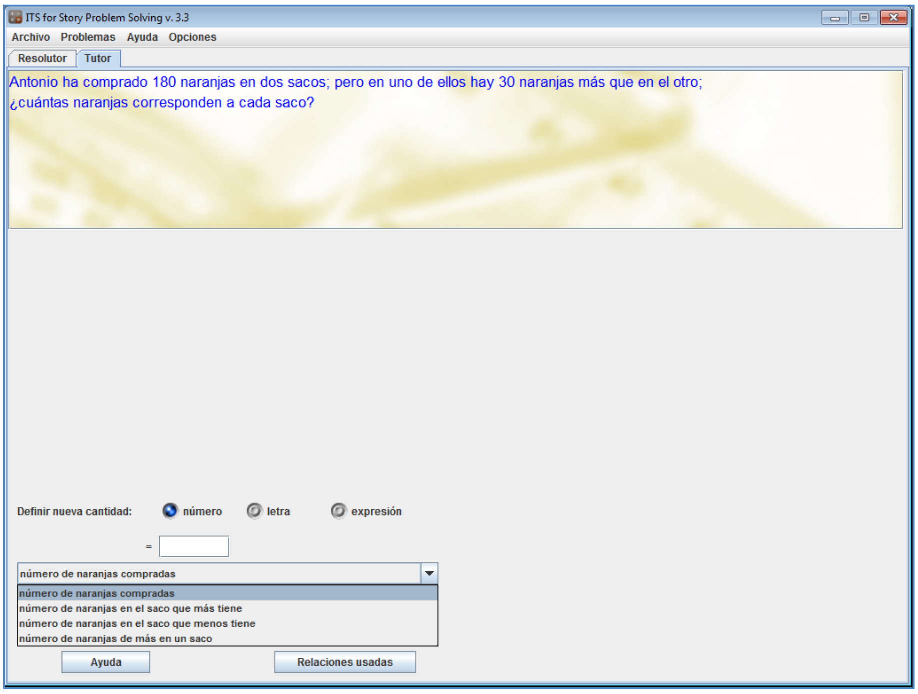


Figura 4.5. Lista de cantidades desplegada en *Las naranjas*.

El primer paso que debemos acometer es introducir al sistema del valor que toman las cantidades conocidas. A partir de la información del enunciado, podemos asignar el valor 180 a la cantidad *número de naranjas compradas* [*N*] y 30 a la cantidad *número de naranjas de más en un saco* [*Mgp*]. No hay más que seleccionar la cantidad, marcar la opción *Número* e introducir el valor en el campo en blanco. Si la asignación es correcta, la cantidad quedará automáticamente definida. En caso contrario, obtendremos un mensaje de notificación del error. Supongamos que, erróneamente, por las razones que sean, intento asignar el valor 30 al *número de naranjas compradas*. [La Figura 4.6. nos muestra el mensaje de respuesta del programa].

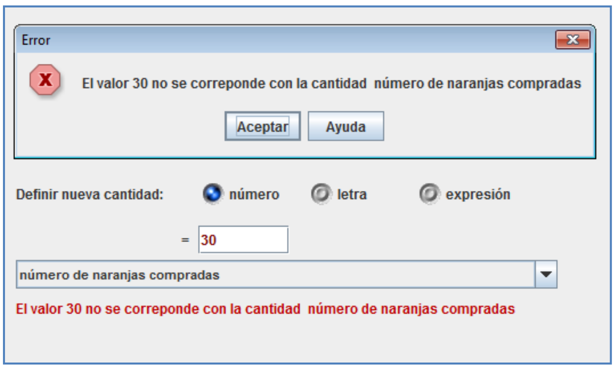


Figura 4.6. Mensaje de error en la asignación de valor a una cantidad.

Cuando realizamos la asignación correcta, el programa va registrando la representación (número, letra o expresión) de cada cantidad en una tabla, lo que nos permite consultar en cualquier momento de la resolución cómo las habíamos definido. [La Figura 4.7 nos muestra el aspecto que tendría la tabla después de haber informado correctamente las cantidades conocidas *N* y *Mgp*].

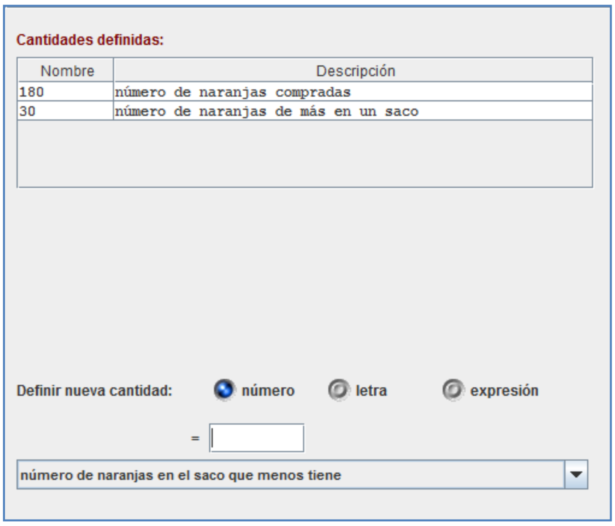


Figura 4.7. Ventana de cantidades tras definir las cantidades conocidas *N* y *Mgp*.

Llegados a este punto nos quedan por definir dos cantidades desconocidas, pues no sabemos qué valor toman. ¿Qué podemos hacer? Efectivamente, podemos asignar una letra, por ejemplo *equis*, a cualquiera de ellas. Nuevamente el proceso es sencillo, sólo hay que seleccionar la cantidad en el menú desplegable, marcar la opción *letra* e introducir la letra que queramos usar. El programa siempre me dejará asignar una letra a una cantidad desconocida, pues ésta es siempre una opción válida. Por ejemplo, asignamos la letra *equis* a la cantidad *número de naranjas en el saco que menos tiene* [*Np*]. Sólo nos queda por definir la cantidad *número de naranjas en el saco que más tiene* [*Ng*]. Activemos la opción *expresión* y veamos qué aparece [Figura 4.8].

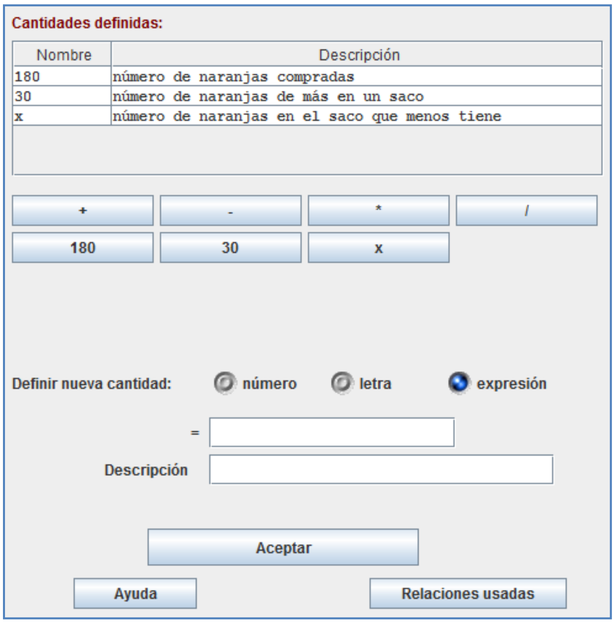


Figura 4.8. Ventana de cantidades tras asignar una letra a la cantidad *Np*.

El programa muestra en pantalla varios botones. Por un lado, tenemos un botón para cada cantidad que ya le hemos asignado valor numérico o expresión algebraica. Esto es importante, cada vez que introducimos una cantidad correctamente en el tutor, se crea un botón para esa cantidad. De este modo, la cantidad puede ser usada después para construir expresiones o ecuaciones. Además tenemos un botón para las operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación y división). Con la ayuda de estos botones podemos crear una expresión para *número de naranjas en el saco que más tiene* [*Ng*]. Imaginemos que queremos asignarle a esta cantidad la expresión algebraica x+30, que refleja el hecho de que este saco tiene 30 naranjas más que el otro, [es decir, la relación $Ng = Np + Mgp$]. Para ello, debemos pulsar el botón x, el botón + y el botón 30[1]. La expresión algebraica irá formándose en el campo inferior [véase Figura 4.9]. Además, si posamos unos segundos el ratón sobre cualquier botón, nos recordará el nombre de la cantidad vincula a dicho botón. Si lo deseamos podemos asignar un nombre diferente a la cantidad con sólo escribirlo en el campo *Descripción*. Si el campo se deja vacio, el sistema le da el nombre que tenía asignado inicialmente por defecto.

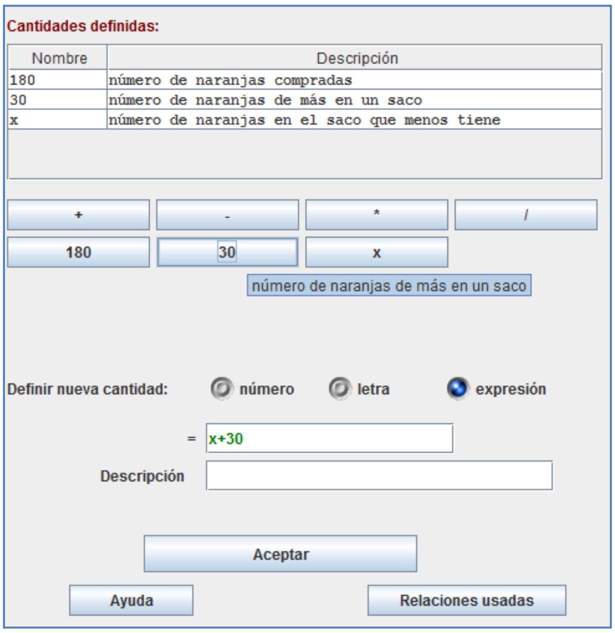


Figura 4.9. Apariencia de HBPS durante la definición de *Ng* mediante una expresión algebraica.

Cuando hemos definido correctamente todas las cantidades, o al menos las cantidades suficientes como para plantear una ecuación, el programa activa la parte derecha de la ventana, dedicada a la construcción de ecuaciones [véase Figura 4.10]. El aspecto del panel de construcción de ecuaciones es muy parecido al de construcción de expresiones. Se dispone de un botón por cantidad, un botón por operación y un botón para el signo igual que permitirá construir la ecuación. Para plantear la ecuación debemos pensar en cómo podemos expresar una misma cantidad de dos maneras diferentes, para lo que habremos de emplear alguna relación aún no usada. Como en cualquier momento de la resolución, si realizamos una acción incorrecta el programa nos informará del error. Dado que aún no hemos usado la información de que el número total de naranjas se puede expresar como la suma de las naranjas en cada uno de los sacos, una posible escritura válida de la ecuación sería $x + (x+30) = 180$. La ecuación se construye de igual

[1] Obviamente también podríamos intercambiar el orden de los sumandos. HBPS es flexible en cuanto a la representación escogida por el usuario, interpretando correctamente las propiedades de las operaciones.

manera que las expresiones, es decir mediante el uso de los botones. El programa se encarga de gestionar automáticamente la aparición de paréntesis [véase Figura 4.11].

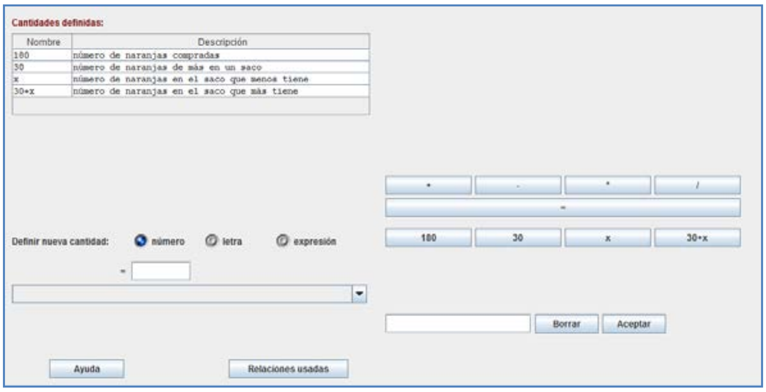


Figura 4.10. Apariencia de HBPS al iniciarse el paso 4 del MC.

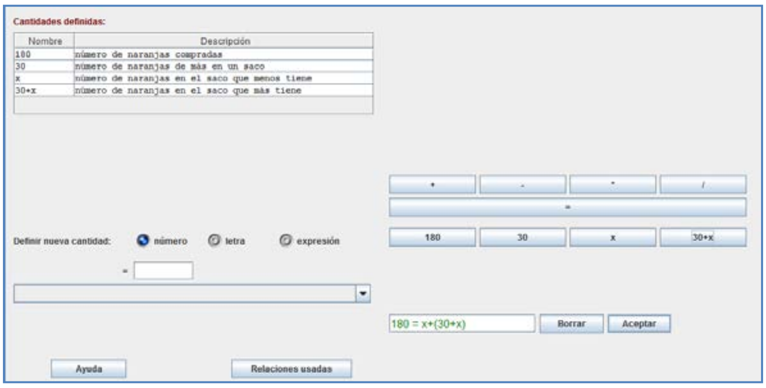


Figura 4.11. Escritura de ecuación en HBPS.

Si la ecuación es correcta, al validarla, el programa nos informa que el planteamiento es correcto y da por finalizada la resolución [véase Figura 4.12].

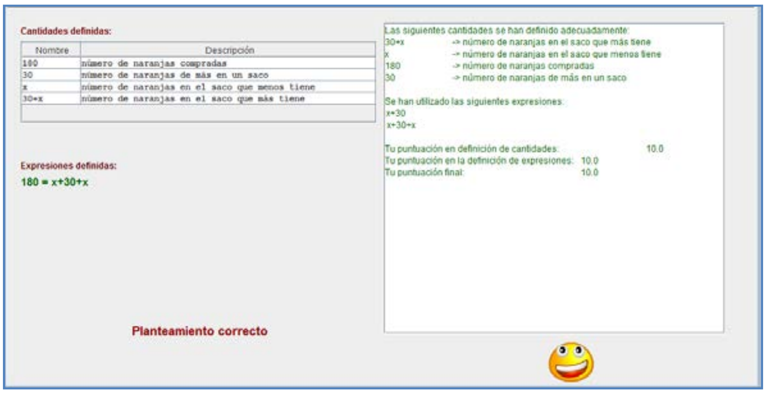


Figura 4.12. Mensaje informativo tras la resolución correcta del problema.

No obstante, podríamos haber planteado el problema de otras formas. Por ejemplo, imaginemos que hubiésemos deseado utilizar dos letras. En ese caso, por ejemplo, podríamos haber representado nuevamente la cantidad *número de naranjas en el saco que menos tiene* mediante la letra *x* y en vez de representar la cantidad *número de naranjas en el saco que más tiene* mediante la expresión algébrica *x*+30, le asignamos la letra *y* [véase Figura 4.13].

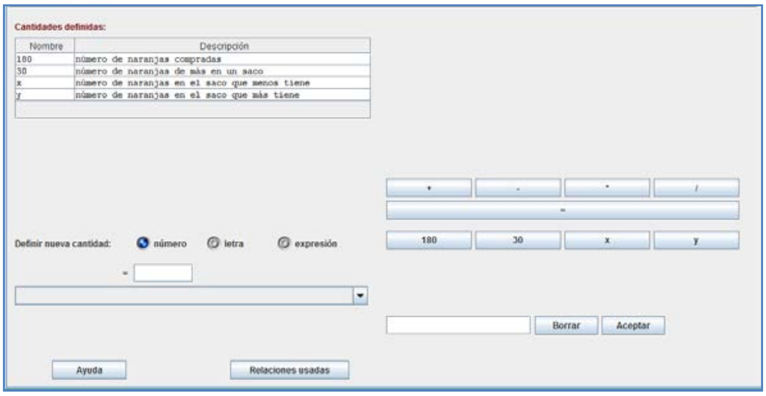


Figura 4.13. Apariencia de HBPS tras una definición de cantidades con dos letras.

En este caso, al utilizar dos letras, deberemos plantear dos ecuaciones. Hasta el momento no hemos usado ninguna relación. Las relaciones que tendremos que usar serán las mismas que en el planteamiento anterior, es decir el hecho de que el número total de naranjas se puede expresar como la suma de las naranjas en cada uno de los sacos [$N = Ng + Np$] y que entre ambos sacos hay una diferencia de 30 naranjas [$Ng = Np + Mgp$]. Esto lo podemos plasmar en dos ecuaciones en el programa [tal y como se muestra en la Figura 4.14].

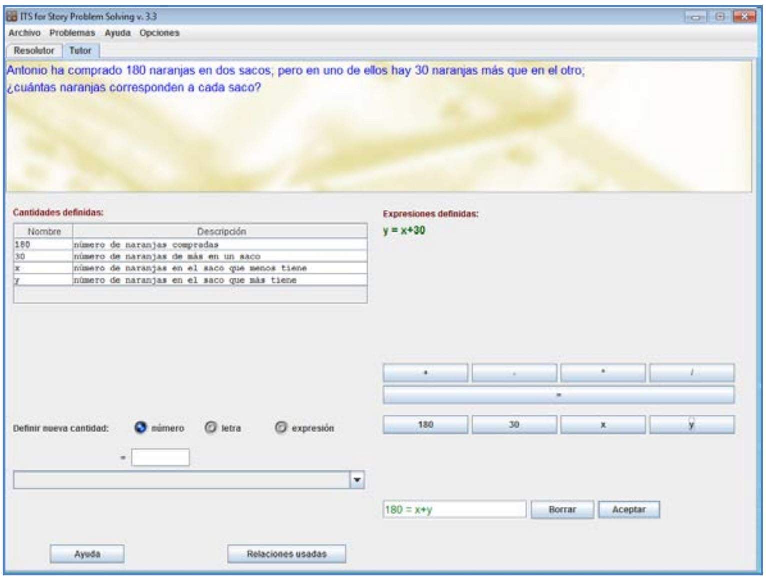


Figura 4.14. Planteamiento del sistema de ecuaciones en HBPS.

[A continuación el profesor explica cómo funcionan las ayudas en HBPS. Esta explicación se dio exclusivamente a los alumnos del grupo CT pues, como ya hemos comentado, la versión que manejó el grupo RT era idéntica con la excepción de que el botón *Ayudas* no estaba disponible].

Para acabar vamos a ver cómo funcionan las ayudas que suministra el programa. El botón *Ayudas* está ideado para daros alguna pista en aquellos momentos en los que no sabéis cómo avanzar en el problema. Os recomendamos que no abuséis de su uso y que solicitéis ayuda después de haber pensado suficientemente el problema. Volvamos a cargar el problema *Las naranjas* para ilustrar cómo funcionan las ayudas. Si nada más empezar el problema, ya no sabemos qué hacer, podemos pulsar el botón *Ayudas*. El programa muestra un mensaje de ayuda [véase Figura 4.15]. Este mensaje nos informa que aún quedan datos (cantidades conocidas) por identificar. Si esta ayuda no fuera suficientemente para vosotros podéis pedir una nueva ayuda, en la que el programa nos subraya la cantidad que puede ser declarada [véase Figura 4.16]. Si, a pesar de estas dos pistas, no fuéramos capaces, una tercera ayuda ya nos especifica exactamente qué debemos hacer para continuar [Figura 4.17].

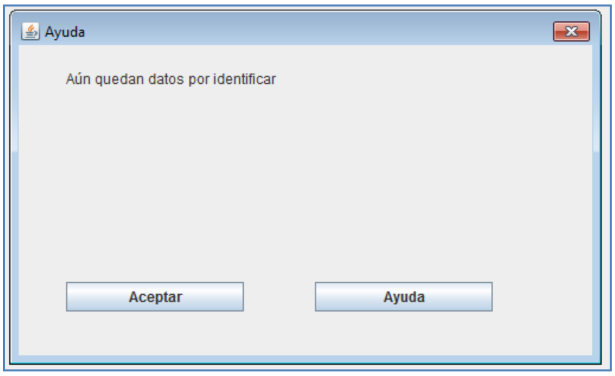


Figura 4.15. Primer mensaje de ayuda en la definición de cantidades conocidas.

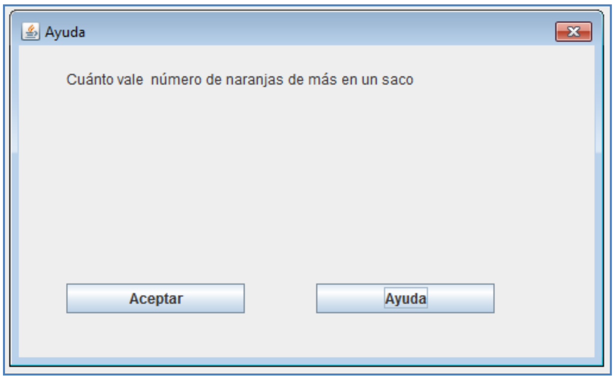


Figura 4.16. Segundo mensaje de ayuda en la definición de cantidades conocidas.

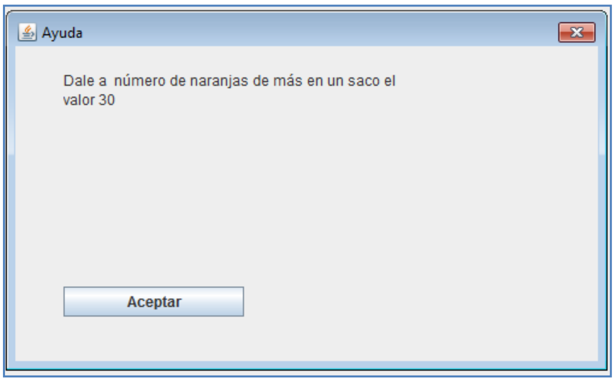


Figura 4.17. Tercer mensaje de ayuda en la definición de cantidades conocidas.

Si ya hemos definido todas las cantidades conocidas y optamos por pedir ayudas, la secuencia de mensajes de ayuda será la reflejada en la Figura 4.18.

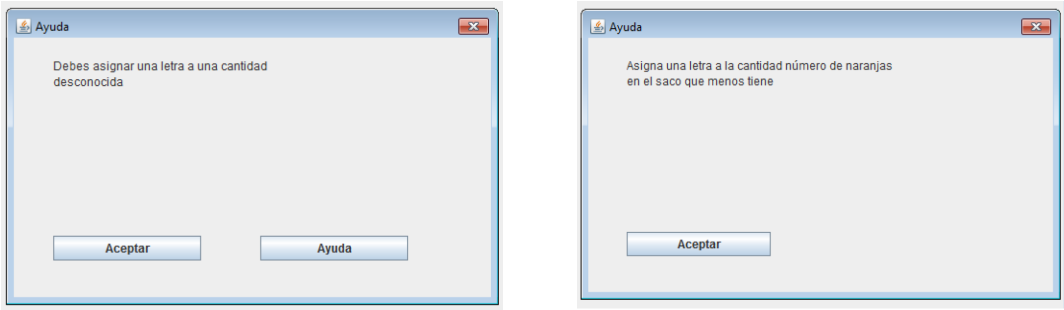


Figura 4.18. Secuencia de mensajes de ayuda en la definición de cantidades desconocidas.

Como podéis ver, el programa cada vez nos va dando pistas más detalladas. Imaginemos que asignamos el valor *x* a la cantidad *número de naranjas en el saco que menos tiene*, tal y como nos recomienda el programa. Si tras ello, solicitamos nuevas ayudas, el programa se va a centrar ahora en ayudarnos a representar las cantidades pendientes de definir mediantes las relaciones entre éstas y las cantidades ya definidas. [En la Figura 4.19 hemos sintetizado los tres niveles de ayudas que el programa nos proporcionaría en esta situación].

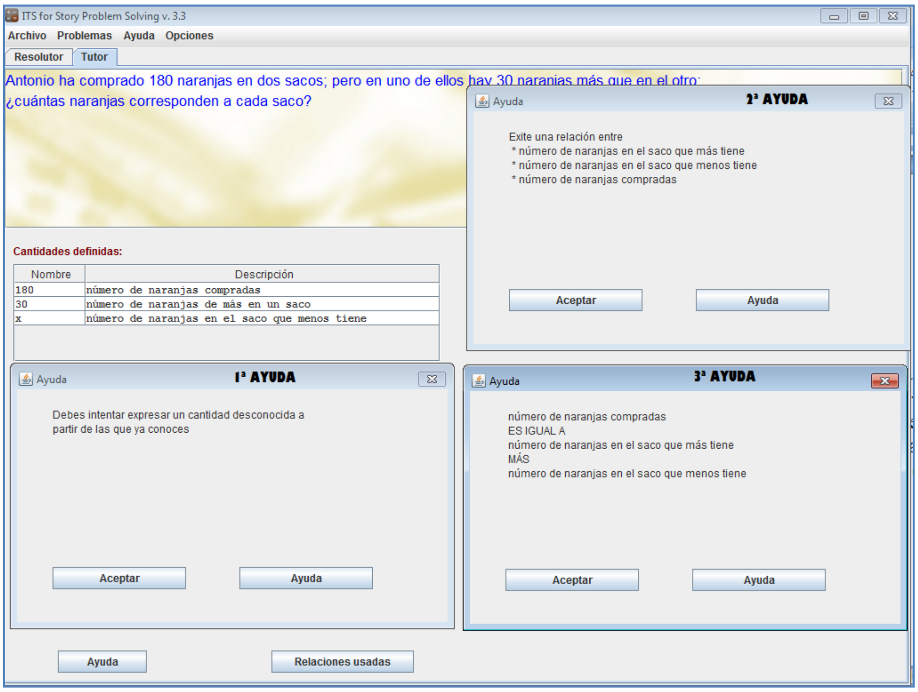


Figura 4.19. Secuencia de mensajes de ayuda en la definición de cantidades desconocidas habiéndose usado ya una letra.

Obviamente, también podemos pedir ayudas cuando estamos construyendo ecuaciones. Sin embargo, creemos que ya hemos ilustrado suficientemente el funcionamiento del botón *Ayudas*. Procedamos a explicar el botón *Relaciones usadas*. Este botón tiene el objetivo de que podamos consultar en cualquier momento las relaciones que ya hemos puesto en juego e introducido en el sistema. Por ejemplo, imaginemos que en el problema hemos informado la cantidad *número de naranjas en el saco que más tiene* como *x*+30, donde *x* representa la cantidad *número de naranjas en el saco que menos tiene*. Si pulsamos el botón *Relaciones usadas*, aparecerá una ventana emergente indicándonos en lenguaje natural que hemos utilizado la relación que establece que la diferencia en número de naranjas entre un saco y otro es de 30 unidades [véase Figura 4.20].

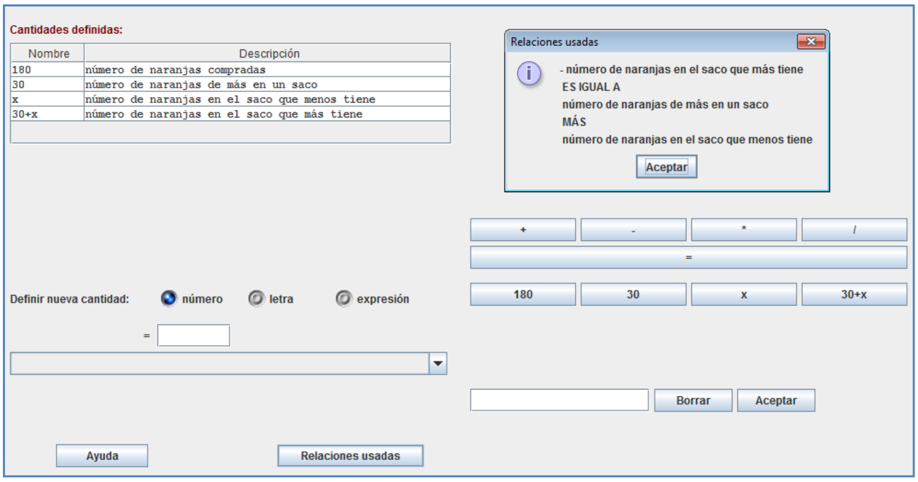


Figura 4.20. Mensaje informativo de las relaciones usadas.

[Tras estas indicaciones, se entregaba la primera colección de problemas a los estudiantes y se les indicaba que debían trabajar individualmente a partir de ese momento].

4.2.2. EL PROBLEMA-EJEMPLO EN EL GRUPO PP

Al igual que en los grupos CT y RT, en el grupo PP el profesor-investigador también resolvió el problema *Las naranjas* para toda la clase. Sin embargo, dado que este grupo trabajaría en lápiz y papel, la resolución se efectuó en la pizarra del aula. A pesar de que para este grupo no procedía dar explicación alguna sobre el tutor, se explicó el problema igualmente, tratando que toda la instrucción que se había impartido en los grupos CT y RT respecto a la manera en que se resuelven algebraicamente los problemas verbales, también se hiciera explícita en el grupo PP. A continuación describimos las explicaciones dadas por el profesor durante la resolución algebraica del problema *Las naranjas*, ilustrando el proceso con imágenes de la pizarra durante la explicación. Nuevamente presentamos las explicaciones del profesor de la misma forma en que fueron dadas a los estudiantes. Dado que en la explicación con el grupo PP se produjeron varias intervenciones de estudiantes, a veces en respuesta a preguntas del profesor-investigador, describiremos entre paréntesis y cursivas las acciones y actuaciones que se fueron produciendo durante la explicación.

Explicación del profesor-investigador

Para resolver este problema, vamos a hacer una lista de las cantidades necesarias para la resolución [véase Figura 4.21]. Así, en la pizarra voy a escribir el nombre de las cantidades que vamos a utilizar: número de naranjas compradas, número de naranjas en el saco que menos tiene, número de naranjas en el saco que más tiene y naranjas de más en el saco que más tiene (respecto al saco que menos tiene). Bien, ¿podemos dar valor a alguna de estas cantidades?

(*En este momento varios estudiantes indicaron correctamente el valor de la cantidad número de naranjas compradas y naranjas de más en el saco que más tiene.*)

Efectivamente, podemos asignar el valor 180 al total de naranjas compradas y 30 a la última de las cantidades de nuestra lista [véase Figura 4.22]. Tras ello, debemos plantearnos qué podemos hacer para continuar.

(*Un alumno sugiere que asignemos una letra a una cantidad*.)

¿Os parece correcto que asignemos la letra equis para representar la cantidad número de naranjas en el saco que más tiene? Vamos a registrarlo en nuestra tabla [véase Figura 4.23]. Nos queda por representar la cantidad número de naranjas en saco que más tiene. Tenemos varias alternativas. Una opción es expresar esta cantidad a partir de las relaciones que tiene con las cantidades que ya hemos representado. Por ejemplo, sabemos que en el saco que más tiene hay 30 naranjas más que en el otro. Esto se traduce en la expresión algebraica $x + 30$ [véase Figura 4.24].

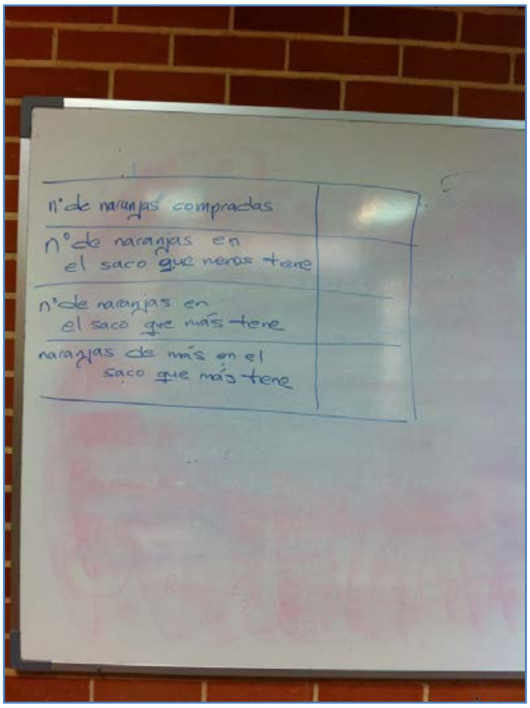


Figura 4.21. Listado de cantidades.

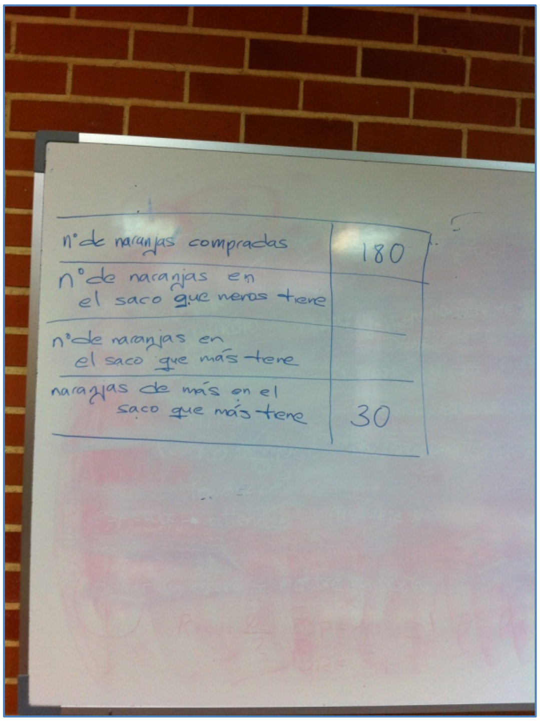


Figura 4.22. Definición de cantidades conocidas.

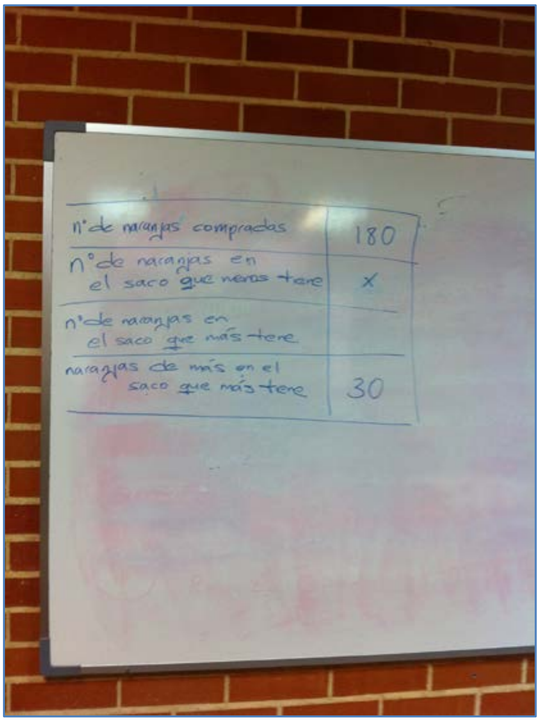


Figura 4.23. Paso 2 del MC.

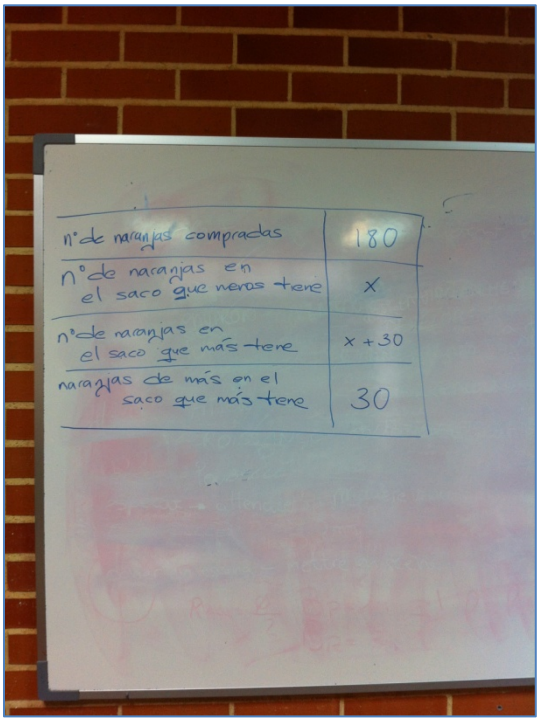


Figura 4.24. Paso 3 del MC.

Una vez que hemos representado todas las cantidades, usando una letra, debemos plantear una ecuación. Para ello, debemos usar una relación entre cantidades que no hayamos usado previamente.

(*Un alumno apuntó a que debíamos emplear el hecho de que las naranjas de un saco más las naranjas de un saco tenían que ser 180. Ante esto, otro propuso la ecuación x+(x+30)=180. El profesor plasmó la ecuación en la pizarra*).

Si quisiéramos obtener el valor de *x*, sería suficiente con resolver la ecuación, pero como en nuestro caso sólo nos interesa el planteamiento, no procedemos a resolverla. Ahora bien, ¿se os ocurre otra manera diferente de plantearlo?

(*Ante el silencio de los estudiantes, borró la ecuación y la expresión algebraica x+30. Asignó la letra y a la cantidad número de naranjas en el saco que más tiene [véase Figura 4.25]*).

Podemos usar tantas letras como queramos. Obviamente, esto implicará que tengamos que plantear más ecuaciones. ¿Cuántas nos harán falta?

(*Un alumno apunto que dos ecuaciones, ya que habíamos usado dos letras.*)

En este caso las mismas relaciones que usamos anteriormente se traducirán en ecuaciones. Por ejemplo, ¿cómo se reescribiría la ecuación anterior?

(*Una alumna propuso x+y=180. El profesor la escribió en la pizarra.)*

Aún nos queda una relación dada por el enunciado que no hemos usado. En concreto, se nos informa de que el saco que más tiene tiene 30 más. ¿Cómo lo traduciríais a una ecuación?

(*Una alumna propuso y=x+30. El profesor la escribió en la pizarra.)*

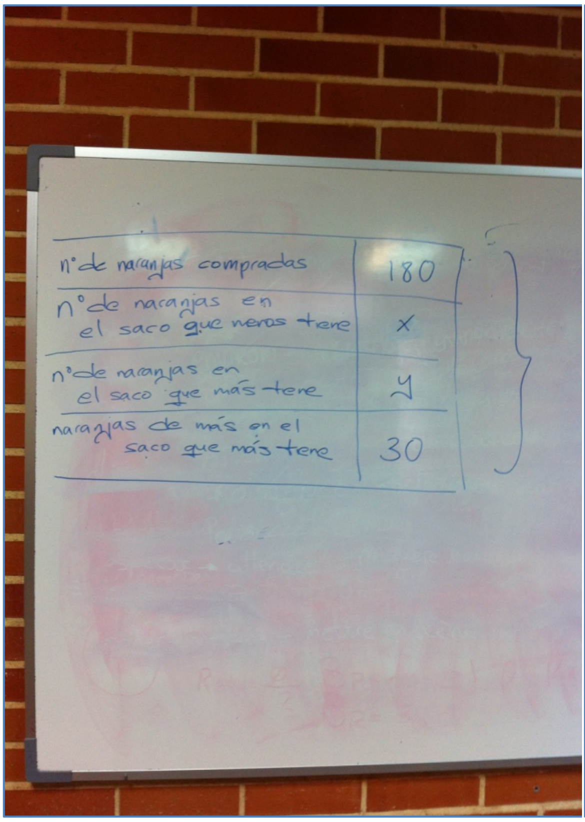


Figura 4.25. Paso 2 (con dos letras).

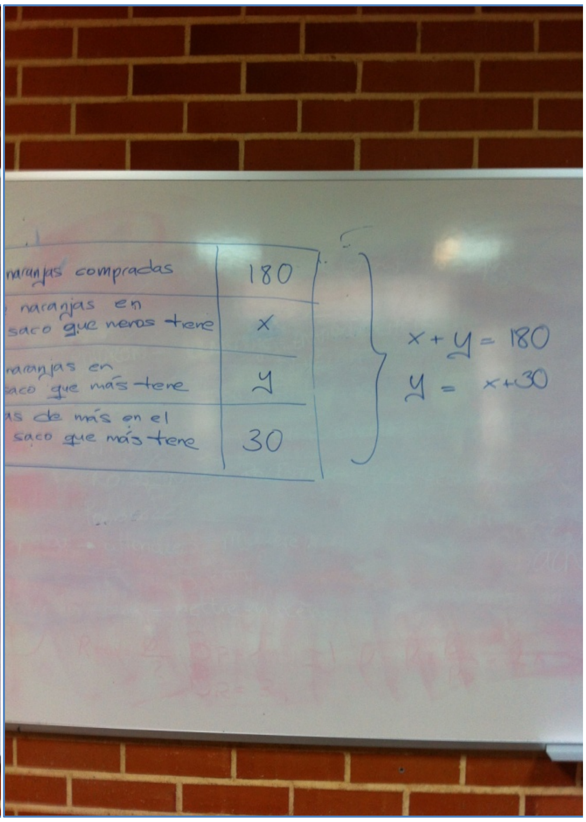


Figura 4.26. Paso 4 (con dos letras).

Para resolver el problema sólo quedaría resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas planteado [véase Figura 4.26].

4.2.3. LA COLECCIÓN DE PROBLEMAS

Una vez que hubo finalizado la explicación del problema-ejemplo por parte del profesor-investigador se repartió una ficha de problemas (Ficha 1) a los estudiantes, que debía ser resuelta de manera individual y autónoma durante la sesión 1. De igual forma en la sesión 2 y 3 se entregaron las Ficha 2 y Ficha 3, respectivamente. Las fichas eran las mismas para los tres grupos, lo que variaba era el entorno en el que debían realizar la resolución. Mientras el grupo CT tenía a su disposición la versión con ayudas de HBPS; el grupo RT usaba la versión sin ayudas del STI, casi idéntica a la versión completa con la excepción de que la posibilidad de pedir ayudas no estaba habilitada. Finalmente, el grupo PP debía resolver exclusivamente en lápiz y papel.

La colección de problemas constó de 12 problemas (cuatro por ficha). Los doce problemas tenían las características de que habitualmente se resuelven de manera algebraica y se procuró que tuvieran diferente estructura tanto entre ellos como comparados con los problemas del cuestionario Pre y Post. Esta exigencia fue atendida considerando la estructura del problema a partir del grafo de una lectura analítica realizada por el investigador. A continuación ofrecemos tanto el enunciado de los problemas como la lectura realizada por el investigador de los mismos.

4.2.3.1. Ficha 1 (Sesión 1)

En primer lugar se presenta el enunciado de los cuatro problemas de la Ficha 1. El orden en que se muestran, coincide con el orden en que aparecían en la ficha. Se acompaña cada problema con la lectura realizada por el investigador y el grafo asociado. Para los grupos CT y RT, esta lectura fue la almacenada en HBPS.

Adrián

Adrián tiene 15 años. Tania tiene 40 años. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la edad de Tania sea igual al doble de la edad de Adrián?

Análisis de las cantidades

Edad actual de Adrián = *Eaa* = 15

Edad futura de Adrián = *Efa* = 40

Edad actual de Tania = *Eat*

Edad futura de Tania= *Eft*

Tiempo transcurrido = *Tt*

Número por el que hay que multiplicar la edad futura de Adrián para obtener la edad futura de la edad futura de Tania = *Vfta* = 2

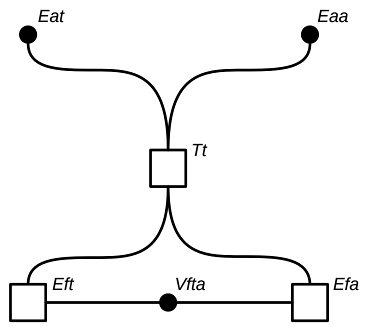
<table>
<tr><th>Análisis de las relaciones</th><th>Grafo</th></tr>
<tr><td>$Efa = Vfta \cdot Eft$
$Eft = Eat + Tt$
$Efa = Eaa + Tt$</td><td>

Figura 4.27. El problema Adrián.</td></tr>
</table>

Amaya y Andrea

Amaya tiene 9 años más que Andrea, y dentro de 3 años la doblará en edad. ¿Cuántos años tiene cada una ahora?

Análisis de las cantidades

Edad actual de Amaya = *Eam*

Edad futura de Amaya = *Efm*

Edad actual de Andrea = *Ean*

Edad futura de Andrea = *Efn*

Tiempo transcurrido = *Tt*

Años de más que tiene Amaya respecto a Andrea = Mmn

Número por el que hay que multiplicar la edad futura de Andrea para obtener la edad futura de Amaya = *Vfnm* = 2

<table>
<tr><th>Análisis de las relaciones</th><th>Grafo</th></tr>
<tr><td>

$Efm = Vfan \cdot Efn$

$Efm = Eam + Tt$

$Efb = Ean + Tt$

$Eam = Ean + Mmn$

</td><td>

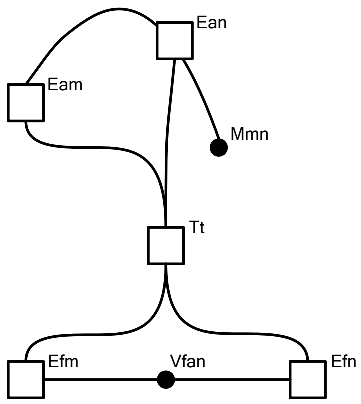


Figura 4.28. El problema *Amaya y Andrea*.

</td></tr>
</table>

<u>*Las zapatillas deportivas*</u>

Un comerciante tiene a la venta 50 pares de zapatillas deportivas a 40 € el par. Cuando lleva vendidos unos cuantos, los rebaja a 30 € el par, continuando la venta hasta que se agotan. La recaudación total ha sido de 1620 €. ¿Cuántos pares vendió sin rebajar y cuántos rebajados?

Análisis de las cantidades

Número inicial de pares de zapatillas = N = 50.

Precio de cada par de zapatillas antes de iniciar la rebaja = Pi = 40

Número de pares vendidos antes de iniciar la rebaja = Ni

Recaudación de los pares vendidos antes de iniciar la rebaja = Di

Precio de cada par de zapatillas tras la rebaja = Pr = 30

Número de pares vendidos tras la rebaja = Nr

Recaudación de los pares vendidos tras la rebaja = Dr

Recaudación total = D = 1620

<table>
<tr><th>Análisis de las relaciones</th><th>Grafo</th></tr>
<tr><td>

$D = Di + Dr$

$N = Ni + Nr$

$Di = Ni \cdot Pi$

$Dr = Nr \cdot Pr$

</td><td>

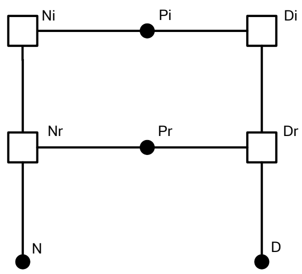


Figura 4.29. El problema *Las zapatillas deportivas*.

</td></tr>
</table>

<u>*Medio siglo*</u>

Amelia tiene 14 años y su hermano Jorge, 12. ¿Cuántos años deben transcurrir para que entre los dos completen cincuenta años?

Análisis de las cantidades

Edad actual de Amelia = Eaa = 14

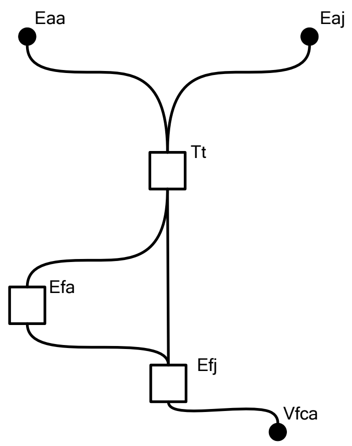
Edad futura de Amelia = Efa

Edad actual de Jorge = Eaj = 12

Edad futura de Jorge = Efj

Tiempo transcurrido = Tt

Años de medio siglo = Ms = 50

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$Efa = Eaa + Tt$ $Efj = Eaj + Tt$ $Ms = Efa + Efj$	 Figura 4.30. El problema *Medio siglo*.

4.2.3.2. Ficha 2 (Sesión 2)

<u>*Abigail*</u>

Abigail tiene cuatro años más que Jonathan. Hace seis años ella tenía el doble de años que él. ¿Cuántos años tienen ahora?

Análisis de las cantidades

Tiempo transcurrido = Tt = 6

Edad actual de Amelia = Eaa

Edad pasada de Amelia = Epa

Edad actual de Jonathan = Eaj

Edad pasada de Jonathan = Epj

Años de más que tiene Abigail respecto a Jonathan = Maj = 4

Número por el que hay que multiplicar la edad pasada de Jonathan para obtener la edad pasada de Abigail = $Vpja$ = 2

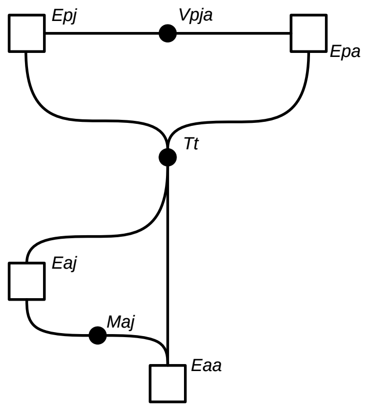
<table>
<tr><th>Análisis de las relaciones</th><th>Grafo</th></tr>
<tr><td>
$Eaa = Epa + Tt$
$Eaj = Epj + Tt$
$Eaa = Eaj + Maj$
$Epa = Vpja \cdot Epj$
</td><td>


Figura 4.31. El problema Abigail.
</td></tr>
</table>

<u>*La merienda*</u>

Un grupo de amigos merienda en una cafetería. Si un bocadillo vale el triple que un refresco, y pagan 33 euros por cinco bocadillos y siete refrescos. ¿Cuánto vale a un refresco? ¿Y un bocadillo?

Análisis de las cantidades

Coste total de la merienda = T = 33

Número de bocadillos comprados = B = 5

Número de refrescos comprados = R = 7

Coste de los bocadillos = Pb

Coste de los refrescos = Pr

Precio de un bocadillo = Pbu

Precio de un refresco = Pru

Número por el que hay que multiplicar el precio de un refresco para obtener el precio de un bocadillo = Vrb = 3

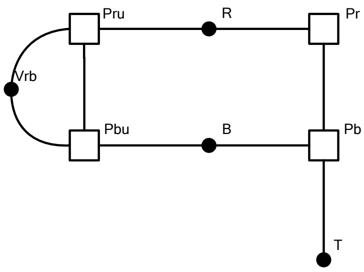
<table>
<tr><th>Análisis de las relaciones</th><th>Grafo</th></tr>
<tr><td>
$T = Pb + Pr$
$Cb = Pbu \cdot B$
$Cr = Pru \cdot R$
$Pbu = Pru \cdot Vrb$
</td><td>


Figura 4.32. El problema La merienda.
</td></tr>
</table>

Chocolatinas y caramelos

Una profesora tiene 120 chocolatinas y 192 caramelos que va a repartir entre los alumnos de su clase. Si cada alumno recibe 3 caramelos más que chocolatinas. ¿Cuántos son los alumnos?

Análisis de las cantidades

Número total de chocolatinas = C = 120

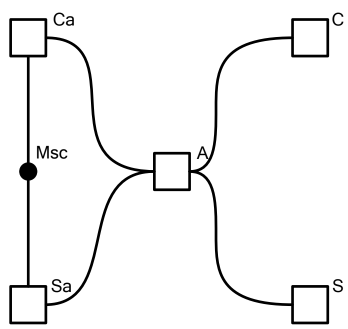
Número total de caramelos = S = 192

Número de caramelos de más que recibe cada alumno con respecto al número de chocolatinas que recibe = Msc = 3

Número de alumnos = A

Número de caramelos que recibe cada alumno = Sa

Número de chocolatinas que recibe cada alumno = Ca

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$Sa = Ca + Msc$ $S = Sa \cdot A$ $C = Ca \cdot A$	 Figura 4.33. El problema *Chocolatinas y caramelos*.

Leer

Narciso ha comprado dos libros y cinco revistas por 156 €. ¿Cuál era el precio de cada artículo, sabiendo que un libro constaba cuatro veces más que una revista?

Análisis de las cantidades

Número de libros = L = 2

Número de revistas = R = 5

Coste de la compra = P = 156

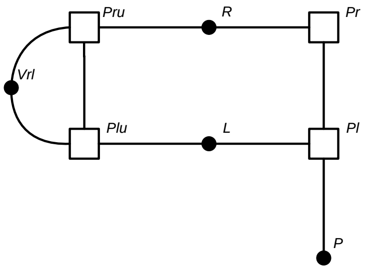
Dinero gastado en libros = Pl

Dinero gastado en revistas = Pr

Precio de un libro = Plu

Precio de una revista = Pru

Número por el que hay que multiplicar el precio de una revista para obtener el precio de un libro = Vrl = 4

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$P = Pl + Pr$ $Pl = Plu \cdot L$ $Pr = Pru \cdot R$ $Plu = Pru \cdot Vrl$	 Figura 4.34. El problema *Leer*.

4.2.3.3. Ficha 3 (Sesión 3)

El agricultor

Un agricultor ha sembrado de trigo la tercera parte de un campo y la décima parte de cebada. Si aún le quedan 425 metros cuadrados sin cultivar, ¿cuál es la superficie total del campo?

Análisis de las cantidades

Superficie cultivada de trigo = Tr

Superficie cultivada de cebada = C

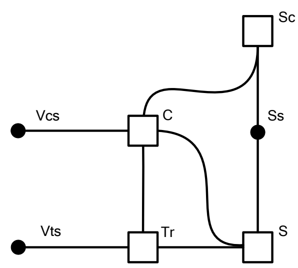
Superficie total = T

Superficie cultivada = Sc

Superficie sin cultivar = Ss = 425

Número por el que hay que multiplicar la superficie cultivada de trigo para obtener la superficie total = Vts = 3

Número por el que hay que multiplicar la superficie cultivada de cebada para obtener la superficie total = Vcs = 10

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$S = Sc + Ss$ $Sc = Tr + C$ $S = Vcs \cdot C$ $S = Vts \cdot Tr$	 Figura 4.35. El problema *El agricultor*.

La furgoneta

Un grupo de amigos alquila una furgoneta por 490 € para hacer un viaje. A última hora se apuntan dos más y así se devuelven 28 € a cada uno de los otros. ¿Cuántos fueron de excursión? ¿Cuánto pagó cada uno finalmente?

Análisis de las cantidades

Precio de la furgoneta = P = 490

Número de amigos de más que se apuntan al final = Dif = 2

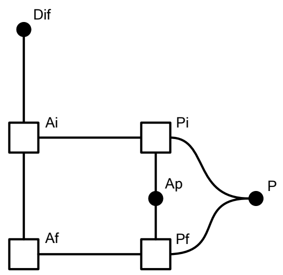
Ahorro por persona al ir más amigos = Ap =28

Número de amigos que iban inicialmente = Ai

Número de amigos que van finalmente = Af

Precio por persona al final = Pf

Precio por persona al principio = Pi

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$Af = Ai + Dif$ $Pi = Pf + Ap$ $P = Pi \cdot Ai$ $P = Pf \cdot Af$	 Figura 4.36. El problema *La furgoneta*.

Mezclando café

Un tendero mezcla un saco de café extra de 10€/kg con una bolsa de café de categoría inferior de 8 €/kg. Así obtiene 20 kg de café mezcla que, para no perder dinero, debe vender a 9,5 €/kg. ¿Cuántos kilos de cada clase de café empleó?

Análisis de las cantidades

Precio de un kilo de café extra = Pue = 10

Precio de un kilo de café inferior = Pui = 8

Precio de un kilo de café mezcla = Pum = 9,5

Kilos de café extra = Cce

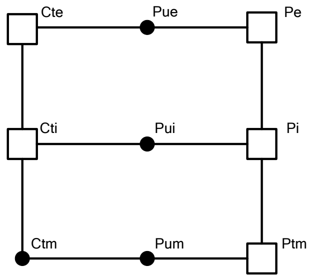
Kilos de café inferior = Cci

Kilos de café mezcla = Ccm = 20

Precio de todo el café extra = Pe

Precio de todo el café inferior = Pi

Precio de todo el café mezcla = Pm

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$Pm = Pe + Pi$ $Ccm = Cce + Cci$ $Pe = Pue \cdot Cce$ $Pi = Pui \cdot Cci$ $Pm = Pum \cdot Ccm$	 Figura 4.37. El problema *Mezclando café*.

<u>*Un paseo de ida y vuelta*</u>

Una persona recorre una calle con una velocidad de 6 km/h y regresa a caballo con velocidad de 10 km/h. Entre ida y vuelta ha tardado 3 horas. Hallar la longitud de la calle.

Análisis de las cantidades

Velocidad a pie = $Vp = 6$

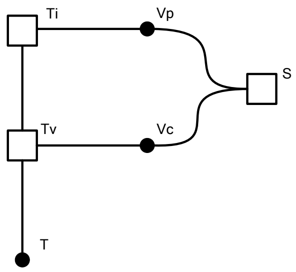
Velocidad a caballo = $Vc = 10$

Tiempo total = $T = 3$

Tiempo de ida = Ti

Tiempo de vuelta = Tv

Longitud de la calle = S

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$T = Ti + Tv$ $S = Vp \cdot Ti$ $S = Vc \cdot Tv$	 Figura 4.38. El problema *Un paseo de ida y vuelta*.

5. Estudio de grupo

5.1. LA FINALIDAD DEL ESTUDIO

El estudio de grupo fue planteado atendiendo a un doble propósito. En primer lugar, pretendíamos clasificar a los estudiantes pertenecientes a los grupos que trabajaron con el sistema tutorial durante la secuencia de enseñanza (grupos CT y RT) para seleccionar las parejas que participaron en el estudio de casos[1]. En segundo lugar, mediante el estudio de grupo se pretendía determinar el efecto de los distintos tipos de enseñanza en la competencia de los estudiantes para resolver problemas verbales de manera algebraica. Con el objeto de determinar este efecto, se analizó el número de problemas que eran capaces de resolver correctamente antes de ser instruidos mediante la secuencia de enseñanza correspondiente e inmediatamente después.

Con este fin se diseñaron dos cuestionarios (cuestionarios Pre y Post) formado por 14 problemas isomorfos uno a uno. El cuestionario Pre fue administrado al inicio de la secuencia de enseñanza en única sesión de 100 minutos de duración y fue realizado conjuntamente por todos los estudiantes que participaron en el estudio. De manera análoga, el cuestionario Post fue administrado al finalizar la secuencia de enseñanza en una única sesión de 100 minutos. Al igual que para el cuestionario Pre, todos los participantes completaron la prueba en la misma franja horaria. El cuestionario Pre constituye el punto de partida de la fase experimental. En dicho momento del curso, los alumnos aún no habían estudiado los problemas verbales aritmético-algebraicos. Al profesor de la materia se le mostró el cuestionario Pre sólo el día previo a la realización del mismo por los estudiantes pues se deseaba evitar que, de algún modo, el

[1] En el capítulo 6 se hace una descripción exhaustiva del uso del estudio de grupo para la clasificación de los estudiantes y de cómo esta clasificación fue utilizada para la selección de participantes en el estudio de casos.

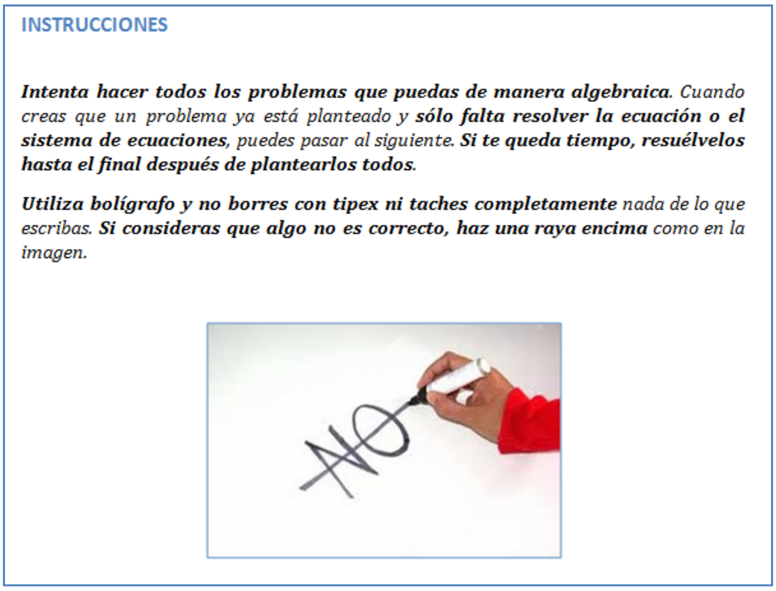
conocimiento de la prueba, modificara su comportamiento previo a la investigación. Por otro lado, los estudiantes de todos los grupos realizaron los cuestionarios exactamente en la misma fecha y hora para evitar que posibles interacciones entre los individuos afectaran al rendimiento en aquellos estudiantes que los realizaran con posterioridad. La administración de los cuestionarios tuvo lugar en el horario habitual de clases y con las mismas precauciones que usualmente se toman en un examen. Así, con el fin de evitar que los estudiantes copiasen, se evitó que los alumnos estuvieran próximos, lo cual implicó usar dos aulas dado el elevado número de alumnos que participaron. La realización de las pruebas estuvo supervisada por el investigador en un aula y por el profesor de la materia de matemáticas en la otra. El profesor tenía indicaciones de no responder ninguna cuestión en relación con los problemas que pudieran plantear los estudiantes. Sólo estaba autorizado a realizar aclaraciones en referencia a dudas que pudieran surgir sobre las instrucciones acerca de cómo completar el cuestionario, las cuales explicaremos con detalle posteriormente en este mismo apartado.

Los alumnos fueron informados de qué estaban participando en una investigación aunque no se les comunicaron características de las mismas que pudieran modificar sus actuaciones. Así, por ejemplo, no fueron informados en ningún momento de que cada uno de los grupos sería instruido de distinta forma. Se les indicó que la separación de los grupos obedecía a cuestiones logísticas consecuencia de que el aula de informática sólo contase con 20 ordenadores. Adicionalmente, el profesor de la materia de matemáticas les informó que las actividades realizadas dentro de la investigación, no serían consideradas para la evaluación de la materia. De este modo, se pretendía evitar una motivación adicional al realizar el cuestionario Post que, aunque afectaría de igual manera a los tres grupos, podría generar desigualdades entre las condiciones del cuestionario Pre y el cuestionario Post.

Los cuestionarios Pre y Post fueron administrados al total de los 56 estudiantes de la población a estudio. Sin embargo, por circunstancias personales, el estudiante 5 no pudo completar el cuestionario Pre al verse forzado a abandonar el centro escolar en el transcurso de la prueba. Se valoró la posibilidad de que este alumno completara la prueba con posterioridad, pero considerando que esta acción podría acarrear que el sujeto, conocedor de todos los problemas del cuestionario, modificara su actuación respecto a la que hubiera reflejado de haber podido completar la prueba con sus compañeros, se optó por descartar al sujeto del análisis comparativo entre cuestionarios. Así, el estudiante 5 participó en el resto de sesiones de la fase experimental con absoluta normalidad pero, no fue incluido en el estudio comparativo. De esta forma, fueron 55 estudiantes quienes completaron a todos los efectos el cuestionario Pre. A partir de este dato, se procedió a dividir la población en tres grupos con el fin de que cada grupo fuese instruido mediante una secuencia de enseñanza diferente.

El proceso de conformación de los grupos se basó en una asignación aleatoria de los estudiantes a los mismos, pues se pretendía generar tres grupos heterogéneos de estudiantes comparables entre sí. Dado que en sí, la aleatoriedad no aseguraba el cumplimiento de los objetivos, articulamos dos vías que ofrecieran ciertas garantías de que los grupos generados no se caracterizaban de base por una desigualdad. Así, por un lado, sometimos las agrupaciones a la supervisión del profesor de matemáticas del curso, quien tenía un conocimiento profundo de los estudiantes pues era tutor del curso y había dado clase de matemáticas a este grupo de estudiantes en los dos últimos años. Por otro lado, los resultados en el cuestionario Pre nos permitieron verificar que la distribución aleatoria generaba grupos comparables en relación con la competencia en la resolución algebraica de problemas verbales al observar que no existían diferencias estadísticamente significativas en el número medio de problemas planteados correctamente en cada grupo. Así, inicialmente, los grupos PP, CT y RT contaron con 19, 18 y 18 estudiantes, respectivamente. Sin embargo, los estudiantes 29 y 31, ambos pertenecientes al grupo RT, no asistieron a la sesión en que se administró el cuestionario Post, por lo que tuvieron que ser excluidos del estudio. En resumen, la parte del estudio de grupo en que se compara los cuestionarios Pre y Post contempla la participación de 53 estudiantes, distribuidos en el grupo PP (19 estudiantes), el grupo CT (18 estudiantes) y el grupo RT (16 estudiantes).

Antes de hacer una descripción exhaustiva de los problemas presentes en cada uno de los cuestionarios, se procede a presentar las instrucciones que se suministraron a los estudiantes a la hora de realizar los cuestionarios. Las instrucciones fueren idénticas tanto para el cuestionario Pre como para el Post. En la parte superior de la primera hoja del cuestionario, los estudiantes tenían un espacio para consignar su nombre y el curso al que pertenecían. En la parte inferior de la misma hoja se recogían unas escuetas instrucciones (véase Figura 5.1) en las que se indicaba que debían plantear una resolución algebraica, explicitando que era suficiente con que planteasen la ecuación o el sistema de ecuaciones, sin necesidad de resolverlos. Esta indicación obedece a que la investigación está centrada en lo que acontece entre los pasos 1 y 4 del MC, por lo que no está comprendido entre sus objetivos lo que sucede a partir del paso 5 del método, como es el caso de la resolución de la ecuación (o del sistema de ecuaciones) planteado. Además, se dieron las instrucciones adicionales de usar bolígrafo en vez de lápiz y de tachar en vez de borrar con el fin de que la producción escrita contuviera la mayor cantidad posible de información.


INSTRUCCIONES

Intenta hacer todos los problemas que puedas de manera algebraica*. Cuando creas que un problema ya está planteado y* ***sólo falta resolver la ecuación o el sistema de ecuaciones****, puedes pasar al siguiente.* ***Si te queda tiempo, resuélvelos hasta el final después de plantearlos todos****.*

Utiliza bolígrafo y no borres con tipex ni taches completamente *nada de lo que escribas.* ***Si consideras que algo no es correcto, haz una raya encima*** *como en la imagen.*

Figura 5.1. Instrucciones de los cuestionarios Pre y Post.

5.2. DESCRIPCIÓN DE LOS CUESTIONARIOS

5.2.1. EL CUESTIONARIO PRE

El cuestionario Pre tenía como función evaluar la competencia previa de los estudiantes en la resolución algebraica de problemas verbales. Dado que se pretendía estudiar la competencia en la resolución algebraica, prácticamente la totalidad de los problemas seleccionados se podrían definir como problemas algebraicos[2]. El criterio obedecido para la catalogación de un problema como algebraico se basó en la lectura analítica realizada por el investigador, la cual se presenta posteriormente en el análisis detallado de los problemas. Una restricción adicional fue exigir que todos los problemas fueran estructuralmente distintos, considerando para ello nuevamente la lectura algebraica realizada por el investigador. Así, 13 de los 14 problemas que constituían el cuestionario Pre se caracterizaban porque la lectura más natural del problema era algebraica, considerando como más natural aquella lectura en la que las cantidades utilizadas se derivan de la situación descrita en el enunciado y que no implican la construcción de situaciones hipotéticas no dadas en el problema. No obstante, se decidió incluir adicionalmente un problema de corte más aritmético, como es el titulado *Las cortinas*, en el cual es posible alcanzar la solución del problema exclusivamente mediante operaciones aritméticas entre cantidades presentes en el enunciado. La inclusión de este problema pretendía poner de manifiesto si los estudiantes tenían dificultades para hacer planteamientos algebraicos (tenían instrucciones precisas de ellos) en situaciones donde el álgebra no fuera el único medio de resolución accesible, y quizá no el más inmediato.

Asimismo, el cuestionario incluía problemas de diferentes subfamilias con las que los estudiantes participantes debieran estar familiarizados pues habían sido objeto de instrucción en cursos previos[3]. El interés en incluir problemas pertenecientes a diferentes subfamilias estriba usando las palabras de Cerdán (2008) en que los problemas de la mayoría de las subfamilias:

> "comparten la puesta en escena de las cantidades, el tipo de cantidades y las relaciones entre ellas. […] los problemas de estas subfamilias son objeto de atención específica, lo que conlleva que los significados de las cantidades, usuales en cada una de estas subfamilias, sean habituales para los estudiantes y que incluso dispongan de tácticas específicas para resolver los problemas de las distintas subfamilias, tácticas que los estudiantes invocarían diciéndose: este problema es de móviles, este problema es de edades, etc." (Cerdán, 2008, p. 27)

Sobre la base de que es habitual que se enseñen (y en consecuencia, los estudiantes puedan emplear) tácticas diferentes para las diferentes subfamilias de problemas verbales, parece lógico considerar la posibilidad de que los estudiantes podrían desarrollar distinto grado de competencia (local) en función de la subfamilia. Con el fin de contemplar esta variable, se incluyó en el cuestionario Pre problemas de las subfamilias edades (tres problemas), compra-venta (seis problemas), reparto (dos problemas), móviles (un problema), trabajo (un problema) y mezclas (un problema). Los problemas fueron seleccionados de los trabajos de investigación de Arnau (2010) y Cerdán (2008) así como de los libros de texto de la materia de matemáticas de la Editorial Anaya de 2º y 3º de Educación Secundaria Obligatoria. A continuación se presenta el enunciado de los 14 problemas del cuestionario Pre. El orden en que se muestran, coincide con el orden en que fueron presentados a los alumnos. La ordenación no obedece a ningún criterio específico más allá de evitar la concentración en bloques de los problemas por subfamilias.

[2] En el capítulo 2 ya se abordó la inconveniencia de clasificar los problemas como algebraicos o aritméticos, y no vincular esta dicotomía a la lectura que realiza el resolutor.

[3] Este punto fue verificado mediante la consulta del libro de texto que los estudiantes habían usado el curso anterior y confirmado por el profesor de la materia de matemáticas.

La edad de Consuelo

¿Cuál es la edad de Consuelo si dentro de 30 años tendrá 4 veces la edad que tiene ahora?

La compra del regalo

Un grupo de amigos debe aportar 5 € cada uno para comprar un regalo. A la hora de pagar, dos de ellos no disponen de dinero, y como consecuencia, los demás aportan 7,5 € cada uno. ¿Cuántas personas forman el grupo de amigos?

Los aceites

¿Cuántos litros de aceite de orujo de 1,6 €/l tenemos que añadir a 60 l de aceite de oliva de 2,8 €/l para obtener una mezcla de 2,5 €/l?

Las rebajas

En las rebajas compré tres camisas y dos pantalones por 126 €. Recuerdo que un pantalón costaba 8 euros más que una camisa. ¿Cuál era el precio de cada prenda?

Marta y María

La edad de María es 3 veces la de su hija Marta, pero dentro de 12 años, la edad de María será solamente el doble que la de Marta. ¿Cuál es la edad actual de cada una?

Lana y algodón

Un sastre compra tela de lana y tela de algodón. En total adquiere 12 metros. El precio del metro de lana es de 2 euros y el de algodón, de 4 euros. El valor total de la tela que compra es de 32 euros. ¿Cuántos metros de tela de lana ha comprado? ¿Cuántos de tela de algodón?

Alcanzar

Un tren parte de Madrid a Valencia con una velocidad de 120 km/ hora y otro de Valencia a Madrid con una velocidad de 100 km /hora. La distancia por tren de Valencia a Madrid es de 440 km. Dígase a qué distancia de Valencia se cruzan ambos trenes.

La lotería

Juan, María y Carlos juegan un décimo de lotería en Navidad que resulta premiado con 8000 €. Calcula cuánto le corresponde a cada uno, sabiendo que Juan juega cuatro veces que María y ésta el triple que Carlos.

Las cortinas

Se compró una cierta cantidad de metros de tela para cortinas, pagándose 528 €. Si se hubiesen comprado 6 metros más se hubiera pagado 564 €. ¿Cuántos metros de tela se compraron?

La traductora

Una traductora debe traducir 150 páginas al día para completar un trabajo. Si tradujese 325 páginas cada día tardaría 7 días menos. ¿Cuántas páginas tendría que traducir en total?

Paz, Petra y su madre

Paz y Petra tienen 6 y 9 años respectivamente. Su madre, Ana, tiene 35 años. ¿Cuántos años deben pasar para que, entre las dos niñas, igualen la edad de la madre?

Dafne

Dafne y Fabiola vendieron 124 boletos para un concierto de jazz. Si el número de boletos que vendió Fabiola fue el triple de los que vendió Dafne. ¿Cuántos ha vendido cada una?

La clase

En una clase hay 29 estudiantes. Si el número de chicas supera en tres al de chicos, ¿cuántos alumnos y cuántas alumnas hay en la clase?

Chocolatinas

Si quiero comprar 8 chocolatinas me faltan dos euros, pero si compro 6 chocolatinas me sobran dos euros. ¿Cuál es el precio de una chocolatina?

5.2.2. EL CUESTIONARIO POST

El cuestionario Post se diseñó con la finalidad de mensurar la competencia de los estudiantes inmediatamente después de haber sido instruidos mediante distintas secuencia de enseñanza. Los 14 problemas del cuestionario Post provienen de las mismas fuentes que el cuestionario Pre o bien son reelaboraciones del autor de los problemas del cuestionario Pre. Las reelaboraciones consistieron en la modificación de valores, situaciones, personajes, etc. manteniendo la estructura del problema y sin alterar la situación en tal grado que éste dejara de pertenecer a la subfamilia de problemas a la que pertenecía el problema original. En la forma que se acometieron las reelaboraciones se puede intuir el criterio sobre el que se construyó el cuestionario Post: el objetivo era incluir problemas isomorfos, es decir estructuralmente iguales, a los del cuestionario Pre y que además del isomorfismo se conservara la pertenencia del problema a la subfamilia de problemas verbales. Los problemas del cuestionario Post fueron administrados en el mismo orden que se presentan a continuación:

La edad de Pablo

¿Cuál es la edad de Pablo si dentro de 15 años tendrá 4 veces la edad que tiene ahora?

La excursión

Un grupo de amigos están planificando una excursión. A cada amigo la excursión le va a costar 10 €. Sin embargo, a última hora, dos de los amigos deciden no ir a la excursión por lo que el resto ha de pagar 12,5 € cada uno. ¿Cuántas personan forman el grupo de amigos?

El té

Disponemos de dos tipos de té: uno de Tailandia a 5,20 €/Kg y otro de la India a 6,20 €/Kg. ¿Cuántos kilógramos de té de la India tenemos que añadir a 45 kilos de té de Tailandia para obtener una mezcla a 5,75 €/Kg?

Las cerezas

Un kilo de cerezas vale dos euros más que uno de peras. Amelia ha pagado 8 € por tres kilos de peras y uno de cerezas. ¿Cuánto cuesta un kilo de peras? ¿Y uno de cerezas?

Amelia y Enrique

Amelia tiene el triple de edad que su hermano Enrique, pero dentro de cinco años la edad de Amelia será sólo el doble. ¿Cuál es la edad de cada uno?

Conejos y gallinas

En una granja, entre gallinas y conejos hay 20 cabezas y 52 patas. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay en la granja?

Dos coches

Albacete y Madrid distan 300 km entre sí. A la misma hora parte de Albacete un coche hacia Madrid con una velocidad de 90 km/h, y de Madrid parte otro hacia Albacete con una velocidad de 60 km/h. Dígase a qué distancia de Albacete se encuentran ambos coches.

La quiniela

Rocío, Luis y Triana hacen una quiniela que resulta premiada con 5000 €. Calcula cuánto le corresponde a cada uno, sabiendo que a Rocío le corresponde el doble que Luis y a éste el triple que a Triana.

El bautizo

En la celebración de un bautizo el coste total del banquete es de 663 €. Si hubiesen asistido 8 personas más el banquete hubiese costado 975 €. Considerando que todas las personas toman el mismo menú. ¿Cuántos invitados asistieron al banquete?

El pintor

Un pintor tiene que pintar una fachada de una finca y planifica que debe pintar 12 m^2 al día para acabar en el plazo previsto. Si pintase 42 m^2 cada día tardaría 25 días menos. ¿Cuántos metros cuadrados tiene la fachada?

Luis, Andrés y su madre

Luis y Andrés tienen 12 y 8 años respectivamente. Su madre, Teresa, tiene 50 años. ¿Cuántos años deben pasar para que, entre las dos niñas, igualen la edad de la madre?

Messi y Ronaldo

Messi y Ronaldo metieron entre los dos 156 goles en una temporada. Si Messi metió el doble de goles que Ronaldo. ¿Cuántos tantos anotó cada uno?

La tienda de animales

En una tienda hay 27 animales entre perros y gatos. Si el número de perros supera en cinco al de gatos, ¿cuántos perros y gatos hay en la tienda?

Los cromos

Si quiero comprar nueve paquetes de cromos me faltan tres euros, pero si compro cinco paquetes me sobran cinco euros. ¿Cuál es el precio de un paquete?

5.3. ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS

En este apartado se presenta un análisis de cada uno de los problemas constituyentes de los cuestionarios Pre y Post. Para cada problema se expone en primer lugar la lectura analítica realizada por el investigador y que es considerada por éste como la más natural a partir del enunciado del problema. En función del problema, podrán presentarse otras lecturas realizadas por el investigador y que podríamos denominar de teóricas. A su vez, se incorporará al análisis de cada problema las lecturas *reales* que se pueden inferir a partir de las producciones escritas de los estudiantes en los cuestionarios. Con la excepción de la primera lectura presentada para cada problema, que como hemos indicado, responde a la lectura realizada por el investigador, el orden de presentación de las lecturas serán teóricas y reales, sin que haya ningún criterio de secuenciación dentro de cada categoría.

5.3.1. ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS DEL CUESTIONARIO PRE

<u>*La edad de consuelo*</u>

¿Cuál es la edad de Consuelo si dentro de 30 años tendrá 4 veces la edad que tiene ahora?

Lectura 1

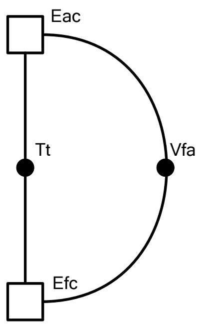
Análisis de las cantidades

Edad actual de Consuelo = *Eac*

Edad futura de Consuelo = *Efc*

Tiempo transcurrido = *Tt* = 30

Número por el que hay que multiplicar la edad actual de Consuelo para obtener cuatro veces su edad actual = *Vfa* = 4

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$Efc = Vfa \cdot Eac$ $Efc = Eac + Tt$	 Figura 5.2. Grafo asociado a la lectura 1 del problema *La edad de Consuelo*.

<u>*La compra del regalo*</u>

Un grupo de amigos debe aportar 5 € cada uno para comprar un regalo. A la hora de pagar, dos de ellos no disponen de dinero, y como consecuencia, los demás aportan 7,5 € cada uno. ¿Cuántas personas forman el grupo de amigos?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Coste por persona si pagaran todos los amigos = *Cpi* = 5

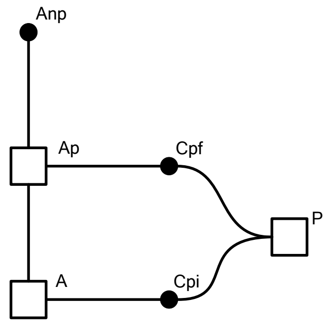
Coste por persona al pagar dos amigos menos = *Cpf* = 7,5

Número de amigos total del grupo = *A*

Número de amigos que no disponen de dinero = *Anp* = 2

Número de amigos que disponen de dinero = *Ap*

Precio del regalo = *P*

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$P = Cpi{\cdot}A$ $P = Cpf{\cdot}Ap$ $A = Ap + Anp$	 Figura 5.3. Grafo asociado a la lectura 1 del problema *La compra del regalo*.

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Coste por persona si pagaran todos los amigos = Cpi = 5

Coste por persona al pagar dos amigos menos = Cpf = 7,5

Incremento del coste por persona al pagar dos amigos menos = Iif

Número de amigos total del grupo = A

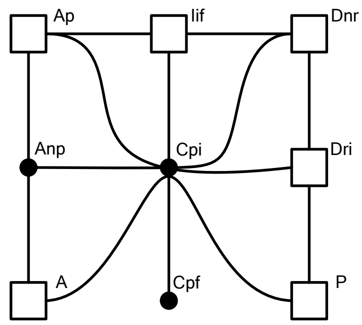
Número de amigos que no disponen de dinero = Anp = 2

Número de amigos que disponen de dinero = Ap

Dinero recaudado si los amigos que finalmente pagan lo hicieran con la contribución inicial = Dri

Dinero no recaudado como consecuencia de los amigos que no aportan = Dnr

Precio del regalo = P

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$Cpf = Cpi + Iif$ $P = Dri + Dnr$ $Dnr = Anp{\cdot}Cpi$ $Dnr = Ap{\cdot}Iif$ $Dri = Cpi{\cdot}Ap$ $P = Cpi{\cdot}A$ $A = Ap + Anp$	 Figura 5.4. Grafo asociado a la lectura 2 del problema *La compra del regalo*.

Los aceites

¿Cuántos litros de aceite de orujo de 1,6 €/l tenemos que añadir a 60 l de aceite de oliva de 2,8 €/l para obtener una mezcla de 2,5 €/l?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Litros de aceite de oliva = *Laa* = 60

Litros de aceite de orujo = *Lao*

Litros de aceite de mezcla = *Lam*

Precio de un litro de aceite de oliva = *Pua* = 1,6

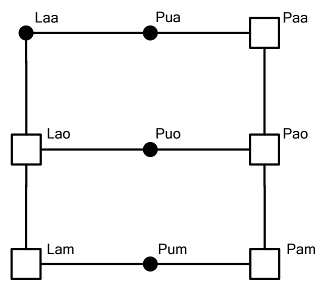
Precio de un litro de aceite de orujo = *Puo* = 2,8

Precio de un litro de aceite de mezcla = *Pum* = 2,5

Precio de todo el aceite de oliva = *Paa*

Precio de todo el aceite de orujo = *Pao*

Precio de todo el aceite de mezcla = *Pam*

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$Pam = Paa + Pao$ $Lam = Laa + Lao$ $Pam = Pum \cdot Lam$ $Paa = Pua \cdot Laa$ $Pao = Puo \cdot Lao$	 Figura 5.5. Grafo asociado a la lectura 1 del problema *Los aceites*.

Las rebajas

En las rebajas compré tres camisas y dos pantalones por 126 €. Recuerdo que un pantalón costaba 8 euros más que una camisa. ¿Cuál era el precio de cada prenda?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Precio de una camisa = *Puc*

Precio de un pantalón = *Pup*

Número de camisas compradas = *C* = 3

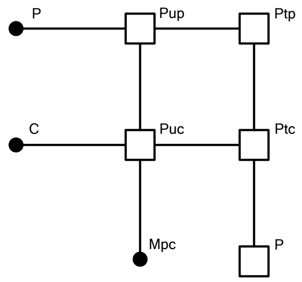
Número de pantalones comprados = *P* = 2

Precio de todas las camisas = *Ptc*

Precio de todos los pantalones = *Ptp*

Dinero de más que cuesta un pantalón respecto a una camisa = *Mpc* = 8

Precio de la compra = *P* = 126

Análisis de las relaciones	*Grafo*
Pup = *Puc* + *Mpc* *P* = *Ptp* + *Ptc* *Ptp* = *P*·*Pup* *Ptc* = *C*·*Puc*	 Figura 5.6. Grafo asociado a la lectura 1 del problema *Las rebajas*.

<u>*Marta y María*</u>

La edad de María es 3 veces la de su hija Marta, pero dentro de 12 años, la edad de María será solamente el doble que la de Marta. ¿Cuál es la edad actual de cada una?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Edad actual de María = *Eam*

Edad actual de Marta = *Eah*

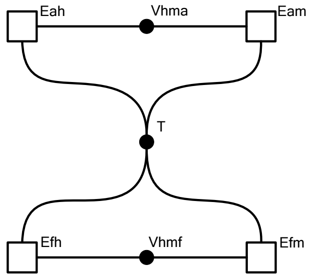
Edad futura de María = *Efm*

Edad futura de Marta = *Efh*

Tiempo transcurrido = *T* = 12

Número por el que hay que multiplicar la edad actual de Marta para obtener la edad actual de María = *Vhma* = 3

Número por el que hay que multiplicar la edad futura de Marta para obtener la edad futura de María = *Vhmf* = 2

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$Efm = Eam + T$ $Efh = Eah + T$ $Eam = Vhma \cdot Eah$ $Efm = Vhmf \cdot Efh$	 Figura 5.7. Grafo asociado a la lectura 1 del problema *Marta y María*.

<u>*Lana y algodón*</u>

Un sastre compra tela de lana y tela de algodón. En total adquiere 12 metros. El precio del metro de lana es de 2 euros y el de algodón, de 4 euros. El valor total de la tela que compra es de 32 euros. ¿Cuántos metros de tela de lana ha comprado? ¿Cuántos de tela de algodón?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Metros de lana comprados = *Cl*

Metros de algodón comprados = *Ca*

Precio de un metro de lana = *Pul* = 2

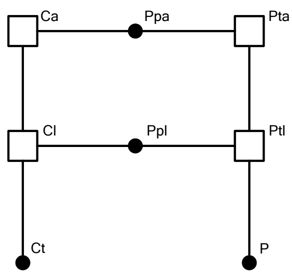
Precio de un metro de algodón = *Pug* = 4

Precio de toda la lana = *Ptl*

Precio de todo el algodón = *Pta*

Metros de tela comprados = *Ct* =12

Precio de la compra = *P* = 32

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$Ct = Cl + Ca$ $P = Ptl + Pta$ $Ptl = Cl \cdot Pul$ $Pta = Ca \cdot Pua$	 Figura 5.8. Grafo asociado a la lectura 1 del problema *Lana y algodón*.

<u>Alcanzar</u>

Un tren parte de Madrid a Valencia con una velocidad de 120 km/ hora y otro de Valencia a Madrid con una velocidad de 100 km /hora. La distancia por tren de Valencia a Madrid es de 440 km. Dígase a qué distancia de Valencia se cruzan ambos trenes.

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Distancia recorrida por el tren que sale de Valencia = *Ssv*

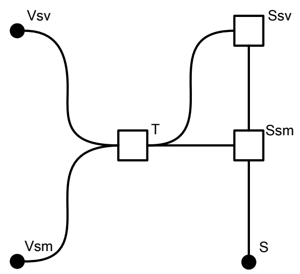
Distancia recorrida por el tren que sale de Madrid = *Ssm*

Distancia entre Valencia y Madrid = *S* = 440

Velocidad del tren que sale de Valencia = *Vsa* = 100

Velocidad del tren que sale de Madrid = *Vsm* = 120

Tiempo que tardan en encontrarse = *T*

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$S = Ssv + Ssm$ $Ssv = Vsv \cdot T$ $Ssm = Vsm \cdot T$	 Figura 5.9. Grafo asociado a la lectura 1 del problema *Alcanzar*.

<u>La lotería</u>

Juan, María y Carlos juegan un décimo de lotería en Navidad que resulta premiado con 8000 €. Calcula cuánto le corresponde a cada uno, sabiendo que Juan juega cuatro veces que María y ésta el triple que Carlos.

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Dinero que le corresponde a Juan = *Dj*

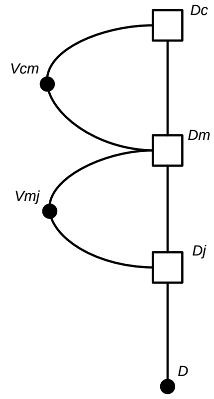
Dinero que le corresponde a María = *Dm*

Dinero que le corresponde a Carlos = *Dc*

Número por el que hay que multiplicar el dinero que le corresponde a María para obtener el que le corresponde a Juan = *Vmj* = 4

Número por el que hay que multiplicar el dinero que le corresponde a Carlos para obtener el que le corresponde a María = *Vcm* = 3

Dinero del premio = *D = 8000*

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$D = Dj + Dm + Dc$ $Dj = Vmj \cdot Dm$ $Dm = Vcm \cdot Dc$	 Figura 5.10. Grafo asociado a la lectura 1 del problema *La lotería*.

<u>*Las cortinas*</u>

Se compró una cierta cantidad de metros de tela para cortinas, pagándose 528 €. Si se hubiesen comprado 6 metros más se hubiera pagado 564 €. ¿Cuántos metros de tela se compraron?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Precio de la tela comprada en la situación real = *Ctr* = 528

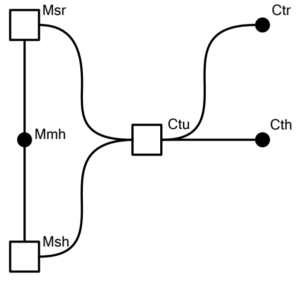
Precio de la tela comprada en la situación hipotética = *Cth* = 564

Metros de tela de más comprada en la situación hipotética = *Mmh* = 6

Cantidad de tela en la situación real = *Msr*

Cantidad de tela en la situación hipotética = *Msh*

Precio de un metro de tela = *Ctu*

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$Msh = Msr + Mmh$ $Ctr = Msr \cdot Ctu$ $Cth = Msh \cdot Ctu$	 Figura 5.11. Grafo asociado a la lectura 1 del problema *Las cortinas*.

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Precio de la tela comprada en la situación real = *Ctr* = 528

Precio de la tela comprada en la situación hipotética = *Cth* = 564

Metros de tela de más comprada en la situación hipotética = *Mmh* = 6

Cantidad de tela en la situación real = *Msr*

Precio de un metro de tela = *Ctu*

Exceso de precio en la situación hipotética respecto a la real = *Ehr*

<table>
<tr><th>Análisis de las relaciones</th><th>Grafo</th></tr>
<tr><td>

$Cth = Ctr + Ehr$

$Ehr = Mmh \cdot Ctu$

$Ctr = Msr \cdot Ctu$

</td><td>

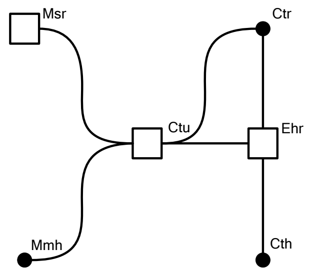


Figura 5.12. Grafo asociado a la lectura 2 del problema *Las cortinas*.

</td></tr>
</table>

<u>*La traductora*</u>

Una traductora debe traducir 150 páginas al día para completar un trabajo. Si tradujese 325 páginas cada día tardaría 7 días menos. ¿Cuántas páginas tendría que traducir en total?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Páginas traducidas por día en la situación inicial = *Pdi* = 150

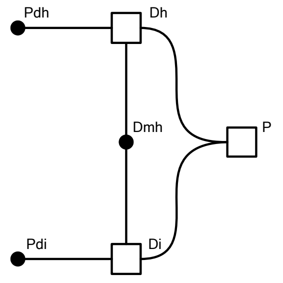
Páginas traducidas por día en la situación hipotética = *Pdh* = 325

Días que tardaría en la situación inicial = *Di*

Días que tardaría en la situación hipotética = *Dh*

Días de menos que tardaría en la situación hipotética = *Dmh* =7

Páginas que tenía traducir = *P*

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$Di = Dh + Dmh$ $P = Pdi \cdot Di$ $P = Pdh \cdot Dh$	 Figura 5.13. Grafo asociado a la lectura 1 del problema *La traductora*.

<u>*Paz, Petra y su madre*</u>

Paz y Petra tienen 6 y 9 años respectivamente. Su madre, Ana, tiene 35 años. ¿Cuántos años deben pasar para que, entre las dos niñas, igualen la edad de la madre?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Edad actual de Paz = *Eapa* = 6

Edad actual de Petra = *Eape* = 9

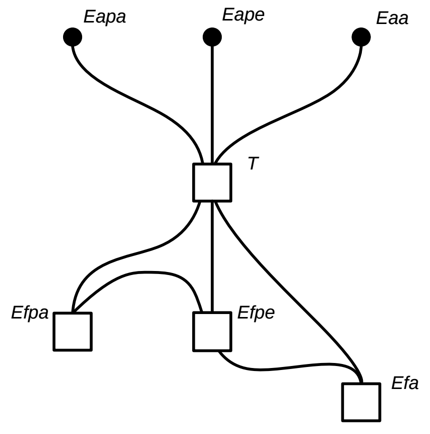
Edad actual de Ana = *Eaa* = 35

Edad futura de Paz = *Efpa*

Edad futura de Petra = *Efpe*

Edad futura de Ana = *Efa*

Tiempo transcurrido = *T*

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$Efpa = Eapa + T$ $Efpe = Eape + T$ $Efa = Eaa + T$ $Efa = Efpa + Efpe$	 Figura 5.14. Grafo asociado a la lectura 1 del problema *Paz, Petra y su madre*.

<u>*Dafne y Fabiola*</u>

Dafne y Fabiola vendieron 124 boletos para un concierto de jazz. Si el número de boletos que vendió Fabiola fue el triple de los que vendió Dafne. ¿Cuántos ha vendido cada una?

Lectura 1

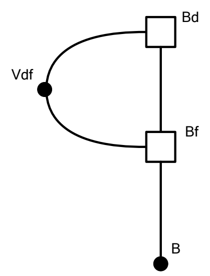
Análisis de las cantidades

Boletos vendidos por Dafne = *Bd*

Boletos vendidos por Fabiola = *Bf*

Boletos vendidos en total = *B* = 124

Número por el que hay que multiplicar los boletos vendidos por Dafne para obtener los vendidos por Fabiola = *Vdf* = 3

Análisis de las relaciones	*Grafo*
B = *Bd* + *Bf* *Bf* = *Vdf*·*Bd*	 Figura 5.15. Grafo asociado a la lectura 1 del problema *Dafne y Fabiola*.

<u>*La tienda de animales*</u>

En una tienda hay 27 animales entre perros y gatos. Si el número de perros supera en cinco al de gatos, ¿cuántos perros y gatos hay en la tienda?

Lectura 1

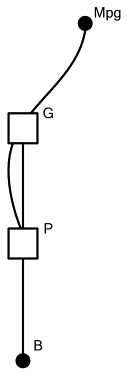
Análisis de las cantidades

Número de perros = *P*

Número de gatos = *G*

Número de animales = *A* = 27

Número de más de perros respecto al número de gatos = *Mpg* = 5

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$A = P + G$ $P = G + Mpg$	 Figura 5.16. Grafo asociado a la lectura 1 del problema *La tienda de los animales*.

<u>*Chocolatinas*</u>

Si quiero comprar 8 chocolatinas me faltan dos euros, pero si compro 6 chocolatinas me sobran dos euros. ¿Cuál es el precio de una chocolatina?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Número de chocolatinas a comprar cuando me falta dinero = Cfd = 8

Número de chocolatinas a comprar cuando me sobra dinero = Cfd = 6

Dinero que falta al comprar ocho chocolatinas = Df = 2

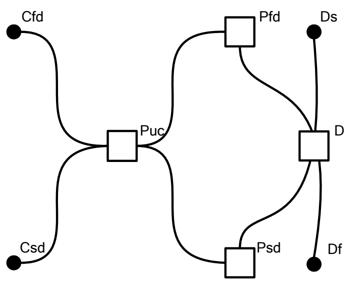
Dinero que sobra al comprar seis chocolatinas = Ds = 2

Precio de una chocolatina = Puc

Dinero que tengo = D

Precio total de chocolatinas en la situación que falta dinero = Pfd

Precio total de chocolatinas en la situación que sobra dinero = Psd

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$Pfd = Cfd \cdot Puc$ $Psd = Csd \cdot Puc$ $Pfd = D + Df$ $D = Psd + Ds$	 Figura 5.17. Grafo asociado a la lectura 1 del problema *Chocolatinas*.

5.3.2. ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS DEL CUESTIONARIO POST

La edad de Pablo

¿Cuál es la edad de Pablo si dentro de 15 años tendrá 4 veces la edad que tiene ahora?

Lectura 1

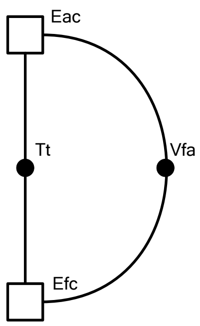
Análisis de las cantidades

Edad actual de Pablo = *Eap*

Edad futura de Pablo = *Efp*

Tiempo transcurrido = *Tt* = 15

Número por el que hay que multiplicar la edad actual de Pablo para obtener cuatro veces su edad actual = *Vfa* = 4

Análisis de las relaciones	*Grafo*
Efp = *Vfa*·*Eap* *Efp* = *Eap* + *Tt*	 Figura 5.18. Grafo asociado a la lectura 1 del problema *La edad de Pablo*.

La excursión

Un grupo de amigos están planificando una excursión. A cada amigo la excursión le va a costar 10 €. Sin embargo, a última hora, dos de los amigos deciden no ir a la excursión por lo que el resto ha de pagar 12,5 € cada uno. ¿Cuántas personan forman el grupo de amigos?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Coste por persona si asistiesen todos los amigos = *Cia* = 10

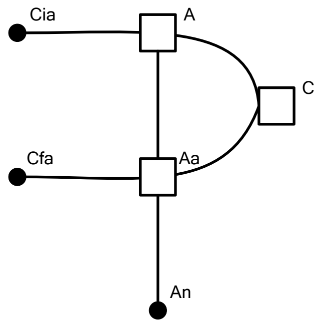
Coste por persona si dos amigos no asisten = *Cfa* = 12,5

Número de amigos del grupo = *A*

Número de amigos que no asisten = *An* = 2

Número de amigos que realmente asisten a la excursión = *Ap*

Coste de la excursión = *C*

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$C = Cia \cdot A$ $C = Cif \cdot Aa$ $A = Aa + An$	 Figura 5.19. Grafo asociado a la lectura 1 del problema *La excursión*.

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Coste por persona si asistiesen todos los amigos = *Cia* = 10

Coste por persona si dos amigos no asisten = *Cfa* = 12,5

Incremento del coste por persona al asistir dos amigos menos = *Iif*

Número de amigos del grupo = *A*

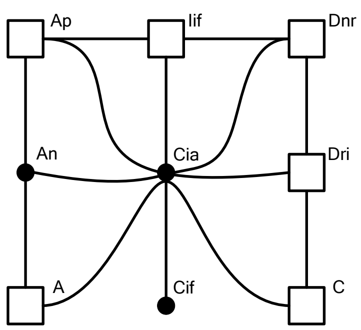
Número de amigos que no asisten = *An* = 2

Número de amigos que realmente asisten a la excursión = *Ap*

Dinero recaudado si los amigos que finalmente pagan lo hicieran con la contribución inicial = *Dri*

Dinero no recaudado como consecuencia de los amigos que no asisten = *Dnr*

Coste de la excursión = *C*

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$Cfa = Cia + Iif$ $C = Dri + Dnr$ $Dnr = An \cdot Cia$ $Dnr = Ap \cdot Iif$ $Dri = Cia \cdot Ap$ $C = Cia \cdot A$ $A = Ap + An$	 Figura 5.20. Grafo asociado a la lectura 2 del problema *La excursión*.

<u>*El té*</u>

Disponemos de dos tipos de té: uno de Tailandia a 5,20 €/Kg y otro de la India a 6,20 €/Kg. ¿Cuántos kilógramos de té de la India tenemos que añadir a 45 kilos de té de Tailandia para obtener una mezcla a 5,75 €/Kg?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Kilos de té de Tailandia = *Ctt* = 45

Kilos de té de la India = *Cti*

Kilos de té mezcla = *Ctm*

Precio de un kilo de té de Tailandia = *Put* = 5,20

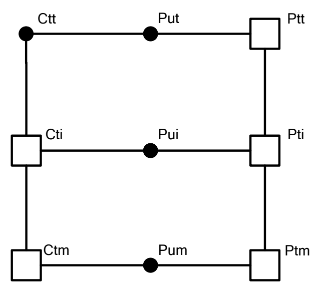
Precio de un kilo de té de la India = *Pui* = 6,20

Precio de un kilo de té mezcla = *Pum* = 5,75

Precio de todo el té de Tailandia = *Ptt*

Precio de todo el té de la India = *Pti*

Precio de todo el té mezcla = *Ptm*

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$Ptm = Ptt + Pti$ $Ctm = Ctt + Cti$ $Ptt = Put \cdot Ctt$ $Pti = Pui \cdot Cti$ $Ptm = Pum \cdot Ctm$	 Figura 5.21. Grafo asociado a la lectura 1 del problema *El té*.

<u>*Las cerezas*</u>

Un kilo de cerezas vale dos euros más que uno de peras. Amelia ha pagado 8 € por tres kilos de peras y uno de cerezas. ¿Cuánto cuesta un kilo de peras? ¿Y uno de cerezas?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Precio de un kilo de cerezas = *Puc*

Precio de un kilo de peras = *Pup*

Número de kilos de cerezas compradas = *C* = 1

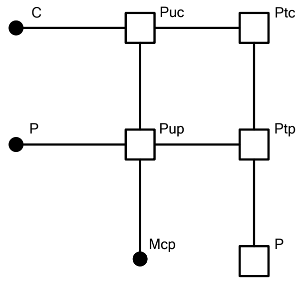
Número de kilos de peras compradas = *P* = 3

Precio de todas las cerezas = *Ptc*

Precio de todas las peras = *Ptp*

Dinero de más que cuesta un kilo de cerezas respecto a un kilo de peras = *Mcp* = 2

Precio de la compra = *P* = 8

Análisis de las relaciones	*Grafo*
Pup = *Puc* + *Mpc* *P* = *Ptp* + *Ptc* *Ptp* = *P*·*Pup* *Ptc* = *C*·*Puc*	 Figura 5.22. Grafo asociado a la lectura 1 del problema *Las cerezas*.

<u>*Amelia y Enrique*</u>

Amelia tiene el triple de edad que su hermano Enrique, pero dentro de cinco años la edad de Amelia será sólo el doble. ¿Cuál es la edad de cada uno?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Edad actual de Amelia = *Eaa*

Edad actual de Enrique = *Eae*

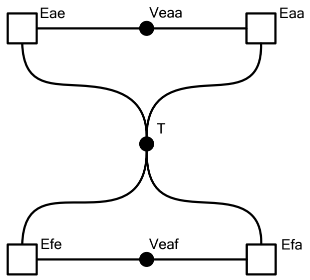
Edad futura de Amelia = *Efa*

Edad futura de Enrique = *Efe*

Tiempo transcurrido = *T* = 5

Número por el que hay que multiplicar la edad actual de Enrique para obtener la edad actual de Amelia = Veaa = 3

Número por el que hay que multiplicar la edad futura de Enrique para obtener la edad futura de Amelia = Veaf = 2

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$Efe = Eae + T$ $Efa = Eaa + T$ $Eaa = Veaa \cdot Eae$ $Efa = Veaf \cdot Efe$	 Figura 5.23. Grafo asociado a la lectura 1 del problema *Amelia y Enrique*.

<u>*Conejos y gallinas*</u>

En una granja, entre gallinas y conejos hay 20 cabezas y 52 patas. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay en la granja?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Número de conejos = Nc

Número de gallinas = Ng

Número de patas de un conejos = $Ppc = 4$

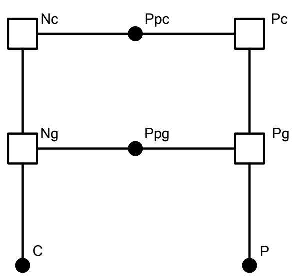
Número de patas de una gallina = $Ppg = 2$

Número de patas de conejo = Pc

Número de patas de gallina = Pg

Número de cabezas = C =20

Número de patas = $P = 52$

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$C = Nc + Ng$ $P = Pc + Pg$ $Pc = Nc \cdot Ppc$ $Pg = Ng \cdot Ppg$	 Figura 5.24. Grafo asociado a la lectura 1 del problema *Conejos y gallinas*.

<u>*Dos coches*</u>

Albacete y Madrid distan 300 km entre sí. A la misma hora parte de Albacete un coche hacia Madrid con una velocidad de 90 km/h, y de Madrid parte otro hacia Albacete con una velocidad de 60 km/h. Dígase a qué distancia de Albacete se encuentran ambos coches.

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Distancia recorrida por el coche que sale de Albacete = *Ssa*

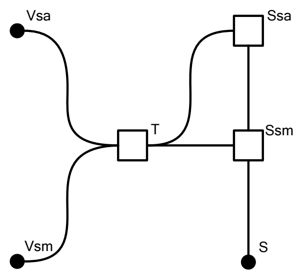
Distancia recorrida por el coche que sale de Madrid = *Ssm*

Distancia entre Albacete y Madrid = *S* = 300

Velocidad del coche que sale de Albacete = *Vsa* = 90

Velocidad del coche que sale de Madrid = *Vsm* = 60

Tiempo que tardan en encontrarse = *T*

Análisis de las relaciones	*Grafo*
S = *Ssa* + *Ssm* *Ssa* = *Vsa*·*T* *Ssm* = *Vsm*·*T*	 Figura 5.25. Grafo asociado a la lectura 1 del problema *Dos coches*.

<u>*La quiniela*</u>

Rocío, Luis y Triana hacen una quiniela que resulta premiada con 5000 €. Calcula cuánto le corresponde a cada uno, sabiendo que a Rocío le corresponde el doble que Luis y a éste el triple que a Triana.

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Dinero que le corresponde a Rocío = *Dr*

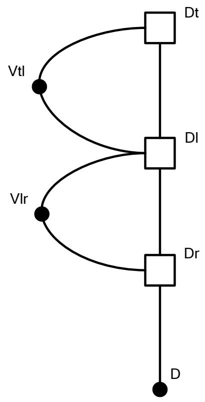
Dinero que le corresponde a Luis = *Dl*

Dinero que le corresponde a Triana = *Dt*

Número por el que hay que multiplicar el dinero que le corresponde a Luis para obtener el que le corresponde a Rocío = *Vlr* = 2

Número por el que hay que multiplicar el dinero que le corresponde a Triana para obtener el que le corresponde a Luis = *Vtl* = 3

Dinero del premio = $D = 5000$

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$D = Dr + Dl + Dt$ $Dr = Vlr \cdot Dl$ $Dl = Vtl \cdot Dt$	 Figura 5.26. Grafo asociado a la lectura 1 del problema *La quiniela*.

<u>*El bautizo*</u>

En la celebración de un bautizo el coste total del banquete es de 663 €. Si hubiesen asistido 8 personas más el banquete hubiese costado 975 €. Considerando que todas las personas toman el mismo menú. ¿Cuántos invitados asistieron al banquete?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Precio real del banquete = $Cbr = 663$

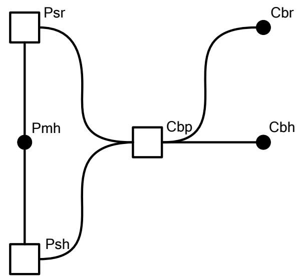
Precio del banquete en la situación hipotética = $Cbh = 975$

Personas de más en la situación hipotética = $Pmh = 8$

Personas en la situación real = Psr

Personas en la situación hipotética = Psh

Precio del banquete por persona = Cbp

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$Psh = Psr + Pmh$ $Cbr = Psr \cdot Cbp$ $Cbh = Psh \cdot Cbp$	 Figura 5.27. Grafo asociado a la lectura 1 del problema *El bautizo*.

Lectura 2

Análisis de las cantidades

Precio real del banquete = *Cbr* = 663

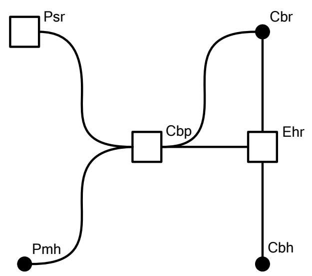
Precio del banquete en la situación hipotética = *Cbh* = 975

Personas de más en la situación hipotética = *Pmh* = 8

Personas en la situación real = *Psr*

Precio del banquete por persona = *Cbp*

Exceso de precio en la hipotética respecto a la real = *Ehr*

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$Psh = Psr + Pmh$ $Cbr = Psr \cdot Cbp$ $Cbh = Psh \cdot Cbp$	 Figura 5.28. Grafo asociado a la lectura 2 del problema *El bautizo*.

<u>*El pintor*</u>

Un pintor tiene que pintar una fachada de una finca y planifica que debe pintar 12 m2 al día para acabar en el plazo previsto. Si pintase 42 m2 cada día tardaría 25 días menos. ¿Cuántos metros cuadrados tiene la fachada?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Superficie pintada por día en la situación inicial = *Sdi* = 12

Superficie pintada por día en la situación hipotética = *Sdh* = 42

Días que tardaría en la situación inicial = *Di*

Días que tardaría en la situación hipotética = *Dh* = 42

Días de menos que tardaría en la situación hipotética = *Dmh* =25

Superficie de la fachada = *S*

Precio real del banquete = *Cbr* = 663

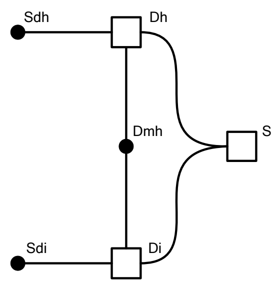
Precio del banquete en la situación hipotética = *Cbh* = 975

Personas de más en la situación hipotética = *Pmh* = 8

Personas en la situación real = *Psr*

Personas en la situación hipotética = *Psh*

Precio del banquete por persona = *Cbp*

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$Di = Dh + Dmh$ $S = Sdh \cdot Dh$ $S = Sdi \cdot Di$	 Figura 5.29. Grafo asociado a la lectura 1 del problema *El pintor*.

<u>*Luis, Andrés y su madre*</u>

Luis y Andrés tienen 12 y 8 años respectivamente. Su madre, Teresa, tiene 50 años. ¿Cuántos años deben pasar para que, entre las dos niñas, igualen la edad de la madre?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Edad actual de Luis = *Eal* = 12

Edad actual de Andrés = *Eaa* = 8

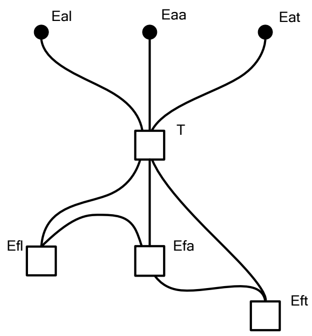
Edad actual de Teresa = *Eat* = 50

Edad futura de Luis = *Efl*

Edad futura de Andrés = *Efa*

Edad futura de Teresa = *Eft*

Tiempo transcurrido = *T*

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$Efl = Eal + T$ $Efa = Eaa + T$ $Eft = Eat + T$ $Eft = Efl + Efa$	 Figura 5.30. Grafo asociado a la lectura 1 del problema *Luis, Andrés y su madre*.

Messi y Ronaldo

Messi y Ronaldo metieron entre los dos 156 goles en una temporada. Si Messi metió el doble de goles que Ronaldo. ¿Cuántos tantos anotó cada uno?

Lectura 1

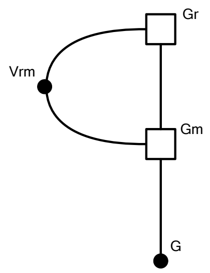
Análisis de las cantidades

Goles anotados por Messi = *Gm*

Goles anotados por Ronaldo = *Gr*

Goles anotados entre los dos jugadores = *G* = 156

Número por el que hay que multiplicar los goles anotados por Ronaldo para obtener los anotados por Messi = *Vrm* = 2

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$G = Gr + Gm$ $Gm = Vrm \cdot Gr$	 Figura 5.31. Grafo asociado a la lectura 1 del problema *Messi y Ronaldo*.

La clase

En una clase hay 29 estudiantes. Si el número de chicas supera en tres al de chicos, ¿cuántos alumnos y cuántas alumnas hay en la clase?

Lectura 1

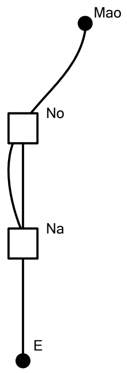
Análisis de las cantidades

Número de chicas = *Na*

Número de chicos = *No*

Número de estudiantes de la clase = *E* = 29

Número de más de chicas respecto al número de chicos = *Mao* = 3

Análisis de las relaciones	*Grafo*
E = Na + No *Na = No + Mao*	 Figura 5.32. Grafo asociado a la lectura 1 del problema *La clase*.

<u>*Los cromos*</u>

Si quiero comprar nueve paquetes de cromos me faltan tres euros, pero si compro cinco paquetes me sobran cinco euros. ¿Cuál es el precio de un paquete?

Lectura 1

Análisis de las cantidades

Número de paquetes a comprar cuando me falta dinero = *Cfd* = 9

Número de paquetes a comprar cuando me sobra dinero = *Cfd* = 5

Dinero que falta al comprar nueve paquetes = *Df* = 3

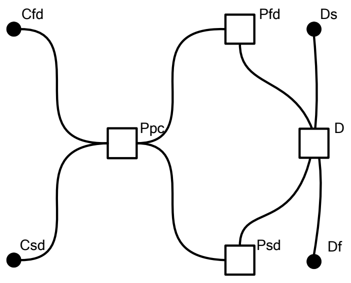
Dinero que sobra al comprar cinco paquetes = *Ds* = 5

Precio de un paquete de cromos = *Ppc*

Dinero que tengo = *D*

Precio total de cromos en la situación que falta dinero = *Pfd*

Precio total de cromos en la situación que sobra dinero = *Psd*

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$Pfd = Cfd \cdot Ppc$ $Psd = Csd \cdot Ppc$ $Pfd = D + Df$ $D = Psd + Ds$	 Figura 5.33. Grafo asociado a la lectura 1 del problema *Los cromos*.

5.4. ANÁLISIS COMPARATIVO DE LAS PRODUCCIONES EN LOS CUESTIONARIOS

En este apartado se presenta un análisis comparativo de los datos recogidos en los cuestionarios Pre y Post en cada uno de los grupos. El propósito del análisis era dilucidar si las diferentes secuencias de enseñanza habían afectado, y en qué medida, el nivel de competencia en la resolución algebraica de problemas verbales. Con este fin, realizamos una comparación, atendiendo a diferentes variables, de las puntuaciones obtenidas en los cuestionarios Pre y Post. En nuestro análisis tomamos en consideración dos variables independientes y dos variables dependientes. La primera de las variables independientes que se emplea es el tipo de instrucción al que es sometido el alumno que, como se ha comentado con anterioridad, viene dado por el grupo de trabajo del alumno durante la fase experimental: grupo CT, grupo RT o grupo PP. La segunda variable independiente consiste en el nivel previo de competencia en la resolución algebraica de problemas verbales. Para ello, se realizó un análisis no jerárquico de conglomerados sobre las puntuaciones obtenidas en el cuestionario Pre, de donde se obtuvo una clasificación de los estudiantes en tres niveles de competencia (bajo, medio y alto) en la resolución algebraica de problemas verbales antes de iniciarse la instrucción. En cuanto a las variables dependientes, se examinan por separado dos variables: una referida al rendimiento global de los estudiantes en el conjunto de los problemas, y otra, de ámbito más local, que da cuenta del rendimiento de los estudiantes en determinadas subfamilias de problemas o en problemas concretos.

A continuación se expone en primer lugar la manera en que codificamos las respuestas a los cuestionarios para su posterior análisis estadístico. Tras ello, se describe el proceso y resultados de la clasificación de los estudiantes por su nivel previo de competencia en la resolución algebraica de problemas verbales. Una vez presentados ambos puntos, se presentan los resultados del estudio comparativo tomando en consideración las dos variables dependientes usadas.

5.4.1. LA CODIFICACIÓN DE LAS RESPUESTAS DE LOS CUESTIONARIOS

Las producciones escritas de los estudiantes en los cuestionarios han sido reducidas para cada problema a una variable dicotómica que recoge el hecho de que la resolución fuera correcta o incorrecta. En el caso de que un estudiante no abordara un determinado problema, es decir, la respuesta apareciera en blanco, ésta ha sido codificada como incorrecta. Igualmente, ante resoluciones aritméticas o basadas en otras estrategias (como, por ejemplo, ensayo y error), éstas también se han codificado como incorrectas con independencia de que la resolución fuera correcta o no. Recuérdese que los estudiantes tenían instrucciones explícitas de resolver los problemas de manera algebraica. En las ocasiones (muy escasas) en que un estudiante hubiese consignado más de un planteamiento sin tachar, siempre se ha tenido en consideración aquel ubicado en una posición más inferior en la hoja de papel o en el caso de encontrarse a la misma altura aquel posicionado más a la derecha. A la hora de codificar como correcta o incorrecta la respuesta a un problema, no se han tomado en consideración resoluciones tachadas, con independencia de que éstas fueran correctas o no.

Dado que, como se ha comentado previamente, este estudio aborda lo que acontece del paso 1 al paso 4 del MC, se ha considerado como correcta cualquier resolución en la que se planteara una ecuación (o sistema de ecuaciones) correcta, considerando así cualquiera cuya resolución mediante transformaciones algebraicas condujera a la cantidad o cantidades por las que se pregunta en el enunciado. No es objeto de la investigación analizar la competencia en la resolución de ecuaciones (o sistema de ecuaciones), por lo cual se codificaron como correctas producciones en las que se resolvía de manera incorrecta ecuaciones (o sistemas de ecuaciones) correctos.

5.4.2. EL NIVEL PREVIO DE COMPETENCIA DE LOS ESTUDIANTES EN LA RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DE PROBLEMAS VERBALES

Uno de los objetivos principales de la investigación consistía en dar respuesta a la pregunta de cómo influye la enseñanza de la resolución algebraica de problemas verbales mediante un sistema tutorial inteligente en la competencia de estudiantes de secundaria cuando resuelven problemas verbales en lápiz y papel. Así, el estudio de grupo se estructura sobre la comparación de los resultados globales que obtuvieron diferentes grupos de estudiantes a una misma colección de problemas antes y después de recibir diferentes instrucciones, dos de las instrucciones se apoyaban en diferentes versiones de un STI mientras que una tenía lugar con exclusividad en lápiz y papel. Sin embargo, este planteamiento si bien permite determinar (y cuantificar) si existe un efecto diferencial para cada tipo de enseñanza, considera globalmente las actuaciones dentro de cada grupo y, en consecuencia, no arroja luz sobre posibles variaciones en el efecto de la enseñanza en función de las características del estudiantes. Así, con el propósito de poder realizar un análisis comparativo a un nivel intra-grupo, decidimos emplear el cuestionario Pre no sólo para el contraste con el cuestionario Post, sino como un cuantificador de la competencia previa de los estudiantes en la resolución algebraica de problemas verbales. En función de la puntuación obtenida en el cuestionario Pre, se realizó un análisis de conglomerados no jerárquicos en tres grupos en la que los estudiantes quedaron clasificados como se muestra en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1.

Clasificación de alumnos según rendimiento en cuestionario Pre

Nivel	Estudiantes	Número de estudiantes
Bajo	7, 24, 51, 47, 34, 17, 40, 16, 46, 30, 18, 33, 44, 13, 28, 45, 49, 36, 32, 21, 54, 8, 39, 25, 2, 53, 11, 1, 12, 9, 19, 35, 22, 48 y 52	35
Medio	27, 43, 56, 6, 26, 20, 50, 15, 38, 37, 10, 3 y 4	13
Alto	55, 42, 23, 14 y 41	5

La clasificación fue contrastada mediante un análisis de conglomerados de dos etapas en tres conglomerados que resultó en la misma distribución que la mostrada en la tabla anterior. Para estos procedimientos estadísticos se empleó como medida de distancia la distancia euclídea y como medida de agregación la media. La Figura 5.34 muestra el cuadro de resumen del análisis de conglomerados de dos etapas en el que se ofrece una medida de la calidad de los conglomerados generados.

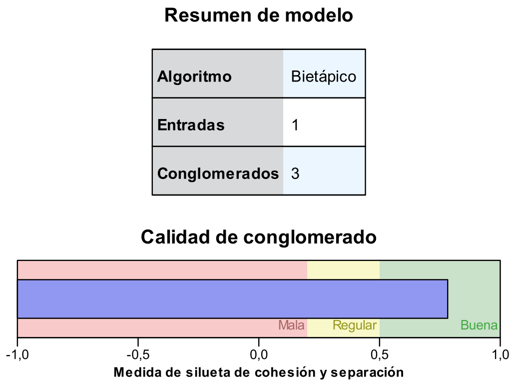


Figura 5.34. Cuadro resumen de análisis de conglomerados de dos etapas.

El conglomerado correspondiente a los estudiantes de nivel alto de competencia previa en la resolución algebraica de problemas verbales se caracteriza por un número muy bajo de estudiantes, que si bien parece ser representativo de los resultados registrados en el cuestionario Pre, nos obliga a ser especialmente cautelosos en las inferencias que se hagan de las comparaciones entre el cuestionario Pre y el Post para este conglomerado.

5.4.3. ANÁLISIS COMPARATIVO POR SUBFAMILIAS DE PROBLEMAS

En este apartado estudiamos la variación en el rendimiento para cada subfamilia de problemas entre los cuestionarios Pre y Post de los estudiantes sujetos a diferente tipo de instrucción. Tradicionalmente la enseñanza de la resolución algebraica de problemas aritmético-algebraicos suele considerar la adscripción de estos problemas a diferentes subfamilias, cuya denominación normalmente viene dada por el contexto que describe el enunciado. En esta investigación los cuestionarios isomorfos comprenden problemas de diferentes subfamilias: tres de edades, seis de compra-venta, dos de reparto, uno de móviles, uno de trabajo y uno de mezclas. El número variable de problemas perteneciente a cada subfamilia es intencional, pues responde a la intención de construir un cuestionario donde las subfamilias de problemas estuvieran representadas en una proporción similar a la que los estudiantes están acostumbrados a resolver. Para ello se tomo como referencia el libro de texto usado por los estudiantes durante el curso anterior. A continuación se describen las variables empleadas para la comparación y el análisis de los resultados obtenidos en los cuestionarios Pre y Post.

- *Razón de diferencia para problemas de edades (RDifEda).* Se calcula como la diferencia entre las puntuaciones obtenidas en los problemas de la subfamilia edades en el cuestionario Post y el Pre dividido por el número de problemas de edades en cada test.
- *Razón de diferencia para problemas de móviles (RDifMov).* Se calcula como la diferencia entre las puntuaciones obtenidas en los problemas de la subfamilia móviles en el cuestionario Post y el Pre dividido por el número de problemas de móviles en cada test.
- *Razón de diferencia para problemas de trabajo (RDifTra).* Se calcula como la diferencia entre las puntuaciones obtenidas en los problemas de la subfamilia trabajo en el cuestionario Post y el Pre dividido por el número de problemas de trabajo en cada test.

- *Razón de diferencia para problemas de mezclas (RDifMez).* Se calcula como la diferencia entre las puntuaciones obtenidas en los problemas de la subfamilia mezclas en el cuestionario Post y el Pre dividido por el número de problemas de mezclas en cada test.
- *Razón de diferencia para problemas de compra-venta (RDifCV).* Se calcula como la diferencia entre las puntuaciones obtenidas en los problemas de la subfamilia compra-venta en el cuestionario Post y el Pre dividido por el número de problemas de compra-venta en cada test.
- *Razón de diferencia para problemas de reparto (RDifRep).* Se calcula como la diferencia entre las puntuaciones obtenidas en los problemas de la subfamilia reparto en el cuestionario Post y el Pre dividido por el número de problemas de reparto en cada test.
- *Razón de diferencia para otros problemas (RDifOtr).* Esta variable considera la fusión en una categoría de los problemas de compra-venta y de reparto bajo la óptica de que, con frecuencia, para estas subfamilias no existe una identificación tan específica de las estructuras conceptuales a involucrar como para las otras subfamilias por lo que puede resultar de interés tener una variables que considere los datos agregados de compra-venta y reparto. Se calcula como la diferencia entre las puntuaciones obtenidas en los problemas de las subfamilias compra-venta y reparto en el cuestionario Post y el Pre dividido por el número de problemas de compra-venta y reparto en cada test.

En la Tabla 5.2 se resumen los porcentajes de respuestas correctas en cada cuestionario en cada uno de los diferentes grupos de instrucción.

Tabla 5.2.

Porcentaje de planteamientos correctos por subfamilias de problemas, cuestionario y grupo

Gr	Edades		Móviles		Trabajo		Mezclas		CV		Rep	
	Pre	Post	Pre	Post	Pre	Post	Pre	Post	Pre	Post	Pre	Post
CT	14,81	31,48	0,00	0,00	5,56	27,78	11,11	16,67	25,00	44,44	33,33	58,33
RT	18,75	29,17	0,00	6,25	12,50	12,50	6,25	6,25	27,08	27,08	28,13	40,63
PP	24,56	26,32	0,00	10,53	0,00	0,00	15,79	5,26	27,19	25,44	21,05	36,84

En la Tabla 5.3 se observa cómo para el grupo CT se produce una mejora neta en el rendimiento de todas las subfamilias de problemas: edades (+16,67%), trabajo (+22,22%), mezclas (+5,56%), compra-venta (+19,44%) y reparto (+25%), con la excepción de los problemas de móviles donde la variación es nula. En cambio, para el grupo RT el efecto de la instrucción es nulo en problemas de trabajo, mezcla y compra-venta. En el resto de categorías se refleja una mejora en la competencia asociada a la resolución algebraica de estos problemas: edades (+10,42%), móviles (+6,25%) y reparto (12,50%). El grupo PP es el único que presenta caídas en el nivel de competencia para determinadas subfamilias. En concreto, en problemas de mezclas y de compra-venta se registran descensos del 10,53% y 1,75%, respectivamente. Los incrementos más notables para este grupo se dan en problemas de móviles (+10,53%) y reparto (+15,79), aunque, en relación con este último dato, el agregado con los problemas de compra-venta ofrece un exiguo incremento del 2,63%.

Tabla 5.3.

Diferencias de rendimiento por instrucción y subfamilias de problemas

Grupo		*RDifEda*	*RDifMov*	RDifTRa	RDifMez	RDifCV	RDifRep	*RDifOtr*
PP (*N*=19)	Media	0,0175	0,1053	0,0000	-0,1053	-0,0175	0,1579	0,0263
	Desv. Típ.	0,1349	0,3153	-	0,3153	0,1916	0,2912	0,1591
RT (*N*=16)	Media	0,1042	0,0625	0,0000	0,0000	0,0000	0,1250	0,0313
	Desv. Típ.	0,2007	0,2500	0,3651	-	0,2277	0,3873	0,2116
CT (*N*=18)	Media	0,1667	0,0000	0,2222	0,0556	0,1944	0,2500	0,2083
	Desv. Típ.	0,3078	0,0000	0,4278	0,2357	0,2374	0,3930	0,2536

5.4.4. ANÁLISIS COMPARATIVO GLOBAL

5.4.4.1. Análisis comparativo global atendiendo a la competencia previa del resolutor

En este apartado realizamos una comparación entre los resultados obtenidos por los estudiantes en los cuestionarios Pre y Post tomando como factores el grupo de pertenencia durante la secuencia de enseñanza así como el nivel de competencia en la resolución algebraica de problemas verbales de los estudiantes antes de iniciarse la instrucción. La variable que se emplea para cuantificar este efecto se calcula como la diferencia entre las respuestas correctas en el cuestionario Post y el cuestionario Pre. Los resultados se recogen en la Tabla 5.4 organizados por tipo de instrucción y nivel previo de los estudiantes. Si bien se producen incrementos en el rendimiento en prácticamente todas las subcategorías resultantes de la combinación de dos factores, es reseñable como para los estudiantes de nivel previo bajo sólo se producen incrementos notables en el grupo CT, con un incremento de rendimiento del 15,48%, mientras que, por el contrario, en los grupos RT y PP la mejora es inferior al 2% en ambos casos. Para los estudiantes de nivel medio se constata una mejora del rendimiento en los grupos PP y RT del 5,36% y 12,50%, respectivamente, aunque nuevamente muy lejana a las cotas alcanzadas en el grupo CT (+24,29%). Finalmente, para los alumnos de nivel previo alto, se presenta el mayor incremente en el grupo RT (+14,29%) en comparación con el grupo CT (+7,14%) y el grupo PP (0%), aunque conviene no perder de perspectiva el bajo número de alumnos clasificados dentro de esta categoría.

Tabla 5.4.

Diferencias de rendimiento por instrucción y por nivel de competencia previo

Grupo		Nivel bajo	Nivel medio	Nivel alto
PP (N = 19)	Media	0,1667	0,7500	0,0000
	Desv. Típ.	1,4035	2,5000	1,7321
RT (N = 16)	Media	0,0909	1,7500	2,0000
	Desv. Típ.	1,8684	2,2174	-
CT (N = 18)	Media	2,1667	3,4000	1,0000
	Desv. Típ.	2,8868	2,0736	-

5.4.4.2. Análisis comparativo global

Para finalizar el capítulo presentamos un análisis comparativo global entre los resultados obtenidos por los estudiantes en los cuestionarios Pre y Post tomando como único factor el grupo de pertenencia durante la secuencia de enseñanza. La tabla 5.5 resume la media y la desviación típica de las puntuaciones en ambos cuestionarios para cada uno de los tipos de instrucción, así como de la ganancia (calculada como la diferencia entre las puntuaciones del cuestionario Post y del Pre).

Tabla 5.5.

Diferencias de rendimiento por instrucción

Grupo		Pre	Post	Dif
CT (N = 18)	Media	2,78	5,22	2,44
	Desv. Típ.	2,713	3,703	2,617
RT (N = 16)	Media	2,94	3,56	0,63
	Desv. Típ.	2,909	3,829	1,996
PP (N = 19)	Media	2,95	3,21	0,26
	Desv. Típ.	2,713	3,457	1,628

Un análisis estadístico reveló que no existían diferencias significativas entre los grupos para las puntuaciones del cuestionario Pre pero, tal y como puede observarse en la tabla, la media es ligeramente superior en los grupos RT y PP con respecto al grupo CT. Por el contrario, la media en el cuestionario Post es superior en este último grupo es sensiblemente superior a los otros dos grupos. Para estudiar el efecto de la instrucción en la competencia en la resolución algebraica de problemas verbales, llevamos a cabo un análisis de covarianza (ANCOVA). La variable independiente, el tipo de instrucción recibida, incluía tres categorías: grupo PP (instrucción con lápiz y papel), grupo RT (instrucción con una versión reducida del sistema tutorial) y grupo CT (instrucción con la versión completa del tutor). La variable dependiente fue la puntuación de los estudiantes en el cuestionario Post mientras que la puntuación en el cuestionario Pre fue usada como covariable.

En primer lugar, se efectuaron dos análisis preliminares para verificar el cumplimiento de las asunciones exigidas para la ANCOVA. En primer lugar, un análisis de varianza permitió corroborar la independencia entre la variable independiente y la covariable, $F(2, 50) = 0{,}019$, $p = 0{,}982$. Tras ello, otro análisis con el fin de evaluar la homogeneidad de las pendientes de regresión, confirmó que esta asunción se verificaba, $F(2, 47) = 0{,}276$, $p = 0{,}760$. Los resultados anteriores respaldan la posibilidad de usar el análisis de covarianza para estudiar el efecto de la instrucción en la competencia en la resolución algebraica de problemas verbales. El análisis reveló un efecto estadísticamente significativo del tipo de instrucción sobre la competencia en la resolución algebraica en el cuestionario Post controlando el efecto de los resultados en el cuestionario Pre, $F(2,49) = 5{,}417$, $p = 0{,}007$, $w^2 = 0{,}55$ (véase Tabla 5.6).

Tabla 5.6.

Análisis de la covarianza para rendimiento en cuestionario Post por el tipo de instrucción

Origen	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Modelo corregido	486,171	3	162,057	35,477	,000
Intersección	30,582	1	30,582	6,695	,013
Pre-test	444,378	1	444,378	97,282	,000
Tipo de instrucción	49,491	2	24,746	5,417	,007
Error	223,829	49	4,568		
Total	1558,000	53			
Total corregida	710,000	52			

Para evaluar las diferencias entre las medias ajustadas entre los diferentes tipos de instrucción se llevaron a cabo análisis *post-hoc*, concretamente el ajuste de Bonferroni para comparaciones múltiples. Los resultados indicaron que los estudiantes que fueron instruidos en el grupo CT obtuvieron una puntuación significativamente mayor en el cuestionario Post que las obtenidas por los estudiantes de los grupos RT y PP, controlando el efecto de las puntuaciones del cuestionario Pre. Los tamaños del efecto para estas diferencias de medias fueron 0,43 y 0,54, respectivamente. Estos tamaños del efecto fueron calculados como Bloom (1984), es decir la diferencia entre las puntuaciones del cuestionario Post y Pre entre la desviación típica del grupo de control. Según Cohen (1992) estos valores pueden considerarse como un efecto medio.

6. Estudio de casos

6.1. EL PROPÓSITO DEL ESTUDIO

El estudio de casos que en este capítulo se presenta fue realizado una vez finalizada la secuencia de enseñanza y tras la administración del cuestionario Post. El estudio de casos tenía un carácter básicamente exploratorio cuyo propósito era describir y documentar las actuaciones de los estudiantes cuando resolvían problemas verbales aritmético-algebraicos en el tutor HBPS. En última instancia se pretendía, a través del análisis de las diferentes actuaciones protagonizadas por los estudiantes, poder mejorar el modelo de enseñanza construido en este trabajo y poder ampliar el conocimiento en relación con el modelo de actuación. A su vez, el análisis de la manera en que los estudiantes operaban sobre el tutor, considerando tanto las estrategias de resolución positivas como las erróneas, ofrece un marco de comprensión sobre algunos de los resultados recogidos en el estudio de perfil cuantitativo.

En el estudio de casos se deseaba que las tareas propuestas fuera de un nivel de dificultad similar a las realizadas a lo largo de la secuencia de enseñanza o los cuestionarios Pre y Post. Es más, durante el estudio de casos se pretendía observar cómo los alumnos resolvían usando el tutor HBPS aquellos problemas que no resolvieron correctamente en el cuestionario Post en lápiz y papel. Así, en primer lugar, a cada pareja se les invitaba a resolver aquellos problemas que ninguno de los miembros había sido capaz de resolver individualmente en el cuestionario Post. Posteriormente, en este capítulo, expondremos en detalle los criterios de selección de los problemas usados en esta fase de la investigación.

6.2. LA TÉCNICA DE OBTENCIÓN DE DATOS

La técnica de obtención de datos empleada es una extrapolación al entorno de HBPS de la utilizada por Schoenfeld (1985), aunque con ciertas decisiones que, como veremos en este capítulo, la hacen más próxima a la utilizada por Puig (1996). En ella, se planteaban una serie de problemas a diferentes parejas de resolutores para que les diesen solución, teniendo estos que manifestarse en voz alta durante el proceso, y en un contexto en el que las intervenciones del investigador se redujesen al mínimo. Los dos subepígrafes de este apartado dan cuenta de cómo fue organizado el estudio de casos en primer término, para luego describir las particularidades del proceso de reducción del protocolo audiovisual al escrito.

En el estudio de casos llevado a cabo se grabaron en vídeo parejas de estudiantes resolviendo problemas en el tutor HBPS, a partir de lo cual se elaboró un protocolo escrito, que constituye el material base sobre el que realizar el análisis de las actuaciones. En Schoenfeld (1985) se presenta una comparación de los pros y contras de grabar a los estudiantes por parejas o individualmente. Básicamente, el autor apuntaba a que en las resoluciones individuales, si bien se manifiestan las cogniciones propias de los alumnos de manera más fiel, no suelen florecer argumentaciones o justificaciones de las acciones realizadas pues el propio contexto no hace necesario su aparición. En cambio, la resolución en parejas, dado la naturaleza dialógica de la situación, invita a recoger una información más rica respecto a la toma individual de decisiones durante la resolución de un problema. Un efecto adicional beneficioso de la configuración por parejas consiste en que el proceso comunicativo entre estudiantes alivia en cierto modo las tensiones impuestas por la grabación, aspecto que suele pesar en las configuraciones individuales. Obviamente, la resolución por parejas modifica totalmente la naturaleza de los datos que se recogen, pues con esta técnica lo que se estudia es "la [naturaleza] de elementos de comunicación que responden a procesos cognitivos que se producen cuando se resuelven problemas en una situación de trabajo cooperativo" (Puig, 1996, p. 60).

La otra variable a tener en consideración durante el proceso de grabación es el papel a desempeñar por el investigador. Schoenfeld (1985) es contundente en relación con este aspecto y aboga por la nula intervención del investigador durante todo el estudio de casos. El autor señala que cualquier intervención, por neutral que pueda parecer, puede desembocar en una modificación de las vías en las que el estudiante resuelve el problema. Bajo este prisma, el investigador no debería intervenir en ningún sentido. Sin embargo, nuestra postura al respecto fue menos estricta. En ocasiones, el investigador intervino para recordar a los estudiantes la necesidad de que el diálogo se produjese en voz alta o que directamente se produjese, en aquellos casos donde ningún miembro de la pareja verbalizaba sus acciones o pensamientos. Además, el investigador actuó ante aquellas dificultadas técnicas claramente ligadas al funcionamiento del tutor como pudieran ser las originadas por el desconocimiento de las reglas de escritura de las expresiones (aritméticas o algebraicas) en el programa. Por otro lado, tomando la postura de Puig (1996), adoptamos una posición más flexible en cuanto a la posibilidad de que el investigador realice puntualmente alguna intervención a lo largo del proceso de resolución. El objetivo del estudio de casos llevado a cabo pretendía incrementar el conocimiento sobre cómo los estudiantes resuelven problemas aritmético-algebraicos, en este caso en el contexto impuesto por el entorno tecnológico del tutor. Con este propósito, para el análisis del estudio de casos hemos empleado lo que Puig (1996) denomina reconstrucción racional del proceso, y que comprende como una narración del proceso de resolución en la que se da sentido a las acciones de los estudiantes a través del conocimiento de los diferentes elementos del modelo de competencia". Así, con el fin de garantizar una mejor comprensión de las acciones de los estudiantes en determinadas situaciones, que por la evolución o el comportamiento de los resolutores pudiera resultar ambigua o confusa, el investigador podía formular preguntas a la pareja. Con la idea de reducir el impacto que estas intervenciones pudieran tener dentro del proceso de resolución, se realizaban, siempre que fuera posible, al finalizar la resolución de los problemas.

En relación con el entorno de resolución, hemos de tener en cuenta que los sistemas tutoriales inteligentes pueden propiciar determinados comportamientos que podríamos catalogar como no deseados dentro de la resolución de problemas verbales. Así, a modo de ejemplo, una estrategia habilitada por la retroalimentación inmediata de validación de cada una de las acciones realizadas en HBPS es el conocido como *gaming*[1]. Este comportamiento se caracteriza por la resolución correcta de las tareas planteadas aprovechando las propiedades y regularidades del sistema, en vez de sobre la base del conocimiento teórico necesario (Baker, Corbett y Koedinger, 2004). Dadas las características de nuestro tutor, existen básicamente dos posibilidades de gaming: una, basada en un abuso continuo de las ayudas y otra, un ensayo y error sistemático a la hora de representar las relaciones del problema. Teniendo en consideración este hecho, en determinadas resoluciones el investigador podía considerar conveniente formular una pregunta con el objeto de determinar si una resolución respondía al gaming o existía comprensión acerca de las acciones ejecutadas. Adicionalmente, en algunas situaciones donde la pareja de estudiantes hubiera consumido el tiempo que tenían asignada para la resolución de un problema dado y, en dicho momento no hubiese indicios de que la resolución estuviera en camino de poder desembocar en una resolución correcta, el investigador podía ofrecer a los estudiantes que usaran algunas de las funcionalidades de ayuda del tutor. De este modo, partiendo de la base que la pareja de resolutores ha sido incapaz de resolver autónomamente el problema, se pretendía observar cómo la actuación de los estudiantes se veía afectada por las estrategias de ayuda del tutor.

6.2.1. LA OBTENCIÓN DE LOS PROTOCOLOS AUDIOVISUALES

El estudio de casos tuvo lugar en un aula del centro, de pequeñas dimensiones y que se usaba para funciones de tutoría. En el centro del aula se dispuso una mesa con la única presencia de un ordenador portátil con un ratón convencional como único periférico. Dado que durante la secuencia de enseñanza los alumnos trabajaron con ordenadores de sobremesa y que pudieran no estar familiarizados con el uso del ratón táctil del portátil, se optó por hacerles usar un ratón convencional. De esta manera, se pretendía que la situación fuese totalmente análoga a la dada durante la secuencia de enseñanza, con la salvedad de la intencional disposición por parejas durante el estudio de casos y por las inevitables restricciones que en la conducta de los alumnos impusiera el acto de grabación. El ordenador empleado durante el estudio de casos, lógicamente, disponía de la versión completa del tutor HBPS con un banco de problemas entre los cuales, como no podía ser de otro modo, estaban todos los necesarios para el estudio. De esta forma, la pareja sólo debía cargar en el programa aquellos problemas que el investigador les informaba debían resolver.

Para la obtención de los protocolos audiovisuales se utilizaron dos cámaras independientes, con diferentes enfoques en aras de captar con detalle el conjunto de acciones desarrolladas por los sujetos. A pesar de utilizar dos cámaras se dispusieron de tres fuentes de vídeo al utilizar un software específico para la grabación de todas las acciones realizadas en el ordenador. En concreto, se utilizó la versión 4.1.1. del software gratuito BB Flashback Express que permite grabar tanto la pantalla del ordenador, el sonido tanto del ordenador como el externo (en este caso, del aula) y las imágenes captadas por la webcam del ordenador. Así, el uso de este software nos permitió captar: 1) todas las acciones realizadas sobre el tutor mediante la grabación de la pantalla, 2) un primer plano de los sujetos mediante la grabación frontal de los mismos y 3) el audio de cualquier sonido que se produjera en el aula. En relación con

[1] Optamos por mantener el vocablo inglés *gaming* pues no existe, que conozcamos, una palabra en español para designar la acepción a la que nos referimos en este texto. Una traducción haciendo uso de la palabra *jugar* sería la más natural pero estimamos que podría dar pie a confusiones, que desaparecen al dedicar el término inglés gaming a la conducta que describimos en el texto.

este último aspecto, hemos de reseñar que, aunque el software de grabación permite simultáneamente el registro de los sonidos producidos en el ordenador, la versión del tutor HBPS no ofrece mensajes sonoros de ningún tipo, por lo que ningún sonido era emitido desde el portátil. Para la grabación de la pantalla se configuró una velocidad de captación de dos *frames* por segundo, lo que garantizaba captar todas las acciones sobre el tutor y al mismo tiempo obtener archivos de datos de un tamaño manejable.

Para la grabación de los primeros planos mediante la cámara del ordenador los estudiantes eran sentados perfectamente centrados respecto a su posición frente al ordenador, de tal manera que se conseguía encuadrar totalmente la parte superior del cuerpo de los sujetos. La segunda de las cámaras se colocó con un enfoque en diagonal hacia la pantalla del ordenador, de tal modo que no sólo captase la pantalla sino que además registrará el tronco y brazos de los sujetos. Así, mediante la combinación de ambas grabaciones siempre era posible dilucidar quién era el autor de una determinada acción, quién hablaba en cada momento, hacía donde dirigían la mirada, qué gestos realizaban en cada momento, etc. A pesar de que ambas cámaras registraban el audio durante el estudio de casos, se decidió grabar también el audio mediante el uso de una grabadora profesional. La grabadora profesional estaba ubicada sobre la mesa, lo más cercana posible a los resolutores sin interferir en sus acciones sobre el ordenador, y fue configurada a un nivel muy alto de definición con el objetivo de poder captar las conversaciones entre los sujetos, incluso en aquellos casos donde estos se manifestasen entre susurros, con un nivel sonoro muy bajo.

El estudio de casos se iniciaba siempre de igual manera: una vez que la pareja había tomado asiento frente al ordenador se les informaba del primer problema que debían resolver, para lo cual debían usar el tutor HBPS y se les recordaba que no estaban autorizados a utilizar ni lápiz ni papel ni cualquier otro programa que estuviera instalado en el ordenador. También se les prohibió usar las funcionalidades de ayudas del tutor para evitar, en la medida de lo posible, resoluciones basadas en gaming, por lo que fueron informados que si deseaban hacer uso de alguna de estos botones, debían pedir permiso al investigador. El planteamiento diseñado para el estudio de casos sólo contemplaba que los alumnos fuesen autorizados a usar las ayudas en el supuesto, ya comentado, de que la pareja hubiera agotado el tiempo asignado para la resolución y además no se encontrara en curso ninguna línea de actuación prometedora. Adicionalmente, se les instaba a iniciar la resolución de cada problema con una lectura en voz alta del enunciado; a que se expresasen en voz alta, de manera que sus verbalizaciones fuesen audibles; y, a que informasen a su compañero de sus pensamientos y del porqué de sus acciones. De esta manera, se pretendía implementar la estrategia del *thinking aloud*, concebida para el trabajo individual, a una disposición en pareja de los estudiantes, que, de por sí, otorga naturalidad (y significado) al proceso de comunicación. Cuando la pareja daba por concluida la resolución de un problema, el investigador informaba del siguiente que debían cargar en el programa, y así sucesivamente.

El estudio de casos fue planificado de tal manera que cada pareja dispusiera un tiempo máximo en torno a los 35 minutos, con un tiempo máximo previsto por problema de ocho minutos. En consecuencia, se estimaba que cada pareja dispondría de tiempo como mínimo para abordar cuatro problemas. A pesar de este tiempo máximo por problema, el investigador podía optar por conceder un tiempo adicional si consideraba interesante lo que en ese instante se estuviera produciendo o si la línea de actuación de los estudiantes mostrase claros de signos de poder conducirlos, en un breve espacio de tiempo, al éxito en el problema. Del mismo modo, el investigador podía decidir dar paso a otro problema (u ofrecer alguna funcionalidad del tutor) antes de agotar los ocho minutos de tiempo establecido si percibía en la pareja una total incapacidad de dar respuesta al problema. Esta percepción podía deberse a la ausencia de acciones sobre el tutor, a la repetición de una estrategia incorrecta o a la propia petición de los sujetos de abandonar la tarea.

6.2.2. LA OBTENCIÓN DE LOS PROTOCOLOS ESCRITOS

Para la reconstrucción racional de las actuaciones de las parejas resulta prácticamente imprescindible transformar los datos audiovisuales grabados a un protocolo escrito. Puig (1996) explica que este proceso implica segmentar el continuo del protocolo oral y traducirlo al lenguaje escrito. Además como el autor señala, esta primera acción no es meramente procedimental sino que implica una toma de decisiones dentro del análisis, es necesario especificar un criterio para fragmentar el protocolo oral. En nuestro caso, seguimos el criterio establecido por Puig (1996), que consiste considerar como fragmentos independientes aquellas verbalizaciones que se producen sin interrupción e identificar cada uno de ellos con un ítem. Aplicando sucesivamente este procedimiento el conjunto del protocolo queda traducido (en cierta manera, reducido) a una colección ordenada de ítems. Como no podía ser de otro modo, los sujetos realizaban diversas acciones a lo largo del estudio de casos, lo cual también ha de ser reflejado en el protocolo escrito. A su vez, estas acciones podían o no coincidir en el tiempo con las verbalizaciones propias del sujeto que comete la acción o con las de su compañero. Con el fin de distinguir en el protocolo escrito las verbalizaciones de los estudiantes de las acciones desarrolladas, optamos por explicar entre paréntesis y en cursiva todo lo relativo a las acciones. En relación con la simultaneidad de acciones y verbalizaciones, adoptamos el siguiente criterio: cuando la acción se produce al mismo tiempo que una verbalización, ésta será recogida dentro del mismo ítem que la verbalización. Así, la acción se consignará inmediatamente después de la verbalización, entre paréntesis e indicando quién es el autor de la acción. Si la acción es acometida en silencio, sin coincidencia con ninguna verbalización, constituirá un ítem en sí mismo. Para dar mejor cuenta de lo que realmente aconteció en el protocolo audiovisual también informaremos entre paréntesis cuando se produzcan silencios o hayamos captado fragmentos de diálogo que no hemos podido transcribir por producirse a un nivel inaudible.

En la construcción de los protocolos escritos seguimos el criterio de Puig (véase, p.ej. Puig (1996) o Arnau (2010), quien lo toma del primer autor), quien aboga por la mayor fidelidad posible a la hora de reflejar el discurso de los estudiantes. Este hecho supone, a veces, registrar proposiciones gramaticalmente incorrectas o expresiones vulgares en el protocolo escrito. Cuando esta situación se dé, emplearemos el término *sic* entre paréntesis para indicar que una palabra o frase recogida en un ítem, que pudiera ser incorrecta, es textual. La misma filosofía nos motiva a emplear los puntos suspensivos para reflejar situaciones propias de la comunicación verbal como son las pausas durante las verbalizaciones, finalizaciones imprecisas o dubitativas o rectificaciones inmediatas. También usaremos los puntos suspensivos al comienzo de un ítem cuando éste conecte con la línea argumental de un ítem predecesor que había sido interrumpido. Por otro lado, emplearemos corchetes para indicar que en la parte del discurso entre corchetes, se ha producido solapamiento con la verbalización reflejada en el ítem anterior. En el caso de que no se cierren los corchetes, se querrá indicar que la verbalización contenida en ese ítem ha provocado la interrupción del ítem que la precedía.

En relación con la codificación de los gestos observados, con la intención de no hacer excesivamente extensa la descripción de los ítems, sólo reflejaremos las acciones que impliquen un acto de comunicación no verbal, gestos que refuercen el discurso o aquellos casos en que los resolutores centren la mirada en algún punto de la pantalla y que resulte relevante en el proceso de resolución. Así, destacaremos especialmente aquellas situaciones en que el sujeto se centra en elementos del tutor como son el enunciado, la ventana de cantidades, los botones que dan cuenta de las cantidades, etc.

En cuanto a las acciones que los resolutores realizan sobre HBPS, registraremos en relación con la definición de cantidades: la cantidad activa en cada momento; la selección de una cantidad entre la lista de cantidades disponibles, o el simple hecho de desplegar dicha lista; la selección de cualquiera de las opciones posibles para representar una cantidad (es decir, asignar valor, letra o expresión a una cantidad); la acción concreta de asignación; la validación de la asignación; y el resultado de la acción, ya sea un mensaje informativo de error o la aceptación de la asignación. En relación con la construcción de ecuaciones, registraremos: cuando el sistema HBPS habilite la ventana de ecuaciones; la construcción de ecuaciones en dicha ventana, así como las acciones derivadas, es decir, validación por parte del usuario; y notificación del resultado por el tutor. Con carácter general, incluiremos en el protocolo escrito cuando los resolutores posen el puntero del ratón sobre algún botón o etiqueta en la pantalla, aunque no lo pulsen o realicen ninguna verbalización al respecto. También registraremos las acciones que modifiquen la región visible en ventana, como, por ejemplo, los desplazamientos de la barra vertical de la ventana de cantidades para visualizar cantidades no visibles. En determinadas ocasiones, la construcción de expresiones o de ecuaciones puede desarrollarse en varios ítems, pues el criterio seguido para la creación del protocolo escrito se basa en las verbalizaciones de los sujetos y no en las acciones de los mismos. Igualmente, habrá ocasiones en que las expresiones o ecuaciones sean introducidas mediante la conjunción de acciones de ambos miembros de la pareja. En consecuencia, y buscando la mayor fidelidad posible del protocolo escrito, hemos optado por informar las acciones concretas en el instante en que se producen dentro del discurso, aunque esta decisión implique con frecuencia fragmentar una acción y ser recogida en diferentes ítems. Para informar de que una acción está inacabada emplearemos los puntos suspensivos. Así, por ejemplo, podremos encontrar en el protocolo escrito "(*Octavio escribe la ecuación "10*x=…*") u "(*Octavio activa la opción "expresión" y escribe "x…"*.) donde los puntos suspensivos no reflejan las funciones típicas dentro de un texto sino que se usan para indicar que la acción está en proceso y aún no ha sido completada. Como puede verse en los ejemplos mostrados, se identificará la descripción de la acción con el autor de la misma. El hecho de remarcar la autoría de la acción se hace imprescindible en aquellas situaciones donde la verbalización corresponde a un sujeto diferente al que realiza la acción, coincidiendo ambos hechos en el tiempo y, por tanto, siendo recogidos en un mismo ítem. En las situaciones en que sí coincide el autor de acción y verbalización, será habitual omitir el sujeto en la descripción de la acción. De este modo, habitualmente las acciones quedarán recogidas en el protocolo escrito siempre mediante como mínimo una oración con los elementos sujeto-tipo de acción-descripción escritos en este orden, excepto cuando el autor de la acción coincida con el de la verbalización, donde será posible la elipsis del autor al describir la acción.

6.3. LA SELECCIÓN DE LOS PARTICIPANTES

La selección de los participantes se hizo a partir del estudio de grupos, estableciéndose los siguientes criterios para la formación de las parejas: 1) pertenencia al grupo de alumnos que desarrollaron la secuencia de enseñanza usando la versión completa del sistema tutorial; 2) puntuación similar en el cuestionario Post; y 3) dificultades en los mismos problemas del cuestionario Post. De manera complementaria a estos criterios, una vez conformadas las parejas de estudiantes, se consultó la opinión del profesor de la materia de Matemáticas con el fin de que éste advirtiese posibles incompatibilidades entre los alumnos que, posteriormente, pudieran derivar en situaciones de escasa verbalización durante el estudio de casos.

El primero de los criterios es evidente pues dado nuestro interés en estudiar cómo parejas de estudiantes resuelven problemas verbales aritmético-algebraicos usando el tutor HBPS, seleccionamos estudiantes entre aquellos que habían realizado la secuencia de enseñanza haciendo uso de esta herramienta. Aunque el diseño del tutor aspira a conseguir un rápido aprendizaje del funcionamiento del mismo, como pudimos comprobar a lo largo de la secuencia de enseñanza, en el estudio de casos deseábamos que el análisis se centrase en el proceso de resolución y no en el conocimiento que los resolutores tuvieran del entorno en el que se desarrollaba la resolución.

Al respecto del segundo y tercer criterio, en primer lugar debemos señalar que nuestra intención a partir del estudio de grupo era identificar perfiles de resolutores y constituir parejas conformadas por miembros del mismo perfil. Además, en el estudio de casos deseábamos prestar especial atención a aquellos problemas que habían ofrecido mayores dificultades a los estudiantes en el cuestionario Post. Esta decisión se fundamentó en la intención de ampliar el conocimiento de qué actuaciones desarrollaban los estudiantes cuando intentaban dar respuesta a estos problemas, más allá de las cogniciones petrificadas[2] que se pudieran inferir de las producciones escritas del cuestionario cuando resolvían con lápiz y papel. Al mismo tiempo, este análisis podría poner de manifiesto qué elementos de los problemas son relevantes en relación con la dificultad que suponen a los estudiantes.

Con estas perspectivas, en primer lugar realizamos una clasificación de los problemas del cuestionario Post atendiendo al criterio de dificultad. Para ello, consideramos como problemas difíciles aquellos que la mitad o más de la mitad de los estudiantes del grupo experimental no habían sido capaces de resolver en la prueba Post. Con este criterio seleccionamos como problemas de interés para el estudio de casos los problemas *La excursión* (cuatro planteamientos correctos entre los 19 estudiantes del grupo CT), *El té* (tres planteamientos correctos), *Amelia y Enrique* (tres planteamientos), *Conejos y gallinas* (nueve planteamientos), *El bautizo* (seis planteamientos), *El pintor* (cinco planteamientos), *Dos coches* (cero planteamientos), *Luis y su madre* (cuatro planteamientos) y *Los cromos* (tres planteamientos). Adicionalmente, al aparecer entre estos problemas dos pertenecientes a la subfamilia de problemas de edades (*Amelia y Enrique* y *Luis y su madre*) optamos por renunciar a uno de ellos con el objeto de disminuir el número de problemas que posteriormente emplearíamos en el estudio de

[2] Puig (2006) nombra *cogniciones petrificadas* a “una manera de examinar los textos de matemáticas de épocas pasadas” (p. 1) y que es extrapolable a las producciones de los alumnos. Bajo este enfoque, consideramos las producciones como “petrificadas” en el sentido de que no expresan más que está explícito en ellos, y “cogniciones” pues reflejan el producto (parcial y puntual) de las cogniciones (matemáticas) del autor de la producción,

casos. Así, decidimos descartar el problema *Luis y su madre* que había tenido un número de planteamientos correctos superior al de *Amelia y Enrique*. De esta manera, habíamos restringido el análisis de los catorce problemas que componían el cuestionario Post a los ocho anteriormente mencionados.

Una vez realizada una preselección de los problemas del cuestionario Post, procedimos a realizar un estudio de qué problemas de este subconjunto no habían sido resueltos correctamente por cada estudiante, con la intención de poder seleccionar parejas en los que ambos miembros tuvieran dificultades en los mismos problemas. De esta forma, acometimos una primera aproximación estudiando posibles parejas en función del número de coincidencias de planteamientos incorrectos en los problemas difíciles. La Tabla 6.1 muestra, para todas las posibles parejas de estudiantes, el número de dichas coincidencias. A su vez, la última columna de la tabla muestra la puntuación asignada a cada estudiante en el cuestionario Post. A partir de la información recogida en la tabla, iniciamos la conformación de las parejas.

Tabla 6.1.

Número de coincidencias en la resolución incorrecta de problemas del cuestionario Post

	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Estudiante 5	Estudiante 6	Estudiante 7	Estudiante 8	Estudiante 9	Estudiante 10	Estudiante 11	Estudiante 12	Estudiante 13	Estudiante 14	Estudiante 15	Estudiante 16	Estudiante 17	Estudiante 18	Estudiante 19	Puntuación Post
Estudiante 1	8	2	3	2	3	1	4	3	3	3	4	4	3	2	3	4	4	4	4	8
Estudiante 2	2	8	3	3	6	4	6	6	6	5	6	6	6	1	4	6	5	6	6	8
Estudiante 3	3	3	8	2	3	2	4	4	4	4	4	4	4	2	3	4	4	4	4	9
Estudiante 4	2	3	2	8	3	3	4	4	4	3	4	4	4	2	3	4	4	4	4	10
Estudiante 5	3	6	3	3	8	4	7	6	6	5	7	7	6	1	5	7	6	7	7	6
Estudiante 6	1	4	2	3	4	8	4	4	4	3	4	4	4	1	3	4	4	4	4	9
Estudiante 7	4	6	4	4	7	4	8	7	7	6	8	8	7	2	6	8	7	8	8	5
Estudiante 8	3	6	4	4	6	4	7	8	7	6	7	7	7	2	5	7	6	7	7	5
Estudiante 9	3	6	4	4	6	4	7	7	8	6	7	7	7	2	5	7	6	7	7	5
Estudiante 10	3	5	4	3	5	3	6	6	6	8	6	6	6	2	5	6	5	6	6	8
Estudiante 11	4	6	4	4	7	4	8	7	7	6	8	8	7	2	6	8	7	8	8	4
Estudiante 12	4	6	4	4	7	4	8	7	7	6	8	8	7	2	6	8	7	8	8	1
Estudiante 13	3	6	4	4	6	4	7	7	7	6	7	7	8	2	5	7	6	7	7	2
Estudiante 14	2	1	2	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	8	2	2	2	2	2	12
Estudiante 15	3	4	3	3	5	3	6	5	5	5	6	6	5	2	8	6	5	6	6	5
Estudiante 16	4	6	4	4	7	4	8	7	7	6	8	8	7	2	6	8	7	8	8	0
Estudiante 17	4	5	4	4	6	4	7	6	6	5	7	7	6	2	5	7	8	7	7	2
Estudiante 18	4	6	4	4	7	4	8	7	7	6	8	8	7	2	6	8	7	8	8	0
Estudiante 19	4	6	4	4	7	4	8	7	7	6	8	8	7	2	6	8	7	8	8	1

En primer lugar, decidimos descartar aquellos estudiantes con rendimientos muy bajas en el cuestionario Post bajo la consideración de que podrían ser alumnos con pocas probabilidades de generar situaciones ricas en el transcurso del estudio de casos.

Adoptamos el criterio de descartar los alumnos con puntuación inferior al primer cuartil, de tal forma que descartamos los estudiantes con puntuaciones inferiores o iguales a uno (sobre catorce). En consecuencia, descartamos los estudiantes 12, 16, 18 y 19. Adicionalmente, atendimos la sugerencia del profesor de no incluir en el estudio al estudiante 15 pues era un alumno muy introvertido y, difícilmente, se manifestaría con soltura al ser grabado. Además, el propio alumno nos había solicitado no participar en esta parte del estudio.

Una vez realizadas estas consideraciones, en consonancia con el segundo criterio establecido para la conformación de parejas, procedimos a realizar una clasificación de los alumnos según la competencia mostrada en el cuestionario Post en tres niveles: bajo, medio y alto. Para ello, se ejecutó un análisis de conglomerados no jerárquico obteniéndose una clasificación de los estudiantes para el estudio de casos en tres grupos en la forma en que se refleja en la Tabla 6.2.

Tabla 6.2.

Clasificación de alumnos seleccionados para el estudio de casos según rendimiento en cuestionario Post

Nivel	Estudiantes
Bajo	5, 7, 8, 9, 11, 13 y 17
Medio	1, 2, 3, 4, 6 y 10
Alto	14

En primer lugar, construimos las parejas de nivel bajo. Tal y como refleja la Tabla 6.2 eran candidatos para esta primera categoría de parejas los estudiantes 7, 8, 9, 11, 13 y 17. A continuación describimos las parejas establecidas y una breve explicación de los motivos que nos llevaron a considerar convenientes las mismas:

- *La pareja Luisa-Octavio*. Estaba formada por los estudiantes 8 (Luisa) y 9 (Octavio). Ambos estudiantes obtuvieron una puntuación de cinco en el cuestionario Post. Ambos habían sido incapaces de resolver exitosamente los problemas *La excursión*, *El té*, *Amelia y Enrique*, *Conejos y gallinas*, *El bautizo*, *El pintor*, *Dos coches*, *Luis y su madre* y *Los cromos*. Además, seleccionamos esta pareja por la coincidencia a la hora de realizar determinados planteamientos erróneos. Por ejemplo, en el problema *El té* ambos propusieron la misma ecuación en la que se produce la incorrecta interpretación de un coste unitario como un coste total (véanse Figura 6.1 y Figura 6.2).

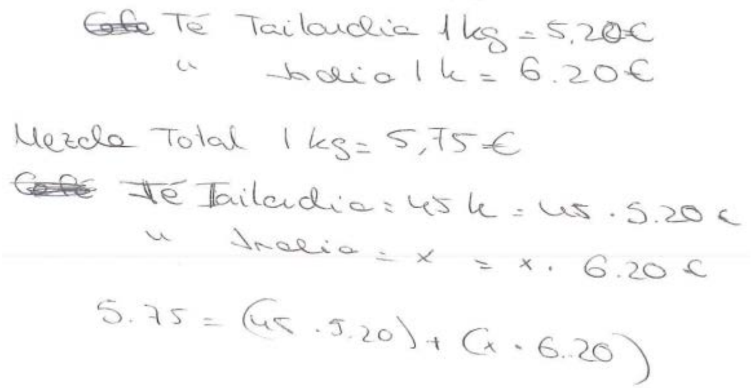


Figura 6.1. Resolución de Luisa del problema *El té*.

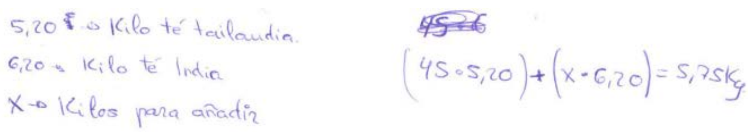


Figura 6.2. Resolución de Octavio del problema *El té*.

También en el problema *El bautizo* plantearon la misma ecuación incorrecta ($x + 8 = 975$) en lo que parece un intento de representar una asociación entre cantidades más que la igualdad entre dos representaciones duales de una misma cantidad (Figuras 6.3 y 6.4).

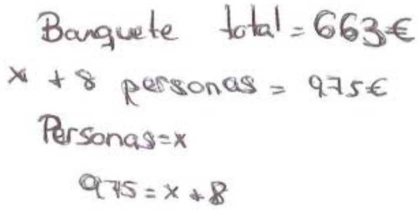


Figura 6.3. Resolución de Luisa del problema *El bautizo*.

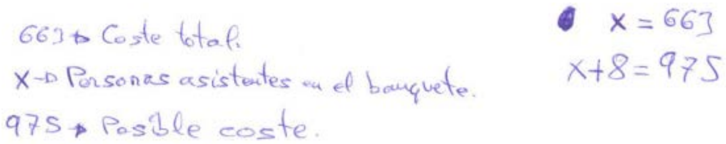


Figura 6.4. Resolución de Octavio del problema *El bautizo*.

- *La pareja Alba-Olga*. Estaba formada por los estudiantes 7 (Alba) y 11 (Olga). Alba y Olga obtuvieron una puntuación de cinco y cuatro en el cuestionario Post, respectivamente. Ambas habían sido incapaces de resolver exitosamente los problemas *La excursión*, *El té*, *Amelia y Enrique*, *Conejos y gallinas*, *El bautizo*, *El pintor*, *Dos coches* y *Los cromos*. Además, observamos que ambas alumnas intentaron resolver el problemas *Conejos y gallinas* mediante la ecuación $x + y = 20 + 52$ (Figura 6.5 y Figura 6.6), aunque bien es cierto que Olga terminó tachando su resolución.

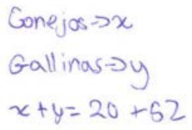


Figura 6.5. Resolución de Alba del problema *Conejos y gallinas.*

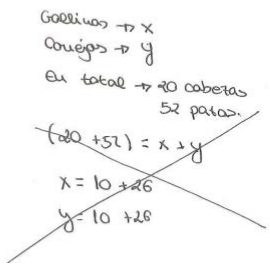


Figura 6.6. Resolución de Octavio del problema *El bautizo*.

Adicionalmente, algunas de las producciones de Alba, la hacían clara candidata para el estudio de casos. En concreto, nos referimos a resoluciones donde la alumna construía dos representaciones duales de una misma cantidad sin llegar a escribir la ecuación, ya sea mediante la igualación directa o a través de una segunda letra (véanse Figura 6.7 y Figura 6.8).

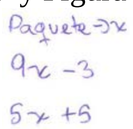


Figura 6.7. Resolución de Alba del problema *Conejos y gallinas*.

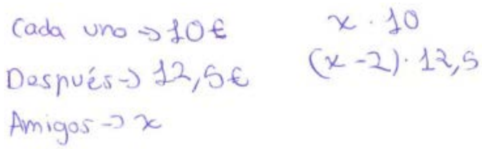


Figura 6.8. Resolución de Alba del problema *El bautizo*.

En segundo lugar, abordamos la construcción de parejas de nivel medio, considerando así como posibles candidatos los estudiantes 1, 2, 3, 4, 6 y 10. A continuación enunciamos las parejas formadas así como los motivos de su agrupación:

- *La pareja Eva y Marta*. Estaba formada por los estudiantes 3 (Marta) y 10 (Eva). Eva y Marta obtuvieron una puntuación de ocho y nueve en el cuestionario Post, respectivamente. Ambas habían sido incapaces de resolver exitosamente los problemas *La excursión*, *El té*, *Amelia y Enrique* y *Dos coches*. En esta pareja, son llamativas, a pesar de la buena puntuación obtenida en el cuestionario Post, las dificultades para resolver el problema *Amelia y Enrique*. Mientras Eva comete un error de inversión en la construcción de la ecuación (Figura 6.9), Marta no parece capaz de usar la estructura conceptual que liga las edades actuales y futuras mediante el tiempo transcurrido (Figura 6.10).

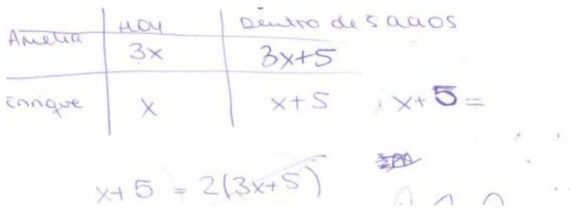


Figura 6.9. Resolución de Eva del problema *El té.*

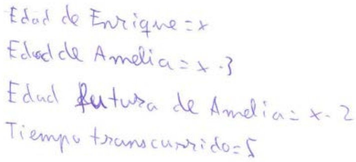


Figura 6.10. Resolución de Marta del problema *El té.*

- *La pareja Celia-Remedios*. Esta pareja se conformó por el interés de incluir la estudiante Remedios en el estudio de casos. Principalmente deseábamos dar sentido, a través del estudio de casos, a algunas de las producciones de Remedios en la prueba escrita, por lo que seleccionamos como pareja a una estudiante de nivel bajo con la expectativa de que Remedios asumiera un papel dominante durante la resolución. De hecho, Celia obtuvo la puntuación más baja entre los alumnos candidatos de nivel bajo. Así, la pareja quedo conformada por Remedios (estudiante 1) y Celia (estudiante 17), ambas con puntuaciones de ocho y dos en el cuestionario Post, respectivamente. Ambas habían sido incapaces de resolver exitosamente, por separado, los problemas *La excursión*, *Amelia y Enrique*, *Conejos y gallinas* y *Dos coches*. Como anticipábamos líneas arriba, en el estudio de casos de esta pareja se pretendía, entre otras cosas, poder arrojar luz sobre la original resolución del problema *Amelia y Enrique* por parte de Remedios (Figura 6.11) o el sistema propuesto en *Conejos y gallinas*, que puede parecer sorprendente en una alumna capaz de resolver otros problemas considerados como difíciles (Figura 6.12).

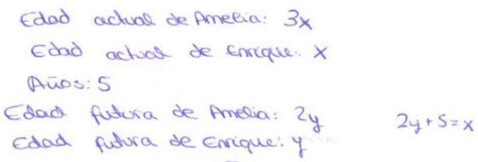


Figura 6.11. Resolución de Remedios del problema *Amelia y Enrique.*

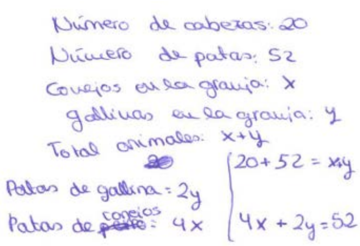


Figura 6.12. Resolución de Remedios del problema *Conejos y gallinas.*

- *La pareja Yolanda-Cándido*. Formada por los estudiantes 4 (Yolanda) y 6 (Cándido) con puntuaciones diez y nueve, respectivamente. Ambos estudiantes habían sido incapaces de resolver exitosamente los problemas *El pintor, Dos coches* y *Los cromos*.

- *La pareja Carmen-Piedad*. Estaba formada por los estudiantes 2 (Carmen) y 5 (Piedad). En realidad, dado que tras formación de las parejas anteriores, sólo quedaba un estudiante de nivel medio (Carmen), seleccionamos a Piedad, la estudiante de nivel bajo de mayor puntuación, para conformar la pareja. Carmen obtuvo una puntuación de ocho en el cuestionario Post mientras que Piedad obtuvo un seis. Ambas habían sido incapaces de resolver exitosamente los problemas *La excursión*, *El té*, *El bautizo*, *El pintor*, *Dos coches* y *Los cromos*.

Finalmente, teníamos la intención de completar el estudio de casos con una pareja de nivel alto. Sin embargo, sólo contábamos con un estudiante de nivel alto en el grupo que trabajó durante la secuencia de enseñanza con la versión completa del tutor. Dado nuestro deseo de conformar una pareja *pura* de estudiantes de nivel alto, optamos por crear una pareja con los estudiantes 14 y 23 (puntuaciones doce y trece, respectivamente). Esta decisión implicaba dar entrada en el estudio de casos a un alumno del grupo que trabajó durante la secuencia de enseñanza con la versión limitada del tutor. Teniendo en consideración que durante el estudio de casos los alumnos no estaban autorizados a utilizar las funcionalidades no habilitadas en la versión limitada, estimamos que la adaptación del estudiante 23 al tutor completo sería transparente y que no debería suponer un hándicap para el mismo. Por el contrario, resultaba de especial interés poder analizar cómo actuaba una pareja formada por alumnos que, prácticamente, habían resuelto correctamente todos los problemas del cuestionario Post ante problemas de dificultad elevada. En resumen, la pareja constituida de nivel alto fue:

- *La pareja Nuria-Jorge*. Formada por los estudiantes 14 (Nuria) y 23 (Jorge) con puntuaciones doce y trece, respectivamente. Dado que no se produjo coincidencia en los problemas (o el problema, en el caso de Jorge) que no supieron plantear, esta pareja en el estudio de casos no abordó ningún problema del cuestionario Post. En el apartado siguiente presentamos y justificamos los problemas planteados para las parejas de mayor nivel de competencia.

6.4. LA SELECCIÓN DE LOS PROBLEMAS

En conjunto, utilizamos once problemas en el estudio de casos, ocho procedentes del cuestionario Post y tres de una dificultad superior. Para la selección de los problemas a usar procedentes del cuestionario, establecimos los siguientes requisitos: 1) que tuvieran un nivel de dificultad similar; y 2) que pertenecieran a subfamilias de problemas distintas y, en consecuencia, dieran cuenta de una mayor variedad de estructuras conceptuales. Al provenir los problemas del cuestionario Post, se garantizaba que no fueran problemas isomorfos entre sí (véase capítulo 5). De entre los problemas del cuestionario Post, sólo tuvimos en consideración los problemas *La excursión*, *El té*, *Amelia y Enrique*, *Conejos y gallinas*, *El bautizo*, *El pintor*, *Dos coches* y *Los cromos*, pues tal como se explicó anteriormente fueron los que se tomaron como referencia para la distribución de los estudiantes en parejas. La preselección de estos problemas ya se fundamentó en escoger aquellos problemas del cuestionario Post con tasas bajas de resoluciones correctas en la prueba escrita, por lo que ya se estaba tomando en consideración el primer criterio de elección de problemas para el estudio de casos.

En lo que respecta al segundo criterio, inicialmente la preselección incluía nueve problemas, pues el problema *Luis y su madre* estaba incluido en dicha relación. Sin embargo, se decidió descartar este problema para no utilizar en el estudio de casos dos problemas de la subfamilia de edades, con las mismas estructuras conceptuales implicadas. De esta forma, del cuestionario Post finalmente se emplearon ocho problemas, quedando por determinar de entre estos problemas cuáles resolvería cada pareja. En este sentido, partíamos de la restricción temporal del estudio, que implicaba una duración del estudio de casos de entre 30 y 40 minutos por pareja. Esta planificación estimaba que cada pareja podría resolver cuatro problemas, aunque siendo conscientes de que el número podría ser mayor en función del desempeño de la pareja. De esta manera, establecimos una serie de directrices para establecer los problemas a resolver por cada pareja. En primer lugar, la pareja debía abordar los problemas que no había sido capaz durante la prueba escrita. Este criterio por sí solo ya determinaba los problemas a resolver en el estudio de casos para aquellas parejas con un número de problemas no resueltos en el cuestionario de cuatro o cinco problemas. De este modo, para las parejas Celia-Remedios y Eva-Marta quedaron perfectamente determinados por este primer criterio los problemas a resolver en el estudio de casos. En segundo lugar fijamos una serie de criterios adicionales para seleccionar los problemas en aquellas parejas dónde hubiese un número elevado de problemas sin resolver correctamente del cuestionario Post. El primero de ellos consistía en seleccionar entre el abanico de problemas disponibles para cada pareja una colección inicial de cuatro problemas entre los cuales se encontrarán aquellos que hubieran revelado producciones de interés en la prueba escrita. Adicionalmente, procuramos evitar el problema de móviles *Dos coches* para las parejas de nivel bajo, pues éste se había revelado como muy difícil de resolver para todo el grupo. Así, sobre la base de actuaciones en la producción escrita con posible potencial para el estudio de casos, seleccionamos los problemas *La excursión*, *Amelia y Enrique*, *El té* y *Los cromos* para la pareja Luisa-Octavio y los problemas *Amelia y Enrique*, *Conejos y gallinas*, *Los cromos* y *El bautizo* para la pareja Alba-Olga, ambas parejas clasificadas como de nivel bajo. En el caso de la pareja Carmen-Piedad, el abanico disponible involucraba los problemas *La excursión*, *El té*, *El bautizo*, *El pintor*, *Dos coches* y *Los cromos*, de entre los que decidimos descartar el problema de móviles, por los motivos anteriormente expuestos, y dejamos el problema *El pintor* en reserva por si la pareja disponía finalmente de tiempo suficiente para resolver cinco problemas.

En aquellos casos donde la pareja dio cuenta de los problemas planificados con mayor velocidad de la estimada, se decidió proponer más problemas a dichas parejas hasta consumir el tiempo total del estudio de casos. La asignación de nuevos problemas se hizo bajo los mismos principios que la adjudicación original, es decir, en primer lugar ofrecer problemas no resueltos del cuestionario Post, dando prioridad a aquellos que pudieran resultar de interés por las actuaciones en la prueba escrita o bien que el investigador considerara oportuno a la vista de las intervenciones de la pareja en el estudio de casos. En el caso de que la pareja agotase todos los problemas no resueltos del cuestionario Post, el investigador valoraría la posibilidad de ofrecer problemas de mayor complejidad. En este sentido, resulta llamativo el estudio de casos protagonizado por la pareja Eva-Marta, que en el tiempo establecido llegaron a abordar siete problemas.

Los parámetros de selección de problemas para cada pareja detallados en el párrafo anterior, obviamente, no son aplicables a aquellas parejas de nivel superior con pocos problemas pendientes de resolver del cuestionario Post. Para estos estudiantes se imponía la búsqueda de problemas de mayor dificultad y en los que pudieran emerger situaciones ricas conceptualmente. Esta decisión nos llevó a seleccionar el problema *El* *heno*[3], el cual ha sido ampliamente utilizado en anteriores investigaciones (véase por ejemplo, Puig (1996) o Cerdán (2008)). Sobre este problema, Cerdán (2008) indicaba que éste conllevaba un mayor nivel de complejidad, pues el enunciado describe una situación en que "se consideran cantidades y relaciones que no están explícitamente mencionadas en el texto del problema, o que hay que construir para dar una explicación pertinente de la situación." (p. 59).

Además del problema *El heno*, decidimos añadir un problema de móviles, los cuales habían generado grandes dificultades entre los participantes en el estudio. No obstante, para las parejas de nivel alto, estimamos interesante que el problema de móviles añadiera un elemento de dificultad adicional y fuera un problema subdeterminado[4], al que denominamos *El alcance*. En este tipo de problemas subdeterminados, o siendo correctos, en una lectura subdeterminada de estos problemas se observan más cantidades desconocidas que relaciones y, no obstante, esto no resulta impedimento para calcular la cantidad por la que se pregunta en el enunciado. Sin embargo, sí que existirá al menos una cantidad desconocida imposible de determinar. Esta tipología de problemas podría generar durante el esbozo lógico-semiótico una (falsa) percepción de ausencia de datos en el enunciado y. por tanto, que los resolutores consideraren imposible dar respuesta al enunciado del problema. Así, consideramos que un problema de móviles subdeterminado sumaría esta dificultad a las propias de las estructuras conceptuales involucradas en esta subfamilia de problemas, generando una situación exigente para las parejas de nivel más alto. Finalmente, se incluyó un tercer problema, también subdeterminado, en este caso de la subfamilia de trabajo, con nombre *La traductora*, isomorfo al problema *El alcance*.

A continuación, ofrecemos un análisis de los problemas utilizados en el estudio de casos, con excepción de los que fueron utilizados también en el cuestionario Post, pues el análisis de estos problemas está disponible en el capítulo 5. La lectura ofrecida de cada problema se corresponde con la cargada en el sistema tutorial durante el estudio de casos.

6.4.1. EL PROBLEMA "EL HENO"

Un granjero había almacenado cierta cantidad de heno para el consumo de ganado pensando que duraría 198 días. Sin embargo, el heno duró 217 días ya que era de mejor calidad y el ganado consumió 171 kg menos por día de lo que se había previsto que gastaría. ¿Cuánto heno se había almacenado en la granja?

Análisis de las cantidades

Días previstos = *Dp* = 198

Días reales = *Dr* = 217

Heno ahorrado diario = *Had* = 171

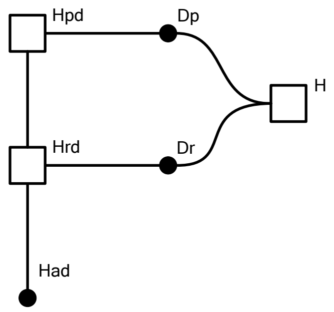
[3] El problema *El heno* proviene de Kalmykova (1975), quien, a su vez, lo tomó de un manual escolar soviético de 1940 (Puig, 1996). La riqueza del análisis teórico del problema y de las actuaciones de estudiantes a la hora de resolverlo se reflejan en el alto número de investigaciones en que ha sido usado. Algunos ejemplos son: Cerdán (2008); Filloy, Puig et al. (2008); Filloy, Rojano et al. (2008); Puig (1996, 2010); y, Puig y Cerdán (1988, 1990).

[4] Los problemas subdeterminados son aquellos que tienen la característica de que es posible determinar la cantidad por la que se pregunta en el problema, pero no otras que participan en el proceso de resolución.

Gasto diario real = *Hrd*

Gasto diario previsto = *Hpd*

Heno almacenado = *H*

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$H = Hpd \cdot Dp$ $H = Hrd \cdot Dr$ $Hpd = Hrd + Had$	 Figura 6.13. Grafo del problema *El heno*.

6.4.2. EL PROBLEMA “EL ALCANCE”

Un ciclista parte de la ciudad A hacia la ciudad B. Cuatro horas más tarde parte un motorista de A hacia B al triple de velocidad que el ciclista. ¿Cuánto tiempo transcurre desde que sale el motorista hasta que alcanza al ciclista?

Análisis de las cantidades

Velocidad del ciclista = *Vc*

Velocidad del motorista = *Vm*

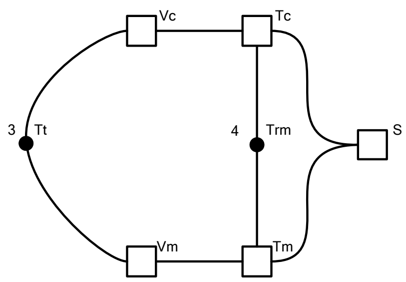
Número por el que hay que multiplicar la velocidad del ciclista para obtener la velocidad del motorista = *Tt* = 3

Horas de retraso con las que sale el motorista = *Trm* = 4

Tiempo desde que sale el ciclista hasta encontrarse = *Tc*

Tiempo desde que sale el motorista hasta encontrarse = *Tm*

Distancia de A a la que se encuentran = *S*

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$S = Vc \cdot Tc$ $S = Vm \cdot Tm$ $Vm = Tt \cdot Vc$ $Tc = Tm + Trm$	 Figura 6.14. Grafo del problema *El alcance*.

6.4.3. EL PROBLEMA “LA TRADUCTORA”

Una traductora traduce un determinado número de páginas en un determinado número de días. Si tradujese 20 páginas menos cada día, tardaría el triple de días. ¿Cuántas páginas escribe en cada caso?

Análisis de las cantidades

Páginas diarias traducidas en la situación real = *Pdr*

Páginas diarias traducidas en la situación hipotética = *Pdh*

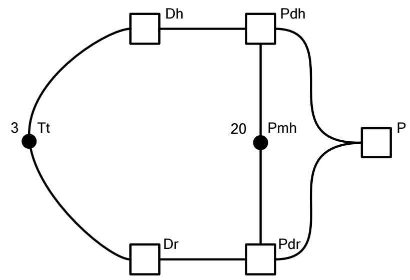
Páginas diarias que traduce de menos en la situación hipotética respecto a la real = *Pmh* = 20

Número por el que hay que multiplicar el número de páginas traducidas en la situación real para obtener el número de páginas traducidas en la situación hipotética = *Tt* = 3

Días que traduce en la situación real = *Dr*

Días que traduce en la situación hipotética = *Dh*

Páginas traducidas = *P*

Análisis de las relaciones	*Grafo*
$P = Dh \cdot Pdh$ $P = Dr \cdot Pdr$ $Dh = Tt \cdot Dr$ $Pdr = Pdh + Pmh$	 Figura 6.15. Grafo del problema *La traductora*.

6.5. EL ANÁLISIS DE LOS CASOS

Para el análisis de los casos reconstruimos el proceso de resolución a partir de los protocolos escritos originados en las actuaciones de cada pareja de estudiantes. Para dar sentido a las actuaciones de los estudiantes tomamos en consideración tanto el modelo de competencia como las actuaciones o tendencias cognitivas documentadas en anteriores investigaciones. La reconstrucción se plasma en dos columnas con el objeto de hacer más inteligible el análisis. Así, en la columna de la derecha se recoge el protocolo escrito agrupado en fragmentos, mientras que en la columna izquierda se describe la parte del proceso de resolución de la que da cuenta el fragmento correspondiente. A su vez, la descripción del proceso es complementada con posibles interpretaciones de las actuaciones de los estudiantes. Además, la reconstrucción las resoluciones se acompañará de la representación mediante grados, de tal manera que cada acción de los estudiantes en HBPS se plasmará en una actualización del grafo correspondiente (p. ej. al introducir una cantidad conocida en HBPS, esto se plasmará en la aparición de un vértice oscuro en el grafo). De esta forma, el grafo constituirá una representación dinámica del proceso de resolución, que aportará información sobre el estado en que se encuentra el proceso. A su vez, las acciones incorrectas serán representadas mediante trazo discontinuo en el grafo.

Los fragmentos, en los que descomponemos el protocolo escrito, se corresponderían con lo que Puig (1996) califica de subepisodios y que nosotros llamaremos episodios al no tomar en consideración otros más generales dentro del proceso de resolución como sí hacía Puig. Estos subepisodios son definidos como segmentaciones de acciones dentro de un mismo paso del método (Puig, 1996). De hecho, Puig (1996), quien introdujo este tipo de análisis, justificó su necesidad al señalar que “cuando el proceso de resolución de un problema responde a la ejecución de un plan organizado por un método, la división en episodios da una información extremadamente parca de los procesos cognitivos que desarrollan los resolutores” (p. 63). Este nivel de fragmentación del protocolo nos permite un análisis más adecuado de las resoluciones de los estudiantes, considerando la demanda cognitiva de las acciones necesarias en cada paso del método y su relación con el modelo de competencia.

Por otro lado, la manera en que se ordenan para cada pareja el análisis de las actuaciones, se corresponde con el orden en que los problemas fueron ofrecidos a las parejas en el estudio de casos.

6.5.1. LA PAREJA CELIA-REMEDIOS

6.5.1.1. El caso de la pareja Celia-Remedios en el problema “La excursión”

Un grupo de amigos está planificando una excursión. A cada amigo la excursión le va a costar 10 €. Sin embargo, a última hora, dos de los amigos deciden no ir a la excursión por lo que el resto ha de pagar 12,5 € cada uno. ¿Cuántas personas forman parte del grupo de amigos?

Remedios lee el enunciado en alto. Celia (ítem 2) lee el nombre de la cantidad activa inicialmente, *Cia*. Inmediatamente Remedios despliega la lista de cantidades mostrando el nombre de todas las cantidades involucradas en el problema. Celia (ítem 4) señala con el dedo la cantidad *Cia* en la ventana de cantidades y verbaliza que dicha cantidad toma el valor 10. Sin embargo, Remedios (ítem 5) solicita paciencia a su compañera y decide definir en primer lugar la cantidad desconocida *A*. Este comportamiento es bastante inusual entre las resoluciones grabadas en el estudio de caso donde lo habitual es identificar y dar valor a las cantidades conocidas para después seleccionar entre las cantidades desconocidas uno o varias cantidades a representar mediante una letra. En este caso Celia (ítem 6) opta directamente por asignar la letra *x* a la cantidad desconocida (*A*) por la que se pregunta en el enunciado. La cantidad activa pasa a ser la cantidad conocida *An*.

1. (*Remedios lee el enunciado en voz alta.*)
2. Celia: Pues, a ver, lo primero, coste por persona si asistiesen todos los amigos… (*Remedios despliega la lista de cantidades. La cantidad activa inicialmente es “coste por persona si asistiesen todos los amigos”*).
3. Remedios: número de amigos…
4. Celia: …diez, esto es diez… (*Señala en la lista la cantidad “coste por persona si asistiesen todos los amigos”*)
5. Remedios: Espérate. Número de amigos. (*Remedios activa la cantidad “número de amigos del grupo”*.)
6. Celia: Eso es… equis. (*Celia asigna la letra “x” a la cantidad “número de amigos del grupo”. La cantidad activa pasa a ser “número de amigos que no asisten”*.)

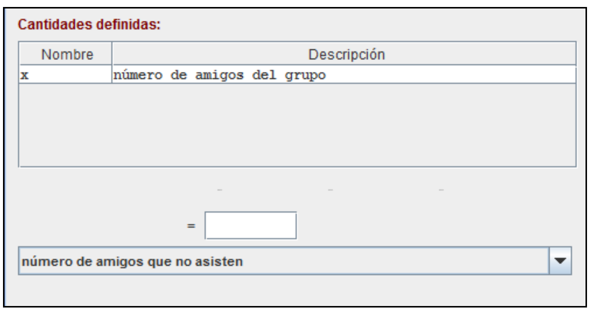


Figura 6.16. Ventana de cantidades después del ítem 6.

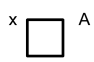


Figura 6.17. Grafo después del ítem 6.

En el ítem 8 Remedios manifiesta su intención de asignar la letra *y* a esta

7. (*Remedios despliega la lista de cantidades.*)
8. Remedios: Número de amigos que no

cantidad. Celia (ítem 9) reacciona rápidamente señalando al enunciado para subrayar que el número de amigos que no asisten es dos. Remedios (ítem 10) da sin dudar la razón a su compañera, tras lo cual Celia da el valor 2 a la cantidad *An*.

asisten, *y*. (*Remedios activa la cantidad "número de amigos que no asisten"*.)

9. Celia: ¿Cómo que *y*? Dos. (*Celia señala el enunciado*.)

10. Remedios: ¡Ah, es verdad! Sí, sí, dos. (*Celia asigna el valor "2" a la cantidad "número de amigos que no asisten". La cantidad activa pasa a ser "coste por persona si dos amigas no asisten"*.)

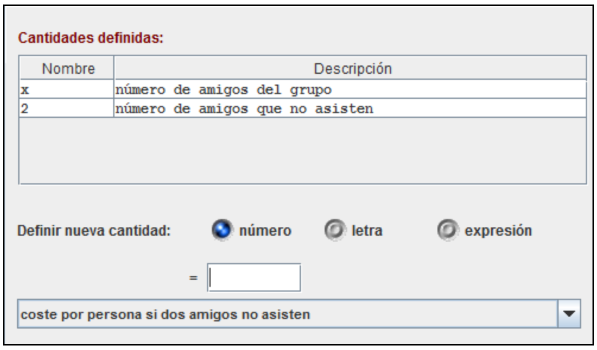


Figura 6.18. Ventana de cantidades después del ítem 10.

Figura 6.19. Grafo después del ítem 10.

La cantidad conocida *Cfa* es activada por defecto, pero Remedios (ítem 11) decide activar en su lugar otro coste unitario conocido, la cantidad *Cia*. Remedios (ítem 12) propone darle el valor 10, ante lo que Celia se muestra favorable y define así la cantidad en el tutor.

11. (*Remedios cambia la etiqueta activa de "coste por persona si dos amigos no asisten" a "coste por persona si asisten todos los amigos"*.)

12. Remedios: Coste por persona si asisten todos los amigos, diez.

13. Celia: Pues diez. (*Asigna el valor "10" a la cantidad "coste por persona si asisten todos los amigos"*.)

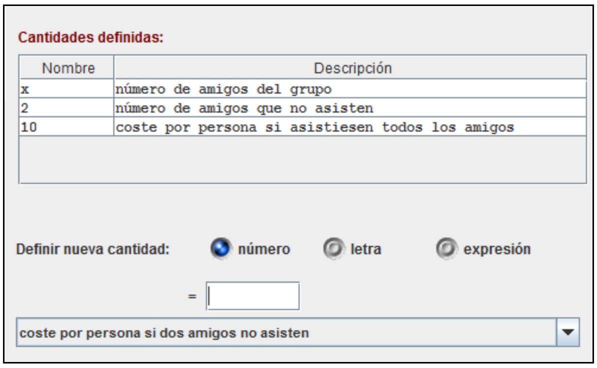


Figura 6.20. Ventana de cantidades después del ítem 13.

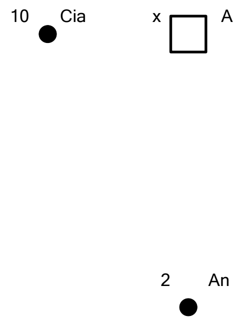


Figura 6.21. Grafo después del ítem 13.

Tras ello, abordan ahora sí la definición del coste unitario *Cfa*, última de las cantidades conocidas por definir. A propuesta de Remedios (ítem 15) Celia (ítem 16) asigna el valor 12,5 al coste por persona cuando asisten a la reunión dos personas menos del total que conforman el grupo.

14. (*Remedios vuelve a desplegar la lista de cantidades*.)

15. Remedios: Coste por persona si dos amigos no asisten, doce con cinco.

16. (*Celia asigna el valor "12,5" a la cantidad "coste por persona si dos amigos no asisten"*.)

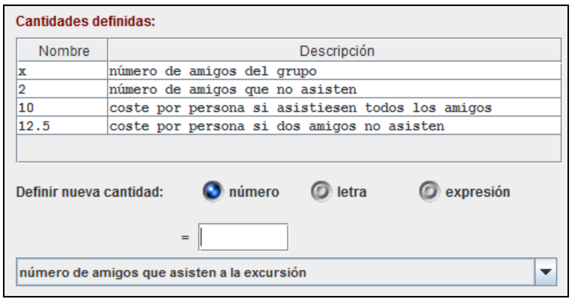


Figura 6.22. Ventana de cantidades después del ítem 16.

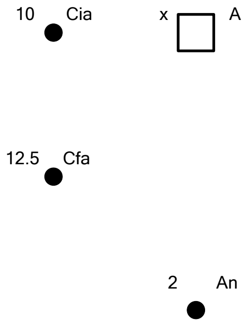


Figura 6.23. Grafo después del ítem 16.

Una vez que la pareja ha dado cuenta de todas las cantidades conocidas, quedan pendientes por definir las cantidades desconocidas *C* y *Aa*. Deciden abordar en primer término la cantidad activa *coste de la excursión*. Celia (ítem 19) plantea usar otra letra, proponiendo asignar la letra *y* a *C*. Remedios (ítem 20) acepta esta vía sin mediar argumentación alguna en la toma de la decisión. Directamente Celia representa la cantidad *C* mediante la letra *y* en el sistema (ítem 20).

17. (*La cantidad activa es "número de amigos que asisten a la excursión". Remedios despliega la lista de cantidades.*)

18. Remedios: Coste de la excursión… (*Activa la cantidad "coste de la excursión" en vez de "número de amigos que asisten a la excursión".*)

19. Celia: *y*.

20. Remedios: *y*. (*Celia asigna la letra "y" a la cantidad "coste de la excursión". Se activa la ventana de ecuaciones.*)

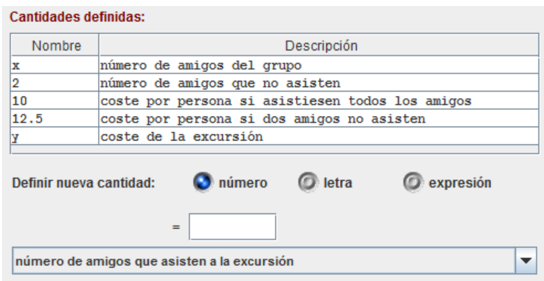


Figura 6.24. Ventana de cantidades después del ítem 20.

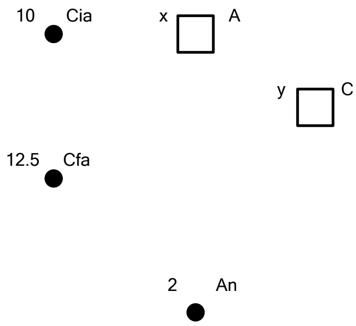


Figura 6.25. Grafo después del ítem 20.

Obviamente la cantidad activa pasa a ser la cantidad *Aa* pues es la única pendiente de definir. A pesar de ello, Remedios (ítem 21) intenta desplegar la lista de cantidades. Parece que Remedios considerara posible que hubiera más cantidades involucradas. Sin embargo, sus verbalizaciones posteriores no parecen indicar que le suponga ningún conflicto el hecho de que en la lectura del problema sólo quede una cantidad pendiente.

21. Remedios: Número de amigos que asisten… (*Despliega la lista de cantidad y sólo aparece la cantidad "número de amigos que asisten a la excursión".*)

22. Celia: … a la excursión.

23. Remedios: Espera.

Celia (ítem 24) propone representar el número de amigos que asisten a la excursión mediante la expresión algebraica $x - y$, o lo que es lo mismo, restando el coste de la excursión al número de amigos del grupo. Parece difícil dar sentido a esta relación que liga aditivamente a dos cantidades de diferentes magnitudes. En esta situación semeja encontrarse Celia pues en cuanto Remedios formula su propuesta, Celia insta a su compañera a que la explique (ítem 25). Al empezar a argumentar (ítem 26) Celia toma consciencia de que la relación que había verbalizado era incorrecta y rectifica empleando la relación aditiva correcta $A = Aa + An$. Remedios (ítem 27) aprueba esta decisión. Entre los ítems 28 y 30 la pareja se ocupa de asignar la expresión algebraica $x - 2$ a la cantidad Aa.

24. Celia: Equis menos *y*. ¿No?

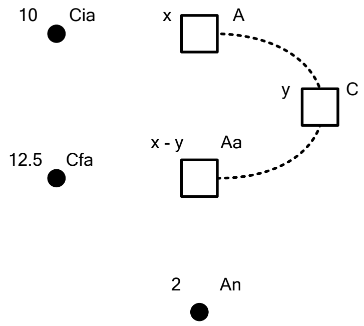


Figura 6.26. Grafo después del ítem 24.

25. Remedios: ¿Por qué?

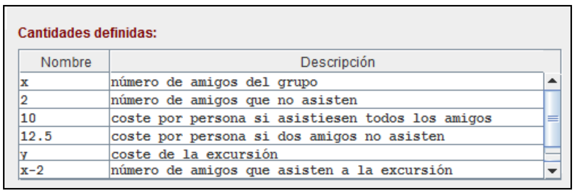
26. Celia: Porque si en principio van equis amigos y… ¡uuuh! Equis menos dos, porque si en principio van equis amigos y luego se quitan dos, como no sabemos el total…

27. Remedios: Vale. Equis menos dos.

28. Celia: Expresión.

29. (*Remedios activa la opción "expresión".*)

30. Celia: Equis menos dos. (*Remedios con el ratón construye la expresión "x−2", que es automáticamente asignada a la cantidad "número de amigos que asisten a la excursión".*)



Cantidades definidas:

Nombre	Descripción
x	número de amigos del grupo
2	número de amigos que no asisten
10	coste por persona si asistiesen todos los amigos
12.5	coste por persona si dos amigos no asisten
y	coste de la excursión
x-2	número de amigos que asisten a la excursión

Figura 6.27. Ventana de cantidades después del ítem 30.

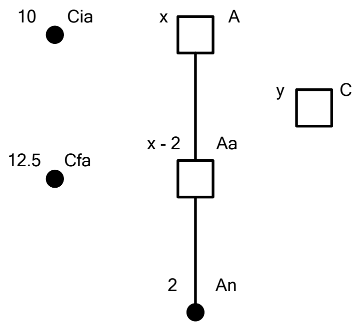


Figura 6.28. Grafo después del ítem 30.

El inicio del paso 4 del MC es marcado por el comentario de Celia (ítem 32) en el que explicita "vamos a hacer la ecuación". Esta intervención plantea dudas sobre si la estudiante tiene en mente la necesidad de construir dos ecuaciones y en su verbalización sólo se ha producido una elipsis: "vamos a hacer la (primera) ecuación" o si, en cambio, Celia considera que una única ecuación permitirá dar respuesta al problema.

31. Remedios: Vale.

32. Celia: Vamos a hacer la ecuación.

Celia (ítem 34 a ítem 36) propone construir una ecuación que refleje la relación incorrecta *Aa* = *Cfa* mediante la igualdad ($x - 2$) = 12,5. Remedios (ítem 38) intenta validar la ecuación pero el sistema no reconoce la ecuación como válida. A pesar de que la relación es claramente errónea, parece interesante subrayar como las dos cantidades empleadas, *Aa* y *Cfa*, están ligadas por la relación correcta C=$Cfa·Aa$ a partir de la cual es posible calcular el coste total de la excursión considerando la situación real (precio por persona de la excursión en la situación real y número de amigos que asisten a la excursión en la situación real).

33. Remedios: A ver…
34. Celia: Equis menos dos es igual a doce, ¿no? (*Remedios escribe "(x−2)=…".*)
35. Remedios: Sería igual a doce con cinco…
36. Celia: ¡Claro! (*Remedios concluye "(x−2)=12.5".*)
37. Remedios: Claro.
38. (*Remedios pulsa el botón "Aceptar" pero la ecuación no es validada por el tutor.*)

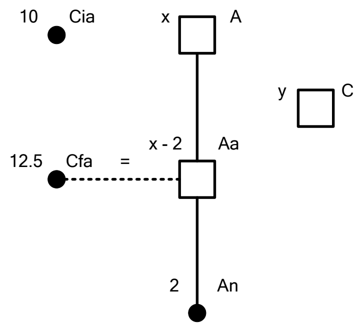


Figura 6.29. Grafo después del ítem 38.

De hecho, cuando se percatan de que la ecuación planteada no es correcta (ítem 39), Remedios (ítem 40) sugiere una nueva ecuación que liga incorrectamente las cantidades involucradas en C=$Cfa·Aa$. En concreto, en vez de tratar de expresar esta relación multiplicativa, Celia plantea la relación errónea C = Cfa + Aa en la forma ($x - 2$) = $y - 12{,}5$.

39. Celia: Pues no, no es igual a doce…
40. Remedios: Ehhh… el coste de la excursión *y* sería más doce con cinco. (*Escribe la ecuación "(x−2)=y−12.5". No es validada por el tutor.*)

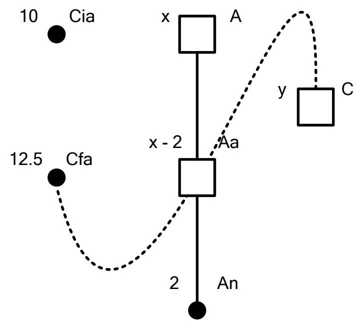


Figura 6.30. Grafo después del ítem 40.

Al ser informados de que la ecuación no es correcta, Remedios (ítem 42) opta por borrar la ecuación propuesta de la ventana de ecuaciones y buscar una alternativa a partir de una cantidad, *A*, no empleada hasta el momento en el paso cuarto del MC. Así, Remedios empieza a introducir en el sistema una ecuación de

41. Celia: No.
42. (*Remedios borra la ecuación anterior.*)
43. Remedios: No. A ver, el número de amigos… (*Remedios empieza a escribir "x…".*)
44. Celia: El número de amigos más coste de la excursión…
45. Remedios: Sería por diez, ¿no?
46. Celia: Por doce coma cinco es igual al coste de la excursión, ¿no?

la forma *x*… (ítem 43). Celia (ítem 44) sugiere proseguir la ecuación sumando el “coste de la excursión”. Bajo esta denominación resulta imposible dilucidar con certeza si la estudiante se refiere al coste total de la excursión (*C*) o a uno de los costes unitarios (*Cia* o *Cfa*). No obstante, la actuación de Celia en el ítem 46 parece indicar que tenía en mente el coste unitario *Cfa*. En cualquier caso, Remedios (ítem 45) había intervenido para corregir a su compañera y abogar por una relación en la que se multiplicase el coste por personas en la situación hipotéticas en que asistiesen todos los amigos (*Cia*) y el número total de amigos (*A*). Celia (ítem 46) discrepa y sugiera la relación incorrecta $C = Cfa{\cdot}A$, en la cual entrelaza cantidades de magnitudes y situaciones diferentes. Remedios, aún sin mediar argumentación, verbaliza la ecuación $x{\cdot}10 = y$, en la que da cuenta de la relación correcta $C = Cia{\cdot}A$ (ítem 47). Celia (ítem 48) parece acatar esta opción al tiempo que Remedios introduce y verifica la ecuación en el sistema.

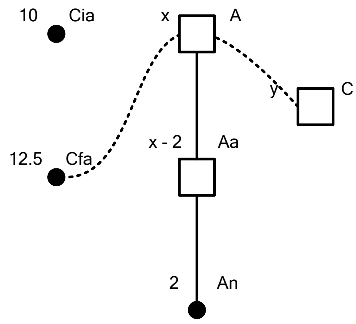


Figura 6.31. Grafo después del ítem 46.

47. Remedios: Por diez es igual a *y*…

48. Celia: a *y*… (*Remedios concluye “y=10*x”. La ecuación es validada por el tutor.*)

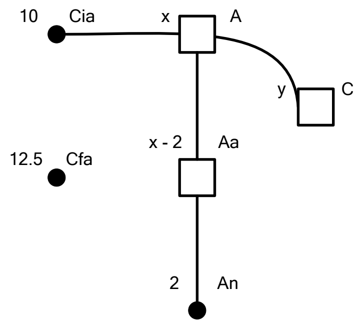


Figura 6.32. Grafo después del ítem 48.

49. Remedios: Sí.

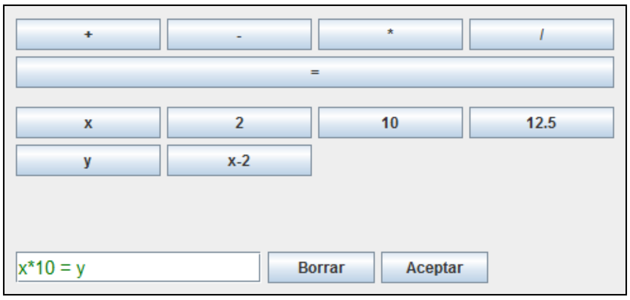


Figura 6.33. Ventana de ecuaciones durante el ítem 48.

En cuanto el tutor valida la ecuación ambas alumnas verbalizan su disposición a plantear “la otra” ecuación (ítems 50 y 51). En ningún caso la pareja muestra sorpresa o duda ante la necesidad de representar otra relación entre cantidades para poder finalizar el problema, por lo que las dudas anteriormente comentadas a partir de la verbalización de Celia en el ítem 32 parecen deberse más a cierta inconcreción en el lenguaje oral que en una dificultad para anticipar el número de ecuaciones necesarios tras finalizar el

50. Celia: Y la otra expresión sería…

51. Remedios: […la otra expresión sería…

tercer paso del MC.

En relación con la segunda ecuación, Celia (ítems 52 y 54) sugiere una expresión algebraica que implica multiplicar el número de amigos que asisten a la excursión realmente por el coste por persona en dicho caso, en lo que pareciera ser el inicio de la representación correcta de la relación $C = Cfa{\cdot}Aa$. De hecho, Remedios llega a introducir en el sistema la ecuación inacabada $(x - 2){\cdot}12{,}5 =$… (ítems 53, 54 y 56). Sin embargo y de manera sorprendente, tanto Remedios (ítem 57) como Celia (ítem 58) muestran dudas y manifiestan su creencia de que la idea en curso no era correcta. Esto lleva a Remedios (ítem 59) a borrar la ecuación de la ventana de ecuaciones.

52. Celia: … equis menos…
53. Remedios: [… equis menos dos… (*Escribe “(x−2)…”.*)
54. Celia: Por, por doce coma cinco… (*Remedios prosigue “(x−2)*12.5…”.*)
55. Remedios: Es que…
56. (*Remedios prosigue “(x−2)*12.5=…”.*)
57. Remedios: … no, yo, no sé, creo que no…
58. Celia: No, no, no… yo creo que tampoco…
59. (*Remedios repasa la ventana de cantidades y decide borrar la ecuación en curso.*)

En el ítem 60 Remedios parece preguntarse a qué es igual el “número de amigos menos”, siendo bastante plausible considerar que se refiere a cómo podrían representar la cantidad *Aa*. En este punto resulta enigmática la verbalización de Remedios (ítem 62) cuando afirma “… (la segunda ecuación) sería con las personas.”. En principio, el uso de la palabra *personas* invita a pensar que podría estar refiriéndose a las *Cia* o *Cfa* pues son las únicas cantidades en cuyas cantidades aparece dicha palabra y, hemos de considerar que segundos antes Remedios ha repasado la ventana de cantidades. No obstante, Celia (ítem 63) parece interpretar a su compañera de manera diferente al considerar que alude a la cantidad *A*, lo cual para ella tiene sentido pues ésta es la cantidad que deben averiguar.

60. Remedios: A ver… número de amigos menos qué será…
61. (*Silencio de cinco segundos.*)
62. Remedios: Yo es que creo que sería con las personas.
63. Celia: Es que, claro, hay que averiguar a cuántos amigos van a la excursión.

Ante el comentario de Celia, Remedios (ítem 64) reacciona iniciando en el sistema una ecuación usando la cantidad *A* mediante la expresión x… y parece tener en perspectiva emplear la cantidad

64. (*Remedios señala en la ventana de cantidades la cantidad “coste por persona si asistiesen todos los amigos”, y luego escribe “x…”.*)
65. Remedios: Coste por persona si asistiesen todos los amigos…

Cia pues con el puntero del ratón señala dicha cantidad en la ventana de cantidades con el puntero del ratón y además verbaliza el nombre de la cantidad (ítem 65). La misma estudiante, Remedios, parece percatarse que la operación que tiene en mente entre A y *Cia* es igual a C, lo que le lleva a expresar “eso, el precio [total], ya lo tengo hecho.” (ítem 66) y a borrar la ecuación iniciada. Esta actuación se presta a una doble interpretación. Por un lado, es posible que Remedios comprenda que está verbalizando la relación $C = Cia{\cdot}A$, la cual ya emplearon en la construcción de la primera ecuación y, por tanto, esa relación estaría “hecha”, tomando las palabras de Remedios. Sin embargo, existe la posibilidad de que la estudiante conciba que el producto $Cia{\cdot}A$ le va a permitir el cálculo directo del precio total de la excursión en lo que sería una cierta reminiscencia de la manera en que se resuelven los problemas verbales aritméticamente. Desde este prisma, Remedios descartaría esta relación considerando que ya tienen una ecuación que les permite calcular la cantidad C.

66. Remedios: No, pero eso, el precio, ya lo tengo hecho. (*Borra la expresión.*)

Celia (ítem 67) parece querer construir una ecuación buscando otra manera de representar la cantidad A. Sin embargo, Remedios interrumpe bruscamente a su compañera indicando que deben emplear la cantidad número de amigos que no asisten (*Aa*). Celia parece entender rápidamente la línea de actuación que propone su compañera. Así, Celia verbaliza una ecuación correcta usando la relación $C = Cfa{\cdot}Aa$ mientras Remedios introduce la ecuación en el sistema (ítems 69 a 71). La actuación de Remedios (ítem 72) revela que ésta no considera la ecuación $(x - 2){\cdot}12{,}5 = y$ como acabada pues parece que desea expresar en el tutor la ecuación $(x - 2){\cdot}12{,}5 = y - 2$. El tutor no permite introducir la última cantidad pues la versión usada restringía su

67. Celia: El número de amigos en total sería…
68. Remedios: [Que no asisten, dos amigos que no asisten… (*Señala en la ventana de cantidades la cantidad “número de amigos que no asisten”.*)
69. Celia: … o sea, equis menos dos… (*Remedios escribe “(x−2)…”.*)
70. Celia: Equis menos dos por… (*Remedios prosigue “(x−2)*12.5...”.*).
71. Celia: Doce con cinco es igual al coste de la excursión. (*Remedios sigue “(x−2)*12.5=y…”.*)
72. Remedios: ¿Y menos dos? (*Intenta continuar la expresión para poner “(x−2)*12.5=y−2”pero el tutor no se lo permite.*)
73. Remedios: No, o sea…
74. Celia: [*y* y ya está, dale a aceptar.
75. (*Remedios valida la ecuación “(x−2)*12.5=y” que es aceptada por el tutor.*)
76. Remedios: No, o sea…

funcionamiento a relaciones ternarias. Este hecho hace dudar a Remedios quien parece plantearse cómo modificar la ecuación (ítem 73). Celia (ítem 74) ataja rápidamente a su compañera subrayando que la ecuación ya está finalizada y que no deben incorporar ningún término. Tras la intervención de Celia, Remedios (ítem 75) valida la ecuación en el sistema.

77. Celia: ¿Ves?
78. Remedios: Ah, sí. Ya está.

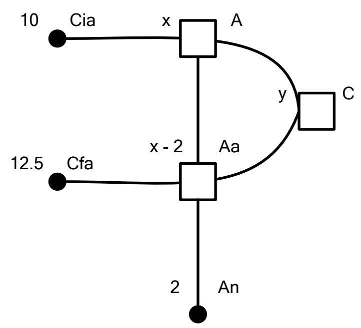


Figura 6.34. Grafo al final de la resolución.

Al finalizar la resolución, el profesor inicia un diálogo con el objeto de dar sentido a algunas de las actuaciones de la pareja. En concreto, muestra interés en saber qué elementos del sistema han podido ayudarle en resolver correctamente un problema que ninguna de las participantes de la pareja supo resolver en el cuestionario Post (ítem 79). En primer lugar la pareja alude a que en la prueba en lápiz y papel tuvieron problemas de tiempo y que debían ir más rápido. Esta justificación no se sustenta en los datos reales dado que en la prueba escrita tenían diez minutos por problema mientras que en sistema el problema ha sido resuelto en cinco minutos.

79. Profesor: Este problema ninguna de las dos lo hizo bien en el papel. Sin embargo lo habéis resuelto bastante rápido y no habéis necesitado pedir ayudas. ¿A qué lo achacáis?
80. Celia: Porque… (*Se ríe.*)
81. Remedios: No sé… es que en el papel, no sé…
82. Celia: Porque en el papel íbamos a lo mejor más rápido…
83. Remedios: [Veíamos a la gente que hacía...]
84. Celia: …creíamos, a lo mejor, que teníamos más problemas y que no nos quedaba tiempo, y entonces íbamos más rápido…
85. Remedios: Claro, íbamos más rápido y la gente, pues como iba más adelantada pues…

Esta explicación no convence al profesor quien les recuerda las ecuaciones incorrectas que plantearon en la prueba escrita (ítem 87). Las ecuaciones eran $(x - 2) = 12{,}5$ y $x = 10$, es decir las relaciones incorrectas $A = Cia$ y $Aa = Cfa$, respectivamente. Celia (ítem 88)

86. Profesor: Entonces no tiene nada que ver con el programa sino con que en el papel no lo pensasteis bien, es decir, en el papel lo hubieseis podido hacer. Sin embargo, en el examen pusisteis cosas como equis igual a diez, equis menos dos es igual a doce coma cinco. ¿Eso por qué lo pusisteis?
87. Remedios: Equis menos dos igual doce coma cinco…

explica que quizá intentaban expresar la relación entre el número de amigos y el precio a pagar por cada uno de ellos.

88. Celia: Pues porque, a lo mejor, pensábamos que equis menos dos, que el total de los amigos era igual a que cada amigo salía a doce coma cinco euros la excursión…. Creo yo…

89. Profesor: Vamos a hacer otro.

6.5.1.2. El caso de la pareja Celia-Remedios en el problema "Conejos y gallinas"

En una granja, entre gallinas y conejos hay 20 cabezas y 52 patas. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay en la granja?

La pareja inicia el proceso de resolución dando lectura en voz alta al enunciado del problema (ítem 1). Las primeras acciones las destinan a la definición de las cantidades conocidas. Así, entre los ítems 5 y 11, registran en el sistema, de manera correcta, las cantidades conocidas *número de patas por conejo* (*Ppc*), *número de patas por gallina* (*Ppg*), *número de cabezas total* (*C*) y *número de patas total* (*P*).

1. (*Celia lee el enunciado en voz alta. La cantidad activa es "número de patas que tiene un conejo".*)

2. Celia: A ver…

3. Celia y Remedios: Número de patas que tiene un conejo.

4. Celia: Cuatro.

5. Remedios: Bueno, sí, que escribas tú. (*Celia asigna el valor "4" a la cantidad "número de patas que tiene un conejo". La cantidad activa pasa a ser "número de patas que tiene una gallina".*)

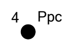


Figura 6.35. Grafo después del ítem 9.

6. Remedios: Dos. (*Celia asigna el valor "2" a la cantidad "número de patas que tiene una gallina". La cantidad activa pasa a ser "número de cabezas total".*)

Figura 6.36. Grafo después del ítem 6.

7. Celia: Dos patitas…

8. Remedios: De cabezas total es… veinte.

9. Celia: Veinte cabezas. (*Celia asigna el valor "20" a la cantidad "número de cabezas total".*)

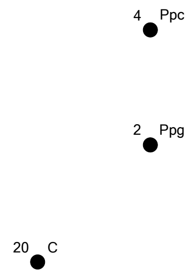


Figura 6.37. Grafo después del ítem 9.

10. Celia y Remedios: Número de patas…

11. Celia: Cincuenta y dos. (*Celia asigna el valor "52" a la cantidad "número de patas total". La cantidad activa pasa a ser "número de patas de conejos".*)

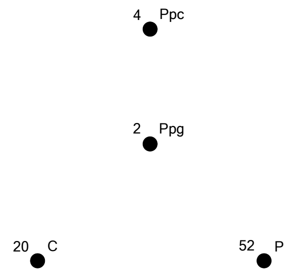


Figura 6.38. Grafo después del ítem 11.

Ante la primera de las cantidades desconocidas ofrecida por el programa, *el número de patas de conejos*, *Pc*, las estudiantes se manifiestan al unísono indicando que desean usar la letra *equis* para su representación y así lo plasman en el tutor (ítem 12). No contemplan la posibilidad de representar otra cantidad mediante una letra para, posteriormente, definir *Pc* mediante una expresión algebraica.

12. Celia y Remedios: Número de patas de conejos, *equis*. (*Celia asigna la letra "x" a la cantidad "número de patas de conejos". La cantidad activa pasa a ser "número de patas de gallinas".*)

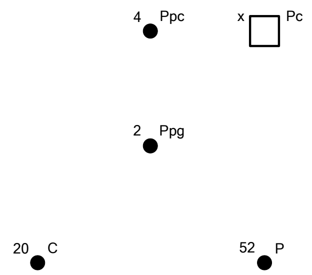


Figura 6.39. Grafo después del ítem 12.

De manera idéntica se comportan con la cantidad *número de patas de gallinas*, *Pg*. Sin apenas mediar verbalización, representan la cantidad *Pg* mediante la letra *y* (ítem 14).

13. Celia y Remedios: Número de patas de gallinas…

14. Celia: *y*. (*Celia asigna la letra "y" a la cantidad "número de patas de gallinas". La cantidad activa pasa a ser "número de conejos". Se activa la ventana de ecuaciones.*)

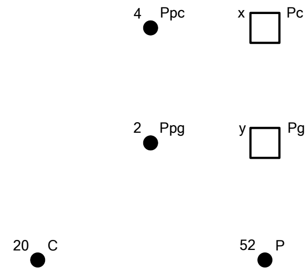


Figura 6.40. Grafo después del ítem 14.

El hecho de haber definido ya, con independencia de la representación escogida, tres cantidades ligadas mediante una relación aditiva (*Pc*, *Pg* y *P*) posibilita el acceso al paso cuarto del MC antes de completar la definición de todas las cantidades. Sin embargo, de momento la pareja prefiere ocuparse de representar la cantidad *número de conejos*, *Nc*. Celia intenta usar la relación multiplicativa que liga el número de patas de conejos y las patas que tiene un conejo, es decir las cantidades *Pc* y *Ppc*. Aunque la idea es correcta, construye la expresión $4x$ para *Nc*, que supone un error de inversión y la representación, en realidad, de la relación $Nc = Ppc \cdot Pc$. El tutor les informa de que la expresión es errónea (ítem 22).

15. Celia y Remedios: Número de conejos…
16. Remedios: Espera, sería… ¿cuatro equis?
17. Celia: Ehhhh… espera, supongo, cuatro… (*Remedios cambia a la opción "expresión" y empieza "4…".*)
18. Remedios: No. (*Dice no porque el programa no permitía escribir "4x".*)
19. Celia: …cuatro por…
20. Remedios: [Eso por].
21. Celia: …equis.
22. Remedios: Eso, se me olvidaba el por. (*Remedios escribe la expresión "4*x", que es identificada como errónea por el tutor.*)

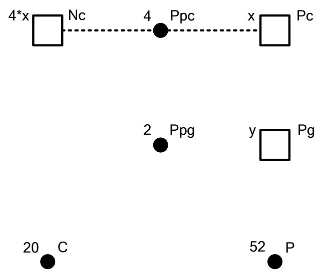


Figura 6.41. Grafo después del ítem 22.

El mensaje de error en relación con la representación de la cantidad *Nc* lleva a Remedios a plantear un cambio de estrategia. La estudiante propone construir la primera de la ecuación y postergar la definición de las cantidades pendientes (ítem 24). Celia acepta la idea de su compañera y rápidamente propone de manera correcta construir una ecuación haciendo uso de la relación $P = Pc + Pg$ (ítems 25, 27 y 29). Remedios

23. Remedios: No, ¿ves?
24. Remedios: Vamos a hacer primero una ecuación, que ya tenemos aquí para plantearla.
25. Celia: Vale. Que sería equis más… número de conejos más… (*Remedios empieza la ecuación "x…".*)
26. Remedios: Es que…
27. Celia: *Equis* más *y* es igual a…
28. Remedios: A cincuenta y dos.
29. Celia: Cincuenta y dos… a cincuenta y dos. (*Remedios escribe "x+y=52". La ecuación es validada por el tutor.*)

introduce en el programa la ecuación $x + y = 52$, que es validada por el tutor (ítem 29).

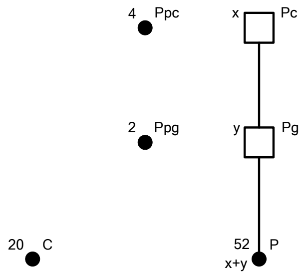


Figura 6.42. Grafo después del ítem 29.

Al consumir la relación aditiva relativa al número de patas, la pareja está obligada a abandonar el paso cuarto del MC y regresar al tercero. Nuevamente meditan cómo simbolizar la cantidad *Nc* (ítems 31 y 32). Remedios afirma que este punto fue el que le generó dificultades en la prueba escrita (ítem 33). Sin embargo, la resolución recogida en la prueba no permite constatar este hecho pues en ella se mostraba como la alumna representaba correctamente las cantidades *Pc* y *Pg* a través de las expresiones $2y$ y $4x$, respectivamente. En su resolución en lápiz y papel optó por designar con las letras *equis* e *y* las cantidades *Ng* y *Nc*, respectivamente. No obstante, sus intervenciones posteriores sí que podrían alinearse con las dificultades que mostraron ambas en la prueba escrita. En un principio, Remedios apunta a qué deben tener en cuenta el número de cabezas (ítem 36). Esta verbalización parece apuntar hacia la relación aditiva $C = Nc + Ng$, aunque se toparía con el problema de que en el tutor todas las cantidades deben estar definidas con antelación a ser usadas en una relación y, en este caso, *Ng* aún no han sido definida. Este planteamiento, inicialmente correcto, parece caer en el abandono cuando Celia propone representar *Nc* a través de la expresión $52 - x$ (ítem 41), lo que supone, en la práctica, la relación errónea $P = Nc + Pg$. Esta relación implica relacionar aditivamente cantidades de magnitudes no homogéneas. En la prueba escrita ambas alumnas mostraron dificultades en este sentido. Por un lado, Remedios planteó

30. Celia: Vale.
31. Remedios: Vale, número de conejos…
32. Celia: Número de conejos…
33. Remedios: Número de conejos… a ver, sería… esto es en lo que me liaba yo…
34. Celia: Sería cua, no, sería, vamos a ver, *equis* patas de conejos…
35. Remedios: …más…pero sí, espérate… (*Remedios despliega la lista y ve que les quedan por definir "número de conejos" y "número de gallinas".*)
36. Remedios: También tienes que tener en cuenta las cabezas.
37. Celia: No, espérate…
38. Remedios: Cincuenta y dos.
39. Celia: Cincuenta y dossssssssss, cincuenta y dos patas menos... las patas de las gallinas…
40. Remedios: Cincuenta y dos menos equis… sería…
41. Celia: Sí. (*Remedios escribe la expresión "52−x", que es identificada como errónea por el tutor.*)

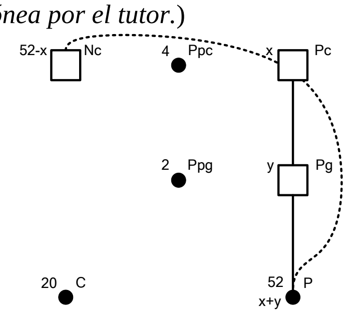


Figura 6.43. Grafo después del ítem 41.

una ecuación incorrecta $x + y = 20 + 52$ (donde x e y designaban *Ng* y *Nc*, respectivamente) y Celia dos ecuaciones $x + y = 20$ y $x + y = 52$, donde aparece una polisemia de las letras al designar al mismo tiempo el número de animales y de patas de animales de cada especie.

Celia continua dando muestras de esta dificultad cuando propone representar *Nc* con la expresión $x - 20$ (ítems 45 y 47), en donde la interpretación que consideramos más lógica implicaría entender que usa *equis* como si representara *Ng*, y por tanto intenta usar la relación $C = Nc + Ng$, aunque también cometería un error de inversión. Ciertamente, no es evidente que opere desde esta línea de razonamiento pues inicialmente atestigua que *equis* da cuenta de *Pc* (ítem 43) pero resulta difícil dar sentido a la relación aditiva que construye entre *C*, *Pc* y *Nc*. Remedios, reacia, construye la ecuación en el programa aunque parece obvio que consideraba incorrecta la expresión antes de que el tutor lo informara (ítem 50).

42. Celia: Nada.
43. Celia: A ver, si el número total de patas de conejos es equis…
44. Remedios: [Claro.]
45. Celia: …pues equis más, más… menos…
46. Remedios: Cuatro.
47. Celia: … menos veinte, ¿no? A ver…
48. Remedios: ¿Equis menos veinte?
49. Celia: Porque son cabezas…
50. Remedios: Ya, pero cabezas totales. (*Remedios escribe la expresión "x−20", que es identificada como errónea por el tutor.*)

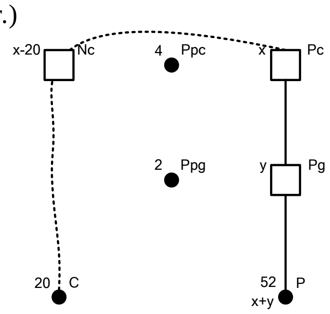


Figura 6.44. Grafo después del ítem 50.

Celia, prestando atención al botón "/", expresa que quizá puedan construir una expresión haciendo uso de esta operación (ítem 53). Remedios opone cierta resistencia alegando que no sabe cómo se escriben en el tutor (ítems 54 y 56). Celia propone una división para ejemplificar cómo deben representarla en el sistema (ítem 57) y que su compañera interpreta como una propuesta de representación para *Nc* (ítem 58). Cuando Celia informa de que sólo era un ejemplo, propone usar la expresión x/y para *Nc* (ítem 61). Remedios rechaza rotundamente esta razón entre el número de patas de conejos y gallinas (ítem 62). Por el contrario, intenta representar nuevamente *Nc* mediante la expresión $4x -$…, donde no es posible determinar qué cantidad

51. Celia: Ah, es verdad.
52. Remedios: No de conejo.
53. Celia: Esto (*señala el botón "/"*) es para poner una fracción, ¿ponemos una fracción? A lo mejor es.
54. Remedios: Es que no sé ponerla, ¿sabes? Aquí.
55. Celia: Esto es para poner una fracción. Ponemos una fracción, a lo mejor es…
56. Remedios: Es que no sé poner fracciones aquí.
57. Celia: Entonces, si es esto (*señala el botón "/"*), a lo mejor es dos entre veinte.
58. Remedios: Mmm, no sé yo… (*Remedios escribe "2/2".*)
59. Celia: ¡No, hombre! ¡No lo pongas, que no es así!
60. Remedios: Entonces…
61. Celia: Sería *equis* entre *y*…
62. Remedios: No.
63. Celia: Es que yo creo que es una fracción

pretendía restar pues esta versión del tutor no permite relaciones cuaternarias que no sean puras (de proporcionalidad o sólo aditivas) (ítem 71).

En este momento de la resolución, cuando la pareja parece totalmente incapaz de avanzar, Remedios propone intentar definir la cantidad *Ng*. En principio, este cambio no debería ser relevante mucho pues la situación es completamente simétrica en relación con la anterior. Sin embargo, de manera sorprendente, Celia espeta "*y* entre dos" (ítem 79) en cuanto Remedios activa la cantidad *Ng* (ítem 78). De este modo, la pareja consigue invertir la relación *Pg* = *Ng*·*Ppg* para simbolizar *Ng* (ítem 81).

pero, no sé.

64. Remedios: A ver. (*Remedios revisa la ventana de cantidades definidas.*)
65. Remedios: ¿Qué es lo que nos pregunta? (*Remedios activa la opción "número" y la etiqueta "número de conejos".*)
66. Remedios: Número de conejos…
67. Celia: Claro, es que no lo sabemos…
68. (*Remedios activa la opción "expresión".*)
69. Remedios: Sería… (*Escribe "4…", intentando poner "4x".*)
70. Celia: Cuatro por equis.
71. Remedios: Eso, que siempre pongo… menos… (*Escribe "4*x…", e intenta proseguir "4*x−…". El tutor no se lo permite.*)
72. Remedios: No puedes, es una expresión.
73. (*Remedios borra la expresión.*)
74. (*Remedios intenta escribir "4*x/…" pero el tutor sólo le permite "4*x".*)
75. Remedios: No. Ay, es que no se puede.
76. Celia: Pon… (*Celia activa la opción "número".*)
77. Celia: Número no puede ser. (*Remedios cree que la etiqueta activa es la que se representa cuando se construye una expresión.*)
78. Remedios: Vamos a probar con éste. Es que… (*Remedios activa la etiqueta "número de gallinas".*)
79. Celia: ¡*y* entre dos!
80. Remedios: ¿Entre dos?
81. Celia: Sí, prueba a ver. Y entre dos. (*Remedios escribe la expresión "y/2", que es automáticamente asignada a la cantidad "número de gallinas".*)

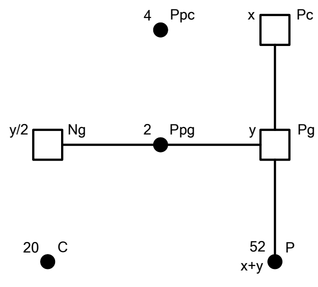


Figura 6.45. Grafo después del ítem 81.

Una vez construida una representación para el número de gallinas, la pareja no muestra ninguna dificultad para extrapolar la estructura conceptual y la manera de traducir la misma en una expresión algebraica para hacer lo propio con el número de conejos. En pocos

82. Celia: ¡Toma ya!
83. Remedios: Y de conejos…
84. Celia: [Pues sería…]
85. Remedios: …entre cuatro.
86. Celia: [O sea *equis*.]
87. Remedios: … *equis* entre cuatro.
88. Celia: O sea *equis* entre cuatro.

segundos construyen la expresión $x/4$ para representar la cantidad *Nc* (ítems 82 a 89).

(*Remedios activa la opción "expresión"*.)

89. Celia: *Equis* entre cuatro. (*Remedios escribe la expresión "x/4", que es automáticamente asignada a la cantidad "número de conejos"*.)

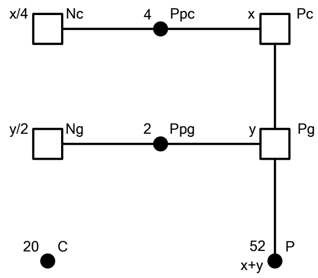


Figura 6.46. Grafo después del ítem 89.

La construcción de la segunda ecuación es completada con facilidad. Operando de manera conjunta ambas estudiantes verbalizan la relación aditiva $C = Nc + Ng$ (ítems 92 a 94). Cuando ya tienen la ecuación prácticamente construida se produce una verbalización interesante de Remedios, quien parece dudar sobre si deben escribir *C* o *P*, pues identifica (o traduce) como equivalentes el hecho de tener veinte cabezas con el tener cincuenta y dos patas. Éste podría ser el origen de su ecuación errónea $x + y = 20 + 52$ en la prueba escrita. Sin embargo, Celia la convence de que la cantidad *P* ya ha sido usada anteriormente y no debe emplearse en esta ecuación (ítem 96). Finalmente, validan la ecuación correcta $(x/4) + (y/2) = 20$ (ítem 96).

90. Remedios: Vale.

91. Celia: Vale.

92. Celia: Pues la segunda expresión sería a lo mejor el número total de conejos más… (*Remedios escribe la ecuación "(x/4)…"*.)

93. Celia y Remedios: …más el número total de gallinas…

94. Remedios: …es igual a veinte cabezas. (*Remedios escribe "(x/4)+(y/2)=…"*.)

95. Remedios: O sea, cincuenta y dos patas.

96. Celia: No, veinte cabezas porque cincuenta y dos ya lo hemos puesto. (*Remedios escribe "(x/4)+(y/2)=20", que es identificada como correcta por el tutor.*)

97. Remedios: Ya está.

98. Celia: Ya.

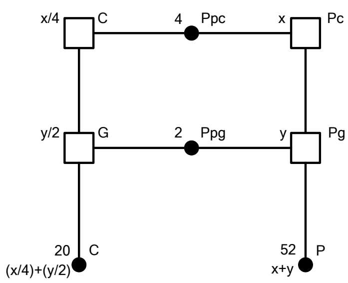


Figura 6.47. Grafo al final de la resolución.

6.5.1.3. El caso de la pareja Celia-Remedios en el problema "Amelia y Enrique"

Amelia tiene el triple de edad que su hermano Enrique, pero dentro de 5 años la edad de Amelia será sólo el doble. ¿Cuál es la edad de cada uno?

Remedios lee en voz alta el enunciado del problema y su primera acción consiste en desplegar la lista de cantidades, quizá para una exploración previa de las cantidades involucradas, aunque bien es cierto que rápidamente se decide por informar la primera de las cantidades conocidas. Por este orden la pareja declara en el sistema las cantidades *tres para hacer el triple* (*Tt)* (ítem 3), *dos para hacer el doble* (*Dd*) (ítem 5) y *tiempo transcurrido* (*T*) (ítem 8).

1. (*Remedios lee el enunciado en voz alta. La cantidad activa es "tres para hacer el triple". Despliega la lista de cantidades.*)
2. Celia: Tres para hacer el triple, tres.
3. (*Celia asigna el valor "3" a la cantidad "tres para hacer el triple". La cantidad activa pasa a ser "dos para hacer el doble".*)

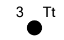


Figura 6.48. Grafo después del ítem 3.

4. Remedios: Dos.
5. Celia: Dos para hacer el doble, dos. (Celia asigna el valor "2" a la cantidad "dos para hacer el doble". La cantidad activa pasa a ser "*tiempo transcurrido*".)

Figura 6.49. Grafo después del ítem 5.

6. Celia: Tiempo transcurrido, cinco.
7. Remedios: Cinco.
8. Celia: Cinco años. (*Celia asigna el valor "5" a la cantidad "tiempo transcurrido". La cantidad activa pasa a ser "edad actual de Amelia".*)

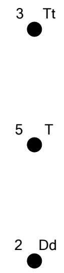


Figura 6.50. Grafo después del ítem 8.

La primera de las cantidades desconocidas propuestas por el tutor es la *edad actual de Amelia* (*Eaa*) pero Remedios prefiere definir en primer lugar la *edad actual de Enrique* (*Eae*) (ítem 9). Su actuación parece responder a la intención de representar *Eaa* mediante la expresión algebraica 3*x* y, de este modo, evitar la inversión que sería necesaria para representar la relación de que la edad actual de la hermana es el triple de la de su hermano en el caso de que simbolizaran la cantidad *Eaa* con la letra *equis*. En consonancia con esta interpretación, Celia representa la cantidad *Eae* mediante la letra equis en el sistema (ítem 15) y segundos después usan la expresión algebraica 3*x* para dar cuenta de la edad actual de Amelia, *Eaa* (ítem 21) con lo que aplican correctamente la relación *Eaa* = *Tt*·*Eae*.

9. Remedios: Edad actual de Amelia… espérate, vamos a poner primero la edad actual de Enrique.
10. (*Remedios activa la etiqueta "edad actual de Enrique".*)
11. Remedios: Ehhh…
12. Celia: *Equis*.
13. Remedios: *Equis*. No.
14. Remedios: Ah, sí, *equis*.
15. (*Celia asigna la letra "x" a la cantidad "edad actual de Enrique". La cantidad activa vuelve a ser "edad actual de Amelia".*)

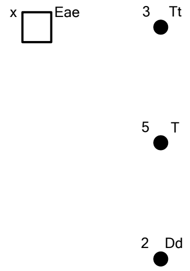


Figura 6.51. Grafo después del ítem 15.

16. Celia: Y luego, tres…
17. Remedios: …tres, tres equis…
18. Celia: Expresión.
19. (*Remedios activa la opción "expresión".*)
20. Celia: Tres por equis.
21. (*Remedios construye la expresión "3*x", que es automáticamente asignada a la cantidad "edad actual de Amelia". La cantidad "edad futura de Amelia".*)

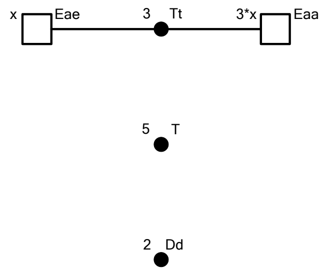


Figura 6.52. Grafo después del ítem 21.

En este instante de la resolución restan por designar las cantidades referentes a las edades futuras de ambos hermanos. La primera de las cantidades ofrecidas por el tutor es la edad futura de Amelia (*Efa*). Celia verbaliza una expresión algebraica 3*x* + 5 que conlleva usar la estructura conceptual por la cual la edad

22. Remedios: Edad futura de Amelia…
23. Celia: Tres por equis más cinco.
24. Remedios: ¿Por qué?
25. Celia: Porque es lo que tiene ahora más cinco años que pasan.
26. Remedios: Pero… (*Celia construye la "(3*x)+5", que es automáticamente asignada a la cantidad "edad futura de Amelia". La cantidad activa pasa a ser "edad futura de Enrique".*)

futura puede ser expresada como la edad actual más el tiempo transcurrido (ítem 23). Remedios no parece comprender inicialmente esta propuesta (ítem 24) lo que exige que su compañera haga explícita la relación *Efa* = *Eaa* + *T* (ítem 25). Celia registra la expresión correctamente en el programa cuando aún Remedios no parecía plenamente convencida (ítem 26).

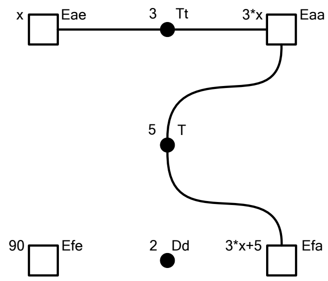


Figura 6.53. Grafo después del ítem 26.

La validación por parte del tutor de la expresión para *Efa* parece aplacar las dudas de Remedios. De hecho, la pareja se centra en la última de las cantidades por declarar en el programa, *la edad futura de Enrique*, *Efe*. Sin necesidad de que medie excesivo intercambio verbal, Celia propone emplear la misma estructura conceptual para expresar la cantidad *Efe* (ítem 29). De este modo, introducen la expresión *x* + 5 en el sistema (ítem 31).

27. Celia: Ves.
28. Remedios: Edad futura de Enrique…
29. Celia: Pues equis más cinco.
30. Remedios: Equis más cinco.
31. Celia: Equis más cinco. (*Remedios construye la expresión "x+5", que es automáticamente asignada a la cantidad "edad futura de Enrique".*)

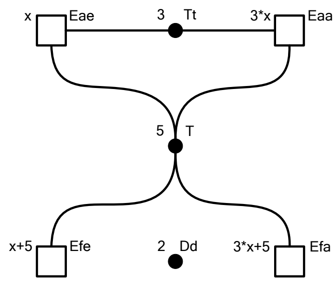


Figura 6.54. Grafo después del ítem 31.

El transito hasta el cuarto paso del método cartesiano ha sido plácido, aparentemente sin obstáculos. La pareja ha definido todas las cantidades y ha de afrontar ahora la construcción de una ecuación. La única relación aún no empleada es la que liga las edades futuras de los hermanos y que viene dada en el enunciado por "dentro de cinco años la edad de Amelia será sólo el doble" (*Efa* = *Dd*·*Efe*).

La pareja inicia la escritura con la idea clara de construirla sobre la cantidad *Efa* (ítem 35). En este punto aparecen las primeras discrepancias en la pareja. Por

32. Remedios: Y ahora… a ver… (*Remedios escribe la ecuación "(3*x+5)…".*)
33. Celia: Equis más cinco es igual a… (*Remedios escribe la ecuación "(3*x+5)=…".*)
34. Remedios: A… espera, es dentro de cinco años… (*Remedios revisa el enunciado. Apunta con el ratón al "5" del enunciado.*)
35. Celia: Equis más cinco.
36. Remedios: … la edad de Amelia… será la edad de Amelia.
37. Celia: …es igual a… prueba a ver con equis más cinco.
38. (*Remedios escribe "(3*x+5)=3*x…".*)
39. Remedios: ¿Sería así?
40. Celia: No.
41. (*Remedios escribe "(3*x+5)=(3*x)*2". La ecuación no es validada por el tutor.*)

un lado, Remedios, quien tiene el control del ratón, iguala la representación 3*x* + 5 de *Efa* a la expresión (3*x*)*2 (ítem 41), con lo que parece que interpreta el fragmento del enunciado de la siguiente forma “dentro de cinco años la edad de Amelia será sólo el doble (de la edad actual de Amelia)”. En el contexto del enunciado del problema esta traducción no parece ser coherente pues esta relación es descrita a continuación de otra en donde explícitamente se establece una comparación entre las edades actuales de Amelia y Enrique con lo que parece lógico que la segunda relación se refiera cómo se ve modificada esta comparación por el paso del tiempo. En cambio, Celia por la sugerencia que ofrece (ítem 37) parece querer relacionar las edades futuras. Su comentario no es tenido en considerado por Remedios quien trata de validar su propuesta, la cual es rechazada por el tutor (ítem 41).

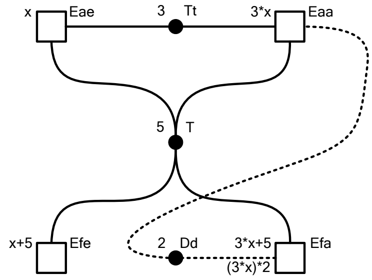


Figura 6.55. Grafo después del ítem 41.

Al ser rechazada la ecuación propuesta por Remedios parece que la pareja va a intentar replicar la comparación pero esta vez con la cantidad *Efe* en vez de *Eaa*. Así pareciera intuirse cuando Celia volvía a incidir en usar la expresión *x* + 5 (ítem 43). De hecho, en esta ocasión Remedios obedece a su pareja e introduce la ecuación (3**x* + 5) = (*x* + 5), pero sorprendentemente considera ésta completa y pretende validarla. Celia tampoco parece oponerse a esta idea, y no pronuncia palabra en contra de las acciones de Remedios. De esta forma terminan sometiendo a validación una ecuación que implica la igualación directa de *Efa* y *Efe* (ítem 45).

42. Remedios: No.
43. Celia: Prueba a ver… equis… (*Remedios escribe “(3*x+5)…”.*)
44. Remedios: ¿Ése?
45. Remedios: Igual a equis más cinco. (*Remedios escribe “(3*x+5)=(x+5)”. Lo intentan validar pero el tutor no les deja.*)

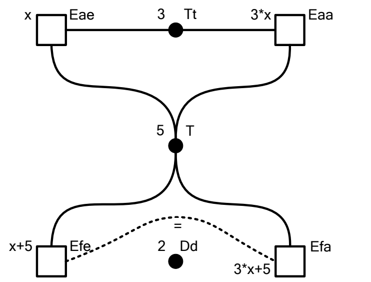


Figura 6.56. Grafo después del ítem 45.

El tutor notifica que la relación planteada es errónea y, a petición de Celia (ítem 49), la pareja decide pausar la resolución y reflexionar en profundidad sobre el enunciado. Celia orienta la construcción de la ecuación a modelizar la situación actual, es decir a usar la cantidad de

46. Celia: No.
47. Remedios: No.
48. (*Remedios borra la expresión y escribe “(3*x+5)…”.*)
49. Celia: A ver Remedios, vamos a pararnos un momento.
50. Remedios: A ver…
51. Celia: Amelia tiene, ahora mismo, el triple que…

comparación entre las edades actuales para escribir la ecuación (ítems 49 y 51). Esta vía no puede conducir a una resolución exitosa dada que dicha relación ya ha sido empleada para la representación de la cantidad *Eaa*. Esta estrategia les conduce a escribir una ecuación incorrecta $3x = x$ (ítem 56), que ni siquiera llegan a validar pues identifican por ellos mismos como incorrecta.

Al igual que en otras resoluciones, la pareja busca construir la ecuación sobre la cantidad que han designado mediante una letra que, con frecuencia y como sucede en este caso, corresponde con la cantidad o una de las cantidades por las que se pregunta en el enunciado. A partir de iniciativa de Remedios que pretendía construir una ecuación en la forma $x =$… (ítem 64), Celia interviene cambiando el foco a la situación futura tras el trascurso del tiempo, con lo que modifica el primer miembro la ecuación a x+5 (ítem 69) lo que parece proponer igualar a la edad futura de Amelia (ítem 70). Remedios le recuerda que eso ya lo han intentado previamente y que ha sido rechazada (ítem 71). El hecho de que Celia acepte la corrección de su compañera parece indicar que no estaba pretendiendo representar la relación $Efa = Dd{\cdot}Efe$ a través de la ecuación $(x + 5) = (3x + 5)/2$. Así, sin justificación alguna, Remedios prueba la ecuación $(x+5) = (3x)$ en lo que parece un intento poco razonado que sólo pretende cerrar la ecuación en vez de eliminarla (ítem 73).

52. Remedios: [Vale, entonces sería tres. (*Remedios intenta pulsa el "3", y luego "3*x" pero el tutor no se lo permite.*)
53. Celia: Ay, borra.
54. Remedios: Ya, borrar.
55. (*Celia borra la ventana de ecuaciones.*)
56. Remedios: Ésta es la edad de Amelia es igual a equis, o sea… (*Remedios escribe "(3*x)=x".*)
57. Celia: A equis… no.
58. Celia: No. (*Remedios borra la ventana de ecuaciones y escribe "(3*x)…".*)
59. Celia: Te piden la edad de cada uno, pues sería… el hermano tiene ahora mismo equis años…
60. Remedios: Sí, ¿qué pongo?
61. Celia: Borra, hay que borrar… borra directamente.
62. (*Remedios borra la ventana de ecuaciones.*)
63. Celia: El hermano tiene equis años, ¿no?
64. Remedios: Sí. (*Remedios escribe "x…".*)
65. Celia: Pero esos equis años más cinco es igual a la edad del futuro de cada uno.
66. Remedios: Claro.
67. Celia: Edad act…
68. Remedios: Pero entonces no es *equis*, es *equis* más cinco.
69. (*Remedios corrige la ecuación a"(x+5)…".*)
70. Celia: Claro. Equis más cinco es igual a la edad futura de… (*Remedios escribe "(x+5)=...".*)
71. Remedios: Ya eso lo he puesto ya pero no nos lo va a…
72. Celia: ¡Ah, sí! Es verdad. Pero si…
73. Remedios: No. (*Remedios escribe "(x+5)=(3*x)", que no es validada por el tutor.*)

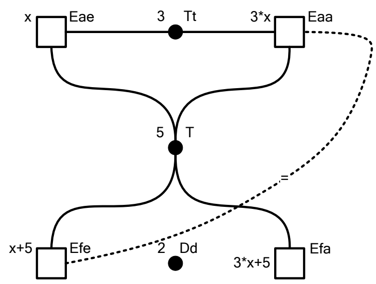


Figura 6.57. Grafo después del ítem 73.

74. Celia: No.
75. Remedios: Ves. No nos deja. (*Remedios borra la ventana de ecuaciones.*)
76. Celia: A ver, dos para hacer el doble… (*Celia lee esa cantidad de la ventana de cantidades.*)

Tras un nuevo intento fallado en el cuarto paso del método cartesiano, Celia relee en el enunciado la descripción de la cantidad *dos para hacer el doble* (*Dd*) (ítem 76) ante lo que su compañera responde con un relevante “es que el dos también lo tenemos que utilizar”. Hasta ese momento dicha cantidad había pasado bastante inadvertida y parece que la pareja empieza a comprender de emplearla dentro de la construcción de la ecuación. Inmediatamente, Celia propone multiplicar por esta cantidad la edad futura de Amelia e igualarlo a la edad futura de Enrique (ítems 78 y 80). De esta forma, construyen una ecuación invertida errónea al tratar de representar la relación $Efa = Dd{\cdot}Efe$, aunque bien es cierto que ningún miembro de la pareja verbaliza explícitamente esta relación. Finalmente, la pareja propone validar la ecuación resultante y que es rechazada por el tutor (ítem 81).

La pareja insiste en esta ecuación e interpretan el significado de cada cantidad. En este proceso no es posible concluir si Remedios interpreta la expresión (3*x + 5)*2 como “la edad de Amelia dentro de dos años” (ítem 84) o si se refería a la expresión 3*x+5 y por un lapsus dijera *dos* pensando en cinco años. Parece más plausible la segunda opción porque sería llamativo que la primera interpretación fuese contemplada por ambas sin que fuera necesario ningún diálogo para consensuarla. Además ninguna de las acciones durante la resolución cobija la hipótesis de que alguno de los estudiantes intenta representar el trascurso del tiempo mediante la operación producto en vez de mediante la suma. En resumen, la revisión del significado de las cantidades no produce ningún avance significativo; es más, la pareja termina solicitando la validación de la misma ecuación que había sido catalogada como errónea unos segundos antes (ítem 92).

77. Remedios: Es que el dos también lo tenemos que utilizar...
78. Celia: Claro, pues pon tres equis por dos. (*Remedios escribe “(3*x+5)…”.*)
79. Celia: tres equis por dos. (*Remedios continua “(3*x+5)*2…”. Celia parece referirse en realidad a (3*x+5).*)
80. Celia: …es igual a la edad futura de Enrique…
81. Remedios: a la edad futura de Enrique… (*Remedios finaliza “(3*x+5)*2=(x+5)”, que es identificada como errónea por el tutor.*)

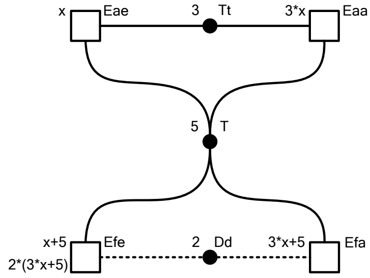


Figura 6.58. Grafo después del ítem 81.

82. Remedios: Ves, no te deja.
83. Celia: No.
84. Remedios: Es que ésta (*coloca el ratón sobre (3*x+5)*) es la de Amelia. Ésta (3*x+5) sería la de Amelia dentro de dos años (sic)… (*Remedios escribe “(3*x+5)*2…”.*)
85. Remedios: que sería igual a la de Enrique… (*Remedios continua “(3*x+5)*2=…”.*)
86. Celia: …a la de Enrique dentro de cinco…
87. Remedios: …que sería, espérate… ¿la de Enrique dentro de cinco? (*Remedios finaliza “(3*x+5)*2=(3*x+5)”.*)
88. Celia: No, ésa es la de Amelia.
89. Remedios: Ah, espera… vaya… (*Remedios borra toda la expresión.*)
90. Celia: Se borra entera.
91. Remedios: Esto no lo hicimos…
92. (*Remedios escribe la ecuación “(3*x+5)*2=(x+5)”, que es identificada como errónea por el tutor.*)

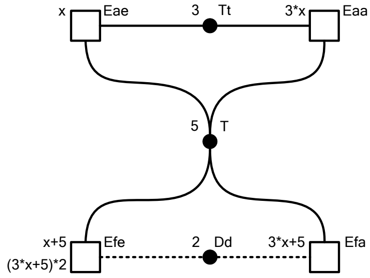


Figura 6.59. Grafo después del ítem 92.

En cierto modo, la pareja asemeja estar en bucle al no ser capaz de representar correctamente la relación que tienen en mente. Lejos de advertir que su error no reside en la selección de las cantidades sino en la manera que la expresión refleja la relación entre ellas. En cambio vuelven a considerar que, quizá, no han de emplear la edad futura de Amelia sino la edad actual de la hermana (ítem 98). Esto les lleva a construir la ecuación invertida $(3*x)*2 = (x + 5)$ en lo que parece un intento fallido de representar que la edad actual de Amelia es el doble de la edad del hermano dentro de cinco años.

93. Celia: No.
94. (*Remedios escribe "(3*x+5)*2=…".*)
95. Remedios: A ver… la de Enrique cuál será dentro de cinco años, equis…
96. Celia: [Ya sé. Espera, quita esto.]
97. Remedios: ¿El qué?
98. Celia: Espera a ver… pon la edad actual de Amelia, que son tres equis…
99. Remedios: Tres equis. (*Remedios borra y escribe "(3*x)…".*)
100. Celia: Por dos, a ver si… no.
101. Remedios: No. (*Remedios prosigue "(3*x)*2…".*)
102. Celia: Es igual, prueba a ver pero yo creo que…
103. Remedios: ¿A qué? ¿A equis más cinco?
104. Celia: Ajá. Pero no.
105. (*Remedios acaba "(3*x)*2=(x+5)", que es identificada como errónea por el tutor.*)

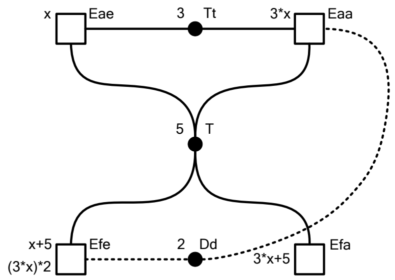


Figura 6.60. Grafo después del ítem 105.

Las siguientes acciones indican que nuevamente consideran que la estructura de la operación es correcta, y que entienden que no están reconociendo correctamente las cantidades involucradas en la relación. Ahora pretenden relacionar las diferentes edades de Amelia (ítem 107), una interpretación del enunciado que fue la primera idea de Remedios a la hora de plantear la ecuación. Una vez más, su propuesta es rechazada por el tutor (ítem 107).

106. Remedios: No. (*Remedios borra la ventana de ecuaciones.*)
107. (*Remedios escribe "(3*x)*2=(3*x+5)", que es identificada como errónea por el tutor.*)

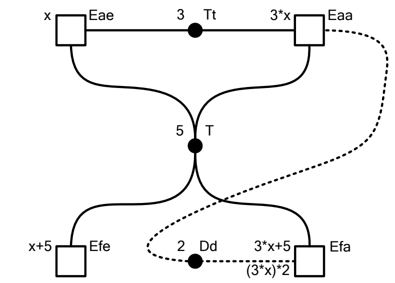


Figura 6.61. Grafo después del ítem 107.

Ante las continuas ecuaciones erróneas, Celia sugiere "ver los datos" e inician una revisión de los datos y las representaciones usadas para designar las cantidades desconocidas (ítem 109). Celia (ítem 111) resume la situación de una manera muy sintética, en la que omite los personajes a la hora de

108. Remedios: Ves, no te deja. A ver…
109. Celia: A ver, vamos a ver los datos… (*Se centran en la ventana de cantidades.*)
110. Remedios: Ya.
111. Celia: Son tres para hacer el doble, bueno, dos. El tiempo transcurrido son cinco años y la edad actual y la edad futura. Es que sería el tiempo transcurrido más la edad actual es igual a la edad futura.

enumerar las cantidades. No sabemos si este comportamiento responde a una cuestión de economía o bien si esta tendencia de reducir los nombres propios a nombres comunes mediante la omisión de parte del nombre puede desembocar en dificultades a la hora de plasmar las relaciones.

A modo de conclusión de la revisión de las cantidades, Celia indica que para construir la ecuación deben emplear la estructura conceptual que permite expresar la edad futura como la edad actual más el paso del tiempo (ítem 111). A este propósito dedican sus siguientes pasos (ítems 112 a 127) pero dado que ya han utilizado esta estructura conceptual aditiva para ambos personajes, no tienen opciones de construir una ecuación de manera exitosa. De hecho, como suele ser habitual en este tipo de situaciones, la pareja no se percata de su error hasta que no representan una identidad algebraica en vez de una ecuación (ítem 130).

112. Remedios: [Equis] (*Remedios escribe "x…".*)
113. Celia: Pon sin… pon equis más tres… No, ésta, ésta… (*Remedios escribe "x+…".*)
114. Remedios: Es que ésta (*pone el ratón sobre 3*x*) son tres equis…
115. Celia: Ya lo sé, ya lo sé, que me he equivocado… (*Remedios escribe "x+3…".*)
116. Remedios: Es que…
117. Celia: No, no, no… bórralo que me he equivocado. Es tres equis, que te he dicho equis más tres pero es tres equis…
118. (*Remedios borra la ventana de ecuaciones.*)
119. Celia: Tres equis más cinco… (*Remedios escribe "(3*x)…".*)
120. Remedios: ¿Más cinco?
121. Celia: Sí. Aquí más… Es igual a… (*Remedios escribe "(3*x)+5=…".*)
122. Remedios: …a la edad futura de Enrique… (*Sin embargo, se posa sobre el botón "edad futura de Amelia".*)
123. Celia: No.
124. Remedios: …de Amelia era…
125. Remedios: edad actual de Amelia… (*Remedios susurra tras posarse sobre el botón 3*x y leer la etiqueta.*)
126. Celia: A la edad futura de Amelia, prueba a ver eso.
127. (*Remedios escribe "(3*x)+5=(3*x+5)". Aparece un mensaje de que la expresión ya ha sido definido/utilizada.*)
128. Celia: Bórralo.
129. Profesor: Antes de borrarlo, ¿qué habéis puesto?
130. Celia: Tres equis más cinco es igual a tres equis más cinco… (Se ríe) Ya, hemos vuelto a…

La pareja empieza a agotar sus iniciativas coherentes para construir una ecuación que permita la resolución del problema. Incluso, en un momento dado llegan a barajar igualar directamente las edades actuales de Amelia y Enrique (ítem 137)

131. (*Remedios escribe "(3*x)…" pero lo borra.*)
132. Remedios: Espera… (*Remedios pulsa "(3*x)…".*)
133. Remedios: No, ¿qué he hecho? ¿dónde está la edad actual de Amelia? La edad actual de Amelia es igual a la edad de Enrique… (*Remedios borra y nuevamente escribe "(3*x)=…".*)
134. Celia: Es que es igual a la edad actual de Enrique… ay, no…
135. Remedios: Pero es que no.
136. Celia: No puede ser. Prueba a ver pero yo creo que no.
137. (*Remedios prosigue "(3*x)*=x…".*)
138. Remedios: No, es que no es. (*Remedios borra la ventana de ecuaciones.*)

Cuando la resolución parece abocada al fracaso, Remedios modifica su estrategia e inicia la escritura de la ecuación mediante un proceso de traducción directa del enunciado, en el cual la estudiante va buscando en la ventana de cantidades aquellas cantidades que dan cuenta de lo relatado en el enunciado. Mediante esta forma se hace visible como Remedios traduce "dentro de cinco años la edad de futura de Amelia" por 3*x*+5 (ítem 140), "es igual al doble que la edad de Enrique" por = 2**x*. Así construye la ecuación errónea (3**x* + 5) = 2**x*, donde el error no se debe a la metodología empleada sino que la estudiante usa la cantidad *Eae* para la única cantidad no mencionada explícitamente en el enunciado. Sin embargo, Remedios rehace la ecuación empleando, esta vez sí, las cantidades correctas (ítem 142).

139. Remedios: Dentro de cinco años… la edad futura de Amelia… (*Remedios escribe "(3*x+5)…".*)
140. Remedios: …es igual al doble que la edad de Enrique… (*Remedios finaliza "(3*x+5)=2*x".*)
141. Remedios: No. (*Remedios borra la ventana de ecuaciones.*)
142. (*Remedios escribe "(3*x+5)=2*(x+5)".*)
143. Remedios: Ahora.

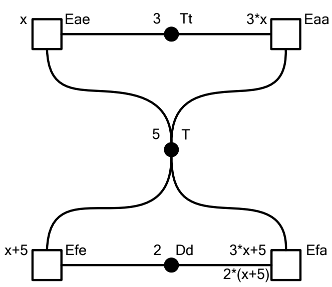


Figura 6.62. Grafo al final de la resolución.

Dado que la pareja ha realizado numerosos intentos y la ecuación finalmente construida no ha sido acompañada por una explicación que permita tener la certeza de que no es fruto de un proceso fortuito, el profesor les invita a explicar la ecuación. En las explicaciones que ofrece Remedios no justifica por qué las ecuaciones anteriores no eran posibles en la situación descrita en el enunciado.

144. Profesor: Habéis probado muchas ecuaciones. ¿Podéis explicar la última?
145. Remedios: Sí, porque, a ver, la edad futura de Amelia va a ser igual al doble de la edad futura que tiene Enrique.
146. Profesor: ¿Por qué no la habéis escrito la primera?
147. Remedios: Estábamos pensando en otras ecuaciones. Por ejemplo la edad de Amelia actual en vez de la futura… y estábamos pensando que era la actual…
148. Profesor: ¿Lo pensabais por alguna cosa en especial?
149. Remedios: No, porque creíamos que la ecuación era con la edad de… ahora en vez de la futura.

6.5.1.4. El caso de la pareja Celia-Remedios en el problema "Dos coches"

Albacete y Madrid distan 300 km entre sí. A la misma hora parte de Albacete un coche hacia Madrid con una velocidad de 90 km/h., y de Madrid parte otro hacia Albacete con una velocidad de 60 km/h. Dígase a qué distancia de Albacete se encuentran ambos coches.

La pareja inicia la resolución del problema mediante la definición de las cantidades conocidas. De esta forma, asignan valor de manera correcta a las cantidades *distancia entre Albacete y Madrid*, *S* (ítem 4); *velocidad del coche que sale de Albacete*, *Vsa* (ítem 7); y velocidad del coche que sale de Madrid, *Vsm* (ítem 10).

1. (*Remedios carga el problema y despliega la lista de cantidades.*)
2. Celia: A ver, no. (*Celia lee el enunciado en voz alta. La cantidad activa es "distancia entre Albacete y Madrid"*.)
3. Remedios: Distancia entre Albacete y Madrid, trescientos.
4. (*Remedios asigna el valor "300" a la cantidad "distancia entre Albacete y Madrid". La cantidad activa pasa a ser la cantidad activa "velocidad del coche que sale de Albacete"*.)

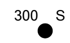


Figura 6.63. Grafo después del ítem 4.

5. Celia: Trescientos.
6. Celia: Velocidad del… noventa.
7. (*Remedios asigna el valor "90" a la cantidad activa "velocidad del coche que sale de Albacete". La cantidad activa pasa a ser "velocidad del coche que sale de Madrid"*.)

Figura 6.64. Grafo después del ítem 7.

8. Celia: Velocidad del… Madrid.
9. Remedios: [Velocidad del… sesenta.]
10. (*Remedios asigna el valor "60" a la cantidad activa "velocidad del coche que sale de Madrid". La cantidad activa pasa a ser "distancia recorrida por el coche que sale de Albacete hasta*

encontrarse”.)

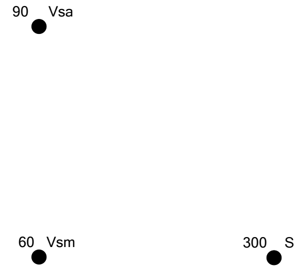


Figura 6.65. Grafo después del ítem 10.

Ante la primera de las cantidades desconocidas propuestas por el programa, *la distancia recorrida por el coche que sale de Albacete* (*S*), Celia propone la representación haciendo uso de la letra *equis* pues arguye que es una cantidad desconocida (ítem 13). Remedios aprueba la idea y la consigna en el sistema (ítem 14).

11. Celia: Distancia recorrida por el coche que sale de Albacete…
12. Remedios: hasta encontrarse…
13. Celia: *Equis*. No lo sabemos.
14. Remedios: *Equis*. (*Remedios asigna la letra “x” a la cantidad activa “distancia recorrida por el coche que sale de Albacete hasta encontrarse”. La cantidad activa pasa a ser “distancia recorrida por el coche que sale de Madrid hasta encontrarse”.*)

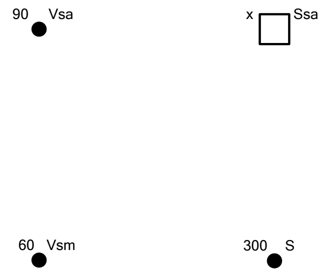


Figura 6.66. Grafo después del ítem 14.

Inmediatamente, y a la vista de la etiqueta de la cantidad *distancia recorrida por el coche que sale de Madrid hasta encontrarse* (*Ssm*), Celia sugiere el uso de una segunda letra, en este caso *y*. Sin prácticamente verbalización, Remedios se limita a plasmar la propuesta de su compañera en el sistema (ítem 17).

15. Celia: *y*.
16. Remedios: ¿Eh? *y*.
17. (*Remedios asigna la letra “y” a la cantidad activa “distancia recorrida por el coche que sale Madrid hasta encontrarse”. La cantidad activa pasa a ser “tiempo que tardan en encontrarse”. Se activa la ventana de ecuaciones.*)

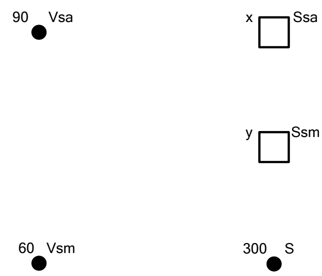


Figura 6.67. Grafo después del ítem 17.

Celia lee el nombre de la siguiente cantidad propuesta, *el tiempo que tardan en encontrarse* (*T*) (ítem 18). Remedios

18. Celia: Tiempo que tardan en encontrarse…
19. Remedios: ¿¿??
20. Celia: Espérate, vamos a hacer primero

parece extrañada a la vista de esta cantidad (ítem 19). Sin embargo, Celia opta por abordar en primer lugar la construcción de una ecuación y posterga la definición de *T*. Dadas las cantidades declaradas en el sistema en ese instante, la única relación que es posible plasmar en una ecuación es la aditiva *S* = *Ssa* + *Ssm*. Así, trabajando de forma conjunta, construyen y validan la ecuación correcta *x* + *y* = 300 (ítem 25).

aquí. (*Celia señala la ventana de ecuaciones.*)

21. Remedios: Pues sería… espera… (*Remedios apunta con el ratón al botón "300".*)
22. Celia: La primera sería noven…
23. Remedios: *Equis.* (*Remedios escribe "x…".*)
24. Celia: Equis más y es igual a tres… (*Remedios escribe "x+y=…".*)
25. Remedios: … a trescientos. (*Remedios escribe "x+y=300", que es validada por el tutor. Se desactiva la ventana de ecuaciones.*)

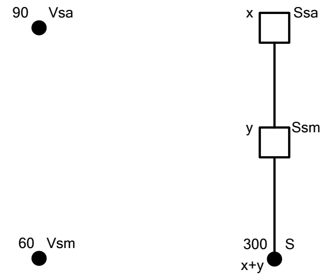


Figura 6.68. Grafo después del ítem 25.

Celia parece querer retomar la definición de la cantidad *T* (ítem 26) cuando su compañera espeta "ahora la segunda" (ítem 27) y decide activar la opción *expresión*. Esta verbalización induce a pensar que considera posible construir la segunda ecuación en ese instante aunque no podemos descartar que esté refiriéndose a que han de usar una segunda relación. Esta interpretación nos parece más remota pues rara vez los estudiantes suelen hablar con respecto a las relaciones sino que suelen distinguir entre ecuaciones y expresiones con independencia de que en ellas se pueda poner en juego la misma relación.

26. Celia: Y ahora el…
27. Remedios: [Y ahora la segunda] (*Remedios activa la opción "expresión".*)
28. Remedios: Espera. (*Activa la opción "número" para leer la etiqueta activa.*)
29. Remedios: Distancia que tardan en encontrarse. (*Remedios activa la opción "expresión".*)
30. (*Remedios activa la opción "número" para leer la etiqueta activa de nuevo*.)
31. Remedios: O sea, tiempo que tardan en encontrarse. (*Activa la opción "expresión".*)

Remedios, vuelve a activar la opción *número*, sólo con el objeto de releer la descripción de *T* (ítem 28). Al leer en voz alta la etiqueta verbaliza "distancia que tardan en encontrarse" en vez de *tiempo que tardan en encontrarse* (ítem 29). Aunque es cierto que posteriormente la estudiante corrige su lectura (ítem 31) y, por tanto, parece que esta verbalización es sólo fruto de una distracción poco relevante, no podemos descartar que sea fruto de una confusión ya documentada en otras investigaciones entre las magnitudes espacio y tiempo.

La pareja empieza a estudiar cómo construir una expresión para representar el tiempo transcurrido. Para ello revisan los significados de las letras x e y usando las funcionalidades del tutor en este sentido (ítems 34 y 35). La elección que han hecho de las cantidades a designar mediante letras, les obliga ahora a invertir alguna de las relaciones multiplicativas $Ssa = Vsa \cdot T$ ó $Ssm = Vsm \cdot T$ mediante el uso de la operación división. Celia sopesa escribir una ecuación usando la cantidad *Vsm* en la forma 60… (ítem 38), lo cual le conduciría a una ecuación incorrecta. Remedios, quizá consciente de ello, rechaza esta propuesta y sugiere otra iniciada con la distancia entre Albacete y Madrid en la forma $x + y$ (ítem 42) siendo ahora su compañera quien rechaza esta idea (ítem 43). A pesar de ello, y de reconocer Remedios que no puede ser correcta (ítem 44), inmediatamente sugiere emplear el valor 300 sin parecer reconocer que esta no deja ser otra forma de representar la misma cantidad. Celia propone, con poca firmeza, emplear la expresión $x - y$ (ítem 46), la cual validan recibiendo el mensaje de que es una expresión algebraica errónea. Ninguna de las dos estudiantes vierte ninguna justificación que permita comprender por qué proponen esta ecuación claramente incorrecta. La expresión algebraica $x - y$ daría cuenta de la relación errónea $Ssa = Ssm + T$, donde las cantidades relacionadas aditivamente no son homogéneas. Una explicación plausible a que la pareja sí considere factible esta relación vendría dada precisamente por la confusión entre espacio y tiempo que apuntábamos pocas líneas atrás. Tras validar la ecuación, Remedios parece comprender precisamente este aspecto y, en consecuencia, entender por qué la misma ha sido rechazada (ítem 57).

32. Celia: Pues si es una expresión, sería *y*…
33. (Remedios escribe la expresión "*y*…".)
34. Celia: *y* es la distancia recorrida y *equis*, *y* es la distancia recorrida por el de…
35. Remedios: [Claro, por el coche que sale de Madrid]. (*Remedios consulta la ventana de cantidades.*)
36. Celia: Mmm…
37. Remedios: Era cuánto tiempo tardan en encontrarse.
38. Celia: Pues sesenta, sesenta… no. (*Remedios borra la expresión. Escribe "60…".*)
39. Remedios: No. (*Remedios borra la ventana de expresiones.*)
40. Remedios: A ver… mmm….
41. Remedios: A ver… distancia recorr… tiempo que tardan en encontrarse…
42. (*Remedios escribe "x+y…".*)
43. Celia: No.
44. Remedios: No, es que no da. (*Borra la ventana de expresiones sin validar.*)
45. Remedios: Distancia… (*Remedios se posa sobre el botón "300".*)
46. Celia: ¿*Equis* menos *y*? Prueba a ver…
47. Remedios: A ver… distancia recorrida por el coche que sale de… Sería *equis*…
48. Celia: [*Equis* menos *y*.]
49. Remedios: Equis más sesenta… (*Remedios escribe "x+60".*)
50. Celia: No.
51. Remedios: ¡Qué hago! (Borra la ventana de expresiones.)
52. Remedios: ¿*Equis* menos *y*?
53. Celia: Sí. No, no, no lo sé…
54. Remedios: Es que esa es la distancia… (*Remedios escribe "x−y".*)
55. Celia: Prueba a ver. Es que es el tiempo total…
56. (*Remedios valida la expresión, que es identificada como errónea.*)

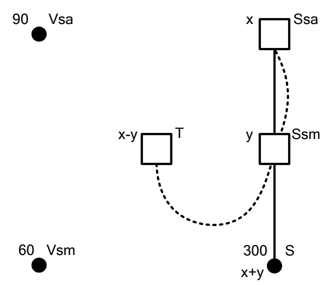


Figura 6.69. Grafo después del ítem 56.

57. Remedios: Claro, es que es el tiempo. (*Remedios borra la ventana de expresiones.*)

Celia, ahora, plantea sumar las cantidades *Vsa* y *Vsm* (ítem 58). En un principio podría pensarse que la estudiante planea usar una estrategia que consiste en transformar la situación descrita en el problema con dos móviles en una situación con un solo móvil circulando a una velocidad igual a la suma de los dos móviles de la situación original. Esta estrategia le permitiría calcular aritméticamente la cantidad *T* gracias a la expresión 300/(90+60). Sin embargo, no parece que sea esta la idea de Celia pues la estudiante intenta asignar directamente esta expresión a la cantidad *T* (ítem 64). Durante esta asignación fallida Remedios se muestra muy escéptica pues no parece verle lógica a la relación propuesta.

58. Celia: A ver, si a noventa kilómetros por hora que va uno más sesenta kilómetros por hora que va otro, prueba a ver noventa más setenta…
59. Remedios: ¿Noventa más setenta? (*Se ríe*).
60. (*Remedios escribe la expresión “90+60”.*)
61. Celia: ciento veinte (sic).
62. Remedios: Yo creo que no.
63. Celia: Ya.
64. (*Remedios valida la expresión, que es identificada como errónea.*)

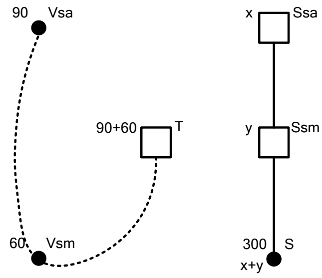


Figura 6.70. Grafo después del ítem 64.

Por primera vez, la pareja parece considerar la necesidad de emplear una relación multiplicativa para dar respuesta al problema. En concreto, Celia alude la opción de emplear una división para representar la cantidad *T* (ítem 66). Su compañera le da la razón, es más, inicia una expresión de la forma 90… quizá con vistas a usar la división (ítem 67). Así lo entiende su compañera quien le sugiere continuar la expresión dividiendo aunque sin concretar por qué cantidad (ítem 68). Remedios rechaza esta opción inicialmente (ítem 69) pero pocos segundos después escribe y trata de validar la expresión 90/*x* para representar *T* (ítem 72). Esta expresión constituye un error de inversión y, como no podría ser de otra manera, es rechazada por el sistema.

65. Remedios: No.
66. Celia: Es que una fracción a lo mejor.
67. Remedios: Es que, claro… (*Remedios escribe “90…”.*)
68. Celia: Noventa entre…
69. Remedios: No.
70. Celia: No.
71. Remedios: Espera. (*Remedios escribe “90/x” revisando la ventana de cantidades.*)
72. Remedios: Es que… (Remedios valida la expresión, que es identificada como errónea.)

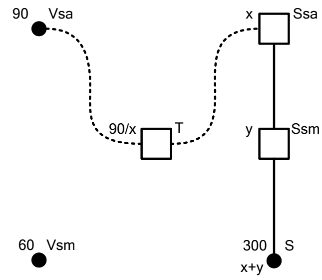


Figura 6.71. Grafo después del ítem 72.

Dando continuidad a la idea de usar la división, ahora, Celia sugiere dividir la cantidad *S* (ítem 73) aunque de sus acciones posteriores no es posible deducir

73. Celia: [Sería trescientos, trescientos entre…].
74. Remedios: ¿Entre?
75. (*Remedios escribe “300/…”.*)
76. Remedios: A ver la distancia que

exactamente por qué cantidad desea dividirla. Sólo se muestra evidente que desea involucrar las cantidades relativas a la magnitud espacio por lo que resultaría imposible que esta expresión diera lugar a una representación correcta de la cantidad T. En un momento dado (ítem 78), Celia vuelve a apuntar a una relación aditiva ligando las tres cantidades relativas a distancias siendo llamativo que su compañera parezca contestarle que esa idea quizá corresponda con la construcción de la segunda ecuación (ítem 79). En una nueva iniciativa, también incorrecta, Celia formula la expresión $300x + y$ (ítem 80) lo que empieza a reflejar la dificultad y el agotamiento de ideas para definir la cantidad T (ítem 82). En respuesta, Remedios vuelve a tratar de validar la expresión algebraica $90/x$ que había sido rechazada por el tutor pocos segundos antes.

recorren es trescientos, ¿no? (*Remedios prosigue "300/x…". Intenta darle al "+" pero el tutor no lo permite.*)

77. Remedios: No, eh, no se puede.
78. Celia: No, es que es… es que es más, ese trescientos más la distancia recorrida, ¿no? Trescientos más…
79. Remedios: Pero eso, eso sería en fracción de aquellas (sic) (*señala la ventana de ecuaciones.*)
80. Celia: Trescientos multiplicado por equis más *y*. Prueba a ver.
81. Remedios: ¿Trescientos por equis más *y*? (*Remedios sólo puede escribir "300*x".*)
82. Celia: No, es que no sé cómo hacerlo el tiempo… (*Remedios borra la expresión.*)
83. Remedios: A ver… vale, espera. Noventa entre… (*Remedios escribe "90/…".*)
84. Celia: [Noventa, ¿por qué siempre noven…?].
85. Remedios: …equis… (*Remedios acaba "90/x".*)
86. Celia: No.
87. (*Remedios valida la expresión, que es identificada como errónea.*)

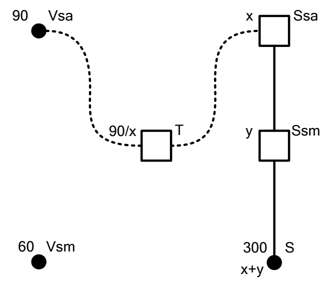


Figura 6.72. Grafo después del ítem 87.

A pesar de sus errores que podrían hacer pensar que la pareja desconoce la estructura conceptual necesaria para resolver el problema, Remedios demuestra que no es el caso pues verbaliza ésta correctamente (ítem 88). La verbalización explícita de la estructura conceptual parece desencadenar un proceso mental de despeje de la cantidad T. En esta línea se incluiría la intervención de Remedios que expresa poder representar el tiempo a partir de la división entre la distancia recorrida por el

88. Remedios: Espera. Porque el tiempo es la distancia partida por la velocidad (*Se ríe.*)
89. Celia: Es que, eh… espérate… [inaudible]… o sea el tiempo que tardan en encontrarse, ¿no?
90. Remedios: Tiempo es igual a distancia entre velocidad. Distancia del coche que sale de Albacete, por ejemplo… (*Remedios se apoya en el ratón en la ventana de cantidades. Mira al fondo, como haciendo memoria. Remedios escribe "x…".*)
91. Remedios: …entre ¿noventa? (*Remedios acaba "x/90", que es identificada como correcta. Se activa la ventana de ecuaciones.*)

coche que sale de Albacete y la velocidad de éste (ítem 90), es decir a través de la relación *Ssa* = *Vsa*·*T*. En la misma verbalización parece subyacer que el estudiante entiende que es posible aplicar la misma estructura conceptual para cualquiera de los dos móviles. De este modo, tras varios intentos previos fallidos, consiguen simbolizar la cantidad *T* mediante la expresión *x*/90 (ítem 91).

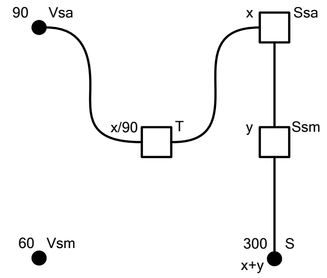


Figura 6.73. Grafo después del ítem 91.

Dado que Celia no parece comprender la base de la expresión que acaban de validar (ítem 95), Remedios verbaliza nuevamente la estructura conceptual usada (ítem 96) pero en este caso lo hace de manera general, sin referirse a ninguno de los móviles. Su manifestación, quizá, pretenda indicar que pueden usar nuevamente esta estructura en una segunda relación considerando el móvil que sale desde Madrid. De hecho, así parece entenderlo su compañera, quien inicia la escritura de la segunda ecuación diciendo "lo que has dicho tú, el tiempo…" (ítem 97). De esta manera, empiezan una ecuación en la forma (*x*/90) =… (ítem 99) que tiene visos de poder cristalizar en una ecuación correcta. Sin embargo, y amparada en la verbalización genérica de la estructura conceptual, Celia indica, sin completar la relación, "el tiempo es igual a la distancia…" (ítem 101) y su compañera ante la palabra *distancia* sugiere usar la cantidad *S* (ítem 102). De esta forma, incurren en un primer error al usar la distancia total y, por tanto, no aplicar la relación a ninguno de los dos móviles. Resulta más sorprendente que traten de validar directamente la ecuación (*x*/90) = 300, lo que en la práctica supone la igualación entre las cantidades *T* y *S*. Esta actuación vuelve a aportar evidencias de que la confusión entre las magnitudes de espacio y tiempo pudiera ser profunda y no debida a descuidos poco transcendentes (ítem 104).

92. Remedios: Bueno…
93. Celia: Vale.
94. Remedios: ¿Ves? Porque es…
95. Celia: [Pero… ¿por qué?
96. Remedios: Porque el tiempo es igual a la velocidad, o sea a la distancia partida de la velocidad.
97. Celia: Ah. Bueno, pues entonces sería… lo que has dicho tú, el tiempo…
98. Remedios: [Sería el tiempo…] (*Remedios escribe "(x/90)…"*.)
99. Celia: … más la ve. No, el tiempo es igual a…. (*Remedios escribe "(x/90)+…"*.)
100. Remedios: Ah, espera.
101. Celia: El tiempo es igual a la distancia… (*Remedios borra y escribe "(x/90)=…"*.)
102. Remedios: ¿A trescientos?
103. Celia: [A trescientos… (*Remedios escribe "(x/90)=300…"*.)
104. Remedios: Ea… (*Remedios valida la ecuación, que no es validada por el tutor.*)

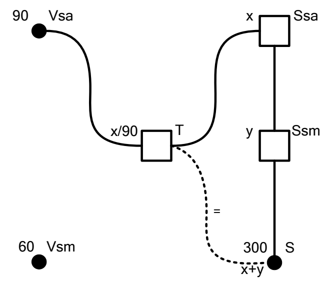


Figura 6.74. Grafo después del ítem 104.

Celia repara en el error de la ecuación

105. Remedios: No. (*Remedios borra la expresión.*)

propuesta a validación pues afirma que no refleja que el tiempo sea igual a la distancia entre la velocidad (ítem 106). No obstante, parece pensar que eso se plasma ya en la representación $x/90$ (ítem 108) y es su compañera quien le recuerda la necesidad de construir otra expresión (ítem 109). Entonces Celia reacciona proponiendo la ecuación ($x/90$)=300/(90+60), en donde la alumna parece tener en mente la transformación del problema de dos móviles en un problema de un único móvil ya comentada anteriormente. Más aún al referirse a la cantidad representada por 90+60 como *la velocidad total* (ítem 112). Desafortunadamente el tutor no les permite construir la ecuación al estar limitadas las relaciones cuaternarias a relaciones de proporcionalidad o aditivas puras.

106. Celia: Es que, es que es… el tiempo es igual a la distancia más, entre la velocidad, ¿no? (*Remedios escribe "(x/90)…".*)

107. Remedios: [Claro.]

108. Celia: Pues sería eso.

109. Remedios: Pero tienes que hacer otra expresión.

110. Celia: Es igual a la distancia en total entre la velocidad, entre noventa más sesenta. (*Remedios prosigue "(x/90)=300/90…".)*

111. Remedios: ¿¿Noventa más sesenta??

112. Celia: Claro, porque es la velocidad total… (*Remedios intenta seguir escribiendo pero el tutor se lo impide.*)

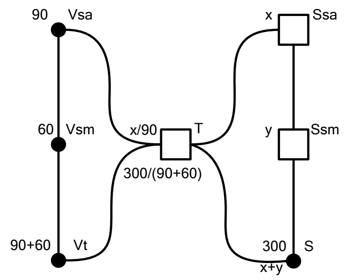


Figura 6.75. Grafo propuesto en ítem 112.

Ante la imposibilidad de resolver el problema desde esa lectura aritmética en la cual es posible ir siempre desde las cantidades conocidas hasta las desconocidas, la pareja reflexiona sobre cómo plasmar la estructura conceptual que relaciona espacio, velocidad y tiempo. Una vez más vuelven a cometer el error de construir una ecuación que supone la igualación de S y T, en esta ocasión plasmada en ($x/90$) = $x + y$ (ítem 118). En el proceso de escritura, destacamos la verbalización inicial de Celia (ítem 115) donde hablaba de la "distancia recorrida por cada coche" y que parecía podría ser el punto de arranque para considerar la relación en el móvil que sale desde Madrid. Sin embargo, las acciones posteriores vuelen a reflejar el uso de la cantidad S, ahora como suma de las distancias recorridas por cada móvil.

113. Remedios: No, no te deja. (*Borra la ventana de ecuaciones.*)

114. Remedios: A ver eso de la velocidad total… o sea el tiempo que tarda en encontrarse. (*Remedios escribe "(x/90)…".*)

115. Celia: Es igual a la distancia recorrida por cada coche, ¿no? (*Remedios escribe "(x/90)=…".*)

116. Remedios: Mmm…

117. Celia: Equis más *y*, ¿no?

118. (*Remedios escribe "(x/90)=x+y", que es identificada como errónea por el tutor.*)

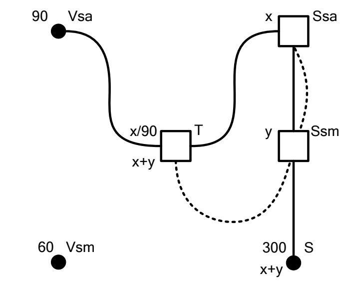


Figura 6.76. Grafo después del ítem 118.

El mensaje de error desencadena un nuevo intento de construir una ecuación

119. Celia: No.

120. Remedios: No. (*Borra la ventana de expresiones.*)

sin involucrar las velocidades de los móviles. Así, proponen la ecuación errónea (x/90) = x−y (ítem 122) que es rechazada por el programa.

121. (*Remedios escribe "(x/90)=x...".*)

122. Remedios: ¿Menos y? (*Remedios escribe "(x/90)=x−y", que es identificada como errónea por el tutor.*)

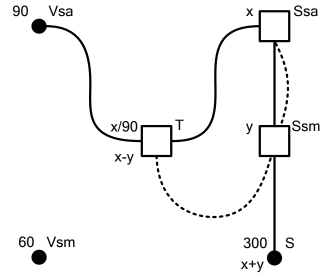


Figura 6.77. Grafo después del ítem 122.

La pareja parece incapaz de ampliar el uso de la estructura conceptual al segundo de los móviles. De hecho, quizá una de los factores que influyan en esta dificultad sea la posibilidad de que el modelo de situación al que estén intentando dar respuesta no se corresponda con lo descrito en el enunciado. Así podría deducirse de lo expuesto por Celia quien afirma que cada móvil recorre trescientos kilómetros (ítem 126). Esto podría justificar el empecinamiento en involucrar S en la ecuación.

Por otro lado, parece que sin mucha reflexión, Celia propone a validación la ecuación (x/90) = 60 + 90, que es rechazada por el tutor (ítem 130).

123. Celia: No.

124. Remedios: No.

125. (*Remedios borra la ventana de expresiones.*)

126. Celia: A ver, tenemos que la distancia total que recorre cada uno es igual a trescientos, ¿no? Pues ahora sería…

127. Remedios: [El tiempo que tardan en encontrarse… (*Remedios escribe "(x/90)…".*)

128. Celia: Sería, sería… sesenta más noventa es igual al tiempo que tardan en encontrarse…

129. Remedios: ¿Sesenta más noventa?

130. Celia: No, no, es que creo que… (*Remedios escribe "(x/90)=60+90", que es identificada como errónea por el tutor.*)

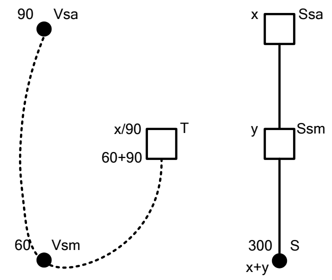


Figura 6.78. Grafo después del ítem 130.

En respuesta y en sintonía con el mensaje de error, Remedios señala que sesenta y noventa corresponden a cada una de las velocidades (ítem 132). Pareciera que desea subrayar la incoherencia de la ecuación. Aún así, Celia se empeña en volver a reescribir la misma ecuación intercambiando el orden de las expresiones de cada miembro. Tras escribirlo, la propia alumna se percata de

131. Celia: No, no, es sesenta más noventa es igual, no al tiempo ése, es sesenta…

132. Remedios: Pero esa es la velocidad, Celia.

133. Celia: No, porque a ver…

134. Remedios: Sí, la velocidad, noventa kilómetros por hora y sesenta.

135. Celia: Es que, vamos a ver. Prueba a ver por si acaso. (*Remedios escribe "90…".*)

136. Remedios: ¿El qué?

137. Celia: Sesenta o noventa más setenta, ¿no?

que han escrito lo mismo. Aún así intentan validarlo fallidamente (ítem 146).

138. Remedios: Vale, vale…
139. (*Remedios escribe "+9060=…".*)
140. Celia: Es igual al tiempo transcurrido.
141. Remedios: No me deja…
142. Celia: Porque lo has hecho mal, mi amor.
143. Celia: Sesenta más noventa es igual al tiempo que tardan en encontrarse.
144. (*Remedios escribe "60+90=(x/90)".*)
145. Remedios: Eso ya lo hemos puesto antes.
146. (*Remedios valida la ecuación, que es identificada como errónea por el tutor.*)

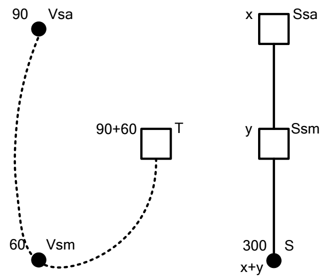


Figura 6.79. Grafo después del ítem 146.

Celia interpela a su compañera para que proponga alguna alternativa (ítem 147). Ésta pretende construir plasmar una relación cuaternaria de proporcionalidad en lo que parece tener en consideración que el tiempo transcurrido es el mismo para ambos móviles y que éste se puede representar independientemente a partir de la velocidad y el espacio recorrido por cada móvil. Sin embargo, formula la ecuación erróneamente al apoyarse en la relaciones erróneas $T = Vsa{\cdot}Ssa$ y $T = Vsm{\cdot}Ssm$ (ítem 150) a pesar de que anteriormente usaron correctamente la estructura conceptual involucrada para definir T.

Pocos segundos más tardes, parece que ya afianzada en la idea de considerar independientemente la relación para cada uno de los móviles, Remedios propone la ecuación incorrecta $60y = (x/90)$ la cual es rechazada por el tutor.

147. Celia: ¿Entonces cómo sería?
148. Remedios: A ver…velocidad del coche… (*Remedios escribe "60*y…".*)
149. Celia: Y más…
150. Remedios: Igual a noventa por equis… No me deja… (*Remedios escribe "60*y=90...". Quería escribir "60*y=90*x". Borra la ventana de ecuaciones.*)
151. Celia: A ver, espera.
152. Remedios: Dime.
153. Celia: Sesenta por… sesenta es el de Madrid por la distancia recorrida por el de Madrid más… no… (*Celia escribe "60*y…". Quería escribir "60*y+…" pero el tutor no le deja. Borra la ventana de expresiones.*)
154. Remedios: A ver espera…
155. (*Remedios escribe "60*y=(x/90)", que no es validada por el tutor.*)

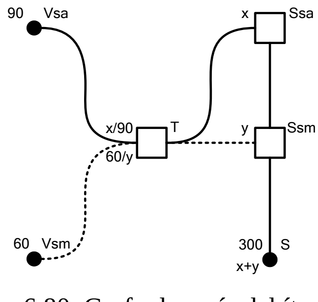


Figura 6.80. Grafo después del ítem 155.

Esta ecuación, aún siendo errónea, permite visualizar la asimetría de las

156. Remedios: No. Pues ésa era la última… es que tenemos que usar estos (*señala la ventana de cantidades*), voy a hacer una

relaciones construidas para cada uno de los móviles, lo que podría facilitar que la pareja alcanzara la ecuación correcta. Sin embargo, ninguna de las estudiantes parece observar este hecho y escriben una nueva ecuación en la que igualan *T* a la razón entre *Vsa* y *Vsm* (ítem 159). De sus comentarios se infiere que cada vez construyen ecuaciones de manera más rápida y dando menos espacio a la reflexión (ítems 158 y 160). Prueba de ello es la siguiente tentativa que escriben donde, esta vez, igualan *T* al producto de las velocidades (ítem 161).

cosa…

157. (*Remedios escribe "90/60…".*)

158. Remedios: ¡Qué burrada voy a poner!

159. (*Remedios finaliza "90/60=(x/90)", que es identificada como errónea por el tutor.*)

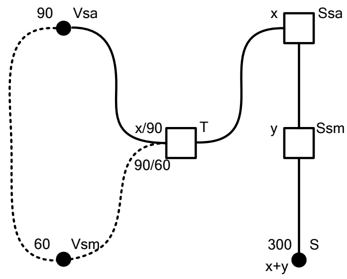


Figura 6.81. Grafo después del ítem 159.

160. Celia: Peores he puesto yo, no te preocupes…

161. (*Remedios reescribe "90*60=(x/90)", que es identificada como errónea por el tutor.*)

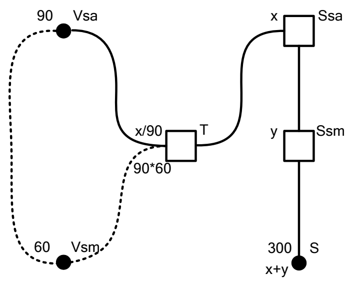


Figura 6.82. Grafo después del ítem 161.

La pobreza de ideas se refleja en el hecho de que vuelven a proponer ecuaciones ya rechazadas por el tutor anteriormente (ítem 145). A su vez, los comentarios de las estudiantes empiezan a denotar una creciente frustración (ítem 162 y 166). A pesar de ello, Remedios vuelve a insistir con la ecuación 60*y* = (*x*/90), que si bien es errónea, parece reconducir el problema a una base lógica y acerca a la pareja a la resolución correcta.

162. Remedios: ¡Me voy a cabrear!

163. Remedios: Espera, la distancia que recorre uno… equis menos *y*… (*Remedios escribe "(x/90)=x−…".*)

164. Celia: menos *y*. (*Remedios escribe "(x/90)=x−y", que es identificada como errónea por el tutor.*)

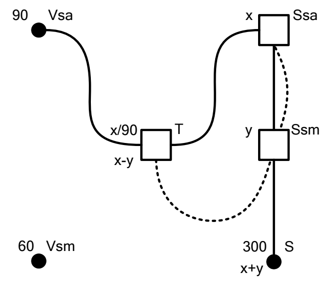


Figura 6.83. Grafo después del ítem 164.

165. Celia: No.

166. Remedios: Joder (sic).

167. Remedios: A ver, espera… (*Remedios escribe "60*y=(x/90)", que no es validada por el tutor.*)

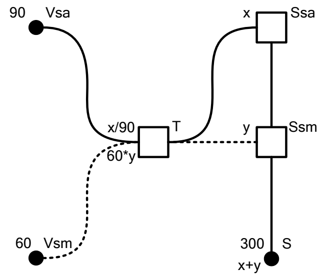


Figura 6.84. Grafo después del ítem 167.

En cambio, las iniciativas comandadas por Celia parecen no edificarse sobre una línea de razonamiento y parecen responder a una estrategia de ensayo y error o de *gaming*. En esa línea se enmarcaría el siguiente intento, cuando escriben 60/300 = 90/300 (ítem 173).

168. Celia: Pon… sesenta partido trescientos igual… (Se ríe).
169. (*Remedios escribe "60/300=…".*)
170. Remedios: Eso es decimal… (*Remedios finaliza "60/300=(x/90)".*)

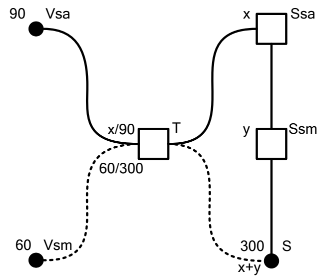


Figura 6.85. Grafo después del ítem 170.

171. Remedios: ¡Madre mía! Espera… (*Remedios borra la expresión para poner lo que pide Celia.*)
172. Celia: Es que se me están ocurriendo unas burradas ahora mismo por mi cabecita…
173. Remedios: Es una burrada pero bueno… (*Remedios escribe "60/300=90…" pues el tutor no les permite representar "60/300=90/300".*)
174. Celia: Oye, si cuela, cuela.
175. Remedios: No.
176. Celia: No vale. (*Remedios borra la ventana de ecuaciones.*)
177. Remedios: A ver, es que…
178. (*Silencio de diez segundos.*)
179. Profesor: Le podéis dar al botón de relaciones si queréis y las leéis en voz alta. Son las que habéis usado, las relaciones que habéis usado.
180. (*Remedios pulsa el botón "Relaciones usadas".*)
181. Celia: ¡Yeee! (*Celia parece abrumada por el texto.*)
182. Profesor: A ver si os ayuda…
183. Celia: Distancia entre Albacete y Madrid es igual a distancia recorrida por el coche que sale de Albacete hasta encontrarse más distancia recorrida por el coche que sale de Madrid hasta encontrarse. Y luego otra es: distancia recorrida por el

La secuencia de iniciativas erróneas es sinónimo de la impotencia de la pareja para resolver el problema. El profesor, atendiendo a la gran cantidad de tiempo consumido en la resolución, autoriza a la pareja a que utilice el botón *Relaciones usadas* (ítem 179). Remedios presiona el botón (ítem 180) y su compañera da lectura a las relaciones usadas (ítem 183). Los comentarios posteriores revelan que la pareja entiende que esas relaciones ya no pueden ser empleadas otra vez (ítems

184 y 185).

La lectura, que perseguía hacer explícita las relaciones gastadas, no parece haber sido de ninguna utilidad. El profesor sopesaba que quizá pudiera desencadenar la construcción de una ecuación por analogía empleando la misma estructura conceptual. En cambio, la dinámica de resolución prosigue por la vía del ensayo y error (véase ítem 187)

coche que sale de Albacete hasta encontrarse es igual a velocidad del coche que sale de Albacete por tiempo que tardan en encontrarse. (*Lee las relaciones usadas.*)

184. Remedios: Ésas son las que hemos usado ya.

185. Celia: Y que no se puede… (*Susurra.*)

186. Remedios: A ver… (*Remedios escribe "90*(x/90)=…".*)

187. Remedios: …es igual a… no. (*Remedios escribe "90*(x/90)=300", que es identificada como errónea por el tutor. Lo sabía antes de validar.*)

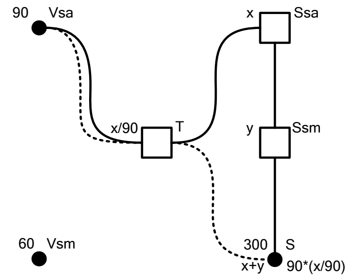


Figura 6.86. Grafo después del ítem 187.

188. Celia: Si es que… (*Remedios borra la ventana de ecuaciones.*)

189. (*Remedios escribe "90…".*)

190. Celia: ¿Has probado noventa más sesenta es igual tiempo transcurrido? (*Remedios continúa "90*60=…".*)

191. Remedios: Sí, ¿no? A ver el tiempo transcurrido… (*Revisa la ventana de cantidades.*)

192. Celia: Es *equis* entre…

193. Remedios: No, es que no. (*Remedios continúa "90*60=(x/90)", que es identificada como errónea por el tutor.*)

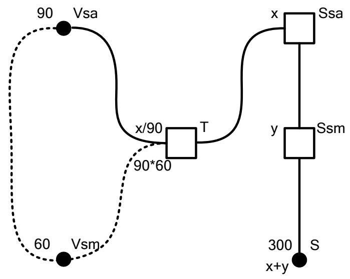


Figura 6.87. Grafo después del ítem 193.

En estos instantes, cuando el profesor está valorando dar paso a otro problema, vuelven a representar la ecuación incorrecta (x/90)=60/y (ítem 197). A diferencia con las anteriores ocasiones en

194. Celia: Y… el tiempo transcurrido es igual a sesenta entre *y*… (*Remedios escribe "(x/90)=…"*).

195. Remedios: ¿Sesenta entre y?

196. Celia: Sí.

197. (*Remedios escribe "(x/90)=60/y", que es identificada como errónea por el tutor.*)

que esta ecuación había sido rechazada por el tutor, esta vez no la desechan inmediatamente tras la notificación. Por el contrario, Celia propone correctamente modificar el segundo miembro invirtiendo dividendo y divisor (ítem 198). La reacción de su compañera parece indicar que considera inasumible esta opción (ítem 199). Aún así, la proponen a validación siendo aceptada por el programa (ítem 201).

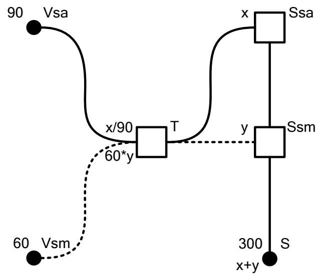


Figura 6.88. Grafo después del ítem 197.

198. Celia: O *y* entre sesenta…

199. Remedios: *y* entre sesenta (se ríe).

200. Celia: Si es que ya… *y* entre sesenta es igual a tiempo transcurrido… yo que sé.

201. (*Remedios escribe "(x/90)=(y/60)", que es validada por el tutor.*)

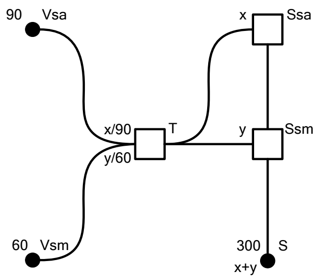


Figura 6.89. Grafo al final de la resolución.

El profesor pregunta a la pareja si han completado el problema simplemente gracias a la fortuna (ítem 204). Queremos destacar la contestación de Celia quien niega este hecho y aduce haber "mirado pensando" (ítem 205). Cuando el profesor le solicita que detalle esta cuestión, la alumna parece esbozar una construcción por analogía con la construcción de la cantidad *T*, es decir con *x/90*, aunque, bien es cierto, que la verbalización no es demasiado precisa (ítem 207).

202. Celia y Remedios: ¡Sí!

203. Celia: Pues ya está…

204. Profesor: Mmm… ¿Suerte?

205. Celia: ¡No! Es que he mirado pensando…

206. Profesor: ¿Y qué has pensado?

207. Celia: Pues que si tenemos… si *equis* que es la distancia recorrida por el de Albacete es igual a noventa que es la velocidad a la que va, debería ser igual a *y*, que es la distancia que recorre el de Madrid entre la velocidad que lleva.

208. Profesor: Lo tenemos que dejar aquí. Muchas gracias.

6.5.2. LA PAREJA LUISA-OCTAVIO

6.5.2.1. El caso de la pareja Luisa-Octavio en el problema “La excursión”

Un grupo de amigos está planificando una excursión. A cada amigo la excursión le va a costar 10 €. Sin embargo, a última hora, dos de los amigos deciden no ir a la excursión por lo que el resto ha de pagar 12,5 € cada uno. ¿Cuántas personas forman parte del grupo de amigos?

Octavio lee el enunciado del problema en voz alta (ítem 1). Luisa asigna el valor 10 a la cantidad *coste por persona si asistiesen todos los amigos* (*Cia*) (ítems 2 y 3).

1. (*Octavio lee el enunciado en voz alta. La cantidad activa inicialmente es “coste por persona si asistiesen todos los amigos”.*)
2. Luisa: Coste si asistieran todos. Pues diez, ¿no? Si les va a costar diez…
3. Octavio: (inaudible) (*Luisa asigna el valor “10” a la cantidad “coste por persona si asistiesen todos los amigos”. La cantidad activa pasa a ser “coste por persona si dos amigos no asisten”.*)

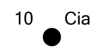


Figura 6.90. Grafo después del ítem 3.

De igual modo proceden para la siguiente cantidad conocida *coste por persona si dos amigos no asisten* (*Cfa*). Luisa verbaliza el valor que corresponde a *Cfa* y directamente consuma la asignación en el programa (ítem 5).

4. Octavio: Bien.
5. Luisa: Si no asisten son doce con cinco. (*Luisa asigna el valor “12.5” a la cantidad “coste por persona si dos amigos no asisten”. La cantidad activa pasa a ser “número de amigos que no asisten”.*)

Figura 6.91. Grafo después del ítem 5.

El profesor solicita a la pareja que hable en alto, especialmente Octavio, pues las intervenciones se suceden entre susurros.

Ante la cantidad conocida *número de*

6. Profesor: Hablad alto, por favor.
7. Luisa: El número de amigos que no asisten…
8. Octavio: [Equis.
9. Luisa: ¡No! Dos… no deciden ir.

amigos que no asisten (*An*), Octavio propone representar la cantidad mediante la letra *x* (ítem 8). Luisa lo corrige de inmediato informándole de que hay dos amigos que no asisten (ítem 9). Octavio da la razón a su pareja (ítem 10), tras lo cual Luisa informa en el programa la cantidad *An* con el valor “2”.

10. Octavio: Dos… dos amigos… son dos, sí.
11. Luisa: Dos. (*Luisa asigna el valor “2” a la cantidad “número de amigos que no asisten”. La cantidad activa es “número de amigos del grupo”.*)

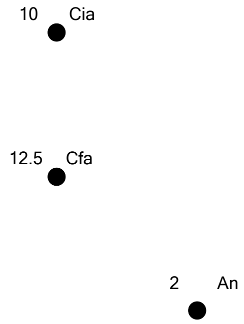


Figura 6.92. Grafo después del ítem 11.

La pareja ha definido ya todas las cantidades conocidas. Ambos leen en voz alta la descripción de la cantidad *número de amigos del grupo* (*A*) (ítem 12). Luisa propone emplear la letra equis para simbolizar *A* (ítem 13) siendo apoyada de inmediato por su compañero (ítem 14). Sin valorar otras opciones ni verbalizar nada más, Luisa registra la asignación de *x* en *A* en el sistema.

12. Ambos: Número de amigos del grupo. (*Hablan al unísono.*)
13. Luisa: Equis.
14. Octavio: Eso sí que es equis.
15. (*Luisa asigna la letra “x” a la cantidad “número de amigos del grupo”. La cantidad activa es “número de amigos que asisten a la excursión”.*)

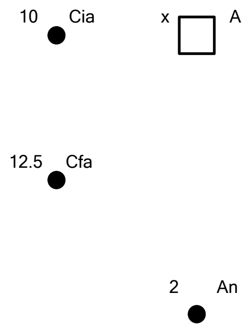


Figura 6.93. Grafo después del ítem 15.

La segunda cantidad desconocida que propone el programa para ser simbolizada es la cantidad *número de amigos que realmente asisten a la excursión* (*Aa*). Luisa sugiere emplear una segunda letra (ítem 17) y, en cambio, Octavio propone emplear la relación aditiva $A = Aa + An$ mediante la expresión algebraica $x - 2$ (ítem 18). Luisa desecha emplear en este

16. Octavio: Número de amigos que, que asisten a la excursión.
17. Luisa: Pues *y*.
18. Octavio: Equis menos dos, ¿no?
19. Luisa: Sí.
20. (*Luisa construye la expresión “x−2”.*)
21. Octavio: Equis menos dos. (*Luisa valida la expresión “x−2”, que es asignada a la cantidad “número de amigos que asisten a la excursión”. La cantidad activa pasa a ser “coste la excursión”.*)

momento otra letra (ítem 19) a favor de la expresión algebraica que construye y valida rápidamente (ítem 20 y 21).

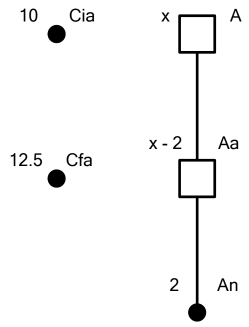


Figura 6.94. Grafo después del ítem 21.

Para cerrar el tercer paso del MC han de definir la cantidad *coste de la excursión* (C). En primer lugar, Octavio parece querer construir una expresión haciendo uso de la cantidad *Cia*, quizá teniendo en mente la relación multiplicativa $C = Cia{\cdot}A$ (ítem 23). Sin embargo, Luisa interrumpe a su compañero y no le deja desarrollar su propuesta. En contraposición, Luisa, mediante deícticos y señalando las cantidades, sugiere la expresión $12.5(x - 2)$ haciendo uso de la relación análoga $C = Cfa{\cdot}Aa$ (ítem 26). Octavio no muestra oposición y deja hacer a su pareja, de tal modo que Luisa introduce correctamente la expresión en el programa.

22. Luisa: Coste de la excursión.
23. Octavio: Eh… diez, bueno…
24. Luisa: [No.
25. Octavio: Sería…
26. Luisa: Esto (*señala "12.5"*) por eso (*señala "x−2"*).
27. Octavio: Esto por eso. Doce con… (*Luisa activa la opción "expresión".*)
28. Luisa: Doce con cinco por… (*Luisa construye la expresión "12.5*(x−2)".*)
29. Octavio: Equis menos dos. (*Luisa valida la expresión "12.5*(x−2)", que es asignada a la cantidad "coste de la excursión". Se activa la ventana de ecuaciones.*)

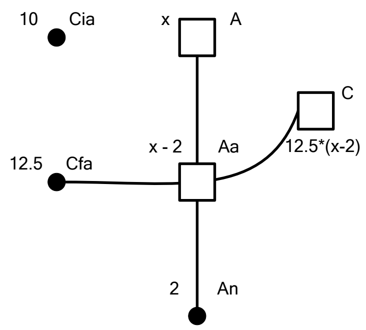


Figura 6.95. Grafo después del ítem 29.

Luisa comienza el cuarto paso del MC releyendo la pregunta del enunciado (ítem 31). Este hecho desconcierta a su compañero que no visualiza el origen del comentario de su pareja (ítem 32). Luisa remarca muy enfáticamente que acaba de releer la pregunta del enunciado (ítem 33) y Octavio reacciona rápidamente situándose de nuevo en el proceso, leyendo en voz alta nuevamente la pregunta (ítem 34). Tras este arranque se produce una pausa en el diálogo, que Octavio intenta romper de manera muy

30. Octavio: Y ya.
31. Luisa: ¿Cuántas personas forman el grupo?
32. Octavio: ¿Dónde está eso?
33. Luisa: ¡La pregunta! (*Luisa señala el enunciado.*)
34. Octavio: ¡Ahhhhh! Vale. ¿Cuántas personas forman el grupo?
35. Luisa: Si… ¿cuántos formaban el grupo?
36. (*Silencio de diez segundos.*)
37. Luisa: Pues…
38. Octavio: [Si a diez…
39. Luisa: …esto…
40. (*Silencio de diez segundos. Octavio repasa la ventana de cantidades.*)

tímida en lo que parece ser un intento de empezar la ecuación usando la cantidad *Cia*, quizá vuelve a pensar sobre la relación $C = Cia{\cdot}A$ tal y como parecía hacer unos segundos antes (ítem 38). Sin embargo Octavio se frena y no desarrolla la idea sobre la que medita, quedando en silencio mientras repasa la ventana de cantidades (ítem 40). Tras un breve proceso de reflexión, Octavio verbaliza una ecuación construida correctamente sobre la cantidad C (ítem 45). Luisa parece no mostrarse de acuerdo con esta idea (ítem 46) produciendo una nueva parada en el proceso de resolución. Luisa sugiere por el contrario construir una ecuación en la forma $x =$… y, de hecho Octavio empieza a realizarlo sobre el programa bajo la dirección de Luisa (ítem 48). Teniendo en cuanta la baja verbalización, Luisa propone representar $x = 10$ (ítem 49 y 51). Octavio necesita recordar qué representaba la letra equis, y cuando verifica que da cuenta de la cantidad A, indica no ver posible esta idea. Luisa reacciona y señala que no pretendía decir que el número de amigos sea diez, sino que se refería a la expresión $10x$ (ítem 53). Esta verbalización parece cuadrar plenamente a Octavio, quien en respuesta construye la ecuación correcta $10x = 12.5(x - 2)$ (ítems 56 a 59). La ecuación es validada por el sistema (ítem 60).

41. Octavio: Coste, número de amigos que no asisten…
42. Luisa: Los doce, lo que cuesta la excursión es igual a…
43. Octavio: Sería, primero, sería equis... (*Octavio señala con el ratón "x" en la ventana de cantidades.*)
44. Octavio: por diez… (*Octavio señala con el ratón "10" en la ventana de cantidades.*)
45. Octavio: ...por diez es igual a… (*Octavio señala con el ratón "12.5*(x−2)" en la ventana de cantidades.*)
46. Luisa: Equis por diez más doce con cinco por… es que no.
47. (*Silencio de diez segundos.*)
48. Luisa: Equis es igual a… (*Octavio escribe la ecuación "x=…".*)
49. Luisa: …diez… (*Octavio escribe la ecuación "x=10...".*)
50. Octavio: Equis sería igual a diez…
51. Luisa: [Creo. No sé seguro. (*Octavio pone el ratón sobre el botón "10", hasta hacer visible la etiqueta "coste por persona si asistiesen todos los amigos".*)
52. Octavio: ¿Equis qué es? El número de amigos del grupo. No creo. (*Octavio consulta "x" en la ventana de cantidades.*)
53. Luisa: Sí, sí. Diez por equis, no, diez...sí, diez por equis...
54. Octavio: ¡Ah! Pues eso igual a sería, ¿no? (*Octavio borra la ventana de ecuaciones.*)
55. Luisa: Sí.
56. Octavio: Diez… (*Octavio escribe la ecuación "10…".*)
57. Octavio: …diez por equis es igual… (*Octavio escribe la ecuación "10*x=…".*)
58. Octavio: …sería a ¿esto? (*Octavio coloca el ratón sobre "12.5*(x−2)".*)
59. Luisa: Eso. ¿No? (Octavio escribe la ecuación "*10*x=(12.5*(x−2))*".)
60. (*Octavio valida la ecuación, que es identificada como correcta.*)
61. Octavio: Ya está.
62. Luisa: Sí. Ya.

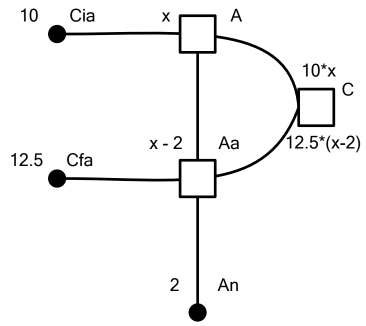


Figura 6.96. Grafo al final de la resolución.

63. Profesor: ¿Podéis explicar la ecuación que habéis planteado?
64. Octavio: No. ¿A ti? ¿Te la explicamos a ti?
65. Profesor: Sí, sí, claro.
66. Octavio: Ah, vale. Sería que diez que es el número de amigos que van, diez por equis es el mismo coste que doce coma cinco por…
67. Luisa: Por… ¡lo que pagan antes por el número de amigos que van es igual a lo que pagan después por los que no van…
68. Octavio: …menos dos amigos.

6.5.2.2. El caso de la pareja Luisa-Octavio en el problema “Amelia y Enrique”

Amelia tiene el triple de edad que su hermano Enrique, pero dentro de 5 años la edad de Amelia será sólo el doble. ¿Cuál es la edad de cada uno?

Luisa lee en voz alta el enunciado del problema. Los resolutores inician el proceso con la definición en el sistema de las cantidades conocidas. Así, por este orden, la pareja da valor a la cantidades *tres para hacer el triple* (*Tt)* (ítem 3), *dos para hacer el doble* (*Dd*) (ítem 5) y *tiempo transcurrido* (*T*) (ítem 7).

1. (*Luisa lee el enunciado en voz alta. La cantidad activa es “tres para hacer el triple”.*)
2. Octavio: Venga, tres para hacer el triple.
3. Luisa: Pues eso es tres. (*Luisa asigna el valor “3” a la cantidad “tres para hacer el triple”. La cantidad activa pasa a ser “dos para hacer el doble”.*)

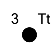


Figura 6.97. Grafo después del ítem 3.

4. Luisa: Dos para hacer el doble…
5. (*Luisa asigna el valor “2” a la cantidad “dos para hacer el doble”. La cantidad activa pasa a ser “tiempo*

transcurrido”.)

Figura 6.98. Grafo después del ítem 5.

6. Octavio: Tiempo transcurrido, equis…
7. Luisa: [Cinco.
8. Octavio: ¡Ah, es verdad! Cinco años la edad… (*Luisa asigna el valor “5” a la cantidad “tiempo transcurrido”. Octavio parece releer el enunciado. La cantidad activa es “edad actual de Amelia”.*)

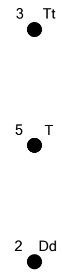


Figura 6.99. Grafo después del ítem 7.

La pareja aborda la definición de la primera de las cantidades desconocidas. El tutor ofrece la cantidad *edad actual de Amelia* (*Eaa*) pero Octavio selecciona la cantidad *edad actual de Enrique* (*Eae*) (ítem 14). Dado que indica que desea simbolizar el hecho de que Amelia tiene el triple de edad que su hermano (ítem 12) y, de ahí, que tome la decisión de simbolizar con la letra *equis* la cantidad *Eae* (ítems 14 y 15).

9. Luisa: Edad actual de Amelia…
10. Octavio: Equis.
11. Luisa: Espera.
12. Octavio: Amelia tiene el triple de edad que su hermano… (*Octavio relee el enunciado.*)
13. Luisa: Pues la edad…
14. Octavio: [Equis será la edad de… (*Octavio despliega la lista de cantidades y activa la cantidad “edad actual de Enrique”.*)
15. Luisa: … la edad de Enrique, equis. (*Luisa asigna la letra “x” a la cantidad “edad actual de Enrique”. La cantidad activa vuelve a ser “edad actual de Amelia.”*)

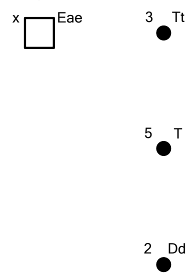


Figura 6.100. Grafo después del ítem 15.

La siguiente acción, en sintonía con la simbolización de *Eae*, comprende el uso de la relación multiplicativa *Eaa* = *Tt*·*Eae* para representar la cantidad *Eaa*. Así, Octavio introduce en el programa la expresión algebraica 3*x* para *Eaa* (ítem 19).

16. Octavio: Equis…
17. Luisa: Y la de Amelia, equis por tres.
18. Octavio: Equis por tres… tres equis. (*Octavio activa la opción "expresión".*)
19. Octavio: Equis por tres. (*Octavio construye la expresión "x*3", que es asignada a la cantidad "edad actual de Amelia". La cantidad activa pasa a ser "edad futura de Amelia".*)
20. Octavio: Sí.

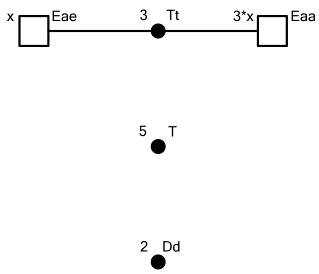


Figura 6.101. Grafo después del ítem 20.

Octavio propone, sin dudar, expresar la edad futura de Amelia (*Efa*) a partir de la estructura conceptual que liga la edad futura con la edad actual más el tiempo que transcurre entre ambos momentos. Para ello, sugiere construir la expresión algebraica 3*x* + 5 (ítem 22). Luisa rechaza esta opción aunque sin justificar su negativa (ítem 23) y obliga a Octavio a esbozar la relación usada (ítem 24). Finalmente, Octavio formaliza la expresión de manera correcta en el sistema (ítem 27).

21. Luisa y Octavio: Edad futura de Amelia…
22. Octavio: Equis por tres más cinco, ¿no?
23. Luisa: No.
24. Octavio: ¡Sí! Equis por tres es la que tiene ahora, más cinco años…
25. (*Octavio activa la opción "expresión".*)
26. Octavio: Equis por tres… (*Octavio escribe la expresión "(3*x)…".*)
27. Octavio: …más cinco. (*Octavio escribe la expresión "(3*x)+5", que es asignada a la cantidad "edad futura de Amelia". La cantidad activa es "edad futura de Enrique".*)

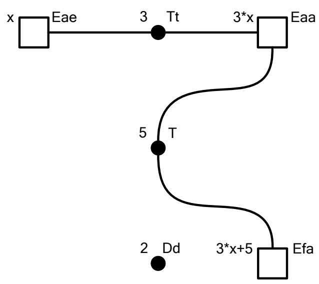


Figura 6.102. Grafo después del ítem 27.

Luisa muestra comprender la relación usada para simbolizar *Efa* pues propone usar la relación análoga para el personaje Enrique. Quizá anteriormente rechazo el uso de esta estructura conceptual pues deseaba usar en primer lugar la relación multiplicativa que liga las edades futuras.

28. Luisa: La edad futura de Enrique, equis más cinco… no, tienes que darle a expresión…
29. (*Octavio activa la opción "expresión" y escribe "x…".*)
30. Luisa: …más cinco. (*Octavio escribe la expresión "x+5" y la asigna a la cantidad activa. Aparece automáticamente la ventana de ecuaciones.*)

En cualquier caso, Luisa expresa la cantidad *Efe* mediante x + 5 (ítem 30).

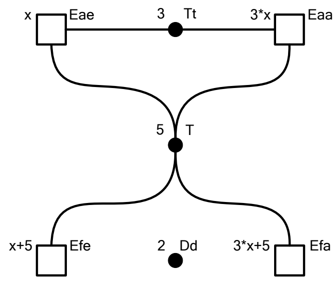


Figura 6.103. Grafo después del ítem 30.

El cuarto paso del MC es iniciado con una relectura de la pregunta del enunciado (ítem 31). Tras ello, Octavio manifiesta que considera sencillo completar este paso e inicia la verbalización de una ecuación sobre la cantidad *Efa*. Sin embargo, se detiene, parece que el hecho de que el enunciado solicite las cantidades *Eaa* y *Eae* le genera dudas en relación con plantear una ecuación sobre otra cantidad (ítem 32). Luisa, quizá en la misma tesitura que su compañero, se dirige al profesor para que le aclare si el enunciado pregunta por las edades actuales o futuras (ítem 33). El profesor les confirma que se refiere a las edades actuales (ítems 36). Esto se refleja en que Octavio decide cambiar la ecuación que llevaba en mente (ítem 38). Así, propone la ecuación 5 + x = 3x + 5 que es rechazada por el sistema (ítem 43). En el proceso de escritura, sin embargo, Octavio pareciera haber sopesado utilizar la cantidad *Dd* (ítem 41).

31. Octavio: ¡Ya! A ver, ahora… ¿cuál es la edad de cada uno? ¿cuál es la edad de cada uno? Sería, es fácil, sería… la edad futura de Amelia se multiplica… (*Octavio revisa la ventana de cantidades.*)
32. Octavio: Pero… la edad de cada uno ahora… (*Octavio mira a Luisa con dudas.*)
33. Luisa: La edad de, pero, ¿es la edad de cada uno ahora? (*Luisa se dirige al profesor.*)
34. Profesor: ¿Lo que os preguntan?
35. Luisa: Sí.
36. Profesor: Sí.
37. Luisa: Vale.
38. Octavio: Ah, vale. Pues entonces sería que cinco… (*Octavio escribe la ecuación “5…”.*)
39. Octavio: …más equis… (*Octavio escribe la ecuación “5+x…”.*)
40. Octavio: … es igual… (*Octavio prosigue la ecuación “5+x=…”.*)
41. Octavio: Ah, no, espera… (*Susurra con el ratón situado sobre el botón “2”.*)
42. Profesor: Habla un poco más alto. (*Octavio cambia el ratón sobre “5” haciendo visible la etiqueta “tiempo transcurrido”.*)
43. Octavio: ¡Ah, vale! Cinco más equis es igual a… tres… esto… aceptar. (*Octavio pulsa el botón”3*x+5” escribiendo “5+x=(3*x+5)”, la cual es identificada como errónea por el tutor.*)

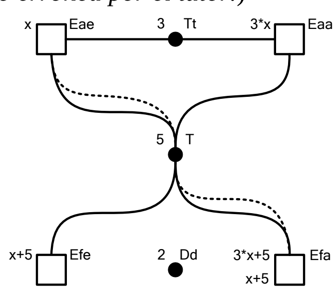


Figura 6.104. Grafo después del ítem 43.

Luisa parece apuntar a que el error está generado porque la ecuación no recoge la información dada por el enunciado de que una de las edades futuras es el doble de la otra (ítem 45). Como respuesta, Octavio inicia la construcción de una ecuación de la forma 3*x* + 5… y amaga con pulsar el botón que representa la multiplicación (ítem 49). De esta forma, pudiera conducir la ecuación hacia un error de inversión pues es plausible considerar que la siguiente cantidad a pulsar sería *Dd*. Sin embargo, Luisa detiene a su compañero y le reconduce hacia la ecuación correcta 3*x* + 5 = 2(*x* + 5) (ítem 51). De este modo, validan la ecuación (ítem 52) completando la resolución del problema.

44. Octavio: No.
45. Luisa: Espera. La edad de cada pero dentro de cinco sólo será el doble… pues… (*Octavio borra la ventana de ecuaciones. Luisa señala el enunciado con el dedo.*)
46. Luisa: …tres equis más cinco…
47. Octavio: […por…]
48. Luisa: … es igual a dos por eso, ¿no? No lo sé, creo que no, dale, eso es igual…
49. (*Octavio escribe la ecuación "(3*x+5)…". Luisa señala el botón "x+5" y Octavio sitúa el ratón sobre el botón "*".*)
50. Luisa: No, es igual a… (*Octavio escribe la ecuación "(3*x+5)=...".*)
51. Octavio: …dos por… (*Octavio escribe la ecuación "(3*x+5)=2*(x+5)".*)
52. Luisa: …eso. (*Octavio valida la ecuación, que es identificada como correcta.*)
53. Octavio: ¡Ah, sí! (*Octavio parece sorprendido.*)
54. Luisa: Ya.
55. Profesor: ¿Puedes explicarlo?
56. Luisa: Sí, sí. Si al… dentro de cinco años, bueno, ahora, es el triple pues dentro de cinco años sólo será el doble pues… lo que tiene ahora por dos.

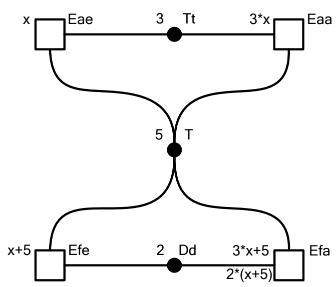


Figura 6.105. Grafo al final de la resolución.

6.5.2.3. El caso de la pareja Luisa-Octavio en el problema "El bautizo"

En la celebración de un bautizo el coste total del banquete es 663 €. Si hubiesen asistido 8 personas más, el banquete hubiese costado 975 €. Considerando que todas las personas toman el mismo menú, ¿cuántos invitados asistieron al banquete?

Las primeras acciones de la pareja están destinadas a representar las cantidades conocidas. Así, la pareja da valor en el programa de manera correcta a las siguientes cantidades *precio real del*

1. Profesor: Ahora vais a hacer el bautizo.
2. Luisa: El bautizo. Éste no sé hacerlo. (*Octavio carga el problema en el programa. La cantidad activa es "precio real del banquete".*)
3. Octavio: No me acuerdo. (*Octavio lee el*

banquete (*Cbr*) (ítem 4), *precio del banquete en la situación hipotética* (*Cbh*) (ítem 6) y *personas de más en la situación hipotética* (*Pmh*) (ítem 7).

enunciado en voz alta.)

4. Luisa: Precio real, seis seis tres. (*Luisa asigna el valor "663" a la cantidad activa. La cantidad activa pasa a ser "precio del banquete en la situación hipotética".*)

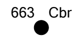


Figura 6.106. Grafo después del ítem 4.

5. Luisa: Precio en la situación hipo…
6. Octavio: Novecientos setenta y cinco. (*Luisa asigna el valor "975" a la cantidad "precio del banquete en la situación hipotética". La cantidad activa pasa a ser "personas de más en la situación hipotética".*)

Figura 6.107. Grafo después del ítem 6.

7. Luisa: Personas en la situación hipot… ocho. (*Luisa asigna el valor "8" a la cantidad "personas de más en la situación hipotética". La cantidad activa pasa a ser "personas en la situación hipotética".*)

Figura 6.108. Grafo después del ítem 7.

Aunque la primera de las cantidades desconocidas ofrecidas por el programa es la cantidad *personas en la situación hipotética*, *Psh*, la pareja, estrategia poco frecuente, decide explorar las cantidades

8. Octavio: Personas en la situación hipotética…
9. Profesor: Octavio, habla en voz alta, por favor.
10. Octavio: …si hubieran asistido, sería *equis*… son las personas que habrían asistido… (*Octavio apunta al enunciado*

pendientes de definir (ítems 11 y 12). Así observan que también deberán dar cuenta de las cantidades *precio del banquete por persona* (*Cbr*) y *personas en la situación real* (*Psr*). Una vez analizadas las tres cantidades desconocidas, optan por representar la cantidad *Psr* mediante la letra *equis* (ítem 17). Quizá impelidos, aunque sea de manera inconsciente, por el hecho de que esta decisión permite representar *Psh* sin necesidad de invertir la relación aditiva *Psh* = *Psr* + *Pmh*.

con el ratón. En concreto a "Si hubiesen asistido 8 personas más…".)

11. Luisa: Pero, las… dale para abajo…
12. (*Octavio despliega la lista de cantidades.*)
13. Octavio: Precio del ban… (*Octavio parece leer la cantidad "precio del banquete por persona".*)
14. Luisa: Precio del… que asistieron realmente, *equis*. (*Octavio activa la cantidad "personas que asistieron realmente". Luisa cambia y parece centrarse en la cantidad "personas que asistieron realmente".*)
15. Octavio: Ah, ¿*equis*?
16. Luisa: Sí, dale, dale ahí. (*Luisa insta a Octavio a que se sitúe sobre el cuadro para poder introducir la letra.*)
17. Octavio: Aquí, *equis*. (*Luisa asigna la letra "x" a la cantidad "personas que asistieron realmente". La cantidad activa pasa a ser "precio del banquete por persona".*)

Figura 6.109. Grafo después del ítem 17.

Tal y como apuntábamos, la pareja tiene en mente construir la expresión *x* + 8 para simbolizar la cantidad *Psh*. De ahí que posterguen la definición de la cantidad *Cbp* (ítem 19) y den prioridad a la cantidad *Psh*. Finalmente, validan la expresión *x* + 8 para la cantidad *Psh* (ítem 28).

18. Luisa: Precio del banquete…
19. Octavio: [Espérate. (*Octavio despliega la lista de cantidades.*)
20. Luisa: Ah, lo otro, equis… (*Octavio activa la cantidad "personas en la situación hipotética".*)
21. Octavio: Y ahora sí…
22. Luisa: Dale a expresión…
23. Octavio: …*equis*…
24. Luisa: [Expresión, expresión. Ahí.]. (*Octavio activa la opción "expresión". Luisa señala con el dedo el botón "expresión".*)
25. Octavio: Equis más ocho años.
26. (*Octavio introduce la expresión "x+8".*)
27. Luisa: Ocho personas. (*Luisa se ríe.*)
28. Octavio: Bueno, sí. (*Octavio valida la expresión, que es asignada a la cantidad "personas en la situación hipotética". La cantidad activa es "precio del banquete por persona".*)

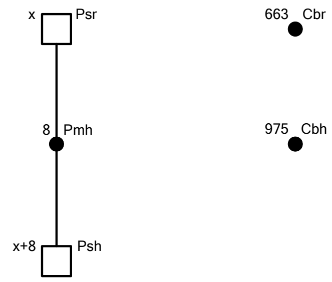


Figura 6.110. Grafo después del ítem 28.

La última de las cantidades desconocidas, el precio de un menú, plantea mayor dificultad para la pareja. De hecho, Luisa reconoce no saber cómo representarla inicialmente (ítem 31). A pesar de ello, apoyados por la funcionalidad del tutor que permite recordar la descripción de cada cantidad en cualquier momento, escriben, trabajando de forma conjunta, la expresión algebraica 663/*x* para representar *Cbr* (ítems 32 a 35).

29. Luisa: Precio del banquete por persona…
30. (*Silencio de diez segundos.*)
31. Luisa: No sé… (*Octavio activa la opción "expresión".*)
32. Luisa: Es eso entre… (*Luisa señala "663". Octavio tenía el ratón sobre el botón "975", con la etiqueta visible "precio del banquete en la situación hipotética". Octavio apunta a "663" haciendo visible el nombre "precio real del banquete".*)
33. Octavio: Seten… seiscientos setenta y tres… (*Octavio escribe la expresión "663…".*)
34. Luisa: …entre… entre… (*Octavio escribe la expresión "663/…".*)
35. Luisa: …entre equis. (*Octavio escribe la expresión "663/x", que es asignada a la cantidad "precio del banquete por persona". Se activa la ventana de ecuaciones.*)

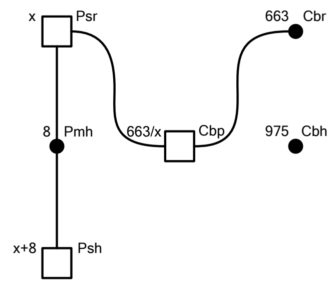


Figura 6.111. Grafo después del ítem 35.

Mientras Luisa inicia el cuarto paso del MC devolviendo a un primer plano la cantidad por la que se preguntaba en el enunciado, es decir *Psr*, Octavio parece decidido a construir la ecuación sobre *Cbr* (ítem 38). Sin embargo, una vez iniciada esta opción, el estudiante no parece ser capaz de llevarla a buen término (ítem 39). En cambio, su compañera sí que parece haber visualizado la ecuación pues, en pocos segundos, consuma y valida la ecuación

36. Luisa: A ver, ¿cuántos invitados asistieron a la boda? Pues sí, espérate… (*Octavio se había colocado sobre el botón "663/x".*)
37. Luisa: …precio… (*Luisa revisa la ventana de cantidades.*)
38. Octavio: Si seiscientos setenta y tres… son…
39. (*Silencio de diez segundos. Octavio vuelve a situar el ratón sobre "663/x", haciendo visible el nombre "precio del banquete por persona".*)
40. Luisa: Seiscientos setenta y tres equis… (*Octavio escribe la ecuación "(663/x)…".*)

correcta (663/*x*) = 975/(8 + *x*) (ítem 43).

41. Luisa: es igual, es igual… (*Octavio escribe la ecuación "(663/x)=…".*)
42. Luisa: a novecientos setenta y cinco entre… (*Octavio escribe la ecuación "(663/x)=975/…".*)
43. Luisa: … equis más ocho. (*Octavio escribe la ecuación "(663/x)=975/(8+x)", que es identificada como correcta por el tutor.*)
44. (*Luisa mira al profesor.*)
45. Profesor: ¿Ya está?
46. Luisa: Sí.

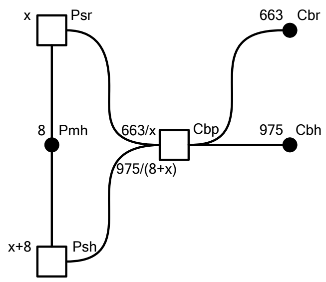


Figura 6.112. Grafo al final de la resolución.

6.5.2.4. El caso de la pareja Luisa-Octavio en el problema "El té"

Disponemos de dos tipos de té: uno de Tailandia a 5,2 €/Kg y otro de la India a 6,2 €/Kg. ¿Cuántos kilógramos de té de la India tenemos que añadir a 45 kilos de té de Tailandia para obtener una mezcla a 5,75 €/Kg?

Tras la lectura del enunciado en voz alta, la pareja inicia la resolución del problema definiendo las cantidades conocidas. Así, entre los ítems 2 y 10 asignan valor correctamente y en este orden a las cantidades *Put, Pui*, *Pum* y *Ctt*.

1. (*Luisa lee el enunciado en voz alta. La cantidad activa es "precio de un kilo de té de Tailandia".*)
2. Luisa: Precio…
3. Octavio: … cinco coma dos.
4. (*Luisa asigna el valor "5,2" a la cantidad "precio de un kilo de té de Tailandia". La cantidad activa pasa a ser "precio de un kilo de té de la India".*)

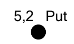


Figura 6.113. Grafo después del ítem 4.

5. Luisa: … el de la India…
6. Octavio: [Ehhh]
7. Luisa: … seis con dos.

8. (*Luisa asigna el valor "6,2" a la cantidad "precio de un kilo de té de la India". La cantidad activa es "precio de un kilo de té de mezcla".*)

Figura 6.114. Grafo después del ítem 8.

9. Luisa: Precio de un kilo de té de mezcla, cinco con setenta y cinco. (*Luisa asigna el valor "5,75" a la cantidad "precio de un kilo de té de mezcla". La cantidad activa pasa a ser "kilos de té de Tailandia".*)

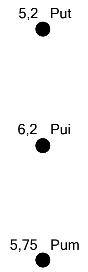


Figura 6.115. Grafo después del ítem 9.

10. Luisa: Kilos de té de India… cuarenta y cinco. (*Luisa asigna el valor "45" a la cantidad activa "kilos de té de Tailandia". Octavio señala con el ratón el enunciado. En concreto, "…que añadir a 45 kilos de té…". La cantidad activa pasa a ser "kilos de té de la India".*)

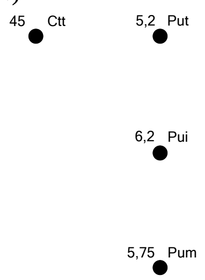


Figura 6.116. Grafo después del ítem 10.

11. Octavio: El té de Tailandia son cuarenta y cinco, los de la India son éstos… Serán equis, ¿no?

12. Luisa: *Equis*. (*Luisa asigna la letra "x" a la cantidad activa "kilos de té de la India". La cantidad activa es "kilos de té de mezcla".*)

Ante la primera cantidad desconocida, Octavio sugiere emplear una letra. En concreto, propone designar los *kilos de té de la India*, *Cti*, mediante la letra *equis* (ítem 11). Luisa acepta la idea y realiza la asignación en el tutor (ítem 12).

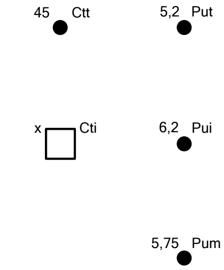


Figura 6.117. Grafo después del ítem 12.

A propuesta de Luisa (ítem 15), Octavio simboliza el total de kilos de té mezcla mediante la expresión algebraica 45 + *x*, poniendo en juego la relación correcta *Ctm* = *Ctt* + *Cti*.

13. Luisa: Mezcla…
14. Octavio: Kilos de té de mezcla.
15. Luisa: Mezcla… cuarenta y cinco más equis.
16. (*Octavio activa la opción "expresión" y construye la expresión "45+x", que es asignada a la cantidad "kilos de té de mezcla". La cantidad activa es "precio de todo el té de Tailandia".*)

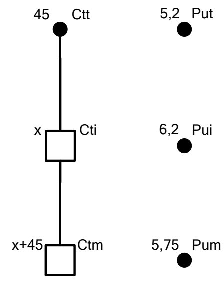


Figura 6.118. Grafo después del ítem 16.

La pareja aborda la representación del primero de los precios totales. El tutor propone la cantidad *precio total del té de Tailandia* (*Ptt*), ante lo cual Luisa sugiere usar la relación multiplicativa *Ptt* = *Ctt*·*Put* que, en este caso, se plasma en la expresión aritmética 45*5,2 (ítem 19).

17. Luisa: Precio de todo el té…
18. Octavio: [de todo el té de Tailandia].
19. Luisa: … de Tailandia. Pues, los cuarenta y cinco por dos, cinco con dos… expresión.
20. Octavio: Es verdad. (*Octavio activa la opción "expresión".*)
21. Luisa: Cuarenta y cinco por cinco con dos.
22. (*Octavio escribe la expresión "45*5.2", por lo que automáticamente se asigna el valor "234" a la cantidad "precio de todo el té de Tailandia". La cantidad activa pasa a ser "precio de todo el té de la India".*)

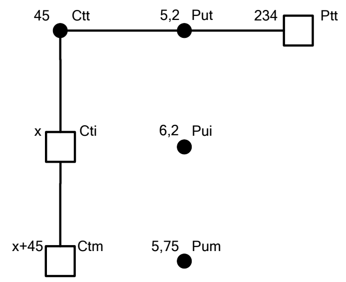


Figura 6.119. Grafo después del ítem 22.

23. Luisa: Precio de…

Luisa continúa comandando el proceso de resolución. Ahora, y de manera análoga al caso de *Ptt,* sugiere representar el precio de todo el té de la India mediante la expresión algebraica 6,2*x* (ítem 32). La estructura conceptual involucrada es la misma que para *Ptt*, es decir la posibilidad de expresar el precio total de un producto a partir de la cantidad y el precio unitario de dicho producto. Luisa muestra no verse afectada por el carácter de las cantidades, es decir que maneja indistintamente cantidades conocidas o desconocidas a la hora de plasmar relaciones al lenguaje algebraico.

24. Octavio: [No. (*Octavio activa la opción "expresión".*)
25. Luisa: ¡Sí!
26. Octavio: Cuarenta y cinco… (*Octavio sitúa el ratón sobre el botón "45".*)
27. Luisa: ¡Eso ya lo has puesto!
28. Octavio: ¡Ah, vale!
29. Luisa: Y el de, el té de… (*Octavio activa la opción "número", haciendo visible la cantidad activa.*)
30. Luisa: … de Indias (sic), pues es seis con dos por equis.
31. (*Octavio activa la opción "expresión".*)
32. Luisa: Seis con dos por equis… (*Octavio escribe la expresión "6.2*x".*)
33. Luisa: …los kilos que haya por lo que vale un kilo… (*Octavio valida la expresión "6.2*x", que es asignada a la cantidad "precio de todo el té de la India". La cantidad activa pasa a ser "precio de todo el té mezcla".*)

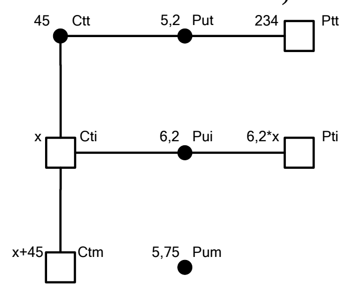


Figura 6.120. Grafo después del ítem 33.

Finalmente la pareja debe dar cuenta del precio de toda la mezcla con antelación a iniciar el paso cuarto del método cartesiano. De manera inmediata, Luisa enuncia la relación aditiva *Ptm* = *Ptt* + *Pti* (ítem 36). Octavio plasma correctamente la relación utilizando el número 234 y la expresión 6,2*x* que simbolizan *Ptt* y *Pti*, respectivamente.

34. Luisa: Precio de toda la mezcla…
35. Octavio: Pues sería…
36. Luisa: …eso, lo que vale el té de India y el té de Tailandia… dale a expresión. (*Octavio tiene el ratón sobre la cantidad "45+x" en la ventana de cantidades.*)
37. (*Octavio activa la opción "expresión".*)
38. Octavio: Sería esto… (*Octavio señala con el ratón el botón "234" haciendo visible el nombre "precio de todo el té de Tailandia".*)
39. Luisa: Sí, todo el té de Tailandia más… (*Octavio escribe la expresión "234+…".*)
40. Octavio: …más…
41. Luisa: … eso. (*Luisa señala con el dedo el botón "6.2*x".*)
42. (*Octavio escribe la expresión "234+(6.2*x)", que es automáticamente asignada a la cantidad "precio de todo el té mezcla". Se activa la ventana de ecuaciones.*)

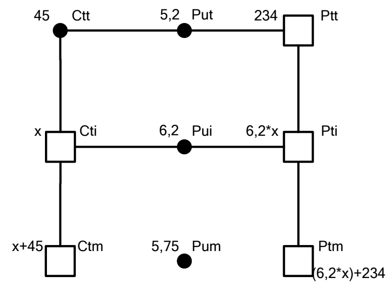


Figura 6.121. Grafo después del ítem 42.

El paso cuarto del método cartesiano es iniciado mediante la relectura de la pregunta del enunciado por parte de Octavio (ítem 43). Este comportamiento se repite con asiduidad durante el estudio de casos y, con frecuencia, se traduce en la construcción de ecuaciones en la forma $x = f(x)$ sobre la cantidad que se pregunta. En este caso, sin embargo, Luisa no parece verse influenciada por este hecho e inicia la construcción de una ecuación sobre la cantidad *Ptm* (ítem 48). La primera iniciativa se basa en la reutilización de la relación *Ptm* = *Ptt* + *Pti* por lo que la pareja no escribe una ecuación sino una identidad algebraica (ítem 56). La pareja no se percata de este hecho y no es hasta que el tutor les informa de que la relación ya sido usada, cuando Luisa reconoce lo evidente que resume en un tautológico "eso es eso" (ítem 58).

43. Octavio: Ya está. A ver, ¿cuántos kilogramos de té de la India tenemos que…? (*Octavio relee el enunciado.*)
44. Luisa: ¿Qué hay ahí abajo? (*Se refiere a un botón que se ve ligeramente cortado en la pantalla.*)
45. Octavio: Creo que es… (*Octavio sitúa el ratón sobre el botón hasta que se visualiza el nombre "precio de todo el té mezcla".*)
46. Luisa: Precio de toda la mezcla.
47. Octavio: Pues…
48. Luisa: Pues eso es igual… (*Octavio escribe la ecuación "(234+6.2*x)…".*)
49. Octavio: es igual…
50. Luisa: Eso es igual…
51. Octavio: Es igual a… (*Octavio escribe la ecuación "(234+6.2*x)=…".*)
52. Luisa: …a lo del té de India y al té de… (*Octavio repasa la ventana de cantidades.*)
53. Octavio: (inaudible.)
54. Luisa: … a esto… (*Octavio escribe la ecuación "(234+6.2*x)=(6.2*x)…".*)
55. Octavio: …más…
56. Luisa: …eso. (*Octavio escribe la ecuación "(234+6.2*x)=(6.2*x)+234".*)
57. Octavio: Doscientos treinta y cuatro. (*Octavio valida la ecuación. El tutor informa que la relación ya ha sido utilizada.*)
58. Luisa: Pues no. ¡Ah, claro! Eso es eso.
59. (*Octavio borra la ventana de ecuaciones y posa el ratón sobre el botón "234+6.2*x" haciendo visible el nombre "precio de todo el té mezcla".*)

Ante el fracaso de la primera tentativa, Luisa retorna a la lectura de la pregunta del enunciado (ítem 60). Octavio reacciona subrayando que el enunciado pregunta por el té de la India, no por el té de mezcla (ítem 61). Esta verbalización quizá sugiera que el estudiante no consideraría que la ecuación deba

60. Luisa: ¿Cuántos kilos de té India tenemos que añadir…? (Luisa relee el enunciado. Octavio apunta con el ratón al mismo.)
61. Octavio: [¡Ah, que es de India, no de toda la mezcla!
62. Luisa: Ah, sí.
63. Octavio: Pues (inaudible)… a ver, a ver si es esto, no sé… esto es igual a… (*Octavio escribe la ecuación "5.75=…"*

construirse sobre *Ptm* como intentaron inicialmente sino sobre *Cti*.

Sin mediar justificación alguna y sin aparente conexión con su verbalización anterior, Octavio plantea la ecuación incorrecta 5.75 = 45 + x, donde la cantidad denotada por x es seleccionada tras consultar una vez más la pregunta del enunciado y verificar que refiere a la cantidad *Cti* (ítems 65 y 67). A pesar de que Luisa parece oponerse o no entender lo expuesto por su compañero, Octavio intenta validar la ecuación y el tutor informa de que la misma es errónea. Es reseñable que la proposición fallida contemplaba usar dos cantidades (*Ctm* y *Pum*) que están presente en la relación $Ptm = Ctm \cdot Pum$, que es la única relación aún no usada.

La pareja insiste en construir una ecuación donde la cantidad *Pum* aparece aislada en el primer miembro de la ecuación. Esta conducta es coherente con los planteamientos erróneos que ambos estudiantes reflejaron en la prueba escrita. Ambos estudiantes construyeron la ecuación $45 \cdot 5{,}2 + 6{,}2x = 5{,}75$. De hecho, volviendo a la resolución en el sistema tutorial, la pareja orienta las siguientes acciones a replicar la ecuación de la prueba en el tutor (ítems 71 a 84). Así, y después de tomar en consideración algunas de las restricciones que impone el sistema en la escritura de ecuaciones, tratan de validar la ecuación recibiendo un mensaje de advertencia de error.

y apunta al enunciado.)

64. Octavio: …cuarenta y cinco más… (*Octavio escribe la ecuación “5.75=45+…”.*)

65. Octavio: …¿cuántos kilogramos de té de la India tenemos que añadir a…? Té de la India…

66. Luisa: Pero…

67. Octavio: Cuarenta y cinco más equis. (*Octavio se sitúa sobre el botón “x” hasta que se hace visible la cantidad “kilos de té de la India” y termina escribiendo la ecuación “5.75=45+x”.*)

68. (*Octavio valida la ecuación, que es identificada como errónea.*)

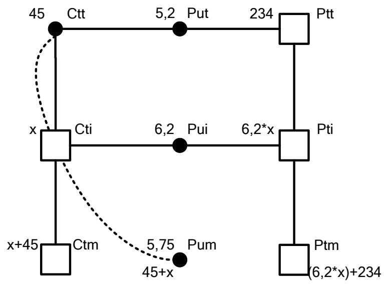


Figura 6.122. Grafo después del ítem 68.

69. Luisa: A ver, ¿cuántos kilogramos de té de la India debemos añadir a cuarenta y cinco de té de Tailandia? (*Octavio se coloca sobre el botón “6,2” haciendo visible el nombre “precio de un kilo de té de la India”.*)

70. Luisa: Pues cinco setenta y cinco, cinco setenta y cinco es igual… (*Octavio escribe la ecuación “5.75=…”.*)

71. Octavio: Cuarenta y cinco kilos…

72. Luisa: [A cuarenta y cinco por cinco con dos…

73. Octavio: …de Tailandia. (*Octavio escribe la ecuación “5.75=45*5.2…”.*)

74. Luisa: …más… (*Octavio intenta continuar pero el tutor no le permite escribir.*)

75. Luisa: …seis con dos…

76. Octavio: No se puede más.

77. Profesor: Es que el cuarenta y cinco por dos ya lo habíais hecho y os daba una cantidad, ¿no?

78. Luisa: ¡Ah, claro! Doscientos treinta y cuatro, sí.

79. Profesor: Tenéis que usar doscientos treinta y cuatro.

80. Luisa: Vale, vale. Pues borra.

81. (*Octavio borra la ventana de ecuaciones.*)

82. Luisa: Pues cinco setenta y cinco es igual esto más… (*Octavio escribe la expresión “5.75=234+…”.*)

83. Luisa: ¿O es la que hemos metido antes ya? Bueno, tú dale, más eso.

84. (*Octavio escribe la expresión “5.75=234+(6.2*x)”,que es identificada como errónea.*)

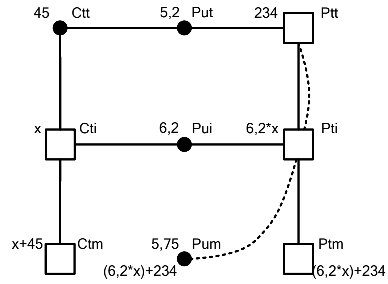


Figura 6.123. Grafo después del ítem 84.

Tras el mensaje de error, ambos estudiantes vuelven a leer la pregunta del enunciado y esta vez sí, Luisa considera la idea de construir la ecuación en forma $x = f(x)$ sobre la cantidad *Cti*, es decir aislando en el primer miembro la letra *equis* (ítem 90). Sin embargo, la iniciativa no parece muy meditada, es más, la propia Luisa, segundos antes de validarla, reconoce creer que será identificada como errónea por el tutor (ítem 92). La ecuación planteada consistía en igualar *equis*, tal y como comentábamos, con el mismo segundo miembro que usaron en la anterior ecuación, es decir la representación de *Ptm* mediante la suma de *Ptt* y *Pti*.

85. Luisa: Joer (sic).

86. Octavio: Tampoco. (*Octavio borra la ventana de ecuaciones.*)

87. Luisa: Es que no sabía hacerlo. ¿*Cuántos kilógramos de té de India…*?

88. Octavio: …*tenemos que añadir a cuarenta y cinco kilos de Tailandia*?

89. Luisa: Vale, creo que ya sé lo qué es. (*Luisa susurra y coge el ratón.*)

90. Luisa: Equis, el té de Indias, es igual… (*Luisa escribe la ecuación “x=…”.*)

91. Luisa: …a… al té…a… doscientos más… (*Luisa escribe la ecuación “x=234+...”.*)

92. Luisa: …yo creo que tampoco es pero bueno, yo le doy a ver… (*Luisa escribe la ecuación “x=234+(6.2*x)”, que es identificada como errónea.*)

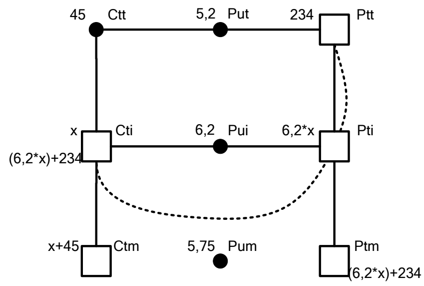


Figura 6.124. Grafo después del ítem 92.

La pareja empieza a mostrar serias dificultades para identificar qué relación deben usar para cerrar el cuarto paso del método cartesiano. Una señal de la incapacidad para ofrecer alternativas es que, entre los ítems 95 y 99, la pareja vuelve a construir y tratar de validar la ecuación $5{,}75 = 45 + x$, misma ecuación que intentaron usar minutos antes.

93. Octavio: No.

94. (*Luisa borra la ventana de ecuaciones.*)

95. Octavio: ¿No sería cuarenta y cinco más el té de Tailandia que tenemos que echar sería (inaudible)?

96. Luisa: ¿Cuántos kilogramos…? (*Luisa relee el enunciado en voz baja, mientras que Octavio vuelve a coger el ratón.*)

97. (*Octavio escribe “5.75=…”.*)

98. Luisa: ¿Cuántos kilogramos de té de la India…? (*Octavio coloca el ratón sobre el botón “45” hasta que se ve el nombre*

“kilos de té de Tailandia”. Octavio escribe “5.75=45+x”.)

99. Octavio: Esto ya lo hemos hecho antes… (*Octavio valida la expresión, que es identificada como errónea.*)

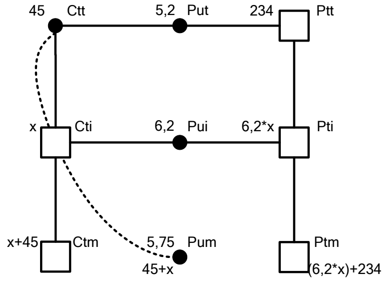


Figura 6.125. Grafo después del ítem 99.

La resolución parece entrar en punto muerto; se empiezan a producir silencios prolongados y los comentarios se tornan en susurros. El profesor se ve obligado a intervenir para recordar a los estudiantes que hablen en un volumen normal (ítem 103) y para pedirles que expliquen sus acciones con el fin de fomentar el diálogo (ítem 107). La pareja parece incapaz de ofrecer una justificación coherente de sus intentonas y, en vez de reflexionar sobre ello, Octavio se embarca en el intento de calcular la cantidad *Cti* mediante la expresión aritmética 45/5,75 (ítem 117) que es rechazada por el tutor (ítem 119). Luisa parece muy sorprendida por las acciones de su compañero y, de hecho, cuando el tutor rechaza la propuesta de su compañero, se ríe con cierta hilaridad, quizá considerando impensable esta opción donde ligan cantidades no relacionadas de diferentes tipos de té.

100. Luisa: ¡Madre mía! (*Octavio borra la ventana de ecuaciones.*)

101. (*Silencio de diez segundos.*)

102. Luisa: Cinco setenta y cinco… (*Luisa habla flojo.*)

103. Profesor: Hablad alto, ¿vale?

104. Luisa: Vale.

105. Octavio: Es que…

106. (*Silencio de diez segundos.*)

107. Profesor: ¿Podéis explicar en voz alta lo que habéis hecho?

108. Luisa: Es que si, un… si cinco setenta y cinco es, son cuarenta y cinco por los cinco con dos…

109. Octavio: Es que no sé si, sería sumarlo.

110. Luisa: Claro, pero es lo que hemos hecho antes.

111. Octavio: Que no te da.

112. Luisa: No.

113. Octavio: Es esta expresión que ya hemos hecho.

114. Luisa: ¿Cuántos kilogramos de té de la India tenemos que añadir…? Cinco setenta y cinco… es que yo pondría lo que hemos puesto antes.

115. Octavio: Es, pues… sería… (*Octavio escribe la ecuación “45…”.*)

116. Luisa: Cuarenta y cinco… más equis… (*Octavio escribe la ecuación “45/…”.*)

117. Luisa: ¿Entre? (*Octavio escribe la ecuación “45/5.75=x”.*)

118. Luisa: ¿Qué estás haciendo?

119. (*Octavio valida la ecuación, que es identificada como errónea.*)

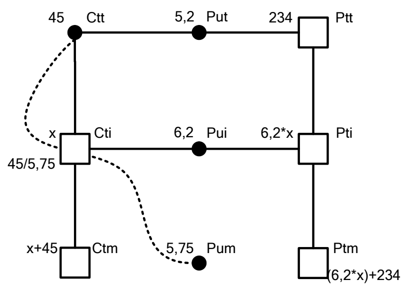


Figura 6.126. Grafo después del ítem 119.

Una vez que Octavio descarta la anterior intentona infundada y borra la ventana de ecuaciones (ítem 121), Luisa interviene y evidencia los motivos que llevan a la pareja a construir la ecuación errónea 5,75 = 234 + 6,2*x*. La estudiante señala que “cinco setenta y cinco es lo que cuesta todo”, es decir se produce una confusión entre el precio unitario (*Pum*) y el precio total (*Ptm*) (ítem 122). Partiendo de interpretación incorrecta del valor 5,75, la pareja desarrolla el resto de la ecuación y la verbaliza de manera correcta (ítems 123 a 125), sin ser capaces de detectar el origen del error lo que parece sumirles en un estado de incomprensión.

120. Octavio: No. (*Luisa se ríe.*)
121. (*Octavio borra la ventana de ecuaciones.*)
122. Luisa: A ver, cuarenta y c… cinco setenta y cinco es lo que cuesta todo, la mezcla… (*Octavio escribe la ecuación “5.75…”.*)
123. Luisa: … pero no, no lo pongas, espérate. Y es la suma de los cuarenta y cinco kilos…
124. Octavio: [más…]
125. Luisa: … más los cuarenta y cinco kilos por los cinco con dos que vale el kilo, son los doscientos treinta y cuatro, y el kilo del de Tailandia son seis con veinte… y los que tenemos que añadir son equis… pues, es que yo… (*Luisa pone cara de incomprensión.*)
126. (*Silencio de diez segundos.*)
127. Octavio: ¿Cuántos kilogramos? (*Octavio se coloca sobre el botón “x” hasta hacer visible el nombre.*)
128. (*Octavio borra la ventana de ecuaciones y se vuelve a colocar sobre el botón “x” hasta hacer visible “kilos de té de la India”.*)
129. Luisa: Te iba a decir seis con veinte por, seis con veinte por equis más doscientos, más doscientos treinta y cuatro pero es lo mismo. (*Octavio señala al enunciado con el ratón.*)

Las siguientes acciones de la pareja revelan cierto agotamiento en el plano de las ideas que son capaces de formular para cerrar el problema. Luisa sigue valorando la ecuación 45 + *x* = 5,75 aunque es consciente de que es errónea pues ya la intentaron con anterioridad (ítem 134). Esta ecuación parece reflejar la asociación de dos cantidades relacionadas al referirse al mismo té más que una representación de las relaciones

130. Luisa: Éste no sé hacerlo, ¿cuántos kilogramos de té la India tenemos que añadir…?
131. Octavio: [¿Cuántos kilogramos de te de Tailandia?
132. Luisa: De té de India.
133. Octavio: Eso. (*Octavio escribe la ecuación “x…”.*)
134. Luisa: Lo de equis más cuarenta y cinco es igual a cinco con setenta y cinco ya lo hemos hecho, ¿a que sí? (*Octavio escribe la ecuación “x=…”.*)
135. Octavio: Sí.
136. (*Silencio de diez segundos.*)

entre cantidades.

Entre los ítems 137 y 154, Luisa, quien dirige el proceso de resolución, plantea la ecuación x = 234 – 5,75 aunque parece que empieza a reflejar cierta desesperación pues ambos estudiantes reconocen creer que la ecuación es incorrecta. Una interpretación de esta estrategia sería considerar que la pareja pretenda alcanzar la ecuación mediante un proceso reiterado de ensayo y error. Obviamente, el tutor rechaza la ecuación (ítem 154).

137. Luisa: Los kilos de té de India es igual a…
138. Octavio: [Pero es que no sería…] (*Octavio tiene el ratón sobre el botón “45+x”.*)
139. Luisa: … cinco setenta y cinco, pon cinco setenta y cinco…
140. Octavio: A ver, que encuentre la flecha.
141. Luisa: No, pon doscientos treinta y cuatro…
142. (*Octavio borra la ventana de ecuaciones.*)
143. Luisa: No…
144. Octavio: [Doscientos treinta y cuatro.] (*Octavio escribe la ecuación “234…”.*)
145. Luisa: … no, no, borra, borra.
146. (*Octavio borra la ventana de ecuaciones.*)
147. Luisa: Equis es igual…
148. Octavio: Equis es igual. (*Octavio escribe la ecuación “x=…”.*)
149. Luisa: … a doscientos treinta y cuatro menos…ehhhhh… (*Octavio escribe la ecuación “x=234−…”.*)
150. Luisa: …cinco con sesenta y cinco. No creo que sea pero bueno, tú ponlo.
151. Octavio: ¿Cinco con sesenta y cinco? Ah, setenta y cinco.
152. (*Octavio escribe la ecuación “x=234−5.75”.*)
153. Octavio: Es igual… no creo que sea esto.
154. (*Octavio valida la ecuación que es identificada como errónea.*)

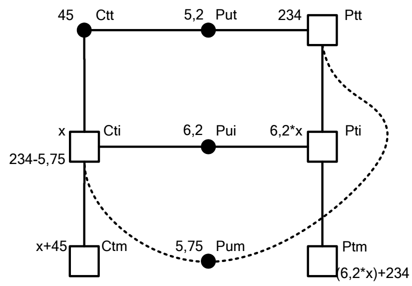


Figura 6.127. Grafo después del ítem 154.

Tras el enésimo error, Octavio incide en construir una ecuación en la forma x =…, mostrándose contundente al respecto y aseverar que debe ser así pues el enunciado pide *Cti* (ítem 157). El segundo miembro lo construye mediante la traducción directa de “cuántos kilogramos de la India hay que añadir a cuarenta y cinco” a la expresión algebraica 45 + x (ítem 158). Estas

155. Luisa: ¡Madre mía! (*Octavio borra la ventana de ecuaciones.*)
156. Octavio: *Equis* es igual a… (*Octavio susurra mientras escribe la ecuación “x=…”.*)
157. Octavio: Te pide los kilogramos de té, así que será *equis* es igual. (*Octavio señala el enunciado con el ratón. Pasa el ratón sobre el botón “x” hasta hacer visible el nombre “kilos de té de la India”.*)
158. Luisa: ¿Cuántos kilogramos de té India hay que añadir a cuarenta y cinco…?

acciones inconexas dan lugar a la ecuación $x = 45 + x$, que es rechazada por el tutor (ítem 158).

(*Enfatiza el 45 y señala con el dedo como si fuese el momento de escribir. Octavio escribe la ecuación "x=(45+x)", que no es validada por el tutor.*)

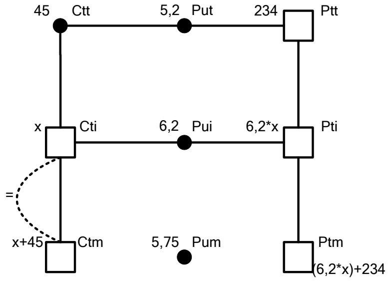


Figura 6.128. Grafo después del ítem 158.

En cuanto el tutor notifica el error, Luisa asume la responsabilidad del proceso de resolución pero continúa la línea de escribir la ecuación a partir de la traducción directa de la pregunta del enunciado. En consonancia con esta idea, relee la pregunta del enunciado íntegramente (ítem 161), no de manera parcial como habían hecho segundos antes (ítem 158). Al leer hasta el final la pregunta menciona el valor 5,75, ante lo que Octavio reacciona modificando la ecuación anterior por $45 + x = 5{,}75$, que también es rechazada por el tutor. Esta propuesta que supondría la igualación de las cantidades *Ctm* y *Pum* parece un intento de recoger en la ecuación todas las cantidades mencionadas en la pregunta del enunciado.

159. Luisa: No, cuarenta y cinco…

160. Octavio: No, (inaudible) (*Octavio intenta validar nuevamente la ecuación.*)

161. Luisa: No. ¿Cuántos kilógramos de té de la India tenemos que añadir a cuarenta y cinco kilogramos de té de Tailandia para obtener una mezcla de cinco setenta y cinco?

162. (*Silencio de diez segundos. Octavio borra la ventana de ecuaciones.*)

163. (*Octavio escribe "(45+x)=5.75", que no es validada por el tutor.*)

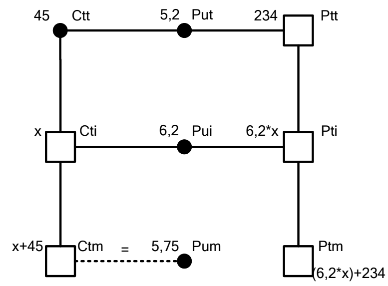


Figura 6.129. Grafo después del ítem 163.

Dado que la pareja parece haber entrado en una dinámica de prueba y error constante y que las acciones acompañadas de una justificación coherente expuesta en voz alta son cada vez más escasas, el profesor les autoriza a utilizar el botón *Relaciones usadas* (ítem 166). Esta opción del programa simplemente informa mediante un mensaje en lenguaje natural de las relaciones que los resolutores ya han usado en el planteamiento del problema. En primer lugar, Luisa lee la descripción de la relación $Ctm = Ctt + Cti$ (ítem 168), tras lo cual es llamativo que afirme que el

164. Luisa: No, no.

165. Octavio: Tampoco. No te deja.

166. Profesor: Dale al botón de relaciones usadas.

167. (*Octavio pulsa el botón "Relaciones usadas".*)

168. Luisa: El kilo de té mezcla es igual a los kilos de Tailandia más los kilos de té India. (*Luisa lee de la ventana de relaciones usadas.*)

169. Profesor: Ésas son las que habéis usado ya.

170. Octavio: Sí.

171. (*Silencio de diez segundos.*)

172. Profesor: A ver si os ayuda algo.

173. Luisa: [Claro, los kilos de té mezcla… pero no sabemos cuántos kilos de té hay

problema es que desconocen “cuántos kilos de té hay ahí” (ítem 173). La estudiante parece referirse a que, a pesar de haber usado la relación, no conocen la cantidad *Ctm*. Esta verbalización es relevante pues aunque la pareja no ha evidenciado dificultades para operar con lo desconocido, ahora parecen tener dificultades para considerar a las expresiones algebraicas que crean para designar cantidades en el mismo nivel que las cantidades conocidas a la hora de emplearlas en la escritura de ecuaciones.

En cualquier caso, Luisa retoma la lectura y verbaliza por este orden las relaciones $Ptt = Ctt \cdot Put$, $Pti = Cti \cdot Pui$ y $Ptm = Ptt + Pti$. Luisa comete ciertas licencias u omisiones en el proceso de lectura que podrían modificar el significado de las relaciones expresadas en el mensaje. Por ejemplo, cuando lee la relación $Ptt = Ctt \cdot Put$ reduce la descripción *precio de todo el té de Tailandia* a *precio de todo el té*, con lo que podrían interpretar la cantidad como *Ptm* en vez de *Ptt* (ítem 175). También, quizá por lo que parece un simple despiste, lee la palabra *menos* en vez de la escrita más cuando leía la proposición que daba cuenta de la relación $Ptm = Ptt + Pti$ con lo que, obviamente, modificaría la propia relación. Sin embargo, la pareja no parece prestar demasiada atención a este mensaje, quizá entendiendo que no les aporta información relevante para construir la ecuación.

ahí. (*Luisa señala con el dedo la primera relación de la ventana de ecuaciones.*)

174. (*Silencio de diez segundos. Octavio repasa con el ratón el enunciado.*)

175. Luisa: A ver, espera, kilos de té mezcla es igual a kilos de té de Tailandia más kilos de té India. El precio de todo el té es igual al precio de un kilo de té de Tailandia… por los kilos de Tailandia. (*Se ríe*). El precio de todo el té de India es igual al precio de té de India por los kilos. El precio de toda la mezcla es igual al precio de todo el Tailandia menos la India (sic). (*En la ventana pone “más”, no “menos” como lee*). El kilo de mezcla... (*Luisa lee de la ventana de relaciones.*)

176. Profesor: Ésas son las que habéis usado, para plantear la ecuación os falta una, ¿no?

177. Octavio: Sí.

178. (*Octavio cierra la ventana de relaciones. Luisa se ríe.*)

Sin buscar conexiones entre las relaciones ya usadas y la que deberían usar para construir la ecuación, la pareja decide volver a la búsqueda de la ecuación que permita resolver el problema sin una idea evidente en mente. Así, prestan atención a la expresión algebraica $234 + 6{,}2x$ que reconocen no recordar qué cantidad representa (ítems 183 y 184). Una vez que mediante el

179. Octavio: A ver… (*Octavio con el ratón señala el enunciado.*)

180. Luisa: El kilo de té mezcla, de todo…

181. (*Luisa señala el botón “5.2” hasta hacer visible el nombre “precio de un kilo de té de Tailandia”.*)

182. Octavio: Esto que hay aquí, ¿esto qué es? Esto que hay abajo… (*Octavio señala el botón de la parte inferior.*)

183. Luisa: Yo que sé… el kilo de… ¿qué es eso? (*Octavio intenta visualizar el botón. Borra la ventana de ecuaciones, pulsa el botón colocado en la parte inferior*

análisis individual de cada una de las cantidades que conforman la expresión algebraica (ítem 186 a 189) identifican la expresión con la suma de los precios totales de té de Tailandia y té de la India, deciden igualar la expresión con el valor de *Pmu* (ítem 190). De esta forma, la pareja incurre una vez más en el error que cometieron en la prueba escrita y en el estudio de casos, en el que parecen considerar que 5,75 es el valor que toma *Ptm* y no *Pum*. La pareja intenta sin éxito validar esta ecuación (ítem 191). Es notable el hecho de que los dos últimos intentos la pareja sólo ha considerado las cantidades involucradas en la relación no usada donde sólo aparecen cantidades relativas al té de mezcla. En caso de que éstas fueran empleadas aisladamente por parejas en relaciones de igualación, les podría conducir a la construcción de la ecuación.

*escribiendo la ecuación "(234+6.2*x)…".*)

184. Octavio: ¿Y eso qué es? Doscientos treinta y cuatro más seis… (*Octavio borra la ventana de ecuaciones.*)

185. Luisa: Espérate, mira a ver qué era eso…

186. (*Octavio vuelve a pulsar botón, escribiendo la ecuación "(234+6.2*x)…". Octavio tenía el ratón sobre el botón "234" viéndose "precio de todo el té de Tailandia".*)

187. Luisa: Doscientos treinta y cuatro…

188. Octavio: [El té de Tailandia más… (*Octavio se posa sobre el botón "6.2" hasta hacer visible "precio de un kilo de té de la India".*)

189. Octavio: …el té de la India.

190. Luisa: Eso es igual a doscientos setenta y cinco, cinco por setenta y cinco… (*Octavio escribe "(234+6.2*x)=5.75".*)

191. Octavio: No creo. (*Octavio intenta validar la ecuación, que no es validada.*)

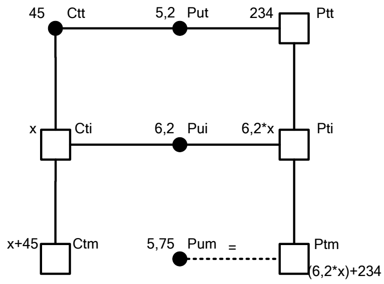


Figura 6.130. Grafo después del ítem 191.

Las siguientes acciones (ítem 192 a 204) ponen de manifiesto la incapacidad de identificar la relación correcta sobre la que construir la ecuación. Sus actuaciones se orientan a reescribir en diferentes formas una relación ya empleada como es *Ptm* = *Ptt* + *Pti*. Además, probablemente influidos por la presión de tener que generar nuevas tentativas, empiezan a formular ecuaciones que no justifican en voz alta y que ni siquiera parecen tener una idea sobre la que desarrollarse. Como muestra véase la ecuación 6.2x + 45 = 5,75 que intentan validar (ítem 204).

192. Octavio: No, no te deja. (*Octavio intenta borrar el 5.75 pero borra toda la ecuación.*)

193. Luisa: A ver, espérate. ¿Cuántos kilogramos de té India tenemos que añadir a cuarenta y cinco de té de Tailandia para obtener… (*Mientras Octavio se posa sobre el botón "5.2" hasta hacer visible "precio de un kilo de té de Tailandia".*)

194. Octavio: Espérate, a ver si es esto…

195. Luisa: [Baja para abajo eso un segundo. (*Luisa se refiere a que baje la barra de la ventana de cantidades para visualizar las cantidades ocultas.*)

196. (*Octavio baja la barra de desplazamiento vertical la ventana de cantidades.*)

197. Luisa: El precio de té de… (Octavio repasa el enunciado.)

198. Octavio: A ver, seis con dos por equis… (*Octavio escribe "6.2*x…".*)

199. Octavio: más… (*Octavio intenta escribir "6.2*x+…" pero el tutor no lo autoriza.*)

200. Octavio: No se puede.

201. Luisa: No, porque eso es lo que ya has puesto ahí. (*Luisa señala el botón “6.2*x”.*)

202. Octavio: ¡Ah, es verdad!

(*Octavio borra la ventana de ecuaciones y escribe “(6.2*x)…”.*)

203. Octavio: Más… que lo otro a ver… más… (Octavio prosigue la ecuación “(6.2*x)+45=…”.)

204. Octavio: … a ehhhh…. (*Octavio escribe la ecuación “(6.2*x)+45=5.75”, que es identificada como errónea.*)

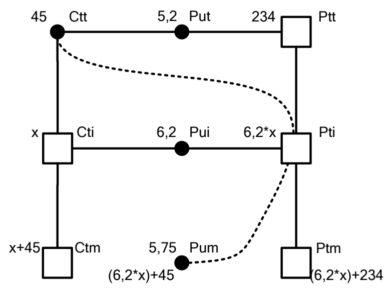


Figura 6.131. Grafo después del ítem 204.

205. (*Octavio borra la ventana de ecuaciones.*)

206. Luisa: ¡Tira! Eso es el precio de todo, de los cuarenta y cinco kilos y de té de India. Pues eso… ah, no, eso es el precio…

207. (*Silencio de diez segundos.*)

208. Luisa: Esto…

209. (*Octavio escribe la ecuación “(234+6.2*x)…”.*)

210. Luisa: …por cinco setenta y cinco es igual… (*Octavio escribe la ecuación “(234+6.2*x)*5.75=…”.*)

211. Luisa: …a... esto más… (*Octavio escribe la ecuación “(234+6.2*x)*5.75=234”. Intenta poner “+(6.2*x)” pero el tutor no lo permite.*)

212. Luisa: Eso es lo que hemos puesto antes…

213. (*Octavio valida “(234+6.2*x)*5.75=234” que es identificada como errónea.*)

En este momento el profesor está a punto de invitarlos a abandonar el problema dado que desde hace unos minutos no se constata ningún avance visible hacia la resolución del problema. Sin embargo, a causa de la verbalización de Luisa (ítem 206) decide concederles algunos segundos más. El motivo es que en esta intervención Luisa podría haberse dado cuenta de que el valor 5,75 no representa la cantidad *Ptm*, aunque no podemos afirmarlo con certeza dado que la verbalización es ambigua e incompleta. Las acciones posteriores de Luisa sí que parecen considerar un cambio de rol de este valor al relacionarlo multiplicativamente con la cantidad *Ptm* (ítem 210) aunque bien es cierto que de manera errónea. De hecho la propuesta desemboca en la construcción de la ecuación (234 + 6.2*x*)*5,75 = 234 aunque parece que realmente querían representar (234 + 6.2*x*)*5,75 = 234 + 6,2*x* (ítems 211 y 213).

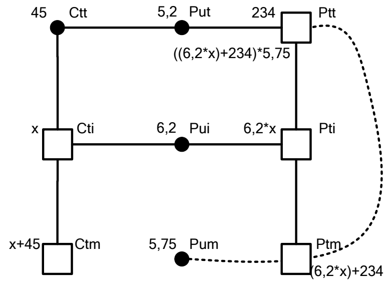


Figura 6.132. Grafo después del ítem 213.

El profesor invita a Luisa a que explique sus acciones con la intención de descifrar si realmente estaría reconsiderando el papel del valor 5,75 y existen posibilidades de que formulen una ecuación correcta. La estudiante se muestra incapaz de justificar sus acciones más allá de la relación *Ptm* = *Ptt* + *Pti*, llegando a mostrar cierta desesperación cuando trata de explicar el motivo que la ha llevado a emplear el valor 5,75 de esta forma. Aunque Octavio inicia una nueva intentona abocada al fracaso (ítem 217), el profesor considera que ya han consumido demasiado tiempo en la resolución de este problema y les invita a abandonar (ítem 218).

214. Luisa: No. (*Luisa se ríe.*)
215. Profesor: ¿Qué intentabas poner? Explícalo.
216. Luisa: Que los… que todo los…no, es que esto no es, el precio de todo el té mezcla… Si hay, si el precio de todo el té mezcla son los doscientos treinta y cuatro más seis con dos por equis, o sea lo que vale cuarenta y cinco kilos de té de Tailandia y los de té India... pues eso tiene que ser igual a... es que no puede ser, es que no, no. Yo voy a salir loca. ¿Cuántos kilos de té India tenemos que añadir a cuarenta y cinco kilos de té de Tailandia?
217. (*Octavio escribe la ecuación "45+6.2=…".*)
218. Profesor: Venga, vamos a cambiar de problema. (*Octavio escribe la ecuación "45+6.2=x", que es identificada como errónea.*)
219. Luisa: Sí, porque… ¡qué pena! (*Luisa ríe desesperada.*)

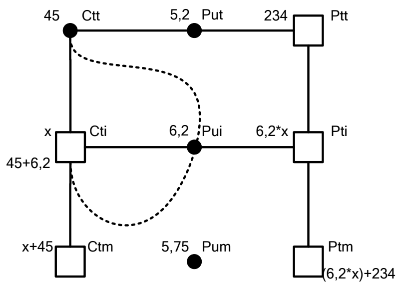


Figura 6.133. Grafo después del ítem 219.

6.5.2.5. El caso de la pareja Luisa-Octavio en el problema "Los cromos"

Si quiero comprar nueve paquetes de cromos me faltan tres euros, pero si compro cinco paquetes me sobran cinco euros. ¿Cuál es el precio de un paquete?

Octavio lee la descripción de la cantidad *número de paquetes a comprar cuando me*

1. (*Octavio lee el enunciado en voz alta. La cantidad activa es "número de paquetes a comprar cuando me falta dinero".*)

falta dinero (*Cfd*) (ítem 1). Luisa propone asignar a *Cfd* el valor 9 (ítem 2) y realiza la acción en el tutor (ítem 3).

2. Luisa: Número de paquetes a comprar cuando me falta dinero, cuando me falta dinero hay que comprar nueve.
3. (*Luisa asigna el valor "9" a la cantidad "número de paquetes a comprar cuando me falta dinero". La cantidad activa pasa a ser "número de paquetes a comprar cuando me sobra dinero".*)

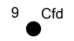


Figura 6.134. Grafo después del ítem 3.

Ambos miembros de la pareja coinciden en señalar que a la cantidad *número de paquetes a comprar cuando me sobra dinero* (*Csd*) le corresponde el valor 5 (ítem 5 y 6). Luisa consuma la acción sobre el programa (ítem 7).

4. Luisa: Y cuando me sobra quiero comprar…
5. Octavio: [Cinco…
6. Luisa: …cinco.
7. (*Luisa asigna el valor "5" a la cantidad "número de paquetes a comprar cuando me sobra dinero". La cantidad activa es "dinero que me falta al comprar nueve paquetes".*)

Figura 6.135. Grafo después del ítem 7.

La siguiente de las cantidades conocidas de la que va a dar cuenta la pareja es *dinero que falta al comprar nueve paquetes* (*Df*). Luisa propone y asigna el valor 3 a dicha cantidad (ítems 8 y 9).

8. Luisa: Número que me falta al comprar, tres euros.
9. (*Luisa asigna el valor "3" a la cantidad "dinero que me falta al comprar nueve paquetes". La cantidad activa es "dinero que me sobra al comprar cinco paquetes".*)

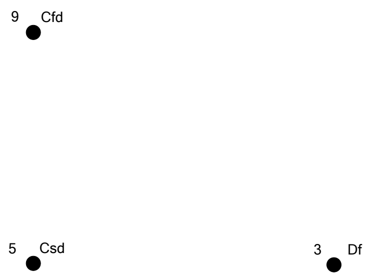


Figura 6.136. Grafo después del ítem 9.

La pareja cierra la definición de cantidades conocidas con la declaración de la cantidad *dinero que falta al comprar cinco paquetes* (*Df*). Nuevamente Luisa comanda el proceso de resolución y asume la responsabilidad, asignando correctamente a la cantidad *Df* el valor de cinco euros (ítems 10 y 11). Su compañera no interviene en estas asignaciones.

10. Luisa: Y lo que me sobra, me sobran cinco euros también.
11. (*Luisa asigna el valor “5” a la cantidad “dinero que me sobra al comprar cinco paquetes”. La cantidad activa es “precio del paquete de cromos”.*)

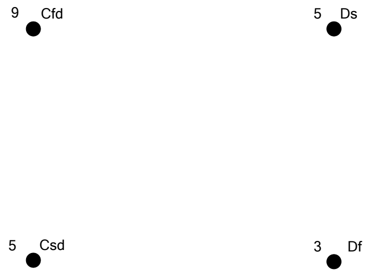


Figura 6.137. Grafo después del ítem 11.

El *precio de un paquete de cromos* (*Ppc*) es la primera cantidad desconocida que abordan en el proceso. Luisa sugiere que han de representarla mediante la letra *x* (ítem 12). Nuevamente Octavio parece no poner ningún inconveniente y Luisa plasma la representación en el tutor (ítem 13). No toman en consideración la opción de desplegar la lista de cantidades para analizar cuáles son las cantidades pendientes de definir.

12. Luisa: Precio del paquete de cromos, equis.
13. (*Luisa asigna la letra “x” a la cantidad “precio del paquete de cromos”. La cantidad activa es “dinero que tengo”.*)

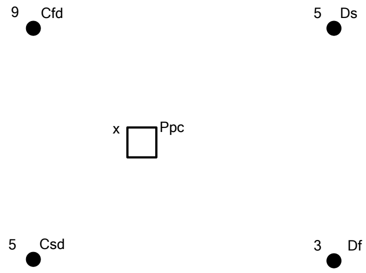


Figura 6.138. Grafo después del ítem 13

Ante la visión de la descripción de la cantidad *dinero que tengo* (*D*), Luisa resume “ahí la cuestión”, parece indicar que obtener esta cantidad es el fin último del problema (ítem 14). Octavio rompe su letargo y empieza a verbalizar la búsqueda de una expresión algebraica que simbolice la cantidad *D*, lo que le lleva a repasar el enunciado (ítem 15). En pocos segundos, sugiere correctamente representar *D* mediante la expresión 5*x* + 5 (ítem 17) usando dos relaciones *Psd* = *Ppc*·*Csd* y *D* = *Psd* + *Ds*. Inicialmente Luisa no comprende la propuesta de su compañero y solicita explicaciones (ítem 18). Octavio describe verbalmente el significado de cada término en la expresión: el precio de nueve paquetes de cromos (5*x*) y el dinero que falta (5) (ítem 21). Luisa acepta entonces la expresión (ítem 22) y Octavio sugiere que la introduzca en el sistema

14. Luisa: Y dinero que tengo… ahí la cuestión.
15. Octavio: Pues sería… espérate, sería equis por, a ver… equis por tres, no, equis… A ver, si quiero comprar nueve paquete de cromos, no. (*Octavio repasa el enunciado.*)
16. Luisa: [Pero…
17. Octavio: Equis por cinco con cinco.
18. Luisa: ¿Cómo?
19. Octavio: Equis…
20. Luisa: [El precio del paquete.
21. Octavio: …el precio del paquete por cin, por cinco paquetes que compro más cinco euros que me sobran.
22. Luisa: Sí.
23. Octavio: Ponlo a ver si es eso. (*Octavio activa la opción “expresión”.*)
24. Profesor: Tened cuidado porque en este problema aparecen dos cincos…
25. Luisa: [Cada cinco es lo que es, sí.
26. Profesor: … cada cinco significa una cosa distinta y tenéis que usar el cinco correcto.
27. Octavio: A ver…
28. Profesor: ¿Entendéis lo que os digo?
29. Luisa: Sí, ¿pero cómo…? (*Octavio se posa*

(ítem 23). El profesor les recuerda la necesidad de que consideren que existen dos botones de *cincos* pero que cada uno de ellos designa dos cantidades diferentes (ítems 24 y 26). Luisa muestra recordar esta característica de funcionamiento del programa al expresar “cada cinco es lo que es” (ítem 25). Teniendo en cuenta este aspecto, la pareja intenta construir la expresión 5*x* + 5 prestando atención a identificar el significado de los botones que usan. Sin embargo, Octavio sólo consigue introducir el primer término de la expresión 5*x* (ítem 33) pero el tutor no les permite escribir más como desean (ítem 35). Esto se debe a que en el tutor se ha de definir previamente la cantidad *Psd* mediante 5*x*, y a partir de la misma, expresarse *D* como la suma 5*x* (*Psd*) y 5 (*Ds*). La propuesta de Octavio implicaba la síntesis de dos relaciones ternarias dando lugar a una cuaternaria, lo cual no es representable directamente en esta versión del sistema. Cuando Luisa se percata de que el sistema no les permite esta expresión (ítem 36), Octavio pulsa el botón *Aceptar*, asignando la expresión 5*x*, que en ese momento tenían escrita, a la cantidad *Psd* (ítem 37). Inmediatamente observa que la acción del tutor tiene pleno sentido, a pesar de las risas de su compañera, por el significado del término (ítem 38), que representa *Psd* y no el dinero que tienen.

sobre el botón “5” haciendo visible el nombre “número de paquetes a comprar cuando me sobra dinero”.)

30. Luisa: ¡Ah, vale!
31. Octavio: Número de paquetes a comprar cuando me sobra dinero…
32. Luisa: Pues equis ¿por cinco? Equis por cinco más ese cinco.
33. Octavio: Equis por cinco más… (*Octavio construye la expresión “x*5…”.*)
34. Luisa: …más ése cinco.
35. (*Octavio intenta continuar la expresión pero el tutor no lo permite.*)
36. Luisa: Pues no nos deja.
37. (*Octavio valida la expresión “x*5”, que es asignada a la cantidad “precio de cinco paquetes de cromos”.*)
38. Luisa: Claro. Ése es el precio de cinco paquetes… (*Luisa se ríe.*)
39. Octavio: De cinco paquetes en vez del total…

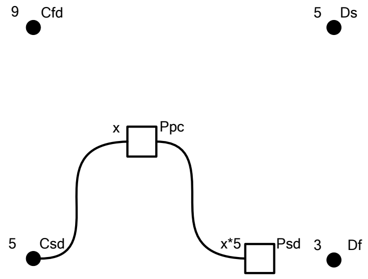


Figura 6.139. Grafo después del ítem 39

Luisa entiende las explicaciones de su compañero (ítem 40). Octavio, tras la definición de *Psd*, tiene en mente retomar la relación que anteriormente no habían podido escribir para *D* (ítem 41). Sin embargo, Luisa prefiere definir el precio de nueve paquetes de cromos en primer lugar para lo que selecciona la cantidad *Pfd* (ítem 42). La estudiante verbaliza la

40. Luisa: Ah, espera, ya.
41. Octavio: Y ahora el dinero que tengo… (*Luisa despliega la lista de cantidades.*)
42. Luisa: Y ahora el de los nueve… (*Luisa activa la cantidad “precio de nueve paquetes de cromos”.*).
43. (*Luisa activa la opción “expresión”.*)
44. Luisa: …equis por nueve. (*Luisa construye la expresión “x*9”, que es asignada a la cantidad “precio de nueve paquetes de cromos”. La cantidad activa pasa a ser “dinero que tengo”.*)

expresión que da cuenta de la relación multiplicativa *Pfd* = *Ppc*·*Cfd* (ítem 43) y la asigna la expresión 9*x* correctamente en el sistema (ítem 44).

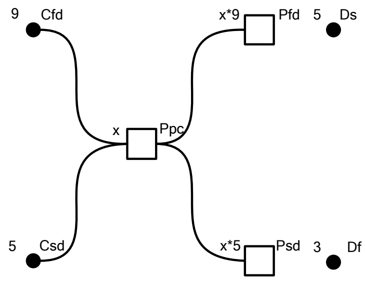


Figura 6.140. Grafo después del ítem 44.

Finalmente la pareja aborda la última de las cantidades por definir el *dinero que tengo*, (*D*). Luisa propone representar esta cantidad como la suma del precio de nueve paquetes de cromos y de cinco paquetes de cromos (ítems 47 y 49) pero Octavio la disuade exponiendo la idea que tenían anteriormente de designarla mediante la cantidad 5*x* + 5 (ítem 50). Luisa acepta la idea de su compañero e inicia la construcción de la expresión (ítem 51). Las acciones de Luisa, dirigidas por Octavio, concluyen exitosamente el paso tercero del MC. La ventana de ecuaciones se activa marcando el inicio del cuarto paso del método.

45. Luisa: Y ahora el precio del paquete…
46. Octavio: Ése lo otro, sería…
47. Luisa: Esto… (*Luisa construye la expresión “(9*x)…”.*)
48. Octavio: ¡No!
49. Luisa: Sí, eso más eso, ¿no? (*señala con el ratón el botón “5*x”.*)
50. Octavio: No, ¿pero no sería equis por cinco más cinco? Lo que íbamos a hacer antes.
51. (*Luisa borra la ventana de expresiones.*)
52. Luisa: Esto… (*Luisa construye la expresión “(5*x)*…”.*)
53. Octavio: Más, no por.
54. (*Luisa borra la ventana de expresiones. Luisa construye la expresión “(5*x)+…”.*)
55. Octavio: Más cinco igual…
56. (*Luisa construye la expresión “(5*x)+5”, que es asignada a la cantidad “dinero que tengo”. Se activa la ventana de ecuaciones.*)
57. Octavio: Ya.

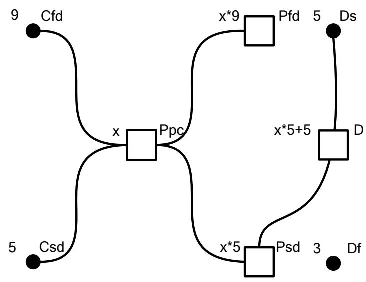


Figura 6.141. Grafo después del ítem 57.

El proceso de construcción de la ecuación es iniciado por una relectura en voz alta de la pregunta del problema por parte de Octavio (ítem 58). Al intentar ofrecer una ecuación como respuesta directa a esta pregunta, Luisa inicia la verbalización de una ecuación en la forma *x* =… Sin

58. Octavio: A ver, ¿cuál es el precio de un paquete?
59. Luisa: El precio de un paquete es equis… equis es igual a… (*Luisa escribe la ecuación “x=…”. Luisa se coloca sobre el botón “5+5*x” hasta visualizar el nombre “dinero que tengo”.*)
60. (*Luisa escribe la ecuación “x=(5+5*x)−(5*x)”, que es identificada como errónea.*)

ofrecer ninguna justificación de los motivos en que se apoya, propone la ecuación $x = (5+5x) - 5x$, basada en la relación incorrecta $D = Ppc + Psd$ (ítem 60). Dado que D había sido representada mediante $Ds + Psd$, esta ecuación implicaría la igualación de Ppc y Ds. Luisa se ríe, quizá siendo consciente de la escasa lógica de su idea, y borra la ecuación escrita (ítem 61).

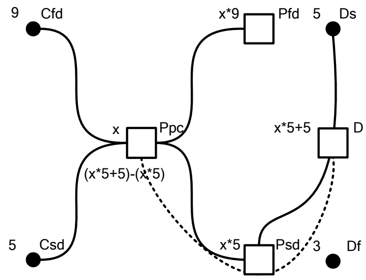


Figura 6.142. Grafo después del ítem 60.

61. (*Luisa se ríe y borra la ventana de ecuaciones.*)

Luisa decide releer el enunciado en voz alta nuevamente para obtener información sobre cómo proceder (ítem 62) Tras el silencio que sigue a la lectura, Luisa insiste en querer construir la ecuación sobre *Ppc* (ítem 64). De hecho inicia la ecuación de ese modo (x =…) (ítem 65) y medita emplear la cantidad D en su representación $5 + 5x$ aunque reconoce no saber cómo continuar (ítem 66). Octavio toma el control del ratón y construye la expresión $9x - 3$, que involucra la relación no usada necesaria para construir la ecuación y que es una representación alternativa de D. Sin embargo, debido a que no ha borrado la ecuación iniciada por su compañera, la ventana de ecuaciones muestra la ecuación $x = 9x - 3$ (ítem 67). El hecho de que Octavio pulse nuevamente el botón *igual* induce a pensar que tenía en mente otra ecuación. En cualquier caso, Octavio termina validando la ecuación y obteniendo un mensaje de error que le lleva a borrar lo escrito (ítem 67).

62. Luisa: Quiero comprar nueve paquete de cromos, me faltan tres euros, pero si quiero cobrar cinco me sobran cinco. ¿Cuál es el precio de un paquete?
63. (*Silencio de diez segundos.*)
64. Luisa: El precio del paquete… (*Luisa escribe la ecuación "x…".*)
65. Luisa: es igual… (*Luisa escribe la ecuación "x=…".*)
66. Luisa… ¿esto? (*Luisa coloca el ratón sobre el botón "5+5*x".*) No sé. No, ¿eh? Yo no sé… dale pero no creo que sea.
67. (*Octavio toma el ratón y continúa "x=(9*x)−3" y le da al botón "=". Valida la ecuación que es identificada como errónea. Borra la ventana de ecuaciones.*)

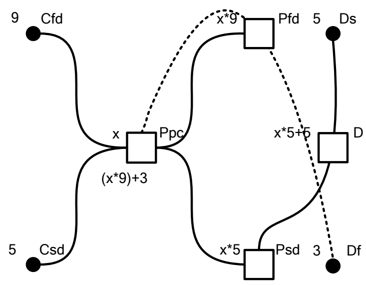


Figura 6.143. Grafo después del ítem 67.

Octavio parece descartar la relación que había escrito y pregunta a su compañera sobre la idea que valoraba con anterioridad (ítem 68). Luisa dirige el proceso de resolución una vez más hacia la construcción de una ecuación explícita

68. Octavio: ¿Cuál decías tú?
69. Luisa: Equis es igual… (*Octavio escribe la ecuación "x…".*)
70. Luisa: …no creo que sea pero bueno, esto menos esto.
71. (*Octavio escribe la ecuación "x=(9*x)−(5*x)", que es identificada como errónea por el tutor.*)

sobre la letra *x* (ítem 69). En este caso propone la ecuación $x = 9x - 5x$, parecida a la que deseaba probar anteriormente (ítems 47 y 49), que reflejaría la relación $Pfd = Psd + Ppc$. Esta relación supondría que la diferencia de coste al comprar cuatro paquetes de cromos más es únicamente el precio de un paquete. Lógicamente el tutor informa de que la ecuación es errónea (ítem 71).

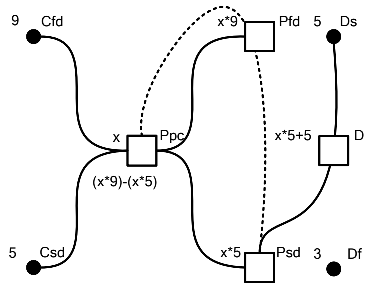


Figura 6.144. Grafo después del ítem 71.

A la vista del mensaje de error, Octavio borra la ecuación incorrecta (ítem 72) y descarta intentar nuevamente construir la ecuación en forma explícita (ítem 73). En vez de ello apuesta por buscar una forma diferente de representar la cantidad *D* (ítem 74 y 75). Su primer intento consiste directamente en la igualación directa de las cantidades $D = Psd$ a través de la ecuación $5 + 5x = 5x$, que es, obviamente, no validada por el tutor (ítem 78).

72. Luisa: A ver, espérate. (*Octavio borra la ventana de ecuaciones.*)
73. (*Octavio escribe la ecuación "x…" pero finalmente borra la ventana de ecuaciones.*)
74. Luisa: Mi pre… (*Octavio escribe la ecuación "(5+5*x)…".*)
75. Luisa: …todas las perras que tengo son iguales… (*Octavio continúa la ecuación "(5+5*x)=…".*)
76. Luisa: a… (*Octavio se posa sobre el botón "5*x" haciendo visible "precio de cinco paquetes de cromos".*)
77. Luisa: …todo el dinero que tengo.
78. (*Octavio escribe la ecuación "(5+5*x)=(5*x)", que no es validada por el tutor.*)

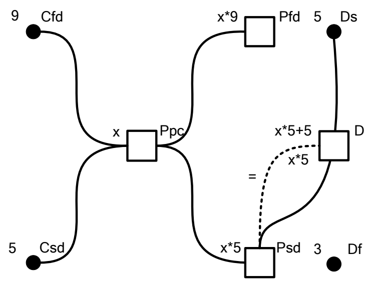


Figura 6.145. Grafo después del ítem 78.

En respuesta a la situación, Octavio construye la ecuación $5 + 5x = 5x + 9x$, que implicaría que el dinero que tengo es igual al precio de los cinco paquetes más el precio de los nueve ($D = Psd + Pfd$). El tutor informa de que la ecuación es errónea. Dado que no hay verbalización, no es posible identificar si la acción es un mero intento de completar de cualquier forma la ecuación errónea del ítem 78 o existe algún razonamiento que sustente la nueva ecuación.

79. Octavio: No me deja. Es igual, no. (*Octavio escribe toda la ecuación "(5+5*x)=(5*x)+(9*x)", que es identificada como errónea por el tutor.*)

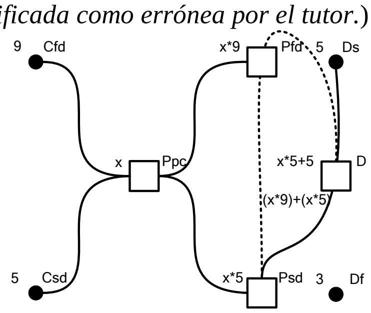


Figura 6.146. Grafo después del ítem 79.

El profesor invita a la pareja a que vayan explicando sus pensamientos y, en

80. (*Octavio borra la ventana de ecuaciones.*)
81. Profesor: Hablad lo que vais pensando.
82. Luisa: Todo el dinero que tengo son esto… (*Luisa escribe la ecuación*

consecuencia, sus acciones, pues en los últimos instantes las verbalizaciones han disminuido de manera importante (ítem 81). Luisa medita volver a construir una ecuación sobre *D* (ítem 82) pero descarta esta opción y vuelve a emerger su idea de escribir una ecuación en forma explícita sobre *x* (ítem 84). De hecho intenta validar una ecuación que ya había sido rechazada por el tutor minutos antes (ítem 85).

*“(5+5*x)=…”.*)
83. Luisa: …pero el precio de un paquete… joer (sic). (*Luisa borra la ventana de ecuaciones.*)
84. Luisa: Equis es igual… (*Luisa escribe la ecuación “x=…”.*)
85. Luisa: a esto… Esto lo hemos hecho ya, ¿no? (*Luisa escribe la ecuación “x=(5+5*x)−(5*x)”, que es identificada como errónea.*)
86. Luisa: Sí.

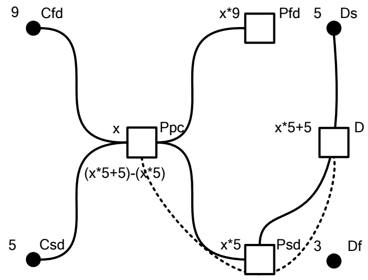


Figura 6.147. Grafo después del ítem 86.

La cadena de errores provoca que Octavio reflexione en voz alta sobre la necesidad de que en la ecuación que propongan sea en la forma $x = f(x)$ (ítem 87). Afirma que no han de obrar constreñidos por esta idea pues posteriormente podrían realizar las transformaciones algebraicas correspondientes para despejar la incógnita. Esta verbalización es importante pues muestra cómo Octavio es capaz de separar el cuarto paso del MC de la resolución de la ecuación o sistema de ecuaciones planteado (pasos 5 y 6 posteriores del método).

87. Octavio: A lo mejor no tiene por qué ser equis primero. A lo mejor luego es despejar la equis de la ecuación y tener la equis…

Tras el comentario de Octavio, vuelven a intentar construir una ecuación sobre la cantidad *D* (ítem 96). Sin embargo, no parecen capaces de entender la necesidad de recurrir a relaciones diferentes a la que ya han puesto en uso. Así, vuelven a usar en su proceso de representación la relación $D = Psd + Ds$, lo que les conduce a escribir la igualdad $5 + 5x = 5 + 5x$ (ítem 108). Antes de validar, Octavio reconoce que lo que han puesto no es una ecuación (ítem 109) pero, aún así, su compañera intenta validarla (ítem 110). El tutor les devuelve un mensaje informativo de que la relación que están empleando ya ha sido

88. Luisa: Todo el dinero que tengo… ¿cuánto es el precio del paquete?¿cuánto valen? (*Luisa se coloca sobre el botón “5+5*x” hasta visualizar el nombre “dinero que tengo”.*)
89. Octavio: Sería… (*Octavio coge el ratón.*)
90. Octavio: …cinco, cinco por equis…
91. Luisa: Cinco por equis es el precio de cinco paquetes…
92. (*Silencio de cinco segundos.*)
93. (*Octavio escribe la ecuación “(5+5*x)…”.*)
94. Octavio: Más… (*Octavio se coloca sobre el botón “+”.*)
95. Luisa: [No. Eso es todas las perras que tienes.
96. Octavio: Sí. Y es igual… (*Octavio escribe toda la ecuación “(5+5*x)=…”.*)
97. Luisa: …a cinco equis, dale a cinco equis…

usada.

98. (*Octavio escribe toda la ecuación “(5+5*x)=(5*x)…”.*)
99. Luisa: …más…
100. (*Octavio escribe toda la ecuación “(5+5*x)=(5*x)+…”.*)
101. Octavio: Cinco.
102. (*Octavio completa la ecuación “(5+5*x)=(5*x)+5”.*)
103. Luisa: Pero mira a ver si es ese cinco… Es que como pone dos cincos, espera, espera, déjame un momento… (*Octavio se coloca sobre un “5” pero pincha y no permite visualizar la etiqueta. Luisa le quita el ratón.*)
104. Luisa: ¿Es que aquí no te pone lo que es cada…? Ah, sí. (*Luisa se posa sobre un “5”, el que no habían pulsado al construir la ecuación, y se muestra “dinero que me sobra al comprar cinco paquetes”.*)
105. Octavio: Míralo. Dinero que me sobre…
106. Luisa: [Claro, es este cinco. (*Luisa borra la ventana de ecuaciones.*)
107. Luisa: Entonces será…
108. Octavio: Cinco… es igual a… (*Luisa escribe toda la ecuación “(5+5*x)=(5*x)+5”.*)
109. Octavio: Pero… si has puesto lo mismo.
110. (*Luisa valida la ecuación, pero el tutor informa de que la expresión ya ha sido utilizada.*)
111. Luisa: ¡Claro, es verdad! (*Luisa se ríe.*)
112. Octavio: Has puesto esta expresión pero dividida…
113. Luisa: Dividida no, claro, sí.

Finalmente y sin que apenas medie diálogo en el proceso, Octavio toma el mando del ratón (ítem 114) e inicia una ecuación sobre la cantidad D (ítem 115). Antes de representar el segundo miembro de la ecuación, repasa el enunciado y verbaliza la expresión $9x - 3$ que ya tuviera en mente en otro momento del proceso de resolución (ítem 116). Como resultado solicita la validación de la ecuación $5 + 5x = 9x - 3$, que es aceptada por el tutor.

114. (*Luisa borra la ventana de ecuaciones. Octavio coge el ratón.*)
115. Octavio: Esto es igual a… (*Octavio escribe “(5+5*x)=…” y repasa el enunciado.*)
116. Octavio: …nueve equis menos tres. (*Octavio escribe toda la ecuación “(5+5*x)=(9*x)−3, que es identificada como correcta.*)
117. Octavio: Ahora sí.

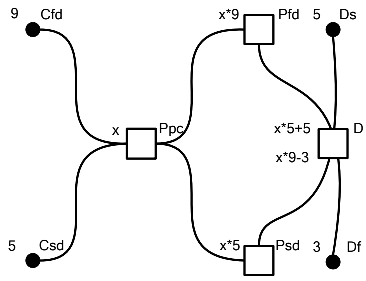


Figura 6.148. Grafo al final de la resolución.

Luisa muestra mucha curiosidad por entender la ecuación propuesta por Octavio (ítems 118 y 120) y el profesor pide a éste que la explique en voz alta (ítem 119). El alumno se limita a describir que la cantidad *D* puede ser expresada en función del coste de los cromos en la situación que faltó dinero (*Pfd*) y el dinero que faltó (*Df*) (ítem 121).

118. Luisa: ¿Y por qué? ¿por qué?
119. Profesor: Explícalo, Octavio.
120. Luisa: ¿Por qué, Octavio?
121. Octavio: A ver, serían que el té, el dinero total es igual a los, el dinero total es igual al dinero que me cuestan los nueve paquetes de cromos menos los tres euros que me faltan.
122. Profesor: Vale, no tenemos más tiempo.

6.5.3. LA PAREJA ALBA-OLGA

6.5.3.1. El caso de la pareja Alba-Olga en el problema "Conejos y gallinas"

En una granja, entre gallinas y conejos hay 20 cabezas y 52 patas. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay en la granja?

La pareja inicia el proceso de resolución dando lectura en voz alta al enunciado del problema (ítem 1). Las primeras acciones las destinan a la definición de las cantidades conocidas. Así, entre los ítems 2 y 10, dan valor, correctamente y en este orden, a las cantidades conocidas *número de patas por conejo* (*Ppc*), *número de patas por gallina* (*Ppg*), *número de cabezas total* (*C*) y *número de patas total* (*P*).

1. Alba: Lee el enunciado en voz alta. (*La cantidad activa es "número de patas que tiene un conejo".*)
2. Olga: A ver, número de patas que tiene un conejo, dos.
3. Alba: Dos. (*Alba asigna el valor "2" a la cantidad "número de patas que tiene un conejo". No valida la cantidad.*)
4. Alba: No, un conejo tiene cuatro.
5. Olga: ¡Anda! Es verdad… (*Alba rectifica y asigna "4" a la cantidad "número de patas que tiene un conejo". La cantidad activa pasa a ser "número de patas que tiene una gallina".*)

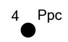


Figura 6.149. Grafo después del ítem 5.

6. Alba: ¡Madre mía! (*Se ríen.*)
7. Olga: Número de patas que tiene una gallina…
8. Alba: Dos… ¡Madre mía! (*Alba asigna el valor "2" a la cantidad "número de patas que tiene una gallina". La cantidad activa pasa a ser "número de cabezas en total".*)

Figura 6.150. Grafo después del ítem 8.

9. Olga: Número de cabezas en total, veinte. (*Alba asigna el valor "20" a la cantidad "número de cabezas en total". La cantidad activa pasa a ser "número de patas en total".*)

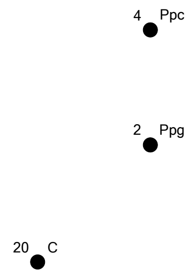


Figura 6.151. Grafo después del ítem 9.

10. Olga: Número de patas en total, cincuenta y dos. (*Alba asigna el valor "52" a la cantidad "número de patas en total". La cantidad activa pasa a ser "número de patas de conejos".*)

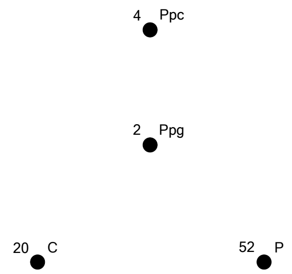


Figura 6.152. Grafo después del ítem 10.

11. Olga: Y número de patas de conejos…
12. Alba: Si son… ¡ah! *equis*, no sabemos cuántas hay, digo yo. (*Alba asigna la letra "x" a la cantidad "número de patas de conejos". La cantidad activa es "número de patas de gallinas".*)

Alba proponer representa la cantidad desconocido *número de patas de conejos*, *Pc*, mediante la letra *equis*, justificando su decisión, precisamente, por el carácter desconocido de la cantidad (ítem 12). En primera instancia no valoran la posibilidad de representar otra cantidad mediante una letra para, posteriormente, definir *Pc* mediante una expresión algebraica.

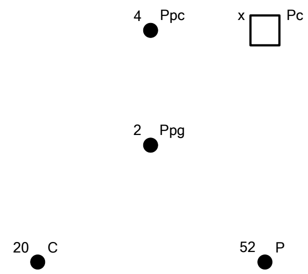


Figura 6.153. Grafo después del ítem 12.

13. Olga: *Equis* entre dos…
14. Alba: Lo que… no nos dice cuántas patas hay de conejo, ni cuántas hay de gallina...
15. Olga: Bueno, i griega… (*Alba asigna la letra "y" a la cantidad "número de patas de gallinas". La cantidad activa pasa a ser "número de conejos".*)

El primer impulso de Olga es construir la expresión algebraica $x/2$ (ítem 13). Esta actuación está sujeta a muy diversas interpretaciones siendo difícil decantarse por una de ellas dadas las escasas explicaciones de las que acompañara la estudiante su propuesta. Una opción sería que Olga no esté pensando en representar la cantidad *Pg* a pesar de que ésta sea la cantidad activa en el instante en que habla. Partiendo de esta hipótesis, la interpretación más plausible sería considerar que intenta usar la relación multiplicativa $Pc = Nc \cdot Ppc$ y que, en consecuencia, pretende representar la cantidad *Nc* cometiendo el desliz de usar *Ppg* en vez de *Ppc*. A lo largo de la resolución, esta estudiante confunde frecuentemente ambas cantidades conocidas *Ppc* y *Ppg*. Otra opción, más remota a nuestro juicio, es que pretenda representar *Pg* y que considere que han de ser la mitad de *Pc*, y que podría estar auspiciado por el hecho de *Ppg* sí es la mitad de *Ppc*, pero sin contemplar que el número de conejos y de gallinas no ha de ser el mismo. Lo sorprendente, es que cuando su compañera enfatiza que *Pc* y *Pg* son cantidades desconocidas (ítem 14), Olga desecha su expresión algebraica sin siquiera tratar de validarla y propone usar una segunda letra (ítem 15). Así, representan la cantidad *Pg* mediante la letra *y*.

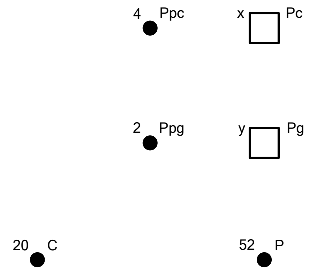


Figura 6.154. Grafo después del ítem 15.

Al enfrentarse ante la siguiente de las cantidades, *el número de conejos* (*Nc*), constatan que también es una cantidad desconocida (ítem 17). Dada esta situación, Alba considera que su planteamiento es erróneo pues entiende que las cantidades designadas mediante letras, a las que se refiere correctamente como incógnitas, deberían ser las cantidades por las que se pregunta en el enunciado, es decir el número de conejos y el número de gallinas. Dada la imposibilidad de borrar las asignaciones de *x* e *y* a *Pc* y *Pg*, Alba propone cargar el problema de nuevo (ítem 22). Olga parece reticente pues afirma que aunque consideren como incógnitas *Nc* y *Ng*, las cantidades *Pc* y *Pg* seguirán siendo desconocidas (ítem 25). Olga ignora este comentario de su compañera y carga

16. Alba: Número de conejos…
17. Olga: …que tampoco lo sabemos.
18. Alba: Es que yo creo que número de patas y número de patas no son las incógnitas… porque nos piden los conejos y las gallinas, tiene que ser eso las incógnitas.
19. Olga: ¿Eh?
20. Alba: Que las incógnitas son conejos y gallinas, no patas y patas.
21. Olga: ¿Y cómo se borra esto? (*Intenta seleccionar cantidades sobre las ventana de cantidades, pensando que puede editarlas.*)
22. Alba: No se borra. Hala, lo cargamos otra vez.
23. Alba: [Es que… pero…]
24. Olga: …ya está. (Olga carga el problema nuevamente.)
25. Alba: … es que tampoco sabemos cuántas patas de conejo y…
26. Olga: …cuántas de gallinas y cuántas de gallina hay…

nuevamente el problema.

Al iniciar desde cero el problema, la pareja se ve obligada a definir una vez más las cantidades conocidas. A esta labor se dedican en la primera etapa de este nuevo planteamiento (ítems 27 al 35). Durante este intervalo vuelve a ponerse de manifiesto la tendencia, parece que debida a descuidos poco relevantes, de Olga de confundir las cantidades *Ppc* y *Ppg* (ítem 27). Además, Alba da muestras de seguir sin comprender el porqué han reiniciado el problema (ítem 29).

27. Alba: Por eso… yo que sé… espérate… (*Olga introduce asigna el valor "2" a la cantidad "número de patas que tiene un conejo". El tutor muestra un mensaje de error.*)

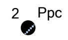


Figura 6.155. Grafo después del ítem 27.

28. Olga: Vale, cuatro. (*Alba asigna el valor "4" a la cantidad "número de patas que tiene un conejo".*)

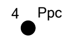


Figura 6.156. Grafo después del ítem 28.

29. Alba: Ni idea…

30. Olga: …número de patas… dos. (*Alba asigna el valor "2" a la cantidad "número de patas que tiene una gallina".*)

Figura 6.157. Grafo después del ítem 30.

31. Alba: Cabezas en total, veinte, ¿no?

32. Olga: Sí. (*Alba asigna el valor "20" a la cantidad "número de cabezas en total".*)

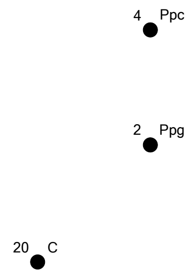


Figura 6.158. Grafo después del ítem 32.

33. Olga: Patas, cincuenta y seis…
34. Alba: Cincuenta y dos…
35. Olga: ¡Eso! Cincuenta y dos. (*Alba asigna el valor “52” a la cantidad “número de patas en total”.*)

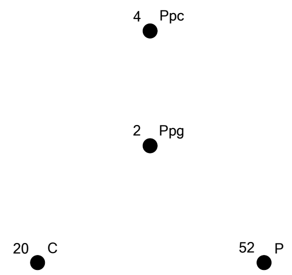


Figura 6.159. Grafo después del ítem 35.

En coherencia con la carga del problema, Olga sugiere activar la cantidad *Nc* en vez de la activada por defecto, *Pc* (ítem 36). Alba, exasperada, alza la voz para transmitir que *Pc* es igualmente una cantidad desconocida (ítem 37), parece que la estudiante ubica en un mismo nivel las cantidades *Pc* y *Nc* y que, por tanto, es indiferente cuál de ellas designen con una letra. Sin embargo, no se produce discusión sobre esta idea, sino que Alba acepta la propuesta de su pareja (ítem 38) y representa la cantidad *Nc* con la letra *equis* (ítem 39). Parece que su comportamiento se debe a una mayor flexibilidad que, finalmente, le lleva a considerar igualmente válida esta vía.

36. Olga: Número de patas de conejos… pásate al otro… (*Indica a Alba que cambie la cantidad activa, que en ese momento es “número de patas de conejos”.*)
37. Alba: …¡¡Es que tampoco lo sabemos!!...
38. Olga: …número de conejos, *equis*… (*Alba haciendo el uso del ratón activa la cantidad “número de conejos”.*)
39. (*Alba asigna la letra “x” a la cantidad “número de conejos”.*)

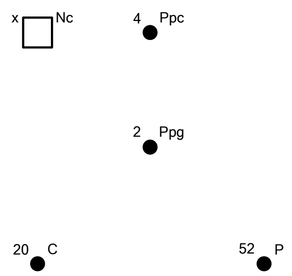


Figura 6.160. Grafo después del ítem 39.

Repiten el proceso para la cantidad número de gallinas (*Ng*), y representan dicha cantidad mediante la letra *y* (ítem 46).

40. Alba: Y el de gallinas…
41. Olga: … i griega.
42. Alba: Cámbialo. (*Alba indica a Olga que active la cantidad “número de gallinas”, en vez de “número de patas de gallinas”.*)
43. Olga: No, está bien.

44. Alba: Está patas.

45. (*Olga haciendo el uso del ratón activa la cantidad “número de gallinas”.*)

46. Alba: I griega (*susurra*). (*Alba asigna la letra “y” a la cantidad “número de gallinas”. La cantidad activa pasa a ser “número de patas de gallinas”.*)

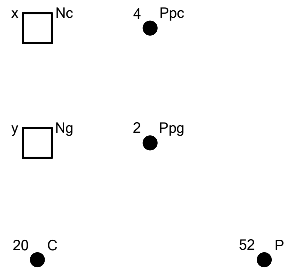


Figura 6.161. Grafo después del ítem 46.

En este punto, la pareja se encuentra prácticamente forzada a empezar a emplear a usar relaciones para avanzar en el proceso de resolución. En realidad, siempre podrían emplear tantas letras como cantidades desconocidas y dilatar el uso de relaciones hasta el paso cuarto del MC, pero rara vez los resolutores usan más de dos letras. Además, aquí, la pareja (sobre todo Olga) parece identificar las letras con las cantidades por las que pregunta el problema. En estas circunstancias, la pareja aborda la representación de la cantidad *Pg* (ítem 48). Alba insiste en su idea de que deberían en primer lugar “averiguar en primer lugar la incógnita de las patas” (ítem 49). Olga se embarca en una aproximación aritmética al problema con la expresión 52/2 en lo que parecía considerar el caso de un reparto equitativo, es decir igual número de conejos y gallinas (ítem 51). No obstante, no parece que sea esta la idea de Olga, pues cuando su compañera le hace ver que tienen que considerar las patas de conejo (ítem 52), Olga se desmarca proponiendo con la expresión 52/4 (ítem 53), cuyo único significado que encontramos sería el número de conejos si sólo hubiera conejos, pero que parece muy lejana esta interpretación del uso que pretende hacer la estudiante. Alba

47. Alba: Vale, entonces…

48. Olga: …número de patas de gallinas…

49. Alba: …es que yo creo que antes deberíamos averiguar la incógnita de las patas antes que la de…

50. Olga: … es que si hay cincuenta y dos… (*Marta haciendo el uso del ratón pulsa el botón “52” en la ventana de ecuaciones.*)

51. Olga: Yo creo que si hay cincuenta y dos patas entre dos que tienen las gallinas, nos tiene que dar las de las gallinas… (*Olga construye la expresión “52/2” en la ventana de cantidades. Olga se da cuenta del error y retorna a la ventana de cantidades.*)

52. Alba: No, porque también tienes que tener en cuenta que hay algunas que son de los…

53. Olga: Pues lo dividimos entre cuatro…

54. Alba: Jájaja… ¡menuda solución!

55. Olga: Borrar… (*Olga pulsa el botón “Borrar” de la ventana de ecuaciones. Olga en realidad quiere modificar la expresión “52/2”.*)

56. Alba: Es que tú tienes que tener en cuenta que primero, al saber el número de patas que tienen, ya puedes averiguar el número de gallinas y… de conejos… digo yo. (*Olga borra la expresión “52/2” en la ventana de cantidades al activar la opción “número”.*)

57. Olga: Y cómo vas a averiguar las que son de conejos y las que son de gallinas…

58. Alba: Pues, hombre, porque las de conejos tienen…

59. (*Olga se ríe. Parece que Alba estaba pensando en las cantidades, pero Olga interpreta qué se refiere a la posibilidad*

concibe como una barbaridad esta idea (ítem 54), y sigue en la línea de sus manifestaciones anteriores, yendo un poco más lejos al afirmar que sí supieran el número de patas que tiene cada especie podrían averiguar *Nc* y *Ng* (ítem 56). No sabemos si está pensando sólo en la estrategia de qué cantidades son incógnitas o empieza a vislumbrar qué relaciones podrían usar. Olga, parece conforme, pero solicita a su compañera que, en primer lugar, exponga cómo determinar el número de patas que corresponde a cada especie (ítems 57 y 61). Alba reconoce desconocer ese paso previo, siguiendo sin quedar claro si sabría continuar si tuviera representadas en la forma que fuere las cantidades *Pc* y *Pg* (ítem 62). En esta situación, Alba activa la opción "letra" por lo que parece haber decidido representar *Pg* mediante una tercera letra (ítem 64). Sin embargo, la asignación no se llega a consumar porque Olga asume la responsabilidad del proceso de resolución (ítem 65).

de distinguir físicamente las patas. De ahí que se ría, contagiando a Alba.)

60. Alba: … ¿el qué? (*Alba se ríe también.*)
61. Olga: Que cómo vas a saber cuáles son las patas de conejos y cuáles son las de gallinas…
62. Alba: Y yo que sé.
63. Olga: Entonces igual estamos.
64. Olga: Número de patas de gallina… (*Alba activa con el ratón la opción "letra"*.)

Olga escribe la ecuación 20 + 52 = *x* + *y*, que fue el planteamiento realizado por ambas alumnas en la prueba escrita (ítems 65 y 67). Quizá propongan esta ecuación rememorando lo hecho en lápiz y papel, pues ambas reconocen que la ecuación no tiene lógica (ítem 67 y 68). Alba es muy explícita al señalar que están sumando cantidades no homogéneas. Ni siquiera llegan a proponer a validación la ecuación, sino que la borran directamente (ítem 69).

65. Olga: Yo creo que las veinte cabezas más las cincuenta y dos… (*Olga en la ventana de ecuaciones construye la expresión "20+52…". Alba pone cara de extrañeza.*)
66. Alba: Eso yo creo que no.
67. Olga: … es igual a *equis* más *y griega*… pero esto no tiene sentido… (*Olga prosigue, "20+52=x+y".*)
68. Alba: ¿Cómo va a ser eso? Le sumas las patas y las cabezas… qué tiene que ver…
69. (*Olga borra la ventana de ecuaciones.*)

Alba, quizá considerando incompleta la información que tienen para dar respuesta al problema, pregunta al profesor si han de suponer que el número de conejos es la mitad del número de animales (ítem 70). Ella misma ve la incoherencia en su pregunta al señalar que entonces tendrían ya la respuesta, diez conejos y diez gallinas (ítem 72). Olga no considera válido el comentario de su compañera

70. Alba: Pero… ¿se supone que es la mitad de cada uno…? ¿mitad de con...? (*Alba dirige la pregunta al profesor.*)
71. Profesor: No os puedo ayudar.
72. Alba: Es que si es la mitad, ya sabemos que son diez gallinas y diez conejos…
73. Olga: No.
74. Alba: ¡Hombre! ¡Veinte cabezas!
75. Olga: No, porque no saldrían… Sí… pero….
76. Alba: No van a tener dos cabezas…
77. Olga: Sí, pero... ¿luego las patas?…

que está usando la relación $C = Nc + Ng$, y lo hace una vez más considerando que la igualdad entre Nc y Ng implicaría la igualdad entre Pc y Pg. De esta consideración inicial errónea, deduce que Pc debería ser la mitad de P, es decir veintiséis patas y que, si hay diez conejos, entonces Ppc debería valer *2,6* (ítem 86). No sabemos si es debido a la cadena de razonamientos de Olga o a la imagen de un conejo con 2,6 patas pero Alba empieza a reírse incontroladamente (ítem 87), lo que llega a exasperar a su compañera (ítem 88). Una vez recobrada la calma, Alba señala que Ppc es igual a cuatro (ítem 91) y parece querer desencadenar una justificación de que si en un caso hipotético la mitad de animales son conejos, eso no implicaría que lo sean la mitad de las patas de conejos respecto al total (ítem 93). Olga la interrumpe, parece que anticipando el discurso de su pareja, pues señala que, efectivamente, en ese caso hipotético Pc debería tomar el valor 40 (ítem 94).

78. Alba: Por eso luego… luego sería la incógnita las patas…
79. Olga: Ajá… pero divide cincuenta y dos entre dos.
80. Alba: Cincuenta y dos entre dos… pero, ¿para qué?
81. Olga: Divídelo.
82. Alba: ¿Pero para qué…?
83. Olga: Cincuenta y dos entre dos es…
84. (*Alba se ríe porque Olga tarda mucho en realizar la operación.*)
85. Alba: Veintiséis.
86. Olga: Veintiséis. Si dividen las éstas (señala con el puntero "20 cabezas" en el enunciado) te salen que hay diez, y aquí veintiséis. ¿Tú crees que de un conejo... de diez conejos pueden sacar veintiséis patas?
87. Alba: Pero de ahí tienes que… (*Alba empieza a reírse.*)
88. Olga: ¡No, Alba, No! ¡Menudo conejo! Tranquilízate….
89. Alba: ¡Yo que sé! (*Alba aún riéndose.*)
90. Olga: El número de patas de gallinas… es que… (*Olga lee la etiqueta activa.*)
91. Alba: Pero es que los conejos tienen cuatro.
92. Olga: ¿Y?
93. Alba: Que si la mitad supuestamente serían…
94. Olga: … claro si tienen veintiséis por cuatro patas, te tendrían que salir cuarenta…
95. Alba: ¡Calla! Espera… yo no tengo ni… yo esto no sé…
96. Olga: Yo tampoco… El número de patas de gallina…
97. Alba: ¿Ponemos *a* y *be*? Yo lo puse en muchos problemas.
98. Olga: Pues *a*.
99. Alba: Madre mía… (*Alba asigna la letra "a" a la cantidad "número de patas de gallinas".*)

Llegados a este punto, donde la pareja parece totalmente incapaz de construir ninguna de las relaciones descritas en el problema, Alba retoma la idea de usar más letras para representar cantidades desconocidas. Directamente propone usar las letras *a* y *b* para las cantidades pendientes *Nc* y *Ng* (ítem 97). Además afirma que es una estrategia que uso en muchos problemas en la prueba escrita[5]. De este modo, asignan la letra *a* a *Pg* (ítem 99) y la letra *b* a *Pc* (ítem 100).

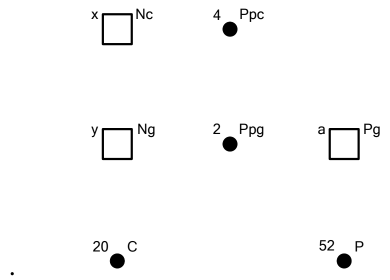


Figura 6.162. Grafo después del ítem 99.

100. Olga: Y be. (*Alba asigna la letra "b" a la cantidad "número de patas de conejos". Alba se ríe. Se activa la ventana de ecuaciones.*)

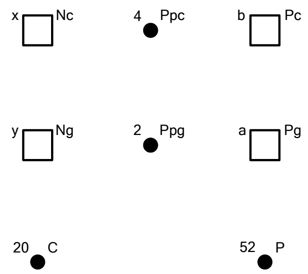


Figura 6.163. Grafo después del ítem 100.

Olga tiene la necesidad de verificar que han dado cuenta de todas las cantidades (ítem 101) mientras que para compañera parece evidente que en el problema no puede haber más cantidades involucradas.

Alba afronta el cuarto paso del MC con la idea de que han de averiguar las cantidades *Nc* y *Ng* (ítem 104). Esto se traduce en que Alba intente escribir una ecuación en la forma *y* =… (ítem 105), que tras unos segundos de reflexión es descartada al ser incapaces de darle continuidad (ítem 108).

101. Olga: Ya está. (*Pincha en la lista desplegable y observa que no quedan cantidades por definir.*)
102. Alba: Si, ¿qué va a haber más?
103. Olga: ¿Esto (*señala la lista de cantidades*) no se quita? (*Silencio breve*) No, porque ya sale esto (*señala la ventana de ecuaciones*).
104. Olga: A ver, tenemos que averiguar las gallinas y los conejos…
105. Alba: A ver, el número de gallinas va a ser igual a… (*Alba coge el ratón y empieza la ecuación "y=….".*)
106. (*Silencio de cinco segundos.*)
107. Alba: Espera. (*Alba observa las cantidades definidas, moviendo la barra de desplazamiento vertical para ver aquellas ocultas.*)
108. (*Alba prosigue "y=2…" pero desiste y borra la expresión.*)
109. Alba: ¿Puede ser qué…? A ver, las gallinas… el número de gallinas es igual a…
110. (*Silencio de cinco segundos.*)
111. Olga: Ni idea (*susurra*).

Quizá el motivo de que no cierren la

[5] En realidad Alba sólo uso más de dos letras en el problema *Las cerezas* y en *Luis, Andrés y su madre*. De manera correcta sólo en el segundo problema mientras que en el primero, la ecuación planteada es errónea precisamente por el uso de letras adicionales cuando parece que la alumna había interpretado correctamente las relaciones del problema.

primera de las ecuaciones basándose en la relación aditiva sobre el total de animales, estribe en que Alba estuviera ya valorando la relación aditiva sobre el total de patas, como parece apuntar sus comentarios (ítems 112 a 118). En este momento se produce una interesante actuación. Olga pregunta directamente a su compañera sobre a qué es igual la cantidad *Pg* (ítem 115). Esto lleva a su compañera, a iniciar una ecuación en la forma *a…* (ítem 116) que es interrumpida por la verbalización de su compañera “no lo tenemos que resolver, lo tenemos que plantear” (ítem 117). Inmediatamente, en respuesta al comentario, Alba construye la ecuación $a + b = 52$ pero afirma “pero, eso se queda igual” (ítem 118). La estudiante parece pensar que su ecuación plasma una información que es evidente y que no conduce a nada en la resolución del problema. A pesar de ello, decide validar la ecuación que es identificada como correcta (ítem 120).

112. Alba: Es que yo creo que primero había que resolver lo de las patas. Si sabes las patas…
113. Olga: ¿Y cómo resolvemos las patas?
114. Alba: Porque si sabes las patas, ya sabes cuántas cabezas tienes…
115. Olga: …ah, y el número de patas de gallinas, ¿a qué es igual?
116. Alba: *a*… (*Alba haciendo uso del ratón, inicia la ecuación “a…”.*)
117. Olga: …pero Alba, no lo tenemos que resolver, lo tenemos que plantear…
118. Alba: Ya. *a* más *be*, el número de patas de gallinas más el número de patas de conejos… (*Alba continúa “a+b…”.*)
119. Olga: …es igual a cincuenta y dos. Pero, eso se queda igual… (*Alba finaliza “a+b=52”.*)
120. (*Alba valida la ecuación, que es identificada como correcta.*)

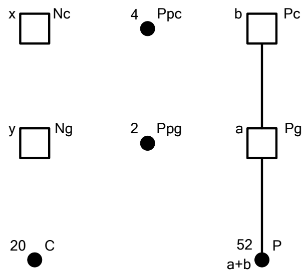


Figura 6.164. Grafo después del ítem 120.

La respuesta de Alba a la validación de la ecuación parece confirmar nuestra interpretación anterior. Alba parece pensar que eso no les conduce a la resolución del problema pero lo contempla como un pequeño avance y, en esa línea, expone que pueden plantear otra ecuación sobre la cantidad *C* (ítem 121). De este modo, construye la ecuación $x + y = 20$ y la registran en el programa (ítem 124).

121. Alba: Bueno, pero algo es algo. Y también el número de… porque si son veinte cabezas, va a haber veinte… entonces el número de conejos más el número de gallinas va a ser igual a veinte…
122. Olga: Ajá.
123. Alba: Digo yo.
124. Olga: Sí, porque cabezas tienen una. (*Alba introduce y valida la expresión “x+y=20”, que es identificada como correcta.*)

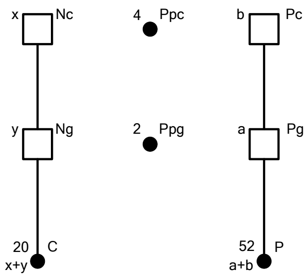


Figura 6.165. Grafo después del ítem 124.

Alba indica que “faltan las patas” (ítem

125. Alba: No van a tener dos… Ahora faltan las patas…

125), en lo que parece una clara intención de construir las ecuaciones pendientes sobre las cantidades *Pc* y *Pg*. Es más, llega a iniciar una ecuación en la forma *a*… (ítem 127). Durante este proceso, Alba parece darse cuenta de que han de ligar cantidades de diferentes magnitudes (ítem 129) e intenta construir una ecuación con la participación de las cantidades *Pg* y *Ppg* (ítem 131). Sin embargo, este intento no cristaliza en una ecuación correcta, quizá por la voluntad de usar *P* con el pensamiento de ceñirse en cantidades relativas al número de patas. La resolución vuelve a encallar y la pareja pide al profesor si pueden solicitar alguna ayuda al programa (ítem 135). Éste les invita a pensarlo un poco más con la expectativa de si serán capaces de involucrar una relación multiplicativa (ítem 136).

126. Olga: A ver las patas de las gallinas son *a*…
127. Alba: A ver… (*Alba inicia la ecuación "a…".*)
128. Olga: Y el número de patas de las gallinas va a ser igual…
129. Alba: … es que las gallinas tienen dos.
130. Olga: Ya.
131. Alba: Va a ser dos, no. *a* es igual a… es que yo creo que es cincuenta y dos… no. (*Alba prosigue "a=2…". Borra e introduce "a=…".*)
132. Olga: Yo en el examen puse eso…
133. Alba: Yo no me acuerdo.
134. Olga: …luego lo borré.
135. Alba: ¿Podemos pedir una ayuda?
136. Profesor: Pensadlo un minuto más.

La primera tentativa que desarrollan se basa en la reutilización de la relación $P = Pc + Pg$. Así, proponen la ecuación $a = 52 - b$, siendo informados de que la relación implicada ha sido ya usada (ítem 142).

137. Alba: Vale.
138. Olga: A ver, el número de patas de gallinas tiene que ser igual al número de patas total menos el de los conejos.
139. Alba: Ya, eso también.
140. (*Alba introduce la ecuación "a=52−b".*)
141. Olga: Pero yo creo que esto no.
142. (*Alba valida la expresión. El tutor muestra un mensaje informando que la expresión ya ha sido utilizada.*)

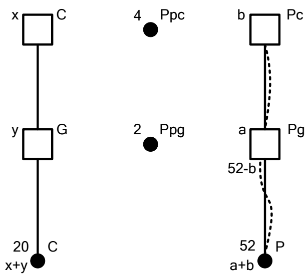


Figura 6.166. Grafo después del ítem 142.

La pareja comprende que la ecuación escrita es equivalente a la ya validada $a + b = 52$ (ítem 144). Tras ello, vuelven a la idea de construir una ecuación sobre la cantidad *Pg* (ítem 145), cuando, sin prácticamente presentar explicaciones, Olga propone la ecuación correcta $a = 2y$ (ítem 146). La construcción de la

143. Olga: Ves, eso no, porque se supone que eso ya lo hemos puesto…
144. Alba: Sí, es lo mismo pero contrario. (*Se refiere a la ecuación "a+b=52".*)
145. Alba: A ver… el número de patas de las gallinas es igual a… (*Olga introduce "a=…".*)
146. Olga: …al número de gallinas… por dos patas que tiene cada uno… (*Olga prosigue "a=y*2". Valida la ecuación, que es identificada como correcta.*)

ecuación parece natural e intuitiva en la forma en la que la presentan, con lo que sorprende que sea la primera vez en toda la resolución donde aparece en escena la estructura conceptual subyacente.

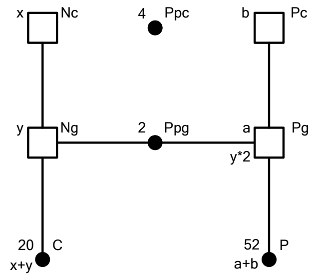


Figura 6.167. Grafo después del ítem 146.

La construcción de la cuarta y última ecuación debiera ser inmediata por ser análoga para *Pc* a la que acaban de plasmar para *Pg*. Sin embargo, Olga considera que no es posible plantear la ecuación sobre *Pc* porque obtendrán un mensaje informativo de que la relación ha sido usada con anterioridad (ítem 148). Alba, en contraposición, piensa que sí es posible lo que se manifiesta a través de un verbalización interrumpida en la que parecía querer señalar que cada ecuación "averigua" cosas distintas (ítem 151).

147. Alba: Sí, y ahora el número de éstos igual…
148. Olga: Pero nos va a salir que es una ecuación igual.
149. Alba: No.
150. Olga: Sí.
151. Alba: No, porque tú aquí estás averiguando…
152. Olga: [Ya lo verás.
153. Alba: Pues a mí no me salía.

Finalmente, deciden construir la ecuación para salir de dudas. De esta manera, escriben y validan la ecuación $b = 4x$, que plasma correctamente la relación multiplicativa $Pc = Nc{\cdot}Ppc$ (ítem 163).

154. Olga: Equis por… (*Olga introduce "b=x*2".*)
155. Alba: Por dos no, por cuatro.
156. Olga: Es verdad.
157. Alba: Se borra entera. (*Olga borra la ecuación.*)
158. Olga: *Be* es igual al número de conejos… (*M introduce "b=…".*)
159. Alba: Espérate, ¿*be* qué es? El número de conejos, vale, cuatro… (*Olga prosigue "b=x+…".*)
160. Olga: ¡Ahh, nena! ¡Qué me has hecho poner más!
161. Alba: ¿Yo?
162. Olga: Sí. *Be* es igual a… (*Borra y reescribe "b=x*4".*)
163. Alba y Olga: *Equis* por cuatro. (*Olga valida la expresión, que es identificada como correcta.*)

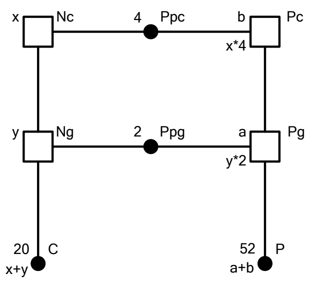


Figura 6.168. Grafo al final de la resolución.

6.5.3.2. El caso de la pareja Alba-Olga en el problema “Amelia y Enrique”

Amelia tiene el triple de edad que su hermano Enrique, pero dentro de 5 años la edad de Amelia será sólo el doble. ¿Cuál es la edad de cada uno?

Cuando el profesor informa a la pareja que deben resolver el problema *Amelia y Enrique* (ítem 1), ambos estudiantes reconocen que los problemas de edades les resultan muy difíciles (ítem 2 y 3). Tras ello, se centran en leer el enunciado del problema en voz alta (ítem 8).

1. Profesor: El siguiente que vais a hacer es Amelia y Enrique.
2. Olga: ¡Ay, esos de las edades…!
3. Alba: … a mí se me dan muy mal.
4. Olga: Amelia…
5. Alba: …tres para hacer el triple… (*Alba quiere empezar a definir cantidades sin leer el enunciado. La cantidad activa es “tres para hacer el triple”.*)
6. Olga: Espérate.
7. Alba: Vale, lee.
8. (*Olga lee el enunciado en voz alta.*)

La primera etapa de la resolución consiste en asignar valor a las cantidades conocidas. En primer lugar dan valor de manera correcta a la cantidad *tres para hacer el triple*, *Tt* (ítem 10) y a la cantidad *dos para hacer el doble*, *Dd* (ítem 12).

9. Olga: Vale, tres para hacer el triple, triple, pues tres.
10. (*Alba asigna el valor “3” a la cantidad “tres para hacer el triple”. La cantidad activa pasa a ser “dos para hacer el doble”.*)

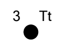


Figura 6.169. Grafo después del ítem 10.

11. Olga: Dos para hacer el doble.
12. (*Alba asigna el valor “2” a la cantidad “dos para hacer el doble”. La cantidad activa pasa a ser “tiempo transcurrido”.*)

Figura 6.170. Grafo después del ítem 12.

A la hora de definir la última de las cantidades conocidas, Alba propone asignar la letra *equis* a la cantidad *T* (ítem

13. Olga: Tiempo transcurrido…
14. Alba: ¡Equis! No lo sabes… (*Alba asigna la letra “x” a la cantidad “tiempo transcurrido” pero no llega a validar.*)

14) aunque en cuanto Olga le señala que esta cantidad toma el valor cinco años (ítem 15), Alba reacciona reconociendo su error y asignando el valor en el programa (ítem 16).

15. Olga: Cinco años…

16. Alba: ¡Ah, madre mía! De verdad… es que… (*Alba asigna el valor "5" a la cantidad "tiempo transcurrido". La cantidad activa pasa a ser "edad actual de Amelia".*)

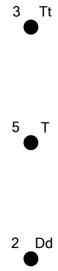


Figura 6.171. Grafo después del ítem 16.

La primera de las cantidades desconocidas que ofrece el problema es la cantidad *edad actual de Amelia* (*Eaa*). Alba usa la letra *equis* para simbolizar la cantidad *Eaa* (ítem 19).

17. Olga: Edad actual de Amelia, equis.

18. Alba: Sí.

19. (*Alba asigna la letra "x" a la cantidad "edad actual de Amelia". La cantidad activa pasa a ser "edad actual de Enrique".*)

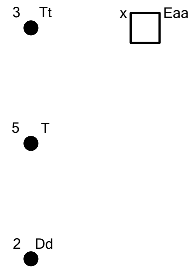


Figura 6.172. Grafo después del ítem 19.

La siguiente de las cantidades es la *edad actual de Enrique* (*Eae*), que Alba propone representar mediante la expresión algebraica 3*x* (ítem 23), lo que supondría un error de inversión a la hora de plasmar la relación $Eaa = Tt \cdot Eae$. Alba parece percatarse de este hecho pero en vez de proponer la expresión *x*/3 para *Eae*, expresa que la *equis* es *Eae* y, entonces, la cantidad *Eaa* sí que correspondería con la expresión *3x* (ítem 24).

20. Olga: Edad actual de Enrique, ehh…

21. Alba: Dos veces equis.

22. Olga: Es que…

23. Alba: [Espera, tres veces equis…

24. Olga: … es que la edad actual de Enrique es equis y la edad actual de Amelia es tres equis.

Con el fin de eludir la necesidad de invertir una relación, la pareja vuelve a cargar el problema y definen nuevamente las cantidades conocidas de igual forma que hicieron con anterioridad.

25. Alba: Es verdad. (*Alba carga nuevamente el problema.*)

26. Olga: Tres para hacer el triple. (*Alba asigna el valor "3" a la cantidad "tres para hacer el triple".*)

27. Olga: Dos para hacer el doble. (*Alba asigna el valor "2" a la cantidad "dos para hacer el doble".*)

28. Olga: Tiempo transcurrido, cinco. (*Alba*

asigna el valor "5" a la cantidad "tiempo transcurrido". La cantidad activa es "edad actual de Amelia".)

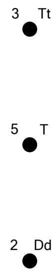


Figura 6.173. Grafo después del ítem 28.

La pareja afronta la declaración de las cantidades desconocidas. Nuevamente la primera de las desconocidas es la *Eaa*, que Olga pretende declarar directamente con la expresión algebraica 3*x* (ítem 29). Alba parece ser consciente de que en el tutor, al contrario de lo que sucede en una resolución en lápiz y papel, es necesario designar previamente la cantidad *Eae* (ítem 33). En consecuencia, Alba activas la cantidad edad actual de Enrique y la simboliza accidentalmente mediante *xx* en vez de por *x* (ítem 35).

29. Olga: Tres equis.
30. Alba: No, nos va a dejar, yo creo. (*Alba intenta asignar 3x desde la opción "número". Sólo puede escribir el primer dígito.*)
31. Olga: Es que es en expresión.
32. (*Alba cambia a la opción "expresión".*)
33. Alba: Sí, pero es que no tenemos a la *equis*, tenemos que poner antes a la edad de Enrique. Número…
34. (*Alba vuelve a la opción "número" y activa la etiqueta "edad actual de Enrique".*)
35. Alba: Edad actual de Enrique, ahora sí… (*Alba asigna la letra "xx" a la cantidad "edad actual de Enrique". La cantidad activa pasa a ser "edad actual de Amelia".*)

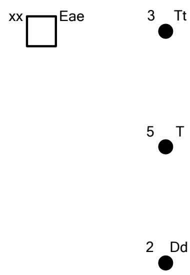


Figura 6.174. Grafo después del ítem 35.

Aparentemente la pareja no da importancia a la designación mediante *xx*. De hecho, Olga propone continuar representando en el sistema la cantidad *Eae* mediante 3*xx* (ítem 37). Sin embargo, cuando Alba intenta registrar la expresión en el tutor emerge una dificultad debido a que el estudiante no atiende al hecho de que la multiplicación debe ser expresado obligatoriamente en el sistema con el símbolo * y que el operador no puede ser omitido como

36. Alba: ¡Hala! (*Alba se ríe porque involuntariamente ha puesto xx en vez de x.*)
37. Olga: Pues tres *equis equis*…
38. (*Alba intenta escribir la expresión "3xx".*)
39. Alba: No me deja…
40. Olga: Normal. (Ambas se ríen.)
41. Olga: A ver espera…

permite el lenguaje algebraico. Al no atender esta característica del tutor la expresión 3*xx* no puede ser introducida (deberían haber escrito 3**xx*). Las estudiantes no reparan en este aspecto y atribuyen el origen del error a la simbolización que han empleado para *Eae* (ítems 39 y 40). De hecho, Alba opta por empezar de nuevo para poder designar nuevamente la cantidad *Eae* (ítem 42). Estas acciones parecen revelar que la pareja considera *x* como la única simbolización posible a partir de la cual resolver el problema.

Alba y Olga encaran la resolución del problema por tercera vez para lo que asignan valor a las cantidades conocidas de igual forma que hicieron las dos veces anteriores (ítems 42 y 45).

42. Alba: (inaudible) (*Alba carga de nuevo el problema.*)
43. Olga: Tres para hacer el triple. (*Alba asigna el valor "3" a la cantidad "tres para hacer el triple"*.)
44. Olga: Dos para hacer el doble. (*Alba asigna el valor "2" a la cantidad "dos para hacer el doble"*.)
45. Olga: Tiempo transcurrido, cinco. (*Alba asigna el valor "5" a la cantidad "tiempo transcurrido". La cantidad activa pasa a ser "edad actual de Amelia"*.)

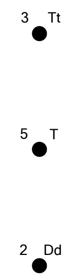


Figura 6.175. Grafo después del ítem 45.

Tras dar cuenta de las cantidades conocidas, la pareja representa la cantidad desconocida *Eae* mediante la letra *equis* (ítem 49).

46. Olga: Edad actual de En… ¡dale Alba! (*Olga activa la etiqueta "edad actual de Enrique"*.)
47. Alba: Pero pónmelo… (*Alba hace referencia a que necesita que activen la opción "letra"*.)
48. (*Olga activa la opción "número"*.)
49. (*Alba asigna la letra "x" a la cantidad "Edad actual de Enrique"*.)

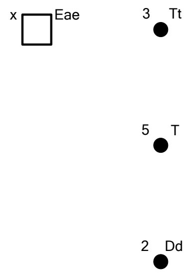


Figura 6.176. Grafo después del ítem 49.

La siguiente acción pretende construir la expresión algebraica *3x* para representar la cantidad *Eaa*. Como era de esperar, vuelven a tener la misma dificultad técnica ligado al uso obligatorio del operador *. Al ser una característica técnica del tutor, el profesor interviene para informarles de la necesidad de escribir la expresión algebraica 3*x* en el tutor de la siguiente forma 3***x*. Tras la explicación del profesor, Olga deja caer un comentario que permite atisbar alguna de las diferencias entre el proceso de resolución en el entorno de lápiz y papel y el del tutor (ítem 58).

50. Olga: Tres equis.
51. Alba: Dale tú. (*Alba hace referencia a que ha de ser Olga con el ratón desde la opción "expresión"*.)
52. (*Olga activa la opción expresión. Intenta escribir la expresión "3x" pero el tutor sólo permite escribir "3" aunque pulsan repetidamente el botón "x"*.)
53. Olga: ¿Por qué no deja?
54. Alba: No lo sé.
55. Profesor: ¿Qué queréis poner?
56. Olga: Tres equis.
57. Profesor: Tenéis que poner tres por equis.
58. Olga: ¡Ah, claro, qué esto no es…!
59. (*Olga con el ratón construye la expresión "3*x", que es automáticamente asignada a la cantidad "edad actual de Amelia". La cantidad activa es "edad futura de Amelia"*.)

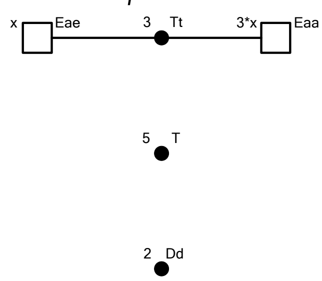


Figura 6.177. Grafo después del ítem 59.

Después de varios inicios en falso aún les restan por definir las edades futuras de ambos hermanos. En primer lugar abordan la cantidad *edad futura de Amelia* (*Efa*). Ambos estudiantes proponen representar la edad futura de Amelia como el doble de la edad actual de Enrique, plasmado en la expresión algebraica 2*x*. En las prueba escrita ambos estudiantes expresaron la cantidad *Efa* por esta vía. Aunque una

60. Alba y Olga: Edad futura de Amelia…
61. Alba: Dos equis.
62. Olga: Dos por equis…
63. Alba: ¡No! Espera…
64. Olga: ¡Sí!
65. Alba: Sólo el doble, pero el doble de la edad de Enrique, ¿no?
66. Olga: ¡Claro!
67. Alba: Ah, entonces sí… (*Olga con el ratón construye la expresión "2*x", que es identificada como errónea por el tutor*.)

interpretación literal del enunciado pudiera auspiciar esta relación pues el lector podría completar el enunciado de la siguiente forma: *Amelia tiene el triple de edad que su hermano Enrique, pero dentro de 5 años la edad de Amelia será sólo el doble (de la edad actual de Enrique)*, esta expresión no tiene sentido dado que implicaría que la edad futura de Amelia fuese menor que la actual, ya que ambas estarían representadas por 2*x* y 3*x*, respectivamente.

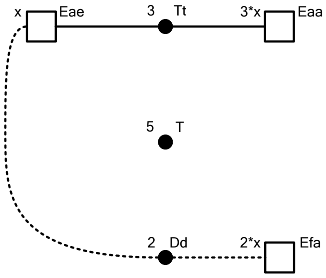


Figura 6.178. Grafo después del ítem 67.

Una vez que el tutor informa de que ecuación propuesta es errónea (ítem 67), Alba reinterpreta la relación de comparación en la que interviene la cantidad *Dd* y afirma considerar que, en su opinión, la edad futura de Amelia ha de designarse como el doble de la edad actual de Amelia en vez de la actual de su hermano (ítem 69). En consonancia, crean la expresión 2*(3*x*) que es identificada como errónea por el tutor.

68. Olga: Ehhhhh…
69. Alba: Es que yo creo que es… es que te dice dentro de cinco años la edad de Amelia será sólo el doble, pero el doble de… de su edad, entonces es…
70. Olga: Será dos por, no… dos más… (*Olga con el ratón introduce la expresión "2+3*x"*.)
71. Alba: ¡Qué va a ser dos más!
72. Olga: Me he equivocado, quería poner por.
73. (*Olga construye la expresión "2*(3*x), que es identificada como errónea por el tutor.)*

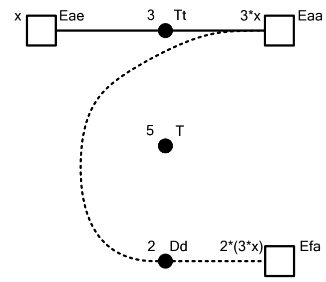


Figura 6.179. Grafo después del ítem 73.

Tras las ecuaciones propuestas erróneas, Alba focaliza el proceso de atención en la cantidad *T*, con un comentario en el que se parece hacerse visible que tiene en mente relaciones alternativas para sacar la resolución del bache en el que se encuentra (ítem 77). Olga se opone rotundamente a este esbozo de idea de su compañera y su actitud provoca un pequeño rifirrafe entre ellas, que Alba sólo consigue aplacar introduciendo en el programa la expresión 5 + 3*x*, que daría cuenta correctamente de la relación aditiva *Efa* = *Eaa* + *T* (ítem 85). Parece que la situación ha descentrado a las

74. Alba: No.
75. Olga: Y dos… si es que sí que es eso…
76. Olga: …dentro de cinco años la edad de Amelia será…
77. Alba: ¡Cinco! (*Alba coge el ratón y pulsa la cantidad "5", introduciendo la expresión "5…"*.)
78. Olga: ¡No!
79. Alba: Sí, le tienes que sumar los años.
80. Olga: ¡Qué no!
81. Alba: Dentro de cinco años, más… (*Alba prosigue "5+…"*.)
82. Olga: ¡Qué no!
83. Alba: ¡Qué yo que sé!
84. Olga: ¡Qué no!
85. Alba: ¡Déjame! Por tres equis… yo que sé, déjame… (*Alba escribe "5+3*x", y*

resolutoras y el profesor solicita a Alba que explique la expresión escrita con el objeto de reconducir el proceso y que las estudiantes presten plena atención al problema (ítem 86). La respuesta de Alba es sumamente relevante pues revela que está pensando en dos formas de representar la *Efa*. Por un lado, la que expresión correcta que acaba de escribir y que explica correctamente desde la estructura conceptual que liga las edades futura y actual con el tiempo transcurrido. Por otro lado, demuestra seguir teniendo en mente representar *Efa* con la expresión $2x$ (ítem 87) aunque ya la hubieran intentado plantear en el sistema y fuera rechazada. La intervención posterior de Olga analiza las palabras de su compañera, no tanto desde el prisma de las relaciones, sino desde la óptica de aquellas cosas que pueden realizarse en el tutor en comparación con el lápiz y papel. Así, afirma que en ese momento el tutor no permite construir ecuaciones, quizá queriendo indicar que posponga otras relaciones para el momento en que sea posible hacerlo en la máquina.

empieza a reírse por las continuas negativas de Olga. Parece desconcentrarse.)

86. Profesor: Explica lo que estás haciendo.

87. Alba: Es que, yo creo que sería, dentro de cinco, si le sumas a la edad de Amelia cinco años, eso va a ser igual a dos equis.

88. Olga: Pero aquí no podemos poner igualdades porque estamos con las cantidades…

No sabemos si este último comentario de Olga no es bien interpretado por Alba, porque sorprendentemente esta estudiante opta por borrar la expresión sin solicitar la validación al sistema (ítem 89). Pareciera que la estudiante quiere dar preferencia a la expresión errónea $2x$ frente a la correcta $3x + 5$ (ítem 89). Al empezar a razonar sobre por qué el tutor rechaza la expresión $2x$, Olga cae en la cuenta que es imposible (ítem 96) pues la edad actual de Amelia sería mayor que la futura (ítem 98).

Como consecuencia, retoman la idea de representar la edad futura de Amelia como la suma de la edad actual de la hermana más el tiempo transcurrido (ítem 99) y terminan registrando la expresión $5 + 3x$ en el programa (ítem 103).

89. Alba: Es que tiene que ser lo otro… (*Alba borra la expresión "5+3*x".*)

90. Olga: Es que yo creo que si ahora, actualmente, la edad de Amelia es tres, es el triple, dentro de cinco años si es el doble, ¿por qué no nos deja poner dos por equis? (*Olga dirige la pregunta al profesor.*)

91. Profesor: Tú dices que la edad futura es dos equis…

92. Olga: …el doble.

93. Profesor: Dos equis.

94. Olga: Claro, si es el doble.

95. (*Silencio de diez segundos.)*

96. Olga: ¡Eso es imposible!

97. Profesor: ¿Por qué?

98. Olga: Porque no puede tener más edad ahora que después…

99. Alba: Ajá… pero le tienes que sumar cinco años… yo creo que sí, no sé…

100. Olga: Prueba. Cinco…

101. Alba: …no me hagas caso si seguro que va a estar mal…

102. Olga: …más tres, más los tres equis. (*Olga construye la expresión "5+3*x",*

que es validada y asignada a la cantidad “edad futura de Amelia”. La cantidad activa pasa a ser “edad futura de Amelia”.)

103. Olga: ¡Anda, pues toma!

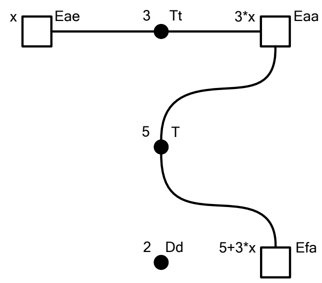


Figura 6.180. Grafo después del ítem 103.

Al verificar que la relación para *Efa* es correcta, emplean la misma estructura conceptual para designar la edad futura de Enrique, *Efe*, mediante la expresión 5 + *x* (ítem 105).

104. Alba: Edad futura de Enrique…

105. Olga: Cinco más equis… (*Olga construye la expresión “5+x”, que es validada y asignada a la cantidad “edad futura de Enrique”.*)

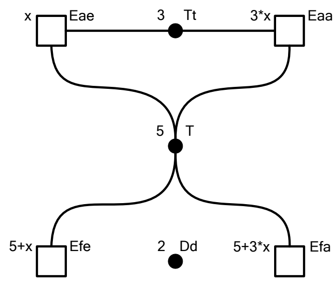


Figura 6.181. Grafo después del ítem 105.

Tras un largo recorrido la pareja ha alcanzado el cuarto paso del método cartesiano. Una de las primeras verbalizaciones de Olga parece reflejar la barrera que habitualmente les supone construir la ecuación (ítem 108).

Olga inicia, con la aprobación de Alba, la escritura de la ecuación usando la cantidad *Eae* y, por tanto, escribiendo una ecuación en la forma $x = f(x)$ (ítems 109 a 112). Sin embargo, la pareja no es capaz de desarrollar la ecuación así iniciada y la desecha (ítem 114).

Alba reconoce no saber cómo proseguir (ítem 115). Por su parte, Olga inicia una ecuación en la forma 5 =… (ítem 116), siendo frenada por su compañera. La interrupción tiene su origen en que Alba

106. Olga: Vale.

107. Alba: A ver…

108. Olga: ¿Cuál es la edad de cada uno? Ya estamos…

109. Olga: A ver la edad actual de Enrique es equis…

110. Alba: Ajá.

111. (*Olga empieza la ecuación “x…”.*)

112. Olga: … que es igual a… (*Olga prosigue “x=…”.*)

113. (*Silencio de cinco segundos. Olga revisa las cantidades no visibles en la ventana de cantidades.*)

114. (*Olga decide borrar el contenido del cuadro de ecuaciones.*)

115. Alba: No tengo ni idea. (*Alba susurra algo inaudible.*)

116. Olga: Dentro de cinco años, a ver… dentro de cinco años, la equis, es decir la edad de Enrique… (*Olga escribe “5=…”.*)

117. Alba: Es que aquí estás resolviendo los cinco años…

considera que esa ecuación buscaría resolver la cantidad *Tt* (ítem 117), es decir, parece entender que la construcción de una ecuación aislando una cantidad en un miembro es un acceso directo al cálculo de dicha cantidad. La respuesta de Olga (ítem 118) es ciertamente ambigua pues, aún compartiendo la opinión de su compañera, manifiesta mayor flexibilidad a la hora de considerar que no es relevante el orden de los miembros en una ecuación. A pesar de ello, quizá algo descentrada por la interrupción previa, no es capaz de desarrollar la ecuación que tenía en mente y abandona esta línea de trabajo.

118. Olga: Bueno, pero… siendo así, da igual lo que éste en un lado o en otro.
119. (*Olga sigue “5=x…”.*)
120. Olga: Ya me he liado. Dentro de cinco años la edad de Enrique va a ser igual, no, no puedo. (*Borra el cuadro de ecuaciones.*)
121. Olga: Pues, no…
122. (*Silencio de veinte segundos.*)

Nuevamente la resolución se detiene y tras un largo silencio (ítem 122), la pareja vuelve a coincidir en la dificultad expresa que suponen para ellas los problemas de edades (ítems 123 y 124). Olga decide examinar la pregunta del enunciado en búsqueda de información que les ayude a construir la ecuación. Así, interroga al profesor si la pregunta del enunciado refiere directamente a las edades actuales de cada uno de los hermanos (ítem 125). Alba le indica que, efectivamente (ítem 126), así es al igual que lo hace el profesor (ítem 127). La siguiente acción ejecutada por Olga muestra su tendencia a aislar la cantidad (o cantidades) por las que se pregunta en uno de los miembros de la ecuación. En esta ocasión, dado que el enunciado pregunta por las cantidades *Eae* y *Eaa*, opta por una ecuación que implica *Eae* = *Eaa* ($x = 3x$) y que, evidentemente, es errónea tal y como les informa el tutor (ítem 128).

123. Alba: A mí es que los de las edades siempre se me han dado mal.
124. Olga: Y a mí.
125. Olga: A ver, la edad actual de, ¿cuál es la edad de cada uno? Cuando dice la edad de cada uno, ¿es la actual? (*Nuevamente se dirige al profesor.*)
126. Alba: Sí.
127. Profesor: Sí.
128. Olga: La edad de Amelia (*pulsa “3*x”*) es igual (*pulsa “=“*) a la ed… no. (Inaudible). (*Olga escribe la expresión”3*x=x”. Tras tratar de validarla, la borra.*)

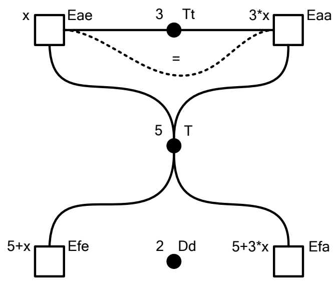


Figura 6.182. Grafo después del ítem 128.

Alba parece concebir una idea (ítem 133) que implica la utilización de la edad futura de Amelia, *Efa* (ítem 137). Sin mediar explicación, plantea la ecuación $3x + 5 = 2x$ (ítem 138). Recordemos que la única relación aún no empleada es aquella que vincula las edades futuras de los hermanos y que viene dada en el

129. Olga: A ver la edad actual de Amelia es igual… (*Olga introduce “3*x=…”.*)
130. (*Silencio de cinco segundos.*)
131. Alba: ¿Y por qué no, la edad actual de Ame… nada, nada… vale…
132. Olga: La edad actual de Amelia es igual a…
133. Alba: ¡Ost…!
134. Olga: Es que tengo algo en mente pero no me sale.

enunciado por "dentro de cinco años la edad de Amelia será sólo el doble" (*Efa* = *Dd*·*Efe*). La ecuación propuesta por Alba sugiere que traduce (o amplia la lectura) de dicho fragmento del enunciado a "dentro de cinco años la edad de Amelia será sólo el doble (de la edad actual de su hermano)". Esta traducción es sintácticamente coherente dada la narrativa del enunciado donde se produce una elipsis del modificador del atributo[6] y, como consecuencia, no se designa unívocamente la cantidad implicada en la comparación. No obstante, la traducción de la alumna carece de lógica desde la óptica de las relaciones pues supone que la edad futura de Amelia es el doble de la edad actual de Enrique cuando cinco años antes era el triple de la misma edad. En este caso, la pareja no repara en este aspecto y es el tutor quien les informa de que la ecuación es errónea (ítem 140).

135. Alba: Y yo. No sé, a lo mejor, la edad…
136. Olga: …actual…
137. Alba: no, futura de Amelia es igual a dos, dos veces equis…
138. (*Alba introduce "(3*x+5)=2*x".*)
139. Olga: No… o sí…
140. (*Alba valida la expresión, que es identificada como errónea.*)

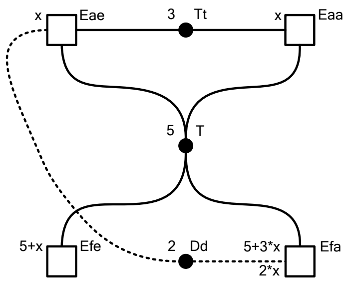


Figura 6.183. Grafo después del ítem 140.

Al ser rechazada la ecuación, Olga pregunta a su compañera por qué han usado la expresión algebraica $2x$ (ítem 142). Como única respuesta, Alba intenta, sin éxito, construir la misma ecuación usando otras cantidades; por ejemplo, usa las cantidades *Eaa* ($3x$) y *T* (5) en vez de la representación de la cantidad *Efa* ($3x + 5$) (ítem 144). Por su lado, Olga decide cambiar el orden de los miembros y escribe la ecuación $2x = 3x + 5$ (ítem 148). Como es obvio, estas variaciones vuelven a conducir a un

141. Alba: No.
142. Olga: ¿Por qué dos veces equis?
143. Olga: Porque dice que será sólo el doble…
144. (*Olga introduce "(3*x)+5=2". intenta seguir escribiendo *x pero el tutor no le deja.*)
145. Alba: Eso a lo mejor sí…
146. Olga: No, no deja.
147. Alba: Ah, no deja. (*Olga borra el cuadro de ecuaciones.*)
148. Alba: A ver, a lo mejor así si te deja… (*Alba introduce "2*x=(3*x+5)", que es rechazada por el tutor.*)

[6] En la proposición "dentro de cinco años la edad de Amelia será sólo el doble", *sólo el doble* desempeña el papel de atributo y lo que se omite sería el modificador del atributo *de la edad futura de Enrique*. En Puig (2012) se explica que el método cartesiano precisa que las cantidades se nombren con nombres propios y no con nombres comunes. En este caso, la omisión del modificador hace que el atributo funcione como un nombre común en vez de cómo un nombre propio generando dificultades en el proceso de construcción de la ecuación.

mensaje de error suministrado por el sistema.

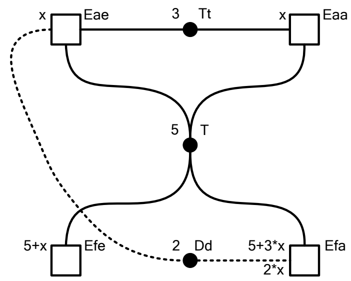


Figura 6.184. Grafo después del ítem 148.

En este momento de la resolución la pareja ha agotado gran parte del tiempo asignado para la resolución de este problema y no parece encontrarse cerca de su resolución. El profesor, sorprendido porque Alba preguntara por el uso de la expresión 2*x* y después ella misma plantee la ecuación, solicita a la alumna que explique su postura (ítem 150). Alba explica la ecuación desde la relación incorrecta *Efa* = *Dd*·*Eae* (ítems 151 a 153). Cuando el profesor le hace ver a Alba que esa misma ecuación era la que le hacía albergar dudas al ser planteada por su compañera (ítem 154), Olga inicia la escritura de una ecuación en la forma *x* = *f*(*x*) (ítem 155). Alba sugiere expresar *x* como "mitad de…" quizá para expresar una ecuación equivalente a la anterior. Olga soslaya el comentario de su pareja (ítem 157) y propone, otra vez, la ecuación errónea *x* = 3*x* (ítem 159).

149. Alba: No.
150. Profesor: Explica lo que has puesto.
151. Alba: Que… la edad… la edad de Amelia dentro de…más cinco será igual a dos veces equis…
152. Olga: … a la edad actual del hermano.
153. Alba: Ajá.
154. Profesor: Pero eso es lo que antes había dicho Olga, y habíais dicho que no podía ser…
155. Olga: ¡Hala! Entonces la edad actual de Enrique es igual a… (*Olga escribe "x=…".*)
156. Alba: … la mitad de…
157. Olga: No…
158. Alba: No.
159. Olga: …es igual a la… a ésta (3*x), es que es eso…. (*Olga escribe e intenta validar "x=3*x".*)

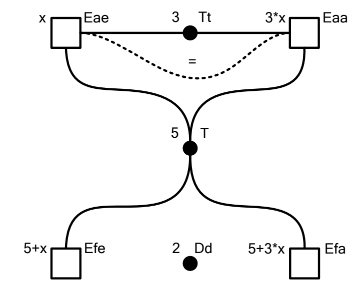


Figura 6.185. Grafo después del ítem 159.

Olga entiende, a la vista de la ecuación rechazada por el tutor, que su propuesta no puede ser válida pero parece mostrar convencimiento en que están representando lo descrito en el enunciado.

Sin que tercie ninguna explicación, Olga empieza a escribir una ecuación que involucra las edades futuras de Amelia y Enrique (*Efa* y *Efe*) (ítems 162, 164 y

160. Olga: …pero es lo que no me deja poner nunca, porque no tiene sentido poner que equis es igual a tres por equis, porque entonces se nos quedaría el tres aquí y equis por equis (sic).
161. Alba: Ajá.
162. Olga: A ver, la edad futura de Enrique… (*Olga pone "(x+5)…".*)
163. Alba: Ajá…
164. Olga: …va a ser igual a… …
165. (*Silencio de cinco segundos.*)
166. Olga: …la edad futura de Amelia por… no… (*Olga prosigue*

166). Finalmente, formaliza la ecuación $x + 5 = (3x + 5)/2$ que plasma, de manera correcta, la relación multiplicativa $Efa = Dd{\cdot}Eae$ (ítem 168) y que validan en tutor (ítem 171). En el proceso de escritura, Olga había reconocido dudas sobre si debían dividir por dos o entre tres, lo que puede ser un indicio de que no tiene claro qué relación están representando (ítems 168 y 169). Tiene que ser su compañera quien la corrija subrayando la relación en juego (ítem 170).

*"(x+5)=(3*x+5)…".*)

167. Alba: No…
168. Olga: No, entre dos… (*Olga prosigue "(x+5)=(3*x+5)/2".*)
169. Olga: … en todo caso, entre tres…
170. Alba: No, porque dentro de cinco años va a ser el doble.
171. Olga: Yo que sé. (*Olga valida la ecuación, que es correcta.*)
172. Olga: ¡Guau!
173. Alba: ¡Qué potra!

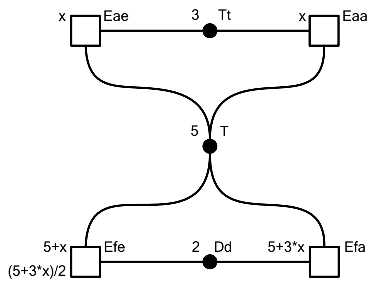


Figura 6.186. Grafo al final de la resolución.

Al finalizar el problema, los comentarios de la pareja parecen sintomáticos de que no existe una comprensión real de la ecuación representada. El profesor pide a la pareja que explique la ecuación (ítem 175). Olga la explica desde la descripción de las cantidades dentro de la ecuación (ítem 176). El profesor les recuerda que anteriormente usaban la expresión algebraica $2x$ (ítem 178) a lo que Olga responde que, efectivamente, estaban usando la cantidad *Eae* (ítem 181). A lo largo de la conversación, Olga pone de manifiesto dudas sobre si la anterior ecuación (errónea) en la que se relacionaba las cantidades correctas *Eae*, *Efa* y *Dd* (ítem 195 y 202) podría ser válida. Pareciera considerar que no es correcta sólo porque el tutor así lo informa, y de hecho, en alguna de su verbalizaciones se vislumbra que se confundan las relaciones porque no se distinga las cantidades relativas a las edades de una misma persona (ítem 195).

174. Olga: Pues yo no sé, yo no entiendo…
175. Profesor: Explica la ecuación.
176. Olga: Porque la edad futura de Enrique va a ser igual a la edad futura de su hermana pero entre dos, porque la de su hermana va a ser el doble de la suya.
177. Alba: ¡Ah, es verdad!
178. Profesor: Antes ponías dos equis…
179. Olga: No lo sé… porque estábamos… ¿antes qué estábamos poniendo?
180. Alba: No me acuerdo.
181. Olga: Estábamos poniendo que la edad actual de Enrique es igual… no me acuerdo qué estábamos poniendo antes.
182. Alba: Es que no me acuerdo…
183. Profesor: Antes estabas poniendo la edad futura de Amelia es igual al doble…
184. Olga: ¡Ah, sí! Lo hemos puesto por aquí…
185. Alba: Es verdad…
186. Olga: Sí, hemos puesto que la edad futura de Amelia era igual al doble de la de su hermano… porque ponía que la edad futura de Amelia sería solamente el doble que la de Enrique…
187. Profesor: Entonces lo que habías puesto antes estaba mal o…
188. Olga: No nos dejaba ponerlo…

En cambio, su compañera sí que revela caer en cuanta de las diferentes cantidades usadas en cada uno de los casos (ítems 203 y 205).

189. Profesor: Pero… ¿estaba bien?
190. Olga: Yo creo que no… porque ya lo pone aquí (señala la ecuación), estamos poniendo lo mismo.
191. Profesor: Pero ahora has puesto… ¿ahora qué has puesto en la ecuación? ¿la que (el tutor) ha dicho que está bien)?
192. Olga: Que la edad futura de Enrique va a ser igual a la edad futura de su hermana pero entre dos…
193. Alba: A la mitad de la edad futura de Amelia.
194. Profesor: ¿Y antes?
195. Olga: Que la edad de Enrique es igual al triple de la edad de su hermana… ¿o no? Sí, estábamos poniendo eso.
196. Profesor: ¿El doble?
197. Olga: Eso, el doble…
198. Alba: Sí.
199. Profesor: ¿Entonces estabas poniendo lo mismo ahora que antes?
200. Olga: No, porque ahora estoy dividiendo y antes multiplicando…
201. Profesor: Bueno, es lo mismo si digo que la de Enrique es la mitad que la de Amelia es lo mismo que si digo la de Amelia es el doble que la de Enrique…
202. Olga: No sé, me estoy liando… no sé…
203. Alba: No, porque ahí no ha puesto la edad futura… He puesto la edad futura de Amelia pero he puesto el doble de la edad actual de Enrique…
204. Profesor: ¿Eso antes?
205. Alba: Sí, ahora he puesto que la edad futura de Enrique será igual a la mitad de la edad futura de Amelia.
206. Profesor: Vale, vamos a pasar a otro.

6.5.3.3. El caso de la pareja Alba-Olga en el problema "El bautizo"

En la celebración de un bautizo el coste total del banquete es 663 €. Si hubiesen asistido 8 personas más, el banquete hubiese costado 975 €. Considerando que todas las personas toman el mismo menú, ¿cuántos invitados asistieron al banquete?

Antes de empezar la resolución la pareja recuerda que este problema y que ninguna de ellas fue capaz de plantearlo correctamente (ítems 5 y 6). En concreto, ambos estudiantes plantearon la ecuación incorrecta $x + 8 = 975$, donde la letra *equis* representaba el número de invitados en la situación inicial. La ecuación parece

1. Profesor: Ahora vais a hacer el bautizo.
2. Olga: ¡Hala!
3. Alba: Éste tampoco sabemos…
4. Olga: ¿Éste lo hicimos en la clase?
5. Alba: Sí, yo… es que…
6. Olga: ¡Ah, sí!... Yo también la lié… (*Olga carga el programa en el tutor.*)

dar cuenta de una asociación entre cantidades relativas a una determinada situación más que una igualdad entre formas duales de representar una misma cantidad.

Una vez rememorada su experiencia con este problema en la prueba escrita, dan lectura en voz alta al enunciado (ítem 8) y abordan la definición de las cantidades conocidas. Por este orden dan valor en el programa de manera correcta a las siguientes cantidades *precio real del banquete* (*Cbr*), *precio del banquete en la situación hipotética* (*Cbh*) y *personas de más en la situación hipotética* (*Pmh*).

7. Alba: A ver… precio real del banquete…
8. (*Olga interrumpe a Alba para leer el enunciado del problema en voz alta.*)
9. Alba: Vale…
10. Olga: Precio real es seiscientos sesenta y tres…
11. Alba: Ajá.
12. (*Alba asigna el valor "663" a la cantidad "precio real del banquete".*)

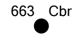


Figura 6.187. Grafo después del ítem 12.

13. Olga: El precio del banquete en la situación hipotética es novecientos setenta y cinco.
14. (*Alba asigna el valor "975" a la cantidad "precio del banquete en la situación hipotética".*)

Figura 6.188. Grafo después del ítem 14.

15. Olga: Personas de más en la situación hipotética…
16. Alba: Ocho…
17. Olga: Son ocho. (*Alba asigna el valor "8" a la cantidad "personas de más en la situación hipotética".*)

Figura 6.189. Grafo después del ítem 17.

Ante la primera de las cantidades desconocidas, *personas en la situación hipotética* (*Psh*), Alba parece proponer su representación mediante la letra *equis* (ítem 19). En cambio, Olga sugiere hacerlo a partir del número de personas en la situación real y las personas de más en la situación hipotética, lo que supone escribir una expresión algebraica que plasme la relación aditiva $Psh = Psr + Pmh$ (ítem 20). Alba acepta la opción expresada por su pareja y advierte que implica definir previamente la cantidad *personas en la situación real* (*Psr*) para poder usarla en una expresión o ecuación (ítem 21). En consecuencia, registran en el programa la representación de la cantidad *Psr* mediante la letra x (ítem 23).

18. Olga: Personas en la situación hipotética…
19. Alba: *equis*…
20. Olga: …las que tenemos más ocho…
21. Alba: …pero antes tendríamos que poner…
22. Olga: Sí. Personas que asistieron realmente, *equis*.
23. Alba: No lo sabemos. (*Alba asigna la letra "x" a la cantidad "personas que asistieron realmente". La cantidad activa pasa a ser "precio del banquete por persona".*)

Figura 6.190. Grafo después del ítem 23.

En coherencia con sus intenciones, representan la cantidad *Psh* mediante la expresión algebraica $x + 8$ (ítem 27).

24. Olga: Y precio del banquete por persona…
25. Alba: Espera… esto… (*Alba activa la cantidad "personas en la situación hipotética".*)
26. Olga: Personas en la situación hipotética… *equis*…
27. Alba: Equis más ocho. (*Olga con el ratón construye la expresión "8+x", que es automáticamente asignada a la cantidad "personas en la situación hipotética". La cantidad activa pasa a ser "precio del banquete por persona".*)

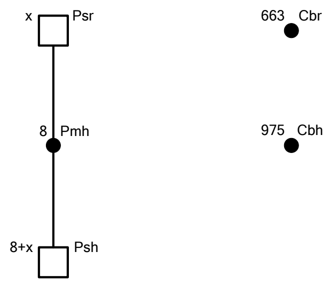


Figura 6.191. Grafo después del ítem 27.

La última de las cantidades pendientes de definir es la cantidad desconocida *precio del banquete por persona* (*Cbp*). Olga identifica que se trata de una cantidad desconocida y enuncia su definición como el cociente entre el coste total y el número de asistentes a la excursión, haciendo explícita la estructura conceptual que han de usar (ítem 30). Alba acota la situación que van a usar, la situación real en vez de la hipotética (ítem 31) y Olga le da continuidad formulando la expresión algebraica correcta 663/*x* que supone la inversión de la relación multiplicativa *Cbr* = *Psr*·*Cbp* (ítem 32). Olga parece concebir dudas de que sea posible construir una expresión algebraica que involucre una división en el tutor (ítem 34) pero la escritura y validación de la expresión cierran estas dudas.

28. Olga: Y precio del banquete por persona…
29. Alba: … precio del banquete por persona…
30. Olga: Tampoco lo sabemos… es el precio total entre las personas que asistieron…
31. Alba: Sí. Y el precio total es seiscientos sesenta y tres entre…
32. Olga: seiscientos sesenta y tres entre equis…
33. Alba: Sí
34. Olga: ¿Eso es posible? (*Alba con el ratón construye la expresión “663/x”, que es automáticamente asignada a la cantidad “precio del banquete por persona”.*)
35. Alba: Sí.

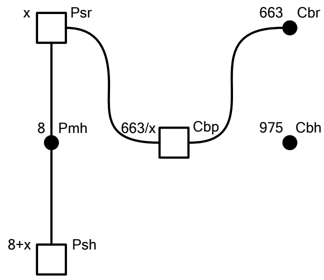


Figura 6.192. Grafo después del ítem 35.

Una vez declaradas todas las cantidades, deben afrontar la construcción de la ecuación. La primera tentativa, comandada por Olga, pasa por revisitar el enunciado y centrarse en la pregunta del mismo. En él se pregunta por la cantidad *Psr*, lo que lleva a Olga a proponer una ecuación en forma *x* =… sobre esa cantidad. En concreto plantea *x* = 663 (ítem 36), donde la alumna vincula directamente por igualación dos cantidades que considera están relacionadas, sin reparar en la poca lógica que subyace en lo escrito, que implica *Psr* = *Cbr*. No obstante, en este caso la pareja no llega a someter la igualdad a validación pues detectan que es incorrecta (ítems 37 y 38).

36. Olga: Vale, ¿cuántos invitados asistieron al banquete? Pues… a ver, si asistieron equis y pagaron seiscientos sesenta y tres… (*Olga con el ratón introduce “x=663”.*)
37. Olga: No, esto es lo que yo puse…
38. Alba: No. *Equis*, borra, borra, borra…
39. (*Olga borra la ventana de ecuaciones.*)

Alba desea usar nuevamente la estructura conceptual *precio total es igual a precio unitario por número de unidades* aunque parece querer plantearla otra vez sobre la

40. Alba: Eq… el precio tot… ¿no sería que…
41. Olga: …el precio…
42. Alba: …*equis* personas por el precio… por el éste (*señala el precio del banquete por persona*)?

situación real (ítems 40 y 42), lo cual no puede conducir a una ecuación sino a una identidad. De hecho, siguiendo la idea planteada por Alba, Olga escribe lo que pretendía ser una relación: (663/*x*)**x* = 663 (ítem 46). Aunque Olga parecía consciente de que no era una ecuación válida, optan por intentarlo recibiendo una notificación de error por parte del tutor (ítem 47).

43. Olga: A ver, el precio del banquete por persona por… (*Olga introduce "(663/x)*…".*)
44. Alba: …por las personas es igual a seiscientos sesenta y tres… (*Olga continúa "(663/x)*x*…".*)
45. Alba: ¡Has puesto multiplicar!
46. Olga: Seiscientos sesenta y tres (sic) por las personas que asistieron es igual al precio total. (*Olga borra la ventana de ecuaciones y escribe "(663/x)*x=663". Se queda parada, parece intuir que no tiene sentido lo que acaban de introducir.*)
47. Alba: Aceptar… (*Olga da a "aceptar" y el tutor identifica la ecuación como errónea.*)

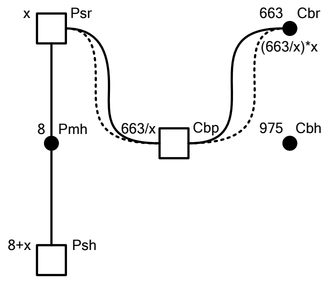


Figura 6.193. Grafo después del ítem 47.

Tras el mensaje de error, Alba apunta a la cantidad *Psh*, con lo quizá empiece a vislumbrar la posibilidad de usar la misma relación para la situación hipotética (ítem 50). Sin embargo, no desarrolla esa opción y plantea la opción de calcular una cantidad que corresponda con la diferencia entre los precios totales de ambos situaciones, lo que sería el precio de ocho menús (ítem 52, 54, 56 y 58). De esta manera conduce el proceso hacia una resolución aritmética. Así, inician la escritura de lo que parece va a ser una ecuación aritmética de la forma 975 – 663 =… (ítem 60). En el proceso encuentran dificultades, pues mientras Olga parece querer igualarlo directamente a una cantidad que informe de un número de personas (ítem 61), Alba parece querer hacerlo al precio que le costaría a ocho personas (ítem 62) aunque su verbalización es interrumpida. Quizá sus pensamientos no fueran incompatibles y Olga estuviera pensando en iniciar una expresión que al final

48. Alba: Yo que sé, no.
49. Olga: Es que esto no tiene sentido, es que lo estamos igualando…
50. Alba: A ver… *equis* más ocho, bueno, ocho más *equis*… a ver, el precio con es…
51. Olga: …y por…
52. Alba: …es que la diferencia del precio… a lo mejor habría que restarla porque ése es el precio que se le suma al haber ocho personas más…
53. Olga: ¿Cómo?
54. Alba: Si tú tienes, si con seiscientos sesenta y tres…
55. Olga: Ajá…
56. Alba: …pagas con equis personas, y si le sumas ocho, novecientos setenta y cinco, vale. Pues al precio de los novecientos sesenta y cinco, que es el precio si asisten éstos…
57. Olga: ah, vale.
58. Alba: … le restas los seiscientos setenta y tres, te da cuánto costarían esas ocho personas.
59. Olga: Ajá. (*Olga escribe "975−663…".*)
60. Alba: Es igual a… (*Olga prosigue "975−663=…".*)
61. Olga: a las personas.
62. Alba: No, es igual al precio, al precio

representara lo que Alba expone. El caso es que la situación se vuelve algo enrevesada, básicamente, porque Olga malinterpreta a su compañera y afirma que ésta desea igualar cantidades de magnitudes diferentes (ítem 67). Esta tergiversación irrita a Alba (ítem 68) quien expone la base de lo quería desarrollar (ítem 70). Olga espeta un encantador “ya, pero eso no es una ecuación” (ítem 71), no sabemos si con plena consciencia de lo que la frase encierra. La interpretación más plausible es que quiera decir que lo expuesto por su compañera ha de ser traducido a una ecuación, invitándola a que se refiera en términos más conciso y dando directrices para introducir la ecuación en el sistema. Otra interpretación comprendería una comprensión más profunda de la propuesta de Alba, entendiendo que deriva en una resolución aritmética y que esto no es lo que se pedía en la tarea. La respuesta de Alba (ítem 71) quizá sí que pueda ser interpretada desde este prisma, pues ella no hace ademán desde ese momento de tratar de representar su idea en el programa sino que parece directamente desechar esta línea de resolución.

que les cuesta…

63. Olga: ¿¿??
64. Alba: Es igual a…
65. Olga: Ah, sí… nooo.
66. Alba: Es igual al precio que aumento… ¿cómo que no?
67. Olga: ¿Cómo va a ser el precio to… el precio hipotético menos el precio total igual a las personas hipotéticas?
68. Alba: ¡Qué yo no te he dicho eso!
69. Olga: Sí.
70. Alba: ¡No! Yo te he dicho que novecientos setenta y cinco, que es el precio hipotético, menos el precio actual es igual a la diferencia que hay entre… entre un banquete y otro de si en uno asisten ocho personas más…
71. Olga: [Ya, pero eso no es una ecuación.
72. Alba: Ya, eso es lo malo… (*Se ríe.*)
73. (*Silencio de diez segundos.*)
74. Olga: A ver… (*entre susurros.*)
75. Alba: Voy a borrarlo. (*Alba borra la ventana de ecuaciones.*)

En este punto la pareja parece totalmente incapaz de avanzar en el problema y acumula intervalos cada vez más prolongados en los que no se producen verbalizaciones por parte de ningún miembro de la pareja. Esto lleva al profesor a autorizar a la pareja a pedir una ayuda (ítem 80). La primera de las ayudas que solicitan les informa que deben plantear una ecuación (ítem 82), punto del que ya eran plenamente sabedores, por lo que el profesor les permite pedir una segunda ayuda (ítem 83). La segunda ayuda consiste en informarles de que existe una relación entre las cantidades *Psh*, *Cbp* y *Cbh* (ítem 86). Ante esta ayuda la pareja reacciona con celeridad, y plasma la relación

76. (*Silencio de veinte segundos.*)
77. Alba: No tengo ni idea. (*Susurra.*)
78. (*Silencio de diez segundos.*)
79. Olga: Yo tampoco. (*Susurra.*)
80. Profesor: Puedes pedir una ayuda.
81. (*Olga pide una ayuda.*)
82. Olga: Puedes plantear una ecuación. (*Olga lee la ayuda en voz alta.*)
83. Profesor: Eso creo que ya lo sabéis, ¿no?
84. Alba: Sí.
85. Profesor: Pues pide otra.
86. (*Olga pide otra ayuda. El tutor informa de que existe una relación entre las personas en la situación hipotética, precio del banquete por persona y precio del banquete en la situación hipotética.*)
87. Olga: Precio de banquete en la situación hipotética, es decir los novecientos setenta y cinco, es igual a las personas en la situación hipotética por…

correcta $Cbh = Psh{\cdot}Cbp$ en el sistema (ítem 96), completando correctamente el planteamiento del problema.

88. Alba: por el precio…
89. Olga: por, por el precio del banquete por persona… No lo entiendo, no la quites…
90. Alba: A ver, el precio es igual a si tú… a las personas que supuestamente, que si viniesen ocho personas…
91. Olga: Ah, claro…
92. Alba: …le sumas el precio, te va a dar novecientos…
93. Olga: No, no lo quites… Es esto (975) igual a… (*Alba cierra el mensaje de ayuda. Alba escribe "975=…".*)
94. Alba: …igual a las personas por lo que costaría… (*Alba prosigue "975=(8+x)…". Pulsa sobre el botón "663/x".*)
95. Olga: No, hay que poner por…
96. Alba: Ah. (*Alba concluye "975=(8+x)*(663/x)", que es validada por el tutor.*)
97. Olga: Ya está.
98. Alba: Vale, ya.
99. Olga: Porque, a ver, los novecientos setenta y cinco que es el total en lo hipotético es igual a las personas hipotéticas por el precio real de cada persona, vale.

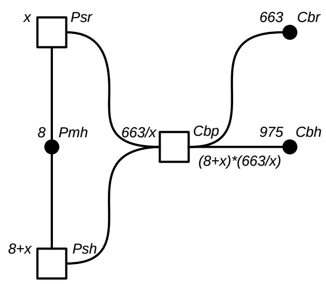


Figura 6.194. Grafo al final de la resolución.

6.5.3.4. El caso de la pareja Alba-Olga en el problema "Dos coches"

Albacete y Madrid distan 300 km entre sí. A la misma hora parte de Albacete un coche hacia Madrid con una velocidad de 90 km/h., y de Madrid parte otro hacia Albacete con una velocidad de 60 km/h. Dígase a qué distancia de Albacete se encuentran ambos coches.

Las estudiantes, antes de abordar la lectura del enunciado, recuerdan haber fracasado en el intento de resolver este problema durante la prueba escrita (ítems 1 y 2). Olga incluso hace constar que llegó a construir una representación esquemática auxiliar del problema pero

1. Olga: ¡Ay! Yo de éste hice hasta un dibujo y no sabía…
2. Alba: Yo éste no lo hice, me faltó.
3. (*Alba lee el enunciado en voz alta. La cantidad activa es "distancia entre Albacete y Madrid".*)
4. Alba: Vale.
5. Olga: A ver, la distancia entre Albacete y Madrid son trescientos…

que aún así fue incapaz de resolverlo (ítem 1). En realidad, ninguna de las alumnas fue capaz de representar siquiera alguna de las relaciones dadas en el enunciado en la resolución en lápiz y papel.

Presentadas estas consideraciones la pareja se centra en la resolución del problema en el sistema tutorial. Las primeras acciones comprenden la definición de las cantidades conocidas. De esta forma, asignan valor de manera correcta a las cantidades *distancia entre Albacete y Madrid*, *S* (ítem 6); *velocidad del coche que sale de Albacete*, *Vsa* (ítem 9); y *velocidad del coche que sale de Madrid*, *Vsm* (ítem 11).

Una vez que han dado cuenta de las cantidades conocidas estudian cómo representar la cantidad desconocidas *distancia recorrida por el coche que sale de Albacete hasta encontrarse*, *Ssa* (ítem

6. Alba: …son trescientos. (*Alba asigna el valor "300" a la cantidad "distancia entre Albacete y Madrid". La cantidad activa pasa a ser "velocidad del coche que sale de Albacete".*)

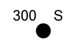


Figura 6.195. Grafo después del ítem 6.

7. Olga: Velocidad del coche que sale de Albacete es… noventa.
8. Alba: Vale.
9. (*Alba asigna el valor "90" a la cantidad "el coche que sale de Albacete". Alba parece releer el enunciado antes. La cantidad activa pasa a ser "velocidad del coche que sale de Madrid".*)

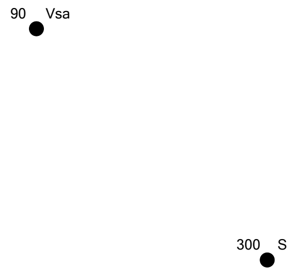


Figura 6.196. Grafo después del ítem 9.

10. Olga: Sesenta.
11. (*Alba asigna el valor "60" a la cantidad "el coche que sale de Madrid". La cantidad activa pasa a ser "distancia recorrida por el coche que sale de Albacete hasta encontrarse".*)

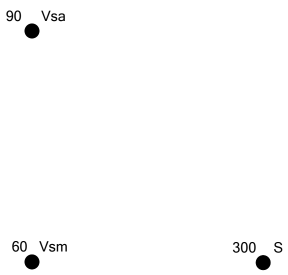


Figura 6.197. Grafo después del ítem 11.

12. Olga: Distancia que recorre no lo sabemos.
13. Alba: ¿Equis?
14. Olga: No, no, espérate… pon equis a la distancia a la que se encuentran…
15. (*Alba despliega la lista de cantidades.*)

12). Alba propone usar la letra *equis* para designarla (ítem 13). Sin embargo, Olga sorprende afirmando que deben usar esta letra para definir una cantidad que represente la distancia a la que se encuentran (ítem 14). Parece evidente que pretende asignar la letra *equis* a la cantidad que dé respuesta a la pregunta del enunciado, sin caer en la cuenta que, precisamente, esta cantidad es *Ssa*. Esto les lleva a consultar todas las cantidades buscando sin éxito una cantidad con nombre *distancia a la que se encuentran* (ítem 15). Su compañera añade que tampoco existe una cantidad que dé cuenta del tiempo (ítem 17), lo que resulta muy llamativo dado que una de las cantidades tiene como etiqueta *tiempo que tardan en encontrarse*. Tras estas acciones, Alba espeta un contundente "¡…este yo no sé… ni plantearlo!" (ítem 18). Con este comentario parece querer señalar que es incapaz siquiera de representar las cantidades desconocidas involucradas más que al hecho de plantear la ecuación (o ecuaciones) necesarias para resolver un problema. De hecho, esto fue lo que le sucedió en la prueba escrita. Por su parte, Olga, más pragmática, sugiere asignar la letra *equis* a la distancia recorrida (ítem 20), parece que pensando en la cantidad *Ssa* pues es la que señala con el ratón mientras habla, aunque, bien es cierto, que muestra flexibilidad al respecto pues reconoce que también podrían designar de este modo la cantidad *Ssm* (ítem 22). Finalmente, optan por asignar *x* a la cantidad *Ssa* (ítem 24).

De manera inmediata, Olga plantea el uso de la relación aditiva $S = Ssa + Ssm$ para expresar la distancia recorrida por el coche que sale de Madrid en función de la distancia recorrida por el que sale de Albacete y la distancia total entre ambas ciudades (ítem 29). Sorprende que ante esta propuesta que involucra una estructura conceptual que podríamos considerar sencilla, Alba manifieste no

16. Olga: Ah, no está…
17. Alba: Es que el tiempo tampoco sale.
18. Olga: ¡Uyyyyyyy, esto yo no sé… ni plantearlo!
19. Alba: Distancia recorrida por el coche… (*Alba sitúa el ratón en la lista de cantidades sobre la cantidad "distancia recorrida por el coche que sale de Albacete hasta encontrarse" aunque también son visibles las cantidades "distancia recorrida por el coche que sale de Madrid hasta encontrarse" y "tiempo que tardan en encontrarse"*.)
20. Olga: ¡Ah! La distancia recorrida es equis.
21. Alba: ¿Del de Albacete?
22. Olga: Del que sea.
23. Alba: Vale.
24. (*Alba asigna la letra "x" a la cantidad "distancia recorrida por el coche que sale de Albacete hasta encontrarse". La cantidad activa pasa a ser "distancia recorrida por el coche que sale de Madrid hasta encontrarse"*.)

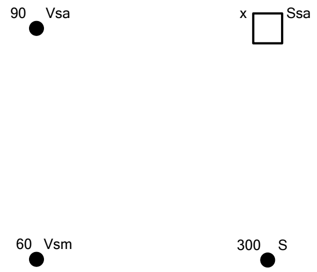


Figura 6.198. Grafo después del ítem 24.

25. Olga: Y la distancia del… a ver, si éste, el de aquí que va para Madrid recorre equis…
26. Alba: [Ajá.]
27. Olga: …el de Madrid que va hacia Albacete va a recorrer…
28. Alba: [Pero también hay que…
29. Olga: …trescientos kilómetros menos los que ha recorrido el otro…
30. Alba: Puede, no lo sé.
31. (*Olga con el ratón escribe la expresión "300−x", que es asignada*

saber si será aceptada por el tutor aunque, desafortunadamente, no explica sus dudas (ítem 30). Olga ignora el comentario de su compañera e introduce en el sistema la expresión $300 - x$ para representar *Ssm* (ítem 31).

En cuanto leen la descripción de la última de las cantidades desconocidas, *el tiempo que tardan en encontrarse* (*T*), las dos manifiestan no saber cómo resolver este problema (ítems 32 y 33), produciéndose un paréntesis en el proceso de resolución (ítem 34). Por fin, Alba señala que podrían usar una segunda letra para simbolizar la cantidad *T* aunque expresa muy poca seguridad (ítem 35). Pareciera que es la única salida que valora para poder proseguir el curso de la resolución, por lo que no contemplaría la posibilidad de construir una representación para *T* en base a las cantidades ya declaradas. Olga aprueba el uso de una segunda letra al subrayar que *T* es una cantidad desconocida (ítem 36).

En línea con las manifestaciones anteriores, Olga reconoce el cuarto paso del MC como una barrera insalvable (ítem 39). Su comentario revela el hecho de que en el tercer paso del MC es posible postergar la necesidad de traducir al lenguaje algebraico las relaciones entre cantidades usando tantas letras como el resolutor desee. Por tanto, es teóricamente posible, aunque muy poco habitual en la práctica, llegar al cuarto paso sin haber usado ninguna de las relaciones entre cantidades. Una vez que se alcanza el cuarto paso del método, esta estrategia se agota y es el momento de modelizar la situación descrita en el

automáticamente a la cantidad “distancia recorrida por el coche que sale de Madrid hasta encontrarse”. La cantidad activa pasa a ser “tiempo que tardan en encontrarse”.)

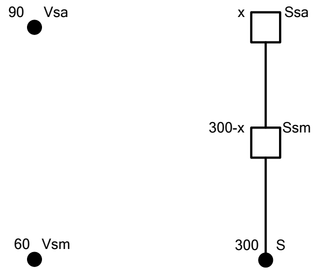


Figura 6.199. Grafo después del ítem 31.

32. Olga: Y el tiempo que tardan en encontrarse, es la de… no lo sé…
33. Alba: Yo tamp… es que yo éste no sé hacerlo…
34. (*Silencio de diez segundos.*)
35. Alba: A lo mejor el tiempo es *y*… digo yo, yo que sé…
36. Olga: Puede ser. Ponlo. Sí, porque del tiempo no nos dice nada.
37. (*Alba asigna la letra “y” a la cantidad “tiempo que tardan en encontrarse”. Se activa la ventana de ecuaciones.*)

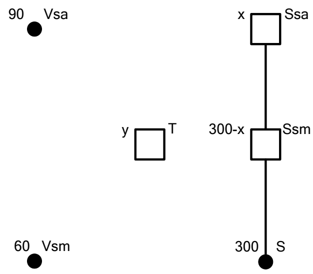


Figura 6.200. Grafo después del ítem 37.

38. Alba: Vale, entonces…
39. Olga: Ahora, esto sí ya que no sé hacer nada…
40. Alba: A ver…
41. Olga: La distancia que recorre el de Madrid hasta Albacete son…
42. Alba: Trescientos…
43. Olga: Los trescientos kilómetros…
44. Alba: … los trescientos kilómetros es igual a… (*Alba escribe “300=…”.*)
45. Olga: ¿Eh?
46. Alba: Yo que sé… (*Alba borra la ventana de ecuaciones.*)
47. Olga: Los trescientos kilómetros menos los que ha recorrido el otro…
48. Alba: Ajá. (*Alba escribe “(300−x)…”.*)
49. Olga: …es igual a… (*Alba prosigue “(300−x)=…”.*)

problema al ponerlo en ecuaciones. Hasta el momento la pareja sólo ha usado la relación *S* = *Ssa* + *Ssm*, que viene dada de manera implícita en el enunciado. Sin embargo, no parece ser capaz de involucrar la estructura conceptual *espacio igual a velocidad por tiempo*, que no aparece mencionada en forma alguna en el enunciado pero que resulta característica y necesaria para la resolución de problemas de la subfamilia de móviles. Así, tras un breve intento fallido de reutilizar la relación aditiva entre las distancias (ítems 41 a 50), se produce un prolongado silencio del que la pareja parece totalmente incapaz de salir.

50. Olga: …a no lo sé… no lo sé.
51. Alba: Es que…
52. (*Silencio de treinta segundos.*)

Considerando que el tiempo de pausa es muy elevado y que la pareja es incapaz de resolver el problema autónomamente, el profesor decide indagar sobre si asocian algún tipo de fórmula con la resolución de este tipo de problemas (ítem 53). Las respuestas son tajantes, afirman que no, incluso Olga pregunta si puede estar relacionado con el cálculo del mínimo común múltiplo (ítem 55). El profesor va un paso más lejos y les pregunta si conocen algún modo de calcular el espacio recorrido por un coche que se desplaza a velocidad constante durante un determinado tiempo (ítem 58). Ante el mutismo de las estudiantes, presenta una situación concreta en la que sabidos tiempo y velocidad deben calcular el espacio recorrido (ítem 60). De este modo, la pareja sí visualiza la estructura conceptual (ítems 62 y 63) y se disponen a aplicarla para dar respuesta al problema.

53. Profesor: ¿Sabéis alguna fórmula para este tipo de problemas?
54. Alba: No.
55. Olga: ¿Lo del mínimo común múltiplo…?
56. Profesor: No. En Física cuando…
57. Olga y Alba: [¡Es que no damos!
58. Profesor: Bueno, pero… ¿no sabéis el espacio que recorre un coche que va a una velocidad constante durante un determinado tiempo?
59. (*Silencio de diez segundos*.)
60. Profesor: Si vais a cien kilómetros por hora durante dos horas, ¿cuánta distancia recorréis?
61. Olga: Mmm… doscientos kilómetros.
62. Olga: Multiplicar. El espacio es igual al tiempo…
63. Alba: [por la velocidad…

La primera propuesta es errónea pues consideran la cantidad *S* en vez de la recorrida por alguno de los móviles (ítem 64). Este aspecto que inicialmente no parece causarles ningún conflicto, se revela problemática cuando deben seleccionar una de las velocidades. En concreto, Olga construye la expresión

64. Olga: …por la velocidad. Entonces, el espacio que es trescientos es igual al tiempo que tardan… (*Olga borra la ventana de ecuaciones y escribe "300=…".*).
65. Alba: que no lo sabemos…
66. Olga: …por la velocidad… (*Olga prosigue "300=y*60".*)
67. Alba: Por… no… pero…
68. Olga: Primero…

300 = y*60 (ítem 66) pero, en el mismo instante que usa la cantidad *Vsm*, Alba protesta enfáticamente y dice exaltada: “¡Es que se encuentran!” (ítem 69). Interpretamos su intervención como que observa una contradicción en el hecho de emplear la cantidad *S* para luego considerar una sola de las velocidades. De hecho, pocos segundos después, comenta que quizá también deberían multiplicar por la cantidad *Vsa* (ítem 71). Finalmente optan por probar la ecuación escrita en primer lugar y, en caso de rechazo, usar la también errónea 300 = y*60*90. En ambos casos, el tutor les notifica que las ecuaciones son incorrectas (ítems 72 y 77).

69. Alba: [¡Es que se encuentran!
70. Olga: Sí.
71. Alba: Entonces, a lo mejor, también es por noventa que va el otro… yo que sé… no lo sé, probamos éste.
72. (*Olga valida la ecuación, que es identificada como errónea.*)

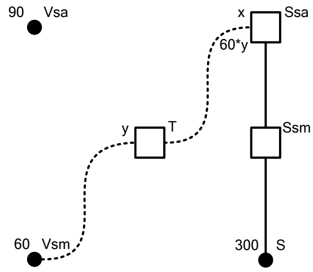


Figura 6.201. Grafo después del ítem 72.

73. Alba: No, probamos con eso que… (Alba prosigue “300=y*60*…”.)
74. Olga: No te va a dejar poner eso…
75. (*Alba finaliza la ecuación “300=y*60*90”.*)
76. Olga: Ah.
77. (*Alba valida la ecuación, que es identificada como errónea.*)

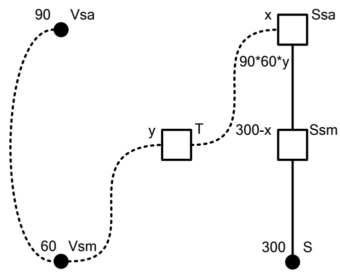


Figura 6.202. Grafo después del ítem 77.

Tras este primer intento fallido de construir una ecuación, Alba usa correctamente la relación *Ssm* = *Vsm*·*T* (ítem 85) a través de la ecuación 300 – x = 60y. Parece que la representación no ha sido fortuita pues la estudiante ha ido verificando puntualmente el significado de las cantidades que empleaba.

78. Alba: No, pues nada. (*Alba borra la ventana de ecuaciones.*)
79. Olga: A ver…
80. Alba: La velocidad por el tiempo es igual a la distancia.
81. (*Silencio de diez segundos.*)
82. Alba: Y si la distancia de que… (*Olga empieza a escribir “(300−x)=…”.*)
83. Alba: Trescientos menos equis es igual a… ¿a qué…? El de Madrid va a sesenta, la velocidad por… ¿por el tiempo? (*Olga prosigue “(300−x)=60*…”.*)
84. Alba: Sí.
85. (*Olga finaliza “(300−x)=60*y”. Alba valida la ecuación que es identificada como correcta.*)

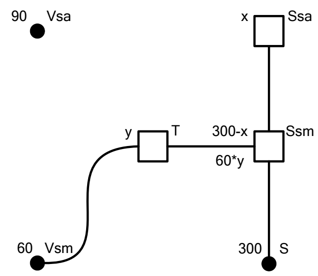


Figura 6.203. Grafo después del ítem 85.

Para la segunda ecuación, la pareja parece tener muy clara la necesidad de considerar el otro de los móviles y, en consecuencia, inician la ecuación empleando la cantidad *Ssa* (ítems 89 y 90). Además, ante lo que parece un desliz de Alba al usar la velocidad del coche que sale de Madrid (ítem 92), Olga reacciona en seguida señalando el uso de *Vsa*. De este modo, terminan construyendo la ecuación correcta $x = 90y$ (ítem 97). Antes de validar la ecuación, Olga manifiesta sus dudas de sobre que vaya a ser aceptada por el programa. En cambio, Alba no parece entender por qué afirma esto pues reconoce que están aplicando la misma estructura conceptual para el otro coche (ítems 97 y 99). Finalmente, validan la ecuación que es identificada como correcta (ítem 100).

86. Alba: Vale, entonces…
87. Olga: Ahora, *equis*…
88. Alba: ¿*y*..?
89. Olga: Yo creo que *equis*, que es la distancia recorrida por el de Albacete…
90. Alba: Ajá. (*Olga escribe "x…".*)
91. Olga: …es igual a…
92. Alba: …es igual a sesenta… (*Olga prosigue "x=60…".*)
93. Olga: No, a noventa.
94. Alba: ¡Uh, madre mía!
95. Olga: *Equis* es igual a noventa por *y*. (*Olga borra la ventana de ecuaciones.*)
96. Olga: No, ya verás cómo no nos va a dejar…
97. Alba: No sé… es lo mismo que lo otro… (*Olga escribe "x=90*y".*)
98. Olga: No.
99. Alba: Nada más que aquí hemos calculado la de Madrid y aquí la de Albacete… (Olga valida la ecuación, que es identificada como correcta.)
100. Olga: Ah, pues sí… pues ya está.

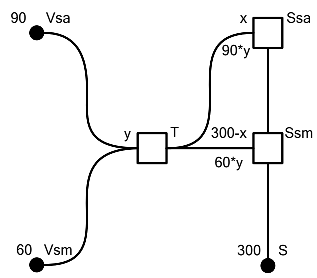


Figura 6.204. Grafo al final de la resolución.

6.5.3.5. El caso de la pareja Alba-Olga en el problema "Los cromos"

Si quiero comprar nueve paquetes de cromos me faltan tres euros, pero si compro cinco paquetes me sobran cinco euros. ¿Cuál es el precio de un paquete?

Olga lee el enunciado en voz alta e

1. (*Olga carga el problema y lee el enunciado en voz alta.*)

inician el proceso de simbolización de las cantidades involucradas en el problema. La primera de las cantidades de las que dan cuenta es la cantidad conocida *número de paquetes a comprar cuando me falta dinero* (*Cfd*) a la cual Alba asigna el valor 9 a propuesta de su compañera (ítems 2 y 3.)

2. Olga: Número de paquetes a comprar cuando me falta dinero, pues nueve.
3. (*Alba asigna el valor "9" a la cantidad "número de paquetes a comprar cuando me falta dinero". La cantidad activa pasa a ser "número de paquetes a comprar cuando me sobra dinero"*.)

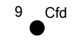


Figura 6.205. Grafo después del ítem 3.

Olga lee la descripción de la cantidad *número de paquetes a comprar cuando me sobra dinero* (*Dsd*) y propone que toma el valor 5 (ítem 4). Alba consuma la asignación el sistema tutorial (ítem 5).

4. Olga: Número de paquetes a comprar cuando me sobra, cinco.
5. (*Alba asigna el valor "5" a la cantidad "número de paquetes a comprar cundo me sobra dinero". La cantidad activa pasa a ser "dinero que me falta al comprar nueve paquetes"*.)

Figura 6.206. Grafo después del ítem 5.

La siguiente de las cantidades conocidas seleccionada es *dinero que falta al comprar nueve paquetes* (*Df*). Nuevamente Olga lee en voz alta la descripción de la cantidad, identifica y señala el valor que le corresponde para que su compañera lo refleje en el sistema (ítems 6 y 7).

6. Olga: Dinero que me falta al comprar nueve, tres.
7. (*Alba asigna el valor "3" a la cantidad "dinero que me falta al comprar nueve paquetes". La cantidad activa es "dinero que me sobra al comprar cinco paquetes"*.)

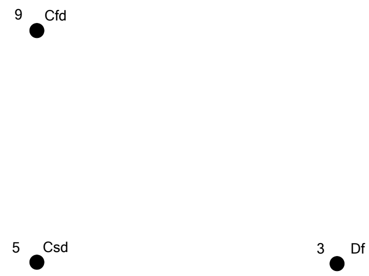


Figura 6.207. Grafo después del ítem 7.

Sin dificultad aparente declaran correctamente la cantidad *dinero que me sobra* (*Ds*) (ítems 8 y 9).

8. Olga: Y dinero que me sobra, cinco.
9. (*Alba asigna el valor "5" a la cantidad "dinero que me falta al comprar cinco paquetes". La cantidad activa pasa a ser "precio de un paquete de cromos"*.)

Figura 6.208. Grafo después del ítem 9.

Ante la primera de las cantidades desconocidas, sorprende la concisión en las acciones de la pareja. Olga, sin apenas pronunciar palabra, indica a su compañera que simbolice el *precio de un paquete de cromos* (*Ppc*) con la letra *x* (ítem 10). Alba obedece y lo consigna en el tutor (ítem 11). En ningún momento valora la posibilidad de explorar el resto de cantidades pendientes de definir ni parece sentir la necesidad de justificar la representación utilizada.

10. Olga: Precio, equis.
11. (*Alba asigna la letra "x" a la cantidad "precio de un paquete de cromos". La cantidad activa pasa a ser "dinero que tengo".*)

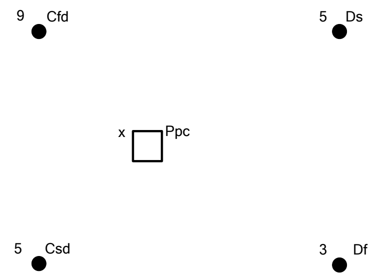


Figura 6.209. Grafo después del ítem 11.

Ante la segunda de las cantidades desconocidas, *dinero que tengo* (*D*), Alba señala que tampoco "la saben" (ítem 13). Olga parece expresar que, como consecuencia de trabajar con una cantidad desconocida, deben emplear una nueva letra (ítem 14). Así, Alba simboliza la cantidad *D* con la letra *y* (ítem 15).

12. Olga: Dinero que tengo…
13. Alba: Tampoco lo sé…
14. Olga: Jo, pues i griega.
15. (*Alba asigna la letra "y" a la cantidad "dinero que tengo". La cantidad activa es "precio de nueve paquetes de cromos".*)

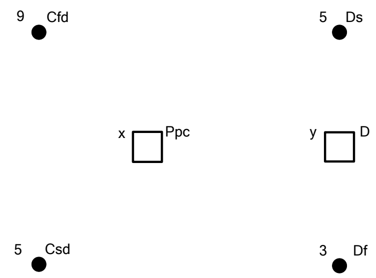


Figura 6.210. Grafo después del ítem 15.

La siguiente cantidad activa es la cantidad *precio total de cromos en la situación que falta dinero* (*Pfd*), que Olga sugiere expresar correctamente mediante la relación aditiva $Pfd = D + Df$ (ítem 18). A pesar de una leve discrepancia sobre qué letra representa "el dinero", rápidamente son capaces de introducir correctamente la expresión $y + 3$ en el tutor, quedando asignada a *Pfd* (ítem 24). La discrepancia viene auspiciada por la

16. Olga: Precio de… uh…
17. Alba: Precio de…
18. Olga: El dinero que tengo más tres.
19. Alba: Ajá. El dinero que es equis, no, el dinero es *y*…
20. (*Alba escribe la expresión "y…".*)
21. Olga: No, el dinero es equis…
22. Alba: No, el dinero es *y*.
23. Olga: Vale.
24. Alba: El dinero más tres. (*Alba escribe la expresión "y+3", que automáticamente es asignada a la cantidad "precio de nueve paquetes de cromos". La cantidad activa pasa a ser "precio de cinco*

verbalización de Olga en el ítem 18, pues quizá por una mera cuestión de economía de lenguaje verbalizaba la relación “el dinero más tres”. De esta forma el nombre común que es *el dinero* podría referir tanto al dinero que cuesta un paquete de cromos (*Ppc*) como al dinero que tiene el protagonista del problema (*D*). En este caso, la imprecisión no acarrea consecuencias sobre el proceso de resolución pues ambos estudiantes parecen tener clara la relación que quieren representar y lo hacen eficazmente.

Para la representación de la cantidad *precio total de cromos en la situación en que me sobra dinero* (*Psd*) Alba involucra la relación aditiva $D = Psd + Ds$, análoga a la empleada anteriormente para modelizar la situación en que faltaba dinero (ítem 25). Así, construyen la expresión correcta $y - 5$ para representar *Psd* y lo plasman en el sistema. Sin embargo, reciben un mensaje de error en el proceso de validación producto de la distinción que hace el tutor entre cantidades y su representación (ítem 26). Una vez que el profesor les recuerda este aspecto, la pareja reacciona de inmediato y vuelven a formular la expresión $y - 5$ empleando en este caso el cinco correspondiente a la cantidad *Ds*. De este modo, el tutor identifica la expresión como correcta (ítem 32).

Olga inicia el paso cuarto del MC parece que releyendo la pregunta del enunciado (ítem 37). Además señala correctamente que el precio de nueve paquetes es $y + 3$

paquetes de cromos”.)

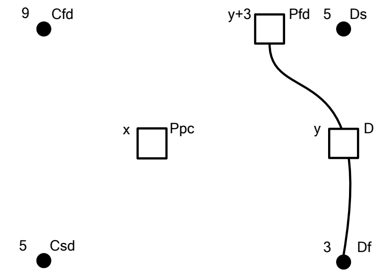


Figura 6.211. Grafo después del ítem 24.

25. Alba: Y el otro es el dinero menos cinco.
26. (*Alba escribe la expresión “y−5”, que es rechazada por el tutor. Usan el “5” asignado a “número de paquete a comprar cuando me sobre dinero”.*)
27. Profesor: Tenéis dos cincos. El programa distingue entre ellos y…
28. Alba: ¡Ah, vale! El dinero menos…
29. Olga: El otro cinco, ¿a cuál le has dado primero?
30. Alba: Número de paquetes… (*Alba se coloca sobre el botón de un “5” y lee la etiqueta de esa cantidad.*)
31. Olga: No.
32. Alba: Dinero que me sobra… aquí. (*Alba se coloca sobre el otro “5” y lee la etiqueta. Escribe “y−5”, que automáticamente es asignado a la cantidad activa.*)

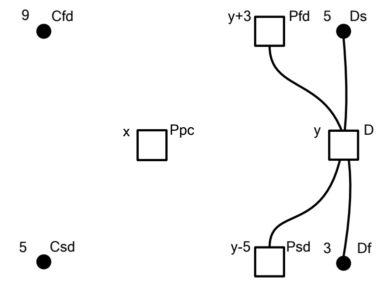


Figura 6.212. Grafo después del ítem 32.

33. Alba: Vale.
34. Profesor: Aunque sean el mismo valor, son distintas cantidades, entonces tenéis que usar la cantidad que corresponda.
35. Olga: Vale.
36. Alba: Vale, entonces…
37. Olga: A ver, el número de paque... ¿eh? ¿Cuál es precio de un paquete? Pues el precio de nueve paquetes es igual a *y* más tres…
38. (*Alba con el ratón escribe “9=(y+3)…”.*)

aunque no es posible afirma de su verbalización si quería comunicar que: 1) es posible construir una ecuación buscando una forma alternativa a $y + 3$ de representar la cantidad *Pfd*; ó 2) la expresión $y + 3$ simboliza la cantidad *Pfd* (teniendo en cuenta que 2) está incluida en 1)). En cualquier caso, la pareja traduce la proposición "el precio de nueve es igual a *y* más tres" al lenguaje algebraico por $9 = y+3$ (ítems 40 y 41). Esta igualación no es posible ser validada en el tutor al ser una relación binaria lo que lleva a la pareja a descartarla.

39. Alba: No, a *y* menos cinco.
40. Olga: No, el precio de nueve es igual es a *y* más tres…
41. Alba: ¡Ah, es verdad! Cuando pongo… (*Alba intenta validar la expresión, que no es aceptada.*)
42. Olga: Pero no te deja… es que esto no existe…
43. Alba: A lo mejor el número de… el número de… no.
44. Olga: El precio de un paquete de cromos es igual a… no lo sé… (*Olga escribe la expresión "x=…" pero desiste y la borra.*)

La pareja intenta construir una ecuación mediante la relación aditiva existente en la situación en que sobra dinero (ítem 45 a 53) aunque por esta vía no parecen hacer progresos lo cual es lógico si consideramos que esas relaciones ya han sido usadas en el paso 3 del MC. La resolución se encuentra en punto muerto y los períodos de silencio se encadenan sin que ningún miembro de la pareja parezca ser capaz de proponer alternativas (ítems 54 a 57.)

45. Alba: Es que, yo creo que sí valdría lo de con cinco paquetes…
46. (Alba escribe la expresión "5…".)
47. Olga: Ése es el dinero que te sobra…pon.
48. Alba: ¿Es el dinero que te sobra?
49. Olga: Sí. El cinco de los paquetes es ése.
50. (*Alba escribe la expresión "5…" ahora haciendo uso de la cantidad "número de paquetes a comprar cuando me sobra dinero".*)
51. Alba: El cinc… a ver, si yo compro cinco, me sobran cinco pero nueve, me faltan tres.
52. Olga: Es que yo creo que cinco es igual a equis menos cinco…
53. Alba: ¡A *y*! A ver con cinco… entre nueve y cinco, hay cuatro, con tres… y ahí te sobran cinco.
54. (*Silencio de diez segundos.*)
55. Olga: No sé, no sé… (*entre susurros.*)
56. Alba: No tengo ni idea.. (*Susurra.*)
57. (*Silencio de veinte segundos.*)

Ante esta situación, el profesor invita a los estudiantes a que compartan sus pensamientos (ítem 58). Olga vuelve a verbalizar la relación $Pfd = D + Df$ aunque no parece que valore la posibilidad de buscar una representación alternativa de *Pfd* (ítem 60). En vez de ello propone la cuanto menos sorprendente ecuación $y = 9 - (y + 3)$,

58. Profesor: ¿Qué estáis pensando?
59. Alba: Yo… no sé…
60. Olga: Es que el dinero que tengo es igual a los nueve paquetes que quiero comprar menos el dinero que me falta.
61. (*Olga escribe la expresión "y=9−(y+3)", que identificada como errónea por el tutor.*)

que es rechazada por el tutor. Alba parece estar plenamente de acuerdo con el mensaje del sistema pues su comentario señala la incoherencia de relacionar aditivamente cantidades de diferentes magnitudes (ítem 62). La pareja parece desistir de resolver el problema e inician un diálogo sobre cómo plantearon el problema en lápiz y papel. Olga señala que ella planteó la ecuación $x = y + 3$ sirviéndose del editor de ecuaciones del tutor para escribirla e ilustra su verbalización (ítem 65). Alba indica que los que no sabía resolver los dejaba en blanco (ítem 66) y ambas se excusan en su mala relación con este tipo de problemas (ítems 67 y 68).

El profesor, observando que la pareja está alejándose del proceso de resolución, les anima a pensar con el afán de reconducir su atención hacia el problema. En respuesta, Alba propone construir una ecuación en cuyo primer miembro recoge una expresión aritmética 9 + 5 que daría cuenta de los paquetes totales, es decir la suma de los paquetes de cromos en la situación que sobre más los paquetes de cromos en la situación que falta (ítem 70) aunque enseguida parece no ver salida a esta línea de razonamiento y borra la ventana de ecuaciones. Pocos segundos retoma la idea intentando construir una ecuación que refleja la relación incorrecta *Cfd* + *Csd* = *Pfd* + *Psd* (ítem 76). La pareja decide borrarla y, dado el tiempo consumido, el profesor decide interrumpir la resolución y darla por finalizada.

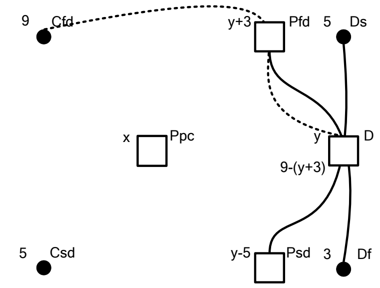


Figura 6.213. Grafo después del ítem 61.

62. Alba: Eso de mezclar cromos y dinero…
63. Olga: Yo en el examen, en el éste, puse que…
64. Alba: Yo es que éste no lo resolví.
65. Olga: …que equis que es el precio de un paquete es igual a esto (*Señala y+3 mientras se ríe*) y que… ya no me acuerdo, lo taché o algo…puse una barbaridad. (*Olga escribe la expresión "x=(y+3)", para ilustrar lo que hizo en lápiz y papel. Lo borra sin validar.*)
66. Alba: Yo, yo… normalmente lo que no resolvía los dejaba en blanco…
67. Olga: ¡Es que se me dan supermal!
68. Alba: A mí igual. Pero bien… a ver…
69. Profesor: Pensad si hay alguna relación entre las cantidades que tenéis ahí.
70. Alba: A ver, supuestamente tenemos que agrupar el… nueve paquetes de cromos más los cinco son igual a… ¿a qué? (*Alba escribe la expresión "9+5=…".*)
71. Olga: No lo sé.
72. Alba: A…
73. Olga: O los nueve menos cinco es igual al precio de uno, no porque eso te dan cuatro…
74. Olga: Alba pon algo…
75. Alba: Es que no lo sé… (*Alba borra la ventana de ecuaciones.*)
76. Alba: Esto es el precio de nueve paquetes de cromos… Pues esto (9) más esto (5) es igual a esto (*y*+3) más (*y*−5), no, no me deja ponerlo. (*Alba intenta escribir la expresión "9+5=(y+3)+(y−5)" pero el tutor sólo deja "9+5=(y+3)". Decide borrar la ventana de ecuaciones.*)
77. Profesor: Lo dejamos aquí.

6.5.4. LA PAREJA EVA-MARTA

6.5.4.1. El caso de la pareja Eva-Marta en el problema "La excursión"

Un grupo de amigos está planificando una excursión. A cada amigo la excursión le va a costar 10 €. Sin embargo, a última hora, dos de los amigos deciden no ir a la excursión por lo que el resto ha de pagar 12,5 € cada uno. ¿Cuántas personas forman parte del grupo de amigos?

Eva lee el enunciado del problema en voz alta (ítem 4). Marta señala que en primer lugar deben informar el *coste por persona si asistiesen todos los amigos* (*Cia*) (ítem 6) con el valor de diez euros (ítem 8). Encarna ejecuta la asignación en el programa (ítem 9).

1. (*Marta carga el programa "La excursión" en el tutor.*)
2. Profesor: Lo lee una de las dos en voz alta y empezáis.
3. Eva: Vale. Si se abre… vale.
4. (*Eva lee el enunciado en voz alta. La cantidad activa es "coste por persona si asistiesen todos los amigos".*)
5. Eva: Primero hay que poner…
6. Marta: A ver, coste por persona si asisten todos los amigos…
7. Eva: Dale. (*Eva se pone sobre el campo donde han de escribir la cantidad.*)
8. Marta: Diez euros.
9. (*Eva asigna el valor "10" a la cantidad "coste por persona si asistiesen todos los amigos". La cantidad activa es "coste por persona si dos amigos no asisten".*)

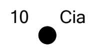


Figura 6.214. Grafo después del ítem 9.

La siguiente cantidad activa es la cantidad conocida *coste por persona si dos amigos no asisten* (*Cfa*). Directamente y sin necesidad de

10. (*Eva asigna el valor "12.5" a la cantidad "coste por persona si dos amigos no asisten". La cantidad activa pasa a ser "número de amigos que no asisten".*)

pronunciar palabra, Eva informa esta cantidad con el valor 12,5.

Figura 6.215. Grafo después del ítem 10.

El profesor les insta a que vayan comentando en voz alta tanto sus pensamientos como sus acciones pues hasta el momento el diálogo está siendo escaso (ítem 11). Eva está ocupada en darle valor a la cantidad conocida *número de amigos que no asisten* (*An*). Asigna el valor 2 para esta cantidad en el sistema (ítem 12).

11. Profesor: Es importante que no susurréis, que vayáis comentando todo en voz alta, lo que pensáis…
12. Eva: [No asisten, dos. (*Eva asigna el valor "2" a la cantidad "número de amigos que no asisten". La cantidad activa es "número de amigos del grupo".*)

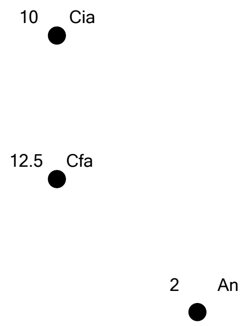


Figura 6.216. Grafo después del ítem 12.

En este momento del proceso de resolución, la pareja ya ha dado cuenta de todas las cantidades conocidas. El tutor les propone la definición de la cantidad *número de amigos del grupo* (*A*). En cuanto Eva lee la descripción de la cantidad, decide asignarle la letra *equi*s (ítem 13) aunque espera a que su compañera le dé su aprobación (ítem 14). Ante el asentimiento de Marta (ítem 15), Eva representa en el programa la cantidad *A* mediante la letra *x*.

13. Eva: Número de amigos del grupo… (*Eva escribe la letra "x".*)
14. Eva: Sí, ¿no? (*Eva se dirige a Marta.*)
15. Marta: Sí.
16. (*Eva asigna la letra "x" a la cantidad activa "número de amigos del grupo". La cantidad activa es "número de amigos que asisten a la excursión".*)

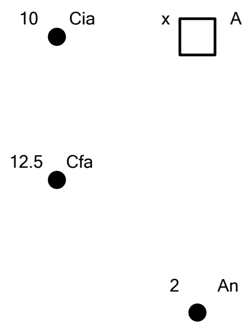


Figura 6.217. Grafo después del ítem 16.

Tras representar la primera de las cantidades de manera simbólica, la pareja

17. Eva: Número de amigos que asisten a la excursión…
18. Marta: [*y*].

aborda la designación de la segunda cantidad desconocida: el número de amigos que realmente asisten a la excursión (*Aa*). Cada miembro de la pareja propone estrategias distintas. Mientras Marta aboga por utilizar una segunda letra (ítem 18), Eva sugiere emplear una relación aditiva incorrecta $Aa = A + An$ mediante la expresión algebraica x+2 (ítem 19). Eva reconoce que es posible plantear el problema con dos letras y pregunta a su compañera si lo abordan de este modo (ítem 21). Sin embargo, Marta parece indicar que no entiende la expresión propuesta por su compañera pues “los dos son los que deciden no ir” (ítem 22). Eva reacciona inmediatamente y reformula la expresión a $x - 2$, es decir dando cuenta de la relación correcta $A = Aa + An$ (ítem 23). Marta aprueba esta opción y la recogen en el programa, cayendo en el olvido la idea de emplear dos letras (ítem 26).

La última de las cantidades que han de representar corresponde al *coste de la excursión* (*C*). Sin aportar argumentaciones, Eva sugiere usar la expresión 10x que refleja correctamente la relación multiplicativa $C = Cia{\cdot}A$ (ítem 29). Casi al mismo tiempo, su compañera propone usar la misma estructura multiplicativa aplicada a la situación real en que asisten dos personas menos, que se plasmaría en la expresión algebraica $(x - 2)*12.5$ (ítem 30). Esta dualidad de representaciones invita a pensar que si la pareja encuentra dificultades en la construcción de la ecuación, éstas no se deberán a una incapacidad para identificar las relaciones existentes en la situación descrita en el enunciado. Curiosamente en vez de decantarse por cualquiera de las representaciones, Eva desea en primera instancia verificar que no haya otras cantidades pendientes de definir antes de tomar una decisión (ítem 31). Marta verifica que *C* es la última de

19. Eva: …equis más dos. ¿*y*? Pero si se van dos…
20. Marta: Pero…
21. Eva: [¿O lo hacemos con dos?
22. Marta: …si los dos son los que deciden no ir…
23. Eva: Ah, entonces es equis menos dos.
24. Marta: Eso. (*Marta activa la opción “expresión”.*)
25. Eva: Ponlo tú.
26. (*Marta construye la expresión “x−2”, que es asignada a la cantidad “número de amigos que asisten a la excursión”. La cantidad activa es “coste de la excursión”.*)

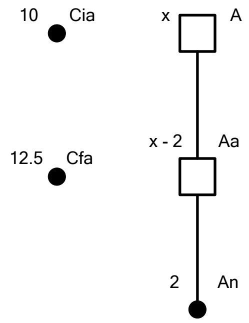


Figura 6.218. Grafo después del ítem 26.

27. Eva: Coste de la excursión… (*Eva lee la cantidad activa.*)
28. Marta: No, eh….
29. Eva: ¿Diez por equis?
30. Marta: ¿Equis menos dos por eso? (*Marta señala en primer lugar con el ratón el botón “(x−2)” y cuando dice “eso” apunta con el ratón al “12.5” del enunciado.*)
31. Eva: Mira a ver si hay más. Me parece que no. (*Eva pide a Marta que mire si en la lista de cantidades hay más cantidades por definir aparte de “coste de la excursión”.*)
32. (*Marta despliega la lista de cantidades, donde sólo queda la activa.*)
33. Marta: No.
34. Eva: Es éste (*“10”*) por éste (*“x”*) o éste (*“12.5”*) por éste (*“x−2”*). (*Con el dedo señala las cantidades sobre la pantalla.*)
35. Marta: Sí. Dice el coste de la excursión… si el coste final de la excursión sin que dos vayan será…
36. Eva: [Probamos primero con ése y después con el otro].
37. Marta: Vale.
38. (*Marta activa la opción “expresión”.*)
39. Marta: Diez por… (*Eva construye la expresión “10*…”.*)

las cantidades a simbolizar antes de pasar a plantear la ecuación (ítem 32). Ante este panorama deciden "probar" primero la expresión 10*x* para designar *C* (ítems 36 y 37). Entre los ítems 38 y 41 construyen y validan la expresión en el programa.

40. Eva: Ahí. (*Señala el botón "x".)*
41. Marta: …equis. (*Eva finaliza y valida la expresión "10*x", que es asignada a la cantidad "coste de la excursión". Se activa la ventana de ecuaciones.*)

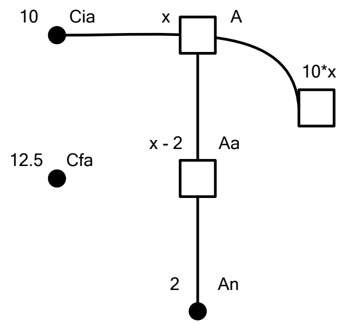


Figura 6.219. Grafo después del ítem 41.

Las relaciones verbalizadas a lo largo del tercer paso del MC invitaban a pensar que la pareja no iba a tener dificultades relevantes en el cuarto paso y, efectivamente, así es. Nada más visualizar la ventana de ecuaciones, Eva, mediante deícticos y señalando los botones de las cantidades implicadas, verbaliza una ecuación correcta sobre dos representaciones diferentes de *C* (ítem 43). Marta escribe y valida la ecuación en el programa (ítems 44 a 48).

42. Marta: Bueno. Entonces ahora… (*Eva coloca el ratón sobre el botón "x" haciendo visible la etiqueta "número de amigos del grupo".)*
43. Eva: Esto (*"12.5")* por esto (*"x−2"*) tiene que dar lo mismo que esto (*"10*x"*). (*Eva verbaliza una expresión señalando los botones en la pantalla.*)
44. Marta: Sí. A ver, esto… (*Marta escribe "12.5…".*)
45. (*Marta prosigue "12.5*x=…".*)
46. Marta: a… ¿esto? (*Marta finaliza "12.5*x=(10*x)".*)
47. Eva: Sí.
48. Marta: Ya está, ¿no? (*Marta valida la ecuación "12.5*x=(10*x)", que es identificada como correcta por el tutor.*)

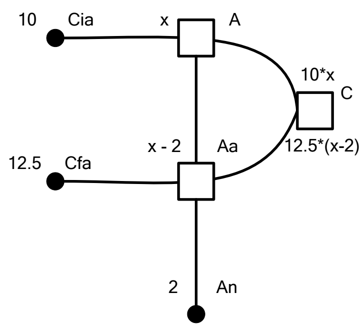


Figura 6.220. Grafo al final de la resolución.

6.5.4.2. El caso de la pareja Eva-Marta en el problema "El té"

Disponemos de dos tipos de té: uno de Tailandia a 5,2 €/Kg y otro de la India a 6,2 €/Kg. ¿Cuántos kilógramos de té de la India tenemos que añadir a 45 kilos de té de Tailandia para obtener una mezcla a 5,75 €/Kg?

La pareja lee el enunciado en voz alta e inicia la asignación de valor a las cantidades conocidas. Así, trabajando de manera conjunta, dan valor en el tutor de manera correcta a las cantidades *precio de un kilo de té de Tailandia* (ítem 4), *precio de un kilo de té la India* (ítem 6) y *precio de un kilo de té mezcla* (ítem 12).

1. (*Marta carga en el programa el problema"El té"*.)
2. (*Eva lee el enunciado en voz alta. La cantidad activa es "precio de un kilo de té de Tailandia"*.)
3. Eva: Precio de un kilo, cinco con dos.
4. (*Eva asigna "5.2" a la cantidad activa. La cantidad activa pasa a ser "precio de un kilo de té de la India"*.)

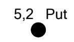


Figura 6.221. Grafo después del ítem 4.

5. Marta: De la India, seis con dos.
6. (*Eva asigna "6.2" a la cantidad activa. La cantidad activa pasa a ser "precio de un kilo de té mezcla"*.)

Figura 6.222. Grafo después del ítem 6.

7. Marta: De té mezcla…
8. Eva: Cuarenta y cinco. No.
9. Marta: No, es el precio.
10. Eva: Cinco con…
11. Eva y Marta: setenta y cinco.
12. (*Eva asigna "5.75" a la cantidad "precio de un kilo de té mezcla". La cantidad activa pasa a ser "kilos de té de Tailandia"*.)

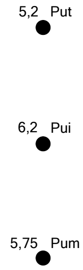


Figura 6.223. Grafo después del ítem 12.

Ante la última de las cantidades conocidas que han de declarar, *kilos de té de Tailandia* (*Ctt*), Eva sorprende proponiendo emplear una letra para su simbolización (ítem 14), que es respaldado por su compañera quien al repasar el enunciado declara que el valor 45 corresponde al té de la India (ítem 17). Cuando intentan realizar la representación de *Ctt*, el tutor les informa de que el valor de esta cantidad es explícitamente proporcionado en el enunciado. A partir de aquí, Eva reacciona sin dificultad y asigna correctamente el valor 45 a *Ctt* mientras su compañera, aún dubitativa, se afana en releer el enunciado. Aunque el intento de denotar una cantidad conocida mediante una letra tiene todos los visos de tener su origen en una escasa concentración durante la lectura del problema, hemos de reseñar que la estudiante Eva cometió el mismo error (que no fue el único y el que le impidiera resolver el problema) durante la prueba escrita, de tal modo que identificó erróneamente que los cuarenta y cinco kilos informaban sobre la cantidad de té de la India empleada en la mezcla.

13. Eva y Marta: Kilos de té de Tailandia. (*Leen la cantidad activa.*)
14. Eva: *Equis*, ¿no?
15. Marta: Mmm.
16. Eva: Sí, porque luego…
17. Marta: [Sí, éste es el de la India…] (*Eva señala el "45" del enunciado cuando dice "éste".*)
18. (*Marta activa la opción expresión.*)
19. (*Eva asigna la letra "x" a la cantidad "kilos de té de Tailandia". El programa no lo valida, y muestra un mensaje "Este valor se proporciona explícitamente en el enunciado".*)

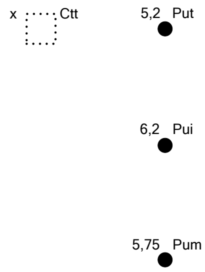


Figura 6.224. Grafo después del ítem 19.

20. Eva: Enton… ah, vale, cuarenta y cinco.
21. Marta: Pero… (*Eva asigna "45" a la cantidad "kilos de té de Tailandia". Marta parece repasar el enunciado por los movimientos del ratón. La cantidad activa pasa a ser "kilos de té de la India".*)

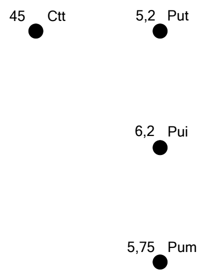


Figura 6.225. Grafo después del ítem 21.

Eva, ahora sí de forma correcta, representa la cantidad *Cti* mediante la

22. Eva: De la India… (Eva asigna la letra "x" a la cantidad "kilos de té de la India".)

letra *equis* (ítem 22).

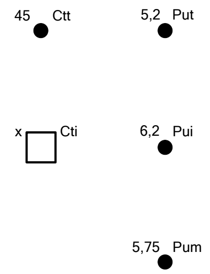


Figura 6.226. Grafo después del ítem 22.

Ante la segunda cantidad desconocida a la que se enfrentan, *los kilos de té de mezcla* (*Ctm*), Eva inicia una verbalización que parece podría derivar en un error de inversión (ítem 23) pero Marta interrumpe a su compañera planteando la expresión algebraica 45 + x (ítem 24) que plasma correctamente el hecho de que la cantidad total de té mezcla es la suma de las cantidades de té de Tailandia y de té de la India usados (*Ctm* = *Ctt* + *Cti*).

23. Eva: De la mezcla es… equis menos…
24. Marta: [Equis más cuarenta y cinco, ¿no?]
25. Eva: Tienes que ponerlo.
26. (*Marta activa la opción expresión. Construye la expresión "x+45", que es asignada a la cantidad "kilos de té mezcla". La cantidad activa pasa a ser "precio del té de Tailandia".*)

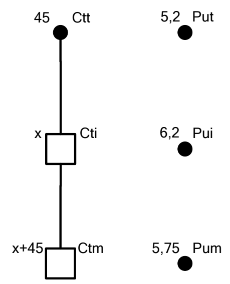


Figura 6.227. Grafo después del ítem 26.

La cantidad activa es *precio total del té de Tailandia* (*Ptt*) que Eva propone representar mediante la expresión aritmética 5,2*45 (ítem 28) que supone aplicar la relación *Ptt* = *Ctt*·*Put*. Marta parece dudar, nuevamente en relación con a qué tipo de té corresponde el valor 45, de tal modo que hasta que no comprueba que la descripción de la cantidad corresponde con *Ctt* no introduce la expresión aritmética en el sistema (ítem 30).

27. Marta: Vale, precio del té de Tailandia, eh… (*Marta se pone a repasar el enunciado.*)
28. Eva: Cinco con eso por cuarenta y cinco… tiene que ser…
29. Marta: No, sí. (*Marta activa la opción "expresión". Construye la expresión "5.2*…".*)
30. Marta: ¿Cuarenta y cinco? (*Marta pulsa el botón "45" cuando se visualiza la etiqueta de la cantidad. Construye así la expresión "5.2*45", que es validada asignando el valor "234" a la cantidad "precio de todo el té de Tailandia". La cantidad activa pasa a ser "precio de todo el té de la India".*)

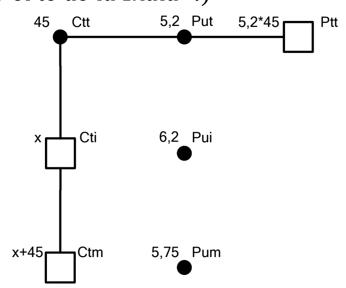


Figura 6.228. Grafo después del ítem 30.

De manera análoga Eva sugiere definir una expresión algebraica para representar la cantidad *Pti* (ítem 32) que implica aplicar la relación *Pti* = *Cti*·*Pui*. Marta consigna correctamente la expresión 6,2*x* para *Pti* en el sistema.

31. Marta: Y precio de…
32. Eva: Cinco con…no, seis coma dos por equis.
33. (*Marta construye la expresión “6.2*x”, que es asignada a la cantidad “precio de todo el té de Tailandia”. La cantidad activa pasa a ser “precio de todo el té mezcla”.*)

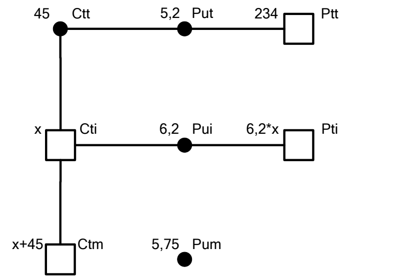


Figura 6.229. Grafo después del ítem 33.

La pareja emplea la misma estructura conceptual para definir la última de las cantidades desconocidas, *el precio total de té mezcla* (*Ptm*). Sin apenas necesidad de justificar sus acciones y, por tanto, con una verbalización meramente descriptiva, ambos estudiantes concuerdan en simbolizar *Ptm* a partir del producto de la expresión 45 + *x*, que crearon para designar *Ctm*, y del valor 5,75, es decir el precio de un kilo de té mezcla (ítem 36). Esta actuación contrasta con sus actuaciones en lápiz y papel donde ambos estudiantes construyeron una ecuación donde 5,75 representaba la cantidad *Ptm*.

34. Marta: Precio de todo el té de mezcla, [cinco por cuarenta y cinco].
35. Eva: [Eso por cuarenta y cinco más equis.]
36. Marta: Sí. Esto… eso… (*Marta construye la expresión “5.75*(45+x)”, que es asignada a la cantidad “precio de todo el té mezcla”. Se activa la ventana de ecuaciones.*)

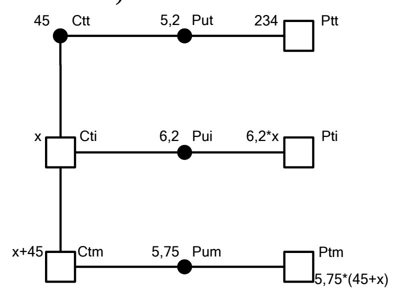


Figura 6.230. Grafo después del ítem 36.

La pareja inicia el cuarto paso del método cartesiano y, de manera inmediata, Marta espeta “la suma… ¿no?” (ítem 38). La estudiante parece tener ya en mente la relación no usada *Ptm* = *Ptt* + *Pti* y sobre la que construirán la ecuación. Eva apoya la idea esbozada por su pareja e inician los pasos necesarios para representar la ecuación en el sistema (ítems 39 a 48). La pareja no muestra ninguna dificultad en el proceso de escritura de la ecuación en el sistema y completan el planteamiento del problema en un breve espacio de tiempo.

37. Eva: A ver, ahora tiene que dar…
38. Marta: La suma… ¿no?
39. Eva: Eso… el último… es que no se ve bien… (*Marta coloca el ratón sobre el botón “5.75*(45+x)” hasta que se ve la expresión.*)
40. Eva: Eso… (*Marta construye “5.75*(45+x)…”.*)
41. Marta: [El precio de mezcla igual…] (*Marta prosigue “5.75*(45+x)=…”.*)
42. Eva: … tiene que ir luego… No (*se refiere a que el ratón está sobre “45+x”*), que eso (*“6.2*x”*)… (*Marta prosigue “5.75*(45+x)=(6.2*x)…”.*)
43. Marta: Por, no, más… el otro…
44. Eva: [Más eso]. (*Marta coloca el ratón sobre el botón “234” haciendo visible el nombre de la cantidad.*)
45. Eva: Más eso, pon más eso.

46. Marta: Éste (*sobre el botón “234”*) es todo el té… del otro…

47. Eva: Del otro. (*Marta finaliza la ecuación “5.75*(45+x)=(6.2*x)+234”, que es identificada como válida por el tutor.*)

48. Marta: Vale.

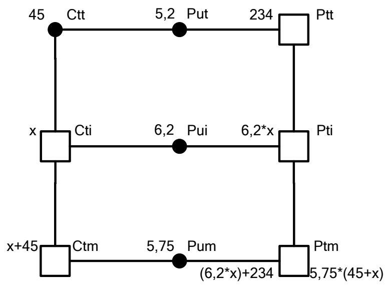


Figura 6.231. Grafo al final de la resolución.

6.5.4.3. El caso de la pareja Eva-Marta en el problema “Amelia y Enrique”

Amelia tiene el triple de edad que su hermano Enrique, pero dentro de 5 años la edad de Amelia será sólo el doble. ¿Cuál es la edad de cada uno?

Eva lee en voz alta el enunciado del problema. Las primeras acciones de la pareja están orientadas a asignar valor a las cantidades conocidas. Por este orden la pareja declara en el sistema las cantidades *tres para hacer el triple* (*Tt)* (ítem 3), *dos para hacer el doble* (*Dd*) (ítem 5) y *tiempo transcurrido* (*T*) (ítem 7).

1. (*Eva lee el enunciado en voz alta. La cantidad activa es “tres para hacer el triple”.*)

2. Marta: Tres.

3. (*Eva asigna el valor “3” a la cantidad activa. La cantidad activa es “dos para hacer el doble”.*)

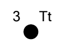


Figura 6.232. Grafo después del ítem 3.

4. Marta: Dos.

5. (*Eva asigna el valor “2” a la cantidad activa. La cantidad activa pasa a ser “tiempo transcurrido”.*)

Figura 6.233. Grafo después del ítem 5.

6. Eva: Cinco.
7. Marta: Cinco. (Eva asigna el valor “5” a la cantidad activa. La cantidad activa pasa a ser “edad actual de Amelia”.)

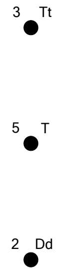


Figura 6.234. Grafo después del ítem 7.

8. Eva: Eh… pon… (*Marta activa la opción “expresión”*.)
9. Eva: No, primero hay que poner la de Enrique…
10. Marta: [Es verdad.
11. (*Marta activa la opción “número”, despliega la lista de cantidades y activa la cantidad “edad actual de Enrique”*.)
12. (*Eva asigna la letra “x” a la cantidad “edad actual de Enrique”. La cantidad activa es “edad actual de Amelia”*.)

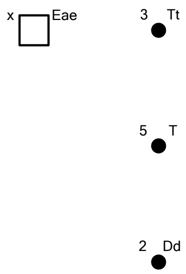


Figura 6.235. Grafo después del ítem 12.

La primera de las cantidades desconocidas propuestas por el tutor es la *edad actual de Amelia* (*Eaa*). Marta activa la opción *expresión* lo que parece indicar que desea designar esta cantidad mediante una expresión algebraica, muy probablemente usando la relación *Eaa* = *Tt*·*Eae* (ítem 8). Eva reacciona indicando que tienen que definir previamente la edad actual de Enrique (*Eae*). La opción más plausible es que la estudiante observe la acción de su pareja y considere que desea representar *Eaa* mediante la expresión algebraica 3*x*, siendo necesario en el tutor definir con antelación qué cantidad designa la *equis*. Otra opción sería que desee evitar la inversión que sería necesaria para representar la relación de que la edad actual de la hermana es el triple de la de su hermano en el caso de que simbolizaran la cantidad *Eaa* con antelación a *Eae*. Con independencia de las causas que lo generan, Eva asigna la letra equis en el sistema a la cantidad *Eae* (ítem 12).

Eva hace uso de esta letra para representa la cantidad *Eaa* mediante la expresión algebraica 3*x* (ítem 14). Marta (ítem 15) parece necesitar que su compañera justifique la expresión propuesta lo que hace mediante una escueta verbalización de la relación multiplicativa *Eaa* = *Tt*·*Eae* (ítem 16). Marta, sin formular palabra, construye la expresión en el sistema (ítem 17).

13. (*Marta activa la opción "expresión".*)

14. Eva: Actual de Amelia, tres por equis.

15. Marta: ¿Por qué?

16. Eva: Porque es el triple que la del hermano…

17. (*Marta construye la expresión "x*3", que es asignada a la cantidad "edad actual de Amelia". La cantidad activa pasa a ser "edad futura de Amelia".*)

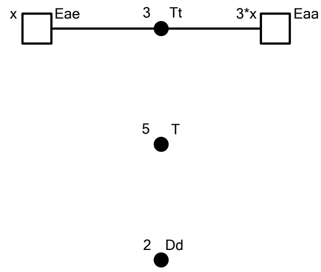


Figura 6.236. Grafo después del ítem 17.

El tutor sugiere la definición de la edad futura de Amelia (*Efa*). Eva verbaliza una expresión algebraica 3*x* + 5 que conlleva usar la estructura conceptual por la cual la edad futura puede ser expresada como la edad actual más el tiempo transcurrido (ítem 19). Marta apoya la idea (ítem 20) e introduce la expresión en el sistema (ítem 21).

18. Marta: Edad futura de Amelia…

19. Eva: Tres equis más cinco…

20. Marta: Sí.

21. (*Marta construye la expresión "3*x+5", que es asignada a la cantidad "edad futura de Amelia". La cantidad activa pasa a ser "edad futura de Enrique".*)

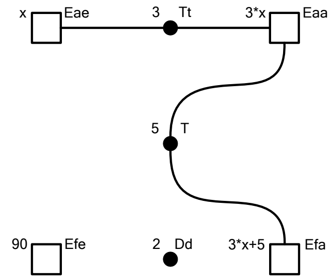


Figura 6.237. Grafo después del ítem 21.

De manera análoga proceden para definir la edad futura de Enrique, *Efe*, para lo cual construyen la expresión *x* + 5 que supone plasmar en el tutor la relación aditiva *Efe* = *Eae* + *T* (ítem 23). Hasta el momento los estudiantes han replicado el planteamiento que ambos estudiantes hicieron en la prueba escrita.

22. Marta: ¿Equis más cinco?

23. (*Marta construye la expresión "x+5", que es asignada a la cantidad activa.*)

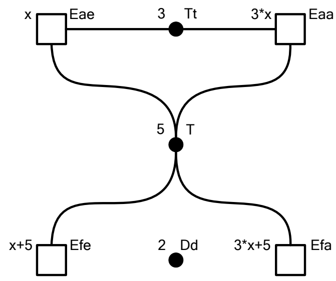


Figura 6.238. Grafo después del ítem 23.

La pareja inicia el cuarto paso del método cartesiano centrando de inmediato la atención en la relación no usada aún. Así,

24. Eva: Entonces, ahora, Amelia será sólo el doble… entonces esto…

25. Marta: ¿Cuál de Amelia?

26. Eva: Eso. (*Marta está señalando con el ratón el botón "3*x+5".*)

Eva verbaliza de manera ambigua que "Amelia será sólo el doble" (ítem 24). Esta manera de referirse a las cantidades, quizá favorecida por el contexto, imposibilita saber a qué cantidad se refiere, si a la edad actual o a la futura. Marta, consciente de este hecho, interrumpe a su compañera y le solicita que aclare este aspecto. Ella está señalando con el ratón la expresión algebraica que representa la cantidad *Efa* (ítem 26) pero Eva haciendo uso de deícticos y apoyándose en los movimientos con el ratón de su pareja, describe la ecuación invertida (x + 5) = 2(3x + 5) (ítems 27 y 29). Marta parece algo sorprendida y le interpela para conocer si realmente quiere construir el segundo miembro de esta forma (ítem 31). Eva empieza a mostrar dudas sobre la relación debiera ser *Efa* = *Dd*·*Efe* ó *Efa* = *Dd*·*Eaa* (ítem 32). Finalmente deciden probar la primera opción, que involucra las edades futuras aunque ofrecen un error de inversión (ítem 36 a 38) aunque Eva prevé que esa ecuación no puede ser válida (ítem 39).

27. Eva: …pero ésta tiene que ser el doble que ésta. (*Marta cambia y señala "x+5".*)
28. Marta: Esto por… (*El ratón sobre "x+5", con la etiqueta "edad futura de Enrique visible".*)
29. Eva: Esto sería igual que el doble de esto.
30. (*Marta construye la ecuación "(x+5)=…".*)
31. Marta: Eh… ¿dos por esto? (*Marta cambia a "3*x+5" cuando dice "esto".*)
32. Eva: No. Espera. Es por ésta o por ésta… (*Señala los botones "3*x" y "3*x+5".*)
33. (*Silencio de diez segundos. Marta repasa el enunciado en silencio.*)
34. Marta: Es que…es que entonces la equis, tendrían menos…
35. Eva: [la edad que tendrían dentro de cinco años] cuál es la edad de ahora.
36. Marta: Pues… entonces ésta, ¿no? (*Marta señala el botón "3*x+5".*)
37. Eva: Dos por eso.
38. Marta: ¿No? (*Marta construye la ecuación "(x+5)=2*(3*x+5)".*)
39. Eva: Eso no puede ser… tú, dale, dale, pero eso no puede ser. (*Marta valida la ecuación, que es identificada como errónea.*)

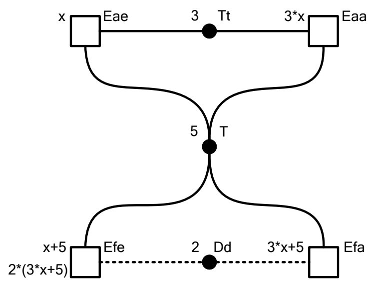


Figura 6.239. Grafo después del ítem 39.

Tras constatar que la ecuación es incorrecta, la pareja procede a modificar la ecuación para evaluar si la relación de comparación se refiere a las edades actual y futura de Amelia, sin considerar la posibilidad de que la ecuación no representa correctamente la comparación descrita en el enunciado pero que las cantidades usadas sí pueden haber sido seleccionadas correctamente. En resumen, la pareja construye la ecuación (x + 5) = 2*(3x), que es rechazada por el sistema (ítem 43).

40. (*Marta posa el ratón sobre el botón "x+5".*)
41. Eva: Es eso igual a… (*Marta escribe "(x+5)=…".*)
42. Eva: …al doble que la que tenía antes… pon eso.
43. (*Marta finaliza "(x+5)=2*(3*x)", que es identificada como errónea.*)

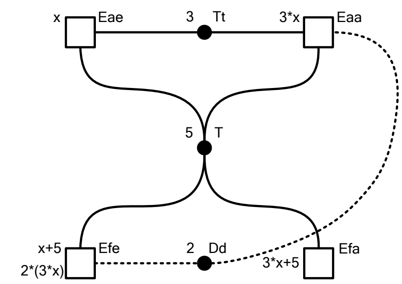


Figura 6.240. Grafo después del ítem 43.

El rechazo de las dos ecuaciones desalienta a la pareja, especialmente a Eva quien entendía que la situación debía corresponder obligatoriamente con alguna de las ecuaciones planteadas. Tras unos segundos de reflexión empiezan a revisar las cantidades involucradas con el fin de acotar el error. El problema de esta estrategia es que el error no reside en las cantidades seleccionadas sino en la forma de construir la ecuación que da lugar a ecuaciones invertidas. De hecho, algunas de las verbalización de Eva parecen recoger que entiende correctamente la relación que pretenden representar (ítem 60 y 63), pero esto no se traduce en la construcción de una ecuación correcta. Es más, Marta termina planteando una ecuación en la que se relacionan multiplicativamente mediante la cantidad *Dd*, las edades actual y futura de Enrique (ítem 65). Esta iniciativa parece perder la perspectiva de traducir la comparación dada en el enunciado pues no considera ninguna cantidad referente a la hermana.

44. Eva: Entonces no lo entiendo. (Marta se ríe.)
45. (*Marta borra la ventana de ecuaciones.*)
46. Marta: A ver…
47. Eva: [Tenía… tiene el triple que Enrique. Dentro de cinco años…
48. (*Silencio de diez segundos.*)
49. Marta: Es que… (*Marta repasa la ventana de cantidades.*)
50. Marta: …ésta es la edad futura de Amelia… (*Marta señala "3*x+5" en la ventana de cantidades.*)
51. Eva: [¡Claro! Si es el triple más los cinco años que pasan.
52. Eva: Tiene el triple que su hermano Enrique pero dentro de cinco años la edad de Amelia será sólo el doble. (*Eva relee el enunciado entre susurros.*)
53. (*Silencio de diez segundos.*)
54. Eva: Entonces esto sería igual que esto por esto. Dentro de cinco años. (Eva señala la pantalla.)
55. Marta: Eh… (*Marta va del botón "x" al "x+5", dudando.*)
56. Eva: Esto. (*Eva enuncia cuando el ratón está sobre "x+5".*)
57. Marta: Esto es la edad de Enrique…
58. Eva: ¡Ya! Sería que igual que eso por eso, la de Amelia sería sólo el doble.
59. Marta: Pero ésta es la edad de Enrique. (*Ahora Marta señala "x", haciendo visible la etiqueta "edad actual de Enrique".*)
60. Eva: ¿No será el doble de la de Enrique?
61. (*Marta señala "x+5", haciendo visible la etiqueta "edad futura de Enrique".*)
62. Marta: Es la edad… (*Marta señala en el enunciado "dentro de 5 años".*)
63. Eva: Amelia tiene que ser el doble que la del otro.
64. (*Silencio de diez segundos. Marta repasa los botones "5", "2", "x" y "x+5".*)
65. Marta: Bueno… (*Marta escribe "(x+5)=2*x".*)
66. Marta: Yo creo que no, ¿eh? (*Marta valida la ecuación, que es identificada como errónea.*)

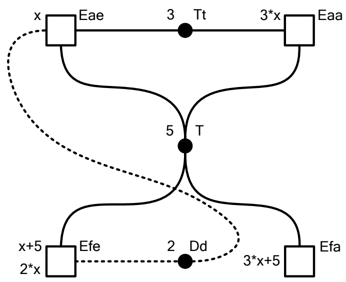


Figura 6.241. Grafo después del ítem 66.

La pareja empieza a mostrar claros signos de desesperación (ítem 67) y no parecen capaces de salir de este punto del proceso de resolución. Obviamente, ambas estudiantes tienen en mente que la solución estriba por poner en una ecuación la relación aún no usada que relaciona dos cantidades multiplicativamente mediante el valor *Dd*. En el intento de justificar su propuesta aparecen verbalizaciones inexactas como la de Eva cuando indica "Equis es igual a tres por equis" (ítem 70), que si bien es cierto que estas incorrecciones pueden florecer en el contexto de un diálogo veloz y que parece posible que la estudiante quiere referirse a que *Eaa* es igual a la expresión algebraica *3x*, también podría considerarse que esconde incomprensiones en relación con el significado de una ecuación y que pueden dificultar la detección de errores de inversión.

Prueba del agotamiento de alternativas es que vuelven a plantear la ecuación (3*x)*2 = (x + 5), que había sido ya rechazada por el tutor minutos antes.

67. Eva: Ya me he rayao (sic). (*Marta borra la ventana de ecuaciones.*)
68. Marta: A ver…
69. (*Silencio de diez segundos. Marta pasa de estar sobre el botón "3*x" al botón "x+5", haciendo visible el nombre de la cantidad.*)
70. Eva: Equis es igual a tres por equis. Eso lo sabemos, porque es el triple…
71. Marta: Sí. (*Marta posa el ratón sobre el botón "3*x", haciendo visible el nombre "edad actual de Amelia".*)
72. Eva: …entonces si tiene que ser… no lo entiendo.
73. Marta: Y no será…
74. (*Marta escribe la ecuación"(3*x)…".*)
75. Marta: …la edad actual de Amelia por dos igual a la edad… (*Mientras habla se va poniendo sobre los botones, se pone sobre "3*x+5", haciendo visible "edad futura de Amelia".*)
76. Marta: …ehhh… (*Marta se posa sobre "x+5", haciendo visible "edad futura de Enrique".*)
77. Marta: …futura de Enrique. Que eso lo hemos hecho…
78. Eva: No.
79. Marta: ¿No?
80. Eva: No sé si lo hemos hecho. Prueba…
81. (*Marta continúa "(3*x)*2=(x+5)".*)
82. Eva: …pero yo creo que eso no es.
83. (Marta valida la ecuación, que es identificada como errónea.)

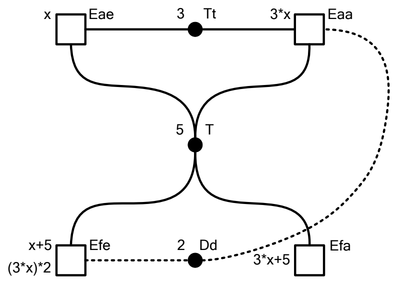


Figura 6.242. Grafo después del ítem 83.

Eva solicita la posibilidad de pedir ayudas al tutor (ítem 87) pero el profesor les invita a que dediquen algunos segundos más a pensar el problema (ítem 88). Tras ello, sin que medie ninguna justificación, Eva propone una ecuación que representaría la relación errónea *Efa* = *Dd*·*Eaa* aunque, por vez primera, la escritura no reflejaría un error de

84. Eva: ¿Ves?
85. (*Marta borra la ventana de ecuaciones. Empieza a repasar el enunciado.*)
86. Marta: A ver…
87. Eva: Mmm… ¿podemos usar ayudas? (Eva se dirige al profesor.)
88. Profesor: No, pensadlo un poco.
89. Eva: A ver…
90. Marta: Y…
91. Eva: …ésta luego sólo va a ser… (*Eva escribe "(3*x+5)=…".*)

inversión. Eva solicita la validación de la ecuación aunque previamente anticipa que cree que no es correcta (ítem 109).

92. Marta: [Eso te iba a decir…

93. (*Eva escribe "(3*x+5)=3...".*)

94. Eva: No…

95. Marta: [No, el triple no.

96. (*Eva borra la ventana de ecuaciones.*)

97. (*Eva escribe "(3*x+5)…". Pulsa el botón "3*x+5" cuando la etiqueta se hace visible: "edad futura de Amelia".*)

98. Marta: Edad futura de Amelia… (*Eva prosigue "(3*x+5)=…".*)

99. (*Eva se coloca sobre el botón "3*x".*)

100. Marta: Ésta es… (*Marta deja de hablar cuando se hace visible la etiqueta "edad actual de Amelia".*)

101. Eva: La actual.

102. (*Eva escribe "(3*x+5)=(3*x)…".*)

103. Marta: Por dos. ¿O qué es lo que querías hacer tú?

104. Eva: Algo de eso, pero eso tampoco está bien. Eso no va a dar, eso no es.

105. (*Eva escribe "(3*x+5)=(3*x)*…". Coloca el ratón sobre el botón "Borrar".*)

106. Marta: Es que también lo estaba pensando.

107. Eva: Eso no es.

108. Marta: Pues probamos otro… (se ríe).

109. (*Eva escribe "(3*x+5)=(3*x)*2", que es identificada como errónea por el tutor.*)

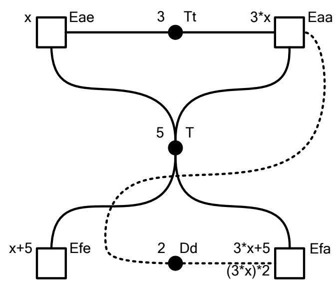


Figura 6.243. Grafo después del ítem 109.

La resolución parece destinada a ser abandonada, pues cada vez se producen más momentos de silencio. En un momento dado, Eva espeta "a lo mejor es que el dos no hay que multiplicárselo a la edad de Amelia" (ítem 117) y segundos después añade "será el doble que la de Enrique…" (ítem 125), que Marta complementa con "dentro de cinco años" (ítem 126). A partir de este diálogo repleto de silencios y frases inacabadas, Marta construye la ecuación correcta 2(*x*

110. Eva: Si eso no iba a ser, si ya lo sabía yo…

111. (*Silencio de diez segundos.*)

112. Profesor: ¿Qué estáis intentando representar?

113. Eva: La edad de Amelia.

114. (*Silencio de cinco segundos.*)

115. Eva: Pero, Amelia…

116. Marta: ¿Cuál es la edad de cada uno? (*Marta relee el enunciado.*)

117. Eva: A lo mejor es que el dos no hay que multiplicárselo a la edad de Amelia...

118. (*Silencio de diez segundos. Marta repasa la ventana de cantidades.*)

+ 5) = 3*x*+5 y la valida en el sistema (ítem 134).

119. Eva: Mmm, mmm, mmm.
120. (*Silencio de diez segundos.*)
121. Eva: No tengo ni idea.
122. Marta: Yo tampoco. Porque…
123. (*Silencio de diez segundos.*)
124. Marta: …dentro de cinco años la edad de Amelia… (*Marta relee el enunciado.*)
125. Eva: …será el doble…que la de Enrique.
126. Marta: …dentro de cinco años.
127. Marta: Y…
128. Eva: ¿Y qué?
129. Marta: ¿Hemos multiplicado la de Enrique por dos?
130. Eva: ¿Y a qué se iguala?
131. Marta: A la edad futura de Amelia.
132. Eva: Pero, a la de Enrique hoy… No.
133. Marta: La futura. (*Marta escribe la ecuación "2*(x+5)=(3*x+5)", que es validada por el tutor.*)
134. Marta: ¡Ye! (*Se ríen.*)

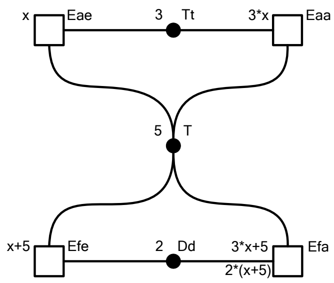


Figura 6.244. Grafo al final de la resolución.

6.5.4.4. El caso de la pareja Eva-Marta en el problema "Dos coches"

Albacete y Madrid distan 300 km entre sí. A la misma hora parte de Albacete un coche hacia Madrid con una velocidad de 90 km/h., y de Madrid parte otro hacia Albacete con una velocidad de 60 km/h. Dígase a qué distancia de Albacete se encuentran ambos coches.

Eva lee el enunciado en voz alta (ítem 1) y la pareja afronta en primer lugar la asignación de valor a las cantidades conocidas. Por este orden, dan valor en el sistema a las cantidades *distancia entre Albacete y Madrid*, *S* (ítem 5); *velocidad del coche que sale de Albacete*, *Vsa* (ítem 6); y *velocidad del coche que sale de Madrid*, *Vsm* (ítem 9).

1. (Eva lee el enunciado en voz alta. *La cantidad activa es "distancia entre Albacete y Madrid".*)
2. Marta: Distancia entre Albacete y Madrid. (*Lee la descripción de la cantidad activa.*)
3. (*Eva empieza a escribir "2…".*)
4. Marta: No, trescientos.
5. (*Eva rectifica y asigna el valor "300" a la cantidad "distancia entre Albacete y Madrid". La cantidad activa pasa a ser "velocidad del coche que sale de*

Albacete”.)

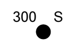


Figura 6.245. Grafo después del ítem 5.

6. Eva: Velocidad del que sale de Albacete, noventa. (*Eva asigna el valor “90” a la cantidad “velocidad del coche que sale de Albacete”. La cantidad activa pasa a ser “velocidad del coche que sale de Madrid”.*)

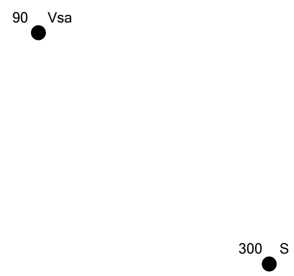


Figura 6.246. Grafo después del ítem 6.

7. Eva: El coche que sale de Madrid…

8. Marta: Sesenta.

9. (*Eva asigna el valor “60” a la cantidad “velocidad del coche que sale de Madrid”. La cantidad activa pasa a ser “distancia recorrida por el coche que sale de Albacete hasta encontrarse”.*)

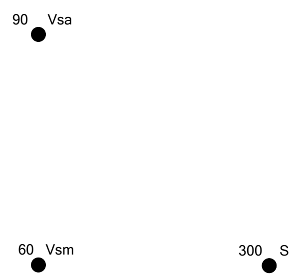


Figura 6.247. Grafo después del ítem 9.

Después de definir todas las cantidades conocidas, la primera de las cantidades desconocidas que se disponen a representar en el sistema es *la distancia recorrida por el coche que sale de Albacete hasta encontrarse*, *Ssa* (ítem 10). Eva pregunta qué cantidad deben designar con la letra *equis* (ítem 11).

10. Marta: Distancia recorrida por el coche que sale de Albacete hasta encontrarse. (*Lee la cantidad activa, lo que le obliga a desplegar la lista de cantidades dada la extensión de la etiqueta. Luego la cierra sin cambiar la cantidad activa.*)

11. Eva: ¿A cuál la llamamos *equis*?

12. Marta: A ésta misma, ¿no?

13. Eva: A mí me da igual, vale.

14. (*Eva asigna la letra “x” a la cantidad*

“distancia recorrida por el coche que sale de Albacete hasta encontrarse”. La cantidad activa pasa a ser “distancia recorrida por el coche que sale de Madrid hasta encontrarse”.)

Marta propone representar así *Ssa*, pero la forma de expresarse denota que considera indiferente hacerlo para cualquiera de las cantidades desconocidas (ítem 12). En el mismo sentido se manifiesta la propia Eva (ítem 13). De este modo, la pareja simboliza en el programa la cantidad *Ssa* con la letra *equis* (ítem 14).

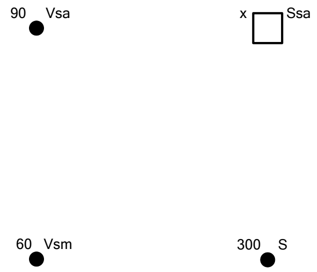


Figura 6.248. Grafo después del ítem 14.

La siguiente de las cantidades desconocidas que abordan es la distancia recorrida por otro móvil. Eva propone representar *Ssm* mediante la expresión algebraica $300 - x$ (ítem 16). Esta expresión conlleva la aplicación correcta de la relación aditiva $S = Ssa + Ssm$. Marta se muestra conforme (ítem 17) e introduce la expresión en el sistema (ítem 19).

15. Marta: Distancia recorr… ¿esto qué sería? (*Marta coloca el ratón sobre la opción “expresión”.*)
16. Eva: Trescientos menos equis.
17. Marta: Sí, ponlo. (*Eva activa la opción expresión.*)
18. Eva: No, lo tienes que poner tú.
19. (*Marta construye la expresión “300−x”, que es asignada a la cantidad “distancia recorrida por el coche que sale de Madrid hasta encontrarse”. La cantidad activa pasa a ser “tiempo que tardan en encontrarse”.*)

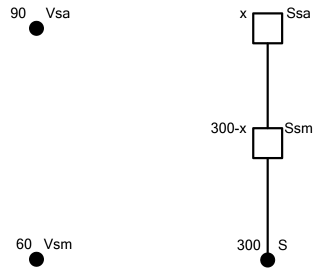


Figura 6.249. Grafo después del ítem 19.

Ante la última de las cantidades desconocidas, *el tiempo que tardan en encontrarse* (*T*), Marta sugiere usar una segunda letra para denotarla (ítem 21). En cambio, Eva parece mostrarse reacia alegando que no “quieren saber” la cantidad *T* sino la distancia, sin concretar cuál de las dos (ítem 23). Esta actuación es muy relevante pues apunta a que la estudiante asocia que la designación mediante letras está destinada a aquellas cantidades que son el objetivo del problema. Marta parece tratar de explicar en su respuesta que la segunda letra ha de ser usada en la ecuación que han de

20. Eva: Tiempo que tardan en encontrarse…
21. Marta: Otra incógnita, ¿no?
22. (*Silencio de diez segundos*)
23. Eva: ¿Para qué queremos saber el tiempo si tenemos… si tenemos que sacar la distancia? (*Eva se dirige al profesor.)*
24. Marta: Porque la ecuación… ¿no te acuerdas que era…
25. Eva: [No, no me acuerdo].
26. Marta: ¡Qué sí! Que yo me acuerdo de algo de eso…
27. Eva: [Entonces, ¿qué? ¿otra incógnita?]
28. Marta: …teníamos que poner la incógnita de *te*…
29. Eva: Ah, pues ponemos una letra. (*Eva asigna la letra “t” a la cantidad “tiempo que tardan en encontrarse”. Se activa la*

plantear (ítems 24 y 26). Aunque su compañera afirma no recordar ese aspecto, aprueba el uso de otra letra (ítem 29). De esta manera, Eva representa la cantidad *T* mediante la letra *t* (ítem 29).

ventana de ecuaciones.)

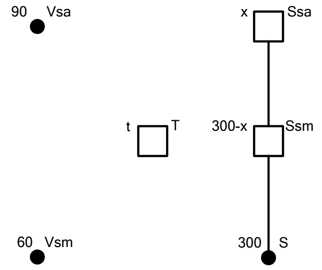


Figura 6. 250.Grafo después del ítem 29.

Marta inicia el cuarto paso del método cartesiano solicitando a su compañera que asuma el control del proceso de resolución e indique cómo deben obrar (ítem 30). En respuesta, Eva verbaliza la estructura conceptual distancia-velocidad-tiempo (ítem 31). Una vez presentada la estructura, Eva estudia cómo aplicarla en el problema y empieza a escribir una ecuación sobre la cantidad *Ssa* (ítem 33). La estudiante, trabajando autónomamente, construye la ecuación errónea $x = 60t$ que reflejaría la relación multiplicativa errónea $Ssa = Vsm{\cdot}T$ (ítem 35). La ecuación errónea parece responder a una confusión entre las cantidades *Vsm* y *Vsa*.

30. Marta: ¿Y ahora?
31. Eva: Entonces, la distancia es igual a la velocidad por el tiempo, entonces…
32. Marta: A ver…
33. Eva: …si es lo que tarda éste, es equis… equis hemos puesto que es el de Albacete, sí, entonces es equis igual… (*Marta construye la expresión "x=…".*)
34. Eva: a sesenta por *te*. (*Eva antes de pulsar el botón "60" espera a que sea visible la etiqueta, a pesar de lo cual escribe "x=60…".*)
35. Marta: Pero… ¿esto? (*Marta finaliza la ecuación "x=60*t". Marta parece reacia.*)
36. Eva: Dale.
37. (*Marta valida la ecuación, que es identificada como errónea.*)
38. Eva: Ah, no.

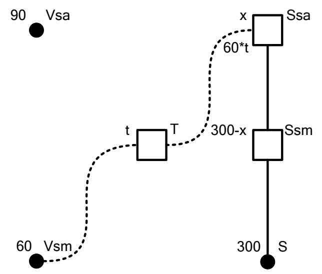


Figura 6.251. Grafo después del ítem 38.

A pesar de la rapidez y aparente seguridad con la que habían abordado la construcción de la primera ecuación, es llamativo que ante el mensaje de error no examinen en profundidad la ecuación con vistas a corregir posibles errores. Por el contrario, desechan la ecuación con rapidez y se disponen a analizar alternativas diferentes (ítem 39).

Reflexionando sobre el problema, ambas concuerdan en que el uso de dos incógnitas implica la necesidad de

39. Marta: No, porque… (*Marta borra la ecuación*)
40. (*Silencio de diez segundos. Marta repasa la ventana de cantidades.*)
41. Marta: A ver…
42. (*Silencio de diez segundos.*)
43. Marta: Si tenemos dos incógnitas, debería ser un sistema, ¿no?
44. Eva: Dos.
45. Marta: Dos…
46. Eva: Dos ecuaciones.
47. Marta: Exactamente.
48. Eva: Claro.

construir un sistema de dos ecuaciones (ítems 43 a 47).

La pareja vuelve a centrarse en cómo escribir la primera de las ecuaciones (ítem 49). Eva duda si la estructura conceptual era tal y como había verbalizado anteriormente o si, en cambio, la distancia es calculada dividiendo el espacio por el tiempo. Así, vuelven a usar las mismas cantidades que en la primera tentativa pero esta vez con la ecuación $x = 60/t$, que es rechazada por el tutor (ítem 55).

49. Marta: Pero no… ¿esto cómo se haría?
50. Eva: A ver la distancia es igual la velocidad por el tiempo… ¿o la velocidad entre el tiempo? ¿O el qué? Prueba ahí (ininteligible)… equis igual a sesenta entre t.
51. (*Marta escribe la ecuación “x=60…”.*)
52. Eva: Es que de eso no me acuerdo… (*Marta escribe la ecuación “x=60/t”.*)
53. Marta: O *te* entre sesenta…
54. Eva: [No.]
55. Eva: No. Lo que… (*Marta valida la ecuación, que es identificada como errónea. Este hecho interrumpe la verbalización de Eva.*)

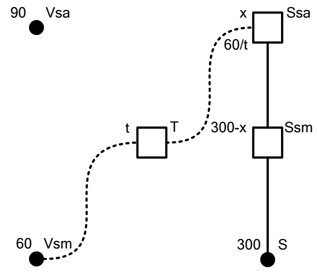


Figura 6.252. Grafo después del ítem 55.

Al recibir una nueva notificación de error, la pareja se centra en revisar la ventana de cantidades y estudiar la representación de cada una de las cantidades (ítem 57). Eva sugiere usar la cantidad denotada por la expresión algebraica $300 - x$, lo que lleva a Marta a habilitar que se haga visible la etiqueta de dicha cantidad y que identifiquen que refiere a *Ssm* (ítem 59). Parece que es en este momento cuando Eva repara en que estaban relacionando las cantidades *Vsm* y *Ssa* (ítem 61) por lo que acotaría el error. De hecho, tras esa intervención, en pocos pasos construye la ecuación correcta $x = 90t$ (ítem 67) plasmando la relación $Ssa = Vsm \cdot T$.

56. Marta: No. (*Marta borra la ecuación.*)
57. (*Silencio de diez segundos. Marta repasa la ventana de cantidades.*)
58. Eva: Haz éste. (*Eva señala con el dedo el botón “300−x”.*)
59. Marta: Trescientos… (*Marta coloca el ratón sobre la cantidad “300−x”, hasta que aparece la etiqueta.*)
60. Marta: …vale, ésta es la de Madrid. Sería…
61. Eva: Es que claro, el que va, el que va… el que sale de de Albacete va a noventa, no a sesenta…
62. Marta: Y estamos poniendo sesenta…
63. Eva: Prueba eso.
64. (*Marta empieza la ecuación “x=…”.*)
65. Marta: ¿Noventa entre t?
66. Eva: Noventa por t.
67. (*Marta finaliza la ecuación “x=90*t”, que es identificada como correcta.*)

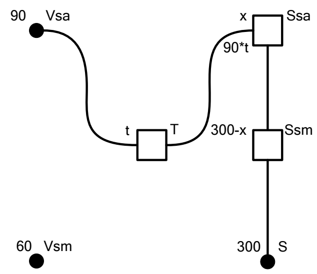


Figura 6.253. Grafo después del ítem 67.

La pareja, trabajando de forma colaborativa, escribe en pocos segundos la segunda de las ecuaciones. En el proceso apenas se produce verbalización, simplemente reflejan el proceso de construcción en el que usan la relación $Ssm = Vsm \cdot T$. De este modo, la pareja propone a validación la ecuación $300 - x = 60t$, que es aceptada por el sistema (ítem 73).

68. Eva: Ah, claro.
69. Marta: Ah.
70. Eva: Trescientos… ése… (*"Ése" es dicho cuando Marta posa el ratón sobre "300−x" y justo al hacerse visible la etiqueta.*)
71. Eva: …igual a… (*Marta escribe "(300−x)=…".*)
72. Marta: [A sesenta…] (*Marta escribe "(300−x)=60...".*)
73. Eva: …a sesenta por *te*. (*Marta escribe "(300−x)=60*t", que es validada por el tutor.*)
74. Marta: Ajá.
75. Eva: Ajá. Ahora.

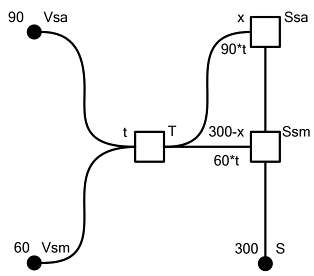


Figura 6.254. Grafo al final de la resolución.

6.5.4.5. El caso de la pareja Eva-Marta en el problema "El alcance"

Un ciclista parte de la ciudad A hacia la ciudad B. Cuatro horas más tarde parte un motorista de A hacia B al triple de velocidad que el ciclista. ¿Cuánto tiempo transcurre desde que sale el motorista hasta que alcanza al ciclista?

Eva lee el enunciado del problema en voz alta, tras lo cual hace lo propio con la descripción de la cantidad desconocida *velocidad del ciclista, Vc*. Sin consultar el resto de cantidades, propone representar

1. (*Eva lee el enunciado en voz alta. La cantidad activa es "velocidad del ciclista".*)
2. Eva: La velocidad del ciclista, *equis*. (*Marta asigna la letra "x" a la cantidad activa. La cantidad activa pasa a ser "velocidad del motorista".*)

Vc mediante la letra *equis* (ítem 2). Marta, sin pronunciar palabra, acata la sugerencia y la refleja en el sistema (ítem 2).

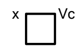


Figura 6.255. Grafo después del ítem 2.

Ante la siguiente de las cantidades, *la velocidad del motorista*, *Vm*, Marta plantea usar una segunda letra (ítem 3). Sin embargo, Eva rechaza esta opción en favor de construir una expresión que refleje el hecho de que el motorista circula al triple de velocidad que el ciclista (ítem 4). La idea convence a Marta (ítem 5), quien es consciente de que para representar la expresión 3*x* en el tutor, necesitan previamente asignar valor a la cantidad conocida *tres para hacer el triple*, *Tt*. En consecuencia, declara dicha cantidad en el sistema (ítem 7) como paso previo a la representación de *Vm* mediante la expresión 3*x* (ítem 8).

3. Marta: ¿*y*?
4. Eva: No, tres equis, es el triple. (*Marta repasa el enunciado.*)
5. Marta: Ah, vale, sí, sí.
6. Eva: Pero hay que poner…
7. Marta: …el tres para el triple. (*Marta despliega la lista de cantidades. Activa la cantidad "tres para hacer el triple". Eva asigna el valor "3" a la cantidad activa. La cantidad activa vuelve a ser "velocidad del ciclista".*)

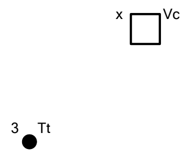


Figura 6.256. Grafo después del ítem 7.

8. Eva: Ahí tienes que poner tres por *equis*. (*Marta construye la expresión "3*x", que es asignada a la cantidad activa. La cantidad activa pasa a ser "distancia de A a la que se encuentran".*)

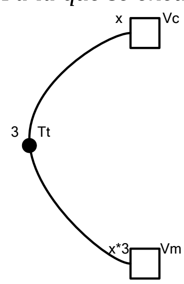


Figura 6.257. Grafo después del ítem 8.

La siguiente cantidad ofrecida por el tutor es la cantidad *distancia de A a la que se encuentran*, *S*. Nuevamente Marta propone usar una letra más (ítem 10). En este caso, dado que aún no han abordado la representación de ninguno de los

9. Eva: Distancia a la que se encuentran… distancia de A a la que se encuentran… a la distancia hay que ponerle otra…
10. Marta: …otra incógnita. (*Eva asigna la letra "y" a la cantidad "distancia de A a la que se encuentran". La cantidad activa pasa a ser "tiempo desde que sale el motorista hasta encontrarse".*)

tiempos, no tienen la posibilidad de construir una expresión algebraica para *S* si quieren atender a la definición de las cantidades en el orden sugerido por el tutor. De esta forma, consuman la simbolización de *S* mediante la letra *y* (ítem 10).

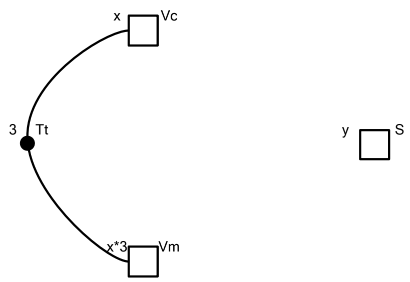


Figura 6.258. Grafo después del ítem 10.

En este instante la cantidad propuesta por el programa es el *tiempo desde que sale el motorista hasta encontrarse*, *Tm*. Marta quiere usar el valor 4 (ítem 12), en lo que parece un intento de representar *Tm* con ese valor más que en iniciar una expresión algebraica haciendo uso del mismo. Eva enfatiza que dicho valor informa de la diferencia entre los tiempos empleados por ciclista y motorista (ítem 13). A tenor de este comentario, Marta despliega la lista de cantidades e identifica la cantidad *horas de retraso con las que sale el motorista*, *Trm*, (ítem 15). Una vez seleccionada dicha cantidad, la declaran de manera correcta en el programa (ítem 16).

11. (*Silencio de diez segundos*.)
12. Marta: (inaudible) cuatro…
13. Eva: [Cuatro. Pero eso es lo que tarda… lo que… cuando sale el otro, cuatro horas después de que salga el ciclista…
14. Marta: Entonces… (*Marta despliega la lista de cantidades.*)
15. Marta: Éstas son cuatro… (*Marta activa la cantidad "horas de retraso con las que sale el motorista"*.)
16. (*Eva asigna el valor "4" a la cantidad activa. La cantidad activa pasa a ser "tiempo desde que sale el ciclista hasta encontrarse".)*

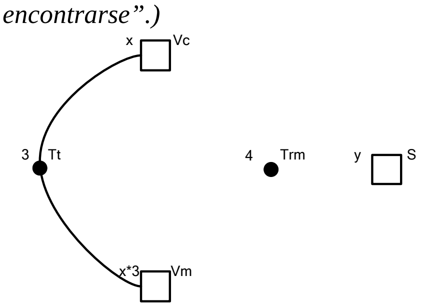


Figura 6.259. Grafo después del ítem 16.

Las dos cantidades pendientes de definir son las cantidades desconocidas *tiempo desde que sale el ciclista hasta encontrarse* (*Tc*) y *tiempo desde que sale el motorista hasta encontrarse* (*Tm*). Eva esboza que pueden representar la primera de ellas mediante una letra y la segunda haciendo uso de la relación $Tc = Tm + Trm$ (ítem 21). Marta, que parecía pensar en una relación a partir de la cantidad *S*, no visualiza la propuesta de su compañera aunque la verbalización de

17. (*Silencio de diez segundos*.)
18. Marta: Tiempo que sale… pues…
19. Eva: Éste tendría que ser…
20. Marta: [Será… ¿qué?]
21. Eva: …algo, y éste, el otro, algo menos cuatro.
22. Marta: Sí, será la distan… no, ¿por qué?
23. Eva: Es el tiempo. O sea que si a éste le ponemos *te*… (*Eva asigna la letra "t" a la cantidad "tiempo desde que sale el ciclista hasta encontrarse". Se activa la ventana de ecuaciones. La cantidad activa pasa a ser "tiempo desde que sale el motorista hasta encontrarse"*.)

Eva es bastante vaga y esto pudiera ser un factor relevante en las dudas de Marta (ítem 22). Marta decide despejar las dudas de su compañera plasmando lo que ha verbalizado sobre el sistema. Así, representa la cantidad Tc mediante la letra t (ítem 23), para inmediatamente hacer lo propio con Tm a través de la expresión algebraica $t-4$ (ítem 25).

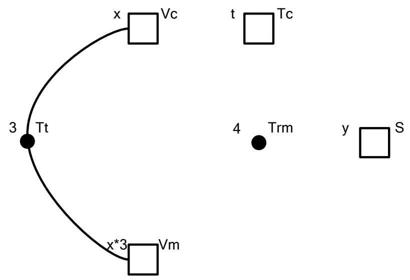


Figura 6.260. Grafo después del ítem 23.

24. Eva: … éste es *te* menos cuatro… (*Eva intenta escribir la expresión desde la opción “letra”, por lo que sólo consigue escribir “t…”.*)
25. Eva: …bueno, ponlo tú. (*Marta activa la opción “expresión” y construye la expresión “t−4”, que es asignada a la cantidad “tiempo desde que sale el motorista hasta encontrarse”.*)

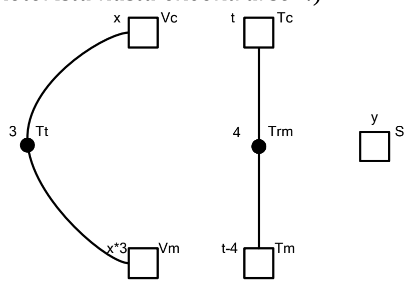


Figura 6.261. Grafo después del ítem 25.

La pareja aborda obligatoriamente el paso cuarto del MC, donde para construir las ecuaciones que dan respuesta del problema habrán de usar la estructura conceptual espacio-velocidad-tiempo para cada uno de los móviles. A pesar de que acaban de finalizar el tercer paso del MC, se ven forzados a consultar el significado de las letras x e y en la ventana de cantidades (ítem 28 y 31). Sin verbalización explícita, entre los ítems 29 y 37, escriben una ecuación que supone aplicar la estructura conceptual anteriormente comentada de manera correcta para el caso del ciclista. En concreto, validan la ecuación $y = x*t$ (ítem 37), lo que supone emplear correctamente la relación $S = Vc \cdot Tc$.

26. Marta: ¿Cuánto tiempo (inaudible)? (*Entre susurros Marta parece que relee el enunciado.*)
27. Eva: Entonces, mira el *y* éste… (*Marta apunta el botón “y”.*)
28. Marta: ¿El *y* qué era? (*Marta repasa la ventana de cantidades. Apunta la cantidad “y”.*)
29. Eva: La distancia. *y* sería igual… (Marta escribe la ecuación “*y*=…”.)
30. Eva: a *equis*…
31. Marta: ¿Qué es? (*Marta consulta la ventana de cantidades.*)
32. Eva: Si hacemos lo de… a *equis*… (*Marta escribe la ecuación “y=x…”.*)
33. Marta: [Por…
34. Eva: …por, espera, que no sé cómo lo hemos puesto… por *te* creo que hemos puesto…
35. Marta: Sí, por el tiempo. (*Marta repasa la ventana de cantidades.*)
36. Eva: Sí, *equis* por *te*. (*Marta escribe la ecuación “y=x*…”.*)
37. Eva: ¡*te* sólo! (*Marta escribe la ecuación “y=x*t”, que es identificada como correcta por el tutor. La verbalización de Eva se debe a que Marta estaba pasando por encima del botón “t−4”, aunque no*

parece que tuviera intención de pulsarlo.)

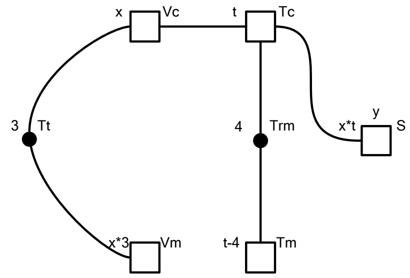


Figura 6.262. Grafo después del ítem 37.

De manera análoga construyen una segunda ecuación modelizando en este caso la situación para el motorista. De este modo, construyen y validan la ecuación $y = 3x*(t - 4)$ (ítem 45).

38. Eva: Luego, ésta…
39. Marta: La *y*. (*Marta escribe la ecuación "y…".*)
40. Eva: …sería igual… (*Marta escribe la ecuación "y=...".*)
41. Marta: Ah, claro, la del motorista.
42. Eva: A equis por tres… (*Marta escribe la ecuación "y=(x*3)...".*)
43. Eva: [por…
44. Marta: …por *te* menos cuatro. (*Marta escribe la ecuación "y=(x*3)*(t−4)", que es validada por el tutor.*)

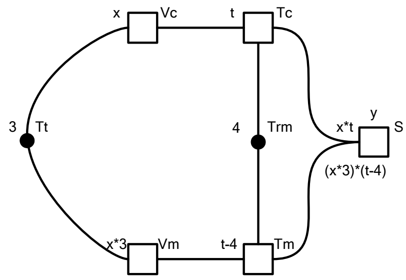


Figura 6.263. Grafo al final de la resolución.

A pesar de que el tutor informa de que el planteamiento es correcto, ninguna de las estudiantes vierte ningún comentario de congratulación o de alegría. Su manera de actuar pareciera señalar que no están plenamente convencidos de haber finalizado el problema. El profesor inicia un diálogo con la pareja para profundizar al respecto de esta cuestión. Les pregunta por el número de incógnitas usadas y el número de ecuaciones planteadas (ítems 53 y 55). Eva responde correctamente a ambas preguntas (ítems 54 y 56). Dado que estas preguntas no desencadenan más comentarios por parte de las estudiantes, el profesor les pregunta sí sabrían resolver el sistema (ítem 59) y llega a

45. Profesor: Vale, habéis planteado el sistema correctamente, ¿no?
46. Eva: Sí.
47. Profesor: Tenéis *y* es igual a *equis* por *te*, ¿verdad?
48. Eva: Sí.
49. Marta: Sí.
50. Profesor: E *y* es igual a *equis* por tres por *te* menos cuatro, ¿sí?
51. Eva: Sí.
52. Profesor: ¿Cuántas incógnitas tenéis ahí?
53. Eva: Tres.
54. Profesor: ¿Y cuántas ecuaciones habéis planteado?
55. Eva: Dos.
56. Profesor: ¿Sabríais dar la solución exacta del problema?
57. Eva: Sí… a ver, ¿exacta?
58. Profesor: Sí, sí… es decir, que resolváis el sistema.
59. Marta: [o sea, que lo resolvamos].
60. (El profesor escribe el sistema en un

escribir el sistema en un folio (ítem 61). Eva indica que deberían calcular el tiempo (ítem 64), aunque termina matizando que el tiempo lo calcularían en primer lugar, dando entender que posteriormente también determinarían las otras incógnitas (ítem 66). Marta hace alusión a que no han visto previamente este tipo de problemas (ítem 67) aunque su compañera la corrige y apunta que lo trabajaron el curso pasado (ítem 68).

Sea como fuere, ninguna realiza acción alguna sobre el sistema y parecen totalmente bloqueadas. Esto lleva al profesor a querer comentar que aunque no recuerden cómo resolver el sistema, que indicasen si creen que el sistema es resoluble (ítems 70 y 72). Sin embargo, no tiene tiempo de presentar su petición pues Eva, algo excitado, afirma que habría que escribir una tercera ecuación (ítem 73) y, al ser preguntada, indica que no es posible resolver el problema con las dos ecuaciones planteadas (ítem 75). Marta parece tratar de hacer memoria y hace un comentario que podría implicar la realización de transformaciones algebraicas para resolver el problema sin necesidad de una tercera ecuación aunque no concreta su verbalización en ninguna acción (ítem 76).

papel.)

61. Profesor: Éste es vuestro sistema. ¿Qué queréis calcular?
62. Marta: Eh… (Marta mira al enunciado.)
63. Eva: El tiempo.
64. Profesor: El tiempo…
65. Eva: [Sería lo primero, ¿no? No sé, no me acuerdo ya de esto.
66. Marta: Es que esto no lo hemos dao (sic)…
67. Eva: Sí, lo dimos el año pasado.
68. (*Silencio de veinte segundos*.)
69. Profesor: Bueno, más que lo resolváis, que a lo mejor no os acordáis de cómo se resuelve…
70. Eva: No.
71. Profesor: …habéis planteado dos ecuaciones con tres incógnitas…
72. Eva: [¡Habría que plantear otra! Si hay tres incógnitas, ¿no habría que plantear tres… tres ecuaciones?
73. Marta: Mmm… ¿quieres decir que no lo podrías resolver tal como está?
74. Eva: No.
75. Marta: A mí me suena de sustituir una de ellas por la otra o algo así… pero no sé.
76. Eva: A mí me suena de haber hecho el año pasado uno o dos de ésos… cuando hicimos lo de una ciudad a otra y eso…
77. Profesor: Vale.

6.5.4.6. El caso de la pareja Eva-Marta en el problema “El heno”

Un granjero había almacenado cierta cantidad de heno para el consumo de ganado pensando que duraría 198 días. Sin embargo, el heno duró 217 días ya que era de mejor calidad y el ganado consumió 171 kg menos por día de lo que se había previsto que gastaría. ¿Cuánto heno se había almacenado en la granja?

Marta da lectura en voz alta al enunciado del problema. En primer lugar, la pareja asigna valor en el sistema a las cantidades conocidas. Así, por este orden, definen

1. (*Marta lee el enunciado en voz alta. La cantidad activa es “días previstos”.*)
2. Eva: Días previstos… (*Eva asigna el valor “198” a la cantidad activa. La cantidad activa pasa a ser “días reales”.*)

correctamente las cantidades *días previstos* (*Dp*) (ítem 2), *días reales* (*Dr*) (ítem 5) y heno ahorrado diario (*Had*) (ítem 7).

Figura 6.264. Grafo después del ítem 2.

3. Marta: Días reales…
4. Eva: Ajá…
5. Marta: Doscientos… (*Eva asigna el valor "217" a la cantidad "días reales". La cantidad activa pasa a ser "heno ahorrado diario".*)

Figura 6.265. Grafo después del ítem 5.

6. Marta: Ciento seten…
7. Eva: Ciento setenta y uno. (*Eva asigna el valor "171" a la cantidad "heno ahorrado diario". La cantidad activa pasa a ser "gasto diario previsto".*)

Figura 6.266. Grafo después del ítem 7.

8. (*Silencio de diez segundos.*)
9. Eva: Eso tiene que ser…
10. Marta: [*equis*… ¿no? Sí. (*Marta susurra. Eva asigna la letra "x" a la cantidad "gasto diario previsto". La cantidad activa es "gasto diario real".*)

Ante la primera de las cantidades desconocidas, *el gasto diario previsto* (*Hpd*), Marta propone emplear la letra *equis* para su designación (ítem 8). Sin consultar ni considerar el uso de otras cantidades, Eva realiza la asignación de *x* a *Hpd* en el sistema tutorial (ítem 10).

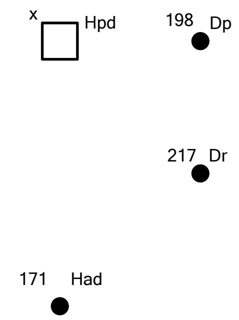


Figura 6.267. Grafo después del ítem 10.

Como consecuencia natural de la decisión anterior, representan la cantidad *gasto diario real* (*Hrd*) haciendo uso de la relación *Hpd* = *Hrd* + *Had*. Pare ello construyen la expresión $x - 171$ para representar *Hrd* (ítem 13).

11. Eva: Gasto diario real, ciento setenta y uno.
12. Marta: N…
13. Eva: No, equis menos ciento setenta y uno. (*Marta construya la expresión "x−171", que es asignada a la cantidad "gasto diario real". La cantidad activa pasa a ser "heno almacenado".*)

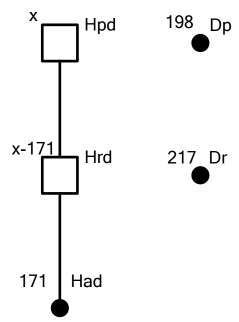


Figura 6.268. Grafo después del ítem 13.

La última de las cantidades desconocidas es *el heno almacenado* (*H*). A la pareja le parece graciosa la posibilidad de referirse a esta cantidad tomando la expresión "cierta cantidad" que es usada en el enunciado para hacer ver que es una cantidad desconocida (ítems 16 y 17).

Finalmente, Eva verbaliza mediante deícticos la relación $H=Hrd \cdot Dr$ (ítem 20). Así, Marta, siguiendo las indicaciones de su pareja, propone a validación la expresión $(x - 171)*217$, que es validada por el tutor (ítem 25).

14. Marta: El almacenado…
15. Eva: Eh…
16. Marta: Cierta cantidad. (*Marta señala "cierta cantidad" en el enunciado y sonríe.*)
17. Eva: Cierta cantidad (*se ríe*)… no.
18. (*Silencio de diez segundos.*)
19. Eva: ¿Eso! (*Marta señala "171 menos" en el enunciado.*)
20. Eva: No. Eso por los días que han estado… (*Marta ahora señala "x−171" en la ventana de cantidades.*)
21. Eva: …equis menos ciento setenta y uno… (*Marta activa la opción "expresión" y empieza a escribir "(x−171)…".*)
22. Eva: …o bueno…
23. Marta: ¿Qué?... Di…
24. Eva: …por doscientos diecisiete.
25. Eva: … o… por lo que duró… (*Marta finalmente construye la expresión "(x−171)*217)".*)
26. Marta: ¿Así? (*Marta valida la expresión que es asignada a la cantidad "heno almacenado".*)

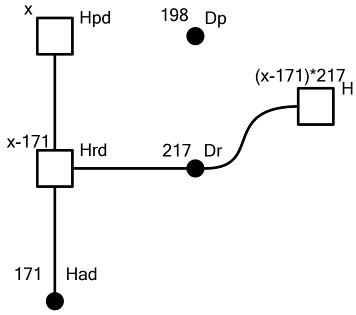


Figura 6.269. Grafo después del ítem 26.

Hasta el instante la resolución ha fluido con gran celeridad y la pareja no ha mostrado ninguna dificultad a la hora de ir reflejando en el tutor las relaciones involucradas. En el inicio del cuarto paso del MC, la pareja rápidamente decide que quiere construir la ecuación sobre la cantidad *H* (ítems 29 y 30).

De igual forma, Eva enseguida plantea que han de usar la relación $H = Hpd \cdot Dp$ (ítem 32). Aplicando esta propuesta de Eva, en pocos segundos construyen la ecuación correcta $217(x - 171) = 198x$, que es validada por el tutor (ítem 40).

27. (*Marta repasa ventana de cantidades y enunciado.*)
28. Eva: Ahora esto… (*Eva dice esto cuando el ratón está sobre “171” del enunciado.*)
29. Marta: Esto, ¿no? (*Marta señala la cantidad “217*(x−171)” en la ventana de ecuaciones.*)
30. Eva: Sí, ¿esto qué? (*Marta escribe la ecuación “((217*(x−171))…”.*)
31. (*Silencio de diez segundos.*)
32. Eva: Eso tendría que ser lo mismo que ciento noventa y ocho por equis.
33. Marta: ¿Que qué?.
34. Eva: Esto es lo que tenía que durar, lo que durarían y esto los kilos… (*El ratón hace visible la etiqueta de la cantidad “217*(x−171)”, que es “heno almacenado”.*)
35. Eva: … espera, ¿a qué hemos puesto *equis*? (*Eva señala con el ratón el nombre de “x” en la ventana de cantidades.*)
36. Eva: El gasto diario previsto… tendría que ser lo mismo… (*Marta escribe la ecuación “(217*(x−171))=….”.*)
37. Marta: Entonces… ¿esto por *equis*? (*Marta señala el botón “198” cuando dice “esto”.*)
38. Eva: Yo creo que sí. (*Marta escribe la ecuación “(217*(x−171))=198*x”.*)
39. (*Silencio de diez segundos. Eva mira a Marta, expectante y parece que sugiriendo a Marta para que valide la ecuación.*)
40. Marta: No sé… (*Marta valida la ecuación, que es identificada como correcta.*)
41. Profesor: ¿Puedes explicarlo?
42. Eva: Sí, que pensaban que iba a durar esto con estos kilos que no se sabe pero luego duró estos días con esos kilos de menos, entonces tiene que dar lo mismo lo que pensaban que iba a durar que lo que duró.

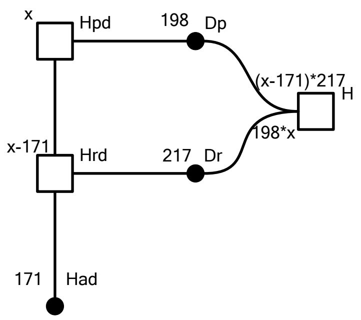


Figura 6.270. Grafo al final de la resolución.

6.5.4.7. El caso de la pareja Eva-Marta en el problema “La traductora”

Una traductora traduce un determinado número de páginas en un determinado número de días. Si tradujese 20 páginas menos cada día, tardaría el triple de días. ¿Cuántas páginas escribe en cada caso?

Eva da lectura al enunciado del problema en voz alta (ítem 1). Eva sugiere representar la cantidad activa inicialmente *páginas diarias traducidas en la situación real*, *Pdr*, mediante la letra *equis*, como finalmente hacen (ítem 4). Tras lo cual, Eva sopesa representar la cantidad *páginas diarias traducidas en la situación hipotética*, *Pdh*, mediante la relación aditiva que liga esta dos cantidades con los páginas de menos que traduciría en la hipotética (ítem 5). Aunque la expresión que verbaliza reflejaría un error de inversión (ítem 5). Dado que en ese instante no pueden construir la expresión en el tutor por no tener declarada la cantidad *páginas diarias que traduce de menos en la situación hipotética respecto a la real*, *Pmh*, Marta propone dar cuenta en primer lugar de las cantidades conocidas (ítem 8). Eva así lo hace, dando valor a las cantidades *Pmh* (ítem 9) y *tres para hacer el triple*, *Tt*. (ítem 12).

1. (*Eva lee el enunciado en voz alta. La cantidad activa es “páginas diarias traducidas en la situación real”.*)
2. Eva: Situación real…
3. Marta: Ehhh…
4. Eva: *Equis*. (*Eva asigna la letra “x” a la cantidad activa “páginas diarias traducidas en la situación real”. La cantidad activa pasa a ser “páginas diarias traducidas en la situación hipotética”.*)

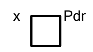


Figura 6.271. Grafo después del ítem 4.

5. Eva: Páginas traducidas en la situación hipotética, veinte menos equis. (*Eva intenta escribir “20−x” pero no es posible.*)
6. Eva: No, es que…
7. Marta: No. (*Eva abre la lista de cantidades.*)
8. Marta: Pon el tres para hacer el triple y esas cosas.
9. (*Eva activa la cantidad “páginas diarias que traduce de menos en la situación hipotética respecto a la situación real”. Asigna el valor “20” a esa cantidad. La*

cantidad activa pasa a ser "días que traduce en la situación hipotética".)

Figura 6.272. Grafo después del ítem 9.

10. Eva: Días que traduce en la situación hipotética… aquí, a ver…
11. Marta: Tenemos que poner… (*Eva despliega la lista de cantidades. Activa la cantidad "tres para hacer el triple".*)
12. Eva: Tres para hacer el triple. (*Eva asigna "3" a la cantidad "tres para hacer el triple". La cantidad activa pasa a ser "páginas diarias traducidas en la situación hipotética".*)

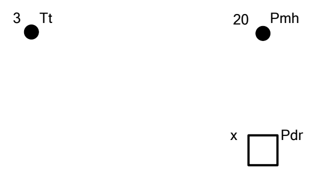


Figura 6.273. Grafo después del ítem 12.

Una vez cumplido con el requisito de declarar previamente todas aquellas cantidades que se desea emplear en la escritura de una expresión. Eva propone representar *Pdh* mediante la expresión algebraica $x - 20$ (ítem 13), con lo que el error de inversión que parecía iba a producirse, no se consuma y la expresión da cuenta correctamente de la relación aditiva entre las cantidades diarias de páginas traducidas. Marta da su aprobación y la pareja registra la expresión para *Pdh* en el sistema (ítem 14).

13. Eva: ¿*Equis* menos veinte?
14. Marta: Sí. (*Eva construye la expresión "x−20" que es asignada a la cantidad "páginas diarias traducidas en la situación hipotética". La cantidad activa pasa a ser "páginas traducidas".*)

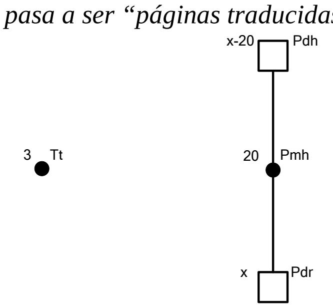


Figura 6.274. Grafo después del ítem 14.

La pareja prefiere abordar en primer lugar la representación de la cantidad *días que traduce en la situación real, Dr*, en vez de la que el tutor ofrecía por defecto, *páginas traducidas, P* (ítems 15

15. Eva y Marta: Páginas traducidas…
16. (*Eva despliega la lista de cantidades. Activa la cantidad "días que traduce en la situación real".*)
17. Eva: Días que traduce en la situación real… ¿qué ponemos? Otra incógnita…
18. Marta: Sí.

y 16). A propuesta de Eva (ítem 17), representan *Dr* mediante la letra *y* (ítem 19).

19. (*Eva asigna la letra “y” a la cantidad “días* que traduce *en la situación real”. La cantidad activa pasa a ser “páginas traducidas”.)*

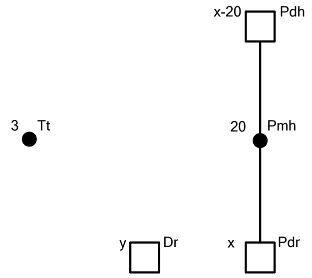


Figura 6.275. Grafo después del ítem 19.

En línea con su acción anterior, nuevamente prefieren encarar la cantidad *días que traducen en la situación hipotética*, *Dh*, que la cantidad *P* (ítem 22 y 23). Eva justifica esta decisión en el hecho de “no entender” la cantidad *P*. En relación con la cantidad *Dh*, plasman correctamente la relación descrita en el enunciado por la cual al traducir menos páginas diariamente, tarda el triple de días en la situación hipotética que en la real. Así, representan la cantidad *Dh* mediante la expresión algebraica 3*y* (ítem 27).

20. Marta: Páginas traducidas…
21. (*Silencio de diez segundos.*)
22. Eva: Es que páginas traducidas, eso no lo entiendo. Espera, pon el problema… lo otro que nos falta… (*Eva solicita a Marta que despliegue la lista de cantidades. Marta despliega la lista de cantidades.*)
23. Eva: Vale. (*Marta activa la cantidad “días que traduce en la situación hipotética”.*)
24. Eva: Eso es…
25. Marta: Ehhh…
26. Eva: …días que traduce, tres equis… tres por y.
27. Marta: Sí. (*Marta construye la expresión “3*y” que es asignada a la cantidad “días que traduce en la situación hipotética”. La cantidad activa pasa a ser “páginas traducidas”.*)

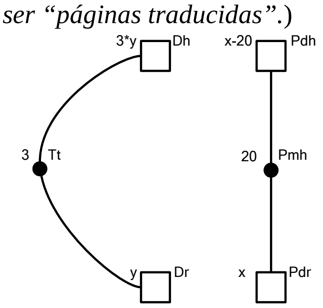


Figura 6.276. Grafo después del ítem 27.

A la hora de representar la cantidad *P*, Marta parece imaginar una situación concreta en la que trabajase veinte días (ítem 28), quizá con vistas a poder reconocer mejor la estructura conceptual que deben usar. Sin embargo, su compañera parece malinterpretarla pues al mencionar la cantidad veinte, da la sensación de que cree que se refiere a la cantidad *Pmh* por lo que le indica que esa

28. Marta: Y páginas traducidas… si trabajase veinte, ¿no?
29. Eva: Pero eso ya lo hemos puesto.
30. (*Silencio de diez segundos. Marta repasa la ventana de cantidades.*)

vía ya ha sido usada (ítem 29).

Marta solicita a su compañera que plantee alternativas (ítem 31), y ésta empieza una verbalización con el nombre de la cantidad P (ítem 33). Resulta muy llamativo que Marta interrumpe con brusquedad para solicitar a su compañera que matice a qué situación se refiere (ítem 33). Su actuación induce a pensar que no interpreta que la cantidad páginas traducidas es la misma para ambas situaciones. Otra posibilidad es que pensara que su compañera se estaba refiriendo a páginas traducidas diarias. No se producen comentarios que permitan acotar con certeza el origen de su pregunta.

31. Marta: ¿Entonces?
32. (*Silencio de diez segundos.*)
33. Eva: Páginas traducidas…
34. Marta: [¿¿¿Pero cuándo???
35. (*Silencio de veinte segundos. Marta repasa la ventana de cantidades.*)

Tras un largo silencio, Eva verbaliza correctamente la estructura conceptual que deben usar, es decir que el total de páginas puede representarse mediante el producto de las páginas diarias y el número de días (ítem 36). La estudiante va un poco más lejos al indicar que la estructura puede ser aplicada en cualquiera de las situaciones (ítems 37 y 39). De esta forma sienta las bases no sólo de la simbolización de P sino de la construcción de la ecuación que resuelve el problema. Su planteamiento se concreta en la representación en el programa de P mediante la expresión $(3y)*(x-20)$ (ítem 44).

36. Eva: Tiene que ser el tiempo por las páginas que traduzca. (*Marta activa la opción “expresión”.*)
37. Eva: Podemos poner lo del principio…
38. Marta: ¿Cómo?
39. Eva: …o lo del final.
40. Eva: Que esto por esto, el tiempo y las páginas que traduce por día es…
41. Eva y Marta: Es lo que traduce en total. (*Marta escribe “(y*3)…”.*)
42. Eva: Pero eso es en el caso hipotético.
43. Marta: (Inaudible) no sabes, ¿o no?
44. Eva: (inaudible) (*Marta finaliza la expresión “(y*3)*(x−20)”, que es asignada a la cantidad “páginas traducidas”.*)

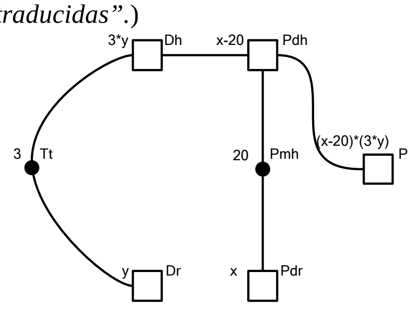


Figura 6.277. Grafo después del ítem 44.

Como era previsible por las intervenciones de Eva, en pocos segundos solventan la escritura de la ecuación al escribir una representación dual de la cantidad P. En concreto, validan la ecuación $(x - 20)*(3y)=xy$ (ítem 55).

45. Marta: Sí. Entonces…
46. (*Silencio de diez segundos.*)
47. Eva: Entonces esto… (*Eva señala el botón “(x−20)*(y*3)”, Marta coloca el ratón sobre él, hasta que es visible la etiqueta “páginas traducidas”.*)
48. Marta: Páginas traducidas. (*Marta escribe la ecuación “(x−20)*(y*3)=…”.*)
49. Eva: Tiene que ser lo mismo… (*Marta escribe la ecuación “(x−20)*(y*3)=...”.*)
50. Eva: …que eso…

51. Marta: ¿Qué eso? (*Marta repasa la ventana de cantidades.*)
52. Eva: Las páginas que traduce en la situación real… (*Marta escribe la ecuación "(x−20)*(y*3)=x....".*)
53. Marta: …por… (*Marta escribe la ecuación "(x−20)*(y*3)=x*....".*)
54. Eva: …por el tiempo que tarda realmente. (*Marta sitúa el ratón sobre el botón "y" hasta que se hace visible la etiqueta "días que traduce en la situación real".*)
55. Marta: Sí. (*Marta escribe la ecuación "(x−20)*(y*3)=x*y".*)
56. Marta: ¿Y ya?
57. Eva: Yo creo que sí. (*Marta valida la ecuación, que es identificada como correcta.*)

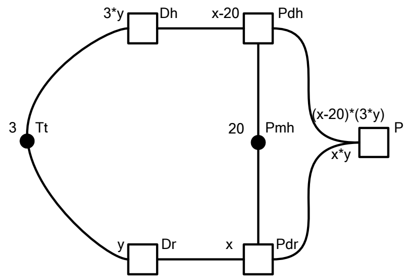


Figura 6.278. Grafo al final de la resolución.

Una vez finalizado el planteamiento, el profesor les pregunta si consideran que han finalizado o si sería necesaria una segunda ecuación (ítem 60). Ambas estudiantes señalan que, dado que tienen dos incógnitas, deberían escribir una segunda ecuación. El profesor escribe la ecuación sobre una hoja de papel (ítem 64) y pregunta a la pareja qué quieren calcular (ítem 67). Eva responde que desean calcular el tiempo y las páginas que traducen (ítem 68), aunque la verbalización es ambigua y no permite identificar con claridad a qué cantidad se refiere, parece que hace mención a aquellas cantidades que han simbolizado mediante letras, no la cantidad solicitada en el enunciado. En cambio, Marta sí parece dar respuesta desde el enunciado al no mencionar el tiempo (ítem 69). Sin embargo, Eva es persistente e incide en que desean calcular *x* e *y* confirmando lo expuesto sobre que no piensa desde lo

58. Profesor: ¿Ya habéis acabado?
59. Eva: Yes.
60. Profesor: ¿O todavía falta otra ecuación?
61. Marta: Sí, porque si tenemos incógnitas…
62. Eva: ¡Ahí no! Bueno, sí, porque si tenemos dos incógnitas, tendría que haber dos ecuaciones.
63. Profesor: Vosotros habéis planteado la ecuación…
64. Eva: [*Equis* menos veinte por tres *y griega* igual a *equis y griega*. (*El profesor escribe la ecuación sobre una hoja de papel.*)
65. Profesor: Ésta es vuestra única ecuación, ¿no?
66. Eva: Sí.
67. Profesor: ¿Qué queríais calcular?
68. Eva: Queríamos calcular el tiempo y las páginas que traducen.
69. Marta: Cuántas páginas diarias escribe en cada caso.
70. Profesor: O sea, que queréis calcular…
71. Eva: [La *equis* y la *y griega*. (*Suena el timbre marcando el final del tiempo.*)
72. Profesor: Mmm… entonces, ¿podríais resolverlo?
73. Eva: No.

que pide el enunciado, sino desde la ecuación (ítem 71). En esta ecuación es imposible determinar *y* (*Dr*) por lo que, bajo la óptica de Eva es coherente su afirmación de que no es posible resolver el problema (ítem 73).

6.5.5. LA PAREJA YOLANDA-CÁNDIDO

6.5.5.1. El caso de la pareja Yolanda-Cándido en el problema "El pintor"

Un pintor tiene que pintar una fachada de una finca y planifica que debe pintar 12 m2 al día para acabar en el plazo previsto. Si pintase 42 m2 cada día tardaría 25 días menos. ¿Cuántos metros cuadrados tiene la fachada?

Cándido lee el enunciado en voz alta (ítem 1) tras lo cual lee la descripción de la cantidad activa, *superficie pintada por día en la situación inicial* (*Sdi*). Aunque en el proceso de lectura modifica el texto lo que podría conferir cierta ambigüedad al significado de la cantidad, Yolanda no titubea y propone correctamente asignarle el valor 12 a *Sdi* (ítem 3), lo que Carla refleja correctamente en el sistema (ítem 4).

1. *(Cándido lee el enunciado en voz alta. La cantidad activa es "metros cuadrados a pintar en la planificación inicial".).*
2. Cándido: Metros cuadrados para pintar en un día inicial. Eso es…
3. Yolanda: [Doce.
4. Cándido: …doce. (*Cándido asigna el valor "12" a la cantidad activa. La cantidad activa pasa a ser "metros cuadrados a pintar en la situación hipotética"*.)

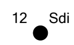


Figura 6.279. Grafo después del ítem 4.

Proceden de igual forma para la siguiente cantidad activa, *superficie pintada por día en la situación hipotética* (*Sdh*), también conocida. En este caso Yolanda lee la descripción de la cantidad recogida en el menú desplegable (ítem 5). Es llamativo como Cándido ensalza vivamente la palabra "hipotética" (ítem 6), quizá con el objetivo de subrayar la diferencia con respecto a la situación inicial. No parece que se deba a dudas sobre el significado de esta palabra, lo cual pudiera ser otra interpretación. Ambos estudiantes coinciden en señalar que *Sdh* toma el valor 42 (ítems 7 y 8) y así lo plasma Yolanda en el tutor (ítem 9).

5. Yolanda: Metros cuadrados diarios a pintar en la situación hipotética…
6. Cándido: [¡Hipotética!
7. Yolanda: Cuarenta y dos.
8. Cándido: Cuarenta y dos, sí.
9. (*Yolanda asigna el valor "42" a la cantidad activa. La cantidad activa es "días que tardaría en la situación inicial"*.)

Figura 6.280. Grafo después del ítem 9.

La siguiente de las cantidades que deciden declarar es la cantidad desconocida *días que tardaría en la situación inicial* (*Di*). Al igual que para la cantidad anterior, Yolanda lee la

10. Yolanda: Días que tardaría en la situación inicial.
11. Cándido: En la inicial…
12. Yolanda: No lo sabe.
13. Cándido: Equis. Pon equis.
14. (*Yolanda asigna la letra "x" a la cantidad activa. La cantidad activa pasa*

descripción de *Di* (ítem 10) y nuevamente Cándido remarca la situación a la que se refiere la cantidad (ítem 11). Yolanda (ítem 12) apunta que se trata de una cantidad desconocida, ante lo cual Cándido propone representarla haciendo uso de la letra *equis* (ítem 13). Yolanda (ítem 14) realiza correctamente la asignación de *x* a *Di* en el tutor.

La siguiente cantidad activa es la cantidad análoga a *Di* para la situación hipotética, es decir *días que tardaría en la situación hipotética* (*Dh*). Inicialmente Yolanda plantea asignar el valor 25 a esta cantidad y, de hecho, llega a escribir este número (ítem 17). Sin embargo, Cándido la corrige y verbaliza la expresión algebraica $x - 25$ en la que hace uso de la relación aditiva $Dh = Di + Dmh$ (ítem 17). No parece valorar la posibilidad de emplear otra letra en este instante. Yolanda no entiende la idea de su compañero y solicita que se la explique (ítem 18). Cándido, a pesar de expresarse de manera atropellada, recupera el fragmento del enunciado "veinticinco días menos" para explicar la relación (ítem 19). A esto une un intento de hacer visible el significado de *x* para señalar su papel en la relación. En este intento se observa cómo el propio Cándido reinterpreta la letra *x* considerando que designa la superficie pintada el primer día, no la superficie pintada diariamente en la situación inicial (ítem 19). Este hecho podría implicar que el alumno estuviese interpretando que el enunciado da cuenta de una única situación en la que durante un período dado el pintor trabaja con un determinado rendimiento y en un determinado momento el pintor modifica su ritmo de trabajo. Obviamente, también puede ser consecuencia de una licencia del lenguaje verbal y que no se corresponda con el esbozo lógico-semiótico realizado por Cándido. En cualquier caso, esta

a ser "días que tardaría en la situación hipotética".)

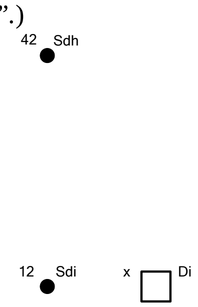


Figura 6.281. Grafo después del ítem 14.

15. Cándido: Días que tardaría en la situación hipotética.
16. Yolanda: Veinticinco.
17. Cándido: Veinticinco… eh, equis menos veinticinco. (*Yolanda escribe el valor "25" en el cuadro de cantidades pero no llega a validar.*)
18. Yolanda: ¿Por qué? (*Yolanda borra la ventana de cantidades.*)
19. Cándido: A ver, si en primer, tardaría veinticinco días menos. Si el primer día tarda equis…
20. Yolanda: ¡Ahhhh! Vale, vale.
21. Cándido: Equis menos veinticinco.
22. Yolanda: Es verdad. Dale a expresión.
23. (*Cándido activa la opción "expresión".*)
24. Yolanda: Pero entonces tenemos que poner veinticinco.
25. Cándido: Ah, entonces tiene que haber alguna por ahí.
26. (*Cándido activa la opción "letra". Cándido despliega la lista de cantidades.*)
27. Cándido: Días menos que tardaría, veinticinco. (*Cándido activa la cantidad "días menos que tardaría en la situación hipotética".*)
28. Yolanda: Veinticinco.
29. (*Cándido asigna el valor "25" a la cantidad activa. La cantidad activa pasa a ser "días que tardaría en la situación hipotética".*)

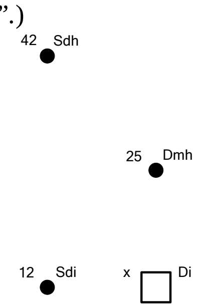


Figura 6.282. Grafo después del ítem 29.

30. Cándido: Vale, días que tardaría en la situación hipotética, equis menos veinticinco. (*Cándido activa la opción*

imprecisión (ya sea lingüística o conceptual) no parece reflejarse en el proceso de resolución pues Yolanda afirma entender la relación (ítem 20). En consecuencia, deciden introducir la expresión algebraica $x - 25$ para designar *Dh* (ítems 21 a 23). En el proceso de representación, Yolanda se percata de que previamente han de definir “el veinticinco” (ítem 24). Para ello, Cándido despliega la lista de cantidades (ítem 26) e identifica a la que corresponde ese valor, *días menos que tardaría en la situación hipotética* (*Dmh*). Entre los ítems 27 y 30, la pareja asigna correctamente 25 y $x - 25$ a las cantidades *Dmh* y *Dh*, respectivamente.

La última de las cantidades que deben abordar es la *superficie de la fachada* (*S*). Cándido (ítem 33) expresa “eso es lo que no se sabe”, y dado el uso del pronombre *lo* parece querer indicar no sólo que es una cantidad desconocida, sino que es la cantidad desconocida por la que se pregunta en el enunciado. Yolanda (ítem 34) propone directamente usar la letra *y* en la designación. Parece que haya una clara identificación entre lo desconocido y el uso de letras, pues siempre que alegan no “saber” una cantidad abogan por emplear letras, no dándose esta justificación al usar relaciones. En el proceso de asignación de la letra *y* a *S*, Cándido parece aludir que esta decisión implicará que deban plantear dos ecuaciones en el paso 4 del MC (ítem 36).

Así, nada más activarse la ventana de ecuaciones, Cándido vuelve a insistir en que han de escribir dos ecuaciones (ítem 40), ante lo que Yolanda se muestra de acuerdo (ítem 41). Cándido expresa verbalmente la igualdad inexistente entre las cantidades *Dh* y *Sdh* (ítem 44) y de manera análoga lo hace para la situación inicial con *Di* y *Sdi* (ítem 45). Esta actuación revela que el resolutor es plenamente consciente de que las

“expresión” y escribe la expresión “x−25”, que es asignada a la cantidad activa. La cantidad activa pasa a ser “superficie de la fachada”.)

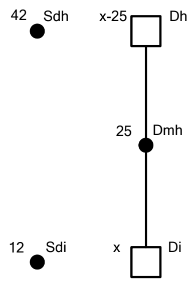


Figura 6.283. Grafo después del ítem 30.

31. Cándido: Vale.
32. Yolanda: Superficie de la fachada.
33. Cándido: Eso es lo que no se sabe.
34. Yolanda: I griega.
35. (*Cándido escribe la letra “y” en el cuadro de cantidades.*)
36. Cándido: Ahora con dos.
37. Yolanda: Dale.
38. (*Cándido asigna la letra “y” a la cantidad activa. Automáticamente se activa la ventana de ecuaciones.*)

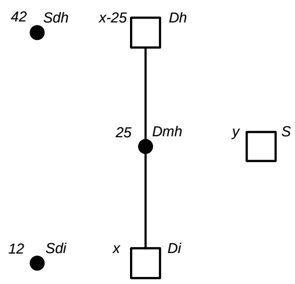


Figura 6.284. Grafo después del ítem 38.

39. Yolanda: Ahora…
40. Cándido: [Ahora hay que plantar dos. (*Cándido se coloca sobre el botón “x−25” haciendo visible “días que tardaría en la situación hipotética”.*)
41. Yolanda: Es verdad.
42. Cándido: A ver los días que…
43. Yolanda: A ver…
44. Cándido: Los días que tardan menos veinticinco es igual a cuarenta y dos metros por día… (*Cándido se coloca sobre el botón “42” haciendo visible “metros cuadrados a pintar en la planificación final”.*)

cantidades de estas parejas están relacionadas. Las dificultades emergen porque no consideran inicialmente relacionar estas cantidades haciendo usa de una tercera cantidad (desconocida) y se limitan a igualarlas, quizá interpretando el signo igual como una asociación. En este caso, Cándido (ítem 45) reconsidera su propuesta alegando que no han usado la cantidad S. Tras esta consideración, el estudiante decide pensar en qué representa la expresión $x – 25$ para lo cual lee la descripción de la misma (ítem 47). Yolanda responde verbalizando la relación incorrecta $S = Sdi·Dh$ refiriéndose a las cantidades por sus representaciones simbólicas (ítem 48 a 50). Cándido detecta el error cometido por su compañera al considerar la superficie pintada diariamente en la situación inicial en vez de en la hipotética (ítem 51). Finalmente Cándido construye en el sistema la ecuación correcta $(x – 25)·42 = y$ (ítem 53). Yolanda responde a estas acciones verificando el significado de la letra x, ante lo cual reconoce que Cándido está en lo cierto (ítem 54). La consulta de esta cantidad podría señalar que Yolanda estaba intentando representar la relación $S = Sdi·Di$, y que su error se debía en una confusión de lo que representaban las cantidades x y $x – 25$ más que de las conocidas Sdi y Sdh.

45. Cándido: …lo otro es doce por día, tarda equis, ¿no? No, espera, no, que no hemos metido la superficie de la fachada. (*Cándido se coloca sobre el botón “12” haciendo visible “metros cuadrados diarios a pintar en la planificación inicial” y luego sobre “x” haciendo visible “días que tardaría en la situación inicial”. Finalmente coloca el ratón sobre “y” haciendo visible “superficie de la fachada”.*)
46. Yolanda: Espera.
47. Cándido: A mira esta por… ehh, los días que, a ver, equis menos veinticinco son los días que tardaría en la situación hipotética… (*Cándido se coloca sobre el botón “x−25” haciendo visible “días que tardaría en la situación hipotética”.)*
48. Yolanda: [Por doce.
49. Cándido: Por doce…
50. Yolanda: Es igual a *y* griega, claro.
51. Cándido: No, por doce no. Por cuarenta y dos que es lo que pintaría. Por doce, por cuarenta y dos cubriría el éste total entonces es igual a *y*, vale, sí, ya.
52. (*Yolanda se ríe por la verbalización atropellada de Cándido.*)
53. Cándido: Equis menos veinticinco por cuarenta y dos sería igual a cubrir la fachada total que sería *y*. (*Cándido escríbe la ecuación “(x−25)*42=y”.*)
54. Yolanda: A ver, equis, ah, vale, es verdad, sí.
55. (*Cándido valida la ecuación que es identificada como correcta por el tutor.*)

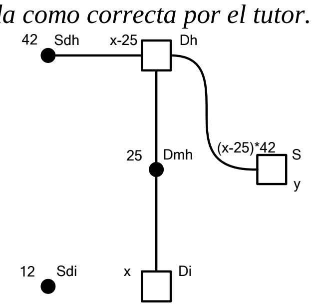


Figura 6.285. Grafo después del ítem 55.

La construcción de la segunda de las ecuaciones no supone demasiadas dificultades a la pareja. Ambos coinciden en que deben emplear la cantidad Sdi (ítems 56 y 57) y la relacionan multiplicativamente con Di para lograr otra representación de la *superficie de la fachada* (ítem 61). De manera rápida, plasman la relación $S=Sdi·Di$ en la segunda ecuación (ítem 62) y dan por concluido el problema. Yolanda (ítem 63)

56. Cándido: Y luego doce… (*Cándido escribe “12…”.*)
57. Yolanda: [doce por… (*Cándido prosigue “12*…”.*)
58. Cándido: …por equis, no, espera…
59. Yolanda: Equis…
60. Cándido: [Sí, por ésta…
61. Yolanda: … es igual a *y* griega.
62. Cándido: Sí. (*Cándido escribe “12*x=y”.*)
63. Yolanda: ¡Joder, qué fácil era! (*Cándido valida la ecuación que es identificada como correcta por el tutor.*)
64. Cándido: Ya está.

de manera muy expresiva lo sencillo que le ha resultado el problema.

65. Yolanda: ¡Ay, Cándido!
66. Cándido: ¿Ahora cuál abrimos?

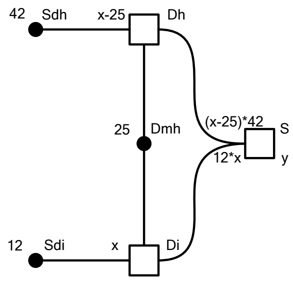


Figura 6.286. Grafo al final de la resolución.

El profesor (ítem 67) trata de indagar sobre qué características del tutor les han ayudado en la resolución, dado que en el cuestionario Post no fueron capaces de resolver este mismo problema ninguno de los dos. Cándido (ítem 68) afirma que “da una pista” al ofrecer la relación de cantidades que deben emplear en la resolución. Yolanda se muestra conforme y apoya la opinión de su compañero. Cándido (ítem 72) extiende la idea de “pista” al indicar que el tutor también les informa de cuántas ecuaciones deben plantear. Es poderosamente llamativo que declare que una vez conocidas las cantidades involucradas y el número de ecuaciones, ya sólo han de pensar (ítem 74). De su comentario subyace la idea de que no les resulta difícil el hecho de representar algebraicamente las relaciones verbalmente descritas en el enunciado sino el hecho de identificar todas las cantidades necesarias.

67. Profesor: Habéis tardado tres minutos y no os habéis equivocado en ninguna expresión, en la prueba ambos lo hicisteis mal. ¿Creéis que el programa ayuda?
68. Cándido: Sí, te da una pista, por así decirlo, te dice las variables que vas a necesitar…
69. Yolanda: [Claro.
70. Cándido: …porque tú, en la realidad, a lo mejor tú no sabes cuál usar, a lo mejor dices…
71. Yolanda: [¿Qué tienes que poner? Claro.
72. Cándido: …¡uy! ¿cuántas tengo que poner o cuántas tengo que plantear? No, aquí como te dice ya los datos que necesitas…
73. Yolanda: [Claro.
74. Cándido: …y ya luego es pensando.

6.5.5.2. El caso de la pareja Yolanda-Cándido en el problema “Los cromos”

Si quiero comprar nueve paquetes de cromos me faltan tres euros, pero si compro cinco paquetes me sobran cinco euros. ¿Cuál es el precio de un paquete?

La pareja inicia la resolución leyendo el enunciado en voz alta. Ambos reconocen el problema y recuerdan que fueron

1. *(Cándido lee el enunciado en voz alta. La cantidad activa es “número de paquetes a comprar cuando me falta dinero”.).*
2. Yolanda: Éste no lo supe.

incapaces de resolverlo correctamente el día del cuestionario (ítems 2 y 3). Sin abordar las causas afrontan la definición de la cantidad activa: la cantidad conocida *número de paquetes a comprar cuando me falta dinero* (*Cfd*) (ítem 4). Yolanda propone asignar a *Cfd* el valor 9 (ítem 6). Su compañero realiza la asignación en el sistema correctamente (ítem 7), activándose la cantidad *número de paquetes a comprar cuando me sobra dinero* (*Csd*).

3. Cándido: No, ni yo.
4. Yolanda: Número de paquetes a comprar cuando me falta dinero…
5. Cándido: Ehhh…
6. Yolanda: Eh, nueve.
7. (*Cándido asigna el valor "9" a la cantidad "número de paquetes a comprar cuando me falta dinero". La cantidad activa pasa a ser "número de paquetes a comprar cuando me sobra dinero".*)

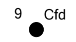


Figura 6.287. Grafo después del ítem 7.

Yolanda (ítem 8) lee la descripción de la cantidad en voz alta. Cándido señala que la cantidad conocida *Csd* toma el valor 5, a lo que Yolanda se muestra de acuerdo (ítems 9 y 10). Cándido asigna en el sistema el valor 5 al número de paquetes adquiridos en la situación que sobra dinero.

8. Yolanda: Número de paquetes a comprar cuando me sobra dinero…
9. Cándido: Cinco.
10. Yolanda: Cinco paquetes. (*Cándido señala con el puntero del ratón "cinco" en el enunciado.*)
11. (*Cándido asigna el valor "5" a la cantidad "número de paquetes a comprar cuando me sobra dinero". La cantidad activa pasa a ser "dinero que me falta al comprar nueve paquetes".*)

Figura 6.288. Grafo después del ítem 11.

La siguiente de las cantidades conocidas de la que va a dar cuenta la pareja es *dinero que falta al comprar nueve paquetes* (*Df*). Al igual que para las cantidades anteriores la pareja repite el procedimiento: identifican la cantidad y le asignan valor de manera inmediata sin la necesidad de que medie verbalización alguna. En resumen, Cándido (ítem 17)

12. Cándido: Dinero que me falta al comprar nueve paquetes, espera, si compro cinco paquetes me sobran cinco y si nueve…
13. Yolanda: [Tres, tres euros.
14. Cándido: No, espera.
15. Yolanda: [Sí.
16. Cándido: Me faltan tres, sí, vale.
17. (*Cándido asigna el valor "3" a la cantidad activa. La cantidad activa es "dinero que me sobra al comprar cinco paquetes".*)

asigna el valor 3 a la cantidad *Df*.

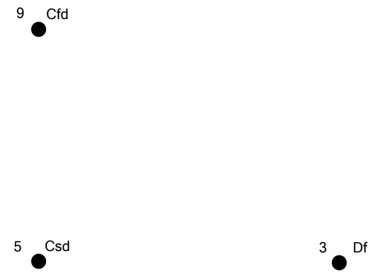


Figura 6.289. Grafo después del ítem 17.

La última de las cantidades conocidas mencionadas en el enunciado es *dinero que falta al comprar cinco paquetes* (*Df*). Yolanda sugiere que esta cantidad vale cinco euros (ítem 18) y Cándido realiza de manera inmediata, sin verbalización alguna, la declaración de la cantidad en el sistema.

18. Yolanda: Dinero que me sobra, cinco euros.
19. (*Cándido asigna el valor "5" a la cantidad activa. La cantidad activa pasa a ser "precio de un paquete de cromos".*)

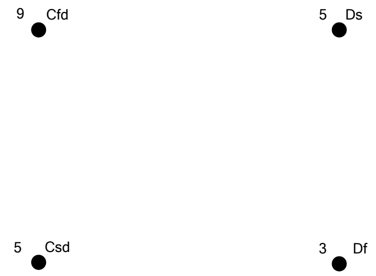


Figura 6.290. Grafo después del ítem 19.

Cándido lee el nombre de la cantidad activa, que no es otra que el *precio de un paquete de cromos* (*Ppc*) y directamente propone representarla mediante la letra *equis* (ítem 20). Yolanda se manifiesta en la misma línea mientras su compañero realiza las acciones correspondientes en el tutor (ítem 21). Parece curioso que no hayan valorado ni reflexionado acerca de la posibilidad de explorar el resto de cantidades pendientes de definir. Quizá la pareja sea plenamente consciente de que han agotado todas las cantidades conocidas y que resulta inevitable designar una cantidad mediante una letra.

20. Cándido: Precio de un paquete de cromos, equis.
21. Yolanda: Equis. (*Cándido asigna la letra "x" a la cantidad "precio de un paquete de cromos". La cantidad activa pasa a ser "dinero que tengo".*)

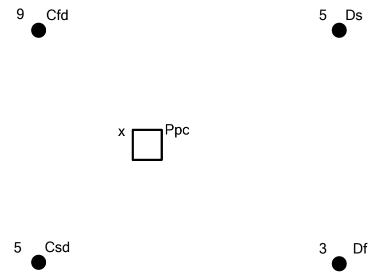


Figura 6.291. Grafo después del ítem 21.

Las etapas anteriores sitúan el momento de la resolución en el tercer paso del MC, siendo el *dinero que tengo* (*D*) *la* cantidad que el sistema propone para que sea designada. Yolanda (ítem 24)

22. Yolanda: Dinero que tengo…
23. Cándido: Ehhh, mmm…
24. Yolanda: I griega.
25. (*Cándido asigna la letra "y" a la cantidad "dinero que tengo". La cantidad activa pasa a ser "precio de nueve paquetes de cromos".*)

propone emplear una nueva letra *y* sin que surja debate sobre posibles alternativas, Cándido consuma la idea asignando la letra *y* a *D* (ítem 25).

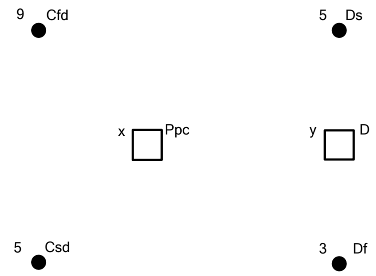


Figura 6.292. Grafo después del ítem 25.

Siguiendo el tercer paso del MC, Yolanda lee la descripción de la cantidad *precio total de cromos en la situación que falta dinero* (*Pfd*) (ítem 26). Rápidamente Cándido propone usar la relación *Pfd* = *Cfd·Ppc* mediante la expresión algebraica 9*x* aunque muestra dudas en cuanto lo verbaliza (ítem 27). Yolanda rechaza la opción que ofrece su compañero (ítem 28) y expresa otra relación (ítems 30 y 32). La alumna señala que "si te faltan tres euros, sería equis más tres" con lo que propone la relación incorrecta *Pfd* = *Ppc* + *Df*. Una posible explicación a esta actuación sería que, en realidad, Yolanda tuviera en mente la cantidad *D* cuando hace referencia a *x* y, por tanto, estuviera intentando representar que el precio de los nueve paquetes de cromos es el dinero del que dispone más el dinero que le falta, *Pfd* = *D* + *Df*. Cándido se manifiesta conforme con Yolanda (ítem 33) e introducen la expresión en el tutor que les informa de que no es correcta (ítem 36). Como resultado, Cándido retoma su idea de original de representar el precio de los paquetes a partir del número de paquetes y el precio unitario de un paquete de cromos (ítem 38) aunque alberga dudas, quizá ligadas a la cantidad que están representando, lo que le lleva a comprobar que, efectivamente, se trata de *Pdf* (ítem 39). Tras eso, reitera su propuesta y Yolanda la apoya (ítem 41), reconociendo que es correcta aunque al inicio de la resolución la identifico como errónea. Así, Cándido construye en el sistema la expresión 9*x* usando la relación *Pfd* = *Cfd·Ppc* (ítem 42).

26. Yolanda: Precio de nueve paquetes de cromos.
27. Cándido: Equis por nueve. No, espera…
28. Yolanda: [No…
29. Cándido: […si un paquete…
30. Yolanda: [me faltan tres euros, sería…]
31. Cándido: […un paquete de cromos vale equis, un paquete de cromos vale equis.
32. Yolanda: Y si te faltan tres euros, sería equis más tres.
33. Cándido: Es verdad, sí.
34. (*Cándido intenta escribir "x+3" en la opción "letra".*)
35. Yolanda: En expresión.
36. Cándido: Ya. (*Cándido activa la opción "expresión". Escribe la expresión "x+3", que es identificada como errónea.*)

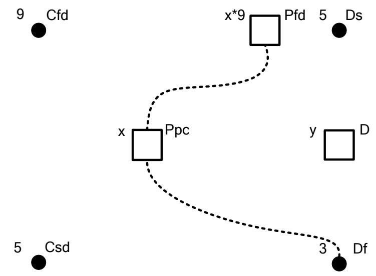


Figura 6.293. Grafo después del ítem 36.

37. Yolanda: No, no es equis más tres. ¡Ah!...
38. Cándido: Jope. Espera. Un precio, un paquete de cromos vale equis, equis por nueve. Equis por nueve que son… no, espera. (*Cándido borra la expresión "x+3". Señala con el puntero en la ventana de cantidades la cantidad "x".*)
39. Cándido: Espera, ¿qué estamos pidiendo? (*Cándido activa la opción "letra" para visualizar el nombre de la cantidad.*)
40. Cándido: El precio de nueve paquetes de cromos. Pues equis por nueve. (*Cándido señala la cantidad activa en la lista.*)
41. Yolanda: Es verdad.
42. Cándido: Si es que lo… (*Cándido escribe la expresión "x*9" que es asignada a la cantidad "precio de nueve*

paquetes de cromos. La cantidad activa pasa a ser "precio de cinco paquetes de cromos". Automáticamente se activa la ventana de ecuaciones.)

43. Cándido: Ves.

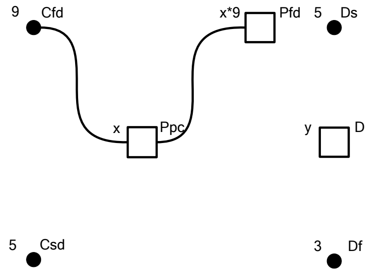


Figura 6.294. Grafo después del ítem 43.

De igual modo que han procedido para la situación en que falta dinero, la pareja emplea la relación multiplicativa análoga para la situación en que sobra dinero. En concreto, Yolanda (ítem 44) propone la expresión 5x usando la relación Psd = $Csd{\cdot}Ppc$. Cándido introduce sin error la expresión en el tutor (ítem 46).

44. Yolanda: Cinco paquetes, equis por cinco.

45. Cándido: Eh, sí

46. (*Cándido escribe la expresión "x*5" que es asignada a la cantidad activa.*)

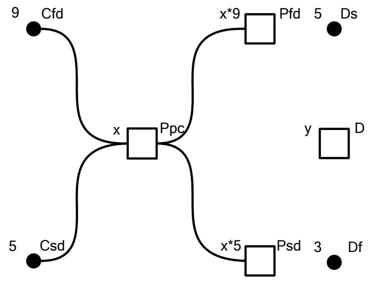


Figura 6.295. Grafo después del ítem 46.

La pareja afronta el paso cuarto del MC, a partir de que Cándido verifica que no quedan cantidades por representar (ítem 47). En realidad podrían haber iniciado la construcción de una ecuación antes de definir Psd, pues el tutor habilita la ventana de ecuaciones desde el mismo momento en que existen las cantidades suficientes para construir una ecuación. Sin embargo, la pareja en ningún momento se plantea representar una ecuación hasta el momento en que han acabado el paso 3 del MC.

La primera acción de Cándido (ítem 48) es revisar el significado de la expresión 9x y de la letra y. En cuanto lee la descripción asociada a la letra y, *dinero que tengo*, Cándido parece manifestar que ya sabe cómo plantear la primera ecuación. Así, entre los ítems 49 y 50, verbaliza una relación aditiva que liga las

47. Cándido: Vale, ya está todo. (*Cándido despliega la lista de cantidades y observa que no quedan cantidades por definir.*)

48. Cándido: A ver, precio de un paquete de… un precio… (*Cándido señala la pregunta del enunciado. Luego se coloca sobre el botón "x*9" haciendo visible "precio de nueve paquetes de cromos". Cambia el ratón sobre el botón "y" y visualiza "dinero que tengo".*)

49. Cándido: ¡Ah, vale! Nueve paquetes… (*Cándido escribe "(9*x)…".*)

50. Cándido: … es igual a *y* menos o más tres, espera…

51. Yolanda: No.

52. Cándido: …con nueve paquetes, ¿cuánto tenía? Con nueve paquetes me faltan tres, pues equis es igual a… (*Cándido señala el enunciado con el ratón.*)

53. Yolanda: [Equis…

54. Cándido: …equis menos, más, menos tres, que es lo que, no,...

55. Yolanda: [¿Y la i griega qué?

56. Cándido: … más tres, que es lo que me faltaría. Si me faltan, tendré que sumarle tres euros más, ¿sabes lo que te digo?

cantidades *Pfd*, *D* y *Df* aunque duda sobre si la ecuación ha de ser $9x = y + 3$ ($Pdf = D + Df$) ó $9x = y - 3$ ($D = Pdf + Df$). Inicialmente Yolanda parece oponerse (ítem 51) aunque conforme avanza el razonamiento de Cándido, se suma a la idea de construir la ecuación por esta vía. Las intervenciones de Cándido son confusas y fomentan la ambigüedad sobre si desea usar la letra *x* o la letra *y* en el segundo miembro (ítem 54). Esta situación lleva a su compañera a cuestionar directamente sobre el papel que va a desempeñar la letra *y* (ítem 55), pues entiende que Cándido no va a utilizarla. Esta pregunta obliga a Cándido a expresarse con mayor claridad, y en el transcurso de la explicación se evidencia que las dudas previas han desaparecido y que va a representar el *Pfd* como la suma del dinero que tiene más la cantidad que les falta (ítem 56). Yolanda (ítem 57) se muestra de acuerdo con esa decisión y parece entender la relación. Cándido construye la ecuación $9x = y + 3$ (ítems 58 y 60) que es validada por el programa. En el proceso de representación, Yolanda traduce la expresión $y + 3$ por "el precio total más tres euros que me faltan", es decir parece que asocia la letra *y* con *Pfd* en vez de con *D* (ítem 59). Sin embargo, esta incorrección no parece tener consecuencias en el proceso de resolución dado que esté es pilotado correctamente por Cándido.

57. Yolanda: Sí, más…
58. Cándido: [Nueve paquetes de cromos es lo mismo… (*Cándido escribe "(9*x)=…".*)
59. Yolanda: …el precio total más tres euros que me faltan.
60. (*Cándido valida "(9*x)=y+3", que es identificada como correcta por el tutor.*)

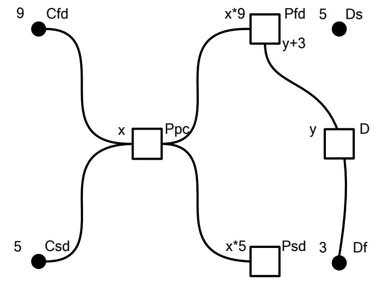


Figura 6.296. Grafo después del ítem 60.

Cándido (ítem 61) señala que para la segunda ecuación habrán de emplear el precio de cinco paquetes de cromos (*Psd*), y Yolanda complementa esta información indicando que van a construir la ecuación sobre una representación alternativa de esta cantidad (ítem 62). De manera inmediata Cándido propone escribir la ecuación $5x = y - 5$ que daría cuenta correctamente de la relación $D = Psd + Ds$ (ítem 63). De hecho, el alumno introduce la ecuación en el sistema pero recibe un mensaje

61. Cándido: Y la otra es cinco equis… (*Cándido se coloca sobre el botón "5*x" haciendo visible "precio de cinco paquetes de cromos".*)
62. Yolanda: Cinco equis es igual a… (*Cándido escribe "(5*x)=…".*)
63. Cándido: …equis, *y* menos cinco, que me sobran. (*Cándido valida "(5*x)=y−5", que es identificada como errónea.*)
64. Cándido: ¡Ahhh!
65. Profesor: Tened cuidado porque hay dos cincos y para nosotros los cinco son iguales, pero para el programa no. Si dejáis el ratón encima del ratón…
66. Cándido: [¡Ah, vale, sí, vale!]
67. Profesor:…cada cinco es una cosa

informando de que la relación es errónea. Esto se debe a que el sistema diferencia las cantidades con independencia de que compartan representación, es decir en el presente problema existen dos cantidades conocidas que toman el mismo valor; *Ds* y *Csd* valen 5. Este hecho no se traduce en que se puedan usar indistintamente ambas cantidades en la construcción de expresiones y ecuaciones. El profesor les recuerda que los dos botones con valor cinco representan cantidades distintas (ítems 65, 67 y 69). De manera inmediata la pareja recuerda esta característica del sistema e inicia la identificación del botón que simboliza la cantidad *dinero que me sobra* (ítem 72). Una vez salvado este aspecto, construyen la ecuación y la validan en el sistema (ítem 77 y 78).

distinta…
68. Yolanda: [Ah, vale.]
69. Profesor: …entonces tenéis que utilizar el cinco que corresponde.
70. Cándido: Vale.
71. Yolanda: Pon por éste.
72. Cándido: Espérate. Número de paquetes a comprar cuando me sobra dinero, éste no era. (*Cándido se coloca sobre el otro “5” haciendo visible “dinero que me sobra al comprar cinco paquetes”.*)
73. Cándido: Dinero que me sobra…
74. Yolanda: Dinero que me sobra…
75. Cándido: Éste sí
76. Yolanda: Sí.
77. Cándido: *y* menos cinco. (*Cándido escribe la ecuación “(5*x)=y−5”.*)
78. Yolanda: Aceptar. (*Cándido valida la ecuación.*)
79. Cándido: Ahí está.

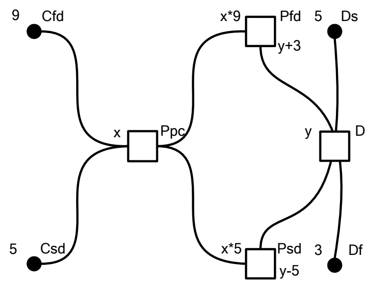


Figura 6.297. Grafo al final de la resolución.

6.5.5.3. El caso de la pareja Yolanda-Cándido en el problema “Dos coches”

Albacete y Madrid distan 300 km entre sí. A la misma hora parte de Albacete un coche hacia Madrid con una velocidad de 90 km/h., y de Madrid parte otro hacia Albacete con una velocidad de 60 km/h. Dígase a qué distancia de Albacete se encuentran ambos coches.

La pareja inicia la resolución del problema mediante la definición de las cantidades conocidas. De esta forma, asignan valor de manera correcta a las cantidades *distancia entre Albacete y Madrid*, *S* (ítem 2); *velocidad del coche*

1. (*Cándido lee el enunciado en voz alta. La cantidad activa es “distancia entre Albacete y Madrid”*).
2. Yolanda: Distancia entre Albacete y Madrid, trescientos. (*Cándido asigna el valor “300” a la cantidad activa. La cantidad activa pasa a ser “velocidad del coche que sale de Albacete”.*)

que sale de Albacete, *Vsa* (ítem 5); y *velocidad del coche que sale de Madrid*, *Vsm* (ítem 6).

Figura 6.298. Grafo después del ítem 2.

3. Yolanda: Velocidad…
4. Cándido: De, sale el coche de Albacete…
5. Yolanda: Noventa kilómetros. (*Cándido asigna el valor "90" a la cantidad activa. La cantidad activa pasa a ser "velocidad del coche que sale de Madrid"*.)

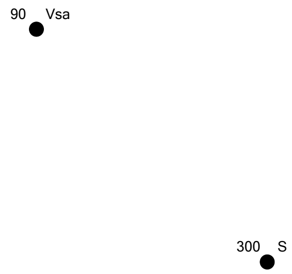


Figura 6.299. Grafo después del ítem 5.

6. Yolanda: Sesenta. (*Cándido asigna el valor "60" a la cantidad activa. La cantidad activa pasa a ser "distancia recorrida por el coche de Albacete hasta encontrarse"*.)

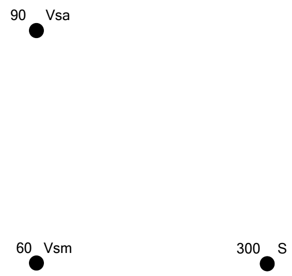


Figura 6.300. Grafo después del ítem 6.

La pareja se enfrenta a la definición de las primeras de las cantidades desconocidas, *la distancia recorrida por el coche que sale de Albacete hasta encontrarse*, *Ssa*. Antes de tomar una decisión, Cándido opta por analizar el resto de cantidades pendientes de definir (ítem 7). De este modo observan que las otras cantidades involucradas, *el tiempo que tardan en encontrarse* (*T*) y *la*

7. Cándido: Distancia recorrida por el coche de Albacete hasta, esto no lo sabemos, espérate, primero vamos a… (*Cándido despliega la lista de cantidades.*)
8. Yolanda: Tiempo que tardan en encontrarse.
9. Cándido: Eso tampoco lo sabemos.
10. Yolanda: Y distancia tampoco.
11. Cándido: Y distancia que recorre, distancia recorrida, tampoco lo sabemos, bueno pues aquí hay que dar… (*Cándido*

distancia recorrida por el coche que sale de Madrid hasta encontrarse (*Ssm*), son también desconocidas (ítems 9 a 11). Ante esta situación Cándido decide mantener seleccionada *Ssa* (ítem 11) y Yolanda representarla con la letra *equis* (ítem 13). Su proceder parece indicar que, en primer lugar, estarían descartando que quedasen cantidades conocidas pendientes de introducir en el sistema y, en un segundo lugar, quizá un análisis previo de las cantidades desconocidas para decidir cuál, al ser designada mediante una letra, hará más fácil posteriormente plasmar en lenguaje algebraico las relaciones entre cantidades. En el mismo momento que denota *Ssa* mediante la letra *equis*, Yolanda ya está previendo el uso la relación $S = Ssa + Ssm$ para representar *Ssm* (ítem 13).

decide no cambiar la cantidad activa. El ratón está sobre la cantidad "distancia recorrida por el coche de Madrid hasta encontrarse".)

12. Cándido: Ehhh… la distancia…
13. Yolanda: [Equis, y luego lo otro será trescientos menos equis porque será la (ininteligible) del corredor este. Claro, pon equis. (*Cándido asigna la letra "x" a la cantidad "distancia recorrida por el coche de Albacete hasta encontrarse". La cantidad activa es "distancia recorrida por el coche que sale de Madrid hasta encontrarse".*)

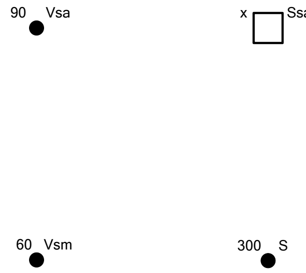


Figura 6.301. Grafo después del ítem 13.

Así, Yolanda propone representar *Ssm* mediante la expresión algebraica $300 - x$ (ítem 14). Ante las dudas de su compañero (ítem 15), Yolanda plantea una situación hipotética en la que uno de los dos coches hubiera recorrido diez kilómetros cuando se encuentran, deduciendo que, en ese caso, el otro coche debería haber recorrido noventa, aunque parece obvio que quería decir doscientos noventa (ítem 18). Esta explicación parece convencer a Cándido quien registra la expresión algebraica para *Ssm* en el tutor (ítem 18).

14. Yolanda: Y luego, distancia que, recorrida por el coche que sale de Madrid, trescientos menos equis. (*Cándido escribe "x…".*)
15. Cándido: ¿Seguro?
16. Yolanda: En expresión. Sí.
17. (*Cándido activa la opción "expresión".*)
18. Yolanda: Porque si ha recorrido diez kilómetros, trescientos menos diez te va a dar noventa (sic) que es lo que ha recorrido el otro… (*Cándido escribe la expresión "300−x", que es asignada a la cantidad "distancia recorrida por el coche que sale de Madrid hasta encontrarse". La cantidad activa pasa a ser "tiempo que tardan en encontrarse".*)
19. Yolanda: …hasta encontrarse.

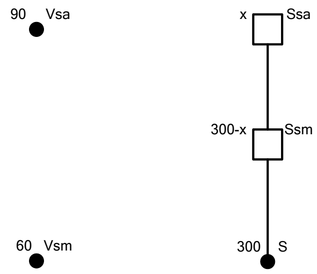


Figura 6.302. Grafo después del ítem 19.

A la vista de la descripción de la cantidad *T*, no muestran ninguna duda ni parecen

20. Cándido: Es verdad. Tiempo que tardan, *y*.
21. Yolanda: I griega. (*Cándido asigna la letra "y" a la cantidad activa. Se activa*

la ventana de ecuaciones.)

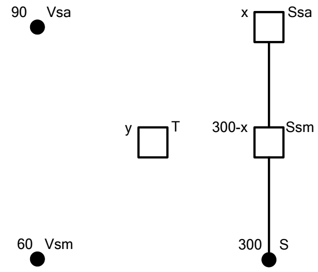


Figura 6.303. Grafo después del ítem 21.

contemplar otras posibilidades. Directamente Cándido sugiere usar una segunda letra (ítem 20) y Yolanda aprueba la idea (ítem 21). Así, sin necesidad de cursar ninguna explicación, asignan la letra *y* a la cantidad *T* (ítem 21).

22. Cándido: Vale, ahora viene…
23. Yolanda: A ver, tenemos qué encontrar a qué distancia de Albacete se encuentran ambos coches.
24. Cándido: Pero tenemos que saber el tiempo porque la velocidad… ¿o no? (*Cándido coloca el ratón sobre "y" haciendo visible "tiempo que tardan en encontrarse"*.)

Como paso previo a la construcción de las ecuaciones necesarias para resolver el problema, Yolanda regresa al enunciado del problema y acota la cantidad que deben encontrar para dar respuesta al problema (ítem 23). A este hecho, que en principio pudiera parecer bastante trivial, podemos darle dos interpretaciones. Una, quizá la más superficial, es que la alumna se limite a revisar el problema en búsqueda de relaciones para construir las ecuaciones y termine, a modo de síntesis, verbalizando aquello que les es solicitado en el enunciado. Otra, práctica habitual de los estudiantes ante el cuarto paso del MC en el programa, es que entienda la construcción de una ecuación como el cálculo, más o menos directo, de la cantidad por la que se les pregunta y que, por ende, han de escribir la ecuación sobre dos representaciones duales de la misma cantidad. De hecho, así parece interpretarla su compañero, quien se decantaría por la cantidad *T* como aquella que tienen que "saber" (ítem 24). Las verbalizaciones son vagas y no permiten dilucidar si la diferencia de posturas se debe al hecho de que pretenden construir la ecuación sobre esas cantidades o si bien se deben a que ambas cantidades están representadas por letras y cada estudiante le da carácter de incógnita únicamente a una de ellas.

25. Yolanda: (Inaudible).
26. Cándido: Relaciones… (*Cándido se sitúa sobre el botón "300−x" haciendo visible "distancia recorrida por el coche sale de Madrid hasta encontrarse"*.)
27. Yolanda: Trescientos menos equis…

En estas circunstancias, sin exponer claramente sus posturas, se embarcan en la escritura de la primera de las ecuaciones. Cándido parece sopesar el uso de la expresión $300 - x$ en la ecuación pues estudia su significado apoyado por una de las funcionalidades del tutor (ítem 26). Posteriormente, hace lo propio con la cantidad *Vsm* (ítem 28) con lo que parece tener en mente una relación que implique únicamente las cantidades referentes a uno de los móviles. Por su parte, Yolanda sugiere escribir $(300 - x) - x$ aunque ella misma descarta la idea inmediatamente (ítem 29).

28. Cándido: [Yo es que éste no sé. Distancia recorrida por el coche que sale de Madrid y te pide en qué punto…
29. Yolanda: Tres menos *equis* menos *equis*, no.
30. Cándido: A ver el tiempo, velocidad… (*Cándido se sitúa sobre el botón "60" haciendo visible "velocidad del coche que sale de Madrid". Luego hace lo mismo con el botón "x" y "distancia recorrida por el coche que sale de Albacete hasta encontrarse".*)
31. Yolanda: (Inaudible) menos equis. (*Mientras Cándido va señalando alternativamente con el ratón "60" y "x".*)

En estas circunstancias, Cándido verbaliza de manera muy imprecisa la estructura conceptual que desea usar (ítem 32). De hecho, la interpretación estricta de sus palabras conlleva usar la relación $Vsm \cdot Ssm = Ssa$ ó incluso $Vsm \cdot Ssm = Ssm$. Por sus acciones posteriores parece que es un error al expresarse y que quería referirse a la velocidad por el tiempo (véase ítem 44). Sin embargo, Yolanda interpreta literalmente las palabras de su compañero y propone la expresión $60x$ (ítem 33). La alumna está cometiendo el error de relacionar multiplicativamente *Vsm* con *Ssa*. Por las acciones posteriores podemos deducir que en este intervalo se encadenan una secuencia de errores y malentendidos. Así, de la expresión propuesta por Yolanda, Cándido parece inferir que la letra equis significa la cantidad *T*, pues propone una ecuación que suponga igualar $90x$ y $60x$ (ítem 34) para, él mismo, rechazarla alegando que los coches recorren distancias diferentes (ítem 36). El uso que hace las expresiones muestra claramente que interpreta las expresiones algebraicas como representaciones de las relaciones multiplicativas $Ssm = Vsm \cdot T$ y $Ssa = Vsa \cdot T$, y que está considerando que x designa por *T*.

32. Cándido: Y si, ah, mira, si multiplicamos, no, nada. (*Breve silencio.*) Sesenta, la velocidad, por la distancia recorrida y te sale el punto en que se encuentran, ¿o no?
33. Yolanda: Sesenta por equis…
34. Cándido: [¡Ah, sí, mira! Noventa por equis es igual a sesenta por equis, no…
35. Yolanda: [No.
36. Cándido: Porque uno recorre más que otro, no se igualan.

Yolanda, parece que también sumada a esta equivocación, identifica la expresión

37. Yolanda: No, a ver, noventa por equis es lo que ha recorrido el primero. (*Mientras Cándido hace visible "distancia entre Albacete y Madrid" al colocarse sobre*

90x con la distancia recorrida por uno de los móviles (ítem 37). Cándido reacciona planteando la expresión $60x - 300$ en lo que siempre, asumiendo que equis estaría denotando T, sería una propuesta de construir una ecuación sobre la cantidad *Ssa* aunque en ella habría un error de inversión pues la expresión correcta sería $300 - 60x$. El hecho de que Cándido esté malinterpretando el significado de *equis* lo confirma su intervención posterior donde afirma que la diferencia expresada daría el punto de encuentro (ítem 40). Yolanda al no entender la relación propuesta propicia que su compañero se percate de esta confusión con respecto al significado de la letra equis. En concreto, la estudiante pregunta a su pareja si la expresión daría y, ya que si consideraban x la cantidad T, parece lógico que y refiriera a *Ssa* (ítem 41). La cuestión lleva a Cándido a revisar el significado de la letra y y detectar su error (ítem 42). De esta forma, reformula su propuesta ahora ya considerando el uso de la letra y en vez de x (ítem 44). Sin embargo, al trasladar la ecuación al tutor, construyen la ecuación, también errónea, $60y = 300$ que es rechazada por el tutor (ítem 50).

“300” y luego obre el botón “60” haciendo visible “velocidad del coche que sale de Madrid”.)

38. Cándido: Mira sesenta por equis menos trescientos…
39. Yolanda: ¿Trescientos por qué?
40. Cándido: Y te da el punto.
41. Yolanda: [¿Y qué te da? ¿i griega? I griega no te da… ¿o sí?
42. Cándido: Pero, ah, no, ¿éste es el tiempo o cuál es el tiempo? (*Cándido se coloca sobre “y” haciendo visible “tiempo que tardan en encontrarse”.*)
43. Yolanda: [Claro.
44. Cándido: Ah, no, entonces es, es sesenta por *y*, ¿sabes? El tiempo por la velocidad total menos trescientos, te da el punto…
45. Yolanda: Vale.
46. Cándido: Es así, ¿no? Yo creo que sí.
47. Yolanda: Entonces, sesenta…
48. Cándido: [Sesenta por *y*… (*Cándido escribe “60*y…”.*)
49. Yolanda: […i griega es igual a trescientos.
50. (*Cándido escribe “60*y=300” que es identificada como errónea.*)

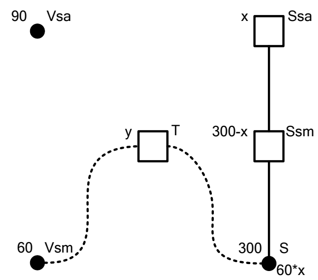


Figura 6.304. Grafo después del ítem 50.

Como respuesta al mensaje de error, Yolanda vuelve a repasar el enunciado destacando la cantidad pedida (ítem 52). Cándido, en cambio, se dedica a revisar exhaustivamente el significado de cada uno de los botones disponibles para construir la ecuación (ítems 53 a 58).

51. Cándido: Argggg… ¡ya decía yo! (*Cándido borra la ecuación.*)
52. Yolanda: Es que a qué distancia de Albacete se encuentran ambos coches… (*Mira el enunciado.*)
53. Cándido: [Tiempo que tardan en encontrarse. (*Cándido se coloca sobre “y” haciendo visible “tiempo que tardan en encontrarse”.*)
54. Cándido: Puff, distancia recorrida por el coche que sale de Madrid hasta encontrarse… Yo no sé, no () nada… (*Cándido se sitúa sobre el botón “300−x” haciendo visible “distancia recorrida por el coche sale de Madrid hasta encontrarse”.*)
55. Yolanda: Trescientos menos equis, a ver, trescientos menos equis… pues no sé. (*Cándido se sitúa sobre el botón “x” haciendo visible “distancia recorrida por el coche sale de Albacete hasta*

encontrarse”.)

56. (*Cándido se sitúa sobre el botón “60” haciendo visible “velocidad del coche que sale de Madrid”. Luego hace lo mismo con el botón “90” y “velocidad del coche que sale de Madrid hasta encontrarse”*.)

Después de observar la descripción de todas las cantidades, Cándido se da por vencido y se dirige al profesor afirmando que no saben resolverlo (ítem 57). Concretamente, señala que no saben plantear la ecuación (ítem 60) a lo que Yolanda añade que el problema podría venir por que el enunciado pide la distancia a la que se encuentran de Albacete (ítem 61), resultando desconcertante que parece apuntar a que serían capaces si les diese “el punto”.

57. Cándido: No sabemos. (*Cándido se dirige al profesor*.)
58. (*Silencio de cinco segundos*.)
59. Profesor: Ya habéis declarado todas las cantidades, ¿no?
60. Cándido: Sí, pero no sabemos plantear la ecuación.
61. Yolanda: Es que te pide a qué distancia de Albacete se encuentran los dos pero… si te dice en qué punto pues a lo mejor pero… (*Cándido se coloca sobre “y” haciendo visible “tiempo que tardan en encontrarse”*.)
62. Cándido: Tiempo que tardan, si multiplicamos la velocidad (*Cándido señala el botón “60”*) así te saldría…

El profesor les pregunta si existe alguna relación entre espacio, velocidad y tiempo (ítem 63). Inmediatamente, Cándido reacciona aplicando la estructura conceptual correctamente a dos casos hipotéticos (ítems 64 y 66). A partir de este punto la pareja se afana en aplicar la estructura conceptual para construir la ecuación.

63. Profesor: ¿Existe alguna relación entre espacio, velocidad y tiempo?
64. Cándido: ¡Claro! Porque a la velocidad que vayas, el tiempo, vas, a la velocidad que vayas, sesenta kilómetros por hora y…
65. Yolanda: [Claro].
66. Cándido: … y tardas una hora, sesenta. Has recorrido sesenta kilómetros, entonces eso tiene que ver. Si tarda una hora y media, entonces sesenta por una hora y media a lo, ha recorrido noventa.

La primera idea es emplear la cantidad *Vsm* para escribir la ecuación (ítem 67). Con esta cantidad, entre los ítems 67 y 81, proponen la ecuación $60y = x$, donde cometen el error de no distinguir correctamente entre las cantidades *Ssa* y *Ssm*, con lo que terminan sometiendo a validación una ecuación que daría cuenta de la relación errónea $Ssa = Vsm{\cdot}T$ (ítem 81).

67. Cándido: Habrá que multiplicar sesenta por…
68. Yolanda: [sesenta por equis.
69. Cándido: … setenta por el tiempo, que eso…
70. Yolanda: [No.
71. Cándido: ¿No?
72. Cándido: El tiempo que tardan…
73. Yolanda: [¿Y a qué da igual?
74. Cándido: … por esto (*señala el botón “60” con el puntero*)…
75. Yolanda: [¿Sesenta por i griega es igual a qué?
76. Cándido: Eh, eh…
77. Yolanda: [¡Ahhhh, claro! ¡ A equis!]
78. Cándido: …sesenta…
79. Yolanda: [¡Dale!
80. Cándido: ¿Cómo? Ponlo tú que no me he enterado.
81. Yolanda: Porque si multiplicas el tiempo a la velocidad que iba te va a dar lo que

ha recorrido hasta ese momento, es igual a equis. (*Yolanda escribe “60*y=x”, que es identificada como errónea.*)

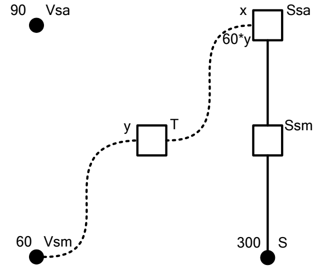


Figura 6.305. Grafo después del ítem 81.

Ante el mensaje de error cada uno de los estudiantes toma líneas de desarrollo de la resolución diferentes. Por un lado Yolanda, intentando detectar la causa del error, examina a qué han igualado la expresión 60*y* (ítem 85) y reconoce que deben igualarlo a la cantidad *Ssm*, no a *Ssa* (ítems 87 y 93). Mientras tanto, Cándido ha recuperado la idea de construir una ecuación sobre la cantidad *Ssa*, aunque nuevamente cometiendo un error de inversión: $60y - 300 = 90y$ (ítem 86 y 88). Cándido intenta reflejar su idea en el tutor no se lo permite (ítem 88) por lo que Yolanda toma la responsabilidad e impone su propuesta (ítem 93). Así, validan la ecuación $60y = 300 - x$, que es aceptada por el programa (ítem 94).

82. Yolanda: Pues no.
83. Cándido: No, si eso lo hemos puesto antes. No, espera. (*Cándido borra la ventana de ecuaciones.*)
84. Cándido: Sesenta por *y* que es el tiempo te da…
85. Yolanda: [¿A qué es igual?
86. Cándido: …el espacio que ha recorrido, entonces a qué distancia se encuentra de Madrid ambos coches lo restas menos… (*Cándido escribe “60*y...”.*)
87. Yolanda: [¡Es que es esto, no eso!
88. Cándido: …menos trescientos es igual a noventa por y… (*Cándido intenta escribir “60*y−300=90*y” pero el tutor no lo permite, quedando “60*y=90”.*)
89. Yolanda: No, no, que ya lo has puesto Cándido.
90. Cándido: Ah, es verdad, no me deja.
91. Yolanda: A ver, espera, borra el noventa.
92. (Cándido borra la ventana de ecuaciones.)
93. Yolanda: Sesenta por i griega es igual a trescientos menos equis.
94. (*Cándido escribe “60*y=(300−x)” que es validada por el tutor.*)
95. Yolanda: ¡Ves!

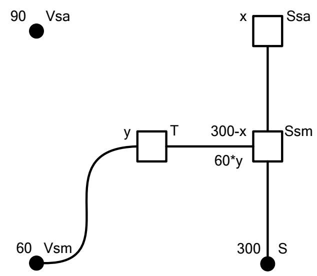


Figura 6.306. Grafo después del ítem 95.

La construcción de la segunda ecuación ya les parece evidente. De manera natural se centran en el móvil que sale desde

96. Cándido: Y ahora el otro sería al revés. (*Cándido se sitúa sobre el botón “90” haciendo visible “velocidad del coche que sale de Albacete hasta encontrarse”.*)

Albacete para escribir una ecuación análoga a la validada para el otro coche (ítem 96 a 104). Asimismo, Yolanda destaca que anteriormente pensaban que equis refería a *Ssm* (ítem 97). En pocos segundos introducen en el sistema la ecuación $90y = x$ y la validan (ítem 104).

97. Yolanda: [Porque nos hemos equivocado al poner… porque pensábamos que si equis era el de sesenta…
98. Cándido: [Hemos puesto el otro.
99. Yolanda: …y era el otro.
100. Cándido: Entonces noventa por y… (*Cándido escribe "90*y…".*)
101. Yolanda: [Por y.
102. Cándido: …es igual a… (*Cándido escribe "90*y=…".*)
103. Yolanda: […a equis.
104. Cándido: No, a trescientos. Ah, sí, a equis. (*Cándido completa la ecuación "90*y=x" que es validada por el tutor.*)
105. Cándido: Ah, vale, ya sale.
106. Yolanda: ¡Ajá!
107. Cándido: Ya está.

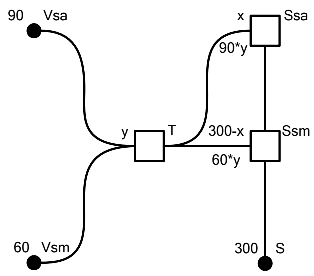


Figura 6.307. Grafo al final de la resolución.

108. Profesor: ¿Qué dificultades habéis tenido inicialmente?
109. Cándido: Que no sabíamos…
110. Yolanda: Es que en realidad nos hemos equivocado al coger eh, como, la…
111. Cándido: Le hemos puesto la variable equis…
112. Yolanda: [Eso]
113. Cándido: …a la distancia recorrida por el coche de Albacete y a trescientos menos equis la otra y entonces hemos cogido la que no era.

6.5.5.4. El caso de la pareja Yolanda-Cándido en el problema "El heno"

Un granjero había almacenado cierta cantidad de heno para el consumo de ganado pensando que duraría 198 días. Sin embargo, el heno duró 217 días ya que era de mejor calidad y el ganado consumió 171 kg menos por día de lo que se había previsto que gastaría. ¿Cuánto heno se había almacenado en la granja?

La primera etapa de la resolución consiste en la definición de las cantidades conocidas. Por este orden, la pareja asigna valor correctamente a las cantidades *días previstos* (*Dp*) (ítem 6), *días reales* (*Dr*) (ítem 10) y heno ahorrado diario (*Had*) (ítem 13).

1. (*Cándido lee el enunciado en voz alta. La cantidad activa es "días previstos".*)
2. Cándido: A ver…
3. Yolanda: Es como el de…
4. Cándido: [Sí, previsto, prev… (*Cándido parece buscar el valor en el enunciado.*)
5. Yolanda: Días previstos, ciento noventa y ocho.
6. Cándido: Sí. (*Cándido asigna el valor "198" a la cantidad "días previstos". La cantidad activa pasa a ser "días reales".*)

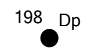


Figura 6.308. Grafo después del ítem 6.

7. Yolanda: Días reales.
8. Cándido: Sin embargo, el heno… (*Cándido relee el enunciado.*)
9. Yolanda: [Doscientos diecisiete, sí, días, sí.
10. Cándido: Sí. (*Cándido asigna el valor "217" a la cantidad "días reales". La cantidad activa pasa a ser "heno ahorrado diario".*)

Figura 6.309. Grafo después del ítem 10.

11. Cándido: Heno…
12. Yolanda: Ciento diecisiete, ciento setenta y uno kilos menos por día de lo que se había previsto.

13. Cándido: Ah, sí, es verdad. (*Cándido asigna el valor "171" a la cantidad "heno ahorrado diario". La cantidad activa pasa a ser "gasto diario previsto".*)

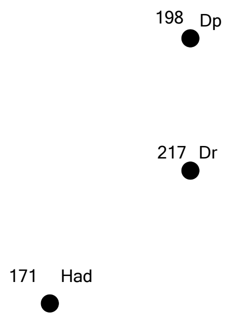


Figura 6.310. Grafo después del ítem 13.

La primera de las cantidades desconocidas ofrecida por el programa es el *gasto diario previsto* (*Hpd*). Cándido parece no entender a qué se refiere esta cantidad (ítem 14). En respuesta, Yolanda comenta que cree que deberían representar todo el heno almacenado mediante la letra *equi*s (ítem 15), y empieza a pensar en cómo podría representar el gasto diario previsto a partir de esa cantidad (ítem 15). Cándido interrumpe a su compañera y parece pensar que deberían representar *Hpd* mediante la letra *equis* (ítem 16), para inmediatamente centrarse en la cantidad *Had*, que afirma que debe estar mal (ítem 18). Las actuaciones de Cándido parecen a indicar que está considerando que las cantidades *Hpd* y *Hrd* están relacionadas, y que quizá confunda las cantidades *Hrd* y *Had* (ítem 20). Una vez aclarada esta confusión, Cándido representa la cantidad *Hpd* mediante la letra *equis* (ítem 22), con la idea de representar *Hrd* a partir de una expresión algebraica que involucre las cantidades *Had* y *Hpd*.

14. Cándido: Gasto diario, ¿cómo que gasto diario?
15. Yolanda: El heno, todo el heno, aquí qué hay que poner, todo el heno sería *equis*, entonces gasto diario previsto sería…
16. Cándido: [¡Ah, claro, *equis*, no, preveía equis…
17. Yolanda: …*equis* por…
18. Cándido: […y luego gastó ciento setenta y uno menos, entonces creo que éste (*señala "171" en la ventana de cantidades*) está mal entonces.
19. Yolanda: No, porque entonces nos hubiera dicho que estaba mal.
20. Cándido: Consumió ciento setenta y uno por día de lo que había previsto que gastaría, sí es eso.
21. Yolanda: Entonces primero tienes que poner (ininteligible por solapamiento)…
22. Cándido: [¡A ver preveía que gastaría *equis*, preveía que gastaría *equis*… (*Cándido asigna la letra "x" a la cantidad "gasto diario previsto". La cantidad activa pasa a ser "gasto diario real".*)

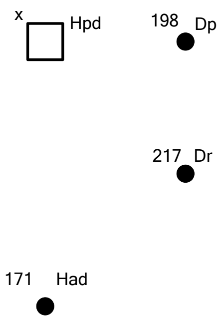


Figura 6.311. Grafo después del ítem 22.

Yolanda propone representar la cantidad *gasto diario real* (*Hrd)* mediante la

23. Cándido: ... y luego gastó ciento setenta y uno menos, es decir…
24. Yolanda: [equis menos ciento setenta y uno.

expresión algebraica x − 171 (ítem 24), que considera correctamente la relación aditiva *Hpd* = *Hrd* + *Had*. Cándido, sorprendentemente, intenta introducir la expresión en la ventana de cantidades, modificando la representación de la cantidad *heno ahorrado diario* (ítem 27). Se vuelve a manifestar la confusión de Cándido entre las cantidades *Had* y *Hrd*. Yolanda hace ver a su compañero que debe hacerlo desde la opción *expresión* (ítems 26 y 28). Finalmente, terminan asignando la expresión *x* − 171 a la cantidad *Hrd* (ítem 31).

25. Cándido: …equis menos ciento setenta y uno.
26. Yolanda: Que no, que lo pongas aquí, Cándido.
27. Cándido: Lo he puesto, pero esto no funciona… ah, es verdad, *equis*… (*Parece que intenta modificar en la ventana de cantidades el valor asignado a "heno ahorrado diario"*.)
28. Yolanda: ¡Ay, Cándido!
29. Cándido: ¡Sí, calla! (*Cándido activa la opción "expresión"*.)
30. Cándido: *Equis* menos ciento setenta y uno. (*Cándido escribe la expresión "x−171"*.)
31. Yolanda: Aceptar. (*Cándido valida la expresión "x−171", que es asignada a la cantidad "gasto diario real". La cantidad activa pasa a ser "heno almacenado"*.)

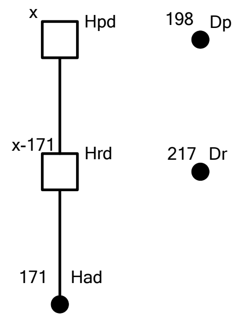


Figura 6.312. Grafo después del ítem 31.

La última de las cantidades pendientes de definir es *el heno almacenado, H* (ítem 32). Yolanda sugiere hacer el uso de la letra *y* para representar la cantidad *H* (ítem 33). Cándido pide cautela para consultar si quedan cantidades pendientes (ítem 35) y una vez verificado que sólo queda por declarar la cantidad *H*, afirma que es posible resolverlo usando una única letra (ítem 36). A solicitud de Yolanda, Cándido verbaliza la relación multiplicativa *H* = *Hrd*·*Dr* (ítems 38, 40 y 42) a través de la expresión (*x* − 171)*217. Yolanda no parece convencida de esta propuesta (ítem 46), pero accede a validarla, siendo la expresión aceptada por el tutor.

32. Cándido y Yolanda: Heno almacenado.
33. Cándido: Eso… (*Cándido mira el enunciado.*)
34. Yolanda: I griega.
35. Cándido: Sí, no, espera, sí, bueno… (*Cándido despliega la lista de cantidades en la que sólo queda la cantidad activa.*)
36. Cándido: Aunque se puede hacer de otra forma, con una sola…
37. Yolanda: [¿Cómo?
38. Cándido: Si el gasto diario es *equis* menos setenta y uno (sic) que es el gasto real (*señala "x−171" en la ventana de cantidades*) y le duró el éste ciento diecisiete días (*señala "217" en el enunciado*)…
39. Yolanda: Sí.
40. Cándido: Lo puedes sacar así, *equis* menos ciento setenta y uno por…
41. Yolanda: [¡Por!
42. Cándido: … por doscientos…
43. Yolanda: [por doscientos diecisiete.
44. Cándido: Sí.
45. Yolanda: A ver… (*Yolanda activa la opción expresión.*)
46. Yolanda: Equis menos ciento setenta y uno por doscientos diecisiete. Yo creo

que no pero… (*Cándido escribe la expresión “(x−171)*217” que es asignada a la cantidad “heno almacenado”.*)

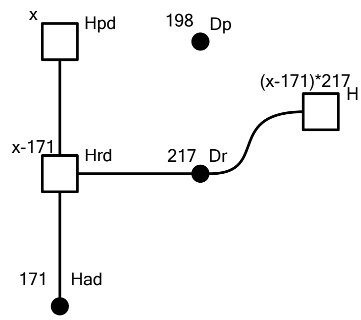


Figura 6.313. Grafo después del ítem 46.

Cándido comenta que la estrategia usada de usar una sola letra resulta más sencilla que con dos letras (ítem 50). Para construir la ecuación, Cándido retorna a la pregunta del enunciado e identifican que la cantidad solicitada es *H*, que han representado por la expresión 217(x − 171) y en torno a la cual organizan la construcción de ecuación. Cándido incluso considera que esta expresión es la solución del problema y que no deben hacer nada más (ítem 58). Yolanda, en respuesta, reflexiona sobre cuántas ecuaciones habrán de escribir (ítem 59). Sin embargo, también evidencia dudas pues quiere validar directamente la expresión algebraica (ítem 60), lo cual es impedido taxativamente por su compañero, quien alega que sin igualarlo no es una ecuación (ítem 63).

47. Yolanda: ¡Ah, pues sí!
48. Cándido: ¡Ves!
49. Yolanda: ¡Ay, qué listo qué eres, Cándido! Entonces…
50. Cándido: [Así es más fácil.
51. Yolanda: Sí.
52. Cándido: ¿Cuánto heno se había almacenado en la granja? (*Cándido señala la pregunta del enunciado.*)
53. Yolanda: Esto.
54. Cándido: Espera.
55. Yolanda: A ver, espera, espera.
56. Cándido: Heno almacenado, esto es el heno almacenado… (*Cándido señala el botón “217*(x−171)” haciendo visible “heno almacenado”.*)
57. Yolanda: (ininteligible).
58. Cándido: ¿No es eso y ya está así?
59. Yolanda: No, no, no. Cuántas, tienes que sacar… (*Cándido escribe “217*(x−171)…”.*)
60. Yolanda: Dale a aceptar.
61. Cándido: ¿Cómo va a ser?
62. Yolanda: ¡Claro!
63. Cándido: ¡Tendrás que igualarlo para fijar la ecuación!

Ya centrados en la escritura de la escritura, Yolanda propone igualar *H* a una cantidad descrita como el heno gastado (ítem 64). Sin embargo no enfoca el proceso a construir una representación dual de *H* sino que desea igualarlo a *Had* (ítem 69), considerando que *Had* informa el heno gastado (ítem 70). Cándido le muestra que esa cantidad no puede ser igual a *H* (ítem 71). Además, Cándido parece pensar en usar la relación $H = Hpd \cdot Dp$, pero la descarta porque interpretaría que estaría planteando “la

64. Yolanda: Es igual a… lo que hemos gastado.
65. Cándido: Mmm… pero no sabes cuánto has gastado.
66. Yolanda: Ehhh, esto. (*Yolanda señala con el dedo el botón “x−171”. Cándido se sitúa sobre el botón haciendo visible “gasto diario real”.*)
67. Cándido: Gasto diario real…
68. Yolanda: [No creo pero bueno…
69. Yolanda: No, no. Esto (*217*(x−171)*) es el heno almacenado, es lo mismo que… (*Cándido vuelve a señalar el botón “x−171” haciendo visible “gasto diario real”.*)
70. Yolanda: [¡Qué lo que has gastado!
71. Cándido: ¿Cómo va a ser lo mismo que

misma ecuación". Esta conducta podría indicar que el estudiante descarta usar la misma estructura conceptual, en este caso para la situación prevista, porque considera que desembocaría en una identidad algebraica en vez de en una ecuación.

Las siguientes actuaciones de Cándido (ítem 75 a 86) parecen centradas en representar *H* usando las cantidades relativas a la situación real. De este modo, el estudiante no escribe nada pues percibe que la relación que pudiera desarrollar coincide con la representación ya existente de *H*.

lo que has gastado?
72. Yolanda: ¡Claro! Ah, no…
73. Cándido: [¡Ah, que lo que has gastado por… claro, que al final es la misma ecuación porque esto es lo mismo…
74. Yolanda: [A ver lo que has gastado es si…
75. Cándido: [Si es esto. (*Cándido señala el botón "217*(x−171)" haciendo visible "heno almacenado".*)
76. Yolanda: …que, espera a ver que no me acuerdo qué había (inaudible), claro, es que no sé…
77. Cándido: Mira, espera, *equis*, éste es el gasto real (*señala el botón "x−171"*)… (*Cándido borra la ventana de ecuaciones. Cándido escribe "(x−171)…".*)
78. Yolanda: Sí.
79. Cándido: Espera, gasto diario real es lo mismo, ¿a qué es igual el gasto diario real? (*Cándido escribe "(x−171)*217…".*)
80. Yolanda: ¡A lo que tienes!
81. Cándido: Es que es [lo que han escrito] es lo mismo que esto (*botón "217*(x−171*)" entonces…
82. Yolanda: Mira, espera, a ver… (*Yolanda borra la ventana de ecuaciones.*)
83. Cándido: …si lo que tienes es esto (*coloca el ratón sobre "171"*) es igual a… (*se coloca sobre "217*(x−171)"*).
84. Yolanda: Es que esto es igual a, es igual a…
85. Cándido: [Es igual a lo que te has gastado más lo que te has ahorrado… porque si yo, a ver…
86. Yolanda: Esto (*botón "217*(x−171)"*) es el heno almacenado al final. (*Cándido señala el botón "217*(x−171)" haciendo visible "heno almacenado".*)
87. Yolanda: Claro, dale a ver.
88. Cándido: ¡Ah! Mira, espera, creo que ya sé. El heno que preveía (*Cándido se coloca sobre "x" y empieza a escribir "x…".*)
89. Cándido: …menos, no, es que no… (*Cándido escribe "x−…". Cándido termina borrando la ventana de ecuaciones.*)
90. Yolanda: ¡Es que es eso, sí! El heno total que tienes, a ver, sí, a ver, si equis es el… ¿cuánto?¿equis qué era? El, el previsto menos lo que has ahorrado…
91. Cándido: [Es lo mismo. La primera esta de heno es lo mismo que la segunda vez, tienes el mismo heno, lo que pasa que lo has gastado antes o lo has gastado después. Entonces la primera prev…
92. Yolanda: [Equis. (*Cándido señala el*

Cándido parece explorar una alternativa haciendo uso de una relación aditiva (ítem 88) aunque él mismo desecha esta opción (ítem 89). Yolanda sí que considera posible representar la cantidad *H* como la diferencia entre el heno previsto y el ahorrado (ítem 90). Esta propuesta manifiesta que la estudiante confunde las cantidades unitarias y las totales, pues parece querer extrapolar la relación aditiva $Hpd = Hrd + Had$ a las cantidades totales, sin reparar que el heno total consumido es el mismo entre ambas situaciones. Cándido parece señalar precisamente que la cantidad *H* refiere a ambas situaciones (ítem 91), y que lo que varía es el tiempo en que se consume. Esta corrección a Yolanda parece actuar de catalizador en la resolución pues inmediatamente la estudiante desea usar la cantidad *Hpd* aún ante el rechazo de Cándido (ítems 92 a 94). Así inician la ecuación usando la letra *equis* y ambos parecen entender la dirección que toma la escritura de la ecuación. De hecho en pocos pasos escriben y validan la ecuación $198x = 217(x - 171)$ (ítem 99).

A modo de cierre, Yolanda comenta que le hubiera resultado más sencillo si hubieran planteado dos letras (ítem 103).

botón "x" haciendo visible "gasto diario previsto".)

93. Cándido: Gasto diario previsto, no, previsto no… (*Cándido escribe "x…".*)
94. Yolanda: Sí.
95. Cándido: ¿Era previsto?
96. Yolanda: Sí. (*Cándido señala el botón "x" haciendo visible "gasto diario previsto".*)
97. Cándido: El gasto diario previsto por ciento noventa y ocho días… (*Cándido escribe "x*198…".*)
98. Yolanda: Es igual a…
99. Cándido: Es igual que esto. (*Cándido escribe "x*198=(217*(x−171))", que es identificada como válida.*)
100. Cándido: Ahí está.
101. Yolanda: ¡Aaaaah, amigo! Yo lo habría hecho más fácil con dos, vaya…
102. Profesor: ¿Cómo lo hubieras hecho tú, Yolanda?
103. Yolanda: Con dos variables, creo que lo hubiera, se me hubiera hecho más fácil.
104. Cándido: ¿Sí?
105. Yolanda: Ajá.

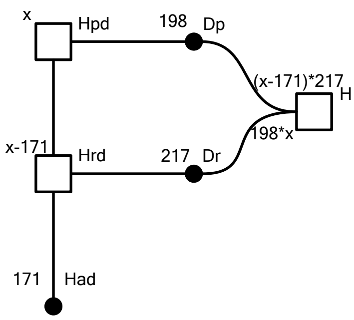


Figura 6.314. Grafo al final de la resolución.

6.5.6. LA PAREJA CARMEN-PIEDAD

6.5.6.1. El caso de la pareja Carmen-Piedad en el problema "La excursión"

Un grupo de amigos está planificando una excursión. A cada amigo la excursión le va a costar 10 €. Sin embargo, a última hora, dos de los amigos deciden no ir a la excursión por lo que el resto ha de pagar 12,5 € cada uno. ¿Cuántas personas forman parte del grupo de amigos?

Carmen lee el enunciado del problema en voz alta (ítem 1). Carmen sugiere asignar el valor 10 a la cantidad conocida *coste por persona si asistiesen todos los amigos* (*Cia*) (ítem 4). Piedad se muestra conforme e invita a su compañera a que realice la asignación en el sistema (ítem 6). Carmen lo consuma correctamente en el programa (ítem 7).

1. (*Carmen lee el enunciado en voz alta. La cantidad activa es "coste por persona si asistiesen todos los amigos".*)
2. Carmen: Vale.
3. Piedad: Muy bien.
4. Carmen: A ver, el coste por persona si asisten todos los amigos es diez euros. (*Piedad despliega la lista de cantidades.*)
5. Carmen: Ya está, el primero… (*Piedad activa la cantidad "coste por persona si asisten todos los amigos".*)
6. Piedad: Pon 10.
7. (*Carmen asigna el valor "10" a la cantidad activa. La cantidad activa es "coste por persona si dos amigos no asisten".*)

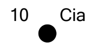


Figura 6.315. Grafo después del ítem 7.

La siguiente cantidad activa es la cantidad conocida *coste por persona si dos amigos no asisten* (*Cfa*). Piedad propone informar esta cantidad con el valor 12,5 (ítem 8) y Carmen acomete la representación en el tutor (ítem 9).

8. Piedad: Vale, eso está bien, ¿no? Coste por persona si dos amigos no asisten, doce con cinco. Ponlo.
9. (*Carmen asigna el valor "12.5" a la cantidad "coste por persona si dos amigos no asisten". La cantidad activa pasa a ser "número de amigos que no asisten".*)

Figura 6.316. Grafo después del ítem 9.

La última de las cantidades conocidas es la cantidad *número de amigos que no asisten* (*An*) que Carmen informa correctamente sin dudar (ítems 11 y 12).

10. Piedad: Número de amigos que no asisten…
11. Carmen: [¡Dos!
12. (*Carmen asigna el valor "2" a la cantidad "número de amigos que no asisten". La cantidad activa es "número de amigos del grupo"*.)

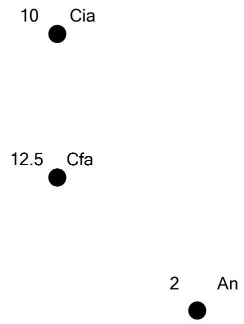


Figura 6.317. Grafo después del ítem 12.

Ante la primera de las cantidades desconocidas, la pareja responde al unísono indicando que han de representarla mediante la letra equis. La cantidad es el *número de amigos del grupo* (*A*).

13. Carmen y Piedad: Número de amigos del grupo, ¡equis! (*al unísono.*)
14. Carmen: Letra. (*Carmen señala con el dedo la opción "letra"*.)
15. (*Piedad activa la opción "letra"*.)
16. Carmen: Equis, vale. (*Carmen asigna la letra "x" a la cantidad "número de amigos del grupo". La cantidad activa es "número de amigos que asisten a la excursión"*.)

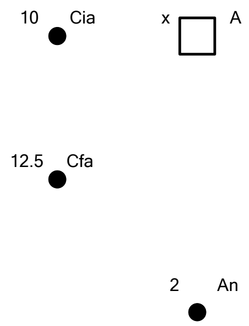


Figura 6.318. Grafo después del ítem 16.

Una vez designada la cantidad *A* mediante la letra *equis*, la pareja aborda

17. Piedad: Número de…
18. Carmen: [Número de amigos que asisten a la excursión.

la designación de la cantidad *número de amigos que asisten a la excursión* (Aa). Piedad propone la expresión $x - 2$ con la que sintetiza la relación aditiva $A = Aa + An$ (ítem 19). Carmen da su visto bueno a la idea de su pareja (ítem 20). Carmen consigna la expresión en el programa sin dificultad (ítem 24).

19. Piedad: Equis menos dos, porque si se quitan dos.
20. Carmen: Sí, equis menos dos.
21. Piedad: Espera, expresión.
22. Carmen: Expresión.
23. (*Piedad activa la opción "expresión".*)
24. Carmen: Equis menos dos… vale, ya está, aceptar. (*Piedad construye la expresión "x−2", que es asignada a la cantidad "número de amigos que asisten a la excursión". La cantidad activa es "coste de la excursión".*)

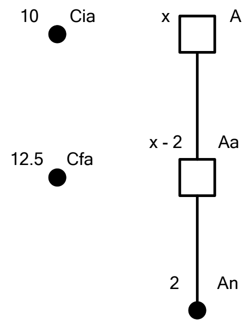


Figura 6.319. Grafo después del ítem 24.

Carmen lee la descripción de la última de las cantidades, el coste de la excursión (C) (ítem 25). Piedad propone usar la estructura multiplicativa que permite expresar el coste de la excursión a partir del número de los asistentes y del coste por persona (ítems 26 y 27). Dado que acompaña su verbalización con el movimiento del puntero señalando las cantidades en la ventana de cantidades, parece que piensa en la situación real, es decir $C = Cfa{\cdot}Aa$. La propuesta genera unos segundos de silencio y cuando Piedad decide plasmar su idea en el sistema (ítem 29), Carmen la interrumpe y le solicita paciencia (ítem 30). Piedad expone las cantidades implicadas en la relación Aa y Cfa (ítems 31 a 37) sin verbalizar explícitamente la operación que han de usar para construir la expresión. Carmen parece traducir la exposición de su compañera en la igualación incorrecta $Aa = Cfa$ (ítem 38). Piedad reacciona de inmediato indicando que deben construir la expresión (x – 2)*12,5 (ítems 40 y 42). Carmen reconoce su error (ítem 43) y la pareja

25. Carmen: Coste de la excursión… mmm…
26. Piedad: Pues los números, el número de amigos que van a la excursión o sea esto… (*Carmen señala la cantidad "número de amigos del grupo" en la ventana de cantidades.*)
27. Piedad: …por lo que les cuesta, ¿o no? (*No está claro qué cantidad señala Piedad con el ratón. Parece que inicialmente señala "coste por persona si asistiesen todos los amigos" pero finalmente deja el ratón sobre "coste por persona si dos amigos no asisten". Parece que se refiere a esta última.*)
28. (*Silencio de cinco segundos.*)
29. Piedad: Digo yo. (*Piedad activa la opción "expresión".*)
30. Carmen: Espera.
31. Piedad: Si van el número de amigos que asisten a la excursión… (*Piedad señala esta cantidad con el ratón.*)
32. Carmen: [Ahora son esos, vale.]
33. Piedad: …equis menos dos…
34. Carmen: [Equis menos dos.]
35. Piedad: … y a cada uno le cuesta…
36. Carmen: [doce…]
37. Piedad: …doce con cinco, o sea con cincuenta, pues el…
38. Carmen: Equis menos dos es igual…
39. Piedad: [No. Equis menos dos…

termina validando la expresión en el tutor (ítem 47).

40. Carmen: [Equis menos dos, aquí. (*Carmen señala el botón “x−2”.*)
41. (*Piedad construye la expresión “(x−2)…”.*)
42. Piedad: Por…
43. Carmen: Es verdad, por, sí…
44. Piedad: El por era esto, ¿no? (*Piedad coloca el ratón sobre el botón “*”.*)
45. Carmen: Sí. (*Piedad contruye la expresión “(x−2)*…”.*)
46. Piedad: Doce con cincuenta. (*Piedad construye la expresión “(x−2)*12.5”.*)
47. Carmen: Aceptar. (*Piedad valida la expresión que es asignada a la cantidad “coste de la excursión”. Se activa la ventana de ecuaciones.*)

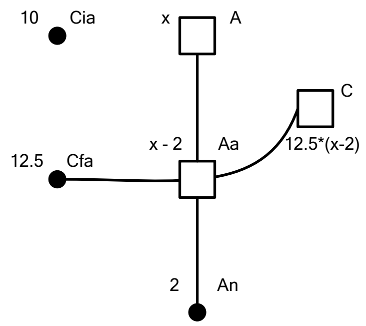


Figura 6.320. Grafo después del ítem 47.

Tras la definición de todas las cantidades, la pareja inicia el paso cuarto del MC. Previamente, comprueban que no quede ninguna cantidad pendiente de definir chequeando que la lista de cantidades esté vacía. Resulta llamativo que a pesar de que la asignación de 12,5(*x*–2)*12,5 haya sido validada por el tutor, tanto Piedad (ítem 48) como Carmen (ítem 49) no entienden que esto garantice que la expresión sea correcta.

48. Piedad: Eso está bien, ¿no?
49. Carmen: Se supone, no sé. (*Piedad despliega la lista de cantidades, que está vacía.*)
50. Carmen: Ahora, vale…
51. Piedad: [Y ya.

Carmen inicia el proceso de construcción de la ecuación releyendo la pregunta del enunciado (ítem 52). Propone “hacer” la expresión 12,5(*x*–2) ante lo que Piedad alega que eso ya lo han hecho (ítem53). Carmen matiza a lo que se refería y parece querer indicar que pretende construir la ecuación sobre la cantidad *C* designada por esa expresión (ítem 54). Piedad coge el hilo y empieza a meditar sobre cómo representar alternativamente la cantidad *C*. Entre los ítems 58 y 62 la

52. Carmen: … ¿cuántas personas forman el grupo? Ahora, ahora ya lo tenemos que, vale… pues espera… creo que tenemos que hacer doce con cincuenta por equis menos dos…
53. Piedad: ¿Por equis menos dos? Eso ya está hecho.
54. Carmen: [Ya, ya, pero ahora tenemos que hacer la ecuación para…
55. Piedad: [Por eso… (*Piedad señala con el ratón el botón “12.5*(x−2)” hasta hacer visible la etiqueta “coste de la excursión”.*)
56. Carmen: [Eso es igual…
57. Piedad: [¡No! Bueno, claro… a ver…

pareja expresa cooperativamente la relación $C = Cia \cdot A$. En concreto, Piedad propone multiplicar el número de amigos total por diez. Muy notable es la contestación de Carmen subrayando que esa relación no es posible porque desconocen la cantidad A (ítem 63). Esta intervención evidencia una dificultad para operar con lo desconocido por parte de Carmen. Piedad reconoce que es una cantidad desconocida (ítem 64) e indica que disponen de una expresión $x-2$ a partir de la que pueden representar el coste de la excursión al conocer lo que paga en esa situación cada amigo (ítems 64, 66, 68 y 70). De igual forma, reitera que podrán hacer lo mismo para el número total de amigos, considerando que en el número total de amigos están incluidos los dos que no asisten en la otra situación (ítem 70). Carmen deduce de la intervención de su pareja que x representa a la cantidad A y acepta la expresión $10x$. A partir de ese momento la pareja se afana en escribir la idea expuesta sobre el programa (ítems 72 a 80). La ecuación $12.5(x-2) = 10x$ es validada por Piedad (ítem 80).

(*Piedad señala el botón "12.5" hasta hacer visible el nombre "coste por persona si dos amigos no asisten"*.)

58. Piedad: …si esto es el número de amigos por lo que ehhhhhhh…
59. Carmen: [Por lo que vale, por lo que cuesta.
60. Piedad: … por lo que vale. Esto es lo mismo que el número de amigos total… (*Piedad mira a Carmen expectante.*)
61. Carmen: Sí, ¿pero por qué?
62. Piedad: …por diez. A ver…
63. Carmen: [A ver tú no sabes cuántos van… (*Carmen mira a Piedad.*)
64. Piedad: Ya lo sé pero, si aquí tenemos una expresión que es el número de amigos que sí que van…
65. Carmen: [Sí.
66. Piedad: … que van a la excursión…
67. Carmen: [Equis menos dos.
68. Piedad: …por…
69. Carmen: [lo que les cuesta.
70. Piedad: …lo que les cuesta a ellos. Eso es una expresión. Esa expresión es lo mismo que ehhhh, el número total de amigos por diez… porque ahí van los dos que en el otro sitio no están y vale diez euros…
71. Carmen: Equis, equis por diez, sí, sí…
72. Piedad: [Por eso. Esto es igual a equis por diez, ¿no? (*Piedad señala con el ratón el botón "12.5*(x−2)" hasta hacer visible la etiqueta "coste de la excursión"*.)
73. Piedad: ¿Por qué equis por diez? ¿Porque es el número total de amigos? Sí.
74. Carmen: Número de amigos, sí.
75. Piedad: Equis, sí.
76. Carmen: Eso… (*Piedad escribe la ecuación "(12.5*(x−2))…"*.)
77. Carmen: ...es igual, pero yo creo que eso así no es… (*Piedad escribe la ecuación "(12.5*(x−2))=…"*.)
78. Carmen: …diez equis.
79. Piedad: Probamos.
80. Carmen: Diez equis. (*Piedad escribe la ecuación "(12.5*(x−2))=10*x", que es identificada como válida.*)
81. Piedad: ¡Sí que era! (*Piedad da un aplauso de alegría mientras Carmen se ríe.*)

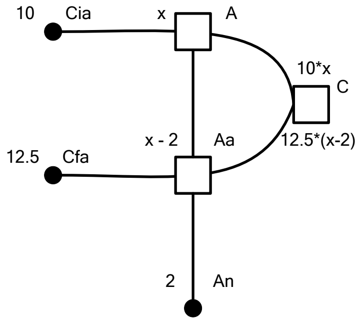


Figura 6.321. Grafo al final de la resolución.

6.5.6.2. El caso de la pareja Carmen-Piedad en el problema "El té"

Disponemos de dos tipos de té: uno de Tailandia a 5,2 €/Kg y otro de la India a 6,2 €/Kg. ¿Cuántos kilógramos de té de la India tenemos que añadir a 45 kilos de té de Tailandia para obtener una mezcla a 5,75 €/Kg?

La pareja empieza la resolución del problema mediante la definición de las cantidades conocidas. En primer lugar Piedad a propuesta de su compañera (ítem 4) da valor de manera correcta a la cantidad *precio de un kilo de té de Tailandia* (*Put*) (ítem 7).

1. (*Carmen lee el enunciado en voz alta. La cantidad activa es "precio de un kilo de té de Tailandia".*)
2. Carmen: Vale, tenemos…
3. Piedad: [Precio de un kilo de té de Tailandia…
4. Carmen: Ehhh, cinco con dos… cinco con dos. (*Piedad escribe "5,2" en el cuadro de cantidades.*)
5. Piedad: ¿Así?
6. Carmen: Sí.
7. (*Piedad asigna el valor "5,2" a la cantidad "precio de un kilo de té de Tailandia". La cantidad activa pasa a ser "precio de un kilo de té de la India".*)

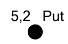


Figura 6.322. Grafo después del ítem 7.

La segunda cantidad que definen es el precio unitario del artículo té de la India (*Pui*), la cual designan correctamente mediante el valor 6,2. Durante el proceso, Carmen hace memoria y señala que

8. Carmen: Y luego el de la India, seis con dos. (*Piedad escribe "6,2" en el cuadro de cantidades.*)
9. Carmen: Esto lo hicimos el año pasado pero no me acuerdo…
10. Piedad: Yo tampoco. (*Piedad asigna el valor "6.2" a la cantidad "precio de un*

durante el curso pasado resolvieron problemas de mezclas parecidos aunque reconoce no recordar cómo resolverlos (ítem 9). Piedad reconoce estar en su misma situación (ítem 10).

kilo de té de la India". La cantidad activa pasa a ser "precio de un kilo de té mezcla".)

Figura 6.323. Grafo después del ítem 10.

La cantidad *precio de un kilo de té mezcla (Ptm)* es la siguiente cantidad propuesta por el tutor. Carmen afirma que desconocen el valor que toma (ítem 11). Sin embargo, Piedad repasa el enunciado con objeto de verificar este hecho (ítem 14). Tras la lectura en voz alta del enunciado, Carmen identifica el valor de *Pum* (ítem 15) y Piedad realiza correctamente la asignación de este valor a *Pum* en el sistema (ítem 16).

11. Carmen: Ehhh, precio de kilo de té de mez… no sabemos cuánto vale el kilo para qué…
12. Piedad: [A ver…
13. Carmen: …la mezcla…
14. Piedad: …el de Tailandia ése, el de la India ése… ¿cuántos kilos de té de la India hay que añadir a cuarenta y cinco de Tailandia para obtener la mezcla a cinco setenta y cinco?
15. Carmen: Precio de un kilo de té de mezcla, cinco con setenta y cinco. Vale.
16. (*Piedad asigna el valor "5.75" a la cantidad "precio de un kilo de té de mezcla". La cantidad activa es "kilos de té de Tailandia".*)

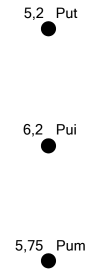


Figura 6.324. Grafo después del ítem 16.

La última de las cantidades conocidas involucradas en la lectura propuesta es *kilos de té de Tailandia (Ctt).* Aunque Piedad verbaliza la descripción de la cantidad *kilos de té la India (Cti)* (ítem 17). Esta acción podría responder a que desease definir *Cti* mediante la letra *equis* (ítem 19) en primer lugar o bien a un

17. Piedad: Kilos de té de la India…
18. Carmen: [De Tail… ¡no, no, de Tailandia, de Tailandia!].
19. Piedad: …*equis*… ah, vale…
20. Carmen: [Cuarenta y cinco, cuarenta y cinco.
21. Piedad: Cuarenta y cinco. (*Piedad asigna el valor "45" a la cantidad "kilos de té de Tailandia". La cantidad activa pasa a ser "kilos de té de la India".*)

error durante la lectura de la etiqueta de la cantidad. En cualquier caso, Carmen corrige a su compañera y le indica la representación de la cantidad *Ctt* mediante el valor 45 (ítem6 18 y 20). Piedad asume esta idea rápidamente y la formaliza en el tutor (ítem 21).

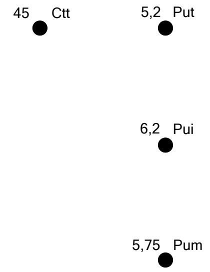


Figura 6.325. Grafo después del ítem 21.

Carmen, quizá retomando su intención anterior, propone representar la cantidad *Cti* mediante la letra *equis* (ítem 22). Carmen pudiera justificar su decisión no sólo en que sea una cantidad desconocida, sino en que es la cantidad desconocida por la que se pregunta en el problema (ítem 24). Piedad simboliza *Cti* mediante *x* en el programa (ítem 24).

22. Carmen: Y de la India, *equis*…
23. Piedad: [Equis.]
24. Carmen: …no sabemos cuántos le tenemos que añadir… letra, ¿a que sí? (*Piedad asigna la letra "x" a la cantidad "kilos de té de la India". La cantidad activa pasa a ser "kilos de té de mezcla"*.)

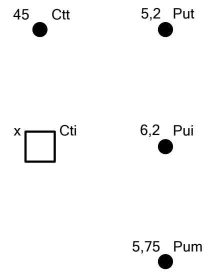


Figura 6.326. Grafo después del ítem 24.

Ante la segunda cantidad desconocida a la que se enfrentan, *los kilos de té de mezcla* (*Ctm*), Carmen sugiere emplear una segunda letra, *y*, (ítem 27) mientras que Piedad plantea usar la relación aditiva que liga las cantidades parciales de los tés constituyentes de la mezcla con la cantidad total, es decir la relación *Ctm* = *Ctt* + *Cti* a través de la expresión algebraica 45 + *x* (ítem 28). Carmen reflexiona unos instantes buscando dar sentido a la expresión verbalizada por su compañera. Carmen interpreta correctamente la misma (ítem 33) y considera la expresión en detrimento de la segunda letra. Así, la pareja introduce en el programa la expresión algebraica 45 + *x* para simbolizar la cantidad *Ctm* (ítems 37 y 38).

25. Carmen: Kilos de té…
26. Piedad: [Kilos de té de mezcla. Pues…
27. Carmen: *y*.
28. Piedad: …cuarenta y cinco más equis.
29. Carmen: Espérate.
30. Piedad: ¿No? Si la mezcla es…
31. Carmen: [¡Espérate! ¡Espérate un momento!
32. (*Silencio de cinco segundos.*)
33. Carmen: Cuarenta… lo que tenemos de Tailandia más lo que le tenemos que meter de la India, sí.
34. Piedad: Por eso…
35. Carmen: [Cuarenta y cinco más…
36. Piedad: …cuarenta y cinco más *equis*, ¿no?
37. Carmen: Sí, más *equis*. (*Piedad activa la opción "expresión" y construye la expresión "45+x"*.)
38. Carmen: Aceptar. (*Piedad acepta la expresión "45+x", que es asignada a la cantidad "kilos de té de mezcla". La cantidad activa pasa a ser "precio de todo el té de Tailandia"*.)

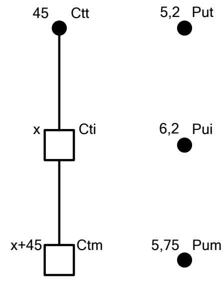


Figura 6.327. Grafo después del ítem 38.

En este momento del proceso de resolución quedan pendientes de designar los precios totales. La cantidad activa es *precio total del té de Tailandia* (*Ptt*) y ante la lectura de su descripción en el programa, Piedad se pregunta por el significado de la misma (ítem 40), que parece interpretar correctamente y, de hecho, rápidamente propone calcularlo a partir una expresión basada en el número de kilos de té de Tailandia y del precio de un kilo de este artículo, $Ptt = Ctt \cdot Put$ (ítem 42). Carmen rechaza esta opción (ítem 43) aunque su compañera insiste explicando los motivos de la relación multiplicativa propuesta a partir del significado de las cantidades. Carmen sigue mostrando reticencias a dar el visto bueno a esta vía de simbolizar *Ptt* (ítem 46). Entonces, Piedad solicita a su pareja que proponga una forma alternativa (ítem 47). Este requerimiento inicia un lapso de silencio en el que Carmen cavila sobre cómo representar *Ptt*. Finalmente musita un escueto “de todo el té” (ítem 51) que, en un primer momento, Piedad entiende que hace referencia a todo el té de Tailandia (ítem 52) pero luego sopesa que, quizá, las dudas de su compañera puedan derivarse de que esta tenga en mente el total del té de mezcla, *Ctm* (ítem 54). Carmen llega incluso a hacer una pregunta al profesor que revela dudas sobre si las *Ctm* se refiere sólo al té de Tailandia o también incluiría los kilos de té de la India (ítem 55). Una vez supera esta duda y asume que esta cantidad considera exclusivamente los kilos de té de Tailandia, continua abogando por usar la letra *y* ya que, a su juicio, desconocen

39. Carmen: Ya está, venga.
40. Piedad: Precio de todo el té de Tailandia?... ¿O sea todo junto, sumado?
41. Carmen: Hay creo que…
42. Piedad: [¿Cinco con dos por cuarenta y cinco?
43. Carmen: No, espérate.
44. Piedad: Digo yo, ¿no? Si es todo, son los cuarenta y cinco kilos… (*Piedad señala con el ratón “45” en el enunciado.*)
45. Piedad: …por cinco con dos que vale cada kilo… (*Piedad señala con el ratón “5.2” en el enunciado.*)
46. Carmen: [Yo creo que no, que no se hace así…
47. Piedad: ¿Entonces?
48. (*Silencio de diez segundos.*)
49. Piedad: ¿Cómo crees que es?
50. (*Silencio de diez segundos.*)
51. Carmen: De todo el té…
52. Piedad: [Por eso.
53. Carmen: …eh…
54. Piedad: ¿De todo el té junto?
55. Carmen: Pero… ¿a todo el té de Tailandia sólo se refiere al de Tailandia? No con la mezcla del de India, ¿no? (*Carmen se dirige al profesor.*)
56. Profesor: El de Tailandia, sólo.
57. Carmen: Vale, entonces… sí, de Tailandia te está diciendo… no, pero no te dice cuántos kilos tienes… yo creo que ahí tienes que poner *y*…
58. Piedad: [Dice el precio. ¡El precio de todo!
59. Carmen: *y*, tú no sabes cuántos kilos tienes.
60. Piedad: Pero es que no tienes que saber el kilo, tienes que saber el precio…
61. Carmen: Ya, y para saber el precio tienes que saber los kilos, ¿o no?
62. Piedad: Si… no sabemos de la India pero de Tailandia sí, cuarenta y cinco.
63. Carmen: Ah, es verdad, espérate… vale, vale, vale… espérate, cuarenta y cinco kilos…

cuántos kilos tienen (ítem 57). Cuando su compañera señala que su intención en este momento es representar el precio total (ítem 58), Carmen contesta que para conocer los precios totales han de conocer las cantidades (ítem 61). Pareciera que Carmen no contemple la representación de cantidades desconocidas a partir de otras (desconocidas y/o conocidas). De hecho, el conflicto parece desatascarse cuando Piedad subraya que sí conocen la cantidad de té de Tailandia (ítem 62). Una vez que Carmen es consciente de ello, la pareja construye la expresión aritmética que permite calcular el precio total del té de Tailandia (*Ptt* = *Ctt*·*Put*).

64. Piedad: ¡Cuarenta y cinco…! (*Piedad señala con el ratón "45" en el enunciado.*)
65. Carmen: [Por esto. (*Carmen señala el enunciado con el dedo.*)
66. Piedad: …por dos con, por cinco con dos.
67. Carmen: Esto es lo de la mezcla, nada…
68. Piedad: Sí.
69. Carmen: Cuarenta y cinco por cinco con dos. (*Piedad activa la opción "expresión".*)
70. Piedad: Cuarenta y cinco… (*Piedad escribe la expresión"45…".*)
71. Piedad: …por cinco con dos. (*Piedad escribe la expresión"45*5.2", asignándose el valor "234" a la cantidad "precio de todo el té de Tailandia". La cantidad activa es "precio de todo el té de la India".*)

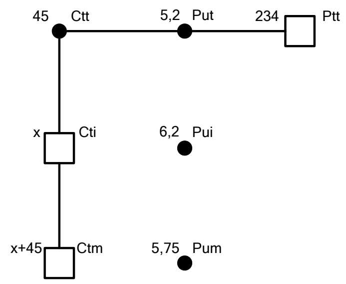


Figura 6.328. Grafo después del ítem 71.

La interpretación que hacíamos de la conducta de Carmen en la definición de *Ptt*, parece confirmarse cuando acometen la designación de *el precio total del té de la India* (Pti). En la primera intervención de Carmen (ítem 73) asevera que "eso sí que ya no lo sé". En ningún momento parece considerar la posibilidad de poder aplicar la misma estructura conceptual que han empleado para calcular *Pti*, con lo que parece obvio que la dificultad emana del carácter de las cantidades más que en la propia relación. Por el contrario, Piedad asegura que han de emplear la expresión 6,2*x* (ítem 74), con una verbalización que parece querer responder a las dudas de sus compañeras. En ella (ítem 76), Piedad justifica el uso de una expresión algebraica y, en concreto, de la aparición de la letra *x*

72. Piedad: Se supone que está.
73. Carmen: Precio de todo el té de la India… no, eso sí que ya no lo sé…
74. Piedad: Ahora sí que es *equis* por esto (*señala con el ratón 6.2 en el enunciado*)…
75. Carmen: [Vale].
76. Piedad: …porque no sabemos los kilos de té de la India, ¿no?
77. Carmen: Sí. (*Piedad activa la opción expresión.*)
78. Carmen: *Equis* por seis con… (*Piedad escribe la expresión "x*…". Mantiene el ratón sobre el "6.2" hasta que se ve "precio de todo el té de la India".*)
79. Carmen: ¡Sí!
80. Piedad: Seis con dos, ¿no?
81. Carmen: Sí.
82. (*Piedad escribe la expresión "x*6.2", que es asignada a la cantidad "precio de todo el té de la India". La cantidad activa pasa a ser "precio de todo el té de mezcla".*)

subrayando que desconocen la cantidad *Cti*. Carmen acepta la explicación de su compañera (ítem 79) e introduce la expresión en el programa para *Pti* (ítem 82).

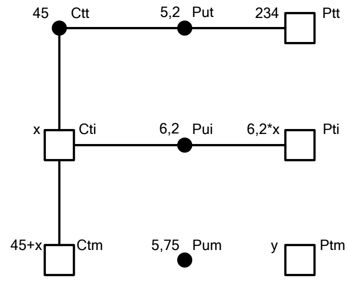


Figura 6.329. Grafo después del ítem 82.

La representación de las cantidades *Ptt* y *Pti* mediante la misma estructura conceptual invitaba a pensar que procederían de la misma manera para el *precio total del té de mezcla* (*Ptm*), especialmente considerando las intervenciones de Piedad quien no ha albergado dudas con independencia del carácter de las cantidades. En cambio, para la cantidad *Ptm*, la primera intervención de Piedad introduce en escena la cantidad el precio de un kilo de té de mezcla de una manera ciertamente ambigua (ítem 84) pues no es posible dilucidar si sugiere que esta cantidad conocida es igual a *Ptm* o simplemente indica que han de usarla en la construcción de una expresión. Inicialmente Carmen parece entender e incluso aprobar la idea de que *Ptm* es igual a *Pum* (ítem 86). Sin embargo, la pareja rectifica diferenciando entre precio total y unitario (ítems 87 a 89). En vez de valorar la posibilidad de construir una expresión para *Ptm*, Carmen vuelve a insistir con emplear una segunda letra; en este caso apoyándose en su creencia de que los problemas de mezclas o de móviles han de ser resueltos mediante esta estrategia (ítems 90 y 95). En esta ocasión Piedad acepta y asigna la letra *y* para designar *Ptm* en el programa (ítem 94). No se atisba en ningún intento de emplear los argumentos que le llevaron a construir la expresión 6,2*x* para disuadir a su compañera.

83. Carmen: Precio total…
84. Piedad: Pffff… cinco, ¿cinco setenta y cinco?
85. (*Silencio de cinco segundos.*)
86. Carmen: Sí.
87. Piedad: No, porque no sabes…
88. Carmen: No, ése es el precio de un kilo de té…
89. Piedad: …pero no sabes todo.
90. Carmen: Entonces es *y*. Estos problemas creo que se hacían…
91. Piedad: ¿Con dos?
92. Carmen: Sí.
93. Piedad: Vale.
94. (*Piedad asigna la letra "y" a la cantidad "precio de todo el té de mezcla". Se activa la ventana de ecuaciones.*)

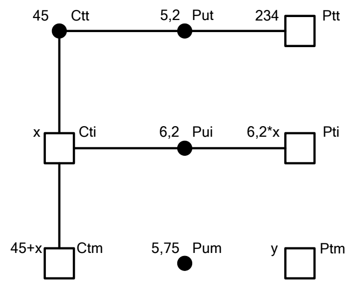


Figura 6.330. Grafo después del ítem 94.

95. Carmen: Igual que los del coche.
96. Piedad: Vale.

El paso cuarto del MC es iniciado con la relectura en voz alta de la pregunta del

97. Piedad: Entonces… ¿cuántos kilos de té de la India hay que añadir a cuarenta y cinco de Tailandia para obtener una mezcla a cinco setenta y cinco? A ver…

enunciado (ítem 97). Piedad reconoce no saber cómo construir la ecuación y focaliza su atención en la forma en qué han representado los precios totales de los tés de Tailandia y de la India (ítem 103). No parece que profundicen en las relaciones que han involucrado y que por analogía les conduciría a la relación *Ptm* = *Ctm·Pum*. Tras unos segundos de silencio, parecen juguetear con la idea de usar una cantidad definida como la suma de *Put* y *Pui*, quizá sopesando incorrectamente que *Pum* pueda ser el resultado de dicha operación (ítems 105 a 107). Ellas mismas descartan seguir este camino y reconocen lo erróneo de su iniciativa (ítems 107 y 108).

Carmen aconseja construir una ecuación en forma explícita sobre la cantidad representada por la letra *y* (ítem 109). Piedad pregunta sobre qué representaba dicha letra (ítem 110) y sorprende el hecho de que su pareja no sepa a qué cantidad refiere (ítem 111) y acabe de proponer una ecuación sobre ella. La pareja ha de acudir a la ventana de cantidades para recordar que *y* daba cuenta de *Ptm* (ítem 111). Inmediatamente Piedad verbaliza que pueden expresar *Ptm* como el producto del precio de un kilo de té de mezcla, identificando explícitamente el valor de 5,75 en el enunciado, y los kilos que tengan de té de mezcla (ítem 113). En el proceso de traducción de lo verbalizado al lenguaje algebraico, Piedad parece ir por el camino correcto pues sugiere emplear la expresión 45 + *x* pero en el mismo instante que pronuncia las palabras parece concebir dudas (ítem 116). La verbalización es ambigua pues no se sabe si identifica la expresión con *Cti* o se refiere, de forma correcta, sólo a la *x*. La siguiente intervención de Piedad (ítem 118) constata estas dudas pues mientras repasa en la ventana de cantidades las cantidades involucradas afirma que *y* representa el precio del té

98. (*Silencio de quince segundos.*)
99. Carmen: ¿Puedo ponerme las gafas? (*Carmen se dirige al profesor.*)
100. Profesor: Claro. (*Carmen se levanta a coger las gafas.*)
101. Piedad: Saca las mías que están en mi mochila.
102. (*Pausa de 45 segundos. Carmen se sienta y retoman el problema.*)
103. Piedad: Yo no sé cómo lo haría. A ver el de Tailandia son cuarenta y cinco por… lo que vale, ¿no? Y el de la India…
104. (*Silencio de diez segundos.*)
105. Carmen: Cinco con dos…
106. Piedad: … más seis con dos…
107. Carmen: … es igual… es que yo creo que eso así no se hace…
108. Piedad: [Es que no es lo mismo.
109. Carmen: *y* es igual, yo creo que tenemos que poner primero *y*…
110. Piedad: [¿*y* qué era?
111. Carmen: Lo, lo que… creo que lo que vale… (Piedad desplaza la barra de la ventana de cantidades para visualizar *y*.)
112. Carmen:… el precio de toda…
113. Piedad: [El precio del té. (*Silencio de cinco segundos.*) O sea esto (*señala 5.75 en el enunciado*), un kilo, lo que vale un kilo, cinco setenta y cinco por los kilos que haya, ¿no?
114. Carmen: *y* es igual a…
115. Piedad: [Todo el té (señala *y* en la ventana de cantidades), o sea *y*, que es todo el té, es igual a cuarenta y cinco más equis…que era el té de la India. (*Piedad mira a Carmen.*)
116. Piedad: ¿O no? Es que no estoy segura.
117. Carmen: Sí. A ver el precio de toda la mezcla es *y* porque no sabemos…
118. Piedad: [A ver, espera. El precio del té (señala *y* en la ventana de cantidades) es lo mismo que el precio de los cuarenta y cinco kilos, que no sé cuánto era… (*Piedad busca en la ventana de cantidades.*)
119. Carmen: Piedad espera, primero tenemos que hacer *y* es igual a cuarenta y cinco más *equis*…
120. Piedad: [Pero espera.
121. Carmen: … que lo tienes aquí.
122. Piedad: Ya, ¿pero por qué? ¿por qué cuarenta y cinco más *equis*?
123. Carmen: Porque, vamos a ver, te está diciendo que de Tailandia tienes cuarenta y cinco kilos pero no sabes cuánto tienes

que debe ser igual al precio de los cuarenta y cinco kilos. Sus dudas le llevan a preguntar a su compañera directamente sobre por qué emplear la expresión 45 + *x* (ítem 122). Carmen justifica su uso mediante la relación aditiva que liga la suma de las partes y el todo (ítem 123). En cuanto escucha a su compañera, Piedad parece visualizar la ecuación que han de plantear y de hecho la formula al señalar que han de igualar *y*, que expresa es el precio de toda la mezcla, a partir del precio de un kilo por el número de kilos. Cuando parece que va a desarrollar la idea y la va a plasmar en una ecuación comenta "el precio de toda la mezcla es lo mismo que cuarenta y cinco más equis…" y no llega a concluir su expresión (ítem 125). Una posibilidad es que proponga la ecuación *y* = *x* + 45 en la que plasmaría una asociación de *Ptm* entre *Ctm*, aunque también es posible que no sea capaz de concretar la ecuación correctamente al no identificar la cantidad *Pum*. Finalmente, tras un breve espacio para la reflexión, Piedad descarta la idea (ítem 127) con el apoyo de su compañera (ítem 128).

de la India, entonces tienes que…

124. Piedad: [¡Ya lo sé! Entonces *y* es el precio de… (*Piedad señala "5,75" en el enunciado y vuelve a apuntar a la ventana de cantidades.*)

125. Piedad: …¡de toda la mezcla! O sea lo que vale uno por los kilos, entonces el precio de toda la mezcla es lo mismo que cuarenta y cinco más equis… (*Piedad señala "45+x" en la ventana de cantidades.*)

126. (*Silencio de cinco segundos.*)

127. Piedad: No.

128. Carmen: No.

Tras la ecuación frustrada, Piedad ofrece una alternativa válida al orientar la resolución hacia una ecuación en la cual el precio total de la mezcla sea representado como la suma de los precios totales del té de la India y del té de Tailandia, *Ptm* = *Ptt* + *Pti* (ítem 129). Carmen, aunque lo exponga como una vía alternativa, verbaliza una ecuación usando los valores y la letra equis que obedece a la relación presentada por su compañera (ítems 130 y 132). De repente, la pareja muestra su sorpresa por la existencia de un botón con el valor 234 (ítem 136). El profesor les recuerda que el tutor calcula las expresiones aritméticas y ofrece su resultado directamente (ítem 137). Tras esta consideración, Carmen retoma la ecuación en proceso y con la ayuda de

129. Piedad: ¡Es lo mismo que el precio del té de la India más el precio de todo el té de Tailandia! ¿No? (*Piedad tiene el ratón sobre las cantidades verbalizadas en la ventana de cantidades.*)

130. Carmen: ¿Y no sería *y* es igual a cuarenta y cinco por…

131. Piedad: [Más].

132. Carmen: …cuarenta y cinco por cinco con dos más equis por seis con dos?

133. Piedad: (*inaudible por solapamiento*).

134. Carmen: Porque tienes cuarenta y cin… a ver, *y* que es el precio de toda la mezcla…

135. Piedad: [¿Aquí pone doscientos treinta y cuatro?

136. Carmen: ¡Nena! (*Se ríen.*)

137. Profesor: Doscientos treinta y cuatro es porque ha hecho el producto de cuarenta y cinco por cinco con dos.

138. Carmen: ¡Ahhh!

139. Piedad: ¡Vale!

140. Carmen: Entonces yo creo que, lo que yo te estaba diciendo, *y* es que es el precio

Piedad, expresa correctamente la relación *Ptm* = *Ptt* + *Pti* subrayando que pueden igualarla a la otra representación de *Ptm* (*y*) (ítem 140 a 145).

Aunque la pareja manifiesta dudas sobre si su idea es correcta, deciden probar y plasmarla en el sistema. Así inician el proceso de escritura de la ecuación sobre el tutor donde aparecen ciertas dificultades ligadas a la manera en que se construyen las ecuaciones en el programa. En primer lugar, Carmen pretende escribir la ecuación involucrando relaciones que han representado previamente (y por tanto, existe un botón exclusivo para esta cantidad) desarrollando nuevamente la expresión y por tanto escribiendo todas las cantidades involucradas. Por ejemplo, Carmen desea usar la cantidad *Ptt* y para ello plantea la expresión aritmética 5,2*45 cuando esta expresión ya la usaron con anterioridad y, como consecuencia, existe un botón con el valor 234. (ítem 152). El profesor les recuerda el requerimiento del tutor de usar los botones creados *ad hoc* cuando deseen usar expresiones representadas con anterioridad. Nuevamente vuelven a mostrar el mismo problema cuando en la representación de *Pti* en vez de usar el botón específico que denota la expresión (6,2**x*) desean emplear los botones individuales de 6,2 y de *x* (ítem 163). Una vez salvadas estos aspectos, la pareja construyen correctamente la ecuación *y* = 234 + 6,2*x* en el tutor (ítem 176).

de toda la mezcla…

141. Piedad: [A ver] (*Piedad señala "y" en la ventana de cantidades.*)
142. Carmen: …y luego, por otra parte…
143. Piedad: [Es igual a…
144. Carmen: …a cuarenta y cinco que son los kilos de Tailandia y por, si un kilo vale cinco con dos, por cuarenta y cinco kilos, vale. Eso por una parte y por, más…
145. Carmen y Piedad: [Seis con dos por equis.
146. Piedad: Vale
147. Carmen: Pero no sé si es eso.
148. Piedad: Yo tampoco pero vamos a probar.
149. Carmen: *y* está abajo, aquí.
150. (*Piedad escribe la ecuación "y…". Carmen señala con el dedo el botón "y".*)
151. Piedad: *y* es igual a… (*Piedad escribe la ecuación "y=…".*)
152. Carmen: …cuarenta y cinco por…
153. Profesor: No pongáis cuarenta y cinco por cinco con dos porque eso ya lo habéis hecho antes y…
154. Carmen: [Doscientos treinta y cuatro.
155. Profesor: Claro.
156. Piedad: ¡Ah, vale!
157. Carmen: Doscientos treinta y cuatro. (*Piedad escribe la ecuación "y=234...".*)
158. Piedad: Más…
159. Carmen: Más… (*Piedad escribe la ecuación "y=234+...".*)
160. Piedad: …eh… precio, ¿qué era? Seis con dos por equis, ¿no?
161. Carmen: …por equis, sí.
162. Piedad: Seis con dos por… (*Piedad escribe la ecuación "y=234+6.2...".*)
163. Carmen: Que va a estar mal… (*Piedad intenta escribir "6.2*x" pero el tutor no lo permite.*)
164. Piedad: Ya.
165. Carmen: Aceptar. (*Piedad valida "y=234+6.2", que es identificada como errónea.*)
166. Piedad: No es válida. Más seis con dos… pero por qué si hemos puesto seis con dos aquí pone (240.2)… ¡ah, vale! No, pero es que… (*Señala la ecuación. Se percata de que no es lo que quería escribir.*)
167. Carmen: [Es que creo que…
168. Piedad: ..., es que hay que ponerlo con…
169. Profesor: Es que ya tenéis un botón que

es seis con dos por equis, entonces tenéis que usar ese botón.

170. Piedad: ¡Ah, vale!

171. (*Piedad borra la ventana de ecuaciones.*)

172. Carmen: *y* es igual a doscientos treinta y cuatro… (*Piedad escribe la ecuación “y=234...”.*)

173. Carmen: …por…

174. Piedad: [¡Más! (*Piedad escribe la ecuación “y=234+...”.*)

175. Carmen: …más seis con, esto. (*Carmen señala con el dedo el botón “6.2*x”. Piedad escribe la ecuación “y=234+(6.2*x)”.*)

176. Carmen: Aceptar. (*Piedad valida la ecuación “y=234+(6.2*x)”, que es identificada como correcta.*)

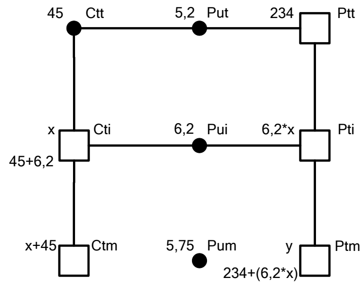


Figura 6.331. Grafo después del ítem 176.

Tras la escritura de la primera ecuación, Carmen empieza a pensar en la segunda (ítem 177). Piedad se ríe nerviosa y muestra sorpresa por el hecho de que tengan que plantear una ecuación adicional (ítem 178). La estudiante muestra no relacionar el uso de más de una letra con la posterior construcción de un sistema de tantas ecuaciones linealmente independientes como letras hayan sido empleadas. Cuando Piedad asume que deben buscar otra ecuación, vierte unos comentarios relevantes en relación con el significado que otorga a las ecuaciones. En el ítem 179, asevera “ya tenemos el precio total de la mezcla” y continua “ahora tenemos que calcular los kilos” (ítem 181) parece que haciendo referencia a la cantidad *Ci*, la otra cantidad desconocida mediante una letra. En principio, este hecho podría ser interpretado como si cada ecuación permitiera el cálculo de una incógnita o bien que la segunda ecuación podría construirse sobre una representación dual

177. Carmen: Vale, ahora, ésa es una…

178. Piedad: [¡Hay que hacer más! (*Piedad se ríe.*)

179. Piedad: Vale, espera, ahora… ya tenemos el precio total de la mezcla con eso…

180. (*Silencio de cinco segundos.*)

181. Carmen: …y ahora tenemos que saber los kilos.

182. Piedad: Vale. De Tailandia hay cuarenta y cinco, hay que saber los de la India.

183. (*Silencio de cinco segundos.*)

184. Piedad: Aquí ya…

185. (*Silencio de diez segundos.*)

186. Carmen: A ver…

187. Piedad: Se supone que hay que saber los kilos de té de la India, ¿no?

188. Carmen: *Equis*, no, espera. Kilos de té de la India…

189. Piedad: Los kilos de la India es lo mismo…

190. Carmen: [kilos de mezcla].

191. Piedad: …a ver, los kilos de té de la India por, no es que eso ya, es lo mismo. (*Piedad señala el enunciado con el ratón.*)

192. (*Silencio de diez segundos.*)

193. Piedad: ¿Cuánto era el total de los kilos

de la cantidad *Ci*.

Los siguientes segundos son dedicados por la pareja a intentar construir una ecuación en forma explícita sobre la cantidad *Ci* (representada por *x*). Parece que uno de los motivos que los impele a proceder de esta manera sea el hecho de que el enunciado pregunte por esta cantidad (ítem 188). En este proceso pretenden usar nuevamente la relación aditiva *Ctm* = *Ctt* + *Cti* (ítem 195) que ya habían empleado en la simbolización de *Ctm*.

de la mezcla? No el precio sino kilos de té de mezcla. Esto, ¿no? (*Piedad señala "45+x" en la ventana de cantidades.*)

194. Carmen: Sí.

195. Piedad: Pues equis, que eran los té, el té de la India más cuarenta y cinco de lo otro es lo mismo que todo junto. (Piedad mira a Carmen.)

196. Piedad: Ah, no, porque ya está la expresión definida. Es lo mismo que acabo de decir.

197. Carmen: Claro.

198. Piedad: ¿Eso se puede hacer? (*Piedad se dirige al profesor.*)

199. Profesor: Pondríais lo mismo.

200. Piedad: Ya, por eso.

201. Profesor: Te diría que…

202. Carmen: [que es lo mismo.

203. Profesor: …que eso no es una ecuación.

A pesar de que la pareja entiende la imposibilidad de reutilizar relaciones ya usadas para construir la ecuación, vuelven a caer en el mismo error y dedican bastantes segundos a representar una identidad algebraica (véase ítem 225). De hecho, consumen gran tiempo en este *cul de sac* sin considerar relaciones alternativas que les posibiliten escribir una ecuación independiente.

204. Carmen: Claro. A ver, entonces, espera…

205. Piedad: Pensémoslo.

206. (*Silencio de cinco segundos.*)

207. Carmen: A ver, ¿cuánto es el té de laaaaaaaa, el té la India? A ver cuánto era.

208. Piedad: ¿Cuánto de kilos o de…

209. Carmen: [*Equis*. Yo creo que ahora tenemos que poner *equis* es igual… el té de la India es igual…

210. Piedad: A todo menos cuarenta y cinco, a todo, la mezcla de té, menos cuarenta y cinco.

211. Carmen: [Sí. *Equis* es igual a… (*Piedad escribe "x=…".*)

212. Carmen: …¿cuánto es toda la mezcla del té? Es igual a *y*…

213. Piedad: [No. Kilos de té de mezcla es igual a cuarenta y cinco más equis… entonces ponemos cuarenta y cinco más… (*Piedad sonríe. Se da cuenta de que están en la misma situación.*)

214. Carmen: [No. El… los kilos que le tienes que echar, son…

215. Piedad: [¿Qué qué?

216. Carmen: Espérate.

217. Piedad: A ver, qué es kilos de té de la India, ¿cuánto es?

218. Carmen: *Equis*.

219. Piedad: Equis. Vale. Es igual a…

220. Carmen: [Cuaren…]

221. Piedad: …todo el total de kilos de la mezcla, que es eso, cuarenta y cinco más equis… (*Piedad escribe "x=(45+x)…".*)

222. Carmen: …menos… (*Piedad escribe*

“x=(45+x)−…”.)

223. Piedad: …menos cuarenta y cinco que son los de Tailandia, ¿no?

224. Carmen: Sí.

225. Piedad: ¿Qué dónde está? Aquí. (*Piedad escribe “x=(45+x)−45”.*)

226. Profesor: Fijaros lo que habéis puesto.

227. Piedad: ¡Cuarenta y cinco más equis menos cuarenta y cinco! (*Piedad se ríe.*)

228. Profesor: Estás poniendo que cuarenta y cinco es igual a cuarenta y cinco…

229. Carmen: Yo creo que en esto…

230. Piedad: [Es que se supone que es todo el té conjunto menos los cuarenta y cinco de Tailandia.

231. Profesor: Ya, eso está bien pero eso ya lo habéis utilizado, esa relación ya la habéis usado.

232. Piedad: ¿Dónde?

233. Carmen: En la de arriba, es la misma…

234. Profesor: Donde habéis dicho que el café, el té de Tailandia es cuarenta y cinco más equis…

235. Carmen: [Escúchame, Piedad, yo creo que…

236. Profesor:…o sea el té de la mezcla es cuarenta y cinco más equis.

237. Carmen: [En ésta creo que, de los precios ya nada… porque se supone que la de los precios es la de arriba. Carmen borra la ventana de ecuaciones.

238. Piedad: Ya.

Una vez que parecen descartar definitivamente escribir la segunda ecuación basándose en la relación aditiva que liga las cantidades de té de cada tipo, Carmen interviene con algunas consideraciones sobre cómo han de construir la ecuación (ítem 237). Su verbalización revela su intención de sólo emplear cantidades de la magnitud masa, descartando los precios. Comenta Carmen “de los precios ya nada… porque se supone que la de los precios es la de arriba” (ítem 237), lo que refuerza la interpretación de que consideran que una ecuación servirá para calcular una incógnita. En este caso, dado que la relación homogénea entre las cantidades de masa ha sido ya empleado, resulta imposible construir una segunda ecuación por esta vía.

239. Profesor: ¿Hay alguna cantidad que no hayáis utilizado?

240. (*Silencio de veinte segundos. Carmen revisa la lista de cantidades.*)

241. Profesor: Vamos a cambiar de problema.

La pareja ha sobrepasado el tiempo previsto para la resolución del problema, lo cual sumado a que los resolutores no parecen estar desarrollando ninguna línea de actuación que pueda desembocar en avances hace que el profesor invite a la pareja a pasar a otro problema.

Cuando la pareja había completado todos los problemas que estaban planificado acometiesen en el estudio de casos, manifestó su deseo de volver a intentar el problema *El té*. En consecuencia, cargan el problema de nuevo e inician nuevamente la tarea de definir las cantidades involucradas. Así, dedican los primeros instantes a definir las cantidades conocidas de igual modo que hicieron en su primer momento. Entre los ítems 242 y 249 asignan valor correctamente a las cantidades conocidas *Put*, *Pui*, *Pum* y *Ctt*.

242. (Antes de acabar el estudio de casos, la pareja manifiesta querer intentar nuevamente el problema.)

243. Carmen: Precio de un kilo de té de Tailandia, cinco con dos. (*La cantidad activa es "precio de un kilo de té de Tailandia"*.)

244. (*Piedad asigna el valor "5.2" a la cantidad activa. La cantidad activa pasa a ser "precio de un kilo de té de la India"*.)

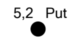


Figura 6.332. Grafo después del ítem 244.

245. Carmen: Seis con dos. (*Piedad asigna el valor "6.2" a la cantidad activa. La cantidad activa es "precio de un kilo de té de mezcla"*.)

Figura 6.333. Grafo después del ítem 245.

246. Piedad: Ehh, de un kilo de… mezcla…

247. Piedad: Cinco setenta y cinco.

248. Carmen: Vale. (*Piedad asigna el valor "5.75" a la cantidad activa. La cantidad activa pasa a ser "kilos de té de Tailandia"*.)

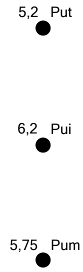


Figura 6.334. Grafo después del ítem 248.

249. Carmen: Kilos de té de Tailandia, cuarenta y cinco. (*Piedad asigna el valor "45" a la cantidad activa. La cantidad activa pasa a ser "kilos de té de la India".*)

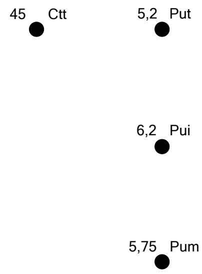


Figura 6.335. Grafo después del ítem 249.

Al igual que en el primer intento deciden representar los kilos de té de la India mediante la letra equis (ítem 250).

250. Carmen: Kilos de té de la India, equis. (*Piedad asigna la letra "x" a la cantidad activa. La cantidad activa pasa a ser "kilos de té de mezcla".*)

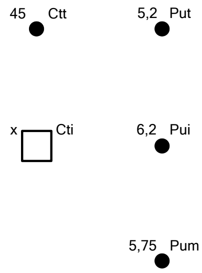


Figura 6.336. Grafo después del ítem 250.

Aunque Carmen pretendía designar la cantidad *Ctm* mediante una segunda letra (ítem 251), Piedad interviene para aconsejar el uso de la relación *Ctm* = *Ctt* + *Cti*. La intervención de Piedad desemboca en la representación de *Ctm* mediante la expresión 45 + *x* (ítem 255).

251. Carmen: Kilos de té de mezcla, *y*. (*Piedad escribe "y" pero no llega a aceptar.*)

252. Piedad: ¡No! Cuarenta y cinco…

253. Carmen: [¡Cuarenta y cinco más *y*, más *equis*!

254. Piedad: Cuarenta y cinco más *equis*.

255. Carmen: Cuarenta y cinco más equis. Vale, aceptar. (*Piedad escribe la expresión "45+x" que es asignada a la cantidad "kilos de té de mezcla". La cantidad activa pasa a ser "precio de todo el té de Tailandia".*)

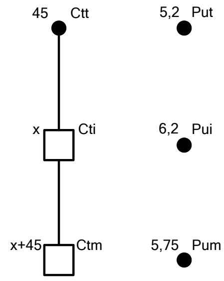


Figura 6.337. Grafo después del ítem 255.

Del mismo modo que sucediera en el primer intento del problema, la pareja tiene pendiente de definir las cantidades relativas a los precios totales. Al igual que hicieran en ese momento, emplean la expresión aritmética 45*5,2 para designar la cantidad *Ptt* (ítem 260).

256. Carmen: Ehhh, precio de todo el té de Tailandia.
257. Piedad: Cuarenta y cinco por cinco con dos. (*Piedad señala en el enunciado las cantidades verbalizadas.*)
258. Carmen: Sí. (*Piedad activa la opción "expresión".*)
259. Carmen: Cuarenta y cinco… (*Piedad escribe la expresión "45…".*)
260. Carmen: …por cinco con dos. (*Piedad escribe la expresión "45*5.2", asignando el valor "234" a la cantidad "precio de todo el té de Tailandia". La cantidad activa pasa a ser "precio de todo el té de la India".*)

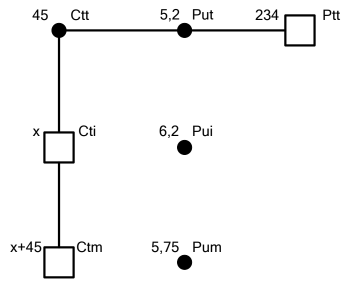


Figura 6.338. Grafo después del ítem 260.

Mediante la misma estructura conceptual que la usada para *Ptt* representan el precio total del té de la India (*Pti*) formalizado en la expresión algebraica 6,2*x*. Con esta acción completan de manera idéntica a como lo hicieron en el primer intento la definición de las cantidades propuestas para la simbolización. En este instante, sólo les queda por definir el precio total de té mezcla (*Ptm*).

261. Piedad: ¿Precio de todo el té de la India? Seis con dos por equis. ¿No? (*Piedad activa la opción "expresión".*)
262. Piedad: ¿Sí o no?
263. Carmen: Sí. ¿El qué has dicho? De la India, sí.
264. (*Piedad escribe la expresión "6.2*x", que es asignada a la cantidad "precio de todo el té de la India". La cantidad activa pasa a ser "precio de todo el té de mezcla".*)

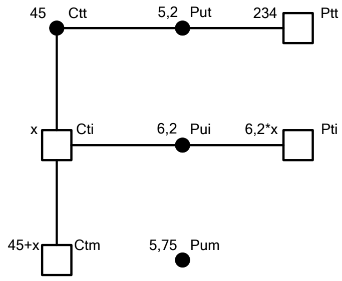


Figura 6.339. Grafo después del ítem 264.

Carmen sugiere, al igual que hicieron en el primer intento, designar *Ptm* mediante la letra *y* (ítem 265). En cambio, Piedad está sopesando una relación en la que participaría el precio de un kilo de té mezcla (ítem 269). En concreto, termina proponiendo la relación multiplicativa *Ptm* = *Ctm*·*Pum* apoyándose en las representaciones de los botones de la ventana de ecuaciones (ítems 274 y 275). Carmen plasma la expresión (45 + *x*)*5,75 en el programa (ítem 276).

265. Piedad: Sí. Precio de todo el té de mezcla.
266. Carmen: *y*.
267. Piedad: Es que, a ver…
268. Carmen: Espérate, precio de todo…
269. Piedad: [Es los kilos por… kilos del total de mezcla… (*Carmen coloca el ratón sobre “5.75” en la ventana de cantidades.*)
270. Piedad: *Equis*, a ver… no, dale a expresión.
271. Carmen: Los kilos…
272. Piedad: [Los kilos por eso. (*Carmen activa la opción “expresión”.*)
273. Piedad: Cuarenta y cinco más equis… (*Carmen construye la expresión “(45+x)…”.*)
274. Piedad: …por… (*Carmen construye la expresión “(45+x)*…”.*)
275. Piedad: …cinco setenta y cinco. (*Carmen construye la expresión “(45+x)*5.75”.*)
276. Carmen: Aquí, aceptar. (*Carmen construye la expresión “(45+x)*5.75”, que es asignada a la cantidad “precio de todo el té de mezcla”. Se activa la ventana de ecuaciones.*)

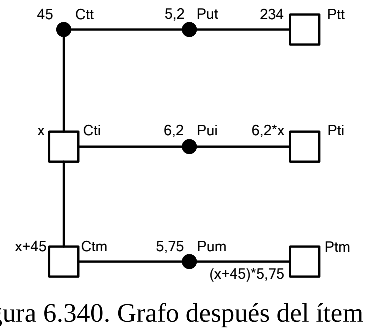


Figura 6.340. Grafo después del ítem 276.

A la hora de plantear la ecuación, Carmen recuerda que en su primer intento habían planteado una ecuación correcta (ítem 281). En concreto, la ecuación que construyeron se apoyaba en la relación *Ptm* = *Ptt* + *Pti* que aún no ha

277. Piedad: Ahora… ¿cuántos kilos hay que sumar?
278. Carmen: Lo que hemos dicho antes.
279. Piedad: ¿Qué hemos dicho?
280. Carmen: Equis… (*Carmen escribe “x…”. Carmen posa el ratón sobre “x” hasta hacer visible “kilos de té de la India”.*)

sido empleada en la presente resolución. Carmen, quizá rememorando que la ecuación la igualdad involucraba la letra *y* que designaba a *Ptm*, se cuestiona sobre qué representa ahora dicha letra (ítem 282). Piedad, al consultar la ventana de cantidades, observa que no han definido ninguna cantidad mediante una segunda letra, parece exaltarse por este descubrimiento (ítem 283). Carmen afirma contundentemente que su planteamiento es incorrecto (ítem 284). Piedad resuelve consultar cómo han representado ahora *Ptm* pues recuerda que esta era la cantidad que designaron con *y* en el primer intento (ítem 285). Esta acción parece que podría conducirlos si plantean la ecuación de manera análoga al primer intento sustituyendo *y* por 5,75*(45+*x*). Sin embargo, la pareja no continua por este hilo y vuelven a barajar la relación *Ctm* = *Ctt* + *Cti* (ítem 291). De este modo, la resolución empieza a asemejarse a la del primer intento donde la pareja fue incapaz de proponer alternativas que les llevara más allá de la reutilización de relaciones. Como prueba, vuelven a construir una igualdad algebraica en el intento de construir una ecuación sobre *Ctm* (ítem 294).

En esta ocasión, en cambio, y quizá por el recuerdo de la ecuación que plantearon correctamente, Carmen y Piedad verbalizan conjuntamente una representación dual de *Ptm* a través de los precios parciales de cada tipo de té (ítems 296 y 297). A partir de este momento, orientan el resto de acciones a construir la ecuación 5,75(45 + *x*) = 6,2*x* + 234, que finalmente representan de manera correcta en el programa (ítem 331).

281. Piedad: [Teníamos una bien, ¿no?
282. Carmen: Sí, espérate, ¿a qué le hemos puesto *y*? (*Carmen busca en la ventana de cantidades.*)
283. Piedad: A ver, baja. No hemos puesto *y* esta vez, creo. ¡No hemos puesto *y*!
284. Carmen: Esto está mal. (Inaudible)
285. Piedad: *y* creo que lo hemos puesto antes a lo del precio total de la mezcla… (*Carmen escribe "x=…".*)
286. Piedad: …que esta vez era cinco setenta y cinco por… mira a ver si es esto… mira a ver… (*Carmen escribe "x=(5.75*(45+x))" al pulsar en el botón accidentalmente pues sólo deseaba consultar su significado*)
287. (*Carmen se dispone a borrarlo.*)
288. Piedad: No, espera, cuarenta cinco por equis, ¿qué es?
289. Carmen: Kilos de mezcla.
290. Piedad: ¡A ver, qué es equis! El té de la India, ¿no? Entonces… (*Piedad borra la ventana de ecuaciones.*)
291. Piedad: …aquí es cuando he dicho yo lo de los kilos totales, que qué era, kilos de té de mezcla, cuarenta y cinco más equis eran lo mismo… (*Piedad escribe "(45+x)…". Consulta en la ventana de cantidades.*)
292. Piedad: ... que el té de la India, o sea el té de Tailandia más… (*Piedad escribe "(45+x)=45+…".*)
293. Piedad: …el otro té, que qué era, ¿cuánto era? Kilos de té de la India, *equis*. (*Piedad consulta en la ventana de cantidades.*)
294. Carmen: Estás poniendo lo mismo. (*Piedad escribe "(45+x)=45+x".*)
295. Piedad: Ya lo sé, ya. (*Piedad borra la ventana de ecuaciones.*)
296. Carmen: A ver el número de, el número, el… el precio total es igual a cinco con dos por equis porque no sabes los kilos…
297. Piedad: …más seis con dos por cuarenta y cinco.
298. Carmen: [Sí.
299. Piedad: El precio total qué era, ¿esto? (*Piedad señala con el ratón el botón "234".*)
300. Carmen: ¿Y el precio? (*Se hace visible la etiqueta "precio de todo el té de Tailandia".*)
301. Piedad: Precio de todo el té de Tailandia… (*Piedad escribe "234…".*)
302. Carmen: [¡No, no! Precio de todo el té de Tailandia, no, el precio total del té de Tailandia y de té de la India.
303. Piedad: A ver, ya. (*Piedad borra la

ventana de ecuaciones.)

304. Piedad: El precio de…

305. Carmen: [kilos de…

306. Piedad: […precios de té de mezcla, precio de todo el té… (*Piedad señala en la ventana de cantidades "5.75".*)

307. Carmen: ¡Está mal, lo hemos hecho mal!

308. Piedad: Espera, precio de todo el té mezcla, que es esto, es lo mismo que… (Piedad escribe "(5.75*(45+x))=…". Piedad baja en la ventana de cantidades y señala "precio de todo el té de mezcla".)

309. Piedad: …¿qué hemos dicho? Seis con dos por…

310. Carmen: …equis… (*Piedad escribe "(5.75*(45+x))=6.2*x".*)

311. Piedad: …más… (*Piedad intenta seguir escribiendo pero el tutor no lo permite.*)

312. Profesor: Tenéis que utilizar los botones, ya tenéis un botón que es seis con dos por equis…

313. Piedad: Ya, lo hemos puesto. ¡Ah, vale, vale! (*Piedad borra la ventana de ecuaciones.*)

314. Piedad: Esto. (*Piedad escribe "(5.75*(45+x))…".*)

315. Carmen: Otra vez. Es igual a esto más…

316. Piedad: Esto más equis… (*Piedad escribe "(5.75*(45+x))=(6.2*x)+...".*)

317. Piedad: ...o sea cinco con dos por equis. (*Piedad escribe "(5.75*(45+x))=(6.2*x)+5.2...".*)

318. Carmen: Espérate, cinco con dos, no Piedad, por cuarenta y cinco…

319. Piedad: [Sí.

320. Carmen: …si ya tenéis los kilos de…

321. Piedad: [¡Ay, sí, es verdad!

322. Profesor: ¿Y eso cuánto era?

323. Carmen: Doscientos treinta y cuatro. Vale, no pasa nada, borra otra vez, si te lo borra entero.

324. (*Piedad borra la ventana de ecuaciones.*)

325. Carmen: Otra vez, la de abajo.

326. Piedad: Esto es igual… (*Piedad escribe "(5.75*(45+x))…".*)

327. Carmen: …a esto más… (*Piedad escribe "(5.75*(45+x))=(6.2*x)+...".*)

328. Carmen: …doscientos treinta y cuatro.

329. Piedad: ¿Segura?

330. Carmen: Sí. (*Piedad escribe "(5.75*(45+x))=(6.2*x)+234".*)

331. Piedad: Pero si era por equis. (*Piedad valida la ecuación, que es identificada como correcta.*)

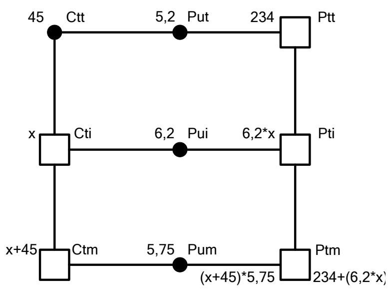


Figura 6.341. Grafo al final de la resolución.

332. Piedad: ¡Ya lo hemos sacado!
333. Profesor: ¿Por qué creéis que ahora lo habéis resuelto y antes no?
334. Piedad: Porque hemos pensado más. (*Piedad se encoge de hombros.*)
335. Carmen: Sí, la verdad es que sí.

6.5.6.3. El caso de la pareja Carmen-Piedad en el problema “El bautizo”

En la celebración de un bautizo el coste total del banquete es 663 €. Si hubiesen asistido 8 personas más, el banquete hubiese costado 975 €. Considerando que todas las personas toman el mismo menú, ¿cuántos invitados asistieron al banquete?

La pareja dedica los primeros segundos a comentar su experiencia con este problema. Las dos estudiantes parecen coincidir en que sabían resolverlo pero no algebraicamente (ítems 2 a 4).

1. Profesor: El bautizo.
2. Carmen: ¡Haalaaaa! Ése yo lo sabía hacer pero de esto, yo no sabía…
3. Piedad: [Con ecuaciones.
4. Carmen: Claro.
5. Piedad: ¿Cambio?
6. Profesor: Sí, cambiad.
7. Carmen: Y éste es que… ah, jo.
8. Piedad: ¿Cómo que ah jo? (*Piedad carga el problema El bautizo.*)
9. Carmen: Que yo quería seguir haciendo éste (*El problema “El té”.*). ¡Hala!
10. Piedad: A ver, lee.

Carmen lee en voz alta el enunciado (ítem 11) y la pareja se centra en dar cuenta de las de las cantidades conocidas. Así, representan correctamente las siguientes cantidades *precio real del banquete* (*Cbr*) (ítem 14) y *precio del banquete en la situación hipotética* (*Cbh*) (ítem 17).

11. (*Carmen lee el enunciado en voz alta. La cantidad activa es “precio real del banquete”.*)
12. Piedad: A ver, precio real del banquete, seis…
13. Carmen: [Seiscientos setenta y tres. (*Piedad señala en el enunciado “663”.*)
14. Piedad: Ponlo. (*Carmen asigna “663” a la cantidad “precio real del banquete”. La cantidad activa es “precio del banquete en la situación hipotética”.*)

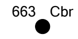


Figura 6.342. Grafo después del ítem 14.

15. Piedad: Precio del banquete en la situación hipotética, nov…
16. Carmen y Piedad: …novecientos setenta y cinco.
17. (*Carmen asigna "975" a la cantidad "precio del banquete en la situación hipotética". La cantidad activa pasa a ser "personas de más en la situación hipotética".*)

Figura 6.343. Grafo después del ítem 17.

Ante la última de las cantidades conocidas, *personas de más en la situación hipotética* (*Pmh*), Carmen propone correctamente darle el valor 8 (ítem 19) pero su compañera se niega, parece que pensando ya en la relación que liga las personas en la situación real, las personas en la situación hipotética y la cantidad activa, *Pmh* (ítem 20). Esto le lleva a enunciar que representarán la cantidad *personas en la situación real* (*Psr*) mediante la letra *equis* (ítem 27) y la cantidad *personas en la situación hipotética* (*Psh*) mediante la expresión $x + 8$ (ítem 28). Carmen no objeta ante estas ideas, sólo pretende que previamente declaren la cantidad conocida *Pmh* lo que es indispensable para la simbolización de *Psh* tal y como tiene en mente su compañera. Sea como sea, Carmen desestima la sugerencia de su pareja y asigna la letra *equis* a la

18. Piedad: En la situación hipotética…
19. Carmen: [Ocho.
20. Piedad: No, no… ocho personas más…
21. Carmen: *Equis*, *equis* se van a las personas que…
22. Piedad: [¡No! Las, a ver…
23. Carmen: Espérate.
24. Piedad: En la celebración hay un coste total de eso pero si hay ocho personas más, pues vamos a poner… (*Piedad despliega la lista de cantidades.*)
25. Piedad: …la situación real, *equis*…
26. Carmen: [Espérate un momento.
27. Piedad: [Personas que asistieron realmente *equis*… (*Piedad activa la cantidad "personas que asistieron realmente".*)
28. Piedad: …y las personas hipotéticas *equis* más ocho.
29. Carmen: Es lo que te iba a decir, que primero vamos a hacer ésta.
30. (*Carmen asigna la letra "x" a la cantidad "personas que asistieron realmente". La cantidad activa pasa a ser "precio del banquete por persona".*)

cantidad *Psr* (ítem 30).

Figura 6.344. Grafo después del ítem 30.

Tal y como era previsible, la pareja intenta construir la expresión 8 + x sin haber declarado *Pmh* en el sistema (ítems 31 a 37). Esto hace imposible el proceso de escritura de la expresión algebraica, y les obliga a asignar valor a la cantidad *Pmh* (ítem 39).

31. Piedad: Pon la otra primero.
32. (*Carmen activa la cantidad "personas en la situación hipotética".*)
33. Carmen: Personas… ocho más *equis*.
34. Piedad: Expresión. (*Carmen activa la opción "expresión".*)
35. Piedad: Ocho.
36. Carmen: No lo tenemos.
37. Piedad: No lo tenemos, no. Hay que hacer el otro.
38. (*Carmen activa la opción "número". Carmen despliega la lista de cantidades.*)
39. Piedad: Personas de más en la situación hipotética, ocho. (*Carmen activa la cantidad "personas de más en la situación hipotética". Carmen asigna el valor "8" a la cantidad activa. La cantidad activa pasa a ser "personas en la situación hipotética".*)

Figura 6.345. Grafo después del ítem 39.

Una vez cubiertas todas las cantidades conocidas y representada *Psr* mediante la letra x, no existe ningún impedimento técnico que les coarte a la hora de construir la expresión algebraica $8+x$. Así, en pocos segundos, asignan correctamente dicha expresión a la cantidad *Psh* (ítem 45).

40. (*Carmen despliega la lista de cantidades.*)
41. Piedad: Precio…
42. Carmen: [Personas… (*Carmen cierra la lista sin modificar la cantidad activa.*)
43. Carmen y Piedad: [Personas en la situación hipotética, equis más ocho. (*Carmen activa la opción "expresión".*)
44. Piedad: Está, está, está…
45. Carmen: Vale, vale. (*Carmen construye la expresión "x+8", que es asignada a la cantidad "personas en la situación hipotética". La cantidad activa pasa a ser "precio del banquete por persona".*)

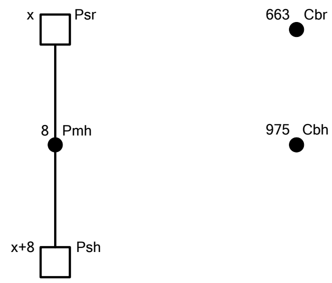


Figura 6.346. Grafo después del ítem 45.

La última de las cantidades desconocidas es el *precio del banquete por persona* (*Cbp*). Carmen sugiere usar una segunda letra para su designación (ítem 48) aunque no llega a consumarlo en el programa, es más ella misma solicita tiempo para meditarlo (ítem 49). Cuando Piedad parece estar pensado en clave de la cantidad requerida por el enunciado (ítem 51), Carmen indica que el precio del menú es de treinta y nueve euros (ítem 52) pues aún lo recuerda de la prueba escrita cuando lo hizo "de cabeza" (ítem 54), probablemente de manera aritmética. Este dato no lo usan en modo alguno dentro del proceso de resolución. Piedad sigue centrada en emplear cuántas personas acudieron al banquete (ítem 55), no quedando claro si para definir *Cbr* o anticipando la construcción de la ecuación. Carmen propone la alternativa de usar la expresión $x - 8$ o bien una expresión que empiece así (ítem 56). Esta propuesta, a todas luces errónea, parece dar la idea a Piedad de expresar el coste unitario como el coste total entre el número de personas, pensando en la situación hipotética (ítem 59). Carmen da a la relación verbalizada carácter general (ítem 60) y es corregida por su compañera, no se sabe si porque sólo lo considera correcta para la situación hipotética o por si está muy concentrada en traducirla al lenguaje algebraica y no quiere descentrarse (ítem 61). Sea como fuere, trabajando de forma conjunta representan la cantidad *Cbp* mediante la expresión algebraica $663/x$ (ítem 74).

46. Piedad: Precio del banquete por persona.
47. (*Silencio de cinco segundos.*)
48. Carmen: *y*.
49. Carmen: Espérate. (*Carmen despliega la lista de cantidades.*)
50. (*Silencio de cinco segundos.*)
51. Piedad: ¿Cuánto es el total de invitados?
52. Carmen: Éste daba treinta y nueve euros el menú.
53. Piedad: ¿Es que lo hiciste?
54. Carmen: De cabeza. (*Se ríen.*)
55. Piedad: A ver, cuánto, cuántos, ay…¿cuántas personas asistieron en total? (*Piedad coge el control del ratón y señala "x" en la ventana de cantidades.*)
56. Carmen: *Equis* menos ocho… no, espérate, *equis*…
57. Piedad: [*Equis* menos ocho entre seiscientos sesenta y tres…
58. Carmen: No. (*Carmen se ríe.*)
59. Piedad: …o sea al revés seiscientos setenta y tres entre las personas…
60. Carmen: [precio del banquete entre las personas].
61. Piedad: No, número de personas en la situación hipotética…
62. Carmen: [personas es equis…
63. Piedad: …el número de personas que asistieron realmente, equis, pues…
64. Carmen: [Yo creo que tienes que poner…
65. Piedad: [El banquete por persona, eso entre las personas… ¿o no? ¿no?
66. (*Silencio de diez segundos.*)
67. Carmen: Precio del banque…
68. Piedad: Si el banquete en total vale…
69. Carmen y Piedad: …seiscientos setenta y tres…
70. Piedad: … y hay equis personas, ¿a cuánto tocarán?
71. Carmen y Piedad: A seiscientos setenta y tres entre equis.
72. Carmen: Pero venga… (*Carmen activa la opción "expresión".*)
73. Piedad: Es que si está mal… (*Carmen*

escribe la expresión "663/…".)

74. Carmen: …entre equis. Va a ser esto por la más… (*Carmen escribe la expresión "663/x", que es asignada a la cantidad "precio del banquete por persona". Se activa la ventana de ecuaciones.*)

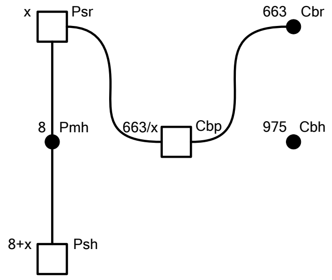


Figura 6.347. Grafo después del ítem 74.

La pareja aborda el cuarto paso del MC, aunque revela cierto temor como consecuencia de las representaciones que han hecho hasta el momento (ítem 75). En relación con la escritura de la ecuación, la primera propuesta de Carmen consiste en la ecuación (663/*x*) = (8 + *x*) (ítem 79) aunque resulta imposible saber si la considera terminada o iba a completarla haciendo uso de otra cantidad. Con independencia de este aspecto, la ecuación incorrecta parece inspirar a Piedad, quien rápidamente propone una ecuación correcta usando dos representaciones de la cantidad *Cbr* (ítem 83). En concreto, verbaliza la ecuación (663/*x*) = 975/(8 + *x*), quizá orientado por la búsqueda de una simetría en ambos miembros de manera que los numeradores recogieran precios totales y los denominadores comensales totales. No se producen verbalizaciones que permitan acotar el razonamiento que ha conducido a Piedad a plantear la ecuación. Finalmente, validan la misma en el sistema (ítem 89) y plantean así correctamente el problema.

75. Carmen: … ya verás qué palazos… (*Se ríen.*)

76. Piedad: ¡Calla! ¡Qué hay que saber el final! ¿Cuántos invitados asistieron al banquete?

77. Carmen: Seiscientos setenta y tres entre equis.

78. Piedad: [¡Equis! Equis, equis más… o sea…

79. Carmen: [Seiscientos setenta y tres entre equis para saber lo que cuesta cada persona es igual a… ocho más equis… (*Carmen pasa de tener el ratón sobre el botón "663/x" viendo "precio real del banquete" a "8+x" viendo "personas en la situación hipotética".*)

80. Piedad: [¿Por qué?

81. (*Silencio de cinco segundos.*)

82. Carmen: Espérate.

83. Piedad: A ver, ¿cuántas personas realmente asistieron? Equis, o sea seiscientos setenta y tres entre equis es lo mismo que novecientos setenta y cinco entre ocho más equis. (*El ratón está todo el rato sobre "663/x" haciendo visible "precio real del banquete".*)

84. Carmen: Repite.

85. Piedad: Equis, o sea, seiscientos setenta y tres entre equis.

86. Carmen: …entre equis, lo que yo te estaba diciendo, es igual a… (*Carmen escribe la ecuación "(663/x)=…".*)

87. Piedad: …es igual a novecientos setenta y cinco… menos, o sea entre… (*Carmen escribe la ecuación "(663/x)=975...". Antes de pulsar "975" hace visible su etiqueta "precio del banquete en la situación hipotética".*)

88. Piedad: …ocho más equis… o no, no sé…. (*Carmen escribe la ecuación "(663/x)=975/(8+x)".*)

89. Carmen: Voy a ver si lo pienso… (*Carmen valida "(663/x)=975/(8+x)", que es identificada como válida.*)
90. Carmen: Somos buenas.
91. Piedad: ¡Sí!

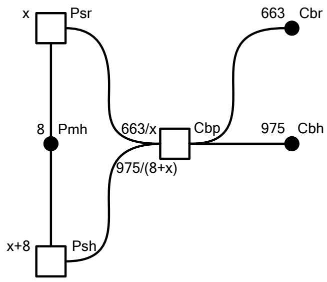


Figura 6.348. Grafo al final de la resolución.

El profesor requiere a Piedad que explique cómo ha construido la ecuación (ítem 94). Las explicaciones de Piedad señalan que el coste unitario es idéntico en ambas situaciones y que puede ser calculado indistintamente mediante las relaciones $Csr = Cbp·Psr$ o $Csh = Cbp·Psh$ (ítem 95).

92. Profesor: ¿Puedes explicarlo?
93. Piedad: Sí, porque ehhh, a ver si, es que no me acuerdo de lo que he puesto… (*Piedad revisa las cantidades con el ratón.*)
94. Profesor: La ecuación, explica la ecuación.
95. Piedad: Ah, vale, aquí (*señala la ecuación*). Seiscientos setenta y tres era lo que cuesta realmente, pues… y las personas que realmente asistían era equis, pues seiscientos setenta y tres que era lo que costaba entre las personas que asistían es lo mismo que el precio hipotético más, o sea entre las personas hipotéticas.
96. Profesor: Porque seiscientos setenta y tres entre equis, ¿qué es?
97. Carmen: Lo que le cuesta a cada persona.
98. Profesor: Venga, vamos a cambiar de problema.

6.5.6.4. El caso de la pareja Carmen-Piedad en el problema "Los cromos"

Si quiero comprar nueve paquetes de cromos me faltan tres euros, pero si compro cinco paquetes me sobran cinco euros. ¿Cuál es el precio de un paquete?

Piedad lee el enunciado en voz alta (ítem 1). En cuanto lo leen, Piedad recuerda que lo intentaron resolver en lápiz y papel y pregunta al profesor si alguna de las dos lo resolvió correctamente, quizá con la perspectiva de repetir el planteamiento (ítem 3). El profesor les indica que

1. (*Piedad lee el enunciado en voz alta. La cantidad activa es "número de paquetes a comprar cuando me falta dinero".*)
2. Carmen: A ver…
3. Piedad: ¿Éste lo hicimos alguna de las dos? ¿Lo hicimos bien? (*Piedad se dirige al profesor.*)
4. Profesor: Los que estáis haciendo no los hicisteis bien ninguna de los dos.
5. Piedad: ¡Ah, vale!

ninguna de las dos lo supo resolver en papel (ítem 4).

Piedad lee la descripción de la cantidad activa, el *número de paquetes a comprar cuando me falta dinero* (*Cfd*) y afirma que toma el valor 9 (ítem 7). Sin esperar la intervención de Carmen, realiza la asignación en el sistema correctamente (ítem 8).

6. Carmen: ¡Es que éste me suena…
7. Piedad: [Número de paquetes a comprar cuando me falta dinero, nueve.
8. (*Piedad asigna el valor "9" a la cantidad "número de paquetes a comprar cuando me falta dinero". Piedad señala con el ratón "nueve" en el enunciado. La cantidad activa es "número de paquetes a comprar cuando me sobra dinero".*)

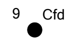


Figura 6.349. Grafo después del ítem 8.

De igual manera procede Piedad para la cantidad que informa del número de paquetes a comprar en la situación en que sobra dinero (*Csd*) (ítem 9). Carmen propone darle el valor 5 (ítem 10). Piedad prefiere revisar el enunciado previamente, y relee la parte del enunciado donde se dan cuenta de las relaciones tanto de la situación en que sobra como en la que falta dinero (ítem 11 a 13). Tras este breve repaso, Carmen da el valor 5 a *Csd* en el tutor (ítem 14).

9. Piedad: Número de paquetes a comprar cuando me sobra dinero…
10. Carmen: Cinco.
11. Piedad: Espera. Si quiero comprar nueve paquetes…
12. Carmen: ...me faltan tres euros…
13. Piedad: …y si quiero comprar cinco paquetes, me sobran.
14. Carmen: Cinco. (*Carmen asigna el valor "5" a la cantidad "número de paquetes a comprar cuando me falta dinero". La cantidad activa es "dinero que me falta al comprar tres paquetes".*)

Figura 6.350. Grafo después del ítem 14.

La siguiente de las cantidades conocidas de la que va a dar cuenta la pareja es *dinero que falta al comprar nueve paquetes* (*Df*). Carmen indica que deben asignar el valor 3 a la cantidad *Df* (ítem

15. Carmen: Dinero que me falta al comprar nueve paquetes, tres.
16. (*Piedad asigna el valor "3" a la cantidad "dinero que me falta al comprar tres paquetes"*. La cantidad activa pasa a ser "dinero que me sobra al comprar cinco paquetes".)

15) y Piedad obedece realizando la acción correspondiente sobre el sistema (ítem 16).

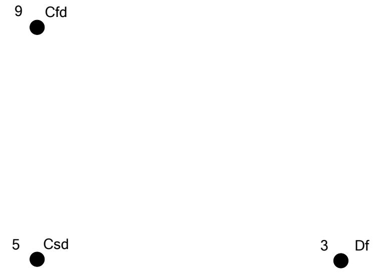


Figura 6.351. Grafo después del ítem 16.

La última de las cantidades conocidas mencionadas en el enunciado es *dinero que falta al comprar cinco paquetes* (*Df).* Carmen apunta que a esta cantidad le corresponde el valor 5 (ítem 17). Sin pronunciar palabra, Piedad consuma la designación de la *Df* mediante este valor (ítem 18).

17. Carmen: Cinco.
18. (*Piedad asigna el valor "5" a la cantidad "dinero que me sobra al comprar cinco paquetes". La cantidad activa es "precio de un paquete de cromos".*)

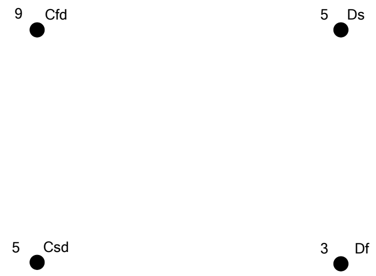


Figura 6.352. Grafo después del ítem 18.

Ante la primera cantidad desconocida que deben designar, Piedad propone emplear la letra equis para representar la cantidad *precio de un paquete de cromos* (*Ppc*) (ítem 20) ante lo que Carmen se muestra conforme y ejecuta la acción en el programa (ítem 21).

19. Carmen: Precio de un paquete de cromos…
20. Piedad: Equis.
21. Carmen: Equis. (*Piedad asigna la letra "x" a la cantidad "precio de un paquete de cromos". La cantidad activa pasa a ser "dinero que tengo".*)

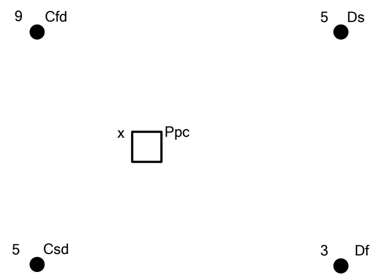


Figura 6.353. Grafo después del ítem 21

La pareja inicia el tercer paso del MC, teniendo ya designadas en el programa todas las cantidades conocidas y habiendo usando una letra para la cantidad *Ppc*. La cantidad activa es *dinero que tengo, D*, y la sugerencia de Piedad es emplear una nueva letra *y* para representarla (ítem 23). Sin embargo, Carmen prefiere explorar las cantidades restantes y despliega la lista de

22. Carmen: Dinero que tengo.
23. Piedad: *y*. (*Piedad mira a Carmen.*)
24. Carmen: Espera. Sí.
25. (*Silencio de cinco segundos.*)
26. Carmen: Sí. (*Carmen despliega la lista de cantidades.*)
27. Piedad: Precio de nueve paquetes… vale, dinero que tengo. (*Carmen deja activa la cantidad "dinero que tengo".*)
28. Piedad: ¿Se sabe o se puede saber?
29. Carmen: *y*.
30. (*Piedad asigna la letra "y" a la cantidad "dinero que tengo". La cantidad activa*

cantidades (ítem 26). Observa que las cantidades restantes son el precio de nueve paquetes y el precio de cinco paquetes de cromos, por lo que prefiere mantener seleccionada la cantidad *D* (ítem 27). Es llamativa la pregunta que plantea Piedad sobre la cantidad: “¿se sabe o se puede saber?” (ítem 28). Parece reflexionar sobre si la pudieran representar a través de un número o mediante una expresión (aritmética o algebraica). Como única respuesta, Carmen nombra la letra *y*, por lo que Piedad procede a asignar ésta a *D* en el programa.

es “precio de nueve paquetes de cromos”.)

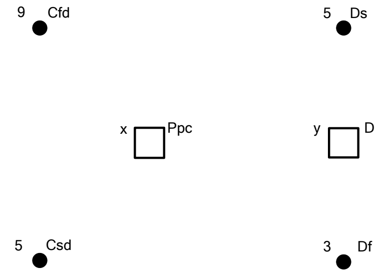


Figura 6.354. Grafo después del ítem 30.

La siguiente acción consiste en la lectura en voz alta de la descripción de la cantidad activa *precio total de cromos en la situación que falta dinero* (*Pfd*) por parte de Carmen (ítem 31). Cuando Piedad empieza a verbalizar la relación *Pfd* = *D* + *Df* (ítem 32), su compañera la interrumpe con vehemencia una y otra vez (ítems 33 a 37). A pesar de la oposición de su compañera, Piedad enérgicamente consigue desarrollar su idea e introduce la expresión *y* + 3 en el sistema para designar la cantidad *D* (ítem 40). Carmen no expone en ningún momento los motivos que le llevaban a oponerse a su compañera.

31. Carmen: Precio de nueve paquetes… de cromos.
32. Piedad: Pues el dinero que tengo más…
33. Carmen: [¡No, no, no!
34. Piedad: [¡Sí!
35. Carmen: ¡Espérate!
36. Piedad: A ver, si quiero comprar el precio de nueve paquete de cromos es el dinero que ya tengo…
37. Carmen: [Más tres]
38. Piedad: …pero como me faltan tres, más tres. (*Piedad activa la opción “expresión”.*)
39. Piedad: El dinero que tengo cuánto era, ¿*y*? (*Piedad construye la expresión “y…”.*)
40. Piedad: más tres. (*Piedad construye la expresión “y+3”, que es asignada a la cantidad “precio de nueve paquetes de cromos”. La cantidad activa es “precio de cinco paquetes de cromos”. Se activa la ventana de ecuaciones.*)

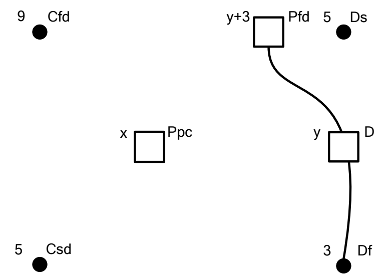


Figura 6.355. Grafo después del ítem 40.

En relación con la última de las cantidades pendientes, el precio total de los cromos en la situación en que falta dinero, Piedad propone representarla mediante la expresión *y* − 5 (ítem 41). Carmen manifiesta creer que la iniciativa

41. Piedad: Precio de cinco paquetes de cromos, el dinero que tengo menos cinco, ¿o no?
42. Carmen: Sí, pero no sé si se hace así, ¿sabes? (*Piedad activa la opción “expresión”.*)
43. Piedad: Yo tampoco pero… (*Piedad construye la expresión “y−5”, que no es*

de su pareja es correcta aunque demuestra dudas. Piedad escribe la expresión en el sistema y al validar recibe un mensaje de error (ítem 43). En realidad la expresión sí es correcta pero el sistema diferencia las cantidades con independencia de que compartan representación y en este caso hay dos cantidades conocidas que toman el mismo valor; *Ds* y *Csd*. Dada que es una peculiaridad del sistema, el profesor les informa inmediatamente (ítem 45). Enseguida recuerdan este aspecto y exploran los botones hasta identificar el que corresponde a la cantidad *Ds*, que es el que desean emplear para construir la expresión $y - 5$ (ítem 52). Solventado esta ligero percance en el proceso de resolución, consiguen simbolizar en el sistema la cantidad *Psd* haciendo uso de la relación aditiva $D = Pfd + Ds$ (ítem 53).

validada al usar el 5 correspondiente a “número de paquetes de cromos”.)

44. Piedad: No corresponde con ninguna cantidad del problema. (*Piedad lee el mensaje de error.*)
45. Profesor: Tened cuidado porque hay dos cincos y tenéis que utilizar el cinco que…
46. Piedad: [¡Ah!]
47. Profesor: …que representa esa cantidad. Si dejáis el ratón sobre el botón os dice qué cinco es.
48. Piedad: Ya, ya. (*Coloca el ratón sobre el “5” usado haciendo visible “número de paquetes a comprar cuando me sobra dinero”.*)
49. Carmen: Entonces pon…
50. Piedad: [Éste cinco, ¿no? A ver, equis, o sea y, dinero que tengo menos… (*Piedad escribe la expresión “y−…”.*)
51. Piedad: …el dinero que me sobra que es éste… (*Piedad coloca el ratón sobre el “5” usado haciendo visible “número de paquetes a comprar cuando me sobra dinero”.*)
52. Piedad: No, éste no. Dinero que me sobra… (*Piedad coloca el ratón sobre el otro “5” haciendo visible “dinero que me sobra al comprar cinco paquetes”.*)
53. Carmen: Sí, antes has puesto el otro. (*Piedad construye la expresión “y−5”, que es asignada a la cantidad “precio de cinco paquetes de cromos”.*)

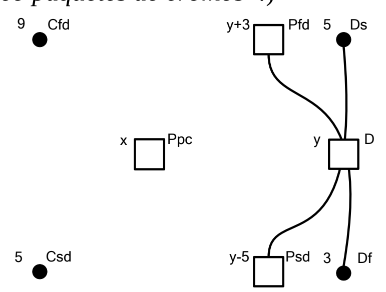


Figura 6.356. Grafo después del ítem 53.

Aunque la pareja podría haber planteado la primera de las ecuaciones en cuanto definieron la cantidad *Pfd*, no han valorado iniciar el cuarto paso del MC hasta que no han definido todas las cantidades. La primera intervención de Piedad (ítem 54) es reveladora acerca de su percepción de lo que han de acometer en esta etapa pues afirma que ahora “hay que saber el precio de un paquete”. Como veremos a continuación, esta preconcepción influirá en gran medida en

54. Piedad: Ahora. Vale, hay que saber el precio de un paquete.
55. Carmen: Vale, espera.
56. (*Silencio de veinte segundos.*)
57. Carmen: Aquí creo que también es de dos ecuaciones.

las ecuaciones que pretenden plantear. Por su parte, Carmen manifiesta su creencia de que serán necesarias dos ecuaciones para resolver el problema.

Carmen sugiere iniciar la primera ecuación en forma $x = f(x)$ (ítem 59), lo que respondería a la necesidad que manifestaba su compañera de calcular el precio de un paquete de cromos. Piedad revisa el significado de x y asiente invitando a su compañera a continuar con la construcción de la ecuación (ítem 60). Carmen sugiere la relación incorrecta *Ppc=Pfd* mediante la ecuación $x = y - 3$ (ítem 62). Piedad de inmediato interroga a su compañera sobre los motivos de que el segundo miembro sea ocupado por la cantidad *Pfd* (ítem 63). Sorprendentemente, Carmen justifica su decisión alegando que $y + 3$ representa el precio de nueve paquetes de cromos (ítem 64). Piedad no ve la lógica en su plan y expone los motivos por los que no pueden igualar *Ppc* y *Pfd*, aunque en su verbalización revela que está malinterpretando la letra x y que considera que da cuenta de la cantidad *dinero que tengo (D)*. Ante la exposición de Piedad, Carmen duda de lo que está representado en el sistema al afirmar que ella piensa que la expresión que designa *Pfd* debería ser $y - 3$ en vez de $y + 3$ (ítem 66). Este típico error de inversión es debido a que Carmen traduce que el hecho de que falten tres euros debe ser representado con la operación menos. Piedad explica que, precisamente debido a que faltan tres euros, han de sumarlos al dinero que tienen para alcanzar la igualdad (ítem 67). Carmen acepta como válidas las explicaciones de su compañera (ítem 68).

58. Piedad: ¿Y la primera?
59. Carmen: Equis es igual…
60. Piedad: ¿Qué es equis? Precio de un paquete es lo mismo… (*Piedad mira a Carmen.*)
61. Carmen: *y*… (*Carmen coge el ratón y baja la barra de desplazamiento vertical de la ventana de cantidades.*)
62. Carmen: …equis es igual a *y* más tres, creo.
63. Piedad: [¿Por qué *y* más tres?
64. Carmen: Porque es el precio de nueve paquetes de cromos. (*Carmen señala “y+3” en la ventana de cantidades.*)
65. Piedad: Entonces no es lo mismo porque el dinero que tengo no es lo mismo que lo de nueve paquetes de cromos, porque me faltan tres euros… ¿entiendes?
66. Carmen: Es que yo creo que esto está mal. El precio de nueve paquetes de cromos es el dinero que tienes menos tres, te faltan tres euros. No es más tres.
67. Piedad: A ver… ¡no! ¡es más tres! Porque es lo que tengo y como me falta, le añado tres.
68. Carmen: Vale, sí. Es que es lo que te sobra lo de abajo. (*Se refiere a la última cantidad de la ventana de cantidades (“y−5”).*)

Retoman la discusión acerca de cómo construir la ecuación y nuevamente Carmen centra la atención sobre la cantidad *Ppc* (ítem 70). Piedad interpreta que propone construir la ecuación sobre esta cantidad (ítem 71). A partir de lo

69. Piedad: Entonces…
70. Carmen: [Equis, lo que vale un paquete de cromos…
71. Piedad: ¿Igual a? (*Piedad escribe la ecuación “x…”.*)
72. Piedad: Lo que vale uno… (*Piedad posa el ratón sobre “9” haciendo visible “número de paquetes a comprar cuando*

cual sus comentarios señalan a que reflexiona sobre cómo construir una ecuación en la forma $x = f(x)$ (ítems 72 y 73) aunque no parece encontrar la manera y se produce una interrupción del diálogo (ítem 74). Carmen insiste en la ecuación $x = y + 3$ (ítem 77) siendo contestada taxativamente por su compañera, quien comprobando el significado de las cantidades involucradas argumenta que no tiene sentido igualar el precio de un paquete de cromos con el de nueve (ítem 80). Resulta llamativo que la clarividencia con la que rebate la ecuación no le conduzca a reformularla correctamente. A pesar de no poder justificar la ecuación, Carmen propone probarla en el tutor (ítem 82) y así lo hace no siendo validada por el sistema[7] (ítem 83). Como resultado, la pareja asume que la ecuación no es válida y la eliminan (ítem 89 y 90).

Piedad redirecciona ahora la construcción de la ecuación señalando que el precio de nueve paquetes lo han representado como $x + 3$ (ítem 92), afirmación apoyada por su pareja (ítem 93). En su intervención Piedad comete un error; no es posible deducir si fruto de un desliz en la verbalización en el que confunde la letra x e y o fruto de una dificultad más profunda en la que considere que x está representando la cantidad D. En cualquier caso, parece que está valorando la posibilidad de escribir una ecuación relacionando los precios totales de cromos en las diferentes situaciones. Carmen manifiesta no comprender por qué va a igualar estas dos cantidades (*Pfd* y *Psd*) (ítem 97) a lo que Piedad responde que no contempla la igualación directa (ítem 98). La cuestión de Carmen indica implícitamente que ella tiende a considerar el proceso de construcción de

me falta dinero”.)

73. Piedad: … es lo mismo que…
74. (*Silencio de diez segundos.*)
75. Carmen: Yo creo que es eso.
76. Piedad: ¿El qué?
77. Carmen: Igual a *y* más tres.
78. Piedad: ¿Por qué?
79. Carmen: Y luego equis…
80. Piedad: [A ver, a ver… precio de un paquete de cromos dices que es igual a… *y* más tres, ¿por qué? Si eso es el de nueve paquetes. ¿Los nueve valen lo mismo que uno?
81. (*Silencio de diez segundos.*)
82. Carmen: No sé. Vamos a probar.
83. (*Carmen coge el ratón y construye la ecuación “x=(y+3)”. Intenta validarla pero el tutor no lo permite.*)
84. Piedad: No.
85. Carmen: ¿Qué le pasa? ¿Por qué no va? (*Carmen se dirige al profesor.*)
86. Profesor: ¿Qué queréis poner?
87. Carmen: ¿Aceptar?
88. Profesor: Porque no está bien eso.
89. Piedad: O sea que no está bien. (*Piedad borra la ventana de ecuaciones.*)
90. Carmen: Vale, no lo acepta.
91. (*Silencio de diez segundos.*)
92. Piedad: El precio de los paquetes, o sea el precio de los nueve es equis más tres, ¿no?
93. Carmen: Sí.
94. Piedad: Enton… y el precio de…
95. Carmen: [Espérate.]
96. Piedad: …de lo otro es *y* menos cinco, ¿no?
97. Carmen: Pero eso no nos… ¿por qué vas a igualar eso?
98. Piedad: Es que no te estoy diciendo de igualarlo…
99. Carmen: [Ah, vale.
100. Piedad: Te estoy preguntando si es así. A ver…
101. Carmen: [Sí.
102. Piedad: …el precio de los nueve es *y* más tres y el del otro *y* más…
103. Carmen: [Sí.
104. Piedad: … y menos cinco. Entonces *y* más tres, que son los nueve paquetes…
105. Carmen: [es igual a…
106. Piedad: … más, *y* más cinco.
107. Carmen: Espera, *y* más tres es igual a…
108. (*Silencio de diez segundos.*)
109. Piedad: No sé.
110. (*Silencio de diez segundos.*)

[7] El tutor no ofrece en este caso un mensaje de error sino que ni siquiera permite la validación pues está configurado para recibir relaciones ternarias y, en este caso, los estudiantes han propuesto una relación de igualdad (binaria).

una ecuación como la igualación de dos cantidades más que como la igualación de dos expresiones que representan a la misma cantidad. En las siguientes intervenciones intentan desarrollar una ecuación involucrando *Psd* y *Pfd* pero sin éxito, terminando por verbalizar la relación incorrecta *Psd* = *Pfd*, que no llegan a escribir, probablemente porque sean conscientes de que es incorrecta. Esta vía de razonamiento conduce el proceso de resolución a un punto muerto.

Como alternativa Carmen vuelve, casi por enésima vez, a devolver a escena la ecuación $x = y + 3$ (ítem 111) lo que parece empezar a agotar la paciencia de Piedad (ítem 112). Presionada por su compañera, Carmen reacciona señalando que no se trata de x en el primer miembro, sino de “equis por algo más” (ítem 113). Piedad acepta el comentario aunque resulta contradictorio que en el mismo ítem que da el visto bueno a la idea de multiplicar *Ppc* por algo, sigue en la búsqueda de una expresión para construir la ecuación en la forma $x = f(x)$ explícita sobre la cantidad *Ppc* (ítem 114).

111. Carmen: *y* más tres es igual a equis.
112. Piedad: ¿Equis qué es? El precio de un paquete de cromos y dale…
113. Carmen: [Espérate, no, espérate, que no, equis, espérate, por algo más…
114. Piedad: Vale. Equis es el dinero que tengo, equis es lo mismo que…

Una vez más el proceso de resolución parece varado, intentando escribir una ecuación mediante relaciones ya usadas en la definición de cantidades (ítem 117). Dado que el silencio vuelve a imponerse, el entrevistado apela a Carmen para que exprese sus pensamientos (ítem 119). Carmen medita sobre igualar la representación que ya tienen de *Pfd*, es decir $y + 3$ con una expresión en la que *Ppc* multiplique otra cantidad (ítem 120). Carmen no es capaz de cerrar la ecuación y Piedad interviene pretendiendo continuar por la línea abierta por su compañera (ítems 122 a 124). Aunque los silencios prolongados no parecen apuntar a que Piedad fuese capaz de llegar a buen puerto, Carmen sorprende a su pareja olvidándose de la relación multiplicativa que introdujo en escena y proponiendo la

115. (*Silencio de cinco segundos.*)
116. Carmen: Precio de nueve paquetes…
117. Piedad: Es que poner *y* más tres menos tres es una tontería, porque entonces pone que *y* es igual a tres…
118. (*Silencio de diez segundos.*)
119. Profesor: A ver Carmen, ¿qué estabas pensando?
120. Carmen: *y* más tres es igual a equis por…
121. Piedad: ¿Por qué?
122. Piedad: O sea por… el precio de los nueve es lo mismo que equis…
123. (*Silencio de cinco segundos.*)
124. Piedad: …que es el precio de un paquete…
125. (*Silencio de treinta segundos.*)
126. Carmen: …es igual a equis menos… tres.
127. Piedad: ¿El qué?
128. Carmen: Equis, eh, *y* más tres, que es…
129. Piedad: [el precio de los nueve.
130. Carmen: …es igual a equis, que es el precio de un paquete… menos los tres euros que te faltan?
131. Piedad: El precio de los nueve es lo

ecuación $y + 3 = x - 3$ (ítem 126). Esta propuesta desconcierta a Piedad (ítem 127) quien pide a su compañera explicaciones. Carmen indica que el precio de los nueve paquetes deberá ser igual al precio de un paquete más los tres euros que faltan, es decir la relación errónea $Pfd = Ppc + Df$ (ítem 130). Piedad para aceptar las explicaciones e incluso empieza a introducir la ecuación en el programa (ítem 131). Al igual que sucediera anteriormente, vuelve a producirse una breve discusión sobre si el hecho de que falte dinero ha de representarse con la operación suma o la resta (ítem 135 y 136), que resuelve Piedad igual que hiciera minutos antes. Finalmente, Piedad trata de validar la ecuación $y + 3 = x + 3$ pero ésta es rechazada por el tutor. Carmen sugiere representar el segundo miembro mediante $x - 3$ al hilo de su anterior discusión (ítem 139). Sin embargo, no llegan a validar esta ecuación, también errónea, pues durante el proceso de escritura Piedad afirma encontrar el motivo del error y asegura que han usado x cuando en realidad deberían referirse a y (ítem 142). Una vez más el proceso se adentra en un bucle del que la pareja no es capaz de salir fruto de la reutilización de relaciones y la incapaz de simbolizar (o siquiera identificar) las relaciones multiplicativas existentes. En este caso, llegan al extremo de que Piedad escribe la igualdad $y + 3 = y + 3$ (ítem 148) aunque no llegan a validarlo porque Carmen observa que han escrito lo mismo a ambos lados del signo igual (ítem 149). Dadas las circunstancias, Piedad prueba la ecuación que sugería su pareja: $y + 3 = x - 3$, que es rechazada por el tutor (ítem 152).

mismo que equis más tres. Claro, digo yo que sí, porque, mira, equis es… (*Piedad escribe "(y+3)…".*)

132. Piedad: …equis más *y*, o sea *y* más tres…
133. Carmen: …es igual a…
134. Piedad: …el precio de los nueve paquetes es eso.
135. Carmen: [Equis menos tres que es lo que... te faltan tres euros…
136. Piedad: [A equis más tres porque te faltan tres. ¿Entiendes? No es menos, es más, creo. (*Piedad escribe "(y+3)=x+3".*)
137. Carmen: Aceptar. (*Piedad valida la ecuación "(y+3)=x+3", que es identificada como errónea por el tutor.*)

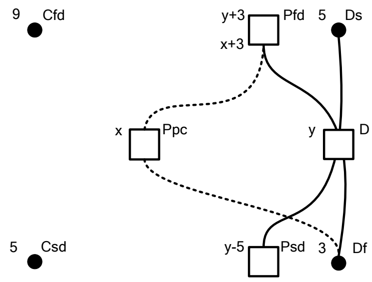


Figura 6.357. Grafo después del ítem 137.

138. Piedad: No.
139. Carmen: Pon menos tres. (*Piedad borra la ventana de ecuaciones.*)
140. Piedad: El de los nueve… (*Piedad escribe "(y+3)…".*)
141. Piedad: …es lo mismo que tu dinero… (*Piedad escribe "(y+3)=x…".*)
142. Piedad: ¡Ah, no! Es que lo hemos puesto mal porque hemos puesto equis y es *y*. A ver… (Piedad mira la ventana de cantidades.)
143. Carmen: ¿¿Qué?? (*Piedad borra la ventana de ecuaciones.*)
144. Piedad: El precio de los nueve… (*Piedad escribe "(y+3)…".*)
145. Carmen: Sí.
146. Piedad: …es lo mismo que el dinero que tú tienes… (*Piedad escribe "(y+3)=y…".*)
147. Carmen: [¡No!
148. Piedad: … más tres. (*Piedad escribe "(y+3)=y+3".*)
149. Carmen: ¡Estás poniendo lo mismo!
150. Piedad: Es verdad. (*Piedad borra la ventana de ecuaciones.*)
151. Carmen: No. Es equis…
152. Piedad: ¡¡¡Ayyy!!! Que es un paquete de cromos… (*Carmen escribe "(y+3)=x−3", que es identificada como errónea por el tutor.*)

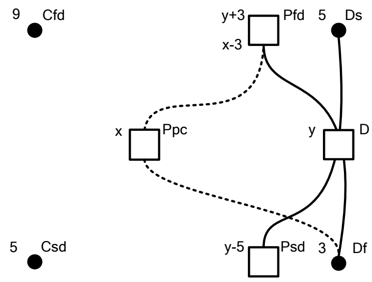


Figura 6.358. Grafo después del ítem 152.

La pareja empieza a mostrar señales de agotamiento y a no ser capaces de barajar alternativas (ítem 154). Piedad vuelve a poner de manifiesto que para ella el objetivo es conocer *Ppc* (ítem 155). Una muestra más de este nivel de agotamiento es el tipo de ecuaciones que empiezan a testar: Carmen introduce $(y + 3) - 3 = x$ (ítem 159) donde subyace la relación errónea $D = Ppc$. El tutor no valida la ecuación propuesta (ítem 160). Piedad justifica el mensaje de error alegando que, obviamente, eso implica igualar x e y.

153. Piedad: No, ¿por qué? (*Carmen borra la ventana de ecuaciones.*)
154. (*Silencio de diez segundos. Suspiran ambas.*)
155. Piedad: Quiere saber el precio de un paquete. Nueve… nueve valen equis más, *y* más tres y cinco *y* menos cinco, entonces…
156. Carmen: ...y equis más tres, te iba a decir equis más tres menos tres…espera…
157. Piedad: [Es que eso no lo podemos hacer.
158. Carmen: No, sería, espérate… (*Carmen escribe "(y+3)−3=…".*)
159. Piedad: ¿Qué haces? (*Carmen escribe "(y+3)−3=x".*)
160. Carmen: Es imposible pero… (*Carmen valida "(y+3)−3=x", que es identificada como errónea.*)

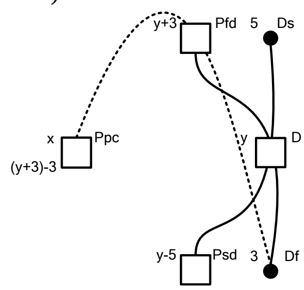


Figura 6.359. Grafo después del ítem 160.

161. Piedad: No, eso es lo que te he dicho antes que se quedaba *y* igual a equis…
162. Carmen: ¡Ay, señor!
163. Piedad: … o sea que no.
164. Carmen: A ver, el precio de nueve paquetes de cromos…
165. (*Silencio de veinte segundos.*)

Cuando parecía que la pareja estaba a punto de renunciar a continuar el proceso, Piedad se pregunta en voz alta cuál es el número total, probablemente pensando en el número de paquetes de cromos cuando la falta dinero (ítem 166). En este momento Piedad parece haber identificado la relación que perseguían y

166. Piedad: ¿Cuál es el número total, o sea? ¡Ay!
167. (*Silencio de quince segundos.*)
168. Piedad: Y si ponemos que equis es igual… (*Piedad escribe "x=…".*)
169. Piedad: …al precio de los nueve… (*Piedad escribe "x=(y+3)…".*)
170. Piedad: …entre nueve. (*Piedad escribe "x=(y+3)/9".*)
171. Carmen: Mira a ver. (*Piedad valida "x=(y+3)/9", que es identificada como

lanza una leve exclamación que denota comprensión. Tras unos segundos de silencio representa correctamente la relación *Pfd* = *Cfd·Ppc* en la forma explícita $x = (y + 3)/9$ (ítem 172).

correcta.)

172. Carmen: Vale.

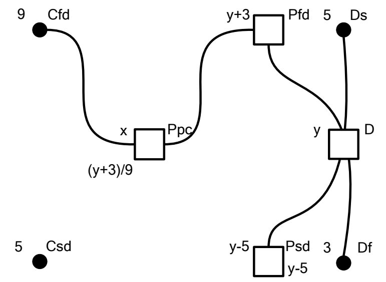


Figura 6.360. Grafo después del ítem 172.

Una vez planteada la primera ecuación se lanzan a construir la segunda usando la relación análoga para la situación en que falta dinero. En pocos segundos introducen y validan la ecuación $x = (y - 5)/5$ en el sistema (ítems 173 a 177).

173. Piedad: [Y también es igual a…
174. Carmen: [x es igual a… (*Piedad escribe "x=…".*)
175. Piedad: […al precio de los cinco… (*Piedad escribe "x=(y−5)…".*)
176. Carmen: …entre cinco.
177. Piedad: …entre cinco. (*Piedad escribe "x=(y−5)/5", que es identificada como correcta por el tutor.*)

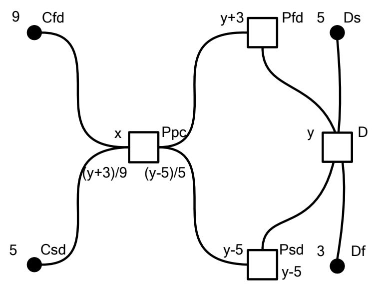


Figura 6.361. Grafo al final de la resolución.

La pareja completa consigue completar el problema. A modo de cierra resulta muy sorprendente la intervención de Carmen (ítem 181) quien afirma "si lo de que equis es igual a *y* más tres ya llegábamos pero lo otro…" en lo que parece ser una muy vaga (e incorrecta) verbalización de que ellas habían identificado que las cantidades representadas por *x* e *y* estaban relacionadas.

178. Piedad: ¡Ahora! ¿Era así?
179. Profesor: Bueno, muy bien.
180. Piedad: O sea que está bien.
181. Carmen: Sí, si lo de que equis es igual a y más tres ya llegábamos pero lo otro… (*Carmen con el ratón señala la ecuación "x=(y+3)/9".*)
182. Piedad: Ya, pero, pero no era tan difícil.
183. Carmen: Ya.
184. Profesor: ¿Queréis volver a El té?
185. Carmen: Vale.
186. Piedad: Vale.

6.5.7. LA PAREJA NURIA-JORGE

6.5.7.1. El caso de la pareja Nuria-Jorge en el problema "El heno"

Un granjero había almacenado cierta cantidad de heno para el consumo de ganado pensando que duraría 198 días. Sin embargo, el heno duró 217 días ya que era de mejor calidad y el ganado consumió 171 kg menos por día de lo que se había previsto que gastaría. ¿Cuánto heno se había almacenado en la granja?

Jorge lee enunciado en alto. Nuria lee el nombre de la cantidad activa inicialmente, *Dp*, y le asigna correctamente el valor 198. Tras esta acción se activa la cantidad *Dr*, y Jorge verbaliza directamente la asignación a esta cantidad del valor 217 (ítem 3). Nuria ejecuta sin dudar la asignación propuesta por su compañero. La nueva cantidad activa es el *heno ahorrado diario*, *Had*, y nuevamente la pareja repite la forma de proceder, es decir sin prácticamente mediar verbalización asignan correctamente el valor que corresponde a esta cantidad conocida. En este caso, Nuria le da el valor 171 a *Had* (ítem 5). De esta forma, agotan sin ninguna dificultad visible la definición de todas las cantidades conocidas.

1. *(Jorge lee el enunciado en voz alta).*
2. Nuria: Días previstos, ciento noventa y ocho. (*La cantidad activa inicialmente es "días previstos". Nuria asigna el valor "198" a dicha cantidad. La cantidad activa pasa a ser "días reales"*.)

Figura 6.362. Grafo después del ítem 2.

3. Jorge: Doscientos diecisiete.
4. (*Nuria asigna el valor "217" a la cantidad "días reales". La cantidad activa pasa a ser "heno ahorrado diario"*.)

Figura 6.363. Grafo después del ítem 4.

5. Nuria: Ciento setenta y uno. (*Nuria asigna el valor "171" a la cantidad "heno ahorrado diario". La cantidad activa pasa a ser "gasto diario previsto".).*

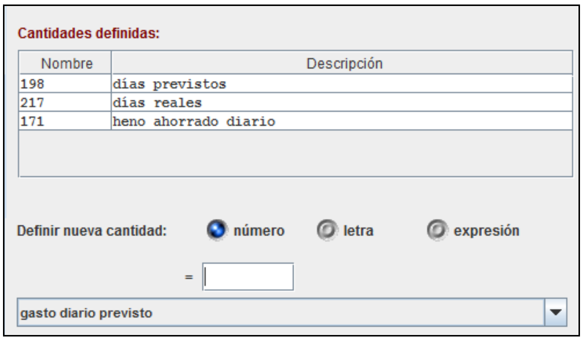


Figura 6.364. Ventana de cantidades después del ítem 5.

Figura 6.365. Grafo después del ítem 5.

Jorge (ítem 6) proponer asignar la letra *equis* a la cantidad desconocida *gasto diario previsto*, *Hpd*, aunque manifiesta no tener confianza absoluta en su idea. Inicialmente Nuria parece obedecer la sugerencia de su compañero pues llegar a escribir la asignación pero no presiona el botón *Aceptar* (ítem 7). De hecho, decide desechar la idea momentáneamente (ítem 8). Jorge (ítem 9) protesta de manera tímida al afirmar que considera que sí es una posibilidad válida. Sin embargo, Nuria hace caso omiso a su pareja y borra lo escrito. Opta, en cambio, por desplegar la lista de cantidades para revisar las cantidades pendientes de definir, lo cual hace con calma, leyendo en silencio cada una de estas cantidades: *Hpd*, *Hrd* y *H*. Finalmente decide activar la última de las cantidades, el *heno almacenado*, con la idea de asignar letra a esa cantidad. El motivo de la elección de esta cantidad se fundamenta en que es la cantidad por la que se pregunta en el enunciado (ítem 13). Ninguno de los estudiantes de la pareja parece estar muy convencido ante esta idea, transcurriendo unos quince de segundos de reflexión silenciosa. Nuria toma la responsabilidad y descarta su idea anterior para pasar a activar la cantidad *gasto diario previsto* (ítem 17). Ante esta idea resulta llamativa la intervención de Jorge (ítem 19) quien anteriormente abogaba por asignar una letra a *Hpd* y ahora esboza el uso de la relación aditiva *Hrd* + *Ad* = *Hpd* al plantear representar *Hpd* mediante una expresión algebraica "equis menos…"

6. Jorge: Equis, puede ser, no sé.
7. (*Nuria escribe "x" en el campo de cantidades.*)
8. Nuria: Lo dejamos para luego…
9. Jorge: Es que creo que es equis, no sé. (*Nuria borra la ventana de cantidades*).
10. Profesor: Habla más fuerte, Nuria.
11. Nuria: Vale.
12. (*Nuria despliega la lista de cantidades. Pasa el ratón despacio sobre "gasto diario previsto", "gasto diario real" y "heno almacenado" por este orden. Finalmente activa la cantidad "heno almacenado".*)
13. Nuria: Heno es lo que te pregunta, ¿no?
14. (*Silencio de cinco segundos.*)
15. Nuria: A ver…
16. (*Silencio de diez segundos.*)
17. (*Nuria despliega la lista de cantidades. Activa la cantidad "heno diario previsto".*)
18. Nuria: Gasto diario previsto…
19. Jorge: [Es que te dice que el ganado consume ciento setenta y un kilos menos… equis menos… (*Nuria despliega la lista de cantidades.*).
20. Nuria: Entonces el gasto real, equis… ¿no? (*Nuria activa la cantidad "gasto diario real"*).
21. Jorge: Sí… no, espérate…
22. (*Silencio de diez segundos.*)
23. Nuria: El gasto diario no se sabe…
24. (*Nuria asigna la letra "x" a la cantidad activa. La cantidad activa pasa a ser "gasto diario previsto".*).

aunque sea de manera errónea. Nuria (ítem 20) rápidamente interpreta la línea de razonamiento de su compañero y entiende que esa definición implica implícitamente asignar la letra equis a la cantidad *gasto diario real*, *Hrd*. Jorge se muestra dubitativo (ítem 21) dando lugar a otro prolongado silencio. Nuria resuelve la situación asignando la letra a equis a *Hrd* bajo el argumento de que esta cantidad es desconocida (ítem 23).

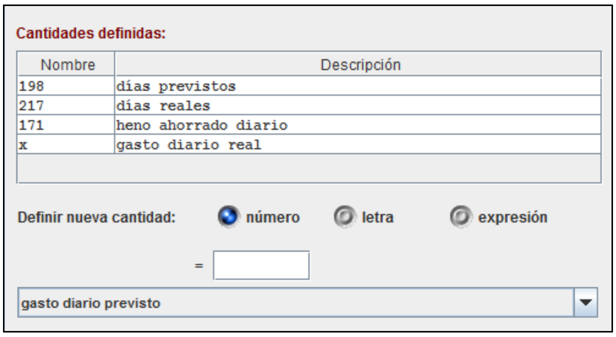


Figura 6.366. Ventana de cantidades después del ítem 24.

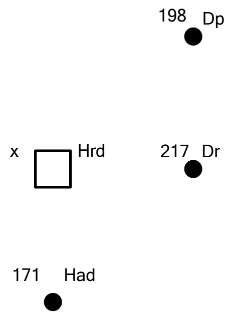


Figura 6.367. Grafo después del ítem 24.

Tras definir la cantidad *Hrd*, rápidamente retoman la relación aditiva que había quedado en el aire para definir la cantidad *gasto previsto diario*. Nuria (ítem 27) propone o quizá recupera la idea de Jorge (ítem 19) al verbalizar “equis menos…”. Jorge (ítem 28) parece darse cuenta de que estarían cometiendo un error de inversión y plasmando la relación incorrecta *Hpd* + *Had* = *Hrd* en vez de la correcta *Hrd* + *Had* = *Hpd*. Nuria (ítem 29) tras releer el fragmento del enunciado donde se describe la relación que están representando, se muestra convencida de que Jorge está en lo cierto (ítem 31). Así, entre los ítems 33 y 34, Nuria representa correctamente la cantidad *Hpd* mediante la expresión x + 171.

25. Nuria: Sería…
26. Jorge: [el previsto sería…
27. Nuria: [… Equis menos…
28. Jorge: [O sería más, espera…
29. Nuria: [Consumió ciento setenta y una menos de lo real, no.
30. Jorge: Sería más.
31. Nuria: Claro.
32. Jorge: Equis más ciento setenta y cinco.
33. Nuria: … más ciento setenta y uno, ¿no? (*Nuria inicia la expresión “x+…”.*)
34. Jorge: Ajá. (*Nuria acaba la expresión “x+171” que es asignada a la cantidad “gasto diario previsto”. La cantidad activa pasa a ser “heno almacenado”.*)

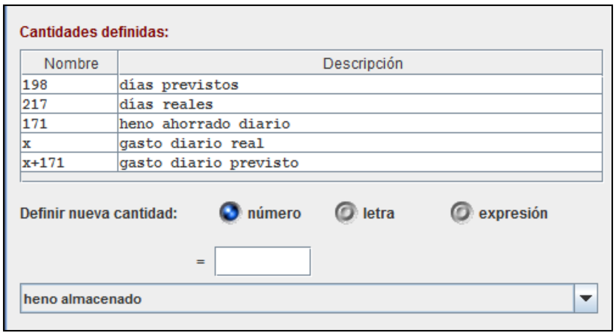


Figura 6.368. Ventana de cantidades después del ítem 34.

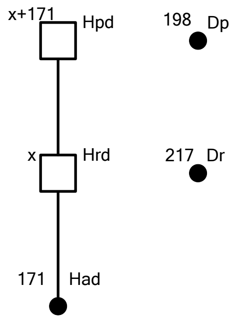


Figura 6.369. Grafo después del ítem 34.

La última cantidad pendiente de definir corresponde al heno almacenado, *H*. Nuria (ítem 35) no parece contemplar la posibilidad de emplear otra letra y opta por representar esta cantidad mediante una expresión algebraica. Jorge (ítem 37) propone emplear la cantidad *Hpd*, *x*+171, para construir una representación de la cantidad *H*. Nuria parece dar continuidad al comentario de su compañero y plantear una relación multiplicativa usando también *Dp* aunque su verbalización no permite identificar claramente cuáles son las cantidades involucradas en la relación (ítem 38). A priori, la interpretación más plausible es que propone representar *H* mediante 198(x + 171) usando la relación correcta $H = Hpd{\cdot}Dp$ pues Nuria propondría “(equis más ciento setenta y uno) por ciento noventa y ocho”. La elipsis se debería a que la verbalización de Nuria es una continuación al comentario de Jorge en el ítem 37. Sin embargo, esta hipótesis no es respaldada por la actuación posterior de Nuria (ítem 39) donde inicia una expresión con la cantidad *Dp* pero a la que no da continuidad. Jorge (ítem 41) le indica que deben usar la operación multiplicación y se ríe, quizá apuntando que eso es lo único que conocen con certeza.

35. Nuria: Y ahora el heno almacenado... (*Nuria activa la opción “expresión”*).
36. Nuria: … sería…
37. Jorge: … equis más ciento setenta y uno… ¿o no?
38. Nuria: Por ciento noventa… ciento noventa y ocho días, ¿no?
39. (*Nuria introduce la expresión “198…”*).
40. (*Silencio de cinco segundos*.)
41. Jorge: Por. (*Jorge se ríe*).

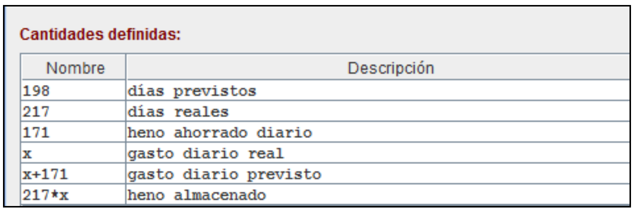
Ante las dudas sobre cómo completar la expresión algebraica, Nuria se replantea qué cantidad conocida usar en la relación (ítem 42). Su intervención se apoya en el uso del ratón para indicar las cantidades

42. Nuria: Si duró doscientos diecisiete días y se gastó esto (*señala con el ratón “171 kg menos por día” en el enunciado*), ¿no serían doscientos diecisiete por…?
43. (*Nuria borra la expresión algebraica iniciada.)*
44. Jorge: Sí, pon doscientos diecisiete…

que desea utilizar. En primer lugar resulta evidente que realiza un cambio de estrategia y pasa de querer poner en lenguaje algebraico la situación hipotética a la situación real. En segundo lugar, Nuria señala que han de usar las cantidades “doscientos siete días” (*Dr*) y la cantidad expresada en “el ganado consumió 171 kg menos por día (en la situación real)” que parece lógica interpretar como *Hrd* ya que Nuria lo asocia a “esto es lo que se gastó” (ítem 49). Esta actuación pone de manifiesto una dificultad para construir la expresión para *H* en esta vía pues la pareja había usado la relación aditiva para representar *Hpd*, no *Hrd*. Por tanto, Nuria podría tener en mente la relación correcta $H = Hrd{\cdot}Dr$ mientras propone representar la relación errónea $H = Hpd{\cdot}Dr$ (ítems 46 y 49).

Jorge que había aceptado la idea de emplear la cantidad *Hrd* en vez de *Hpd* (ítem 44), sí que observa el error en el razonamiento de su compañera. En consecuencia, señala que $x + 171$ representa *Hpd* y que debería emplear *x* (*Hrd*), al principio de manera tímida (ítem 48) y finalmente con contundencia (ítem 50) para hacer desistir a Nuria de su postura. Finalmente, acaban representando la relación correcta $H = Hrd{\cdot}Dr$.

45. (*Nuria inicia la expresión “217…”*).
46. Nuria: Por… ¿esto? (*Nuria señala con el ratón el botón “x+171”.*)
47. (*Silencio de cinco segundos. En este intervalo de tiempo se hace visible el nombre “gasto diario previsto” al mantener Nuria el ratón sobre “x+171”.)*
48. Jorge: No, porque ése era el previsto, sería… por equis sólo puede ser, no lo sé…
49. Nuria: Doscientos diecisiete días… gasto diario previsto (*señala “x+171” en la ventana de cantidades*), esto es lo que se gastó…
50. Jorge: [Pero el real, es el real, es equis…
51. (*Nuria señala “x” y su nombre “gasto diario real” en la ventana de cantidades.*)
52. Jorge: …porque estás contando real.
53. Nuria: (Ininteligible) por equis. (*Nuria escribe “217*x” que es asignada a la cantidad “heno almacenado”. Se activa la ventana de ecuaciones.*).



Cantidades definidas:

Nombre	Descripción
198	días previstos
217	días reales
171	heno ahorrado diario
x	gasto diario real
x+171	gasto diario previsto
217*x	heno almacenado

Figura 6.370. Ventana de cantidades después del ítem 53.

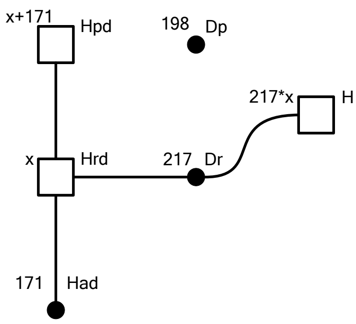


Figura 6.371. Grafo después del ítem 53.

La pareja afronta la construcción de la ecuación y las primeras acciones de Nuria señalan sobre qué cantidad (*H*)

54. Nuria: Y ahora esto qué, a ver…
55. (*Nuria señala “217*x” haciendo visible “heno almacenado”*).
56. Nuria: ¿Cuánto de esto hay almacenado en la granja? (*Mientras sigue siendo*

tiene en mente construir la ecuación. Una posible explicación a esta conducta podría ser el hecho de que vuelva a releer la pregunta del enunciado y selecciona aquella cantidad por la que se pregunta en el mismo. A partir de ese punto, la pareja no encuentra demasiadas dificultades para representar la cantidad *H* mediante dos formas diferentes. En cualquier caso, parece que el único inconveniente podría venir por el orden en que ambos desean construir la ecuación (ítems 59 a 62) en diferente orden. Sin embargo, ambos se manifiestan de acuerdo a la hora de poner en juego la relación $H = Hpd{\cdot}Dp$ (ítems 63 a 66) y a partir de ahí usar la representación $217x$ de *H* para establecer la ecuación (ítems 67 a 74).

visible la etiqueta "heno almacenado".).

57. Jorge: Doscientos diecisiete…
58. Nuria: [Doscientos diecisiete por equis más ciento setenta y uno tiene que ser, ¡no! Ciento noventa y ocho por esto (*señala "x+171" con el ratón*), equis… ¿no?
59. Jorge: A ver, pon primero doscientos diecisiete por equis… (*Nuria introduce "198…" mientras habla Jorge.*).
60. Nuria: [Pero, ¿por qué?
61. Jorge: Espera.
62. (*Nuria escribe "198*…"*)
63. Nuria: Esto (*señala con el ratón el botón "x+171"*) es lo que se prevé, ¿no?
64. (*Se hace visible el nombre "gasto diario previsto" al mantener Nuria el ratón sobre "x+171".*)
65. Jorge: Ajá.
66. Nuria: Se prevé eso… (*Nuria escribe "198*(x+171)…".*)
67. Nuria: …entonces esto tiene que ser igual a…
68. Jorge: …doscientos diecisiete… por…
69. Nuria: [¡Equis!
70. Jorge: …por equis, sí.
71. Nuria: Esto, ¿no? (*Nuria señala con el ratón el botón "217*x".*)
72. Jorge: Sí.
73. (*Nuria escribe "198*(x+171)=(217*x)".*)
74. Nuria: (ininteligible) (*Nuria valida la ecuación "198*(x+171)=(217*x)" que es identificada como correcta.*)
75. Nuria: ¡Bien!

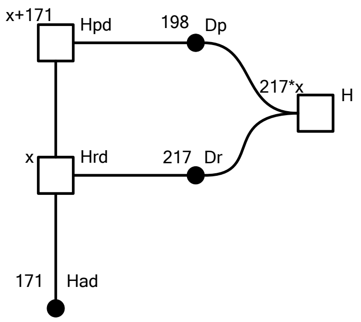


Figura 6.372. Grafo al final de la resolución.

6.5.7.2. El caso de la pareja Nuria-Jorge en el problema “El alcance”

Un ciclista parte de la ciudad A hacia la ciudad B. Cuatro horas más tarde parte un motorista de A hacia B al triple de velocidad que el ciclista. ¿Cuánto tiempo transcurre desde que sale el motorista hasta que alcanza al ciclista?

Jorge lee enunciado en alto. Nuria lee el nombre de la cantidad activa inicialmente *velocidad del ciclista*, *Vc*, y directamente propone asignarle la letra equis sin necesidad de consultar el resto de cantidades involucradas (ítem 2). Jorge subraya que *Vc* es una cantidad desconocida (ítem 3) con lo que parece posicionarse a favor de la propuesta de su compañera. Nuria va más allá y adelanta la representación de la *velocidad del motorista* haciendo uso de la relación correcta *Vm* = *Tt*·*Vc* (ítem 4).

1. *(Jorge lee el enunciado en voz alta).*
2. Nuria: A ver, velocidad del ciclista… velocidad del ciclista, equis. (*La cantidad activa inicialmente es “velocidad del ciclista”*.)
3. Jorge: No se sabe.
4. Nuria: Y el motorista tres equis.
5. (*Silencio de cinco segundos. Nuria mira a Jorge*.)
6. Nuria: Como pone que el motorista parte al triple de velocidad…
7. Jorge: Claro, equis.
8. (*Nuria asigna la letra “x” a la cantidad “velocidad del ciclista”. La cantidad activa pasa a ser “velocidad del motorista”*.).

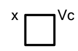


Figura 6.373. Grafo después del ítem 8.

Nuria (ítems 9 y 10) se dispone a construir una expresión algebraica en la que sintetice la relación *Vm* = *Tt*·*Vc*. Sin embargo, se da cuenta de que, a diferencia con el entorno de lápiz y papel, en el tutor previamente ha de definir la cantidad conocida *Tt* (ítem 11). Así, Nuria asigna correctamente el valor 3 a la cantidad *tres para hacer el triple* (*Tt*). Una vez dada definida esta cantidad conocida, Nuria construye la expresión 3*x* para representar la cantidad *Vm*.

9. Nuria: Velocidad del motorista…
10. (*Nuria activa la opción “expresión”*.)
11. Nuria: Ay, primero hay que poner lo de tres para hacer el triple.
12. (*Nuria activa la opción “número”, activa la cantidad “tres para hacer el triple” y asigna el valor “3” a dicha cantidad. La cantidad activa vuelve a ser “velocidad del motorista”*.)

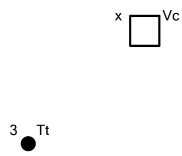


Figura 6.374. Grafo después del ítem 12.

13. (*Nuria activa la opción “expresión”. Escribe la expresión “3*x” que es asignada a la cantidad “velocidad del motorista”. La cantidad activa es*

“distancia de A a la que se encuentran”.)

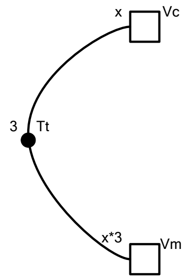


Figura 6.375. Grafo después del ítem 13.

La cantidad activa pasa a ser la cantidad desconocida *distancia de A a la que se encuentran* (*S*). Nuria propone tímidamente asignar la letra *y* a dicha cantidad. Sin embargo, Jorge la interrumpe instándole a que modifique la cantidad activa (ítem 17). Por sus acciones no es posible identificar si no considera correcta la propuesta de su compañera o simplemente desea explorar las cantidades pendientes de definir. Nuria despliega la lista de cantidades (ítem 18) y a la vista de todas las cantidades pendientes de definir, propone asignar el valor 4 a la cantidad *tiempo desde que sale el motorista hasta encontrarse*, *Tm*, de hecho activa la cantidad con esa intención (ítem 19). En respuesta, Jorge verbaliza que el enunciado indica que el motorista sale cuatro horas más tarde, parece lógico pensar que con la intención de hacer ver que *Tm* no tiene por qué ser cuatro (ítem 20). Nuria le da razón a su pareja y abre la lista de cantidades nuevamente (ítem 21). Rápidamente identifica la cantidad a la que realmente le corresponde el valor 4 que es *horas de retraso con las que sale el motorista* (*Trm*) y realiza la asignación de ese valor de manera correcta. De este modo, la pareja completa la definición de todas las cantidades conocidas.

14. Nuria: Distancia de A a la que se encuentran…
15. (*Silencio de cinco segundos*.)
16. Nuria: Eso será *y*, ¿no?
17. Jorge: [Pon otra, pon otra…
18. (*Nuria despliega la lista de cantidades.*).
19. Nuria: Tiempo desde que sale el motorista hasta encontrarse, eso es cuatro, ¿no? Ajá. (*Nuria activa la cantidad “tiempo desde que sale el motorista hasta encontrarse”*.)
20. Jorge: Dice que sale cuatro horas más tarde.
21. Nuria: Ah, es verdad. A ver... (*Nuria despliega la lista de cantidades*.)
22. Nuria: Horas… de retraso… (*Nuria activa la cantidad “horas de retraso con las que sale el motorista”. Asigna el valor “4” a la cantidad activa. La cantidad activa es “tiempo desde que sale el ciclista hasta encontrarse”*.)

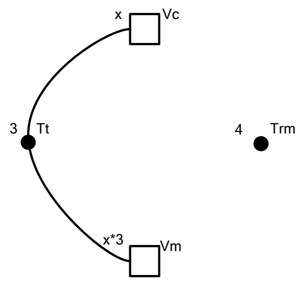


Figura 6.376. Grafo después del ítem 22.

Jorge (ítem 24) propone asignar la letra *y* a la cantidad activa *tiempo que sale el ciclista hasta encontrarse* (*Tc*). La

23. Nuria: Tiempo desde que sale el ciclista hasta encontrarse.
24. Jorge: *y*.
25. (*Nuria asigna la letra “y” a la cantidad activa.*)

propuesta es inmediata en cuanto se hace visible esta cantidad, en ella no media apenas verbalización por ningún miembro de la pareja; ninguno parece contemplar otra posibilidad para representar esta cantidad ni seleccionar otra de las cantidades pendientes. Directamente Nuria asigna la letra *y* a *Tc* (ítem 25).

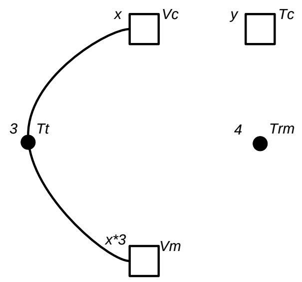


Figura 6.377. Grafo después del ítem 25.

Tras utilizar una segunda letra se plantean cómo representar el tiempo dedicado por el motorista, *Tm*, que es la cantidad activa en ese instante. Para esta tarea no valoran la posibilidad de usar más letras sino que acuden al uso de la relación aditiva que liga los tiempos de ciclista y motorista (*Tc* = *Tm* + *Trm*). Jorge (ítem 27) propone correctamente designar *Tm* mediante la expresión algebraica *y* – 4, lo cual genera dudas en Nuria quien verbaliza la expresión *y* + 4. La idea de Nuria se plasmaría en un error de inversión, el cual podría tener su origen en dos factores: 1) la construcción sintáctica del enunciado, donde las cantidades aparecen en un orden que respalda la ecuación 4 + *Vm* = *Vc*; y en cierto grado ligada a la anterior, 2) la tendencia a no invertir relaciones, y querer construir la expresión con la operación suma ante la palabra clave “más” en el enunciado.

Jorge (ítem 29) explica su propuesta verbalizando el nombre de las cantidades involucradas en la expresión *y* + 4. Aún así, Nuria parece dudar y verifica lo que representa la letra *y* (ítem 30). Jorge parece querer hacer palpable que la idea de Nuria implica que el tiempo del motorista será la del ciclista más cuatro horas (ítem 31). Finalmente Nuria parece asumir la postura de su compañero pues asigna la expresión *y* – 4 a la cantidad *Tm* (ítem 32).

26. Nuria: Tiempo desde que sale el motorista hasta encontrarse. A ver…
27. Jorge: *y* menos cuatro, *y* menos cuatro horas sería…
28. Nuria: ¿No será…? Será más cu… tarda, tiempo desde que sale el motorista hasta encontrarse…
29. Jorge: *y* menos cuatro horas que ha salido con retraso. El tiempo que ha tardado el ciclista menos las cuatro horas de retraso.
30. Nuria: ¿Y por qué no…? (*N sitúa el ratón sobre “y” haciendo visible “tiempo desde que sale el ciclista hasta encontrarse”.)*
31. Jorge: Porque si fuese más sería el tiempo que ha tardado el ciclista más cuatro horas más.
32. (*Nuria escribe la expresión “y−4” que es asignada a la cantidad “tiempo desde que sale el motorista hasta encontrarse”. La cantidad activa pasa a ser “distancia de A a la que se encuentran”*.)

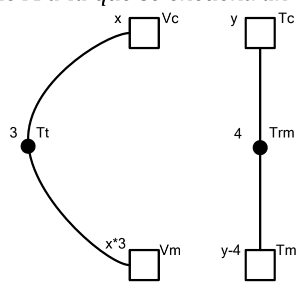


Figura 6.378. Grafo después del ítem 32.

Nuria (ítem 33) lee en voz alta el nombre de la cantidad *S*, última de las cantidades

33. Nuria: Distancia de A a la que se encuentran… pues será…
34. Jorge: [El tiempo por la velocidad. (*Jorge mira a Nuria dubitativo.*).

a definir. Jorge verbaliza la estructura conceptual espacio igual a velocidad por tiempo (ítem 34) aunque no muestra seguridad y espera sin éxito que su compañera corrobore su idea. Por el contrario, Nuria piensa en construir una ecuación mediante el uso de una relación aditiva. De hecho, parece esbozar la posibilidad mediante una ecuación incompleta $Vm = S -\ldots$ en la que no llega a verbalizar la tercera cantidad pues Jorge interrumpe su intervención insistiendo en la estructura conceptual anteriormente comentada (ítem 37). Las divergencias generan unos segundos de silencio que finalmente rompe Nuria consultando la lista de cantidades, quizá con la idea de cambiar de cantidad en vez de encarar las diferencias (ítem 39). Jorge se muestra persistente (ítem 40) lo que lleva a Nuria a ofrecer la responsabilidad del proceso de resolución a Jorge instándole a que le indique cómo debe construir la expresión. Jorge (ítem 42) apunta las cantidades que deben usar: *Vc* y *Tc*. Nuria pregunta si deben plantear la multiplicación entre ambas cantidades (ítem 43) ante lo cual Jorge responde afirmativamente. A pesar de que no parecen totalmente convencidos, Nuria construye la expresión *xy* para representar la cantidad *S* usando correctamente la relación multiplicativa $S = Vc \cdot Tc$.

35. Jorge: Yo creo que es así…
36. Nuria: Velocidad del mot… (*señala 3*x en la ventana de cantidades*), a ver distancia de A a la que se encuentran… Es la distancia total menos…
37. Jorge: [La distancia es tiempo por velocidad. El tiempo que ha tardado por la velocidad que iba.
38. *(Silencio de cinco segundos.)*
39. (*Nuria despliega la lista de cantidades donde sólo queda la cantidad activa.)*
40. Jorge: Yo creo que sí.
41. Nuria: Vale, ¿cómo se hace la expresión? (*Nuria activa la opción "expresión"*).
42. Jorge: Pues equis, equis es la velocidad del ciclista y el tiempo del ciclista es *y*.
43. Nuria: ¿Equis por *y*? (*Nuria escribe la expresión "x…"*).
44. Jorge: Sí, ¿no puede ser así?
45. (*Nuria escribe la expresión "x*y" que es asignada a la cantidad "distancia de A a la que se encuentran". Automáticamente el tutor habilita la ventana de ecuaciones.*)

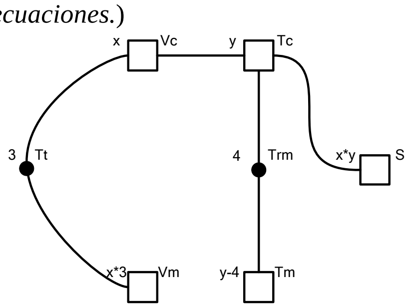


Figura 6.379. Grafo después del ítem 45.

El inicio del paso 4 del MC viene marcado por un prolongado silencio durante el cual no realizan ninguna acción sobre el tutor. Finalmente Nuria (ítem 48) decide romper el silencio con una verbalización que ofrece cuanto menos una doble interpretación. La primera de las hipótesis es considerar que Nuria plantea construir la ecuación sobre la expresión *xy* y que, por tanto, sólo han de buscar otra vía para representar esa misma cantidad e igualarlas. Esta hipótesis, que a nuestro juicio parece la más probable, no viene respalda con las acciones posteriores de Nuria (ítems 50 y 52) en las que pretende construir

46. Nuria: A ver…
47. (*Silencio de diez segundos.*)
48. Nuria: La velocidad por el tiempo del ciclista tiene que ser igual, ¿no?
49. Jorge: A…
50. Nuria: A ver la velocidad del ciclista, equis ¿no?
51. Jorge: Ajá. (*Nuria escribe "x…"*).
52. Nuria: Y el tiempo del ciclista, ¿*y*? (*Nuria consulta en la ventana de cantidades y parece sorprenderse de que sea y la letra que represente el tiempo del ciclista*).
53. Nuria: Entonces sería, hay que hacer dos.
54. Jorge: [Esa expresión ya la tienes…
55. (*Nuria borra la ventana de ecuaciones.*)
56. Jorge: … y además hay que hacer dos.
57. Nuria: Es que equis por *y* igual a qué… (*Nuria inicia la ecuación "(x*y)…"*).
58. Jorge: A…

nuevamente la expresión *x*y*. Destaca que cuando Nuria está construyendo la expresión, la estudiante se sorprenda del significado de la letra *y*, quizá sea en ese momento cuando se percate de que la relación que ha verbalizado mediante “velocidad por el tiempo del ciclista” da lugar a *x*y* y que ya ha sido formulada anteriormente. Esto puede conducirle a afirmar que van a necesitar utilizar dos ecuaciones (ítem 53) aunque Nuria no desarrolla su línea de razonamiento y no podemos descartar que en ese instante recuerde que el uso de dos letras está normalmente asociado al planteamiento de un sistema de dos ecuaciones. En cualquier caso, Jorge corta la representación en curso que estaba llevando a cabo su compañera alegando que ya disponen de esa expresión algebraica (ítem 54) lo que se traduce en que Nuria borre la ecuación en curso (ítem 55). A pesar de la interrupción, Jorge (ítem 56) se muestra de acuerdo con la idea de que tendrán que plantear dos ecuaciones, posiblemente a consecuencia del uso de dos letras. Nuria (ítem 57) retoma el proceso e indica con claridad que deben igualar una expresión igual a *xy* aunque pocos segundos después vuelve a generar dudas pues señala que deben igualarlo a *S* (ítem 59). A lo largo del paso 4 en todas las intervenciones de Nuria emerge una confusión difícil de descifrar por su escaso desarrollo oral pero en la que parece subyacer la intención de reutilizar la relación $S = Vc{\cdot}Tc$ para construir la ecuación. Su compañero Jorge en cambio sí da muestra de entender plenamente la necesidad de designar la cantidad *S* de dos formas diferentes. Así, propone emplear la relación $S = Vm{\cdot}Tm$ de manera correcta para definir el segundo miembro de la ecuación (ítem 60), de tal modo que terminan construyendo la ecuación $xy = (3x)*(y - 4)$. A pesar de que Nuria manifiesta inseguridad sobre lo que hacen (ítem 65), validan la ecuación que es aceptada y completan el paso cuarto del

59. Nuria: A la distancia… (*Nuria mueve la barra de desplazamiento vertical en la ventana de cantidades haciendo visible la descripción de la cantidad representada por “x*y”*).
60. Jorge: [A la distancia que ha recorrido el motorista, que sería tres equis, equis por tres…
61. (*Nuria coloca el ratón sobre “x*3” haciendo visible “velocidad del motorista”. Nuria escribe “(x*y)=(x*3)…”.*)
62. Nuria: Ésta (*x*3*) es la velocidad del motorista.
63. Jorge: Sí, y la distancia que ha recorrido el motorista que era por *y* menos cuatro. (*Nuria pone cara de sorpresa.*)
64. Nuria: No sé esto… (*Nuria escribe “(x*y)=(x*3)*(y−4)”, que es identificada como correcta.*)
65. Jorge: Jajaja… (*Jorge se ríe y Nuria sigue con cara de sorpresa, no parece haber entendido el porqué de la ecuación*).

MC.

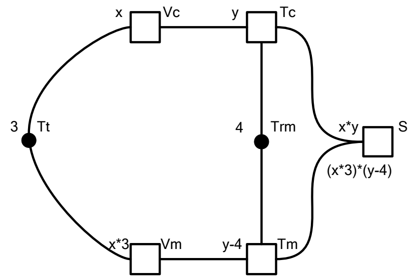


Figura 6.380. Grafo al final de la resolución.

El profesor inicia un diálogo con la pareja de estudiantes para indagar sobre si ésta considera que el problema estaría finalizado (ítems 66 y 68). Ambos estudiantes así lo afirman (ítem 69 y 70). Entre los ítems 71 y 74 el profesor plasma en un folio en blanco la ecuación planteada por los estudiantes para resolver el problema. El profesor pregunta directamente por la cantidad pedida en el enunciado del problema (ítem 75), que es identificada en el enunciado por Jorge como *Tm* (ítem 76) y en la ecuación por su representación *y* por ambos estudiantes (ítems 77 y 78) aunque ambos han de consultar el tutor.

El profesor (ítem 81) pregunta a los estudiantes si serían capaces de resolver dicha ecuación. Nuria no parece segura pues se ríe y directamente pasa el folio a su compañero (ítem 82). Jorge parece evocar alguna situación reciente de aula con una ecuación que contenía *x* por *y* aunque reconoce que el profesor las comentó sin llegar a explicarlas (ítems 83 y 85). Nuria se muestra muy sorprendida y alberga dudas sobre este hecho (ítems 84 y 86).

66. Profesor: Vale, habéis planteado una ecuación, ¿no?
67. Nuria: Sí.
68. Profesor: ¿Y habéis terminado el problema?
69. Nuria: Sí.
70. Jorge: Sí.
71. Profesor: ¿La ecuación cuál es? ¿Me la podéis decir?
72. Nuria: Sí, equis por *y* igual a equis por tres por *y* menos cuatro.
73. Profesor: Tres equis por y menos cuatro, ¿no?
74. Nuria: Sí. (*El profesor escribe la ecuación en un folio*).
75. Profesor: ¿Y el problema qué os pedía?
76. Jorge: El tiempo que transcurre desde que sale el motorista hasta que alcanza al ciclista.
77. Profesor: Entonces tenéis esta ecuación (*el profesor señala el folio*), ¿podéis decirme cuál es el tiempo?
78. (*Nuria consulta la ventana de cantidades*).
79. Nuria: La *y*, ¿no? (*Mirando a Jorge*).
80. Jorge: Ehhh, sí, la *y* es el tiempo desde que sale el ciclista hasta encontrarse. (*Jorge se incorpora para consultar el ordenador.*).
81. Profesor: Ajá, entonces, ¿podrías resolver esa ecuación?
82. Nuria: Jejeje…. (*Nuria pasa el folio a Jorge, parece indicar que ella no es capaz.*)
83. Jorge: Esto es lo que dijo Antonio el otro día, que era equis por *y* esta ecuación, pero resolverla no sé…
84. Nuria: ¿Cómo?
85. Jorge: Que dijo Antonio que eran una especie de ecuaciones que eran equis por *y* pero no las explico.
86. Nuria: ¿Seguro?
87. Jorge: Sí.

La pareja se centra en la resolución de la ecuación tras la sugerencia de Nuria de desarrollar el segundo miembro de la ecuación (ítem 88). Jorge (ítem 89) se muestra conforme y ejecuta la acción correctamente (ítem 92) quedando la ecuación como $xy = -12x + 3xy$, que reescribe como $12x = 3xy–xy$ (ítem 94). Mientras Jorge verbaliza el siguiente paso en el que reducirá a un solo término el segundo miembro de la ecuación (ítem 95), Nuria parece pensar en pasar al primer miembro el término xy (ítem 96). Jorge no valora esta posibilidad sino que realiza la siguiente relación de transformaciones algebraicas: $12x = 2xy$; $12 = 2xy/x$; $12 = 2y$; $y = 6$, alcanzado el resultado de manera correcta.

88. Nuria: A ver, esto (*señala en el papel el segundo miembro de la ecuación: $3x(y-4)$*) hay que multiplicarlo…
89. Jorge: [Ya.
90. Nuria: Esto, sigue…
91. Jorge: Espérate.
92. Nuria: ...tres equis y menos… (*Jorge transforma la ecuación en $xy = -12x + 3xy$*)
93. Jorge: Menos doce equis más tres equis y porque lo he hecho al revés.
94. (*Jorge transforma la ecuación en $12x = 3xy-xy$.*)
95. Jorge: Dos equis por y.
96. Nuria: Esto (*señala xy*) pasa, ¿no? (*Jorge transforma la ecuación en $12x = 2xy$*).
97. (*Jorge transforma la ecuación en $12 = 2xy/x$; $12 = 2y$; $y = 6$.*)
98. Jorge: Eso es.

6.5.7.3. El caso de la pareja Nuria-Jorge en el problema “La traductora”

Una traductora traduce un determinado número de páginas en un determinado número de días. Si tradujese 20 páginas menos cada día, tardaría el triple de días. ¿Cuántas páginas escribe en cada caso?

Jorge lee enunciado en alto. Nuria lee el nombre de la cantidad activa inicialmente *páginas diarias traducidas en la situación real*, *Pdr*, y directamente propone asignarle la letra *equis* sin necesidad de consultar el resto de cantidades involucradas (ítem 2). Inmediatamente conciben la posibilidad de representar la cantidad *páginas diarias traducidas en la situación hipotética*, *Pdh*, mediante la relación aditiva que liga esta dos cantidades con los páginas de menos que traduciría en la hipotética (ítem 5). Para ello, Nuria es consciente de que deben definir la cantidad *páginas diarias que traduce de menos en la situación hipotética respecto a la real*, *Pmh* (ítem 7). Se dispone a ello, y en el proceso además de representar de asignar valor a esta cantidad (ítem 13) hacen lo propio con la también cantidad conocida

1. *(Jorge lee el enunciado en voz alta. La cantidad activa es “páginas diarias traducidas en la situación real”).*
2. Nuria: Páginas diarias traducidas en la situación real, equis.
3. Jorge: Sí.
4. (*Nuria asigna la letra “x” a la cantidad activa. La cantidad activa pasa a ser “páginas diarias traducidas en la situación hipotética”.*)

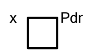


Figura 6.381. Grafo después del ítem 4.

5. Nuria: Páginas diarias traducidas, equis menos veinte.
6. Jorge: Sí.
7. Nuria: Pero no tenemos el veinte, espérate.

tres para hacer el triple, *Tt* (ítem 9).

8. (*Nuria despliega la lista de cantidades y activa la cantidad "tres para hacer el triple"*).
9. Nuria: Tres para hacer el triple. (*Nuria asigna el valor "3" a la cantidad activa. La cantidad activa pasa a ser "páginas diarias traducidas en la situación hipotética"*.)

Figura 6.382. Grafo después del ítem 9.

10. (*Nuria despliega la lista de cantidades y activa la cantidad "páginas diarias que traduce de menos en la situación hipotética respecto a la real"*.)"
11. Nuria: Páginas diarias que traduce de menos…
12. Jorge: [Sí.
13. Nuria: Vale. (*Nuria asigna el valor "20" a la cantidad activa. La cantidad activa pasa a ser "páginas diarias traducidas en la situación hipotética"*.)

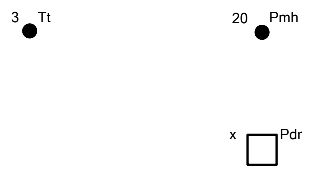


Figura 6.383. Grafo después del ítem 13.

Tras declarar todas las cantidades conocidas, están en disposición de escribir en el tutor la expresión $x - 20$ para representar *Pdh* (ítem 15). Esta expresión supone una aplicación correcta de la relación aditiva *Pdr* = *Pdh* + *Pmh*.

14. Nuria: Páginas diarias, equis menos veinte.
15. (*Nuria activa la opción "expresión". Escribe la expresión "x−20" que es asignada a la cantidad "páginas diarias traducidas en las situación hipotética". La cantidad activa pasa a ser "páginas traducidas".)*

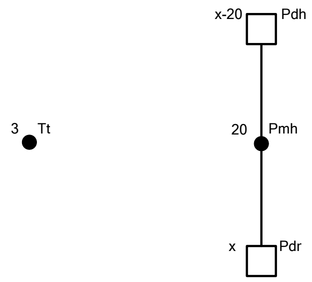


Figura 6.384. Grafo después del ítem 15.

Nuria (ítem 16) lee en voz alta el nombre de la cantidad activa, que es el número de páginas traducidas (*P*). A partir de las cantidades ya representadas no es posible representar la cantidad *P* mediante una expresión algebraica. Ante esta situación, Jorge (ítem 19) propone directamente cambiar de cantidad sin valorar la posibilidad de asignarle una letra. Nuria acepta rápidamente la idea y activa la cantidad *días que traduce en la situación real*, *Dr* (ítem 20). Sin dudar propone de manera muy concisa y sin explicar el motivo asignar la letra *y* a *Dr* (ítem 21). Jorge se muestra de acuerdo (ítem 22) y Nuria procede a realizar la asignación de forma correcta (ítem 24).

16. Nuria: Páginas traducidas, ehhhhh…
17. (*Silencio de cinco segundos.*)
18. Nuria: …que puede ser…
19. Jorge: [Pon otra.
20. Nuria: Venga, vale. (*Nuria despliega la lista de cantidades. Activa la cantidad "días que traduce en la situación real".*)"
21. Nuria: Días que traduce en la situación real, *y*.
22. Jorge: Sí.
23. (*Nuria escribe "7".*)
24. Nuria: ¡Uh, siete! (*Nuria corrige y asigna la letra "y" a la cantidad activa. La cantidad activa es "páginas traducidas".*)

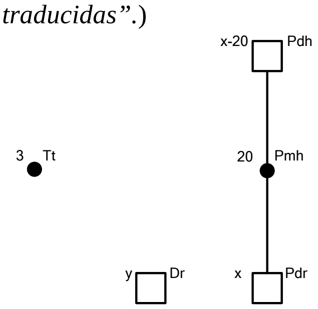


Figura 6.385. Grafo después del ítem 24.

Para completar el paso tercero del MC sólo les queda dar cuenta de dos cantidades: *días que traduce en la situación hipotética* (*Dh*) y *páginas traducidas* (*P*). Al igual que hicieron con anterioridad posponen la declaración de la cantidad *P* y activan la cantidad *Dh*. Sin aparente dificultad, Jorge propone usar correctamente la relación multiplicativa $Dh = Tt{\cdot}Dr$ mediante la

25. (*Nuria despliega la lista de cantidades. Nuria activa la cantidad "días que traduce en la situación hipotética".*)
26. Nuria: Días que traduce en la situación hipotética, *y*…
27. Jorge: Tres *y*, tardaría…
28. Nuria: [El triple. (*Nuria activa la opción "expresión".*)
29. (*Nuria escribe la expresión "3*y" que es asignada a la cantidad "días que traduce en la situación hipotética". La cantidad activa pasa a ser "páginas traducidas".*)

expresión algebraica 3*y* (ítem 27). Nuria acepta de inmediato la propuesta, enfatizando la palabra *triple*, probablemente con el afán de respaldar lo comentado por su compañero identificando sobre qué elemento del enunciado se establece la comparación multiplicativa. Nuria consuma correctamente la asignación de la expresión algebraica 3*y* a *Dh*. (ítem 29).

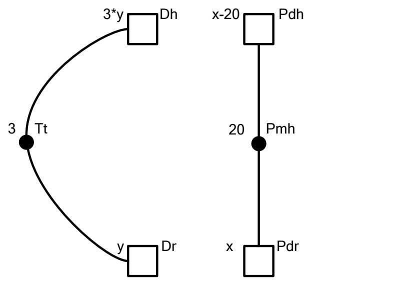


Figura 6.386. Grafo después del ítem 29.

En este momento sólo queda por definir la cantidad desconocida *P*, para lo cual pueden recurrir a dos estructuras multiplicativas análogas $P = Pdr{\cdot}Dr$ o $P = Pdr{\cdot}Dh$. Nuria (ítem 32) parece releer la pregunta del enunciado ante lo que directamente responde verbalizando la expresión algebraica correcta *xy*. La estudiante espera a que su pareja se pronuncie pero ante el silencio de Jorge decide explicar la relación verbalizada. Para ello subraya el significado de las cantidades involucradas, es decir especifica apoyándose en la ventana de cantidades que *y* representa *Dr* y cuando parece que va a hacer lo propio con *x* es interrumpida por Jorge, quien ya visualiza la relación y parece expresar que dado que la otra cantidad designa a *Pdr* entonces la expresión es válida. En consecuencia, Nuria plasma la declaración de *P* mediante el uso de las cantidades relacionadas con la situación real (ítem 35).

30. Nuria: Y ahora páginas traducidas…
31. Jorge: [Ehhh…
32. Nuria: Sería… ¿cuántas páginas diarias escribe? Equis por *y*. (*Nuria mira a Jorge expectante.*)
33. Nuria: Días que traduce en la situación real… (*Nuria señala la descripción de “y” en la ventana de cantidades.*)
34. Jorge: [Sí, y páginas que traduce, sí.
35. (*Nuria activa la opción “expresión”. Escribe la expresión “x*y” que es asignada a la cantidad “páginas traducidas”. Automáticamente se activa la ventana de ecuaciones.*)

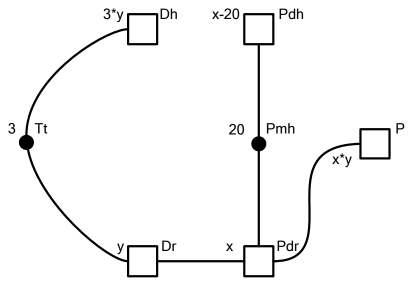


Figura 6.387. Grafo después del ítem 35.

Nuria inicia la construcción de la ecuación sin albergar ninguna duda sobre la cantidad en que van a plantear la igualdad. En concreto, propone hacerlo sobre la cantidad *P* que acaban de de definir mediante la expresión *xy* (ítem 36). Jorge (ítem 37) aprueba la idea sin pronunciar palabra. De este modo, la ecuación en curso adquiere la forma *xy* = … (ítem 38) y reflexionan sobre cómo escribir el segundo miembro. Nuria (ítem 39) sopesa utilizar la expresión $x - 20$ y

36. Nuria: A ver, ahora, entonces equis por *y* tiene que ser igual a…
37. (*Jorge asiente.*)
38. (*Nuria inicia la ecuación “x*y=…”*
39. Nuria: … a equis menos veinte… (*Nuria sitúa el cursor sobre “(x−20)” haciendo visible “páginas diarias traducidas en la situación hipotética”.*)
40. Nuria: … por tres, ¡por tres *y*!
41. Jorge: [Por y por tres.
42. Nuria: Por tres *y*, sí. (*Nuria escribe “(x*y)=(x−20)…” y pulsa el botón “y*3”.*)
43. Jorge: Te falta el por.
44. Nuria: El por. (*Nuria escribe “(x*y)=(x−20)*(y*3)” que es*

coloca el ratón sobre el botón correspondiente. Al hacerse visible el nombre de la cantidad *páginas diarias traducidas en la situación hipotética*, Nuria reacciona verbalizando la expresión que da cuenta correctamente de la relación $P = Pdr \cdot Dh$ (ítem 40). En este caso, parece que la visualización de la cantidad ha podido evocar la estructura conceptual a usar, probablemente favorecido por el uso muy reciente de la misma estructura para la situación real. Finalmente Nuria completa la ecuación de manera correcta (ítem 44).

identificada como correcta.)

45. Profesor: Muy bien, lo vamos a dejar aquí.

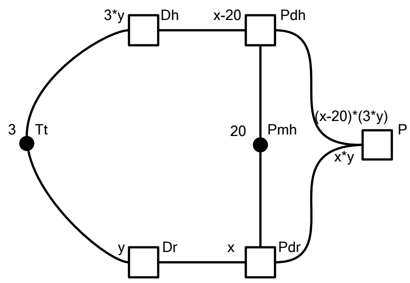


Figura 6.388. Grafo al final de la resolución.

7. Conclusions

> As far as technology itself and education is concerned, technology is basically neutral. It's like a hammer. The hammer doesn't care whether you use it to build a house or whether on torture, using it to crush somebody's skull, the hammer can do either.
>
> Noam Chomsky

7.1. CONCLUSIONS FROM THE GROUP STUDY

The study group was intended to answer the question:

> How does the teaching of algebraic solving of word problems by using an intelligent tutoring system influence the proficiency of secondary school students in solving word problems with pencil and paper?

First, it should be emphasized that the findings of this study group must not to be (nor they are intended to be) generalisable to other populations, confined them to the particular group of students with which the experimentation was developed. In addition, although one of the research interests was the possibility to analyse the potential of HBPS in the teaching of solving word problems, it should also be taken into consideration that the obtained results are the result of a teaching sequence in which different factors take part (e.g., the selected problems) and not only the solving environment, that it the reason why it is not possible to place all responsibility of results on the tool.

The group study intended to explore how different teaching sequences modified the level of proficiency in algebraic solving of word problems. Recall that the experimental design consisted of three sequences of teaching, which basically differs on the learning environment where students were instructed.

A group of students was taught entirely in paper and pencil (group PP); another group worked with a version of HBPS with all its features available (group CT); and a third group worked with a limited version of the system in which no explicit help messages were provided (group RT). After the teaching sequence in all the groups, an increase in the number of problems properly solved was observed. This phenomenon could be considered logical given the fact that this was precisely the purpose of teaching sequences. What is of interest is the comparison of the improvement depending on the different instruction sequences. In this sense, the empirical results reflect a significant improvement in the proficiency in algebraic solving of word problems related to group CT in comparison with groups RT and PP.

These results may be of interest from the point of view of the design of ITS for the teaching of problem solving; therefore, when building a ITS is necessary to determine what tutoring strategies are actually effective in students' learning. In this sense, the number and type of helps that the system provides to the student represent a critical point in the efficiency of a tutorial system. On the one hand, a low level of support can result in the student's inability to complete the task and, therefore, in a lack of motivation on the part of him/her. On the other hand, too much assistance can also have negative effects by decreasing the student interest and concentration in solving the problem (Dabbagh, 2003). In fact, this latter issue corresponds to a common problem in ITS designed for teaching, especially in those that provide assistance in an intensive way. In these cases, the student may complete the task taking advantage of, or more accurate to say, abusing the system's support strategies, especially in environments where the user can successively ask for help until the program finally does solve the problem instead of they themselves (Baker, Corbett, Koedinger, & Roll, 2005). In this way, different studies have shown that overuse of scaffolding results in little learning (Baker, Corbett, Koedinger, & Wagner, 2004; Shute, Woltz and Regian, 1989; Walonoski, & Heffernan, 2006) while other authors argue that systems that are intensive in the tutoring of solving process can lead to better results (e.g. Koedinger, & Aleven, 2007; VanLehn, 2011). The data collected in our study point out that, in general, students did not systematically overuse HBPS's functionalities in order not to solve problems by themselves. Thus, the higher level of support in the full version of HBPS resulted in a higher increase in the proficiency of solving algebraically word problems.

If we take into consideration the students' proficiency level, it was observed that there were significant improvements in the group taught with the full version of HBPS for the three categories of students (low, intermediate and high level[1]). In any case, what is more interesting again is the comparison between the different teaching sequences. From this perspective, one of the most striking results occurs with students classified as low level. For this category, there was only a significant improvement in group CT, that is, for those students who worked with the complete version of HBPS. On the other hand, for intermediate level students, there were significant improvements in all three teaching sequences, although, again, the best results were observed in group CT.

One possible interpretation of these results could be founded on the level of support offered by each type of instruction linked to the student's characteristics. Low level students would have a less ability to identify their errors and difficulties that they undertake during the resolution of a problem in comparison with high level students. Thereby, the ITS used by group RT, in which no explicit help was provided, would be less suitable for low level students. The results may be justified from this framework, since they show how tutor's features used in group RT did result in a significant

[1] The prior proficiency in the algebraic solving of word problems was stemmed from the students' results in the Pretest. In chapter 5, the classification of students according to these results is explained.

increase in the proficiency in algebraic solving of word problems for intermediate level students, whereas the effect cannot be considered relevant for low level students[2].

In relation to the mentioned above, VanLehn (2011) carried out a meta-analysis comparing the effectiveness of different types of tutoring among which human tutoring and different types of ITS were included. One of the categories of STI used was called step-based tutoring system by the author, which was comprised of those systems that allow the user to enter the same steps that he/she would have to address if the task would be solved outside the system, i.e. these systems do not offer additional support. From this perspective, the tutor used by the group RT is considered to belong to this category. One of the partial results from VanLehn (2011) pointed out that this type of tutoring systems had a mean effect size of 0.76 compared to an instruction without any tutoring (instruction on the same contents with no kind of feedback). The results of our group study offer a complementary view to the presented ones in VanLehn (2011). First, our data differ from VanLehn's in the fact that no significant differences were found in the comparison between group RT and group PP. However, as we have seen, the effect on the proficiency in the algebraic solving is strongly influenced by the individual characteristics of students. Thus, the fact that the effectiveness of instruction may be determined by the prior level of proficiency of students can have interesting educational implications about how to organise teaching with ITS.

In conclusion, the results from our group study support the potential of HBPS for teaching of algebraic solving of word problems. Although the results invite to consider future possibilities of this tutorial system positively, it also should be taken into consideration other issues derived from data analysis. In particular, the ITS used in this work is a system of high rigidity, not adapted to the individual characteristics of each student. In this sense, the current line of development is focused on the building of a student model that lets the system offer adapted feedback according to the knowledge of the student at each moment. This development would make possible to provide more appropriate help messages and even the system will be able to determine what problem should be solved after the student has solved another one. In this way, the system itself would form a personalised teaching sequence for each student.

7.2. CONCLUSIONS FROM THE CASE STUDY

The case study was intended to answer the question:

> What are the performances of students when they solve word problems in an intelligent tutoring system after being instructed in algebraic solving of word problems using the system?

Next, the conclusions of the case study are presented as a catalogue of student performances. As a consequence, in some occasions we will be forced to include descriptions of the student performances or even short excerpts of written protocols in order to clearly illustrate the phenomenon that we would be referring to. As far as possible, we will try to keep the spirit of this chapter and minimize the space destined to these aspects. To this end, we will use footnotes to make reference to the performances of pairs that support what is being said in the body of the text. In this way, the reader can go to chapter 6 for a detailed view of the specific students' performance. The way of referring that we use is taken from Arnau (2010) and it will indicate the student, the

[2] In this analysis we do not take into consideration the students classified as high level given the limited number of student within this category.

pair, the problem and the items in which the action occurred. If the performance is not developed exclusively by one of the students, the protagonist will not be included.

7.2.1. THE DIFFICULTY IN INTERPRETING THE NAMES OF THE QUANTITIES THAT HBPS PROPOSES

Puig (2003a) pointed out, based on both Filloy's and his own works about problem solving, that there are evidences of:

> cuando se resuelve un problema ineludiblemente, se realiza, por rápido y fugaz que sea esto, un análisis consciente o inconsciente lógico inicial —que llamaremos "esbozo lógico-semiótico" del problema o de la situación problemática— que pretende bosquejar la solución, esto es, apuntar el camino que necesita seguirse en la resolución del problema de acuerdo con algún texto matemático producido con el uso de algún SMS. (p. 11).

However, the solving environment may influence the logico-semiotic outline that a solver produces when solves a problem. As it is reflected in the description of the algebraic competence model of solving word problems using HBPS, the system imposes restrictions on the solving process, which are particularly relevant in relation to the first step of the Cartesian Method (CM). First, HBPS forces that the analysis of problems leads him to an algebraic solution, i.e. it has to be not only algebraic the reading but also the resolution process.

Without judging the suitability of this fact, that is certainly difficult to fault given the purpose of the teaching sequence, it is undeniable that a limitation of freedom in students' performance occurs when working in HBPS. It is not only that an arithmetical solution could be considered as undesirable, but it is simply not possible to perform it in the configuration of HBPS used in this work. This fact may represent the first constraint to the logico-semiotic outline that a student could produce working in a paper-and-pencil environment. In the production of a logico-semiotic outline a (competent) user anticipates necessary conceptual relationships and foresees the use of a mathematical system of signs (or a stratum of it) to solve the problem (Puig, 2003a). Thus, in HBPS the solver has to adapt to the program's mathematical system of signs and he/she is not free to choose the system (of signs) that he/she considers more convenient as it would be possible in paper-and-pencil environment. Furthermore, the solver's reading should match the one stored in HBPS. Although it is true that this reading was, in the opinion of the author, the most natural reading from the statement and that problems where multiplicity of readings were likely to happen were discarded, we cannot reject the possibility that a student could carry out a different analysis of the problem, which would be impossible to enter into the system. In this case, the solver would need to rework her/his logico-semiotic outline to be able to address the resolution in HBPS. To the latter, it must be added that HBPS provides a list with the name of the quantities included in the reading stored in the system. This fact does affect the way in which the student analyses and poses the problem, as well as allowing her/him to detect whether her/his prior logico-semiotic outline matches the one that is possible to carry out in HBPS. Next, some performances or difficulties linked to the possibility of having a list of quantities are described.

First, difficulties are observed in some pairs to properly manage the involved quantities showing inability to give meaning to the name of some of the quantities offered by STI. Thus, in the problem *Two cars* (*Dos coches*), among the quantities contained in the list of quantities, it appeared a quantity called *time required to meet each other* (*tiempo que* *tardan en encontrarse*). This was the only quantity belonging to magnitude time. The statement of the problem describes a situation in which two moving objects leave from two points spaced by a known distance, travelling in opposite directions on a straight road and that both objects move at known constant speeds until they find themselves. To handle the quantity *time required to meet each other* properly, students should infer that the time taken by one object is the same as the one spent by the other object, although these covered different distances. However, during the resolution of this problem, three out of four pairs that solved the problem in the case study showed difficulties associated with the appearance of this quantity in the list of quantities. For instance, one of the students in Eva-Marta's pair said not to understand why the time appeared in the list when their aim was to calculate the distance[3]. On the one hand, this performance shows the difficulty for some students to involve the conceptual structure that links distance, rate and time. However, after her classmate told him that they should use the letter *t* to represent the time, she immediately verbalised the conceptual structure distance-rate-time[4]. This resolution illustrates how students can rework or complete their reading from the interpretation of quantities offered in the list. In this case, names of quantities allow students to invoke the use of the conceptual structures that are necessary to solve the problem.

In other cases, difficulties were observed when name of quantities suggested by HBPS did not match up with the name that the solver had in mind or, at least he was not able to identify that they were the same quantities since the name predefined by HBPS did not correspond to the one that the solver would have given. Thus, e.g., the pair Alba-Olga, in the course of the resolution of the problem *Two cars*, initially affirmed that they were incapable of posing it. Their argument was based on the fact that they wanted to assign the letter *x* to the quantity with the name *distance in which they meet each other* (*distancia a la que se encuentran*)[5]. The program offered the quantities *distance covered by the car leaving from Albacete until they meet* (*distancia recorrida por el coche que sale de Albacete hasta encontrarse*) and *distance covered by the car leaving from Madrid until they meet* (*distancia recorrida por el coche que sale de Madrid hasta encontrarse*). The pair seemed to conceive that the quantity they intended to use did not correspond to any of the above quantities. The name itself that is proposed by the pair is ambiguous because it does not specify the origin of reference of the measure. Perhaps the vagueness of the name proposed by the students is due to a greater difficulty linked to the analytic reading of the problem, and that they consider that both objects travel the same distance, hence it is not necessary to differentiate the distance covered by each object. The same pair, a few seconds later, revising the list of quantities indicated that they were not able to continue affirming that "the time is not here", whereas it was visible the quantity *time required to meet each other* [6]. This pair of students, which were classified as low level from the results of the group study, showed difficulties using some of the quantities offered by HBPS. The pair Celia-Remedios also showed some to give meaning to the same quantity. In fact, they postponed the definition of this quantity as much as possible and showed signs of not understanding what the name *time*

[3] (Eva; Eva-Marta; *Dos coches*; ítems 20-29).

[4] (Eva-Marta; *Dos coches*; ítems 29-32).

[5] (Alba-Olga; *Dos coches*; 12-16).

[6] (Alba-Olga; *Dos coches*; 17-18).

required to meet each other (*tiempo que tardan en encontrarse*) refers to[7]. In the symbolization process of the quantity, one of the students expressed that this quantity must be "the total time" as they intended to represent it summing the rates of the two objects, perhaps trying to transform the problem into another with only one object. However the actions of the students do not allow us to precisely elucidate the origin of this difficulty. On the one hand, the pairs may not interpret the situation described in the statement properly and, therefore, the quantities offered by HBPS could be considered as unnecessary and wrong. On the other hand, the pairs may understand the situation correctly but may consider the quantities offered by the system as not adequate in order to solve the problem. Possibly, due to a lack of flexibility in interpreting the names, they expected that these would be written in a way almost identical to how the quantities are described in the statement. In this sense, the performance of the pair Celia-Remedios and their appellation of the quantity as "total time" seem to indicate that the pair would expect to have found in the list a quantity for the time spent for each of the object. Thereby, at this stage of the solving process, the students would not infer yet that both quantities would be equal as well as equal to the quantity "the total time" if they had decided to reduce the problem to one with only one object. In actual fact, Puig (1996), from the analysis of students' resolutions of the problem *The hay* (*El heno*), noted that this type of inferences are neither trivial nor direct for students. In response to these observations, the author started to consider the necessity of introducing binary relations of equality in the hypergraphs. As a consequence, the system HBPS, not allowing the solver to use this type of relations, could make students have difficulties in giving meaning to the proposed quantities and so in translating the problem into equations.

The phenomenon is observed clearly in other performances, allowing to delimit why students do not consider as valid some names proposed by HBPS. Thus, by way of example, the pair Eva-Marta stated not to understand the quantity *translated pages* (*páginas traducidas*) in the problem *The translator* (*La traductora*) because the name does not specify to which situation is referred[8]. This performance strongly suggests that the student has not been able to infer from the statement that the same number of pages is translated in both the actual and the hypothetical situation. Thereby, the students could consider necessary to define a quantity for each of the situations: *translated pages in the actual situation* (*páginas traducidas en la situación real*) and *translated pages in the hypothetical situation* (*páginas traducidas en la situación hipotética*). It is not possible to say from these performances whether the students would build an equation on the equality of both quantities later.

In general, the students, when they have been asked about it, have tended to consider that having the names of the quantities is a factor which significantly reduces the difficulty of solving problems[9]. However, the performances described above show that this feature is not neutral and influences the process of solving word problems, even leading to generate difficulties.

[7] (Celia-Remedios; *Dos coches*; ítems 18-55).

[8] (Eva-Marta; *La traductora*; ítems 20-34).

[9] (Cándido-Yolanda; *El pintor*; ítems 67-74).

7.2.2. THE LACK OF DETERMINATION OF THE NAME OF QUANTITIES: COMMON NOUN INSTEAD OF PROPER NOUN

The age problem used in the case study showed how the omission of modifiers, which allows to specify what quantity the name refers to, produces difficulties in interpreting the arithmetical relations among quantities described in the statement. This line of performance has been previously documented in algebraic solving of word problems in other environments as, e.g., the spreadsheet (Arnau, 2010; Arnau, & Puig, 2013; González-Calero, Arnau, & Puig, 2013). In relation to this phenomenon, Puig (2012) explains that the CM requires to name the quantities with proper nouns, not with common nouns. Natural language has mechanisms to convert common nouns as "price", for example, into proper nouns as "the price of a chair"; in this case the definite article "the" and the genitive "of a chair". If students do not assign a different proper noun to each different quantity, or they abbreviate them when writing in the spreadsheet, the noun may not work as the name assigned to a specific quantity and work as a common noun that can refer to different determinate quantities. Then, in the course of the resolution, the students can forget what quantity they intended to name by this (abbreviated) name that they have written, or confuse the quantity when using that name. These performances were also observed when students solved problems in HBPS. Thus, for instance, during the resolution of the problem *The hay* a student in Cándido-Yolanda's pair verbalised an incorrect additive relation that could be favoured by the vagueness when referring to quantities.

Instead of using the name of the quantity *expected daily consumption* (*gasto diario previsto*) proposed by the ITS, the student spoke about the quantity "planned hay" ("heno previsto"). The omission of the adjective "daily" generates that the name of the quantity works as a common noun, causing the ambiguity of whether the quantity represent the expected daily consumption or the total of hay, which eventually leads the student to verbalise an incorrect relationship[10].

In a spreadsheet, students should name (properly) all the quantities involved in the resolution process, otherwise an increase in the use of wrong relationships is produced. However, in HBPS this task does not rest on the solver's shoulders because the system provides a list with the necessary quantities correctly named. The fact that this difficulty also appears in HBPS could point out that even though the ITS provides a (correct) name for each quantity by default, the solver may mentally assign another name to that quantity and operate under their own designation during the resolution process. In fact, the omission of modifiers when referring to quantities could be included in this line of actions. In short, the fact that students have a list with the names of quantities and that they represent the quantities heeding these names (step 2 and 3 of the CM) does not guarantee that students cannot make variations or reinterpretations of names over the resolution process, to a greater extent in the step 4 of the CM.

7.2.3. THE DIFFICULTY IN INTERPRETING RELATIONS AMONG QUANTITIES

When extracting relations among quantities from the statement, errors were produced due to a partial analysis, focused on fragments of the statement. In this sense, the age problem *Amelia y Enrique* is particularly representative. The statement of the problem reads as follows: *Amelia is three times as old as her brother Enrique, but five years from now, Amelia's age will only be the double. What is the age of each of them?*

[10] (Yolanda; Cándido-Yolanda; *El heno*; ítem 90).

(*Amelia tiene el triple de edad que su hermano Enrique, pero dentro de 5 años la edad de Amelia será sólo el doble. ¿Cuál es la edad de cada uno?*). The case study showed a tendency to isolate each of the propositions in which relations between quantities are described and a tendency to make a direct translation without interpreting the relation in the context of the situation described by the statement. In the case of *Amelia y Enrique*, it was observed how some pairs considered that each propositions in which a multiplicative comparison appears unconnected.

The case study illustrated a tendency not only to isolate each of the propositions in which a relationship among quantities is described but also to proceed to a direct translation, without interpreting the relation to the described situation in the statement. In the case of *Amelia y Enrique*, it was observed how some pairs considered no connection at all in each of the propositions where a multiplicative comparison appears (*Amelia is three times as old as her brother Enrique, / but five years from now, Amelia's age will only be the double*). In this way, when translating to the algebraic language, the second proposition was written like $3x + 5 = 2x$. This interpretation is valid only if a linear translation of the statement is made from left to right without bearing in mind the semantics of itself. Then, $3x + 5$ would explain the future age of Amelia (*five years from now, Amelia's age… – dentro de 5 años la edad de Amelia*…) and $2x$ from the double of the current age of Enrique (…*will only be the double – será sólo el doble*). The proposed equation suggests that it has been translated (or extended the reading) from the said fragment of the statement to *five years from now, Amelia's age will only be the double (of the current age of his brother)* (*dentro de cinco años la edad de Amelia será sólo el doble (de la edad actual de su hermano)*)[11]. This translation is syntactically coherent given the narrative of the statement where an ellipsis of the genitive occurs and, as a consequence, a univocal designation of the involved quantity in the comparison does not take place. Nevertheless, the student's translation lacks logic from the standpoint of the relations as it means that the future age of Amelia is the double of the current age of Enrique, while five years before, it was the triple of the same age. Another interpretation, equally incorrect from the relations set of the problem, was *five years from now, Amelia's age will only be the double (of the current age of Amelia)"* (*dentro de cinco años la edad de Amelia será sólo el doble (de la edad actual de Amelia)*)[12].This type of performances reveals a tendency to do translations, word by word from left to right, of the described relations in the statement without an analysis of the validity of the said relations in the semantic of the problem.

7.2.4. THE CHOICE OF THE QUANTITY TO DESIGNATE BY MEANS OF A LETTER

Almost all the pairs showed the tendency to represent the quantity (or any of the quantities) that they were directly asked for in the statement by means of a letter[13]. This

[11] (Alba-Olga; *Amelia y Enrique*; ítems 60-67), (Alba, Alba-Olga; *Amelia y Enrique*; ítems 137-152), (Eva, Eva-Marta; *Amelia y Enrique*; ítems 124-132) y (Remedios; Celia-Remedios; *Amelia y Enrique*; ítems 139-140).

[12] (Alba-Olga; *Amelia y Enrique*; ítems 69-73), (Eva, Eva-Marta; *Amelia y Enrique*; ítems 107-109), (Remedios; Celia-Remedios; *Amelia y Enrique*; ítems 32-41), (Remedios; Celia-Remedios; *Amelia y Enrique*; ítems 139-140).

[13] (Luisa; Luisa-Octavio; *La excursión*; ítems 30-35), (Octavio; Luisa-Octavio; *Amelia y Enrique*; ítem 31), (Luisa; Luisa-Octavio; *El bautizo*; ítem 36), (Octavio; Luisa-Octavio; *El té*; ítem 43), (Octavio; Luisa-Octavio; *El bautizo*; ítem 58), (Olga; Alba-Olga; *Amelia y Enrique*; ítem 108), (Olga; Alba-Olga; *El bautizo*; ítem 36), (Olga; Alba-Olga; *Los cromos*; ítem 37), (Carmen; Carmen-Piedad; *La excursión*; ítem 52), (Piedad; Carmen-Piedad; *El bautizo*; ítem 76), (Piedad; Carmen-Piedad; *El té*; ítem 97).

performance had already been documented (see, for example, Cerdán, 2008). However, it was observed that this performance line was subject to being modified in those cases where considering as unknowns[14] the quantities required in the problem statement, involved the reversal of one comparative relation given in the statement and/or the use of the division for the representation of a multiplicative structure. Referring to an example, in the problem *The hay*, even though the demanded quantity in the statement was the total hay, none of the pairs represented this quantity by means of a letter. By contrast, every pair that solved the problem decided to consider some of the daily hay consumptions as the only unknown, whether it was either the planned or the real consumption[15]. This decision let them subsequently capture the conceptual structure that ties daily consumption, time and total consumption with no need to use the division operation.

In other cases, the students opted to place a second letter, theoretically not necessary[16], in order to represent an unknown quantity that was not asked for in the statement. In this way, in the problem *Two cars*, and in spite of the fact that the statement asks for the distance covered by one of the objects and that the problem is solvable with only a letter, three out of the four pairs that solved it opted to use a second letter to represent time[17]. The introduction of this second letter let the pairs represent the distance-rate-time conceptual structure in a multiplicative way in step 4 of the CM instead of having to use the division in the algebraic representation of time in step 3 of the CM.

The tendency not to reverse relations when translating them into the algebraic language is clearly seen in the students' performance when they solve the problem *Amelia y Enrique*. The statement asked for the current ages of the protagonists; therefore and from this point of view, the assignment of a letter to Amelia's and Enrique's current age should turn out to be, to a certain extent, equally probable. Nevertheless, here it is observed how the students anticipate the consequences of their own decision-making when it comes to face the next step of the method (step 3). In particular, the four pairs that solved the problem designated Enrique's current age by letter x, adducing that in this way, they could represent Amelia's as $3x$, what means a direct translation of the proposition *Amelia is three times as old as her brother Enrique* (*Amelia tiene el triple de edad que su hermano Enrique*)[18]. Snippets from the protocol are very clear in this sense: "Amelia's current age… wait, let's write first Enrique's current age" (Remedios; Celia-Remedios; item 9) or "First we must write Enrique's" (Eva; Eva-Marta; item 9). In other cases, the performances even seem to indicate not only that they consider to do it in this way as more comfortable, but that they consider it as the only viable option. In this sense, one of the pairs initially opted to assign a letter to Amelia's current age, and after doing it, they decided to reject their idea and restart again the resolution from the

[14] With the word *unknown* we allude to those quantities represented by letters in step 2 from CM.

[15] (Eva-Marta; *El heno*; ítem 10), (Cándido-Yolanda; *El heno*; ítem 22) y (Nuria-Jorge; *El heno*; ítem 24).

[16] When introducing this line of performance, we do not consider those problems where the use of two letters is not optional, but necessary to solve the problem. We consider, consequently, the cases in which the reading associated to the problem could be solved using only one letter.

[17] (Alba-Olga; *Dos coches*; ítem 37), (Eva-Marta; *Dos coches*; ítem 29) y (Cándido-Yolanda; *Dos coches*; ítem 21).

[18] (Luisa-Octavio; *Amelia y Enrique*; ítems 9-20), (Eva-Marta; *Amelia y Enrique*; ítems 8-12) y (Celia-Remedios; *Amelia y Enrique*; ítems 9-21).

very beginning[19]. Their literal justification was that "Enrique's current age is *x* and Amelia's current age is 3*x*" (Olga; Alba-Olga; item 24). This case is a clear exponent of the resistance that the students show to reverse comparative relations, especially the multiplicative ones. These observations concur with the conclusions of the work of Hershkovitz, Nesher and Novotná (2000), with the explicit title *Given a problem, what is the x?*

The case study let us detect a tendency for low level students to consider the assignment of letters to those quantities that were not asked for in the statement as hardly suitable and even incorrect. In the solution of the problem *Rabbits and hens* (*Conejos y gallinas*) by the pair Alba-Olga, this phenomenon was sharply observed. At a first moment, the pair assigned the letter *x* and *y* to number of legs of all rabbits and to number of legs of all hens respectively[20]. However, few seconds later, Alba pointed out "I think that number of legs and number of legs are not the unknowns… because they ask for the rabbits and the hens, the unknowns have to be that" (Alba; Alba-Olga; item 18). Judging from the tenor of its performance, they did not consider the possibility of expressing the number of rabbits or of hens using the already represented quantities. They just decided that it was necessary to start again to reassign the letters to the quantities which they were asked for.

7.2.5. THE DIFFICULTY IN OPERATING WITH THE UNKNOWN

The algebraic solving of word problems inexorably leads to the operation with the unknown. The necessity to operate with the unknown constitutes a cognitive jump in the move from the arithmetic to the algebraic thought. In fact, Filloy and Rojano indicate the existence of a didactic cut in that point between both stages (see, for example, Rojano, & Filloy, 1984). Consequently, the difficulty in operating with the unknown is specially visible in uninitiated students in the algebraic solving of word problems. In the present work, the students had received algebraic instruction in the two previous courses. Given this fact, it could be stated that they should have overcome the transitional period between the arithmetic and the algebraic one. Even then, verbalizations produced throughout the case study indicated that the speaker did not consider feasible to use a quantity because this one was a unknown quantity[21]. Showing an example, we go back to Carmen's performance in the problem *The excursion* (*La excursión*). In a precise moment, her classmate, Piedad, wants to build the equation on the quantity *cost of the excursion* (*coste de la excursión*). With this purpose, she correctly suggests multiplying the number of friends, expressed by *x* in step 2 of the CM, by 10, the cost per person if every friend attends. Nonetheless, Carmen shows her rejection claiming that they do not know the number of friends (item 63). This interpretation points out to a difficulty in order to operate with the unknown on the part of Carmen. Her classmate could convince her, having to affirm that they had an expression that represented such unknown quantity. In general lines, the difficulties found in relation to the operation with the unknown had a local character, not shared by both members of a pair and, in consequence, it was not translated into the inability to solve any problem throughout the case study.

---

[19] (Alba-Olga; *Amelia y Enrique*; ítems 17-25).

[20] (Alba-Olga; *Conejos y gallinas*; ítems 11-24).

[21] (Carmen; Carmen-Piedad; *La excursión*; ítems 59-64), (Carmen; Carmen-Piedad; *El té*; ítem 60) y (Luisa; Luisa-Octavio; *El té*; ítem 173).

7.2.6. THE REVERSAL ERROR IN HBPS

In the chapter devoted to the bibliographic revision, special attention was paid to the reversal error, one of the most studied errors in relation to the process of translating statements into the algebraic language. Basically, the analysis of the previous works showed the existence of two explicative models for this error: the syntactic translation and the static comparison. Throughout the case study, the commission of reversal errors were frequent, not only for the multiplicative relations[22]but also for additive ones[23]. In some cases, the reversal error was produced only during the verbalization of the relation, being detected and corrected during the writing process of the relation in the system. On the contrary, in other situations, the error was more persistent and it resulted in the writing of incorrect relations in the system.

Usually, the studies about the reversal error tends to indicate that this error emerges in the process of building equations (step 4 of the CM) but, however, it is equally possible in every situation in which the conversion from a comparative relation to the algebraic language is produced (step 3[24] and 4[25] of the CM). Actually, in the tutorial system it is possible to determine if a reversal error is taking place, because at every moment it is known to which quantity each expression that the solver builds is assigned. At the same time, reversed equations and expressions occurred in not comparative relations[26], although in a lower number. Here, we make reference to the reversed equations and expressions without coming from comparative relations, in spite of being aware of the fact that, being strict, these cases would not be included in the reversal error category.

In the light of the students' performance in the case study, almost every reversal error could be explained from the syntactic translation model. Thus, numerous cases are found where the order of the quantities in the reversed expression or equation coincides with the order in which the quantities appear in the statement. Besides, the students usually accompany the writing process of the relation with syncopal verbalizations of fragments from the statement where the relation in question is related. And now we concisely trace some examples with the aim of illustrating the way in which the reversal errors were committed, seeming to highlight the linear character of the translating

---

[22] (Alba; Alba-Olga; *Amelia y Enrique*; ítem 23), (Marta; Eva-Marta; *Amelia y Enrique*; ítems 30-39), (Eva-Marta; *Amelia y Enrique*; ítem 43), (Eva-Marta; *Amelia y Enrique*; ítem 83), (Celia-Remedios; *Amelia y Enrique*; ítem 81), (Celia-Remedios; *Amelia y Enrique*; ítem 92), (Celia-Remedios; *Amelia y Enrique*; ítem 105), (Celia-Remedios; *Conejos y gallinas*; ítems 15-22) y (Piedad; Carmen-Piedad; *El bautizo*; ítem 57).

[23] (Carmen; Carmen-Piedad; *Los cromos*; ítem 67), (Eva; Eva-Marta; *La traductora*; ítem 5), (Celia-Remedios; *Conejos y gallinas*; ítems 43-50), (Cándido; Cándido-Yolanda; *Los cromos*; ítems 54-56), (Nuria; Nuria-Jorge; *El heno*; ítems 25-34) y (Nuria; Nuria-Jorge; *El alcance*; ítems 26-32).

[24] (Eva; Eva-Marta; *La traductora*; ítem 5), (Nuria; Nuria-Jorge; *El heno*; ítems 25-34), (Nuria; Nuria-Jorge; *El alcance*; ítems 26-32), (Alba; Alba-Olga; *Amelia y Enrique*; ítem 23) y (Celia-Remedios; *Conejos y gallinas*; ítems 15-22).

[25] (Carmen; Carmen-Piedad; *Los cromos*; ítem 67), (Cándido; Cándido-Yolanda; *Los cromos*; ítems 54-56), (Marta; Eva-Marta; *Amelia y Enrique*; ítems 30-39), (Eva-Marta; *Amelia y Enrique*; ítem 43), (Eva-Marta; *Amelia y Enrique*; ítem 83), (Celia-Remedios; *Amelia y Enrique*; ítem 81), (Celia-Remedios; *Amelia y Enrique*; ítem 92), (Celia-Remedios; *Amelia y Enrique*; ítem 105) y(Piedad; Carmen-Piedad; *El bautizo*; ítem 57).

[26] (Eva; Eva-Marta; *El té*; ítem 23), (Cándido-Yolanda; *Dos coches*; ítems 44-45), (Cándido; Cándido-Yolanda; *Dos coches*; ítems 86-88), (Remedios; Celia-Remedios; *Dos coches*; ítems 71) y (Remedios; Celia-Remedios; *Dos coches*; ítems 87)

process. Firstly, we show a case of reversal error in an additive relation, which occurred during the solving of the problem *The trading cards (Los cromos)* by the pair Carmen-Piedad. Specifically, the pair was trying to reflect into an equation the relation within the fragment of statement: *If I want to buy nine packs of trading cards, I still need three euros* (*Si quiero comprar nueve paquetes de cromos me faltan tres euros*). Piedad suggests using the expression $y + 3$ to represent the cost of nine packs. The letter y had been previously assigned to the quantity *money I have*. In view of this proposal, Carmen states: "I think that this is wrong. The price of the nine packs of trading cards is the money that you have minus three, you need three euros more. It is not plus three." (item 67). The verbalization of Carmen seems to link the presence of the verb "need" ("faltar") with the use of the operation "substract". It is advisable to report how this type of performance is associated, in a way, to the tendency of avoiding the reversal of relations. Concerning that, for example, Nuria, along the problem resolution *The catch-up* (*El alcance*), points out that they have to use the operation addition to express the time that the motorcyclist spends[27]. The fragment of the statement said like that *Four hours later a motorcyclist leaves from A to B three times as fast as the cyclist* (*Cuatro horas más tarde parte un motorista de A hacia B al triple de velocidad que el ciclista*). Here, Nuria's proposal joins the tendency of identifying a key word in the statement in Spanish ("más") that condition the operation to use, so that a resistance towards using a subtraction in the algebraic expression occurs. In this particular case, the strategy leads to a reversal error.

On the other hand, in the problema *Amelia y Enrique* the multiplicative reversal errors were frequent in the translation of the fragment *five years from now, Amelia's age will only be the double*. For example, the pair Eva-Marta interpreted the first part of the proposition correctly (*five years from now, Amelia's age*) as the quantity *future Amelia's age* and they started the writing of an equation $x + 5$… (item 40). After that, one of them verbalised "it is equal to…" and wrote $x + 5 =$… (item 41), in order to proceed saying "double of the one she had before" and concluding the reversed equation $x + 5 = 2{\cdot}3x$ (items 42 y 43).

The strategy of direct translation from the natural to the algebraic language was common although, out of consideration for the lack of verbalization of the pairs in certain moments, it is not always possible to clearly distinguish the bonds that are established between the natural language and the mathematical expressions. As previously indicated, the students' performances seem to be in the line of the interpretation offered by the syntactic translation model. Despite considering that the performances have revealing elements in this sense, we opt to bear in mind a prudence principle, particularly strict on this regard. Even so, we want to link our results with some of the ideas expressed by Kirshner et al. (1991). In particular, the authors pointed out that the syntactic translation could be favoured in methodologies of types like *thinking aloud*, because, actually, they could be strategies *post hoc*, with the aim of justifying an equation built by other mechanisms. Nevertheless, the performances here reflected seem to point out the use of direct translations during the building process of either the equations or the algebraic expressions, not a posteriori.

[27] (Nuria; Nuria-Jorge; *El alcance*; ítems 28-31).

7.2.7. THE REUSE OF RELATIONS IN THE BUILDING OF EQUATIONS

Step 4 of the CM obligatorily demands the incorporation of relations among quantities not previously used. In consequence, having step four of the CM being achieved, the solver is obliged to express the still pending to use relations in the algebraic language in order to give a solution to the problem. Hence, it is coherent that the difficulties arisen either expressing a certain relation in the algebraic language or identifying a certain conceptual structure emerges in this last stage, in which the solvers are being headed for using a certain relation, not being able to delay its introduction into the system. It has to be remembered that, theoretically, a direct access from the second to the fourth step could be possible by means of the use of as many letter as unknown quantities the reading has. Following the latter, it is justified that virtually every situation of mental block or of notable difficulty in the solving of a problem are produced in step 4 of the method.

In those situations where the solvers showed difficulties in order to complete step four of the CM, a tendency to build equations by reusing of relations already used in the third step was observed. As a result of the duplicity in the use of relations, the resulting expressions corresponded to algebraic identities instead of equations[28]. In order to show an example, here is a small fragment of the solution protocol of *The tea* (*El té*) by the pair Luisa-Octavio:

46. Luisa: Price of all the mixture.
47. Octavio: So…
48. Luisa: So this is equal… (*Octavio writes the equation "(234 + 6.2*x)…".*)
49. Octavio: it is equal…
50. Luisa: This is equal…
51. Octavio: This is equal… (*Octavio writes the equation "(234 + 6.2*x) = …".*)
52. Luisa: …the one of the Indian tea and the tea from… (*Octavio has a look at the quantities window.*)
53. Octavio: (inaudible.)
54. Luisa: … this… (*Octavio writes the equation "(234 + 6.2*x) = (6.2*x)…".*)
55. Octavio: …plus…
56. Luisa: …that. (*Octavio writes the equation "(234 + 6.2*x) = (6.2*x) + 234".*)
57. Octavio: Two hundred and thirty-four. (*Octavio validates the equation. The tutor informs that the relation has already been used.*)
58. Luisa: No way. ¡Oh yes! That is that.

The protocol shows how the pair builds an algebraic identity when expressing, in step 4 of the CM, the total price of the tea mixture as the sum of the total prices of the Indian and the Thai tea, something that they had already done in step 3. The tautology of "that

[28] (Celia-Remedios; *Amelia y Enrique*; ítems 56-61), (Luisa-Octavio; *El té*; ítems 46-58), (Luisa-Octavio; *Los cromos*; ítems 82-85), (Carmen-Piedad; *El té*; ítems 195-196), (Carmen-Piedad; *El té*; ítems 212-226), (Alba-Olga; *Conejos y gallinas*; ítems 137-142), (Alba-Olga; *Dos coches*; ítems 41-50), (Cándido-Yolanda; *El heno*; ítems 75-86) y (Nuria-Jorge; *El alcance*; ítems 53-59).

is that” reveals how the student finally, and after the error message of the system, realises that they have set out an identity instead of an equation.

This tendency was relatively common, specially in those pairs classified as low level and having difficulties to bring step 4 of CM to an end. However, what it is striking is the fact that this trend had not had hardly any reflection on the solutions with pencil and paper. The interpretation of this phenomenon is articulated on the characteristics of the algebraic solving in HBPS.

First of all, and as it is shown in the chapter 2, it is not unusual that the users of STI try to take advantage of the continuous feedback that the system provides to its benefit; in other words, in order to give an answer to the proposed task without actually working on it. Thus, this strategy for reusing relations could be strenghthed by a decrease in the attention on the part of the solvers, as they are aware that their own decisions are always subjected to the system validation. Therefore, a characteristic like the continuous feedback, designed for the supervision of the user actions, could result in some automatisms through step 4 and a lower level of reflection. Although the situation is theoretically possible, the case study did not allow us to detect systematic strategies in order to take advantage of the system potentials with the aim of avoiding the task. The performances indicate that the students, being aware of the validations that HBPS executes, tend to check the majority of their ideas, even though they are conscious that they are incorrect in many occasions. This type of performances could be considered as a kind of low intensity gaming.

Unlike that, a restriction in the solver’s decisions in HBPS that could have a greater influence in the appearance of this tendency is the fact that the student should address step 3 and 4 of CM individually. As it was claimed before, in paper and pencil it usually happens that the solver assigns algebraic expressions to quantities during the process of writing the equation, and therefore, steps 3 and 4 are addressed jointly. In these cases, focusing on cases with only one equation, the solver uses each expression only once. Thus, and in paper and pencil environment, the solvers could consider the repeated appearance of the same algebraic expression as incorrect, associating this fact to the reuse of a relation. In comparison, this idea would stop being valid in HPBS since, for example, in the case of the quantity on which the equation is built, the solver should define this quantity in step 3 by means of an algebraic expression. Later on, this solver should reuse this expression in step 4 in order to match it with another one. According to that, the students could erroneously consider the reuse of the relations as necessary when they solve problems in HBPS. Therefore, this could be translated into difficulties in step 4 of CM. An increase in the difficulty could be added to this fact, something that would mean for the students to identify the relations that have not been used yet in step four, bearing in mind that the aid based on the provision of the quantity names disappears and that the relations still pending to use are frequently the most difficult ones to represent and/or those not given in the statement. Next, we show a brief example of how the rupture between steps 3 and 4 of the method may not be intuitive. In the resolution of the problem *The excursion* (*La excursión*), the pair Carmen-Piedad completed step 3 thanks to the representation of the total price of the excursion as the multiplication of the cost per person in a situation by the number of friends in such situation, manifested in the algebraic expression $12,5(x–2)$. Starting step 4, the following dialogue happens*:*

52. Carmen: … ¿how many people make up the group? Now, now we've got it that, it costs… so wait… I think that we have to do twelve point fifty multiplied by *x* minus two…

53. Piedad: ¿Multiplied by *x* minus two? That is already done.

54. Carmen: I know, I know, but now we have to do the equation to…

Starting step 4, and after reading the statement question, Carmen seems to direct the building of the equation towards the establishment of an equation on the total price of the excursion. In order to get that, she sets out the use of the expression that they already have for that quantity with the aim of make it equal to another representation of this quantity, what could lead her to the correct equation $12{,}5(x–2) = 10x$. Nevertheless, her classmate, Piedad, interrupts her and lectures "that is already done" (item 53), what could be interpreted as a resistance to the reuse of the algebraic expression $12{,}5(x–2)$ in the equation, maybe due to the fact that the student associates the second appearance of the expression with the reuse of relations.

7.2.8. THE BUILDING OF THE EQUATIONS IN THE FORM X = F (X)

The case study let us detect a tendency to build equations in the form $x = f(x)$, so to say, equations in which one of the unknowns is isolated in one of the sides, usually the left one. The resolutions analysed in the case study point out that several performance characteristics through step 4 of the MC would concur on the building of this type of equations. Firstly, we proceed to describe what mechanisms could motivate the students' inclination towards writing equations in the form $x = f$ (x). Secondly, we explain how this tendency can be translated in difficulties in order to cover step 4 of the CM successfully.

The building of an equation demands the equating of two expressions that represent the same quantity. In accordance with that, a competent solver, when addressing this step, would evaluate the relations that have not been used in step 3 of the CM with the aim of deciding to which quantity (or quantities) is possible to assign a different expression from the one that it was assigned to in step 3. Thus, the possibility to form a dual representation for a quantity (or quantities) would implicitly determine on what quantity (or quantities) the equation (or equations) would be established. Yet, the case study contributed evidence about the fact that when students classified as low level reach step 4 of the method, they tend to evaluate the objective quantities of the problem, instead of evaluating the relations used and not used in the solution[29]. This tendency was translated into a very specific behaviour, the re-reading of the statement question in the moment of starting step 4 of CM[30]. Consequently, among those students that turned to the statement question when starting step 4, the building of the equation in the form $x = f(x)$ constituted a natural continuation in this process. And now we synthetically show

[29] This tendency was identified in the pairs Luisa-Octavio (in every problem that they solved), Carmen-Piedad (in every problem that they solved) and Alba-Olga (in every problem that they solved except for *Two cars*).The pairs Luisa-Octavio and Alba-Olga were classified as low-level whereas the pair Carmen-Piedad was a mixed one since Piedad was classified as a low-level student (see chapter 6).

[30] (Carmen; Carmen-Piedad; *La excursión*; ítem 52), (Piedad; Carmen-Piedad; *El té*; ítem 98), (Piedad; Carmen-Piedad; *El bautizo*; ítem 76), (Piedad; Carmen-Piedad; *Los cromos*; ítem 55), (Luisa; Luisa-Octavio; *La excursión*; ítem 31), (Octavio; Luisa-Octavio; *Amelia y Enrique*; ítem 31), (Luisa; Luisa-Octavio; *El bautizo*; ítem 36); (Octavio; Luisa-Octavio; *El té*; ítem 43); (Octavio; Luisa-Octavio; *Los cromos*; ítem 58); (Olga; Alba-Olga; *Conejos y gallinas*; ítem 102); (Olga; Alba-Olga; *Amelia y Enrique*; ítem 108), (Olga; Alba-Olga; *El bautizo*; ítem 36), (Olga; Alba-Olga; *Los cromos*; ítem 37)

some samples of this tendency with the purpose of highlighting the line of reasoning behind this behaviour. For example, the pair Luisa-Octavio did a re-reading of the statement question (*what is the price of a pack?*) when they reached step 4 of CM. Immediately after, Luisa explained "the price of a pack is *x*…*x* equals…" and started to write an equation in the form x =… (item 59). In the same way, the pair Alba-Olga, when starting step 4 in the problem *Amelia y Enrique* have the following conversation[31]:

108. Olga: What is the age of each one? Same again…

109. Olga: Let's see, Enrique's current age is *x*…

110. Alba: Aha!

111. (*Olga starts the equation "x…".*)

The brief fragment of the protocol shows how, after revising the statement question (item 108), the pair identifies the representation of the quantity (or some of the quantities) that the problem requests (item 109). As it was already shown before, the pairs tend to represent these quantities with letters in step 2 of CM. Thus, the next action consists in starting an equation in the form $x = f(x)$, isolating the unknown in the left side (item 111).

This type of conducts could be considered as a way of acting mechanically by which the students start step 4. Nevertheless, and analysing the whole of the solution process, these performances seem to be partial signs of a more complex tendency associated to certain reminiscences to the arithmetic thought. To be precise, the case study has offered evidences about the fact that various students consider that, when building an equation in the form $x = f(x)$, the direct calculation of the isolated quantity would be possible[32]. To show an example, we come back to the performance of the pair Celia-Remedios in a specific moment related to step 4 in the problem resolution of *The excursion*. The pair had just built the equation $y = 10x$ correctly, where y and x represented the price of the excursion and the number of friends in the group, respectively. In order to finish the problem, the students had to be able to represent the cost of the excursion making use of the information about the fact that if two friends did not attend, they would pay 12,5 € instead of 10 €. However, the pair starts to consider how to commence the second equation in this way:

63. Remedios: I think that it would be with the people.

64. Celia: Well, sure, we have to guess how many friends go to the excursion.

65. (*Remedios points out the quantity "cost per person if every friend attends" in the quantity window, and later she writes "x…".*)

66. Remedios: Cost per person if every friend attends.

67. Remedios: No, but that, the price, I've already done it (*She erases the expression*)

[31] In the fragments of protocols that we present here, the numbering of the items of the original transcription is maintained.

[32] (Celia-Remedios; *La excursión*; ítem 61-67), (Alba; Alba-Olga; *Amelia-Enrique*; ítem 117), (Alba; Alba-Olga; *Conejos y gallinas*; ítems 112-117), (Carmen-Piedad; *El té*; ítem 178-182), (Carmen-Piedad; *Los cromos*; ítems 59-61) y (Octavio; Luisa-Octavio; *Amelia y Enrique*; ítem 58-60)

From this fragment, it is valid to deduce that the pair considers that they should orient the building of the equation towards the determination of the number of friends (items 63 and 64) because the first equation would already tell them about the cost of the excursion (item 67). In a similar way, the pair Carmen-Piedad acted similarly throughout the resolution of the problem *The tea*. Concretely, after writing the first of the equations, Piedad said "we already have the total price of the mixture with that…" (item 180) and her classmate replied "… and now we have to know the kilos"(item 182) indicating the apparent objective of the second equation.

From the previous examples, we want to illustrate the way in which some pairs, especially the low level ones, use procedures with arithmetic characteristics in the building process of equations. Furthermore, they do not seem to contemplate an analysis of the unused relations. In some occasions, this conduct let them build a correct equation as no impediment exists to write the equation in the form $x = f(x)$. However, sometimes, the letter that they try to isolate does not appear in the relation pending to use, the one that they obviously have to use in order to build the equation. In that case, this conduct prevents them from completing the fourth step of the method successfully. The interpretation about the fact that the writing of the equations in the form of $x = f(x)$ seems to be linked to the consideration, on the part of the students, that equations allow them to calculate the isolated quantity. This could be therefore related to the interpretation of the sign equal as a "do something signal" (Kieran, 1981). This tendency is exemplified with detail in González-Calero, Arnau, Puig and Arevalillo-Herráez (2013).

As it was previously commented, this behaviour is characteristic of the pairs with a low level profile, particularly the tendency to re-read the statement question when they start step 4 of the CM. The low level pairs repeated this kind of automatism in almost every faced problem. The intermediate and high level students showed no sign of acting in this way, and even less in an automatically way. In short, for low level students, step 4 seemed to suppose a rupture in the process of resolution, which forces them to return to the problem statement and orientate the process towards the quantities to calculate. Otherwise, the transition between step 3 and 4 could be qualified as slight for the rest of the students, establishing a continuity in the work of reflecting relations in the algebraic language.

7.2.9. THE DIFFICULTY TO USE THE SAME CONCEPTUAL STRUCTURE IN MORE THAN ONE OCCASION

The CM requires that the necessary relations to give answer to the problem are reflected in either algebraic expressions or equations between step three and four. These relations can be described in the problem statement or they can correspond to conceptual structures that are assumed to be known by the solver and that he/she could apply during the problem resolution. Some of these structures are the relation between the time passed and the current and future ages of a protagonist, the relation between unitary and total costs or the relation distance-rate-time. Then, for example, in distance-rate-time problems that are target of learning in secondary school, it is common to describe situations where objects are moving at a uniform speed. The text of the problem does not describe the way in which the speed, the distance and the time are linked. On the contrary, it is expected that the personal intertext of the student let him/her involve the conceptual structure that matches the covered distance by an object that runs at a constant speed in him/her problem reading. According to Puig (2012), the concept of personal intertext covers "los textos que para un individuo particular están ligados con el texto a cuya lectura se enfrenta con el fin de producir sentido. Ese intertexto personal es el que le abre al lector sus posibilidades de lectura" (p. 17). As a consequence, when a student faces up the task of giving sense to a certain problem, he/she does not analyse this text isolatedly, but he/she puts other related texts into action (from the point of view of the solver), from where he/she will have to identify the necessary conceptual structures in order to develop a reading of the problem.

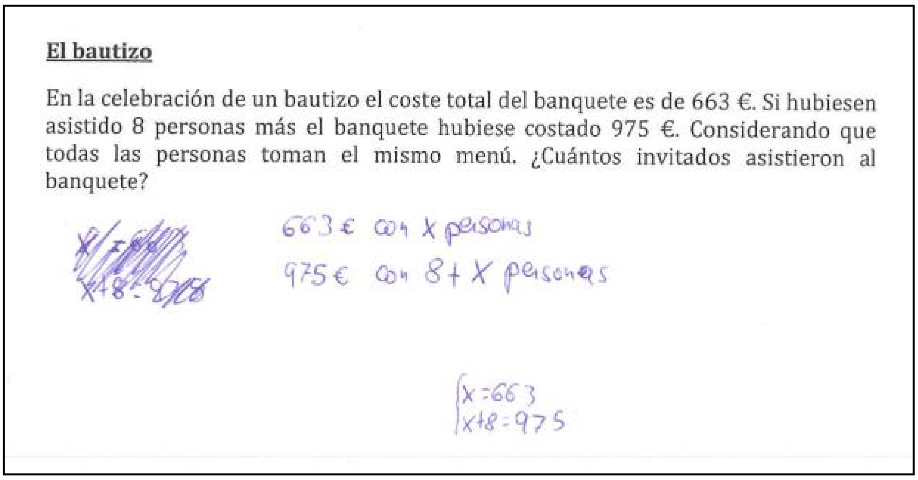
In the algebraic word problems used in this work, as in the majority of the problems that are used in the teaching of algebra, the necessity to invoke some conceptual structure for its solution is very common. Occasionally, it can be inevitable to use the same conceptual structure more than once throughout the problem resolution, since this structure can bring more than one relation to light. For instance, in the problem *Amelia y Enrique*, where two multiplicative comparisons between the current and future ages of both siblings are established, it is necessary to bring to the reading of the problem, the knowledge that the future age of one person will be the current age plus the time passed between both situations. In the specific problem of *Amelia y Enrique*, this conceptual structure has to be considered by both of the siblings, giving rise to two different relations. Throughout the case study, some manifestations could be a product of an inclination to consider that a conceptual structure had to be only used once in the problem solution, showing a biunivocal identification between conceptual structure and relation[33].

7.2.10. THE EQUATION AS A REPRESENTATION OF THE ASSOCIATION AMONG RELATED QUANTITIES

The present section is devoted to the difficulty in representing equations in word problems in which the statement informs about a situation in which a proportional relation underlies. For example, among the problems used in the case study, we mention the statement of *The Baptism* (*El Bautismo*) in order to deal with the topic. That one said like that: *In a baptism celebration, the total cost of the reception is 663€. If 8 more people had attended, the reception would have cost 975 €. Considering the fact that every person has the same menu, how many guests attended the reception?* The statement described two situations in which the solver has to consider the multiplicative structure that associates the number of guests in such situation and the price of each menu with the total price of the reception in such situation. Bearing in mind both resulting relations together, the quantity price of each menu is maintained invariable and it constitutes the constant of proportionality.

The solutions in pencil and paper had reflected the students' difficulties when solving this type of problems. Concretely, and proceeding with the example *The baptism*, the system of equations $x = 663$ y $x + 8 = 975$ was seen as a common erroneous response. This approach could respond to an incorrect attempt to reflect the underlying proportionality relation in the problem. In this case, the sign equal could actually be interpreted as an association between related quantities more than as an equating between two symbolic representations of a same quantity. As an example, we include the solutions in pencil and paper from the students 24 y 22 of the problem *The baptism*, in which it is observed how the students consider and symbolize that the total cost of the reception and the number of guests are related in each situation.

[33] (Remedios; Celia-Remedios; *La excursión*; ítem 66-67), (Olga; Alba-Olga; *Dos coches*; ítems 95-97),



El bautizo

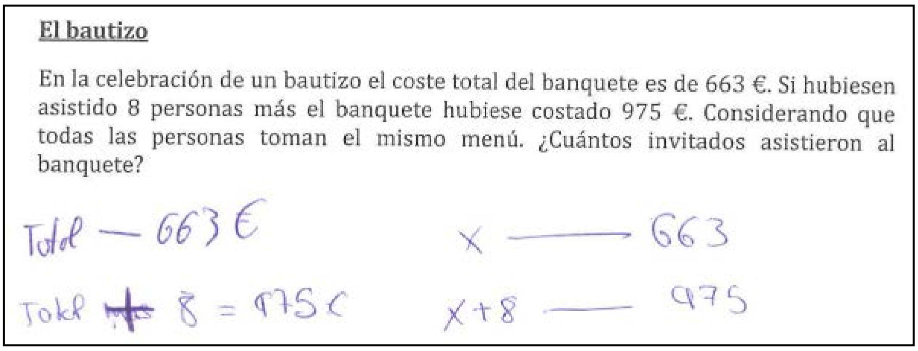
En la celebración de un bautizo el coste total del banquete es de 663 €. Si hubiesen asistido 8 personas más el banquete hubiese costado 975 €. Considerando que todas las personas toman el mismo menú. ¿Cuántos invitados asistieron al banquete?

663 € con x personas

975 € con 8+x personas

$\begin{cases} x = 663 \\ x+8 = 975 \end{cases}$

Figure 7.1. Solution of student 26 in the problem *The Baptism*.



El bautizo

En la celebración de un bautizo el coste total del banquete es de 663 €. Si hubiesen asistido 8 personas más el banquete hubiese costado 975 €. Considerando que todas las personas toman el mismo menú. ¿Cuántos invitados asistieron al banquete?

Total — 663 € x —— 663

Total + 8 = 975 € x + 8 —— 975

Figure 7.2. Solution of student 22 in the problem *The Baptism*.

Student 22 even poses a rule of three (see Fig. 7.2). The development of this rule would have derived in a correct equation. However, the student seem to use such rule of three in order to reflect the association between quantities, what makes her set out the equations system: $x = 663$ and $x + 8 = 975$.

Another acceptable interpretation, complementary to the former, is supported by the analysis of the character of the involved quantities in the multiplicative relation. In *The Baptism*, in order to reflect the multiplicative conceptual structure on the algebraic language correctly, every involved quantity obviously has to be identified. Thus, a possible explanation of the former equations system, $x = 663$ and $x + 8 = 975$, could mean the difficulty to include the quantity *price of the menu* in the analytical reading of the problem. Note that this is a quantity which has not been mentioned in the statement and that its use implicitly derives from the necessity to use a multiplicative structure.

In relation to this difficulty, the case study offered information that can help in the understanding of that one. In particular and if we consider the information of the problem *The Baptism*, this one was proposed in the case study of the pairs Luisa-Octavio, Alba-Olga and Carmen-Piedad. Even one of the formation criteria of the pair Luisa-Octavio was that both students had made the same type of erroneous approaches in this type of problems. Nevertheless, throughout the case study, none of the pairs intended to build an equation or equations by the direct equating of two quantities related multiplicatively. Neither verbalization nor action on the system suggests that this option was evaluated.

When analysing the differences between resolutions in a written test and in the case study, it seems logical to think that a great part of the justification must fall on the solution environment. Moreover, it would be possible to consider the differences that solving in pairs imposes with respect to individual one, but it must me remembered the presence of pairs where both members shared the difficulty when they had to solve the problem; in these cases, it was not appreciated either. Consequently, we interpret these differences in the resolutions from an analysis of the differences between the solving environments. In HBPS, the execution of the steps of CM are imposed to the solver in an orderly way, so that it is not possible to explain step 3 and 4 at the same time, as it usually happens with pencil and paper. In order to finish step 3 in the system, the solver has to compulsorily generate a valid representation for every involved quantity in the reading of the problem. In the three resolutions of the problem *The Baptism*, the students defined the quantity *price of the reception per person* using the algebraic expression $663/x$. In step 4 of CM, the students came back to apply the same conceptual structure in order to build the equation[34]. It is obvious that the fact that HBPS provides a list with the necessary quantities for the solution establishes a notable difference with the pencil and paper environment. On the contrary, in relation to the difficulty concerned, it seems to be outstanding how the fact that a quantity which is not mentioned in the statement becomes visible modifies the performances substantively in step 4 of the method. These observations highlight that the difficulties documented with pencil and paper when solving this type of problems could have their origin in a difficulty in order to invoke the necessary multiplicative structure. The change of strategy of the students when solving the problems in HBPS, in principle, should not happen if the origin was an erroneous conception of what it is an equation in which the students considered that the equations $x = 663$ y $x + 8 = 975$ are a symbolic representation of a proportionality relation. Given the fact that, in HBPS, the students did not show any difficulty in using the conceptual structure correctly, it is acceptable to consider that the difficulties were not in the ignorance of such, but in the inability to incorporate it in the reading of the problem spontaneously. Thus, the visibility of the quantity *price of the reception per person* could be perceived as an indication to the use of the conceptual structure.

In conclusion, the results of our study suggest prudence when considering HBPS as a facilitator in the learning of the CM for the algebraic solving of word problems. On the one hand, the results of the group study shows that the tool has the enough potential in order to favour the learning of the algebraic solving of word problems. Nevertheless, the case study has revealed non-desirable performances that could be originated in the characteristics of the systems or in the way that the instruction by using HBPS is produced. Consequently, still considering the positive expectations derived from the present work, it is necessary to bear in mind the negative cognitive tendencies that could derive from the use of HBPS. Once said this, our results suggest continuing working on the development of HBPS, and then, new versions of HBPS may be able to adapt themselves to the individual characteristics of each student and generate specific instructions according to students’ specificities. At the same time, the designs of the new versions, being supported by the results of this line of researching works, have to expect that the use of the tool does not favour the appearance of non-desirable

[34] The pairs Luisa-Octavio y Carmen-Piedad completed step 4 with no difficulties in a short time. Only the pair Alba-Olga showed difficulties in doing it, although not related to the equating between related quantities but to the attempt to build an equation using a relation already used in the third step.

performance tendencies and facilitate the transition from the algebraic solving in HBPS to the solving with pencil and paper.

8. Referencias bibliográficas

Anderson, J. R. (1983). *The architecture of cognition*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Anderson, J.R., Corbett, A.T., Koedinger, K.R. y Pelletier, R. (1995). Cognitive tutors: Lessons learned. *The Journal of the Learning Sciences, 4*, 167–207.

Arnau, D. (2010). *La enseñanza de la resolución algebraica de problemas en el entorno de la hoja de cálculo*. Servei de Publicacions de la Universitat de València: València.

Arnau, D. y Puig, L. (2013). Actuaciones de alumnos instruidos en la resolución algebraica de problemas en la hoja de cálculo y su relación con la competencia en el método cartesiano. *Enseñanza de las Ciencias, 31*(3), 49-66.

Arnau, D., Arevalillo-Herráez, M. y Puig, L. (2011). Características de un sistema tutorial inteligente para la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 257-266). Ciudad Real, España: Servicio de publicaciones de la Universidad de Castilla-La Mancha y SEIEM.

Arnau, D., Arevalillo-Herráez, M., Puig, L. y González-Calero, J. A. (2013). Fundamentals of the design and the operation of an intelligent tutoring system for the learning of the arithmetical and algebraic way of solving word problems. *Computers & Education, 63*, 119–130. doi:10.1016/j.compedu.2012.11.020

Arroyo, I. (2003). *Quantitative evaluation of gender differences, cognitive development differences and software effectiveness for an elementary mathematics intelligent tutoring system* (Tesis doctoral). School of Education, University of Massachusetts, Amherst.

Arroyo, I., Murray, T., Beck, J. E., Woolf, B. P. y Beal, C. R. (2003). A formative evaluation of AnimalWatch. En *Proceedings of the 11th International Conference on Artificial Intelligence in Education* (pp. 371–373). Amsterdam: IOS.

Atkinson, R. y (2003). *An experimental evaluation of tutorials in problem solving (TiPS): A remedial mathematics tutor*. (Office of Naval Research ONR N00014-02-1-0191).

Baker, R. S., Corbett, A. T., Koedinger, K. R. (2004). Detecting student misuse of intelligent tutoring systems. En J.C. Lester, R.M. Vicari, R.M. y F. Paraguaçu (Eds.), *ITS 2004. LNCS*, vol. 3220 (pp. 531–540). Heidelberg: Springer.

Baker, R. S., Corbett, A. T., Koedinger, K. y Roll, I. (2005). Detecting when students game the system, across tutor subjects and classroom cohorts. En L. Ardissono, P. Brna y A. Mitrovic (Eds.), *Proceedings of the 10th International Conference on User Modeling* (pp. 220–224). Heidelberg, Germany: Springer.

Baker, R. S., Corbett, A. T., Koedinger, K. R. y Wagner, A. Z. (2004). Off-task behavior in the cognitive tutor classroom: When students “game the system”. En E. Dykstra-Erickson y M. Tscheligi (Eds.), *Proceedings of ACM CHI 2004 Conference on Human Factors in Computing Systems* (pp. 383–390). Washington, DC: Association for Computing Machinery.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. doi:10.1177/0022487108324554

Barnett, J. (1979). The study of syntax variables. En G. A. Goldin y C. E. McClintock (Eds.), *Task variables in mathematical problem solving* (pp. 23-68). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Baroudi, Z. (2006). Easing students’ transition to algebra. *Australian Mathematics Teacher, 62*(2), 28–33.

Beal, C. R. (2013). AnimalWatch: An intelligent tutoring system for algebra readiness. En R. Azevedo y V. Aleven (Eds.), *International Handbook of Metacognition and Learning Technologies, Vol. 2* (pp. 337-348). Springer New York.

Beal, C. R. y Arroyo, I. (2002). The AnimalWatch project: Creating an intelligent computer mathematics tutor. En S. Calvert, A. Jordan y R. Cocking (Eds.), *Children in the digital age* (pp. 183-198). Westport, CT: Praeger.

Beal, C. R., Arroyo, I., Cohen, P. y Woolf, B. (2010). Evaluation of AnimalWatch: an intelligent tutoring system for arithmetic and fractions. *Journal of Interactive Online Learning, 9*(1), 64–77.

Beal, C. R., Shaw, E. y Birch, M. (2007). Intelligent tutoring and human tutoring in small groups: An empirical comparison. En R. Luckin, K. R. Koedinger y J. Greer (Eds.), *Artificial intelligence in education: Building technology rich learning contexts that work* (pp. 536–538). Amsterdam: IOS.

Beck, J. E., Arroyo, I., Woolf, B. P. y Beal, C. R. (1999). An ablative evaluation. En *Proceedings of the Ninth International Conference on Artificial Intelligence in Education* (pp. 611–613). Amsterdam: IOS Press.

Bednarz, N. y Janvier, B. (1994). The emergence and development of algebra in a problem solving context: a problem analysis. En J. P. da Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2,* (pp. 64-71).

Bednarz, N. y Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (pp. 115-136). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (pp. 3-12). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Behr, M., Erlwanger, S. y Nichols, E. (1976). *How Children View Equality Sentences* (PMDC Technical Report No. 3). Florida State University, Tallahassee, FL.

Bell, A. (1996). Problem-solving approaches to algebra: Two aspects. En N. Bernardz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives to research and teaching* (pp. 167-187). Dordretch, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bloom, B. S. (1984). The 2 sigma problem: The search for methods of group instruction as effective as one-to-one tutoring. *Educational Researcher, 13*, 4–16.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in Secondary Mathematics Project*. Windsor, United Kingdom: NFER-NELSON.

Cai, J., Ng, S. y Moyer, J. (2011). Developing students' algebraic thinking in earlier grades: Lessons from China and Singapore. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 25-41). Heidelberg: Springer.

Caldwell, J. H. y Goldin, G. A. (1979). Variables affecting word problem difficulty in elementary school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 10*, 323-336.

Caldwell, J. H. y Goldin, G. A. (1987). Variables affecting word problem difficulty in secondary school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*, 187-196.

Carbonell, R. (1970). AI in CAI: An artificial intelligence approach to computer aided instruction. *IEEE Transactions on Man-Machine Systems, 11*, 190-202.

Cerdán, F. (2008). *Estudios sobre la familia de problemas aritmético-algebraicos*. Servei de Publicacions de la Universitat de València: València.

Chang, K. E., Sung, Y. T. y Lin, S. F. (2006). Computer-assisted learning for mathematical problem solving. *Computers & Education, 46*(2), 140–151.

Chi, M. T. H., Siler, S., Jeong, H., Yamauchi, T. y Hausmann, R. G. (2001). Learning from human tutoring. *Cognitive Science, 25*, 471–533.

Clement, J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*, 16–30.

Clement, J., Lochhead, J. y Monk, G. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. *The American Mathematical Monthly, 4*, 286-290. doi: 10.1080/17470211003787619

Clement, J., Lochhead, J. y Soloway, E. (1980). Positive effects of computer programming on students' understanding of variables and equations. En *Proceedings of the ACM 1980 Annual Conference* (pp. 467-474). Nashville, TN: ACM.

Cohen, J. (1992). Statistical power analysis. *Current directions in psychological science, 1*(3), 98-101.

Cohen, E. y Kanim, S. E. (2005). Factors influencing the algebra "reversal error". *American Journal of Physics, 73*(11), 1072–1078.

Collins, A. (2012). What is the most effective way to teach problem solving? A commentary on productive failure as a method of teaching. *Instructional Science, 40*(4), 731-735.

Collis, K. F. (1974). *Cognitive development and mathematics learning*. Trabajo presentado en Psychology of Mathematics Education Workshop, Centre for Science Education, Chelsea College, London.

Collis, K. F: (1975). *The development of formal reasoning*, Newcastle, Australia: University of Newcastle.

Cook, B. (1973). *An analysis of arithmetic linguistic and algebraic structural variables that contribute to problem solving difficulty in algebra word problems*. Trabajo presentado en el Annual Meeting of The American Educational Research Association. New Orleans, LA. (ERIC Document Reproduction Service No ED076433.)

Cooper, M. (1986). The dependence of multiplicative reversal on equation format. *Journal of Mathematical Behaviour, 5*(2), 115–120.

Corbett, A. T. y Anderson, J. R. (1992). Student modeling and mastery learning in a computer-based programming tutor. En *Proceedings of the Second International Conference on Intelligent Tutoring Systems*. Montreal, Canada.

Corbett, A. T., Koedinger, K. R. y Anderson, J. R. (1997). Intelligent tutoring systems. En M. G. Helander, T. K. Landauer y P. V. Prabhu, (Eds.), *Handbook of human-computer interaction* (pp. 849–874). Amsterdam: Elsevier.

Crowley, L., Thomas, M. y Tall, D. (1994). Algebra symbols, and translation of meaning. En J. P. da Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 2*, (pp. 240-247).

Dabbagh, N. (2003). Scaffolding: An important teacher competency in online learning. *TechTrends*, *47*(2), 39-44.

Davis, R. B. (1975). Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations. *Journal of Children's Mathematical Behavior, 1*(3), 7-35.

Davis, R. B. (1984). *Learning mathematics. The cognitive science approach to mathematics education*. London: Croom Helm.

Dede, Y. (2004). The concept of variable and identification its learning difficulties. *Educational Sciences: Theory & Practice, 4*(1), 50-58.

Derry, S. J. (2001). *Development and assessment of tutorials in problem solving (TiPS): A remedial mathematics tutor*. (Final report to the Office of Naval Research N00014–93–1-0310), Wisconsin Center for Education Research, University of Wisconsin, Madison, Wisc.

Fernández, A. (2009). *Razón y proporción. Un estudio en la escuela primaria*. Valencia: Gráficas Marí Montañana.

Filloy, E. (1990). PME algebra research. A working perspective. En G. Booker, P. Coob y T. Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, (pp. PII1-PII33). Oaxtepec, Morelos, Mexico.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de lasCiencias, 26*, 327-342.

Filloy, E. y Rojano, T. (1984). From an arithmetical to an algebraic thought (a clinical study with 12–13 year olds). En J. M. Moser (Ed.), *Proceedings of the 6th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 51–56). Madison, WI: University of Wisconsin.

Filloy, E. y Rojano, T. (1985a). Operating the unknown and models of teaching (a clinical study with 12-13 year olds with a high proficiency in pre-algebra). En *North American Chapter of the International Psychology of Mathematics Education*, 2, (pp. 75-79). Ohio, EE.UU.

Filloy, E. y Rojano, T. (1985b). Obstructions to the acquisition of elementary algebraic concepts and teaching strategies. En *Proceedings of the Ninth Annual Meeting of the PME*, (pp. 154-158). Utrech, Holanda.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach*. New York: Springer.

Filloy, E., Rojano, T. y Rubio, G. (2001). Propositions concerning the resolution of arithmetical-algebraic problems. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 155-175). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Fisher, K. M. (1988). The students-and-professors problem revisited. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(3), 260-262.

Fisher, K. J., Borchert, K. y Bassok, M. (2011). Following the standard form: Effects of equation format on algebraic modeling. *Memory & Cognition, 39*, 502–515. doi: 10.3758/s13421-010-0031-6

Freedman, R. (2000).What is an intelligent tutoring system? *Intelligence, 11*(3), 15-16.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

Fridman, L. M. (1990). Los grafos trinomiales como metalenguaje de los problemas. *Matemáticas. Revista del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, 17-18*, 51-59.

Graesser, A. C., Person, N. y Magliano, J. (1995). Collaborative dialog patterns in naturalistic one-on-one tutoring. *Applied Cognitive Psychology*, 9, 359–387.

Graesser, A. C., VanLehn, K., Rose, C. P., Jordan, P. y Harter, D. (2001). Intelligent tutoring systems with conversational dialogue. *AI Magazine, 22*(4), 39–41.

Goldin, G. A. (1979). Structure variables in problem solving. En G. A. Goldin y C. E. McClintock (Eds.), *Task variables in mathematical problem solving* (pp. 103-169). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

González-Calero, J. A., Arnau, D. y Puig, L. (2011). Consideraciones sobre la enseñanza de la resolución algebraica de problemas verbales en el entorno de la hoja de cálculo en sexto curso de primaria. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 29-38). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

González-Calero, J. A., Arnau, D. y Puig, L. (2013). Dificultades en la construcción de nombres de cantidades durante la resolución algebraica de problemas verbales por estudiantes de primaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 301-310). Bilbao: SEIEM.

González-Calero, J.A., Arnau, D., Puig, L. y Arevalillo-Herráez, M. (2013). Difficulties in the construction of equations when solving word problems using an intelligent tutoring system. En A.M. Lindmeier y A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol 2. pp. 353-360). Kiel, Germany: PME.

Guerrero, L., Rojano, T., Geraniou, E., Mavrikis, M., Hoyles, C. y Noss, R. (2011). Critical moments in generalization tasks. Building algebraic rules in a digital sign system. Trabajo presentado en *the annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Reno, Nevada, USA.

Gutierrez-Santos, S., Geraniou, E., Pearce-Lazard, D. y Poulovassilis, A. (2012). The design of teacher assistance tools in an exploratory learning environment for algebraic generalisation. *IEEE Transactions in Learning Technologies, 5*(4), 366-376. doi:10.1109/TLT.2012.19

Heffernan, N. T. (2001). *Intelligent tutoring systems have forgotten the tutor: Adding a cognitive model of an experienced human tutor* (Tesis doctoral). Carnegie Mellon University, Computer Science Department.

Heffernan, N. T. (2003) Web-Based evaluations showing both cognitive and motivational benefits of the Ms. Lindquist Tutor. En *11th International Conference Artificial Intelligence in Education* (pp. 115-122). Sydney, Australia: IOS Press.

Heffernan, N. T., Crouteau, E. (2004). Web-based evaluations showing differential learning for tutorial strategies employed by the Ms. Lindquist Tutor. En J. C. Lester, R. M. Vicari, y F. Paraguaçu (Eds), *Proceedings of 7th Annual Intelligent Tutoring Systems Conference* (pp. 491-500). Maceio, Brazil, 2004: Springer.

Heffernan, N. T. y Koedinger, K. R. (2000). Intelligent tutoring systems are missing the tutor: building a more strategic dialog-based tutor. En C. P. Rose y R. Freedman (Eds.), *Building dialogue systems for tutorial applications, papers of the 2000 AAAI fall symposium* (pp. 14–19). Menlo Park, CA: AAAI Press.

Heffernan, N. T. y Koedinger, K. R. (2002). An intelligent tutoring system incorporating a model of an experienced human tutor. En S. Cerri, G. Gouardères and F. Paraguaçu (Eds.), *Sixth International Conference on Intelligent Tutoring System* (pp. 596–608). Biarritz, France: Springer Lecture Notes in Computer Science.

Herscovics, N. y Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*, 59-78.

Hershkovitz, S., Nesher P. y Novotná, J. (2000). Given a problem, what is the x? En A. Gagatsis and G. Makrides (Eds.). *Proceedings of the 2nd Mediterranean Conference on Mathematics Education* (pp. 36-46). Nicosia: Cyprus Mathematical Society.

Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L. y Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 258–288.

Jerman, M. y Rees, R. (1972). Predicting the relative difficulty of verbal arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics, 4*, 306-323.

Kalmikova, Z.I. (1975). Processes of analysis and synthesis in the solution of arithmetic problems. En J. Kilpatrick, I. Wirszup, E.G. Begle y J. Wilson (Eds.), *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics. Vol. XI. Analysis and systhesis as problem solving methods* (pp. 1-171). Standford, CA: NCTM.

Kaput, J. y Schorr, R. (2008). Changing representational infrastructures changes most everything: the case of SimCalc, algebra, and calculus. En K. Heid y G. W. Blume (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics. Cases and perspectives, Vol. 2* (pp. 211–253). Charlotte, NC: Information Age Publisher.

Kho, T. H. (1987). Mathematical models for solving arithmetic problems. En *Proceedings of Fourth Southeast Asian Conference on Mathematical Education (ICMI-SEAMS). Mathematical Education in the 1990's* (pp. 345–351). Singapore: Institute of Education.

Kieran, C. (1980). The interpretation of equal sign: Symbol for equivalence vs an operator symbol. En Karplus (Ed.), *Proceedings of PME, 4* (pp. 163-169). California.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 317-326.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 390-419). New York: MacMillan Publishing Company.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 11-49). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias, 7*, 230-240.

Kilpatrick, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. En L. L. Hatfield y D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problem solving: papers from a research workshop* (pp. 7-20). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Kilpatrick, J. (1985): A retrospective account of the past 25 Years on teaching mathematical problem solving. En E. A. Silver (Ed.): *Teaching and learning* *mathematical problem solving: multiple research perspectives* (pp. 1-15). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Kirshner, D., Awtry, Y., McDonald, J. y Gray, E. (1991). *The cognitivist caricature of mathematical thinking: The case of the students and professors problem*. Trabajo presentado en the Thirteenth Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Blacksburg, Va.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A. y Stephens, A. C. (2011). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & variable. En J. Cai, y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialouge from multiple perspectives* (pp. 259–276). Berlin/Heidelberg/New York, NY: Springer-Varlag.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M. y Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education 37*(4), 297-312.

Koedinger, K. R. (2001). Cognitive tutors as modeling tool and instructional model. En K. D. Forbus y P. J. Feltovich (Eds.), *Smart machines in education: the coming revolution in educational technology* (pp. 145-168). Menlo Park, CA: AAAI/MIT Press.

Koedinger, K. R. y Aleven, V. (2007). Exploring the assistance dilemma in experiments with cognitive tutors. *Educational Psychology Review, 19*(3), 239–264.

Koedinger, K. R. y Anderson, J. R. (1998). Illustrating principled design: The early evolution of a cognitive tutor for algebra symbolization. *Interactive Learning Environments, 5*(1), 161–179.

Koedinger, K. R., Anderson, J. R., Hadley, W. H. y Mark, M. A. (1997). Intelligent tutoring goes to school in the big city. *International Journal of Artificial Intelligence in Education, 8*, 30-43.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School, 7*(4), 23-26.

Küchemann, D. (1981). Algebra. En K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 102-119). London: John Murray.

Kulik, J. A. (1994). Meta-analytic studies of findings on computer-based instruction: An updated analysis. En E. L. Baker y H. F. O'Neil (Eds.), *Technology assessment in education and training* (pp. 9–33). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kulik, C. y Kulik, J. (1991). Effectiveness of computer-based instruction: An updated analysis. *Computers in Human Behavior, 7*, 75–91.

Landy, D. y Goldstone, R. L. (2007). How abstract is symbolic thought? *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 33*(4), 720-733. doi: 10.1037/0278-7393.33.4.720

Lewis, A. B. y Mayer, R. E. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 79*(4), 363-371.

Lopez-Real, F. (1995). How important is the reversal error in algebra? En B. Atweh and S. Flavel (Eds.), *Proceedings of the 18th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, (pp. 390-396).

MacGregor, M. y Stacey, K. (1993). Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24* (3), 217-232.

MacGregor, M. y Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational studies in mathematics*, *33*(1), 1-19.

McArthur, D. y Lewis, M. (1998). *Untangling the Web: Applications of the internet and other information technologies to Higher Education*. Santa Monica, CA: RAND Corporation.

Malisani, E. y Spagnolo, F. (2009). From arithmetical thought to algebraic thought: The role of the "variable". *Educational Studies in Mathematics*, *71*(1), 19-41.

Marshall, S. P. (1995). *Schemas in problem solving*. Cambridge: Cambridge University Press.

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Mathematical Behaviour*, *3*(1), 93–166.

Mayer, R.E. (1982). Memory for algebra story problems. *Journal of Educational Psychology*, *74*(2), 199-216.

Merrill, D. C., Reiser, B. J., Ranney, M. y Trafton, J. G. (1992). Effective tutoring techniques: A comparison of human tutors and intelligent tutoring systems. *The Journal of the Learning Sciences*, *2*, 277–306.

Nathan, M. J. (1990). Empowering the student: prospects for an unintelligent tutoring system. En *Proceedings of the SIGCHI Conference on Human Factors in Computing Systems* (pp. 407-414). New York: ACM.

Nathan, M. J., Kintsch, W. y Lewis, C. (1988). *Tutoring Algebra Word Problems* (Technical Report 88-12). Institute of Cogninive Science, University of Colorado, Boulder.

Nathan, M. J., Kintsch, W. y Young, E. (1990). *A theory of algebra word problem comprehension and its implications for unintelligent tutoring systems*. (Technical Report 90-02). Institute of Cognitive Science, University of Colorado, Boulder.

Nkambou, R., Mizoguchi, R. y Bourdeau, J. (2010). *Advances in intelligent tutoring systems*. Heidelberg: Springer.

Nesher, P. (1976). Three determinants of difficulty in verbal arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics*, *7*(4), 369-388.

Nesher, P., Hershkovitz, S. y Novotna, J. (2003). Situation model, text base and what else? Factors affecting problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(2), 151-176.

Ng, S. F. y Lee, K. (2009). The model method: Singapore children's tool for representing and solving algebraic word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 282-313.

Nicaud, J. F., Bouhineau, D. y Chaachoua, H. (2004). Mixing microworld and CAS features in building computer systems that help students learn algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*, 169–211.

Noss, R., Poulovassilis, A., Geraniou, E., Gutierrez-Santos, S., Hoyles, C., Kahn, K., et al. (2012). The design of a system to support exploratory learning of algebraic generalisation. *Computers & Education, 59*(1), 63–81.

Nwana, H. S. (1990). Intelligent tutoring systems: an overview. *Artificial Intelligence Review, 4*(4), 251-277.

Paige, J. y Simon, H. (1966). Cognitive processes in solving algebra word problems. En B. Kleinmuntz (Ed.), *Problem solving research, method, and theory*. New York: Wiley.

Polya, G (1945). *How to Solve It*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Polya, G (1962). *Mathematical Discovery*, vol 1. New York: Wiley.

Polya, G. (1965). *Mathematical Discovery, vol 2*. New York: Wiley.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.

Puig, L. (1997). Clasificar y significar. En L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Actas del Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 113-127.

Puig, L. (1998). *Poner un problema en ecuaciones*. Manuscrito no publicado.

Puig, L. (2003a). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. En E. Filloy (Ed.) *Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual* (pp. 174-186). Fondo de Cultura Económica / CINVESTAV: México, DF.

Puig, L. (2003b). *Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa* (versión oral). Conferencia invitada al Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Granada: Universidad de Granada, 10-13 de septiembre 2003.

Puig, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Actas del X Simposio de la SEIEM*, 107-126.

Puig, L. (2008). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. *PNA, 2*(3), 87-107.

Puig, L. (2010a). Researching (algebraic) problem solving from the perspective of Local Theoretical Models. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 8*, 3-16.

Puig, L. (2010b). Historias de al-Khwārizmī (4ª entrega). El proyecto algebraico. *Suma, 65*, 87-94.

Puig, L. (2012). Observaciones acerca del propósito del álgebra educativa. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (Anexo, pp. 1 - 20). Jaén: SEIEM.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Puig, L. y Cerdán, F. (1990). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. En E. Filloy y T. Rojano (Eds.), *Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* (pp. 35-48). Cuernavaca, México: PNFAPM.

Puig, L. y Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189-224). Norwood, MA: Kluwer Academic Publishers.

Quintana, C., Reiser, B. J., Davis, E. A., Krajcik, J., Fretz, E., Duncan, R. G., et al. (2004). A scaffolding design framework for software to support science inquiry. *Journal of the Learning Sciences, 13*(3), 337–386. doi: 10.1207/s15327809jls1303_4

Reusser, K. (1993). Tutoring systems and pedagogical theory: representational tools for understanding, planning, and reflection in problem solving. En S. P. Lajoie y S. J. Derry (Eds.), *Computers as cognitive tools* (pp. 143–177). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Reusser, K., Kampfer, A., Sprenger, M., Staub, F., Stehler, R. y Stussi, R. (1990) *Tutoring mathematical word problems using solution trees* (Research Report No 8), Abteilung Pädagogische Psychologie, Universität Bern, Switzerland.

Rojano, T. (1996). Developing algebraic aspects of problem solving within a spreadsheet environment. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (pp. 137-145). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Rojano, T. y Sutherland, R. (1993). Towards an algebraic approach: the role of spreadsheets. En I. Hirabayashi, N. Nobuhiko, S. Keiichi y L. Fou-Lai (Eds.), *Proceedings of the 17th Psychology of Mathematics Education Conference, 1*, (pp. 189-196).

Rojano, T. y Sutherland, R. (1997). Pupils' strategies and the cartesian method for solving problems: the role of spreadsheets. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Psychology of Mathematics Education Conference, 4*, (pp. 72-79).

Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. *Mathematics Teacher, 74*, 418-420.

Rubio, G. (1994). *Modelos didácticos para resolver problemas verbales aritmético algebraicos. Tesis teóricas y observación empírica* (Tesis doctoral). Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV: México.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL; Academic Press.

Stacey, K. y MacGregor, M. (2000). Learning the algebraic method of solving problems. *Journal of Mathematical Behavior, 18*, 149-167.

Self, J. A. (1974). Student models in computer-aided instruction, *International Journal of Man-Machine Studies, 6*, 261-276.

Self, J. A. (1999). The defining characteristics of intelligent tutoring systems research: ITSs care, precisely. *International Journal of Artificial Intelligence in Education, 10*, 350-364.

Shute, V. J. y Psotka, J. (1996). Intelligent tutoring systems: past, present and future. En D. Jonassen (Ed.), *Handbook of research on educational communications and technology* (pp. 570–600). New York: Macmillan.

Shute, V. J., Woltz, D. J. y Regian, J. W. (1989). An investigation of learner differences in an ITS environment: There's no such thing as a free lunch. En D. Bierman, J. Breuker y J. Sandberg (Eds.), *Artificial intelligence and education* (pp. 260-266). Amsterdam: IOS.

Suppes, P. (1967). Some theoretical models for mathematics learning. *Journal of Research and Development in Education*, 1, 5-22.

Sutherland, R. y Rojano, T. (1993). A spreadsheet approach to solving algebra problems. *Journal of Mathematical Behavior, 12*, 353-383.

Thompson, P. W. (1989). Artificial intelligence, advanced technology, and learning and teaching algebra. En S. Wagner, & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 135–161). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates and National Council of Teachers of Mathematics.

Urban-Lurain, M. (1996). *Intelligent tutoring systems: An historic review in the context of the development of artificial intelligence and educational psychology*. Recuperado de http://web.cps.msu.edu/~urban/ITS.htm

Van Amerom, B. A. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *54*, 63-75.

Van Dooren, W., Verschaffel, L. y Onghena, P. (2002). The impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 319–351. doi:10.2307/4149957

VanLehn, K. (2011). The relative effectiveness of human tutoring, intelligent tutoring systems, and other tutoring systems. *Educational Psychologist, 46*(4), 197-221.

Van Merriënboer, J. J. G. y Sweller, J. (2005). Cognitive load theory and complex learning: Recent developments and future directions. *Educational Psychology Review*, *17*(2), 147–177. doi:10.1007/s10648-005-3951-0

Verschaffel, L., Greer, B. y De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands: Sweits & Zeitlinger.

Waalkens, M., Aleven, V. y Taatgen, N. (2013). Does supporting multiple student strategies lead to greater learning and motivation? Investigating a source of complexity in the architecture of intelligent tutoring systems. *Computers & Education, 60*(1), 159-171.

Wagner, S. y Kieran, C. (1989). An agenda for research on the learning and teaching of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 220-237). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates and National Council of Teachers of Mathematics.

Walonoski, J. A. y Heffernan, N. T. (2006). Detection and analysis of off-task gaming behavior in intelligent tutoring systems. En M. Ikeda, K. Ashley y T. Chan (Eds.), *Proceedings of the 8th International Conference on Intelligent Tutoring Systems* (pp. 382–391). Heidelberg, Germany: Springer.

Welder, R. M. (2007). *Preservice elementary teachers' mathematical content knowledge of prerequisite algebra concepts* (Tesis doctoral). Montana State University.

Wollman, W. (1983). Determining the sources of error in a translation from sentence to equation. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14* (3), 169-181.

Woolf, B. P. (2009). *Building intelligent interactive tutors*. Burlington, MA: Morgan Kaufman.

Yazdani, M. (1986) Intelligent tutoring systems survey. *Artificial Intelligence Review*, 1, 43-52.