UNIVERSITAT DE VALENCIA
FACULTAT DE MATEMATIQUES

# ALGUNOS PROBLEMAS SOBRE HOLOMORFIA EN DIMENSION INFINITA

Tesis doctoral presentada por
M. Pilar Rueda Segado
Dirigida por los Dres.
D. Pablo Galindo
D. Domingo García
D. Manuel Maestre

UNIVERSIDAD DE VALENCIA FACULTAD DE [illegible]

Reunido el Tribunal que suscribe, en el día de la fecha, acordó otorgar, por unanimidad, a esta Tesis doctoral de Dña M. Pilar Rueda Segado la calificación de Apto cum Laude

Valencia, a 21 de Marzo de 1997

El Secretario,

El Presidente

Manuel [illegible]

PABLO GALINDO, DOMINGO GARCIA y MANUEL MAESTRE, Profesores del Departament d'Anàlisi Matemàtica de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de València,

CERTIFICAN: Que la presente memoria "ALGUNOS PROBLEMAS SOBRE HOLOMORFIA EN DIMENSION INFINITA" ha sido realizada bajo nuestra dirección en el Departament d'Anàlisi Matemàtica de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de València por M. PILAR RUEDA SEGADO y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente, presentamos ante la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de València la referida Tesis doctoral, firmando el presente certificado.

En Burjassot, a 15 de diciembre de 1996

Fdo. Pablo Galindo    Fdo. Domingo García    Fdo. Manuel Maestre

Matematicas

*Quiero agradecer a los Profesores Pablo Galindo, Domingo García y Manuel Maestre toda la ayuda y explicaciones que me han ofrecido, sin las cuales no hubiese podido hacer este trabajo. También les quiero agradecer de forma muy especial el interés, paciencia y apoyo que me han mostrado en todo momento.*

*Asimismo, agradezco a los profesores Richard Aron, Klaus Bierstedt, José Bonet, Juan Carlos Díaz y Sean Dineen todas las sugerencias y explicaciones que tan cordialmente me han prestado.*

*También quiero agradecer a mi familia, especialmente a Jesús y a mi madre los ánimos que me han dado a lo largo de estos años.*

*Por último, doy las gracias a todos mis compañeros del Departamento de Análisis Matemático (que es tanto como decir todo el Departamento) por transformar el día a día en unos momentos realmente agradables.*

# Indice

*Introducción* 1

*Cap.1. Sobre el teorema de Banach-Dieudonné* 9
*1.1 Funciones holomorfas de tipo acotado en un espacio de Banach* 11
*1.2 Funciones holomorfas de tipo acotado en un espacio de Fréchet* 17
*1.3 La topología* $\tau_{bcl}$ 27

*Cap.2. Espacios ponderados de funciones holomorfas* 37
*2.1 El espacio* $\mathcal{H}v(U)$ 38
*2.2 El espacio* $\mathcal{H}V(X)$ 50
*2.2.1 Reflexividad en* $\mathcal{H}V(X)$ 53
*2.2.2 El espacio* $\mathcal{H}V(X)$ *y su predual como LB* 70

*Cap.3. Bidualidad en espacios de funciones holomorfas* 85

*Cap.4. Sobre los polinomios de tipo finito débil-estrella continuos, y aplicaciones a la sobreyectividad de ciertos operadores de convolución* 117

*Bibliografía* 137

# Introducción

En esta memoria se presentan varios resultados dentro del contexto de la Holomorfía en dimensión infinita. Estos resultados se han dividido en cuatro capítulos si bien existe una fuerte interacción entre ellos.

El objetivo del primer capítulo es tratar de elaborar teoremas de tipo Banach-Dieudonné para espacios de aplicaciones holomorfas; es decir, estudiar cuál es la topología más fina, o la localmente convexa más fina, en el espacio de funciones holomorfas de tipo acotado $\mathcal{H}_b(E)$, donde $E$ será bien un espacio de Banach, bien un espacio de Fréchet, que coincide con la topología compacto-abierta $\tau_0$ sobre los conjuntos acotados del espacio $\mathcal{H}_b(E)$.

Antes de nada, y para centrar el tema, recordemos el teorema de Banach-Dieudonné (ver [45]): *Sea $E$ un espacio de Banach, la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos compactos de $E$ es la topología más fina en el dual topológico $E'$ de $E$ que coincide con la topología débil estrella $\sigma(E', E)$ en los subconjuntos equicontinuos de $E'$.*

Este teorema clásico de Banach-Dieudonné fue extendido por Mujica (Teorema 2.1 de [33]) a espacios de polinomios homogéneos y continuos definidos en un espacio de Banach de la siguiente forma: *Sea $X$ un espacio de Banach y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{P}(^nX)$ denota el espacio de todos los polinomios $n$-homogéneos y continuos sobre $X$, entonces la topología compacto-abierta, $\tau_0$, es la topología más fina en $\mathcal{P}(^nX)$ que coincide con $\tau_0$ sobre cada subconjunto acotado en norma de $\mathcal{P}(^nX)$.*

Por otra parte, si $U$ es un subconjunto abierto de un espacio de

Banach $X$, Mujica (Teorema 2.1 de [36]) también estudió la topología (localmente convexa) más fina que coincide con $\tau_0$ sobre cada subconjunto acotado del espacio de funciones holomorfas y acotadas sobre $U$, $\mathcal{H}^\infty(U)$. Se sigue de su estudio (mirar la Nota 1.2.2 de la presente memoria) que esta topología es estrictamente más fina que $\tau_0$ al menos cuando $U$ es la bola unidad abierta de $X$. Por tanto, en general no se verifica un teorema de tipo Banach-Dieudonné para el espacio $\mathcal{H}^\infty(U)$.

Motivado por estos resultados, el problema que se plantea es si se verifica este tipo de teorema para el espacio de funciones holomorfas de tipo acotado $\mathcal{H}_b(E)$. Nuestro principal resultado establece que, en el caso de ser $E$ un espacio de Banach, sólo es cierto si el espacio $E$ es de dimensión finita. También hacemos un estudio en el caso de ser $E$ un espacio de Fréchet.

El segundo capítulo está dedicado al estudio de espacios ponderados de funciones holomorfas $\mathcal{H}V(X)$ en un espacio de Banach $X$ de dimensión infinita y para una familia de pesos $V$.

Los espacios ponderados de aplicaciones continuas, y en particular de aplicaciones holomorfas, aparecen de forma natural en numerosos e importantes campos del análisis funcional como por ejemplo en Teoría de Distribuciones, en análisis de Fourier o en ecuaciones en derivadas parciales entre otros. Debido a ello, son numerosos los autores que han estudiado dichos espacios centrándose, en el caso de espacios ponderados de funciones holomorfas, en espacios de Banach de dimensión finita.

Parte del interés de los espacios ponderados también reside en que para un peso adecuado $v$ el espacio $\mathcal{H}v(U)$, donde $U$ es un subconjunto abierto de un espacio de Banach $X$, se puede considerar una generalización del espacio $\mathcal{H}^\infty(U)$ de funciones holomorfas y acotadas sobre $U$. En este sentido, demostraremos generalizaciones de algunos teoremas probados por Mujica en [36] (ver la sección 2.1).

También damos una representación del espacio $\mathcal{H}_b(X)$ como espacio ponderado para una familia de pesos adecuada (Ejemplo 2.2.21 A). Ello nos motiva a caracterizar cuándo el espacio $\mathcal{H}V(X)$ es reflexivo. Rubel y Shields [42] probaron que $\mathcal{H}v(G)$ es isométricamente isomorfo al bidual $\mathcal{H}v_0(G)^{**}$ de $\mathcal{H}v_0(G)$ cuando $G$ es el disco unidad abierto de $\mathbb{C}$ y $v$ es un peso radial sobre $G$ que se anula en la frontera de $G$. Este resultado generalizaba el probado por Williams [49] para $G = \mathbb{C}$ y $v$ un peso radial rápidamente decreciente en el infinito. Bierstedt y Summers [9] obtuvieron, para un abierto $G$ en $\mathbb{C}^N$ y un peso continuo y positivo $v$ en $G$, que los espacios $\mathcal{H}v(G)$ y $\mathcal{H}v_0(G)^{**}$ son isométricamente isomorfos si y sólo si la bola unidad cerrada de $\mathcal{H}v_0(G)$ es densa en la bola unidad cerrada de $\mathcal{H}v(G)$ con respecto a la topología compacto-abierta. Esta condición se verifica en particular en el contexto dado por Rubel y Shields. A su vez, Bierstedt y Bonet [6] mejoraron esta caracterización para el espacio $\mathcal{H}W(G)$ donde $W$ es una sucesión creciente de funciones continuas y estrictamente positivas. En este contexto probaron que el bidual del espacio $\mathcal{H}W_0(G)$ es isomorfo a $\mathcal{H}W(G)$ si y sólo si para cada subconjunto acotado $B$ de $\mathcal{H}W(G)$ existe un subconjunto $C$ acotado y absolutamente convexo en $\mathcal{H}W_0(G)$ tal que $B$ está contenido en la clausura de $C$ en $\mathcal{H}W_0(G)$ con respecto a la topología compacto-abierta (ver Proposición 10 de [6]). Este resultado les permite concluir que para una sucesión de pesos radiales $W$ sobre $\mathbb{C}$ la igualdad $\mathcal{H}W_0(\mathbb{C}) = \mathcal{H}W(\mathbb{C})$ implica que $\mathcal{H}W(\mathbb{C})$ es reflexivo.

Sin embargo, las técnicas utilizadas tanto por Bierstedt-Bonet como por Bierstedt-Summers no son directamente aplicables en dimensión infinita. Debido a ello adoptamos una nueva técnica basada en un teorema clásico de Kalton (Teorema 3.2 de [30]) el cual afirma que un espacio de Fréchet $E$ con una descomposición de Schauder $(E_n)$ $\gamma$-

completa y contractiva es reflexivo si y sólo si cada espacio de Fréchet $E_n$ es reflexivo. Prieto [40] usa este resultado para caracterizar la reflexividad del espacio de funciones holomorfas de tipo acotado definidas en un espacio de Banach, así como del espacio de funciones holomorfas de tipo acotado que son uniformemente débil-continuas sobre los conjuntos acotados. Estos resultados permiten plantear la siguiente pregunta: ¿Es posible caracterizar la reflexividad de algún espacio ponderado de funciones holomorfas? Más concretamente, ¿es posible encontrar una familia de pesos $V$ adecuada, definida en un espacio de Banach $X$ de modo que el espacio ponderado de funciones holomorfas $\mathcal{H}V(X)$ admita una descomposición de Schauder? En este capítulo se da respuesta afirmativa a ambas preguntas.

En conexión a estos problemas está también el del estudio del predual de espacios de funciones holomorfas. Así por ejemplo Bierstedt y Bonet [6] utilizan la existencia de predual $F$ de un espacio localmente convexo bornológico $E$ con la propiedad $(BBC)$ para caracterizar cuándo la aplicación restricción $R : F \longrightarrow H'_b$, donde $H$ es un subespacio topológico de $E$, es un isomorfismo topológico en la imagen, esto es, $E$ es canónicamente el bidual de $H$. Por otra parte en [22] se prueba que el predual de $\mathcal{H}_b(U)$, donde $U$ es un abierto equilibrado de un espacio de Banach $X$, tiene estructura de $(LB)$-espacio. Mujica en [37] probó que dicha estructura venía determinada por los preduales $G^\infty(U_n)$ de cada espacio de Banach $\mathcal{H}^\infty(U_n)$, donde $(U_n)$ es una sucesión adecuada de abiertos de $U$. En el último apartado del segundo capítulo damos condiciones de tipo general sobre la familia de pesos para que el espacio ponderado de funciones holomorfas $\mathcal{H}V(X)$ tenga un predual con una estructura de este tipo.

En el tercer capítulo presentamos caracterizaciones de tipo general sobre el bidual de ciertos subespacios cerrados del espacio $\mathcal{H}_b(U)$ de funciones holomorfas de tipo acotado definidas sobre un abierto $U$ de un espacio de Banach $X$, donde $U$ será bien un abierto absolutamente convexo y acotado de $X$, bien el propio espacio $X$.

Un problema clásico de la Holomorfía en dimensión infinita es el estudio del bidual tanto del espacio de polinomios homogéneos definidos en un espacios de Banach $X$ como el del bidual del propio espacio de funciones holomorfas definidas en un abierto de $X$.

En [40] aparece una caracterización de cuándo el espacio $\mathcal{H}_b(X)$ de funciones enteras de tipo acotado definidas en un espacio de Banach $X$, es el bidual del espacio $\mathcal{H}_{wu}(X)$ de funciones enteras que son débil uniformemente continuas sobre los acotados de $X$. A este respecto Prieto (Teorema 12 de [40]) establece que $\mathcal{H}_b(X)$ es isomorfo al bidual del espacio $\mathcal{H}_{wu}(X)$ si y sólo si el espacio $\mathcal{P}(^mX)$ de polinomios $m$-homogéneos y continuos sobre $X$ es isomorfo al bidual del espacio $\mathcal{P}_{wu}(^mX) = \mathcal{P}(^mX) \cap \mathcal{H}_{wu}(X)$. En la prueba se tiene la siguiente situación: $\mathcal{P}(^mX) = \mathcal{P}_{wu}(^mX)^{**}$ para todo $m \geq 0$ y al ser dichas familias descomposiciones de Schauder respectivas de los espacios $\mathcal{H}_b(X)$ y $\mathcal{H}_{wu}(X)^{**}$, aparentemente ambos espacios coinciden algebraica y, por tanto, topológicamente. Sin embargo, tanto el espacio $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ como $\mathcal{H}(D)$, donde $D$ es el disco unidad abierto de $\mathbb{C}$, tienen por descomposición de Schauder a $(\mathcal{P}(^m\mathbb{C}))_m$ y sin embargo dichos espacios no son isomorfos (ver Nota 3.9). Este ejemplo muestra que si queremos tener un isomorfismo topológico entre dos espacios de Fréchet con descomposiciones de Schauder, tenemos que suponer una condición más fuerte que un simple isomorfismo entre los espacios que forman las descomposiciones. Este problema también aparece en la Proposición 16 de [5]. Para aclarar esta situación introducimos una nueva clase de descomposiciones de Schauder: las descomposiciones $R$-Schauder. De acuerdo con esto, el resultado principal es el Teorema 3.12.

Valdivia prueba en [47] que el bidual de $\mathcal{P}_{w^*}(^mX^*)$ es isométricamente isomorfo a su $\tau_0$-clausura en $\mathcal{P}(^mX^*)$ bajo la hipótesis de que el espacio $\mathcal{P}_{w^*}(^mX^*)$ no contiene ninguna copia de $l^1$, mientras que en [48] prueba el resultado análogo para $\mathcal{H}_{w^*}(X^*)$. En particular obtiene que si $X$ es un espacio de Banach tal que $X^*$ posee la propiedad de aproximación y $\mathcal{H}_{w^*}(X^*)$ no contiene ninguna copia de $l^1$, entonces el bidual de $\mathcal{H}_{w^*}(X^*)$ se identifica canónicamente con $\mathcal{H}_b(X^*)$. Mediante el uso de las descomposiciones $R$-Schauder, el Corolario 3.19 mejora este resultado y lo extiende para funciones holomorfas en la bola unidad.

Con relación al cuarto capítulo destacamos como resultado principal que todo polinomio $m$-homogéneo continuo de tipo finito $P$ definido en el dual $X^*$ de un espacio de Banach $X$ y que es débil-estrella continuo sobre los conjuntos acotados, puede ser escrito de la forma $P = \sum_{j=1}^{q} x_{1j}...x_{mj}$ donde $x_{ij} \in X$, para todo $i, j$. Como consecuencia inmediata se cumple que todo polinomio en las condiciones anteriores es débil-estrella continuo. El resto del capítulo está dedicado, como aplicación, al estudio de la suprayectividad de los operadores de convolución sobre los espacios $\mathcal{H}_{wu}(X)$ y $\mathcal{H}_{w^*}(X^*)$. En general, la suprayectividad de operadores de convolución ha sido estudiada en profundidad por varios autores en análisis funcional. Por ejemplo, Gupta [26] obtuvo que todo operador de convolución sobre el espacio de funciones nuclearmente enteras de tipo acotado es suprayectivo. Nosotros hemos obtenido que si $X$ tiene la propiedad de aproximación, entonces todo operador de convolución $\theta \neq 0$ sobre $\mathcal{H}_{w^*}(X^*)$ es suprayectivo, es decir, verifica $\theta(\mathcal{H}_{w^*}(X^*)) = \mathcal{H}_{w^*}(X^*)$. También probamos el resultado análogo para operadores de convolución sobre el espacio $\mathcal{H}_{wu}(X)$ suponiendo que $X^*$ tiene la propiedad de aproximación.

Antes de dar paso a los capítulos recordemos brevemente la definición de función holomorfa de tipo acotado que tanto peso tiene a lo largo de la memoria.

Si $E$ y $F$ son dos espacio de Fréchet, $\mathcal{H}_b(E;F)$ denota el espacio de todas las aplicaciones holomorfas sobre $E$ y con valores en $F$ que están acotadas sobre los acotados de $E$. Si $F = \mathbb{C}$ escribiremos simplemente $\mathcal{H}_b(E)$. A los elementos de $\mathcal{H}_b(E;F)$ se les llama aplicaciones holomorfas de tipo acotado.

Consideramos la siguiente familia de seminormas:

$$\| f \|_A := \sup_{x\in A} \beta(f(x))$$

al variar $A$ en los acotados de $E$ y $\beta$ en las seminormas continuas de $F$. Esta familia de seminormas define en $\mathcal{H}_b(E;F)$ la topología de la convergencia uniforme sobre los acotados de $E$, que denotamos $\tau_b$.

Si $E$ es un espacio de Fréchet, entonces $(\mathcal{H}_b(E), \tau_b)$ es un espacio de Fréchet.

Recordemos que la serie de Taylor centrada en el origen $\sum_{m=0}^{\infty} P_m$ de $f \in \mathcal{H}_b(E;F)$ converge absoluta y uniformemente sobre los conjuntos acotados de $E$.

Supongamos ahora que $(E,d)$ es un espacio de Fréchet y $U$ es un abierto no vacío de $E$. Si $U \neq E$ y $x \in U$, entonces $d_U(x)$ denota la distancia de $x$ a $E \setminus U$, i.e.

$$d_U(x) = \inf\{d(x,y) : y \in E \setminus U\}$$

Además,

$$| d_U(x) - d_U(y) | \leq d(x,y) \quad \forall x,y \in U$$

Si $U = E$, definimos $d_U(x) = \infty$ para todo $x \in U$.

Un conjunto $A \subset U$ se dice que es $U$- acotado si $A$ es acotado y $\inf_{x\in A} d_U(x) > 0$.

Si $F$ es un espacio de Fréchet decimos que una aplicación holomorfa $f$ definida en $U$ y con valores en $F$ es de tipo acotado si está acotada en cada subconjunto $U$-acotado de $E$. $\mathcal{H}_b(U;F)$ denota el espacio de las aplicaciones holomorfas de tipo acotado definidas sobre $U$ y con valores en $F$, dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre todos los conjuntos $U$-acotados, que denotaremos igualmente $\tau_b$. Si $F = \mathbb{C}$, escribimos $\mathcal{H}_b(U)$ en lugar de $\mathcal{H}_b(U;\mathbb{C})$.

# Capítulo 1

# Sobre el teorema de Banach-Dieudonné.

En este capítulo se estudia bajo qué condiciones se da un teorema de tipo Banach-Dieudonné para el espacio de funciones holomorfas de tipo acotado $\mathcal{H}_b(U)$, donde $U$ es un abierto equilibrado bien un espacio de Banach, bien un espacio de Fréchet.

Mujica fue pionero en el estudio de este tipo de teorema para espacios de funciones holomorfas. Así, por ejemplo, probó en [33] que en el espacio de polinomios $n$-homogéneos y continuos $\mathcal{P}(^nX)$ sobre un espacio de Banach $X$, la topología compacto-abierta $\tau_0$ es la más fina que coincide con $\tau_0$ sobre cada conjunto acotado en norma de $\mathcal{P}(^nX)$.

Por otro lado, si $U$ es un subconjunto abierto de un espacio de Banach y denotamos por $(\mathcal{H}^\infty(U), \|.\|_\infty)$ el espacio de las funciones holomorfas y acotadas en $U$ dotado con la norma supremo, la topología localmente convexa más fina que coincide con $\tau_0$ sobre los subconjuntos $\|.\|_\infty$-acotados de $\mathcal{H}^\infty(U)$, es la más fina que verifica esta condición (ver Teorema 4.4 de [36] o Corolario I.4.2 de [12]). Más aún, Mujica en [36] obtiene una descripción de las seminormas que generan esta topología.

Motivados por estos resultados, consideramos en $\mathcal{H}_b(U)$ la topología localmente convexa más fina que coincide con $\tau_0$ sobre los conjuntos $\tau_b$-acotados. Denotamos dicha topología por $\tau_{bcl}$. En este contexto es natural definir a su vez la topología $\tau_{bc}$ como la más fina en $\mathcal{H}_b(U)$ que verifica la condición anterior. $\tau_{bc}$ viene determinada por la familia de subconjuntos $A$ de $\mathcal{H}_b(U)$ cuya intersección con cada subconjunto $\tau_b$-acotado $B$ de $\mathcal{H}_b(U)$ es un abierto de $B$ para $\tau_0$.

Con respecto a $\tau_{bcl}$ nos planteamos las siguientes dos preguntas:

1. Describir la topología $\tau_{bcl}$.

2. ¿En qué casos coinciden $\tau_0$ y $\tau_{bcl}$?

Nuestro objetivo principal es dar respuesta a la segunda pregunta, que no es más que una reformulación del problema de si se puede establecer o no un teorema de tipo Banach-Dieudonné en el espacio $\mathcal{H}_b(U)$. En los dos primeros apartados de este capítulo se dan respuestas a este problema; en el primero se prueba que, en el caso de ser $U$ un subconjunto abierto y equilibrado de un espacio de Banach $X$ sólo se da un teorema de este tipo si la dimensión de $X$ es finita, mientras que en el segundo, el problema es estudiado para un abierto equilibrado de un espacio de Fréchet $E$. Concretamente veremos que la respuesta es negativa si $E$ es un espacio de Fréchet no Montel, mientras que en el marco de espacios de Fréchet Montel los resultados son más heterogéneos. En el tercer apartado se estudia de forma intrínseca la topología $\tau_{bcl}$ y se obtiene una descripción de un sistema fundamental de seminormas. Además se prueba que si $E$ es un espacio de Fréchet y $U$ un abierto equilibrado de $E$ entonces $((\mathcal{P}(^mE), \tau_{bcl}))_m$ es una descomposición $\mathcal{S}$-Schauder de $(\mathcal{H}_b(U), \tau_{bcl})$ siendo absoluta si $U = E$ o bien si $E$ es un espacio de Banach.

## 1.1 Funciones holomorfas de tipo acotado en un espacio de Banach

Sea $X$ un espacio de Banach y $U$ un abierto equilibrado de $X$. Comenzamos esta sección con un sencillo lema que relaciona las nuevas topologías con las más usuales de $\mathcal{H}_b(U)$, para dar paso a nuestro teorema principal.

**Lema 1.1.1** $\tau_0 \leq \tau_{bcl} \leq \tau_{bc} \leq \tau_b$.

Demostración: Las dos primeras desigualdades son consecuencia directa de las definiciones de cada topología. Para probar la tercera tomamos en el espacio metrizable $\mathcal{H}_b(U)$ una sucesión $(f_n)_n$ $\tau_b$-convergente a $f \in \mathcal{H}_b(U)$. Entonces $(f_n)_n$ $\tau_0$-converge a $f$ y el conjunto $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{f\}$ es $\tau_b$-acotado. Consecuentemente, $(f_n)_n$ $\tau_{bc}$-converge a $f$, lo que prueba que $\tau_{bc} \leq \tau_b$. ∎

**Teorema 1.1.2** Sea $X$ un espacio de Banach y $U$ un abierto equilibrado de $X$. Entonces

$$(\mathcal{H}_b(U), \tau_0) = (\mathcal{H}_b(U), \tau_{bcl})$$

si y sólo si la dimensión de $X$ es finita.

Demostración: Primero probamos la suficiencia. Como la dimensión de $X$ es finita, $\tau_0 = \tau_b$ y la conclusión se sigue del Lema anterior.

Supongamos ahora que la dimensión de $X$ es infinita. Por el Teorema de Josefson-Nissenzweig (ver Cap.12 de [14]), existe una sucesión de funcionales continuas $(\phi_n)_n$ en el dual $X^*$ de $X$ tal que

$$\|\phi_n\| = 1 \ \text{ y } \ \lim_n \phi_n(x) = 0 \quad \forall x \in X.$$

Entonces podemos encontrar una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $X$ tal que

$$\|x_n\| = 1 \ \text{ y } \ |\phi_n(x_n)| > 1 - 1/n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos a construir un ejemplo de una forma lineal $T$ sobre $\mathcal{H}_b(U)$ que no es $\tau_0$-continua y sí es $\tau_{bc}$-continua, es decir, es $\tau_0$-continua en los $\tau_b$-acotados, lo que probará que $\tau_{bc}$ es estrictamente más fina que $\tau_0$.

Llamemos $B$ a la bola unidad cerrada de $X$ y sea $t > 1$ tal que $\frac{1}{t}B$ es $U$-acotado. Para cada $f \in \mathcal{H}_b(U)$ denotamos por $\sum_{m=0}^{\infty} P_m f$ la serie de Taylor de $f$ en el origen. Al ser $U$ equilibrado dicha serie converge en los puntos de $U$. Definimos la función $T$ como sigue:

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathcal{H}_b(U) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & f & \rightsquigarrow & T(f) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m f(\frac{x_m}{t^2}) \end{array}$$

Como

$$|P_m f(\frac{x_m}{t^2})| = 1/t^m |P_m f(\frac{x_m}{t})| \leq 1/t^m \|f\|_{\frac{1}{t}B}$$

la función $T$ está bien definida y

$$|T(f)| \leq \frac{t}{t-1} \|f\|_{\frac{1}{t}B}$$

Claramente $T$ es lineal y, como consecuencia de la desigualdad anterior, $T$ es $\tau_b$-continua.

Sin embargo, $T$ no es $\tau_0$-continua. En efecto, como $(\phi_n)_n$ $\sigma(X^*, X)$-converge a cero, por el Teorema clásico de Banach-Dieudonné, la sucesión $(t^2\phi_n)_n$ converge a cero uniformemente sobre los subconjuntos compactos de $X$. Así pues, $((t^2\phi_n)^n)_n$ es una sucesión en $\mathcal{H}_b(U)$ que $\tau_0$-converge a cero. Sin embargo, la desigualdad

$$|T((t^2\phi_n)^n)| = |\phi_n^n(x_n)| > (1 - 1/n)^n$$

nos asegura que la sucesión $(T(\phi_n^n))_n$ no converge a cero.

Por otra parte, $T$ sí es $\tau_0$-continua en los $\tau_b$-acotados de $\mathcal{H}_b(U)$. Sea $A$ un subconjunto $\tau_b$-acotado de $\mathcal{H}_b(U)$ y sea $(f_i)_i$ una red en $A$ $\tau_0$-convergente a un elemento $f \in A$. Vamos a probar que $(T(f_i))_i$

converge a $T(f)$. Por las desigualdades de Cauchy. $(P_m f_i)_i$ $\tau_0$-converge a $P_m f$ para cada $m \in \mathbb{N}$.De donde $(P_m f_i(\frac{x_m}{t^2}))_i$ converge a $P_m f(\frac{x_m}{t^2})$ para cada $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Además,

$$|P_m g(\frac{x_m}{t^2})| \leq 1/t^m \|g\|_{B/t} \leq 1/t^m \sup\{\|h\|_{B/t} : h \in A\}$$

para todo $g \in A$, por lo que la serie

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m g(\frac{x_m}{t^2})$$

converge uniformemente en $A$. Por tanto, dado $\epsilon > 0$ existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\sum_{m=m_0+1}^{\infty} P_m g(\frac{x_m}{t^2})| < \epsilon/3 \quad \forall g \in A$$

y para cada $m \leq m_0$ existe $i_m$ tal que si $i \geq i_m$ entonces

$$|P_m f_i(\frac{x_m}{t^2}) - P_m f(\frac{x_m}{t^2})| < \epsilon/(3(m_0+1)).$$

Si tomamos $i \geq i_1, ..., i_{m_0}$ entonces

$$|T(f_i) - T(f)| \leq |\sum_{m=0}^{m_0} P_m f_i(\frac{x_m}{t^2}) - P_m f(\frac{x_m}{t^2})| +$$

$$|\sum_{m=m_0+1}^{\infty} (P_m f_i(\frac{x_m}{t^2}) - P_m f(\frac{x_m}{t^2}))| \leq (m_0+1)\frac{\epsilon}{3(m_0+1)} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Lo que prueba que $T$ es $\tau_0$-continua en $\tau_b$-acotados y por tanto $\tau_{bc}$ es estrictamente más fina que $\tau_0$.

Consideremos ahora la topología menos fina para la que $T$ es continua y denotémosla por $\tau_T$. Claramente la topología $\tau_T$ es localmente convexa. La topología $\max(\tau_T, \tau_0)$ es localmente convexa y como coincide con $\tau_0$ sobre los conjuntos $\tau_b$-acotados, entonces $\max(\tau_T, \tau_0) \leq \tau_{bcl}$. Por lo que $\tau_0$ es estrictamente menos fina que $\tau_{bcl}$. ∎

Notemos que en el curso de la prueba hemos probado que $\tau_{bc}$ coincide con $\tau_0$ si y sólo si la dimensión de $X$ es finita.

**Nota 1.1.3** 1) Sea $U$ un abierto absolutamente convexo y acotado. Entonces $\tau_{bc}$ es estrictamente más fina que $\tau_0$ sobre $\mathcal{H}^\infty(U)$. De otro modo, como $(\mathcal{H}^\infty(U), \tau_{bc})$ y $(\mathcal{H}^\infty(U), \|.\|_\infty)$ tienen los mismos acotados (Proposición 4.7. de [36]), $(\mathcal{H}^\infty(U), \tau_0)$ y $(\mathcal{H}^\infty(U), \|.\|_\infty)$ deberían tener también los mismos conjuntos acotados. Como $U$ es convexo, si $a$ es un punto de la frontera de $U$, por el Teorema de Hahn-Banach existe un funcional continuo $\phi \in X^*$ tal que $Re\phi(x) < Re\phi(a)$ para todo $x \in U$, donde $Re\phi(z)$ denota la parte real de $\phi(z)$. Entonces la función $f(x) = 1/\phi(x-a)$ es holomorfa en $U$ y no está acotada. Consecuentemente, la familia

$$\{\sum_{m=0}^{N} P_m f : N = 0, 1, 2...\}$$

no es un conjunto $\|.\|_\infty$-acotado, y como la serie de Taylor de $f$ $\tau_0$-converge a $f$, la familia anterior es $\tau_0$-acotada. Por tanto, $\tau_0 < \tau_{bc}$.

2) Consideremos en $\mathcal{H}_b(U)$ la topología inducida por $\tau_\delta$, que seguiremos denotando $\tau_\delta$. Recordemos que una seminorma $p$ en el espacio $\mathcal{H}(U)$ de funciones holomorfas en $U$ es $\tau_\delta$-continua si para cada cubrimiento abierto numerable y creciente de $U$, $(V_n)_n$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ y $c > 0$ tales que $p(f) \leq c \sup_{x \in V_{n_0}} |f(x)|$ para todo $f \in \mathcal{H}(U)$. La topología $\tau_\delta$ es la topología localmente convexa generada por las seminormas $\tau_\delta$-continuas. Al ser ésta una de las topologías más importantes en Holomorfía en dimensión infinita, es natural estudiar su relación con $\tau_{bcl}$. Para espacios de Banach de dimensión finita ambas topologías, $\tau_{bcl}$ y $\tau_\delta$, coinciden (ver Teorema 1.2.2. posterior). Para un espacio de Banach de dimensión infinita $X$ la situación es completamente diferente. Como $\tau_\delta$ coincide con la topología de la norma sobre $\mathcal{P}(^n X)$ y $\tau_{bcl}$ coincide con $\tau_0$ por la extensión del Teorema de Banach-Dieudonné dada

por Mujica. se sigue que $\tau_\delta > \tau_{bcl}$ sobre $\mathcal{P}(^nX)$. Como consecuencia $\tau_\delta$ también es diferente de $\dot{\tau}_{bcl}$ en $\mathcal{H}_b(U)$.

Sea $G^\infty(U)$ el predual de $\mathcal{H}^\infty(U)$ construido por Dixmier-Ng (Teorema 19 of [19]. Para una prueba más corta ver el Teorema 1 de [38]. Ver también el Teorema 2.1. de [36]). Sus elementos son todos los funcionales $u \in \mathcal{H}^\infty(U)'$ cuya restricción a la bola unidad es $\tau_0$-continua. Este espacio es un espacio de Banach con la norma inducida por la norma de $\mathcal{H}^\infty(U)'$. El espacio $\mathcal{H}^\infty(U)$ puede ser dotado con la topología $\tau_c$ de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos compactos de $G^\infty(U)$, y Mujica probó que los espacios $(\mathcal{H}^\infty(U), \tau_{bc})$ y $(G^\infty(U)', \tau_c)$ son isomorfos (Teorema 4.7 de [36]).Si consideramos $\mathcal{H}_b(U)$ es conocido (Teorema 7.3. de [37], ver también el Teorema 1 junto con la Proposición 2 de [22]) que existe un espacio (LB) fuertemente acotadamente retractivo $G_b(U)$, dado por

$$G_b(U) = ind_n G^\infty(U_n)$$

tal que $\mathcal{H}_b(U) = G_b(U)'_\beta$, donde $(U_n)_n$ es una sucesión fundamental de $U$-acotados equilibrados. Por tanto, y de forma natural, podemos considerar sobre $\mathcal{H}_b(U)$ la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos compactos de $G_b(U)$, que también denotaremos por $\tau_c$. A continuación estudiamos la relación entre $\tau_c$ y $\tau_{bcl}$.

**Proposición 1.1.4** *La topología $\tau_c$ es más fina que $\tau_0$.*

Demostración: Es consecuencia directa del hecho de que la aplicación evaluación

$$\begin{array}{rcccccc} \delta: & U & \longrightarrow & G_b(U) & & & \\ & x & \rightsquigarrow & \delta_x: & \mathcal{H}_b(U) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & & & f & \rightsquigarrow & \delta_x(f) = f(x) \end{array}$$

es holomorfa (Proposición 7.2 de [37]). ■

**Teorema 1.1.5.** *Sea $X$ un espacio de Banach de dimensión infinita y $U$ un abierto equilibrado de $X$. Entonces*

*i)* $\tau_{bcl}$ *es estrictamente menos fina que* $\tau_b$ *en* $\mathcal{H}_b(U)$.

*ii)* $\tau_c$ *coincide con* $\tau_0$ *sobre cada subconjunto* $\tau_b$*-acotado de* $\mathcal{H}_b(U)$.

*iii)* $(\mathcal{H}_b(U), \tau_{bcl}) = (G_b(U)', \tau_c)$.

*iv)* $(\mathcal{H}_b(U), \tau_{bcl})' = G_b(U)$.

*v)* $(\mathcal{H}_b(U), \tau_b)$ *y* $(\mathcal{H}_b(U), \tau_{bcl})$ *tienen los mismos conjuntos acotados.*

*vi)* $(\mathcal{H}_b(U), \tau_{bcl})'_b = G_b(U)$.

Demostración: i) Por el Lema 1.1.1 $\tau_{bcl} \leq \tau_b$. Ahora bien, por el Teorema de Banach-Dieudonné para polinomios (Teorema 2.1 de [33]) $\tau_{bcl}$ coincide con $\tau_0$ en $\mathcal{P}(^nX)$ y, por otra parte, $\tau_b$ coincide con la topología de la norma. Luego las topologías $\tau_{bcl}$ y $\tau_b$ difieren. Por tanto, $\tau_{bcl} < \tau_b$.

ii) Sea $A$ un subconjunto $\tau_b$-acotado de $\mathcal{H}_b(U)$. Sea $(f_i)_{i\in I} \subset A$ una red $\tau_0$-convergente a $f \in A$. Vamos a probar que $(f_i)_{i\in I}$ $\tau_c$-converge a $f$. Sea $K$ un subconjunto compacto de $G_b(U)$. Como $G_b(U)$ es fuertemente acotadamente retractivo, $K$ es un subconjunto compacto de $G^\infty(U_n)$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Como $A$ es $\tau_b$-acotado, existe una constante $M > 0$ tal que

$$|f(x)| < M \qquad \forall x \in U_n, \;\; \forall f \in A.$$

Luego el conjunto

$$A_n := \{f|_{U_n} : f \in A\}$$

es un subconjunto acotado de $\mathcal{H}^\infty(U_n)$. Dividiendo por $M$, podemos suponer que $A_n$ está contenido en la bola unidad cerrada $B_n$ de $\mathcal{H}^\infty(U_n)$. Si $u \in G^\infty(U_n)$, por definición, $u|_{B_n}$ es $\tau_0$-continua. Como $(f_i|_{U_n})_{i\in I}$ $\tau_0$-converge a $f|_{U_n}$ entonces $(u(f_i|_{U_n}))_{i\in I}$ tiende a $u(f|_{U_n})$. En otras palabras, $(f_i|_{U_n})_{i\in I}$ tiende a $f|_{U_n}$ para la topología $\sigma(\mathcal{H}^\infty(U_n), G^\infty(U_n))$.

El Teorema de Banach-Dieudonné clásico aplicado al espacio de Banach $G^{\infty}(U_n)$ asegura que la topología de la convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos de $G^{\infty}(U_n)$ coincide con $\sigma(\mathcal{H}^{\infty}(U_n), G^{\infty}(U_n))$ en $A_n$. Luego, $(f_i|_{U_n})_{i\in I}$ tiende a $f|_{U_n}$ sobre $K$. Concluimos que $(f_i)_{i\in I}$ tiende a $f$ para la topología $\tau_c$.

Ahora la Proposición 1.1.4 nos da el resultado.

iii) Como $G_b(U)$ es un espacio localmente convexo completo, la conclusión se sigue de ii) y del Teorema (7) p.271 de [31].

iv) Por ser $G_b(U)$ un espacio completo, la envoltura absolutamente convexa y cerrada de todo subconjunto compacto es compacta, luego $\tau_c$ es menos fina que la topología de Mackey. Por tanto, por el Teorema de Mackey-Arens $(G_b(U)', \tau_c)' = G_b(U)$ y por iii) obtenemos el resultado.

v) De iv) se sigue que $\tau_{bcl}$ es más fina que $\sigma(\mathcal{H}_b(U), G_b(U))$. Luego, todo $A \subset \mathcal{H}_b(U)$ que sea $\tau_{bcl}$-acotado es $\sigma(\mathcal{H}_b(U), G_b(U))$-acotado. Pero como $\mathcal{H}_b(U)$ es isomorfo a $G_b(U)'_b$, el conjunto $A$ es $\sigma(G_b(U)', G_b(U))$-acotado y, al ser $G_b(U)$ tonelado, $A$ es fuertemente acotado. Consecuentemente, $A$ es $\tau_b$-acotado. Así queda probado que todo $\tau_{bcl}$-acotado es $\tau_b$-acotado.

Por otra parte, de i) se sigue que todo $\tau_b$-acotado es $\tau_{bcl}$-acotado.

vi) Es consecuencia de v). ∎

## 1.2 Funciones holomorfas de tipo acotado en espacios de Fréchet

En la sección anterior, ha quedado completamente resuelto el problema de intentar establecer teoremas de tipo Banach-Dieudonné para espacios de funciones holomorfas de tipo acotado definidas en un abierto equilibrado de un espacio de Banach. En esta sección, nuestro estudio se centra en espacios de funciones holomorfas de tipo acotado definidas en un abierto equilibrado de un espacio de Fréchet $E$ no Banach. Probaremos que para espacios de Fréchet-Montel con $\tau_0 = \tau_\omega$ se cumple $\tau_\delta = \tau_{bcl}$. Por tanto, bajo esta condición, el teorema de Banach-Dieudonné se verifica para $\mathcal{H}_b(U)$ si y sólo si $\tau_\delta = \tau_0$. Sin embargo para espacios de Fréchet no Montel probaremos que $\tau_{bcl}$ es estrictamente más fina que $\tau_0$.

**Teorema 1.2.1** *Si $U$ es un abierto equilibrado de un espacio de Fréchet no Montel $E$, entonces $\tau_{bcl}$ es estrictamente más fina que $\tau_0$ en $\mathcal{H}_b(U)$.*

Demostración: Si $E$ es un espacio de Fréchet no Montel existe una sucesión $(\phi_n)_n$ de funcionales continuos en el dual $E'$ de $E$ tal que $(\phi_n)_n$ tiende a cero para la topología débil-estrella $\sigma(E', E)$, pero que no tiende a cero para la topología fuerte $\beta(E', E)$ (Teorema 2 de [10]). Debido a esta última condición, podemos encontrar $\delta > 0$ y un subconjunto acotado $A$ de $E$ tal que para cada $p \in \mathbb{N}$ existe $n_p \in \mathbb{N}$ y un elemento $x_p \in A$ tal que

$$|\phi_{n_p}(x_p)| \geq \delta.$$

Podemos suponer que la sucesión $(n_p)$ es estrictamente creciente. Al igual que en el Teorema 1.1.2 definimos la función

$$T(f) := \sum_{p=1}^{\infty} P_{n_p} f(\frac{1}{t^2} x_p), \quad f \in \mathcal{H}_b(E)$$

donde $t > 1$ viene dado porque $\frac{1}{t}A$ es $U$-acotado y, mediante argumentos similares (usando $(t^2\phi_{n_p}/\delta)$), obtenemos que $T$ no es $\tau_0$-continua pero sí $\tau_{bc}$-continua. Más aún, obtenemos finalmente que $\tau_{bcl}$ es estrictamente más fina que $\tau_0$. ∎

El teorema siguiente nos fue sugerido por el Profesor Dineen a quien queremos expresar nuestro agradecimiento.

**Teorema 1.2.2** *Si $E$ es un espacio de Fréchet-Montel y $U$ es un abierto equilibrado de $E$, entonces*
*i) $\tau_{bcl} \leq \tau_\delta$ en $\mathcal{H}_b(U)$.*
*ii) Si $\tau_0 = \tau_\omega$ entonces $\tau_{bcl} = \tau_\delta$ en $\mathcal{H}_b(U)$.*

Demostración: i) Sea $p$ una seminorma $\tau_{bcl}$-continua, y sea $C$ un subconjunto $\tau_\delta$-acotado de $\mathcal{H}_b(U)$. Como $\tau_\delta$ es la topología bornológica asociada a $\tau_0$, $C$ es $\tau_0$-acotado y, consecuentemente, $C$ es relativamente $\tau_0$-compacto. Por otra parte, al ser $E$ es un espacio de Montel se verifica $(\mathcal{H}_b(U), \tau_b) = (\mathcal{H}(U), \tau_0)$ y, por tanto, $C$ es $\tau_b$-acotado. Así pues, por definición, $\tau_{bcl}$ coincide con $\tau_0$ sobre $C$. Por tanto, $p(C)$ es acotado. Lo que prueba que $p$ es $\tau_\delta$-continua.

ii) Por el Corolario 2.44 y el Ejemplo 2.46 de [15] $\tau_\delta$ y $\tau_\omega$ tienen los mismos conjuntos acotados. De aquí que, por la Proposición 3.30 de [15], $\tau_\omega$ y $\tau_\delta$ inducen la misma topología sobre los conjuntos acotados de $\mathcal{H}(U)$. Consecuentemente, si $\tau_0$ coincide con $\tau_\omega$ entonces $\tau_0 = \tau_{bcl} = \tau_\omega = \tau_\delta$ sobre los subconjuntos acotados de $\mathcal{H}(U)$. Por tanto, $\tau_0$ y $\tau_\delta$ coinciden sobre los conjuntos acotados, de donde $\tau_\delta \leq \tau_{bcl}$. Esto implica que $\tau_{bcl} = \tau_\delta$. ■

Como por definición $\tau_0 \leq \tau_{bcl}$, el teorema anterior también nos permite utilizar los resultados conocidos de $\tau_0 = \tau_\delta$ para obtener condiciones bajo las que se verifique la igualdad $\tau_0 = \tau_{bcl}$.

**Corolario 1.2.3** *i) Si $U$ es un abierto equilibrado de un espacio de Fréchet-Montel $E$ que no admite una norma continua y tal que $\tau_0 = \tau_\omega$, entonces $\tau_0 < \tau_{bcl}$ en $\mathcal{H}_b(U)$.*
*ii) Si $E$ es un espacio de Fréchet nuclear entonces $\tau_0 = \tau_{bcl} (= \tau_\delta)$ en $\mathcal{H}_b(E)$ si y sólo si $E$ es un espacio $DN$.*
*iii) Si $E$ es un espacio de Fréchet nuclear con base y $U$ es un polidisco abierto de $E$, entonces $\tau_0 = \tau_{bcl} (= \tau_\delta)$ en $\mathcal{H}_b(U)$ si y sólo si $E$ es un*

*espacio $DN$.*

Demostración: i) Como $E$ no admite una norma continua, $\tau_\delta$ es estrictamente más fina que $\tau_\omega$ (Ejemplo 2.52 de [15]). Por tanto, como consecuencia del Teorema 1.2.2.ii), obtenemos que $\tau_0 = \tau_\omega < \tau_\delta = \tau_{bcl}$.
ii) Se sigue directamente del Teorema 1.2.2.i) y del hecho de que si $E$ es un espacio de Fréchet nuclear entonces $\tau_0 = \tau_\delta$ si y sólo si $E$ es un espacio $DN$ (ver Teorema 5.42 y Teorema 6.36 de [15]).
iii) Se prueba de igual forma que ii) dado que el Teorema 5.42 de [15] está enunciado para polidiscos y si bien no es así para el Teorema 6.36 de [15], una prueba totalmente paralela a la de éste permite obtener el resultado para polidiscos. ∎

**Nota 1.2.4** Son muchos los autores que han obtenido condiciones y ejemplos para la igualdad $\tau_0 = \tau_\omega$. Así, Mujica [34] probó que $\tau_0 = \tau_\omega$ para todo espacio de Fréchet-Schwartz. Ansemil y Ponte [1] han probado esta igualdad para espacios de Fréchet-Montel con base absoluta. Dineen [16] la probó para espacios de Fréchet-Montel con una base incondicional de tipo $(T)$. Galindo, García y Maestre [21] mejoraron este resultado para espacios de Fréchet-Montel de tipo $T$ y Defant y Maestre [13] la probaron para espacios de Fréchet-Montel con la propiedad $(BB)$ $n$ veces para todo $n \in \mathbb{N}$. Un resultado general que incluye los casos anteriores puede encontrarse en [11].

Un ejemplo clásico de un espacio de Fréchet nuclear es el espacio $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de todas las sucesiones de números complejos dotado con la topología producto. Por tanto, por el Teorema 1.2.2, $\tau_{bcl} = \tau_\delta$ en $\mathcal{H}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$. Pero, por el Corolario 1.2.3 i), $\tau_0 < \tau_\delta$.

A lo largo de nuestro estudio sobre la coincidencia o no de las topologías $\tau_0$ y $\tau_{bcl}$ hemos obtenido, en el contexto de espacios de Fréchet, el siguiente resultado: *Si $E$ es un espacio de Fréchet-Schwartz* *que no admite norma continua entonces* $\tau_0 < \tau_{bcl}$ *en* $\mathcal{H}_b(E)$ (ver Corolario 1.2.3 i)). Si además nos situamos en el marco de los espacios nucleares, $\tau_0 = \tau_{bcl}$ si y solamente si $E$ tiene la propiedad $DN$. Esto nos lleva a preguntarnos si sólo vamos a obtener la igualdad de las topologías para espacios nucleares. Nuestro objetivo va a ser dar un ejemplo de un espacio de Fréchet-Schwartz no nuclear para el que $\tau_0 = \tau_{bcl}$. Dineen da, sin prueba, un ejemplo de un espacio de Fréchet-Schwartz no nuclear (ver Ejemplo 3 de [18]); dicho espacio será el que requiramos para nuestro objetivo, por ello nos parece de interés proporcionar una prueba del mismo. Empezaremos por probar un lema técnico.

**Lema 1.2.5** *Dada una matriz* $(a_{n,k})_{n,k}$ *de números positivos existe una sucesión* $(b_n)_n \subset \mathbb{N}$ *de forma que* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{a_{n,k}}{a_{n,k+1}} = \infty$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración: Tomamos $b_1$ tal que $b_1 \frac{a_{1,1}}{a_{1,2}} > 1$. Tomamos $b_2$ tal que $b_2 \frac{a_{2,i}}{a_{2,i+1}} > 1$, para $i = 1, 2$. En general tomamos $b_n$ tal que $b_n \frac{a_{n,i}}{a_{n,i+1}} > 1$, para $i = 1, 2, ...n$. Así construida, la sucesión $(b_n)_n$ verifica que dado $k \in \mathbb{N}$ y $N > k$,

$$\sum_{n=1}^{N} b_n \frac{a_{n,k}}{a_{n,k+1}} =$$

$$b_1 \frac{a_{1,k}}{a_{1,k+1}} + b_2 \frac{a_{2,k}}{a_{2,k+1}} + \ldots + b_k \frac{a_{k,k}}{a_{k,k+1}} + b_{k+1} \frac{a_{k+1,k}}{a_{k+1,k+1}} + \ldots + b_N \frac{a_{N,k}}{a_{N,k+1}} >$$

$$N - k + 1$$

y, por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{a_{n,k}}{a_{n,k+1}} = \infty$, tal y como queríamos probar. ∎

**Ejemplo 1.2.6** (ver Ejemplo 3. de [18]) Sea $\lambda(A)$ un espacio de sucesiones Fréchet nuclear con matriz $A = (a_{n,k})_{n,k}$ $(0 < a_{n,k} \leq a_{n,k+1}$, $\forall n, k)$. Sea $(b_n)_n \subset \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{a_{n,k}}{a_{n,k+1}} = \infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$ dada por el Lema 1.2.5. Definimos la matriz $C := (c_{n,k})_{n,k}$ como sigue.

Para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{cccc} c_{1,k} = a_{1,k} & c_{b_1+1,k} = a_{2,k} & & c_{b_1+\ldots+b_{n-1}+1,k} = a_{n,k} \\ c_{2,k} = a_{1,k} & c_{b_1+2,k} = a_{2,k} & & c_{b_1+\ldots+b_{n-1}+2,k} = a_{n,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{b_1,k} = a_{1,k} & c_{b_1+b_2,k} = a_{2,k} & & c_{b_1+\ldots+b_n,k} = a_{n,k}. \end{array}$$

Se trata de una matriz de Köthe pues $0 < c_{n,k} \leq c_{n,k+1}$, siendo el espacio de sucesiones asociado

$$\lambda(C) = \{(x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : p_k((x_n)_n) := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| c_{n,k} < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}\}$$

Teniendo en cuenta que un espacio de sucesiones $\lambda(D)$ es de Schwartz si y sólo si su matriz $D = (d_{n,k})_{n,k}$ verifica la propiedad

$$(\frac{d_{n,k}}{d_{n,k+1}})_n \longrightarrow 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

(Teorema 4.9 de [8]) se tiene en particular que $(\frac{a_{n,k}}{a_{n,k+1}})_n \longrightarrow 0 \; \forall k \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$(\frac{c_{n,k}}{c_{n,k+1}})_n = (\frac{a_{p_n,k}}{a_{p_n,k+1}})_n \longrightarrow 0, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

es decir, $\lambda(C)$ es de Schwartz.

Sin embargo no es nuclear. Recordemos que, en general, (Teorema de [29]) $\lambda(D)$ es nuclear si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{n,k}}{d_{n,k+1}} < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Al ser la sucesión $(\sum_{n=1}^{N} b_n \frac{a_{n,k}}{a_{n,k+1}})_N$ una subsucesión de las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n,k}}{c_{n,k+1}}$, se verifica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n,k}}{c_{n,k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{a_{n,k}}{a_{n,k+1}} = \infty$$

por lo que $\lambda(C)$ no es nuclear.

Consideremos los espacios de Banach

$$l_1^{b_n} := \{(x_m)_m \in l_1 : \ x_m = 0 \ \forall m > b_n\} = \mathbb{C}^{b_n} \times \{0\}$$

con la norma de $l_1$, es decir,

$$\|(x_m)_m\|_{l_1^{b_n}} = \sum_{m=1}^{b_n} |x_m|.$$

Definimos el espacio

$$\mathcal{E} := \lambda(A)(l_1^{b_n}) := \{(x_n)_n : x_n \in l_1^{b_n} \text{ y } (\|x_n\|_{l_1^{b_n}})_n \in \lambda(A)\} =$$

$$\{(x_n)_n : x_n \in l_1^{b_n} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{l_1^{b_n}} a_{n,k} < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}\}$$

que con la topología generada por las seminormas

$$p_k((x_n)_n) := \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{l_1^{b_n}} a_{n,k}$$

es un espacio de Fréchet.

**Proposición 1.2.7** *$\mathcal{E}$ es topológicamente isomorfo a $\lambda(C)$.*

Demostración. Definimos la aplicación $T$ dada por

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathcal{E} & \longrightarrow & \lambda(C) \\ & (x_n)_n & \rightsquigarrow & (y_m)_m := (x_1^1, ..., x_1^{b_1}, x_2^1, ..., x_2^{b_2}, ..., x_n^1, ..., x_n^{b_n}, ...) \end{array}$$

donde $x_n = (x_n^1, ..., x_n^{b_n}) \in \mathbb{C}^{b_n}$. La aplicación $T$ está bien definida pues si $m = b_1 + \ldots + b_n + j$ con $0 < j \leq b_{n+1}$,

$$\sum_{m=b_1+\ldots+b_n+1}^{b_1+\ldots+b_{n+1}} |y_m| c_{m,k} = \sum_{j=1}^{b_{n+1}} |x_{n+1}^j| a_{n+1,k} = \|x_{n+1}\|_1 a_{n+1,k}$$

por lo que $(y_m)_m \in \lambda(C)$.

Veamos que $T$ es sobre. Si $(y_m)_m \in \lambda(C)$ agrupamos sus coordenadas de modo que

$$\begin{aligned} x_1 &:= (y_1, ..., y_{b_1}, 0, ...) \in l_1^{b_1}, \\ x_2 &:= (y_{b_1+1}, ..., y_{b_1+b_2}, 0, ...) \in l_1^{b_2}, \\ &\vdots \\ x_n &:= (y_{b_1+...+b_{n-1}+1}, ..., y_{b_1+...+b_{n-1}+b_n}, 0, ...) \in l_1^{b_n}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} \|x_n\|_{l_1^{b_n}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} \sum_{j=1}^{b_n} |y_{b_1+b_2+...b_{n-1}+j}| =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{b_n} c_{b_1+b_2+...+b_{n-1}+j,k} |y_{b_1+b_2+...b_{n-1}+j}| < \infty \qquad (I)$$

luego $(x_n)_n \in \mathcal{E}$.

Claramente $T$ es inyectiva y lineal.

De (I) se sigue la continuidad de $T$ y por el Teorema de la aplicación abierta, $T$ es un isomorfismo topológico. ∎

Como consecuencia de este isomorfismo el espacio $\mathcal{E}$ es de Schwartz no nuclear. Se puede probar que $\mathcal{E}$ es de Schwartz a partir del hecho de que cada $l_1^{b_n}$ es de dimensión finita. Concretamente, Dineen establece, sin prueba en [18] (Ejemplo 4), el siguiente resultado del que aportamos una prueba.

**Proposición 1.2.8** *Sea $\lambda(A)$ un espacio de sucesiones de Schwartz, y sea $E_n$ un espacio de Banach para cada $n \in \mathbb{N}$. El espacio*

$$E := \lambda(A)(\{E_n\}_n) = \{(x_n)_n : x_n \in E_n \text{ y } (\|x_n\|)_n \in \lambda(A)\}$$

*dotado con la topología generada por las seminormas*

$$p((x_n)_n) := \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,p} \|x_n\|$$

*es un espacio de Schwartz si y solamente si cada $E_n$ es de dimensión finita.*

Demostración. La condición claramente es necesaria pues cada $E_n$ se puede identificar con un subespacio de $E$ mediante las inclusiones

$$\begin{array}{ccc} E_n & \longrightarrow & E \\ x_n & \rightsquigarrow & (0,...,0,x_n,0,...), \end{array}$$

donde $x_n$ está situado en la posición $n$-ésima. Dicha inclusión es continua dado que

$$p((0,...,0,x_n,0,...)) = \|x_n\|a_{n,p}$$

y todo espacio de Banach que sea de Schwartz es de dimensión finita.

Si suponemos ahora que cada $E_n$ es de dimensión finita hemos de probar que dada una seminorma continua $p$ existe otra $q \geq p$ tal que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \frac{E}{Ker\, q} & \longrightarrow & \frac{E}{Ker\, p} \\ x + Ker\, q & \rightsquigarrow & x + Ker\, p \end{array}$$

es precompacta. Esto es equivalente a probar que dada una seminorma continua $p$ existe otra $q \geq p$ tal que la identidad $(E,q) \longrightarrow (E,p)$ es precompacta. Sea $p$ una seminorma continua de $E$. Como $\lambda(A)$ es Schwartz existe una seminorma continua $q \geq p$ tal que la identidad $(\lambda(A),q) \longrightarrow (\lambda(A),p)$ es precompacta. Veamos que esto implica que $(E,q) \longrightarrow (E,p)$ es precompacta.

Sea $(x^l)_l$ una sucesión en $E$ con $x^l = (x_n^l)_n$ y tal que

$$q(x^l) = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^l\|a_{n,q} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tenemos que probar que existe una subsucesión de $(x^l)_l$ que sea $p$-Cauchy. Por ser la identidad $(\lambda(A),q) \longrightarrow (\lambda(A);p)$ precompacta, la sucesión $((\|x_n^l\|)_n)_l$ es $p$-precompacta. Por tanto posee una subsucesión que seguiremos denotando $((\|x_n^l\|)_n)_l$, de modo que dado $\epsilon > 0$ existe $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s, t \geq l_0$ implica

$$p((\|x_n^s\|)_n - (\|x_n^t\|)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} | \, \|x_n^s\| - \|x_n^t\| \, | a_{n,p} < \frac{\epsilon}{6}.$$

Pero como $x^{l_0} \in E$ se tiene que la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^{l_0}\| a_{n,p}$ es finita, por lo que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n \geq n_0} \|x_n^{l_0}\| a_{n,p} < \frac{\epsilon}{6}$.

Así si $l \geq l_0$

$$\sum_{n \leq n_0} \|x_n^l\| a_{n,p} \geq \sum_{n \geq n_0} | \|x_n^l\| - \|x_n^{l_0}\| | a_{n,p} + \sum_{n \geq n_0} \|x_n^{l_0}\| a_{n,p} \leq \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} = \frac{\epsilon}{3}.$$

Como por hipótesis cada espacio $E_n$ tiene dimensión finita y $\|x_n^l\| \leq \frac{1}{a_{n,p}}$, podemos extraer para cada $n \in \mathbb{N}$ una subsucesión de $(x_n^l)_{l \in J}$ que sea de Cauchy. Aplicando el método diagonal de Cantor podemos asumir además que el conjunto de superíndices $J \subset \mathbb{N}$ es el mismo para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo que existe $l_1 \in \mathbb{N}$ (podemos elegir $l_1 \geq l_0$) tal que $l, l' \geq l_1$, $l, l' \in J$, implique

$$\|x_n^l - x_n^{l'}\| < \frac{\epsilon}{3 \sum_{n=1}^{n_0 - 1} a_{n,p}} \quad \forall n = 1, 2, ..., n_0 - 1,$$

de donde

$$p(x^l - x^{l'}) = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^l - x_n^{l'}\| a_{n,p} \leq$$

$$\sum_{n=1}^{n_0 - 1} \|x_n^l - x_n^{l'}\| a_{n,p} + \sum_{n \geq n_0} (\|x_n^l\| + \|x_n^{l'}\|) a_{n,p} \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Lo que prueba que $(x^l)_{l \in J}$ es $p$-Cauchy. ∎

Si partimos ahora de un espacio de sucesiones $\lambda(A)$ Fréchet nuclear que tenga además la propiedad $DN$, y construimos el espacio de Fréchet-Schwartz no nuclear $\mathcal{E}$, como cada $E_n = l_{b_n}^1$ es de dimensión finita, por el Teorema 4 de [18], las topologías $\tau_\omega$ y $\tau_\delta$ coinciden en el espacio $\mathcal{H}(\mathcal{E})$. Para dicho espacio, por ser Schwartz, se verifica $\tau_0 = \tau_\omega$ y como consecuencia del Teorema 1.2.2 ii) se verifica finalmente que $\tau_0 = \tau_\omega = \tau_\delta = \tau_{bcl}$.

## 1.3 La topología $\tau_{bcl}$

En las secciones anteriores hemos introducido una nueva topología en el espacio $\mathcal{H}_b(U)$ de aplicaciones holomorfas de tipo acotado definidas en un abierto equilibrado $U$ de un espacio de Fréchet $E$, denotada $\tau_{bcl}$, que surgía de forma natural al intentar elaborar teoremas de tipo Banach-Dieudonné para dicho espacio. Con este propósito, definíamos la topología $\tau_{bcl}$ como la topología localmente convexa más fina en $\mathcal{H}_b(U)$ que coincide con la topología compacto-abierta $\tau_0$ sobre los conjuntos $\tau_b$-acotados de $\mathcal{H}_b(U)$. Sin embargo, en el contexto de espacios localmente convexos, siempre se persigue una descripción de un sistema fundamental de seminormas que genera la topología del espacio. Esta sección está dedicada a la descripción de la topología $\tau_{bcl}$. En la primera proposición se detalla la topología $\tau_{bcl}$ siguiendo el mismo tipo de ideas que aparecen en [12] para las topologías mixtas. Después se prueba que la familia de espacios de polinomios $m$-homogéneos $((\mathcal{P}(^mE), \tau_0))_m$ es una descomposición $\mathcal{S}$-Schauder de $(\mathcal{H}_b(U), \tau_{bcl})$, siendo dicha descomposición absoluta si el espacio $E$ es un espacio de Banach o bien si $U = E$. Esto nos permitirá dar una descripción de un sistema fundamental de seminormas para $\tau_{bcl}$.

Sea $\mathcal{B}$ un sistema fundamental de conjuntos $\tau_b$-acotados en $\mathcal{H}_b(U)$. Para cada familia $\mathcal{V} := (V_B)_{B\in\mathcal{B}}$ de $\tau_0$-entornos de 0 consideramos el conjunto

$$\beta(\mathcal{V}) = co(\cup_{B\in\mathcal{B}}(V_B \cap B))$$

donde $co(F)$ denota la envoltura convexa de $F$. Entonces, como podemos suponer que $\mathcal{B}$ está formado por conjuntos convexos de modo que $\alpha B \in \mathcal{B}$ para todo $B \in \mathcal{B}$ y todo $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, es fácil (aunque largo) comprobar que la familia $(\beta(\mathcal{V}))_{\mathcal{V}}$ forma una base de entornos de 0 para una topología localmente convexa, digamos $\tau$, en $\mathcal{H}_b(U)$.

Si consideramos $\mathcal{B}_T$ la familia de todos los subconjuntos $\tau_b$-acotados de $\mathcal{H}_b(U)$, y para cada familia $\mathcal{V} := (V_B)_{B \in \mathcal{B}_T}$ de $\tau_0$-entornos de 0 consideramos el conjunto

$$\beta_T(\mathcal{V}) = co(\cup_{B \in \mathcal{B}_T}(V_B \cap B))$$

se tiene que dicho conjunto es un $\tau$-entorno de cero ya que dado un sistema fundamental de acotados $\mathcal{B}$, tomando $W_B := V_B$ si $B \in \mathcal{B}$ y $\mathcal{W} := (W_B)_{B \in \mathcal{B}}$ entonces $\beta(\mathcal{W}) \subset \beta_T(\mathcal{V})$. Pero además, la familia $(\beta_T(\mathcal{V}))_{\mathcal{V}}$ es un sistema fundamental de $\tau$-entornos de cero ya que si $\beta(\mathcal{V})$, donde $\mathcal{V} = (V_B)_{B \in \mathcal{B}}$, es un $\tau$-entorno de cero, por ser $\mathcal{B}$ sistema fundamental de $\tau_b$-acotados para cada $C \in \mathcal{B}_T \setminus \mathcal{B}$ existe $B_C \in \mathcal{B}$ de modo que $C \subset B_C$. Definimos $W_C := V_{B_C}$ si $C \in \mathcal{B}_T \setminus \mathcal{B}$ y $W_C := V_C$ si $C \in \mathcal{B}$. Entonces, si llamamos $\mathcal{W} := (W_C)_{C \in \mathcal{B}_T}$, se tiene que

$$\beta_T(\mathcal{W}) = co(\cup_{C \in \mathcal{B}_T}(C \cap W_C)) = co(\cup_{C \in \mathcal{B}}(C \cap W_C) \cup \cup_{C \notin \mathcal{B}}(C \cap W_C)) \subset$$

$$co(\cup_{C \in \mathcal{B}}(C \cap V_C) \cup \cup_{C \notin \mathcal{B}}(B_C \cap V_{B_C})) = co(\cup_{C \in \mathcal{B}}(C \cap V_C)) = \beta(\mathcal{V}).$$

En la próxima proposición trabajaremos con el sistema fundamental de entornos de cero generado por la familia $\mathcal{B}_T$.

**Proposición 1.3.1** $\tau = \tau_{bcl}$.

Demostración: Probemos en primer lugar que $\tau$ coincide con $\tau_0$ sobre los subconjuntos $\tau_b$-acotados de $\mathcal{H}_b(U)$. Sea $V$ un $\tau_0$-entorno de 0 en $\mathcal{H}_b(U)$. Tomemos $\mathcal{V} := (V_B)_{B \in \mathcal{B}_T}$ donde $V_B = V \; \forall B \in \mathcal{B}_T$. Entonces

$$\beta_T(\mathcal{V}) = co(\cup_{B \in \mathcal{B}_T}(V_B \cap B)) \subset V$$

y por tanto $V$ es un $\tau$-entorno de 0. Así pues, $\tau_0 \leq \tau$.

Consideremos ahora un subconjunto $\tau_b$-acotado $B$ de $\mathcal{H}_b(U)$, y sea $C_B := B - B \in \mathcal{B}_T$. Un $\tau$-entorno en $B$ de un elemento $x_0 \in B$ tiene la forma $(x_0 + \beta_T(\mathcal{V})) \cap B$, donde $\mathcal{V} = (V_C)_{C \in \mathcal{B}_T}$.

Tenemos que

$$(x_0 + V_{C_B}) \cap B \subset (x_0 + \beta_T(\mathcal{V})) \cap B.$$

y consecuentemente, $\tau|_B \leq \tau_0|_B$. Por lo que obtenemos la igualdad $\tau|_B = \tau_0|_B$.

Sea $\tau_1$ una topología localmente convexa tal que para cada conjunto $W$ $\tau_1$-abierto y convexo y cada conjunto $A$ $\tau_b$-acotado, la intersección $A \cap W$ es un subconjunto abierto de $(A, \tau_0|_A)$.

Por definición de $\tau_1$, para cada $B \in \mathcal{B}_T$, $B \cap W$ es abierto en $(B, \tau_0|_B)$. Así, si $x \in B \cap W$ existe un $\tau_0$-entorno de 0 $V_B$ tal que

$$(V_B + x) \cap B \subset B \cap W.$$

De este modo obtenemos

$$(V_B \cap (B - x)) + x = (V_B + x) \cap B \subset B \cap W \subset W,$$

luego $V_B \cap (B - x) \subset W - x$ lo que prueba que $\cup_{B \in \mathcal{B}_T}(V_B \cap (B - x)) \subset W - x$. Si llamamos $C_B := B - x$ entonces $\{C_B : B \in \mathcal{B}_T\} = \mathcal{B}_T$. Llamamos $W_{C_B} := V_B$ y $\mathcal{W} = (W_C)_{C \in \mathcal{B}_T}$. Entonces,

$$\beta_T(\mathcal{W}) = co(\cup_{B \in \mathcal{B}_T}(W_{C_B} \cap C_B)) = co(\cup_{B \in \mathcal{B}_T}(V_B \cap (B - x))) \subset W - x.$$

Esto prueba que $\tau$ es más fina que $\tau_1$ y, de acuerdo con la definición de $\tau_{bcl}$, $\tau = \tau_{bcl}$. ■

Consideremos $\mathcal{P}(^m E)$ dotado con la topología inducida por $\tau_{bcl}$. En principio ésta es más fina que la topología localmente convexa más fina que coincide con $\tau_0$ sobre los acotados de $\mathcal{P}(^mE)$, es decir, la topología $\tau_{bcl}$ propia de los polinomios homogéneos. Ahora bien, como la inducida es más fina que $\tau_0$ y por el teorema de Banach-Dieudonné para polinomios $\tau_0$ coincide con $\tau_{bcl}$ en los polinomios homogéneos, tenemos que la topología inducida por $\tau_{bcl}$ en $\mathcal{P}(^mE)$ es la propia $\tau_{bcl}$ de $\mathcal{P}(^mE)$ y por tanto $\tau_0$. Vamos a probar que la familia $(\mathcal{P}(^mE), P_m)$ donde $P_m$ es la proyección dada por

$$\begin{array}{rccc} P_m: & \mathcal{H}_b(U) & \longrightarrow & \mathcal{P}(^mE), \\ & f & \rightsquigarrow & P_m(f) \end{array}$$

es una descomposición $\mathcal{S}$-Schauder del espacio $(\mathcal{H}_b(U), \tau_{bcl})$ para cualquier abierto equilibrado $U$ de un espacio de Fréchet $E$. Más aún, si $U = E$ o bien $E$ es un espacio de Banach dicha descomposición es absoluta. Para ello aportamos una prueba a modo de lema del hecho bien conocido de que $((\mathcal{P}(^mE), \tau_b))_m$ es una descomposición $\mathcal{S}$-absoluta de $(\mathcal{H}_b(U), \tau_b)$, cuando $U$ es un abierto equilibrado de un espacio de Fréchet $E$ (ver por ejemplo [40]). También puede ser deducido de la Proposición 3.2 de la presente memoria para espacios de Banach.

**Lema 1.3.2** *Sea $E$ un espacio de Fréchet y $U$ un abierto equilibrado de $E$. $((\mathcal{P}(^mE), \tau_b))_m$ es una descomposición $\mathcal{S}$-absoluta de $(\mathcal{H}_b(U), \tau_b)$.*

Demostración: Recordemos que

$$\mathcal{S} := \{(a_n)_n \subset \mathbb{C} : \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \leq 1\}.$$

Hemos de probar que para cualquier $a = (a_n)_n \in \mathcal{S}$ y cualquier conjunto $B$ $U$-acotado, la seminorma $q(f) = \sum_{m=0}^{\infty} |a_m| \|P_m f\|_B$, $f \in \mathcal{H}_b(U)$ es continua en $(\mathcal{H}_b(U), \tau_b)$.

Sea $t > 1$ tal que $t^2 B$ sigue siendo $U$-acotado.

Como $\limsup_{m\to\infty} |a_m|^{1/m} \leq 1$ existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq m_0$ entonces $|a_m|^{1/m} < t$. Luego, usando las desigualdades de Cauchy en el último paso,

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} |a_m| \|P_m f\|_B \leq \sum_{m=m_0}^{\infty} t^m \|P_m f\|_B \leq$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{t^m} \|P_m f\|_{t^2 B} \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{t^m} \|f\|_{t^2 B} < \infty,$$

lo que prueba el lema. ∎

**Proposición 1.3.3** *Sea $E$ un espacio de Fréchet y $U$ un abierto equilibrado de $E$. $((\mathcal{P}(^m E), \tau_{bcl}))_m$ es una descomposición $\mathcal{S}$-Schauder de $(\mathcal{H}_b(U), \tau_{bcl})$.*

Demostración: Hemos de probar que dado $a = (a_n)_n \in \mathcal{S}$, si $f \in \mathcal{H}_b(U)$, entonces $\sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m f$ converge en $(\mathcal{H}_b(U), \tau_{bcl})$. Por el Lema 1.3.2 $g = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m f \in (\mathcal{H}_b(U)$. Luego la sucesión de sumas parciales $(\sum_{m=0}^{n} a_m P_m f)_n$ converge a $g$ para $\tau_b$ y por tanto para $\tau_0$. Como además $\{\sum_{m=0}^{n} a_m P_m f : n \in \mathbb{N}\} \cup \{g\}$ es $\tau_b$-acotado la convergencia se da para $\tau_{bcl}$. ∎

**Proposición 1.3.4** *Sea $E$ un espacio de Fréchet. $((\mathcal{P}(^m E), \tau_{bcl}))_m$ es una descomposición de Schauder absoluta de $(\mathcal{H}_b(E), \tau_{bcl})$.*

Demostración: Hemos de probar que dada una seminorma continua $p$ en $(\mathcal{H}_b(E), \tau_{bcl})$ la serie $q(f) = \sum_{m=0}^{\infty} p(P_m f)$ converge para cualquier $f \in \mathcal{H}_b(E)$ y define una seminorma $\tau_{bcl}$-continua. Para ello tomemos $C \subset \mathcal{H}_b(E)$ $\tau_b$-acotado. Definimos el conjunto $D$ dado por

$$D := \Gamma(C \cup \{P_m f : f \in C, \ m = 0, 1, 2, ...\})$$

donde $\Gamma(H)$ denota la envoltura absolutamente convexa de un conjunto $H$. Como por las desigualdades de Cauchy

$$\|2^m P_m f\|_A = \|P_m f\|_{2A} \leq \|f\|_{2A}$$

para todo $A \subsetneq E$ acotado y equilibrado, $D$ es $\tau_b$-acotado por lo que $\tau_{bcl}$ coincide con $\tau_0$ en $D$. Luego la restricción de $p$ a $D$ es $\tau_0$ y por tanto $\tau_b$ continua. De aquí que existan $B \subset E$ acotado y $K > 0$ tales que si $\|g\|_B \leq K$ entonces $p(g) \leq 1\ \forall g \in D$. Sea $M := \text{máx}\{K, \sup_{g \in D} \|g\|_B\}$. Si $f \in C$, como $\frac{K}{2M} < 1$ y $D$ es equilibrado entonces $\frac{K}{2M} 2^m P_m f \in D$ y como $\|\frac{K}{2M} 2^m P_m f\|_B \leq \frac{k}{2M} M < K$ entonces $p(\frac{K}{2M} 2^m P_m f) \leq 1$. De donde $p(P_m f) \leq \frac{2M}{K 2^m}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, para todo $f \in C$. Esta desigualdad muestra que la serie $\sum_{m=0}^{\infty} p(P_m f)$ converge uniformente en $C$. Por el teorema de Banach-Dieudonné para polinomios la restricción de $p$ a cada $\mathcal{P}(^m E)$ es $\tau_0$-continua, y como el límite uniforme de funciones continuas es continuo concluimos que la seminorma $q(f) = \sum_{m=0}^{\infty} p(P_m f)$ es $\tau_0$-continua en $C$, siendo $C$ un subconjunto acotado arbitrario de $\mathcal{H}_b(E)$. Esto prueba que $q$ es $\tau_{bcl}$-continua. ∎

Si repasamos rápidamente las pruebas de los tres últimos resultados nos damos cuenta de que éstos son válidos para cualquier espacio localmente convexo $E$.

**Proposición 1.3.5** *Sea $E$ un espacio de Fréchet y $U$ un abierto equilibrado de $E$. Sea $p$ una seminorma $\tau_b$-continua en $\mathcal{H}_b(U)$, entonces $p$ es $\tau_{bcl}$-continua en $\mathcal{H}_b(U)$ si y solamente si su restricción a cada $\mathcal{P}(^m E)$ es $\tau_0$-continua.*

Demostración: La condición es claramente necesaria como consecuencia del Teorema de Banach-Dieudonné para polinomios.

Supongamos ahora que $p$ es una seminorma $\tau_b$-continua cuya restricción a cada $\mathcal{P}(^m E)$ es $\tau_0$-continua. Probemos que la seminorma

$$q(f) = \sum_{m=0}^{\infty} p(P_m f)$$

es $\tau_{bcl}$-continua.

Tenemos que probar que $q$ está bien definida y es $\tau_0$-continua sobre los $\tau_b$-acotados. Tomemos para ello un $\tau_b$-acotado $C$ y sea $\{f_i\}_{i\in I}$ una red en $C$ $\tau_0$-convergente a un elemento $f \in C$. Hemos de probar que $q(f_i)$ converge a $q(f)$. Como $p$ es $\tau_b$-continua existe un subconjunto $U$-acotado $B$ de $U$, que podemos suponer sin pérdida de generalidad equilibrado, y un $k > 0$ tales que

$$p(f) \leq k\|f\|_B \quad \forall f \in \mathcal{H}_b(U).$$

Sea $t > 1$ tal que $tB$ es $U$-acotado. Al ser $C$ $\tau_b$-acotado, existe $M > 0$ tal que $\|g\|_{tB} < M$ para todo $g \in C$. Así pues,

$$t^m p(P_m g) \leq kt^m \|P_m g\|_B = k\|P_m g\|_{tB} \leq k\|g\|_{tB} < kM$$

es decir

$$p(P_m g) \leq \frac{1}{t^m} kM \quad \forall g \in C$$

de donde la serie $\sum_{m=0}^{\infty} p(P_m g)$ converge uniformemente en $C$. Como $C$ es arbitrario esto prueba por un lado que $q$ está bien definida, pero además al ser la restricción de $p$ a cada $\mathcal{P}(^m E)$ $\tau_0$-continua y como el límite uniforme de funciones continuas es continuo, concluimos que $q$ es $\tau_0$-continuo en $C$. Por tanto $q$ es $\tau_{bcl}$-continua. Por último, como

$$p(f) \leq \sum_{m=0}^{\infty} p(P_m f) = q(f) \quad \forall f \in \mathcal{H}_b(U)$$

la seminorma $p$ es $\tau_{bcl}$-continua. ∎

Notar que la condición suficiente es válida en general para espacios localmente convexos mientras que la condición necesaria es válida para espacios localmente convexos metrizables ya que hacemos uso del teorema de Banach-Dieudonné para polinomios válido en este contexto (Teorema 2.1 de [33]).

**Nota 1.3.6** Esta proposición nos permite simplificar considerablemente las pruebas de los Teoremas 1.1.2 y 1.2.1 dado que la seminorma $T$ que se define por

$$T(f) = \sum_{m=0}^{\infty} |P_m f(x_m/t)| \quad \forall f \in \mathcal{H}_b(U)$$

donde la sucesión $(x_m/t)$ es la dada según cada una de las pruebas, es $\tau_b$-continua y además

$$T(P) = |P(x_m/t)| \quad \forall P \in \mathcal{P}(^m E)$$

por lo que $T|_{\mathcal{P}(^m E)}$ es $\tau_0$-continua para cada $m \in \mathbb{N}$. Así pues, obtenemos directamente que $T$ es $\tau_{bcl}$-continua.

Para obtener resultados plenamente satisfactorios necesitamos trabajar con espacios de Banach.

**Proposición 1.3.7** *Sea $X$ un espacio de Banach y $U$ un abierto equilibrado de $X$. Una seminorma $p$ en $\mathcal{H}_b(U)$ es $\tau_{bcl}$-continua si y solamente si $p$ es $\tau_b$-continua y su restricción a cada $\mathcal{P}(^m X)$ es $\tau_0$-continua.*

Demostración: Al ser $X$ un espacio de Banach, por el Lema 1.1.1 $\tau_{bcl} \leq \tau_b$ en $\mathcal{H}_b(U)$. Luego toda seminorma $\tau_{bcl}$-continua es $\tau_b$-continua y basta aplicar ahora la proposición anterior. ∎

Las ideas que aparecen en la prueba de la Proposición 1.3.5 junto con un argumento de tonelación nos llevan a obtener la siguiente descripción de las seminormas $\tau_{bcl}$-continuas.

**Proposición 1.3.8** *Sea $X$ un espacio de Banach y $U$ un abierto equilibrado de $X$. La topología $\tau_{bcl}$ en $\mathcal{H}_b(U)$ está generada por todas las seminormas $p$ que verifican:*

*i) $p(f) = \sum_{m=0}^{\infty} p(P_m f)$ para todo $f \in \mathcal{H}_b(U)$, y*

*ii) la restricción de $p$ a cada $\mathcal{P}(^m X)$ es $\tau_0$-continua.*

Demostración: Sea $p$ una seminorma que verifica i) y ii). Para ver que $p$ es $\tau_{bcl}$-continua basta probar por la Proposición 1.3.7 que $p$ es $\tau_b$-continua, o lo que es lo mismo, que el conjunto $V$ dado por

$$V := \{f \in \mathcal{H}_b(U) : p(f) \leq 1\}$$

es un $\tau_b$-entorno de cero. Bastará probar que $V$ es un tonel puesto que por ser $X$ un espacio de Banach $(\mathcal{H}_b(U), \tau_b)$ es de Fréchet y por tanto tonelado.

Por ser $p$ seminorma el conjunto $V$ es absolutamente convexo y absorbente. Además por la condición i) se tiene que

$$V = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{f \in \mathcal{H}_b(U) : \sum_{m=0}^{n} p(P_m f) \leq 1\}$$

que junto con ii) prueba que $V$ es $\tau_0$-cerrado y por tanto $\tau_b$-cerrado. Así pues $V$ es un tonel en el espacio de Fréchet $(\mathcal{H}_b(U), \tau_b)$ y consecuentemente un $\tau_b$-entorno de cero.

Hasta aquí hemos probado que toda seminorma que verifique i) y ii) es $\tau_{bcl}$-continua.

Por el Lema 1.1.1 cada seminorma $q$ $\tau_{bcl}$-continua es $\tau_b$-continua. De aquí que por la Proposición 1.3.2 la seminorma $p_q$ dada por

$$p_q(f) = \sum_{m=0}^{\infty} q(P_m f)$$

está bien definida y es $\tau_b$-continua. Como $p_q$ coincide con $q$ sobre $\mathcal{P}(^m X)$ para todo $m \in \mathbb{N}$, tenemos por una parte por el Teorema de Banach-Dieudonné para polinomios que $p_q$ es $\tau_0$-continua sobre cada $\mathcal{P}(^m X)$ y por otra parte que

$$p_q(f) = \sum_{m=0}^{\infty} q(P_m f) = \sum_{m=0}^{\infty} p_q(P_m f)$$

para cada $f \in \mathcal{H}_b(U)$. Por la Proposición 1.3.7 $p_q$ es $\tau_{bcl}$-continua. Finalmente, como $q \leq p_q$, se sigue que la familia $(p_q)$ es un sistema fundamental de seminormas continuas para $\tau_{bcl}$. ∎

**Proposición 1.3.9** *Sea $X$ un espacio de Banach y $U$ un abierto equilibrado de $X$. Entonces $(\mathcal{P}(^mX), P_m)$ es una descomposición de Schauder absoluta de $(\mathcal{H}_b(U), \tau_{bcl})$.*

Demostración: Es consecuencia directa del apartado i) de la proposición anterior. ∎

# Capítulo 2

# Espacios ponderados de funciones holomorfas

Dado el interés de los espacios ponderados en varios campos del análisis funcional, son muchos los autores que han estudiado dichos espacios (entre estos autores cabe destacar Rubel y Shields [42], Williams [49], Bierstedt y Summers [9] y Bierstedt y Bonet [6]). Sin embargo, todos estos trabajos se limitan a espacios ponderados de funciones holomorfas definidas en (abiertos de) espacios de dimensión finita. En este capítulo definimos espacios ponderados de funciones holomorfas cuando éstas están definidas en (abiertos de) espacios de Banach de dimensión infinita.

En el primer apartado nos limitamos al estudio de dichos espacios para un solo peso. Así denotaremos por $\mathcal{H}v(U)$ el espacio ponderado, para un único peso $v$, de funciones holomorfas de tipo acotado definidas en un abierto $U$ de un espacio de Banach $X$. Gracias al peso $v$ definimos una norma en $\mathcal{H}v(U)$ que le confiere estructura de espacio de Banach. En conexión con el capítulo 1 de esta memoria, estudiamos la topología localmente convexa más fina en $\mathcal{H}v(U)$ que coincide con $\tau_0$ sobre los conjuntos acotados de $\mathcal{H}v(U)$, y caracterizamos un sistema de seminormas que generan dicha topología. También obtenemos que el dual fuerte de $\mathcal{H}v(U)$ con esta topología es topológicamente isomorfo al predual de $\mathcal{H}v(U)$ con la norma asociada al peso $v$. Un interés añadido de estos espacios es que se pueden considerar una generalización del espacio $\mathcal{H}^\infty(U)$ de funciones holomorfas y acotadas sobre $U$ sin más que considerar como peso la función constante 1. Gracias a ello, estos resultados generalizan a su vez los obtenidos por Mujica para $\mathcal{H}^\infty(U)$ (Teoremas 4.4 y 4.5 de [36]).

## 2.1 El espacio $\mathcal{H}v(U)$

Sea $X$ un espacio de Banach y $U \subset X$ un subconjunto abierto. Llamamos peso a toda función $v$ definida en $U$ y con valores reales. En este apartado trabajaremos con pesos que supondremos siempre positivos (esto es $v(x) > 0\ \forall x \in U$) y y que alcancen el ínfimo sobre cualquier conjunto compacto, esto es, si $K$ es un conjunto compacto, existe $x_0 \in K$ tal que $v(x_0) = \text{mín}_{x\in K} v(x) > 0$. Esta condición se verifica, por ejemplo, si $v$ es semicontinua inferiormente.

Definimos el espacio

$$\mathcal{H}v(U) := \{f \in \mathcal{H}(U) : \|f\|_v := \sup_{x\in U} v(x)|f(x)| < \infty\}$$

y lo dotamos con la topología dada por la norma $\|.\|_v$, que llamaremos $\tau_v$.

Recordemos que una función $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ se anula en la frontera de $U$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $A \subset U$ $U$-acotado tal que

$$|g(x)| < \epsilon \quad \forall x \in U \setminus A.$$

Definimos también el subespacio $\mathcal{H}v_0(U)$ de $\mathcal{H}v(U)$ mediante

$$\mathcal{H}v_0(U) := \{f \in \mathcal{H}v(U) : vf \text{ se anula en la frontera de } U\}$$

**Proposición 2.1.1** *Si $U$ es un abierto acotado se cumple:*

*i) $\mathcal{H}v(U)$ contiene a los polinomios continuos si, y sólo si, $v$ está acotado.*

*ii) $\mathcal{H}v_0(U)$ contiene a los polinomios continuos si, y sólo si, $v$ se anula en la frontera de $U$.*

Demostración. Si $\mathcal{H}v(U)$ ($\mathcal{H}v_0(U)$) contiene a los polinomios continuos, en particular contiene a las constantes, por lo que el peso está acotado (se anula en la frontera de $U$, respectivamente).

Supongamos que $v$ está acotado. Por ser $U$ acotado, todo polinomio continuo $P$ está acotado en $U$. Así pues,

$$\sup_{x\in U} v(x)|P(x)| \leq \sup_{x\in U} v(x) \sup_{x\in U} |P(x)| < \infty,$$

y, por tanto, $\mathcal{H}v(U)$ contiene a los polinomios continuos.

Supongamos finalmente que $v$ se anula en la frontera de $U$. Sea $P$ un polinomio continuo y $\epsilon > 0$. Por ser $U$ acotado, $P$ está acotado en $U$, digamos por $M$. Como $v$ se anula en la frontera de $U$ existe $A \subset U$ $U$-acotado tal que $v(x) < \epsilon/M$ para todo $x \in U \setminus A$. Luego

$$v(x)|P(x)| \leq v(x)M < \epsilon \quad \forall x \in U \setminus A,$$

lo que prueba que $v|P|$ se anula en la frontera de $U$. ∎

Veamos algunas propiedades de $\tau_v$.

**Proposición 2.1.2** *En $\mathcal{H}v(U)$, la topología $\tau_v$ es más fina que $\tau_0$.*

Demostración: Sea $K \subset U$ compacto y sea $m := \min_{x\in K} v(x) > 0$. Entonces,

$$|f(x)| = \frac{v(x)}{v(x)}|f(x)| \leq \frac{1}{m}\|f\|_v \quad \forall x \in K \quad \forall f \in \mathcal{H}_v(U),$$

de donde

$$\sup_{x\in K} |f(x)| \leq \frac{1}{m}\|f\|_v \quad \forall f \in \mathcal{H}_v(U),$$

lo que prueba que $\tau_0 \leq \tau_v$. ∎

Denotemos por $B_v := \{f \in \mathcal{H}v(U) : \|f\|_v \leq 1\}$.

**Proposición 2.1.3** *El conjunto $B_v$ es $\tau_0$-compacto.*

Demostración: Como $\tau_0 \leq \tau_v$, $B_v$ es $\tau_0$-acotado. Falta probar que $B_v$ es cerrado en el espacio de Montel $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$. Sea $(f_d)_{d\in D}$ una red en $B_v$ $\tau_0$-convergente a $f \in \mathcal{H}(U)$, hemos de probar que $\|f\|_v \leq 1$. Como la $\tau_0$-convergencia implica la convergencia puntual, para cada $x \in U$, la red $(v(x)|f_d(x)|)_{d\in D}$ converge a $v(x)|f(x)|$, y como para cada $d \in D$

$$\sup_{x\in U} v(x)|f_d(x)| = \|f_d\|_v \leq 1$$

concluimos que

$$\sup_{x\in U} v(x)|f(x)| = \|f\|_v \leq 1$$

∎

**Proposición 2.1.4** *$(\mathcal{H}v(U), \|.\|_v)$ es un espacio de Banach.*

Demostración: De la proposición anterior se sigue que, en particular, la topología $\tau_v$ posee un sistema fundamental de entornos de cero que son $\tau_0$-cerrados en $\mathcal{H}(U)$. Además, $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ es completo y como $\tau_0 \leq \tau_v$, el resultado 18.4(4) de [31] nos permite concluir que $(\mathcal{H}v(U), \|.\|_v)$ es completo. ∎

Así pues, $(\mathcal{H}v(U), \|.\|_v)$ es un espacio de Banach cuya bola unidad cerrada es $\tau_0$-compacta. De aquí que, por el Teorema de Ng [38], el espacio

$$Gv(U) := \{\phi \in \mathcal{H}v(U)' : \phi|_{B_v} \text{ es } \tau_0 - \text{continua}\}$$

con la topología inducida por la norma de $\mathcal{H}v(U)'$ es un espacio de Banach que verifica

$$Gv(U)' = \mathcal{H}v(U)$$

mediante un isomorfismo isométrico.

Consideremos en $\mathcal{H}v(U)$ la topología (localmente convexa) más fina que coincide con $\tau_0$ sobre los conjuntos de $\mathcal{H}v(U)$ $\|.\|_v$-acotados. De acuerdo con nuestra notación, denotaremos a esta topología $\tau_{bc}$ ($\tau_{bcl}$ respectivamente).

Recordemos que un espacio de Saks es una terna $(E, \|.\|, \tau)$ donde $E$ es un espacio vectorial, $\tau$ es una topología localmente convexa en $E$ y $\|.\|$ es una norma en $E$ de modo que la bola unidad cerrada $B$ de $(E, \|.\|)$ es $\tau$-acotada y $\tau$-cerrada. Además, en el espacio de Saks $(E, \|.\|, \tau)$ se puede definir la topología mixta $\gamma[\|.\|, \tau]$ del siguiente modo: si $\mathcal{U} := (U_n)_n$ es una sucesión de $\tau$-entornos de cero absolutamente convexos, la familia formada por los conjuntos

$$\gamma(\mathcal{U}) := \cup_{n=1}^{\infty}(U_1 \cap B + \ldots + U_n \cap nB)$$

al variar $\mathcal{U}$, forma una base de entornos de cero para una topología localmente convexa en $E$ que denotamos $\gamma[\|.\|, \tau]$. Dicha topología es la topología localmente convexa más fina en $E$ que coincide con $\tau$ sobre los acotados de $(E, \|.\|)$ (Proposición I.1.5 de [12]), y si $B$ es $\tau$-compacto entonces $\gamma[\|.\|, \tau]$ es la topología más fina verificando dicha condición (Corolario I.4.2 de [12]).

Como la bola unidad cerrada $B_v$ de $(\mathcal{H}_v(U), \|.\|_v)$ es $\tau_0$-compacta (Proposición 2.1.3), el espacio $(\mathcal{H}_v(U), \|.\|_v, \tau_0)$ es de Saks y las topologías $\gamma := \gamma[\|.\|_v, \tau_0]$, $\tau_{bcl}$ y $\tau_{bc}$ coinciden.

Agradezco a K.D. Bierstedt el haberme hecho notar las siguientes consideraciones:

Consideremos el espacio $\mathcal{C}(U)$ de las funciones continuas de $U$ en $\mathbb{C}$. El espacio ponderado de funciones continuas en $U$ viene dado por

$$\mathcal{C}v(U) := \{f \in \mathcal{C}(U) : \|f\|_v := \sup_{x \in U} v(x)|f(x)| < \infty\}$$

y se le dota de la norma $\|.\|_v$. En $\mathcal{C}v(U)$ consideramos la topología mixta $\gamma_c$, esto es, la topología (localmente convexa) más fina que coincide con $\tau_0$ sobre los $\|.\|_v$-acotados de $\mathcal{C}v(U)$. Como todo $\|.\|_v$-acotado de $\mathcal{H}v(U)$ es un $\|.\|_v$-acotado en $\mathcal{C}v(U)$, la topología inducida por $\gamma_c$ en $\mathcal{H}v(U)$ es menos fina (no estrictamente) que $\gamma$. K.D. Bierstedt probó la igualdad de ambas topologías del siguiente modo:

**Proposición 2.1.5** $(\mathcal{C}v(U), \gamma_c)$ *induce en* $\mathcal{H}v(U)$ *la topología* $\gamma$.

Demostración. Como $(\mathcal{C}v(U), \gamma_c)$ induce una topología menos fina que $\gamma$ en $\mathcal{H}v(U)$, la inclusión canónica

$$(\mathcal{H}v(U), \gamma) \longrightarrow (\mathcal{C}v(U), \gamma_c)$$

es continua. Ahora bien, por [44] $(\mathcal{C}v(U), \gamma_c)$ es un espacio $gDF$ (Recordemos que un espacio localmente convexo $(E, \tau)$ es un espacio $gDF$ si posee un sistema fundamental numerable de acotados $\mathcal{A}$ y $\tau$ es la topología localmente convexa más fina que coincide con $\tau$ sobre los elementos de $\mathcal{A}$) y como $(\mathcal{H}v(U), \gamma)$ es semi-Montel, se sigue por el Lema de Baernstein (ver, por ejemplo, Teorema 8.3.55 de [39]) que $\gamma_c$ induce $\gamma$ sobre $\mathcal{H}v(U)$. ∎

En el siguiente teorema damos explícitamente un sistema fundamental de seminormas para la topología $\tau_{bcl}$. En [43] probábamos este teorema para un peso continuo, positivo y tal que

$$0 < \inf_{x \in A} v(x) \leq \sup_{x \in A} v(x) < \infty$$

para todo conjunto $A$ $U$-acotado. Recordemos que en esta ocasión nuestro peso $v$ es una función positiva y que alcanza el ínfimo en los conjuntos compactos. El Teorema 2.1.6 es una generalización de los Teoremas 4.4 y 4.5 de [36] y, si bien en [43] utilizábamos una prueba paralela a la de éstos, y que sigue siendo válida en este caso, ahora ofrecemos otra más corta basada en ciertos resultados de [12] y hacia la que me orientó K.D. Bierstedt.

**Teorema 2.1.6** *Las topologías $\tau_{bcl}$ y $\tau_{bc}$ coinciden.*

*Además, esta topología está generada por las seminormas de la forma*

$$p(f) = \sup_j \alpha_j v(y_j)|f(x_j)|, \quad f \in \mathcal{H}v(U),$$

*donde $(x_j)_j$ e $(y_j)_j$ varían sobre todas las sucesiones de $U$ y $(\alpha_j)_j$ varía en las sucesiones de números positivos que tienden a cero.*

En la prueba del Teorema 2.1.6 haremos uso del siguiente lema.

**Lema 2.1.7** *Para cada $K \subset U$ compacto y $f \in \mathcal{H}v(U)$ se verifica*

$$\min_{x\in K} v(x) \sup_{x\in K} |f(x)| \leq \sup_{x\in K} v(x)|f(x)|.$$

Demostración del Lema 2.1.7: Sea $m := \min_{x\in K} v(x) > 0$. Entonces

$$|f(x)| = \frac{v(x)}{v(x)}|f(x)| \leq \frac{1}{m} \sup_{x\in K} v(x)|f(x)| \quad \forall x \in K,$$

de donde,

$$\min_{x\in K} v(x) \sup_{x\in K} |f(x)| \leq \sup_{x\in K} v(x)|f(x)|.$$

■

Demostración del Teorema 2.1.6: Sólo falta probar que las seminormas dadas en el enunciado del teorema generan la topología.

Consideremos las seminormas

$$p_A(f) = \min_{x\in A} v(x) \max_{x\in A} |f(x)|$$

donde $A$ varía en los subconjuntos finitos de $U$. Como todo conjunto finito es compacto, cada $p_A$ es $\tau_0$-continua.

Veamos en primer lugar que para cada familia finita $\{A_i\}_{i\in F}$ de subconjuntos finitos de $U$ existe una constante $c > 0$ tal que

$$\sup_{i\in F} p_{A_i} \leq c\; p_{\cup_{i\in F} A_i}.$$

Como

$$\inf_{x\in A_i} v(x) \sup_{x\in A_i} |f(x)| \leq \inf_{x\in A_i} v(x) \sup_{x\in \cup_{i\in F} A_i} |f(x)| \frac{\inf_{x\in\cup_{i\in F} A_i} v(x)}{\inf_{x\in\cup_{i\in F} A_i} v(x)}$$

$c = \max_{i\in F} \frac{\inf_{x\in A_i} v(x)}{\inf_{x\in\cup_{i\in F} A_i} v(x)}$ sirve.

Por otra parte $\|.\|_v = \sup_A p_A$. En efecto, por el Lema 2.1.7

$$\inf_{x\in A} v(x) \sup_{x\in A} |f(x)| \leq \sup_{x\in A} v(x)|f(x)|$$

de donde $\sup_A p_A \leq \|.\|_v$. Supongamos que existe $f \in \mathcal{H}v(U)$ tal que $\sup_A p_A(f) < \|f\|_v$. Sea $c > 0$ tal que $\sup_A p_A(f) < c < \|f\|_v$. En particular para $A = \{x\}$, $x \in U$, tenemos que $v(x)|f(x)| < c < \|f\|_v$ para todo $x \in U$. De aquí llegamos a la contradicción $\|f\|_v = \sup_{x\in U} v(x)|f(x)| \leq c < \|f\|_v$, por lo que se tiene que $\|.\|_v = \sup_A p_A$.

Teniendo en cuenta estas dos propiedades de la familia de seminormas $\mathcal{A} := \{p_A : A \subset U \text{ finito}\}$ y dado que $B_v$ es $\tau_0$-compacto, por la Proposición I.4.5 de [12] se sigue que la familia de seminormas dadas por

$$\tilde{p} : f \rightsquigarrow \sup_n \lambda_n^{-1} p_n(f)$$

donde $(p_n)_n$ es una sucesión de seminormas de $\mathcal{A}$ y $(\lambda_n)_n$ es una sucesión de números positivos que crece a infinito, genera la topología $\gamma = \tau_{bc} = \tau_{bcl}$. Lo que prueba el teorema. ∎

**Proposición 2.1.8** *Se verifica:*
*i)* $(\mathcal{H}v(U), \|.\|_v)$ *y* $(\mathcal{H}v(U); \tau_{bc})$ *tienen los mismos acotados.*
*ii)* $Gv(U) = (\mathcal{H}v(U), \tau_{bc})'_b$.

*iii)* $(\mathcal{H}v(U), \tau_{bc}) = (Gv(U)', \tau_c)$*, donde* $\tau_c$ *es la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos compactos de* $Gv(U)$*.*

Demostración: i) Es consecuencia de la teoría de espacios de Saks (Proposición 1.11 de [12]).
ii) Se sigue de la definición de $\tau_{bc}$ y $Gv(U)$ que $Gv(U) = (\mathcal{H}v(U), \tau_{bc})'$ algebraicamente, y por i) la igualdad es topológica.
iii) Sea $r > 0$ y sea $(f_d)_d$ una red en $rB_v$ que $\tau_0$-converge a una función $f \in rB_v$. De la propia definición de $Gv(U)$, la red $(f_d)_d$ converge a $f$ en $(rB_v, \sigma(Gv(U)', Gv(U)))$, por lo que $\tau_0$ es más fina que la topología $\sigma(Gv(U)', Gv(U))$. Pero al ser $rB_v$ $\tau_0$-compacto, ambas topologías, $\tau_0$ y $\sigma(Gv(U)', Gv(U))$, coinciden sobre $rB_v$ para cualquier $r > 0$. Finalmente, el dual del espacio de Banach $Gv(U)$ es isométricamente isomorfo a $(\mathcal{H}v(U), \|.\|_v)$, por lo que el teorema clásico de Banach-Dieudonné nos asegura que $\tau_c$ es la topología más fina sobre $\mathcal{H}v(U)$ que coincide con $\tau_0$ sobre los subconjuntos acotados de $\mathcal{H}v(U)$. ∎

**Nota 2.1.9** Denotemos por $U_X$ la bola unidad abierta de $X$. Si $\mathcal{H}_v(U_X)$ contiene a los polinomios (equivalentemente, si el peso $v$ es acotado) entonces $\tau_{bc}$ es estrictamente más fina que $\tau_0$. De hecho, si $\tau_0 = \tau_{bc}$, entonces la Proposición 2.1.8 i) implicaría que $\tau_0$ y $\|.\|_v$ tendrían los mismos conjuntos acotados, pero tal y como vamos a ver, esto es falso.

Dada una sucesión $(x_n)_n$ en $U_X$ convergente en norma a 1, existe una función holomorfa $f \in \mathcal{H}_b(U_X)$ tal que $f(x_n) = \frac{n}{v(x_n)}$, $n = 1, 2, \ldots$ (Teorema 3 de [46]). Como $v(x_n)f(x_n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $f$ no pertenece a $\mathcal{H}_v(U_X)$. Esto implica que la familia $\{\sum_{m=0}^{N} P_m f : N = 0, 1, 2 \ldots\}$ no es $\|.\|_v$-acotada. Pero la serie de Taylor de $f$ $\tau_0$-converge a $f$, y por tanto la familia $\{\sum_{m=0}^{N} P_m f : N = 0, 1, 2 \ldots\}$ es $\tau_0$-acotada. Así pues $\tau_{bc}$ es strictamente más fina que $\tau_0$.

De hecho, mediante argumentos análogos se obtiene que para todo subconjunto no vacío, abierto y absolutamente convexo de $X$ y todo peso $v$ tal que $\mathcal{H}_v(U)$ contiene a los polinomios, la topología $\tau_{bc}$ es estrictamente más fina que $\tau_0$. Un ejemplo de esta situación aparece cuando $U = X$ y $v(x) = e^{-\|x\|}$, $x \in X$.

Notar que 1.1.3 1) puede considerarse un caso particular de este resultado.

A partir de ahora supondremos que $U \subset X$ es un abierto equilibrado. Cada $f \in \mathcal{H}(U)$ posee un desarrollo en serie de Taylor en el origen

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j f(x), \quad x \in U$$

que converge uniformemente a $f$ sobre los compactos de $U$.

Definimos las medias de Cesàro de $f$ como

$$C_n f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^{n} \left( \sum_{k=0}^{l} P_k f(x) \right) =$$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left( \sum_{l=k}^{n} P_k f(x) \right) = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) P_k f(x)$$

para $x \in U$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Cada $C_n f$ es un polinomio de grado $\leq n$.

**Lema 2.1.10** *Para cada $f \in \mathcal{H}(U)$, la sucesión $(C_n f)_n$ $\tau_0$-converge a $f$.*

Demostración: Sea $K$ un subconjunto compacto de $U$, y sea $\epsilon > 0$. Llamemos

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} P_k f.$$

Como $(S_n)_n$ $\tau_0$-converge a $f$, la sucesión $(\|S_n - f\|_K)_n$, donde

$$\|S_n - f\|_K := \sup_{x \in K} |S_n(x) - f(x)|,$$

tiende a cero. Por tanto, la sucesión de las medias aritméticas

$$\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\|S_k - f\|_K\right)_n$$

también tiende a cero, esto es $\exists n_0$ tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\|S_k - f\|_K < \epsilon,$$

de donde

$$\|C_n f - f\|_K = \left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(S_k - f)\right\|_K \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\|S_k - f\|_K < \epsilon,$$

lo que prueba el lema. ∎

**Lema 2.1.11** *Para $f \in \mathcal{H}(U)$ y $x \in U$, se verifica:*

$$|C_n f(x)| \leq \max_{|t|=1}|f(tx)| \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Demostración: Fijemos $f$ y $x$. Como $U$ es equilibrado, $\{tx : t \in \overline{\Delta}\} \subset U$, donde $\Delta := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Definimos $g(t) := f(tx)$, $t \in \overline{\Delta}$. Así definida,

$$g \in \mathcal{A}(\overline{\Delta}) := \{h : \overline{\Delta} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ continua } : h|_{\Delta} \text{ es holomorfa}\}$$

y además

$$g(t) = f(tx) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k f(tx) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k f(x) t^k \qquad (1)$$

por lo que la serie de la derecha de (1) es la serie de Taylor de $g$ en cero.

La desigualdad de Féjer

$$\max_{t=1}|C_n h(t)| \leq \max_{t=1}|h(t)| \quad h \in \mathcal{A}(\overline{\Delta}),\ n \in \mathbb{N}$$

implica

$$|C_n f(x)| = |\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(\sum_{l=0}^{k} P_l f(x))| = |C_n g(1)| \leq$$

$$\max_{|t|=1} |g(t)| = \max_{|t|=1} |f(tx)|.$$

■

**Definición 2.1.12** *Sea $X$ un espacio de Banach y $U$ un subconjunto abierto equilibrado de $X$. Un peso $v$ se dice que es radial si $v(tx) = v(x)$ $\forall t \in \mathbb{C} : |t| = 1$, $\forall x \in U$.*

**Proposición 2.1.13** *Sea $X$ un espacio de Banach, $U$ un subconjunto abierto equilibrado de $X$ y $v$ un peso positivo, que alcance el ínfimo en los compactos de $U$ y radial, definido en $U$. La sucesión $(C_n)_n$ donde*

$$C_n : f \in \mathcal{H}v(U) \rightsquigarrow C_n f, \quad n \in \mathbb{N},$$

*tiene las siguientes propiedades:*
*a) Cada $C_n$ es un operador lineal y continuo de $\mathcal{H}v(U)$ en $\mathcal{H}v(U)$. De hecho, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $f \in \mathcal{H}v(U)$ se cumple:*

$$\sup_{x\in U} v(x)|C_n f(x)| \leq \sup_{x\in U} v(x)|f(x)|$$

*de donde $(C_n)_n$ es equicontinuo en el espacio $\mathcal{L}(\mathcal{H}v(U), \mathcal{H}v(U))$ de las aplicaciones lineales y continuas de $\mathcal{H}v(U)$ en $\mathcal{H}v(U)$.*
*b) La sucesión $(C_n f)_n$ $\tau_{bc}$-converge a $f$, $\forall f \in \mathcal{H}v(U)$.*
*c) La sucesión $(C_n)_n$ es equicontinuo en $\mathcal{L}((\mathcal{H}v(U), \tau_{bc}), (\mathcal{H}v(U), \tau_{bc}))$.*
*d) La sucesión $(C_n)_n$ es equicontinuo en $\mathcal{L}((\mathcal{H}v(U), \tau_0), (\mathcal{H}v(U), \tau_0))$.*

Demostración: a) Es claro que cada $C_n$ es lineal, además si $f \in \mathcal{H}v(U)$, al ser $v$ radial,

$$\|P_m f\|_v = \sup_{x\in U} v(x)|P_m f(x)| \leq \sup_{x\in U} v(x) \sup_{|t|\leq 1} |P_m f(tx)| \leq$$

$$\sup_{x\in U} v(x) \sup_{|t|=1} |f(tx)| = \sup_{x\in U} \sup_{|t|=1} v(tx)|f(tx)| \leq \|f\|_v \ \forall m \in \mathbb{N},$$

esto es, $P_m f \in \mathcal{H}v(U)$ $\forall m$, por lo que $C_n f \in \mathcal{H}v(U)$.

Además por el Lema 2.1.11 y por ser $U$ equilibrado,

$$\|C_n f\|_v = \sup_{x\in U} v(x)|C_n f(x)| \leq \sup_{x\in U} v(x) \max_{|t|=1} |f(tx)| =$$

$$\sup_{x\in U} \max_{|t|=1} v(tx)|f(tx)| = \sup_{x\in U} v(x)|f(x)| = \|f\|_v, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

b) Sea $f \in \mathcal{H}v(U)$. Por el Lema 2.1.10 la sucesión $(C_n f)_n$ $\tau_0$-converge a $f$ y como $\|C_n f\|_v \leq \|f\|_v$, el conjunto $\{C_n f : n \in \mathbb{N}\}$ es $\|.\|_v$-acotado. Luego por la definición de $\tau_{bc}$, $(C_n f)_n$ $\tau_{bc}$-converge a $f$.

c) Por el Teorema 2.1.6 sabemos que la topología $\tau_{bc}$ está generada por las seminormas de la forma

$$p(f) = \sup_j \alpha_j v(x_j)|f(y_j)|$$

donde $(x_j)_j$ e $(y_j)_j$ varían sobre todas las sucesiones de $U$ y $(\alpha_j)_j$ varía en las sucesiones de números positivos que tienden a cero. Entonces, por el Lema 2.1.11, se cumple

$$\sup_j \alpha_j v(x_j)|C_n f(y_j)| \leq \sup_j \alpha_j v(x_j) \max_{|t|=1} |f(ty_j)| = \sup_j \alpha_j v(x_j)|f(z_j)|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, y donde $z_j \in U : |f(z_j)| = \max_{|t|=1} |f(ty_j)|$, lo que prueba c).

d) Sea $K$ un subconjunto compacto de $U$. Por el Lema 2.1.11

$$\sup_{x\in K} |C_n f(x)| \leq \sup_{x\in K} \max_{|t|=1} |f(tx)| \leq \sup_{x\in e(K)} |f(x)|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, y donde $e(K) := \cup_{|t|=1} tK$ es compacto, lo que prueba d). ∎

Algunos de los resultados de la proposición anterior fueron obtenidos por Bierstedt, Bonet y Galbis en [7] para $\mathcal{H}V(G)$ donde $G$ es un abierto equilibrado de $\mathbb{C}^N$ y $V$ es un sistema de pesos no negativos, radiales y continuos definidos en $G$ y suponiendo que $\mathcal{H}V_0(G)$ contiene a los polinomios.

## 2.2 El espacio $\mathcal{H}V(X)$

Sea $X$ un espacio de Banach y $U$ un abierto de $X$. Salvo que se indique otra cosa, a lo largo de todo este apartado $V$ denota una familia de pesos no negativos definidos en $U$ que verifican la condición siguiente: (P) para cada $A \subset U$ $U$-acotado, existe $v \in V$ tal que $\inf_{x\in A} v(x) > 0$.

Definimos los espacios ponderados de funciones holomorfas como

$$\mathcal{H}V(U) := \{f \in \mathcal{H}(U) : \text{para cada}\, v \in V \ , \ \sup_{x\in U} v(x)|f(x)| < \infty\}$$

$$\mathcal{H}V_0(U) := \{f \in \mathcal{H}V(U) : \text{para cada}\, v \in V \,\text{y para cada}\, \epsilon > 0 \ \text{existe un}$$

$$U-\text{acotado}\, A \ \text{tal que} \ v(x)|f(x)| < \epsilon \ \forall x \in U \setminus A\}$$

La topología ponderada sobre $\mathcal{H}V(U)$ (y $\mathcal{H}V_0(U)$), denotada $\tau_V$, viene determinada por el sistema de seminormas $(p_v)_{v\in V}$ donde

$$p_v(f) := \sup_{x\in U} v(x)|f(x)|.$$

Llamamos $\mathcal{P}V(^mX) := \mathcal{P}(^mX) \cap \mathcal{H}V(X)$ y $\mathcal{P}V_0(^mX) := \mathcal{P}(^mX) \cap \mathcal{H}V_0(X)$.

**Proposición 2.2.1** *El espacio $\mathcal{H}V(U)$ es subespacio de $\mathcal{H}_b(U)$ y en $\mathcal{H}V(U)$ la topología $\tau_b$ es menos fina que $\tau_V$.*

Demostración: Sea $f \in \mathcal{H}V(U)$ y sea $A$ un conjunto $U$-acotado. Por la condición impuesta a los pesos, existe $v \in V$ de modo que $c := \inf_{x\in A} v(x) > 0$. Entonces

$$|f(x)| = \frac{1}{v(x)} v(x)|f(x)| \leq \frac{1}{c} p_v(f) \quad \forall x \in A,$$

esto es, $f$ está acotada en $A$ y además se tiene que

$$\sup_{x\in A}|f(x)| \leq \frac{1}{c}p_v(f),$$

para cualquier $f \in \mathcal{H}V(U)$, lo que prueba la segunda afirmación. ∎

Notemos que como consecuencia inmediata de la Proposición 2.2.1 la topología compacto-abierto $\tau_0$ es menos fina que $\tau_V$ sobre $\mathcal{H}V(U)$.

**Nota 2.2.2** i) Si partimos de una familia $V$ de pesos positivos de modo que cada $v \in V$ verifique que $0 < \inf_{x\in A} v(x) \leq \sup_{x\in A} v(x) < \infty$ para todo conjunto $A$ $U$-acotado, la condición de que $\mathcal{H}V_0(U)$ esté contenida en $\mathcal{H}V(U)$ es innecesaria. En efecto, para $\epsilon = 1$ tomamos un conjunto $A$ $U$-acotado de modo que para todo $x \in U \setminus A$ se verifica $v(x)|f(x)| < 1$. Dado que la familia $(W_n)_n$ donde, si $d(x, X\setminus U)$ denota la distancia de $x$ a $X \setminus U$,

$$W_n := \{x \in U : \|x\| < n \quad d(x, X\setminus U) > 2^{-n}\}$$

es un sistema fundamental de $U$-acotados (Proposición 7.1 de [37]), podemos suponer sin pérdida de generalidad que $A$ es abierto.

Por el Principio del módulo máximo

$$\sup_{x\in A}|f(x)| \leq \sup_{x\in Fr(A)}|f(x)|$$

donde $Fr(A)$ denota la frontera de $A$. Así,

$$|f(x)| = \frac{v(x)}{v(x)}|f(x)| \leq \frac{1}{\inf_{y\in A} v(y)} \quad \forall x \in Fr(A).$$

Luego

$$\sup_{x\in A}|f(x)| \leq \frac{1}{\inf_{y\in A} v(y)}.$$

Por tanto,

$$\sup_{x\in U} v(x)|f(x)| = \max(\sup_{x\in A} v(x)|f(x)|, \sup_{x\in U\setminus A} v(x)|f(x)|) \leq$$

$$\text{máx}(\sup_{x\in A} v(x) \sup_{x\in A} |f(x)|, 1) \leq \text{máx}(\frac{\sup_{x\in A} v(x)}{\inf_{y\in A} v(y)}, 1).$$

ii) La familia

$$V' := \{\max_{v\in F} v :, F \in P_f(V)\},$$

donde $P_f(V)$ denota el conjunto de partes finitas de $V$, verifica la condición P). Además, como $V \subset V'$ se tiene que $\mathcal{H}V'(U) \subset \mathcal{H}V(U)$ y $\mathcal{H}V_0'(U) \subset \mathcal{H}V_0(U)$ . Recíprocamente, si $f \in \mathcal{H}V(U)$ y $F \in P_f(V)$,

$$\max_{v\in F} \sup_{x\in U} v(x)|f(x)| = \sup_{x\in U} \max_{v\in F} v(x)|f(x)| < \infty$$

por lo que $f \in \mathcal{H}V'(U)$, esto es $\mathcal{H}V'(U) = \mathcal{H}V(U)$. Por otra parte, al ser la unión finita de $U$-acotados un conjunto $U$-acotado, obtenemos igualmente que $\mathcal{H}V_0'(U) = \mathcal{H}V_0(U)$. Gracias a esto, podemos considerar, sin pérdida de generalidad, que la familia $V$ está dirigida por la relación $v \leq w$ si y sólo si $v(x) \leq w(x)$, $\forall x \in U$. De este modo la familia de seminormas $\{p_v\}_{v\in V}$ es sistema fundamental de seminormas continuas.

**Proposición 2.2.3** *$(\mathcal{H}V(U), \tau_V)$ es un espacio completo.*

Demostración: Sea $(f_d)_{d\in D}$ es una red de Cauchy en $(\mathcal{H}V(U), \tau_V)$. Por ser $\tau_b \leq \tau_V$, $(f_d)_{d\in D}$ es de Cauchy en el espacio completo $(\mathcal{H}_b(U), \tau_b)$ por lo que existe $f \in \mathcal{H}_b(U)$ $\tau_b$-límite de $(f_d)_{d\in D}$.

Veamos que $f \in \mathcal{H}V(U)$ y que $(f_d)_{d\in D}$ $\tau_V$-converge a $f$. Sea $\epsilon > 0$. Si $v \in V$, al ser una red de Cauchy, existe $d_0 \in D$ tal que $d, d' \geq d_0$ implica $p_v(f_d - f_{d'}) < \epsilon$. Fijando $d \geq d_0$ y tomando límite en la subred $(f_{d'})_{d'\geq d_0}$, tenemos

$$v(x)|f_d(x) - f(x)| < \epsilon \qquad \forall x \in U. \qquad (1)$$

Así,

$$\sup_{x\in U} v(x)|f(x)| \leq \sup_{x\in U} v(x)|f(x) - f_{d_0}(x)| + \sup_{x\in U} v(x)|f_{d_0}(x)| < \infty$$

luego $f \in \mathcal{H}V(U)$ y de (1) $(f_d)_{d\in D}$ $\tau_V$-converge a $f$. ∎

**Corolario 2.2.4** $(\mathcal{H}V_0(U), \tau_V)$ *es un espacio completo.*

Demostración: Basta demostrar que $\mathcal{H}V_0(U)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}V(U)$. Para ello tomamos una red $(f_d)_{d\in D} \subset \mathcal{H}V_0(U)$ $\tau_V$-convergente a $f \in \mathcal{H}V(U)$. Para $\epsilon > 0$ y $v \in V$ existe $d_0 \in D$ tal que si $d \geq d_0$ entonces $p_v(f_d - f) < \epsilon/2$. Como $f_{d_0} \in \mathcal{H}V_0(U)$ existe $A$ $U$-acotado tal que $v(x)|f_{d_0}(x)| < \epsilon/2$ para todo $x \in U \setminus A$. De donde

$$v(x)|f(x)| \leq v(x)|f(x) - f_{d_0}(x)| + v(x)|f_{d_0}(x)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

para todo $x \in U \setminus A$, lo que prueba que $f \in \mathcal{H}V_0(U)$. ∎

**Corolario 2.2.5** *Para cada* $m \in \mathbb{N}$ $(\mathcal{P}V(^mX), \tau_V)$ *es un espacio completo.*

Demostración: Es consecuencia de la Proposición 2.2.3 y de ser el espacio $\mathcal{P}_a(^mX)$ de polinomios $m$-homogéneos no necesariamente continuos, cerrado para la convergencia puntual. ∎

**Nota 2.2.6** i) Si $V = \{v\}$ la condición P) se reduce a que $\inf_{x\in A} v(x) > 0$ para todo conjunto $U$-acotado $A$. En este caso escribiremos $\mathcal{H}v(U)$ y $\mathcal{H}v_0(U)$ en lugar de $\mathcal{H}V(U)$ y $\mathcal{H}V_0(U)$ respectivamente. Además, por ser $v$ una función positiva, $p_v$ es una norma, también denotada $\|.\|_v$, y los espacios $(\mathcal{H}v(U), p_v)$ y $(\mathcal{H}v_0(U), p_v)$ son espacios de Banach (ver Apartado 2.1).

ii) Si $V = (v_n)_n$ es una familia numerable de pesos, teniendo en cuenta la nota 2.2.2 ii), el espacio $(\mathcal{H}V(U), \tau_V)$ es metrizable y por la Proposición 2.2.3 se trata de un espacio de Fréchet.

### 2.2.1 Reflexividad en $\mathcal{H}V(X)$

En este apartado vamos a dar propiedades a la familia $V$ para la que el espacio $\mathcal{H}V(X)$ posea como descomposición de Schauder a la familia

$\{\mathcal{P}(^m X); m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ y, gracias a esto, probamos que el espacio $\mathcal{H}V(X)$ es (semi) reflexivo si y sólo si cada espacio $\mathcal{P}(^m X)$ lo es.

En general, no es cierto que la familia $(\mathcal{P}(^m X), P_m)$ donde

$$\begin{array}{rccl} P_m: & \mathcal{H}v(X) & \longrightarrow & \mathcal{P}(^m X) \\ & f & \rightsquigarrow & P_m(f) \end{array}$$

siendo $P_m(f)$ el polinomio de Taylor de $f$ en el origen, sea una descomposición de Schauder de $\mathcal{H}v(X)$. De hecho, la serie de Taylor $\sum_{m=0}^{\infty} P_m f$ de $f$ en el origen no tiene por qué ser $p_v$-sumable. En efecto, si tomamos en $\mathbb{C}$ un peso de tipo de decrecimiento exponencial $v(z) = e^{-|z|}$, $z \in \mathbb{C}$, y la función

$$f(z) := e^z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

al ser

$$\left|\frac{e^z}{e^{|z|}}\right| = \frac{e^{Re(z)}}{e^{|z|}} \leq 1 \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

la función $e^z \in \mathcal{H}v(\mathbb{C})$. Pero como

$$v(x)|(f(x) - \sum_{m=0}^{n} P_m f(x))| = \left|\frac{e^x - \sum_{m=0}^{n} \frac{x^m}{m!}}{e^x}\right|$$

tiende a 1 cuando $x$ tiende a $\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!}$ no converge a $e^z$ en la topología de la norma $p_v$.

En general, para que $(\mathcal{P}(^m X), P_m)$ fuera una descomposición de Schauder, la serie de Taylor de toda función $f \in \mathcal{H}V(X)$ debería converger a $f$ en la topología generada por la norma $p_v$. Sin embargo, aun considerando pesos radiales, si intentamos probar dicha convergencia nos encontramos con el siguiente problema.

Dado $R > 1$,

$$R^m v(z)|P_m(z)| = v(z)|P_m(Rz)| \leq v(z) \sup_{|s|\leq 1} |P_m(sRz)| \leq$$

$$v(z)\sup_{|s|\leq 1}|f(sRz)| = v(z)\sup_{|s|=1}|f(sRz)| = \sup_{|s|=1} v(zs)|f(sRz)| =$$

$$\sup_{|s|=1} v(s\frac{1}{R}u)|f(su)|$$

sin embargo $v(rx)|f(x)|$ no tiene por qué estar acotado para ningún $r < 1$, tal y como vamos a probar.

Tomemos en $\mathbb{C}$ un peso de tipo de decrecimiento exponencial $v(z) = e^{-|z|}$, $z \in \mathbb{C}$, y la función

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!\lg(m+2)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Para $k \in \mathbb{N}$ existe $m_k \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq m_k$ implica $\frac{1}{\lg(m+2)} \leq \frac{1}{k}$. Entonces si $x > 0$

$$h(x) := \sum_{m\geq m_k} \frac{x^m}{m!\lg(m+2)} \leq \frac{1}{k}\sum_{m\geq m_k}\frac{x^m}{m!}.$$

Si llamamos $g(x) := \sum_{m\geq m_k}\frac{x^m}{m!}$ tenemos $\frac{h(x)}{g(x)} \leq \frac{1}{k}$ para $x > 0$. Así si $x > 0$

$$v(x)|f(x)| = \frac{1}{e^x}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!\lg(m+2)} = \frac{a(x)+h(x)}{b(x)+g(x)} =$$

$$\frac{\frac{a(x)}{g(x)} + \frac{h(x)}{g(x)}}{\frac{b(x)}{g(x)}+1} \leq \frac{\frac{a(x)}{g(x)} + \frac{1}{k}}{\frac{b(x)}{g(x)}+1}$$

donde $a(x) := \sum_{m=0}^{m_k-1}\frac{x^m}{m!\lg(m+2)}$ y $b(x) := \sum_{m=0}^{m_k-1}\frac{x^m}{m!}$.

La expresión de la derecha tiende a $\frac{1}{k}$ cuando $x$ tiende a $\infty$ dado que

$$\frac{a(x)}{g(x)} = \frac{\sum_{m=0}^{m_k-1}\frac{x^m}{m!\lg(m+2)}}{\sum_{m\geq m_k}\frac{x^m}{m!}} = \frac{\sum_{m=0}^{m_k-1}\frac{x^m}{m!\lg(m+2)}}{e^x - \sum_{m=0}^{m_k-1}\frac{x^m}{m!}}$$

tiende a cero cuando $x$ tiende a $\infty$ y de forma análoga $\frac{b(x)}{g(x)}$ también, lo que prueba que $f \in \mathcal{H}v_0(\mathbb{C})$.

Veamos que $v(rx)|f(x)|$ no está acotado para ningún $r < 1$. Como $r^m \lg(m+2)$ converge a cero cuando $m$ tiende a infinito, fijado $k \in \mathbb{N}$ existe $m_k \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq m_k$ implica $r^m \leq \frac{1}{k \lg(m+2)}$. Para $x > 0$ consideramos igual que antes

$$a(x) := \sum_{m=0}^{m_k-1} \frac{x^m}{m! \lg(m+2)}\,; \qquad h(x) := \sum_{m \geq m_k} \frac{x^m}{m! \lg(m+2)}$$

$$b(x) := \sum_{m=0}^{m_k-1} \frac{x^m}{m!}\,; \qquad g(x) := \sum_{m \geq m_k} \frac{x^m}{m!}$$

Así

$$g(rx) = \sum_{m \geq m_k} \frac{x^m}{m!} r^m \leq \frac{1}{k} \sum_{m \geq m_k} \frac{x^m}{m! \lg(m+2)} = \frac{1}{k} h(x)$$

mientras que

$$\frac{b(rx)}{h(x)} = \frac{\sum_{m=0}^{m_k-1} \frac{r^m x^m}{m!}}{\sum_{m \geq m_k} \frac{x^m}{m! \lg(m+2)}} = \frac{\sum_{m=0}^{m_k-1} \frac{r^m x^m}{m!}}{x^{m_k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{(m+m_k)! \lg(m+m_k+2)}}$$

converge a cero cuando $x$ tiende a $\infty$, luego

$$v(rx) f(x) = \frac{f(x)}{e^{rx}} = \frac{a(x) + h(x)}{b(rx) + g(rx)} \geq$$

$$\frac{h(x)}{b(rx) + g(rx)} = \frac{1}{\frac{b(rx)}{h(x)} + \frac{g(rx)}{h(x)}} \geq \frac{1}{\frac{b(rx)}{h(x)} + \frac{1}{k}}$$

y la expresión de la derecha converge a $k$ cuando $x$ tiende a $\infty$.

Para evitar este problema supondremos que $V$ verifica además, cuando se especifique, las siguientes propiedades:

A1) *Para cada $v \in V$ existen $r > 1$ y $w \in V$ tales que*

$$v(x) \leq w(rx) \quad \forall x \in X.$$

A2) *Cada $v \in V$ es radial.*

**Proposición 2.2.7** *Si $V$ verifica A2, para cada $v \in V$ se cumple*

$$p_v(P_m(f)) \leq p_v(f), \quad \forall f \in \mathcal{H}V(X)$$

Demostración: Sea $v \in V$. Usando consecutivamente las desigualdades de Cauchy, el Principio del módulo máximo y el hecho de que $v$ es un peso radial obtenemos la siguiente cadena:

$$p_w(P_m(f)) = \sup_{x\in X} v(x)|P_m(f)(x)| \leq \sup_{x\in X} v(x) \sup_{|t|\leq 1} |P_m(f)(tx)| \leq$$

$$\sup_{x\in X} v(x) \sup_{|t|\leq 1} |f(tx)| = \sup_{x\in X} v(x) \sup_{|t|=1} |f(tx)| = \sup_{x\in X} \sup_{|t|=1} v(tx)|f(tx)| =$$

$$\sup_{x\in X} v(x)|f(x)| = p_v(f)$$

para todo $f \in \mathcal{H}V(X)$. ∎

**Proposición 2.2.8** *Si $V$ verifica las condiciones $A1$ y $A2$ anteriores, entonces para cada $v \in V$ existen $r > 1$ y $w \in V$ tales que*

$$p_v(P_m(f)) \leq \frac{1}{r^m} p_w(f) \quad \forall f \in \mathcal{H}V(X).$$

Demostración: De la propiedad $A1$, dado $v \in V$ existen $r > 1$ y $w \in V$ tales que

$$v(x) \leq w(rx) \quad \forall x \in X.$$

Haciendo uso consecutivo de esta desigualdad y de la proposición anterior obtenemos la siguiente cadena:

$$r^m p_v(P_m(f)) = r^m \sup_{x\in X} v(x)|P_m(f)(x)| = \sup_{x\in X} v(x)|P_m(f)(rx)| \leq$$

$$\sup_{x\in X} w(rx)|P_m(f)(rx)| = \sup_{x\in X} w(x)|P_m(f)(x)| = p_w(P_m(f)) \leq p_w(f)$$

para todo $f \in \mathcal{H}V(X)$. ∎

**Proposición 2.2.9** *Si $V$ verifica $A2$, entonces para cada $f \in \mathcal{H}V_0(X)$, $P_m f \in \mathcal{H}V_0(X)$ para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Demostración: Sea $\epsilon > 0$. Por ser $f \in \mathcal{H}V_0(X)$, existe $r_0 > 0$ tal que si $\| x \| > r_0$ entonces $v(x)|f(x)| < \epsilon/2$.

Si $x \in X$ con $\| x \| > r_0$, usando consecutivamente las desigualdades de Cauchy, el Principio del módulo máximo y el hecho de que $v$ es un peso radial obtenemos la siguiente cadena:

$$v(x)|P_m(f)(x)| \leq v(x) \sup_{|t|\leq 1} |P_m(f)(tx)| \leq v(x) \sup_{|t|\leq 1} |f(tx)| =$$

$$v(x) \sup_{|t|=1} |f(tx)| = \sup_{|t|=1} v(tx)|f(tx)| \leq \epsilon/2 < \epsilon$$

lo que prueba que $P_m f \in \mathcal{H}V_0(X)$. ∎

**Lema 2.2.10** *i) Si $V$ verifica las condiciones A1 y A2, entonces la topología $\tau_V$ está generada por la familia de seminormas continuas con la siguiente propiedad:*

$$p(f) = \sum_{m=0}^{\infty} p(P_m(f)) \quad \forall f \in \mathcal{H}V(X).$$

*ii) Si $V = (v_n)_n$ es numerable y verifica las condiciones A1 y A2, entonces la topología $\tau_V$ está generada por la familia de seminormas con las siguientes propiedades:*

*a) $p(f) = \sum_{m=0}^{\infty} p(P_m(f)) \quad \forall f \in \mathcal{H}V(X)$,*

*b) $p|_{\mathcal{P}(^m X)}$ es continua para $\tau_V$ en $\mathcal{P}(^m X)$.*

Demostración: i) Para cada seminorma continua $p := p_v$, con $v \in V$, definimos $q_p$ dado por

$$q_p(f) = \sum_{m=0}^{\infty} p(P_m(f)) \quad \forall f \in \mathcal{H}V(X).$$

Por la Proposición 2.2.8 existe $r > 1$ y existe $w \in V$ tales que

$$p(P_m(f)) \leq \frac{1}{r^m} p_w(f) \quad \forall f \in \mathcal{H}V(X) \qquad (2)$$

por lo que $q_p(f) < \infty$ para todo $f \in \mathcal{H}V(X)$. Además la seminorma $q_p$ es $\tau_V$-continua pues si $(f_d)$ es una red en $\mathcal{H}V(X)$ $\tau_V$-convergente a $f \in$

$\mathcal{H}V(X)$, dado $\epsilon > 0$ existe $d_0$ tal que si $d \geq d_0$ entonces $p_w(f_d - f) < \epsilon$. De esta desigualdad y de (2), si $d \geq d_0$ se tiene que

$$p(P_m(f_d) - P_m(f)) < \frac{1}{r^m}\epsilon \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

de donde, si $d \geq d_0$

$$q_p(f_d - f) = \sum_{m=0}^{\infty} p(P_m(f_d) - P_m(f)) < \frac{1}{1-r}\epsilon,$$

lo que prueba que $q_p$ es $\tau_V$-continua.

Por otra parte,

$$p(f) = p(\sum_{m=0}^{\infty} P_m(f)) \leq \sum_{m=0}^{\infty} p(P_m(f)) = q_p(f)$$

por lo que forman un sistema fundamental de seminormas y como $p$ y $q_p$ coinciden sobre $\mathcal{P}(^mX)$, se sigue que

$$q_p(f) = \sum_{m=0}^{\infty} q_p(P_m(f)) \quad \forall f \in \mathcal{H}V(X),$$

lo que concluye la prueba de i).

ii) Teniendo en cuenta i), basta probar que toda seminorma verificando a) y b) es $\tau_V$-continua, y esto es consecuencia de ser el conjunto

$$\{f \in \mathcal{H}V(X) : p(f) \leq 1\} = \bigcap_{k=0}^{\infty}\{f \in \mathcal{H}V(X) : \sum_{m=0}^{k} p(P_m f) \leq 1\}$$

un tonel en el espacio de Fréchet $(\mathcal{H}V(X), \tau_V)$. ■

**Proposición 2.2.11** *Si $V$ verifica las condiciones A1 y A2, entonces la familia $(\mathcal{P}V(^mX), \tau_V)_m$ $((\mathcal{P}V_0(^mX), \tau_V)_m)$ es una descomposición de Schauder $\mathcal{S}$-absoluta y $\gamma$-completa de $\mathcal{H}V(X)$ ($\mathcal{H}V_0(X)$, respectivamente).*

Demostración: Como consecuencia de la Proposición 2.2.8 el desarrollo de Taylor de cada $f \in \mathcal{H}V(X)$ $\tau_V$-converge a $f$.

Además, como consecuencia de la Proposición 2.2.7, cada proyección

$$\begin{array}{rccc} P_m: & \mathcal{H}V(X) & \longrightarrow & \mathcal{P}(^mX)\cap\mathcal{H}V(X) \\ & f & \rightsquigarrow & P_m(f) \end{array}$$

está bien definida y es continua, por lo que $(\mathcal{P}V(^mX),\tau_V)$ es una descomposición de Schauder de $\mathcal{H}V(X)$.

Gracias a la Proposición 2.2.9 tenemos ahora que $(\mathcal{P}V_0((^mX),\tau_V)$ es una descomposición de Schauder de $\mathcal{H}V_0(X)$.

decir Schauder de sabido en localmente $E$,

Probemos a continuación que la descomposición es $\mathcal{S}$-albsoluta. Recordemos que $\mathcal{S} := \{(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \leq 1\}$. Hemos de probar que dado $a=(a_n)_n \in \mathcal{S}$, si $f\in\mathcal{H}V(X)$, entonces

$$g=\sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m f \in \mathcal{H}V(X)$$

y además que $q(f)=\sum_{m=0}^{\infty}|a_m|p_v(P_mf)<\infty$ para todo $v\in V$ y la seminorma $q$ es continua.

Sea $v\in V$, por la Proposición 2.2.8 existe $r>1$ y existe $w\in V$ tales que $p_v(P_m(h))\leq \frac{1}{r^m}p_w(h)\quad \forall h\in\mathcal{H}V(X)$. Como $\frac{1+r}{2}>1\geq \lim sup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}$ existe $m_0\in\mathbb{N}$ tal que si $m\geq m_0$ entonces $|a_m|^{1/m}<\frac{1+r}{2}$. Sea $c_i>0$ tal que $|a_i|<c_i(\frac{1+r}{2})^i,\quad i=0,1,\ldots,m_0-1$, y sea $c=\max(c_0,\ldots,c_{m_0-1},1)$. Dicho número real $c$ tiene la propiedad de que $|a_m|\leq c(\frac{1+r}{2})^m\quad\forall m\in\mathbb{N}$. Tenemos

$$\sup_{x\in X} v(x)|a_mP_mf(x)|\leq \frac{|a_m|}{r^m}p_w(f)\leq c(\frac{1+r}{2r})^m p_w(f)$$

lo que prueba que $g\in\mathcal{H}V(X)$, que $\sum_{m=0}^{\infty}|a_m|p_v(P_mf)<\infty$ para todo $v\in V$ y que $q$ es continua, esto es, $(\mathcal{P}V(^mX))_m$ es una descomposición $\mathcal{S}$-absoluta de $\mathcal{H}V(X)$.

Por último veamos que la descomposición es $\gamma$-completa. Sea $Q_m\in\mathcal{P}(^mX)$ de modo que $(\sum_{m=0}^{n}Q_m)_n$ es una sucesión $\tau_V$-acotada. Tenemos que probar que dicha sucesión $\tau_V$-converge a una función $f \in \mathcal{H}V(X)$. Tomemos para ello una seminorma continua $p$ en $\mathcal{H}V(X)$ que verifique $p(f) = \sum_{m=0}^{\infty} p(P_m(f))$. Sabemos por el Lema 2.2.9 que la familia de seminormas continuas que verifican dicha propiedad generan la topología $\tau_V$. Bajo estas condiciones, la sucesión $(p(\sum_{m=0}^{n} Q_m))_n = (\sum_{m=0}^{n} p(Q_m))_n$ está acotada y, por tanto, converge para toda seminorma continua $p$ en $\mathcal{H}V(X)$ que verifique $p(f) = \sum_{m=0}^{\infty} p(P_m(f))$. Como dichas seminormas generan $\tau_V$ concluimos que $\sum_{m=0}^{\infty} q(Q_m) < \infty$ para toda seminorma $\tau_V$-continua $q$. Por tanto la sucesión $(\sum_{m=0}^{n} Q_m)_n$ es de Cauchy y como $\mathcal{H}V(X)$ es completo dicha sucesión $\tau_V$-converge a una función $f \in \mathcal{H}V(X)$. ■

**Corolario 2.2.12** *Si $V$ verifica A1 y A2, entonces el espacio $\mathcal{H}V(X)$ ($\mathcal{H}V_0(X)$) es semirreflexivo si y sólo si cada $(\mathcal{P}V(^mX), \tau_V)$ (respectivamente $(\mathcal{P}V_0(^mX), \tau_V)$) es semirreflexivo.*

Demostración: Por la Proposición 2.2.11, la familia $(\mathcal{P}V(^mX))_m$ es una descomposición $\mathcal{S}$-absoluta, y por tanto contractiva (ver Corolario 3.14 de [15]) de $\mathcal{H}V(X)$. Como además es $\gamma$-completa, el Teorema 3.2 de [30] nos da la conclusión. Un razonamiento análogo sirve para $\mathcal{H}V_0(X)$. ■

**Corolario 2.2.13** *Si $V = (v_n)_n$ es numerable y verifica A1 y A2, entonces el espacio $\mathcal{H}V(X)$ ($\mathcal{H}V_0(X)$) es reflexivo si y sólo si cada $(\mathcal{P}V(^mX), \tau_V)$ (respectivamente $\mathcal{P}V_0(^mX)$) es reflexivo.*

Demostración: Es consecuencia del Corolario 2.2.12 y del hecho de que en este caso el espacio $\mathcal{H}V(X)$ (y por tanto $\mathcal{H}V_0(X)$) es un espacio de Fréchet. ■

En 2.2.23 damos un ejemplo (ejemplo A) de una familia de pesos $V$ cumpliendo 1) y 2) para la que se verifica $\mathcal{H}V(X) = \mathcal{H}_b(X)$. Gracias a este ejemplo, el Corolario 2.2.13 generaliza el Corolario 2 de [40], en el que Prieto obtiene que $(\mathcal{H}_b(X), \tau_b)$ es reflexivo si y sólo si cada $\mathcal{P}(^mX)$ es reflexivo.

El siguiente resultado es de carácter general dado que en él se dan condiciones para que dos espacios de Fréchet genéricos sean isomorfos. Como aplicación a los espacios ponderados que nos ocupan obtendremos que si $\mathcal{P}V_0(^mX)''$ y $\mathcal{P}V(^mX)$ son isomorfos bajo ciertas condiciones, entonces $\mathcal{H}V_0(X)''$ es isomorfo a $\mathcal{H}V(X)$.

**Proposición 2.2.14** *Sean $E$ y $F$ espacios de Fréchet y sean $(E_n)_n$ y $(F_n)_n$ descomposiciones de Schauder absolutas de $E$ y $F$ respectivamente. Supongamos que existen isomorfismos algebraicos $T_m : E_m \longrightarrow F_m$, $m \in \mathbb{N}$, que verifiquen:*
*Condición i). Para cada seminorma continua $p$ en $F$ existe $a > 0$ y existe una seminorma continua $q$ en $E$ tales que $p(T_m(x_m)) \leq a\ q(x_m)$ $\forall x_m \in E_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$,*
*Condición ii). Para cada seminorma continua $q$ en $E$ existe $b > 0$ y existe una seminorma continua $p$ en $F$ tales que $q(x_m) \leq b\ p(T_m(x_m))$ $\forall x_m \in E_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$.*

*Entonces la aplicación*

$$\begin{array}{rccl} T: & E & \longrightarrow & F \\ & x = \sum_{m=0}^{\infty} x_m & \rightsquigarrow & T(x) = \sum_{m=0}^{\infty} T_m(x_m) \end{array}$$

*es un isomorfismo topológico.*

Notar que las condiciones i) y ii) vienen a decir que la familia de aplicaciones $(T_m)_m$ es, en cierto sentido, equiisomorfa. En conexión con el capítulo 3, es interesante hacer notar que pese a que los espacios $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $\mathcal{H}(\Delta)$, donde $\Delta$ es el dico unidad abierto de $\mathbb{C}$, tengan como misma descomposición de Schauder a los polinomios complejos $m$-homogéneos no se verifican dichas condiciones.

Demostración. Veamos en primer lugar que $T$ está bien definida, esto es, que la serie $\sum_{m=0}^{\infty} T_m(x_m)$ converge. Sea $p$ una seminorma continua en $F$ y sean $a$ y $q$ dados por i). Como la descomposición es absoluta podemos suponer que $q(\sum_{m=0}^{\infty} x_m) = \sum_{m=0}^{\infty} q(x_m)$. Entonces

$$\sum_{m=0}^{\infty} p(T_m(x_m)) \leq a \sum_{m=0}^{\infty} q(x_m) = aq(\sum_{m=0}^{\infty} x_m) < \infty$$

lo que prueba la convergencia.

$T$ es claramente lineal, y es continua pues haciendo uso de la desigualdad anterior se tiene que

$$p(T(x)) = p(\sum_{m=0}^{\infty} T_m(x_m)) \leq \sum_{m=0}^{\infty} p(T_m(x_m)) \leq a\ q(x).$$

Por otra parte si $T(x) = 0$, de la unicidad de la expresión de $T(x)$ se tendría que $T_m(x_m) = 0$ para todo natural $m$. Al ser cada $T_m$ inyectiva $x_m = 0$ y por tanto $x = 0$. Esto prueba la inyectividad de $T$.

Para probar la sobreyectividad tomemos $y = \sum_{m=0}^{\infty} y_m \in F$. De forma análoga a la anterior pero usando ahora la condición ii) se prueba que la serie $x := \sum_{m=0}^{\infty} T_m^{-1} y_m$ converge en $E$, y la continuidad y linealidad de $T$ nos prueban que $T(x) = y$.

Finalmente el teorema de la aplicación abierta nos asegura que $T$ es un isomorfismo topológico. ∎

**Corolario 2.2.15** *Si $V$ es numerable y verifica las condiciones $A1$ y $A2$ y, si para todo $m \in \mathbb{N}$, los espacios $\mathcal{P}V_0({}^mX)''$ y $\mathcal{P}V({}^mX)$ son isomorfos mediante isomorfismos que verifican las condiciones i) y ii) de la proposición anterior, entonces $\mathcal{H}V_0(X)''$ es isomorfo a $\mathcal{H}V(X)$.*

Demostración. Por la Proposición 2.2.11, las familias $(\mathcal{P}V_0({}^mX))_m$ y $(\mathcal{P}V({}^mX))_m$ son descomposiciones $\mathcal{S}$-absolutas de $\mathcal{H}V_0(X)$ y $\mathcal{H}V(X)$ respectivamente. Por la Proposición 3.11 de [15], $(\mathcal{P}V_0({}^mX)'')_m$ es una descomposición $\mathcal{S}$-absoluta de $\mathcal{H}V_0(X)''$. Basta aplicar ahora la Proposición anterior. ∎

Hasta ahora hemos trabajado con los cortes $\mathcal{P}(^mX) \cap \mathcal{H}V(X)$. Sin embargo es interesante plantearse cuándo $(\mathcal{P}(^mX), \| \, . \, \|)$ es un subespacio de $\mathcal{H}V(X)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. En la Proposición 2.2.16 damos una caracterización de los pesos para los que se verifica dicha condición.

Recordemos que se dice que un peso $v$ es rápidamente decreciente a cero si para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $v(x) \| x \|^m$ tiende a cero cuando $\| x \|$ tiende a infinito.

**Proposición 2.2.16** *$V$ es una familia de pesos rápidamente decreciente a cero si y sólo si $\mathcal{P}(^mX) \subset \mathcal{H}V(X)$, $\forall m \in \mathbb{N}$, y la topología $\tau_V|_{\mathcal{P}(^mX)}$ es la topología de la norma $\| \, . \, \|_m$ en $\mathcal{P}(^mX)$.*

Demostración: Si $V$ es una familia de pesos rápidamente decreciente a cero, el espacio $\mathcal{H}V_0(X)$ contiene a $\mathcal{P}(^mX)$ para cada $m \in \mathbb{N}$. En efecto, sea $P \in \mathcal{P}(^mX)$. Por ser $P$ continuo, $P$ está acotado, digamos por $M$, en la bola unidad cerrada de $X$, luego

$$v(x)|P(x)| = v(x)|P(\frac{x}{\| x \|})| \, \| x \|^m \leq M v(x) \| x \|^m$$

lo que prueba, al ser $v$ rápidamente decreciente a cero, que $P \in \mathcal{H}V_0(X)$.

Por la Proposición 2.2.1, la topología generada por la norma en $\mathcal{P}(^mX)$ es menos fina que la topología $\tau_V|_{\mathcal{P}(^mX)}$.

Por otra parte, si $P \in \mathcal{P}(^mX)$ y $x \in X$, $x \neq 0$,

$$v(x)P(x) = v(x)P(\frac{x}{\| x \|}) \, \| x \|^m \, . \qquad (1)$$

Por ser $v$ rápidamente decreciente a cero $s := \sup_{x \in X} v(x) \| x \|^m < \infty$ y de (1)

$$\sup_{x \in X} v(x)|P(x)| \leq s \, \| P \|_m,$$

lo que prueba la igualdad de las topologías.

Por último probemos que si $\mathcal{P}(^mX) \subset \mathcal{H}V(X)$, $\forall m \in \mathbb{N}$, y la topología $\tau_V|_{\mathcal{P}(^mX)}$ es la topología de la norma $\| \cdot \|_m$ en $\mathcal{P}(^mX)$ entonces cada peso $v \in V$ es rápidamente decreciente a cero.

Para cada $x \in X$, $x \neq 0$, extendemos mediante el teorema de Hahn-Banach la función

$$\begin{array}{ccc} \{tx, t \in \mathbb{C}\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ tx & \rightsquigarrow & t \| x \| \end{array}$$

a una función lineal y continua $\Pi_x : X \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\Pi_x(tx) = t \| x \|$, $\forall t \in \mathbb{C}$, y que verifica $|\Pi_x(y)| \leq \| y \|$, $\forall y \in X$. Así pues, $\Pi_x^m$ es un polinomio $m$-homogéneo y continuo que verifica $\| \Pi_x^m \| = 1$. De aquí que el conjunto $\{\Pi_x^m : \| x \| \leq 1\}$ es norma-acotado en $\mathcal{P}(^mX)$ y, por hipótesis, $\tau_V$-acotado. Esto es, $\sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{y \in X} v(y)|\Pi_x(y)|^m < \infty$ para cada $v \in V$, de donde $\sup_{x \in X} \sup_{y \in X} v(y)|\Pi_{\frac{x}{\|x\|}}(y)|^m < \infty$. En particular

$$M_m := \sup_{x \in X} v(x) \| x \|^m = \sup_{x \in X} v(x)|\Pi_{\frac{x}{\|x\|}}(x)|^m < \infty,$$

por lo que $v(x) \| x \|^m \leq \frac{M_{m+1}}{\|x\|}$ y consecuentemente $v$ es de decrecimiento rápido para cada $v \in V$. ∎

**Corolario 2.2.17** *Sea $V$ una familia numerable de pesos. Los pesos de $V$ son rápidamente decrecientes a cero si y sólo si $\mathcal{P}(^mX) \subset \mathcal{H}V(X)$, para todo $m \in \mathbb{N}$. En este caso la topología $\tau_V|_{\mathcal{P}(^mX)}$ es la topología de la norma $\| \cdot \|_m$ en $\mathcal{P}(^mX)$.*

Demostración: Es suficiente probar que si $\mathcal{P}(^mX) \subset \mathcal{H}V(X)$ entonces $(\mathcal{P}(^mX), \tau_V) = (\mathcal{P}(^mX), \|.\|_m)$. Como $\|.\|_m = \tau_b|_{\mathcal{P}(^mX)} \leq \tau_V$ y como $(\mathcal{P}(^mX), \|.\|_m)$ y $(\mathcal{P}(^mX), \tau_V)$ son espacios de Fréchet se sigue la igualdad $(\mathcal{P}(^mX), \tau_V) = (\mathcal{P}(^mX), \|.\|_m)$. ∎

**Corolario 2.2.18** *Si $V$ es una familia de pesos rápidamente decrecientes a cero que verifican A1 y A2, entonces $\mathcal{H}V_0(X) = \mathcal{H}V(X)$.*

Demostración: Sea $f \in \mathcal{H}V(X)$. Por la Proposición 2.2.11, el desarrollo de Taylor de $f$ $\tau_V$-converge a $f$. Ahora bien, por ser los pesos de decrecimiento rápido, $\mathcal{H}V_0(X)$ contiene a los polinomios (ver la demostración de la Proposición 2.2.16) y como además es cerrado concluimos que $f \in \mathcal{H}V_0(X)$. ∎

En lo que queda de sección vamos a trabajar con el espacio $\mathcal{H}_{wu}(X)$. Si $V$ es una familia de pesos definidos sobre $X$, denotaremos

$$\mathcal{H}V_{wu}(X) = \mathcal{H}V(X) \cap \mathcal{H}_{wu}(X) \text{ y } \mathcal{P}V_{wu}(^mX) = \mathcal{H}V(X) \cap \mathcal{P}_{wu}(^mX).$$

**Lema 2.2.19** *$\mathcal{H}V_{wu}(X)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}V(X)$.*

Demostración: Sea $(f_d)_{d\in D}$ una red en $\mathcal{H}V_{wu}(X)$ que $\tau_V$-converge a $f \in \mathcal{H}V(X)$. Como $\tau_b \leq \tau_V$ la red $(f_d)_{d\in D}$ converge uniformemente a $f$ en los acotados de $X$. Como el límite uniforme de funciones uniformemente continuas es uniformemente continua concluimos que $f \in \mathcal{H}V_{wu}(X)$. ∎

**Proposición 2.2.20** *Si $V$ verifica las condiciones A1 y A2, entonces la familia $(\mathcal{P}V_{wu}(^mX), \tau_V)$ es una descomposición de Schauder $\mathcal{S}$-absoluta y $\gamma$-completa de $\mathcal{H}V_{wu}(X)$.*

Demostración: Veamos, en primer lugar, que se trata de una descomposición de Schauder. Si $f \in \mathcal{H}V_{wu}(X)$ tenemos por un lado que, por ser $(\mathcal{P}V(^mX), \tau_V)_m$ una descomposición de Schauder de $\mathcal{H}V(X)$, el desarrollo de Taylor de $f$ en el origen $\tau_V$-converge a $f$ y como $f \in \mathcal{H}_{wu}(X)$ cada $P_m(f) \in \mathcal{P}_{wu}(^mX)$ (ver 1.5b de [2]).

$E$ es

Probemos que la descomposición es $\mathcal{S}$-absoluta. Hemos de probar que dado $a = (a_n)_n \in \mathcal{S}$, si $f \in \mathcal{H}V_{wu}(X)$, entonces $g = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m f \in$

$\mathcal{H}V_{wu}(X)$ y que $q(f) = \sum_{m=0}^{\infty} |a_m| p_v(P_m f) < \infty$ y es una seminorma continua para todo $v \in V$. Por la Proposición 2.2.11, sólo falta probar que $g \in \mathcal{H}_{wu}(X)$; pero esto es consecuencia de que $(\mathcal{P}_{wu}(^m X))_m$ es una descomposición $\mathcal{S}$-Schauder de $\mathcal{H}_{wu}(X)$ (ver Proposición 11 de [40]).

Por último, la descomposición es $\gamma$-completa como consecuencia de la Proposición 2.2.11 y del Lema 2.2.19. ∎

**Corolario 2.2.21** *Si $V$ verifica A1 y A2, entonces $\mathcal{H}V_{wu}(X)$ es semirreflexivo si y sólo si $(\mathcal{P}V_{wu}(^m X), \tau_V)$ es semirreflexivo para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Demostración: Por la Proposición 2.2.20 $(\mathcal{P}V_{wu}(^m X), \tau_V)_m$ es una descomposición $\mathcal{S}$-absoluta, y por tanto contractiva (ver Corolario 3.14 de [15]) de $\mathcal{H}V_{wu}(X)$. Como además es $\gamma$–completa, el Teorema 3.2 de [30] nos da la conclusión. ∎

**Corolario 2.2.22** *Si $V = (v_n)_n$ es numerable y verifica A1 y A2, entonces $\mathcal{H}V_{wu}(X)$ es reflexivo si y sólo si $(\mathcal{P}V_{wu}(^m X), \tau_V)$ es reflexivo para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Demostración: Es consecuencia del Corolario 2.2.21 y del hecho de que, en este caso, el espacio $\mathcal{H}V_{wu}(X)$ es un espacio de Fréchet. ∎

El ejemplo 2.2.23 A) posterior permite representar $\mathcal{H}_b(X)$ como un espacio ponderado $\mathcal{H}V(X)$ para una familia de pesos adecuada. En este caso $\mathcal{H}V_{wu}(X) = \mathcal{H}_{wu}(X)$ por lo que el Corolario 2.2.22 es una generalización del Corolario 8 de [40].

**Ejemplos 2.2.23** Vamos a construir ejemplos de familias de pesos que verifican las propiedades $A1$ y $A2$ y a cuyos espacios ponderados asociados, consecuentemente, se les puede aplicar los resultados probados en este apartado. Además en todos los ejemplos, los pesos son rápidamente decrecientes a cero. El primero de ellos, y más importante, permite recuperar el espacio de funciones holomorfas de tipo acotado $\mathcal{H}_b(X)$. Por este motivo, los resultados dados en este apartado generalizan los dados por Prieto [40] para $\mathcal{H}_b(X)$.

**A.** Sea $(X, \| \cdot \|)$ un espacio de Banach. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $v_n(x) = 1$ si $\| x \| \leq n$ y $v_n(x) = 0$ si $\| x \| > n$. La familia $V := (v_n)_n$ verifica la condición P) y como para toda función $f \in \mathcal{H}_b(X)$

$$\sup_{x \in X} v_n(x)|f(x)| = \sup_{\|x\| \leq n} |f(x)| < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

se cumple que $(\mathcal{H}V(X), \tau_V) = (\mathcal{H}_b(X), \tau_b)$. Además, como la familia $V$ también verifica las condiciones $A1$ y $A2$, el Corolario 2.2.12 (Corolario 2.2.22) establece que $\mathcal{H}_b(X)$ ($\mathcal{H}_{wu}(X)$, respectivamente) es reflexivo si y sólo si cada $\mathcal{P}(^mX)$ ($\mathcal{P}_{wu}(^mX)$, respectivamente) es reflexivo.

**B.** Dado un espacio de Banach $X$, vamos a construir una familia numerable de pesos definidos en $X$ rápidamente decrecientes a cero. para la que se verifican las condiciones $A1$ y $A2$, de donde, por una parte, obtendremos como consecuencia que la familia $(\mathcal{P}(^mX), P_m)$ es una descomposición $\mathcal{S}$-absoluta y $\gamma$-completa de $\mathcal{H}V(X)$ y, por otra, que $\mathcal{H}V(X)$ es reflexivo si y sólo si cada $\mathcal{P}(^mX)$ es reflexivo.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la función

$$v_n(x) = e^{-\frac{\|x\|}{n}} \quad \forall x \in X.$$

Dichas funciones son positivas y verifican

$$0 < \inf_{\|x\| \leq t} v_n(x) \leq \sup_{\|x\| \leq t} v_n(x) < \infty \quad \forall t > 0.$$

Así pues $(v_n)_n$ es una sucesión de pesos definidos sobre el espacio de Banach $X$ y que además verifican:

1) Dado $n \in \mathbb{N}$ $e^{-\frac{\|x\|}{n}} = e^{-\frac{\|2x\|}{2n}}$, esto es, dado $n \in \mathbb{N}$ existe $m = 2n \in \mathbb{N}$ tal que $v_n(x) \leq v_m(2x)$,

2) Para cada $n \in \mathbb{N}$, dado $x \in X$ y $t \in \mathbb{C}$ tal que $|t| = 1$ se tiene que $e^{-\frac{\|tx\|}{m}} = e^{-\frac{\|x\|}{n}}$, esto es, cada peso es radial,

3) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $e^{-\frac{\|x\|}{n}}$ es rápidamente decreciente a cero.

En general siempre que tengamos un peso $v$ radial y rápidamente decreciente a cero podemos definir por inducción la familia numerable de pesos $(v_n)_n$ dada por $v_n(x) = v(\frac{x}{n})$ para cada $n \in \mathbb{N}$, que son de decrecimiento rápido y que verifican las condiciones $A1$ y $A2$. De la definición se obtiene directamente la condición $A1$, pues $v_n(x) = v_{2n}(2x)$.

Usando este método podemos establecer la siguiente familia de pesos $V$ cuyo interés reside en que el espacio $\mathcal{H}V(X)$ incluye las funciones holomorfas de crecimiento exponencial (recordemos que una función holomorfa $f$ es de crecimiento exponencial si existe $K > 0$ de modo que $|f(x)| \leq Ke^{\|x\|} \quad \forall x \in X$).

**C.** Sea $X$ un espacio de Banach. Definimos $v(x) = e^{-\|x\|^2}$, $\forall x \in X$. Como $v$ es radial y rápidamente decreciente a cero, la familia de pesos $V = (v_n)_n$, donde cada $v_n(x) = e^{-\frac{\|x\|^2}{n}}$, verifica las condiciones $A1$ y $A2$. Además, si $f \in \mathcal{H}_b(X)$ es una función de crecimiento exponencial existe $K > 0$ de modo que $|f(x)| \leq Ke^{\|x\|}$ $\forall x \in X$. Dado $n \in \mathbb{N}$ las siguientes desigualdades se verifican para $\| x \| \geq n$

$$v_n(x)|f(x)| = e^{-\frac{\|x\|^2}{n}}|f(x)| \leq e^{-\|x\|}|f(x)| \leq K.$$

Si $\| x \| < n$, existe $K' > 0$ de modo que $\sup_{\|x\| \leq n} |f(x)| < K'$ por ser $f$ de tipo acotado, mientras que por continuidad $\sup_{\|x\| \leq n} e^{-\frac{\|x\|^2}{n}} < \infty$. Así pues $\sup_{x \in X} v(x)|f(x)| < \infty$ lo que prueba que $f \in \mathcal{H}V(X)$.

### 2.2.2 El espacio $\mathcal{H}V(X)$ y su predual como $LB$

En este apartado trabajaremos con una sucesión creciente de pesos $V := (v_n)_n$ definidos en un abierto equilibrado $U$ de un espacio de Banach $X$ y que, tal y como indicábamos al principio de la sección 2.2, son no negativos y verifican la condición (P). En este caso la condición (P) se puede reescribir de la siguiente forma:
P) Para cada conjunto $U$-acotado $A$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\inf_{x \in A} v_n(x) > 0$.

Consideramos el espacio ponderado

$$\mathcal{H}V(U) := \{f \in \mathcal{H}(U) : p_n(f) := \sup_{x \in X} v_n(x)|f(x)| < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$$

que con la topología $\tau_V$ generada por la familia de seminormas $(p_n)_n$ es un espacio localmente convexo metrizable y completo, es decir, se trata de un espacio de Fréchet (ver Proposición 2.2.3).

**Proposición 2.2.24** *La familia formada por los conjuntos*

$$V_{n,\epsilon} := \{f \in \mathcal{H}V(U) : p_n(f) \leq \epsilon\},$$

*para $n \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$ es un sistema fundamental de entornos de cero absolutamente convexos y $\tau_0$-cerrados.*

Demostración: Por ser $(v_n)_n$ creciente, la familia $(V_{n,\epsilon})_{n,\epsilon}$ es un sistema fundamental de entornos de cero para $\tau_V$. Demostremos que cada $V_{n,\epsilon}$ es $\tau_0$-cerrado. Sea $(f_d)_d$ una red en $V_{n,\epsilon}$ que $\tau_0$-converge a $f \in \mathcal{H}(X)$. Probemos que $f \in V_{n,\epsilon}$. Como cada $f_d \in V_{n,\epsilon}$ se tiene que $\sup_{x \in U} v_n(x)|f(x)| \leq \epsilon$. Como la convergencia para $\tau_0$ implica la convergencia puntual, la red $(v_n(x)|f_d(x)|)_d$ tiende a $v_n(x)|f(x)|$, por lo que $v_n(x)|f(x)| \leq \epsilon$, $\forall x \in U$, lo que prueba que $f \in V_{n,\epsilon}$. ∎

**Nota 2.2.25** Notar que en realidad se ha probado que cada $V_{n,\epsilon}$ es $\tau_0$-cerrado en $\mathcal{H}(U)$. Por poseer $\mathcal{H}V(U)$ un sistema fundamental de entornos de cero que son $\tau_0$-cerrados en $\mathcal{H}(U)$ y por ser $(\mathcal{H}(U), \tau_0)$ un espacio completo y $\tau_0 \leq \tau_V$, se tiene que $(\mathcal{H}V(U), \tau_V)$ es completo (18.4(4) de [31]).

En [6] se define la condición $(CNC)$ en un espacio $E = (E, \tau)$ localmente convexo bornológico sobre el que existe una topología localmente convexa de Hausdorff $\tilde{\tau}$ menos fina que $\tau$, como sigue:

*(CNC)* $\quad$ *$\tau$ tiene una base de entornos de cero formada por conjuntos absolutamente convexos y $\tilde{\tau}$-cerrados.*

La Proposición 2.2.24 afirma que el espacio $\mathcal{H}V(U)$ verifica la propiedad $(CNC)$.

Consideremos para cada $\alpha = (\alpha_n)_n$, $\alpha_n > 0$, el siguiente conjunto:

$$D_\alpha := \{f \in \mathcal{H}V(U) : p_n(f) \leq \alpha_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Claramente, la familia $\{D_\alpha\}_{\alpha=(\alpha_n)_n, \alpha_n>0}$ es un sistema fundamental de $\tau_V$-acotados absolutamente convexos. Veamos a continuación que dichos conjuntos son $\tau_0$-compactos.

**Proposición 2.2.26** *Para cada $\alpha = (\alpha_n)_n$, $\alpha_n > 0$, el conjunto $D_\alpha$ es $\tau_0$-compacto.*

Demostración: Como $\tau_0 \leq \tau_V$ y $D_\alpha$ es $\tau_V$-acotado, $D_\alpha$ es $\tau_0$-acotado. Falta comprobar que es $\tau_0$-cerrado. Sea $(f_d)_d$ una red en $D_\alpha$ que $\tau_0$-converge a $f \in \mathcal{H}(X)$. Veamos que $f \in D_\alpha$. Como cada $f_d \in D_\alpha$ se tiene que $p_n(f) = \sup_{x\in U} v_n(x)|f_d(x)| \leq \alpha_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como la convergencia para $\tau_0$ implica la convergencia puntual, la red $(v_n(x)|f_d(x)|)_d$ tiende a $v_n(x)|f(x)|$, por lo que $v_n(x)|f(x)| \leq \alpha_n$, $\forall x \in U$ $\forall n \in \mathbb{N}$, lo que prueba que $f \in D_\alpha$. ∎

Así pues, el espacio $(\mathcal{H}V(U), \tau_V)$ posee un sistema fundamental de acotados absolutamente convexos y $\tau_0$-compactos (esta propiedad recibe, a su vez, el nombre $(BBC)$ en [6]). Mujica (ver p.417 de [15] o

Teorema 1 y Corolario 2 de [6]) probó que el espacio $GV(U)$ definido como

$$\{\phi \in \mathcal{H}V(U)^* : \phi|_A \text{ es } \tau_0 - \text{continua } \forall A \subset \mathcal{H}V(U)\ \tau_V - \text{acotado }\} =$$

$$\{\phi \in \mathcal{H}V(X)^* : \phi|_{D_\alpha} \text{ es } \tau_0 - \text{continua } \forall \alpha = (\alpha_n), \alpha_n > 0\}$$

dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos $\tau_V$-acotados es un espacio completo $(DF)$ que verifica

$$GV(U)'_i := ind_U GV(U)'_{W^\circ} = \mathcal{H}V(U)$$

(donde $W$ varía en el sistema $\mathcal{W}$ de todos los entornos de cero absolutamente convexos de $GV(U)$) mediante un isomorfismo topológico. Además, como $(\mathcal{H}V(U), \tau_V)$ también verifica $(CNC)$ el espacio $GV(U)$ es tonelado, con lo cual $GV(U)'_i$ coincide con el dual fuerte $GV(U)'_b$ y resulta que $\mathcal{H}V(U)$ es topológicamente isomorfo a $GV(U)'_b$.

Sea $\tau_{bc}$ la topología más fina sobre $\mathcal{H}V(U)$ que coincide con $\tau_0$ sobre los $\tau_V$-acotados de $\mathcal{H}V(U)$. Claramente, un subconjunto $W$ de $\mathcal{H}V(U)$ es $\tau_{bc}$-abierto si y sólo si $W \cap C$ es $\tau_0$-abierto en $C$ para todo subconjunto $\tau_V$-acotado $C$ de $\mathcal{H}V(U)$.

**Proposición 2.2.27** *La topología $\tau_{bc}$ es invariante por traslaciones, esto es, si $W$ es $\tau_{bc}$-abierto entonces $W + g$ es $\tau_{bc}$-abierto para todo $g \in \mathcal{H}V(U)$.*

Demostración: Sea $W$ un conjunto $\tau_{bc}$-abierto, $g \in \mathcal{H}V(U)$ y $C$ un conjunto $\tau_V$-acotado. Hemos de probar que $(W + g) \cap C$ es $\tau_0$-abierto en $C$. Como $W$ es $\tau_{bc}$-abierto, el conjunto $W \cap (C - g)$ es $\tau_0$-abierto en $C - g$, por lo que existe $G$ $\tau_0$-abierto tal que $W \cap (C - g) = G \cap (C - g)$. Entonces

$$(W + g) \cap C = (W \cap (C - g)) + g = (G \cap (C - g)) + g = (G + g) \cap C$$

y al ser $G + g$ $\tau_0$-abierto concluimos la prueba. ∎

**Proposición 2.2.28** *i)* $\tau_0 \leq \tau_{bc} \leq \tau_V$.
*ii)* $(\mathcal{H}V(U), \tau_V)$ *y* $(\mathcal{H}V(U), \tau_{bc})$ *tienen los mismos acotados.*
*iii)* $GV(U) = (\mathcal{H}V(U), \tau_{bc})'_b$.

Demostración: i) La primera desigualdad es consecuencia directa de la definición. Por otra parte, si la sucesión $(f_n)_n$ $\tau_V$-converge a $f$ en $\mathcal{H}V(U)$, el conjunto $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{f\}$ es $\tau_V$-acotado, y como $\tau_0 \leq \tau_V$, concluimos que $(f_n)_n$ $\tau_{bc}$-converge a $f$. De aquí que $\tau_{bc} \leq \tau_V$.
ii) Por la definición de $\tau_{bc}$, una forma lineal $u$ sobre $\mathcal{H}V(U)$ es $\tau_{bc}$-continua si y sólo si la restricción de $u$ a cada acotado de $\mathcal{H}V(U)$ es $\tau_0$-continua, esto es, si y sólo si $u \in GV(U)$. Así pues, $(\mathcal{H}V(U), \tau_{bc})' = GV(U)$ algebráicamente. Esto, junto con la Proposición 2.2.25, asegura que la topología $\tau_{bc}$ es más fina que la topología $\sigma(\mathcal{H}V(U), GV(U))$, luego todo $A \subset \mathcal{H}V(U)$ $\tau_{bc}$-acotado es $\sigma(\mathcal{H}V(U), GV(U))$-acotado. Pero como $\mathcal{H}V(U)$ es isomorfo topológicamente a $GV(U)'_b$, el conjunto $A$ es $\sigma(GV(U)', GV(U))$-acotado y, al ser $GV(U)$ tonelado, $A$ es equicontinuo. Por tanto, $A$ es fuertemente acotado y, consecuentemente, $A$ es $\tau_V$-acotado.Así queda probado que todo $\tau_{bc}$-acotado es $\tau_V$-acotado.

Por otra parte, de i) se sigue que todo $\tau_V$-acotado es $\tau_{bc}$-acotado.
iii) Es consecuencia de ii). ∎

En lo que sigue supondremos además que cada peso $v_n$ es semicontinuo inferiormente (s.c.i).

Sea

$$U_n := U \setminus v_n^{-1}(\{0\}) = \{x \in U : v_n(x) > 0\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

El conjunto $U_n$ es abierto por ser $v_n$ s.c.i.

Con estas condiciones, por el apartado 2.1 anterior, sabemos que cada espacio $(\mathcal{H}v_n(U_n), \|.\|_{v_n})$ es un espacio de Banach y, además, el espacio

$$Gv_n(U_n) := \{\phi \in \mathcal{H}v_n(U_n)^* : \phi|_{B_n} \text{ es } \tau_0 - \text{continua }\}$$

(donde $B_n := \{f \in \mathcal{H}v_n(U_n) : \|f\|_{v_n} \leq 1\}$), dotado con la topología fuerte es un espacio de Banach que verifica

$$Gv_n(U_n)' = \mathcal{H}v_n(U_n)$$

topológicamente.

Veamos a continuación que $\mathcal{H}V(U) = proj_n \mathcal{H}v_n(U_n)$.

Para $m > n$ definimos

$$\begin{array}{rccc} r_{n,m}: & \mathcal{H}v_m(U_m) & \longrightarrow & \mathcal{H}v_n(U_n) \\ & f & \rightsquigarrow & f|_{U_n} \end{array}$$

La aplicación $r_{n,m}$ está bien definida pues si $f \in \mathcal{H}v_m(U_m)$ y $x \in U_n$,

$$v_n(x)|f(x)| \leq v_m(x)|f(x)| \leq \sup_{y \in U_m} v_m(y)|f(y)| < \infty$$

y de aquí

$$\|r_{n,m}(f)\|_{v_n} \leq \|f\|_{v_m}$$

por lo que, además de lineal, $r_{n,m}$ es continua.

Sea ahora la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} r_n: & \mathcal{H}V(U) & \longrightarrow & \mathcal{H}v_n(U_n). \\ & f & \rightsquigarrow & f|_{U_n} \end{array}$$

Como

$$\|r_n f\|_{v_n} = \sup_{x \in U_n} v_n(x)|f(x)| = \sup_{x \in U} v_n(x)|f(x)| = p_n(f), \quad \forall f \in \mathcal{H}V(U),$$

se tiene que $r_n$ es continua, por lo que la aplicación

$$\begin{array}{rccl} r: & \mathcal{H}V(U) & \longrightarrow & proj_n \mathcal{H}v_n(U_n) \\ & f & \rightsquigarrow & r(f) := (r_n f)_n \end{array}$$

es lineal y continua. Además es inyectiva pues si $r_n f = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in U$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $v_m(x) > 0$. Así pues $x \in U_m$ y $f(x) = 0$.

Veamos a continuación que $r$ es suprayectiva.

Sea $(f_n)_n \in proj_n \mathcal{H}v_n(U_n)$. Definimos $f(x) := f_n(x)$ si $x \in U_n$. La función $f$ está bien definida pues $U = \cup_{n=1}^{\infty} U_n$ y si $x \in U_n \cap U_m$ con $n < m$, por definición de límite proyectivo, $r_{n,m}(f_m) = f_n$, de donde $f_m(x) = f_n(x)$. Por otra parte, al ser $f|_{U_n} = f_n$ y $U = \cup_{n=1}^{\infty} U_n$, $f$ es una función holomorfa en $U$ y como

$$\sup_{x \in U} v_n(x)|f(x)| = \sup_{x \in U_n} v_n(x)|f(x)| = \sup_{x \in U_n} v_n(x)|f_n(x)| < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

se tiene que $f \in \mathcal{H}V(U)$.

Al estar $r$ definida entre espacios de Fréchet, se trata de un isomorfismo topológico como consecuencia del teorema de la aplicación abierta.

Este límite proyectivo no es reducido en general. Por 2.2.23 A) $\mathcal{H}_b(X)$ es un ejemplo de espacio ponderado y en este caso $\mathcal{H}_b(X) = proj_{r>0} \mathcal{H}^{\infty}(rB)$, donde $B$ es la bola unidad abierta de $X$, no es reducido.

Nuestro siguiente objetivo es probar que, en el caso $U = X$ y bajo ciertas hipótesis sobre los pesos, $GV(X) = ind_n Gv_n(U_n)$.Para ello tomemos la traspuesta

$$r_n^t : \mathcal{H}v_n(U_n)^* \longrightarrow \mathcal{H}V(X)^*.$$

**Proposición 2.2.29** $r_n^t(Gv_n(U_n)) \subset GV(X)$.

Demostración: Sea $\phi \in Gv_n(U_n)$ y $C \subset \mathcal{H}V(X)$ $\tau_V$-acotado. Como

$$r_n^t(\phi)|_C = \phi \circ r_n|_C = \phi|_{r_n(C)}$$

es $\tau_0$-continua al ser $r_n(C)$ acotado, concluimos que $r_n^t(\phi) \in GV(X)$. ■

Una consecuencia inmediata de esta proposición es que la aplicación $r_n$ definida del espacio $(\mathcal{H}V(X), \sigma(\mathcal{H}V(X), GV(X)))$ en el espacio $(\mathcal{H}v_n(U_n), \sigma(\mathcal{H}v_n(U_n), Gv_n(U_n)))$ es continua.

Además, la aplicación $(r_n^t|_{Gv_n(U_n)})^t : \mathcal{H}V(X) \longrightarrow \mathcal{H}v_n(U_n)$ verifica que $(r_n^t|_{Gv_n(U_n)})^t = r_n$, pues para $f \in \mathcal{H}V(X)$ y $\phi_n \in Gv_n(U_n)$ se tiene que

$$(r_n^t|_{Gv_n(U_n)})^t(f)(\phi_n) = f \circ r_n^t|_{Gv_n(U_n)}(\phi_n) = f(\phi_n \circ r_n) =$$

$$\phi_n \circ r_n(f) = \phi_n(r_n(f)) = r_n(f)(\phi_n).$$

**Proposición 2.2.30** *Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $v_n$ es radial y si $v_n(x) > 0$ entonces $v_n(tx) > 0$ para todo $t : |t| \leq 1$. Si el espacio $\mathcal{H}V(X)$ contiene a los polinomios entonces $r_n^t|_{Gv_n(U_n)}$ es inyectiva.*

Demostración: La proposición quedará probada si vemos que la aplicación $r_n$ tiene rango $\sigma(\mathcal{H}v_n(U_n), Gv_n(U_n))$-denso. La hipótesis de que $v_n(tx) > 0$ para todo $t : |t| \leq 1$, siempre que $v_n(x) > 0$ asegura que el abierto $U_n$ sea equilibrado. Sea $f \in \mathcal{H}v_n(U_n)$ y sean $C_m f$ las medias de Cesàro de $f$. Como cada $C_m f$ es un polinomio, $C_m(f) \in \mathcal{H}V(X)$ para todo $m \in \mathbb{N}$.Por la Proposición 2.1.13 b) la sucesión $(C_m f)_m$ $\tau_{bc}$-converge a $f$ y como, por la Proposición 2.1.8 ii), $(\mathcal{H}v_n(U_n), \tau_{bc})' = Gv_n(U_n)$, se sigue que la sucesión $(r_n(C_m f))_m$ $\sigma(\mathcal{H}v_n(U_n), Gv_n(U_n))$-converge a $f$. ■

Gracias a esta proposición, y bajo sus hipótesis, cada $Gv_n(U_n)$ se puede considerar subespacio de $GV(X)$, si bien evitaremos las identificaciones en pro de la claridad.

De forma análoga a lo probado hasta ahora, si tomamos las traspuestas

$$r_{n,m}^t : \mathcal{H}v_n(U_n)^* \longrightarrow \mathcal{H}v_m(U_m)^* \quad (n < m)$$

se verifica:

i) $r_{n,m}^t(Gv_n(U_n)) \subset Gv_m(U_m)$,

ii) $(r_{n,m}^t|_{Gv_n(U_n)})^t = r_{n,m}$,

iii) $r_{n,m}^t|_{Gv_n(U_n)}$ es inyectiva, de donde $Gv_n(U_n)$ se podría considerar subespacio de $Gv_m(U_m)$, para $n < m$, si bien no haremos tal identificación.

Así, al tomar traspuestas pasamos del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{H}V(X) \arrow[dl, "r_m"'] \arrow[dr, "r_n"] & \\ \mathcal{H}v_m(U_m) \arrow[rr, "r_{n,m}"'] & & \mathcal{H}v_n(U_n) \end{tikzcd}$$

a

$$\begin{tikzcd} & GV(X) & \\ Gv_m(U_m) \arrow[ur, "r_m^t"] & & Gv_n(U_n) \arrow[ul, "r_n^t"'] \arrow[ll, "r_{n,m}^t"] \end{tikzcd}$$

Reagrupemos en el siguiente lema todas las condiciones sobre los pesos que necesitamos para obtener una estructura de $LB$ en el espacio $GV(X)$. Si bien puede parecer que se trata de un gran número, todas ellas son muy naturales y son verificadas en los casos más usuales (ver Ejemplos 2.2.23).

**Lema 2.2.31** *Sea $X$ un espacio de Banach, $V = (v_n)_n$ una sucesión creciente de pesos que verifique:*

*P1) Cada* $v_n : X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *es s.c.i. y radial, para todo* $n \in \mathbb{N}$.
*P2) Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *si* $v_n(x) \neq 0$ *entonces* $v_n(tx) \neq 0 \quad \forall t : |t| \leq 1$.
*P3) Para cada* $A \subset X$ *acotado existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\inf_{x\in A} v_n(x) > 0$.
*P4) Dado* $n \in \mathbb{N}$, *existe* $m > n$ *y existe* $t > 1$ *tal que* $v_n(x) \leq v_m(tx)$ $\forall x \in X$.
*P5)* $\mathcal{H}V(X)$ *contiene a los polinomios (equivalentemente, cada* $v_n$ *es de decrecimiento rápido).*

*Entonces, dado* $n \in \mathbb{N}$ *existe* $m > n$ *y existe* $\alpha = (\alpha_j)_j$, $\alpha_j > 0$ *tal que si* $f \in B_m$, $f$ *admite la siguiente descomposición:*

$$f = r_m \sum_{j=0}^{N-1} P_j f + \sum_{j=N}^{\infty} P_j f,$$

*donde* $N$ *viene dado por las condiciones* $r_{n,m}(\sum_{j=N}^{\infty} P_j f) \in \frac{\epsilon}{2} B_n$ *y* $\sum_{j=0}^{N-1} P_j f \in \frac{\epsilon}{2} B_\alpha$.

Demostración: Notemos en primer lugar que para cada $p \in \mathbb{N}$, por P2), el abierto $U_p$ es equilibrado, por lo que la serie de Taylor de cada $f \in \mathcal{H}v_p(U_p)$ converge puntualmente a $f$, esto es

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j f(x) \quad \forall x \in U_p$$

y por P5), $r_p(\sum_{j=0}^{N} P_j f) \in \mathcal{H}v_p(U_p)$, luego

$$\sum_{j=N}^{\infty} P_j f = f - r_p(\sum_{j=0}^{N} P_j f) \in \mathcal{H}v_p(U_p), \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Por otra parte, modificando ligeramente las pruebas de las Proposiciones 2.2.7 y 2.2.8 se obtiene que

$(I) \quad \|r_p(P_j f)\|_{v_p} = \sup_{x\in U_p} v_p(x) |r_p(P_j f)(x)| \leq$

$$\sup_{x\in U_p} v_p(x) \sup_{|t|\leq 1} |P_j f(tx)| \leq \sup_{x\in U_p} v_p(x) \sup_{|t|\leq 1} |f(tx)| =$$

$$\sup_{x\in U_p} v_p(x) \sup_{|t|=1} |f(tx)| = \sup_{x\in U_p} \sup_{|t|=1} v_p(tx)|f(tx)| =$$

$$\sup_{x\in U_p} v_p(x)|f(x)| = \|f\|_{v_p} \quad \forall f \in \mathcal{H}v_p(U_p), \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

$(II)$ Dado $n \in \mathbb{N}$ $\exists m > n$ $\exists t > 1$ (dados por P4):

$$t^j\|r_n(P_jf)\|_{v_n} = t^j \sup_{x\in U_n} v_n(x)|r_n(P_jf)(x)| = \sup_{x\in X} v_n(x)|P_jf(tx)| \leq$$

$$\sup_{x\in X} v_m(tx)|P_jf(tx)| = \sup_{x\in X} v_m(x)|P_jf(x)| = \sup_{x\in U_m} v_m(x)|P_jf(x)| =$$

$$\|r_m(P_jf)\|_{v_m} \leq \|f\|_{v_m} \quad \forall f \in \mathcal{H}v_m(U_m).$$

Sea $f \in B_m$. De $(II)$, la serie $\sum_{j=0}^{\infty} r_n(P_jf)$ converge a $r_{n,m}f$ en $(\mathcal{H}v_n(U_n), \|.\|_{v_n})$ y

$$\|\sum_{j=N}^{\infty} r_n(P_jf)\|_{v_n} \leq \sum_{j=N}^{\infty} \|r_n(P_jf)\|_{v_n} \leq \sum_{j=N}^{\infty} \frac{1}{t^j}\|f\|_{v_n} \leq \sum_{j=N}^{\infty} \frac{1}{t^j}$$

que es menor que $\epsilon/2$ para $N$ suficientemente grande.

Por P3), sea $p \in \mathbb{N}$ tal que $\inf_{x\in B} v_p(x) > 0$, donde $B$ es la bola unidad cerrada de $X$. Podemos tomar $v_1' := v_p$ y $v_k' := v_{p+k-1}$. Así elegida, la familia de pesos $V' := (v_k')_k$ es creciente y verifica P1),..., P5) y además $(\mathcal{H}V'(X), \tau_{V'}) = (\mathcal{H}V(X), \tau_V)$, por lo que podemos suponer que $\inf_{x\in B} v_1(x) > 0$.

Por ser cada $v_p$ de decrecimiento rápido, para cada $j$, $\mathcal{P}(^jX) \subset \mathcal{H}V(X)$ y $\tau_V$ coincide con la topología de la norma en $\mathcal{P}(^jX)$ (Corolario 2.2.17). Luego, para cada $k \in \mathbb{N}$, $p_k|_{\mathcal{P}(^jX)}$ es una seminorma continua de $\mathcal{P}(^jX)$, por lo que existe $a_{k,j} > 0$ tal que $p_k(P) \leq a_{k,j}\|P\|$ para todo $P \in \mathcal{P}(^jX)$.

Además, como $\|P_jf\| \leq cp_1(P_jf)$, donde $c := \inf_{x\in B} v_1(x)$, se sigue que

$$\sum_{j=0}^{N-1} p_k(P_jf) \leq \sum_{j=0}^{N-1} a_{k,j}\|P_jf\| \leq \sum_{j=0}^{N-1} a_{k,j}cp_1(P_jf) \leq \sum_{j=0}^{N-1} a_{k,j}cp_{v_m}(P_jf) =$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} a_{k,j}c\|r_m(P_jf)\|_{v_m} \leq \sum_{j=0}^{N-1} a_{k,j}c\|f\|_{v_m} \leq \sum_{j=0}^{N-1} a_{k,j}c.$$

Si llamamos $\alpha_k := \frac{2}{\epsilon}c\sum_{j=0}^{N-1} a_{k,j} > 0$ se tiene que

$$p_k(\sum_{j=0}^{N-1} P_jf) \leq \frac{\epsilon}{2}\alpha_k,$$

es decir, $\sum_{j=0}^{N-1} P_jf \in \frac{\epsilon}{2}B_\alpha$, $\alpha := (\alpha_k)_k$. ∎

**Proposición 2.2.32** *Bajo las condiciones del Lema 2.2.29 se verifica:*

$$B_\alpha^\circ \cap r_n^t(A_n) \subset \epsilon r_m^t(A_m),$$

*donde $A_k$ es la bola unidad cerrada de $Gv_k(U_k)$.*

Demostración: Recordemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{H}V(X) \arrow[dl, "r_m"'] \arrow[dr, "r_n"] & \\ \mathcal{H}v_m(U_m) \arrow[rr, "r_{n,m}"'] & & \mathcal{H}v_n(U_n) \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} & GV(X) & \\ Gv_m(U_m) \arrow[ur, "r_m^t"] & & Gv_n(U_n) \arrow[ul, "r_n^t"'] \arrow[ll, "r_{n,m}^t"] \end{tikzcd}$$

Sea $\phi \in B_\alpha^\circ \cap r_n^t(A_n)$ y sea $\phi_n \in A_n$ tal que $\phi = r_n^t(\phi_n)$. Sea $\phi_m := r_{n,m}^t(\phi_n) \in Gv_m(U_m)$.

Entonces,

$$\phi = r_n^t(\phi_n) = r_m^t(r_{n,m}^t(\phi_n)) = r_m^t(\phi_m),$$

luego basta ver que $\phi_m \in \epsilon A_m$. Sea $f \in \mathcal{H}v_m(U_m)$ con $\|f\|_{v_m} \leq 1$, esto es, $f \in B_m$. Por el lema anterior,

$$f = r_m(\sum_{j=0}^{N-1} P_jf) + \sum_{j=N}^{\infty} P_jf$$

con $\sum_{j=0}^{N-1} P_j f \in \frac{\epsilon}{2} B_\alpha$ y $r_{n,m}(\sum_{j=N}^{\infty} P_j f) \in \frac{\epsilon}{2} B_n$.

Entonces,

$$|\phi_m(f)| = |r_{n,m}^t(\phi_n)(f)| = |\phi_n \circ r_{n,m}(r_m(\sum_{j=0}^{N-1} P_j f) + \sum_{j=N}^{\infty} P_j f)| =$$

$$|\phi_n(r_n(\sum_{j=0}^{N-1} P_j f)) + \phi_n(r_{n,m}(\sum_{j=N}^{\infty} P_j f))| \leq |r_n^t(\phi_n)(\sum_{j=0}^{N-1} P_j f)| + \frac{\epsilon}{2} =$$

$$|\phi(\sum_{j=0}^{N-1} P_j f)| + \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

lo que prueba que $\phi_m \in \epsilon A_m$. ∎

**Teorema 2.2.33** *Bajo las condiciones del Lema 2.2.31 se verifica que para cada* $n \in \mathbb{N}$ *existe* $m > n$ *tal que* $GV(X)$ *y* $r_m^t G v_m(U_m)$ *inducen la misma topología sobre* $r_n^t(A_n)$.

Demostración: Hemos de probar que para cada $\epsilon > 0$ existe un entorno de cero $V$ en $GV(X)$ tal que

$$V \cap r_n^t(A_n) \subset r_m^t(\epsilon A_m) \cap r_n^t(A_n).$$

Sea

$$B_\alpha = \{f \in \mathcal{H}V(X) : p_n(f) \leq \alpha_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\}, \; \alpha = (\alpha_n)_n, \; \alpha_n > 0.$$

Este es un conjunto $\tau_V$-acotado y, por tanto, es $\tau_{bc}$-acotado. Como $(\mathcal{H}V(X), \tau_{bc})' = GV(X)$, entonces $B_\alpha^\circ$ (donde el polar se ha tomado en $GV(X)$) es un entorno de cero en $GV(X)$, por lo que bastará probar que dado $\epsilon > 0$ existe $\alpha = (\alpha_n)_n$, $\alpha_n > 0$ tal que

$$B_\alpha^\circ \cap r_n^t(A_n) \subset \epsilon r_m^t(A_m);$$

resultado que se ha probado en la proposición anterior. ∎

**Teorema 2.2.34** *Bajo las condiciones del Lema 2.2.31,*

$$GV(X) = ind_n Gv_n(U_n)$$

*algebraica y topológicamente. Además, dicho límite inductivo es regular.*

Demostración: Sea $A \subset GV(X)$ un conjunto acotado. Entonces $A^\circ$ (polar tomado en $\mathcal{H}V(X)$) es un entorno de cero de $GV(X)'_b = \mathcal{H}V(X)$. Como $\mathcal{H}V(X) = proj_n \mathcal{H}v_n(U_n)$, existe $F \subset \mathbb{N}$ finito tal que

$$\bigcap_{j\in F} \{f \in \mathcal{H}V(X) : p_j(f) \leq \epsilon\} \subset A^\circ$$

para un $\epsilon > 0$. Sea $n := \max_{j\in F} j$, entonces

$$\bigcap_{j\in F} \{f \in \mathcal{H}V(X) : p_j(f) \leq \epsilon\} = \{f \in \mathcal{H}V(X) : p_n(f) \leq \epsilon\} = r_n^{-1}(\epsilon B_n),$$

y, teniendo en cuenta las propiedades de las aplicaciones traspuestas,

$$\epsilon(r_n^t|_{Gv_n(U_n)}(A_n))^\circ = ((r_n^t|_{Gv_n(U_n)})^t)^{-1}(\epsilon A_n^\circ) = r_n^{-1}(\epsilon B_n) \subset A^\circ,$$

donde el primer polar se ha tomado en $\mathcal{H}V(X)$ y el segundo en $\mathcal{H}v_n(U_n)$. Al tomar polares en $GV(X)$ obtenemos, haciendo uso del teorema del bipolar, que

$$A \subset A^{\circ\circ} \subset \frac{1}{\epsilon}(r_n^t|_{Gv_n(U_n)}(A_n))^{\circ\circ} = \frac{1}{\epsilon}\overline{r_n^t(A_n)}^{GV(X)}.$$

Por el Teorema anterior, existe $m > n$ tal que $GV(X)$ y $r_m^t Gv_m(U_m)$ inducen la misma topología sobre $r_n^t(A_n)$. De aquí que , al ser $r_m^t Gv_m(U_m)$ completo con la topología final por $r_m^t$,

$$\overline{r_n^t(A_n)}^{GV(X)} = \overline{r_n^t(A_n)}^{r_m^t(Gv_m(U_m))}$$

y por tanto,

$$A \subset \frac{1}{\epsilon}\overline{r_n^t(A_n)}^{r_m^t(Gv_m(U_m))} \subset r_m^t(Gv_m(U_m)).$$

Esto es, cada acotado de $GV(X)$ está contenido en algún $r_m^t(Gv_m(U_m))$ y es acotado ahí. Por lo tanto,

$$GV(X) = \cup_{n=1}^{\infty} r_n^t Gv_n(U_n)$$

y los espacios $GV(X)$ y $ind_n r_n^t Gv_n(U_n)$ inducen la misma topología sobre cada subconjunto acotado de $GV(X)$, dado que si $A \subset GV(X)$ es acotado existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset r_n^t(Gv_n(U_n))$ y es acotado ahí, y existe $m > n$ tal que $GV(X)$ y $r_m^t(Gv_m(U_m))$ inducen la misma topología en $A$. Por otra parte, $ind_j r_j^t(Gv_j(U_j))$ y $r_m^t(Gv_m(U_m))$ inducen la misma topología en $A$ pues, si llamamos $\tau_{ind}$ a la topología límite inductivo, $\tau_{ind}|_A \leq \tau_{r_m^t(Gv_m(U_m))}|_A$ por definición de $\tau_{ind}$ y como

$$\tau_{r_m^t(Gv_m(U_m))}|_A = \tau_V|_A \leq \tau_{ind}|_A \leq \tau_{r_m^t(Gv_m(U_m))}|_A,$$

se obtiene la igualdad.

Por último, como $GV(X)$ es un $(DF)$-espacio, por el teorema de Gröthendieck (Teorema 3 de [25]), la aplicación identidad

$$GV(X) \longrightarrow ind_n r_n^t(Gv_n(U_n))$$

es continua, lo que prueba que $GV(X) = ind_n r_n^t(U_n)$ topológicamente. ∎

**Nota 2.2.35** En este apartado hemos trabajado con familias de pesos numerables. Si consideramos una familia dirigida $V$, no necesariamente numerable, de pesos no negativos s.c.i. y que verifiquen la condición (P), podemos probar que $\mathcal{H}V(X) = proj_{v\in V}\mathcal{H}v(U_v)$ mediante un argumento análogo al usado en el caso numerable. Más aún, siguiendo con la misma notación, $GV(X)' = HV(X)$ cuando $GV(X)'$ está dotado con la topología de la convergencia uniforme sobre las uniones finitas de las bolas unidad de $Gv(U_v)$. Se puede probar, aunque no incluimos la demostración por no alargar en exceso esta nota, que $\mathcal{H}V(X)$ es el dual fuerte de $GV(X)$ si y sólo si $GV(X) = ind_v Gv(U_v)$ es regular. Por último hacemos notar que si $\mathcal{H}V(X)$ fuera bornológico, como verifica las condiciones $(CNC)$ y $(BBC)$, entonces posee un predual que es $(LB)$-espacio.

# Capítulo 3

# Bidualidad en espacios de funciones holomorfas

Este capítulo está dedicado al estudio del bidual de espacios de funciones holomorfas. El problema original surgió en espacios de polinomios [5] al intentar resolver el problema de cuándo el bidual $\mathcal{P}(X)^{**}$ del espacio de polinomios continuos sobre un espacio de Banach $X$ era isomorfo al espacio de polinomios continuos $\mathcal{P}(X^{**})$ definidos sobre el bidual de $X$. Y en general, la descripción que se pretende obtener es cuándo el bidual de una clase de funciones holomorfas sobre un espacio de Banach $X$ es topológicamente isomorfo a otra clase de funciones holomorfas sobre $X^{**}$. En los últimos años son muchos los autores que se han preocupado de describir el bidual de algunos espacios de polinomios o de funciones holomorfas (por ejemplo [5], [23], [28], [40], [47] and [48]).

La técnica que vamos a desarrollar para la obtención de isomorfismos entre espacios de funciones holomorfas consiste en obtener para cada uno de los espacios descomposiciones de Schauder adecuadas, que llamaremos $R$-Schauder, de modo que si dos espacios con un mismo tipo de descomposición $R$-Schauder cumplen que los espacios que las componen son en cierto sentido "equi" isomorfos, entonces los espacios originales son isomorfos. Este hecho es falso en general para descomposiciones de Schauder arbitrarias. Así por ejemplo, tanto el espacio $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ como $\mathcal{H}(D)$, donde $D$ es el disco unidad abierto de $\mathbb{C}$, tienen por descomposición de Schauder a $(\mathcal{P}(^m\mathbb{C}))_m$ y sin embargo dichos espacios no son isomorfos (ver la nota al Corolario 10.6.12 de [29] o la Nota 3.9). Otro ejemplo sencillo nos lo ofrece los espacios

$$c_0 = \{(a_n)_n : \exists \lim_n a_n = 0\}$$

y

$$l_1 = \{(a_n)_n : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty\}$$

que tienen una misma descomposición de Schauder $(H_n)$ donde cada $H_n$ es el subespacio generado por los vectores básicos $e_n := (0, ..., 0, 1, 0, ...)$, estando el 1 situado en el lugar $n$-ésimo.

Así pues, existen espacios de Fréchet que no son topológicamente isomorfos y que tienen la misma descomposición de Schauder. De aquí que nos preguntemos qué condiciones han de verificar los espacios $E$ y $F$ para asegurar que las igualdades entre los escalones que forman las descomposiciones respectivas lleven a un isomorfismo topológico entre $E$ y $F$. Más aún, bajo unas condiciones así, qué tipo de isomorfismos entre los escalones caracterizan el isomorfismo entre $E$ y $F$. Estas preguntas quedan contestadas gracias al concepto de descomposición $R$-Schauder.

Si $E$ es un espacio localmente convexo de Hausdorff, denotaremos con $E^*$ su dual algebraico y con $E'$ su dual topológico, es decir, el espacio de las formas lineales y continuas en $E$. Sin embargo, y dado que por el contexto no supondrá ambigüedad, seguiremos la notación tradicional para espacios de Banach según la cual el dual topológico de un espacio de Banach $X$ se denota $X^*$.

A lo largo del capítulo $(X, \| \cdot \|)$ denota un espacio de Banach complejo, $B$ la bola unidad abierta de $X$, $U$ un abierto absolutamente convexo de $X$, $B^*$ la bola unidad abierta del dual $X^*$ de $X$ y $G$ un abierto absolutamente convexo de $X^*$.

**Definición 3.1** *Sea $(E, \tau)$ un espacio de Fréchet y $(E_n, \| \cdot \|_n)_n$ una sucesión de espacios de Banach que forman una descomposición de Schauder de $E$. Diremos que $(E_n)$ es una descomposición R-Schauder de $E$, $0 < R \leq \infty$, si para toda sucesión $(x_n)_n$, $x_n \in E_n$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge en $E$ si y sólo si* $\limsup_n \| x_n \|_n^{1/n} \leq \frac{1}{R}$.

Recordemos que una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge dentro de su disco de convergencia y diverge fuera de él. Además, el radio de dicho disco viene dado por la fórmula de Cauchy-Hadamard:

$$R_c = \frac{1}{\limsup_n |a_n|^{\frac{1}{n}}}.$$

Claramente el concepto de $R$-Schauder descomposición está inspirado en dicha fórmula y es inmediato que si tomamos $E = \mathcal{H}(RD)$, donde $D$ es el disco unidad abierto de $\mathbb{C}$ y $0 < R \leq \infty$ con el convenio $\infty D = \mathbb{C}$, y tomamos $E_n = \mathcal{P}(^n\mathbb{C})$ entonces $(\mathcal{P}(^n\mathbb{C}))_n$ es una descomposición $R$-Schauder de $\mathcal{H}(RD)$.

**Proposición 3.2** *Si $(E_n)_n$ es una descomposición R-Schauder de $E$, $0 < R \leq \infty$, entonces $(E_n)_n$ es una descomposición $\mathcal{S}$-absoluta de $E$.*

Demostración. Como $E$ es un espacio de Fréchet basta probar que $(E_n)_n$ es una descomposición $\mathcal{S}$-Schauder de $E$ (Proposición 3.10 de [15]).

Sea $(a_n)_n \in S := \{(a_n)_n \subset \mathbb{C} : \limsup_n |a_n|^{1/n} \leq 1\}$ y sea $x = \sum_{m=0}^{\infty} x_m \in E$. Tenemos que probar que $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x_m \in E$.

Como

$$\limsup_n (|a_n| \, \| x_n \|_n)^{1/n} \leq \limsup_n |a_n|^{1/n} \limsup_n \| x_n \|_n^{1/n} \leq \frac{1}{R}$$

se sigue de la definición de descomposición $R$-Schauder que

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m x_m \in E.$$

■

**Nota 3.3** i) De esta proposición se sigue que no toda descomposición de Schauder es $R$-Schauder para algún $0 < R \leq \infty$. De hecho, una descomposición de Schauder que no sea $S$-absoluta no puede ser $R$-Schauder para ningún $R$. Por ejemplo, siguiendo la notación inicial, $(H_n)_n$ no es una descomposición $R$-Schauder de $l_1$ para ningún $R$.

ii) También existen descomposiciones $S$-absolutas que no son $R$-Schauder para ningún $R$. Por ejemplo si consideramos la sucesión de pesos $V := (v_n)_n$ donde $v_n(z) := e^{-\frac{|z|}{n}}$, $z \in \mathbb{C}$, el espacio ponderado $\mathcal{H}V(\mathbb{C})$ tiene por descomposición $S$-absoluta a $(\mathcal{P}(^m\mathbb{C}))_m$ (Proposición 2.2.11). Pero como la función

$$f(z) := e^{z^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m}}{m!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

no pertenece a $\mathcal{H}V(\mathbb{C})$ la serie $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m}}{m!}$ no converge para $\tau_V$ y sin embargo $\limsup_m (\frac{1}{m!})^{\frac{1}{2m}} = 0$. Consecuentemente no se verifica la definición de $R$-Schauder para ningún $R$.

iii) En general para un espacio de Banach $X$ si $V$ es una familia numerable de pesos de decrecimiento rápido la situación es la siguiente:
a) Si $\mathcal{H}V(X) = \mathcal{H}_b(X)$ entonces $(\mathcal{P}(^mX))_m$ es una descomposición $\infty$-Schauder de $\mathcal{H}V(X)$ (ver Ejemplo 3.5 a) posterior).
b) Si $\mathcal{H}V(X)$ es un subespacio propio de $\mathcal{H}_b(X)$ entonces $(\mathcal{P}(^mX))_m$ es una descomposición $S$-absoluta de $\mathcal{H}V(X)$ que no es $R$-Schauder para ningún $0 < R \leq \infty$. En efecto, de forma análoga a ii) si $f = \sum_{m=0}^{\infty} P_m f \in \mathcal{H}_b(X) \setminus \mathcal{H}V(X)$, entonces $\limsup_m \|P_m\|^{\frac{1}{m}} = 0$. Pero

$\sum_{m=0}^{\infty} P_m f$ no converge para $\tau_V$ pues de hacerlo, como $\tau_b \leq \tau_V$, $f$ sería su suma, lo que contradice que $f$ no pertenece a $\mathcal{H}V(X)$.

La topología de $E$ y la norma de cada $E_n$ aparecen fuertemente relacionados en la definición de descomposición $R$-Schauder. De hecho, la próxima proposición muestra que la topología de $E$ puede ser descrita en términos de $R$ y de la norma de cada $E_n$.

**Proposición 3.4** *Si $E_n$ es una descomposición R-Schauder de $E$, $0 < R \leq \infty$, la familia de seminormas $\{p_r : 0 < r < R\}$ dadas por*

$$p_r(x) = \sum_{m=0}^{\infty} r^m \parallel x_m \parallel_m, \quad x = \sum_{m=0}^{\infty} x_m \in E$$

*determina un sistema fundamental de seminormas continuas para $E$.*

Demostración. Sea $0 < r < s < R$, como

$$\limsup_n \parallel x_n \parallel_n^{1/n} \leq \frac{1}{R} < \frac{1}{s},$$

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que si $n \geq n_0$ entonces $\parallel x_n \parallel_n \leq \frac{1}{s^n}$; de donde $r^n \parallel x_n \parallel_n \leq \frac{r^n}{s^n}$ y por tanto la serie $\sum_{m=0}^{\infty} r^m \parallel x_m \parallel_m$ es convergente para cada $0 < r < R$ y cada $p_r$ es una seminorma. Dicha familia de seminormas determina una topología localmente convexa sobre $E$ metrizable (pues basta considerar la familia $\{p_{r_n} : r_n \in ]0, R[\cap\mathbb{Q}\}$) que denotamos $\tau_R$. Como para cada $0 < r < R$ el conjunto

$$\mathcal{B}_r := \{x \in E : p_r(x) \leq 1\} =$$

$$\cap_{l=0}^{\infty}\{x = \sum_{m=0}^{\infty} x_m \in E : \sum_{m=0}^{l} r^m \parallel x_m \parallel_m \leq 1\}$$

es un tonel en el espacio de Fréchet $(E, \tau)$ se tiene que $\tau_R \leq \tau$. De aquí que la identidad $(E, \tau) \longrightarrow (E, \tau_R)$ sea continua. Si probamos que $(E, \tau_R)$ es completo, por el Teorema de la aplicación abierta, ambas topologías coincidirán.

Como $r^m\|x_m\|_m \leq \sum_{n=0}^{\infty} r^n\|x_n\|_n = p_r(x)$, $\forall x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \in E$, la proyección

$$\begin{array}{ccc} (E, \tau_R) & \longrightarrow & (E_m, \| \cdot \|_m) \\ x = \sum_{m=0}^{\infty} x_m & \rightsquigarrow & x_m \end{array} \qquad (1)$$

es continua para cada $m \in \mathbb{N}$.

Sea ahora $(x^s)_s$ una sucesión $\tau_R$-Cauchy en $E$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ la sucesión $(x_m^s)_s$ es de Cauchy en el espacio de Banach $E_m$ por lo que existe $x_m \in E_m$ $\| \cdot \|_m$-límite de $(x_m^s)_s$. Para terminar la prueba debemos demostrar que $x := \sum_{m=0}^{\infty} x_m$ es convergente y que $(x^s)_s$ $\tau_R$-converge a $x$. Por ser $(x^s)_s$ una sucesión $\tau_R$-Cauchy, dado $\epsilon > 0$ existe $s_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s, s' \geq s_0$ implica que $\sum_{m=0}^{\infty} r^m \| x_m^s - x_m^{s'} \|_m < \epsilon$. Por tanto

$$\sum_{m=0}^{l} r^m \| x_m^s - x_m^{s'} \|_m < \epsilon \quad \forall l \in \mathbb{N} \quad \forall s, s' \geq s_0.$$

Si fijamos $s$ y hacemos tender $s'$ a $\infty$ entonces

$$\sum_{m=0}^{l} r^m \| x_m^s - x_m \|_m \leq \epsilon \quad \forall l \in \mathbb{N} \quad \forall s \geq s_0 \quad (2).$$

Así pues,

$$\sum_{m=0}^{\infty} r^m \| x_m \|_m \leq \sum_{m=0}^{\infty} r^m \| x_m^s - x_m \|_m + \sum_{m=0}^{\infty} r^m \| x_m^s \|_m < \infty.$$

Luego $\limsup_m \| x_m \|_m^{1/m} \leq \frac{1}{R}$, y por tanto $x = \sum_{m=0}^{\infty} x_m \in E$. Además, de (2) se tiene que

$$p_r(x - x^s) < \epsilon \quad \forall s \geq s_0,$$

lo que prueba que $(x^s)_s$ $\tau_R$-converge a $x$. ∎

La sucesión $(\mathcal{P}(^m X))_m$ $((\mathcal{P}_{wu}(^m X))_m)$ es una descomposición de Schauder de $\mathcal{H}_b(U)$ [40] ($\mathcal{H}_{wu}(U)$ [2] y [40] respectivamente). Si $x \in$

$\mathcal{H}_{wu}(X)$ Aron probó en la Proposición 1.5b de [2] que $P_m f \in \mathcal{P}_{wu}(^m X)$ usando la fórmula integral de Cauchy. Es conocido que este mismo argumento sirve para el caso de funciones no enteras y puede ser usado también para probar que $(\mathcal{P}_{w^*}(^m X^*))_m$ es una descomposición de Schauder de $\mathcal{H}_{w^*}(G)$. Estos hechos nos permiten obtener los ejemplos 3.5 y 3.7 posteriores.

**Ejemplos 3.5** a) La familia $(\mathcal{P}(^m X), \|\ .\ \|_B)_m$ es una descomposición $\infty$-Schauder de $\mathcal{H}_b(X)$. Para probarlo tenemos que ver que dada una sucesión $(P_m)_m$, $P_m \in \mathcal{P}(^m X)$, la serie $\sum_{m=0}^{\infty} P_m$ converge en $\mathcal{H}_b(X)$ si y solamente si $\limsup_m \|P_m\|_B^{\frac{1}{m}} = 0$.

Supongamos en primer lugar que $f := \sum_{m=0}^{\infty} P_m \in \mathcal{H}_b(X)$ y sea $r > 0$. Por las desigualdades de Cauchy

$$\|P_m\|_B = \frac{1}{r^m}\|P_m\|_{rB} \leq \frac{1}{r^m}\|f\|_{rB}$$

de donde

$$\|P_m\|_B^{\frac{1}{m}} \leq \frac{1}{r}\|f\|_{rB}^{\frac{1}{m}}.$$

Al tomar límites para $m$ obtenemos que $\limsup_m \|P_m\|_B^{\frac{1}{m}} \leq \frac{1}{r}$, para cualquier $r > 0$ y de aquí que $\limsup_m \|P_m\|_B^{\frac{1}{m}} = 0$.

Recíprocamente, sea $r > 0$. Como $\limsup_m \|P_m\|_B^{\frac{1}{m}} = 0$ la serie $\sum_{m=0}^{\infty} r^m \|P_m\|_B$ converge. Pero esta serie coincide con $\sum_{m=0}^{\infty} \|P_m\|_{rB}$. Por tanto, como

$$\|\sum_{m=p}^{q} P_m\|_{rB} \leq \sum_{m=p}^{q} \|P_m\|_{rB} < \epsilon$$

para $q > p$ suficientemente grandes, la serie $\sum_{m=0}^{\infty} P_m$ converge en el espacio de Fréchet $\mathcal{H}_b(X)$.

De forma análoga se prueban los ejemplos siguientes.

b) Sea $R > 0$. La familia $(\mathcal{P}(^m X), \|\ .\ \|_B)_n$ es una descomposición $R$-Schauder de $\mathcal{H}_b(RB)$.

c) Sea $U$ un abierto equilibrado y acotado de $X$. La familia $(\mathcal{P}(^mX), \| \cdot \|_U)$ es una descomposición 1-Schauder de $\mathcal{H}_b(U)$.

**Nota 3.6** De la propia definición se obtiene de forma inmediata que si $(E_n, \| \cdot \|_n)_n$ es una descomposición $R$-Schauder $(0 < R \leq \infty)$ del espacio de Fréchet $E$ y $F$ es un subespacio cerrado de $E$ de modo que $(F \cap E_n, \| \cdot \|_n)_n$ es una descomposición de Schauder de $F$, entonces $(F \cap E_n, \| \cdot \|_n)_n$ es una descomposición $R$-Schauder de $F$.

Como consecuencia de la Nota 3.6 y los ejemplos 3.5 obtenemos:

**Ejemplos 3.7** a') La familia $(\mathcal{P}_{wu}(^mX), \| \cdot \|_B)_m$ es una descomposición $\infty$-Schauder del espacio $\mathcal{H}_{wu}(X)$.

b') Sea $R > 0$. La familia $(\mathcal{P}_{wu}(^mX), \| \cdot \|_B)_n$ es una descomposición $R$-Schauder de $\mathcal{H}_{wu}(RB)$.

c') Sea $U \subset X$ un abierto absolutamente convexo y acotado de $X$. La familia $(\mathcal{P}_{wu}(^mX), \| \cdot \|_U)$ es una descomposición 1-Schauder de $\mathcal{H}_{wu}(U)$.

a") La familia $(\mathcal{P}_{w^*}(^mX^*), \| \cdot \|_{B^*})_m$ es una descomposición $\infty$-Schauder del espacio $\mathcal{H}_{w^*}(X^*)$.

b") Sea $R > 0$. La familia $(\mathcal{P}_{w^*}(^mX^*), \| \cdot \|_{B^*})_n$ es una descomposición $R$-Schauder de $\mathcal{H}_{w^*}(RB^*)$.

c") Sea $G \subset X^*$ un subconjunto absolutamente convexo y acotado de $X^*$. La familia $(\mathcal{P}_{w^*}(^mX^*), \| \cdot \|_G)$ es una descomposición 1-Schauder de $\mathcal{H}_{w^*}(G)$.

**Proposición 3.8** *Si $(E_n, \| \cdot \|_n)_n$ es una descomposición R-Schauder de $E$, $0 < R < \infty$, entonces la familia $(E_n, (R/R')^n \| \cdot \|_n)_n$ es una descomposición $R'$-Schauder de $E$ para todo $0 < R' < \infty$.*

Demostración. Dado $x_m \in E_m$, $m \in \mathbb{N}$, por hipótesis la serie $\sum_{m=0}^{\infty} x_m$ converge en $E$ si y sólo si $\sum_{m=0}^{\infty} r^m \parallel x_m \parallel_m$ converge para todo $0 < r < R$. Pero como

$$\sum_{m=0}^{\infty} r^m \parallel x_m \parallel_m = \sum_{m=0}^{\infty} r^m (\frac{R'}{R})^m (\frac{R}{R'})^m \parallel x_m \parallel_m$$

la serie $\sum_{m=0}^{\infty} x_m$ converge en $E$ si y sólo si $\sum_{m=0}^{\infty} s^m (\frac{R}{R'})^m \parallel x_m \parallel_m$ converge para todo $0 < s < R'$. ∎

**Nota 3.9** La Proposición 3.8 nos dice que existen esencialmente dos tipos de descomposiciones $R$-Schauder: las de tipo infinito (descomposiciones $\infty$-Schauder) y las de tipo finito (que son reducibles a descomposiciones 1-Schauder del modo siguiente: si $(E_n, \parallel . \parallel_n)_n$ es una descomposición $R$-Schauder de $E$, $0 < R < \infty$, entonces la familia $(E_n, R^n \parallel . \parallel_n)_n$ es una descomposición 1-Schauder de $E$). De acuerdo con la Proposición 3.8, los Ejemplos b,b',b") son casos particulares de c,c',c") respectivamente. Llegados a este punto, la siguiente pregunta surge de forma natural: ¿Es posible establecer un isomorfismo topológico entre dos espacios de Fréchet teniendo uno de ellos una descomposición $R$-Schauder con $0 < R < \infty$, y el otro una descomposición $\infty$-Schauder? Como hemos definido las descomposiciones $R$-Schauder teniendo en mente los espacios de funciones holomorfas de tipo acotado definidas en un conjunto abierto de un espacio de Banach, la pregunta puede reformularse del siguiente modo: ¿Es posible encontrar un espacio de Banach $X$ tal que $\mathcal{H}_b(X)$ sea topológicamente isomorfo a $\mathcal{H}_b(B)$? Recordemos que ya hemos indicado anteriormente que esto no es cierto para $X = \mathbb{C}$.

La respuesta a ambas preguntas es negativa y me la proporcionó José Bonet en una comunicación personal que le agradezco profundamente y en la que me mostró el siguiente punto de vista de las descomposiciones $R$-Schauder como espacios de series de potencias.

Dada una sucesión de espacios de Banach $(E_n)_n$ y $0 < R \leq \infty$ el espacio de series de potencias $\Lambda_R((E_n)_n)$ es un espacio de Fréchet definido por $\Lambda_R((E_n)_n) := \{x = (x_n) \in \prod_n E_n : \ p_r(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|_n r^n < \infty \ \ \forall r : 0 < r < R\}$, dotado con la topología localmente convexa dada por la familia de seminormas $\{p_r : 0 =< r < R\}$. Cuando $E_n = \mathbb{C}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ el espacio de series de potencias lo denotaremos $\Lambda_R$.

Como para cualquier sucesión de números reales no negativos $(\alpha_n)_n$ y cualquier $0 < R \leq \infty$ la condición $\limsup_n \alpha_n^{1/n} \leq 1/R$ es equivalente a $\sum_{n=0}^{\infty} r^n \alpha_n < \infty \ \forall r : 0 < r < R$, si $E$ es un espacio de Fréchet con una descomposición $R$-Schauder $(E_n)_n$, entonces $E$ es topológicamente isomorfo al espacio de series de potencias $\Lambda_R((E_n)_n)$, donde el isomorfismo $\phi : \Lambda_R((E_n)_n) \longrightarrow E$ está definido por $\phi((x_n)_n) := \sum_{n=0}^{\infty} x_n \ \forall (x_n)_n \in \Lambda_R((E_n)_n)$.

Se dice que un espacio de Fréchet $E$ satisface la propiedad $DN$ si dado un sistema fundamental de seminormas $(\|.\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe una norma continua $\|.\|$ en $E$ tal que para todo natural $k$ existe $p \in \mathbb{N}$ y existe $c > 0$ tales que

$$\|\cdot\|_k \leq r\|.\| + \frac{c}{r}\|.\|_{k+p} \quad \forall r > 0.$$

La definición es independiente del sistema de seminormas tomado y por tanto la propiedad $DN$ es un invariante topológico. También es inmediato de la definición que si $E$ cumple la propiedad $DN$ y $F$ es un subespacio de $E$, entonces $F$ cumple la propiedad $DN$. Una caracterización útil de la propiedad $DN$ es que exista una norma continua $\|.\|$ en $E$ tal que para todo natural $k$ existe $p \in \mathbb{N}$ y existe $c > 0$ tales que

$$\|\cdot\|_k^2 \leq c\|.\|\|\cdot\|_{k+p}.$$

Los espacios $\Lambda_R$ no tienen la propiedad $DN$ cuando $0 < R < \infty$ mientras que $\Lambda_\infty$ sí la tiene (Teorema 21.7.5 de [29]). José Bonet generaliza este resultado para los espacios $\Lambda_R((E_n)_n)$. Concretamente se tiene:

**Proposición 3.10** *Para toda sucesión de espacios de Banach* $(E_n)_n$ *y todo* $0 < R \leq \infty$ *el espacio* $\Lambda_R((E_n)_n)$ *tiene la propiedad* $DN$ *si y sólo si* $\Lambda_R$ *la tiene.*

Demostración. En la prueba $p_r$ denotará tanto a la seminorma de $\Lambda_R((E_n)_n)$ dada por $p_r((x_n)_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|_n r^n$ como a la seminorma de $\Lambda_R$ dada por $p_r((z_n)_n) = \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|_n r^n$.

Si $\Lambda_R((E_n)_n)$ cumple la propiedad $DN$ posee una norma continua $\|.\|$ cumpliendo que para todo $r$: $0 < r < R$ existe $r' > r$ $(r' < R)$ y existe $c > 0$ tales que

$$p_r((x_n)_n)^2 \leq c \ \|(x_n)_n\| \ p_{r'}((x_n)_n)$$

para todo $(x_n)_n \in \Lambda_R((E_n)_n)$.Como $\|.\|$ es continua sean $0 < r'' < R$ y $c' > 0$ tales que $\|.\| \leq c' p_{r''}$. Entonces

$$p_r((x_n)_n)^2 \leq c'' p_{r''}((x_n)_n) p_{r'}((x_n)_n)$$

donde $c'' = cc'$. Esta desigualdad es equivalente a

$$p_r((\|x_n\|_n)_n)^2 \leq c'' p_{r''}((\|x_n\|_n)_n) p_{r'}((\|x_n\|_n)_n)$$

donde ahora las seminormas son las correspondientes al espacio $\Lambda_R$. Veamos que esta última desigualdad implica que $\Lambda_R$ tiene la propiedad $DN$. Sea $(z_n)_n \in \Lambda_R$ y sea $x_n \in E_n$ con $\|x_n\|_n = 1$. Entonces $z_n x_n \in E_n$ y $\|z_n x_n\|_n = |z_n|$. Luego, de la desigualdad anterior,

$$p_r((z_n)_n)^2 = p_r((|z_n|)_n)^2 = p_r((\|z_n x_n\|_n)_n)^2 \leq$$

$$c'' p_{r''}((\|z_n x_n\|_n)_n) p_{r'}((\|z_n x_n\|_n)_n) =$$

$$c'' p_{r''}((z_n)_n) p_{r'}((z_n)_n)$$

para todo $(z_n)_n \in \Lambda_R$.

Recíprocamente, si $\Lambda_R$ tiene la propiedad $DN$ existe una norma continua $\|.\|$ en $\Lambda_R$ cumpliendo que para todo $r$: $0 < r < R$ existe $r' > r$ ($r' < R$) y existe $c > 0$ tales que

$$p_r((z_n)_n)^2 \leq c \ \|(z_n)_n\| \ p_{r'}((z_n)_n)$$

para todo $(z_n)_n \in \Lambda_R$. Como $\|.\|$ es continua sean $0 < r'' < R$ y $c' > 0$ tales que $\|.\| \leq c' p_{r''}$. Entonces

$$p_r((z_n)_n)^2 \leq c'' p_{r''}((z_n)_n) p_{r'}((z_n)_n)$$

donde $c'' = cc'$.

Si $(x_n)_n \in \Lambda_R((E_n)_n)$ se tiene que $(\|x_n\|_n)_n \in \Lambda_R$. Luego, de la última desigualdad se sigue que

$$p_r((x_n)_n)^2 = p_r((\|x_n\|_n)_n)^2 \leq c'' p_{r''}((\|x_n\|_n)_n) p_{r'}((\|x_n\|_n)_n) =$$

$$c'' p_{r''}((x_n)_n) p_{r'}((x_n)_n)$$

Lo que prueba que $\Lambda_R((E_n)_n)$ tiene la propiedad $DN$. ∎

De aquí J. Bonet concluye el teorema siguiente.

**Teorema 3.11** *Si $E$ y $F$ son espacios de Fréchet con descomposiciones $R$-Schauder, $0 < R < \infty$, e $\infty$-Schauder respectivamente, entonces no existe ningún isomorfismo topológico entre $E$ and $F$.*

Por tanto, el espacio $\mathcal{H}_b(X)$ ($\mathcal{H}_{wu}(X), \mathcal{H}_{w^*}(X^*)$) no es topológicamente isomorfo a $\mathcal{H}_b(B)$ ($\mathcal{H}_{wu}(B), \mathcal{H}_{w^*}(B^*)$ respectivamente).

La Proposición 3.8 y el Teorema 3.13 posterior pueden obtenerse a partir de la teoría de espacios de series de potencias, sin embargo nos mantenemos en el contexto de las descomposiciones $R$-Schauder dado que es completamente natural a la holomorfía y permite que el capítulo sea autocontenido sin alargarlo en exceso.

A partir de ahora nuestro objetivo es estudiar cuándo se puede dar un isomorfismo topológico entre dos espacios de Fréchet que tengan descomposiciones $R$-Schauder del mismo tipo.

Para cada $0 < r < R$ definimos

$$\mathcal{B}_r := \{x \in E : p_r(x) \leq 1\}.$$

Por la Proposición 3.4 la familia $\{\frac{1}{s}\mathcal{B}_r\}_{s>0,0<r<R}$ es un sistema fundamental de entornos de cero para $(E, \tau)$.

Denotamos $\mathcal{B}_r^\circ$ al polar de $\mathcal{B}_r$ en $E'$, esto es

$$\mathcal{B}_r^\circ = \{\phi \in E' : |\phi(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathcal{B}_r\}$$

y $\mathcal{B}_r^{\circ\circ}$ al polar de $\mathcal{B}_r^\circ$ en $E''$, esto es

$$\mathcal{B}_r^{\circ\circ} = \{F \in E'' : |F(\phi)| \leq 1 \quad \forall \phi \in \mathcal{B}_r^\circ\}.$$

Como $E''[\beta(E'', E')]$ es un espacio de Fréchet, la familia

$$\{\frac{1}{s}\mathcal{B}_r^{\circ\circ}\}_{s>0,0<r<R}$$

es un sistema fundamental de entornos de cero.

**Lema 3.12** *i) Dado $\phi_m \in E_m^*$ se cumple que $\phi_m \in \mathcal{B}_r^\circ$ si y sólo si $\| \phi_m \|_m^* \leq r^m$, donde $\|.\|_m^*$ es la norma dual de $E_m^*$.*

*ii) Si $\phi = \sum_{n=0}^\infty \phi_n \in \mathcal{B}_r^\circ$ entonces $\| \phi_m \|_m^* \leq r^m$, $\forall m \in \mathbb{N}$.*

Demostración. i) Supongamos que $\phi_m \in \mathcal{B}_r^\circ$, entonces

$$\| \phi_m \|_m^* = \sup_{x_m \in E_m, \|x_m\|_m \leq 1} |\phi_m(x_m)| = \sup_{x_m \in r^m \mathcal{B}_r \cap E_m} |\phi_m(x_m)| =$$

$$r^m \sup_{x_m \in \mathcal{B}_r \cap E_m} |\phi_m(x_m)| \leq r^m$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

Recíprocamente, si $\phi_m \in E^*_m$ es tal que $\| \phi_m \|^*_m \leq r^m$, entonces dado $x \in \mathcal{B}_r$, $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$,

$$|\phi_m(x)| = |\phi_m(x_m)| \leq \frac{1}{r^m} \| \phi_m \|^*_m \leq 1.$$

ii) $\| \phi_m \|^*_m = \sup_{x_m \in E_m, \|x_m\|_m \leq 1} |\phi_m(x_m)| = \sup_{x_m \in r^m \mathcal{B}_r \cap E_m} |\phi_m(x_m)| =$

$$r^m \sup_{x_m \in \mathcal{B}_r \cap E_m} |\phi_m(x_m)| = r^m \sup_{x_m \in \mathcal{B}_r \cap E_m} |\phi(x_m)| \leq r^m \sup_{x \in \mathcal{B}_r} |\phi(x)| \leq r^m.$$

■

**Teorema 3.13** *Si $(E_n, \| \cdot \|_n)_n$ es una descomposición R-Schauder de E, $0 < R \leq \infty$, entonces $(E^{**}_n, \| \cdot \|^{**}_n)_n$ es una descomposición R-Schauder de $(E'', \beta(E'', E'))$.*

Demostración. Por la Proposición 3.2, $(E_n, \| \cdot \|_n)_n$ es una descomposición $S$-absoluta de $(E, \tau)$, por lo que $(E^{**}_n, \| \cdot \|^{**}_n)_n$ es una descomposición $S$-absoluta de $(E'', \beta(E'', E'))$ (ver Proposición 3.11 de [15]). Dados $0 < r < R$, $r < s < R$ y $G = \sum_{m=0}^{\infty} G_m \in E''$, con $G_m \in E^{**}_m$, existe $M > 0$ tal que $G \in M\mathcal{B}^{\circ\circ}_s$. Por el Lema 3.12 i) $\phi_m \in E^*_m$ verifica $\| \phi_m \|^*_m \leq 1$ si y sólo si $s^m \phi_m \in \mathcal{B}^\circ_s \cap E^*_m$. Luego

$$r^m \| G_m \|^{**}_m = r^m \sup_{\phi_m \in E^*_m, \|\phi_m\|^*_m \leq 1} |G_m(\phi_m)| =$$

$$M(\frac{r}{s})^m \sup_{s^m \phi_m \in \mathcal{B}^\circ_s \cap E^*_m} |\frac{1}{M} G(s^m \phi_m)| \leq M(\frac{r}{s})^m \sup_{\phi \in \mathcal{B}^\circ_s} |\frac{1}{M} G(\phi)| \leq M(\frac{r}{s})^m.$$

Por tanto la serie $\sum_{m=0}^{\infty} r^m \| G_m \|^{**}_m$ converge para todo $0 < r < R$, y por la Fórmula de Cauchy-Hadamard $\limsup_m (\| G_m \|^{**}_m)^{1/m} \leq \frac{1}{R}$.

Supongamos ahora que $\limsup_m (\| G_m \|^{**}_m)^{1/m} \leq \frac{1}{R}$. Tenemos que probar que la serie $\sum_{m=0}^{\infty} G_m$ $\beta(E'', E')$-converge. Como la familia $\{s\mathcal{B}^\circ_r\}_{s>0, 0<r<R}$ forma un sistema fundamental de $\beta(E', E)$-acotados, bastará probar que $\sum_{m=0}^{\infty} G_m$ converge uniformemente en $s\mathcal{B}^\circ_r$, para

todo $s > 0$ y $0 < r < R$. Por el Lema 3.12 ii), si $\phi = \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m \in s\mathcal{B}_r^{\circ}$ entonces $\| \phi_m \|_m^* \leq sr^m$, $\forall m \in \mathbb{N}$, de donde

$$|G_m(\phi)| = |G_m(\phi_m)| \leq \| G_m \|_m^{**} \| \phi_m \|_m^* \leq sr^m \| G_m \|_m^{**},$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\sum_{m=0}^{\infty} G_m$ es uniformemente de Cauchy en $s\mathcal{B}_r^{\circ}$, para $0 < r < R$ y $s > 0$, y como $E''$ es un espacio de Fréchet, existe $G := \sum_{m=0}^{\infty} G_m \in E''$. ■

**Teorema 3.14** *Sean $(E_n, \| \cdot \|_n)_n$ y $(F_n, \| \cdot \|_n)_n$ descomposiciones $R$-Schauder de los espacios de Fréchet $(E, \tau)$ y $(F, \eta)$ respectivamente $(0 < R \leq \infty)$.*

*Supongamos que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe un isomorfismo algebraico $T_m : E_m \longrightarrow F_m$ tal que la sucesión $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$ verifica:*
*i) Si $0 < R < \infty$, para cada $t > 1$ existen $a_t, b_t > 0$ tales que $\| T_m(x_m) \|_m \leq a_t t^m \| x_m \|_m$ y $\| x_m \|_m \leq b_t t^m \| T_m(x_m) \|_m$ $\forall x_m \in E_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$ (Condición I).*
*ii) Si $R = \infty$, existen $t, t' > 0$ y $a_t, b_{t'} > 0$ tales que $\| T_m(x_m) \|_m \leq a_t t^m \| x_m \|_m$ y $\| x_m \|_m \leq b_{t'} (t')^m \| T_m(x_m) \|_m$ $\forall x_m \in E_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$ (Condición II).*

*Entonces la aplicación*

$$\begin{array}{llll} T: & E & \longrightarrow & F \\ & x = \sum_{m=0}^{\infty} x_m & \rightsquigarrow & T(x) := \sum_{m=0}^{\infty} T_m(x_m) \end{array}$$

*es un isomorfismo topológico.*

*Recíprocamente, si existe un isomorfismo topológico $T : E \longrightarrow F$ tal que $T(E_m) \subset F_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$, entonces $T(E_m) = F_m$ y $(T_m := T|_{E_m})_m$ es una sucesión de isomorfismos topológicos que verifica la Condición I si $0 < R < \infty$ y II si $R = \infty$.*

Demostración. Definimos

$$\begin{array}{llll} T: & E & \longrightarrow & F \\ & x = \sum_{m=0}^{\infty} x_m & \rightsquigarrow & T(x) := \sum_{m=0}^{\infty} T_m(x_m) \end{array}$$

Para comprobar que $T$ está bien definida hemos de probar que la serie $\sum_{m=0}^{\infty} r^m \parallel T_m(x_m) \parallel_m$ converge para $0 < r < R$.

Supongamos que $0 < R < \infty$. Sean $r < s < R$. Por la Condición I existe $a > 0$ tal que

$$\parallel T_m(x_m) \parallel_m \leq a(\frac{s}{r})^m \parallel x_m \parallel_m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Por lo que

$$r^m \parallel T_m(x_m) \parallel_m \leq as^m \parallel x_m \parallel_m, \quad m \in \mathbb{N} \quad (3)$$

Supongamos ahora que $R = \infty$. Por la Condición II existen $s, a > 0$ tales que

$$\parallel T_m(x_m) \parallel_m \leq as^m \parallel x_m \parallel_m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Por lo que

$$r^m \parallel T_m(x_m) \parallel_m \leq a(sr)^m \parallel x_m \parallel_m, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

De donde obtenemos en ambos casos la convergencia de la serie.

La aplicación $T$ claramente es lineal. Por la Proposición 3.4 sabemos que la familia $\{q_r\}_{0<r<R}$ donde $q_r(y) := \sum_{m=0}^{\infty} r^m \parallel y_m \parallel_m$, $y = \sum_{m=0}^{\infty} y_m \in F$, es un sistema fundamental de seminormas $\eta$-continuas en $F$.

Si $0 < R < \infty$ de (3) obtenemos que

$$T(\{x \in E : p_s(x) \leq \frac{1}{a}\}) \subset \{y \in F : q_r(y) \leq 1\}.$$

Mientras que si $R = \infty$ de (4) obtenemos que

$$T(\{x \in E : p_{rs}(x) \leq \frac{1}{a}\}) \subset \{y \in F : q_r(y) \leq 1\};$$

inclusiones que prueban en ambos casos la continuidad de $T$.

Para probar que $T$ es inyectiva tomemos $x = \sum_{m=0}^{\infty} x_m \in E$ tal que $T(x) = 0$, esto es $\sum_{m=0}^{\infty} T_m(x_m) = 0$. Por la unicidad de la expresión se sigue que $T_m(x_m) = 0$ $\forall m \in \mathbb{N}$, y por ser cada $T_m$ inyectiva concluimos que $x_m = 0$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Por lo que $x = 0$.

Sea $V$ la aplicación definida de $F$ en $E$ por

$$V(\sum_{m=0}^{\infty} y_m) = \sum_{m=0}^{\infty} T_m^{-1} y_m$$

para todo $y = \sum_{m=0}^{\infty} y_m \in F$. De forma análoga a la aplicación $T$ se prueba que $V$ está bien definida y es continua. Además $V$ es la aplicación inversa de $T$ pues

$$T(V(y)) = T(\sum_{m=0}^{\infty} T_m^{-1}(y_m)) = \sum_{m=0}^{\infty} T_m T_m^{-1}(y_m) = \sum_{m=0}^{\infty} y_m = y$$

y de igual forma $V(T(x)) = x$.

Probemos ahora el resultado recíproco. Para cada $m \in \mathbb{N}$ definimos $T_m := T|_{E_m} : E_m \longrightarrow F_m$.

Cada $T_m$ es lineal e inyectiva por ser la restricción de una aplicación lineal e inyectiva.

Además cada $T_m$ es sobreyectiva pues si $y_m \in F_m \subset F$, al ser $T$ sobreyectiva, existe $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \in E$ de modo que $T(x) = y_m$. Pero por ser $T$ lineal y continua

$$y_m = T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x_n).$$

Y por la unicidad de la suma obtenemos que $T_n(x_n) = 0$ para todo $n \neq m$ e $y_m = T_m(x_m)$ con $x_m \in E_m$. Luego $T_m(E_m) = F_m$.

Comprobemos por último que se verifican las Condiciones I y II. Sea $0 < r < R$. Por ser $T$ continua existe $0 < s < R$ (podemos suponer sin pérdida de generalidad $s > r$) y existe $a > 0$ de modo que

$$T(\{x \in E : p_s(x) \leq a\}) \subset \{y \in F : q_r(y) \leq 1\}.$$

Por tanto $q_r(T(x)) \leq \frac{1}{a}p_s(x) \quad \forall x \in E$. En particular, si $x_m \in E_m$ $q_r(T(x_m)) \leq \frac{1}{a}p_s(x_m)$ o equivalentemente $r^m \parallel T_m(x_m) \parallel_m \leq \frac{1}{a}s^m \parallel x_m \parallel_m$. Así pues, $\parallel T_m(x_m) \parallel_m \leq \frac{1}{a}(\frac{s}{r})^m \parallel x_m \parallel_m$ .
i) Si $0 < R < \infty$, al hacer tender $r$ a $R^-$, $s$ tiende a $R^-$ por lo que $\frac{s}{r}$ tiende a $1^+$. Así, dado $t > 1$ existe $a_t > 0$ tal que

$$\parallel T_m(x_m) \parallel_m \leq a_t t^m \parallel x_m \parallel_m \quad \forall x_m \in E_m.$$

ii) Si $R = \infty$ existe $t > 0$ y existe $a_t > 0$ tales que

$$\parallel T_m(x_m) \parallel_m \leq a_t t^m \parallel x_m \parallel_m \quad \forall x_m \in E_m$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

Por último, por ser $T$ abierta, existen $b > 0$ y $0 < s < R$ (podemos suponer sin pérdida de generalidad $s > r$) tales que

$$\{y \in F : q_s(y) \leq b\} \subset T(\{x \in E : p_r(x) \leq 1\})$$

o equivalentemente $p_r(x) \leq \frac{1}{b}q_s(T(x)) \quad \forall x \in E$. En particular, si $x_m \in E_m$ entonces $p_r(x_m) \leq \frac{1}{b}q_s(T(x_m))$. Esto es, $r^m \parallel x_m \parallel_m \leq \frac{1}{b}s^m \parallel T_m(x_m) \parallel_m$, de donde $\parallel x_m \parallel_m \leq \frac{1}{b}(\frac{s}{r})^m \parallel T_m(x_m) \parallel_m$ .
i) Si $0 < R < \infty$, al hacer tender $r$ a $R^-$, $s$ tiende a $R^-$ por lo que $\frac{s}{r}$ tiende a $1^+$. Así, dado $t > 1$ existe $b_t > 0$ tal que

$$\parallel x_m \parallel_m \leq b_t t^m \parallel T_m(x_m) \parallel_m \quad \forall x_m \in E_m$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.
ii) Si $R = \infty$ entonces existe $t > 0$ y existe $b_t > 0$ tales que

$$\parallel x_m \parallel_m \leq b_t t^m \parallel T_m(x_m) \parallel_m \quad \forall x_m \in E_m$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, lo que completa la prueba. ∎

Notemos que este teorema afina al máximo la Proposición 2.2.14 ya que las condiciones I y II impuestas a los isomorfismos $T_m$ caracterizan la existencia de un isomorfismo topológico entre $E$ y $F$.

**Corolario 3.15** *Sean $(E_n, \| \cdot \|_n)_n$ y $(F_n, \| \cdot \|_n)_n$ descomposiciones R-Schauder y R'-Schauder respectivas de los espacios de Fréchet $(E, \tau)$ y $(F, \eta)$ $(0 < R < \infty$ y $0 < R' < \infty)$.*

*Si para todo $m \in \mathbb{N}$ existe un isomorfismo algebraico $T_m : E_m \longrightarrow F_m$ tal que para cada $t > 1$ existen $a_t, b_t > 0$ tales que*

$$\|T_m(x_m)\|_m \leq a_t t^m (\frac{R}{R'})^m \|x_m\|_m \text{ y } \|x_m\|_m \leq b_t t^m (\frac{R'}{R})^m \|T_m(x_m)\|_m$$

*$\forall x_m \in E_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$ (Condición I'), entonces la aplicación*

$$\begin{array}{llll} T: & E & \longrightarrow & F \\ & x = \sum_{m=0}^{\infty} x_m & \rightsquigarrow & T(x) := \sum_{m=0}^{\infty} T_m(x_m) \end{array}$$

*es un isomorfismo topológico.*

*Recíprocamente, si existe un isomorfismo topológico $T : E \longrightarrow F$ tal que $T_m(E_m) \subset F_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$, entonces $T_m(E_m) = F_m$ y $T_m := T|_{E_m}$ son isomorfismos topológicos que satisfacen la condición I'.*

Demostración. Es consecuencia directa de la Proposición 3.8 y del Teorema 3.14. ∎

**Corolario 3.16** *Sean $(E_n, \|\cdot\|_n)_n$ y $(F_n, \|\cdot\|_n)_n$ descomposiciones R-Schauder de los espacios de Fréchet $(E, \tau)$ y $(F, \eta)$ respectivamente $(0 < R \leq \infty)$. Si cada $E_n$ es isométricamente isomorfo a $F_n$, $n \in \mathbb{N}$, entonces los espacios $E$ y $F$ son topológicamente isomorfos.*

Demostración. Basta indicar que los isomorfismos isométricos verifican trivialmente las Condiciones I y II.

En lo que sigue vamos a aplicar los resultados anteriores a espacios de funciones holomorfas.

Sea $\mathcal{F}$ un subespacio $\tau_b$-cerrado de $\mathcal{H}_b(U)$. Consideremos la aplicación $\delta$ dada por

$$\begin{array}{rcccccl} \delta : & U & \longrightarrow & \mathcal{F}' & & & \\ & x & \rightsquigarrow & \delta_x : & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & & & f & \rightsquigarrow & \delta_x(f) = f(x). \end{array}$$

Como para cada $f \in \mathcal{F}$ se tiene que $\delta_x(f) = f(x)$ para todo $x \in U$, la aplicación $\delta$ es holomorfa (Ejercicio 8.D de [32]). Además $\delta$ es de tipo acotado dado que la imagen de un conjunto $U$-acotado $A$ está contenida en el polar en $\mathcal{F}'$ del entorno de cero en $\mathcal{F}$ $\{f \in \mathcal{F} : \sup_{x\in A} |f(x)| \leq 1\}$. De aquí que la traspuesta de $\delta$ sea la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \delta^* : & \mathcal{F}'' & \longrightarrow & \mathcal{H}_b(U) \\ & F & \rightsquigarrow & \delta^*(F) = F \circ \delta. \end{array}$$

**Definición 3.17** *Diremos que el espacio $\mathcal{F}''$ es canónicamente isomorfo al subespacio $\tau_b$-cerrado $\mathcal{G}$ de $\mathcal{H}_b(U)$ si $\delta^* : \mathcal{F}'' \longrightarrow \mathcal{G}$ es un isomorfismo topológico.*

Si tomamos $\mathcal{F} = \mathcal{H}_b(U)$, la aplicación $\delta^*$ está definida entre los espacios $\mathcal{H}_b(U)''$ y $\mathcal{H}_b(U)$. Si consideramos $\mathcal{H}_b(U)$ subespacio de su bidual mediante la inyección natural, $\delta^*$ es una proyección. Por este motivo, si además $\delta^*$ es inyectiva, el espacio $\mathcal{H}_b(U)$ es reflexivo, siendo $\delta^*$ la identidad. En general, si $\mathcal{F}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}_b(U)$ y la aplicación $\delta^*$ verifica que $\delta^*(\mathcal{F}'') = \mathcal{F}$ y es inyectiva entonces el espacio $\mathcal{F}$ es reflexivo.

Denotamos por $\delta^*_m$ a la aplicación $\delta^*|_{\mathcal{F}^{**}_m} : \mathcal{F}^{**}_m \longrightarrow \mathcal{P}(^m X)$, donde $\mathcal{F}_m := \mathcal{F} \cap \mathcal{P}(^m X)$.

En realidad $\delta_m^*$ es la traspuesta del polinomio $m$-homogéneo

$$\begin{array}{rccccc} \delta_m : & X & \longrightarrow & \mathcal{F}_m^* & & \\ & x & \rightsquigarrow & \delta_{m,x} : & \mathcal{F}_m & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & & & P_m & \rightsquigarrow & P_m(x) \end{array}$$

y $\|\delta_m^*\| \leq 1\ \forall m \in \mathbb{N}$. Notar que también en este caso, si $\mathcal{F}_m = \mathcal{P}(^m X)$, la aplicación $\delta_m^* : \mathcal{P}(^m X)^{**} \longrightarrow \mathcal{P}(^m X)$ es una proyección, por lo que si $\delta_m^*$ es inyectiva el espacio $\mathcal{P}(^m X)$ es reflexivo siendo $\delta_m^*$ la identidad.

**Teorema 3.18** *Sea $X$ un espacio de Banach y sea $U$ bien un abierto absolutamente convexo y acotado de $X$ o bien $U = X$. Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ subespacios cerrados de $(\mathcal{H}_b(U), \tau_b)$. Escribimos $\mathcal{F}_m := \mathcal{F} \cap \mathcal{P}(^m X)$ y $\mathcal{E}_m := \mathcal{E} \cap \mathcal{P}(^m X)$ dotados con $\|.\|_U$ si $U$ es un subconjunto absolutamente convexo y acotado de $X$ y $\|.\|_B$ si $U = X$. Supongamos que $(\mathcal{E}_m)_m$ y $(\mathcal{F}_m)_m$ son descomposiciones de Schauder de $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ respectivamente. Si $\mathcal{E}_m$ y $\mathcal{F}_m$ son (canónicamente) isométricamente isomorfos para todo $m \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ son (canónicamente) topológicamente isomorfos.*

Demostración. Es consecuencia de los Ejemplos 3.5, de la Nota 3.6 y del Corolario 3.16. ∎

**Teorema 3.19** *Sea $X$ un espacio de Banach, sea $B$ la bola unidad abierta de $X$ y sea $U$ bien un abierto absolutamente convexo y acotado de $X$ o bien $U = X$. Sea $\mathcal{F}$ un subespacio $\tau_b$-cerrado de $\mathcal{H}_b(U)$. Sea $\tau$ una topología localmente convexa en $\mathcal{H}_b(U)$ menos fina que $\tau_b$. Sea $\mathcal{F}_m := (\mathcal{F} \cap \mathcal{P}(^m X), \|.\|_B)$ si $U = X$ y $\mathcal{F}_m := (\mathcal{F} \cap \mathcal{P}(^m X), \|.\|_U)$ si $U$ es un abierto absolutamente convexo y acotado. Supongamos que*

*1) $(\mathcal{F}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ es una descomposición de Schauder de $\mathcal{F}$.*

*2) Si $f \in \overline{\mathcal{F}}^{\tau}$ entonces $P_m f \in \overline{\mathcal{F}_m}^{\tau}$, para todo $m \in \mathbb{N}$ (equivalentemente, $(\overline{\mathcal{F}_m}^{\tau})_m$ es una descomposición de Schauder de $\overline{\mathcal{F}}^{\tau}$).*

*Si para cada $m \in \mathbb{N}$ existe un isomorfismo (canónico) topológico $T_m : \mathcal{F}_m^{**} \longrightarrow \overline{\mathcal{F}_m}^{\tau}$ satisfaciendo bien la Condición I si $U$ es un subconjunto abierto absolutamente convexo y acotado de $X$, o la Condición II si $U = X$, entonces $\mathcal{F}''$ es isomorfo (canónicamente) topológicamente a $\overline{\mathcal{F}}^{\tau}$.*

*Recíprocamente, si existe un isomorfismo topológico*

$$T : \mathcal{F}'' \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}^{\tau}$$

*tal que $T(\mathcal{F}_m^{**}) \subset \overline{\mathcal{F}_m}^{\tau}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, entonces $T(\mathcal{F}_m^{**}) = \overline{\mathcal{F}_m}^{\tau}$ y $T_m := T|_{\mathcal{F}_m^{**}}$ son isomorfismos topológicos que satisfacen la Condición I si $U$ es un subconjunto abierto absolutamente convexo y acotado de $X$, o la Condición II si $U = X$.*

Demostración. Supongamos que $U = X$. Por el ejemplo 3.5 a) y la Nota 3.6 las familias $(\mathcal{F}_m, \|.\|_B)_m$ y $(\overline{\mathcal{F}_m}^{\tau}, \|.\|_B)_m$ son descomposiciones $\infty$-Schauder de $\mathcal{F}$ y $\overline{\mathcal{F}}^{\tau}$ respectivamente. Por el Teorema 3.13, $(\mathcal{F}_m^{**}, \|.\|_B^{**})_m$ es una descomposición $\infty$-Schauder de $\mathcal{F}''$. Ahora basta aplicar el Teorema 3.14 para obtener el resultado en este caso.

Supongamos ahora que $U$ es un abierto absolutamente convexo y acotado de $X$. Como consecuencia del Ejemplo 3.5 c) y la Nota 3.6 las familias $(\mathcal{F}_m, \|.\|_U)_m$ y $(\overline{\mathcal{F}_m}^{\tau}, \|.\|_U)_m$ son descomposiciones 1-Schauder de $\mathcal{F}$ y $\overline{\mathcal{F}}^{\tau}$ respectivamente. Por el Teorema 3.13 la familia $(\mathcal{F}_m^{**}, \|.\|_U^{**})_m$ es una descomposición 1-Schauder de $\mathcal{F}''$. Ahora basta aplicar el Teorema 3.14 para obtener el resultado. ∎

**Corolario 3.20** *Bajo las mismas hipótesis que el Teorema 3.19, si cada $\mathcal{F}_m^{**}$ es (canónicamente) isométricamente isomorfo a $\overline{\mathcal{F}_m}^{\tau}$ entonces $\mathcal{F}''$ es (canónicamente) topológicamente isomorfo a $\overline{\mathcal{F}}^{\tau}$.*

Antes de ver las aplicaciones de estos resultados al estudio de los biduales de espacios de funciones holomorfas, incluimos una prueba del siguiente Teorema debido a Valdivia (Teorema 2 de [47]) y del que haremos uso posteriormente. Para este fin fijemos la notación y recordemos algunos hechos sobre $\mathcal{P}(^m X^*)$.

Si $X$ es un espacio de Banach y $X^*$ es su dual topológico, denotaremos por $D$ ($D^*$, $D^{**}$) la bola unidad cerrada de $\mathcal{P}_{w^*}(^m X^*)$ ($\mathcal{P}_{w^*}(^m X^*)^*$, $\mathcal{P}_{w^*}(^m X^*)^{**}$ respectivamente).

Consideremos el producto tensorial $\otimes_m X^*$ de $X^*$ $m$-veces. La simetrización de un elemento $x_1 \otimes ... \otimes x_m \in \otimes_m X^*$ se define mediante el operador $s$ dado por:

$$s(x_1 \otimes ... \otimes x_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} x_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes x_{\sigma(m)}$$

donde $S_m$ es el grupo de permutaciones de $m$ elementos.

El subespacio de $\otimes_m X^*$ generado por $s(x_1 \otimes ... \otimes x_m)$, $x_1, ..., x_m \in X^*$, se llama el producto tensorial simétrico de $X^*$ $m$ veces y se denota $\otimes_{m,s} X^*$. Los elementos de $\otimes_{m,s} X^*$ se llaman tensores simétricos. Cada elemento $x \in \otimes_{m,s} X^*$ puede representarse como una suma finita (no necesariamente única) de la forma $\sum_i x_i \otimes ... \otimes x_i$. Se tiene entonces que $(\otimes_{m,s} X^*)^*$ es isomorfo algebraicamente al espacio $\mathcal{L}_{as}(^m X^*)$ de aplicaciones $m$-lineales y simétricas de $X^* \times ... \times X^*$ en $\mathbb{C}$. La topología proyectiva en $\otimes_{m,s} X^*$ viene dada por la norma

$$\|z\|_\pi = \text{ínf}\{\sum_i \|x_i\|_*^m, \quad z = \sum_i x_i \otimes ... \otimes x_i\}$$

donde $\|.\|_*$ es la norma de $X^*$. $\otimes_{m,s,\pi} X^*$ denota el espacio $\otimes_{m,s} X^*$ dotado con la topología proyectiva y $\hat{\otimes}_{m,s,\pi} X^*$ denota su compleción.

Es sabido [17] que el espacio $(\hat{\otimes}_{m,s,\pi} X^*)^*$ es isométricamente isomorfo a $\mathcal{P}(^m X^*)$ mediante la aplicación

$$\begin{array}{ccc} (\hat{\otimes}_{m,s,\pi} X^*)^* & \longrightarrow & \mathcal{P}(^m X^*) \\ u & \rightsquigarrow & P(x^*) := u(x^* \otimes \ldots \otimes x^*) \end{array}$$

Además la bola unidad cerrada de $\hat{\otimes}_{m,s,\pi}X^*$ es el conjunto

$$B_\otimes := \overline{\Gamma\{x^* \otimes \ldots \otimes x^* : x^* \in B^*)\}}^{\|\cdot\|_\pi}.$$

Considerando $\hat{\otimes}_{m,s,\pi}X^*$ como un predual de $\mathcal{P}(^mX^*)$, podemos dotar a $\mathcal{P}(^mX^*)$ de la topología $\tau$ de la convergencia uniforme sobre los compactos de $\hat{\otimes}_{m,s,\pi}X^*$. En general, para un espacio y su predual esta topología no tiene una interpretación clara, pero en este caso gracias a que el predual es un producto tensorial y que por tanto sus compactos se pueden localizar con compactos del espacio base, esta topología es exactamente $\tau_0$.

Consideremos las aplicaciones canónicas siguientes:

$$\begin{array}{rccl} \delta: & X^* & \longrightarrow & \mathcal{P}_{w^*}(^mX^*)^* \\ & x^* & \rightsquigarrow & \delta_{x^*}(P) := P(x^*) \end{array}$$

y

$$\psi : \hat{\otimes}_{m,s,\pi}X^* \longrightarrow \mathcal{P}_{w^*}(^mX^*)^*$$

dada por $\psi(x^* \otimes \ldots \otimes x^*) := \delta_{x^*}$ y extendida por linealidad.

**Teorema 3.21** (M.Valdivia): *Sea $X$ un espacio de Banach y sea $m \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{P}_{w^*}(^mX^*)$ no contiene ninguna copia de $l_1$ entonces $\mathcal{P}_{w^*}(^mX^*)^{**}$ es isométricamente isomorfo a $\overline{\mathcal{P}_{w^*}(^mX^*)}^{\tau_0}$.*

Demostración. Probemos en primer lugar que

$$\psi(int(B_\otimes)) = int(D^*),$$

donde $int(B_\otimes)$ ($int(D^*)$) denota el interior de $B_\otimes$ ($D^*$ respectivamente). Como $\delta$ es $w^*$-continua, el conjunto $\{\delta_{x^*} : x^* \in B^*\}$ es $w^*$-compacto. Como $\mathcal{P}_{w^*}(^mX^*)$ no contiene copias de $l_1$, por el Teorema de Haydon [27], $A := \overline{\Gamma\{\delta_{x^*} : x^* \in B^*\}}^{\|\cdot\|_m^*}$ es un conjunto $w^*$-compacto. Veamos que $A = D^*$. Si suponemos que existe un $u \in D^* \setminus A$, por Hahn-Banach existe un funcional $\phi$ lineal y $w^*$-continuo tal que $|\phi(u))| > 1$ y $|\phi(v)| \leq 1$ $\forall v \in A$. Como $\phi$ es $w^*$-continuo se tiene que $\phi \in \mathcal{P}_{w^*}(^m X^*)$. Ahora bien, por ser el conjunto $\{\delta_{x^*} : x^* \in B^*\}$ normante en $\mathcal{P}_{w^*}(^m X^*)$ se tiene que $\|\phi\| \leq 1$ lo que contradice que $|\phi(u)| > 1$. Usando este hecho obtenemos la cadena

$$\psi(B_\otimes) = \psi(\overline{\Gamma\{x^* \otimes \ldots \otimes x^* : x^* \in B^*\}}^{\|\cdot\|_\pi}) \subset$$

$$\overline{\psi(\Gamma\{x^* \otimes \ldots \otimes x^* : x^* \in B^*\})}^{\|\cdot\|_m^*} = A = D^* \subset \overline{\psi(B_\otimes)}^{\|\cdot\|_m^*}.$$

De aquí que, al aplicar el Lema III.2.1 de [45] al Teorema del homomorfismo de Banach, obtenemos que $\psi(int(B_\otimes)) = int(D^*)$. Gracias a esta igualdad, la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \hat{\psi}: & \frac{\hat{\otimes}_{m,s,\pi} X^*}{\psi^{-1}(\{0\})} & \longrightarrow & \mathcal{P}_{w^*}(^m X^*)^{**} \\ & z + \psi^{-1}(\{0\}) & \rightsquigarrow & \psi(z). \end{array}$$

es un isomorfismo isométrico y por tanto su traspuesta, que podemos identificar con la traspuesta de $\psi$, $\psi^* : \mathcal{P}_{w^*}(^m X^*)^{**} \longrightarrow (\hat{\otimes}_{m,s,\pi} X^*)^* = \mathcal{P}(^m X^*)$, también es un isomorfismo isométrico en la imagen.

Sólo nos queda por probar que

$$\psi^*(\mathcal{P}_{w^*}(^m X^*)^{**}) = \overline{\mathcal{P}_{w^*}(^m X^*)}^{\tau_0}.$$

Como $\psi^*(\mathcal{P}_{w^*}(^m X^*)^{**})$ coincide con el ortogonal del espacio $\psi^{-1}(\{0\})$ entonces $\psi^*(\mathcal{P}_{w^*}(^m X^*)^{**})$ es $w^*$-cerrado respecto al par dual $(\mathcal{P}(^m X^*)$, $\hat{\otimes}_{m,s,\pi} X^*)$ y, por tanto, teniendo en cuenta la observación anterior, $\tau_0$-cerrado. Como además $\psi^*|_{\mathcal{P}_{w^*}(^m X^*)}$ es la identidad en $\mathcal{P}_{w^*}(^m X^*)$ se sigue que

$$\overline{\mathcal{P}_{w^*}(^m X^*)}^{\tau_0} = \overline{\psi^*(\mathcal{P}_{w^*}(^m X^*))}^{\tau_0} \subset \psi^*(\mathcal{P}_{w^*}(^m X^*)^{**}).$$

Por otro lado, como $D$ es $w^*$-denso en $D^{**}$ y $\psi^*$ es $w^*$-continua, se tiene que $\psi^*(D)$ es $w^*$-denso en $\psi^*(D^{**})$ que es acotado en $\mathcal{P}(^m X^*)$

por ser $\psi^*(D^{**})$ la bola unidad cerrada de $\psi^*(\mathcal{P}_{w^*}(^mX^*)^{**})$. Por el Teorema de Banach-Dieudonné y teniendo en cuenta que la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos de $\hat{\otimes}_{m,s,\pi}X^*$ es $\tau_0$, el conjunto $\psi^*(D)$ es $\tau_0$-denso en $\psi^*(D^{**})$. De aquí que

$$\psi^*(\mathcal{P}_{w^*}(^mX^*)^{**}) = \psi^*(Lin(D^{**})) = Lin(\psi^*(D^{**})) = Lin(\overline{\psi^*(D)}^{\tau_0}) =$$

$$Lin(\overline{D}^{\tau_0}) \subset \overline{\mathcal{P}_{w^*}(^mX^*)}^{\tau_0},$$

donde, para un conjunto $C$, $Lin(C)$ denota la envoltura lineal de $C$. Y de ambas inclusiones se sigue la igualdad buscada. ∎

Recordemos que un espacio de Banach $X$ es de Asplund si el dual de cualquier subespacio separable es separable.

**Teorema 3.22** *Sea $X$ un espacio de Banach. Sea $G \subset X^*$ bien la bola unidad abierta de $X^*$ o bien $G = X^*$. Si para todo $m \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}_{w^*}(^mX^*)$ no contiene ninguna copia de $l_1$, entonces $\mathcal{H}_{w^*}(G)''$ es canónicamente isomorfo a $\overline{\mathcal{H}_{w^*}(G)}^{\tau_0}$, la clausura de $\mathcal{H}_{w^*}(G)$ en $(\mathcal{H}_b(G), \tau_0)$.*

*En particular se da el isomorfismo cuando $X$ es un espacio de Asplund.*

Demostración. Probemos que las condiciones del Corolario 3.20 se verifican para $\mathcal{F} = \mathcal{H}_{w^*}(G)$ y $\tau = \tau_0$.

1) Sabemos que $(\mathcal{P}_{w^*}(^mX^*))_m$ es una descomposición de Schauder de $\mathcal{H}_{w^*}(G)$.

2) Si $f \in \overline{\mathcal{H}_{w^*}(G)}^{\tau_0}$ existe una red $(f_i)_{i\in I}$ en $\mathcal{H}_{w^*}(G)$ que es $\tau_0$-convergente a $f$. Ahora bien, por las desigualdades de Cauchy, para cada $m \in \mathbb{N}$ la red $(P_m f_i)_{i\in I} \subset \mathcal{P}_{w^*}(^mX^*)$ $\tau_0$-converge a $P_m f$, por lo que $P_m f \in \overline{\mathcal{P}_{w^*}(^mX^*)}^{\tau_0}$.

Como $\mathcal{P}_{w^*}(^mX^*)$ no contiene ninguna copia de $l_1$, por el Teorema de Valdivia anterior $\mathcal{P}_{w^*}(^mX^*)^{**}$ es canónicamente isométricamente isomorfo a $\overline{\mathcal{P}_{w^*}({}^mX^*)}^{\tau_0}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Si aplicamos ahora el Corolario 3.20 obtenemos que $\mathcal{H}_{w^*}(G)''$ es canónicamente isomorfo a $\overline{\mathcal{H}_{w^*}(G)}^{\tau_0}$.

Si $X$ es Asplund, $\mathcal{P}_{w^*}({}^mX^*)$ también es Asplund (Corolario 1.1 de [47]) para todo $m \in \mathbb{N}$. Por tanto $\mathcal{P}_{w^*}({}^mX^*)$ no contiene copias de $l_1$, para todo $m \in \mathbb{N}$. La primera parte del Teorema completa la prueba.

■

**Teorema 3.23** *Sea $X$ un espacio de Banach tal que $X^*$ verifica la propiedad de aproximación. Sea $G \subset X^*$ bien la bola unidad abierta de $X^*$ o bien $G = X^*$. Si $\mathcal{P}_{w^*}({}^mX^*)$ no contiene ninguna copia de $l_1$ para todo $m \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{H}_{w^*}(G)''$ es canónicamente isomorfo a $\mathcal{H}_b(G)$.*

*En particular el isomorfismo se da cuando $X$ es un espacio de Asplund tal que $X^*$ verifica la propiedad de aproximación.*

Demostración. Como $X^*$ tiene la propiedad de aproximación, los espacios $\mathcal{P}_{w^*}({}^mX^*)^{**}$ y $\mathcal{P}({}^mX^*)$ son canónicamente isométricamente isomorfos (Teorema 3 de [47]). Teniendo en cuenta los ejemplos 3.5 c), 3.7 c") y el Teorema 3.13, una aplicación del Corolario 3.16 nos da el resultado.

Si $X$ es Asplund, $\mathcal{P}_{w^*}({}^mX^*)$ también es Asplund (Corolario 1.1 de [47]) para todo $m \in \mathbb{N}$. Por tanto $\mathcal{P}_{w^*}({}^mX^*)$ no contiene copias de $l_1$, para todo $m \in \mathbb{N}$. La primera parte del Teorema completa la prueba.

■

Los Teoremas 3.22 y 3.23 han sido obtenidos por Valdivia en [48] para funciones enteras bajo la condición de que $l_1$ no está contenido en el espacio de funciones enteras.

**Nota 3.24** El Teorema 3.23 admite una prueba alternativa. De acuerdo con la prueba del Teorema 3 de [47], si $X^*$ tiene la propiedad de aproximación entonces $\overline{\mathcal{P}_{w^*}({}^mX^*)}^{\tau_0}$ y $\mathcal{P}({}^mX^*)$ coinciden. Por tanto,

$\overline{\mathcal{H}_{w^*}(G)}^{\tau_0}$ coincide con $\mathcal{H}_b(G)$. Una aplicación del Teorema 3.22 nos da el resultado.

**Nota 3.25** Los teoremas 3.22 y 3.23 son ciertos para cualquier conjunto abierto $G$ en $X^*$ tal que existe un subconjunto abierto absolutamente convexo y acotado $V$ de $X$ satisfaciendo que $G$ coincide con el interior de $V^\circ$ para la topología de la norma en $X^*$. De hecho, si $\|.\|_V$ es el funcional de Minkowski de $V$ en $X$, el espacio de Banach $Y := (X, \|.\|_V)$ es topológicamente isomorfo a $(X, \|.\|)$ y $G$ es ahora la bola unidad abierta de $Y^*$. Más aún, $\mathcal{P}({}^m Y^*)$ es isométricamente igual a $(\mathcal{P}_{w^*}({}^m X^*), \|.\|_G)$ que claramente no contiene ninguna copia de $l_1$. La conclusión se obtiene del Corolario 3.22 (respectivamente Corolario 3.23).

**Teorema 3.26** *Sea $X$ un espacio de Banach y sea $U \subset X$ bien un subconjunto abierto absolutamente convexo y acotado de $X$ o bien $U = X$. Supongamos que para todo $m \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}_{wu}({}^m X)$ no contiene una copia de $l_1$ (por ejemplo cuando $X^*$ es un espacio de Asplund). Entonces*

*a) $\mathcal{H}_{wu}(U)''$ es isomorfo topológicamente a $\overline{\mathcal{H}_{w^*}(U^{**})}^{\tau_0}$, donde $U^{**}$ es el interior en $X^{**}$ para la topología de la norma de la clausura débil-estrella de $U$ en $X^{**}$.*

*En particular, el espacio $\mathcal{H}_{wu}(B)''$ es isomorfo topológicamente a $\overline{\mathcal{H}_{w^*}(B^{**})}^{\tau_0}$, donde $B$ y $B^{**}$ son las bolas unidades abiertas de $X$ y $X^{**}$ respectivamente, y el espacio $\mathcal{H}_{wu}(X)''$ es isomorfo topológicamente a $\overline{\mathcal{H}_{w^*}(X^{**})}^{\tau_0}$.*

*b) Si suponemos además que $X^{**}$ tiene la propiedad de aproximación, entonces $\mathcal{H}_{wu}(U)''$ es topológicamente isomorfo a $\mathcal{H}_b(U^{**})$.*

Demostración. a) Como los espacios $\mathcal{P}_{wu}({}^m X)$ y $\mathcal{P}_{w^*}({}^m X^{**})$ son isométricamente isomorfos, $\mathcal{P}_{w^*}({}^m X^{**})$ no contiene ninguna copia de $l_1$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Como la clausura para la norma $\overline{U^{**}}$ de $U^{**}$ coincide con la débil-estrella clausura de $U$, por el Teorema del bipolar $\overline{U^{**}}$ es el bipolar de $U$ en $X^{**}$. Entonces, por el Teorema 3.22, $\mathcal{H}_{w^*}(U^{**})''$ y $\overline{\mathcal{H}_{w^*}(U^{**})}^{\tau_0}$ son topológicamente isomorfos. Ahora bien, como $\mathcal{H}_{wu}(U)$ y $\mathcal{H}_{w^*}(U^{**})$ son topológicamente isomorfos, obtenemos finalmente que $\mathcal{H}_{wu}(U)''$ y $\overline{\mathcal{H}_{w^*}(U^{**})}^{\tau_0}$ son isomorfos topológicamente.

b) Un argumento análogo al usado en la prueba de la Nota 3.24 nos da el resultado. ∎

**Teorema 3.27** *Sea $X$ un espacio de Banach y sea $U \subset X$ bien la bola unidad abierta de $X$ o bien $U = X$. Si para todo $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_{wu}(^mX)^{**}$ es isométricamente (canónicamente) isomorfo a $\mathcal{P}(^mX)$, entonces $\mathcal{H}_{wu}(U)''$ es (canónicamente) isomorfo a $\mathcal{H}_b(U)$.*

Demostración. Sea $R$ bien $\infty$ if $U = X$ o 1 en otro caso. Por los Ejemplos 3.5 a) y c) $(\mathcal{P}(^mX))_m$ es una descomposición $R$-Schauder de $\mathcal{H}_b(U)$. Por otra parte, por los Ejemplos 3.7 a) y c) y el Teorema 3.13, $(\mathcal{P}_{wu}(^mX)^{**})_m$ es una descomposición $R$-Schauder de $\mathcal{H}_{wu}(U)''$. El Corolario 3.16 nos da el resultado. ∎

El Teorema 3.27 y el Teorema 3.28 posterior clarifican el Teorema 12 de [40].

Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{cccccc} \widetilde{\delta}_m : & X^{**} & \longrightarrow & \mathcal{P}(^mX)^* & & \\ & z & \rightsquigarrow & \widetilde{\delta}_{m,z} : & \mathcal{P}(^mX) \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & & & P \quad\rightsquigarrow & \widetilde{P}(z) \end{array}$$

donde $\widetilde{P}$ denota la extensión de Aron-Berner [3] de $P$ a $X^{**}$. González en [23] define, extendiendo una definición anterior de Aron y Dineen [5], el concepto de espacio Q-reflexivo como aquel espacio de Banach $X$ para el que la aplicación traspuesta $\widetilde{\delta}_m^* : \mathcal{P}(^mX)^{**} \longrightarrow \mathcal{P}(^mX^{**})$ de $\widetilde{\delta}_m$ es biyectiva y por tanto un isomorfismo topológico para todo $m \in \mathbb{N}$. Como $\|\widetilde{\delta}^*\| \leq 1$, para que se verifiquen las desigualdades inversas en las hipótesis del Teorema 3.14 debemos suponer que $\widetilde{\delta}^*$

tiene propiedades adicionales, por ejemplo que sea isometría (en este caso diremos que $X$ es isométricamente Q-reflexivo) para todo $m \in \mathbb{N}$. Entonces como consecuencia de los Teoremas 3.13 y 3.14 obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 3.28** *Sea $X$ un espacio de Banach isométricamente Q-reflexivo y sea $U \subset X$ bien la bola unidad abierta de $X$ o bien $U = X$. Entonces el espacio $\mathcal{H}_b(U)''$ es canónicamente topológicamente isomorfo a $\mathcal{H}_b(U^{**})$.*

Comparar con la Proposición 16 de [5].

De hecho podemos enunciar el siguiente teorema:

**Teorema 3.29** *Sea $X$ un espacio de Banach y sea $U \subset X$ bien la bola unidad abierta de $X$ o bien $U = X$. Entonces el espacio $\mathcal{H}_b(U)''$ es canónicamente topológicamente isomorfo a $\mathcal{H}_b(U^{**})$ si y sólo si $X$ es Q-reflexivo y la sucesión $(\widetilde{\delta}_m)_m$ satisface la condición I si $U \neq X$ o la condición II si $U = X$.*

# Capítulo 4

# 4. Sobre los polinomios de tipo finito débil-estrella continuos y aplicaciones a la suprayectividad de ciertos operadores de convolución

Sea $X$ un espacio de Banach. Recordemos que una forma $m$-lineal $A$ de $X^* \times \ldots \times X^*$ se llama de tipo finito si tiene la forma

$$A(x_1^*, \ldots, x_m^*) = \sum_{j=1}^{n} \phi_{1j}(x_1^*). \ldots .\phi_{mj}(x_m^*)$$

donde cada $\phi_{jk}$ es un elemento de $X^{**}$. Los polinomios $m$-homogéneos de tipo finito son la restricción a la diagonal de una forma $m$-lineal simétrica de tipo finito. Un polinomio de tipo finito es una suma finita de polinomios homogéneos de tipo finito. Denotamos por $\mathcal{P}_{fw^*}(X^*)$ el espacio de polinomios continuos de tipo finito que son débil estrella continuos en los conjuntos acotados de $X^*$.

Si $E$ y $F$ son espacios de Banach duales, denotamos por $\mathcal{H}_{w^*}(E; F)$ el subespacio de $\mathcal{H}_b(E; F)$ de las funciones holomorfas de $E$ en $F$ que son acotadas en los conjuntos acotados y débil-estrella débil-estrella continuas sobre los conjuntos acotados. Si $F = \mathbb{C}$ escribimos $\mathcal{H}_{w^*}(E)$ en lugar de $\mathcal{H}_{w^*}(E; F)$. En este caso $\mathcal{H}_{w^*}(E)$ es un álgebra con la multiplicación puntual. Para $f_1, ..., f_n$ en $\mathcal{H}_{w^*}(E)$ $Alg(f_1, ..., f_n)$ denota la subálgebra generada por $f_1, ..., f_n$, es decir, el conjunto de todas las combinaciones lineales de productos finitos de $f_1, ..., f_n$. Por Alaoglu-Bourbaki la bola unidad cerrada de $E$ es débil-estrella compacta, entonces $\mathcal{H}_{w^*}(E; F)$ es un subespacio cerrado del espacio de Fréchet $\mathcal{H}_b(E; F)$ con la topología $\tau_b$ de la convergencia uniforme sobre los conjuntos acotados.

Si consideramos $X$ como subespacio de $X^{**}$ mediante la inclusión canónica $x(x^*) = x^*(x)$ for $x \in X$ and $x^* \in X^*$, entonces todo $x \in X$ es una función lineal y continua en $X^*$ que es débil-estrella continua. Por tanto, $X$ es un subespacio de $\mathcal{H}_{w^*}(X^*)$.

Denotamos por $\mathcal{H}_{wu}(X)$ el espacio de las funciones enteras que son débil uniformemente continuas sobre los conjuntos acotados en $X$. $\mathcal{H}_{wu}(X)$ es también un subespacio cerrado de $\mathcal{H}_b(X)$. Recordemos que toda función entera que es débil uniformemente continua sobre los conjuntos acotados tiene una extensión a $X^{**}$ que es débil estrella continua sobre los conjuntos acotados y esta extensión determina un isomorfismo topológico entre $\mathcal{H}_{wu}(X)$ y $\mathcal{H}_{w^*}(X^{**})$ (Theorem 7.1 de [4]).

Los dos primeros resultados del tema son el eje principal del mismo. En el primero de ellos se prueba que si $X$ es un espacio de Banach, toda forma $m$-lineal simétrica de tipo finito definida en $X^* \times ... \times X^*$ y que es débil-estrella continua en conjuntos acotados es débil estrella continua. En el segundo teorema se prueba el resultado análogo para polinomios. A partir de aquí y como aplicación a dichos teoremas, dedicaremos el resto del capítulo a estudiar los homomorfismos continuous de $\mathcal{H}_{w^*}(X^*)$ y a probar que si $X$ verifica la propiedad de aproximación, todo operador de convolución en $\mathcal{H}_{w^*}(X^*)$ es sobre. También obtendremos este resultado para los operadores de convolución de $\mathcal{H}_{wu}(X)$ bajo la hipótesis de que $X^*$ posee la propiedad de aproximación.

Quiero agradecer a R. Aron el haberme introducido en el estudio de los homomorfismos continuos de $\mathcal{H}_{w^*}(X^*)$ durante mi estancia en la Universidad de Kent.

A lo largo del capítulo $X$ denotará un espacio de Banach.

**Teorema 4.1** *Toda forma $m$-lineal $A$ definida en $X^* \times \ldots \times X^*$ simétrica y de tipo finito que es débil-estrella continua en los conjuntos acotados puede escribirse de la forma $A = \sum_{j=1}^{q} x_{1j} \ldots x_{mj}$, donde $x_{ij} \in X$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., q$. En particular, $A$ es débil-estrella continua.*

Demostración. Lo demostraremos por inducción sobre $m$.

Para $m = 1$, las funcionales lineales en $X^*$ que son débil-estrella continuas sobre los conjuntos acotados son todas débil-estrella continuas (Teorema V.5.6 de [20]). Como $X$ es el dual de $X^*$ cuando éste está dotado de la topología débil-estrella, tenemos que $A \in X$.

Supongamos que el teorema es cierto para $m-1$ y sea

$$A = \sum_{j=1}^{n} \phi_{1j} \ldots \phi_{mj}, \quad \phi_{ij} \in X^{**},\ i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n$$

una forma $m$-lineal simétrica continua de tipo finito que es débil-estrella continua sobre los acotados.

Para $x^* \in X^*$ consideramos la forma $(m-1)$-lineal simétrica $B(x^*)$ dada por

$$B(x^*)(x_1^*, \ldots, x_{m-1}^*) = A(x_1^*, \ldots, x_{m-1}^*, x^*) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \phi_{1j}(x_1^*) \ldots \phi_{m-1\ j}(x_{m-1}^*)\phi_{mj}(x^*).$$

Reordenando la familia $\{\phi_{mj}\}_{j=1}^{n}$ si fuera necesario, existe un $t \leq n$ tal que $\{\phi_{mj}\}_{j=1}^{t}$ es el máximo número de vectores linealmente independientes de dicha familia. De donde obtendríamos una expresión para $B(x^*)$:

$$B(x^*) = \sum_{j=1}^{t} \phi_{mj}(x^*) \sum_{k=1}^{t_j} \psi_{1jk} \dots \psi_{m-1\ jk}, \quad \psi_{ljk} \in X^{**} \quad \forall j, k, l.$$

Sea $z_l^* \in X^*$, $l = 1, ..., n$, tal que $\phi_{mj}(z_l^*) = \delta_{jl}$. Entonces la forma $(m-1)$-lineal

$$B(z_l^*) = \sum_{k=1}^{t_l} \psi_{1jk} \dots \psi_{m-1\ jk} =: A_{ml}$$

es simétrica y débil-estrella continua sobre los conjuntos acotados. Por la hipótesis de inducción obtenemos que $A_{ml}$ puede ser escrita en la forma

$$A_{ml} = \sum_{k=1}^{s_l} x_{1lk} \dots x_{m-1\ lk}$$

donde $x_{ilk} \in X$ para todo $i, l, k$. Tenemos entonces que

$$A(x_1^*, ..., x_m^*) = B(x_m^*)(x_1^*, ..., x_{m-1}^*) =$$

$$\sum_{l=1}^{t} \phi_{ml}(x_m^*) A_{ml}(x_1^*, ..., x_{m-1}^*) =$$

$$\sum_{l=1}^{t} \phi_{ml}(x_m^*) \sum_{k=1}^{s_l} x_{1lk}(x_1^*) \dots x_{m-1\ lk}(x_{m-1}^*) =$$

$$\sum_{l=1}^{t} \sum_{k=1}^{s_l} \phi_{ml}(x_m^*) x_{1lk}(x_1^*) \dots x_{m-1\ lk}(x_{m-1}^*).$$

Para simplificar la notación escribiremos la última suma de la forma:

$$\sum_{j=1}^{s} x_{1j}(x_1^*) \dots x_{m-1\ j}(x_{m-1}^*) \eta_{mj}(x_m^*)$$

donde $x_{ij} \in X$, $\forall i, j$, y $\eta_{mj} \in X^{**}$, $\forall j$.

Para $x^* \in X^*$ sea $C(x^*)$ la forma $(m-1)$-lineal simétrica dada por

$$C(x^*)(x_2^*, ..., x_m^*) = A(x^*, x_2^*, ..., x_m^*) =$$

$$\sum_{j=1}^{s} x_{1j}(x^*) x_{2j}(x_2^*) \dots x_{m-1\ j}(x_{m-1}^*) \eta_{mj}(x_m^*).$$

Así definida $C(x^*)$ es débil-estrella continua sobre los acotados. Usando el mismo razonamiento que antes podemos suponer que $\{x_{1j}\}_{j=1}^{r}$ $(r \leq s)$ son el máximo número de vectores linealmente independientes de $\{x_{1j}\}_{j=1}^{s}$ y que

$$C(x^*) = \sum_{l=1}^{r} x_{1l}(x^*) \sum_{k=1}^{r_l} y_{2lk} \dots y_{m-1\ lk} \varphi_{mlk}$$

donde $y_{ljk} \in X$, $\forall l, j, k$, y $\varphi_{m,l,k} \in X^{**}$, $\forall l, k$.

Si elegimos $u_l^* \in X^*$, $l = 1, ..., r$, de modo que $x_{1j}(u_l^*) = \delta_{jl}$ obtenemos:

$$C(u_l^*) = \sum_{k=1}^{r_l} y_{2lk} \dots y_{m-1\ lk} \varphi_{mlk} =: A_{1l}.$$

Entonces $A_{1l}$ es simétrica y débil-estrella continua sobre los conjuntos acotados. Por tanto, por la hipótesis de inducción, obtenemos finalmente que $A_{1l}$ puede escribirse de la forma

$$A_{1l} = \sum_{k=1}^{q_l} z_{2kl} \dots z_{mkl}$$

donde $z_{jkl} \in X$, $\forall j, k, l$. Así pues,

$$A(x_1^*, ..., x_m^*) = C(x_1^*)(x_2^*, ..., x_m^*) = \sum_{l=1}^{r} x_{1l}(x_1^*) A_{1l}(x_2^*, ..., x_m^*) =$$

$$\sum_{l=1}^{r} x_{1l}(x_1^*) \sum_{k=1}^{q_l} z_{2kl}(x_2^*) \dots z_{mkl}(x_m^*)$$

lo que concluye la prueba. ∎

Como una consecuencia inmediata obtenemos el resultado análogo para polinomios.

**Teorema 4.2** *Todo polinomio $m$-homogéneo de tipo finito $P$ en $X^*$ que es débil-estrella continuo sobre los acotados puede escribirse de la forma $P = \sum_{j=1}^{q} x_{1j} \dots x_{mj}$ donde $x_{ij} \in X$, $\forall i,j$. En particular, $P$ es débil-estrella continuo.*

Denotemos por $\mathcal{M}_{w^*}(X^*)$ el conjunto de todos los homomorfismos continuos no nulos $\varphi : \mathcal{H}_{w^*}(X^*) \longrightarrow \mathbb{C}$.

**Teorema 4.3** *Si $X$ tiene la propiedad de aproximación entonces*

$$\mathcal{M}_{w^*}(X^*) = \{\delta_{x^*} : x^* \in X^*\}$$

*donde $\delta_{x^*}$ es la aplicación evaluación dada por $\delta_{x^*}(f) = f(x^*)$, $f \in \mathcal{H}_{w^*}(X^*)$.*

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{M}_{w^*}(X^*)$. Como la restricción de $\varphi$ a $X$ es un elemento de $X^*$ existe $x^* \in X^*$ tal que $\varphi(x) = \delta_{x^*}(x)$, $\forall x \in X$. Por el Teorema 4.2 un polinomio $P$ $m$-homogéneo continuo de tipo finito definido en $X^*$ que es débil-estrella continuo en los acotados tiene la forma $P = \sum_{j=1}^{q} x_{1j} \dots x_{mj}$ donde $x_{ij} \in X$, $\forall i,j$. Entonces,

$$\varphi(P) = \varphi(\sum_{j=1}^{q} x_{1j} \dots x_{mj}) = \sum_{j=1}^{q} \varphi(x_{1j}) \dots \varphi(x_{mj}) =$$

$$\sum_{j=1}^{q} \delta_{x^*}(x_{1j}) \dots \delta_{x^*}(x_{mj}) = \delta_{x^*}(P).$$

De donde, por linealidad, $\varphi(P) = \delta_{x^*}(P)$ para todo $P \in \mathcal{P}_{fw^*}(X^*)$. Como $X$ tiene la propiedad de aproximación, por el Teorema 5.2 de [4], $\mathcal{P}_{fw^*}(X^*)$ es denso en $\mathcal{H}_{w^*}(X^*)$. Por continuidad se obtiene que $\varphi = \delta_{x^*}$. ∎

Sea $\mathcal{M}(\mathcal{H}_{w^*}(X^*);\mathcal{H}_{w^*}(X^*))$ el conjunto de todos los homomorfismos continuos no nulos $\theta : \mathcal{H}_{w^*}(X^*) \longrightarrow \mathcal{H}_{w^*}(X^*)$.
Si $\theta \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_{w^*}(X^*);\mathcal{H}_{w^*}(X^*))$ y $x^* \in X^*$ se tiene que $\delta_{x^*} \circ \theta \in \mathcal{M}_{w^*}(X^*)$. Entonces, si $X$ tiene la propiedad de aproximación, por el teorema anterior existe $g(x^*) \in X^*$ tal que $\delta_{x^*} \circ \theta = \delta_{g(x^*)}$. Tenemos así definida la aplicación $g : X^* \longrightarrow X^*$ inducida por $\theta$. Cuando sea conveniente escribiremos $g_\theta$ en lugar de $g$.

**Lema 4.4** *Supongamos que $X$ tiene la propiedad de aproximación. Para todo $x \in X$ y $x^* \in X^*$*

$$g(x^*)(x) = \theta(x)(x^*).$$

*En general, $\theta(f) = f \circ g$ para todo $f \in \mathcal{H}_{w^*}(X^*)$.*

Demostración.

$$\theta(x)(x^*) = \delta_{x^*} \circ \theta(x) = \delta_{g(x^*)}(x) = x(g(x^*)) = g(x^*)(x),$$

para todo $x \in X$ y $x^* \in X^*$. Si $f \in \mathcal{H}_{w^*}(X^*)$

$$\theta(f)(x^*) = \delta_{x^*} \circ \theta(f) = \delta_{g(x^*)}(f) = f(g(x^*)) = f \circ g(x^*),$$

para todo $x^* \in X^*$. ∎

**Proposición 4.5** *Supongamos que $X$ tiene la propiedad de aproximación. La aplicación $g$ pertenece a $\mathcal{H}_{w^*}(X^*;X^*)$.*

Demostración. Probemos en primer lugar que $g$ es holomorfa. Basta probar que para todo $x \in X$ $\delta_x \circ g$ es una función entera (Ejercicio 8.E p.68 de [32]). Pero esto es claro ya que

$$\delta_x \circ g(x^*) = g(x^*)(x) = \theta(x)(x^*);$$

esto es, $\delta_x \circ g = \theta(x)$.

Probemos ahora que $g$ es débil-estrella débil-estrella continua en los acotados de $X^*$. Sea $A \subset X^*$ acotado y sea $(x_i^*)_i$ una red en $A$ débil-estrella convergente a un elemento $x^* \in A$. Tenemos que probar que $(g(x_i^*))_i$ débil-estrella converge a $g(x^*)$. Sea $x \in X$. Como $\theta(x)$ es débil-estrella continua en $A$, $(\theta(x)(x_i^*))_i$ converge a $\theta(x)(x^*)$, esto es, $(g(x_i^*)(x))_i$ converge a $g(x^*)(x)$ lo que concluye la prueba. ∎

Supongamos ahora que $g \in \mathcal{H}_{w^*}(X^*; X^*)$. Podemos definir un homomorfismo continuo $\theta : \mathcal{H}_{w^*}(X^*) \longrightarrow \mathcal{H}_{w^*}(X^*)$ mediante $\theta(f) := f \circ g$. Cuando sea conveniente escribiremos $\theta_g$ en lugar de $\theta$. Si $X$ tiene la propiedad de aproximación, como

$$\theta_{g_\theta}(f) = f \circ g_\theta = \theta(f),$$

esto es, $\theta_{g_\theta} = \theta$, y

$$g_{\theta_g}(x^*)(x) = \theta_g(x)(x^*) = x(g(x^*)) = g(x^*)(x),$$

esto es, $g_{\theta_g} = g$, existe una biyección $T$ entre $\mathcal{M}(\mathcal{H}_{w^*}(X^*); \mathcal{H}_{w^*}(X^*))$ y $\mathcal{H}_{w^*}(X^*; X^*)$ dada por $T(\theta) = g_\theta$.

Sea $\mathcal{B}$ la familia de subconjuntos de $X$ acotados en norma. Si consideramos $X$ como subespacio de $\mathcal{H}_{w^*}(X^*)$, la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos acotados induce en $X$ la topología de la norma y $X$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}_{w^*}(X^*)$. Por tanto, todo $M \in \mathcal{B}$ es un subconjunto $\tau_b$-acotado de $\mathcal{H}_{w^*}(X^*)$. Como $\mathcal{B}$ es saturado, $\mathcal{B}$ define una topología $\tau_{\mathcal{B}}$ localmente convexa en el espacio $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{w^*}(X^*); \mathcal{H}_{w^*}(X^*))$ de aplicaciones lineales y continuas de $\mathcal{H}_{w^*}(X^*)$ en $\mathcal{H}_{w^*}(X^*)$, para la que un sistema fundamental de entornos de cero está formado por los conjuntos $U(M, V) := \{\theta : \theta(M) \subset V\}$, donde $M \in \mathcal{B}$ y $V$ es un $\tau_b$-entorno de cero en $\mathcal{H}_{w^*}(X^*)$. De hecho, la topología $\tau_{\mathcal{B}}$ es de Hausdorff ya que si $\theta \in \cap_{M,V} U(M, V)$ entonces

$\theta(M) \subset V$, $\forall M, V$. Entonces $\theta(X) \subset \bigcap_V V = 0$. De donde, por el Teorema 4.2, $\theta(\mathcal{P}_{f_{w^*}}(X^*)) = 0$. Como estamos suponiendo que $X$ tiene la propiedad de aproximación, por el Teorema 5.2 de [4], $\mathcal{P}_{f_{w^*}}(X^*)$ es denso en $\mathcal{H}_{w^*}(X^*)$. De aquí que, por continuidad, $\theta = 0$. Consideremos $\mathcal{M}(\mathcal{H}_{w^*}(X^*); \mathcal{H}_{w^*}(X^*))$ dotado con la topología inducida por $\tau_{\mathcal{B}}$.

**Teorema 4.6** *Supongamos que $X$ verifica la propiedad de aproximación. La aplicación $T : \mathcal{M}(\mathcal{H}_{w^*}(X^*); \mathcal{H}_{w^*}(X^*)) \longrightarrow \mathcal{H}_{w^*}(X^*; X^*)$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Probemos primero que $T$ es continua. Sea $(\theta_i)_i$ una red $\tau_{\mathcal{B}}$-convergente a $\theta$. Es decir, dado $U(M, V)$ existe $i_0$ tal que si $i \geq i_0$ entonces $\theta_i(M) - \theta(M) \subset V$, esto es, $(\theta_i)_i$ converge uniformemente a $\theta$ en $M$, para todo $M \in \mathcal{B}$. Si denotamos $g_i := T(\theta_i)$ tenemos que probar que $(g_i)_i$ $\tau_b$-converge a $g := T(\theta)$. Sea $A \subset X^*$ acotado y sea $\epsilon > 0$. Como $(\theta_i)_i$ converge uniformemente en la bola unidad $B$ de $X$, si consideramos el $\tau_b$-entorno de cero $\{f \in \mathcal{H}_{w^*}(X^*) : \sup_{x^* \in A} |f(x^*)| \leq \epsilon\}$ existe $i_0$ tal que si $i \geq i_0$ entonces

$$\sup_{x^* \in A} |\theta_i(x)(x^*) - \theta(x)(x^*)| \leq \epsilon, \quad \forall x \in B.$$

Luego si $i \geq i_0$ se cumple que

$$|g_i(x^*)(x) - g(x^*)(x)| \leq \epsilon, \quad \forall x \in B,\ x^* \in A.$$

Lo que prueba que $(g_i)_i$ $\tau_b$-converge a $g$ y $T$ es continua.

Probemos ahora que $T^{-1}$ es continua. Sea $(g_i)_i$ una red en el espacio $\mathcal{H}_{w^*}(X^*; X^*)$ $\tau_b$-convergente a $g \in \mathcal{H}_{w^*}(X^*; X^*)$. Tenemos que probar que $(\theta_i := T^{-1}(g_i))_i$ converge uniformemente en cada conjunto de $\mathcal{B}$ a $\theta := T^{-1}(g)$. Basta probar la convergencia uniforme en la bola unidad $B$ de $X$. Un $\tau_b$-entorno de cero en $\mathcal{H}_{w^*}(X^*)$ es de la forma $\{f \in \mathcal{H}_{w^*}(X^*) : \sup_{x^* \in A} |f(x^*)| \leq \epsilon\}$ donde $A \subset X^*$ es acotado. Como $(g_i)_i$

converge a $g$ uniformemente en $A$, existe $i_0$ tal que si $i \geq i_0$ entonces

$$\sup_{x\in B} |g_i(x^*)(x) - g(x^*)(x)| \leq \epsilon \quad \forall x^* \in A.$$

Equivalentemente,

$$|\theta_i(x)(x^*) - \theta(x)(x^*)| \leq \epsilon \quad \forall x \in B, x^* \in A.$$

Luego $(\theta_i)_i$ converge a $\theta$ uniformemente en $B$ y $T^{-1}$ es continua. ∎

En la prueba se ha demostrado que $T$ es un homeomorfismo uniforme con la uniformidad natural en $\mathcal{M}(\mathcal{H}_{w^*}(X^*); \mathcal{H}_{w^*}(X^*))$ inducida por la de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{w^*}(X^*); \mathcal{H}_{w^*}(X^*))$, de donde se obtiene el siguiente corolario:

**Corolario 4.7** *Si $X$ verifica la propiedad de aproximación el espacio $(\mathcal{M}(\mathcal{H}_{w^*}(X^*); \mathcal{H}_{w^*}(X^*)), \tau_B)$ es completo.*

**Teorema 4.8** *Supongamos que $X$ verifica la propiedad de aproximación. Sea $g = T(\theta)$.*

*a) $g$ es constante si y sólo si $\theta$ envía cada $f$ a una aplicación constante $\theta(f) = c(f)$.*

*b) Si $\theta$ tiene rango finito, entonces $g$ tiene rango finito.*

*c) Si $g$ tiene rango finito, entonces existen $f_1, ..., f_n \in \mathcal{H}_{w^*}(X^*)$ tales que $\theta(f)$ pertenece a la clausura de $Alg(f_1, ..., f_n)$ para todo $f \in \mathcal{H}_{w^*}(X^*)$.*

Demostración. a) Supongamos que $g = a^* \in X^*$, esto es, $g(x^*) = a^*$ $\forall x^* \in X^*$. Como

$$\theta(f)(x^*) = f \circ g(x^*) = f(a^*),$$

$\theta$ envía a $f$ a la aplicación constante $\theta(f)(x^*) = f(a^*)$. Así pues, en realidad $\theta(\mathcal{H}_{w^*}(X^*)) \subset \mathbb{C}$ y $\theta = \delta_{a^*}$.

Recíprocamente, si $\theta$ envía cada $f$ a una aplicación constante $\theta(f) = c(f)$, en particular $\theta(x) = c(x)$ $\forall x \in X$. Como $\theta$ es lineal y continua, también lo es $c$, es decir, $c \in X^*$ y

$$g(x^*)(x) = \theta(x)(x^*) = c(x) \quad \forall x^* \in X^*, \quad x \in X.$$

Luego $g(x^*) = c$, $\forall x^* \in X^*$.

b) Supongamos que $\theta$ tiene rango finito. Entonces existen $f_1, ..., f_n \in \mathcal{H}_{w^*}(X^*)$ y $c_1, ..., c_n$ en el dual de $\mathcal{H}_{w^*}(X^*)$ tales que

$$\theta(f) = c_1(f)f_1 + \ldots + c_n(f)f_n, \quad \forall f \in \mathcal{H}_{w^*}(X^*).$$

En particular,

$$\theta(x) = c_1(x)f_1 + \ldots + c_n(x)f_n, \quad \forall x \in X$$

y la restricción $c_{i|_X}$ de $c_i$ a $X$ pertenece a $X^*$, $i = 1, ..., n$. Luego,

$$g(x^*)(x) = \theta(x)(x^*) = c_1(x)f_1(x^*) + \ldots + c_n(x)f_n(x^*) =$$

$$(f_1(x^*)c_1 + \ldots + f_n(x^*)c_n)(x), \quad \forall x \in X.$$

Por tanto,

$$g(x^*) = f_1(x^*)c_{1|_X} + \ldots + f_n(x^*)c_{n|_X}$$

lo que prueba que $g$ tiene rango finito.

c) Por hipótesis existen $x_1^*, ..., x_n^* \in X^*$ tales que para cada $x^* \in X^*$ existen constantes $f_1(x^*), ..., f_n(x^*)$ en $\mathbb{C}$ verificando

$$g(x^*) = f_1(x^*)x_1^* + \ldots + f_n(x^*)x_n^*.$$

Sea

$$\begin{array}{rccc} p_i: & g(X^*) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & g(x^*) & \rightsquigarrow & f_i(x^*) \end{array}$$

la proyección. Entonces $f_i : X^* \longrightarrow \mathbb{C}$ satisface la relación $f_i = p_i \circ g$ por lo que $f_i$ es una función entera. Como $p_i$ está definida en un espacio de dimensión finita generado por $x_1^*, ..., x_n^*$, $p_i$ es débil-estrella continua. Luego $f_i \in \mathcal{H}_{w^*}(X^*)$, $i = 1, ...n$.

Más aún, para todo $x \in X$ y $x^* \in X^*$

$$\theta(x)(x^*) = g(x^*)(x) = f_1(x^*)x_1^*(x) + \ldots + f_n(x^*)x_n^*(x) =$$

$$(x_1^*(x)f_1 + \ldots + x_n^*(x)f_n)(x^*),$$

luego

$$\theta(x) = x_1^*(x)f_1 + \ldots + x_n^*(x)f_n, \quad \forall x \in X.$$

Por el Teorema 4.2 todo polinomio $P$ en $X^*$ $m$-homogéneo, continuo, de tipo finito y que es débil-estrella continuo en los acotados puede escribirse de la forma $P = \sum_{j=1}^q x_{1j} \ldots x_{mj}$ donde $x_{ij} \in X$, $\forall i, j$. Luego $\theta(P) = \sum_{j=1}^q \theta(x_{1j}) \ldots \theta(x_{mj}) \in Alg(f_1, ..., f_n)$. Como estamos suponiendo que $X$ tiene la propiedad de aproximación, $\mathcal{P}_{fw^*}(X^*)$ es denso en $\mathcal{H}_{w^*}(X^*)$ (Teorema 5.2 de [4]). De aquí que, finalmente, $\theta(f)$ pertenezca a la clausura de $Alg(f_1, ..., f_n)$ para todo $f \in \mathcal{H}_{w^*}(X^*)$. ∎

**Nota 4.9** En el caso real, González y Gutiérrez [24] han probado que todo homomorfismo continuo $\theta : \mathcal{C}^k(E) \longrightarrow \mathcal{C}^k(F)$, donde $E$ y $F$ son espacios de Banach reales (ver [24] para las definiciones), es compacto (es decir, $\theta$ envía subconjuntos acotados de $\mathcal{C}^k(E)$ en subconjuntos relativamente compactos de $\mathcal{C}^k(F)$) si y sólo si su función asociada $g : F \longrightarrow E$ dada por $\delta_{g(x)} = \delta_x \circ \theta$ es constante. En nuestro contexto hemos probado que si la función asociada $g$ es constante, $\theta$ envía cada $f$ a una función constante $\theta(f)$. Luego $\theta$ es compacta. De hecho, $\theta = \delta_{a^*}$ para algún $a^* \in X^*$, y si $A \subset \mathcal{H}_{w^*}(X^*)$ es $\tau_b$-acotado, entonces $\{\theta(f) : f \in A\} = \{f(a^*) : f \in A\}$ es un conjunto acotado en $\mathbb{C}$. Así pues, es relativamente compacto en $\mathbb{C}$ y por tanto en $\mathcal{H}_{w^*}(X^*)$.

Sin embargo el recíproco no es cierto en general. Por ejemplo como el espacio $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ de funciones enteras en $\mathbb{C}$ es un espacio de Montel, todo homomorfismo continuo $\theta : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C})$ es compacto.

En el Teorema siguiente probamos que los únicos homomorfismos continuos de convolución $\theta : \mathcal{H}_{w^*}(X^*) \longrightarrow \mathcal{H}_{w^*}(X^*)$, $\theta \neq 0$, son las traslaciones. Denotemos por

$$\eta_{a^*} : f \in \mathcal{H}_{w^*}(X^*) \rightsquigarrow \eta_{a^*}(f) \in \mathcal{H}_{w^*}(X^*)$$

la traslación dada por $\eta_{a^*}(f)(x^*) = f(x^* + a^*)$. Recordamos que $\theta$ es un operador de convolución si

$$\theta(\eta_{a^*}(f)) = \eta_{a^*}(\theta(f)), \quad \forall f \in \mathcal{H}_{w^*}(X^*).$$

**Teorema 4.10** *Supongamos que $X$ verifica la propiedad de aproximación. Sea $\theta \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_{w^*}(X^*); \mathcal{H}_{w^*}(X^*))$ y sea $g \in \mathcal{H}_{w^*}(X^*; X^*)$ su aplicación asociada. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*i) $\theta$ es un operador de convolución.*

*ii) $g(x^*) = x^* + c^*$ para algún $c^* \in X^*$.*

*iii) $\theta = \eta_{c^*}$.*

Demostración. i) $\rightarrow$ ii). Sea $x \in X$ y $x^*, y^* \in X^*$, entonces

$$\eta_{y^*}(\theta(x))(x^*) = \theta(x)(x^* + y^*) = g(x^* + y^*)(x).$$

Por otra parte,

$$\theta(\eta_{y^*}(x))(x^*) = (\eta_{y^*}(x) \circ g)(x^*) = \eta_{y^*}(x)(g(x^*)) =$$

$$x(g(x^*) + y^*) = (g(x^*) + y^*)(x).$$

Luego $g(x^*+y*) = y^*+g(x^*)$ para todo $x^*, y^* \in X^*$. Así $g(x^*)+y^* = g(y^*)+x^*$, y entonces $g(x^*)-x^* = g(y^*)-y^*$. Por tanto $g(x^*)-x^* = c^*$ para algún $c^* \in X^*$ y ii) queda probado.

ii) $\rightarrow$ iii). $\theta(f)(x^*) = f \circ g(x^*) = f(x^* + c^*)$. Luego $\theta = \eta_{c^*}$.

iii) $\rightarrow$ i) es obvio.

∎

Como consecuencia inmediata obtenemos el resultado principal.

**Teorema 4.11** *Si $X$ verifica la propiedad de aproximación entonces todo operador de convolución*

$$\theta \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_{w^*}(X^*); \mathcal{H}_{w^*}(X^*))$$

*verifica*

$$\theta(\mathcal{H}_{w^*}(X^*)) = \mathcal{H}_{w^*}(X^*).$$

En lo que sigue será conveniente diferenciar las traslaciones del espacio $H_{wu}(X)$ de las de $\mathcal{H}_{w^*}(X^{**})$. Para ello, si $a \in X$,

$$\eta_a : f \in \mathcal{H}_{wu}(X) \rightsquigarrow \eta_a(f) \in \mathcal{H}_{wu}(X)$$

denotará la traslación dada por $\eta_a(f)(x) = f(x+a)$, $x \in X$. Será útil usar la notación siguiente

$$\eta_a(f) = [x \in X \rightsquigarrow f(x+a)].$$

Similarmente, para $a^{**} \in X^{**}$, $\overline{\eta_{a^{**}}} : \mathcal{H}_{w^*}(X^{**}) \longrightarrow \mathcal{H}_{w^*}(X^{**})$ es la traslación $\overline{\eta_{a^{**}}}(f) = [x^{**} \in X^{**} \rightsquigarrow f(x^{**} + a^{**})]$.

**Lema 4.12** *Para $g \in \mathcal{H}_{w^*}(X^{**})$ la aplicación*

$$\begin{array}{rccl} T_g : & X^{**} & \longrightarrow & \mathcal{H}_{w^*}(X^{**}) \\ & a^{**} & \rightsquigarrow & T_g(a^{**}) := \overline{\eta_{a^{**}}}(g) \end{array}$$

*es débil-estrella $\tau_b$ continua en los subconjuntos acotados de $X^{**}$.*

Demostración. Sea $A$ un subconjunto acotado de $X^{**}$ y sea $(a_i^{**})_i$ una red en $A$ débil-estrella convergente a $a^{**} \in A$. Tenemos que probar que la red $(\overline{\eta_{a_i^{**}}}(g) = T_g(a_i^{**}))_i$ $\tau_b$-converge a $T_g(a) = \overline{\eta_{a^{**}}}(g)$.

Un $\tau_b$-entorno de cero tiene la forma

$$U := \{f \in \mathcal{H}_{w^*}(X^{**}) : \sup_{x^{**} \in C} |f(x^{**})| \leq \epsilon\}$$

donde $C \subset X^{**}$ es acotado y $\epsilon > 0$. Sea $\lambda > 0$ tal que $A \cup C \subset \lambda B^{**}$, donde $B^{**}$ denota la bola unidad cerrada de $X^{**}$. Como $2\lambda B^{**}$ es débil-estrella compacto, la aplicación $g$ es débil-estrella uniformemente continua en $2\lambda B^{**}$. Entonces, existe un débil-estrella entorno de cero $V$ absolutamente convexo tal que si $y^{**}, z^{**} \in 2\lambda B^{**}$ verifican $y^{**} - z^{**} \in V$ entonces

$$|g(y^{**}) - g(z^{**})| \leq \epsilon. \qquad (1)$$

Como $(a_i^{**})_i$ débil-estrella converge a $a^{**}$, existe $i_0$ tal que para $i \geq i_0$ $a_i^{**} - a^{**} \in V$. Sea $i \geq i_0$. Si $x^{**} \in \lambda B^{**}$, entonces $a^{**} + x^{**}, a_i^{**} + x^{**}$ están en $2\lambda B^{**}$ y $(a_i^{**} + x^{**}) - (a^{**} + x^{**}) = a_i^{**} - a^{**} \in V$. Luego, por (1), $|g(a_i^{**} + x^{**}) - g(a^{**} + x^{**})| \leq \epsilon$. Entonces,

$$\begin{aligned}
&\sup_{x^{**} \in C} |T_g(a_i^{**})(x^{**}) - T_g(a^{**})(x^{**})| = \\
&\sup_{x^{**} \in C} |g(a_i^{**} + x^{**}) - g(a^{**} + x^{**})| \leq \\
&\sup_{x^{**} \in \lambda B^{**}} |g(a_i^{**} + x^{**}) - g(a^{**} + x^{**})| \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Hemos probado que si $i \geq i_0$ entonces $T_g(a_i^{**}) - T_g(a^{**}) \in U$. Por tanto, la red $(T_g(a_i^{**}))_i$ es $\tau_b$-convergente a $T_g(a^{**})$. ∎

Tal y como indicábamos al principio de la sección, toda función de $\mathcal{H}_{wu}(X)$ tiene una extensión a $X^{**}$ que es débil-estrella continua sobre los conjuntos acotados, y esta extensión determina un isomorfismo topológico de álgebras entre $\mathcal{H}_{wu}(X)$ y $\mathcal{H}_{w^*}(X^{**})$ (Teorema 7.1 de [4]). Sea $E : \mathcal{H}_{wu}(X) \longrightarrow \mathcal{H}_{w^*}(X^{**})$ dicho operador de extensión. Por simplicidad, $\tilde{f}$ denotará la extensión de $f$ a $X^{**}$ vía $E$. La aplicación $E$ genera una biyección entre el conjunto $\mathcal{M}(\mathcal{H}_{wu}(X); \mathcal{H}_{wu}(X))$ de homomorfismos continuos no nulos definidos de $\mathcal{H}_{wu}(X)$ en $\mathcal{H}_{wu}(X)$, y $\mathcal{M}(\mathcal{H}_{w^*}(X^{**}); \mathcal{H}_{w^*}(X^{**}))$ dada por

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{M}(\mathcal{H}_{wu}(X); \mathcal{H}_{wu}(X)) & \longrightarrow & \mathcal{M}(\mathcal{H}_{w^*}(X^{**}); \mathcal{H}_{w^*}(X^{**})) \\
\theta & \rightsquigarrow & \theta_* := E \circ \theta \circ E^{-1}
\end{array}$$

Es más, dicha aplicaciión biyecta los operadores de convolución de ambos espacios.

**Teorema 4.13** *$\theta$ es uun operador de convolución si y sólo si $\theta_*$ es un operador de convoluciión.*

Demostración. Suppongamos en primer lugar que

$$\theta_{**} \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_{w^*}(X^{**}); \mathcal{H}_{w^*}(X^{**}))$$

es un operador de conuvolución. Tenemos que probar que

$$\eta_a(\theta(f)) = \theta(\eta_a(f))$$

para todo $a \in A$ y $f \in \mathcal{H}_{wu}(X)$, donde $\theta = E^{-1} \circ \theta_* \circ E$.

$$\eta_a(\theta(f)) = \eta_a(E^{-1} \circ \theta_* \circ E(f)) = \eta_a(E^{-1}(\theta_*(\tilde{f}))) =$$

$$[x \rightsquigarrow \theta_*(\tilde{f})(x+a)]\,] = E^{-1}(\overline{\eta_a}(\theta_*(\tilde{f}))) = E^{-1}(\theta_*(\overline{\eta_a}(\tilde{f}))) \qquad (2).$$

Por otra parte,

$$\theta(\eta_a(f)) = E^{-1} \circ \theta_* \circ E(\eta_a(f)) = E^{-1}(\theta_*(\widetilde{\eta_a(f)})) \qquad (3).$$

Como $\overline{\eta_a}(\tilde{f}) \in \mathcal{H}_{w^*}(X^{***})$ y

$$\overline{\eta_a}(\tilde{f})_{|X} = [x \in X \rightsquigarrow \tilde{f}(x+a)] = [x \in X \rightsquigarrow f(x+a)] = \eta_a(f),$$

por unicidad de la exteensión se tiene que $\overline{\eta_a}(\tilde{f}) = \widetilde{\eta_a(f)}$. Luego de (2) y de (3) concluimos quue $\eta_a(\theta(f)) = \theta(\eta_a(f))$.

Supongamos ahora que $\theta : \mathcal{H}_{wu}(X) \longrightarrow \mathcal{H}_{wu}(X)$, $\theta \neq 0$, es un operador de convoluciión. Tenemos que probar que

$$\overline{\eta_{a^{**}}}(\theta_*(f)) = \theta_*(\overline{\eta_{a^{**}}}(f)) \qquad (4)$$

para todo $f \in \mathcal{H}_{w^*}(X^{**})$. Para $g \in \mathcal{H}_{w^*}(X^{**})$ sea $T_g$ la aplicación dada en el Lema 4.12. Entonces (4) es equivalente a

$$T_{\theta_*(f)}(a^{**}) = \theta_* \circ T_f(a^{**}).$$

Sean $B$ y $B^{**}$ las bolas unidad cerradas de $X$ y $X^{**}$ respectivamente. Como $\lambda B$ es débil-estrella denso en $\lambda B^{**}$, $\forall \lambda > 0$, por el Lema 4.12 basta probar que $\theta_* \circ T_f(a) = T_{\theta_*(f)}(a)$ para todo $a \in X$ y $f \in \mathcal{H}_{w^*}(X^{**})$, esto es, $\overline{\eta_a}(\theta_*(f)) = \theta_*(\overline{\eta_a}(f))$. Si $f_{|X}$ denota la restricción de $f$ a $X$ se cumple

$$\theta_*(\overline{\eta_a}(f)) = E \circ \theta \circ E^{-1}(\overline{\eta_a}(f)) =$$

$$E \circ \theta \circ E^{-1}[x^{**} \in X^{**} \leadsto f(x^{**} + a)] =$$

$$E \circ \theta[x \in X \leadsto f(x + a)] = E \circ \theta(\eta_a(f_{|X})) =$$

$$E(\eta_a(\theta(f_{|X}))) = \eta_a(\widetilde{\theta(f_{|X})}) \qquad (5).$$

Por otra parte,

$$\overline{\eta_a}(\theta_*(f)) = \overline{\eta_a}(E \circ \theta \circ E^{-1}(f)) = \overline{\eta_a}(E(\theta(f_{|X}))) = \overline{\eta_a}(\widetilde{\theta(f_{|X})}) \qquad (6).$$

Razonando igual que antes $\overline{\eta_a}(\widetilde{\theta(f_{|X})}) = \eta_a(\widetilde{\theta(f_{|X})})$. Luego, de (5) y (6) concluimos que $\theta_*$ es un operador de convolución. ∎

**Teorema 4.14** *Sea $X$ un espacio de Banach tal que $X^*$ tiene la propiedad de aproximación. Entonces, todo operador de convolución $\theta \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_{wu}(X); \mathcal{H}_{wu}(X))$ verifica*

$$\theta(\mathcal{H}_{wu}(X)) = \mathcal{H}_{wu}(X).$$

Demostración. Por el Teorema 4.13

$$\theta_* = E \circ \theta \circ E^{-1} \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_{w^*}(X^{**}); \mathcal{H}_{w^*}(X^{**}))$$

es un operador de convolución. Como $X^*$ tiene la propiedad de aproximación, por el Teorema 4.10, $\theta_*(\mathcal{H}_{w^*}(X^{**})) = \mathcal{H}_{w^*}(X^{**})$. Luego,

$$\theta(\mathcal{H}_{wu}(X)) = E^{-1} \circ E \circ \theta \circ E^{-1} \circ E(\mathcal{H}_{wu}(X)) =$$

$$E^{-1} \circ \theta_* \circ E(\mathcal{H}_{wu}(X)) = E^{-1}(\theta_*(\mathcal{H}_{w^*}(X^{**}))) =$$

$$E^{-1}(\mathcal{H}_{w^*}(X^{**})) = \mathcal{H}_{wu}(X),$$

Lo que concluye la prueba. ∎

Como consecuencia del Teorema 4.11 también obtenemos el teorema siguiente.

**Teorema 4.15** *Sea $X$ un espacio de Banach tal que $X^*$ tiene la propiedad de aproximación. El operador $\theta \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_{wu}(X); \mathcal{H}_{wu}(X))$ es de convolución si y sólamente si existe $a^{**} \in X^{**}$ tal que*

$$\theta(f) = [x \in X \rightsquigarrow \tilde{f}(x + a^{**})]$$

*donde $\tilde{f} \in \mathcal{H}_{w^*}(X^{**})$ es la extensión de $f$ a $X^{**}$.*

Demostración. La condición suficiente es inmediata. Probemos la condición necesaria. Por el Teorema 4.13

$$\theta_* = T \circ \theta \circ T^{-1} \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_{w^*}(X^{**}); \mathcal{H}_{w^*}(X^{**}))$$

es un operador de convolución. Entonces, por el Teorema 4.10, $\theta_* = \overline{\eta_{a^{**}}}$ para algún $a^{**} \in X^{**}$. Por tanto, para $f \in \mathcal{H}_{wu}(X)$,

$$\theta(f) = E^{-1} \circ \overline{\eta_{a^{**}}} \circ E(f) = E^{-1}(\overline{\eta_{a^{**}}}(\tilde{f})) = [x \rightsquigarrow \tilde{f}(x + a^{**})].$$

∎

# Bibliography


[1] J.M. Ansemil, S. Ponte, The compact open and the Nachbin ported topologies on spaces of holomorphic functions. *Arch. Math.* 51 (1988) 65–70.

[2] R.M. Aron, Weakly uniformly continuous and weakly sequentially continuous entire functions. *In J.A.Barroso (ed.), Advances in holomorphy, Notas Mat.65. Amsterdam. North-Holland.* (1979) 47–66.

[3] R.M. Aron, P. Berner, A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings. *Bulletin de la Société Mathématique de France.* 106 (1978) 3–24.

[4] R.M. Aron, B.J. Cole and T.W. Gamelin, Weak-star continuous analytic functions. *Can. J. Math.* Vol. 47 (4) (1995) 673–683.

[5] R.M. Aron, S. Dineen, Q-reflexive Banach spaces. *Rocky Mountain.* To appear.

[6] K.D. Bierstedt, J. Bonet, Biduality in Fréchet and (LB)-spaces. *Progress in Functional Analysis, North-Holland Math. Stud.,* 170 113–133. North-Holland, Amsterdam, (1992).

[7] K.D. Bierstedt, J. Bonet, A. Galbis, Weighted spaces of holomorphic functions on balanced domains. *Michigan Math. J.* 40 (1993) 271–297.

[8] K.D. Bierstedt, R.G. Meise, W.H. Summers, Köthe sets and Köthe sequence spaces. *Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory.* J.A. Barroso (Ed.), Amsterdam-London (1982) 27–91.

[9] K.D. Bierstedt, W.H. Summers, Biduals of weighted Banach spaces of analytic functions. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* 54 (1993) 70–79.

[10] J. Bonet, M. Lindström, M. Valdivia, Two theorems of Josefson-Nissenzweig type for Fréchet spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* 117, 2 (1993) 363–364.

[11] C. Boyd, A. Peris, A projective description of the Nachbin-ported topology. Preprint.

[12] J.B. Cooper, Saks spaces and applications to Functional Analysis. *Notas de Matemática, North-Holland Math. Stud., Vol.139, North-Holland, Amsterdam,* (1978).

[13] A. Defant, M. Maestre, Property (BB) and holomorphic functions on Fréchet-Montel spaces. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 115 (1993) 305–313.

[14] J. Diestel, Sequences and series in Banach spaces. *Graduate texts in Math., Vol.92, Springer, Berlin,* (1984).

[15] S. Dineen, Complex analysis in locally convex spaces. *North-Holland Math. Stud., Vol.57, North-Holland, Amsterdam,* (1981).

[16] S. Dineen, Holomorphic functions on Fréchet-Montel spaces. *J. Math. Anal. Appl.* 163 (1992) 581–587.

[17] S. Dineen, Infinite dimensional complex analysis. Pendiente de publicación.

[18] S. Dineen, Holomorphic functions and Banach-nuclear decompositions of Fréchet spaces. *Studia Math.* To appear.

[19] J. Dixmier, Sur un théorème de Banach, *Duke Math. J.* 15 (1948) 1057–1071.

[20] N. Dunford and J. Schwartz, Linear Operators, Part I. *Interscience.* (1959)

[21] P. Galindo, D. García, M. Maestre, The coincidence of $\tau_0$ and $\tau_\omega$ for spaces of holomorphic functions on some Fréchet-Montel spaces. *Proc. R. Ir. Acad.* Vol. 91A, No. 2 (1991) 137–143.

[22] P. Galindo, D. García, M. Maestre, Holomorphic mappings of bounded type. *Journal of Math. Anal. and Appl.* 166, 1 (1992) 236–246.

[23] M. González, Remarks on Q-reflexive Banach spaces. Preprint.

[24] M. González, J.M. Gutiérrez, Compact and weakly compact homomorphisms between algebras of differentiable functions. *Proc. Amer. Math. Soc.* Vol.115, no.4 (1992) 1025–1029.

[25] A. Grothendieck, Sur les espaces (F) et (DF). *Summa Brasiliensis Mathematicae,* Vol.3, fasc.6, (1954) 57–122.

[26] C.P. Gupta, Malgrange theorem for nuclearly entire functions of bounded type on a Banach space. *The University of Rochester. Rochester, New York.* (1966) Ph. D. Thesis.

[27] R. Haydon, Some more characterizations of Banach spaces containing $l_1(\mathbb{N})$. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* 90 (1976) 269–276.

[28] J. Jaramillo, A. Prieto and I. Zalduendo, The bidual of the space of polynomials on a Banach space. Preprint.

[29] H. Jarchow, Locally convex spaces. *Math. Leitfäden, Teubner, Stuttgart,* (1981).

[30] N.J. Kalton, Schauder decompositions in locally convex spaces. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 68 (1970) 377–392.

[31] G. Köthe, Topological vector spaces I, *Springer-Verlag, New York,* 159 (1969).

[32]. J. Mujica, Complex Analysis in Banach spaces.*North-Holland Math. Stud., Vol.120, North-Holland, Amsterdam,* (1986).

[33] J. Mujica, Complex homomorphisms of the algebras of holomorphic functions on Fréchet spaces, *Math. Ann.* 241 (1979) 73–82.

[34] J. Mujica, A Banach-Dieudonné theorem for germs of holomorphic functions. *J. Func. Anal.* 57 (1984) 31–48.

[35] J. Mujica, A completeness theorem for inductive limits of Banach spaces, *Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory II, North-Holland Math. Studies* 86 (1984) 319–329.

[36] J. Mujica, Linearization of Bounded Holomorphic Mappings on Banach Spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 324, 2 (1991) 867–887.

[37] J. Mujica, Linearization of holomorphic mappings of bounded type. *Progress in Functional Analysis, North-Holland Math. Studies, Vol. 170, North-Holland, Amsterdam* (1992), 149–162.

[38] K.F. Ng, On a theorem of Dixmier, *Math. Scand.* 29 (1971) 279-280.

[39] P. Pérez Carreras, J. Bonet, Barreled locally convex spaces, *North-Holland Math. Stud., 131, North-Holland, Amsterdam,* (1987).

[40] A. Prieto, The bidual of spaces of holomorphic functions in infinitely many variables. *Proc. R. Ir. Acad.* Vol. 92A, No. 1 (1992) 1-8.

[41] A.P. Robertson, W.J. Robertson, Topological vector spaces. *Cambridge tracts in Mathematics and Mathematical Physic. Vol. 1. Cambridge Univ. Press., Cambridge,* (1973).

[42] L.A. Rubel, A.L. Shields, The second duals of certain spaces of analytic functions. *J. Austral. Math. Soc.* 11 (1970) 276-280.

[43] P. Rueda, On the Banach-Dieudonné Theorem for spaces of holomorphic functions. *Quaestiones Mathematicae* 19 (1996) 341-352.

[44] W. Ruess, The strict topology and $(DF)$-spaces, *Functional Analysis, Surveys and Recent Results, North-Holland Math. Stud., North-Holland, Amsterdam.* (1979) pp.105-118.

[45] H.H. Schaefer, Espacios vectoriales topológicos. *Ed.Teide* (1974).

[46] M. Valdivia, Interpolation in certain function spaces. *Proc. R. Ir. Acad.* Vol. 80A, N.2, (1980) 173-189.

[47] M. Valdivia, Banach spaces of polynomials without copies of $l^1$. *Proc. Amer. Math. Soc.* To appear.

[48] M. Valdivia, Fréchet spaces of holomorphic functions without copies of $l^1$. *Math. Nach.* To appear.

[49] D.L. Williams, Some Banach spaces of entire functions. *Ph. D. Thesis, University of Michigan* (1967).