UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
Departament de Didàctica de la Matemàtica

APORTACIONES A LA INTERPRETACIÓN Y APLICACIÓN DEL MODELO DE VAN HIELE: LA ENSEÑANZA DE LAS ISOMETRÍAS DEL PLANO. LA EVALUACIÓN DEL NIVEL DE RAZONAMIENTO.

PRIMERA PARTE

Memoria presentada por Dña. ADELA JAIME PASTOR
para optar al Grado de DOCTOR EN MATEMÁTICAS
Dirigida por el Dr. D. ÁNGEL GUTIÉRREZ RODRÍGUEZ

Valencia, septiembre de 1993

.s Matemáticas

31 cms.

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA
DE LES MATEMÀTIQUES

Dr. D. ÁNGEL GUTIÉRREZ RODRÍGUEZ, Catedrático de E.U. de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València,

CERTIFICO:

1) Que la presente memoria titulada *Aportaciones a la Interpretación y Aplicación del Modelo de Van Hiele: La Enseñanza de las Isometrías del Plano. La Evaluación del Nivel de Razonamiento* ha sido realizada bajo mi dirección por Dña. ADELA JAIME PASTOR, en el Departament de Didàctica de la Matemàtica de la Universitat de València, y constituye su tesis para optar al Grado de Doctor en Matemáticas.

2) Que esta memoria cumple los requisitos exigidos por la legislación vigente, por lo que autorizo su presentación en la Universitat de València.

Y para que así conste, firmo el presente certificado.

En Valencia, a 1 de septiembre de 1993.

DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LES MATEMÀTIQUES - UNIVERSITAT DE VALÈNCIA -

Fdo.: Angel Gutiérrez Rodríguez

AGRADECIMIENTOS

No es posible expresar aquí mi agradecimiento a todas las personas que, directa o indirectamente, con sus conocimientos sobre el tema de esta tesis o con su apoyo moral, han ayudado a que haya podido llevar adelante y finalizar este trabajo. Pero no puedo menos que mencionar expresamente a algunas de ellas.

En primer lugar a Angel Gutiérrez, director de esta tesis, quien durante todos estos años me ha orientado, aconsejado y animado.

A Michael Shaughnessy, David Fuys y Alan Hoffer, cuyas acertadas opiniones me han ayudado a comprender mejor el modelo de Van Hiele.

A los estudiantes de Magisterio Carmen, Nuria, María Dolores y Enrique, y a la profesora del Departamento de Didáctica de la Matemática María Cáceres, quienes llevaron a cabo algunas experimentaciones con alumnos de E.G.B., fundamentales para el desarrollo de esta tesis.

A todos los alumnos de E.G.B., B.U.P. y Magisterio que participaron desinteresadamente en las experimentaciones que realizamos, así como a los equipos directivos y profesores de Matemáticas de los Centros, que me dieron todas las facilidades para que pudiera llevar a cabo este trabajo.

A los profesores del Colegio Amadeo Tortajada de Mislata, Miguel, Ramón y José Manuel, con quienes colaboré durante varios años y que aportaron información sobre la viabilidad de la enseñanza de las simetrías en E.G.B. y sobre el modo de razonamiento en Geometría de los estudiantes del Ciclo Superior de E.G.B.

Al Departamento de Didáctica de la Matemática de la U. de Valencia, que me ha facilitado la realización de estas investigaciones siempre que fue necesario.

Por otras razones, a mis padres, quienes siempre me animaron a estudiar y, en estos últimos años, a realizar la tesis doctoral.

Y, finalmente, a mis profesores de Enseñanza Media y la Facultad de Matemáticas que contribuyeron a ampliar mi visión de la organización de las Matemáticas.

Adela Jaime Pastor

ÍNDICE

RESUMEN

Una de las preocupaciones centrales de los investigadores en Didáctica de las Matemáticas es tratar de describir y explicar los procesos cognitivos de los estudiantes de Matemáticas. En las últimas décadas ha destacado de manera especial dentro de este terreno el Modelo de Razonamiento Matemático de Van Hiele, que ha sido estudiado con intensidad y utilizado con éxito como marco de referencia para el diseño curricular.

La memoria que presentamos tiene como objetivo analizar algunas componentes del Modelo de Van Hiele, aportando varias sugerencias, tanto metodológicas como de aplicación, que ayuden a conocer mejor dicho modelo y a utilizar todo su potencial de manera más eficaz para mejorar la enseñanza de las Matemáticas.

El primer capítulo es una introducción y está dedicado a una revisión de las principales componentes del Modelo de Van Hiele (los niveles de razonamiento, las fases de aprendizaje y las características centrales del modelo). Además, hacemos una revisión de las principales aportaciones de las publicaciones realizadas sobre el modelo y resumimos nuestra postura en relación con algunas cuestiones críticas que se han suscitado a raíz de los resultados de investigación.

En el capítulo 2 hacemos una aportación a la utilización del Modelo de Van Hiele como marco teórico para el diseño curricular, mediante la presentación de *una unidad de enseñanza de las isometrías del plano* que ha sido elaborada de acuerdo con los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje de Van Hiele. Esta unidad de enseñanza es válida para las Enseñanzas Primaria y Secundaria, así como para la formación de profesores de Primaria. La unidad es el resultado de numerosas experimentaciones realizadas con estudiantes de los cursos 1º a 8º de E.G.B. y estudiantes de la Escuela de Magisterio.

En las primeras secciones de este capítulo planteamos el objetivo y el desarrollo de nuestra investigación y analizamos las publicaciones más interesantes relacionadas con el tema. Después, en las secciones posteriores, presentamos la unidad de enseñanza dividida en tres partes, dirigidas a la enseñanza de las traslaciones, los giros y las simetrías del plano. Para cada isometría, enunciamos los objetivos generales (tanto de habilidades de razonamiento como de conocimientos) a conseguir para alcanzar cada uno de los

niveles primero a tercero de Van Hiele, afinamos dichos objetivos especificando los correspondientes a cada fase de aprendizaje de ese nivel y enunciamos los tipos de actividades, organizadas para las diferentes fases de aprendizaje de cada nivel de razonamiento.

En el capítulo 3, apoyando la idea de la continuidad en la adquisición de los niveles de razonamiento de Van Hiele, planteamos una interpretación del proceso seguido por los estudiantes en su avance a través de los sucesivos niveles y proponemos una técnica para determinar el nivel de razonamiento de los estudiantes coherente con dicha interpretación. Diferentes secciones del capítulo están dedicadas a los elementos claves de nuestra investigación:

- Describimos el proceso de adquisición de los niveles mediante la definición del concepto de *grado de adquisición de los niveles de Van Hiele.* Aunque son bastantes las investigaciones que, al determinar el nivel de razonamiento de estudiantes, reconocen la existencia de numerosos estudiantes que se encuentran en transición de un nivel al siguiente, hasta ahora ninguna investigación ha planteado una manera de evaluar con detalle ese período de transición.

- Utilizamos operativamente los grados de adquisición de los niveles mencionados en el párrafo precedente, para lo cual, y como complemento a dicha definición, presentamos un *método de evaluación de los grados de adquisición de los niveles* de Van Hiele por los estudiantes, que nos permite analizar e interpretar las contestaciones a items de respuesta libre.

- Hemos usado los dos elementos anteriores en un estudio longitudinal realizado con estudiantes desde 6º de E.G.B. hasta C.O.U. Para ello hemos desarrollado un conjunto de tests escritos de respuesta libre y hemos utilizado este método para evaluar las respuestas a los tests y determinar los grados de adquisición de los niveles de Van Hiele por los estudiantes. En esta memoria presentamos los tests y comentamos los resultados de dicha administración.

- Junto a estas tres aportaciones, que consideramos más destacables, en el capítulo 3 presentamos otra contribución, también original, que puede constituir un avance en la utilización del Modelo de Van Hiele: La elaboración de un tipo de *items escritos de respuesta libre* que ayude a romper la actual escasez de tests fiables para la determinación del nivel de razonamiento de los estudiantes. Estos items están concebidos con el objetivo de superar algunos de los inconvenientes que suelen tener los tests escritos, para lo cual tratamos que se acerquen en lo posible al formato de las entrevistas clínicas. Consideramos esta última componente de la memoria de menor relieve en comparación con las anteriores porque es un tema de investigación que estamos iniciando y del cual sólo planteamos los principios básicos, que seguiremos desarrollando en el futuro.

La memoria termina con unas conclusiones generales y varios anexos que contienen información complementaria sobre las experimentaciones que hemos realizado para las investigaciones recogidas en los capítulos 2 y 3 de la memoria.

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

Este capítulo está dedicado a hacer un rápido recorrido por el Modelo de Van Hiele, describiendo los elementos y características principales de los niveles de razonamiento y de las fases de aprendizaje. Esta descripción no intenta ser exhaustiva, pues hay diversas publicaciones en las que se pueden encontrar análisis detallados, por ejemplo Hershkowitz (1990) y Clements, Battista (1992), sino que sólo pretendemos dar una visión general de las características del modelo, centrándonos con más detalle en aquellos elementos que están directamente relacionados con las investigaciones que presentamos en los siguientes capítulos de esta memoria.

1.1. Origen y difusión del Modelo de Van Hiele.

El modelo en el que se centran las investigaciones recogidas en esta memoria tiene su origen en los trabajos de dos profesores holandeses de Matemáticas de Enseñanza Secundaria, Pierre M. van Hiele y Dina van Hiele-Geldof, quienes, en sus tesis doctorales, presentaron, respectivamente, un modelo de enseñanza y aprendizaje de la Geometría (Van Hiele, 1957) y un ejemplo concreto de aplicación de ese modelo en unos cursos de Geometría (Van Hiele-Geldof, 1957).

El Modelo de Van Hiele ha tenido una difusión relativamente reciente en el mundo occidental si observamos la fecha de las primeras publicaciones de los Van Hiele. En la Unión Soviética se supo muy pronto del Modelo de Van Hiele y se tomó como base para el diseño de un nuevo currículum de Matemáticas implementado en la primera mitad de los años 60 (ver Pyskalo, 1968). También se utilizó el Modelo de Van Hiele en Holanda en el proyecto Wiskobas de desarrollo curricular, que se empezó a desarrollar en 1971 (Treffers, 1987). Pero hasta mediados de la década de los 70 no se le empezó a prestar atención en los EE.UU., a raíz de la publicación de una conferencia de I. Wirszup (Wirszup, 1976), y a continuación se difundió también por los demás países occidentales.

Sin embargo, el interés despertado fue tal que se ha convertido en el modelo teórico de referencia más frecuente en las investigaciones y diseños curriculares relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría. Esta referencia es muchas veces explícita, aunque otras lo es implícita, como en N.C.T.M. (1989). En España el proceso comenzó una década más tarde y en la actualidad se encuentra en período de difusión, reflejándose ello en la existencia de equipos de varios investigación, en la publicación de trabajos basados en el Modelo de Van Hiele o en los que se le cita y en su presencia como tema de trabajo en diversas conferencias, cursos y congresos de Didáctica de las Matemáticas.

En los capítulos siguientes de esta memoria haremos unas recopilaciones y descripciones de las investigaciones más interesantes sobre el Modelo de Van Hiele que tienen que ver directamente con los contenidos de cada capítulo. No obstante, es necesario mencionar aquí tres proyectos de investigación que, en cierto modo, han sido los impulsores del Modelo de Van Hiele y que han marcado profundamente las pautas del trabajo de investigación realizado después de la publicación de los resultados de dichos proyectos. Todos se desarrollaron en EE.UU. en el período de 1979 a 1982 y se les denominan en ocasiones los proyectos de Brooklyn (Fuys, Geddes, Tischler, 1988), de Chicago (Usiskin, 1982) y de Oregón (Burger, Shaughnessy, 1990 y 1986). En las memorias de estas tres investigaciones se aporta información detallada sobre el modelo de Van Hiele que todo estudioso del tema debería conocer.

Los objetivos del Proyecto de Brooklyn, según se menciona en Fuys, Geddes, Tischler (1988), eran:

- Desarrollar y documentar un modelo de trabajo sobre los niveles de Van Hiele, basándose en diversos documentos traducidos del holandés al inglés para este proyecto.

- Evaluar el nivel de razonamiento de los estudiantes de los grados 6º a 9º (equivalentes a 6º de E.G.B. y 1º de B.U.P., respectivamente).

- Analizar el nivel en el que se plantea la enseñanza de la Geometría en esos grados, a partir de los libros de texto de diversas editoriales.

- Determinar si se puede instruir a los profesores de esos grados para que sean capaces de identificar los niveles de Van Hiele de sus alumnos y en los materiales curriculares.

Gracias a este trabajo disponemos de la versión inglesa de algunos escritos interesantes de los propios Pierre y Dina van Hiele que, de otra manera, quizá hoy todavía serían accesibles sólo en holandés. También es destacable mencionar el diseño de tres unidades de enseñanza, organizadas según los niveles de razonamiento, que se emplearon en entrevistas dirigidas a evaluar el razonamiento de los estudiantes.

Además de los resultados en sí mismos sobre el nivel de los estudiantes, hay que mencionar: i) el trabajo llevado a cabo en relación con la identificación de comportamientos específicos de cada nivel (1 a 5) para las tareas propuestas, obteniendo una relación de descriptores para cada nivel, ii) la propuesta, original, de identificar un nivel "actual" y un nivel "potencial" de razonamiento en cada alumno, correspondientes, respectivamente, al nivel que muestra el estudiante cuando se le presenta una serie de tareas y las intenta resolver y el nivel que puede llegar a utilizar cuando recibe instrucción y iii) la elaboración de unos formularios para facilitar la evaluación de los alumnos en las entrevistas, los cuales no se limitaban a la identificación del nivel o bondad de la respuesta, sino que incluían otros datos de interés para la evaluación posterior del nivel del estudiante.

En el Proyecto de Chicago (Usiskin, 1982) se evaluó a 2700 estudiantes de Enseñanza Secundaria en EE.UU. mediante diversos tests, realizados antes y después de un curso de Geometría. Con ello se pudo: i) Observar el nivel de Van Hiele de razonamiento de los estudiantes, antes y después de curso de Geometría, ii) determinar si el nivel de Van Hiele es un buen predictor del éxito de los estudiantes en los cursos de Geometría y iii) comentar la relación/diferencia entre el nivel de razonamiento empleado en la enseñanza y el exhibido por lo alumnos.

Al margen de los resultados obtenidos en el proyecto sobre los aspectos indicados anteriormente, el resultado de esta investigación que ha logrado mayor divulgación ha sido el test diseñado para la evaluación de los alumnos. Se trata de un test para medir los niveles de razonamiento 1 a 5 mediante 5 ítems de elección múltiple para cada nivel, lo cual lo convierte en un instrumento tentador para administrarlo rápidamente y/o a grandes poblaciones. A pesar de la amplia difusión de dicho test, provocada por su facilidad de uso y la falta de alternativas, un problema de fondo que presenta es el interrogante existente sobre la posibilidad de evaluar los niveles de razonamiento mediante ítems de elección múltiple (Crowley, 1989). De manera más particular, se han presentado críticas directas a este test (ver, por ejemplo, Wilson, 1990 y Crowley, 1990) que han sido contestadas por el propio Z. Usiskin (Usiskin, Senk, 1990).

En la memoria de este proyecto también se da una relación de descriptores generales para cada nivel (1 a 5), extraída de los escritos de Pierre y Dina van Hiele.

Por lo que respecta al Proyecto de Oregón (Burger, Shaughnessy, 1990), sus autores estudian la adecuación del modelo de Van Hiele para describir el razonamiento de los estudiantes en Geometría. Para ello se entrevistó oralmente a 48 estudiantes de los grados K a 12 (su equivalente en España es Pre-escolar a C.O.U.), de los cuales se analizó en detalle a 14. Además de las conclusiones relativas al modelo de Van Hiele, ha tenido amplia difusión la batería de problemas empleados en las entrevistas clínicas de evaluación, que se centran en triángulos y cuadriláteros.

Al igual que hemos comentado anteriormente para el proyecto de Brooklyn, en el de Oregón también: i) se elabora una relación de descriptores, en este caso para los niveles 1 a 4, extraídos de los comportamientos de los alumnos ante los problemas propuestos y ii) se redacta un formulario con indicaciones concretas sobre las preguntas a plantearle al alumno, según las respuestas que éste vaya dando, y para su evaluación.

Hay diversas publicaciones que narran de forma detallada las componentes del Modelo de Van Hiele y las aportaciones e investigaciones más destacadas. Por esa razón, no haremos aquí una descripción exhaustiva del mismo, sino que sólo presentaremos sus elementos fundamentales y sus características relacionadas directamente con los contenidos de esta memoria. Unas buenas descripciones del modelo aparecen en Hoffer (1983), Crowley (1987), Burger, Shaughnessy (1986). En castellano, Corberán y otros (1989) y Jaime, Gutiérrez (1990 b). Además, en Gutiérrez, Jaime (1989) se ofrece una relación detallada de referencias comentadas en relación con el Modelo de Van Hiele. Por otra parte, el propio Van Hiele (1986) explica sus ideas sobre el modelo 29 años después de su primera publicación, lo cual permite observar la evolución que sufrió en los primeros años, hasta llegar a la forma generalmente aceptada en la actualidad.

1.2. Descripción del Modelo de Van Hiele.

El Modelo de Van Hiele abarca dos aspectos:

- Descriptivo, mediante el cual se identifican diferentes formas de razonamiento geométrico de los individuos y se puede valorar el progreso de éstos.

- Instructivo, que marca unas pautas a seguir por los profesores para favorecer el avance de los estudiantes en su nivel de razonamiento geométrico.

El núcleo central del Modelo de Van Hiele está constituido por la idea de que, a lo largo del proceso de aprendizaje de la Geometría, el razonamiento de los estudiantes pasa por una serie de niveles de razonamiento, que son secuenciales, ordenados y tales que no se puede saltar ninguno. Cada nivel supone la comprensión y utilización de los conceptos geométricos de una manera distinta, lo cual se refleja en una manera diferente de interpretarlos, definirlos, clasificarlos, y hacer demostraciones.

La componente instructiva del modelo se basa en las fases de aprendizaje. Estas constituyen unas directrices para fomentar el desarrollo de la capacidad de razonamiento matemático de los estudiantes y su paso de un nivel de razonamiento al siguiente, mediante unos tipos de actividades y de problemas particulares para cada fase.

Los niveles de razonamiento.

La descripción de los niveles de Van Hiele hecha en Wirszup (1976) plantea la existencia de cinco niveles de razonamiento. Esta es la caracterización más extendida y aceptada actualmente, en la que se centran todas las investigaciones referentes al modelo y a partir de la cual se ha trabajado para conseguir descripciones más finas de los niveles. No obstante, el proceso de evolución histórico del modelo ha sido más variable.

La cantidad de niveles de razonamiento contemplados por el propio Van Hiele en sus descripciones del modelo ha sido modificada en varias ocasiones, como consecuencia del proceso de evolución de sus ideas, del contraste con las ideas de otros expertos y de una mayor cantidad de resultados de investigaciones. Así, en Van Hiele (1986, cap. 8) se recuerda que la primera descripción, publicada en 1955, planteaba la existencia de tres niveles, que corresponden a los niveles 2º a 4º actuales. Sin embargo, otros especialistas plantearon la ausencia de un nivel inferior que recogiera el tipo de razonamiento visual tan frecuente entre los estudiantes; este nivel echado en falta es el actual primer nivel de razonamiento. Así pues, a raíz de los primeros análisis hechos, Van Hiele perfeccionó su propuesta definiendo cuatro niveles, que corresponden a los niveles 1º a 4º actuales. En Van Hiele (1986, p. 47) el autor habla de la posible existencia de niveles superiores al cuarto, de la dificultad de diferenciarlos y del peligro de sobrevalorarlos.

Más recientemente, en la "Conference on learning and teaching geometry: Issues for research and practice", que tuvo lugar en junio de 1987 en la Universidad de Siracusa (EE.UU.), Van Hiele planteó una nueva propuesta de definición de los niveles de razonamiento, en la cual contemplaba la existencia de tres niveles. Esta propuesta, en realidad, supone la eliminación del 5º nivel y la reorganización de las características de los niveles 2º a 4º actuales para refundirlos en los niveles 2º y 3º de la nueva propuesta. No obstante, esta propuesta de P.M. van Hiele no ha tenido ninguna trascendencia y, como decíamos antes, los investigadores siguen considerando actualmente la descripción básica de cinco niveles hecha en Wirszup (1976).

Aunque, en su forma más general, el Modelo de Van Hiele considera la existencia de cinco niveles de razonamiento, que describiremos más adelante, también se utiliza con frecuencia una restricción de ésta, que ignora el quinto nivel. Precisamente esta última organización, que consta de cuatro niveles, es la que utilizamos en esta memoria, por motivos que señalaremos más adelante. Así mismo, alguna investigación ha incluido un nivel anterior al primero de Van Hiele (Clements, 1988).

Es necesario comentar que no hay unanimidad en cuanto a la numeración de los niveles, pues algunas publicaciones hablan de los niveles 0 a 4, mientras que otras hablan de los niveles 1 a 5. Nosotros adoptamos la segunda opción, pues creemos que es más cómoda y evita confusiones, al hacer coincidir las etiquetas con los valores ordinales de cada nivel. Seguidamente presentamos las características generales de los cinco niveles de razonamiento. Están extraídas de diversas publicaciones, pero principalmente de Burger, Shaughnessy (1986), Hoffer (1981) y Jaime, Gutiérrez (1990 b):

Nivel 1 (Reconocimiento)

- Percepción global de las figuras: Se suelen incluir atributos irrelevantes en las descripciones, especialmente referidos a la posición en el plano.
- Percepción individual de las figuras: Cada figura es considerada como un objeto, independiente de otras figuras de la misma clase. No se generalizan las características de una figura a otras de su misma clase.
- Descripción de las figuras basada principalmente en su aspecto físico y posición en el espacio. Los reconocimientos, distinciones o clasificaciones se basan en semejanzas físicas globales.
- Frecuentemente hay descripciones por semejanza con otros objetos, no necesariamente matemáticos: "Se parece a ...", "tiene forma de ...".
- Uso de propiedades imprecisas para identificar, comparar, ordenar, caracterizar figuras, con frecuentes referencias a prototipos visuales.
- Aprendizaje de un vocabulario básico para hablar de las figuras, escribirlas, etc.
- No se suelen reconocer explícitamente las partes de que se componen las figuras ni sus propiedades matemáticas. Cuando sí se hace dicho reconocimiento, estos elementos o propiedades no tienen un papel central y, frecuentemente, reflejan contradicciones.

Nivel 2 (Análisis)

- Reconocimiento de que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y están dotadas de propiedades matemáticas. Se describen las partes que integran una figura y se enuncian sus propiedades. Se es capaz de analizar las propiedades matemáticas de las figuras.
- Deducción de propiedades mediante experimentación. Capacidad de generalización de dichas propiedades a todas las figuras de la misma familia.
- La definición de un concepto consiste en el recitado de una lista de propiedades, lo más exhaustiva posible, pero en la que puede haber omisiones de características necesarias. Así mismo, se rechazan las definiciones dadas por el profesor o el libro de texto en favor de la del estudiante cuando aquéllas entran en conflicto con la propia.

- No se relacionan diferentes propiedades de una figura entre sí o con las de otras figuras. No se establecen clasificaciones a partir de las relaciones entre las propiedades. No se realizan clasificaciones inclusivas[1].
- La demostración de una propiedad se realiza mediante su comprobación en uno o pocos casos.

Nivel 3 (Clasificación)

- Sí se pueden relacionar propiedades de una figura entre sí o con las de otras figuras: Se comprende la existencia de relaciones y se descubren, de manera experimental, nuevas relaciones.
- Comprensión de lo que es una definición matemática y sus requisitos. Se definen correctamente conceptos y tipos de figuras. También se hacen referencias explícitas a las definiciones cuando se realizan razonamientos o demostraciones.
- Sí se pueden realizar clasificaciones inclusivas.
- La demostración de una propiedad ya no se basa en la comprobación de casos, pues hay una necesidad de justificar de manera general la veracidad de dicha propiedad, para lo cual se usan razonamientos deductivos informales.
- Comprensión y realización de implicaciones simples en un razonamiento formal. Comprensión de una demostración realizada por el profesor. Capacidad para repetir tal demostración y adaptarla a otra situación análoga.
- Incapacidad para llevar a cabo una demostración formal completa, en la que haya que encadenar varias implicaciones, pues no se logra una visión global de las demostraciones y no se comprende su estructura.

Nivel 4 (Deducción Formal)

- Se pueden reformular enunciados de problemas o teoremas, trasladándolos a un lenguaje más preciso.
- Realización de las demostraciones (de varios pasos) mediante razonamientos deductivos formales.

---

[1] Nos referimos a la clasificación consciente realizada por el propio individuo, basada en la relación lógica entre el concepto más general y su subclase. No negamos la posibilidad de asignarle a un ejemplo concreto el nombre de la clase y de la subclase si se ha introducido con ambas designaciones.

- Capacidad para comprender y desarrollar demostraciones formales. Capacidad para adquirir una visión global de las demostraciones y para comprender la misión de cada implicación simple en el conjunto.
- Capacidad para comprender la estructura axiomática de las matemáticas: Sentido de axiomas, definiciones, teoremas, términos no definidos, ...
- Aceptación de la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas o mediante diferentes formas de demostración.

Nivel 5 (Rigor)

- Posibilidad de trabajar en sistemas axiomáticos distintos del usual (de la geometría euclídea).
- Capacidad para realizar deducciones abstractas basándose en un sistema de axiomas determinado.
- Capacidad para establecer la consistencia de un sistema de axiomas. Capacidad para comparar sistemas axiomáticos diferentes y decidir sobre su equivalencia.
- Comprensión de la importancia de la precisión al tratar los fundamentos y las relaciones entre estructuras matemáticas.

Ya hemos comentado anteriormente que en las investigaciones que integran esta memoria hemos trabajado sólo con los cuatro primeros niveles de Van Hiele. El no considerar el quinto nivel se debe a los siguientes motivos:

1) La unidad de enseñanza de isometrías del plano que hemos diseñado es útil para la Enseñanza Primaria, la Secundaria y la formación de profesores de Primaria. Todas las investigaciones llevadas a cabo en estos niveles educativos, tanto en España como en otros países, coinciden en señalar que son pocos los alumnos que tienen una adquisición alta del cuarto nivel de razonamiento, y éstos sólo surgen al final de la E. Secundaria. De hecho, la unidad de enseñanza de isometrías propuesta aquí no contempla actividades para el cuarto nivel de Van Hiele, ya que no ha habido oportunidad, dentro de nuestras posibilidades y limitaciones, de trabajar con estudiantes que razonaran en el cuarto nivel, o que estuvieran en condiciones de avanzar hasta la adquisición completa de ese nivel, como consecuencia de nuestra instrucción.

2) La propuesta de evaluación del razonamiento de los estudiantes que formulamos en esta memoria es válida para cualquier nivel de razonamiento, pero la aplicación práctica de la misma que mostramos se ha llevado a cabo con

alumnos del Ciclo Superior de E.G.B., B.U.P. y C.O.U. Como acabamos de señalar, a priori esperábamos que apenas hubiera estudiantes en el cuarto nivel, cosa que se ha ratificado en la realidad. Por eso, tampoco hemos considerado el quinto nivel de Van Hiele en el diseño de los tests usados en esta experimentación.

3) Un análisis teórico de las características del quinto nivel publicadas y utilizadas por diversos autores (por ejemplo, Usiskin (1982, p. 79) concluye que "El nivel 5, tal como lo describen los Van Hiele, o no existe o no se puede evaluar. Todos los demás niveles sí se pueden evaluar"), junto a los resultados de nuestras propias investigaciones, nos han llevado a una posición de escepticismo respecto a las validez de dichas características del quinto nivel y a la posibilidad de testarlas. Desde esta postura, creemos que lo razonable es restringir el uso de este nivel hasta que se hayan realizado investigaciones específicas orientadas a dar respuesta a estos interrogantes, lo cual, por lo que sabemos, todavía no ha ocurrido.

Las fases de aprendizaje.

Las cinco fases de aprendizaje pretenden presentar una organización de las actividades que permita pasar de un nivel de razonamiento al siguiente. Las fases no están por tanto asociadas a un nivel determinado, sino que en cada nivel la instrucción comienza con actividades de la fase primera y continúa con actividades de las siguientes fases. Al finalizar la fase quinta, los alumnos deben haber alcanzado el nivel de razonamiento siguiente. Las características principales de las fases de aprendizaje son las siguientes:

Fase 1 (Información)

- En esta fase se procede a tomar contacto con el nuevo tema objeto de estudio. El profesor debe identificar los conocimientos previos que puedan tener sus alumnos sobre este nuevo campo de trabajo y su nivel de razonamiento en el mismo.
- Los alumnos deben recibir información para conocer el campo de estudio que van a iniciar, los tipos de problemas que van a resolver, los métodos y materiales que utilizarán, etc.

La primera fase se puede obviar en algunos casos pues, dado que su finalidad es que el profesor obtenga información sobre los conocimientos y el nivel de razonamiento de sus alumnos y que éstos la obtengan sobre el campo de estudio, cuando existe con anterioridad esa información no es necesario realizar el trabajo específico de esa fase. Ello sucede generalmente cuando se produce una enseñanza continua que incluye el paso de un nivel al siguiente. Por ejemplo, una situación bastante frecuente en los centros de E.G.B. es que un grupo de estudiantes tiene el mismo profesor de Matemáticas en todos los cursos del Ciclo, pues el profesor va subiendo de curso junto a sus alumnos. Otra situación posible es que, dentro del mismo curso, y sin que haya ruptura en la continuidad de las clases dedicadas a un tema de Matemáticas, se produzca el paso de los estudiantes de un nivel al siguiente; es relativamente fácil que ocurra esto al pasar del nivel 1 al 2 ó del nivel 2 al 3. En ambos casos, puede ocurrir que la primera fase sea innecesaria.

Ese es el motivo por el que, en la secuencia de enseñanza de las isometrías del plano que proponemos, sólo incluimos un conjunto completo de actividades de la fase de información en el primer nivel de razonamiento de cada movimiento, limitándonos en los bloques de actividades de los siguientes niveles a dar algunas orientaciones o actividades aisladas. En caso de que la instrucción no comience en el primer nivel, se pueden seleccionar tareas de distintos niveles para saber hasta qué punto los alumnos están familiarizados con las estructuras propias del nivel correspondiente.

Fase 2 (Orientación Dirigida)

- Se guía a los alumnos mediante actividades y problemas (dados por el profesor o planteados por los mismos estudiantes) para que éstos descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicas de la red de conocimientos que deben formar.
- Los problemas propuestos han de llevar directamente a los resultados y propiedades que los estudiantes deben entender y aprender. El profesor tiene que seleccionar cuidadosamente estos problemas y actividades y debe orientar a sus alumnos hacia la solución cuando lo necesiten.

Esta fase es fundamental, ya que en ella se construyen los elementos básicos de la red de relaciones del nivel correspondiente. Van Hiele (1986, p. 97) señala que "las actividades (de la segunda fase), si se seleccionan cuidadosamente, constituyen la base adecuada del pensamiento de nivel superior". El trabajo se ha de presentar a los alumnos de manera que los conceptos y las estructuras a alcanzar aparezcan de manera progresiva. El papel del profesor es, por tanto, básico en esta fase, ya que debe guiar a sus alumnos para que adquieran correctamente las estructuras básicas del nivel. El profesor debe seleccionar los problemas para que planteen situaciones en cuya resolución aparezca alguno de los elementos (conceptos, propiedades, definiciones, relaciones entre propiedades, etc.) que los alumnos tienen que aprender y en los que deben basar su nueva forma de razonamiento.

Fase 3 (Explicitación)

• Los alumnos deben intentar expresar en palabras o por escrito los resultados que han obtenido, intercambiar sus experiencias y discutir sobre ellas con el profesor y los demás estudiantes, con el fin de que lleguen a ser plenamente conscientes de las características y relaciones descubiertas y afiancen el lenguaje técnico que corresponde al tema objeto de estudio.

Los estudiantes tienen que utilizar el vocabulario adecuado para describir la estructura sobre la que han estado trabajando. Se debe aprender y afianzar el vocabulario propio del nivel. En esta fase no se produce un aprendizaje de conocimientos nuevos, en cuanto a estructuras o contenidos, sino una revisión del trabajo llevado a cabo con anterioridad, de puesta a punto de conclusiones y de práctica y perfeccionamiento de la forma de expresarse, todo lo cual origina un afianzamiento de la nueva red de conocimientos que se está formando.

El tipo de trabajo que de debe realizar en esta fase es de discusión y comentarios sobre la forma de resolver los ejercicios anteriores, elementos, propiedades, relaciones, ... que se han observado o utilizado.

La tercera fase no debe interpretarse como fijada temporalmente después de la segunda fase y antes de la cuarta, sino más bien como una actitud permanente de diálogo y discusión en todas las actividades que lo permitan de las diferentes fases de aprendizaje. Por tanto, en la secuencia de enseñanza de las isometrías que proponemos no hay actividades diseñadas expresamente para esta fase, entendiendo que sí se debe exigir la justificación y discusión en todo momento entre los alumnos o entre profesor y alumnos.

Fase 4 (Orientación Libre)

- En esta fase se debe producir la consolidación del aprendizaje realizado en las fases anteriores. Los estudiantes deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores y, probablemente, más complejos.
- El profesor debe proponer a sus alumnos problemas que no sean una simple aplicación directa de un dato o algoritmo conocido, sino que planteen nuevas relaciones o propiedades, que sean más abiertos, preferiblemente con varias vías de resolución, con varias soluciones o con ninguna. Por otra parte, el profesor debe limitar al máximo su ayuda a los estudiantes en la resolución de los problemas.
- En palabras de Van Hiele (1986, p. 54), los estudiantes aprenden a encontrar su camino en la red de relaciones por sí mismos, mediante actividades generales.

Los alumnos deberán aplicar los conocimientos y lenguaje que acaban de adquirir en otras situaciones nuevas. Los problemas planteados en esta fase deben obligar a los estudiantes a combinar sus conocimientos y aplicarlos a situaciones diferentes de las propuestas anteriormente. La intervención del profesor en la resolución de las tareas debe ser mínima, pues son los alumnos quienes tienen que encontrar el camino adecuado a partir de lo aprendido en la segunda fase.

Fase 5 (Integración)

- Los estudiantes establecen una visión global de todo lo aprendido sobre el tema y de la red de relaciones que están terminando de formar, integrando estos nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente.
- El profesor debe dirigir resúmenes o recopilaciones de la información que ayuden a los estudiantes a lograr esta integración. Las actividades que les proponga no deben implicar la aparición de nuevos conocimientos, sino sólo la organización de los ya adquiridos.

Se trata de adquirir una visión general de los contenidos del tema objeto de estudio, integrada por los nuevos conocimientos adquiridos en este nivel y los que ya tenían los estudiantes anteriormente. No hay un aprendizaje de elementos nuevos, sino una fusión de los nuevos conocimientos, algoritmos y formas de razonar con los anteriores. Las actividades de esta fase deben favorecer dicha integración y permitirle al profesor comprobar si se ha conseguido ya. Parte del trabajo que debe realizar el profesor en la quinta fase es la confección y presentación a los alumnos de resúmenes de los contenidos estudiados. En cuanto a los estudiantes, es importante memorizar los resultados más importantes y adquirir destreza y agilidad en el uso de los nuevos algoritmos, procedimientos de resolución de problemas o métodos de trabajo.

Por lo que respecta a las experimentaciones de nuestras unidades de enseñanza de las isometrías, no hemos diseñado actividades específicas para la quinta fase, si bien a ella corresponden el resumen por el profesor de la red de relaciones de la isometría objeto de estudio y la memorización por los alumnos de los nuevos resultados, definiciones, relaciones, etc., así como la comprensión e interiorización de las nuevas relaciones.

Sin embargo, es necesario tener presente que la quinta fase de aprendizaje es importante. Una debilidad de nuestras experimentaciones ha sido que hemos prestado a esta fase poca atención pues, aunque periódicamente hemos hecho con nuestros estudiantes resúmenes de lo estudiado hasta ese momento, han sido pocos y posteriormente se ha notado su falta ya que a veces los estudiantes no recordaban algún resultado que habían estudiado algunas semanas antes y que debían utilizar.

Es posible que, después de analizar los contenidos de las unidades de enseñanza de las isometrías, los cuales presentamos en el capítulo 2, al lector le parezca demasiado libre la aplicación de las fases de aprendizaje de Van Hiele que hemos hecho. Sobre ello deseamos puntualizar que, desde nuestro punto de vista, las fases de aprendizaje son una pauta útil a tener en cuenta para llevar a cabo la enseñanza de manera apropiada, pero que no es fácil, ni posible en bastantes ocasiones, encontrar tipos de actividades que coincidan exactamente con los que teóricamente se proponen en el modelo, o hacer un recorrido total por cada fase antes de pasar a la siguiente.

También pensamos que ningún modelo teórico de enseñanza o aprendizaje puede ni debe ser aplicado de manera rigurosa, sino que su estructura debe permitir adaptarlo a las particularidades de cada caso. La formulación de un modelo o una teoría será tanto más útil cuanto más fácil sea aplicarlo a la gran diversidad de situaciones que se presentan en las matemáticas escolares, tanto por las diferentes áreas de las Matemáticas como por los distintos tipos de estudiantes.

Probablemente, esta dificultad sea el motivo por el que apenas hay trabajos en los que se presentan unidades de enseñanza con una especificación clara y explícita de la fase de aprendizaje para la que están diseñadas las distintas actividades de la unidad. Más aún, las pocas investigaciones que sí lo hacen se limitan a trabajar en uno o dos niveles y a veces presentan variaciones en la aplicación de las fases de aprendizaje respecto de lo que señala su formulación teórica análogas a algunas de las que hemos hecho aquí (por ej., Bobango, 1987).

Para concluir esta sección de análisis de las fases de aprendizaje de Van Hiele, creemos importante destacar que una actividad por sí misma no corresponde en general a un nivel de razonamiento y una fase de aprendizaje concretos. No es posible analizar una actividad aislada, sino que hay que hacerlo dentro del contexto en el que se encuentre y teniendo en cuenta el trabajo realizado previamente y el que se planea realizar con posterioridad. Por ejemplo, se puede dar el caso siguiente: Una actividad A, propuesta en la fase 2 de un cierto nivel, permite descubrir una propiedad P1 que se empleará como base para la resolución, en la fase 4, de la actividad B, cuyo objetivo es descubrir la propiedad P2 basándose en el uso de P1. Pero si modificamos la organización de la unidad de enseñanza, podemos hacer que la actividad B pertenezca a la fase 2 y la actividad A a la fase 4, de manera que la propiedad P1 surgirá de la aplicación de la propiedad P2.

Del mismo modo, una actividad no tiene por qué corresponder a un nivel de razonamiento determinado, pues generalmente las actividades propuestas se pueden resolver utilizando métodos de trabajo y formas de razonamiento propias de distintos niveles. Lógicamente, si una actividad está incluida entre las correspondientes a cierto nivel N, el profesor debe exigir a los estudiantes respuestas coherentes con las características de dicho nivel N.

Propiedades del Modelo de Van Hiele.

Junto a las características particulares de cada nivel de razonamiento o fase de aprendizaje, es necesario mencionar algunas propiedades globales del Modelo de Van Hiele cuya consideración y análisis es imprescindible para una adecuada comprensión y utilización del modelo. A continuación presentamos las principales de estas propiedades, algunas de las cuales están íntimamente relacionadas con las investigaciones descritas en esta memoria.

Jerarquización y Secuencialidad de los niveles de razonamiento.

Para alcanzar un nivel de razonamiento, es necesario haber adquirido previamente los niveles anteriores. Van Hiele (1986, p. 51) afirma que "el pensamiento del segundo nivel no es posible sin el del nivel básico; el pensamiento del tercer nivel no es posible sin el pensamiento del segundo nivel".

Todos los estudios que conocemos realizados hasta la fecha que han analizado esta propiedad confirman su veracidad. Por ejemplo, Denis (1987), Burger, Shaughnessy (1986), Fuys, Geddes, Tischler (1988), Mayberry (1981) y (1983), Soon (1989) o Usiskin (1982). No obstante, también es frecuente encontrar estudiantes cuyo comportamiento no se ajusta a esta propiedad, si bien su proporción suele ser poco significativa y, generalmente, su presencia es un síntoma de algún tipo de problema o deficiencia en la metodología de asignación de niveles empleada.

La aceptación de esta propiedad puede ser importante cuando llega el momento de la práctica de la determinación del nivel de razonamiento de los estudiantes. Como veremos en su momento en el capítulo 3, tanto el método para evaluar las respuestas a los tests como el procedimiento de determinación de los grados de adquisición de los niveles de Van Hiele que hemos desarrollado nosotros se basan en la idea de que si un problema puede ser resuelto según los niveles N-1 y N, la resolución correcta del problema por métodos del nivel N supone tener adquirido el nivel N-1.

Relación entre el Lenguaje y los niveles de razonamiento.

Cada nivel tiene un lenguaje propio, entendiendo por ello no sólo las palabras o construcciones gramaticales empleadas, sino también el significado que se les da. Por ejemplo, para un estudiante del segundo nivel de razonamiento, "demostrar" una propiedad consiste en comprobar su veracidad en uno o pocos casos, para un estudiante del tercer nivel consiste en buscar algún tipo de justificación lógica intuitiva de la propiedad, mientras que para un estudiante del cuarto nivel consiste en aplicar el razonamiento lógico formal para obtener una demostración matemáticamente correcta y aceptable. Otro ejemplo lo da Van Hiele (1986, p. 51) en el campo de la aritmética, cuando dice que "la diferencia entre los objetos del segundo y el tercer niveles se puede observar también por diferentes formas de escritura. En el segundo nivel, los cálculos se basan en relaciones entre números concretos: 4 x 3 = 12, 6 + 8 = 14. En el tercer nivel de pensamiento, se basan en la generalización de resultados: a x (b + c) = (a x b) + (a x c)".

Esta característica explica la incomprensión entre dos personas que empleen lenguajes de distintos niveles. Este es un fenómeno que se produce con frecuencia en las aulas de Enseñanza Secundaria o la Universidad entre profesor y alumno cuando el profesor plantea un problema del cual espera una respuesta correspondiente al cuarto nivel (es decir un desarrollo riguroso y formal del problema) pero el estudiante está todavía en el segundo o tercer nivel de razonamiento y resuelve el problema mediante un ejemplo o un razonamiento intuitivo.

Localidad de los niveles de razonamiento.

Por localidad de los niveles se entiende que un individuo puede razonar en diferentes niveles al trabajar en distintos campos de la Geometría. Por el contrario, la idea de globalidad de los niveles plantea que el nivel de razonamiento de un individuo es el mismo en cualquier campo de la Geometría.

La falta de información válida sobre esta disyuntiva en un primer momento hizo que varias investigaciones intentaran poner luz en esta cuestión, entre ellas Gutiérrez, Jaime (1987 b) y Mayberry (1981). Según los resultados obtenidos, la localidad es la situación real, postura que compartimos. El propio Van Hiele acepta la localidad de los niveles pues sugiere que, una vez que se ha alcanzado un nivel para un concepto, o área de la Geometría, requiere menos tiempo y esfuerzo alcanzar ese mismo nivel para otros conceptos o áreas. Esta postura es también apoyada por Freudenthal (1973) cuando plantea la idea de las organizaciones locales de la Geometría.

Al elaborar la unidad de enseñanza de las isometrías hemos tenido en cuenta esta característica: En primer lugar, hemos diseñado unidades de enseñanza para los niveles 1 y 2 independientes para cada isometría (traslaciones, giros, simetrías). Posteriormente, al llegar al nivel 3 surgen las propiedades que relacionan unas isometrías con otras, por lo que se produce la necesaria integración de conocimientos de las distintas isometrías. Esto supone, en términos prácticos, que, por ejemplo, para poder trabajar correctamente en el tercer nivel de las simetrías, es necesario haber adquirido en las traslaciones y los giros, como mínimo, el nivel 2.

Discretitud o Continuidad de los niveles de razonamiento.

Esta propiedad hace referencia a la manera como se produce el paso de un nivel a otro. La formulación inicial del modelo hecha por el propio Van Hiele establecía que el paso de un nivel al siguiente se produce de manera brusca, como un salto. Este concepto lo podemos representar gráficamente mediante una escalera, como en la figura 1.1.

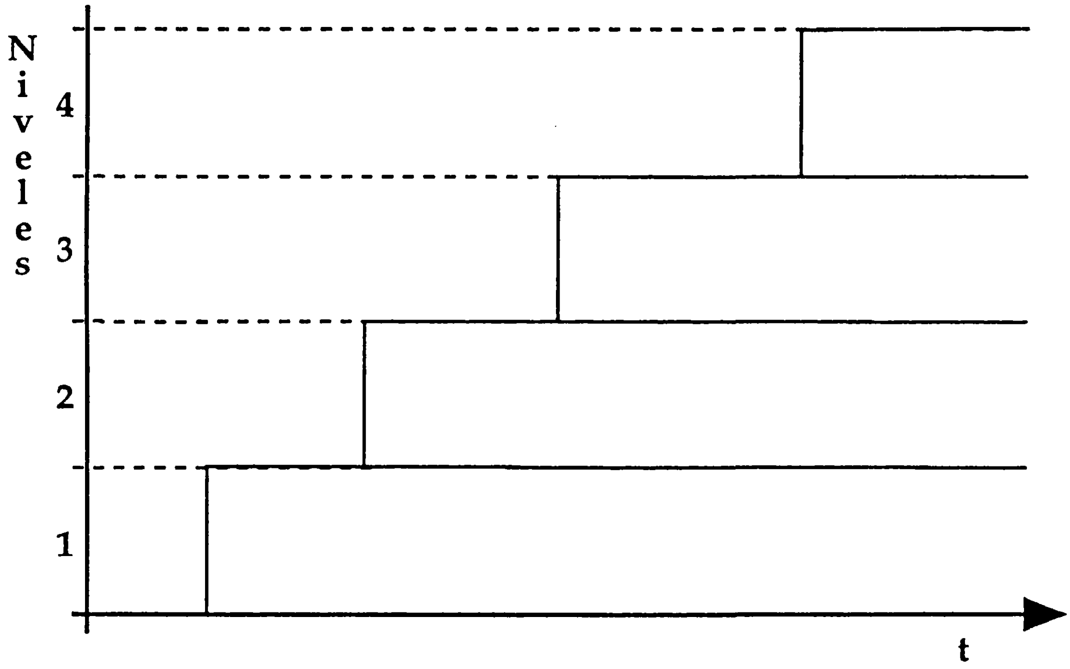


Figura 1.1. Discretitud de la adquisición de los niveles de Van Hiele.

Sin embargo, las investigaciones recientes, por ejemplo Fuys, Geddes, Tischler (1988), Burger, Shaughnessy (1990), Gutiérrez y otros (1991) y Shaughnessy y otros (1991), han mostrado que la interpretación discontinua de los niveles no puede explicar ciertas situaciones, bastante frecuentes, de alumnos que razonan simultánea o alternativamente en dos niveles consecutivos. En algunas de estas investigaciones, aunque los autores iniciaron la investigación basándose en la concepción discreta de los niveles de Van Hiele, los resultados obtenidos les obligaron, a plantear la existencia de contradicciones entre sus resultados y esa idea de discretitud (Usiskin, 1982), cuando no a reconocer que el paso de un nivel al siguiente se producía de manera continua (Burger, Shaughnessy, 1990).

Por ello, actualmente tiene más fuerza y produce mejores resultados en los análisis del comportamiento de los estudiantes la consideración de la continuidad en la adquisición de los niveles. Nuestros trabajos de los últimos años y los presentados en esta memoria se basan en el carácter continuo de la transición entre los niveles: Creemos que el paso de un nivel al siguiente no se produce de forma brusca, sino que hay un período de transición, durante el cual se entremezclan momentos de razonamiento de los dos niveles consecutivos.

Una representación de la continuidad, a la que se ajusta la interpretación de adquisición de los niveles de razonamiento en términos de "grados de adquisición" que proponemos en el capítulo 3, es la esquematizada en la figura 1.2, que es una variación del propuesto en Clements (1992).

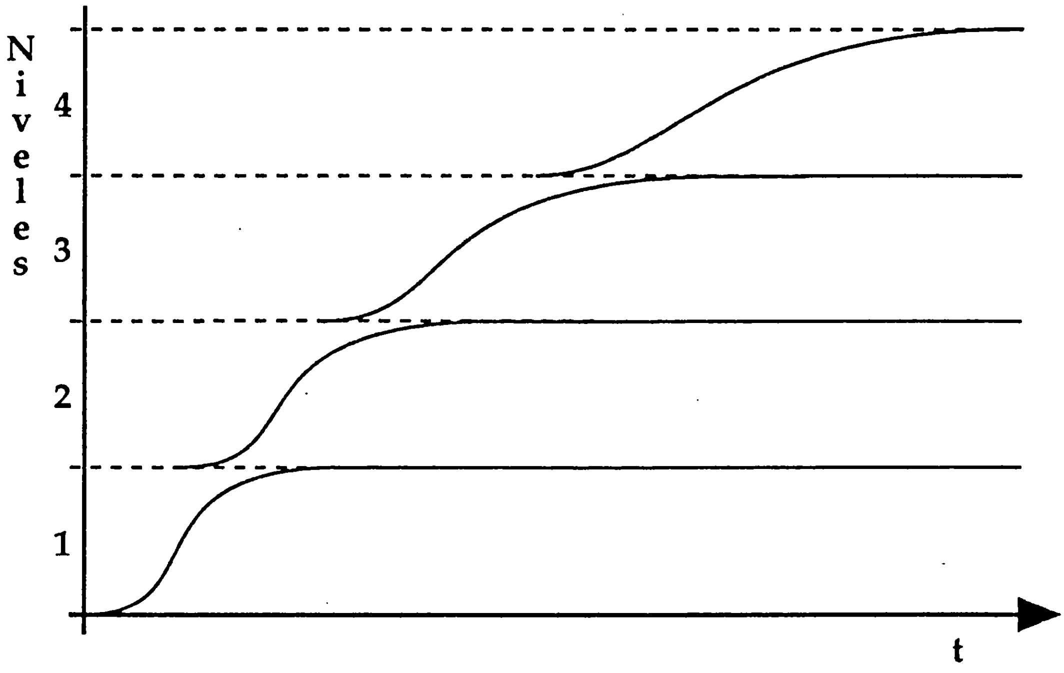


Figura 1.2. Continuidad de la adquisición de los niveles de Van Hiele.

La Instrucción como herramienta de avance en el nivel de razonamiento.

Frente a teorías, como la de Piaget, que ligan el desarrollo intelectual al biológico, Van Hiele afirma que la instrucción es un factor básico para avanzar en el nivel de razonamiento. Por una parte, Van Hiele dice que "la maduración que lleva a un nivel superior ... debe considerarse, por encima de todo, como un proceso de aprendizaje y no como una maduración de tipo biológico" (Fuys, Geddes, Tischler, 1984). Además, señala que "la transición de un nivel al siguiente no es un proceso natural; tiene lugar bajo la influencia de un programa de enseñanza-aprendizaje. La transición no es posible sin el aprendizaje de un nuevo lenguaje" (Van Hiele, 1986, p. 50), aunque también nos previene de que, "sin embargo, es posible que ciertas formas de enseñanza no permitan alcanzar los niveles superiores, pues los métodos de pensamiento usados en esos niveles permanecen inaccesibles a los estudiantes" (Fuys, Geddes, Tischler, 1984).

CAPÍTULO 2: DISEÑO DE UNA UNIDAD DE ENSEÑANZA DE LAS ISOMETRÍAS DEL PLANO BASADA EN EL MODELO DE VAN HIELE

CAPÍTULO 2: DISEÑO DE UNA UNIDAD DE ENSEÑANZA DE LAS ISOMETRÍAS DEL PLANO BASADA EN EL MODELO DE VAN HIELE

Este capítulo tiene como objetivo presentar una propuesta de enseñanza de las Isometrías del Plano, que está organizada teniendo en cuenta los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje del Modelo de Van Hiele.

En primer lugar explicamos los motivos por los que iniciamos hace algunos años esta investigación y el interés que tienen sus resultados. A continuación, hacemos una revisión de las publicaciones interesantes relacionadas con el tema de nuestro trabajo, con el fin de permitir situarlo en el contexto de las otras investigaciones realizadas que tienen puntos en común con él. También es importante identificar los contenidos matemáticos de la unidad de enseñanza, por lo que hacemos un rápido resumen de los conceptos y propiedades matemáticos que son los objetivos de enseñanza de la unidad.

La parte más importante de este capítulo empieza en la sección 2.4, en la cual se hace una presentación general de la investigación que ha dado lugar a la unidad de enseñanza de las Isometrías del Plano. Las cuatro secciones restantes contienen nuestra aportación a la aplicación del Modelo de Van Hiele en el campo de las Isometrías: En la sección 2.5 enunciamos descriptores de los niveles de Van Hiele específicos para las Isometrías del Plano y en las secciones siguientes presentamos y comentamos de manera detallada los objetivos y actividades de la unidad de enseñanza.

2.1. Interés y motivos de la investigación.

Hay dos puntos que se deben tener en cuenta al valorar el interés de esta parte de la memoria y que, al mismo tiempo, son las razones por las que nos decidimos, hace algunos años, a iniciar esta investigación:

1) La escasez de materiales curriculares diseñados teniendo en cuenta explícitamente los niveles de razonamiento y, sobre todo, las fases de aprendizaje de Van Hiele.

2) El interés de ampliar el campo de aplicación del Modelo de Van Hiele a otras áreas de la Geometría diferentes de los polígonos y los conceptos relacionados con éstos.

Tanto en España como en otros países en los que se está investigando sobre el Modelo de Van Hiele, se aprecia una falta de materiales curriculares diseñados teniendo en cuenta las propuestas de dicho modelo y en los que se presenten de manera explícita no sólo los niveles de razonamiento, sino también las fases de aprendizaje. Además, en la mayoría de los casos en que los autores afirman que sí han prestado atención a esta componente del modelo, no especifican claramente cuál es la parte de la unidad que corresponde a cada una de las fases.

El proyecto de investigación Gutiérrez y otros (1991) es uno de los escasos trabajos en los que sí se hace esa identificación: Esta investigación incluye una unidad de enseñanza de triángulos, cuadriláteros y polígonos en general centrada en los niveles segundo y tercero de Van Hiele; para cada uno de dichos temas de Geometría, se presentan los ejercicios organizados siguiendo las fases de cada nivel.

Bobango (1987) presenta una propuesta para la enseñanza de triángulos y cuadriláteros centrada en un contexto informático que utiliza principalmente el programa Geometric Supposer. En dicha unidad se incluye una especificación de las actividades para las fases de aprendizaje, si bien se limita al segundo nivel de razonamiento. Es interesante anotar que en la secuencialización de las fases de aprendizaje utilizada en esta investigación hay algunas modificaciones respecto a la propuesta teórica de Van Hiele, parte de las cuales coinciden con las introducidas en la secuencia que proponemos en esta memoria, que ya hemos comentado en el capítulo 1. En particular, en la unidad de Bobango, la fase 3 no se sitúa secuencialmente tras las fases 1 y 2, sino que perdura a lo largo de toda la instrucción. En cuanto a la fase 5, se limita a realizar un resumen de los aspectos generales estudiados sobre triángulos y cuadriláteros.

Ludwig (1986) plantea la enseñanza de las Isometrías del Plano en un entorno informático a través del lenguaje Logo, pero lo hace de una manera confusa: El análisis en términos del Modelo de Van Hiele del progreso de los estudiantes en el aprendizaje de las Isometrías se combina con un análisis del aprendizaje del lenguaje Logo, tal como proponen Olson, Kieren, Ludwig (1987). El resultado final es una propuesta de unidad para la enseñanza de las Isometrías que está organizada haciendo más énfasis en el aprendizaje del Logo, pues se propone una distribución según los niveles de razonamiento y según las fases de aprendizaje del Logo.

Aparte de los trabajos que acabamos de mencionar, no conocemos ningún otro en el que, para cada actividad propuesta en la unidad de instrucción, se especifiquen el nivel y la fase dentro del nivel en los que debe situarse. No obstante, por su interés especial, comentaremos además otras dos investigaciones. La primera de ellas es la tesis doctoral de Dina van Hiele-Geldof (Van Hiele-Geldof, 1957), en la cual presenta la aplicación del modelo propuesto por P.M. van Hiele (Van Hiele, 1957) a unos temas de Geometría. No obstante, Dina van Hiele no especifica qué tareas de las que propone a sus alumnos corresponden a cada fase de aprendizaje de cada nivel.

La segunda investigación es el proyecto de Brooklyn, en el cual se diseñaron tres módulos de enseñanza basados en el Modelo de Van Hiele. En la memoria de este proyecto (Fuys, Geddes, Tischler, 1988) se realiza una descripción detallada de la organización de las actividades según los niveles de razonamiento, pero sólo se hacen alusiones generales y vagas a su distribución en fases. En Jaime, Gutiérrez (1990 b) mostramos un desglose del segundo de esos módulos, el titulado "Estudio de relaciones angulares de los polígonos", indicando concretamente los niveles y, dentro de cada nivel, las fases a las que, según nuestro parecer, puede corresponder cada una de las actividades propuestas.

Mencionábamos al comienzo de esta sección el interés de aplicar el Modelo de Van Hiele a las diversas áreas de la Geometría escolar. El hecho de que en las primeras descripciones de los niveles presentadas se emplearan los polígonos para ilustrar la forma de razonar en cada nivel, especialmente en Van Hiele (1959) y Wirszup (1976), originó que la mayoría de los estudios posteriores sobre el Modelo de Van Hiele se centraran en dicha parte de la Geometría. Ello no quiere decir que no se haya trabajado en otras áreas de la Geometría, pero sí que se ha hecho poco y de manera dispersa.

En otra publicación clásica, Hoffer (1983), su autor reproduce la descripción de los niveles de razonamiento basada en los polígonos, pero también propone caracterizaciones de los niveles de Van Hiele para las áreas de lógica matemática, isometrías y números reales. No obstante, A. Hoffer nos ha comentado personalmente que dichas caracterizaciones no tenían su origen en investigaciones experimentales, sino que eran el fruto de una extrapolación teórica desde el campo de los polígonos.

Probablemente, uno de los motivos para que existan pocas investigaciones basadas en los niveles de Van Hiele en otros campos es la dificultad de iniciar el estudio ya que, en primer lugar, hay que realizar una caracterización específica y detallada de cada nivel de razonamiento en ese campo concreto. De todas formas, el uso de los niveles de Van Hiele está dando muy buenos resultados, por lo que, aunque resulta difícil, es interesante abrir nuevas líneas de investigación en áreas de la Geometría como la Proporcionalidad Geométrica (Semejanza), la Geometrías Espacial o las Isometrías del Plano.

2.2. Resumen de la literatura sobre la enseñanza de las Isometrías del Plano.

Trabajos de otros autores

Los primeros trabajos importantes que conocemos en los que se analizan las dificultades del aprendizaje de las Isometrías del Plano son los de Moyer (1974) y (1978) y Schultz (1977) y (1978). Se trata de dos investigaciones de corte piagetiano que reflejan los métodos de investigación habituales en ese momento. En ellas se estudia la influencia de diversos factores de tipo perceptivo en la habilidad para realizar traslaciones, giros o simetrías, mediante la manipulación de unas figuras con las que los estudiantes deben realizar determinados movimientos. Entre otros factores que influyen en la dificultad para realizar correctamente el movimiento, se identifican la dirección del movimiento (vertical, horizontal, inclinada), la distancia entre el objeto y su imagen y, para las simetrías, la posición del eje.

Entre los trabajos más recientes que no están directamente relacionados con el Modelo de Van Hiele hay que señalar los trabajos de D. Küchemann y D. Grenier. Küchemann (1981), como parte del proyecto C.S.M.S., llevó a cabo un análisis de los errores cometidos al dibujar giros y simetrías. Esta investigación se basó en la administración de un test a una muestra significativa en una región de Gran Bretaña y en entrevistas posteriores a parte de la muestra, por lo que sus resultados se han tenido en cuenta en gran parte de las investigaciones posteriores en las que intervenían esos movimientos. En concreto, determina unas variables que influyen en la dificultad de la realización de los giros y las simetrías y determina los tipos de errores cometidos. Con estos resultados establece una jerarquía de niveles de comprensión del movimiento correspondiente, que no tiene relación con el Modelo de Van Hiele.

Grenier (1988) es un estudio muy completo, organizado según la metodología de la escuela francesa de Didáctica de las Matemáticas, que intenta dilucidar dos puntos: i) Si es posible elaborar una serie de situaciones-problema, susceptible de cuestionar las concepciones erróneas sobre la simetría axial que persisten en los alumnos después de la enseñanza, y ii) cuáles son los medios didácticos y pedagógicos de los que dispone el enseñante que le permiten la devolución del problema al alumno y una gestión de las fases de institucionalización adaptada a los objetivos de aprendizaje. Entre los trabajos llevados a cabo para responder a esas cuestiones, incluye un estudio pormenorizado de cada una de las variables que influyen en la aplicación de una simetría axial y la secuencia de situaciones que se diseñó como propuesta de enseñanza en 6° grado (11-12 años de edad).

En cuanto a investigaciones publicadas sobre isometrías, basadas en el Modelo de Van Hiele, merece la pena reseñar las tres siguientes:

Como hemos comentado en la sección anterior, Ludwig (1986) diseña una unidad de enseñanza de las Isometrías del Plano en un entorno de lenguaje Logo. Para cada uno de los sub-temas (congruencia, traslaciones, simetrías y giros), Ludwig enuncia descriptores de los niveles de Van Hiele obtenidos a partir de la observación de las intervenciones de los alumnos. Pero, como hemos señalado previamente, se produce un solapamiento entre el análisis de las Isometrías y el del Logo que da lugar a una mezcla de descriptores de ambos campos, en la que predomina éste último.

Uno de los objetivos de Soon (1989) es investigar si en el aprendizaje de las transformaciones del plano (traslaciones, giros, simetrías y homotecias) se verifica la jerarquía de los niveles de Van Hiele. Su conclusión es afirmativa. En su trabajo, Soon incluye una caracterización de los niveles de Van Hiele 1 a 5 para las transformaciones del plano y diseña un test en forma de entrevista clínica, que administra a 20 estudiantes de Enseñanza Secundaria de 15 y 16 años de edad.

En Johnson-Gentile (1990) se estudian los efectos de entornos informáticos y no informáticos en el aprendizaje, niveles de razonamiento y precisión del lenguaje geométrico de los estudiantes, así como la relación entre el sexo de los estudiantes y su capacidad de visualización espacial, todo ello en los grados 5° y 6°. Esta investigación utiliza como material de trabajo la sección dedicada a los movimientos del plano en el diseño curricular de Clements y Battista (1988), el cual está basado en el uso de Logo y uno de cuyos objetivos es facilitar el progreso a lo largo de los sucesivos niveles de razonamiento de Van Hiele.

Trabajos previos propios

Nuestra actividad de enseñanza de las Isometrías del Plano comenzó en 1980, en la E.U. del Profesorado de E.G.B. de Valencia. Los contenidos de la asignatura en la que impartíamos el tema de las Isometrías eran fundamentalmente matemáticos y la presentación de la asignatura correspondía al esquema clásico de exposición formal en la pizarra y ejercicios de aplicación. En aquel momento desconocíamos la existencia de los niveles de Van Hiele. Un análisis de aquellas clases desde la perspectiva actual nos permite reconocer el problema de incomprensión de lenguaje a que hace referencia el Modelo de Van Hiele, puesto que los alumnos mayoritariamente razonaban en el segundo nivel, mientras que para gran parte del tema se exigía razonamiento formal, esto es, de cuarto nivel.

La incomprensión que mostraban los alumnos nos hizo modificar la metodología llevada a cabo e invertir el proceso de desarrollo del tema a partir del curso 1983-84: Una cadena de actividades, en las que era básica la manipulación de figuras, iba conduciendo a los alumnos al descubrimiento de las características de los diversos movimientos y las relaciones entre ellos. En Gutiérrez, Jaime (1986) está el núcleo central de actividades propuestas. Esta forma de introducir los conceptos resultó mucho más efectiva, si bien, en momentos determinados, se podían detectar dificultades de comprensión, que correspondían a la exigencia de un nivel superior de razonamiento para resolver las tareas propuestas. En Gutiérrez, Jaime (1987 a) y (1988) presentamos los resultados de unas pruebas que realizamos para evaluar este cambio en la metodología de enseñanza.

Por otra parte, en el año 1986 comenzamos a trabajar con un grupo de profesores de diversos colegios públicos de E.G.B. en el diseño e implementación de unidades para la enseñanza de las Isometrías del Plano en E.G.B. Durante varios años, a partir de la aprobación de un proyecto de investigación por la Generalitat Valenciana, se realizaron experimentaciones de enseñanza de las simetrías en Preescolar, 4º, 6º, 7º y 8º de E.G.B, todas ellas con los grupos completos de alumnos, en sus horas habituales de clase y dirigidas por los respectivos profesores. También se amplió la investigación a la enseñanza de giros y traslaciones, mediante la elaboración de las secuencias de actividades correspondientes.

Tras las experimentaciones piloto en clases ordinarias de E.G.B. y en Magisterio que acabamos de mencionar, las tres unidades de enseñanza fueron modificadas y experimentadas de una manera más controlada, en condiciones de laboratorio, con estudiantes de los cursos 1º, 3º y 6º de E.G.B. Estas experimentaciones, junto con otra llevada a cabo posteriormente con estudiantes de la Escuela de Magisterio, también con metodología de laboratorio, son las que han formado la base de la propuesta que presentamos en esta memoria y a las cuales pertenecen las referencias concretas a comportamientos de alumnos que haremos en otras secciones de este capítulo.

La consideración del Modelo de Van Hiele en relación con la enseñanza de las Isometrías comenzamos a hacerla al empezar a preparar estas experimentaciones de laboratorio mencionadas en el párrafo anterior. En diversas publicaciones hemos presentado algunos resultados preliminares. En Jaime, Gutiérrez (1989 a) se puede ver una descripción general de las características de los niveles de Van Hiele para las Isometrías del Plano. En Jaime, Gutiérrez (1990 b) incluimos una descripción de los niveles de Van Hiele particularizados para las traslaciones del plano y proponemos una unidad de enseñanza de este tema que abarca desde el primer al cuarto nivel de razonamiento, estando las actividades distribuidas según los niveles. En Gutiérrez, Jaime (1991) presentamos un trabajo sobre los giros con una organización semejante al anterior, pero con las actividades de cada nivel distribuidas también de acuerdo con las fases de aprendizaje. Por último, en Jaime (1992) hacemos algo similar en relación con las simetrías; en esta última publicación, hacemos una descripción de todos los niveles de razonamiento en el área de las simetrías y ofrecemos una relación de los objetivos de enseñanza a conseguir, pero sólo enunciamos actividades para las fases del primer nivel de razonamiento.

2.3. Bases matemáticas: El grupo de las Isometrías del Plano.

En esta sección presentamos un resumen de los principales elementos (definiciones y propiedades) de la estructura matemática del conjunto de las Isometrías del Plano que tienen que ver con los objetivos de enseñanza de la unidad que hemos diseñado.

No hemos pretendido dar una visión completa del tema desde el punto de vista matemático, sino que nos hemos limitado a enunciar aquellas propiedades que son explícitamente objeto de estudio en algún momento o que, aunque no aparecen enunciadas directamente en ninguna actividad, la unidad de enseñanza sí contiene todos los elementos necesarios para su estudio. Este es el caso de la estructura de grupo (los distintos grupos de isometrías y sus subgrupos) y de las propiedades relacionadas directamente con ella (elementos neutro y simétricos).

Por otra parte, la organización de esta sección es más temática que lógico-deductiva. Para un estudio matemático detallado de las Isometrías del Plano, se puede recurrir a numerosas publicaciones, por ejemplo Martin (1982).

Definiciones.

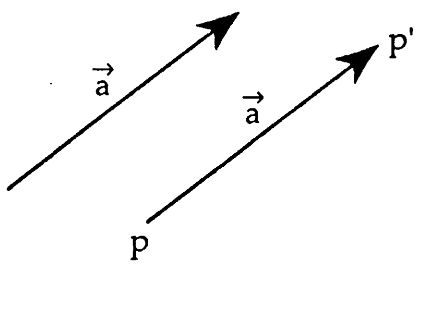
Definición 1. Una isometría del plano es una aplicación del plano en sí mismo $f: \Pi \longrightarrow \Pi$ que mantiene las distancias entre los puntos:

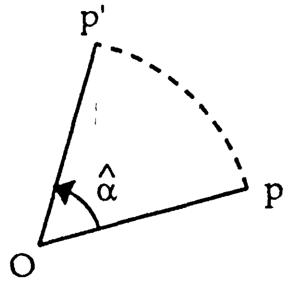
$d(f(p),f(q)) = d(p,q)$, $\forall\, p \in \Pi$ y $\forall\, q \in \Pi$.

Definición 2. Sea $\vec{a}$ un vector del plano. La traslación de vector $\vec{a}$ es una aplicación del plano en sí mismo $T_a: \Pi \longrightarrow \Pi$ tal que:

$T_a(p) = p'$ si y sólo si $\overrightarrow{pp'} = \vec{a}$, $\forall\, p \in \Pi$.

El vector $\vec{a}$ es el *vector de traslación.*

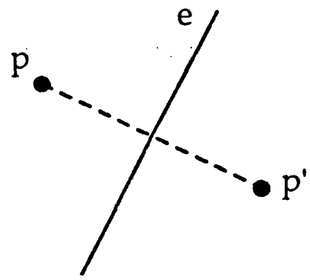




Definición 3. Sean un punto O del plano y un ángulo orientado $\hat{\alpha}$. El giro de centro O y ángulo $\hat{\alpha}$ es una aplicación del plano en sí mismo $G(O, \hat{\alpha}): \Pi \longrightarrow \Pi$ tal que:

$G(O, \hat{\alpha})(p) = p'$ si y sólo si $d(O,p) = d(O,p')$ y $\angle pOp' = \hat{\alpha}$, $\forall p \in \Pi$.

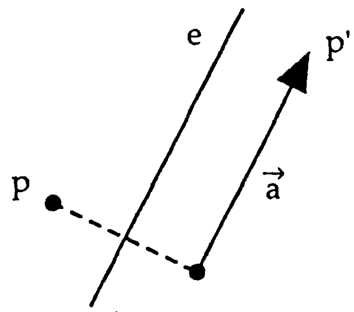
El punto O es el *centro de giro* y $\hat{\alpha}$ es el *ángulo de giro.*



Definición 4. Sea una recta e del plano. La simetría axial (o simplemente simetría) de eje la recta e es una aplicación del plano en sí mismo $S_e: \Pi \longrightarrow \Pi$ tal que:

$S_e(p) = p'$ si y sólo si e es la mediatriz del segmento pp', $\forall p \in \Pi$.

La recta e es el *eje de simetría.*



Definición 5. Sean una recta del plano e y un vector del plano $\vec{a}$ paralelo a la recta e. La simetría en deslizamiento de eje e y vector $\vec{a}$ es una aplicación del plano en sí mismo $S(e,a): \Pi \longrightarrow \Pi$ tal que:

$S(e,a) = T_a \circ S_e$.

Definición 6. Dos isometrías del plano f y g son equivalentes si y solo si $f(p) = g(p)$, $\forall p \in \Pi$.

Propiedades básicas de las isometrías.

Traslaciones.

1) Toda traslación es una isometría.

2) La composición de dos traslaciones de vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es otra traslación de vector $\overrightarrow{a+b}$: $T_b \circ T_a = T_{a+b}$.

3) Toda traslación se puede descomponer (de infinitas formas) en un producto de dos traslaciones.

4) Las traslaciones conservan el sentido de los ángulos.

Giros.

1) Todo giro es una isometría.

2) Dos giros del mismo centro $G(O, \hat{\alpha})$ y $G(O, \hat{\beta})$ son equivalentes si y sólo si $\hat{\alpha} - \hat{\beta} = \dot{360}°$.

3) El centro de un giro (distinto de la aplicación identidad) es el único punto que se mantiene invariante por ese giro: Sean $p \in \Pi$ y $\hat{\alpha} \neq \dot{360}°$. Entonces, se tiene que $G(O, \hat{\alpha})(p) = p$ si y sólo si $p = O$.

4) a) La composición de dos giros del mismo centro es otro giro del mismo centro cuyo ángulo es la suma de los ángulos: $G(O, \hat{\beta}) \circ G(O, \hat{\alpha}) = G(O, \hat{\alpha} + \hat{\beta})$.
b) La composición de dos giros de distinto centro $G(O', \hat{\beta}) \circ G(O, \hat{\alpha})$ es:
- Un giro $G(O'', \hat{\alpha} + \hat{\beta})$ si $\hat{\alpha} + \hat{\beta} \neq \dot{360}°$.
- Una traslación T_a si $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \dot{360}°$.

5) a) Todo giro se puede descomponer (de infinitas maneras) en un producto de dos giros con su mismo centro.
b) Todo giro se puede descomponer (de infinitas maneras) en un producto de dos giros de distintos centros.

6) Toda traslación se puede descomponer (de infinitas maneras) en un producto de dos giros de distintos centros.

7) Los giros conservan el sentido de los ángulos.

Simetrías.

1) Toda simetría es una isometría.

2) Si $p' = S_e(p)$, entonces el segmento pp' es perpendicular al eje e.

3) Si $p' = S_e(p)$ y $q \in e$, entonces $d(p,q) = d(p',q)$.

4) Los puntos del eje de una simetría son los únicos puntos que se mantienen invariantes por esa simetría: Sea $p \in \Pi$. Entonces, $S_e(p) = p$ si y sólo si $p \in e$.

5) a) La composición de dos simetrías $S_{e_1} \circ S_{e_2}$ de ejes paralelos es la traslación T_a tal que: $\vec{a} \perp e_i$, $i = 1, 2$, $|\vec{a}| = 2\, d(e_1, e_2)$ y el sentido del vector $\vec{a}$ es desde el eje e_2 hacia el eje e_1.
b) La composición de dos simetrías $S_{e_1} \circ S_{e_2}$ de ejes que se cortan en el punto O es el giro $G(O, \hat{\alpha})$ tal que: $\hat{\alpha} = 2 \angle e_2 e_1$ y el sentido del ángulo $\hat{\alpha}$ es igual al del ángulo que va desde el eje e_2 hasta el eje e_1.

6) a) Toda traslación se puede descomponer (de infinitas maneras) en un producto de dos simetrías de de ejes perpendiculares al vector de traslación.
b) Todo giro se puede descomponer (de infinitas maneras) en un producto de dos simetrías que se cortan en el centro de giro.

7) Las simetrías invierten el sentido de los ángulos.

Simetrías en deslizamiento.

1) Toda simetría en deslizamiento es una isometría.

2) El orden de actuación de la simetría y la traslación que definen una simetría en deslizamiento es indiferente: $S(e,a) = T_a \circ S_e = S_e \circ T_a$.

3) Las simetrías en deslizamiento invierten el sentido de los ángulos.

Teoremas de clasificación de las Isometrías del Plano.

1) Toda isometría, o conserva la orientación de los ángulos o la invierte.

2) Toda isometría que conserve la orientación de los ángulos o es una traslación o es un giro.

3) Toda isometría que invierta la orientación de los ángulos o es una simetría axial o es una simetría en deslizamiento.

4) Toda isometría del plano se puede descomponer como producto de tres o menos simetrías axiales.

La estructura algebraica del conjunto de las Isometrías del Plano.

1) La composición de una traslación y un giro es otro giro del mismo ángulo: $G(O, \hat{\alpha}) \circ T_a = G(O', \hat{\alpha})$ y $T_b \circ G(C, \hat{\alpha}) = G(C', \hat{\alpha})$. Esta composición no es conmutativa.

2) Cualquier giro se puede descomponer (de infinitas maneras) en producto de un giro y una traslación.

3) Para todo $p \in \Pi$, $S_e(p) = p'$ si y sólo si $S_e(p') = p$. Por lo tanto, las simetrías son aplicaciones idempotentes: $S_e \circ S_e = I$, siendo I la aplicación identidad.

4) El conjunto de las traslaciones del plano es un grupo abeliano con la ley composición de aplicaciones. El elemento neutro es la traslación de vector nulo T_0, la aplicación identidad. El elemento simétrico de la traslación T_a es la traslación T_{-a}, donde $-\vec{a}$ es el vector del mismo módulo y dirección que $\vec{a}$ pero de sentido contrario.

5) Para cada punto $O \in \Pi$, el conjunto de los giros del plano con centro en O es un grupo abeliano con la ley composición de aplicaciones. El elemento neutro es el giro G(O, 0°), la aplicación identidad. El elemento simétrico del giro $G(O, \hat{\alpha})$ es el giro $G(O, -\hat{\alpha})$.

6) El conjunto de las traslaciones y los giros del plano es un grupo, no abeliano, con la ley composición de aplicaciones. El subconjunto de las traslaciones es un subgrupo abeliano. El subconjunto de los giros del mismo centro es un subgrupo abeliano, para cada punto del plano.

7) El conjunto de las Isometrías del Plano es un grupo, no abeliano, con la ley composición de aplicaciones. El elemento neutro es la aplicación identidad. Los elementos simétricos son: $T_a^{-1} = T_{-a}$; $G(O, \hat{\alpha})^{-1} = G(O, -\hat{\alpha})$; $S_e^{-1} = S_e$; $S(e,a)^{-1} = S(e,-a)$.

2.4. Desarrollo y organización de la investigación.

Cronología de la investigación.

Tal como hemos señalado en la sección 2.2, previamente a la consideración de los niveles de Van Hiele como marco de referencia para la organización de la enseñanza, disponíamos ya de información relativa a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de este tema. En concreto, contábamos con la información aportada por:

- Nuestro conocimiento de las Isometrías del Plano desde el punto de vista matemático.

- Los resultados de investigaciones previas sobre aprendizaje de las Isometrías del Plano, mencionadas en la sección 2.2, en particular las llevadas a cabo por Küchemann (1981), Grenier (1988) y nosotros mismos: Gutiérrez, Jaime (1987 a), (1988) y Jaime, Gutiérrez (1989 b).

- Nuestra experiencia de enseñanza de este tema en la E.U. del Profesorado de E.G.B. de Valencia siguiendo varias metodologías, unas veces mediante enseñanza formal y otras mediante una enseñanza por descubrimiento.

- Los resultados de la experimentación piloto, en grupos completos de E.G.B., de una unidad de enseñanza de las simetrías diseñada por nosotros[1].

Toda esta experiencia previa ha influido, obviamente, en los resultados de nuestra investigación actual. El trabajo de diseño de las unidades de enseñanza basadas en el Modelo de Van Hiele presentado en esta memoria se ha llevado a cabo mediante las siguientes etapas:

- Consideración y análisis de toda la información y experiencia detalladas en los párrafos precedentes.

- Identificación teórica de las características de los niveles de Van Hiele en el área de las Isometrías del Plano, a partir de las características generales del modelo.

- Modificación de la unidad de enseñanza de las simetrías, ya experimentada con anterioridad, y diseño de unidades de traslaciones y giros para los dos primeros niveles de Van Hiele.

- Experimentación en laboratorio de las unidades anteriores, con grupos de dos a cuatro alumnos, todos ellos del Colegio Público de Prácticas de Valencia, en los siguientes cursos:

[1] Las primeras actividades de esa unidad están extraídas de o basadas en Walter (1973).

Traslaciones y Giros: 3º y 6º de E.G.B.; Simetrías: 1º y 3º de E.G.B.

- Ampliación de las unidades de enseñanza anteriores para los niveles de razonamiento tercero e inicio del cuarto.

- Experimentación de estas unidades de enseñanza con dos alumnas de 2º curso de la especialidad de Ciencias de la E.U. del Profesorado de E.G.B. de Valencia.

- Caracterización definitiva de los niveles de Van Hiele en el área de las Isometrías del Plano, como consecuencia del análisis de las experimentaciones mencionadas.

- Modificación de las unidades de enseñanza experimentadas y elaboración de las unidades que presentamos como propuesta final en esta memoria.

Los grupos reducidos de estudiantes de E.G.B. a los que nos acabamos de referir han sido diferentes para la experimentación de cada movimiento, excepto en el caso de 6º de E.G.B., cuyas alumnas siguieron las unidades de traslaciones y giros, y en el de Magisterio, cuyas alumnas siguieron, en este orden, las unidades de traslaciones, giros y simetrías. De las dos alumnas de Magisterio, una realizó las tres unidades de enseñanza, mientras que la otra no asistió a la de simetrías.

Todas las sesiones de estas experimentaciones se llevaron a cabo en el laboratorio del Departamento de Didáctica de la Matemática, fuera de las horas habituales de clase y se grabaron en video. Posteriormente, las cintas de video fueron transcritas y analizadas. Como resultado de este análisis preparamos unos resúmenes que recogen, con algunos comentarios, las partes más interesantes de las experimentaciones. Estos resúmenes están incluidos en los anexos 1, 2 y 3 de esta memoria.

La duración habitual de las sesiones de experimentación osciló entre 45 y 60 minutos para los alumnos de E.G.B. y entre 1 y 3 horas para las alumnas de Magisterio. La cantidad de sesiones con cada grupo puede verse en la tabla 2.1.

La unidad de enseñanza fue diseñada por la autora de esta tesis doctoral, la cual proporcionó personalmente la instrucción en la mayoría de los cursos (traslaciones y giros en 6° de E.G.B. y Magisterio; simetrías en Magisterio) y dirigió a profesores o futuros profesores en los restantes.

Traslaciones	nº de sesiones
3º de E.G.B.	8
6º de E.G.B.	5
Magisterio	5

Giros	nº de sesiones
3º de E.G.B.	20
6º de E.G.B.	9
Magisterio	6

Simetrías	nº de sesiones
1º de E.G.B.	3
3º de E.G.B.	6
Magisterio	13

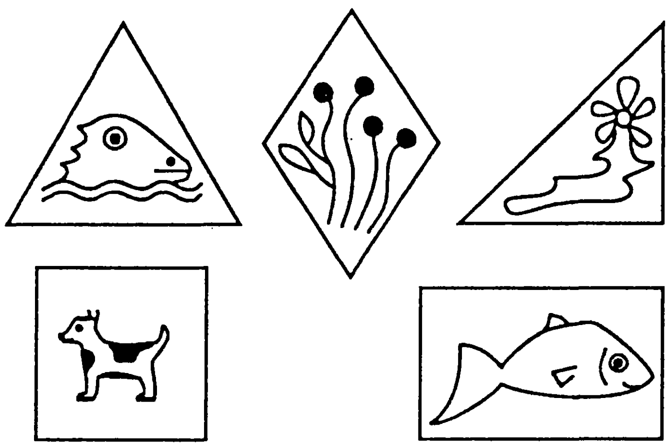
Tabla 2.1. Cursos de la experimentación y cantidad de sesiones de cada uno.

El contexto de la unidad de enseñanza.

Uno de nuestros objetivos al abordar la elaboración de este material de enseñanza fue preparar unas actividades en las que la comprensión de los conceptos básicos estudiados se basara en la realización física de los movimientos correspondientes, más que en el dibujo de las imágenes. Esto es particularmente importante cuando nos encontramos con estudiantes de los dos primeros niveles de Van Hiele.

Otro objetivo, de distinto tipo, fue conseguir la viabilidad de su implementación en cualquier Centro, con un coste mínimo. Ello descartaba el uso de materiales costosos o de actividades que requiriesen una infraestructura especial, en particular un entorno informático.

El resultado ha sido un entorno de aprendizaje en el que el material básico para manipular son unas pequeñas figuras de papel (ver dibujo 2.1). Es muy fácil y barato disponer de la cantidad necesaria de figuras, pues sólo hay que conseguir la cantidad suficiente de fotocopias y recortar las figuras. Los enunciados de las actividades están planteados en hojas de papel de forma que los alumnos utilicen estas piezas sobre ellas en la realización de los movimientos correspondientes.



Dibujo 2.1. Figuras para las actividades.

Una vez encontrada la solución (generalmente la imagen de una figura por determinado movimiento), los alumnos pegarán una pieza sobre la lámina, en vez de dibujarla. Esta reducción de la necesidad de dibujar es interesante por varios motivos: Evita errores producidos por una destreza insuficiente de dibujo, garantizando la congruencia real (no sólo formal) de las figuras y sus imágenes. Este procedimiento resulta especialmente eficaz para los niños pequeños. Así mismo, para cualquier tipo de alumnos, supone un ahorro bastante importante de tiempo.

Además de las láminas y las figuras mencionadas, los materiales complementarios que necesita cada estudiante para todas las unidades de enseñanza son hojas de papel y los instrumentos habituales de dibujo (regla, escuadra y compás). Para las actividades de giros, necesitan, además, un transportador, un disco de plástico transparente (acetato, por ejemplo) de aproximadamente 15 cm. de diámetro y una varilla de cartulina, madera, etc. de unos 10 cm. de longitud. Para las actividades de simetrías necesitan, además de los materiales generales, un mira (metacrilato coloreado, que permite ver la figura simétrica a su través, en el lugar donde le corresponde) y un espejo, ambos de unos 10x15 cm.

En la unidad de enseñanza que hemos elaborado, prescindimos casi por completo del uso de coordenadas. El motivo de ello es que hemos puesto el énfasis en la consideración de los movimientos en sí mismos, evitando situaciones que implicaran el conocimiento o dominio de conceptos o relaciones matemáticas no imprescindibles para lograr nuestros objetivos y que muy probablemente no serían comprendidas por los alumnos de los niveles en los que debíamos trabajar, o necesitarían un proceso de instrucción largo. En concreto, eso se produce en el caso de las simetrías axiales cuyos ejes no están en posición horizontal o vertical y en los giros. Sin embargo, en las traslaciones, las relaciones implicadas en el uso de coordenadas para calcular las imágenes de los puntos son mucho más simples, por lo que se pueden introducir en la secuencia de enseñanza como un objetivo más de aprendizaje en los niveles de razonamiento apropiados, pero siempre manteniendo el objetivo de mostrar qué es este movimiento físico, evitando la reducción del estudio de las isometrías al aprendizaje de unas reglas de manejo de números.

Desde hace bastantes años, tras unas someras ideas presentadas en Enseñanza Primaria, que normalmente se reducen al plegado para las simetrías y a una visión intuitiva de los giros, en Enseñanza Media y en la Universidad las isometrías se contemplan casi exclusivamente desde el punto de vista matricial. De esta manera, el estudio de las isometrías se convierte en operaciones con matrices y, para la mayoría de los estudiantes, se pierde el significado real de lo que son esos movimientos. A partir de la secuencia de enseñanza que proponemos, el enfoque matricial se podría introducir una vez que los estudiantes hayan alcanzado el cuarto nivel. En ese momento serán capaces de trabajar en un contexto abstracto y las matrices y sus operaciones podrán adquirir sentido como representaciones de los movimientos correspondientes y las composiciones entre ellos.

En los nuevos Diseños Curriculares Base para la Educación Secundaria Obligatoria (M.E.C., 1989 y Generalitat Valenciana, 1990), se propone el estudio de las isometrías del plano en este período escolar, sugiriéndose métodos manipulativos para su estudio. En este caso sí se presentan las condiciones idóneas para poder realizar un estudio de las isometrías a lo largo de la E.S.O. que empiece en el primer nivel de razonamiento de Van Hiele y llegue hasta el tercero, pudiendo continuarlo en la Educación Secundaria Post-obligatoria, para intentar alcanzar el cuarto nivel de razonamiento.

Organización de la unidad de enseñanza.

La secuencia de enseñanza que proponemos pretende conseguir un progreso desde el primer nivel de razonamiento hasta el cuarto. Por los motivos que explicamos al describir los niveles de razonamiento en la sección 1.2, sólo hemos diseñado actividades para los tres primeros niveles.

Es importante tener presente que la adquisición de un nivel de razonamiento no obedece a una madurez estrictamente biológica ni a una cantidad de horas de enseñanza. Incluso con enseñanza adecuada, la forma de razonamiento de algunos estudiantes no llegará al tercer o cuarto nivel. Por lo general, la adquisición de un nivel de razonamiento requiere bastante tiempo, incluso años en el caso de los niveles 3 y 4, con una experiencia adecuada.

Tal como indicamos en la última parte de la sección 1.2, la opinión más generalizada es que los niveles de Van Hiele son locales. En caso de que una persona no haya alcanzado todavía el nivel n en ningún área de la Geometría, el dominio de ese nivel en cualquier concepto será una labor lenta en el tiempo. Pero si posee el nivel n en varios campos, es probable que la adquisición de ese mismo nivel en otros sea más rápida, siendo esto más evidente cuanto más alto sea ese nivel n. Así, una persona que razone en el cuarto nivel en polígonos, por ejemplo, es probable que adquiera deprisa los primeros niveles en cualquier otro concepto geométrico.

Con lo anterior queda claro que, generalmente, una secuencia de unas pocas actividades u horas de clase no será suficiente para pasar de un nivel al siguiente si los alumnos no tienen adquirido ese nivel en ningún otro concepto.

Al entender y valorar la propuesta de unidad de enseñanza que presentamos en esta memoria, es necesario tener en cuenta que no se trata de una unidad totalmente desarrollada, preparada para llevar a un aula. Los bloques de actividades que la componen están formados por tipos de actividades, adecuados para alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos y para ayudar a a los estudiantes a alcanzar cierto nivel de razonamiento. Pero en ningún caso se debe interpretar que la realización de dichos bloques de actividades, tal como aparecen aquí, hará que un estudiante interiorice por completo las características de los conceptos implicados y de ese nivel de razonamiento.

Análogamente, las láminas que acompañan a las actividades, son tipos de situaciones sobre las que hay que resolver los problemas planteados en la actividad. En algunos casos, las láminas contienen todas las variedades de situaciones convenientes para esa actividad, pero en otros casos se deben plantear más situaciones, modificando las características de las figuras o las isometrías. Por último, queremos señalar que en muchas actividades no hemos incluido ejemplos de las láminas que las acompañan porque el contenido de estas láminas se desprende de manera evidente del texto de la actividad, luego incluir las láminas no aportaría información a la lectura y comprensión de la unidad de enseñanza.

Aunque nos estamos refiriendo en este capítulo al conjunto de las Isometrías del Plano, las actividades que hemos diseñado están divididas en tres módulos, dirigidas a la enseñanza de traslaciones, giros y simetrías. Las simetrías en deslizamiento se introducen en las actividades del segundo nivel y se estudian en las del tercer nivel del módulo dedicado a las simetrías, desde la perspectiva de una composición de movimientos, ya que los resultados y propiedades de las composiciones de movimientos forman parte del trabajo básico de ese nivel. Los motivos de que dicha isometría tenga un papel secundario en esta unidad son que este movimiento no se puede caracterizar de manera independiente de las otras isometrías y que su definición y utilización tiene una fuerte componente formal. Para comprender las simetrías en deslizamiento hace falta, como mínimo, un alto grado de adquisición del tercer nivel, por lo que en esta unidad nos hemos limitado a introducir el concepto y a procurar el aprendizaje de sus propiedades básicas. Un desarrollo de la unidad de enseñanza que incluyera actividades para el cuarto nivel de Van Hiele sí debería abordar el estudio detallado de las simetrías en deslizamiento.

En las secciones siguientes de este capítulo abordamos la unidad de enseñanza de las Isometrías del Plano. El trabajo que presentamos está desglosado en tres partes:

1) Caracterización operativa de los niveles de Van Hiele de forma específica para cada isometría (traslaciones, giros y simetrías), la cual se concreta posteriormente en la definición de objetivos de enseñanza para cada movimiento en cada nivel de razonamiento.

2) Enunciado de los objetivos y las actividades. La unidad de enseñanza de las Isometrías está dividida en tres partes, una por cada isometría. Cada una de ellas, a su vez, está dividida en bloques de actividades correspondientes a los niveles 1 a 3 de Van Hiele. Para cada nivel de razonamiento, enunciamos los objetivos de la enseñanza en ese nivel y en cada fase de aprendizaje, seguidos por los enunciados de los tipos de actividades propuestas.

3) Comentarios sobre los objetivos y las secuencias de actividades de cada nivel de razonamiento y fase de aprendizaje. Estos comentarios tienen como finalidad explicar y justificar la organización de las actividades y dar ejemplos, extraídos de las experimentaciones realizadas, que ayuden a entender su forma de organización.

2.5. Los niveles de Van Hiele en las Isometrías del Plano.

A partir del estudio teórico de las características de los niveles de razonamiento, tanto generales como particularizadas a las Isometrías del Plano, y de las posteriores modificaciones ocasionadas por las experimentaciones que hemos llevado a cabo con estudiantes, proponemos la descripción siguiente, que muestra las destrezas que corresponden a la adquisición de cada nivel de razonamiento en esta área de la Geometría. Son complemento y particularización de las destrezas generales expuestas en el capítulo 1. En las secciones posteriores de este capítulo describiremos los objetivos a conseguir en cada nivel para cada una de las isometrías simples (traslaciones, giros y simetrías), lo cual está estrechamente vinculado con las características de los niveles enunciadas aquí.

Nivel 1 (Reconocimiento)

La consideración global de los movimientos se refleja en:

- El reconocimiento de la conservación del tamaño y la forma de las figuras.
- La posibilidad de reconocer los movimientos y realizarlos sirviéndose de materiales auxiliares.
- La utilización de propiedades fuertemente visuales para identificar isometrías, como la "colocación igual" de las figuras en las traslaciones, la disposición circular de las figuras en los giros y la visión del eje de simetría como separador "por la mitad" de las dos figuras simétricas, junto con el cambio de orientación en éstas.
- El empleo del vocabulario elemental de las isometrías: Traslación, giro, simetría, centro de giro, eje de simetría, ...

Nivel 2 (Análisis)

La consideración de los movimientos a través de sus elementos permite:

- Hacer uso de forma intencionada y explícita de los elementos que caracterizan cada una de las isometrías: Módulo, dirección y sentido del vector en las traslaciones, centro y ángulo en los giros y eje en las simetrías.
- Determinar los elementos que caracterizan una isometría concreta en las traslaciones (componentes del vector) y las simetrías (eje), a partir de propiedades de estos movimientos. En los giros (centro y ángulo) sólo en situaciones particulares, que no requieran recurrir a relaciones de propiedades propias del tercer nivel.
- Descubrir y utilizar nuevas propiedades de las isometrías, a partir de su verificación en casos concretos. En particular:
  - Las asociadas directamente a la definición de cada movimiento: Igualdad de los vectores que unen puntos y sus respectivas imágenes por una traslación,

equidistancia al centro e invarianza del ángulo en un giro y equidistancia y perpendicularidad al eje en una simetría.
- La determinación de la inclinación de la imagen de una figura por un giro, según el ángulo del giro efectuado.
- La determinación de la mediatriz de un segmento PQ como el lugar geométrico de los centros de los giros que transforman P en Q.
- La existencia siempre de un giro o una traslación entre dos figuras congruentes, de la misma orientación en sus ángulos.

• Utilizar la definición de cada movimiento en tareas de reconocimiento y de aplicación directa del movimiento en cuestión.
• Aplicar composiciones de isometrías, realizando sucesivamente los movimientos correspondientes, sobre figuras concretas. En particular, se puede realizar una simetría en deslizamiento.
• Tras la realización sucesiva de las isometrías correspondientes, identificar el movimiento resultante de una composición de isometrías y sus características, cuando ello no suponga utilizar técnicas basadas en el empleo de relaciones correspondiente al tercer nivel. En particular, se puede trabajar con las composiciones de traslaciones, de giros del mismo centro y de dos simetrías.
• Descubrir la conmutatividad de la composición de traslaciones y de giros del mismo centro.
• Utilizar las coordenadas del vector de traslación en situaciones concretas.
• Utilizar notación y vocabulario matemáticos asociados a las isometrías: p, p', T_a, S_e, G(O,a°), perpendicularidad, mediatriz, módulo, dirección, sentido, ...

Nivel 3 (Clasificación)

Al establecer relaciones entre las propiedades y comprender planteamientos generales, se consigue:

• Comprender y utilizar el corte de mediatrices de segmentos que unen puntos homólogos para determinar el centro de un giro.
• Completar el estudio experimental de los casos básicos de composiciones de dos isometrías con la composición de dos giros de distinto centro, generalizando las situaciones que conducen a un giro y las que llevan a una traslación.
• Comprender y utilizar la posibilidad de descomposición, de infinitas formas, de una traslación y de un giro en producto de dos simetrías. Comprender y utilizar

la posibilidad de descomposición, de infinitas formas, de un giro y de una traslación en producto de dos giros de distinto centro.

- Utilizar las propiedades de las composiciones básicas de isometrías, de determinación de la inclinación de una figura por un giro y de la existencia de giro o traslación entre figuras congruentes no inversas, para justificar:
  - Qué características se puedan conocer del resultado de una composición de isometrías.
  - La posibilidad de transformar una figura en otra por una composición de isometrías.
- Simplificar adecuadamente composiciones de isometrías: Utilización de la conmutatividad en los casos posibles, de la idempotencia de las simetrías, de la asociatividad y de las relaciones conocidas entre las distintas isometrías.
- Establecer relaciones generales, sin soporte de figuras o traslaciones concretas, entre las coordenadas de un punto, de su imagen y del vector de la traslación aplicada.
- Comprender la definición de cada isometría, en términos de un conjunto mínimo, suficiente, de condiciones, así como su enunciado formal.
- Comprender demostraciones formales, sencillas, cuando se presentan hechas. Por ejemplo, la demostración de que la composición de dos simetrías cuyos ejes se cortan es un giro.
- Completar alguna implicación en una demostración formal. Hacer demostraciones simple, que sólo supongan la adaptación de una demostración formal o la aplicación de una propiedad ya conocidas a la situación que se presenta. Por ejemplo, a partir de la definición formal de giro, demostrar que la composición de giros del mismo centro es un giro con ángulo la suma de los ángulos de los giros que se componen.
- Pasar de una situación concreta a una general, completando algunas implicaciones en una demostración particular cuya organización es análoga a la demostración formal general.

Nivel 4 (Deducción Formal)

Se puede razonar prescindiendo de todo soporte concreto, por lo que:

- Se comprende y utiliza la estructura algebraica de las isometrías del plano.

- Se hacen demostraciones formales completas: Se identifican la hipótesis, la tesis y la red de implicaciones lógicas que llevan al resultado. En particular, es de especial interés:
  - El teorema de clasificación de las isometrías: Todas isometría es uno de los siguiente movimientos: Traslación, giro, simetría o simetría en deslizamiento.

2.6. Propuesta de enseñanza de las Traslaciones.

TRASLACIONES: NIVEL 1

Objetivos:

Las actividades que planteamos para este nivel pretenden lograr los objetivos generales siguientes, que más adelante desglosaremos en las diferentes fases de aprendizaje:

1- Reconocimiento de la característica de isometría de la traslación (el tamaño y la forma de las figuras se conservan).

2- Reconocimiento y realización de traslaciones de manera directa sirviéndose de materiales auxiliares (por ejemplo, una regla). Identificación del tipo de desplazamiento (en línea recta).

3- Descubrimiento y empleo de características visuales de las traslaciones: Mantenimiento de la inclinación de la figura, ausencia de inversión.

4- Reconocimiento y realización de traslaciones en diferentes direcciones sin ayuda de material auxiliar.

5- Utilización de vocabulario apropiado relacionado con las traslaciones: Traslación, dirección, figura trasladada, imagen, distancia, ...

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

En el primer nivel de razonamiento se entra en contacto con el objeto de estudio, en este caso las traslaciones, y el razonamiento se basa en la consideración global de las figuras y sus movimientos, siendo éste fundamentalmente visual. Por lo tanto, todas las propiedades que se pongan de relieve deberán estar basadas en atributos manipulativos o visuales.

Algunas de las propiedades de las traslaciones que tienen que ver con la forma de movimiento (en línea recta) pueden ser percibidas por los estudiantes como similares a las de otras transformaciones, como las homotecias o las simetrías, por lo que una parte del trabajo inicial de introducción de las traslaciones en el nivel 1 debe centrarse en diferenciar las traslaciones de éstas.

La necesidad de un razonamiento de tipo visual motiva que la realización física de movimientos por los estudiantes se convierta en el mejor medio de comprensión de las traslaciones, lo cual conlleva la consideración de dos aspectos: Dinámico (realización del movimiento) y estático (observación de las figuras inicial y final). Por tanto, la realización física del movimiento y las características visuales de la colocación de las figuras constituyen la base de juicio en este nivel, y de ahí los objetivos 2 y 3.

Durante algún tiempo, muchos estudiantes requieren la ayuda de algún material o medio mecánico que les permita realizar de manera automática las traslaciones. Esta forma de trabajo es necesaria para que puedan observar las características de las traslaciones y, en las experimentaciones que hemos realizado, ha consistido en trasladar figuras a lo largo de una regla en cuyo borde estaban apoyadas.

El cuarto objetivo presenta la necesidad de explotar la componente fuertemente visual de igualdad de inclinación entre figuras trasladadas, consiguiendo un avance hacia la adquisición del nivel 2 de razonamiento, para lo cual es necesario que los estudiantes empiecen a ser capaces de realizar movimientos de traslación sin la ayuda de ningún material auxiliar, lo cual podrán comenzar a hacer una vez que hayan comprendido suficientemente el significado de las propiedades físicas de las traslaciones.

El objetivo 5 incide en la característica del modelo de Van Hiele referente a que cada nivel de razonamiento posee un lenguaje específico. Ello incluye en este caso el aprendizaje de términos nuevos y la unificación de los significados atribuidos por el profesor y los alumnos en torno a las traslaciones. Esto último quiere decir que el profesor deberá adaptar su vocabulario (es decir, el vocabulario matemático usual) a las capacidades y posibilidades de sus alumnos, pues en ocasiones, sobre todo con los más pequeños, será más conveniente emplear vocablos distintos, con el mismo significado, más familiares para los niños. Asimismo, los alumnos modificarán o ampliarán algunas de las acepciones atribuidas a una palabra o expresión.

Fase 1 del Nivel 1

Objetivos:

1- Toma de contacto con el concepto de traslación.

2- Información sobre los conocimientos previos elementales que puedan tener los alumnos acerca de las traslaciones.

3- Toma de contacto con materiales de ayuda (la regla) y métodos informales empleados para la realización de traslaciones (desplazamiento sobre la regla).

4- Información sobre el vocabulario que poseen los estudiantes al hablar de traslaciones, unificación de términos y significados entre profesor y alumnos e introducción de vocabulario específico nuevo (dirección, línea recta, ...).

Actividades:

A1- Presentar ejemplos y contra-ejemplos de figuras trasladadas. En primer lugar se muestran pares de figuras. Después se muestran grupos de más de dos figuras. Pedir que los alumnos expresen lo que entienden por traslación.

A2- Dar y pedir ejemplos de traslaciones del entorno escolar y ajenos a la escuela.

A3- Utilizar una regla u otro tipo de soporte equivalente para deslizar una figura a lo largo de su borde (utilizando figuras con alguno de sus lados totalmente apoyado sobre el soporte). Pedir que los alumnos expresen cómo es el desplazamiento.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

Una de las misiones de esta primera fase es permitirle al profesor obtener información acerca del conocimiento que poseen sus alumnos sobre las traslaciones. Para ello, si éstos ya las habían estudiado con anterioridad, el profesor, además de proponer las actividades que acabamos de enunciar para la fase 1, puede ir seleccionando actividades de los sucesivos niveles de razonamiento y formulando preguntas a los alumnos sobre los resultados que esperan obtener o por qué han dado cierta respuesta, con el fin de averiguar dónde empiezan las carencias de sus alumnos.

A diferencia de lo que sucede en el caso de las simetrías o los giros, para las traslaciones no hay ningún material que, por sí mismo o manipulándolo, produzca traslaciones de figuras y pueda servir como medio de verificación de ese movimiento. Por ello, en la actividad A1 hemos optado por utilizar el método de ejemplos y contra-ejemplos, que se ajusta a la forma visual de razonar en el primer nivel de Van Hiele. Si se trabaja con niños pequeños, en la presentación deben aparecer no sólo dibujos, sino también contornos de figuras que correspondan a objetos o figuras recortadas en cartulina o papel, de manera que se puedan situar encima de las de la lámina. Además de ello, es importante incluir casos en las más diversas posiciones, evitando limitarse a las estándar, y con una separación entre las figuras diferente en casos distintos.

La secuencia de ejemplos y contraejemplos se ha mostrado eficaz en todas las experimentaciones que hemos llevado a cabo. De hecho, todos los alumnos con lo que hemos trabajado extrajeron la idea de que dos figuras trasladadas son las que "están igual", teniendo esa expresión el significado de que no varía nada en la figura y de que se encuentran con la misma inclinación, idea correcta, puesto que ningún alumno presentó problemas posteriormente en la identificación de figuras trasladadas.

Los ejemplos del entorno real por parte de los alumnos (actividad A2), y la expresión de lo que entienden por traslación (actividades A1 y A3) le han permitido al profesor, en las experiencias realizadas, darse cuenta de la idea que se han forjado los alumnos sobre lo que es una traslación, así como de unificar significados asignados por el profesor y por los alumnos. Tal es, por ejemplo, el caso citado anteriormente, de "figura igual", con el significado de figura con la misma inclinación. Estas actividades son también útiles para ir perfeccionando las expresiones empleadas por los alumnos, bien en esta fase o en las posteriores pues, como todo intento de expresar verbalmente un concepto, obligan a los alumnos a prestar atención a las características que consideran fundamentales.

En la actividad A3 se introduce el deslizamiento de figuras como método que permite realizar traslaciones de forma ajustada. Este procedimiento lo han empleado todos los alumnos que han participado en nuestras experimentaciones sobre traslaciones, no solamente en las actividades de esta fase, sino también con posterioridad. De hecho, para algunos alumnos ése método fue básicamente el utilizado durante varias sesiones, tanto en tareas de reconocimiento como de realización de traslaciones. Por ello, es importante su aprendizaje y utilización desde el primer momento, lo cual constituye el objetivo de la actividad A3.

Fase 2 del Nivel 1

Objetivos:

1- Reconocimiento de las características de las traslaciones de ser isometrías (no cambia el tamaño ni la forma) y de conservar la orientación.

2- Introducción y utilización correcta de vocabulario básico: Figura trasladada, traslación, línea recta, ...

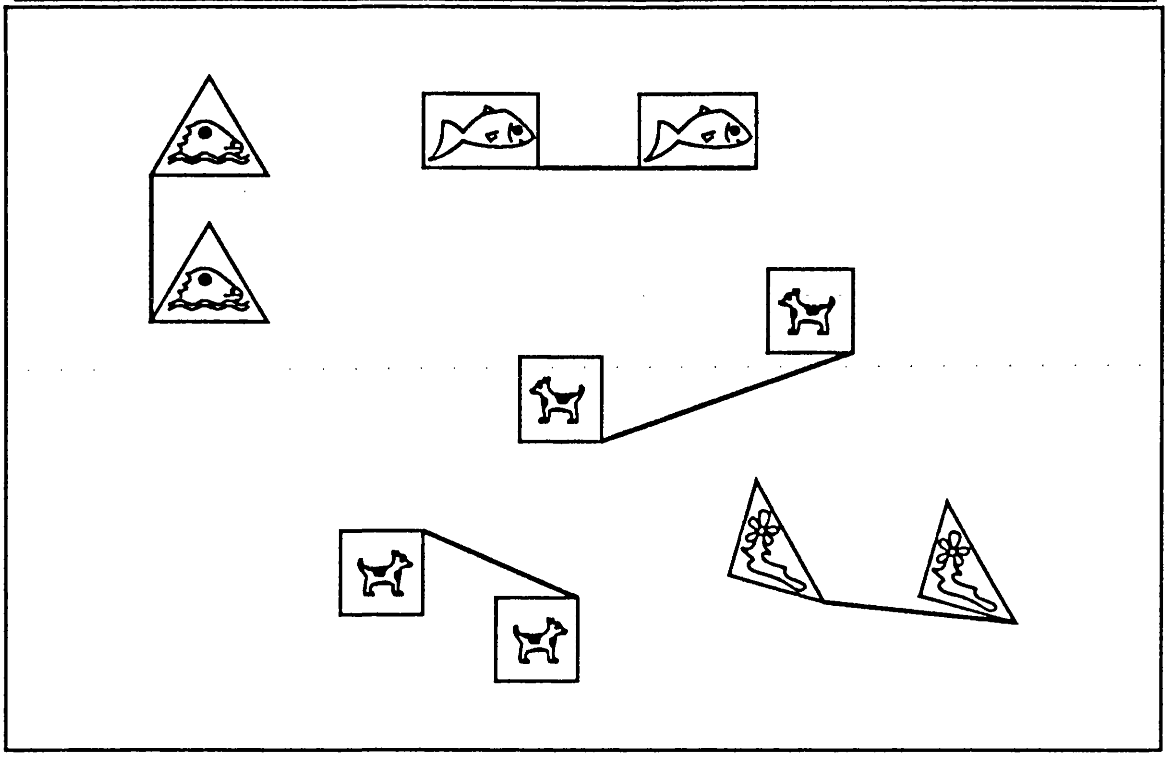
3- Empleo correcto de un soporte para deslizar una figura por una traslación o para identificar figuras trasladadas. Obtención de líneas alternativas de deslizamiento.

4- Identificación visual de grupos de figuras trasladadas o no trasladadas. Justificaciones visuales y manipulativas.

5- Identificación de elementos homólogos de dos figuras trasladadas (vértices, lados, otros puntos con características visuales concretas).

Actividades:

A1- Trasladar una figura sobre la línea marcada utilizando un soporte para el deslizamiento. Dibujar otras líneas válidas para el desplazamiento.



A2- Dado un conjunto de figuras, reconocer las figuras que se corresponden mediante una traslación, sirviéndose y sin servirse del deslizamiento de la figura (se incluyen figuras de diferente tamaño, forma y orientación de sus ángulos).

A3- Dadas dos figuras trasladadas, deslizar una hasta la otra (con o sin ayuda de un soporte). Marcar un punto o lado sobre la figura original. Marcar el correspondiente en la figura trasladada. Unirlos por una línea que represente el recorrido de ese elemento.

-◊-◊-◊-◊-◊-◊-

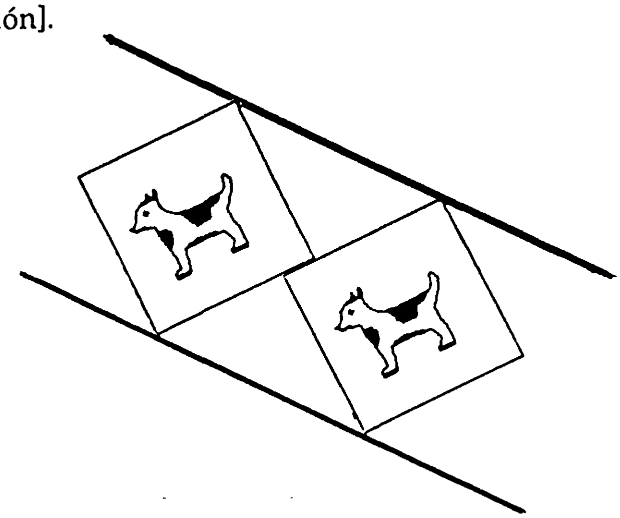
En las tres actividades de esta fase se realizan deslizamientos de figuras, cuya finalidad es doble: Ayudar a que los estudiantes lleguen a asimilar las características dinámicas y visuales de las traslaciones y proporcionarles destreza en esta técnica que les permitirá, desde el primer momento, realizar físicamente las traslaciones.

En todas las experimentaciones realizadas, incluso en Magisterio, hay constancia del arrastre de las piezas para efectuar o verificar traslaciones; en ocasiones se utilizaba un soporte para ello -regla- pero en las mayoría de los casos no. En 3º de E.G.B. ese método del arrastre prevaleció sobre los demás, en 6º de E.G.B. su uso se fue haciendo menos frecuente y en Magisterio casi desapareció, siendo las alumnas de este último curso conscientes, tras las primeras actividades, de su imprecisión.

Cabe destacar que en la experimentación de Magisterio fueron las propias alumnas las que propusieron en las primeras actividades (la segunda, concretamente) el empleo de un soporte para identificar figuras trasladadas. En concreto, la profesora pide un método que asegure que las identificaciones que han realizado las alumnas sobre figuras trasladadas son correctas. Las propuestas de las alumnas son:

Merche: *Yo cogería la regla la coloca como soporte entre las figuras correspondientes. Si hay una línea que ...* [no acaba la frase]. *Si un punto está sobre la regla, pero trasladado* [entonces sí hay traslación].

Ara: *Yo pondría así la regla, formando dos paralelas* [sitúa dos reglas paralelas, de manera que las figuras quedan entre ellas, tocándolas, como se aprecia en el dibujo].



Como la tendencia natural de los estudiantes (sobre todo de los más pequeños) es apoyar un lado completo de las figuras sobre la línea soporte para deslizarlas, tanto en la actividad A1 como en las actividades siguientes, se han incluido pares de figuras con las que es factible efectuar la traslación de esta manera y otros pares en los que sólo se puede apoyar un punto en la guía.

Entre las figuras empleadas en la actividad A2 se incluyen algunas de diferente tamaño, forma y orientación, con lo cual se trabaja el primer objetivo. La variación de forma no se incluyó en las experimentaciones realizadas, pero en esta propuesta sí se tiene en cuenta esa característica para cubrir por completo este aspecto del concepto de traslación, que es reconocible mediante un análisis visual.

Después de haber realizado las actividades de la fase 1 y la actividad A1 de esta fase, los estudiantes de todos los cursos con los que hemos experimentado han resuelto con facilidad la actividad A2. Las explicaciones dadas por los niños de 3º y 6º de E.G.B. para justificar su elección de los pares de figuras trasladadas o no trasladadas fueron análogas y siempre se referían a atributos de posiciones o de movimientos: *Que se repiten igual, No está igual, Son dos figuras iguales y miran hacia el mismo lado, Esta mira hacia acá y esa hacia allá, Están cada uno de una forma* [quiere decir en una posición]. *Que todos los dibujos miran hacia el mismo sitio, ...* Las estudiantes de Magisterio resolvieron esta actividad sin ninguna dificultad y en sus explicaciones utilizaban términos matemáticos como: *Están sobre una línea* [recta]. *Forman paralelas, No está girada, ...*

El segundo objetivo no es específico de ninguna actividad concreta, sino de todas ellas. A lo largo de las sucesivas actividades, el profesor debe ir modificando el vocabulario de los estudiantes para sustituir los términos imprecisos que suelen utilizar por otros más correctos. Esto es especialmente importante con los niños de los cursos inferiores, ya que son los que tienen menos desarrollados el vocabulario matemático. Un comentario análogo sobre este objetivo se puede hacer para los otros niveles de razonamiento, así como para las simetrías y los giros.

En la experimentación de 3º de E.G.B., se pone claramente de manifiesto la conveniencia de trabajar en la identificación de puntos y lados homólogos (actividad 3) como paso previo a la realización de algunas de las actividades propuestas en la fase 4: En el caso de algunas figuras en ejercicios de la fase 4, con las que algunos niños han tenido problemas, la identificación indicada anteriormente permite realizar correctamente las traslaciones pedidas (los ejercicios consisten en trasladar una figura, de manera que un lado o punto prefijados se sitúen sobre otro dado). El proceso de enseñanza para que los alumnos hagan corresponder correctamente los elementos homólogos incluye el deslizamiento de la figura siempre que sea necesario.

La identificación de varias líneas para el deslizamiento también tiene que ser objeto de enseñanza en esta fase del primer nivel. Ello se puede comprobar en el caso de Fernando, alumno de 3º de E.G.B.: Algunas situaciones las resuelve bien, pero no todas. En el dibujo de la página siguiente se aprecian varias de sus soluciones para un par de figuras. Sin embargo, la orientación dirigida, en la que el profesor hace que Fernando deslice la figura tantas veces como quiera, parece resultar efectiva.

La identificación como homólogos de los puntos iguales de las figuras original y trasladada no es inmediata. También ahora se puede apreciar cómo Fernando sólo descubre esta propiedad después de una instrucción dirigida en la que el profesor marca, y hace que el niño marque también, pares de puntos homólogos (vértices, ojo, boca, ...) y que verbalice lo que observa. No obstante, cuando ya asocia correctamente los pares de puntos, Fernando sigue necesitando desplazar una figura antes de unir los puntos mediante una recta.

Fase 4 del Nivel 1

Objetivos:

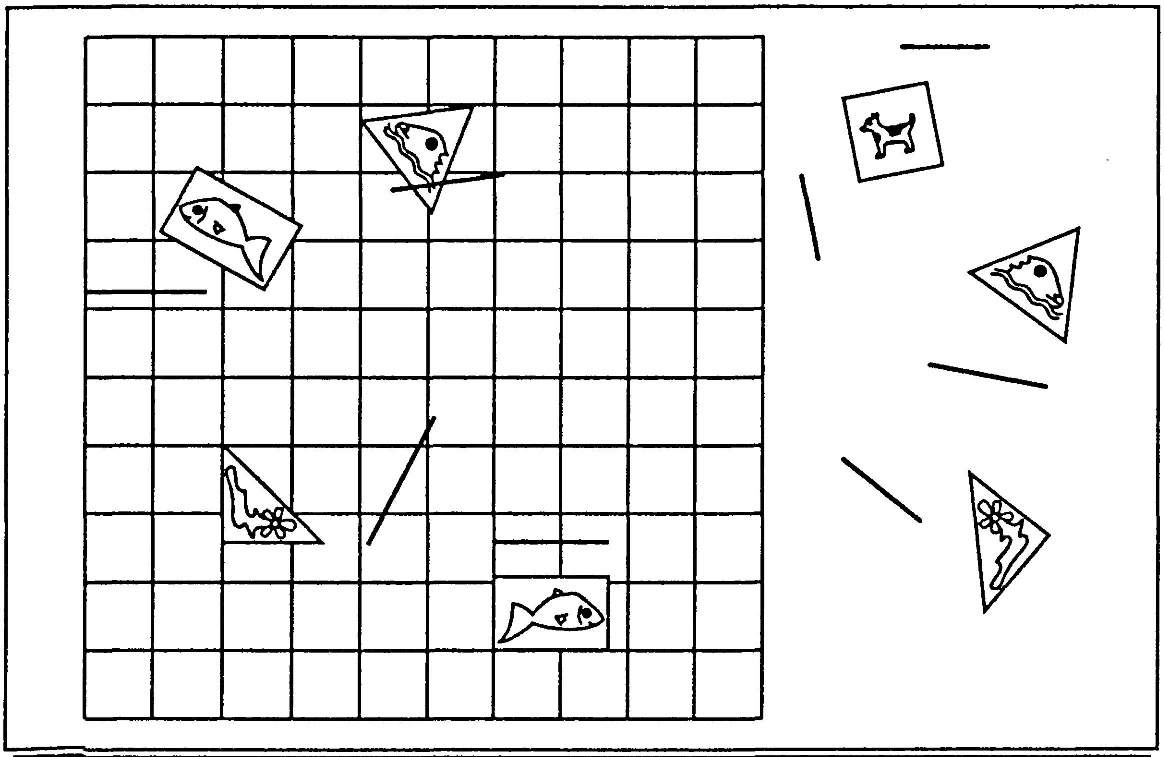
1- Utilizar las características visuales y los procedimientos de realización de traslaciones que se pusieron de manifiesto en la fase 2, en otras situaciones en las que los estudiantes deban emplear, aunque sea implícitamente, algunas propiedades matemáticas que se harán explícitas en el nivel 2, tales como el paralelismo de segmentos de las figuras trasladadas o la asociación de un vector al desplazamiento la traslación.

Actividades:

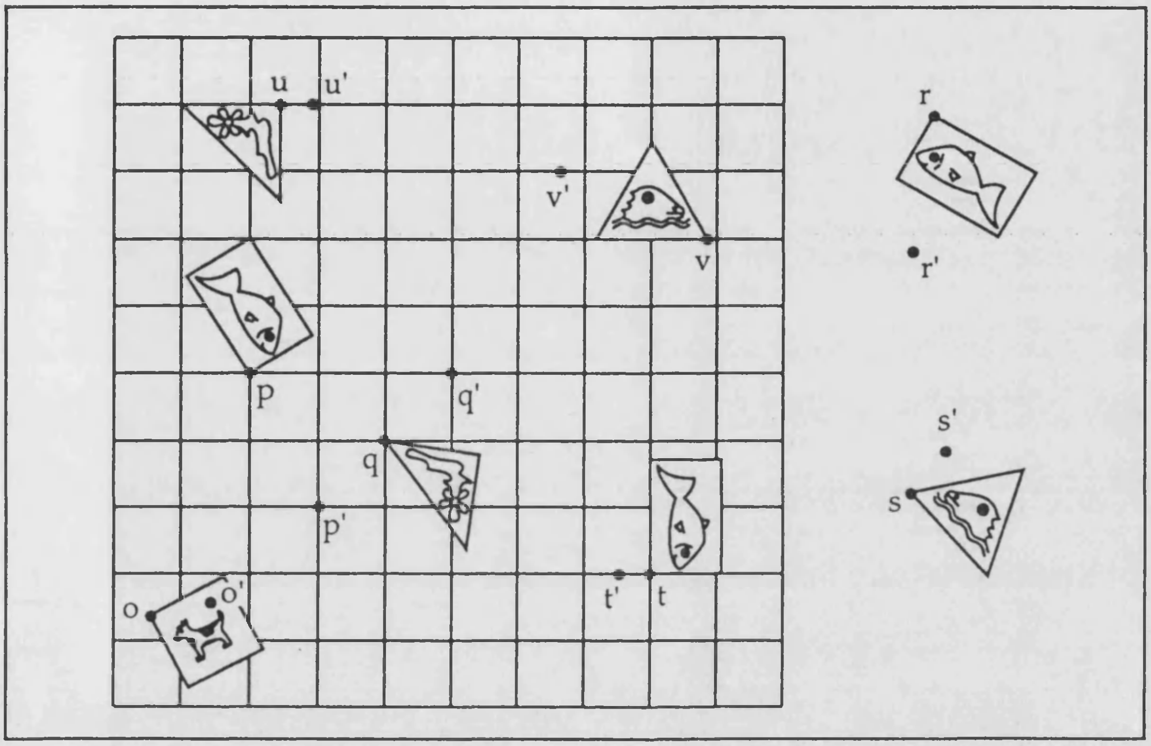
A1- Trasladar una figura de manera que un lado concreto de la figura se sitúe sobre un segmento dado de la misma longitud (siempre hay solución).

Realizar otro ejercicio análogo al anterior, pero siendo ahora los propios alumnos quienes elijan y dibujen dicho segmento.

Proponerles a los alumnos un ejercicio análogo al primero, pero en el que no exista siempre solución.



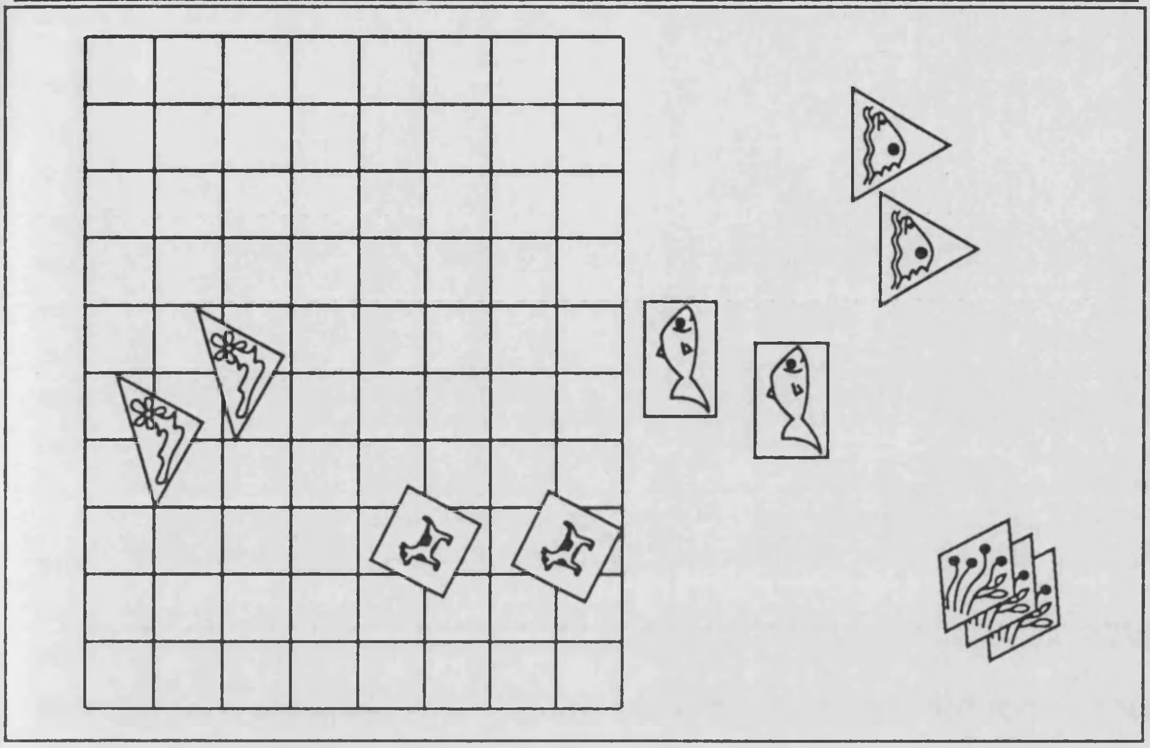
A2- Trasladar una figura de manera que el punto marcado se sitúe sobre un punto dado.

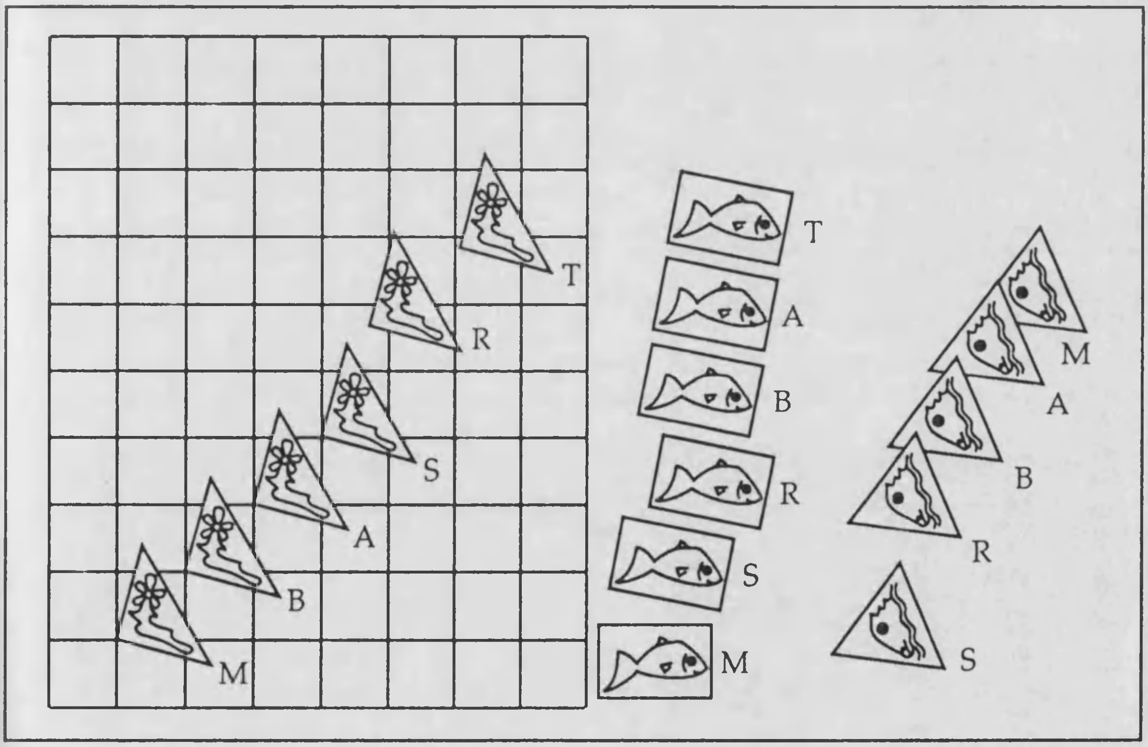


A3- Colocar piezas continuando un friso cuyo inicio se da.

Construir varios frisos diferentes, creados libremente por los estudiantes.

Identificar piezas que claramente (es decir, que se aprecia visualmente) están mal situadas en un friso.



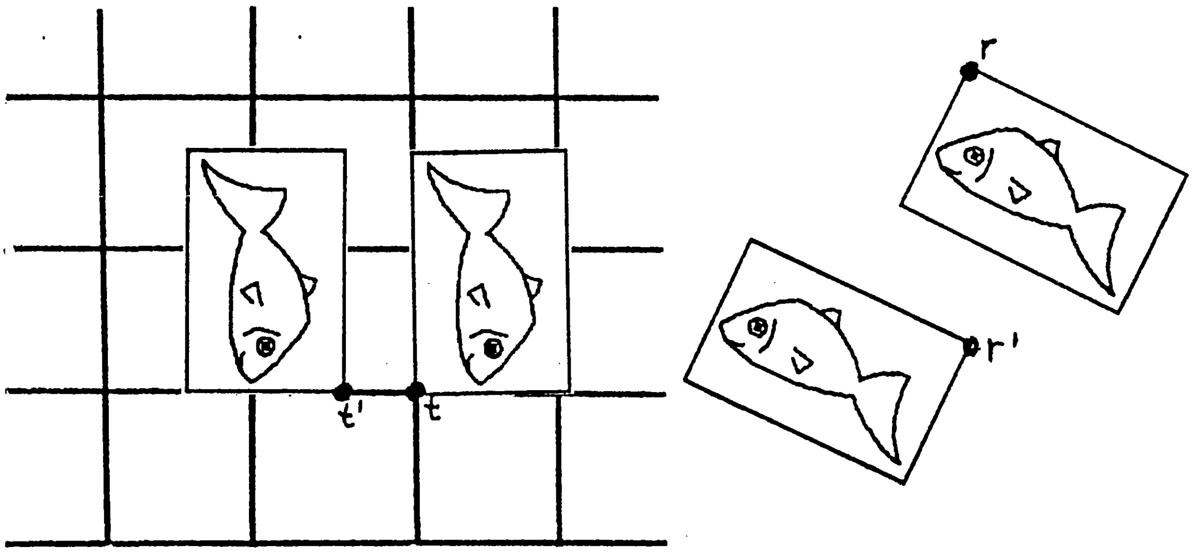

T
R
S
A
B
M
T
A
B
R
S
M
M
A
B
R
S

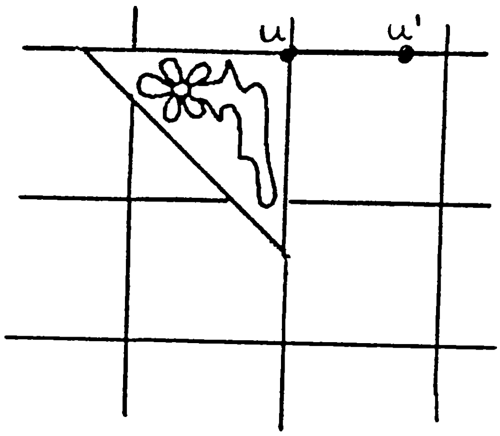
-◊-◊-◊-◊-◊-◊-

Al comentar las actividades correspondientes a la fase 2 ya indicamos la conveniencia de que los alumnos identificaran elementos homólogos, para que fueran conscientes de esa propiedad y la pudieran emplear en situaciones como las planteadas en las actividades A1 y A2 de la fase 4. Estas actividades no son tan sencillas como pudieran parecer, pues incluso en 6º de E.G.B. y Magisterio hubo estudiantes que cometieron errores al no ser capaces de asociar el punto marcado en la lámina con el punto correcto de la figura imagen. Además, hay ejercicios de estas actividades en los que algunos estudiantes de cada curso sitúan la figura imagen girada respecto de la original, si bien se dan cuenta de estos errores en cuanto el profesor hace algún comentario, y los corrigen por sí mismos.

El reconocimiento del paralelismo de segmentos que se corresponden por una traslación, en especial de los lados de las figuras que hemos empleado, corresponde al primer nivel de razonamiento, ya que es una de las características visuales de ese movimiento. De hecho, todos los alumnos muestran desde el principio que han observado y asumido esa propiedad cuando insisten en que las figuras deben estar "igual", refiriéndose con ello a que deben tener la misma inclinación, es decir que sus lados deben ser paralelos. No obstante, puntualmente cometen errores al respecto, ocasionados por general por prestar atención a otras características, pero que se resuelven en cuanto se fijan, tal como hemos señalado en el párrafo anterior.

Como ejemplo de la forma de actuar de los estudiantes de los diferentes grupos de las experimentaciones, podemos describir al de 6º de E.G.B., cuyas las alumnas resolvieron bien la mayoría de los casos de las actividades A1 y A2, pero no todos. Los más destacados son (actividad 6 de la experimentación) una incorrección en la inclinación (por parte de Inmaculada, que es la alumna de este grupo que requería más enseñanza) y no situar el vértice correspondiente sobre el punto indicado (por parte de Icíar); en los dibujos que incluimos tras este párrafo mostramos los errores de Icíar. Posiblemente, si se hubiera incluido previamente una actividad como la A3 de la fase 2, este último error, no relacionar correctamente los puntos homólogos, se habría evitado. En cuanto al error de inclinación, sólo lo comete Inmaculada en una figura, lo cual hace pensar que en general sí tiene asumida la permanencia de inclinación, pero también muestra la necesidad de incluir suficiente cantidad de ejercicios anteriormente, en la fase 2, para que los estudiantes asimilen completamente esta característica y la tengan siempre en cuenta.





Los casos más problemáticos para los estudiantes son aquéllos en los que la figura original y la imagen se superponen. Esta dificultad, que se encuentra presente también al hacer giros y simetrías, la hemos podido observar en todos los grupos de estudiantes con los que hemos trabajado, con más o menos frecuencia según los cursos de E.G.B. en los que se encontraban. Creemos que se debe a una tendencia generalizada a evitar la colocación de una figura sobre otra, lo cual se ha puesto claramente de manifiesto en el grupo de 3º de E.G.B., donde Lorena resuelve sin dificultad los casos de traslaciones en los que la imagen no toca la figura original, pero comete errores cuando la imagen debe superponerse a la original (ver dibujo). Una vez bien resuelto el ejercicio, con la ayuda del profesor, Lorena comenta: *Queda mal porque se queda una encima de la otra.*

La realización o continuación de frisos de la actividad A3 se experimentó en 3º de E.G.B. y en Magisterio. Los alumnos de ambos grupos construyeron bien todos los ejemplos (trabajando con una apreciación plenamente visual los estudiantes de 3º y más matemática los de Magisterio). El ejercicio de identificación de piezas mal colocadas en frisos sólo se utilizó en la experimentación de Magisterio, pero en este caso se exigieron justificaciones de nivel 2. Sin embargo, tras analizar las grabaciones de las experimentaciones, hemos considerado más adecuado incluirlo entre las actividades correspondientes a la cuarta fase del nivel 1, para permitir una ejecución basada en las características visuales del nivel 1 y, al mismo tiempo, propiciar el uso de componentes y propiedades matemáticas por parte de los estudiantes que hayan iniciado la adquisición del nivel 2.

TRASLACIONES: NIVEL 2

Objetivos:

Las actividades que planteamos para este nivel pretenden lograr los objetivos generales siguientes, que más adelante desglosaremos en las diferentes fases de aprendizaje:

1- Descubrimiento, reconocimiento y utilización adecuada de:

a) Las propiedades que caracterizan las traslaciones: Dirección, sentido y longitud del movimiento. Representar esas características mediante un vector.

b) Las tres componentes de un vector para realizar la traslación asociada.

c) El paralelismo y la igualdad de longitudes de los segmentos que unen cada punto de una figura y su imagen.

2- Utilización de la notación y el vocabulario matemáticos para identificar o referirse a puntos, traslaciones, vectores, etc. (P, P', a, T_a, ...).

3- Utilización explícita de la definición de traslación en las explicaciones.

4- Identificación de las traslaciones mediante mediante las coordenadas del vector libre asociado. Realizar traslaciones de figuras a partir de las coordenadas del vector de traslación.

5- Realización de composiciones de traslaciones y generalización del resultado. Utilización de la traslación resultante de una composición. Descubrimiento de la conmutatividad de la composición de traslaciones.

6- Descubrimiento y verificación, a partir de ejemplos, de otras propiedades de las traslaciones.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

La característica básica del razonamiento de nivel 2 consiste en el descubrimiento y utilización explícita de los elementos y propiedades matemáticos de las diferentes isometrías como base de los juicios que desarrollan los estudiantes. Si nos centramos en las traslaciones, los elementos que constituyen su caracterización matemática son la longitud recorrida, la dirección del desplazamiento y el sentido en que se realiza el desplazamiento. Por ello, estos elementos deben ser los primeros objetos de estudio (objetivo 1), tanto su descubrimiento como su utilización. Con el fin de que los estudiantes identifiquen claramente cada una de las tres componentes de los vectores de traslación, en primer lugar se trabaja sobre cada uno de ellos independientemente (objetivo 1a). Sólo después de que los estudiantes sean capaces de reconocer y usar las tres componentes, se introducirá el concepto de vector de traslación (objetivo 1b).

Este tipo de actividad es adecuado para el nivel 2 de razonamiento, ya que se basa en establecer una relación directa entre las propiedades matemáticas representadas gráficamente por el vector y las propiedades matemáticas que caracterizan las traslaciones. Además, aunque es necesario que los estudiantes utilicen simultáneamente las tres componentes de un vector de traslación, no hay ninguna relación de dependencia lógica entre ellas, por lo que su consideración no requiere el razonamiento lógico propio del nivel 3 de Van Hiele.

La adquisición del segundo nivel de razonamiento se basa, en buena parte, en el uso por los estudiantes del vocabulario matemático para expresar sus resultados o conclusiones y para comunicarse con el profesor y los demás estudiantes. Por este motivo, el objetivo 2 nos recuerda que debemos prestar atención a la forma de expresión de los estudiantes durante todas las actividades de las sucesivas fases de este nivel, procurando que vayan abandonando el vocabulario informal propio del nivel 1, si bien tratando de evitar que la adquisición del nuevo vocabulario les cree dificultades adicionales. El vocabulario adecuado al nivel 2 incluye la identificación matemática, oral y escrita, de los elementos que intervienen en la realización y representación simbólica de las traslaciones: Puntos, traslaciones, composiciones, vectores, ...

El aprendizaje y uso por los estudiantes del vocabulario matemático relativo a las traslaciones se complementa con la capacidad para definir en estos términos la traslación (objetivo 3), dando una lista de propiedades suyas, y para utilizar la definición como elemento de sus justificaciones. La utilización explícita de la definición de traslación sirve también para que los estudiantes aprendan a diferenciar más claramente las propiedades generales de las traslaciones de aquéllas que sólo lo son de una traslación concreta.

Además de la visión directa de una traslación, que conduce a la consideración del vector asociado, se puede interpretar ese movimiento mediante su descomposición en un desplazamiento horizontal y otro vertical, lo cual está directamente asociado a las coordenadas del vector de traslación. Este tratamiento encuentra un contexto natural cuando se trabaja sobre cuadrícula y permite obtener propiedades de las traslaciones a partir de las relaciones numéricas correspondientes. Ambos enfoques están estrechamente vinculados y, aunque es posible prescindir del último, pensamos que tiene interés su inclusión como objetivo de enseñanza (objetivo 4), ya que permite descubrir y analizar propiedades y relaciones desde una perspectiva analítica.

Estas dos perspectivas están claramente influidas por los conocimientos que tengan los alumnos sobre vectores y sobre el conjunto de los números enteros. En particular, los alumnos que comprendan y utilicen adecuadamente los sistemas de coordenadas y los vectores libres, su suma y las relaciones entre las coordenadas de los vectores, sólo tendrán que hacer una transferencia de sus conocimientos al campo de las traslaciones, mientras que los alumnos que no hayan recibido enseñanza sobre vectores tendrán que ir descubriendo cada relación.

En lo que concierne a la influencia de los conocimientos de los estudiantes en el campo de los números enteros, hay que tener en cuenta que varía la forma de instrucción a realizar según que conozcan o no los números negativos y sepan o no sumarlos y restarlos. De las experimentaciones que hemos realizado se desprende que los estudiantes de E.G.B. que no conocían previamente el sistema de coordenadas cartesianas eran capaces de generar espontáneamente sistemas de coordenadas alternativos, formados por números naturales acompañados de referencias a la dirección del desplazamiento (a la derecha/izquierda y hacia arriba/abajo).

Uno de los objetivos del nivel 2 de razonamiento es desarrollar las dos perspectivas indicadas anteriormente, por lo cual en las unidades de enseñanza se propondrán actividades en las cuales no se utilicen coordenadas, mientras que en otras (o en las mismas) el trabajo se efectúa a través de las coordenadas.

Conocido un tipo de movimiento, los alumnos pueden pasar a su aplicación reiterada, esto es, a realizar composiciones en las que intervenga ese movimiento. En el caso de las traslaciones, uno de los objetivos del nivel 2 debe ser observar experimentalmente el resultado de mover una figura sucesivamente mediante varias traslaciones y encontrar el movimiento resultante de dicha composición (objetivo 5). Los resultados obtenidos en varios ejemplos les permiten, a los estudiantes que están iniciando el razonamiento de nivel 2, generalizar los resultados y enunciar de forma abstracta la propiedad subyacente. Por ello, también se puede obtener la regla de cálculo de las coordenadas de la traslación resultante de una composición y aplicarla directamente.

Análogamente, la generalización de resultados experimentales les permite a los alumnos darse cuenta de la conmutatividad de la composición de traslaciones (objetivo 5).

El objetivo 6 hace referencia a una de las finalidades del nivel 2 de razonamiento: Procurar que los estudiantes aprendan una variedad de propiedades matemáticas que formarán la base para su aprendizaje en la cuarta fase del nivel 2 y en los niveles siguientes. Está claro que, además de propiedades directamente encaminadas a la construcción y caracterización del concepto de traslación, como las especificadas en algunos de los objetivos de este nivel, interesa que los estudiantes descubran otras y se familiaricen con ellas, para profundizar de esa manera su conocimiento de tipo analítico y algebraico de las traslaciones. Un ejemplo es la obtención de las coordenadas de la traslación inversa a una dada.

Fase 1 del Nivel 2

Objetivos:

1- Obtener información de los conocimientos que tienen los alumnos sobre traslaciones, y en particular sobre vectores, suma de vectores, coordenadas, números enteros y suma y resta de números enteros.

2- Obtener información de los conocimientos que tienen los alumnos rectas paralelas, sus propiedades y el trazado de estas líneas.

3- Proporcionar una unidad complementaria de enseñanza sobre rectas paralelas y su trazado, si fuera necesario.

Actividades:

A1- Dadas varias rectas, de diversas inclinaciones, dibujar rectas paralelas a ésas, utilizando herramientas adecuadas: Regla, escuadra y cartabón. Si los alumnos saben usar el compás, utilizar también este material.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

La utilidad de esta primera fase del nivel 2 y su forma de desarrollo dependen en gran medida de si se trata de estudiantes con los que se empieza a trabajar en este momento en las traslaciones o, por el contrario, son estudiantes que han llegado al nivel 2 como consecuencia del trabajo previo con las unidades de enseñanza del nivel 1. En el primer caso, el profesor debe comprobar qué conocimientos previos tienen sus alumnos y cuál es su nivel de razonamiento, por lo que el bloque de actividades de esta fase debe estar formado por la actividad A1 enunciada aquí junto a otras actividades de las diferentes fases del nivel 1 y algunas de los niveles 2 y 3. De esta manera, el profesor puede conocer el nivel de razonamiento de sus alumnos y, al mismo tiempo, éstos van tomando contacto con los diferentes elementos y materiales de trabajo.

En el segundo caso, que es la situación que ha tenido lugar en todas nuestras experimentaciones, el trabajo en esta fase se puede limitar al tema planteado en la actividad A1, sobre el concepto de paralelismo y el trazado de rectas paralelas. En todos los cursos en los que hemos experimentado isometrías, se ha puesto de manifiesto la necesidad de disponer de un método eficaz par trazar paralelas. Siempre hemos utilizado regla y escuadra, pero estos materiales presentan problemas, pues se requiere bastante tiempo hasta que los alumnos de E.G.B. y algunos universitarios los dominan, por lo que, en nuestras experimentaciones, se convirtieron en una fuente de errores para los niños que no sabían usarlos bien antes de empezar las actividades de la fase 2. Por ello, es conveniente dotarles a los estudiantes de la destreza suficiente para poder trazar paralelas antes de comenzar los ejercicios de traslaciones en los que se deba aplicar.

Para estudiantes que tengan especiales dificultades en el manejo de los instrumentos citados anteriormente, sería interesante disponer de algún material alternativo. Existe en el mercado un instrumento especialmente diseñado para trazar paralelas y perpendiculares, formado por una regla y un rodillo que le permite desplazarse perpendicularmente, pero cuyo uso está poco extendido. También se puede pensar en el diseño de algún material fácil de construir y barato; por ejemplo, se podría emplear una hoja de plástico transparente, cuadriculada, suficientemente rígida como para que su borde sirviera de regla. Ese material no lo hemos experimentado, pero creemos que su manejo sería bastante sencillo para los estudiantes de E.G.B.

Fase 2 del Nivel 2

Objetivos:

1- Descubrir y utilizar el paralelismo y la igualdad de longitudes de todos los segmentos que unen puntos homólogos mediante una traslación.

2- Descubrir y utilizar como características de una traslación la longitud, la dirección y el sentido del desplazamiento mediante la traslación. Introducir el vector de traslación.

3- Comprender el significado del concepto de vector libre correspondiente a una traslación. Utilizar vectores libres para aplicar y determinar traslaciones.

4- Aprender a aplicar una traslación concreta a un punto por procedimientos exactos. Comprender la independencia del punto elegido para aplicar el vector de una traslación y calcular la imagen.

5- Descubrir y utilizar las coordenadas del vector de una traslación. Identificar y aplicar traslaciones mediante las coordenadas de sus vectores.

6- Comprender y utilizar la notación estándar de las traslaciones, T_{vector}, y el vocabulario básico asociado.

Actividades:

A1- (La lámina consiste en pares de figuras trasladadas; en algunos pares la traslación es la misma; entre otros la diferencia está sólo en la longitud, dirección o sentido; entre otros la diferencia son 2 ó 3 características). Marcar varios puntos de la figura A y unirlos mediante segmentos con sus respectivas imágenes en la figura A' mediante la traslación. Marcar en todos los segmentos, mediante una flecha en el extremo correspondiente, el sentido del movimiento de la traslación. (Abrir un diálogo sobre las regularidades y propiedades observadas. Introducir el concepto de vector asociado a la traslación).

Copiar, en lugar separado de las figuras, el vector que indica cuál ha sido la traslación.

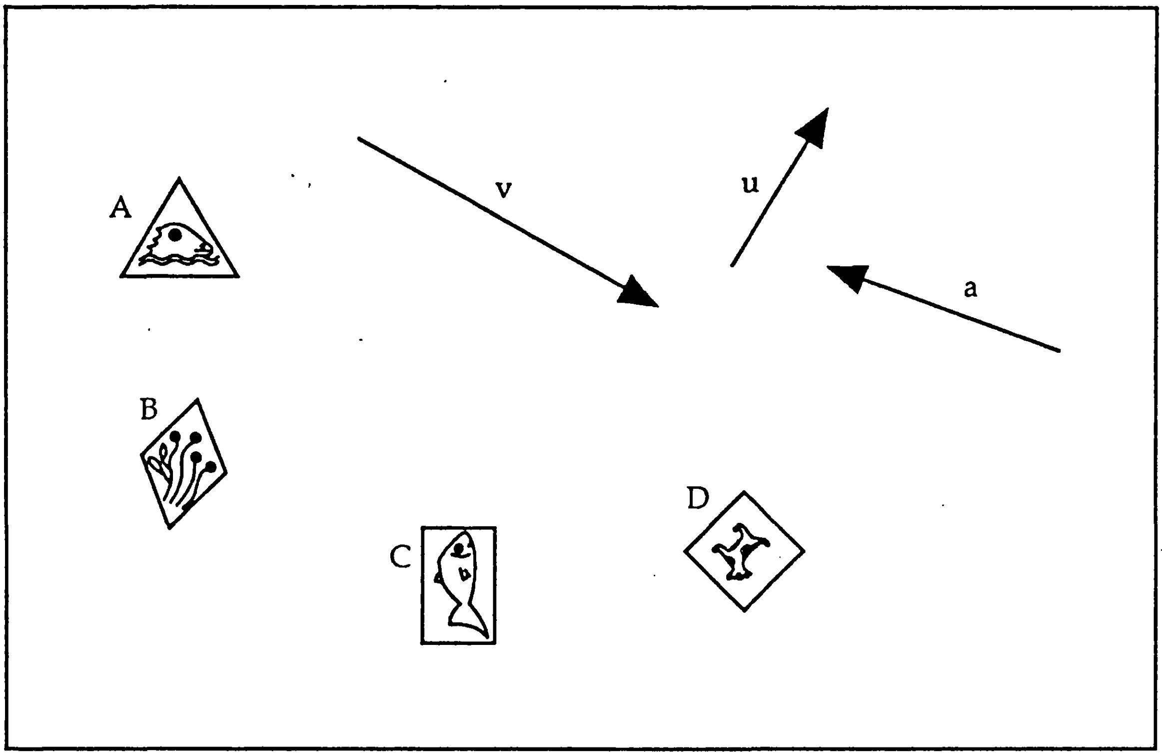
Repetir el ejercicio con otros pares de figuras trasladadas. Pedir a los estudiantes una previsión de lo que va a suceder. ¿En qué se diferencian los vectores de los pares de figuras ... y ...? ¿Son iguales algunos vectores de distintos pares de figuras?

(Pedir a los estudiantes que especifiquen los datos que necesitan para determinar una traslación).

A2- El vector *v* que hay en la lámina se ha obtenido copiando, en un lugar separado de las figuras, los vectores que unen puntos correspondientes de la figura A y de su imagen, pero la figura imagen se ha borrado. Tratar de colocar la imagen de A por esa traslación.

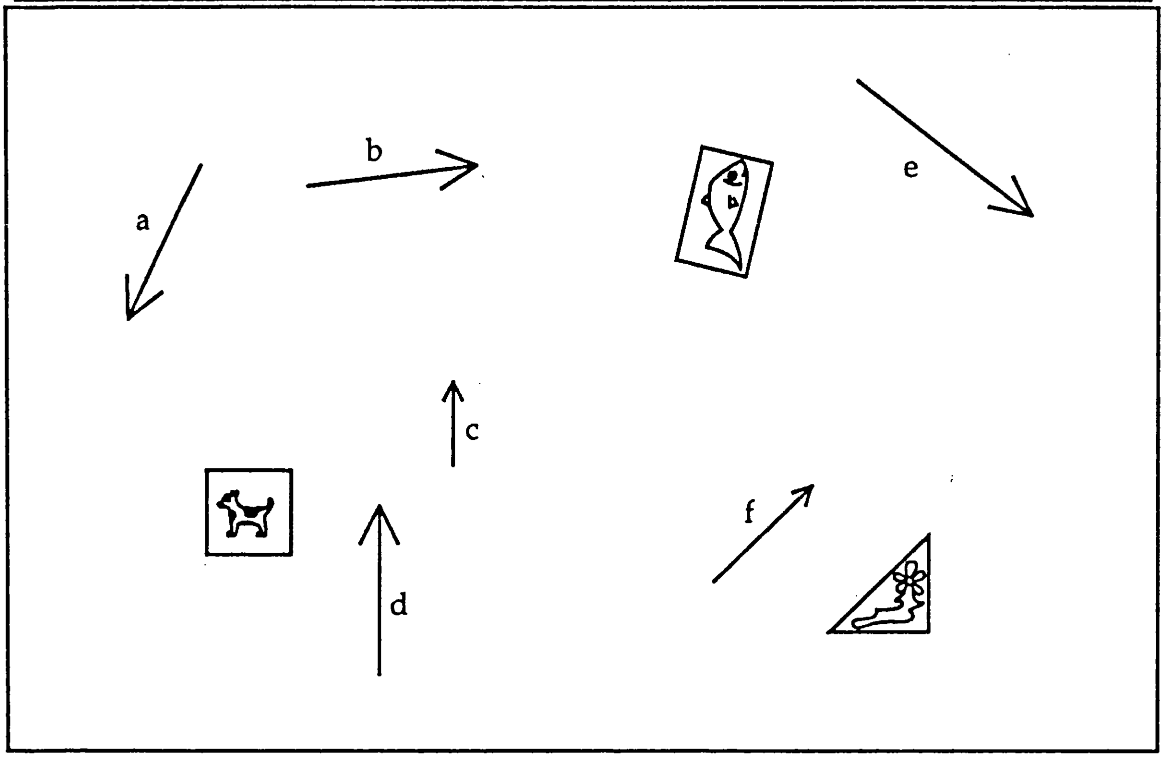
Trasladar la figura B de forma que el vector de la traslación sea también *v*.

Repetir el ejercicio con otros vectores y figuras dados en la lámina.



A3- Para trasladar la figura A, José ha elegido el vértice P, a partir del cual ha situado el vector de la traslación. Ara va a realizar la misma traslación, pero utilizando el vértice Q. ¿Dónde situará la imagen de la figura? ¿Por qué? Justifícalo.

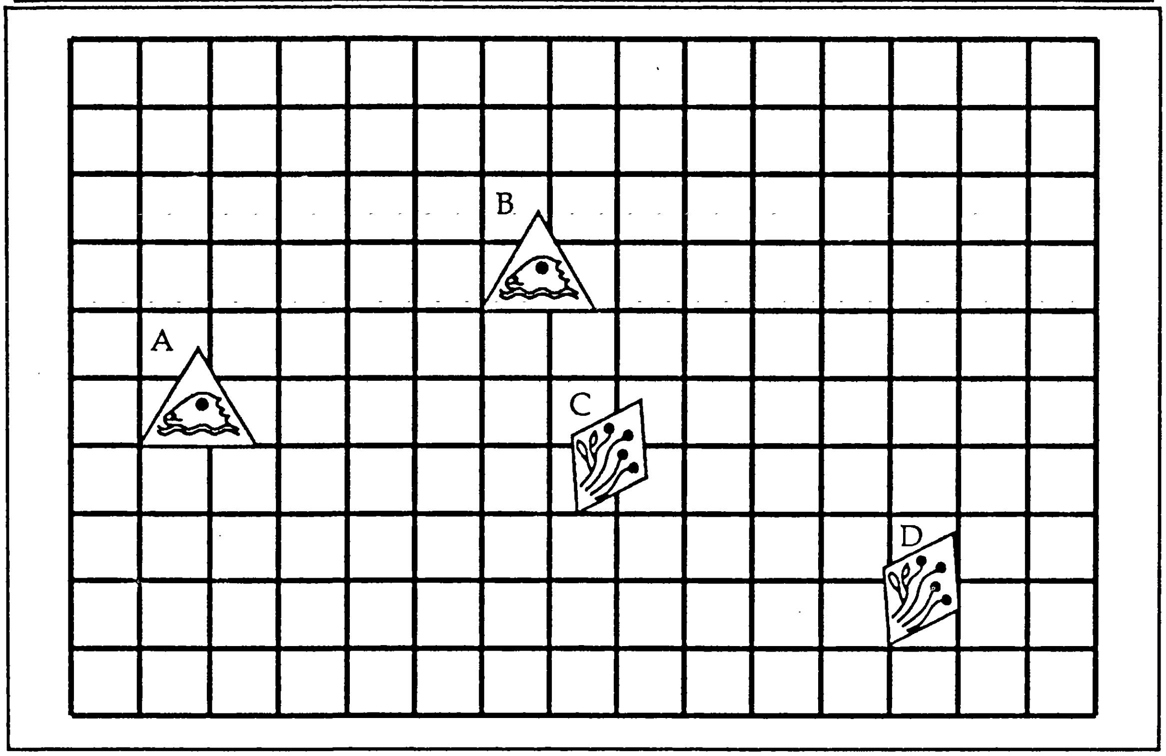
A4- Aplicar a las figuras de la lámina las traslaciones cuyos vectores se dan.



A5- Marcar un punto de la figura A y su homólogo de la figura B. Indicar cuánto hay que mover la figura A (en horizontal y en vertical) para trasladarla hasta la figura B.

Repetir el ejercicio con otros puntos de la figura A. Comparar los resultados y extraer consecuencias.

Dibujar el vector de la traslación y anotar la cantidad de cuadrados que hay, en horizontal y en vertical, desde el origen hasta el final del vector.

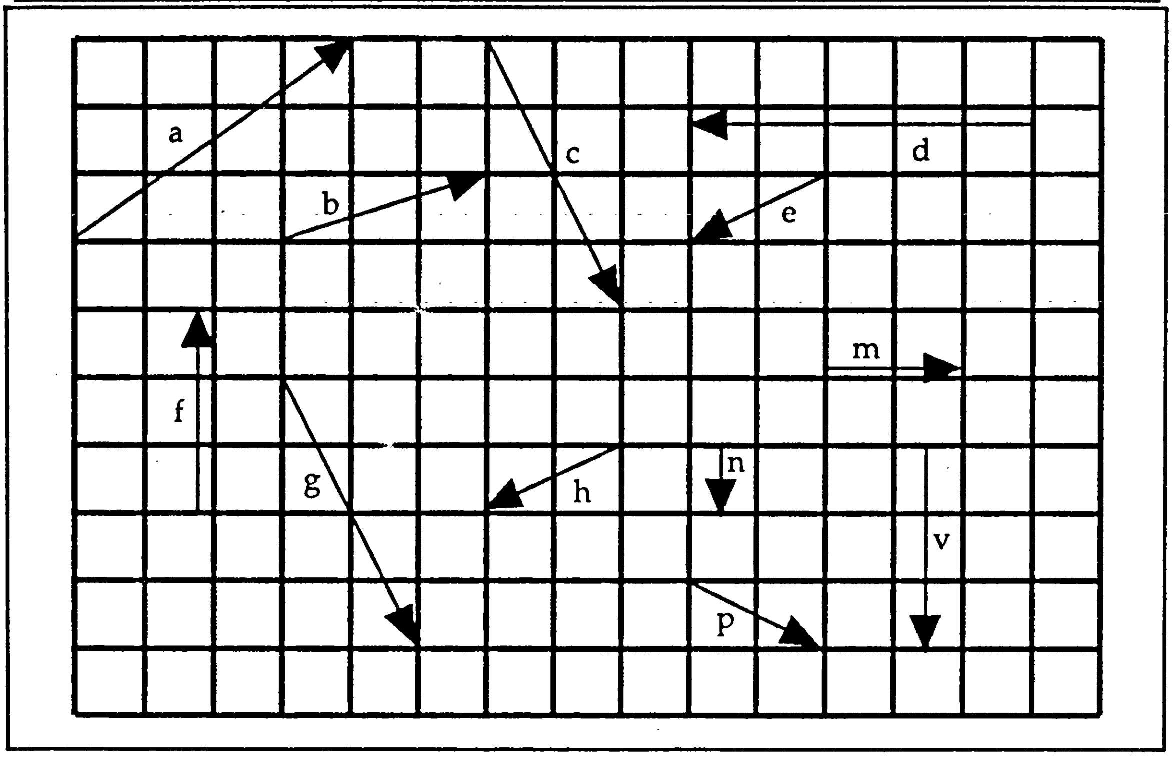


A6- Aplicar a la figura A la traslación que la mueve 3 cuadros hacia la derecha y 5 cuadros hacia abajo, usando el vértice P como punto de partida. Conjeturar y verificar dónde se situará la imagen de A si se cuenta desde el vértice Q. ¿Y si se cuenta desde el punto R? (R está situado el interior de la figura). Dibujar después el vector de esta traslación.

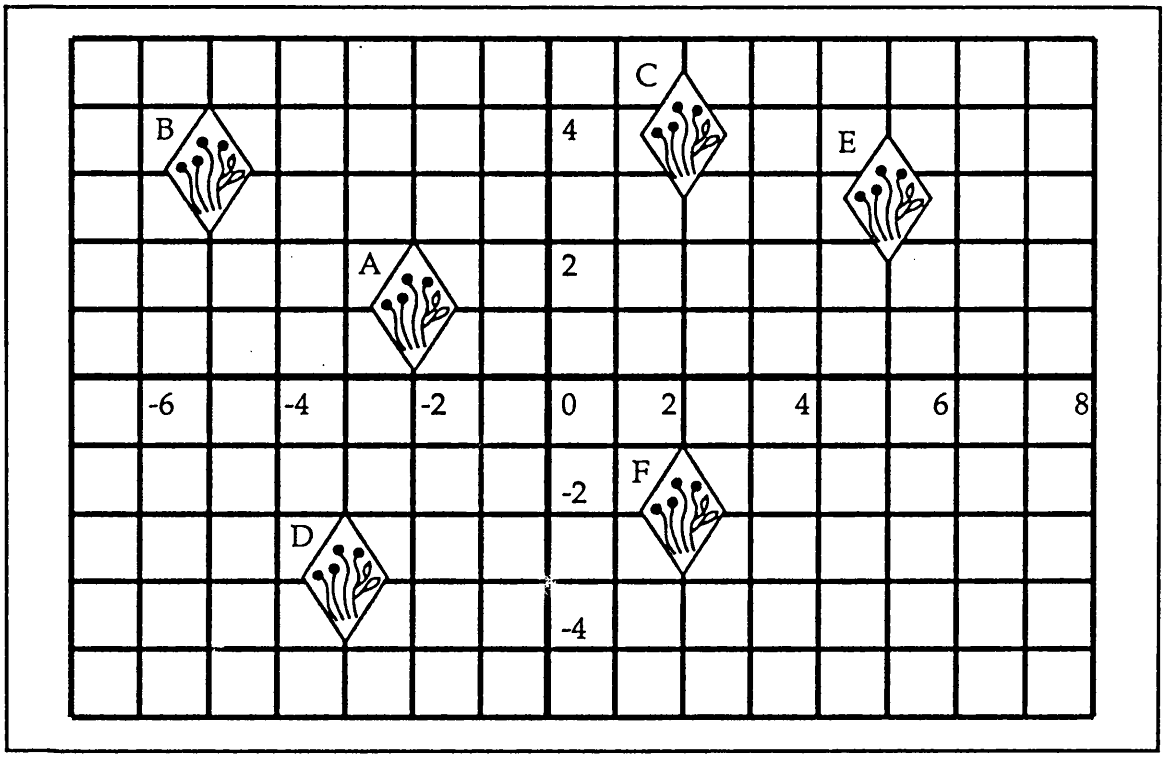
Dibujar los vectores de las traslaciones[1]: (2 a la izquierda, 5 abajo); (4 a la derecha, nada en vertical); (nada en horizontal, 6 abajo); (6 a la derecha, 2 arriba). Aplicar cada una de estas traslaciones a alguna de las figuras de la lámina.

A7- Dar las coordenadas de cada uno de los vectores que hay en la lámina. Decir cuáles corresponden a la misma traslación y explicar por qué. (Introducir el concepto de vectores equivalentes).

[1] Si los estudiantes saben trabajar con números enteros, se sustituirá lo antes posible la notación de direcciones por los números positivos y negativos, presentando este cambio como un convenio para economizar esfuerzo.



A8- Dar las coordenadas de los vectores de las traslaciones que llevan la figura A hasta cada una de las otras figuras de la lámina.



A9- Colocar una figura A sobre una hoja cuadriculada y colocar su imagen por medio de la traslación de vector[1] (3, -1). Colocar en otro lugar de la misma lámina otra figura B y su imagen por esa misma traslación. Repetir el ejercicio con las traslaciones de vectores (-4, -4), (0, 5) y (-3, 0). Observar los resultados y plantear conclusiones.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

El análisis de los resultados obtenidos en los cursos en que hemos experimentado la unidad de enseñanza de las traslaciones es la base sobre la que descansa la propuesta de actividades de la fase 2 que hacemos aquí. Esta propuesta va encaminada a conseguir la comprensión por los estudiantes de las traslaciones en términos de sus características y sus coordenadas, así como a procurar que comprendan y utilicen el vector libre como resumen de las características de la traslación.

Con las actividades propuestas a los estudiantes a lo largo de la fase 2 del segundo nivel de razonamiento se pretende que éstos adquieran la visión de las traslaciones en términos de sus elementos matemáticos característicos y que desarrollen las destrezas básicas para su aplicación desde ese punto de vista: Utilización del vector libre y consideración de las coordenadas. Estas destrezas son las que les deben permitir posteriormente a los estudiantes, en las actividades de la fase 4, realizar por sí mismos actividades que les conducirán al descubrimiento de otras propiedades más complejas (composición de traslaciones, conmutatividad, etc.).

Como se desprende de los resúmenes de las experimentaciones que hemos realizado, las cuales presentamos en el anexo I de esta memoria, la introducción del vector libre como representante de la traslación requiere que los alumnos hayan asimilado con anterioridad la propiedad inversa: Realizada una traslación, existe un vector que representa esa traslación; la comprensión de esta propiedad por los estudiantes supone, además, que sean capaces de dibujar el vector a partir de diferentes puntos de la figura original y también en una posición alejada de dicha figura. También hemos podido comprobar en las experimentaciones que es necesario diseñar actividades expresamente dirigidas a desvincular las

[1] Con alumnos que no utilizan números negativos, el profesor debe modificar el enunciado convirtiendo los vectores a la notación de direcciones.

traslaciones de las figuras concretas sobre las que se aplican. Por eso, una parte de la actividad A1 consiste en dibujar los vectores de las traslaciones en varios puntos diferentes y en lugares separados de las figuras correspondientes.

La idea de que unas traslaciones pueden diferenciarse de otras por la longitud recorrida, la dirección o el sentido del movimiento se introduce también en la actividad A1, mediante la comparación de las características comunes y diferentes de los vectores de diversas traslaciones, ya que estas propiedades forman la base sobre la que se apoyan los conceptos matemáticos de traslación y de vector. En los diversos ejercicios propuestos, algunas veces las traslaciones se diferencian sólo en una característica, mientras que otras se diferencian en dos o las tres características.

Es evidente que, previamente a la comparación de esas características, los estudiantes tienen que asumir el hecho de que, cuando se hace una traslación, los segmentos que se forman al unir puntos con sus respectivas imágenes son todos paralelos y de la misma longitud. Por esta razón, la primera parte de la actividad A1 consiste precisamente en eso.

La experimentación llevada a cabo en 3º de E.G.B. contemplaba en la secuencia de actividades, entre otras, a) unir puntos homólogos, b) reconocer que los segmentos obtenidos en a) son paralelos y de igual longitud, c) dibujar, separado de las figuras, un segmento igual a los que unen puntos homólogos, y d) utilizar el segmento (sin sentido) que define una traslación para mover algunas figuras. Pero los alumnos se encontraban todavía en el nivel 1 de Van Hiele y por ello resultó imposible que trabajaran basándose en las características de paralelismo e igualdad de segmentos entre puntos homólogos. Solamente uno de los alumnos, que comenzaba a razonar en el nivel 2, fue capaz de utilizar esas propiedades y algunas características del vector libre después de que se le mostrara mediante un ejemplo cómo hacerlo.

En la experimentación de 6º de E.G.B., la introducción a la idea de igualdad de traslaciones se presentó de otra manera: Tras realizar una traslación sobre una figura, se pedía a los alumnos que aplicaran "la misma" traslación sobre otra figura. No se habían realizado con anterioridad ejercicios, consistente en comparar segmentos que unieran puntos con sus imágenes por traslaciones diferentes, por lo que los alumnos no interpretaron el significado de la pregunta en los términos deseados. No obstante, todos ellos, mediante instrucción guiada de la profesora, llegaron a entender lo que se les pedía y mostraron comprender correctamente el significado del vector libre cuando se les presentó por primera vez en la sesión siguiente.

En este curso se pudo ver con claridad, además, que la comprensión de la idea de independencia del punto elegido para aplicar la traslación (estudiada en la actividad A3) es otra de las propiedades básicas de las traslaciones, que no es evidente ni intuitiva para los estudiantes y que requiere una instrucción dirigida específica, quizá debido a que visualmente produce una idea errónea. Por lo tanto, hay que presentar a los estudiantes esta propiedad mediante métodos adecuados al comienzo del razonamiento de nivel 2, los principales de los cuales son la realización de ejemplos por los estudiantes y la verificación de los resultados. Entre los alumnos de 6º se puede ver que Rebeca (que tenía un nivel de razonamiento más alto, avanzando por el nivel 2) enseguida comprendió y empezó a utilizar la independencia, mientras que sus compañeras mostraron prácticamente hasta el final de la experiencia una tendencia a usar con cierta frecuencia la concepción visual (propia del nivel 1 y errónea en el nivel 2) de dependencia del punto elegido. Por ejemplo, al realizar una actividad de composición de traslaciones algún tiempo después (actividad 12 de la experimentación de 6º de E.G.B.), la profesora plantea el tema de la independencia de los puntos elegidos:

Prof. [a Marta]: *Yo veo que siempre marcáis un punto* [un vértice] *para empezar en ese punto. ¿Y qué pasa si no marcáis un punto?*

Marta: *Pues que lo podemos hacer desde otro vértice y <u>no</u> sale igual.*

Prof.: *Probad ahora. Tú* [a Inmaculada] *prueba haciéndolo* [la misma traslación] *desde este punto y tú* [a Marta] *desde éste.*

Inmaculada [tras hacer la traslación]: *Sale en el mismo sitio.*

Marta: *Nos sale igual.*

Prof.: *¿Y si cogierais otro vértice?*

Marta: *Seguramente saldría igual.*

Prof.: *¿Seguramente? ¿No estáis seguras? A ver, probad.*

Marta: *Sí, saldrá lo mismo. Espera, vamos a hacerlo.*

En la experimentación de Magisterio sí hubo ejercicios consistentes en unir puntos homólogos y comparar los segmentos, pero no se les pidió a las alumnas que copiaran el vector en un lugar separado de las figuras. Poco después, cuando se les pidió por primera vez que realizaran una traslación representada por un segmento libre, separado de la figura a trasladar, las alumnas no supieron utilizar sus características y de las respuestas que dieron en esta actividad se desprendió claramente que la actividad de copiar el segmento de la traslación distante de la figura habría sido efectiva.

En efecto, el primer intento de Merche y Ara en esta actividad fue resolverla como otra actividad anterior (A1 de la fase 4 del nivel 1) en la que debían mover la figura hasta situar uno de sus lados sobre el segmento dado. En este caso su respuesta fue que no había solución porque el segmento dado no era paralelo a ningún lado de la figura. También pensaron que habría que trasladar un vértice de la figura hasta un extremo del segmento, por semejanza con la actividad A2 de la fase 4 del nivel 1. En vista de las respuestas, la profesora les presentó a las alumnas una lámina de alguna actividad anterior en la que se veía cómo son los segmentos que unen puntos homólogos y, a partir de ella, realizaron la actividad de dibujar un segmento representando la traslación separado de las figuras. Desde ese momento, Merche entendió el significado del segmento libre, que utilizó bien salvo algún error puntual, pero Ara tuvo dificultades durante algún tiempo para utilizar correctamente la dirección de la traslación.

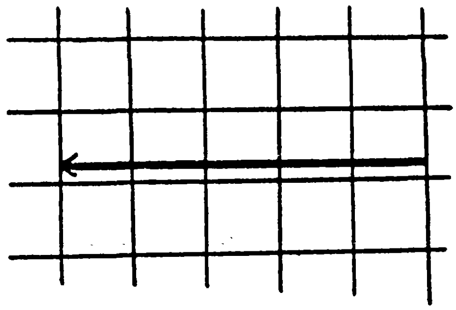
En Magisterio no se puso de manifiesto el error de la dependencia del punto elegido para realizar o definir una traslación. Esto se pudo deber, en parte, a que en esta experimentación la profesora sólo realizó preguntas directas sobre esa propiedad cuando ya se habían resuelto numerosas actividades de nivel 2. Otro posible motivo es que el método empleado usualmente por estas alumnas para trasladar las figuras consistía en obtener las imágenes de dos vértices, en vez de la imagen de un solo vértice y colocar la figura imagen paralela visualmente a la original.

Por todo ello, como hemos indicado antes, los ejercicios incluidos en las actividades A1 y A2 son importantes para facilitar la comprensión del vector libre, cuyo aprendizaje se completa mediante las actividades A3 y A4. Las actividades A2 y A3 son dos pasos intermedios entre la obtención directa del segmento o vector de la traslación (realizada en A1) y la aplicación a una figura de una traslación definida por su vector (actividad A4). También hemos considerado necesario incluir como objetivo directo en algunas actividades la propiedad de independencia del punto elegido en la realización de traslaciones, tanto cuando se realizan gráficamente (A3), como cuando se realizan mediante las coordenadas (A6).

La introducción de las coordenadas de una traslación también requiere enseñanza dirigida específica, aunque deberá ser distinta según los conocimientos que tengan los estudiantes sobre números enteros y sobre vectores. Este es el objetivo de la segunda parte de las actividades, desde la A6. En las experimentaciones llevadas a cabo en 6º de E.G.B. y en Magisterio, hemos tenido las dos situaciones opuestas de no conocer y conocer bien, respectivamente, ambos conceptos.

Hemos podido comprobar que los estudiantes que no conocen los números enteros ni los vectores sí son capaces de generar y utilizar un sistema de coordenadas cartesianas, en el que se mantiene la idea de par de datos, pero donde los signos +/- deben sustituirse por indicaciones de desplazamientos hacia la derecha/izquierda y hacia arriba/abajo. Aunque la ordenación (abcisa, ordenada) no es imprescindible cuando se utilizan los sentidos de desplazamiento, es conveniente habituar a los estudiantes a mantener el orden (horizontal, vertical) para facilitar el paso a las coordenadas estándar. Por otra parte, las alumnas de Magisterio tuvieron que adaptar sus conocimientos sobre vectores al campo actual de trabajo, así como recordar y afianzar los conocimientos que poseían en relación con los números enteros. Tales resultados nos han llevado a incluir en la secuencia que proponemos aquí actividades encaminadas directamente al descubrimiento y utilización de las coordenadas, si bien la forma concreta de estas actividades hay que adaptarla a los conocimientos de cada grupo de estudiantes. En cada aula en particular, el profesor deberá decidir qué visión conviene emplear.

Como se puede observar, en este grupo hay dos tipos de actividades: En algunas se pide obtener las coordenadas del vector a partir de la traslación representada gráficamente y en otras actividades se hace lo contrario. Hay situaciones de desplazamientos sólo en horizontal o vertical y, además, algunos vectores de estos tipos que no se encuentran dibujados sobre la trama, lo cual ayuda a una mejor comprensión por los estudiantes, ya que presentan situaciones variadas y con diversos grados de dificultad. Esta variedad de ejercicios es interesante porque permite discriminar diferentes grados de comprensión, o algunos errores puntuales. Por ejemplo, en la experimentación realizada en Magisterio, una de las alumnas, que trabajaba ya con un alto grado de confianza en la realización e identificación de traslaciones mediante coordenadas, estuvo considerando durante cierto tiempo como ordenada del vector la distancia entre el vector (que era horizontal) y la cuadrícula (ver dibujo).



En la actividad A7, además de afianzar la comprensión de la identificación de las traslaciones mediante las coordenadas de su vector, se trabaja sobre la idea de la equivalencia de vectores caracterizada por la igualdad de sus coordenadas. Con esto intentamos que los estudiantes diferencien aún mejor el concepto de vector libre de la posición concreta de su representante sobre una hoja de papel. En las experimentaciones de 6º de E.G.B. y de Magisterio, los estudiantes no necesitaron realizar traslaciones con vectores equivalentes para darse cuenta de que producían la misma traslación. De todas maneras, es importante que los estudiantes asuman por completo la traducción de la equivalencia visual a la igualdad de coordenadas y, aunque en las experiencias llevadas a cabo no hubo problemas en este aspecto, pensamos que es una propiedad que se debe presentar explícitamente, sobre todo si se desea continuar usando las coordenadas en las actividades de la cuarta fase y de los niveles posteriores.

Fase 4 del Nivel 2

Objetivos:

1- Componer traslaciones a partir del dibujo de sus vectores y obtener la traslación resultante.

2- Componer traslaciones a partir de las coordenadas de sus vectores y obtener las coordenadas de la traslación resultante.

3- Comprender y utilizar el vocabulario y la notación formales asociados a las traslaciones y su composición.

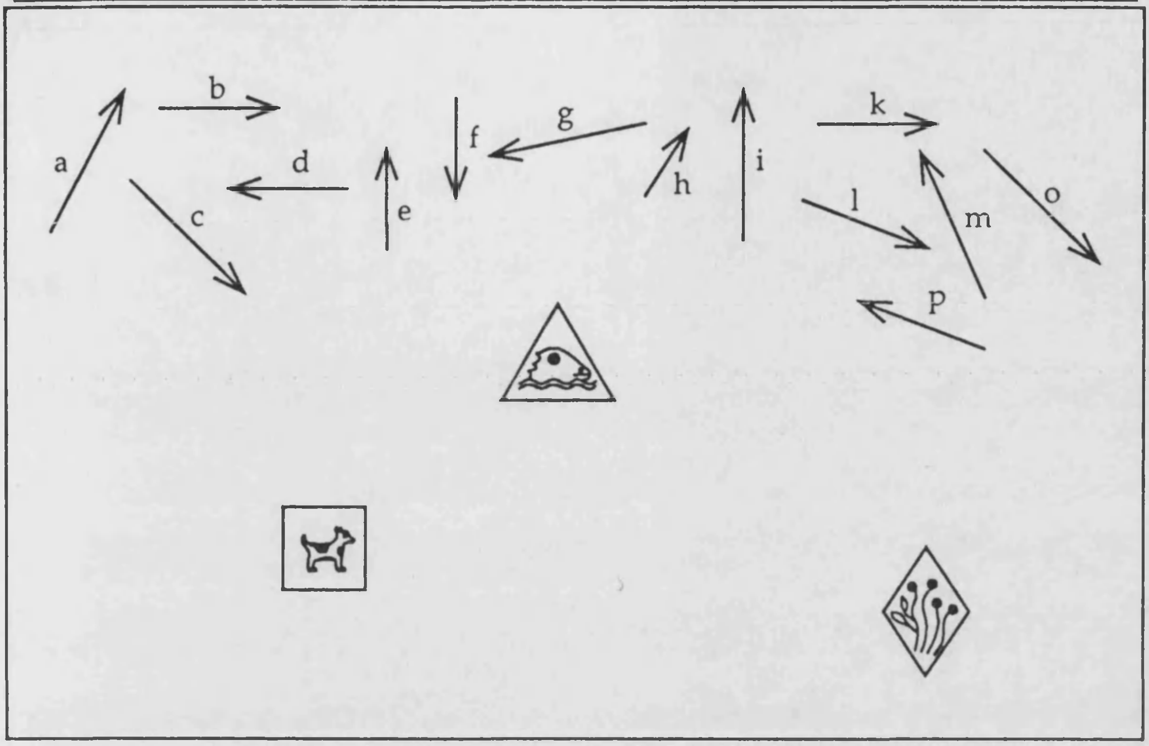
4- Verificar la conmutatividad de la composición de traslaciones.

5- Descubrir experimentalmente y utilizar otras propiedades relacionadas con las traslaciones.

Actividades:

A1- Sin utilizar coordenadas, aplicar a una figura de la lámina la traslación de vector ... (especificar alguno de la lámina). Sobre la figura imagen, hacer actuar la traslación de vector ... (especificar otro de la lámina). Determinar el movimiento que permite pasar directamente desde la figura original hasta la última imagen obtenida, dando las características de ese movimiento.

Repetir el ejercicio componiendo otras traslaciones y moviendo otras figuras. Generalizar el resultado de la composición de traslaciones.



A2- (Lámina sin cuadrícula). Sin utilizar coordenadas, aplicar a una figura la traslación T_v (especificar algun vector de la lámina). Aplicarle a la figura imagen la traslación T_r. Copiar los vectores de las traslaciones de la composición y el de la traslación resultante.

Repetir el ejercicio, con la misma figura y las mismas traslaciones, pero tomando el mismo punto del dibujo para calcular las sucesivas imágenes. Dibujar luego el vector de la traslación resultante poniendo su origen en el punto elegido.

Repetir el ejercicio con otras figuras y otros vectores.

A3- (Lámina sin cuadrícula). Sin utilizar coordenadas, obtener directamente la imagen final de la figura por medio de la composición $T_b \circ T_a$, sin colocar la imagen intermedia.

Repetir el ejercicio calculando la composición de otros pares de vectores.

A4- (Lámina con cuadrícula). Obtener las coordenadas de los vectores *a* y *b*. Aplicarle a una figura de la lámina la composición $T_b \circ T_a$. Obtener el vector de la traslación resultante y calcular sus coordenadas.

Repetir el ejercicio con las composiciones $T_c \circ T_a$, $T_a \circ T_d$, etc.

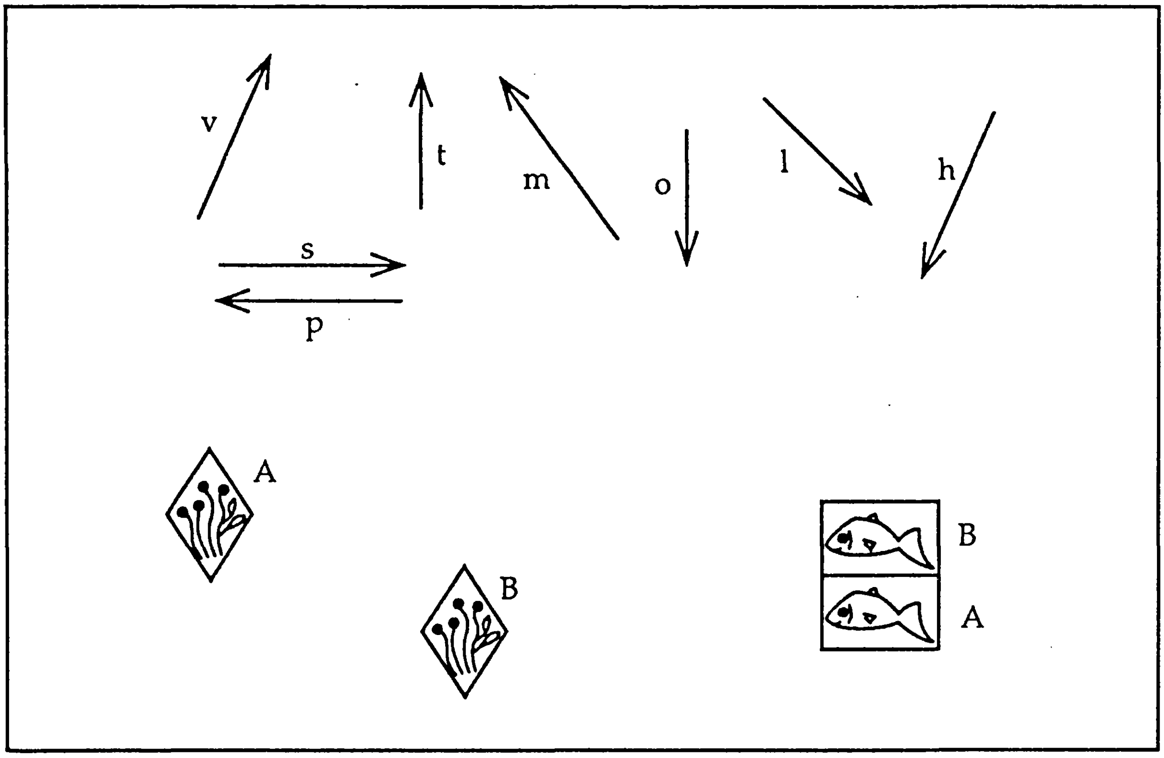
A5- (Lámina con cuadrícula). Hacer la composición $T_c \circ T_b \circ T_a$ sobre la figura de la lámina. Dibujar el vector de la traslación resultante. Escribir las coordenadas de cada uno de los vectores de la composición y las del vector de la traslación resultante.

Repetir el ejercicio con otros grupos de tres traslaciones.

A6- Realizar varias de las composiciones de traslaciones de las actividades anteriores, pero cambiando el orden de las traslaciones; usar las mismas figuras que antes y elegir algunas composiciones de láminas sin cuadrícula y otras con cuadrícula. En cada caso, obtener el vector resultante de la composición y, cuando se utilice cuadrícula, calcular las coordenadas de dichos vectores.

Comparar los resultados de esta actividad con los de las actividades anteriores y extraer conclusiones. Generalizar el resultado de la composición de varias traslaciones y su conmutatividad.

A7- Se ha utilizado la composición de dos traslaciones para llevar la figura A hasta la B. Una de las traslaciones es T_v. Dibujar el vector de la otra traslación.



A8- Queremos pasar de la figura A a la B mediante la composición de dos traslaciones. Dibujar los vectores de dos traslaciones cuya composición produzca ese movimiento.

Si es posible, encontrar otra solución diferente de la anterior, es decir con dos traslaciones diferentes. ¿Cuántas soluciones distintas se pueden encontrar?

A9- Si se mueve la figura A hasta la B mediante la traslación de vector (3, 5), ¿cuáles son las coordenadas del vector[1] de la traslación que permite llevar la figura B hasta A? Introducir el concepto de traslación inversa de una dada.

Repetir el ejercicio con la traslación de vector (-4, -7) y con la de vector (-2, 6).

A10- Si se le aplica a la figura de la lámina una traslación, a su imagen se le vuelve a aplicar la misma traslación, y así sucesivamente, ¿cómo tiene que ser el vector para que se forme una banda que no deje huecos entre las figuras y que tampoco se solapen? Construir dos bandas distintas con la misma figura.

Para conseguir que las bandas anteriores se prolonguen igual en sentido contrario, ¿qué otra traslación es necesario usar?

A11- Definir las traslaciones imprescindibles que hay que utilizar repetidamente para cubrir todo el plano, y no solamente un friso, con imágenes de la figura de la lámina, sin que quede ningún hueco ni se monten las figuras.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

Las actividades propuestas en esta cuarta fase del nivel 2 se basan en los conocimientos básicos que los estudiantes deben haber asimilado y aprendido mediante las actividades realizadas en la fase 2 de este nivel. La secuencia empieza con varias actividades (de la A1 a la A5) dedicadas al aprendizaje de la composición de traslaciones desde las dos perspectivas trabajadas con anterioridad: Utilización gráfica de los vectores de traslación y consideración de las coordenadas de dichos vectores.

[1] Con alumnos que no utilizan números negativos, el profesor debe modificar el enunciado, convirtiendo los vectores a la notación de direcciones.

La pertinencia de la introducción de la composición de traslaciones en esta fase viene avalada por las experimentaciones realizadas. Tanto en 6º de E.G.B. como en Magisterio, la comprensión previa que tenían los estudiantes de las características de las traslaciones en términos de sus vectores, permitió que los estudiantes fueran capaces, desde el principio, de realizar por sí mismos las composiciones sin necesitar ayuda del profesor.

En cuanto al descubrimiento de la relación entre las coordenadas de los vectores de traslación que se componen y el de la traslación resultante, se trata de una interesante actividad para investigar libremente, pues ayuda a consolidar los conocimientos acerca de las traslaciones y a obtener estrategias cuando los estudiantes no conocen las operaciones de suma y resta de números enteros. En la experimentación de 6º de E.G.B., todos los niños fueron capaces de obtener dichas relaciones por sí mismos, excepto una alumna, que fue ayudada en el primer ejercicio por una compañera y entonces ya supo generar su método de trabajo. En caso de estudiantes que ya saben operar en Z, la generalización del resultado mediante la experimentación en casos concretos, trabajo propio del nivel 2, resultó sencilla y no presentó dificultades particulares.

Debido a que nos encontramos trabajando el nivel 2 de razonamiento, en todas las actividades se utilizan figuras y vectores concretos, a partir de los cuales se experimenta, se generaliza y se enuncian las propiedades estudiadas, dejando para los niveles 3 y 4 de razonamiento el trabajo de estudiar la composición de traslaciones de manera abstracta y la obtención de demostraciones generales de estas propiedades.

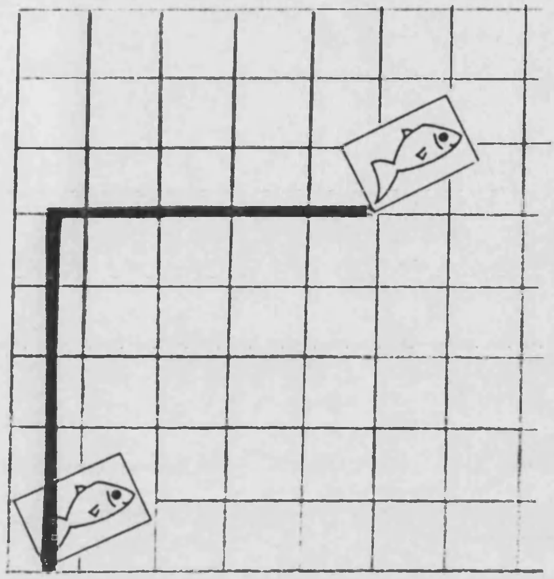
Las actividades de composición de traslaciones que presentamos en esta propuesta son muy similares a las utilizadas en las experimentaciones de 6º de E.G.B. y Magisterio, aunque con algunas modificaciones o ampliaciones. Por ejemplo, la segunda parte de la actividad A2, en la que se pide utilizar siempre el mismo punto para dibujar desde él los vectores de las sucesivas traslaciones de la composición y el de la traslación resultante, ayuda a establecer un método de obtención de la imagen final: Bien mediante la suma de vectores (procedimiento que probablemente usarán los estudiantes que hayan trabajado anteriormente con vectores, como sucedió con las alumnas de Magisterio), o bien obteniendo la imagen final de un punto (generalmente un vértice) mediante la aplicación sucesiva en ese punto de los vectores de las traslaciones que se componen.

Tanto en lo referente al uso de números enteros y su aritmética, como al uso de vectores libres y su suma, los conocimientos previos que posean los estudiantes pueden modificar el planteamiento de este grupo de actividades, ya que en un caso los estudiantes deberán transferir propiedades o procedimientos ya conocidos a este nuevo campo de trabajo y en el otro tendrán que ir descubriendo las propiedades y técnicas correspondientes, aunque en este caso lo harán limitándose al campo de las traslaciones.

Un segundo grupo de actividades (de la A6 a la A9) está centrado en el aprendizaje de varias propiedades básicas de las traslaciones: La conmutatividad de la composición, la descomposición de una traslación en producto de varias y la traslación inversa de otra. En la actividad A6 se plantea la conmutatividad; ésta es una propiedad importante que, según hemos observado en todas las experimentaciones realizadas, los estudiantes del nivel 2 de Van Hiele pueden descubrir y generalizar sin dificultad a partir de su comprobación en algunos casos.

La descomposición de traslaciones surge como el proceso contrario a la composición y su presentación comienza con el planteamiento, en la actividad A7, de situaciones concretas, a partir de las cuales se pueda comprender la existencia de diversas soluciones (actividad A8). Este trabajo sigue la metodología propia del nivel 2, pero debe continuarse en el nivel 3, cuando los estudiantes tengan suficiente capacidad de razonamiento para asumir la generalidad de la descomposición, sin necesidad de soporte concreto de figuras, y para relacionar las traslaciones con las otras simetrías. Esto último no se puede hacer en el nivel 2, por lo que en los ejercicios de estas actividades las situaciones se limitan a la descomposición de una traslación en dos traslaciones.

En las experimentaciones llevadas a cabo en 6º de E.G.B. y en Magisterio se puede apreciar el estilo de trabajo típico de nivel 2. Al resolver la primera parte de la actividad A8, una estudiante de 6º sólo veía la descomposición horizontal + vertical (ver el dibujo de la página siguiente) y, cuando se le pidieron otras posibilidades, empezó a tantear con una figura de papel, pero no se daba cuenta de que cualquiera de las posiciones en las que estaba situando esa figura era válida como primera traslación de la composición. Tras un tiempo de búsqueda por tanteo reconoció uno de los lugares donde había situado la figura como posible solución, seguramente porque la segunda traslación en ese caso era horizontal. Seguidamente, una compañera le mostró otras variantes y la alumna



poco a poco, tanteando por sí misma más opciones, se dió cuenta de que sí había más soluciones. La otra alumna de 6º a la que se le propuso la actividad (que es la que razonaba a un nivel más alto) también también dio como primera solución la descomposición horizontal + vertical pero, a diferencia de la estudiante anterior, al pedirle más, enseguida se dió cuenta de la infinidad de posibilidades.

Respecto a las alumnas de Magisterio, desde el principio reconocieron la existencia de infinitas posibilidades. Sólo les planteamos actividades análogas a la A7. Sin embargo, en 6º de E.G.B. se planteó directamente la descomposición en dos traslaciones (actividad A8). Después de analizar los resultados obtenidos, creemos que se facilita y se hace más completo el proceso de aprendizaje si los estudiantes realizan las dos actividades, por lo que en la unidad de enseñanza que proponemos aquí hemos incluido ambas.

La nomenclatura y el vocabulario matemáticos correctos también se deben ir introduciendo en estos ejercicios a medida que surgen los conceptos o términos correspondientes, siempre que no sean origen de errores y no seas innecesarios. Por ejemplo, para la composición de aplicaciones sí hemos empleado la notación matemática $T_b \circ T_a$, mientras que para la traslación inversa no se utilizó el símbolo matemático T_a^{-1}.

Las actividades de la fase 4 terminan con dos (A10 y A11) dedicadas a trabajar en la construcción de frisos y mosaicos. Este tipo de actividades, cuando el sistema generador está formado por un solo tipo de isometrías, son muy apropiadas para concluir la fase 4, ya que en ellas los estudiantes pueden experimentar por sí mismos (objetivo de la fase de orientación libre) en el nuevo contexto de frisos y mosaicos y deben emplear la mayoría de las propiedades de las traslaciones que han aprendido hasta el momento. Por otra parte, la construcción de frisos y mosaicos se puede plantear con todas las isometrías y con diversos grados de dificultad, abstracción y formalismo.

Al realizar estas actividades por primera vez, el profesor debe dirigir a sus alumnos para mostrarles las peculiares "reglas de juego" de la construcción de frisos y mosaicos derivadas de su estructura algebraica, aunque dicha estructura debe quedar oculta por el momento. La primera de las reglas es que se pueden utilizar tanto las isometrías dadas en el enunciado de la actividad como sus inversas. La segunda regla, que en el caso de las traslaciones carece de significado y no es necesario mencionar, es que los giros y las simetrías se pueden aplicar basando su centro de giro o eje de simetría en cualquier celda de la malla, y no sólo en la inicial, siempre que se mantengan las posiciones relativas entre la celda y el centro o el eje, respectivamente.

Este contexto de los frisos y mosaicos no fue explotado en las experimentaciones realizadas; en todos los cursos empleamos bandas de figuras, que en ocasiones eran frisos, pero con otros objetivos (recordar las actividades del nivel 1); en Magisterio, al final de la experimentación de simetrías, también se introdujo el concepto de sistema generador de un friso o mosaico, a través de la construcción del friso y el mosaico más sencillos (celda rectangular, con sistema generador de traslaciones), pero se le dedicó poco tiempo.

TRASLACIONES: NIVEL 3

Objetivos:

Las actividades que planteamos para este nivel pretenden lograr los objetivos generales siguientes, que más adelante desglosaremos en las diferentes fases de aprendizaje:

1- Trabajar con traslaciones expresando los datos y resultados (puntos, imágenes y vectores) mediante coordenadas.

2- Descubrir y justificar que siempre existe una isometría (giro o traslación) relacionando dos figuras congruentes de la misma orientación.

3- Demostrar el resultado de la composición de traslaciones y el resultado de la descomposición de una traslación en traslaciones. Comprender y saber utilizar la infinidad de soluciones de la descomposición y las relaciones gráficas y aritméticas de los vectores implicados y de sus coordenadas.

4- Obtener, utilizar y analizar la definición formal de traslación. Caracterizar las traslaciones mediante conjuntos de condiciones necesarias y suficientes.

5- Demostrar informalmente, mediante razonamiento deductivo, propiedades de las traslaciones descubiertas en este nivel o en los anteriores.

6- Comprender el planteamiento y desarrollo de algunas demostraciones formales relacionadas con las traslaciones.

7- Realizar algunas implicaciones simples en una demostración y demostraciones de pocos pasos relacionadas con las traslaciones.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

Antes de entrar a justificar los objetivos especificados para el estudio de las traslaciones en este nivel, es imprescindible señalar que un desarrollo completo del tercer nivel de razonamiento requiere comprender las relaciones existentes entre las traslaciones y los otros tipos de isometrías estudiados (giros y simetrías). Esto lo hemos tenido en cuenta al plantear los objetivos de las unidades de enseñanza de los giros y las simetrías correspondientes al tercer nivel, donde, además del estudio específico del movimiento correspondiente, se hace un estudio conjunto de todas las isometrías.

Por lo tanto, especificamos los objetivos a alcanzar en esta unidad de enseñanza de las traslaciones para el tercer nivel de razonamiento, aunque no todos ellos se puedan conseguir por medio de actividades exclusivas de esa isometría. Tal es el caso, por ejemplo, del objetivo 2, aunque es importante ya que se refiere a una parte del teorema fundamental de las isometrías y es clave para entender globalmente la estructura de este conjunto, no puede ser abordado en este momento. La consecución de este objetivo se llevará a cabo en la unidad de enseñanza de los giros. Por el contrario, el objetivo 3 y los últimos objetivos enunciados para el tercer nivel de las traslaciones sí los desarrollamos en esta unidad, puesto que se pueden alcanzar centrándose sólo en ese movimiento.

Otra consecuencia importante de esta interrelación entre las distintas isometrías es que conviene que los estudiantes hayan desarrollado simultáneamente un aprendizaje de giros y de simetrías y se encuentren en el mismo nivel de razonamiento en esos conceptos que en traslaciones.

Los primeros objetivos plantean la necesidad de que los estudiantes lleguen a razonar de manera abstracta, utilizando representantes genéricos de las traslaciones y plasmando sus argumentos en los símbolos matemáticos correspondientes. De acuerdo con las características del modelo de Van Hiele, ese trabajo de generalización y abstracción es propio del tercer nivel de razonamiento pues, además, se basa en la utilización y combinación de diversas propiedades de las traslaciones.

El primer objetivo se refiere al interés de que los estudiantes trabajen en la obtención de las coordenadas (v_1, v_2) del vector de una traslación a partir de las coordenadas de un punto $P = (p_1, p_2)$ y de su imagen $P' = (p'_1, p'_2)$ o viceversa. Para el desarrollo correcto de la unidad de enseñanza que proponemos en esta memoria, no es imprescindible lograr este primer objetivo, pues en el entorno que hemos creado para el estudio de las isometrías sólo hemos empleado las coordenadas con las traslaciones, y esto de forma no generalizada. En las experimentaciones realizadas, hemos comprobado que incluso estudiantes de E.G.B. pueden resolver correctamente actividades de traslaciones basadas en coordenadas, por lo que hemos incluido, tanto en las actividades de este nivel como del segundo, algunas sugerencias al respecto. Somos conscientes de que se trata solamente de una primera aproximación, pues un tratamiento detallado basado en el uso de coordenadas (que, probablemente, debería incluir los giros y las simetrías) llevaría a la elaboración de otras unidades de enseñanza completamente diferentes, lo cual se aleja de los objetivos de nuestra investigación.

El desarrollo del objetivo 3 difiere de la visión de la composición de traslaciones que hemos proporcionado con las actividades del segundo nivel, en cuanto que ahora pretendemos que los estudiantes lleguen a una consideración general y abstracta de la composición de traslaciones, mientras que en las actividades del segundo nivel se utilizaban sólo situaciones concretas. Por una parte, los estudiantes deben comprender y utilizar la suma de vectores sin necesidad de recurrir a ejemplos concretos. Por otra parte, respecto del uso de coordenadas, deben generalizar por sí mismos y justificar la fórmula $(v_1, v_2) = (r_1+s_1+\ldots, r_2+s_2+\ldots)$, siendo (v_1, v_2) el vector de la traslación resultante de una composición de traslaciones y (r_1, r_2), (s_1, s_2), ... los vectores de las traslaciones que intervienen en esa composición: $T_v = \ldots \circ T_s \circ T_r$.

Por lo que respecta a la descomposición de traslaciones, como ya indicamos en los comentarios de las actividades de la fase 4 del segundo nivel, la visión general de la descomposición, la infinidad de posibilidades y las relaciones numéricas de las coordenadas, así como la descomposición de una traslación en movimientos que no son traslaciones, corresponden al tercer nivel de razonamiento. En unos casos, esto se debe al elemento abstracto que interviene cuando se establecen afirmaciones trabajando sobre isometrías abstractas y en otros a las relaciones que hay que establecer entre los diversos movimientos, relaciones que se construyen sobre propiedades de los movimientos correspondientes.

Los objetivos 4 a 7 se refieren a las otras dos componentes básicas del razonamiento del tercer nivel de Van Hiele, la capacidad de definir y la de demostrar de manera lógico-deductiva, aunque informal, propiedades nuevas o ya conocidas. Los diferentes objetivos dan una visión más puntual del proceso de iniciación al razonamiento matemático, que debe hacerse poco a poco y empezando con situaciones sencillas al alcance de los estudiantes, para permitirles tener la experiencia necesaria para progresar en su adquisición del razonamiento del tercer nivel.

Fase 1 del Nivel 3

Objetivos:

En la presentación de las actividades de los niveles anteriores ha quedado suficientemente explicada la finalidad que debe tener la fase 1 de cada nivel, por lo que no creemos necesario repetir esas consideraciones respecto a la fase 1 del tercer nivel. En este caso, tampoco proponemos ninguna actividad específica para dicha fase, si bien los profesores deben centrar su actividad en determinar el nivel de razonamiento de sus alumnos en relación con las traslaciones y sus conocimientos sobre:

- Los números enteros y las operaciones de suma y resta en este conjunto.
- Utilización de los vectores gráficamente y mediante coordenadas.
- Manipulación y propiedades de las traslaciones.
- Los elementos necesarios de las otras isometrías.

En relación con estos puntos, si los alumnos conocen el tema pero tienen alguna carencia concreta, es conveniente darles una instrucción específica adecuada antes de empezar a trabajar con las traslaciones.

Fase 2 del Nivel 3

Objetivos:

1- Obtener la relación general entre coordenadas de un punto y su imagen por una traslación y las coordenadas del vector de la traslación.

2- Obtener y justificar de manera general, sin el soporte de figuras, la resultante de una composición de traslaciones, tanto a partir de la suma gráfica de los vectores de las traslaciones que se componen como de la suma de sus coordenadas.

3- Obtener y justificar de manera general, sin el soporte de figuras, la descomposición de una traslación en producto de varias traslaciones mediante la utilización gráfica de los vectores y a partir de sus coordenadas.

4- Justificar si determinados conjuntos de condiciones son suficientes para determinar una traslación.

5- Comprender y realizar demostraciones, dirigidas por el profesor, mediante justificaciones deductivas generales y no sólo comprobando casos particulares.

Actividades:

A1- A) Las coordenadas de un punto P son (2, 3). Si se le aplica a P la traslación de vector (5, 2), ¿cuáles son las coordenadas de su imagen P'? ¿Y las coordenadas de la imagen de Q = (-1, 5)? ¿Y las coordenadas de la imagen de R = (20, -30)?

Repetir el ejercicio con las imágenes de los puntos anteriores cuando la traslación que se aplica tiene como vector (-40, 50).

B) Las coordenadas de P', imagen de P, por la traslación T_v de vector (5, 6) son (10, 14). ¿Cuáles son las coordenadas de P? Si las coordenadas de Q' son (0, -7), ¿cuáles son las de Q?

Repetir el ejercicio con P' = (-10, 70), Q' = (50, -80) y la traslación de vector r = (8, -10).

C) Las coordenadas de un punto P son (3, 9) y las de su imagen P' por una traslación son (5, 7). ¿Cuáles son las coordenadas del vector de la traslación?

Repetir el ejercicio con el punto Q = (30, -40) y su imagen Q' = (-20, 60).

A2- Si P' es la imagen de P por una traslación T_a, y los puntos P y P' tienen de coordenadas (p_1, p_2) y (p'_1, p'_2) respectivamente, ¿cuáles son las coordenadas del vector a? Justificar la respuesta sin recurrir a los ejemplos de la actividad A1 u otros análogos.

Si conocemos las coordenadas de P' = (p'_1, p'_2), que es la imagen del punto P por medio de una traslación T_a, ¿qué otros datos necesitamos conocer para saber cuáles son las coordenadas de P? Expresar en términos matemáticos la forma de obtener las coordenadas de P.

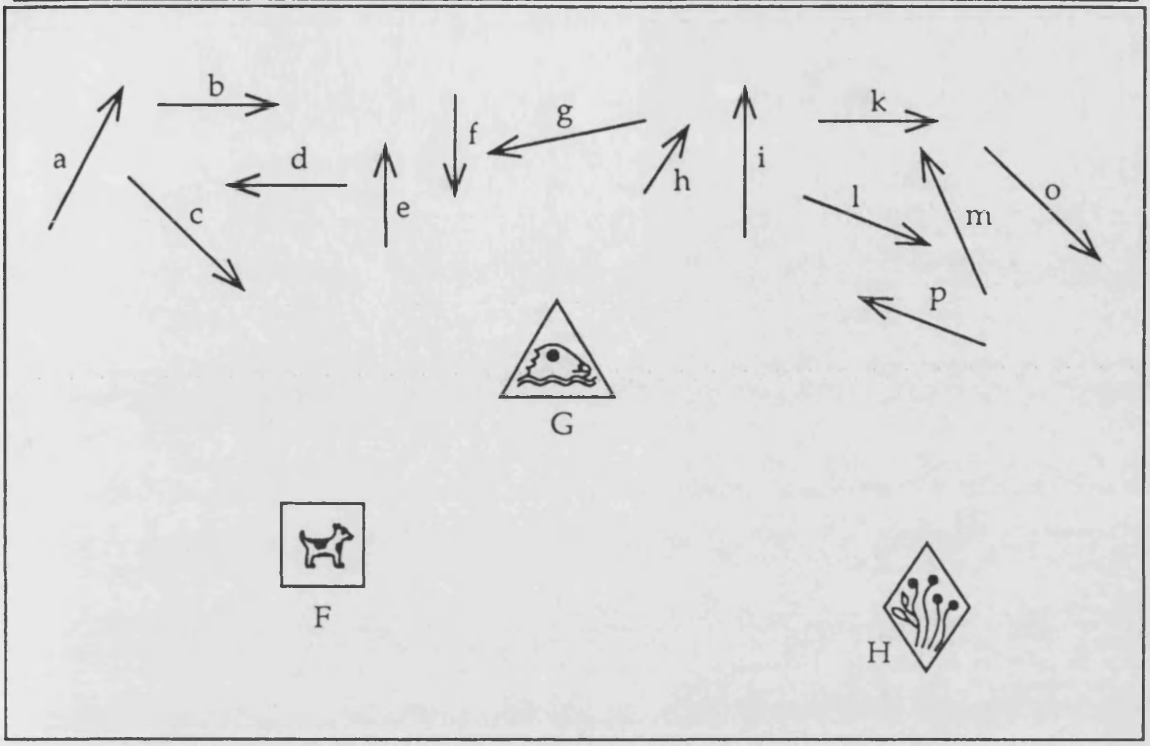
A3- A) A la figura F hay que aplicarle la composición $T_a \circ T_b \circ T_c \circ T_d \circ T_e$. ¿Se puede simplificar esta expresión? Sin aplicar los vectores para mover la figura F y sus imágenes, ¿cómo se puede determinar gráficamente, sin recurrir a las coordenadas de los vectores, el movimiento equivalente a esta composición?

Repetir el ejercicio con otras composiciones de traslaciones, aplicándole directamente a una figura de la lámina el vector de la traslación resultante de la composición.

Describir de manera general el procedimiento gráfico que permite obtener el vector resultante de una composición de traslaciones cuando se conocen los vectores de las traslaciones que forman parte de dicha composición.

B) A una figura F hay que aplicarle la composición $T_a \circ T_b \circ T_c \circ T_d \circ T_e$, cuyos vectores tienen las coordenadas a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2), etc. ¿Se puede simplificar esta expresión? Sin aplicar los vectores para mover la figura F y sus imágenes, ¿cómo se puede determinar el movimiento equivalente a esta composición?

Describir de manera general el procedimiento para obtener las coordenadas del vector resultante de una composición de traslaciones cuando se conocen las coordenadas de los vectores de las traslaciones que forman parte de dicha composición.



A4- (Planteamiento general del problema, por lo que no se proporciona ningún vector concreto). Dada una traslación T_v, ¿es posible descomponerla en un producto de dos traslaciones? En caso afirmativo, ¿cuántas soluciones hay? Justificar los resultados de manera general, gráficamente, sin limitarse a la comprobación de algunos casos.

¿Es posible descomponer T_v en producto de tres, cuatro, ... traslaciones?

A5- A) Dada una traslación T_a de vector a = (3, 1), ¿es posible descomponer esta traslación en un producto de dos traslaciones? En caso afirmativo, ¿qué coordenadas tienen los vectores de estas dos traslaciones? Si ello es posible, proporcionar cuatro soluciones particulares diferentes.

¿Es posible que el vector de una traslación de la descomposición de T_a sea el de coordenadas (5, 2)? ¿Y el de coordenadas (-7, 6)?

B) Dada una traslación T_b de vector b = (b_1, b_2), ¿de cuántas formas se puede descomponer esta traslación en producto de dos traslaciones? Decir qué condiciones deben cumplir las coordenadas de las traslaciones de la descomposición: Si r = (r_1, r_2) y s = (s_1, s_2) son los vectores de las traslaciones que intervienen en la descomposición ($T_v = T_r \circ T_s$), expresar la relación entre (b_1, b_2), (r_1, r_2) y (s_1, s_2).

Si T_b se descompone en producto de tres, cuatro, ... traslaciones, justificar cuántas soluciones hay en cada caso. Proporcionar ejemplos concretos descomponiendo la traslación de vector b = (1, 0) en producto de tres y cuatro traslaciones.

En general, dado el vector $b = (b_1, b_2)$, ¿qué condiciones deben cumplir las coordenadas de los vectores $r = (r_1, r_2)$, $s = (s_1, s_2)$ y $t = (t_1, t_2)$ para que sea cierto que $T_b = T_r \circ T_s \circ T_t$? Justificar las respuestas deductivamente, sin limitarse a comprobar algunos ejemplos concretos.

A6- Enunciar propiedades de las traslaciones para que los alumnos demuestren si son ciertas o falsas y si caracterizan a las traslaciones. Un ejemplo es el siguiente:

- La imagen de un punto P por cierto movimiento es P' y la imagen de otro punto Q por ese mismo movimiento es Q'. ¿Podemos dar algunas condiciones que aseguren que este movimiento es una traslación? O sea, ¿qué relaciones debe haber entre P, P', Q y Q' para que estemos seguros de que el movimiento ha sido una traslación?

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

En el tercer nivel de razonamiento se deben enlazar las tres isometrías (traslaciones, giros y simetrías), por lo que es conveniente realizar también las actividades incluidas en las unidades correspondientes a giros y simetrías, en particular las que relacionan estos movimientos con las traslaciones. La necesaria secuenciación y linealidad de la presentación escrita de esta unidad de enseñanza de las isometrías nos ha aconsejado limitar las actividades propuestas para las fases 2 y 4 de la enseñanza de las traslaciones a aquéllas en las que sólo se requieren conocimientos de traslaciones. Por lo tanto, en ninguna de las dos fases hemos incluido actividades que relacionen traslaciones con giros o simetrías, que están planteadas en las unidades correspondientes al tercer nivel de Van Hiele de dichos movimientos.

Respecto a las experimentaciones llevadas a cabo, prácticamente la totalidad de las actividades que se proponen para el nivel 3 se han utilizado sólo en la de Magisterio, puesto que en las experimentaciones de 3º y 6º de E.G.B. sólo se planteó la instrucción para los dos primeros niveles de razonamiento. A las alumnas de 6º les planteamos algunas actividades de iniciación al tercer nivel de razonamiento, pertenecientes a la secuencia propuesta para esta fase, pero detuvimos la experimentación al observar que, en el poco tiempo disponible, estas alumnas no podrían realizar un avance significativo. En algunos de los párrafos siguientes se pueden leer algunas respuestas de estas niñas que confirman nuestra afirmación anterior.

Según hemos indicado al comentar los objetivos de la fase 1 de este nivel de razonamiento, sugerimos que las actividades A1 y A2, que están diseñadas para cubrir el objetivo 1 de esta fase, sólo se propongan a estudiantes que tengan fluidez en el manejo de la aritmética en Z. Estas actividades marcan un tipo de trabajo típico del inicio de la fase 2, pues inicialmente corresponde al segundo nivel de razonamiento, ya que la actividad A1 plantea situaciones concretas, con puntos y vectores de coordenadas concretas, pero después la actividad A2 plantea la generalización y la demostración abstracta, mediante argumentos lógicos correspondientes al tipo de razonamiento del tercer nivel.

Las actividades A1 y A2 sólo se han utilizado en la experimentación de Magisterio. Estas alumnas necesitaron hacer muy pocos ejercicios concretos (A1) para deducir la relación general; únicamente hubo algún pequeño problema ocasionado por su olvido o falta de dominio de las operaciones aritméticas con los números negativos. Estas alumnas sí llegaron a establecer por sí mismas las relaciones generales entre las coordenadas de los puntos origen e imagen y las del vector de traslación, expresando las relaciones correspondientes en términos matemáticos abstractos (A2).

La actividad A3 está dirigida a cubrir el objetivo 2 de esta fase. En A3-A el énfasis está en la utilización gráfica de los vectores, para obtener el vector de la traslación resultante mediante la suma de los vectores de las traslaciones que se componen. El interés radica en que los alumnos deduzcan el procedimiento general, a partir de los conocimientos que poseen sobre la composición de traslaciones adquiridos en la fase 4 del segundo nivel. El objetivo de esta parte de la actividad es que los estudiantes establezcan la relación entre la suma de vectores y la composición de traslaciones de manera general y que lleguen a describir y justificar dicha relación sin referirse a ejemplos concretos. En la actividad A3-B el planteamiento es similar al anterior, pero referido a las coordenadas del vector de la traslación resultante de la composición.

En las actividades que propusimos en las experimentaciones de 6º de E.G.B. y en Magisterio, las alumnas hicieron las simplificaciones oportunas por sí mismas, sin necesidad de que lo pidiera la profesora, si bien en 6º de E.G.B. no lo hicieron todas las alumnas.

Respecto a la actividad A3-B, recordemos que las estudiantes de 6º no sabían manejar los números negativos, por lo que el sistema de coordenadas que utilizaron se basaba en los términos derecha-izquierda y arriba-abajo. Además, dos de las niñas, Marta e Inmaculada, a veces calculaban las coordenadas de los vectores inclinados midiendo en la dirección del vector; esto provocó algunas descripciones ambiguas, tal vez porque todas las alumnas veían los vectores y no necesitaban especificar todos los datos (actividad 13 de la experimentación, lámina 6-T-13.2):

Marta [refiriéndose al vector (2, -2)]: *El vector 1 es dos cuadros en diagonal hacia la derecha, pero pasando por el medio* [le falta añadir que el movimiento es hacia abajo].

....

Inmaculada [refiriéndose al vector (3, -1)]: *Tres.*
Prof.: *¿Tres hacia abajo?*
Inmaculada: *No. Es que lo lleva en la misma línea.*

De todas formas, las alumnas de 6º fueron capaces de obtener las coordenadas del vector resultante de una composición de hasta 4 traslaciones después de que haber aplicado paso a paso las traslaciones de la composición a un punto o una figura. A continuación la profesora les pidió que calcularan las coordenadas del vector resultante sin realizar los movimientos; al poco tiempo consiguieron resolver el problema, trabajando por separado con la primera y segunda coordenadas de los vectores. No obstante, su desconocimiento de los números negativos hizo este proceso laborioso y lento.

En la experimentación de 6º propusimos la actividad A3-A después de la A3-B. Por este motivo, parte de las niñas la resolvieron por un procedimiento mixto: Calculaban las coordenadas de un vector con una regla para luego dibujar dicho vector a partir de un vértice de la figura a trasladar, no suponiendo ninguna dificultad adicional el uso de papel no cuadriculado. Sólo una de las cuatro niñas utilizó el trazado de paralelas en esta actividad.

En la experimentación de Magisterio la única dificultad especial en la actividad A3 se debió a los conocimientos previos que tenían las estudiantes del uso de vectores en Física, fundamentalmente Ara (ella misma dice: *Esto es Física*, en la actividad 21 de la experimentación), lo cual ocasiona la aplicación incorrecta de algunas fórmulas. Por ejemplo, en la actividad 24 de la experimentación, equivalente a la A3-A, Ara recuerda la relación "extremo menos origen" para determinar el sentido del vector resultante, pero al aplicarla obtiene el sentido inverso al correcto.

Posteriormente, en la misma actividad, al trabajar con una composición de más de dos traslaciones, Ara calcula el vector resultante de las dos primeras traslaciones, después el resultante del anterior y la tercera traslación, etc. El procedimiento es correcto (propiedad asociativa) pero más largo de lo necesario. En cuanto la profesora le hace ver que obtener las imágenes sucesivas de un punto de la figura por las traslaciones lleva a la imagen final, Ara se da cuenta de que no es necesario el proceso que ella empleaba; ella misma lo dice:

Ara: *Hay que unir el origen del primer vector con el extremo del último vector.*

Las estudiantes de Magisterio resolvieron correctamente la actividad equivalente a la A3-B, en la cual, además, se les pidió que calcularan las coordenadas de la imagen de un punto $M = (m_1, m_2)$ por una composición de traslaciones. Al principio utilizaron dos estrategias diferentes (actividad 26 de la experimentación): Mientras una calculaba el vector resultante (sumando las coordenadas de los vectores de la composición) y después sumaba esas coordenadas a las del punto M, la otra alumna sumaba directamente las coordenadas de los vectores y de M. Pero al pedirles la profesora que generalizaran los resultados, ambas enunciaron la misma fórmula, $(m'_1, m'_2) = (m_1+v_1+t_1, m_2+v_2+t_2)$, la cual después la empleaban siempre.

Las actividades A4 y A5 están relacionadas con el objetivo 3 de esta fase. Igual que para la composición de traslaciones, ahora, para la descomposición, primero se plantea el problema basado en la representación gráfica de los vectores de las traslaciones (actividad A4) y después basado en las coordenadas de los vectores (actividad A5).

En la experimentación de 6º, esta actividad sólo se les planteó a dos de las cuatro niñas y se puede ver claramente en sus respuestas que razonaban en el segundo nivel de Van Hiele, por lo que terminó aquí la experimentación de la unidad de enseñanza de las traslaciones en este curso.

Influidas por el uso de las coordenadas, la primera solución de descomposición de una traslación en producto de otras dos que dan estas niñas es siempre el par de vectores vertical y horizontal. Al poco tiempo Rebeca se dió cuenta de la existencia de "muchas" posibilidades, de que podía obtener tantas descomposiciones como deseara. Por el contrario, Marta solo podía ver *siempre los dos mismos vectores;* después de un rato de tanteo, fue capaz de encontrar algunas soluciones más, pero siempre las percibía como casos concretos, sin conexión entre ellas. En el siguiente diálogo se nota que Marta no tuvo la capacidad de generalización de Rebeca (actividad 14 de la experimentación):

Prof. [después de que Marta haya encontrado una descomposición de una traslación]: *¿Y otra solución?*
Marta: *No sé. Espera que piense.*

La profesora le pidió a Rebeca que indicara otras posibilidades. Rebeca dio tres ejemplos (con anterioridad ya se había puesto de manifiesto que Rebeca había comprendido la generalización del resultado). Marta también encontró otras soluciones y descubrió cómo conseguir distintas soluciones.

Prof.: *¿Cuántas soluciones puedes encontrar?*
Rebeca: *Muchas.*
Marta [empieza a contar]: *1, 2, ... muchas.*
Prof.: *¿Muchísimas?*
Marta: *Pues no sé. No me voy a pasar toda la vida comprobando.*
Prof.: *¿Tienes que irlo comprobando?*
Marta: *Sí.*

Las alumnas de Magisterio realizaron estas actividades siguiendo pasos análogos a los que se plantean en la secuencia propuesta en esta memoria. Esto resultó adecuado, obteniendo las alumnas las descomposiciones y justificaciones pedidas en las actividades y utilizando la notación matemática correcta para vectores, coordenadas y relaciones, notación en la que no fue necesario insistir, pues la emplearon por su propia iniciativa, sin que la profesora tuviera que pedirla explícitamente. En cuanto a la infinidad de descomposiciones de una traslación, veamos el diálogo entre estas alumnas, ante una situación análoga a la planteada a las alumnas de 6º, la cual hemos transcrito arriba:

Merche: *Se pueden hacer muchas.*

Prof.: *¿Muchas cuántas son?*

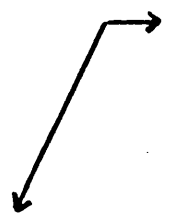
Ara: *Bastantes.*

Merche: *Una infinidad ... Podemos coger todas las coordenadas de todos los ...* [no termina la frase].

Ara: *Podemos coger un segmento muy largo. No sé. Muchas.*

Merche: *Yo diría que infinitas. Porque puedes coger lo que quieras. Puedes coger uno así de largo* [coloca las manos separadas] *u otro.*

Ara: *Claro. Puedes coger uno pequeñito y otro muy largo; puedes coger dos largos, iguales o grandes; éste muy pequeñito y éste muy grande* [Ara dibuja dos vectores (ver dibujo) y hace referencia a variaciones sobre ellos].



Prof.: *¿Y cuántos pequeñitos y grandes hay?*

Ara: *Muchos. Yo creo que infinitos.*

Merche: *Yo creo que sí hay infinitas. Porque hay infinitos vectores que al sumarlos den ése.*

Finalmente, la propiedad que planteamos en A6 tiene relación con el objetivo 4 de esta fase y parcialmente con el objetivo 5. Por la actuación de las alumnas se puede ver que este ejercicio sí resultó adecuado para empezar a modificar su comprensión de la demostración matemática desde una perspectiva del nivel 2 de razonamiento a una del nivel 3: Por una parte, cambió su consideración de la propiedad enunciada, pasando de verla como condición necesaria a condición suficiente. Por otra parte, cambió su tipo de confianza en de la veracidad de dicha propiedad, pasando de una base experimental del razonamiento a otra de demostración general deductiva.

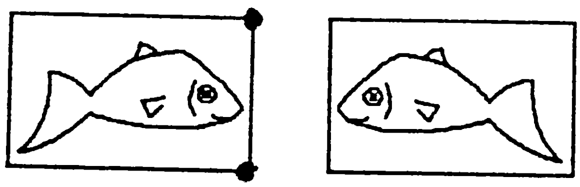
Al plantear esta propiedad a las estudiantes de Magisterio y analizar sus respuestas, podemos ver que Merche sí se dió cuenta desde el principio de que lo que se pedía era una condición suficiente, y su forma de razonar mostraba que tenía clara la diferencia entre condiciones necesarias y suficientes. Sin embargo, Ara se mantuvo en la búsqueda de una condición necesaria, justificando que eso se tiene que cumplir, sin darse cuenta de que no era lo que se pedía. Después de que la profesora leyera el enunciado de la propiedad, se estableció el siguiente diálogo (última actividad, 28, de la experimentación):

Ara: *Sí porque a P le habremos sumado el mismo vector que a Q; la misma longitud, por así decirlo.*

....

Merche: *Pero con dos sólo vimos que no se podía. En el pez ...* [no acabó la frase porque intervino Ara. Merche hacía referencia a la lámina M-T-9.1 en la que había visto, en la sesión correspondiente, que en dos peces simétricos, dos vértices y sus correspondientes imágenes se podían unir mediante vectores iguales en dirección, módulo y sentido. La lámina no se pone a la vista hasta un poco después].

Ara: *Pero da igual. La longitud tiene que ser la misma.*

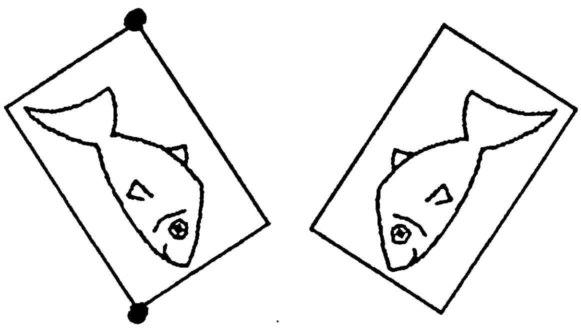


Merche: *Ahí* [en la lámina M-T-9.1] *era la misma y no era una traslación.*

Ara: *Esa es una condición que yo digo. No digo que sea la única. Hay más condiciones.*

Merche: *Pero hay* [movimientos] que *la cumplen y no son traslaciones.* [Sacamos la lámina M-T-9.1, de los peces simétricos] *Que éste fuera el P y éste el Q* [Merche señaló los vértices marcados en el primer dibujo]. *Ahí hay la misma distancia y no es una traslación. Si los vértices fueran opuestos, sí.*

....



[La profesora dibujó un contraejemplo (ver el segundo dibujo) a la situación planteada por Merche].

Merche: *Deberían ser los cuatro* [vértices los que tuvieran la misma distancia a sus imágenes].

Prof.: *¿Por qué?*

Merche: *El número de vértices. No. Con* *tres ya sería* [suficiente]. *Sí. Ese es más largo* [señala el segmento que une otro de los vértices y su correspondiente en la figura anterior].

Prof.: *Tú te fijas en ese dibujo, ¿no?* [el dibujo hecho por la profesora]

Merche: *Sí.*

Ara: *Continúo pensando lo que he dicho antes: Que sumándole un mismo vector nos dará siempre un P', un Q' y nos dará todos los vértices.*

Prof.: *Pero lo que te dicen es que te dan las coordenadas de un punto P y de P', de Q y de Q'. ¿Qué tiene que pasar para que estés segura de que se trata de una traslación?*

Ara: *Que tengan la misma longitud, pero los vértices que se corresponden.*

Prof.: *En esta figura que yo he hecho, en estos dos puntos hay la misma longitud* [la profesora señala los vértices opuestos, paralelos al eje de simetría, y sus correspondientes imágenes].

Ara: *Esos puntos no se corresponden.*

Prof.: *Sí se corresponden, pero es una simetría. La longitud es la misma. Entonces, el hecho de que la longitud ésta, para pasar de aquí a aquí, sea la misma que para pasar de aquí a aquí* [señala unos puntos P, P', Q y Q' que Ara había marcado al principio de la actividad y que no pertenecen a ninguna figura], *incluso la misma dirección y el mismo sentido, ¿eso te garantiza que sea una traslación o no?*

Ara: *No.*

Como se ve, este proceso de cambio en las concepciones de las alumnas requirió la orientación constante por parte de la profesora, por lo que es necesario realizar varias actividades con esta finalidad en la fase 2.

Fase 4 del Nivel 3

Objetivos:

1- Comprender el planteamiento y desarrollo de algunas demostraciones formales sencillas. Demostrar algunas propiedades ya conocidas.

2- Entender la concatenación de los pasos de una demostración que se haya estudiado anteriormente y adaptarla a otro teorema cuando la variación de planteamiento y desarrollo sea pequeña.

3- Completar demostraciones formales, presentadas por el profesor, realizando algunas implicaciones simples que no aparecen explícitamente.

Actividades:

A1- Demostrar que la composición de traslaciones es conmutativa, basándose en la representación gráfica de los vectores de traslación. Demostrar esta propiedad también mediante el uso de coordenadas.

A2- Demostrar que las traslaciones son isometrías, es decir: Dado un segmento PQ, demostrar, aplicando la definición de traslación, que su imagen P'Q' por la traslación T_v tiene su misma longitud.

Como introducción a las demostraciones formales, los estudiantes deben:

- identificar las partes del enunciado del teorema,
- demostrar este teorema informalmente,
- repetir una demostración formal desarrollada por el profesor, identificando el argumento general de razonamiento y justificando cada uno de los pasos.

A3- Dar a los estudiantes los enunciados de varias propiedades de las traslaciones para que verifiquen si son verdaderas o falsas y hagan las demostraciones correspondientes. Algunos enunciados pueden ser los siguientes:

- La imagen de una línea recta por una traslación es una línea recta. Además, cada recta y su imagen son paralelas.
- Dada T_v, para todo punto P del plano, si $P' = T_v(P)$, se cumple que $P \neq P'$.

- Basta comprobar que los segmentos que unen dos puntos y sus respectivas imágenes son de la misma longitud para saber que el movimiento realizado es una traslación.

- Dada T_v, para todo par de puntos P y Q del plano, si P' y Q' son sus imágenes por la traslación, se cumple: i) d(P,P') = d(Q,Q'). ii) d(P,Q) = d(P',Q'). iii) d(P,Q') = d(P',Q).

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

Ya hemos comentado con anterioridad que, en la propuesta de actividades de traslaciones para las fases 2 y 4 de este nivel, sólo incluimos actividades que tengan que ver exclusivamente con las traslaciones, dejando para las unidades dedicadas a los giros y las simetrías la ampliación del estudio de las traslaciones. Este motivo por el cual, no se plantean ciertas propiedades importantes de las traslaciones.

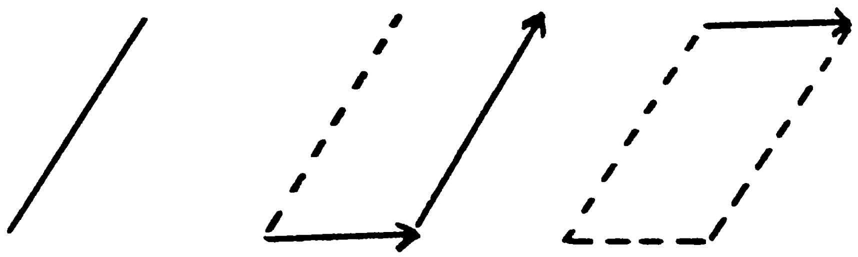
En la experimentación de Magisterio la actividad A1 se propuso algo prematuramente, pues los estudiantes no habían recibido instrucción suficiente del segundo nivel, por lo cual la alumna que intentó hacer una demostración general actuó intuitivamente. De todas maneras, en los comentarios que hacemos un poco más adelante se puede ver el razonamiento de nivel 3 al intentar analizar los casos posibles según las direcciones de los vectores.

En la experimentación con ese mismo grupo, la introducción a la conmutatividad de la composición de traslaciones tuvo lugar mediante un ejercicio en el que las alumnas aplicaron a la misma figura las dos composiciones asociadas. Como era de esperar, estas alumnas generalizaron inmediatamente la propiedad, por lo que la profesora les planteó que demostraran su validez general. Ara se basó en la analogía (y tal vez en la interpretación cartesiana de las traslaciones) para su justificación (actividad 24 de la experimentación):

Ara: *Porque da lo mismo sumar* $4 + 5$ *que* $5 + 4$.
Prof.: *Pero ahora son vectores, no números.*
Ara: *Pero da lo mismo. Yo creo que da lo mismo.*

Al pedirles una demostración más rigurosa, Merche inició un análisis de casos, según las posiciones de los vectores: los dos vectores horizontales (Ara planteó que si eran verticales sería igual) e inclinados (en realidad su clasificación debería haber sido en vectores con la misma dirección y con direcciones diferentes, pero Merche no fue capaz de identificarla explícitamente). En el diálogo que presentamos a continuación se ve que Merche no organiza bien los pasos de su justificación, pues los vectores que traza sucesivamente (y que mostramos en los dibujos) no son los adecuados en el momento que los dibuja. Un poco más adelante, al afirmar que no comprende por qué se produce la conmutatividad, se pone de manifiesto que el razonamiento que sigue no es de nivel 4, puesto que no intenta establecer una cadena hipótesis - demostración - conclusión para demostrar la propiedad.

Merche: *Si están torcidos, da lo mismo hacer uno después del otro. Esto mismo* [traza un vector inclinado, que mostramos en el dibujo de la izquierda] *será lo mismo que si hago así* [Merche traza el vector inferior horizontal y el inclinado de la derecha. Ver el dibujo del centro] *y después así* [Merche traza el vector superior del dibujo de la derecha].



Prof.: *Esta figura que estás dibujando ahí, ¿qué será? Tú has hecho este dibujo para explicarlo. En ese dibujo, ¿qué ves? Tú dices: Si compongo éste y luego éste* [izquierdo y superior] *da lo mismo que si compongo éste y luego éste* [inferior y derecho].

Merche: *Sí.*

Prof.: *¿Por qué?*

Merche: *No lo sé.*

Prof.: *Tú te has basado en este dibujo ... Explica el razonamiento: Has puesto a y b. La composición de a y b es ésta. Luego* [has puesto] *b y a. La traslación resultante es ésta. ¿Por qué sale lo mismo? ¿Qué es lo que te lo asegura? ¿Esta figura qué es?*

Merche: *Un paralelogramo.*

Prof.: *¿Por qué?*

Merche: *Porque tiene los lados paralelos dos a dos.*

Prof.: *Entonces es la misma diagonal. Si poneis los vectores, éste es paralelo a éste y éste paralelo a éste. Entonces tenemos la diagonal del paralelogramo.*

Esto hace pensar que una organización de la enseñanza que cubra los objetivos de la fase 2 del tercer nivel antes de plantear la actividad A1 sí les permitirá a los estudiantes tener los conocimientos y la capacidad de razonamiento necesarios para resolver la cuestión propuesta, reduciendo la componente intuitiva y las imprecisiones que se produjeron con las alumnas de la experimentación.

Respecto a las actividades A2 y A3, su planteamiento y el tipo de respuesta que se debe pedir a los estudiantes corresponde al tercer nivel, por la consideración matemática de unas propiedades con un marcado carácter visual y ya conocidas con anterioridad. Este tipo de propiedades tan evidentes tienen la peculiaridad de que los estudiantes que razonan en el segundo nivel de Van Hiele no comprenden qué hay que demostrar, o por qué hay que demostrar algo tan obvio. Con la actividad A2 tratamos precisamente de mejorar la compresión por los estudiantes de esta necesidad de demostración.

La actividad A3 plantea la verificación de propiedades de las traslaciones y su demostración. También surge al papel de los contraejemplos como demostración de la falsedad de una propiedad. Generalmente, las demostraciones tendrán que ser guiadas por el profesor, para lograr que los estudiantes afiancen su convencimiento de la necesidad de las demostraciones deductivas y vayan más allá de la simple comprobación de algún ejemplo. Como en otras actividades similares a ésta, no proponemos ningún conjunto de propiedades que los alumnos deban estudiar necesariamente, sino que planteamos una actividad abierta que cada profesor puede organizar según su propio criterio e intereses. Nosotros planteamos cuatro propiedades a modo de ejemplo.

En la experimentación de Magisterio se pudo comprobar, una vez más, algo conocido por cualquier profesor de matemáticas: Que los estudiantes aprenden a demostrar la falsedad (mediante contraejemplos) mucho antes que la veracidad (sin poder recurrir a los ejemplos) de las propiedades. Así, al plantear el tercer enunciado de la actividad A3, se generó el siguiente diálogo:

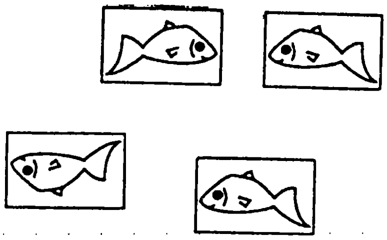
Merche: *Con dos sólo no. Porque me acuerdo del otro día. Eran dos peces* [busca la lámina M-T-9.1 resuelta en una sesión anterior; ver el dibujo de la página siguiente]. *Son dos segmentos de la misma longitud y no son paralelos.*

Prof.: *Exactamente. Con dos sólo no es suficiente. Ara, ¿estás de acuerdo?*

Ara: *Sí.*

Prof.: *Y si con dos no es suficiente, ¿qué pasa?*

Merche: *Tendría que ser con cuatro por lo menos ...* [posteriormente se ve que Merche está pensando en los cuatro vértices] *No. Con 4 no porque ...* [se pone a mirar los peces de la lámina].



Ara: *Pruebas con todos los vértices. Si no te da la misma longitud, entonces es que no es traslación.*

Prof. [a Merche]: *Y tú que decías con 4 puntos, mira: ¿Este punto no es también de la figura? Pues la distancia es la misma. Y con este punto también* [la profesora le muestra a Merche un contraejemplo a su afirmación anterior: Señala, en los peces simétricos, varios puntos situados sobre el lado paralelo al eje de simetría, con lo cual todos los segmentos correspondientes son de la misma longitud].

Merche: *Yo decía 4 vértices.*

Como se ve, en el tercer nivel de razonamiento en Geometría, todavía tienen mucha influencia la representación gráfica y los dibujos, pues los estudiantes utilizan a menudo propiedades implícitas de las que no llegan a ser conscientes. En este caso, Merche planteaba que si los cuatro vértices de un rectángulo verifican la hipótesis del enunciado (los segmentos que unen cada punto y su imagen tienen la misma longitud), entonces el movimiento es una traslación. En realidad, lo que planteaba era un caso particular de la utilización de cuatro puntos no alineados.

2.7. Propuesta de enseñanza de los Giros.

GIROS: NIVEL 1

Objetivos:

Las actividades que planteamos para este nivel pretenden lograr los objetivos generales siguientes, que más adelante desglosaremos en las diferentes fases de aprendizaje:

1- Reconocimiento de la característica que poseen los giros de ser **isometrías** (el tamaño y la forma de las figuras se conservan).

2- Reconocimiento y realización de giros de manera directa sirviéndose de materiales auxiliares (por ejemplo, discos, palillos, ruedas). Identificación del tipo de desplazamiento (circular).

3- Descubrimiento y empleo de características visuales de los giros: Desplazamiento circular, cambio de posición, equidistancia al centro, no inversión de la figura.

4- Utilización de vocabulario apropiado relacionado con los giros: Giro, centro, distancia, recorrido circular, inclinación, imagen, ...

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

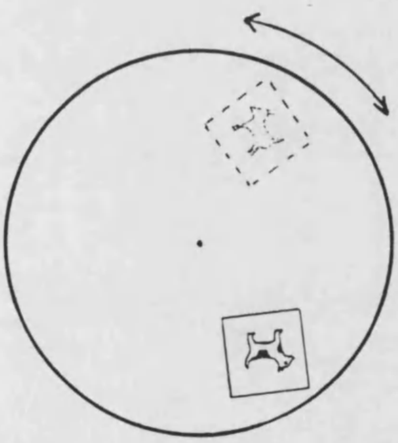
El enfoque global, en el cual se basa el razonamiento del primer nivel, se centra, en el caso de los giros, en la consideración de un desplazamiento alrededor de un punto u objeto fijo. En este nivel de razonamiento, hay que fomentar también la consideración del cambio de inclinación que va experimentando una figura a lo largo de su recorrido (objetivo 2).

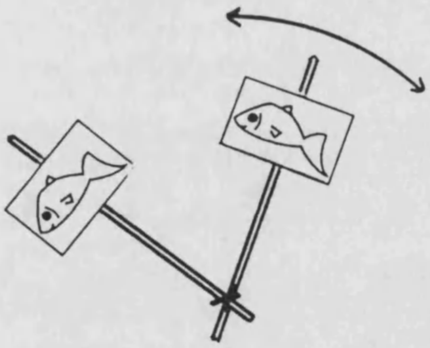
La manipulación con materiales adecuados debe facilitarles a los estudiantes la visión señalada anteriormente, tanto cuando el centro de giro es interior a la figura objeto del movimiento como cuando es exterior.

A diferencia de lo que ocurre con las simetrías y el espejo o el mira, no hay ningún material estandarizado que produzca giros de manera automática, sin necesidad de manipulación. Por este motivo, como parte de esta investigación, hemos experimentado con varios materiales. En particular, hemos empleado discos transparentes y palillos (Jaime y otros, 1989).

Los discos transparentes son círculos de hojas de acetato con su centro marcado. Para girar una figura, se coloca el disco con su centro sobre el de giro, se calca o pega una figura como la que hay que girar, se pincha por el centro del disco con algún objeto punzante y se le dan vueltas (ver dibujo). Para obtener una copia sobre el papel, se pinchan los vértices o puntos extremos de la pieza o dibujo, se retira el disco y se ajusta la imagen a las marcas.

Los palillos son palitos o tiras de cartulina. En este caso debe haber piezas recortadas como la que que es objeto del giro. Para girar una figura, se sitúa el palillo de manera que pase por el centro de giro y por la figura. Se pega sobre el palillo una pieza igual a la que hay que girar, en su mismo lugar y con la misma inclinación; se sujeta o pincha el palillo por el centro del giro y se le dan vueltas (ver dibujo). Para obtener una copia sobre el papel, se pinchan los vértices o puntos extremos de la pieza, se quita el palillo y se ajusta la imagen a las marcas.





En las actividades se utilizarán estos materiales para efectuar giros de figuras, para permitir a los estudiantes observar el desplazamiento de las figuras y para comprobar la exactitud de las respuestas obtenidas.

No hemos considerado el compás como herramienta de apoyo en las actividades del nivel 1, ya que en este nivel se debe conseguir una familiaridad con el efecto visual (cambios de posición y de inclinación) producido al girar figuras, lo cual no se puede observar al girar puntos aislados. No obstante, cuando los estudiantes saben manejarlo, el compás puede resultar útil en algunas actividades para dibujar circunferencias, en lugar de trazarlas a mano alzada.

La visión primaria de giro, como algo que da vueltas, incluye las características a las que hacemos alusión en los objetivos 1 y 3: Conservación del tamaño y forma de las figuras (primer objetivo) y desplazamiento circular, cambio de posición y equidistancia al centro de giro (tercer objetivo). Respecto a estas últimas, no pretendemos desarrollar una consideración puntual y precisa, sino global y aproximada; en particular, la equidistancia se entiende como recorrido circular.

El último objetivo se refiere al aprendizaje necesario del vocabulario asociado a los giros. La concreción de este objetivo depende de la edad de los estudiantes y sus conocimientos geométricos. Con frecuencia los niños de los cursos inferiores de Primaria conocen algunos elementos relacionados con los giros (por ejemplo los sentidos de giro), pero no han aprendido a referirse a ellos con propiedad. Por lo tanto, el profesor deberá proporcionar oportunidades para que los alumnos reconozcan la necesidad de usar un vocabulario más exacto y lo practiquen.

Fase 1 del Nivel 1

Objetivos:

1- Toma de contacto con el concepto de giro.

2- Información sobre los conocimientos previos elementales que tienen los alumnos acerca de los giros.

3- Introducción de herramientas de ayuda y métodos informales empleados para la realización de giros (palillo, disco).

4- Información sobre el vocabulario que poseen los estudiantes al hablar de giros, unificación de términos y significados entre profesor y alumnos e introducción de vocabulario específico nuevo (centro, movimiento circular, ...).

Actividades:

A1- Dar y pedir ejemplos de giros del entorno escolar y externos a la escuela. Pedir a los alumnos que expresen lo que entienden por giro o por girar un objeto.

A2- Pinchar, sucesivamente, por un vértice, otro punto del contorno y un punto interior una figura con algún dibujo y darle vueltas en cada uno de esos casos, parándola en diversas posiciones a lo largo del recorrido y pegando piezas iguales en el lugar correspondiente.

A3- Sobre un disco transparente, en el que está marcado el centro, pegar una figura. Colocar el disco sobre una hoja de papel en blanco y darle vueltas, pinchando por su centro. Situar varias piezas a lo largo del recorrido. Pedir a los alumnos que describan el desplazamiento.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

La información que el profesor debe obtener en esta primera fase, sobre los conocimientos que poseen sus alumnos en relación con los giros, se pueden conseguir observando cómo resuelven los estudiantes determinadas actividades y formulándoles preguntas sobre qué resultado creen que obtendrán o por qué han dado cierta respuesta. Si los alumnos ya han estudiado con anterioridad los giros, el profesor puede plantear problemas para los que se necesiten niveles de razonamiento cada vez más elevados, con el fin de averiguar dónde empiezan las carencias de sus alumnos.

La actividad A1 revela en términos generales lo que los alumnos entienden por girar, giro, ... y le proporciona al profesor la primera información sobre los conocimientos y familiarización de los alumnos en relación a los giros. En todas las experiencias que hemos llevado a cabo, los ejemplos de giro espontáneos que proporcionaron los alumnos fueron casi exclusivamente tridimensionales: *La Tierra, el Sol, una noria, las aspas de un molino, ...* fueron los principales ejemplos dados por los niños de 3º de E.G.B. En cuanto a los estudiantes de 6º de E.G.B., los ejemplos que propusieron fueron *la Tierra* y *Los discos de música*. En Magisterio, los ejemplos espontáneos correspondieron también al espacio, por lo que después se les pidió a las alumnas expresamente que dieran ejemplos de giros en el plano. Una de ellas sí proporcionó uno, un disco, pero la otra no supo dar ninguno.

Las explicaciones de esta última alumna eran confusas, con una terminología que denotaba claramente que en su experiencia escolar había trabajado en algún momento con giros en el espacio, pues siempre se refería a rotaciones alrededor de un eje: *Esto* [un tubo cilíndrico de pegamento] *gira sobre su eje central ... En un giro la distancia al eje de todos los puntos es constante.*

Las actividades A2 y A3 sirven de toma de contacto con la visión dinámica de los giros en el plano y sus efectos sobre una figura, introduciendo a los estudiantes en el entorno en el que se desarrollará esta propuesta de aprendizaje. Las dos actividades son complementarias, ya que en la primera se trata el caso de las figuras que contienen el centro de giro (que manipulativamente es el más fácil) y en la segunda el caso de las figuras que no lo contienen.

En este par de actividades se debe poner el énfasis en la observación global del movimiento de giro, sin entrar en analizar en detalle las propiedades de mantenimiento de la distancia de las figuras al centro o variación de su inclinación. Salvo que los estudiantes ya conozcan estas propiedades, su empleo riguroso son objetivos de la fase 2 de este nivel.

Los medios y métodos propuestos en estas actividades (dar vueltas a la figura, tras pincharla o situarla sobre un disco transparente o un palillo) les permiten a los alumnos percibir qué es un giro y disponer de herramientas para el trabajo que se realizará posteriormente. En todas las experiencias llevadas a cabo, esos instrumentos mostraron su eficacia, pues los alumnos se sirvieron de ellos para diversas tareas de realización, verificación y corrección de giros.

Desde los primeros ejercicios el profesor puede hacer uso de vocabulario matemático (giro, centro, ...) para ir familiarizando a sus alumnos con esos términos. En las experiencias efectuadas se aprecia que la simple mención de esos vocablos por parte del profesor provoca su utilización, o al menos la posibilidad de empleo, por parte de todos los alumnos. En ocasiones, generalmente en los primeros cursos de E.G.B., los estudiantes tardan en empezar a usar espontáneamente estos términos, aunque los comprenden sin dificultad cuando los utilizan el profesor u otros estudiantes.

Fase 2 del Nivel 1

Objetivos:

1- Reconocimiento de la característica de los giros de ser isometrías (no cambia el tamaño ni la forma) y de la conservación de la orientación.

2- Introducción y utilización de vocabulario básico: Giro, girar, centro de giro, imagen, ...

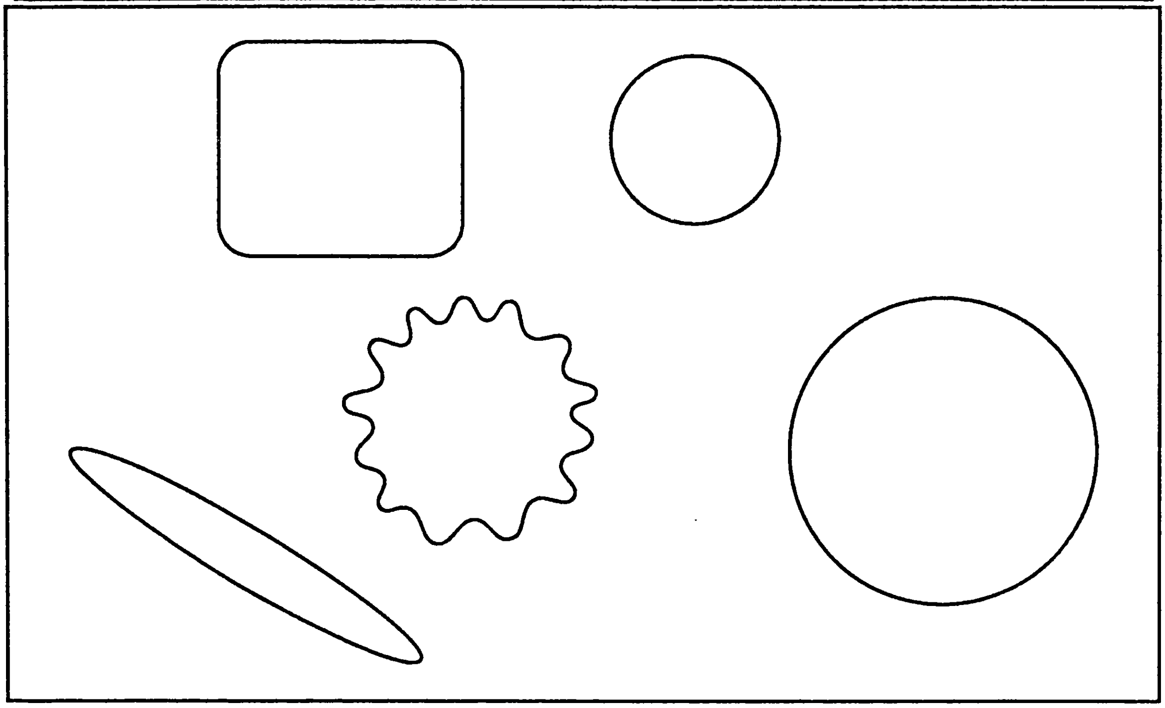
3- Empleo correcto de métodos y materiales adecuados para realizar o identificar un giro: Pinchar sobre el centro de giro si está en la figura; usar un disco, palillo, ... cuando el centro de giro es exterior a la figura.

4- Identificación visual de grupos de figuras giradas o no giradas, en situaciones claramente distinguibles visualmente.

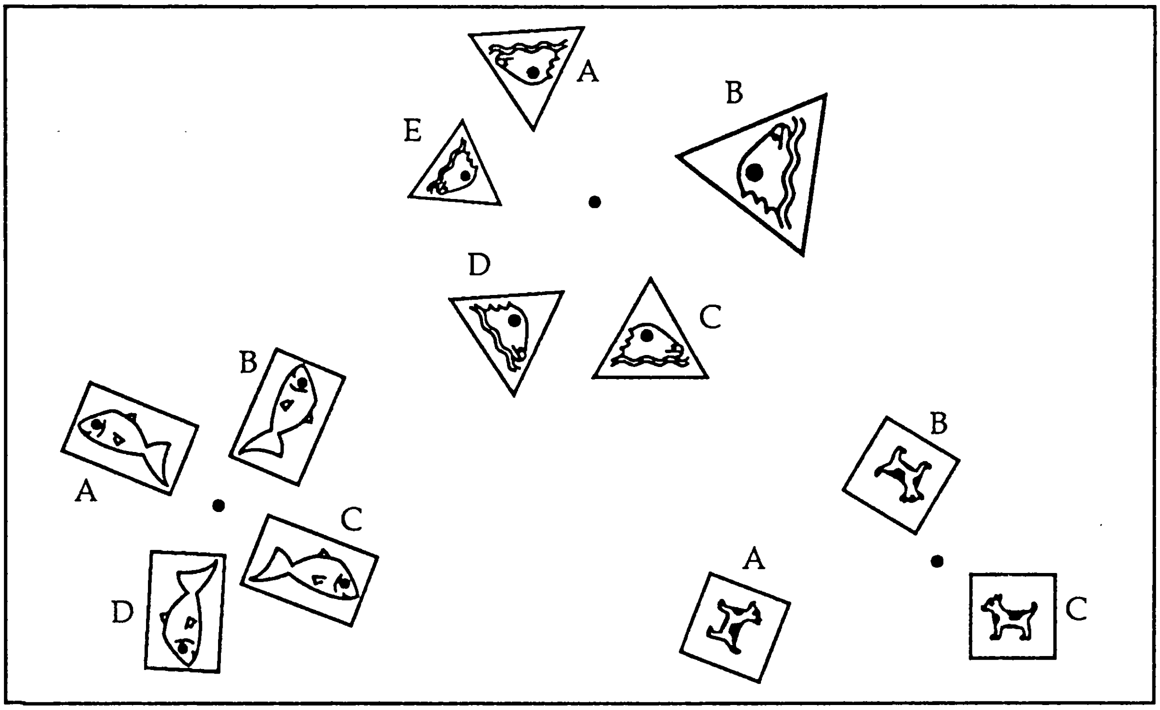
Actividades:

A1- Dados una figura y un punto, realizar giros sirviéndose de algún material auxiliar, tomando como centro el punto especificado (incluir casos con el centro de giro en el interior, en el contorno y en el exterior de las figuras).

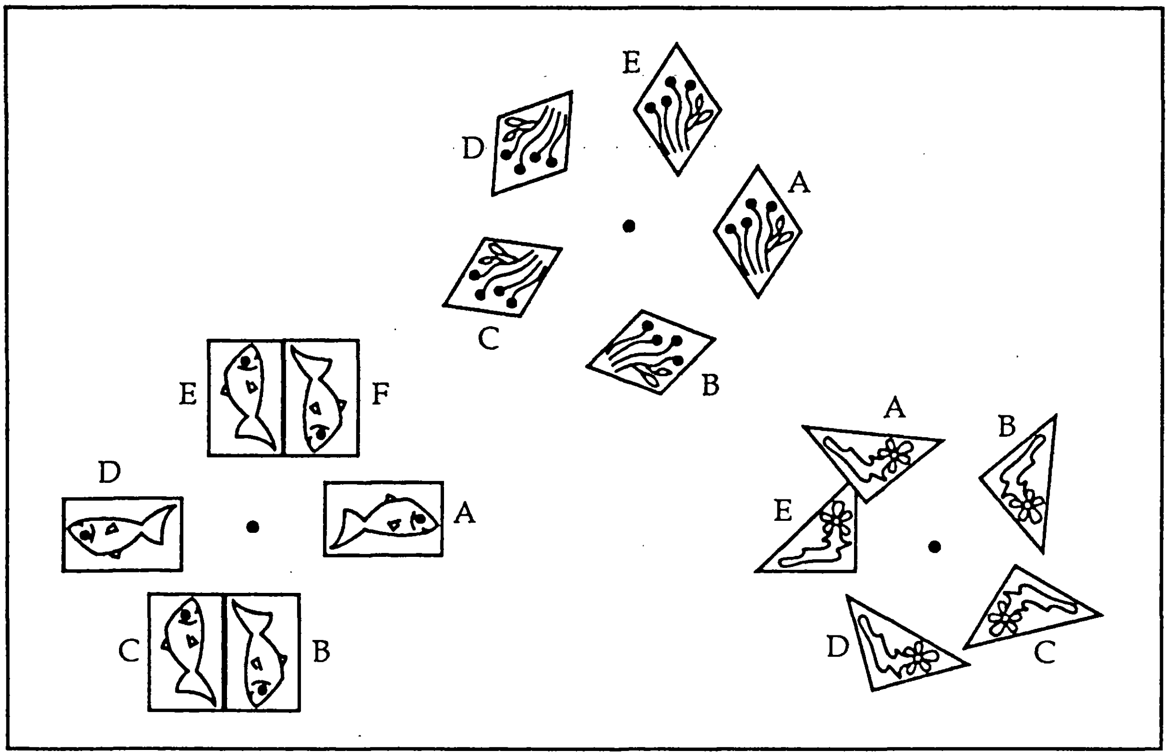
A2- Dadas varias líneas, algunas de las cuales son circunferencias y otras no, reconocer cuáles corresponden a recorridos de giros y cuáles no.



A3- Dados un punto y un conjunto de figuras, identificar las que se corresponden mediante un giro con centro en el punto especificado (los casos negativos deben corresponder a variaciones claras de tamaño o forma, a inversión de la figura y a diferencias acusadas en la distancia al centro de las figuras no giradas respecto a las giradas).



A4- Dados un punto y un conjunto de figuras, identificar las que se corresponden mediante un giro con centro en el punto especificado (los casos negativos deben corresponder a diferencias muy acusadas en la inclinación de las figuras no giradas respecto de las giradas).



-◊-◊-◊-◊-◊-◊-

En las actividades A3 y A4, los alumnos deben servirse del arrastre manual de las figuras a lo largo de la circunferencia y de los métodos y herramientas ya conocidos (pinchar, disco o palillo) para resolver el ejercicio. Además, después de resolver los primeros casos de esta manera, el profesor les pedirá en los ejercicios siguientes que, antes de llevar a cabo las comprobaciones, conjeturen la respuesta a partir de su juicio visual.

Mediante las actividades A1 y A2 se pretende afianzar la base manipulativa necesaria para el trabajo de nivel 1. Una parte de los objetivos de la fase 2 del primer nivel es la utilización correcta de los medios manipulativos, la cual se fomenta en la actividad A1, ya que, por una parte, su manejo es necesario para poder desarrollar y utilizar el razonamiento del primer nivel y, por otra parte, esas herramientas se utilizarán a lo largo de las actividades que se proponen en los distintos niveles en la realización de giros y en su comprobación.

En unos casos el centro de giro está sobre la figura, en un vértice, un lado o su interior; otras veces es exterior a la figura. Los estudiantes deben seleccionar un método adecuado: Pinchar sobre el centro y empujar la figura cuando el centro está sobre ella, y emplear un disco, palillo, u otro material válido, cuando el centro se encuentra fuera de la figura.

La visión del desplazamiento circular con cambio continuo de inclinación de la figura se potencia en las actividades A1 y A2 mediante el arrastre de figuras a lo largo de la circunferencia formada en el giro. Este sistema de arrastre, junto con los medios manipulativos, constituyen los elementos sobre los que apoyar el razonamiento del nivel 1, y también serán útiles posteriormente en otros niveles.

La finalidad de la actividad A2 es trabajar explícitamente sobre la idea más primaria relacionada con el giro, que es la visión circular del desplazamiento. Para ello el profesor debe propiciar explicaciones o justificaciones de los estudiantes basadas en la forma circular (o "redonda", en su terminología) de los recorridos de los giros, frente a variación de la distancia al centro o la existencia de tramos rectos en los recorridos que no lo son. En esta actividad, todos los alumnos con los que hemos trabajado identificaron de inmediato la circunferencia como la única línea posible de desplazamiento al efectuar un giro. En 3º de E.G.B., la justificación espontánea de los alumnos fue *Porque es/no es redondo* y, ante la petición del profesor de otras razones, para los casos negativos indicaron que *Es ovalado* o *No es círculo entero.* Cuando, poco después, el profesor hizo referencia a la existencia de tramos rectos, los niños también emplearon esa característica para justificar movimientos que no eran giros.

La utilización explícita de la equidistancia al centro de giro no es una característica a desarrollar en el primer nivel de razonamiento, ya que se trata de una propiedad de carácter puntual propia de un nivel de razonamiento superior. Sí lo es el desplazamiento circular, tal como hemos indicado en ocasiones anteriores, pues ésta es una propiedad global visual que contiene de manera implícita la idea de equidistancia. Los estudiantes que utilizaron la equidistancia al centro en las actividades del primer nivel de razonamiento lo hicieron porque tenían asociada esa propiedad a la circunferencia; pero en tal caso, la relación no se origina en el proceso de aprendizaje de los giros, sino que ha sido tiene adquirida con anterioridad. En la experimentación llevada a cabo en 3º de E.G.B., el profesor introdujo la equidistancia al centro de giro como factor a considerar en los giros y se apreció que los niños no fueron capaces de interiorizar esa propiedad; la repitieron en algún momento, debido a que se les indicó que la tuvieran en cuenta, pero a lo que recurrieron espontáneamente fue a la visión de recorrido circular. Por ejemplo, cuando el profesor pidió una segunda característica de los giros, Sandra hizo referencia a la necesidad en general de emplear la equidistancia, pero de manera poco precisa:

Sandra: *Medirlo con la regla.*
Prof.: *¿Desde dónde hasta dónde?*
Sandra: *Desde el punto de giro ...*
Prof.: *¿Hasta dónde?*
Sandra: *Hasta el final.*

Hay, no obstante, una niña de 3º de E.G.B., cuyo razonamiento es superior al de los demás niños, que sí utiliza esa propiedad:

Gloria: *Si lo mides con la regla; por ejemplo, desde aquí ... Te da 2; siempre te ha de dar 2 y si no es* [giro], *a veces no* [no mide 2].

Esta niña es la única que posteriormente, en otras actividades, hizo uso a veces de la equidistancia al centro de giro, tanto en la ejecución como en la verificación de giros.

En 6º de E.G.B. algunas alumnas indican por sí mismas la relación de equidistancia al centro, vinculada a la circunferencia, como propiedad de ésta. Así, cuando la profesora pide que las alumnas tracen el recorrido seguido por un punto en un giro, todas dibujan una circunferencia y sus justificaciones son:

Inmaculada: *Porque es así.*
Rebeca: *Porque al mover una figura en una rotación se convierte el movimiento en una circunferencia.*
Marta [corrige una circunferencia con un trazado no exacto]: *Porque no guardaba la distancia.*
Tras esa intervención, la profesora pregunta si saben qué propiedad posee la circunferencia. La respuesta de Marte es:
Marta: *Que hay la misma distancia desde el punto centro hasta todos sus puntos.*

En Magisterio las alumnas sí emplean y hacen referencia desde el primer momento a la equidistancia al centro, si bien al principio Ara tiene alguna idea errónea.

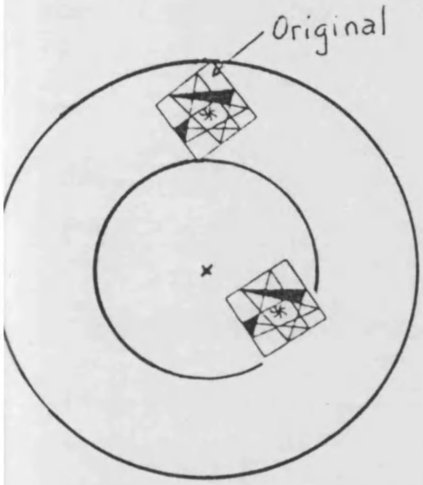
Respecto al uso de materiales manipulativos, en las experiencias de 3º y 6º algunos alumnos necesitaron la ayuda del profesor para emplearlos adecuadamente o para transferir el modo de utilización de un material al del otro (disco-palillo).

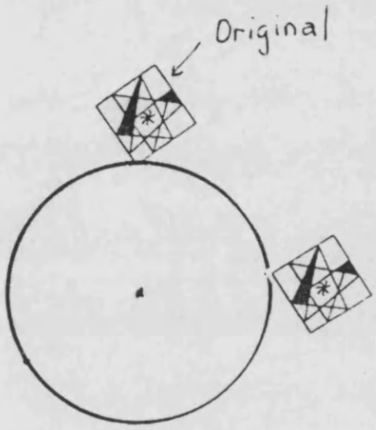
En la actividad A3, además de presentar la característica de isometría de los giros, expresada por el hecho de reconocer que las figuras no cambian su tamaño ni forma, se analizan las propiedades de conservación de distancia y de ausencia de inversión de orientación en los giros, propiedades visuales abordables en el primer nivel de razonamiento.

La percepción de la variación de la inclinación de una figura cuando se mueve por un giro no es tan inmediata como la idea de movimiento circular. Los primeros ejercicios de toma de contacto con los giros provocan a veces la visión de cambio continuo uniforme, pero es necesario trabajar sobre ello para asimilar correctamente esa característica. En todas las experimentaciones que hemos llevado a cabo se produjeron errores en varias ocasiones, no solamente al principio de la instrucción, sino también en ejercicios más avanzados. Por ello ahora insistimos más, con la actividad A4, en la realización de ejercicios orientados directamente a desarrollar en el primer nivel de razonamiento esa idea de cambio de inclinación, para lo cual es eficaz el arrastre de la figura a lo largo del recorrido y la comprobación con herramientas manipulativas.

En ninguna de las experimentaciones efectuadas se hizo hincapié en el arrastre de la pieza, pero los alumnos de todos los cursos lo utilizaron espontáneamente. Por ejemplo, en 3º de E.G.B., Gloria empleó esa técnica desde los primeros ejercicios en los que se le daba una figura y el centro de giro, y lo hacía para formarse una idea de cómo se situaría la figura girada. Mucho más adelante, en la sesión 15ª, a Gloria se le presentó un dilema al ver que la posición en la que había situado la figura mediante arrastre (errónea por no haber mantenido la distancia al centro de giro) y la posición que había obtenido con el compás (correcta) eran diferentes. Gloria se sorprendió por este resultado y su primera reacción fue considerar correcta su estimación mediante arrastre. Pero podría haberse dado el caso contrario, de corrección en la colocación manipulativa y error en el método más técnico.

Describimos a continuación dos casos, correspondientes a la actuación de Inmaculada, en la experimentación de 6º de E.G.B., en los cuales se observa la ausencia de consolidación de la idea de cambio de inclinación: En la actividad 7 de la experimentación, Inmaculada da como resultado de un giro la figura de la izquierda de las que mostramos a continuación, a pesar de haberse servido del procedimiento que estaba aprendiendo, basado en propiedades matemáticas. Inmaculada no se da cuenta de la necesidad de variar la inclinación. Más adelante, en la actividad 9 de la experimentación, se puede observar de nuevo una traslación de la figura imagen, cuando se había pedido un giro de 80° (dibujo de la derecha).





Insistimos, por tanto, en la conveniencia de desarrollar la visión intuitiva en primer lugar, que comprende tanto la idea de desplazamiento circular como la de cambio uniforme y continuo de la inclinación de una figura a lo largo del recorrido del giro. Para ello, en la secuencia de actividades que proponemos, el arrastre manual de las figuras es uno de los medios de reconocimiento de giros en esta fase, y de realización de giros en la fase de orientación libre de este primer nivel de razonamiento.

Aunque la ausencia de variación de los ángulos girados por distintos puntos de una figura y la conservación del tamaño de las figuras han resultado evidentes para los estudiantes que participaron en las experimentaciones que hemos realizado, ya desde el principio del trabajo con giros, conviene ponerlas de manifiesto. Por ejemplo, en 3º de E.G.B., en un ejercicio se acepta como válida una figura inversa de la dada simplemente porque no se les había presentado a los niños la existencia de tales figuras hasta el momento, por lo que sólo prestaban atención a su colocación sobre la circunferencia de giro. No obstante, cuando los niños probaron con medios manipulativos lo que sucedía, se dieron cuenta de la existencia de piezas diferentes (de orientación inversa en sus ángulos[1]) y en lo sucesivo sí prestaron atención la característica de inversión. De todas maneras, esta propiedad de inversión es menos visual que la conservación de distancias, y es posible que si hubiéramos experimentado con niños de menos experiencia (cursos inferiores), eso se habría convertido en objetivo de instrucción. De hecho, en los comentarios relativos a la experimentación de simetrías, indicamos que los niños de 1º de E.G.B. necesitaban frecuentemente situar las piezas correspondientes una encima de la otra o alineadas para compararlas y decidir si eran la misma o no.

Por tanto, creemos conveniente manifestar explícitamente en las actividades del primer nivel esa característica de los giros. Tampoco hay que descartar la posibilidad de que en alumnos con menos experiencia la conservación de distancias tenga que ser objeto de enseñanza, pues en el caso de simetrías, en diversas experiencias sobre giros llevadas a cabo con alumnos de 4° a 8° de E.G.B., las cuales no se incluyen entre las comentadas en esta tesis, y en la de simetrías de 1º de E.G.B. (actividad 9), hemos constatado que, en tareas de dibujo, siempre hay varios alumnos que disminuyen o aumentan considerablemente el tamaño de las imágenes, si bien es probable que en esos errores influya la falta de destreza de dibujo.

[1] La consideración de esta característica se hace de manera visual, mediante una apreciación de que las figuras "miran hacia el otro lado", o comprensiones parecidas, y de que al superponer las piezas no pueden coincidir.

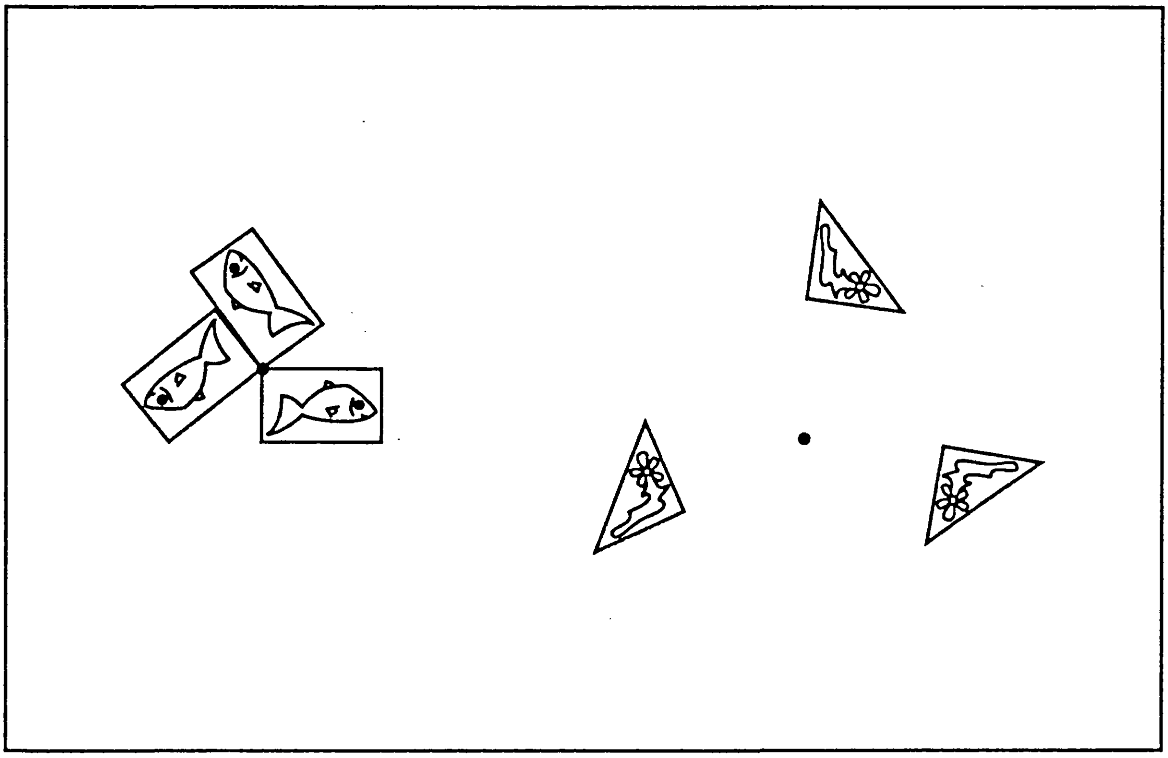
Fase 4 del Nivel 1

Objetivos:

1- Utilizar las características visuales de los giros (desplazamiento circular y variación de la inclinación) y las técnicas de realización de giros, desarrolladas en la fase 2, para reconocer figuras giradas y efectuar giros en situaciones más complejas.

Actividades:

A1- Dado un grupo de tres figuras que se corresponden mediante giros cuyo centro es el señalado, coger una figura igual a las dadas y moverla con la mano siguiendo el recorrido completo del giro a lo largo de toda la circunferencia. Pegar piezas como esta en algunos lugares del recorrido y comprobar posteriormente, sirviéndose de algún material auxiliar, la exactitud de la solución.

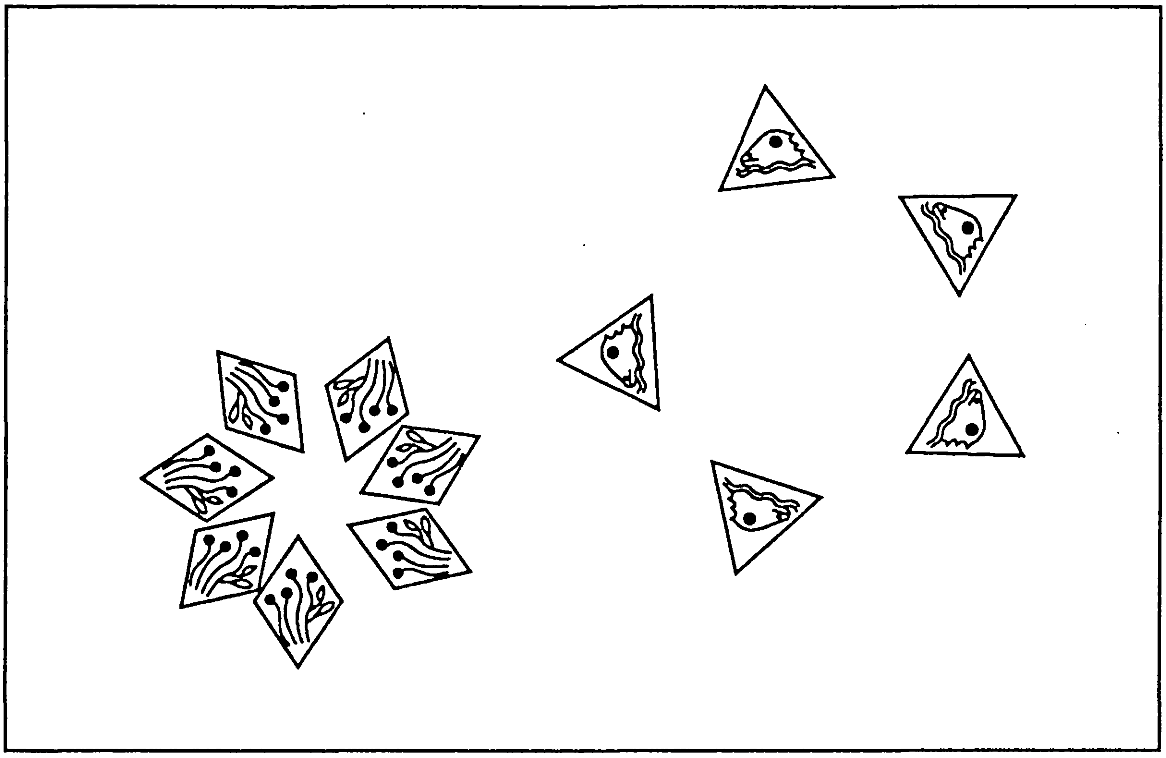


A2- Dados varios grupos de figuras que se corresponden mediante giros con el mismo centro, marcar el recorrido seguido por algunos puntos. Conjeturar primero y comprobar después el recorrido de otros puntos.

A3- Dados una figura y un centro de giro, marcar el recorrido seguido por varios puntos al girar la figura. Hacerlo sin mover la figura y después comprobar la solución aportada, mediante el desplazamiento de la figura y también sirviéndose de alguna herramienta auxiliar.

Disponiendo de las circunferencias trazadas en la primera parte de la actividad, ya corregidas, colocar varias imágenes de la figura a lo largo del recorrido del giro. Hacerlo arrastrando las piezas, sin material auxiliar. Comprobar después el resultado con la ayuda de alguna herramienta.

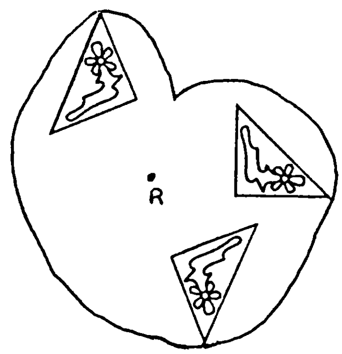
A4- Dado un grupo de varias figuras que se corresponden mediante un giro y que cubren gran parte de la circunferencia correspondiente, señalar aproximadamente dónde se encuentra el centro de giro. Determinarlo sin servirse de materiales auxiliares, pero utilizarlos luego para la comprobación.



- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

Las actividades que proponemos en la fase 4 incluyen tareas que exigen la aplicación de las características de los giros y de los métodos de movimiento desarrollados en la fase 2.

Con la actividad A1 se intenta afianzar la comprensión de las dos propiedades visuales y globales básicas de los giros: Equidistancia al centro y variación continua de la inclinación de los segmentos. La equidistancia es comprendida y asimilada con bastante facilidad por la mayoría de los estudiantes, pero no ocurre lo mismo con la variación de inclinación. Existe una fuerte tendencia, que hemos detectado en estudiantes de todas las edades, desde E.G.B. hasta Magisterio, a pensar que las figuras se mantienen paralelas a sí mismas cuando están girando (Jaime y otros, 1989).



Tal como pone de manifiesto la experimentación de 3º de E.G.B., el conocimiento de que el desplazamiento en un giro es circular (visión de tipo global) no implica que se haya asimilado su particularización a cada punto de una figura. Entender esta particularización es el primer paso necesario para iniciar la adquisición del segundo nivel de razonamiento. Por ejemplo, en el dibujo se ve la respuesta de Jorge acerca del recorrido seguido por un punto. Es evidente que no intenta dibujar una circunferencia. Por ello, en las actividades A2 y A3 se incide sobre esa característica. Una vez contestada A3, aparece planteada explícitamente la propiedad de la situación concéntrica de las diversas circunferencias correspondientes a los recorridos de diversos puntos de la misma figura.

La segunda parte de la actividad A3 no se planteó en nuestras experimentaciones del mismo modo que se propone aquí. Su inclusión se es consecuencia de la forma de actuación de los estudiantes en otras actividades: Cuando saben manejar el compás y se les pide que ajusten la posición de la figura imagen (esperando el profesor que obtengan las imágenes de varios puntos), la actitud espontánea que se produce en varios alumnos de 6º de E.G.B. y de Magisterio es ajustar la figura de manera que encajen en varias circunferencias, es decir situando simultáneamente varios puntos de la figura (generalmente sus vértices) sobre las circunferencias correspondientes. Ello se debe a que la visión de ajuste por circunferencias se puede adquirir en una fase avanzada del primer nivel, aunque haya que esperar hasta las actividades del nivel 2 para estudiar los aspectos matemáticos y metodológicos relacionados con la obtención de las imágenes de varios puntos.

En nuestras experimentaciones no se planteó ninguna actividad como la A4. No obstante, la visión global de movimiento circular, desarrollada en este primer nivel, incluye la existencia del "punto central" (centro de giro), reconocido incluso por los alumnos de 3º de E.G.B. La actividad A4 pretende centrar la atención en dicho elemento, ya que juega un papel fundamental en el trabajo que se realiza en niveles superiores de razonamiento. La experiencia adquirida en las fases previas del primer nivel debe permitirles a los estudiantes reconocer la posición aproximada del centro de giro y servirse correctamente de los instrumentos empleados con anterioridad, para situarlo con un grado de exactitud aceptable.

GIROS: NIVEL 2

Objetivos:

Las actividades que planteamos para este nivel pretenden lograr los objetivos generales siguientes, que más adelante desglosaremos en las diferentes fases de aprendizaje:

1- Descubrimiento, reconocimiento y utilización adecuada de:

a) Las propiedades que caracterizan los giros: La equidistancia al centro de giro y la invarianza del ángulo de giro entre cualquier punto y su imagen.

b) La equivalencia de giros del mismo centro y ángulos α y β tales que $\alpha - \beta$ es múltiplo de 360°.

2- Utilización de la notación y el vocabulario matemáticos para identificar o referirse a puntos, centros de giro, ángulos, etc. (p, p', G(O,60°), ...).

3- Utilización explícita de la definición de giro en las argumentaciones.

4- Determinación del ángulo o el centro de un giro a partir de otros datos.

5- Realización de composiciones de giros del mismo centro y generalización del resultado de la composición de varios de tales giros. Descubrimiento de la conmutatividad.

6- Descubrimiento y verificación, a partir de ejemplos, de otras propiedades de los giros.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

En el segundo nivel de razonamiento se empiezan a poner de manifiesto y a utilizar explícitamente los elementos matemáticos que caracterizan los giros y sus propiedades. Por ese motivo, el primer objetivo de este nivel debe ser el aprendizaje comprensivo de las propiedades básicas de los giros.

Se utiliza la equidistancia de un punto y su imagen al centro de giro, relacionándola con la circunferencia correspondiente, lo cual es la formalización de la interpretación de giro desarrollada en el primer nivel de razonamiento debido a su fuerte componente visual.

La medida del desplazamiento realizado mediante un giro se plasma en el ángulo de giro. Pero para utilizarla hace falta comprender su invarianza, por lo que ésta constituye otro de los primeros objetivos de este nivel de razonamiento. El empleo de los grados en los giros (no necesariamente a través del transportador[1]) permite descubrir experimentalmente propiedades de los giros, propiedades que posteriormente se generalizan y aplican.

Casi la totalidad de los objetivos propuestos para este nivel de razonamiento lleva asociada la medida de ángulos. En particular, destacan la equivalencia de giros, la composición de giros del mismo centro y la determinación del ángulo o el centro de giro.

El paso del primer al segundo nivel de razonamiento supone el inicio de la actividad realmente matemática de los estudiantes, por lo que en este nivel deben también empezar el aprendizaje del vocabulario matemático usual, así como de las notaciones correspondientes a los conceptos u operaciones implicados. Por este motivo, uno de los objetivos importantes del nivel 2 debe ser el desarrollo de la capacidad de los estudiantes para entender la terminología matemática y utilizarla en sus explicaciones. No obstante, es conveniente evitar aquellos casos en los que dichos vocablos o notaciones puedan crear dificultad a los estudiantes, retrasando su uso hasta el momento adecuado.

Una vez que los estudiantes han entendido qué es un giro y cuáles son sus características matemáticas, ya están en condiciones de entender la definición y usarla en sus explicaciones, por lo qué un objetivo del nivel 2 debe ser fomentar el uso de la definición de giro. No obstante, no se debe olvidar que, para los estudiantes del segundo nivel, una definición es una relación de las propiedades destacadas de ese concepto, más que un conjunto mínimo de tales propiedades (condiciones necesarias y suficientes).

[1] Si el empleo del transportador presenta problemas, se pueden utilizar otros medios que, aunque posiblemente sean de menor exactitud, permiten obtener algunas propiedades. En particular, disponer de sectores de cartón de diversas amplitudes ha demostrado resultar útil en otras investigaciones (Fuys, Geddes, Tischler, 1988).

Los estudiantes que se encuentran en el segundo nivel de razonamiento pueden trabajar en la determinación del centro de un giro, lo cual hacen mediante procedimientos de aproximación. Sin embargo, para que entiendan correctamente el procedimiento técnico de cálculo del centro de giro, que es una destreza necesaria para lograr una visión completa de los giros, es necesario previamente el descubrimiento y la generalización de la propiedad de que la mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los centros de los giros que transforman uno de los extremos del segmento en el otro. El afianzamiento de esa propiedad permitirá posteriormente, en el tercer nivel de razonamiento, efectuar composiciones de giros de distinto centro y justificar la obtención del centro del giro resultante. Por lo tanto, en las actividades del nivel 2 se trabajará en las ideas básicas (cálculo aproximado del centro de giro y asimilación de la propiedad de la mediatriz) y en las actividades del nivel 3 se utilizarán estos conocimientos en un contexto más formalizado y más apropiado para su uso general.

Pero también hay otras propiedades que pueden descubrir y utilizar directamente los estudiantes y a las que no aludimos ahora. No obstante, para que avance el nivel de razonamiento de los estudiantes, es necesario que éstos practiquen sus destrezas y hagan nuevos descubrimientos. Son de especial importancia, por diversos motivos, los siguientes:

- Las particularidades de los giros de 180°, pues este movimiento tiene suficiente entidad por sí mismo como para que con frecuencia reciba un nombre propio: Simetría central. Por una parte, posee gran contenido visual, al quedar la figura imagen "al revés", y, por otra parte, el método más sencillo para obtener la imagen por un giro de 180° difiere del usual, pues sólo precisa alinear el punto imagen con el punto original y el centro de giro y mantener la distancia al centro de giro.

- La determinación de la inclinación de las imágenes por el ángulo del giro: Las imágenes de una figura por varios giros del mismo ángulo y centros distintos son trasladadas unas de otras. Pretendemos que esta propiedad sirva posteriormente, en las actividades del tercer nivel de Van Hiele, para establecer relaciones entre giros, traslaciones y su composición, y que sea un elemento básico para la justificación general de ciertos resultados de composiciones de movimientos o para la obtención de técnicas generales de composición y descomposición de isometrías.

Fase 1 del Nivel 2

Objetivos:

1- Obtener información de los conocimientos que tienen los alumnos sobre ángulos, manejo de transportador y empleo del compás para trazar mediatrices, medir distancias, ...

2- Proporcionar una unidad complementaria de enseñanza sobre ángulos, su medida y forma de uso del transportador, si ello fuera necesario.

Actividades:

A1- Dados un punto P y su imagen P' mediante un giro con centro O, marcar el ángulo que se forma (en los primeros casos, pintar su interior). Medir el ángulo.

A2- Dados un centro de giro y un segmento con un extremo en dicho centro, girar el segmento aproximadamente, sin servirse de material de medida, un ángulo de ... (se da un valor). Comprobar luego el resultado con un instrumento de medida (transportador o cuñas angulares, según las posibilidades de los alumnos).

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

Cuando se inicie la enseñanza con estudiantes que demuestren haber superado ya el nivel 1 de razonamiento en el área de los giros, pero no el nivel 2, las actividades a realizar en esta primera fase deberían ser las propuestas aquí precedidas de algunas actividades de las distintas fases del nivel 1, que servirán para que los estudiantes recuerden determinados conocimientos necesarios y para que el profesor detecte posibles carencias de sus alumnos. Por el contrario, si durante un curso los estudiantes pasan del nivel 1 al 2, el profesor ya tiene información sobre el nivel de razonamiento de sus alumnos y éstos ya conocen el tema objeto de estudio, por lo que en esta fase 1 el profesor se puede limitar a obtener y proporcionar información sobre aspectos concretos, como los conocimientos de ángulos y el uso de compás y transportador.

Para progresar a lo largo del segundo nivel de razonamiento es necesario recurrir al dibujo y medición de ángulos, por lo que resulta imprescindible que los estudiantes posean esos conocimientos antes de empezar a trabajar en las actividades de la fase 2. Por este motivo, en la experimentación que llevamos a cabo con los alumnos de 3º de E.G.B. fue necesario incluir un módulo de instrucción sobre ángulos.

Si se intenta un aprendizaje demasiado rápido o superficial de los ángulos, los alumnos aprenden de memoria algunas propiedades, a veces contrarias a su intuición (por ejemplo, muchos estudiantes de E.G.B. relacionan la amplitud de los ángulos centrales de las circunferencias con sus radios, por lo que consideran mayor el ángulo de la circunferencia con radio más largo, aunque matemáticamente los ángulos tengan la misma amplitud). Esto puede provocar que los estudiantes memoricen algoritmos de obtención de la imagen de puntos o de figuras, aunque no entiendan realmente por qué deben hacerlo así. En la experimentación realizada en 3º de E.G.B., se puede observar que éste es el caso de Sandra y Jorge, los cuales dan respuestas contradictorias porque en unos casos se guían por sus concepciones y en otros por las explicaciones del profesor. Respecto a Gloria, le cuesta al principio asimilar que todas las circunferencias midan 360°, pero su problema está en que desearía una explicación con fundamento más matemático que la simple justificación de "porque es así". Veamos a continuación un extracto de las actuaciones de los niños durante una de las sesiones dedicadas a la unidad complementaria dirigida al aprendizaje de ángulos (en la transcripción siguiente, cuando se indica "niña" la que habla es Gloria o Sandra; no se distingue en el vídeo cuál de las dos interviene):

Niña: *¿Todos los círculos miden 360?*
Prof.: *Todos.*
Niñas: *¿Todos?*
Prof.: *Todos. Aunque el círculo sea inmenso, lo único que tenemos que hacer ¿qué es?*
Niña: *¿Y toda la bola del mundo también?*
¿Gloria?: *¿Y por qué miden todas igual?*
Jorge: *Un duro no porque no tiene centro de giro.*
Niña: *La nariz del duro.*
Prof.: *Un duro es redondo como esto.*
Jorge: *Sí, pero no mide 360.*

Prof.: *¿Cómo que no? ¿Esto cuánto mide?* [el transportador, que es un círculo completo].

Niña: *Deberían medir unos menos que otros.*

Prof. [a Jorge]: *Según tú, ¿cuánto debería medir, más o menos?*

Jorge: *Menos.*

....

Gloria: *Pero es muy raro. ¿Por qué tienen que medir todos lo mismo?.*

Prof.: *Porque lo miden. ¿Lo comprobamos?*

....

Prof.: *Sandra, ¿cuánto mide cada uno de éstos?* [el profesor se refiere a una serie de arcos concéntricos que acaba de dibujar. Los niños acaban de medir el valor del ángulo].

Sandra no lo sabe.

Prof.: *Gloria, explícaselo.*

Gloria: *Lo mismo que ése* [señala el arco que estaba dibujado antes de que el profesor dibujara los demás concéntricos].

Prof.: *Sandra, ¿entonces cuánto miden?*

Sandra: *100 todos.*

Casi inmediatamente después, el profesor hace que Jorge diga los valores de dos arcos complementarios que acababan de medir y luego señala arcos de la misma amplitud, pero sobre circunferencias de mayor tamaño. La contestación de Jorge, correcta, es:

Jorge: *Medirán igual, sólo que más ampliado.*

Sin embargo, un poco después el profesor le pide a Jorge que indique el valor de un ángulo (de 260°) y a continuación le pide el valor de un arco concéntrico, sobre una circunferencia, mayor. La respuesta de Jorge es: *Más de 260.*

En el desarrollo de la experimentación se observa cómo los niños fueron mejorando su comprensión de esta propiedad de los ángulos con el tiempo, de manera que después de realizadas varias actividades ya habían asimilado la independencia entre la amplitud de los ángulos y la longitud de sus lados. Por ejemplo, Jorge, en la quinta sesión dedicada a ángulos, tras resolver las medidas de los ángulos de una lámina, todos rectos, explica que *todos son iguales porque todos miden 90 y da igual que el círculo sea más grande o más pequeño para medir lo mismo.*

Por lo tanto, para el progreso en el segundo nivel de razonamiento en los giros es imprescindible haber adquirido previamente este nivel en el uso de los ángulos y su medida. Esto no significa que una comprensión perfecta de los ángulos implique entender fácilmente el método de obtención de las imágenes de puntos o figuras mediante giros, pero sí es un requisito previo necesario.

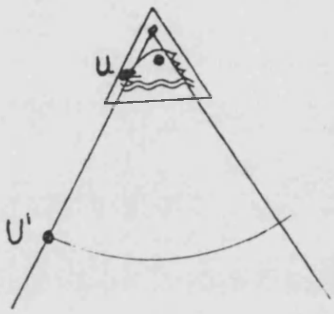
Por otra parte, también es deseable que los estudiantes desarrollen su capacidad de estimación de las medidas de los ángulos, en términos de identificación aproximada de su valor a partir de fracciones de la circunferencia (por ejemplo, 90° es la mitad de 180° y la cuarta parte de la circunferencia, 170° es casi media circunferencia, etc.).

En caso de que el empleo del transportador resulte complicado para los alumnos, es posible recurrir a otros medios. Por ejemplo, se pueden utilizar "cuñas", es decir sectores circulares de un radio fijo hechos con cartulina, cartón, etc., de diversas amplitudes (por ejemplo, 15°, 45° y 90°, cuya suma permite obtener una gran variedad de ángulos). Este material no lo hemos utilizado en nuestras experimentaciones, pero su uso por Fuys, Geddes, Tischler (1988) en un módulo de reconocimiento de ángulos y la dificultad que supone para muchos alumnos de todas las edades el empleo del transportador, nos inclinan a considerar las cuñas como un medio efectivo para el descubrimiento de propiedades de los giros, evitando el deslizamiento de convertir el empleo del transportador en el objeto de atención principal, cuando sólo debe ser un instrumento auxiliar. En la experimentación de Magisterio podemos observar cómo Ara tenía ciertas dificultades en el empleo de buena parte de los materiales manipulativos, siendo sin embargo capaz de obtener, generalizar y aplicar propiedades matemáticas de las isometrías.

En la propuesta que hacemos para esta primera fase, hemos planteado algunas actividades orientadas directamente a vincular los ángulos y los giros de un punto, con el fin de introducir a los estudiantes en lo que constituirá uno de los aspectos básicos de la visión del giro desde la perspectiva del segundo nivel de razonamiento, desde la cual la aplicación de un giro está determinada por la equidistancia al centro y el ángulo de giro concreto. Estos ejercicios les presentan a los estudiantes unos elementos básicos en el trabajo del segundo nivel y, al mismo tiempo, permiten comprobar su destreza en el uso de los ángulos y sus instrumentos de medida, siendo, por tanto, su planteamiento coherente con las finalidades de la primera fase de aprendizaje del nivel 2.

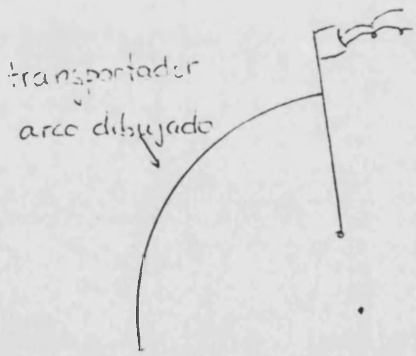
Al realizar estas actividades, se debe tener en cuenta que el trabajo realizado en el primer nivel ha sido eminentemente manipulativo, especialmente por los estudiantes más pequeños, por lo que en los primeros ejercicios de cada actividad habrá que continuar con los mismos métodos, permitiendo a los estudiantes que usen un disco transparente para realizar los giros, y haciendo que en los siguientes ejercicios utilicen regla, transportador o compás si es posible.

En las experimentaciones llevadas a cabo se ha podido comprobar que siempre hay algún momento en el cual los alumnos dejan de lado como foco de atención principal la equidistancia de un punto y su imagen al centro de giro, o bien el desplazamiento seguido, centrándose en el trazado de un ángulo y/o de la circunferencia. Como ejemplo, presentamos a continuación un dibujo de cada uno de los cursos en los que hemos realizado las experimentaciones de giros:



Dibujo 1.

Sandra, en la actividad 12 de la experimentación de 3º de E.G.B., para efectuar un giro de 60°, marcó un punto U, interior a la figura, trazó el ángulo de 60° y situó U', imagen de U, en el mismo lado del ángulo que U, como muestra el dibujo 1.

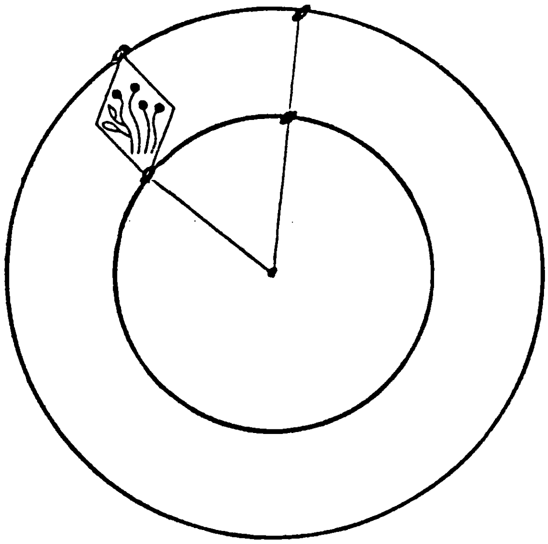


Dibujo 2.

En 6º de E.G.B., para resolver la actividad 10, Inmaculada tenía que girar 90° la pipa. Su explicación fue:

Inmaculada: *Yo he puesto el punto* [que quiero girar] *aquí* [en la intersección de la pipa con la circunferencia exterior del transportador; ver dibujo 2] *y aquí, de 90° hasta éste* [extremo del arco que traza, que es de una amplitud de 90° y mostramos en el dibujo 2] *¿O tendría que ser este punto?* [extremo inferior de la pipa].

En la experimentación de Magisterio, en la actividad 8 Ara debía girar el rombo 57°. Trazó circunferencias para los vértices inferior y superior; midió el ángulo girado por el vértice inferior y dibujó los lados de ese ángulo; después intentó ajustar la figura imagen, de manera que los vértices inferior y superior se situaran en las intersecciones de las circunferencias con el lado del ángulo de 57° dibujado antes. Por lo tanto, la imagen del vértice superior era incorrecta, puesto que no había medido 57° para ese vértice (ver dibujo 3).



Dibujo 3.

Fase 2 del Nivel 2

Objetivos:

1- Descubrir y utilizar la equidistancia de cada punto y su imagen al centro de giro como característica de los giros.

2- Descubrir y utilizar como característica de los giros la invarianza del ángulo de giro para todos los puntos de una figura.

3- Descubrir y utilizar como característica de los giros el centro y el ángulo de giro. Saber determinar el ángulo de un giro.

4- Comprender y utilizar la notación estándar de giro, G(centro,ángulo), el vocabulario básico asociado y los sentidos de giro.

5- Aprender a aplicar un giro determinado a un punto por procedimientos exactos.

6- Obtener la imagen de una figura por un giro dado usando varios procedimientos apropiados para diferentes situaciones. Reconocer y utilizar las propiedades particulares de las situaciones según que el centro de giro esté sobre la figura a girar o fuera de ella.

Actividades:

A1- Dadas varias figuras que se corresponden mediante un giro, con centro sobre ellas, determinar la posición exacta del centro de giro. Hacer explícita y generalizar la idea de la invarianza del centro de giro (la imagen del centro es él mismo).

A2- Dadas dos figuras, A y B, que se corresponden mediante un giro (unas veces con el centro exterior a ellas y otras con el centro en su interior o contorno), marcar varios puntos de A y sus imágenes en B. Dibujar el arco de circunferencia recorrido en cada caso y marcar el ángulo correspondiente (trazando los respectivos radios). Medir los ángulos formados por los distintos puntos marcados de A y sus imágenes en B.

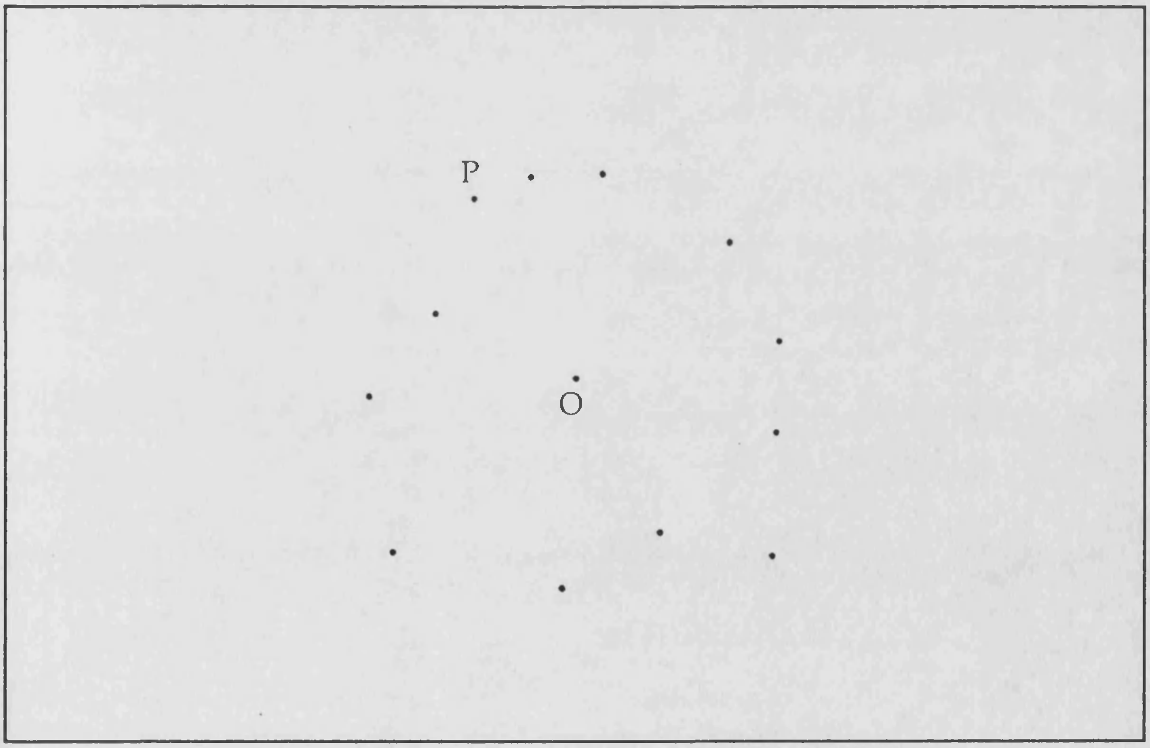
Generalizar la invarianza del ángulo de giro para todos los puntos de una figura.

A3- Dados un punto P, su imagen P' y el centro de un giro, determinar el ángulo de dicho giro. Escribir el giro con la nomenclatura estándar G(centro,ángulo) u otra que se considere adecuada.

Utilizando un disco transparente, obtener la imagen de otros puntos al aplicar el giro anterior. Medir el ángulo del giro que ha pasado cada uno de los puntos a su imagen. Generalizar la idea de invarianza del ángulo de giro para todos los puntos del plano.

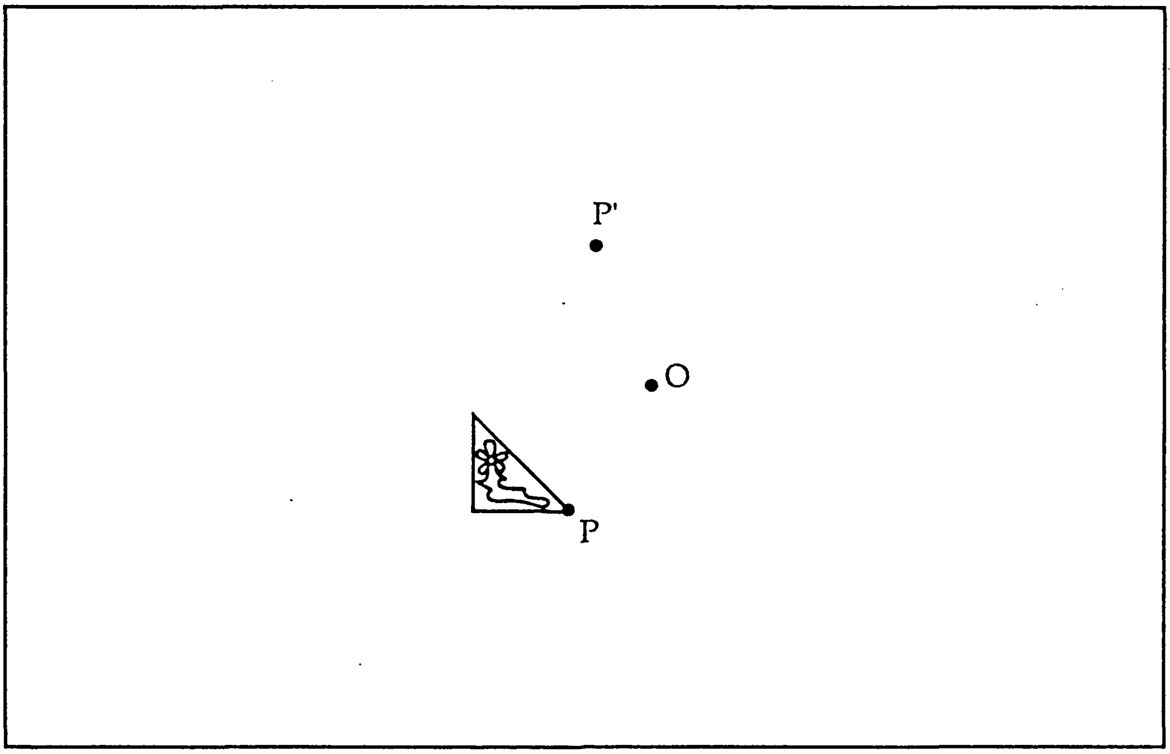
Ahora sin utilizar el disco transparente, obtener la imagen de otros puntos por ese mismo giro.

A4- Dados un punto P, un centro de giro O y otros puntos, determinar con rigor y sin trazar circunferencias (midiendo con una regla la distancia al centro de giro) cuáles de esos puntos pueden ser imágenes de P cuando este punto va girando alrededor del centro de giro dado. Marcar y medir el ángulo del giro en los casos que sí haya giro.



A5- Dados una figura, el centro, exterior a ella, de un giro y la imagen de un punto de la figura por medio de ese giro, tratar de colocar la figura imagen.

Discutir los procedimientos empleados por los estudiantes y resolver otros casos empleándolos. Si no ha surgido, introducir el método consistente en trazar circunferencias para otros puntos y situar la imagen ajustando sobre ellas los puntos correspondientes.



A6- Dados una figura, el centro de un giro exterior a ella y la imagen de un punto de la figura por medio de ese giro, tratar de determinar el ángulo de giro. Obtener las imágenes de otros puntos de la figura y después colocar la figura imagen.

A7- Resolver actividades análogas a A5 y A6, pero con giros cuyo centro esté sobre la figura (en su contorno en los primeros casos y en un punto interior después). Discutir las formas de determinar la imagen utilizadas por los estudiantes.

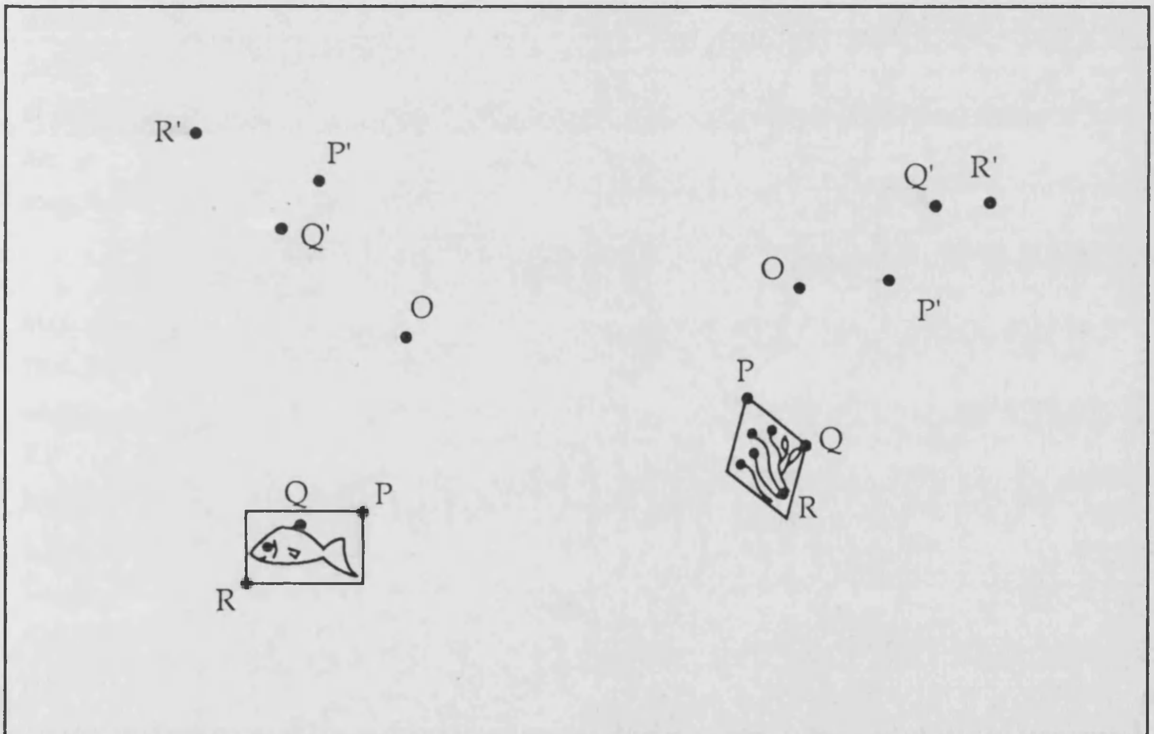
A8- Dados el centro de un giro, un punto P y su imagen P' por ese giro, calcular el valor del ángulo de giro y marcar el recorrido seguido por el punto P a lo largo del giro. Hacer físicamente ese recorrido.

Repetir el ejercicio con otros giros y pares de puntos. Introducir los sentidos del ángulo de giro.

A9- Dados una figura y el giro G(O, ...) (dar un valor para el ángulo. El centro de giro es exterior a la figura), determinar la figura imagen.

A10- Dados una figura y el giro G(O, ...) (dar un valor para el ángulo. El centro de giro está sobre la figura, primero en su contorno y luego en el interior), determinar la figura imagen.

A11- Dados una figura y tres puntos suyos, P, Q y R, determinar si los puntos P', Q' y R' pueden ser sus imágenes por medio de un giro de centro O. Explicar en cada caso si es posible o no y qué falla en los casos negativos.

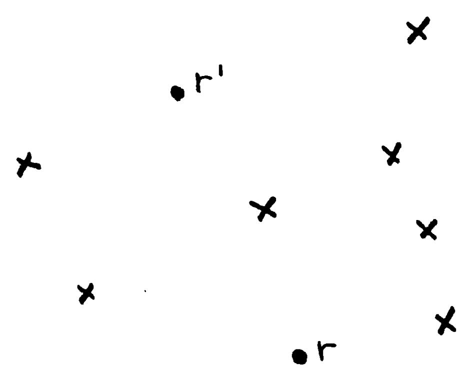


-◊-◊-◊-◊-◊-◊-

La necesidad de la equidistancia de un punto y su imagen al centro de giro ya se estableció en las actividades del nivel 1, en situaciones en las que la influencia visual era muy fuerte. Tal es, por ejemplo, el reconocimiento de las circunferencias como las únicas líneas que marcan el desplazamiento seguido por puntos o figuras al girar. No obstante, para poder resolver otras actividades basadas en esa propiedad se requiere un progreso de los alumnos hacia el segundo nivel de razonamiento, por lo que el primer objetivo que hemos planteado en esta fase es construir esos conocimientos básicos sobre la equidistancia.

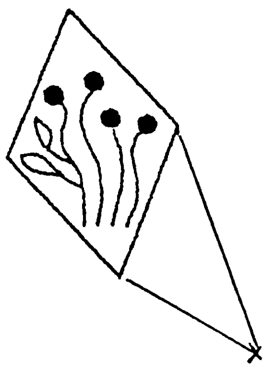
En la experimentación de 3º de E.G.B., el profesor hacía referencia a la equidistancia al centro de giro pero, excepto Gloria, ningún alumno la consideraba al fundamentar sus explicaciones; todos centraban su atención preferentemente en la componente gráfica del desplazamiento circular. Gloria, que progresaba a lo largo del segundo nivel, sí asimiló bien esa propiedad, a la que recurrió varias veces en sus construcciones y justificaciones, pues, aunque también determinaba sus respuestas a partir de la simple observación; después era capaz de referirse espontáneamente en su explicación a la equidistancia al centro de giro. Así, mientras los otros niños explican que *cuando es giro todo es redondo, pase por donde pase, ...; sólo con un poco que no sea redondo ya no es* [un giro], Gloria explicaba que *si lo mides con una regla, por ejemplo desde aquí* [el centro de giro], *te da dos; siempre te ha de dar dos y si no es* [giro], *a veces no* [mide dos]. (Actividad 6 de la experimentación).

En 6º de E.G.B., las alumnas superaron pronto el primer nivel de razonamiento y empezaron a utilizar esta propiedad en sus justificaciones. En el caso de Inmaculada, el progreso hacia el segundo nivel fue más lento (de hecho, su adquisición del nivel 2 no llegó a ser completa), por lo que se detectó en ella un menor empleo de la propiedad matemática de la equidistancia al centro de giro. Por ejemplo, en la actividad 12 de la experimentación, para obtener entre los puntos que se ven en el dibujo los posibles centros de giro que transforman R en R', Inmaculada recurría al compás - real o colocando los dedos a modo de compás- y no pensaba por sí misma directamente en términos de equidistancia (aunque sí podía hacer referencia a ella cuando sus compañeras se lo indicaban):



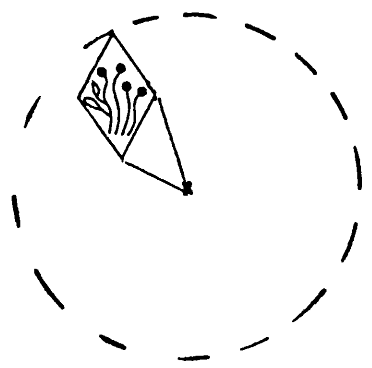
Inmaculada [a Marta]: *Tienes que poner la punta* [del compás] *en cada estrellita* [los puntos que debía indicar si eran centros de giro] *y si te pasa por las dos partes, entonces está bien.*

En Magisterio, las alumnas sí empleaban consciente y voluntariamente la equidistancia de una manera sistemática, acompañada de otras propiedades matemáticas particulares de cada caso, como la tangencia de un lado de la figura a la circunferencia de uno de sus vértices. En particular, Ara recordaba de su experiencia escolar una definición de giro basada en la equidistancia, pero incorrecta, que intentaba aplicar. En este caso, la primera función de las actividades de la fase 2 del segundo nivel fue la de hacerle rectificar esta concepción errónea:



En la actividad 3 de la experimentación, Ara debe colocar la imagen de una figura por medio de un giro con centro exterior a la figura. Ara mide la distancia desde dos vértices de la figura inicial al centro de giro (ver el dibujo de la derecha), que cree que han de ser iguales, pues según ella, *todos los puntos se encuentran a la misma distancia del eje* (Ara usa la palabra eje en vez de centro pues, seguramente, ha estudiado giros en el espacio. La propiedad que enuncia ahora es exactamente la que dio con anterioridad como definición de giro).

Prof.: *O sea, que has medido dos* [cm.] *de aquí* [un vértice de la figura inicial] *al centro y dices que de aquí* [el otro vértice] *al centro ha de medir dos* [cm.]. *¿Y mide eso?*
Ara: *No.*
Prof.: *No se cumple. ¿Cómo se te ocurre que lo puedes hacer? Todavía no lo he explicado.*
Ara: *Trazar la circunferencia externa y tomar ese punto como referencia* [Ara hace con la mano la circunferencia que pasa por uno de los vértices (ver el dibujo de la página siguiente), aunque no la dibuja].
Entonces Ara dice que no le sale, que no entiende por qué las distancias de cada vértice al centro de giro son distintas. Merche le explica el error:



Merche: *Esa distancia no es la misma que ésa de ahí* [Merche señala, correctamente, de un vértice y de su imagen al centro de giro].

Prof.: *O sea, que ahí hay una distancia que falla.*

Ara: *¿Entonces tenía razón yo con lo de la distancia?*

Prof.: *¿Pero qué distancia era igual?*

Ara: *Esa. La distancia de ese vértice* [el inferior del rombo] *al eje* [quiere decir centro].

Prof.: *¿Qué vértice?* [Ara señala el inferior del rombo].

Prof.: *Al centro. ¿Y con ese otro vértice qué pasa?* [la profesora señala el vértice de la derecha].

Ara: *Que ésta tendrá que ser también la misma* [ahora Ara señala las distancias correctas: Del vértice y de su imagen al centro de giro].

Prof.: *¿Era eso lo que tú decías antes?*

Ara: *Claro. Eso es lo que yo decía; por eso yo ...* [la profesora le interrumpe]

Prof.: *¿Tú no decías que la distancia desde este vértice al centro y desde este vértice al centro tenían que ser iguales?* [la profesora señala los vértices inferior y derecho de la figura inicial].

Ara: *Sí. Estaba equivocada. Es que sabía que había una distancia. Pero luego creía ... Bueno, como en todas las rotaciones que había visto la distancia era la misma, pues mi idea era ésa.*

Desde el punto de vista matemático, está claro que es equivalente dibujar circunferencias y situar los puntos sobre ellas que medir directamente la distancia de cada punto al centro de giro, pero no ocurre lo mismo desde la perspectiva del progreso en el nivel de razonamiento, pues es conveniente que en el segundo nivel la circunferencia tenga el significado de la equidistancia y no simplemente el significado gráfico del nivel 1, de línea sobre la que se desplaza un punto al girar. Por ello, en las actividades propuestas para la segunda fase del nivel 2, se debe conseguir que los alumnos utilicen explícitamente el concepto de equidistancia en sus argumentaciones (aquí vemos una clara interrelación entre los objetivos de la fase 2 y los de la fase 3).

La primera actividad de esta fase (actividad A1) está dirigida expresamente a considerar la invarianza del centro de giro, a través de su identificación en figuras giradas en las que el centro de giro se encuentra sobre ellas. El énfasis en esta propiedad obedece a que influye directamente en el método de obtención de la imagen de figuras con centro de giro sobre ellas. La identificación del centro de giro en el nivel 1 es visual; por ejemplo, en la experiencia de 6º de E.G.B., las alumnas se basaron en una visión global de las figuras para diferenciar casos correspondientes o no a giros, cuando el profesor situaba una pieza en distintos lugares. Posteriormente, la orientación de los ejercicios que realizaron en esta fase del nivel 2 hizo que las estudiantes expresaran claramente la invarianza del centro de giro (actividad 15 de la experimentación):

Las niñas habían estado haciendo giros con centros exteriores a las figuras que mueven, y se había planteado la cuestión de saber cuántos puntos imagen se necesitan para poder colocar la figura imagen. Aunque en un primer momento Inmaculada dice que 1 imagen, porque usaba el disco transparente, Rebeca se da cuenta de que con las imágenes de dos puntos se puede determinar siempre la posición de la figura imagen. A continuación tienen que hacer un giro cuyo centro está sobre la figura. Rebeca se da cuenta de que uno de los dos puntos puede ser el centro de giro porque su imagen es él mismo:

Icíar: *¿Lo hacemos con todos los puntos?*
Prof.: *Como quieras. ¿Cuántos hacen falta?*
Rebeca: *Con uno si haces todas las circunferencias* [se refiere al método de trazar las circunferencias de los recorridos de los vértices de la figura, calcular la imagen de uno de ellos y ajustar los otros vértices de la figura de papel sobre sus respectivas circunferencias].
Prof. [a Rebeca e Icíar]: *¿No tenéis ahí* [en la figura] *el centro? Pues, ¿cuántos hacen falta?*
Rebeca: *¡Claro! Pues ya hay dos.*
Prof.: *¿Con cuántas circunferencias habríais tenido bastante?*
Rebeca: *Con una. ¡Claro!*
....
Prof.: *¿Y con el centro de giro qué pasa?*
Icíar: *Que siempre está en el mismo sitio.*

En la experimentación de Magisterio se observa que no es inmediata la identificación del centro de giro y su invarianza cuando éste se encuentra sobre la figura, como se puede ver en la solución de Ara a una de las actividades que se le plantearon, análoga a las actuales A2 y A3.

Algo parecido ocurrió en la experimentación de 3º de E.G.B., pues habría hecho falta más instrucción para que los estudiantes superaran por completo el nivel 1 de Van Hiele y progresaran al ritmo requerido en el nivel 2, sobre todo por parte de Sandra. Una de las consecuencias de la presentación antes de tiempo de las actividades de esta fase es que Sandra memorizaba los distintos algoritmos de obtención de la imagen de un punto o de una figura y por eso no los relacionaba con la posición del centro de giro sobre la figura o exterior a ella. Resulta significativo el comentario de Sandra tras girar, con ayuda del profesor, algunas figuras mediante el algoritmo propuesto por el profesor: *A mí me da igual* [elegir] *un punto fácil que uno difícil* [para aplicar el giro]. *Todo es lo mismo. Y si es más fácil o más difícil lo comprendes igual.*

Para comprender las formas de obtención de la imagen de una figura por un giro se requiere necesariamente haber asimilado la idea de que todos los puntos giran el mismo ángulo (es decir, la invarianza del ángulo de giro). Esta propiedad fue totalmente asumida por las alumnas de Magisterio, pero no así por algunos estudiantes de otros cursos. Por ejemplo, en la actividad 11 de la experimentación en 3º de E.G.B., Gloria no tiene dudas y sus respuestas son siempre rápidas y seguras. Cuando el profesor le pregunta por qué hay siempre los mismos grados responde:

Gloria: *Porque siempre es lo mismo. Porque el ojo* [del pez, que es la figura con la que trabajaban en ese momento] *está más hacia allí y ahora está más hacia ahí y ...*
Prof. [interrumpiéndole]: *¿Toda la figura se ha movido lo mismo?*
Gloria: *Sí.*

Sin embargo, su compañera Sandra tenía serias dificultades, pues al principio no era capaz de coordinar las imágenes de los diversos puntos y sus respuestas eran lentas e inseguras. Con el tiempo, Sandra fue dando más respuestas correctas, pero no estaba claro si ello se debía a la repetición o comprendía realmente la propiedad, pues con frecuencia era incapaz de aplicarla para calcular la imagen de una figura.

En la secuencia de actividades propuesta aquí, esta propiedad es el objetivo de la actividad A2, que junto a la A1 abordan estos conocimientos que son necesarios antes de proceder a la obtención por procedimientos matemáticamente correctos de la imagen de una figura.

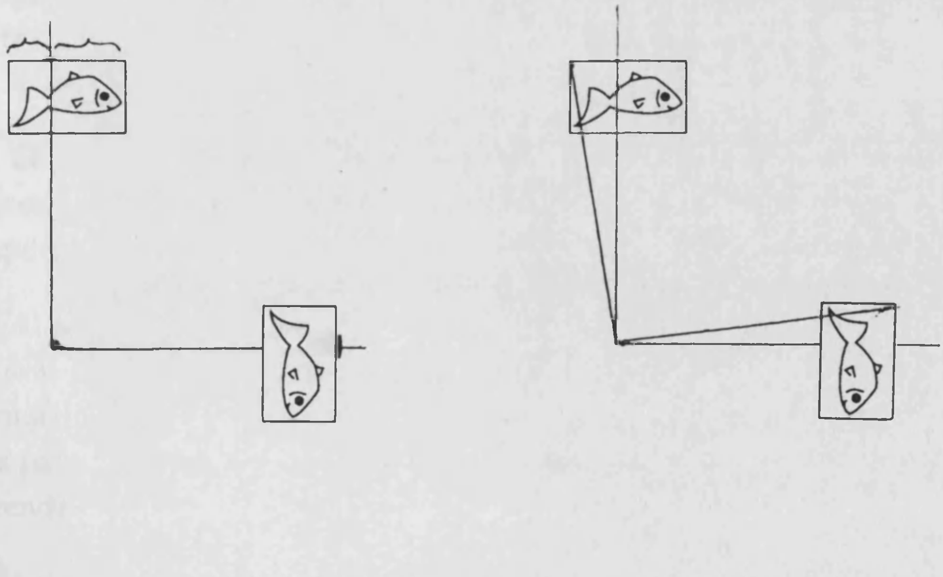
La obtención de la imagen de una figura de modo correcto se pueden realizar de varias maneras y en situaciones particulares existen variantes que incorporan propiedades especiales del caso en cuestión. Una vez adquiridas las ideas básicas de equidistancia al centro y de invarianza del ángulo de giro, es conveniente que los estudiantes aprendan varios métodos de trabajo que, si bien son matemáticamente equivalentes, pueden aparecer como diferentes ante estudiantes del segundo nivel de razonamiento a causa de los distintos elementos que se utilizan y las formas de trabajo. Por otra parte, también es importante en este nivel que los estudiantes adquieran destrezas en el empleo de herramientas auxiliares como parte del algoritmo seguido. Las actividades de la A4 a la A7 están orientadas a conseguir estos objetivos, pues en A4 se pide usar una regla en vez del compás, en A5 y A6 se puede empezar, si es necesario, usando el disco transparente, para pasar después, en A5, a dibujar varias circunferencias y ajustar la figura imagen sobre ellas, mientras que en A6 se debe llegar al cálculo de las imágenes de varios puntos para fijar la figura imagen. Así mismo, se debe tener en cuenta en este grupo de actividades la diferencia, ya comentada, entre los giros de figuras que contienen o no el centro de giro. A continuación, en las actividades A9 a A11, se plantean problemas más libres, con el fin de que los estudiantes afiancen los diferentes algoritmos y profundicen en la comprensión de las propiedades matemáticas subyacentes.

En relación con los métodos usados por los estudiantes, en las experiencias realizadas hemos encontrado que las dos alumnas de Magisterio y casi todas las de 6º de E.G.B. se encontraban cómodas usando el método de ajuste de la figura imagen sobre las circunferencias correspondientes, si bien algunos estudiantes, como Inmaculada (alumna de 6º) se decantaron por la utilización del disco transparente.

En la experimentación de 3º de E.G.B., el profesor dirigió siempre la instrucción hacia la obtención de las imágenes de dos vértices midiendo los ángulos correspondientes, por lo que no se dejó prácticamente opción a la aparición de otros métodos. Quizá ello influyó en la gran dificultad que tuvo Sandra para asimilar ese método. De todas maneras, incluso bajo esas condiciones, se puede observar la tendencia de Gloria a servirse del ajuste sobre circunferencias mediante el desplazamiento manual de la figura sobre ellas.

En consecuencia, dado que la mayor parte de los estudiantes se inclinaba más por el empleo del disco transparente y por el ajuste sobre circunferencias, hemos incluido explícitamente el estudio de ambos métodos en la propuesta de actividades contenida en esta memoria para que, con su utilización, los estudiantes afiancen su comprensión del resultado de aplicar un giro a una figura. No obstante, el profesor no debe anular la posibilidad de aparición de otros métodos correctos, propuestos por los alumnos. Probablemente, algunos de los que se produzcan de manera espontánea serán particularizaciones de los dos mencionados antes, pero no por ello son desechables.

Tal es el caso, por ejemplo, de Gloria (3º de E.G.B.), en la actividad 11 de la experimentación, al aplicar G(O,-90°) a un rectángulo. En la sesión anterior, Gloria había girado alguna figura usando el método propuesto por el profesor, el consistente en obtener las imágenes de dos puntos, pero en esta ocasión se basó en sus propias ideas sobre los giros: Gloria hizo el ángulo recto indicado en el dibujo de la izquierda y después midió con la regla las distancias marcadas en la figura mediante una llave (las marcas son nuestras). Con el compás, midiendo su abertura en la figura original, trazó sobre la línea horizontal una marca (así aseguró la equidistancia al centro). Después, colocó en vertical la pieza imagen (en la posición correcta) y, para ajustarla en el lugar exacto, midió sobre el lado correspondiente las dos distancias a las que la línea horizontal ha de cortar a uno de los lados (medidas que ya había obtenido antes). Finalmente, para asegurarse de que estaba bien hecho, midió el ángulo girado por otro vértice de la figura (ver el dibujo de la derecha).



Matemáticamente, el método de Gloria es correcto, pues se basa en la equidistancia al centro de cada punto y su imagen, pero Gloria actuaba de un modo intuitivo y en esta sesión el profesor no analizó con ella su método. Después, Gloria intentó aplicarlo también al ejercicio siguiente, cuyo ángulo de giro era de 100°, pero esta vez se desorientó y lo abandonó en favor del empleado por el profesor.

En la fase 4 de este segundo nivel de razonamiento el profesor puede aprovechar la existencia de esta variedad de métodos de trabajo para proponer su análisis y discutir sobre las propiedades empleadas en cada uno de ellos.

En las experimentaciones pedíamos a menudo a los estudiantes que determinaran la cantidad de puntos-imagen que es necesario obtener para poder determinar la figura imagen. La reflexión se centraba en el método propuesto por el profesor, el consistente en determinar el arco recorrido por cada punto, con el objetivo de poner de relieve la información que se necesita para realizar cada paso del algoritmo y hacer desaparecer poco a poco las formas de resolución basadas en la simple apreciación visual. Aunque los estudiantes progresaban en ello, con frecuencia hacían referencia a otros métodos empleados o ideados por ellos. Por este motivo, creemos que el profesor debe tratar también de comprender los métodos de realización de giros empleados por sus alumnos, cosa que se plantea explícitamente en las actividades A5 y A7 de la secuencia propuesta aquí, e implícitamente en la actividad A9. En todas ellas se debe dejar a los estudiantes libertad para que elijan el método a seguir, analizando después entre todos los estudiantes y el profesor los diferentes métodos, en particular, los tres que se han planteado en las actividades: Disco transparente, ajuste por circunferencias y cálculo de la imagen de varios puntos.

El objetivo final de este trabajo debe ser fomentar una maduración progresiva de los estudiantes, para que sean capaces de razonar basándose en cualquiera de los métodos y de elegir el más apropiado para cada situación.

Al analizar las grabaciones de las sesiones de trabajo que hemos realizado, se observa cómo no es trivial lograr que los estudiantes comprendan qué información necesitan para poder girar una figura y cuándo tienen suficientes datos para fijar la figura imagen. Entre los alumnos de 3º de E.G.B., Gloria sí llegó a entenderlo, pero parece que Sandra memorizaba las propiedades y los métodos de trabajo sin llegar a entenderlos. Los dos fragmentos de transcripciones siguientes resultan significativos:

Tras haber resuelto varias actividades en las que las niñas habían obtenido las imágenes de figuras por giros con centros exteriores a ellas, el profesor les formuló preguntas a las niñas con el fin de recordar la propiedad de la cantidad mínima de puntos-imagen necesarios para situar correctamente la figura imagen. Se produjo el diálogo siguiente, en el que se aprecia que Gloria tiene muy claro el resultado, pero Sandra parece que no comprende la contribución de cada nueva imagen (actividad 11 de la experimentación de 3º de E.G.B.):

Prof. [a Gloria]: *¿Con un solo punto podemos saber cómo queda la figura?*
Gloria: *No. Bueno, si lo haces de casualidad sí.*
Prof.: *Bueno, de casualidad sí, pero ¿con dos lo podrías asegurar?*
Gloria: *Sí.*
Prof.: *¿Y con tres?*
Gloria: *También.*
Prof.: *Más seguro. ¿Y con cuatro?*
Gloria: *Mejor.*
Prof.: *El número mínimo para saber cuántos puntos hay que coger cuál es?*
Gloria: *Dos.*
Prof. [a Sandra]: *¿Cuántos puntos hay que coger como mínimo?*
Sandra: *Dos.*
Prof.: *¿Y si cogemos tres?*
Sandra: *No. No puedo coger tres.*
Prof.: *Imagínate que a este punto lo llamo K. ¿Podría coger el punto K?*
Sandra: *Sí.*
Prof.: *¿Y a este punto lo puedo llamar B? Puedo coger los puntos que quiera. Lo que pasa es que como mínimo hay que coger ...*
Sandra: *Dos.*
Gloria: *¿Y como máximo?*
Sandra: *1200.*
Gloria: *No. Más. 4000.*

Al día siguiente, al resolver algunos casos con los centros de giro sobre la figura, se produjo este diálogo (actividad 12 de la experimentación):

Prof.: *¿Qué diferencia hay* [de cuando el centro de giro está dentro de la figura] *a cuando el centro de giro está fuera de la figura?*

Gloria: *Que había que coger dos puntos ... Y aquí hay uno.*

Prof.: *¿Con uno es suficiente?*

Gloria: *Sí. Puedes coger más.*

Sandra: *Sí. Pero lo mínimo son dos.*

Prof.: *¿Si coges más qué pasaría?*

Gloria: *Mejor.*

Prof.: *Mejor. Te asegurarías más puntos.*

En 6º de E.G.B., Rebeca fue la primera que espontáneamente pudo razonar utilizando las propiedades de los giros. La primera aproximación de las alumnas de 6º a estas actividades consistió en obtener la imagen de un punto y ajustar la inclinación de la figura visualmente. La llamada de atención del profesor hizo que Rebeca justificara correctamente por qué no era suficiente con esos datos (actividad 4 de la experimentación):

Prof.: *Con un vértice no es bastante.*

Marta: *Pues lo hacemos con otro.*

Rebeca: *Con un vértice podría estar así, o así, o así, ... La figura la podemos poner de todas las maneras que queramos, siempre que el vértice esté aquí.*

Después, en una actividad en la que se les pedía verificar si dos figuras se correspondían mediante un giro de centro dado exterior a las figuras, las alumnas comprobaron sólo con un punto. Ante una pregunta del profesor, las niñas recuerdan lo hablado en la sesión anterior y Rebeca justifica la indeterminación colocando una figura en varias posiciones de la imagen posibles si sólo se fija un vértice (actividad 6 de la experimentación). En los resúmenes de las sesiones siguientes hay referencias a otros comentarios, relacionados con esta propiedad, en los que se aprecia que las alumnas han comprendido los motivos por los que no es suficiente el empleo de un solo punto imagen para determinar la imagen de una figura por un giro con centro exterior a ella. Por ejemplo, en la última sesión, Inmaculada decía que había obtenido la imagen de un punto y, sin que el profesor indicase nada, añadió que no había colocado la imagen a ojo porque se había servido del disco transparente.

Varias sesiones más tarde, cuando estaban trabajando en una actividad análoga a la actual A13 de la fase 4 del nivel 2, el profesor provocó un diálogo en el que se ve que Rebeca e Icíar comprendían la relación entre la cantidad de puntos-imagen necesarios y la posición del centro de giro, exterior o interior a la figura (actividad 15 de la experimentación):

[Rebeca e Icíar estaban trabajando con un centro de giro sobre la figura]
Icíar: *¿Lo hacemos con todos los puntos?*
Prof.: *Como quieras. ¿Cuántos hacen falta?*
Rebeca: *Con uno* [es suficiente] *si haces todas las circunferencias* [Marta corrobora la contestación anterior de Rebeca].
Prof. [a Rebeca e Icíar]: *¿No tenéis ahí* [sobre la figura] *el centro? Pues, ¿cuántos hacen falta?*
Rebeca: *¡Claro!, pues ya hay dos.*
Prof.: *¿Con cuántas circunferencias habríais tenido bastante?*
Rebeca: *Con una. ¡Claro!*
Prof. [después de que Rebeca e Icíar terminaran el ejercicio]: *Vosotras habeis cogido el centro ahí* [sobre la figura]. *¿Cuántos puntos hacía falta mirar?*
Rebeca e Icíar: *Uno.*
Prof.: *¿Por qué?*
Rebeca: *Porque uno* [el punto cuya imagen ha obtenido] *y uno* [el centro de giro], *dos.*
Prof.: *¿Y con el centro de giro qué pasa?*
Rebeca: *Que es un punto* [de los dos necesarios].
Icíar: *Que siempre está en el mismo sitio.*

En cuanto a las alumnas de Magisterio, al principio también tuvieron algunas vacilaciones sobre la determinación de la figura, principalmente Ara, si bien las resolvieron pronto y ya comprendían la propiedad desde casi el principio de la experimentación, si bien fue necesario consolidarla para afianzar el razonamiento del segundo nivel y eliminar las justificaciones intuitivas basadas en características visuales. Así, en la primera sesión, al resolver una actividad consistente en determinar si dos figuras (A y C) se correspondían mediante un giro, se produjo el siguiente dialogo, que refleja dichas vacilaciones (actividad 5 de la experimentación):

Ara: *La C se corresponde con la A porque este vértice* [de A] *mide lo mismo que éste* [su imagen de C]. *Bueno, la distancia al centro es la misma.*
Prof.: *¿Y con ese vértice que has probado seguro que está girada?*
Merche: *Tienen que estar en la misma posición respecto al centro.*

Prof.: *¿Qué quiere decir en la misma posición?*

Merche: *Que éste también mediría lo mismo que éste* [Merche señala la distancia de otro vértice de A y de su imagen en C al centro de giro].

Prof.: *Pero eso no lo has hecho.*

Merche: *No, pero se ve. Hago otra circunferencia.*

Prof.: *O sea, has probado el otro* [vértice] *con una circunferencia y entonces ...*

Ara: *Sí que es, porque he medido la distancia a otro vértice y mide 3'9* [se refiere a la distancia desde otro vértice y desde su imagen al centro de giro].

Prof.: *Entonces, ¿con medir la distancia a un vértice es bastante?*

Ara: *En principio parece que sí.*

Prof.: *¿Uno sólo?*

Ara: *Yo he cogido otro para asegurarme.*

Prof.: *¿Pero con uno sólo sería suficiente o no?*

Merche: *No. Depende de la posición de la figura.*

Ara: *Se necesitarán dos.*

Prof.: *Si miramos esta de antes* [perros B y C de la lámina M-G-5.1], *¿la distancia de este vértice al centro y la de éste al centro cómo son?*

Alumnas: *Igual.*

Prof.: *Y los perros no son girados. ¿Si comprobamos con un vértice es suficiente?*

Alumnas: *No.*

Prof.: *¿Y si probamos con dos?*

Alumnas: *Sí.*

Algo después, en esa misma sesión, tras girar una figura con centro en un vértice, Merche justificaba que era suficiente con dibujar una circunferencia *porque el otro* [punto necesario] *ya está pintado* [aludiendo al centro de giro].

La actividad A8 tiene como objetivo la introducción de los sentidos positivo y negativo de los ángulos de giro. Esta actividad aparece después de otras en las que los estudiantes han tenido que realizar giros (siempre con ángulos sin signo), por lo que es probable que en alguna de esas actividades surja la cuestión de los dos sentidos de movimiento posibles. Naturalmente, el profesor debe aprovechar la primera oportunidad que le proporcionen sus alumnos de un contexto apropiado para introducir este concepto, con lo que la actividad A8 pasaría a tener una misión de afianzamiento. No obstante, si en las siete primeras actividades no surgiera espontáneamente la cuestión, la actividad A8 la provocará. En las experiencias realizadas no hemos tenido nunca ninguna dificultad en relación con los sentidos de giro, una vez que los estudiantes memorizaban la regla mnemotécnica que asocia los sentidos al giro de las agujas del reloj.

En la unidad de enseñanza de la fase 2 que presentamos en esta memoria, hemos incluido varias actividades (A5, A6 y A7) en las que explícitamente se hace incidencia en la indeterminación de la imagen de una figura cuando solamente se conoce la imagen de un punto. Con ello pretendemos llegar a que los estudiantes sean capaces de determinar cuántos elementos necesitan para relacionar las figuras original e imagen. No obstante, una tendencia que se presenta con bastante frecuencia en estudiantes de todas las edades es la de pasar de calcular la imagen de un solo punto a calcular las imágenes de más puntos de los necesarios, por ejemplo de los cuatro vértices de un rectángulo. Esta forma de razonar es coherente con las características del nivel 2 de Van Hiele, pues los estudiantes de este nivel actúan bajo la creencia de que una buena descripción es aquélla que incluye la mayor cantidad posible de características, bien sean imágenes de puntos para hacer movimientos o propiedades de un concepto para dar su definición.

La última actividad de esta fase, A11, sirve como resumen de las propiedades más importantes estudiadas en las actividades precedentes. Los distintos ejercicios que la componen son variados, de forma que algunos casos sí corresponden a giros, mientras que otros no lo son por diversos motivos: En unos el ángulo del giro no es el mismo para todos los puntos; en otros la distancia al centro no es correcta, ... La actividad puede también servir de resumen de métodos de realización de giros, si se fomenta que los estudiantes usen distintos procedimientos en unos y otros casos: Trazado de circunferencias, medición de las distancias al centro de giro, medida del ángulo de giro, uso del disco transparente, del compás y el transportador, ...

Fase 4 del Nivel 2

Objetivos:

1- Componer giros del mismo centro y determinar el giro resultante. Verificar la conmutatividad de la composición de giros del mismo centro.

2- Descubrir y utilizar la equivalencia de giros.

3- Descubrir y utilizar la propiedad de la mediatriz de un par de puntos como el lugar geométrico de los centros de giros que transforman un punto en el otro.

4- Comprender y utilizar el vocabulario y la notación formales asociados a los giros y su composición.

5- Descubrir experimentalmente y utilizar otras propiedades relacionadas con los giros. En particular, la determinación de la inclinación de la imagen de una figura por el ángulo del giro efectuado y propiedades particulares de los giros de 180°.

Actividades:

A1- Dados una figura y el giro G(O, ...) (se dan el centro y el ángulo), determinar, para cada uno de los métodos empleados con anterioridad, la cantidad mínima de puntos-imagen necesarios para poder situar con exactitud la figura imagen. Estudiar las diferencias según que el centro de giro se encuentre sobre la figura o sea exterior a ella.

A2- Dados el centro de un giro, un punto P y su imagen P', marcar el recorrido de ese giro. Medir el ángulo orientado del giro. Marcar también el recorrido del giro de sentido contrario al anterior que va desde P hasta P'. Medir también el ángulo orientado de este giro.

Aplicar esos dos mismos giros al punto Q. Repetir el ejercicio con otros centros de giro y otros conjuntos de puntos. Enunciar los resultados que se observan y justificarlos.

(Introducir el concepto de giros equivalentes). Generalizar la relación entre los ángulos de los giros equivalentes. Identificar algunos giros que sean equivalentes a los siguientes: G(A, ...), G(B, ...), G(C, ...) (dar los valores de los ángulos).

A3- Dados una figura, su imagen por un giro cuyo centro es exterior a la figura y el centro de ese giro, determinar el ángulo del giro utilizado y realizar el recorrido seguido por la figura. Hacer también el recorrido del giro equivalente.

Seleccionar un punto de la figura y marcar los recorridos seguidos por ese punto mediante cada uno de los dos giros equivalentes. Hacer lo mismo con otros puntos de la figura. Repetir el ejercicio con el mismo centro de giro y otra figura de la lámina.

A4- Dada una figura, obtener su imagen mediante cada uno de los giros siguientes: ... (especificar giros concretos, entre los cuales algunos pares sean equivalentes. Incluir ángulos de +180° y -180°).

A5- Dado el punto P, obtener su imagen mediante cada uno de los giros siguientes: ... (especificar varios pares de giros equivalentes, uno de cada par con ángulo inferior a 360° y el otro del par con ángulo mayor que 360°). Hacer el recorrido con un disco o con compás y justificar por qué en algunos casos se obtiene el mismo resultado. Identificar otros giros equivalentes a cada uno de los anteriores. Repetir el ejercicio, aplicando los giros a una figura.

A6- Dada una figura y un centro de giro (en unos casos sobre la figura y en otros exterior a ella), aplicar giros de +180° ó de -180° con el centro indicado. Observar las regularidades que se producen en las soluciones y generalizar el resultado.

Dado el punto P, aplicarle el giro G(O,180°). Repetir varias veces el ejercicio con otros puntos y centros de giro, intentando hacerlo sin usar herramientas auxiliares (compás, transportador, disco transparente, etc.).

Dados un punto A y su imagen A' por medio de G(C,180°), encontrar el centro del giro.

A7- Dada una figura, aplicarle el giro G(O, ...) (indicar un ángulo). A la figura imagen, aplicarle el giro G(O, ...) (indicar otro ángulo). (Introducir la idea de composición de giros). Identificar un movimiento que permita pasar directamente desde la figura inicial hasta la última imagen obtenida, indicando las características de dicho movimiento.

Repetir el ejercicio con las otras figuras de la lámina y los pares de giros siguientes: G(P, ...) y G(P, ...); G(S, ...) y G(S, ...) (se dan los valores de los ángulos). Comparar los resultados de los distintos ejercicios y obtener algunas conclusiones. Generalizar esas conclusiones y justificarlas.

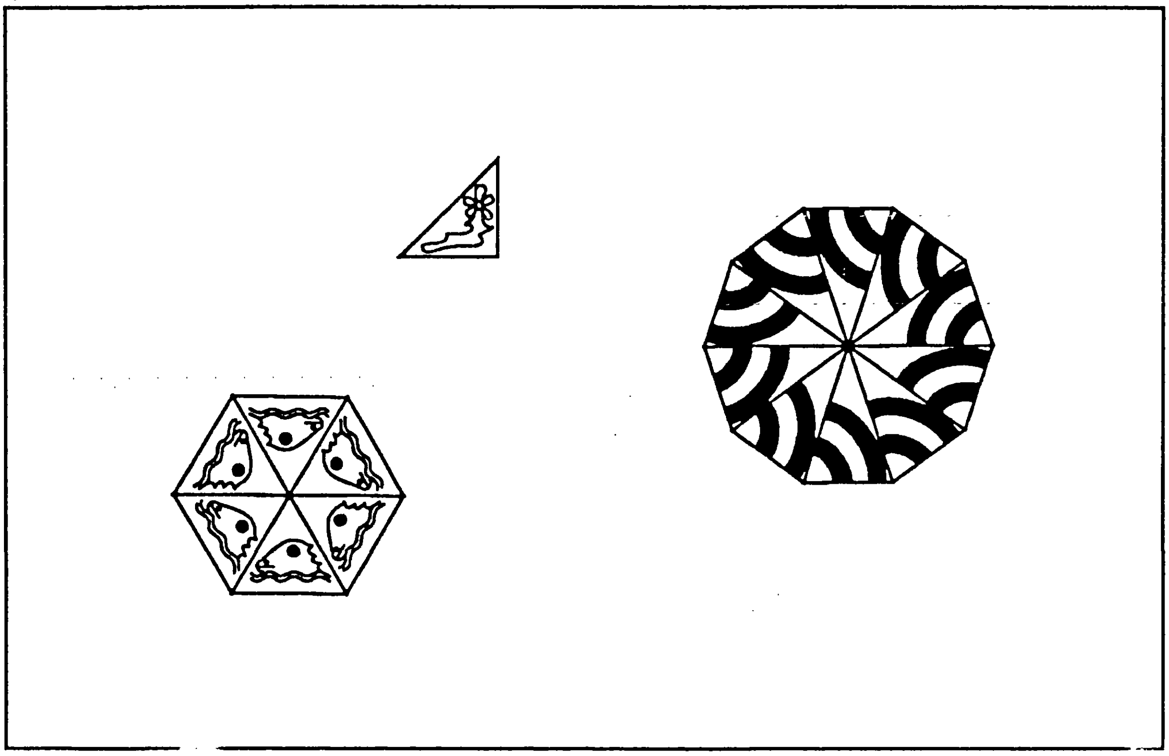
A8- Aplicarle a la figura la siguiente composición de giros: G(O, ...)∘ G(O, ...)∘G(O, ...) (dar los valores de los ángulos). ¿Cómo se puede simplificar el trabajo? O sea, ¿cómo se puede resolver el ejercicio sin realizar todos los giros?

Hacer algunas composiciones utilizando las mismas figuras y giros de las actividades A7 y A8, pero cambiando el orden de los giros orden. Comparar los resultados obtenidos y generalizar la propiedad de la conmutatividad en la composición de giros del mismo centro.

A9- Presentar a los estudiantes varios rosetones generados por giros. Pedirles que, en cada caso, identifiquen el centro y el ángulo de giro que permite pasar de una celda a la siguiente. Pedirles también que identifiquen el ángulo que permite pasar de una celda a otra no contigua a la primera.

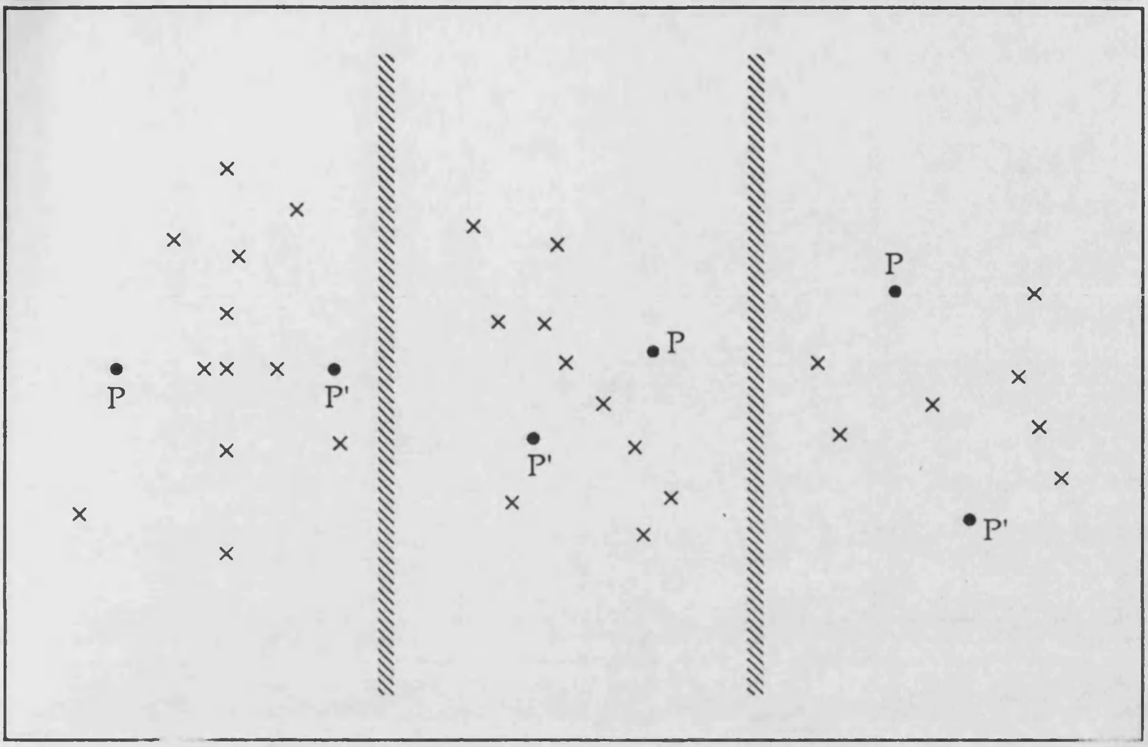
Dada una pieza, determinar el ángulo del giro que permite generar un rosetón e indicar, además, la cantidad de celdas que tendrá el rosetón.

Determinar el ángulo de giro necesario para que un rosetón esté formado por ... celdas (indicar el número de celdas). Generalizar los resultados de esta actividad, referentes a la relación entre el número de celdas del rosetón y el valor del ángulo del giro que lo genera. Indicar algunos casos en los que no sea posible construir un rosetón.



A10- Dados los puntos P y P', y varios puntos más, indicar cuáles de éstos pueden ser centros de giros que transformen P en P'. Buscar otros puntos, no dibujados en la lámina, que también puedan ser centros de giro. ¿Hay más posibilidades? Determinar el ángulo de giro para algunos de los centros de giro encontrados. ¿Cuál es el mayor/menor? ¿Qué giros son positivos/negativos? Si se quiere realizar un giro con un ángulo pequeño/grande, positivo/negativo, ¿dónde estará el centro?

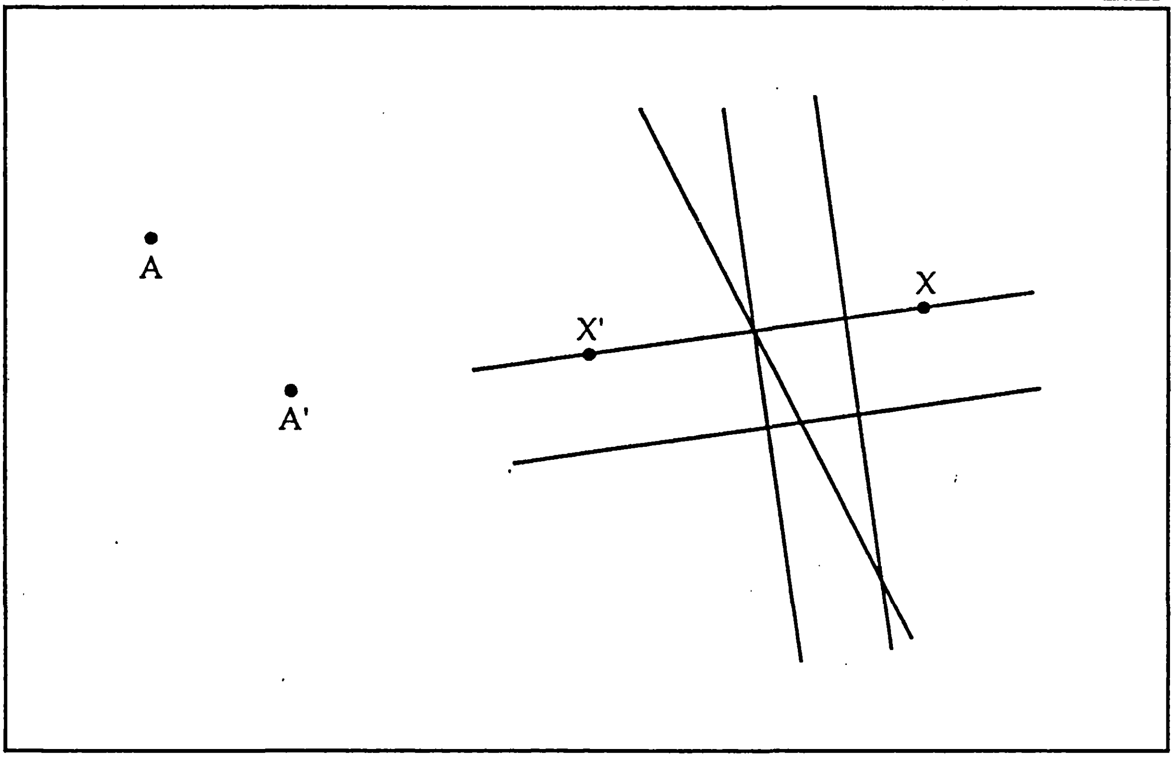
Buscar el centro del giro de ... (indicar un ángulo) que transforme P en P'.



A11- Dados dos puntos A y A', buscar centros de giros que lleven A en A'.

Dados dos puntos X y X' y varias rectas, justificar cuál o cuáles de las rectas contienen los centros de los giros que transforman X en X'.

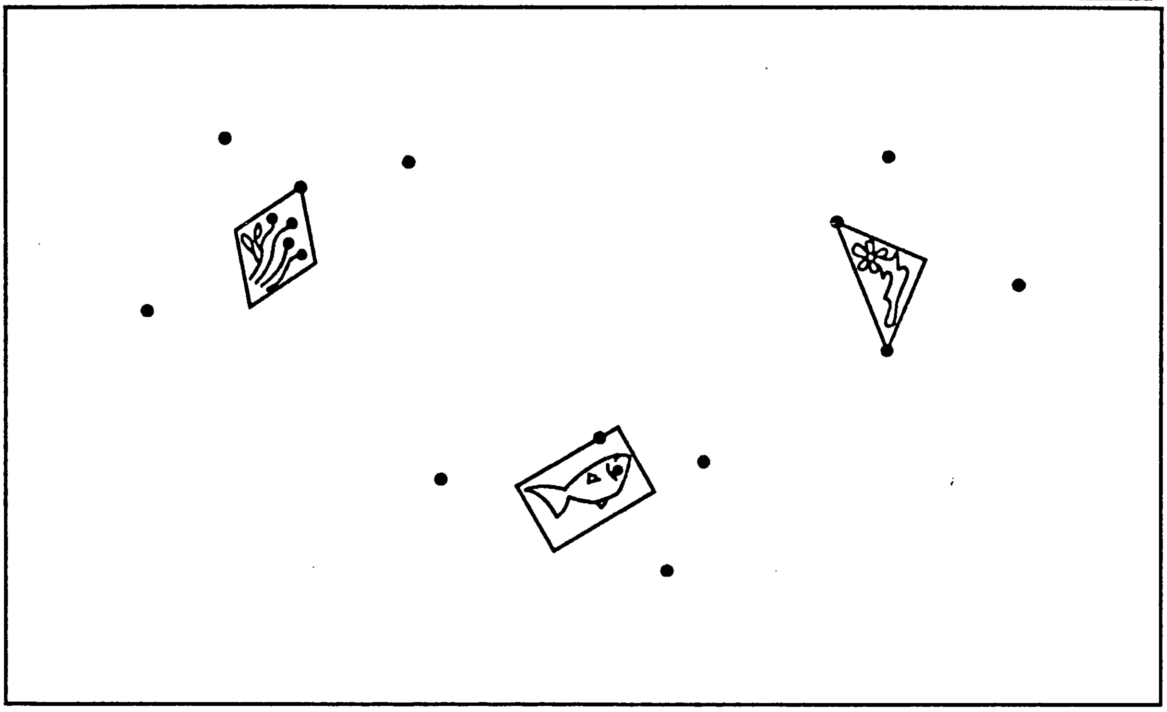
(Una vez obtenida la propiedad de que la mediatriz es la recta que contiene los centros de giro, explicar el procedimiento para trazar la mediatriz con compás, si esto no supone gran dificultad para los estudiantes).



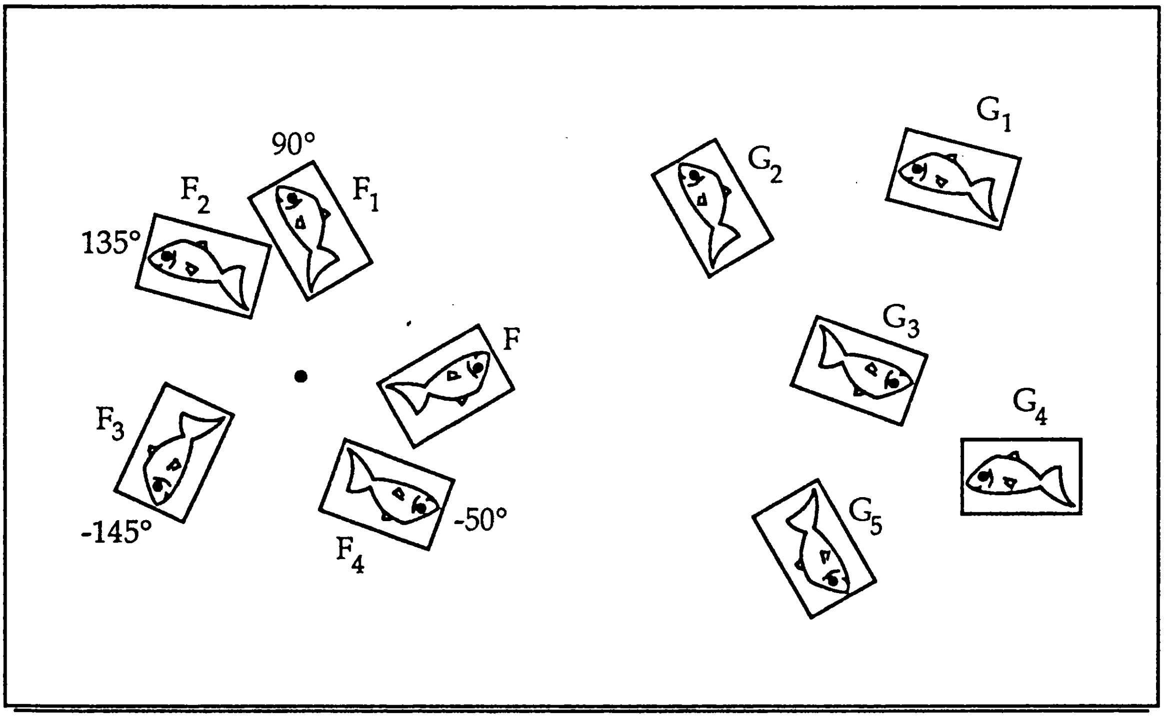
A12- Proporcionar a los estudiantes el enunciado de alguna propiedad relacionada con los giros y pedirles que la verifiquen y justifiquen si es cierta siempre, en algunos casos concretos o nunca. Por ejemplo: i) Si P' es la imagen de P por un giro, entonces $P' \neq P$. ii) Si Q' es la imagen de Q por un giro de centro O, entonces $\Delta QQ'O$ es equilátero.

A13- Dados una figura y varios puntos, aplicar a la figura, siempre a la misma, giros de ... (especificar un ángulo) con centro en cada uno de los puntos dados. Analizar los resultados, enunciar la propiedad observada.

Repetir el ejercicio anterior con otra figura y varios puntos distintos como centros de giro, siendo el ángulo del giro ... (dar un valor). Generalizar el resultado y su forma de utilización.

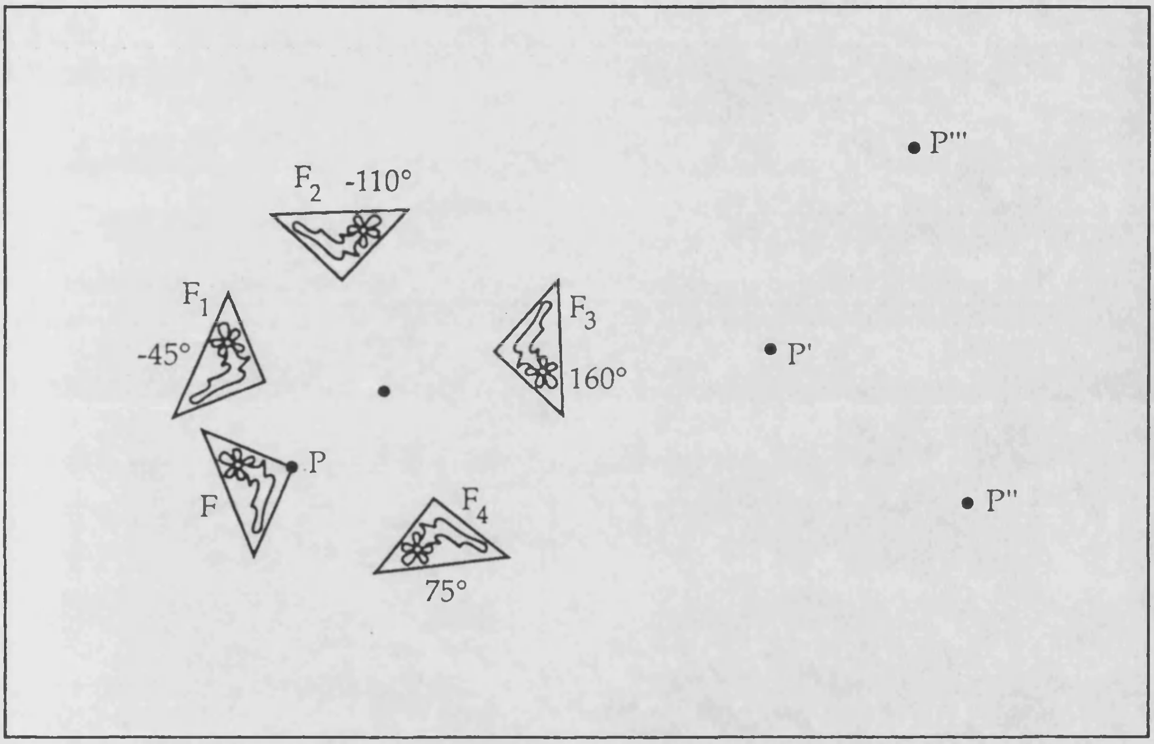


A14- Dadas una figura F, varias imágenes suyas (F_1, F_2, ...) mediante giros cuyos ángulos se indican junto a las respectivas imágenes, y otro grupo de figuras (G_1, G_2, ...), decir, cuando sea posible, sólo observando las figuras, el ángulo del giro que permite pasar desde F hasta cada figura G_i. Comprobar en algunos casos el resultado obteniendo el centro y el ángulo del giro.



A15- Se dan una figura F y varias imágenes suyas (F_1, F_2, ...) mediante giros cuyos ángulos se indican junto a las respectivas imágenes. Obtener la imagen de la figura F mediante un giro de ... (indicar uno de los ángulos escritos junto a las figuras), sabiendo que el punto P de F gira hasta P'.

Repetir el ejercicio en otros casos, variando la posición de P', el ángulo del giro, eligiendo otro punto de F, ...



A16- Construir un friso a partir del rectángulo dado, tomando como sistema generador G(O,180°) y T_a (el centro O está en el punto medio del lado menor del rectángulo y el vector *a* mide el doble que el lado mayor).

Después de construido el friso, fijar una celda y explicar dónde y cómo se situará la imagen de esa celda al aplicarle el giro G(O,180°).

Fijar una celda y señalar las celdas desde las cuales alguno de los movimientos generadores permite llegar hasta ella.

A17- Determinar el vector *a* para que se pueda construir un friso a partir del rectángulo dado, tomando como sistema generador G(O,180°) y T_a (el centro O está en el punto medio del lado mayor).

-◊-◊-◊-◊-◊-◊-

En las actividades del nivel 1 y las fases anteriores del nivel 2, tuvimos en cuenta la diferencia que hay entre la realización de un giro cuyo centro está dentro de la figura a girar, o en su perímetro, y de uno cuyo centro está fuera de dicha figura, para lo cual planteamos actividades diferentes basadas en una y otra situación. En las actividades de esta fase también hemos tenido en cuenta dicha diferencia, que sigue siendo importante, si bien ahora nos limitaremos a plantear en una misma actividad ejercicios matemáticamente análogos pero con figuras en posiciones diferentes respecto al centro de giro. No obstante, en los comentarios de los párrafos siguientes no haremos referencia a dicha distinción salvo que, en algún momento, pueda ser relevante.

Análogamente, en las actividades de niveles y fases anteriores se trabajó para lograr que los estudiantes adquiriesen destreza en el uso de los diferentes materiales y métodos de realización de giros, por lo que en las actividades de esta cuarta fase del nivel 2, los estudiantes tuvieron libertad para utilizar los materiales y métodos que prefirieran, salvo que se indicara explícitamente lo contrario. No obstante siempre se exigió que los resultados tuvieran un mínimo de exactitud y rigor matemáticos. El material usado por los estudiantes de nuestras experimentaciones dependió, principalmente, de la edad y destreza de cada estudiante, si bien el objetivo final debe ser que todos lleguen a usar correctamente los materiales usuales de dibujo técnico (regla, compás y transportador).

En los comentarios sobre de las actividades planteadas para la segunda fase de este nivel, ya hemos explicado la finalidad de la actividad A1 de la fase 4. La necesidad de determinar la imagen de más de un punto de una figura para obtener correctamente la figura resultante, afianzada a través de los ejercicios de la fase 2, se matiza más en la fase 4, donde se pide a los alumnos que actúen con precisión respecto al empleo de la cantidad mínima de puntos e imágenes, llegando a diferenciar los procedimientos de obtención de la figura imagen, según que el centro de giro sea interior o exterior a la figura girada. En los comentarios de la fase 2 incluimos algunos ejemplos de actuaciones de estudiantes que corresponderían a la situación deseada en la fase 4.

Las ideas sobre giros adquiridas en la segunda fase les permiten a los estudiantes comprender y explorar el concepto de giros equivalentes, estableciendo la relación visual y numérica entre ellos. Las actividades A2 hasta A6 están dirigidas a la enseñanza de la equivalencia de giros y a hacer que los estudiantes descubran algunas propiedades particulares, como las relativas a los giros de 180°. Todos los alumnos con los que se ha llevado a cabo la experiencia visualizaron la equivalencia, en términos de los dos caminos posibles de las figuras, si bien el grado de utilización de esta propiedad poco después de su introducción varió significativamente de unos a otros. Gloria (3º), Rebeca (6º) y Merche (Magisterio) emplearon espontáneamente en tareas posteriores el giro equivalente al dado, cuando ello facilitaba su trabajo, aunque no se hiciera mención en el enunciado de la actividad a la conveniencia de recurrir a la equivalencia. No ocurrió así siempre con los demás estudiantes, si bien sí podían utilizarlo cuando se les pedía.

En todos los cursos podemos encontrar referencias incorrectas por parte de algún estudiante al valor numérico del ángulo del giro resultante o a su signo, aunque gráficamente sí señalaba el recorrido correctamente. Los errores se debían casi siempre a la rapidez de la experimentación llevada a cabo, que no permitía memorizar por completo algunos aspectos. También se produjeron algunos errores en las justificaciones de los estudiantes debidos a un intento de aplicar propiedades de otro campo de las matemáticas, pero que no eran adecuadas aquí. Por ejemplo, Ara (Magisterio) en una ocasión dió como valor del ángulo del giro equivalente la suma del que se indicaba y 360° porque *Menos por menos es más*, pero sí marcó bien el recorrido de dicho giro.

Por ello, las actividades A2, A3 y A4 abordan el concepto de giros equivalentes a partir del recorrido de los puntos o las figuras en sentidos contrarios, hasta completar la circunferencia, preparando el camino para que los estudiantes, observando los resultados obtenidos, puedan plantear la relación numérica de los ángulos equivalentes y la constatación y aplicación de la equivalencia de giros al aplicar pares de giros a un mismo punto o figura.

En la actividad A5 hemos planteado también la equivalencia de giros con ángulos mayores que 360°, dado que en las composiciones de giros pueden aparecer estos valores como resultado de la suma de los ángulos. En las actividades planteadas en las experimentaciones se vió claramente la conveniencia de su tratamiento al estudiar la composición de giros, si bien no se dedicó ninguna actividad específica a la equivalencia de giros en sí misma.

Las actividades que planteamos en la propuesta de esta memoria para introducir y entender la composición de giros del mismo centro (A7 y A8) son análogas a las utilizadas en las experimentaciones, si bien algunas no se emplearon en todos los cursos. La forma de organizar estas dos actividades intenta que los estudiantes consigan, en primer lugar, una comprensión visual de la composición de giros y, después, que obtengan las relaciones numéricas, teniendo siempre en mente las equivalencias de giros.

En la experimentación de 3º de E.G.B. se aprecia la carencia de visión global de la composición por parte de Sandra. Por ejemplo, tras la solución de varios ejercicios sobre el valor numérico del ángulo del giro resultante de una composición de giros, la primera actividad en la que se le planteó la composición sobre una figura, los valores de los ángulos de giro fueron -180°, -180°, -90°, -90°. Sandra realizó la composición por pasos pero no supo reconocer el movimiento resultante. A lo largo de todos los ejercicios que se le plantean, se aprecia claramente que Sandra no entiende la finalidad de una simplificación de giros. Ante un ejercicio concreto solía optar por ejecutar todos los movimientos, salvo que se le indicara expresamente lo contrario. Asimismo, las simplificaciones previas a la realización del giro resultante que hacía Sandra eran muy pobres, pues prácticamente se limitaba a simplificar los ángulos de valores numéricos opuestos. Por ello en esta propuesta insistimos más en la comprensión previa visual, tanto del significado de los giros equivalentes como de la idea de composición de giros del mismo centro.

No sucedía lo mismo con Gloria (3º de E.G.B.), la cual se había construido unas estrategias mentales de interpretación de los ángulos y de cálculo que le permitían resolver los ejercicios y comprender lo que hacía. Desde ese punto de vista, los distintos signos de los ángulos no impidieron llegar a la solución de los ejercicios, aunque está claro que el manejo de los números enteros habría agilizado y facilitado el proceso.

En un momento dado, el profesor introdujo en ese curso, 3º de E.G.B., la regla usual para simplificar los ángulos de los giros de una composición: Sumar los positivos, sumar los negativos y restar, de los dos valores obtenidos, el menor del mayor. El profesor no la expuso directamente, sino que dejó que las niñas indicasen la operación aritmética a efectuar cada vez en el paso siguiente. Gloria intervino eficazmente, adelantando correctamente en varias ocasiones la operación. Eso pone de manifiesto la comprensión por su parte de lo que hace y, en particular, del significado del valor del ángulo de giro, signo incluido. Como contrapartida, Silvia no comprendió la justificación de ese método y, de haberlo exigido en ejercicios posteriores, su estrategia habría consistido en intentar su memorización, como de hecho se vio en algún ejercicio en el que se le pidió la simplificación.

En 3º de E.G.B., la composición de giros de distinto centro sólo se le planteó a Gloria, pero con muy poco tiempo, ya al final de la experimentación. No obstante, se aprecia un intento de generalización de los trabajos y métodos válidos para otras situaciones, desarrollando un razonamiento correcto de nivel 2.

En 6º de E.G.B. la introducción de los sentidos de giro no supuso ninguna dificultad, surgiendo en primer lugar, como es habitual con cualquier tipo de estudiantes, los adjetivos de "izquierda" y "derecha". En cuanto a las combinaciones de números positivos y negativos o de números negativos, aparece muy poco, pues sólo se proponen dos ejercicios de composición de giros, uno con dos giros del mismo centro y otro con dos giros de distinto centro. Parece desprenderse que, razonando en términos del sentido del giro, las alumnas sí pueden trabajar correctamente con valores positivos y negativos (aunque en las grabaciones no hemos podido seguir el trabajo efectuado por todas las alumnas). No obstante, en el ejercicio de composición de giros de distinto centro, no queda clara la justificación de las alumnas sobre la operación realizada con los valores de los ángulos (actividad 16 de la experimentación):

Los valores de los ángulos de los giros que se componen son + 90° y -60°.
Inmaculada escribe en la pizarra: *90 P* [positivos] - *60 N* [negativos] = 30 y pregunta: *¿P* [positivos] o *N* [negativos]?
Prof.: *¿Tú qué crees?*
Inmaculada: *P.*
Prof. [señala la pizarra]: *¿90 positivos y 60 negativos no será 30 positivos?*
Marta: *Sí.*
Prof.: *¿Por qué?*
Marta: *Porque hemos restado los ángulos.*
Prof.: *¿Por qué has restado los ángulos?*
Inmaculada: *Porque es así.*

Rebeca, sin embargo, basa su justificación sobre el ángulo del giro resultante en una propiedad que se acababa de descubrir: la determinación de la inclinación de la imagen de una figura según el ángulo del giro aplicado o, lo que es equivalente, y es en los términos en los que se expresa Rebeca, la traslación existente entre todas las imágenes de una misma figura por giros del mismo ángulo. Esto muestra inicio del razonamiento de nivel 3 y está en la línea del modo de razonar que pretendemos con la secuencia de enseñanza que proponemos ahora.

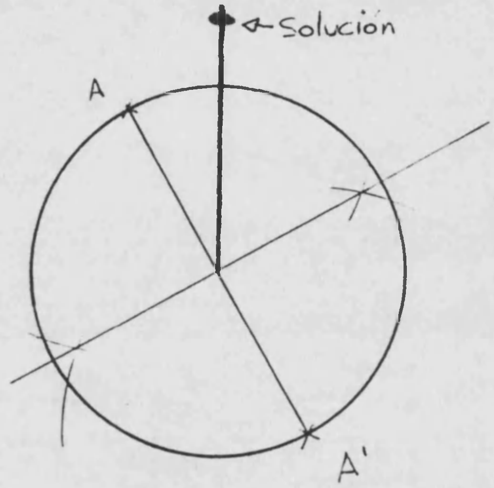
Obviamente, la composición de giros de distinto centro es más compleja que la de giros del mismo centro. Si bien su introducción puede hacerse en el nivel 2, ya que los estudiantes de este nivel tienen capacidad suficiente para realizar estas composiciones e identificar el tipo de movimiento resultante, para entender bien este caso de composiciones hace falta una capacidad de relacionar diferentes conceptos e isometrías que es más propia del nivel 3. Por este motivo, con las actividades del nivel 2 no pretendemos llevar a cabo un descubrimiento exhaustivo de propiedades importantes de los giros, sino que intentamos que los estudiantes tengan las bases de conocimientos y relaciones que les permitan tener éxito en las actividades del nivel 3.

La introducción en las actividades A10 y A11 de la mediatriz como el lugar geométrico de los posibles centros de giros que transforman un punto en otro se planteó por primera vez en las experimentaciones de dos maneras diferentes, según el curso: Los estudiantes de 6º debían seleccionar los puntos que servían como centros de giro de entre un conjunto de puntos que se les daba, mientras que los de 3º y Magisterio debían buscar centros de giro, sin más datos.

En el primer caso (6º de E.G.B.), la solución se obtuvo, simplemente, probando punto por punto con el compás o la regla. En el segundo caso, la solución inmediata fue el punto medio del segmento (giro de 180°), e hizo falta insistir en la búsqueda de más puntos para que los estudiantes reconocieran la existencia de otras soluciones, que fueron consiguiendo por tanteo, probando con el compás y/o midiendo los radios. Hay, no obstante, una excepción en Magisterio, Merche, que traza enseguida la mediatriz, quizá de manera algo intuitiva, influida por sus conocimientos previos.

En la propuesta final que hacemos aquí hemos optado por introducir la visión del lugar de los centros de giros de forma análoga a como se planteó en la experimentación con 6º (actividad actual A10): Proporcionar una serie de puntos para que los alumnos identifiquen los que son centros de giros. De esta forma se facilita de una manera bastante rápida la generalización de la alineación de los centros de giro. El otro tratamiento también es válido, pero consume más tiempo; en la secuencia que proponemos, ese tipo de actividad aparece después de que los estudiantes hayan descubierto la existencia de una línea recta que contiene los centros de giro (actividad A11).

En nuestras experimentaciones no hubo dificultad en que los estudiantes de los diferentes cursos llegaran a discriminar los puntos que son centros de giro de los puntos que no lo son basándose en la equidistancia, si bien en algunos casos al principio no se hizo referencia explícita a ella. La única excepción fue Sandra (3º de E.G.B.), que avanzaba con dificultad y requería más instrucción de la fase 2.



La interpretación de los centros de giro como puntos de una recta se afianza cuando se establece la relación entre los valores de los ángulos y la mayor o menor distancia entre el centro de giro y el segmento que une el punto y su imagen. En las experimentaciones llevadas a cabo sólo les propusimos esta actividad a los estudiantes de 6º de E.G.B. y de Magisterio. En este último curso se vió claramente la utilidad de esta actividad (actividad 16 de la experimentación), pues mientras que Merche aplicaba correctamente la idea de mediatriz y el valor del ángulo, Ara tardó en establecer las relaciones necesarias para resolver la actividad. En el dibujo se muestra la solución obtenida por Ara cuando, tras haber construido la recta de los centros de giro, se le pidió que encontrara el centro del giro cuyo ángulo es de -30°. Obsérvese que traza un ángulo de 30°, con vértice en el punto medio del segmento AA', siendo este segmento uno de los lados del ángulo.

Una de las finalidades generales del segundo nivel de razonamiento es que los estudiantes descubran experimentalmente, apliquen y justifiquen propiedades matemáticas. Por ello es necesario que, además de las propiedades básicas de los giros, que forman el hilo conductor de la organización del tema, los estudiantes trabajen en algunas otras propiedades más específicas. Dado que no tienen por qué ser unas propiedades concretas y cada profesor puede tener sus preferencias, presentamos una actividad abierta (A12), en la que no se especifican las propiedades a estudiar, sino sólo dos ejemplos. No obstante, cualquier propiedad estudiada en esta actividad debe basarse en los fundamentos de los giros aprendidos en las actividades de la segunda fase de este nivel de razonamiento. Magisterio fue el único curso en el que planteamos la actividad A12, que resultó útil porque impulsó la reflexión de las alumnas y les hizo profundizar más en los giros, pero que fue demasiado corta debido a la limitación de tiempo que teníamos.

Las actividades A13, A14 y A15 se dedican al descubrimiento y aplicación, para su afianzamiento, de la propiedad de determinación por el ángulo del giro, de la inclinación de la imagen de una figura por ese tipo de movimiento. Con ellas continuamos la línea de ejercicios contemplados en el objetivo 5 y que iniciamos en A12. El tratamiento es más extenso ahora, puesto que esta propiedad constituirá uno de los pilares sobre los que sustentar las justificaciones de relaciones en el nivel 3.

En las experimentaciones llevadas a cabo, se presentó en 6º de E.G.B. y en Magisterio. En el primero de estos cursos se produjo rápidamente la visión de la traslación entre todas las imágenes de una misma figura por giros del mismo ángulo, excepto en el caso de una estudiante, Icíar, quizá por falta de tiempo. En la aplicación directa de la propiedad, dos estudiantes cometieron errores, más propios de descuidos que de incomprensión de la propiedad; alguno de esos errores fue también cometido por Ara, una de las estudiantes de Magisterio. El trabajo llevado a cabo en 6º de E.G.B. (actividad 15 de la experimentación) fue más breve de lo que proponemos ahora en la nueva secuencia, a pesar de lo cual Rebeca consolidó suficientemente la propiedad como para servirse de ella en un ejercicio planteado inmediatamente después, para justificar el valor del ángulo de giro resultante de una composición:

Se trata de la actividad 16 de la experimentación de 6º de E.G.B. Hay que efectuar la composición de dos giros de distinto centro y ángulos, 90° y 180°, respectivamente. Tras realizarla, por pasos, Rebeca dice que el ángulo del giro resultante es de 90°. Su justificación es: *Se hace 90* [gira 90° la pieza original] *y entonces ya sale trasladada* [de la figura final]. No indica el signo, que es negativo.

En Magisterio, la secuencia de ejercicios propuestos (actividades 21, 22 y 23 de la experimentación) resultó eficaz, puesto que los primeros errores, quizá debidos a descuidos, y los titubeos sobre la aplicación de la propiedad fueron subsanados por completo. Por ello, la secuencia que presentamos ahora contiene tres actividades, A13, A14 y A15, iguales a las experimentadas en Magisterio.

Algunas actividades de esta fase están dedicadas a estudiar las características particulares de los giros de 180°, tanto explícitamente (actividad A6), como implícitamente (actividad A16 y A17). Las experimentaciones han mostrado que los estudiantes son capaces de descubrir por sus propios medios las características de los giros de 180°, si bien no siempre se llegaron a poner de relieve estas propiedades, ya que en algún curso no se habían planteado las actividades con esta finalidad concreta. Por ello en esta propuesta sí incluimos las propiedades básicas de los giros de 180° en la secuencia de actividades.

En las experimentaciones llevadas a cabo se planteó la alineación de cada punto, su imagen y el centro de giro (utilizando sólo la regla para obtener la imagen). También surgió la característica visual de estos giros de que la figura imagen se sitúa "al revés" de la original. Rebeca (6º de E.G.B.) y Merche (Magisterio) hicieron explícito que cada segmento y su imagen por un giro de 180° son paralelos, propiedad que no se había comentado antes y que después utilizaron para resolver otras actividades. Por lo inusual, merece la pena destacar el método seguido por Merche para girar una figura 180° con centro exterior a la figura (actividad 12 de la experimentación): Merche eligió un lado de la figura, trazó las rectas que pasan por los vértices de sus extremos y el centro de giro y, por último, colocó la figura imagen en el lugar en que la separación entre las dos rectas era exactamente igual al lado de la figura, teniendo cuidado de mantener el lado de la figura imagen paralelo al correspondiente de la original (aunque Merche no mencionó explícitamente esta propiedad, en la grabación se ve que sí se preocupa de ella). Algo más tarde, la profesora le pidió a Merche que usara otro método de obtención de imágenes por giros de 180° y Merche empleó el método usual, pero comentando que *lo que pasa es que* [con mi procedimiento] *gano tiempo.*

Las dos estudiantes de los cursos de 3º y 6º de E.G.B. con un nivel de razonamiento inferior no intuyeron alguna de estas propiedades. Por ejemplo, Sandra (3º E.G.B.) asimiló bien la característica del centro como punto medio de los segmentos que unen cada punto y su imagen; así, en la actividad 17 de la experimentación, Sandra justificó que el ángulo de giro entre dos figuras era de 180° *porque si hacemos la raya es la mitad.* Pero, al mismo tiempo, con frecuencia colocaba la figura imagen en posición trasladada de la original (actividad 13 de la experimentación) y mantenía durante cierto tiempo este error, aunque en otras actividades sí giraba la figura.

Por otra parte, Inmaculada (6º E.G.B.) situaba la figura imagen con una inclinación incorrecta (actividad 15 de la experimentación), error que le corregía Rebeca y se lo explicaba basándose en la ausencia de paralelismo entre los lados de la figura inicial y los correspondientes de la imagen.

Para finalizar, queremos mencionar un grupo de actividades (A9, A16 y A17) que, con motivo de la construcción de rosetones y frisos, sirven para aplicar en un contexto diferente propiedades de los giros aprendidas con anterioridad: La composición de giros y las características de los giros de 180°. La única de estas actividades que hemos experimentado es la A9, usada sólo en Magisterio, y no presentó problemas. Tanto los rosetones como los frisos son un buen contexto para investigar dentro del segundo nivel de razonamiento, pues obligan a los estudiantes a combinar propiedades de los giros y las traslaciones y sirven como preparación para el trabajo del nivel 3, en el que se iniciará el estudio conjunto de las tres isometrías.

La primera vez que un grupo de estudiantes trabaje con frisos, será necesario explicarles que se pueden emplear las traslaciones T_a, T_{-a} y que el giro G(O,180°) puede tener su centro sobre cualquiera de las baldosas que van apareciendo, pero siempre sobre el mismo punto de la baldosa. En estas actividades hemos optado por una introducción gradual, manteniendo al principio el centro del giro fijo, sobre la baldosa inicial, para hacerles ver, cuando hayan construido algunos frisos de esa manera, que se obtiene el mismo resultado aunque se cambie el centro del giro a los puntos homólogos de otras baldosas.

GIROS: NIVEL 3

Objetivos:

Las actividades que planteamos para este nivel pretenden lograr los objetivos generales siguientes, que más adelante desglosaremos en las diferentes fases de aprendizaje:

Los objetivos y actividades de este nivel se complementan con los correspondientes de los otros movimientos.

1- Comprender la obtención del centro de giro a partir de determinada información sobre una figura y su imagen.

2- Descubrir y justificar que siempre existe una isometría (giro o traslación) relacionando dos figuras congruentes de la misma orientación.

3- Realizar composiciones de giros de distinto centro, generalizar el resultado de la composición de varios de tales giros y utilizar estos resultados en otros problemas. Análisis de la conmutatividad.

4- Realizar composiciones y descomposiciones de giros y/o traslaciones. Simplificar composiciones de estas isometrías.

5- Demostrar el resultado de la composición de giros y el resultado de la descomposición en giros de un giro o una traslación. Comprender y saber utilizar la infinidad de soluciones.

6- Relacionar propiedades conocidas para obtener nuevas propiedades de los giros o métodos para la aplicación de este movimiento.

7- Obtener, utilizar y analizar la definición formal de giro. Caracterizar los giros mediante conjuntos de condiciones necesarias y suficientes.

8- Demostrar informalmente, mediante razonamiento deductivo, propiedades de los giros descubiertas en este nivel o en los anteriores.

9- Comprender el planteamiento y desarrollo de algunas demostraciones formales relacionadas con los giros.

10- Realizar algunas implicaciones simples en una demostración y demostraciones de pocos pasos relacionadas con los giros.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

Para completar adecuadamente el desarrollo del tercer nivel de razonamiento, hay que estudiar y utilizar las relaciones existentes entre las distintas isometrías, traslaciones, giros y simetrías, ya que tanto al componer giros como simetrías se producen traslaciones y giros. Por lo tanto, al iniciar el trabajo con los bloques de actividades para la adquisición del tercer nivel de Van Hiele, conviene que los estudiantes hayan realizado previamente el aprendizaje de las traslaciones, los giros y las simetrías y que se encuentren, como mínimo, en el segundo nivel de razonamiento en cada uno de estos conceptos.

En este nivel el descubrimiento de propiedades va más allá de la simple experimentación en algunos casos, puesto que se plantea la necesidad de una demostración (justificación) general. No obstante, los ejemplos concretos siguen teniendo importancia pues, en bastantes ocasiones serán la base sobre la que se apoyen las demostraciones elaboradas por los estudiantes o el profesor.

Desde la perspectiva en la que hemos planteado la secuencia de enseñanza propuesta, uno de los objetivos importantes del tercer nivel de razonamiento debe consistir en lograr que los estudiantes adquieran una visión general y global de las relaciones existentes entre las tres isometrías, y en particular entre los giros y los movimientos a que dan lugar en sus composiciones, las traslaciones.

Ello se consigue mediante el empleo de dos propiedades básicas: La determinación de la inclinación relativa entre una figura y su imagen, es decir del ángulo formado por ambas figuras (propiedad descubierta en el nivel anterior), y la existencia siempre de una traslación o un giro que permite pasar de una figura a otra congruente de la misma orientación. Desafortunadamente, para estas dos propiedades no se puede hacer una demostración general informal basada en otras propiedades conocidas, por lo que los estudiantes las generalizan a partir de la consideración y análisis de varios casos, método propio del segundo nivel de razonamiento. Sin embargo, el descubrimiento y justificación de la existencia siempre de un giro o una traslación entre dos figuras congruentes, de la misma orientación, no se ha planteado hasta el tercer nivel porque, en los casos en que las dos figuras están giradas, se requiere la obtención del centro de giro y la combinación de algunas propiedades para poder realizar la demostración de la veracidad de esta propiedad.

Esta visión general permite conocer y justificar el movimiento resultante de una composición de giros y traslaciones, incluyendo la determinación del ángulo entre las figuras original y final. Asimismo, permite estudiar las posibilidades de descomposición de una traslación o de un giro en varias de estas isometrías y aplicarlas a situaciones concretas.

Casi todas las propiedades que acabamos de mencionar requieren saber determinar el centro del giro que transforma una figura en otra. La comprensión y asimilación del procedimiento que permite obtenerlo con precisión, corte de mediatrices, es propia del tercer nivel de razonamiento, ya que para ello se requiere que los estudiantes consideren de forma simultánea los giros de cada punto de una figura, estableciendo la relación entre las diferentes mediatrices. Por ello, uno de los objetivos incluidos en el tercer nivel es descubrir este método de obtención del centro de giro y su comprensión.

Otra característica del tercer nivel de Van Hiele es que los estudiantes empiezan a poder obtener y emplear definiciones matemáticas, así como a comprender y utilizar demostraciones formales. A ello obedece el planteamiento de los últimos objetivos de este nivel, en los cuales se propone el estudio de la definición formal de giro y la demostración de algunas propiedades importantes de los giros (algunas ya conocidas por los estudiantes y otras nuevas). En cuanto a las demostraciones, los profesores no deben olvidar que se trata de la primera aproximación de sus alumnos a las demostraciones formales, por lo que no deben pretender que ellos las obtengan por sí mismos, sino que los profesores deben guiar y explicar el desarrollo de estas demostraciones que, en todo caso, deben ser sencillas y admitir un tratamiento informal pero riguroso.

Fase 1 del Nivel 3

Objetivos:

En la presentación de las actividades de los niveles anteriores ha quedado suficientemente explicada la finalidad que debe tener la fase 1 de cada nivel, por lo que no creemos necesario repetir esas consideraciones respecto de la fase 1 del tercer nivel. En este caso, tampoco proponemos ninguna actividad específica para dicha fase, si bien los profesores deben centrar su actividad en determinar el nivel de razonamiento de sus alumnos en relación con los giros y sus conocimientos sobre:

- Los números enteros y las operaciones de suma y resta en este conjunto.
- Utilización de la circunferencia, los ángulos orientados y los grados.
- Manipulación y propiedades de los giros.
- Los elementos necesarios de las otras isometrías.

En relación con estos puntos, si los alumnos conocen el tema pero tienen alguna carencia concreta, es conveniente darles una instrucción específica adecuada antes de empezar a trabajar con los giros.

Fase 2 del Nivel 3

Objetivos:

1- Obtener el centro de giro, mediante el corte de mediatrices.

2- Descubrir experimentalmente que, dadas dos figuras congruentes con la misma orientación, siempre hay un giro -si su inclinación es distinta- o una traslación -si su inclinación es la misma- que permite pasar de una a la otra.

3- Componer giros de distinto centro y generalizar el resultado en función del valor de la suma de los ángulos de los giros que se componen.

4- Demostrar informalmente el resultado de la composición de dos giros de distinto centro (basando el argumento en la relación de las inclinaciones relativas de las diferentes figuras).

5- Descomponer una traslación o un giro en producto de dos giros de distinto centro. Comprender, justificar y emplear la infinidad de soluciones.

6- Entender la definición formal de giro e identificarla adecuadamente en situaciones concretas.

7- Relacionar propiedades conocidas para resolver situaciones y desarrollar métodos de realización y reconocimiento de giros.

8- Comprender el desarrollo de algunas demostraciones, dirigidas por el profesor, y proporcionar la justificación de algunas implicaciones que formen parte de las mismas.

Actividades:

A1- Dadas una figura y su imagen por medio de un giro, obtener el centro y el ángulo de ese giro (recordar que los centros de los giros que relacionan un par de puntos son los puntos de la mediatriz del segmento que los une).

¿Es seguro que todas las mediatrices se cortan en el mismo punto? ¿Puede haber algún giro para el cual no se corten todas las mediatrices en el mismo punto? Justificar las respuestas.

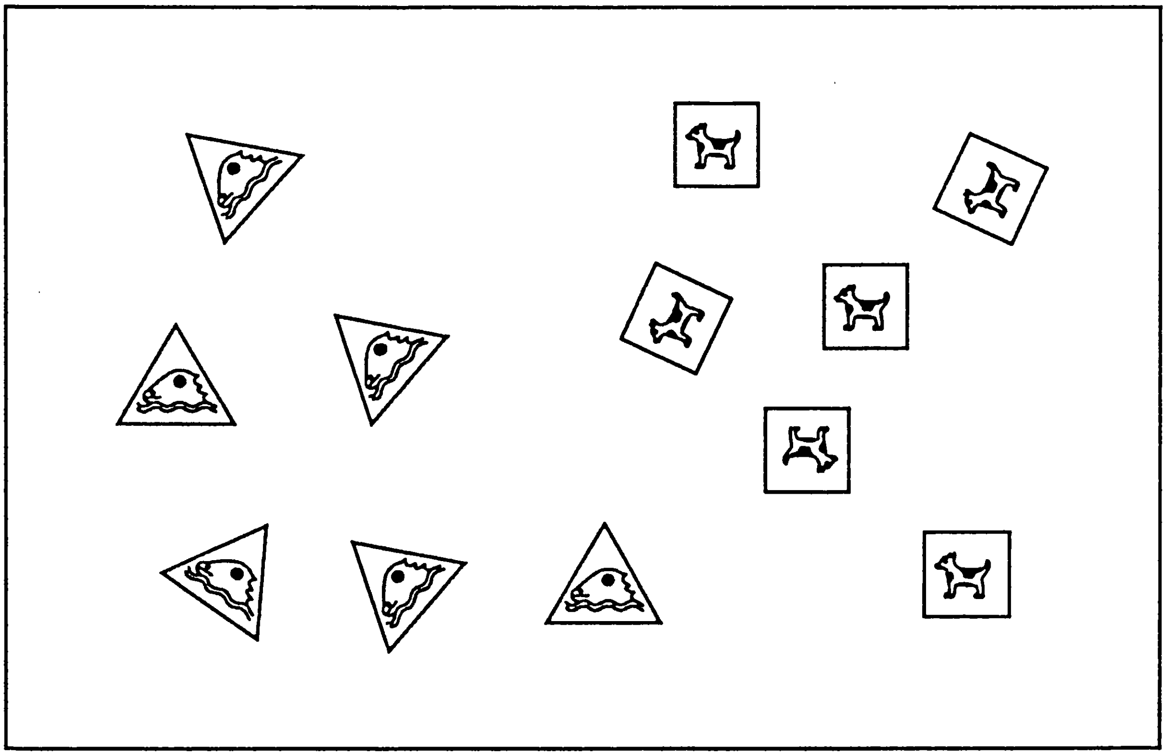
A2- El alumno coloca sobre una hoja de papel dos figuras congruentes de la misma orientación, de forma que tengan distinta inclinación. Averiguar si existe algún giro que permita pasar de una figura a la otra (determinando su centro y su ángulo). Repetir el ejercicio con otros pares de figuras.

Generalizar el resultado anterior: Dadas dos figuras congruentes de la misma orientación y con distinta inclinación, ...

¿Puede existir algún caso para el cual no sea cierta la afirmación que se acaba de hacer? ¿Por qué?

A3- Se dan varias figuras congruentes de la misma orientación, algunas con la misma inclinación entre ellas y otras con inclinaciones diferentes. Determinar cuándo es posible pasar de una figura a otra mediante una isometría simple (traslación, giro o simetría). Comprobar cada caso positivo determinando por completo la isometría correspondiente. Repetir el ejercicio con otros conjuntos de figuras.

Generalizar el resultado anterior: Dadas dos figuras congruentes de la misma orientación, ...



A4- Dada la figura F, marcar un punto sobre ella y obtener su imagen mediante G(O,-90°) (O está en la lámina). Sin hallar la imagen de más puntos, determinar la imagen de F por el giro anterior. Recordar para ello la propiedad de que la inclinación de la girada de una figura está de terminada por el ángulo del giro.

Si a la figura A de la lámina se le aplica un giro de -75°, colocar una figura con la inclinación de la imagen de A. Luego, señalar un punto de A y obtener su imagen por G(P,-75°). Después, sin obtener la imagen de más puntos, determinar la imagen de A por el giro G(P,-75°).

Repetir el ejercicio anterior con la figura B y el giro G(R,120°).

Describir y generalizar el método seguido para obtener la imagen de las figuras. Aplicarlo a otras figuras y otros giros.

A5- Colocar en la lámina una figura con la inclinación que tendrá la imagen de la figura F de la lámina si se le aplica un giro de 40° (no se especifica el centro de giro). Comprobar el resultado aplicando a F el giro G(C,40°) (se da C).

Colocar en la lámina una figura con la inclinación que tendrá la imagen final de la figura A de la lámina si se le aplica un giro de 125° y a la imagen resultante se le aplica un giro de -235° (no se especifican los centros de giro). Comprobar el resultado aplicándo a la figura A la composición G(P,-235°)∘G(Q,125°) (se dan P y Q).

Repetir este ejercicio, efectuando la misma composición de giros pero invirtiendo su orden. ¿Qué semejanzas y diferencias hay entre ambos resultados?

Repetir el ejercicio haciendo la composición de más de dos giros, modificando cada vez el orden de actuación.

A6- Aplicar a la figura F (se da) la composición G(O,235°)∘G(R,175°) (se especifican los centros de los giros). ¿Qué información sobre la imagen final se puede tener antes de empezar a realizar la composición?

Repetir el ejercicio aplicando a la figura A la composición G(P,-70°)∘G(Q,70°) (se dan G, P y Q).

Repetir el ejercicio haciendo composiciones de más de dos giros.

A7- Generalizar los resultados de las actividades anteriores: ¿Qué movimiento resulta de la composición de giros de distinto centro? ¿Por qué se obtiene unas veces un giro y otras una traslación? ¿Qué sucede si los giros que se componen tienen el mismo centro? Completar los enunciados:

El movimiento resultante de la composición G(B,β°)∘G(A,α°) es ...

El movimiento resultante de la composición G(C,β°)∘G(C,α°) es ...

A8- A) Para pasar la figura F a la F' (se dan ambas) se ha aplicado el giro G(O,80°) (se da el centro) pero, en lugar de hacer este giro directamente, se tienen que utilizar dos giros, también con centro en O, para obtener el mismo resultado.

Si el primer giro empleado es G(O,50°), ¿cuál es el segundo giro? Y si el segundo giro es G(O,-60°), ¿cuál es el primero?

Si el primer giro efectuado es G(O,α°), ¿cuál es el segundo? Y si el segundo giro es G(O,β°), ¿cuál es el primero?

B) Repetir el ejercicio anterior pero con giros de distintos centros. Si el primer giro que se aplica es G(P,20°) (se da P), ¿qué características se conocen del segundo giro? Obtener el segundo giro.

Repetir el ejercicio, pero siendo G(Q,-65°) el primer giro que se aplica (se da Q).

Generalizar los resultados y métodos de trabajo anteriores expresando la relación verbalmente y por escrito: Si se quiere descomponer G(R,α°) en producto de dos giros de distinto centro, ¿qué se puede decir de sus ángulos de giro? ¿Y de sus centros?

C) Descomponer el giro G(O,80°) en producto de dos giros de distinto centro, pero ahora no se fija previamente ningún dato de estos giros (ni sus centros ni sus ángulos). ¿Dónde se puede situar el centro del primer giro de la composición? ¿Qué ángulo puede tener? ¿Cuántas posibilidades hay para elegir el primer giro?

Una vez fijado el primer giro de la composición, ¿dónde se puede situar el centro del segundo giro? ¿Qué ángulo puede tener? ¿Cuántas posibilidades hay para elegir el segundo giro?

A9- A) Para pasar la figura F a la F' (se dan ambas) se ha aplicado la traslación T_a (se da el vector) pero, en lugar de hacer esta traslación directamente, se tienen que utilizar dos giros para obtener el mismo resultado.

Si el primer giro utilizado es G(O,120°) (se da O), ¿qué características se conocen del segundo giro? Obtener el segundo giro.

Si el segundo giro es G(P,-60°) (se da P), ¿qué características se conocen del primer giro? Obtener el primer giro.

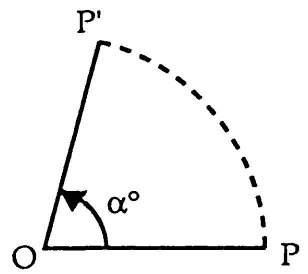
Generalizar los resultados y métodos de trabajo anteriores expresando la relación verbalmente y por escrito: Si se quiere descomponer T_a en producto de dos giros, ¿qué se puede decir de sus ángulos de giro? ¿Y de sus centros?

B) Ahora también se pide descomponer la traslación T_a en producto de dos giros de distinto centro, pero no se fija previamente ningún dato (ni sus centros ni sus ángulos). ¿Dónde se puede situar el centro del primer giro de la composición? ¿Qué ángulo puede tener? ¿Cuántas posibilidades hay para elegir el primer giro?

Una vez fijado el primer giro de la composición, ¿dónde se puede situar el centro del segundo giro? ¿Qué ángulo puede tener? ¿Cuántas posibilidades hay para elegir el segundo giro?

A10- El giro $G(O,\alpha°)$ se define como la aplicación del plano en sí mismo que a cada punto P del plano le hace corresponder el punto P' del plano, de manera que se cumplen las dos condiciones siguientes (ver la figura):

1. $d(O,P) = d(O,P')$.
2. $\angle POP' = \alpha°$.



Recordar cuál es el resultado de la composición $G(O,\beta°)\circ G(O,\alpha°)$. Demostrar esta propiedad verificando que se cumplen las dos condiciones de la definición de giro.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

En la experimentación realizada en 3º de E.G.B. no llegamos a trabajar en todas las actividades correspondientes al tercer nivel de razonamiento. En este curso, incluso para Gloria, que era la alumna más avanzada, resultó imposible razonar en el tercer nivel. Por ejemplo, al proponerle una actividad similar a la A1, en la que tenía que obtener el centro de giro por corte de mediatrices, Gloria determinó el punto medio del segmento entre un punto y su imagen (seguramente recordando el método usado con los giros de 180°) y trazó la circunferencia que pasa por esos puntos. A continuación, el profesor le pidió que comprobara si el centro que había elegido era válido para otros puntos de la figura; Gloria se asombró cuando comprobó que ese punto no servía. Tras experimentar, se dió cuenta de que *Hay que hallar el centro de giro, pero de todo.* Gloria sí comprendía claramente que, para que un punto sea centro de giro, debe ser válido para todos los puntos de la figura, pero con este comentario mostraba que estaba razonando en el nivel 2, pues no era capaz de relacionar las condiciones de unos puntos y otros de las figuras. A partir de las explicaciones del profesor, Gloria aprendió que el corte de dos mediatrices da la solución, pero no pudo establecer las relaciones lógicas necesarias para que podamos considerar que estuviera utilizando el tercer nivel de razonamiento.

Respecto a la composición de giros de distinto centro, en 3º de E.G.B. sólo se hizo de manera rápida y poco profunda, y no se incluyeron actividades conducentes a demostrar las propiedades o los resultados obtenidos. Como en otras ocasiones anteriores, parece que Sandra ha asimilado las propiedades puntuales y es capaz de aplicar las sucesivas instrucciones del profesor, pero no el proceso general de la actividad. En cuanto a Gloria, sus respuestas eran correctas pero la profesora no logró que la niña diera ninguna justificación para las afirmaciones que había hecho. En la actividad 18 de la experimentación, al proponerle la composición de dos giros de -60° y -130° con distinto centro, y después de que Gloria los hubiera aplicado a una figura, la profesora le preguntó:

Prof.: *Desde este pez* [la figura inicial] *hasta éste* [la imagen final], *¿cuánto hemos movido?*
Gloria: *-190.*
Prof.: *¿Seguro?*
Gloria: *Sí.*
....
Prof.: *¿Habría un centro de giro que desde la figura 1 pasara a la 3?*
Gloria: *Sí.*
Prof.: *¿Seguro o es posible?*
Gloria: *Seguro.*
Prof.: *¿Por qué?*
Gloria: *Porque se puede hacer.*

En cuando a 6º de E.G.B., las limitaciones de tiempo hicieron que la experimentación de las actividades correspondientes al tercer nivel fuera más corta de lo debido. Creemos que una instrucción adecuada, con suficientes actividades como las propuestas en esta memoria, habría logrado desarrollar, al menos parcialmente, el tercer nivel de razonamiento de varias de las alumnas. No es el caso de Inmaculada, pues ya comentamos anteriormente que esta niña habría requerido más actividades para afianzar el segundo nivel de razonamiento. Sin embargo, Rebeca sí mostró un razonamiento de tercer nivel, por ejemplo al resolver la actividad A1, de obtención del centro de giro mediante corte de mediatrices. Las demás alumnas de 6º se sentían satisfechas con el procedimiento consistente en obtener una mediatriz y probar puntos sobre ella, que es lo que habían hecho hasta el momento, pero Rebeca no se conformaba con eso y, al cabo de un rato, se dió cuenta de la solución: *Si hacemos las mediatrices de todos los segmentos de todos los vértices podemos sacar un punto* [en el] *que coinciden todos. ¡Pues claro!*

También se aprecia comienzo del razonamiento de nivel 3 cuando Rebeca se sirve de la propiedad de que la inclinación de la figura imagen depende del ángulo de giro para justificar informalmente el resultado de la composición de giros de distinto centro, situación que ya presentamos en los comentarios del nivel 2.

En la experimentación de Magisterio sí se incluyeron todos los aspectos fundamentales que proponemos ahora para el tercer nivel, por lo que nos referiremos casi siempre a este curso al comentar las actividades de giros propuestas para las distintas fases del ese nivel. En el resumen que presentamos de dicha experimentación, se aprecia cómo las alumnas progresaban en su comprensión de las relaciones entre los movimientos.

A lo largo de la experimentación de las actividades de esta fase, las justificaciones de las alumnas eran a veces imprecisas y requerían la orientación de la profesora para establecer algunas relaciones. Así, por ejemplo, la primera vez que se plantea la obtención del centro de giro de un par de figuras (actividad A1 actual, 17 de la experimentación), Merche justifica el que sea el corte de las mediatrices *porque se desplaza toda la figura. No se desplaza un sólo punto. ... O sea, un punto se desplaza y el centro tiene que estar a la mitad; entonces para todos los demás puntos también tiene que estar a la mitad.*

Ara, después de trazar dos mediatrices, dice (actividad 17 de la experimentación): *Lo que hemos hecho antes de trazar la mediatriz respecto dos puntos, para la figura no nos sirve porque, si da muchas mediatrices, ¿dónde está el centro? ¿en una o en la otra?* y, al indicarle que el corte de todas las mediatrices es la solución, dice: *Simplemente no lo veo. No sé decir por qué* [es ésa la solución].

En la experimentación de Magisterio, la profesora dio la justificación correcta de por qué el centro de giro es el punto de corte de las mediatrices, pero se puede conseguir que los estudiantes lo razonen por sí mismos mediante preguntas más o menos dirigidas, según los requerimientos de los estudiantes, lo cual es el objetivo de la actividad A1 tal como la planteamos en esta memoria.

Ya hemos señalado al comentar los objetivos del tercer nivel, que la propiedad de que toda isometría directa es una traslación o un giro es una de las propiedades básicas para lograr que los estudiantes realicen y entiendan las demostraciones siguiendo la metodología propia del tercer nivel de razonamiento. En las experimentaciones llevadas a cabo con alumnos de E.G.B. y de Magisterio, dicha propiedad no fue un objetivo específico de ninguna actividad, si bien en algún momento se vio en Magisterio la necesidad de conocer esta propiedad para poder avanzar. Hemos tratado de corregir esa laguna en la secuencia propuesta en esta memoria, pues es una de las primeras propiedades que se desarrollan en la fase 2 del tercer nivel, mediante las actividades A2 y A3. En estas actividades, si los estudiantes deciden buscar contraejemplos, para demostrar que la propiedad es falsa, el profesor debe dejarles que lo intenten y, tras la búsqueda infructuosa, justificar que no existe tal contraejemplo.

Otra habilidad importante que deben conseguir los estudiantes al progresar en la adquisición del tercer nivel de razonamiento es la de diferenciar condiciones necesarias y condiciones suficientes. El siguiente diálogo es un ejemplo de razonamiento, correcto, de Ara (Magisterio) que muestra su consciencia de la diferencia entre condición necesaria y suficiente. Téngase en cuenta al analizar esta transcripción que no se les había presentado a las alumnas la propiedad, que hemos mencionado en el párrafo anterior, de que siempre existe una traslación o un giro que permite relacionar dos figuras congruentes de la misma orientación.

En esta actividad (número 20 en la experimentación), similar a la A2 actual, se daban a las estudiantes pares de figuras congruentes y se les pedía averiguar cuándo había un giro que permitiera mover una figura del par hasta la otra y, si existía, determinarlo.

Ara indica que, para ver si es giro, hay que *encontrar el centro de giro o, si te lo daban, comprobar que era.*

Merche: *Con dos mediatrices bastará, ¿no? Porque viendo dónde se cortan dos ya sabes dónde está el centro.*
Ara: *Si sabes que es un giro sí, pero si no, tendrás que comprobar primero.*

Merche: *Ya, pero lo he comprobado mirando el otro vértice, si pasa por la circunferencia.*

Un signo del progreso de las estudiantes de Magisterio en la adquisición del razonamiento de tercer nivel es que eran capaces de identificar y justificar situaciones nuevas para ellas basando sus demostraciones en dos propiedades básicas: La posibilidad de determinar la inclinación de la figura imagen a partir del ángulo de giro (introducida en las actividades A4 y A5 de esta fase) y la determinación del movimiento resultante de una composición de giros (introducida en las actividades A6 y A7). Las actividades A4 a A6 conectan con las A13 a A15 de la fase 4 del nivel 2, pues las actividades del nivel 3 plantean la relación entre una figura y su imagen en sentido inverso a las actividades del nivel 2 y sirven para completar y generalizar estos resultados.

Analizando la experimentación vemos cómo, al plantearles por primera vez en la actividad 28 de la experimentación, semejante a la A6 actual la composición de dos giros cuyos ángulos suman 360°, las estudiantes supieron avanzar el resultado, antes de resolver manipulativamente la composición:

Prof.: *Cogéis una lámina. Pegar una figura. Poner un centro de giro en un vértice y haceis primero un giro de +70° y luego, al resultado, le aplicáis un giro de -70° con otro centro. Este otro centro, si queréis, lo podéis poner en un vértice de la imagen.*

Ara [casi inmediatamente]: *Se va a quedar como está. Una paralela a ésta* [la figura inicial]. *Con este lado paralelo, este también y éste también.*

Prof.: *¿Y va a salir donde está ésa* [la figura original]*?*

Alumnas: *Según donde esté el centro de giro.*

....

Prof.: *Vamos a modificar el ángulo. El primero es de +70° y el segundo lo cambiamos a +290°.*

Ara: *Pues dará la suma. Es que esto es igual que si la figura la trasladamos* [quiere decir giramos] *290+70. Entonces, si hago una sola rotación, equivale a las dos. No tengo por qué hacer todo el rollo ese. Hago una de 360.*

Merche [mientras Ara está girando la figura 360°]: *Da lo mismo.*

Prof.: *Entonces, ¿qué pasa?*

Ara: *Se sobrepone. Se pone encima.*

Prof.: *¿Y tú, qué dices, Merche?*

Merche: *Lo mismo.*

Prof.: *¿Eso poniendo los centros de giro dónde?*

Merche: *En el mismo vértice.*

Prof.: *¿Y si ponéis los centros de giro en distintos vértices?*

Merche: *No tiene por qué* [coincidir con la figura inicial].

Ara: *No tiene por qué, pero daría una traslación de ésta.*

Prof.: *¿Por qué?*

Ara: *Por lo mismo de antes* [el caso de los giros de +70° y -70°].

Prof.: *¿Y estáis seguras de que va a dar una traslación?*

Merche: *Sí, porque el ángulo es el mismo.*

Prof.: *¿Cuándo va a dar una traslación?*

Merche: *Cuando el ángulo sea el mismo ... Tiene que dar 360. O sea, que la suma de los dos tiene que ser 360. Pero para que quede igual* [que la figura inicial].

....

Prof.: *Entonces lo que tiene que pasar es que la suma de los ángulos sea 360°.. Y en el primer caso que os había puesto, ¿qué pasaba con +70 y -70?*

Merche: *Que daba cero. Que es lo mismo por ...* [no se entiende lo que dice].

Prof.: *¿Y va a dar igual si hacemos primero 290 y luego 70 que si hacemos primero 70 y luego 290?*

Ara: *Sí.*

Merche: *El sitio puede que no.*

Ara: *Bueno, pero el ángulo será el mismo. El lugar exacto no tiene por qué, porque si tomamos distintos centros ...*

La rapidez de las experimentaciones llevadas a cabo impide que se hagan con frecuencia resúmenes de los resultados obtenidos. Ello, junto al hecho de que el único tiempo que las alumnas dedicaban al tema de la isometrías era el de estas sesiones, provocaba en ocasiones el olvido de algunas relaciones o propiedades necesarias para avanzar. Tal es, por ejemplo, el caso de la composición de giros del mismo centro (actividad semejante a la A7) o, más adelante, otras composiciones que las alumnas asimilaron, justificaron y aplicaron correctamente en su momento, pero que luego no las recordaban. Por ello, como metodología de trabajo si se utiliza esta unidad de enseñanza en una clase real, es necesario que además de descubrir y aplicar las propiedades que corresponden a las diversas actividades propuestas explícitamente, se repasan algunos resultados clave y su demostración general. Tal como hemos organizado las actividades de esta fase y de la fase 4 del tercer nivel, las demostraciones de las relaciones fundamentales no son complejas, sino que sólo hace falta tener presentes y combinar unas pocas propiedades. Estas propiedades permiten conocer de inmediato el movimiento resultante de una composición de giros, así como algunas características de la descomposición de un giro o traslación en producto de giros.

A veces, el planteamiento de las actividades hace pensar que la solución se pueda obtener directamente a partir de los datos, mediante alguna relación simple matemática. Ello provoca en ocasiones respuestas incorrectas. Tal es el caso, por ejemplo, del cálculo del centro del giro resultante de la composición de dos giros (actividad A1), para el cual una respuesta, incorrecta, muy habitual es que corresponde al punto medio de los dos centros de los giros que se componen.

Entre las características generales del tercer nivel de razonamiento está el comienzo de la exigencia de demostración general rigurosa, aunque informal, incluyendo la comprensión de lo que es una demostración, pues los alumnos son capaces de seguir una demostración realizada por otra persona, siempre que las implicaciones que requiera correspondan a relaciones simples entre propiedades conocidas. En la actividad A10 se propone demostrar un resultado ya conocido, que $G(O,\beta°) \circ G(O,\alpha°) = G(O,\alpha°+\beta°)$. Utilizar propiedades o resultados conocidos y aceptados como ciertos por los estudiantes antes de iniciar el acceso a la idea de demostración matemática rigurosa, tiene la ventaja de que se pone el énfasis en la demostración en sí, separándola del proceso de búsqueda y elaboración de una conjetura que, dentro de las características de la forma de pensar en el tercer nivel, es generalmente una etapa previa del trabajo de los estudiantes. Por otra parte, usar propiedades ya aceptadas como ciertas permite discriminar a aquellos estudiantes que todavía están en el segundo nivel, pues éstos no suelen aceptar la necesidad de que haya que demostrar estos resultados. Por lo tanto, con las actividades del tercer nivel de razonamiento se debe romper la idea, característica del segundo nivel, de que los ejemplos (unos pocos por lo general) demuestran la propiedad y convertirla en la idea de que los ejemplos sólo dan confianza en la validez del resultado, pero no seguridad.

También es propio del tercer nivel la comprensión de las definiciones matemáticas, en este caso la de giro, por lo que en la fase 2 se debe empezar a trabajar en este tema. Siguiendo con la actividad A10, para plantear el objetivo de la demostración, en ella se pide a los estudiantes que identifiquen las condiciones de un giro. Las alumnas de Magisterio no tuvieron problemas en ese caso, si bien la profesora guió la actividad mediante preguntas. En este tipo de actividad probablemente sea imprescindible la orientación guiada del profesor para enfocar el proceso a seguir, aunque se presente de manera explícita en el enunciado de la actividad, pues en la secuencia de actividades que proponemos en esta memoria, al igual que sucedió en la experimentación de Magisterio, es la primera vez que se plantea una actividad de este tipo a los estudiantes y, por lo tanto, es muy conveniente seguir la metodología de orientación dirigida propia de la segunda fase de enseñanza.

En respuesta a las preguntas de la profesora, las estudiantes de Magisterio identificaron correctamente las dos características de los giros (equidistancia al centro e invarianza del ángulo de giro). Entre las dos estudiantes fueron respondiendo correctamente a las preguntas de la profesora sobre la identificación de estos datos en el caso de la composición de giros del mismo centro, preguntas que, en realidad, planteaban los sucesivos pasos de la demostración formal.

Después de haber estudiado las diferentes posibilidades de composiciones de giros, las actividades A8 y A9 plantean las mismas propiedades pero en sentido contrario: Descomposición de giros o traslaciones en producto de giros. Estas dos actividades, junto a otras análogas relativas a descomposición en producto de simetrías, planteadas en su momento, son un elemento clave para lograr que los estudiantes comprendan realmente las relaciones entre las diferentes isometrías y puedan llegar a tener una visión global del conjunto de las isometrías del plano.

Estas actividades suelen ser difíciles y nuestra experiencia con numerosos grupos normales de estudiantes de Magisterio nos ha mostrado que la mayor dificultad se encuentra en comprender la existencia de infinitas soluciones (actividades A8C y A9C). En la experimentación con las dos estudiantes de Magisterio, éstas las resolvieron bien, con algunas dificultades o equivocaciones debidas, generalmente, a la novedad de la situación. Así, en la actividad 30 de la experimentación, (actual A8), Merche relacionó sin dificultad los ángulos del giro dado y los giros de la descomposición, pero en A8B, al determinar el centro del segundo factor, Merche calculó el centro del giro que lleva directamente de la figura A (inicial) a la B (imagen). Cuando terminó se dió cuenta del error:

Merche: *Lo que he hecho es ver el centro de ésta* [figura A] *a ésta* [figura B], *pero no sé cómo sacar el otro* [el que se pide en la actividad].

Prof.: *Has obtenido el centro del giro que pasa directamente de A a B, y eso sería un giro con centro ése* [punto] *y ángulo ¿cuánto?*

Merche: *100.*

Prof.: *100°. Pero ahora, ése* [giro] *lo hemos descompuesto en dos, el primero con centro aquél* [señala el punto dado en la actividad], *en O, y ahora hay que hallar el segundo.*

A continuación Merche situó una figura sobre la A y la movió con la mano según G(O, 30°). Al poco tiempo ya se dió cuenta de que, para calcular el centro del segundo giro de la descomposición, debía considerar esta imagen y la figura B. La comprobación de que había asimilado correctamente esta actividad la tuvimos más tarde, al trabajar en la actividad A9, pues Merche ya obtuvo los centros de los dos giros sin equivocarse.

Fase 4 del Nivel 3

Objetivos:

1- Servirse de propiedades conocidas de los giros para:

- Simplificar movimientos en una composición de giros o de giros y traslaciones y conocer todas las características posibles del movimiento resultante. Resolver situaciones generales y casos particulares.

- Descomponer un giro o una traslación en una composición de giros o de giros y traslaciones. Resolver situaciones generales y casos particulares.

- Descubrir, aprender y utilizar técnicas para pasar de una figura a otra mediante una composición de giros o de giros y traslaciones.

2- Comprender el planteamiento y desarrollo de demostraciones formales sencillas.

3- Adaptar demostraciones que se hayan presentado anteriormente, cuando la variación de planteamiento y desarrollo es pequeña.

4- Completar demostraciones, realizando algunas implicaciones simples omitidas.

Actividades:

A1- Aplicar a la figura F (se da la figura) la composición $G(O,-145°)\circ T_a$ (se dan O y a). ¿Qué información sobre la imagen final se puede tener antes de empezar a realizar la composición? ¿Qué se puede decir acerca de la inclinación de la imagen final? ¿Qué tipo de isometría permite pasar directamente de la figura F a su imagen por la composición? ¿Qué características se pueden conocer de esa isometría antes de realizar los movimientos?

Comprobar las respuestas anteriores aplicando a F la composición $G(O,-145°)\circ T_a$.

Repetir el ejercicio aplicando a la figura G la composición $T_b\circ G(Q,75°)$ (se dan Q y b). Repetir el ejercicio aplicando a la figura G la composición $G(Q,75°)\circ T_b$. ¿Qué hay de común y qué de diferente en los resultados de estas dos composiciones? ¿Es conmutativa la composición de un giro y una traslación?

Generalizar los resultados de los ejercicios anteriores: El movimiento resultante de la composición de un giro y una traslación es ...

A2- Dada la composición G(O,60°)∘G(O,-50°)∘G(P,80°)∘G(P,-100°), sin aplicar las isometrías de la composición a ninguna figura concreta, simplificar al máximo la composición, decir qué tipo de isometría equivale a la composición y dar todas las características posibles del movimiento resultante. Para responder, recordar las propiedades conocidas sobre la inclinación de la imagen de una figura por un giro.

Comprobar después el resultado marcando en una hoja de papel los centros de giro, obteniendo la imagen de una figura F, y determinando por completo la isometría equivalente a la composición.

Repetir el ejercicio con las siguientes composiciones: G(P,60°)∘G(R,30°)∘T_a; G(R,30°)∘T_a∘G(P,60°); G(P,60°)∘G(R,-40°)∘T_a∘G(S,-20°). Marcar también el vector de traslación para realizar la segunda parte del ejercicio.

A3- Dadas dos figuras F y F' congruentes de la misma orientación y dados los tipos y la cantidad de isometrías que deben formar parte de una composición que permita pasar de F a F', se pide justificar si el ejercicio tendrá solución o no y, en caso afirmativo, obtener varias soluciones, generando técnicas eficaces no sólo para este caso concreto sino para todos los casos análogos.

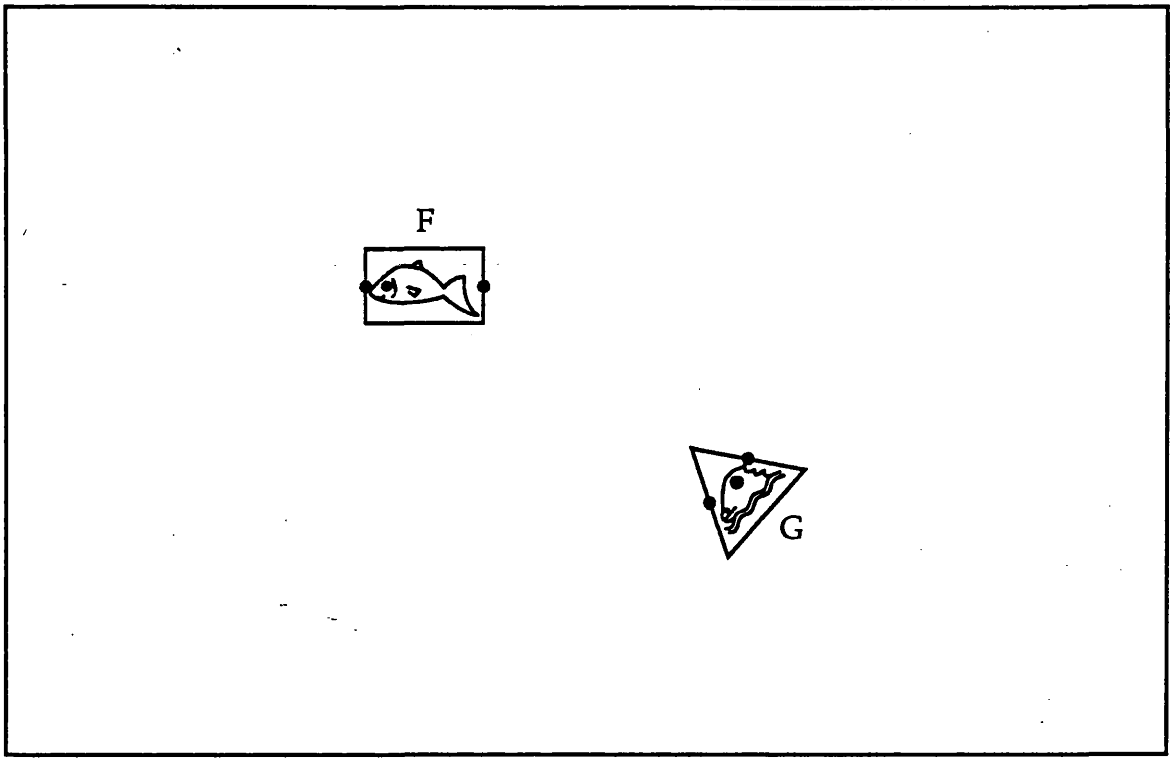
Ejemplo: Se dan dos figuras giradas y hay que resolver el ejercicio mediante una composición de dos giros y una traslación.

(Al plantear los ejercicios, proponer algunos en los que no esté prefijada ninguna de las isometrías de manera concreta, y en otros en los que sí lo estén. Proponer unos casos con solución y otros que no la tengan).

A4- A partir de la figura F, construir un friso cuyo sistema generador sean los giros G(O,180°) y G(P,180°). Repetir el ejercicio con la figura G.

Una vez construido el friso, seleccionar dos celdas A y B y encontrar una isometría simple que permita pasar de A a B. Encontrar también varias composiciones de movimientos que permitan pasar de A a B. Repetir el ejercicio con varios pares de celdas.

Repetir el ejercicio construyendo otros frisos y mosaicos cuyos sistemas generadores estén formados sólo por giros y/o traslaciones.



A5- Introducción a las demostraciones formales: Los estudiantes deben

- completar alguna implicación,
- repetir una demostración que se da, identificando el argumento general de razonamiento y justificando cada uno de los pasos,
- modificar una demostración ya conocida adaptándola a otro enunciado análogo al anterior.

Ejemplo: Desarrollar la demostración de que los giros son isometrías, enunciando este teorema de la forma siguiente: *Dado un segmento PQ, demostrar, aplicando la definición de giro, que su imagen por el giro G(O,α°) tiene su misma longitud.* El trabajo de los alumnos consistirá en resumir el planteamiento general de la demostración, una vez realizada bajo la dirección del profesor, justificar algún paso de la demostración, identificar algún elemento de la misma, y repetirla con un planteamiento gráfico distinto.

A6- Dados varios enunciados de propiedades de los giros, decir si son verdaderos o falsos y hacer las demostraciones correspondientes. Algunos enunciados pueden ser:

- La imagen de una línea recta por un giro es una línea recta.

- Dado $G(O,\alpha^o)$, para todo punto $P \neq O$, si P' es su imagen por el giro, se cumple que $P \neq P'$.
- Dado $G(O,\alpha^o)$, para todo par de puntos P y Q, si P' y Q' son sus imágenes por el giro, se cumple: i) d(P,P') = d(Q,Q'). ii) d(P,Q) = d(P',Q'). iii) d(P,Q') = d(P',Q).

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

Las actividades de la fase 4 del tercer nivel tienen como objetivos principales conseguir un aprendizaje más completo y profundo de los giros y sus relaciones con las otras isometrías e iniciar el camino de los estudiantes hacia el razonamiento matemático formal. Ninguno de estos objetivos se pueden lograr por completo sólo con las actividades de la unidad de giros que proponemos para este nivel, sino que necesita del complemento de las actividades de traslaciones y simetrías.

De hecho, en la experimentación llevada a cabo en Magisterio, las actividades de composición y descomposición correspondientes a esta fase de la unidad de giros se llevaron a cabo conjuntamente con las correspondientes a las simetrías; ello pone de manifiesto una posibilidad de relación, por parte de las alumnas, de las diferentes isometrías y sus propiedades, que es posible y deseable como objetivo a conseguir para el tercer nivel de Van Hiele, ya que una de las habilidades que deben desarrollar los estudiantes para alcanzar este nivel de razonamiento es la capacidad de relacionar diferentes familias de objetos matemáticos y sus propiedades. Por lo tanto, el hecho de que hayamos organizado la unidad de enseñanza que presentamos en esta memoria en tres partes disjuntas, una para cada isometría, no quiere decir que propongamos la enseñanza lineal, de cada isometría independiente de las demás.

En esta fase, más que una secuencia completa de actividades, hemos planteado diversos tipos, pues la variedad de posibilidades es grande, tanto en enunciados como en dificultad. Por lo tanto, creemos que en cada momento el profesor debe seleccionar aquellas actividades concretas que se ajusten mejor a la marcha de su clase y a la adquisición del tercer nivel que tengan sus alumnos.

Las actividades A1 a A4 se orientan al primer objetivo y todas ellas piden a los estudiantes realizar composiciones o descomposiciones de giros y traslaciones.

La actividad A1 fue una de las últimas actividades de composición que se presentaron en la experimentación de giros realizada en Magisterio. En concreto, las alumnas debían aplicar $T_a \circ G(O,90^\circ)$ a una figura y determinar la isometría equivalente (actividad 31 de la experimentación). En las actividades de las fases y niveles anteriores no había aparecido esta composición explícitamente, por lo que esta actividad se enmarca correctamente dentro del objetivo de la fase 4 de plantear problemas en los que se deban aplicar conocimientos adquiridos previamente a situaciones nuevas. En la siguiente transcripción se observa que las alumnas (en particular Merche, que es la que interviene) ya tienen un dominio correcto de la influencia de cada isometría en la posición de las imágenes:

Prof.: *Sin hacer nada, ¿sabes algo de la figura final?*
Merche: *Sí. Que será así* [Merche coloca una pieza girada 90° respecto a la original]
Porque la traslación no cambia su inclinación.
Después de que Merche haya efectuado la composición, la profesora le dice:
Prof.: *Haz la misma composición, pero al revés. ¿Qué crees que va a pasar?*
Merche: *Será una trasladada de ésta* [de la imagen anterior].
Prof.: *¿Saldrá en el mismo sitio o no?*
Merche: *No, porque hay que aplicar la traslación desde aquí* [señala la figura inicial].

La actividad A2 es una extensión de las actividades A5 a A7 de la fase 2 y de la A1 de esta fase, pues plantea el mismo tipo de ejercicios, pero en un contexto abstracto, sin el soporte de las figuras concretas. La segunda parte de cada ejercicio debe ser una comprobación de las respuestas que acaban de dar los alumnos, por lo que las figuras, los centros de giro y los vectores se les darán sólo después de que los estudiantes hayan contestado a las preguntas anteriores. De esta manera, planteamos explícitamente el cambio del papel de los ejemplos en el nivel 2 (los ejemplos son la demostración) al que tienen en los niveles 3 y 4 (simples comprobaciones, antes o después de hacer la demostración, y contraejemplos).

Dentro de una serie de ejercicios en los que debían determinar el resultado de composiciones de giros, la profesora propuso la composición $G(Q,-10^\circ) \circ G(P,-50^\circ) \circ G(O,150^\circ)$ (actividad 29 de la experimentación). Antes de realizar en el papel ningún giro, Merche hizo esta reflexión:

Merche: *Será 90 positivos, que será una traslación de ésta, ¿no?* [Merche ha girado 90° la pieza original, tomando un vértice como centro].

....

Prof.: *Para saber dónde está la figura, ¿cuántos puntos necesitas conocer?*
Merche: *Dos, ¿no?*
Prof.: *¿Y si sabes que tiene que estar paralela a ésa* [la pieza girada 90°].
Merche: *Uno.*

En el ejercicio siguiente se plantea la composición G(Q,140°)∘G(P,180°)∘G(O,40°), en la que la suma de los ángulos es 360°:

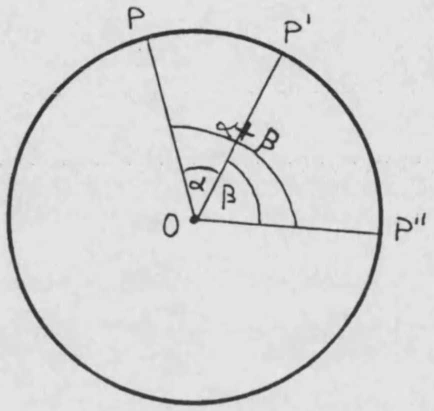
Merche: *Se queda igual la figura, en el mismo sitio.*
Prof.: *¿En el mismo sitio?*
Merche: *Claro. Da 360. Bueno, se quedaría igual la figura, no en el mismo sitio.*

Merche utiliza de manera efectiva lo que aprendió en actividades anteriores, como se ve en el procedimiento que emplea para resolver el ejercicio. En concreto, especifica que toma como punto para obtener la imagen O, que es un vértice de la figura original y el primer centro de giro:

Merche: *Ya sé que G(O,40°) va a dejar O igual. La figura hay que girarla 40°, pero eso me da igual, porque yo sé que O está ahí.*

Respecto a las demostraciones, en las actividades A5 y A6 sólo presentamos unos ejemplos, en los que se conjuga la definición de giro, estudiada en la fase 2, con la comprensión inicial de una demostración formal, también introducida en la fase 2, y el papel de los ejemplo y contraejemplos en las demostraciones, ello dentro de la visión de las demostraciones propia del tercer nivel.

En la actividad A5 proponemos demostrar que los giros son isometrías. Al redactar el enunciado de este teorema, hemos tenido en cuenta las características del tipo de razonamiento del tercer nivel, lo cual nos ha llevado a no proponer el enunciado formal "demostrar que los giros son isometrías" ya que, para los estudiantes que están progresando en la adquisición del tercer nivel, esta formulación general puede resultar demasiado evidente para que sientan la necesidad de convertirla en objeto de demostración, pues la utilización de piezas de papel como material básico en la experimentación lleva implícita la existencia de esa propiedad. En efecto, los resúmenes de las sesiones desarrolladas en la experimentación de Magisterio muestran que las estudiantes no veían la necesidad de demostrar esta propiedad u otras del mismo estilo.



En la experimentación de Magisterio, propusimos la demostración gráfica de que G(O,α°)•G(O,β°) = G(O,α°+β°) (actividad 26 de la experimentación). Las estudiantes identificaron correctamente las dos componentes de la definición de giro que se tenían que usar para determinar el giro G(O,α°+β°) y contestaban correctamente a las preguntas que les iba formulando la profesora como guión de la demostración. Por ejemplo, Merche justificó la igualdad de distancias al centro de giro de un punto y su imagen final *porque están en la misma circunferencia.* El dibujo que realizaron las alumnas en el transcurso de ese proceso es el que mostramos.

La actividad A6 se planteó en Magisterio a través de una serie de 10 enunciados (actividad 25 de la experimentación); los resúmenes de la experimentación de Magisterio que presentamos en el anexo II describen la actuación de las estudiantes en cinco de esos enunciados. Para demostrar la certeza de un enunciado, en ocasiones, las alumnas se basaban en ejemplos concretos, hechos en ese momento o recordados de sesiones anteriores; sin embargo, en otras ocasiones hacían referencia a la definición de giro, como base para su demostración. Esto muestra que las estudiantes se encontraban en transición del segundo al tercer nivel de razonamiento. Uno de los enunciados propuestos fue:

Prof.: *La distancia de un punto a su imagen siempre es la misma. O sea, la distancia de P a P' es la misma que la de Q a Q', sean cuales sean los puntos P y Q.*

En un primer momento, las estudiantes dijeron que sí era cierta la propiedad, pero al tratar de justificarlo quedó claro que habían entendido mal el enunciado. Tras una aclaración por la profesora, empezaron de nuevo:

Merche: *En un giro no* [no es cierta la propiedad]. *Si no, las circunferencias tendrían que estar a la misma ... Todo tendría que estar a la misma línea, ¿no?*
Ara: *Tendrían que estar todos los puntos sobre la misma circunferencia.*

En otro momento del diálogo, Merche se sirvió de dos dibujos para demostrar su respuesta de que dichas distancias no siempre eran iguales. Vemos, por lo tanto, que para una correcta adquisición de la idea de demostración lógica es necesario plantear tanto propiedades verdaderas como otras total o parcialmente falsas, para así trabajar en el papel de los ejemplos como método válido de demostración de la falsedad pero no de la veracidad de un enunciado.

Otro enunciado incluido en esa actividad fue:

Prof.: *El ángulo POP', siendo O el centro del giro, es siempre el mismo, sea cual sea el punto P.*

La extrema evidencia de esta propiedad para las estudiantes hizo que trataran de buscar algo oculto y que creyeran que había algo en el enunciado que no entendían. Merche, con una expresión de convencimiento total y de semi-incredulidad de que ésa pudiera ser la pregunta planteada, contestó:

Merche: *El ángulo sí.*
Prof.: *¿Por qué?*
Merche: *¡Porque es un giro!*

Para terminar los comentarios sobre la unidad de enseñanza de los giros, queremos recalcar que, en las experimentaciones, especialmente en la de Magisterio, que ha sido la más larga y densa, se ha hecho patente la necesidad de resumir y recordar de tiempo en tiempo las propiedades fundamentales, de manera que los alumnos puedan recordar o rehacer rápidamente la propiedad necesaria para utilizarla en un momento determinado. Esto es especialmente necesario cuando se alcanza el tercer nivel y se empieza a trabajar en la realización de demostraciones informales.

Como hemos señalado anteriormente en esta memoria, en las experimentaciones llevadas a cabo no incidimos suficientemente en este aspecto, lo cual provocaba en ocasiones olvidos que no facilitaban el progreso del razonamiento e impedían la visión completa de las relaciones entre las isometrías necesaria para resolver una situación concreta.

Por ejemplo, incluso al final de la última sesión dedicada a los giros, cuando estaba trabajando en la composición $T_a \circ G(O,90°)$ que hemos comentado con anterioridad, Merche (Magisterio) se olvidaba en algún momento de que la composición de giros del mismo centro es conmutativa (actividad 31 de la experimentación):

....

Prof.: *Entonces, ¿la composición de traslación con giro es conmutativa o no?*
Merche: [Silencio]
Prof.: *O sea, si compones un giro con centro en O y ángulo 30° y luego un giro con centro en O y ángulo 40°, ¿daba igual el giro que actuaba primero? Con giros del mismo centro.*
Merche: *No me acuerdo.*

Generalmente, cuando la profesora le orientaba de alguna manera, mediante alguna pregunta dirigida o un dato, Merche recordaba el resultado o la deducía con rapidez, dando la solución correcta.

2.8. Propuesta de enseñanza de las Simetrías.

SIMETRÍAS: NIVEL 1

Objetivos:

Las actividades que planteamos para este nivel pretenden lograr los objetivos generales siguientes, que más adelante desglosaremos en las diferentes fases de aprendizaje:

1- Reconocimiento de la característica que poseen las simetrías de ser **isometrías** (el tamaño y la forma de las figuras se conservan).

2- Reconocimiento y realización de simetrías de manera directa sirviéndose de materiales auxiliares (plegado y calcado, plegado y recorte, mira, espejo).

3- Descubrimiento y empleo de características visuales de las simetrías: Cambio de semiplano, inversión de la figura, equidistancia al eje.

4- Reconocimiento y realización de simetrías con diferentes posiciones de los ejes y de las figuras, con y sin ayuda de material auxiliar.

5- Utilización de vocabulario adecuado relacionado con las simetrías: Nombres de los instrumentos usados, simetría, eje, figura simétrica, imagen, distancia, ...

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

Dado que el razonamiento del primer nivel se basa en la consideración visual y global de los objetos matemáticos, las propiedades indicadas en los objetivos tendrán una fuerte componente gráfica o manipulativa y para utilizarlas no será necesaria la descomposición o el análisis local de las figuras, por lo que los estudiantes que razonen en el nivel 1 podrán identificar y usar dichas propiedades.

Por ejemplo, en el primer nivel, el reconocimiento de que las figuras no se hacen más grandes ni más pequeñas ni modifican su forma (primer objetivo) se puede llevar a cabo mediante la observación de reflejos en espejos o miras.

En las actividades de la secuencia propuesta para el nivel 1 se emplean las técnicas de reflejo (mediante el mira o el espejo) y plegado, seguido de dibujo o recorte para colocar piezas en determinadas posiciones, dibujar figuras simétricas y obtener figuras con siluetas simétricas.

El segundo de los objetivos especificados es esencial en el primer nivel de razonamiento, pues los alumnos empiezan a descubrir las simetrías y para ello se hace necesario utilizar medios que las produzcan de forma automática. Al mismo tiempo, esos medios se pueden emplear como correctores, aunque no sólo en este nivel, por lo que los alumnos deben comprender bien sus características y posibilidades y adquirir destreza en su manejo.

En este nivel de razonamiento no se han incluido ejercicios de obtención de las simétricas de figuras que corten al eje, pues para resolverlos no es suficiente con la comprensión visual global propia del nivel 1, sino que es necesario considerar la descomposición de las figuras en partes y la recomposición de las imágenes correspondientes.

Respecto al reconocimiento y utilización de las propiedades indicadas en el objetivo 3, conviene hacer algunas puntualizaciones:

El cambio de semiplano es una característica de apreciación global, y por lo tanto de nivel 1. Las actividades se orientarán a poner de relieve la función del eje de simetría como separador de una figura y su imagen.

En este nivel los estudiantes pueden apreciar algunos aspectos de la inversión de la figura, pero por lo general no se llega a producir una comprensión completa de esta propiedad. Los estudiantes poseen cierta idea gráfica de que la figura se coloca "al revés", pero no diferencian siempre las simetrías de ciertos giros (especialmente los de 180°) de la figura que también la colocan "al revés". Será en el segundo nivel de razonamiento cuando se comprenda por completo la propiedad de inversión, al ser capaces los estudiantes de centrar la atención en las características matemáticas de los movimientos.

Algo parecido sucede con la equidistancia: Al incluirla como objetivo en el nivel 1, no se pretende conseguir que los alumnos la empleen como objeto de estudio en sí misma, sino más bien que, en su consideración global de la figura dada y su imagen mediante una simetría, los alumnos sean capaces de tener en cuenta si la imagen debe tocar o no al eje, según la colocación de la figura original, y, en segundo término, que también puedan prestar atención a la separación correcta (o con bastante aproximación) del eje cuando se trate de figuras sencillas (triángulos equiláteros, círculos, cuadrados, etc.) las cuales, al igual que los ejes, estén situadas en posiciones familiares para los estudiantes. Esto es especialmente importante con los niños de los primeros cursos de Enseñanza Primaria, cuyas concepciones de estas figuras están ligadas en ocasiones a determinadas posiciones prototípicas, por ejemplo con una base horizontal (Hershkowitz, 1990; Vinner, Hershkowitz, 1983).

De todas maneras, es importante tener en cuenta que los estudiantes prestan atención global a la figura, por lo que alguna de estas características puede dejar de ser tenida en cuenta, y si el profesor hace mención explícita de ella, al intentar arreglar la figura imagen se puede perder alguna de las otras características de las simetrías.

La perpendicularidad, respecto al eje de simetría, del segmento que une un punto con su imagen no es una propiedad que pueda ser estudiada por alumnos en el primer nivel de razonamiento, pues no se trata de una propiedad global de las figuras, sino que su reconocimiento requiere un análisis exacto de las figuras y los puntos que las componen. En el nivel 1 sólo se puede llegar a una identificación difusa de la perpendicularidad, mediante la idea de que las imágenes están "en frente de" las figuras originales. En cualquier caso, los estudiantes del primer nivel deben ser capaces de identificar como no simétricos aquellos pares de figuras con una acusada desviación respecto de la perpendicular. Con esto se sentará la base para el estudio detallado de esta propiedad en las actividades del segundo nivel de razonamiento.

El objetivo 4 se refiere a situaciones que usualmente corresponden a la visión primaria de simetría que, bien por la experiencia cotidiana o por su mayor sencillez, se pueden resolver mediante una concepción global de simetría.

El quinto objetivo corresponde a la introducción de vocabulario específico de las simetrías, adecuado al de los alumnos. La concreción de este objetivo en una lista específica de términos debe depender de la edad y los conocimientos previos geométricos de los estudiantes con los que se vaya a trabajar, pues en algunos casos habrá que sustituir ciertos términos matemáticos usuales por otros más significativos para ellos y, por lo tanto, más fáciles de usar por su parte.

Fase 1 del Nivel 1

Objetivos:

1- Toma de contacto con el concepto de simetría.

2- Información sobre los conocimientos previos elementales que tienen los alumnos acerca de las simetrías.

3- Toma de contacto con materiales de ayuda (mira, espejo) y métodos informales para la realización de simetrías u obtención de figuras simétricas (reflejo, plegado y calcado, plegado y recorte).

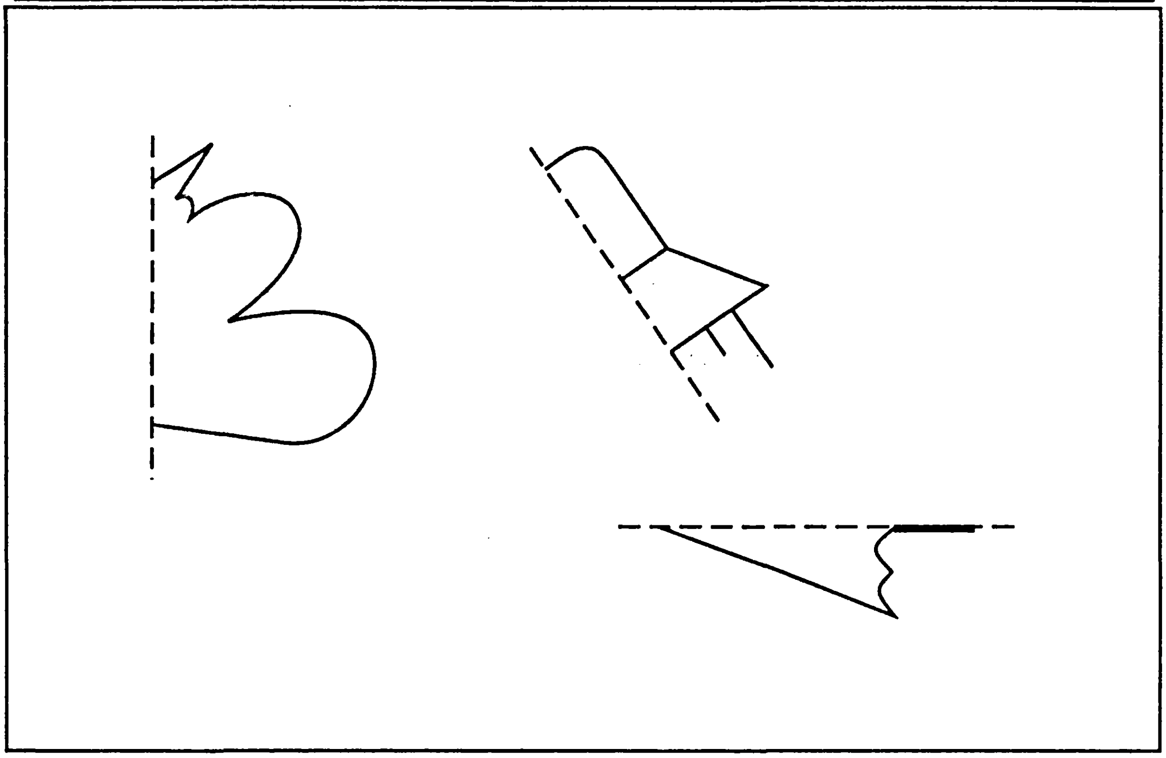
4- Información sobre el vocabulario que poseen los estudiantes al hablar de simetrías, unificación de términos y significados entre profesor y alumnos e introducción de vocabulario específico nuevo (mira, espejo, eje, ...).

Actividades:

A1- Los alumnos juegan con espejos y con miras. Los colocan en distintos lugares, observan las imágenes reflejadas y copian lo que se ve a través del mira.

A2- Por parejas, los estudiantes hacen de figura y de imagen, respectivamente, en un espejo imaginario. El estudiante que actúa de persona real realiza movimientos y el que actúa de persona reflejo los debe reproducir. En caso de que haya un espejo suficientemente grande en el aula, utilizarlo previamente.

A3- Obtener las figuras completas plegando por la línea señalada y recortando.



A4- En un conjunto de figuras recortadas que se les dan, los alumnos deben observar la existencia de dos tipos de figuras diferentes (inversas entre sí). Después, emplear el mira para colocar una figura como imagen de la otra.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

El profesor debe obtener información sobre los conocimientos de sus alumnos en relación con las simetrías, a través de los ejercicios de esta fase, observando lo que hacen los estudiantes y formulándoles preguntas sobre qué creen que va a salir o por qué se ha obtenido cierto resultado. Si los alumnos ya han estudiado con anterioridad este movimiento, el profesor puede plantear ejercicios de niveles de razonamiento cada vez más elevados para averiguar dónde empiezan las carencias de los estudiantes.

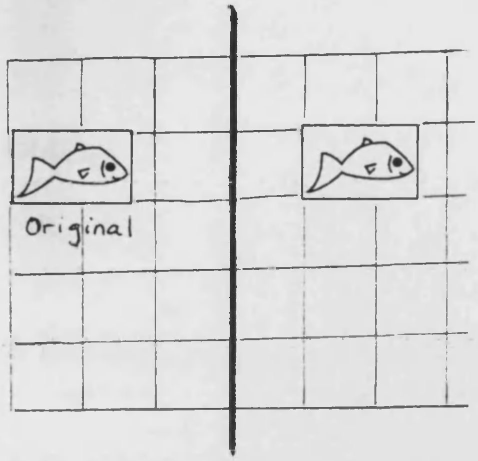
Una de las ventajas de la simetría es que hay diversos materiales (espejo y mira en nuestro caso) que permiten su introducción fácilmente. A través del empleo libre de esos materiales en la actividad A1, los alumnos empiezan a familiarizarse con las figuras simétricas. Los alumnos de todos los cursos en los que hemos experimentado con el espejo y el mira descubrieron pronto las posibilidades de estos materiales para obtener ciertas figuras y exploraron con interés diversas posibilidades de estos materiales, que explicitan diferentes aspectos de las simetrías. En esta actividad no es necesario usar unas láminas especialmente estructuradas, preparadas por el profesor, sino que se pueden emplear figuras planas y objetos 3-dimensionales; los estudiantes deben tener libertad para colocar las figuras y los espejos o miras en posiciones muy variadas.

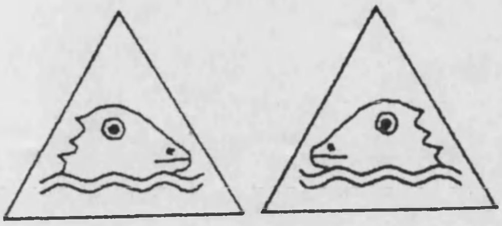
Asimismo, la interpretación de imagen a través de un espejo que se presenta en la actividad A2 conecta una experiencia usual (peinarse, por ejemplo) con el objetivo de estudio. Esta actividad se ha utilizado en cursos, desde 4º hasta 8º de E.G.B., en experiencias no presentadas en esta tesis, y resultó efectiva, pues el conjunto de la clase reconoció inmediatamente los errores cometidos por el alumno "imagen" y éste al poco tiempo actuó sin equivocarse.

Las técnicas de plegar y recortar o plegar y calcar son estrategias empleadas en la mayoría de los colegios desde los primeros cursos de Enseñanza Primaria, e incluso de Preescolar, donde se recurre con frecuencia al plegado y picado. En ese caso, los ejercicios de A3 le dan un nuevo enfoque a algo ya conocido por los niños, pues con frecuencia estas actividades tienen lugar en las clases de expresión plástica y no están conectadas con las matemáticas.

En las experiencias que hemos llevado a cabo, todos los alumnos tenían cierta familiaridad con el plegado y recorte, por lo que con alumnos de 1º y 3º de E.G.B. estos ejercicios resultaron más sencillos que otros que les habíamos propuesto con anterioridad. Por lo tanto, esas primeras actividades que utilizamos entonces son más apropiadas para una fase posterior. En nuestras experiencias quedó clara la conveniencia de utilizar el plegado y recorte y/o plegado y dibujo en esta primera fase de toma de contacto de los alumnos con las simetrías.

Dentro de lo que es una introducción al trabajo del primer nivel, en la actividad A4 destaca la existencia de una diferencia (la inversión) entre las figuras original e imagen. En las experimentaciones realizadas, en 1° de E.G.B. se cometen algunas equivocaciones en la selección de la pieza inversa; en el dibujo de la izquierda de la página siguiente mostramos la solución de Javier a un ejercicio de la actividad 8. De todos modos, cuando las dos figuras inversas (o sea, con distinta orientación en sus ángulos) están colocadas una al lado de la otra, con la misma inclinación (ver dibujo de la derecha), si los niños se fijan entonces sí son capaces de distinguirlas sin excesiva dificultad, usando explicaciones como: *Que unos miran para acá y otros para allá.*





La primera actividad de la experiencia que realizaron los alumnos de 3º fue la identificación de piezas inversas entre sí e inmediatamente supieron distinguirlas. También la expresión que emplearon los niños de 3º fue: *Una mira hacia un sitio y otra hacia otro.*

Por ello nos parece acertado plantear en la fase de información la distinción entre figuras inversas cuyo contorno exterior sean siluetas irregulares, en lugar de polígonos, pues así se sugiere la inversión de manera más acusada.

Fase 2 del Nivel 1

Objetivos:

1- Reconocimiento de la característica de las simetrías de ser isometrías (no cambia el tamaño ni la forma de las figuras).

2- Introducción y utilización de vocabulario básico: Figura simétrica, simetría, eje, imagen, ...

3- Empleo correcto, en cualquier posición de eje y figura, de los materiales y técnicas de realización de simetrías: Espejo, mira, plegado y recorte, plegado y dibujo.

4- Reconocimiento del cambio de semiplano y selección del semiplano adecuado sin recurrir a instrumentos auxiliares, en cualquier posición de eje y figura.

5- Afianzamiento y utilización de la inversión de las figuras simétricas.

6- Descubrimiento, reconocimiento y utilización de la equidistancia de manera visual primaria: Tocando al eje / separadas del eje.

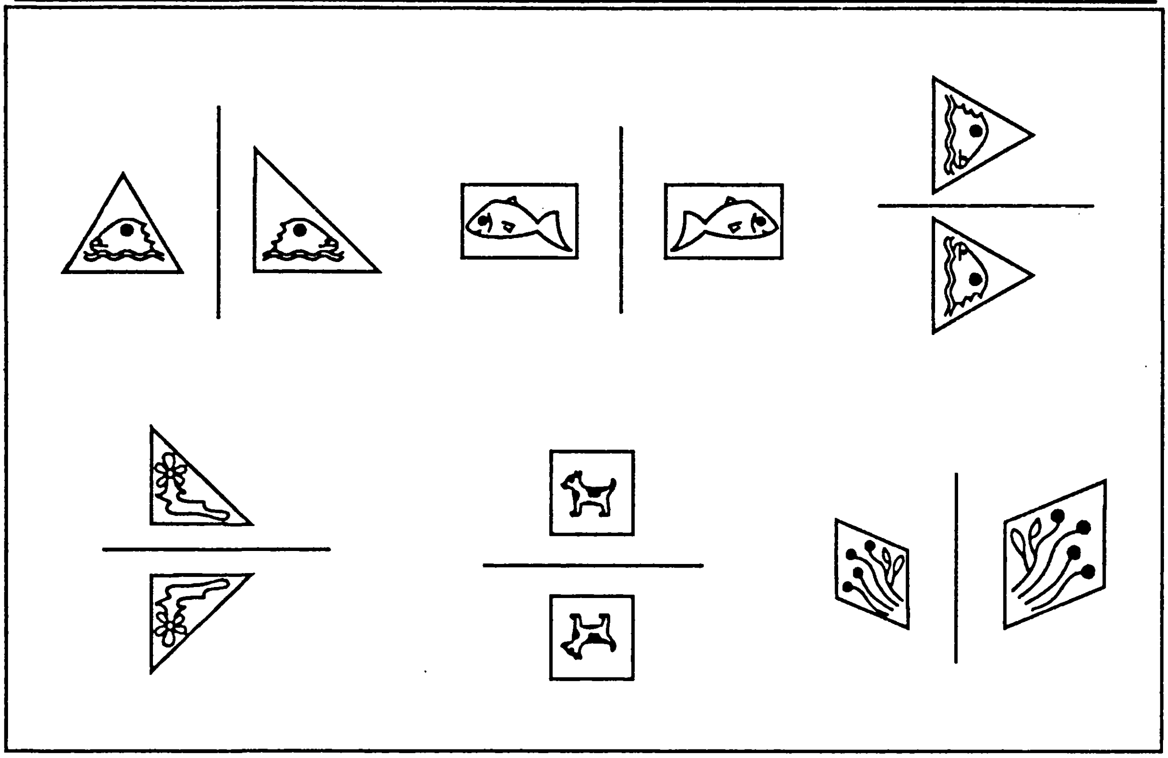
7- Reconocimiento de pares de figuras simétricas / no simétricas. Los pares no simétricos deben corresponder a ausencia de equidistancia (cambio de tocar el eje a no tocarlo), carencia de inversión o ausencia de cambio de semiplano.

8- Obtención aproximada del eje de simetría de dos figuras con el mira.

9- Realización aproximada de simetrías, con ayuda puntual de materiales auxiliares, cuando los ejes y las figuras se encuentran en posiciones sencillas.

Actividades:

A1- Reconocer las figuras que se corresponden mediante una simetría, en un conjunto de figuras en las que los casos afirmativos no presentan dificultades en cuanto a posiciones de eje y de figuras y los negativos corresponden a modificaciones de la figura, ya sea en forma o en tamaño.



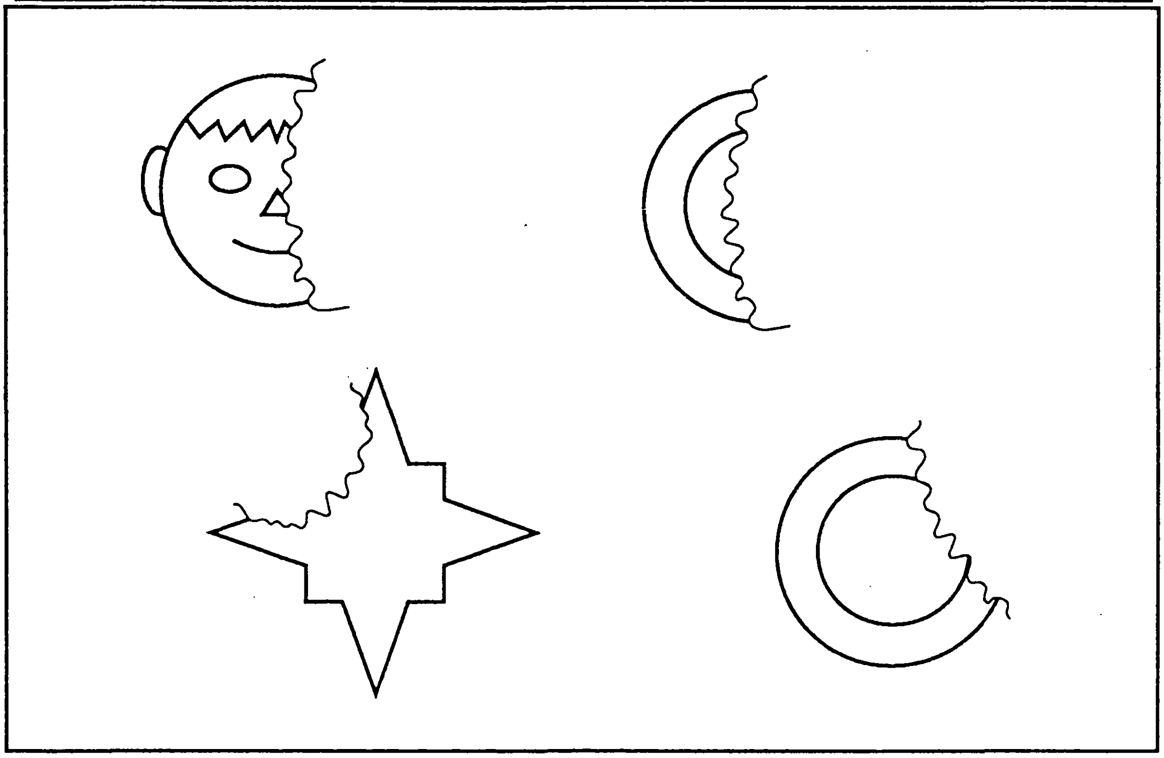
A2[1]- A) Colocando el espejo o el mira sobre una figura de la lámina, conseguir que la figura se vea completa.

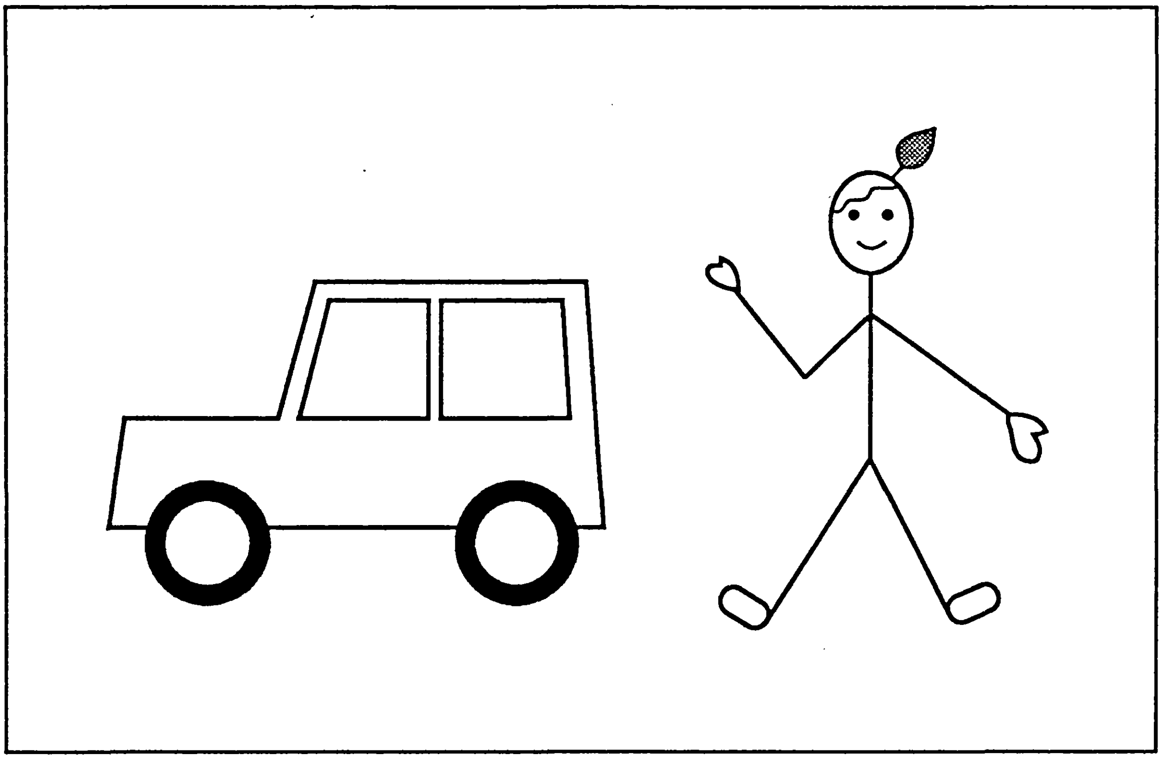
B) Colocando el espejo o el mira sobre la lámina, conseguir que se vean dos coches / hombres. Hacer que los dos coches / hombres se acerquen y se alejen. En el caso del hombre, conseguir también algunas imágenes no usuales, como, por ejemplo, un hombre sin pluma o con dos plumas.

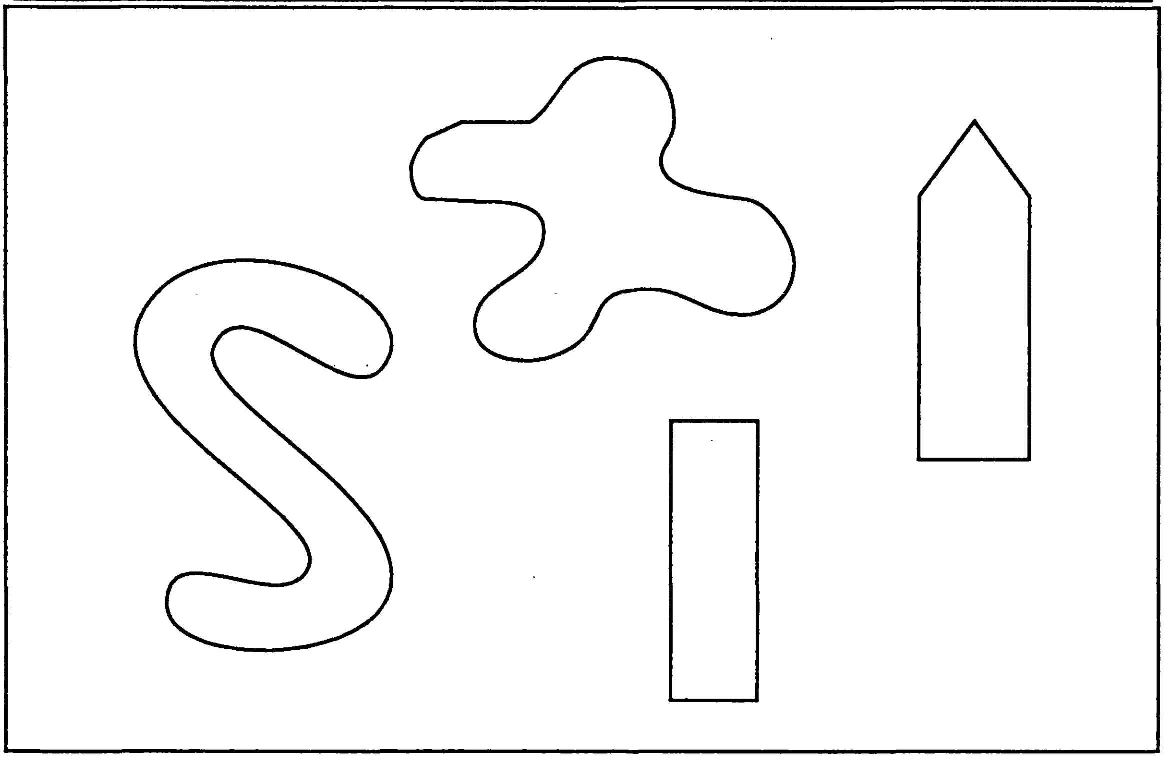
C) Colocando el espejo o el mira sobre la lámina, conseguir algunas transformaciones de las figuras, como, por ejemplo, un palo más / menos largo o grueso.

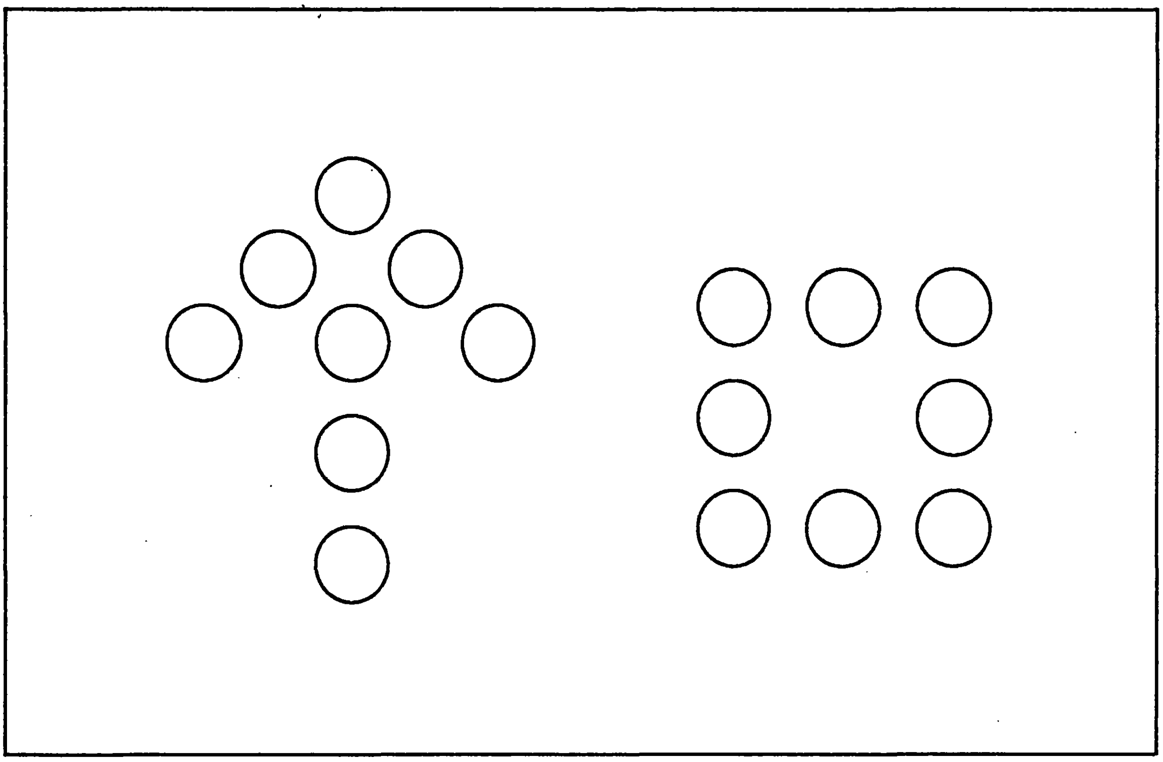
D) Colocando el espejo o el mira sobre la lámina, conseguir que se vean 1, 2, 3, ... canicas en cada configuración. Averiguar cuál es el número máximo de canicas que se pueden obtener en cada caso.

[1] Las láminas que presentamos para la actividad A2 están inspiradas en o extraidas de Walter (1973).



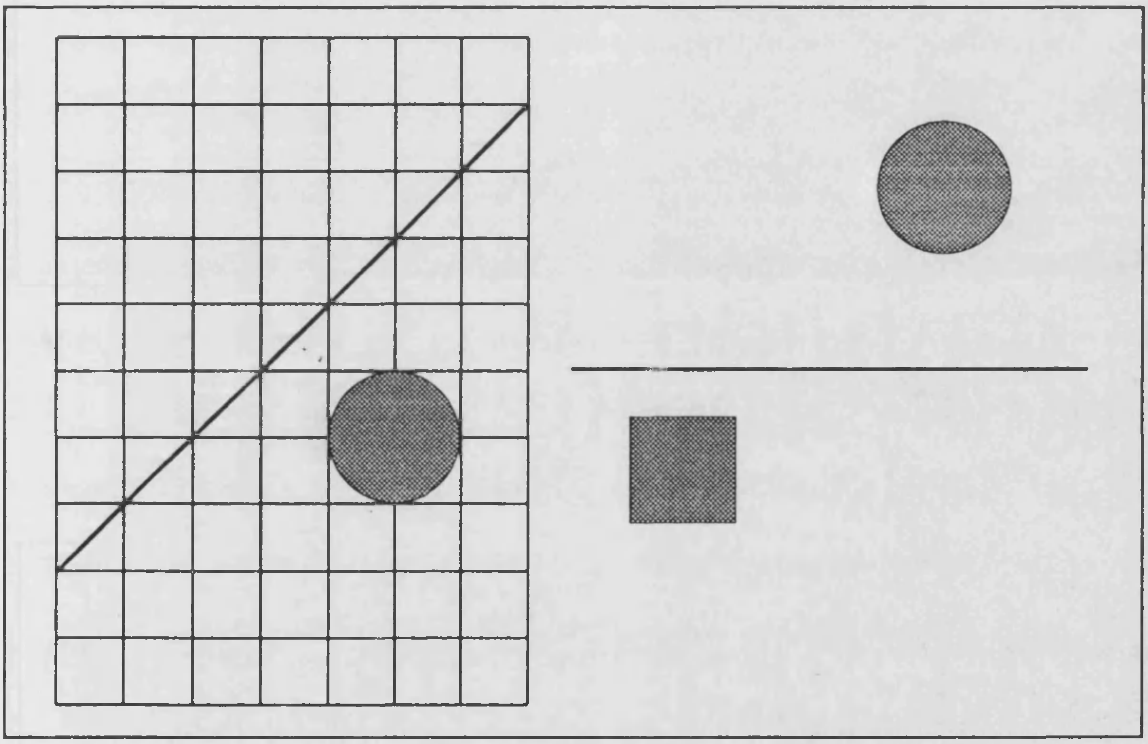




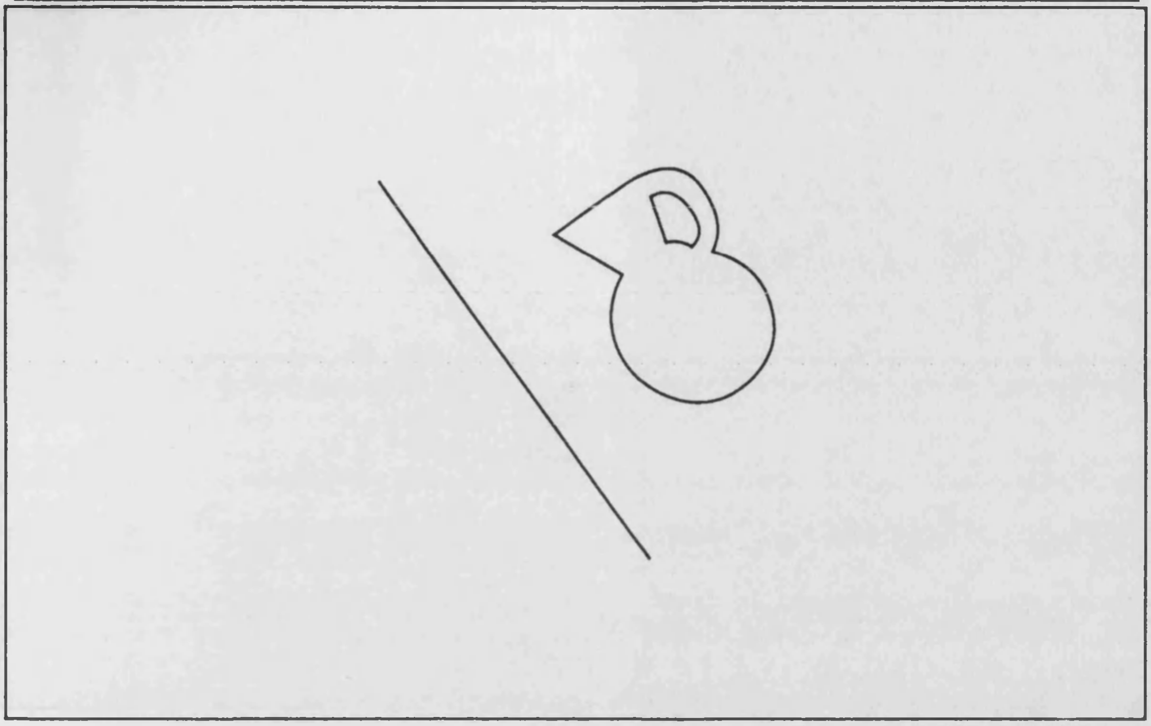


A3- Se proporcionan el dibujo de figuras completas o medias figuras y un eje de simetría. El alumno debe utilizar plegado y dibujo o el mira para obtener la figura imagen o completarla.

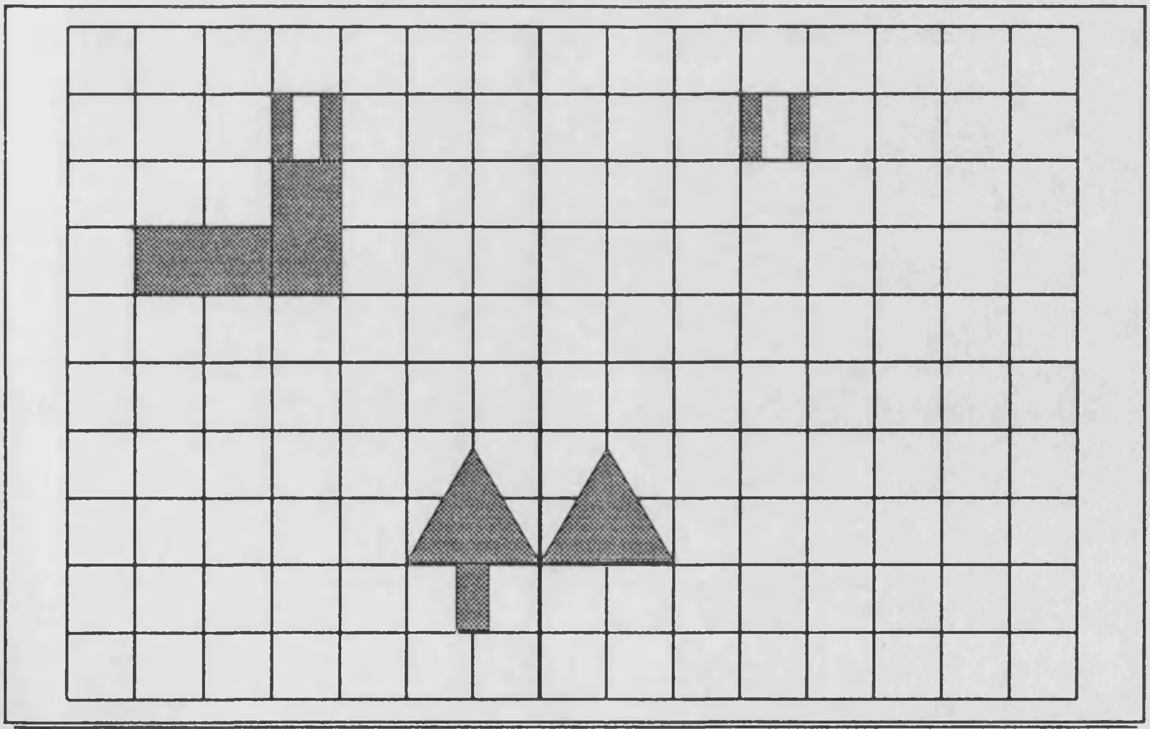
A4- Se proporcionan una pieza poligonal o un círculo (sin dibujo interior para no romper la simetría) y un eje de simetría. El profesor sitúa la pieza en la hoja y dirige a los alumnos para que realicen la simetría situando una pieza igual:
a) En el semiplano correcto y
b) En una posición concreta, teniendo en cuenta si toca o no toca al eje.

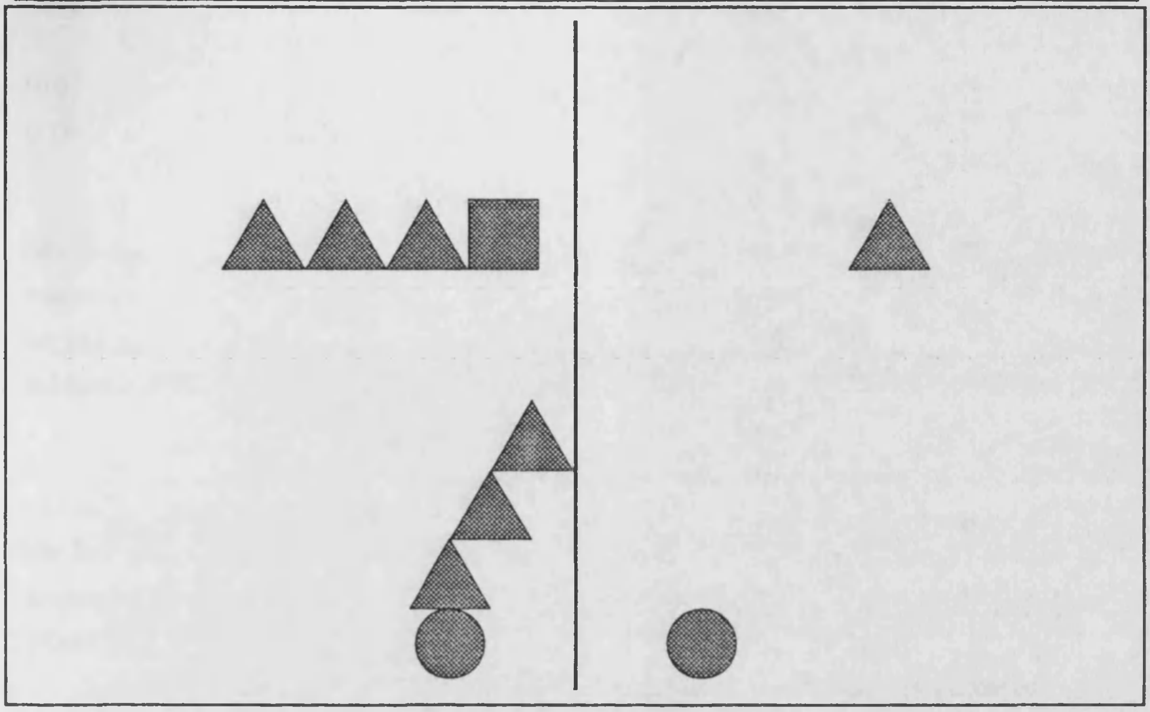


A5- Se presenta el dibujo o la silueta de una figura no simétrica y un eje de simetría. Los alumnos disponen de piezas recortadas, cuyo dibujo o silueta es como el de la lámina y también tienen otras piezas iguales, pero con distinta orientación de sus ángulos (o sea, piezas simétricas). El profesor dirige a los alumnos para que:
a) Seleccionen la pieza imagen adecuada,
b) La sitúen en el semiplano correcto y
c) La coloquen en una posición concreta, teniendo en cuenta si toca o no toca al eje.

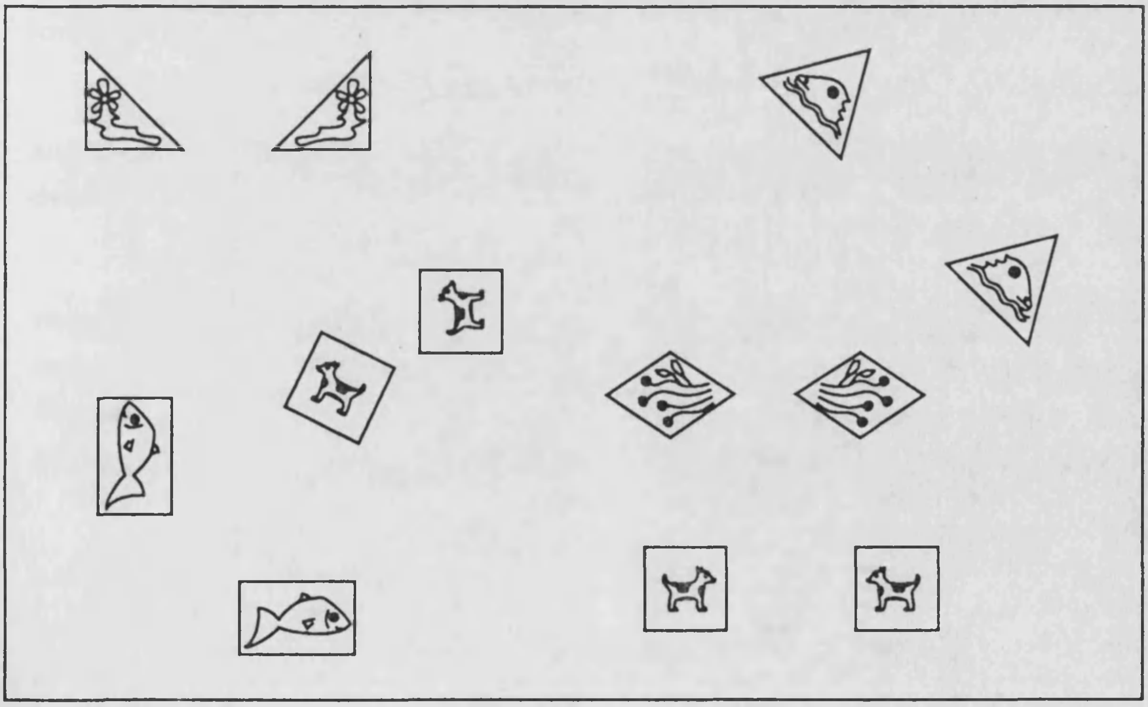


A6- Completar figuras simétricas formadas por piezas. Se proporciona la figura original, el eje de simetría y parte de la figura simétrica. Los ejes de simetría están en posiciones estándar. Las herramientas auxiliares (mira, espejo, plegado) pueden usarse puntualmente.





A7- Obtener, con la ayuda del mira, el eje de simetría de cada par de figuras. (Todos los casos que se presenten deben tener solución y en ninguno el eje de simetría corta las figuras).



- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

El primer objetivo (característica de isometría de las simetrías) se logra mediante la realización de simetrías por procedimientos automáticos (mira, espejo o plegado) y la observación de los resultados.

El segundo objetivo de esta fase puede estar también presente en fases o niveles posteriores, pues, cuando la secuencia se utiliza con niños de los primeros cursos de Enseñanza Primaria o que tienen alguna dificultad especial con algún término, éste debe ser sustituido por otro más conveniente, dejando para más adelante el aprendizaje del vocablo matemático correcto.

Ya se ha comentado anteriormente la problemática referente a las dificultades de aprendizaje de las simetrías asociadas a determinadas posiciones de los ejes y/o las figuras (corte de la figuras por el eje o ciertas combinaciones de inclinaciones entre la figura y el eje). Por ello, en la propuesta de enseñanza que planteamos ahora hemos omitido esas situaciones en las actividades de esta fase.

En las experimentaciones de la unidad de enseñanza de las simetrías que hemos realizado, no se utilizó la actividad A1. No obstante, las experiencias llevadas a cabo con traslaciones y giros han mostrado que los alumnos sí reconocen con rapidez la característica allí exigida (conservación de la forma y el tamaño), que es, evidentemente, de tipo visual y debe formar parte de la primera toma de contacto con cualquier isometría.

Para hacer esta actividad, los estudiantes podrán usar las herramientas auxiliares (espejo, mira o plegado), pero al avanzar la actividad deben prescindir de dicha ayuda.

La actividad A2 se ha experimentado en los diversos cursos de E.G.B. y ha resultado eficaz en cuanto a la consideración por los estudiantes de las características generales de la simetría propias del nivel 1. En concreto, una visión de la inversión y la equidistancia de una figura y su imagen al eje se pusieron de relieve mediante las láminas usadas para esta actividad.

El plegado y el reflejo son las dos bases sobre las que fundamentar la concepción visual global de simetría. Ambos procedimientos proporcionan dos visiones del concepto de simetría y son los procedimientos primarios que sirven para realizar automáticamente y comprobar simetrías; por lo tanto, su conocimiento y utilización es un objetivo importante a lograr en el primer nivel. Por ser métodos básicos de trabajo, su empleo para la obtención de simetrías debe ser objetivo de aprendizaje en la fase 2. En la actividad A3 se inicia a los estudiantes en el manejo de estas herramientas, que seguirán utilizando en adelante siempre que lo necesiten.

La secuencia seguida en las experimentaciones realizadas relegaba a un segundo plano el plegado en favor del mira. Pero hemos podido constatar que todos los alumnos con experiencia escolar tienen cierta familiaridad con el plegado y, en caso de haber estudiado simetrías con anterioridad, éste es el recurso más utilizado, incluso mentalmente a veces, para razonar sobre simetrías.

En las actividades A4 y A5 se dirige a los alumnos hacia la consideración de tres características de las simetrías (inversión, cambio de semiplano y equidistancia), aunque desde la visión global de la simetría indicada con anterioridad en la justificación de los objetivos de nivel 1. Se pretende que los estudiantes empiecen a realizar simetrías por sus propios medios, aplicando las concepciones que tengan de ese movimiento, por lo que, si bien al principio pueden servirse de las herramientas auxiliares (espejo, mira) directamente, luego las emplearán sólo para comprobar sus respuestas, hasta obtener una válida.

El énfasis de las actividades se pone por separado en cada una de las tres características de las simetrías mencionadas antes (inversión, cambio de semiplano y equidistancia al eje), con lo cual se dirige al alumno hacia lo que debe tener en cuenta, a diferencia de la actividad A1 de la fase 4, en la cual no se especifica cada una de las características y el alumno debe aplicarlas por sí mismo. La perpendicularidad respecto al eje no es un objetivo de este nivel, como hemos explicado con anterioridad, y en cuanto a la equidistancia, sólo se debe exigir una solución aproximada.

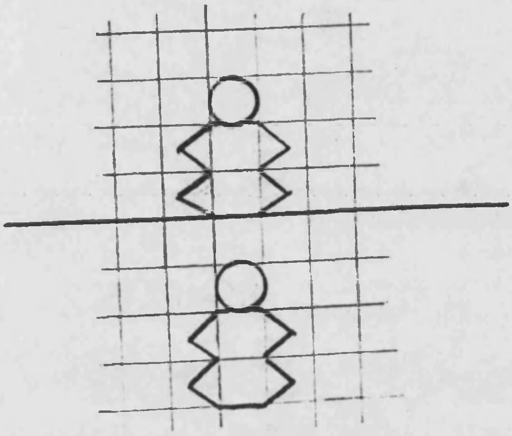
En las experiencias llevadas a cabo se puede ver, de manera muy clara en los alumnos de 1º de E.G.B. y menos acusada en los de 3º de E.G.B., que, en algunas de sus justificaciones, los estudiantes hacen referencia a la distancia al eje y en otras a que la figura "está al revés", pero siempre aluden sólo a una de las características, que no tienen en cuenta en otros ejercicios similares posteriores. Por ejemplo, en la actividad 7 de la experimentación, Sonila sitúa bien las figuras imagen de la lámina 1-S-7.1. Tras ello, la profesora le pregunta sobre el punto de la figura que toca el eje:

Prof.: *¿Por qué has puesto las dos puntas juntas?*

Sonila: *Porque está junto a la raya.*

Prof.: *Y cuando está junto a la raya sale junto a la raya, ¿verdad? y si está separado sale separado.*

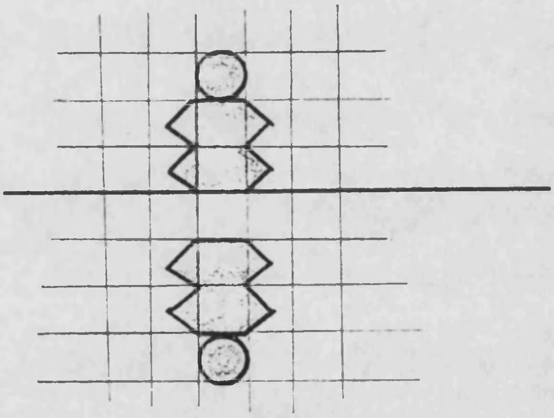
Sin embargo, en la lámina inmediatamente posterior, la 1-S-7.2, Sonila da como solución lo que muestro en el dibujo 1 (la figura original es la del semiplano superior), tras lo cual el proceso de modificaciones sucesivas de Sonila transcurre del modo siguiente:



Dibujo 1.

Prof.: *Antes has dicho que lo que tocaba el espejo, ¿tocaba el espejo o no?* ... [Sonila asiente] ... *Ahí, ¿qué toca el espejo? Esto toca el espejo, ¿no?* [el segmento inferior de la figura] *Entonces, ¿cómo hay que ponerlo?*

Sonila no lo sabe, por lo que la profesora hace que mire a través del espejo. Luego Sonila retira el espejo y vuelve a intentarlo. En esta ocasión sí tiene en cuenta al inversión de la figura, pero la distancia al eje no la modifica (ver el dibujo 2).



Dibujo 2.

Sonila coloca el mira, gira la hoja 180°, quita el mira y ya resuelve bien el ejercicio.

Se requiere la dirección del profesor hacia esas propiedades para que los estudiantes les presten atención, aunque no lo harán aplicándolas a cada punto de la figura, sino desde una perspectiva global de la colocación de la imagen en el plano.

Algo semejante sucede con el cambio de semiplano, que los estudiantes en nuestras experimentaciones utilizaban, salvo en alguna actuación puntual en 1º de E.G.B., pero no aparecía nunca en las justificaciones espontáneas.

En la secuencia experimentada no había ninguna actividad análoga a la A6. Su inclusión en la secuencia propuesta aquí está justificada porque, al proporcionar parte de la figura que los estudiantes deben completar, se incide en el uso de un enfoque visual para su resolución. De hecho, es una de las formas que pueden facilitar la consideración de la inversión en el nivel 1.

Al igual que en las actividades A4 y A5, el uso del mira, del espejo o de otro medio auxiliar debe decrecer progresivamente, si bien en esta fase los estudiantes pueden servirse de ellos repetidas veces en un mismo ejercicio para mejorar la solución aportada.

En la actividad A6 los ejes se encuentran en posiciones estándar, mientras que en la fase 4 se ha propuesto una actividad similar (A2) en la que se trabaja con ejes en posiciones no estándar y el uso de los materiales auxiliares está más limitado.

La obtención aproximada del eje de simetría, que se propone en la actividad A7, corresponde al primer nivel de razonamiento, pues la visión global de la simetría incluye las ideas de las dos figuras y el espejo o la línea de plegado entre ellas. También se fomenta la consideración del eje como línea situada "por la mitad" de las dos figuras desde una apreciación global, sin la consideración puntual de cada elemento de las figuras. El profesor dirigirá a los estudiantes, observando su forma de resolver el ejercicio y perfeccionando su técnica de doblado o colocación del mira si es necesario. Junto con la apreciación visual, esos serán los medios empleados en esta actividad para resolver los ejercicios.

En las experiencias llevadas a cabo no se experimentó esta actividad en 1º de E.G.B., aunque sí una parecida en todos los demás cursos, a partir de 3º de E.G.B. En estos casos, a diferencia de la actividad A7 que proponemos, no todas las situaciones planteadas tenían solución y la justificación de la existencia o no del eje de simetría y su obtención se planteó en Magisterio con exigencias de razonamiento de nivel superior al que planteamos ahora. En 3º de E.G.B., el tanteo con el mira les permitió a los alumnos identificar los ejes de simetría de los pares de figuras.

Fase 4 del Nivel 1

Objetivos:

1- Utilizar las características y técnicas que se pusieron de manifiesto en la fase 2 en situaciones distintas o en las que aumenta la complejidad. Las diferencias entre las actividades de las fases 2 y 4 están originadas por:

- La posición de los ejes: Actividades que en la fase 2 se restringían a ejes en posiciones estándar, ahora se presentan también con ejes de otras inclinaciones o con posiciones relativas figura-eje más complejas.

- El planteamiento general de la tarea: Actividades que en la fase 2 se enfocaban hacia una sola característica visual, en la fase 4 se plantean en general, debiendo tenerse en cuenta simultáneamente las diferentes propiedades de las simetrías estudiadas en la fase 2.

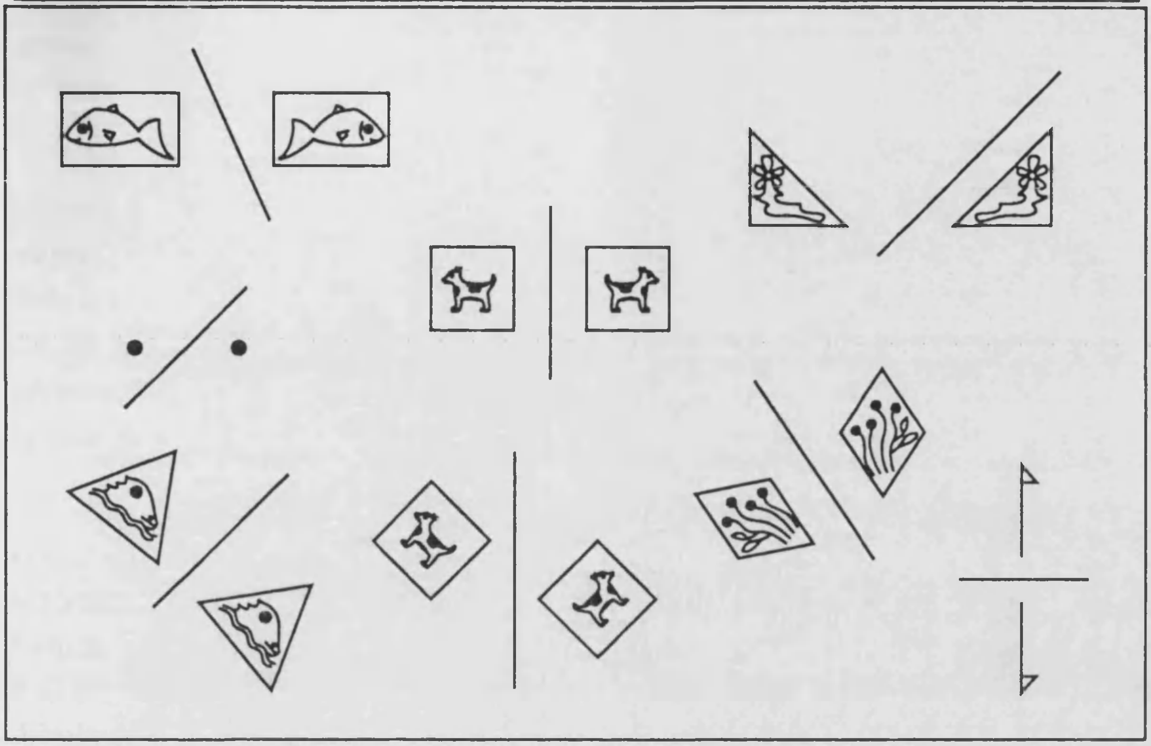
Actividades:

A1- Se proporcionan una pieza, poligonal o círculo (con un dibujo interior para romper la simetría) o con silueta no simétrica, y un eje de simetría. Los alumnos deben colocar la figura imagen.

A2- Completar figuras simétricas formadas por piezas. Se proporcionan la figura original, el eje de simetría y parte de la figura simétrica. Los ejes de simetría no están en posiciones estándar y las herramientas auxiliares (mira, espejo, plegado) pueden usarse sólo para verificar o corregir el resultado.

A3- Obtener con la ayuda del mira el eje de simetría de un par de figuras (los ejes de simetría no se encuentran necesariamente en posiciones estándar).

A4- Dados varios pares de figuras, reconocer las que se corresponden mediante la simetría cuyo eje se da. Si es necesario, se pueden utilizar las herramientas auxiliares para resolver el ejercicio.



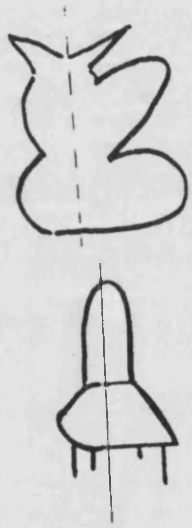
A5- Completar, dibujándola, una figura simétrica de la cual se proporciona la mitad.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

Las actividades A1, A2 y A3 son ampliaciones de las actividades A4, A5, A6 y A7 de la fase 2. Un elemento básico del proceso de aprendizaje de las simetrías es la posición del eje. Como hemos comentado con anterioridad, la ausencia de perpendicularidad es uno de los errores más frecuentes en la realización de simetrías, cuyo origen está, generalmente, en que los estudiantes ignoran la influencia del eje de simetría en la determinación de la dirección del movimiento y aceptan solamente las posibilidades de movimientos verticales y horizontales. Por este motivo, en las actividades de la fase 2 se limitaron las posiciones de los ejes de simetría a los casos más fáciles y en la fase 4 se profundiza en esta componente de la simetría, proponiendo la realización y observación de simetrías con ejes de otras inclinaciones.

Los casos negativos de la actividad A4 corresponden a falta de equidistancia (de tocar a no tocar el eje), a colocación de las dos figuras en el mismo semiplano o a no inversión de la figura. La visión global de la simetría debe permitirles a los estudiantes distinguir en esta actividad si los pares de figuras son simétricas o no respecto a un eje aunque, como se trata del nivel 1, los casos negativos que se presentan deben ser reconocibles a simple vista, sin necesidad de recurrir a técnicas de medición de distancias o perpendicularidad.

En las experimentaciones de la actividad A4, a partir de 3º de E.G.B. las principales dificultades para los estudiantes se plantearon en situaciones de ausencia de inversión de las figuras y de ausencia de perpendicularidad al eje. Esta actividad no es la extensión de ninguna otra de la fase 2, pues lo que requiere de los estudiantes es que utilicen de manera conjunta los diferentes elementos característicos de las simetrías que han aprendido a lo largo de las actividades de la fase 2.



En las experimentaciones realizadas hemos propuesto pocas actividades de dibujo, como la A5, pero hemos comprobado que, desde 1º de E.G.B., los ejercicios basados en el dibujo de figuras sí resultan adecuados para integrarlos en la secuencia de enseñanza, pues requieren que los estudiantes apliquen la visión adquirida de simetría con más cuidado que cuando sólo deben colocar una pieza de papel en su sitio. De hecho, los alumnos de 1º de E.G.B mostraron al final de la fase 4 una visión global correcta de la simetría, con deformaciones originadas por su poca habilidad de dibujo, lo cual repercutía sobre todo en el grosor de la figura (ver dibujo) y, en una niña, en la conversión de algunos ángulos en partes curvas, en concreto en la silla de la lámina 1-S-9.3.

SIMETRÍAS: NIVEL 2

Objetivos:

Las actividades que planteamos para este nivel pretenden lograr los objetivos generales siguientes, que más adelante desglosaremos en las diferentes fases de aprendizaje:

1- Descubrimiento, reconocimiento y utilización adecuada de:

a) Las propiedades que caracterizan las simetrías: Perpendicularidad y equidistancia respecto del eje de simetría.

b) El paralelismo de los segmentos que unen puntos simétricos.

c) El eje de simetría como mediatriz de los segmentos que unen puntos simétricos, aplicándolo en particular para encontrar ejes de simetría.

2- Utilización de la notación y el vocabulario matemáticos para identificar o referirse a puntos, ejes simetrías, etc. (P, P', S, S_e, ...).

3- Utilización explícita de la definición de simetría en las argumentaciones.

4- Realización de composiciones de simetrías y generalización de los resultados de la composición de dos simetrías.

5- Comprensión de la idempotencia de las simetrías.

6- Descubrimiento y verificación, a partir de ejemplos, de otras propiedades de las simetrías.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

La descripción de nivel 2 indica como característico de este nivel la utilización de las propiedades y elementos matemáticos de los objetos de estudio como base del razonamiento. Por lo tanto, descubrirlas y aprender a utilizarlas deben formar parte de los objetivos a conseguir en este nivel. Así, el objetivo 1 se refiere a los elementos que habitualmente forman parte de la definición o caracterización de una simetría (equidistancia y perpendicularidad respecto del eje) y a las propiedades básicas que resulta necesario usar en la identificación y caracterización de simetrías en la mayor parte de las situaciones.

Hay un cambio importante en la forma de razonamiento entre los niveles 1 y 2, pues los estudiantes pues los estudiantes pasan de una interpretación global de las simetrías a ser capaces de diferenciar los diversos elementos y propiedades matemáticos que intervienen en la realización de una simetría. Por lo tanto, debe haber también un cambio importante en la forma de expresión usada por los estudiantes cuando comunican sus pensamientos, las formas de resolver las actividades, los tipos de soluciones que son admitidas como correctas, etc. Toda esta problemática queda recogida en el objetivo 2, que indica la necesidad de lograr que los estudiantes terminen de aprender el vocabulario matemático relacionado con las simetrías y que sean capaces de leer y escribir los símbolos matemáticos más usuales en este contexto.

Una vez descubiertas y comprendidas las propiedades características que identifican las simetrías, los alumnos estarán en condiciones de entender y emplear la definición de simetría como parte de sus argumentos para explicar o demostrar resultados, conjeturas o afirmaciones. El tercer objetivo de las actividades del nivel 2 no plantea que los estudiantes obtengan la definición formal de simetría por sí mismos, ya que en este nivel, más que una definición matemática (como conjunto de propiedades necesarias y suficientes), los estudiantes organizarán, analizarán y utilizarán listas amplias de propiedades de las isometrías.

La composición de simetrías es fundamental en el aprendizaje de las isometrías del plano, por ser uno de los pilares en los que sustentar la relación entre las distintas isometrías. De ahí que su aprendizaje esté recogido explícitamente en los objetivos 4 y 5 de este nivel. No obstante, no podemos pretender que los estudiantes del nivel 2 lleguen a dominar la composición de simetrías en sus diferentes casos y las características de los distintos resultados, sino sólo que descubran y aprendan la relación de causa-efecto entre la composición de simetrías y las traslaciones o giros. La actividad propia del tipo de razonamiento del nivel 2 es la aplicación de movimientos sucesivos sobre figuras concretas y la comprobación de las características del movimiento resultante, pues se trata de la realización directa de simetrías y de mediciones sobre situaciones concretas. Más tarde, cuando los estudiantes hayan alcanzado el razonamiento del nivel 3, volverán a estudiar este tema específico, para trabajar sobre las relaciones obtenidas de una manera general y más abstracta que en el nivel 2. De esta manera, se hace patente la característica del Modelo de Van Hiele de promover una enseñanza en espiral.

El último objetivo global del nivel 2 que planteamos nos recuerda que para desarrollar correctamente el razonamiento de este nivel no hay que limitarse a estudiar las propiedades usuales o básicas de las simetrías, sino que los estudiantes debe descubrir por sí mismo otras propiedades o verificar la certeza de algunas que hayan sido planteadas por el profesor. Entre estas propiedades se encuentran, por ejemplo, la invarianza de puntos o figuras por una simetría o las relaciones entre puntos del plano, sus imágenes y los puntos del eje de simetría.

Fase 1 del Nivel 2

Objetivos:

1- Obtener información de los conocimientos que tienen los alumnos sobre mediatrices, paralelas y perpendiculares, las propiedades de estas líneas y su dibujo.

2- Proporcionar una unidad complementaria de enseñanza sobre rectas paralelas y perpendiculares y su trazado, si ello fuera necesario.

Actividades:

A1- Los alumnos han de trazar rectas paralelas o perpendiculares a otras con diversas inclinaciones y emplear instrumentos adecuados para ello: Regla, escuadra y cartabón, compás.

-◊-◊-◊-◊-◊-◊-

Si se utiliza la unidad de enseñanza que proponemos en esta memoria con estudiantes que demuestren haber superado ya el nivel 1 de razonamiento en las simetrías, pero no el nivel 2, el profesor deberá iniciar el trabajo con las actividades del nivel 2. En este caso, la fase 1 del nivel 2 debería estar integrada por la actividad que proponemos aquí precedida de algunas actividades de las distintas fases del nivel 1, que sirvan, al profesor, para verificar los conocimientos y el nivel de razonamiento de sus alumnos y, a éstos, para recordar determinados conocimientos previos necesarios y para entrar en contacto con el tema de las simetrías.

Así, en la experimentación realizada en Magisterio, las primeras actividades que propusimos fueron una selección de actividades del nivel 1: Colocar las imágenes de figuras respecto de un eje dado de manera visual, sin usar ningún material, con diversos grados de complejidad; dibujar las imágenes de algunas figuras a mano alzada; identificar qué pares de figuras son simétricas respecto del eje dado; aprendizaje de utilización del mira y el espejo; identificar qué pares de figuras son simétricas y dibujar el eje de simetría de estos pares; etc. (en el resumen de esta experimentación incluido en el anexo III de esta memoria se puede ver la relación completa de estas actividades).

Desde el primer momento, se pudo observar con claridad que Merche, la estudiante de Magisterio (de las dos alumnas que iniciaron la experimentación sobre isometrías, Ara tuvo que abandonarla) razonaba en el nivel 2, pues hacía continuas referencias a la equidistancia y la perpendicularidad al explicar sus respuestas. Al mismo tiempo, se pudo observar también que tenía algunas lagunas y confusiones. Por ejemplo, en su respuesta a la primera actividad (colocar visualmente las figuras simétricas respecto de un eje dado) Merche confundía la simetría axial con el giro de 180° pues, para situar la imagen de un punto o figura, seleccionaba aleatoriamente un punto del eje de simetría y colocaba la imagen girada 180° tomando ese punto como centro de giro. Así explicó su forma de encontrar las imágenes:

Merche: *No me acuerdo mucho, pero creo que tiene que haber en el eje un punto y entonces la distancia de este punto* [uno de la figura inicial] *al eje tiene que ser la misma que del eje a este punto* [su homólogo en la figura imagen], *pero en la misma recta* [la que une los puntos señalados y pasa por el centro de giro].

Esta respuesta, independientemente del error conceptual, refleja claramente un razonamiento de nivel 2. Pero, por otra parte, Merche recordaba también la caracterización de la simetría como plegado, por lo que al plegar la lámina por el eje de simetría se dio cuenta de que había situado mal las imágenes y las corrigió, aplicando la equidistancia y perpendicularidad al eje de manera consciente. Así explicó ahora su forma de proceder:

Prof.: *¿En qué te fijas* [para hacer la simetría]*?*
Merche: *En la distancia de cada punto al eje.*
Prof.: *¿La distancia sólo?*
Merche: *Perpendicular.*

Por lo tanto, estas actividades sirvieron también para que la alumna recordara los conceptos y aclarara sus ideas. Argumentos análogos a éste se pueden encontrar en las actividades siguientes, aunque buena parte de ellas estaban planteadas para permitir un razonamiento puramente visual, de nivel 1.

Si la unidad de enseñanza se utiliza con estudiantes que han realizado previamente las actividades de la unidad del nivel 1 de simetrías, es evidente que la finalidad de informar al profesor y a los estudiantes que tiene la fase 1 del nivel 2 está, en gran parte, superada, pues el trabajo que se inicia es la continuación natural del anterior. Por lo tanto la función de las actividades a realizar en esta fase se limita a hacer que el profesor verifique si sus alumnos conocen o no los nuevos elementos de las simetrías en los que se van a basar las actividades del nivel 2, la perpendicularidad y el paralelismo, y a hacer que los estudiantes tomen contacto con esos nuevos elementos.

En caso de que el profesor detecte alguna carencia importante en sus alumnos, tanto de tipo conceptual como técnico, deberá proponerles algunas actividades (que no hemos incluido en nuestra propuesta por no estar relacionadas directamente con la enseñanza de las simetrías) para que afiancen sus concepciones y aprendan a dibujar correctamente rectas perpendiculares y paralelas con regla y escuadra o compás.

En los párrafos anteriores hemos insistido en los conceptos de perpendicularidad y paralelismo como conocimientos previos necesarios para iniciar el trabajo con las actividades de la fase 2, pero no hemos aludido a otros conceptos geométricos relacionados con las simetrías, principalmente el de mediatriz. Dentro del diseño que hemos elaborado, no es necesario conocer previamente la idea de mediatriz para llevar a cabo las actividades de nivel 2, por lo que, en caso de no conocerlo los alumnos, no es necesario introducirlo en la fase 1, sino sólo en el momento en que sea oportuno.

Fase 2 del Nivel 2

Objetivos:

1- Descubrir y utilizar la equidistancia al eje de simetría de cada punto y su imagen, y la perpendicularidad respecto al eje de los segmentos que unen dichos pares de puntos.

2- Descubrir y utilizar el paralelismo de todos los segmentos que unen puntos que se corresponden.

3- Caracterizar el eje de simetría como la mediatriz de los segmentos que unen puntos simétricos.

4- Comprender y utilizar la notación estándar de las simetrías, S_e, y el vocablo básico asociado.

5- Descubrir la idempotencia de las simetrías y generalizar el resultado de la composición de una simetría consigo misma una cantidad par/impar de veces.

6- Aprender a aplicar una simetría determinada a un punto por procedimientos exactos.

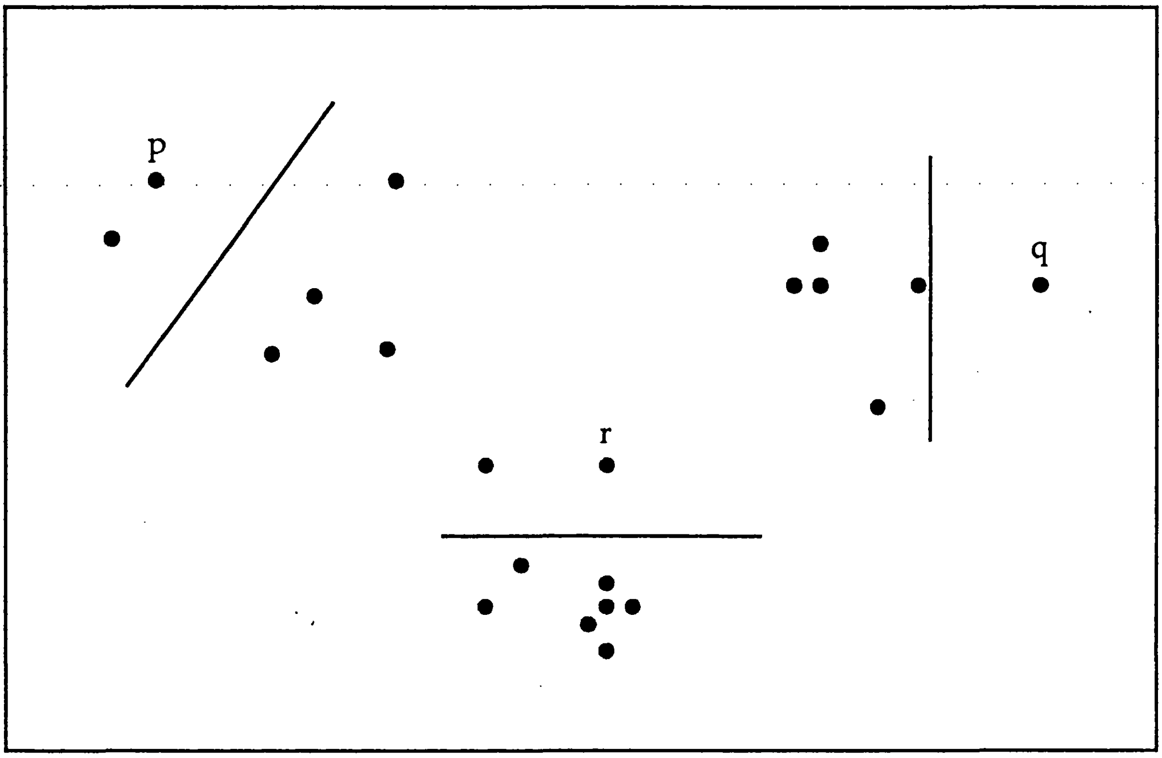
Actividades:

A1- Dados un par de figuras simétricas y el eje de la simetría, marcar dos puntos homólogos de las figuras, P y P', y unirlos por un segmento. Hacer lo mismo con varios pares de puntos (Q y Q', etc.). Repetir el ejercicio con varios ejes de simetría y pares de figuras simétricas.

Obtener los simétricos de varios puntos respecto un eje de simetría dado (se puede usar el mira o plegado). Unir, mediante segmentos, cada punto y su imagen. Repetir el ejercicio con varios ejes de simetría y conjuntos de puntos.

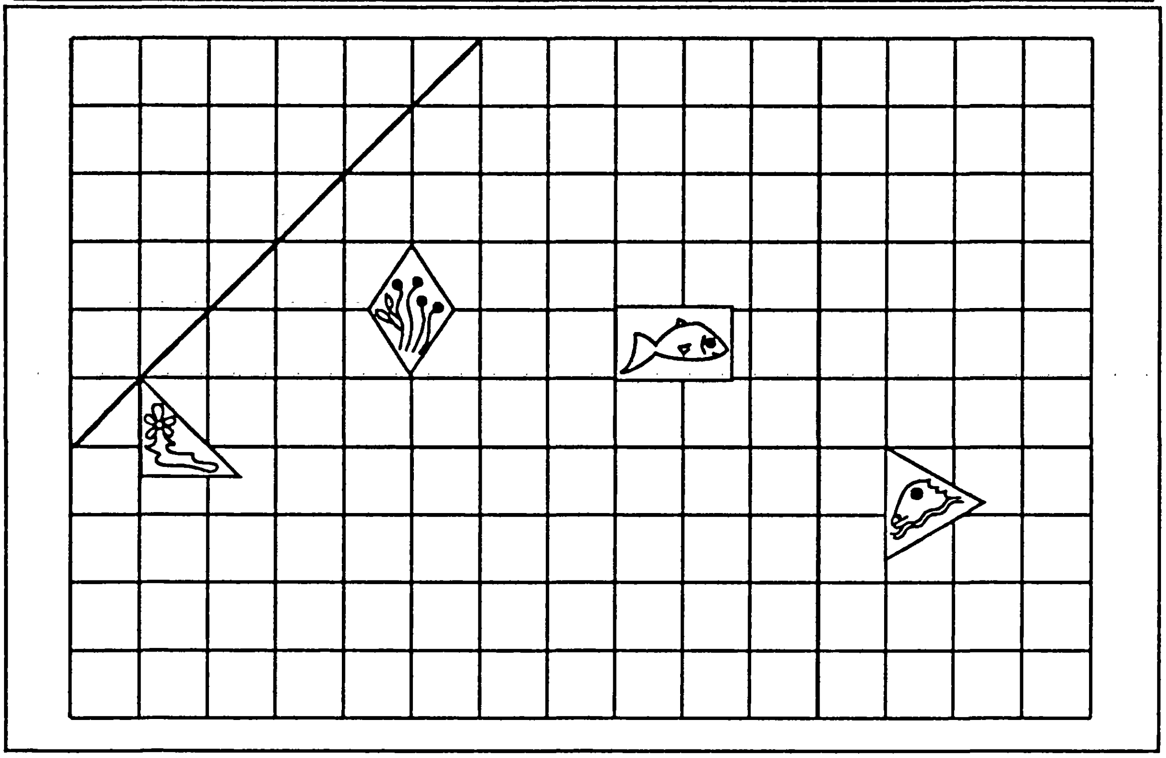
Observar los resultados de los ejercicios anteriores y deducir propiedades de las simetrías.

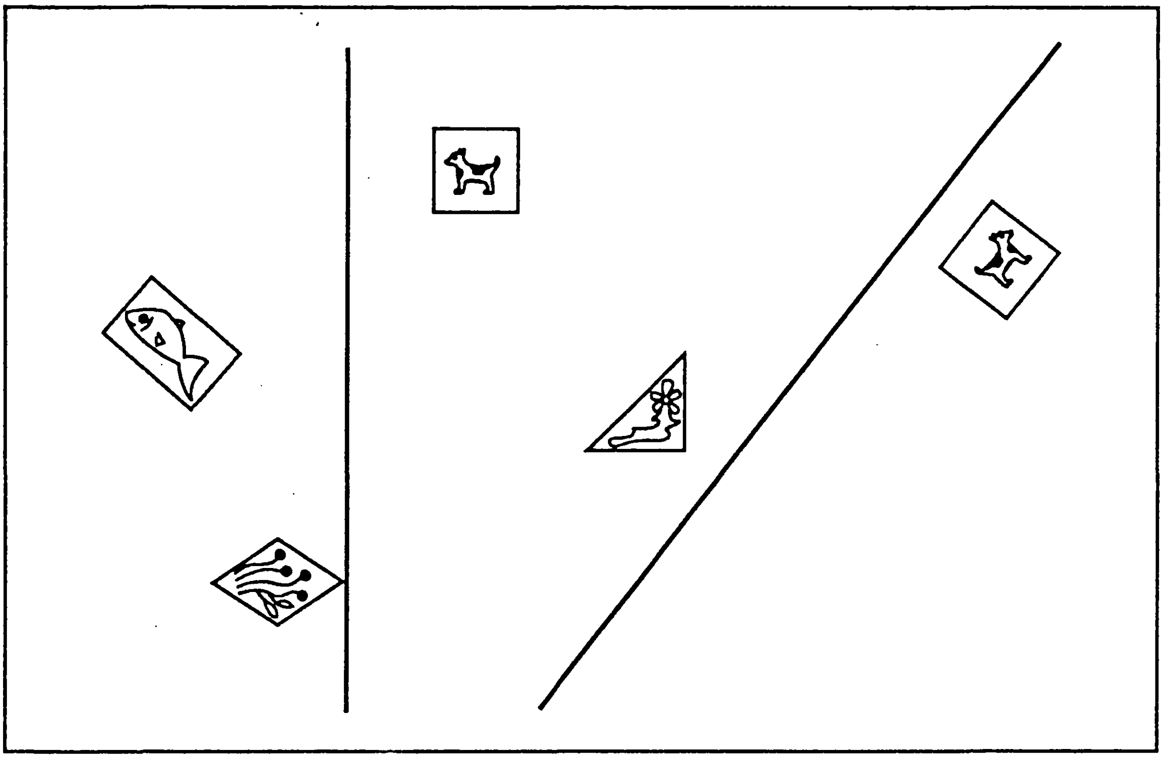
A2- Se dan un eje de simetría, varios puntos y sus posibles imágenes. Identificar los pares de puntos que se corresponden mediante esa simetría sin utilizar procedimientos automáticos (mira, plegado, ...).

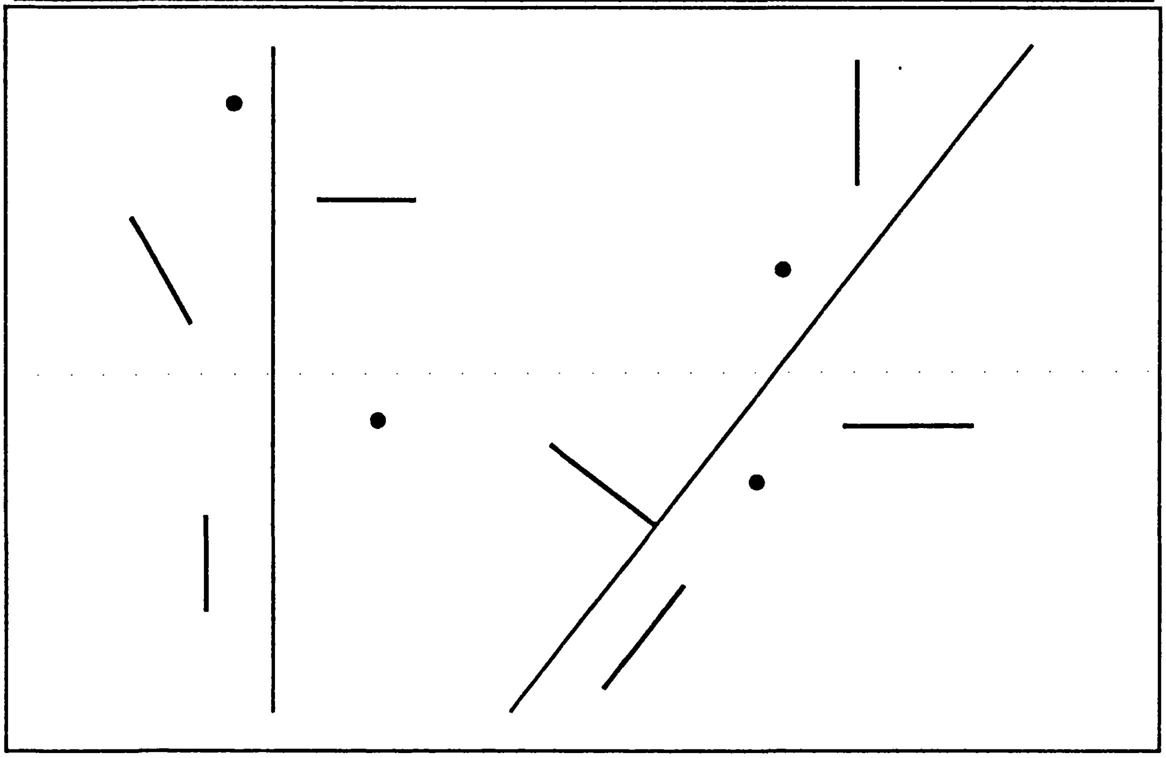


A3- Obtener las imágenes de las figuras de las láminas por la simetría cuyo eje aparece dibujado, sin utilizar procedimientos automáticos (mira, plegado, ...).

Obtener las imágenes de los segmentos y puntos marcados respecto del eje de la lámina.

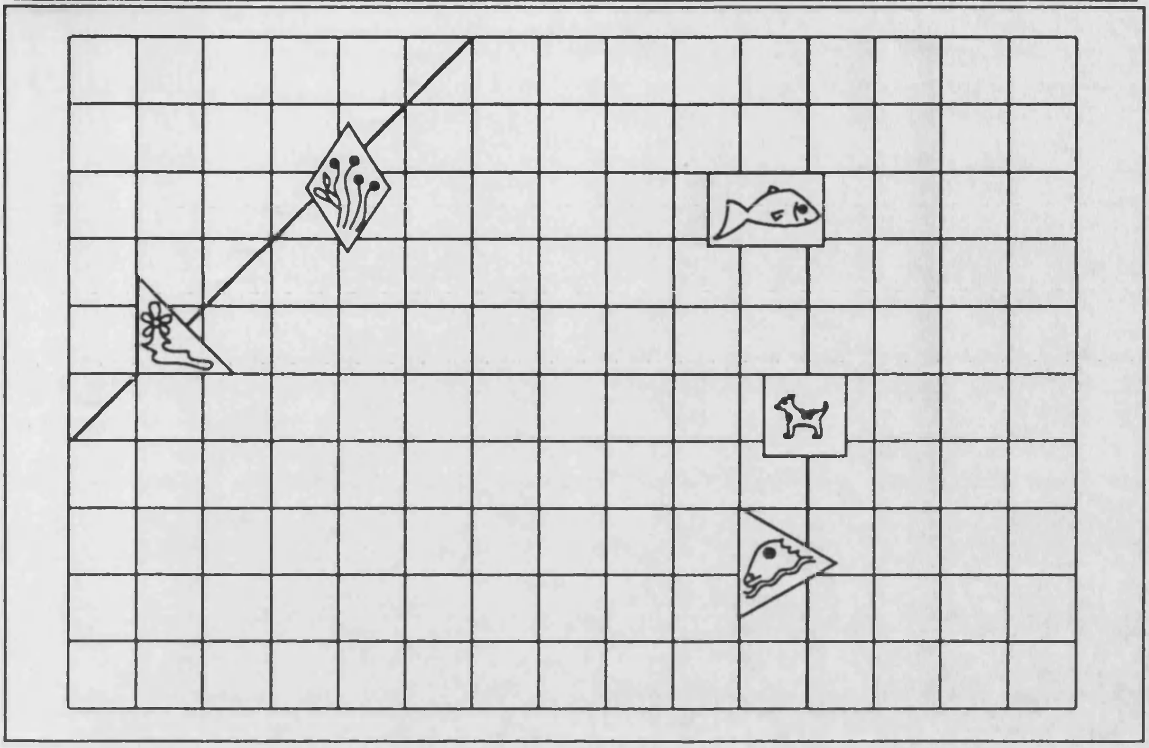


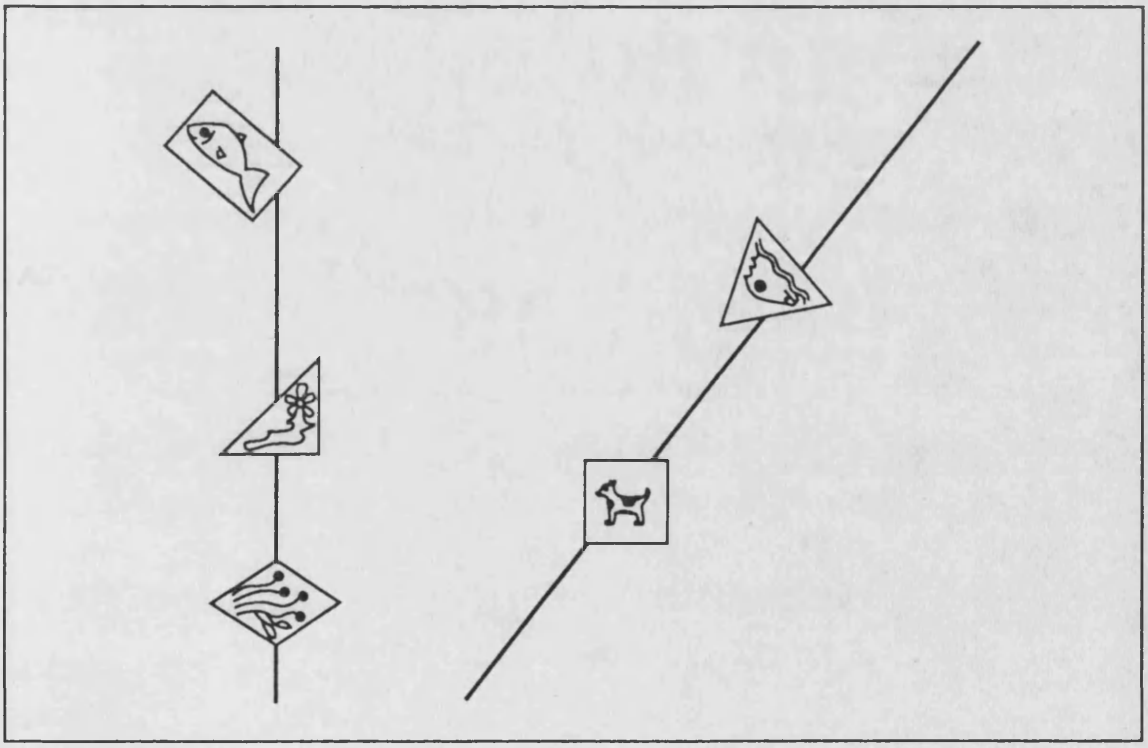


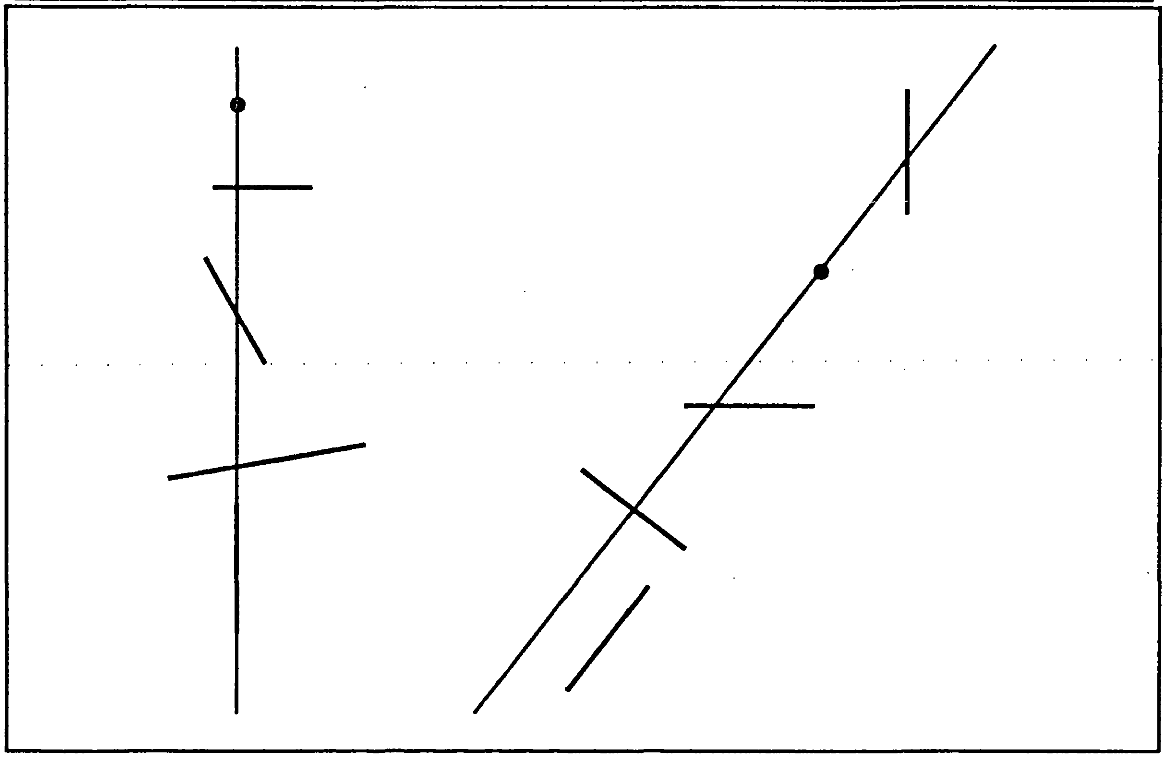


A4- Pedir a los estudiantes que definan lo que es una simetría. Analizar las diferentes definiciones propuestas. Plantear la definición usual de simetría a partir del procedimiento de obtención de figuras simétricas (consideración de la perpendicularidad y la equidistancia al eje) en caso de que no haya surgido espontáneamente.

A5- Obtener las imágenes de las figuras y los segmentos de las láminas por la simetría cuyo eje aparece dibujado (el eje debe cortar las figuras y segmentos). Explicar cómo proceder con el mira. Los alumnos deben explicar cómo obtener la imagen mediante equidistancia y perpendicularidad.







A6- Dados un punto y su imagen mediante una simetría, obtener el eje de dicha simetría (No se incluyen casos en los que el eje corte las figuras).

Dadas dos figuras simétricas, obtener el eje de simetría:

- Mediante la mediatriz de un punto y su imagen.
- Uniendo los puntos medios de dos segmentos.

A7- Aplicar a una figura la misma simetría dos veces consecutivas. Aplicar a otra figura la misma simetría tres veces consecutivas.

Repetir el ejercicio con otras figuras y ejes, aplicando las simetría 2, 3, 4, 5, ... veces consecutivas. Observar los resultados y enunciar la propiedad general descubierta.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

Varias de las actividades anteriores no se incluyeron en las experimentaciones descritas en esta memoria. Parte de ellas han sido añadidas como consecuencia de las experimentaciones, para completar y mejorar la unidad de enseñanza. Las otras sí se utilizaron en varias unidades diseñadas para el aprendizaje de las simetrías, puestas en práctica en clases ordinarias completas, de 4º a 8º de E.G.B. y en Magisterio, durante el horario normal de clases, impartidas por los profesores habituales y formando parte de los contenidos del curso oficial.

De estas experimentaciones no fue posible realizar un seguimiento detallado día a día que pueda ser incluido en esta memoria, pero los profesores de E.G.B. nos hacían resúmenes periódicos, más o menos minuciosos, del desarrollo e incidencias de las clases; en cuanto a Magisterio, nosotros hemos impartido durante varios años esos cursos, por lo que la información que poseemos es amplia.

El descubrimiento de la perpendicularidad y la equidistancia al eje es una de las actividades que no se han incluido en ninguna de las experimentaciones realizadas, tal como se plantean en la actividad A1. En los grupos del Ciclo Superior de E.G.B., el profesor hizo alusión directa a estas propiedades después de que los estudiantes realizaran algunos ejercicios de obtención de figuras simétricas, mientras que en Magisterio ya eran conocidas por la mayor parte de los alumnos, por lo que se procedió a recordarlas.

En las experimentaciones de 3º de E.G.B. se utilizaron actividades equivalentes a la A1 para traslaciones y giros, que produjeron buenos resultados para la introducción de las propiedades características de dichas isometrías. Este tipo de actividad también se reveló como un buen método de observación para el descubrimiento por los estudiantes de otras propiedades. Por ello creemos que resulta acertado comenzar la segunda fase del nivel 2 de las simetrías con la actividad A1 e iniciar así a los alumnos en las propiedades características de las simetrías. Aunque en el enunciado de esta actividad se indica que los estudiantes pueden emplear materiales que permiten obtener las imágenes de manera automática (mira o plegado), es conveniente que se sirvan de la regla, la escuadra y el compás cuando sean capaces. Aunque esto pueda suponer algo más de tiempo para realizar la actividad, su realización será más rica, ya que estos materiales obligan a utilizar conscientemente unas propiedades matemáticas de la simetría que, de otra manera quedan más ocultas.

La actividad A2 tiene como objetivo reforzar las ideas de equidistancia y perpendicularidad al eje y es un complemento de la anterior, pues al tener que reconocer y justificar las situaciones correctas se resaltan las características objeto de interés. La limitación en el uso de materiales manipulativos se hace con el fin de impulsar a los estudiantes a usar estas características matemáticas de las simetrías, pues es necesario reducir al mínimo el uso de los materiales propios del nivel 1 (mira, plegado y espejo). Esta actividad tampoco estuvo incluida en las unidades de enseñanza de las experimentaciones resumidas en esta memoria, pero sí se utilizó en la Escuela de Magisterio y resultó útil para alumnos de Magisterio con conocimientos escasos o nulos sobre las isometrías del plano.

La actividad A3 supone un paso más hacia la utilización explícita de la definición de simetría axial, propia del razonamiento del nivel 2, por lo que se debe forzar a los estudiantes a usar los instrumentos de dibujo. En la experimentación llevada a cabo en Magisterio se pudo observar que éste fue el método seguido por Merche. También fue el método utilizado por la mayor parte de los estudiantes del Ciclo Superior de E.G.B. y de Magisterio, una vez que habían descubierto y comprendido la concepción de la simetría basada en sus características de perpendicularidad y equidistancia al eje.

Las tres primeras actividades presentan a los estudiantes las propiedades básicas de las simetrías desde diferentes puntos de vista. Así pues, al realizar la actividad A4 los estudiantes ya deben disponer de la información y la experiencia suficientes para poder dar una definición de simetría axial, entender el significado de otras definiciones diferentes y juzgarlas. Por lo tanto, con esta actividad se pretende, en primer lugar, que los estudiantes proporcionen sus propias definiciones de simetría axial (entendiendo la palabra "definición" de acuerdo con las características del nivel 2 de Van Hiele). Aunque, posiblemente, los estudiantes incluyan algunas propiedades irrelevantes en sus definiciones, el profesor no debe rechazarlas, salvo que sean erróneas, pero sí debe procurar que siempre aparezcan explícitamente las características fundamentales (perpendicularidad y equidistancia del eje). En una clase normal, generalmente los estudiantes propondrán varias definiciones diferentes, por lo que la actividad debe continuar con una discusión, orientada y controlada por el profesor, sobre la validez de las diferentes definiciones.

En la experimentación de Magisterio se produjo una situación usual: Merche, a lo largo de las primeras sesiones, resolvió diversas actividades en las que tuvo que utilizar las propiedades características de las simetrías para resolver la actividad o para justificar su respuesta. Esto hizo que fuera creando su propia definición de simetría, a pesar de que en dichas actividades no se le pidió que definiera explícitamente las simetrías. Pero al llegar, en la cuarta sesión, a la actividad 19 de la experimentación en la que la profesora le presentó varios enunciados, para que Merche dijera si eran ciertos o no, reconoció en uno de ellos la definición de simetría. El enunciado era: *Al unir un punto de una figura con su* *imagen, el eje de simetría pasa siempre por el punto medio de ese segmento.* La respuesta de Merche fue:

Merche: *Esa es la definición de simetría, ¿no? ... O sea, un punto y su imagen, la mediatriz siempre tiene que estar a ... siempre tiene que ser el eje, ¿no?*

La obtención de la imagen de una figura cortada por el eje de simetría, se ha revelado problemática si se propone a estudiantes que todavía no han alcanzado el segundo nivel de razonamiento, ya que no aparece directamente por ninguna de las técnicas auxiliares propias del primer nivel de razonamiento (espejo, mira o plegado), sino que requiere la división de la figura en dos partes (a ambos lados del eje) y la consideración independiente de cada una de ellas. Los estudiantes de E.G.B. y de Magisterio que se enfrentan a la actividad A5 por primera vez, generalmente no son capaces de resolverla de inmediato y necesitan con frecuencia la dirección del profesor para descomponer la figura en dos partes y prestar atención a cada una de ellas por separado, pero sin perder la coordinación del segmento que las une. No obstante, una vez que se les sugiere tal descomposición, centrada la situación en la obtención de puntos imagen, mediante la perpendicularidad y la equidistancia, les permite obtener la imagen requerida.

En la experimentación de Magisterio se aprecia que, al encontrarse la estudiante ya desde el principio en el nivel 2, resolvió la situación sin dificultad. En las láminas usadas en la primera sesión, como parte de las actividades de la fase 1, aparecían algunas figuras situadas encima del eje de simetría y en otras actividades posteriores, de esta segunda fase, también tuvo la estudiante que colocar o dibujar las imágenes de figuras o segmentos situados sobre el eje. En ningún momento se apreció ninguna dificultad por el hecho de que las figuras estuvieran sobre el eje; los errores que cometió no fueron particulares de estos casos, sino que se debían a falsas concepciones o despistes y correspondían, casi siempre, a algunos de los errores típicos de las simetrías detectados por diversas investigaciones (Grenier, 1988; Jaime, Gutiérrez, 1989 b; Küchemann, 1981).

Un requisito para poder adquirir completamente el segundo nivel de razonamiento en cualquiera de las isometrías es haber adquirido previamente el segundo nivel en el campo de las figuras geométricas planas, ya que la realización de cualquiera de los movimientos obliga a seleccionar partes de las figuras (puntos o segmentos generalmente), a relacionarlas con las correspondientes partes de la figura imagen y también a considerar algunas propiedades como igualdad de longitudes o ángulos, paralelismo, perpendicularidad, etc., todo lo cual son destrezas propias del nivel 2. En el aprendizaje de las simetrías es donde se puede reconocer más claramente dicha necesidad previa, ya que ésta es la única de las tres isometrías que estamos tratando que obliga a dividir una figura en dos partes y a considerarlas como dos figuras relacionadas pero independientes.

La comprensión de las características de las simetrías permite, en la actividad A6, la obtención de manera precisa del eje de simetría a partir de un par de figuras simétricas. Es importante que los estudiantes practiquen con una variedad de ejercicios en los que haya casos de diferentes posiciones de ejes y de figuras, con el fin de evitar la generación de concepciones erróneas o parciales y de estrategias particulares que sólo sirvan para determinadas situaciones.

En las experimentaciones de los diversos cursos tuvimos cuidado de proporcionar a los estudiantes tal variedad de situaciones en las actividades de los diferentes niveles y fases y, en particular, en los ejercicios directamente vinculados a los que ahora comentamos (ejercicios del mismo tipo que la actividad A7 de la fase 2 del nivel 1 la A6 de la fase que estamos comentando ahora). En la experimentación de 3º de E.G.B., los estudiantes resolvieron estas actividades (u otras similares) de manera visual, ya que se encontraban en el nivel 1, usando el mira o plegado para encontrar el eje de simetría, mientras que en la experimentación de Magisterio las actividades de este tipo se resolvieron mediante trazado de segmentos y determinación de mediatrices o de puntos medios, métodos que corresponden al nivel 2. Hay que destacar que, en esas actividades, omitimos situaciones en las que el eje cortaba las figuras, situación que en la propuesta actual no hemos descuidado, al incluirlas en la fase 4.

La actividad A6 está dividida en dos partes, que corresponden a dos grados de complejidad de las situaciones planteadas. En primer lugar se trabaja con la herramienta básica de determinación del eje de simetría, su interpretación como mediatriz del segmento que une cada punto y su imagen. Las dos técnicas de obtención de ejes de simetría presentadas en la segunda parte de la actividad completan la aplicación de este método, ofreciendo una interpretación alternativa, prácticamente más sencilla (pues es más fácil trazar dos segmentos y unir sus puntos medios que trazar la mediatriz de un segmento) pero conceptualmente más compleja (pues se basa en dos propiedades del eje de simetría, mediatriz común a todos los segmentos, en vez de en una sola propiedad, mediatriz del segmento). Esta doble visión es interesante, pues con posterioridad, en el nivel 3, se puede discutir sobre la necesidad o la suficiencia de considerar todas las propiedades en cada método.

Las dos técnicas presentadas en la segunda parte de la actividad A6 surgieron en la experimentación de Magisterio. La primera actividad de este tipo que se presentó a la estudiante de Magisterio consistió en dibujar el eje de simetría de un par de figuras simétricas y no le proporcionaba ninguna indicación sobre la forma de resolver el problema. La estudiante seguía justificando sus soluciones mediante propiedades matemáticas de las simetrías, aunque algunas veces incluía explicaciones de tipo visual. En este caso (actividad 12 de la experimentación), Merche situó la regla aproximadamente en la posición del eje y dijo:

Merche: *Sería perpendicular, ¿no?*
Prof.: *Ahora te lo pido exacto. Tú has dicho que* [el eje] *es perpendicular y has colocado la regla aproximadamente por en medio.*
Merche: *De un punto a su imagen y pasaría por la mitad. Mediría 2* [Merche usa dos puntos y sus respectivas imágenes y une los puntos medios de los dos segmentos].
Prof.: *¿Dos puntos?*
Merche: *O sea, 4. Dos de cada figura* [dos puntos de la figura original y sus respectivas imágenes].
Prof.: *Y si midieras uno y su imagen, ¿quedaría determinado el eje? En vez de dos, ¿si cogieras uno quedaría determinada la imagen?*
Merche: *No, porque no sabes por dónde va la recta.*

La idempotencia de las simetrías es una propiedad fácil de descubrir y de generalizar por los estudiantes que se encuentran accediendo al nivel 2 de razonamiento, por lo que la actividad A7 no debe presentar especial dificultad una vez comprendido que se debe aplicar la misma simetría varias veces seguidas a las sucesivas imágenes.

Es importante aprovechar las actividades de esta fase para promover en los estudiantes la necesidad de comprobar la validez de los resultados mediante la utilización de todas las propiedades contenidas en la definición del concepto o, si ello no es posible, de las que se hayan establecido como suficientes, y comprender que la limitación a la verificación de una propiedad puede producir resultados incorrectos. De esta manera, gradualmente se va incrementando el grado de exigencia en el razonamiento del individuo que con posterioridad, en el nivel 3, desembocará en demostraciones informales y en el inicio de la demostración formal. La actividad A6, por ejemplo, se presta a ello, pues es relativamente fácil que los estudiantes identifiquen como sí/no simétricas dos figuras que realmente no/sí lo son. Las propias respuestas de los estudiantes deben servir para hacerles ver que, además de poder trazar la mediatriz de un segmento o la recta que pasa por los puntos medios de dos segmentos, se necesitan determinados requisitos para que dos figuras sean simétricas. En la experimentación de Magisterio, Merche identificó como simétricos el par de zapatos de la figura lámina M-S-12 (para los que hay una simetría en deslizamiento), pero al intentar trazar el eje, uniendo dos puntos con sus respectivas imágenes, se dio cuenta de su error ya que sabía que esos segmentos deberían ser paralelos.

Fase 4 del Nivel 2

Objetivos:

1- Utilizar propiedades de las simetrías descubiertas anteriormente.

2- Componer dos simetrías y determinar la isometría resultante. Verificar la ausencia de conmutatividad de la composición de simetrías.

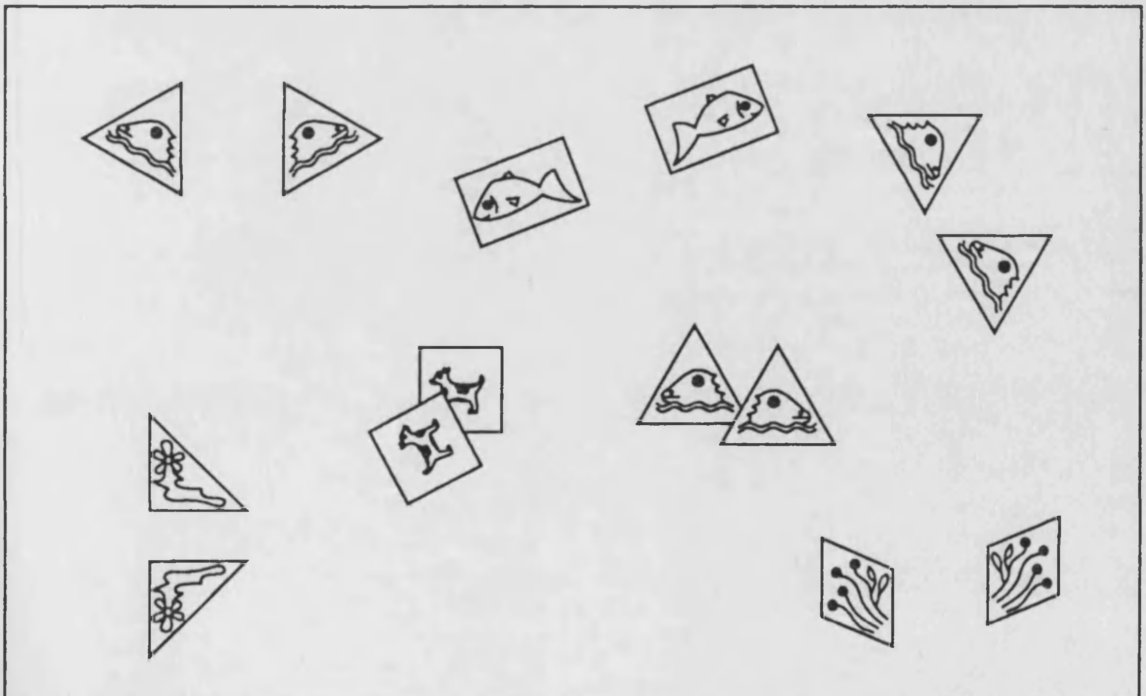
3- Comprender y utilizar el vocabulario y la notación formales asociados a las simetrías y su composición.

4- Introducir la simetría en deslizamiento y sus características básicas.

5- Descubrir experimentalmente y utilizar otras propiedades de las isometrías relacionadas con las simetrías.

Actividades:

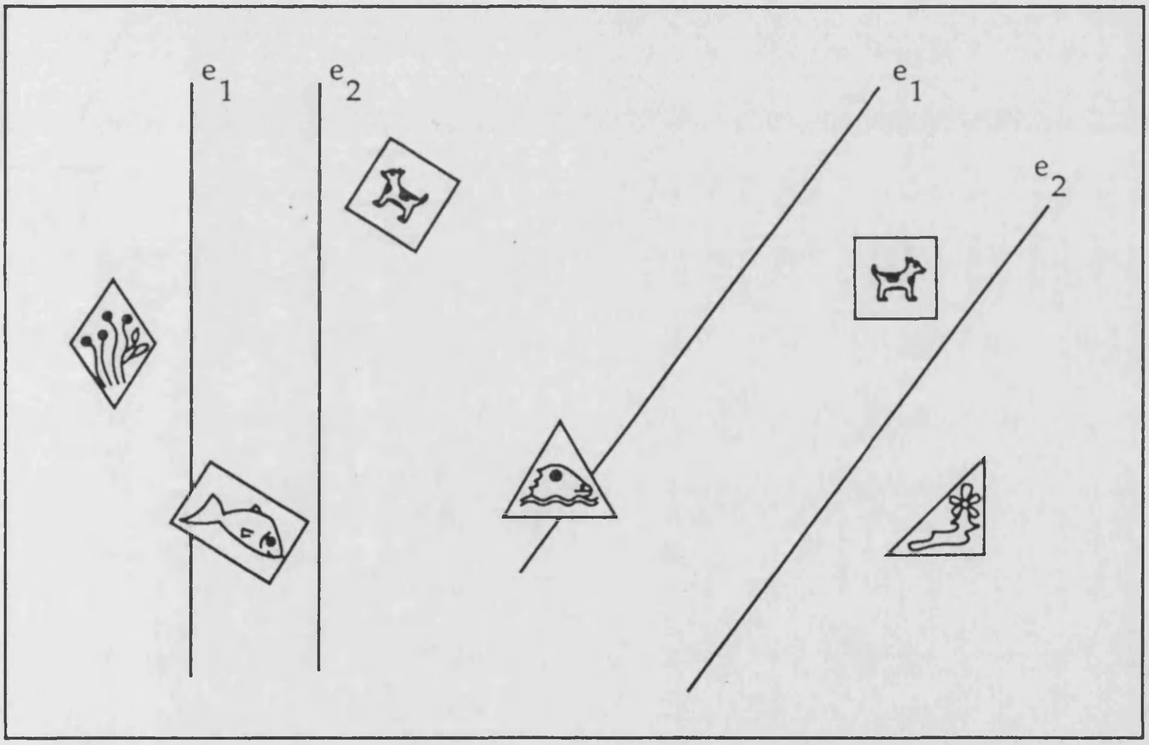
A1- Dados varios pares de figuras, identificar los que corresponden a dos figuras simétricas (incluir casos en los que las figuras se corten). En cada situación, dibujar el eje de simetría o justificar por qué las figuras no son simétricas.



A2- Dadas una figura y la simetría S_e, determinar la cantidad mínima de puntos-imagen necesarios para poder situar con exactitud la figura imagen. Estudiar las diferencias según que el eje de simetría toque la figura o sea exterior a ella.

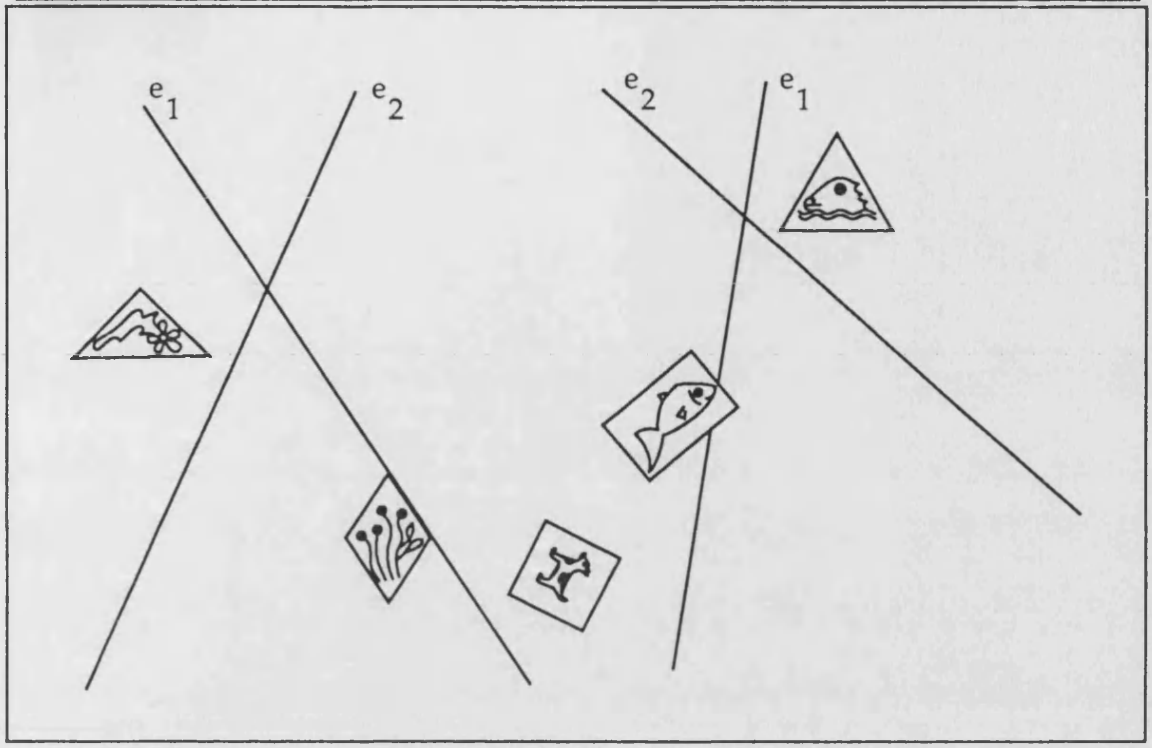
A3- Dados una figura y los ejes de simetrías paralelos e_1 y e_2, aplicarle a la figura la simetría S_1 y a su imagen la simetría S_2 (introducir el concepto de composición de simetrías). Determinar el movimiento que permite pasar directamente de la desde la figura inicial hasta la última imagen obtenida, indicando las características de dicho movimiento.

Repetir el ejercicio con otras figuras y pares de ejes paralelos. Generalizar el resultado.



A4- Dados una figura y dos ejes de simetrías que se cortan, e_1 y e_2, aplicarle a la figura la simetría S_1 y a su imagen la simetría S_2. Determinar el movimiento que permite pasar directamente desde la figura inicial hasta la última imagen obtenida, indicando las características de dicho movimiento.

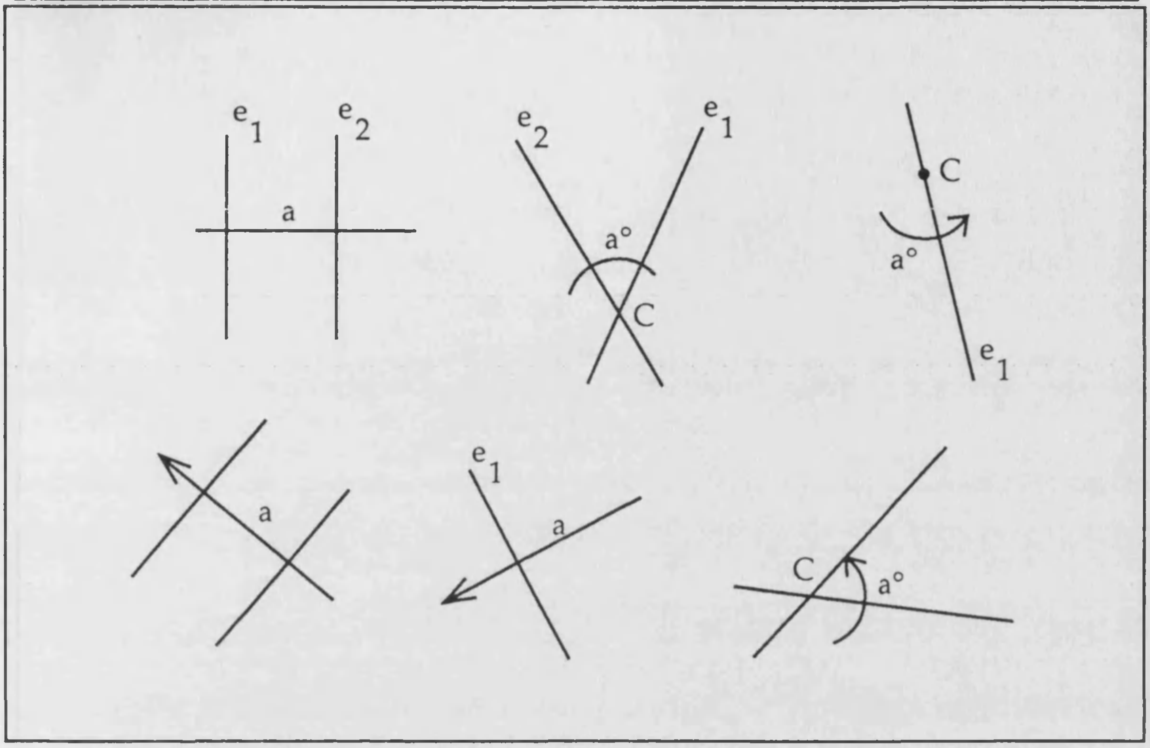
Repetir el ejercicio con otras figuras y pares de ejes que se corten. Generalizar el resultado.



A5- En la lámina se dan algunas características de las simetrías S_1 y S_2 y del movimiento (traslación o giro) resultante de la composición $S_2 \circ S_1$. Completar las características que faltan de dichos movimientos, para que cada uno de ellos quede completamente identificado.

Una vez obtenidas todas las características de cada isometría, verificarlas aplicando a una figura la composición $S_2 \circ S_1$ y el movimiento equivalente.

Repetir el ejercicio con los otros pares de simetrías de la lámina y el movimiento equivalente a su composición.

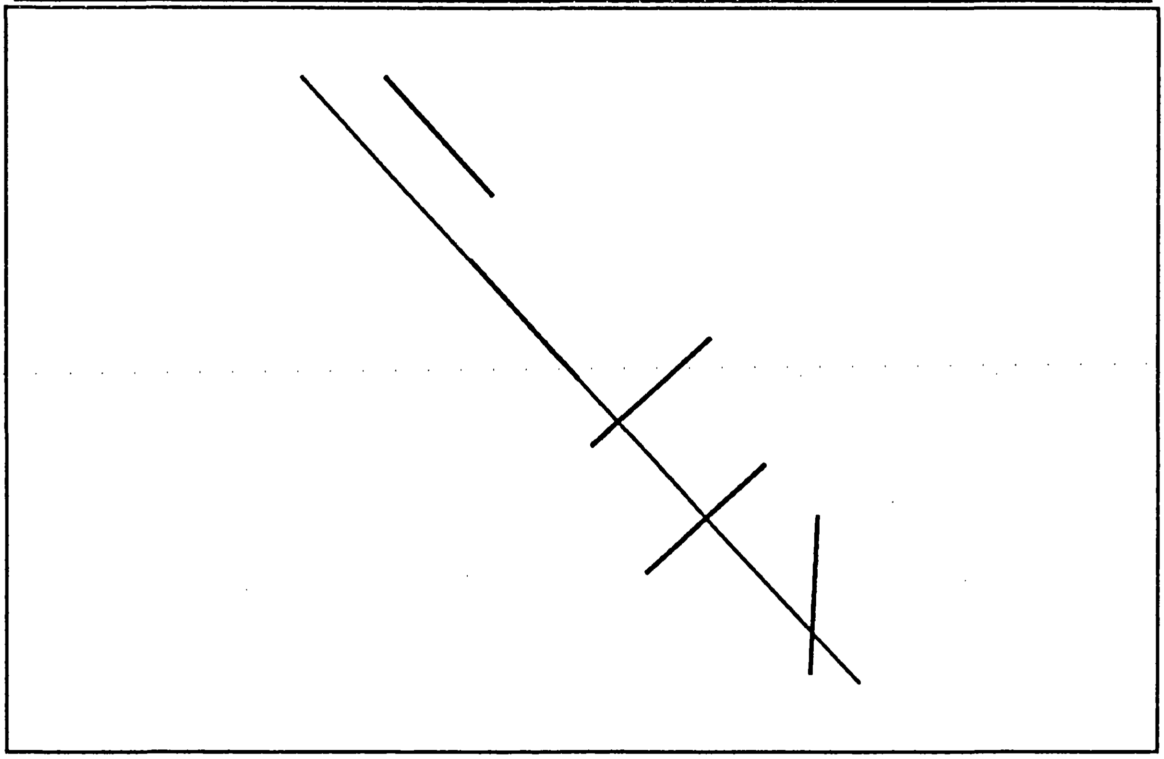


A6- Proporcionar a los estudiantes el enunciado de alguna propiedad relacionada con las simetrías y pedirles que la verifiquen y justifiquen si es cierta siempre, en algunos casos concretos o nunca. Por ejemplo:

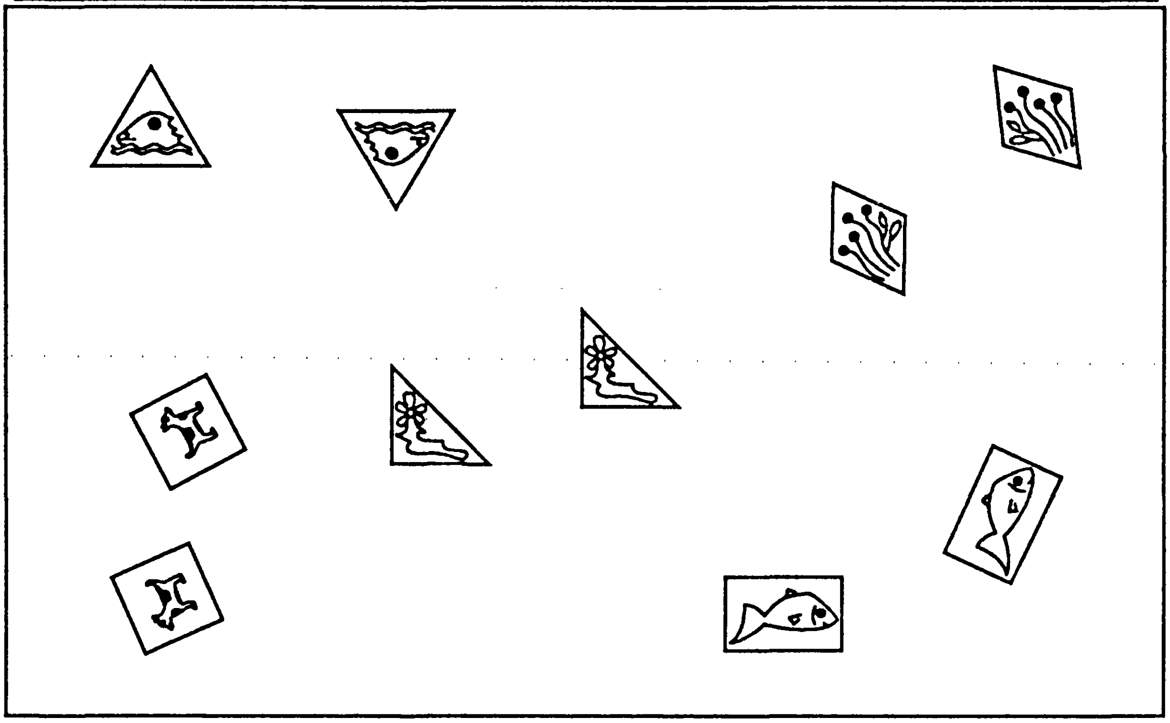
i) Sea R' la imagen de R por la simetría S_e y sea P un punto del eje *e*. a) ¿Qué tipo de triángulo, según sus lados y según sus ángulos, es ΔPRR'? b) Si se coloca P en otro lugar del eje de simetría, ¿será el triángulo ΔPRR' siempre del mismo tipo? c) Si se colocan R en otro lugar de la figura y R' en la posición correspondiente, ¿será el triángulo ΔPRR' siempre del mismo tipo?

ii) Si Q' es la imagen de Q por una simetría, entonces Q' ≠ Q.

A7- Dados varios segmentos y un eje de simetría, dibujar las imágenes de los segmentos por dicha simetría. Generalizar los resultados referentes a las posibles posiciones relativas de un segmento y su imagen.

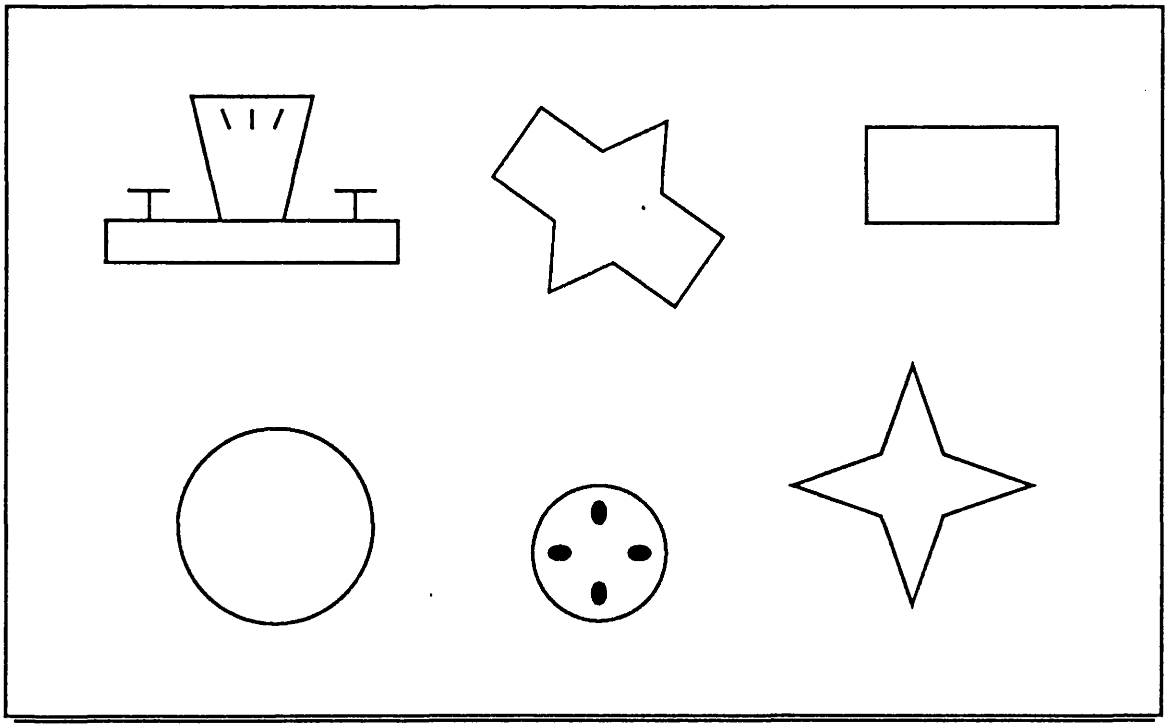


A8- Se dan varios pares de figuras congruentes. Determinar cuándo es posible pasar de una figura a la otra mediante una isometría simple (traslación, giro o simetría). Estudiar, en particular, los casos de pares de figuras con la misma o diferente orientación y aquellos pares en los que coinciden un punto y su homólogo, o en los que coinciden varios puntos y sus respectivos homólogos.

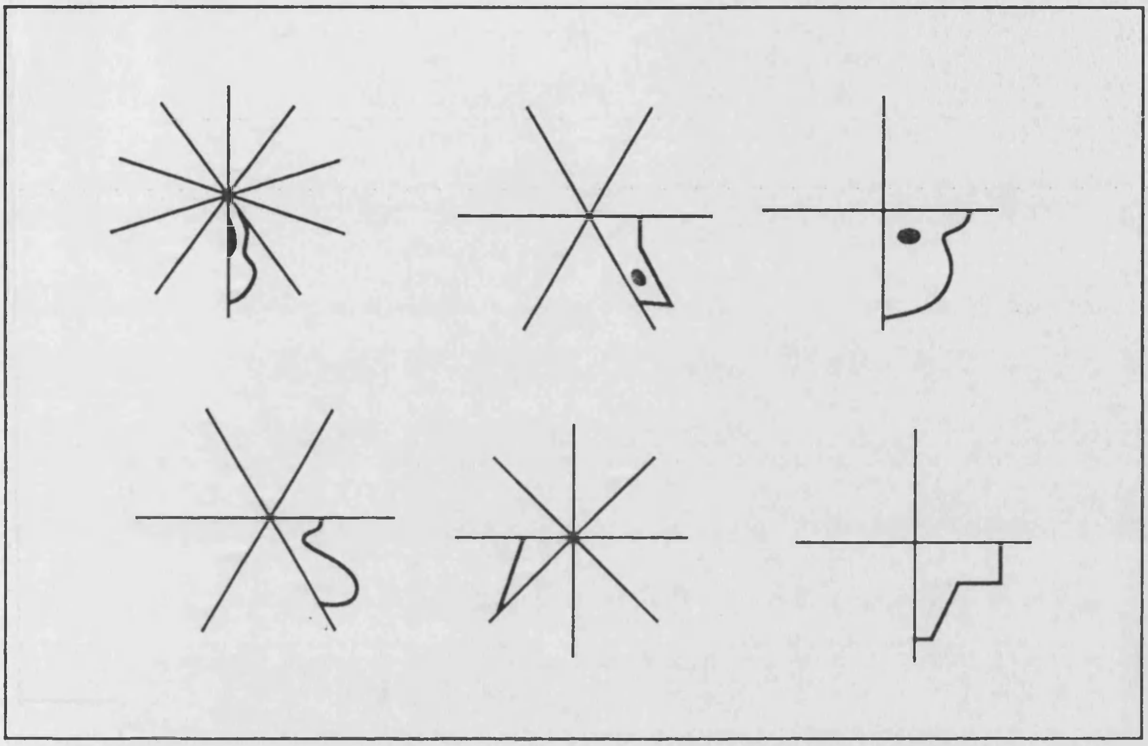


A9- Introducir el concepto de simetría en deslizamiento y mostrar varios ejemplos a los estudiantes. Dadas una figura y una simetría en deslizamiento, aplicar dicho movimiento a la figura.

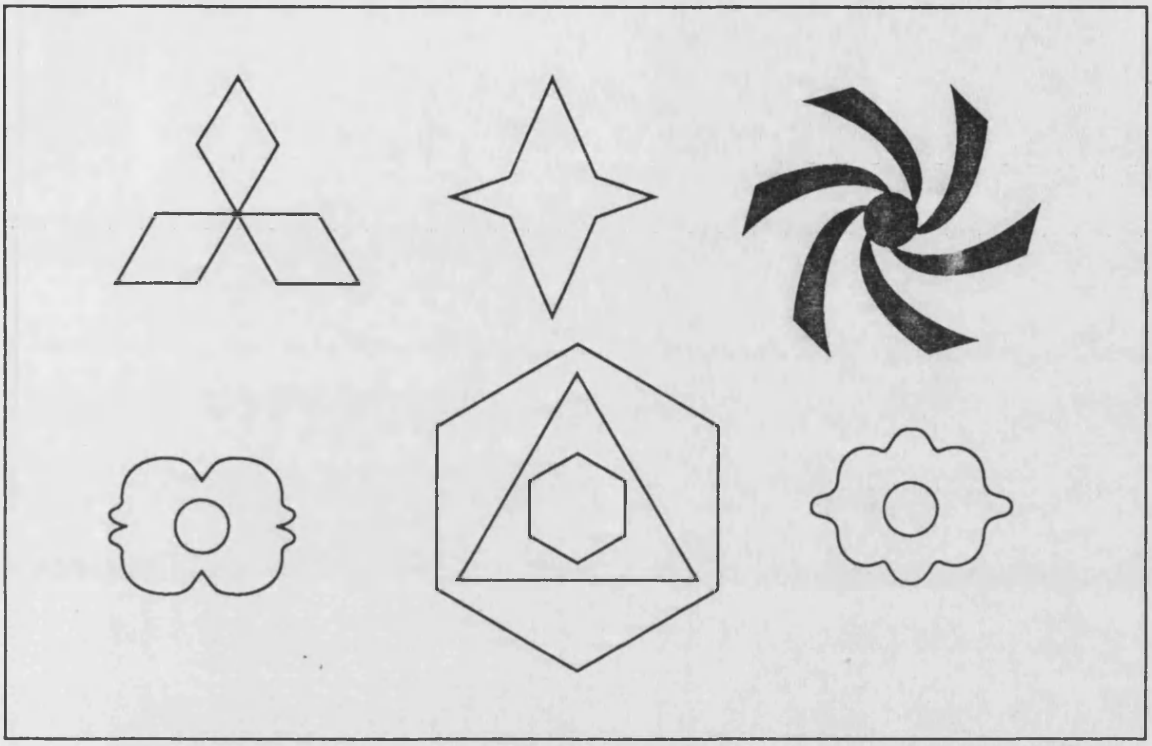
A10- Obtener todos los ejes de simetría de las figuras dadas.



A11- Presentar a los estudiantes varios rosetones generados por simetrías. Dados una parte de una figura y los ejes de simetría de dicha figura, dibujar la figura completa.



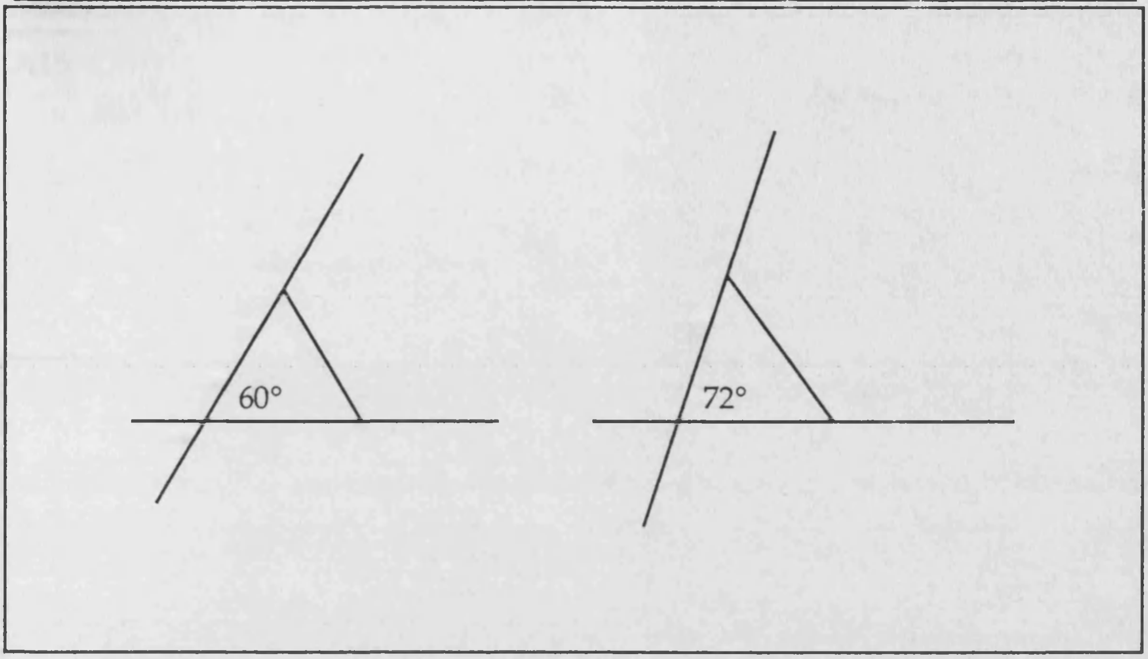
A12- Para cada figura, obtener el motivo mínimo que, mediante la aplicación de simetrías, permita la reproducción de la figura completa.



A13- Dibujar o construir figuras que tengan 1, 2, 3 ó 4 ejes de simetría. Explicar algún procedimiento para obtener figuras con más ejes de simetría.

A14- Averiguar si puede generar un rosetón mediante las simetrías que pasen por los dos lados del triángulo marcados en la lámina. Cuando sea posible generarlo, indicar la cantidad de celdas que tendrá el rosetón.

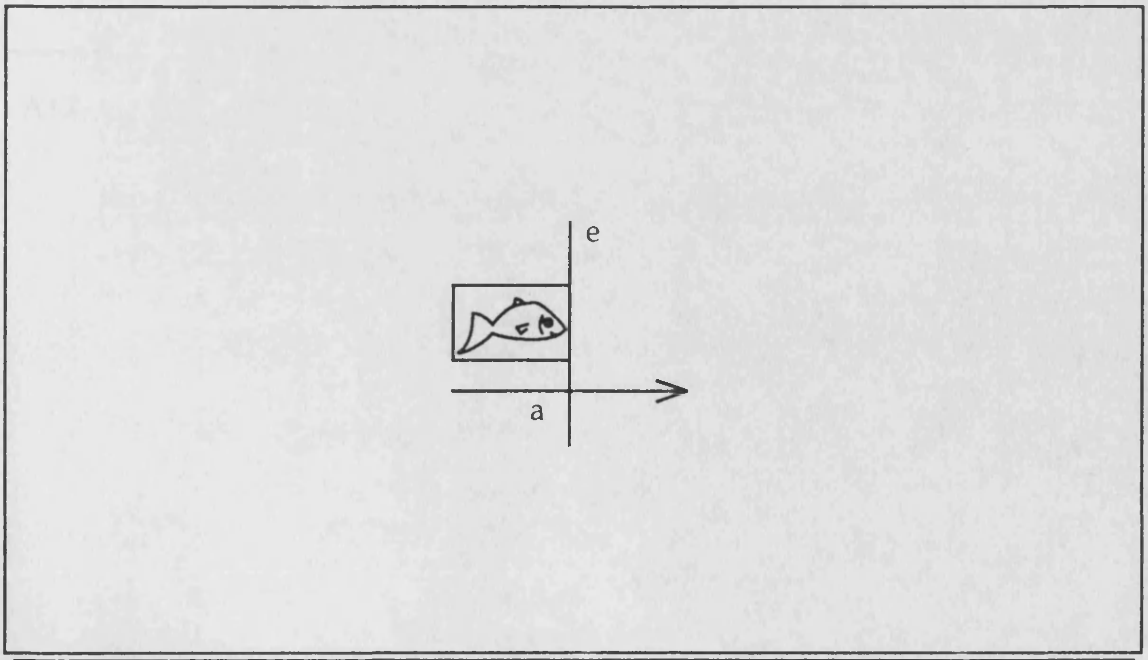
Determinar el ángulo que debe haber entre dos ejes de simetría consecutivos para que generen un rosetón formado por ... (indicar el número de celdas). Generalizar los resultados de esta actividad, referentes a la relación entre el número de celdas del rosetón y el valor del ángulo entre los ejes de simetría que lo generan. Indicar algunos casos en los que no sea posible construir un rosetón.



A15- Construir un friso a partir del rectángulo dado, tomando como sistema generador S_e y T_a. El lado mayor del rectángulo mide la mitad que el vector *a* (el rectángulo debe tener un dibujo no simétrico).

Después de construido el friso, fijar una celda y explicar dónde y cómo se situará la imagen de esa celda al aplicarle la simetría S_e.

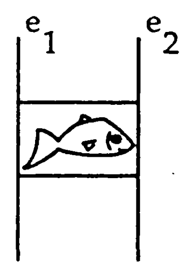
Fijar una celda y señalar las celdas desde las cuales alguno de los movimientos generadores permite llegar hasta ella.



A16- Construir un friso a partir del rectángulo dado, tomando como sistema generador S_1 y S_2 (el rectángulo debe tener un dibujo no simétrico).

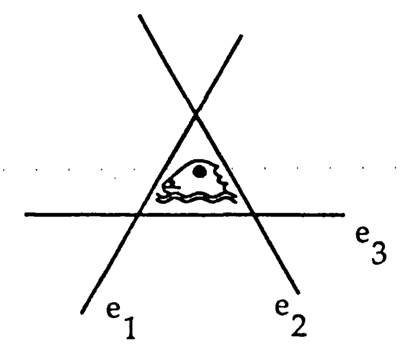
Después de construido el friso, fijar una celda y explicar dónde y cómo se situará la imagen de esa celda al aplicarle la simetría S_1.

Fijar una celda y señalar las celdas desde las cuales alguno de los movimientos generadores permite llegar hasta ella.



A17- Construir un mosaico a partir del triángulo (equilátero) dado, tomando como sistema generador S_1, S_2 y S_3 (el triángulo debe tener un dibujo no simétrico).

Determinar la cantidad de ejes de simetría necesarios y sus posiciones para generar un mosaico a partir de un rectángulo en vez de un triángulo.



-◊-◊-◊-◊-◊-◊-

En la actividad A6 de la fase 2 se introdujeron los procedimientos para la obtención del eje de simetría entre dos figura simétricas. En la actividad A1 de esta fase los estudiantes deben aplicar esos y otros conocimientos, primero para identificar los pares de figuras que se corresponden mediante una simetría, debiendo realizar las verificaciones y justificaciones oportunas, y después para encontrar los ejes de simetría de los pares que sí sean simétricos. Se incluyen casos en los que el eje corte a las figuras, situación que no se presentó en la actividad semejante de la fase 2 de este mismo nivel.

Las actividades A3 y A4 tienen como objetivo estudiar la composición de simetrías, para que los estudiantes descubran por sus propios medios el resultado de cada caso y la relación existente entre las simetrías que intervienen en la composición y el movimiento resultante. Estas van seguidas por la actividad A5, que plantea algunos problemas de aplicación de los resultados anteriores y que, en la práctica, se puede dividir en dos partes, una correspondiente a simetrías de ejes paralelos y la otra a simetrías de ejes que se cortan. Es necesario esperar a la fase 4 para plantear estas actividades porque, a diferencia de lo que ocurre con las traslaciones y los giros del mismo centro, para la realización de composiciones de simetrías y el análisis de los resultados, no sólo se necesita aplicar los conocimientos sobre simetrías adquiridos en la segunda fase, sino coordinar estos conocimientos con los referentes a traslaciones y giros.

En la experimentación de Magisterio propusimos estas actividades seguidas de algunas de aplicación directa del resultado para afianzarlo. La estudiante no tuvo ninguna dificultad en reconocer que, con los ejes paralelos, el resultado es una traslación, ni que su vector es perpendicular a los ejes de simetría. A continuación, al realizar las composiciones $S_1 \circ S_2$ y $S_2 \circ S_1$ con los mismos ejes y la misma figura, la estudiante, antes de empezar a calcular la segunda composición, dijo (actividad 21 de la experimentación) que esperaba que saliera *hacia el lado contrario, pero el vector será el mismo. Difiere en el sentido,* tras lo cual dedujo fácilmente la relación de los ejes de simetría con el módulo y sentido del vector de la traslación.

En el caso de los ejes que se cortan, la relación entre la figura inicial y la imagen final no es tan evidente, por lo que la estudiante de Magisterio, al principio, no la reconoció. Sin embargo, al preguntarle la profesora directamente por el movimiento que relacionaba dichas figuras, sí lo identificó como un giro. A continuación, al calcular el centro del giro y ver que coincidía con el punto de corte de los ejes, ya relacionó el giro con las simetrías. No obstante, la estudiante no observó la similitud entre el resultado que había obtenido en el caso de composición de simetrías con ejes paralelos y el que estaba obteniendo con simetrías cuyos ejes se cortan. Esto es una señal de que la estudiante todavía no razona en el nivel 3, si bien ya tiene una buena adquisición del nivel 2 pues, una vez obtenida la relación completa entre los ejes de simetría y el giro resultante de la composición, la estudiante sí fue capaz de relacionar los dos casos y resolver inmediata y correctamente actividades similares a otras realizadas antes con simetrías de ejes paralelos.

La forma de trabajar de esta alumna, al resolver las actividades de composición de simetrías durante las experimentaciones, es un ejemplo típico de los estudiantes de Magisterio, pues el comportamiento mayoritario de los estudiantes de grupos ordinarios de Magisterio que han trabajado con estas actividades, u otras similares, es análogo al de ella en cuanto a la forma de reaccionar, las respuestas típicas, las partes más fáciles o más difíciles, etc.

El descubrimiento y la verificación de propiedades matemáticas de cada isometría es un objetivo central del nivel 2 de razonamiento, por lo que en la segunda fase se guía a los estudiantes para que comprendan y aprendan las propiedades básicas y en la cuarta fase se les proponen actividades en las que, aplicando de modo directo los conocimientos obtenidos en la fase 2, deben descubrir otras propiedades importantes de los movimientos. En la actividad A6 hemos planteado dos de estas propiedades de las simetrías. Al igual que en los bloques de actividades de giros o traslaciones, estas propiedades hay que entenderlas sólo como ejemplos de lo que sugerimos a los profesores como contenido de esta actividad y pueden ser sustituidas o complementadas con otras propiedades.

La actividad A7 tiene una finalidad similar a la anterior. La experiencia que han adquirido anteriormente en el uso de las simetrías debe permitirles a los estudiantes resolver el problema planteado en dicha actividad, estudiando cuándo la imagen de un segmento es él mismo, cuándo se solapan parcialmente, cuándo son disjuntos, etc. En las experimentaciones de 3º de E.G.B. y de Magisterio se planteó una actividad análoga a la A7 (actividad 15 de la experimentación de 3º y actividad 11 de la experimentación de Magisterio).

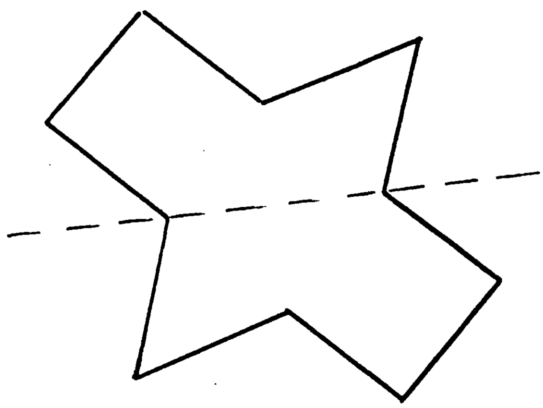
Los estudiantes de 3º la resolvieron correctamente, si bien sólo se les planteó simetrizar segmentos concretos. Ello nos sorprendió, ya que esta actividad resulta difícil para estudiantes que no comprenden bien el concepto de simetría, o que comienzan la adquisición del nivel 2. En las diversas experiencias que hemos realizado con grupos ordinarios de diversos cursos de los Ciclos Medio y Superior de E.G.B., numerosos estudiantes han cometido errores en esta actividad, siendo dichos errores muy sistemáticos y característicos de cada posición relativa de los segmentos y el eje de simetría (Jaime, Gutiérrez, 1989 b). En cuanto a la experimentación de Magisterio, sí se presentó una actividad análoga a la A7, incluyendo el planteamiento general antes de la solución de segmentos concretos. También nuestra alumna la resolvió, distinguiendo en el enfoque de la solución general, entre las situaciones de perpendicularidad, paralelismo y otra inclinación de los segmentos respecto del eje de simetría.

A la actividad A8 hay que darle un enfoque experimental: Los alumnos observarán que, en los casos que se les presentan, siempre hay un giro o una traslación entre las figuras no son inversas y que cuando las figuras son inversas no siempre existe una isometría simple que transforme una figura en la otra, tratándose de una simetría en caso de que sí haya. En la experimentación de Magisterio se observó la necesidad de incluir en la secuencia de enseñanza un actividad análoga a la A8 puesto que, desde el enfoque de razonamiento general que pretendíamos conseguir en el nivel 3, análogo al que ahora deseamos, se utilizaba directamente la propiedad desarrollada en esa actividad como base de muchas justificaciones.

La justificación informal de la propiedad anterior corresponde al nivel 3, donde se puede además ampliar a la situación de figuras inversas entre las cuales no hay una simetría axial, pero sí la composición de una simetría con cualquiera de las isometrías directas. En la unidad de enseñanza que proponemos, la existencia de traslación o giro entre figuras directas, está contemplada como objetivo en el tercer nivel de los giros, completándola ahora, en el apartado de las simetrías, para las figuras inversas. Sin embargo, si se desea plantear el hecho de que siempre hay una isometría simple que permite pasar de una figura a otra congruente, y/o trabajar con al estructura algebraica completa de las isometrías del plano, es necesario introducir previamente la **simetría en deslizamiento**. Por otra parte, dado que la propuesta que hacemos tiene como objetivo conseguir que los estudiantes adquieran una visión global completa de las isometrías cuando alcancen los niveles superiores de razonamiento, y en el mundo matemático la simetría en deslizamiento es básica, consideramos aconsejable su conocimiento y consideración como movimiento con entidad propia por los alumnos del tercer nivel y necesario por los estudiantes del cuarto nivel.

En la actividad A9 se introduce la simetría en deslizamiento. El trabajo que se hace en el nivel 2 sobre ese movimiento es solamente de introducción. Hemos elegido este momento para presentar la cuarta isometría del plano porque es ahora cuando los estudiantes acaban de iniciar la integración de todos los movimientos, sus relaciones y sus características comunes. En la experimentación de Magisterio se introdujo al final de la última sesión, por lo que la alumna poseía en ese momento un dominio de relaciones entre los movimientos superior al que normalmente tendrán los alumnos que sigan la secuencia que ahora proponemos en el momento en que se introduce la simetría en deslizamiento.

Una vez que los estudiantes saben discriminar si dos figuras son o no simétricas y obtener el eje de simetría de un par de figuras simétricas, la actividad A10 plantea encontrar los ejes de simetría de una figura, lo cual supone realizar un trabajo semejante al anterior pero en una situación nueva, motivo por el cual esta actividad es apropiada para la cuarta fase. La novedad principal radica en el hecho de que, en este caso, los estudiantes deben descomponer mentalmente la figura en una cantidad variable de formas. Es evidente que los estudiantes pueden resolver la actividad simplemente mediante la observación global de la figura, usando razonamiento de nivel 1, pero eligiendo adecuadamente la complejidad de las figuras y pidiendo a los estudiantes justificaciones más detalladas y precisas, se puede hacer que la resuelvan usando razonamiento de nivel 2. Por este motivo, en la secuencia que proponemos hemos incluido esta actividad en la cuarta fase del nivel 2.



En las experimentaciones realizadas utilizamos este tipo de actividad en 3º de E.G.B. y en Magisterio, surgiendo en cada curso razonamientos de diferentes niveles: En 3º de E.G.B., (actividad 13 de la experimentación) los estudiantes utilizaron razonamiento de nivel 1, pues su forma de resolver la actividad era dibujar los ejes de simetría que creían que tenía cada figura y comprobar después con el mira si sus respuestas eran correctas o no. Por el contrario, en Magisterio (actividad 13 de la experimentación), Merche dió otro tipo de justificaciones para sus respuestas, a pesar de que en algunos casos cometió los mismos errores que sus compañeros de 3º; por ejemplo, al decidir si la línea marcada en el dibujo es eje de simetría de la figura, la desechó *porque si lo fuera, este punto* [el vértice central superior] *iría aquí* [señala aproximadamente la posición de su imagen].

Incluir un círculo en esta actividad es muy interesante, pues sirve para darse cuenta de la concepción de infinito que tienen los estudiantes; esta concepción juega un papel importante en actividades en las que se realizan procesos iterativos, como la construcción de mosaicos, o hay infinitas soluciones, como la descomposición de una traslación o un giro en dos simetrías. Ante la pregunta de cuántos ejes de simetría tiene un círculo, los estudiantes de 3º de E.G.B. dieron respuestas diversas, como: *Muchísimos, Todos los que quieras,* o *Millones y millones y millones.* La estudiante de Magisterio contestó directamente: *Infinitos, todos los diámetros.*

Las experiencias que hemos realizado mostraron que, a diferencia de la actividad A10, la actividad A11 requiere que los estudiantes recurran a razonamiento de nivel 2, pues deben usar la perpendicularidad y la equidistancia al eje de simetría para dibujar la figura completa, mientras que un tratamiento solamente visual de la simetría no permite su realización, salvo que el profesor dirija muy estrechamente la actividad de los alumnos. En realidad, tanto la actividad A11 como las dos que le siguen, adquieren todo el sentido cuando se proponen después de que se haya estudiado la composición de simetrías de ejes no paralelos, pues estas actividades permiten contextualizar dicha operación y, por lo tanto, para los estudiantes de nivel 2 suponen una aplicación de propiedades ya conocidas a una situación distinta y nueva. De todas maneras, hasta el nivel 3 no se establecen de manera espontánea las relaciones implicadas.

El tipo de análisis que deben hacer los estudiantes para resolver la actividad A12 es análogo al de la A10, aunque el planteamiento no lo pone de manifiesto ya que centra la atención en la obtención de una parte de la figura y no en el dibujo de los ejes, por lo que los estudiantes no se suelen dar cuenta de la similitud entre ambas actividades hasta después de haber resuelto algunos ejercicios concretos. No obstante, como está actividad plantea la situación inversa de la actividad A11, los estudiantes que han entendido bien la actividad anterior pueden resolver ésta sin especial dificultad.

La actividad A13 también está relacionada estrechamente con las anteriores y refuerza los conocimientos adquiridos en la fase 2, al ser necesario usarlos en un planteamiento distinto. Esta actividad se planteó en la experimentación realizada en Magisterio (actividad 34 de la experimentación), y la solución dada por la estudiante, de nivel 2, se basó en la utilización de situaciones anteriores. La actividad planteada en la experimentación de Magisterio tuvo una segunda parte en la que se pidió a la estudiante construir figuras en las que los ejes de simetría fueran paralelos. La resolución de esta parte de la actividad condujo a una discusión, propia del nivel 3, sobre la justificación de que los ejes deben cortarse siempre. En primer lugar, Merche, tras pensar un poco, dibujó algunas figuras, intentando que tuvieran dos ejes de simetrías paralelos, pero esta experimentación le llevó a la conclusión de que no existe solución porque si en la figura hay dos ejes, el proceso de completar la figura no finaliza nunca (en realidad se genera un friso). Así pues, en este caso los ejemplos no han servido como "demostración" de la respuesta (el estilo de razonamiento del nivel 2 de Van Hiele), sino que han generado una justificación general que se sirve de los ejemplos como complemento para facilitar las explicaciones (el estilo de razonamiento del nivel 3). No obstante, este episodio de trabajo en el nivel 3 está aislado porque la estudiante no es capaz de establecer las relaciones completas entre este resultado y las propiedades de la composición simetrías y, por lo tanto, no entiende claramente la generalización formal al caso de una figura con tres ejes paralelos:

Prof.: *¿Va a ser posible con tres* [ejes de simetría paralelos] *o no?*
Merche: *No.*
Prof.: *¿Y el porqué lo tienes claro?*
Merche: *No. Con dos sí que lo he visto, pero con tres no. Pero será por la misma razón. La figura se quedará ... Al poner el tercero siempre le faltaría algo para que sea simétrica a la primera. Al poner ese algo sale uno ...* [no se entiende lo que dice] *y ése ya no es de toda la figura, sino de una parte.*

Este bloque de actividades termina con un grupo de ellas (A14 hasta A17) en las que se plantean la construcción y el análisis de rosetones, frisos y mosaicos. Se trata de actividades análogas a otras presentadas en los bloques de actividades de giros y traslaciones correspondientes a la misma fase de aprendizaje. En estas actividades los estudiantes deberán combinar todos sus conocimientos relativos a la composición de simetrías para aplicarlos a una variedad de situaciones diferentes. Excepto en la actividad A15, hemos planteado sólo situaciones en las que los sistemas generadores están formados únicamente por simetrías, pero es posible plantear otros cubrimientos, con sistemas generadores más complejos (evitando las simetrías en deslizamiento), para comprobar si los estudiantes han comprendido bien los tres movimientos y son capaces de relacionar las propiedades de unos y otros.

La primera vez que un estudiante trabaje con frisos o mosaicos, será necesario explicarle que, si utiliza una traslación o un giro, puede emplear también la traslación o el giro inversos y que las simetrías y los giros pueden tener su eje/centro sobre cualquiera de las baldosas que van apareciendo, pero siempre sobre el mismo lado/punto de la baldosa. En las actividades A15 y A16 hemos planteado varias partes para hacer ver a los estudiantes, cuando hayan construido algunos frisos o mosaicos a partir de las posiciones iniciales de las isometrías generadoras, que se obtiene el mismo resultado aunque se cambie la posición de los ejes de simetría a los lados homólogos de otras baldosas.

SIMETRÍAS: NIVEL 3

Objetivos:

Las actividades que planteamos para este nivel pretenden lograr los objetivos generales siguientes, que más adelante desglosaremos en las diferentes fases de aprendizaje:

1- Utilizar el movimiento resultante de la composición de varias simetrías. Comprender y utilizar la equivalencia de composiciones de simetrías. Comprender y saber utilizar la infinidad de soluciones equivalentes

2- Comprender y saber utilizar la infinidad de posibilidades equivalentes para la descomposición de de una traslación y de un giro en dos simetrías.

3- Simplificar composiciones de isometrías mediante la descomposición en simetrías de los movimientos integrantes del producto.

4- Descubrir, justificar y utilizar técnicas para pasar de una figura a otra mediante una composición de isometrías. Reconocer y justificar casos posibles e imposibles.

5- Obtener, utilizar y analizar la definición formal de simetría. Caracterizar las simetrías mediante conjuntos de condiciones necesarias y suficientes.

6- Demostrar informalmente, mediante razonamiento deductivo abstracto, propiedades de las simetrías descubiertas en este nivel o en los anteriores.

7- Comprender el planteamiento y desarrollo de algunas demostraciones formales relacionadas con las simetrías.

8- Realizar algunas implicaciones simples en una demostración y demostraciones de pocos pasos relacionadas con las simetrías.

9- Afianzar las características de la simetría en deslizamiento, su relación con las otras isometrías y su empleo adecuado.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

Ya hemos dicho, al comentar los objetivos generales del tercer nivel para las traslaciones y los giros, que en este nivel se debe conseguir una globalización de los conocimientos adquiridos previamente de las diferentes isometrías, por lo que es conveniente que los alumnos hayan estudiado simultáneamente traslaciones y giros, y que no sólo hayan superado el segundo nivel de razonamiento en las simetrías, sino también en esos otros movimientos. En realidad, la lectura de las actividades que proponemos en este bloque para alcanzar el tercer nivel de razonamiento en las simetrías, pone en evidencia que le resultará muy difícil, por no decir imposible, realizar correctamente dichas actividades a un alumno que no tenga esa base de conocimientos sobre traslaciones y giros.

Los tres primeros objetivos inciden en las relaciones básicas entre las tres isometrías simples: La composición de dos simetrías equivale a una traslación o un giro. Estas relaciones ya han sido descubiertas y aprendidas en las actividades del segundo nivel, por lo que en el tercer nivel se debe buscar la consolidación, profundización, integración, demostración y formalización de dichas relaciones, tanto en sentido directo (simetría $\Rightarrow$ traslación o giro) como en sentido inverso (traslación o giro $\Rightarrow$ simetría).

Así, el objetivo 1 plantea el tema de la infinidad de composiciones equivalentes de simetrías o, inversamente, la infinidad de descomposiciones equivalentes de una traslación o de un giro en producto de dos simetrías. El objetivo 2 dirige la atención a la demostración informal de dichas relaciones y el objetivo 3 plantea la necesidad de saber utilizar estas propiedades en diferentes contextos para completar su comprensión.

El cuarto objetivo es, en cierta forma, complementario del tercero, pues ambos hacen énfasis en la conveniencia de que los estudiantes aprendan a manejar conjuntos de isometrías en vez de isometrías aisladas, ya que de esa forma se podrán resolver diversos tipos de problemas que, en otro caso, no tendrían solución. En estos dos objetivos subyace el teorema fundamental de las isometrías, según el cual cualquier isometría se puede descomponer en un producto de, a lo más, tres simetrías. Con el objetivo 4 planteamos la utilidad de llevar al plano operativo este teorema, para conseguir que los estudiantes aprendan a razonar mediante la transformación ágil de unas isometrías en otras, según el interés de cada situación.

La comprensión de qué es una definición matemática y la capacidad para obtener definiciones son uno de los elementos que caracterizan el razonamiento del tercer nivel de Van Hiele. Así pues, cualquier unidad de enseñanza que pretenda promover la adquisición del tercer nivel de razonamiento por los estudiantes debe prestar atención a este tema. En nuestro caso, el objetivo 5 cubre esta componente. En él planteamos la conveniencia de trabajar en la comprensión de la definición usual de simetría axial, pero también la conveniencia de que los estudiantes analicen otros conjuntos de condiciones que puedan caracterizar este movimiento. Por ejemplo, ya que en el entorno que hemos creado para realizar las actividades que proponemos en esta memoria, la técnica más usual para calcular las imágenes de las figuras es mover puntos, es razonable que planteemos a los estudiantes la pregunta de cuántos puntos necesitan mover para tener plenamente identificada la imagen de cualquier figura por un determinado tipo de isometría. En el caso de las simetrías, esto lleva a la propiedad de que la simetría es el único movimiento tal que las mediatrices de tres puntos no alineados y sus correspondientes imágenes coinciden.

Los objetivos 6, 7 y 8 se orientan a procurar que los estudiantes desarrollen su capacidad de demostrar. Ello pasa por varias etapas. La primera es lograr que los estudiantes entiendan la insuficiencia de los ejemplos como forma de demostración (usada como válida en el segundo nivel de razonamiento). Otra etapa es el desarrollo de su habilidad para realizar demostraciones, que debe empezar enfrentando a los estudiantes con casos sencillos y cortos, de uno o pocos pasos, guiados por el profesor. La última etapa, que se debe cubrir con el paso del tercer al cuarto nivel de razonamiento, es la de formalización y abstracción, para lograr el rigor y la exactitud propios del razonamiento matemático formal.

Por último, el objetivo 9 tiene en cuenta el movimiento más complejo de las simetrías, que en este nivel se puede comprender por completo, ya que en el tercer nivel se desarrolla un conocimiento amplio sobre las composiciones y descomposiciones de movimientos, sus características y posibilidad de utilización, con lo cual, la composición de una traslación con una simetría con ciertas características (la simetría en deslizamiento) es tan sólo una situación particular entre las usuales en el trabajo del tercer nivel.

Los profesores deben tener presente que aprender a hacer demostraciones es un proceso largo y costoso, por lo que no deben pretender que, desde el principio, los estudiantes realicen las demostraciones por sí mismos, ni que las realicen de manera formal, sino que deben conformarse con justificaciones informales de carácter general, aunque probablemente basadas en ejemplos particulares. Un elemento importante es, por ejemplo, aprender a diferenciar las diversas partes de los enunciados de los teoremas y a distinguir las condiciones necesarias de las suficientes.

Fase 1 del Nivel 3

Objetivos:

En la presentación de las actividades de los niveles anteriores hemos explicado suficientemente cuál debe ser la finalidad de la fase 1 de cada nivel, por lo que no creemos necesario repetir esas consideraciones respecto de la fase 1 del tercer nivel. En este caso, tampoco proponemos ninguna actividad específica para dicha fase, si bien los profesores deben centrar su actividad en determinar el nivel de razonamiento de sus alumnos en relación con las simetrías y sus conocimientos sobre:

- Utilización de los instrumentos de dibujo para trazar mediatrices y perpendiculares.
- Manipulación y propiedades de las simetrías.
- Conocimiento de la simetría en deslizamiento.
- Las propiedades básicas de las traslaciones y los giros y de sus composiciones.

En relación con estos puntos, si los alumnos conocen el tema pero tienen alguna carencia concreta, es conveniente darles una instrucción específica adecuada antes de empezar a trabajar con las simetrías.

Fase 2 del Nivel 3

Objetivos:

1- Obtener y aplicar directamente el movimiento resultante de la composición de dos simetrías. Comprender y utilizar la equivalencia de todas las composiciones que producen el mismo resultado.

2- Descomponer una traslación o un giro en producto de dos simetrías. Comprender la infinidad de posibilidades.

3- Extender la relación directa entre las simetrías, los giros y las traslaciones a situaciones de composición y descomposición cualesquiera de estas isometrías. Emplear esas relaciones en composiciones de esos movimientos con la simetría en deslizamiento

4- Entender la definición formal de simetría, identificándola y utilizándola adecuadamente en situaciones concretas.

5- Justificar si ciertos conjuntos de condiciones determinan una simetría, tanto en casos concretos como abstractos.

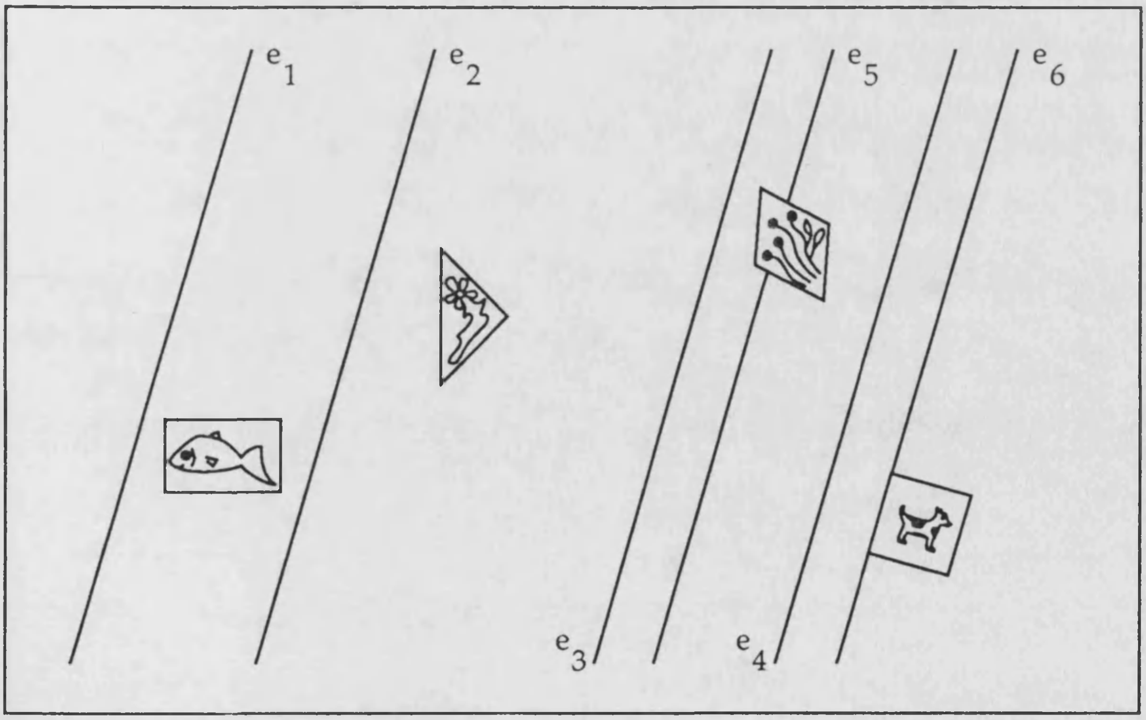
6- Comprender el desarrollo de algunas demostraciones, dirigidas por el profesor, y proporcionar la justificación de algunas implicaciones que formen parte de las mismas.

Actividades:

A1- Dados varios pares de simetrías de ejes paralelos, cuyas composiciones producen la misma traslación ($S_2 \circ S_1 = S_4 \circ S_3 = S_6 \circ S_5 = T_a$), y dadas varias figuras, aplicar directamente el movimiento resultante de cada composición a algunas figuras. Comprobar el resultado mediante la realización de las composiciones. Justificar la equivalencia de las composiciones.

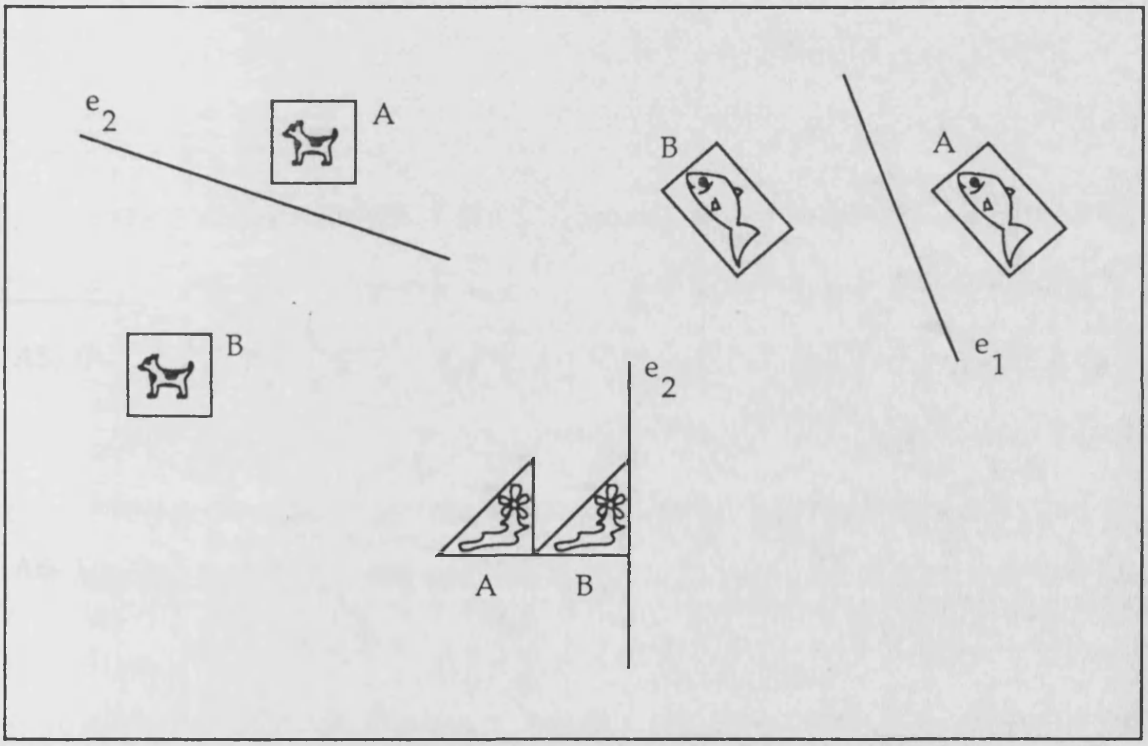
Dibujar otros pares de simetrías cuya composición sea equivalente a las anteriores. Justificar la equivalencia.

Dibujar otros pares de simetrías cuya composición no sea equivalente a las anteriores. Justificar la no equivalencia.



A2- Dadas una figura F y su imagen F' por una traslación, dibujar un par de ejes de simetría cuya composición transforme la figura F en la F'. Después dibujar otros pares de ejes de simetría que produzcan el mismo resultado. Discutir y justificar el número de soluciones posibles.

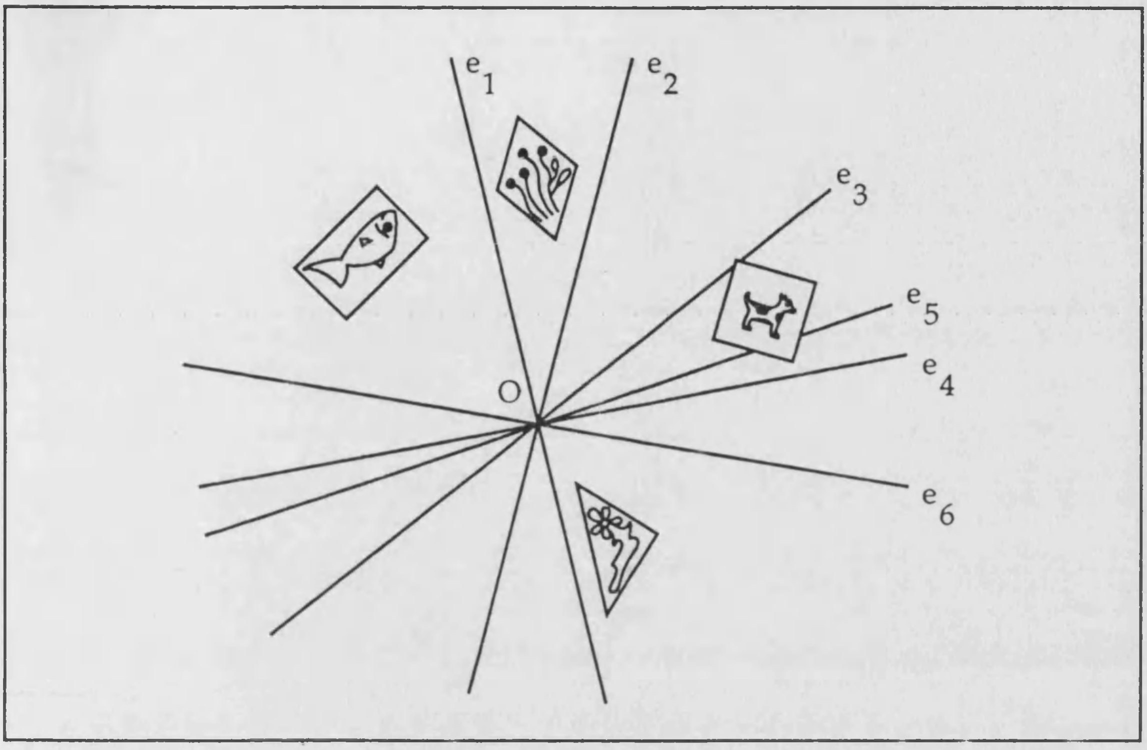
A3- Dadas una figura F y su imagen F' por una traslación, y dado un eje de simetría, dibujar otro eje de simetría tal que la composición de estas dos simetrías transforme la figura F en la F'. Discutir y justificar el número de soluciones posibles. (Los primeros ejercicios deben tener solución, pero también se deben plantear después otros sin solución).



A4- Dados varios pares de simetrías cuyos ejes se cortan, cuyas composiciones producen el mismo giro ($S_2 \circ S_1 = S_4 \circ S_3 = S_6 \circ S_5 = G(O,\alpha°)$), y dadas varias figuras, aplicar directamente el movimiento resultante de cada composición a algunas figuras. Comprobar el resultado mediante la realización de las composiciones. Justificar la equivalencia de las composiciones.

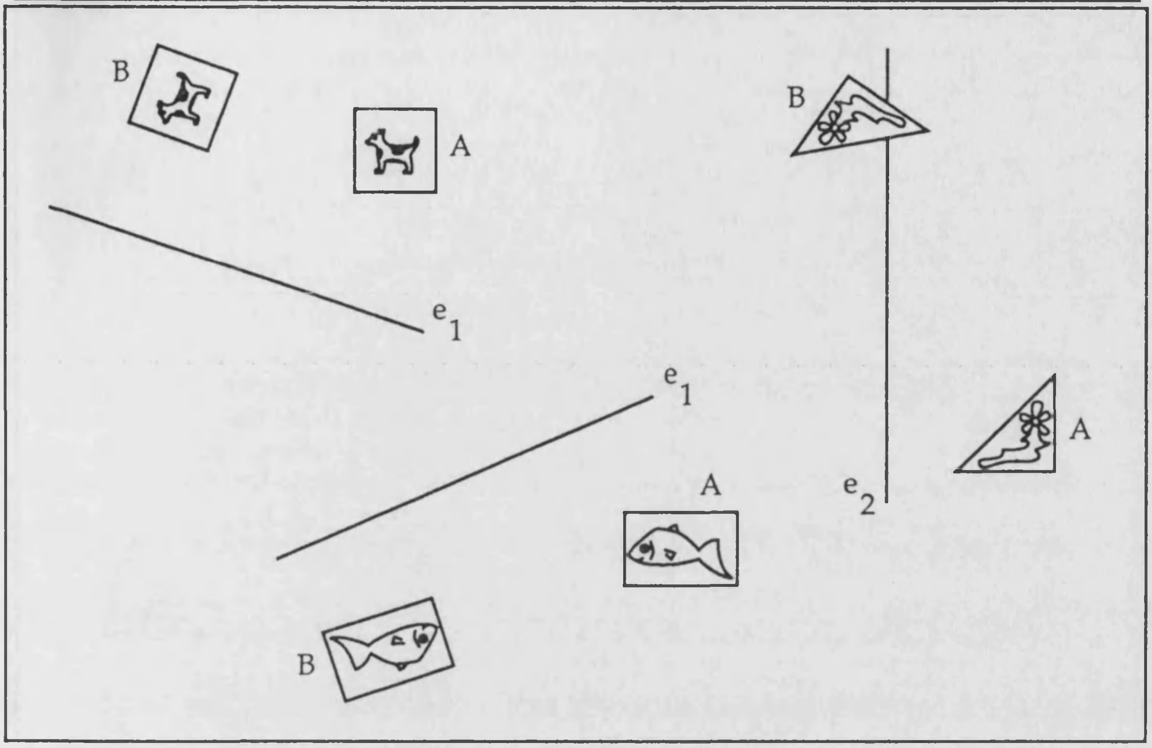
Dibujar otros pares de simetrías cuya composición sea equivalente a las anteriores. Justificar la equivalencia.

Dibujar otros pares de simetrías cuya composición no sea equivalente a las anteriores. Justificar la no equivalencia.



A5- Dadas una figura F y su imagen F' por un giro, dibujar un par de ejes de simetría cuya composición transforme la figura F en la F'. Después dibujar otros pares de ejes de simetría que produzcan el mismo resultado. Discutir y justificar el número de soluciones posibles.

A6- Dadas una figura F y su imagen F' por un giro, y dado un eje de simetría, dibujar otro eje de simetría tal que la composición de estas dos simetrías transforme la figura F en la F'. Discutir y justificar el número de soluciones posibles. (Los primeros ejercicios deben solución, pero también se deben proponer después otros sin solución).

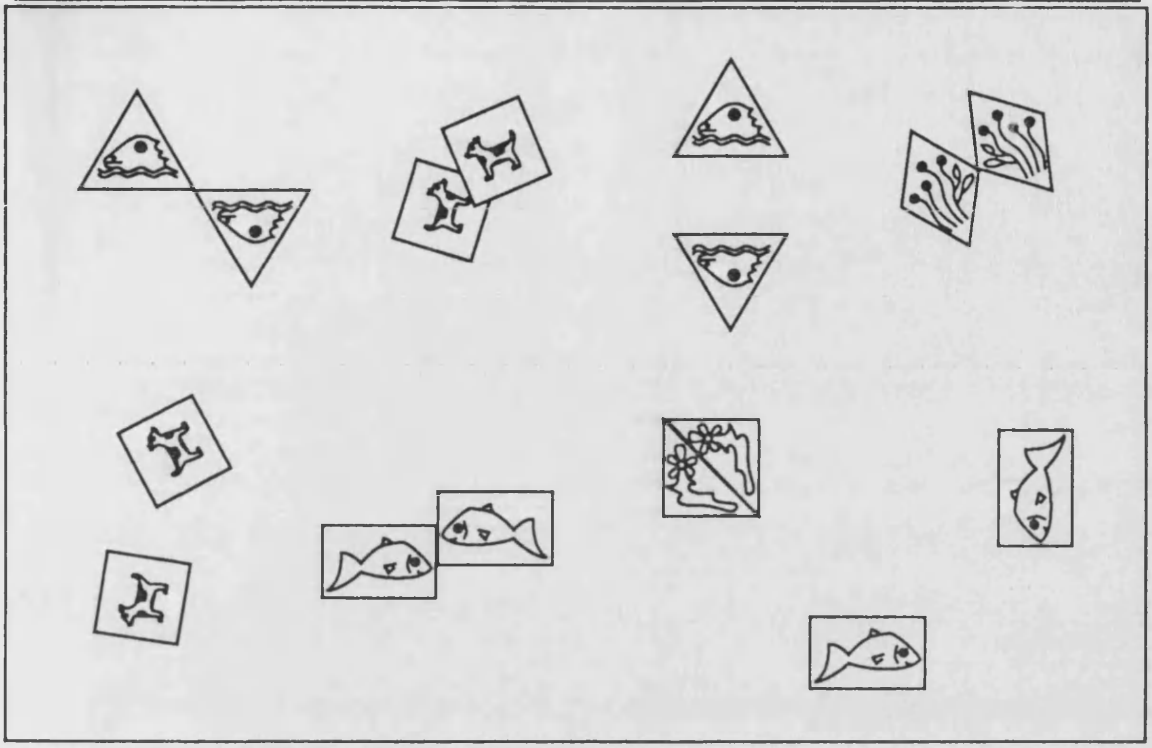


A7- Recordar la propiedad de que, dadas dos figuras congruentes de la misma orientación, siempre existe una traslación o un giro que permite pasar de una figura a la otra.

Estudiar el caso de dos figuras congruentes de orientación inversa: ¿Existe siempre una isometría simple (traslación, giro o simetría) que transforme una figura en la otra?

¿Qué sucede si las figuras están situadas de forma que coinciden un punto y su imagen? ¿Y si coinciden dos/tres/infinitos puntos y sus respectivas imágenes? ¿Y si las figuras no tienen ningún punto en común?

Enunciar unas conclusiones generales que resuman los resultados obtenidos en esta actividad.



A8- En la actividad anterior se ha visto que entre dos figuras iguales, pero inversas, no existe siempre una simetría axial. Utilizar los pares de aquella actividad en los que no hay simetría axial y otros pares en los que tampoco haya, con el fin de descubrir si, en esos casos, se puede pasar siempre de una figura a la otra mediante la composición de una traslación y una simetría. ¿Y mediante la composición de un giro y una simetría?

Generar técnicas generales de resolución en esos casos. En particular, para el caso de traslación y simetría, hacer coincidir un punto con su homólogo de la otra figura por la traslación.

A9- Analizar composiciones de isometrías. Para ello:

1) Indicar si la orientación de la imagen final será igual o inversa de la orientación de la figura inicial.

2) Determinar el mayor número posible de características del movimiento resultante de la composición.

3) Cuando sea posible, especificar cuál será la inclinación relativa de la imagen final respecto de la figura inicial.

Ejemplos de ejercicios de esta actividad:

Analizar las siguientes composiciones (los elementos que definen cada una de las isometrías se dan, o sea, en la lámina están dibujados los vectores de las traslaciones, los centros de los giros y los ejes de las simetrías):

$S_1 \circ S_2 \circ G(O,50°)$ (siendo los ejes de ambas simetrías paralelos / secantes con punto de corte en O / distinto de O).

$S_1 \circ S_2 \circ S_3$ (con ejes en posiciones diversas).

$S_1 \circ S_2 \circ T_a$; $S_1 \circ T_a \circ S_2$; $S_2 \circ S_1 \circ T_a$ (con simetrías de ejes paralelos / secantes).

$S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ S_4$ (con ejes en posiciones diversas).

$S(v,e_1) \circ T_{-v}$; $S(v,e_1) \circ S_2$, siendo e_1 y e_2 paralelos; etc.

A10- Identificar cierta composición de movimientos para pasar de una figura a otra: Dadas dos figuras congruentes, los tipos de isometrías y la cantidad de ellas que deben formar parte de una composición para pasar de una figura a la otra, identificar por completo dichas isometrías, proporcionando varias soluciones cuando sea posible o justificando cuándo no hay solución. Generar y explicar técnicas útiles no sólo para esta actividad concreta, sino también para todos los casos que correspondan a figuras a las que se les ha aplicado el mismo tipo de isometría que el propuesto.

Ejemplo de ejercicios de esta actividad:

Se dan dos figuras giradas. Hay que determinar las isometrías concretas que integran una composición que permita pasar de la primera figura a la segunda, siendo esas isometrías: Dos traslaciones; tres traslaciones; dos simetrías y una traslación; una simetría y dos traslaciones; dos giros; etc.

A11- Distinguir conjuntos suficientes de condiciones para caracterizar una isometría y aprender a seleccionar conjuntos mínimos de condiciones para determinar isometrías.

Ejemplos de ejercicios de esta actividad:

1) Se conoce la mediatriz del segmento que une un punto P y su imagen P' por cierta isometría. ¿Se puede saber de qué isometría se trata?

Si se sabe que esa isometría es una traslación, ¿se puede determinar dicha isometría? (otros casos: un giro, una simetría)

Se conocen las mediatrices de los segmentos que unen dos puntos y sus respectiva imágenes por cierta isometría. ¿Se puede saber de qué isometría se trata? ¿Qué relaciones debe haber entre estas mediatrices para que la isometría sea una traslación, o una simetría, o un giro? (otros casos: tres, cuatro puntos)

2) Si las mediatrices de dos (otros casos: tres, infinitos) segmentos con extremos en puntos y sus respectivas imágenes por una determinada isometría coinciden (otros casos: son paralelas, se cortan en un mismo punto), ¿se puede determinar el tipo de isometría de que se trata? ¿Se puede determinar por completo dicha isometría? ¿Hay que imponer alguna condición a los puntos y sus imágenes para que el tipo de isometría quede determinado por completo?

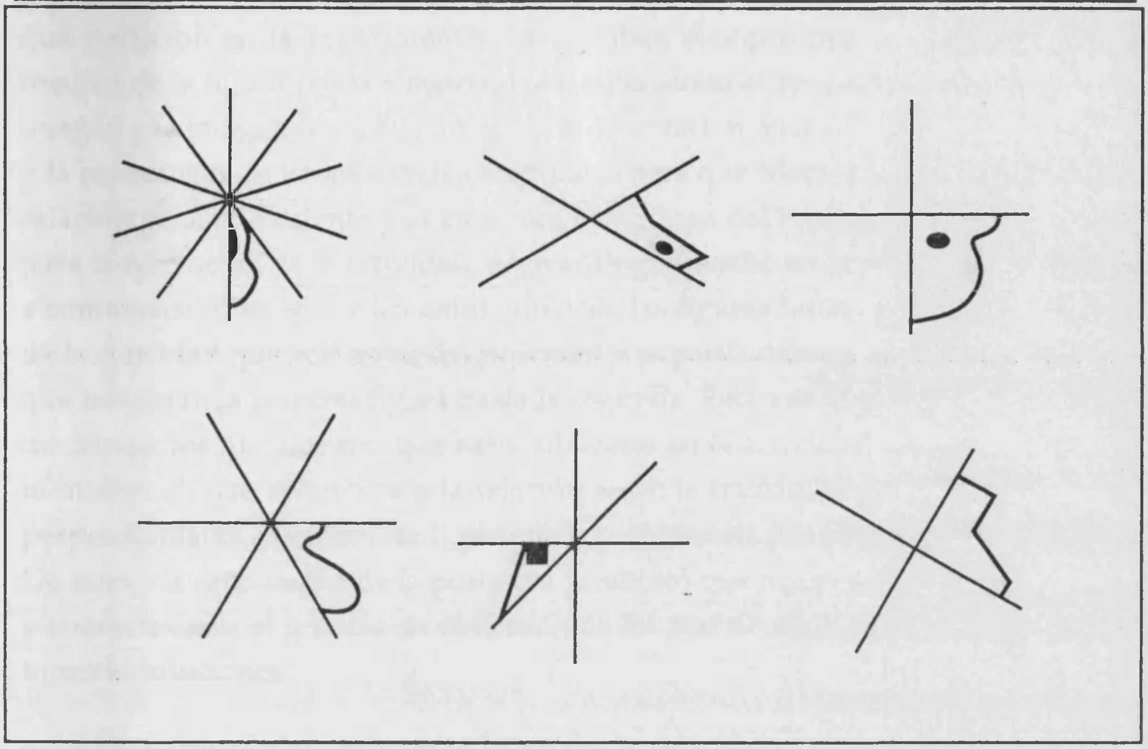
A12- Actividad de aplicación de las relaciones entre isometrías en diferentes contextos.

Ejemplos de ejercicios de esta actividad centrados en los cubrimientos del plano:

1) Dados varios ejes de simetría y un motivo, dibujar, cuando sea posible, una figura completa cuyos ejes de simetría sean exactamente los dibujados. Los alumnos han de identificar, antes de resolver manipulativamente el ejercicio, si hay solución y describir la figura que se obtendrá, justificando sus conclusiones haciendo referencia a las isometrías presentes.

2) Rosetones, frisos y mosaicos: Construir cubrimientos aplicando al motivo mínimo un sistema generador dado y justificar qué movimientos aparecerán en el cubrimiento. Basándose en las relaciones entre las isometrías del sistema generador, proporcionar otros sistemas generadores del mismo cubrimiento.

Realizar deformaciones en los lados de los motivos mínimos, según el sistema generador, y crear diseños propios.



-◊-◊-◊-◊-◊-◊-

El primer grupo de actividades propuestas (A1 a A6) desarrollan de manera directa las relaciones, descubiertas en las actividades del segundo nivel, entre la composición de dos simetrías cuyos ejes son paralelos y las traslaciones (actividades A1 a A3) o entre la composición de dos simetrías cuyos ejes se cortan y los giros (actividades A4 a A6).

La transformación de una composición en el movimiento equivalente es siempre más sencilla que la descomposición de una traslación o un giro en producto de dos simetrías, pues esto último requiere una comprensión e integración mayores de todos los elementos implicados en las relaciones que se consideran.

Esta afirmación la hemos comprobado tanto con diversos grupos normales de estudiantes de Magisterio con los que hemos trabajado este tema durante varios años, como en la experimentación llevada a cabo en Magisterio. En este último caso, las actividades dirigidas explícitamente a estudiar la descomposición en pares de simetrías se plantearon sólo para las traslaciones. En primer lugar planteamos una actividad en la que se daban una figura, su imagen y un eje de simetría y pedíamos dibujar el otro eje. Las soluciones de Merche (la estudiante que participó en la experimentación) pasaban siempre por la obtención de la imagen de la figura por la simetría dada, obteniendo el eje pedido a partir de esta imagen y la imagen final. Fue necesaria la orientación muy directa de la profesora y la realización de varios ejercicios similares para que Merche lograra entender la relación general existente y la empleara como base del razonamiento que realizó para la resolución de la actividad. Algo análogo sucedió en la actividad propuesta a continuación, en la que los datos eran sólo las figuras inicial y final (las mismas de la actividad que acabamos de comentar) y se pedía dibujar dos ejes de simetría que movieran la primera figura hasta la segunda. Esta vez Merche sólo fue capaz de dibujar los mismos ejes que había utilizado en la actividad anterior. En algún momento sí hizo referencia a la relación entre la traslación y las simetrías (ejes perpendiculares al vector, etc.), pero no supo aplicarla para resolver el problema. De nuevo la orientación de la profesora posibilitó que nuestra alumna progresara y comprendiera el proceso de obtención de los ejes de simetría y la existencia de infinitas soluciones.

Para consolidar las propiedades de la relación entre simetrías y giros o traslaciones, son muy adecuados los problemas en los que los estudiantes se enfrentan a casos sin solución, pues la justificación de la inexistencia de pares de ejes que cumplan las condiciones precisa una coordinación entre las características implicadas más cuidadosa que en los casos con solución, en los que basta con utilizar dichas características de manera secuencial.

En la experimentación de Magisterio tenemos un ejemplo de esta situación en la actividad 24: Dadas una figura, su imagen por una traslación y un eje de simetría no perpendicular al vector de traslación, Merche debía dibujar otro eje de simetría tal que, compuesto con el que se daba, transformara la figura inicial en la final. Merche indicó, correctamente, que no había solución, pero para ello realizó la simetría dada en el planteamiento de la actividad. Su justificación incluía el recitado de alguna propiedad, pero siguió meditando y, tras algún tiempo, comprendió el motivo: *¡Claro! No puede ser. Porque los ejes no eran perpendiculares a la unión de un punto con su imagen. Entonces éstos no pueden ser.*

En la secuencia de actividades que proponemos en esta memoria se han tenido en cuenta las observaciones anteriores, pues planteamos en primer lugar actividades (A1 y A4) para la aplicación directa de la composición de simetrías en una variedad de situaciones que producen el mismo resultado. Estas actividades deben facilitar la resolución, por parte de los estudiantes, de las actividades de descomposición, inversas de las anteriores propuestas a continuación. Las actividades A2 y A5 plantean la descomposición de una traslación o un giro, respectivamente, en producto de dos simetrías, con la diferencia respecto a las actividades anteriores de que ahora los alumnos no disponen de ninguna descomposición equivalente ya realizada para basarse en ella al resolver los casos propuestos. Finalmente, en las actividades A3 y A6 se plantean situaciones de descomposición en las que sólo hay que determinar uno de los dos ejes de simetría. Estas actividades sirven para afianzar las relaciones entre los movimientos correspondientes y para poner más de relieve la diferencia entre la infinitud y unicidad de soluciones, dependiendo de la cantidad de datos disponibles.

Con las actividades A7 y A8 se completa el estudio del teorema fundamental de las isometrías iniciado en el bloque de actividades del tercer nivel de la unidad de giros, prescindiendo de la simetría en deslizamiento. Este teorema es una de las bases en las que se debe fundamentar gran parte del razonamiento del tercer nivel que deberán realizar los estudiantes para resolver las actividades planteadas a continuación, utilizando la propiedad de la existencia o no de isometrías simples que permitan pasar de una figura a otra congruente. Este teorema se emplea, por ejemplo, para justificar la posibilidad o no de pasar de una figura a otra mediante determinada combinación de isometrías y para generar métodos de resolución de ese tipo de problemas, para asegurar la presencia de determinado tipo de isometría en algunas composiciones, etc.

Como señalamos en los comentarios de la fase 4 del nivel 2, en la experimentación llevada a cabo en Magisterio, la propiedad se enunció a partir de los resultados de actividades anteriores, pero no se insistió en ella, al menos de manera explícita, tanto como habría sido deseable para lograr que la estudiante centrara sus justificaciones de algunas de las actividades propias del tercer nivel de razonamiento, tales como las propuestas ahora en las actividades A9 a A12. En una de las últimas sesiones de la experimentación, la profesora planteó por separado las dos partes de la demostración formal de este teorema: El caso de dos figuras de la misma orientación y el caso de dos figuras de distinta orientación.

La actuación de la estudiante puede considerarse típica de las etapas intermedias de adquisición del tercer nivel de razonamiento, pues al principio, durante un tiempo, basaba sus respuestas y justificaciones en lo que veía en las láminas, en vez de en las propiedades de las figuras o las isometrías, evidenciando por lo tanto un razonamiento de segundo nivel. Posteriormente, ya volvió a trabajar basándose en propiedades matemáticas y en relaciones o deducciones a partir de dichas propiedades, es decir razonando en el tercer nivel. Esta forma de comportamiento, de cambio de nivel, se puede observar generalmente en los estudiantes en transición entre un nivel de razonamiento y el siguiente cuando se enfrentan a un problema difícil que no saben resolver.

En las actividades A9 y A10 se extiende la equivalencia de las composiciones de simetrías con traslaciones y giros a situaciones en las que no se presentan las isometrías de manera aislada, sino en el contexto de composiciones formadas, además, por otras isometrías. En estas actividades se plantean en primer lugar situaciones de composición (A9) y en segundo lugar de descomposición (A10). Pretendemos con estas actividades que los estudiantes basen la resolución de los problemas en el uso explícito de propiedades y relaciones matemáticas ya conocidas, tales como la propiedad objetivo de las actividades A7 y A8, y otras propiedades básicas de cada isometría estudiada en las unidades dedicadas a traslaciones y a giros, y en las actividades de simetrías del segundo nivel.

En la experimentación de Magisterio, se apreció cómo nuestra alumna progresaba en su dominio de las relaciones, si bien buena parte de los ejercicios que corresponderían a los propuestos actualmente en las actividades A9 y A10 fueron más limitados, pues no se le exigió la aplicación explícita de las propiedades a las que hemos hecho referencia en el párrafo anterior ni se incluyó la simetría en deslizamiento. La alumna progresó rápidamente, de resolver las situaciones paso a paso a seguir un razonamiento basado en las características de las isometrías concretas implicadas en la composición o descomposición, hasta llegar a la consideración de los tipos de isometrías con los que debía trabajar y de las relaciones generales existentes entre sos tipos de movimientos.

Las actividades que proponemos en esta memoria son más completas y permiten un progreso mejor en la adquisición del tercer nivel de razonamiento, ya que en ellas se exige de los estudiantes la reflexión sobre las propiedades que constituyen la base matemática del grupo de las isometrías del plano y, por lo tanto, del tipo de razonamiento del tercer nivel. Por otra parte, el progreso en ese modo de trabajo requiere una orientación del profesor (fase 2 del nivel) hasta su comprensión, debiendo ser después los estudiantes capaces de trabajar basándose principalmente en las relaciones matemáticas, con menor necesidad de soporte concreto (figuras o elementos de un movimiento determinado), en tareas de ese mismo estilo (ver las actividades A1 y A2 de la fase 4 de este tercer nivel de razonamiento).

Veamos un ejemplo del desarrollo de este tipo de actividades en la experimentación de Magisterio. La actividad (37ª) consiste en pasar de una figura a otra congruente de la misma orientación, que no es trasladada de la primera, mediante una composición de cuatro simetrías (en otras palabras, descomponer un giro en producto de cuatro simetrías). Un poco antes Merche había obtenido, para las mismas figuras, una descomposición en producto de una traslación y un giro. Merche relacionó ambos casos:

Merche: *Podrías aplicar dos que fueran una traslación y dos que fueran un giro.*
Prof.: *¿Y podrías aplicar dos que fueran un giro y dos que fueran un giro también?*
Merche: ... *El primer* [centro de giro] *me daría lo mismo* [dónde situarlo]. *Luego, respecto a ése, el otro punto de corte* [quiere decir que el segundo centro de giro lo obtendría a partir de las mediatrices entre puntos de la imagen de la figura inicial por el primer giro, y los puntos correspondientes de la figura final].

A lo largo de toda la experimentación, como ya hemos comentado en ocasiones anteriores, se apreció la necesidad de recordar y resumir con frecuencia los conocimientos y relaciones fundamentales estudiados hasta ese momento, cosa que en la experimentación de Magisterio, debido principalmente a la escasez de tiempo disponible, hicimos pocas veces. Esto provocó que, por ejemplo, cuando se estaban realizando actividades de la fase 2, la alumna no recordara en algún momento las relaciones entre dos giros de distinto centro y el movimiento resultante de su composición.

Una de las características del tercer nivel de razonamiento es la capacidad para entender el concepto matemático de definición y, por lo tanto, para identificar conjuntos mínimos de condiciones suficientes que determinen algún concepto. Pero este trabajo requiere, al principio, la orientación del profesor y por ello hay que empezar a desarrollarlo en la segunda fase.

En la experimentación de Magisterio propusimos una actividad análoga a la A11 (actividad 16 de la experimentación), aunque menos completa que los ejemplos que proponemos ahora. El planteamiento de la actividad se centró, en primer lugar, en la coincidencia de las mediatrices entre dos puntos y sus respectivas imágenes como condición suficiente para caracterizar una simetría. El proceso seguido por Merche se puede ver al final de los comentarios que hemos hecho para la fase 2 del nivel 2.

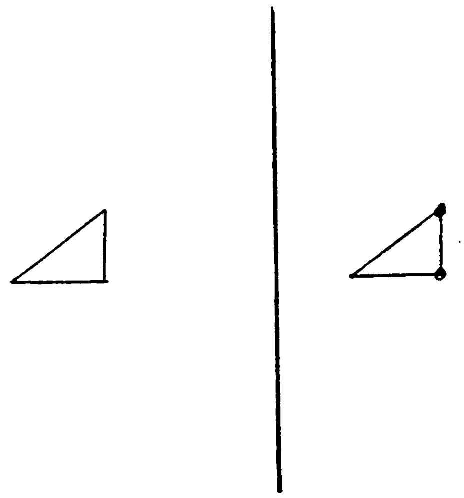
Prof.: *Tienes una figura y trazas la mediatriz de un punto y su imagen y te sale una recta y ésa es la perpendicular en el punto medio. Coges otro punto y su imagen y trazas su mediatriz, y es la misma. ¿Entonces estás segura de que el movimiento ha sido una simetría o no?*

Merche dibujó un contraejemplo correcto (ver dibujo 1) y mencionó los dos puntos que hemos marcado en el dibujo 1.

Prof.: *Muy bien. O sea, que no sirve si dos puntos y sus imágenes tienen la misma mediatriz. ¿Y si infinitos puntos y sus imágenes tienen la misma mediatriz?*

Merche contestó varias veces que entonces es seguro que sí se trata de una simetría.

Prof.: *¿Cuántos puntos hay ahí* [en el dibujo del contraejemplo] *que tengan la misma mediatriz?*



Dibujo 1.

Merche: *Infinitos.*

La profesora y Merche se rieron ante la contradicción que suponían las dos últimas respuestas de Merche.

Prof.: *¿Entonces qué pasa? ¿Podrías dar algunas condiciones de puntos y mediatrices que aseguraran que el movimiento que has hecho ha sido una simetría?*

Merche: *Mirando los vértices.*

Prof.: *¿Cuántos vértices tienes que mirar? ¿O cómo?*

Merche: *4 ó 5.*

La profesora amplió el par de triángulos que antes había dibujado Merche, para dar el contraejemplo que mostramos en el dibujo 2 (página siguiente).

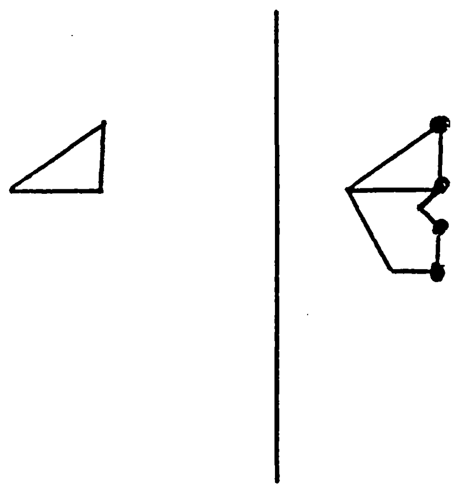
Prof.: *Si dibujo esta figura y su trasladada y cojo estos cuatro vértices* [los que hemos marcado en el dibujo 2], *sus mediatrices serían la misma.*

Merche: *Cogeríamos 4 que no estén en la misma línea.*

Prof.: *Cuatro que no estén en línea recta. ¿Por qué serviría entonces?*

Merche: *Porque así ya son perpendiculares y las mediatrices coinciden. Ya tiene que ser simétrico.*

Prof.: *¿Cuántos te hacen falta exactamente? Ahora que estás afinando la condición, ¿con cuántos sería suficiente probar y cómo tendrías que elegir los puntos ésos?*



Dibujo 2.

Merche: *Tres y que fueran opuestos.*

Prof.: *¿Opuestos qué quiere decir?*

Merche: *Vértices opuestos son éste y éste* [señalando los dos vértices marcados en el dibujo 3].

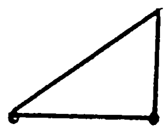
Prof.: *¿Y si no hay vértice enfrente justo?*

Merche: *Un punto que tú sitúas en la figura, que está enfrente.*

Prof.: *¿Cómo?*

Merche: *Enfrente.*

A continuación la profesora enunció correctamente la propiedad aludida:



Dibujo 3.

Prof.: *Tres puntos no alineados. Con 3 puntos no alineados ya estás segura de que si al trazar las mediatrices siempre es la misma, las figuras van a ser simétricas.*

Así pues, vemos cómo el trabajo sobre estas y otras actividades y la dirección de la profesora hizo que la estudiante descubriera varias de las propiedades que permiten asegurar que dos figuras son simétricas. La profesora no planteó la cuestión de la necesidad ya que en estos problemas es evidente.

Una secuencia de actividades como la anterior plantea a los estudiantes la caracterización de las diferentes isometrías estudiadas en términos de condiciones suficientes y si, como proponemos en la secuencia descrita en esta memoria se trabaja al mismo tiempo en la eliminación de características redundantes, se completan las componentes básicas de la comprensión de las definiciones matemáticas.

La actividad A12, que completa el bloque de actividades de la fase 2, pretende hacer uso de todas las relaciones y propiedades que se han estudiado hasta ahora de las diferentes isometrías en situaciones cuyo planteamiento no se limite a la ejecución de un movimiento, a aplicar directamente alguna propiedad, o a analizar determinados puntos, rectas o figuras.

Hemos recurrido a los ejemplos de diseño y análisis de cubrimientos, en el primer lugar, porque es muy rico en variedad de situaciones y grados de dificultad, lo cual permite hacer un análisis completo de las relaciones si se fomenta la discusión sobre la existencia o no de solución, la cantidad de repeticiones, los tipos de isometrías y su determinación, etc. Además, algunas experimentaciones que hemos realizado con grupos de alumnos y profesores de diversos niveles educativos han mostrado que este tipo de problemas resulta atractivo para los estudiantes.

Respecto a la construcción y análisis de mosaicos, en la experimentación de Magisterio se trabajó sólo un poco al final de la experimentación, introduciendo la idea de sistema generador, pero únicamente se empleó el formado por dos traslaciones y, como celda, un rectángulo. En la propuesta de unidad de enseñanza que presentamos en esta memoria pretendemos que haya un empleo más amplio de las posibilidades de los cubrimientos del plano, de manera que el trabajo con cubrimientos esté presente en los bloques de actividades de los distintos movimientos y que se retome en los diversos niveles de razonamiento, mediante una organización del trabajo en espiral, típica de la enseñanza basada en el modelo de Van Hiele.

Fase 4 del Nivel 3

Objetivos:

1- Utilización de la idea de conjunto de condiciones necesarias y suficientes para caracterizar una isometría.

2- Predecir la mayor cantidad posible de características de la isometría equivalente a la composición de varias isometrías y de la imagen final por dicha composición de una figura dada.

3- Simplificar composiciones de isometrías. Descomponer isometrías en productos de otras isometrías.

4- Descubrir, aprender, utilizar y justificar técnicas para pasar de una figura a otra mediante una composición de isometrías. Reconocer y justificar casos posibles e imposibles.

5- Comprender el planteamiento y desarrollo de demostraciones formales sencillas.

6- Adaptar demostraciones que se hayan presentado anteriormente, cuando la variación de planteamiento y desarrollo es pequeña.

7- Completar demostraciones realizando algunas implicaciones simples omitidas.

Actividades:

A1- Realizar las simplificaciones posibles en las composiciones que se presentan. Especificar el mayor número posible de características de la isometría resultante. En los casos en que sea posible, realizar las simplificaciones de diversas formas. (No dar ninguna figura ni fijar isometrías concretas, sino sólo el tipo de isometría y ciertas relaciones entre sus características).

Ejemplos de ejercicios de esta actividad:

1) Simplificar $S_1 \circ S_2 \circ T_a \circ T_b$, siendo los ejes e_1 y e_2 paralelos (otros casos: que se cortan; coincidentes) y los vectores a y b de igual módulo y dirección, pero sentidos opuestos.

2) Simplificar $S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ T_a$, siendo: i) e_1 y e_2 perpendiculares a e_3. ii) Los tres ejes se cortan en un punto. iii) Los tres ejes son paralelos. iv) $S_1 = S_2$ y paralelo a S_3. v) $S_1 = S_3$ y paralelo a S_2. ...

3) Simplificar las composiciones: $G(O,\alpha°) \circ T_v$; $G(O,\alpha°) \circ S_1 \circ G(R,\beta°) \circ S_2$; $G(O,\alpha°) \circ S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ G(O,\beta°)$.

A2- Descomponer una isometría en un producto de isometrías, del cual se conocen los tipos de isometrías que lo integran, la cantidad de cada tipo, el orden de operación y algunas relaciones entre dichas isometrías. Los alumnos se deben basar en relaciones generales y proporcionar, cuando sea posible, varias soluciones (Nota: No todos los casos deben tener solución).

Ejemplos de ejercicios de esta actividad:

1) Descomponer una simetría en un producto de: i) Tres simetrías. ii) Dos simetrías y dos giros de distinto centro. iii) Una traslación y una simetría. iv) Una simetría. ...

2) Descomponer un giro en el producto de: i) Un giro de 90° y una traslación. ii) Un giro y dos simetrías. iii) Una simetría y un giro. ...

A3- Relacionar composiciones de isometrías.

Ejemplos de ejercicios de esta actividad:

Transformar una simetría en deslizamiento en i) Un giro y una simetría. ii) Un giro de 180° y una simetría.

Descomponer el producto de un giro de 90° y una traslación en: i) Un giro y dos simetrías. ii) Una simetría y un giro. ...

A4- Aplicación de relaciones entre las isometrías que forman parte de una composición.

Ejemplos de ejercicios de esta actividad:

Dado un rosetón, friso o mosaico, obtener un sistema generador suyo.

A5- Introducción a las demostraciones formales mediante teoremas relativos a la composición y descomposición de isometrías.

Ejemplos de ejercicios de esta actividad:

1) Demostrar que la composición de giros de distinto centro $G(R,60°) \circ G(O,90°)$ equivale al giro $G(S,150°)$. Para ello descomponer cada uno de los giros en dos simetrías: $G(O,90°) = S_2 \circ S_1$, $G(R,60°) = S_4 \circ S_3$, pero de tal forma que $S_2 = S_3$.

Repetir la demostración con otros pares de giros variando los valores de los ángulos, pero de forma que su suma no sea múltiplo de 360°.

Demostrar la propiedad general: $G(O,\beta°) \circ G(P,\alpha°) = G(Q,\alpha°+\beta°)$ siempre que $\alpha°+\beta° \neq \dot{3}60°$.

2) Repetir el proceso de 1) para demostrar que $G(O,\beta°) \circ G(P,\alpha°) = T_a$ siempre que $\alpha°+\beta° = \dot{3}60°$.

3) Repetir el proceso de 1) para demostrar que $T_a \circ G(O,\alpha°) = G(P,\alpha°)$.

4) Demostrar que la simetría S_e se puede descomponer en producto de otra simetría y del giro $G(O,60°)$ (Se da una lámina con el eje e y, sobre esa recta, el centro O del giro). Repetir la demostración con el giro $G(P,180°)$ (el punto P pertenece al eje e).

¿Se puede descomponer cualquier simetría como producto de otra simetría y un giro de cualquier amplitud dada?

A6- Realizar demostraciones formales poco complejas basadas en la igualdad de las imágenes de un punto por varias isometrías.

Ejemplo de ejercicios de esta actividad:

Dada la simetría en deslizamiento $D = T_a \circ S_e$, ¿qué relación tiene con la composición $S_e \circ T_a$? Demostrar la respuesta.

A7- Proporcionar a los estudiantes una demostración formal poco compleja para que la analicen y la repitan en una situación idéntica y en casos con pequeñas modificaciones, o bien para que los estudiantes realicen por sí mismos alguna de las implicaciones de la demostración.

Ejemplo de ejercicios de esta actividad:

Proporcionar la demostración de que la composición de dos simetrías de ejes paralelos (que se cortan) es una traslación (un giro) con determinadas características, basada en el análisis de la relación entre un punto y su imagen por la composición.

Una variación en la demostración presentada puede consistir en que los estudiantes la repitan basándose en un esquema gráfico en el que el punto del que se obtiene la imagen esté situado en una posición distinta respecto a los ejes. Por ejemplo, con los ejes paralelos, situar dicho punto entre los dos ejes si en la demostración primitiva se encontraba a la derecha o izquierda de ambos. O, con los ejes no paralelos, situarlo más o menos cerca del punto de corte.

-◊-◊-◊-◊-◊-◊-

Las dos primeras actividades son análogas, en cuanto a los contenidos, a otras realizadas en la fase 2 de este nivel. En la segunda fase, con el apoyo de figuras e isometrías concretas y bajo la dirección del profesor, los alumnos aprendieron a establecer y utilizar las relaciones entre las diversas isometrías, mediante problemas de composición y descomposición de isometrías. Ahora, en la fase 4, el planteamiento de los problemas es más abstracto, ya que se establecen las relaciones generales entre las características de los diversos tipos de movimientos, sin plantearlas con isometrías concretas, determinadas sobre una lámina. Respecto al grado de abstracción de estas actividades, dado que se está trabajando en el tercer nivel, los estudiantes se pueden servir de dibujos concretos para conjeturar sobre los resultados o la forma de demostrarlos y recurrir a calcular las imágenes de puntos en actividades en las que ello pueda ayudarles a abordar de manera efectiva las situaciones planteadas. Pongamos, por ejemplo, el caso de la descomposición de una simetría en producto de un giro y una simetría. En la línea de la justificación informal que fomentamos en el tercer nivel de razonamiento, una solución adecuada es la siguiente:

Pensemos en una figura A y su imagen, B por una simetría S_e (el razonamiento se produce sin la concreción de dibujos). Ambas figuras han de ser inversas entre sí. Lo que se pide es pasar de A a B mediante la composición de un giro y una simetría. Para ello, a A le aplico una simetría, S_2, distinta a S_e. La imagen de A por esa simetría, A', ya no será inversa respecto a B y, por lo tanto, seguro que existe una traslación o un giro que transforme A' en B. Como lo que se pide es un giro, si por casualidad A' y B fueran trasladadas entre sí, entonces modificaría un poco la inclinación del eje e_2, con lo que A' saldría girada respecto a B. El centro del giro, O, se obtiene mediante el corte de mediatrices (de puntos de A' y sus correspondientes de B; el ángulo α del giro se determina midiendo el ángulo POP', siendo P un punto de A' y P' el punto homólogo en B. Así, $S_e = G(O,\alpha)\circ S_2$.

Ante una sugerencia por parte del profesor sobre la posibilidad de utilizar sólo puntos en la demostración anterior y no figuras completas, el estudiante debería rehacer el razonamiento, con las modificaciones pertinentes.

Lo que, evidentemente, no es admisible en el tercer nivel de razonamiento es el uso de los ejemplos como evidencia última que demuestre la veracidad de una afirmación. Que un estudiante intente esta forma de "demostración" significa que su progreso en la adquisición del tercer nivel de razonamiento es insuficiente y que todavía sigue entendiendo las demostraciones según los parámetros del segundo nivel.

En la experimentación de Magisterio se pudo constatar que la realización de diversas actividades basadas en isometrías concretas le proporcionó a nuestra alumna una comprensión de las relaciones entre las isometrías suficiente para lograr el grado de abstracción requerido para las actividades A1 y A2 de la fase 4. No obstante, le propusimos pocos problemas de este estilo y en algunos de ellos nuestra alumna tuvo intervenciones incorrectas, no por imposibilidad de razonar en el nivel que se requería en los problemas propuestos, sino porque, como hemos comentado en otras ocasiones, los estudiantes recurren a un nivel de razonamiento inferior cuando el problema planteado les resulta difícil o, en otras ocasiones, sufren el olvido de algunas propiedades importantes que deben utilizar en ese momento.

Veamos algunos ejemplos en los que se resumen las diferentes formas de actuación mencionadas. La profesora le había propuesto a Merche una serie de ejercicios de simplificación de composiciones de isometrías (actividad 44). Veamos, en primer lugar, la influencia de dos fallos de memoria:

Prof.: *En una composición de dos giros y dos simetrías, ¿hay algunas condiciones con las cuales el resultado final sea una traslación?*

Merche [seguramente intentó recordar y dió una relación incorrecta]: *No porque giro y simetría es giro.*

La profesora le preguntó sobre la orientación de las figuras original y final según la composición de giro con simetría y por la aplicación de un giro (inversas en el primer caso, pero no en el segundo); así Merche se dió cuenta de su error. Después Merche razonó a partir de la escritura algebraica de la composición, G∘G∘S∘S:

Prof.: *¿Y puede ser una traslación?*

Merche: *A ver. Sería o bien tres giros, $G \circ G \circ G$, o bien dos giros y una traslación $G \circ G \circ T$. Dos giros no pueden ser una traslación. Y tres giros tampoco.*

Prof.: *¿No?*

Merche: *Si lo que ha girado es lo mismo y tiene la misma inclinación que la figura original sí que sería.*

Prof.: *¿Y qué tendría que pasar?*

Merche: *Que los tres* [ángulos] *sumaran 360 ó 0.*

Prof.: *Entonces, ¿puede darse o no puede darse?*

Merche: *Sí. En dos casos: Cuando dieran 0 los ángulos entre ellos ó 360.*

En el ejercicio siguiente Merche relacionó correctamente los movimientos que formaban la composición que debía simplificar:

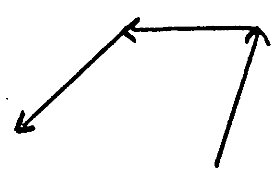
Prof.: *¿Un giro y dos simetrías pueden dar una traslación?*

Merche: *Si se cortan* [los ejes de simetría] *dan un giro.* [En este caso tendría] *giro y giro. Si los dos suman 360 ó 0 sí. Si son paralelos* [los ejes de las simetrías], *sería traslación. Tendría giro y traslación, que no* [no puede ser].

Sin embargo, en el ejercicio siguiente se produjo un retroceso en el nivel de razonamiento de la estudiante, bastante alejado de su forma usual de trabajo hasta ese momento. En concreto, el error consistió en pensar que se puede originar un cambio de inclinación de una figura moviéndola mediante una composición de traslaciones cuyos vectores tienen distintas inclinaciones:

Prof.: *Si compones tres traslaciones, ¿puede salir un giro?*

Merche: *Sí, porque los vectores pueden hacer que la figura cambie de inclinación* [Merche había trazado los vectores del dibujo].



Prof.: *¿Los vectores pueden hacer que la figura cambie de inclinación? ¿Entonces tres traslaciones sí pueden dar un giro?*

Merche: *Sí ... Va a ocurrir cuando tengan distinta dirección, porque entonces la dirección cambiará y será un giro. Si tuvieran la misma, sería una traslación junta.*

Este error no fue momentáneo, sino que lo mantuvo durante cierto tiempo, pues necesitó realizar la composición en dos casos distintos para cambiar de respuesta. Es decir, que nuestra alumna pasó a utilizar razonamiento del segundo nivel para convencerse convencerse de que la composición de traslaciones no cambiaba la inclinación de las figuras. Posteriormente, cuando se convenció de ello, ya reaccionó normalmente.

La actividad A3 es una combinación de las dos actividades anteriores, pues se deben realizar simultáneamente simplificaciones y descomposiciones, en la que se amplía la cantidad de relaciones entre movimientos a tener en cuenta, por lo que consolida más el razonamiento del tercer nivel.

En la experimentación de Magisterio esta actividad cumplió su papel correctamente, pues la estudiante supo resolverla adecuadamente, usando el método de trabajo y el tipo de razonamiento apropiados para esta fase del tercer nivel de Van Hiele. En la experimentación sólo se planteó un ejercicio de este tipo (actividad 44):

Prof.: *Si tienes una simetría y una traslación, ¿puedes dar siempre una simetría y un giro cuya composición sea equivalente a la anterior?*

Merche propuso descomponer la traslación en producto de dos simetrías y proporcionó una solución correcta, en la cual se sirvió de la descomposición de un giro en dos simetrías. Además, Merche dió correctamente las características que deben cumplir los ejes para que el resultado sea el pedido:

Merche: *Como el giro son dos* [simetrías de *ejes que se cortan, tendrá que cortarse uno que sea paralelo* [se refiere a uno de los ejes de las simetrías en que se descompone la traslación] *y el otro que tienes* [el de la composición inicial S∘T].

Hay actividades, como la A4, cuyo objetivo no es estudiar directamente alguna propiedad o técnica de trabajo con las isometrías, sino que tienen como objetivo el uso de dichas propiedades o técnicas en otros contextos. Este trabajo de aplicación de los conocimientos es una de las características de la fase 4 de enseñanza y es necesario para alcanzar el razonamiento del nivel correspondiente. En este caso, al situarnos en el contexto de la construcción y análisis de los cubrimientos del plano, se aplica todo lo estudiado antes sobre composiciones y descomposiciones, selección de conjuntos mínimos y realización de demostraciones.

Los ejercicios propuestos como ejemplo de la actividad A4 continúan el trabajo de actividades propuestas en la fase 2 y de otras actividades de los niveles segundo y tercero de los distintos movimientos. Resolverlos ahora requiere identificar los movimientos que se aprecian visualmente en el cubrimiento y, teniendo en cuenta las relaciones entre ellos, identificar los otros movimientos que pueda haber en el cubrimiento y extraer un conjunto mínimo de isometrías que lo generen. Este tipo de actividad, planteada dentro de la fase 4 del tercer nivel de razonamiento, no se experimentó en Magisterio, pero consideramos acertado el empleo de esa aplicación artística a lo largo de la secuencia de enseñanza. El análisis que deben efectuar los estudiantes para resolver la actividad requiere del tercer nivel de razonamiento, siendo una tarea adecuada para que los alumnos investiguen por sí mismos y apliquen la base proporcionada por los ejercicios llevados a cabo en la fase 2 de este nivel.

El afianzamiento de la necesidad de demostrar rigurosamente las afirmaciones o respuestas y la introducción de las demostraciones formales son dos de los principales objetivos de las actividades del tercer nivel de razonamiento, finalidad a la cual se dedican de manera explícita las tres últimas actividades de este bloque (A5, A6 y A7), como conclusión de las actividades del tercer nivel y preparación para el cuarto nivel. En las actividades A5 y A6 los estudiantes son los encargados de realizar las demostraciones, que son lo suficientemente simples como para que su trabajo se pueda completar aplicando directamente propiedades y relaciones conocidas. En la actividad A7 se les presenta a los estudiantes una demostración completa, con la finalidad de que la comprendan y la repitan con alguna modificación debida al cambio de alguna condición secundaria, como puede ser la organización de la figura en la que se basen los estudiantes para hacer la nueva demostración.

Desde la perspectiva con la cual se ha enfocado la secuencia de enseñanza que proponemos en esta memoria, el razonamiento que se fomenta en el tercer nivel se basa en las definiciones y propiedades básicas de cada isometría, las relaciones de descomposición y composición de movimientos y en algunas otras propiedades. En la actividad A5, las demostraciones formales propuestas siguen esta línea. En esta actividad se hace una introducción a las demostraciones formales mediante el planteamiento, en primer lugar, de casos particulares, basados en isometrías concretas pero cuya forma de demostración es idéntica a la del caso general. Al mismo tiempo, el profesor debe proporcionar algunas indicaciones a los estudiantes para que puedan superar los puntos clave. Tal es, por ejemplo, en la primera demostración propuesta en A5, la idea de descomponer cada uno de los dos giros en producto de dos simetrías de manera que ambas descomposiciones tengan una simetría en común que permita simplificar la descomposición. La parte importante de la actividad es lograr que los estudiantes sepan utilizar esta idea en otras demostraciones, incluso cuando se trata de descomposiciones de isometrías distintas de los giros. También hay que tener en cuenta la destreza algebraica de los alumnos y su conocimiento de las propiedades geométricas que puedan estar implicadas en el desarrollo de las demostraciones. Hay que tener en cuenta, no obstante, que, en el tercer nivel de razonamiento los estudiantes se limitan a adaptar demostraciones a situaciones similares, siendo en el cuarto nivel cuando las transferencias de los métodos de demostración a situaciones distintas son más amplias.

Pero el desarrollo de la capacidad de razonamiento formal se basa también en otro tipo de estrategias, en el cual la idea fundamental es que dos isometrías (o composiciones) son equivalentes si ambas producen la misma imagen para cada punto del plano. Por ello proponemos una actividad, la A6, dedicada a ese tipo de formulación.

En la experimentación de Magisterio, propusimos algunos problemas iguales o parecidos a los incluidos en las actividades que estamos comentando (A5 a A7). Se puede comprobar que nuestra alumna sí pudo realizar los pasos de las demostraciones, aunque no tenía desarrollado por completo el sentido de cuándo una demostración era general o sólo un caso particular. Respecto a ello hay que insistir en la escasez de tiempo para la experimentación, que impidió afianzar adecuadamente los diversos pasos que ahora se proponen para alcanzar el nivel correspondiente de razonamiento. Hay que tener también en cuenta que el proceso de familiarización y adquisición de destreza en la realización de demostraciones lógico-deductivas (no necesariamente formales según los estándares de las Matemáticas) puede ser largo, por lo que en una experimentación de laboratorio como la realizada es difícil conseguir plenamente este objetivo.

En la experimentación de Magisterio planteamos, en la actividad 32 de la experimentación, la actividad A5, mediante la composición $G(R,60°) \circ G(O,90°)$. La profesora le presentó a la estudiante, por escrito, la expresión algebraica $G(R,60°)\circ G(O,90°) = S_4\circ S_3\circ S_2\circ S_1$ y en una lámina en la que estaban dibujados los centros de giro O y R, Merche debía dibujar los ejes de las simetrías de manera que $S_2 = S_3$.

Merche realizó rápidamente y de manera correcta la descomposición de cada giro en dos simetrías, explicando la infinidad de posibilidades existentes. La profesora le pidió que hiciera $S_2 = S_3$ y, también rápidamente, Merche situó bien los ejes, explicándolo:

Merche: *Que pase un eje por los dos centros. Porque un eje siempre tiene que pasar por el centro y, si tiene que servir para los dos giros ...* [deberá pasar por los dos centros].

Al pedirle que simplificara la expresión, Merche eliminó las dos simetrías centrales, por ser la misma. Respecto al valor del ángulo resultante, lo midió con transportador. Cuando la profesora le dijo a Merche que la finalidad de este ejercicio era llegar a una demostración general de que la composición de giros de distinto centro es un giro, se produjo el diálogo siguiente:

Merche: *¿Pero siempre se pueden quitar dos ejes?*
Prof.: *Yo simplemente te he preguntado: ¿Puedes dar siempre las simetrías de manera que una sea igual a la otra? ¿Eso lo puedes hacer siempre o no?*
Merche: *Si no te dan ninguna* [simetría], *sí.*

A continuación la profesora le propuso un ejercicio análogo, con la composición $G(S,40°)\circ G(O,80°)$, que Merche hizo bien sin ayuda.

Posteriormente, la profesora le pidió una demostración general y Merche construyó un diagrama de descomposición en simetrías análogo a los anteriores, colocando letras en los ángulos correspondientes y escribiendo unas ecuaciones algebraicas correctas, pero con las que se desorientó. La profesora intervino para centrar la atención de Merche en los ángulos apropiados, tras lo cual ésta consiguió llegar al resultado requerido (actividad 32):

Prof.: *¿Para hacerlo en general, ¿cómo lo harías?*
Merche: *Donde se corten los dos ejes sería otro punto* [diferente de O y S] *y el ángulo de giro sería* $\alpha + \beta$.

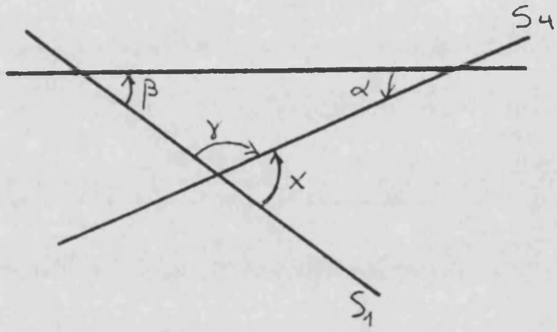
Hay que hacer notar que la profesora no había mencionado los ángulos en términos generales. La profesora le pidió la demostración general, a lo que Merche, que tenía delante el dibujo del ejercicio anterior, contestó:

Merche: *Puede ser fijándote en los ángulos de este triángulo.* α *puede ser este ángulo y* β *éste.* [además, Merche marcó con γ el tercer ángulo del triángulo y escribió]:

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 180^\circ$$

$$\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$$

Después de un rato, la profesora intervino, para hacer referencia al sentido de los ángulos y a las dos posibilidades que producen giros equivalentes. Después, le sugirió a Merche que calculara x, ángulo exterior, a partir de $\alpha + \beta$ (ver dibujo). Merche escribió las siguientes ecuaciones, intentando despejar x:



Merche: $\frac{x}{2} = 180 - \frac{\gamma}{2}$

$$\gamma = 180 - x$$

$\alpha + \beta + 180 - x = 180$ [simplifica 180 y despeja x]

$$x = \alpha + \beta$$

Obsérvese que los dos errores cometidos al quitar denominadores se compensaron en la simplificación posterior, por lo que, a pesar de ellos, la igualdad final fue correcta.

Este fragmento de la experimentación que acabamos de mostrar es un ejemplo en el que se ve la necesidad de proporcionar la información adecuada para que los estudiantes puedan superar las partes de la demostración que sean más complejas. Además, es necesario organizar la secuencia de actividades de manera que los alumnos entiendan el paso de la demostración particular a la general. También es un ejemplo en el que se puede apreciar la diferencia entre un razonamiento abstracto informal (basado, generalmente en deducciones intuitivas o poco rigurosas, propio del tercer nivel de Van Hiele) y uno abstracto formal (propio del cuarto nivel). En ocasiones, el razonamiento informal se refleja en el hecho de que los estudiantes formalizan algunas partes de la demostración que son más simples, desde el punto de vista de la abstracción o complejidad de las deducciones involucradas, y resuelven por procedimientos experimentales (observando, midiendo, etc.) las partes que son más complejas.

Por ejemplo, cuando Merche estaba demostrando el resultado de la composición de dos giros de distinto centro con ángulos concretos, que acabamos de describir en los párrafos anteriores, representaba algebraicamente las descomposiciones de los giros en simetrías y las justificaba de manera abstracta, pero medía con un transportador el ángulo formado por los ejes de simetría para determinar el ángulo del giro resultante, porque la deducción abstracta del valor de este ángulo le resultaba difícil, como quedó plenamente demostrado al pedirle la demostración general.

CAPÍTULO 3: INTERPRETACIÓN DE LA CONTINUIDAD DE LOS NIVELES DE VAN HIELE Y DESCRIPCIÓN DE UN MÉTODO DE EVALUACIÓN

CAPÍTULO 3: INTERPRETACIÓN DE LA CONTINUIDAD DE LOS NIVELES DE VAN HIELE Y DESCRIPCIÓN DE UN MÉTODO DE EVALUACIÓN

Este tercer capítulo de la memoria está dedicado a reflexionar sobre una de las características centrales del Modelo de Van Hiele: La forma como se produce el paso desde un nivel de razonamiento al siguiente. En primer lugar, planteamos el problema, que se centra en la necesidad de describir el proceso de adquisición de un nuevo nivel de razonamiento por los estudiantes. Para ello, hacemos una revisión de la información obtenida a partir de varias investigaciones destacadas y enunciamos nuestra postura al respecto. A continuación, proponemos una solución, que se basa en varios puntos:

- Planteamiento de una interpretación de la continuidad, que se traduce en un proceso de adquisición gradual de los niveles de razonamiento por los estudiantes.

- Descripción de una metodología de trabajo para evaluar el grado de adquisición de los niveles de Van Hiele por los estudiantes. Esa metodología no se basa en un tipo específico de test o prueba.

- Presentación de un ejemplo de aplicación de los conceptos y métodos de los dos puntos anteriores, consistente en un estudio longitudinal de estudiantes españoles de los cursos 6º de E.G.B. a C.O.U. (con edades entre 11 y 18 años). En las últimas secciones de este capítulo describimos dicho estudio y comentamos y analizamos sus resultados.

3.1. Interés y motivos de la investigación.

Como se desprende de los comentarios y la revisión bibliográfica hechos en el capítulo 1 y que completamos en la sección 3.2, la continuidad (adquisición gradual) o discretitud (salto brusco) en el paso de un nivel de Van Hiele al siguiente ha sido una de las propiedades objeto de investigación desde los primeros trabajos sobre este modelo, ya que se trata de una de sus características centrales. Los resultados de las investigaciones han mostrado numerosas discrepancias con la propuesta de discretitud que se hace en el trabajo original de Van Hiele, pero, si bien se ha admitido en la mayoría de dichas investigaciones la necesidad de reconsiderar esta idea, los instrumentos utilizados en las evaluaciones de estudiantes o la forma de interpretar la información proporcionada por dichos instrumentos no habían producido hasta el momento unos resultados que hicieran algo más que señalar la presencia de este problema. En este capítulo, asumiendo plenamente la característica de continuidad de los niveles de Van Hiele, hacemos una propuesta radical que abre una línea de investigación que permite analizar el paso de un nivel de razonamiento al siguiente con detalle y desde una nueva perspectiva.

Bien sea directa o indirectamente, cualquier estudio relacionado con el Modelo de Van Hiele, que no sea estrictamente teórico, incluye una identificación de la forma de razonar de los estudiantes implicados. En términos del Modelo de Van Hiele, eso se traduce en la asignación de un nivel de razonamiento. Tal asignación se ha de llevar a cabo necesariamente proponiendo una serie de tareas o items que los estudiantes deben contestar o resolver. Se plantean, por tanto, dos cuestiones a tener en cuenta para llevar a cabo una evaluación adecuada:

- ¿Qué tipo test emplear? (Escrito u oral, con items de elección múltiple o respuesta libre, ...)
- ¿Cómo evaluar las respuestas al test?

Otro de nuestros objetivos en este capítulo es dar una respuesta a la segunda de las preguntas anteriores, esto es, proponer una forma de evaluación de las respuestas de los estudiantes independiente del formato (escrito u oral) de test empleado, pero utilizable con items de respuesta libre sólamente.

Existe consenso generalizado en que la forma de evaluar los niveles de razonamiento que proporciona más información es la entrevista. Pero las condiciones requeridas para poderlas realizar (cantidad de tiempo, coincidencia de horarios, ...) limitan en gran medida las posibilidades de emplearlas y las hacen casi inviables para la observación de grandes colectivos de estudiantes. En el terreno del Modelo de Van Hiele, por el momento no hay alternativas válidas a las entrevistas, lo cual hace que una aportación al diseño de tests escritos como la que presentamos en este capítulo, que suponga una aproximación a la cantidad de información obtenida en las entrevistas, constituya un avance interesante en las herramientas a disposición de los investigadores para evaluar los niveles de Van Hiele.

3.2. Resumen de la literatura sobre evaluación de los niveles de Van Hiele.

En lo referente a la discretitud o continuidad de los niveles de Van Hiele, a modo de resumen general, podemos decir que las investigaciones en las que se ha intentado identificar el nivel de razonamiento de los estudiantes han encontrado con frecuencia comportamientos que rebaten la discretitud.

Así, en Burger, Shaughnessy (1990) se observó que algunos estudiantes oscilaban en sus respuestas entre dos niveles consecutivos de razonamiento, empleando a veces uno de los niveles y a veces el otro. Esta oscilación se hacía patente porque, al analizar una respuesta de un estudiante, diferentes investigadores identificaban características de comportamiento pertenecientes a dos niveles consecutivos. Estos alumnos fueron clasificados como alumnos "en transición" entre los dos niveles. En la práctica, para evaluar el nivel del alumno en cuestión, se recurrió a la asignación de un código diferenciador; por ejemplo, el vector (1, 1-2, 1, 1-2, 1-2) significa que los investigadores habían observado predominante el nivel 1 de Van Hiele (segundo nivel en la notación de 0 a 4) en las respuestas a los problemas 1º y 3º, pero que "no pudieron decidir entre los dos niveles" 1 y 2 en las respuestas a los otros problemas (Burger, Shaughnessy, 1990, pg. 20).

En Fuys, Geddes, Tischler (1988) también se observó el empleo de estrategias de dos niveles consecutivos por parte de algunos alumnos, los cuales se servían por lo general del nivel inferior ante una situación en la que no se sentían seguros. La conclusión de los investigadores fue que no está claro que el paso de un nivel a otro sea discreto, aunque según ellos sí se producen momentos de salto o avance brusco. En lugar de la forma de escalera propuesta por la formulación original del Modelo de Van Hiele (ver pg. C1-18), se sugiere una transición de un nivel al siguiente en pequeños escalones. La asignación del nivel de razonamiento mostrado por los estudiantes en cada tarea también la resumen estos investigadores mediante la indicación de un nivel o dos niveles consecutivos. Así, utilizan el símbolo 1-2 para indicar la transición entre los niveles 1 y 2 (también en la escala de 0 a 4) ya que "los estudiantes formularon propiedades y dieron algunos argumentos deductivos simples (usualmente con la guía del entrevistador), pero no fueron capaces de hacer demostraciones por sí mismos" (Fuys, Geddes, Tischler, 1988, pg. 82).

También Usiskin (1982) se ve inducido por sus datos a mencionar la posibilidad de que exista un proceso de transición entre dos niveles. El problema principal que debía resolver este investigador a propósito de la forma de asignar niveles a los estudiantes era la decisión (con efectos estadísticos básicos) del criterio referente al número mínimo de respuestas correctas que se exigía para considerar que un estudiante había alcanzado un cierto nivel de Van Hiele. A pesar de la pobreza de este tipo de criterio, en esta investigación se plantea que "la transición, por ejemplo, del nivel 2 al 3 podría estar caracterizada por alcanzar un criterio alto en los niveles 1 y 2 y algún criterio intermedio en el nivel 3" (Usiskin, 1982, pg. 33). En esta investigación se utiliza la numeración de 1 a 5 para los niveles de Van Hiele.

Esta situación de oscilación entre dos niveles se ha encontrado prácticamente en la totalidad de las investigaciones en las que se ha examinado el razonamiento de los estudiantes desde el punto de vista del Modelo de Van Hiele. No obstante, ninguno de los investigadores ha profundizado en el análisis de la cuestión de la transición que había identificado, limitándose alguno de ellos a apuntar la necesidad de investigarla. Por ejemplo, poco después de presentar nuestros primeros estudios considerando la idea de la adquisición gradual de un nivel de razonamiento (Fortuny, Gutiérrez, Jaime, 1988), Crowley (1989) plantea que el diseño de items para un test de evaluación del nivel de razonamiento podría tener que ser diferente según que se contemple el paso de un nivel al siguiente como discreto o como continuo. En este último caso, indica que "eso querría decir que un estudiante debe demostrar una proporción mucho mayor de la actividad asociada con un nivel antes de que se considere que lo domina. De hecho, la cantidad de esa 'proporción mayor' -100%, 90%, etc.- debería ser también un tema de investigación" (Crowley, 1989, pg. 212).

Nosotros también detectamos estos problemas en las primeras experimentaciones que hicimos sobre el Modelo de Van Hiele (Gutiérrez, Jaime, 1987 b), lo cual originó un cambio por nuestra parte en la forma de obtener información sobre el nivel de razonamiento: Pasamos de trabajar con tests de elección múltiple a hacerlo con entrevistas y tests escritos de respuesta libre. También, la toma de contacto con el trabajo que estaba realizando J.M. Fortuny sobre evaluación del nivel de razonamiento y la percepción 3-dimensional (Fortuny, 1988) y nuestra colaboración con él generó el inicio de las ideas que presentamos en este capítulo, los grados de adquisición de los niveles de Van Hiele y el método de evaluación, cuyas versiones previas pueden verse en Fortuny, Gutiérrez, Jaime (1988) y Gutiérrez, Jaime, Fortuny (1991).

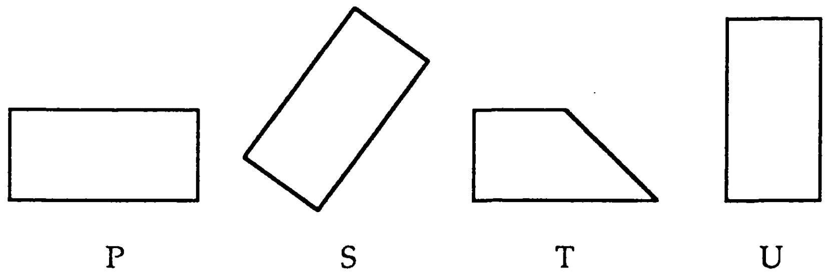
Además de su utilización en geometría 3-dimensional mencionada en el párrafo anterior, hemos experimentado en geometría plana con diversos tipos de individuos (estudiantes de E.G.B., de Enseñanza Media y de Magisterio), lo cual ha servido para perfeccionar la propuesta. Resultados de estas investigaciones están recogidos en Jaime, Gutiérrez (1990 a), Gutiérrez, Jaime, Shaughnessy, Burger (1991) y Gutiérrez y otros (1991).

La elección del instrumento para evaluar el nivel de razonamiento de los estudiantes es un elemento importante en este tipo de investigaciones, y se pueden encontrar las más variadas opciones: Tests escritos con items de elección múltiple, de respuesta libre, o parte de cada clase; entrevistas clínicas; tests escritos seguidos de entrevistas complementarias. En Shaughnessy y otros (1991) se discutió sobre la utilidad y validez de varias de estas posibilidades.

Hay acuerdo generalizado en que las entrevistas clínicas son las que proporcionan más información. En el contexto del Modelo de Van Hiele, tenemos dos excelentes ejemplos en el test utilizado en Burger, Shaughnessy (1990) y las unidades de enseñanza diseñadas por Fuys, Geddes, Tischler (1988). No obstante, por el tiempo que consumen, las entrevistas clínicas sólo se pueden emplear en determinadas investigaciones, con pocos estudiantes implicados, por lo que la mayoría de las investigaciones han utilizado tests escritos.

Respecto a los items de elección múltiple, poseen las ventajas de que se pueden administrar fácilmente a colectivos amplios y su corrección es muy rápida. El test de Usiskin (1982) constituye el ejemplo obligado para este tipo de tests en el contexto del Modelo de Van Hiele y ha sido, y sigue siendo, empleado por numerosos investigadores. Nosotros diseñamos tests con items de elección múltiple en nuestros trabajos iniciales sobre el Modelo de Van Hiele (Gutiérrez, Jaime, 1987 b), aunque pronto cambiamos a items de respuesta libre.

Un inconveniente importante que presenta el empleo de los items de elección múltiple es que no reflejan la razón por la cual un estudiante selecciona una de las opciones que se le presentan. Dado que los items deben estar asignados previamente a un nivel de razonamiento, surgen con frecuencia casos de estudiantes que eligen la respuesta correcta pero empleando un tipo de razonamiento que no corresponde al nivel establecido previamente para ese ítem. D. Fuys ponía de relieve este hecho con el siguiente comentario a un ítem de elección múltiple, parecido a alguno de los empleados por Usiskin (1982), del test que habíamos elaborado en (Gutiérrez, Jaime, 1987 b). En dicho ítem, asignado al nivel 1, se pedía identificar los rectángulos entre los siguientes cuadriláteros:



Fuys (1987) comentaba que "un estudiante podría elegir la respuesta C [los rectángulos son P, S y U] porque:

a) T no tiene forma de rectángulo (nivel 1), o

b) T no es porque no tiene todos los ángulos rectos (nivel 2), o

c) T es un trapecio y los trapecios no son rectángulos porque no tienen todas las propiedades necesarias de los rectángulos (nivel 3, un razonamiento informal)."

Esta ha sido una de las razones por las que se ha puesto en duda la fiabilidad de los test de elección múltiple para evaluar el nivel de Van Hiele de razonamiento. Mayberry (1981) analiza la posibilidad de diseñar un test escrito para identificar el nivel de razonamiento de un estudiante y añade que sería muy difícil diseñar y analizar un test de elección múltiple. Por su parte, Crowley (1989), en una investigación enfocada a diseñar un test de elección múltiple para evaluar los niveles de Van Hiele, no tiene éxito en su objetivo y concluye poniendo en duda la posibilidad de obtener resultados positivos en el diseño de este tipo de tests.

Un ejemplo de test escrito en el que se combinan items de elección múltiple y de respuesta libre es el de Mayberry (1981) y (1983). Por otra parte, nosotros hemos empleado items de respuesta libre (solos o acompañados de entrevistas clínicas) en nuestras investigaciones más recientes, como Gutiérrez, Jaime, Fortuny (1991), Gutiérrez y otros (1991) y en los tests utilizados en la sección 3.5 (los items de estos tests aparecen en el anexo IV).

3.3. Cuestiones objeto de esta investigación.

En este capítulo presentamos algunas contribuciones a la resolución de los problemas, planteados en la sección 3.1, relativos a la evaluación de los niveles de razonamiento de los estudiantes. Las formas de abordarlos tienen una estrecha relación con la postura que se adopte respecto de la cuestión de la continuidad o discretitud de los niveles de Van Hiele. Ya hemos explicado con anterioridad los motivos por los que apoyamos la opción de la continuidad en la transición de un nivel de razonamiento al siguiente. Así pues, desde esta postura, hay tres cuestiones de investigación a las cuales proponemos soluciones en este capítulo:

1- Asumida la continuidad del progreso de un nivel de Van Hiele al siguiente, se plantea el problema de describir ese proceso de adquisición de un nuevo nivel de razonamiento por un estudiante.

Ofrecemos una interpretación de la continuidad en la adquisición de un nivel de razonamiento definiendo el concepto de <u>Grado de Adquisición</u> de un nivel de Van Hiele. Esta visión proporciona mayor información sobre la forma de razonamiento de los estudiantes y mayor precisión en su evaluación que la asignación de un simple y único nivel de razonamiento, empleada en todos los trabajos anteriores sobre el Modelo de Van Hiele que conocemos.

2- Aceptada la descripción anterior del proceso de adquisición de los niveles de Van Hiele, el problema siguiente que se plantea es el de encontrar un procedimiento para evaluar a los estudiantes de manera que se pueda discriminar su progreso en la adquisición de un nuevo nivel de razonamiento.

Para dar respuesta a este segundo problema, hemos construido un método de interpretación de las respuestas de los estudiantes que permite identificar su mayor o menor dominio de determinado nivel de razonamiento. En concreto, hemos definido unos <u>Tipos de Respuesta</u> en los que se tienen en cuenta, dentro de los parámetros del nivel de razonamiento en el que se contesta el ejercicio propuesto, la veracidad y exactitud de la respuesta desde el punto de vista matemático así como la consolidación en el uso de las características propias de ese nivel de razonamiento. A partir del conjunto de respuestas a un test o a una unidad de enseñanza, a cada estudiante se le pueden asignar los grados de adquisición que muestra de cada uno de los niveles de Van Hiele.

3- Entrando en el terreno práctico de la investigación sobre el Modelo de Van Hiele, está planteado desde hace años el problema de construir un test válido y fiable para medir el nivel de razonamiento de los estudiantes. Particularizándolo, el problema es construir un test compatible con las bases teóricas marcadas en los párrafos anteriores de esta sección.

Cuando una investigación utiliza una muestra grande de estudiantes, es evidente la conveniencia de los tests escritos frente a las entrevistas clínicas. Por ello hemos trabajado en la línea de conseguir items escritos de respuesta libre que produzcan el máximo de información sobre el razonamiento de los estudiantes. Sucesivas experimentaciones simultáneas con tests y entrevistas nos han llevado a utilizar la estructura de super-ítem, que aproxima los tests escritos a las entrevistas orales. Hemos elaborado unos tests escritos para analizar el progreso en el nivel de razonamiento, que hemos administrado a grupos de estudiantes de los cursos entre 6º de E.G.B. y C.O.U., inclusives. Al mismo tiempo, esta experiencia sirve para mostrar la aplicación práctica de las respuestas dadas a los problemas 1 y 2 anteriores por medio de un ejemplo real.

En resumen, pensamos que la consideración de los niveles de Van Hiele en términos del Grado de Adquisición de cada nivel es interesante porque proporciona más información que la de los métodos anteriores, en los que sólo se asigna un nivel o se menciona la transición entre dos niveles consecutivos, y que los Tipos de Respuesta que hemos diseñado para valorar las contestaciones a cuestiones de respuesta libre (tanto orales como escritas) se convierten en una directriz práctica para la evaluación de un mayor o menor dominio de los niveles de razonamiento. Estos elementos, combinados con un tipo de items que den a los estudiantes la posibilidad de responder de acuerdo con su propia forma de razonamiento, suponen un instrumento útil para la comprensión del Modelo de Van Hiele y para la realización de investigaciones futuras.

3.4. Definición y método de evaluación de los Grados de Adquisición de los niveles de Van Hiele.

A continuación presentamos de manera detallada las respuestas que proponemos a los problemas planteados en la sección anterior.

Definición de los Grados de Adquisición de un nivel de razonamiento

En los tests de elección múltiple para determinar el nivel de Van Hiele, cada ítem está asignado a un nivel prefijado de razonamiento y a cada respuesta se le asigna el valor "bien" o "mal". Por el contrario, en un ítem de respuesta libre, el evaluador debe interpretar la contestación del estudiante en términos de un nivel de razonamiento, pudiendo, por tanto, identificar la presencia de uno u otro nivel y graduar la calidad de la respuesta. Esta forma de evaluar amplía en gran medida la información obtenida sobre el razonamiento mostrado por el estudiante, en cuanto que de ella se desprende la confianza del estudiante en cada nivel.

Si pensamos en la adquisición progresiva de un nivel de razonamiento, podemos hablar, en términos cualitativos, de un proceso de dominio cada vez mayor del nivel, que va desde el dominio nulo (al comienzo del proceso) hasta el completo (al final del proceso), con una serie de situaciones intermedias con características propias. Cada uno de estos Grados de Adquisición de un nivel de Van Hiele viene determinado por las siguientes características:

<u>Adquisición Nula</u>: No se emplean las características de este nivel de razonamiento.

<u>Adquisición Baja</u>: Empieza la consciencia de las características, métodos y exigencias propios del nivel, pero es muy pobre la utilización que se hace de ellos. Es frecuente el abandono del trabajo en este nivel para recurrir al razonamiento de nivel inferior.

<u>Adquisición Intermedia</u>: El empleo de los métodos de este nivel es más frecuente y preciso. No obstante, todavía no se domina, por lo que, ante situaciones que resultan complicadas, se produce un retroceso de nivel, con un intento posterior de retorno al nivel superior. Hay, por tanto, saltos frecuentes

entre dos niveles consecutivos de razonamiento, lo cual corresponde a las situaciones descritas en la sección 3.2.

Adquisición Alta: El nivel habitual de trabajo es éste y se produce con muy poca frecuencia el retroceso de nivel, aunque sucede alguna vez. Asimismo, en ocasiones se hace un uso inadecuado de las herramientas propias de este nivel de razonamiento.

Adquisición Completa: Hay un dominio total de las herramientas y métodos de trabajo propios de este nivel de razonamiento.

Si cuantificamos la división anterior mediante porcentajes, unos límites razonables para los diferentes grados de adquisición de un nivel de razonamiento son los siguientes:

0	Adquisición nula:	0% ≤ Gr(n) ≤ 15%.
15	Adquisición baja:	15% < Gr(n) < 40%.
40	Adquisición intermedia:	40% ≤ Gr(n) ≤ 60%.
60	Adquisición alta:	60% < Gr(n) < 85%.
85	Adquisición completa:	85% ≤ Gr(n) ≤ 100%.
100		

Tabla 3.1. Valores cualitativos y cuantitativos de los grados de adquisición de un nivel de Van Hiele.

Es importante señalar que la cantidad de divisiones y los valores porcentuales asignados para los límites son subjetivos y no afectan al concepto central de los grados de adquisición del nivel propuesto. Nos hemos decantado por las cinco divisiones señaladas anteriormente porque, a partir de nuestras experimentaciones en diferentes contextos matemáticos y con estudiantes de diferentes cursos y países, pensamos que hay características diferenciadoras claras para cada una de ellas. Por otra parte, los porcentajes asignados son razonables a partir del significado de cada división.

Evaluación de las respuestas a un test: Definición de los Tipos de Respuestas

Para no inducir a confusión al relacionar este trabajo con la propuesta sobre la definición de los tipos planteada en algunas de nuestras publicaciones anteriores, mencionadas en la sección 3.2, señalaremos antes de empezar que la que presentamos ahora difiere algo de la que hemos divulgado anteriormente. La variación afecta a los tipos 0 y 1 anteriores, fusionados en el que actualmente designamos como tipo 1, lo cual es fruto de nuestra experiencia en el uso de este método de evaluación en los últimos años.

Los tipos de respuestas que proponemos son aplicables a items de respuesta libre, tanto orales como escritos, pero no a items de elección múltiple. Por lo general, un ítem de respuesta libre puede ser contestado en distintos niveles de Van Hiele. Por tanto, no será el enunciado del ítem, sino la respuesta del estudiante lo que determine el nivel que se asigne al estudiante. Ejemplos de esta diversidad de formas posibles de responder a una misma pregunta pueden verse en el anexo V, en el cual presentamos ejemplos de toda la gama de respuestas a los items (anexo IV) de los tests administrados que hemos encontrado.

Esta variedad de posibilidades hace que, a la hora de evaluar una respuesta, primero se deba determinar el nivel de razonamiento en el que se ha respondido y después se deba analizar la calidad de la respuesta desde la perspectiva del nivel que se considera, teniendo en cuenta tanto su precisión matemática como el empleo del nivel de razonamiento en cuestión.

Este doble análisis de las respuestas (de nivel de razonamiento y de corrección matemática) lleva a establecer una variedad de Tipos de Respuestas, que tienen las características siguientes:

Tipo 1: Items sin respuesta, con respuestas no codificables o con respuestas que indican que el estudiante no está en un determinado nivel de razonamiento pero que no proporcionan ninguna información sobre su forma de utilizar los niveles de razonamiento inferiores.

Tipo 2: Respuestas matemáticamente incorrectas y muy incompletas, pero en las que se reconocen indicios de utilización de cierto nivel de razonamiento. Se trata, por lo general, de respuestas muy breves y pobres que, además, contienen errores matemáticos o que no contestan directamente a la pregunta planteada.

Tipo 3: Respuestas matemáticamente correctas pero muy incompletas, en las que se reconocen indicios de utilización de cierto nivel de razonamiento. Se trata, por lo general, de respuestas muy breves y pobres, aunque no contienen errores matemáticos.

Tipo 4: Respuestas que reflejan claramente características de dos niveles de razonamiento consecutivos. Esta es la situación más típica de los alumnos en transición entre niveles, pues entremezclan dos niveles de razonamiento consecutivos en sus respuestas a un ítem (generalmente en función de la dificultad de las preguntas). Las respuestas pueden ser matemáticamente correctas o incorrectas, pero deben ser bastante completas.

Tipo 5: Respuestas bastante completas pero matemáticamente incorrectas, que reflejan claramente la utilización predominante de un nivel de razonamiento determinado. La incorrección de las respuestas puede deberse a errores matemáticos o a que siguen una línea de trabajo que no lleva a la solución del problema planteado, pero cuyos procesos de razonamiento son válidos.

Tipo 6: Respuestas bastante completas y matemáticamente correctas que reflejan claramente la utilización predominante de un nivel de razonamiento determinado. Se trata de respuestas claras y correctas, pero que no están completas porque no llegan a resolver el problema totalmente, porque hay "saltos" en el razonamiento deductivo seguido, porque tienen pequeños errores, etc.

Tipo 7: Respuestas matemáticamente correctas y completas que reflejan claramente la utilización de un nivel de razonamiento determinado.

En el anexo V describimos con detalle los criterios que hemos utilizado para la asignación de nivel de razonamiento y Tipo a las respuestas de los estudiantes testados. En particular, pueden verse, para cada ítem, ejemplos de respuestas de los diferentes Tipos (excepto para el Tipo 1).

El esquema siguiente resume la relación entre la corrección matemática, la consolidación del nivel de razonamiento y los distintos Tipos de respuestas:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Corrección Matemática</td></tr>
<tr><td>Incorrecta</td><td>Correcta</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Uso del Nivel de V.H.</td><td>Alto</td><td>5</td><td>6, 7</td></tr>
<tr><td>Medio</td><td colspan="2">4</td></tr>
<tr><td>Bajo</td><td>2</td><td>3</td></tr>
</table>

Tabla 3.2. Características de los Tipos de respuestas.

Asignación de los Grados de Adquisición de los niveles de Van Hiele a los estudiantes

La parte final del proceso, una vez que un estudiante ha contestado a un test o un cuestionario, es la determinación de sus grados de adquisición de los diferentes niveles de Van Hiele. Para ello, se deben tener en cuenta varios elementos y pasos:

A) La ponderación de cada tipo de respuesta. Esta guarda relación con los intervalos del segmento [0, 100] fijados para los grados de adquisición de los niveles, y está recogida en la tabla siguiente:

Tipo	1	2	3	4	5	6	7
Ponderación (%)	0	20	25	50	75	80	100

Tabla 3.3. Ponderación de los diferentes Tipos de respuestas.

Al igual que en el caso de los valores cuantitativos de los grados de adquisición, se trata de unos valores subjetivos. En las experimentaciones que hemos realizado no hemos detectado ningún problema en estos valores, por lo que los consideramos válidos.

B) La codificación que se ha hecho de las respuestas del estudiante al test, esto es, el nivel de razonamiento y el tipo que se le ha asignado a cada respuesta.

C) El rango de niveles de Van Hiele en los que se puede contestar cada ítem del test. Ya hemos comentado al comienzo de la sección 3.4 que la mayoría de los items admiten respuestas de diferentes niveles de razonamiento, siendo por lo general posibles respuestas de 2 ó 3 niveles, por lo que se debe ponderar la respuesta en todos los niveles de razonamiento que el estudiante podría haber utilizado. En aplicación de la organización jerárquica de los niveles de Van Hiele, consideramos que si un ítem puede ser contestado en un rango de niveles N_1 a N_2 y es contestado en el nivel N ($N_1 \leq N \leq N_2$), este ítem tendrá una ponderación de:

- 100% en los niveles de ese rango que son inferiores al N.
- 0% en los niveles de ese rango que son superiores al N.
- el valor correspondiente al tipo de la respuesta en el nivel N.

Por ejemplo, si un ítem se puede contestar en los niveles 2, 3 y 4 y a una respuesta se le han asignado el nivel 3 y el tipo 5, la ponderación correspondiente a esa respuesta será: nivel 2 --> 100 %, nivel 3 --> 75 %, nivel 4 -> 0 %.

D) Los items que pueden contestarse en cada nivel de razonamiento, para calcular el grado de adquisición de ese nivel por los estudiantes. Este valor se obtiene calculando la media aritmética de las ponderaciones asignadas a todos los items que pueden ser contestados en ese nivel.

Por ejemplo, si hay tres items que pueden ser contestados en el nivel 2 y las ponderaciones de esos items en dicho nivel son 0%, 20% y 50%, el grado de adquisición del nivel 2 por el estudiante es $Gr(2) = \frac{0 + 20 + 50}{3} = 23'3\%$, que corresponde a una adquisición baja de este nivel.

Este cálculo se debe hacer para cada nivel de razonamiento, con lo que el resultado final de la evaluación de un estudiante es un conjunto de cuatro valores correspondientes a los grados de adquisición de cada nivel de Van Hiele 1 a 4.

Por ejemplo, un estudiante puede mostrar en un test grados de adquisición del 100% (completa), 80% (alta), 20% (baja) y 0% (nula) de los niveles 1 a 4, respectivamente. Estos valores nos dan a entender que el estudiante está terminando la adquisición del segundo nivel de razonamiento, que es su nivel de trabajo habitual, aunque al mismo tiempo está iniciando la adquisición del tercer nivel, que sabe utilizar en problemas fáciles. En la sección 3.5, tomando como base los resultados del estudio longitudinal realizado, explicamos el significado de este grupo de cuatro valores y la información o consecuencias que se pueden extraer de ellos.

Con los métodos de asignación de niveles de Van Hiele utilizados hasta el momento en las restantes investigaciones, el razonamiento de este estudiante habría sido identificado como de nivel 1, de transición entre los niveles 1 y 2, ó de nivel 2, dependiendo del criterio para la superación de niveles adoptado.

En Gutiérrez, Jaime, Shaughnessy, Burger (1991) hicimos un estudio comparativo de los métodos de evaluación utilizados en Burger, Shaughnessy (1990) y en Gutiérrez y otros (1991) (el método seguido en esta última publicación es casi idéntico al que proponemos aquí), aplicando ambos métodos a un grupo de estudiantes formado por parte de los entrevistados en el proyecto de investigación americano y parte de los testados en el proyecto de investigación español.

Tipos de tests para evaluar el nivel de razonamiento

Existen dos aspectos a tener en cuenta en relación con el test a emplear en la evaluación del nivel de Van Hiele de razonamiento de los estudiantes:

- Elección del tipo de test: Oral o escrito. Con items de respuesta libre o de elección múltiple.
- Elección de los items que deben formar el test: Los niveles de razonamiento a los que estarán asociados. El número de items en el test y la cantidad de ellos asociados a cada nivel de razonamiento.

Tras analizar las investigaciones realizadas hasta el momento sobre el Modelo de Van Hiele, mencionadas en la sección 3.2, pensamos que los items o problemas de respuesta libre son los que permiten identificar con mayor precisión el razonamiento de los estudiantes. Con este tipo de items, las entrevistas son la forma de obtener información más amplia; con tests escritos se puede obtener también bastante información sobre el razonamiento de los estudiantes, aunque hay una pérdida de información respecto a las entrevistas. La ventaja de los tests escritos respecto a las entrevistas es que permiten evaluar colectivos más numerosos de estudiantes.

Respecto a los items concretos que deben integrar un test (cantidad, contenidos, objetivos, etc.), siempre existe el problema de proceder a una selección adecuada, pues incluir uno u otro ítem puede suponer sobre o infravalorar un tipo de razonamiento de los estudiantes. Pero esta dificultad existe siempre, en cualquier test y no solamente en los relacionados con el Modelo de Van Hiele. En lo que se refiere al diseño de tests para medir el nivel de razonamiento geométrico, éste es un tema abierto, que debería ser investigado con detalle en el futuro, en el que es necesario considerar, además, la influencia de los conocimientos previos de los estudiantes y la ponderación de las distintas destrezas diferenciadas que integran cada nivel de Van Hiele; en Jaime, Gutiérrez (1990 c) hacemos una sugerencia en esta línea.

3.5. Aplicación a un estudio longitudinal de alumnos desde 6º de E.G.B. hasta C.O.U.

En esta sección presentamos un ejemplo de utilización del método que hemos descrito en las secciones precedentes para identificar el grado de adquisición de los niveles de razonamiento de los estudiantes. Lo haremos empleando un test cuyos items hemos diseñado teniendo en cuenta las ideas expresadas en la sección anterior. Dichos items forman parte de una batería más amplia, diseñada por nosotros para evaluar el nivel de razonamiento de Van Hiele y que, desde 1988, ha experimentado mejoras sucesivas. El análisis de los resultados obtenidos mediante la administración de este test lo centraremos en dos aspectos:

1) Análisis de la evolución del nivel razonamiento de los estudiantes desde 6º de E.G.B. hasta C.O.U. (con edades entre 11 y 18 años). Los alumnos de 3º de B.U.P. y de C.O.U. eran de la especialidad de Ciencias. La comparación de los resultados obtenidos en los diversos cursos puede dar una idea de cómo evoluciona el razonamiento geométrico de los estudiantes a lo largo del Ciclo Superior de E.G.B. y la Enseñanza Media.

2) Seguimiento de la variación experimentada en el nivel de razonamiento de dos de estos grupos de estudiantes a lo largo de varios años: Los estudiantes de 6º de E.G.B. evaluados en 1990 fueron evaluados de nuevo en 1991 y 1992, cuando estaban en 7º y 8º de E.G.B., respectivamente. Análogamente, los estudiantes de 7º de E:G.B. evaluados en 1990 fueron evaluados de nuevo en 1991, cuando estaban en 8º de E.G.B. La comparación de los resultados obtenidos por los mismos

estudiantes durante varios años puede servir para contrastar la validez de los resultados de 1).

Es necesario señalar que no pretendemos considerar los resultados obtenidos como generalizables o significativos para colectivos análogos de estudiantes, pues no era éste un objetivo del estudio, ya que no hemos llevado a cabo la necesaria selección previa de los Centros y los alumnos, en función del campo de validez deseado, que hubiera garantizado la validez de tal generalización.

El contexto de la experimentación

Descripción de los grupos evaluados

Como hemos dicho, los cursos en los que se llevó a cabo el estudio abarcan desde 6º de E.G.B. hasta C.O.U. La tabla siguiente resume la información sobre los estudiantes a los que hemos evaluado.

Curso	Nº de estud.	Centro y año
6º E.G.B.	34*	Amadeo Tortajada (Mislata, Valencia), 1990.
7º E.G.B.	33†	Amadeo Tortajada, 1990.
	29*	Amadeo Tortajada, 1991.
8º E.G.B.	31	Amadeo Tortajada, 1990.
	25†	Amadeo Tortajada, 1991.
	27*	Amadeo Tortajada, 1992.
1º B.U.P.	35	San Vicente Ferrer (Valencia), 1990.
2º B.U.P.	36	San Vicente Ferrer, 1990.
3º B.U.P.	28	I.B. de Villajoyosa (Villajoyosa, Alicante), 1991.
C.O.U.	31	I.B. de Mislata (Mislata, Valencia), 1990.

*) Estos 3 grupos están formados por los mismos estudiantes, testados en 3 años consecutivos.

†) Estos 2 grupos están formados por los mismos estudiantes, testados en 2 años consecutivos.

Tabla 3.4. Características de los estudiantes testados.

En relación con la diversidad de Centros, cabe destacar que para E.G.B. se ha utilizado siempre el mismo y que muchos de los alumnos de este Colegio que continúan sus estudios lo hacen en el I.B. de Mislata, por ser el instituto de bachillerato de la misma población. Este instituto es el que se ha empleado en la evaluación de alumnos de C.O.U. Para la evaluación de alumnos de B.U.P. no nos resultó fácil recurrir a I.B. de Mislata, por lo que, en una primera administración, testamos a estudiantes de 1º, 2º y 3º de B.U.P. del I.B. San Vicente Ferrer de Valencia. Sin embargo, los estudiantes de 3º de B.U.P. no dispusieron de tiempo suficiente para contestar al test completo, lo cual nos obligó a anular este grupo y repetir la prueba en otro grupo de ese curso. Esto no pudo hacerse en el mismo Instituto, sino que tuvo lugar en el I.B. de Villajoyosa (Alicante).

Para efectuar el análisis comparativo de los resultados de los grupos de E.G.B., se administró siempre el mismo test, a cada estudiante le hemos asignado el mismo número de orden en los años sucesivos y hemos procedido a eliminar a los estudiantes que no han contestado los tests todos los años.

La administración de los tests tuvo lugar siempre durante el mes de mayo o primeros días de junio. Aunque el test fue el mismo durante los 2 ó 3 años consecutivos, la posible desviación producida por el aprendizaje de los items en las administraciones es despreciable, pues el tiempo transcurrido entre una administración y la siguiente fue suficientemente largo.

Descripción de los tests diseñados

En la búsqueda durante varios años de un método que permitiera aproximar los tests escritos a las entrevistas clínicas, hemos avanzado respecto a los items usuales de respuesta abierta. La idea central consiste en el planteamiento sucesivo del enunciado inicial y de nuevos enunciados planteando la misma cuestión, después de proporcionar más información, u otras cuestiones relacionadas, de manera que cada vez se requiera un dominio inferior de un nivel determinado de razonamiento o que se pueda resolver con niveles cada vez más bajos. Lo que construimos en realidad son super-items (aunque seguiremos llamándolos, simplemente, items), que se pueden desglosar para su evaluación y codificación en varias partes cuando se crea conveniente. Por lo tanto, que el proceso de organización y administración de uno de estos items es el siguiente:

- Primero se presenta el enunciado del ejercicio, sin dar ayudas complementarias, excepto en el caso de que se pretenda que alguna propiedad figure desde el principio como indicación. La respuesta del alumno ante esta situación, a veces muestra el nivel en el que razona, pero en muchas ocasiones no se produce información debido a que el alumno no sabe cómo enfocar la propiedad o demostración pedida.

- A continuación se le plantea al estudiante el mismo ejercicio, con algún tipo de información adicional, de manera que, si se encuentra en cierto nivel de Van Hiele, pueda contestar. Se intenta eliminar la posibilidad de falta de respuesta originada por una desorientación total sobre el camino a seguir o por la necesidad de que se ocurra una "idea feliz".

- Siguiendo este proceso, se puede proceder a presentar el ejercicio con exigencias de razonamiento menor, del mismo nivel o de niveles inferiores.

- En esta secuencia los estudiantes no pueden retroceder, esto es, una vez que un estudiante ha pasado a la parte siguiente del ítem, no puede volver atrás para contestar o corregir las respuestas anteriores. Ello es porque de esta manera el evaluador puede conocer mejor el proceso de respuesta seguido por los estudiantes y saber si han contestado por sí mismos o gracias a la ayuda proporcionada.

Por ejemplo, el super-ítem 17 de los tests que utilizamos para la evaluación de estudiantes llevada a cabo para esta tesis (ver anexo IV), primero pide la demostración de una propiedad (demostrar que la suma de los ángulos de cualquier triángulo acutángulo es 180°), sin dar indicaciones. En la segunda parte del ítem se presenta una propiedad (las igualdades de los ángulos formados al cortar dos rectas paralelas por una transversal), que se debería haber estudiar en el Ciclo Superior de E.G.B. y que permite completar la demostración. Las respuestas de los estudiantes a estas dos partes las evaluamos conjuntamente, asignándoles un tipo de respuesta en alguno de los niveles 2 a 4. Finalmente, en la última parte del ítem, se muestra con todo detalle la demostración formal, representándola gráficamente en un triángulo acutángulo, y se pregunta si se cumple la propiedad en otros casos (triángulos rectángulos y triángulos obtusángulos), pidiendo la justificación o demostración correspondiente. Este apartado lo evaluamos en el nivel 2 ó 3, según la respuesta del alumno; no se puede responder en el cuarto nivel porque los estudiantes ya tienen un modelo de la demostración y lo que deben hacer es entenderla y adaptarla a otras situaciones parecidas.

Al preparar los tests para este estudio, hemos tenido en cuenta que las condiciones usuales de trabajo exigen que el tiempo total necesario para responder al test no supere cierto límite. En concreto, en este caso, la administración se debía realizar durante las horas usuales de clase de Matemáticas, a los grupos completos de alumnos, en el Centro correspondiente, y por sus profesores habituales, a los cuales habíamos dado previamente instrucciones sobre la forma de proceder. Por todo ello, no se podían superar los 60 minutos, que es el tiempo máximo dedicado usualmente a la clase de Matemáticas en los Centro escolares.

Según el método de evaluación descrito en la sección 3.4, el grado de adquisición de un nivel se obtiene a partir de la media de las ponderaciones de todos los items que se pueden contestar en ese nivel. Por tanto, cuantos más niveles de respuesta admita cada ítem, más oportunidades habrá de observar cada nivel de razonamiento y cuantos más items incluyan en su rango de posibles contestaciones un nivel concreto, más fiable será la evaluación correspondiente a ese nivel.

Para ajustarnos a estas limitaciones, en cierto modo contradictorias, diseñamos tres tests diferentes, en función del nivel de razonamiento esperado de los estudiantes de los diferentes cursos. La diferencia entre los tests está en el cambio de algunos de los items, manteniendo otros fijos y permaneciendo también constante el número de items.

Nuestra experiencia previa, y la de otros investigadores, con alumnos de esos niveles educativos, nos permitió intuir a priori los niveles de razonamiento más probables de los alumnos de cada curso, por lo que incrementamos la cantidad de items que podían ser respondidos en esos niveles y disminuimos el número de ítem orientados a los niveles más improbables, aunque manteniendo un mínimo de dos items asociados a cada nivel de Van Hiele. Esto, junto con la adecuación de los contenidos de los items a los conocimientos geométricos previsibles de los estudiantes, condujo a tres tests, que hemos denominado A, B y C, con los items que indicamos a continuación. Por otra parte, los niveles en los que evaluamos cada uno de los items aparecen en la tabla que presento con posterioridad.

Los items utilizados en los tres tests son: P3, P5, P7.1, P12A, P15 (.1, .2), P17 (A.1, A.1, B), P19 y P24. En el anexo IV presentamos estos items, manteniendo el formato en que fueron administrados. Los items que componen cada test, ordenados según su colocación en el test, son los siguientes:

TEST A (administrado a 6º, 7º y 8º de E.G.B.): P3, P12A, P17A.1, P17A.2, P17B, P7.1 y P19.

TEST B (administrado a 1º y 2º de B.U.P.): P3, P15.1, P15.2, P17A.1, P17A.2, P17B, P5 y P7.1.

TEST C (administrado a 3º de B.U.P. y C.O.U.): P7.1, P15.1, P15.2, P17A.1, P17A.2, P17B, P3 y P24.

La tabla 3.5 resume los items de cada test y los niveles posibles (•) de las respuestas a cada ítem. Están subrayados los items comunes a los 3 tests. Los items de cada test están ordenados según su orden de administración.

Test A					Test B					Test C				
	Niveles					Niveles					Niveles			
Ítem	1	2	3	4	Ítem	1	2	3	4	Ítem	1	2	3	4
3	•	•			3	•	•			7.1	•	•	•	
12A	•	•			15		•	•	•	15		•	•	•
17A		•	•	•	17A		•	•	•	17A		•	•	•
17B		•	•		17B		•	•		17B		•	•	
7.1	•	•	•		5	•	•			3	•	•		
19		•	•	•	7.1	•	•	•		24			•	•

Tabla 3.5. Organización de los tests administrados.

A priori cabía suponer que los niveles de razonamiento predominantes en los estudiantes desde 6º de E.G.B. a 2º de B.U.P. estarían entre el 1 y el 3, mientras que los estudiantes de 3º y C.O.U. estarían entre el nivel 2 y el 4. Como puede verse en la tabla, todos los tests pueden evaluar los 4 niveles de Van Hiele, si bien los tests A y B dedican más atención a los niveles 1 y 2, mientras que el test C dedica más atención a los niveles 3 y 4. La diferencia principal entre los tests A y B se encuentra en los contenidos matemáticos de los problemas planteados.

Asignación de nivel y tipo a las respuesta de los estudiantes

Para la asignación de nivel de Van Hiele a las respuestas de los estudiantes hemos tenido en cuenta:

- Los descriptores generales de los niveles de Van Hiele y los particulares para polígonos, triángulos y cuadriláteros (en el capítulo 1 hemos enunciado los primeros y hemos dado referencias en las que aparecen los segundos).

- Los descriptores particulares de los niveles de razonamiento en los diferentes items empleados. Estos descriptores son particularizaciones de los descriptores anteriores, ampliados y modificados tras experimentaciones piloto, a las preguntas o problemas concretos planteados en los items. Se trata de modelos de respuestas que cubren la mayoría de las respuestas realmente dadas por los estudiantes testados. El anexo V contiene la lista completa de estos descriptores junto a su asignación de nivel y tipo de respuesta.

Todos estos descriptores permiten disponer de unos criterios unificadores y objetivos en los que basarse para asignar nivel y tipo, aunque no cubren todas las posibilidades con detalle, por lo que siempre existe un factor subjetivo que origina discrepancias en las evaluaciones llevadas a cabo por diferentes investigadores.

Para la corrección de los tests, dos evaluadores, conocedores del Modelo de Van Hiele y de los tests, asignamos, de forma independiente, los niveles y tipos de respuesta a cada respuesta de cada estudiante, basándonos en las listas de descriptores mencionadas antes. Los evaluadores fuimos quien presenta esta tesis y Angel Gutiérrez, director de la misma. Una vez corregidos los tests por cada uno, procedimos a la comparación de los resultados, analizando de manera especial los casos de discrepancia, con el objetivo de llegar a un acuerdo para producir una única asignación de niveles y tipos de respuesta para cada estudiante.

En algunos casos, este proceso nos obligó a modificar la lista de descriptores, para introducir uno nuevo o para mejorar alguno de los ya existentes. Cada vez que se producía una de estas modificaciones en la lista de descriptores de un ítem, procedíamos a revisar todas las respuestas previamente evaluadas que pudieran estar influidas por dicha modificación, con el fin de salvaguardar la unidad de criterios y la fiabilidad de los resultados.

Un criterio de fiabilidad de tests que se emplea a veces consiste en comparar las correcciones hechas por varios expertos de forma independiente, para medir las discrepancias entre ellas. Cuanto menos discrepancias haya, más fiable es el test o el criterio de corrección analizado. En nuestro caso, dicha técnica, que no hemos aplicado en estos tests, habría permitido mejorar la lista de descriptores, detectando ambigüedades y limitando la inevitable componente subjetiva del evaluador.

En lo que respecta al cálculo de los valores de los grados de adquisición de los niveles de Van Hiele, hemos aplicado el procedimiento descrito en la sección 3.4. La tabla 3.5. permite identificar qué items han determinado el grado de adquisición de cada nivel, pues son los marcados en cada columna con • los que admiten respuestas de ese nivel. Veamos un ejemplo:

Las respuestas de un estudiante al test B han sido asignadas a los siguientes niveles de razonamiento y tipos de respuesta:

	Nivel	Tipo
Ítem 3	2	5
Ítem 15	3	3
Ítem 17A	–	1
Ítem 17B	3	2
Ítem 5	2	3
Ítem 7.1	2	2

Por lo tanto, a sus respuestas le corresponden las ponderaciones en cada nivel de razonamiento (de acuerdo con la tabla 3.3) y los grados de adquisición de los niveles (según la tabla 3.1) siguientes:

	Nv. 1	Nv. 2	Nv. 3	Nv. 4
Ítem 3	100	75	--	--
Ítem 15	--	100	25	0
Ítem 17A	--	0	0	0
Ítem 17B	--	100	20	--
Ítem 5	100	25	--	--
Ítem 7.1	100	20	0	--
Gr(n)	100 Compl.	53'33 Interm.	11'25 Nula	0 Nula

Es decir, que este estudiante tiene una adquisición completa del primer nivel de Van Hiele, intermedia del segundo y nula del tercer y cuarto niveles.

Validación de los items y los tests

Los items utilizados en este estudio forman parte de una batería más amplia que es el resultado de varios años de investigación previa, en la que hemos trabajado en la elaboración de items escritos de respuesta libre, con el objetivo de acercar el estilo de los tests escritos a la forma como se suelen desarrollar las entrevistas clínicas, en las que el entrevistador puede ir variando progresivamente las preguntas planteadas en función de las respuestas previas del entrevistado (o de sus silencios) y del nivel de razonamiento que refleje, o puede dar alguna ayuda adicional que sirva para desbloquear al estudiante. Dicha batería de items ha sufrido modificaciones en varias ocasiones, como resultado de las numerosas experimentaciones realizadas con estudiantes de todos los niveles educativos y también de consultas con especialistas, en particular D. Fuys, M. Shaughnessy y A. Hoffer, con quienes hemos discutido en varias ocasiones los contenidos, estructura y resultados de administraciones de la mayor parte de los items de la batería, y en particular los que hemos utilizado en el trabajo objeto de este capítulo. Otras veces hemos variado los items a raíz de las respuestas que hemos obtenido en alguna administración.

La validación global de cada test se puede hacer de dos maneras: Analizando el proceso de creación de los items y analizando la coherencia interna de cada test.

Ya hemos explicado en el apartado anterior el proceso de construcción de los items y el tipo de validación a que los hemos sometido. La coherencia interna de los tests es importante para asegurarnos de que los items han sido elegidos correctamente, pues podría ocurrir que, aunque cada ítem por sí mismo sea válido, el conjunto fuera desequilibrado. Un parámetro para medir esta coherencia interna es el Coeficiente de Escalabilidad de Guttman, que mide la jerarquización de los items de un test. En nuestro caso, puesto que asumimos como cierta la estructura jerárquica de los niveles de Van Hiele (un estudiante no puede adquirir un nivel de razonamiento sin haber adquirido antes el nivel anterior), el coeficiente de Guttman nos permitirá determinar si es correcta la relación entre los items asociados a unos niveles y los asociados a los otros, es decir, si los estudiantes que contestan bien los items asociados a un nivel de razonamiento también contestan bien los items asociados al nivel inferior.

El coeficiente de Guttman, por sí solo, nada más nos permitiría validar los items relacionados con los niveles 1 a 3, ya que la jerarquía termina con el nivel 4: Un defecto en el diseño de los items asociados, por ejemplo, al nivel 2 se reflejaría en unos grados de adquisición del nivel 2 inferiores a los del nivel 3, pero un defecto de este tipo en los items asociados al nivel 4 no se podría identificar, salvo que se utilice otro procedimiento de validación diferente.

Para calcular el coeficiente de Guttman, se consideran los vectores formados por los grados de adquisición de los cuatro niveles de razonamiento de cada estudiante (g_1, g_2, g_3, g_4). Puesto que la situación deseable es que $g_1 \geq g_2 \geq g_3 \geq g_4$, se considera que hay un "error" cuando $g_m < g_n$ para al menos un $n > m$. Por ejemplo, el vector (90, $\underline{10}$, 30, 15) tiene 1 error y el vector ($\underline{40}$, $\underline{50}$, 60, 20) tiene 2 errores. Es decir, que el número de errores de un vector (g_1, g_2, g_3, g_4) es igual al número de valores g_i que hay que incrementar para que el vector verifique la relación $g_1 \geq g_2 \geq g_3 \geq g_4$; en los ejemplos anteriores, los valores subrayados son los que hay que incrementar. El coeficiente de escalabilidad de Guttman viene dado por la fórmula:

$$G = 1 - \frac{\text{nº total de errores}}{\text{nº total de respuestas}} = 1 - \frac{\text{nº total de errores}}{4 \times \text{nº de estudiantes}}.$$

De forma análoga se puede utilizar el coeficiente de Guttman para analizar los items de los tests, considerando los vectores formados por las ponderaciones de las respuestas de cada estudiante a los diferentes items asociados a cada nivel de razonamiento (luego este vector tiene 15 componentes, tantas como puntos • hay en la tabla 3.5 para cada test). Ahora se compara el peso de cada ítem de un nivel con los pesos de todos los items de niveles superiores, pero no se compara con los pesos de los otros items de su mismo nivel. En la situación deseable, la ponderación de un ítem en el nivel n debe ser mayor o igual que la ponderación de cualquier otro ítem en los niveles n+1, ... En este caso la fórmula es:

$$G = 1 - \frac{\text{nº total de errores}}{\text{nº total de respuestas}} = 1 - \frac{\text{nº total de errores}}{15 \times \text{nº de estudiantes}}.$$

Cuando no hay ningún error se obtiene G = 1. En investigaciones anteriores en Didáctica de las Matemáticas que han utilizado el coeficiente de Guttman, se ha considerado como límite inferior para aceptar la jerarquización el valor G = 0'90 (Mayberry, 1983; Hart, 1980). La tabla siguiente resume los coeficientes de escalabilidad de Guttman para los diferentes cursos.

		Coef. de Guttman	
	Curso	**entre niveles**	**entre items**
	6º E.G.B.	1'00	0'96
Test A	**7º E.G.B.**	1'00	0'96
	8º E.G.B.	1'00	0'96
Test B	**1º B.U.P.**	0'99	0'85
	2º B.U.P.	0'98	0'81
Test C	**3º B.U.P.**	0'99	0'88
	C.O.U.	0'98	0'86

Tabla 3.6. Valores del coeficiente de escalabilidad de Guttman.

Se observa que los valores del coeficiente de Guttman son muy altos al comparar los grados de adquisición de los niveles, lo cual confirma la fiabilidad de los tests. Cuando se comparan las ponderaciones de las respuestas individuales a los items, los valores obtenidos son, lógicamente, inferiores. Destacan en particular los de los cursos de Enseñanza Media, correspondientes a los tests B y C. Un análisis detenido de las respuestas de cada estudiante pone de manifiesto:

1) Que los errores no proceden de pocos estudiantes, sino que afectan a la mayoría de los estudiantes de cada curso (desde un 68% en 3º de B.U.P. hasta un 86% en 1º de B.U.P.).

2) Que los items con mayor número de errores corresponden al nivel 2 (el 16'5% de los errores son en el ítem P3, el 14% en el P5, el 15'8% en el P7.1 y el

11'4% en el P17A), con la única excepción significativa del ítem P5 asociado al nivel 1 (con un 16'2% de los errores). Las diversas fuentes posibles de estos errores (defecto de los items, falta de tiempo para contestar el test completo, carencia de conocimientos geométricos necesarios, etc.) deberán ser estudiadas con detalle en una investigación posterior, con el fin de determinar los cambios necesarios para mejorar los tests.

Así pues, consideramos los tests globalmente fiables, si bien hay en ellos algunos items que son los principales causantes de los errores producidos y que, por lo tanto, deben ser analizados para su posible revisión.

Resultados de la administración de los tests. Análisis y conclusiones

Con la consideración, formulada con anterioridad, de que no pretendemos que los datos y los resultados que mostramos aquí sean generalizables a la totalidad de alumnos de los niveles educativos con los que hemos trabajado, vamos a hacer algunos análisis de la información obtenida sobre los niveles de razonamiento de los estudiantes. Vamos a centrarnos en los dos aspectos enunciados al comienzo de esta sección 3.5:

1- Comparar los grados de adquisición de los niveles de Van Hiele mostrados por estudiantes de los diferentes cursos desde 6º de E.G.B. hasta C.O.U.

2- Estudiar el progreso a lo largo del Ciclo Superior de E.G.B. del nivel de razonamiento de los estudiantes evaluados varias veces en años consecutivos.

Comparación de los cursos 6º de E.G.B. a C.O.U.

Para el primero de los objetivos, en el anexo VI incluimos unas tablas con los grados de adquisición de los niveles de razonamiento por los estudiantes de cada curso. A continuación presentamos algunas tablas descriptivas que resumen, desde diversos puntos de vista, los resultados obtenidos.

Las tablas de las páginas siguientes (tabla 3.7) informan, para cada nivel de Van Hiele y curso, de las cantidades absolutas (y porcentuales) de alumnos que han obtenido los diferentes grados de adquisición de dicho nivel. En las tablas de 7º y 8º de E.G.B. se recogen los dos (respectivamente, tres) grupos de alumnos de esos cursos testados.

6º de E.G.B.	Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4	
Adquis. Completa	9	(26'47)	0	(0'00)	0	(0'00)	0	(0'00)
Adquis. Alta	7	(20'59)	0	(0'00)	0	(0'00)	0	(0'00)
Adq. Intermedia	10	(29'41)	0	(0'00)	0	(0'00)	0	(0'00)
Adquis. Baja	7	(20'59)	7	(20'59)	0	(0'00)	0	(0'00)
Adquis. Nula	1	(2'94)	27	(79'41)	34	(100)	34	(100)
Media	60'39 alta		7'55 nula		0'33 nula		0'00 nula	
Desv. Típica	26'26		8'54		1'33		0'00	

7º de E.G.B.	Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4	
Adquis. Completa	32	(51'61)	0	(0'00)	0	(0'00)	0	(0'00)
Adquis. Alta	6	(9'68)	3	(4'84)	0	(0'00)	0	(0'00)
Adq. Intermedia	5	(8'06)	2	(3'23)	0	(0'00)	0	(0'00)
Adquis. Baja	16	(25'81)	18	(29'03)	2	(3'23)	0	(0'00)
Adquis. Nula	3	(4'84)	39	(62'90)	60	(96'77)	62	(100)
Media	69'92 alta		15'56 baja		1'05 nula		0'00 nula	
Desv. Típica	32'18		16'52		5'50		0'00	

8º de E.G.B.	Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4	
Adquis. Completa	63	(75'90)	1	(1'20)	0	(0'00)	0	(0'00)
Adquis. Alta	10	(12'05)	4	(4'82)	0	(0'00)	0	(0'00)
Adq. Intermedia	7	(8'43)	9	(10'84)	1	(1'20)	0	(0'00)
Adquis. Baja	2	(2'41)	47	(56'63)	4	(4'82)	0	(0'00)
Adquis. Nula	1	(1'20)	22	(26'51)	78	(93'98)	83	(100)
Media	87'95 completa		26'23 baja		2'55 nula		0'00 nula	
Desv. Típica	20'28		17'41		9'03		0'00	

Tabla 3.7.1. Resultados de la administración de los tests.

1º de B.U.P.	Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4	
Adquis. Completa	12	(34'29)	0	(0'00)	0	(0'00)	0	(0'00)
Adquis. Alta	10	(28'57)	2	(5'71)	1	(2'86)	0	(0'00)
Adq. Intermedia	1	(2'86)	7	(20'00)	0	(0'00)	2	(5'71)
Adquis. Baja	12	(34'29)	16	(45'71)	4	(11'43)	0	(0'00)
Adquis. Nula	0	(0'00)	10	(28'57)	30	(85'71)	33	(94'29)
Media	65'24 alta		27'05 baja		6'00 nula		2'86 nula	
Desv. Típica	26'33		18'27		13'43		11'61	

2º de B.U.P.	Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4	
Adquis. Completa	22	(61'11)	2	(5'56)	0	(0'00)	0	(0'00)
Adquis. Alta	10	(27'78)	2	(5'56)	1	(2'78)	0	(0'00)
Adq. Intermedia	0	(0'00)	8	(22'22)	4	(11'11)	2	(5'56)
Adquis. Baja	4	(11'11)	19	(52'78)	9	(25'00)	0	(0'00)
Adquis. Nula	0	(0'00)	5	(13'89)	22	(61'11)	34	(94'44)
Media	83'10 alta		36'50 baja		15'28 baja		2'50 nula	
Desv. Típica	22'78		20'10		19'48		9'24	

3º de B.U.P.	Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4	
Adquis. Completa	24	(85'71)	1	(3'57)	0	(0'00)	0	(0'00)
Adquis. Alta	0	(0'00)	9	(32'14)	0	(0'00)	0	(0'00)
Adq. Intermedia	4	(14'29)	2	(7'14)	2	(7'14)	0	(0'00)
Adquis. Baja	0	(0'00)	9	(32'14)	9	(32'14)	2	(7'14)
Adquis. Nula	0	(0'00)	7	(25'00)	17	(60'71)	26	(92'86)
Media	92'41 completa		43'32 intermedia		12'93 nula		2'32 nula	
Desv. Típica	17'47		28'42		15'13		7'63	

Tabla 3.7.2. Resultados de la administración de los tests.

C.O.U.	Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4	
Adquis. Completa	28	(90'32)	5	(16'13)	0	(0'00)	0	(0'00)
Adquis. Alta	0	(0'00)	8	(25'81)	2	(6'45)	0	(0'00)
Adq. Intermedia	2	(6'45)	9	(29'03)	6	(19'35)	1	(3'23)
Adquis. Baja	0	(0'00)	7	(22'58)	8	(25'81)	0	(0'00)
Adquis. Nula	1	(3'23)	2	(6'45)	15	(48'39)	30	(96'77)
Media	93'55 completa		55'29 intermedia		21'65 baja		2'85 nula	
Desv. Típica	21'03		25'26		21'89		7'96	

Tabla 3.7.3. Resultados de la administración de los tests.

Las tablas anteriores nos muestran el perfil medio de los estudiantes de cada curso, así como el progreso a lo largo de los cursos. En E.G.B. se observa un incremento en el grado de adquisición del primer nivel de Van Hiele, que se completa en 8º, junto a un inicio en la adquisición del segundo nivel a partir de 7º. Además, como cabía esperar, en E.G.B. no hay muestras significativas de razonamiento de tercer nivel (sólo unos pocos estudiantes de 7º y 8º que han respondido algún ítem) y hay una ausencia total de razonamiento del cuarto nivel.

Por lo que se refiere a Enseñanza Media, resulta llamativo el descenso en los grados de adquisición del primer nivel en 1º y 2º de B.U.P., dato que comentaremos más adelante. A lo largo de estos cuatro cursos continua el incremento en la adquisición del segundo nivel y se inicia la adquisición, muy baja, del tercer nivel. Esto último es, seguramente, fruto de la enseñanza formalizada propia de estos cursos, en los que se hace énfasis en las demostraciones. No obstante, a pesar de este tipo de enseñanza, ni siquiera en C.O.U. se aprecia la presencia significativa de razonamiento de cuarto nivel. Desde el punto de vista didáctico, esto es una confirmación de la incomunicación que se produce cuando profesor y alumnos se expresan utilizando diferentes niveles de razonamiento. La enseñanza de las Matemáticas de estudiantes con habilidades de razonamiento como los de esta muestra debería empezar en 1º de B.U.P. basándose en los métodos de trabajo del segundo nivel, para progresar a partir de ahí hasta el tercer nivel y, cuando sea posible, iniciar la adquisición del cuarto nivel.

Sin embargo, de estas tablas no es posible obtener información detallada sobre cada estudiante y sobre los diferentes perfiles de grados de adquisición presentes en cada curso. Tal información es igual o más rica que la anterior, pues nos permite conocer mejor la diversidad de formas de razonar de los estudiantes dentro de un mismo grupo.

A la vista de los vectores con los grados de adquisición de todos los estudiantes evaluados, hemos identificado una serie de perfiles, descritos en la tabla 3.8, que aparecen de manera significativa en nuestro estudio, y que son el reflejo de diferentes estilos de razonamiento matemático. Los perfiles de esta tabla están ordenados desde el nº 1, que corresponde al razonamiento de mayor nivel (estudiantes que han adquirido plenamente los niveles 1 y 2 y están en proceso de adquisición del nivel 3), hasta el perfil nº 12, que corresponde a estudiantes que ni siquiera muestran una adquisición baja del primer nivel de razonamiento.

La tabla 3.9 muestra, de una forma más sintética, la misma información. Aquí es más fácil darse cuenta de la evolución de los niveles de razonamiento de los estudiantes a lo largo de los cursos, pues, con la excepción de 1º de B.U.P., cuanto más alto es el curso, mayor es la cantidad de estudiantes que tienen perfiles correspondientes a formas de razonamiento de más calidad.

Perfil	6º E.G.B.	7º E.G.B.	8º E.G.B.	1º B.U.P.	2º B.U.P.	3º B.U.P.	C.O.U.
CC(AI)≤I			1		6	4	13
CAI≤B					6	4	10
CA≤BN		5	5			25	13
CI≤BN		3	11	11	6	7	26
CBBN			1		8		
C≤BNN	26	44	58	17	36	43	23
AI≤BN				9	11		
A≤BNN	21	10	12	20	17		
INNN	29	8	7	3		14	
BBNN		2	1	14	3		
BNNN	21	24	1	20			
NNNN	3	5	1				

Tabla 3.9. Porcentajes (redondeados) de estudiantes de cada curso en cada perfil.

Perfil nº	Niveles 1	2	3	4	Cursos 6º E.G.B.	7º E.G.B.	8º E.G.B.	1º B.U.P.	2º B.U.P.	3º B.U.P.	C.O.U.	Total
1	C	C	A,I	≤I	0 (0'00)	0 (0'00)	1 (1'20)	0 (0'00)	2 (5'56)	1 (3'57)	4 (12'90)	8 (2'59)
2	C	A	I	≤B	0 (0'00)	0 (0'00)	0 (0'00)	0 (0'00)	2 (5'56)	1 (3'57)	3 (9'68)	6 (1'94)
3	C	A	≤B	N	0 (0'00)	3 (4'84)	4 (4'82)	0 (0'00)	0 (0'00)	7 (25'00)	4 (12'90)	18 (5'83)
4	C	I	≤B	N	0 (0'00)	2 (3'23)	9 (10'84)	4 (11'43)	2 (5'56)	2 (7'14)	8 (25'81)	27 (8'74)
5	C	B	B	N	0 (0'00)	0 (0'00)	1 (1'20)	0 (0'00)	3 (8'33)	0 (0'00)	0 (0'00)	4 (1'29)
6	C	≤B	N	N	9 (26'47)	27 (43'55)	48 (57'83)	6 (17'14)	13 (36'11)	12 (42'86)	7 (22'58)	122 (39'48)
7	A	I	≤B	N	0 (0'00)	0 (0'00)	0 (0'00)	3 (8'57)	4 (11'11)	0 (0'00)	0 (0'00)	7 (2'27)
8	A	≤B	N	N	7 (20'59)	6 (9'68)	10 (12'05)	7 (20'00)	6 (16'67)	0 (0'00)	0 (0'00)	36 (11'65)
9	I	N	N	N	10 (29'41)	5 (8'06)	6 (7'23)	1 (2'86)	0 (0'00)	4 (14'29)	0 (0'00)	26 (8'41)
10	B	B	N	N	0 (0'00)	1 (1'61)	1 (1'20)	5 (14'29)	1 (2'78)	0 (0'00)	0 (0'00)	8 (2'59)
11	B	N	N	N	7 (20'59)	15 (24'19)	1 (1'20)	7 (20'00)	0 (0'00)	0 (0'00)	0 (0'00)	30 (9'71)
12	N	N	N	N	1 (2'94)	3 (4'84)	1 (1'20)	0 (0'00)	0 (0'00)	0 (0'00)	0 (0'00)	5 (1'62)
Otros					0 (0'00)	0 (0'00)	1 (1'20)	2 (5'71)	3 (8'33)	1 (3'57)	5 (16'13)	12 (3'88)
TOTALES					34 (100)	62 (100)	83 (100)	35 (100)	36 (100)	28 (100)	31 (100)	309 (100)

C = adquisición completa; A = adquisición alta; I = adquisición intermedia; B = adquisición baja; N = adquisición nula.

Tabla 3.8. Cantidades absolutas (y porcentuales) de estudiantes de cada curso en cada uno de los perfiles definidos.

La observación de las tablas anteriores permite deducir que, de manera global, se ha producido un incremento progresivo en los grados de adquisición de los niveles de Van Hiele a lo largo de los cursos, con una excepción que comentaremos más adelante. Efectivamente, al aplicar el test[1] de Kruskal-Wallis (que analiza 3 ó más muestras independientes, basándose en una anova de 1 factor) al conjunto de los estudiantes desde 6º a C.O.U., se obtiene una diferencia entre los cursos altamente significativa para cada nivel de razonamiento (p=0'00005 de una cola).

En la tabla 3.10 se comparan las medias de los grados de adquisición de cada curso y del siguiente (6º y 7º, 7º y 8º, 8º y 1º, etc.) mediante el test de Mann-Whitney (basado en un análisis de las medias de dos muestras independientes). Al igual que en la tabla 3.7, aquí también llama la atención el retroceso en el grado de adquisición del nivel 1 que se observa al pasar de 8º de E.G.B. a 1º de B.U.P. Creemos que esto se puede deber a que los estudiantes de 1º de B.U.P. no tuvieron bastante tiempo para contestar el test, pues 8 de los 35 estudiantes del grupo dejaron en blanco el último ítem (ítem 7.1) y 4 de ellos dejaron en blanco también el penúltimo (ítem 5), que son 2 de los 3 items que miden el grado de adquisición del nivel 1; además, otros estudiantes contestaron sólo parcialmente el último ítem. La influencia de este defecto en el nivel 2 es menor, ya que todos los items del test medían dicho nivel, y no se aprecia influencia en los niveles 3 y 4. En 2º de B.U.P. se ha producido el mismo fenómeno, si bien bastante más atenuado, cuyas causas son probablemente las mismas que en 1º.

La gráfica 3.10 representa la misma información que la tabla que la acompaña. Uno de los datos que esta gráfica refleja con claridad es la variación de los grados de adquisición de cada nivel a lo largo de los cursos. Vemos que el nivel de razonamiento en el que más progresan los estudiantes es el segundo, pero que por término medio no llegan a obtener una adquisición alta de este nivel. lo cual quiere decir que los estudiantes de estos cursos deberían recibir una instrucción que les ayudara a adquirir completamente el segundo nivel de Van

[1] Para los análisis estadísticos que vamos a hacer en las páginas siguientes, hemos utilizado estadísticos no paramétricos, ya que no tenemos certeza de que los grados de adquisición de cada nivel por los diferentes cursos sigan distribuciones normales. Más bien, la observación de los datos nos hace sospechar lo contrario.

Hiele lo antes posible, para poder empezar a desarrollar la adquisición del tercer nivel.

	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
6º E.G.B.	60'39	7'55	0'33	0'00
7º E.G.B.	69'92*	15'56†	1'05	0'00
8º E.G.B.	87'95†	26'23†	2'55	0'00
1º B.U.P.	65'24†	27'05	6'00†	2'86*
2º B.U.P.	83'10†	36'50*	15'28†	2'50
3º B.U.P.	92'41*	43'32	12'93	2'32
C.O.U.	93'55	55'29*	21'65	2'85

*) Diferencia significativa (p<0'05 de una cola) con el curso anterior.

†) Diferencia significativa (p<0'01 de una cola) con el curso anterior.

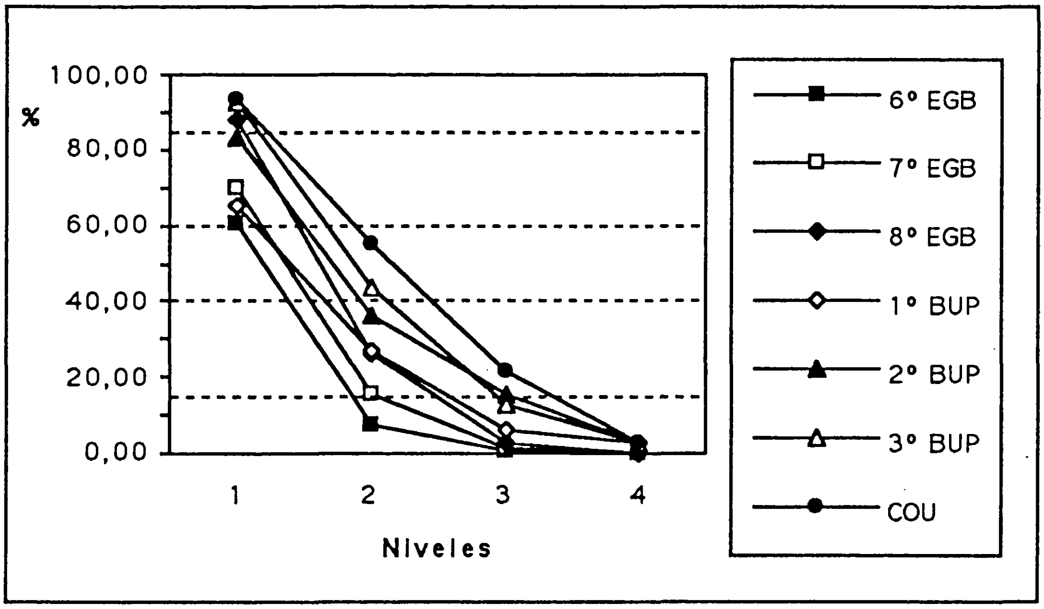


Tabla y gráfica 3.10. Medias de los grados de adquisición de cada nivel de Van Hiele por los estudiantes de los diferentes cursos.

Aunque el Modelo de Van Hiele tiene entre sus características centrales la jerarquía de los niveles de razonamiento, es decir que un estudiante progresará en su capacidad de razonamiento pasando de un nivel al siguiente e iniciando la adquisición del segundo nivel cuando haya adquirido completamente el primero, la realidad de la enseñanza hace que con cierta frecuencia aparezcan situaciones diferentes. En los párrafos anteriores hemos visto los perfiles de adquisición de los niveles más frecuentes entre los estudiantes testados, la mayoría de los cuales se ajustan completamente a la jerarquización propuesta por el modelo. De estos perfiles, aquéllos en los que como máximo hay un nivel con una adquisición incompleta (por ejemplo CCAN, CANN, INNN, etc.) corresponden a 228 estudiantes (73'8%).

Vamos a centrar ahora la atención en los perfiles que contradicen este enunciado de la secuencialidad de los niveles. Hay dos tipos de situaciones claramente diferentes:

1) Estudiantes que muestran una adquisición incompleta de varios niveles de razonamiento, pero siendo el grado de adquisición de cada nivel mayor que el del nivel siguiente. Ejemplos de este tipo son los perfiles CCAI, CAIB, CAIN, AIBN, IBNN, etc. En esta situación se encuentran 59 estudiantes (19'1%). Entre éstos, destacan los perfiles ABNN (con 18 estudiantes), CABN y CIBN (con 12 estudiantes cada uno).

2) Estudiantes que muestran una adquisición incompleta de varios niveles de razonamiento, pero siendo el grado de adquisición de un nivel igual o menor que el del nivel siguiente. Ejemplos de este tipo son los perfiles CCII, CAAI, CABI, CIIN, IANN, BIIN, etc. En esta situación se encuentran 22 estudiantes (7'1%). Entre éstos perfiles destacan BBNN (con 8 estudiantes) y CBBN (con 4 estudiantes).

Los perfiles más atípicos de este grupo son aquéllos en los que el grado de adquisición de un nivel es inferior al del nivel siguiente. En nuestra muestra han aparecido CABI, IANN, BIIN, BIBN y NBNN, con 1 estudiante en cada uno de ellos (1'6% en total), por lo que no suponen una cantidad relevante y podemos considerar que se trata de las anomalías inevitables cuando se trabaja con personas.

Los demás perfiles de este grupo son aquéllos en los que el grado de adquisición de un nivel es igual al del nivel siguiente. Han aparecido 7 de estos perfiles, entre los que destacan BBNN (con 8 estudiantes) y CBBN (con 4); los 5 perfiles restantes tienen 1 estudiante cada uno.

Estudio longitudinal en el Ciclo Superior de E.G.B.

Los estudiantes de cada grupo evaluado han tenido el mismo profesor de Matemáticas en los 3 cursos del Ciclo Superior, por lo que la enseñanza ha sido continua a lo largo del Ciclo, sin los desajustes (omisiones o repeticiones de contenidos) usuales debidos al cambio de profesor. El profesor del grupo evaluado en 6º, 7º y 8º ha sido diferente del profesor del grupo evaluado en 7º y 8º.

Para realizar el segundo de los objetivos planteados en esta sección, hay que observar la adquisición de los niveles de razonamiento por cada alumno en los distintos cursos en los que se le ha evaluado: En 6º, 7º y 8º en un caso y en 7º y 8º en el otro. Las gráficas del anexo VII muestran esas comparaciones.

Como hemos visto en el apartado anterior, en los cursos de E.G.B. no hay presencia significativa del tercer ni el cuarto nivel de razonamiento, por lo que centraremos nuestro análisis de los resultados en los niveles 1 y 2. Las tablas 3.11 y 3.12 presentan un resumen numérico de los resultados en estos cursos.

		Nivel 1		Nivel 2	
Adquis. Completa	7º	17	(51'52)	0	(0'00)
	8º	19	(76'00)	0	(0'00)
Adquis. Alta	7º	3	(9'09)	3	(9'09)
	8º	5	(20'00)	1	(4'00)
Adquis. Intermedia	7º	3	(9'09)	0	(0'00)
	8º	1	(4'00)	5	(20'00)
Adquis. Baja	7º	10	(30'30)	11	(33'33)
	8º	0	(0'00)	13	(52'00)
Adquis. Nula	7º	0	(0'00)	19	(57'58)
	8º	0	(0'00)	6	(24'00)
Media	7º	71'92	alta	18'96	baja
	8º	89'80	compl.	28'23	baja
Desv. Típica	7º	29'94		18'41	
	8º	16'44		15'22	

Tabla 3.11. Resultados de la administración del test en 7º y 8º de E.G.B.

		Nivel 1		Nivel 2	
Adquis. Completa	6º	9	(26'47)	0	(0'00)
	7º	15	(51'72)	0	(0'00)
	8º	17	(62'96)	0	(0'00)
Adquis. Alta	6º	7	(20'59)	0	(0'00)
	7º	3	(10'34)	0	(0'00)
	8º	2	(7'41)	0	(0'00)
Adquis. Intermedia	6º	10	(29'41)	0	(0'00)
	7º	2	(6'90)	2	(6'90)
	8º	6	(22'22)	2	(7'41)
Adquis. Baja	6º	7	(20'59)	7	(20'59)
	7º	6	(20'69)	7	(24'14)
	8º	1	(3'70)	12	(44'44)
Adquis. Nula	6º	1	(2'94)	27	(79'41)
	7º	3	(10'34)	20	(68'97)
	8º	1	(3'70)	13	(48'15)
Media	6º	60'39	nula	7'55	nula
	7º	67'64	alta	11'69	nula
	8º	78'83	alta	18'21	baja
Desv. Típica	6º	26'26		8'54	
	7º	34'41		13'03	
	8º	20'01		14'46	

Tabla 3.12. Resultados de la administración del test en 6º, 7º y 8º de E.G.B.

En cuanto a los perfiles de los estudiantes de estos cursos, están recogidos en la tabla 3.13. Si comparamos esta tabla con la 3.9, podemos apreciar que en E.G.B. no están presentes los perfiles correspondientes a las mejores formas de razonamiento. También se aprecia una mejora en el nivel de razonamiento de los estudiantes a lo largo de los años, como lo prueba que el porcentaje de estudiantes con los perfiles de razonamiento superiores va creciendo al ir subiendo de curso.

Perfil	Grupo de 6º, 7º y 8º			Grupo de 7º y 8º	
	6º E.G.B.	7º E.G.B.	8º E.G.B.	7º E.G.B.	8º E.G.B.
CA≤BN				9	4
CI≤BN		7	7		20
C≤BNN	26	45	56	42	52
A≤BNN	21	10	7	9	20
I≤BNN	29	7	22	9	4
B≤BNN	21	21	4	27	
NNNN	3	10	4		

Tabla 3.13. Porcentajes (redondeados) de estudiantes de E.G.B. en cada perfil.

La cuestión principal que hay que analizar es si ha habido progreso en los niveles de razonamiento de los estudiantes a lo largo de los 3 (2) años observados. Para ello hemos utilizado el test de Friedman (que analiza 3 ó más[1] muestras emparejadas basándose en una anova de 2 factores) para el grupo de 6º, 7º y 8º y el test de Wilcoxon (basado en un análisis de las medias de 2 muestras emparejadas) para el grupo de 7º y 8º. Aunque al hacer análisis globales de los cursos hemos utilizado todos los alumnos disponibles, en estos dos análisis se eliminan los estudiantes que han dejado de contestar el test en alguno de los cursos (el programa de ordenador utilizado hace esta eliminación automáticamente), por lo que las muestras válidas han sido de 25 estudiantes en cada grupo.

En ambos grupos se obtiene una diferencia global entre los cursos significativa para los niveles de Van Hiele 1 ($p<0'01$ de una cola) y 2 ($p<0'0005$ de una cola). En cuanto a los niveles 3 y 4, los grados de adquisición de casi todos los estudiantes son cero, por lo que no tiene sentido hacer ningún análisis estadístico. Por lo tanto, a lo largo de los 3 (2) años de 6º, 7º y 8º (7º y 8º) sí ha habido un progreso significativo en la adquisición de los niveles 1 y 2 pero no ha habido progreso significativo en la adquisición de los niveles 3 y 4.

El análisis de las correlaciones entre los grados de adquisición obtenidos por los estudiantes en los cursos sucesivos corrobora la conclusión anterior pues, como se observa en la tabla siguiente, se obtienen en casi todos los casos valores

[1] En Systat se puede usar el test de Friedman sólo con 2 muestras. En el caso de 7º y 8º, el resultado es análogo al del test de Wilcoxon.

altos del coeficiente de correlación de Spearman (tabla 3.14). Los valores más bajos de este coeficiente corresponden al primer nivel de razonamiento, cosa razonable ya que la mayoría de los estudiantes tienen una adquisición alta o completa de este nivel, por lo que el incremento a lo largo de los cursos es menor.

	6º E.G.B.		7º E.G.B.		8º E.G.B.	
	Niv. 1	Niv. 2	Niv. 1	Niv. 2	Niv. 1	Niv. 2
6º E.G.B.	1'000	1'000				
7º E.G.B.	0'546	0'596	1'000	1'000		
8º E.G.B.	0'455	0'693	0'329	0'634	1'000	1'000

	7º E.G.B.			8º E.G.B.		
	Niv. 1	Niv. 2	Niv. 3	Niv. 1	Niv. 2	Niv. 3
7º E.G.B.	1'000	1'000	1'000			
8º E.G.B.	0'691	0'755	0'834	1'000	1'000	1'000

Tabla 3.14. Matrices de coeficientes de correlación de Spearman entre los grados de adquisición de cada nivel en años sucesivos.

Otra cuestión que es útil analizar es si hay diferencias significativas entre los distintos grupos de cada curso (los 2 grupos de 7º ó los 3 grupos de 8º); de existir, se puede pensar en una diferencia de conocimientos o capacidad matemática entre los estudiantes de los diferentes grupos, en una metodología diferente de enseñanza, debido a que los profesores son distintos, o a ambos factores.

En nuestro estudio no hemos podido llevar a cabo una comprobación sobre posibles diferencias iniciales en cuanto a conocimientos o capacidad matemática entre los estudiantes de los diferentes grupos. Claramente, el análisis que presentamos sería más fiable si se dispusiera de tal información. De todas maneras, tal como señalamos en algún momento, pretendemos mostrar un ejemplo de aplicaciones del método de evaluación que proponemos, y no generalizar los resultados que obtengamos de este análisis a todo el colectivo de estudiantes. Así pues, asumimos la hipótesis de que el conocimiento y las capacidades iniciales de los alumnos son los mismos en todos los grupos. Ello conduce a que, en caso de aparecer diferencias, éstas se deberían fundamentalmente a los diferentes profesores y, por lo tanto, métodos de enseñanza.

Para analizar la existencia de diferencias entre los grados de adquisición de los niveles de Van Hiele por los estudiantes de los 2 grupos de 7º de E.G.B. o de los 3 grupos de 8º de E.G.B. que hemos testado, por tratarse ahora de muestras independientes hemos utilizado el test de Mann-Whitney en 7º y el test de Kruskal-Wallis, extensión del anterior, en 8º. Los resultados obtenidos son los siguientes:

- No hay diferencia significativa ($p>0'05$ de dos colas) entre los 2 grupos de estudiantes de 7º de E.G.B. en ningún nivel de razonamiento.

- Sí hay diferencia significativa entre los 3 grupos de estudiantes de 8º de E.G.B. en los niveles 1 ($p<0'0005$ de dos colas) y 2 ($p<0'05$), pero no la hay en los niveles 3 ni 4 ($p>0'1$). Estas diferencias se deben al grupo testado en 1992, cuyas medias de los grados de adquisición de dichos niveles son significativamente inferiores a las de los grupos de 8º de los años 1990 y 1991.

CAPÍTULO 4: RESUMEN FINAL Y CONCLUSIONES

CAPÍTULO 4: RESUMEN FINAL Y CONCLUSIONES

En esta memoria hemos presentado varias contribuciones originales que afectan al modelo de razonamiento de Van Hiele. Las podemos dividir en dos partes, que corresponden a los contenidos de los capítulos 2 y 3, respectivamente: A) Una contribución a la aplicación del Modelo de Van Hiele a la enseñanza de la Geometría, mediante el diseño de una unidad de enseñanza de las Isometrías del Plano, y B) una contribución al desarrollo de la metodología de investigación sobre el Modelo de Van Hiele, mediante la caracterización del proceso continuo de adquisición de un nivel de razonamiento y la definición de un método para determinar el grado de adquisición de los niveles de Van Hiele por los estudiantes.

A) Como aportaciones prácticas, en esta memoria hemos dedicado un capítulo a desarrollar una propuesta concreta de enseñanza de las Isometrías del Plano, basada en el Modelo de Van Hiele y siguiendo las secuencias de los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje propuestas en este modelo.

En el capítulo 2 hemos expuesto nuestra visión particular sobre la forma de considerar las fases de aprendizaje de Van Hiele, que facilitan la organización de secuencias concretas de enseñanza. Hemos traducido a la realidad escolar las ideas expuestas en el modelo, puestas en práctica mediante la presentación detallada de una unidad de enseñanza formada por tres partes, centrada cada una de ellas en la enseñanza de las traslaciones, los giros y las simetrías, respectivamente.

Cada una de estas partes está dividida en bloques de actividades correspondientes a los niveles 1, 2 y 3 de Van Hiele y, a su vez, organizados de acuerdo con la secuencia de fases de aprendizaje. El resultado final son conjuntos de actividades, cada uno de los cuales tiene planteados sus objetivos específicos, que guardan una estrecha relación con el nivel de razonamiento y la fase de aprendizaje correspondiente para los que están diseñadas las actividades.

Otro aspecto de esta unidad en el que se refleja la influencia del Modelo de Van Hiele es la relación entre las diferentes isometrías durante su enseñanza: En las actividades del primer nivel de razonamiento, traslaciones, giros y simetrías se presentan como movimientos completamente independientes de los demás. Pero en las actividades del segundo nivel se presentan las relaciones básicas entre los tres movimientos, trabajo que se completa en las actividades del tercer nivel, que estudian con detalle las relaciones lógicas entre las isometrías o sus composiciones. De esta manera se sientan las bases para poder construir y entender la estructura algebraica del conjunto de las Isometrías del Plano, trabajo que, por su complejidad y abstracción, se debe completar cuando los estudiantes estén avanzando en la adquisición del cuarto nivel de razonamiento.

B) Como aportaciones más teóricas, en el capítulo 3 hemos presentado algunas reflexiones sobre diversas componentes centrales del Modelo de Van Hiele:

- Sobre la continuidad en la adquisición de los niveles de razonamiento, hemos partido de la idea de que la adquisición de un nivel de razonamiento es un proceso continuo que se prolonga en el tiempo y nuestra aportación ha consistido en proporcionar una interpretación de dicho proceso en términos del Grado de Adquisición de cada uno de los niveles. Esto supone un gran giro respecto a las visiones anteriores, en las que sólo se tenían en cuenta los estudiantes que mostraban un razonamiento homogéneo y uniforme, coherente con un determinado nivel de Van Hiele.

- Por lo que respecta a la evaluación del nivel de razonamiento de los estudiantes, la propuesta que formulamos permite traducir las actuaciones de los estudiantes en términos de consolidación de los niveles de razonamiento. A través de los Tipos de Respuesta, podemos analizar las respuestas de los estudiantes a cualquier test (oral o escrito) de respuesta libre, lo cual incrementa en gran medida la objetividad y la precisión de la evaluación respecto a los métodos anteriores, los cuales tenían como único objetivo asignar el nivel al que correspondiera el razonamiento predominante de los estudiantes.

- Como complemento a las propuestas anteriores, la forma de diseñar items escritos que sugerimos es también una idea original, que consigue acercar la estructura escrita a la oral, con el consiguiente incremento de información que se puede obtener sobre el razonamiento de los estudiantes a partir de sus respuestas.

- Finalmente, hemos aplicado las ideas resumidas en los párrafos precedentes mediante su utilización en dos situaciones en las que se muestran de forma práctica dicha ideas: El análisis de la evolución del razonamiento de estudiantes desde 6º de E.G.B. hasta C.O.U. y el seguimiento del razonamiento de dos grupos de estudiantes durante varios cursos del Ciclo Superior de E.G.B.; en concreto hemos evaluado el nivel de razonamiento de un grupo al finalizar 6º, 7º y 8º de E.G.B. y del otro grupo al finalizar 7º y 8º de E.G.B. Los datos obtenidos indican que los estudiantes mejoran en su nivel de razonamiento a lo largo del Ciclo Superior de E.G.B. y la Enseñanza Media, pero que esta mejora es mucho menor de lo que sería deseable, pues al terminar C.O.U. son pocos los estudiantes que han adquirido completamente el segundo nivel de Van Hiele y muchos menos los que muestran siquiera una adquisición baja del tercer nivel. No obstante, no hemos pretendido generalizar los resultados obtenidos a los niveles educativos correspondientes, puesto que la finalidad no era ésta.

Resumiendo lo anterior, pensamos que en esta tesis doctoral se contemplan ideas originales que pueden afectar positivamente a la comprensión del Modelo de Van Hiele y a su aplicación, las cuales suponen un paso hacia adelante en las herramientas de que se disponen como material para mejorar la educación matemática.

Trabajo futuro

No obstante, somos conscientes del trabajo que queda por hacer y de las carencias o defectos de las propuestas que presentamos. Algunas propuestas para un trabajo futuro son:

- Implementar suficientes actividades para la enseñanza de las Isometrías del Plano, a partir de los modelos de ejercicios que se proponen en esta tesis, de manera que constituyan la unidad de enseñanza para aplicar en las aulas de Enseñanza Primaria y Secundaria.

- Diseñar unidades de enseñanza sobre otros temas tomando como fundamento el los niveles de razonamiento y las fases de enseñanza del Modelo de Van Hiele.

- Usar el método de evaluación que proponemos para hacer estudios sobre el nivel de razonamiento matemático de colectivos de estudiantes (comparaciones entre distintos colectivos, progreso de los mismos individuos, ...). Esto, de hecho, ya ha empezado a realizarse, pues sabemos de estudiantes de doctorado de varios países que han utilizado o están utilizando dicho método de evaluación en sus investigaciones.

- Estudiar la conveniencia o no de modificar alguno de los Tipos de respuesta definidos en el capítulo 2. Asimismo, analizar qué valores de porcentaje son los más adecuados para la ponderación de los diferentes Tipos de respuesta.

- Diseñar tests escritos de respuesta libre para evaluar el nivel de razonamiento de los estudiantes en distintos campos o conceptos geométricos. Estos tests deben cumplir los requisitos de fiabilidad y validez y deben ser cómodos de administrar a colectivos grandes.

REFERENCIAS

REFERENCIAS

Bobango, J.C. (1987): *Van Hiele levels of geometric thought and student achievement in standard content and proof writing: The effect of phased-based instruction.* (Univ. Microfilms: Ann Arbor, EE.UU.).

Burger, W.F.; Shaughnessy, J.M. (1986): Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry, *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 17 n° 1, pp. 31-48.

Burger, W.F.; Shaughnessy, J.M. (1990): *Assessing children's intellectual growth in geometry* (final report). (Oregon State University: Corvallis, EE.UU.).

Clements, D.H. (1992): Elaboraciones sobre los niveles de pensamiento geométrico, en *Gutiérrez, A. (1992): Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría.* (CINVESTAV-PNFAPM: México), pp. 16-43.

Clements, D.H.; Battista, M.T. (1988): *A Logo-based elementary school geometry curriculum,* manuscrito.

Clements, D.H.; Battista, M.T. (1992): Geometry and spatial reasoning, en *Grouws, D.A. (1992): Handbook of research on mathematics teaching and learning.* (Macmillan: N. York), pp. 420-464.

Corberán, R. y otros (1989): *Didáctica de la geometría: Modelo de Van Hiele.* (Universitat de València: Valencia).

Crowley, M.L. (1987): The Van Hiele Model of the development of geometric thought, en *N.C.T.M. (1987): Learning and teaching geometry, K-12* (1987 Yearbook). (N.C.T.M.: Reston, EE.UU.), pp. 1-16.

Crowley, M.L. (1989): *The design and evaluation of an instrument for assessing mastery Van Hiele levels of thinking about quadrilaterals* (Univ. Microfilms: Ann Arbor, EE.UU.).

Crowley, M.L. (1990): Criterion-referenced reliability indices associated with the Van Hiele geometry test, *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 21 n° 3, pp. 238-241.

Denis, L.P. (1987): *Relationships between stage of cognitive development and Van Hiele level of geometric thought among Puerto Rican adolescents.* (Univ. Microfilms: Ann Arbor, EE.UU.).

Fortuny, J.M. (1988): *Avaluació de la jerarquia de les habilitats de percepció espacial estructural.* (CIRIT: Barcelona).

Fortuny, J.M.; Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1988): *Van Hiele levels and visualization in three dimensions,* texto de la ponencia presentada en el Topic Group "Visualization" del 6º I.C.M.E., manuscrito.

Freudenthal, H. (1973): *Mathematics as an educational task.* (D. Reidel: Dordrecht).

Fuys, D. (1987): *Comunicación personal.*

Fuys, D.; Geddes, D.; Tischler, R. (1984): *English translations of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele.* (School of Education, Brooklyn College: N. York).

Fuys, D.; Geddes, D.; Tischler, R. (1988): *The Van Hiele Model of thinking in geometry among adolescents* (Journal for Research in Mathematics Education Monograph n° 3). (N.C.T.M.: Reston, EE.UU.).

Generalitat Valenciana (1990): *Diseño Curricular Base. Secundaria Obligatoria. Area de Matemáticas.* (Cons. de Cultura, Ed. i Ciencia: Valencia).

Grenier, D. (1988): *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième* (tesis doctoral). (Univ. J. Fourier, Grenoble I: Grenoble).

Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1986): *Traslaciones, giros y simetrías en el plano* (Monografía de "Papeles de Enseñanza de las Matemáticas" nº 2). (E.U. del Profesorado de E.G.B.: Valencia).

Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1987 a): Estudio sobre la adquisición del concepto de simetría, *Enseñanza de las Ciencias* n° extra, pp. 365-366.

Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1987 b): Estudio de las características de los niveles de Van Hiele, en *Proceedings of the XI International Conference for the P.M.E.* vol. 3, pp. 131-137.

Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1988): Errors when drawing symmetries, en *Compte Rendu de la 39e Rencontre Internationale de la C.I.E.A.E.M.,* pp. 400-404.

Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1989): Bibliografía sobre el Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, *Enseñanza de las Ciencias* vol. 7 n° 1, pp. 89-95.

Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1991): El Modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría. Un ejemplo: Los giros, *Educación Matemática* vol. 3 n° 2, pp. 49-65.

Gutiérrez, A.; Jaime, A.; Fortuny, J.M. (1991): An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels, *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 21 n° 3, pp. 237-251.

Gutiérrez, A.; Jaime, A.; Shaughnessy, J.M.; Burger, W.F. (1991): A comparative analysis of two ways of assessing the Van Hiele levels of thinking, en *Proceedings of the 15th P.M.E. Conference* vol. 2, pp. 109-116.

Gutiérrez, A. y otros (1991): *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en Enseñanza Media basada en el Modelo de razonamiento de Van Hiele* (Memoria final del Proyecto de Investigación). (C.I.D.E.: Madrid).

Hart, K. (1980): *Secondary school children's understanding of ratio and proportion.* (British Thesis Library: Londres).

Hershkowitz, R. (1990): Psychological aspects of learning geometry, en *Nesher, P.; Kilpatrick, J. (1990): Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (Cambridge U.P.: Cambridge, G.B.), pp. 70-95.

Hoffer, A. (1981): Geometry is more than proof, *The Mathematics Teacher* vol. 74 n° 1, pp. 11-18.

Hoffer, A. (1983): Van Hiele-based research, en *Lesh, R.; Landau, M. (1983): Acquisition of mathematics concepts and processes.* (Academic Press: N. York), pp. 205-227.

Jaime, A. (1992): La organización de una secuencia de enseñanza en geometría según el Modelo de Van Hiele, en *Gutiérrez, A. (1992): Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría.* (CINVESTAV-PNFAPM: México), pp. 60-75.

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1989 a): The learning of plane isometries from the viewpoint of the Van Hiele Model, en *Actes de la 13e Conférence Internationale de Psychology for Mathematics Education* vol. 2, pp. 131-138.

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1989 b): *Diseño de un programa de enseñanza progresiva de las isometrías del plano en E.G.B.* (Memoria final del Proyecto de Investigación). (Conselleria de Cultura, Ed. i C.: Valencia).

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1990 a): Study of the degree of acquisition of the Van Hiele levels by secondary school students, en *Proceedings of the 14th International Conference of the P.M.E.* vol. 2, pp. 251-258.

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1990 b): Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El Modelo de Van Hiele, en *Llinares, S.;*

Sánchez, M.V. (1990): Teoría y práctica en educación matemática (colección "Ciencias de la Educación" nº 4). (Alfar: Sevilla), pp. 295-384.

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1990 c): *La evaluación del nivel de razonamiento de Van Hiele a través de tests escritos de respuesta libre,* texto de la comunicación presentada al I C.I.B.E.M. (Sevilla, 1990), manuscrito.

Jaime, A. y otros (1989): Introduciendo los giros del plano en E.G.B., *Suma* vol. 1 nº 2, pp. 55-59.

Johnson-Gentile, K. (1990): *The effects of computer and non-computer environments on fifth and sixth-grade students' conceptualizations of geometric motions (fifth-grade).* (Univ. Microfilm: Ann Arbor, EE.UU.).

Küchemann, D. (1981): Reflections and rotations, en *Hart, K. (1981): Children's understanding of mathematics: 11-16.* (John Murray: Londres), pp. 137-157.

Ludwig, S.C. (1986): *Indicators of growth within a logo/motion geometry curriculum environment* (tesis doctoral). (Univ. of Alberta: Canadá).

Martin, G.E. (1982): *Transformation geometry.* (Springer Verlag: Berlín).

Mayberry, J. (1981): *An investigation of the Van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers.* (Univ. Microfilms: Ann Arbor, EE.UU.).

Mayberry, J. (1983): The Van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers, *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 14 nº 1, pp. 58-69.

M.E.C. (1989): *Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria II.* (M.E.C.: Madrid).

Moyer, J.C. (1974): *An investigation into the cognitive development of euclidean transformations in young children.* (Univ. Microfilms: Ann Arbor, EE.UU.).

Moyer, J.C. (1978): The relationship between the mathematical structure of euclidean transformations and the spontaneously developed cognitive structures of young children, *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 9 nº 2, pp. 83-92.

N.C.T.M. (1989): *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* (N.C.T.M.: Reston, EE.UU.). (Traducido al español por la S.A.E.M. Thales).

Olson, A.T.; Kieren, T.E.; Ludwig, S. (1987): Linking logo, levels and language in mathematics, *Educational Studies in Mathematics* vol. 18, pp. 359-370.

Pyskalo, A.M. (1968): *Geometry in grades 1-4 (problems in the formation of geometric conceptions in pupils in the primary grades)* (Traducción por A. Hoffer). (Prosveshchenie Publishing House: Moscú).

Schultz, K.A. (1977): *Variables influencing the difficulty of rigid transformations during the transition between the concrete and formal operational stages of cognitive development* (tesis doctoral). (Univ. Microfilms: Ann Arbor, EE.UU.).

Schultz, K.A. (1978): Variables influencing the difficulty of rigid transformations during the transition between the concrete and formal operational stages of cognitive development, en *Lesh, R.; Mierkiewicz, D. (1978): Recent research concerning the development of spatial and geometrical concepts.* (ERIC: Columbus, EE.UU.), pp. 195-211.

Shaughnessy, J.M.; Burger, W.F.; Gutiérrez, A.; Jaime, A.; Fuys, D. (1991): Analyzing and describing students' thinking in geometry: Continuity in the Van Hiele levels, en *Proceedings of the 13th Annual Meeting of the P.M.E.-N.A.* vol. 1, pp. 183-188.

Soon, Y.-P. (1989): *An investigation of Van Hiele-like levels of learning in transformation geometry of secondary school students in Singapore.* (Univ. Microfilms: Ann Arbor, EE.UU.).

Treffers, A. (1987): *Three dimensions (a model of goal and theory description in mathematics instruction - the Wiskobas Project).* (D. Reidel: Dordrecht).

Usiskin, Z. (1982): *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry.* (ERIC: Columbus, EE.UU.).

Usiskin, Z.; Senk, S. (1990): Evaluating a test of Van Hiele levels: A response to Crowley and Wilson, *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 21 n° 3, pp. 242-245.

Van Hiele, P.M. (1957): *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría)* (tesis doctoral). (Universidad de Utrecht: Utrecht, Holanda). (Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991).

Van Hiele, P.M. (1959): La pensée de l'enfant et la géométrie, *Bulletin de l'A.P.M.E.P.* n° 198, pp. 199-205. (Traducción al inglés en *Fuys; Geddes; Tischler (1984)*, pp. 243-252).

Van Hiele, P.M. (1986): *Structure and insight. A theory of mathematics education.* (Academic Press: Londres).

Van Hiele-Geldof, D. (1957): *The didactics of geometry in the lowest class of Secondary School* (tesis doctoral). (Universidad de Utrecht: Utrecht, Holanda). (Traducción al inglés en *Fuys; Geddes; Tischler (1984)*, pp. 1-206).

Vinner, S.; Hershkowitz, R. (1983): On concept formation in geometry, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* vol. 83 n° 1, pp. 20-25.

Walter, M.I. (1973): *Entdecke neue bilder.* (Annette Verlag: Alemania).

Wilson, M. (1990): Measuring a Van Hiele geometry sequence: A reanalysis, *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 21 n° 3, pp. 230-237.

Wirszup, I. (1976): Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry, en *Martin, J.L.; Bradbard, D.A. (1976): Space and geometry*. (ERIC: Columbus, EE.UU.), pp. 75-97.

Matemáticas

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Departament de Didàctica de la Matemàtica

APORTACIONES A LA INTERPRETACIÓN Y APLICACIÓN DEL MODELO DE VAN HIELE: LA ENSEÑANZA DE LAS ISOMETRÍAS DEL PLANO. LA EVALUACIÓN DEL NIVEL DE RAZONAMIENTO.

SEGUNDA PARTE

Memoria presentada por Dña. ADELA JAIME PASTOR
para optar al Grado de DOCTOR EN MATEMÁTICAS
Dirigida por el Dr. D. ÁNGEL GUTIÉRREZ RODRÍGUEZ

Valencia, septiembre de 1993

ANEXO I: RESUMEN DE LA EXPERIMENTACIÓN DE LA UNIDAD DE ENSEÑANZA DE LAS TRASLACIONES

ANEXO I: RESUMEN DE LA EXPERIMENTACIÓN DE LA UNIDAD DE ENSEÑANZA DE LAS TRASLACIONES

RESUMEN DE LA EXPERIMENTACIÓN EN 3º DE E.G.B.

Listado de las actividades experimentadas.

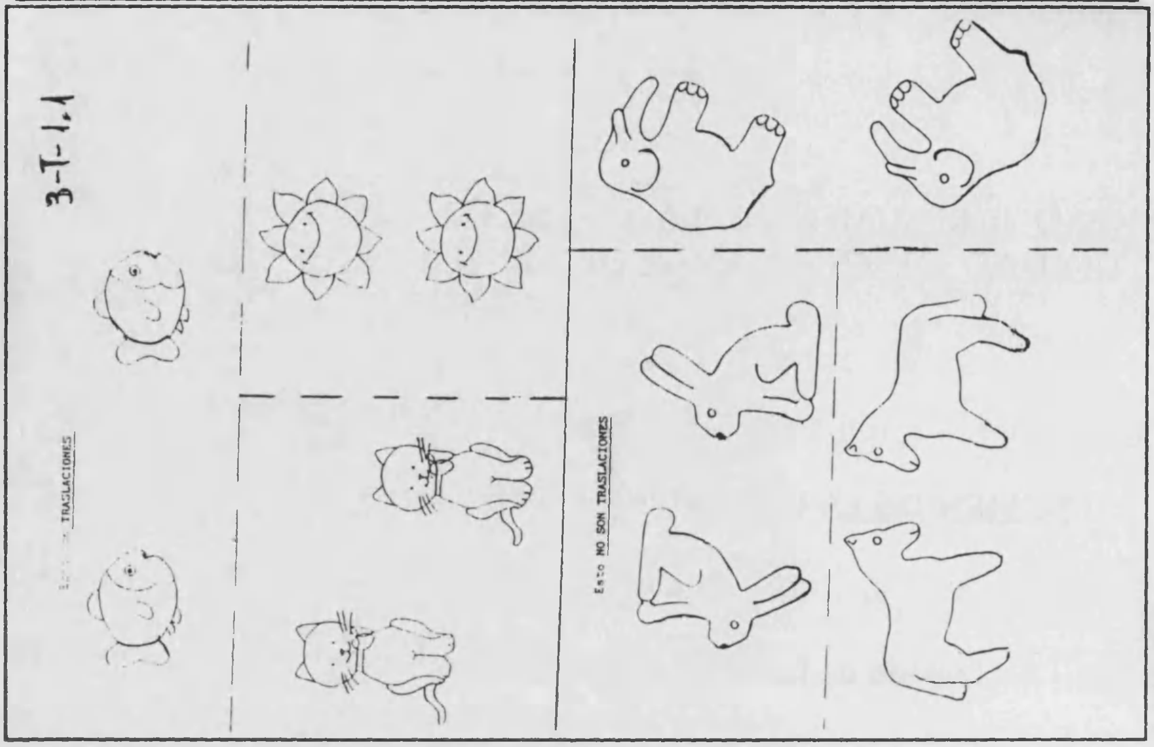
Láminas: 3-T-1.1, 3-T-1.2, 3-T-1.3 y 3-T-1.4.
Objetivos: Introducir las traslaciones estática y dinámicamente.
Actividad 1: Observar figuras trasladadas y no trasladadas.

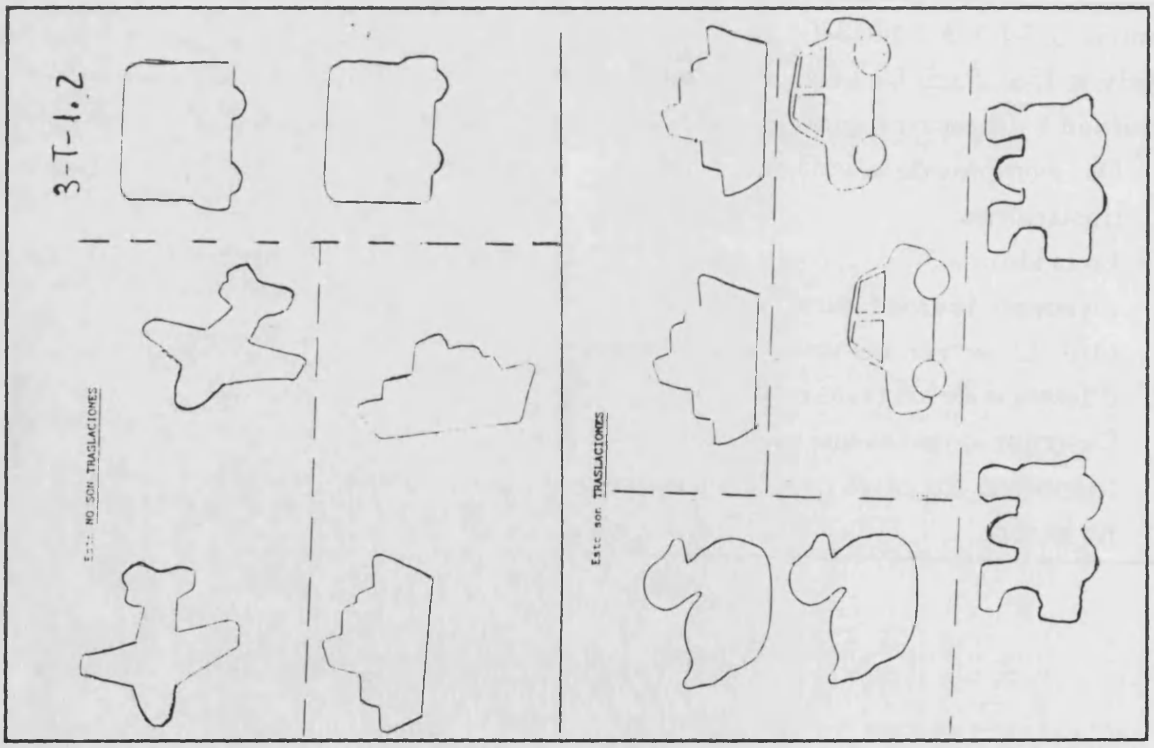
Dar ejemplos de la vida real e indicar si ciertos ejemplos de la vida real son traslaciones.

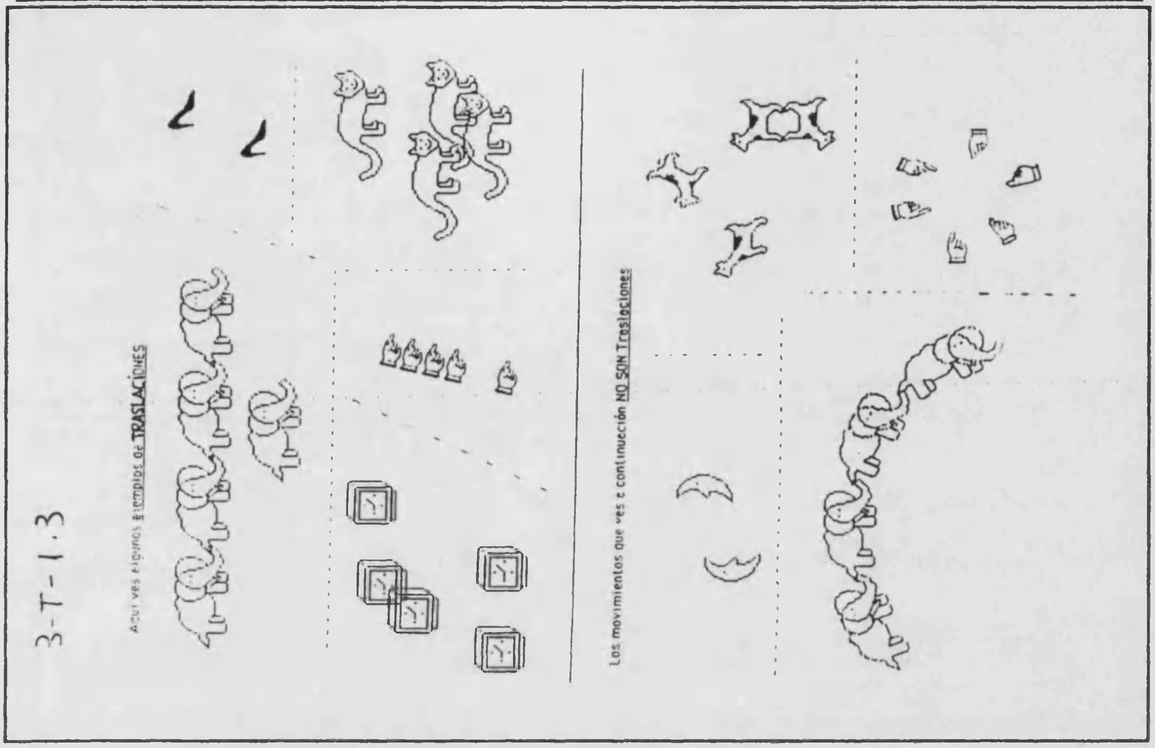
En la lámina 3-T-1.2, coger un objeto igual a uno de los dibujados (los niños disponen de esas figuras) y colocarlo encima del dibujo. Desplazarlo hasta el otro. Observar cómo es el movimiento en las traslaciones y lo que lo diferencia de los casos en que no hay traslaciones.

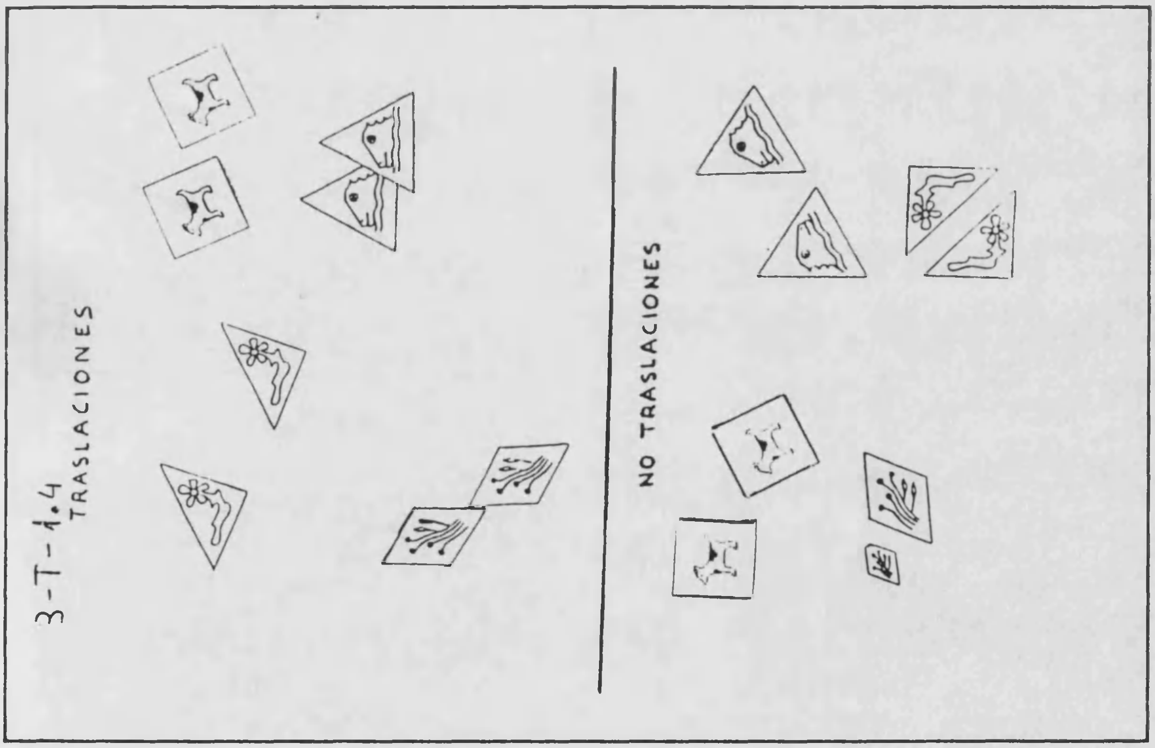
Describir lo que es una traslación.

Identificar los casos que no corresponden a traslaciones y explicar por qué no lo son.


3-T-1.1
Esto son TRASLACIONES
Esto NO SON TRASLACIONES


3-T-1.2
Esto NO SON TRASLACIONES
Esto son TRASLACIONES


3-T-1.3
Aquí ves algunos ejemplos de TRASLACIONES
Los movimientos que ves a continuación NO SON Traslaciones

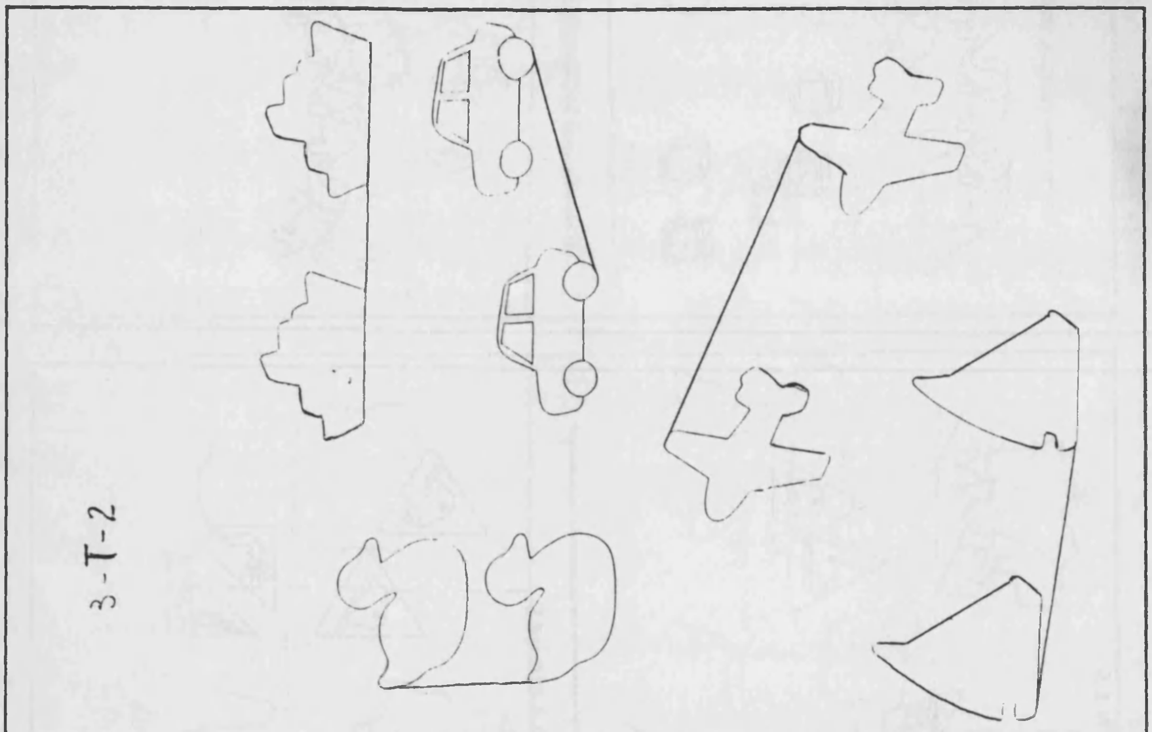

3-T-1.4
TRASLACIONES
NO TRASLACIONES

Láminas: 3-T-2.

Objetivos: Fomentar la visión dinámica de la traslación.

Desarrollar la característica de invarianza de la inclinación de una figura por una traslación.

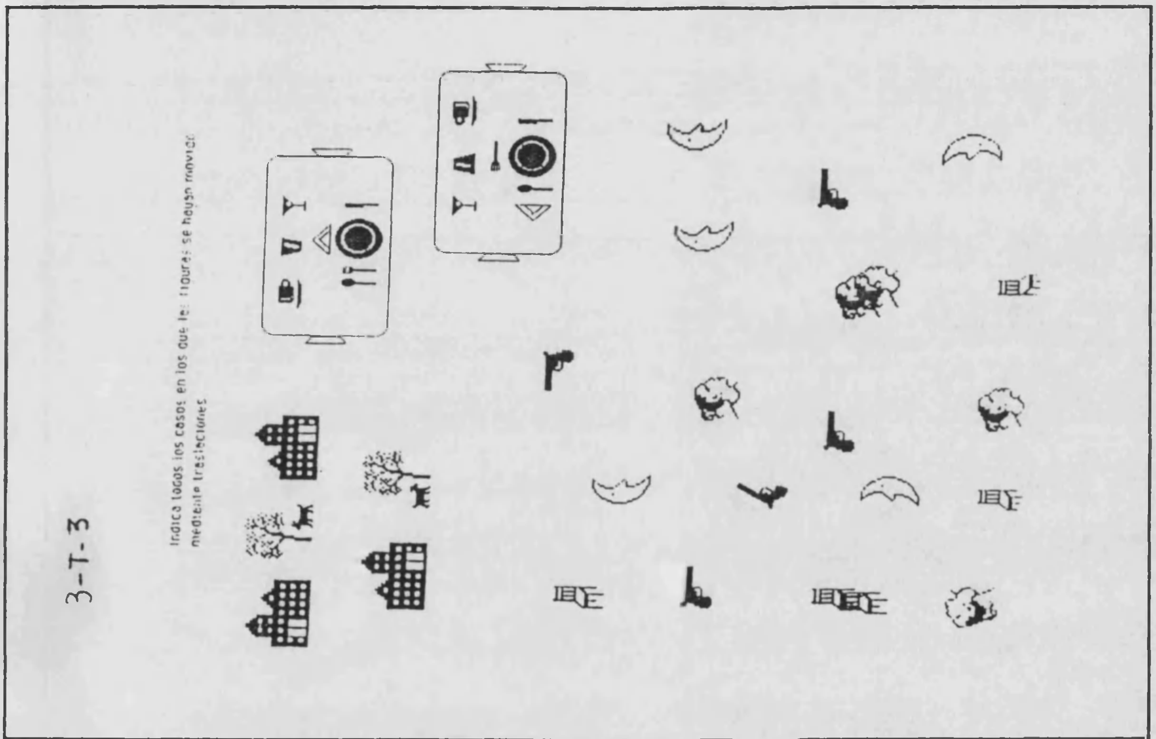
Actividad 2: Colocar una regla con el borde por la línea que va de una figura a la otra. Situar un objeto igual a esas figuras encima de una de ellas. Desplazar el objeto hasta el otro, apoyándolo de alguna manera en el borde de la regla. Trazar alguna otra línea que sea válida como camino de desplazamiento.



Láminas: 3-T-3.

Objetivos: Afianzar el reconocimiento visual de las traslaciones.

Actividad 3: Identificar los objetos que se corresponden mediante una traslación. Realizar físicamente el desplazamiento de una figura a otra en los casos afirmativos. Justificar estática y dinámicamente por qué sí o no hay traslación.



Láminas: 3-T-4.

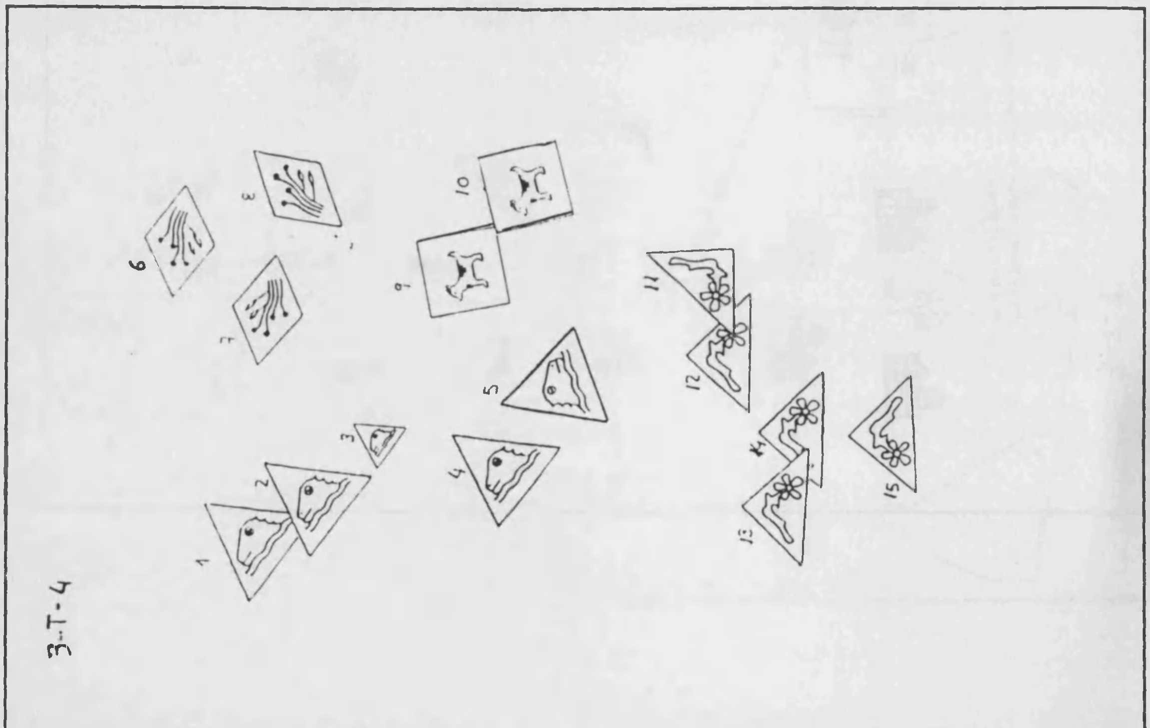
Objetivos: Utilizar técnicas estáticas (visuales) y dinámicas (desplazamientos) para identificar las traslaciones.

Pre-introducción de la visión de puntos que se corresponden por la traslación, a partir de la consideración dinámica (movimiento) y la estática (el mismo punto en relación con el resto de la figura).

Actividad 4: Reconocer las figuras trasladadas entre sí, estática y dinámicamente, realizando físicamente el desplazamiento.

Dibujar varias "líneas de traslación" para el mismo par de figuras.

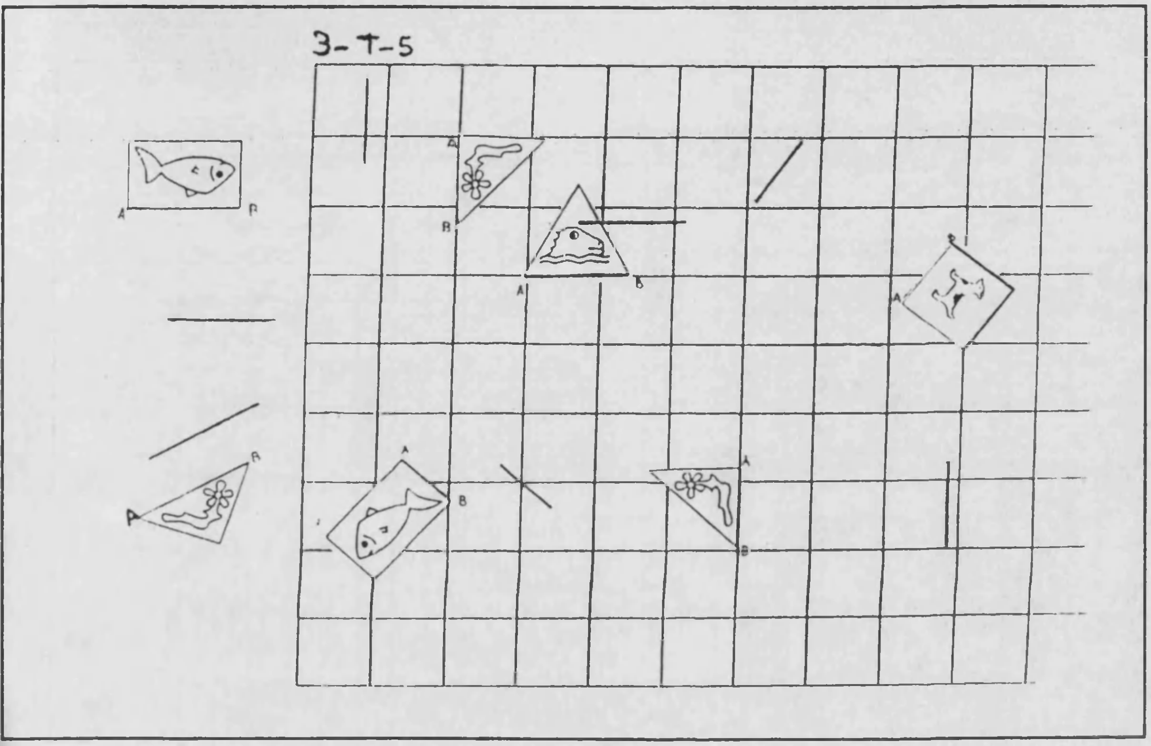
Elegidas una figura y su trasladada, averiguar dónde van a situarse los vértices y algunos puntos interiores de la figura original.



Láminas: 3-T-5.

Objetivos: Incidir en la invarianza de inclinación de una figura como el efecto característico de las traslaciones sobre las figuras.

Actividad 5: Trasladar las figuras para que el lado correspondiente se coloque sobre el segmento.

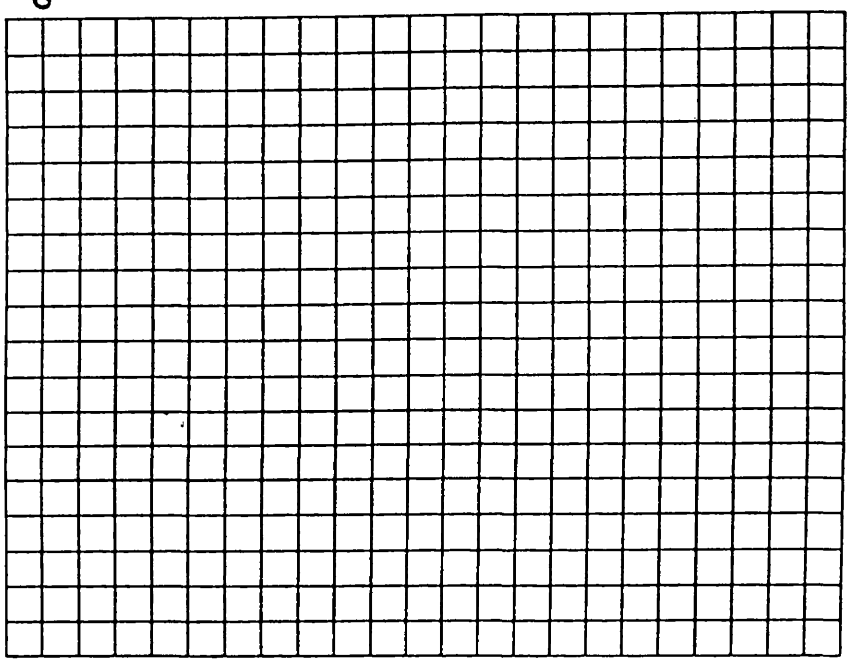


Láminas: 3-T-6.

Objetivos: Desarrollar y utilizar la característica de las traslaciones de mantener el paralelismo de segmentos.

Actividad 6: El trabajo se lleva a cabo por parejas de niños. El ejercicio es análogo al anterior (actividad 5), pero ahora, por turnos, uno de los niños es el que sitúa la figura y el segmento y el otro niño lo resuelve.

3-T-6



Láminas: 3-T-7.

Objetivos: Aplicar la invarianza de inclinación de una figura por una traslación.

Comprender cuáles son los puntos que se corresponden, por una traslación, entre dos figuras iguales.

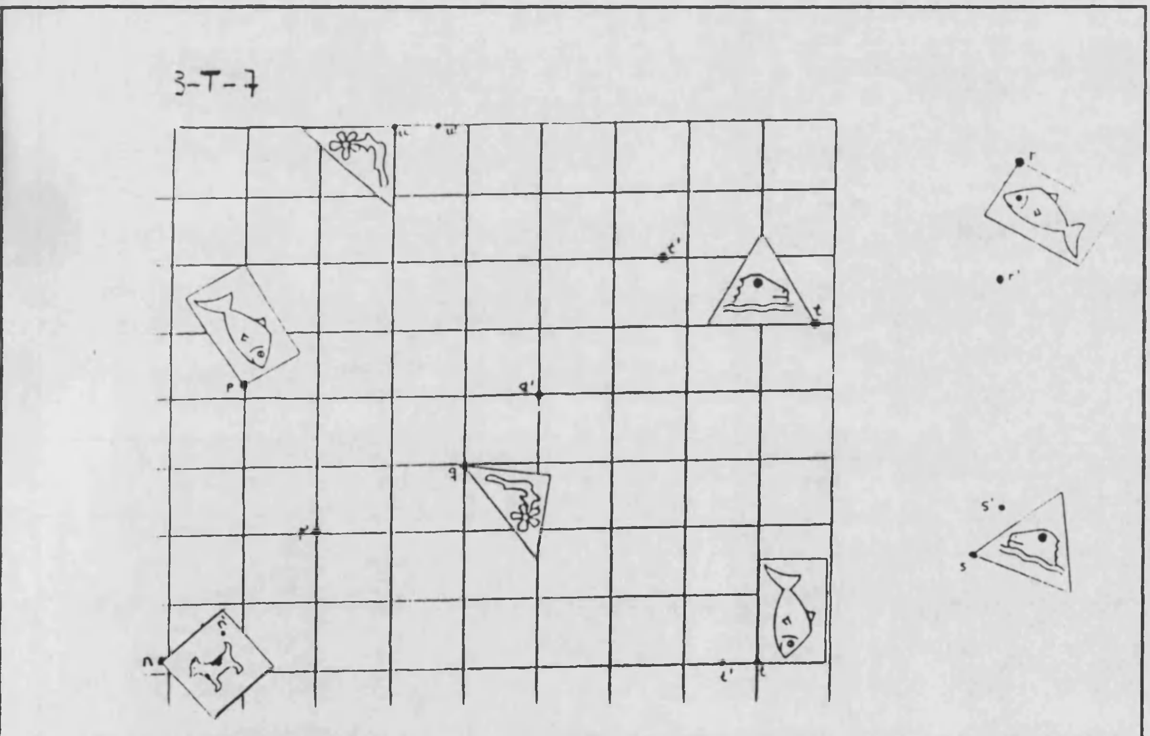
Averiguar si los alumnos comprenden que se puede determinar la imagen de cualquier punto si se conoce un punto y su imagen. O sea, detectar si los alumnos reconocen que por paralelismo y midiendo las distancias entre un punto y su imagen se puede obtener la imagen de cualquier otro punto.

Actividad 7: Trasladar la figura de manera que el vértice indicado se sitúe en el punto marcado (siempre es exterior a la figura).

Una vez resuelto el ejercicio anterior, pintar con el mismo color los puntos que son iguales de la figura que había dibujada y de la que se acaba de colocar y trazar una línea entre esos puntos, de su mismo color.

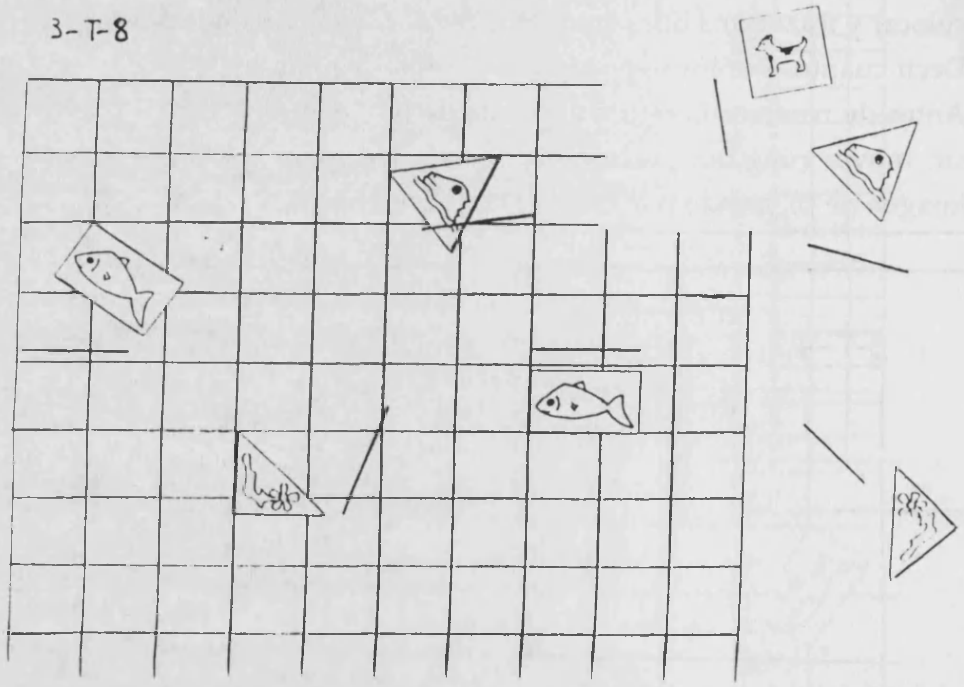
Decir cuántos puntos se pueden unir de esa manera.

Antes de resolver la figura superior derecha (rectángulo sin cuadrícula), y sin mover ninguna pieza igual a ella, averiguar dónde se situará p' (la imagen de p), siendo p el vértice superior derecho.



Unidad complementaria de enseñanza dedicada a introducir el paralelismo de líneas y su trazado.
(No se comenta en los resúmenes de las sesiones).

Láminas: 3-T-8.
Objetivos: Afianzar y utilizar la característica de paralelismo entre segmentos que se corresponden por una traslación.
Actividad 8: Trasladar la figura de manera que uno de sus lados se coloque sobre el segmento, cuando sea posible.



Láminas: Hojas en blanco.
Objetivos: Utilizar la misma traslación de manera repetida, a través de la consideración de un modelo que se repite (una banda).
Actividad 9: El profesor coloca dos piezas en cada una de las láminas, distintas para cada alumno. Los alumnos deben continuar la banda.
El ejercicio se repite con distintas relaciones entre las piezas modelo, o sea, con características distintas en el vector de la traslación que define la banda.

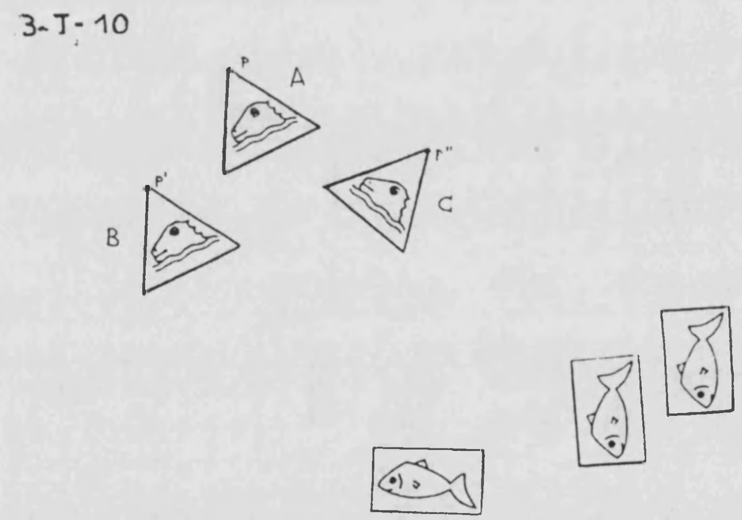
Láminas: 3-T-10.

Objetivos: Reconocer, como característica de las traslaciones, el paralelismo e igualdad de longitud de los segmentos que unen puntos que se corresponden.

Actividad 10: Pintar del mismo color los vértices iguales y el ojo. Unir los vértices iguales de A y B con un segmento del mismo color con el que están pintados, pero, antes, decir cómo van a ser esos segmentos. Comprobarlo. Verificar el paralelismo y la igualdad de longitudes.

Indicar si sucederá lo mismo con puntos de las figuras A y C. Comprobarlo. Contrastar lo que ha sucedido entre las dos figuras trasladadas y las que no son trasladadas.

En el grupo de peces (rectángulos), decir cuáles son trasladados entre sí. Comprobar que sucede lo mismo que antes al unir puntos que se corresponden.

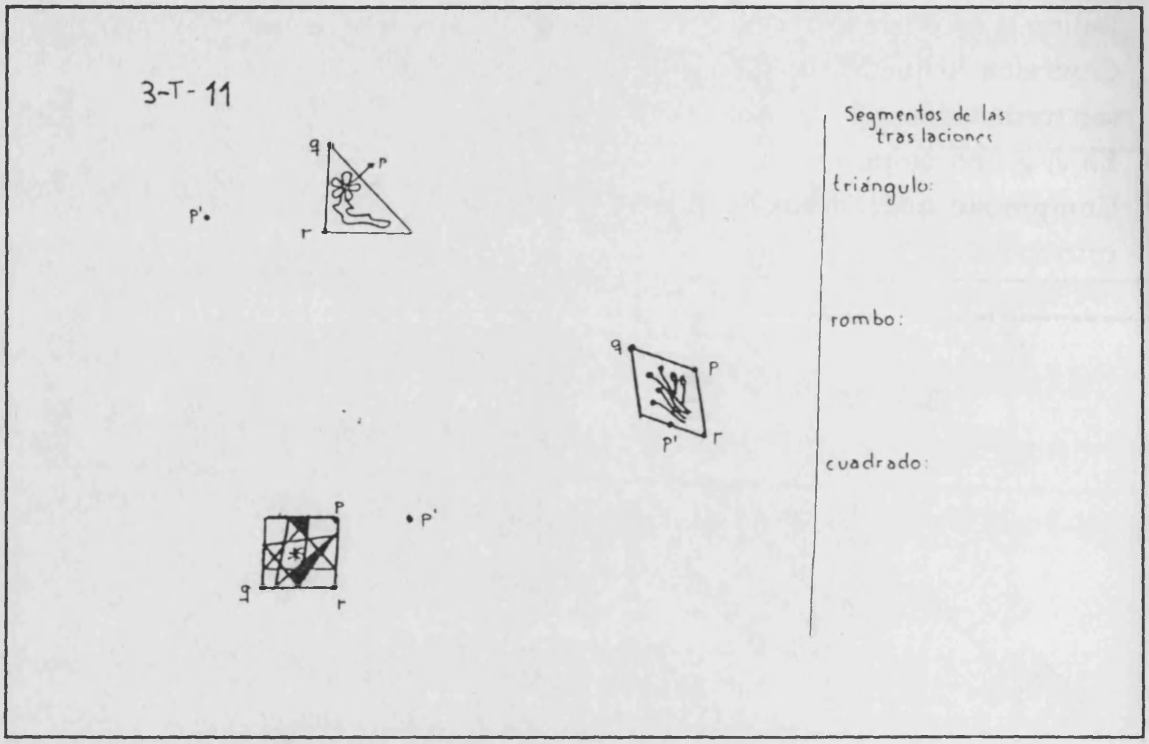


Láminas: 3-T-11.

Objetivos: Desarrollar la comprensión del segmento que define una traslación (a excepción del sentido).

Actividad 11: Obtener la imagen de otros puntos de la figura, conocida la imagen de un vértice.

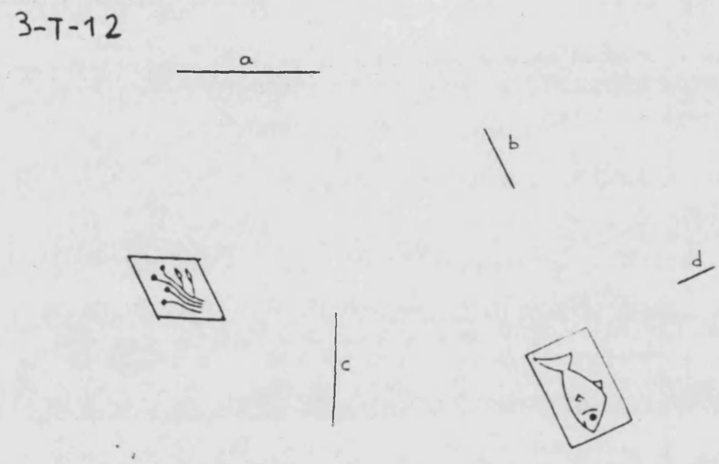
Dibujar después los segmentos de las traslaciones, separados de las figuras, en el margen derecho de la hoja.



Láminas: 3-T-12.

Objetivos: Introducir la caracterización de una traslación (a falta del sentido del vector) a partir de un segmento libre.

Actividad 12: Aplicar a una figura una traslación determinada por el segmento dado.



Resumen de las sesiones de 3º de E.G.B.

Sesiones 1 y 2

Láminas: 3-T-1.1, 3-T-1.2, 3-T-1.3 y 3-T-1.4.
Objetivos: Introducir las traslaciones estática y dinámicamente.
Actividad 1: Observar figuras trasladadas y no trasladadas.
Dar ejemplos de la vida real e indicar si ciertos ejemplos de la vida real son traslaciones.
En la lámina 3-T-1.2, coger un objeto igual a uno de los dibujados (los niños disponen de esas figuras) y colocarlo encima del dibujo. Desplazarlo hasta el otro. Observar cómo es el movimiento en las traslaciones y lo que lo diferencia de los casos en que no hay traslaciones.
Describir lo que es una traslación.
Identificar los casos que no corresponden a traslaciones y explicar por qué no lo son.

Láminas: 3-T-2.
Objetivos: Fomentar la visión dinámica de la traslación.
Desarrollar la característica de invarianza de la inclinación de una figura por una traslación.
Actividad 2: Colocar una regla con el borde por la línea que va de una figura a la otra. Situar un objeto igual a esas figuras encima de una de ellas. Desplazar el objeto hasta el otro, apoyándolo de alguna manera en el borde de la regla.
Trazar alguna otra línea que sea válida como camino de desplazamiento.

La primera presentación que se hace del concepto de traslación es la estática (lámina 3-T-1.1). Los alumnos adquieren enseguida la idea global de traslación, que plasman verbalmente mediante mediante la siguiente definición:

Son dos figuras iguales y miran hacia el mismo lado.

El ejemplo dado por un alumno pone de manifiesto que ha asimilado la idea de igualdad: *Cuando dos gemelas hacen lo mismo.*

Esta introducción estática (dos objetos fijos) no implica necesariamente la visión dinámica (traslación como movimiento). Este planteamiento se produce en la experiencia realizada tras la lámina 3-T-1.1: Antes de introducir la traslación como movimiento, el profesor pregunta si es traslación cuando un ascensor que está en el primer piso sube al segundo. La contestación de un niño es: *No porque estaba en el primer piso y después en el segundo.* También se da el caso de un niño que considera que una noria sí es traslación *porque están igual,* lo cual muestra que se centra en la igualdad global de los objetos, propia del razonamiento inicial del nivel 1 de Van Hiele.

No obstante, a partir del momento en que se introduce la idea de traslación como movimiento en el plano, éste será el medio preferido por los alumnos en la mayoría de las ocasiones para realizar las actividades propuestas: Casi siempre deslizan las figuras para obtener el resultado requerido. De hecho, la consideración de movimiento en la traslación no presenta problemas, y se puede ver que la incidencia mayor por parte de los alumnos se encuentra en la igualdad de dos figuras y no en el desplazamiento en línea recta:

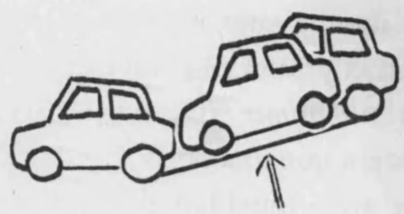
Juan: [Una traslación es] *dos objetos que ...* [el profesor interrumpe].
Prof. [coloca el coche correspondiente al dibujo de la lámina T3-1.2, sobre la silueta dibujada]: *¿Cuántos coches hay?*
Juan: *Uno.*
Prof.: *¿Qué es una traslación?*
Juan: *El coche se tiene que mover de la misma forma, hacia un lado que esté igual.*
Prof.: *¿Qué es una traslación?*
Juan: *Dos objetos que son iguales ...* [interrupción del profesor].
Prof.: *¿Cuántos objetos hay?*
Juan: *Uno ... Una traslación es un objeto que es igual, que se tiene que mover de la misma forma y se tiene que quedar igual.*

Posteriormente, al trabajar con la lámina 3-T-1.4, las preguntas dirigidas del profesor hacen que los alumnos justifiquen y piensen también en recorridos en línea recta (traslaciones) frente a recorridos con curvas:

Fernando.: *Una traslación es un objeto igual de grande que el otro que está en la misma posición.*

Juan: *Y que no esté en línea curva.*

Las justificaciones que dan los niños para los casos negativos de traslaciones en la lámina 3-T-1.4 incluyen expresiones como: *Es más pequeño* (la necesidad de igualdad de tamaño es una característica evidente para estos alumnos), *Se tuerce, Están al revés.*



El único caso en el que hay error (dos niños lo cometen) es en el deslizamiento del coche por la regla (Lámina 3-T-2), aunque el error es previsible: Colocan las dos ruedas del coche sobre la regla para realizar el movimiento (ver dibujo).

Láminas: 3-T-3.
Objetivos: Afianzar el reconocimiento visual de las traslaciones.
Actividad 3: Identificar los objetos que se corresponden mediante una traslación. Realizar físicamente el desplazamiento de una figura a otra en los casos afirmativos. Justificar estática y dinámicamente por qué sí o no hay traslación.

Los alumnos disponen de objetos reales, iguales a los representados en el papel, para realizar físicamente el desplazamiento.

No hay ningún problema en la resolución de esta actividad.

Láminas: 3-T-4.
Objetivos: Utilizar técnicas estáticas (visuales) y dinámicas (desplazamientos) para identificar las traslaciones.

Pre-introducción de la visión de puntos que se corresponden por la traslación, a partir de la consideración dinámica (movimiento) y la estática (el mismo punto en relación con el resto de la figura).

Actividad 4: Reconocer las figuras trasladadas entre sí, estática y dinámicamente, realizando físicamente el desplazamiento.

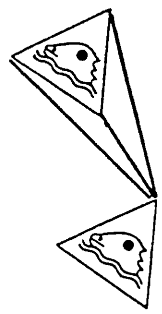
Dibujar varias "líneas de traslación" para el mismo par de figuras.

Elegidas una figura y su trasladada, averiguar dónde van a situarse los vértices y algunos puntos interiores de la figura original.

A partir de la actividad 4, y también en algunos casos de actividades anteriores, los alumnos disponen de piezas de papel iguales a las figuras dibujadas. Para cada tipo de figura hay piezas simétricas, de orientación inversa. No obstante, esto no supone en ningún momento un problema para los alumnos, quienes seleccionan correctamente la pieza que corresponde en cada caso.

Reconocen bien las figuras trasladadas, desechando los casos negativos porque: *No está igual; Tienes que doblar; Esta mira hacia acá y ésa hacia allá; etc.*

Por lo menos uno de los niños (Juan) no tiene ninguna dificultad en trazar segmentos de la traslación, de vértice a vértice de las figuras trasladadas. Pero, por lo menos otro de los alumnos (Fernando), tiene serios problemas en esta misma tarea, aunque el reconocimiento de figuras trasladadas sí lo resuelve bien. En el dibujo se aprecian las líneas marcadas por Fernando. Es preciso trabajar con él durante bastante tiempo hasta que lo resuelve: Primero el profesor hace que Fernando desplace la figura por las líneas que ha dibujado. Después le pide que señale el camino desde una de las "esquinas". Fernando se sirve de la pieza, que desplaza varias veces antes de dibujar el recorrido. Al llegar al lugar de corte con la figura final se para, aunque quizá debido a que no sabe si puede dibujar por encima de la figura o no. Para dibujar el segmento a partir de otro vértice, de nuevo requiere ayuda. El profesor



marca con rotulador los vértices de partida y de llegada y Fernando se sirve de nuevo del desplazamiento de la pieza para trazar el camino.

Después de trabajar con los vértices, el profesor le pregunta a Fernando dónde se sitúan diversos puntos del interior del triángulo (ojo, boca, ...). Fernando desplaza cada vez la pieza antes de dar el resultado. Tras ello, el profesor hace que Fernando señale y verbalice dónde se han situado varios puntos concretos de la figura tras efectuar la traslación. Después de varias veces, parece que Fernando se da por fin cuenta de que los puntos iguales se corresponden. Sin embargo, ese resultado no lo debe haber asimilado por completo, pues en el ejemplo siguiente desplaza la pieza antes de unir los puntos. Ahora el profesor le pregunta a Fernando cuántos caminos puede dibujar. Fernando cuenta los que ha trazado, tras lo cual el profesor le pregunta:

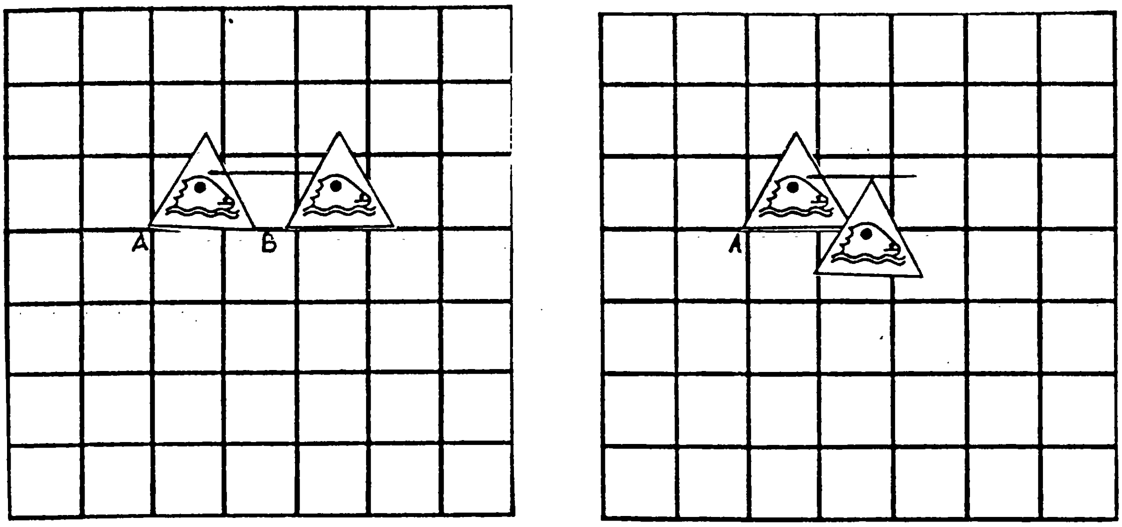
Prof.: *¿Sólo?*
Fernando: *Muchos ...100.*

Tras la identificación de otros ejemplos de no-traslaciones, el profesor le pide a Fernando que una todos los puntos que pueda entre las figuras 12 y 14 (entre las que sí hay traslación). Fernando lleva a cabo el desplazamiento con una pieza recortada. Después marca con rotulador un vértice de la figura 12 y sitúa la regla. Luego hace lo mismo con los otros vértices. El profesor marca el centro de la flor (punto interior al triángulo) y Fernando se sirve también de la pieza para desplazarla antes de dibujar el recorrido.

Sesión 3

Láminas: 3-T-5.
Objetivos: Incidir en la invarianza de inclinación de una figura como el efecto característico de las traslaciones sobre las figuras.
Actividad 5: Trasladar las figuras para que el lado correspondiente se coloque sobre el segmento.

Al menos uno de los niños (Juan) resuelve bien todos los ejercicios sin necesidad de ayuda. En el triángulo rectángulo sobre la cuadrícula nadie tiene problemas (quizá por la conjunción de la posición de la pieza y la dirección horizontal requerida para el desplazamiento). Luego, por lo menos dos de los niños requieren ayuda en algún caso:



Parece que Fernando es el que tiene más problemas. En concreto, para la figura en la cual el segmento pasa por encima de ella (triángulo equilátero con dibujo del dragón) efectúa un desplazamiento horizontal (ver dibujo de la izquierda). El profesor insiste en que el lado AB lo tiene que colocar sobre el segmento y le pide a Fernando que resuelva otros ejercicios, los cuales hace bien. Pero al retomar el caso del triángulo equilátero (dragón), su solución es de nuevo incorrecta (ver dibujo de la derecha). El profesor hace que Fernando identifique los extremos del segmento y del lado de la figura.

Fernando.: *Uno esta punta* [vértice A] *con ésta* [extremo correcto del segmento].
Prof.: *¿Y la otra con cuál?*
Fernando la señala y ya sitúa bien la imagen.

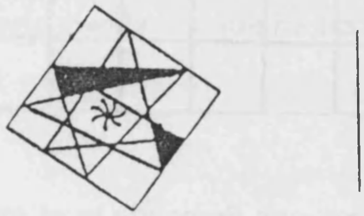
Carmen dice que no puede resolver el caso del rectángulo (pez). El profesor emplea directamente con ella la técnica que dio resultado con Fernando, consistente en identificar y relacionar los dos extremos del lado del rectángulo con los correspondientes del segmento. Carmen resuelve así bien todos los ejercicios, incluso el del triángulo equilátero (dragón) que le presentó problemas a Fernando.

Láminas: 3-T-6.

Objetivos: Desarrollar y utilizar la característica de las traslaciones de mantener el paralelismo de segmentos.

Actividad 6: El trabajo se lleva a cabo por parejas de niños. El ejercicio es análogo al anterior (actividad 5), pero ahora, por turnos, uno de los niños es el que sitúa la figura y el segmento y el otro niño lo resuelve.

Juan tiene muy claras las ideas e interviene corrigiendo cuando otro de los niños traza un segmento incorrecto por no ser paralelo a ninguno de los lados de la figura (ver dibujo). Aparentemente no se producen más errores en los ejercicios de esta actividad. El profesor interviene preguntando por qué no es válida la solución errónea y en las respuestas se ve que el tipo de justificación que utilizan los niños es el empleado ya en la primera sesión:



Carmen: [No puede haber traslación] *porque en ésta está recto y en ésta para pasarlo aquí se tuerce.*

Prof.: *¿Qué es una traslación?*

Carmen: *Cuando un elemento está igual a otro, en la misma posición.*

Prof.: *¿Y para poder pasar de uno a otro qué no tienen que haber?*

Carmen: *Una curva.*

Prof.: *¿Y de éste a éste?*

Niños: *Sí porque no se tuerce.*

Prof.: *Y la línea que los une, ¿cómo tendría que ser?*

Niños: *Recta.*

Sesiones 4 y 5

Láminas: 3-T-7.

Objetivos: Aplicar la invarianza de inclinación de una figura por una traslación.

Comprender cuáles son los puntos que se corresponden, por una traslación, entre dos figuras iguales.

Averiguar si los alumnos comprenden que se puede determinar la imagen de cualquier punto si se conoce un punto y su imagen. O sea, detectar si los alumnos reconocen que por paralelismo y midiendo las distancias entre un punto y su imagen se puede obtener la imagen de cualquier otro punto.

Actividad 7: Trasladar la figura de manera que el vértice indicado se sitúe en el punto marcado (siempre es exterior a la figura).

Una vez resuelto el ejercicio anterior, pintar con el mismo color los puntos que son iguales de la figura que había dibujada y de la que se acaba de colocar y trazar una línea entre esos puntos, de su mismo color.

Decir cuántos puntos se pueden unir de esa manera.

Antes de resolver la figura superior derecha (rectángulo sin cuadrícula), y sin mover ninguna pieza igual a ella, averiguar dónde se situará p' (la imagen de p), siendo p el vértice superior derecho.

El profesor hace incidencia en la unión de puntos que se corresponden entre las figuras inicial y final. Los niños marcan con el mismo color los puntos que se corresponden y los unen con ese color, cambiando de color para distintos puntos.

Los niños enseguida emplean el vocabulario p, p', q,q', etc. Esta seguridad por parte de los niños en designar los puntos que se corresponden y la explicación clara que hacen del método a seguir inclina a pensar que han asimilado la concepción de una traslación en términos de los elementos de las figuras. Por ejemplo, la explicación de un niño es: *Hay que bajar la figura de arriba en línea recta ... Hay que unir t y t'.*

Sin embargo no es cierta tal comprensión pues, excepto Juan, los demás niños tienen dificultades en algunos casos: Las niñas en el triángulo rectángulo (flor), aunque seguramente es debido a que la imagen se superpone. Al principio se quedan desconcertadas y, una vez bien resuelto, Lorena dice:

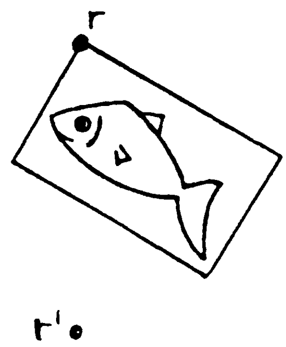
Lorena: *Queda mal porque se queda una encima de la otra.*

Lorena pide ayuda en el ejercicio del dragón; dice que no le sale porque tiene que torcer la figura. El profesor tiene que ayudar a Fernando a encontrar y unir puntos alternativos al indicado en la lámina. Es interesante destacar que estos errores no son exclusivos de los primeros casos ni de los más complejos. Por tanto, como indiqué antes, el motivo es que los niños no han asimilado la traslación en términos de sus elementos.

Se plantea la cuestión de la cantidad de puntos que pueden unir. Las soluciones que dan los niños corresponden al número de puntos que han unido o a una cantidad baja, pensando en puntos destacados de la figura. Juan propone: *¿Por qué no los hacemos todos y ya está?*, idea que le parece bien al menos a otro de los niños.

Después, quizá debido a la insistencia del profesor sobre la unión de puntos que se corresponden, alguno de los niños utiliza esa propiedad para justificar el caso siguiente. Se trata del triángulo rectángulo (flor) situado en el centro de la lámina. El profesor pregunta:

Prof.: *¿Cómo sabéis que queda exactamente así?*
Juan: *Por el hueco.*
Prof.: *¿Con la regla qué podéis hacer?*
Juan: *Medir el hueco.*
Niña: *Unir este puntito con éste ... Y éste con éste* [hace referencia a vértices que se corresponden].



El ejercicio que plantea a continuación el profesor consiste en localizar la imagen de un vértice, conocida la imagen de otro. Para ello utiliza el rectángulo (pez) de la lámina 3-T-7 que no está sobre la cuadrícula, cuya imagen no se ha obtenido previamente. En concreto, se pide la imagen del vértice superior derecho, sabiendo que el vértice r se desplaza hasta r'; ver dibujo). Desde un punto de vista matemático, el objetivo del profesor es que los niños apliquen el vector de la traslación; aplicado a esta situación, pretende que los niños tengan en cuenta que los desplazamientos de r y del otro vértice por la traslación deben ser iguales en longitud y paralelos entre sí (el sentido de la traslación es evidente). Pero surge el problema de que los niños no han estudiado el concepto de paralelismo.

Juan pide la pieza del pez. Las niñas también la piden un poco después. El profesor no permite que tengan la pieza y exige un resultado exacto. Para facilitar las cosas, pide que unan r con r'. Entonces Juan mide esa distancia y coloca la imagen del otro vértice también a esa distancia, aunque no en el lugar exacto. Después las niñas también colocan la imagen pedida a ojo o midiendo. Las explicaciones que dan es que las líneas tienen que ser *en línea recta.* Fernando no sabe cómo resolver el ejercicio.

El profesor introduce entonces el concepto de paralelismo. Hace que los niños señalen el segmento rr' y pide el lugar en el que se situará el vértice inferior izquierdo de la figura. Solamente Juan traza una recta paralela y luego, ante la pregunta del profesor, mide la distancia correcta.

En este momento los demás niños están completamente desorientados. Juan es el único que ha podido transferir la propiedad del paralelismo de segmentos a la obtención de la imagen de un punto. Esta situación permanece durante la sesión quinta, en la que se insiste sobre este mismo dibujo, aunque con las imágenes de otros puntos, y en los ejercicios de este tipo realizados durante la sesión sexta. En esta última sesión, el profesor tendrá que ir indicando los pasos del algoritmo para obtener la imagen de varios puntos del triángulo de la lámina 3-T-7 no situado sobre la cuadrícula.

La primera parte de la sesión quinta está dedicada a introducir el concepto de rectas paralelas y a su trazado con cartabón y escuadra. Estas herramientas resultaron ser poco adecuadas debido a que su utilización correcta requiere una estrategia que no es sencilla para alumnos de este curso. No presentamos los ejercicios concretos planteados a los niños ni sus respuestas porque corresponden a una instrucción específica sobre trazado de paralelas, complementaria al estudio del movimiento que nos ocupa.

Sesión 6

A partir de este día, Fernando no asiste a las sesiones dedicadas a traslaciones. La actividad 7 finalizó en esta sesión pero, para facilitar la lectura, hemos incluido los comentarios correspondientes en el bloque dedicado a las sesiones 4 y 5.

Láminas: 3-T-8.
Objetivos: Afianzar y utilizar la característica de paralelismo entre segmentos que se corresponden por una traslación.
Actividad 8: Trasladar la figura de manera que uno de sus lados se coloque sobre el segmento, cuando sea posible.

Esta actividad es la misma que la actividad 5, pero en aquel caso siempre había solución. En el triángulo equilátero (dragón) situado sobre la cuadrícula todos los niños dan la respuesta errónea (dicen que no es posible efectuar la traslación). Seguramente, y como es usual, el hecho de que el segmento se superponga a la figura aumenta el grado de dificultad. Juan rectifica pronto y resuelve bien todos los casos, observando enseguida también las dos posibilidades en el caso del rectángulo (pez).

Los otros niños no lo resuelven tan rápido y el profesor les tiene que ayudar a veces. El caso comentado antes del dragón es uno de los que requieren ayuda para algunos niños. Otro ejemplo de carencia de visión de la propiedad matemática del paralelismo del segmento lo tenemos en Carmen, la cual tiene que probar, mediante desplazamiento de la figura, cada uno de los tres lados del triángulo rectángulo (flor) de la cuadrícula.

Láminas: Hojas en blanco.
Objetivos: Utilizar la misma traslación de manera repetida, a través de la consideración de un modelo que se repite (una banda).
Actividad 9: El profesor coloca dos piezas en cada una de las láminas, distintas para cada alumno. Los alumnos deben continuar la banda.
El ejercicio se repite con distintas relaciones entre las piezas modelo, o sea, con características distintas en el vector de la traslación que define la banda.

Los frisos propuestos varían de un alumno a otro. Los primeros frisos están sobre cuadrícula. Todos los niños los completan bien.

Luego, la hoja sobre la que tienen que desarrollar el friso no tiene cuadrícula. La forma de resolverlo es visual, aunque a veces algún niño emplea la regla como soporte sobre el que deslizar la figura y Juan también la utiliza para medir. Los resultados de Carmen a veces están un poco desviados, aunque en general es aceptable.

El profesor pregunta sobre las diferencias entre distintas traslaciones (haciendo referencia a los frisos que han construido). Los niños no hacen referencia a características matemáticas, sino que hacen referencia a que se trata de distintas figuras o a que en algún caso *la figura mira hacia ... y el otro mira hacia ...*

Láminas: 3-T-10.

Objetivos: Reconocer, como característica de las traslaciones, el paralelismo e igualdad de longitud de los segmentos que unen puntos que se corresponden.

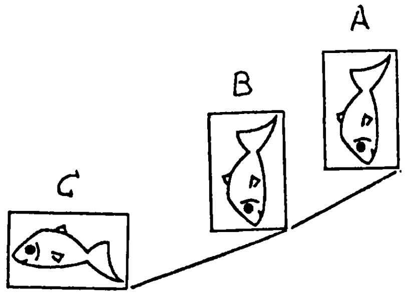
Actividad 10: Pintar del mismo color los vértices iguales y el ojo. Unir los vértices iguales de A y B con un segmento del mismo color con el que están pintados, pero, antes, decir cómo van a ser esos segmentos. Comprobarlo. Verificar el paralelismo y la igualdad de longitudes.

Indicar si sucederá lo mismo con puntos de las figuras A y C. Comprobarlo.

Contrastar lo que ha sucedido entre las dos figuras trasladadas y las que no son trasladadas.

En el grupo de peces (rectángulos), decir cuáles son trasladados entre sí. Comprobar que sucede lo mismo que antes al unir puntos que se corresponden.

Juan ya asimiló en láminas anteriores que los segmentos que unen puntos que se corresponden son paralelos y miden lo mismo. En esta lámina está seguro de esa propiedad sin necesidad de comprobarlo. Lorena, sin embargo, en el primer grupo de figuras de esta lámina que resuelve, necesita medir la longitud de todos los segmentos trazados.



Al aplicar la propiedad al segundo grupo de figuras se ve claramente que Lorena no ha entendido en qué consiste la comprobación: Mide la distancia de un vértice de A a uno de B y de ése a uno de C (ver dibujo). Como las distancias no son iguales, dice que está mal, que de B a C no es traslación, lo cual reconoce visualmente pero, evidentemente, no por las mediciones realizadas.

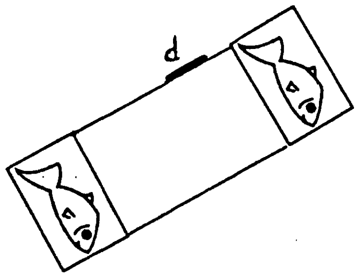
Láminas: 3-T-11.
Objetivos: Desarrollar la comprensión del segmento que define una traslación (a excepción del sentido).
Actividad 11: Obtener la imagen de otros puntos de la figura, conocida la imagen de un vértice.
Dibujar después los segmentos de las traslaciones, separados de las figuras, en el margen derecho de la hoja.

Juan ha asimilado las características de las traslaciones que se requieren para resolver esta actividad. Lorena no entiende el proceso y precisa ayuda constantemente. Carmen tiene una comprensión parcial, y debe ser ayudada de vez en cuando.

Láminas: 3-T-12.
Objetivos: Introducir la caracterización de una traslación (a falta del sentido del vector) a partir de un segmento libre.
Actividad 12: Aplicar a una figura una traslación determinada por el segmento dado.

Esta sesión está dedicada casi por entero a intentar que los niños relacionen el trabajo que llevaron a cabo en la actividad anterior con lo que se les pide ahora. El profesor recurre a la lámina anterior, hace que los niños verbalicen las propiedades conocidas de paralelismo e igualdad de longitudes de los segmentos que unen puntos que se corresponden; les recuerda que, en la actividad anterior, copiaron el segmento de la traslación en la parte derecha de la hoja y explica que ese segmento es el que se les proporciona ahora; también marca mediante p y p' los extremos del segmento. Eso lo explica de diversas maneras, pero los niños insisten en que no se puede hacer la traslación. Para el segmento a dicen que *es muy largo* y que el c *no es paralelo*.

Después el profesor comienza a resolver el ejercicio propuesto: Aplica el segmento a uno de los vértices de una de las figuras de la lámina. Juan y Carmen completan esa figura. A Lorena hay que indicarle cada paso. En la otra figura, Juan comete algunos errores: Primero no tiene en cuenta la longitud, y hace los segmentos que sitúa desde los vértices de la figura original mucho más largos que el segmento de la traslación. Después comete el error típico de medir entre los vértices más próximos (ver dibujo), error que también comete Carmen.



En resumen, Lorena está desorientada y no entiende lo que hace. Carmen y Juan sí han aplicado el algoritmo que hay que utilizar, una vez que se les ha dado un ejemplo, pero no han sido capaces de entender que lo que se pide es el proceso inverso al realizado en la actividad anterior. Matemáticamente, en este ejercicio se considera la utilización del segmento (vector sin sentido) libre que define una traslación.

Llegados a este punto, Lorena ha llegado al máximo de sus posibilidades y no relaciona propiedades matemáticas con el trabajo manipulativo y visual. El extremo opuesto es Juan, quien seguramente habría podido comprender el significado de vector libre de haberle proporcionado más enseñanza al respecto. Fernando abandonó en la sesión quinta; su proceso de aprendizaje requería más instrucción en las primeras propiedades trabajadas: Puntos que se corresponden, paralelismo de segmentos, ... En cuanto a Carmen, seguramente habría podido aumentar su comprensión sobre las propiedades estudiadas al final: Paralelismo e igual distancia entre los segmentos que unen puntos que se corresponden y utilización del vector libre, aunque no creo que su progreso fuera mucho más adelante.

Esta situación, junto con el comienzo de un período vacacional, aconsejó la finalización de la experimentación con los alumnos de este curso.

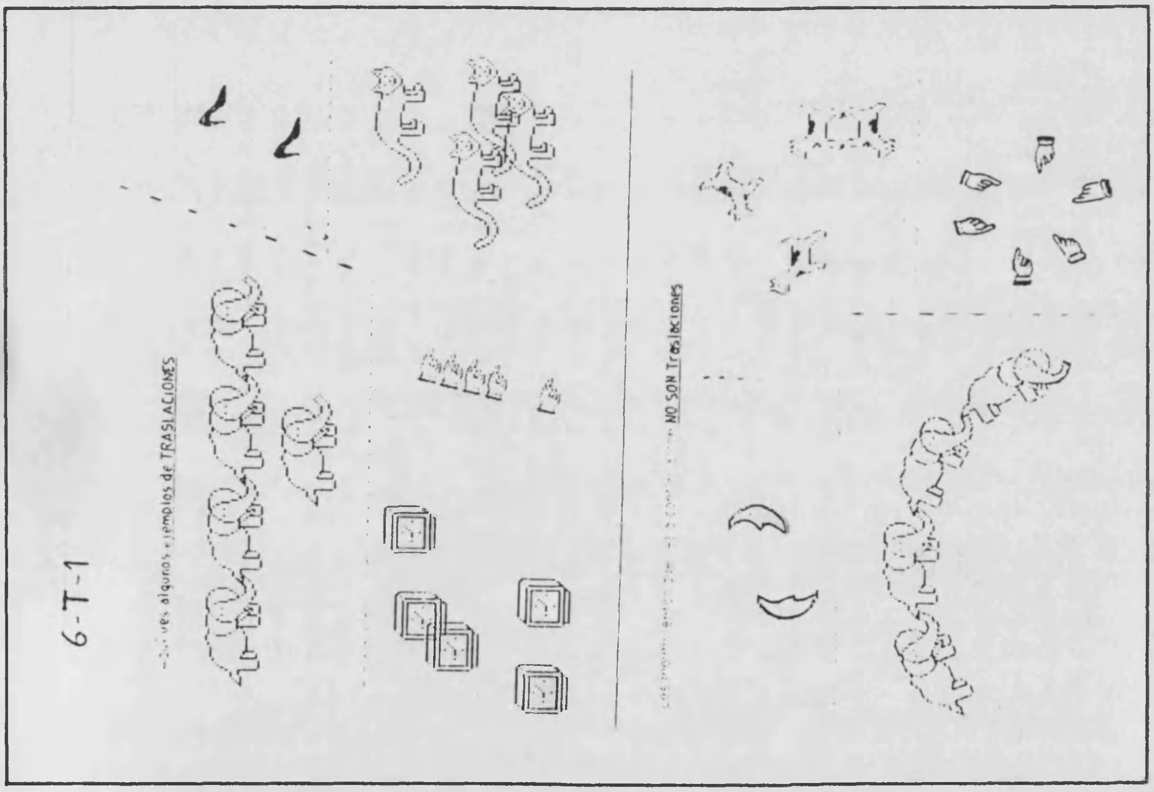
RESUMEN DE LA EXPERIMENTACIÓN EN 6º DE E.G.B.

Listado de las actividades experimentadas.

Láminas: 6-T-1.

Objetivos: Introducción estática de las traslaciones.

Actividad 1: Observar las figuras que son trasladadas entre sí y las que no lo son.
Expresar verbalmente lo que es una traslación.



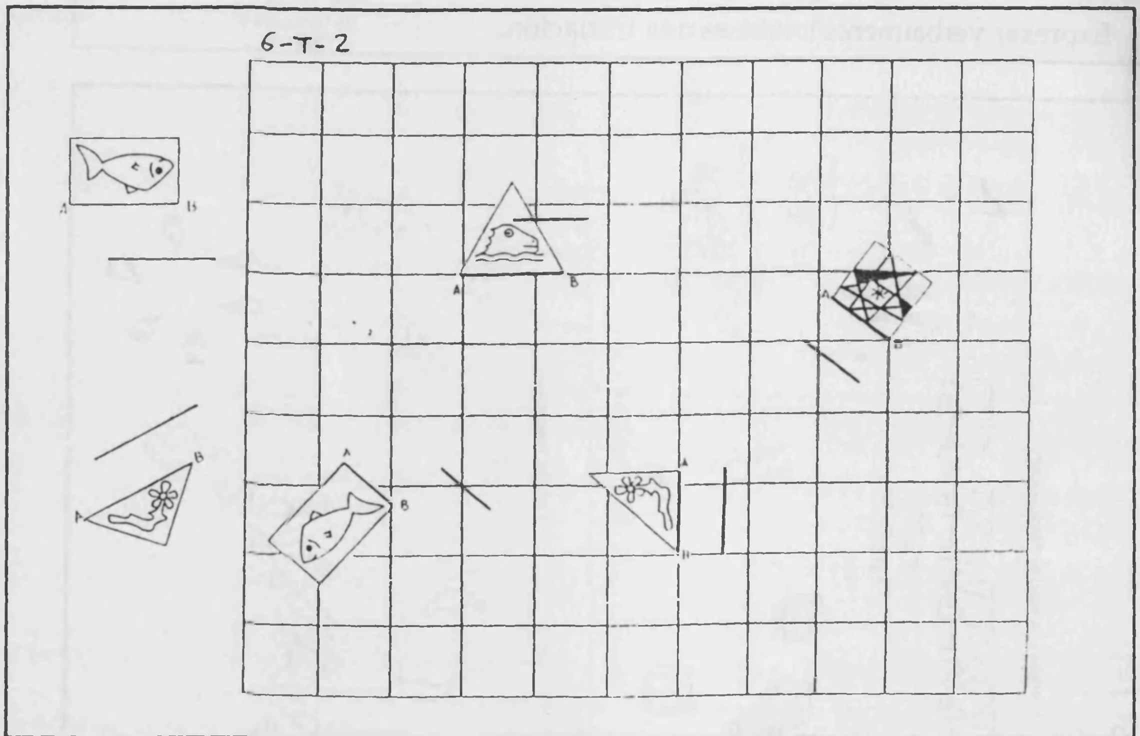
Láminas: 6-T-2.

Objetivos: Emplear las características visuales en el reconocimiento de figuras trasladadas.

Introducción dinámica de las traslaciones.

Actividad 2: Decir qué figuras se han movido por una traslación y justificar algunos casos positivos y otros negativos.

Coger las siluetas de la casa y de la pistola (se proporcionan esas piezas en papel), situarlas encima de alguna de esas figuras y desplazarla hasta otras trasladadas de ellas. Deslizar luego las siluetas entre figuras no trasladadas.



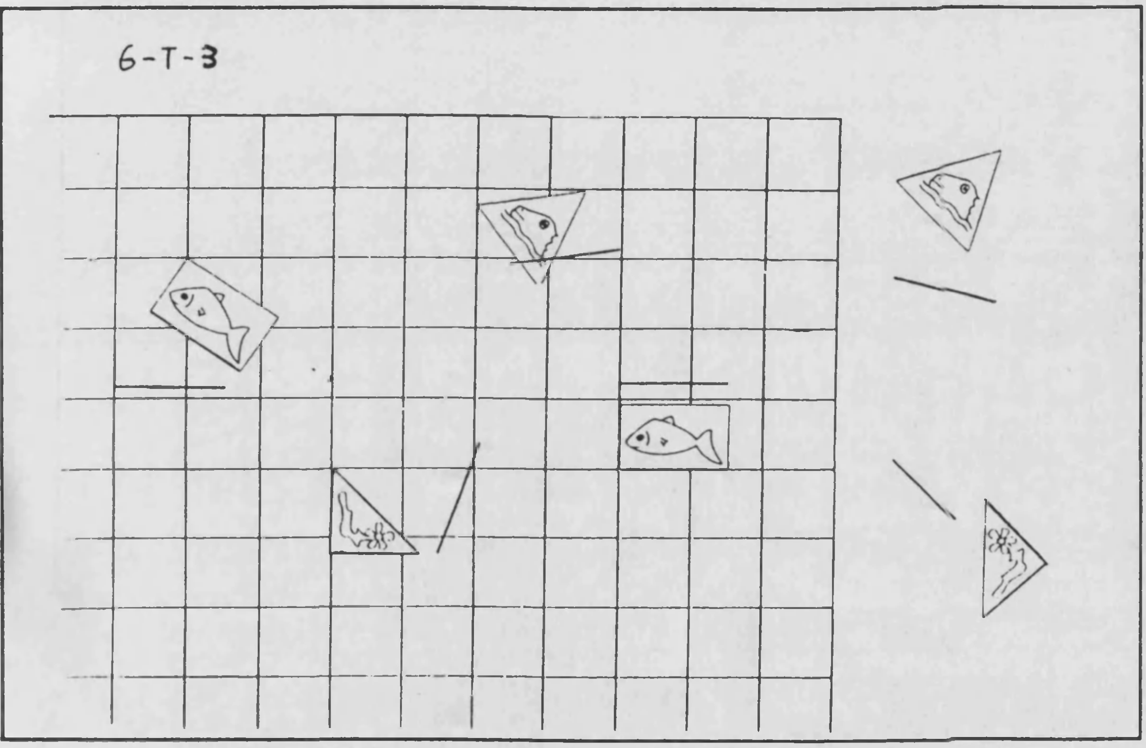
Láminas: 6-T-3.

Objetivos: Reconocer que las traslaciones no cambian el sentido de los ángulos, desde la visión de "dar la vuelta al papel".

Emplear las características visuales de las traslaciones, tanto estática como dinámicamente, de invarianza en la inclinación de una figura.

Actividad 3: Trasladar la figura de manera que el lado AB se coloque sobre el segmento dibujado.

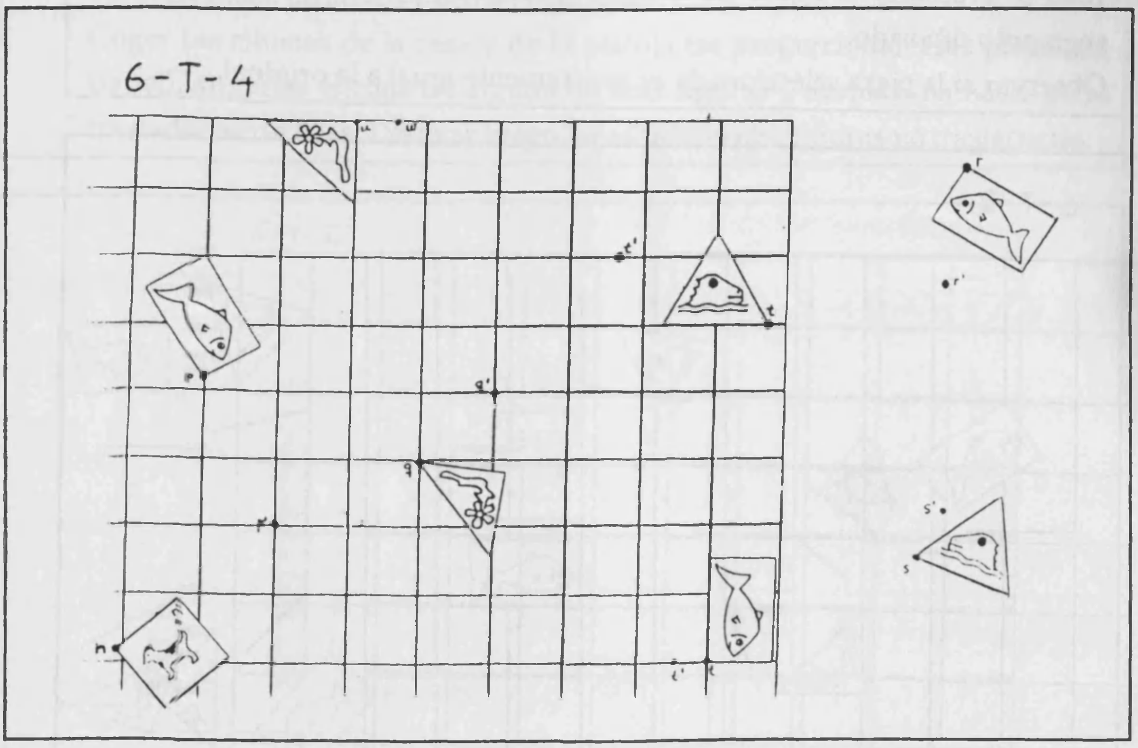
Observar si la pieza seleccionada es exactamente igual a la original.



Láminas: 6-T-4.

Objetivos: Afianzar y utilizar al característica visual de invarianza en la inclinación de las figuras por las traslaciones.

Actividad 4: Trasladar la pieza de manera que el vértice marcado se sitúe sobre el punto indicado.

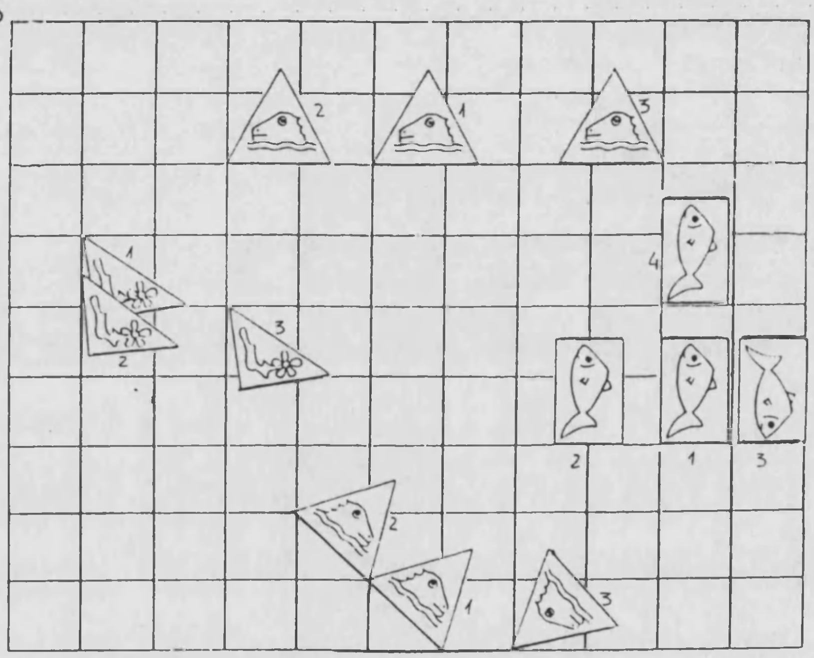


Láminas: 6-T-5.

Objetivos: Afianzar y utilizar al característica de invarianza en la inclinación de las figuras por las traslaciones y el paralelismo de segmentos que se corresponden por una traslación.

Actividad 5: Desplazar la figura de manera que algún lado se coloque sobre el segmento marcado. Justificar la posibilidad o imposibilidad. Dar todas las soluciones para cada caso.

6-T-5



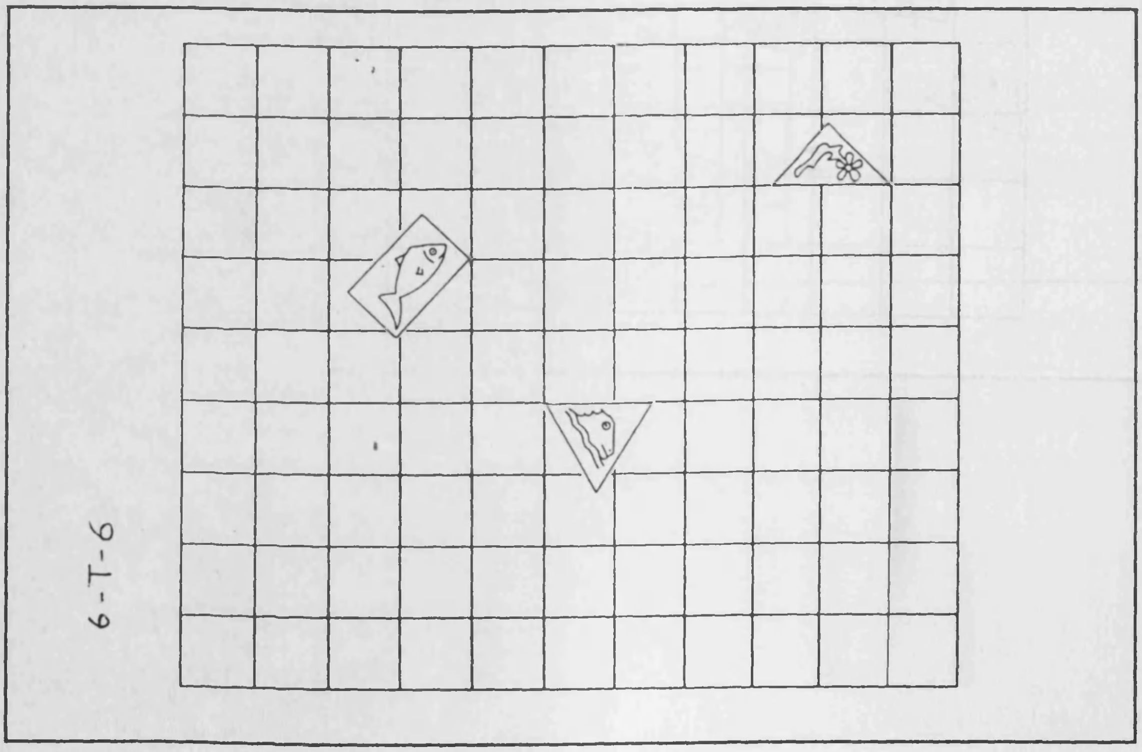
Láminas: 6-T-6.

Objetivos: Introducir y determinar una aproximación a las coordenadas del vector de una traslación: Instrucciones del tipo derecha / izquierda y arriba / abajo. Descubrir la independencia del punto elegido de una figura (y su imagen) en la determinación de las coordenadas (la aproximación direccional indicada en el objetivo anterior) del vector de la traslación.

Actividad 6: Se trabaja por parejas de alumnas. Seleccionada una figura de la lámina, una de las alumnas de la pareja la traslada, sin que la otra alumna vea dónde la sitúa. A continuación, debe dar instrucciones directas para que su compañera sepa dónde está la imagen.

Una vez que ya se utilizan instrucciones del tipo derecha o izquierda y arriba o abajo, averiguar qué sucede si se selecciona otro punto de la figura original para determinar la traslación.

Trabajo en grupo: Análogo al anterior, pero una alumna da las instrucciones y todas las demás sitúan la imagen.



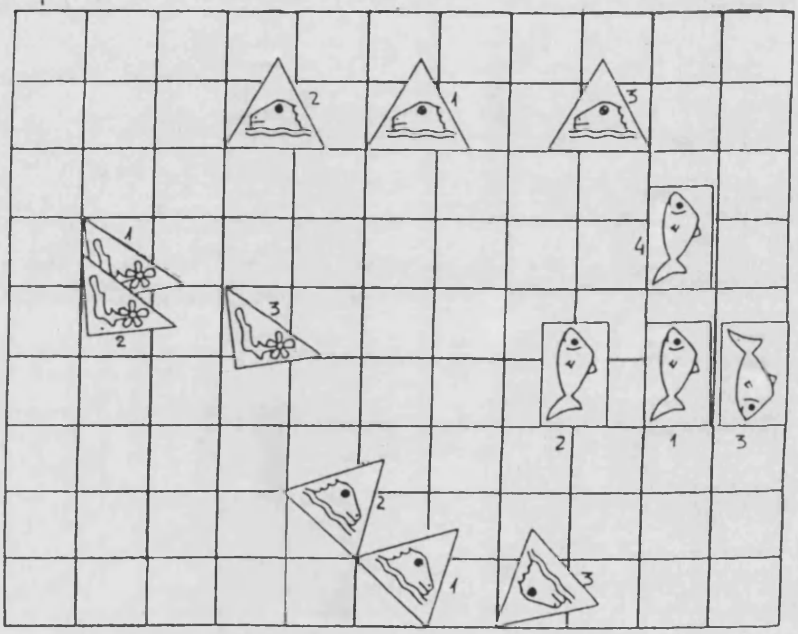
Láminas: 6-T-7.

Objetivos: Identificar las coordenadas (la aproximación direccional indicada en los objetivos de la actividad anterior) de una traslación, conocida una figura y su imagen.

Afianzar la independencia del punto elegido para determinar las coordenadas (la aproximación) del vector de la traslación.

Actividad 7: Se seleccionan dos figuras y hay que indicar si son trasladadas o no. En caso afirmativo, determinar la traslación que transforma una en la otra.

6-T-7



Láminas: 6-T-8.

Objetivos: Identificar las traslaciones mediante un segmento (el sentido del vector no se introduce todavía).

Considerar las componentes longitud y dirección del vector que define una traslación.

Afianzar la comprensión sobre la independencia del punto elegido en una figura para aplicar una traslación.

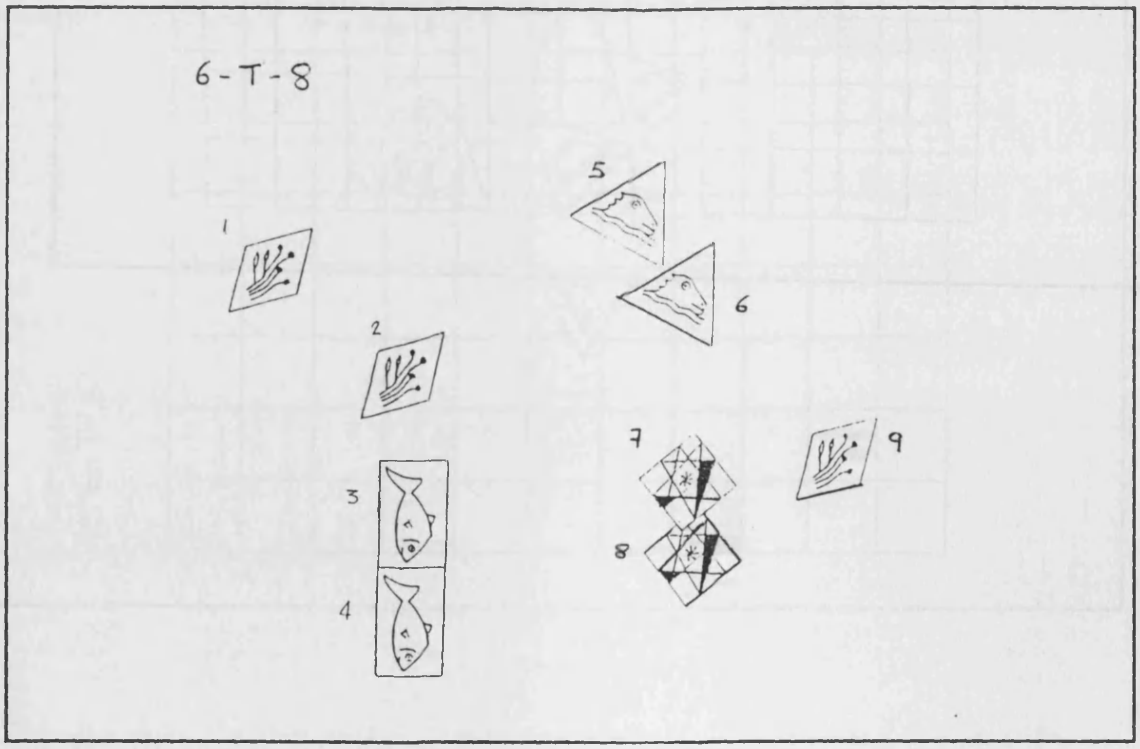
Desarrollar la característica de libertad del segmento de la traslación, o sea, su movilidad en el plano.

Actividad 8: Indicar cómo se puede indicar en esta situación, en la que no hay cuadrícula, la traslación que se va a efectuar.

Si se mide directamente la distancia desde un vértice hasta su imagen, explicar qué se obtiene al seleccionar un vértice distinto.

Explicar cómo son los segmentos que unen vértices que se corresponden por una misma traslación.

Fijar dos figuras concretas y determinar la traslación que lleva una a otra. Seleccionar una figura distinta y aplicarle exactamente la misma traslación anterior, o sea, mover la pieza de la misma manera que se hizo antes.



Láminas: 6-T-9.

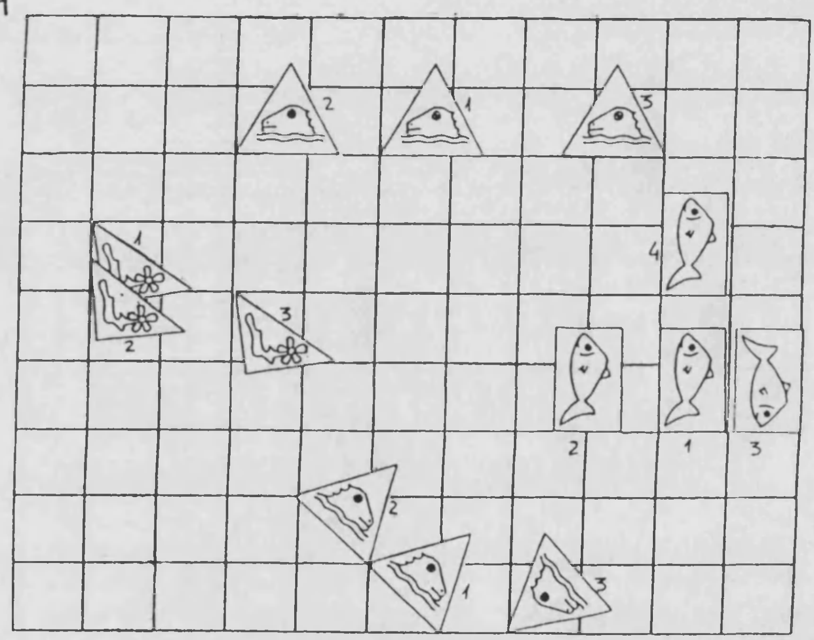
Objetivos: Proporcionar correctamente las coordenadas de una traslación (la aproximación direccional: arriba/abajo, derecha/izquierda), conocidas una figura y su imagen.

Afianzar la independencia del punto elegido para determinar las coordenadas del vector de la traslación.

Actividad 9: Dar las instrucciones que permiten trasladar la figura ... a la ...

Decir qué instrucciones se obtienen si se elige un punto distinto para contar desde él.

6-T-9

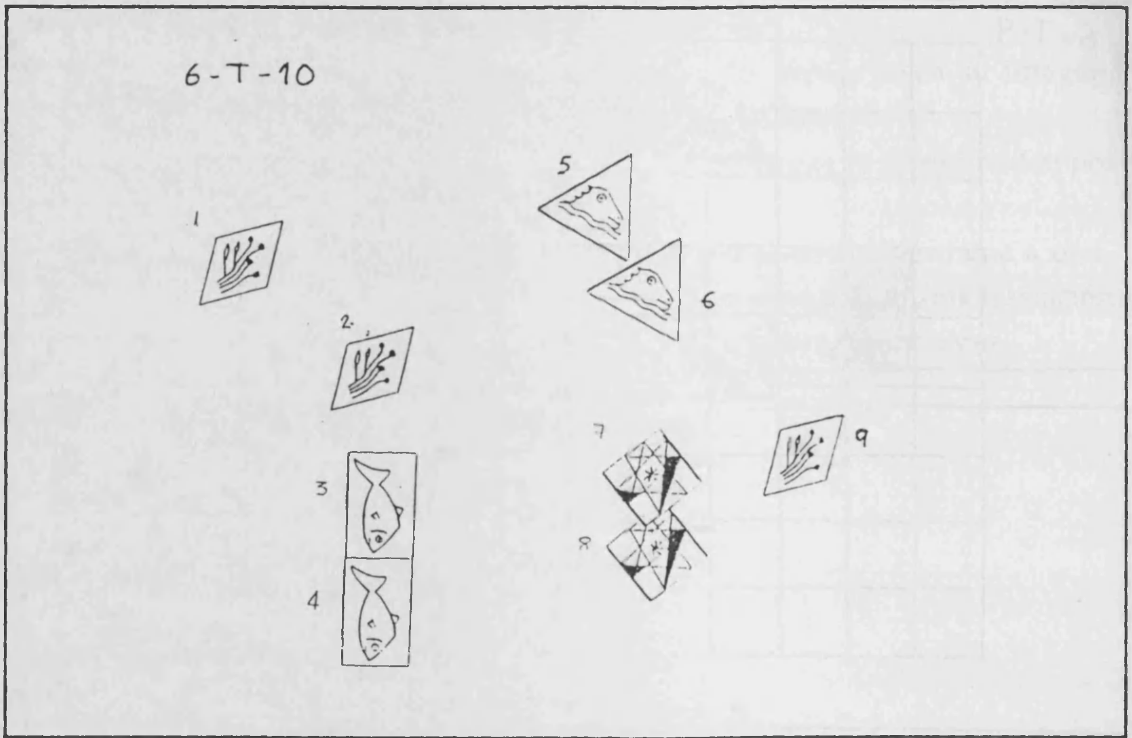


Láminas: 6-T-10.

Objetivos: Introducir las características cualitativas de la traslación inversa: Sentido opuesto y coordenadas (su aproximación direccional) con instrucciones contrarias.

Actividad 10: Seleccionadas dos figuras trasladadas, trazar el camino que lleva una de ellas a la otra. Marcar luego el camino que transforma la final de antes en la original de antes.

Explicar la relación que hay entre ambas traslaciones. Indicar qué relación existe entre las coordenadas que las definen.



Láminas: 6-T-11.

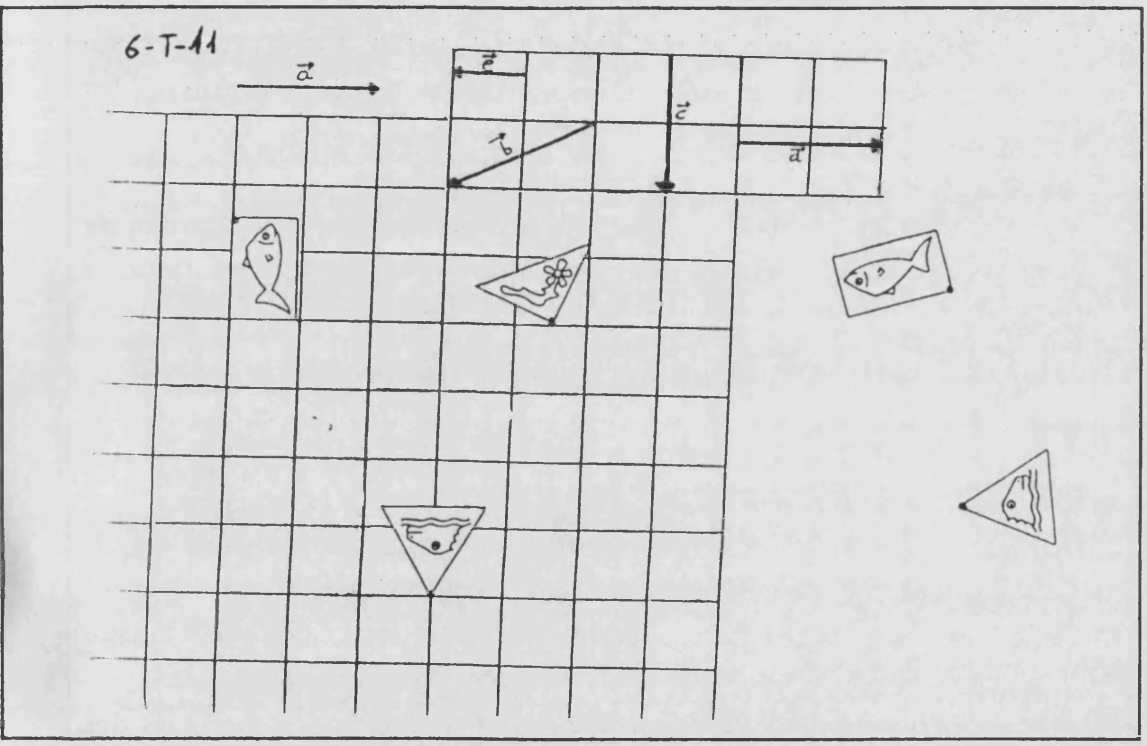
Objetivos: Introducir el vector libre como caracterización de las traslaciones.

Considerar las tres componentes del vector (dirección, módulo y sentido).

Utilizar el vector libre para realizar traslaciones, a partir de sus coordenadas y también mediante aplicación directa del vector.

Actividad 11: Indicar para qué pueden ser las flechas dibujadas en la lámina.

Aplicarle a la figura ... la traslación ...



Láminas: Hoja en blanco.

Objetivos: Aplicar traslaciones definidas mediante un vector libre, mediante la utilización directa del vector.

Introducir y efectuar composiciones de traslaciones.

Descubrir la conmutatividad de la composición de traslaciones.

Actividad 12: Se lleva a cabo por parejas. Cada niña pega una figura y dibuja un vector. La compañera tiene que aplicarle a la figura la traslación caracterizada por ese vector.

Ejercicio análogo, pero ahora la cantidad de vectores es dos y lo que hay que hacer es componer las traslaciones correspondientes, o sea, aplicar una de las traslaciones y, a la figura imagen, aplicarle la otra traslación.

Hacer una composición de tres traslaciones.

Realizar alguna de las composiciones de dos traslaciones con el orden de actuación contrario. O sea, la que antes se utilizó primero ahora interviene en segundo lugar.

Láminas: 6-T-13.1, 6-T-13.2 y hoja cuadriculada.

Objetivos: Realizar composiciones de aplicaciones.

Descubrir y utilizar la relación numérica entre las coordenadas de las traslaciones que intervienen en una composición y la traslación resultante.

Afianzar el conocimiento de la conmutatividad de la composición de traslaciones.

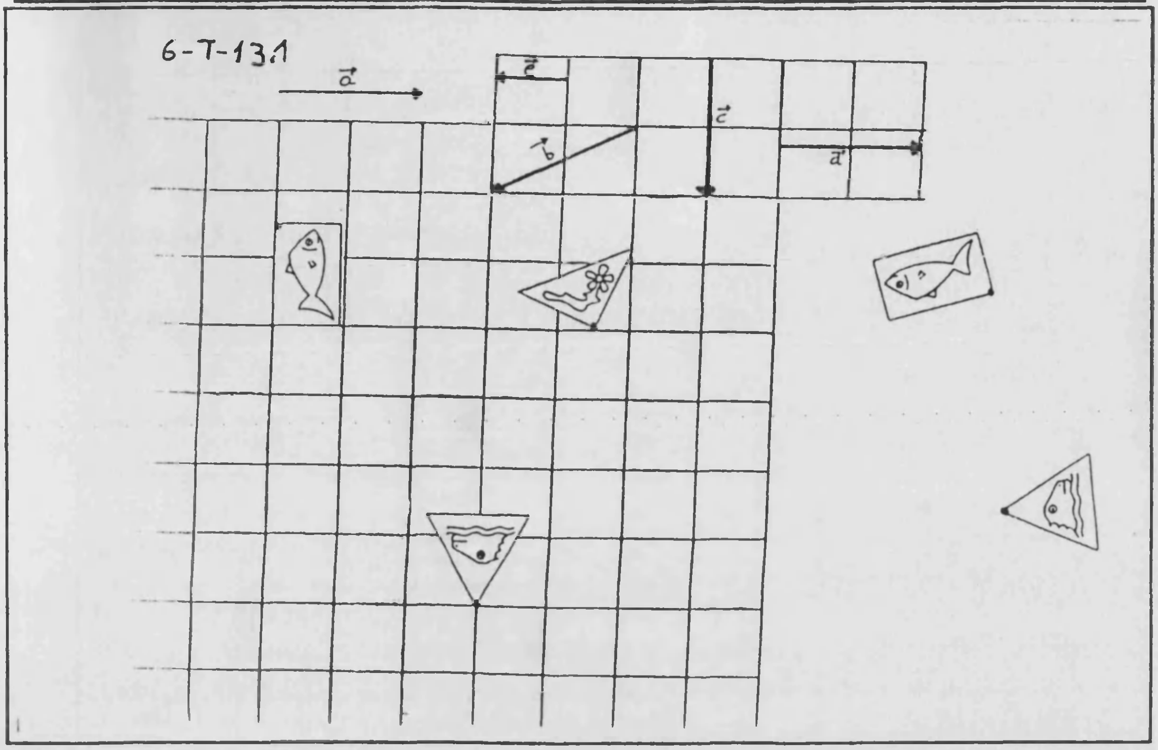
Actividad 13: Lámina 6-T-13.1: Aplicarle a la figura ... la composición de las dos traslaciones ... Anotar las coordenadas de cada una de ellas y las del resultado. Observar qué relación existe entre las cantidades anotadas.

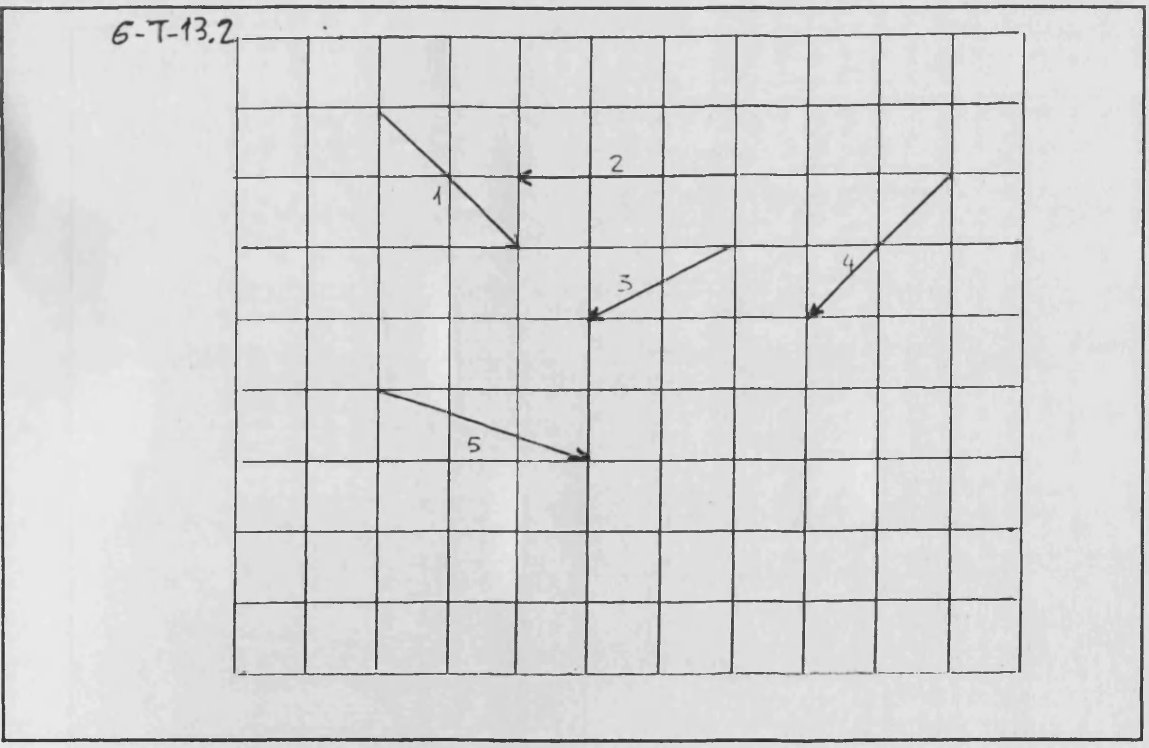
Repetir el ejercicio con las mismas traslaciones que antes, pero actuando en orden contrario.

Indicar directamente cuáles son las coordenadas de la traslación resultante de la composición de las tres traslaciones ...

Lámina 6-T-13.2: Coger una hoja cuadriculada, pegar una figura y aplicarle la composición de las traslaciones ... Para ello, se puede hacer por pasos en las primeras composiciones, bien sirviéndose directamente de cada uno de los vectores o de sus coordenadas.

En las últimas composiciones, aplicar directamente la traslación resultante tras el cálculo de las coordenadas de su vector.


6-T-13.1
$\vec{a}$
$\vec{c}$
$\vec{b}$
$\vec{c}$
$\vec{a}$


6-T-13.2
1
2
3
4
5

Láminas: Hoja cuadriculada.

Objetivos: Descomponer una traslación en producto de dos.

Descubrir la infinidad de posibilidades de tal descomposición.

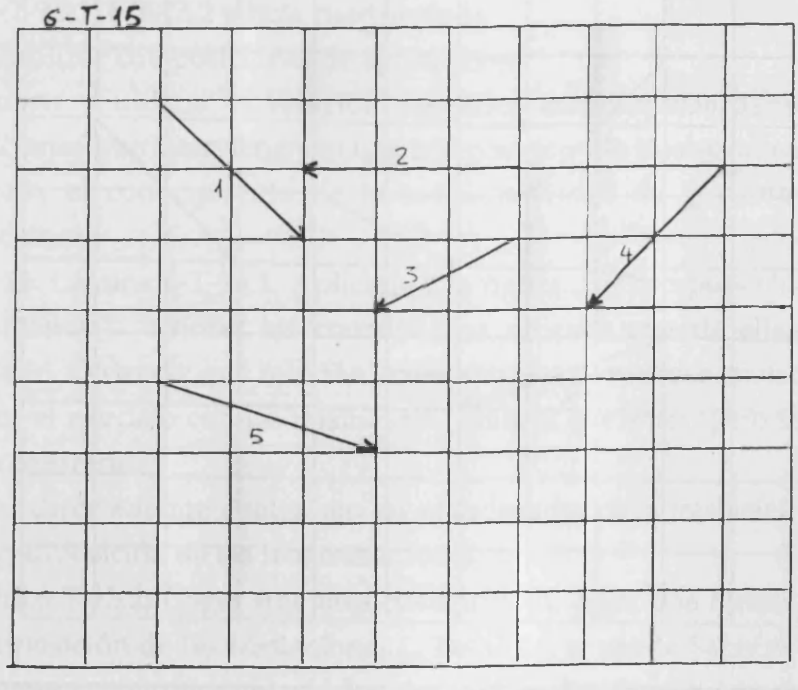
Actividad 14: El ejercicio se resuelve trabajando conjuntamente dos alumnas. Hay que pegar dos figuras trasladadas entre sí y se trata de pasar de una figura a la otra mediante dos traslaciones. Hay que dibujar los dos vectores.

Una vez que se ha encontrado una solución, averiguar si existe otra más y, en caso afirmativo, decir cuántas y justificarlo.

Láminas: 6-T-15 y hoja en blanco.

Objetivos: Componer traslaciones sin soporte de cuadrícula, conocidos los vectores libres.

Actividad 15: Pegar una pieza en la hoja en blanco. Aplicarle la composición de las dos traslaciones ... Si se cree oportuno, calcar los vectores en la hoja, manteniendo su inclinación.



Láminas: Hoja en blanco.

Objetivos: Descomponer una traslación en producto de dos, sin soporte de cuadrícula.

Afianzar la comprensión de la infinidad de posibilidades para la descomposición.

Actividad 16: El trabajo se lleva a cabo conjuntamente por parejas. Hay que pegar en la hoja dos figuras, trasladadas entre sí. El ejercicio consiste en descomponer esa traslación en producto de dos.

Explicar cuántas soluciones existen.

Láminas: Hoja en blanco.

Objetivos: Descomponer una traslación en producto de dos, sin soporte concreto de figuras o vectores; o sea, a partir sólo de las relaciones cuantitativas de las coordenadas de los vectores.

Actividad 17: Las coordenadas del vector resultante de una composición de dos traslaciones son ... Averiguar cuáles son las coordenadas de los vectores de las traslaciones que se han compuesto.

Explicar cuántas soluciones existen.

Resumen de las sesiones de 6º de E.G.B.

Sesión 1

Láminas: 6-T-1.
Objetivos: Introducción estática de las traslaciones.
Actividad 1: Observar las figuras que son trasladadas entre sí y las que no lo son.
Expresar verbalmente lo que es una traslación.

Quizá debido a que en en esta actividad no hay pares de figuras, sino grupos de más figuras, la verbalización de lo que es una traslación por parte de las niñas incluye a veces una idea de repetición múltiple. De todas maneras, ello no supone ningún impedimento en las actividades posteriores para el reconocimiento y consideración de dos figuras trasladadas.

Las expresiones empleadas para definir una traslación son:
A lo mejor que cuando dobles el papel se te quede uno encima de otro.
Que se repiten ... igual. Se va repitiendo seguido.
Que todos los dibujos miran hacia el mismo sitio.
Que los dibujos se van multiplicando. Se van repitiendo los mismos dibujos.

La primera de todas las descripciones es incorrecta, pues corresponde a una simetría. La alumna reconoce visualmente las traslaciones, pero quizá da como respuesta el método de plegado por ser el único experimentado para algo parecido en E.G.B.

Las justificaciones que dan las alumnas para los contraejemplos son:
Están cada uno de una forma. No están seguidos.
Miran hacia distinto sitio.
No están en línea recta.
[Las manos] *no señalan todas hacia el mismo sitio.*

Láminas: 6-T-2.

Objetivos: Emplear las características visuales en el reconocimiento de figuras trasladadas.

Introducción dinámica de las traslaciones.

Actividad 2: Decir qué figuras se han movido por una traslación y justificar algunos casos positivos y otros negativos.

Coger las siluetas de la casa y de la pistola (se proporcionan esas piezas en papel), situarlas encima de alguna de esas figuras y desplazarla hasta otras trasladadas de ellas. Deslizar luego las siluetas entre figuras no trasladadas.

Todas las alumnas identifican correctamente los casos que se corresponden mediante una traslación y los que no, incluso los que se superponen. Las justificaciones proporcionadas son análogas a las de la lámina anterior,

La profesora les proporciona a las niñas siluetas recortadas de esas figuras para que realicen los desplazamientos con la pieza, aunque no hace que verbalicen la propiedad de que el movimiento es en línea recta en las traslaciones.

Láminas: 6-T-3.

Objetivos: Reconocer que las traslaciones no cambian el sentido de los ángulos, desde la visión de "dar la vuelta al papel".

Emplear las características visuales de las traslaciones, tanto estática como dinámicamente, de invarianza en la inclinación de una figura.

Actividad 3: Trasladar la figura de manera que el lado AB se coloque sobre el segmento dibujado.

Observar si la pieza seleccionada es exactamente igual a la original.

De cada tipo de pieza de las que disponen las alumnas está una y su simétrica. La profesora no lo ha indicado, pero las alumnas se dan cuenta y seleccionan en cada momento la adecuada. Saben que para que coincidieran las piezas inversas habría que "dar la vuelta" al papel (colocarlo por la otra cara).

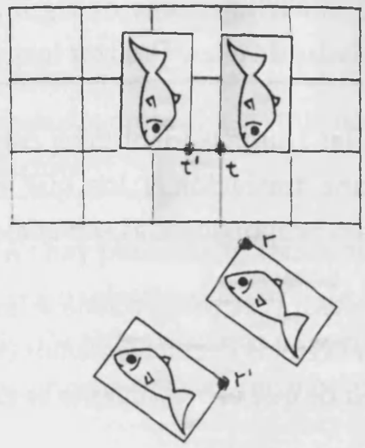
Las alumnas sí tienen clara la actividad propuesta y, aunque hay algunos errores (una pieza inversa y un pez girado) parece que se deben a descuidos más que a falta de comprensión. La superposición de figuras no supone ninguna dificultad adicional.

Láminas: 6-T-4.

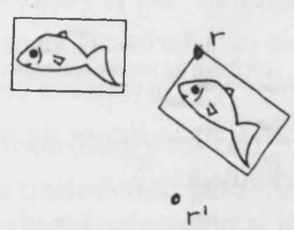
Objetivos: Afianzar y utilizar la característica visual de invarianza en la inclinación de las figuras por las traslaciones.

Actividad 4: Trasladar la pieza de manera que el vértice marcado se sitúe sobre el punto indicado.

Iciar tiene mal varias figuras, dos sobre la cuadrícula y una fuera de ella. El error consiste en que no coloca el vértice que corresponde sobre el punto, sino otro vértice (ver los dibujos). Los corrige al ir repasando cada uno de los casos todas las niñas con la profesora.



Inmaculada sitúa mal el rectángulo que no está sobre la cuadrícula. Varía por completo la inclinación (ver dibujo).



Láminas: 6-T-5.

Objetivos: Afianzar y utilizar al característica de invarianza en la inclinación de las figuras por las traslaciones y el paralelismo de segmentos que se corresponden por una traslación.

Actividad 5: Desplazar la figura de manera que algún lado se coloque sobre el segmento marcado. Justificar la posibilidad o imposibilidad. Dar todas las soluciones para cada caso.

Las niñas resuelven rápidamente y bien la lámina, excepto Inmaculada, quien deja sin trasladar la flor sin cuadrícula. Se da cuenta de que sí hay solución cuando se lo indican; en concreto, Marta le dice:

Marta: *Es que has probado con un segmento sólo y tienes que probar con los otros.*

Ninguna niña da al principio las dos posibilidades del rectángulo (pez) horizontal aunque, cuando la profesora pregunta, Rebeca las explica enseguida.

Las alumnas no hacen referencia al paralelismo, por lo que la profesora lo menciona y desde entonces las niñas la emplean correctamente en sus justificaciones de esta lámina.

Láminas: 6-T-6.

Objetivos: Introducir y determinar una aproximación a las coordenadas del vector de una traslación: Instrucciones del tipo derecha / izquierda y arriba / abajo. Descubrir la independencia del punto elegido de una figura (y su imagen) en la determinación de las coordenadas (la aproximación direccional indicada en el objetivo anterior) del vector de la traslación.

Actividad 6: Se trabaja por parejas de alumnas. Seleccionada una figura de la lámina, una de las alumnas de la pareja la traslada, sin que la otra alumna vea dónde la sitúa. A continuación, debe dar instrucciones directas para que su compañera sepa dónde está la imagen.

Una vez que ya se utilizan instrucciones del tipo derecha o izquierda y arriba o abajo, averiguar qué sucede si se selecciona otro punto de la figura original para determinar la traslación.

Trabajo en grupo: Análogo al anterior, pero una alumna da las instrucciones y todas las demás sitúan la imagen.

Las instrucciones primeras de las alumnas son en varios pasos y contienen una primera orden, que no necesariamente incluye el número de cuadrados de diferencia entre las figuras. Algunas de las frases empleadas son:

Empezando por aquí [uno de los vértices], *un poco en diagonal hasta que quede algo superpuesta con ésta.*

La vas colocando hacia la diagonal del dragón.

Luego van aproximando mediante instrucciones del tipo: *Más arriba, más hacia la derecha ... Un poco más,* etc.

Entonces la profesora dirige el proceso hasta llegar a la expresión mediante la aproximación a las coordenadas del vector de la traslación, consistente en valores numéricos, seguidos de direcciones derecha o izquierda y arriba o abajo.

Primero la profesora pide que lleguen al resultado mediante una orden. Rebeca propone numerar los cuadrados en horizontal y en vertical *y dar el cuadrado.* O sea, su propuesta consiste en dar las coordenadas. Tras ello sigue este diálogo:

Prof.: *¿Y sin numerar los cuadros? ... ¿Cómo puedes decir lo que te has movido? Has ido hacia la izquierda y hacia abajo.*

Icíar: *Dices los cuadros: Dos cuadros hacia abajo y un cuadro hacia la izquierda.*

Esa respuesta ya es exactamente la deseada.

Inmediatamente después surge por sí mismo el problema de cómo contar: Si contar el cuadro de la figura o no. Y también se plantea la cuestión de la dependencia o no del punto elegido para realizar la traslación:

Icíar: *No. Sería un cuadro, porque yo lo he contado con ésa incluida.*

Icíar: *Un cuadro hacia abajo sin contar la flor y un cuadro hacia la izquierda desde el vértice más lejano..*

Prof.: *Vamos a hacer todos lo que dice Icíar. Poner igual la hoja.*

Icíar: *Un cuadro hacia abajo y uno hacia la izquierda.*

Prof.: *Lo tenéis en sitios distintos.*

Icíar: *Es que depende del vértice por donde empieces.*

Marta: *No porque un cuadro hacia abajo se iría aquí* [mueve la pieza] *y uno hacia la izquierda se iría aquí.* [Seguramente lo mueve dos cuadrados].

Como el resultado de Marta no coincide con el de Icíar, ésta le dice: *Marta, es que tú estás contando desde aquí, desde este vértice.*

Marta: *¡Claro!, ¡yo estoy diciendo desde éste!*

Marta: *¿Cuánto?*

Icíar: *Dos abajo y uno a la izquierda.*

El resultado de Inmaculada no coincide con el de las demás, por lo que repite con las piezas sucesivamente las dos instrucciones que dio Icíar: Dos hacia abajo y uno hacia la izquierda. Lo realiza bien.

Marta: *Se podría haber dicho de una manera más simple: Por este segmento dos diagonales hacia abajo.*
Prof.: *En este caso sí, pero si queremos algo más general lo de Icíar sirve. ¿Y si ahora digo tres hacia abajo uno hacia la derecha?*
Rebeca y Marta: *¿Con qué vértice?*
Prof.: *Vosotros hacerlo.*
Una vez que lo han hecho, la profesora dice: *¿Y si os fijáis en el otro vértice en horizontal dónde se queda?*
Prof. (Una vez que las alumnas han efectuado el movimiento): *Rebeca, se te ha quedado en el mismo sitio que antes, ¿no?*

La transcripción anterior es significativa sobre el convencimiento de las niñas sobre la dependencia del vértice elegido para aplicar la traslación en el lugar en que se situará la figura imagen. Ese convencimiento continúa durante parte de la sesión siguiente, en la que se proponen ejercicios de este tipo, con esta misma lámina, y también en la lámina siguiente.

Incluso cuando parece que las alumnas han entendido la independencia del vértice elegido, la idea visual de dependencia prevalece a veces en sesiones posteriores en algunas de las alumnas. En esas situaciones, al hacerles preguntas directas o pensar sobre el posible motivo del error, se dan cuenta de que no han tenido en cuenta la independencia del punto elegido.

El resto del trabajo por parte de las niñas en esta lámina es parecido al transcrito, por lo que no incido más en ello. Sí comentaré, sin embargo, que alguna de las niñas hace una desplazamiento inclinado para una orden "hacia abajo". La profesora entonces hace desplazamientos "hacia abajo" inclinados, pero con diferentes destinos, con el fin de mostrar la ambigüedad de esa expresión. Al finalizar, la profesora indica que seguirán las líneas de la trama en los desplazamientos derecha-izquierda y arriba-abajo.

Sesión 2

Láminas: 6-T-7.

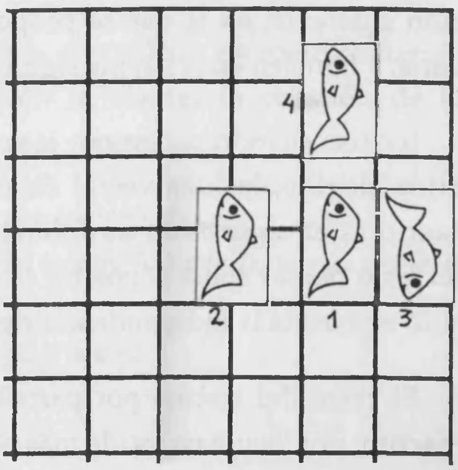
Objetivos: Identificar las coordenadas (la aproximación direccional indicada en los objetivos de la actividad anterior) de una traslación, conocida una figura y su imagen.

Afianzar la independencia del punto elegido para determinar las coordenadas (la aproximación) del vector de la traslación.

Actividad 7: Se seleccionan dos figuras y hay que indicar si son trasladadas o no. En caso afirmativo, determinar la traslación que transforma una en la otra.

Transcribo el comienzo de la solución esta lámina por las alumnas, que pone de manifiesto la idea de dependencia de la imagen del punto elegido de una figura para contar los cuadrados de desplazamiento por la traslación, aunque esa idea reaparece a lo largo de la sesión varias veces (en algunas transcripciones que incluyo con otra finalidad también se ve claramente):

Rebeca: *Desde este lado* [el inferior del rectángulo 1, ver dibujo] *tres cuadros hacia arriba.*



Marta: *Dos.*

Rebeca: *Bueno, no, dos.*

Prof.: *¿Qué os parece?*

Otras niñas: *Dos.*

Prof.: *Rebeca, empieza a contar en la línea de arriba, ¿qué saldría?*

Rebeca: *Otros dos.*

Prof.: *¿Y si empiezas a contar en la aleta pequeña* [del pez]?

Rebeca: *Otros dos.*

¿Inmaculada?: *Sí.*

Otras niñas: *Sí.*

Prof.: *Antes decíais que no salía igual si contábamos desde puntos distintos.*

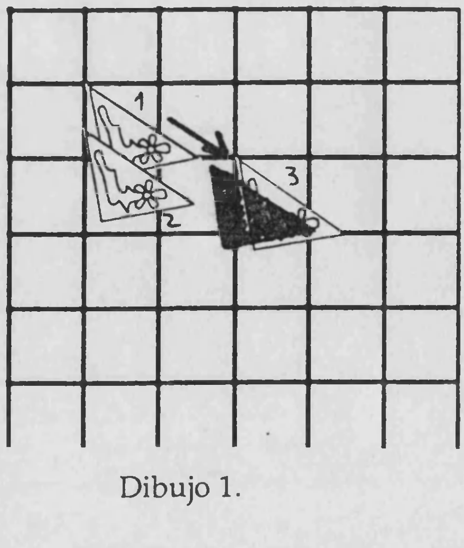
Marta: *Pero como todos estaban mirando hacia el mismo sitio.*

A excepción de Rebeca, las alumnas cometen errores a veces en desplazamientos inclinados. Indican hacia arriba/abajo cierto número de cuadros, pero no se trata de desplazamiento vertical, sino inclinado; en ocasiones la determinación completa de la traslación la dan mediante una instrucción del tipo que acabo de mencionar, precedida de otra horizontal o vertical. A continuación presento dos ejemplos, en los que también se aprecia que las alumnas no han asimilado la idea de independencia del punto elegido de la figura para aplicar la traslación.

Prof.: *Inmaculada, ¿cómo se puede ir del dragón 1 al 2?* [el inferior de la lámina].
Inmaculada [desplaza, trasladando, una pieza del 1 al 2]: *Pues hay un cuadro.*
Prof.: *¿Horizontal?, ¿Vertical?*
Inmaculada: *En vertical.*
Prof.: *En diagonal.*
Inmaculada: *Eso.*
Prof.: *¿Desde dónde has medido?*
Inmaculada: *Desde el vértice de ahí.*
Prof.: *¿Y si mides desde el ojo del dragón qué saldría?*
Inmaculada manipula, mira y dice: *Uno y ... espera, uno.*
Prof.: *¿Uno también?.*
Inmaculada: *Sí.*

El otro ejemplo que muestro corresponde a la respuesta de Icíar al pasar de la flor 1 a la 3:

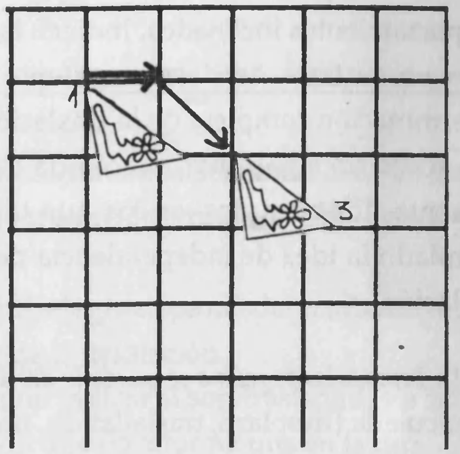
Icíar: [Me preguntas] *cuántos cuadritos hay, ¿no? Pues hay ... ¡Uy! ¡Qué lío! Hay uno y un poquito, pero muy poquito. Además, esto está inclinado .*
Prof.: *¿Cómo medíais antes, cuando estabais inventando vuestras normas?*
Icíar: *¿Con los cuadritos?*
Prof: *¿Ese método no funcionaba bien?*
Niñas: *Sí.*
Marta: *Es que yendo así no sería una traslación porque no va al mismo lado* [en el dibujo 1 muestro, mediante



Dibujo 1.

una flecha, la dirección que ha seguido Marta al desplazar la figura, de tal manera que no se superponen exactamente].

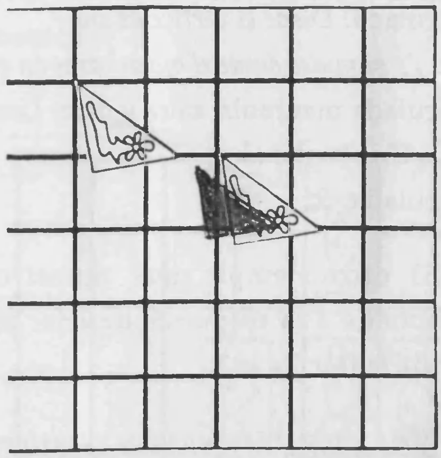
Icíar: *Sí es. Un cuadro hacia la derecha y uno hacia abajo* [ver en el dibujo 2 la forma como Icíar desplaza hacia abajo, que es inclinada. La traslación real es (2, –1)].



Dibujo 2.

Prof.: *¿No es una traslación eso?*

Marta: *Haciéndolo así no porque no quedan en el mismo sitio* [Marta ha realizado de nuevo la traslación como indicamos en el dibujo 3, de tal manera que la pieza no se superpone exactamente sobre la imagen].



Dibujo 3.

Icíar: *Bueno, pero si lo haces con cuadraditos sí. Es uno a la derecha y uno abajo, moviendo.*

Prof.: *Uno a la derecha y uno abajo. ¿Estáis de acuerdo?*

Marta e Inmaculada: *Sí.*

Prof.: *¿Tú también, Rebeca?*

Rebeca: *Yo diría 2 a la derecha* [en vez de 1].

Icíar: *Bueno, sí desde el que está más para allá, pero desde este vértice, el vértice que está más hacia la derecha del primero pues 1 hacia la derecha.*

Rebeca: *¡Ah!, sí.*

Icíar: *Desde este vértice* [inferior derecho] *1 a la derecha, 2 abajo* [ver en el dibujo 4 cómo mueve la figura cuando va indicando esos desplazamientos. Inclina para mover hacia abajo].

Prof.: *¿Cuál es 1 a la derecha?*

Icíar: *Este.*

Prof.: *Cuál es el vértice?*

Icíar señala el que inferior derecho.

Prof.: *¿Hasta dónde lo tienes que llevar?*

Icíar [señalando]: *Desde aquí 1 a la derecha y 2 abajo.*

Prof.: *Pero eso es más de 1.*

Niñas: *Sí. Son dos* [Son varias las niñas que se dan cuenta de eso, incluida Icíar].

Icíar: *Sí. Son 2 a la derecha* [mueve la figura], *1 abajo.*

Rebeca: *2 a la derecha, 1 abajo.*

Prof.: *Rebeca, tú lo estabas mirando desde otro vértice.*

Rebeca: *Queda igual. 2 a la derecha y 1 abajo.*

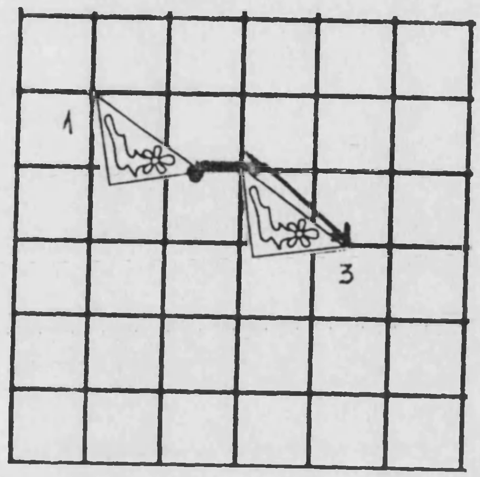
Prof.: *¿Desde cualquier sitio va a dar lo mismo?*

Marta:*Sí.*

Prof.: *¿Cómo quedaría desde el redondelito de la flor?*

Niñas: *Igual.*

Icíar: *Siempre da igual.*



Dibujo 4.

A pesar de que parece que las alumnas están convencidas de que las coordenadas del desplazamiento por la traslación son independientes del vértice de la figura, en las instrucciones que dan inmediatamente después de este ejercicio, y en el ejercicio siguiente, de nuevo algunas niñas hacen incidencia en el punto elegido.

La utilización de desplazamiento inclinado en lugar del horizontal + vertical se produce también puntualmente en sesiones posteriores. Todas las alumnas menos Rebeca lo emplean alguna vez. En ocasiones no se trata de un error de recuento de cuadrados, pues hacen una descripción del movimiento según la cantidad de cuadros desplazados en diagonal. En estos casos omiten algún dato para que la traslación quede totalmente determinada. Por ejemplo, Marta dirá *1 en diagonal hacia arriba,* pero se dan cuenta de ello en cuanto la profesora se lo indica. En esos casos, Inmaculada comete varias veces el error de emplear el término "vertical" y en unas cuantas ocasiones -pocas- dan la coordenada vertical, expresada mediante "abajo/arriba", contada según una diagonal, precedida del desplazamiento horizontal complementario.

Láminas: 6-T-8.
Objetivos: Identificar las traslaciones mediante un segmento (el sentido del vector no se introduce todavía).
Considerar las componentes longitud y dirección del vector que define una traslación.
Afianzar la comprensión sobre la independencia del punto elegido en una figura para aplicar una traslación.
Desarrollar la característica de libertad del segmento de la traslación, o sea, su movilidad en el plano.
Actividad 8: Indicar cómo se puede indicar en esta situación, en la que no hay cuadrícula, la traslación que se va a efectuar.
Si se mide directamente la distancia desde un vértice hasta su imagen, explicar qué se obtiene al seleccionar un vértice distinto.
Explicar cómo son los segmentos que unen vértices que se corresponden por una misma traslación.
Fijar dos figuras concretas y determinar la traslación que lleva una a otra.
Seleccionar una figura distinta y aplicarle exactamente la misma traslación anterior, o sea, mover la pieza de la misma manera que se hizo antes.

La comprensión de lo que significa "la misma" traslación requiere una explicación de ese vocablo en términos de traslaciones. La forma de plantearlo es la siguiente:

Tras identificar la traslación que transforma la figura 7 en la 8, se pide la aplicación de la misma traslación a otra figura (a la 1).

Las niñas no lo entienden y algunas lo interpretan como desplazamiento de la figura 1 hasta el mismo lugar en que se encuentra la imagen de la primera traslación, o sea, hasta la figura 8. El profesor se sirve de un símil con juegos de niños para explicar el significado de igualdad. El juego consiste en que un niño se mueve x pasos hacia un lado y los demás deben repetir esa acción. Tras eso las alumnas comprenden, al menos momentáneamente, lo que se pide. Icíar en algún momento piensa sólo en igualdad de longitud, pero al final de la sesión, todas las alumnas, excepto quizá Inmaculada, han comprendido que las traslaciones no están asociadas a las figuras y que una traslación se puede aplicar a cualquier figura.

Excepto Rebeca, las demás alumnas muestran algunas veces no haber asimilado la independencia del punto elegido para aplicar o identificar la traslación. Incluso al final de la sesión Icíar exclama: *¡Ah!, pero es que vamos con distinto vértice. Aquí sí que* [el resultado] *sale distinto* [según el vértice que se elija].

Rebeca menciona y utiliza algunas propiedades que no han surgido en la clase. En concreto, se refiere explícitamente al paralelismo de las líneas que unen puntos que se corresponden mediante una traslación, tanto si son de una misma figura como al aplicar una traslación conocida a una figura distinta. También explicita que la distancia entre figuras se conserva. Ambas propiedades las verbaliza sin que la profesora las haya indicado anteriormente. En la transcripción que viene a continuación muestro una de esas intervenciones de Rebeca:

La profesora ha pedido que las alumnas le apliquen a la figura 2 la misma traslación que la que lleva la figura 1 a la 9. Las niñas ya han indicado que la distancia (de un punto a su imagen) ha de ser la misma. Todas, menos Inmaculada, marcan, desde un vértice de 2, una línea paralela a la de la traslación conocida y de su misma longitud. Rebeca, que es perfeccionista, dice:

Rebeca: *A mí me ha salido mal porque esto* [distancia entre las figuras 1 y 2, que son las dos originales] *tiene que estar a la misma distancia que esto* [distancia entre la figura 9 y la imagen de la figura 2, que son las dos imágenes de las traslaciones].

Icíar hace referencia al paralelismo, tras haberlo mencionado Rebeca, pero sin embargo no es una propiedad que haya asimilado por completo, pues poco después dice que no hace falta el paralelismo para aplicar una traslación, y sólo es necesario conocer la distancia que se tiene que desplazar la figura. De todas maneras, es probable que ese error provenga de que no está considerando o no haya entendido el significado de aplicar "la misma" traslación.

Inmaculada seguramente no ha trazado paralelas, pues su imagen está demasiado desviada para ello.

Sesión 3

Láminas: 6-T-9.

Objetivos: Proporcionar correctamente las coordenadas de una traslación (la aproximación direccional: arriba/abajo, derecha/izquierda), conocidas una figura y su imagen.

Afianzar la independencia del punto elegido para determinar las coordenadas del vector de la traslación.

Actividad 9: Dar las instrucciones que permiten trasladar la figura ... a la ...

Decir qué instrucciones se obtienen si se elige un punto distinto para contar desde él.

En el primer ejercicio -traslación del triángulo 1 al 2 (dragones), situados en la parte inferior de la lámina- Inmaculada y Marta no emplean componentes horizontal + vertical, sino inclinada: *Un cuadrado en diagonal hacia arriba.* La profesora les hace ver que se requiere expresar además si es hacia la derecha o hacia la izquierda. Rebeca e Icíar sí indican, correctamente, las coordenadas horizontal + vertical.

La traslación del triángulo 1 al 3 (flor) sólo la dan correctamente, mediante coordenadas horizontal + vertical, Rebeca y Marta. Inmaculada indica mal la coordenada horizontal, pues hace referencia a la separación entre las figuras: *1 abajo y 1/2 a la derecha*, pero luego rectifica. Inmaculada es la única alumna que muestra en esta lámina no haber asimilado la independencia del punto elegido en la figura para realizar la traslación. Al preguntarle la profesora si desde el vértice superior el resultado es el mismo, Inmaculada cuenta los cuadros antes de responder. Icíar tiene bastantes dificultades, parte de las cuales ya indiqué en algún párrafo anterior: *1 hacia la derecha, 1 hacia abajo* es su primera propuesta. A continuación da otras dos respuestas erróneas. Finalmente lo resuelve bien, tras la sugerencia de la profesora de que se fije en otro vértice, el superior. Parece, por tanto, que la idea de lo que hay que hacer sí que la tienen clara todas las alumnas, pero la elección de ciertos puntos para determinar la traslación provoca errores debido a que la figura está en el recorrido que hay que hacer al contar los cuadros del desplazamiento.

Láminas: 6-T-10.
Objetivos: Introducir las características cualitativas de la traslación inversa: Sentido opuesto y coordenadas (su aproximación direccional) con instrucciones contrarias.
Actividad 10: Seleccionadas dos figuras trasladadas, trazar el camino que lleva una de ellas a la otra. Marcar luego el camino que transforma la final de antes en la original de antes.
Explicar la relación que hay entre ambas traslaciones. Indicar qué relación existe entre las coordenadas que las definen.

Para "marcar el camino que lleva la figura 5 a la 6", dos niñas, Rebeca e Icíar, utilizan las coordenadas horizontal + vertical. Otras dos niñas dibujan directamente la traslación.

El objetivo de las actividades es muy simple, por lo que las niñas responden correctamente sobre los caminos necesarios en esos casos para hacer la traslación que lleva la figura final a la inicial (la figura 6 a la 5).

Láminas: 6-T-11.
Objetivos: Introducir el vector libre como caracterización de las traslaciones.
Considerar las tres componentes del vector (dirección, módulo y sentido).
Utilizar el vector libre para realizar traslaciones, a partir de sus coordenadas y también mediante aplicación directa del vector.
Actividad 11: Indicar para qué pueden ser las flechas dibujadas en la lámina.
Aplicarle a la figura ... la traslación ...

Los objetivos básicos de la actividad se consiguen, excepto quizá Inmaculada, la cual probablemente no se da cuenta de algunas de las características que se emplean.

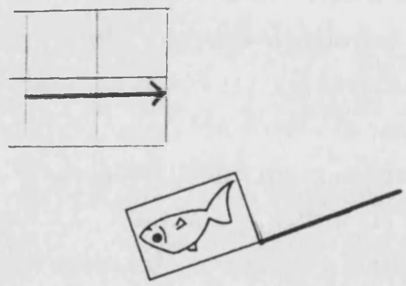
Todas las alumnas, excepto Inmaculada, habían asimilado en los ejercicios de las actividades previas el significado de un vector como representante de una traslación con las características de ésta. Ahora, a Inmaculada hay que recordarle el significado del vector, pues no utiliza su dirección y comete errores respecto a la longitud -medida en cuadrados- de las coordenadas; seguramente el problema de medición se debe a que no ha aprendido todavía a contar entre vértices que se corresponden.

Inmaculada sigue teniendo, además, problemas con el trazado de paralelas (recordar que en la actividad 8 también se presentó ese problema). Cuando hay que dibujar una paralela al vector, no traza la paralela o se pierde a lo largo del proceso y luego no sabe cómo colocar la pieza. Pero todos esos errores los va superando Inmaculada con los ejercicios y llega a entender el significado del vector libre como representante de una traslación. De hecho, todas las alumnas, incluso Inmaculada, llega a hacer referencia a igualdad de dirección y módulo cuando justifican casos correctos o lo que hay que hacer.

Veamos con más detalle algunas intervenciones de las alumnas durante la realización de los ejercicios de esta actividad:

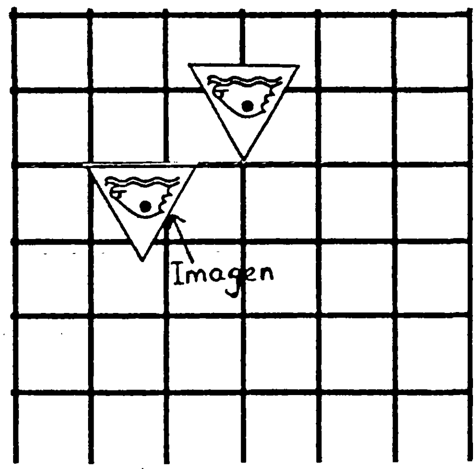
Prof: *¿Para qué creéis que se dan las flechas?*
Icíar: *Para decir dónde tenemos que ir.*
Prof.: *El pez que hay a la derecha, sin cuadrícula, moverlo por la traslación a ... La flecha indica el camino. El pez se tiene que mover según el camino ése.*

Excepto Inmaculada, las demás niñas lo hacen bien. Inmaculada realiza mal el desplazamiento, prolongando un lado (ver dibujo). Le dicen cómo colocar la regla -horizontal- y que desplace la pieza, pero Inmaculada no la sitúa de manera correcta. Se lo tienen que resolver.



Mediante preguntas directas, las niñas van expresando que, para especificar el vector, hay que indicar la dirección y la longitud. La profesora indica la diferencia entre dirección y sentido.

Inmaculada hace mal todos los ejercicios que se piden. El primero consiste en aplicarle la traslación de vector b (de coordenadas (-2,-1)) al triángulo equilátero de la cuadrícula (dragón). En el dibujo de la página siguiente se ve la traslación realizada por Inmaculada, quien es la única que sitúa mal la imagen. Inmaculada tiene que realizar varios intentos antes de dar la solución correcta. En el ejercicio siguiente parece que el error de Inmaculada proviene de haber colocado un vértice en el lugar destinado a otro.



Todas las niñas se dan cuenta enseguida de la equivalencia de los vectores *a* y *d:* Al pedir la profesora que apliquen la traslación de vector *a* a una figura a la que anteriormente le habían aplicado *d,* las niñas, sin necesidad de resolver el ejercicio, dicen que da el mismo resultado. La justificación de Inmaculada, correcta, aunque parcial porque no posee el vocabulario adecuado, es: *Sí* [saldrá lo mismo] *porque son de la misma longitud y de la misma ...* [no completa la frase].

La aplicación del vector libre mediante trazado de paralelas surge al pedir la traslación de vector b (coordenadas (-2,-1) sobre el triángulo equilátero (dragón) que no se encuentra sobre la cuadrícula. Inmaculada, de nuevo, es la única que lo resuelve mal.

La propuesta de Rebeca es utilizar medidas en horizontal y vertical, y es lo que hacen todas las niñas. Evidentemente, esa propuesta es consecuencia del trabajo previo sobre cuadrícula, en el que se insistió en utilizar las coordenadas del vector de la traslación. La profesora pide luego una propuesta alternativa, que es la aplicación directa del vector, y pregunta acerca de la particularidad de las rectas que contienen al vector y la trazada, con lo que surge el paralelismo.

El trazado de paralelas las alumnas lo realizan mediante cartabón y escuadra. La carencia de dominio en el manejo de la técnica correspondiente hace que el trazado de paralelas se convierta en un fin en sí mismo, desviando la atención del objetivo de la actividad. Rebeca no tiene problemas, pero las demás niñas sí. A la que le resulta más difícil es a Inmaculada, a la cual hay que ayudar mucho y, una vez trazada la paralela, dice: *No sé cómo tengo que colocar la pieza,* y va probando hasta que consigue situarla.

A lo largo de esta actividad, Marta hizo en algún momento referencia a desplazamiento "en diagonal": *2 en diagonal hacia abajo* para el vector *b*, de coordenadas (-2,1), que ya discutimos al referirnos al vocabulario empleado por las alumnas en relación con la identificación de las coordenadas de los vectores.

Sesión 4

Láminas: Hoja en blanco.

Objetivos: Aplicar traslaciones definidas mediante un vector libre, mediante la utilización directa del vector.

Introducir y efectuar composiciones de traslaciones.

Descubrir la conmutatividad de la composición de traslaciones.

Actividad 12: Se lleva a cabo por parejas. Cada niña pega una figura y dibuja un vector. La compañera tiene que aplicarle a la figura la traslación caracterizada por ese vector.

Ejercicio análogo, pero ahora la cantidad de vectores es dos y lo que hay que hacer es componer las traslaciones correspondientes, o sea, aplicar una de las traslaciones y, a la figura imagen, aplicarle la otra traslación.

Hacer una composición de tres traslaciones.

Realizar alguna de las composiciones de dos traslaciones con el orden de actuación contrario. O sea, la que antes se utilizó primero ahora interviene en segundo lugar.

A lo largo de los ejercicios de esta actividad se ve que Marta e Inmaculada no han asimilado todavía la independencia del punto elegido en una figura para aplicar las traslaciones o, por lo menos, no para una composición. Respecto a Inmaculada, aunque varias veces dice que sí da igual el vértice elegido, posteriormente piensa que no. A continuación muestro un ejemplo:

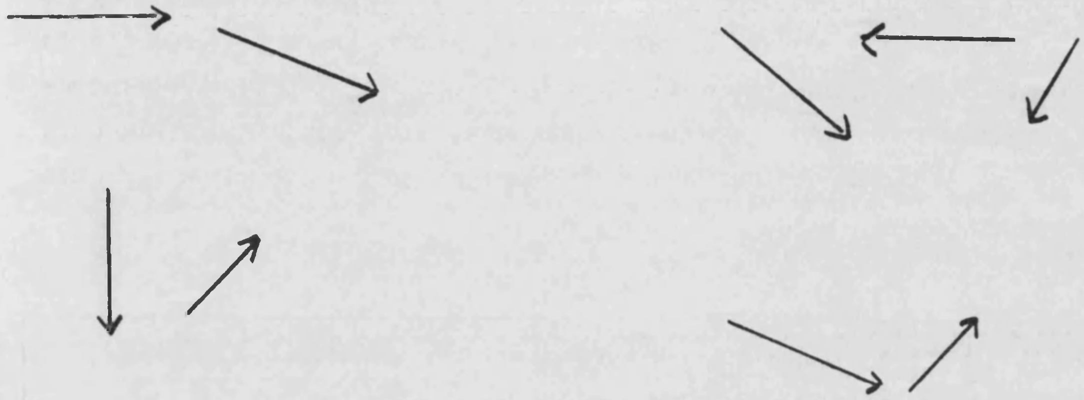
Una vez resuelta una composición de traslaciones, la profesora le dice a Marta: *Yo veo que siempre marcáis un punto* [vértice] *para empezar en ese punto. ¿Y qué pasa si no marcáis un punto?*

Marta: *Pues que lo podemos hacer desde otro vértice y no sale igual.*

Prof.: *Probad ahora: Tú* [Inmaculada] *prueba haciéndolo desde este punto y tú* [Marta] *desde éste.*

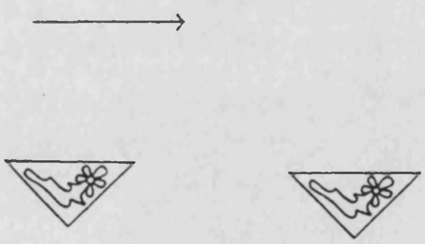
Inmaculada [tras hacerlo]: *Sale en el mismo sitio.*

Marta: *Nos sale igual.*
Prof.: *¿Y si cogierais otro vértice?*
Marta: *Seguramente saldría igual.*
Prof.: *Seguramente. No estáis seguras. A ver, probad.*
Marta: *Sí saldrá lo mismo. Espera, vamos a hacerlo.*



Dibujo 1.

La utilización del vector libre no es ningún problema para las alumnas y la composición de traslaciones tampoco. Pero quizá el hecho de que el trabajo lo desarrollan por parejas produzca alguna corrección entre las dos niñas de cada pareja antes de presentar los resultados, con lo cual puede resultar que pase desapercibido algún error que sí se habría manifestado en caso de haber realizado los ejercicios de manera individual. En el dibujo 1 mostramos algunos de los grupos de vectores que se utilizaron en las composiciones.



Dibujo 2.

En uno de los ejercicios, Inmaculada comete el error típico de medir entre los vértices más próximos, en lugar de utilizar los que se corresponden (ver dibujo 2). Pero ese tipo de error no es significativo, en cuanto que nosotros hemos comprobado en todas las experiencias que hemos realizado que lo cometen incluso estudiantes con gran dominio en la aplicación de traslaciones.

La conmutatividad de la composición de traslaciones la generalizan todas las niñas a partir de su comprobación en un ejemplo.

Rebeca hace mención explícita a la propiedad de paralelismo entre la figura original y la final, una vez que la profesora pregunta si la figura la colocan un poco a ojo. La respuesta de Rebeca es que ella ha comprobado el paralelismo de lados (mediante regla y escuadra). La profesora aprovecha la ocasión para destacar que se puede obtener la imagen de un punto y luego situar la figura paralela a la original.

Láminas: 6-T-13.1, 6-T-13.2 y hoja cuadriculada.

Objetivos: Realizar composiciones de aplicaciones.

Descubrir y utilizar la relación numérica entre las coordenadas de las traslaciones que intervienen en una composición y la traslación resultante.

Afianzar el conocimiento de la conmutatividad de la composición de traslaciones.

Actividad 13: Lámina 6-T-13.1: Aplicarle a la figura ... la composición de las dos traslaciones ... Anotar las coordenadas de cada una de ellas y las del resultado. Observar qué relación existe entre las cantidades anotadas.

Repetir el ejercicio con las mismas traslaciones que antes, pero actuando en orden contrario.

Indicar directamente cuáles son las coordenadas de la traslación resultante de la composición de las tres traslaciones ...

Lámina 6-T-13.2: Coger una hoja cuadriculada, pegar una figura y aplicarle la composición de las traslaciones ... Para ello, se puede hacer por pasos en las primeras composiciones, bien sirviéndose directamente de cada uno de los vectores o de sus coordenadas.

En las últimas composiciones, aplicar directamente la traslación resultante tras el cálculo de las coordenadas de su vector.

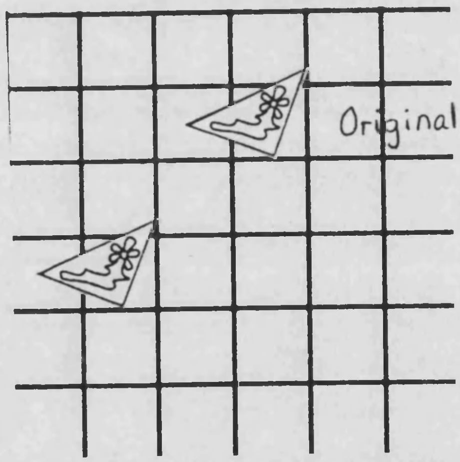
En los ejercicios de esta actividad, las alumnas trabajan por parejas.

Se trabaja en los ejercicios basados en la lámina 6-T-13.1 para obtener las coordenadas de la traslación resultante en una composición, las niñas aplican las traslaciones intermedias, incluso cuando se pide solamente el resultado final. En la sesión siguiente, que comentaré más adelante, sí se darán cuenta de que se trata de calcular las coordenadas horizontal y vertical por separado, a partir de las coordenadas de las traslaciones que intervienen en la composición. De todas maneras, hago notar que estas alumnas no conocen los números negativos y, quizá de haber trabajado en su aula con números enteros, habrían llegado antes a pensar en el método que proporciona la solución.

En la pareja Inmaculada-Marta aparece un error propio de sesiones anteriores: Se debe a que no saben cómo aplicar una traslación concreta a una figura. Se trata de un tipo de situación que ya presentó problemas en actividades anteriores: La figura a trasladar no tiene ninguno de sus lados en la dirección de la trama y la traslación a realizar es inclinada. En concreto, hay que aplicar la traslación de vector b, de coordenadas (-2,-1) al triángulo rectángulo (flor) de la cuadrícula.

Inmaculada mueve la pieza, pero ella misma dice que no lo sabe hacer.

Marta sigue con su tendencia a utilizar desplazamientos "en diagonal" en este tipo de situaciones. En concreto, su respuesta, errónea, es: *Son 2 en diagonal. Cojo un vértice y muevo 2 en diagonal.* Está segura de que ha resuelto bien el ejercicio (ver en el dibujo su solución).



Hay que dirigir a las alumnas para que tengan en cuenta correctamente las coordenadas del vector b.

Sesión 5

En esta sesión se termina la actividad 13; en concreto, se realizan los ejercicios de la lámina 6-T-13.2. Las parejas que se forman son Rebeca con Marta e

Icíar con Inmaculada. No tienen ninguna dificultad en identificar las coordenadas horizontal y vertical de cada vector, en términos de derecha/izquierda, arriba/abajo, pero, igual que indiqué en sesiones anteriores, Marta e Inmaculada recurren en ocasiones a describir o aplicar una traslación en términos del desplazamiento inclinado. En estos casos, a veces la descripción verbal es ambigua, quizá porque todas las alumnas disponen de los vectores dibujados, y entonces no necesitan especificar algunos datos que pueden identificar visualmente. Por ejemplo:

Marta: *El vector 1 es dos cuadros en diagonal, hacia la derecha, pero pasando por el medio* [falta añadir que baja, pues se trata del vector (2, -2)].

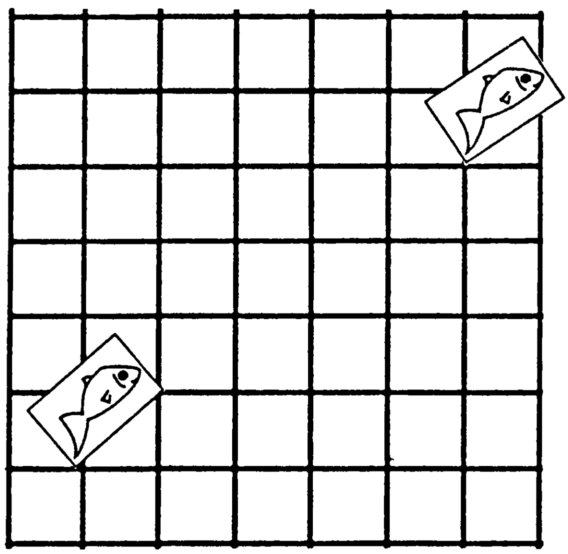
La imprecisión de Inmaculada es mayor, ya que alguna vez sólo da la cantidad de cuadros que atraviesa el vector. Inmaculada no se da cuenta por completo de la ambigüedad que supone eso. Por ejemplo: para el vector (3, -1), dice:

Inmaculada: *3.*
Prof.: *¿3 hacia abajo?*
Inmaculada: *No. Es que lo lleva en la misma línea.*

A lo largo de la realización de los ejercicios de esta lámina, ya no aparece el error de pensar que la traslación resultante depende del punto al que se le aplican las traslaciones. Más bien al contrario, Marta, que en la sesión anterior cometió ese error, recalca al principio de esta sesión la independencia del punto elegido; eso lo hace por propia voluntad, sin que se le pregunte sobre ello, simplemente para indicar que ya ha aprendido la propiedad. Parece que la aplicación de una traslación ya no supone dificultades para ninguna niña, ni siquiera los casos de situaciones inclinadas que les resultaban difíciles en las láminas anteriores. Hay algún error, pero al repasar lo corrigen ellas mismas.

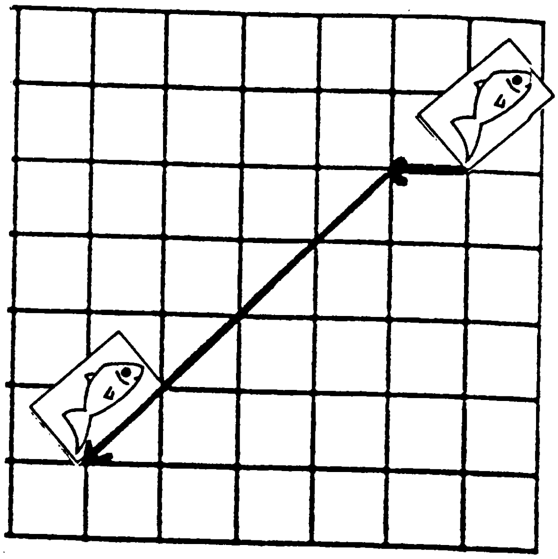
Las composiciones que realizan son de dos, tres y cuatro traslaciones. Una vez efectuadas, paso a paso, dan las coordenadas del vector de la traslación resultante. También pide la profesora que obtengan las coordenadas del vector de la traslación resultante directamente y, aunque al principio hacen todos los pasos, luego ya independizan las coordenadas y obtienen cada coordenada por separado (la profesora no les ha dicho cómo resolverlo). Quizá el hecho de no haber estudiado números negativos produzca una técnica lenta a veces, pensando detenidamente las operaciones a realizar cada vez que los sentidos de los vectores producen coordenadas de signos opuestos. Icíar es la que tiene más dificultades en darse cuenta del cálculo de las coordenadas de manera independiente del proceso de aplicación de las traslaciones. Inmaculada le explica a Icíar cómo resolver el primer caso en el que hay sentidos opuestos, pues Icíar todavía no ha deducido ningún procedimiento. Pero, a partir de entonces, Icíar ya resuelve esas situaciones. Inmaculada, que es la que usualmente tiene más problemas, obtiene bastante deprisa las coordenadas de las traslaciones resultantes.

Láminas: Hoja cuadriculada.
Objetivos: Descomponer una traslación en producto de dos.
Descubrir la infinidad de posibilidades de tal descomposición.
Actividad 14: El ejercicio se resuelve trabajando conjuntamente dos alumnas. Hay que pegar dos figuras trasladadas entre sí y se trata de pasar de una figura a la otra mediante dos traslaciones. Hay que dibujar los dos vectores.
Una vez que se ha encontrado una solución, averiguar si existe otra más y, en caso afirmativo, decir cuántas y justificarlo.



La descomposición de una traslación en producto de dos sólo da tiempo a proponérsela a Rebeca y Marta. La propiedad se plantea a partir de un caso concreto: Dos rectángulos (peces) sobre la cuadrícula que se corresponden mediante una traslación de vector (-5,-5) (ver dibujo). La primera solución que encuentran las alumnas es, evidentemente, la descomposición en un vector horizontal y otro vertical.

Al poco tiempo Rebeca se da cuenta de la descomposición general, de la existencia de "muchas" posibilidades. Ha comprendido que puede construir tantas como desee. Por el contrario, Marta sólo puede ver *siempre los dos mismos vectores*. Tras bastante rato, durante el cual está moviendo la pieza y pensando si en los lugares donde la para habría solución, sí da otra posibilidad. En ese momento la pieza está colocada de manera que una de las dos traslaciones es (-1,0). Marta dice: *Uno hasta aquí y luego hasta aquí* (ver dibujo).



Es importante destacar que Marta llega a esta solución por tanteo, y sólo ha sido capaz de darse cuenta de que en esa colocación intermedia de la figura sí hay solución, despreciando cualquier otra colocación que, sin embargo, también era válida. Marta es capaz luego de encontrar alguna otra solución y, aunque llega a darse cuenta de que hay muchas posibilidades, siempre piensa en casos concretos. No ha tenido la capacidad de generalización de Rebeca. Transcribo parte de lo que sucede tras el ejemplo que encontró Marta y que hemos comentado previamente:

Prof.: *¿Y otra solución?*
Marta: *No sé. Espera que piense.*

La profesora le pide a Rebeca que indique algunas otras posibilidades. Rebeca da tres ejemplos (con anterioridad ya se había puesto de manifiesto que Rebeca había visto la generalización). Marta también encuentra entonces algunas alternativas y se da cuenta de cómo conseguir distintas soluciones.

Prof.: *¿Cuántas soluciones puedes encontrar?*
Rebeca: *Muchas.*
Marta [Empieza a contar]: *1, 2, ... muchas.*
Prof.: *¿Muchísimas?*
Marta: *Pues no sé. No me voy a pasar toda la vida comprobando.*
Prof.: *¿Tienes que irlo comprobando?*
Marta: *Sí.*

Láminas: 6-T-15 y hoja en blanco.

Objetivos: Componer traslaciones sin soporte de cuadrícula, conocidos los vectores libres.

Actividad 15: Pegar una pieza en la hoja en blanco. Aplicarle la composición de las dos traslaciones ... (sus vectores son los de la lámina 6T-15). Si se cree oportuno, calcar los vectores en la hoja, manteniendo su inclinación.

Las parejas que se forman son las mismas que para la actividad anterior: Rebeca con Marta e Icíar con Inmaculada.

El cambio de papel con cuadrícula a papel sin cuadrícula no supone ninguna dificultad a la hora de realizar composiciones. Todas las niñas, excepto Inmaculada, miden con la regla en horizontal y vertical las coordenadas de los vectores libres, para situar cada vector con la inclinación adecuada en uno de los vértices de la figura a trasladar. Inmaculada calca los vectores en su hoja y luego, para aplicar las traslaciones correspondientes, mueve esos vectores mediante trazado de paralelas. Quizá si los vectores libres hubieran estado en la misma hoja sobre la que tenían que realizar la traslación, más niñas habrían empleado el paralelismo.

Es importante destacar que Inmaculada realiza bien las traslaciones aplicando el paralelismo del vector libre. En la sesión anterior, en la que se introdujo ese método, parecía que Inmaculada no había entendido cómo utilizar el paralelismo del vector para aplicar una traslación.

Láminas: Hoja en blanco.

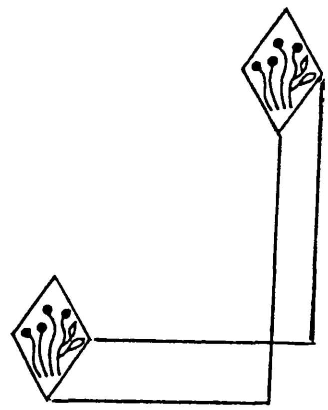
Objetivos: Descomponer una traslación en producto de dos, sin soporte de cuadrícula.

Afianzar la comprensión de la infinidad de posibilidades para la descomposición.

Actividad 16: El trabajo se lleva a cabo conjuntamente por parejas. Hay que pegar en la hoja dos figuras, trasladadas entre sí. El ejercicio consiste en descomponer esa traslación en producto de dos.

Explicar cuántas soluciones existen.

La descomposición de una traslación en producto de dos sólo da tiempo a proponérsela a Rebeca y a Marta. Rebeca, que ya había mostrado comprender la infinidad de posibilidades en la lámina anterior, en la cual había cuadrícula, mantiene esa visión. Marta da dos veces la solución horizontal + vertical, desde distintos vértices (ver dibujo). Pero ella misma se da cuenta de que se trata de las mismas traslaciones, pues comenta: *Es la misma solución, pero con otro vértice.*



Rebeca proporciona varias posibilidades y no se sabe si Marta habría dado otras concretas, pues la actividad finaliza ahí.

Láminas: Hoja en blanco.

Objetivos: Descomponer una traslación en producto de dos, sin soporte concreto de figuras o vectores; o sea, a partir sólo de las relaciones cuantitativas de las coordenadas de los vectores.

Actividad 17: Las coordenadas del vector resultante de una composición de dos traslaciones son ... Averiguar cuáles son las coordenadas de los vectores de las traslaciones que se han compuesto.

Explicar cuántas soluciones existen.

La última actividad propuesta, también sólo a la pareja Rebeca y Marta, consiste en la descomposición de una traslación concreta en dos traslaciones, pero sólo a partir de datos numéricos. En concreto, la profesora les pide la descomposición de la traslación de coordenadas 4 a la derecha y 3 hacia arriba en dos traslaciones, cuyas coordenadas hay que averiguar.

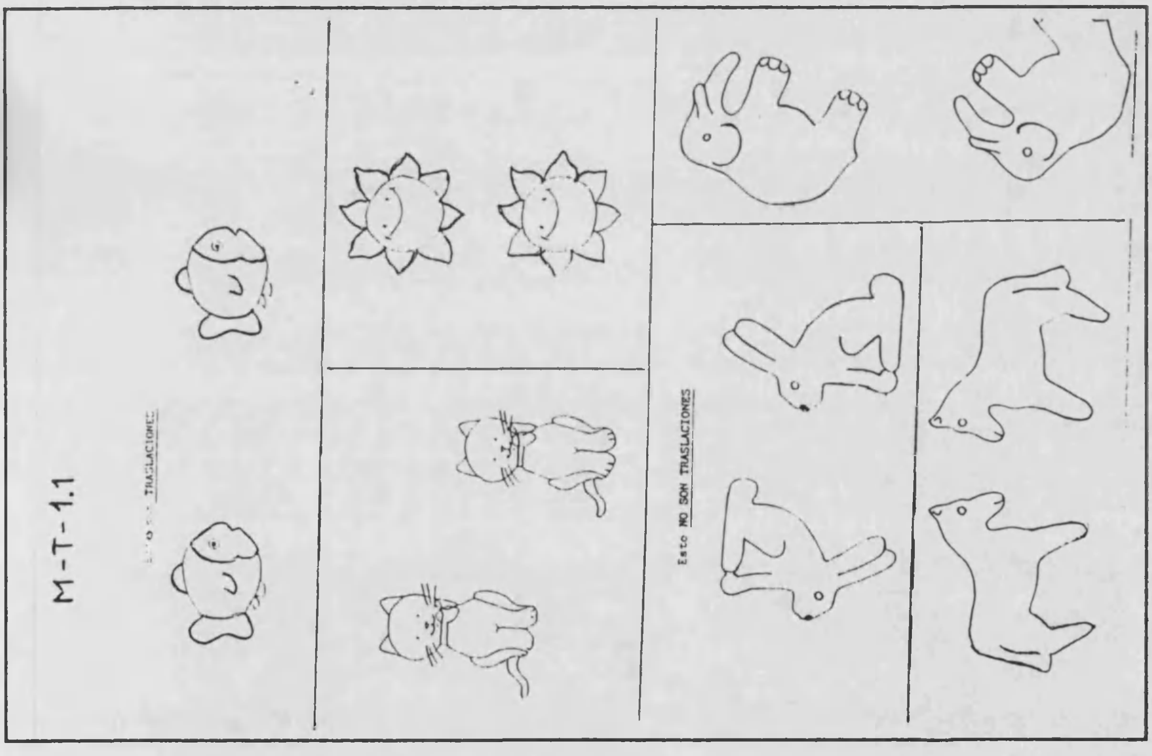
Seguramente el hecho de no haber trabajado en el campo de los números enteros dificulta el ejercicio.

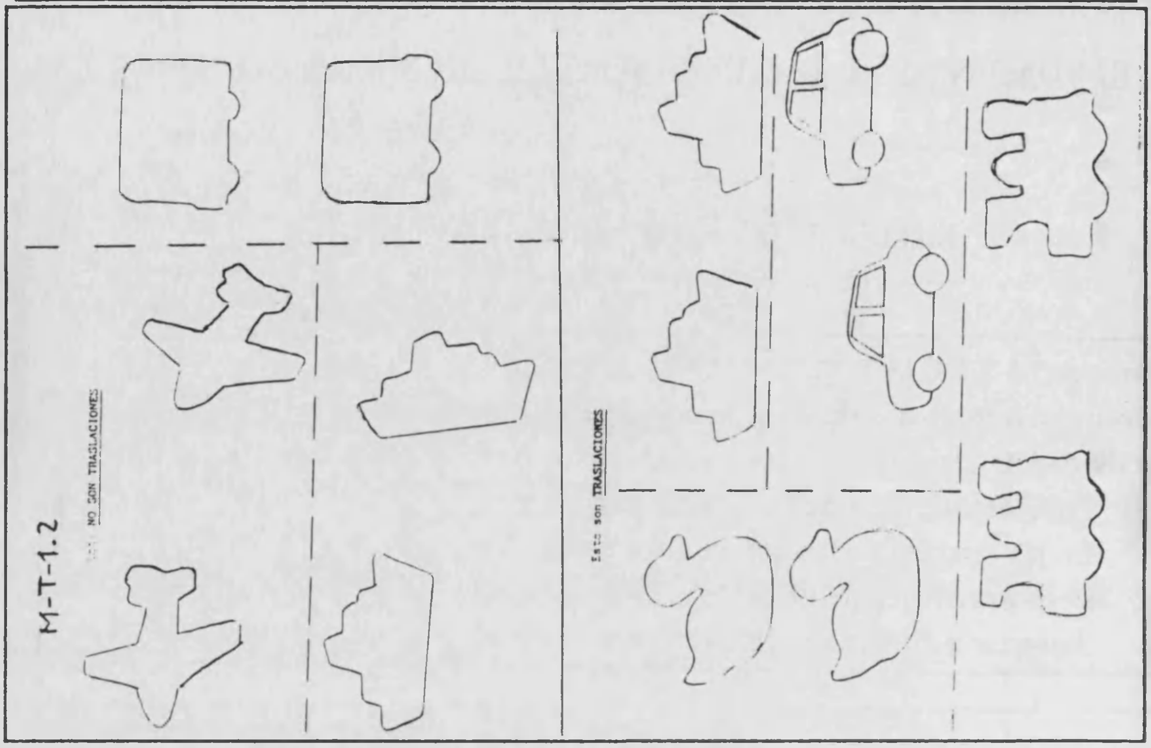
Al principio no saben cómo resolver el ejercicio. Sin embargo, al cabo de un rato Rebeca lo descubre y da una de las traslaciones: *2 a la derecha y 2 arriba,* ante lo cual Marta comprende el ejercicio y proporciona la traslación que complementa la que dio Rebeca: *2 a la derecha y 1 arriba.*

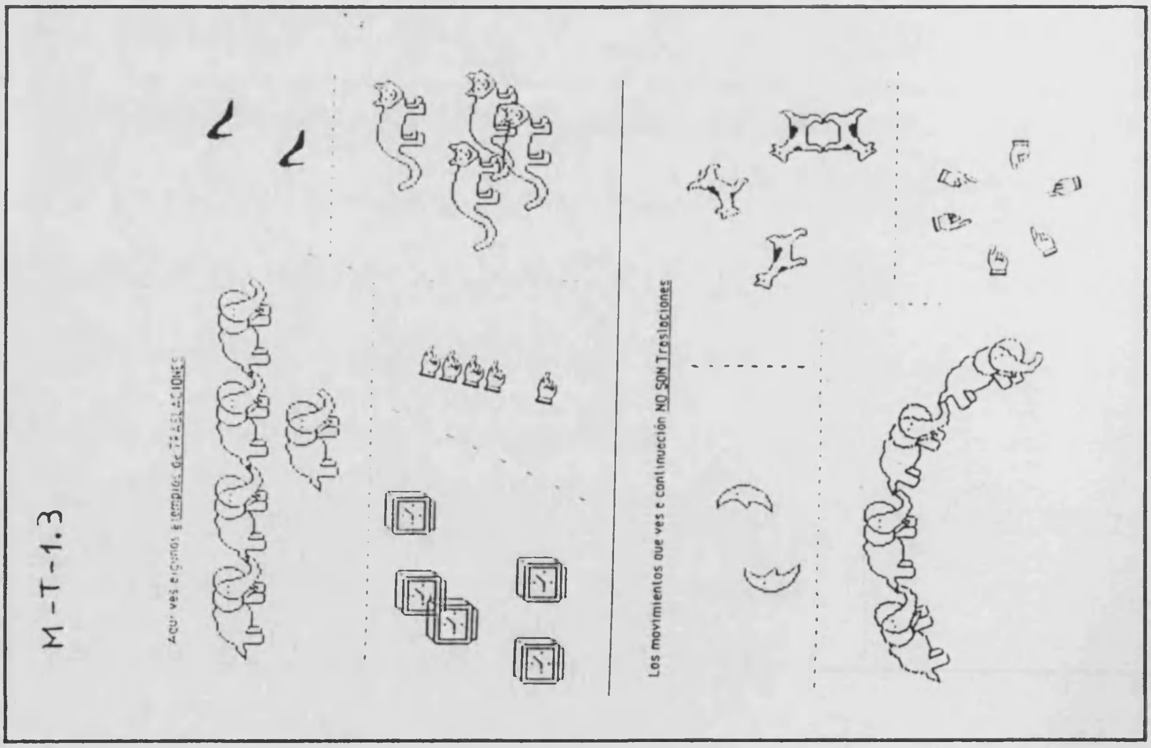
RESUMEN DE LA EXPERIMENTACIÓN EN MAGISTERIO

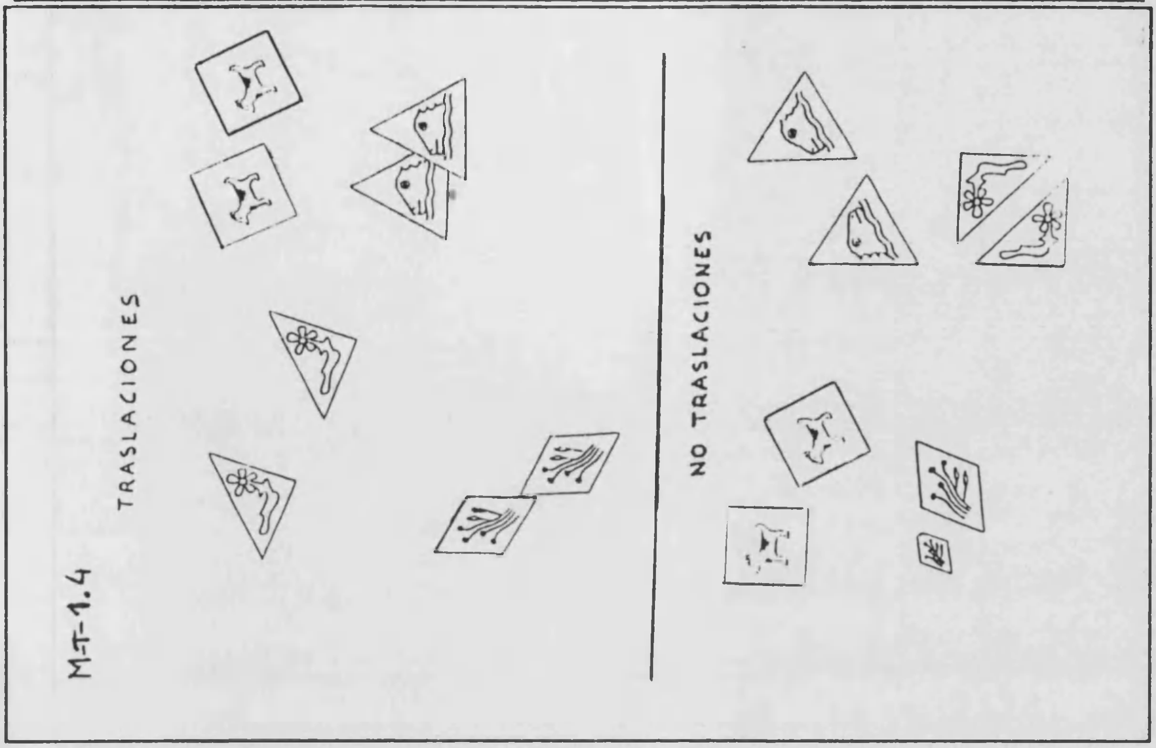
Listado de las actividades experimentadas.

Láminas: M-T-1.1, M-T-1.2, M-T-1.3 y M-T-1.4.
Objetivos: Introducir estática y dinámicamente las traslaciones.
Actividad 1: Tras observar los ejemplos y los contra-ejemplos de traslaciones de cada lámina, decir qué son las traslaciones.
En las láminas en las que se dispone de piezas iguales a las de los dibujos, desplazar físicamente las piezas desde uno de los dibujos hasta el otro. Apreciar las diferencias existentes entre las traslaciones y las no traslaciones.




M-T-1.2
NO SON TRASLACIONES
Esto son TRASLACIONES

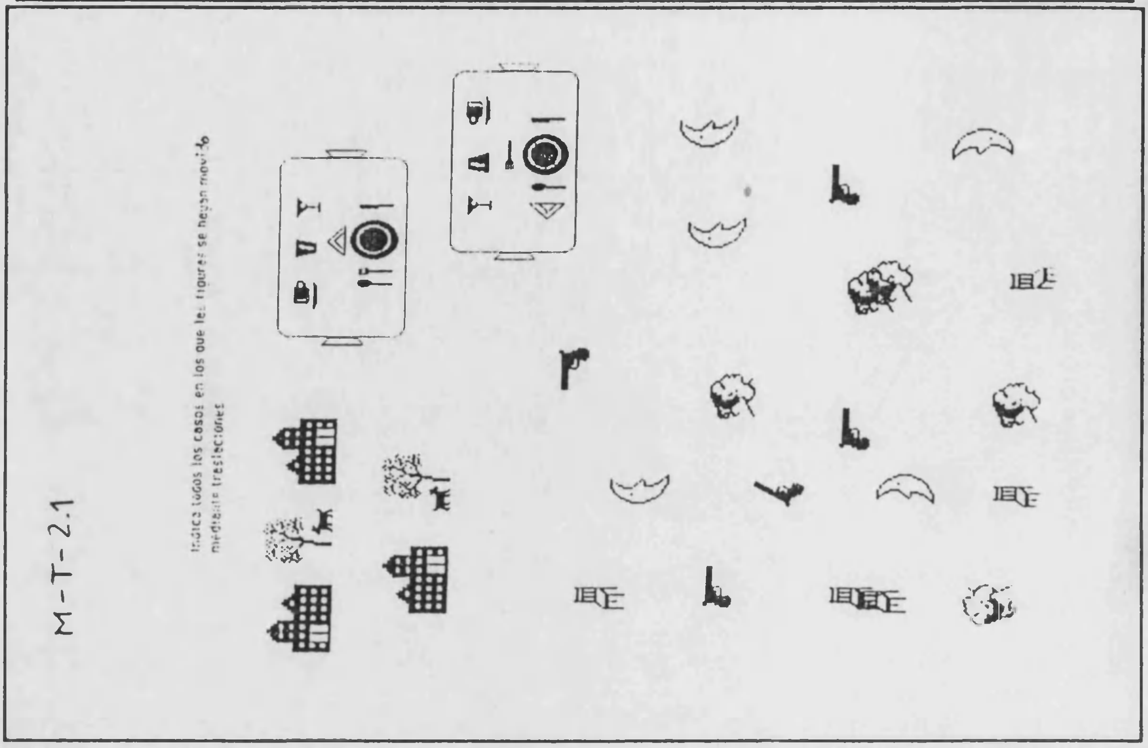

M-T-1.3
Los movimientos que ves a continuación NO SON Traslaciones

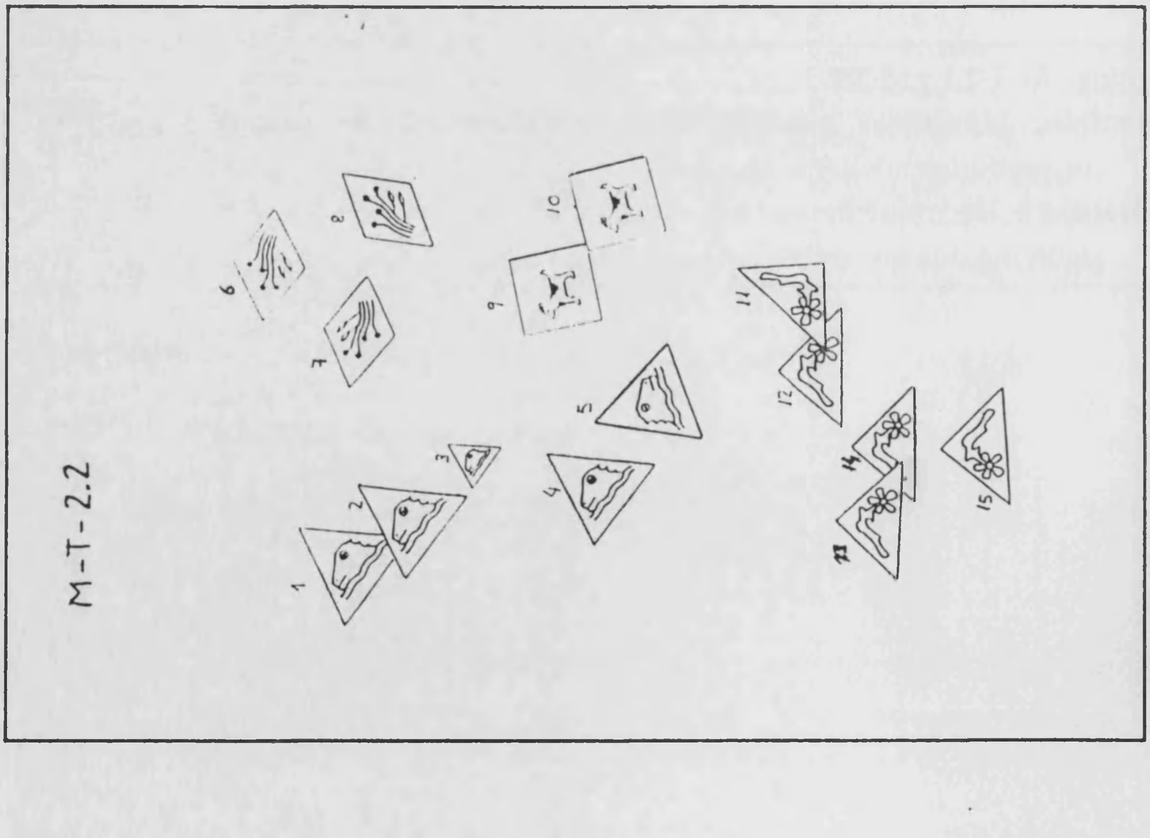


Láminas: M-T-2.1 y M-T-2.2.

Objetivos: Identificar visualmente y dinámicamente las figuras que se corresponden mediante una traslación.

Actividad 2: Decir qué figuras se corresponden mediante una traslación. Utilizar algún método que ratifique la respuesta visual.


M - T - 2.1

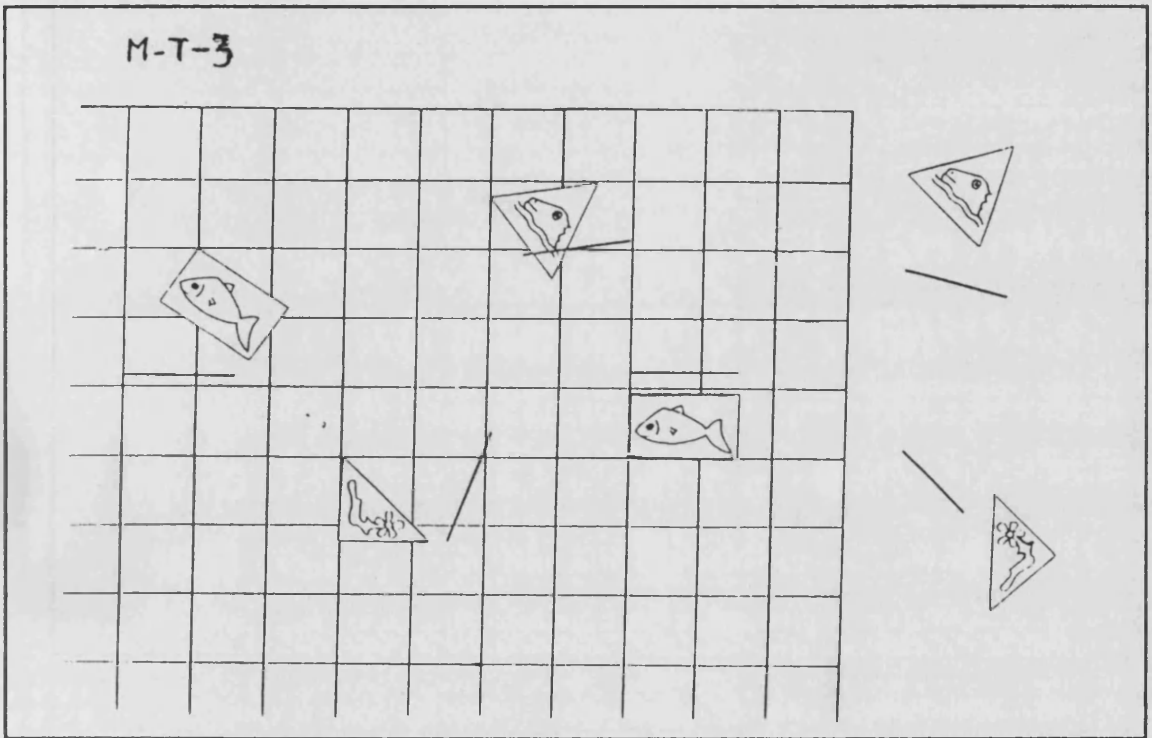

M - T - 2.2

Láminas: M-T-3 y hoja en blanco.

Objetivos: Afianzar y emplear la característica de conservación de inclinación de las figuras por una traslación y, en particular, de los segmentos.

Actividad 3: Lámina M-T.3: Trasladar la figura de manera que el lado AB se coloque sobre el segmento.

Hoja en blanco: Ejercicio análogo, pero hay que pegar una pieza en la hoja y trazar el segmento.

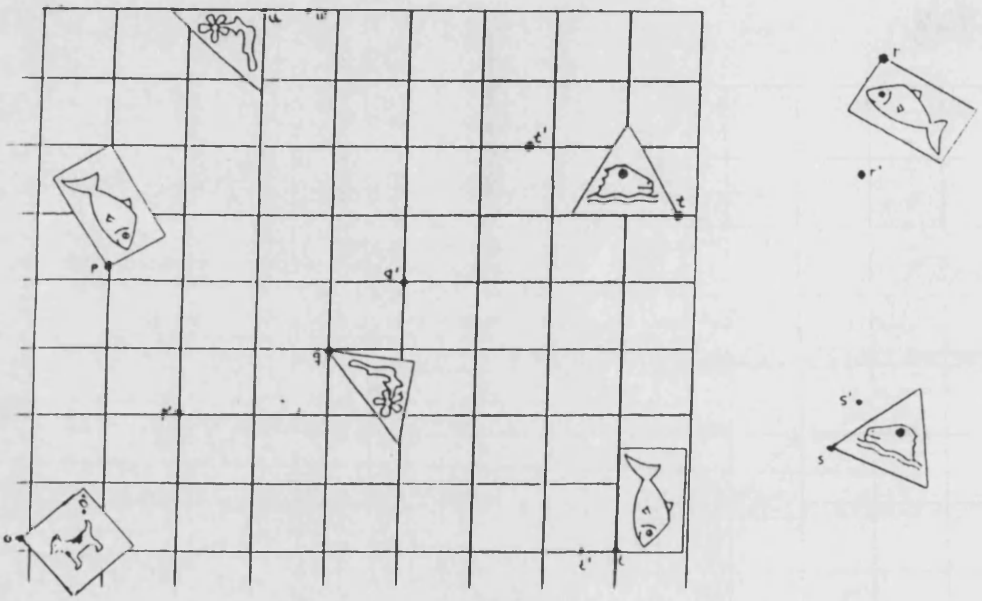


Láminas: M-T-4.

Objetivos: Afianzar y emplear la característica de conservación de inclinación de las figuras por una traslación.

Actividad 4: Trasladar la figura de manera que el vértice marcado se sitúe sobre el punto indicado.

M-T-4

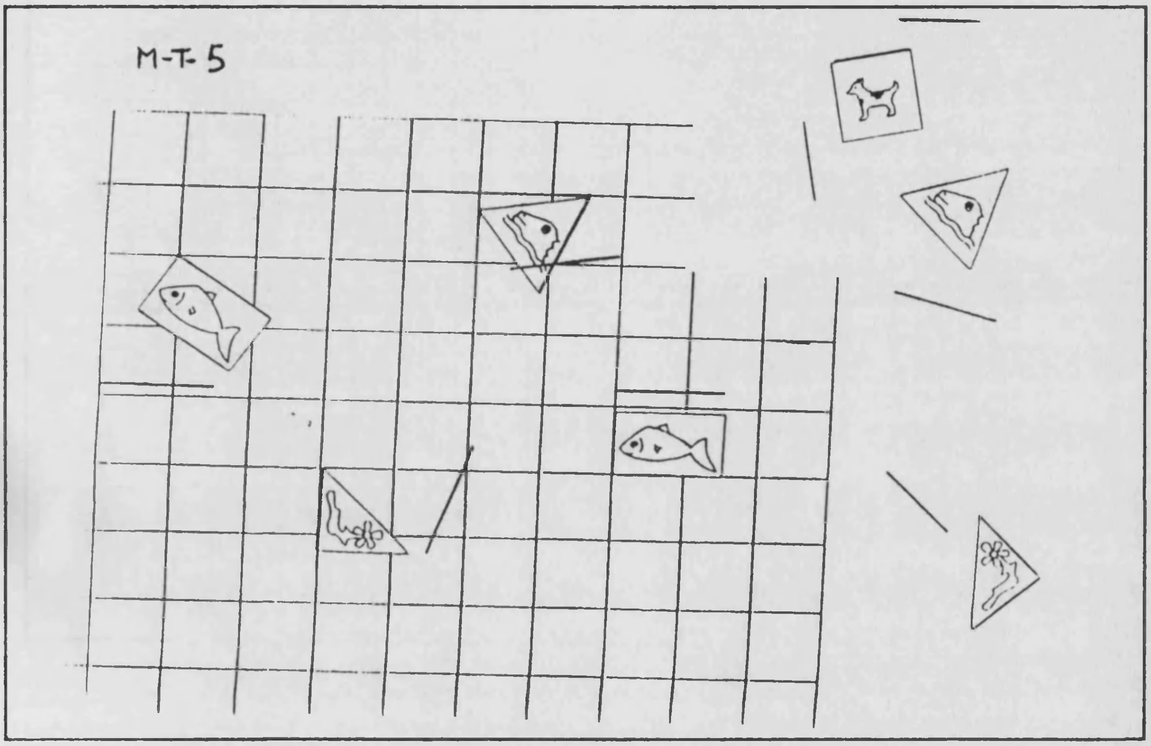


Láminas: M-T-5.

Objetivos: Utilizar el paralelismo de segmentos en el desplazamiento mediante una traslación.

Actividad 5: Desplazar la figura de manera que algunos de sus lados se coloque sobre el segmento marcado. Justificar la posibilidad o imposibilidad de cada caso.

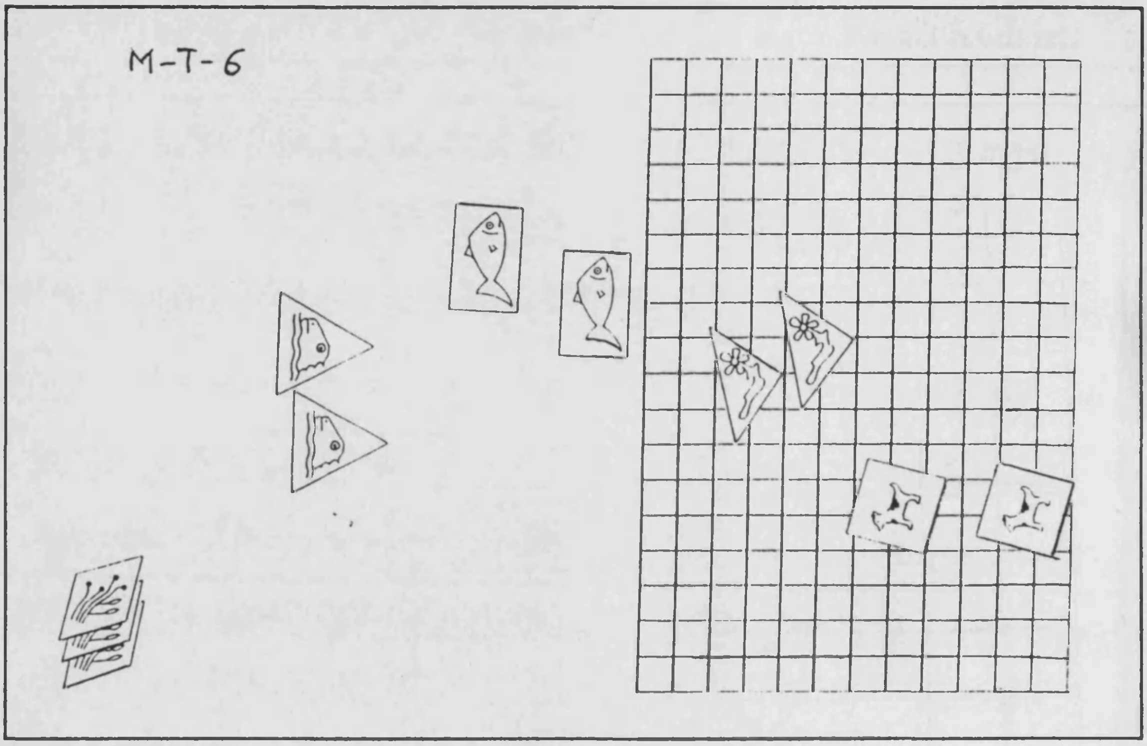
Dar todas las soluciones para cada situación.



Láminas: M-T-6.

Objetivos: Utilización de algunas características del vector de una traslación Dirección y módulo.

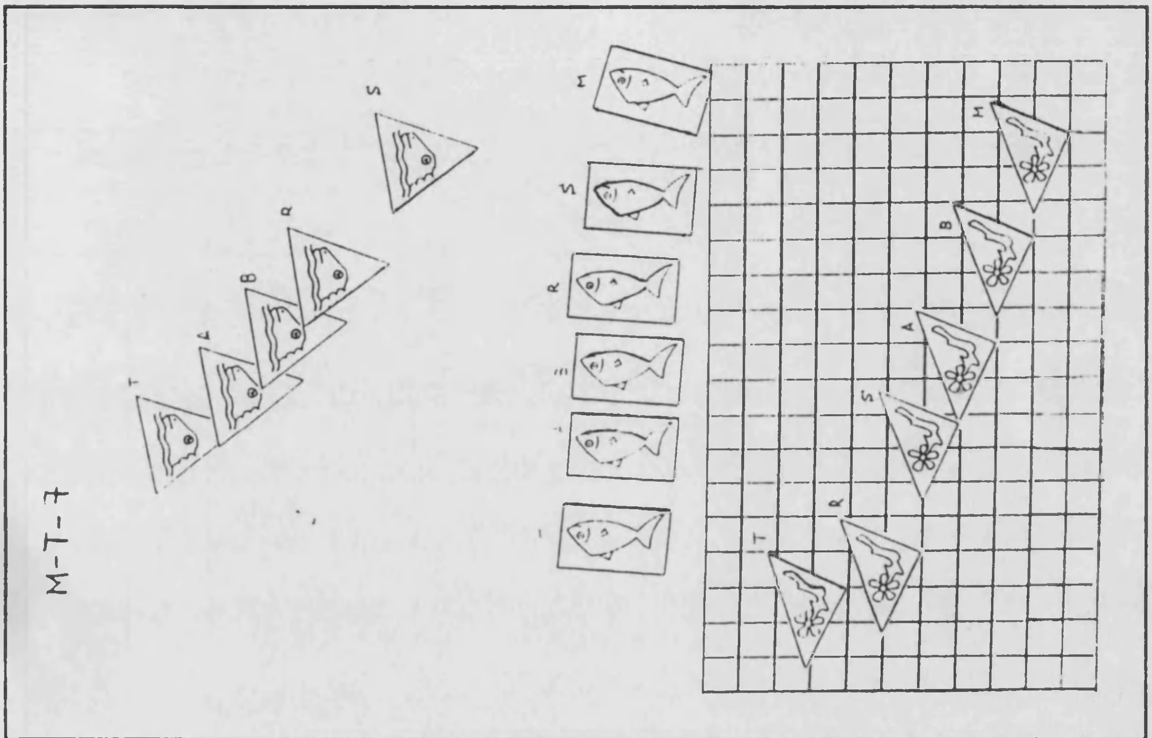
Actividad 6: Continuar la banda cuya pauta se da mediante dos o tres figuras. Explicar el método seguido para proceder con exactitud.



Láminas: M-T-7.

Objetivos: Utilización de algunas características del vector de una traslación: Dirección y módulo.

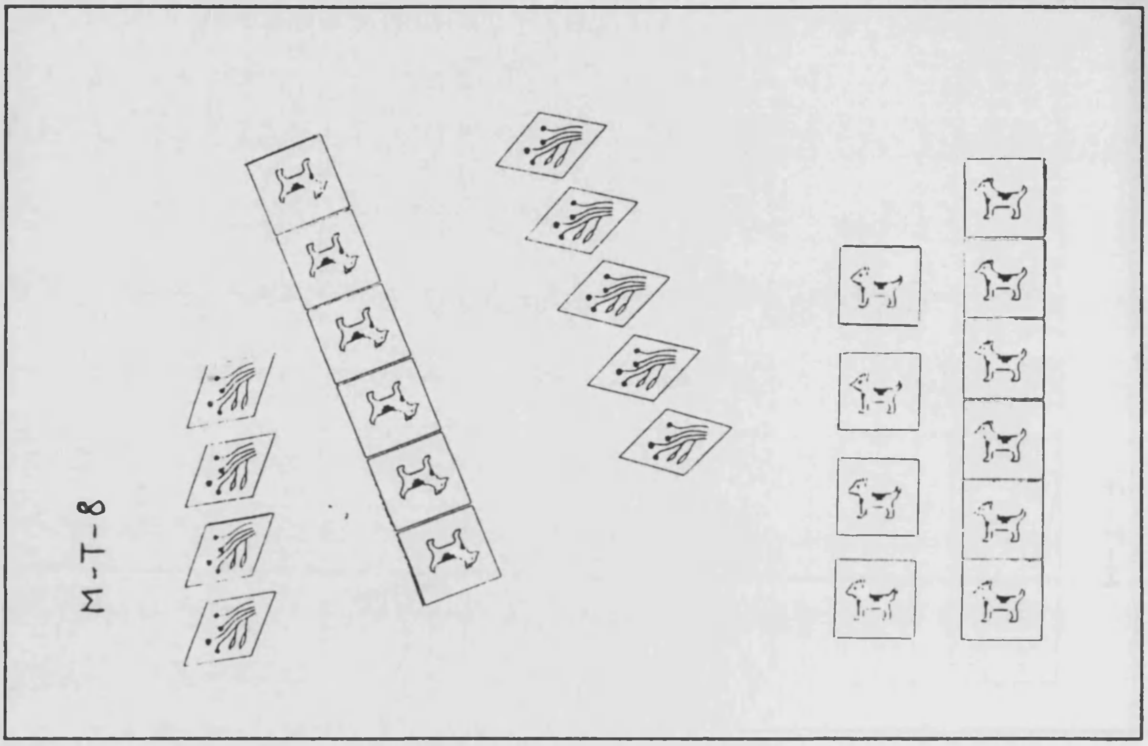
Actividad 7: Identificar las figuras mal situadas y explicar las causas por las que no son válidas.



Láminas: M-T-8.

Objetivos: Obtener las características del "segmento libre" que define una traslación: Dirección y longitud. (No se considera el sentido de la traslación).

Actividad 8: Observar y expresar lo que hay de común y de diferente entre las traslaciones que producen esos frisos.

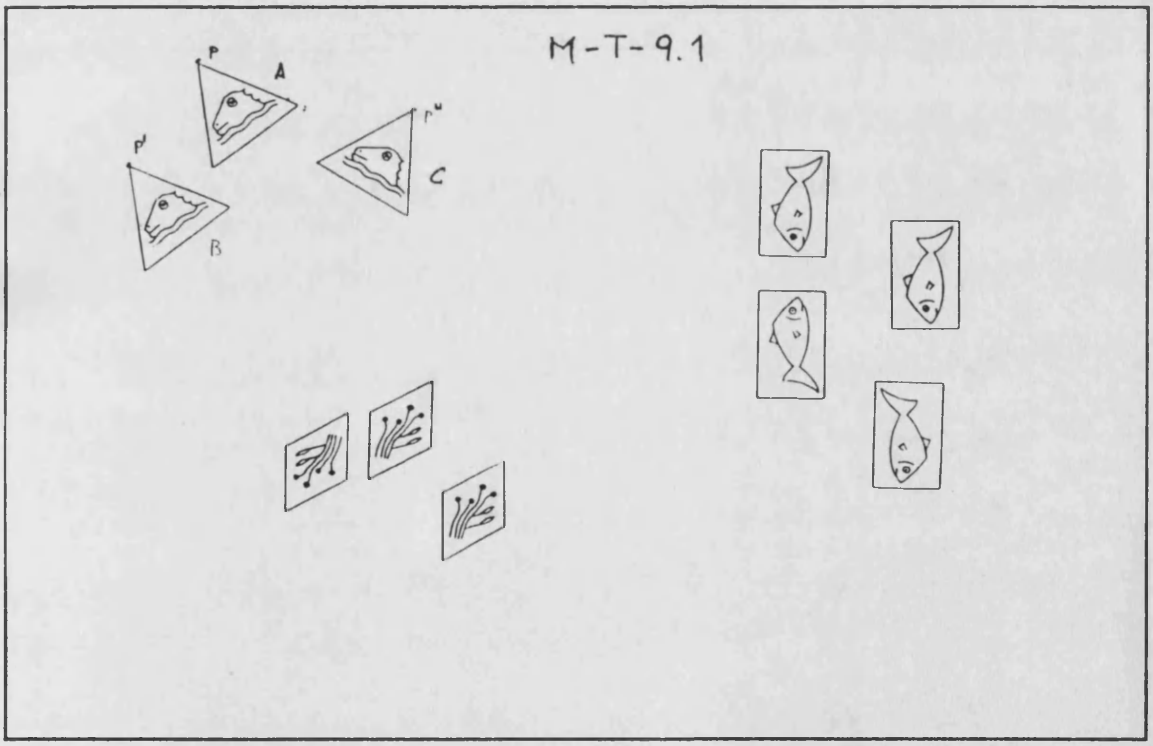


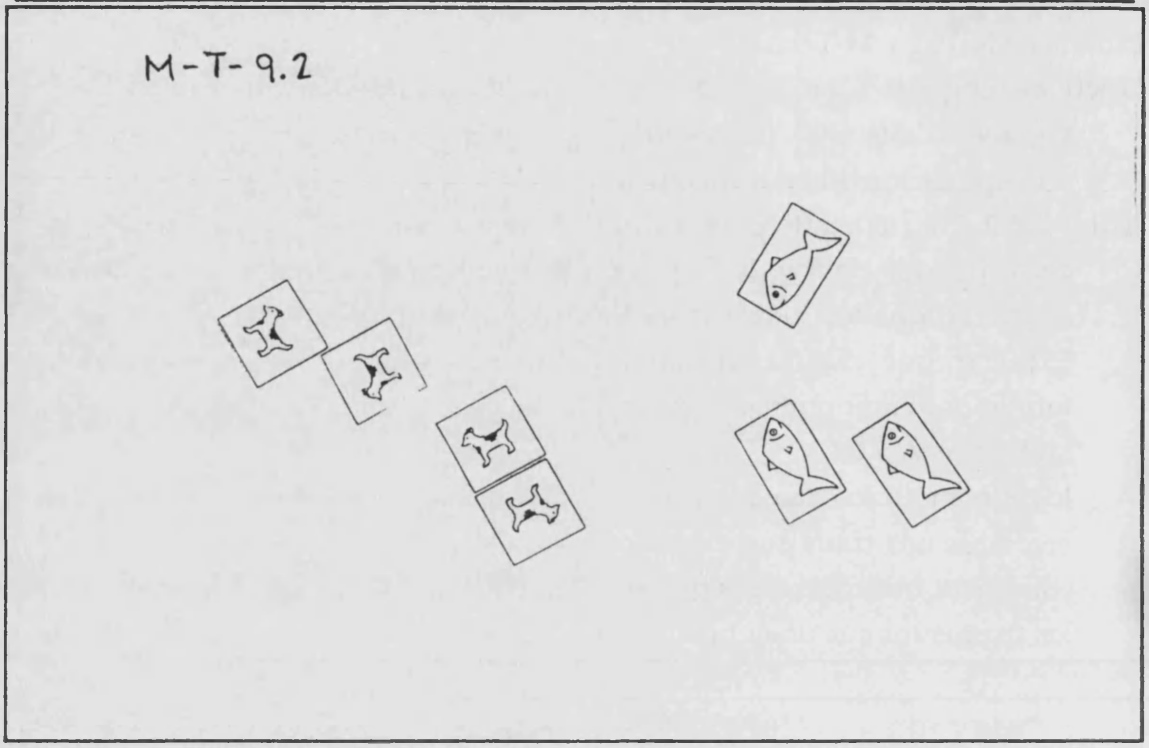
Láminas: M-T-9.1 y M-T-9.2.

Objetivos: Emplear la propiedad de paralelismo e igualdad de longitud entre los segmentos que unen puntos homólogos por una traslación para diferenciar este tipo de movimiento de otros.

Actividad 9: Unir el punto p de la figura A de la lámina M-T-9.1 con los que les corresponden de B y de C, p' y p", respectivamente. Indicar cómo será el segmento que une otro vértice de A con su correspondiente vértice de B. Explicar qué características se mantienen siempre en los segmentos formados al unir puntos de A con puntos de B. Decir si sucede lo mismo con las figuras A y C.

Identificar en los demás casos de las láminas qué figuras se corresponden mediante una traslación y verificar que sólo en las traslaciones se cumple la condición, obtenida ante,s de paralelismo e igualdad de longitud entre todos los segmentos que unen puntos que se corresponden.



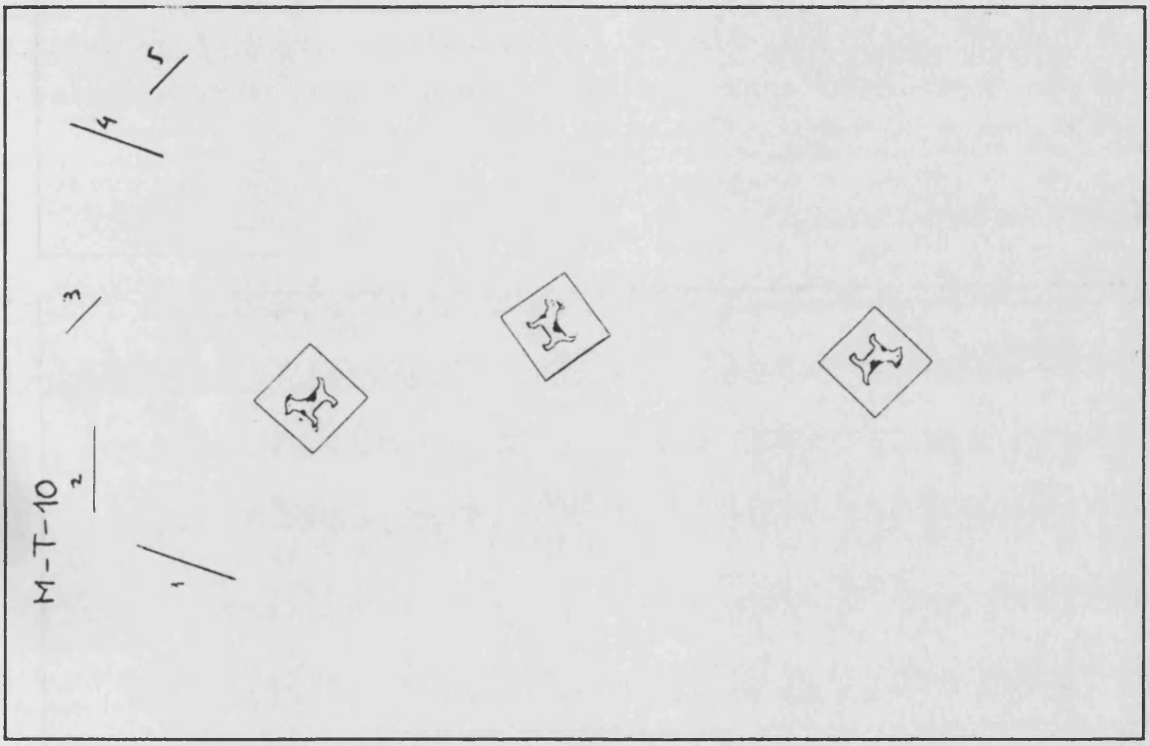

M-T-9.2

Láminas: M-T-10.

Objetivos: Introducir la utilización de una traslación a partir del "segmento libre" que la define (el sentido de la traslación se define más adelante).

Comprender la movilidad del segmento, siempre que conserve las características de dirección y longitud.

Actividad 10: Aplicar a la figura ... la traslación, cuyas características vienen dadas por un segmento ...



Láminas: M-T-11.

Objetivos: Aplicar traslaciones a partir de sus "segmentos libres".

Comprender la igualdad de las traslaciones definidas por "segmentos libres" equivalentes.

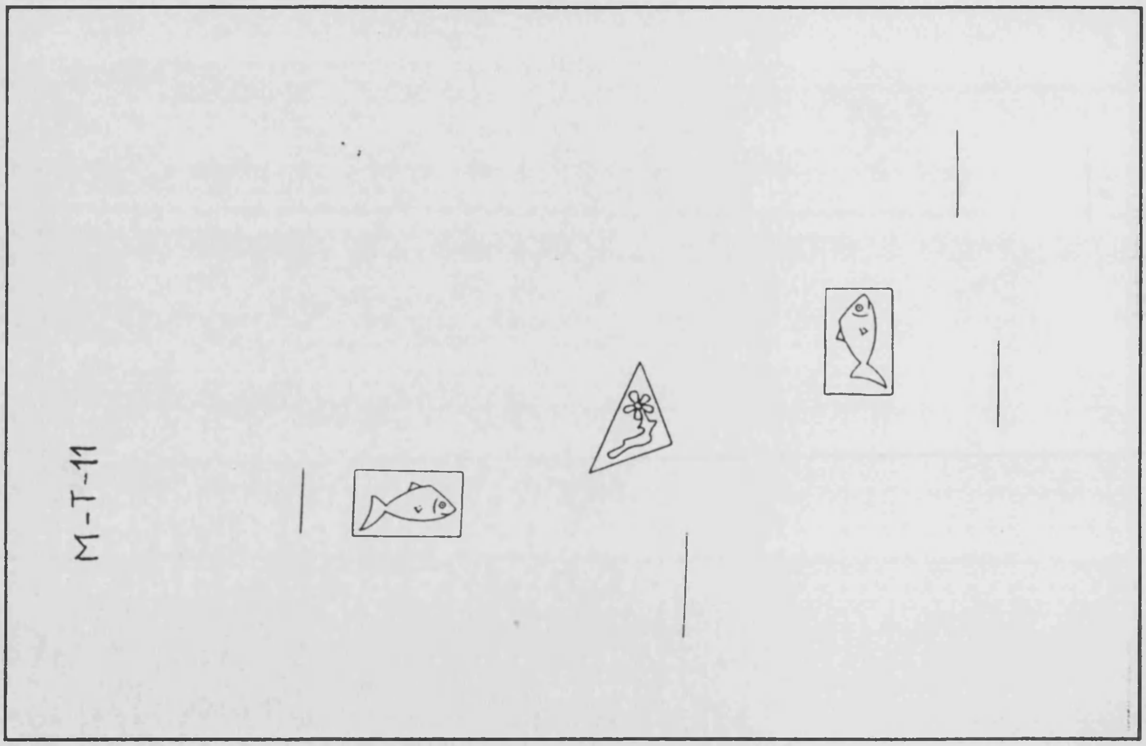
Introducir el sentido como una de las características de una traslación.

Considerar el vector libre como el objeto matemático que reúne las características que definen una traslación.

Actividad 11: Aplicar la traslación determinada por el segmento ... a la figura...

Averiguar cuántas soluciones hay. Explicar en qué difieren y proponer alguna modificación en el segmento utilizado para que la traslación quede totalmente determinada.

Decir cuáles son las tres características que definen una traslación y que se resumen en el vector.

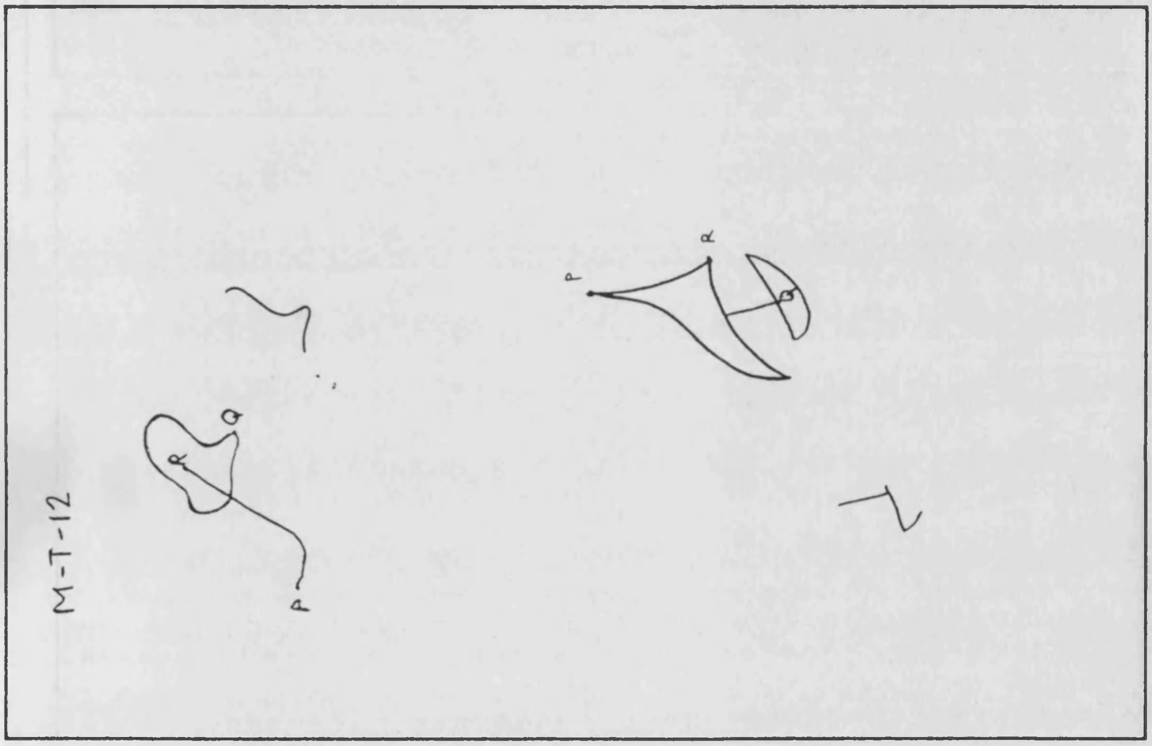


Láminas: M-T-12.

Objetivos: Determinar el vector de una traslación, a partir de una figura y su imagen, como medio para aplicar la traslación a otros puntos.

Actividad 12: La flor y el barco han sido movidos por traslaciones distintas, pero sólo se muestra parte de sus imágenes. Determinar, de manera precisa, dónde está situada la imagen de R y la de P en cada caso.

Copiar, en lugar separado de los dibujos, el vector que define cada una de las traslaciones.



Láminas: M-T-13.1 y M-T-13.2.

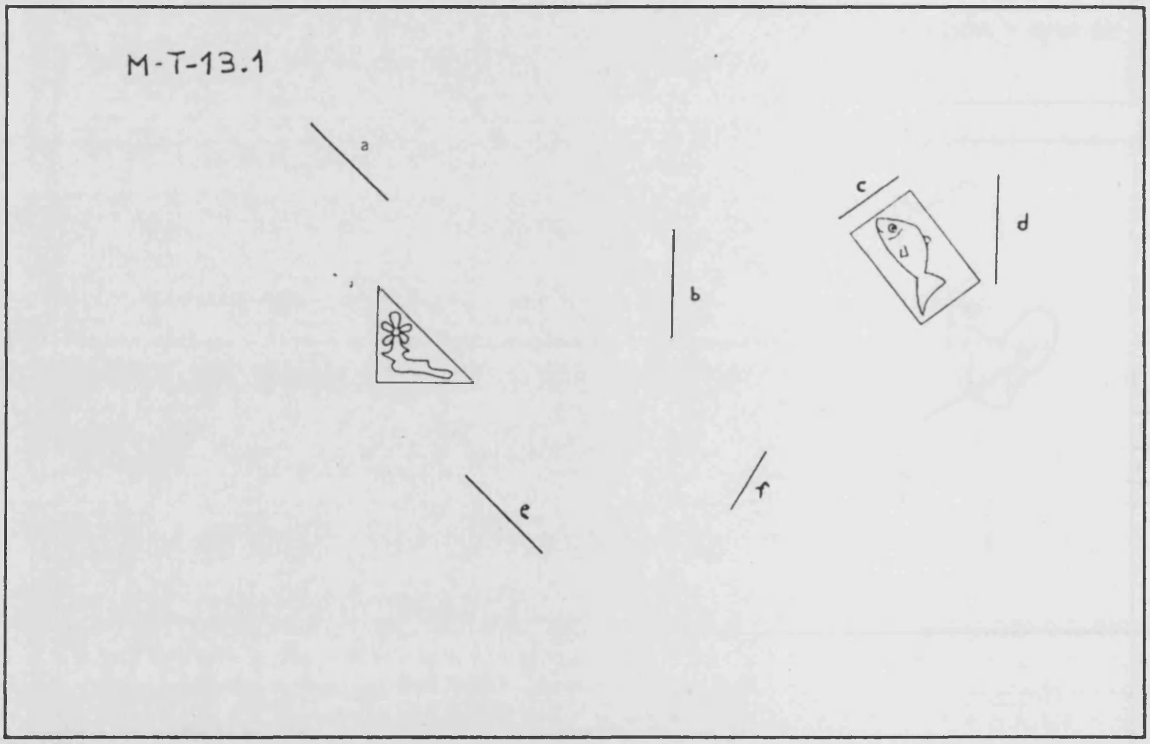
Objetivos: Comprender el significado del "segmento libre" y del vector libre como portadores de las características de las traslaciones.

Saber utilizar el segmento o vector libre de una traslación en la aplicación de ésta.

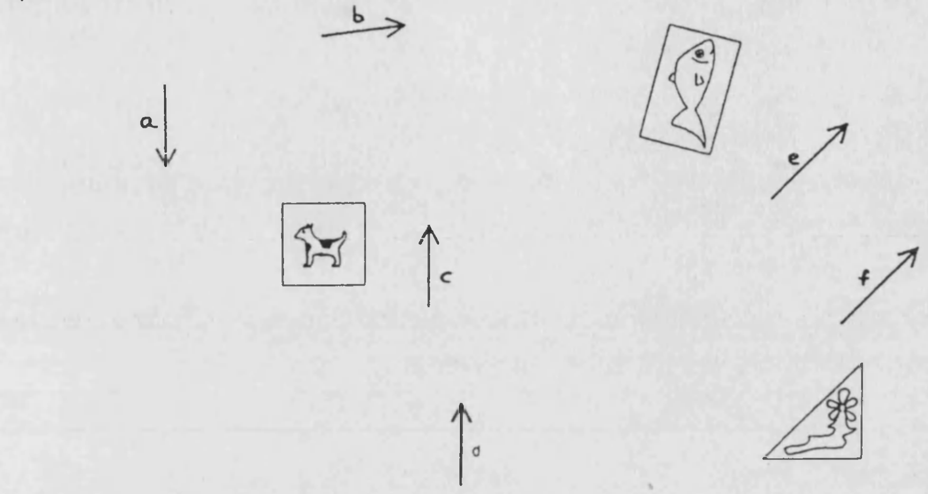
Reconocer los segmentos o vectores que definen la misma traslación.

Actividad 13: Lámina M-T-13.1: Aplicar las traslaciones, cuyas características están determinadas por el segmento ..., a la figura ...

Lámina M-T-13.2: Aplicar la traslación, cuyas características están determinadas por el vector ..., a la figura ...



M-T-13.2



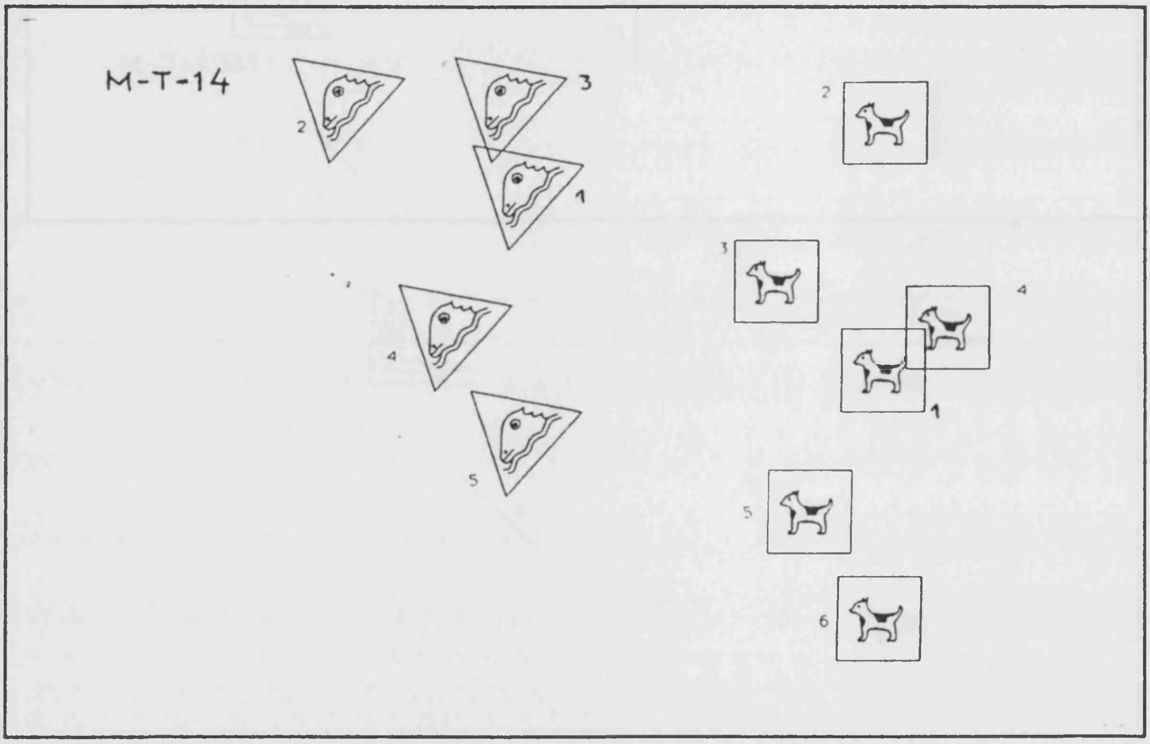
Láminas: M-T-14.

Objetivos: Determinar el vector que define una traslación a partir de una figura y su imagen por la traslación.

Identificar y justificar la existencia o inexistencia de vectores equivalentes, a partir de sus características.

Actividad 14: Dibujar el desplazamiento por cada traslación que lleva una de las figuras del grupo a las demás. Copiar, en lugar aparte, los distintos vectores que se obtienen.

Tras repetir el ejercicio anterior en varias situaciones, justificar si, entre los vectores obtenidos, hay algunos equivalentes.

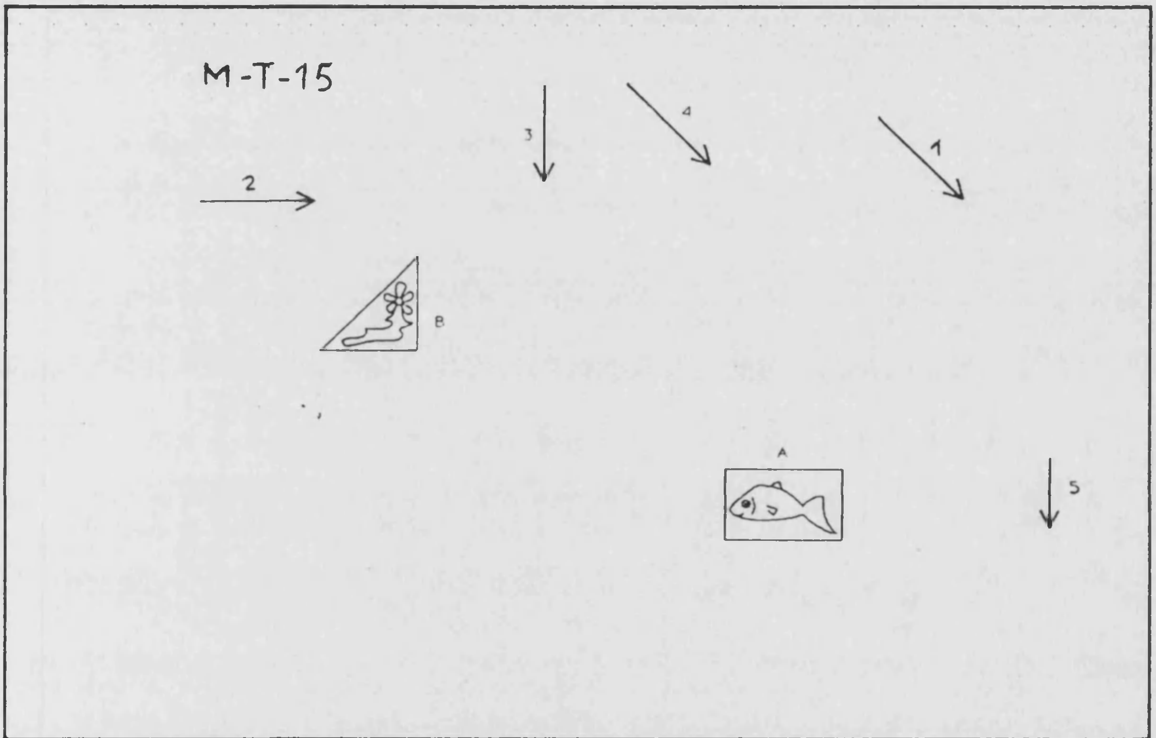


Láminas: M-T-15.

Objetivos: Utilizar las características de la traslación inversa (sin introducir el término "inversa").

Actividad 15: La figura ... es la imagen de otra por medio de la traslación de vector ... Obtener la figura original.

Dar las características de la traslación que lleva de la figura final a la original.



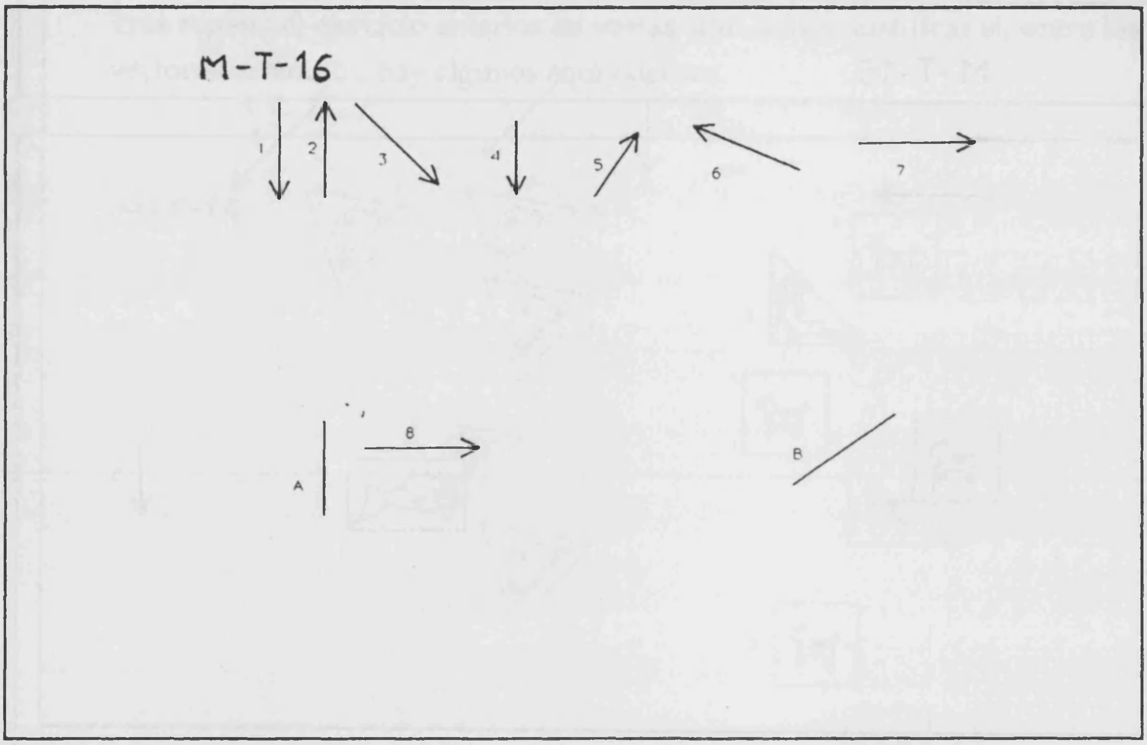
Láminas: M-T-16.

Objetivos: Utilizar los vectores libres para aplicar las traslaciones correspondientes.

Pasar del contexto usual de figuras a segmentos.

Considerar el paralelismo de segmentos que se corresponden por una traslación.

Actividad 16: Aplicar la traslación de vector ... al segmento ...



Láminas: M-T-17.

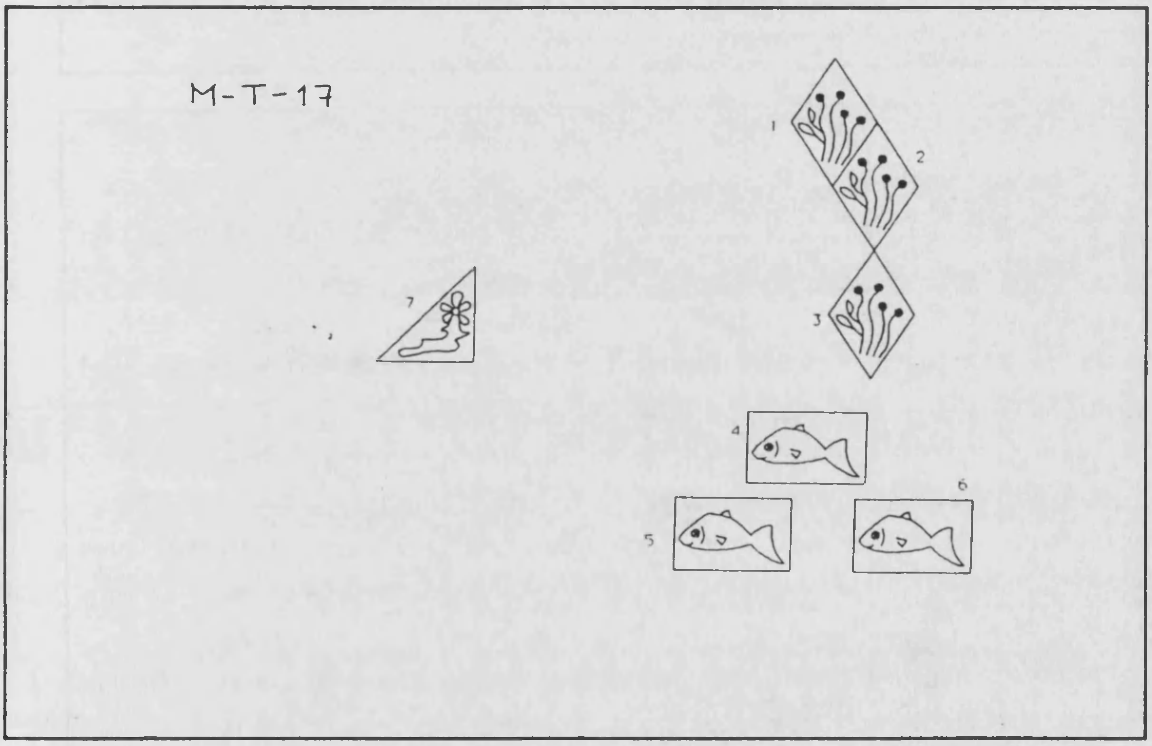
Objetivos: Identificar una traslación a partir de la figura original y su imagen.

Afianzar las características de los vectores que definen traslaciones inversas (vectores opuestos).

Desvincular una traslación de las figuras concretas en las que se ve.

Actividad 17: Trazar el vector correspondientes a la traslación que transforma la figura 4 en la 5. Dibujar también el vector de la traslación que lleva al figura 5 a la 4. Decir en qué se diferencian.

Aplicar a la figura 7 la traslación que pasa la figura 4 a la 5.



Láminas: M-T-18.

Objetivos: Obtención de información por parte del profesor sobre el grado de afianzamiento que poseen las alumnas en relación a propiedades sencillas de las traslaciones, vistas anteriormente, y al tipo de justificación empleada.

Desarrollar el significado de conjunto mínimo suficiente para una definición.

Reducir un conjunto de condiciones hasta llegar a un conjunto mínimo, suficiente para definir una traslación.

Actividad 18: Decir si cada una de las propiedades es cierta o no en las traslaciones y justificar la respuesta.

Reducir el conjunto de condiciones 8 a 11, dejando las imprescindibles para que, entre todas, determinen una traslación.

M - T- 18

1- La imagen de una recta es una recta paralela a ella.

2- Los segmentos determinados al unir puntos y sus respectivas imágenes son todos de la misma longitud.

3- Dado el vector de la traslación, si para trasladar la figura se coloca el vector a partir de uno de sus vértices superiores, la imagen saldrá más arriba que si el vector se sitúa desde un vértice inferior.

4- La imagen de una figura se puede obtener hallando la imagen de un punto y colocando la figura con la misma inclinación que la original.

5- Basta comprobar que dos segmentos que unen puntos y sus respectivas imágenes son de la misma longitud para poder asegurar que se trata de una traslación.

6- Basta comprobar que dos segmentos que unen puntos y sus respectivas imágenes son paralelos para poder asegurar que se trata de una traslación.

7- Un punto y su imagen son suficientes para determinar la traslación que se ha aplicado. O sea, si se conoce un punto y su imagen se puede saber cuál es el vector de la traslación utilizada.

8- Todos los segmentos los mueve la misma longitud.

9- Todos los puntos los mueve en la misma dirección y en el mismo sentido.

10- Los segmentos que unen puntos y sus imágenes respectivas son todos paralelos.

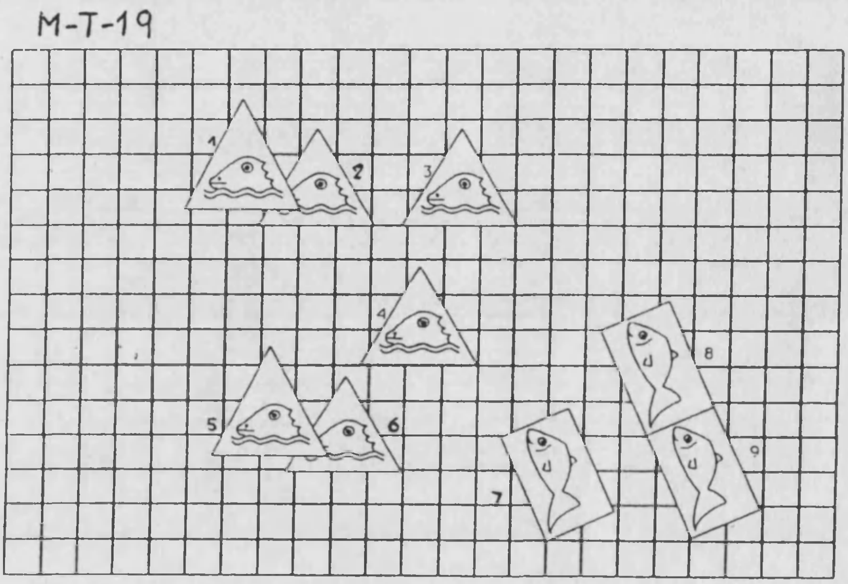
11- Transforma líneas rectas en líneas rectas.

Láminas: M-T-19.

Objetivos: Introducir las coordenadas del vector que define una traslación.

Actividad 19: Trabajo por parejas. Una alumna tiene que unir dos figuras iguales y dar verbalmente indicaciones sobre la traslación efectuada, con el fin de que la otra alumna averigüe de qué par de figuras se trata.

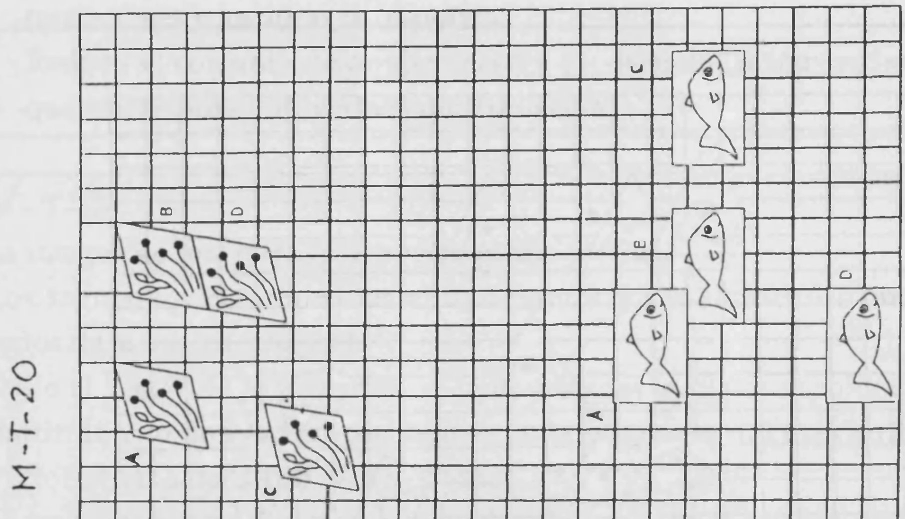
Además de resolverlo indicando el módulo, la dirección y el sentido, se puede solucionar el ejercicio, de manera precisa, de otra forma. Buscar ese método alternativo.



Láminas: M-T-20.

Objetivos: Obtener las coordenadas del vector de una traslación, conocidas una figura y su imagen.

Actividad 20: Obtener las coordenadas de los vectores de varias de las traslaciones que trasladan una figura a otra.



Láminas: M-T-21.

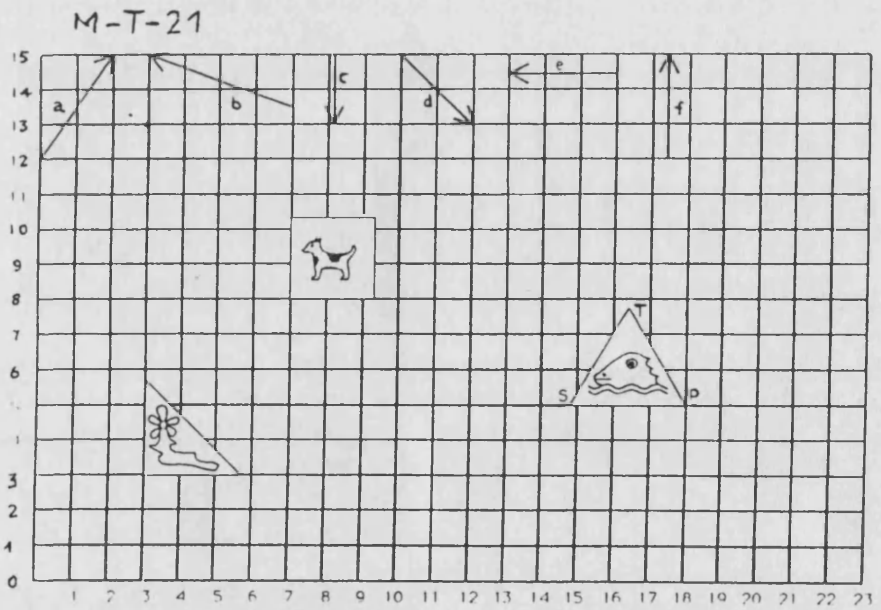
Objetivos: Descubrir la relación existente entre las coordenadas de un punto, las del vector de una traslación y las de la imagen del punto por esa traslación, cuando la incógnita son las coordenadas del punto imagen.

Actividad 21: Aplicarle al dragón la traslación de vector a. Anotar las coordenadas del punto P, del vector a y de la imagen de P. Hacer lo mismo para el punto T.

Sin obtener la imagen de S por la traslación de vector a, decir cuáles van a ser sus coordenadas.

Explicar cómo obtener las coordenadas de la imagen de un punto por una traslación.

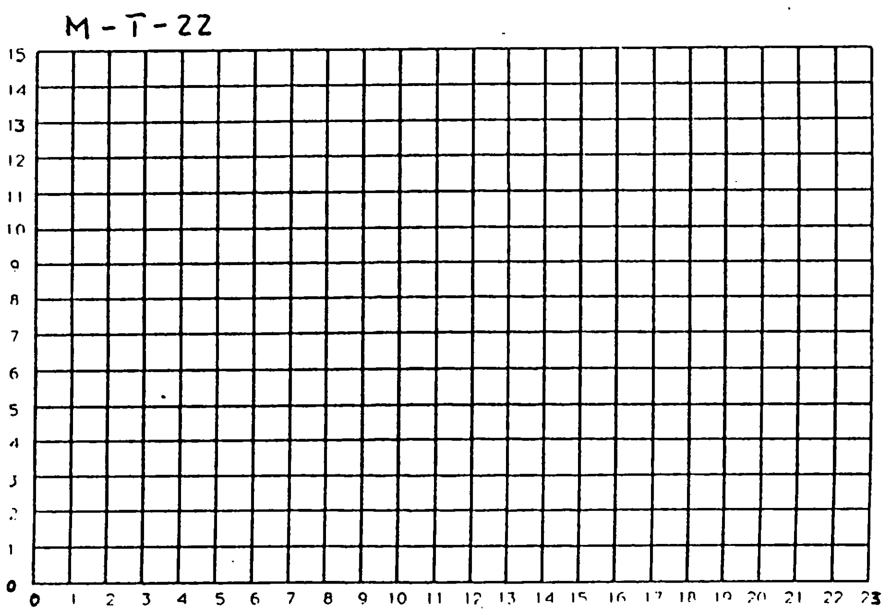
Aplicar esa relación numérica general para obtener las coordenadas de las imágenes de puntos de otras figuras por otras traslaciones.



Láminas: M-T-22.

Objetivos: Utilizar la relación existente entre las coordenadas de un punto, las del vector de una traslación y las de la imagen del punto por esa traslación, cuando la incógnita son las coordenadas del vector.

Actividad 22: Se dan las coordenadas de un punto concreto y las de su imagen por una traslación. Hay que averiguar las coordenadas del vector de la traslación.



Láminas: M-T-23.

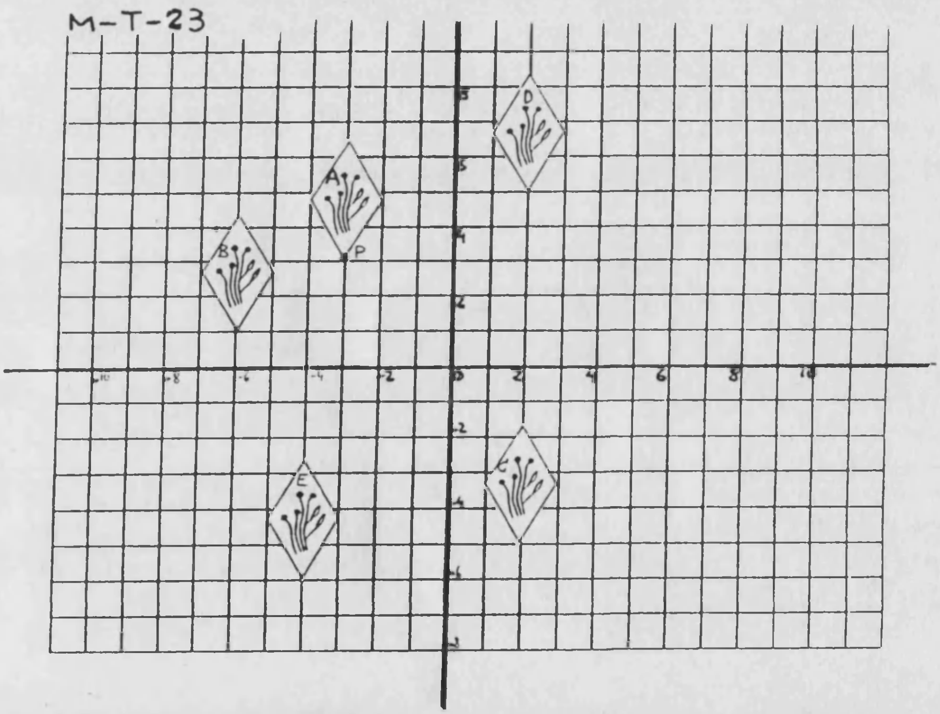
Objetivos: Relacionar las coordenadas de los vectores de traslaciones inversas.

Utilizar la relación existente entre las coordenadas de un punto, las del vector de una traslación y las de la imagen del punto por esa traslación, cuando la incógnita son las coordenadas del punto imagen.

Actividad 23: Dar las coordenadas de cada una de las siguiente traslaciones: La que lleva la figura A a B; B a A; A a C; C a A. Expresar la relación existente cuando las traslaciones son inversas y justificarlo.

Obtener las coordenadas del punto imagen de P, cuando se aplica una traslación cuyo vector tiene como coordenadas (20, -30).

Repetir el ejercicio con otros puntos y traslaciones.



Láminas: M-T-24.

Objetivos: Composición de traslaciones: Introducir y utilizar la idea de composición de traslaciones. Introducir la notación matemática.

Descubrir la conmutatividad, emplearla y hacer una demostración general de esta propiedad.

Simplificar vectores de la misma dirección y, en particular, vectores opuestos.

Comprender y utilizar la traslación con el vector resultante de la suma de los vectores de las traslaciones de la composición.

Actividad 24: Aplicar al dragón la composición de las traslaciones T_a y T_b, lo cual se escribe $T_b \circ T_a$ y consiste en efectuar la traslación de vector a y, a la figura resultante, aplicarle la traslación de vector b.

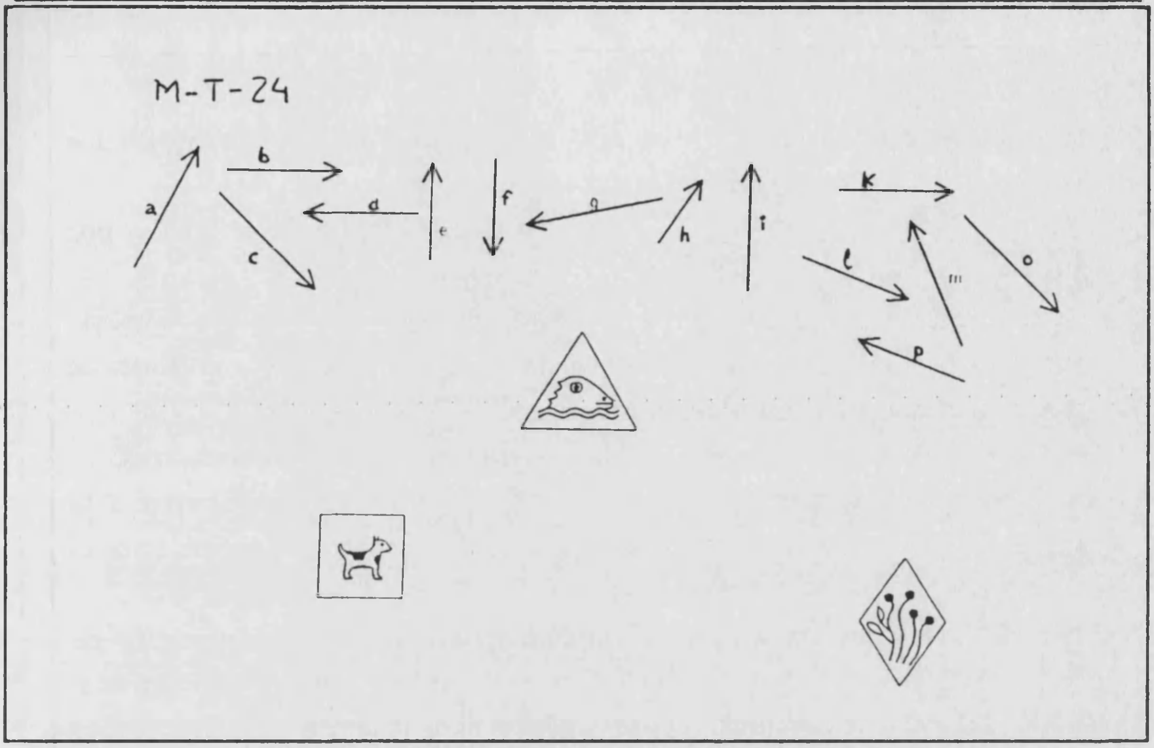
Aplicar al perro $T_b \circ T_a$. Tras hacerlo, decir si es necesario proceder en dos pasos.

Aplicar al rombo las composiciones $T_d \circ T_p$ y $T_p \circ T_d$. Generalizar el resultado.

Demostrar matemáticamente la conmutatividad de la composición de dos traslaciones.

Aplicar al perro la composición $T_d \circ T_g \circ T_f \circ T_i$, resolviendo el ejercicio de la manera más rápida posible.

Aplicar a una figura la traslación resultante de una composición de varias traslaciones. Para ello, obtener primero el vector resultante de los vectores de las traslaciones de la composición.


M-T-24
a
b
c
d
e
f
g
h
i
k
l
m
o
p

Láminas: M-T-25.

Objetivos: Descomposición de una traslación:

Descomponer una traslación en dos traslaciones, conocido uno de los vectores de la descomposición. Ello en dos situaciones:

1) La traslación resultante está determinada por una figura original y por su imagen y

2) La traslación resultante está determinada por un vector (no hay figuras).

Descomponer una traslación en tres traslaciones, conocidos los vectores de dos de las traslaciones de la descomposición.

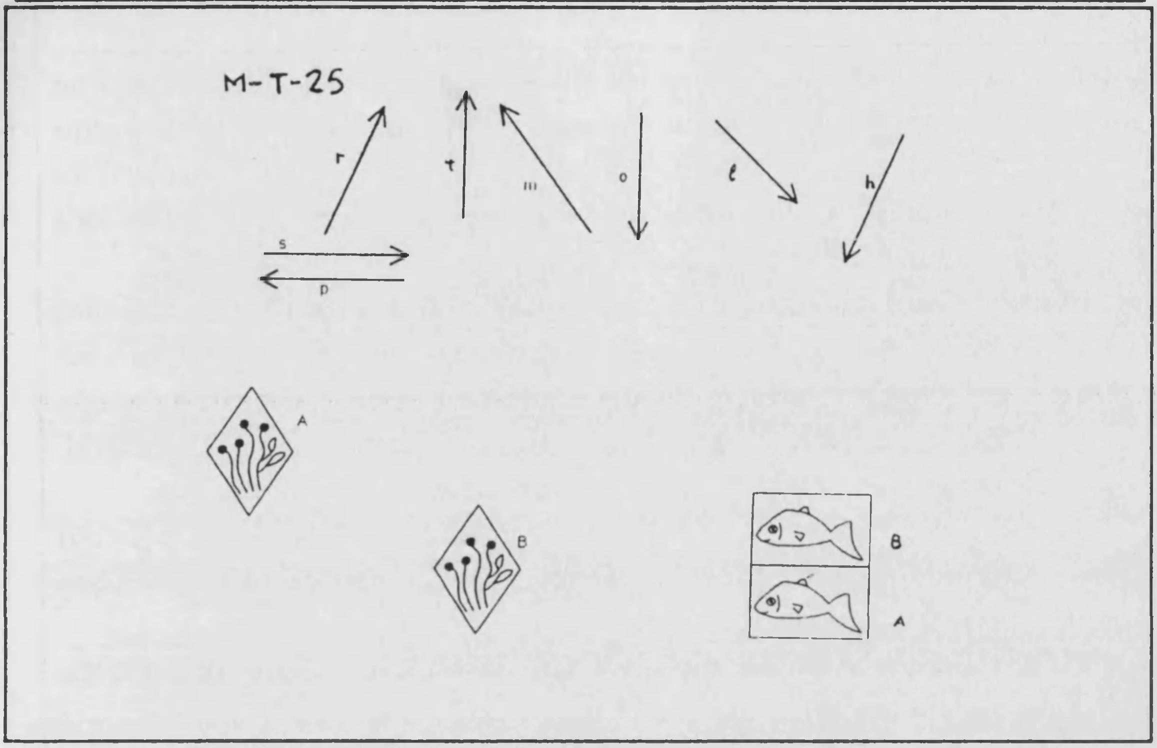
Caso general de la descomposición de una traslación en dos, tres, ... traslaciones. Comprender la infinidad de posibilidades, respecto a la cantidad de traslaciones de la descomposición y respecto a las traslaciones concretas.

Actividad 25: Para pasar de la figura A a la B se ha empleado la composición de dos traslaciones. La primera tiene como vector r. Obtener la segunda. Resolver el ejercicio con los dos pares de figuras de la lámina.

Sin figuras concretas, se sabe que m es el vector de la traslación resultante de una composición de dos traslaciones; l es el vector de una de esas traslaciones. Obtener el vector de la otra traslación.

El vector de la traslación resultante de una composición de tres traslaciones es o; dos de las traslaciones de la composición tienen como vectores l y t. Averiguar el vector de la otra traslación.

El vector h corresponde a una traslación. Explicar cuántas descomposiciones se pueden realizar de esa traslación en dos traslaciones. Indicar qué sucede si la cantidad de traslaciones de la descomposición es tres.


M-T-25
r
t
m
o
l
h
s
p
A
B
B
A

Láminas: M-T-26.

Objetivos: Afianzar las relaciones numéricas existentes entre las coordenadas de un punto, de su imagen por una traslación y de las coordenadas del vector que define la traslación. Obtener cualquiera de esos valores a partir de los otros, en situaciones concretas y en general, empleando notación matemática en este último caso.

Descubrir y utilizar las relaciones numéricas existentes entre las coordenadas de los vectores de las traslaciones que intervienen en una composición y las del vector de la traslación resultante. Utilizarlo en ejercicios de composición y de descomposición de traslaciones, en casos particulares y en general, empleando notación matemática en este último caso.

Actividad 26: Descomponer la traslación de vector c en dos traslaciones, siendo d el vector que define una de ellas. Obtener las coordenadas del vector que define la otra traslación.

Repetir el ejercicio, siendo b el vector de la traslación que se descompone y e el vector de la traslación conocida.

Las coordenadas de un punto P son (5, 8). Se le aplica la traslación de vector c. Obtener las coordenadas de la imagen de P.

Repetir el último ejercicio cuando a Q, de coordenadas (-2, 10), se le aplica la traslación de vector g.

A un punto T, de coordenadas (t_1, t_2), se le aplica la traslación de vector con coordenadas (v_1, v_2). Decir cuáles son las coordenadas de la imagen de T.

Un punto R tiene de coordenadas (-6, 7) y se le aplica la composición $T_h \circ T_g \circ T_e \circ T_d \circ T_c$. Obtener las coordenadas de la imagen de R.

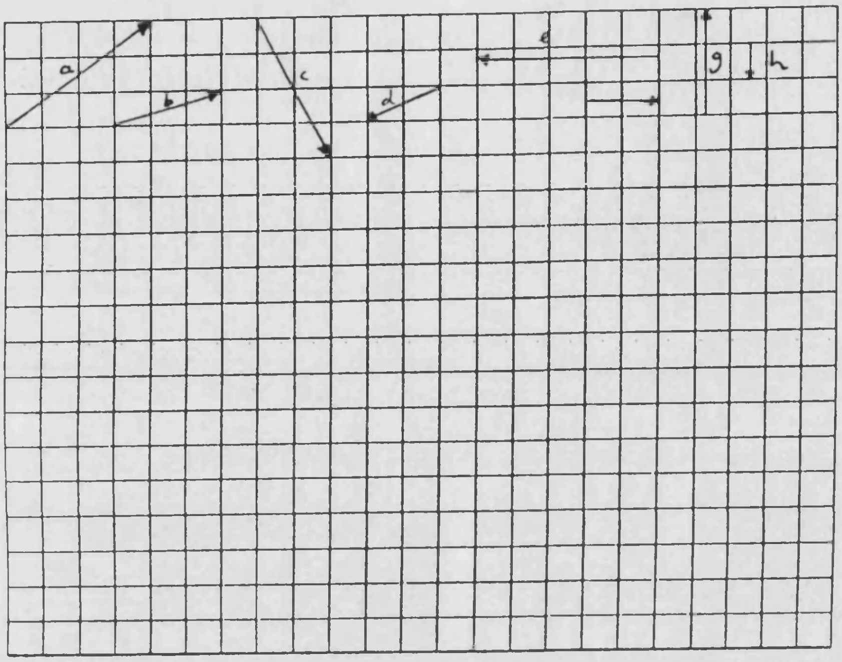
A un punto, M, de coordenadas (m_1, m_2), se le aplica la composición de dos traslaciones. El vector de la primera tiene de coordenadas (v_1, v_2) y el de la segunda (t_1, t_2). Indicar cuáles son las coordenadas de la imagen de M.

La traslación de vector c se descompone en dos traslaciones. Una es la de vector a. Obtener las coordenadas del vector de la otra traslación.

La traslación de vector (r_1, r_2) se descompone en dos traslaciones. Una es la de vector (v_1, v_2). Obtener las coordenadas del vector de la otra traslación.

Expresar por escrito, mediante relaciones, todas las posibilidades de descomposición de la traslación de vector (-80, 1) en tres traslaciones.

M - T - 26



Láminas: Hoja en blanco.

Objetivos: Detectar si se resuelve correctamente una situación concreta de aplicación de traslación a una figura, para la que una de las alumnas realizó un desplazamiento incorrecto en las primeras sesiones dedicadas a traslaciones.

Actividad 27: Pegar una pieza rectangular (el pez), inclinada y aplicarle una traslación vertical de 1 cm. hacia arriba.

Láminas: Hoja en blanco.

Objetivos: Comprender el planteamiento del enunciado de una propiedad general de las traslaciones.

Comprender la diferencia entre condición necesaria y suficiente.

Determinar conjuntos suficientes de condiciones para determinar una traslación.

Actividad 28: Si la imagen de P es P' y la imagen de Q es Q', averiguar si se puede dar alguna condición sobre P, P', Q y Q' que asegure que el movimiento ha sido una traslación.

Analizar si la o las condiciones dadas como solución al ejercicio anterior se tienen que cumplir necesariamente en las traslaciones.

Analizar si siempre que se cumplan las condiciones propuestas como solución en el primer ejercicio, el movimiento ha de ser una traslación.

Resumen de las sesiones de Magisterio

Sesiones 1 y 2

Láminas: M-T-1.1, M-T-1.2, M-T-1.3 y M-T-1.4.
Objetivos: Introducir estática y dinámicamente las traslaciones.
Actividad 1: Tras observar los ejemplos y los contra-ejemplos de traslaciones de cada lámina, decir qué son las traslaciones.
En las láminas en las que se dispone de piezas iguales a las de los dibujos, desplazar físicamente las piezas desde uno de los dibujos hasta el otro.
Apreciar las diferencias existentes entre las traslaciones y las no traslaciones.

Las referencias a lo largo de estas láminas sobre las causas de ser o no traslaciones corresponden a:

Estar sobre una línea.
No estar girado.
Ser la misma figura.
Que no se muevan. Que estén en la misma posición.

La primera contestación en esta experimentación sobre lo que son traslaciones no es acertada, pero enseguida, y sin intervención de la profesora, la misma alumna hace ya descripciones relacionadas con la igualdad de figuras y con el desplazamiento en línea recta. Transcribo:

Prof.: *¿A partir de esto* [lámina M-T-1.1] *veis lo que son traslaciones?*
Ara: *No mucho. Bueno, sí,* [esto no es] *porque éste levanta la pata* [hace referencia a la pareja de elefantes, que son simétricos] *...Tiene que estar sobre una misma línea ... Los conejos no son porque se habría trasladado hacia aquí* [desplazamiento horizontal], *pero no girado.*
Merche: [Lo que tiene que suceder es] *que la figura no se mueva ... Que se quede igual.*

Respecto a la utilización de una regla como soporte para efectuar el desplazamiento, a petición de la profesora, la explicación de Merche sobre cómo debe ser el movimiento es: *Traslada un punto del vehículo sobre esa recta, no sobre otra.*

Ara utiliza dos reglas paralelas para deslizar entre ellas la figura, y empleará ese métodos varias veces a lo largo de las sesiones para ejercicios de comprobación y de realización de traslaciones.

La justificación de Ara sobre la imposibilidad de variación de tamaño de las figuras por una traslación es: *Si trasladas una figura no cambia la materia.*

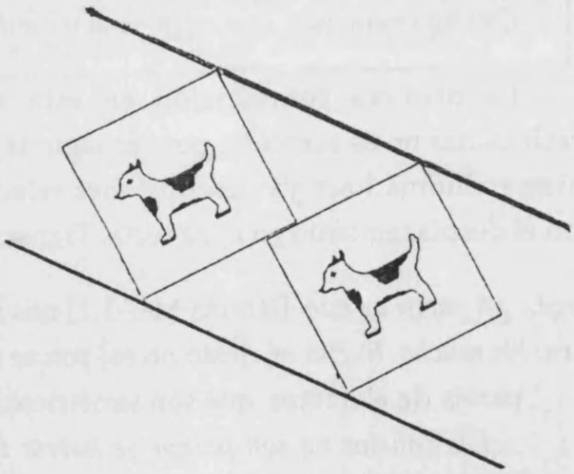
Comento como aspecto a tener en cuenta la interpretación visual que tiene Ara de la lámina M-T-1.3, la cual es para ella una representación de figuras en el espacio. Debido a ello incluye la condición de *estar en un mismo plano* para las traslaciones. De todas maneras, una vez que la profesora le explica que no se trata de una representación de figuras en el espacio, no surge de nuevo esa consideración espacial.

Láminas: M-T-2.1 y M-T-2.2.

Objetivos: Identificar visualmente y dinámicamente las figuras que se corresponden mediante una traslación.

Actividad 2: Decir qué figuras se corresponden mediante una traslación. Utilizar algún método que ratifique la respuesta visual.

Las dos alumnas resuelven correctamente el ejercicio. Aunque visualmente sí reconocen bien las figuras trasladadas, la profesora les pide un método para asegurarse. Las dos alumnas proponen la utilización de reglas: Merche una y Ara dos (recordar que Ara se servía ya en la actividad 1 de dos reglas paralelas para deslizar la figura entre ellas), e incluyen en sus explicaciones elementos y propiedades:



Merche: *Yo cogería la regla* [la coloca].

Si hay una línea que ... [no acaba la frase]. *Si un punto está sobre la regla, pero trasladado* [entonces sí hay traslación].

Ara: *Yo pondría así la regla, formando dos paralelas* [sitúa dos reglas paralelas, de manera que las figuras queden entre las reglas, tocando éstas; ver dibujo].

Láminas: M-T-3 y hoja en blanco.
Objetivos: Afianzar y emplear la característica de conservación de inclinación de las figuras por una traslación y, en particular, de los segmentos.
Actividad 3: Lámina M-T.3: Trasladar la figura de manera que el lado AB se coloque sobre el segmento.
Hoja en blanco: Ejercicio análogo, pero hay que pegar una pieza en la hoja y trazar el segmento.

Las alumnas resuelven estos ejercicios sin ninguna dificultad. En las primeras figuras siempre se han servido del arrastre de la figura, paralelamente a la original, por la hoja; o sea, no la colocaban directamente. Merche incluso utilizaba la regla, aunque después prescindió de ella.

Láminas: M-T-4.
Objetivos: Afianzar y emplear la característica de conservación de inclinación de las figuras por una traslación.
Actividad 4: Trasladar la figura de manera que el vértice marcado se sitúe sobre el punto indicado.

Las alumnas se siguen sirviendo del arrastre de la pieza desde la posición original. Por sí mismas hacen referencia al paralelismo de los lados, aunque Ara muestra no utilizarlo en el ejercicio en el cual el punto imagen es interior a la figura (cuadrado). Ese caso resulta conflictivo para Ara, pues ésta sí conoce la propiedad de paralelismo, pero seguramente no sabe cómo resolverlo. También Merche resuelve mal ese ejercicio, aunque en su caso no ese trata de ausencia de paralelismo, sino de que el vértice indicado no lo ha situado sobre el punto marcado; en cuanto la profesora le indica el error lo corrige. Veamos algunas transcripciones en las que se reflejan los comentarios anteriores: En primer lugar muestro la referencia al paralelismo y después la realización de un giro por parte de Ara:

Una pieza se ha movido un poco respecto la inclinación correcta. Ara sitúa de nuevo la pieza sobre la original y la coloca bien en su posición final. Entonces la profesora dice:

Prof.: *Es que estaba un poco corrida.*

Ara: *Sí. La paralela.* [Hay que destacar que hasta ese momento no se había hecho mención explícita al paralelismo de los lados].

Prof.: *¿Tienen que ser paralelas las líneas?*

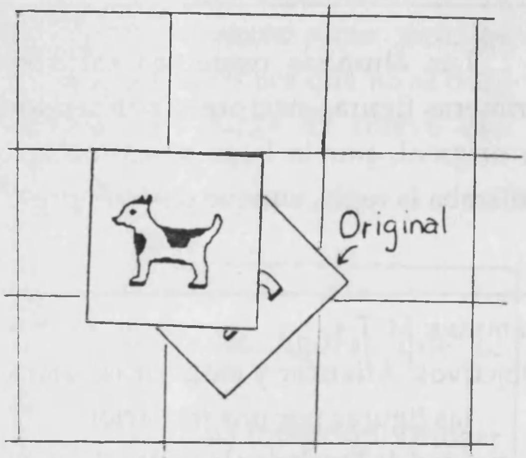
Ara: *Sí. Yo creo que sí.*

Prof.: *Como hasta ahora no lo utilizabas. ¿Lo has descubierto ahora?*

Ara: *No. Yo me había dado cuenta antes. El segmento que trasladas ha de ser paralelo.*

....

En el cuadrado Ara ha realizado un giro, y no de modo accidental (ver dibujo). La profesora le pregunta sobre su colocación y Ara vuelve a realizar un giro. Luego la profesora pregunta:



Prof: *¿Pero así es una traslación?*

Ara: *No.*

Entonces Ara vuelve a situar la pieza sobre la original y la traslada correctamente con la mano.

Prof.: *Es que antes no era una traslación.*

Ara: *No. Era un giro.*

Sesión 2

Láminas: M-T-5.

Objetivos: Utilizar el paralelismo de segmentos en el desplazamiento mediante una traslación.

Actividad 5: Desplazar la figura de manera que algunos de sus lados se coloque sobre el segmento marcado. Justificar la posibilidad o imposibilidad de cada caso.

Dar todas las soluciones para cada situación.

Las dos alumnas resuelven bien los ejercicios y las justificaciones que dan se basan en el paralelismo. Por ejemplo:

Hay algunas que no son soluciones ... porque no son rectas paralelas. Por ejemplo, esto es un giro.

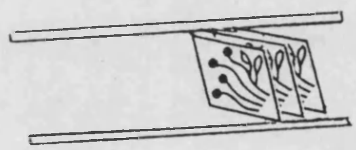
En los casos de más de una posibilidad Ara deja alguna de las soluciones, pero las completa en cuanto la profesora le indica que falta alguna. Su comprensión es correcta. En uno de estos casos dice: *Sí* [hay otra solución]. *Depende de si trasladas sobre el segmento este lado o éste.*

Láminas: M-T-6.
Objetivos: Utilización de algunas características del vector de una traslación: Dirección y módulo.
Actividad 6: Continuar la banda cuya pauta se da mediante dos o tres figuras. Explicar el método seguido para proceder con exactitud.

Ara tiene muchos problemas durante varias sesiones cuando se sirve de regla y cartabón o cartabón y escuadra para comprobar o trazar paralelas. Merche no tiene ese problema, pues maneja bien esos instrumentos.

Es visible un progreso en la comprensión de las traslaciones a lo largo de las seis bandas que realizan.

En el caso de Merche, sus soluciones son las siguientes: La primera banda que realiza es la de los rombos superpuestos sin cuadrícula. Coloca una regla para apoyar un vértice, pero luego sitúa una paralela por el vértice opuesto (ver dibujo) y lo justifica [porque] *con una regla sólo no sé exactamente dónde.*



En la banda siguiente que resuelve Merche (triángulo equilátero; no hay cuadrícula) utiliza el paralelismo de un lado y la relación de distancia entre las figuras: Mide la diferencia de alturas entre las dos figuras consecutivas que se dan y traza una línea paralela al lado correspondiente por esa altura.

Después hace la banda del triángulo rectángulo (está sobre cuadrícula) y explica así cómo la ha construido: *He contado cuadritos y he puesto la figura, pero como está aquí* [se refiere a situarlo con la misma posición]. *Sin regla.*

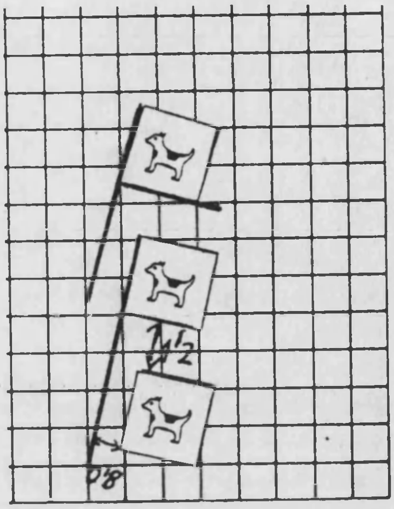
En la banda de cuadrados (sobre cuadrícula) Merche traza paralelas al lado inferior, mediante cartabón y escuadra, y cuenta los cuadros de separación entre las piezas. Como no es exacto el número, comete error de desplazamiento. No obstante, las ideas básicas de traslación son correctas. No se da cuenta de que con algunos de los otros vértices no habría sido necesario aproximar. Más adelante retoma esa banda, aplicando el mismo método que con la banda de rectángulos, y corrige el error de distancia que tenía.

Para la banda de rectángulos (sin cuadrícula), Merche aplica el método general: Traza dos líneas por vértices opuestos y mide la distancia de separación de las figuras a lo largo de esa línea. Ara, como tiene problemas en comprobar y trazar paralelas, a veces recurre a métodos visuales para esos fines (aunque sí intenta emplear cartabón y escuadra). No se trata por tanto de un intento de resolverlo visualmente, sino de una imposibilidad de emplear el instrumental requerido.

Para la banda de los triángulos equiláteros (no hay cuadrícula), Ara comprueba que las dos figuras que se dan son trasladadas. Para ello verifica el paralelismo de uno de los lados de la figura. Pero no aplica la propiedad de que entonces los demás lados también serán paralelos, pues comprueba con otro lado y le parece que no es totalmente paralelo, aunque quizá lo haga para asegurarse. Para construir esa banda, Ara emplea dos reglas paralelas entre las que desliza la figura.

Para la primera banda sobre cuadrícula (triángulo rectángulo), Ara cuenta cuadros de separación, pero se basa más en el deslizamiento de la pieza entre dos reglas paralelas. Tanto para la banda de rectángulos (sin cuadrícula) como para la de cuadrados (con cuadrícula), Ara utiliza un método no estándar, basándose en la intuición y en lo que ve en esos ejemplos concretos: Mide distancias de separación en horizontal y vertical entre dos figuras consecutivas (ver el dibujo de la página siguiente). Se requiere la instrucción guiada por parte de la profesora para que Ara aprenda uno de los métodos estándar, utilizado por Merche. Veamos parte de la transcripción en la que se pone de manifiesto ese aprendizaje:

Tras hacer que Ara justifique el método utilizado por ella en la banda de los rectángulos, la profesora le pide que dibuje *el recorrido que hace el pez.*



Ara [coge la pieza y hace el recorrido]: *Si uno estos vértices* [el vértice superior izquierdo de las figuras del friso, y traza la línea correspondiente].

Prof.: *Tendrías que hacer algo más para efectuar la traslación? Si te pido que coloques la pieza siguiente, ¿cómo lo haces?*

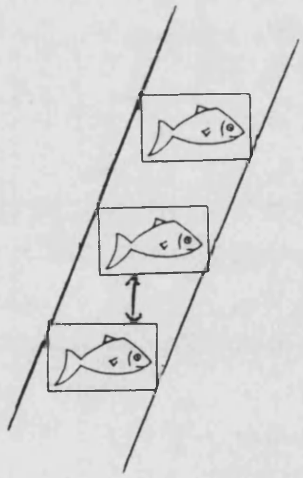
Ara: *Alargo esta línea* [la dibujada antes] *y trazo otra línea por aquí* [línea paralela a la anterior por los vértices opuestos. Se refiere a esa línea, pero no la dibuja]. *Eso me parece a simple vista. A lo mejor me equivoco.* [Ara coge la pieza y la va trasladando].

Prof.: *O sea, ¿no estabas segura de si tenía que pasar por ahí?*

Ara: *Sí. Tiene que pasar por dos rectas paralelas* [dibuja la paralela a la que había dibujado antes, por los vértices opuestos]. *Las prolongaría.*

Ara prolonga las líneas, coge la pieza, la traslada desde la inferior y, cuando llega aproximadamente al lugar donde tiene que colocarla, dice:

Ara: *Sabiendo esta distancia como referencia* [la separación vertical entre las figuras consecutivas; ver dibujo] *y colocando un vértice sobre esta recta y el otro sobre ésta.*



El método de Ara es bueno, pero la profesora quiere que considere la longitud a lo largo del recorrido, igual que había hecho Merche. Por eso le pregunta:

Prof. [a Ara]: *¿Puedes tomar otra distancia como referencia, en lugar de ésa?* [Ara piensa un poco] ... *Cuando te mueves a lo largo de este camino* [señala el camino recorrido a lo largo de la traslación] ...

Ara: *1'2* [esa es la separación vertical entre figuras consecutivas, no la distancia a lo largo del desplazamiento de la traslación].

Prof.: *1'2 así* [separación vertical]. *Desplazando así* [la profesora recorre una de las líneas dibujadas en la dirección de la traslación], *¿cuál es el camino que has recorrido? ¿cuánto te has movido?*

Ara: *¡Ah!* [Hay que] *calcular la distancia* [señala la longitud del recorrido de la traslación].

Prof.: *Y esa distancia es siempre la misma, ¿no?*

Ara: *Sí. Esa distancia es la misma que ésa* [se refiere a la distancia entre las dos figuras siguientes].

Láminas: M-T-7.

Objetivos: Utilización de algunas características del vector de una traslación: Dirección y módulo.

Actividad 7: Identificar las figuras mal situadas y explicar las causas por las que no son válidas.

Las dos alumnas emplean algunas de las propiedades necesarias correctas: Todos los vértices que se corresponden han de encontrarse alineados, los lados han de ser paralelos, la distancia de una figura a la consecutiva ha de ser siempre la misma.

Respecto a la distancia, a veces, al contar entre dos figuras consecutivas, si una está mal no toman la última pieza correcta como referencia para el resto de figuras a partir de la incorrecta, sino la distancia desde la incorrecta, con lo cual, alguna pieza bien situada respecto a las demás la dan como no válida.

Láminas: M-T-8.

Objetivos: Obtener las características del "segmento libre" que define una traslación: Dirección y longitud. (No se considera el sentido de la traslación).

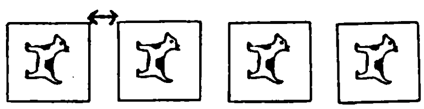
Actividad 8: Observar y expresar lo que hay de común y de diferente entre las traslaciones que producen esos frisos.

Como características sí surgen pronto las deseadas: *Unos* [frisos] *están en vertical y otros inclinados* [lo cual lleva al planteamiento de la dirección], y *La separación de una a otra* [longitud del segmento que define la traslación]. Como este ejercicio se plantea a través de frisos, el sentido del vector de la traslación no es objetivo de esta actividad; se abordará más adelante.

Entre las características comunes de las traslaciones que producen frisos incluyen el paralelismo de las líneas que unen puntos que se corresponden, pero desde la visión de la técnica que han empleado hasta ahora, consistente en trazar dos paralelas por vértices opuestos de las figuras. En concreto, Merche indica que *Todas tienen dos paralelas por las que pasan dos vértices o dos lados.*

Esas respuestas espontáneas de las alumnas van seguidas de una serie de preguntas dirigidas para que lleguen a expresar la dirección y el sentido como características de cada traslación. Las alumnas llegan a expresar correctamente la igualdad de la traslación utilizada entre los frisos correspondientes. Las alumnas son totalmente conscientes de la independencia del punto utilizado en las figuras para ver cuál es la traslación utilizada.

Ara comete uno de los errores clásicos respecto a la longitud de la traslación empleada: En el friso horizontal de cuadrados separados, da como distancia la que hay entre los dos lados más próximos de dos figuras consecutivas, y no la existente entre dos vértices que se corresponden (ver dibujo). La profesora le hace que mueva una pieza y entonces Ara rectifica, siendo totalmente consciente de su error.

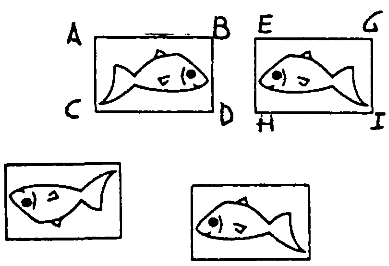


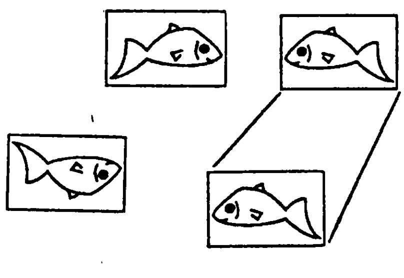
Láminas: M-T-9.1 y M-T-9.2. Objetivos: Emplear la propiedad de paralelismo e igualdad de longitud entre los segmentos que unen puntos homólogos por una traslación para diferenciar este tipo de movimiento de otros.

Actividad 9: Unir el punto p de la figura A de la lámina M-T-9.1 con los que les corresponden de B y de C, p' y p", respectivamente. Indicar cómo será el segmento que une otro vértice de A con su correspondiente vértice de B. Explicar qué características se mantienen siempre en los segmentos formados al unir puntos de A con puntos de B. Decir si sucede lo mismo con las figuras A y C.
Identificar en los demás casos de las láminas qué figuras se corresponden mediante una traslación y verificar que sólo en las traslaciones se cumple la condición, obtenida ante,s de paralelismo e igualdad de longitud entre todos los segmentos que unen puntos que se corresponden.

Las alumnas emplean la propiedad de que, en las traslaciones, los segmentos que unen puntos que se corresponden son siempre paralelos y de la misma longitud.

Pero Ara tiene grandes dificultades en darse cuenta de lo que se pide, respecto a la caracterización de las traslaciones. El conflicto se presenta con los rectángulos simétricos de la lámina M-T-9.1. En ese caso dice que hay segmentos que son iguales, por ejemplo, AG con CI, ó BE con DH (ver el dibujo de la izquierda; las letras las hemos añadido nosotros para identificar mejor los elementos a los que nos referimos en estos comentarios). No comprende que que la conclusión a la que debe llegar es que sólo en las traslaciones todos los segmentos que unen puntos homólogos tienen la misma longitud (y son paralelos). Cuando Merche le explica que la igualdad de longitud debe suceder





con todos los segmentos, Ara traza dos segmentos entre los rectángulos trasladados, indicando que en ese caso también hay segmentos de distinta longitud; ese error proviene de que Ara se ha equivocado al unir los vértices, y uno de los segmentos no une vértices homólogos (ver dibujo de la derecha). Incluso cuando rectifica el segmento que había trazado mal entre los rectángulos trasladados, se requiere instrucción hasta que Ara se da cuenta de la propiedad objetivo de esta actividad.

Una vez que Ara comprende la propiedad, la profesora le pide que resuma lo que sucede. Ara tiene dificultades para expresarla pero, con la dirección de la profesora al final la enuncia. Transcribo esta última situación:

Ara: [Lo que hemos visto es] *que en una traslación el vértice que se traslada tiene que ser paralelo al otro vértice que se traslada ... Bueno, la recta que trazamos por los vértices, entre el que se traslada y el no trasladado* [no termina la frase]. *Es que me explico mal.*

Prof.: T*ú coges un punto y otro* que se corresponde. ¿Qué tiene que pasar cuando coges un punto y su imagen?

Ara: Pues eso nos da una recta. Y luego, otro punto y su imagen otra recta. Tienen que ser paralelas y de igual longitud.

Respecto a la forma de proceder de Ara al principio de este ejercicio, es interesante destacar que, para unir vértices que se corresponden, en lugar de fijarse en la posición relativa del vértice respecto al resto de la figura, Ara piensa en el movimiento realizado por la figura. Quizá por ello, y por la influencia de las traslaciones, en el caso de los rectángulos simétricos la primera unión de vértice que hace es incorrecta (G-B). Al decirle que es incorrecto recurre a ver cómo es el movimiento, aunque piensa en un giro y hace el recorrido completo del vértice, antes de dar la respuesta.

Posteriormente, en la justificación de los casos de la lámina M-T-9.2 en los que hay traslaciones, las alumnas explican que los segmentos no salen de la misma longitud o se pueden cortar cuando no hay traslación.

La profesora resume la caracterización de las traslaciones a partir de los segmentos que unen puntos homólogos y luego pide otro método para identificar figuras trasladadas. La solución aportada por Merche es: *Poniendo reglas,* que hace referencia a la manera empleada frecuentemente por las dos alumnas para comprobar con cierta precisión la existencia de traslación, y que consiste en trazar una línea uniendo vértices homólogos y otra por los vértices opuestos de las figuras, de manera que las figuras queden entre las dos líneas, las cuales debían ser paralelas en caso de haber traslación.

Láminas: M-T-10.
Objetivos: Introducir la utilización de una traslación a partir del "segmento libre" que la define (el sentido de la traslación se define más adelante).
Comprender la movilidad del segmento, siempre que conserve las características de dirección y longitud.
Actividad 10: Aplicar a la figura ... la traslación, cuyas características vienen dadas por un segmento ...

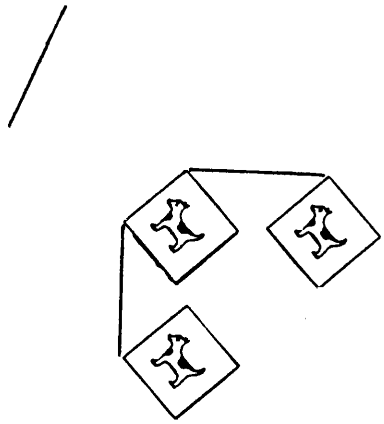
En algunos de los ejercicios anteriores, en concreto en los de frisos, estaba previsto que las alumnas dibujaran, separado de cada friso, el segmento que poseía las características de dirección y longitud de la traslación efectuada. Con ello se introducía a las alumnas en el manejo de segmentos libres. Sin embargo, por un descuido se omitió esa parte de la actividad. Ello provoca en el ejercicio actual una confusión en las alumnas, pues el salto a la idea de segmento se lleva a cabo de manera demasiado brusca. En este ejercicio se ve que las alumnas no se dan cuenta de qué es lo que se les pide.

De todas maneras, si la profesora les hubiera indicado a las alumnas cómo resolverlo, mediante un ejemplo, seguramente las alumnas sí habrían resuelto los ejercicios con cierta rapidez. Pero en la experimentación que se está llevando a cabo interesa ver hasta dónde son capaces las alumnas de comprender y utilizar el vector libre como representante de una traslación.

El planteamiento del ejercicio es: *Al perro de arriba le aplicáis la traslación 1 ... Lo que doy es la traslación que tenéis que hacer.*

La primera idea de las alumnas es utilizar el segmento como en los ejercicios de las actividades 3 y 5, en los cuales había que situar un lado de la figura sobre el segmento proporcionado en la lámina. Por ello dicen que no hay solución, ya que el segmento *No es paralelo,* o bien, como otra posibilidad Merche piensa que quizá lo que se pide es trasladar la figura de manera que uno de los vértices de la figura coincida con uno de los extremos del segmento.

La profesora recuerda, sobre una lámina anterior, cómo son los segmentos que unen punto homólogos, hace que señalen algunas de las traslaciones y, finalmente dice: *Lo que doy ahora es el empujón que hay que hacer.* Eso lo interpretan las dos alumnas como que hay que tener en cuenta esa longitud, pero no la dirección. De hecho, Merche dibuja varias imágenes, siempre a una distancia igual a la longitud del segmento, pero en distintas direcciones (ver dibujo).



La profesora hace que las alumnas marquen puntos homólogos y que los unan, que señalen la traslación realizada y que comparen ese segmento con el que se da. A partir de entonces, Merche entiende perfectamente el significado del segmento como portador de las características que definen una traslación (a excepción del sentido, que no se considera de momento). No sucede lo mismo con Ara, quien requiere más enseñanza.

Tras varias explicaciones de la profesora, durante las cuales Ara hace referencia al paralelismo e igualdad de longitud de los segmentos que unen puntos homólogos por una traslación, señala traslaciones e indica características que diferencian varias traslaciones, vuelve a cometer el error de utilizar una dirección incorrecta en el ejercicio que se propone entonces. Hace un desplazamiento perpendicular al que corresponde.

Tras una nueva intervención de la profesora, con la correspondiente instrucción, Ara sí tiene en cuenta la dirección en el ejercicio siguiente, aunque comete el error clásico de medir la distancia entre los dos lados más próximos, y no entre los que corresponde. Ese error lo corrige y lo comprende en cuanto se le indica.

Pero en el ejercicio inmediatamente posterior, de nuevo el desplazamiento lo realiza según una dirección perpendicular a la dada. La longitud sí es la correcta.

Se trata del cuadrado inferior y de la traslación de segmento 3, que es paralelo a uno de los lados del cuadrado (ver dibujo).

Láminas: M-T-11.
Objetivos: Aplicar traslaciones a partir de sus "segmentos libres".
Comprender la igualdad de las traslaciones definidas por "segmentos libres" equivalentes.
Introducir el sentido como una de las características de una traslación.
Considerar el vector libre como el objeto matemático que reúne las características que definen una traslación.
Actividad 11: Aplicar la traslación determinada por el segmento ... a la figura...
Averiguar cuántas soluciones hay. Explicar en qué difieren y proponer alguna modificación en el segmento utilizado para que la traslación quede totalmente determinada.
Decir cuáles son las tres características que definen una traslación y que se resumen en el vector.

No presenta ninguna dificultad la introducción de la necesidad de especificar el sentido de una traslación.

Merche interpreta el ejercicio totalmente en consonancia con el objetivo de la actividad. Ella misma pregunta si debe hacer dos figuras, especifica la equivalencia de las traslaciones definidas por algunos de los segmentos de la lámina *Porque son líneas paralelas y de la misma longitud,* y comprende la necesidad de especificar el sentido de la traslación.

Ara también entiende todos esos aspectos, aunque hay que írselos planteando. Ante la pregunta de si puede colocar más de una figura, la respuesta de Ara es: [Puedes poner] *todas las que quieras con tal de que siga la pauta,* pues interpreta la pregunta como si se le pidiera la aplicación sucesiva de la traslación, o sea, la realización de un friso. Posteriormente, al efectuar la traslación, la profesora le pregunta sobre la existencia de más posibilidades, ante lo cual aparece la necesidad de expresar el sentido de la traslación.

Láminas: M-T-12.

Objetivos: Determinar el vector de una traslación, a partir de una figura y su imagen, como medio para aplicar la traslación a otros puntos.

Actividad 12: La flor y el barco han sido movidos por traslaciones distintas, pero sólo se muestra parte de sus imágenes. Determinar, de manera precisa, dónde está situada la imagen de R y la de P en cada caso.

Copiar, en lugar separado de los dibujos, el vector que define cada una de las traslaciones.

Las dos alumnas la resuelven perfectamente y no surge ninguna dificultad.

Sesión 3

Láminas: M-T-13.1 y M-T-13.2.

Objetivos: Comprender el significado del "segmento libre" y del vector libre como portadores de las características de las traslaciones.

Saber utilizar el segmento o vector libre de una traslación en la aplicación de ésta.

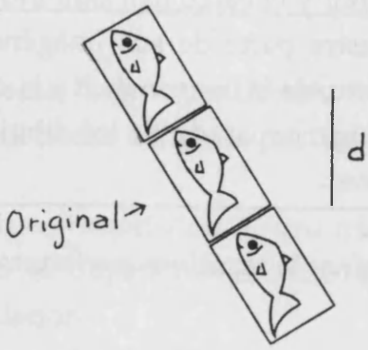
Reconocer los segmentos o vectores que definen la misma traslación.

Actividad 13: Lámina M-T-13.1: Aplicar las traslaciones, cuyas características están determinadas por el segmento ..., a la figura ...

Lámina M-T-13.2: Aplicar la traslación, cuyas características están determinadas por el vector ..., a la figura ...

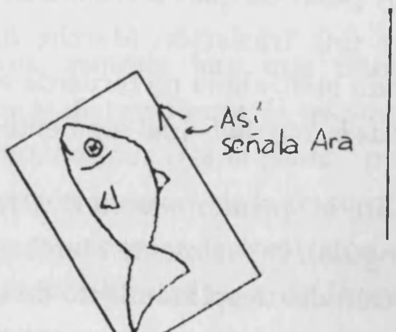
A pesar de que en el ejercicio en el que se introdujo la idea de segmento que define una traslación Merche había comprendido el significado y lo había aplicado bien, ahora no recuerda su significado exacto. La idea que emplea es que *lo que da la longitud* [del segmento] *hay que trasladarlo.*

En el primer ejercicio (traslación de segmento a sobre el triángulo rectángulo), casualmente Merche también aplica bien la dirección, aunque en la medición del desplazamiento de la figura comete el error clásico de considerar la distancia entre los puntos más próximos de las figuras consecutivas, y no la distancia entre puntos homólogos. Pero en el segundo ejercicio (traslación de segmento d sobre el rectángulo), Merche no tiene en cuenta la dirección (ver el dibujo en la página siguiente), sino sólo la longitud del segmento, por lo que piensa que se pueden hacer muchas imágenes. La simple indicación de la profesora de que *El segmento era ése* [el d], sirve para que Merche se dé cuenta de su error y entonces tiene en cuenta la dirección.



Merche ha asimilado de nuevo correctamente las características del segmento libre y, en la lámina siguiente, M-T-13.2, emplea perfectamente el vector libre en todos los casos. Sin que nadie le pregunte sobre ello, indica que los vectores e y f son iguales.

Ara sí había tenido problemas, en actividades anteriores, para entender el significado del segmento libre que define una traslación y ahora hay que realizar de nuevo instrucción con ella para que lo entienda. Los dos primeros ejercicios (traslaciones de segmentos a y b sobre el triángulo rectángulo y el rectángulo, respectivamente) los resuelve sin tener en cuenta la dirección, a pesar de que tras el primero de ellos recibe instrucción para enmendar su error. En ambos casos, el deslizamiento lo efectúa según la dirección de uno de los lados de la figura. La transcripción siguiente refleja que Ara no ha entendido el significado del segmento. Se produce al comienzo del segundo de esos ejercicios a que me he referido. La profesora le pregunta a Ara cómo tiene que mover la figura. Ara señala a lo largo de uno de los lados largos del rectángulo y hacia arriba (ver dibujo).



Ara: *Yo lo veo así. Es que como aquí no marca ninguna puntita de flecha que sea ni para abajo ni para arriba.*

Prof.: *¿Pero qué dirección te está diciendo* [el segmento]. *Esto* [el segmento] *te dice cómo tienes que poner las reglas para deslizar, ¿no? ¿Y cómo tienes que ponerlas?*

Ara: *Yo es que no lo veo. Es que estoy acostumbrada a ver la puntita de la flecha.*

Prof.: *Imagínate que hay una punta de flecha ahí* [en un extremo del segmento]. *¿Cómo trasladarías ahora?*

Ara: *Yo creo que sería así, con la inclinación que tiene* [vuelve a desplazar a lo largo del lado, en lugar de vertical, que es la dirección del segmento].

En el último de los casos de esa lámina (traslación de segmento f sobre el cuadrado) y en los ejercicios de la lámina siguiente, Ara sí aplica bien las dos características del segmento y las tres del vector, respectivamente, aunque los suele emplear como generadores de un friso, pero eso no tiene importancia, pues es simplemente cuestión de presentarle de manera más clara el objetivo de la actividad para que piense en una sola traslación.

La equivalencia de vectores, igual que sucedió en el caso de Merche, la observa rápidamente. En la lámina en la que aparecieron por primera vez ya se dieron cuenta enseguida de que se trataba de lo mismo. El lenguaje empleado por Ara ahora es correcto y preciso: [los vectores] *e y f son iguales, ¿no? Porque tienen la misma dirección, la misma longitud y el mismo sentido.*

Ara sigue teniendo dificultades con los instrumentos que emplean para trazar paralelas o comprobar el paralelismo (regla y cartabón o escuadra y cartabón).

Láminas: M-T-14.

Objetivos: Determinar el vector que define una traslación a partir de una figura y su imagen por la traslación.
Identificar y justificar la existencia o inexistencia de vectores equivalentes, a partir de sus características.

Actividad 14: Dibujar el desplazamiento por cada traslación que lleva una de las figuras del grupo a las demás. Copiar, en lugar aparte, los distintos vectores que se obtienen.
Tras repetir el ejercicio anterior en varias situaciones, justificar si, entre los vectores obtenidos, hay algunos equivalentes.

La actividad se desarrolla bien, sin ninguna equivocación. Las alumnas justifican sus respuestas en las propiedades correctas de paralelismo, longitud del vector, sentido, etc. También se pone de manifiesto la comprensión de la independencia del vértice elegido, propiedad que ya habían asimilado en sesiones anteriores.

Láminas: M-T-15.
Objetivos: Utilizar las características de la traslación inversa (sin introducir el término "inversa").
Actividad 15: La figura ... es la imagen de otra por medio de la traslación de vector ... Obtener la figura original.
Dar las características de la traslación que lleva de la figura final a la original.

No hay ninguna dificultad. Para resolver el ejercicio, las dos alumnas piensan en la traslación directa. Una vez obtenida la solución, para explicar cómo ha sido la traslación efectuada, la respuesta es: *Cambia la punta de la flecha, con la misma longitud* y, aunque no verbalizan que la dirección no varía, sí que son conscientes de ello.

Láminas: M-T-16.
Objetivos: Utilizar los vectores libres para aplicar las traslaciones correspondientes.
Pasar del contexto usual de figuras a segmentos.
Considerar el paralelismo de segmentos que se corresponden por una traslación.
Actividad 16: Aplicar la traslación de vector ... al segmento ...

Merche no tiene ninguna dificultad, pero Ara sí necesita ayuda en uno de los dos ejercicios (el segundo que hace). Quizá parte de la confusión provenga de la existencia de varias líneas sobre el papel, tras obtener la imagen de los vértices.

Los ejercicios propuestos son: Traslaciones de vectores 1 (vertical) y 7 (horizontal) al segmento B (las dos alumnas). Traslación de vector 1 (Merche) ó 3 (Ara) al segmento A.

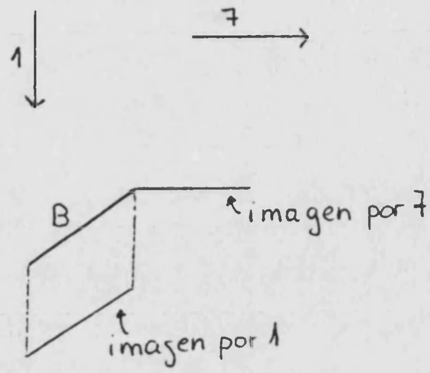
En el dibujo 1 se pueden apreciar las soluciones de Ara. Para el vector 1, vertical, la solución es correcta, pero no así para el vector 7. Sus explicaciones son:

Ara [para el caso correcto]: *He trazado la paralela al segmento. He medido la longitud y he puesto la misma longitud.*

Ara [para el caso correcto]: *He trazado la paralela a 7* [al vector 7] *y he medido la longitud de 7.*

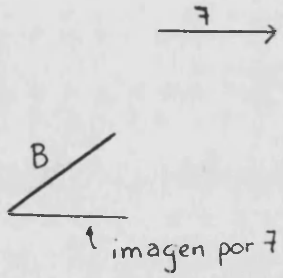
Prof: *¿Por una traslación puede transformarse en ese segmento?* [la imagen incorrecta del vector 7]

Ara: *Parece que hay un giro.*



Dibujo 1.

La segunda respuesta de Ara a ese ejercicio también está mal, pues señala el segmento paralelo al vector dado por el extremo inferior del segmento (ver el dibujo 2). Las dos soluciones erróneas corresponden, por tanto, a las líneas trazadas para obtener las imágenes de los vértices extremos del segmento, procedimiento utilizado usualmente por Ara para trasladar (obtener las imágenes de los vértices de la figura).



Dibujo 2.

Luego, sin instrucción intermedia por parte de la profesora, Ara proporciona la solución correcta.

Cuando se le formula directamente la pregunta, Ara siempre dice que la imagen ha de ser paralela a la original, lo cual indica que, en situaciones como la anterior, Ara tenía un conflicto entre la propiedad conocida y el método de resolución.

El último de los ejercicios propuestos a Ara -traslación de vector 3 sobre el segmento A- lo resuelve bien.

Láminas: M-T-17.
Objetivos: Identificar una traslación a partir de la figura original y su imagen.
Afianzar las características de los vectores que definen traslaciones inversas (vectores opuestos).
Desvincular una traslación de las figuras concretas en las que se ve.
Actividad 17: Trazar el vector correspondientes a la traslación que transforma la figura 4 en la 5. Dibujar también el vector de la traslación que lleva al figura 5 a la 4. Decir en qué se diferencian.
Aplicar a la figura 7 la traslación que pasa la figura 4 a la 5.

Las alumnas lo resuelven sin ninguna dificultad.

Láminas: M-T-18.
Objetivos: Obtención de información por parte del profesor sobre el grado de afianzamiento que poseen las alumnas en relación a propiedades sencillas de las traslaciones, vistas anteriormente, y al tipo de justificación empleada.
Desarrollar el significado de conjunto mínimo suficiente para una definición.
Reducir un conjunto de condiciones hasta llegar a un conjunto mínimo, suficiente para definir una traslación.
Actividad 18: Decir si cada una de las propiedades es cierta o no en las traslaciones y justificar la respuesta.
Reducir el conjunto de condiciones 8 a 11, dejando las imprescindibles para que, entre todas, determinen una traslación.

Como se puede observar, en la lámina se incluyen las propiedades básicas de una traslación, así como su caracterización. Las justificaciones dadas por las alumnas son informales, del tipo de las exigidas a lo largo de la experimentación, y se basan en su experiencia de los ejercicios realizados hasta el momento. En algunas de las propiedades, la interpretación que le dan las alumnas al enunciado no es la que se pretende, por lo que sus respuestas parecen erróneas. Pero cuando entienden la finalidad con la que están escritos los enunciados, por lo general las respuestas son acertadas.

Cabe, no obstante, destacar dos ejercicios. Uno, la propiedad 5, porque pone de manifiesto respuestas basadas en los ejercicios resueltos a lo largo de todas las sesiones, con razonamiento propio de nivel 2-3 de Van Hiele, nivel que corresponde a las exigencias de la experimentación llevada a cabo hasta el momento. El otro ejercicio es el planteamiento de la selección de un conjunto mínimo, entre ciertas propiedades, suficiente para definir una traslación. En este caso se produce un cambio de opinión varias veces por parte de Ara, pero no por parte de Merche. La dificultad no reside tanto en el hecho de que el conjunto sea mínimo -pues la solución es lo que se ha venido empleando durante bastantes ejercicios como caracterización de las traslaciones- como en el reconocimiento de que igualdad en dirección es equivalente a paralelismo. Veamos algunas transcripciones que presentan lo que acabo de exponer:

Propiedad 5- Basta comprobar que dos segmentos que unen puntos y sus respectivas imágenes son de la misma longitud para poder asegurar que se trata de una traslación.

Merche: *Con dos sólo no. Porque me acuerdo el otro día. Eran dos peces* [busca la lámina. M-T-9.1]. *Son dos segmentos de la misma longitud y no son paralelos.*

Prof.: *Exactamente. Con dos sólo no es suficiente. Ara, ¿estás de acuerdo?*

Ara: *Sí.*

Prof.: *Y si con dos no es suficiente, ¿qué pasa?*

Merche: *Tendría que ser con cuatro por lo menos* [Posteriormente se ve que Merche está pensando en los cuatro vértices] *...No. Con 4 no porque ...* [no acaba la frase. Se pone a mirar los peces de la lámina].

Ara: *Pruebas con todos los vértices. Si no te da la misma longitud, entonces es que no es traslación.*

Prof. [a Merche]: *Y tú que decías con 4 puntos, mira: ¿Este punto no es también de la figura? Pues la distancia es la misma. Y con este punto también* [la profesora le muestra a Merche un contraejemplo a su afirmación anterior: Señala, en los peces simétricos, varios puntos situados sobre el lado paralelo al eje de simetría, con lo cual todos los segmentos correspondientes son de la misma longitud].

Merche: *Yo decía 4 vértices.*

Respecto al otro ejercicio comentado anteriormente, las condiciones a partir de las cuales hay que seleccionar un conjunto mínimo suficiente para definir una traslación son los números 8, 9, 10 y 11:

Propiedad 8- Todos los segmentos los mueve la misma longitud.
Propiedad 9-Todos los puntos los mueve en la misma dirección y en el mismo sentido.
Propiedad 10- Los segmentos que unen puntos y sus imágenes respectivas son todos paralelos.
Propiedad 11- Transforma líneas rectas en líneas rectas.

Ara: *8, 9 y 10.*

Prof.: *¿Si quitas la 10 no es suficiente para definir una traslación?*

Ara: *Sí porque la dirección puede implicar el mismo ángulo, el paralelismo.*

Prof.: *Entonces, ¿hace falta o no poner la propiedad 10 para definir una traslación?*

Ara: *No.*

Prof.: *¿Si dejamos la 8 y la 9 estamos definiendo una traslación? ¿No hay ningún otro movimiento?*

Ara: *Si te dan el vector y tienes una dirección y un sentido y una longitud* [se queda pensando]. *No. Necesitas el paralelismo, yo creo ... Yo creo que sí es necesaria* [la propiedad 10].

Prof.: *¿Hay que decir necesariamente las tres para estar seguro que es una traslación?*

Merche: *La misma dirección, el mismo sentido y la misma longitud serán paralelos, No pueden cruzarse.*

Ara: *Es que en la dirección puede estar implícito el paralelismo también ... Sí. La dirección y el sentido implican el paralelismo.*

Prof.: *Entonces, si todos los puntos los mueve la misma dirección, longitud y sentido, ¿va a ser siempre una traslación?*

Ara: *Sí ... Porque es lo que se entiende por una traslación.*

Veamos a continuación las respuestas de las alumnas a otras dos de las propiedades:

Propiedad 2- Los segmentos determinados al unir puntos y sus respectivas imágenes son todos de la misma longitud.

Alumnas: *Sí.*

Ara: *Porque si no, yo qué se. Porque si no no trasladaríamos la figura. Trasladaríamos un vértice.*

Merche: *No puede ser de otra manera porque no se puede que dar atrás una parte de la figura.*

O sea, las dos alumnas basan sus justificaciones en la situación física de la figura.

Propiedad 6- Basta comprobar que dos segmentos que unen puntos y sus respectivas imágenes son paralelos para poder asegurar que se trata de una traslación.

Alumnas: *No es cierta.*

Merche: *En el caso de los peces de antes* [ver contestación a propiedad 5], *eran paralelas.*

Ara: *Además de ser paralelos necesitan ser de la misma longitud. Y comprobarlo desde todos los vértices, como hemos hecho antes.*

Láminas: M-T-19.

Objetivos: Introducir las coordenadas del vector que define una traslación.

Actividad 19: Trabajo por parejas. Una alumna tiene que unir dos figuras iguales y dar verbalmente indicaciones sobre la traslación efectuada, con el fin de que la otra alumna averigüe de qué par de figuras se trata.

Además de resolverlo indicando el módulo, la dirección y el sentido, se puede solucionar el ejercicio, de manera precisa, de otra forma. Buscar ese método alternativo.

Desde el principio la profesora podría haber explicado directamente lo que son las coordenadas del vector de una traslación, pero, al igual que en la experimentación con 6º de E.G.B., primero se deja libremente trabajar a las alumnas para ver qué tipo de descripción emplean.

El hecho de que, por el ejercicio que se plantea, las figuras inicial y final estén dibujadas en la lámina, hace que, en algunos casos, la alumna que tiene que adivinar la figura de que se trata emplee la técnica de exclusión. Por ello, habría sido más interesante haber planteado el ejercicio de manera que la situación de la imagen fuera totalmente arbitraria.

Las instrucciones de las que se sirven las alumnas hacen referencia al principio directamente al camino recorrido. El salto a la consideración de las coordenadas lo origina directamente la profesora. A diferencia de las alumnas de 6º de E.G.B., en este caso sí trabajan con números negativos y, además, saben lo que son las coordenadas de un vector. De todas maneras, al principio hay que repasar el significado exacto del par de números que da las coordenadas cuando alguna de las coordenadas es nula y hay que discutir el lugar que se toma como origen de coordenadas. En las transcripciones que presento a continuación se reflejan esos aspectos:

Entre las referencias espontáneas de las alumnas hay direcciones geográficas, junto con medidas, especificaciones arriba, abajo, y algunas otras:

Ara: *La longitud del segmento es 2'2 cm.. La dirección es sudeste. No sé cómo decirlo. Y está inclinado unos 30°.*

Merche: *Totalmente horizontal y mide 4.*

Ara: *El vector mide 4'1 cm. y apunta hacia el sur.*

Merche: *El vector mide 6'6 y está justamente en la diagonal del cuadro* [como no ha indicado el sentido, Ara le dice que así puede ser del 1 al 4 ó del 4 al 1. Por eso, Merche amplía la instrucción] *Hacia arriba.*

Ara: *Mide una longitud de 1 cuadrado y un poquito de otro y apunta la flecha hacia el norte tirando hacia el oeste.*

Merche: *Mide cinco cuadritos y, basándote en la horizontal, tiene una inclinación de medio cuadrito. Esa es la inclinación, pero mide cinco cuadros y está hacia la izquierda.*

Ara: *Cuatro cuadraditos, medidos hacia el sur.*

El paso de ese tipo de referencias a las coordenadas del vector de la traslación lo provoca directamente la profesora, a partir de la experiencia de las alumnas en la asignatura de física, lo cual resulta fácil. De todas maneras, antes de su utilización hay que aclarar la idea que tienen las alumnas de los vectores en física, pues lo que utilizan es coordenadas del punto final (donde está la flecha) en lugar de coordenadas del vector; por tanto, sus valores para las coordenadas de un vector dependen del lugar donde se tome el origen de coordenadas. Veamos algunas transcripciones de lo que acabo de comentar:

Prof.: *¿En física qué utilizáis para determinar los vectores?*

Ara: *Módulo, dirección y sentido.*

Prof.: *Y si dicen: Dibuja el vector tal.*

Ara: *X e Y.*

Prof.: *Este vector* [traslación del triángulo 3 al 4, de coordenadas (-1, -4)].

Ara: *Depende de lo que tome como eje de referencia.*

Prof.: *Pero ¿para la traslación hace falta fijar el vector aquí o se puede dibujar en otro sitio?*

Merche: *O sea, ¿lo puedo situar completamente ahí?* [señala el origen de coordenadas].

Prof.: *¿Cuánto te has movido?*

A partir de entonces las alumnas dan las coordenadas de los vectores de las traslaciones y desplazan alguna pieza según las coordenadas de algún vector dado por la profesora.

Ara se equivoca en un desplazamiento que no es vertical -del triángulo 3 al 4, para cuya traslación las coordenadas del vector son (-1, -4)- pues no da la coordenada horizontal. Pero una vez corregido, no tiene más problemas.

Láminas: M-T-20.

Objetivos: Obtener las coordenadas del vector de una traslación, conocidas una figura y su imagen.

Actividad 20: Obtener las coordenadas de los vectores de varias de las traslaciones que trasladan una figura a otra.

Conceptualmente no hay problemas. Se producen, no obstante, algunos errores de orden y de signo en el par de números que determina las coordenadas de un vector, pero ello se soluciona simplemente con aclarar las normas o fijándose más, cuando se trata de un descuido. También Ara comete una vez el error de no contar entre vértices homólogos, pero se trata de un despiste.

Láminas: M-T-21.

Objetivos: Descubrir la relación existente entre las coordenadas de un punto, las del vector de una traslación y las de la imagen del punto por esa traslación, cuando la incógnita son las coordenadas del punto imagen.

Actividad 21: Aplicarle al dragón la traslación de vector a. Anotar las coordenadas del punto P, del vector a y de la imagen de P. Hacer lo mismo para el punto T.
Sin obtener la imagen de S por la traslación de vector a, decir cuáles van a ser sus coordenadas.
Explicar cómo obtener las coordenadas de la imagen de un punto por una traslación.
Aplicar esa relación numérica general para obtener las coordenadas de las imágenes de puntos de otras figuras por otras traslaciones.

Hay que comentar que Ara traza ya correctamente paralelas sirviéndose de cartabón y escuadra o regla y escuadra.

Las alumnas resuelven bien el ejercicio, sin ningún error. La profesora les pide las coordenadas de algunos puntos de figuras, las coordenadas de algunos vectores, y las coordenadas de las imágenes de esos puntos tras aplicarles las traslaciones definidas por esos vectores. Las alumnas simplemente dan las soluciones y, al final, la profesora resume la propiedad de que lo que se hace es sumar las coordenadas. Resulta expresiva la última frase de Ara: *Esto es Física.*

Láminas: M-T-22.
Objetivos: Utilizar la relación existente entre las coordenadas de un punto, las del vector de una traslación y las de la imagen del punto por esa traslación, cuando la incógnita son las coordenadas del vector.
Actividad 22: Se dan las coordenadas de un punto concreto y las de su imagen por una traslación. Hay que averiguar las coordenadas del vector de la traslación.

Cuando todos los valores numéricos son positivos, tanto las coordenadas de los puntos origen e imagen como las coordenadas del vector resultante, las alumnas resuelven el ejercicio sin ninguna dificultad. Pero cuando alguno de los valores que se dan es negativo, Merche tiene problemas. En parte se debe a carencia de conocimientos aritméticos suficientes cuando hay que realizar restas y alguno de los sumandos en negativo. Creo que Ara tampoco tiene muy consolidadas esas operaciones aritméticas, aunque sí especifica, tras hacer un ejercicio, que hay que *Restar P' menos P ... para sacar el vector* .

De hecho, Ara lo resuelve planteando una suma: Busca el valor que hay que sumar a la coordenada del punto original para obtener el valor de la imagen. La transcripción siguiente lo muestra claramente. Corresponde a la respuesta de Ara para buscar la traslación que lleva P (3, -2) a P' (-1, 6):

Ara: *-4 es la primera* [coordenada] *porque es lo que tienes que sumarle a +3 para que dé -1. Ese será X. Y luego* [para obtener] *Y, -2 +8.*

La carencia de conocimientos suficientes con restas de números negativos hace que Merche no se dé cuenta de la operación a efectuar en esos casos:

Merche: *¿Hay que restar? ... Si son positivos sí que da, pero si no, no.*

Sesión 4

Láminas: M-T-23.
Objetivos: Relacionar las coordenadas de los vectores de traslaciones inversas.
Utilizar la relación existente entre las coordenadas de un punto, las del vector de una traslación y las de la imagen del punto por esa traslación, cuando la incógnita son las coordenadas del punto imagen.
Actividad 23: Dar las coordenadas de cada una de las siguiente traslaciones: La que lleva la figura A a B; B a A; A a C; C a A. Expresar la relación existente cuando las traslaciones son inversas y justificarlo.
Obtener las coordenadas del punto imagen de P, cuando se aplica una traslación cuyo vector tiene como coordenadas (20, -30).
Repetir el ejercicio con otros puntos y traslaciones.

Al principio surge accidentalmente la ocasión de que las alumnas expresen la relación entre las coordenadas de los vectores de traslaciones opuestas, lo cual hacen bien: *El signo* [cambia] *... siempre ... porque la longitud es la misma. Lo único que cambia es el sentido.*

Respecto a la obtención de las coordenadas de la imagen de un punto, a partir de las coordenadas del punto y las del vector de la traslación, las alumnas efectúan una resta en lugar de una suma y mantienen esa actitud. Sin embargo, llega un momento en el cual se pone de manifiesto que, a pesar de que la profesora indicó expresamente que uno de los datos eran las coordenadas del vector, las alumnas pensaban que el ejercicio era análogo al de la lámina anterior, o sea, que los datos que se proporcionaban eran las coordenadas de los puntos inicial y final y que había que hallar las coordenadas del vector de la traslación. Una vez aclarado eso, se ve que Ara sí entiende perfectamente cómo resolver los ejercicios con los datos que se dan. La transcripción que muestro corresponde a una de sus explicaciones:

Ara: *Si nosotros creíamos que teníamos que calcular el vector restábamos las coordenadas. Porque, ¿cómo se calcula un vector? Restando dos coordenadas. Pero si te dan un vector, el vector es el mismo. Entonces lo único que tienes que hacer es sumarle a estas coordenadas las coordenadas del vector.*

Merche precisa de la explicación de Ara para darse cuenta de la situación concreta del ejercicio y del modo de resolverlo. La primera solución que sugiere es una resta (igual que Ara), por lo que es incorrecta. Pero, por su contestación al finalizar todos los ejercicios, tras la explicación de Ara, es: *Yo al principio había hecho eso* [sumar, lo cual es correcto], *pero no sabía por qué,* lo cual da a entender que no tenía las ideas claras sobre la relación existente entre coordenadas de los puntos y las del vector.

Láminas: M-T-24.

Objetivos: Composición de traslaciones: Introducir y utilizar la idea de composición de traslaciones. Introducir la notación matemática.

Descubrir la conmutatividad, emplearla y hacer una demostración general de esta propiedad.

Simplificar vectores de la misma dirección y, en particular, vectores opuestos.

Comprender y utilizar la traslación con el vector resultante de la suma de los vectores de las traslaciones de la composición.

Actividad 24: Aplicar al dragón la composición de las traslaciones T_a y T_b, lo cual se escribe $T_b \circ T_a$ y consiste en efectuar la traslación de vector a y, a la figura resultante, aplicarle la traslación de vector b.

Aplicar al perro $T_b \circ T_a$. Tras hacerlo, decir si es necesario proceder en dos pasos.

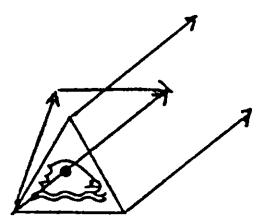
Aplicar al rombo las composiciones $T_d \circ T_p$ y $T_p \circ T_d$. Generalizar el resultado.

Demostrar matemáticamente la conmutatividad de la composición de dos traslaciones.
Aplicar al perro la composición $T_d \circ T_g \circ T_f \circ T_i$, resolviendo el ejercicio de la manera más rápida posible.
Aplicar a una figura la traslación resultante de una composición de varias traslaciones. Para ello, obtener primero el vector resultante de los vectores de las traslaciones de la composición.

Las dos alumnas resuelven correctamente todos los ejercicios y se logran todos los objetivos de la actividad sin necesidad de instrucción especial. No obstante, en el caso de Ara se produce un predominio de las ideas que tiene asumidas de física, respecto a la composición de vectores, en detrimento de lo que realmente sucede cuando se aplica una traslación, lo cual provoca algunos errores aunque no de gran importancia. A continuación procedo a comentar, a rasgos generales, la evolución de la actuación de las alumnas.

En ninguno de los casos precisan las alumnas situar la figura completa en la posición intermedia de la composición. Tanto Merche como Ara obtienen la imagen de dos vértices. Merche comienza aplicando sucesivamente los dos vectores. Eso lo hace con dos vértices. Según ella misma explica, utiliza dos vértices para *no torcer la figura*. En otros ejercicios obtiene, en lugar aparte, la resultante de los vectores, y eso es lo que aplica a dos vértices.

Sobre Ara tiene una gran influencia lo que recuerda de Física, por lo que se basa en la composición de vectores y tiene alguna idea errónea al principio. Su procedimiento consiste en hacer la composición sobre uno de los vértices, y aplicar luego la resultante sobre otro vértice (ver dibujo). Pero antes de dar el resultado correcto, que es el que mostramos en el dibujo, Ara se centra en que el sentido del vector resultante es *extremo menos origen*, lo cual le hace pensar que el sentido de la traslación es el opuesto al correcto. La profesora hace que Ara indique las sucesivas



posiciones donde se coloca uno de los vértices al ir aplicando las traslaciones y Ara ya no vuelve a cometer ese error.

Posteriormente, cuando se piden composiciones de más de dos traslaciones, la forma de proceder de Ara es obtener la resultante de dos, componer esa resultante con otra traslación y obtener la nueva resultante, y así sucesivamente. De nuevo se produce un dominio de las ideas previas de Ara, provenientes de la asignatura de Física. La respuesta de Ara ante la pregunta de si es necesario obtener la resultante cada vez que tiene dos traslaciones, Ara responde: *Es que estoy acostumbrada.* En cuanto la profesora le hace ver que obtener las imágenes sucesivas de un vértice por las traslaciones ya lleva a la imagen final, Ara se da cuenta de que no es necesario seguir todo el proceso que ella empleaba; ella misma lo dice: *No* [no es necesario obtener las composiciones intermedias]. *Hay que unir el origen del primer vector con el extremo del último vector.*

La conmutatividad se presenta mediante la realización de una composición obtenida anteriormente en orden inverso. Ese ejemplo basta para que las alumnas generalicen la propiedad. La primera justificación por parte de las alumnas proviene de Ara y es totalmente informal; no es una justificación de esa propiedad, pues sólo hace referencia a un contexto aritmético, más familiar para ella, en el que es cierta la conmutatividad.

Ara: *Porque da lo mismo sumar 4+5 que 5+4.*
Prof.: *Pero ahora son vectores, no números.*
Ara: *Pero da lo mismo. Yo creo que da lo mismo.*

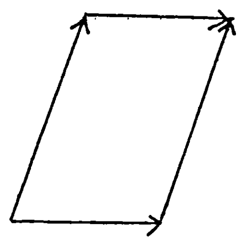
Al pedir una demostración más "matemática", Merche inicia una demostración mediante la consideración de lo que sucede según el tipo de vectores: Horizontales (tras lo cual Ara propone que si son verticales sucede lo mismo), Inclinado. Su demostración en esta última situación (eje inclinado) es bastante intuitiva y no es correcta, aunque se aprecia un intento de justificación general. Tampoco es muy rigurosa la explicación en el caso de los vectores horizontales, pues se centra sólo en el caso en el que los dos vectores tengan el mismo sentido. De haber concretado un poco más, quizá hubiera surgido algún problema con el hecho de que, si son de distinto sentido, la operación sigue siendo una suma (en alguna sesión anterior las alumnas hicieron referencia a resta de vectores cuando los vectores que se componían eran de sentidos opuestos). La profesora presentará de forma completa la demostración que Merche inicia, incluyendo la formulación de alguna pregunta directa sobre elementos que se emplean en la demostración. Debido al interés que presenta conocer cómo razonan las alumnas esa demostración, presento casi por completo su desarrollo:

La profesora pide una demostración *más matemática.*

Merche [tras un poco de tiempo]: *Se me ocurre que los dos sean horizontales, en el mismo sentido. Si pones uno al lado del otro sería la suma de uno más el otro.*

Ara: *Y estos dos verticales también.*

Merche: *Si están torcidos da lo mismo hacer uno después del otro. Esto* [dibuja un vector inclinado, el de la izquierda en el dibujo] *será lo mismo que si hago así* [traza el vector inferior horizontal y el inclinado de la derecha] *y después así* [traza el vector superior del dibujo].



Como se puede observar, los vectores que Merche ha ido dibujando no están de acuerdo con lo que dice en cada momento. En ese caso, su justificación sería bastante intuitiva, aunque también se puede tratar de una falta de coordinación entre lo que dice y el momento en que lo dibuja, o de un primer intento de desarrollar una demostración más exacta.

Prof.: *Esta figura que estás dibujando ahí, ¿qué será? Tú has hecho este dibujo para explicarlo. ¿En ese dibujo qué ves? Tú dices: Si compongo éste y luego éste* [izquierdo y superior] *da lo mismo que si compongo éste y luego éste* [inferior y derecho. Nótese que la profesora utiliza los vectores anteriores de Merche, pero de manera correcta].

Merche: *Sí.*

Prof.: *¿Por qué?*

Merche: *No lo sé.*

Prof.: *Tú te has basado en este dibujo ... Explica el razonamiento: Has puesto a y b. La composición de a y b es ésta. Luego* [has puesto] *b y a. La traslación resultante es ésta. ¿Por qué sale lo mismo? ¿Qué es lo que te lo asegura? ¿Esta figura qué es?*

Merche [y quizá Ara también]: *Un paralelogramo.*

Prof.: *¿Por qué?*

Merche: *Porque tiene los lados paralelos dos a dos.*

Prof.: *Entonces es la misma diagonal. Si poneis los vectores, éste es paralelo a éste y éste paralelo a éste. Entonces tenemos la diagonal del paralelogramo.*

Las preguntas de la profesora por lo general van seguidas de silencio de las alumnas y por eso la profesora formula la pregunta siguiente. De todas maneras, a las alumnas se les concede poco tiempo entre pregunta y pregunta.

En la composición de más de dos traslaciones, las alumnas eliminan los vectores que se puede sin necesidad de que la profesora se lo indique. También substituyen los que tienen sentidos opuestos por el vector resultante. Las dos alumnas pueden resolver estos ejercicios y los únicos comentarios a hacer corresponden a la forma de actuar de Ara. Lo más destacado respecto a las soluciones de Ara ya lo indiqué con anterioridad: Ara no hace directamente más de dos traslaciones, pues cada vez que tiene dos obtiene su resultante, ésta la compone con otra traslación, y así sucesivamente. También conviene decir que Ara no es rápida, y a veces repasa la parte del proceso que tiene realizado hasta el momento, antes de continuar. Una vez, en el resultado de la composición de varias traslaciones comete el error clásico de tomar como imagen de un vértice el vértice más próximo de la figura imagen, en lugar del que corresponde. Pero se trata de un descuido que soluciona correctamente en cuanto se le indica.

Láminas: M-T-25.

Objetivos: Descomposición de una traslación:

Descomponer una traslación en dos traslaciones, conocido uno de los vectores de la descomposición. Ello en dos situaciones:

1) La traslación resultante está determinada por una figura original y por su imagen y

2) La traslación resultante está determinada por un vector (no hay figuras).

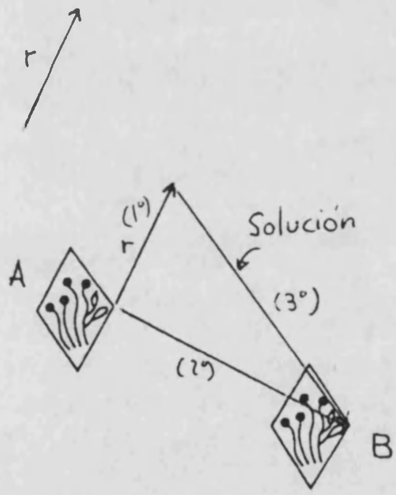
Descomponer una traslación en tres traslaciones, conocidos los vectores de dos de las traslaciones de la descomposición.

Caso general de la descomposición de una traslación en dos, tres, ... traslaciones. Comprender la infinidad de posibilidades, respecto a la cantidad de traslaciones de la descomposición y respecto a las traslaciones concretas.

Actividad 25: Para pasar de la figura A a la B se ha empleado la composición de dos traslaciones. La primera tiene como vector r. Obtener la segunda. Resolver el ejercicio con los dos pares de figuras de la lámina.
Sin figuras concretas, se sabe que m es el vector de la traslación resultante de una composición de dos traslaciones; l es el vector de una de esas traslaciones. Obtener el vector de la otra traslación.
El vector de la traslación resultante de una composición de tres traslaciones es o; dos de las traslaciones de la composición tienen como vectores l y t. Averiguar el vector de la otra traslación.
El vector h corresponde a una traslación. Explicar cuántas descomposiciones se pueden realizar de esa traslación en dos traslaciones. Indicar qué sucede si la cantidad de traslaciones de la descomposición es tres.

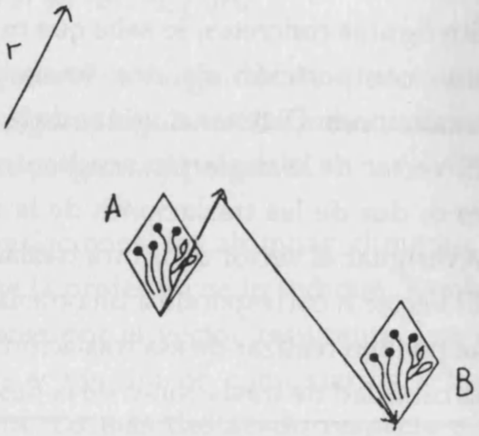
Las alumnas resuelven bien todos los ejercicios en las distintas situaciones de descomposición y también son conscientes de la infinidad de posibilidades de la descomposición. Transcribo algunas de las explicaciones de las alumnas:

En el primer ejercicio que resuelve Merche, la traslación viene dada por los rombos A (original) y B (imagen), y una de las traslaciones de la descomposición tiene de vector r. La forma de resolverlo Merche se aprecia en el dibujo, y su explicación es: *He puesto r. He visto la distancia que hay de un vértice a otro y lo que falta es el vector.*



La explicación de Ara a ese mismo ejercicio es: *He trasladado el vector r y llega hasta aquí. Este vértice* [inferior de la figura A] *llega hasta aquí* [vértice inferior de la figura B]. *Entonces, como este vértice es ése, éste sería el vector que tendríamos que aplicar para que estuviesen* [así; ver el dibujo de la página siguiente].

Y a continuación transcribo parte del diálogo sobre la infinidad de posibilidades de descomposición de una traslación, la de vector h, en producto de dos:



Merche: *Se pueden hacer muchas.*

Prof.: *¿Muchas cuántas son?*

Ara: *Bastantes.*

Merche: *Una infinidad ... Podemos coger todas las coordenadas de todos los ...* [no termina la frase].

Ara: *Podemos coger un segmento muy largo. No sé. Muchas.*

Merche: *Yo diría que infinitas Porque puedes coger lo que quieras. Puedes coger uno así de largo* [coloca las manos separadas] *u otro.*

Ara: *Claro. Puedes coger uno pequeñito y otro muy largo; puedes coger dos largos, iguales o grandes; éste muy pequeñito y éste muy grande* [Ara ha dibujado dos vectores y está haciendo referencia a variaciones sobre ellos].

Prof.: *¿Y cuántos pequeñitos y grandes hay?*

Ara: *Muchos. Yo creo que infinitos.*

Merche: *Yo creo que sí hay infinitas. Porque hay infinitos vectores que al sumarlos den ése.*

Sesión 5

Láminas: M-T-26.

Objetivos: Afianzar las relaciones numéricas existentes entre las coordenadas de un punto, de su imagen por una traslación y de las coordenadas del vector que define la traslación. Obtener cualquiera de esos valores a partir de los otros, en situaciones concretas y en general, empleando notación matemática en este último caso.

Descubrir y utilizar las relaciones numéricas existentes entre las coordenadas de los vectores de las traslaciones que intervienen en una composición y las del vector de la traslación resultante. Utilizarlo en ejercicios de composición y de descomposición de traslaciones, en casos particulares y en general, empleando notación matemática en este último caso.

Actividad 26: Descomponer la traslación de vector c en dos traslaciones, siendo d el vector que define una de ellas. Obtener las coordenadas del vector que define la otra traslación.

Repetir el ejercicio, siendo b el vector de la traslación que se descompone y e el vector de la traslación conocida.

Las coordenadas de un punto P son (5, 8). Se le aplica la traslación de vector c. Obtener las coordenadas de la imagen de P.

Repetir el último ejercicio cuando a Q, de coordenadas (-2, 10), se le aplica la traslación de vector g.

A un punto T, de coordenadas (t_1, t_2), se le aplica la traslación de vector con coordenadas (v_1, v_2). Decir cuáles son las coordenadas de la imagen de T.

Un punto R tiene de coordenadas (-6, 7) y se le aplica la composición $T_h \circ T_g \circ T_e \circ T_d \circ T_c$. Obtener las coordenadas de la imagen de R.

A un punto, M, de coordenadas (m_1, m_2), se le aplica la composición de dos traslaciones. El vector de la primera tiene de coordenadas (v_1, v_2) y el de la segunda (t_1, t_2). Indicar cuáles son las coordenadas de la imagen de M.

La traslación de vector c se descompone en dos traslaciones. Una es la de vector a. Obtener las coordenadas del vector de la otra traslación.

La traslación de vector (r_1, r_2) se descompone en dos traslaciones. Una es la de vector (v_1, v_2). Obtener las coordenadas del vector de la otra traslación.

Expresar por escrito, mediante relaciones, todas las posibilidades de descomposición de la traslación de vector (-80, 1) en tres traslaciones.

No existe ningún problema en la consecución de esos objetivos. Las alumnas también utilizan correctamente la nomenclatura matemática. Como ejemplos, muestro las siguientes transcripciones:

Prof.: *Un punto P tiene de coordenadas (5,8). Le aplicamos el vector c. ¿Cuáles son las coordenadas de la imagen de P?*

Ara escribe las coordenadas del punto, debajo las coordenadas del vector, da como resultado (7, 4) y dice: *Yo creo que sumas.*

Prof.: *¿Crees o estás segura?*

Ara: *Estoy segura porque el punto es el mismo: Sólo que le añades el vector.*

La respuesta de Merche a otro ejercicio análogo es: *Lo he sumado directamente*

Prof.: *¿Y es seguro que lo tienes que sumar siempre?*
Merche: *Sí.*

Prof. [Es otro ejercicio]: *El punto T tiene de coordenadas (t1, t2) y le aplicamos un vector que tiene de coordenadas (v1, v2). ¿Qué coordenadas tiene la imagen de T?* [La profesora no escribe las coordenadas, sino que las dicta].
Ara [inmediatamente]: *(t1+v1, t2+v2)* [da el resultado por escrito, correctamente].

Prof. [Es otro ejercicio]: *Un punto R tiene de coordenadas (-6, 7). A ese punto le aplicamos la composición de las traslaciones Th∘Tg∘Te∘Td∘Tc* [Los vectores están en la lámina] *El ejercicio consiste en dar las coordenadas de la imagen de R al aplicar esa composición.*
Ara: *(-11, 4). He sumado la composición de las traslaciones y luego le he sumado las coordenadas del punto.*
Prof.: *Y así tienes las coordenadas.*
Ara: *Las coordenadas de la imagen.*

Mientras que Ara ha sumado directamente todos los valores numéricos, Merche realiza la composición de los vectores para obtener el vector resultante de la composición, que luego suma a las coordenadas de R. No obstante, Merche también sabe que se pueden sumar directamente todos los valores numéricos, como se ve ahora:

Prof. [a Merche]: *¿Y sin necesidad de hacer la composición de los vectores?*
Merche: *Se suman todos.*

Prof. [Es otro ejercicio]: [Ahora planteo un problema] *en general: Un punto M, que tiene de coordenadas (m1, m2), se traslada mediante la composición de dos traslaciones. La traslación primera tiene de coordenadas (v1, v2) y las coordenadas del vector de la segunda traslación son (t1, t2). ¿Cómo podemos obtener la imagen de M?*
Ara: *Podemos hacer directamente, sumando la composición de los vectores, luego lo que nos dé, le sumamos el punto, o todo* [escribe ((m1+v1+t1), (m2+v2+t2))].

Prof. [Es otro ejercicio]: *La traslación c es la resultante y la descomponemos en dos traslaciones. Una es la de vector a* [de la lámina]. *¿Cuál es la otra traslación?*
Ara: *a es (4, 3). Yo he puesto la resta, la resultante menos el vector, porque ésta más la otra tiene que dar la resultante.*

Prof. [Es otro ejercicio]:*Tenemos la traslación de vector (r1, r2) y la descomponemos en dos. Una de ellas tiene como vectores (v1, v2), ¿cuál es la otra?*
Alumnas [rápidamente]: *(r1-v1, r2-v2).*

Prof. [Es otro ejercicio]: *La traslación de vector (-80, 1) tenéis que descomponerla en tres. ¿Podéis dar alguna fórmula, expresión, relación, que diga cómo podéis obtener las tres?*
Ara: *La suma de las tres tiene que dar la resultante.*
Prof. [a Merche]: *¿A tí no se te ocurría y te ha dado la idea Ara?*
Merche: *No. Es que podrán ser muchos. Lo que pasa es que, como una de las coordenadas es 1, dos tendrán que ser 0 y otra 1* [esa coordenada], *a no ser que puedan ser fracciones o números negativos.*
Prof.: *¿Y números negativos no pueden ser?*
Merche: *Sí.*
Prof.: *Entonces, ¿qué condición tendrá que ser? ¿Cómo puedes expresarlo?*
Ara ha escrito v(-80, 1) y, en tres líneas, a(a1, a2), b(b1, b2), c(c1, c2) y, en otra línea, v = a+b+c (a las letras de los vectores les coloca el signo de vector en su parte superior)..
Prof.: *Y con los números que te doy, (-80, 1), ¿cómo sería?*
Ara escribe: *(-80, 1) = (a1, a2) + (b1, b2) + (c1, c2)*
-80 = a1+b1+c1
1 = a2+b2+c2

No obstante, a pesar de la buena actuación de las alumnas en esta lámina, al principio Merche muestra un error que no está acorde con sus actuaciones, usualmente correctas: Para el vector e, que es horizontal, Merche da como coordenadas (-5, 0'2). El problema está en el 0'2, pues cuenta como coordenada la separación de la línea horizontal de la trama a la que se encuentra el vector. No es accidental ese error, pues persiste en él durante algún tiempo, en una discusión al respecto. Finalmente se da cuenta de su error y ya no lo comete de nuevo.

Láminas: Hoja en blanco.
Objetivos: Detectar si se resuelve correctamente una situación concreta de aplicación de traslación a una figura, para la que una de las alumnas realizó un desplazamiento incorrecto en las primeras sesiones dedicadas a traslaciones.

Actividad 27: Pegar una pieza rectangular (el pez), inclinada y aplicarle una traslación vertical de 1 cm. hacia arriba.

Ara efectúa bien la traslación y en sus explicaciones muestra que comprende la independencia de la dirección del vector de la traslación, respecto la inclinación de los lados de la figura a mover.

Láminas: Hoja en blanco.
Objetivos: Comprender el planteamiento del enunciado de una propiedad general de las traslaciones.
Comprender la diferencia entre condición necesaria y suficiente.
Determinar conjuntos suficientes de condiciones para determinar una traslación.
Actividad 28: Si la imagen de P es P' y la imagen de Q es Q', averiguar si se puede dar alguna condición sobre P, P', Q y Q' que asegure que el movimiento ha sido una traslación.
Analizar si la o las condiciones dadas como solución al ejercicio anterior se tienen que cumplir necesariamente en las traslaciones.
Analizar si siempre que se cumplan las condiciones propuestas como solución en el primer ejercicio, el movimiento ha de ser una traslación.

Merche sí se da cuenta desde el principio de que lo que se pide es una condición suficiente, y su forma de razonar muestra que entiende cuál es la diferencia entre condiciones necesarias y suficientes. La generalización que lleva a cabo en esta actividad se basa en las situaciones concretas que se le han presentado a lo largo de la experimentación.

Sin embargo, Ara se mantiene en la búsqueda de una condición necesaria, justificando que eso se tiene que cumplir, sin darse cuenta de que no es lo que se pide. De todas maneras, sí tiene alguna capacidad de razonamiento inverso, en cuanto que al final explica que harán falta más condiciones que la exigida por ella. Pero se trata de una respuesta ante una pregunta muy directa y después de todas las explicaciones de Merche. Mi opinión es que Ara no entiende por completo el planteamiento de un ejercicio en términos de la búsqueda de condiciones suficientes. Veamos algunas secuencias de la transcripción correspondientes a esa situación.

Prof.: *Un punto P tiene como imagen P' y Q tiene como imagen Q' por el mismo movimiento. ¿Podemos dar algunas condiciones que aseguren que el movimiento es una traslación? O sea, ¿podemos decir algo sobre P, P', Q y Q' de manera que estemos seguros de que ha habido una traslación?*

Ara: *Sí porque a P le habremos sumado el mismo vector que a Q; la misma longitud, por así decirlo.*

....

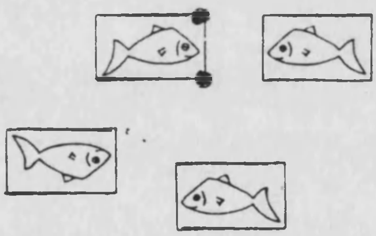
Merche: Pero con dos sólo vimos que no se podía. En el pez ... [no acaba la frase porque Ara interviene. Merche hace referencia a la lámina M-T-9.1, en la cual había dos peces simétricos y allí habían visto que dos vértices y sus correspondientes de la imagen se unían mediante vectores iguales en dirección, módulo y sentido].

Ara: *Pero da igual. La longitud tiene que ser la misma.*

Merche: *Ahí era la misma y no era una traslación.*

Ara: *Esa es una condición que yo digo. No digo que sea la única. Hay más condiciones.*

Merche: *Pero hay que la cumplen y no son traslaciones.* [Sacamos la lámina M-T-9.1]. [Supongamos] *que éste fuera el P y éste el Q* [Merche señala los dos vértices que indicamos en el dibujo]. *Ahí hay la misma distancia y no es una traslación. Si los vértices fueran opuestos, sí.*



Prof.: *Esos* [los que Merche había señalado] *son opuestos, según cómo los mires.*

Merche: *Me refiero a éstos* [en diagonal].

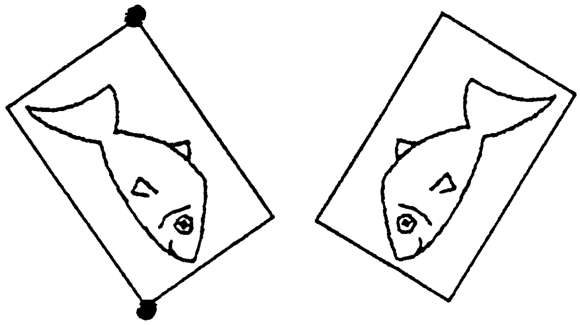
La profesora dibuja un contraejemplo a la situación planteada por Merche. Se trata de dos rectángulos simétricos, para los cuales el eje de simetría sería paralelo a la diagonal (ver el dibujo de la página siguiente).

Merche: *Deberían ser los cuatro* [vértices].

Prof.: *¿Por qué?*

Merche: *El número de vértices. No. Con tres ya sería* [suficiente]. *Sí. Ese es más largo* [señala el segmento que une otro de los vértices y su correspondiente en la figura dibujada por la profesora].

La última intervención de Merche muestra que ésta sí ha comprendido por completo la pregunta formulada por la profesora. Merche razona basándose en la experiencia proporcionada por la figura concreta con la que ha experimentado. Así, ahora generaliza que basta con tres vértices basándose en lo que sucede en esta figura.



Prof.: *Tú te fijas en ese dibujo, ¿no?* [en el dibujo hecho por la profesora].

Merche: *Sí.*

Ara: *Continúo pensando lo que he dicho antes: Que sumándole un mismo vector nos dará siempre un P', un Q' y nos dará todos los vértices.*

Prof.: *Pero lo que te dicen es que te dan las coordenadas de un punto P y de P', de Q y de Q'. ¿Qué tiene que pasar para que estés segura de que se trata de una traslación?*

Ara: *Que tengan la misma longitud, pero los vértices que se corresponden.*

Prof.: *En esta figura que yo he hecho, en estos dos puntos hay la misma longitud* [la profesora señala los vértices opuestos, paralelos al eje de simetría, y sus correspondientes imágenes].

Ara: *Esos puntos no se corresponden.*

Prof.: *Sí se corresponden, pero es una simetría. La longitud es la misma Entonces, el hecho de que la longitud ésta, para pasar de aquí a aquí, sea la misma que para pasar de aquí a aquí* [señala unos puntos P —> P', Q —> Q' que Ara había escrito al principio del ejercicio, y que no están en ninguna figura], *incluso la misma dirección y el mismo sentido, ¿eso te garantiza que sea una traslación o no?*

Ara: *No.*

Prof.: *Y Merche dice que con tres puntos* [vértices] *es suficiente. ¿Por qué?*

Merche: *Porque no he visto ningún caso que no se cumpla.*

ANEXO II: RESUMEN DE LA EXPERIMENTACIÓN DE LA UNIDAD DE ENSEÑANZA DE LOS GIROS

ANEXO II: RESUMEN DE LA EXPERIMENTACIÓN DE LA UNIDAD DE ENSEÑANZA DE LOS GIROS

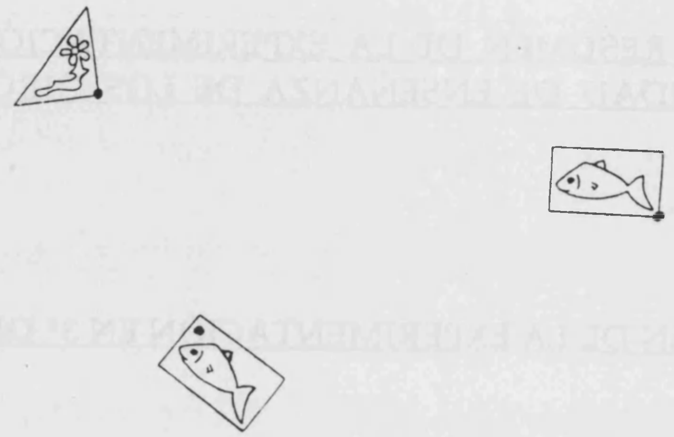
RESUMEN DE LA EXPERIMENTACIÓN EN 3º DE E.G.B.

Listado de las actividades experimentadas.

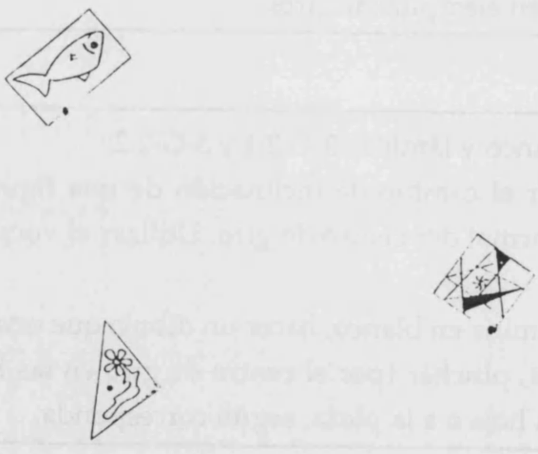
Láminas: Ninguna.
Objetivos: Introducción de la idea de giro.
Actividad 1: Los niños dan vueltas sobre sí mismos.
Se dan y se piden ejemplos de giros.

Láminas: Hoja en blanco y láminas 3-G-2.1 y 3-G-2.2.
Objetivos: Visualizar el cambio de inclinación de una figura mediante un giro. Utilización informal del centro de giro. Utilizar el vocabulario básico: Girar, centro de giro.
Actividad 2: En la lámina en blanco, hacer un dibujo que ocupe casi toda la hoja. En cada lámina, pinchar (por el centro de giro en las láminas que se dan) y dar vueltas a la hoja o a la pieza, según corresponda.

3-G-2.1



3-G-2.2



Láminas: Hoja en blanco.

Objetivos: Observar el recorrido y la variación de inclinación de una figura con el centro de giro exterior a ella.

Introducción de una técnica de giro de una figura cuando el centro de giro es exterior a ella: Utilización de un palillo o una tira de cartulina.

Actividad 3: Pegar una figura sobre el palillo. Fijar el extremo u otro punto del palillo y dar vueltas. Pegar varias piezas a lo largo del recorrido.

Láminas: Hoja en blanco.

Objetivos: Introducción de una técnica para realizar giros cuando el centro de giro es exterior a la figura: Disco de acetato.

Actividad 4: Pegar una figura sobre un disco de acetato. Pinchar el disco por el centro y dar vueltas. Pegar varias piezas a lo largo del recorrido.

Primero la figura sobresale del círculo de acetato. Luego la figura está dentro del disco en su totalidad. En ambos casos, para pegar correctamente las figuras, pinchar en los vértices de la que gira para marcar las posiciones de esos vértices en el lugar donde se quiere colocar una pieza.

Láminas: 3-G-5.1, 3-G-5.2 y 3-G-5.3.

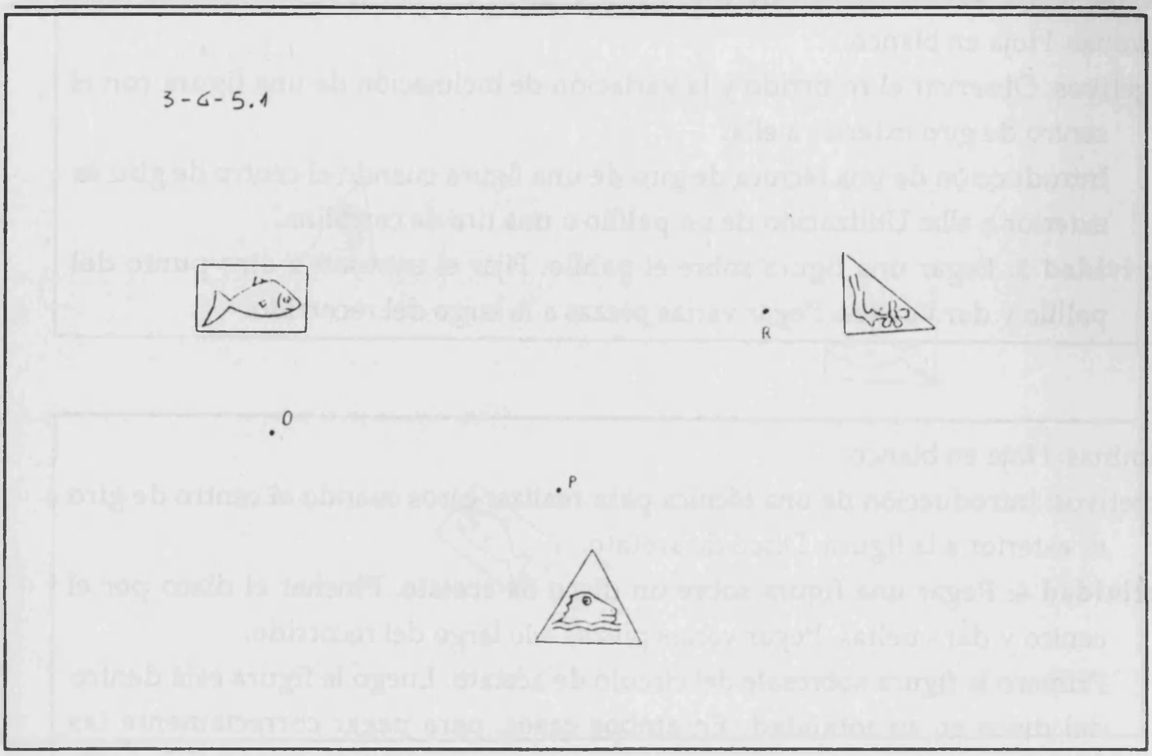
Objetivos: Utilizar herramientas auxiliares para girar una figura cuando el centro de giro, dado, es exterior a la figura. Las herramientas son: Un palillo (o tira de papel) en la lámina 3-G-5.1 y un disco de acetato en la lámina 3-G-5.2.

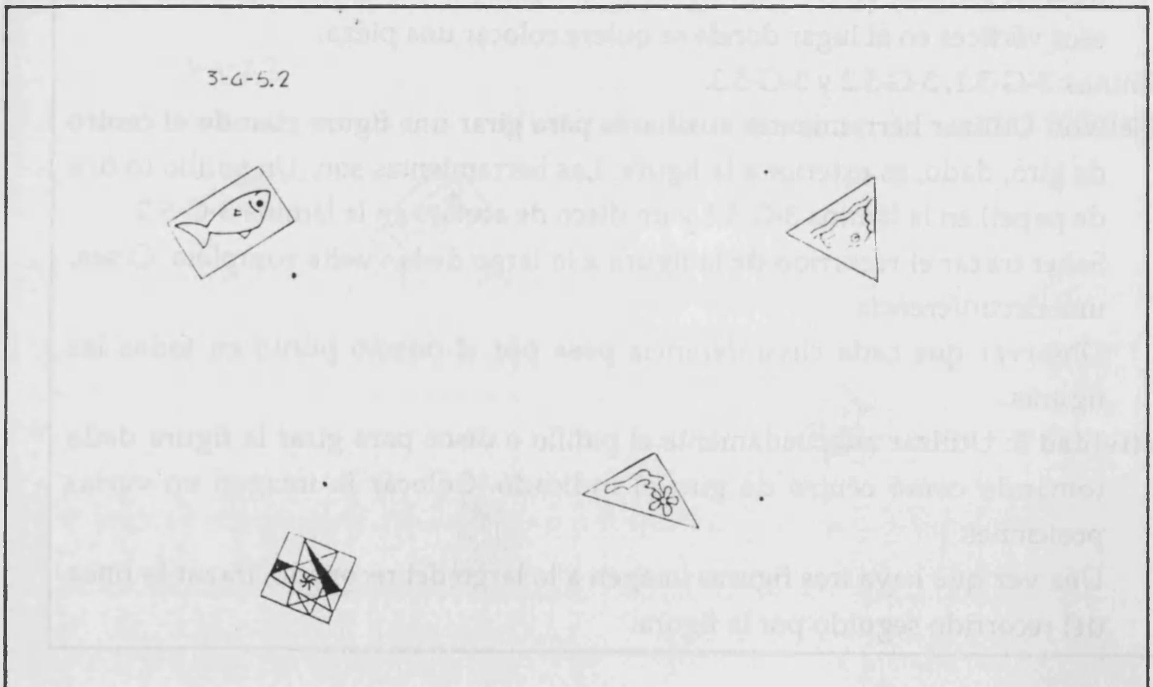
Saber trazar el recorrido de la figura a lo largo de la vuelta completa. O sea, una circunferencia.

Observar que cada circunferencia pasa por el mismo punto en todas las figuras.

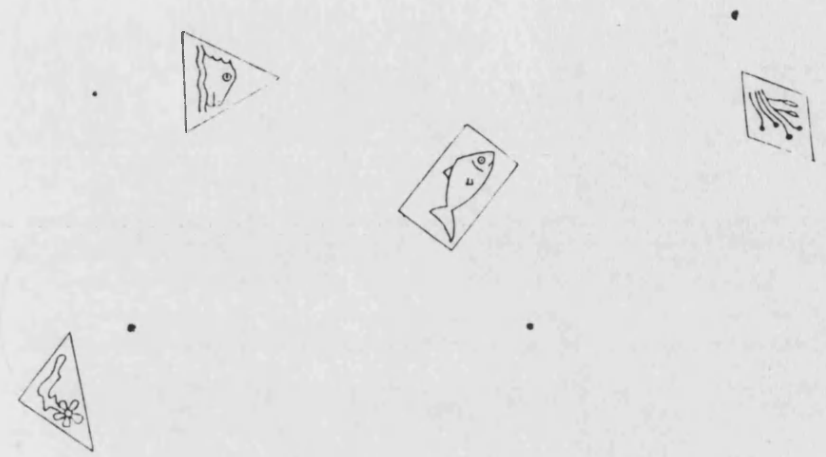
Actividad 5: Utilizar adecuadamente el palillo o disco para girar la figura dada tomando como centro de giro el indicado. Colocar la imagen en varias posiciones.

Una vez que haya tres figuras imagen a lo largo del recorrido, trazar la línea del recorrido seguido por la figura.


3-G-5.1
O
P
R


3-G-5.2

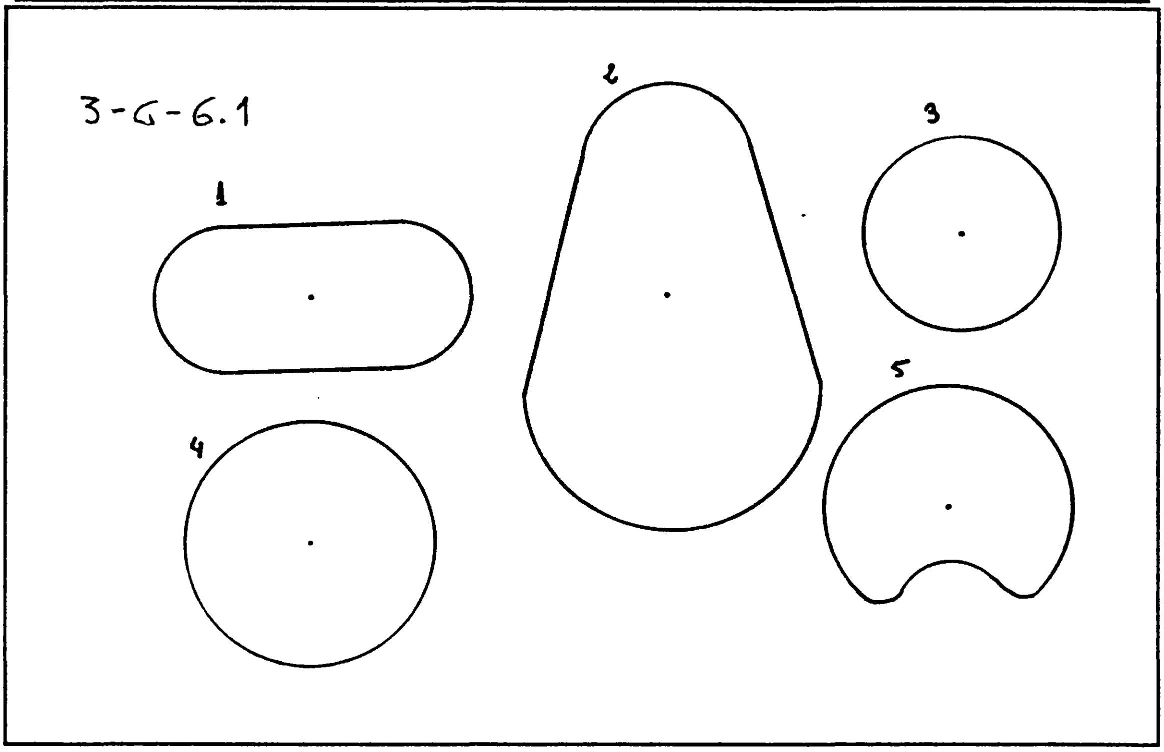
3-G-5.3

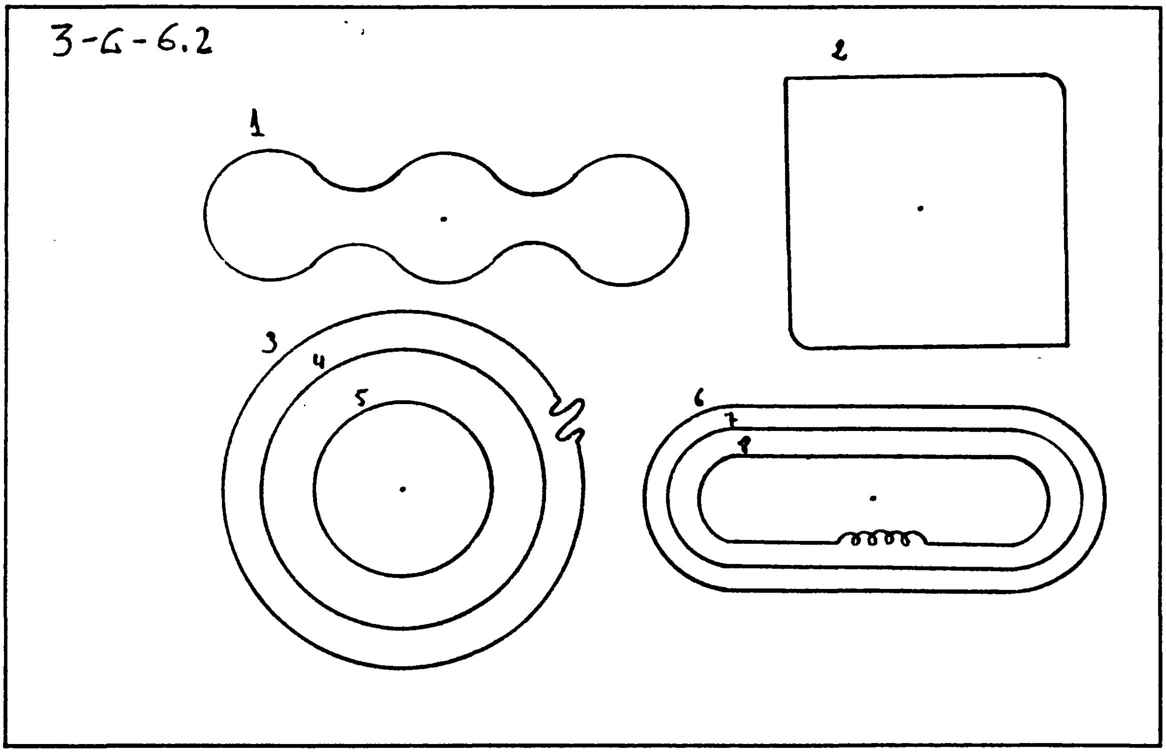


Láminas: 3-G-6.1 y 3-G-6.2.

Objetivos: Reconocer la circunferencia como el único camino posible de los giros.

Actividad 6: Indicar cuáles de los caminos trazados corresponden a giros.


3-G-6.1
1
2
3
4
5


3-G-6.2
1
2
3
4
5
6
7
8

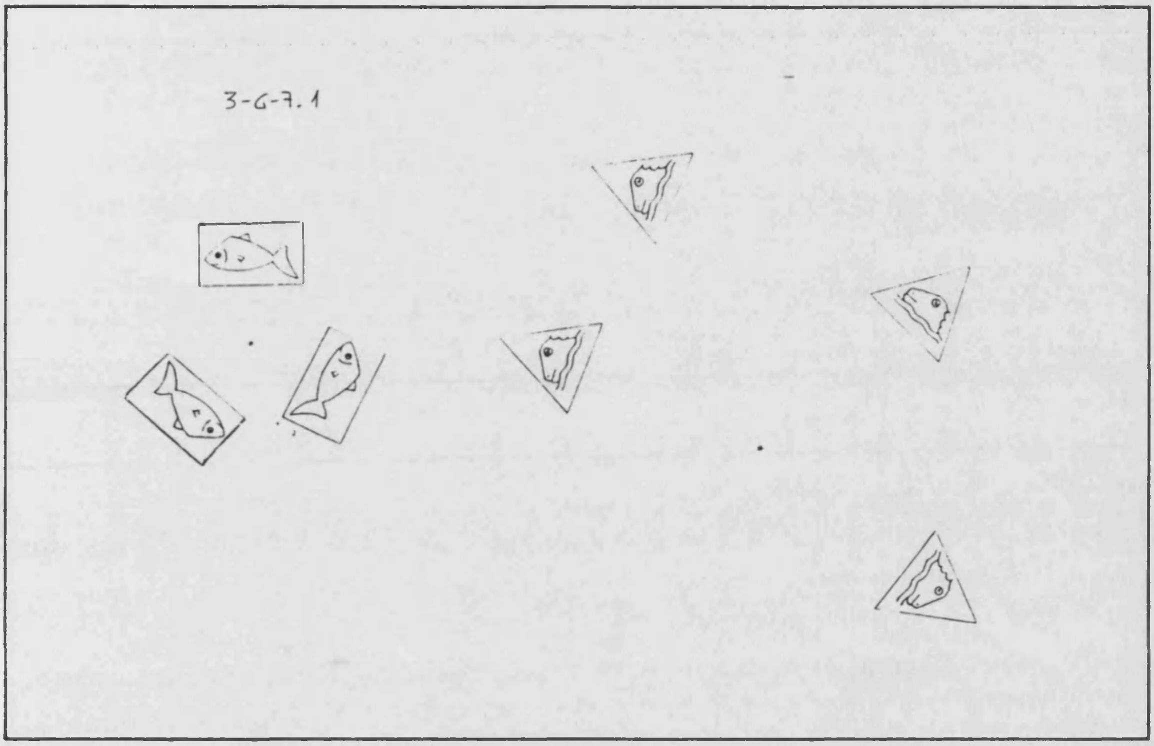
Láminas: 3-G-7.1 y 3-G-7.2.

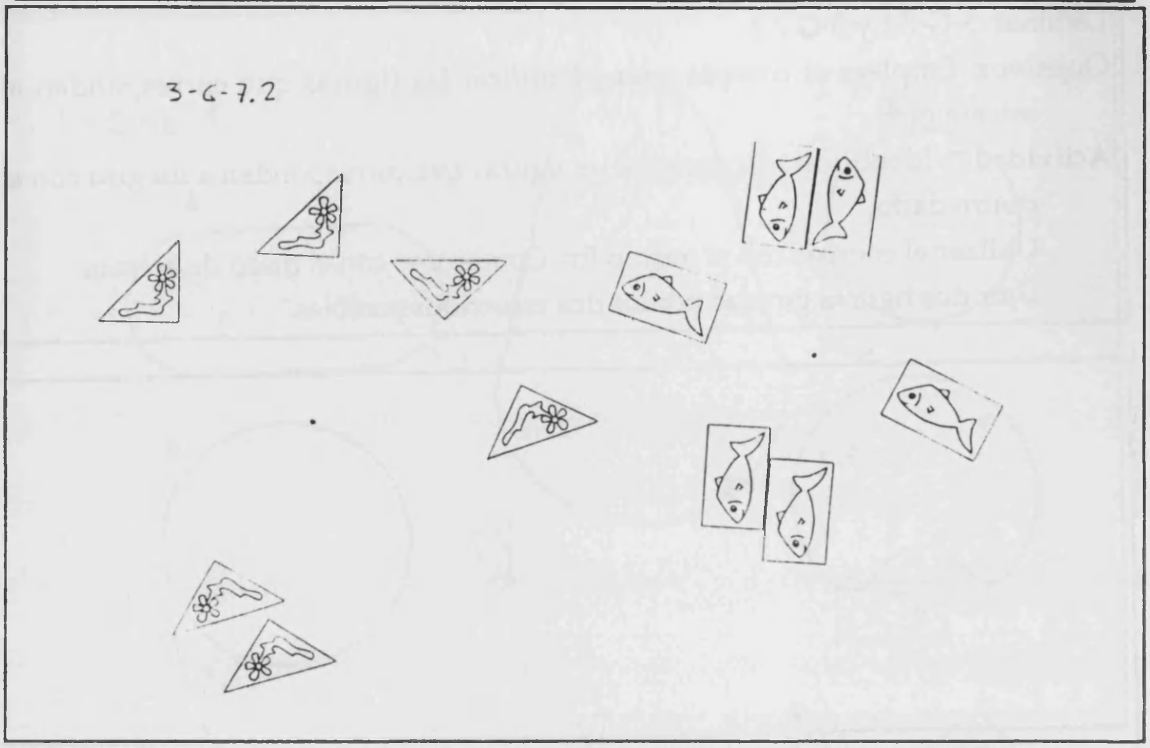
Objetivos: Emplear el compás para identificar las figuras que corresponden al mismo giro.

Actividad 7: Identificar visualmente las figuras que corresponden a un giro con el centro dado.

Utilizar el compás con el mismo fin. Comprobar con el disco de acetato.

Unir dos figuras giradas por los dos recorridos posibles.





Láminas: 3-G-8.1 y 3-G-8.2.

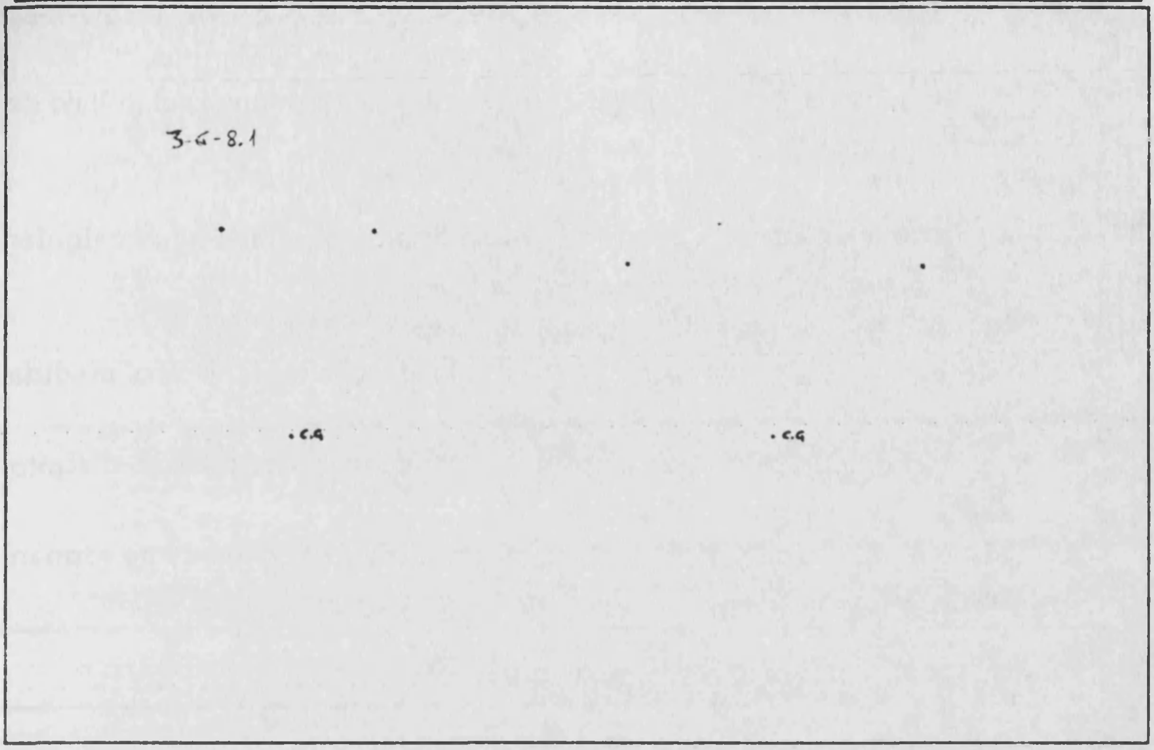
Objetivos: Pre-introducción a giros equivalentes: Consideración de los dos caminos posibles a lo largo de la circunferencia.

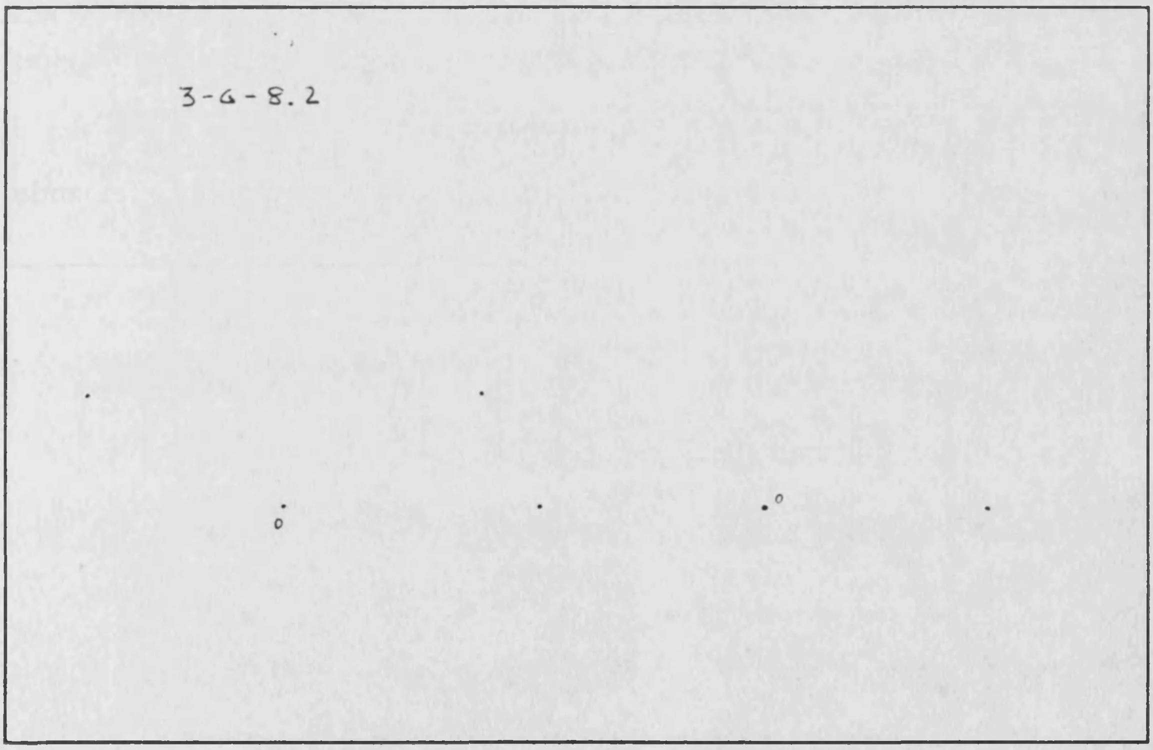
Medición con el transportador.

Deducir y comprobar que la suma de las amplitudes de los dos giros es 360°.

Actividad 8: Descubrir las dos posibilidades de recorrido que llevan un punto al otro. Marcarlas con distinto color.

Medir cada una de esas amplitudes con el transportador. Sumar las dos de cada círculo. Generalizar que la suma es siempre 360°.


3-6-8.1


3-6-8.2

Láminas: De la unidad complementaria sobre el aprendizaje de ángulos.

Objetivos: Proporcionar los conocimientos necesarios para continuar el trabajo de giros. En particular,

Medir ángulos.

Memorizar y aplicar al cálculo de la amplitud de ángulos que cualquier circunferencia mide 360°.

Adquirir familiarización con ángulos estándar: 90° y 180°.

Colocar puntos de manera que el ángulo de giro sea de una medida prefijada.

Ordenar ángulos según su amplitud (Se incluyen círculos de distinto tamaño).

Actividad: Actividades de una unidad complementaria de apoyo que no forman parte de esta propuesta.

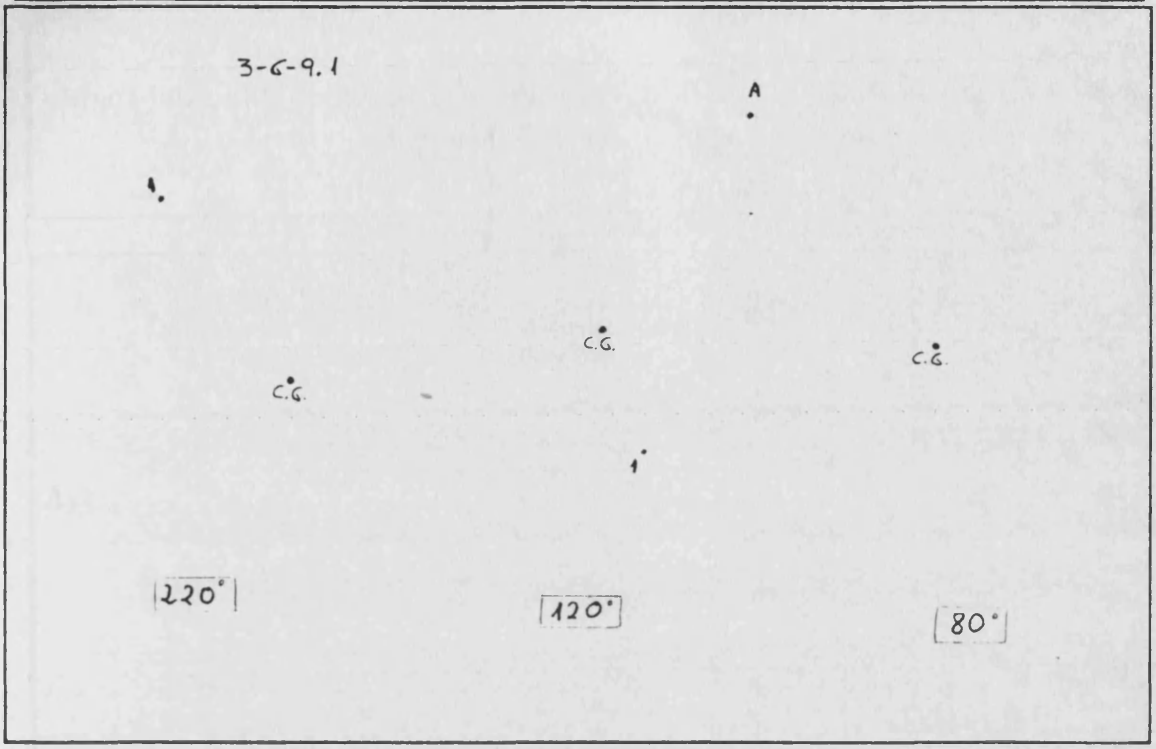
Láminas: 3-G-9.1 y 3-G-9.2.

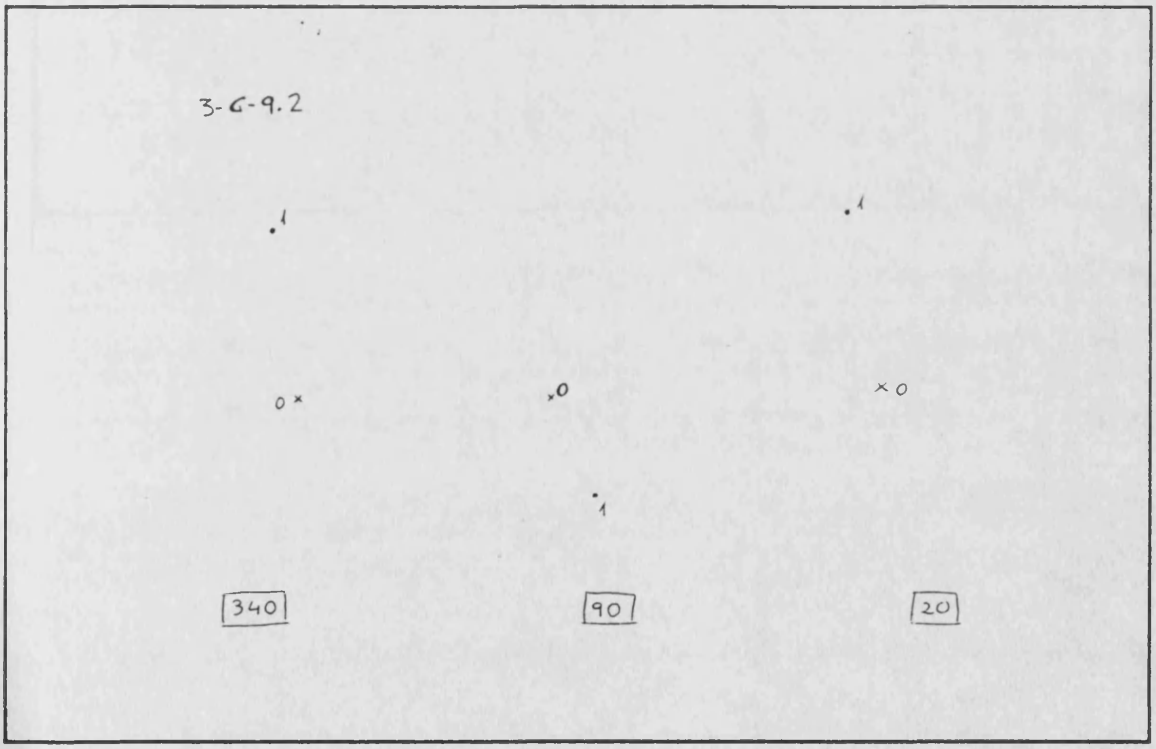
Objetivos: Medida del ángulo de giro para obtener la imagen de un punto.

Aprender cómo medir cuando, al colocar el transportador, el punto a girar no está situado por las marcas del transportador.

Introducir el signo del ángulos de giro.

Actividad 9: Aplicar al punto que se da un giro de cierta amplitud , tomando como centro el indicado en la lámina.

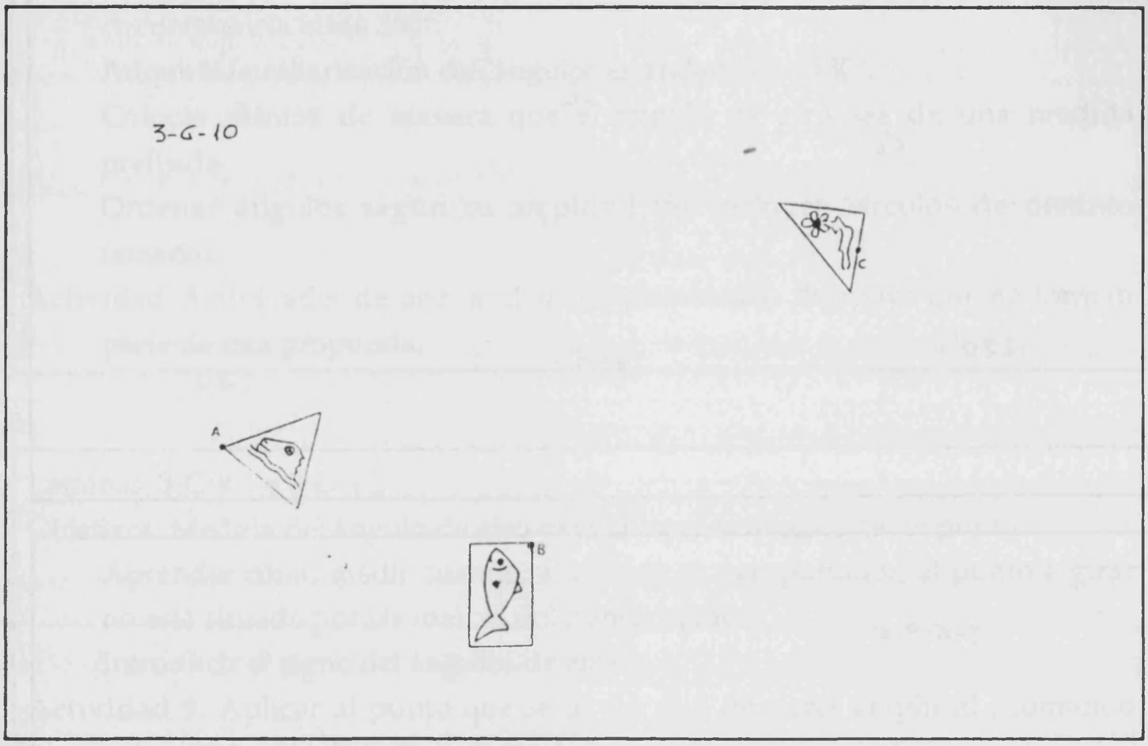

3-6-9.1
A
C.G.
C.G.
C.G.
1
220°
120°
80°


3-6-9.2
1
1
O
O
O
1
340
90
20

Láminas: 3-G-10.

Objetivos: Girar una figura, conocidos el centro de giro y la amplitud del ángulo de giro, cuando el centro de giro está sobre la figura.

Actividad 10: Aplicarle a la figura el giro que se da.



Láminas: 3-G-11.1 y G-2.11.2.

Objetivos: Girar correctamente una figura con el centro de giro exterior a ella.

Aprender para esos casos a emplear las imágenes de dos puntos.

Reconocer que, cuando el centro de giro se encuentra fuera de la figura, la cantidad mínima de puntos–imagen necesaria para situar la imagen de una figura es dos.

Reconocer la invarianza de la amplitud del ángulo de giro recorrido por cualquier punto de una figura.

Realizar giros de 180° utilizando sólo una regla.

Reconocer y obtener giros equivalentes.

Actividad 11: Aplicarle a la figura el giro que se pide.

Explicar cuántos puntos de la imagen hay que conocer para poder situarla.

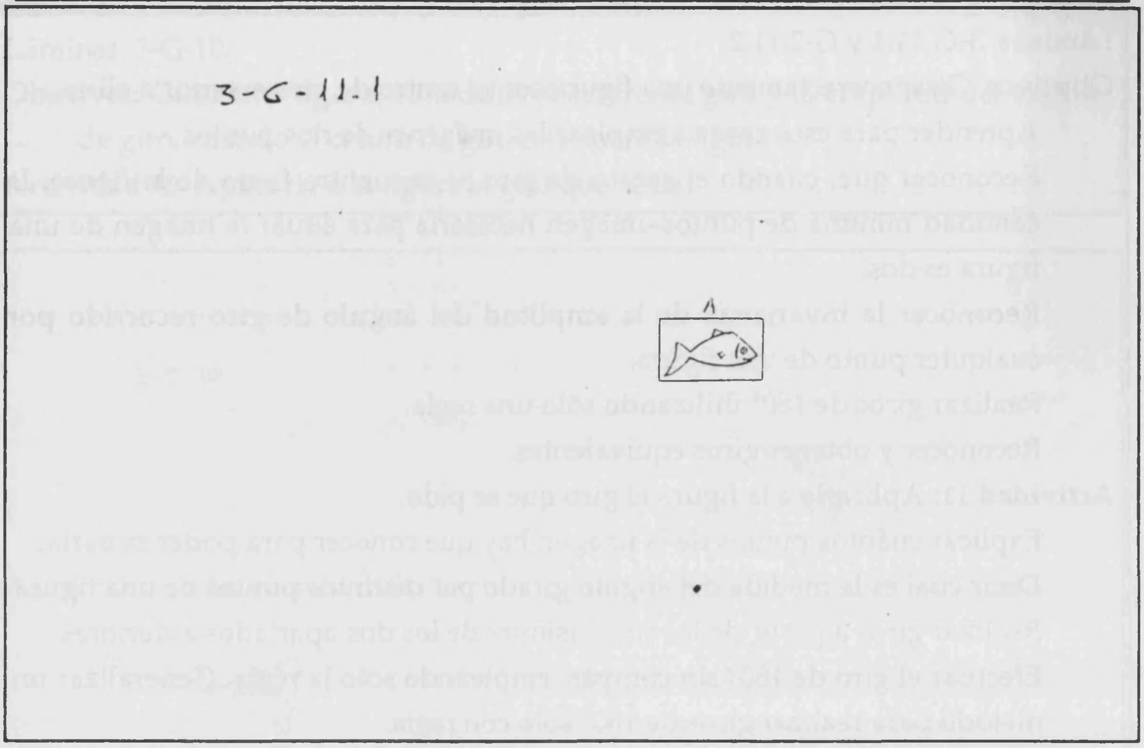
Decir cuál es la medida del ángulo girado por distintos puntos de una figura.

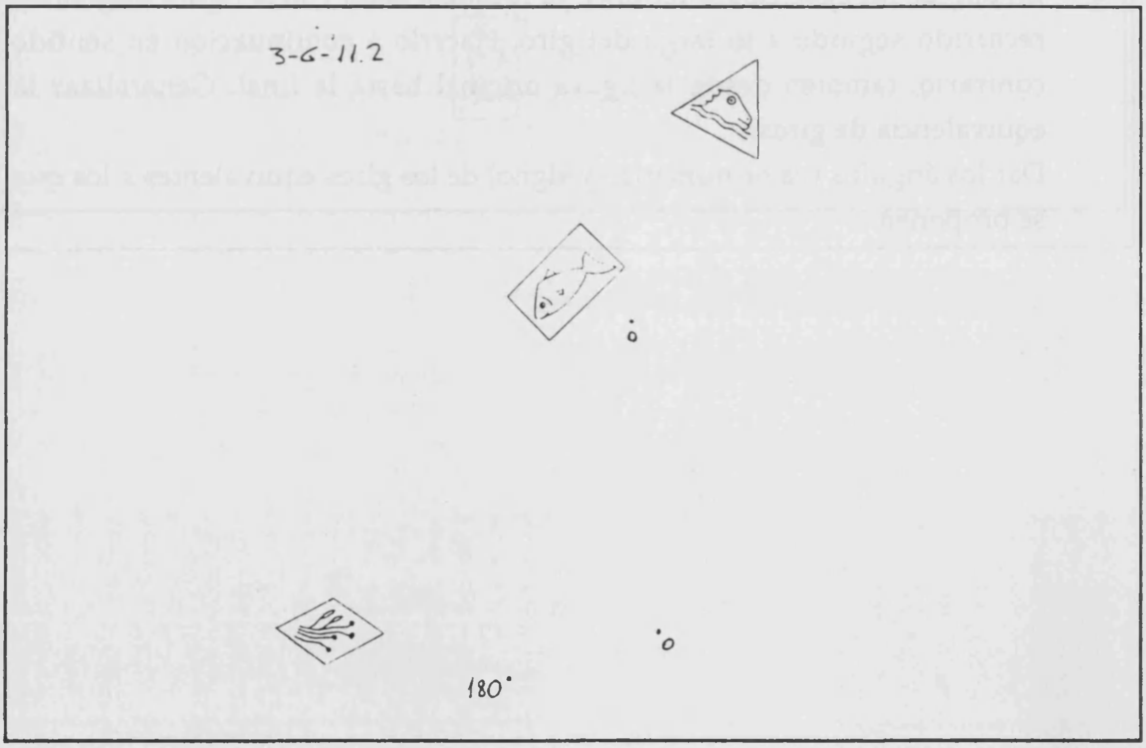
Realizar giros a partir de las conclusiones de los dos apartados anteriores.

Efectuar el giro de 180° sin compás, empleando sólo la regla. Generalizar un método para realizar giros de 180° sólo con regla.

En uno de los ejercicios anteriores, ya resuelto, hacer con la figura original el recorrido seguido a lo largo del giro. Hacerlo a continuación en sentido contrario, también desde la figura original hasta la final. Generalizar la equivalencia de giros.

Dar los ángulos (valor numérico y signo) de los giros equivalentes a los que se proponen.


3-G-11.1
A


3-G-11.2
O
O
180°

Láminas: 3-G-12.

Objetivos: Realización de giros cuando el centro de giro está sobre la figura.

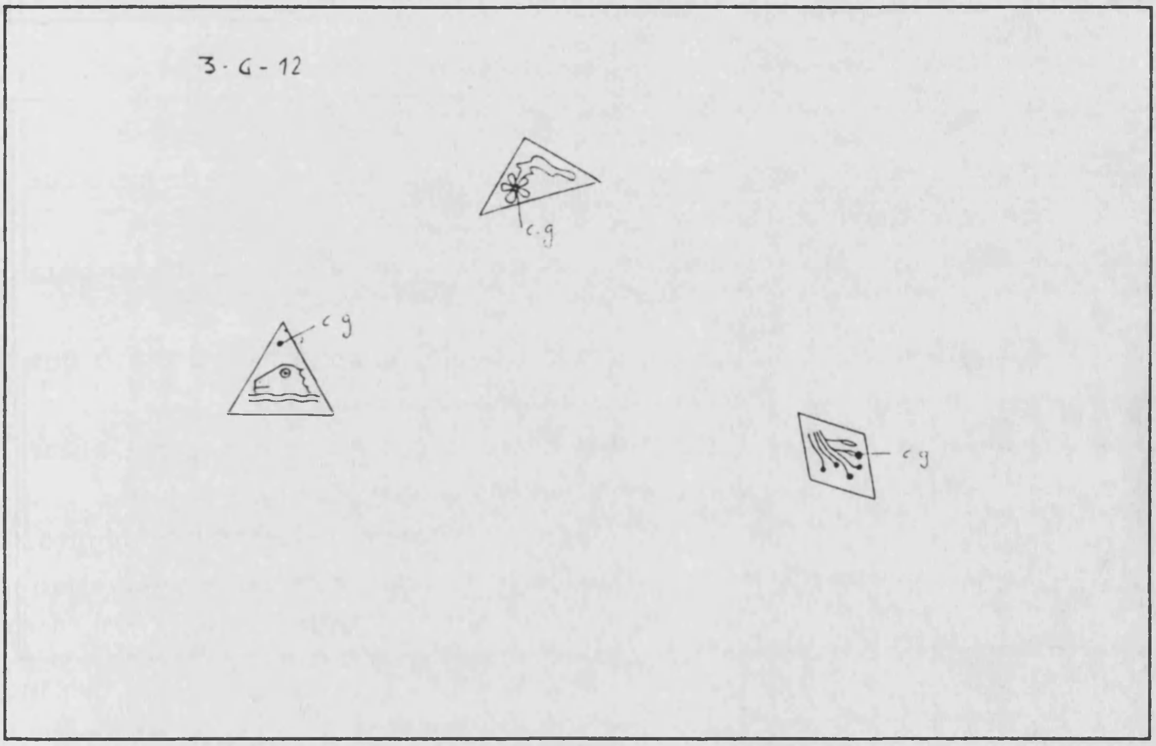
Angulos equivalentes (complementarios a 360°).

Composición de giros del mismo centro (centro sobre la figura).

Actividad 12: Realizar el giro indicado.

Dar el valor del ángulo de giro que produce el mismo resultado que alguno de los giros que acaban de hacer.

Una vez girada una figura cierto ángulo, girar la imagen mediante otro giro con el mismo centro. Dar el valor del ángulo del giro resultante.



Láminas: Hoja en blanco.

Objetivos: Composición de giros del mismo centro (centro en la figura y fuera de ésta).

Simplificación de los valores numéricos de los giros que se componen.

Actividad 13: Se dan varios giros con el mismo centro y hay que indicar cómo quedará una figura (que el profesor dibuja o pega).

Se dan los valores de los ángulos de varios giros que intervienen en una composición. Hay que obtener el valor del ángulo del giro resultante. En este tipo de ejercicios no hay ninguna figura concreta. Algunos de estos ejercicios son para resolverlos individualmente y otros por parejas.

Láminas: 3-G-14.

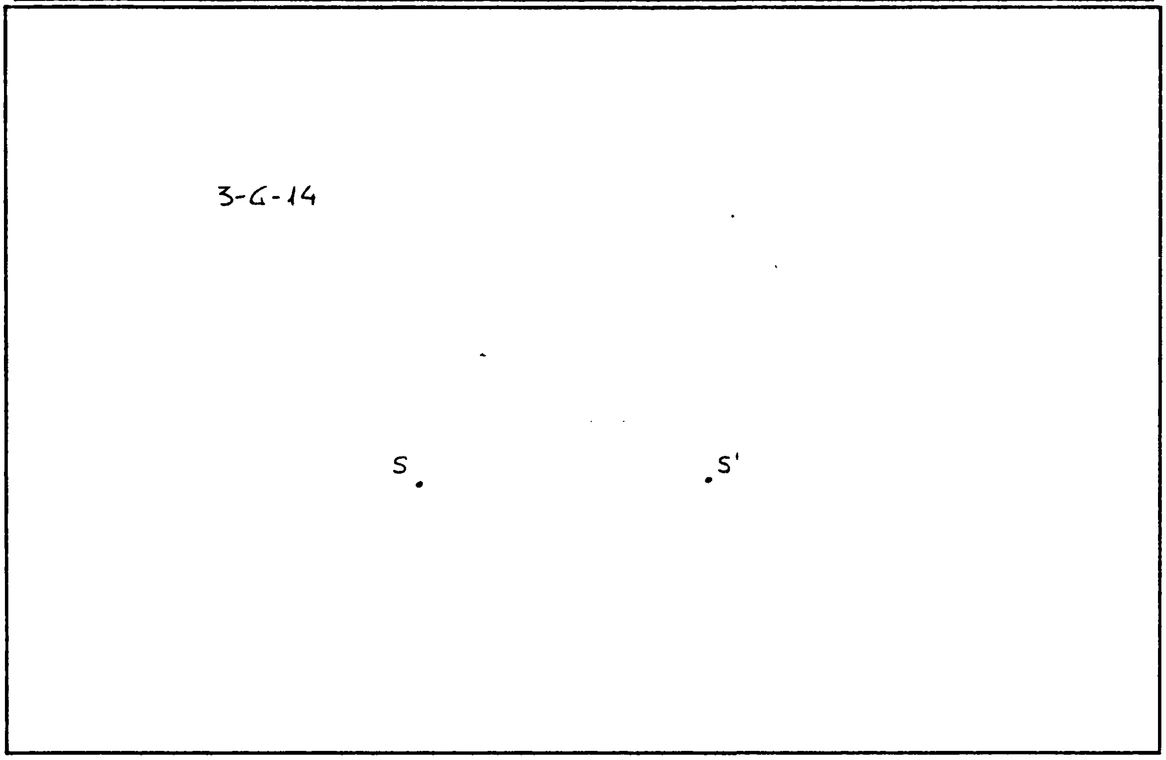
Objetivos: Obtener la mediatriz como el lugar de los posibles centros de giros que transforman un punto en otro.

Utilizar la equidistancia desde el centro de giro a un punto y su imagen para obtener centros de giro.

Actividad 14 (mediante trabajo en grupo): Buscar el centro de un giro que transforme un punto en el otro. Buscar otros centros de giro.

Medir la distancia desde el centro de giro a un punto y a su imagen. Utilizar esa característica de equidistancia para obtener nuevos centros de giro.

Tras descubrir que hay una recta donde se encuentran los centros de giro, indicar por dónde pasa la recta de los centros de giro y que en ella están todos los posibles centros de giro. Comprobarlo en varios ejemplos.

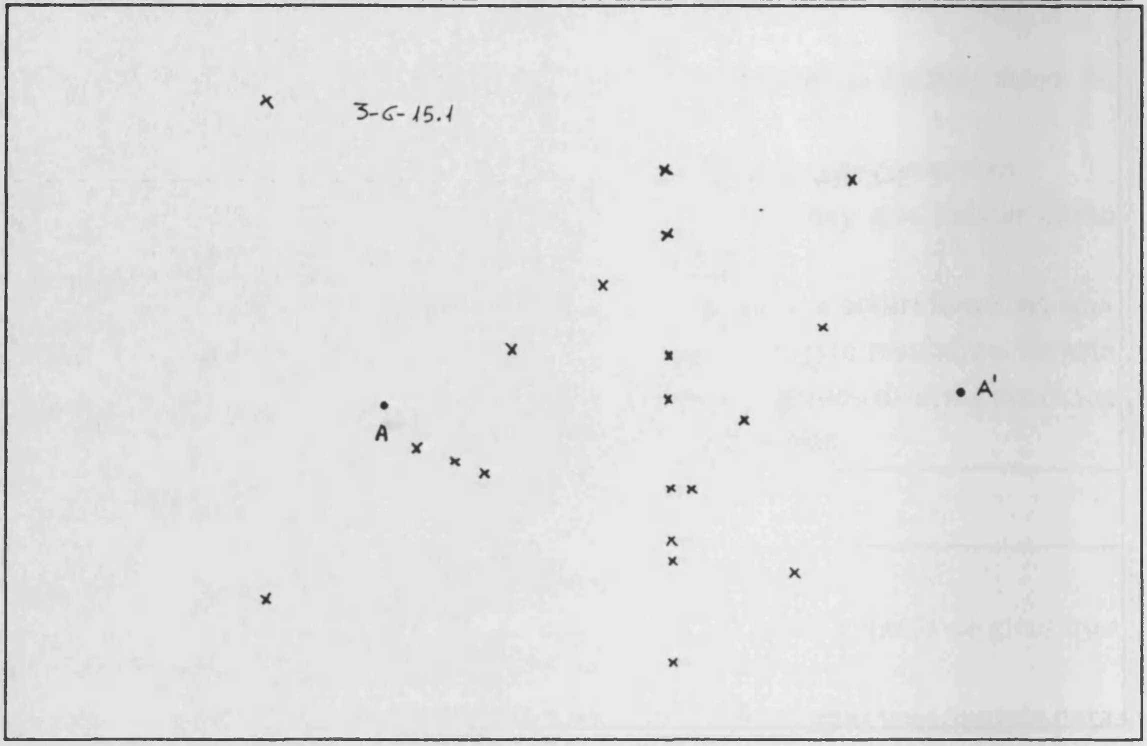


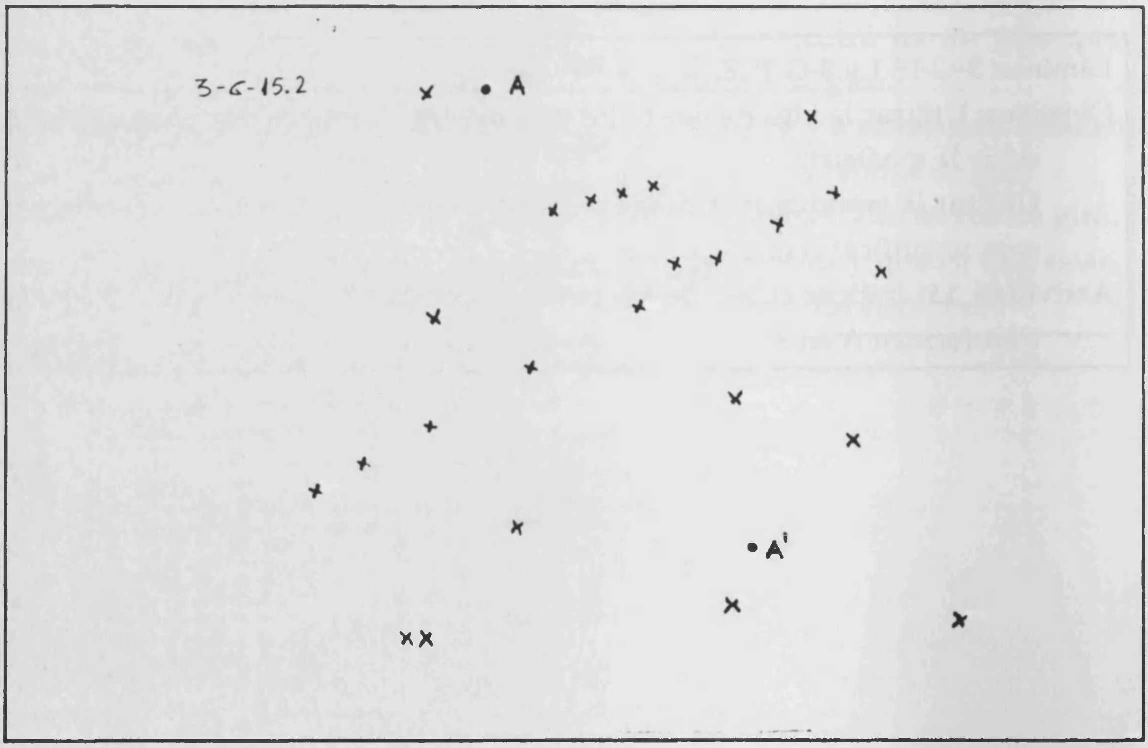
Láminas: 3-G-15.1 y 3-G-15.2.

Objetivos: Utilizar la idea de que todos los posibles centros de giro se encuentran sobre la mediatriz.

Utilizar la equidistancia desde el centro de giro a cada punto y su imagen para identificar centros de giro.

Actividad 15: Indicar cuáles de los puntos marcados son centros de giros que transforman A en A'.

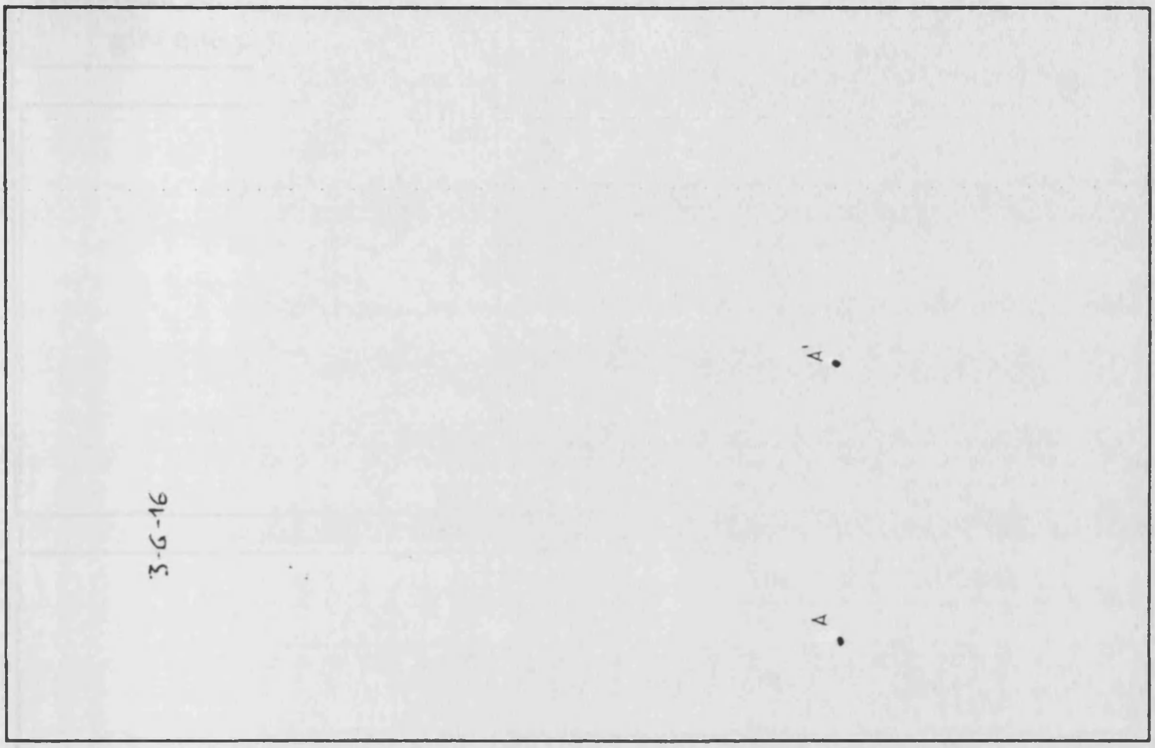

3-G-15.1
A
A'


3-G-15.2
A
A'

Láminas: 3-G-16.

Objetivos: Obtener la mediatriz mediante el compás.

Actividad 16: El profesor muestra cómo servirse del compás para trazar la mediatriz y las alumnas deben repetir el procedimiento.



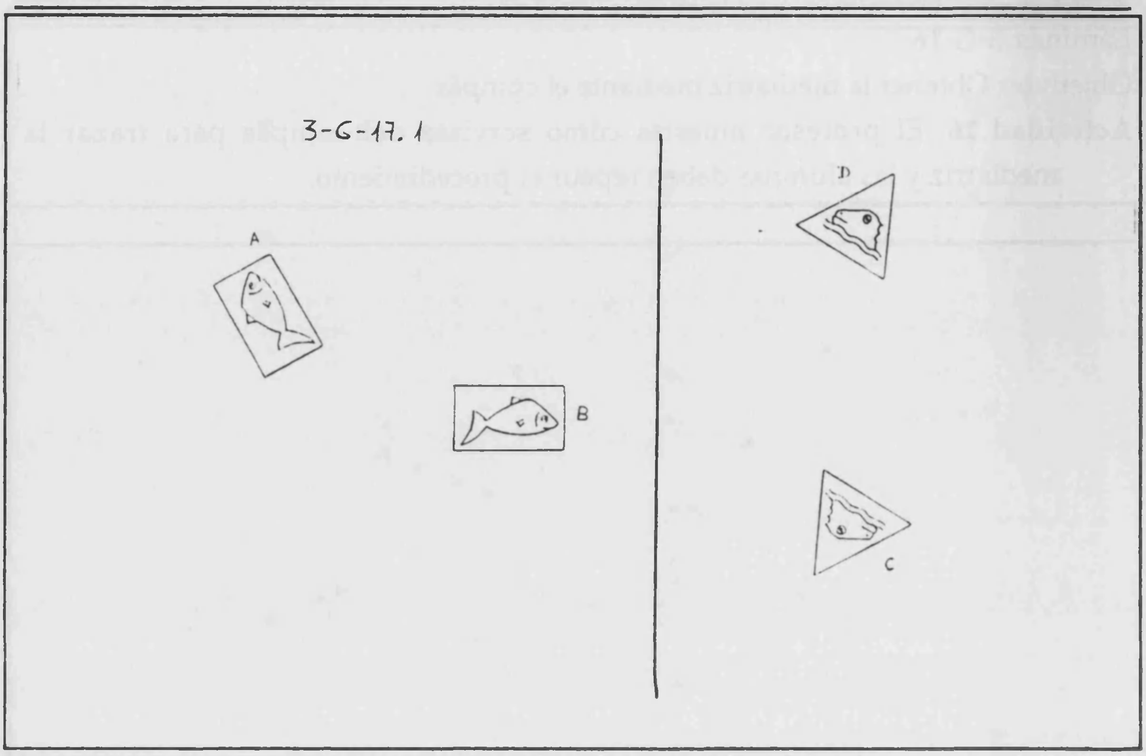
Láminas: 3-G-17.1 y 3-G-17.2.

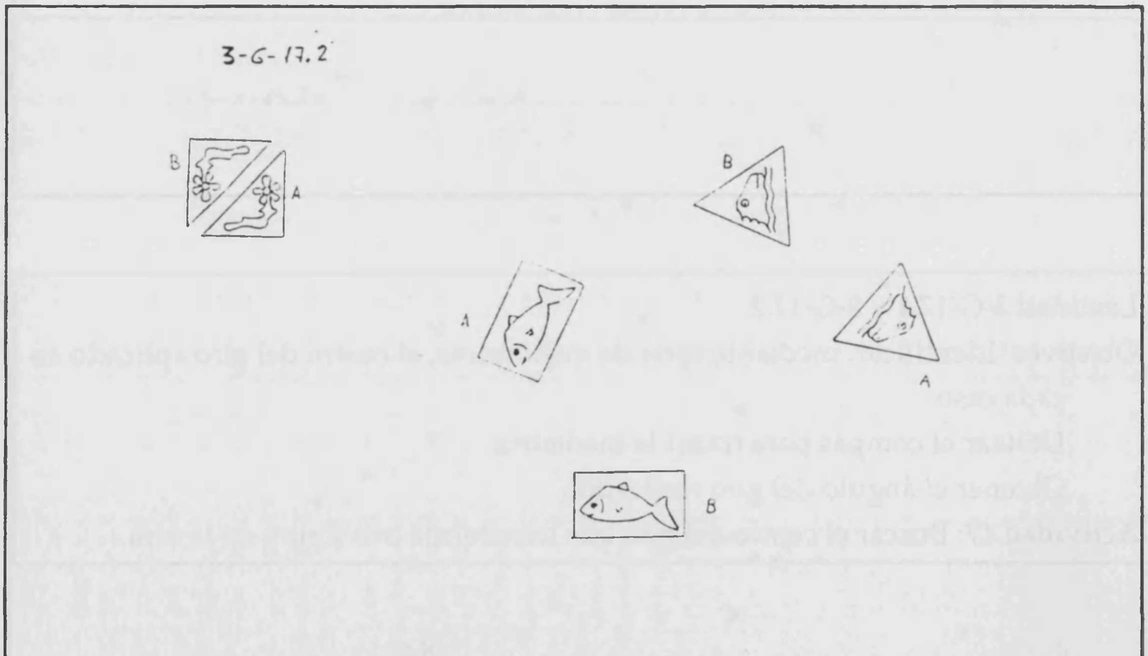
Objetivos: Identificar, mediante corte de mediatrices, el centro del giro aplicado en cada caso.

Utilizar el compás para trazar la mediatriz.

Obtener el ángulo del giro realizado.

Actividad 17: Buscar el centro del giro que transforma una figura en la otra.

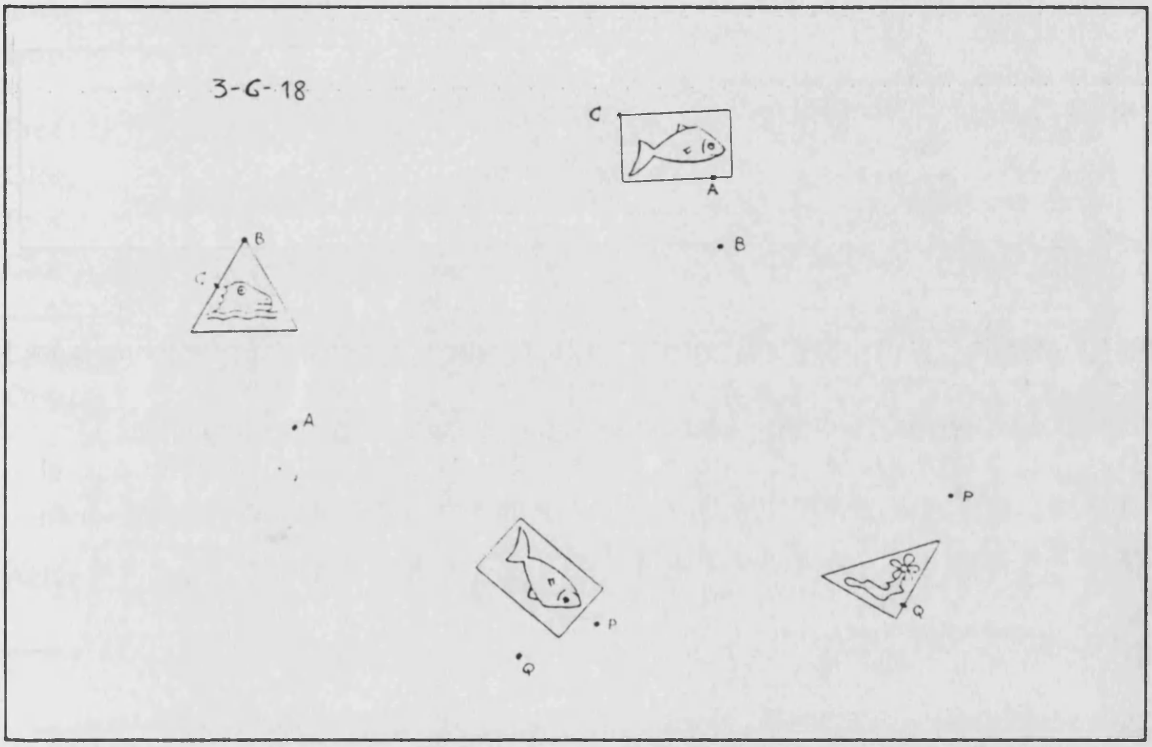

3-G-17.1
A
B
D
C


3-G-17.2
B
A
B
A
A
B

Láminas: 3-G-18.

Objetivos: Composición de giros de distinto centro: Ver que el resultado es un giro con otro centro y ángulo la suma de los ángulos (no se dan ejemplos en los que el resultado sea una traslación).

Actividad 18: Efectuar la composición de los giros indicados. Hallar el centro del giro que pasa la figura inicial a la final. Obtener el ángulo del giro.



Resumen de las sesiones de 3º de E.G.B.

Sesión 1

Láminas: Ninguna.
Objetivos: Introducción de la idea de giro.
Actividad 1: Los niños dan vueltas sobre sí mismos.
Se dan y se piden ejemplos de giros.

Los niños enseguida captan la idea de giro, pues sus ejemplos son correctos, como veremos. El vocabulario elemental se va introduciendo sin problemas a lo largo de las primeras actividades.

Tras hacer que los niños den vueltas con y sin los brazos extendidos, el profesor cita como ejemplo de giro las manecillas del reloj y los niños mencionan ya desde ese primer caso el verbo girar:

Prof.: *Las manecillas de mi reloj ...*
Niños: *Giran.*

Entre los ejemplos que proporcionan los niños se encuentran: *La Tierra, el Sol, una noria, las aspas de un molino, nosotros* (seguramente este alumno hace referencia a las vueltas que han estado dando previamente), *una rana*. A esto último, otro niño replica: *Una rana no. Una rana va a saltos.* Pero el niño que propuso la rana responde: *Una rana también puede girar.*

Láminas: Hoja en blanco y láminas 3-G-2.1 y 3-G-2.2.
Objetivos: Visualizar el cambio de inclinación de una figura mediante un giro. Utilización informal del centro de giro. Utilizar el vocabulario básico: Girar, centro de giro.
Actividad 2: En la lámina en blanco, hacer un dibujo que ocupe casi toda la hoja. En cada lámina, pinchar (por el centro de giro en las láminas que se dan) y dar vueltas a la hoja o a la pieza, según corresponda.

Dado que la actividad es elemental, simplemente de familiarización con los giros, no presenta ninguna dificultad.

Se recalca que, cuando se efectúa una vuelta completa, las figuras se quedan como al principio.

La respuesta que da una alumna a la pregunta del profesor, antes de empezar a resolver los ejercicios de las láminas 3-G-2.1 y 3-G-2.2, muestra que emplea el vocabulario básico específico de los giros:

Prof.: *¿Para qué creéis que está el punto gordo?*
Gloria: *Es el centro de giro.*
Prof.: *¿Os acordáis de qué pasa cuando da una vuelta entera?*
Gloria: *Que se queda como al principio.*

Láminas: Hoja en blanco.
Objetivos: Observar el recorrido y la variación de inclinación de una figura con el centro de giro exterior a ella.
Introducción de una técnica de giro de una figura cuando el centro de giro es exterior a ella: Utilización de un palillo o una tira de cartulina.
Actividad 3: Pegar una figura sobre el palillo. Fijar el extremo u otro punto del palillo y dar vueltas. Pegar varias piezas a lo largo del recorrido.

Desde el punto de vista matemático de los giros, esta actividad es una toma de contacto con este movimiento, al igual que en las actividades anteriores, por lo que no ofrece ninguna dificultad. Situar la figura con la inclinación correcta les resulta complicado a los niños porque, al levantar el palillo, pierden la colocación exacta de la figura. Para resolver esto, el profesor pincha los vértices de la figura y con esa referencia los niños ya pegan las piezas bien y sin problemas. Ese sistema de pinchar los vértices resultó extremadamente útil, no sólo en este caso, sino también posteriormente, cuando los alumnos emplearon otros medios manipulativos para realizar los giro, en concreto discos transparentes.

La referencia de los vértices proporciona información para situar la figura en el lugar correcto, pero los alumnos tienen que prestar atención además a la colocación de cada vértice en el punto que le corresponde. Por ello, ya desde esta sesión, el profesor hace que los niños comprueben que el resultado es correcto, siempre que ello es posible. En la actividad 3 no se produce el error de no hacer corresponder los vértices adecuados, pero en otras actividades sí que se da alguna vez.

Sesión 2

Todas las sesiones comienzan con un repaso de lo que se vio en la sesión anterior o, por lo menos, de lo que es necesario para realizar el trabajo de la sesión presente. En esta sesión el repaso incluye:

- Cosas que giran. Los niños dan como ejemplos *el sol, una noria, un molino, ...*
- Repaso de las láminas que hicieron y de qué es el centro de giro.
- La técnica de utilización del palillo para girar figuras cuando el centro de giro es exterior a ellas.

Láminas: Hoja en blanco.
Objetivos: Introducción de una técnica para realizar giros cuando el centro de giro es exterior a la figura: Disco de acetato.
Actividad 4: Pegar una figura sobre un disco de acetato. Pinchar el disco por el centro y dar vueltas. Pegar varias piezas a lo largo del recorrido.
Primero la figura sobresale del círculo de acetato. Luego la figura está dentro del disco en su totalidad. En ambos casos, para pegar correctamente las figuras, pinchar en los vértices de la que gira para marcar las posiciones de esos vértices en el lugar donde se quiere colocar una pieza.

Gloria lo hace bien y no precisa explicaciones detalladas por parte del profesor, pero a los otros niños sí hay que indicarles cómo utilizar el disco.

Un niño tiene problemas tras pegar una imagen pues la ha pegado al revés y no se da cuenta de por qué no coincide con la figura inicial. El profesor le hace preguntas directas para que llegue a ser consciente de la equivocación:

Prof.: *¿Hacia dónde está la boca en este pez? ... ¿Y en los otros? ...*

Entonces el niño ya se da cuenta del error y lo corrige.

Cuando la figura está situada en su totalidad dentro del disco, al principio les resulta difícil a los niños colocar la imagen porque no pinchan los vértices para dejar una marca en el lugar en que se deben situar, pero luego sí emplean esa técnica y ya no hay problemas. Una de las niñas, Sandra, intercambia los vértices, o sea, sitúa los vértices sobre las marcas, pero no sobre las que corresponden al vértice que sitúa en cada punto. Mediante la dirección del profesor, usando el disco para comprobar, Sandra se da cuenta de su error.

En alguno de los ejercicios, Gloria no espera a que el profesor pinche los vértices, sino que hace el recorrido aproximado con la mano (y la figura) y después lo comprueba con el disco. El profesor insiste siempre en la comprobación de los resultados y, por lo general, los niños sí los verifican.

Sesiones 3 y 4

Láminas: 3-G-5.1, 3-G-5.2 y 3-G-5.3.

Objetivos: Utilizar herramientas auxiliares para girar una figura cuando el centro de giro, dado, es exterior a la figura. Las herramientas son: Un palillo (o tira de papel) en la lámina 3-G-5.1 y un disco de acetato en la lámina 3-G-5.2.

Saber trazar el recorrido de la figura a lo largo de la vuelta completa. O sea, una circunferencia.

Observar que cada circunferencia pasa por el mismo punto en todas las figuras.

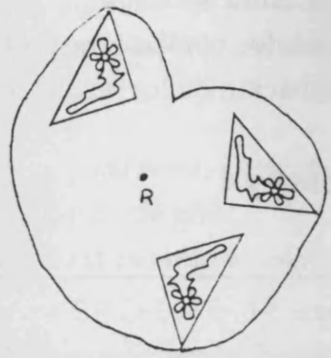
Actividad 5: Utilizar adecuadamente el palillo o disco para girar la figura dada tomando como centro de giro el indicado. Colocar la imagen en varias posiciones.

Una vez que haya tres figuras imagen a lo largo del recorrido, trazar la línea del recorrido seguido por la figura.

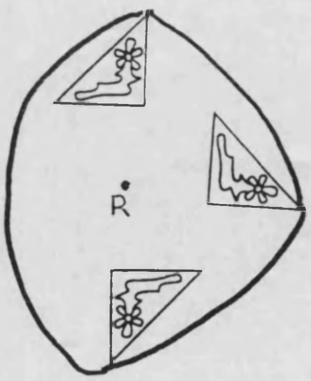
Como en las actividades anteriores en las que los niños emplearon el palillo o el disco, no estaban fijados previamente ni el centro de giro ni la figura, el profesor explica el manejo del palillo en este caso, indicando expresamente que marquen los vértices de la figura en el lugar donde la quieran colocar; esto es, que cuando tienen la pieza girada sobre el disco o palillo, antes de desprenderse del instrumento auxiliar deben pinchar los vértices de la figura en el disco o colorearlos en el palillo, dejando las marcas correspondientes sobre el papel.

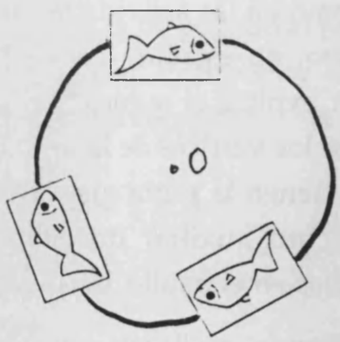
Los niños le dan vueltas al palillo/disco para observar el recorrido y sitúan varias figuras a lo largo de éste. En el disco, la figura ya está pegada en la posición correcta y tiene los vértices agujereados para facilitar la colocación de la imagen y para comprobar los recorridos de los vértices.

Tal como indicamos con anterioridad, el profesor insiste siempre en que los niños comprueben los resultados, aunque los niños ya tienen asumida esa actitud por sí mismos.



El profesor pide que los niños dibujen el recorrido de la figura. Como se aprecia en el dibujo de la derecha, Jorge no intenta hacer una línea circular en el primer ejercicio, o quizá se le presentó el problema al cerrar la línea, dejando de lado la forma circular. Los demás niños trazan circunferencias bastante imperfectas, las cuales adolecen en varios casos de algunos defectos graves si tenemos en cuenta propiedades básicas de los giros. Así, por ejemplo, parece que Sandra sí intenta hacer un trazo circular, pero el centro de giro está muy desplazado (ver dibujo inferior izquierdo). Algunas veces, la línea dibujada por los niños pasa por vértices distintos en distintas figuras, por lo que el profesor intenta hacerles ver la necesidad de que siempre pase por el mismo punto. Para hacer más fácil la corrección del error, resulta útil marcar en todas las figuras el punto por el que se va a hacer pasar la línea. Todo lo anterior es una muestra evidente de que los alumnos están trabajando en el primer nivel de razonamiento. Gloria resuelve bastante bien todos los casos, sin





que se ponga de manifiesto ningún error de manera acusada. Su estrategia para resolver el primero de los ejercicios fue pasar el trazo por los puntos medios de los lados opuestos del rectángulo (ver dibujo derecho de la página anterior).

Sesión 5

Al igual que en el resto de sesiones de esta experiencia, al comienzo tiene lugar un repaso de algunos de los conocimientos tratados anteriormente:

Prof. [hace referencia a cómo trazar el recorrido que sigue un punto cuando se mueve mediante un giro. Los niños tienen una figura colocada en varias de las posiciones a lo largo del recorrido del giro. En la pregunta que se formula a continuación, el punto es el ojo del pez de una de las figuras]: *Cuando* [la línea del recorrido] *pasaba por el ojo,* [en] *la siguiente figura ...*
Gloria: *Por el ojo.*
Prof.: *¿Y la siguiente?*
Gloria: *Por el ojo.*
Prof.: *¿Y el camino era?*
Gloria: *Redondo.*
Prof.: *Llamábamos circuito o recorrido a esa línea.*

Láminas: 3-G-6.1 y 3-G-6.2. Objetivos: Reconocer la circunferencia como el único camino posible de los giros. **Actividad 6**: Indicar cuáles de los caminos trazados corresponden a giros.

Los niños no tienen problemas para identificar los caminos trazados correspondientes a desplazamientos en giros (circunferencias). Antonio se basa en la forma (redonda) del disco de acetato para dar sus justificaciones: *No ... porque el acetato es redondo y aquí no sigue ...*

La justificación general es que *son/no son redondos.*

El profesor hace referencia a líneas rectas: *Si hay línea recta no es* [un giro]. A partir de entonces los niños incluyen a veces la existencia de trazos rectos en las justificaciones para desechar un recorrido. Entre las razones esgrimidas por los niños, además de la redondez se encuentran: *Es ovalado; Hay línea recta; No es círculo entero.*

El profesor introduce la equidistancia al centro como identificación de las circunferencias. Como se puede apreciar a continuación, Gloria es la única capaz de completar las indicaciones del profesor. Aunque esto se ve más adelante, también es ella la única que sí utiliza y comprende el significado de esa propiedad, lo cual corresponde al segundo nivel de razonamiento de Van Hiele.

Prof.: *¿Con compás lo sabría* [si es círculo]*?*
Niños: *Sí, claro.*
Prof.: *¿Y con una regla?*
Niños: *No.*
Prof.: *Os lo voy a decir* [cómo hacerlo con regla]. *Tenéis que medir desde el centro de giro hasta el circuito.*
Gloria: *Entonces hay que medir, por ejemplo, el centro de giro lo pones aquí* [en la regla] *y si mides así tienen que dar todos lo mismo.*

Posteriormente el profesor pide dos justificaciones de por qué sí/no son circuitos de giro algunos de la lámina. Sólo Gloria hace referencia inmediata a la equidistancia. Sandra se refiere a ella cuando se le pregunta por una segunda opción, aunque de forma poco precisa:

Sandra: *Medirlo con la regla.*
Prof.: *¿Desde dónde hasta dónde?*
Sandra: *Desde el punto de giro.*
Prof.: *¿Desde qué? Desde el centro de ...*
Sandra: *Desde el centro de ...*
Prof.: *Giro.*
Sandra: *Desde el centro de giro.*
Prof.: *¿Hasta dónde?*
Sandra: *Hasta el final.*

Al terminar la sesión y repasar de nuevo las razones por las que un recorrido no corresponde a un giro, los niños repiten las justificaciones que dieron en los ejercicios resueltos con anterioridad. Por ejemplo:

Cuando hay una raya o medio círculo.
Hay líneas así [la alumna mueve la mano siguiendo una línea recta].
Cuando es giro todo es redondo, pase por donde pase y para distinguir cuándo es tiene que ser siempre círculo; sólo con un poco que no sea redondo ya no es.

De nuevo es Gloria la única que utiliza la equidistancia al centro claramente, lo cual muestra una diferencia en el nivel de razonamiento entre esta niña (que ahora presenta nivel 1 y comienzos de 2) y los demás (que se mueven de momento en el nivel 1).

Gloria: *Si lo mides con una regla, por ejemplo, desde aquí.*
Prof. [interrumpe]: *¿Cómo se llama?*
Gloria: *Centro de giro. Te da 2; siempre te ha de dar 2 y si no es* [giro], *a veces no* [no mide 2].

Láminas: 3-G-7.1 y 3-G-7.2.
Objetivos: Emplear el compás para identificar las figuras que corresponden al mismo giro.
Actividad 7: Identificar visualmente las figuras que corresponden a un giro con el centro dado.
Utilizar el compás con el mismo fin. Comprobar con el disco de acetato.
Unir dos figuras giradas por los dos recorridos posibles.

El primer grupo de figuras que resuelven es el de los triángulos equiláteros (dragones). Hay un triángulo que es trasladado de otro y está situado fuera del círculo sobre el que se encuentran los restantes. Visualmente varios alumnos lo identifican como incorrecto. Gloria es la única que, para asegurarse, mide distancias al centro de giro. Luego el profesor proporciona compases y, aunque no indica cómo emplearlos, los niños los utilizan bien. En las justificaciones de los alumnos se incluyen referencias a que la circunferencia pasa por los vértices:

Jorge: *Porque* [la circunferencia] *pasa por la esquina* [en todas las figuras].

Los alumnos dejan como válido el dragón inverso (sí está situado sobre el círculo de giro y los niños no se percatan de la inversión). Se dan cuenta de que no es correcto tras la utilización del disco de acetato. No obstante, los alumnos sí reconocen la imposibilidad de inversión; el hecho de que no le prestaran atención en ese ejercicio se debe a que hasta ese momento no existió esa diferencia entre las figuras empleadas. De hecho, en la primera actividad en la que se presenta posteriormente esa situación, los niños eliminan enseguida la figura inversa.

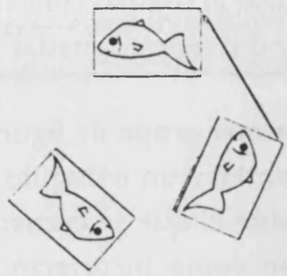
Los alumnos no consideran la necesidad de comprobar que dos figuras están relacionadas por un giro con más de una circunferencia, si bien varios de ellos sí trazan dos o tres. Cuando sólo utilizan una, el profesor hace que verifiquen con más. La estrategia seguida por los alumnos es emplear una figura como referencia y trazar una (o más) circunferencias por sus vértices o puntos destacados. Cuando esa figura no se ajusta a las demás, los niños piensan que todas están mal. Sólo Gloria razona por sí misma que la figura inicial es la incorrecta:

Gloria: *Hay muchas figuras mal ... No. La que está mal es ésta.*

A los demás alumnos les ayuda el profesor para que se den cuenta de que la figura que falla es la que han seleccionado como referencia.

Tras resolver la lámina 3-G-7.1, y antes de comenzar la 3-G-7.2, el profesor hace que los niños marquen, mediante colores distintos, el paso de una figura a otra por los dos recorridos posibles.

Varios niños unen en el rectángulo un vértice con el siguiente más próximo, para lo cual Jorge traza una línea recta (ver dibujo), error que corrige mediante la intervención del profesor. Sandra trabaja lentamente y el profesor le dirige la actividad de vez en cuando.



Sesiones 6 a 12

En realidad la sesión 6 comienza al resolver la lámina 3-G-7.2, pero incluimos ese ejercicio en la sesión 5 para facilitar la lectura de esta memoria.

Láminas: 3-G-8.1 y 3-G-8.2.
Objetivos: Pre-introducción a giros equivalentes: Consideración de los dos caminos posibles a lo largo de la circunferencia.
Medición con el transportador.
Deducir y comprobar que la suma de las amplitudes de los dos giros es 360°.
Actividad 8: Descubrir las dos posibilidades de recorrido que llevan un punto al otro. Marcarlas con distinto color.

> Medir cada una de esas amplitudes con el transportador. Sumar las dos de cada círculo. Generalizar que la suma es siempre 360°.

Cuando el profesor pide un camino alternativo al más corto para ir desde un punto al otro mediante un giro, Gloria es la única que piensa por sí misma en el recorrido que completa la circunferencia en sentido contrario. Los demás niños, bajo la dirección del profesor, también resuelven el ejercicio.

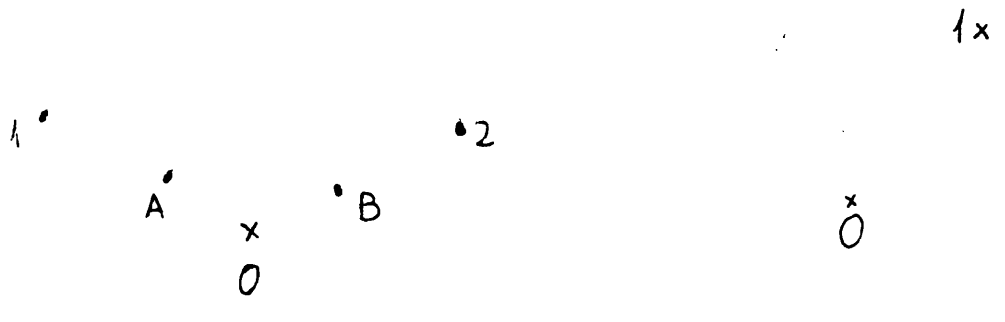
El profesor les da a los niños un transportador y les explica cómo utilizarlo. Tras medir los valores de los ángulos que producen giros equivalentes (o sea, que llevan p a p' en esta actividad) en varios casos, los niños obtienen que la suma de ambas amplitudes es siempre 360°.

Aprendizaje de ángulos (Unidad de enseñanza complementaria)

Debido a que los alumnos todavía no habían recibido instrucción sobre ángulos en su clase habitual, hubo que diseñar una unidad complementaria de enseñanza relacionada con ese concepto. Para desarrollarla se requirieron seis sesiones. Los aspectos que se abordaron fueron los siguientes:

Medir ángulos.
Memorizar que cualquier circunferencia mide 360° y aplicarlo al cálculo de la medida de ángulos.
Adquirir familiarización con ángulos especiales: 90° y 180°.
Colocar puntos de manera que el ángulo de giro sea de una medida prefijada.
Ordenar ángulos según su amplitud (se incluyen círculos de distinto radio).

El objetivo de esta unidad complementaria es proporcionar los conocimientos necesarios para continuar el trabajo con los giros. Por ello, en los ejercicios utilizados sobre ángulos, muchas de las situaciones corresponden, o son lo más parecido posible, a lo que los niños encontrarán posteriormente en las actividades dedicadas a giros. Así, aunque hay ejercicios en los que se dan los ángulos en su forma estándar o mediante el sombreado de una sección completa de un círculo, la introducción y parte de las medidas se llevan a cabo a través de arcos de circunferencia, relacionándolos con los giros. Por ejemplo, se incluyen ejercicios en los que los alumnos han de medir el ángulo del giro que lleva el punto A al B y el 1 al 2 (ver dibujo inferior izquierdo), o bien se pide colocar un punto que esté girado, por ejemplo, 220° del punto 1, tomando como centro de giro el que se da (ver dibujo inferior derecho).



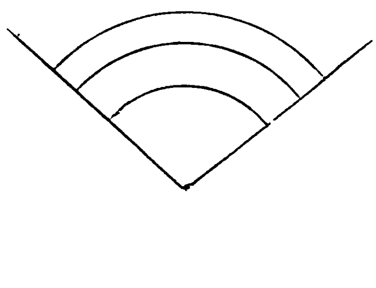
Debido a que el concepto de ángulo y su medida no es el objetivo de esta memoria de tesis, no explico con detalle el progreso seguido por los alumnos en relación a ese concepto; aunque sí incluyo a continuación algunos comentarios generales y transcripciones sobre aspectos interesantes de esta unidad extra de enseñanza. No obstante, dado que algunos de los últimos objetivos de esta unidad se desarrollan en un contexto de giros, comentaré con detalle la forma en que los niños resuelven esa actividad (actividad 9).

Una de las ideas que les cuesta más asumir a los niños es el hecho de que todas las circunferencias miden 360° y que sectores (iguales) sobre circunferencias concéntricas tienen la misma medida angular. Tan sólo Gloria asume desde el principio esas propiedades, que aplica cuando procede. Los otros niños sí llegan a utilizarlas, pero intermitentemente y ello tras una insistencia muy fuerte en ejercicios en los que se ponen de manifiesto esos resultados. No obstante, en varias ocasiones Gloria pide una razón por la cual el tamaño de las circunferencias no influye en el valor de su medida (360°); se trata de la necesidad que siente de que se le demuestre de alguna manera ese resultado; no le gusta la justificación del profesor, consistente siempre en verificarlo por medio de la medición de varias circunferencias. A continuación presento dos ejemplos sobre ello, correspondientes ambos a la tercera sesión de la unidad complementaria dedicada ángulos:

Niña: *¿Todos los círculos miden 360?*
Prof.: *Todos.*
Niñas: *¿Todos?*
Prof.: *Todos. Aunque el círculo sea inmenso, lo único que tenemos que hacer ¿qué es?*
Niña: *¿Y toda la bola del mundo también?*
Niña: *¿Y por qué miden todas igual?*
Jorge: *Un duro no porque no tiene centro de giro.*
Niña: *La nariz del duro.*
Prof.: *Un duro es redondo como esto.*
Jorge: *Sí, pero no mide 360.*
Prof.: *¿Cómo que no? ¿Esto* [un transportador, que es un círculo completo] *cuánto mide?*
Niña: *Deberían medir unos menos que otros.*
Prof. [a Jorge]: *Según tú, ¿cuánto debería medir, más o menos?*
Jorge: *Menos.*
....
Gloria: *Pero es muy raro. ¿Por qué tienen que medir todos lo mismo?*
Prof.: *Porque lo miden. ¿Lo comprobamos?*

Las dos transcripciones de esa misma sesión que muestro a continuación reflejan que, a pesar de que a veces los niños sí indican la igualdad de medida en ángulos trazados sobre circunferencias de distintos tamaños (con frecuencia porque el profesor les corrige o porque se acaba de hacer un ejercicio análogo), los alumnos, excepto Gloria, no han aprendido esa propiedad:

Prof.: *Sandra, ¿cuánto mide cada uno de éstos?* [Ver dibujo. El profesor se refiere a una serie de arcos concéntricos que acaba de dibujar. Los niños acababan de medir el valor del ángulo].



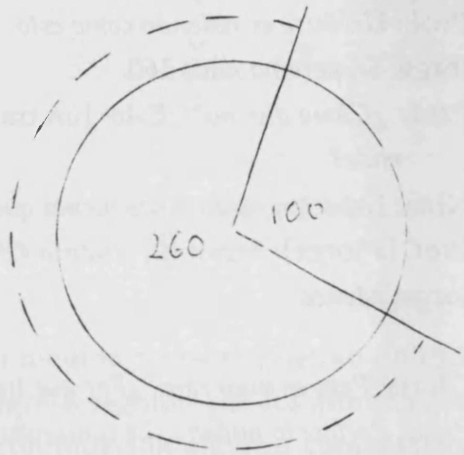
Sandra no lo sabe.
Prof.: *Gloria, explícaselo.*
Gloria: *Lo mismo que ése* [señala el arco que estaba dibujado antes de que el profesor dibujara los demás concéntricos].

Prof.: *Sandra, ¿entonces cuánto miden?*

Sandra: *100 todos.*

Casi inmediatamente después, el profesor le pide a Jorge que diga los valores de dos arcos complementarios que acababan de medir y luego señala arcos de la misma amplitud, pero sobre circunferencias de mayor tamaño. La contestación de Jorge, correcta, es:

Jorge: *Medirán igual, sólo que más ampliado.*



Sin embargo, un poco después el profesor le pide a Jorge que indique el valor de un ángulo (el de 260° en el dibujo) y a continuación le pide el valor de un arco concéntrico, sobre una circunferencia, mayor (ver dibujo). La respuesta de Jorge es: *Más de 260.*

De todas maneras, aunque la asimilación completa de la propiedad es un hecho que requiere más tiempo e instrucción que la proporcionada en esta unidad de enseñanza, tras la realización de bastantes ejercicios los alumnos cada vez consideran con más asiduidad la irrelevancia de la longitud de los lados del ángulo o del tamaño de la circunferencia utilizada. Por ejemplo, Jorge, en la quinta sesión dedicada a los ángulos, tras resolver las medidas de los ángulos de una lámina, todos rectos, explica: *Todos son iguales porque todos miden 90 y da igual que el círculo sea más grande o más pequeño para medir lo mismo.*

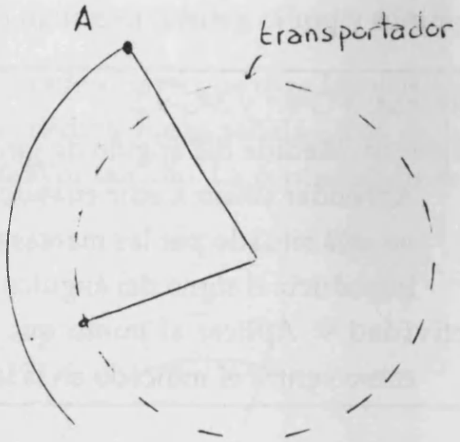
Uno de los factores que influyen seguramente en la comprensión y utilización mejor por parte de Gloria que por los otros niños de las medidas de los ángulos y de la relación entre ellos es que su destreza aritmética es mayor, lo que le permite hacer los cálculos adecuados y tener la visión de algunos ángulos en términos de fracciones de la circunferencia. Así, Gloria indica y utiliza que 90° es 1/4, 180° es 1/2 y 120° es 1/3 de la circunferencia; para la medición de ángulos mayores que 180° emplea complementarios a 360° y en las ordenaciones de ángulos, cuando son cóncavos utiliza a veces las ordenaciones de los convexos correspondientes y luego las invierte. Los demás niños no piensan en esos términos y por lo general necesitan efectuar las operaciones sobre el papel.

Láminas: 3-G-9.1 y 3-G-9.2.
Objetivos: Medida del ángulo de giro para obtener la imagen de un punto.
Aprender cómo medir cuando, al colocar el transportador, el punto a girar no está situado por las marcas del transportador.
Introducir el signo del ángulos de giro.
Actividad 9: Aplicar al punto que se da un giro de cierta amplitud , tomando como centro el indicado en la lámina.

En la lámina 3-G-9.1 es la primera vez que se plantea este tipo de ejercicio, si bien los niños ya habían medido con anterioridad arcos de circunferencia en una lámina análoga a ésta, pero en la que se daban los puntos inicial y final, y también habían medido ángulos dibujados en la forma estándar, esto es, con un arco.

La introducción y utilización correcta del sentido de los giros y el signo de los ángulos no presenta ninguna dificultad. En la lámina 3-G-9.1, excepto Gloria, los otros niños tienen algún problema, que comento en el párrafo siguiente. La segunda lámina (3-G-9.2) sí la resuelven bien, aunque tienen que recordar lo que hicieron y a veces el profesor incluye alguna sugerencia (por ejemplo, unir el centro de giro con el punto), recalca el proceso para afianzar el método seguido y recuerda propiedades destacadas (por ejemplo, que el punto imagen está sobre la circunferencia que pasa por el punto original). Así, por ejemplo, Jorge no sabe cómo resolver el ejercicio en el que las marcas del transportador no pasan por el punto; luego ya recuerda que debe prolongar la línea que une el centro de giro con el punto a girar y sí completa el ejercicio. Entre estas dos láminas los niños hicieron una actividad sobre medida y ordenación de ángulos convexos y cóncavos, dibujados en la manera estándar.

Comentando de manera más detallada la lámina (3-G-9.1), señalaré que el primer ejercicio consiste en un giro de 220° y que el punto a girar se encuentra en la circunferencia del transportador. Gloria lo resuelve bien, pero los otros niños no. El profesor les dice que unan el centro de giro con los puntos original e imagen, pero los niños no colocan bien el punto imagen. A Sandra hay que explicarle de nuevo en qué consiste el ejercicio y a Jorge hay que ayudarle en la medición del ángulo. Finalmente lo resuelven. Los otros ejercicios que componen esta actividad corresponden a giros de 120° y de 80°, pero ahora el transportador es mayor que la circunferencia por donde gira el punto dado. Gloria lo resuelve bien y, además, da las dos posibilidades de cada caso. En el dibujo se aprecia el error de Jorge en el ángulo de 80°: La imagen del punto no la sitúa sobre la circunferencia correspondiente, sino en el extremo del segmento que había trazado para formar el ángulo de 80°.



En algunas ocasiones el profesor les pide a los niños que coloquen aproximadamente el punto imagen mediante un giro de cierto ángulo y se aprecia que a veces los niños (Sandra sobre todo) tienen dificultades para estimar el tamaño de los ángulos. Para solucionarlo, el profesor formula preguntas relacionadas con el cálculo de medidas a partir de otras ya conocidas. Gloria no tiene esos problemas y seguramente en eso influye su destreza aritmética, que le permite ver relaciones que Sandra no puede llevar a cabo mentalmente.

Sesiones 13 y 14

Láminas: 3-G-10. Objetivos: Girar una figura, conocidos el centro de giro y la amplitud del ángulo de giro, cuando el centro de giro está sobre la figura. **Actividad 10**: Aplicarle a la figura el giro que se da.

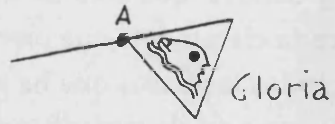
Todos los niños, incluida Gloria, tienen problemas con esta lámina. Ninguno de los niños es capaz de relacionar correctamente lo que hay que hacer con lo que vieron en la sesión previa, en la que el objeto de giro era un punto y no una figura. Intentan aplicar la situación anterior, pero no saben traducirla al caso actual. La visión de la figura entera no les permite a los niños pensar que pueden utilizar cualquier punto de ella y obtener su imagen.

Cuando el profesor fija un punto concreto de la figura, entonces los niños sí aplican el método que conocen de la sesión anterior para obtener la imagen de ese punto. Gloria tiene suficiente con esa indicación, a partir de la cual es capaz de situar correctamente la figura imagen. Jorge en ocasiones no tiene en cuenta cuál es el lado que contiene el punto cuya imagen ha obtenido, por lo que no sitúa bien la figura, y Sandra, que sólo ha memorizado el algoritmo, comete errores en los que se aprecia claramente que precisa más enseñanza para comprender por qué se requieren todos los pasos que ha aprendido (unir el centro de giro con el punto a girar, trazar un arco de circunferencia que pase por el punto, etc.).

Tras tres ejercicios, parece que Gloria sí ha entendido el sentido del proceso que sigue y no necesita la aclaración por parte del profesor de los puntos a tener en consideración; de hecho, ella sola es capaz de extender la situación conocida (centro de giro en un vértice de la figura) al caso en el que el centro de giro se encuentra en el punto medio de un lado de la figura. De Jorge sólo se puede apreciar que en el último ejercicio sí utiliza bien el procedimiento para girar la figura, pero no realiza más que tres casos y en todos la situación es la misma: Girar una figura con centro de giro en un vértice. Sandra no tiene la visión general del procedimiento, y sólo aprende un algoritmo, que en ocasiones aplica mal.

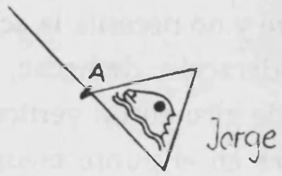
Con el fin de ayudar a los niños a situar la imagen de una figura de manera correcta, además de enseñarles a obtener la imagen de un punto de la figura, resultó útil pinchar la figura por el centro de giro y hacerla girar según ciertos ángulos fáciles (180°, 90°, ...), relacionando esos valores (y las posiciones respectivas de la figura) con el valor del ángulo pedido. También contribuyó a la obtención de la solución correcta la técnica consistente en pintar de color el lado que pasa por el vértice a girar y el centro de giro, tanto en la figura original como en la pieza que se va a colocar en la posición de la imagen, aunque Gloria no necesitó nunca recurrir a esto. Veamos a continuación con más detalle las actuaciones de los alumnos en esta actividad.

El primer ejercicio que se propone es girar un dragón 60° con centro de giro en un vértice. Ese ejercicio se propuso directamente a Gloria y Jorge, sin ninguna indicación complementaria; Sandra lo hace en la sesión siguiente (ya que no pudo asistir ese día), por lo que el profesor comienza con ella siguiendo otra estrategia para evitar parte de los problemas que se les presentaron a los otros dos niños. Tanto Gloria como Jorge prolongan uno de los lados del triángulo que pasa por el centro de giro, y no saben continuar (ver dibujo). Se observa claramente que ambos están aplicando una técnica válida en las sesiones anteriores, pero que aquí no es utilizable. En las transcripciones de Jorge y de Gloria que presento seguidamente, y que corresponden a extractos de sus actuaciones, se refleja claramente tal situación:



Prof. [a Jorge]: *¿Qué hay que hacer? ¿Dónde está el centro de giro?*

Jorge [coloca bien el transportador, con su centro en A]: *Aquí, y 60 va aquí* [marca el vértice inferior derecho de la figura original].

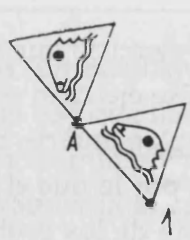


Prof.: *¿Entonces no se mueve la figura?*

Jorge no puede seguir y tampoco Gloria. Por tanto, la imagen que ha obtenido no sabe exactamente a qué corresponde ni creo que sepa exactamente que lo que ha hecho ha sido obtener la imagen de uno de los vértices.

El profesor pincha por el centro de giro y hace que Jorge mueva con la mano la figura 180°, 90° y después, le pide que, reflexionando sobre la relación entre estos valores y el ángulo pedido, sitúe la figura imagen en su posición. Una vez hecho eso, le pide que se asegure de que exactamente corresponde a 60° (midiendo con el transportador).

El ejercicio siguiente consiste en mover el mismo dragón 180°. Jorge persistirá en un error de colocación de la imagen, en el cual domina una componente visual, y del que no se da cuenta a pesar de las comprobaciones manipulativas (ver dibujo):



Jorge mide 180° desde el punto 1 y coloca la imagen incorrectamente (ver dibujo): *Aquí es 180, que ya lo he comprobado* [ha medido con el transportador].

Prof.: *Pues yo no estoy seguro.*

El profesor pincha por el centro de giro y hace que Jorge mueva 180°, pero Jorge sigue convencido de que su solución es correcta. El profesor pinta de color un lado del triángulo original y el correspondiente de la pieza que mueve Jorge. Al pinchar por el centro de giro y hacer coincidir los lados pintados, Jorge coloca bien la figura. Sin embargo, su idea previa prevalece sobre esta demostración manipulativa, pues seguidamente el profesor le pide que compruebe con el transportador y Jorge comete de nuevo el mismo error que al principio y sigue pensando que su solución original era correcta: *¿Ves como quedaba aquí? Estaba seguro.* Esta idea persiste incluso cuando el profesor hace que se fije en que el lado del triángulo pintado de color no se encuentra sobre la línea por la que debería pasar. Tras ello el profesor, pinchando por el centro de giro, hace que Jorge mueva 90°, 180°, que se fije en la línea de color para hacerla coincidir sobre la posición correcta y después que mida de nuevo, lo cual desconcierta a Jorge:

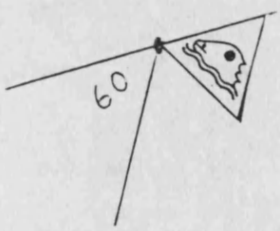
Jorge: *Siempre da ahí* [posición correcta, obtenida cuando el profesor está pinchando por el centro de giro], *pero con el transportador da ahí* [en la posición incorrecta].

El ejercicio finaliza cuando el profesor recurre a Gloria, la cual coloca la primera vez la figura también incorrectamente, en la misma posición que Jorge. Pero cuando el profesor le pide que revise, ya lo hace bien.

Más adelante se puede comprobar la generalización de Jorge a partir del valor de los ángulos del triángulo equilátero (dragón) al hacer un ejercicio consistente en girar +60° esa figura.

Jorge: *O sea, que cada dragón mide 60 ... Porque si éste es 60, todos miden igual.*

Por su parte, Gloria ha estado trabajando independientemente. En el primer ejercicio (giro del dragón 60°), tras prolongar uno de los lados de la figura dice: *El centro ...* [se queda pensando cuál es el centro y qué tiene que mover]



El profesor pincha la figura por el centro de giro, A, y hace que Gloria la gire 180°, 90°, 60°. Todas las posiciones en que coloca la imagen son correctas. Cuando el profesor le pide cómo sabe que la posición para 60° es la que ha dado, Gloria dice: *Porque lo he medido* (seguramente antes de que el profesor interviniese). Gloria traza entonces la prolongación de uno de los lados de la figura imagen (ver dibujo) y mide el ángulo que forma con el que trazó al principio de la actividad (el cual mostramos anteriormente en un dibujo), y dice:

Gloria: *Mira.* [Mide] *60. Es que la figura no hace nada. Es mejor sin figura.*

....

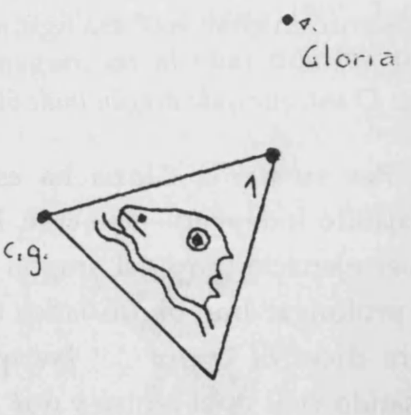
Prof.: *¿Desde dónde hasta dónde* [has medido]? [Gloria lo indica] *¿Pero qué has movido? La figurita está aquí.*

Gloria: *Es que yo he cogido 360* [el 0 del transportador] *desde aquí* [la prolongación de un lado de la figura original] ... [no sabe desde qué punto de la figura debe empezar a medir] *¿Pero hacia dónde pongo 360?* [quiere decir el 0° del transportador]. *Lo puedo poner hacia aquí, aquí, aquí* [va girando el transportador, cuyo centro ha situado en el centro de giro].

Prof.: *Ese es el problema, saber desde dónde empezamos.*

Gloria: *Pues desde donde se quiera. Podíamos poner aquí un 1 y ya está* [ver dibujo].

Esta última propuesta de Gloria no tiene en cuenta la figura para nada: Simplemente coloca un punto donde le parece, igual que en las láminas anteriores, para hallar la imagen. Por tanto, no es capaz de transferir lo que hizo en sesiones anteriores a la nueva tarea.



Prof.: *No. Donde se quiera no.*

Gloria: *Sí. Podíais haber puesto un 1 como en las otras hojas* [se refiere a colocar un punto concreto para hallar su imagen].

Prof.: *Vale. Te pongo que la figura borreguito es un 1* [el profesor dibuja un 1 sobre la figura, pero sin hacer referencia a ningún punto concreto].

Eso no le sirve a Gloria, pues ella quiere un punto concreto para moverlo, como en las láminas anteriores.

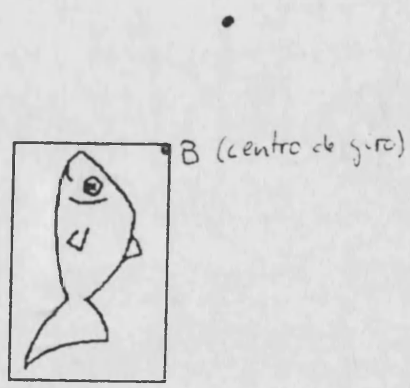
Gloria: *No. Aquí.* [Señala por el exterior de la figura]. *¿Dónde pongo 360?* [se refiere al 0° del transportador].

El profesor entonces le marca un vértice concreto de la figura:

Prof.: *Imagínate que éste es el punto 1* [ver figura]. *Muévelo +60.*

Gloria entonces ya procede bien, aplicando la técnica utilizada en las actividades anteriores para hallar la imagen de un punto: Dibuja la línea que une el centro con la imagen del punto 1 a 60°, para lo cual emplea transportador y compás, y pega bien la figura.

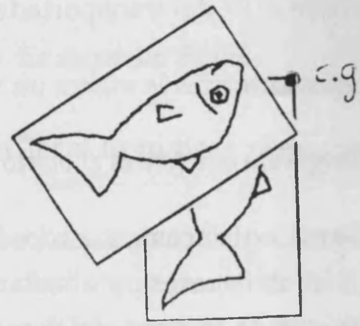
Durante el resto de la sesión Gloria sigue teniendo problemas cuando no se da un punto concreto a girar. También en algún momento sitúa mal la imagen y el profesor tiene que pinchar por el centro de giro correspondiente y hacerle pensar en el valor del ángulo girado o en el lado concreto de la figura que se ha de situar sobre la línea imagen que ha obtenido. Así, por ejemplo, para girar -45° el rectángulo del dibujo, de nuevo Gloria dice:



Gloria: *¿Dónde pongo 360?* [se refiere al 0° del transportador] *Lo pongo aquí* [dibuja un punto separado del rectángulo; ver figura]. *Es que se puede poner donde quiera.*
Prof.: *¿Y por qué pones ahí el 360?*
Gloria: *Porque se puede poner en todos los sitios.*

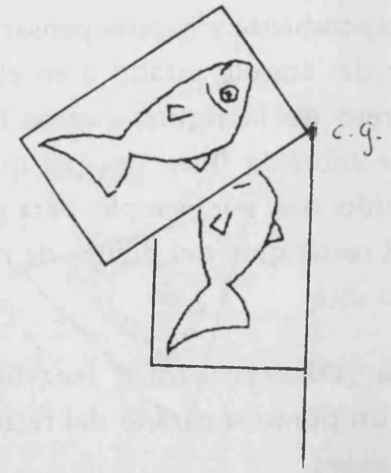
Gloria coloca el centro del transportador en el punto indicado como centro de giro (uno de los vértices del rectángulo) y el 360° (= 0°) del transportador en el punto que había dibujado exterior al rectángulo, lo cual es correcto para proceder a hallar la imagen de ese punto exterior, pero no sirve para obtener directamente la imagen del rectángulo.

El profesor interviene para hacerle ver que así mueve el punto pero no la figura. Gloria coloca entonces una figura sobre la original y la gira con la mano aproximadamente los -45° requeridos, pero no mantiene invariante el centro de giro (ver dibujo). De todas maneras, ante una ligera indicación del profesor se da cuenta de ese error y corrige.



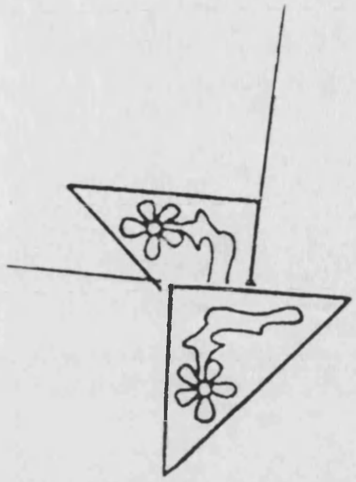
Para evitar el desplazamiento del centro de giro, el profesor pincha la figura por el centro de giro y Gloria la mueve varios ángulos conocidos para tomarlos como referencia: 180° (lo hace por su propia iniciativa), 90° (se lo pide el profesor). Después ya efectúa bien el giro de -45°. El profesor le indica a continuación el proceso a seguir:

Prof.: *Pues hacemos lo que hacíamos siempre: Ponemos el pez y esta línea* [prolongación de un lado] *y luego hacemos una línea a 45*] *que coincida con ésta* [con el lado correspondiente de la pieza de la figura imagen que ha colocado a 45°; ver dibujo].



Parece que Gloria de momento no relaciona lo que está haciendo el profesor con el método que ella conoce, quizá porque el profesor utiliza la imagen del lado completo de la figura y hasta ahora Gloria utilizó siempre puntos, por lo que el profesor le hace sugerencias:

Prof.: *¿El 0 del transportador dónde es? ... ¿Y el 45? ...*

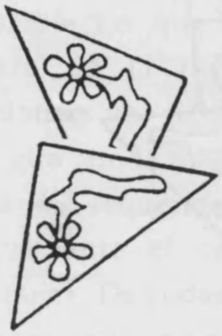


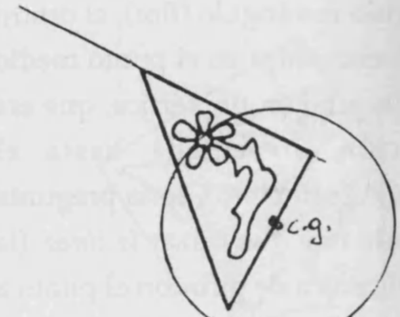
Gloria ya se da cuenta de cómo hay que seguir. Después realiza bien varios ejercicios sin necesidad de ayuda del profesor. En particular, en el caso del triángulo rectángulo (flor), el centro de giro se encuentra en el punto medio de un lado y no en un vértice, que era la situación presentada hasta el momento. Al principio Gloria pregunta hacia dónde hay que trazar *la línea* (la que une el centro de giro con el punto a girar), pero ella misma indica que da igual y prolonga el cateto que contiene el centro de giro. A continuación traza una línea perpendicular que pasa por el centro de giro (la amplitud pedida es 90°) y sitúa bien la figura (ver dibujo).

En cuanto a Sandra, como hemos indicado con anterioridad, es capaz de memorizar y aplicar un algoritmo, pero generalmente no se da cuenta exactamente de la finalidad de cada paso. En varios casos comete el error consistente en situar un lado que no corresponde sobre la línea que traza para medir el ángulo de giro y se requiere bastante tiempo de trabajo con ella para que se dé cuenta de su equivocación y la corrija. En particular, en un ejercicio en el que hay que girar 45° el rectángulo (pez) con centro en un vértice, es necesario más de un cuarto de hora, a lo largo del cual el profesor recurre a pinchar la figura por el centro de giro, hacer que Sandra efectúe giros de otras amplitudes y a pintar con el mismo color uno de los lados de la figura original (el que contiene el centro y el punto a girar) y el correspondiente de la figura imagen.

Otro error que pone de manifiesto la memorización del algoritmo se produce en este mismo ejercicio: Sandra quiere obtener la imagen de un vértice, por lo que traza (bien) una circunferencia, mide 45° pero luego dibuja el arco incorrecto, de manera que no pasa por el vértice cuya imagen quiere obtener.

Sandra es incapaz de efectuar el giro de 180° cuyo centro se encuentra en la mitad de un lado de la figura (triángulo rectángulo). El profesor pincha la figura por el centro de giro y Sandra sitúa la imagen como indicamos en el dibujo inferior izquierdo. El profesor le pide que se asegure midiendo. Sandra entonces traza la circunferencia y luego la línea que se ve en el dibujo inferior derecho, que no pasa por el centro de giro, tras lo cual el profesor va dirigiendo a Sandra, paso a paso, en la realización del proceso correcto.





Es interesante el comentario de Sandra en esta última figura, cuando está trazando la circunferencia. El profesor les propone a los niños que elijan un punto que les resulte fácil para moverlo, a lo que Sandra contesta:

Sandra: *A mí me da igual un punto fácil que difícil. Todo es lo mismo. Y si es más fácil o más difícil lo comprendes igual.*

Sesión 15

Láminas 3-G-11.1 y G-2.11.2.

Objetivos: Girar correctamente una figura con el centro de giro exterior a ella.

Aprender para esos casos a emplear las imágenes de dos puntos.

Reconocer que, cuando el centro de giro se encuentra fuera de la figura, la cantidad mínima de puntos–imagen necesaria para situar la imagen de una figura es dos.

Reconocer la invarianza de la amplitud del ángulo de giro recorrido por cualquier punto de una figura.

Realizar giros de 180° utilizando sólo una regla.

Reconocer y obtener giros equivalentes.

Actividad 11: Aplicarle a la figura el giro que se pide.

Explicar cuántos puntos de la imagen hay que conocer para poder situarla.
Decir cuál es la medida del ángulo girado por distintos puntos de una figura.
Realizar giros a partir de las conclusiones de los dos apartados anteriores.
Efectuar el giro de 180° sin compás, empleando sólo la regla. Generalizar un método para realizar giros de 180° sólo con regla.
En uno de los ejercicios anteriores, ya resuelto, hacer con la figura original el recorrido seguido a lo largo del giro. Hacerlo a continuación en sentido contrario, también desde la figura original hasta la final. Generalizar la equivalencia de giros.
Dar los ángulos (valor numérico y signo) de los giros equivalentes a los que se proponen.

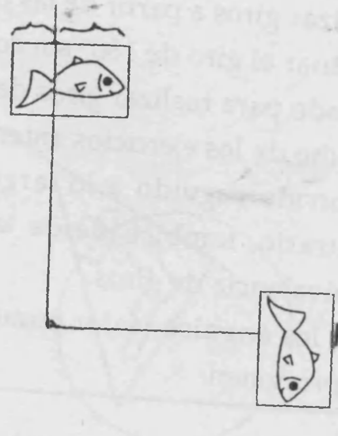
Esta actividad es, en realidad, una serie de actividades encadenadas basadas en las mismas láminas. Gloria trabaja en el nivel 2 de razonamiento porque descubre propiedades relacionadas con la forma de girar una figura y se basa en ellas para resolver los ejercicios. La técnica sugerida por el profesor la tiene ya bastante asimilada y utiliza métodos propios, basados por lo general en propiedades correctas, obtenidas intuitivamente, aunque a veces tiene errores.

Sandra trabaja básicamente en el nivel 1 de razonamiento. Al igual que comenté en relación con la actividad anterior, la técnica de obtención de la imagen de una figura es un algoritmo para Sandra, del que aprende los pasos pero no comprende su justificación. No es capaz de considerar las partes o elementos de una figura de forma coordinada para la realización de un giro: No relaciona las imágenes de dos vértices de una figura para colocar la figura imagen en el lugar exacto. Tampoco relaciona el valor de los ángulos recorridos por distintos puntos de la figura.

Gloria sí comprende cuál es la cantidad mínima de puntos imagen necesarios para colocar correctamente la figura imagen, y Sandra sólo aprende que hacen falta dos porque es lo que se le ha estado enseñando en las actividades previas. En cuanto a la obtención de ángulos equivalentes, Gloria lo ha asimilado por completo y parece que Sandra sí lo sabe resolver, aunque es más lenta que Gloria, posiblemente a causa de la aritmética implicada.

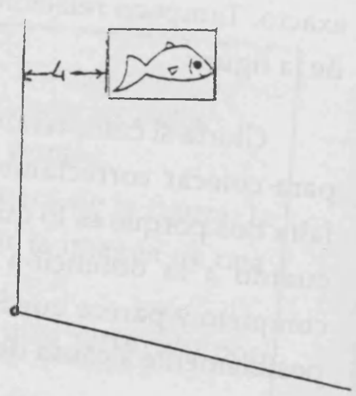
A continuación comentaré con más detalle las actuaciones de las dos alumnas, Sandra y Gloria. El tercer alumno, Jorge, no asiste a ésta sesión ni a las posteriores, por lo que en lo sucesivo no habrá más referencias a él.

La técnica (correcta) seguida por Gloria para resolver el primer ejercicio de esta actividad, que consiste en girar el rectángulo -90°, no corresponde exactamente al algoritmo utilizado hasta ahora y es ella la que se lo inventa: Gloria hace el ángulo recto indicado en el dibujo y después mide con la regla las distancias señaladas en el dibujo mediante una llave (estas marcas son nuestras, no las hace Gloria). Con el compás traza sobre la línea horizontal una marca, utilizando la misma abertura del compás necesaria para la figura original (así asegura la equidistancia al centro). Coloca en vertical la pieza imagen (en la posición correcta) y, para ajustarla en el lugar exacto, mide sobre el lado correspondiente las dos distancias a las que la línea horizontal ha de cortar a uno de los lados (medidas que ya obtuvo antes). Luego, para asegurarse de que está bien resuelto, mide el ángulo girado por otro vértice.



En otro ejercicio de nuevo Gloria intenta servirse de una técnica distinta a la aprendida y muy parecida a la del ejercicio anterior. Ahora se trata de aplicarle a la misma figura de antes un giro de 100° con el centro de giro en un punto exterior a la figura.

Gloria traza un ángulo de 100°, aunque ninguno de sus lados pasa por la figura a girar. Después mide, en horizontal, la separación del rectángulo a uno de los lados del ángulo (ver dibujo; la indicación de la medida es nuestra) y luego intenta colocar el rectángulo imagen a la misma distancia de la otra línea del ángulo. No le satisface el resultado, abandona su método y utiliza el general explicado por el profesor.



En el método anterior seguido por

Gloria hay un aspecto muy interesante, que es el uso de la propiedad (correcta) de que la distancia de un punto a una línea (el lado del ángulo) se mantiene constante cuando a ambos se les aplica el mismo giro. Gloria es capaz de basarse en esa propiedad, no hecha explícita directamente en las sesiones anteriores, para realizar los giros.

Al intentar emplear con esta figura el algoritmo utilizado en actividades anteriores, válido cuando el centro de giro estaba sobre la figura, aparece el problema de que ahora no es suficiente obtener la imagen de un único punto para situar de manera exacta la figura imagen, pues el centro es exterior. Esta actividad será la que servirá como generadora del nuevo algoritmo, que no había sido necesario hasta ahora.

En el mismo ejercicio que he comentado anteriormente (girar 100° una figura con un centro exterior a ella), Gloria coloca la figura imagen a partir de la imagen de un solo punto y dando una inclinación aproximada a la figura, para lo cual desplaza la pieza con la mano a lo largo de la circunferencia. Se produce el diálogo siguiente:

Gloria: [Queda] *así más o menos.*

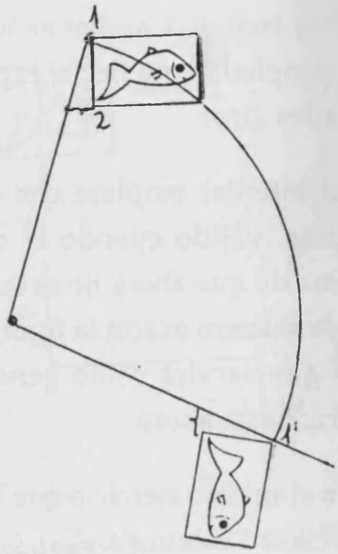
Prof.: *Quiero que sea exacto. Yo puedo moverla así* [dejando fijo el punto imagen obtenido por Gloria midiendo, gira la pieza imagen] *¿y cómo sé yo cuál es la inclinación* [correcta]?.

Gloria hace el recorrido con la pieza a lo largo de la circunferencia, hasta el punto imagen obtenido.

Prof.: *Este punto va ahí, pero ¿cómo puedes asegurar que este otro va ahí?*

Gloria: *¡Ah! ¡Ya está! Quedaría así ... Por aquí* [en la original] *pasa por debajo y por aquí* [en la imagen] *también.*

Gloria se ha fijado en la posición relativa circunferencia - figura en la figura original y coloca la imagen teniendo en cuenta esta relación, lo cual es correcto, aunque no exacto en la forma como Gloria lo utiliza. El profesor quiere provocar la comprensión por parte de Gloria de que la imagen de dos puntos proporciona de manera exacta la ubicación de la pieza imagen y que emplee este método para girar figuras cuando el centro de giro es exterior a ellas; por ello insiste, sin hacer explícita la propiedad requerida, en que Gloria busque algún método alternativo para colocar la imagen de manera exacta. El razonamiento de Gloria se fundamenta en la invarianza de la relación posicional entre la figura original y la circunferencia dibujada o la figura original y un lado de ángulo al pasar a la figura imagen.



....

Prof.: *¿Y cómo sabes que ésa es exactamente la posición?*

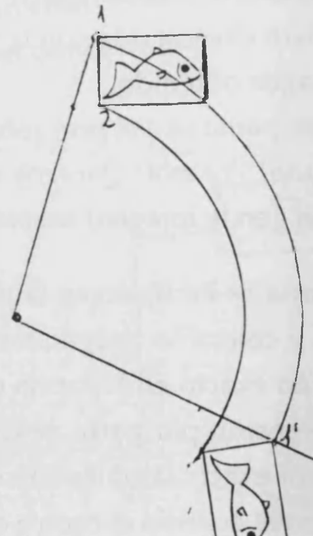
Gloria: *Midiendo de aquí a aquí y de aquí a aquí* [las distancias desde el vértice hasta el lado del ángulo que ha dibujado].

Prof.: *Pero fíjate bien en lo que has hecho. A éste* [el primer vértice de la figura original] *le llamamos 1. A éste* [su imagen] *1'. A éste* [otro vértice de la figura original] *le llamamos 2. ¿Dónde pongo 2'?*

Gloria señala el vértice correspondiente de la imagen que ha colocado.

Prof.: *El 1' yo sé que va aquí* [el profesor hace con el lápiz el recorrido a lo largo del arco correspondiente].

Gloria: *Pues haciendo otro giro* [se refiere a girar el punto 2].



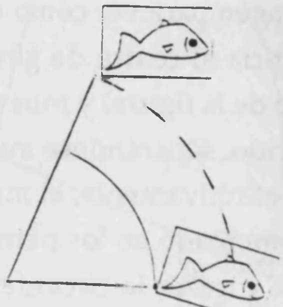
Gloria ajusta correctamente la imagen sin seguir exactamente el método explicado en clase: Traza una circunferencia que pasa por el segundo punto (el 2) y ajusta la figura imagen sin medir el ángulo para este punto, haciendo que el vértice correspondiente de la figura imagen se sitúe sobre la circunferencia (ver dibujo. 1' ya estaba fijado). Seguramente, cuando Gloria aplica este método no lo considera como alternativa al de obtención de la imagen de otro punto, sino que actúa como se le ocurre, aunque aplica un método correcto, basándose quizá en la experiencia de actividades anteriores. No obstante, el profesor quiere que Gloria utilice el algoritmo de cálculo de la imagen de la figura a partir de la determinación de las imágenes de dos puntos, midiendo el ángulo para ambos, que es lo que hace Gloria a continuación.

En un ejercicio posterior, Gloria hace en primer lugar una estimación de la figura imagen para ver cómo queda aproximadamente, pero no tiene en cuenta la equidistancia al centro de giro. Para ello traza el ángulo correspondiente (desde un vértice de la figura) y mueve con la mano la figura aproximadamente a lo largo del recorrido, separándose mucho del centro de giro. Pero, a la hora de colocar la imagen definitivamente, el método que sigue sí es correcto: Utiliza el mismo que hemos comentado en los párrafos anteriores, consistente en obtener la imagen de un vértice y trazar la circunferencia para otro, ajustando la figura de manera que este segundo vértice se coloque sobre su circunferencia. El resultado correcto le sorprende por no coincidir con su aproximación manipulativa inicial, y parece que Gloria no se da cuenta de la ausencia de equidistancia cuando movió la figura, pues piensa que el correcto fue el resultado de su manipulación, como dice: *Yo quiero que pase por aquí* [por donde le salió la primera vez]. Para resolver la contradicción, procede a obtener con cuidado la imagen del segundo vértice.

Sandra tiene errores conceptuales muy fuertes, ya que no ha comprendido la finalidad de las manipulaciones que hace para realizar los giros. Por ejemplo, no tiene en cuenta la equidistancia y tampoco la inclinación de la figura original. Ello se aprecia claramente en el dibujo de la derecha, en el cual utiliza la figura original sólo para trazar el ángulo correspondiente (70°) midiendo desde uno de sus vértices. Una vez que tiene

el ángulo, la figura que manipula para determinar la imagen no la sitúa sobre la original ni la relaciona con ella, sino que hace que uno de sus lados coincida con uno de los lados del ángulo dibujado, con lo cual su inclinación no es la de la figura original, y la imagen se encuentra mucho más próxima al centro de giro. El profesor le indica que así no es correcto, y Sandra responde:

Sandra: *Pues hago con el compás así* [señala con la mano el arco que pasa por el vértice, marcado por nosotros con trazo discontinuo en el dibujo de la derecha].



Sandra no entiende el mecanismo para obtener la imagen, como se ve ahora:

Prof. *Quiero que pongas H* [en un vértice, cuya imagen va a obtener] *... Ponte en H. ¿Por dónde va? ... ¿Hasta ahí seguro? ¿Cómo lo sabes?*

Sandra: *Porque lo he medido.*

Prof.: *Pues lo que tienes que hacer es moverlo aquí.*

Sandra: *¿Pero entonces el pez dónde lo coloco?*

Prof.: *Primero mira dónde está H'.*

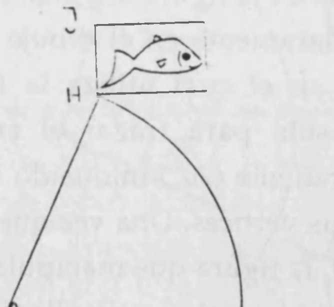
Sandra: *H' está aquí, aquí, ...* [incorrecto].

Prof.: *¿Seguro? Lo que has de hacer es alargarlo.*

Sandra ya da una respuesta correcta para H'.

Prof.: *Ahora sí que estamos seguros. Ahora buscamos otro punto, por ejemplo éste, al que llamamos J y hay que buscar J'. Hay que hacer lo mismo.*

Sandra no lo resuelve bien, pues se basa en las líneas que había trazado antes y no hace ninguna nueva que una el centro de giro con J.



Prof.: *¿Seguro? Te lo voy a explicar* [ver dibujo]: *H coincide con la línea que hemos dibujado* [señala la línea que une el centro de giro y H] *y éste es*

el ángulo que hemos medido. ¿J coincide con la línea?
Sandra: *No.*
Prof.: *¿Y entonces cómo estás segura de que la línea va por ahí?*
Sandra: *Tengo que hacer la línea* [une el centro de giro y J]. *Desde ahí* [indica el punto J].
Prof.: *Muy bien. ¿Hasta dónde? ¿Cuánto tiene que medir el ángulo J?*
Sandra: *No me lo has dicho.*

La frase anterior da a entender que Sandra no ha asimilado la invarianza de la medida de los ángulos girados por diversos puntos de la misma figura.

Prof.: *¿El de H cuánto medía?*
Sandra: *70.*
Prof.: *¿Y el de J?*
Sandra [tras una pequeña pausa]: *70.*

Esta respuesta, aunque correcta, quizá esté provocada porque es la única que un alumno puede dar, ya que no dispone de más datos sobre ese ángulo, ante esa manera, tan usual en el entorno escolar, de formular la pregunta; por ello no se sabe si Sandra realmente es consciente de que todos los puntos giran lo mismo. Más adelante, en esta misma sesión, se ve cómo Sandra responde correctamente, pero nos queda la duda de si ello si ello es resultado de la memorización de los ejercicios realizados.

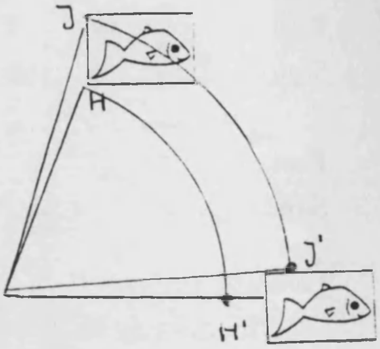
Gloria no tiene dudas sobre esta propiedad y sus afirmaciones son categóricas. Siempre da rápidamente el valor correcto y cuando el profesor le pregunta por qué sucede eso, contesta convencida:

Gloria: *Porque siempre es lo mismo. Porque el ojo está más hacia allí y ahora está más hacia ahí y ...* [el profesor le interrumpe].
Prof.: *¿Toda la figura se ha movido lo mismo?*
Gloria: *Sí.*

Una vez halladas las imágenes de dos puntos de la figura original, Sandra no las relaciona para obtener la imagen:

Prof.: *Y ahora el pez cómo quedaría?*
Sandra: *¿Desde J'?*
Prof.: *Todo. ¿Cómo quedaría al final?*

Sandra: *Así* [ver dibujo].



Sandra no ha tenido en cuenta la simultaneidad de imágenes; se fija sólo en una. Evidentemente, la inclinación no la varía adecuadamente. De todas maneras, parece que reconoce que algo no funciona, pues quita la pieza y pregunta:

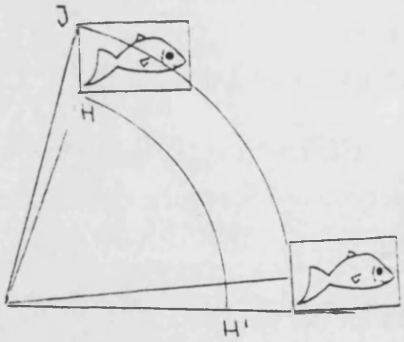
Sandra: *¿Pero cuál pongo?* [se refiere a qué vértice imagen ha de tener en cuenta].

Prof.: *Fíjate en la figura. Fíjate dónde está J y dónde está H ...* [Sandra no sabe qué hacer] ... *En la figura que tienes en el dedo, ¿dónde estarían J' y H'?*

Sandra señala bien J' y H' en la lámina. El profesor coloca la pieza sobre la original y hace que Sandra la vaya desplazando a lo largo del arco. Sandra la coloca mal.

Prof.: *¿H' dónde está?*

Sandra señala bien H', pero coloca la pieza intentando que los dos vértices cuyas imágenes ha obtenido se sitúen sobre el mismo arco (ver dibujo).



Prof.: *H está aquí y H' aquí.*

Sandra: *Entonces tiene que ponerse así* [hace lo mismo que antes, pero ajusta los dos vértices H' y J' a lo largo del arco que lleva H a H'].

Prof.: *Pero fíjate en este otro ahora* [señala J en la figura original].

Sandra ya se da cuenta y coloca bien la pieza.

A continuación el profesor insistirá en la invarianza de la medida del ángulo de giro. En la transcripción presentada con anterioridad se vio que Sandra no la conocía al principio y ahora parece que sí está aprendiendo ese resultado, aunque no es porque tenga clara la justificación, sino más bien porque el profesor insiste en ello.

Prof.: *¿Desde esta línea de H* [la OH] *hasta esta otra* [la OH'] *cuánto mide?*
Sandra: *70.*
Prof.: *¿Y desde la línea de J* [OJ] *hasta la de J'* [OJ'; las señala]*?*
Sandra [piensa un poco]: *70.*
Prof.: *¿Todos 70?*
Sandra [se queda pensando]: *Si esto mide 70* [señala uno de los arcos], *esto mide 70* [señala el otro arco].
Prof.: *¿Y si haces una línea desde la boca?*
Sandra [hace el recorrido con el dedo]: *70.*
Prof.: *Toda la figura 70.*

Cuando Sandra tiene que realizar otro ejercicio, análogo al anterior, no sabe cómo. El profesor ha de ir repasando la técnica, desde su planteamiento.

Para recordar la cantidad mínima de puntos necesarios para obtener la imagen, el profesor pregunta a las niñas. Gloria tiene muy claro el resultado, pero Sandra parece que no entiende la contribución de cada nueva imagen, como se ve a continuación:

Prof. [a Gloria]: *¿Con un solo punto podemos saber cómo queda la figura?*
Gloria: *No. Bueno, si lo haces de casualidad sí.*
Prof.: *Bueno, de casualidad sí, pero ¿con dos lo podrías asegurar?*
Gloria: *Sí.*
Prof.: *¿Y con tres?*
Gloria: *También.*
Prof.: *Más seguro. ¿Y con cuatro?*
Gloria: *Mejor.*
Prof.: *El número mínimo para saber cuántos puntos hay que coger cuál es?*
Gloria: *Dos.*
Prof. [a Sandra]: *¿Cuántos puntos hay que coger como mínimo?*
Sandra: *Dos.*
Prof.: *¿Y si cogemos tres?*
Sandra: *No. No puedo coger tres.*
Prof.: *Imagínate que a este punto lo llamo K. ¿Podría coger el punto K?*
Sandra: *Sí.*

Prof.: *¿Y a este punto lo puedo llamar B? Puedo coger los puntos que quiera. Lo que pasa es que como mínimo hay que coger ...*

Sandra: *Dos.*

Gloria: *¿Y como máximo?*

Sandra: *1200.*

Gloria: *No. Más. 4000.*

Respecto a los giros equivalentes, de sentido contrario y que en valor absoluto suman 360°, el profesor hace un repaso al final de la sesión. Comienza planteándole a Gloria girar de 230° una figura. Gloria, sin ninguna indicación, hace el equivalente, giro de -130°. A Sandra hay que hacerle preguntas muy dirigidas para que conteste sobre la equivalencia. Parece que visualmente sí lo comprende, aunque no ha habido la oportunidad de comprobar si lo aplica espontáneamente cuando resulta conveniente.

La realización de giros de 180° empleando sólo la regla la llevan a cabo en un ejercicio. Sandra enseguida sitúa aproximadamente bien la pieza y está convencida de que su solución es correcta. Gloria mide con los dedos la distancia y Sandra hace a continuación lo mismo. No obstante, en el repaso que el profesor efectúa al principio de la sesión siguiente, una de las cuestiones hace referencia a los procedimientos posibles para efectuar giros de 180°. Sandra sólo reconoce la regla y especifica que con el compás no se puede. Su idea es que, al estar alineados cada punto con el centro de giro y su imagen, el único instrumento posible es la regla.

Sesión 16

Láminas: 3-G-12.

Objetivos: Realización de giros cuando el centro de giro está sobre la figura.

Angulos equivalentes (complementarios a 360°).

Composición de giros del mismo centro (centro sobre la figura).

Actividad 12: Realizar el giro indicado.

Dar el valor del ángulo de giro que produce el mismo resultado que alguno de los giros que acaban de hacer.

Una vez girada una figura cierto ángulo, girar la imagen mediante otro giro con el mismo centro. Dar el valor del ángulo del giro resultante.

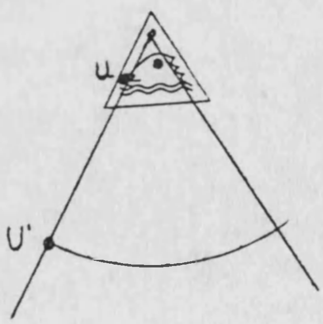
La composición de giros sólo se le propone a Gloria.

Respecto al trabajo con ángulos equivalentes, la situación es análoga a la de sesiones anteriores: Cuando se le pregunta a Sandra directamente, sí tiene la visión del recorrido correspondiente y de que el valor del ángulo es el complemento a 360°, cambiado de signo, pero no usa espontáneamente esa propiedad. Gloria domina la equivalencia de ángulos y, por sí misma, la utiliza cuando le resulta cómodo.

A pesar de que, en alguna sesión anterior, ya se habían realizado giros con el centro situado sobre la figura a mover (en uno de sus vértices o lados), la realización posterior de giros con el centro exterior a la figura provoca el olvido del procedimiento a emplear cuando el centro se encuentra sobre la figura: Las alumnas no saben cómo proceder. En el caso de Sandra está claro, pues cada situación distinta a una anterior requiere el entrenamiento correspondiente para llegar a resolverla. Gloria busca la situación análoga a la anterior, cuando el punto era exterior a la figura, y se requiere instrucción a lo largo del primer ejercicio hasta que comprende el proceso en el caso actual; a partir de ese momento sí efectúa bien todos los casos que se le presentan de este tipo.

A continuación comentamos con más detalle lo que hemos resumido en los párrafos anteriores:

Antes de comenzar a resolver los ejercicios de esta actividad, se realiza un repaso de lo trabajado en la sesión anterior: Cantidad necesaria de puntos a mover para colocar la imagen cuando el centro de giro estaba fuera de la figura, invarianza de la amplitud del ángulo girado por los diversos puntos de una figura y realización de giros de 180° con regla.



Sandra sigue teniendo problemas conceptuales importantes. Por lo general, sigue sin comprender las justificaciones de los diversos pasos de los algoritmos que aplica para realizar giros. Sandra tiene que girar 60° el triángulo equilátero (dragón). Recuerda la técnica cuando el centro de giro era exterior, aunque mal, pues, después de haber trazado un ángulo de 60° que pasa por el centro de giro y otro punto, al que llama U, designa mediante U' (imagen de U, según la nomenclatura que se ha utilizado siempre) un punto sobre esa misma línea (ver dibujo dela página anterior). Se requiere la ayuda constante del profesor hasta que Sandra coloca bien la pieza. En el ejercicio siguiente, similar al que acaba de realizar, Sandra sigue teniendo algunos problemas.

El primer ejercicio de Gloria consiste en girar 120° el dragón (triángulo equilátero). Traza una línea que pasa por el centro de giro, pero no sabe seguir. Manifiesta una necesidad de que el centro de giro se encuentre en el exterior:

Gloria: *Es que el centro de giro debería estar aquí* [señala el punto que hemos marcado mediante una x en el dibujo].
Prof.: *Antes el centro de giro estaba fuera de la figura y ahora está dentro.*
Gloria: *Ahora pongo esto* [el transportador] *así y el 360 en el centro de giro.*
Prof.: *¿Dónde está el centro de giro?*
Gloria: *Es que también puedo hacer una línea ahí, o ahí, o ahí* [señala líneas en diversas direcciones, que pasan por el centro de giro.

El profesor pincha la pieza por el centro de giro y le pide a Gloria que la gire. Le recuerda lo que hacía cuando el centro de giro era exterior, fijándose en un punto, y hace que Gloria obtenga la imagen de un punto. Mientras lo resuelve, parece que Gloria no sabe exactamente el camino a seguir, pues el profesor la ayuda mediante diversas preguntas. Pero, una vez obtenida la imagen de un punto, parece que de repente Gloria relaciona lo que sabe (centro de giro exterior) con la situación actual (centro de giro sobre la figura) y en adelante ya no tendrá problemas en ese tipo de ejercicios. Además, parece que Gloria se da cuenta de la cantidad de puntos-imagen necesarios para colocar la figura imagen, según el centro de giro esté en el interior o en el exterior de la figura:

Prof.: *¿Qué diferencia hay* [de cuando el centro de giro está dentro de la figura] *a cuando el centro de giro está fuera de la figura?*
Gloria: *Que había que coger dos puntos ... Y aquí hay uno.*
Prof.: *¿Con uno es suficiente?*
Gloria: *Sí. Puedes coger más.*
Sandra: *Sí. Pero lo mínimo son dos.*
Prof.: *¿Si coges más qué pasaría?*

Gloria: *Mejor.*
Prof.: *Mejor. Te asegurarías más puntos.*

La parte de la actividad dedicada a la composición de giros del mismo centro está centrada casi por completo en Gloria. Sandra no interviene directamente. Gloria no tiene ninguna dificultad en obtener el giro resultante mediante la correspondiente suma de los ángulos.

Sesión 17

El profesor, como es usual, repasa algunas de las propiedades y métodos para realizar giros estudiados con anterioridad. Por lo general lo lleva a cabo mediante preguntas dirigidas a las niñas. En concreto recuerda lo siguiente:

- Giro de 180° con regla sólo o con compás y transportador.
- Giros equivalentes.
- Cantidad mínima de puntos imagen necesarios para colocar la figura girada, según que el centro de giro esté dentro o fuera de la figura.
- Métodos para girar una figura cuando el centro de giro está dentro o fuera de la figura.
- Composición de giros del mismo centro: Procedimiento y resultado.

A pesar de que Sandra no había intervenido activamente en la composición de giros del mismo centro en la sesión anterior, contesta correctamente el valor del ángulo del giro resultante en el caso que le plantea el profesor, que corresponde a una suma sencilla de dos sumandos. Pero ello no significa que haya establecido la relación entre la operación y el efecto de los ángulos; en particular, cuando hay ángulos positivos y negativos Sandra da en ocasiones como resultado la suma de todos los valores. Por ejemplo, para los ángulos -200°, -160° y +10°, Sandra hace la adición 200°+160°+10°.

Sandra sigue sin asimilar el algoritmo utilizado para girar una figura, pues en la explicación de un ejemplo resuelto en alguna sesión anterior (se trata de un giro con centro fuera de la figura) calcula mal varias veces la imagen de un punto. Veamos parte del diálogo entre Sandra y el profesor: Este le ha pedido a Sandra que explique cómo procedió al girar 50° el dragón en una sesión anterior (Sandra tiene ante sí la lámina con el ejercicio ya resuelto).

Sandra: *Elegiríamos un punto de aquí* [la figura], *por ejemplo éste, y lo uniríamos con ese punto de aquí* [centro de giro]; *luego elegiríamos otro punto y lo uniríamos* [con el centro de giro; lo señala]; *luego cogeríamos esa cosa redonda* [el transportador] *y pondríamos el 360* [el 0°] *aquí* [señala una de las líneas] *hasta el número ése* [50° en el transportador].

Prof.: [Los 50° que hay que medir] *serían desde aquí* [la línea que une el punto a girar con el centro de giro] *¿hasta dónde? ...* [Sandra señala mal]... *Ese punto lo llamamos S. ¿Dónde iría S'?...* [Sandra señala mal]... *Más fácil. Llamamos O al ojo. ¿Dónde estará el ojo "prima"?*

Sandra señala un vértice. El profesor le pregunta a Gloria, la cual da la solución correcta y luego Sandra señala en los lugares correctos las imágenes de varios puntos.

Láminas: Hoja en blanco.
Objetivos: Composición de giros del mismo centro (centro en la figura y fuera de ésta).
Simplificación de los valores numéricos de los giros que se componen.
Actividad 13: Se dan varios giros con el mismo centro y hay que indicar cómo quedará una figura (que el profesor dibuja o pega).
Se dan los valores de los ángulos de varios giros que intervienen en una composición. Hay que obtener el valor del ángulo del giro resultante. En este tipo de ejercicios no hay ninguna figura concreta. Algunos de estos ejercicios son para resolverlos individualmente y otros por parejas.

La composición de giros del mismo centro parece que no presenta dificultades, aunque hay diferencias entre la efectividad de las dos niñas, ocasionadas por la visión de equivalencia de giros y la fluidez en el cálculo aritmético:

Gloria simplifica ángulos cuya suma es 360° y también ángulos opuestos, reduce a ángulos menores de 360° (por ejemplo, 390° lo convierte a 30°), y sólo realiza los giros que quedan tras las simplificaciones. Esa visión la adquiere tras algunos ejercicios. Al principio sólo simplifica los opuestos; luego también el resto. Su manejo de las operaciones aritméticas cuando reduce un ángulo mayor de 360° o cuando compone dos giros en los que el ángulo positivo es menor que el negativo, es correcto. En general se basa en técnicas en las que relaciona el sentido de giro y, algunas veces que el ángulo del minuendo es menor que el del sustraendo, transforma 0° en 360°. Ello muestra su comprensión de la relación entre los ángulos de giros equivalentes, además de fluidez en la operatoria.

Sandra, tras algunos ejercicios en loa que el profesor le indica la forma de proceder, sí simplifica ángulos opuestos, pero no lleva a cabo otro tipo de simplificaciones. Por lo general tiende a realizar los giros sucesivamente, aunque alguna vez utiliza directamente el giro resultante.

El profesor les sugiere una técnica para manejar más cómodamente los ángulos de signos contrarios: Sumar los positivos entre sí, sumar los negativos entre sí y restar el resultado menor del mayor, dejando el signo del mayor. Cuando el profesor está presentando esa regla, Gloria adelanta varias veces correctamente la operación a realizar a su verbalización por parte del profesor, lo cual muestra que comprende el método.

A continuación muestro un fragmento de la actuación de Sandra, posterior a la solución, en esta sesión, de varios casos de composición:

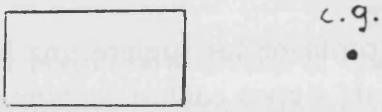
Prof.: *Ahora os voy a dar una figura y el centro de giro y os voy a dar varios pasos, como antes y, o nos planteamos hacerlo paso a paso, o resolvemos todo el problema y con un solo paso nos evitamos hacer los cuatro o cinco pasos.*
Sandra: *Yo lo quiero hacer paso a paso.*

El profesor le dice que trate de ahorrar trabajo y le da los ángulos (de giros) de –180°, –20°, –50°, +50° y +10°.

Prof.:*Primero me dices las operaciones que haces y después te digo si el resultado está bien y luego ya lo haces.*
Sandra: *¿Pero lo hago ahora?*
Prof.: *Primero el resultado porque si no no vas a saber cómo quedará el resultado.*
Sandra [mirando la lámina]: *A ver qué va primero.*
Prof.:*¿Qué será primero, mover la figura o hallar el resultado?*
Sandra: *Mover la figura.*
Prof.:*¿Dónde?*
Sandra: *¡Ah, no! Hallar el resultado.*

Veamos a continuación algunos ejemplos del comportamiento de Sandra, los cuales muestran la necesidad de insistir en la realización de los giros que integran una composición antes de que los alumnos entiendan la simplificación correspondiente:

El primer ejercicio propuesto a Sandra consiste en mover un rectángulo, que está dibujado y no tiene ningún diseño en su interior, los siguientes giros (el centro siempre es el mismo, ver dibujo): Primer giro 180-, segundo giro 180+, tercer giro 90- y cuarto giro 90-.



Prof.: *Me tienes que decir dónde quedaría. Puedes hacer todos los cálculos que quieras, mover la figura, ...*

Sandra va realizando el ejercicio paso a paso. Por tanto, no tiene en cuenta el repaso que hizo el profesor al principio de la sesión, concerniente a la simplificación de giros, y durante el cual Sandra respondió dando como valor del giro resultante la suma de los ángulos de los giros que se componían (sin tener en cuenta el signo).

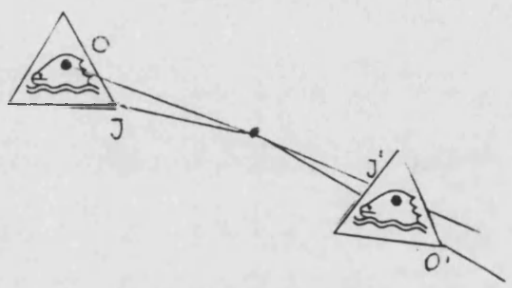
Tras el dibujo de la primera imagen (giro de 180°), Sandra tiene que pensar el lugar donde irá la segunda imagen, la cual obtiene a partir de la primera. Parece, por tanto, que no relaciona el hecho de que +180° y –180° se anulan, pues, en caso afirmativo, debería haber colocado directamente la segunda imagen sobre la original, sin necesidad de realizar los dos giros. Los giros siguientes de esa composición (–90° y –90°), también los resuelve paso a paso y no sitúa la imagen en el lugar correcto. Entonces el profesor le pregunta:

Prof.: *¿No quedaría un poco más bajo? ¿90 y 90 cuánto es?*
Sandra: *180.*

Prof.: *Y si 90 y 90 es 180, ¿pasaría aquí* [a 180° de la original] *o aquí* [sobre la original]*?*

Sandra tiene que hacer el recorrido de los cuatro giros, -180°, +180°, -90° y -90°, antes de contestar. Pero no relaciona esas medidas estándar con la posición correcta: Modifica algo, muy poco, la última imagen, ya que sabe que está mal porque el profesor está intentando que corrija, pero sigue dejándola de manera incorrecta. Es evidente que una comprensión clara provocaría la colocación inmediata de la figura a 180° de la original. Esto es lo que hace Gloria cuando el profesor le pide que intervenga.

Otra situación interesante es esta sesión se produce cuando Sandra tiene que mover el dragón (triángulo equilátero) según una composición de giros con el centro en el exterior de la figura. En este caso lo interesante no es la realización de la composición, cuyo giro resultante tiene como ángulo -190°, sino la inclinación con la que Sandra coloca la figura. Seguramente se podría haber resuelto con rapidez si Sandra hubiera comprobado con algún material (por ejemplo, un disco) su resultado, pero el profesor quiere que Sandra llegue a darse cuenta de su error sin recurrir a la comprobación directa. El profesor dirige algo la instrucción para que Sandra considere dos puntos de la figura original, los identifique mediante letras (O y J) y que obtenga sus imágenes (O' y J'). Una vez obtenidos, Sandra no modifica la inclinación de la figura, con lo cual queda aproximadamente trasladada (ver dibujo).



Prof.: *Sandra, ¿qué hay de raro? ¿Puede ser así?*

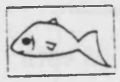
Sandra [riéndose]: *No. Este* [punto] *se ha ido aquí y éste allí ... Tenía que estar recto y está cruzado.*

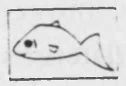
O sea, lo que le llama la atención a Sandra es que las líneas que unen puntos entre las figuras original e imagen se cruzan; esto no es de extrañar, pues esa situación no se había presentado anteriormente. Para que Sandra se dé cuenta de que ha de colocar la figura al revés o de que no ha hecho coincidir los vértices correspondientes, el profesor utiliza otra figura, un pez (rectángulo): Coloca un rectángulo sobre el dragón y le pide a Sandra que lo mueva 180°.

Sandra: *¿Más o menos?* [aunque si se le pregunta directamente responde que da igual +180° que -180°, suele pedir el signo cuando ha de utilizar ese ángulo].

Prof.: *Me da igual.*

Sandra lo coloca en el lugar correcto para 180°, pero no invierte la pieza, sino que la sitúa trasladada (ver dibujo).





Prof.: *¿No giraría también el pez?*

Tras un poco de instrucción, insistiendo en que Sandra se fije en que el pez ha de girar, Sandra hace el recorrido de la semicircunferencia variando adecuadamente la inclinación. Para recalcar el resultado, el profesor escribe sobre la pieza "cola" y "cabeza" en los lugares correspondientes, destacando que la parte de la figura original que está más cerca o más lejos del centro de giro también lo está en la figura imagen. Al pasar de nuevo a la figura del dragón, Sandra no se llega a dar cuenta de la necesidad de que la figura esté al revés hasta que el profesor pega una pieza sobre el transportador y lo gira los 190°.

Simplemente como anécdota complementaria, señalar que a las niñas les gusta resolver conjuntamente los ejercicios en los que hay que obtener el valor numérico del giro resultante de una composición, pues las simplificaciones previas les resultan divertidas. De todas maneras, como indiqué con anterioridad, Sandra se limita a simplificar ángulos opuestos entre sí, mientras que Gloria efectúa más simplificaciones. En el repaso al comienzo de la sesión siguiente, el profesor debe ayudar algo a Sandra para recordar los pasos a seguir (sumar los positivos, sumar los negativos y restar); además, Sandra da siempre como signo del ángulo resultante menos *porque se hace una resta.*

Sesiones 18 y 19

En el repaso inicial se hacen dos ejercicios dedicados a la obtención del giro resultante de una composición de giros con el mismo centro y a la obtención de los giros equivalentes a algunos dados por el profesor. Sandra precisa algo de ayuda, lo cual no sucede con Gloria.

Láminas: 3-G-14.

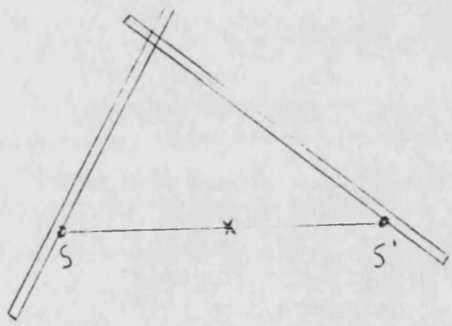
Objetivos: Obtener la mediatriz como el lugar de los posibles centros de giros que transforman un punto en otro.

Utilizar la equidistancia desde el centro de giro a un punto y su imagen para obtener centros de giro.

Actividad 14 (mediante trabajo en grupo): Buscar el centro de un giro que transforme un punto en el otro. Buscar otros centros de giro.

Medir la distancia desde el centro de giro a un punto y a su imagen. Utilizar esa característica de equidistancia para obtener nuevos centros de giro.

Tras descubrir que hay una recta donde se encuentran los centros de giro, indicar por dónde pasa la recta de los centros de giro y que en ella están todos los posibles centros de giro. Comprobarlo en varios ejemplos.



Las niñas obtienen enseguida el primer centro de giro, correctamente, midiendo la mitad de la distancia que separa los puntos (giro de 180°). Luego proceden por tanteo, sirviéndose del compás y Gloria obtiene algún punto próximo al anterior. El profesor hace que midan longitudes y que observen la equidistancia del centro de giro a los dos puntos, tras lo cual Gloria se sirve de dos reglas para obtener nuevos centros de giro (ver dibujo). Para encontrar el centro siguiente, sin que nadie se lo indique, se sirve intuitivamente de la simetría: Mide la distancia desde el primer centro de giro (de ángulo 180°) al último centro que ha encontrado y coloca otro centro a la misma distancia, simétrico respecto a la línea que une los dos puntos dados como datos en el ejercicio. Tras varios puntos, Gloria ve que puede conseguir siempre puntos "más atrás" y da toda la recta (la mediatriz) como solución. (En la mediatriz no se considera explícitamente la perpendicularidad al segmento que une los dos puntos que se corresponden mediante el giro. Implícitamente se sitúa con la inclinación aproximada, mediante consideración visual)

Sandra aplica propiedades que Gloria descubre. Así, cuando Gloria se sirve de dos reglas, Sandra también lo hace después para descubrir nuevos giros. Lo mismo sucede con la simetría.

Gloria utilizará consistentemente en ejercicios posteriores la propiedad de que la mediatriz es el lugar geométrico de los centros de giro que transforman un punto en otro y la propiedad de equidistancia de un punto y su imagen al centro de giro. Sandra emplea correctamente la propiedad cuando la acaba de descubrir, pero no se sirve de ella en ejercicios posteriores o tiene algún error de vez en cuando. Transcribo a continuación el momento en el cual Gloria hace referencia a la mediatriz:

Gloria: *Mira, todo esto* [son centros de giro; se trata de la mediatriz].
Prof.: *¿Entonces todos los centros de giro cómo tendrían que salir?*
Gloria: *En la misma recta.*
Prof.: *Entonces, ¿cualquiera que esté sobre la misma recta será centro de giro?*
Gloria: *Sí.*
Prof.: *¿Y esa recta por dónde tiene que pasar?*
Gloria: *Por el primer centro de giro.*
Prof.: *¿Y de aquí a aquí cuánto medirá respecto de aquí a aquí?* [de un punto de la mediatriz a S y S'].
Gloria: *Lo mismo.*

El profesor repite la pregunta con otros puntos de la mediatriz para asegurarse de que Gloria ha comprendido la propiedad.

Láminas: 3-G-15.1 y 3-G-15.2.
Objetivos: Utilizar la idea de que todos los posibles centros de giro se encuentran sobre la mediatriz.
Utilizar la equidistancia desde el centro de giro a cada punto y su imagen para identificar centros de giro.

Actividad 15: Indicar cuáles de los puntos marcados son centros de giros que transforman A en A'.

Gloria se sirve de la propiedad descubierta anteriormente de que todos los centros de giro están sobre la mediatriz. De hecho, su procedimiento consiste en medir la distancia de A a A', trazar una línea por el punto medio (con la inclinación deducida visualmente, que sí es perpendicular) y considerar como válidos los puntos situados en esa línea.

Sandra comienza resolviendo la actividad mediante la comprobación de la equidistancia punto a punto, ello a pesar de que al final del primer ejercicio ve la explicación de Gloria y se da cuenta de que puede emplear la mediatriz:

Sandra: *¡Ah! Entonces estos también sirven* [y marca los que se encuentran alineados y todavía no había comprobado].

Láminas: 3-G-16.
Objetivos: Obtener la mediatriz mediante el compás.
Actividad 16: El profesor muestra cómo servirse del compás para trazar la mediatriz y las alumnas deben repetir el procedimiento.

Después de que las niñas verbalicen que la recta de los centros de giro pasa *por la mitad* (del segmento que une los dos puntos), el profesor explica cómo servirse del compás para trazar esa recta y pide que las niñas comprueben su validez en varios de sus puntos, o sea, que son centros de giro que transforman uno de los puntos dados en el otro.

El algoritmo para trazar la mediatriz con compás les resulta complicado siempre y es una fuente de errores, pues las niñas memorizan los pasos a seguir, y en ocasiones olvidan alguno de ellos.

Láminas: 3-G-17.1 y 3-G-17.2.
Objetivos: Identificar, mediante corte de mediatrices, el centro del giro aplicado en cada caso.
Utilizar el compás para trazar la mediatriz.
Obtener el ángulo del giro realizado.
Actividad 17: Buscar el centro del giro que transforma una figura en la otra.

Para obtener el centro de giro que transforma una figura en otra el profesor tiene que guiar el proceso. Las niñas utilizan un único punto de la figura original y su imagen y obtienen un centro de giro válido para ese el punto de la figura (el punto medio del segmento que los une), pero piensan que es la solución pedida, o sea, el centro del giro que transforma una figura en la otra. Como es usual, cuando el profesor explica cómo resolver el ejercicio, Sandra va aprendiendo los pasos del método a seguir y sí puede realizarlos, aunque con mucha frecuencia el profesor le tiene que hacer preguntas directas para que vaya resolviendo el ejercicio.

Gloria utiliza como centro de giro el punto medio que une dos puntos que se corresponden y traza la circunferencia que pasa por ellos. El profesor le pide que compruebe si el centro que está utilizando es válido para otros puntos de la figura. Gloria traza con el compás una circunferencia que pasa por otro punto de la figura original y se queda sumamente extrañada al ver que la circunferencia no pasa por el punto correspondiente de la figura imagen. Entonces toma como centro de la circunferencia (y de giro) otros puntos de la mediatriz del segmento que consideró inicialmente y ve que tampoco son válidos. Guiada por el profesor, Gloria aprende que ha de utilizar el corte de dos mediatrices, pero no comprende por qué. Es muy explícita su expresión: [Teníamos dos peces y había que hallar] *el centro de giro, pero de todo,* la cual muestra que sí comprende que, para que un punto sea centro de giro, no basta comprobar que es válido par un punto de la figura. Sandra no lo tiene claro. Veamos el fragmento siguiente, que corresponde al repaso que el profesor realiza al comienzo de la última sesión (sesión 20):

Sandra explica que hay que trazar dos mediatrices para obtener el centro de giro que transforma una figura en otra. El profesor le pregunta qué sucede si sólo traza una.

Sandra: *Que sería para un punto.*
Prof.: *¿Y para los otros serviría?*
Sandra se queda callada.
Gloria: *No. Bueno, podría ser casualidad y sí que sirviera.*

A lo largo de muchas de las sesiones aparece la equivalencia entre los giros de +180° y -180° con el mismo centro. Gloria hace referencia a ella de inmediato; Sandra sólo cuando se le pregunta directamente y, aunque sí es capaz de justificarlo bien, a veces parece que su primera idea no tiene en cuenta tal equivalencia. Eso sucede también en las últimas sesiones; las transcripciones siguientes recogen algunos momentos:

En la sesión 18, Sandra ha obtenido como centro de un giro que transforma un punto en otro el punto medio del segmento que los une. El profesor le pide la medida del ángulo de giro.

Sandra: *180.*
Prof.: [Con signo]*¿más o menos?*
Sandra: *Así, menos* [hace con la mano la semicircunferencia en el sentido de las agujas del reloj].
Gloria: *Y también más.* [hace con la mano la semicircunferencia en el sentido contrario a las agujas del reloj].

Sandra se da cuenta de que también es válido el otro sentido.

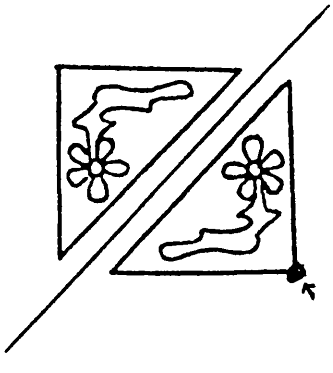
Otro ejemplo, esta vez de la sesión 19, es el siguiente: Una vez obtenido el centro de giro para los dragones de la lámina 3-G-17.1 que se corresponden por un giro de 180°, el profesor pregunta cuánto se ha movido el dragón por ese giro.

Gloria [sin medir, contesta inmediatamente]: *180..*
Sandra mide y pregunta: *¿Más o menos?*
Gloria: *Da igual.*
Prof.: *¿Por qué?*
Gloria: *Porque da igual.*
Sandra [tras la intervención de Gloria]: *Da lo mismo ... Porque más sería así* [señala la semicircunferencia correspondiente] *y menos así* [señala la semicircunferencia correspondiente] *y 180+180 = 360.*

En el ejemplo siguiente se ve que Sandra tiene una mezcla de ideas correctas y confusas respecto a las características visuales -no obtenidas mediante algoritmos- del lugar donde se encuentra el centro de giro y de la posición de la figura imagen mediante giros de 180°:

El profesor le pregunta a Sandra cuánto se ha movido la flor de la lámina 3-G-17.2 (la pregunta la realiza antes de que Sandra haya trabajado con esas figuras, o sea, se trata de una aproximación visual).

Sandra [al poco rato]: *180 ... Porque si hacemos una raya es la mitad* [ver dibujo].



....

Prof.: *¿Por dónde estará el centro de giro?*

Sandra señala el vértice marcado con una flecha en el dibujo. Luego corrige y señala bien.

Prof.: *¿Y cuánto se habrá movido?*

Sandra: *360.*

Prof.: *Si hace 360 haría así* [el profesor recorre una circunferencia completa con el dedo]. *Como se queda en la mitad ...*

Sandra: *180.*

El profesor le pide entonces a Sandra que explique el proceso a seguir para obtener el centro de giro. Sandra va despacio pero, con algo de ayuda, llega a formular por completo el método de corte de mediatrices.

En las actividades cuyo objetivo es obtener el centro de giro, sólo se le plantea a Gloria el cálculo del valor del ángulo del giro. Gloria lo calcula correctamente, dando además los dos valores posibles, el positivo y su equivalente negativo. De hecho, Gloria sigue empleando correctamente en todos los casos la equivalencia de giros.

Sesión 20

Láminas: 3-G-18.

Objetivos: Composición de giros de distinto centro: Ver que el resultado es un giro con otro centro y ángulo la suma de los ángulos (no se dan ejemplos en los que el resultado sea una traslación).

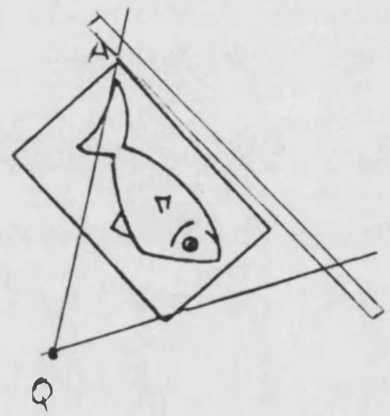
Actividad 18: Efectuar la composición de los giros indicados. Hallar el centro del giro que pasa la figura inicial a la final. Obtener el ángulo del giro.

Habría sido necesario más tiempo para verificar la comprensión de la propiedad por las niñas. Sandra, como es usual, va aplicando las instrucciones del profesor y las dificultades que tiene en los distintos algoritmos que debe aplicar originan que el profesor no le pregunte por el valor del ángulo del giro resultante.

Igual que en sesiones anteriores, parece que Sandra ha asimilado algunas propiedades puntuales, pero no el proceso general. Así, por ejemplo, está convencida de la igualdad del ángulo que hay que aplicar a los puntos de la figura que gira, pero tiene errores importantes, como el siguiente:

El primer ejercicio de composición de giros que se plantea sobre giros de distinto centro es girar el rectángulo (pez) mediante G(R,-130°)∘G(Q,-60°). El profesor va recordando el algoritmo de giro. Sandra llama A al primer punto a girar.

Prof.: *¿Cuánto mide desde Q hasta A?* [Sandra lo mide con la regla] ... *¿Dónde tendrías que poner A'?*



Sandra coloca la regla como indico en el dibujo.

Gloria, antes de resolver el ejercicio, dice que la inclinación será la suma de los ángulos (en los ejemplos concretos), pero en realidad no llega a comprobar los resultados por falta de tiempo, con lo cual las afirmaciones de Gloria vienen provocadas por ser las únicas posibles con los datos de que dispone, pero es probable que no provengan de una justificación fundamentada. Veamos por último algunas de las intervenciones de Gloria en relación con el giro resultante de la composición anterior. Gloria ha efectuado los dos giros sucesivamente y el profesor le pregunta:

Prof.: *¿Desde este pez* [el primero] *hasta éste* [el último] *cuánto hemos movido?* [el profesor hace que Gloria se fije en un punto y que piense que el resultado de la composición se puede hacer sin necesidad de obtener el pez intermedio].

Gloria: *-190* [Correcto].

Prof.: *¿Seguro?*

Gloria: *Sí.*

Prof.: *Date cuenta de que el centro de giro ha cambiado.*

Gloria: *Sí. Pero el giro es distinto.*

Prof.: *La inclinación desde la primera* [figura] *hasta la tercera, ¿el giro que habrá hecho de cuánto será?*

Gloria: *Es que éste no es igual que éste* [señala las figuras. Se refiere a los centros de giro].

Prof.: *¿Te refieres al centro de giro?*

Gloria: *Sí.*

Prof.: *Yo me refiero a la inclinación.*

Gloria: *190.*

A continuación, el profesor le pide a Gloria que halle el centro de giro para ver si ha habido un giro de -190°.

La cantidad de líneas trazadas, junto con la dificultad de obtener las mediatrices con el transportador hace que al final prescindan de su obtención y el profesor continúe el trabajo sin el centro de giro.

Prof.: *¿Habría un centro de giro que desde la figura 1 pasara a la 3?*

Gloria: *Sí.*

Prof.: *¿Seguro o es posible?*

Gloria: *Seguro.*

Prof.: *¿Por qué?*

Gloria: *Porque se puede hacer.*

Prof.: *Porque lo hemos hecho* [en otros ejercicios]: *Cuando dos figuras estaban giradas hallábamos el centro de giro por las mediatrices. Otra cosa, ¿cómo crees que estará girado este pez en total, si el primer giro era de -60 y el segundo de -130?*

Gloria: *¿Con el mismo centro?*

Prof.: *Con distinto.*

Gloria: *El primero -60 y el segundo -130.*

Prof.: *¿Y en total?*

Gloria: *-190.*

Prof.: *Con el centro de giro que hubiésemos hallado entre las figuras correspondientes.*

Gloria: *1 y 3* [figura original y resultado de la composición. El profesor ha ido señalando esas figuras].

Prof.: *¿Tú crees que es posible o no?*

Gloria: *Sí. ¿Y con tres giros?*

Prof.: *Imagínate que tenemos A, B y P. Giro el pez con* [centro de giro en] *A y lo muevo +10. Lo cojo desde* [el centro de giro] *B y lo muevo -200. Después, desde* [el centro de giro] *P, +90.*

Gloria: *Si hubiéramos hallado un centro de giro para todos, ... -100.*

Prof.: *¿Desde dónde? ¿Desde A? ¿Desde B? ¿Desde P?*

Gloria: *Desde otro centro de giro.*

....

Prof.: *¿Y cómo lo tendríamos que haber hallado?*

Gloria: *Con esto* [se refiere al método de las mediatrices].

En el diálogo siguiente el profesor le pregunta a Gloria sobre el resultado de la composición de giros cuando hay cuatro centros de giro: G(A,-100°), G(B,-50°), G(C,80°) y G(D,40°).

Prof.: *¿Habría un centro de giro* [resultante]*?*

Gloria: *Sí.*

Prof.: *¿Que sea el resultado de todos? ¿Dónde estaría el resultado y cuánto se movería?*

Gloria: *Primero con un centro lo mueves como quieras.*

Prof.: *No. Primero hay que moverlo con A, después con B, después con C y después con D.*

Gloria: *¿Para qué tantos?*

Prof.: *Porque en este caso hay cuatro centros de giro y hay que moverlo con todos.*

Gloria: *Pues lo mueves con todos. Después hallas las dos mediatrices. Se movería ... -30.*

Prof.: *¿Para hallar el centro de giro lo harías con la figura original y cuál más?*

Gloria: *La final.*

Prof.: *¿Qué pasa si sólo cogemos un punto* [quiere decir si sólo obtiene una mediatriz]*?*

Gloria: *Que sólo tienes el centro de giro de ese punto.*

La experimentación termina aquí. Estas últimas respuestas de Gloria muestran que trata de generalizar las propiedades y métodos de trabajo anteriores, si bien no tiene claras todas las conexiones entre los diferentes elementos implicados. Ello nos da pie para pensar que, con una enseñanza más prolongada, podría haber comprendido la propiedad de la composición de giros de distinto centro (con suma de ángulos no múltiplo de 360°) y la técnica para la determinación del giro resultante. En este momento Gloria usa un razonamiento correcto de nivel 2, pues basa sus deducciones y justificaciones en los ejemplos, con las correspondientes generalizaciones.

En cuanto a Sandra, su forma de actuación se basa fundamentalmente en la memorización y dominio de procedimientos algorítmicos poco complejos. Se podría decir que se encuentra en transición entre el primer y segundo nivel de razonamiento.

RESUMEN DE LA EXPERIMENTACIÓN EN 6º DE E.G.B.

Listado de las actividades experimentadas.

Láminas: No hay.

Objetivos: Obtener información sobre la idea que tienen los alumnos de qué es un giro. Introducir el concepto de giro.

Actividad 1: Se piden ejemplos de giros y objetos que giren.

Se proporcionan ejemplos de giros y se piden otras situaciones de giros.

Láminas: 6-G-2.1 y 6-G-2.2.

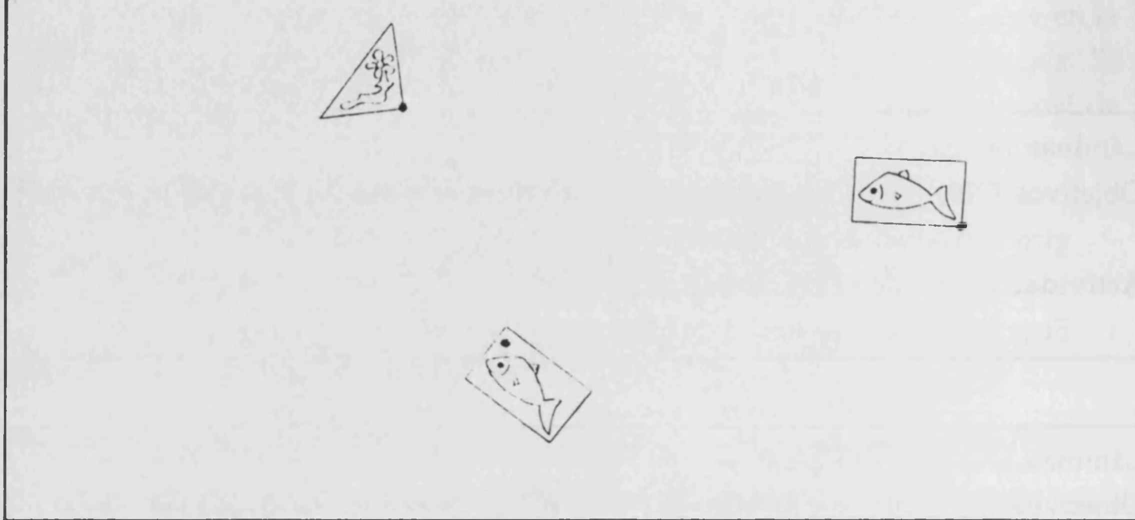
Objetivos: Introducción informal a los giros en el plano: Giro de una figura, conocido el centro de giro.

Reconocimiento visual de la variación de inclinación de una figura, de su recorrido y de su relación con el centro de giro.

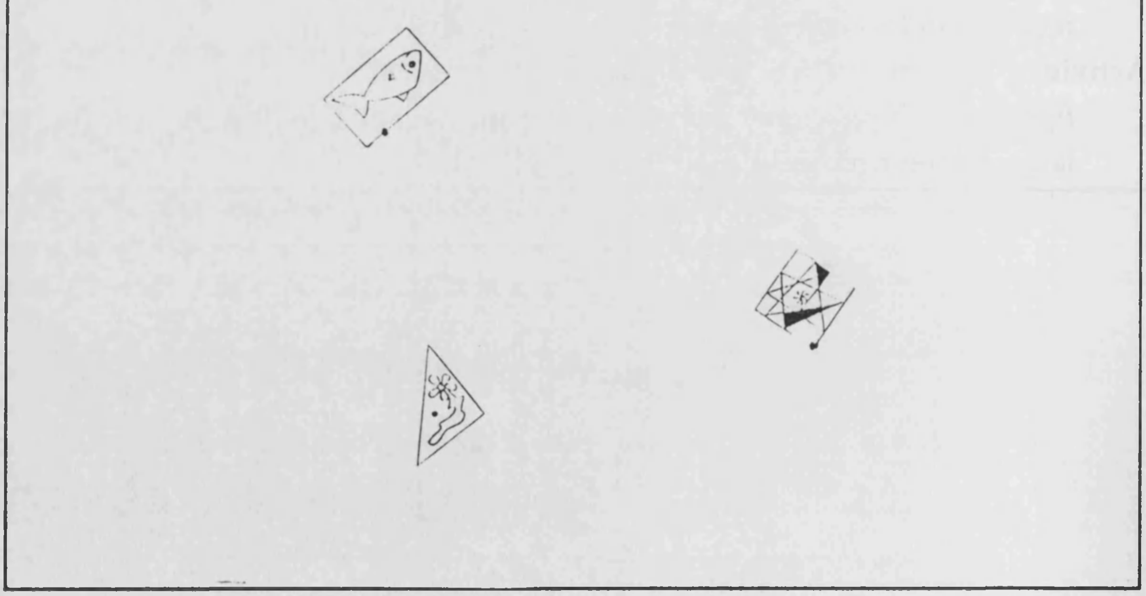
Utilización correcta de material auxiliar (un objeto punzante) para girar una figura cuando el centro de giro se encuentra sobre ella.

Actividad 2: Girar una figura tomando como centro el que se da. Colocar tres figuras en las posiciones y lugares por donde se va situando la imagen a lo largo del recorrido del giro.

6-G-2.1



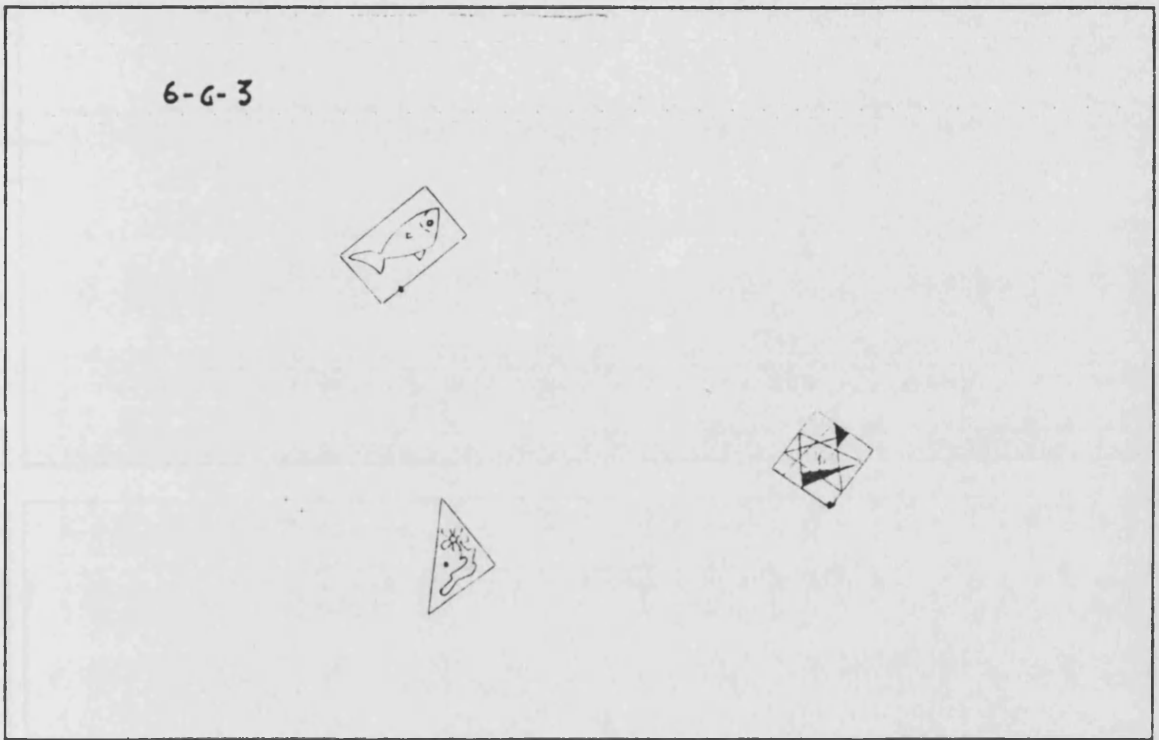
6-G-2.2



Láminas: 6-G-3.

Objetivos: Reconocer cuándo se corresponden pares de figuras mediante un giro con centro sobre ellas.

Actividad 3: El profesor coloca una pieza sobre alguna de las figuras de la lámina. Los alumnos deben indicar si corresponde a un giro con centro el señalado.



Láminas: 6-G-4.1 y 6-G-4.2.

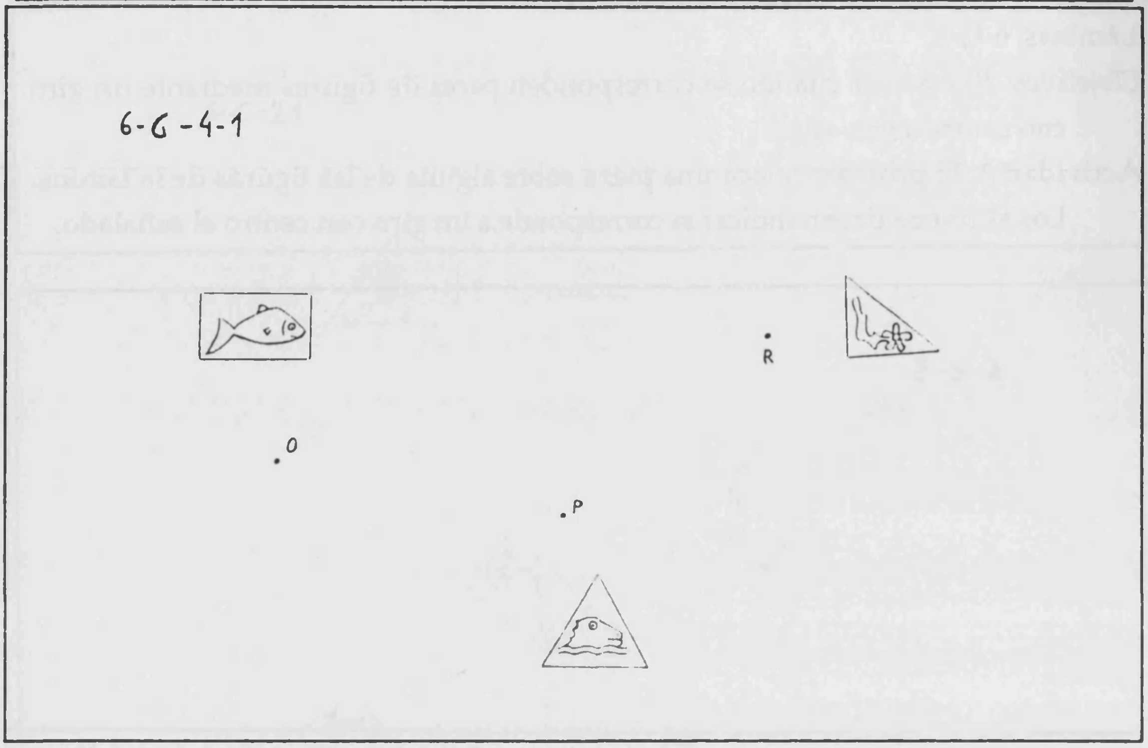
Objetivos: Introducir manipulativamente giros cuando el centro es exterior a la figura objeto de giro.

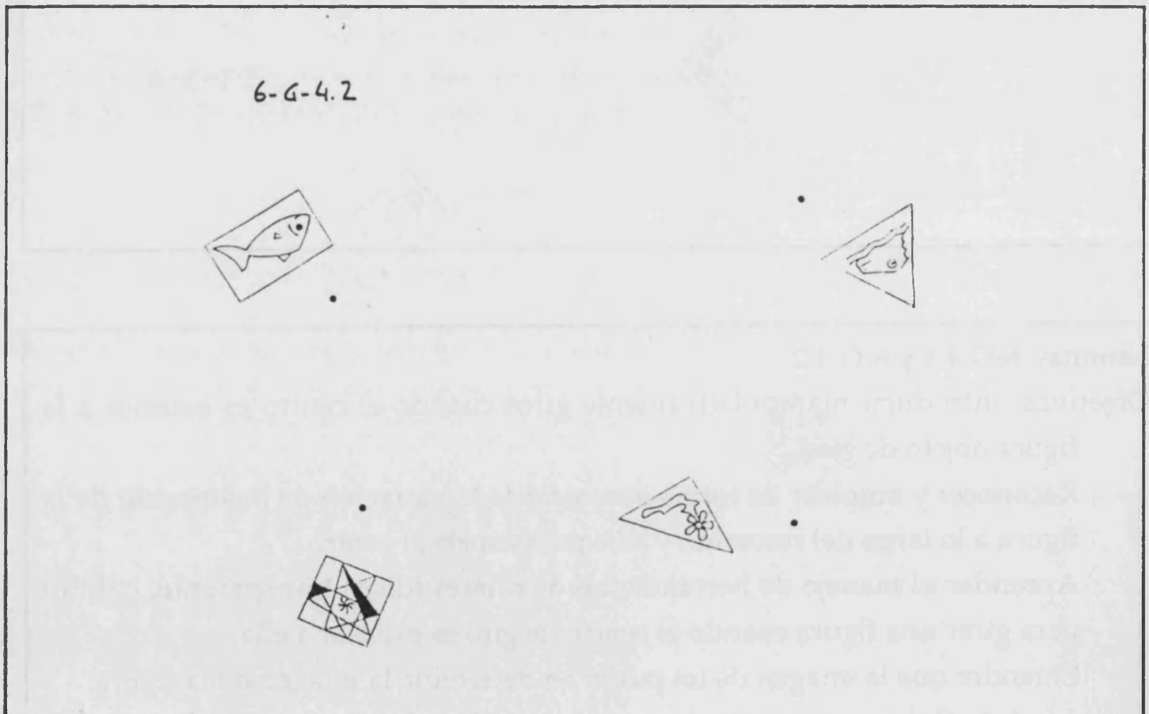
Reconocer y emplear de forma aproximada la variación de inclinación de la figura a lo largo del recorrido y su equidistancia al centro.

Aprender el manejo de herramientas auxiliares (disco transparente, palillo) para girar una figura cuando el centro de giro es exterior a ella.

Entender que la imagen de un punto no determina la imagen de la figura.

Actividad 4: Colocar varias imágenes de una figura a lo largo del recorrido seguido al girarlas. Comprobar los resultados mediante un disco transparente/palillo. Explicar cuáles son los errores cometidos.


6-G-4-1
R
O
P


6-G-4.2

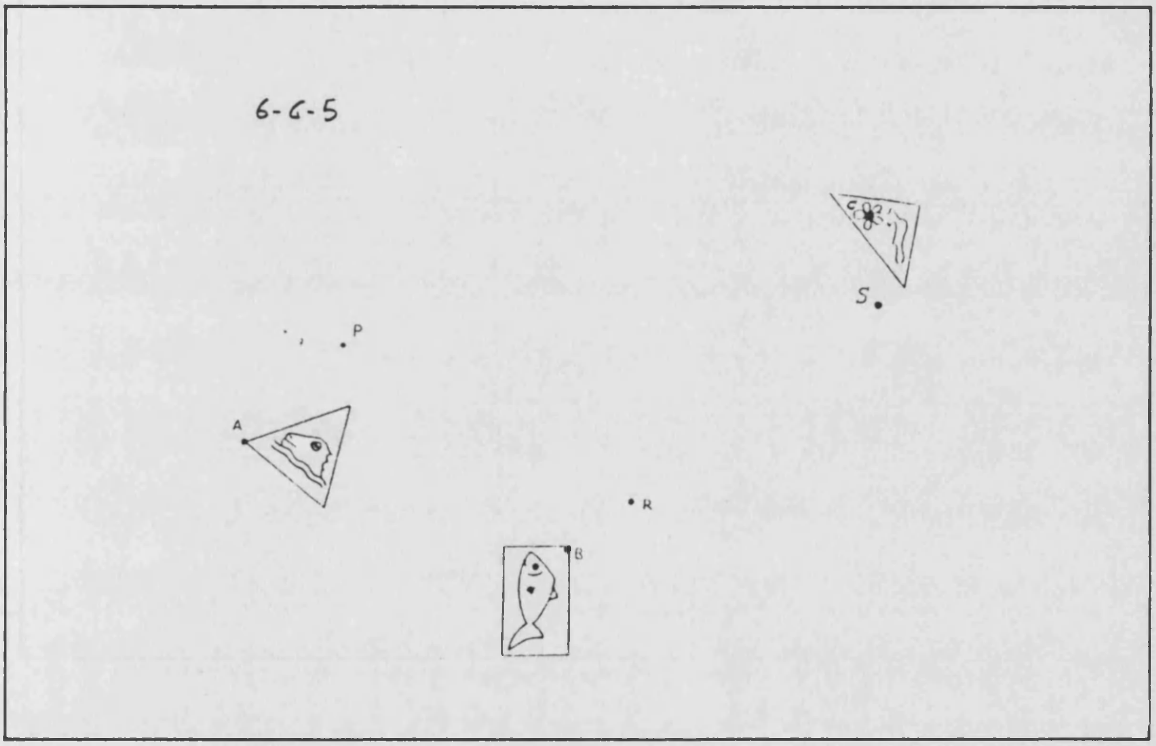
Láminas: 6-G-5.

Objetivos: Identificar la circunferencia como el recorrido seguido por un punto en un giro.

Utilizar el compás para trazar el camino recorrido de un punto por un giro.

Actividad 5: Dibujar, sin ningún instrumento, el recorrido que sigue el punto marcado sobre la figura, cuando se aplica un giro con centro en el punto exterior a ella.

Emplear después el compás para trazar el recorrido seguido por otros puntos.

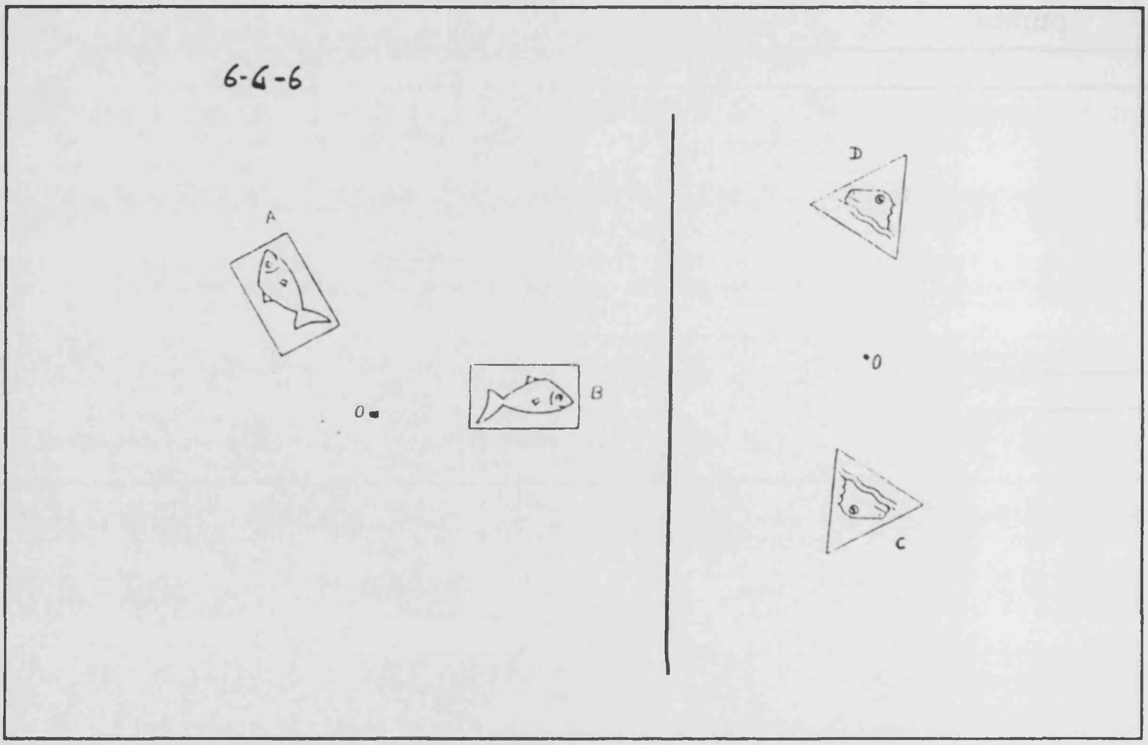


Láminas: 6-G-6.

Objetivos: Utilizar la imagen de vértices como medio para identificar si dos figuras se corresponden mediante un giro.

Entender que la verificación de la imagen de un sólo punto no es suficiente para asegurar que dos figuras se correspondan mediante un giro.

Actividad 6: Indicar si las dos figuras dadas se corresponden mediante un giro con centro O.



Láminas: Hoja en blanco.

Objetivos: Girar una figura, con el centro de giro exterior a ella, obteniendo la imagen de dos puntos.

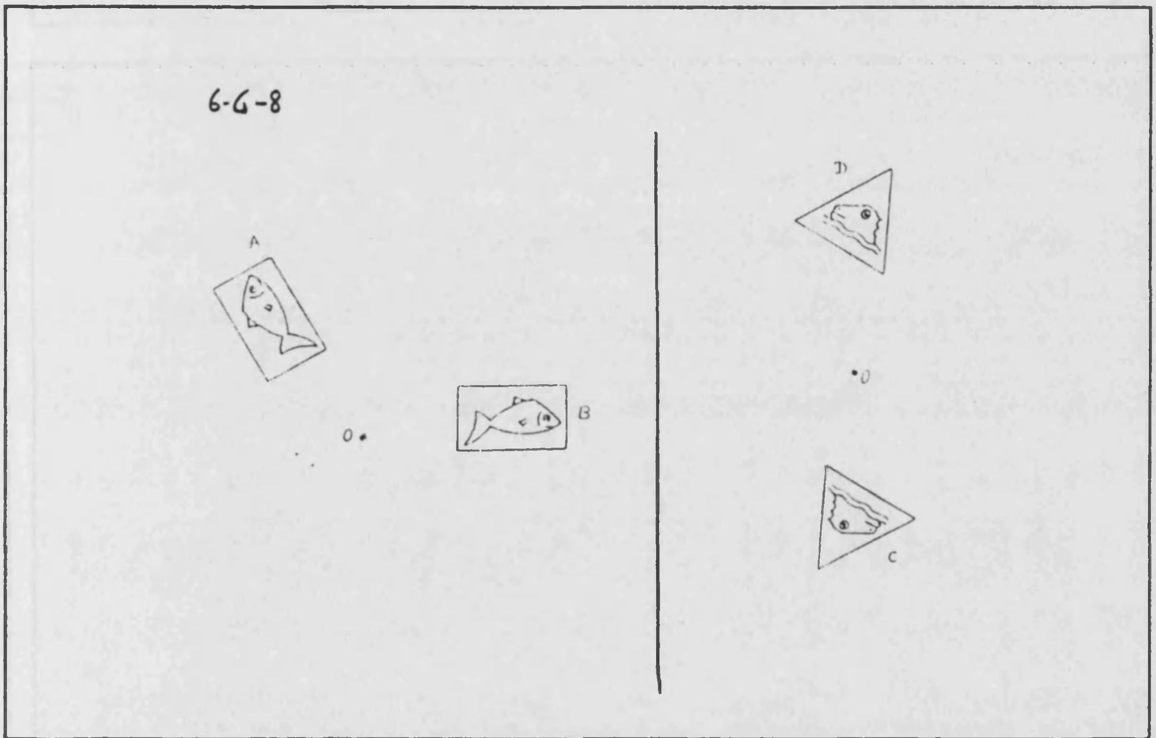
Comprender y utilizar la propiedad de que es necesario (y suficiente) obtener la imagen de dos puntos para determinar la imagen de la figura.

Actividad 7: Pegar un cuadrado en la hoja. Marcar un punto, exterior al cuadrado, como centro de giro. Colocar una pieza, imagen del cuadrado original mediante un giro con el centro señalado.

Láminas: 6-G-8.

Objetivo: Medida del giro realizado. Angulo del giro.

Actividad 8: Si una persona tiene es su lámina el rectángulo A y el centro de giro, pero no tiene dibujado el rectángulo B, decir qué indicaciones se le podrían dar para que fuera capaz de saber hasta dónde ha girado A (o sea, dónde está B).



Láminas: Hoja en blanco.

Objetivos: Introducir el signo del ángulo de giro.

Empleo correcto del transportador de ángulos.

Obtener la imagen de una figura por un giro, conocidos el centro y el ángulo.

Recalcar la necesidad de obtener la imagen de más de un punto para situar la figura imagen.

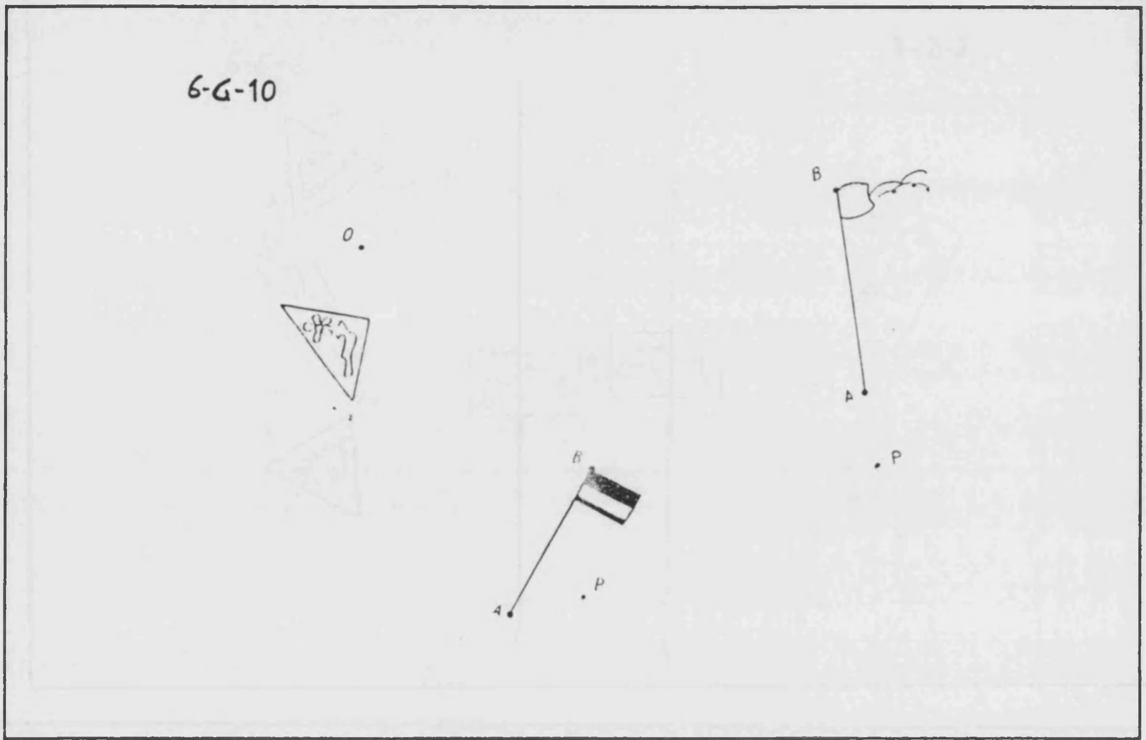
Actividad 9: Pegar una figura en la hoja. Marcar un punto, exterior a la figura, como centro de giro. Aplicar a la figura un giro de ángulo 80° (sin signo) y centro el marcado.

Láminas: 6-G-10.

Objetivos: Obtener la imagen de una figura por un giro, conocidos el centro y el ángulo.

Recalcar la necesidad de obtener la imagen de más de un punto para situar la figura imagen.

Actividad 10: Aplicar a las figuras los giros indicados, dados sus ángulos (con signo) y siendo sus centros los puntos marcados en la lámina.



Láminas: 6-G-11.

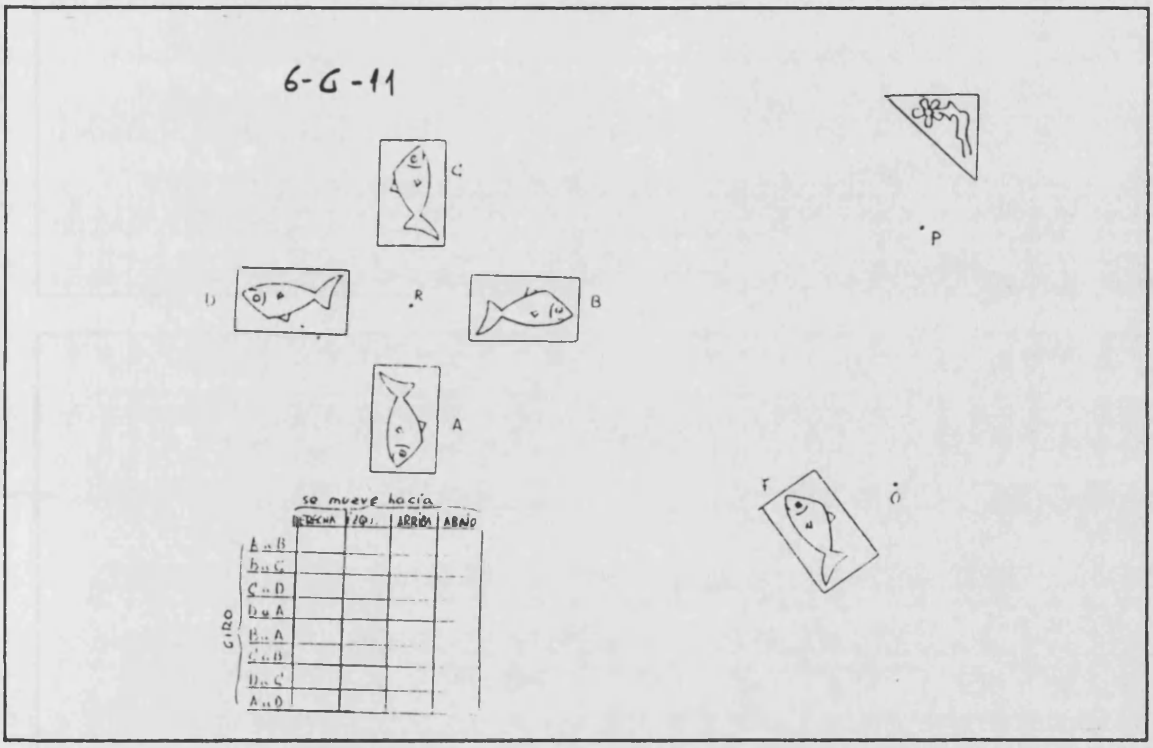
Objetivos: Introducir los giros equivalentes.

Afianzar la obtención de la imagen de una figura por un giro.

Actividad 11: En el grupo de rectángulos A, B, C, D, dar el ángulo de giro en cada uno de los casos que indica el profesor. Proporcionar otra alternativa.

Girar el rectángulo F, con centro en O, un ángulo de -160°. Decir el valor del ángulo para el giro equivalente.

Sin realizar el giro, decir el valor del ángulo que produce un giro equivalente al indicado por el profesor (dar varios valores de ángulos).



Láminas: 6-G-12.

Objetivos: Descubrir y utilizar que los centros de los giros que transforman un punto en otro son los puntos que están sobre la mediatriz. (La perpendicularidad no se verbaliza, aunque sí se pretende que visualmente se abstraiga la inclinación correcta de la recta).

Recordar qué es la mediatriz y la propiedad de equidistancia que posee.

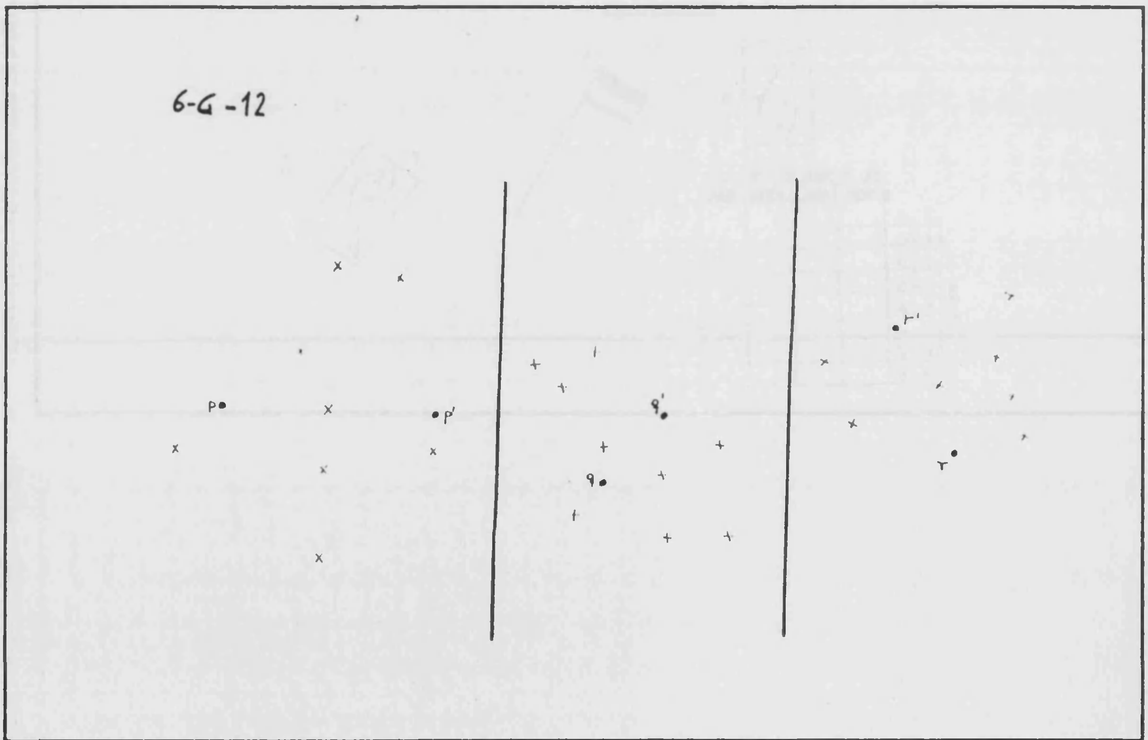
Actividad 12: Identificar cuáles de los puntos marcados mediante una x sirven como centros de giros que mueven P hasta P'.

Para el par de puntos Q y Q', explicar si, sin necesidad de comprobar con el compás, se puede desechar algún punto (x) y si se puede saber cuáles son los puntos (x) válidos.

Las mismas preguntas para el par R y R'.

Averiguar si existen más centros de giro. En caso afirmativo, decir cuántos y cuáles.

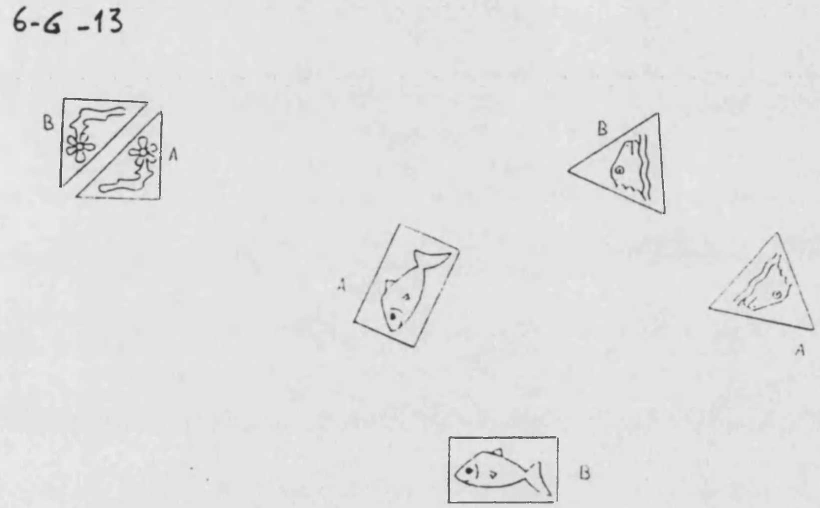
Recordar lo que es la mediatriz. Indicar qué propiedad posee en relación con lo que acabamos de ver.



Láminas: 6-G-13.

Objetivo: Obtener el centro del giro que transforma una figura en otra. Descubrir y/o utilizar el método de corte de mediatrices para obtener el centro de giro.

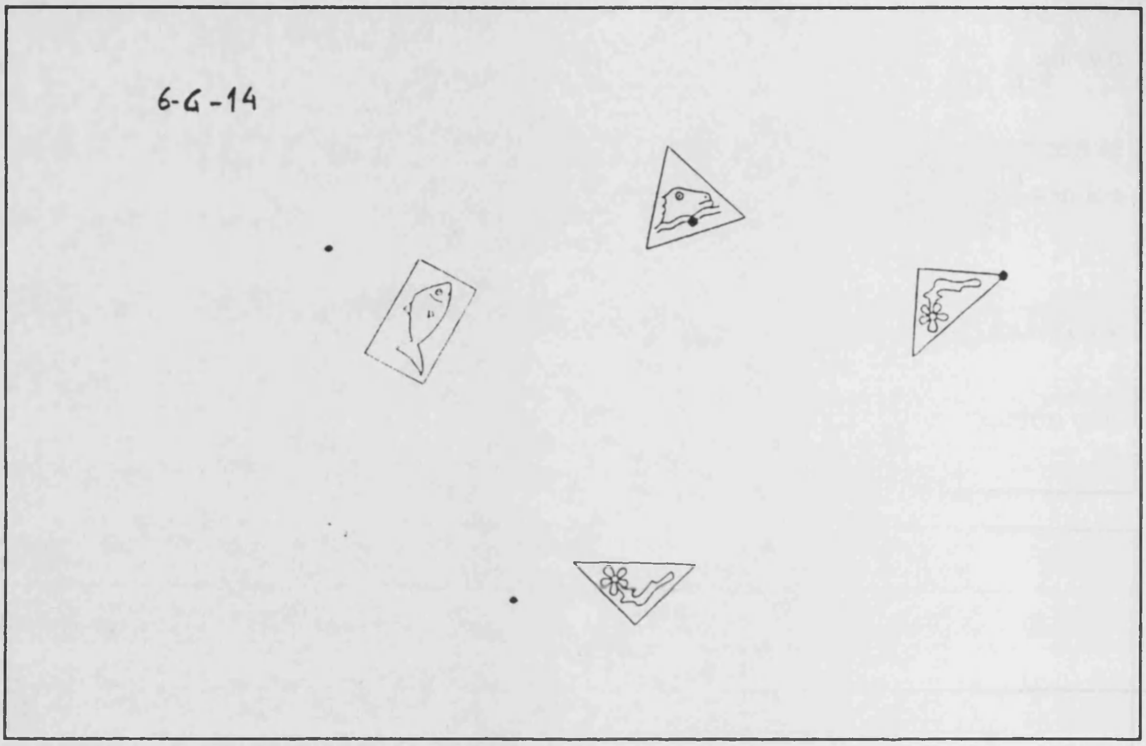
Actividad 13: Obtener el centro del giro que transforma la figura A en la figura B.



Láminas: 6-G-14.

Objetivos: Obtener el giro resultante de la composición de giros del mismo centro.

Actividad 14: Aplicarle a la figura un giro de -90°. A la imagen resultante, aplicarle un giro con el mismo centro y ángulo -70°. Indicar cuánto mide el ángulo del giro resultante.

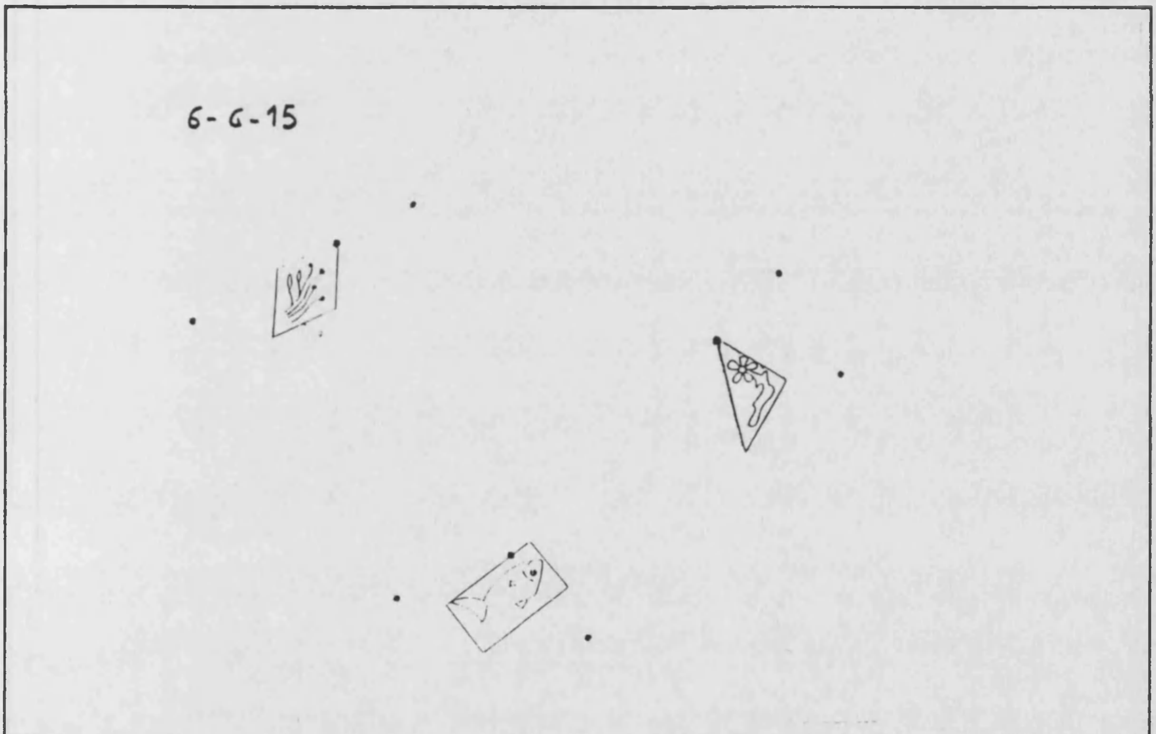


Láminas: 6-G-15.

Objetivos: Descubrir y aplicar la propiedad de que la inclinación de la figura final depende sólo del ángulo de giro y no del centro de giro.

Actividad 15: Aplicar varias veces a una figura el giro del ángulo que se da, utilizando un centro de giro distinto cada vez.

(Tras haber realizado varios ejercicios): Sin servirse de instrumentos, girar una figura, de la que ya se tienen varias imágenes mediante giros de distinto centro y el mismo ángulo que se pide ahora, por medio de un giro del mismo ángulo y cuyo centro se encuentra sobre la figura original.



Láminas: 6-G-16.

Objetivos: Generalizar el resultado de la composición de giros con distinto centro (cuando el resultado es otro giro).

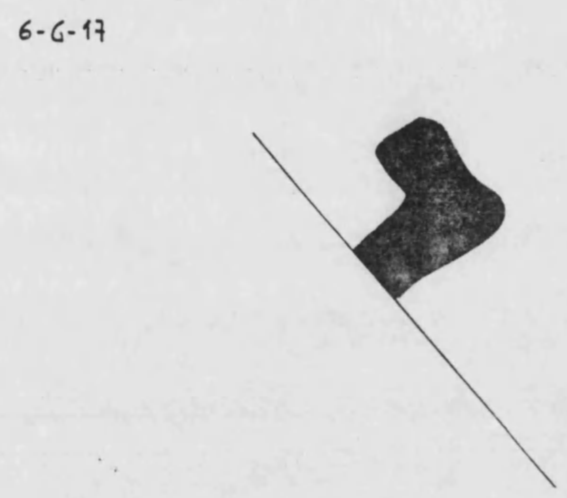
Actividad 16: Aplicar a la figura un giro y a la imagen resultante otro giro, con centro en un punto distinto. Determinar el giro que permite pasar directamente desde la figura inicial hasta la final.

6-G-16

Láminas: 6-G-17.

Objetivos: Recordar la realización de simetrías mediante plegado.

Actividad 17: Doblar la hoja por la línea y recortar las dos partes de la hoja juntas, siguiendo la silueta. Luego desplegar la hoja.



Láminas: 6-G-18.1, 6-G-18.2 y hoja en blanco.

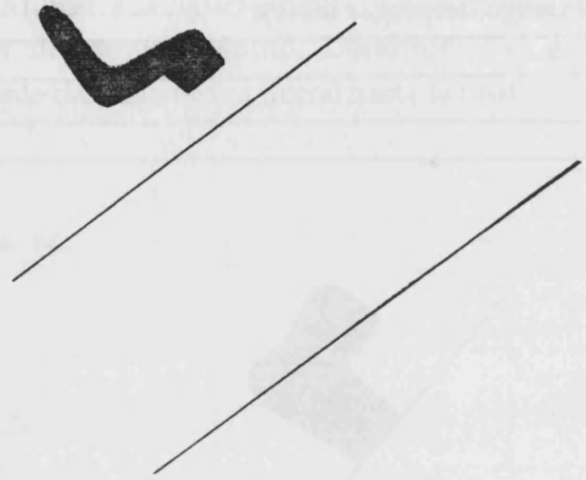
Objetivos: Observar la alternancia de figuras simétricas y trasladadas de la original al realizar simetrías de ejes paralelos.

Reconocer la igualdad de vectores para traslaciones consecutivas.

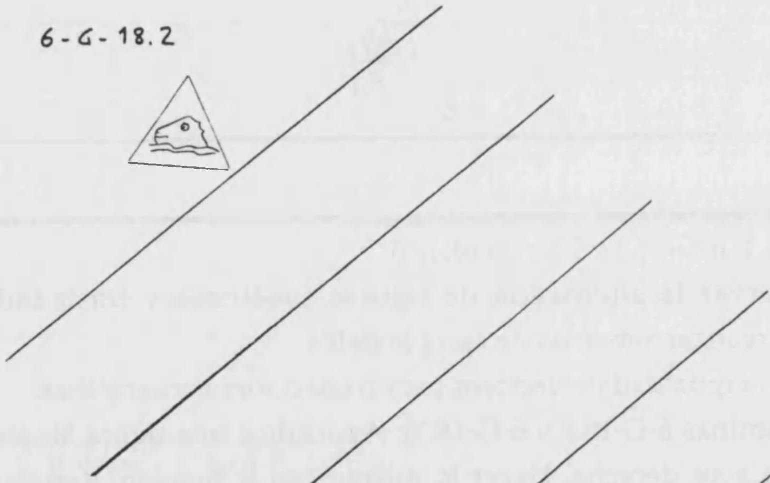
Actividad 18 (láminas 6-G-18.1 y 6-G-18.2): Aplicarle a una figura la simetría del eje situado a su derecha. Hacer lo mismo con la imagen. Repetirlo varias veces. Decir qué se observa. Indicar qué movimiento permite pasar de la figura 1 a la 3 y de la 2 a la 4. Dibujar los vectores de la traslaciones que llevan la figura 1 a la 3 y la 2 a la 4. Decir cómo son esas traslaciones.

(Lámina en blanco): Plegar la hoja en acordeón. Dibujar una figura y recortarla, con la hoja plegada, atravesando todas las partes de la hoja. Identificar los movimientos que aparecen. Indicar cómo son las traslaciones entre figuras consecutivas trasladadas.

6-G-18.1



6-G-18.2



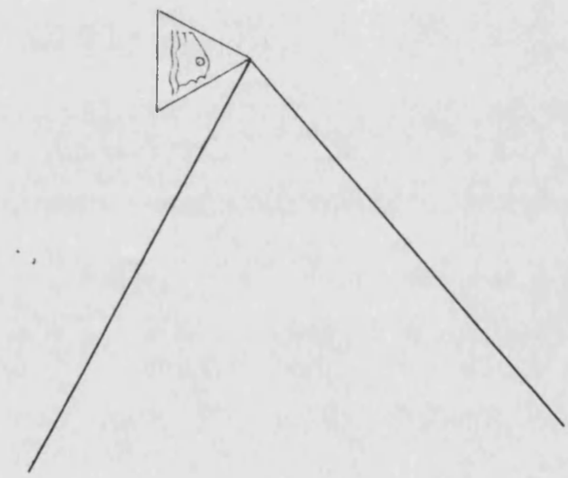
Láminas: 6-G-19.

Objetivos: Relacionar la composición de dos simetrías de ejes que se cortan con un giro con centro el punto de corte de los ejes.

Actividad 19: Aplicarle a la figura la simetría de eje el más próximo a ella. Aplicarle a la imagen la simetría del otro eje.

Decir qué movimiento lleva la figura original a la final. Obtener el centro del giro.

6-G-19



Láminas: Hojas en blanco.

Objetivos: Doblar la hoja por la mitad y luego de nuevo por la mitad, con el pliegue perpendicular al anterior. Recortar una silueta con la hoja doblada. Desplegarla.

Identificar los movimientos que se pueden observar. Dar el centro y el valor del ángulo del giro que hay desde una figura hasta la siguiente girada.

Repetir el ejercicio haciendo un pliegue más que antes, perpendicular al último. Identificar varios centros de giro, el ángulo de giro y los otros movimientos existentes.

Resumen de las sesiones de 6º de E.G.B.

Sesión 1 y principio de la Sesión 2

Láminas: No hay. Objetivos: Obtener información sobre la idea que tienen los alumnos de qué es un giro. Introducir el concepto de giro. **Actividad 1**: Se piden ejemplos de giros y objetos que giren. Se proporcionan ejemplos de giros y se piden otras situaciones de giros.

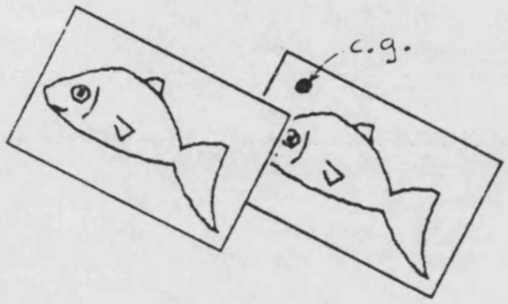
Cuando la profesora les pregunta a las niñas si saben lo que es girar, ellas dicen que sí y dan como ejemplos: *Un disco; la Tierra alrededor de su eso* (sic).

Láminas: 6-G-2.1 y 6-G-2.2. Objetivos: Introducción informal a los giros en el plano: Giro de una figura, conocido el centro de giro. Reconocimiento visual de la variación de inclinación de una figura, de su recorrido y de su relación con el centro de giro. Utilización correcta de una material auxiliar (un objeto punzante) para girar una figura cuando el centro de giro se encuentra sobre ella. **Actividad 2**: Girar una figura tomando como centro el que se da. Colocar tres figuras en las posiciones y lugares por donde se va situando la imagen a lo largo del recorrido del giro.

Los dos primeros ejercicios corresponden a una figura con el centro de giro en un vértice y a otra con el centro de giro interior, respectivamente, y la profesora no proporciona ninguna información sobre cómo efectuar el giro. Luego muestra la utilización de un objeto punzante, para clavarlo en el centro de giro, y ésa será la herramienta de que se dispondrá para los ejercicios restantes de la lámina 6-G-2.1. Los ejercicios de la lámina 6-G-2.2 hay que efectuarlos sin servirse de la aguja, aunque ésta sí se emplea para comprobar la exactitud de las soluciones obtenidas.

Todas las niñas tienen una idea formada de cómo girar, sin necesidad de explicarlo, pero no es una concepción basada en propiedades matemáticas, como lo muestra el hecho de que dos alumnas unas veces lo hacen bien y otras mal. El primer ejercicio, en el que el centro de giro se encuentra en un vértice de la figura, es resuelto correctamente por todas las alumnas. Icíar lo explica:

Icíar: *Con el punto que está señalado* [el centro de giro], *sujeto por ese punto y voy girando los otros.*



Sin embargo, cuando el centro de giro es interior a la figura, esa misma niña no aplica ninguna de las características matemáticas del giro, pues sitúa la figura trasladada (ver dibujo). Algo análogo sucede con Inmaculada, la cual resuelve rápida y correctamente todos los ejercicios de la primera lámina, pero falla en el rectángulo (pez) de la segunda lámina, en el que el c.g. está sobre un lado, pero no en un vértice.

Láminas: 6-G-3. Objetivos: Reconocer cuándo se corresponden pares de figuras mediante un giro con centro sobre ellas. **Actividad 3**: El profesor coloca una pieza sobre alguna de las figuras de la lámina. Los alumnos deben indicar si corresponde a un giro con centro el señalado.

Las alumnas responden correctamente, aunque sus justificaciones no son precisas o correctas. Por ejemplo, la razón que dan para uno de los contraejemplos es:

Inmaculada: [No es] *porque no queda igual.*
Icíar: *Porque no quedan paralelas.*

Esta justificación incorrecta de Inmaculada es probablemente se debe a que, hasta la sesión anterior, estas mismas alumnas han estado trabajando sobre traslaciones.

Láminas: 6-G-4.1 y 6-G-4.2.

Objetivos: Introducir manipulativamente giros cuando el centro es exterior a la figura objeto de giro.

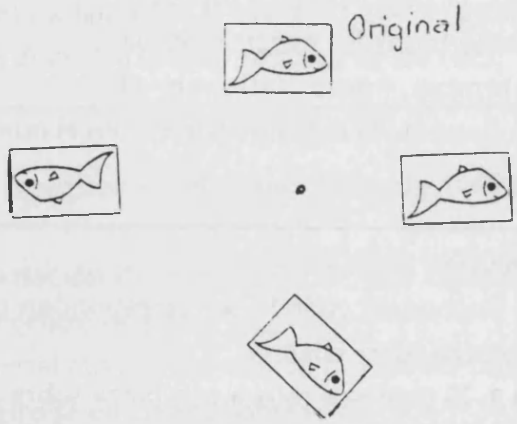
Reconocer y emplear de forma aproximada la variación de inclinación de la figura a lo largo del recorrido y su equidistancia al centro.

Aprender el manejo de herramientas auxiliares (disco transparente, palillo) para girar una figura cuando el centro de giro es exterior a ella.

Entender que la imagen de un punto no determina la imagen de la figura.

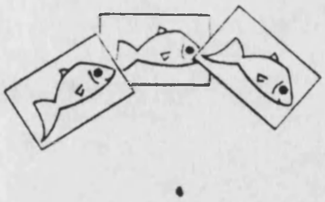
Actividad 4: Colocar varias imágenes de una figura a lo largo del recorrido seguido al girarlas. Comprobar los resultados mediante un disco transparente/palillo. Explicar cuáles son los errores cometidos.

Con el centro de giro exterior a la figura, el proceso que se sigue en la unidad de enseñanza es análogo al utilizado en el caso de que el centro estuviera en el interior: Primero, sin haberles proporcionado ningún material auxiliar, se les pide a las niñas que coloquen varias figuras a lo largo del recorrido. Posteriormente ya se les da algún instrumento para que comprueben, sin dar instrucciones sobre cómo emplearlo. A veces hay errores de falta de equidistancia y/o de inclinación de la figura, pues el procedimiento consistente en mover la pieza con la mano, variando al mismo tiempo la inclinación de la pieza, es bastante inexacto. En el dibujo mostramos la solución de una alumna a un ejercicio, en el que se pueden apreciar los dos errores: Ausencia de equidistancia al centro en el rectángulo de la izquierda e inclinación incorrecta.



En las justificaciones de los errores, las alumnas sí hacen referencia a ambas propiedades.

En uno de los ejercicios, Inmaculada extrae una conclusión errónea sobre la colocación de las imágenes: Las dos primeras que obtiene se superponen a la original (ver dibujo), por lo que piensa que todas las imágenes deben cumplir esa condición:



Inmaculada: *Ya sé. La esquina tiene que estar encima.*

Para corregir ese error, la profesora sitúa piezas en otros lugares válidos, en los que no hay solapamiento o éste es de casi toda la figura.

Respecto a la cantidad de puntos-imagen que es necesario comprobar u obtener para verificar si una figura es girada de otra, o para situar la figura imagen, Rebeca lo entiende y las demás niñas corroboran la cantidad correcta cuando se trabaja sobre esa propiedad, pero en sesiones posteriores, en algunas ocasiones Rebeca es la única que la emplea. Veamos algunas situaciones concernientes a ese resultado:

Inmaculada: *Con un vértice se gira y tiene que ponerse aquí* [gira el disco e indica el vértice correspondiente de la imagen].

Marta: *Se pone esto ahí* [centro del disco sobre el centro de giro] *y se marca un vértice. Se va girando y se ve dónde va.*

Prof.: *¿Y con un vértice sólo seguro que ya sabemos que está bien?*

Se quedan calladas todas.

Inmaculada: *Espera que lo pruebe. Pero el vértice tendrías que tener cuidado que esté a esa parte.*

Prof.: *Con un vértice no es bastante.*

Marta: *Pues lo hacemos con otro.*

Rebeca: *Con un vértice podría estar así, o así, o así, ... La figura la podemos poner de todas las maneras que queramos, siempre que el vértice esté aquí.*

En un ejercicio posterior se plantea así:

Prof.: *¿Habrá que coger todos los vértices?*

Niñas: *No.*

Prof.: *¿Cuántos son suficientes?*
Una niña, y después las otras: *Dos.*
Rebeca: *Porque es como cuando tenías la figura.*

Sesión 2

Láminas: 6-G-5.
Objetivos: Identificar la circunferencia como el recorrido seguido por un punto en un giro.
Utilizar el compás para trazar el camino recorrido de un punto por un giro.
Actividad 5: Dibujar, sin ningún instrumento, el recorrido que sigue el punto marcado sobre la figura, cuando se aplica un giro con centro en el punto exterior a ella.
Emplear después el compás para trazar el recorrido seguido por otros puntos.

Las alumnas ya habían asumido con anterioridad que, mediante un giro, el desplazamiento es circular. Además se explicita la propiedad de equidistancia al centro en la circunferencia. Veamos algunas conversaciones:

Prof.: *Todas habéis dibujado una circunferencia. ¿Por qué?*
Inmaculada: *Porque es así.*
Rebeca: *Porque al mover una figura en una rotación se convierte el movimiento en una circunferencia.*

Marta ha corregido un poco la circunferencia realizada a mano y la profesora le pregunta por qué la ha corregido.

Marta: *Porque no guardaba la distancia.*
Prof.: *¿Sabéis qué propiedad tiene?* [la circunferencia]
Marta: *Que hay la misma distancia desde el punto centro hasta todos sus puntos.*

Láminas: 6-G-6.

Objetivos: Utilizar la imagen de vértices como medio para identificar si dos figuras se corresponden mediante un giro.

Entender que la verificación de la imagen de un sólo punto no es suficiente para asegurar que dos figuras se correspondan mediante un giro.

Actividad 6: Indicar si las dos figuras dadas se corresponden mediante un giro con centro O.

En esta actividad se retoma el planteamiento de la cantidad necesaria y suficiente de puntos-imagen a considerar, lo cual se abordó puntualmente en la primera sesión.

Para decidir si dos figuras se corresponden mediante un giro, las niñas sólo comprueban si un punto de la figura original se superpone o no sobre el punto correspondiente de la otra figura. Ante una pregunta de la profesora, las niñas recuerdan lo que les dijo en la sesión anterior sobre la necesidad de verificar con más de un punto. Rebeca justifica la indeterminación existente sobre la colocación de una figura si sólo se fija un punto mostrando, con la ayuda de una pieza, las posibles inclinaciones de la imagen si sólo se conoce dónde se sitúa un vértice; en concreto, Rebeca hace un desplazamiento circular con el dedo, de manera que el centro de la circunferencia es el vértice fijado y el radio es la longitud de un lado, dando a entender que el vértice de ese lado que no actúa como centro de giro se podría situar en cualquier punto a lo largo de la circunferencia (ver dibujo). La profesora hace que las otras niñas repitan la propiedad y que una de ellas la justifique pero, a pesar de ello, en el ejercicio inmediatamente posterior, consistente en obtener la imagen de una figura, no la aplican, pues sólo se sirven de la imagen de un punto.

Habría sido conveniente la inclusión de algunos ejercicios en los que las alumnas se hubieran tenido que enfrentar a situaciones en las que resultara insuficiente la comprobación de la coincidencia de un punto de la figura original y la imagen; esto es, situaciones en las que no hubiera giro pero al girar algún punto de la figura original sí se superpusiera sobre el punto correspondiente de la imagen.

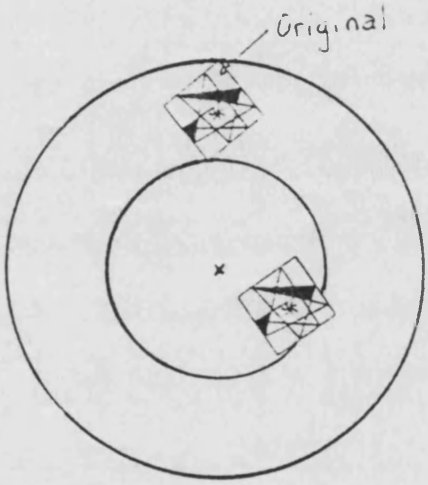
A continuación mostramos algunos de los momentos comentados anteriormente:

Prof.: *¿Con que ese punto coincida ya está bien?*
Niñas: *Sí.*
Prof.: *¿Ya está?*
Niñas: *Sí.*
Prof.: *Yo me acuerdo de que el otro día tú* [Rebeca] *decías que no.*
Rebeca: *Se tenía que ...*
Marta: *Se tenía que hacer con todos los vértices.*
Prof.: *¿Con todos?*
Niña: *Con más de uno.*
Prof.: *¿Con cuántos?*
Niña: *Con dos por lo menos.*
Prof.: *A ver. Si sólo probáis con un punto habría salido que estaba bien con esta* [pieza] [la profesora coloca un rectángulo (pez) de manera que el vértice considerado coincide, pero con una inclinación distinta a la de la figura de la lámina].
Las niñas se ponen a comprobar si para el pez de la lámina coinciden también los otros vértices.
Prof.: *Si probamos sólo con un punto, ¿en cuántos sitios podía estar el pez éste?* [la profesora ha colocado un rectángulo-pez sobre la posible imagen dibujada en la lámina].
Varias niñas: *En un montón, en muchos.*
Rebeca: *En todos los que quieras* [mueve el dedo a lo largo de una circunferencia con centro el vértice correcto].

Láminas: Hoja en blanco. Objetivos: Girar una figura, con el centro de giro exterior a ella, obteniendo la imagen de dos puntos. Comprender y utilizar la propiedad de que es necesario (y suficiente) obtener la imagen de dos puntos para determinar la imagen de la figura.

Actividad 7: Pegar un cuadrado en la hoja. Marcar un punto, exterior al cuadrado, como centro de giro. Colocar una pieza, imagen del cuadrado original mediante un giro con el centro señalado.

Rebeca realiza correctamente la actividad. Icíar e Inmaculada no. De Marta no tengo información. Icíar sólo obtiene la imagen de un punto y coloca la figura con la inclinación algo desviada, pero parece que se da cuenta de la necesidad de utilizar más de un punto, pues, cuando la profesora le pregunta por qué está mal, Icíar indica que, como sólo ha cogido un punto, el otro no sabía donde iba. Pero el error conceptual de Inmaculada es grande:



Inmaculada pregunta si hay que coger otro punto (un segundo vértice), coloca la imagen en una posición totalmente incorrecta, pues ignora una de las circunferencias trazadas y la sitúa con la misma inclinación que la figura original (realmente hace una traslación; ver dibujo). Las otras niñas corrigen a Inmaculada, tras lo cual ya utiliza las dos circunferencias que ha trazado, pero sigue colocando la pieza trasladada de la original. Rebeca le dice que tiene que ir cambiando la inclinación. Entonces Inmaculada rectifica de nuevo, aunque no se fija en el vértice concreto que ha de apoyarse sobre cada circunferencia, sino que coloca la figura sobre la original, la va moviendo con la mano, siguiendo el recorrido de las circunferencias, y la sitúa aproximadamente en su posición.

Láminas: 6-G-8.
Objetivo: Medida del giro realizado. Angulo del giro.
Actividad 8: Si una persona tiene es su lámina el rectángulo A y el centro de giro, pero no tiene dibujado el rectángulo B, decir qué indicaciones se le podrían dar para que fuera capaz de saber hasta dónde ha girado A (o sea, dónde está B).

Las propuestas de las alumnas son siempre de mediciones longitudinales. La sugerencia de Marta es medir la distancia del centro a un punto y luego cambia a considerar dos puntos. Cuando la profesora les muestra que eso no es válido, Rebeca propone medir, además, la distancia de cada vértice a su imagen, lo cual en realidad sí fija la figura final si, además, se da el sentido del giro. Como este procedimiento no es práctico y ninguna de las alumnas sugiere la utilización de grados, la profesora lo propone directamente. Las alumnas sí saben trabajar con ángulos, pero varias emplean mal el transportador.

Sesión 3 y principio de la Sesión 4

Láminas: Hoja en blanco.
Objetivos: Introducir el signo del ángulo de giro.
Empleo correcto del transportador de ángulos.
Obtener la imagen de una figura por un giro, conocidos el centro y el ángulo.
Recalcar la necesidad de obtener la imagen de más de un punto para situar la figura imagen.
Actividad 9: Pegar una figura en la hoja. Marcar un punto, exterior a la figura, como centro de giro. Aplicar a la figura un giro de ángulo 80° (sin signo) y centro el marcado.

Láminas: 6-G-10.
Objetivos: Obtener la imagen de una figura por un giro, conocidos el centro y el ángulo.
Recalcar la necesidad de obtener la imagen de más de un punto para situar la figura imagen.
Actividad 10: Aplicar a las figuras los giros indicados, dados sus ángulos (con signo) y siendo sus centros los puntos marcados en la lámina.

Los comentarios que hago a continuación corresponden a las actividades: 9 y 10. Las niñas dicen que no recuerdan cómo emplear el transportador, aunque seguramente incluyen en esa expresión el hecho de que no saben cómo girar una figura utilizando las imágenes de puntos. El profesor guía la obtención del primer punto:

Prof.: ... *Este vértice que tenéis más cerca del centro, ¿cómo se mueve?* ... [Después de que las niñas hayan dibujado la circunferencia] *Ahora tenéis el recorrido de ese punto* [el vértice elegido] *cuando gira alrededor de ese punto* [el centro de giro]. *¿Dónde irá si tiene que moverse 80°?*

Tanto en la actividad 9 como en el primer ejercicio de la actividad 10 se aprecia claramente que sólo Rebeca aplica la propiedad de que es necesario obtener las imágenes de dos o más puntos de la figura; pero la realización de estos ejercicios les hace darse cuenta a las niñas de la imprecisión que conlleva el empleo de la imagen de un sólo punto y posteriormente sí utilizan más puntos imagen, o hacen referencia a ello, para la colocación exacta de la figura imagen.

Inmaculada tiene más problemas, pues no ha entendido la necesidad de algunas de las propiedades que se deben utilizar, lo que origina que sitúe la figura imagen trasladada, que obtenga mal la imagen de algún vértice o que no sepa cómo obtener la imagen de un punto cuando la situación no es exactamente como la resuelta anteriormente.

Respecto a la introducción del signo para el ángulo, no presenta ninguna dificultad. Se plantea en el primer ejercicio, ante la petición, por parte de la profesora, de situar la figura imagen en todos los sitios posibles. Como era de esperar, la propuesta por parte de las alumnas para diferenciar los dos sentidos es incluir el calificativo "derecha" o "izquierda", pero ellas mismas se dan cuenta de que no es válido, pues la forma como están sentadas alrededor de la lámina hace que el mismo giro sea visto como un movimiento "hacia la derecha" por unas niñas y "hacia la izquierda" por otras. Entonces la profesora propone la utilización del sentido de las agujas del reloj. No obstante, como la tendencia natural es la anterior, con frecuencia siguen siendo los calificativos derecha/izquierda los utilizados.

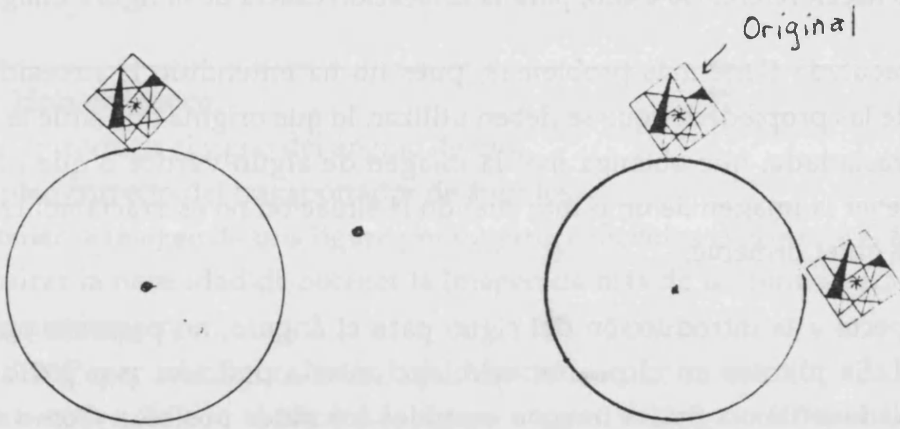
Seguidamente presento con más detalle los comportamientos de las actividades 9 y 10 a que he hecho referencia en los párrafos anteriores.

En el primero de los ejercicios de la actividad 9, una vez que las alumnas han trazado la circunferencia del giro para el vértice inferior del cuadrado, la profesora pregunta cuál es la imagen de ese vértice por un giro de 80°. Inmaculada señala un punto exterior al círculo (ver dibujo inferior izquierdo). Luego rectifica, pero coloca la figura trasladada (ver dibujo inferior derecho).

Como le dicen que está mal, entonces recuerda que en la sesión anterior también resolvió mal un ejercicio (también cometió errores del mismo tipo) e intenta acordarse de cómo había que hacer el ejercicio:

Inmaculada: *Espera, ayer me pasó igual. ¡Es que no me acuerdo!.*

Esa expresión pone de manifiesto que Inmaculada intenta recurrir a la memoria para solucionar la situación. El profesor hace que se fije en el recorrido que sigue el punto (seguramente con una figura en la mano) y finalmente Inmaculada sitúa bien la figura.



El ejercicio siguiente es análogo, pero el ángulo de giro es de 60°. Icíar obtiene la imagen de un vértice y hace a mano, con una pieza, el recorrido aproximado, con la finalidad de colocar la pieza con la inclinación adecuada. Por su pregunta un poco después, cuando la profesora hace referencia a otros vértices, parece que no ha asumido que, si fija otro vértice, la imagen queda totalmente determinada:

....

Icíar: *¿Entonces podemos hacer de otro vértice?*

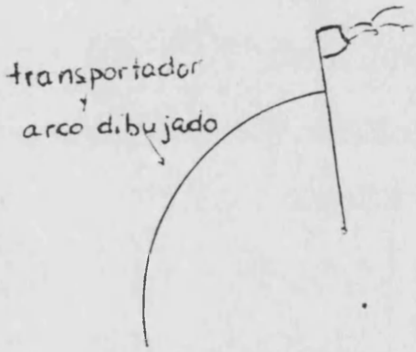
....

En un ejercicio posterior, Icíar sí emplea esa propiedad, pues pregunta: *Hacemos dos circunferencias para hacerlo mejor, ¿no?*

Inmaculada pregunta al principio: *¿Se puede hacer 60 desde otros vértices o siempre desde el mismo? ... Si hacemos 60 desde otro vértice ...* [no finaliza la frase]. Sí contesta, correctamente, que el ángulo de giro desde todos los vértices que la profesora le señala es de 60°.

En un ejercicio consistente en girar +90° una figura dibujada, de la que no dispone de pieza, Inmaculada tiene dificultades debido a que no sabe cómo medir cuando el punto que está girando no se encuentra por las marcas del transportador (en alguna sesión anterior sí se había tratado ese caso, pero quizá habría sido conveniente realizar más ejercicios de práctica). Un ejemplo de lo que acabamos de contestar es la solución de Inmaculada al dibujo de la pipa:

Inmaculada: *Yo he puesto el punto* [que quiero girar] *aquí* [en la intersección de la pipa con la circunferencia exterior del transportador] *y aquí, de 90° hasta éste* [extremo del arco que traza, el cual mostramos en el dibujo] *¿O tendría que ser este punto?* [extremo inferior de la pipa]



Prof.: *Tú sabrás qué punto vas a girar. ¿Cómo lo vas a hacer?*

Inmaculada: *Pero luego tendré que llegar a éste o éste [señala los extremos de la línea vertical del dibujo] ...* ¿Pero cómo llego?

....

Láminas: 6-G-11.

Objetivos: Introducir los giros equivalentes.

Afianzar la obtención de la imagen de una figura por un giro.

Actividad 11: En el grupo de rectángulos A, B, C, D, dar el ángulo de giro en cada uno de los casos que indica el profesor. Proporcionar otra alternativa.

Girar el rectángulo F, con centro en O, un ángulo de -160°. Decir el valor del ángulo para el giro equivalente.

Sin realizar el giro, decir el valor del ángulo que produce un giro equivalente al indicado por el profesor (dar varios valores de ángulos).

Originalmente la actividad estaba diseñada con la finalidad de contrastar las identificaciones de los sentidos de giro como instrucciones a la derecha o a la izquierda con las basadas en el sentido de las agujas del reloj, pues la posición en que están colocadas las figuras hace resaltar lo inapropiado de las primeras. La inclusión de esta actividad corresponde a que normalmente los estudiantes siempre piensan en términos de "derecha" o "izquierda". Sin embargo, las niñas hacen siempre referencia a valores positivos o negativos de los ángulos, y no se establece el contraste pensado originalmente.

Respecto a la idea de giros equivalentes, se desarrolla fácilmente; La formulación matemática no se indica explícitamente hasta haber resuelto todos los ejercicios, y son las propias alumnas quienes la enuncian:

Prof.: *¿Tenéis alguna regla?*
Rebeca: *A 360 le quitas lo que des* [el valor del ángulo cuyo equivalente hay que calcular].
Inmaculada: *Y también tienes lo de positivo y negativo.*
Prof.: *Sí. Si era positivo ahora es negativo y al revés.*

La relación numérica entre giros equivalentes no la utilizan todas las alumnas desde el primer momento, aunque pronto se dan cuenta de la existencia de los dos giros con el mismo resultado. Inmaculada tiene varios errores numéricos, si bien hace el recorrido equivalente correcto. En lo que viene a continuación presento algunas intervenciones de las alumnas, referentes a la primera vez que surge la equivalencia de +180° y -180° (es el segundo ángulo que se pide) y a la confusión o ausencia de cálculos numéricos por parte de Inmaculada.

Prof.: *De A a C.*
Niñas: *Un giro de 180° negativo.*
O positivo.
No.
Sí. ¿No puede ir así? [La alumna que dio esa contestación hace el recorrido correspondiente con la mano].
Prof.: *¿Y para ir de D a A?*
Niñas: *Un giro de 90° en positivo.*
Inmaculada: *Pero también puede ser un giro de 360.*
Rebeca: *De 270.*

Inmaculada: *Bueno, pues lo que sea* [hace con la mano el recorrido correcto para el ángulo del giro equivalente].

Posteriormente, tras girar el rectángulo F -160°, la profesora pide el valor del giro equivalente.

Rebeca: *200 positivos* [Correcto].
Inmaculada: *Sí, así* [traza con la mano el recorrido correcto].
Prof. [a Inmaculada]: *¿De cuánto sería?*
Inmaculada [a Rebeca]: *¿Tú cuánto has dicho? ... ¿No sería también 160 ...? Porque queda igual. ¡Ah! No, que es más grande.*
Las otras niñas: *No puede ser también de 160.*
....

Luego se resuelven, bien, los ejercicios con giros de +45°, +120° y +180° y se pide la regla, lo cual ya comenté anteriormente.

En el giro de 160° de la figura, las alumnas obtienen las imágenes de varios vértices. Hay que destacar que como primer vértice Inmaculada y Marta han seleccionado uno diferente. Al comparar sus dos imágenes creen que alguna de ellas la tiene mal; Marta comprende la situación en cuanto se da cuenta de que los vértices son distintos, pero Inmaculada sigue sin entender que las dos imágenes son correctas pues, cuando Rebeca le dice lo que sucede, Inmaculada exclama: *¡Qué lío!*

Final de la Sesión 4 y principio de la Sesión 5

Láminas: 6-G-12.
Objetivos: Descubrir y utilizar que los centros de los giros que transforman un punto en otro son los puntos que están sobre la mediatriz. (La perpendicularidad no se verbaliza, aunque sí se pretende que visualmente se abstraiga la inclinación correcta de la recta).
Recordar qué es la mediatriz y la propiedad de equidistancia que posee.
Actividad 12: Identificar cuáles de los puntos marcados mediante una x sirven como centros de giros que mueven P hasta P'.

Para el par de puntos Q y Q', explicar si, sin necesidad de comprobar con el compás, se puede desechar algún punto (x) y si se puede saber cuáles son los puntos (x) válidos.
Las mismas preguntas para el par R y R'.
Averiguar si existen más centros de giro. En caso afirmativo, decir cuántos y cuáles.
Recordar lo que es la mediatriz. Indicar qué propiedad posee en relación con lo que acabamos de ver.

Al resolver el primer ejercicio de esta actividad, todas las niñas identifican enseguida el centro de giro situado en el punto medio del segmento PP'. Para comprobarlo, Icíar se sirve del compás.

Rebeca, tras unas cuantas soluciones, generaliza que servirán los puntos que están alineados y las demás niñas descubren esa propiedad en el ejercicio siguiente. No recuerdan (o no han estudiado) que la mediatriz es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento.

Excepto en las primeras justificaciones de Inmaculada, las razones aducidas por las alumnas para eliminar los puntos incorrectos se centran en la equidistancia. Marta y Rebeca además hacen referencia de manera explícita en su justificación a la relación equidistancia - circunferencia. Al principio parece que Inmaculada haya aprendido la técnica de utilizar el compás para comprobar y no se sabe si lo relaciona con la equidistancia.

Rebeca resuelve los ejercicios más deprisa que sus compañeras, por lo que efectúa un ejercicio complementario, consistente en medir los ángulos correspondiente a los giros con centro en algunos de los puntos que ha obtenido como solución del ejercicio anterior, tarea que completa bien.

A continuación presento la transcripción de algunas de las intervenciones de las alumnas relacionadas con los comentarios anteriores.

Prof.: *Buscar centros de giro que pasen R a R'. Primero, a ojo, tachar los que veáis que no sirven.*
Marta: *¡Ah!, era de R a R' y yo he hecho de R' a R.*

Inmaculada [a Marta]: *Tienes que poner la punta* [del compás] *en cada estrellita* [los puntos están marcados mediante x] *y si te pasa por los dos puntos, entonces está bien.*

Prof.: *¿Y por qué lo tienes que poner en cada estrellita?*

Marta: *Porque la estrellita tiene que ser el centro de giro.*

Prof.: *Antes de empezar con el compás, tacha los que a ojo no te sirvan.*

Marta justifica que un punto no es centro de giro *Porque, a ojo, la distancia a R no es la misma que a R' y entonces no puede haber una circunferencia.*

Rebeca obtiene enseguida las soluciones. El profesor le dice:

Prof.: *Imagino que has probado poniendo el compás en los puntos y probando si pasaba por los dos puntos* [R y R']. *¿Por qué sirve ese método para ver si es centro de giro?*

Rebeca: *Porque está a la misma distancia de los dos puntos.*

Prof. [a Rebeca]: *Además de esos tres puntos que te han salido, ¿puedes marcar más, que no estén* [dibujados en la lámina y] *que sean centros de giro?*

Rebeca: *Muchos, son todos los de la recta* [los de la mediatriz].

Cuando la profesora le pide a Inmaculada que tache los que sepa que no son centros de giro sin utilizar el compás, Inmaculada se sirve de los dedos, como si se tratara de un compás. Cuando ha tachado un punto, la profesora le pregunta por qué no es válido. Inmaculada contesta que porque la circunferencia no pasará por R y por R' y luego se queda pensando.

Marta: *Porque, a ojo, la distancia a r no es la misma que a r' y entonces no puede haber una circunferencia.*

Inmaculada: *¿Sabes qué creo? Que son así porque tienen que estar todos seguidos* [quiere decir alineados].

Prof.: *¿Por qué?*

Inmaculada: *Yo creo que sí.*

Prof.: *Además de esos puntos, ¿qué otros servirían?*

Inmaculada: *Los que estuviesen a la misma distancia.*

Marta: *Los que estuviesen entre ésos* [entre R y R'].

Prof.: *¿Solamente?*

Icíar: *O más lejos, siempre que estuvieran en la misma línea.*

El profesor les pide que dibujen varios y pregunta: *¿Cuántos salen?*

Niñas: *Un montón.*

Marta: *Infinitos. Todos los que estuviesen por ahí* [en la mediatriz].

Inmaculada: *Yo creo que cuando coges dos puntos que ya son centros de giro, ya son todos los de la recta.*

Final de la Sesión 5 y principio de la Sesión 6

Láminas: 6-G-13.
Objetivo: Obtener el centro del giro que transforma una figura en otra. Descubrir y/o utilizar el método de corte de mediatrices para obtener el centro de giro.
Actividad 13: Obtener el centro del giro que transforma la figura A en la figura B.

Las niñas seleccionan rápidamente como centro de giro el punto medio del segmento que une un vértice y su imagen y trazan la circunferencia correspondiente. Todas se quedan asombradas cuando, al comprobar con el disco transparente, ven que no es correcto. El profesor les recuerda que antes vieron que hay muchos puntos que sirven como centros de giro para un par de puntos. Eso hace que Icíar piense en probar con otro punto, pero lo hará por tanteo sobre la mediatriz del segmento anterior. Ese es también el método adoptado por Marta e Inmaculada (seguramente unas alumnas influidas por las otras); en concreto, lo que hacen es trazar una mediatriz e ir probando con el compás diversos puntos de esa mediatriz, para verificar su validez como centro de giro para otro vértice de la figura.

Rebeca intenta razonar sobre la equidistancia en la mediatriz, pero erróneamente, pues cree que, dibujada una mediatriz, la distancia desde un punto de ella a cualquier par de puntos que se corresponden (aunque no sean los utilizados para trazar la mediatriz) ha de ser la misma. Al comprobar se queda extrañada de que no se verifique eso. El profesor le explica a Rebeca el método que emplean las demás niñas para obtener el centro de giro, pero a Rebeca no le acaba de convencer el tener que ir probando por tanteo. De todas maneras, como no se le ocurre ninguna alternativa, resuelve de esa manera el ejercicio y empieza a probar en el ejercicio siguiente. Pero de repente se da cuenta por sí misma de la solución, relacionando correctamente la propiedad de equidistancia de las mediatrices. El tono de voz con que Rebeca explica ese resultado muestra que ha tenido la visión clara de la solución:

Rebeca: *Si hacemos las mediatrices de todos los segmentos de todos los vértices podemos sacar un punto* [en el] *que coinciden todos. ¡Pues claro!*

Rebeca es la única que deduce esa relación; como se ha podido apreciar, Rebeca piensa obtener el punto de corte de las mediatrices para todos lo vértices. Inmaculada no llega a entenderla. Marta e Icíar no sé si lo comprenden, aunque sí lo aceptan: Cuando, a instancias de la profesora, intentan resolver otro ejercicio aplicando el corte de mediatrices, se arman un lío debido a la cantidad de líneas que hay trazadas (además de los segmentos que unen los puntos que se corresponden y de las mediatrices, están también las marcas realizadas con compás para obtener las mediatrices). Ello origina que Marta abandone ese método y emplee de nuevo el tanteo a lo largo de una mediatriz. La expresión que utiliza Icíar, tras obtener finalmente el centro de giro mediante el corte de dos mediatrices es: *¡Me sale!* con una mezcla de satisfacción y asombro, lo cual hace pensar que no había establecido internamente las relaciones que llevan a esta propiedad.

Antes de indicarle a Marta el método de corte de mediatrices, Marta explica cómo ha obtenido ella el centro de giro: Ha hallado una mediatriz y ha ido probando puntos. El primero que prueba ve que no le sirve, pero el segundo en el que prueba sí le sirve para tres puntos. Su última frase es:*Y por eso concluyo que sí sirve*. Esta forma de expresarse es característica del vocabulario de Marta, cuyas estructuras gramaticales son apropiadas para el inicio del nivel 3 de razonamiento: Como se cumple tal cosa, entonces ...

Láminas: 6-G-14.
Objetivos: Obtener el giro resultante de la composición de giros del mismo centro.
Actividad 14: Aplicarle a la figura un giro de -90°. A la imagen resultante, aplicarle un giro con el mismo centro y ángulo -70°. Indicar cuánto mide el ángulo del giro resultante.

Esta actividad solamente se hace una vez y las alumnas responden correctamente. Parece que no presenta dificultades prever el resultado, si bien habría sido conveniente emplear valores de ángulos de distintos signos. Para determinar el signo del giro resultante, las alumnas se basan en el sentido de las agujas del reloj.

Aunque no tiene implicación directa en el objetivo de esta actividad, comentaremos que Icíar obtiene la imagen de dos vértices sirviéndose del compás. Por lo general, siempre pregunta sobre la necesidad de obtener la imagen del segundo de los vértices, aunque se trata de una confirmación más que de una pregunta. Eso es una constante en Icíar, por lo que no se da sólo en esta actividad, sino casi siempre. Icíar pone de manifiesto verbalmente su preferencia por el método basado en obtener la imagen de dos o más puntos cuando, para mayor rapidez, la profesora sugiere en actividades posteriores el uso del disco transparente, a lo que Icíar comenta: *Yo es que, como me lo he aprendido así ...* Inmaculada utiliza el disco de acetato.

Final de la Sesión 6, Sesión 7 y principio de la Sesión 8

Lámina 6-G-15.

Objetivo: Descubrir y aplicar la propiedad de que la inclinación de la figura final depende sólo del ángulo de giro y no del centro de giro.

Actividad 15: Aplicar varias veces a una figura el giro del ángulo que se da, utilizando un centro de giro distinto cada vez.

(Tras haber realizado varios ejercicios): Sin servirse de instrumentos, girar una figura, de la que ya se tienen varias imágenes mediante giros de distinto centro y el mismo ángulo que se pide ahora, por medio de un giro del mismo ángulo y cuyo centro se encuentra sobre la figura original.

La obtención de dos imágenes de la misma figura es suficiente para que todas las niñas, excepto Icíar, observen la traslación entre las imágenes. Es posible que Icíar no se diera cuenta de esa característica al mismo tiempo que las demás porque terminó un poco más tarde la actividad. En la transcripción que muestro a continuación se ve esto con más detalle:

En el primero de los ejercicios (girar un triángulo -dragón- 30° con distintos centros de giro), tras la colocación de dos imágenes la profesora pregunta si observan algo. Inmaculada y Marta ven la traslación:

Inmaculada: *Que todas miran hacia Marta ... Que si mueves esta hacia arriba se coloca encima.*

Marta: *Que todas son trasladadas* [antes de trabajar en esta unidad de enseñanza, las mismas niñas habían estudiado traslaciones].

Inmaculada: *Eso yo ya lo había visto.*

Icíar: *Pues yo no había caído.*

En el ejercicio inmediatamente posterior, en el que hay que realizar giros de 180°, cuando las alumnas han obtenido varias imágenes la profesora pregunta:

Prof.: *¿Qué pasa con todas las imágenes?*
Marta [y Rebeca después]:*Son paralelas.*
Inmaculada: *Que son paralelas a la primera* [No está claro si se refiere a la traslación entre todas las imágenes -todas las imágenes son paralelas a la primera imagen- o a la propiedad del ángulo de 180°, según la cual los lados de original y giradas son paralelos entre sí]
Prof.: *¿Qué movimiento pasa de una a la otra?*
Niñas: *Una traslación.*
Prof.: *¿Os acordáis que el otro día con 70 salía igual?*
Niñas: *Sí.*
Prof.: *¿Creéis que siempre va a pasar eso?*
Niñas: *Sí.*
....
Prof.: *¿Os acordáis de qué era una traslación?*
Marta: *Que traslada* [quiere decir mueve] *sin variar ... la inclinación.*

Uno de los ejercicios de esta actividad, del cual acabamos de mostrar una secuencia de la actuación de las alumnas en su resolución, utiliza giros de 180°. Al obtener la primera imagen, Rebeca se da cuenta de la propiedad de los giros de 180° de mantener el paralelismo entre un segmento y su imagen. Esa propiedad no había sido estudiada, pero no obstante Rebeca la descubre y la utiliza para calcular la segunda imagen. Se produce el diálogo siguiente:

Rebeca: *¿Lo podemos hacer a ojo?*
Prof.: *¿Pero a ojo dónde la colocarías?*
Rebeca: *Trazando paralelas* [coge un cartabón y una regla]. *Espérate a que lo mire. ¡Ah! sí. Claro. Tiene que estar así* [la coloca bien].
Prof.: *¿Cómo lo sabes?*
Rebeca: *No sé.*

Pero Rebeca sí está totalmente convencida de la propiedad y se basa en ella para indicarle a una compañera que no ha colocado bien la imagen. Más adelante, cuando la profesora hace referencia al paralelismo entre todas las imágenes, Rebeca piensa en el paralelismo con la original e indica que sólo ocurrirá cuando el ángulo es de 180°.

La inclinación de las imágenes de Inmaculada está algo desviada, quizá debido a que no las ha obtenido con exactitud. Rebeca en algún momento le indica su error fijándose en la ausencia de paralelismo entre los lados. Para obtener las imágenes de puntos de la figura, Inmaculada se ha servido del disco de acetato y las demás niñas del compás.

La aplicación de la propiedad objetivo de esta actividad (la inclinación de la imagen de una figura es siempre la misma si el ángulo del giro aplicado es el mismo) se plantea cuando la profesora les pide a las alumnas que giren el rombo 90°, tomando como centro un vértice de la figura original y sin utilizar compás ni disco (las alumnas acababan de obtener tres imágenes de esa misma figura original, por medio de giros de 90° con centros distintos). Rebeca enseguida aplica la propiedad. Marta dice enseguida que ha de ser "paralelo", aunque tarda un poco en obtener la imagen. A Icíar hay que darle alguna indicación. Inmaculada coloca mal la imagen, pues la sitúa paralela a la figura original y no a las otras imágenes; al corregir comete el error de no considerar como centro de giro el que se da, y hace coincidir vértices diferentes de la figura original y la imagen. Habría sido necesario formular algunas preguntas para saber hasta qué extremo esos errores son debidos a descuidos o a falta de comprensión de las propiedades implicadas.

A lo largo de los ejercicios de la actividad 15, se plantea varias veces cuál es la cantidad suficiente de puntos-imagen que hay que obtener para fijar correctamente la figura imagen. Inmaculada dice que uno, pero que coloca a ojo la figura imagen porque utiliza el disco, lo cual es un método correcto. Rebeca entonces se da cuenta de que, trazando las circunferencias de dos vértices, con fijar uno sólo es suficiente, pues el otro queda determinado porque debe estar sobre la otra circunferencia, lo cual es cierto.

Con posterioridad, cuando Rebeca e Icíar tienen que hacer un giro con centro sobre la figura original, Rebeca relaciona enseguida la cantidad necesaria de puntos en este caso con la situación en la que el centro de giro es exterior: Se da cuenta de que uno de los dos puntos necesarios es el centro de giro, porque su imagen ya se conoce (es el mismo punto). Icíar comprende el razonamiento de Rebeca, como se ve en el diálogo siguiente:

Rebeca e Icíar han elegido como centro de giro un punto sobre la figura.
Icíar: *Lo hacemos con todos los puntos?*

Prof.: *Como quieras. ¿Cuántos hacen falta?*

Rebeca: *Con uno si haces todas las circunferencias.*

Marta corrobora la contestación anterior de Rebeca.

Prof. [a Rebeca e Icíar]: *¿No tenéis ahí* [sobre la figura] *el centro? Pues, ¿cuántos hacen falta?*

Rebeca: *¡Claro!, pues ya hay dos.*

Prof.: *¿Con cuántas circunferencias habríais tenido bastante?*

Rebeca: *Con una. ¡Claro!*

Tras finalizar este ejercicio, la profesora les pregunta a Rebeca e Icíar:

Prof.: *Vosotras habéis cogido el centro ahí* [sobre la figura]. *¿Cuántos puntos hacía falta mirar?*

Rebeca e Icíar: *Uno.*

Prof.: *¿Por qué?*

Rebeca: *Porque uno* [punto cuya imagen han obtenido] *y uno* [el centro de giro], *dos.*

Prof.: *¿Y con el centro de giro qué pasa?*

Rebeca: *Que es un punto* [de los dos necesarios].

Icíar: *Que siempre está en el mismo sitio.*

Final de la Sesión 8

Láminas: 6-G-1.

Objetivos: Generalizar el resultado de la composición de giros con distinto centro (cuando el resultado es otro giro).

Actividad 16: Aplicar a la figura un giro y a la imagen resultante otro giro, con centro en un punto distinto. Determinar el giro que permite pasar directamente desde la figura inicial hasta la final.

Se dedica poco tiempo a esta actividad. No se les pide a las niñas que obtengan el centro del giro resultante de la composición. El primer ejercicio consiste en girar 90° el triángulo rectángulo (flor), con el centro de giro sobre la figura y, a continuación, girar 180° la imagen obtenida.

Tras resolverlo, Rebeca indica que sí habrá un giro que pase de la figura original a la última y que es de (-)90°. Para justificarlo muestra los movimientos:

Rebeca: *Se hace 90* [gira la pieza original -90°] *y entonces ya sale trasladada* [de la figura final]. [Traslada la pieza hasta la posición resultante de la composición que, efectivamente, resulta de un giro de -90°.]

Las demás alumnas no utilizan esa propiedad en sus razonamientos. Inmaculada no entiende por qué se obtiene como ángulo del giro resultante la suma de los que se componen. En un ejercicio lo indica explícitamente: *Yo no lo entiendo.* Aunque en el ejercicio siguiente Inmaculada proporciona el resultado correcto, posiblemente se deba a que es el tipo de respuesta que, en el entorno escolar, proporciona la solución adecuada en una situación semejante; de hecho, cuando la profesora le pide una justificación, la única contestación de Inmaculada es: *Porque creo que es así.* A continuación transcribo ese momento:

Prof.: *De la primera* [figura] *a la tercera eran 90 positivos y de la tercera a la cuarta 60 negativos.*

Inmaculada escribe en la pizarra

90 P
60 N
30

Y pregunta: *¿P o N?*
Prof.: *¿Tú qué crees?*
Inmaculada: *P.*
Prof. [señala en la pizarra] *¿90 positivos y 60 negativos no será 30 positivos?*
Marta: *Sí.*
Prof.: *¿Por qué?*
Marta: *Porque hemos restado los ángulos.*
Prof.: *¿Por qué has restado los ángulos?*
Inmaculada: *Porque creo que es así.*

Marta sí sabe obtener el valor resultante, relacionando el signo de los ángulos que se componen, si bien no justifica a través de la traslación de las imágenes, como hizo Rebeca. No está claro si, al igual que Inmaculada, sus respuestas se deben al contexto en el que se desarrolla la experiencia, que hace pensar que el resultado es la suma de los ángulos, o si utiliza conscientemente la propiedad de la determinación de la inclinación de la figura por medio del ángulo de giro. En cuanto a Icíar, la solución se da en la clase antes de que ella tenga su imagen final correcta, pues había utilizado una figura inversa. Por lo general, Icíar procede paso por paso y después da el resultado numérico.

En esta actividad se plantea la equivalencia de ángulos porque Rebeca da espontáneamente dos soluciones posibles a un ejercicio en el que los ángulos de los giros de la composición son 180° y +30°. Rebeca tiene en cuenta la doble posibilidad +180° y -180°, con lo que se obtienen los dos resultados 210° y -150°. A raíz de esto la profesora pide el ángulo equivalente a algún otro y las respuestas son correctas.

Respecto a la cantidad de puntos-imagen a utilizar para obtener correctamente la figura final, Icíar emplea uno sólo en un ejercicio en el que necesitaban dos. Por otra parte, Marta dice que va a emplear dos vértices. En un ejercicio en el que el centro del giro está situado sobre la figura, la profesora lo recalca, tras lo cual Marta dice: *¡Ah!, pues* [es necesario] *un solo punto.* De todas maneras, al enunciar el ejercicio no se había pedido que las alumnas emplearan la cantidad mínima de puntos necesaria para colocar la figura imagen. Inmaculada coloca mal algunas figuras imagen.

Sesión 9

Láminas: 6-G-17.
Objetivos: Recordar la realización de simetrías mediante plegado.
Actividad 17: Doblar la hoja por la línea y recortar las dos partes de la hoja juntas, siguiendo la silueta. Luego desplegar la hoja.

Esta actividad y las siguientes hasta el final de la experimentación de la unidad de giros están dirigidas a relacionar la composición de simetrías con las traslaciones y los giros.

Las alumnas han estudiado en algún curso anterior simetrías, pues cuando despliegan la hoja varias hacen referencia al "eje de simetría", vocablo que no se les había mencionado durante esta experimentación.

Láminas: 6-G-18.1, 6-G-18.2 y hoja en blanco.
Objetivos: Observar la alternancia de figuras simétricas y trasladadas de la original al realizar simetrías de ejes paralelos.
Reconocer la igualdad de vectores para traslaciones consecutivas.

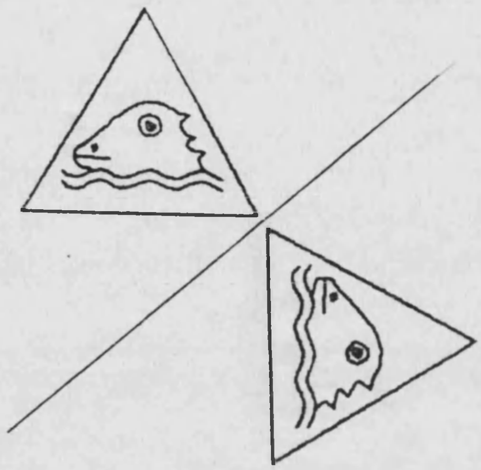
Actividad 18 (láminas 6-G-18.1 y 6-G-18.2): Aplicarle a una figura la simetría del eje situado a su derecha. Hacer lo mismo con la imagen. Repetirlo varias veces.
Decir qué se observa. Indicar qué movimiento permite pasar de la figura 1 a la 3 y de la 2 a la 4. Dibujar los vectores de la traslaciones que llevan la figura 1 a la 3 y la 2 a la 4. Decir cómo son esas traslaciones.
(Lámina en blanco): Plegar la hoja en acordeón. Dibujar una figura y recortarla, con la hoja plegada, atravesando todas las partes de la hoja.
Identificar los movimientos que aparecen. Indicar cómo son las traslaciones entre figuras consecutivas trasladadas.

Como el objetivo de esta serie de actividades no es estudiar las simetrías, la obtención de las imágenes se realiza utilizando el mira (hacemos la descripción de este material en el capítulo 2 de esta memoria), por ser el método más rápido y fácil de aprender. No obstante, después de que las alumnas han utilizado el mira con las figuras de la primera lámina, la profesora les pide que obtengan la primera imagen de la lámina 6-G-18.2 sin utilizar dicho instrumento. El objetivo es detectar la tendencia que puedan tener las alumnas a efectuar un desplazamiento horizontal en situaciones de simetría como la propuesta. Como era de esperar (Küchemann, 1981; Grenier, 1988; Gutiérrez y Jaime, 1988; Jaime y Gutiérrez, 1989 b), todas las alumnas cometen ese error.

Las alumnas adelantan la alternancia de inversión de las figuras antes de realizar la primera composición: La profesora les pregunta cómo será la imagen de la primera figura que han obtenido y las alumnas contestan, correctamente, que será como la original. De todas maneras, como se verá más adelante, las alumnas no aplicarán posteriormente la inversión cuando tengan que verificar que una simetría sola no puede producir un giro. También identifican el tipo de movimiento (traslación) que permite pasar de una figura a otra alternada.

Resulta interesante observar la intuición incorrecta de giro que produce en los estudiantes la realización de una simetría, debido a la variación de inclinación que se produce en la imagen. Se puede ver en el segundo ejercicio de esta actividad (ver dibujo):

Rebeca: *He hecho un giro.*
Prof.: *Has hecho una simetría.*
Rebeca: *Y un giro.*
Las demás niñas: *Y un giro.*

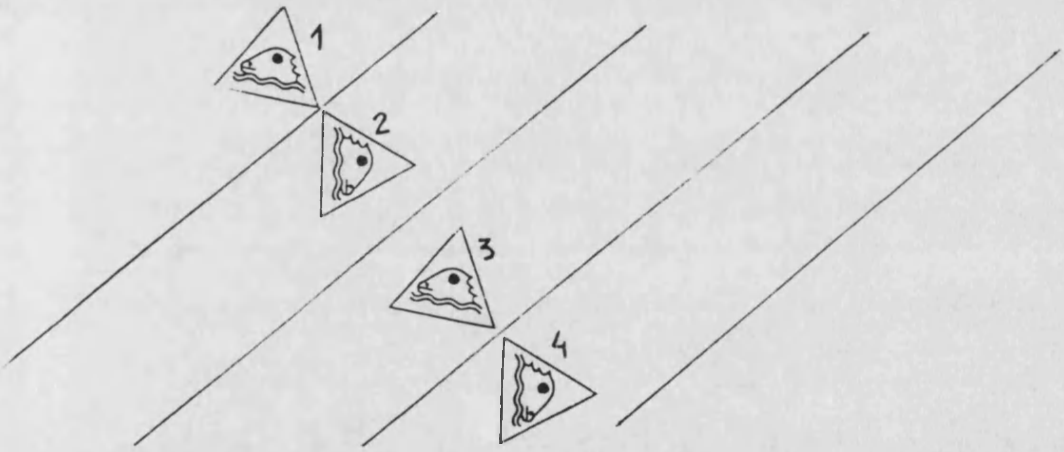


La profesora hace que las alumnas utilicen una figura y la muevan para buscar el giro, tras lo cual se dan cuenta de que no se trata de la misma figura:

Icíar: *No es un giro porque son caras opuestas. Miran diferente.*
Otras niñas: *Es verdad.*

Inmaculada comete de nuevo ese mismo error, con la misma pieza, más adelante:

Inmaculada: *Entonces ésta y ésta* [no se sabe si se refiere a la 1 y la 2 ó a la 1 y la 3] *no son traslaciones. Entonces son giros* (ver el dibujo siguiente).
La profesora le pide que verifique, moviendo la figura, dónde está el giro.
Inmaculada: *Son simétricas. El ojo está hacia el otro lado.*



La visión de la primera traslación le permite a Icíar generalizar que saldrán más traslaciones, situación corroborada por Rebeca. Marta e Inmaculada van algo más atrasadas y la primera visión de Inmaculada cuando obtiene las cuatro imágenes es la repetición de los pares figura-imagen (ver dibujo anterior) aunque, al preguntarles directamente, todas las alumnas reconocen las traslaciones existentes. Veamos cómo Icíar adelanta la existencia de una traslación. La profesora pide encontrar la figura simétrica de la figura 3 (las alumnas las han numerado desde el 1, comenzando por la original).

Icíar: *¿No saldrá trasladada de ésa* [de la 2]?

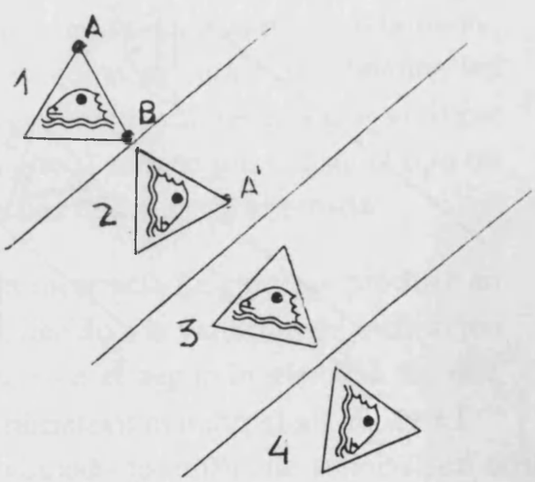
Rebeca: *¡Claro!*

Icíar: *Porque si ésa* [la 3] *sale trasladada de ésa* [la 1], *ésta* [la que hay que obtener] *será trasladada de ésa* [la 2].

Respecto a la igualdad de las traslaciones, se recalca poco en esta experimentación, pero sí aparece el comentario anterior de Icíar, el cual refleja que Icíar se da cuenta no sólo de la existencia de las traslaciones, sino seguramente también de su igualdad. Cuando la profesora pregunta cómo es la traslación que lleva la figura 2 a la 4, Inmaculada la señala con la mano y Rebeca hace referencia explícita a la igualdad de las traslaciones: *Es el mismo vector*, lo cual es seguido de la justificación de Icíar: *Sí porque van todos en la misma línea*. Icíar no menciona la igualdad de longitudes, propiedad que es precisamente la que utiliza Marta en el ejercicio siguiente para referirse a la característica común de todas las traslaciones que aparecen: *Son de la misma longitud*.

Tras completar el segundo ejercicio, y una vez que las alumnas han observado que hay traslaciones, Marta tiene una gran confusión, pues intenta trasladar varios puntos de la figura original a un mismo vértice de su imagen:

Marta: *Suponiendo que de este vértice* [el marcado mediante A en el dibujo] *quisiéramos trasladar a éste* [el marcado mediante A' en el dibujo], *cogiendo éste* [el marcado mediante B en el dibujo], *si lo quisiéramos trasladar a éste* [A'] ...



Prof.: *¿Pero de aquí* [figura 1] *a aquí* [figura 2] *puedes trasladar?*

Marta: *No. Pero con este vértice* [el superior] *sí puedes.*

Prof.: *Este vértice sí que lo puedes llevar aquí, pero la figura entera no se traslada. La figura entera no es una traslación. Tienes traslación de aquí a aquí* [1 a 3] *y de aquí a aquí* [2 a 4].

Ese bloqueo de Marta no se corresponde con su razonamiento usual, y hay que considerarlo como momentáneo. Posteriormente no tiene más ese tipo de problemas.

Láminas: 6-G-19.
Objetivos: Relacionar la composición de dos simetrías de ejes que se cortan con un giro con centro el punto de corte de los ejes.
Actividad 19: Aplicarle a la figura la simetría de eje el más próximo a ella. Aplicarle a la imagen la simetría del otro eje.
Decir qué movimiento lleva la figura original a la final. Obtener el centro del giro.

Una vez resuelto el primer ejercicio (el caso en el que la figura tiene un vértice en el punto de corte de los dos ejes de simetría), Inmaculada es la primera que, ante la pregunta de la profesora, dice que el movimiento que pasa de la figura original a la final es un giro. Eso es correcto, pero posteriormente, en el segundo ejercicio, dice que la imagen de la figura original por la primera simetría está girada. Ello hace pensar que Inmaculada simplemente se fija en la variación de inclinación para afirmar que se trata de un giro, igual que había sucedido en la actividad 18.

El trabajo que se hace respecto a esta propiedad no es riguroso ni completo pues, por falta de tiempo, no se plantea la obtención del centro de giro por medio del corte de mediatrices para confirmar que es el punto de intersección de los ejes de simetría, ni el valor del ángulo de giro en función del formado por los ejes. Debido a la posición de una de las figuras y de los ejes de simetría, no es difícil reconocer visualmente el centro de giro, y eso es lo que se pide; varias de las niñas lo indican correctamente.

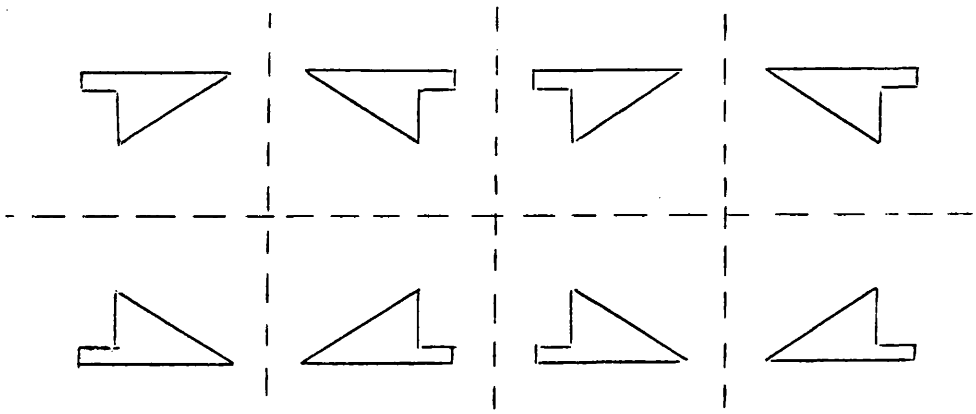
Inmaculada: *Un giro.*
Rebeca: *No tenemos que hacer un giro.*
Icíar: *Sí, será un giro.*
Rebeca: *Es que no tenemos centro de giro.*
Prof.: *¿Podría ser una traslación?*
Niñas: *No.*
Prof.: *¿Y una simetría?*
Niñas: *No.*
Prof.: *¿Por qué no?*

Icíar: *Porque las figuras, los puntos, no miran al mismo sitio.*
Inmaculada: *Es un giro, es un giro.*
Prof.: *¿Cómo lo sabes?*
Inmaculada: *Porque lo he puesto aquí* [Quizá lo ha comprobado con la mano o con un disco].
Icíar: *No es simetría porque una mira para un sitio y otra para otro.*
Rebeca: *No es simetría porque es la misma figura.*

En el ejercicio siguiente, Rebeca, Marta e Inmaculada indican, sin dudarlo, que se trata de un giro; de Icíar no tenemos información sobre lo que dice.

Láminas: Hojas en blanco.
Objetivos: Reconocer la alternancia de simetrías y giros en una serie de figuras.
Actividad 20: Doblar la hoja por la mitad y luego de nuevo por la mitad, con el pliegue perpendicular al anterior. Recortar una silueta con la hoja doblada. Desplegarla.
Identificar los movimientos que se pueden observar. Dar el centro y el valor del ángulo del giro que hay desde una figura hasta la siguiente girada.
Repetir el ejercicio haciendo un pliegue más que antes, perpendicular al último. Identificar varios centros de giro, el ángulo de giro y los otros movimientos existentes.

En estos ejercicios no interviene Inmaculada. Las alumnas sí identifican las figuras simétricas, giradas y los centros de giro correctamente (en el segundo ejercicio sólo se piden los centros de giro sencillos, correspondientes a intersección de pliegues). Respecto al ángulo de giro, en el primer ejercicio lo dan bien y en el segundo hay alguna confusión momentánea entre 90° y 180°. En el dibujo mostramos la disposición de las figuras del segundo ejercicio.



RESUMEN DE LA EXPERIMENTACIÓN EN MAGISTERIO

Listado de las actividades experimentadas.

Láminas: Ninguna.
Objetivos: Obtener información sobre la idea de giro que tienen los alumnos.
Actividad 1: Pedir ejemplos de giros.

Láminas: Hojas en blanco.
Objetivos: Introducir visualmente la variación de inclinación y la posición de una figura por un giro, cuando el centro de giro se encuentra sobre la figura.
Aprender a manejar instrumentos auxiliares (objeto punzante) para realizar giros.
Actividad 2: Pinchar una pieza en un vértice (o en su interior) y darle vueltas.
Pegar luego tres piezas en distintas posiciones a lo largo del recorrido.
Pegar una figura en la hoja. Fijar un vértice o punto interior de esa figura y, sin ayuda de material auxiliar, situar tres imágenes de giros con centro en el punto fijado. Comprobar a continuación, con ayuda de un objeto punzante, la exactitud de las soluciones anteriores.

Láminas: Hojas en blanco.

Objetivos: Introducir visualmente la variación de inclinación y la posición de una figura por un giro, cuando el centro de giro se encuentra en el exterior de la figura.

Aprender el manejo de instrumentos auxiliares (palillo, disco transparente) para efectuar giros.

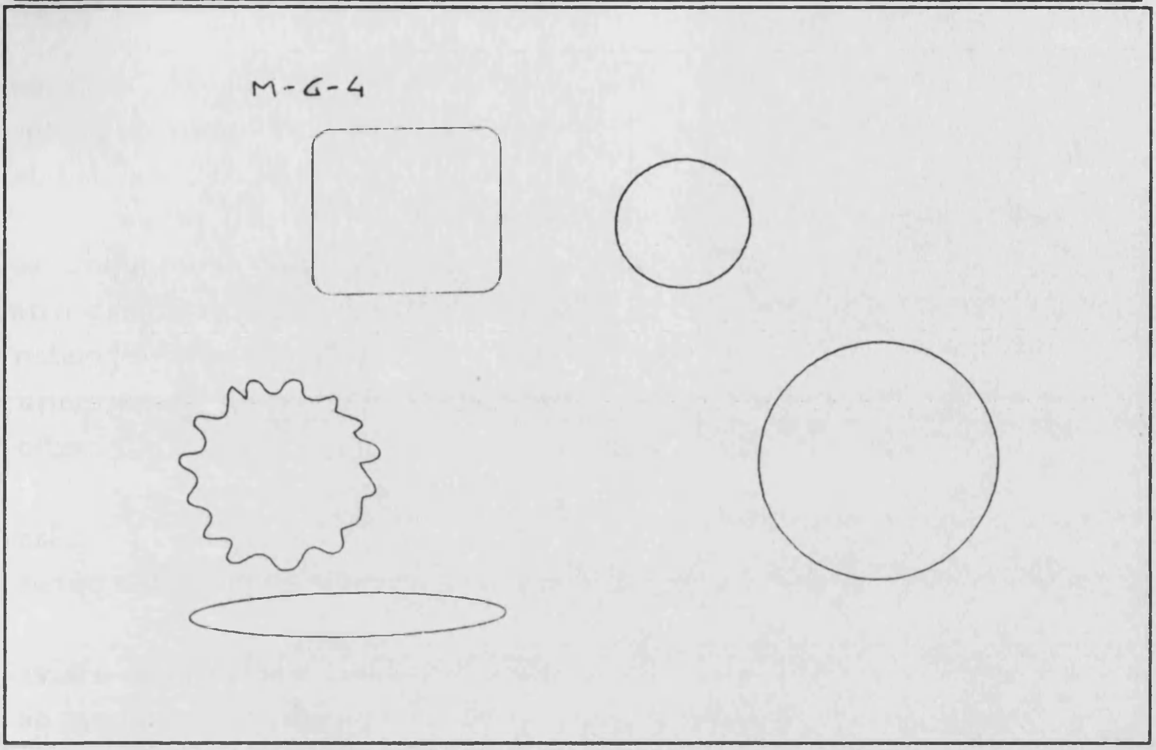
Actividad 3: Pegar una figura en la lámina; marcar un punto exterior a ella como centro de giro. Con la ayuda de un palillo o un disco transparente, observar cómo varía la imagen al dar vueltas. Pegar luego tres piezas en distintas posiciones a lo largo del recorrido.

Pegar una figura en una hoja; marcar un punto exterior a ella como centro de giro. Sin usar material auxiliar, pegar tres piezas en distintas posiciones a lo largo del recorrido. Comprobar a continuación, con un disco o palillo, la exactitud de las soluciones anteriores. Explicar qué características se han tenido en cuenta para resolver el ejercicio y cuáles los errores cometidos.

Láminas: M-G-4.

Objetivo: Reconocer las circunferencias como las únicas líneas que describen el recorrido de un punto a lo largo de un giro de 360°.

Actividad 4: Identificar cuáles de las líneas corresponden al recorrido de un punto cuando gira. Justificarlo.


M-G-4

Láminas: M-G-5.1 y M-G-5.2.

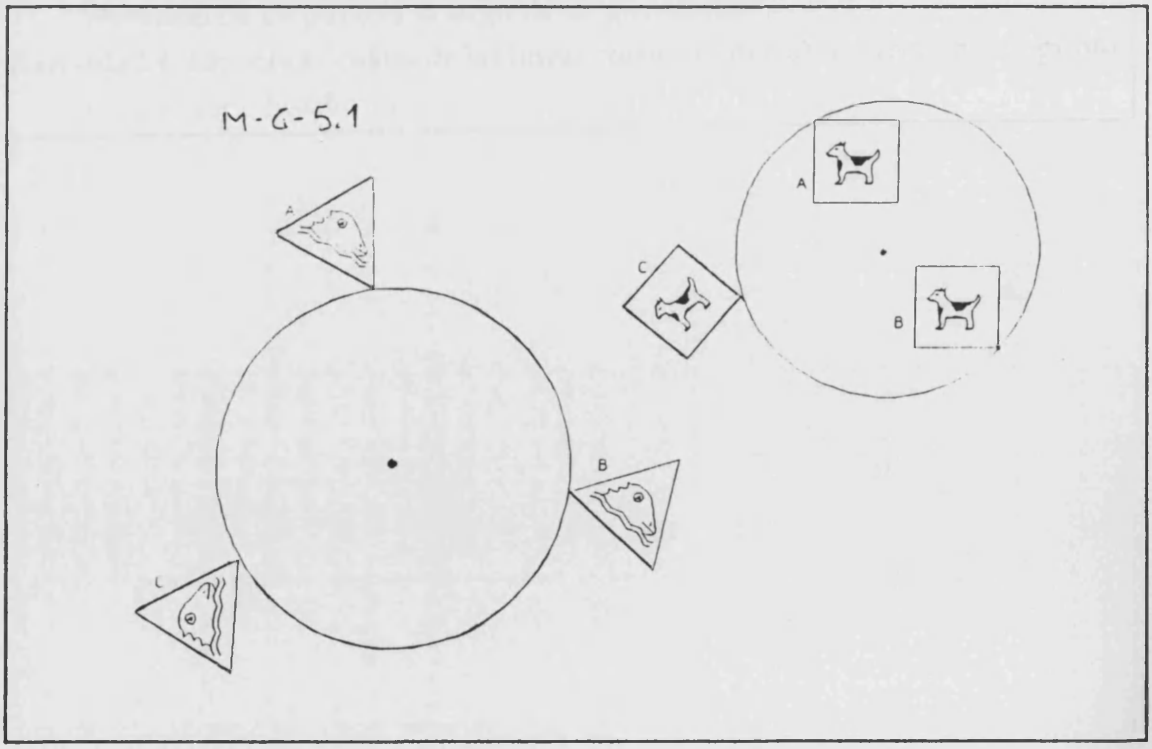
Objetivos: Reconocer las figuras que se corresponden mediante un giro, conocido su centro. Utilizar características visuales, equidistancia al centro de puntos de la figura (por medición directa y mediante circunferencias), igualdad de los vértices que tocan una misma circunferencia.

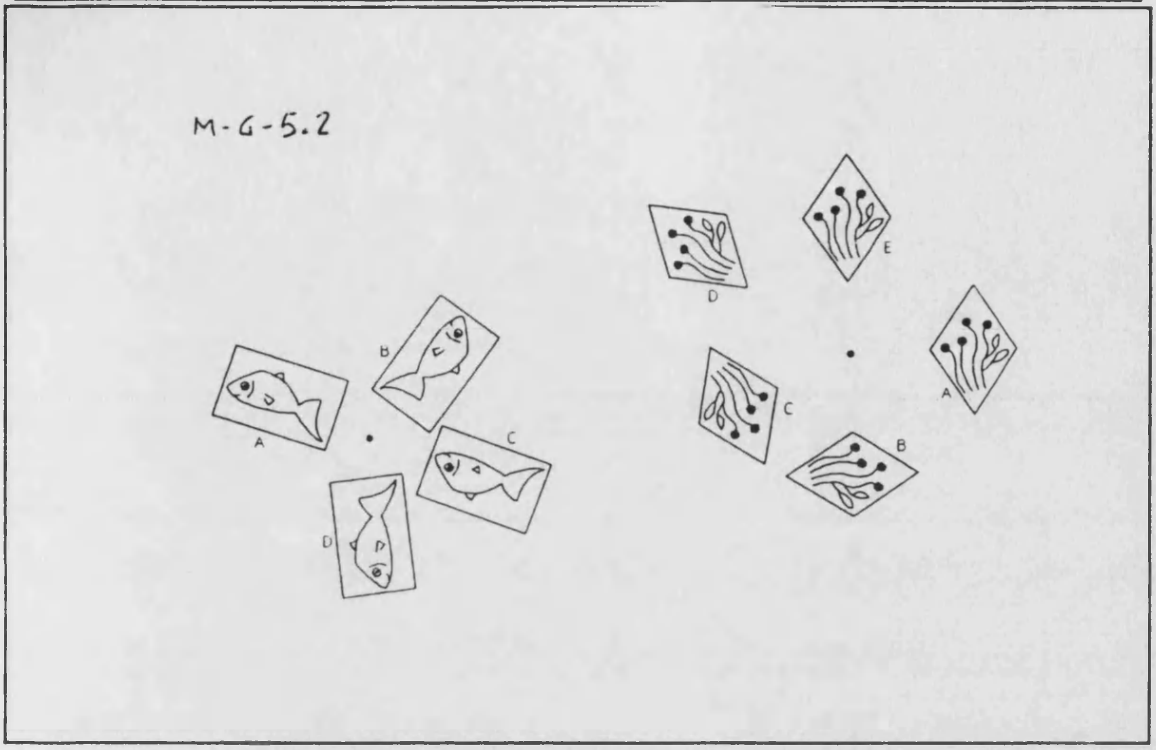
Utilizar la imagen de vértices como medio para identificar si dos figuras se corresponden mediante un giro. Entender que la verificación de la imagen de un sólo punto no es suficiente para asegurar que dos figuras se correspondan mediante un giro. Reconocer la cantidad de puntos que es necesario comprobar para asegurarse de que una figura es imagen de otra por medio de un giro.

Actividad 5: Identificar las figuras que son giradas de la A (lámina M-G-5.1) y las figuras giradas entre sí (lámina M-G-5.2), con centro de giro en el punto indicado.

Explicar cómo se puede asegurar que las soluciones son correctas. Hacer referencia a ajuste de puntos por circunferencias, a medición de distancias de puntos al centro de giro, ...

Indicar cuál es la cantidad mínima de puntos o circunferencias que se debe comprobar para asegurar que dos figuras se corresponden mediante un giro.





Láminas: M-G-6.1 y M-G-6.2.

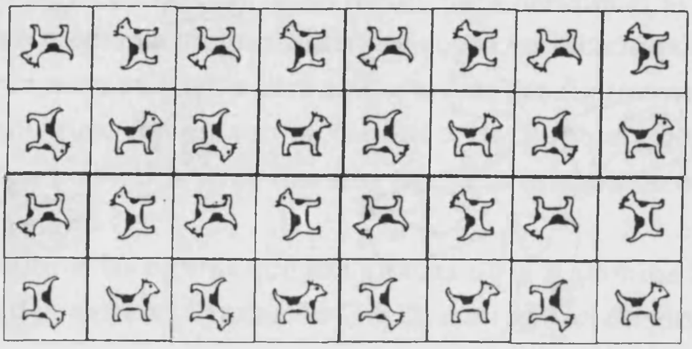
Objetivos: Identificar los giros existentes entre las figuras que tocan un mismo vértice de la malla.

Relacionar el ángulo de giro con el número de figuras alrededor del centro de giro.

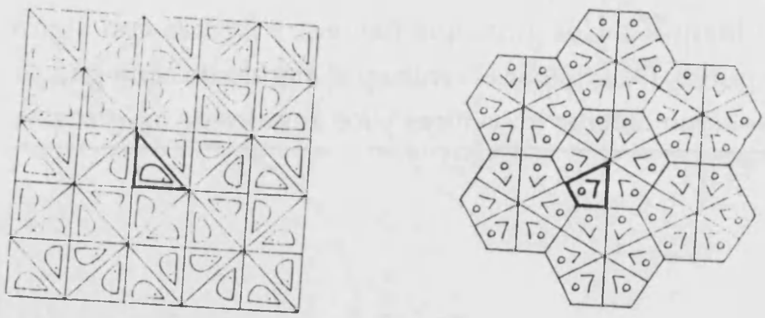
Actividad 6: Identificar los giros que hay entre figuras con algún vértice en un mismo punto. Determinar el centro y el ángulo de cada giro.

Explicar cómo obtener los centros y los ángulos de los giros.

M - G - 6.1



M - G - 6.2



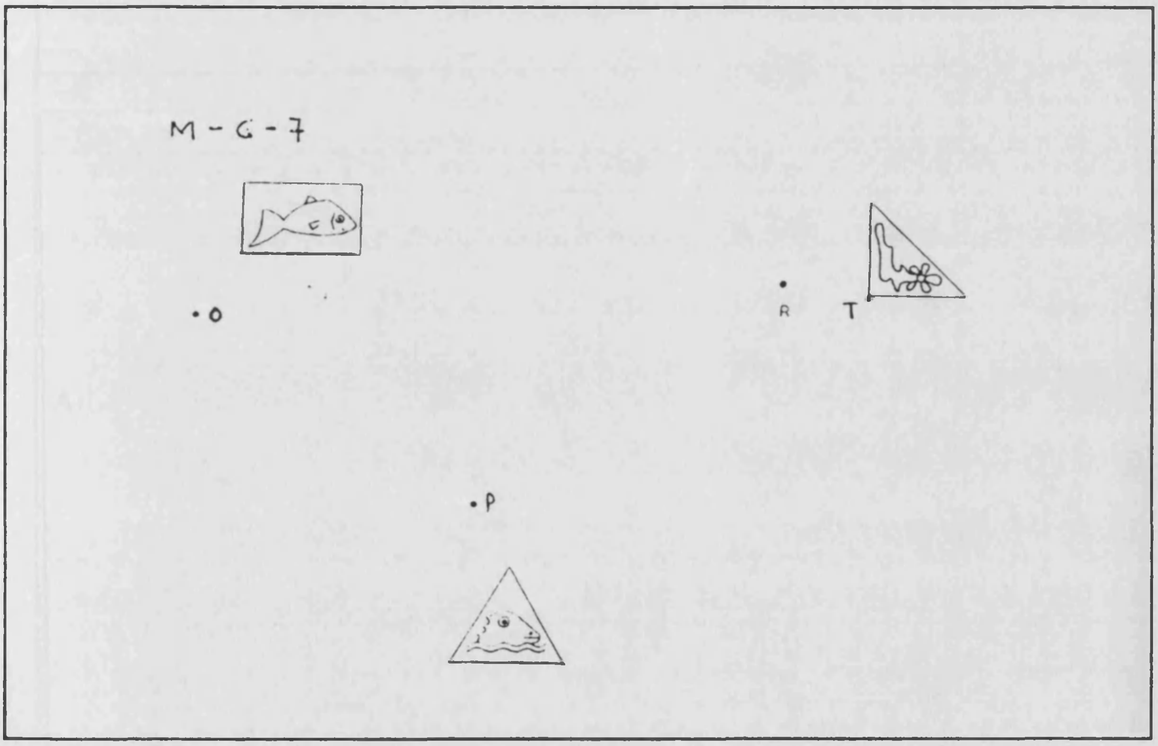
Láminas: M-G-7.

Objetivos: Servirse de circunferencias para hallar la imagen de un figura por un giro, cuyo centro se conoce.

Reconocer la cantidad necesaria y suficiente de circunferencias (es decir, de puntos-imagen) para determinar la figura final.

Actividad 7: Girar la figura, tomando como centro el especificado. El método a utilizar es el trazado de circunferencias.

Explicar para cuántos puntos se han trazado circunferencias, si se pueden emplear menos y cuál sería la cantidad mínima necesaria para determinar la imagen de la figura.



Láminas: M-G-8.

Objetivos: Introducir el empleo de la medida del ángulo de giro.

Determinar el ángulo de giro, conocidos un punto y su imagen.

Aplicar un giro a un punto y a una figura, conocidos el centro y el ángulo.

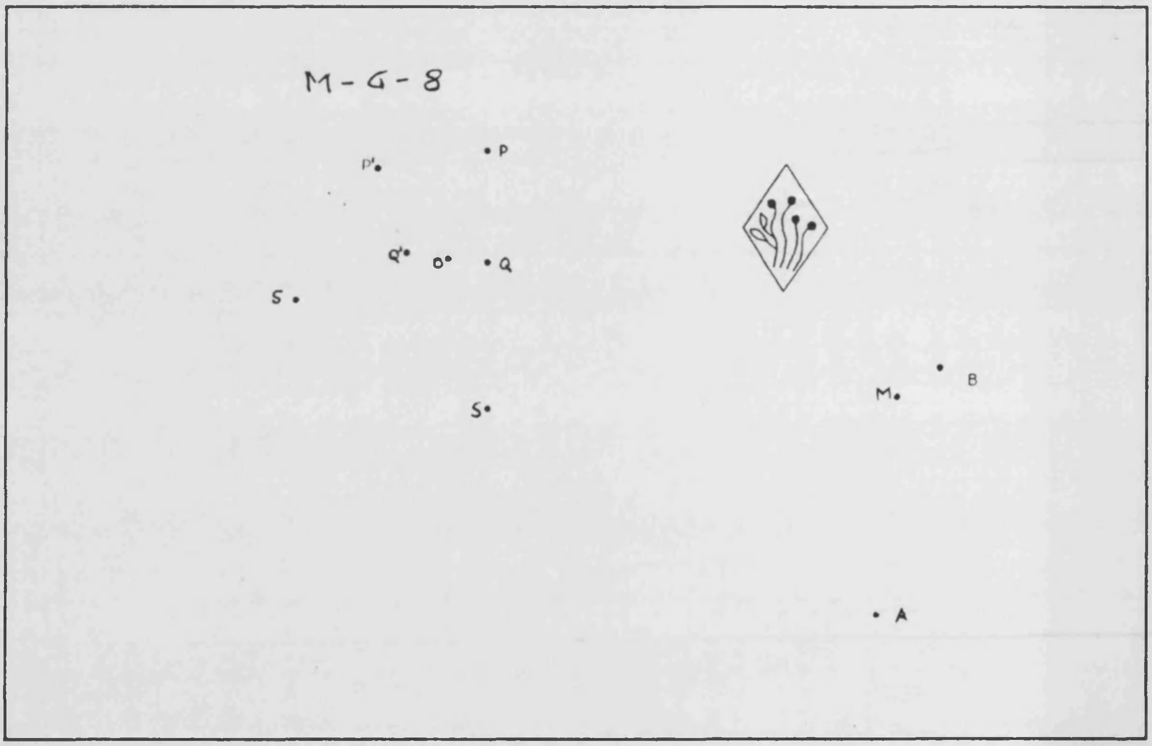
Reconocer la cantidad necesaria y suficiente de puntos-imagen necesarios para obtener la imagen de una figura por un giro determinado.

Actividad 8: Medir con exactitud el ángulo del giro, con centro O, que lleva P a P'.

Aplicar un giro con centro M y ángulo el anterior al punto A.

Aplicar ese mismo giro a la figura.

Indicar de cuántos puntos se ha obtenido la imagen, si es posible emplear menos y cuál sería la cantidad mínima necesaria para determinar la imagen de la figura.



Láminas: Hoja en blanco.

Objetivos: Introducir el signo de los ángulos de giro. Comprender la ambigüedad del empleo de las direcciones "izquierda", "derecha", "arriba y "abajo" y contrastarla con la eficacia del sentido de las agujas del reloj.

Actividad 9: Marcar un punto como centro de giro y otro punto para moverlo mediante un giro de ángulo 30° y centro el punto marcado.

Tras resolver el ejercicio propuesto, averiguar si sólo hay una solución. Dibujar la otra. Pensar cómo se pueden diferenciar las dos opciones.

(Tras introducir el signo de los ángulos, marcar un punto como centro de giro y girar otro punto un ángulo de ... (proponer valores con signo).

Láminas: M-G-10.

Objetivos: Dados un punto o figura y su imagen por un giro, calcular el ángulo de giro.

Saber que, al girar una figura, todos sus puntos realizan el mismo giro.

Descubrir y aprender la equivalencia de los giros con el mismo centro y ángulo de +180° y -180°.

Descubrir y aprender la equivalencia de giros. Generalizar la regla.

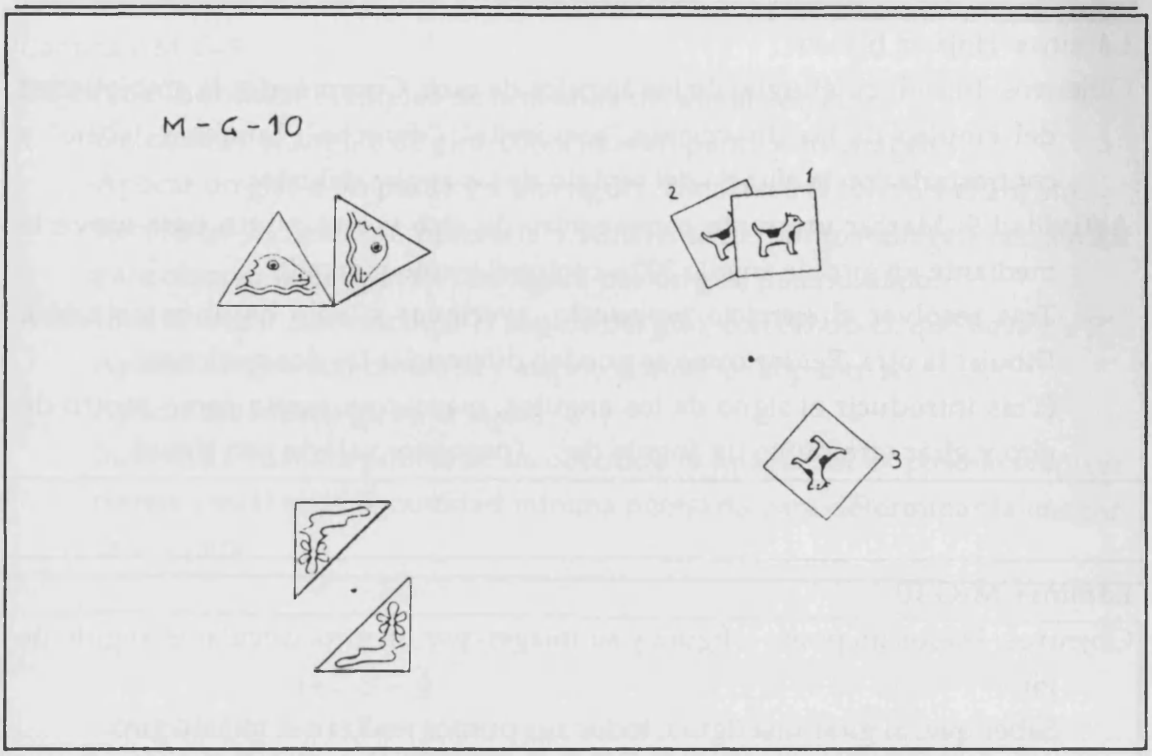
Actividad 10: Medir el ángulo del giro que lleva una figura a su imagen.

Explicar qué ángulo se obtiene al elegir otro punto de la figura para medirlo.

(En las figuras con giros de 180°): Explicar si sólo se puede dar como valor ... (el obtenido por los alumnos).

En los otros ejercicios también hay dos valores de ángulos posibles, haciendo el recorrido en sentidos opuestos entre si. Obtener ambos ángulos. Indicar y justificar cómo son sus signos y su relación numérica. Generalizar las características (centro y ángulo) de los giros equivalentes.

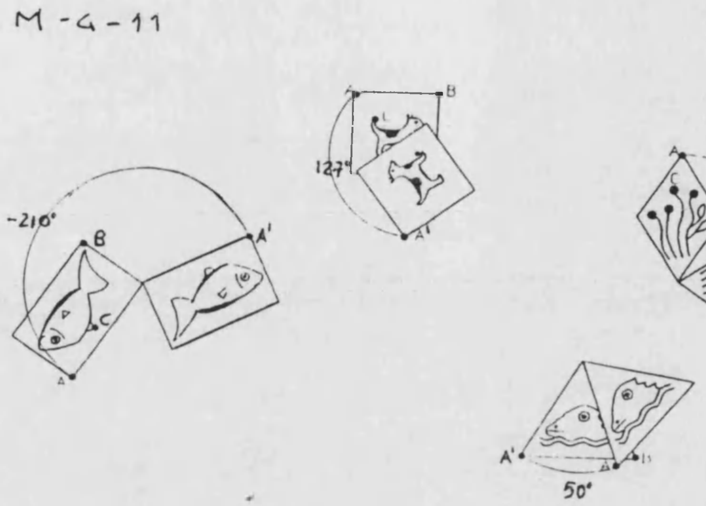
Comprobar que hay más valores de ángulos que producen giros equivalentes a $G(O,\alpha°)$: $\alpha° \pm \dot{3}60°$. Hacer varios giros equivalentes con la misma figura y explicar numéricamente cuáles son sus valores. Generalizar la solución.



Láminas: M-G-11.

Objetivos: Relacionar correctamente el sentido de giro con el signo del ángulo.

Actividad 11: Marcar el sentido del giro sobre el arco señalado en la lámina.



Láminas: Hoja en blanco.

Objetivos: Afianzar la aplicación de giros a una figura, conocidos el centro y el ángulo de giro.

Reconocer, por distintos métodos, cuándo está determinada la figura imagen: Medición para dos puntos, trazado de circunferencias junto con una medición, trazado de líneas rectas en el caso de ángulos de 180°, ...

Utilizar el giro más cómodo entre los equivalentes.

Actividad 12: Pegar una figura y marcar un vértice o un punto exterior como centro de giro. Girar la figura con el centro y ángulo indicados.

Especificar si se podría haber determinado la figura imagen con menos elementos de los utilizados. Explicar cuáles son los elementos mínimos a obtener si se utiliza el ajuste por circunferencias de puntos, aplicación del giro a puntos, ... Explicar qué sucede si el giro es de 180°.

Decir si el ángulo que se ha utilizado es el más sencillo o si se podría haber empleado otro, de un giro equivalente, y que resulte más fácil.

Láminas: Hojas en blanco.
Objetivos: Repaso de la equivalencia de giros: Centro y ángulo.
Actividad 13: Determinar los giros equivalentes a los que se indican. Marcar un centro de giro y un punto. Obtener la imagen de ese punto, señalando los recorridos de los dos giros equivalentes.

Láminas: Hojas en blanco.
Objetivos: Composición de giros del mismo centro: Realización y obtención del giro resultante. Generalización del resultado.
Utilización de la notación matemática para expresar la composición de giros.
Conmutatividad del producto de giros del mismo centro.
Actividad 14: Pegar una figura y marcar dos puntos P y Q que serán centros de giro. Aplicar a la figura un giro de ... (valor del ángulo) con centro en P. Aplicar a la imagen un giro de ... (valor del ángulo) con centro en Q.
Observar y determinar el movimiento que permite pasar directamente de la figura inicial a la imagen final. Indicar qué relación existe entre las características del movimiento resultante y las de los giros que se componen.
Utilizar los mismos giros del ejercicio anterior, realizando la composición en orden inverso. Antes de obtener la imagen, aventurar el posible resultado y comprobarlo después.
Explicar si la composición de giros del mismo centro es conmutativa.
Aplicarle a la figura el resultado de las siguientes composiciones (se dan por escrito; los giros tienen el mismo centro).

Láminas: M-G-15.1 y M-G-15.2.

Objetivos: Relacionar el número de figuras de un rosetón con el ángulo del giro generador.

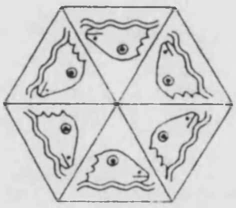
Determinar el giro necesario, en un rosetón, para pasar de una figura a otra, no necesariamente contigua, ...

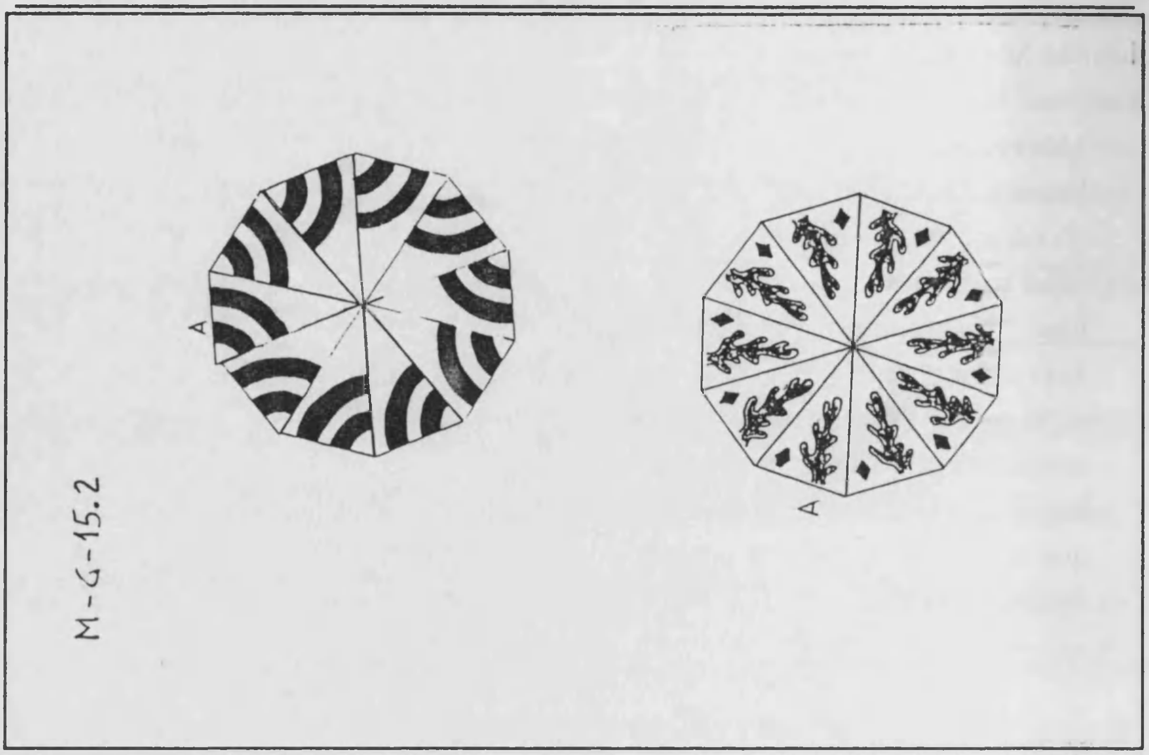
Actividad 15: Indicar el ángulo de giro que permite pasar de esta figura (se marca una) a la siguiente o a otra (se señala una).

Si se sitúa el centro de giro en el vértice de este triángulo (la pieza recortable es el triángulo rectángulo isósceles), decir cuál es el giro necesario para componer un rosetón.

Explicar la relación existente entre el número de figuras del rosetón, la pieza que lo constituye y el ángulo del giro a realizar para pasar de una figura a la siguiente o a otra.

M-G-15.1




A
A
M-G-15.2

Láminas: M-G-16 y hojas en blanco.

Objetivos: Descubrir que los posibles centros de giro que transforman un punto P en otro P' son los puntos de la recta que pasa por el punto medio del segmento PP' (la perpendicularidad no es objetivo explícito, aunque sí lo es una aproximación a la inclinación correcta).

Denominar correctamente la recta que contiene los centros de giro (mediatriz) y trazarla con compás.

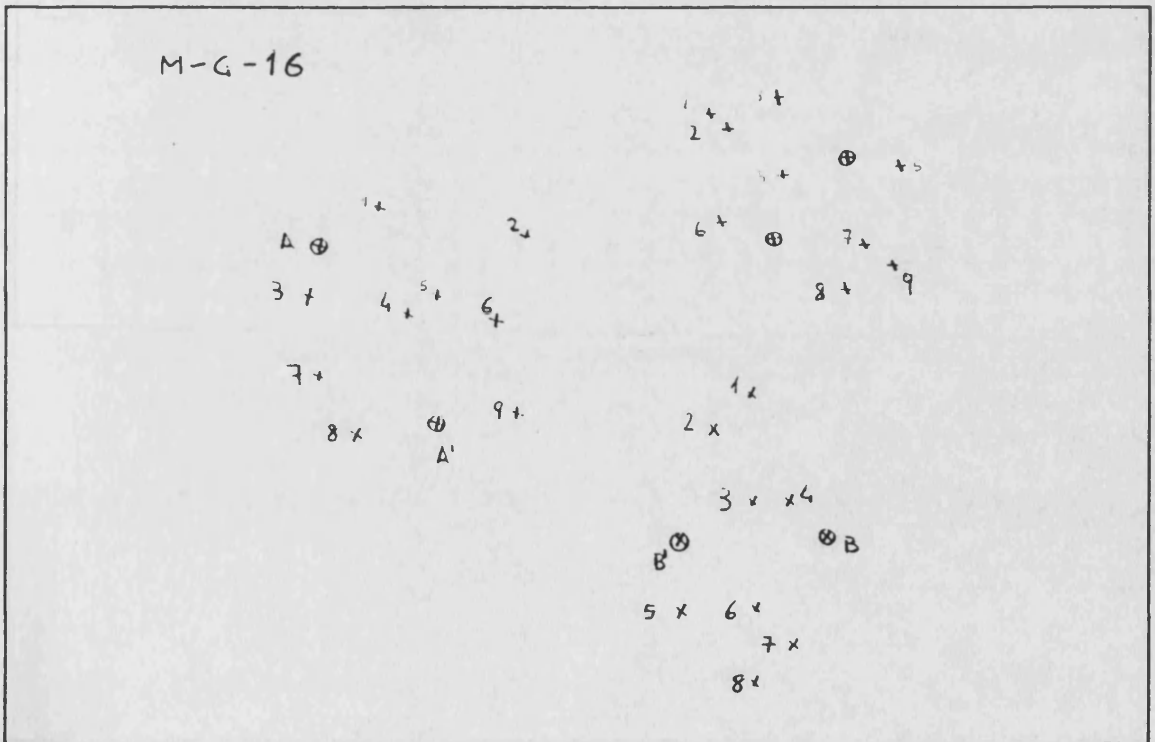
Relacionar la variación de la medida del ángulo de giro, igualdad de ángulos (medida absoluta) y sentido de giro con la distancia del centro de giro al segmento PP', simetría respecto a ese segmento o variación de semiplano, respectivamente.

Actividad 16: En las hojas en blanco, dibujar un punto A y su imagen A'. Buscar centros de giros que lleven A hasta A'. Averiguar cuántos centros hay.

Buscar el centro del giro de ... (un valor numérico).

En la lámina M-G-16, identificar los puntos válidos como centros de giros que transforman A en A'.

En las hojas en blanco, obtener exactamente el centro del giro de ... (un valor numérico). Para ello, tomar un punto sobre la mediatriz y unirlo con A y con A'. Observar el tipo de triángulo formado y calcular el valor de sus ángulos.

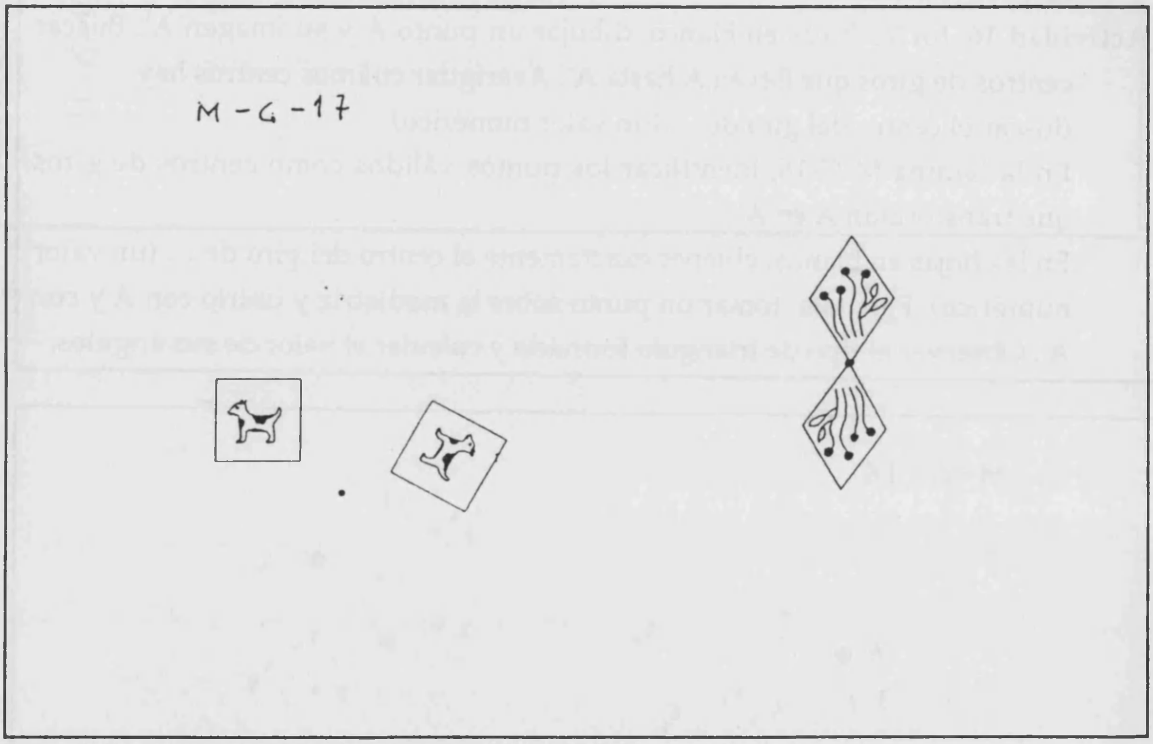


Láminas: M-G-17.

Objetivos: Descubrir que todas las mediatrices de los segmentos que unen puntos y sus imágenes por un mismo giro se cortan en el centro del giro.

Actividad 17: En una figura y su imagen por un giro, seleccionar un punto y su imagen. Trazar la mediatriz del segmento que une esos dos puntos. Seleccionar otro punto y su imagen. Pensar si se puede saber algo de la mediatriz del segmento que une estos dos puntos. Comprobar la hipótesis anterior con ese par de puntos y con otro par de puntos que se correspondan.

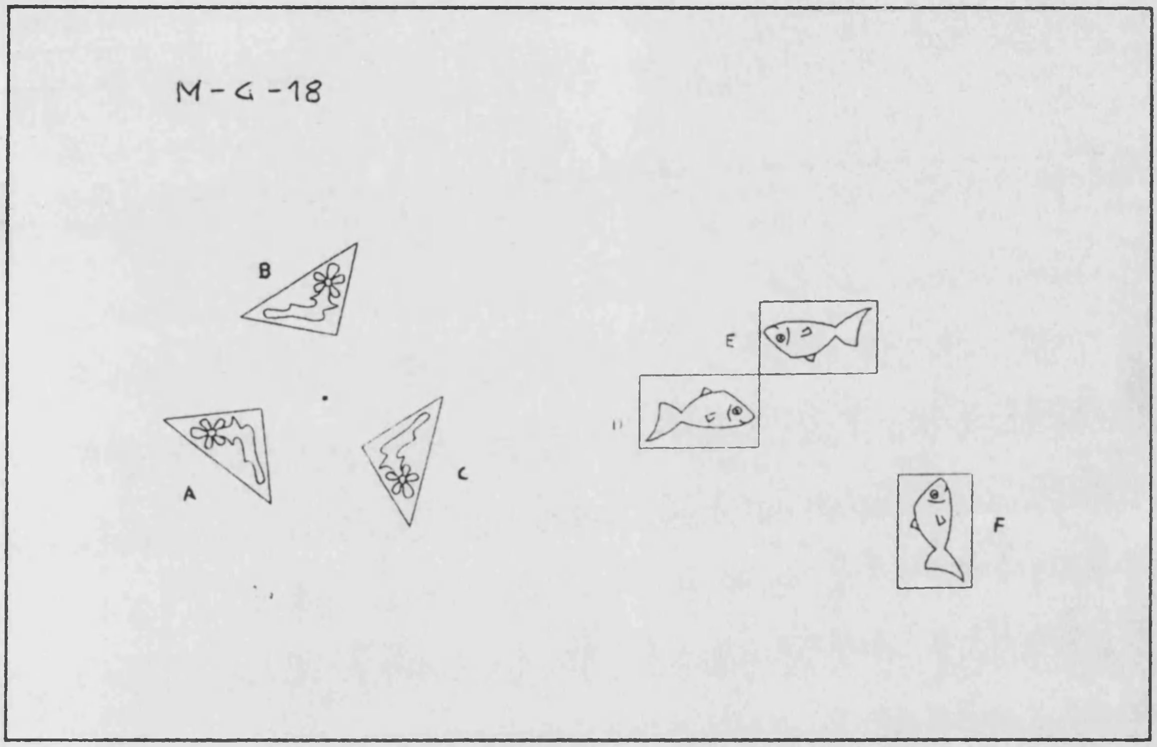
Generalizar la propiedad y justificarla.



Láminas: M-G-18.

Objetivos: Utilizar el corte de mediatrices de segmentos, cuyos extremos son puntos y sus imágenes por un giro, para obtener el centro del giro.

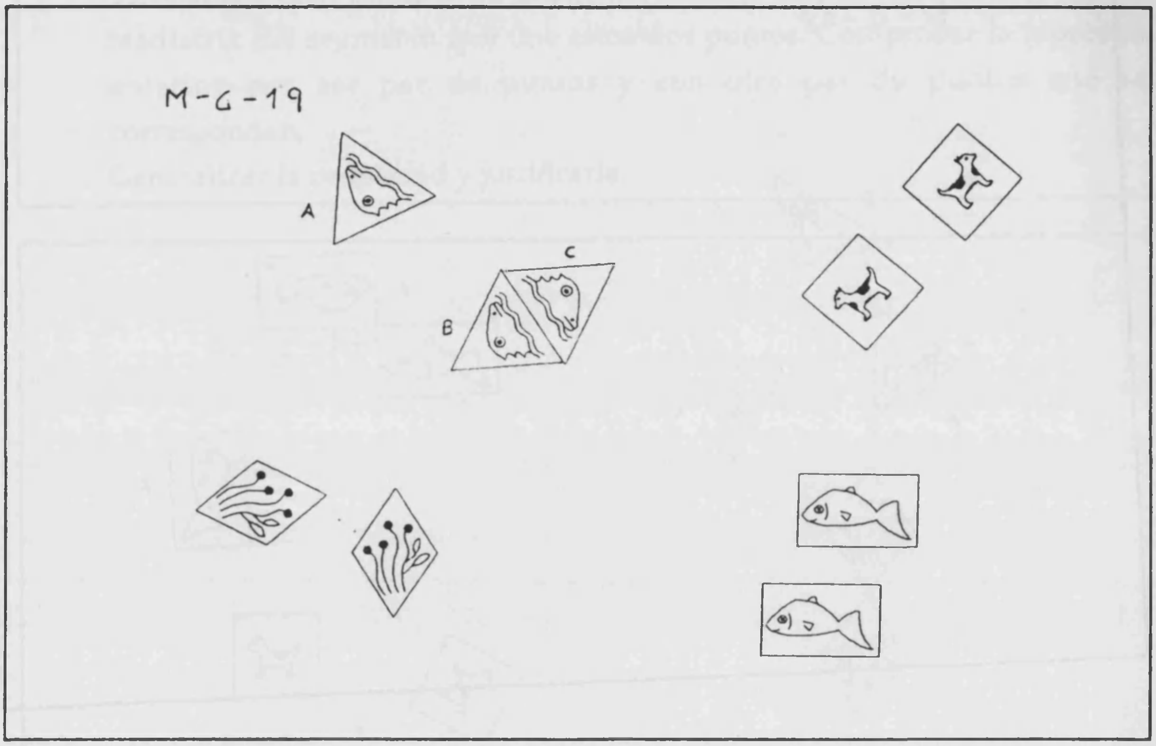
Actividad 18: Buscar el centro del giro que transforma una figura en la otra.



Láminas: M-G-19.

Objetivos: Comprobar que sólo en los giros todas las mediatrices de los segmentos que unen puntos y sus imágenes se cortan en un mismo punto.

Actividad 19: Indicar qué figuras se corresponden mediante un giro. Proceder primero visualmente y comprobar luego lo que sucede con las mediatrices.



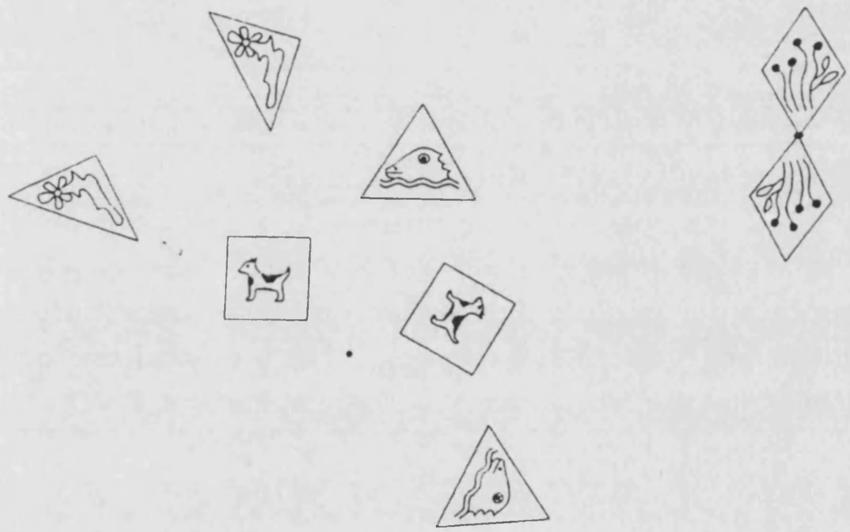
Láminas: M-G-20.

Objetivos: Aplicar el corte de mediatrices de segmentos, con extremos un punto de una figura y su correspondiente de la figura imagen, para obtener el centro del giro.

Afianzar que el ángulo y el centro de un giro son las características que determinan un giro.

Actividad 20: Averiguar a cuáles de los pares de figuras que se dan se les ha aplicado el mismo giro.

M-G-20



Láminas: Hojas en blanco.

Objetivos: Descubrir que la inclinación de la imagen de una figura por un giro está determinada por el ángulo de giro y no por el centro de giro.

Utilizar la propiedad anterior para reconocer la imagen de una figura por un giro de cierto ángulo, cuando se dispone de una imagen de la misma figura con la inclinación que le produce ese ángulo.

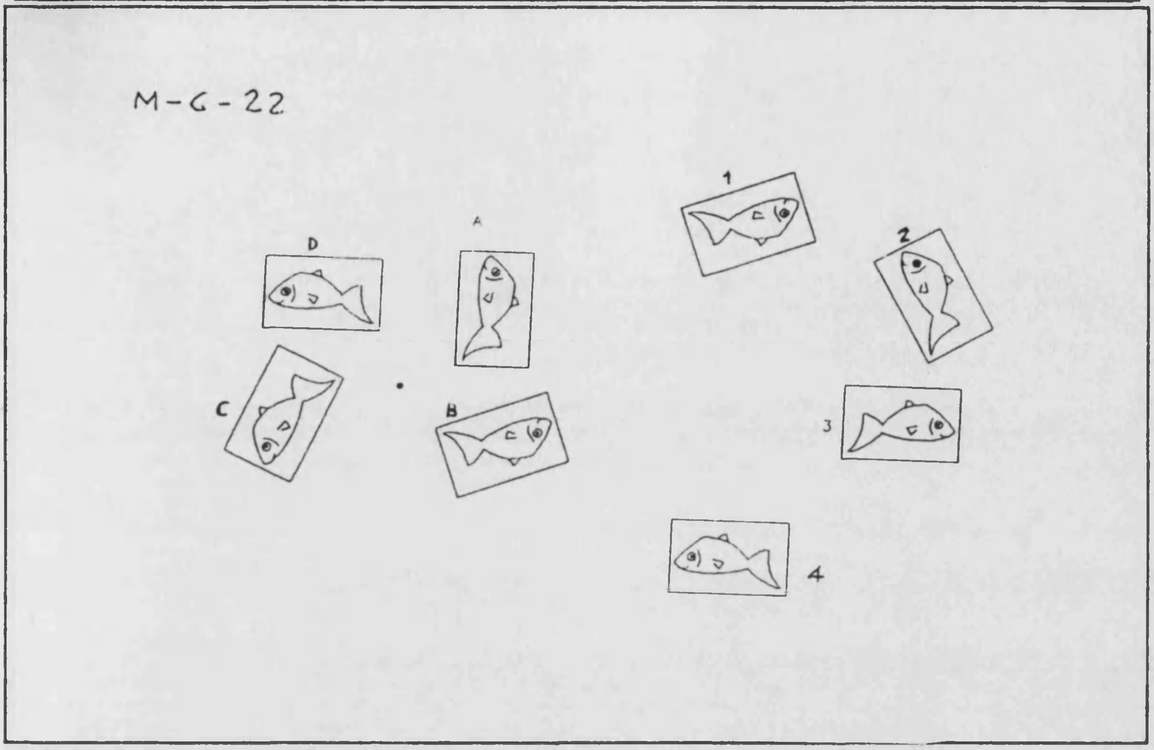
Actividad 21: Pegar una pieza y marcar distintos puntos de la lámina como centros de giro. Aplicar a la figura (siempre a la misma) giros de ... (un valor numérico), con los diferentes centros de giro marcados.

El profesor coloca una figura en la lámina (con una inclinación que no corresponde a la de las imágenes del ejercicio anterior) y pregunta si esa figura puede ser imagen de la original por medio de un giro cuyo ángulo es ... (el mismo del ejercicio anterior).

Láminas: M-G-22.

Objetivos: Aplicar la propiedad de determinación de la inclinación de la figura imagen según el ángulo del giro aplicado.

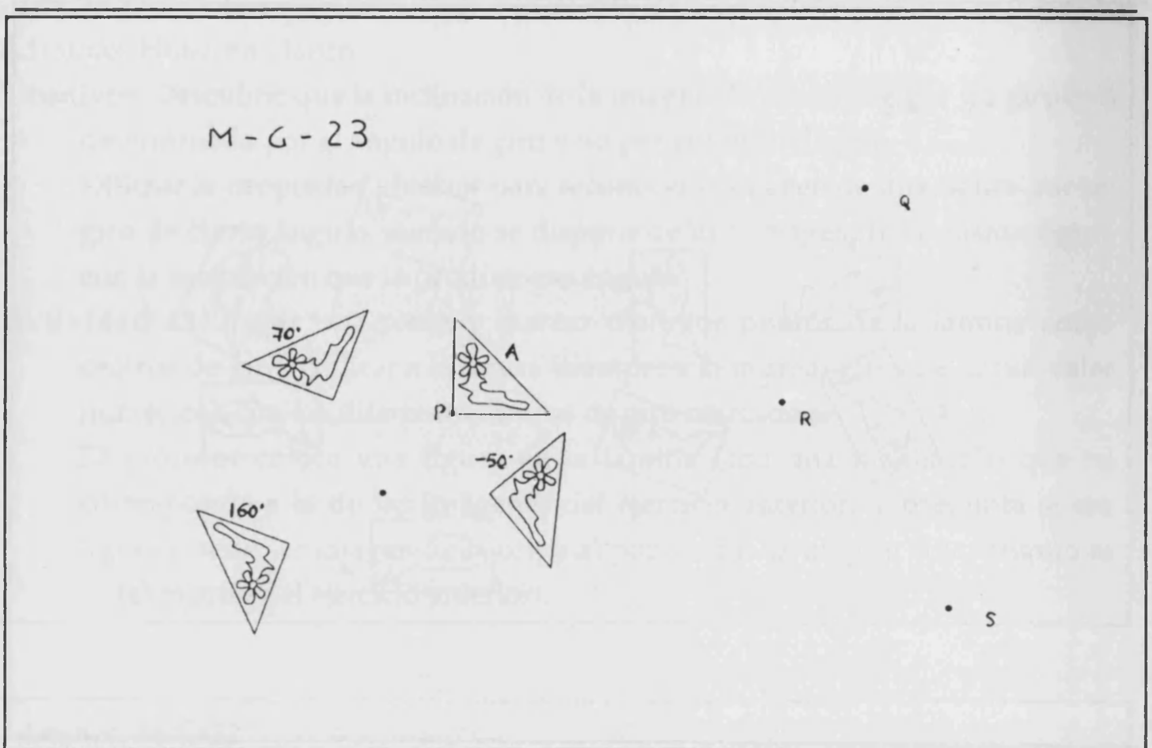
Actividad 22: Indicar cuáles de las figuras numeradas pueden ser imágenes del rectángulo A por medio de un giro cuyo ángulo es el mismo que el de alguno de los giros que transforman A en los rectángulos B, C o D.



Láminas: M-G-23.

Objetivos: Aplicar la propiedad de determinación de la inclinación de la figura imagen según el ángulo del giro aplicado.

Actividad 23: Obtener la imagen de la figura A por un giro de ... (dar algún valor de los indicados en las figuras de la lámina: -50°, 70° ó 160°), sabiendo que el punto P se ha transformado en ... (especificar alguno de los puntos Q, R ó S).



Láminas: Hoja en blanco.

Objetivos: Aprender un método para girar una figura cuando el centro de giro es exterior a ella:

a) Girar con centro un vértice de la figura original.

b) Obtener la imagen de un punto por el giro pedido.

c) Colocar la figura final, teniendo en cuenta a) y b).

Justificar el método anterior por la propiedad de variación de inclinación de una figura según el ángulo del giro.

Actividad 24: Pegar una pieza y marcar un centro de giro exterior. Aplicar un giro de ... (valor del ángulo), con centro el señalado, pero no utilizar la imagen de varios puntos, sino aplicar la propiedad de que la inclinación de la imagen de una figura por un giro queda fijada por el ángulo del giro.

Láminas: M-G-25.

Objetivos: Reconocer propiedades inmediatas referentes a giros y, cuando ello sea oportuno, comparar con la propiedad equivalente para las traslaciones.

Observar el grado de afianzamiento que tienen los alumnos de las propiedades elementales de los giros y el tipo de justificación que utilizan.

Actividad 25: Decir si es cierta o no cada una de las propiedades que se dan. Justificar las respuestas.

M - G - 25

1- La distancia de un punto a su imagen por un giro siempre es la misma. O sea, la distancia de P a P' es la misma que de Q a Q', sean cuales sean los puntos P y Q.

2- Un giro deja invariante el tamaño de las figuras.

3- La distancia de un punto P al centro de giro siempre es la misma que la de su imagen P' al centro de ese giro.

4- Un giro transforma líneas rectas en líneas rectas.

5- Un giro cambia la inclinación de las figuras.

6- Un giro mueve todos los puntos del plano.

7- Un giro mantiene las distancias. O sea, la distancia entre dos puntos P y Q es la misma que la distancia entre sus imágenes P' y Q'.

8- Si O el centro de un giro y P' la imagen de P por ese giro, el ángulo $\angle POP'$ es siempre el mismo, sea cual sea el punto P.

9- Un punto y su imagen por un giro están siempre sobre una circunferencia cuyo centro es el centro del giro.

Láminas: M-G-26.

Objetivos: Introducir la definición formal de giro.

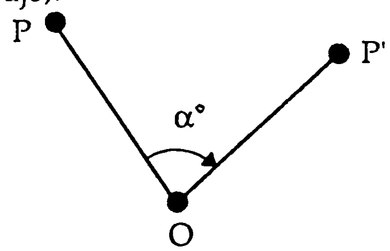
Identificar las condiciones de la definición en un caso concreto.

Actividad 26: Leer la definición de giro. Indicar si alguna de las condiciones que se dan se ha comprobado de alguna manera concreta en ejercicios resueltos anteriormente.

Para la demostración de que la composición de dos giros del mismo centro, $G(O,\beta°)\circ G(O,\alpha°)$, es otro giro del mismo centro y ángulo la suma de los ángulos, $G(O,\alpha°+\beta°)$, hacer una representación gráfica e identificar en qué consisten las condiciones de la definición de giro para el giro resultante.

M - G - 26

Definición de giro (ver dibujo):



Un giro de centro O y ángulo α°, $G(O,\alpha°)$, es un movimiento del plano tal que a cada punto P le asigna un punto P', que llamamos imagen de P, que cumple:

1- La distancia del centro de giro O a P es la misma que la distancia de O a P'.

2- El ángulo ∠POP' es igual al ángulo de giro α°.

Láminas: Hojas en blanco.

Objetivos: Composición de giros de distinto centro con la suma de sus ángulos no múltiplo de 360: Descubrir y generalizar el resultado y la ausencia de conmutatividad.

Justificar el valor del ángulo del giro resultante a partir de la propiedad de la dependencia de inclinación de la imagen de una figura según el ángulo del giro realizado.

Actividad 27: Pegar una pieza en la lámina y marcar dos puntos P y Q como centros de giro. Aplicarle a la figura la composición del giro de centro P y ángulo ... (un valor numérico) y el giro de centro Q y ángulo ... (otro valor numérico).

Determinar el movimiento que lleva directamente de figura inicial a la imagen final.

Averiguar si existe alguna relación directa entre los centros o ángulos de los giros que se componen y el centro o ángulo del giro resultante.

Justificar el valor del ángulo del giro resultante a partir de la variación de inclinación experimentada por la figura en cada giro.

Realizar la composición de los dos giros anteriores, pero en orden inverso. Antes de resolverlo, hacer una hipótesis sobre las características que se puedan conocer de antemano sobre la figura imagen y sobre el movimiento resultante. Comprobarlo luego.

Generalizar el resultado de al composición de dos giros de distinto centro (con la suma de los ángulos no múltiplo de 360°).

Láminas: Hoja en blanco.

Objetivos: Composición de giros de distinto centro cuando la suma de los ángulos es múltiplo de 360°: Descubrir y generalizar el resultado y la ausencia de conmutatividad.

Justificar el valor del ángulo del giro resultante a partir de la propiedad de la dependencia de inclinación de la imagen de una figura según el ángulo del giro realizado.

Actividad 28: Pegar una pieza en la lámina y marcar dos puntos P y Q como centros de giro. Aplicarle a la figura la composición del giro de centro P y ángulo ... (un valor numérico) y el giro de centro Q y ángulo ... (otro valor numérico apropiado).

Determinar el movimiento que lleva directamente de figura inicial a la imagen final. Justificar por qué se obtiene una traslación.

Repetir el ejercicio, pero con ángulos de giros de ... (dos valores que sumen 0° ó 360°).

Realizar las composición anteriores, pero en orden inverso. Indicar qué tienen en común y qué de diferente los resultados obtenidos al modificar el orden de actuación de los giros.

Generalizar el resultado de al composición de dos giros de distinto centro (con la suma de los ángulos múltiplo de 360°).

Láminas: Hojas en blanco.

Objetivos: Afianzar el resultado de la composición de giros de distinto centro.

Afianzamiento y utilización del método de giro de una figura introducido con anterioridad, basado en la imagen de un punto de la figura y en la inclinación final.

Conseguir eficacia en la obtención de la figura imagen por una composición de giros mediante la selección de elementos que simplifican el trabajo en situaciones particulares.

Actividad 29: Pegar una pieza en la hoja. Marcar un vértice P y otro punto exterior Q como centros de giro. Aplicar a la figura la composición del giro de centro P y ángulo ... (un valor numérico) y el giro de centro Q y ángulo ... (otro valor numérico cuya suma no sea múltiplo de 360°). Antes de resolver el ejercicio, indicar qué se puede saber del resultado.

Resolver un ejercicio análogo, pero con tres giros en la composición. Antes de realizar la composición, situar una figura con la inclinación que tendrá la imagen final. Explicar cuántos puntos-imagen es necesario obtener para poder situar la imagen final. Pensar qué punto de la figura inicial se puede tomar para que no sea necesario obtener su imagen por el primer giro.

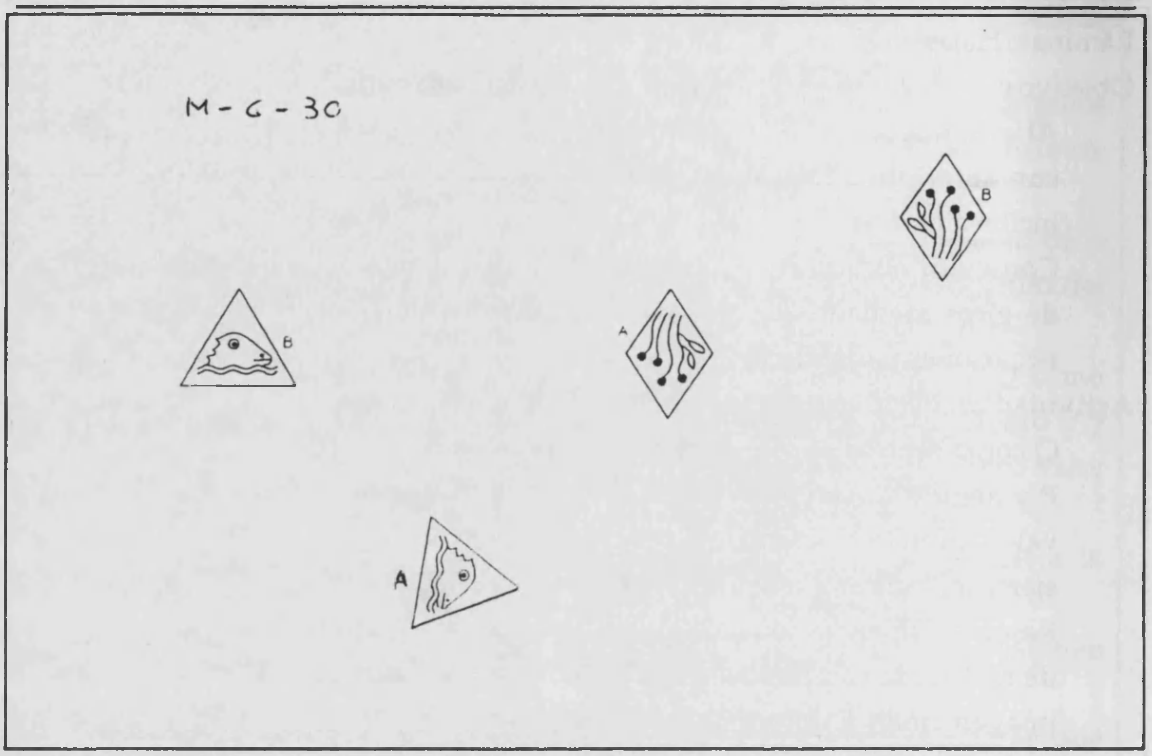
Hacer un ejercicio similar, cuando la suma de los ángulos de los tres giros que se componen es 360°.

Láminas: M-G-30 y hoja en blanco.

Objetivos: Descomponer un giro y una traslación en producto de dos giros, conocidas las figuras inicial y final y el primero de los giros.

Aplicar las propiedades conocidas de composición de giros y determinación de la inclinación de una figura en un giro según el valor del ángulo.

Actividad 30: Para pasar de la figura A a la B se han utilizado dos giros. El primero es ... (dar un giro con centro en un vértice de la figura original). Determinar el segundo.



Láminas: Hoja en blanco.

Objetivos: Composición de traslación y giro. Descubrimiento del movimiento resultante y de la ausencia de conmutatividad.

Relacionar las propiedades conocidas, de determinación de inclinación de una figura según el movimiento aplicado, para justificar el movimiento resultante.

Actividad 31: Pegar una pieza en la lámina. Aplicarle la composición del giro ... (dar un giro) con la traslación de vector ... (dar un vector). Antes de resolverla manipulativamente, indicar el mayor número posible de características de la figura y del movimiento resultantes. Comprobarlo realizando los movimientos.

Hacer la composición anterior, pero en orden inverso. Antes de realizarla, indicar si saldrá el mismo resultado que antes o no.

Resumen de las sesiones de Magisterio

Sesión 1

Láminas: Ninguna.
Objetivos: Obtener información sobre la idea de giro que tienen los alumnos.
Actividad 1: Pedir ejemplos de giros.

Antes de realizar los ejercicios de las láminas, la profesora les pregunta a las alumnas si saben lo que es un giro y pide ejemplos.

La primera respuesta de las alumnas es negativa, a pesar de haber empleado, inadecuadamente, la palabra "giro" en sesiones anteriores. Después sí dan algunas ideas. Por parte de las dos alumnas aparece en algún momento la idea de equidistancia a algo.

Ara piensa en el espacio y no es capaz de dar un ejemplo de giro en el plano cuando se le pide, pues dice: *Una noria*. Algunas de las expresiones y otros ejemplos que utiliza son los siguientes:

Ara: *Cuando gira sobre su eje, a una distancia fija ...* [Por ejemplo] *esto* [tubo cilíndrico de pegamento, colocado verticalmente] *gira sobre su eje central ... En un giro, la distancia al eje de todos los puntos es constante.*

Merche sí da ejemplos de giro en el plano. Para explicar lo que es un giro, dice:

Merche: *Lo mismo* [que dijo Ara], *pero también puede ser respecto a un vector, o sea, una circunferencia. Por ejemplo, si esto lo moviera así* [mueve un objeto plano en el aire, en un plano horizontal, siguiendo un arco de circunferencia].

El ejemplo posterior que da Merche es: *Un disco.*

Láminas: Hojas en blanco.

Objetivos: Introducir visualmente la variación de inclinación y la posición de una figura por un giro, cuando el centro de giro se encuentra sobre la figura.

Aprender a manejar instrumentos auxiliares (objeto punzante) para realizar giros.

Actividad 2: Pinchar una pieza en un vértice (o en su interior) y darle vueltas. Pegar luego tres piezas en distintas posiciones a lo largo del recorrido.

Pegar una figura en la hoja. Fijar un vértice o punto interior de esa figura y, sin ayuda de material auxiliar, situar tres imágenes de giros con centro en el punto fijado. Comprobar a continuación, con ayuda de un objeto punzante, la exactitud de las soluciones anteriores.

Láminas: Hojas en blanco.

Objetivos: Introducir visualmente la variación de inclinación y la posición de una figura por un giro, cuando el centro de giro se encuentra en el exterior de la figura.

Aprender el manejo de instrumentos auxiliares (palillo, disco transparente) para efectuar giros.

Actividad 3: Pegar una figura en la lámina; marcar un punto exterior a ella como centro de giro. Con la ayuda de un palillo o un disco transparente, observar cómo varía la imagen al dar vueltas. Pegar luego tres piezas en distintas posiciones a lo largo del recorrido.

Pegar una figura en una hoja; marcar un punto exterior a ella como centro de giro. Sin usar material auxiliar, pegar tres piezas en distintas posiciones a lo largo del recorrido. Comprobar a continuación, con un disco o palillo, la exactitud de las soluciones anteriores. Explicar qué características se han tenido en cuenta para resolver el ejercicio y cuáles los errores cometidos.

Al comienzo se introduce el término "centro de giro", desconocido por las alumnas, según dijo Ara: *Nunca lo había oído,* y que antes llamó "eje".

Las alumnas se basan en propiedades para resolver los ejercicios. En unos casos es la equidistancia al centro y en un ejemplo concreto Merche se basa en una situación particular de la pieza: La tangencia de un lado respecto a la circunferencia recorrida por un vértice. Ambas alumnas utilizan en algún momento, espontáneamente y de manera consciente, la circunferencia como medio para obtener puntos situados a la misma distancia del centro de giro.

Es importante destacar que Ara tienen una idea errónea sobre la aplicación de la equidistancia en los giros. No obstante, es coherente con su definición, la cual es la que intenta aplicar, por lo que sitúa mal la imagen en el primer ejercicio, quedándose desconcertada al ver que no es correcta. Ese comportamiento corresponde como mínimo al nivel 2 de razonamiento de Van Hiele, ya que está basado en propiedades. A continuación detallo más esta situación, junto con alguna intervención puntual de Merche, la cual tiene lugar cuando Ara explica su solución a la actividad 3: El ejercicio consiste en colocar imágenes de una figura por medio de un giro cuyo centro es exterior a la figura. Ara mide, pero considera la distancia desde dos vértices de la figura original (el derecho y el inferior; ver dibujo] hasta el centro de giro, que cree que han de ser iguales. Por lo tanto, Ara sí intenta aplicar su "definición" de giro, según la cual *todos los puntos se encuentran a la misma distancia del eje.*

La conversación entre la profesora y las alumnas transcurre así:

Prof.: *O sea, que has medido 2* [cm.] *de aquí* [uno de los vértices de la figura original] *al centro y dices que de aquí* [el otro vértice] *al centro ha de medir 2* [cm.]. *¿Y mide eso?*

Ara: *No.*

Prof.: *No se cumple. ¿Cómo se te ocurre que lo puedes hacer? Todavía no lo he explicado.*

Ara: *Trazar la circunferencia externa y tomar ese punto como referencia.* [Ara hace con la mano la circunferencia que pasa por el vértice más alejado del centro de giro, aunque no la dibuja].

Entonces Ara dice que no le sale, que no concibe por qué la distancia de los dos puntos al centro de giro es distinta.

La profesora les da después a las alumnas un disco de acetato y un palillo para que comprueben la figura imagen que han situado y se aprecia que Ara la tiene mal. El error lo explica Merche:

Merche: *Esa distancia no es la misma que ésa de ahí.* [Merche señala, correctamente, de un vértice de la figura original al centro de giro y de la figura imagen obtenida por Ara al centro de giro].

Prof.: *O sea, que ahí hay una distancia que falla.*

Ara: *¿Entonces tenía razón yo con lo de la distancia?*

Prof.: *¿Pero qué distancia era igual?*

Ara: *Esa. La distancia de ese vértice* [el inferior del rombo original] *al eje* [centro de giro].

Prof.: *¿Qué vértice?* [Ara señala el inferior del rombo] *Al centro. ¿Y con ese otro vértice qué pasa?* [la profesora señala el vértice derecho del rombo original].

Ara: *Que ésta tendrá que ser también la misma.* [Ahora Ara señala distancias correctas, del vértice y de su imagen al centro de giro].

Prof.: *¿Eso era lo que tú decías antes?*

Ara: *Claro. Eso es lo que yo decía; por eso yo ...* [la profesora le interrumpe].

Prof.: *¿Tú no decías que la distancia desde este vértice al centro y desde este vértice al centro tenían que ser iguales?* [la profesora señala los vértices inferior y derecho de la figura original, cuya distancia al centro de giro Ara consideraba al principio que debía ser la misma].

Ara: *Sí. Estaba equivocada. Es que sabía que había una distancia. Pero luego creía ...* [no acaba la frase]. *Bueno, como en todas las rotaciones que había visto la distancia era la misma, pues mi idea era ésa.*

Láminas: M-G-4.

Objetivos: Reconocer las circunferencias como las únicas líneas que describen el recorrido de un punto a lo largo de un giro de 360°.

Actividad 4: Identificar cuáles de las líneas corresponden al recorrido de un punto cuando gira. Justificarlo.

Las alumnas las identifican inmediatamente *porque son circunferencias* y *tienen que estar a la misma distancia.*

Esto, en términos de nivel de razonamiento, indica que estas alumnas se sirven de las propiedades de los giros, en este caso la equidistancia al centro de giro de un punto y su imagen, por lo que se trata de nivel 2.

Láminas: M-G-5.1 y M-G-5.2.

Objetivos: Reconocer las figuras que se corresponden mediante un giro, conocido su centro. Utilizar características visuales, equidistancia al centro de puntos de la figura (por medición directa y mediante circunferencias), igualdad de los vértices que tocan una misma circunferencia.

Utilizar la imagen de vértices como medio para identificar si dos figuras se corresponden mediante un giro. Entender que la verificación de la imagen de un sólo punto no es suficiente para asegurar que dos figuras se correspondan mediante un giro. Reconocer la cantidad de puntos que es necesario comprobar para asegurarse de que una figura es imagen de otra por medio de un giro.

Actividad 5: Identificar las figuras que son giradas de la A (lámina M-G-5.1) y las figuras giradas entre sí (lámina M-G-5.2), con centro de giro en el punto indicado.

Explicar cómo se puede asegurar que las soluciones son correctas. Hacer referencia a ajuste de puntos por circunferencias, a medición de distancias de puntos al centro de giro, ...

Indicar cuál es la cantidad mínima de puntos o circunferencias que se debe comprobar para asegurar que dos figuras se corresponden mediante un giro.

Cuando las alumnas quieren fundamentar una respuesta, siempre recurren a propiedades correctas: Situación del vértice incorrecto sobre la circunferencia (lámina M-G-5.1) o ausencia de equidistancia de alguno de los vértices, habiéndolo verificado mediante medición directa o a través de circunferencias. En algún momento se incluye una apreciación de forma no precisa, pero al pedir la aclaración se formula matemáticamente; eso sucede, por ejemplo, en el grupo de los rombos de la lámina M-G-5.2, en el que, para identificar las figuras que se corresponden mediante un giro, Merche utiliza un vértice sólo y, además, *Que tienen que estar en la misma posición respecto al centro,* lo cual significa *Que éste* [vértice] *también mediría lo mismo que éste.* [Merche ha señalado las distancias de un vértice y de su imagen al centro de giro].

Respecto a la cantidad necesaria y suficiente de puntos que es necesario comprobar, las respuestas de las alumnas no son correctas al principio, pues parece que no consideren necesario verificar más de un punto, aunque en realidad utilizan más características, como por ejemplo la transcrita en el párrafo anterior, por las cuales sí se determina la figura imagen; la cuestión está en si las alumnas son conscientes de ello, lo cual no se pone claramente de manifiesto en sus intervenciones. En alguna de las transcripciones que muestro más adelante se aprecia una discusión al respecto.

Para detallar más los comentarios anteriores, describo en líneas generales los métodos seguidos por las alumnas:

Ara, en el primero de los ejercicios (dragones de la lámina M-G-5.1), mide la distancia entre dos vértices de la figura original, aunque no hace nada con ello, y mueve una pieza o el dedo a lo largo de la circunferencia marcada. Respecto a la primera medición, innecesaria, ella misma indica, correctamente, que lo que debería haber medido era la distancia desde dos puntos de la figura original al centro y la distancia de los dos puntos correspondientes de la imagen al centro y ver si eran iguales. En el segundo ejercicio (perros de la lámina M-G-5.2), directamente indica que C [no es válida] *porque el vértice no se corresponde;* y entre el B y el C no *porque no está en la misma circunferencia.* Los ejercicios de la otra lámina los resuelve midiendo distancias de un vértice y sus posibles imágenes al centro de giro; luego comprueba con otro vértice. Ahí se genera una discusión sobre la cantidad de vértices a utilizar para asegurarse que se trata de una imagen correcta:

Ara: *La C se corresponde con la A porque este vértice mide lo mismo que éste* [dos vértices que se corresponden]. *Bueno, la distancia al centro es la misma.*
Prof.: *¿Y la B has dicho que también?*
Ara: *Sí. Todos miden 2'3* [Ara ha medido con la regla].
Prof.: *¿Y con probar con ese vértice ya te aseguras de que está girada?*
Merche: *Tienen que estar en la misma posición respecto al centro.*
Prof.: *¿Qué quiere decir en la misma posición?*
Merche: *Que éste también mediría lo mismo que éste* [Merche señala la distancia al centro de giro de otro vértice y de su imagen].
Prof.: *Pero eso no lo has hecho.*
Merche: *No, pero se ve. Hago otra circunferencia.*
Prof.: *O sea, has probado el otro* [vértice] *con una circunferencia y entonces ...*

Ara: *Sí que es, porque he medido la distancia a otro vértice y mide 3'9* [se refiere a la distancia desde otro vértice y desde su imagen al centro de giro].

Prof.: *Entonces, ¿con medir la distancia a un vértice es bastante?*

Ara: *En principio parece que sí.*

Prof.: *¿Uno sólo?*

Ara: *Yo he cogido otro para asegurarme.*

Prof.: *¿Pero con uno sólo sería suficiente o no?*

Merche: *No. Depende de la posición de la figura.*

Ara: *Se necesitarán dos.*

Prof.: *Si miramos ésta de antes* [los perros B y C de la actividad M-G-5.1], *¿la distancia de este vértice al centro y la de éste al centro cómo es?* [señala los dos vértices que tocan la circunferencia, que son el mismo en las figuras correspondientes].

Alumnas: *Igual.*

Prof.: *Y los perros no son girados. ¿Si comprobamos con un vértice es suficiente?*

Alumnas: *No.*

Prof.: *¿Y si probamos con dos?*

Alumnas: *Sí.*

En el ejercicio siguiente, Ara mide con regla las distancias al centro de giro desde dos vértices y sus imágenes correspondientes.

Merche emplea un palillo para resolver el ejercicio primero y, cuando la profesora le pide la solución sin servirse de disco ni palillo, Merche hace referencia a que el vértice sobre la circunferencia no es el mismo en una figura, justificación análoga a la que empleará en el ejercicio siguiente. En los ejercicios de la lámina M-G-5.2, Merche traza circunferencias, una por lo general, pero emplea además algunas características visuales que sí determinan la figura, como indiqué con anterioridad.

En uno de los ejercicios (perros, lámina M-G-5.1) se ve que las alumnas no tienen desarrollada la idea de que hay infinitas posibilidades para obtener un centro de giro si sólo se considera un punto y su imagen. Esto surge accidentalmente, cuando la profesora pregunta si los perros B y C son solución. La respuesta de Ara considera el centro dado, que era el planteamiento original del ejercicio, pero Merche se cuestiona si habrá otro centro de giro. Lo que hace entonces es buscar por tanteo un punto que aproximadamente sea válido visualmente y que la circunferencia que traza con ese centro sí se ajuste a dos vértices que se corresponden. Entonces justifica que no es giro porque desde ese centro de giro que ha obtenido no hay la misma distancia a otros dos vértices que se corresponden (lo que hace Merche es indicar esos vértices concretos). Como en este momento el objetivo de los ejercicios no es considerar la posible existencia de otros centros de giro, válidos para un punto, no se establece ninguna discusión al respecto.

Láminas: M-G-6.1 y M-G-6.2.

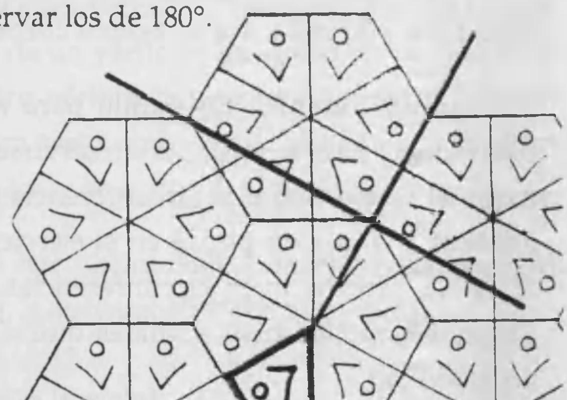
Objetivos: Identificar los giros existentes entre las figuras que tocan un mismo vértice de la malla.

Relacionar el ángulo de giro con el número de figuras alrededor del centro de giro.

Actividad 6: Identificar los giros que hay entre figuras con algún vértice en un mismo punto. Determinar el centro y el ángulo de cada giro.

Explicar cómo obtener los centros y los ángulos de los giros.

El planteamiento del primer ejercicio (cuadrados con giros de 90° en los vértices) les hace pensar a las alumnas que se piden giros entre las figuras más próximas, por los que sólo identifican los giros de 90° y no los de 180°, aunque ello no se debe a que exista dificultad en observar los de 180°.



La primera vez que se enfrentan a giros de 120° (ver el dibujo de la derecha), las dos alumnas identifican el ángulo como de 180°. Merche corrige indicando 45° y 90°, lo cual también es incorrecto, y finalmente da la solución válida, después de que la profesora le haga reflexionar sobre el valor del giro a lo largo de la circunferencia completa y le pregunte: *¿Qué tendrías que haber hecho para pasar de cada figura a la siguiente?*, lo cual provoca la solución mediante división de 360° entre el número de figuras giradas. Ara traza líneas perpendiculares que pasan por el centro de giro (ver dibujo) y da como solución 180°. La profesora le pregunta por qué y Ara corrige haciendo referencia correctamente a la división:

Ara: *No. Sería 180 sólo si fuesen dos pasos. Son tres pasos. Sería 360 dividido entre tres.*

Láminas: M-G-7.
Objetivos: Servirse de circunferencias para hallar la imagen de un figura por un giro, cuyo centro se conoce.
Reconocer la cantidad necesaria y suficiente de circunferencias (es decir, de puntos-imagen) para determinar la figura final.
Actividad 7: Girar la figura, tomando como centro el especificado. El método a utilizar es el trazado de circunferencias.
Explicar para cuántos puntos se han trazado circunferencias, si se pueden emplear menos y cuál sería la cantidad mínima necesaria para determinar la imagen de la figura.

Excepto en el triángulo rectángulo, para el cual trazan una circunferencia, en los demás casos las alumnas utilizan tres o cuatro. De todas maneras, al preguntarles sobre la cantidad suficiente de circunferencias, Merche es la que responde y da la respuesta correcta y, si trazan más circunferencias, es para ajustar más fácilmente la pieza. Ante la pregunta de cuántas soluciones hay si sólo se fija un punto (la profesora señala uno concreto del triángulo equilátero-dragón), responden que *muchas* (Merche) e *infinitas* (Ara). Además, Merche explica que en el triángulo rectángulo dos vértices de la figura original (y por tanto, también en la imagen) quedan sobre una misma circunferencia porque el triángulo es isósceles.

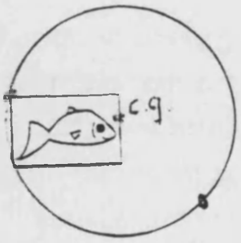
Láminas: M-G-8.
Objetivos: Introducir el empleo de la medida del ángulo de giro.
Determinar el ángulo de giro, conocidos un punto y su imagen.
Aplicar un giro a un punto y a una figura, conocidos el centro y el ángulo.
Reconocer la cantidad necesaria y suficiente de puntos-imagen necesarios para obtener la imagen de una figura por un giro determinado.
Actividad 8: Medir con exactitud el ángulo del giro, con centro O, que lleva P a P'.
Aplicar un giro con centro M y ángulo el anterior al punto A.
Aplicar ese mismo giro a la figura.

Indicar de cuántos puntos se ha obtenido la imagen, si es posible emplear menos y cuál sería la cantidad mínima necesaria para determinar la imagen de la figura.

Ara tiene problemas con la utilización del transportador, pues dice que ella no lo ha empleado nunca. Merche no tiene dificultades con su uso.

Respecto a la cantidad mínima suficiente de puntos imagen necesarios para determinar la figura imagen, hay que hacerle ver a Ara directamente la diferencia entre centro interior y exterior a la figura. Merche sí se da cuenta esa diferencia, pero por lo general traza más circunferencias de las necesarias con el fin de ajustar mejor la pieza. Ninguna de las alumnas mide el ángulo para varios vértices; sólo lo miden para uno y los restantes los ajustan manualmente sobre sus respectivas circunferencias, lo cual es correcto.

Para afianzar la cantidad de puntos-imagen necesarios para obtener la girada de una figura, la profesora utiliza un rectángulo (pez) y sitúa el centro de giro sobre un lado; traza la circunferencia, con centro el de giro, que pasa por un vértice, da como imagen de ese vértice el que hemos marcado en el dibujo y dice:



Prof.: *Aquí, que el centro de giro está sobre la figura, se conoce la imagen de un vértice. ¿Haría falta obtener la imagen de más vértices?*

Merche: [No] *pues ya está* [ya se puede colocar la figura imagen] *porque el otro* [punto cuya imagen es necesario conocer] *ya está pintado* [es el centro de giro].

Ara: *Yo sí que lo haría* [obtener la imagen de otro vértice]

Prof.: *¿Pero hace falta o no?*

Ara: *No lo sé.*

Prof.: *En todos los casos, ¿cuántos puntos hemos dicho que eran suficientes?*

Ara: *Dos.*

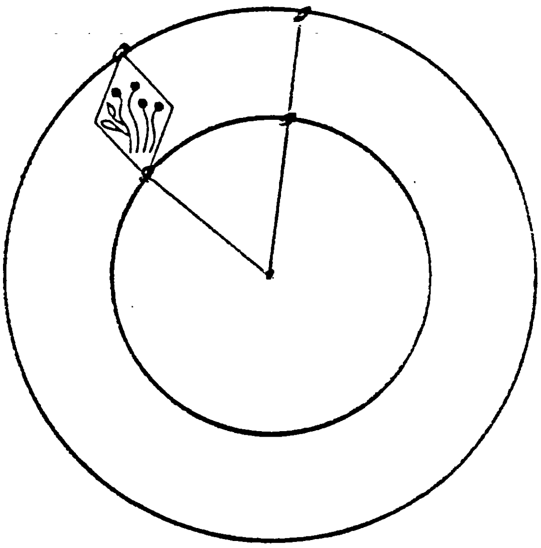
Prof.: *Y aquí, ¿cuántos hacen falta?*

Ara: *Si conoces dos ya lo tienes.*

Prof.: *¿Y el centro de giro dónde va? ¿El centro de giro se mueve?*

Ara: *No.*

Prof.: *Entonces ya tienes dos. Uno es el centro de giro y con otro punto que obtengas ya puedes colocar la imagen. Si quieres asegurarte, puedes trazar tres.*



En el primer ejercicio de la lámina, Ara comete un error, que después repetirá en la sesión cuarta, aunque entonces lo corregirá por sí misma. El error consiste en trazar el ángulo correspondiente a un vértice e intentar ajustar la imagen de dos vértices, el correcto y otro, sobre el mismo lado del ángulo (ver dibujo. Ara mide el ángulo, 57°, para el vértice inferior y luego intenta colocar la imagen de ese vértice y del superior sobre el lado del ángulo). Ara no se da cuenta de su error hasta que la profesora une el vértice superior con el centro de giro y le explica la situación. Entonces Ara acaba de ajustar la figura.

Sesión 2

Láminas: Hoja en blanco.

Objetivos: Introducir el signo de los ángulos de giro. Comprender la ambigüedad del empleo de las direcciones "izquierda", "derecha", "arriba y "abajo" y contrastarla con la eficacia del sentido de las agujas del reloj.

Actividad 9: Marcar un punto como centro de giro y otro punto para moverlo mediante un giro de ángulo 30° y centro el punto marcado.

Tras resolver el ejercicio propuesto, averiguar si sólo hay una solución. Dibujar la otra. Pensar cómo se pueden diferenciar las dos opciones.

(Tras introducir el signo de los ángulos, marcar un punto como centro de giro y girar otro punto un ángulo de ... (proponer valores con signo).

Las primeras referencias de las alumnas para diferenciar los dos sentidos de giro son derecha/izquierda, o bien arriba/abajo. El profesor le da la vuelta a la hoja para que las alumnas vean que entonces las referencias no pueden ser las mismas. Entonces Ara sugiere la que se emplea usualmente: *Pues tomamos como referencia la de las agujas del reloj.* Seguramente ello está provocado por los conocimientos de la alumna previos a esta experiencia, pues en realidad ninguna de las alumnas se da cuenta de que lo que convierte en válida esa referencia es su independencia de la colocación particular de la hoja. Eso se aprecia en la conversación siguiente:

Prof.: *Darle la vuelta a las hojas. ¿Cambia el sentido de los ángulos o sigue siendo el mismo? El que antes iba hacia arriba, ¿ahora hacia dónde va?*
Alumnas: *Hacia abajo.*
Prof.: *¿Y el que antes era negativo?*
Alumnas: *Positivo* [incorrecto, porque ya se había introducido el signo según el sentido de las agujas del reloj].
Prof.: *¿Por qué, Merche?*
Merche: *Tendrá que tener algo fijo, ¿no?*

La profesora hace que identifiquen el signo de un ángulo antes y después de dar la vuelta a la hoja y entonces es cuando las alumnas se dan cuenta de que el signo no varía.

Luego la profesora pide en dos casos que giren un punto, dando el valor del ángulo y el signo, y las alumnas lo hacen bien, aunque el primer ejercicio Merche, por descuido, lo resuelve en sentido contrario.

Láminas: M-G-10.
Objetivos: Dados un punto o figura y su imagen por un giro, calcular el ángulo de giro.
Saber que, al girar una figura, todos sus puntos realizan el mismo giro.
Descubrir y aprender la equivalencia de los giros con el mismo centro y ángulo de +180° y -180°.
Descubrir y aprender la equivalencia de giros. Generalizar la regla.
Actividad 10: Medir el ángulo del giro que lleva una figura a su imagen.
Explicar qué ángulo se obtiene al elegir otro punto de la figura para medirlo.
(En las figuras con giros de 180°): Explicar si sólo se puede dar como valor ... (el obtenido por los alumnos).

En los otros ejercicios también hay dos valores de ángulos posibles, haciendo el recorrido en sentidos opuestos entre si. Obtener ambos ángulos. Indicar y justificar cómo son sus signos y su relación numérica. Generalizar las características (centro y ángulo) de los giros equivalentes.
Comprobar que hay más valores de ángulos que producen giros equivalentes a G(O,α°): $\alpha° \pm 360°$. Hacer varios giros equivalentes con la misma figura y explicar numéricamente cuáles son sus valores. Generalizar la solución.

El primer ejercicio que se plantea es con los dragones (giro de -90° con centro en un vértice). La profesora marca un vértice y pide el ángulo de giro de ese punto. Merche da pronto la solución correcta, pero Ara tiene durante un rato problemas, debido a que no entiende la situación: Una de sus preguntas es: *¿Pero ese punto que hemos señalado qué es?* y ella misma indica que no lo comprende. Ara no es capaz de darse cuenta de dónde está el centro de giro, ni siquiera con una pieza, pues la sitúa fijando un punto interior. La profesora le señala finalmente cuál es el centro de giro, pues ése no es el objetivo de la actividad, y Ara ya resuelve bien el ejercicio. En los ejercicios restantes no tiene ninguna dificultad. En el caso de las flores, incluso da la solución sin necesidad de medir: *180. No hay no que hacerlo. Enseguida se ve.* Merche, en ese mismo ejercicio, sí traza la línea que une dos puntos que se corresponden para dar la solución.

Las dos alumnas tienen completamente asumido que el giro realizado por todos los puntos de la figura es el mismo.

La equivalencia entre los giros con el mismo centro y ángulos de +180° y -180° surge en el ejercicio con esos valores particulares del ángulo. Cada alumna da un signo como solución y, al preguntarles, ven que el resultado es el mismo. La profesora aprovecha la situación para pedir un giro equivalente a otro de los realizados (dragones). Merche lo obtiene al poco tiempo, sirviéndose de una figura, pero Ara no, hasta que la profesora le especifica que siga el recorrido "por abajo". Cuando Ara entiende exactamente lo que debe hacer, su primera idea es que la figura se situará al revés por ese movimiento, aunque mantiene esa visión por poco tiempo, pues no acaba la frase y verifica correctamente con la pieza. Después las alumnas obtienen bien otros giros equivalentes. Sólo se hace referencia a ángulos inferiores a 360°.

Láminas: M-G-11.
Objetivos: Relacionar correctamente el sentido de giro con el signo del ángulo.
Actividad 11: Marcar el sentido del giro sobre el arco señalado en la lámina.

No hay ninguna dificultad para las alumnas en esta actividad.

Láminas: Hoja en blanco.
Objetivos: Afianzar la aplicación de giros a una figura, conocidos el centro y el ángulo de giro.
Reconocer, por distintos métodos, cuándo está determinada la figura imagen: Medición para dos puntos, trazado de circunferencias junto con una medición, trazado de líneas rectas en el caso de ángulos de 180°, ...
Utilizar el giro más cómodo entre los equivalentes.
Actividad 12: Pegar una figura y marcar un vértice o un punto exterior como centro de giro. Girar la figura con el centro y ángulo indicados.
Especificar si se podría haber determinado la figura imagen con menos elementos de los utilizados. Explicar cuáles son los elementos mínimos a obtener si se utiliza el ajuste por circunferencias de puntos, aplicación del giro a puntos, ... Explicar qué sucede si el giro es de 180°.
Decir si el ángulo que se ha utilizado es el más sencillo o si se podría haber empleado otro, de un giro equivalente, y que resulte más fácil.

Las alumnas resuelven bien los ejercicios. El ángulo de giro que se plantea en primer lugar es de 200°, una vez con el centro de giro en un vértice de la figura y otra en un punto exterior. En ambos casos Merche se basa en el giro equivalente: Realiza un giro de -160°. Como el transportador de que disponen las alumnas sólo tiene medidas hasta 180°, Ara hace giros de 180° basándose en que, para ese valor, el punto imagen se encuentra en el otro extremo de la línea que une el punto original con el centro de giro y, a partir de ahí, mide 20°, ello incluso después de haber oído el procedimiento empleado por Merche.

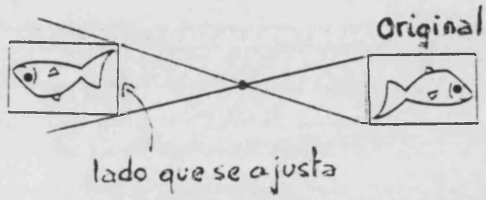
Merche mide el ángulo para obtener la imagen de un vértice y traza tres arcos de circunferencia, aunque sabe que con dos es suficiente, como explica:

Merche: *Con estos dos* [arcos] *habría sido suficiente, pero así* [con tres] *es más exacto.*

Ara traza sólo una circunferencia porque en ella se apoyan dos vértices:

Ara: *He trazado la recta de este vértice* [para medir el ángulo] *y he aprovechado que estos dos vértices están sobre la circunferencia y he colocado los dos sobre la circunferencia.*

En el ejercicio siguiente el ángulo de giro es 180°. Merche emplea un procedimiento original: Elige dos vértices y traza las rectas que pasan por cada uno de esos vértices y por el centro de giro. Luego ajusta la pieza imagen en el lugar en el que la abertura de esas dos líneas se ajusta exactamente a la del lado de la pieza, colocando el lado entres dichos vértices paralelo al de la figura original (ver dibujo). El método es correcto si se tiene en cuenta el paralelismo. Merche no menciona explícitamente esa característica, aunque sí la utiliza. Explica que hace las dos rectas y luego tiene que ajustar el ancho de la figura. La profesora más adelante le pide otro método y Merche hace referencia al estándar para 180°, la equidistancia al centro por las líneas trazadas:



Merche: *Midiendo eso de aquí y esto de aquí.* [Señala los segmentos de las dos rectas desde los vértices de la figura original hasta el centro de giro). *Lo que pasa es que ganamos tiempo* [con su método de ajuste de la pieza].

Ara al principio tiene cierta confusión: Traza la circunferencia que pasa por un vértice y traza una línea recta que pasa por otro vértice y por el centro de giro. Dice: *Este vértice lo traslado 180°.* Como se lía, borra la línea recta. Parece que Ara recuerda varios procedimientos de los utilizados hasta el momento (la línea recta, el arco de circunferencia), pero en su cabeza están algo mezclados y los va utilizando porque son los que han funcionado en otras ocasiones. No obstante, cuando reflexiona sí utiliza propiedades adecuadas y, en concreto, en este caso utiliza finalmente el método estándar: Trazar las líneas que pasan por el centro de giro y el vértice y medir las distancias correspondientes. De hecho, ella misma hace referencia a esa necesidad cuando entabla un diálogo con Merche sobre la validez del procedimiento empleado por ésta; Ara no entiende que sea correcto si no mide las distancias al centro de giro. Transcribimos a continuación una parte de este diálogo. Merche le pregunta a Ara para qué necesita las circunferencias, queriendo indicar que con las dos líneas tenía suficiente.

Ara: *Para situarlos. Es que tú puedes saber la recta, pero necesitas saber a qué distancia lo sitúas.*

Merche le dice que sí se sabe sin necesidad de las circunferencias porque la anchura del lado ha de ser exactamente ésa. Merche hace referencia a su método, pues le intenta hacer comprender a Ara que hay que encajar la pieza, de manera que la anchura que queda entre las rectas sea la del lado correspondiente de la figura.

Merche: *Esa anchura no puede ser ni más para acá ni más para allá.*
Ara: *Eso es una tontería. Tú necesitas saber la circunferencia en la cual gira.*
....
Ara (señala el dibujo de Merche): *Esta distancia es la misma que ésta. Ese es otro procedimiento.*
Merche: *Yo lo que he hecho ha sido medir este trocito de aquí* [el lado que encaja].

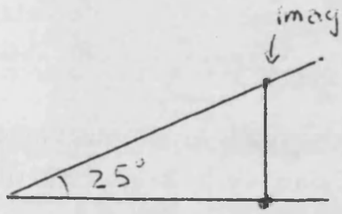
Aunque ya se estudió en láminas anteriores, en ésta se plantea en algún momento la igualdad del ángulo de giro para todos los puntos de una figura, lo cual las alumnas tienen totalmente asumido.

Sesión 3

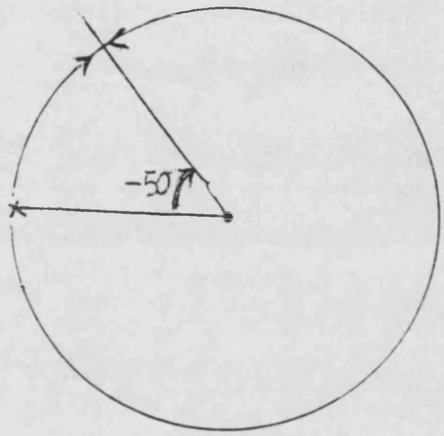
Láminas: Hojas en blanco.
Objetivos: Repaso de la equivalencia de giros: Centro y ángulo.
Actividad 13: Determinar los giros equivalentes a los que se indican. Marcar un centro de giro y un punto. Obtener la imagen de ese punto, señalando los recorridos de los dos giros equivalentes.

Ara comete al principio varios errores, pero al final da las soluciones correctamente. Los errores de Ara consisten en restar de 180°, en lugar de hacerlo de 360°, marcar como imagen de un punto otro obtenido mediante desplazamiento rectilíneo (ver dibujo 1 en la página siguiente), e indicar como valor del ángulo del giro equivalente la suma del dado y 360° (en lugar de la resta), porque *menos por menos es más.*

No obstante, todos esos errores Ara los subsana rápidamente. Por ejemplo, la respuesta memorística correspondiente al último tipo de error no coincide con su solución gráfica de un ejercicio concreto, planteado ante su contestación incorrecta. El ejercicio consiste en aplicarle al punto P el giro G(O,-50°), marcando los dos recorridos posibles (ver dibujo 2 con su solución, correcta). Tras ese ejercicio, da respuestas correctas sobre los valores de los ángulos en los giros equivalentes.



Dibujo 1.



Dibujo 2.

Láminas: Hojas en blanco.

Objetivos: Composición de giros del mismo centro: Realización y obtención del giro resultante. Generalización del resultado.
Utilización de la notación matemática para expresar la composición de giros.
Conmutatividad del producto de giros del mismo centro.

Actividad 14: Pegar una figura y marcar dos puntos P y Q que serán centros de giro. Aplicar a la figura un giro de ... (valor del ángulo) con centro en P. Aplicar a la imagen un giro de ... (valor del ángulo) con centro en Q.
Observar y determinar el movimiento que permite pasar directamente de la figura inicial a la imagen final. Indicar qué relación existe entre las características del movimiento resultante y las de los giros que se componen.

Utilizar los mismos giros del ejercicio anterior, realizando la composición en orden inverso. Antes de obtener la imagen, aventurar el posible resultado y comprobarlo después.
Explicar si la composición de giros del mismo centro es conmutativa.
Aplicarle a la figura el resultado de las siguientes composiciones (se dan por escrito; los giros tienen el mismo centro).

La composición en sí no presenta dificultades: Las dos alumnas generalizan que el resultado es un giro con ángulo suma de los ángulos de los giros que se componen. También asumen la conmutatividad sin dudarlo. Por ejemplo, tras resolver el ejercicio $G(O,-90^\circ)\circ G(O,-30^\circ)$ y pedir que se realice una composición con los mismos giros, pero con orden de intervención contrario, Ara contesta que *da igual porque el resultado es el mismo. Da* [-]*120.* La respuesta fue inmediata, sin efectuar la composición.

La visión del ángulo resultante como suma de los ángulos que intervienen en la composición se obtiene desde el primer ejercicio. En el segundo ejercicio que se plantea, Merche aplica directamente ese resultado. Ara efectúa la composición, por pasos sucesivos, aunque ella misma hace referencia a que podía haberlo solucionado directamente:

Ara: *Me he complicado la vida porque lo he hecho geométricamente y lo podía haber hecho aritméticamente, sumando los positivos y los negativos.*

En algún momento plantea la profesora cuántos vértices habría sido necesario/suficiente utilizar para obtener la imagen. A veces las alumnas utilizan más de los necesarios, quizá para ajustar mejor la imagen, pero siempre responden que dos es la cantidad requerida. En una de tales respuestas, de Ara, en realidad sólo hacía falta uno, pues el centro de giro se encontraba en un vértice.

Con bastante frecuencia las alumnas emplean el vocablo "trasladar" en lugar de "girar" o mover, si bien conceptualmente sí piensan en el giro correspondiente.

La profesora le plantea por escrito a Merche el enunciado general de la composición de giros del mismo centro ($G(O,\alpha)\circ G(O,\beta) =$) y Merche escribe correctamente el resultado: $(G(O, \alpha)\circ G(O,\beta) = G(O, \alpha+\beta)$.

Láminas: M-G-15.1 y M-G-15.2.

Objetivos: Relacionar el número de figuras de un rosetón con el ángulo del giro generador.

Determinar el giro necesario, en un rosetón, para pasar de una figura a otra, no necesariamente contigua, ...

Actividad 15: Indicar el ángulo de giro que permite pasar de esta figura (se marca una) a la siguiente o a otra (se señala una).

Si se sitúa el centro de giro en el vértice de este triángulo (la pieza recortable es el triángulo rectángulo isósceles), decir cuál es el giro necesario para componer un rosetón.

Explicar la relación existente entre el número de figuras del rosetón, la pieza que lo constituye y el ángulo del giro a realizar para pasar de una figura a la siguiente o a otra.

Las alumnas obtienen las relaciones deseadas sin ningún problema. Una de las alumnas no sabía cuál era exactamente el valor del ángulo del triángulo dado, pero ello no afecta a la comprensión de las propiedades de los giros objeto de esta actividad, que están totalmente claras para ambas alumnas.

Láminas: M-G-16 y hojas en blanco.

Objetivos: Descubrir que los posibles centros de giro que transforman un punto P en otro P' son los puntos de la recta que pasa por el punto medio del segmento PP' (la perpendicularidad no es objetivo explícito, aunque sí lo es una aproximación a la inclinación correcta).

Denominar correctamente la recta que contiene los centros de giro (mediatriz) y trazarla con compás.

Relacionar la variación de la medida del ángulo de giro, igualdad de ángulos (medida absoluta) y sentido de giro con la distancia del centro de giro al segmento PP', simetría respecto a ese segmento o variación de semiplano, respectivamente.

Actividad 16: En las hojas en blanco, dibujar un punto A y su imagen A'. Buscar centros de giros que lleven A hasta A'. Averiguar cuántos centros hay.

Buscar el centro del giro de ... (un valor numérico).

En la lámina M-G-16, identificar los puntos válidos como centros de giros que transforman A en A'.

En las hojas en blanco, obtener exactamente el centro del giro de ... (un valor numérico). Para ello, tomar un punto sobre la mediatriz y unirlo con A y con A'. Observar el tipo de triángulo formado y calcular el valor de sus ángulos.

Las alumnas llegan a aprender que los centros de los giros que transforman un punto, A, en otro, A', son exactamente los puntos de la mediatriz del segmento AA' y también utilizan las relaciones entre la distancia del centro al segmento AA' y la medida y signo de los ángulos de giro.

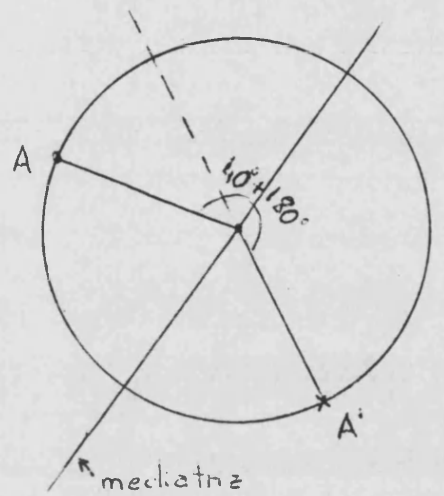
Pero hay bastante diferencia entre las dos alumnas: Merche tiene la visión de la infinidad de soluciones -centros de giro- sobre una recta y traza la mediatriz directamente con compás. Ara sólo ve el punto medio de AA', incluso tras oir la solución de Merche y ver cómo ésta comprueba que algún punto de la mediatriz también es centro de giro. Después, tras hacer algunas verificaciones a petición de la profesora, Ara se convence de que los puntos de la mediatriz del segmento AA' sí son solución.

En ningún momento se comenta la perpendicularidad de la recta de centros de giro respecto al segmento AA', aunque sí se debería haber hecho. No obstante, la inclinación visual que consideran las alumnas es buena, si bien no es exacta cuando se realiza sin herramientas que conduzcan a la perpendicularidad, lo cual es el caso de Ara. Quizá el uso de la mediatriz desde el primer momento por parte de Merche haya tenido lugar de manera algo intuitiva, pues de hecho no recuerda lo que es la mediatriz ni las propiedades de ésta. Merche razona consecuentemente con los conocimientos que posee de los giros, pues comprueba algunos puntos de la mediatriz y dice que no necesariamente servirán todos los de la mediatriz, pero que los centros de giro estarán sobre esa recta y serán infinitos:

Merche: *Yo creo que hay infinitos. Todos éstos* [los puntos de la mediatriz] *pueden* [ser centros de giro].
Prof.: *¿Y por qué pueden servir todos ésos?*
Merche: *Todos ésos no, pero ahí* [en la mediatriz] *puede haber muchos.*
Prof.: *¿Y por qué pueden ser precisamente ésos?*
Merche comprueba en varios puntos.
Prof.: *¿Hay infinitos? ¿Todos* [los puntos de la mediatriz] *sirven?*
Merche: *Claro. Si* [la recta] *es el centro de esos dos* [puntos A y A'], *es que eso es el centro de todas las circunferencias que pasan por ahí.*

Prof.: *¿Y por qué trazaste* [nada más comenzar a resolver el ejercicio] *esta recta* [la mediatriz]? [Merche se sirvió del compás para su trazado al comenzar a resolver la actividad].

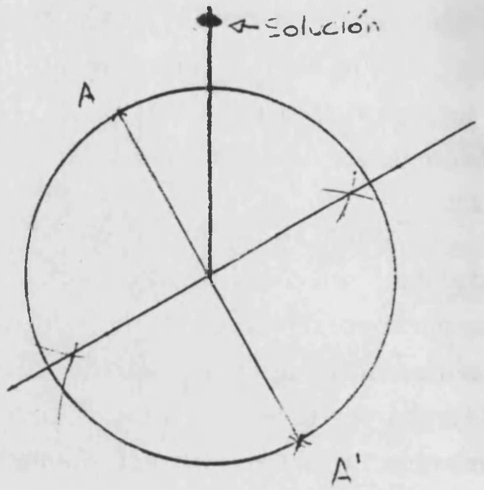
Merche: *Porque he visto que todas las circunferencias tienen que pasar por el medio.*



Como se puso de manifiesto desde el comienzo de las experimentaciones, Ara no conoce la utilización de material de dibujo técnico, y tiene dificultades para su manejo, incluso a nivel elemental. Quizá ello ha influido en esta ocasión en la diferencia de formas de resolver la actividad por parte de las dos alumnas. La profesora tiene que explicarle a Ara cómo trazar la mediatriz, y tiene que ayudarle en algún momento. Posiblemente, esa utilización pobre que hace Ara del material de dibujo también tenga repercusión directa en las dificultades que presentan otras actividades para ella. Por ejemplo, para medir el ángulo del giro que transforma A en A' (ver dibujo), Ara obtiene el valor del ángulo cóncavo (posiblemente por la posición en que situó el transportador), mediante su descomposición en 180° y el resto (ver dibujo).

Merche muestra en todo momento una comprensión total de la tarea que se plantea y sabe resolverla. Ara no tiene en ocasiones la visión general del problema que ha de resolver; quizá se encuentra demasiado sumida en los elementos que intervienen y no posee la visión global de la actividad que le permita relacionar las propiedades o técnicas correspondientes.

Por ejemplo, tras obtener la recta que contiene los centros de giro que pasan A a A' (primer ejercicio de la actividad), se pide obtener, aproximadamente, el centro del giro de -30°. Ara marca un punto no situado en la mediatriz y lo une con el centro del segmento AA', de manera que el ángulo formado por esa recta y el segmento AA' es de 30° (ver dibujo en la página siguiente). La profesora hace que Ara se fije en cuál es el centro de giro. Ara no sabe cómo resolver el ejercicio, por lo que la profesora le pide que mida el ángulo del giro desde un punto de la mediatriz. Desafortunadamente no es posible prolongar ese día la sesión por más tiempo, por lo que no se puede finalizar el ejercicio.



Posteriormente, en la última de las láminas se plantea de nuevo dicho ejercicio, con un ángulo de 110°. En esta ocasión Ara resuelve el ejercicio aplicando proporcionalidad directa para ajustar el centro de giro. Esa idea, que no es correcta, denota sin embargo un razonamiento más avanzado que ensayo y error: Ara traza la recta de los centros de giro (por el punto medio de AA' y con una inclinación aproximadamente perpendicular, pues no se sirve de instrumental). Después mide el valor de un ángulo (140°) e intenta aplicar proporcionalidad para obtener la distancia del segmento AA' a la que se encontrará el centro del ángulo de 110°. Para ello se sirve del punto medio de AA', donde el ángulo es 180°, y del punto que utilizó, donde el ángulo es de 140°: Si de 180 a 140 hay 40, desplazándose una longitud proporcional sobre la recta de centros tendría 100°, por lo que el centro pedido estaría un poco más cerca del segmento AA').

Para resolver ese mismo tipo de ejercicio, Merche ideó un método propio que muestra su comprensión de la situación: Desplaza el transportador a lo largo de la mediatriz hasta que la marca correspondiente a la mitad del ángulo pedido esté alineada con A o con A' (ver dibujo); por ejemplo, si el ángulo de giro debe ser -30°, la marca del ángulo del transportador a alinear con A o con A' es 15°.

Cuando la profesora pide el

ángulo del giro al tomar como centro cierto punto, O, de la mediatriz, con frecuencia Merche obtiene el valor correcto mediante la duplicación del formado por la mediatriz y el segmento OA o el OA'.

El ejercicio final de los que se proponen en esta actividad, consistente en obtener de modo exacto, aplicando propiedades de triángulos, el centro del giro de -80° que transforma A en A', La profesora dirige desde el principio las respuestas de las alumnas y va indicando todos los pasos, que las alumnas completan correctamente. A continuación presento la justificación que dan las alumnas a la solución del ejercicio porque en su explicación hay una diferencia de enfoque: El de Ara es visual, mientras que el de Merche se basa en la equidistancia al centro de giro de un punto y su imagen.

Prof.: *Se forma un triángulo. ¿Es de algún tipo particular?*
Ara: *Isósceles porque tiene dos lados iguales y dos ángulos iguales; eso se ve haciendo esto* [el dibujo].
Merche: [Isósceles] *porque tienen la misma distancia al centro.*

Láminas: M-G-17.
Objetivos: Descubrir que todas las mediatrices de los segmentos que unen puntos y sus imágenes por un mismo giro se cortan en el centro del giro.
Actividad 17: En una figura y su imagen por un giro, seleccionar un punto y su imagen. Trazar la mediatriz del segmento que une esos dos puntos. Seleccionar otro punto y su imagen. Pensar si se puede saber algo de la mediatriz del segmento que une estos dos puntos. Comprobar la hipótesis anterior con ese par de puntos y con otro par de puntos que se correspondan.
Generalizar la propiedad y justificarla.

Tras trazar una mediatriz, las dos alumnas piensan que la segunda mediatriz coincidirá con la primera, lo cual, evidentemente, no es correcto en los giros. Evidentemente, se trata de un tipo de respuesta típica en el entorno escolar, cuando se pregunta sobre el resultado de algo que anteriormente siempre se producía de la misma manera; la contestación inmediata es que sigue siendo igual ahora, en el nuevo entorno.

Al trazar la segunda mediatriz, Merche generaliza enseguida la propiedad, correcta, de que todas las mediatrices pasarán por el centro del giro. Ara comprueba que, efectivamente la segunda mediatriz pasa también por el centro de giro y admite la generalización de que eso ocurrirá con todas las mediatrices, quizá influida por la pregunta directa de la profesora y por la afirmación de Merche. Incluyo a continuación la transcripción del transcurso del razonamiento de Ara después de trazar la primera mediatriz:

Ara: *He trazado una mediatriz. Sí que pasa por el centro. Al hacer la circunferencia he visto la imagen de A a A'. Si ahora cogiese B y B' daría igual. Sería la misma mediatriz.*

Ara marca con el compás arcos para trazar la segunda mediatriz y se da cuenta de que no es la misma que antes.

Prof: *¿Y qué esperas* [obtener]?

Ara: *Pues que habrá muchas mediatrices, respecto a los puntos que traces.*

Prof.: *¿Y pasará algo con esas mediatrices o no?*

Ara: *Pues porque los centros estarán situados en ...* [no acaba la frase]. *Claro. Entonces, lo que hemos hecho antes de trazar la mediatriz respecto a dos puntos, para una figura no nos sirve porque, si da muchas mediatrices, ¿dónde está el centro? ¿en una o en la otra? Bueno, estará el centro ...* [no acaba la frase]. *Es que, claro, las mediatrices tendrán sus puntos ...* [no acaba la frase]. *Serán centro de los puntos B y B'. De los puntos A y A' será esta mediatriz.*

Una vez que las alumnas indican que todas las mediatrices se cortan en el centro de giro, las justificaciones que dan son:

Ara: *No sé. Simplemente lo vemos. No sabemos decir por qué.*

Merche: *Porque se desplaza toda la figura. No se desplaza un punto sólo ... O sea, un punto se desplaza y el centro tiene que estar a la mitad; entonces todos los demás puntos también tienen que estar a la mitad.*

Después de que las alumnas comprueben de nuevo la propiedad en el otro caso de la lámina, la profesora justifica el corte de todas las mediatrices en el centro de giro a partir de la propiedad, conocida ya, de que todos los posibles centros de giro que transformen A en A' se encuentran en la mediatriz de AA', y lo propio con la mediatriz de BB' y la de CC', siendo A, B y C puntos concretos de la figura original y A', B' y C' sus respectivas imágenes.

Láminas: M-G-18.
Objetivos: Utilizar el corte de mediatrices de segmentos, cuyos extremos son puntos y sus imágenes por un giro, para obtener el centro del giro.
Actividad 18: Buscar el centro del giro que transforma una figura en la otra.

Las alumnas resuelven bien la actividad. Las explicaciones que dan muestran que han comprendido la finalidad de las mediatrices:

Ara: *Sería donde se cortan todas* [las mediatrices], *pero donde se cortan dos ya es suficiente.*
Prof.: *¿Y si quisierais comprobar que no os habéis equivocado, ¿qué haríais?*
Merche: *Circunferencias.*
Prof.: *¿Y si quisierais comprobar con mediatrices?*
Merche: *Más.*

Láminas: M-G-19.
Objetivos: Comprobar que sólo en los giros todas las mediatrices de los segmentos que unen puntos y sus imágenes se cortan en un mismo punto.
Actividad 19: Indicar qué figuras se corresponden mediante un giro. Proceder primero visualmente y comprobar luego lo que sucede con las mediatrices.

Visualmente Ara identifica bien los pares de figuras giradas, excepto los rombos. Merche identifica incorrectamente algunos pares: Los rombos y los perros, en los que hay una simetría clara pero piensa que sí hay giro, y los dragones B y C, unidos por un lado, con centro de giro en la mitad de ese lado, para los que cree que no hay giro. Cuando se sirve de una pieza para moverla desde una figura hasta la otra corrige la idea visual incorrecta.

Las alumnas descubren, mediante experimentación, que las mediatrices no se cortan en un punto en el caso de la traslación y de la simetría. En la simetría, la expresión de Ara pone claramente de manifiesto que no esperaba la coincidencia de mediatrices, pues exclama: *¡Qué sorpresa! La mediatriz de AA' es la misma que la de BB'.* La justificación sobre la coincidencia de las mediatrices en el caso de la simetría la justifica Merche *Porque los puntos están a la misma distancia del eje. Si están a la misma distancia,* [el eje] *tiene que estar a la mitad.*

El paralelismo de las mediatrices en la traslación lo justifican así:

Merche: *Porque todos los segmentos tienen la misma longitud y el mismo sentido ... Los segmentos* [que unen puntos homólogos] *son paralelos ... y las mediatrices de segmentos paralelos son paralelas.*

Ara: *Yo creo que, al encontrarse a la misma distancia los vértices, van a salir paralelas.*

Las dos alumnas resuelven los dos casos en los que hay giro y, ante la pregunta de la profesora, indican que, una vez comprobado con dos mediatrices o más que se cortan en un punto, para verificar si se trata efectivamente de un giro, pueden recurrir a medir las distancias al centro (Merche) o trazar circunferencias para otros vértices con centro el punto de corte de las mediatrices.

Aunque Ara sí resuelve los ejercicios, en el primero de ellos hace un comentario que no corresponde exactamente a la situación que se presenta: Ara ha comprobado con cuatro mediatrices que se cortan en un punto. La profesora le pregunta cómo se asegura de que es un giro y se produce el diálogo siguiente:

Ara: *Este* [el punto de corte] *sería* [el centro de] *un giro. Y con el compás, mirando la distancia a A y a A' se mantiene constante en* <u>*todos*</u> *los rombos.*

Prof.: *Sólo tienes dos rombos.*

Ara: *Sí, sí. Pero si tuviésemos más, viendo si se mantiene constante. Entonces, claro, estos puntos están incluidos en la circunferencia. Luego, trazando la circunferencia BB' y, si pasa por los vértices ...* [no acaba la frase porque da por supuesto que se entiende su razonamiento].

Láminas: M-G-20.

Objetivos: Aplicar el corte de mediatrices de segmentos, con extremos un punto de una figura y su correspondiente de la figura imagen, para obtener el centro del giro.

Afianzar que el ángulo y el centro de un giro son las características que determinan un giro.

Actividad 20: Averiguar a cuáles de los pares de figuras que se dan se les ha aplicado el mismo giro.

Antes de resolver la actividad, hay que identificar los elementos que determinan un giro, en lo cual interviene la profesora:

Merche: [Para determinar un giro hay que dar] *el ángulo y el sentido.*

Prof.: *¿Y qué más?*

Merche: *La distancia al centro.*

Prof.: *El centro. O sea, el centro y el ángulo, y con eso ya está determinado. Y por ángulo quiero decir el sentido y la amplitud*

El proceso de solución de la actividad es correcto. Visualmente las alumnas descartan algunas de las figuras. Después, como dice Ara, lo que hacen es *encontrar el centro de giro o, si te lo daban, comprobar que era.*

Transcribo un diálogo correspondiente al comienzo del segundo ejercicio, en el que se aprecian ideas claras sobre la utilización de mediatrices. El comentario de Ara sobre la necesidad de comprobar si se trata de un giro es correcto, pues todavía no se ha visto la propiedad de que dos figuras iguales, con la misma orientación en sus ángulos, siempre se corresponden mediante una traslación o un giro.

Merche: *Con dos mediatrices bastará, ¿no? Porque viendo dónde se cortan dos ya sabes dónde está el centro.*

Ara: *Si sabes que es un giro, sí, pero si no, tendrás que comprobar primero.*

Merche: *Ya, pero lo he comprobado mirando el otro vértice, si pasa por la circunferencia.*

Sesiones 4 y 5

Láminas: Hojas en blanco.

Objetivos: Descubrir que la inclinación de la imagen de una figura por un giro está determinada por el ángulo de giro y no por el centro de giro.

Utilizar la propiedad anterior para reconocer la imagen de una figura por un giro de cierto ángulo, cuando se dispone de una imagen de la misma figura con la inclinación que le produce ese ángulo.

Actividad 21: Pegar una pieza y marcar distintos puntos de la lámina como centros de giro. Aplicar a la figura (siempre a la misma) giros de ... (un valor numérico), con los diferentes centros de giro marcados.

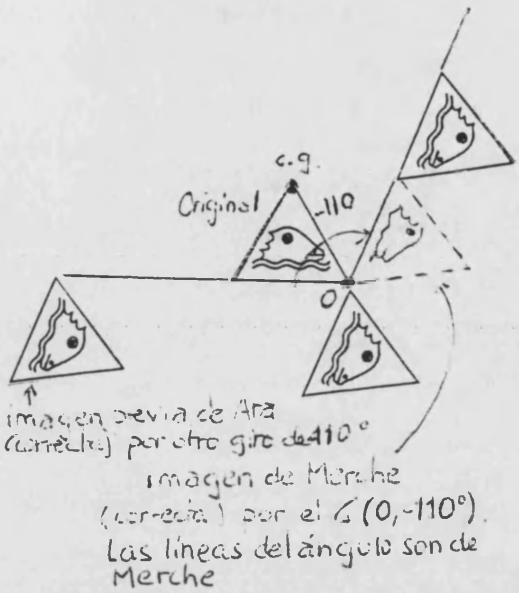
El profesor coloca una figura en la lámina (con una inclinación que no corresponde a la de las imágenes del ejercicio anterior) y pregunta si esa figura puede ser imagen de la original por medio de un giro cuyo ángulo es ... (el mismo del ejercicio anterior).

Tras obtener la imagen de varias figuras mediante giros de distinto centro e igual ángulo, las alumnas descubren el paralelismo y la traslación entre las imágenes. En el diálogo que muestro se observa la imprecisión en el lenguaje utilizado por Ara:

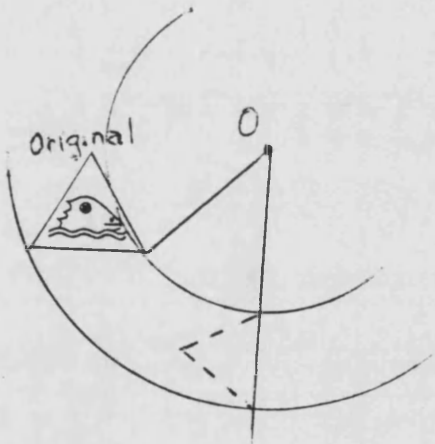
Ara: [Las tres imágenes] *están desplazadas ... Están ¿formando rectas paralelas los vértices?*
Prof.: *¿Qué movimiento permitiría pasar de una figura a otra?*
Ara coge una pieza, la coloca sobre una de las imágenes y la desplaza hasta otra de las imágenes mediante una traslación.
Merche: *Una traslación.*

Cuando la profesora sitúa una pieza con una inclinación distinta a la de las imágenes obtenidas y pregunta si puede ser imagen de la original por medio de un giro de -45° (ángulo empleado en ese ejercicio), las respuestas no corresponden a una aplicación correcta de la propiedad objetivo de ese ejercicio (cuando el ángulo de giro es el mismo, las imágenes son todas trasladadas entre sí). Merche responde que *Sí, según donde esté el centro de giro.* Ara dice que *tendría que estar así,* y coloca la pieza paralela a la original, no a las imágenes anteriores, que sería lo correcto. La contestación de Merche no es totalmente incorrecta si razona basándose en que la experimentación se ha limitado a unos casos concretos, por lo que el hecho de que se produzca una traslación podría no suceder siempre, ya que no se ha utilizado un razonamiento general para justificar este resultado.

La vez siguiente que la profesora propone un ejercicio parecido, en el que hay que basarse en esta propiedad, Merche la utiliza correctamente, sin titubeos. Ara lo resuelve mal al principio, pues si bien sí aplica la propiedad de la traslación existente entre las figuras imágenes, no tiene en cuenta el lugar donde se encuentra el centro de giro. En concreto, el ejercicio consiste en girar 110° una figura, tomando como centro de giro su vértice superior y conociendo otras imágenes de esa misma figura por otros giros también de 110°. No se permite utilizar ningún instrumento de medida ni el compás. En el primer dibujo de la página siguiente mostramos las dos posiciones consecutivas en las que Ara sitúa la imagen. Tras esas soluciones de Ara, la profesora le pregunta sobre la situación del centro de giro, tras lo cual Ara rectifica y resuelve correctamente el ejercicio. Esta forma de trabajar de Ara se produce con frecuencia a lo largo de la experimentación y parece mostrar que Ara sí es capaz de aplicar propiedades, pero con frecuencia hay que hacerle una reflexión directa sobre alguno de los elementos a tener en cuenta.



También hay que destacar que Ara, al comenzar el ejercicio consistente en girar una figura -110°, con centro exterior a la figura, tras unir un vértice con el centro de giro dice que no recuerda cómo obtener la figura imagen (sin embargo, había obtenido muchas imágenes en casos análogos en ejercicios anteriores). Al poco tiempo ella misma recuerda el proceso: *¡Ya! Ahora giro 110° en sentido contrario a la agujas del reloj.* Y continúa bien la obtención de la figura imagen.

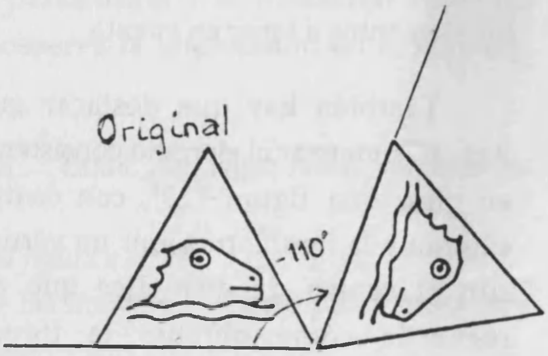


En el caso anterior, también comete un error, que ella misma subsana: Hay que girar el triángulo +45°. Ara mide el ángulo para uno de los vértices y apoya todo el lado de la figura sobre el lado del ángulo marcado (ver dibujo). Ara había trazado circunferencias para dos vértices y ve que el extremo correspondiente de ese lado de la figura no se ajusta sobre la circunferencia exterior, lo cual le hace darse cuenta de que no era correcto lo que había hecho:

Ara: *Había aplicado el mismo ángulo a dos vértices* [los dos extremos del lado de la figura], *y eso es una barbaridad.*

Luego Ara completa bien el ejercicio.

Los métodos empleados por las alumnas para obtener la figura imagen varían: En un caso, en que el centro de giro es exterior, Merche mide el ángulo de giro para un vértice y traza dos circunferencias para otros dos vértices, ajustando sus imágenes sobre las circunferencias. Ara mide los ángulos de giro para tres vértices y traza sus circunferencias. Cuando el centro de giro se encuentra en un vértice de la figura, Merche traza el ángulo de giro a partir de uno de los lados sobre los que está el vértice y sitúa el lado correspondiente de la figura imagen sobre el segundo lado del ángulo (ver dibujo). Ara emplea el mismo método que cuando el centro de giro es exterior: Mide el ángulo para tres vértices y traza las circunferencias correspondientes.



Láminas: M-G-22.

Objetivos: Aplicar la propiedad de determinación de la inclinación de la figura imagen según el ángulo del giro aplicado.

Actividad 22: Indicar cuáles de las figuras numeradas pueden ser imágenes del rectángulo A por medio de un giro cuyo ángulo es el mismo que el de alguno de los giros que transforman A en los rectángulos B, C o D.

Las alumnas resuelven correctamente la actividad, haciendo referencia a la propiedad objeto de la misma. Sus justificaciones son:

Ara: *El 1 con el B porque son paralelos ... Las figuras son trasladadas ... El centro de giro sería distinto.*

Merche: *La 4 y la D. Sería el mismo ángulo de A a 4 que de A a D, pero con diferente centro.*

Láminas: M-G-23.

Objetivos: Aplicar la propiedad de determinación de la inclinación de la figura imagen según el ángulo del giro aplicado.

Actividad 23: Obtener la imagen de la figura A por un giro de ... (dar algún valor de los indicados en las figuras de la lámina: -50°, 70° ó 160°), sabiendo que el punto P se ha transformado en ... (especificar alguno de los puntos Q, R ó S).

Las dos alumnas resuelven bien la actividad, aplicando la propiedad objetivo de la misma. En el primero de los casos que se plantean, Ara precisa pensar en algún momento el paso a dar, pero llega a resolverlo. Merche los realiza rápidamente.

Láminas: Hoja en blanco.

Objetivos: Aprender un método para girar una figura cuando el centro de giro es exterior a ella:

a) Girar con centro un vértice de la figura original.

b) Obtener la imagen de un punto por el giro pedido.

c) Colocar la figura final, teniendo en cuenta a) y b).

Justificar el método anterior por la propiedad de variación de inclinación de una figura según el ángulo del giro.

Actividad 24: Pegar una pieza y marcar un centro de giro exterior. Aplicar un giro de ... (valor del ángulo), con centro el señalado, pero no utilizar la imagen de varios puntos, sino aplicar la propiedad de que la inclinación de la imagen de una figura por un giro queda fijada por el ángulo del giro.

La profesora le va dirigiendo a Ara los pasos a seguir en el primero de los ejercicios (el ángulo de giro es -120°). Ara sí sabe que la inclinación de la figura final será de -120° respecto la figura inicial, dato que aplica para situarla, pues gira -120° la figura inicial, tomando como centro de giro un vértice.

El primer intento de colocación de la figura imagen es incorrecto, no por la inclinación sino porque deja la figura sobre el centro de giro, pero Ara misma se da cuenta de su error: *La distancia* [al centro de giro] y rectifica. En la nueva posición sí atiende a la equidistancia al centro, pues traza una circunferencia, pero como imagen del vértice utilizado para la circunferencia coloca un punto que no es correcto.

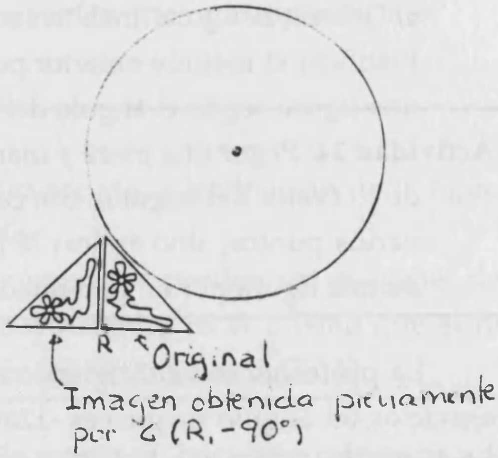
En el segundo ejercicio, Ara realiza un giro con centro en un vértice de la figura original, para obtener la inclinación de la imagen pedida, lo cual es correcto, pero después se desorienta respecto al lugar en que debe colocar la figura. Quizá ello se debe a que Ara cree que hay que resolver el ejercicio sin instrumentos de dibujo auxiliares. Finalmente la profesora le indica que tiene que medir los 90° para un punto y entonces Ara completa bien el ejercicio. Veamos el diálogo entre la profesora y Ara, después de que ésta ha girado sobre un vértice la figura original:

Ara: *No lo veo* [= No sé dónde hay que colocar la imagen]. *Tiene que tener esa forma* [= Ha de ser paralela a la pieza obtenida mediante un giro con centro en el vértice de la figura original]. *Pero es que podría situarla por aquí* [parte izquierda de la circunferencia, aproximadamente a -90°], *pero entonces no giraría 90°.*

Prof.: *Si quieres saber exactamente dónde se sitúa, ¿qué te hará falta conocer?*

Ara: *La imagen ... de este vértice* [Ara señala uno que no es el de la circunferencia que había dibujado].

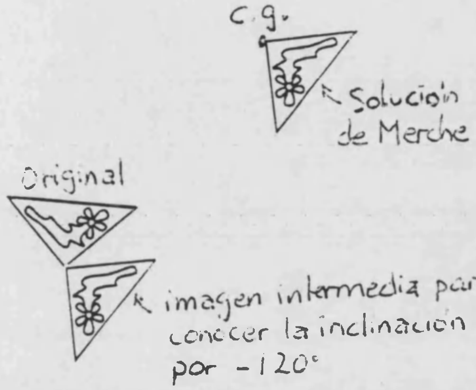
Ara señala su imagen cuando el centro de giro se encontraba en el vértice de la figura original que utilizó antes. La profesora le recuerda que el centro del giro que se pide no está ahí. Ara traza una circunferencia para el vértice cuya imagen quiere situar (ver dibujo), pero sigue sin saber dónde está su imagen hasta que la profesora le dice que debe medir los 90°:



Prof.: *Tienes que medir los 90°. No puedes hacerlo a ojo.*

Ara: *¡Claro! Yo es que estaba intentando hacerlo a ojo.*

Entonces Ara resuelve el ejercicio y explica, correctamente, el proceso a seguir. Por lo que respecta a Merche, en el primer ejercicio, para conocer la inclinación de la figura final realiza el giro tomando como centro un vértice de la figura original (el ángulo es de -120° en su ejercicio) y utiliza la estrategia de situar directamente un lado de la figura final, con la misma inclinación que el lado correspondiente de la figura que giró anteriormente tomando como centro un vértice de la figura original. Pero la primera colocación que realiza es sobre el centro de giro (ver dibujo), o sea, comete el mismo tipo de error que Ara. Sin intervención de la profesora, Merche corrige su error (expresa que tiene que haber la misma distancia del centro de giro al vértice original que del centro de giro a la imagen de ese vértice). El método que emplea consiste en trazar arcos de circunferencias, con centro el de giro, para dos vértices, y ajustar sobre esos arcos un segmento, sabiendo que debe ser de la misma longitud y paralelo al lado de la figura que obtuvo con la inclinación de -120°.



La profesora le sugiere, como método más preciso, el consistente en obtener la imagen de un punto y trasladar la figura que obtuvo cuando situó el centro de giro sobre un vértice de la figura original. Merche tiene las ideas claras y en el ejercicio siguiente aplica sin titubeos este método.

Láminas: M-G-25.
Objetivos: Reconocer propiedades inmediatas referentes a giros y, cuando ello sea oportuno, comparar con la propiedad equivalente para las traslaciones.
Observar el grado de afianzamiento que tienen los alumnos de las propiedades elementales de los giros y el tipo de justificación que utilizan.
Actividad 25: Decir si es cierta o no cada una de las propiedades que se dan. Justificar las respuestas.

En ocasiones las alumnas se basan en la experimentación de casos, bien construyéndolos en el momento en que se plantea la pregunta o haciendo referencia a situaciones surgidas con anterioridad. Otras veces las alumnas se basan en la definición funcional que tienen de los giros. Las afirmaciones de las alumnas son correctas, si bien varias veces interpretan el enunciado que se les presenta con un significado diferente al previsto. En ocasiones la dificultad de interpretación proviene de lo evidente de la propiedad enunciada.

A continuación presento una selección de ejemplos de actuaciones de las alumnas, en relación con algunas propiedades de la lámina M-G-25, que muestran los comentarios anteriores:

Propiedad 1- La distancia de un punto a su imagen por un giro siempre es la misma. O sea, la distancia de P a P' es la misma que de Q a Q', sean cuales sean los puntos P y Q.

Este enunciado plantea que d(P,P') = d(Q,Q') para todo par de puntos P y Q. Tras la lectura de la propiedad por las alumnas, la profesora la enuncia modificando su expresión gramatical:

Prof.: *O sea, cogemos un punto y su imagen. Habrá una distancia entre ellos. Cogemos otro punto y su imagen. Habrá una distancia entre ellos.* [La propiedad dice] *que la distancia ésa va a ser siempre la misma.*
Merche: *Sí ... Entre un punto y su imagen.*
Ara: *Sí que se cumple porque la distancia de P a P' tiene que ser la misma. Si no no tendría el mismo centro.*

Las alumnas no han interpretado bien el enunciado de la propiedad 1, pues piensan que se plantea que d(O,P) = d(O,P'), que d(O,Q) = d(O,Q') y lo mismo para todo punto del plano. Por ello, su respuesta es incorrecta para la propiedad enunciada, pero válida para la interpretación que ellas le dan. Tras una aclaración de lo que se pide, las dos alumnas proporcionan la respuesta correcta:

Merche: *En un giro no* [no es cierta la propiedad]. *Si no las circunferencias tendrían que estar a la misma ...* (no acaba la frase). *Todo tendría que estar a la misma línea, ¿no?*

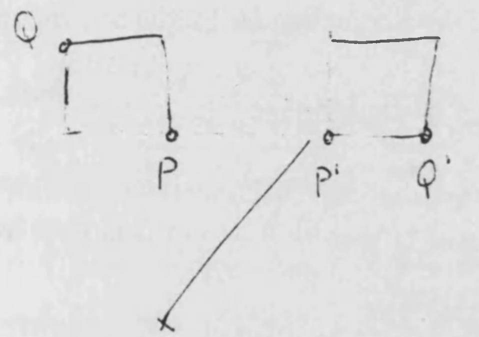
Esa forma de expresión de Merche no es adecuada, pero Ara sí plasma correctamente la idea intuitiva de Merche:

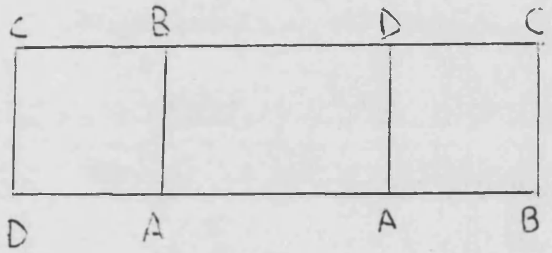
Ara: *Tendrían que estar todos los puntos sobre una misma circunferencia.*

De todas maneras, Merche dio con anterioridad a lo transcrito una justificación bien fundamentada:

Merche: *Yo creo que no* [que no se cumple la propiedad]. *Además de que si el centro estuviera dentro de la figura* [señala un vértice del cuadrado (perro)] *entonces la distancia de ese punto a la figura sería cero. Sería diferente la otra.*

Y se sirvió de dos dibujos para justificar la afirmación de que las distancias no eran iguales. El primero de ellos no era correcto, pues no podía corresponder a un giro (ver dibujo inferior izquierdo); ante una pregunta de la profesora, rectifica el diagrama haciendo uno que, aunque sí es válido como contraejemplo, no sé si Merche aprecia el giro realizado (ver dibujo inferior derecho)





Tras las justificaciones de este ejercicio, la profesora pregunta si la propiedad se cumple en las traslaciones, a lo cual contestan las alumnas afirmativamente, lo cual es correcto.

Propiedad 4- Un giro transforma líneas rectas en líneas rectas.

Las alumnas afirman sin ninguna duda que es cierta esa propiedad y Ara incluso indica que lo que se pregunta es una tontería.

Propiedad 6- Un giro mueve todos los puntos del plano.

Merche: *Según dónde esté el centro. Si el centro está sobre la figura, entonces no se mueve ... Los demás sí.*

Ara: Claro. [Los que no son el centro de giro] *tenemos que obtenerlos para calcular la imagen.*

....

Propiedad 8- Si O es el centro de un giro y P' la imagen de P por ese giro, el ángulo ∠POP' es siempre el mismo, sea cual sea el punto P.

Aquí se vuelve a plantear un problema de interpretación de la propiedad, pues Merche dice que no entiende lo que se dice, incluso después de que la profesora se lo explique. Seguramente influye el hecho de que la propiedad es evidente en los giros, pues, cuando Merche llega a comprender lo que se pregunta, exclama: *El ángulo sí* [es igual], con una expresión de convencimiento total y de semi-incredulidad de que ésa sea la pregunta, a lo que sigue:

Prof.: *¿Por qué?*

Merche: *¡Porque es un giro!* [La entonación con la que Merche enuncia esta frase muestra que la considera evidente].

Propiedad 9- Un punto y su imagen por un giro están siempre sobre una circunferencia cuyo centro es el centro del giro.

Alumnas: *Sí* [es cierta].

Ara: *Si no no sería* [giro].

Láminas: M-G-26.

Objetivos: Introducir la definición formal de giro.

Identificar las condiciones de la definición en un caso concreto.

Actividad 26: Leer la definición de giro. Indicar si alguna de las condiciones que se dan se ha comprobado de alguna manera concreta en ejercicios resueltos anteriormente.

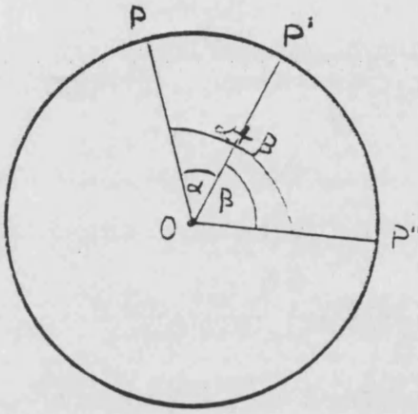
Para la demostración de que la composición de dos giros del mismo centro, $G(O,\beta°)\circ G(O,\alpha°)$, es otro giro del mismo centro y ángulo la suma de los ángulos, $G(O,\alpha°+\beta°)$, hacer una representación gráfica e identificar en qué consisten las condiciones de la definición de giro para el giro resultante.

Las alumnas identifican bien las dos condiciones de la definición de giro para el giro G(O, $\alpha+\beta$) y entre las dos van contestando correctamente todas las preguntas que formula la profesora y que corresponden:

- a la identificación de los datos y del resultado, en términos de las dos condiciones de la definición formal usual,

- a la representación gráfica de la propiedad (ver dibujo), y

- a los pasos de la demostración de la propiedad.



La profesora hace la demostración de la propiedad basándose en las dos condiciones de la definición de giro. Antes de ello, Merche había justificado la igualdad de distancia al centro de un punto y de su imagen *Porque están en la misma circunferencia.*

Láminas: Hojas en blanco.

Objetivos: Composición de giros de distinto centro con la suma de sus ángulos no múltiplo de 360: Descubrir y generalizar el resultado y la ausencia de conmutatividad.

Justificar el valor del ángulo del giro resultante a partir de la propiedad de la dependencia de inclinación de la imagen de una figura según el ángulo del giro realizado.

Actividad 27: Pegar una pieza en la lámina y marcar dos puntos P y Q como centros de giro. Aplicarle a la figura la composición del giro de centro P y ángulo ... (un valor numérico) y el giro de centro Q y ángulo ... (otro valor numérico).

Determinar el movimiento que lleva directamente de figura inicial a la imagen final.

Averiguar si existe alguna relación directa entre los centros o ángulos de los giros que se componen y el centro o ángulo del giro resultante.

Justificar el valor del ángulo del giro resultante a partir de la variación de inclinación experimentada por la figura en cada giro.

Realizar la composición de los dos giros anteriores, pero en orden inverso. Antes de resolverlo, hacer una hipótesis sobre las características que se puedan conocer de antemano sobre la figura imagen y sobre el movimiento resultante. Comprobarlo luego.
Generalizar el resultado de al composición de dos giros de distinto centro (con la suma de los ángulos no múltiplo de 360°).

Las alumnas sí recuerdan, de las sesiones dedicadas al estudio de las traslaciones, la escritura y el significado de la composición de aplicaciones. Aprecian, cuando procede, el paralelismo entre imágenes resultantes de aplicar el mismo ángulo total, pero cometen los errores esperados (por ser las relaciones directas a partir de los datos), respecto a la obtención del centro del giro resultante. Estos errores provienen por lo general de Merche, pues es la que aventura soluciones, y son:

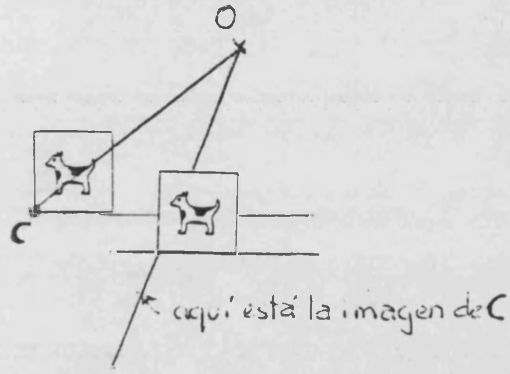
- Tomar uno de los dos centros de los giros que se componen como centro del giro resultante (este error lo tienen las dos alumnas, aunque quizá Ara lo comete por despiste, según se puede apreciar en la transcripción que muestro más adelante).
- Pensar como solución en el punto medio entre los dos centros de los giros que se componen.
- Utilizar el corte de dos mediatrices, una correcta y la otra la correspondiente a los centros de los giros que se componen.

Merche no se sirve, en su justificación sobre la colocación de la figura imagen, de la propiedad referente a la determinación de la inclinación de la imagen de una figura por el ángulo del giro realizado. Merche obtiene el ángulo del giro resultante en el primer ejercicio por medición y, cuando generaliza que el ángulo resultante es la suma de los que se componen, se sirve de ese razonamiento experimental en la justificación del ejercicio siguiente. Luego, después de que la profesora realice la explicación completa, Merche sí emplea esa propiedad, referente a la determinación de la inclinación de la imagen de una figura por el ángulo del giro realizado, cuando se necesita.

Ara sí relaciona la propiedad con la justificación de la inclinación de la figura resultante, aunque sus primeras respuestas parece que son algo intuitivas. Al final parece que las dos alumnas comprenden la propiedad objetivo de esta actividad, tomando como justificación la dependencia de la inclinación de la imagen según el ángulo del giro realizado.

Otras situaciones concretas a destacar son las siguientes:

En el segundo ejercicio hay que aplicarle la composición (G(O,90°)∘G(C,-30°) a la figura. Merche coloca la imagen del primer giro trasladada, como se ve en el dibujo. Además, la distancia a la que sitúa el vértice imagen en el que se fija (inferior izquierdo) no es correcta y el ángulo empleado es de +30° en lugar de -30°. De todas maneras, aunque parece que los errores son serios, dos no tienen importancia: Es posible que en la distancia se equivocara al marcar el punto, pues en una explicación posterior dice que sí midió; el cambio en el sentido del ángulo de giro se debe a un descuido. Por otra parte, cuando la profesora le pregunta si puede salir trasladada la figura imagen, Merche afirma que *Con un centro no,* haciendo referencia a que por medio de un giro no puede salir así, con lo que se da cuenta de su error. La actuación anterior de Merche puede dar a entender que no comprende las propiedades que se van utilizando, pero ello no es cierto; por lo general Merche sí comprende en cada momento la situación del ejercicio, si bien de vez en cuando comete errores que no se corresponden con su trayectoria usual.



Cuando las alumnas ya han asumido que el centro del giro resultante de la composición hay que obtenerlo, Ara traza una mediatriz y luego, sobre esa mediatriz, va probando por tanteo el posible centro de giro; o sea, en ese momento no recuerda ni deduce que puede trazar otra mediatriz y que la solución la proporciona el punto de corte de las dos mediatrices. Una reflexión de la profesora le hace recordar ese método:

Prof: *Es que estás ajustando a ojo. ¿Qué pasará?*
Alumna: *Que no se puede conocer* [el centro del giro resultante].

Prof. [a Ara]: *Es que a ojo te resultará casi imposible, ¿no? porque hay muchos puntos* [en la mediatriz donde probar]. *¿El centro de giro para cuántos puntos de la figura tiene que servir?*

Ara: *¡Ah! Tendré que hacer otra recta* [otra mediatriz].

Entonces Ara recuerda por completo el algoritmo y procede correctamente a obtener el centro del giro resultante de la composición. A continuación transcribo algunas de las intervenciones de las alumnas a lo largo de la realización de esta actividad, y que corresponden a algunos de los comentarios anteriores.

Primer ejercicio. La composición a realizar es G(O',-30°)∘G(O,90°). Cada estudiante tiene su propia lámina, pero la figura es la misma y está situada igual en las láminas de las dos alumnas, el primer centro de giro está en el mismo vértice, pero el segundo, que es exterior a la figura, difiere algo de una lámina a la otra.

Antes de resolver el ejercicio, Ara escribe directamente G(O,+90-30), a lo que sigue la conversación siguiente:

Prof.: *¿Con centro en O?*

Ara: *¡Ah! No. Es que es distinto el centro.*

....

Prof.: ... *Comparando las dos figuras finales* [las de las dos alumnas], *¿qué pasa?*

Ara: *Tiene la misma inclinación. Son paralelas.*

Prof.: *¿Creéis que es casualidad?*

Ara: *No. Es por el ángulo. Es el mismo ángulo y, además, tenemos* [la figura] *en la misma posición.*

Prof.: *¿Qué giro va a permitir pasar de la primera figura a la última? ¿Hay algo que conozcáis o no?*

Las alumnas no responden, lo cual hace suponer que no relacionan la propiedad conocida de la determinación de la inclinación de la figura por el ángulo del giro.

Prof.: *Calcular el ángulo.*

Merche mide 110°, pero tomando como centro de giro el de uno de los giros de la composición.

Prof. [a Merche]: *Y así, ¿con ese centro de giro puedes calcular el arco o no?*

Ara: *No porque el primero corresponde al primer centro de giro, pero la* [figura] *3 corresponde al segundo. Entonces, si tenemos dos centros de giro distintos ...* [no termina la frase].

Merche: *A la mitad* [de los dos centros de giro].

Ara: *Si tenemos dos centros de giro no se puede* [saber dónde se encuentra el centro del giro resultante].

Prof.: *¿Dónde estará el centro de giro?*

Ara: *¡Ah! Pues tenemos que calcularlo.*

Ara traza una mediatriz e intenta encontrar el centro de giro por tanteo (la transcripción de esta parte la he incluido anteriormente) y Merche emplea una mediatriz correcta y la de los dos centros de los giros que se componen, a lo que la profesora comenta:

Prof.: *¿Por qué has hecho la mediatriz de los dos centros? ¿Qué es lo que estás buscando?*

Merche: *¡Ah! El centro. Entonces tiene que ser con dos puntos de la figura.*

Merche obtiene entonces bien el centro del giro resultante, mediante el corte de mediatrices. Después de que las alumnas midan el ángulo de giro resultante, la profesora dice:

Prof.: *Es 60. ¿Puede ser casualidad?*

Alumnas: *No.*

Ara: *Porque 90 menos 30 son 60.*

Prof.: *¿Pero por qué hay que hacer eso? Cuando el centro era el mismo era lógico. Pero ¿ahora por qué?*

Merche: *Porque tiene que ...* [no acaba la frase].

Ara: *¿Puede ser por lo mismo de antes? Que cuando tiene distinto centro nos da una* [busca la palabra adecuada].

Prof.: *¿Inclinación?*

Ara: *Sí. Bueno, que eran paralelas todas.*

Prof.: *¿Y eso cómo lo dirías?*

Ara: *Porque son traslaciones todo y entonces, aunque sean distintos centros, como esto es una traslación de esa figura, entonces siempre te va a salir lo mismo.*

Prof.: *A ver, Merche, ¿tú qué dices?*

Merche: *Yo creo que sí. Era porque* [no acaba la frase]. *Es que era lo que estaba diciendo ella* [Ara] ... *Eso que estábamos diciendo antes de que cuanto más cerca estabas,* *menos ángulo tenía. Entonces, como tiene que girar más, el ángulo será menor que uno y menor que otro.*

Prof.: *¿Y por qué sale precisamente 60?, ¿porque está entre 30 y 90?*

La profesora deja ese ejercicio y pasa a otro para ver si las alumnas mejoran la justificación. Pide que hagan la misma composición sobre la misma figura y los mismos centros, pero en orden inverso: (G(O,90°)•G(C,-30°).

Prof.: *¿Creéis que va a pasar algo?*
Alumnas: *Lo mismo.*
Prof.: *¿Que saldrá lo mismo?*
Alumnas: *Sí.*
Prof.: *¿Por qué?*
Las alumnas no contestan.

Tras realizar la composición, la profesora pregunta qué sucede con las dos imágenes finales (las resultantes de las dos composiciones, que varían sólo en el orden de actuación de los giros)

Ara: *Que son paralelas. Una traslación.*
Prof.: *Exactamente. ¿Eso qué quiere decir respecto al ángulo de giro? ¿Qué ángulo llevará la figura 1 a la 3?*
Ara: *60.*
Prof.: *¿Por qué, Merche?*
Merche: *Por lo mismo de antes.*
Prof.: *Ahí* [en el ejercicio anterior] *estáis seguras de que es 60 porque lo habéis medido. Y ahora sale aquel resultado* [la profesora señala la lámina de la última composición] *¿Estáis seguras de que es 60?*
Merche: *Sí Porque están a la misma distancia el 1 del 3 que el 1 del 3* [Merche ha hecho referencia a la figura original y a la final en los dos ejercicios, pero eso no es cierto].
Prof.: *¿Están a la misma distancia? No sé. ¿Tú crees? Aquí* [en una de las láminas] *están casi tocándose y allí* [la otra lámina] *están separados Ara, ¿tú qué dices?*
Ara: *Pues por la sencilla razón de que la recta que une los dos vértices AB es paralela a la que une aquí AB. También estas dos* [líneas] *son paralelas, y éstas, todas las líneas* [lados de la figura] *sos paralelas* [Ara señala correctamente los lados que se corresponden en las dos imágenes finales de los dos ejercicios].
Prof.: *Y si son paralelas.*

Ara: *Es una traslación.*

Prof.: *Y si es una traslación, ¿con el ángulo de giro qué pasa?*

Ara: *Que es el mismo.*

Prof.: *¿Eso lo habéis visto ya antes hoy, o no?*

Ara: *Sí. El otro día ya estuvimos con eso.*

Prof.: *¿Y hoy en qué lámina lo hemos visto?*

....

La profesora saca esas láminas y, para una de ellas, dice:

Prof.: *En ésta se daba el ángulo y, cuando pedían con el mismo ángulo, la colocabais ...*

Ara: *Trasladada.*

Prof.: *Aquí* [en el ejercicio que acaban de resolver] *sale trasladada y entonces el ángulo de giro será también de ...*

Alumnas: *60.*

Prof.: *¿El centro de giro será el mismo que antes?*

Alumnas: *No.*

Prof.: *¿Por qué?*

Merche: *Porque no están a la misma distancia.*

Ara: *El centro de giro tiene que ser el mismo.*

Prof. [a Ara]: *¿El centro de giro que lleva a la 3* [desde la figura original] *en esta lámina es el mismo que el que lleva a la 3* [desde la figura original] *en esta lámina?* [La profesora señala las dos láminas correspondientes a la misma composición de giros, pero cada vez en un orden].

Ara mira las dos láminas y dice:

Ara: *No. Puede ser distinto, pero que dé 60°. Si fuera el mismo daría en el mismo sitio.*

Finalmente se propone otro ejercicio, que las alumnas resuelven bien. La justificación de Merche para el valor del ángulo resultante se basa en la experimentación anterior. La profesora hace una justificación basándose en la dependencia de la inclinación de la imagen de una figura según el ángulo del giro realizado.

Láminas: Hoja en blanco.

Objetivos: Composición de giros de distinto centro cuando la suma de los ángulos es múltiplo de 360°: Descubrir y generalizar el resultado y la ausencia de conmutatividad.

Justificar el valor del ángulo del giro resultante a partir de la propiedad de la dependencia de inclinación de la imagen de una figura según el ángulo del giro realizado.

Actividad 28: Pegar una pieza en la lámina y marcar dos puntos P y Q como centros de giro. Aplicarle a la figura la composición del giro de centro P y ángulo ... (un valor numérico) y el giro de centro Q y ángulo ... (otro valor numérico apropiado).

Determinar el movimiento que lleva directamente de figura inicial a la imagen final. Justificar por qué se obtiene una traslación.

Repetir el ejercicio, pero con ángulos de giros de ... (dos valores que sumen 0° ó 360°).

Realizar las composición anteriores, pero en orden inverso. Indicar qué tienen en común y qué de diferente los resultados obtenidos al modificar el orden de actuación de los giros.

Generalizar el resultado de al composición de dos giros de distinto centro (con la suma de los ángulos múltiplo de 360°).

Las contestaciones son correctas, sin necesidad de resolver gráficamente los ejercicios. Las alumnas se basan en las propiedades estudiadas anteriormente, relacionadas con la inclinación de la figura según el ángulo del giro. En ocasiones la forma de expresarse las alumnas no es correcta, pero el significado que quieren dar sí. Como las respuestas las dan conjuntamente, no se sabe si cada alumna por separado habría justificado bien todas las situaciones.

Las propiedades que razonan son: Al componer dos giros, con la suma de los ángulos 0° ó 360°, la figura final es traslada de la original. Será la misma que la original si el centro de los dos giros que se componen es el mismo.

A continuación presento una parte de la actuación de las alumnas que refleja lo anterior. La profesora comienza planteando el primer ejercicio:

Prof.: *Coged una lámina. Pegad una figura. Poned un centro de giro en un vértice y haced primero un giro de +70° y luego, al resultado le aplicáis un giro de -70° con otro centro. Ese otro centro, si queréis, lo ponéis en un vértice de la imagen.*

Ara [casi de inmediato]: *Se va a quedar como está. Una paralela a ésta. Con este lado paralelo, éste también y éste también*

Prof.: *¿Y va a salir donde está ésa* [la figura original]?

Alumnas: *Según dónde esté el centro de giro*

Prof.: *Para que estuviera donde está, ¿dónde tendrían que estar los centros?*
Merche: *En el mismo vértice.*
Prof.: *¿Estáis seguras de eso?*
Ara: *¡Hombre! Tanto como seguras del todo ... No sé. Todo sea que salga algún caso raro particular de éstos ...* [Se refiere a la posible existencia de alguna situación especial que no tengan prevista].

Prof. [Plantea el segundo ejercicio]: *Vamos a modificar el ángulo. El primero es de +70° y el segundo lo cambiamos a +290°.*
Ara: *Pues dará la suma. Es que esto es igual que si la figura la trasladamos 290 + 70* [Ara ha utilizado la palabra "trasladamos" con el significado de "giramos"]. *Entonces, si hago una sola rotación equivale a las dos. No tengo por qué hacer todo el rollo ése. Hago una de 360.*

Ara empieza a girar la pieza 360°. Merche se ríe porque Ara no se ha dado cuenta de que lo que va a hacer es darle una vuelta completa y dejarla en el mismo sitio.
Merche: *Da lo mismo.*
Ara entonces se da cuenta de que girar 360 es dar una vuelta completa.
Prof.: *¿Entonces qué pasa?*
Ara: *Se superpone. Se pone encima* [Ara coloca la pieza sobre la figura original].
Prof.: *¿Y tú qué dices, Merche?*
Merche: *Lo mismo.*
Prof.: *¿Eso poniendo los centro de giro dónde?*
Merche: *En el mismo vértice.*
Prof.: *¿Y si ponéis los centro de giro en distintos vértices?*
Merche: *No tiene por qué.*
Ara: No tiene por qué, pero daría una traslación de ésta.
Prof.: *¿Por qué?*
Ara: *Por lo mismo de antes.*
Prof.: *¿Y estáis seguras de que va a dar una traslación?*
Merche: *Sí, porque el ángulo es el mismo.*
Prof.: *¿Cuándo va a dar una traslación?*
Merche: *Cuando el ángulo sea el mismo* [Merche se refiere a la suma de los ángulos] *... Tiene que dar 360. O sea, que la suma de los dos tiene que ser 360. Pero para que quede igual.*
Las alumnas emplean con frecuencia la expresión "quedar igual" con el significado de "tener la misma inclinación", aunque no estén las figuras en el mismo sitio.

Prof.: *¿Y el centro?*

Ara: *El centro calcularíamos. Si tenemos dos centros distintos, pues sacaríamos ...*

Prof. [interrumpe a Ara]: *¿Pero los centros tienen que ser distintos para que sean trasladadas o puede ser el mismo?*

Merche: *Si es el mismo dará la misma figura.*

Prof.: *Entonces lo que tiene que pasar es que la suma de los ángulos sea 360. Y en el primer caso que os había propuesto, ¿qué pasaba con +70 y -70?*

Merche: *Que daba cero. Que es lo mismo por ...* [no se entiende lo que dice].

Prof.: *¿Y va a dar igual si hacemos primero 290 y luego 70 que si hacemos primero 70 y luego 290?*

Ara: *Sí.*

Merche: *El sitio puede que no.*

Ara: *Bueno, pero el ángulo será el mismo. El lugar exacto no tiene por qué. Porque si tomamos distintos centros ...*

Prof. [interrumpe a Ara]: *Bueno, pero tú haces una composición y al final obtienes una figura. Y luego la haces, pero al revés.*

Ara: *¿Pero los centros están situados en el mismo sitio?*

Prof.: *Sí.*

Ara: *No tienen por qué* [salir en el mismo lugar las imágenes].

Prof.: *¿Por qué?*

Ara: *Por lo que hemos visto antes.*

Sesión 6

Esta es la última de las sesiones dedicadas a giros. A ella sólo asiste Merche.

Láminas: Hojas en blanco.

Objetivos: Afianzar el resultado de la composición de giros de distinto centro.

Afianzamiento y utilización del método de giro de una figura introducido con anterioridad, basado en la imagen de un punto de la figura y en la inclinación final.

Conseguir eficacia en la obtención de la figura imagen por una composición de giros mediante la selección de elementos que simplifican el trabajo en situaciones particulares.

Actividad 29: Pegar una pieza en la hoja. Marcar un vértice P y otro punto exterior Q como centros de giro. Aplicar a la figura la composición del giro de centro P y ángulo ... (un valor numérico) y el giro de centro Q y ángulo ... (otro valor numérico cuya suma no sea múltiplo de 360°). Antes de resolver el ejercicio, indicar qué se puede saber del resultado.

Resolver un ejercicio análogo, pero con tres giros en la composición. Antes de realizar la composición, situar una figura con la inclinación que tendrá la imagen final. Explicar cuántos puntos-imagen es necesario obtener para poder situar la imagen final. Pensar qué punto de la figura inicial se puede tomar para que no sea necesario obtener su imagen por el primer giro.

Hacer un ejercicio similar, cuando la suma de los ángulos de los tres giros que se componen es 360°.

Merche resuelve bien todos los ejercicios. No comete ningún error y se pone de manifiesto que comprende en todo momento los problemas que se plantean y las propiedades que puede aplicar. La profesora va proponiendo los métodos de solución que quiere que aplique Merche ya que, debido a su especificidad, no surgen espontáneamente de la propia alumna. El método consistente en girar la figura sobre un vértice y trasladarla cuando se conoce un punto, ya se le había sugerido en alguna sesión anterior y Merche sí lo comprende y es capaz de aplicarlo, pero la profesora se lo tiene que pedir, pues el utilizado por Merche espontáneamente se basa en la obtención de la imagen de dos puntos.

Por otra parte, la profesora quiere destacar que, cuando el primer centro de giro se encuentra sobre la figura original, entonces lo más cómodo es obtener la imagen de ese vértice, pues queda invariante por el primer giro. De ello no se da cuenta Merche hasta que la profesora se lo indica, pero luego, en el ejercicio siguiente, Merche utiliza por sí misma esa propiedad y la traslación de la figura, una vez colocada con la inclinación final, todo ello correctamente, siendo consciente de lo que hay que realizar. Transcribo algunos fragmentos de la actuación de Merche en estos ejercicios:

En el primer ejercicio la composición a aplicar es G(P,-90°)∘G(O,30°). Tras obtener Merche la imagen por el primer giro, la profesora pregunta:

Prof.: *Antes de acabar, ¿sabes cómo va a salir la figura final?*

....

Merche: *Desde la original será -60 ... porque es la suma de los ángulos.*

Merche obtiene la imagen de la figura final midiendo para un vértice y trazando circunferencias para otros dos, que ajusta sobre esas circunferencias.

El segundo ejercicio es G(Q,-10°)∘G(P,-50°)∘G(O,+150°). Sin hacer ninguno de los giros, Merche dice:

Merche: *Será 90 positivos, que será una traslación de ésta, ¿no?* [Es correcto, pues Merche ha girado 90° la figura original, tomando un vértice como centro].

....

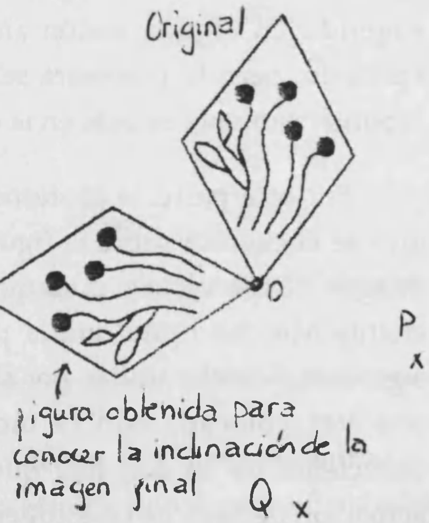
Prof.: *Para saber dónde está la figura, ¿cuántos puntos necesitas conocer?*
Merche: *Dos, ¿no?*
Prof.: *¿Y si sabes que tiene que estar paralela a ésa* [la figura girada 90°].
Merche: *Uno* [cierto, pues luego traslada].

Más adelante, la profesora quiere que Merche se dé cuenta de que si utiliza como punto para obtener su imagen el vértice en el que se encuentra el primer centro de giro, se ahorra trabajo:

Prof.: *¿De qué punto vas a hallar la imagen?*
Merche: *De éste mismo* [el derecho, ver dibujo].
Prof.: *¿Y no hay otro que te resulte más cómodo para el primer giro?*
Merche: *Este* [el superior].

....

Prof.: *El giro es con centro en O y ángulo de 150°. ¿Hay algún punto de la figura original que sepas ya dónde va a ir, sin necesidad de medir nada?*



....

Prof.: *¿Qué ocurre con el centro de giro? ¿Dónde va a parar?*
Merche: *En el mismo sitio.*
Prof.: *Entonces, ¿cuál es la imagen de ese vértice?*
Merche: *El mismo. Ya. Pero ... ¡Claro! Como sabes que es así* [con la inclinación de 90°], *ya tienes un punto.*

Merche continúa bien el proceso: Obtiene la imagen de ese punto por la composición de los otros dos giros y traslada la figura que ya obtuvo con la inclinación final.

En el ejercicio siguiente la suma de los ángulos es 360°. Se trata de G(Q,+140°)∘G(P,+180°)∘G(O,+40°).

Merche: *Se queda igual la figura, en el mismo sitio.*
Prof.: *¿En el mismo sitio?*
Merche: *Claro. Da 360. Bueno, se quedaría igual la figura, no en el mismo sitio.*

Merche utiliza de manera efectiva lo que aprendió en actividades anteriores, como se ve en el procedimiento que emplea para resolver este ejercicio. En concreto, el punto cuya imagen va a obtener lo elige de manera que permanece invariante por el primer giro, pues es el centro de éste; de esa manera simplifica el trabajo a realizar:

Merche: *Ya sé que G(O, 40) va a dejar O igual. La figura hay que girarla 40°, pero eso me da igual, porque yo sé que O está ahí* [permanece invariante].

Láminas: M-G-30 y hoja en blanco.
Objetivos: Descomponer un giro y una traslación en producto de dos giros, conocidas las figuras inicial y final y el primero de los giros.
Aplicar las propiedades conocidas de composición de giros y determinación de la inclinación de una figura en un giro según el valor del ángulo.
Actividad 30: Para pasar de la figura A a la B se han utilizado dos giros. El primero es ... (dar un giro con centro en un vértice de la figura original). Determinar el segundo.

Tanto la situación en la que la figura B es girada de A (primer ejercicio) como cuando B es trasladada de A (segundo ejercicio) Merche los resuelve bien, aunque tiene que descubrir en algún momento cómo proceder. Las situaciones no evidentes desde el primer momento para Merche las incluyo en los comentarios que vienen a continuación.

En el caso en que las figuras inicial y final son giradas, Merche relaciona enseguida el valor del ángulo del giro resultante con los de los giros de la composición: 100-30 (30° es un dato, el ángulo del primer giro, y 100° es el del giro que transforma A en B, que obtiene Merche). Para conocer el ángulo del giro resultante de la composición, Merche traslada un lado de la figura imagen (B), de manera que coincida en un vértice con el correspondiente de la figura original (A). Para el centro de giro, Merche duda, pues obtiene el resultante de la composición mediante corte de mediatrices a partir de las figuras A y B. Una vez calculado, se da cuenta de que es el centro válido para pasar A a B, pero no para el segundo giro de la composición, que es el que se pide:

Merche: *Lo que he hecho es ver el centro de ésta* [A] *a ésta* [B], *pero no sé cómo sacar el otro* [el que se pide].

Prof.: *Has obtenido el centro del giro que pasa directamente A a B, y eso sería un giro con centro ése ¿y ángulo cuánto?*

Merche: *100.*

Prof.: *100°. Pero ahora, ése* [giro] *lo hemos descompuesto en dos, el primero con centro aquél* [que es un dato], *en O, y ahora hay que hallar el segundo.*

Merche sitúa una pieza sobre la original y la gira con la mano aproximadamente 30° con O, que es un vértice, como centro. Al poco tiempo Merche ya se da cuenta de que lo que tiene que hacer es obtener el centro de giro a partir de esa imagen que acaba de colocar y la figura B. Al principio del ejercicio Merche ya se había servido de una pieza para realizar el primer giro, pero luego la quitó y parece que lo olvidó para la obtención del centro de giro. Posiblemente, la ausencia de visión inmediata del centro del giro pedido se deba a que Merche pensara que se podía obtener directamente a partir de los datos.

En el otro ejercicio, en el que las figuras inicial (A) y final (B) son trasladadas, Merche directamente dice que los dos giros de la composición *tendrán que sumar 360* y resuelve bien el ejercicio (el otro dato es el primer giro -centro y ángulo- de los dos de la composición). Parece que Merche asimiló por completo en el ejercicio anterior la obtención del centro de giro.

Láminas: Hoja en blanco.

Objetivos: Composición de traslación y giro. Descubrimiento del movimiento resultante y de la ausencia de conmutatividad.

Relacionar las propiedades conocidas, de determinación de inclinación de una figura según el movimiento aplicado, para justificar el movimiento resultante.

Actividad 31: Pegar una pieza en la lámina. Aplicarle la composición del giro ... (dar un giro) con la traslación de vector ... (dar un vector). Antes de resolverla manipulativamente, indicar el mayor número posible de características de la figura y del movimiento resultantes. Comprobarlo realizando los movimientos.
Hacer la composición anterior, pero en orden inverso. Antes de realizarla, indicar si saldrá el mismo resultado que antes o no.

Merche resuelve el ejercicio sin ningún problema y utiliza las propiedades correspondientes de determinación de inclinación de la figura. Veamos a continuación algunas transcripciones al respecto. El primer ejercicio es aplicar la composición Ta∘G(O,90°) a una figura.

Prof.: *Sin hacer nada, ¿tú ya sabes algo de la figura final?*
Merche: *Sí. Que será así* [Merche coloca una pieza girada -90° respecto la original, lo cual es correcto] ... *Porque la traslación no cambia su ...* [inclinación].
Prof.: *Perfectamente. Entonces lo que pasa es que la figura final estará girada 90°. Haz la composición, a ver.*

Merche realiza bien la composición. Posteriormente, la profesora le pide la composición con el orden de actuación de los giros cambiado:

Prof.: *Haz la misma composición, pero al revés. ¿Qué crees que va a pasar?*
Merche: *Será una trasladada de ésta* [de la girada].
Prof.: *¿Saldrá en el mismo sitio o no?*
Merche: *No.*
Prof.: *¿Por qué?*
Merche: *Porque hay que aplicar la traslación desde aquí.*

Una vez que Merche ha resuelto esa composición, la profesora le pregunta:

Prof.: *Entonces, ¿la composición de traslación con giro es conmutativa o no?*
Merche: *No.*
Prof.: *Con los giros del mismo centro, ¿era conmutativa o no la composición?...* [Silencio] *... O sea, si compones un giro con centro en O y ángulo 30° y luego un giro con centro en O y ángulo 40°, ¿daba igual el giro que actuaba primero? Con giros del mismo centro.*
Merche: *No me acuerdo.*

Esta última respuesta de Merche muestra que es necesario repasar y memorizar ciertos resultados básicos para poder avanzar con eficacia. De todas maneras, Merche ha mostrado en frecuentes ocasiones que su comprensión de los giros es suficiente como para responder correctamente esa pregunta, sencilla, en cualquier momento.

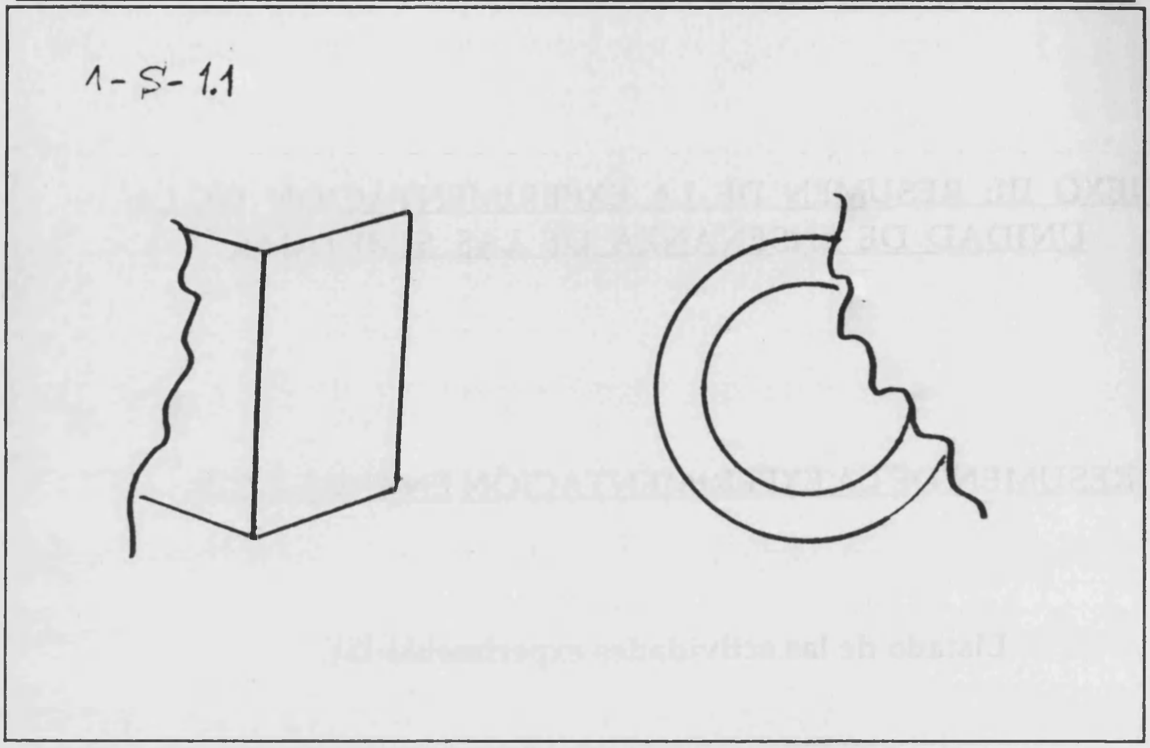
ANEXO III: RESUMEN DE LA EXPERIMENTACIÓN DE LA UNIDAD DE ENSEÑANZA DE LAS SIMETRÍAS

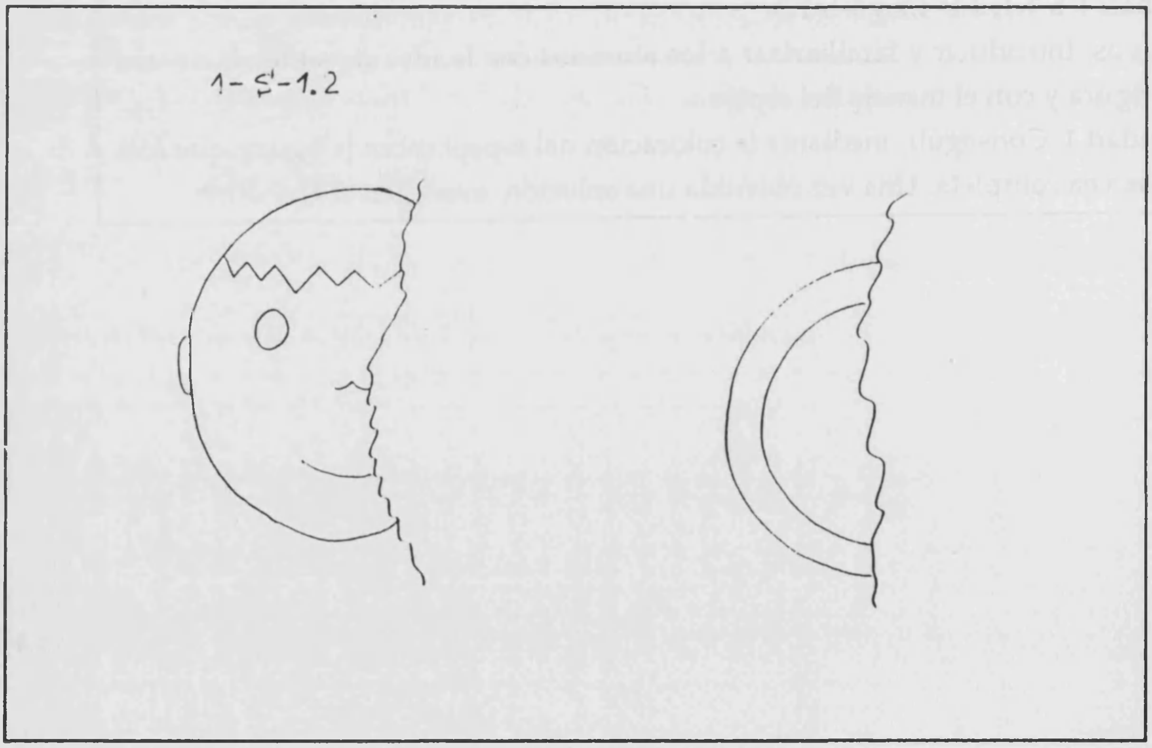
ANEXO III: RESUMEN DE LA EXPERIMENTACIÓN DE LA UNIDAD DE ENSEÑANZA DE LAS SIMETRÍAS

RESUMEN DE LA EXPERIMENTACIÓN EN 1º DE E.G.B.

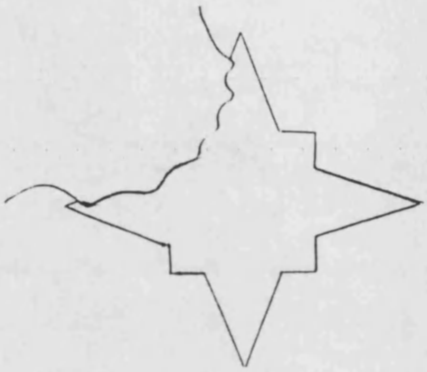
Listado de las actividades experimentadas.

Láminas: 1-S-1.1, 1-S-1.2 y 1-S-1.3.
Objetivos: Introducir y familiarizar a los alumnos con la idea de simetría de una figura y con el manejo del espejo.
Actividad 1: Conseguir, mediante la colocación del espejo sobre la figura, que ésta se vea completa. Una vez obtenida una solución, averiguar si hay otras.


1- S- 1.1


1- S'-1.2

1 - S'- 1.3



Láminas: 1-S-2.

Objetivos: Familiarizar a los alumnos con la idea de simetría, por medio del espejo.

Incrementar el conocimiento de los efectos producidos por un espejo en una figura.

Actividad 2: Conseguir con el espejo dos barcos y dos hombres.

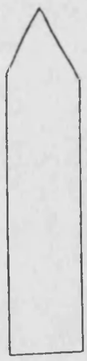
En el caso del hombre, además se piden configuraciones especiales, no usuales. Por ejemplo: Un sólo hombre con dos plumas / sin pluma, etc.

1 - S - 2

Láminas: 1-S-3.1, 1-S-3.2 y 1-S-3.3.
Objetivos: Familiarizar a los alumnos con las simetrías y el uso del espejo.
Reconocer la parte de una figura que mediante simetrías produce ciertas transformaciones en la figura original (más gruesa, delgada, larga, corta, ...)
Actividad 3: Conseguir algunas transformaciones de la figura. Por ejemplo: Palo más o menos largo / grueso.

1 - S - 3.1

1 - S - 3.2

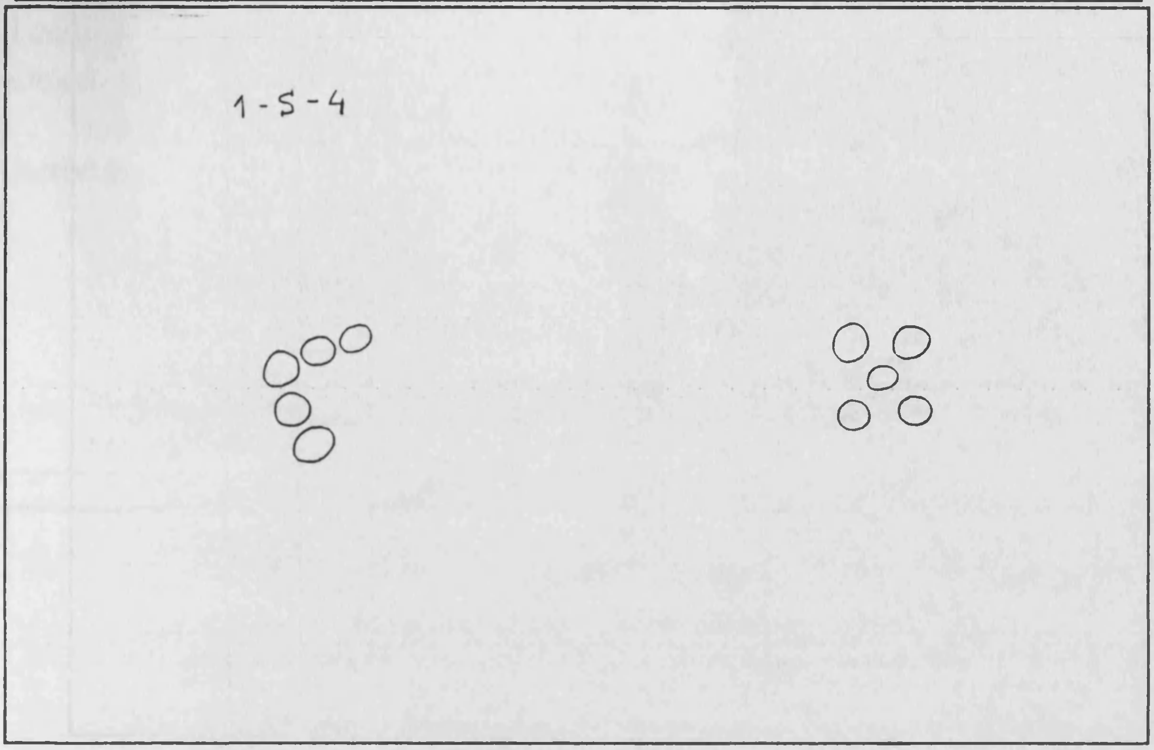


1-S-3.3

Láminas: 1-S-4.

Objetivos: Familiarizar a los alumnos con las simetrías y el uso del espejo.
Incrementar el conocimiento de los efectos producidos por un espejo en una figura.

Actividad 4: Conseguir que sólo se vea un punto, dos, tres, ... Obtener varias posibilidades en algunos de los casos.



Láminas: 1-S-5.1 y 1-S-5.2.

Objetivos: Introducción de la simetría axial.

Introducción del cambio de semiplano y de la equidistancia al eje (esta última sin necesidad de precisión).

Introducción del "mira" como herramienta para obtener la figura simétrica de una dada y para detectar y corregir errores en su colocación.

Actividad 5: Colocar la imagen de la pieza de la lámina, pero:

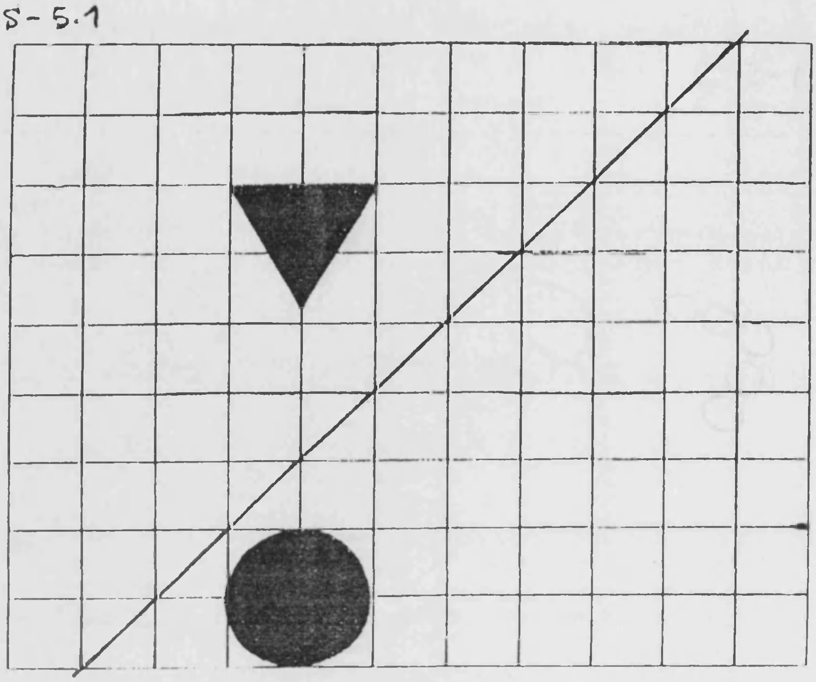
En unos casos hay que emplear el espejo o el "mira" para situar las piezas.

Otras veces hay que observar con el mira o el espejo y retirarlo antes de colocar la imagen.

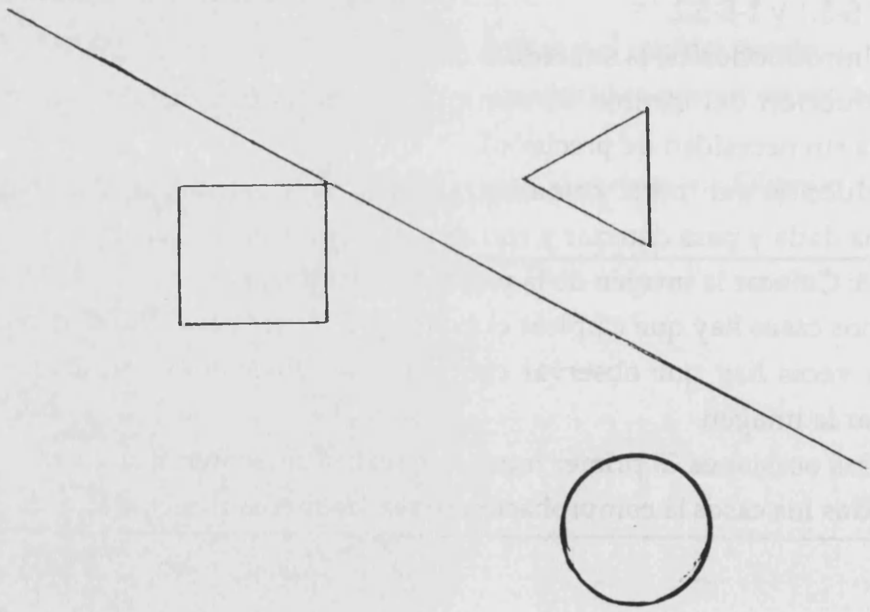
En otras ocasiones, el primer intento se realiza sin material auxiliar.

En todos los casos la comprobación se realiza mediante el mira.

1-S-5.1



1-S-5.2



Láminas: 1-S-6.1 y 1-S-6.2.

Objetivos: Utilización del cambio de semiplano y de la equidistancia al eje de simetría de la imagen (esta última sin necesidad de precisión).

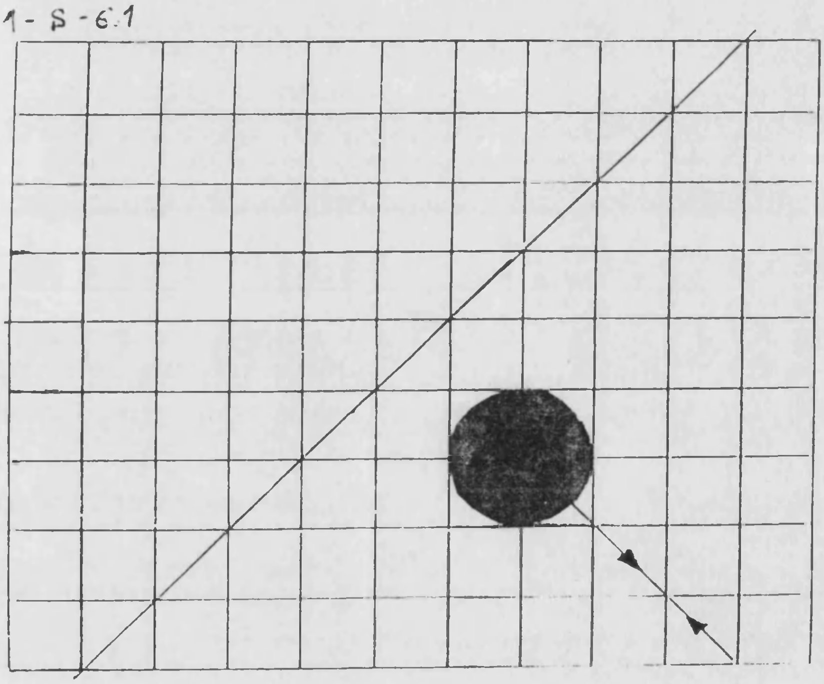
Actividad 6: Colocar la pieza imagen sin utilizar material auxiliar. Corregir a continuación sirviéndose del mira.

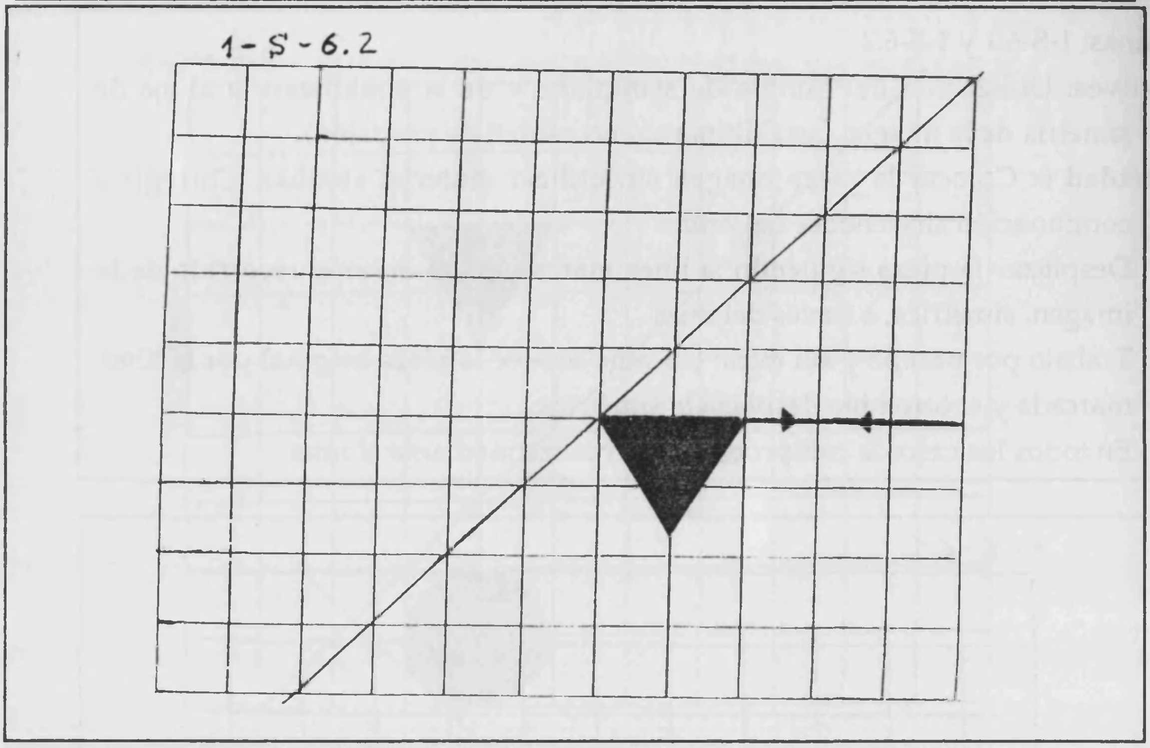
Desplazar la pieza siguiendo la línea marcada y observar el recorrido de la imagen, simétrica, a través del mira.

Trabajo por parejas y sin mira: Un niño mueve la pieza original por la línea marcada y el otro niño desplaza la simétrica.

En todos los casos la comprobación se realiza mediante el mira.

1 - S - 6.1

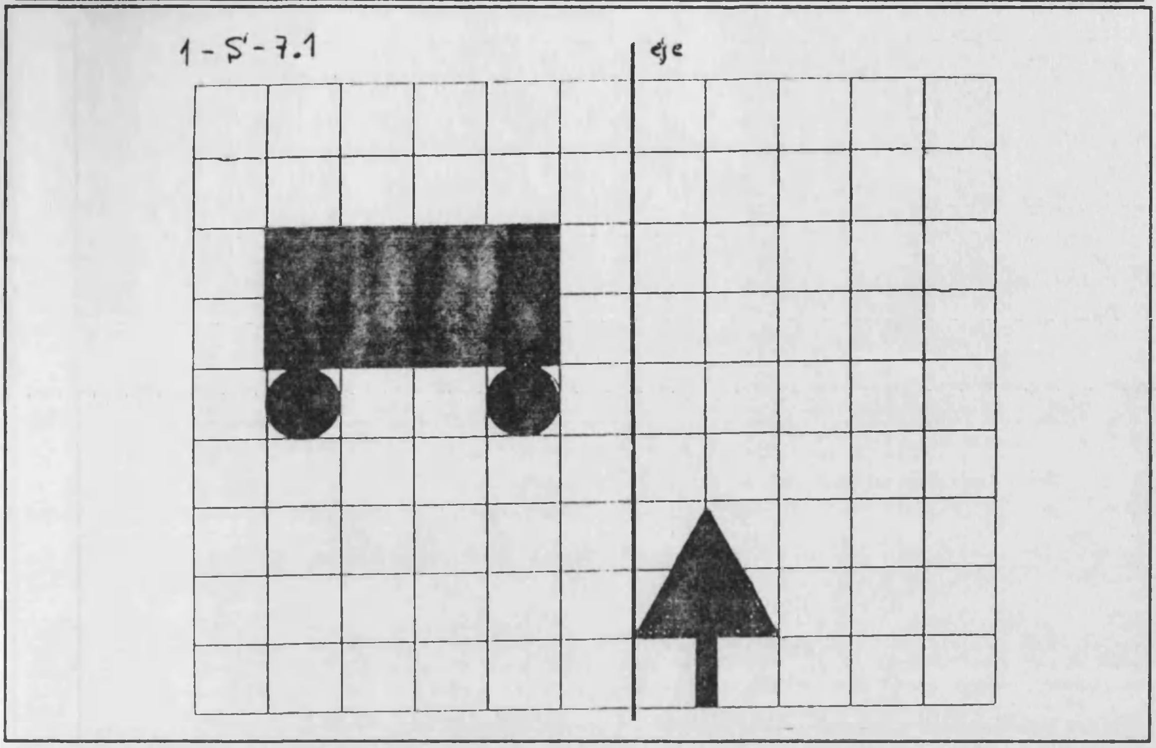


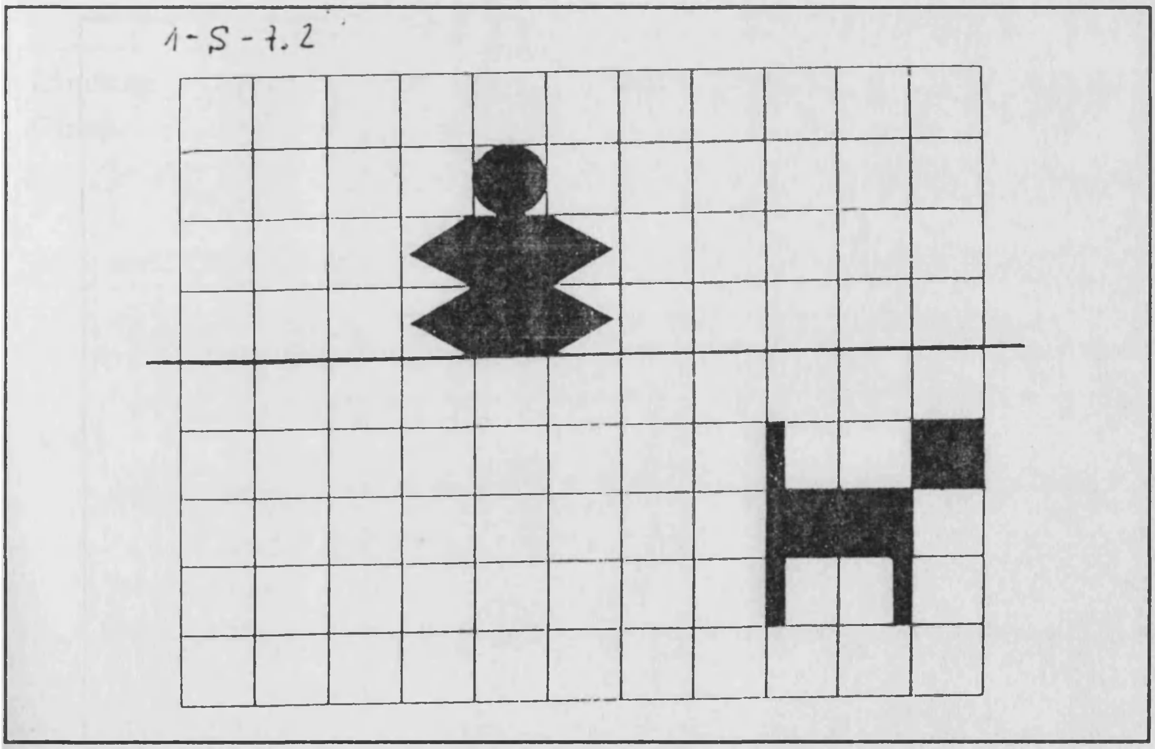


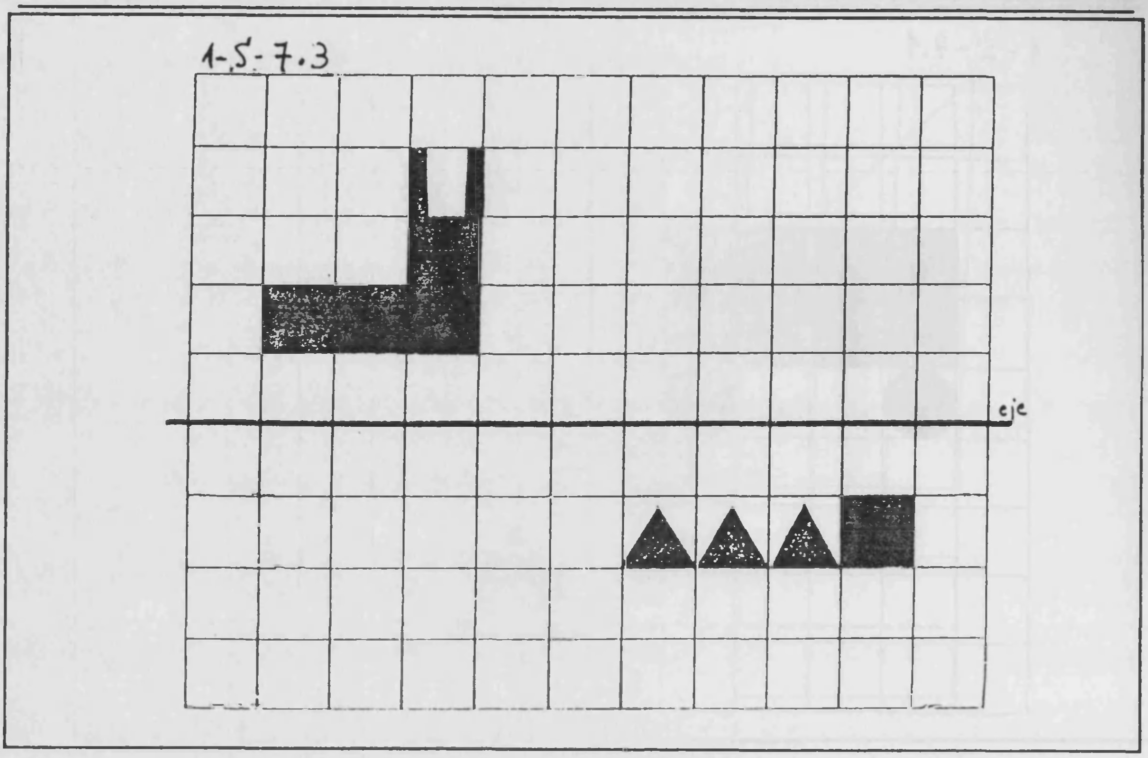
Láminas: 1-S-7.1, 1-S-7.2, 1-S-7.3, 1-S-7.4 y 1-S-7.5.

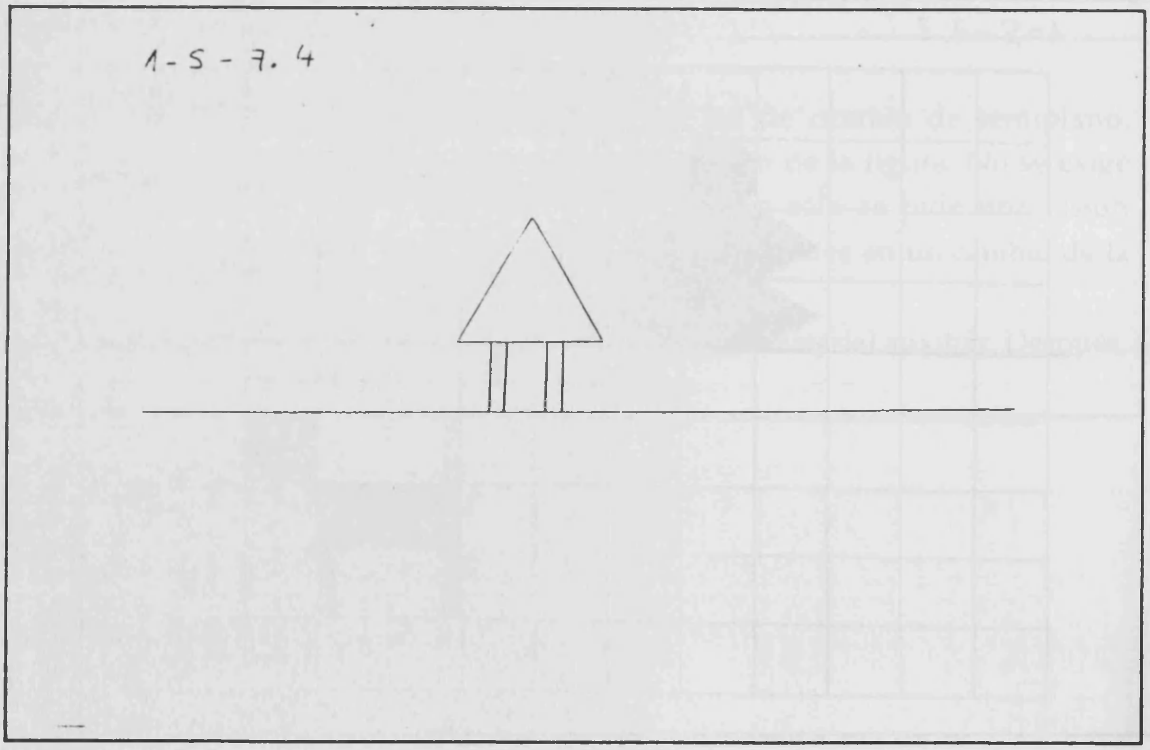
Objetivos: Desarrollar y aplicar las características de cambio de semiplano, equidistancia (de forma aproximada) e inversión de la figura. No se exige precisión para ninguna de estas características; sólo se pide una visión aproximada que, en el caso de la inversión, se traduce en un cambio de la figura, colocándose aproximadamente "al revés".

Actividad 7: Colocar la figura simétrica sin servirse de material auxiliar. Después, comprobar el resultado con el mira y corregir.

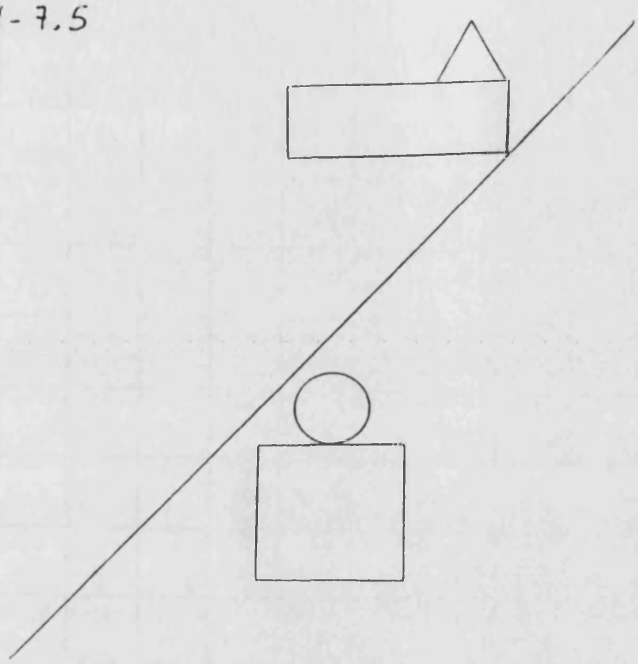

1 - S' - 7.1
eje


1 - S - 7.2


1-5-7.3
eje


1-5-7.4

1-S-7.5



Láminas: 1-S-8.1, 1-S-8.2, 1-S-8.3 y 1-S-8.4.

Objetivos: Diferenciar piezas con dibujos de distinta orientación (simétricas).

Seleccionar la figura de orientación contraria a la dada.

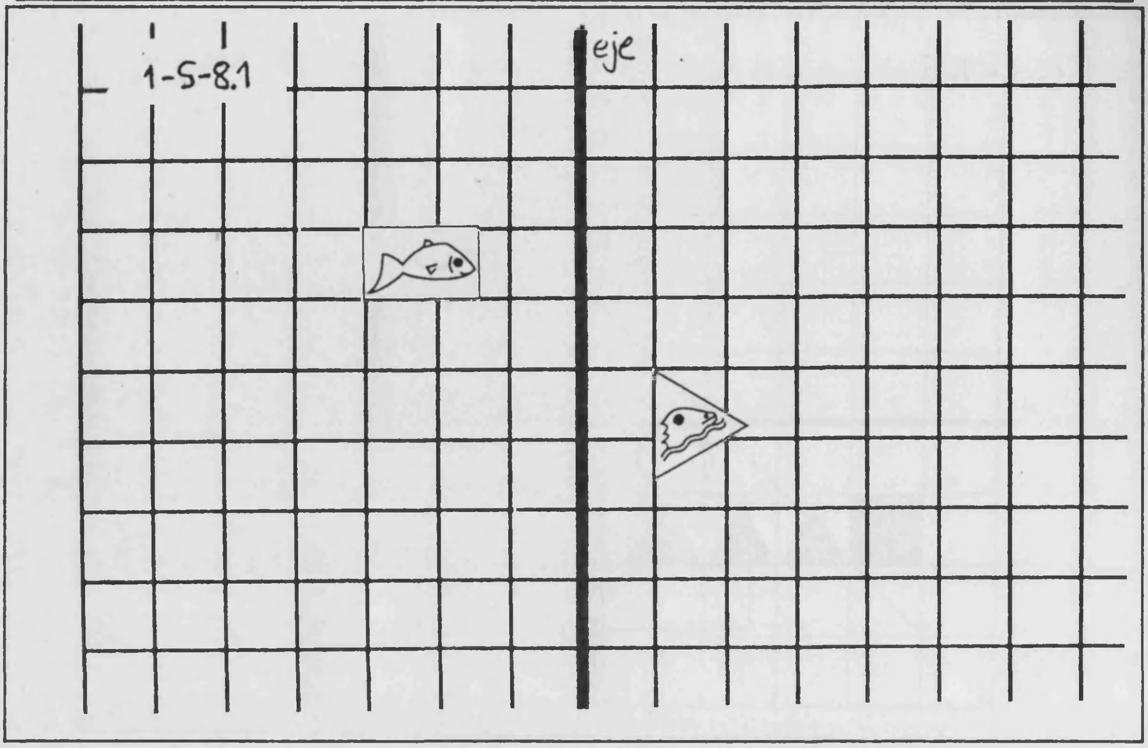
Desarrollar y aplicar las características de cambio de semiplano, equidistancia (de forma aproximada) e inversión de la figura. No se exige precisión para ninguna de estas características; sólo se pide una visión aproximada que, en el caso de la inversión, se traduce en un cambio de la figura, colocándose aproximadamente "al revés".

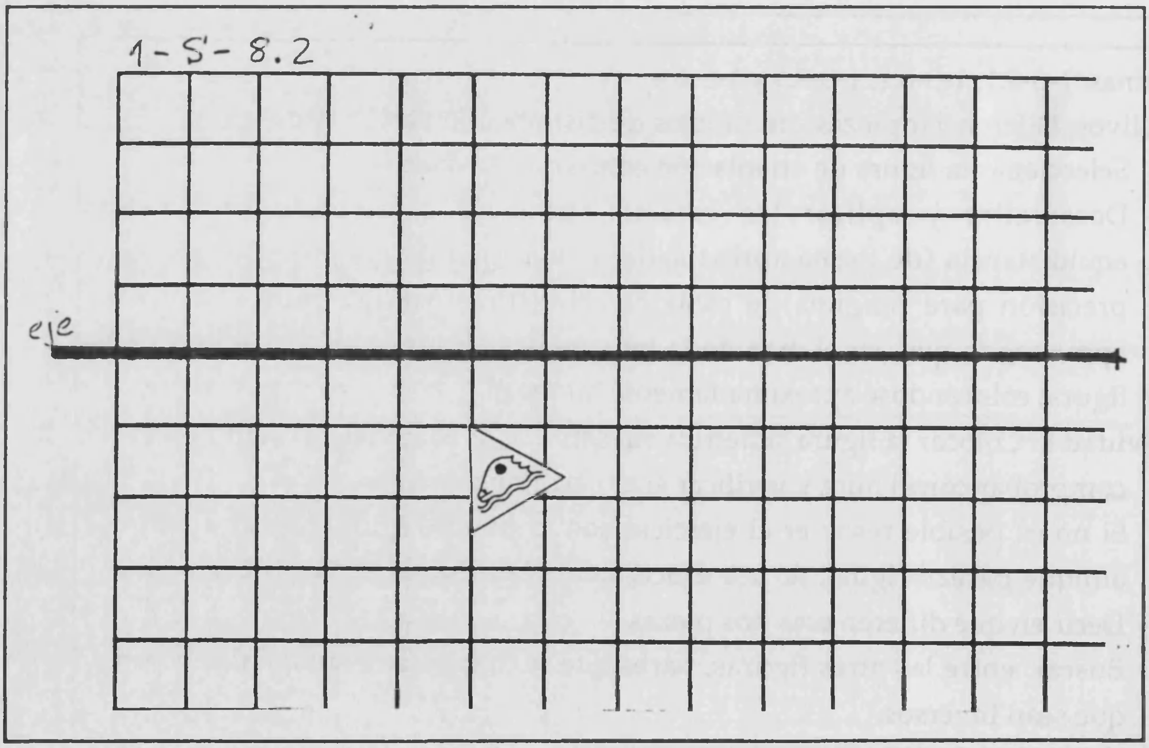
Actividad 8: Colocar la figura simétrica sin servirse de material auxiliar. Después, comprobar con el mira y verificar si es correcta la imagen.

Si no es posible resolver el ejercicio con la pieza elegida, buscar otra que, aunque parezca igual, no sea exactamente la misma que la utilizada antes. Decir en qué difieren esas dos piezas.

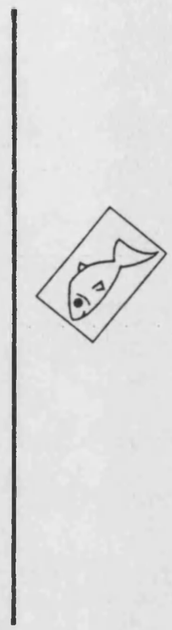
Buscar, entre las otras figuras, pares que sean exactamente iguales y pares que sean inversos.

Resolver el resto de ejercicios, teniendo en cuenta la pieza que hay que seleccionar.

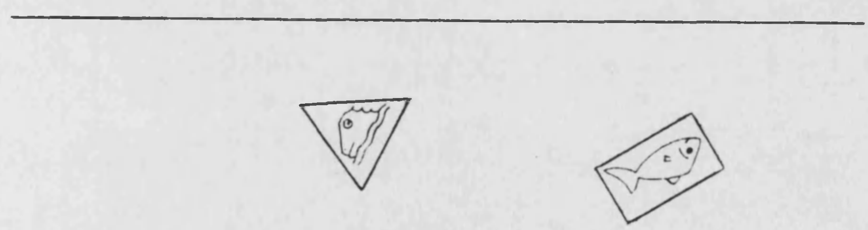

1-S-8.1
eje


1-S'-8.2
eje

1-S-8.3



1-S-8.4



Láminas: 1-S-9.1, hoja en blanco, 1-S-9.2 y 1-S-9.3.

Objetivos: Observar el conocimiento que tienen los alumnos de los métodos de plegado + calcado, plegado + recorte, y dibujo directo para obtener completa una figura de la que se ve la mitad.

Introducir los métodos anteriores en caso de que alguno de ellos sea desconocido.

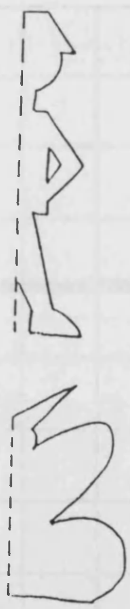
Objetivo del dibujo propio de cada alumno y de la figura 1-S-9.2: Reconocer las características que debe poseer una figura para poderla reproducir mediante simetría a partir de su mitad.

Actividad 9: Utilizar alguno de los métodos indicados (plegar + recortar, plegar + dibujar, dibujo directo) para obtener la figura completa.

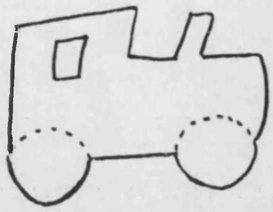
En una hoja en blanco, dibujar la mitad de algún objeto; luego, por simetría, obtener la otra mitad.

En la lámina 1-S-9.2, intentar obtener la figura completa, por plegado, a partir de su mitad. Comprobar con el mira (que no hay solución).

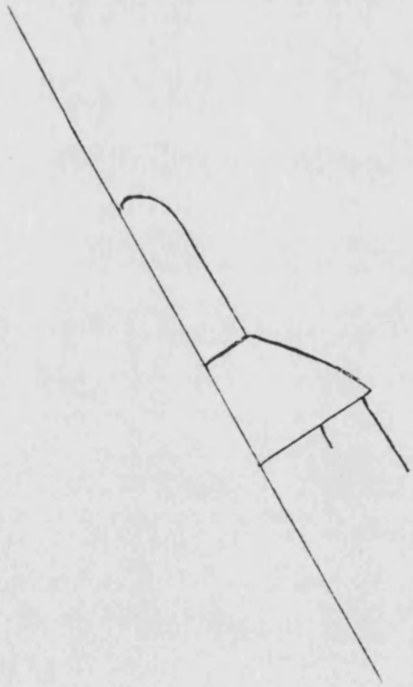
1-S-9.1



1-5-9.2



1-5-9.3



Resumen de las sesiones de 1º de E.G.B.

Sesión 1

Láminas: 1-S-1.1, 1-S-1.2 y 1-S-1.3.
Objetivos: Introducir y familiarizar a los alumnos con la idea de simetría de una figura y con el manejo del espejo.
Actividad 1: Conseguir, mediante la colocación del espejo sobre la figura, que ésta se vea completa. Una vez obtenida una solución, averiguar si hay otras.

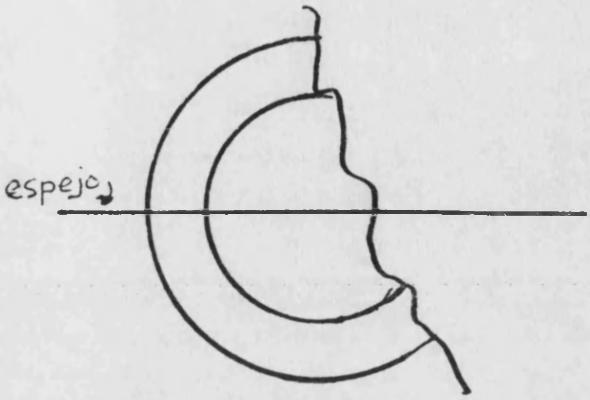
Como se puede observar en las láminas, entre los ejercicios que se proponen hay casos sin solución, con solución única, con varias (pocas) soluciones y con infinitas soluciones. Evidentemente, en 1º de E.G.B. no se pretende que los alumnos reconozcan la existencia de la infinidad de soluciones; cuando hay más de una posibilidad, simplemente se intenta en algunas ocasiones que encuentren varias.

Estos ejercicios se pueden resolver mediante una imagen mental de la figura completa, para lo cual no hace falta un análisis de los elementos de la simetría, o por tanteo. O sea, son actividades propias de nivel 1.

Al principio los niños se familiarizan con la manera de colocar el espejo. La profesora ayuda a todos los niños. En la solución de las diversas figuras, las que les resultan más fáciles son las más familiares con un eje de simetría: la cara y el libro.

Por lo general los niños tantean con el espejo hasta que consiguen la solución o ven que no es posible resolverlo. Cuando hay más de una solución, cada vez que la profesora pide una nueva se inicia otra búsqueda. No se hace un análisis de la figura.

Algunas veces los niños colocan el espejo en posiciones que claramente no producen solución. Por ejemplo, en el plato con solución algunos niños prueban colocando el espejo atravesando la parte rota, como muestro en el dibujo.



En el primer dibujo, la contestación de un niño a una pregunta de la profesora hace referencia a mitades de la figura:

Prof.: *¿Y si le dais la vuelta al espejo qué se ve?*
Niño: *Otra* ***mitad***.

Láminas: 1-S-2. Objetivos: Familiarizar a los alumnos con la idea de simetría, por medio del espejo. Incrementar el conocimiento de los efectos producidos por un espejo en una figura. **Actividad 2**: Conseguir con el espejo dos barcos y dos hombres. En el caso del hombre, además se piden configuraciones especiales, no usuales. Por ejemplo: Un sólo hombre con dos plumas / sin pluma, etc.

Los niños proceden unas veces por tanteo y otras directamente, pero siempre resuelven los ejercicios. Uno de los intentos de Marina para conseguir dos hombres que se den la mano es el que indico en el dibujo. Veamos una explicación de Sonila sobre cómo conseguir un hombre con pluma y después sin pluma:

Prof. [a Sonila]: *Explícale a Marina cómo lo haces con plumas y sin pluma.*
Sonila [coloca el espejo cada vez en la posición correspondiente]: *Con pluma, ..., sin pluma.*
Prof.: *¿Por qué has cambiado el espejo de posición? ¿Por qué una vez sale con pluma y otra sin pluma?*
Sonila no contesta.

Prof.: ¿Qué parte del hombre tenías que coger?

Sonila coloca bien el espejo, señala la parte del hombre que se ha de reflejar y dice:

Porque si no no sale.

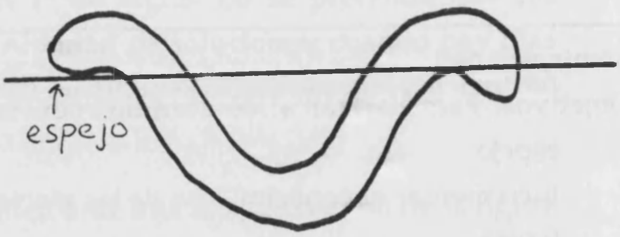
Láminas: 1-S-3.1, 1-S-3.2 y 1-S-3.3.

Objetivos: Familiarizar a los alumnos con las simetrías y el uso del espejo.

Reconocer la parte de una figura que mediante simetrías produce ciertas transformaciones en la figura original (más gruesa, delgada, larga, corta, ...)

Actividad 3: Conseguir algunas transformaciones de la figura. Por ejemplo: Palo más o menos largo / grueso.

Algunos casos los resuelven los niños directamente (palo más delgado), pero otros por tanteo. Marina da alguna solución errónea. Por ejemplo, para hacer más grueso el gusano da como buena la colocación del espejo que indico en el dibujo.



En los primeros intentos dirigidos a conseguir un palo más largo, los niños no han tenido en cuenta la estructura de la figura: Todos colocan el espejo a lo largo del palo (ver dibujo) y desplazan el espejo a lo largo de esa línea vertical, lo cual, evidentemente, no produce transformación en altura, sino en grosor. Descubren la posición adecuada del espejo por tanteo. En el lápiz, quizá por la experiencia previa del palo, sí sitúan el espejo con la inclinación adecuada para conseguir una modificación en longitud. También resuelven rápidamente algunas otras modificaciones. La justificación de Javier sobre por qué salen dos puntas en el lápiz hace referencia al reflejo:

Prof.: *¿Y de dónde te sale la otra punta si no tenía?*

Javier: *Porque se refleja.*

Prof.: *¿En el espejo se refleja? ¿Qué se refleja?*

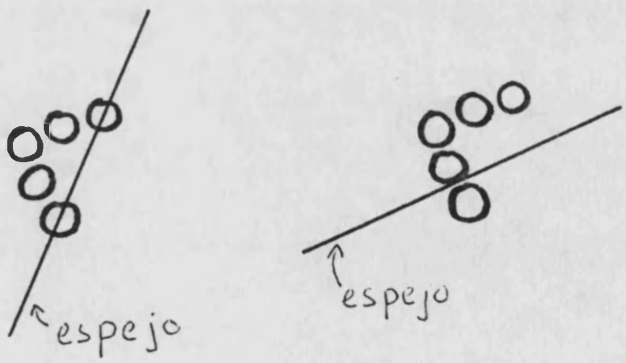
Javier: *Esa parte.*

Láminas: 1-S-4.
Objetivos: Familiarizar a los alumnos con las simetrías y el uso del espejo.
Incrementar el conocimiento de los efectos producidos por un espejo en una figura.
Actividad 4: Conseguir que sólo se vea un punto, dos, tres, ... Obtener varias posibilidades en algunos de los casos.

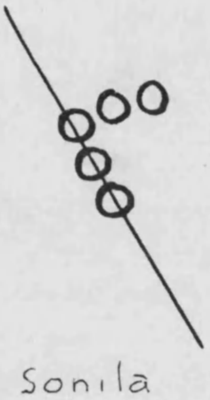
Todos los niños resuelven los ejercicios, algunos muy deprisa, lo cual indica que tienen asimilado el efecto del espejo: Algunas veces encuentran la solución probando. También consiguen más de una solución si se les pide. Cuando se les pregunta por la cantidad máxima de puntos que podrán obtener, dan como solución las que van encontrando. Ven que 11 no pueden salir porque, como dice Darío, *Si hubiera otro redondelito sí se podría sacar* [pero con los que hay, no].

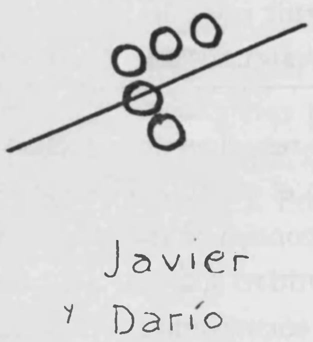
Las respuestas de los alumnos indican el grado de comprensión de éstos sobre la duplicación que origina el espejo. Veamos algunos ejemplos:

Prof.: *¿Dónde habéis tenido que poner el espejo para ver un punto?*
Niños: *En medio.*
Prof.: *Javier, ¿y eso por qué?*
Javier: *Porque el espejo para esta parte está para nosotros y así se refleja la mitad de esa parte y se ve en el espejo.*
Prof.: *Se ve medio, y medio que se refleja, tienes ya uno.*
Prof.: *A ver si conseguís ahora dos puntos.*
En el dibujo se ven las soluciones de Darío y de Javier.
Javier: *He puesto en este trocito el espejo y luego se reflejaba en el espejo.*
Prof.: *Has cogido uno entero y en le espejo se refleja ese entero y así tienes dos.*
Prof.: *Ahora tres puntos.*



Las tres configuraciones que muestro a continuación corresponden a las de Sonila, Javier y Darío.

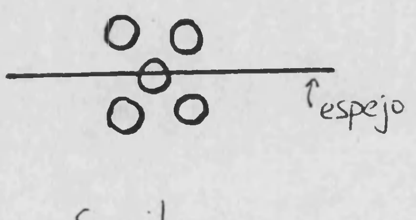


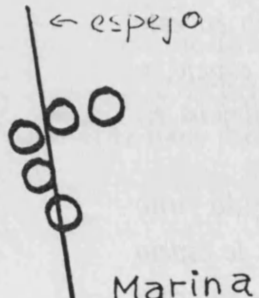


Javier: *He puesto aquí el espejo y luego se refleja este medio .*
Sonila: *He cortado tres en medio y se refleja.*
Marina: *He partido éste por la mitad y éste* [el entero] *se refleja.*

Cuando se piden 5 puntos, Sonila coloca el espejo de manera que deja todos los de la configuración que se utiliza en ese momento a un lado, con lo que en total se ven 10.
Prof.: *Sonila, pero ahí no se ven 5, se ven más.*
Sonila: *10.*

Entonces da la solución correcta. En los dibujos muestro las soluciones de Sonila y de Marina.





Láminas: 1-S-5.1 y 1-S-5.2.
Objetivos: Introducción de la simetría axial.
Introducción del cambio de semiplano y de la equidistancia al eje (esta última sin necesidad de precisión).
Introducción del "mira" como herramienta para obtener la figura simétrica de una dada y para detectar y corregir errores en su colocación.
Actividad 5: Colocar la imagen de la pieza de la lámina, pero:
En unos casos hay que emplear el espejo o el "mira" para situar las piezas.
Otras veces hay que observar con el mira o el espejo y retirarlo antes de colocar la imagen.
En otras ocasiones, el primer intento se realiza sin material auxiliar.
En todos los casos la comprobación se realiza mediante el mira.

Las piezas empleadas en esta actividad son polígonos regulares para evitar la complejidad provocada por piezas asimétricas. Se han utilizado sólo ejes inclinados en esta experiencia para observar si ello elimina errores posteriores, consistentes en simetrizar horizontal o verticalmente aunque los ejes estén inclinados. Parece que no los evita. La comprobación de si se cometen esos errores se lleva a cabo en el grupo de láminas de la actividad 7.

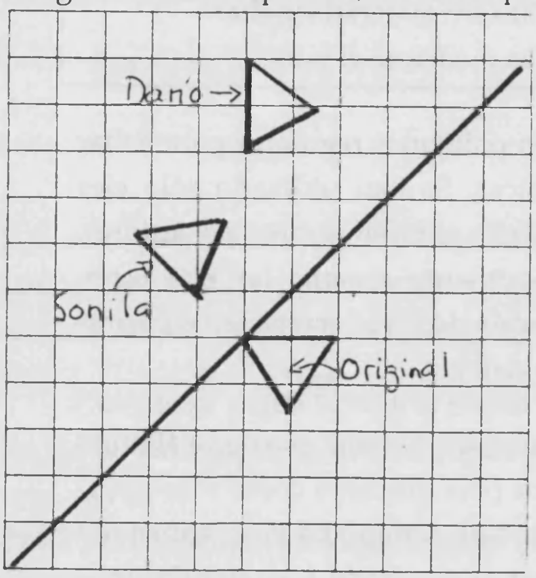
Además de las indicaciones generales, la profesora le tiene que darle algunas explicaciones muy precisas a alguno de los niños para que sepa cómo manejar el mira como herramienta de corrección. El cambio de semiplano sí lo entienden enseguida los alumnos. Sólo Javier, tras colocar el cuadrado y el círculo de la lámina 1-S-5.2, no sabe dónde colocar el triángulo hasta que la profesora le pregunta directamente sobre el semiplano y entonces ya lo resuelve. Eso se debe seguramente a que las otras piezas de la lámina se encontraban en el semiplano distinto al del triángulo.

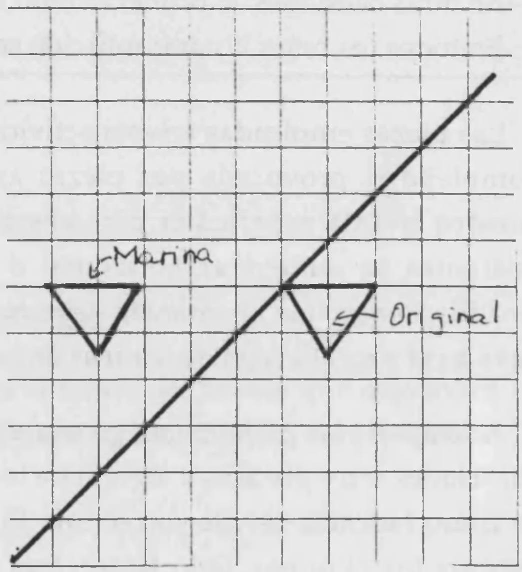
Sesión 2

Láminas: 1-S-6.1 y 1-S-6.2.
Objetivos: Utilización del cambio de semiplano y de la equidistancia al eje de simetría de la imagen (esta última sin necesidad de precisión).

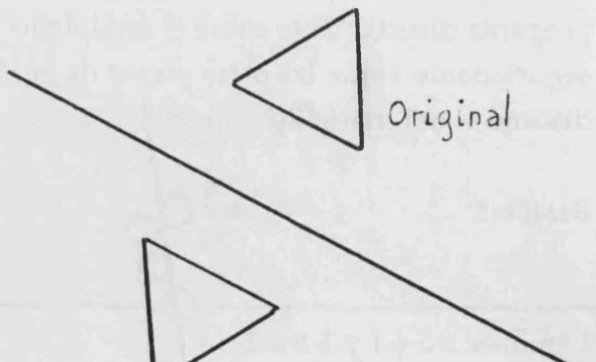
Actividad 6: Colocar la pieza imagen sin utilizar material auxiliar. Corregir a continuación sirviéndose del mira.
Desplazar la pieza siguiendo la línea marcada y observar el recorrido de la imagen, simétrica, a través del mira.
Trabajo por parejas y sin mira: Un niño mueve la pieza original por la línea marcada y el otro niño desplaza la simétrica.
En todos los casos la comprobación se realiza mediante el mira.

Los niños sí tienen en cuenta la equidistancia al eje, de manera aproximada, excepto en el triángulo de la lámina 1-S-6.2, ya que el original toca el eje y la imagen la sitúan separada, como se aprecia en los dibujos de tres niños.





Por el contrario, los niños no tienen en cuenta la perpendicularidad. Muestro a continuación la justificación de un alumno, Darío, sobre la colocación correcta de un triángulo (ver dibujo), por ser característica del primer nivel de razonamiento de Van Hiele: La profesora modifica la posición de la pieza imagen, que Darío había situado bien, colocándola mal, y le pregunta a Darío por qué no es válida como ella la ha puesto. Darío



contesta: *Porque me gustan así los triángulos.*

Láminas: 1-S-7.1, 1-S-7.2, 1-S-7.3, 1-S-7.4 y 1-S-7.5.
Objetivos: Desarrollar y aplicar las características de cambio de semiplano, equidistancia (de forma aproximada) e inversión de la figura. No se exige precisión para ninguna de estas características; sólo se pide una visión aproximada que, en el caso de la inversión, se traduce en un cambio de la figura, colocándose aproximadamente "al revés".
Actividad 7: Colocar la figura simétrica sin servirse de material auxiliar. Después, comprobar el resultado con el mira y corregir.

Las figuras que aparecen en estas láminas están formadas por piezas - cuadrados, círculos triángulos y rectángulos muy estrechos (patas del perro y semejantes)- por lo que los niños deben construir la imagen a partir de las partes correspondientes.

Las tres primeras láminas tienen ejes en posiciones estándar. En la primera de ellas el eje es vertical y las figuras que se presentan poseen simetría de eje vertical, por lo que sus imágenes son iguales a ellas y una traslación horizontal también permitiría obtenerlas. Por ello, en ese ejercicio no se puede apreciar la inversión, pero sí la equidistancia y el cambio de semiplano.

En casi todas las figuras de las otras láminas sí se pueden observar las tres características anteriores y en la última lámina, por ser el eje inclinado, la perpendicularidad respecto al eje, aunque ello no es un objetivo a conseguir.

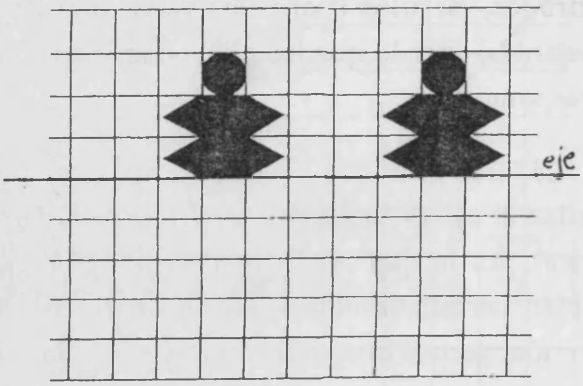
La primera lámina no presenta dificultades, seguramente debido a las posiciones estándar de las figuras y a la igualdad de éstas con sus imágenes, tal como indiqué anteriormente Las justificaciones de los alumnos reflejan una consideración de la equidistancia, como se aprecia en estas transcripciones:

Javier: *He mirado lo que separaba desde aquí hasta aquí* [desde el coche hasta el eje] *y lo he puesto aquí* [al otro lado del eje].
Sonila [ha puesto juntas las dos flechas] *porque está junto a la raya.*

Sin embargo, esos mismos alumnos no tienen en cuenta la equidistancia en otros casos que les resultan más complicados y, ni siquiera al preguntarles, se dan cuenta inmediatamente de ese error. Eso indica que estos niños no efectúan las simetrías basándose explícitamente en esa característica, sino más bien en una apreciación visual global.

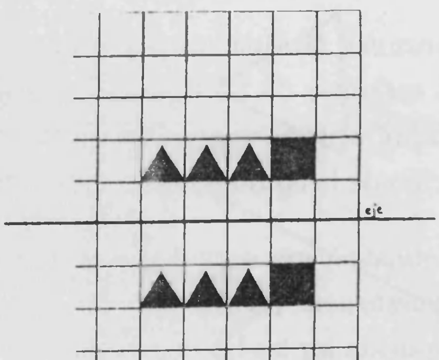
En las láminas 1-S-7.2 y siguientes, se observa con toda claridad que la inversión de las figuras no es una característica de adquisición inmediata. De hecho, todos los alumnos tienen problemas en una o varias figuras, y, si no tienen más es porque se ayudan con el mira. Hay un niño, incluso usando el mira, no invierte la figura. Existe una tendencia muy fuerte a situar dar como solución una traslación de la figura original, quizá debido en parte al hecho de que en dos láminas el eje de simetría es horizontal y las figuras a simetrizar se encuentran en posición estándar. En el dibujo mostramos un ejemplo La equidistancia también la dejan de lado los niños en varias ocasiones.

El cambio de semiplano en general sí se respeta. Sólo hay un alumno, Javier, que no lo tiene en cuenta, pues da la solución que muestro en el dibujo. Quizá ha realizado una simetría horizontal porque en la lámina anterior (la 1-S-7.1) el eje era vertical.

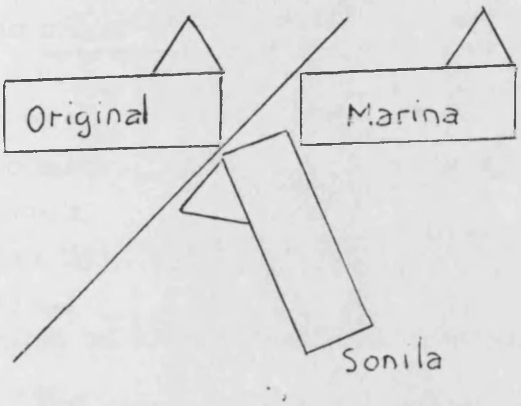


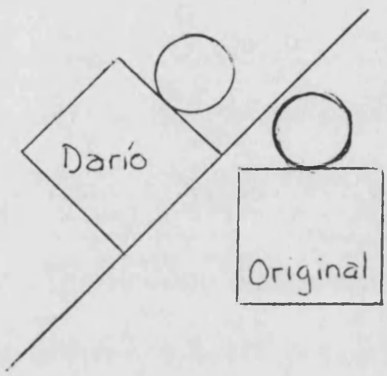
La perpendicularidad sí la respetan cuando la situación que se presenta no es complicada (eje vertical u horizontal y figura con una inclinación no conflictiva).

Es interesante destacar que las dos últimas figuras propuestas con ejes horizontales (gusano de la lámina 1-S-7.3 y lámina 1-S-7.4) todos los niños las resuelven bien sin usar el espejo, excepto Marina, que no invierte la imagen, haciendo una traslación (ver dibujo)



De la lámina con ejes inclinados (1-S-7.5) sólo da tiempo resolver una figura. En los dibujos muestro las soluciones de los niños, en las que se combinan todos los errores sobre las características de las simetrías comentadas con anterioridad, excepto el cambio de semiplano, que es correcto. De todas maneras, respecto a la equidistancia, sólo un alumno coloca la imagen claramente mal y se aprecia un intento por parte de una de las niñas (Sonila) de inversión, que resuelve de manera incorrecta. Quizá con más ejercicios de este tipo habrían mejorado sus destrezas.





De los comentarios anteriores se desprende que estos niños no pueden prestar atención simultáneamente a todas las características involucradas en la realización de una simetría. Veamos, por ejemplo, el caso de Sonila. Esta niña resuelve bien la lámina 1-S-7.1, teniendo en cuenta, en particular, la equidistancia al eje. La profesora le pregunta sobre esa característica:

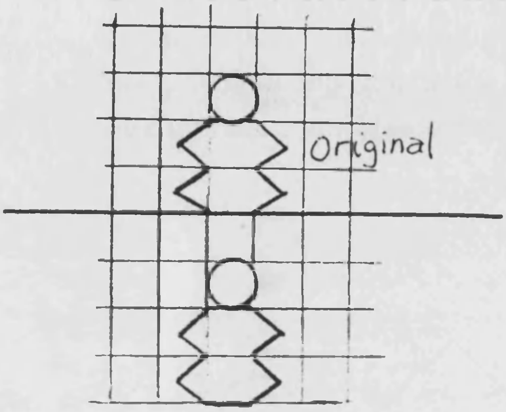
Prof.: *¿Por qué has puesto las dos puntas juntas?*
Sonila: *Porque está junto a la raya.*
Prof.: *Y cuando está junto a la raya, sale junto a la raya, y si está separado sale separado.*

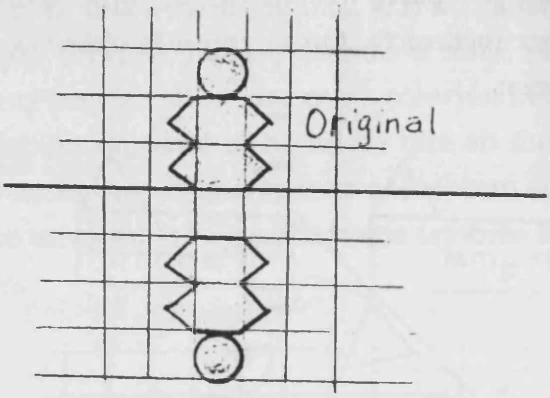
Sin embargo, la primera solución que da Sonila a la figura de la lámina 1-S-7.2 es la que muestro en el primer dibujo de la página siguiente, tras lo cual se produce el diálogo siguiente:

Prof.: *Antes has dicho que lo que tocaba el espejo* [en la figura original], *tocaba el espejo* [en la imagen], *¿o no?*

Sonila asiente.

Prof.: *¿Ahí toca el espejo? Esto toca el espejo, ¿no? ¿Entonces cómo hay que ponerlo?*





Sonila no lo sabe. La profesora hace que Sonila mire a través del espejo, tras lo cual Sonila quita el espejo y vuelve a intentarlo. En esta ocasión si hace una figura simétrica, pero separada del eje (ver dibujo superior derecho).

Después, Sonila coloca el mira y gira la hoja 180°, luego quita el mira y construye la imagen , en esta ocasión correctamente.

Sesión 3

Láminas: 1-S-8.1, 1-S-8.2, 1-S-8.3 y 1-S-8.4.

Objetivos: Diferenciar piezas con dibujos de distinta orientación (simétricas).

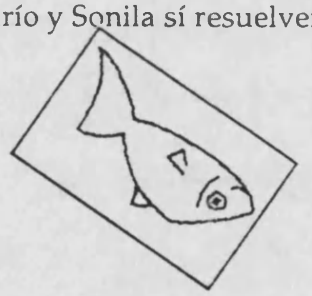
Seleccionar la figura de orientación contraria a la dada.

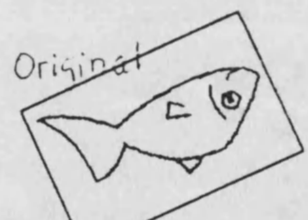
Desarrollar y aplicar las características de cambio de semiplano, equidistancia (de forma aproximada) e inversión de la figura. No se exige precisión para ninguna de estas características; sólo se pide una visión aproximada que, en el caso de la inversión, se traduce en un cambio de la figura, colocándose aproximadamente "al revés".

Actividad 8: Colocar la figura simétrica sin servirse de material auxiliar. Después, comprobar con el mira y verificar si es correcta la imagen.

Si no es posible resolver el ejercicio con la pieza elegida, buscar otra que, aunque parezca igual, no sea exactamente la misma que la utilizada antes. Decir en qué difieren esas dos piezas.
Buscar, entre las otras figuras, pares que sean exactamente iguales y pares que sean inversos.
Resolver el resto de ejercicios, teniendo en cuenta la pieza que hay que seleccionar.

Debido a que la atención se centra ahora en el empleo de la figura inversa, se han utilizado sólo ejes en posición estándar, puesto que cuando los ejes están inclinados se suman dificultades complementarias. Los niños tienen dificultades en seleccionar la figura correcta y colocarla con la inclinación adecuada. La profesora hace que se fijen en los dos rectángulos y que indiquen en qué se diferencian. La caracterización de inversión en las piezas que da Sonila es la usual: *Que unos miran para acá y otros para allá.* Las justificaciones que dan todos los niños cuando la pieza que colocan es la correcta también es aproximadamente esa misma. Esta idea, sin embargo, es compatible con la realización de un giro de 180° en vez de una simetría, que Javier emplea varias veces. Darío y Sonila sí resuelven bien algunos de los ejercicios.





Marina es la que presenta mayores problemas. Al terminar la sesión no se sabe si realmente se ha dado cuenta de la necesidad de emplear dos piezas distintas, ni de si sabe distinguirlas. De todas maneras, en el último caso la solución que da no es demasiado incorrecta, como se puede apreciar en el dibujo: La inclinación está aproximadamente bien y la distancia difiere poco de la correcta; además, aunque la pieza imagen no es la inversa, está situada de manera que las cabezas de los peces se enfrentan, con lo que la idea de inversión es aproximada.

A pesar de que la cantidad de casos presentados en este grupo de actividades es pequeña, tras la orientación de la profesora en la primera figura, los alumnos sí tienen en cuenta la inversión, aunque desde una visión global, que se asocia a que *cada figura mira hacia un lado,* con lo cual no siempre se selecciona la pieza correcta, ya que esta interpretación no discrimina adecuadamente los giros de 180°. Al principio los niños no se fijaban expresamente en esa característica.

Los alumnos no relacionan el resultado del plegado con lo que están haciendo ahora, a pesar de que, como se pone de manifiesto en la actividad siguiente, parece que sí estén familiarizados con ese método. Un momento en el que se puede ver esa ausencia de relación es cuando la profesora pregunta: *¿Y si doblas el papel por la raya coincidirá?,* a lo cual contesta Darío: *No lo sé.*

Láminas: 1-S-9.1, hoja en blanco, 1-S-9.2 y 1-S-9.3.

Objetivos: Observar el conocimiento que tienen los alumnos de los métodos de plegado + calcado, plegado + recorte, y dibujo directo para obtener completa una figura de la que se ve la mitad.

Introducir los métodos anteriores en caso de que alguno de ellos sea desconocido.

Objetivo del dibujo propio de cada alumno y de la figura 1-S-9.2: Reconocer las características que debe poseer una figura para poderla reproducir mediante simetría a partir de su mitad.

Actividad 9: Utilizar alguno de los métodos indicados (plegar + recortar, plegar + dibujar, dibujo directo) para obtener la figura completa.

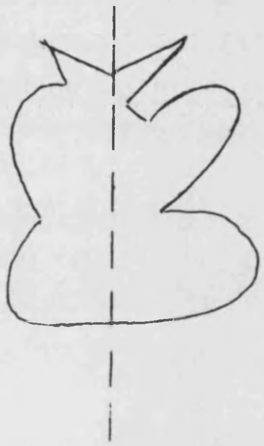
En una hoja en blanco, dibujar la mitad de algún objeto; luego, por simetría, obtener la otra mitad.

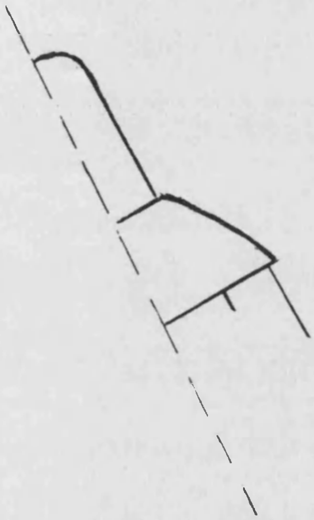
En la lámina 1-S-9.2, intentar obtener la figura completa, por plegado, a partir de su mitad. Comprobar con el mira (que no hay solución).

El dibujo de la lámina 1-S-9.2, que es la figura de un tren completo, no simétrico, se incluye porque es conveniente saber si los alumnos se dan cuenta de que las figuras deben poseer ciertas características para poderlas reproducir por simetría a partir de una sección de ellas.

Antes de que la profesora dé las instrucciones para resolver los ejercicios de la lámina 1-S-9.1, los alumnos saben que se trata de completar la figura: Marina dice: *Lo tenemos que completar,* a lo que Darío responde: *Pones el espejo y ya está..* La profesora da entonces las instrucciones que son: *Completar, pero sin espejo y en otra hoja.*

Los niños sí saben cómo obtener la figura imagen mediante dibujo directo, aunque tienen una visión global, con deformaciones en grosor (ver en los dibujos que mostramos, por ejemplo, el dibujo de la mariposa de Darío) o, en el caso de Marina, en la forma, pues redondea en la imagen el asiento, que en la figura original tenía trazos rectos, como se aprecia en el dibujo.





Respecto a los procedimientos consistentes en doblar + recortar y doblar + dibujar, varía el grado de familiaridad de los niños con ellos, aunque sí son capaces de utilizarlos. El hecho de que la figura haya que obtenerla en una lámina distinta a la que se proporciona hace que Marina no vea el proceso a seguir: En el primer caso (un hombre) quizá vio a Sonila y procedió del mismo modo sin problemas, pero el dibujo de la mariposa no sabe cómo resolverlo. La profesora le tiene que indicar que calque lo que hay en la lámina en la hoja en blanco. Entonces Marina ya puede continuar. Sonila utiliza correctamente plegado + recorte en las figuras. Javier emplea plegado + dibujo.

Darío dibuja directamente, sin plegar, pero la profesora le pide que doble y calque. Varias veces se pone de manifiesto que Darío sí sabe emplear plegado, pero que no piensa en primera instancia en emplearlo para que las dos partes de la figura salgan iguales.

Tanto el diseño de medio dibujo por parte de los alumnos, inventado por ellos, como el reconocimiento de que el tren no se puede obtener completo a partir de una parte suya lo hacen bien los niños. No obstante, convienen comentar que el diseño de Darío fue un hombre completo, por lo que al simetrizar le salieron dos hombres; al preguntarle dijo que sí había pensado obtener dos hombres, en cuyo caso sí estaría bien su propuesta.

Las sesiones realizadas hasta este momento pusieron de manifiesto que el avance de los alumnos se producía muy lentamente y que se requeriría mucho progreso por su parte para conseguir una comprensión de las simetrías acorde con el segundo nivel de razonamiento de Van Hiele. Su forma de trabajo se centraba en una visión global y las características de las simetrías que en un momento dado parecía que habían asimilado, con posterioridad no las tenían en cuenta.

Debido a que, a través de estas sesiones, pudimos identificar la forma de razonar de estos alumnos, que el progreso de éstos era muy lento y que estaba próximo el fin del curso escolar, la experimentación con 1º de E.G.B. se limitó al trabajo que hemos expuesto.

RESUMEN DE LA EXPERIMENTACIÓN EN 3º DE E.G.B.

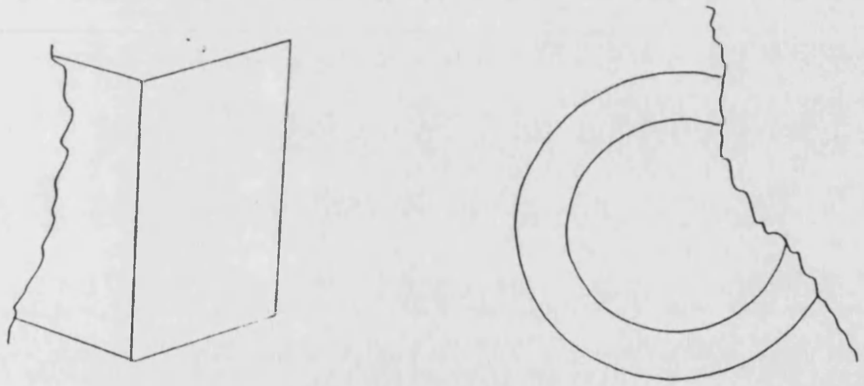
Listado de las actividades experimentadas.

Láminas: 3-S-1.1, 3-S-1.2 y 3-S-1.3.

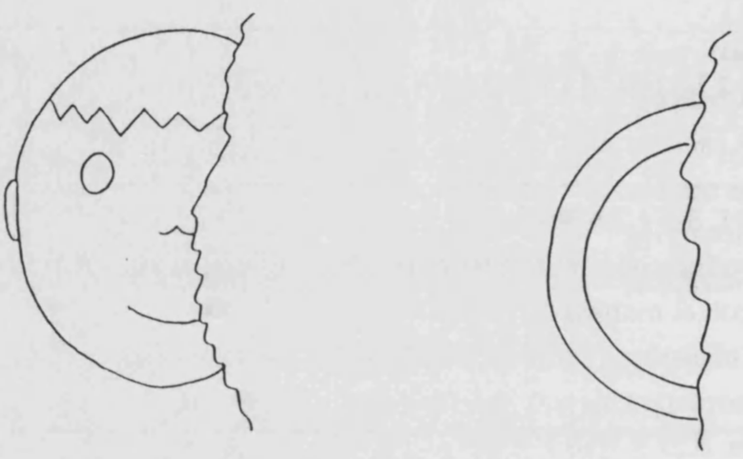
Objetivos: Introducir y familiarizar a los alumnos con la idea de simetría de una figura y con el manejo del espejo.

Actividad 1: Conseguir, mediante la colocación del espejo sobre la figura, que ésta se vea completa. Una vez obtenida una solución, averiguar si hay otras.

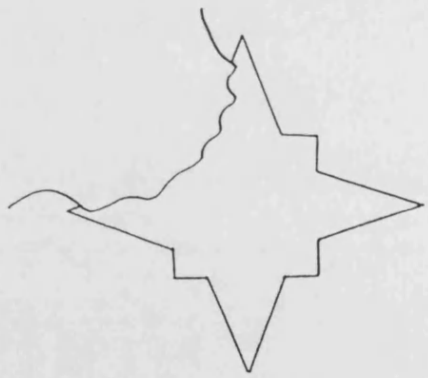
3-S-1.1



3-S-1.2



3-S-1.3



Láminas: 3-S-2.

Objetivos: Familiarizar a los alumnos con la idea de simetría, por medio del espejo.

Incrementar el conocimiento de los efectos producidos por un espejo en una figura y, en particular, la relación de equidistancia al espejo de la figura original y su imagen.

Actividad 2: Conseguir con el espejo dos barcos y dos hombres.

Hacer que los dos barcos / hombres se aproximen / alejen.

En el caso del hombre, además se piden configuraciones especiales, no usuales. Por ejemplo: Un sólo hombre con dos plumas / sin pluma, etc.

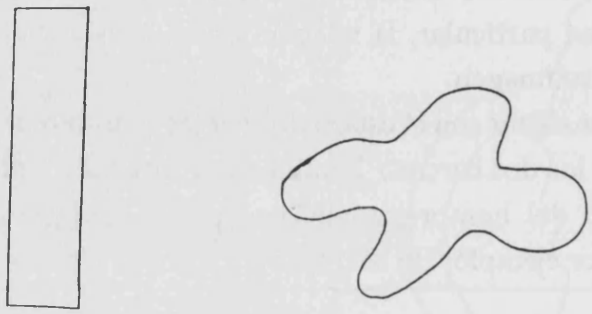
Láminas: 3-S-3.1, 3-S-3.2 y 3-S-3.3.

Objetivos: Familiarizar a los alumnos con las simetrías y el uso del espejo.

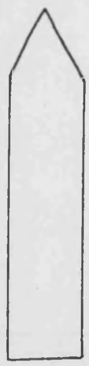
Reconocer la parte de una figura que mediante simetrías produce ciertas transformaciones en la figura original (más gruesa, delgada, larga, corta, ...).

Actividad 3: Conseguir algunas transformaciones de la figura. Por ejemplo: Palo más o menos largo / grueso.

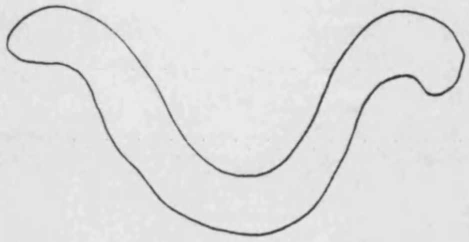
3-S-3.1



3-S-3.2



3-S-3.3



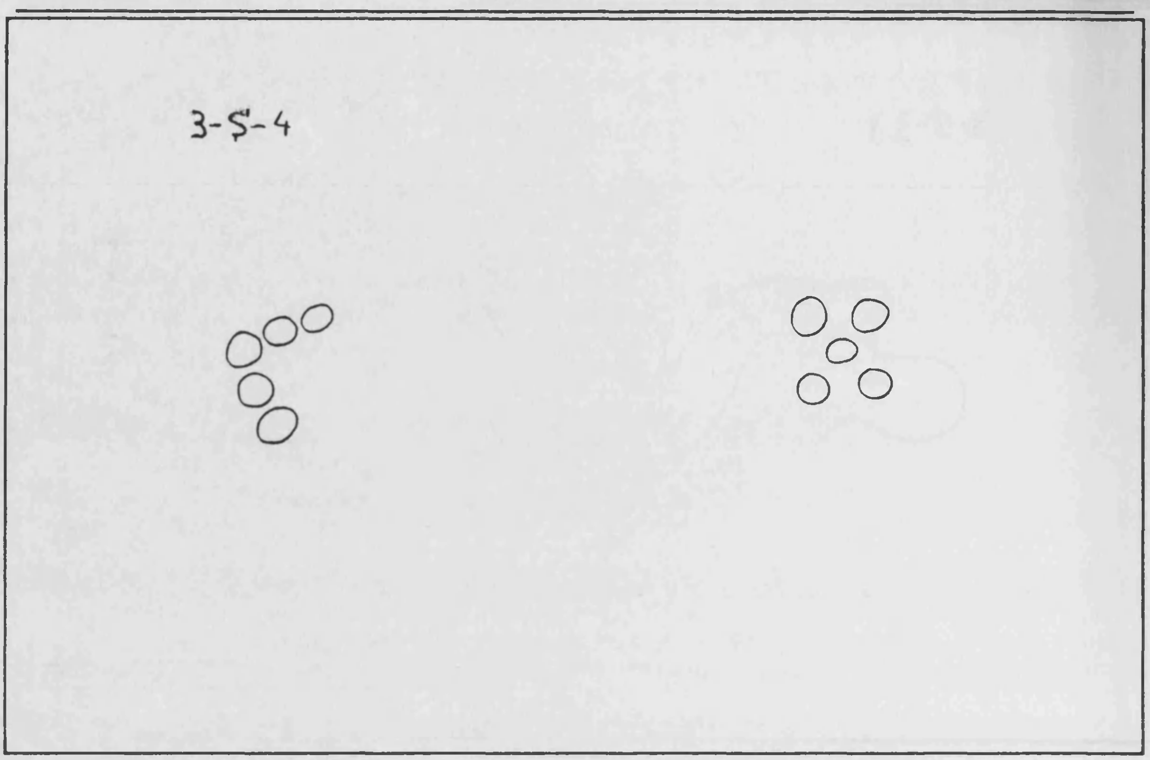
Láminas: 3-S-4.

Objetivos: Familiarizar a los alumnos con las simetrías y el uso del espejo.

Incrementar el conocimiento de los efectos producidos por un espejo en una figura.

Actividad 4: Conseguir que sólo se vea un punto, dos, tres, ... Obtener varias posibilidades en algunos de los casos.

Averiguar cuál es la cantidad máxima de puntos que se pueden obtener.



Láminas: 3-S-5.1 y 3-S-5.2.

Objetivos: Introducción de la simetría axial.

Introducción del cambio de semiplano y de la equidistancia al eje sin gran precisión.

Conseguir una visión aproximada del lugar donde se situará la figura imagen.

Proponer sólo situaciones con el eje de simetría no vertical ni horizontal, con el fin de observar si es posible evitar errores usuales en el aprendizaje de las simetrías, correspondientes a la colocación de las figuras original e imagen alineadas horizontal o verticalmente con ejes inclinados.

Introducción del "mira" como herramienta para obtener la figura simétrica de una dada y para detectar y corregir errores en su colocación.

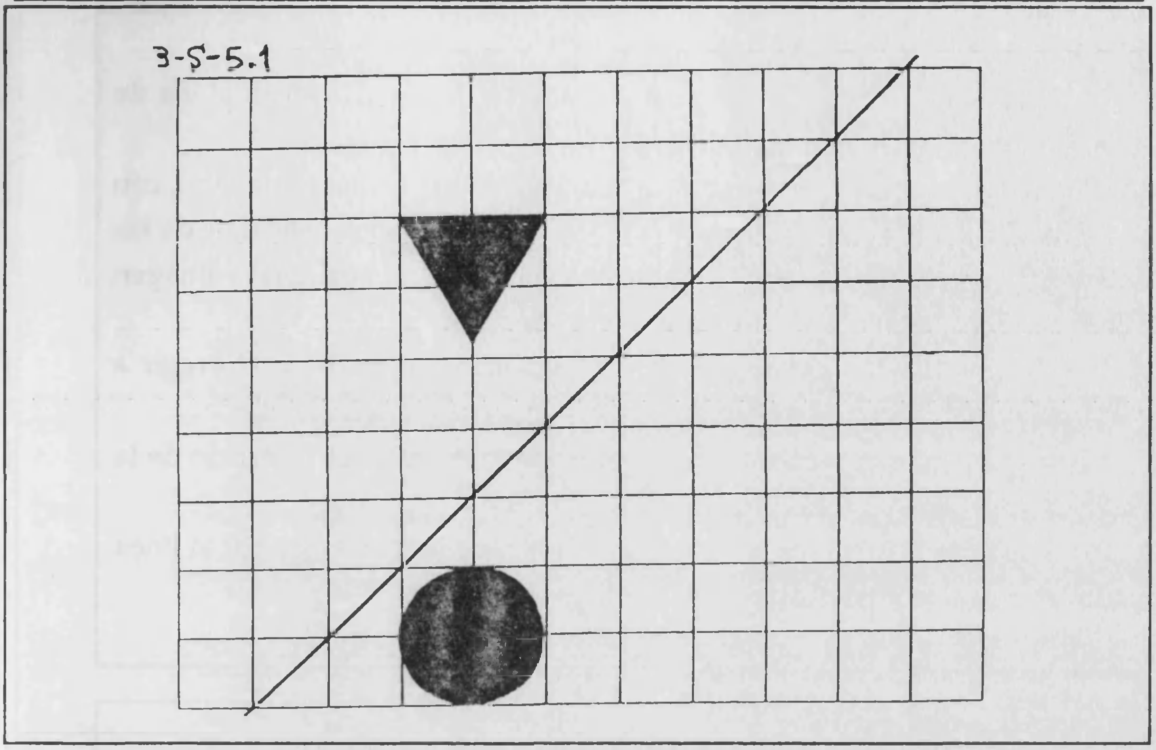
Actividad 5: Colocar la imagen de la pieza de la lámina, pero:

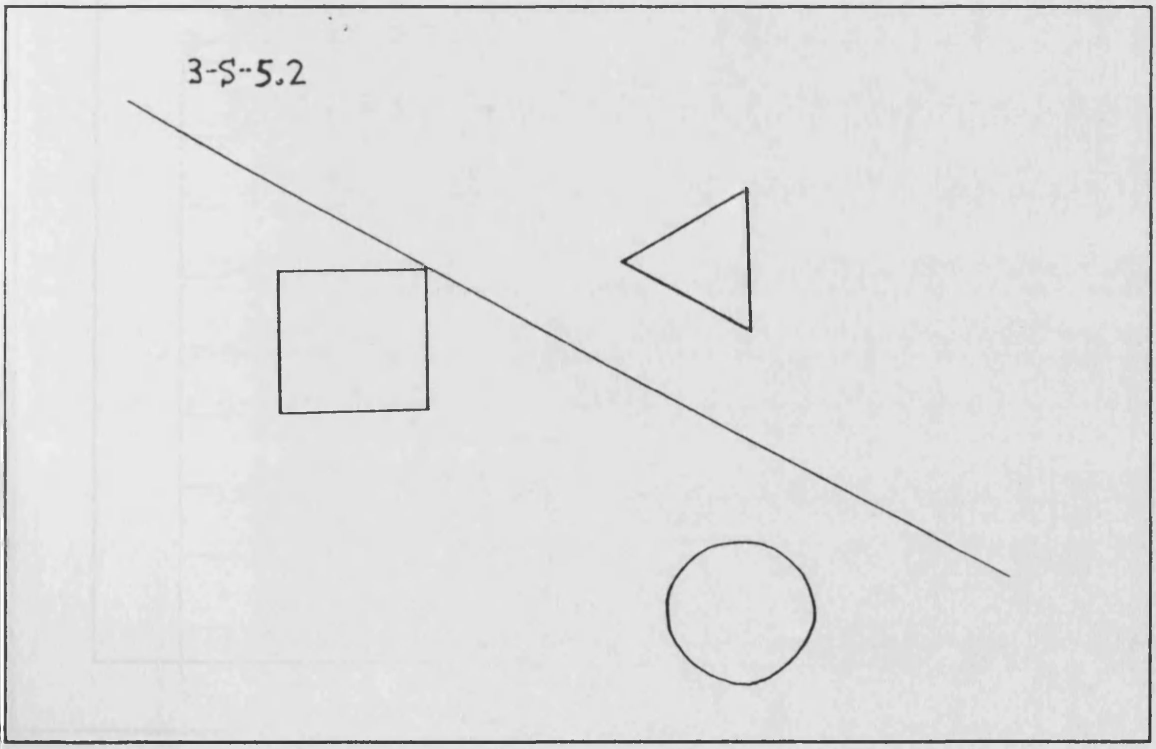
En unos casos hay que emplear el espejo o el "mira" para situar las piezas.

Otras veces hay que observar con el mira o el espejo y retirarlo antes de colocar la imagen.

En otras ocasiones, el primer intento se realiza sin material auxiliar.

En todos los casos la comprobación se realiza mediante el mira.


3-S-5.1


3-S-5.2

Láminas: 3-S-6.1, 3-S-6.2, 3-S-6.3 y 3-S-6.4

Objetivos: Utilización del cambio de semiplano y de la equidistancia al eje de simetría de la imagen, sin gran precisión.

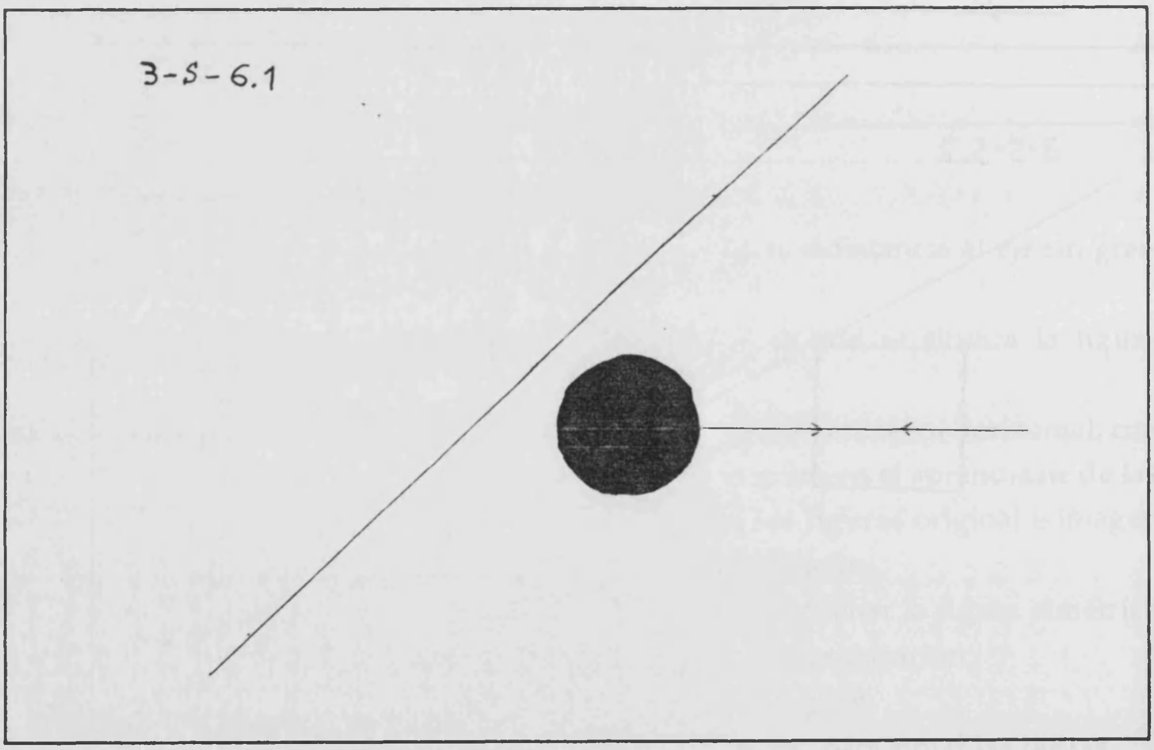
Proponer sólo situaciones con el eje de simetría no vertical ni horizontal, con el fin de observar si es posible evitar errores usuales en el aprendizaje de las simetrías, correspondientes a la colocación de las figuras original e imagen alineadas horizontal o verticalmente con ejes inclinados.

Actividad 6: Colocar la pieza imagen sin utilizar material auxiliar. Corregir a continuación sirviéndose del mira.

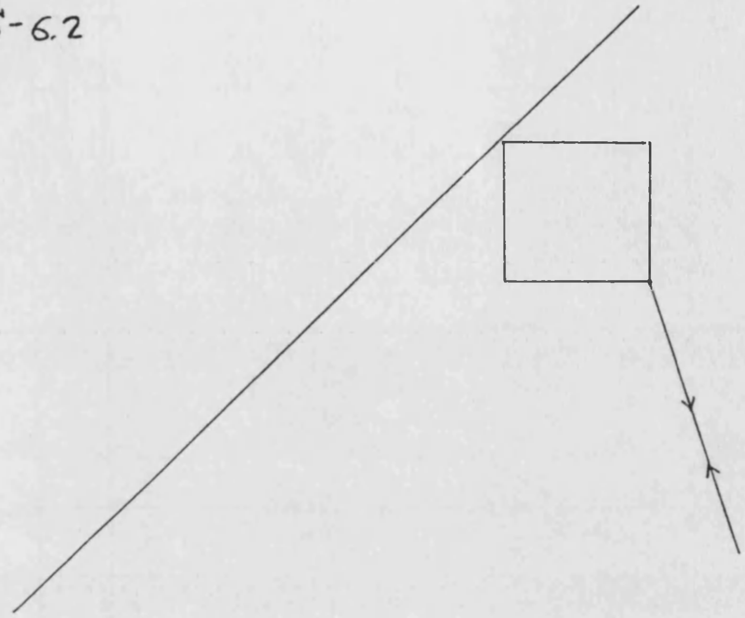
Desplazar la pieza siguiendo la línea marcada y observar el recorrido de la imagen, simétrica, a través del mira.

Trabajo por parejas y sin mira: Un niño mueve la pieza original por la línea marcada y el otro niño desplaza la simétrica.

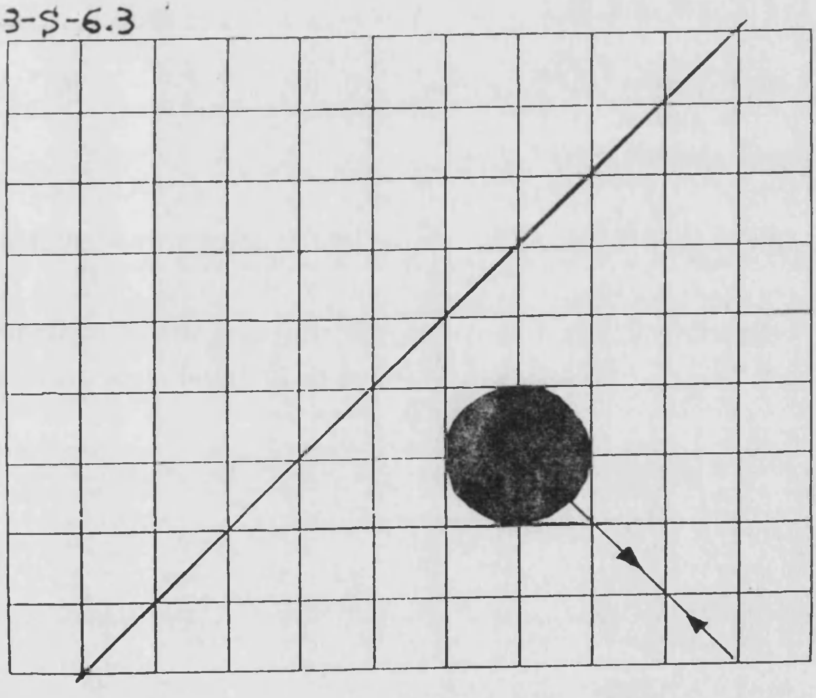
En todos los casos la comprobación se realiza mediante el mira.



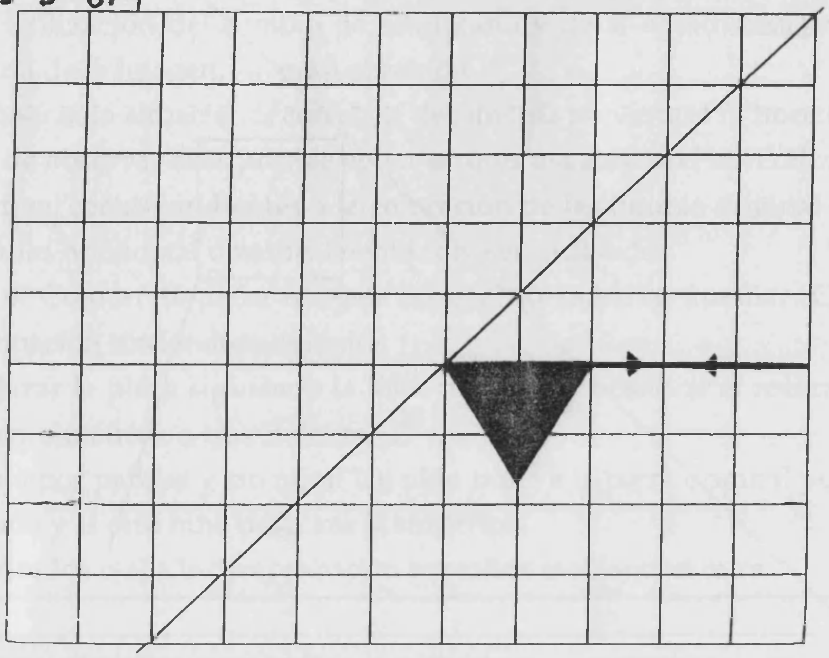
3-S-6.2



3-S-6.3



3-S-6.4

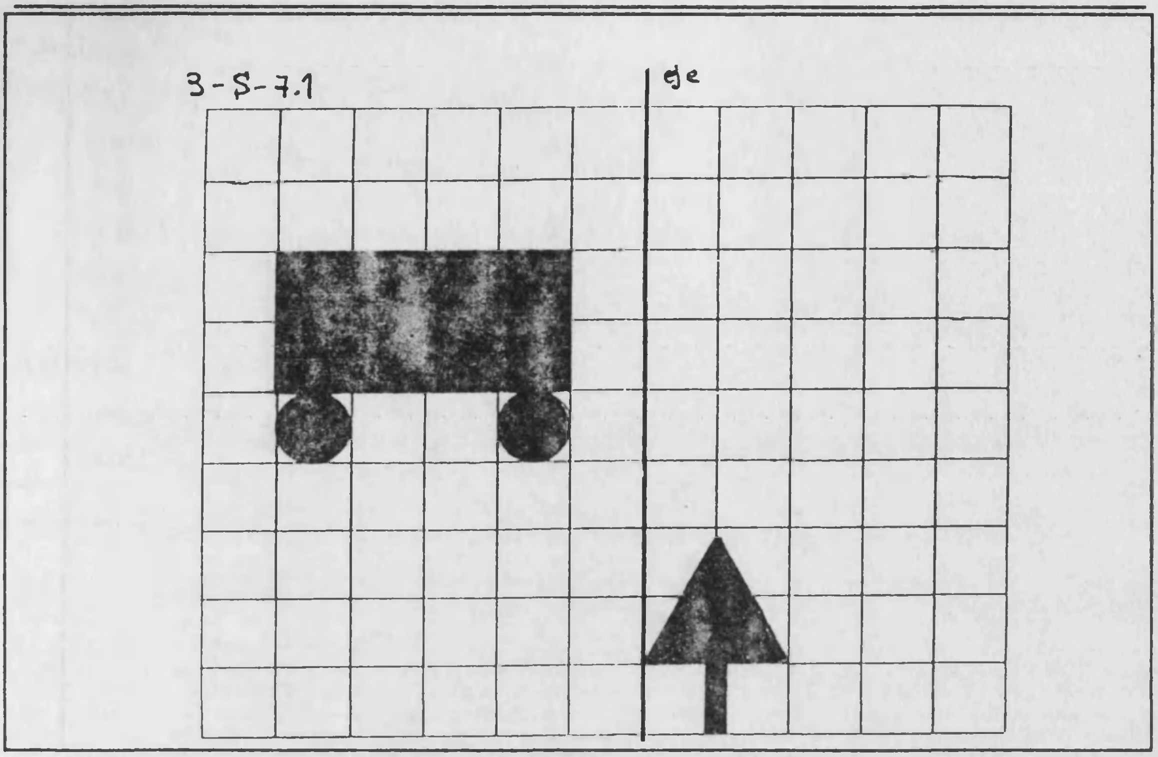


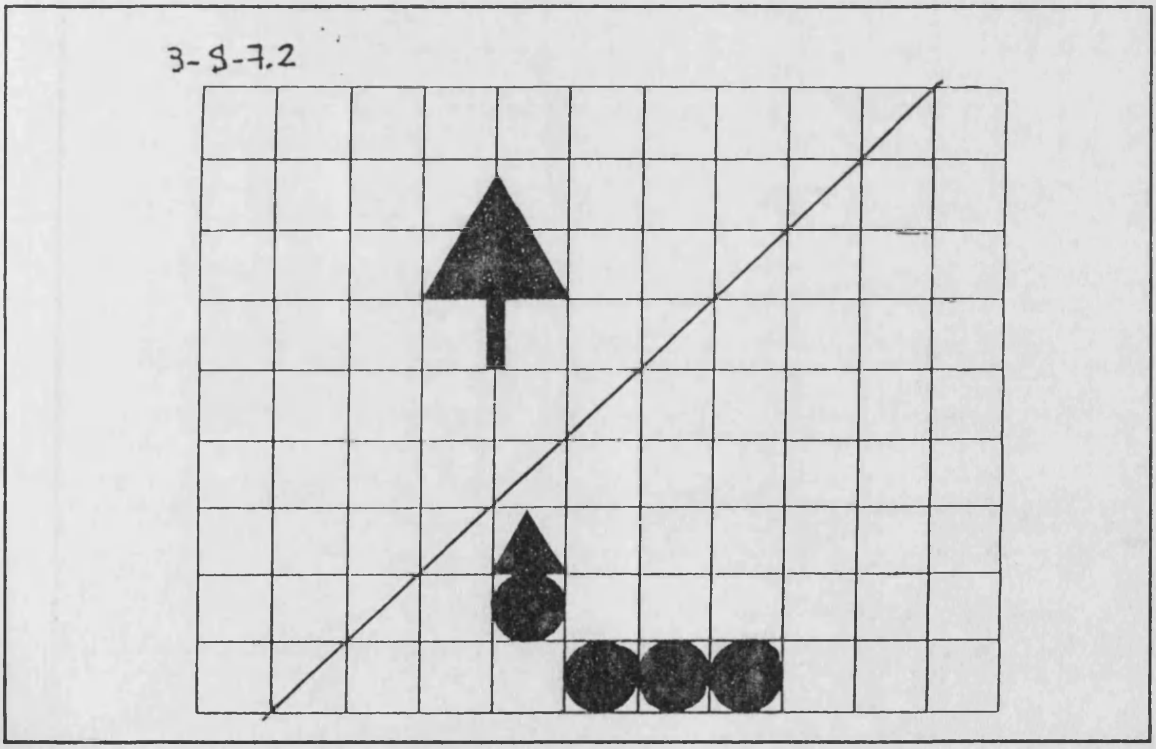
Láminas: 3-S-7.1, 3-S-7.2, 3-S-7.3 y 3-S-7.4.

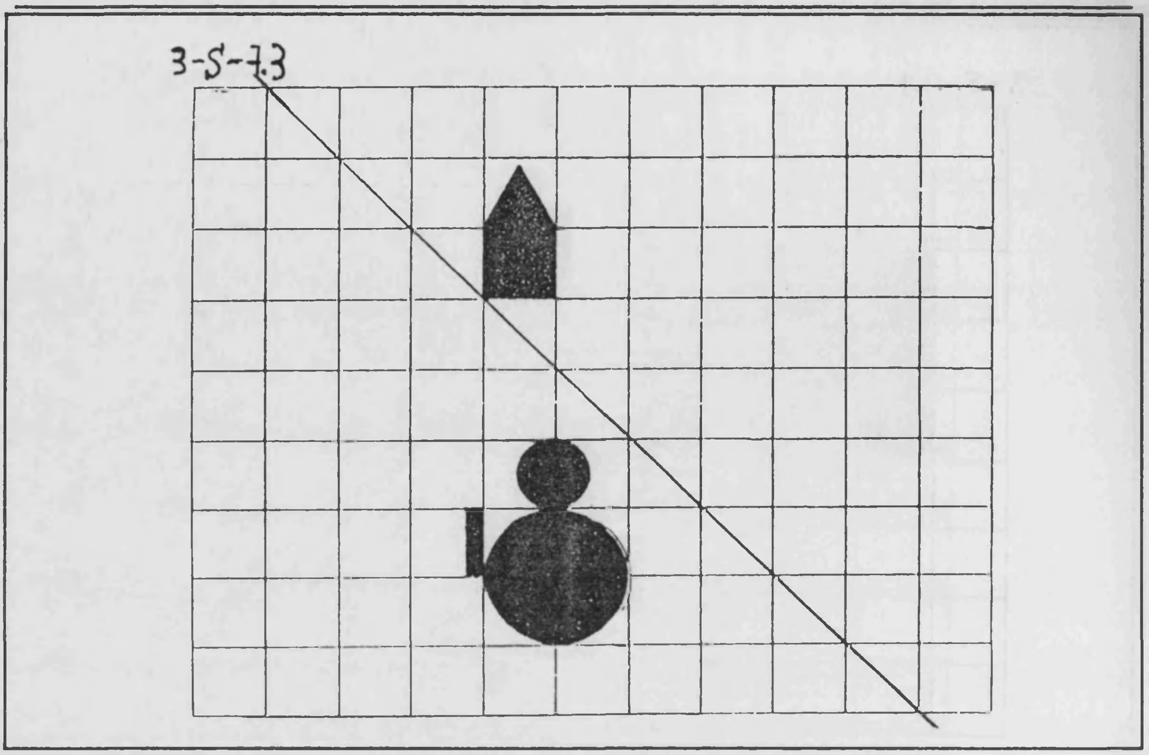
Objetivos: Desarrollar y aplicar las características de cambio de semiplano, equidistancia e inversión de la figura.

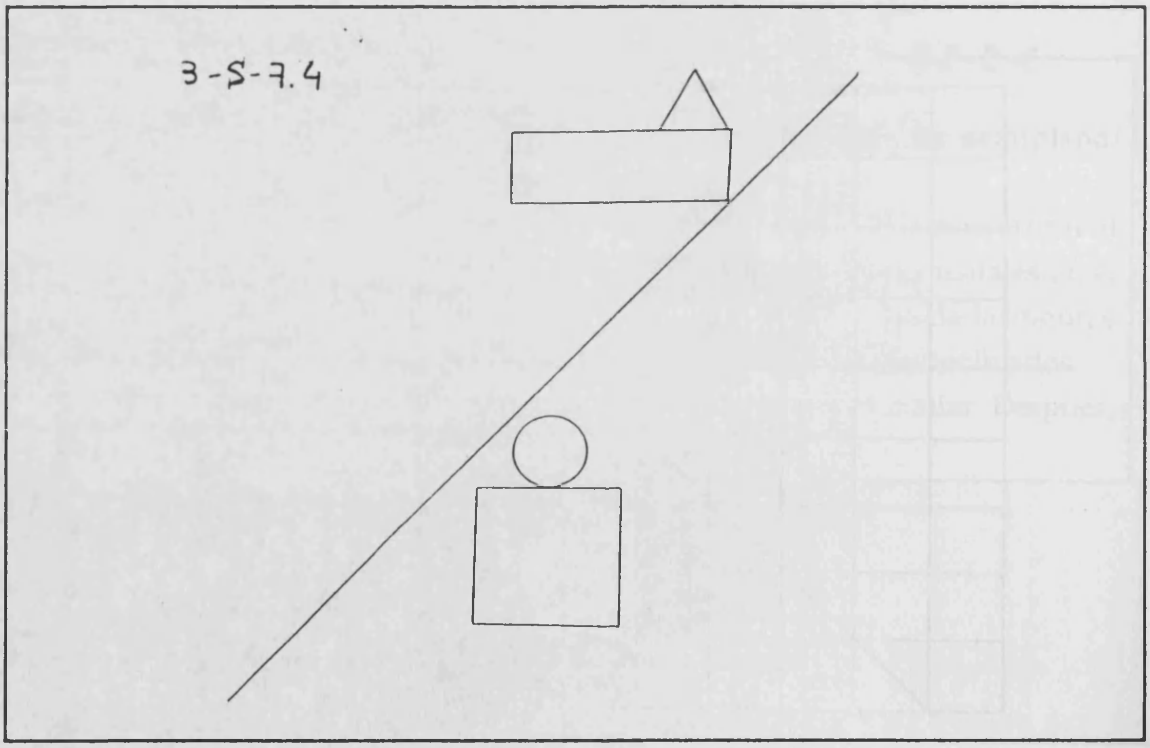
Incidir mayoritariamente en situaciones con el eje de simetría no vertical ni horizontal, con el fin de observar si es posible evitar errores usuales en el aprendizaje de las simetrías, correspondientes a la colocación de las figuras original e imagen alineadas horizontal o verticalmente con ejes inclinados.

Actividad 7: Colocar la figura simétrica sin servirse de material auxiliar. Después, comprobar el resultado con el mira y corregir.


3-S-7.1
eje


3-S-7.2


3-S-7.3


3-S-7.4

Láminas: 3-S-8.1, hoja en blanco, 3-S-8.2, 3-S-8.3 y 3-S-8.4.

Objetivos: Observar las técnicas empleadas espontáneamente por los alumnos para reproducir por simetría una figura completa a partir de su mitad.

Introducir brevemente los métodos de plegado + calcado, plegado + recorte, y dibujo directo.

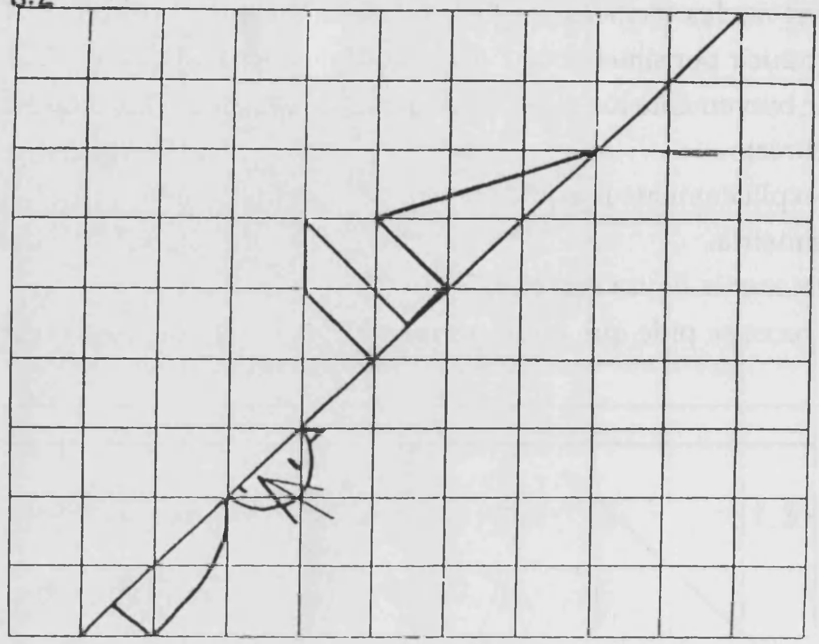
Emplear explícitamente la equidistancia de la figura original y de su imagen al eje de simetría.

Actividad 8: Obtener la figura completa.

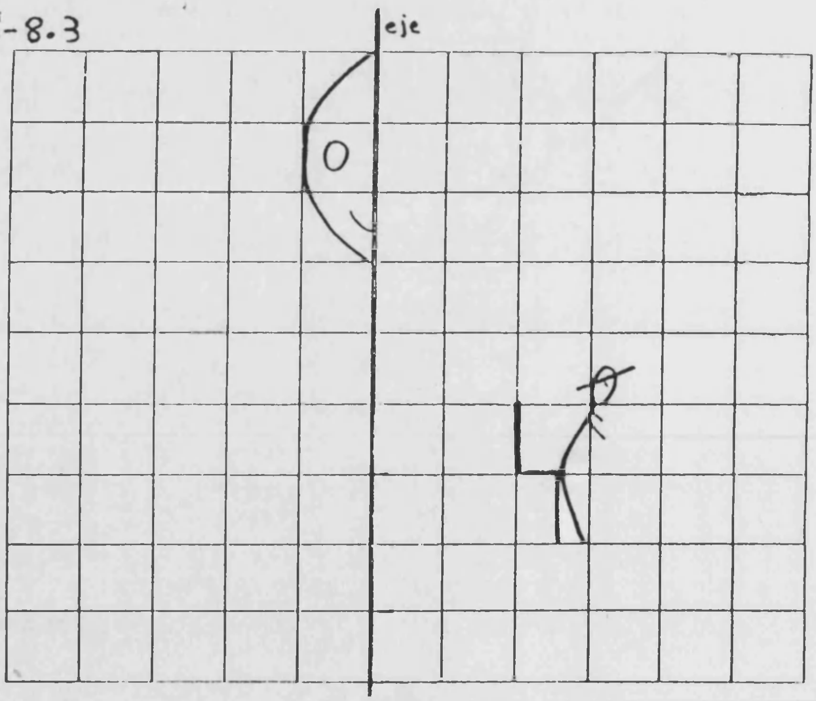
Algunas veces se pide que no se resuelva sobre la lámina, sino en una hoja auxiliar.

3-S-8.1

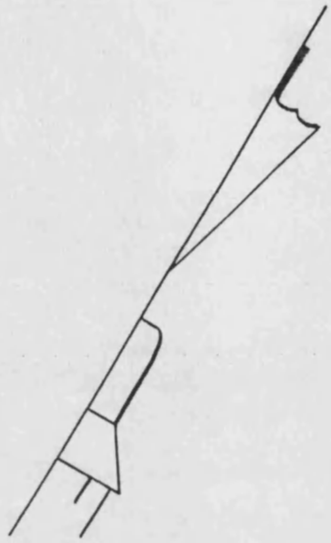
3-S-8.2



3-S-8.3



3-S-8.4



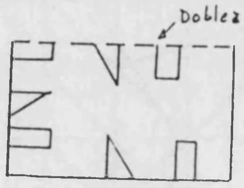
Láminas: 3-S-9 y hojas en blanco.

Objetivos: Utilización de la simetría axial.

Actividad 9: Tras doblar una hoja en presencia de los alumnos, el profesor hace cortes (como a los indicados en la lámina 3-S-9 o parecidos) y, tras cada situación que se propone, los alumnos deben dibujar en una hoja en blanco el hueco que aparecerá al desdoblar la hoja.

Ejercicio análogo, pero uno de los niños efectúa el corte.

3-S-9



Láminas: 3-S-10.1, 3-S-10.2 y 3-S-10.3.

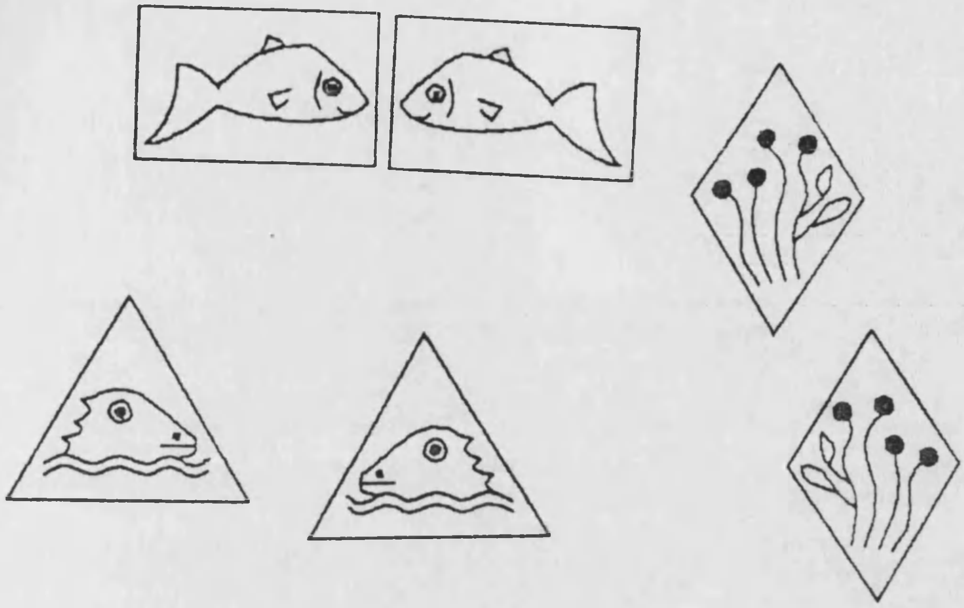
Objetivos: Utilización de la inversión de orientación de una pieza al darle la vuelta a la hoja, colocándola por su otra cara.

Colocación de figuras simétricas respecto un eje.

Actividad 10: (A los niños se les dan varias piezas recortadas de las que mostramos en la lámina 3-S-10.1). Identificar las piezas que son iguales. Explicar en qué difieren las que son casi iguales.

Recortar dos veces la jarra de la lámina 3-S-10.2 y darle la vuelta a una, colocándola por la otra cara de la hoja. Situarlas en la lámina 3-S-10.3 de manera que sean simétricas respecto al eje. Comprobar con el mira.

Se coloca una jarra sobre la lámina 3-S-10.3, sin que se superponga a la línea y los alumnos deben situar la jarra simétrica respecto al eje dibujado y comprobar después con el mira su solución.



3-S-10.2

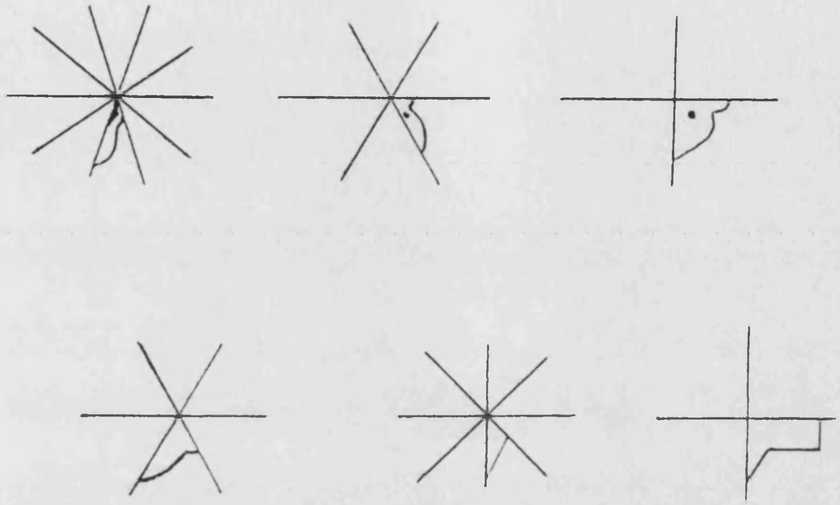
3-S-10.3

Láminas: 3-S-11.

Objetivos: Práctica de la realización de simetrías axiales.

Actividad 11: Completar la figura a partir del motivo que se ve, teniendo en cuenta que las líneas dibujadas son los ejes de simetría de la figura.

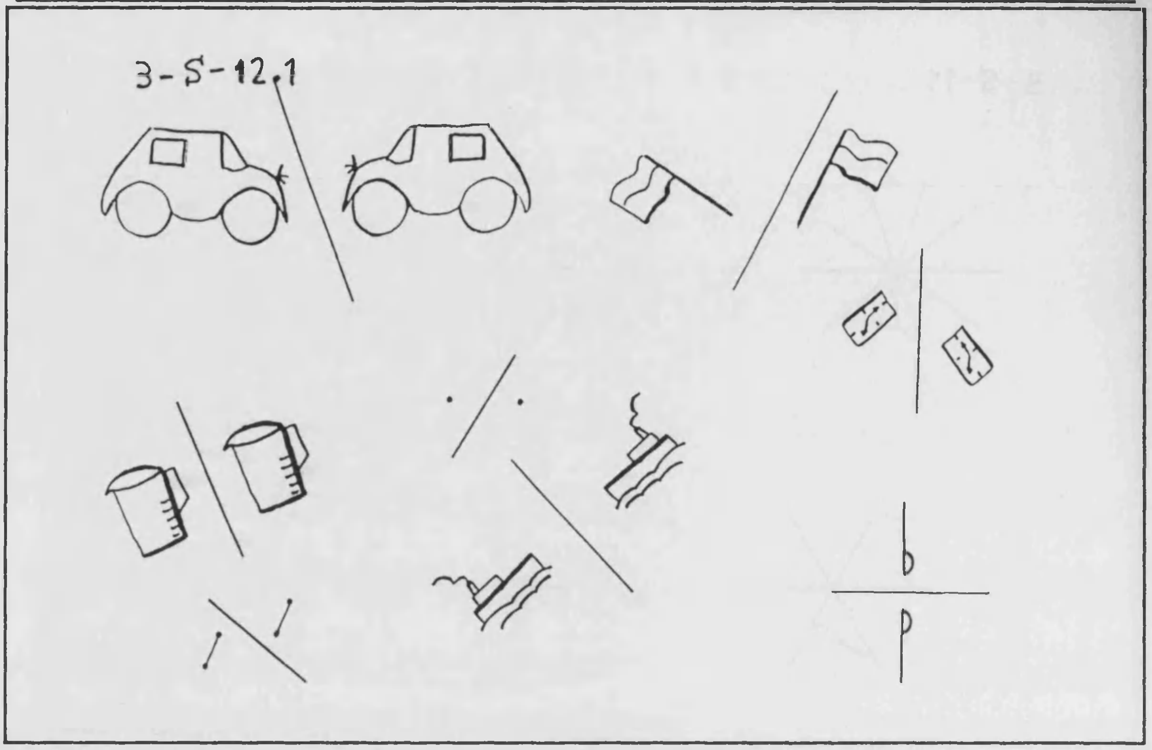
3-S-11

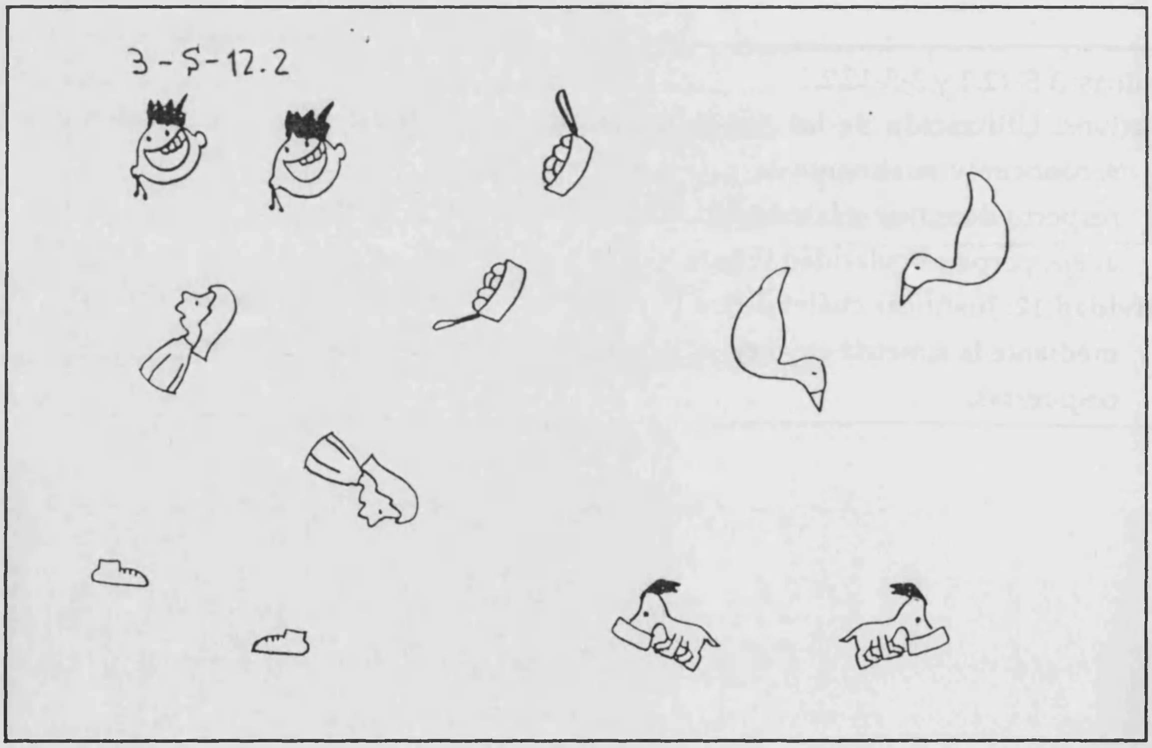


Láminas: 3-S-12.1 y 3-S-12.2.

Objetivos: Utilización de las características de la simetría axial que permiten reconocer visualmente la correspondencia entre dos figuras simétricas respecto de un eje y la existencia de eje. Inversión de la figura, equidistancia al eje, perpendicularidad (visión intuitiva).

Actividad 12: Justificar cuáles de los pares siguientes de figuras se corresponden mediante la simetría cuyo eje es la línea dibujada. Comprobar con el mira las respuestas.


3-S-12.1

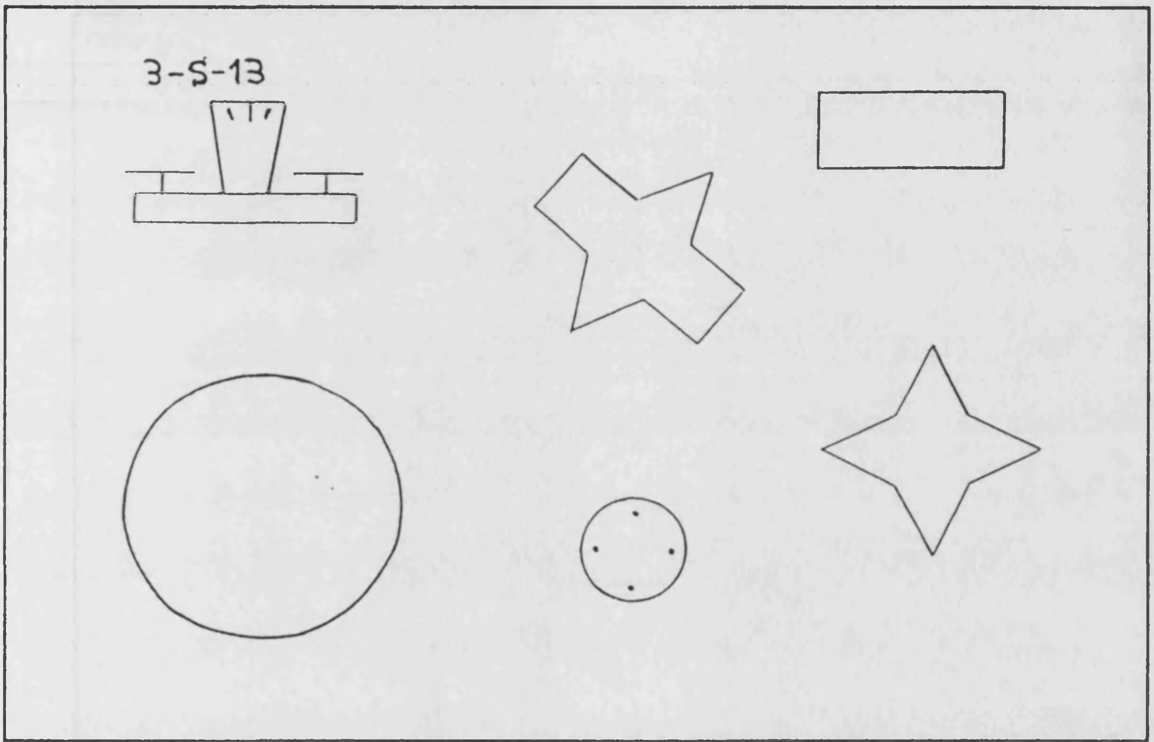

3-S-12.2

Láminas: 3-S-13.

Objetivos: Introducción de los ejes de simetría de una figura.

Aplicación de los conocimientos que se poseen sobre simetrías para obtener los ejes de simetría de una figura con la ayuda del mira.

Actividad 13: Empleando el mira, obtener todos los ejes de simetría de cada una de las figuras.

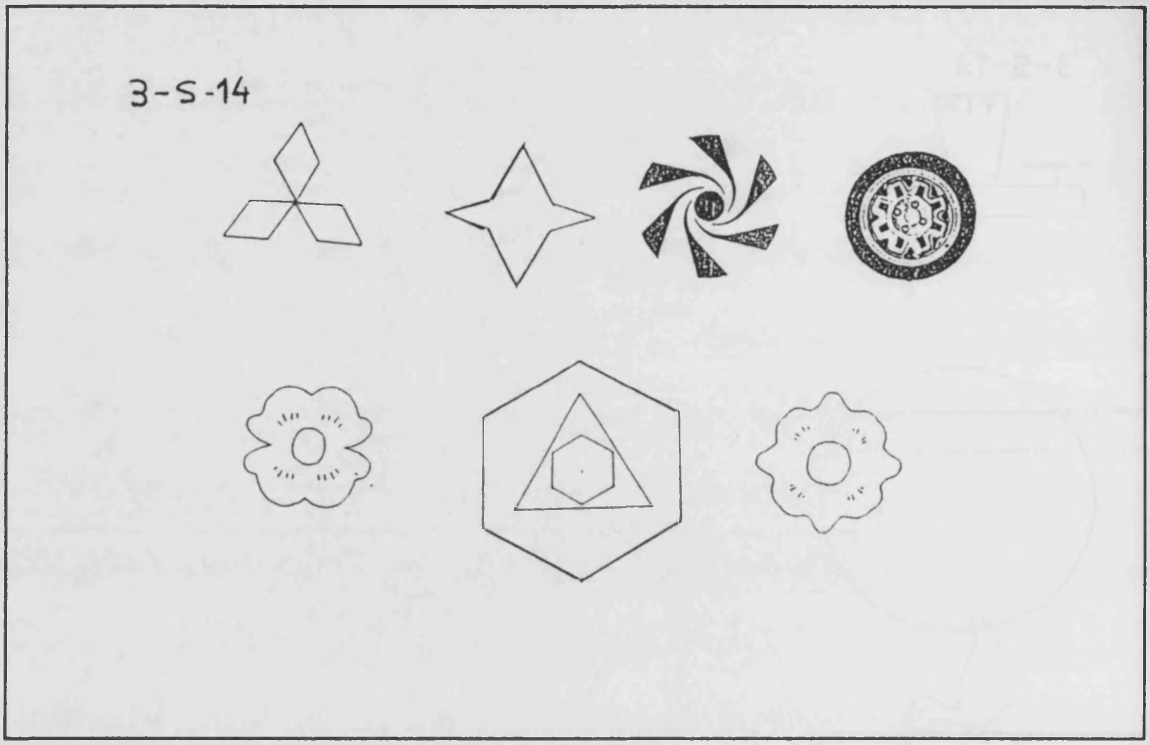


Láminas: 3-S-14.

Objetivos: Aplicación de los conocimientos que se poseen sobre simetrías.

Actividad 14: Empleando el mira, obtener la parte más pequeña de cada figura que, por simetrías, permite reproducir la figura completa. Trazar las líneas en las que hay que colocar el mira.

Asociar las líneas dibujadas con los ejes de simetría de la figura.

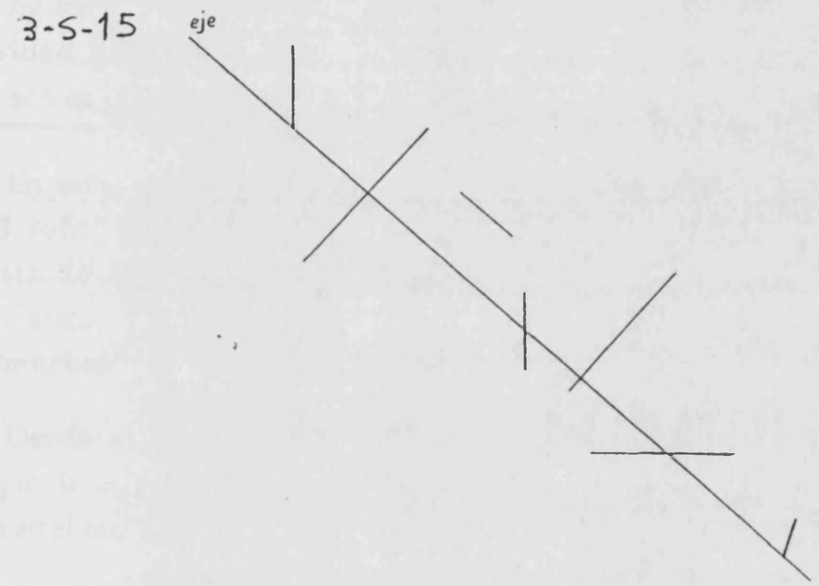


Láminas: 3-S-15.

Objetivos: Observación de las características matemáticas de la simetría axial asimiladas por los alumnos: Equidistancia y perpendicularidad respecto al eje.

Utilización de la simetría axial en objetos matemáticos y situaciones no empleados hasta el momento (segmentos y corte con el eje de simetría).

Actividad 15: Obtener el segmento simétrico de cada uno de los dibujados respecto al eje de simetría que se da.

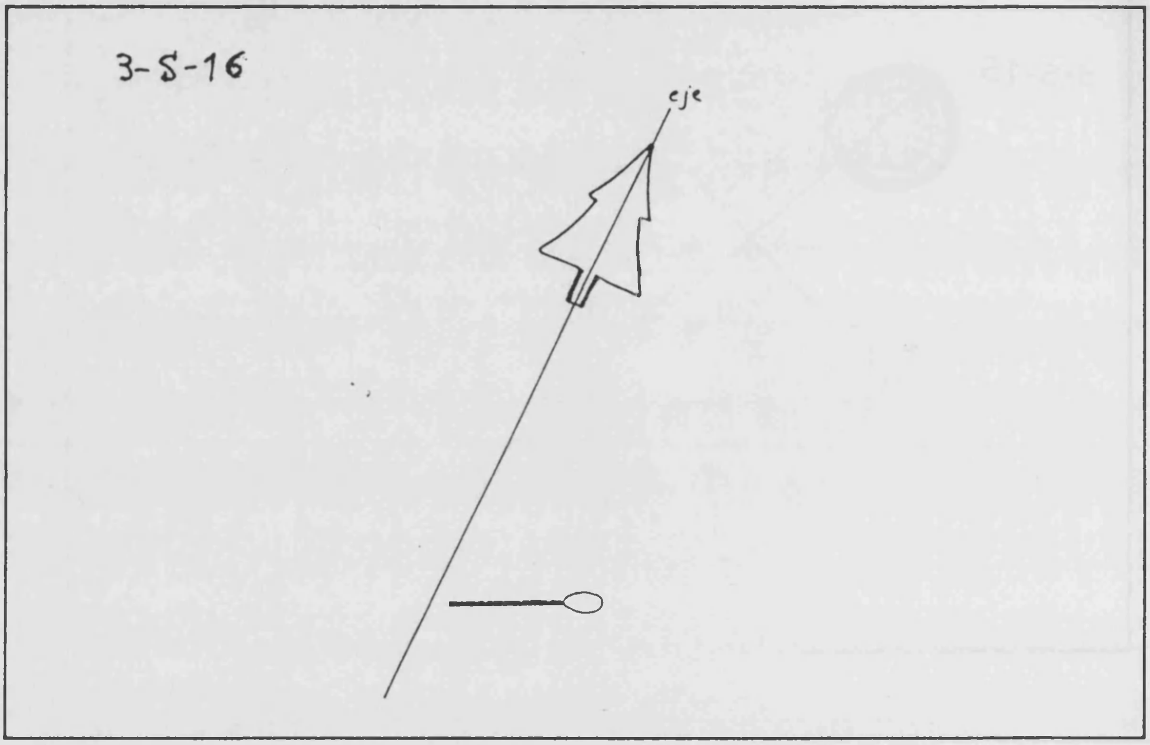


Láminas: 3-S-16.

Objetivos: Observación de las características matemáticas de la simetría axial asimiladas por los alumnos: Equidistancia y perpendicularidad respecto al eje.

Utilización de la simetría axial en situaciones no empleados hasta el momento (figura cuya simétrica es ella misma) o difíciles (eje inclinado con segmento horizontal)

Actividad 16: Obtener la figura simétrica.



Resumen de las sesiones de 3º de E.G.B.

Sesión 1

Láminas: 3-S-1.1, 3-S-1.2 y 3-S-1.3.
Objetivos: Introducir y familiarizar a los alumnos con la idea de simetría de una figura y con el manejo del espejo.
Actividad 1: Conseguir, mediante la colocación del espejo sobre la figura, que ésta se vea completa. Una vez obtenida una solución, averiguar si hay otras.

En este curso se hace más incidencia que en la experimentación de 1º de E.G.B. sobre la cantidad posible de soluciones existentes en cada caso, aunque si se trata de infinitas, los alumnos no comprenden exactamente el significado matemático de tal magnitud, por lo que la pretensión es que los alumnos vean que hay "muchas" soluciones.

Desde el principio los niños sí conocen el efecto duplicador del espejo. Por ejemplo, la justificación de David al primer caso (libro) es: *La forma de este trozo se refleja en el espejo y entonces se ve entero.*

Los ejercicios los resuelven bien, generalmente sin recurrir al tanteo, que sí empleaban los niños de 1º de E.G.B. con mucha frecuencia. De todas maneras, en ocasiones sí recurren al tanteo, sobre todo cuando se les pide alguna solución alternativa a la que acaban de dar. En algún caso aislado se da una solución incorrecta, debido a que el alumno no ha prestado atención a la forma exacta del dibujo. Por ejemplo, Melisa sitúa el espejo en la estrella de manera que no se ven todas las puntas.

La cantidad de soluciones posibles de cada caso la obtienen mediante experimentación, modificando el número a medida que van obteniendo más. Eso lo podemos ver, por ejemplo, en el ejercicio del plato con infinitas soluciones, en el cual al principio sólo ven una solución y luego van descubriendo más, de una en una. La profesora interviene cuando tienen tres, variando ella misma muy poco la inclinación del espejo. Los niños se dan cuenta del arco de circunferencia que produce soluciones, pero la cantidad de soluciones que hay, según ellos, es el número que les sale (12 ó 17). Quizá sí lleguen a entender que cuanto más pequeño es el desplazamiento del giro hecho con el espejo, el número de soluciones aumenta, pero no creo que lleguen a entender el infinito que menciona la profesora, pues eso para ellos es una cantidad grande que seguramente se limita a 17 en este caso o un poco más si son lo suficientemente hábiles. Pero este es un problema de comprensión del infinito y de la continuidad, pero no de simetría. En concreto, en este ejemplo los niños sí se llegan a dar cuenta del barrido que pueden realizar con el espejo para obtener soluciones.

Láminas: 3-S-2.
Objetivos: Familiarizar a los alumnos con la idea de simetría, por medio del espejo.
Incrementar el conocimiento de los efectos producidos por un espejo en una figura y, en particular, la relación de equidistancia al espejo de la figura original y su imagen.
Actividad 2: Conseguir con el espejo dos barcos y dos hombres.
Hacer que los dos barcos / hombres se aproximen / alejen.
En el caso del hombre, además se piden configuraciones especiales, no usuales. Por ejemplo: Un sólo hombre con dos plumas / sin pluma, etc.

La actividad no presenta ninguna dificultad para los niños. La profesora intenta relacionar lo que hacen los niños cuando acercan y alejan una figura y su imagen con lo que les sucede a los propios alumnos cuando se miran en el espejo. La explicación de los niños de lo que sucede cuando se miran en el espejo hace referencia a que se ven *más grandes* cuando se acercan al espejo. Melisa dice que *parece que me vaya y venga* cuando aleja y acerca el espejo a su cara. La profesora les explica que también están más cerca (una persona y su imagen) cuando acercan el espejo, tras lo cual algún niño repite esa característica.

Sesión 2

Láminas: 3-S-3.1, 3-S-3.2 y 3-S-3.3.
Objetivos: Familiarizar a los alumnos con las simetrías y el uso del espejo.

Reconocer la parte de una figura que mediante simetrías produce ciertas transformaciones en la figura original (más gruesa, delgada, larga, corta, ...).
Actividad 3: Conseguir algunas transformaciones de la figura. Por ejemplo: Palo más o menos largo / grueso.

No hay ninguna dificultad y los niños reconocen los límites donde situar el espejo para obtener los efectos deseados.

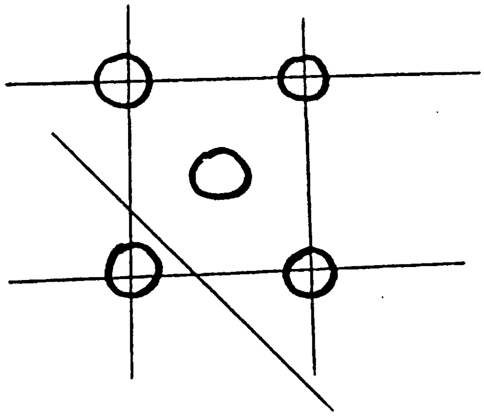
Láminas: 3-S-4.
Objetivos: Familiarizar a los alumnos con las simetrías y el uso del espejo.
Incrementar el conocimiento de los efectos producidos por un espejo en una figura.
Actividad 4: Conseguir que sólo se vea un punto, dos, tres, ... Obtener varias posibilidades en algunos de los casos.
Averiguar cuál es la cantidad máxima de puntos que se pueden obtener.

Desde el primer caso que se plantea -obtener un sólo punto- los niños sí saben cómo resolverlo: *Lo pones en la mitad de un punto.*

Otro aspecto es la cantidad de soluciones. Los niños van aumentando las posibilidades de colocación del espejo hasta generalizar las posiciones que producen una solución válida. A continuación esquematizo el proceso para el caso de un punto:

Primero encuentran una solución. Cuando la profesora les pide más, se dan cuenta de que *sirven los extremos.* Después Melisa dice que *con el tercero también le sale* [en la primera configuración] y Nadia generaliza: *Todos los que están en las esquinas.*

Para otras cantidades de puntos sucede algo análogo. En el caso de dos puntos descubren las dos posibilidades (al margen de los círculos de la lámina con los que se empleen esas técnicas): Duplicar uno, lo cual explica Elisa así: *Lo he puesto* [el espejo] *fuera del circulito y este circulito se refleja en el espejo y salen dos.* Duplicar dos mitades, lo cual explica David: *He puesto el espejo en la mitad de dos puntos; así se reflejan dos medios puntos y salen dos enteros.*



Al principio los niños sí tantean para hallar nuevas soluciones o métodos, pero después ya utilizan la relación que han obtenido y que proporciona todas las soluciones. En el dibujo muestro las soluciones de Nadia para conseguir dos puntos; se había dejado tres esquinas de la configuración de la lámina, pero al preguntarle la profesora si sólo le salen ésas, enseguida complementa con las que se dejó.

Respecto a la cantidad máxima de puntos que se pueden obtener (la pregunta se formula tras la obtención de 4 puntos), las primeras respuestas son erróneas y corresponden a las cantidades que van obteniendo experimentalmente: Varios niños coinciden en que son 5. Después una niña dice: *¡Ah! ¡Ya está! 8. ¡No!, 10.* David piensa que son 9. Elisa y Nadia (imagino que los demás niños también) comprenden por completo cuál es la cantidad máxima y justifican que 11 no pueden obtener porque *para 11 necesitaríamos 6* [puntos en la lámina].

Láminas: 3-S-5.1 y 3-S-5.2.
Objetivos: Introducción de la simetría axial.

Introducción del cambio de semiplano y de la equidistancia al eje sin gran precisión.

Conseguir una visión aproximada del lugar donde se situará la figura imagen.

Proponer sólo situaciones con el eje de simetría no vertical ni horizontal, con el fin de observar si es posible evitar errores usuales en el aprendizaje de las simetrías, correspondientes a la colocación de las figuras original e imagen alineadas horizontal o verticalmente con ejes inclinados.

Introducción del "mira" como herramienta para obtener la figura simétrica de una dada y para detectar y corregir errores en su colocación.

Actividad 5: Colocar la imagen de la pieza de la lámina, pero:

En unos casos hay que emplear el espejo o el "mira" para situar las piezas.
Otras veces hay que observar con el mira o el espejo y retirarlo antes de colocar la imagen.
En otras ocasiones, el primer intento se realiza sin material auxiliar.
En todos los casos la comprobación se realiza mediante el mira.

Sesión 3

Láminas: 3-S-6.1, 3-S-6.2, 3-S-6.3 y 3-S-6.4.
Objetivos: Utilización del cambio de semiplano y de la equidistancia al eje de simetría de la imagen, sin gran precisión.
Proponer sólo situaciones con el eje de simetría no vertical ni horizontal, con el fin de observar si es posible evitar errores usuales en el aprendizaje de las simetrías, correspondientes a la colocación de las figuras original e imagen alineadas horizontal o verticalmente con ejes inclinados.
Actividad 6: Colocar la pieza imagen sin utilizar material auxiliar. Corregir a continuación sirviéndose del mira.
Desplazar la pieza siguiendo la línea marcada y observar el recorrido de la imagen, simétrica, a través del mira.
Trabajo por parejas y sin mira: Un niño mueve la pieza original por la línea marcada y el otro niño desplaza la simétrica.
En todos los casos la comprobación se realiza mediante el mira.

Solamente se utilizan ejes inclinados para observar si alguno de los errores más comunes en la realización de simetrías axiales se deben al estudio de las simetrías con ejes en posición vertical.

Incluyo conjuntamente los comentarios de las actividades 5 y 6 debido a que una parte de la actividad 6 es análoga a la 5, puesto que, en la actividad 6, antes de desplazar las figuras según las líneas señaladas hay que situar sus imágenes.

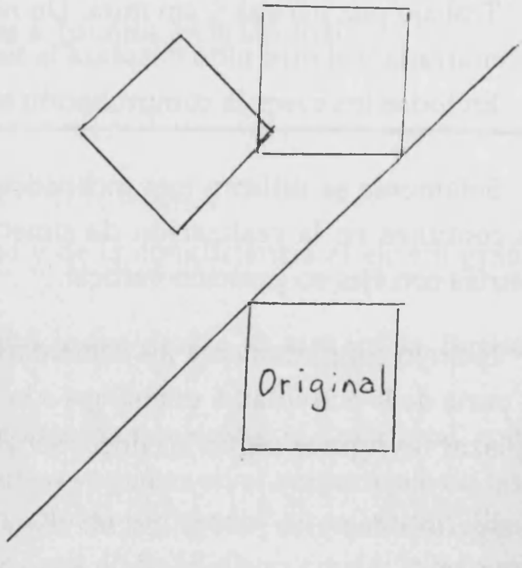
El círculo es la pieza que resulta más sencilla para los niños porque no incluye en sí misma posibilidad de variación en su inclinación. En las otras piezas -triángulo y cuadrado- sí, lo cual es fuente de errores.

Hay errores de equidistancia y de perpendicularidad. Pero la mayoría de las veces sí se tienen en cuenta aproximadamente ambas características y el problema lo produce la inclinación incorrecta de los triángulos y cuadrados.

Las referencias en estos comentarios a una colocación aproximada sería considerada errónea si se mide con precisión la perpendicularidad y la equidistancia, pero los estudiantes se encuentran todavía en el primer nivel de Van Hiele, por lo que aquí sólo se considera una visión global de las figuras, en la que se tiene en cuenta una relación aproximada entre original e imagen respecto al eje de simetría.

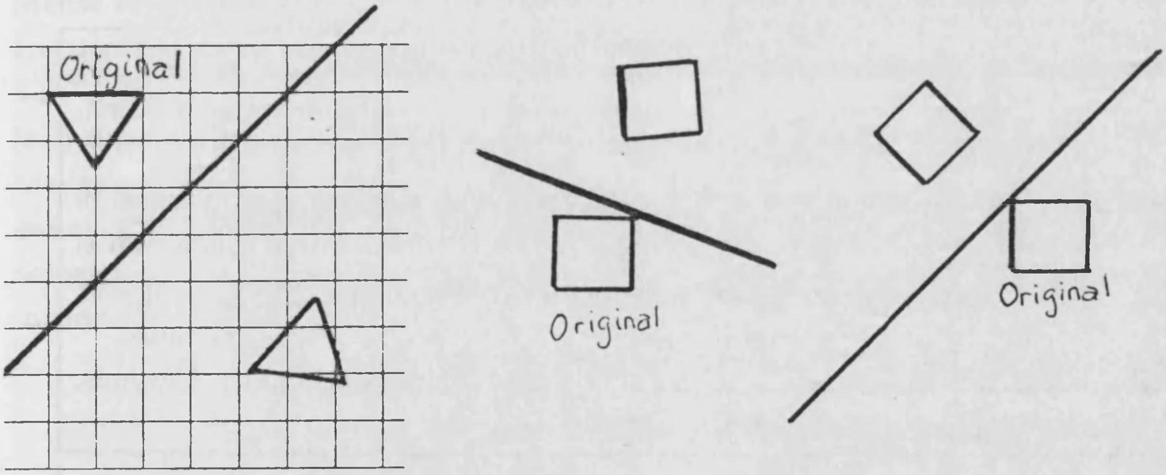
Debido a una carencia de visualización mental de la simetría axial con eje inclinado, algunos niños cometen errores típicos con esa posición de los ejes, como pueden ser desplazamientos en horizontal o en vertical pero, por lo general, si se les hace alguna observación a los niños, sí son capaces de variar la posición, teniendo en cuenta la inclinación del eje, con lo que se corrige total o parcialmente el error de perpendicularidad. Respecto a la equidistancia, una observación por parte del profesor provoca generalmente la colocación válida de la imagen. En los ejercicios de la actividad 7 es cuando se podrá apreciar mejor que los niños sí han asumido, por lo general, esa variación de inclinación de la figura.

Cuando se presentan varias figuras al mismo lado del eje, en una situación global de alineación paralela respecto a éste, como en la lámina 3-S-5.2, la perpendicularidad si la tienen todos los alumnos en cuenta, incluso en figuras con posición relativa conflictiva respecto al eje (cuadrado), mientras que si esa misma figura conflictiva se encuentra sola (lámina 3-S-6.2), aunque sea en la misma posición, a veces no es bien resuelta; como ejemplo presento unos dibujos con soluciones incorrectas de los niños. Ninguno es de Elisa porque su solución es válida. No



obstante, no todas las piezas conflictivas que se encuentran solas en una lámina se resuelven mal. Por ejemplo, los niños sitúan aproximadamente bien la imagen del triángulo de la lámina 3-S-6.4, si no se exige precisión en la perpendicularidad.

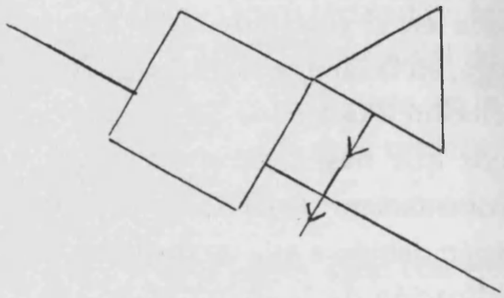
Respecto a la equidistancia, David es quien comete ese error de manera más acusada en el cuadrado de la lámina 3-S-5.2, luego repite en una situación análoga, en la lámina 3-S-6.2. También es notable la ausencia de equidistancia en su solución a la lámina 3-S-5.1. Estos tres casos citados los muestro en los tres dibujos que hay a continuación. Los demás alumnos sí tienen en cuenta aproximadamente la equidistancia, excepto en algún caso puntual, aunque no con precisión debido a que no disponen de instrumentos de medida y a que, cuando la inclinación de la figura no es correcta, eso repercute en la equidistancia y perpendicularidad.



Durante la ejecución de los ejercicios hay referencias explícitas a la equidistancia. Por ejemplo, tras la resolución de la lámina 3-S-5.1, la profesora pregunta por qué sale el reflejo al otro lado. Elisa responde: *Esto* [figura original] *y esto* [figura imagen] *están a la misma distancia y entonces, si lo pones* [el espejo] *a la mitad de distancia, se ve éste* [original] *y éste* [imagen], *porque estamos en medio.* En otras ocasiones se hace referencia concreta a la cantidad de cuadrados de separación con el eje.

Para finalizar los comentarios de estos dos bloques, incluyo la forma de proceder de Nadia para colocar correctamente el triángulo de la lámina 3-S-5.2, pues quizá se puede interpretar como consideración exacta de las dos características de equidistancia y perpendicularidad. De todas maneras, no creo que se trate de una utilización intencionada de la perpendicularidad como propiedad característica de las simetrías, aunque sí de la equidistancia.

Nadia se sirve de un cuadrado como regla, uno de cuyos lados coloca perpendicularmente al eje y va desplazando la pieza, que al principio situó sobre la original, de manera que el vértice correspondiente se desliza por el lado del cuadrado, manteniendo la pieza paralela a la original. En el dibujo se ilustra la posición del cuadrado.



Láminas: 3-S-7.1, 3-S-7.2, 3-S-7.3 y 3-S-7.4.

Objetivos: Desarrollar y aplicar las características de cambio de semiplano, equidistancia e inversión de la figura.

Incidir mayoritariamente en situaciones con el eje de simetría no vertical ni horizontal, con el fin de observar si es posible evitar errores usuales en el aprendizaje de las simetrías, correspondientes a la colocación de las figuras original e imagen alineadas horizontal o verticalmente con ejes inclinados.

Actividad 7: Colocar la figura simétrica sin servirse de material auxiliar. Después, comprobar el resultado con el mira y corregir.

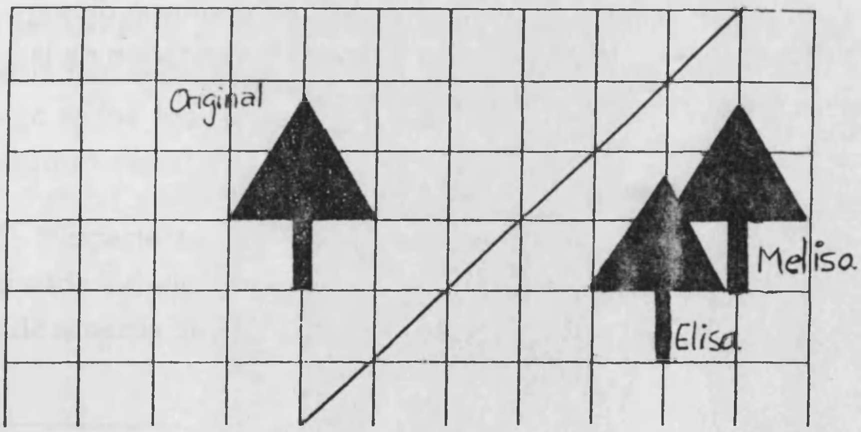
Las figuras de esta actividad están formadas por piezas: triángulos, cuadrados, círculos y rectángulos muy estrechos y alargados (como el tronco del árbol), que los niños deben seleccionar para reconstruir la figura simétrica.

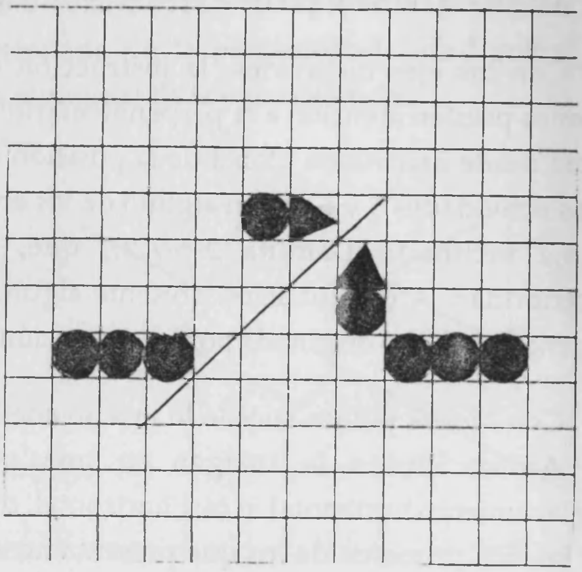
La única lámina que se presenta con un eje en posición estándar (lámina 3-S-7.1) tiene cuadrícula, el eje es vertical y las figuras también están en posición estándar, siendo, además, simétricas respecto a un eje vertical, por lo que la situación es la más fácil y no se puede observar la inversión de las figuras. En las láminas restantes sí se puede analizar esa característica, sobre todo en las figuras no simétricas, si bien en las figuras que tienen alguna simetría, el eje de la figura no es paralelo al de la lámina, por lo que es posible detectar también ciertos errores relacionados con la inversión.

Todos los niños resuelven bien la lámina con el eje en posición estándar.

Con los ejes inclinados, la instrucción que se proporciona hace que los alumnos presten atención a la perpendicularidad y a la equidistancia, aunque esta última desde una visión global de la posición de la figura (tal como comentamos en las actividades 5 y 6) y con alguno de los errores usuales en la primera lámina de eje inclinado (lámina 3-S-7.2), que, conscientemente, corrigen con posterioridad. A continuación presento algunos ejemplos de la consideración de perpendicularidad originada por la instrucción:

Con Melisa y Elisa sucede lo mismo con la figura superior de la lámina 3-S-7.2. Ambas sitúan la imagen en una posición que corresponde a un desplazamiento horizontal, o casi horizontal, de la figura original (ver sus dibujos. Son los dos primeros de los que presentamos después de este párrafo). Después tienen en cuenta de manera consciente la variación en inclinación de la figura: Melisa rectifica porque *el espejo está así*, haciendo referencia a que no había tenido en cuenta la inclinación del eje de simetría. Elisa en el dibujo superior de la lámina 3-S-7.3 dice: *Ahora me parece que no me va a pasar*, refiriéndose al error de no variar la inclinación de la figura. Los dos últimos dibujos que muestro a continuación, de Melisa y Elisa, respectivamente corresponden a las soluciones de las alumnas tras enunciar las frases que he transcrito. Como se puede observar, en ambos casos las soluciones no son correctas, pero sí se ha prestado atención a la modificación en la inclinación de la figura.





También es interesante la colocación de la otra figura inferior de la lámina 3-S-7.2 por parte de Melisa (ver dibujo). Comienza situando bien la parte superior (cabeza del gusano), teniendo en cuenta la equidistancia y perpendicularidad, pero luego hace un desplazamiento horizontal con el resto de la figura, por lo que queda separada de la cabeza. Entonces la profesora le pregunta sobre la cabeza y el resto del gusano, a lo que sigue la intervención de Elisa:

Elisa: *Melisa, es que esto es todo un gusano.*
Melisa: *¡Ah! Yo creía que era ....* [no termina la frase y se pone a reconstruir el cuerpo, colocándolo en el lugar correcto].

Respecto a la inversión de la figura, sólo David parece tener problemas y también deja la equidistancia en un caso. En los dibujos se pueden apreciar los errores de David. Los dos últimos dibujos corresponden a intentos sucesivos de corrección y para cada uno de ellos ha empleado el mira. En el penúltimo dibujo sí ha corregido la inversión, pero falla la perpendicularidad; de todas maneras, desde una perspectiva global no es grande su error, pues sí hace un cambio de inclinación y mantiene aproximadamente la distancia al eje. En el último dibujo corrige correctamente la perpendicularidad, pero corrige mal la orientación de la figura, pues antes la tenía inversa y ahora elige la misma.

Sesión 4

Láminas: 3-S-8.1, hoja en blanco, 3-S-8.2, 3-S-8.3 y 3-S-8.4.
Objetivos: Observar las técnicas empleadas espontáneamente por los alumnos para reproducir por simetría una figura completa a partir de su mitad.
Introducir brevemente los métodos de plegado + calcado, plegado + recorte, y dibujo directo.
Emplear explícitamente la equidistancia de la figura original y de su imagen al eje de simetría.
Actividad 8: Obtener la figura completa.
Algunas veces se pide que no se resuelva sobre la lámina, sino en una hoja auxiliar.

En las primeras láminas se deja libertad para que los alumnos elijan el método que quieran (excepto el espejo y el mira) para obtener la figura completa en una hoja auxiliar, no en la lámina. Todos, excepto Nadia, utilizan calcado, sin doblar, haciendo correctamente las manipulaciones necesarias de inversión de la hoja. Nadia intentó plegar, pero no supo cómo seguir y, al ver a sus compañeros, siguió el método de éstos.

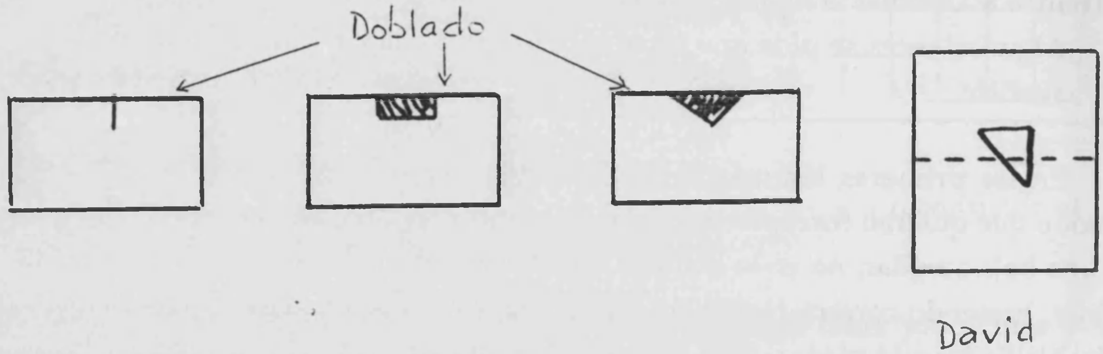
Curiosamente, en la segunda lámina, Nadia y Elisa intentan obtener la imagen sin hoja auxiliar. Tras doblar por el eje de simetría se paran porque no saben continuar, hasta que piensan que se debe a que necesitan una hoja auxiliar, en la cual sí lo resuelven bien. En una lámina posterior, la profesora le pide a Nadia que recurra al plegado; Nadia no está segura de cómo hacerlo, aunque luego todos los niños consiguen emplear ese método. El dibujo directo y el plegado + recorte lo resuelven correctamente sin problemas todos los niños.

Respecto a la figura inferior de la lámina 3-S-8.3, que es la único completa y separada del eje de simetría, todos los niños tienen en cuenta la equidistancia al eje de simetría al dibujar la imagen.

Láminas: 3-S-9 y hojas en blanco.
Objetivos: Utilización de la simetría axial.

Actividad 9: Tras doblar una hoja en presencia de los alumnos, el profesor hace cortes (como a los indicados en la lámina 3-S-9 o parecidos) y, tras cada situación que se propone, los alumnos deben dibujar en una hoja en blanco el hueco que aparecerá al desdoblar la hoja.
Ejercicio análogo, pero uno de los niños efectúa el corte.

Los cortes que realiza la profesora son los que muestro en el dibujo de la izquierda. Todos los niños resuelven bien los dos primeros, pero David hace mal el tercero, como se ve en el dibujo de la derecha.



Láminas: 3-S-10.1, 3-S-10.2 y 3-S-10.3.
Objetivos: Utilización de la inversión de orientación de una pieza al darle la vuelta a la hoja, colocándola por su otra cara.
Colocación de figuras simétricas respecto un eje.
Actividad 10: (A los niños se les dan varias piezas recortadas de las que mostramos en la lámina 3-S-10.1). Identificar las piezas que son iguales. Explicar en qué difieren las que son casi iguales.
Recortar dos veces la jarra de la lámina 3-S-10.2 y darle la vuelta a una, colocándola por la otra cara de la hoja. Situarlas en la lámina 3-S-10.3 de manera que sean simétricas respecto al eje. Comprobar con el mira.
Se coloca una jarra sobre la lámina 3-S-10.3, sin que se superponga a la línea y los alumnos deben situar la jarra simétrica respecto al eje dibujado y comprobar después con el mira su solución.

En relación con las piezas de la lámina 3-S-10.1, los niños no tienen ninguna dificultad en reconocer las inversas entre sí, las cuales identificas mediante: *Una mira hacia un lado y otra hacia otro.*

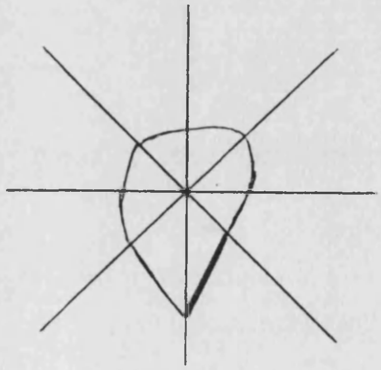
La inversión de la pieza (jarra) no es algo evidente: Aunque los alumnos sí han realizado ejercicios de obtención de una figura mediante copia de la mitad e inversión del papel (en la actividad 8), la transferencia al caso actual no es inmediata. El ejercicio que ahora se presenta es el primero (y el único) en el que hay que darle la vuelta al papel de la silueta (jarra) para colocar correctamente su imagen por una simetría axial. A los alumnos no se les da ninguna indicación de esa necesidad de "darle la vuelta" al papel.

La primera solución de Nadia corresponde a una traslación y la segunda a un giro de 180°. También David efectúa un giro de 180°. La comprobación con el mira produce finalmente la solución correcta. Los otros alumnos sí le dan la vuelta a la pieza, colocándola por la cara correcta, no sé si espontáneamente o tras la comprobación con el mira. La explicación que da Melisa sobre por qué le da la vuelta a la jarra es la siguiente: *No lo sé. Porque si la pones así no la puedes poner así porque entonces los picos* [el saliente superior] *están aquí ...*

Sesión 5

Láminas: 3-S-11.
Objetivos: Práctica de la realización de simetrías axiales.
Actividad 11: Completar la figura a partir del motivo que se ve, teniendo en cuenta que las líneas dibujadas son los ejes de simetría de la figura.

Tras la explicación de la profesora, la cual resuelve un ejercicio, los niños sí saben lo que hay que hacer. Algunas figuras no las resuelven bien los niños porque van deformando cada vez un poco la simetría y en algún caso no aplican la simetría más que en el primer eje, tal como se aprecia en el dibujo que muestro de David.



Láminas: 3-S-12.1 y 3-S-12.2.
Objetivos: Utilización de las características de la simetría axial que permiten reconocer visualmente la correspondencia entre dos figuras simétricas respecto de un eje y la existencia de eje. Inversión de la figura, equidistancia al eje, perpendicularidad (visión intuitiva).
Actividad 12: Justificar cuáles de los pares siguientes de figuras se corresponden mediante la simetría cuyo eje es la línea dibujada. Comprobar con el mira las respuestas.

Por lo general los niños sí resuelven bien los ejercicios. La forma de realizarlos es en común, no cada alumno individualmente, por lo que no se puede detectar si algún alumno que no conteste a un ejercicio tiene las ideas correctas o incorrectas. Los casos en los que se produce algún error son típicos:

-Desplazamiento en horizontal. Por ejemplo, Nadia lo comete en los coches y los puntos.
-Traslación. Por ejemplo, Nadia lo comete en las jarras y Elisa en las caras.

Tras la discusión en común las niñas se dan cuenta de su error. En relación con el error de la traslación, precisamente cuando Nadia lo comete, Elisa le explica que se ha equivocado, basándose en la inversión de la figura, lo cual es correcto, y cuando posteriormente Elisa se equivoca, es Nadia quien explica el error mediante la inversión. O sea, que parece que sí saben que la figura se invierte, aunque a veces no le presten atención a esa característica. La explicación de Nadia es: *No,* [las caras no son simétricas] *porque el pendiente tendría que estar en la otra oreja.*

Las justificaciones que dan los niños en varios pares de figuras se basan en el plegado: *Al doblar sí / no coinciden.*

Ejemplos de justificaciones de los niños ante pares concretos de figuras son los siguientes:

Nadia [banderas; no son simétricas] *Aunque el eje esté recto* [coge un mira], *si está una así y la otra así, al doblar no sirve.*
Melisa [banderas]: *Cada una está en una posición.*

David [jarras]: *Que está torcida una jarra... Que está una al revés... Que no coinciden... Por ejemplo, el asa y el pico de ésta daría en la otra asa* [Estas frases no las enuncia David seguidas. Tras cada una de ellas, la profesora le pide una aclaración y David contesta la siguiente].

Sesión 6

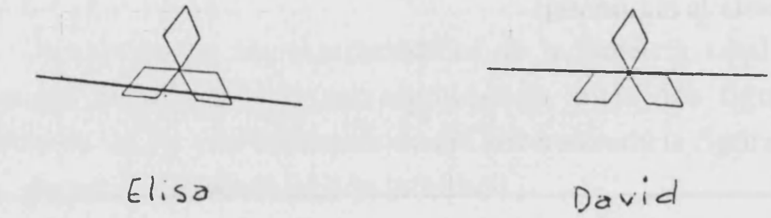
Láminas: 3-S-13.
Objetivos: Introducción de los ejes de simetría de una figura.
Aplicación de los conocimientos que se poseen sobre simetrías para obtener los ejes de simetría de una figura con la ayuda del mira.
Actividad 13: Empleando el mira, obtener todos los ejes de simetría de cada una de las figuras.

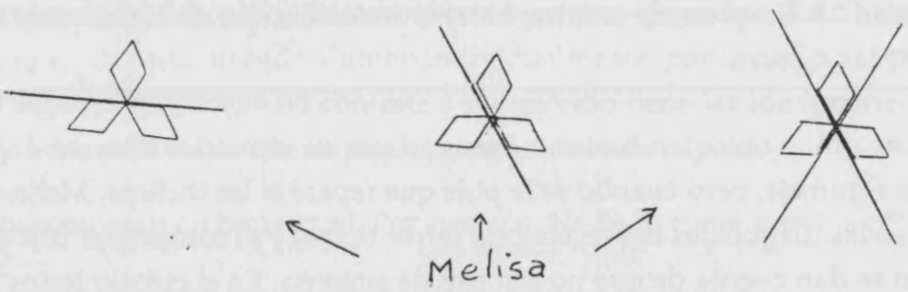
Los niños obtienen bastante bien los ejes de simetría. Elisa se deja en dos figuras algún eje, pero cuando se le pide que repase sí los incluye. Melisa y David incluyen las diagonales del rectángulo (error típico) y al comprobar con el mira es cuando se dan cuenta de que no son ejes de simetría. En el círculo todos los niños se dan cuenta de que hay muchos ejes.

Elisa dice enseguida: *Aquí se pueden poner muchos ejes.*
Nadia: *En el círculo muchísimos.*
Elisa: *Todos los que quieras.*
Prof.: *¿Millones?*
Elisa: *Millones y millones y millones.*

Láminas: 3-S-14.
Objetivos: Aplicación de los conocimientos que se poseen sobre simetrías.
Actividad 14: Empleando el mira, obtener la parte más pequeña de cada figura que, por simetrías, permite reproducir la figura completa. Trazar las líneas en las que hay que colocar el mira.
Asociar las líneas dibujadas con los ejes de simetría de la figura.

La profesora ayuda a los niños. Algunos casos resultan difíciles, como el primero de la lámina, para el que se pueden apreciar errores de Elisa y de David y tres intentos consecutivos de Melisa en los dibujos que mostramos a continuación.





Parece que, tras un rato, los niños se dieron cuenta de que había que hallar los ejes de simetría, y así resolvieron los ejercicios.

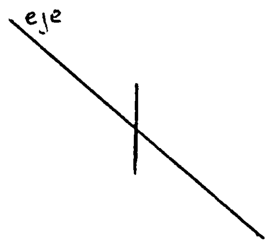
Láminas: 3-S-15.

Objetivos: Observación de las características matemáticas de la simetría axial asimiladas por los alumnos: Equidistancia y perpendicularidad respecto al eje.

Utilización de la simetría axial en objetos matemáticos y situaciones no empleados hasta el momento (segmentos y corte con el eje de simetría).

Actividad 15: Obtener el segmento simétrico de cada uno de los dibujados respecto al eje de simetría que se da.

Aunque no es lo usual en las experimentaciones que hemos realizado con grupos completos de alumnos del Ciclo Superior de E.G.B., estos niños no cometen errores. Tan sólo Melisa deja sin dibujar el segmento simétrico del que se ve en el dibujo. Veamos la explicación que da:



Prof.: *¿Por qué no la has completado?*
Melisa: *Porque creía que partía el eje.*
Prof.: *¿Qué pasaría al reflejarse?*
Melisa: *Que se cortaría, reflejada mal.*
Prof.: *¿Mal?*
Melisa: *No. Bien. Pero tiene un reflejo que no sé qué hacer.*

Láminas: 3-S-16.
Objetivos: Observación de las características matemáticas de la simetría axial asimiladas por los alumnos: Equidistancia y perpendicularidad respecto al eje.
Utilización de la simetría axial en situaciones no empleados hasta el momento (figura cuya simétrica es ella misma) o difíciles (eje inclinado con segmento horizontal)
Actividad 16: Obtener la figura simétrica.

Los niños enseguida reconocen la invarianza de la figura cuyo eje de simetría coincide con el eje respecto al cual hay que simetrizar (árbol): *No hay que hacerla porque se refleja igual.*

La posición eje inclinado-figura horizontal, que en los estudios sobre errores en la realización de simetrías siempre es de las más conflictivas, sólo la resuelve bien David. Entre los otros niños, la solución más frecuente es la de hacer una inversión con desplazamiento horizontal.