VALÈNCIA

Matemáticas
T.D
200

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
FACULTAT DE MATEMÀTIQUES

Departament de Didàctica de la Matemàtica

LA ENSEÑANZA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE REGLA Y COMPÁS. DEL MUNDO DE LA PURA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS A LA ESCUELA MEDIA ARGENTINA: ESTUDIO DE DOS CASOS

TESIS DOCTORAL

PRESENTADA POR:

Liliana Eva Siñeriz

DIRIGIDA POR:

Dr. Luis Puig Espinosa
Dr. Ángel Gutiérrez Rodríguez

Valencia, 2000

UMI Number: U603101

All rights reserved

INFORMATION TO ALL USERS
The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted.

In the unlikely event that the author did not send a complete manuscript
and there are missing pages, these will be noted. Also, if material had to be removed,
a note will indicate the deletion.

UMI U603101
Published by ProQuest LLC 2014. Copyright in the Dissertation held by the Author.
Microform Edition © ProQuest LLC.
All rights reserved. This work is protected against
unauthorized copying under Title 17, United States Code.

ProQuest LLC
789 East Eisenhower Parkway
P.O. Box 1346
Ann Arbor, MI 48106-1346

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
BIBLIOTECA CIÈNCIES

Nº Registre 16056
DATA 12-2-01
SIGNATURA TD200/Matemat.

Nº LIBIS: i18896236

31 cm

b16737362

A mi compañero de siempre
y a nuestra hija Malén

AGRADECIMIENTOS

Muchas personas han contribuido de una forma u otra para que este trabajo pudiera llevarse a cabo. Quiero expresar mi agradecimiento a todas ellas, y especialmente

a Luis Puig y Angel Gutiérrez, que lo han hecho posible;

a Fernando Cerdán, quien me ha regalado muchas horas de trabajo, y que con su chispa intelectual y su calidez supo darme el apoyo necesario para seguir adelante;

a mis compañeras del grupo de investigación Edumat, que me alentaron en los momentos en que la página estaba en blanco;

a mis padres y hermano, que depositaron toda su confianza en mí;

a mis amigos, que siempre han estado para compartirlo todo;

y a Raúl y Malén, que...

ÍNDICE

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

1.1. Delimitación del campo de estudio 13

1.2. Propósitos del trabajo 15

1.3. Partes del trabajo 15

CAPÍTULO 2: PROBLEMAS DE REGLA Y COMPÁS

2.1. Dos ópticas diferentes 17

2.1.1. Desde la Geometría Sintética 17

2.1.2. Desde la Heurística 26

2.1.2.1. Método de los Dos Lugares 27

2.1.2.2. Método de la Figura Auxiliar 31

2.1.2.3. Método de la Figura Semejante 33

2.2. Los métodos y la generación de problemas 35

2.3. Operaciones básicas y construcciones elementales 38

2.3.1. Operaciones Básicas 38

2.3.2. Construcciones Elementales 39

2.4. Espacio teórico de problemas de algunas construcciones 45

CAPÍTULO 3: HACIA UN MODELO DE COMPETENCIA

3.1. Sobre el problema y la tarea 55

3.2. Resolución, solución y resultado 57

3.3. Sobre el proceso de resolución 60

3.3.1. Del proceso del resolutor ideal 61

3.3.2. De los componentes del proceso 63

3.4. Sobre la competencia en resolución de problemas de regla y compás 69

3.5. Sobre la competencia en la enseñanza de resolución de problemas de regla y compás 77

CAPÍTULO 4: RASGOS DE LA CONDUCTA COMPETENTE: ESTUDIO EXPLORATORIO

4.1. Propósitos del estudio 90
4.2. Obtención y análisis de datos 90
4.3. Instrumentos de análisis 94
4.3.1. Espacio real de problemas 96
4.3.2. Descriptores de la actuación según fases y aspectos cognitivos 96
4.3.3. Tabla de episodios y Poligonal del proceso 105
4.4. Actuación competente 110
4.5. Rasgos de competencia 150

CAPÍTULO 5: MODELO DE ENSEÑANZA

5.1. Sobre la enseñanza de resolución de problemas 161
5.2. La secuencia didáctica 169
5.2.1. Sobre los objetivos 170
5.2.2. Sobre el diseño 171
5.2.3. Sobre el contenido 172
5.2.4. Descripción de la secuencia didáctica 173
5.3. Descripción de la enseñanza impartida 182

CAPÍTULO 6: LA ACTUACIÓN DE LA DOCENTE DE ESCUELA MEDIA

6.1. Propósito y metodología 187
6.2. La Actuación Docente 188
6.3. Algunos rasgos en la actuación 250

CAPÍTULO 7: CONCLUSIONES

7.1. Conclusiones teóricas 267
7.2. Conclusiones de orden metodológico 269
7.3. Resultados de la observación de la conducta 270

REFERENCIAS 279

ANEXOS:

ANEXO I: Las clases del experto
ANEXO II: Programa de la asignatura a cargo del experto
ANEXO III: Unidad de Enseñanza
ANEXO IV: Las clases de la profesora de la escuela media

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Hace más de dos décadas que, desde los diferentes sectores implicados en los sistemas educativos, se insiste en la necesidad de poner un énfasis particular en la resolución de problemas a la hora de diseñar el currículum y de organizar las tareas concretas para los alumnos. Recientes formulaciones referentes a los fines de la enseñanza de la Matemática sostienen que la misma debe proveer a los estudiantes la oportunidad de explorar un amplio rango de problemas y situaciones problemáticas, como también un amplio rango de enfoques y técnicas, mediante la aplicación de diferentes métodos y estrategias de resolución al abordar dichos problemas. Estos fines tienen una inmediata implicación didáctica pues la actividad de resolución de problemas pasa a ser el centro de la tarea escolar.

Hay una gran variedad de investigaciones en el campo de resolución de problemas las cuales resultan ser grandes aportes para el análisis del proceso de resolución, puesto que enfocan los elementos que intervienen y la forma en que estos elementos modelan el proceso. En distintos capítulos haremos referencia a estos estudios dirigidos a la indagación del proceso, ya que han sido las bases sobre las que hemos realizado las elaboraciones teóricas en este trabajo.

El foco de esas investigaciones está en los resolutores, aunque de alguna manera están señalando aspectos a considerar en situaciones de enseñanza de resolución de problemas.

Las prácticas escolares configuran el campo de experiencias sobre el cual los alumnos desarrollan su competencia en resolución de problemas. Si asumimos que uno de los objetivos de la enseñanza en los sistemas educativos es promover las habilidades para resolver problemas, entonces se hace necesario examinar cómo se adquieren y promueven dichas habilidades en el aula.

Hay varios obstáculos para investigar la adquisición de estas competencias en el ámbito escolar, puesto que muchas veces la resolución de problemas se reduce a ejercicios rutinarios, que requieren la aplicación de algún algoritmo o de un hecho; y si se intenta observar la resolución de problemas que van más allá de estas rutinas,

probablemente no se pueda observar en clase. Sin embargo la necesidad de examinar este asunto es grande, ya que con ello se tendrá una mejor comprensión de las competencias en resolución de problemas, lo que llevará a adaptar los medios para ayudar a los alumnos en el desarrollo de las mismas.

Esta investigación pretende contribuir al estudio de la enseñanza de resolución de problemas en los sistemas educativos. Abordaremos este asunto, indagando la manera en que están presentes los elementos que intervienen en el proceso de resolución de problemas en situaciones de enseñanza.

Para tal fin dirigiremos la atención a los *problemas de regla y compás*, ya que requieren de ciertas habilidades en resolución de problemas; "regla y compás" es un tópico que puede ser utilizado para enseñar ciertas heurísticas, o ciertas formas de comportamiento heurístico. Podemos considerarlo como un componente para el profesor que pretende enseñar resolución de problemas, ya que envuelve ciertos modos y medios de resolución que son heurísticos. Estos modos y medios de resolución, que no suponen una garantía para llegar al resultado, pueden describirse independientemente del contenido, es decir que pueden examinarse desde el mundo de la pura resolución de problemas, de ahí que vayamos a importar los elementos teóricos de ese mundo para hacer el análisis del proceso de resolución de estos problemas.

Nos hemos centrado en los *problemas de regla y compás*, los cuales tienen un rico potencial heurístico, con la intención de elaborar un modelo teórico para interpretar los procesos que se desarrollan cuando un docente enseña a resolver estos problemas. Con ello se pretende sacar conclusiones referentes a la enseñanza de resolución de nuestros problemas específicos que contribuyan al estudio de la enseñanza de resolución de problemas en los sistemas educativos.

La presentación del trabajo está estructurada acorde al concepto metodológico de Modelo Teórico Local (MTL), introducido por Filloy, el cual enfoca el objeto de estudio desde distintas componentes interrelacionadas a fin de dar cuenta de la complejidad de los fenómenos observados, y pretende ser apropiado sólo para la interpretación de estos fenómenos específicos.

En el Modelo Teórico Local de Enseñanza de Resolución de Problemas de Regla y Compás, se contemplarán: un Modelo de Competencia, elaborado a partir del análisis de los problemas y de la conducta competente, un Modelo de Enseñanza, organizado

sobre la base de algunos aspectos constitutivos de la competencia, y un Modelo de Actuación, en el que se describe la actuación docente de acuerdo a la forma que en ella adoptan los elementos del modelo de competencia[1].

PROPÓSITOS DEL TRABAJO:

En esta investigación se pretende examinar la enseñanza de la resolución de problemas geométricos de construcción cuando la misma se mira desde los elementos que conforman el proceso de resolución.

El propósito de este trabajo es doble. Por un lado, la intención es elaborar un modelo de competencia al enseñar a resolver problemas de regla y compás, y por otro, es estudiar en función de ese modelo la actuación docente, derivada de una enseñanza organizada en torno a algunos de esos elementos y a los contenidos e intenciones curriculares correspondientes a la geometría de primer año de la escuela media argentina (alumnos de 13 y 14 años).

PARTES DEL TRABAJO:

La lectura de bibliografía centrada en el contenido a tratar, construcciones geométricas con regla y compás, y el examen de diferentes trabajos situados en el mundo de pura resolución de problemas, han permitido identificar algunos elementos correspondientes a la competencia en resolución de problemas con regla y compás.

Dichos elementos debieran formar parte también de la conducta competente al enseñar a resolver estos problemas, no sólo porque el docente necesita ciertas competencias en lo que va a enseñar, sino porque será preciso que los considere a la hora de organizar una enseñanza tendiente a promover habilidades en la resolución de esta clase de problemas.

[1] Los nombres que hemos asignado a las componentes son los que se utilizan en Puig (1996). Filloy se refiere a ellas como Modelo de Competencia Formal, Modelo de Enseñanza y Modelo de los Procesos Cognitivos, o en algunos trabajos habla de Tendencias Cognitivas.

Por ende, la primera parte del trabajo ha consistido en el estudio teórico de los problemas y del proceso, lo cual ha permitido identificar algunos elementos del modelo de competencia en enseñanza de resolución de problemas de regla y compás. En los capítulos 2 y 3 se presentan los análisis teóricos hechos al respecto.

La segunda parte de esta investigación está centrada en otro de los componentes del MTL, el Modelo de Enseñanza, al cual nos referimos en el capítulo 5.

Para ello, inicialmente se ha diseñado una secuencia didáctica, que apunta a la apropiación de ciertas formas de trabajo heurístico y que contempla los contenidos e intenciones curriculares correspondientes a la geometría de primer año de la escuela media.

Luego se han llevado a cabo sesiones de trabajo con una profesora de escuela media, quien en una instancia posterior desarrollaría en sus clases la temática. En dichas sesiones fundamentalmente se ha prestado atención a esta secuencia y a algunos elementos del modelo de competencia que conforman el estudio teórico preliminar.

La tercera parte del trabajo se destinó a identificar nuevos elementos del modelo de competencia. Con intención de tener un mayor conocimiento de los elementos iniciales del modelo, y de estudiar la forma que adoptan en una enseñanza competente, se ha observado cómo están presentes en las clases de un profesor a cargo de un curso de resolución de problemas, con amplia experiencia en la enseñanza de la resolución de problemas. En el capítulo 4 se presenta la descripción de la conducta de este experto, así como también los instrumentos de análisis que hemos elaborado para tal fin, lo que lleva a la revisión del componente de competencia del modelo teórico. Es decir, los datos empíricos de la exploración de la actuación del experto nos permitieron identificar ciertos rasgos de competencia al enseñar a resolver nuestra clase de problemas, que se incorporan al Modelo de Competencia diseñado inicialmente.

En función de los resultados que se desprenden de dicho estudio, en el capítulo 6 se describe la actuación de la docente de escuela media, y se interpretan los datos en términos del nuevo modelo teórico. Por último, en el capítulo 7, se recogen las conclusiones más relevantes que fueron apareciendo en el transcurso de este trabajo.

CAPÍTULO 2

PROBLEMAS DE REGLA Y COMPÁS

2.1. DOS ÓPTICAS DIFERENTES

Podemos comenzar acordando que las construcciones con regla y compás son construcciones geométricas, independientes de la medida, en las que los únicos instrumentos permitidos son la regla no graduada y el compás, y que en ellas se utiliza la regla para trazar rectas, y el compás para trazar circunferencias.

Sin embargo esta caracterización de dichas construcciones es insuficiente para evidenciar el espíritu desde el cual se las concibe o la óptica adoptada para su consideración. En los apartados siguientes haremos referencia a dos perspectivas distintas bajo las cuales se ha abordado esta temática: la primera de ella es la que proviene de la Geometría Sintética, la cual nos remitiremos a interpretar desde la obra euclídea, y la segunda surge desde el campo de la resolución de problemas.

2.1.1. Desde la Geometría Sintética

Los geómetras griegos, de acuerdo a las fuentes que nos permiten conocer su obra, habían llegado a distinguir tres tipos de problemas: los planos, para cuya solución bastaban líneas rectas y circunferencias; los sólidos, que suponían el uso de secciones cónicas; los lineales, que requerían curvas más complicadas (espiral, cuadratriz, etc.).

Según L. Vega en la introducción de los "Elementos", Pappus (s. III d.C.) sostiene que Euclides ha ofrecido un criterio para identificar los problemas planos: "A es un problema plano sólo si es efectivamente soluble por el procedimiento de regla y compás; luego si A es un problema plano, A tiene una construcción efectiva sobre la base sentada en los Elementos". (Euclides 1991, págs. 55-56)

Así, las llamadas "construcciones de regla y compás", habrían sido para Euclides aquellas que se obtienen intersectando rectas y circunferencias, cuya existencia estaba garantizada por ciertas nociones comunes y cinco postulados:

"1- Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.

2 - Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta.

3 - Y el describir un círculo con cualquier centro y distancia.

4 - Y el ser todos los ángulos rectos iguales entre sí.

5 - Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos".

(Euclides 1991, pág. 197)

Dichos postulados se presentan a continuación de veintitrés definiciones, con las que se inicia el libro I de "Los Elementos", obra que suele fecharse hacia el s. III a.C.

El primer postulado permite la construcción efectiva de la recta una vez conocida su definición[1]. El segundo establece que un segmento sólo puede prolongarse de una única manera por cada extremo, por ende dos rectas no podrán tener un segmento común. El tercer postulado tiene ciertos rasgos del primero, en este caso permite la construcción del círculo luego de contar con la noción correspondiente[2].

Euclides justifica la construcción de ciertos objetos y postula la de otros, pero para ello sigue cierta racionalidad. Las construcciones de la recta y de la circunferencia se establecen por postulados, que son las construcciones que se corresponden con los instrumentos regla y compás -o con las operaciones elementales que se hacen con dichos instrumentos-, y a partir de ello se justifican las demás construcciones. Por ejemplo en la proposición 1, a la cual haremos referencia más adelante, se justifica la construcción del triángulo equilátero, se demuestra que tal objeto es construible o, dicho de otro modo, se garantiza mediante una prueba que existe tal objeto.

El cuarto postulado es de naturaleza muy diferente a los tres anteriores, pues no se refiere a la posibilidad de hacer ciertas construcciones, sino que establece una propiedad de los ángulos rectos, la de ser una magnitud determinada que representa un patrón para medir los demás tipos de ángulos. L. Vega señala que Proclo (s. V d.C.) ha indicado que posteriormente este postulado fue considerado como una noción común o axioma, e incluso ha sugerido considerarlo como tal, aunque más tarde, ese filósofo y

[1] Definición 4: "Una línea recta es aquélla que yace por igual respecto de los puntos que están en ella".

[2] Definición 15: "Un círculo es una figura plana comprendida por una línea tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí".

comentarista del tratado euclideo, lo tomará como proposición susceptible de demostración.

El postulado quinto, por un lado y en cuanto al aspecto operativo, se parece a los tres primeros postulados, pues establece la existencia de puntos de intersección entre rectas. Por otro lado completa la noción de paralelismo esbozada en la definición de rectas paralelas[3]; probablemente debido a su asociación con una definición es que se lo ha considerado en los siglos XVI y XVII como una noción común. L. Vega también señala que, según Proclo, "debe ser borrado de la lista de postulados porque se trata de un teorema lleno de dificultades, que Tolomeo se propuso resolver en un libro y cuya demostración requiere varias definiciones y teoremas" (Euclides 1991, pág 57). La historia donde se pretende bajar de su pedestal a este postulado es muy conocida, por un lado los intentos concluían en supuestos deductivamente equivalentes al mismo en el marco de la geometría euclidea, y por otro llevaron a vislumbrar las geometrías no euclideanas.

Los postulados no se demuestran y además no son evidentes para los sentidos -esta cualidad se reserva para las nociones comunes-, son una petición de acuerdo. Tal como lo expresa Puig (1994) parafraseando a Árpád Szabó, los postulados designan en la dialéctica una petición a la que el interlocutor no asiente de inmediato sino ante la que tiene reservas. Por eso Euclides escribe en imperativo: Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera, y de igual manera el resto de los postulados, con el fin de señalar al lector cuáles son los poderes constructivos de los que ha de dotarse quien haya de construir los objetos geométricos que van a estudiarse en los Elementos.

Con respecto a las nociones comunes, llamadas axiomas por otros geómetras, podemos decir que se distinguen por su calidad de principios, no sólo verdaderos y evidentes, sino también indemostrables; además, y según las pautas aristotélicas, estos deberían tener un alcance más general que el limitado por el campo temático de una ciencia determinada.

El conjunto de nociones comunes también llevó a generar algunas diferencias entre los matemáticos helenísticos. Por un lado, parece ser que hubo un intento de

[3] Definición 23: "Son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos".

Apolonio de demostrar alguna de estas nociones comunes. Por otro lado, hubo algunos comentadores y editores de este tratado que añadieron nuevos axiomas acerca de las relaciones de igualdad y desigualdad, a los cuales Proclo sugiere rechazar para no aumentar el número de axiomas sin necesidad.

Las cinco nociones comunes admitidas en la obra euclidea son:

i) Las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí.

ii) Y si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales.

iii) Y si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales.

iv) Y las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.

v) Y el todo es mayor que la parte.

(Euclides 1991, págs. 199-201)

En forma inmediata a establecer sus postulados y nociones comunes, Euclides presenta una serie de problemas y teoremas, a los cuales algunos traductores de este tratado les dan el nombre de proposiciones.

Según la tradición griega un problema se diferenciaba de un teorema. Un problema representaba un objeto geométrico a hacer, por ejemplo la construcción de una figura; en cambio un teorema era una proposición a establecer acerca de una característica esencial –propiedad, relación- de los objetos matemáticos construidos o dados. La índole de las proposiciones geométricas también dio lugar a varias controversias dentro del círculo platónico, algunos defendían su calidad de teoremas porque versaban sobre objetos eternos de una ciencia teórica, y otros esgrimían su condición primera de ser problemas.

Puig (1996) recoge el sentido dado a la palabra problema en la antigua Grecia y para ello alude a comentarios de Pappus y de Proclos. Pappus hace la discriminación entre problemas y teoremas y hace corresponder cada una de las dos palabras con los verbos de los que se derivan: "Aquellos que propugnan una terminología más precisa en las cuestiones estudiadas en geometría, usan el término problema en el sentido de una indagación en la que se plantea (probálletai) hacer o construir algo, y el término teorema en el sentido de una indagación en la que se investigan (theoreítai) las consecuencias y las implicaciones necesarias de ciertas hipótesis, pero, entre los antiguos, algunos las describían todas como problemas, y algunos, todas como teoremas" (Puig, 1996, pág.

28). Asimismo, Proclo al comentar el primero de los libros de Euclides, distingue de entre todo lo que se sigue de los principios –definiciones, postulados y axiomas- a los problemas y teoremas "los primeros abarcando la generación, división, substracción o adición de figuras, y en término generales, los cambios que se realizan en ellas, y exhibiendo los segundos los atributos esenciales de cada una" (Puig, 1996, pág. 29). Además indica que las cosas que se plantean como problema hay que hacerlas o crearlas, ya que puede ser posible que sean distintas a lo que dice el enunciado, y a diferencia de ello, las cosas que se plantean como teoremas son de un modo y eso es lo que hay que mostrar. Para ilustrar estas ideas Proclo comenta que "construir un triángulo equilátero sobre una recta" es un problema, pues sobre una recta también se pueden construir triángulos no equiláteros, en cambio "inscribir un ángulo recto en un semicírculo" es un teorema puesto que no hay que crear ya que siempre que se dibuje un ángulo inscripto en un semicírculo será recto, y efectivamente eso es lo que ha de probarse.

La distinción entre problema y teorema puede percibirse en la organización del conjunto de proposiciones de los Elementos de Euclides; en él tanto los problemas como los teoremas se presentan como proposiciones[4], pero basta con remitirse a la

[4] Según Vera L., Proclo sostiene que en dichas proposiciones hay un patrón de prueba común que consta de los siguientes pasos, pero luego parece reconocer que no siempre se dan todos estos pasos en las pruebas de los Elementos y enfatiza tres de ellos, los cuales a su criterio nunca han de faltar -el enunciado, la demostración y la conclusión-:

1) Enunciado (*prótasis*): formulación en términos generales de lo que se considera dado y de lo que se busca probar (proposición del objeto a construir si es un problema, o del aserto a establecer si es un teorema).
2) Exposición (*ékthesis*): presentación de lo dado o introducción de un caso determinado de aplicación del enunciado mediante la cláusula "sea ..." y uso de letras para designar los elementos del caso.
3) Determinación o delimitación (*diorismós*): especificación del objeto de la prueba por referencia al caso expuesto; en los problemas esto se lleva a cabo mediante la fórmula "lo que se requiere es ..." y en los teoremas mediante "digo que ...". Por diorismo también se entiende delimitación de las condiciones de posibilidad de la prueba; cuando tiene este significado se suele poner como apéndice del enunciado del problema.
4) Preparación (*kataskeué*): disposición de construcciones y relaciones, a partir de lo dado y en orden a la obtención del resultado propuesto.

última línea de la demostración correspondiente para poder discriminarlos –en los problemas se concluye con la frase "que era lo que había que hacer", y en los teoremas con "que era lo que había que demostrar"-. No obstante los problemas también contienen demostraciones, en las que se muestra que la construcción satisface las condiciones del problema.

Las tres primeras proposiciones del libro I son problemas:

- Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada.

- Poner en un punto dado (como extremo) una recta igual a una recta dada.

- Dadas dos rectas desiguales, quitar de la mayor una recta igual a la menor.

(Euclides 1991, págs. 201-205)

La proposición 1 se deriva de la primera de las nociones comunes y de los postulados 1 y 3.

La proposición 2 prueba que es posible la construcción de un segmento congruente a otro segmento dado, habiendo determinado previamente uno de los extremos del segmento buscado. La misma se apoya en la proposición anterior (construcción del triángulo equilátero), en las nociones comunes i) y iii), y en los tres primeros postulados.

La proposición 3 significa, en versión moderna, transportar un segmento sobre una semirrecta dada. Esto queda más claro en la versión de Beppo Levi (1947) del tratado euclideo, que expresa esta proposición en los siguientes términos "Dados dos

---

5) Demostración (*apódeixis*): proceso demostrativo que consiste en la derivación de consecuencias sobre la base de los conocimientos previos, ya sean definiciones, postulados, axiomas, o proposiciones sentadas en pruebas anteriores.

6) Conclusión (*sympérasma*): aserción de que se ha satisfecho el diorismós en el caso de un problema o reiteración del enunciado en el caso de un teorema como confirmación de que el objeto de la prueba ha sido establecido. Viene marcada con "por consiguiente". La conclusión en los problemas se remata con la cláusula "que era lo que había que hacer", y en los teoremas con "que era lo que había que demostrar".

(Euclides 1991, págs. 35-37)

segmentos, cortar del mayor un segmento igual al otro", y comenta que desde su punto de vista, Euclides supone que son dados un segmento y una semirrecta, a la cual indica como segmento mayor. Para transportar dicho segmento sobre la semirrecta se requiere aplicar la proposición 2, lo que permite construir un segmento congruente al dado con extremo en el origen *o* de la semirrecta, para luego trazar la circunferencia determinada por los extremos de dicho segmento (tomando *o* como centro).

Para entender el orden de proposiciones establecidas por Euclides, es necesario hacer algunas precisiones acerca de la naturaleza ideal de los instrumentos implicados. Los tres primeros postulados sientan las bases operativas del procedimiento de construcción con regla y compás, con la regla se trazan rectas y con el compás se describen circunferencias. La regla es ilimitada, sin marcas y tiene sólo un borde; el compás es un instrumento que sólo traza circunferencias de centro dado pasando por un punto dado. A diferencia del instrumento compás, el compás de Euclides no puede por ejemplo transportar distancias (o longitudes); podríamos imaginarlo como un compás que "se cierra o se abre cuando nos salimos del plano", es decir pierde su amplitud al salirnos del plano, de ahí el nombre de compás colapsable que le dieron los anglosajones.

Es por eso que se hace necesaria la proposición 3, puesto que permite teóricamente transportar distancias. No sólo nos da la posibilidad de transportar un segmento, sino que además nos habilita a transportar una circunferencia (transportar una circunferencia es construir con centro en un punto dado una circunferencia congruente a una $C_{o,\overline{ab}}$ dada) y a construir una circunferencia dados un centro y un radio. A partir de dicha proposición el "compás euclídeo" puede materializarse por nuestro compás físico.

La suficiencia de los postulados para transportar segmentos y circunferencias nos permite visualizar la elegancia del método euclídeo.

Por todo lo expuesto, podemos concluir que en la concepción de Euclides, las construcciones de regla y compás no tienen por objetivo la realización efectiva de la construcción, sino mostrar por un encadenamiento lógico de proposiciones que algo es construible con regla y compás.

En este punto vamos a hacer una breve referencia a la consideración de las construcciones que nos ocupan en el marco del diseño, ya que es una visión

completamente opuesta a la euclidea. Sin embargo, cabe destacar que en este enfoque se apunta a la precisión en el dibujo y que, por el contrario, nuestro modelo de enseñanza persigue ciertas formas de razonamientos en lugar de precisión.

Los manuscritos de las construcciones de regla y compás provenientes de los matemáticos antiguos, al parecer se componían de figuras a mano alzada, las cuales eran esquemas cuya función fue sostener visualmente el razonamiento. Posteriormente, las normas gráficas impuestas por la imprenta fueron las que llevaron a transformar estos esquemas en dibujos, y esto dio origen a una nueva perspectiva para enfocar dichas construcciones, cuyo objetivo es encontrar un buen algoritmo de construcción, el cual proporcione un medio sencillo para obtener el objeto geométrico buscado. A diferencia de la visión euclidea, centrada en establecer si es posible construir con regla y compás una cierta figura, aquí la intención es simplificar el trabajo del dibujante y encontrar los medios óptimos para llevar a cabo la construcción utilizando dichos instrumentos.

Chevallard y Jullien (1991) analizan las diferencias entre "trazados con regla y compás" y la concepción euclidea de regla y compás, la cual llaman "constructibilidad con regla y compás". Comparan la simplicidad de una solución clásica a un cierto problema de construcción frente a la dificultad de llevar a cabo el procedimiento implicado utilizando los instrumentos de dibujo[5]. Como la solución clásica establece la posibilidad de construir con regla y compás la figura requerida, la consideran una prueba de constructibilidad con regla y compás, en lugar de considerarla un "buen" algoritmo de construcción que permite construir efectivamente la figura requerida. Con la intención de encontrar un "buen" algoritmo de construcción, estos autores hacen

[5] Para ello presentan la solución propuesta por Rouché y Comberousse al problema "Trazar la bisectriz de un ángulo cuyo vértice se desconoce". La misma consiste en trazar una perpendicular a cada recta y ubicar en cada una un punto a una distancia arbitraria d, luego trazar las paralelas por dichos puntos, su punto de intersección es un punto de la bisectriz, luego se repite el procedimiento para hallar otro punto de la misma. La simplicidad de esta solución es tal que se utilizan un par de líneas para justificarla; pero a esta simplicidad se opone la dificultad que surge cuando se trata de realizar efectivamente la construcción correspondiente con regla y compás. Es necesario trazar dos perpendiculares a una recta dada sobre las cuales se toman longitudes iguales, después dos paralelas a una recta dada pasando por un punto dado; así se obtiene un primer punto de la bisectriz buscada, luego de lo cual es necesario recomenzar el mismo trabajo para obtener un segundo punto, y por fin trazar la bisectriz.

referencia a la geometrografía[6] y hacen un breve análisis de la obra de E. Lemoine[7], su creador. De esta manera ponen en evidencia dos formas contrastantes de abordar las

[6] "En el trabajo de E. Lemoine, intitulado Sobre la geometrografía o Arte de las construcciones geométricas, se indica que este arte tiene un cuádruple objetivo: 1) hacer notar de manera convencional la simplicidad y exactitud de las construcciones geométricas, lo cual permitirá su comparación; 2) encontrar los procedimientos para efectuar, lo más simple posible, una construcción determinada de la Geometría; 3) discutir una construcción dada para encontrar una más simple; 4) determinar entre todas las construcciones posibles de un mismo objeto aquella que es la más simple y que se denominará entonces la construcción geometrográfica. Vemos entonces que la geometrografía se interesa por los procedimientos de construcción mismos, y se propone compararlos a fin de encontrar los más simples según criterios determinados. La singularidad misma de esta forma de encarar el estudio de los procedimientos de construcción y el poco éxito que ella encontró, remarcan la omnipresencia de los problemas de constructibilidad en Matemáticas y ponen en evidencia de nuevo, y de manera más precisa, la distinción entre demostración de constructibilidad y algoritmo de construcción". (Chevallard y Jullien 1991, pág. 67)

[7] "Examinemos el trabajo de Lemoine. Define primero las "operaciones elementales de construcción":

Oper R_1: Hacer pasar el borde de una regla por un punto

Oper R_2: Trazar una linea siguiendo el borde de una regla

Oper C_1: Posar una punta del compás sobre un punto

Oper C_2: Posar una punta del compás en un punto arbitrario de una recta

Oper C_3: Trazar una circunferencia

Para cada procedimiento de construcción se tendrá un símbolo del tipo Op: ($l_1 R_1 + l_2 R_2 + m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3$) ; donde l_1 , l_2 , m_1 , m_2 y m_3 son el número de veces que se realiza cada operación elemental

$l_1 + l_2 + m_1 + m_2 + m_3$ = coeficiente de simplicidad

$l_1 + m_1 + m_2$ = coeficiente de exactitud

l_2 y m_3 es el número de rectas y circunferencias trazadas

.....Una vez diseñado el marco teórico, el autor estudia por este medio un cierto número de construcciones clásicas y muestra que en general, no solamente no son construcciones geometrográficas, sino que se obtienen a menudo con coeficientes elevados, tanto en simplicidad, como en exactitud o en el número de rectas y circunferencias a trazar. Entre otras se interesa por la solución propuesta por Rouché y Comberousse al problema del trazado de la bisectriz de un ángulo dado cuando no se conoce su vértice. Esta construcción tiene el símbolo: Op: ($18 R_1 + 9 R_2 + 32 C_1 + 4 C_2 + 28 C_3$) con una simplicidad de 91, una exactitud de 54, utilizando 9 rectas y 28 circunferencias. Luego propone su construcción geometrográfica con una simplicidad de 16, una exactitud de 9, utilizando 2 rectas y 5 circunferencias. Su símbolo es op: ($4R_1 + 2R_2 + 4C_1 + C_2 + 5C_3$); y Lemoine concluye: de 91 operaciones elementales a 16 con la geometrográfica canónica, son las reducciones que la geometrografía conduce al operar en la construcción de este problema tan simple".(Chevallard y Jullien 1991, pág. 68)

construcciones con regla y compás: la de Euclides, acorde a un punto de vista matemático, el cual gira exclusivamente sobre los problemas de constructibilidad, sin preocuparse necesariamente de los medios para realizar la construcción efectiva; y la de Lemoine, que persigue simplificar los procedimientos de construcción, apuntando así hacia una teoría del diseño.

2.1.2. Desde la Heurística

Desde una perspectiva heurística, el interés en los problemas de regla y compás se centra en el estudio de los modos de comportamiento y los medios que se utilizan en su proceso de resolución que son independientes del contenido, y que no brindan garantía de que se obtenga la solución. Ciertamente los problemas que estamos considerando tienen un contenido matemático, el cual está presente cuando actúan sobre el problema esos modos y medios de resolución que llamaremos heurísticos, ya que pueden describirse en forma independiente del contenido.

Según Polya (1962) las construcciones con regla y compás son un tema que ocupa tradicionalmente un lugar importante en la enseñanza de la geometría plana, ya sea por su interés práctico como teórico, además sostiene que son muy adecuadas para familiarizar al estudiante con las figuras geométricas y para instruirlo en la resolución de problemas; y por esta última razón aborda la discusión de estos problemas.

En ese libro Polya estudia algunos métodos generales para la elaboración de planes, o modelos generales de procedimientos que son propios de problemas particulares. Puig (1996) expresa que este autor intentaba ir más allá de esto, que su intención habría sido presentar un "método general" que, aunque anunciado en el primer tomo, años más tarde no acaba de aparecer en el segundo tomo. (Puig 1996, pág. 42). Dejando de lado cualquier especulación teórica al respecto, cabe indicar que nuestro interés se dirige hacia los métodos generales aplicables a los problemas de regla y compás.

En este apartado vamos a examinar los tres métodos de resolución presentados por Polya al abordar las construcciones geométricas que nos ocupan, los cuales utilizaremos para el análisis de los problemas y de la actuación docente. Dichos métodos plantean una serie de pasos a seguir, que se traducen en la construcción de

ciertos objetos geométricos, para lo cual no se establecen pautas para su solución; es decir estos métodos no garantizan la solución del problema inicial, sino que lo transforman en construcciones o problemas más abordables.

Nuestra óptica respecto a las construcciones con regla y compás es que son problemas en los que están presentes ciertos métodos de resolución y nuestro objetivo será precisar cómo dichos métodos modelan el proceso de resolución.

A tal fin, y como primer paso, nos referiremos a cada uno de ellos, para luego en la sección siguiente analizar su impacto en el proceso de resolución.

2.1.2.1. Método de los Dos Lugares

La proposición 1 del libro I de Euclides es la construcción del triángulo equilátero dado el lado, y hemos visto que la ubicación de esta proposición responde a cierta racionalidad, puesto que cada una de las construcciones euclideas se genera por un encadenamiento lógico de proposiciones ya establecidas.

Polya inicia el capítulo I de su libro diciendo que, a pesar de que en el sistema euclideano hay suficientes razones para restringir el problema al triángulo equilátero, él abordará un problema más general, cuya solución es análoga. De este modo aborda la construcción de un triángulo dados los tres lados. Para ello describe los pasos para realizar dicha construcción y orienta a descubrir el modelo que subyace, el cual enuncia de la siguiente manera:

"Método de los Dos Lugares":

1) Reducir el problema a la construcción de un punto.

2) Dividir la condición en dos partes de modo que cada parte suministre un lugar geométrico para el punto incógnita; cada lugar debe ser circular o rectilíneo.

Una vez presentado el modelo, propone una serie de ejemplos de aplicación, en alguno de los cuales resalta una característica esencial de los lugares geométricos a considerar, ser circulares o rectilíneos.

El autor culmina el capítulo haciendo algunos comentarios acerca de su concepción de la noción "lugar".

> El término "lugar" significa esencialmente lo mismo que el término "conjunto": el conjunto (o lugar) de los puntos del plano que están a una distancia dada de un punto dado es una circunferencia.
>
> En este ejemplo, definimos el conjunto (o lugar) enunciando una condición que sus elementos (puntos) deben satisfacer, o una propiedad que estos elementos deben poseer: los puntos de una circunferencia satisfacen la condición, o tienen la propiedad, de estar todos contenidos en el mismo plano y todos están a igual distancia de un punto dado.
>
> Los conceptos de "condición" y "propiedad" están firmemente ligados con el concepto de un conjunto. En muchos ejemplos matemáticos podemos clara y simplemente enunciar la condición o propiedad que caracteriza a los elementos de un conjunto. Aún, si está faltando una descripción más informativa siempre podemos decir: los elementos del conjunto S tienen la propiedad de pertenecer a S, y satisfacen la condición de que pertenecen a S. (Polya 1962, pág. 21)

Además hace unos comentarios adicionales con el fin de extender su dominio de aplicación, en los cuales se vale de la analogía para utilizarlo en la resolución de problemas geométricos de construcción en el espacio, y llama a esta nueva versión "Método de los tres lugares".

Al hablar de analogía, cabe considerar el primer volumen de su segundo libro (Polya, 1954; traducción castellana Polya, 1966) en el cual hace una referencia más precisa a este término, y define la "analogía aclarada" de la siguiente manera "La analogía es una especie de semejanza. Es diríamos, semejanza sobre un nivel definido y conceptual.... Objetos semejantes son aquellos que concuerdan entre sí en algún aspecto. Si usted trata de delimitar el aspecto en que concuerdan para definir conceptos, usted mira estos objetos semejantes como análogos. Si tenemos éxito en aclarar los conceptos, hemos clarificado la analogía.... Dos sistemas son análogos si concuerdan en relaciones claramente definibles de sus partes respectivas" (pág.38). Así un concepto de geometría plana puede tener análogos en geometría sólida, y aclarar la analogía consiste en especificar las relaciones en que concuerdan. Por ejemplo un triángulo en un plano puede decirse que es análogo a un tetraedro en el espacio puesto que: en el plano dos rectas no pueden encerrar una parte de éste y tres sí pueden hacerlo, en el espacio tres planos no pueden y cuatro sí. "La relación del triángulo con el plano es la misma que la del tetraedro con el espacio en cuanto que ambos están limitados por el número mínimo de elementos" (pág. 39). Puig al referirse a la analogía, rescata estos y otros fragmentos de ese libro de Polya, y señala que "buscar algo análogo" es una sugerencia heurística

que no brinda indicación alguna acerca de lo que efectivamente hay que hacer, en cambio la "analogía aclarada" puede ser concebida como una herramienta heurística, en la medida que precisa cuál es el tipo de transformación que hay que realizar (Puig 1996, pág. 41).

Desde este punto de vista es que Polya (1962) establece la analogía entre el problema "Construir un triángulo dados sus tres lados" y el problema "Hallar un tetraedro dadas sus seis aristas". En este último caso se construye con tres aristas la base del tetraedro y el problema se reduce a hallar el vértice restante. El punto buscado debe satisfacer tres requisitos, lo cual se traduce en su pertenencia a tres superficies esféricas.

Posteriormente y a fin de que el método aún pueda aplicarse a una mayor variedad de problemas, en el capítulo 6 hace una generalización del mismo: "*1) Dividir la condición en cláusulas apropiadas; 2) Hallar el lugar correspondiente a cada una de las cláusulas; 3) Hallar el objeto matemático buscado mediante la intersección de esos lugares*" (pág. 135).

Esta generalización del método, permitiría su aplicación en problemas que no se pueden reducir a la construcción de un punto, sino que el objeto matemático a determinar puede ser una recta, un segmento, etc. Por ejemplo podría ser aplicado al problema: "Por un punto p interior a una circunferencia trazar una cuerda de longitud dada ab" [8].

Los datos son una circunferencia C(o,R), un punto p interior a la misma y un segmento; y la incógnita es una cuerda, un segmento X. Dividiendo la condición en dos partes: 1) X pasa por p, 2) X es congruente al segmento dado, y teniendo en cuenta que dos cuerdas son congruentes si y sólo si equidistan del centro de la circunferencia, podemos concluir que X pertenece al haz de cuerdas que pasa por p y al conjunto de cuerdas tangentes a una circunferencia concéntrica a la dada y de radio $R_1 = \sqrt{R^2 - (ab^2/4)}$. Por tanto el problema se reduce a trazar las tangentes exteriores a una circunferencia $C(o,R_1)$ que pasen por un punto p, el cual puede pertenecer, ser interior o ser exterior a la misma, dependiendo de ello su solución.

[8] En esta memoria adoptaremos la notación conjuntista: con letras minúscula designaremos a los puntos y con mayúsculas a los segmentos y rectas.

El contenido de los últimos párrafos puede servir para poner al descubierto las intenciones de Polya de hacer el método cada vez más y más general. No obstante, en este trabajo tendremos en cuenta el Método de los Dos Lugares dejando de lado sus versiones más abiertas, las cuales llevan a construir objetos no construibles en el contexto en que estamos.

En efecto, las superficies esféricas implicadas en la construcción del tetraedro son elementos ajenos a nuestro mundo plano de regla y compás; como también el conjunto de tangentes a la circunferencia utilizada en el último problema no puede construirse con regla y compás. En realidad lo que se ha hecho en dicho problema es deducir la intersección de dos conjuntos de cuerdas, lo cual derivó en la construcción de una recta tangente a una circunferencia por un punto, y recién éste es el problema que sí puede resolverse con regla y compás.

Por tanto nuestros problemas de regla y compás se caracterizan porque las construcciones implicadas en todos sus pasos de solución son realizables con regla y compás; además dicha solución está acompañada de un argumento que la justifica.

Volviendo al Método de los Dos Lugares y a los problemas que requieren su aplicación, podríamos considerar ciertas diferencias entre los mismos con vistas a estudiar su complejidad. En Scandura (1977) se hace un análisis en este aspecto, se identifican diferentes variantes en las construcciones implicadas, las cuales pueden incidir en el grado de dificultad.

Una de las cuestiones a examinar es el tipo de construcciones elementales implicadas. Algunos problemas involucran construcciones tales como el trazado de una paralela, de una mediatriz, de una bisectriz o de una circunferencia, que se utilizan ya sea para hallar uno de los lugares, o para hallar la figura final, o bien cumplen ambas funciones. En cambio en otros problemas las construcciones implicadas no son tan simples, por ejemplo el problema puede requerir encontrar el lugar de los vértices de un ángulo de cierta medida que subtiende un segmento dado; ésta construcción llamada "arco capaz", la trataremos más adelante al referirnos a las construcciones elementales, donde podrá observarse su diferente complejidad respecto a las anteriores.

Asimismo, hay problemas en los que los dos lugares pueden encontrarse independientemente, en cualquier orden; en cambio en otros problemas se necesita

hallar un primer lugar el cual se utiliza para encontrar otro -esto es así en los problemas de triángulos donde se deben determinar dos vértices-, por ejemplo el problema "Construir un triángulo dados la altura y la mediana respecto a un lado y un ángulo adyacente a dicho lado", en el cual necesitamos primero determinar un vértice –que es la intersección de un arco capaz y una recta perpendicular al segmento altura que será necesario para hallar uno de los lugares geométricos al que pertenece el vértice restante.

Hay problemas en los que se da uno de los lugares y sólo es necesario buscar el lugar restante, por ejemplo "Dadas tres rectas secantes dos a dos, construir una circunferencia tangente a dos de ellas y con centro en la tercera recta".

En algunos problemas los dos lugares son construcciones muy diferentes; en cambio en otros problemas son análogas, por ejemplo "Construir una circunferencia inscripta en un triángulo dado". Hay problemas en que la construcción de la figura incógnita es inmediata luego de hallar el punto de intersección de los dos lugares; en cambio en otros problemas, tal como el último ejemplo mencionado, será necesario hacer algún otro trazado utilizando dicho punto para construir la figura final.

Todos estos criterios pueden ser de interés a la hora de examinar la complejidad de un problema. En este trabajo nos limitaremos a mencionarlos, ya que el grueso de los problemas analizados correspondería a una de las categorías, por lo cual la consideración de esta clasificación sería pertinente para un estudio en el que la complejidad de los problemas fuese mayor.

2.1.2.2. Método de la Figura Auxiliar

En ciertos problemas no se puede, o es muy dificultoso, construir directamente la figura requerida, pero es posible construir otra figura y utilizarla en la solución del problema original. La resolución de estos problemas consiste básicamente en hacer un bosquejo de la incógnita que se requiere, lo cual permite visualizar la información y descubrir en dicho esquema alguna figura que puede construirse en forma inmediata y que además resulta útil en la solución del problema original, y luego a partir de ella se procede a resolver el problema.[9]

[9] Polya (1962) se refiere al método de la siguiente manera "Trata de descubrir alguna parte de la figura o

"Método de la Figura Auxiliar":

1) Se construye una figura auxiliar la cual está relacionada con los datos del problema.

2) A partir de esta figura auxiliar se construye la figura requerida.

Por ejemplo en el problema "Construir un triángulo dados dos lados y la altura respecto al lado restante. (A,C, H_B) "

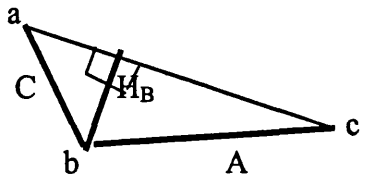


Fig. 2.1

El Método de los Dos Lugares nos llevaría a decir que c está en la circunferencia C(b, A) y la recta tangente a la circunferencia C(b, H_B)

Las construcciones implicadas no se corresponden con las que llamaremos más adelante "construcciones elementales", luego nos valdremos de una figura auxiliar. Es decir tenemos un problema en el cual la aplicación del Método de los Dos Lugares desemboca en construcciones complejas, por lo que para simplificar este asunto introducimos un nuevo método. La construcción de la figura auxiliar no resuelve el problema sino que es el primer paso para la solución, a partir del cual se apoyará la construcción de la incógnita. La construcción de dicha figura auxiliar es un nuevo problema, el cual debe resolverse con regla y compás utilizando el Método de los Dos Lugares.

En otros problemas puede ocurrir que la figura auxiliar no se reduzca al Método de los Dos Lugares, entonces nuevamente habría que recurrir al Método de la Figura Auxiliar -debería hallarse una nueva figura auxiliar relacionada con la anterior, en la que es aplicable el Método de los Dos Lugares-. En una sección posterior se hará un estudio más detallado al respecto.

---

alguna figura relacionada, la cual puedas construir, y la puedas usar como un paso para la construcción de la figura original" (pág. 15).

2.1.2.3. Método de la Figura Semejante

Hay ciertos problemas que se caracterizan porque en su procedimiento de solución debe realizarse alguna semejanza u homotecia. En dichos problemas no se puede construir directamente la figura incógnita, pero es posible construir una figura semejante a la misma. La solución siempre implica construcciones acordes a las invariantes geométricas de la homotecia, como es el trazado de líneas paralelas o la copia de ángulos.

Polya (1962) presenta este método con un ejemplo que culmina con un breve comentario: "Esto sugiere un modelo general: Si no puedes construir la figura requerida, piensa en la posibilidad de construir una figura semejante a la misma".

En Scandura (1977) se hace un análisis del método a fin de identificar los pasos que se siguen en su aplicación. Para ello se tratan problemas, en los que los objetos geométricos que se requiere construir son diferentes, aunque el espíritu del método queda en evidencia.

Se presenta el problema "Dado un triángulo inscribir en el un cuadrado, tal que un lado del cuadrado esté contenido sobre un lado del triángulo y los otros dos vértices del cuadrado están sobre los otros dos lados del triángulo" y para resolverlo se construye un cuadrado arbitrario que cumple parte de la condición, es decir que uno de sus lados está apoyado en un lado del triángulo y uno de sus vértices en otro lado del triángulo. De esta manera se ha construido una figura semejante, o más precisamente, una figura homotética a la pedida. Luego se usan dos pares de puntos correspondientes de ésta figura y de la figura requerida, y se determina el centro de homotecia; los puntos a utilizar son los vértices que se apoyan en los lados del triángulo. Por último se traza una recta desde el centro de homotecia a un punto de la figura semejante, cuarto vértice del cuadrado arbitrario, que es el correspondiente de algún punto necesario en la construcción pedida (Fig.2.2); y tomando como base al punto obtenido se construye el cuadrado buscado.

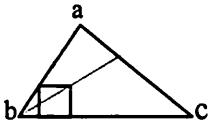


Fig.2.2

Análogamente en el problema "Construir un triángulo dados los ángulos ∠b y ∠c y la mediana M_A correspondiente al lado A", se construye un triángulo de tamaño arbitrario cuyos ángulos coincidan con los dados (figura semejante), incluyendo el trazado de su mediana. Luego se determina el centro de homotecia (vértice del ángulo ∠a); y desde este punto se traza M_A sobre la mediana correspondiente de la figura semejante. Se traza desde el extremo de este segmento una paralela al lado opuesto al centro de homotecia y se prolongan los otros lados del triángulo semejante hasta cortar a la paralela (Fig. 2.3.a.).

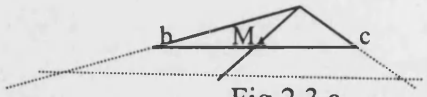


Fig.2.3.a.

Estos ejemplos llevan a enunciar el método subyacente de la manera siguiente:

"Método de la Figura Semejante"

1) Construir una figura semejante a la figura incógnita.

2) Determinar un centro de homotecia.

3) Usar el centro de homotecia y un punto p' de la figura homotética que se corresponda con un punto que pueda determinarse y sea necesario para construir la figura incógnita.

El último problema podría haberse resuelto del siguiente modo: 1) construir un triángulo $\overset{\Delta}{a'b'c'}$ semejante al buscado y trazar su mediana $M_{A'}$; 2) transportar la mediana que es dato sobre una recta paralela a $M_{A'}$; 3) trazar por los extremos de la mediana dada, las paralelas a los lados del triángulo $\overset{\Delta}{a'b'c'}$. (Fig. 2.3.b)

Fig. 2.3.b

Un análisis minucioso de diferentes resoluciones acordes a este método nos lleva a hacer una ligera modificación en la formulación del mismo, con la intención de expresarlo en forma más abarcativa. Para ello, en vez de construir la figura requerida considerando el centro de homotecia y el punto *p'*, que en definitiva determinan un segmento muy particular, vamos a considerar cualquier segmento de la figura semejante

que se corresponda por una homotecia con un segmento de la figura requerida. Éste será un segmento auxiliar que permitirá la construcción de la figura incógnita. Dichos segmentos homotéticos estarán contenidos en rectas paralelas (coincidentes o no); por tanto el método puede enunciarse de una manera más general, que incluye a la anterior:

1) Construir una figura semejante a la figura incógnita.

2) Tener en cuenta otra parte de la condición y construir un segmento X que se corresponda por una homotecia a un segmento auxiliar X' de la figura semejante construida, el cual permita la construcción de la figura buscada mediante el trazado de paralelas.

3)Construir la figura pedida teniendo construida la figura semejante y el segmento X.

Volviendo a Polya (1962) y a su punto de vista de estos métodos, en comentarios que hace posteriormente, expresa que el Método de la Figura Semejante puede considerarse como un caso particular del Método de la Figura Auxiliar, es decir, la figura semejante del Método de la Figura Semejante puede verse como una figura auxiliar especial. Así también hace extensiva esta consideración al objeto matemático utilizado en el Método de los Dos Lugares.

En este trabajo haremos caso omiso a estas "inclusiones de clase" ya que no brindan aportes que lleven a un mayor conocimiento acerca de los métodos. Desde nuestro punto de vista, cada método actúa sobre el proceso de resolución de una manera muy particular, característica del método en sí, y nuestra intención será describirla. Al reducir unos métodos a otros se borran las diferencias que son precisamente lo que constituye la materia de enseñanza de los métodos.

2.2. LOS MÉTODOS Y LA GENERACIÓN DE PROBLEMAS

Acorde a una perspectiva heurística, los problemas de regla y compás pertenecen a una clase de problemas que se corresponden con ciertos métodos de resolución. La aplicación de un método modela el proceso de resolución en una forma determinada, la cual será objeto de estudio en este apartado.

Según Puig (1996) un "espacio de problemas" es el conjunto de problemas generados por herramientas heurísticas, métodos, sugerencias heurísticas y las relaciones entre ellos. Desde este punto de vista, un método puede ser considerado como generador de una serie de problemas que le es propia. A continuación vamos a elaborar los respectivos esquemas de generación de problemas de cada uno de los métodos vistos.

La aplicación del Método de los Dos Lugares a un problema transforma dicho problema en la determinación de un punto, para lo cual se hace necesaria la construcción de dos lugares geométricos. El espacio de problemas generado por este método tiene el esquema representado en la figura 2.4, en el cual el problema P se transforma en otro problema Q, que a su vez se desdobla en Q_1 y Q_2.

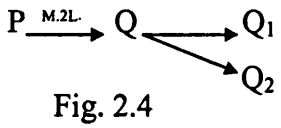


Fig. 2.4

Q: determinar un punto

Q_1 y Q_2 son las construcciones de cada lugar

Por ejemplo, si el problema es "Construir un triángulo dados el lado A, la altura H_A y el ángulo ∠a opuesto al lado A", entonces los problemas del espacio sería:

Q: determinar el vértice a

Q_1: construir la paralela al lado A que esté a una distancia H_A del mismo

Q_2: construir el arco capaz AC (A, ∠a)

Al Método de la Figura Auxiliar también podemos asociarle un espacio de problemas (Fig. 2.5), que muestre que tras construir la figura auxiliar, el problema original no queda resuelto, pero basándonos en ella podemos hacer una reformulación del mismo, lo cual implicará la realización de una nueva construcción. El operador T_Q, que indica "transformar con el resultado de Q", conduce al problema R, cuya solución permitirá resolver el problema original. Como puede verse en la figura 2.5, el esquema "acaba" en problemas que hay que resolver.

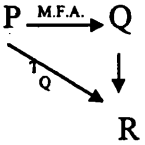


Fig. 2.5

Q: construir la figura auxiliar

R: construir la figura requerida teniendo construida la figura auxiliar

El Método de la Figura Semejante es más complejo que los dos anteriores, hay un aumento en el número de pasos y además están implicadas ciertas construcciones que responden a las invariantes geométricas de la homotecia, que han de realizarse a partir de una construcción previa. Este método contiene dos pasos fundamentales: el primero de ellos es construir una figura semejante a la figura incógnita, y el segundo es hallar un segmento de la figura requerida que se corresponda por una homotecia a un segmento de la figura semejante, previamente construida. El procedimiento culmina con el trazado de paralelas o la copia de ángulos.

La figura 2.6 representa el esquema de problemas generado por el Método de la Figura Semejante. Los indicadores M.F.S. (1) y M.F.S. (2) dan cuenta de los pasos del método a los que hicimos referencia en el párrafo anterior y los operadores T_D y T_G señalan las transformaciones según el resultado de D y G respectivamente.

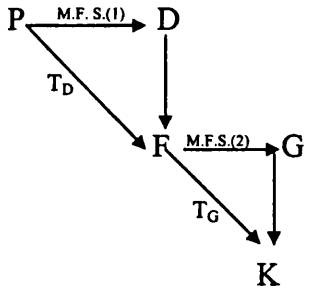


Fig. 2.6

D: construir una figura semejante a la pedida

F: construir la figura pedida teniendo construida la figura semejante a la misma

G: tener en cuenta otra parte de la condición y construir un segmento X que se corresponda por una homotecia a un segmento auxiliar X' de la figura semejante construida, el cual permita la construcción de la figura buscada mediante el trazado de paralelas

K: construir la figura pedida teniendo construida la figura semejante y el segmento X

2.3. OPERACIONES BÁSICAS Y CONSTRUCCIONES ELEMENTALES

2.3.1. Operaciones Básicas

En la primera sección de este capítulo, hemos visto los pasos de Euclides para transportar un segmento sobre una semirrecta, lo cual además le permitiría transportar una circunferencia o construir una circunferencia dados el centro y un radio. Asimismo hubo de probar varias proposiciones antes de arribar a una construcción tan básica como es el transporte de ángulos (proposición número 23), para lo cual se apoya en la proposición que le antecede (construcción de un triángulo dados los tres lados) y en la proposición 8 (si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales respectivamente a dos lados del otro y tienen también iguales sus bases respectivas, también tendrán iguales los ángulos comprendidos por las rectas iguales).

Nuestras reglas de juego son algo diferentes, no necesitamos seguir el encadenamiento lógico euclídeo que prueba que una construcción es posible, ya que damos por supuesto que esto está demostrado, lo que debemos realizar es la construcción efectiva y justificar los pasos seguidos para ello.

Nuestro mundo de regla y compás tiene sus características propias; en él las construcciones se basarán en el trazado de rectas y circunferencias usando los instrumentos de dibujo correspondientes, e irán acompañadas de la argumentación que las justifica.

El propio compás se utiliza como "transportador de segmentos", así también para trazar una circunferencia dado el centro o y un radio R, se necesita transportar el segmento R y la construcción es inmediata. Para trazar una recta en una determinada dirección respecto de otra, se necesita transportar un ángulo. Llamaremos "operaciones básicas" al transporte de segmentos y de ángulos, ya que dichas operaciones permiten el trazado de circunferencias y rectas determinadas, sobre las que se apoyarán nuestras construcciones.

El sentido que da Polya (1966) a la palabra "lugar", hace que podamos interpretar estas "operaciones básicas" de acuerdo al Método de los Dos Lugares.

En efecto, transportar un segmento sobre una semirrecta se transforma en determinar el extremo restante del segmento transportado, el cual se halla mediante la intersección de: 1) la semirrecta $\overline{oc}$ (objeto dado); 2) la $C_{o,\overline{ab}}$ (con $\overline{ab}$ segmento dado).

Por otra parte, si consideramos el procedimiento que conocemos para transportar un ángulo, podemos concluir que se basa en el hecho de que ángulos centrales correspondientes a cuerdas congruentes de circunferencias congruentes, son congruentes. De acuerdo a ello, podemos considerar el ángulo a transportar como ángulo central de una circunferencia. Sobre esta base, la construcción se reduce a transportar dos circunferencias secantes, circunferencias en línea punteada de la figura 2.7, una de las cuales tiene centro en el vértice *o* del ángulo a transportar, y la otra tiene centro en la intersección de dicha circunferencia con uno de los lados del ángulo, siendo su radio la cuerda que el ángulo determina sobre la primera circunferencia..

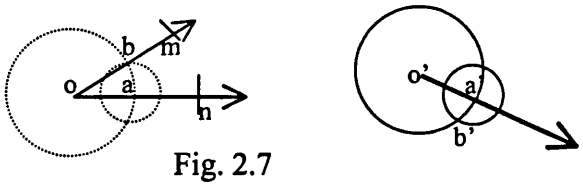


Fig. 2.7

En definitiva, el problema de construir un ángulo congruente a uno dado, de modo que uno de sus lados sea una semirrecta dada y el otro esté en uno de los semiplanos que ella determina, puede reducirse a la determinación de un punto. Dicho punto será la intersección de dos circunferencias secantes, cuyos centros y radios son determinados previamente en la construcción: la circunferencia $C_{o',R}$ y la circunferencia $C_{a',ab}$. Fijando un sentido o uno de los semiplanos que la semirrecta dada determina, es posible precisar el ángulo requerido.

2.3.2. Construcciones Elementales

El objetivo de hacer un estudio teórico de las construcciones con regla y compás es diseñar el espacio teórico de problemas correspondiente a cada una de ellas. Dicho espacio se construye examinando los procesos de resolución generados por los métodos mencionados, y determinando la serie de problemas por los que se atraviesa hasta llegar a una construcción elemental.

A tal fin vamos a establecer un conjunto de construcciones elementales y analizar cada una de ellas. En cada una de estas construcciones elementales subyace uno o más de los métodos vistos. El esquema de problemas correspondiente a una construcción tal estará conformado por un entretejido de construcciones simples, cuyas terminales serán o bien datos o construcciones de determinadas circunferencias y rectas en las que están implicadas las operaciones básicas. El trazado de la mediatriz de un segmento –que hemos designado con la letra A- encabeza esta breve lista de construcciones. Dicha construcción está implicada en las demás construcciones elementales, motivo por el cual aparece en los respectivos esquemas de problemas.

1- **A**: Construir la **mediatriz** de un segmento $\overline{ab}$.

Esta construcción puede reducirse a encontrar dos puntos que pertenezcan a la mediatriz, y puesto que la mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento, entonces podemos reformular nuestro problema inicial en estos términos:

A_R (A reformulado): hallar dos puntos que equidisten de los extremos del segmento.

Una vez reformulado el problema, éste puede dividirse en dos:

A_{R1}: hallar un primer punto que equidiste de los extremos

A_{R2}: encontrar un segundo punto que equidiste de los extremos

El punto buscado en ambas partes puede hallarse como intersección de dos circunferencias de igual radio y centro a y b respectivamente.

Asumiendo el hecho de que dos circunferencias en estas condiciones se cortan si la distancia entre los centros es menor que dos veces el radio, se elige $R > \overline{ab}/2$ lo que lleva a encontrar dos puntos que equidistan de los extremos del segmento, con lo cual se abordan simultáneamente A_{R1} y A_{R2}.

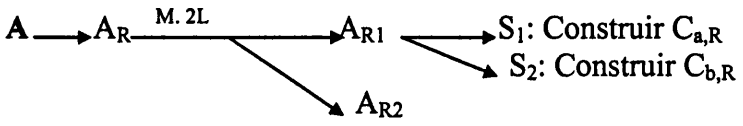


Fig. 2.8

2- **E**: Construir la **recta perpendicular a una recta L por un punto p** (exterior o perteneciente a la recta)

La aplicación del método de la figura auxiliar, en este caso lleva a la construcción de un segmento auxiliar, problema que se traduce en encontrar los extremos de dicho segmento. Los extremos de este segmento se hallan fácilmente con sólo advertir que pertenecen a dos lugares geométricos: 1) pertenecen a L (recta dada); 2) equidistan de p, por tanto pertenecen a $C_{p,R}$ (con R> d(p,L)). Por último se llega a la solución del problema inicial mediante la construcción de la mediatriz del segmento auxiliar.

S: determinar un segmento contenido en L tal que p pertenezca a su mediatriz

S_R (S reformulado): determinar los extremos a, b del segmento auxiliar

S_1: Construir la circunferencia $C_{p,R}$ (con R> d(p,L))

A: Construir la mediatriz M_{ab}

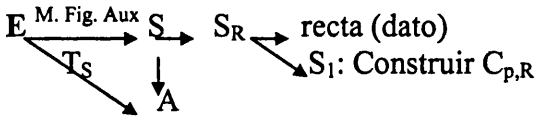


Fig. 2.9.a.

Podría también hacerse el esquema de la figura 2.9.b., donde S_{R1} y S_{R2} son hallar a y b respectivamente.

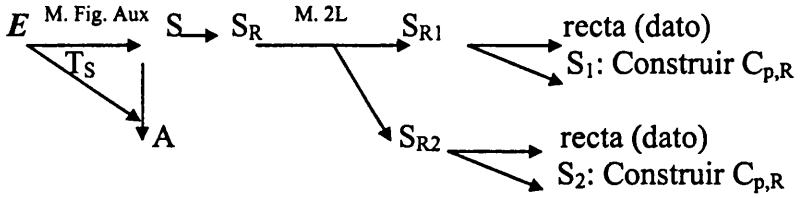


Fig. 2.9.b.

3- **I**: Construir la **bisectriz** de un ángulo $\overset{\wedge}{mon}$ dado

La construcción usual de la bisectriz de un ángulo comienza con el trazado de una circunferencia con centro en el vértice o del ángulo y radio arbitrario R. De este modo, se ubican dos puntos a y b sobre cada lado del ángulo, los cuales forman el triángulo $\overset{\Delta}{aob}$, que por ser isósceles cumple que la bisectriz del ángulo opuesto a la base está contenida en la mediatriz de dicha base (esta demostración se apoya en consideraciones de simetría respecto al eje que contiene a la bisectriz). Por tanto nuestro problema original se reduce a la construcción de dicha mediatriz.

Y: hallar un segmento $\overline{ab}$ apoyado en los lados del ángulo cuyos extremos equidisten del vértice o.

A: construir la mediatriz M_{ab}

Y_R (Y reformulado): hallar los extremos del segmento

Y_{R1}: hallar a

Y_{R2}: hallar b

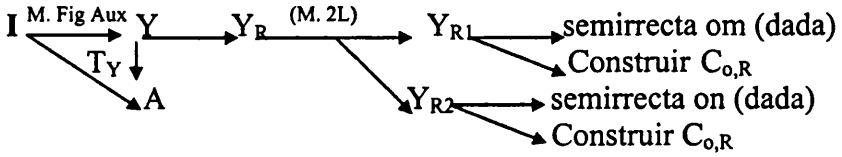


Fig. 2.10

4- **O**: Construir la **paralela a la recta L por un punto dado q**

Podemos utilizar el hecho de que una perpendicular a una perpendicular a una recta dada es paralela a la misma, para así apoyarnos en las construcciones elementales anteriores. Por tanto el primer paso puede ser la construcción de una recta auxiliar que sea perpendicular a la recta dada, para luego basar en ella la solución del problema original.

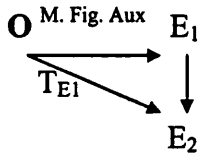


Fig. 2.11

E_1: Construir la recta L' perpendicular a L por un punto arbitrario p (exterior o perteneciente a la recta dada)

E_2: Construir la recta L" perpendicular a L' por el punto q dado

La figura 2.12 representa un esquema de esta construcción elemental, ampliado según el esquema derivado de la construcción elemental del tipo E.

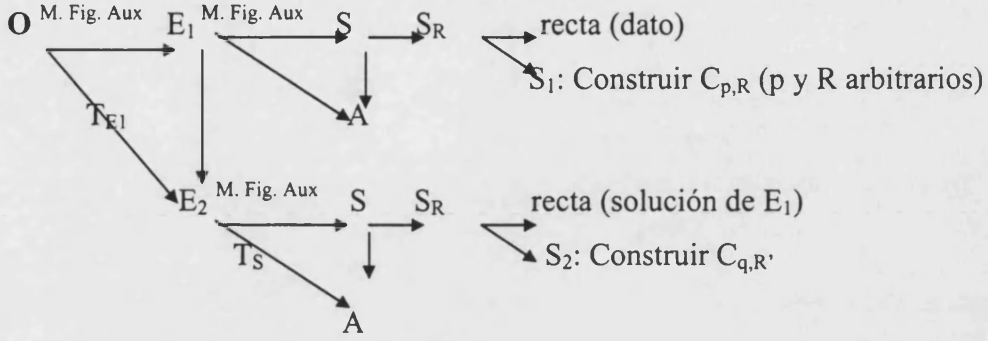


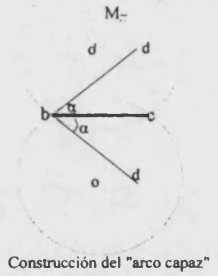
Fig. 2.12

5- **U**: Construir el **arco capaz** (lugar de puntos que subtienden a un segmento dado $\overline{bc}$ bajo un ángulo dado).

Puesto que esta construcción elemental es más compleja que las anteriores, vamos a explicitar los pasos a seguir para realizar esta construcción.

- Dado el segmento $\overline{bc}$,se traza por uno de sus extremos la recta $\overleftrightarrow{bd}$, que forma con dicho segmento un ángulo α congruente al dado.
- se traza la mediatriz de $\overline{bc}$
- se traza una perpendicular a $\overleftrightarrow{bd}$ en el vértice b.

Estas dos rectas determinan el centro *o* del arco buscado, y $\overline{ob}$ es el radio de dicho arco.



Construcción del "arco capaz"

Fig.2.13

Siguiendo un procedimiento análogo encontramos el centro *o'* de un arco de circunferencia simétrico al anterior. La justificación de esta construcción utiliza el hecho de que ángulos entre perpendiculares son congruentes; y sobre esta base se construye un ángulo central que duplica al ángulo dado.

Ahora sí, elaboraremos el esquema de problemas correspondiente. Podemos reducir el problema a la construcción de un punto, el centro *o* del arco de circunferencia buscado. Dicho punto pertenece a dos lugares geométricos: 1) o equidista de $\overline{bc}$, por tanto pertenece a la mediatriz de este segmento; 2) o pertenece a una recta N que forma

un ángulo (90° - α) con $\overline{bc}$ (con N intersección $\overline{bc}$ = b). Para hallar este último lugar será útil una figura auxiliar, la semirrecta $\overrightarrow{bd}$ que forma con el segmento $\overline{bc}$ un ángulo α, para lo cual se requiere la operación básica "copiar α ".

J: determinar el centro o del arco de circunferencia cuyo ángulo central $\hat{boc}$ es el doble del ángulo dado

W: trazar recta que pasa por a y forma un ángulo (90° - α) con $\overline{bc}$

A: construir la mediatriz M_{bc}

K: trazar la semirrecta $\overrightarrow{bd}$ que forme un ángulo α con el segmento dado, que se traduce en la operación básica K_1: " Copiar α sobre la semirrecta $\overrightarrow{bc}$ "

E: trazar la recta perpendicular a $\overline{bd}$ por b.

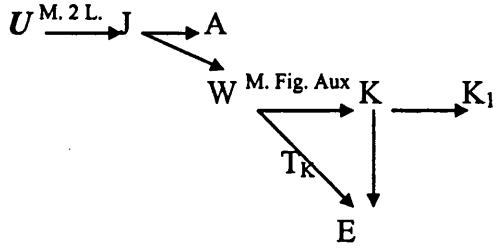


Fig. 2.14

Tal como hemos procedido anteriormente, aquí también cabe añadir el esquema derivado de la construcción elemental E, obteniendo así el esquema representado en la figura 2.15

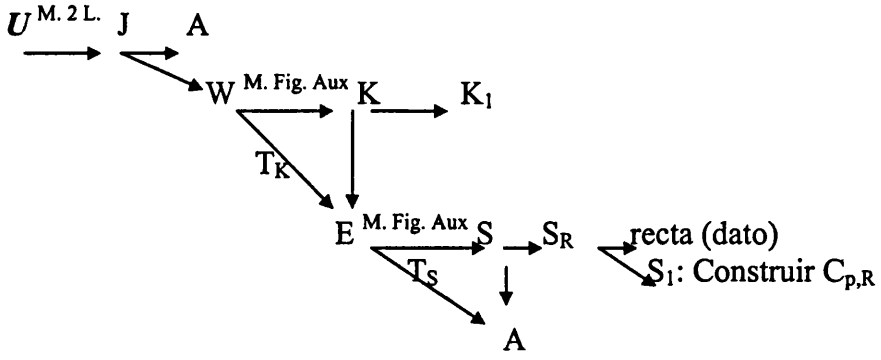


Fig. 2.15

2.4. ESPACIO TEÓRICO DE PROBLEMAS DE ALGUNAS CONSTRUCCIONES

Hemos visto que las construcciones de regla y compás son un tipo muy particular de problemas, que involucran ciertos métodos de resolución y que la aplicación de un método genera una serie de problemas que lo caracteriza.

Puig (1996) introduce la noción de "espacio de problemas" como una forma de representar el proceso de resolución de un problema, que persigue subrayar que, desde el punto de vista heurístico, uno de los aspectos cruciales del proceso es la transformación del problema original en otros problemas. A su vez, habla de dos tipos de espacio de problemas, el "espacio de problemas teórico de la resolución de un problema" y el "espacio de problemas de una resolución del problema", siendo el primero de ellos un instrumento de análisis de los problemas y de las herramientas heurísticas[10], y el segundo un instrumento para el análisis de la actuación de los resolutores.

El examen de los procesos de resolución generados por la aplicación de uno o varios métodos nos permite hacer corresponder a cada problema un espacio teórico de problemas. La serie de problemas que se desprenden de la aplicación de los métodos es algo característico de los mismos, en este sentido es que el espacio de problemas resulta ser un instrumento de análisis de los distintos métodos.

La intención de esta sección es doble, por un lado se pretende ilustrar el accionar de los métodos en diferentes problemas, el cual queda plasmado en la cadena de problemas que se genera, y por otro lado es mostrar la complejidad del entretejido de construcciones que resultan de la conjunción de los métodos en cuestión. Para ello nos centraremos en algunas construcciones, y a partir de examinar los procesos de resolución generados por los métodos, vamos a elaborar el espacio teórico de problemas correspondiente.

[10] Una herramienta heurística es un procedimiento independiente del contenido del problema que lo transforma en otro; no resuelve el problema ni tampoco garantiza su solución. (Puig 1996, pág. 46)

A fin de reflejar claramente en el espacio de problemas lo característico de cada método, identificaremos la serie de problemas por los que se atraviesa, deteniendo el análisis cuando el problema al que se ha arribado es una de las construcciones elementales tratadas anteriormente.

Utilizaremos un ejemplo al cual ya hicimos referencia, el cual sigue el esquema global del Método de la Figura Auxiliar presentado en 2.2, para dar cuenta del entretejido de construcciones generadas por la aplicación de dicho método en conjunción con el de los dos lugares.

"Construir un triángulo dados dos lados y la altura respecto al lado restante"

Podemos dar el problema por resuelto y realizar un bosquejo de la figura incógnita, y descubrir los triángulos rectángulos que llevan a la solución de este problema.

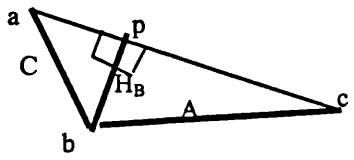


Fig. 2.16 a.

La construcción de uno de dichos triángulos implica el Método de los Dos Lugares, a partir de esta construcción el problema de construir la figura requerida habiendo construido la figura auxiliar, se traduce en determinar un vértice de la figura incógnita, que se obtiene mediante la intersección de dos lugares que resultan inmediatos. La figura 2.17 representa el espacio teórico de problemas correspondiente a este proceso, donde:

S: construir el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{bpc}$ dados un cateto y la hipotenusa

Q: determinar el vértice c

R: construir el triángulo $\overset{\Delta}{abc}$ habiendo construido el triángulo $\overset{\Delta}{bpc}$

R′: determinar el vértice a

Q_1: construir la circunferencia C(b,A)

Q_2: trazar la recta perpendicular al segmento $\overline{bp}$ (segmento correspondiente a la altura H_B) por su extremo p

Q_2': construir la recta que contiene al segmento $\overline{pc}$ (prolongar un segmento)

Q_3: construir la circunferencia C(b,C).

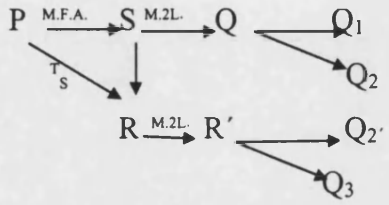


Fig. 2.17

La construcción del triángulo rectángulo podría haberse reducido a determinar el vértice p de dicha figura auxiliar, lo cual llevaría al espacio de problemas de la figura 2.18, donde:

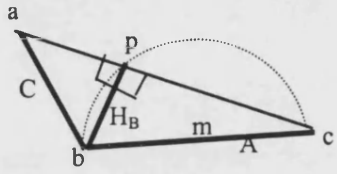


Fig. 2.16 b.

W: determinar p

W_1: construir la circunferencia C(b, H_B)

W_2: construir el arco capaz AC(A,90°) (o circunferencia de diámetro A)

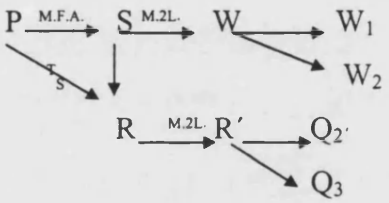


Fig. 2.18

En vez de construir el triángulo auxiliar $\overset{\Delta}{bpc}$, podría haberse elegido construir el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{bpa}$, sin cambiar con ello el lineamiento general que caracteriza a este proceso.

Con la intención de precisar el campo de acción de los métodos y delimitar los espacios teóricos correspondientes, vamos a valernos de este problema para hacer alguna apreciaciones al respecto. Ya hemos aludido que, en la búsqueda de una solución, se podría haber pensado en aplicar el Método de los Dos Lugares, o sea que el problema podría haberse reducido por ejemplo a determinar el vértice a, el cual puede hallarse como intersección de la circunferencia C(b,C) y de la recta tangente a la circunferencia C(b, H_B) que pase por el vértice c. Sin embargo la construcción de esta recta tangente no conforma nuestra lista de construcciones elementales, por lo cual pensaremos en construir una figura auxiliar para la resolución de este problema. De la amplia gama de posibilidades de resolución, en el análisis teórico consideraremos sólo

aquellas que se reducen a las construcciones elementales, y al trazado de circunferencias y rectas que implican operaciones básicas. Es decir, inicialmente se intentará aplicar el Método de los Dos Lugares, a condición de llegar a una de las construcciones elementales, y si este no es el caso recurriremos a otro método.

A veces no es posible construir la figura requerida valiéndose de una figura auxiliar, entonces habrá que construir una segunda figura auxiliar.

"Construir un triángulo dados el lado A, y las alturas H_B y H_C respecto a los lados restantes"

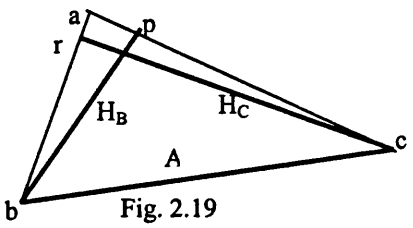


Fig. 2.19

En este caso se podría reducir el problema a determinar el vértice a, que es la intersección de dos rectas que no conforman los datos, pero que se pueden hallar recurriendo a dos figuras auxiliares.

Sea P_1: Construir el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{bpc}$ dados la hipotenusa y un cateto.

Una vez resuelto P_1, si seguimos el esquema global del Método de la Figura Auxiliar, se pasaría al problema siguiente

P′: Construir lo que pide P habiendo construido P_1.

Sin embargo, en este ejemplo no se puede construir el triángulo buscado con sólo haber construido el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{bpc}$, por tanto recurrimos a una segunda figura auxiliar, lo que se traduce en

P_2: Construir el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{brc}$

Nos valdremos del siguiente esquema para representa la situación:

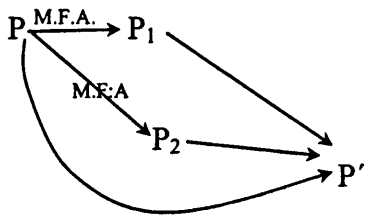


Fig. 2.20

donde P_1 y P_2 son las construcciones de cada una de las figuras auxiliares, y P′ es la transformación del problema inicial con las dos figuras construidas. Las flechas indican que P_1 y P_2 son figuras auxiliares de P y que el problema original se transforma en P′; y la notación intenta señalar que P es la construcción de la figura original y el P′ es la construcción de dicha figura valiéndose de los problemas anteriores.

El esquema esbozado en la figura 2.20 es representativo de todo problema que requiere la construcción de dos figuras auxiliares. En la figura 2.21 presentamos el espacio teórico de problemas correspondiente al ejemplo que estamos analizando

P_1: construir el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{bpc}$ dados un cateto y la hipotenusa

Q: determinar p

Q_1: construir la circunferencia C(b, H_B)

Q_2: construir el arco capaz AC(A,90°)

P_2: construir el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{brc}$ dados un cateto y la hipotenusa

Z_1: construir la circunferencia C(c, H_C)

Z: determinar r

P′: construir el triángulo $\overset{\Delta}{abc}$ habiendo construido los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{bpc}$ y $\overset{\Delta}{brc}$.

M: determinar a

M_1: prolongar el segmento $\overline{cp}$

M_2: prolongar el segmento $\overline{br}$

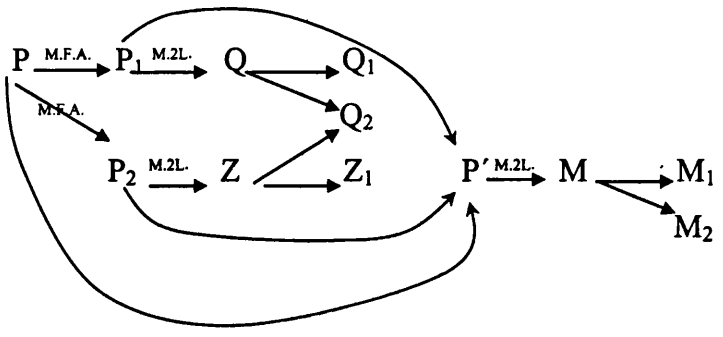


Fig. 2.21

El problema *"Construir un triángulo dados el lado A, la altura H_B respecto al lado B, y el segmento de bisectriz $D_{\angle c}$ correspondiente al ángulo $\angle c$"* en muchos aspectos es similar al anterior.

Se hace uso doblemente del Método de la Figura Auxiliar, no obstante la construcción de una de las figuras depende de la construcción de la otra.

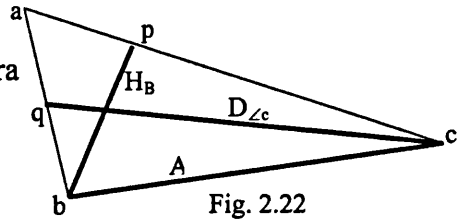


Fig. 2.22

La construcción del triángulo $\overset{\Delta}{bqc}$ no se puede realizar con los datos iniciales, es necesario hallar un nuevo dato, el cual puede derivarse de la construcción del triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{bpc}$. El esquema del Método de Figura Auxiliar que responde a esta situación es el siguiente

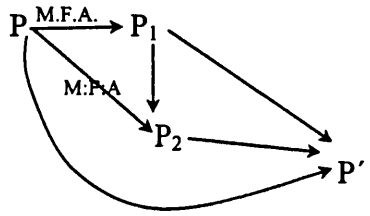


Fig. 2.23

donde P_1 es la construcción de la figura auxiliar que se puede realizar a partir de los datos iniciales, P_2 es la construcción de la segunda figura auxiliar habiendo construido ya la primera, y P′ es la transformación del problema inicial con las dos figuras construidas.

El esquema es similar al presentado anteriormente, sólo que hemos incorporado una flecha que va de P_1 a P_2, queriendo con ello indicar que se tiene una segunda figura auxiliar que requiere la construcción de una figura previa.

El espacio de problemas que se desprende del caso concreto que estamos es examinando es el siguiente:

P_1: construir el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{bpc}$ dados un cateto y la hipotenusa

Q: determinar p

Q_1: construir la circunferencia C(b, H_B)

Q_2: construir el arco capaz AC(A,90°)

P_2: construir el triángulo $\overset{\Delta}{bqc}$ habiendo construido el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{bpc}$

R: determinar q

R_1: construir la bisectriz del ángulo $\angle c$ del triángulo $\overset{\Delta}{bpc}$

R_2: construir la circunferencia $C(c,D_{\angle c})$

P′: construir el triángulo $\overset{\Delta}{abc}$ habiendo construido los triángulos $\overset{\Delta}{bpc}$ y $\overset{\Delta}{bqc}$.

M: determinar a

M_1: prolongar el segmento $\overline{cp}$

M_2: prolongar el segmento $\overline{bq}$

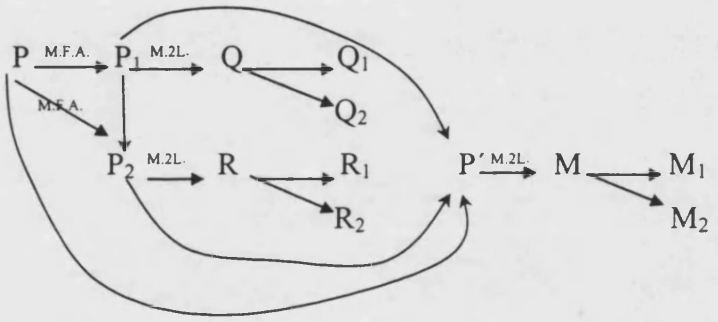


Fig. 2.24

En caso de reducir el problema P_1 a la construcción del punto c, los problemas serían análogos a los que conforman el espacio presentado en la figura 2.17.

El siguiente problema es análogo al anterior, sólo se diferencian en el tipo de lugares implicados.

"Construir un triángulo dados el ángulo $\angle a$, el segmento de bisectriz $D_{\angle a}$ correspondiente al mismo y la altura H_A respecto al lado opuesto a dicho ángulo",

También será necesario construir una figura auxiliar, que podrá hallarse mediante el Método de los dos lugares, y luego será preciso construir una nueva figura auxiliar para hallar un segundo vértice.

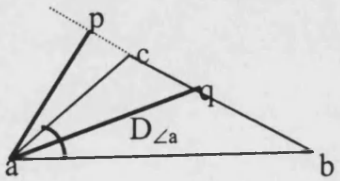


Fig. 2.25

Luego de ello podemos hallar el tercer vértice mediante el Método de los Dos Lugares.

La figura 2.26 representa el espacio de problemas correspondiente, donde:

P_1: construir el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{apq}$ dados un cateto (congruente a H_A) y la hipotenusa (congruente a $D_{\angle a}$)

Q: determinar p

Q_1: construir arco capaz $AC(D_{\angle a}, 90°)$

Q_2: construir la circunferencia $C(a,H_A)$

P_2: construir el triángulo $\overset{\Delta}{acq}$ dados un lado (congruente a $D_{\angle a}$), un ángulo adyacente (congruente a $\angle a/2$) y la altura respecto al lado opuesto a dicho ángulo (congruente a H_A), habiendo construido el triángulo $\overset{\Delta}{apq}$.

N: determinar c

N_1: construir la recta que contiene al segmento $\overline{pq}$

N_2: construir recta que forme un ángulo $\angle a/2$ con el segmento $\overline{aq}$ (cuya intersección con dicho segmento sea el punto a)

P': construir el triángulo $\overset{\Delta}{abc}$ habiendo construido los triángulos $\overset{\Delta}{apq}$ y $\overset{\Delta}{acq}$

Z: determinar b

Z_1: construir recta que contiene al segmento $\overline{cq}$

Z_2: construir la recta que forma un ángulo $\angle -a/2$ con el segmento $\overline{aq}$ (cuya intersección con dicho segmento sea el punto a) (recta $\overleftrightarrow{ab}$)

K: copiar ángulo $\angle a/2$

R': hallar $\angle a/2$

R": construir la bisectriz del ángulo $\angle a$ dado

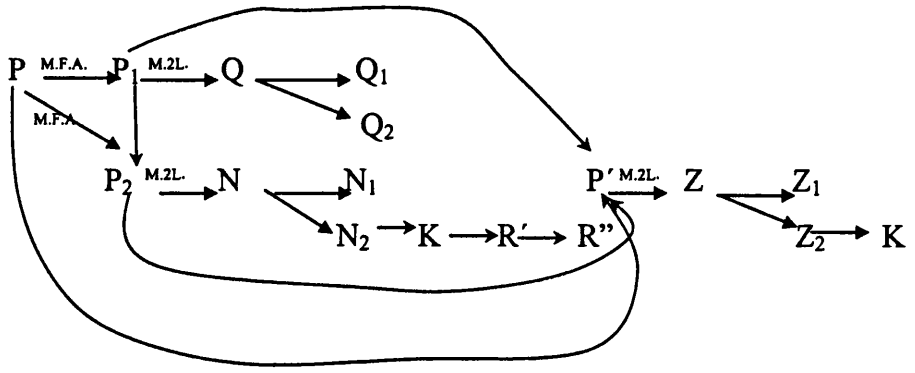


Fig. 2.26

La intención de todas estas consideraciones es avanzar en la sistematización del análisis, precisando el campo de acción de los métodos y delimitando los espacios teóricos correspondientes.

Asumiremos entonces que cuando no puede aplicarse en forma inmediata el Método de Dos Lugares se aplica el de Figura Auxiliar. El Método de la Figura Semejante es mucho más complejo, por tanto podríamos acordar en recurrir al mismo en caso de la imposibilidad de aplicar los métodos anteriores, o sea que cuando no se pueda usar el Método de Figura Auxiliar recién se recurrirá al de Figura Semejante.

Por ejemplo dado el problema "*Construir un triángulo dados H_A, $\angle b$ y $\angle c$*" se resuelve aplicando el método de la figura auxiliar, el bosquejo de la figura incógnita se representa en la figura 2.24 y el espacio de problemas correspondiente en la figura 2.25 donde:

S: Construir triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{apc}$ dados el cateto y el ángulo opuesto al mismo

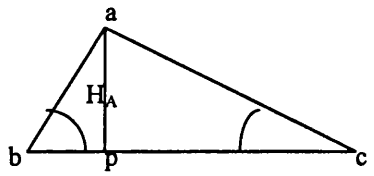


Fig. 2.27

Q: determinar c

Q_1: construir arco capaz (H_A, $\angle c$)

Q_2: recta perpendicular al segmento $\overline{ap}$ por p

R: construir el triángulo $\overset{\Delta}{abc}$ habiendo construido el triángulo $\overset{\Delta}{apc}$

V: determinar b

$Q_{2'}$: construir recta que contiene al segmento $\overline{pc}$

V_1: construir arco capaz (H_A, $\angle b$) o arco capaz ($\overline{ac}$, $\angle b$)

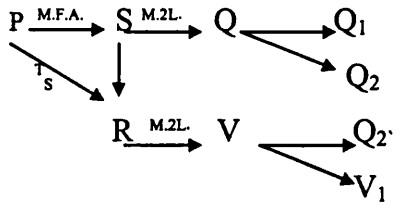


Figura 2.28

Este problema podría haberse resuelto por Método de Figura Semejante, sin embargo vamos a reservar la aplicación de dicho método a los casos en que no puede construirse la figura auxiliar. Por ejemplo en el problema presentado en el apartado 2.1.2.3, que consistía en *"Construir un triángulo dados los ángulos ∠b y ∠c y la mediana M_A"*, no es posible la construcción de dicha figura auxiliar puesto que sólo tenemos dos datos para construir los triángulos que podrían ser candidatos a figura auxiliar, por tanto en ese caso recurriremos a la figura semejante.

CAPÍTULO 3

HACIA UN MODELO DE COMPETENCIA

3.1. SOBRE EL PROBLEMA Y LA TAREA

Las construcciones con regla y compás son problemas matemáticos. Polya (1965)[1] hace la distinción entre "problemas por resolver" y "problemas por demostrar". El propósito de los problemas del primer tipo es descubrir cierto objeto –la incógnita del problema-, y sus elementos principales son los datos, la incógnita y la condición; en cambio los problemas del segundo tipo, pretenden mostrar de modo concluyente la exactitud o falsedad de una afirmación claramente enunciada, y sus parte principales son la hipótesis y la conclusión. (Polya 1965, pág. 161). En esta distinción las construcciones con regla y compás entrarían en la primera categoría.

Por otro lado y teniendo en cuenta al resolutor, podemos aludir a la clasificación que hace Butts[2] (1980) de los problemas, basada en el grado de creatividad necesario para

---

[1] Polya (1962, vol 2 pág. 139) también hace otra clasificación de problemas, desde una perspectiva pedagógica establece cuatro clases: 1) los problemas que se resuelven por la aplicación mecánica de un procedimiento presentado o discutido previamente; 2) aquellos que se resuelven por aplicación de un procedimiento dado anteriormente pero además se requiere algún juicio o razonamiento del resolutor; 3) problemas que requieren la combinación de dos o más procedimientos previamente tratados; 4) problemas que requieren otras nuevas combinaciones de procedimientos o ejemplos que llevan a considerar varias alternativas para lo cual se necesita el uso del razonamiento plausible. Además señala que el grado de dificultad así como su valor educativo aumenta al ir de la primera a la cuarta.

[2] Butts T. (1980) hace la siguiente clasificación de los problemas matemáticos: 1) ejercicios de reconocimiento, son ejercicios en los que se pide al resolutor reconocer o evocar un hecho específico, definición o enunciado de un teorema; 2) ejercicios algorítmicos, son ejercicios que pueden ser resueltos mediante un procedimiento paso a paso; 3) problemas de aplicación, los cuales involucran las aplicaciones algorítmicas; los problemas verbales tradicionales, cuya solución requiere una formulación simbólica del problema y una manipulación de los símbolos de acuerdo a varios algoritmos, caen en esta categoría; 4) problemas de búsqueda, son problemas que no contienen en su enunciado una estrategia para su resolución; .

abordarlos, de acuerdo a la cual, nuestras construcciones pueden ser tanto problemas de aplicación como de búsqueda. Es decir, dado que la ejecución de un procedimiento para resolver el problema debe estar siempre acompañada de la argumentación de que sus pasos son adecuados, se podría considerar al problema como de aplicación si previamente el resolutor conoce dicho procedimiento; por el contrario, si ha de crearlo será un problema de búsqueda.

Si nos ubicamos dentro de una situación escolar, estamos ya en otro plano y en lugar de hablar de problema hablamos de tarea. La tarea es el encargo que el profesor hace al alumno. Dicho encargo puede estar expresado en términos muy vagos, por ejemplo "resuelve este problema", entonces las reglas de juego en la clase son las que determinan qué tiene que hacer el alumno. Otras veces la tarea suele estar expresada en forma más precisa, y el profesor explícitamente le pide al alumno el resultado del problema, la solución o la resolución[3]. Los encargos pueden ser muy distintos. En un examen en que la respuesta se deba dar poniendo una cruz, se está preguntando por el resultado. Es poco usual que la tarea sea "entregar la resolución". Este tipo de tarea apunta a la observación del propio proceso de resolución. En las prácticas normales de la escuela, generalmente el profesor pide la solución, la tarea es "dar la solución y no sólo el resultado". Esto pone de relieve la diferencia entre tarea y problema. Podríamos decir que el problema se resuelve y a la tarea se responde, es decir el alumno debe responder a la tarea que el profesor le ha encargado.

En este trabajo estaríamos en el terreno de la tarea. En el caso de la escuela media la tarea, por ejemplo, podría ser la construcción de un triángulo con regla y compás partiendo de ciertos datos. Dicha tarea impone condiciones, pues no es construir el triángulo de cualquier manera sino que para ello ha de usarse la regla y el compás, lo cual lleva a atender ciertas normas de trabajo en el dominio. Éstas llevan a concebir a la regla como un instrumento que permite trazar rectas y segmentos, además se la considera no graduada, por

5) situaciones problemáticas, son situaciones en la que uno de los pasos cruciales es identificar él o los problemas inherentes a la situación cuya solución se utilizará.

[3] La distinción entre resultado, solución y resolución la explicaremos en el apartado 3.2.

tanto se anula la posibilidad de utilizarla para medir; el compás por su parte es utilizado para construir circunferencias o arcos de circunferencia, y para transportar segmentos.

El propósito de un curso de resolución de problemas será instruir en el método, y por tanto la tarea no será la misma, en este caso consistirá en utilizar los métodos para construir la figura requerida. Por ende la condición impuesta ha de ser la consideración de los métodos aplicables a los problemas de regla y compás, y la respuesta a la tarea implicará el uso de los mismos, ya que son el objeto de instrucción.

A diferencia de lo que ocurre en ese contexto, la enseñanza de los métodos en la escuela media es implícita; se apunta al uso de los mismos en la resolución de los problemas pero no se hace explicitación al respecto. Por tanto, una condición que impondría la tarea es resolver el problema aplicando los métodos, aunque dado el carácter implícito de esta condición, la respuesta podrá involucrar ciertos procedimientos que no se apoyan en dichos métodos.

3.2. RESOLUCIÓN, SOLUCIÓN Y RESULTADO

De acuerdo a Puig y Cerdán (1988) "el *proceso de resolución de un problema* es la actividad mental desplegada por el resolutor desde el momento en que, siéndole presentado un problema, asume que lo que tiene adelante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea. Dar por acabada la tarea no quiere decir que el resolutor haya encontrado la solución del problema, sino que para él la situación ha dejado de ser problemática porque la ha dotado de sentido" (pág. 21).

A partir de la distinción entre solución, resultado y resolución, hecha para los problemas de matemática en Puig (1996, pág. 34), vamos a precisar el significado de estos términos en el caso particular de nuestras construcciones, introduciendo para ello la discusión acerca de algunas dificultades provenientes de tal distinción.

Usaremos el término "*resolución*" para indicar el conjunto de acciones que se realizan durante el proceso, que pueden conducir o no a obtener el resultado.

Atendiendo al proceso de resolución vamos a hacer algunas consideraciones acerca de dos términos, *"resultado"* y *"solución"*, términos que posteriormente se utilizarán en las descripciones que componen nuestro modelo teórico. La distinción entre ellos a veces se hace difícil y éste es el caso en la clase de problemas que estamos estudiando.

Una manera de abordar esta discusión es dar definiciones generales. Por ejemplo podríamos acordar que "*el resultado es lo que contesta a la pregunta*", o sea que puede ser un número, una expresión algebraica, una derivación lógica, una figura, etc. Ahora bien, si el problema fuera "construir un triángulo con regla y compás dados tales datos", ¿qué es lo que contesta a la pregunta o responde a las condiciones de este problema? ¿el triángulo construido o la construcción del mismo?. Podemos optar por una postura radical y decir que el triángulo construido no contesta a la pregunta, pues la presentación de la figura final no muestra si dicha figura está efectivamente construida con regla y compás. Es decir que la figura final no responde a la condición de construir con regla y compás, que lleva a establecer reglas como usar regla no graduada, no medir, etc. Si en cambio el problema fuera "construir un triángulo dados ciertos datos" entonces la figura final sí que contestaría a la pregunta del problema ya que en ella no se hace referencia a qué instrumentos utilizar y cómo utilizarlos. Luego, podría derivarse que en los problemas de regla y compás, el resultado es la construcción.

A su vez podríamos dar la siguiente definición "*la solución es el conjunto de pasos que llevan de los datos a la incógnita*", por ende en el caso que estamos considerando la solución sería la construcción, pero además la construcción sería el resultado, puesto que contesta a la pregunta de construir con regla y compás. Por tanto con esta definición de solución, la solución y el resultado coinciden.

Por el contrario, en un problema aritmético podríamos hacer una diferenciación entre resultado y solución siguiendo las definiciones anteriores; y si de acuerdo a ellas observamos el proceso de resolución de dichos problemas, podemos concluir que la solución es la síntesis y el resultado es el producto de la síntesis.

Sin embargo, la definición de solución enunciada sólo es aplicable a los problemas de encontrar, cuyas partes principales son datos, incógnita y condición, la cual especifica cómo la incógnita está ligada a los datos. Podríamos buscar una definición de solución que no se

restrinja a una clase de problemas y que sirva para todos los problemas, una definición que también sirva para los problemas de probar, problemas en los cuales no hay datos ni incógnita. Podríamos adoptar la siguiente definición más general "*solución es el conjunto de pasos que me llevan al resultado*". Entonces ya no podremos decir que en nuestros problemas la construcción es la solución, porque la solución es el conjunto de pasos que nos llevan a descubrir la construcción.

Si con este esquema miramos un proceso de resolución de un problema de regla y compás, podríamos decir que la solución es el análisis porque el análisis es lo que lleva a descubrir la construcción, y el resultado, o sea la construcción, es la síntesis.

Podemos ser menos ambiciosos en cuanto a dar definiciones tan generales que sirvan para cualquier problema, ya que las construcciones de regla y compás son una clase muy particular de problemas. Los mismos, además de tener sus propias características, son problemas geométricos y son problemas de encontrar. ¿Qué responde a la pregunta de los problemas geométricos de encontrar? Vamos a abordar este asunto haciendo referencia a un famoso problema, el cual fue propuesto por Fagnano en 1775, cuyo enunciado es el siguiente "Encontrar el triángulo de menor perímetro inscripto en un triángulo acutángulo". Lo que responde a la pregunta es un triángulo, se trata del triángulo cuyos vértices son los pies de las alturas; podemos acordar entonces que dicho triángulo es el resultado. No obstante, la obtención de dicho resultado puede realizarse de distintas maneras, el mismo Fagnano resolvió el problema mediante cálculos, es decir dio una solución analítica, más tarde Schwartz aporta una solución geométrica, empleando nociones de simetría.

De acuerdo a estas consideraciones puede decirse que "*resultado es el objeto matemático que responde a la pregunta*", y "*solución es el conjunto de pasos que llevan a obtener dicho resultado*". Sobre esta base podemos considerar que los problemas de construcciones geométricas consisten en la construcción de una figura dados ciertos elementos de la misma, por tanto lo que responde a la pregunta es una figura que cumple con la condición del problema, una figura cuyos elementos responden a la condición. Según nuestras reglas de juego, la figura que responde a la pregunta del problema debe

construirse con regla y compás, por tanto se agrega una nueva condición. Este requerimiento puede verse plasmado en el tipo de solución que se espera, no es cualquier solución sino una que implique la construcción de ciertos lugares geométricos construibles con regla y compás.

Acorde a estas últimas apreciaciones se han adoptado las definiciones de los términos "solución" y "resultado", sin embargo cabe señalar que no se puede zanjar este asunto esgrimiendo que esta es la mejor manera de hacerlo, sino que simplemente es una manera. Las acepciones adoptadas para referirnos a los términos que han sido motivo de reflexión son:

"Resultado es el objeto matemático que responde a las condiciones requeridas por el problema".

"Solución es el conjunto de pasos que conducen al resultado mediante la construcción de lugares geométricos con regla y compás".

De estas definiciones y enfocando el proceso de resolución de problemas, puede interpretarse a la solución como el conjunto de pasos que llevan a construir la figura requerida utilizando regla y compás, en este sentido podría decirse que la solución implica el análisis y la síntesis, el análisis lleva a descubrir los pasos para la construcción, y la síntesis permite efectivizar la construcción para obtener el resultado, donde el resultado es la figura que responde a las condiciones del problema, es el producto de hacer la síntesis.

3.3. SOBRE EL PROCESO DE RESOLUCIÓN

La descripción del proceso de resolución de problemas puede hacerse desde dos niveles de análisis diferentes, el microscópico y el macroscópico.

En el análisis microscópico se observan las conductas puntuales, de este modo se detectan instancias en que el resolutor está aplicando un algoritmo, interpretando la información que surge del enunciado, recordando una definición o una propiedad, eligiendo una alternativa ante dos caminos de solución que parecen razonables, comprobando el

resultado, tratando de recordar un problema parecido o simplemente está atascado y sin saber qué hacer. En cambio, en un nivel de análisis macroscópico se observa la totalidad del proceso, las conductas puntuales no son conductas aisladas, sino parte de un bloque de conductas que tienen un sentido determinado en el proceso, un sentido respecto al objetivo final de obtener la solución (Puig y Cerdán, 1988, pág. 22).

En los siguientes apartados se comentan dos maneras distintas de realizar descripciones macroscópicas, una de ellas utiliza la introspección y proviene de la obra de Polya, desarrollada hasta los años 60, y la otra surge de los trabajos de Schoenfeld realizados dos décadas después, en la que se utiliza la observación. Estas dos perspectivas nos brindarán elementos que serán de utilidad al realizar las elaboraciones teóricas correspondientes a nuestra clase de problemas.

3.3.1. Del proceso del resolutor ideal

Puig y Cerdán (1988) hacen referencia al libro "Cómo plantear y resolver problemas" (Polya, 1965) e interpretan que efectivamente lo que ha hecho su autor es examinar, mediante la introspección, el comportamiento de lo que llaman un resolutor "ideal". De acuerdo a ello el trabajo de Polya puede verse como un intento para describir las tareas generales que realiza este resolutor, elaborando en consecuencia un modelo del proceso de resolución dividido en fases. Es su conocido modelo de cuatro fases: *comprensión, elaboración de un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva.* De este modo dichas fases serían el reflejo de una conducta competente, es decir son las que seguiría un resolutor ideal, quien para recorrerlas lo hace linealmente, o sea que no pasa a la fase siguiente sin haber completado la anterior. El resolutor ideal atraviesa dichas fases de un modo secuencial, pasando de una a otra sólo cuando la anterior ha concluido. En ese libro Polya presenta dicho modelo y acompaña cada una de las fases con un conjunto de preguntas de naturaleza heurística, que el resolutor puede hacerse a sí mismo o que un profesor puede utilizar para guiar a sus alumnos en la resolución de un problema. Por tanto, completar una fase se traduce en dar respuesta al conjunto de preguntas que la acompañan. Cada fase tiene un objetivo específico; una fase se completa cuando la tarea

correspondiente se ha concluido y se está preparado para abordar la tarea de la siguiente fase. Así, la fase de comprensión finaliza cuando el resolutor establece claramente la meta del problema, después de haber analizado el contenido del problema basándose en las preguntas incluidas en esta fase. Del mismo modo, la fase de elaboración de un plan, termina cuando el resolutor ha determinado los pasos necesarios para hallar la incógnita, y la fase de ejecución termina cuando la incógnita ha sido determinada. Por último, la fase de visión retrospectiva acaba después de hacer las verificaciones relativas a la correcta implementación del plan, de comprobar si la incógnita determinada es la que responde a la pregunta del problema, de considerar el método o el resultado para la solución de nuevos problemas y de haber aprendido de la resolución del problema todo lo que el resolutor considera posible aprender.

En este trabajo, y tendiendo a un modelo de competencia, tendremos en cuenta las fases por las que transitaría el resolutor ideal, por lo cual vamos a dividir el proceso de resolución de un problema según las mismas.

Otro aspecto importante planteado en los trabajos de Polya es la consideración del tipo de razonamientos que intervienen en el curso de la resolución de un problema. En el proceso de resolución no sólo tienen lugar razonamientos deductivos, sino que existen ciertos razonamientos que no pueden describirse con los patrones clásicos deductivos de la lógica, son razonamientos que se consideran provisionales y viables, y cuyo objetivo es descubrir la solución. En el libro "Matemática y razonamiento plausible" (Polya, 1966) analiza la estructura formal de estos razonamientos, los llamados razonamientos plausibles, en los cuales no se transmite verdad de las premisas a la conclusión, sino un aumento en la creencia de que la conclusión es verdadera. Los *patrones plausibles* (PP) son los que describen la forma lógica de estos razonamientos, describen la forma lógica de los razonamientos en que se apoyan las tomas de decisiones que tienen lugar en el proceso de resolución de un problema, puede decirse que bajo cualquier decisión tomada por el resolutor respecto a qué alternativa es más razonable para seguir, habrá algún PP subyacente.

Nos limitaremos a mencionar este asunto, acordamos que en la resolución de un problema pueden encontrarse ciertos razonamientos descriptibles mediante patrones

plausibles, y otros razonamientos que responden a patrones deductivos, en cambio en la solución del problema, es decir en el conjunto de pasos que conducen al resultado, sólo son admisibles los razonamientos deductivos. Además sólo vamos a señalar que los PP no son conocimientos ni conductas del resolutor, y que la estructura lógica de la matemática lleva a que no sean enseñables en forma directa, por lo cual suelen aparecer indirectamente en situaciones de enseñanza.

3.3.2. De los componentes del proceso

Para describir lo que sucede al resolver problemas, Schoenfeld propone situarse en el lugar de un observador exterior que mira lo que un resolutor concreto está haciendo mientras resuelve el problema. Desde este punto de vista, divide el proceso en trozos diferentes, llama episodio a cada uno de los trozos en los que la conducta del resolutor es homogénea y caracteriza a estos diferentes bloques de modo que especifiquen su función en la globalidad del proceso. De ahí que su esquema de análisis se basa en la división del protocolo en episodios, donde cada episodio es una secuencia de conductas de la misma naturaleza. Los nombres que propone para calificar los episodios son: lectura, análisis, exploración, plan-ejecución, verificación, transición, información nueva y evaluación local. Los mismos están definidos en Schoenfeld (1985), así como también la forma de examinarlos en un protocolo, la cual se basa en una lista de preguntas que se corresponden con cada uno de ellos. Dicha lista fue diseñada con la intención de analizar las tareas del gestor en el proceso de resolución, por tanto las preguntas se centran en este componente, al cual nos referiremos en párrafos posteriores.

De las investigaciones de Schoenfeld, basadas en una observación minuciosa del proceso de resolución de problemas por sujetos reales, se desprende que a la hora de resolver un problema intervienen ciertos elementos -recursos, heurísticas, gestor y creencias- que modelan el proceso de resolución. En su libro "Mathematical Problem Solving" (Schoenfeld, 1985) los llama *componentes del conocimiento y la conducta* y los describe dando ejemplos de su influencia en la actuación de algunos resolutores; más

precisamente, describe el proceso de resolución de resolutores reales basándose en estos componentes[4].

Denomina *recursos* a los conocimientos y destrezas que pueden utilizarse para resolver el problema, al conocimiento matemático que posee el resolutor y que puede aportar a la solución para hacer el problema más accesible. Con intención de diferenciar los recursos que pueden delinear el quehacer individual en un dominio matemático particular presenta la siguiente lista: a) intuiciones y conocimiento informal observado en el dominio; b) hechos y definiciones; c) procedimientos algorítmicos; d) procedimientos rutinarios o técnicas no algorítmicas para resolver cierta clase de problemas; e) competencias relevantes o implementación rutinaria de ciertas estrategias heurísticas; f) conocimiento de reglas de discurso en el dominio.

Los dos primeros títulos que encabezan la lista dan cuenta por sí mismos del contenido de cada uno, el tercero y el cuarto se refieren a procedimientos algorítmicos y no algoritmicos respectivamente, en el primer caso se incluyen las construcciones standars, manipulaciones algebraicas, etc. y en el segundo caso se ubican técnicas no algorítmicas para resolver cierta clase de problemas, por ejemplo el procedimiento para hallar máximos y mínimos en Cálculo, donde hay decisiones tácticas como elegir la variable independiente, obtener la fórmula para la variable dependiente, etc. pero no hay decisiones estratégicas, o sea decisiones de qué hacer en la solución, el resolutor sabe que esa forma general de enfocar el problema lo lleva a la solución, por tanto el control no está presente a menos que haya errores en la implementación. En el siguiente título, competencias relevantes, se incluyen las habilidades para implementar ciertas heurísticas, que se traducen en hacer reformulaciones del problema y en llevar a cabo formas adecuadas de trabajo que conducen a descubrir pistas para la solución. El último título de la lista se refiere al conocimiento proposicional, al conocimiento necesario para analizar la naturaleza de las argumentaciones matemáticas.

Respecto al segundo componente, ya en Schoenfeld (1980) se explica qué es un heurístico y se da una lista de heurísticos por episodio[5]; se lo define como "una sugerencia

[4] Posteriormente, Schoenfeld (1992) se refiere a estos componentes como "aspectos de la cognición".

general o estrategia, independiente de cualquier tópico particular o materia de estudio, que ayuda al resolutor a aproximarse y comprender un problema y ordenar eficientemente sus recursos para resolverlo". La última frase es importante, ya que expresa la relación entre lo heurístico y lo que posteriormente este autor denominará control o decisiones ejecutivas. En Schoenfeld (1985) las *heurísticas o estrategias heurísticas* son reglas para tener éxito en la resolución de problemas, sugerencias generales que ayudan a comprender mejor el problema o hacer progresos hacia su solución. Entre ellas se incluye dibujar figuras, introducir notación adecuada, explotar problemas relacionados, reformular problemas arguyendo por contradicción, trabajar hacia atrás, conjeturar y verificar, considerar casos.

Claramente estas heurísticas son de diferente naturaleza, por ende si se quieren analizar los elementos que intervienen en el proceso de resolución con cierto detalle, habrá que diferenciarlas. En las publicaciones de Puig y Cerdán ha sido acuñado el término **herramienta heurística** (HH) cuando se hace referencia a un procedimiento independiente del contenido del problema que lo transforma en otro, queriendo resaltar con dicho término su carácter de instrumento de transformación. Una HH no resuelve el problema ni garantiza

[5] Para el *análisis y comprensión* del problema, sugiere dibujar un diagrama, examinar casos especiales y simplificar usando simetría o "sin pérdida de generalidad". Para el *diseño y planificación* de una solución sugiere planificar soluciones jerárquicamente, explicar qué se está ejecutando y por qué y qué se hará con el resultado de esa operación. En la *exploración de soluciones de problemas difíciles* recomienda considerar una variedad de problemas equivalentes –reemplazando condiciones por otras equivalentes, combinando elementos del problema de diferentes formas, introduciendo elementos auxiliares, reformulando el problema ya sea cambiando de notación, o bien arguyendo por contradicción o asumiendo una solución y determinando las propiedades que debe tener-, considerar leves modificaciones del problema original –eligiendo submetas, eliminando una condición para luego intentar imponerla, descomponiendo el problema y trabajar caso a caso- y considerar amplias modificaciones del problema original –examinando problemas análogos con menos variables, explorando el papel de una sola variable o condición dejando el resto fijo, explotando algún problema similar ya sea sacando partido tanto del resultado como del método de solución. En la *verificación de la solución* sugiere usar test o criterios específicos -¿se usan todos los datos pertinentes?, ¿es razonable?, ¿resiste ensayos de simetría, análisis dimensional o cambios de escala?-, y usar test o criterios generales -¿se puede llegar al resultado de otra manera?, ¿puede quedar concretada en casos particulares?, ¿es posible reducirla a resultados conocidos?, ¿se puede utilizar para generar algo conocido?-. (Schoenfeld, 1980, págs. 9-10)

su solución sino que lo transforma en otro; su nombre se determina en función de la comparación entre el problema original y el transformado. De ahí por ejemplo, la denominación de la HH "consideración de un caso", la cual implica sustituir un elemento del problema por otro del mismo campo, donde el término elemento no se restringe a un objeto individual sino que puede considerarse como tal a una familia de objetos.

Por otra parte y apartándonos por un instante de esta definición de HH, la cual va a permitir discriminar ciertas heurísticas de Schoenfeld, es interesante señalar que las HH pueden adoptar diferentes formas, así la "consideración de un caso" puede adoptar una forma general, particular, singular o límite. La primera de ellas resulta de sustituir el elemento por una clase a la que pertenece, la segunda de sustituir el elemento por una subclase, la tercera resulta de sustituirlo por un objeto, la cuarta implica la consideración de un caso particular o singular que se encuentra en un extremo del campo de variabilidad; incluso alguna de estas formas pueden llevar a la consideración de una serie de casos, la cual es otra versión de esta herramienta. Puede observarse que lo mismo ocurriría para otras HH, entonces si pretendemos analizar las distintas maneras que tienen cada una de las HH de realizar la transformación del problema, nos encontraríamos con una infinidad de "subestrategias" aplicables a pocos problemas. Una forma de acotar el número de HH y a la vez tener en cuenta esta diversidad de maneras en que pueden aparecer es dar un sentido más abarcativo a cada HH, de modo que pueda ajustarse a una mayor cantidad de problemas, pero a condición de hacer una reinterpretación a través de ciertas tareas de monitoreo. Entonces, cada HH hará referencia a un procedimiento determinado que permitirá formular un problema relacionado con el original y su manera particular de actuar sobre un problema puede examinarse mediante ciertas tareas -comparación de dicho problema con el transformado, análisis de los efectos de su uso para la solución del problema original, etc.- cuya ejecución depende de otro de los componentes del proceso -el gestor-, al que posteriormente nos referiremos.

Volviendo a nuestro análisis, vamos a partir de que las HH hacen referencia a un procedimiento determinado que permite formular un problema relacionado con el original. Esta caracterización de las HH hace posible la distinción entre las heurísticas que pueden aparecer durante la resolución de un problema. De este modo "hacer una tabla" o "usar

notación adecuada" no tienen el carácter de transformación del problema, aunque son formas adecuadas de trabajo que tienen potencial heurístico. A este tipo de heurísticas que pueden ser útiles para descubrir las llamaremos **destrezas**. El uso del cálculo aritmético también es una destreza pero no pertenece al campo de la heurística sino que responde al conocimiento de cierto contenido matemático que puede aportarse a la solución del problema, pero hay destrezas que tienen contenido heurístico por lo cual las incorporaremos en este terreno. Otro tipo de heurísticas serán aquellas **sugerencias generales** cuya función es señalar una dirección de trabajo pero que no evocan un procedimiento concreto, por ejemplo la sugerencia de "explotar problemas relacionados". Por último, lo que en párrafos anteriores se ha llamado "trabajar hacia atrás", no es otra cosa que una nueva forma de llamar al método griego de análisis. En este trabajo consideraremos que los **métodos de resolución** son parte de la heurística que está presente en el proceso de resolución de problemas, los mismos pretenden garantizar la solución de un problema. Estos métodos, que hemos llamado heurísticos, llevan a una transformación del problema original determinada de forma standard, transformación que para el caso de los métodos aplicables a los problemas de regla y compás hemos examinado en el capítulo anterior.

Otro de los componentes que podría considerarse de los trabajos de Schoenfeld es el *gestor* o *control*, trata de las formas en que el resolutor usa la información que está potencialmente a su disposición, se centra en las decisiones claves sobre qué hacer en un problema, decisiones que pueden llevar a continuar o suspender un camino de solución. Las acciones al nivel de control se caracterizan por tener consecuencias globales sobre la evolución de una solución. Entre los comportamientos de interés se incluyen: diseñar planes, seleccionar objetivos y subobjetivos, analizar y comprobar las soluciones, revisar o abandonar un plan cuando el examen indica que hay que hacerlo. Son decisiones ejecutivas, son decisiones globales que abarcan la selección e implementación de recursos –incluyendo la distribución del tiempo- y heurísticas a disposición del resolutor.

El elemento restante[6] que interviene en el proceso de resolución de problemas es el *sistema de creencias*, que implica una visión del mundo de la matemática, que indica la perspectiva con que el resolutor se aproxima a la matemática y a las tareas matemáticas; da cuenta de sus creencias sobre sí mismo, sobre el entorno, sobre el tema, sobre la resolución de problemas, sobre la matemática. Es el conjunto de determinantes del comportamiento individual, derivado de las experiencias del sujeto con la matemática. Las creencias sobre la matemática pueden determinar cómo se acerca el resolutor a un problema, qué técnicas usar o rechazar, cuánto tiempo y con qué dedicación trabajar, y otras cosas por el estilo. Las creencias establecen el contexto en el que operan los recursos, las heurísticas y el control, y en ese sentido es que en este trabajo hacemos alusión a ellas.

Podría decirse que inicialmente estos elementos provienen de la observación de una carencia y luego pasan a conformar el conjunto de elementos explicativos del proceso. Al observar el proceso de resolución de sujetos reales, Schoenfeld ha encontrado casos en los que los resolutores eran incapaces de resolver el problema que se les había planteado y se embarcaban en tareas que no llevaban a la solución, no obstante poseían tanto los recursos pertinentes para la solución, como un arsenal de heurísticas adquirido de forma organizada a través de la instrucción explícita en ellas. Para dar cuenta de ello, introduce la idea de que el proceso de resolución en todo momento está regulado por un mecanismo de carácter metacognitivo, al que denomina gestor, cuya función es controlar lo que sucede y decidir qué hay que hacer para alcanzar la meta, procura que las acciones y decisiones del resolutor se dirijan a obtener la incógnita o la conclusión requerida. De la misma manera se encontró con casos en los que, pese a conocer las heurísticas y hacer una buena gestión, los resolutores no pudieron resolver el problema a causa de una falta de conocimiento acerca de algún hecho o algoritmo, o simplemente porque no se utilizaron ciertas destrezas que hubieran facilitado el camino de solución, entonces explica el fracaso de los resolutores mediante la carencia de recursos. Y cuando disponiendo de todo lo anterior, a los resolutores ni se les ha ocurrido que aquello que sabían podían utilizarlo en la resolución,

[6] Schoenfeld (1992) adiciona otro elemento, las *prácticas*, que son el conjunto de experiencias que se dan en el entorno escolar, y más ampliamente en el entorno social, que conforman la percepción matemática del individuo.

entonces sus concepciones acerca de la matemática y de la tarea de resolver problemas son las que lo llevan al fracaso, o sea que el sistema de creencias permite explicar dicho fracaso.

En lugar de considerar a estos elementos como fuente de explicación de la conducta del resolutor, se los podría considerar como elementos que hacen falta para tener éxito a la hora de resolver un problema[7]. En este trabajo y puesto que estamos enfocando problemas muy particulares, podemos avanzar un poco más en este asunto, y además de indicar cuáles son los elementos que componen la conducta competente, trataremos de precisar en detalle qué significa ello en el caso los problemas de regla y compás.

3.4. SOBRE LA COMPETENCIA EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE REGLA Y COMPÁS

Los problemas de regla y compás implican el uso de determinados métodos, los cuales generan una serie particular de problemas, analizada en detalle en el capítulo anterior. La conducta competente se ha de caracterizar entonces por estar organizada por un método, lo cual lleva a hacer un recorrido por un espacio de problemas.

Asumiremos que el proceso de resolución de problemas no se compone de conductas puntuales aisladas, sino que dichas conductas tienen un sentido respecto a la totalidad del proceso, por lo cual lo consideraremos para su análisis compuesto por fases con objetivos específicos. Examinaremos el proceso de resolución de problemas a partir de las fases por las que transitaría el resolutor ideal, pero a diferencia de G. Polya y puesto que estamos trabajando con sujetos reales, para nosotros no habrá fases perfectas, concebiremos dichas fases como estados por los que se pasa y a los que se puede volver durante el

[7] Puig (1996) utiliza esta idea para listar los elementos del modelo de competencia asociado al estilo heurístico de resolución de problemas, los cuales son: destrezas con potencial heurístico, sugerencias heurísticas, herramientas heurísticas, métodos de resolución con contenido heurístico, patrones plausibles, gestor instruido, concepción de la naturaleza de resolver problemas según la cual ésta se realiza con fines epistémicos. (Puig, 1996, pág. 44).

proceso de resolución. Una conducta competente podría caracterizarse entonces por cierto recorrido por las distintas fases del proceso de resolución.

¿Qué hay que añadir a estas fases cuando estamos en una clase de problemas concretos? La descripción de las fases que hace Polya (1945) es muy general, lo cual es razonable porque habla de resolver problemas en general, por tanto vamos a intentar abordar este asunto desde nuestros problemas.

Los métodos introducen una particularidad en el proceso de resolución, y es que organizan el plan. El matiz que imponen los métodos es que el proceso de resolución debe estar guiado por el método; la elaboración del plan consiste básicamente en decidir usar el método y en la ejecución del plan se llevan a cabo los pasos de dicho método. Entonces si describimos la conducta competente guiada por un método, si nos fijamos en la competencia en un proceso de resolución de problemas guiado por un método, es esperable que la fase de elaboración del plan apenas tenga entidad, es previsible que dicha fase sea extremadamente corta y que se pase rápidamente a la fase de ejecución, la cual es difícil y larga. Estas especulaciones teóricas se corroboran en los análisis que Puig (1996) hace en el caso de problemas conducidos por el Método Cartesiano. En ellos puede observarse que en los procesos de resolución guiados por ese método, tienen lugar episodios de lectura y análisis con pocos items -siendo los items trozos del protocolo sin interrupción-, y que rápidamente se pasa a un episodio de plan-ejecución compuesto de una gran cantidad de items. Es decir el proceso se compone de unos primeros episodios, que desde nuestro punto de vista corresponderían a una fase de comprensión, y luego prácticamente toda la actividad corresponde a la fase de ejecución. Los procesos estudiados además incluyen un episodio de verificación el cual en algunos casos, además de estar compuesto por items en los que se hacen las verificaciones correspondientes, está compuesto por otros items en los que se hace un nuevo análisis del problema y se ejecuta el plan derivado de éste. Del análisis de estos protocolos se desprende que el centro del proceso es la ejecución de un plan organizado por el método, y que esa ejecución se compone de segmentos de conducta asociados a los pasos de dicho método.

Volviendo a los problemas de regla y compás, el ideal competente en resolver estos problemas hace a mano alzada un dibujo de la figura requerida marcando los datos, piensa

en el método y estudia la posibilidad de aplicarlo, una vez hecho esto pasa a la ejecución del plan. Esto es propio de un proceso de resolución guiado por un método, de inmediato se está en la ejecución, en el momento en que se ponen en marcha los pasos del método. O sea que la fase de ejecución prácticamente ocupa todo el proceso, y se puede decir que esto es algo inherente a los procesos guiados por un método.

Si a este análisis teórico que estamos haciendo del proceso de resolución, le añadimos la noción de espacio de problemas, se introduce un nuevo elemento a considerar al hacer la división en fases. Al resolver un problema, no se resuelve un único problema sino una serie de problemas generados por un método o por la aplicación de herramientas heurísticas. Entonces las fases del proceso ya no sólo deben pensarse respecto al problema original sino también respecto al problema del espacio que se está abordando. Cuando se está en el problema original y desde un punto de vista teórico, es de esperar que la comprensión y ejecución sean fases largas, incluso la fase de visión retrospectiva tendrá una fuerte entidad puesto que no se limita a las verificaciones correspondientes de la solución o del resultado sino que en ella se tratará de potenciar el trabajo heurístico. En cambio resulta casi obvio que en un problema transformado la fase de comprensión sea efímera y en algunos casos, una vez enunciado el problema se pase directamente a otra fase, del mismo modo es de esperar que el grado de presencia de las demás fases varíe; o sea que podemos acordar que al resolver cualquier problema del espacio también se transitarán las fases de Polya pero habrá una variación en su peso.

Por otra parte, si consideramos la presencia en el proceso de resolución de problemas de los componentes del conocimiento y la conducta, o aspectos cognitivos llamados posteriormente por Schoenfeld, y en lugar de concebirlos como fuente de explicación del fracaso de los resolutores, los concebimos como elementos necesarios para tener éxito al resolver problemas, podemos acordar que son elementos de la conducta competente. No obstante si pretendemos avanzar más en la teoría y hacer análisis más refinados del proceso, no basta sólo con enunciar que son elementos de competencia sino que se hace necesario examinar qué significa esto. Las descripciones que hace Schoenfeld

acerca de cómo están presentes estos elementos en un proceso de resolución son también muy generales. Por ejemplo, el gestor tiene funciones de carácter general, en una instrucción organizada a fin de generar un buen gestor en la conducta de los resolutores lo introduce mediante preguntas generales: ¿qué estoy haciendo? ¿para qué lo estoy haciendo? ¿cómo encaja lo que estoy haciendo en el conjunto de la resolución del problema? Naturalmente, la reiteración de dichas preguntas en la actuación de los sujetos carece de sentido si estos no cuentan con los instrumentos como para realizar el análisis que lleve a responderlas. Son preguntas buenas pero fracasan en un determinado momento, porque el ¿qué estoy haciendo? no sirve si uno no sabe qué es lo que puede producir el instrumento que se está usando; la pregunta ¿para qué sirve lo que estoy haciendo? sencillamente no se puede contestar si uno no conoce adonde puede conducir el instrumento que se está usando; y la tercer pregunta tampoco puede responderse si el resolutor no sabe que se está moviendo en un espacio de problemas. El sentido que daremos al gestor en el modelo teórico coincide con el de "gestor instruido" utilizado en Puig (1996), nuestro gestor es el que se hace la pregunta general pero sabiendo cuales son las respuestas posibles, no sólo sabe que ha de controlar el proceso sino que conoce las tareas asociadas al uso de recursos y heurísticas. Si se pretende analizar en detalle los elementos de competencia de resolución de problemas de regla y compás, habrá que examinar qué significa que haya un buen gestor del proceso, así como también identificar el tipo de recursos y heurísticas que facilitan el camino para llegar a resolver este tipo de problemas. Con relación al componente "sistema de creencias" sólo señalaremos que es otro elemento asociado a la competencia de resolución de problemas, y el análisis de su presencia en el proceso ha merecido la atención de muchas investigaciones que van en la línea de las concepciones del sujeto, pero esto escapa a los objetivos de nuestra investigación.

En la sección anterior hemos comentado el sentido amplio que Schoenfeld da al término heurística o estrategia heurística y hemos presentado una forma de clasificar estas heurísticas a fin de sistematizar el análisis; pero si consideramos dicha clasificación y al mismo tiempo los contenidos de los recursos que este autor identifica, llegamos a algunos puntos contradictorios. Hay ciertas destrezas y habilidades para aplicar algunas heurísticas que componen su lista de recursos, que para nosotros corresponden al campo de lo

heurístico, por tanto las recogimos en una de las clases de heurísticas. Este autor considera que los recursos son la información relevante al problema que posee el resolutor, son las herramientas y técnicas que el resolutor puede utilizar para un problema particular, de ahí la incorporación a dicha lista de ciertos elementos con potencial heurístico.

¿Cómo establecer criterios para considerar los componentes de Schoenfeld y sistematizar el análisis de su presencia en el proceso de resolución?. Para ello distinguiremos tres tipos de aspectos cognitivos, los que respectivamente llamaremos "***contenido matemático***", "***trabajo heurístico***" y "***gestor***". Con el primero de ellos nos referiremos al conocimiento de conceptos, definiciones, hechos, propiedades, algoritmos de construcción, y reglas de trabajo en este mundo de "regla y compás". El segundo hará referencia a las formas de trabajo para avanzar y resolver el problema de manera eficaz, para diferenciarlas vamos a acudir a la clasificación mencionada –*destrezas heurísticas*, *herramientas heurísticas*, *métodos heurísticos*, *sugerencias generales heurísticas*-. El tercero se centra en las evaluaciones locales y/o globales, en el trabajo con el error, en los cambios de punto de vista, toma de decisiones y en el control de la relación del problema que se está trabajando con el resto de los problemas del espacio.

Ya hemos señalado que estos elementos deben formar parte de una conducta competente; no obstante vamos a analizar el significado de estas competencias para el caso de los problemas con regla y compás.

El ***"contenido matemático"*** implicado en estos problemas se centran en el **conocimiento de conceptos** y su **reformulación como lugares geométricos**, en el uso de **algoritmos de construcción**, de algunas **propiedades de las figuras**, y en el conocimiento de ciertas **reglas de trabajo en el dominio**, tales como el significado de "lo dado", el significado de solucionar el problema, ciertos criterios elementales para la construcción de figuras, por ejemplo que una recta se determina mediante dos puntos, que para determinar una circunferencia son necesarios el centro y un punto de la misma, que tres puntos no alineados determinan un triángulo.

El ***"trabajo heurístico"*** está centrado en el uso de los tres **métodos** que hemos analizado en el capítulo 2. Cada método consiste en una serie de pasos a seguir y tal como los concebimos, cada paso se traduce en un problema. El método permite que para cierto

problema P, se puedan identificar los problemas particulares generados por su aplicación, pero no brinda indicaciones de cómo resolver esos problemas, por eso decimos que es heurístico. O sea, el método permite enunciar los problemas que se desprenden de su aplicación pero no dice nada sobre cómo resolverlos, para ello puede recurrirse nuevamente al uso de los métodos o de otras heurísticas.

Las **sugerencias generales** de carácter heurístico tienen la función de señalar una dirección de trabajo sin evocar un procedimiento concreto, tienden a orientar búsquedas en la memoria a largo plazo. En nuestro caso las sugerencias "establecer diferencias y similitudes con problemas anteriores" y "reducir el problema a una construcción elemental ya vista o problema resuelto anteriormente" corresponden a esta clase de heurísticas, la primera atiende a la plena comprensión del problema para luego configurar un plan y la segunda parece apuntar en forma inmediata a la configuración del plan. Otro conjunto de sugerencias heurísticas, que también tienen un carácter general, y que son importantes en el proceso de resolución, sobre todo porque atienden a una concepción de la disciplina y de la actividad de resolución de problemas, son las que llevan a potenciar las posibilidades que brinda el problema, por ejemplo las sugerencias que llevan a analizar el resultado o a resolver el problema de forma diferente.

La *reformulación* es la **herramienta heurística** aplicable a esta clase de problemas, adopta su forma de acuerdo al contenido matemático a que hace referencia. La consideración de ciertos conocimientos matemáticos lleva a realizar las reformulaciones encaminadas a la solución de los problemas. Algunas reformulaciones se desprenden de la consideración de los criterios de construcción de las figuras, de la aplicación de algún hecho, otras en cambio, provienen de concebir a las figuras geométricas como lugar de puntos, lo que se traduce en transformaciones del problema original basadas en las propiedades del conjunto de puntos implicado. Así por ejemplo, el problema "trazar la paralela a una recta por un punto dado" se puede reducir a encontrar otro punto, si tenemos en cuenta el criterio para construir una recta, por tanto el problema inicial se transforma en "encontrar un punto que esté en la paralela", y si se concibe a la paralela como lugar geométrico dicho problema se transforma en "encontrar un punto que esté a la misma distancia que está el punto dado de la recta dada". Cabe señalar que cada una de las

reformulaciones que se hacen durante el proceso persigue descubrir el problema asociado a un paso del método.

Otras herramientas heurísticas que pueden ser útiles son "dar un valor particular a la incógnita" y "explorar rango de posibilidades mediante casos límite", las cuales pueden considerarse para llegar a una plena comprensión el problema; por ejemplo al abordar el problema "Construir un triángulo dados un lado y los ángulos adyacentes" puede tomarse el caso de un triángulo obtusángulo y estudiar qué valores de ángulos podrían tomarse como adyacentes, esto puede conducir a la evaluación de la pertinencia de datos, del mismo modo a partir del examen de casos límite, o sea triángulos bajos y anchos, o altos y angostos, se puede desembocar en la evaluación de datos y con esto aumentar el conocimiento de las partes principales del problema.

Las **destrezas heurísticas** son formas adecuadas de trabajo que pueden ser útiles para descubrir; podemos dividirlas en tres grandes grupos: 1) instrumentales, referentes al *uso de instrumentos de geometría*, a la *precisión en los trazados*, 2) organizativas, por ejemplo *hacer una figura para visualizar la información dada en el enunciado*, o *hacer un dibujo para representar el plan*, 3) comunicativas, por ejemplo *uso de notación adecuada.*

La notación simbólica es necesaria para traducir el enunciado de un lenguaje dado a otro y reordenar la información. Cuando la información es abundante o está dada en lenguaje coloquial puede ser útil expresar los datos, condiciones e incógnita de forma clara y abreviada (notación matemática); esta representación que conlleva la traducción del lenguaje usual al matemático, hace más manejable la situación. Asimismo, un dibujo preciso proporciona un terreno adecuado para el descubrimiento, por ejemplo si dicho dibujo constituye un resultado intermedio puede servir para encontrar sus relaciones con la incógnita, en cambio si el dibujo corresponde al resultado del problema puede facilitar la búsqueda de conexiones y extensiones del problema original.

En los problemas que se presentan con enunciado verbal, hacer una figura para visualizar la situación descrita en el enunciado ayuda a la comprensión del problema, es un dibujo para visualizar la información dada en el enunciado que es útil para entender qué es lo dado y qué es lo buscado.

En vías de diseñar un plan, podemos intentar descubrir los antecedentes que hacen falta para determinar la incógnita, para ello es útil hacer un dibujo a mano alzada de dicha incógnita y remarcar lo dado. A esta figura que resulta de dar el problema por resuelto y marcar en ella los datos, la vamos a llamar "*figura de análisis*" ya que permite "hacer análisis".

En los problemas de construcción de triángulos la figura que representa la situación del enunciado y la figura de análisis coinciden como objeto geométrico, pero el rol que tienen en el proceso de resolución es diferente, por lo cual es posible distinguirlas. Es decir, se puede dibujar un triángulo remarcando en él los datos y usar esa figura en sentidos distintos. Por un lado se la puede utilizar simplemente para visualizar lo dado y a partir de esto llegar a entender cual es la meta del problema. Por otro, se utiliza dicha figura para hacer el examen previo de lo que se busca, la intención es partir del objetivo final o resultado y analizar los objetivos parciales o resultados intermedios que habría que plantearse para determinarlo, este es el sentido que hemos dado a la figura de análisis.

Otra cuestión a considerar es la *naturaleza genérica de la figura de análisis*. Esta figura es una representación del resultado y como tal presenta ciertas peculiaridades que deben omitirse. En el estudio de cuadriláteros un cuadrado particular se lo puede considerar representante de una clase de figuras y del trabajo con dicha figura se pueden inferir propiedades de todos los cuadrados, es decir que es necesario dejar de lado ciertos atributos irrelevantes –tal como las dimensiones del cuadrado- para conjeturar y demostrar los atributos relevantes de dicha figura, o las propiedades que tienen todos los ejemplos correspondientes a esa figura. Del mismo modo, la figura de análisis es un representante del conjunto de objetos geométricos que cumplen con las condiciones del problema y es a partir de hacer caso omiso a la forma y dimensiones de esa figura que se descubren las relaciones esenciales entre la incógnita y los datos. Entender cual es la naturaleza de la figura de análisis es disponer de un conocimiento de ciertas reglas de trabajo en el dominio que es necesario para la resolución de problemas.

En referencia al tercer componente, y situados en un proceso de resolución guiado por un método, podemos establecer que las tareas del ***"gestor"*** son las derivadas de saber cuáles son los *pasos*, saber *cómo se organizan*, saber cuáles son los *problemas generados*.

Además, puesto que muchas veces hay implicado más de un método, es el gestor el que organiza la *secuencia de uso* de los mismos. En el análisis teórico de los problemas de regla y compás hemos establecido ciertos criterios para decidir cuándo un método es aplicable. De la amplia variedad de resoluciones que pueden asociarse a un problema, sólo consideramos aquellas cuyos espacios teóricos se reducen a las construcciones elementales, y al trazado de circunferencias y rectas que implican operaciones básicas. Esta perspectiva permite poner los métodos en secuencia. El Método de los Dos Lugares es el más sencillo, por tanto el resolutor consciente intentará aplicarlo en primera instancia, no obstante sólo será posible su aplicación si los lugares implicados se corresponden con alguna de estas construcciones. En caso de no poder aplicar este método, el resolutor consciente recurre al Método de la Figura Auxiliar, puesto que es mucho más sencillo que el de la figura semejante; y sólo cuando resulta imposible hacer la figura auxiliar recurre al Método de Figura Semejante.

3.5. SOBRE LA COMPETENCIA EN ENSEÑANZA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE REGLA Y COMPÁS

Con la intención de describir los elementos que componen la competencia al enseñar a resolver problemas, vamos a centrarnos en una enseñanza que apunta a la competencia en resolución de problemas basada en un estilo heurístico. No se pretende analizar una enseñanza que apunte a una manera de resolver problemas basada en el uso o aplicación directa de esquemas dependientes del contenido, en la que es necesario tener una gran base de conocimientos para abordar los problemas, pues esto escapa al terreno heurístico. Dicha enseñanza también lleva asociado un cierto modelo de competencia que implica una base de conocimientos dependientes del contenido, que implica competencias en resolución de problemas, que son deseables pero están fuera de los objetivos del sistema y de la heurística. Aquí se está focalizando a otro modelo de competencia, al modelo de competencia correspondiente a una enseñanza que atiende a un estilo heurístico de resolver problemas. Esta característica de alguna forma debe reflejarse en la manera de enseñar, de

donde podemos inferir que un profesor que pretenda enseñar un estilo heurístico deberá actuar acorde al mismo ya que ese es su objeto de enseñanza.

Estamos situados en los problemas de regla y compás, no estamos viendo todos los problemas ni toda la heurística, pero el comportamiento que se va a intentar enseñar es el heurístico. Hemos elegido "regla y compás" como modelo de competencia heurística, el cual requiere de ciertas habilidades en resolución de problemas, es un modelo que puede ser utilizado para enseñar ciertas heurísticas o ciertas formas de comportamiento heurístico. "Regla y compás" es un componente para el profesor que pretende enseñar resolución de problemas, ya que envuelve ciertos modos y medios de resolución que son heurísticos. Nuestra intención es elaborar un modelo de competencia correspondiente a una manera de enseñar que pretende que los alumnos tengan un estilo heurístico al resolver problemas con regla y compás. Como estamos focalizando una clase de problemas, ese comportamiento heurístico está fundamentalmente centrado en el uso de los tres métodos.

En la sección 3.3 se han identificado algunos elementos correspondientes a la competencia en resolución de problemas de regla y compás, y dicha competencia es la que se intenta enseñar, por lo cual se transforman en elementos necesarios de la conducta competente al enseñar a resolver esta clase de problemas. Asimismo, se hace necesaria la consideración de dichos elementos al organizar una enseñanza tendiente a promover un estilo heurístico.

De esta manera los distintos aspectos cognitivos presentes en el proceso de resolución de problemas inevitablemente deben ser incorporados a la organización de la instrucción. Por tanto las acciones que caracterizarán a una conducta competente estarán orientadas a poner en juego estos aspectos. La presencia de los mismos en la enseñanza puede traducirse en indicaciones que da el docente al respecto:

- ***"Indicaciones de Contenido Matemático":*** hacen alusión al conocimiento de conceptos, propiedades o hechos, algoritmos de construcción, reglas de trabajo en el mundo específico de la "regla y el compás".

- ***"Indicaciones para el Trabajo Heurístico":*** se refieren a las formas de trabajo para avanzar y resolver el problema de manera eficaz; orientaciones respecto a ciertas destrezas, a utilizar ciertas herramientas heurísticas, a la aplicación de los pasos de

algún método de resolución, o sugerencias generales cuya función es orientar búsquedas en la memoria a largo plazo.

- ***"Indicaciones para el Gestor"***: llevan a evaluaciones locales y/o globales, al cambio de punto de vista, a la reflexión de lo que se está haciendo y para qué se hace, son indicaciones que orientan a moverse en el espacio de problemas de la resolución de un problema.

Ya hemos comentado que en la clase de problemas que estamos estudiando, la estructura del proceso de resolución está modelada por un método. El método consiste en una serie de pasos a seguir que se traducen en problemas. El método permite identificar los problemas particulares generados por su aplicación, pero no brinda indicaciones de cómo resolverlos. En este punto es que decimos que el profesor actúa como sugeridor heurístico; sus indicaciones serán de diferente naturaleza, a veces irán en el sentido de las destrezas, otras en el sentido de las herramientas heurísticas, de los métodos o simplemente señalarán una dirección de trabajo. Las sugerencias heurísticas aparecen de forma natural en la enseñanza, son frases que invocan ciertas formas de trabajo que permiten progresar en la solución y obtener el resultado, e incluso llevan a explotar las potencialidades del problema aumentando así los conocimientos de la disciplina.

Una de las características del profesor que pretende un estilo heurístico es que en la enseñanza suple al gestor, o que sus indicaciones van en la línea del gestor. El espacio teórico de problemas que resulta de la aplicación de uno de los métodos o de la combinación de varios en un determinado problema, es el espacio en el cual se desarrolla la actuación competente. En el capítulo 2 hemos presentado el espacio teórico de problemas correspondiente a unos determinados problemas. Con ello podemos conocer las demandas cognitivas más generales de la tarea -generación de los problemas que surgen de los pasos de cada método- y las tareas de gestión asociadas a ello –decisión sobre secuencialidad de aplicación de los métodos, control de la relación del problema que se está trabajando con el resto de problemas del espacio-. Uno de los rasgos de la conducta competente es saber que al resolver un problema se está transitando por un espacio de problemas -que será parte del espacio teórico asociado al problema- y analizar las relaciones entre un cierto problema del

espacio y el resto, en particular con el problema original, así también habrá de analizar la transformación del problema original cuando se retorna a éste después de resolver un determinado problema del espacio.

En el caso en que estamos, en un proceso de resolución guiado por un método, ya hemos indicado que las tareas del gestor son las derivadas de saber los pasos del método, saber cómo se organizan y saber cuales son los problemas generados. Además, puesto que en muchos problemas hay implicado más de un método, es el gestor el que organiza la secuencia de uso de dichos métodos.

En el análisis que hemos hecho de los métodos y de los problemas, hemos observado que el Método de los dos lugares es el más sencillo; en caso de no poderse aplicar dicho método se recurre al Método de la Figura Auxiliar; el Método de Figura Semejante es conceptualmente más difícil puesto que implica hallar un centro de homotecia o encontrar un segmento homotético a otro que forma parte de la figura a construir, por tanto se recurre a él en tercer lugar. Es decir que aunque la figura semejante se pueda hacer parece razonable optar por hacer la construcción de una figura auxiliar, porque en general ésta puede hallarse fácilmente por el Método de los dos Lugares.

No obstante, y dejando de lado la complejidad de los métodos, vamos a hacer ciertas consideraciones que nos permitirán poner en secuencia a dichos métodos. Para ello vamos a centrarnos en las construcciones de triángulos, aceptando que cuando no sea posible la aplicabilidad del Método de los dos Lugares, recurriremos a otro método. ¿Qué es lo que puede llevarnos a decidir hacer una figura auxiliar en vez de hacer una semejante? Vamos a analizar esto poniendo el foco de atención en los datos que se tienen para la construcción, ya no del triángulo original sino de un triángulo relacionado con éste, que me permitirá construirlo y será nuestra figura auxiliar. En este punto podemos observar que si disponemos de tres datos, los cuales permiten determinar un triángulo, entonces podremos construir dicho triángulo auxiliar, pero si se dispone de dos datos entonces sólo es posible construir un triángulo semejante, se construye el semejante por imposibilidad de construir el auxiliar. Esta situación pone en secuencia a los métodos, dada la imposibilidad de aplicar el Método de los dos Lugares se recurre al Método de la Figura Auxiliar, y dada la imposibilidad de hacer la figura auxiliar se recurre al Método de Figura Semejante.

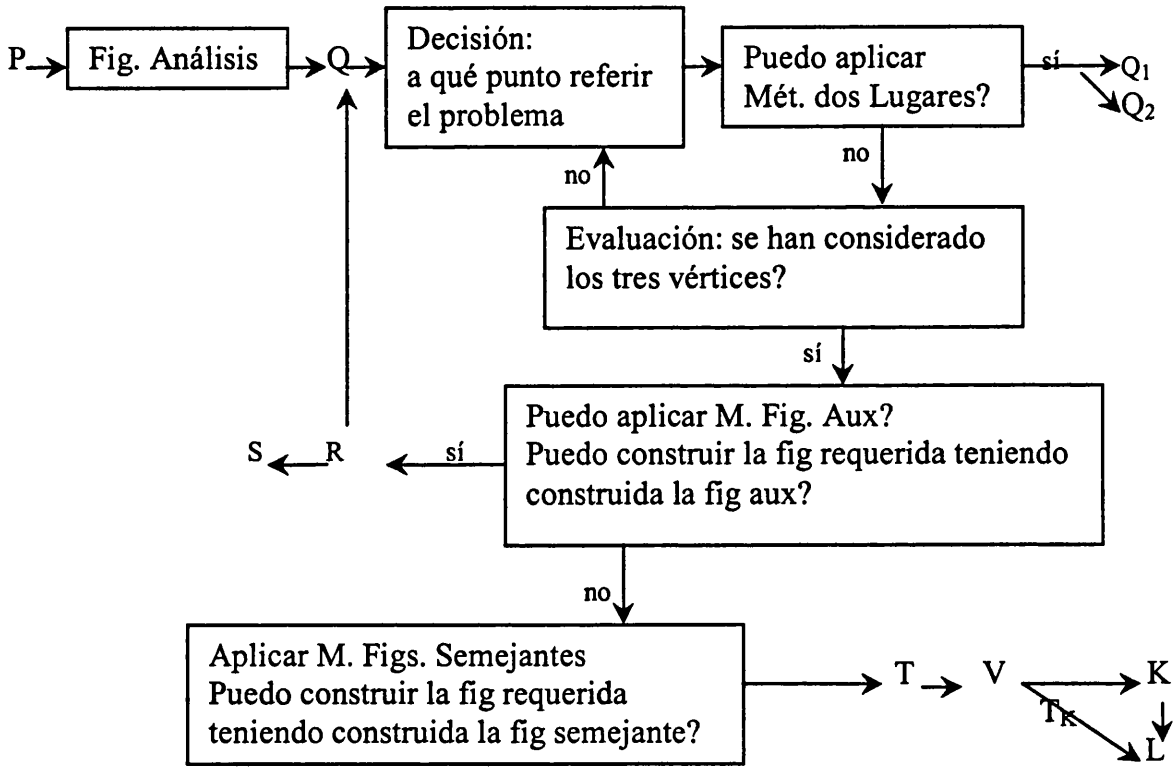
Entonces, restringiéndonos a los problemas de construcción de triángulos, podemos hacer un esquema en el cual se automatizan las tareas del gestor al organizar la secuencia. En esos problemas, solo hay 3 puntos que determinar –los vértices del triángulo-, entonces las tareas de gestión pueden organizarse fácilmente. El gestor evalúa la aplicabilidad de los métodos pero respetando un orden; primero evalúa la posibilidad de aplicar el Método de los dos Lugares, en caso de que no pueda aplicarse pasa a analizar la posibilidad de utilizar el Método de la Figura Auxiliar, y en caso que éste tampoco pueda aplicarse entonces utiliza el Método de la Figura Semejante. Inicialmente, se debe transformar el problema a determinar un punto, puesto que el Método de los dos lugares así lo indica, y el gestor debe preocuparse de elegir entre los tres puntos posibles aquel que pueda determinarse con dos lugares. Para ello, mira un punto y evalúa si se puede, en caso afirmativo aplica el método; en caso contrario, no considera otro método sino que antes mira otro punto y estudia la posibilidad de aplicar dos lugares, en caso afirmativo lo aplica y de lo contrario pasa a observar el tercer punto y nuevamente analiza la posibilidad de aplicar los dos lugares. Solamente si ahora no es posible su aplicación entonces cambia de método y considera el de Figura Auxiliar, y sólo se recurre al Método de Figura Semejante ante la imposibilidad de construir la figura auxiliar. O sea que podemos llegar a automatizar las acciones que llevan a considerar los distintos vértices y métodos.

Una conducta de este estilo es característica de la competencia; en un proceso de resolución en el cual el gestor no funciona de este modo, posiblemente se observará uno de los puntos y se evaluará si puede aplicarse el método de los dos lugares, y en caso de no ser posible directamente se pasa a considerar otro método. En la conducta competente se ve la secuencia, la secuencia organizada por el gestor.

No obstante una conducta automática de este tipo lleva a transitar por el camino más largo; si incluimos en los rasgos de la conducta competente, la consideración de los caminos más cortos o económicos, entonces podemos decir que esta conducta automática, aunque es competente, no es la más competente de las conductas. Una conducta competente no se caracteriza por hacer puramente análisis en una primera etapa y luego en una segunda etapa hacer la síntesis. Por ejemplo, luego de hacer la figura de análisis y señalar los datos, se estudia qué puede construirse con ellos, eso es síntesis. Es decir en una

resolución competente tienen lugar procesos, en los cuales se construyen cosas desde los datos, y a su vez se va desde la incógnita hacia los datos, hay trozos de síntesis y de análisis que se van a encontrar al inicio, en el medio o al final del proceso de distinta manera, aunque muchas veces los de síntesis no se lleguen a hacer sino que se anticipan y se utilizan para descubrir el camino.

Podemos entonces automatizar las tareas del gestor pero debemos tener en cuenta las consideraciones anteriores. En el siguiente esquema se presentan las preguntas y decisiones involucradas en una resolución de este estilo, así como también la serie de problemas generada sobre la base de éstas.



Q: determinar un punto

R: construir una figura auxiliar

S: construir la figura requerida teniendo construida la auxiliar

T: construir una figura semejante

V : construir la figura requerida teniendo construida la figura semejante

K: teniendo en cuenta la otra parte de la condición construir un segmento X que sea homotético a un segmento auxiliar X' de la figura semejante construida.
L: construir la figura pedida teniendo construida la figura semejante y el segmento X.

Por otra parte, y así como se hace necesaria la consideración de los aspectos cognitivos al organizar la enseñanza de resolución de problemas de regla y compás, también se hará necesario tener en cuenta las fases de Polya. Las mismas son un medio para organizar el proceso de resolución, y dicha organización debe contemplarse en la enseñanza. Esta organización del proceso mediante fases con objetivos específicos se traduce en una forma de enseñar dirigida a hacer transitar a los alumnos por las mismas, y su consideración en la enseñanza queda plasmada a través de las sugerencias que hace el docente, sugerencias con propósitos específicos.

De este modo, las indicaciones que llevan a transitar la fase de ***comprensión*** tendrán como propósito que cada alumno se haga una idea de la situación, que entienda cuáles son las partes del problema (datos, condición e incógnita) y que haga una formulación propia de dicho problema. Las intervenciones docentes que se dirigen a la fase de ***elaboración del plan*** apuntarán a que cada alumno considere su estado actual de conocimientos con vistas a seleccionar una heurística apropiada y que reformule el problema acorde a ésta. Atendiendo a la fase de ***ejecución del plan***, las intervenciones tendrán el propósito de explicitar el esquema de solución, de orientar para que la implementación del plan sea ordenada y para que se monitoree el proceso de resolución a nivel local y/o global. Las indicaciones orientadas a la fase de ***visión retrospectiva*** llevarán a reconsiderar la solución, el proceso y/o el resultado, se buscará ir más allá del problema original. Esta fase es importante para la asimilación de diferentes formas de trabajo heurístico; las sugerencias llevarán a verificar si el resultado tiene sentido o es correcto, a explicitar las heurísticas utilizadas y evaluar el alcance y efectos de su uso, a validar diferentes soluciones y comparar los planes correspondientes.

En la sección anterior hemos hecho referencia a la forma y peso que adquieren las fases de Polya en un proceso de resolución guiado por los métodos. Hemos visto que la

característica de los métodos es que organizan el plan, lo cual se traduce en el trabajo de los resolutores competentes en un episodio de elaboración casi sin entidad -que se limita a estudiar la posibilidad de aplicación del método- y en un episodio de ejecución largo, que consiste en llevar a cabo los pasos del mismo. En el caso de la enseñanza esto va a cambiar radicalmente, la fase de elaboración ocupa buena parte del proceso, así lo muestran los resultados del estudio exploratorio al que nos referiremos en el próximo capítulo. Es previsible que esto ocurra, ya que los objetivos por fase y la consideración de los métodos, van a delinear el quehacer competente al enseñar a resolver los problemas en cuestión. Hemos señalado que el propósito de la fase de elaboración de un plan es hacer que el alumno tenga una idea cabal del plan que posteriormente ejecutará, entonces esta fase se hace larga puesto que contiene todo el paseo por el espacio de problemas, con las intervenciones pertinentes para identificar y relacionar los problemas por los que se transitará. En los problemas más sencillos la estructura del espacio es simple, consiste únicamente de los problemas generados por un método, en los cuales sólo hay implicadas construcciones elementales; por el contrario en otros problemas la estructura del espacio será más compleja, los problemas han de generarse por sucesivas aplicaciones de los diferentes métodos.

En este contexto la actuación docente competente introduce un nuevo método para organizar el recorrido por estas dos fases del proceso de resolución de nuestros problemas, se trata del Método de Análisis-Síntesis.

Ya anteriormente hicimos referencia a este método sin embargo no hemos hecho comentario alguno sobre el mismo. Simplemente vamos a señalar que la caracterización del mismo puede encontrarse en el libro XIII de los Elementos de Euclides. Se trata de un apéndice titulado "Qué es el análisis y qué es la síntesis?", en el cual se ofrece análisis y síntesis de las cinco primeras proposiciones del libro y se presenta el método en los términos siguientes "Análisis es la asunción de lo buscado como si ya fuera admitido -y el acceso- por medio de sus implicaciones a algo que se reconoce verdadero. Síntesis es una asunción de lo que es reconocido y el acceso, por medio de sus implicaciones a algo que se admite como verdadero o a la consecución de lo buscado" (Euclides 1991, libros X-XIII, pág.314). Pappus -siglo IV- explica más en detalle en qué consiste el método de Análisis y

Síntesis[8] distinguiendo además entre dos tipos de análisis, a los cuales llama teórico y problemático. Cabe resaltar que éste también es un método heurístico, puesto que aplicando los pasos no tenemos garantías de llegar al resultado, vendría a ser un patrón estándar de la lógica del descubrimiento. Probablemente los griegos hayan advertido su potencial heurístico, Lakatos (1981) hace algunas apreciaciones a este respecto, enuncia la siguiente cita de Descartes referente al encubrimiento del análisis en los manuscritos, lo cual

[8] "El llamado "Tesoro del Análisis" es, para decirlo brevemente, un cuerpo especial de doctrina habilitado para uso de aquellos que, tras haber terminado los Elementos ordinarios, están deseosos de adquirir la facultad de resolver problemas que se les puedan plantear y que implican (la construcción de) líneas; dicho cuerpo de doctrina es útil sólo por esto. Constituye la obra de tres hombres, Euclides, el autor de los Elementos, Apolonio de Perga y Aristeo el viejo, y procede por vía de análisis y síntesis.

El análisis, pues, considera aquello que se busca como si fuera algo aceptado y pasa desde ello, a través de sus consecuencias sucesivas, a algo que es aceptado como resultado de la síntesis: pues en el análisis damos por supuesto aquello que se busca como si (ya) estuviera dado, e inquirimos qué es aquello de lo cual resulta esto y a su vez cuál es la causa antecedente de lo posterior, y así sucesivamente, hasta que, volviendo así sobre nuestros pasos, llegamos a algo ya conocido o que pertenezca a la clase de los primeros principios, y a un tal método lo llamamos análisis por ser una solución hacia atrás.

Pero en la síntesis, invirtiendo el proceso, tomamos como ya dado aquello a lo que llegamos en último término en el análisis y, alineando en su orden natural como consecuencias lo que antes eran antecedentes, y conectándolas unas con otras sucesivamente, llegamos finalmente a la construcción de lo que se buscaba; y a esto llamamos síntesis.

Ahora bien, el análisis es de dos tipos, uno va dirigido a la búsqueda de la verdad y se llama teórico, el otro se dirige a encontrar aquello que se nos ha dicho que encontremos y se llama problemático. 1) En el tipo teórico de análisis, asumimos lo que se busca como si fuera algo existente y verdadero, tras lo cual pasamos a través de sus consecuencias sucesivas, como si también ellas fueran verdaderas y estuvieran establecidas en virtud de nuestra hipótesis, a algo aceptado; entonces a) si ese algo aceptado es verdadero, aquello que se busca será también verdadero y la prueba corresponderá en el orden inverso al análisis, pero, b) si llegamos a algo reconocidamente falso, aquello que se busca será también falso. 2) En el tipo problemático asumimos aquello que es propuesto como si fuera algo conocido, tras lo cual pasamos a través de sus consecuencias sucesivas, considerándolas verdaderas, hasta algo aceptado: luego, si a) lo que es aceptado es posible y obtenible, es decir, lo que los matemáticos llaman dado, lo que se propuso originalmente será también posible, y la prueba corresponderá de nuevo en orden inverso al análisis, pero si b) llegamos a algo reconocidamente imposible, el problema será también imposible."(Lakatos, 1981 págs. 107-108).

desembocaba en la sola presentación de la síntesis: "Fue esta síntesis lo único que los geómetras antiguos emplearon en sus escritos, no porque fueran totalmente ignorantes del método analítico, sino, en mi opinión, porque otorgaban al mismo un valor tan alto que deseaban guardarlo para sí como un secreto importante" y expresa su opinión al respecto en los siguientes términos "Mi hipótesis es que la explicación principal radica en el prejuicio infalibilista contra el simple hacer hipótesis. El análisis es buscar tentativamente, mientras que la síntesis es probar; el análisis es falible, la síntesis infalible. Se creía que ser falible estaba por debajo de la propia dignidad y por ello se omitía el análisis" (Lakatos 1981, pág. 110). Su punto de vista es que el análisis no sólo fue un patrón heurístico utilizado en una geometría ya axiomatizada, que movilizaba lemas probados que eran necesarios para la síntesis, sino que su papel data de la geometría pre-euclidea, en donde fue un medio para la obtención de lemas y nuevos axiomas que generaron posteriormente el sistema axiomático de Euclides.

Los reflejos en la heurística de dicho método quedan recogidos por las sugerencias "trabajar hacia atrás", "dar el problema por resuelto", "hacer la figura de análisis", o "trabajar hacia delante a partir de los datos". Estas sugerencias son sólo ideas para hacer progresos en la solución, no suponen que se tenga un método para resolver el problema o un plan de solución.

Retomando el examen de la conducta competente, podemos decir que el método de Análisis-Síntesis organiza el recorrido por las fases de elaboración y ejecución del plan que resuelve el problema original.

En otras palabras, la actuación docente competente está guiada no sólo por la consideración de los tres métodos heurísticos aplicables a los problemas de regla y compás, sino que además incorpora otro método, el "Análisis", el cual va a configurar la aparición de los demás. Los tres métodos a los que venimos haciendo referencia parecen cobijarse bajo este método más amplio, cuya función será indicar los pasos a seguir para elaborar el plan. Puede decirse entonces que el método de "Análisis" organiza la elaboración de un plan en el que están presentes los demás métodos. Los métodos brindan planes ya elaborados, justamente eso es lo que los diferencia de las herramientas heurísticas; desde este punto de vista el "Análisis", por el hecho de ser un método organiza un plan, pero en

este caso no es el plan para resolver el problema –el cual está modelado a partir de los métodos heurísticos presentados en el capítulo 2-, sino el plan para elaborar dicho plan.

Si miramos esta cuestión desde una perspectiva más panorámica, podemos concluir que en el tránsito por la fase de elaboración del plan, en realidad lo que se está haciendo es ejecutar el "Análisis", o sea ejecutar el plan de cómo elaborar el plan. En definitiva, y lejos de querer armar un trabalenguas al respecto, podemos decir que se dispone de un plan para elaborar el plan, y al transitar la fase de elaboración del plan se ejecuta el plan que permite elaborar el plan para resolver el problema. A partir de esto la ejecución del plan que resuelve el problema consiste en hacer la síntesis.

CAPÍTULO 4

RASGOS DE LA CONDUCTA COMPETENTE:

ESTUDIO EXPLORATORIO

Inicialmente vamos a hacer algunas consideraciones que ayudarán a entender la metodología global implementada en el trabajo, para luego centrarnos en el estudio exploratorio que es objeto del capítulo.

Las fuentes de información que se han decidido considerar para delinear el Modelo de Competencia provienen tanto de los análisis teóricos hechos en capítulos anteriores, como de los análisis de las observaciones de personas concretas. El criterio adoptado parte de la idea de que al observar a cualquier persona, se aprenden de su manera de actuar rasgos de la conducta competente, es decir que cualquier persona puede ser fuente de información para el Modelo de Competencia, a condición de reinterpretar lo observado.

Dicha reinterpretación se realiza desde un marco diseñado para tal fin, que recoge algunos aspectos de los modelos de análisis que provienen del mundo de la pura resolución de problemas (división del proceso en fases, noción de espacio de problemas, categorías de conocimiento y conducta) y que se vale de ellos para examinar la actuación en una clase de problemas específicos.

Los elementos transportados corresponden a modelos de análisis que atienden al resolutor, por lo cual habrá que reformularlos, ya no sólo por estar centrados en una clase de problemas concretos, sino porque el objeto de estudio es la actuación docente al enseñar a resolver dichos problemas.

En este capítulo, haremos referencia a un estudio exploratorio en el que se ha observado a un profesor con gran experiencia en la enseñanza de resolución de problemas, ya no sólo porque cualquier persona puede ser fuente de información, sino porque nos valdremos de un sujeto casi competente -puesto que de ningún sujeto real se puede predicar la competencia- para descubrir algunos rasgos de la conducta competente.

4.1. PROPÓSITOS DEL ESTUDIO

En el capítulo anterior hemos hecho referencia a ciertos elementos de competencia al enseñar a resolver problemas de regla y compás, que han sido el producto de los análisis teóricos de estos problemas.

La intención del estudio exploratorio que presentamos en este capítulo ha sido identificar nuevos elementos del Modelo de Competencia. Para ello se examinaron las formas en que aparecen los elementos de competencia, provenientes de las elaboraciones teóricas -aunque el modelo no está definido aún, se tienen individualizados ciertos elementos del mismo-, en las clases de un profesor con amplios conocimientos en el campo de la resolución de problemas.

El objetivo final de este estudio ha sido identificar algunos rasgos constitutivos de la conducta competente, para luego describir en función de ellos la actuación de una docente de escuela media al enseñar a resolver esta clase de problemas.

4.2. OBTENCIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

Los datos iniciales provienen de la observación de las clases de un docente experto[1] en el dominio, al enseñar elementos de resolución de problemas con la finalidad de promover ciertas habilidades basadas en modos heurísticos de trabajo. El ámbito en que se ha llevado a cabo el estudio corresponde a clases de la asignatura optativa cuatrimestral "Didáctica de la resolución de problemas y heurística matemática", en la Escuela Universitaria de Magisterio de la Universidad de Valencia. Los problemas de regla y compás están incluidos en la programación de dicha asignatura y se utilizan como medio para desarrollar tales competencias.

Las clases se grabaron en vídeo y posteriormente se transcribieron.

[1] La palabra "experto" se usa en el sentido que la utilizaron Newell, A. y Simon, H. (1972), para referirse a una persona que tiene mucha experiencia en un dominio.

En las transcripciones de clase se traslada al lenguaje escrito lo que docente y alumnos dicen y hacen.

En ellas se intenta optimizar y controlar toda la información que surge de una situación de enseñanza, y puesto que la atención se centra en la forma en que el docente promueve en el grupo de alumnos un estilo heurístico de resolución de problemas, las producciones verbales que se registran son las que provienen de instancias colectivas de comunicación, que muestran el diálogo entre el docente y el grupo entero de alumnos.

A fin de facilitar la recolección de los datos, se dejaron de lado los registros correspondientes a instancias de trabajo individual, donde ocasionalmente el docente y un alumno particular entrecruzan palabras, y en la transcripción sólo se hace mención a las mismas con el fin de hacer una interpretación global de la metodología implementada.

Con la pretensión de analizar la intervención docente en situaciones de enseñanza donde se resuelven problemas de construcción geométrica, y describir la forma que adoptan los elementos del modelo de competencia en dichas situaciones, hemos dirigido el microscopio hacia las indicaciones del docente. Hemos identificado aquellas que se refieren al contenido matemático, al trabajo heurístico y al gestor, y que además apuntan a orientar al alumno en el tránsito por las diferentes fases del proceso de resolución. A su vez nos hemos basado en la noción de espacio real de problemas, para ubicarlas en el problema al cual se dirigen. En los apartados 4.3.1 y 4.3.2 respectivamente se presenta esa noción y los criterios usados para discriminar las indicaciones así como también los descriptores de la actuación.

Las consideraciones anteriores han permitido desglosar las transcripciones en episodios. Nuestra noción de episodio, aunque homónima a la utilizada en los trabajos de Schoenfeld, tiene un sentido diferente. Este autor, llama episodio a un mismo segmento del protocolo en que la conducta es de la misma naturaleza, y los nombres que da a los respectivos episodios evocan ese tipo de conducta que los caracteriza –lectura, análisis, exploración, plan implementación, etc-. Una tal división de la transcripción, no da cuenta de lo que sucede en el interior de esos grandes trozos de conducta homogénea, no brinda información acerca del sentido local y global que toda conducta puntual tiene

respecto al proceso. Para ello hemos introducido una nueva concepción del término episodio.

Se ha considerado como **episodio** a un trozo de la transcripción en el que hay un mismo tipo de conducta, que puede describirse en función de las fases y de los aspectos cognitivos mencionados, y que además está asociada a uno de los problemas del espacio real de problemas. O sea que la división en episodios y la calificación de éstos la hicimos en función de tres componentes: fases, aspectos cognitivos y espacio real de problemas.

En referencia a la calificación de episodios en la actuación docente, podemos acordar que desde el momento en que el profesor plantea un cierto problema hasta que da por finalizado el trabajo en el mismo, hace y sugiere hacer muchas cosas. Por ejemplo, apuntando a la comprensión del problema – ya sea del problema original o de un problema del espacio- puede sugerir hacer una figura para visualizar la información del enunciado o puede llevar a evaluar la pertinencia de datos, o puede aludir a la definición de algún concepto implicado, lo cual pone en juego aspectos cognitivos diferentes. En el primer caso sus indicaciones van en la línea de la heurística y particularmente de lo que hemos denominado destrezas, actúa como sugeridor heurístico, en los otros casos sus indicaciones van en la línea del gestor y del contenido matemático respectivamente –actúa como gestor o como detector del contenido matemático-, por tanto los fragmentos de la transcripción acordes a unas u otras características los vamos a considerar como episodios distintos. También pueden tener lugar situaciones que se corresponden con una misma fase del proceso y con un mismo aspecto cognitivo, pero que pueden diferenciarse porque las indicaciones implicadas son de diferente naturaleza, por ejemplo el profesor está ayudando a sus alumnos a transitar la fase de elaboración del plan y centrado en el trabajo heurístico da indicaciones que apuntan a una cierta destreza, sugiere marcar en la figura de análisis cierto ángulo recto, o sea sugiere marcar información complementaria en dicha figura, y estas indicaciones son seguidas por otras que están dirigidas por un método, evidentemente estas situaciones pueden discriminarse ya que persiguen heurísticas de distinta naturaleza por lo cual en ese caso las incluimos en episodios diferentes. Aún más, puede suceder que la atención esté puesta en una determinada fase y en un mismo tipo de heurística y sin

embargo aún las indicaciones pueden diferenciarse, imaginemos al docente guiando el camino por la fase de ejecución del plan y focalizando el trabajo heurístico, supongamos que para ello lleva a hacer la síntesis e inmediatamente hace algunas sugerencias sobre algún paso del Método de los Dos Lugares, aunque estos segmentos de conducta están guiados por los métodos de resolución heurísticos, son claramente diferenciables ya que responden a distintos métodos por lo cual los hemos puesto en episodios diferentes.

A su vez, en situaciones destinadas a elaborar el plan y centradas en el uso de un determinado método, y cuando el análisis del protocolo lo ha permitido, las hemos dividido para diferenciar los segmentos de acciones asociados a los pasos del mismo, esto se hace a fin de resaltar la forma que adoptan las reformulaciones y decisiones cuando se trata de instruir en el uso del método.

Así como en una cierta fase hemos distinguido las sugerencias que corresponden a un mismo tipo de heurísticas, de igual manera distinguimos las sugerencias que llevan a considerar un cierto aspecto del contenido matemático, como así también las que se refieren a evaluaciones locales y globales, diferenciando en éstas las tareas de gestión implicadas. Todas estas distinciones nos han permitido segmentar la transcripción en episodios, en trozos del protocolo en el que las acciones que lo conforman responden a uno de los descriptores definidos entre fases y aspectos cognitivos, las cuales se detallan en la siguiente sección.

Por otro lado, en los protocolos tienen lugar algunas instancias que pueden estar dentro de un episodio o entre dos episodios distintos, pueden aparecer al inicio, en el desarrollo o al final de la clase. No las consideramos episodios, sin embargo coexisten con ellos; apuntan al proceso de enseñanza, por ejemplo en ellas se puede encontrar al docente informando a los estudiantes sobre el campo de estudio que van a trabajar o haciendo comentarios sobre lo que se ha trabajado y para qué sirve, lo cual tiene un objetivo específico en el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que transmiten el sentido global de la tarea. En otros casos, son instancias para averiguar los conocimientos previos de los estudiantes, para su adecuación en la organización de la enseñanza. Estan acorde a principios generales de la instrucción y deben formar parte de la conducta competente al enseñar, las hemos llamado "indicaciones hacia la enseñanza" ya que se

hacen en ese sentido y hemos rotulado con *IE a los fragmentos de transcripción destinados a las mismas.

La metodología utilizada para fragmentar las transcripciones fue la siguiente:

1) Se hacen dos lecturas de la clase como primera aproximación al análisis. Se comienza por una lectura global que permite detectar momentos en los que se dan indicaciones dirigidas hacia la enseñanza y momentos destinados a trabajar cada uno de los problemas planificados por el docente. En una segunda lectura se examinan individualmente cada uno de los problemas, y se identifican grandes bloques de conductas que se corresponden con las fases del proceso de resolución del problema.

2) Lecturas posteriores permiten dar sentido a las acciones recogidas en cada bloque a partir de los descriptores hechos según fases y aspectos cognitivos, así como también identificar los problemas principales del espacio de problemas por el que se transita. Con ello es posible encuadrarlas tanto en el problema original como en otro problema del espacio, lo que lleva a hacer la distinción entre episodios.

Cabe señalar que muchas veces el proceso de resolución de un problema no puede enmarcarse en los límites de una clase, no es de extrañar que al terminar la clase se esté transitando una cierta fase, por lo cual el profesor deberá retomar el trabajo en la clase siguiente, optando por continuarlo a partir de la fase que ha quedado inconclusa o de cualquier otra. Este tipo de cuestiones también ha sido tenido en cuenta para la fragmentación de la transcripción, por ende el episodio con el que se inicia una clase puede corresponder a cualquiera de las fases del proceso de resolución.

4.3. INSTRUMENTOS DE ANÁLISIS

Hemos predicado, en forma más que suficiente, que la conducta competente se ha de caracterizar por estar organizada por ciertos métodos, lo que lleva a hacer un recorrido por un espacio de problemas. La intención es observar esa conducta a través de la teoría que se dispone sobre el proceso de resolución de problemas, entonces vamos a aprovechar los resultados de pura resolución de problemas para luego hacer las conclusiones específicas que conciernen a nuestros problemas.

El objetivo es hacer pura resolución de problemas, pero de hecho estamos centrados en una clase de problemas, por eso hemos transportado elementos teóricos de la pura resolución de problemas, hemos traído los modelos de análisis de ese mundo, tales como la noción de espacio de problemas de Puig, la distinción de los aspectos cognitivos identificados por Schoenfeld y el modelo multifasético de Polya, y hemos adecuado y reelaborado dichos elementos para construir nuestra lupa para observar.

Los instrumentos que se han diseñado para el análisis de la actuación brindan una mirada microscópica del proceso de enseñanza de resolución de problemas, centrada en las intervenciones docentes relacionadas con los elementos del modelo de competencia.

Ya hemos comentado que el esquema del método indica que hay que generar tales problemas, pero no dice como hacerlo. Este esquema no da indicaciones sobre qué sucede cuando los sujetos adaptan su actuación a las demandas de la estructura de la tarea. Por ende se hace preciso determinar cuál es el espacio de problemas que se desprende de la actuación de los sujetos, que en lo que respecta a nuestro caso, es el espacio correspondiente a un proceso de resolución de problemas delineado por los intercambios comunicativos entre el docente y sus alumnos, y al que nos referiremos en 4.3.1.

La elaboración de dicho espacio de problemas implica el análisis de la presencia de los métodos -elementos del modelo de competencia que son generadores de problemas- y de la forma particular que adoptan en el proceso, pero ello no da cuenta del conjunto de actuaciones relacionadas con los demás elementos del modelo de competencia, es por eso que hemos elaborado el instrumento que presentamos en 4.3.2. La descripción que se hace del mismo es la versión final de las categorías elaboradas inicialmente para el análisis, ya que al examinar la actuación docente se fueron reformulando algunas de ellas, otras se fusionaron o se eliminaron y se incorporaron otras no previstas.

En 4.3.3. se presentan dos instrumentos de análisis que permiten visualizar la información obtenida a partir de la división en episodios y hacer la reconstrucción de la actuación docente.

4.3.1. Espacio real de problemas

En el capítulo 2, hemos presentado los esquemas de lo que supone la aplicación de cada uno de los métodos, así como también el esquema que resulta de la aplicación de uno o la combinación de varios en un determinado problema, lo cual permite hacer un análisis de los problemas y de los métodos en cuestión.

El esquema de generación de problemas, asociado a los métodos y adecuado para un problema, nos proporciona una representación de la estructura del espacio en el que se debería desarrollar la actuación del sujeto ideal. Es lo que llamamos *espacio teórico de problemas*, el cual se construye a partir del examen de los procesos de resolución generados por los métodos.

Si nos situamos en una situación de enseñanza, pasamos ya a otro nivel de análisis, en el que además del problema se consideran los otros personajes que componen la situación, tal como los alumnos y el docente. En este contexto vamos a hablar de *espacio real de problemas* para referirnos al conjunto de problemas por el que se transita efectivamente. Dicho espacio será uno de los instrumentos sobre el cual basaremos el análisis de la actuación docente, pues nos va a permitir definir ciertos comportamientos. En la sección 4.4. se trata en detalle la actuación del experto, por tanto en ella se presenta el espacio real de problemas correspondiente a cada uno de los problemas trabajados en las clases de este docente.

Puesto que el docente que estamos observando es un ejemplo de conducta casi competente, se podría asumir que sus intervenciones estarán orientadas a realizar un recorrido por el espacio teórico de problemas asociado a un problema, por tanto sería de esperar que el espacio real de problemas coincida en gran parte con el espacio teórico.

4.3.2. Descriptores de la actuación según fases y aspectos cognitivos

Este instrumento se ha elaborado a fin de sistematizar el análisis de la actuación docente, permite identificar las indicaciones que orientan el tránsito por las diferentes fases del proceso de resolución y clasificarlas de acuerdo al componente de la cognición a que hacen referencia.

A) Contenido matemático en las diferentes fases

En el "contenido matemático" se incluyen las indicaciones que hacen referencia a:

- contenidos conceptuales: conceptos y propiedades (definiciones, ejemplificaciones y hechos)
- contenidos procedimentales: reglas de trabajo en el dominio (regla y compás, naturaleza genérica de la figura de análisis, criterios de construcción) y algoritmos de construcción.

A1) En comprensión: corresponde al conocimiento matemático al que se hace referencia con el fin de hacer accecible el problema, es cualquier información matemática que se sugiere aplicar o tener en cuenta para hacer una formulación propia del problema.

- concepto implicado en el enunciado: 1) definición; 2) ejemplificación (dibujo que representa al concepto); 3) conocimiento informal que los alumnos tienen de éste.
- hechos o propiedades de objetos matemáticos contenidos en el enunciado; hechos y propiedades para una mejor comprensión del problema (ej: la mediana no tiene por qué ser perpendicular al lado; la altura no tiene por qué tener como extremo al punto medio del lado).
- conocimiento de reglas del dominio:1) regla y compás; 2) convenciones sobre notación; 3) significado de lo dado, significado de solucionar el problema

A2) En elaboración de un plan: corresponde al conocimiento matemático al que se hace referencia con el fin de reinterpretar las condiciones del problema y establecer la transformación del mismo, o cualquier información matemática que se sugiere tener en cuenta en el esquema de solución.

- conceptos reformulados como lugares geométricos (concepto implicado visto como lugar geométrico, o se hace referencia a las propiedades del conjunto de puntos implicado)
- definiciones equivalentes de un concepto
- definición de un concepto útil para incluir en el plan (el concepto no está incluido en el enunciado pero se considera útil para configurar un plan)

- hechos y propiedades para configurar el plan (ej: la perpendicular de la perpendicular a una recta es paralela a dicha recta; la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°)

- conocimiento informal o mecánico de un algoritmo de construcción implicado

- conocimiento de reglas del dominio: 1) criterios de construcción (una recta se determina mediante dos puntos, para determinar una circunferencia son necesarios el centro y un punto de ésta, tres puntos no alineados determinan un triángulo); 2) naturaleza genérica de la figura de análisis

A3) En ejecución del plan: corresponde al conocimiento matemático al que se hace referencia al ejecutar el plan

- algoritmo de construcción o de operación básica implicado

- conocimiento de reglas del dominio: 1) naturaleza genérica de la figura de análisis, 2) Reglas de juego (regla y compás- regla no graduada para trazar rectas y compás para trazar circunferencias-; establecer a priori los segmentos y/o ángulos que serán considerados como dato).

A4) En visión retrospectiva: es el conocimiento matemático utilizado en la solución (o diferentes soluciones) al que se hace referencia por considerarlo útil para la solución de otros problemas; inferencia de hechos, resignificación de conceptos (definiciones equivalentes)

- inferencia de hechos o propiedades de los objetos matemáticos (inferencia de propiedades de los puntos de la paralela o de la bisectriz, de la "desigualdad triangular", de propiedades del resultado -es un triángulo escaleno y acutángulo-)

- inferencia de definiciones equivalentes

- conceptos implicados en la solución (definición, reformulación como lugar geométrico)

- hechos implicados en la solución

- algoritmos implicados en la solución

- conocimiento de reglas del dominio: 1) criterios de construcción; 2) naturaleza genérica de la figura de análisis; 3) regla y compás

B) Trabajo heurístico en las diferentes fases

Se incluyen las indicaciones que hacen referencia a:

- destrezas organizativas, instrumentales y comunicativas (SDH)
- el uso de ciertas herramientas heurísticas (SHH)
- la aplicación de los pasos de un método de resolución (SMRH)
- sugerencias generales cuya función es señalar una dirección de trabajo sin evocar un procedimiento concreto, a veces tienden a orientar búsquedas en la memoria a largo plazo y otras llevan a potenciar las posibilidades que brinda el problema –o a sacarle el jugo al problema- para ampliar los conocimientos matemáticos (lo que está acorde con una concepción de la tarea de resolución de problemas basada en fines epistémicos) (SHG)

B1) En comprensión: orientaciones respecto a la implementación rutinaria de ciertas formas adecuadas de trabajo -o destrezas- que sirven para entender qué es lo dado y qué es lo buscado o que ayudan a interpretar el enunciado (SDH); sugerencias dirigidas a aplicar una determinada herramienta heurística que ayuda a la comprensión del problema (SHH)

SDH:

- hacer una figura para visualizar la situación descrita en el enunciado (dibujo para visualizar la información dada en el enunciado) (organizativa)
- uso de notación adecuada (comunicativa)
- establecer lo dado y lo buscado (separar las partes principales del problema -datos, incógnita y condición-. Se hace referencia a lo dado, ya sea verbalizando los datos o dibujando los segmentos o ángulos que se establecen como dato, y se explicita el objetivo del problema. Sistematiza el trabajo) (organizativa)

SHH:

- dar un valor particular a la incógnita
- explorar el rango de posibilidades a través de casos límite

B2) En elaboración de un plan: sugerencias generales (SHG) que orientan la búsqueda en la memoria a largo plazo a fin de configurar un plan, son orientaciones respecto a la implementación rutinaria de ciertas formas adecuadas de trabajo (SDH)

que sirven para descubrir las relaciones entre datos e incógnita o para visualizar un esquema de plan, sugerencias que llevan a aplicar ciertas herramientas heurísticas (SHH) a fin de hacer una reformulación del enunciado, o indicaciones dirigidas por algún método de resolución (SMRH)

SDH:

- marcar información complementaria en la figura de análisis (sirve para descubrir las relaciones entre datos e incógnita)
- hacer un dibujo para representar el plan (dibujo a mano alzada para representar el plan. Sirve para visualizar un esquema de plan, para organizar el trabajo en el problema, ayuda a seguir el hilo de un razonamiento, a visualizar las transformaciones del problema).

SHG: algunas en el fondo indican "buscar un problema relacionado" y otras señalan una dirección de trabajo.

- establecer diferencias y similitudes con problemas anteriores
- reducir el problema a una construcción elemental ya vista o problema resuelto anteriormente
- utilizar hechos empleados en problemas anteriores (si el punto pertenece a la mediana está en una circunferencia con centro en el punto medio del lado)
- trabajar hacia adelante

SHH:

- reformular: son HH adecuadas al método de resolución; a diferencia de las indicaciones para aplicar el contenido matemático en éstas la reformulación se hace explícitamente
  - basándose en la propiedad del conjunto de puntos implicado
  - utilizando hechos conocidos
  - basándose en datos y/o criterio de construcción
  - fijar un dato y reformular (ej: si nos dan un lado nos dan dos vértices entonces falta determinar el vértice restante. Es una versión de la reformulación anterior que se utiliza en las construcciones de triángulos, conduce a la aplicación del 1° paso del Método de los Dos Lugares)
  - sustituyendo un concepto por su definición

SMRH: indicaciones dirigidas por el método

- indicaciones dirigidas por el Método de los Dos Lugares:
  - reformular figuras geométricas como lugar de puntos
  -reinterpretar la información de la figura de análisis basándose en lugares geométricos
  - tener en cuenta lo buscado y dividir la condición en partes
  - pasos del método: reducir el problema a la determinación de un punto y hallarlo como intersección de dos lugares
- indicaciones dirigidas por el Método de la Figura Auxiliar o indicaciones para considerar una figura auxiliar
- indicaciones dirigidas por el Método de la Figura Semejante
- indicaciones dirigidas por el análisis creciente: examen previo de lo que se busca, estableciendo relaciones entre datos e incógnita. Llevan a partir del objetivo final o resultado y analizar los objetivos parciales o resultados intermedios que habría que plantearse a fin de determinarlo
  - trabajar hacia atrás (significado de dar el problema por resuelto; dar el problema por resuelto e investigar los antecedentes que permiten determinar la incógnita)
  - hacer la figura de análisis (dar el problema por resuelto y remarcar los datos)
  - establecer problemas generados por el análisis
- indicaciones dirigidas por el método sintético: llevan a partir de los datos y deducir de ellos lo que se busca pasando por una serie de pasos intermedios, apoyándose en los conocimientos que se tiene, de manera de obtener la cadena de inferencias que constituye la solución. Se buscan los resultados intermedios u objetivos parciales que se pueden alcanzar a partir de los elementos dados. Son indicaciones dirigidas por la condición.

B3) En ejecución del plan: sugerencias para implementar el plan de forma ordenada, se explicita de alguna manera el esquema de solución (la solución está dirigida por el método, objetivo o condición) y las transformaciones del problema

SDH:

- uso de útiles de geometría
- forma de hacer los trazados (precisión, prolongar semirrectas y arcos)
- uso de notación adecuada

SHH:

- reformular basándose en el resultado de un problema del espacio
- fijar un dato y reformular (ej: copiando la altura H_A se tiene el vértice a y el pie de la altura, queda determinar el vértice b)
- reformular basándose en datos y criterio de construcción

SMRH:

- hacer la síntesis (se explicitan o se representan secuencialmente, mediante dibujo, los pasos de solución, yendo desde los datos a la incógnita)
- indicaciones dirigidas por un determinado método de resolución (Dos lugares, Figura Auxiliar, Figura Semejante); aplicar pasos del método; indicaciones que llevan a hacer las construcciones que se desprenden de los pasos del método

B4) En visión retrospectiva: indicaciones para reconsiderar la solución y validarla, para reinterpretarla desde las heurísticas empleadas, sugerencias generales para ir mas allá del problema original y así aumentar los conocimientos en el campo de resolución de problemas

SHH:

- validar la solución (se transforma el problema a una problema de probar; por lo tanto es reformular el problema: demostrar que el resultado cumple con las condiciones del problema)
-repasar el plan

SHG:

- establecer analogías y/o diferencias con problemas ya resueltos
- analizar el resultado: unicidad y/o existencia; posibilidad de resultados congruentes; conjeturar el resultado al variar la medida de los datos
- analizar alternativas que pueden presentarse en los pasos de solución (analizar la incidencia de la figura de análisis en el diseño del plan; descartar restricciones innecesarias en una construcción –abertura de compás)
- resolver el problema de forma diferente

- buscar problemas que puedan resolverse total o parcialmente habiendo resuelto el problema planteado (transferencia de resultado y/o método; si se focaliza método está en la línea de las SMRH)
- analizar alternativas que pueden presentarse en los pasos de solución

SDH:

- precisión en los trazados

SMRH:

- reinterpretar la solución (o la solución de un problema del espacio o un algoritmo aprendido en forma mecánica utilizado en el plan) desde el Método o de la HH (interpretar de acuerdo a los pasos y atendiendo a los problemas en que se traducen; o destacar la reformulación hecha –por ejemplo, considerando un criterio de construcción).

C) Gestor en las diferentes fases

Se incluyen las indicaciones que fomentan evaluaciones locales y/o globales, que enfocan el trabajo con el error, los cambios de punto de vista, la toma de decisiones, que llevan a la reflexión sobre las acciones realizadas y el sentido de las mismas, y que guían el camino para avanzar en las fases del proceso de resolución.

C1) En comprensión: indicaciones que apuntan a evaluar la pertinencia y suficiencia de datos, la posibilidad de satisfacer la condición, a determinar qué información es relevante y cual no lo es.

- evaluar la pertinencia y/o suficiencia de datos
- evaluar la posibilidad de satisfacer la condición
- descartar información irrelevante
- leer el problema (indicación para centrarse en la fase de comprensión)
- analizar diferentes alternativas al considerar lo dado (si lo dado es un cateto puede considerarse el mayor o el menor)

C2) En elaboración de un plan: indicaciones que apuntan a evaluar el estado actual del conocimiento relativo a la tarea y a establecer un control en la dirección del plan

- evaluar la información que se desprende de la figura de análisis

- evaluar la información utilizada y la que no se ha utilizado
- evaluar aplicabilidad de Método de Resolución (o HH) usado anteriormente (lleva a analizar condiciones de uso)
- evaluar la posibilidad de usar construcciones conocidas
- analizar qué se conoce y qué falta determinar (para cuando se despistan)
- evaluar utilidad de resolver un problema del espacio
- decisión: ¿a qué punto referir el problema?
- evaluar la secuencialidad en que se considerará lo dado
- evaluar la pertinencia del plan (control de errores)
- evaluar dificultades que pueden surgir de un problema del espacio o de un paso del plan
- recuperar lo valioso de un plan
- cambiar el punto de vista para explorar

C3) En ejecución del plan: indicaciones para llevar un control de dirección en la ejecución del plan, apuntan a monitorear el proceso de resolución a nivel local y/o global, orientan el trabajo con nueva información

- evaluar la pertinencia del paso a ejecutar del plan
- acarreo de información de un problema a otro o de la figura de análisis a un problema: seleccionar la información útil de un problema del espacio y transportarla al original o a otro; seleccionar información de la figura de análisis y transportarla
- evaluar nueva información que se desprende de un problema del espacio (control de la relación entre problema original y un problema del espacio)
- determinar en qué lugar del espacio se está
- evaluar dificultades al concretar el plan (imposibilidad de aplicar directamente cierto método, dependencia entre construcciones implicadas)
- retomar plan abandonado
- cambiar el punto de vista ante un atasco
- afianzar la comprensión del plan antes de ejecutarlo

C4) En visión retrospectiva: indicaciones que apuntan a evaluar la solución a nivel global, sugerencias para evaluar economía de planes

- comprobar el resultado (verificar si es correcto el resultado o evaluar si es razonable; incluye a resultados intermedios) (control de errores)
- analizar errores que pueden desprenderse de interpretaciones incorrectas del enunciado
- evaluar las transformaciones del problema generadas en la solución (se lleva a la reflexión del proceso, a evaluar las transformaciones que se derivan de la solución. A diferencia de las sugerencias para reinterpretar la solución aquí no se apunta a los pasos del método sino que se acentúan algunas transformaciones del problema o de un problema del espacio)
- chequear el plan implementado (abarca a todo problema del espacio; difiere a la indicación de evaluación del plan incluida en la elaboración, ya que dicha evaluación es previa a ejecutar el plan y ésta es posterior a ejecutarlo)
- evaluar ventajas y dificultades del plan general
- evaluar economía de planes

4.3.3. Tabla de episodios y Poligonal del proceso

El análisis del proceso de enseñanza de resolución de problemas basado en los descriptores de actuación y en el espacio real de problemas, lleva a segmentar las transcripciones y a la consecuente asignación de episodios, los cuales han sido numerados según el orden de aparición. Una presentación tal de la transcripción debe estar seguida de un medio que facilite la reconstrucción del proceso, un medio que muestre las fases por las que se transita y la forma que toman las sugerencias docentes relativas a los aspectos cognitivos, así como también que dé cuenta del problema del espacio en el que se está actuando. En este sentido, es que se ha volcado la información que se desprende del análisis en un medio gráfico, el que permite visualizar los diferentes episodios que conforman el proceso. Se ha hecho la representación del proceso a través de una tabla de doble entrada, cuyas filas son las cuatro fases y sus columnas son los tres aspectos cognitivos. Así también, los problemas del espacio real que han tenido alguna entidad durante el proceso, ya que han sido el centro de atención de algunos segmentos del protocolo, son incorporados en las respectivas filas mediante letras mayúsculas que los identifican. En la tabla se insertan los episodios según su

orden de aparición, ubicándolos en uno de los problemas del espacio real y caracterizándolos de acuerdo a la lista de descriptores de la actuación. Cabe señalar que los episodios de gestión global han sido situados bajo el problema en el que ocurren, sin pretender con ello asociarlos sólo a ese problema particular, ya que como ayudan a transitar por el espacio de problemas, su presencia involucra a todo el espacio o a gran parte de éste.

	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA P R			
ELABORACIÓN DEL PLAN P Q R			
EJECUCIÓN DEL PLAN P Q			
VISIÓN RETROSPECTIVA P Q			

Fig. 4.1

La *"tabla de episodios"* es una tabla como la de la figura 4.1, en ella llamamos P al problema original, y en este caso hemos llamado Q y R a los problemas del espacio real que adquirieron mayor atención durante el proceso. Los episodios son denotados con el número asignado en la transcripción y con la expresión que los representa, la cual está incluida en la lista de descriptores presentada en 4.3.2, y son ubicados de acuerdo al aspecto cognitivo, a la fase y al problema al que corresponden. Cada una de las filas tiene tantas subdivisiones como problemas haya involucrados en ella.

Las tablas de episodios han facilitado el análisis de la actuación docente, ya que muestran en forma precisa la naturaleza e intención de las intervenciones durante el proceso de resolución de un problema, sin embargo en ellas se hace dificultosa la comparación de procesos entre diferentes problemas.

Como la intención de este estudio ha sido la identificación de los rasgos que componen la conducta competente, lo que lleva a examinar el trabajo del docente en las distintas etapas de la enseñanza, que entre otras cosas se traduce en comparar los procesos correspondientes a los diversos problemas tratados en esas etapas, entonces se ha hecho necesario idear otro instrumento para facilitar tal comparación. Si a esto le sumamos la pretensión de describir la actuación de la docente de escuela media en función de los resultados que arroja el análisis del experto, podemos notar que de alguna manera está subyacente la comparación de los procesos derivados de ambas actuaciones, lo cual confirma la necesidad de tal instrumento.

De ahí que se ha diseñado un esquema representativo del proceso de resolución, al que se ha llamado la *"poligonal del proceso"*. Es un esquema como el de la figura 4.2, en el cual los números que permiten construir la poligonal corresponden a los episodios que previamente se han volcado en la "tabla de episodios" asociada a un determinado proceso de resolución. Es un medio que permite mirar al espacio como a un todo, brinda una visualización inmediata del número de transformaciones del problema, de la cantidad de indicaciones y de su distribución en el espacio – las indicaciones se concentran en un determinado problema o están dispersas en forma homogénea en todo el espacio -; muestra el tipo de aspecto de la cognición que se repite en las fases recorridas y en los distintos problemas, como así también las fases que se recorren y el modo en que se recorren – el recorrido es lineal o se observan saltos y se vuelve varias veces a la misma fase-. Si el número de indicaciones lo permite, se puede determinar la preferencia "fase-aspecto cognitivo", observando la concentración de indicaciones por fase.

La poligonal que presentamos como ejemplo es ficticia, no se deriva de ninguno de los procesos que se observaron, sin embargo podemos utilizarla para interpretar la información que puede obtenerse a partir de ella; además hemos optado por no presentar una tabla de episodios complementaria a fin de obviar detalles y mostrar la forma en que se ha procedido al volcar los datos en este instrumento.

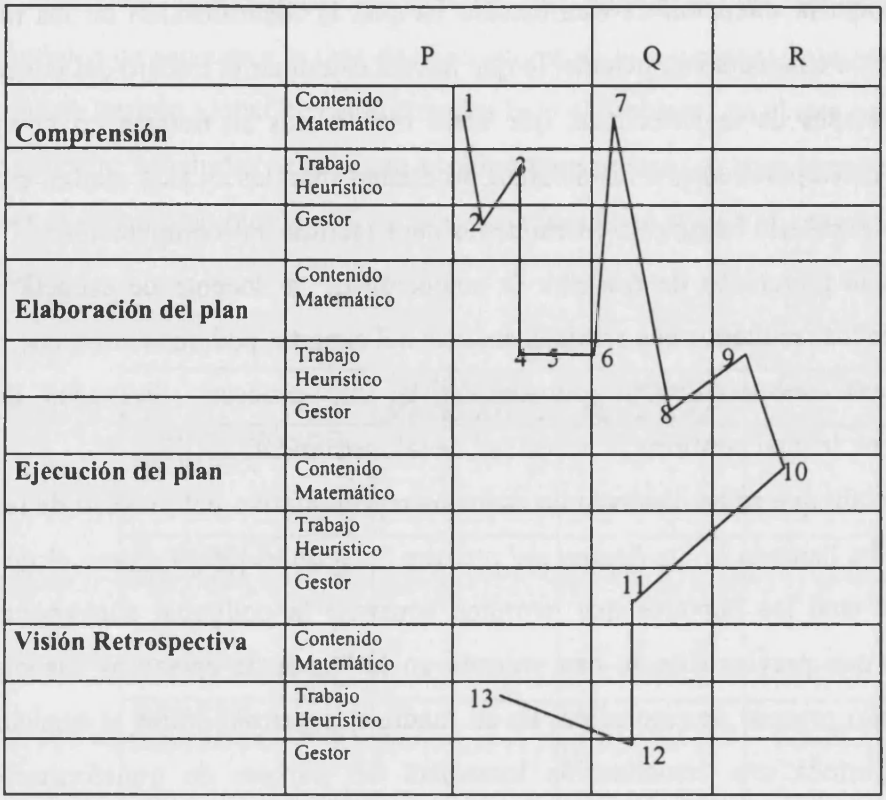


Fig. 4.2

El zig-zag en una misma fase implica cambio en los aspectos cognitivos. Por ende, los episodios 1 a 3 indican que las sugerencias para la comprensión hacen referencia a los tres aspectos cognitivos, la primera es de contenido matemático, por ejemplo el docente podría haber aludido a la definición de un concepto implicado en el enunciado, la segunda y la tercera podrían corresponder respectivamente a la evaluación de la suficiencia de datos y al uso de notación adecuada.

La línea vertical indica que en un determinado problema se conserva el aspecto cognitivo al cambiar de fase, por ejemplo los episodios 3 y 4 están ambos en el plano de la heurística.

La línea horizontal implica conservación del aspecto cognitivo en una misma fase. Es el caso de los episodios 4 y 5, que podrían provenir de orientaciones para hacer la figura de análisis y para marcar en ella información complementaria, el episodio siguiente se ubica en otro problema aunque en él se continúa apuntando al trabajo heurístico. En general cuando se está en la fase de elaboración del plan, el primer episodio de cada uno de los problemas del espacio que está centrado en la heurística - en

este caso 6 y 9- es el que resulta de hacer una reformulación, o sea que la reformulación nos ubica inmediatamente bajo otro problema.

El zig-zag entre fases implica cambio de fase, la disposición de los episodios 6 a 9 indica que de un episodio de elaboración del plan se va a uno de comprensión, para luego volver a la elaboración mediante indicaciones para la gestión, lo que conduce a una nueva reformulación.

A partir del episodio 10 comienza la ejecución y el paseo por el espacio de problemas en orden inverso. Cabe destacar que este tipo de interpretación es producto de los datos experimentales, o sea que el instrumento que estamos presentando ya está influido por ciertos resultados que arroja el análisis de la actuación. Exploraciones previas a la elaboración de este instrumento, centradas en el examen de la conducta casi competente, han llevado a detectar que la fase de elaboración del plan contiene todo el paseo por el espacio de problemas hasta que los alumnos tienen claro dicho espacio, luego de ello y revirtiendo el recorrido las sugerencias se dirigen a la ejecución del plan. De allí que el gráfico intenta plasmar el fenómeno observado, mostrando ese camino de ida y vuelta, por lo cual la disposición de episodios tiene un sentido hasta completar la fase de elaboración y a partir de ello adopta el sentido contrario.

Hay una línea vertical que une los episodios 11 y 12, que está señalando que se mantiene el aspecto cognitivo en el problema Q aunque varía la fase. En el mayor de los casos los episodios de gestión que hemos ubicado en la fase de elaboración, responden a una evaluación que tiene una repercusión global –aunque hay tareas de gestión que no son evaluaciones sino que llevan a tomar decisiones-, por tanto bien podría el episodio 11 llevar a evaluar la información que se desprende de un problema del espacio o a determinar el lugar del espacio en el que se está, o puede estar centrado en el acarreo de información de un problema a otro.

El episodio 12 también es de gestión aunque corresponde a la fase de visión retrospectiva del problema Q; en general los episodios ubicados en esa fase y correspondientes a un problema que no es el original, responden a evaluaciones o chequeos de los resultados intermedios, cuya finalidad es el control de errores.

Cualquier evaluación incluida en la visión retrospectiva de un cierto problema del espacio tiene un carácter global en dicho problema, sin embargo bien podría considerarse como una evaluación local dentro del proceso de resolución, entonces una

evaluación tal podría ser vista como una de las tareas del gestor para la fase de ejecución del problema original. Aquí se ha optado por plasmar las evaluaciones locales del proceso en evaluaciones globales de los problemas que resultan de la transformación del problema original.

El último episodio está situado en la visión retrospectiva del problema original y se dirige al trabajo heurístico, entonces las sugerencias implicadas podrían por ejemplo llevar a reinterpretar la solución desde el método, a resolver el problema en forma diferente, etc.

Quizás pueden hacerse más comentarios sobre el funcionamiento de este medio visual de representar el proceso, pero los hemos postergado para la próxima sección en la que al estudiar la actuación docente se irán precisando sobre la marcha otros detalles que conciernen a este instrumento de análisis.

4.4. ACTUACIÓN COMPETENTE

Estamos buscando elementos que constituyen la conducta competente al enseñar a resolver una clase de problemas, donde esos problemas se utilizan como medio para desarrollar ciertas capacidades de resolución de problemas. Estamos dirigiendo la mirada hacia un profesor que pretende la apropiación de un estilo heurístico por parte de los alumnos. ¿Cómo proyecta lograr ese fin? y ¿qué hace concretamente para ello? Son dos preguntas a las que nos abocaremos en esta sección.

Puesto que "regla y compás" es parte del curso de resolución de problemas en cuyo ámbito se desarrolla la actuación del docente, vamos a contestar la primera pregunta trascendiendo a la temática específica. "Regla y compás" es un componente del profesor que persigue ese estilo heurístico, para lo cual ha proyectado etapas de enseñanza y tareas con determidas características, así como el tratamiento de otros temas[2].

El curso está organizado en función de algunos elementos de competencia en resolución de problemas, a saber: destrezas heurísticas, sugerencias heurísticas, herramientas heurísticas, métodos de resolución con contenido heurístico, patrones plausibles, gestor instruido –el que conoce los comportamientos de gestión a nivel local

[2] El Programa de la Asignatura se adosa en Anexo II.

y global que llevan a controlar el proceso y las tareas de gestión asociadas al uso de las herramientas y métodos heurísticos-, una concepción de la naturaleza de la tarea de resolver problemas según la cual ésta se realiza con fines epistémicos.

Asimismo, hay ciertos hechos que también delinean la organización de la enseñanza, en primer lugar se considera a los alumnos -futuros maestros-, como resolutores de problemas, en segundo lugar como estudiosos de los procesos de aprendizaje y en tercer lugar como futuros instructores en resolución de problemas. De acuerdo a esto, la secuencia de instrucción está organizada en cinco etapas que están caracterizadas por los estados que alcanza el alumno: 1) resolutor, 2) resolutor / observador de sí mismo, 3) resolutor / observador externo, 4) resolutor /observador / investigador, 5) resolutor / observador / investigador / profesor. En cada etapa se va añadiendo un nuevo estado a los anteriores. En la primer etapa se considera al alumno como resolutor, se le plantea una colección de problemas que contienen implicitamente lo que se quiere enseñar, se los elige de modo que puedan ser utilizados para presentar explícitamente algunas herramientas o método heurísticos. En la segunda etapa el alumno es un resolutor conciente o sea es un observador de su propio proceso de resolución. En la tercera, no es sólo observador del proceso desarrollado por él mismo sino del proceso desarrollado por otros alumnos y por el profesor, que actúa como modelo. En la cuarta etapa cambia radicalmente el tipo de tareas ya que por primera vez se hace una instrucción explícita de los elementos del modelo de competencia, va más allá de un uso explícito de las herramientas y método de resolución, hay una institucionalización de los mismos; la observación que se hace del proceso tanto propio como ajeno, ya no es ingenua sino que está apoyada en los elementos teóricos, por ende el alumno llega a ser investigador del proceso de resolución. En la última etapa se deja de lado el estado de resolutor y se introduce el de profesor, y ya no sólo es investigador del proceso sino que puede aplicar los conocimientos adquiridos en actividades y tareas propias de la profesión.

En todos los casos, los problemas planificados en la instrucción se caracterizan por no requerir grandes conocimientos para ser abordados, por ser problemas de contenido matemático y por tener potencial heurístico.

Cabe señalar que las tres primeras etapas no están proyectadas para ser recorridas en forma secuencial, sino que desde un principio la intención docente apunta

a que estos estados se presenten a raíz de las tareas que se proponen en la enseñanza. El tratamiento de los problemas de regla y compás está previsto en una parte inicial del curso, por lo que la actuación del profesor estaría dirigida a lograr que sus alumnos alcancen estos primeros estados, o sea ir gradualmente de resolutor a observador del propio proceso y de los procesos de otros sujetos.

La respuesta a la segunda pregunta, ¿qué hace el docente para lograr que sus alumnos se apropien de un estilo heurístico de resolución de problemas?, sólo la podemos responder sobre la base de los datos experimentales. Para ello, vamos a examinar la actuación docente utilizando los instrumentos diseñados a ese fin, que fueron descriptos anteriormente. El Anexo I contiene la transcripción de cada una de las clases, segmentada ya en episodios. Atendiendo a la reconstrucción de los procesos que se desprenden de dichas transcripciones, en los siguientes apartados se presenta la tabla de episodios de cada uno de los problemas tratados durante la instrucción, la correspondiente poligonal del proceso, el espacio real de problemas del proceso de resolución y se hace la reconstrucción incluyendo comentarios y reflexiones provenientes del análisis del problema en el marco de la clase en la que se lo ha abordado.

4.4.1. Problema 1: "Dada una recta y un punto exterior a ella, trazar una recta paralela a la dada que pase por el punto dado"

4.4.1.1. Tabla de Episodios

	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA P	2- definición concepto implicado en el enunciado (punto exterior a una recta)	1- hacer figura para visualizar situación descripta en el enunciado 3- uso de notación adecuada	

		4- establecer lo dado y lo buscado	
	Q' 11- definición de concepto implicado en Q' (distancia de un punto a un recta)		
ELABORACIÓN DE UN PLAN	P	5- dar el problema por resuelto y remarcar los datos 6- tener en cuenta lo buscado y dividir la condición en partes	
	T	7- reformular basándose en datos y criterio de construcción (T: encontrar un punto que esté en la paralela)	
	8- concepto implicado en T reformulado como lugar geométrico (propiedad de los puntos de la paralela)		
		9- reformular basándose en la propiedad del conjunto de puntos implicado	
	Q	(Q: encontrar un punto que esté a la misma distancia de la recta dada que el punto dado)	
	Q'	10- establecer problemas generados por el análisis (Q': Determinar la distancia que hay desde el punto dado a la recta dada)	
	Q"	12- establecer problemas generados por el análisis (Q": Trazar la recta perpendicular a la dada por el punto dado)	
	13- definición de concepto útil para configurar plan para Q" y su reformulación como lugar geométrico (Mediatriz)		
		14- indicaciones dirigidas por el método: reformular figuras como lugar de puntos	15- evaluar utilidad de resolver un problema del espacio
		16-Indicaciones para en Q" hacer uso implícito del Metodo de Figura Auxiliar	▸Una alumna esboza

Q	23- hecho para configurar el plan (para medir distancia de un punto a una recta se traza una perpendicular)		idea de plan para Q 21- evaluar pertinencia del plan para resolver Q)
EJECUCIÓN DEL PLAN Q"	17- algoritmo de construcción (mediatriz)		19- evaluar nueva información que se desprende de un problema del espacio 20- determinar en qué lugar del espacio de problemas estoy
Q		22- reformular de acuerdo al resultado de Q' (E: encontrar un punto a una distancia conocida de la recta dada) ►Un alumno ejecuta su plan para Q .Consiste en hacer dos triángulos isósceles congruentes, con un vértice común y apoyados en la recta dada, y trazar las alturas de ambos.	
P		24- uso de notación adecuada	30- retomar plan abandonado (Q se transforma por el resultado de Q' en E; E: hallar un punto a una distancia conocida de la recta dada) 31- seleccionar información útil de un problema del espacio y transportarla a otro.
		32- aplicar segundo paso del Método de los Dos Lugares (está implícito)	
VISIÓN RETROSPECTIVA Q"			18- evaluar las transformaciones que se generan en la solución
Q	25- relaciones de congruencia entre los elementos de construcción		

		26 - validar la solución; reformulación "Probar que el punto hallado está a la misma distancia" 27- resolver el problena de forma diferente (El profesor hace pasar a una alumna a ejecutar su plan; consiste en el trazado de la bisectriz de un ángulo recto, para luego hallar un punto de ésta que esté a una distancia dada de los lados del ángulo) 28- validar la solución (probar...)	
P	29- Concepto utilizado reformulado como lugar geométrico (bisectriz) 33- hechos implicados en la solución: mediante una perpendicular se mide la distancia de una recta a un punto ► Se revisa la solución (clase 2) 34- criterios de construcción (recta)	: 35- reinterpretar la solución desde el Método de los Dos Lugares	

4.4.1.2. Poligonal del proceso

P: "Dada una recta y un punto exterior a ella, trazar una recta paralela a la dada que pase por dicho punto"

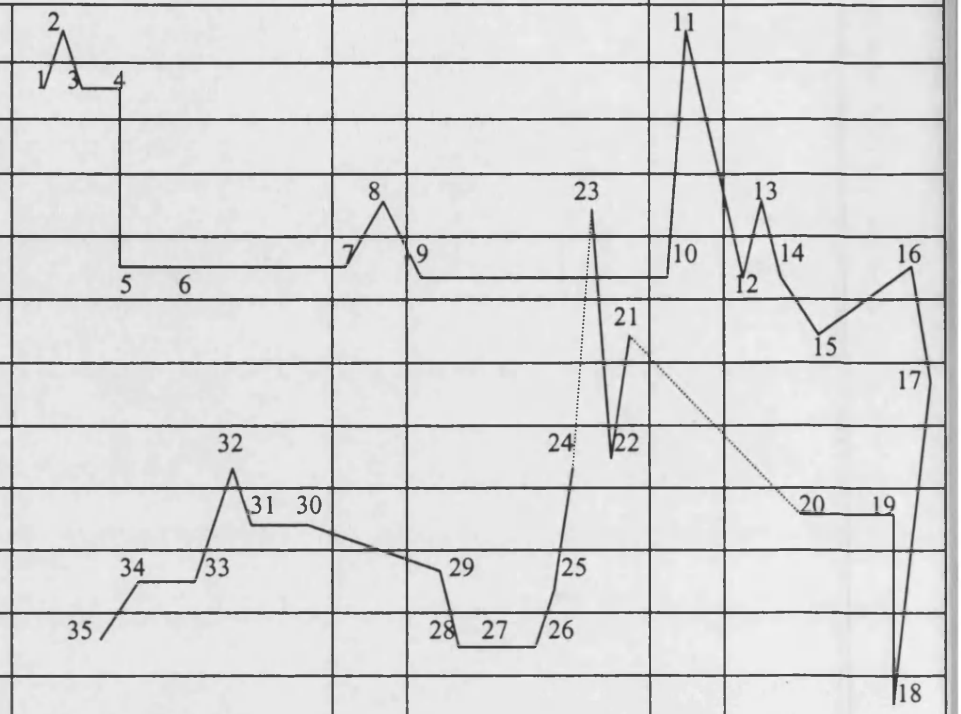
Q: Encontrar un punto que esté a la misma distancia de la recta dada que el punto dado

Q': Determinar la distancia que hay desde el punto dado a la recta dada

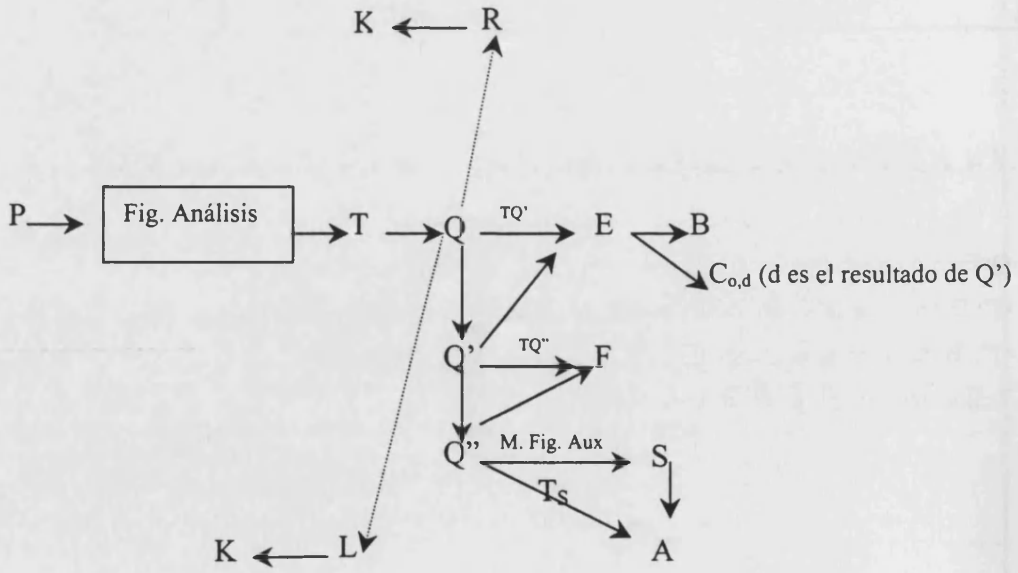
Q": Trazar la recta perpendicular a la dada por el punto dado

T: Encontrar un punto que esté en la paralela

		P	T	Q	Q'	Q"
Comprensión	Contenido Matemático					
	Trabajo Heurístico					
	Gestor					
Elaboración del plan	Contenido Matemático					
	Trabajo Heurístico					
	Gestor					
Ejecución del plan	Contenido Matemático					
	Trabajo Heurístico					
	Gestor					
Visión Retrospectiva	Contenido Matemático					
	Trabajo Heurístico					
	Gestor					



4.4.1.3. Espacio real de problemas



E: Hallar un punto a una distancia d (resultado de Q') de la recta dada

F: Determinar m, pie de la perpendicular a la recta dada por el punto dado

S: Determinar un segmento contenido en la recta dada tal que sus extremos (a y b) equidisten del punto dado

A: Trazar la mediatriz del segmento

B: Trazar la perpendicular a la recta dada por un punto o de la misma

L: Construir sobre la recta dada un triángulo congruente al triángulo apb (siendo p el punto dado)

K: Probar que el punto hallado está a la misma distancia de la recta que el punto dado

R: Construir sobre la recta dada un cuadrado de lado pm

4.4.1.4. Reconstrucción del proceso

Los minutos iniciales de esta primer clase se destinan a informar a los alumnos respecto al campo de estudio que van abordar y se presentan los elementos básicos para comenzar a trabajar los problemas de regla y compás. El docente se refiere al significado de regla y compás, es decir en qué consiste resolver un problemas con regla y compás, además lleva a establecer el criterio para construir una recta –mediante dos puntos- y el criterio para construir una circunferencia –mediante un centro y el radio-, y presenta a la circunferencia como lugar geométrico. Se hace alusión a ciertas nociones tales como perpendicular, paralela, bisectriz, mediatriz, pero sin profundizar en detalles. Se trata de una fase preliminar al abordar un tema nuevo, que se incluye al organizar la enseñanza, y que no sólo es para los alumnos una instancia de información y de toma de contacto con el tema, sino que es un útil para que el profesor descubra los conocimientos previos de sus alumnos sobre la temática a trabajar.

El resto del tiempo de clase se dedica a la resolución del primer problema - inclusive se vuelve a él en los primeros minutos de la seguna clase-, y mediante dicho problema el profesor presenta el método que pretende enseñar.

Se recorren todas las fases del proceso de resolución. Los episodios 1 a 4 corresponden a la fase de comprensión, uno de ellos atiende al contenido matemático, en él se hace referencia a la definición de punto exterior. En cambio los tres restantes apuntan al trabajo heurístico, específicamente van en la línea de las destrezas, en uno de ellos el docente sugiere hacer una figura para visualizar la información, en otro explicita qué es lo dado y cuál es el objetivo del problema, y en el tercero, aunque se establezcan ciertas convenciones sobre notación, la frase "utilizamos siempre notaciones que nos digan algo" puede considerarse indicador de que la notación siempre lleva a algo, por lo cual el sentido que en la enseñanza se da al uso de notación es el de una forma adecuada

de trabajo que lleva a descubrir. Por cierto, ya que estamos haciendo alusión a la notación, cabe destacar que la notación utilizada por este docente, lo cual se pone en evidencia en las transcripciones de clase –letras mayúsculas para designar puntos, y minúsculas para segmentos y rectas- difiere de la que hemos adoptado en este trabajo.

Antes de pasar a una nueva fase del proceso, el docente explicita que va a intentar instruir en el método. Es una indicación que no tiene que ver con el proceso de resolución del problema sino que apunta a la enseñanza, se explicita lo que se va a enseñar. Indicaciones generales de esta naturaleza, suelen aparecer durante la clase, tienen un rol específico dentro de un contexto de enseñanza, que es el de informar al alumno lo que se le va a enseñar, o de informarle sobre lo que se ha enseñado, a fin de que éste pueda darle un sentido global a la tarea. Son un tipo particular de "indicaciones hacia la enseñanza", las hemos llamado "indicaciónes sobre el sentido global de la tarea".

Los episodios 5 a 16 pertenecen a la elaboración del plan para resolver el problema, prácticamente estan dirigidos por el objetivo. En esta fase hay un buen número de indicaciones y en la mayoría de los casos se dirigen al trabajo heurístico. El docente comienza sugiriendo que se dé el problema por resuelto y se remarquen los datos – lo que hemos llamado figura de análisis-, y a modo de organizar el plan de acuerdo al Método de los Dos Lugares, divide la condición en partes y da una serie de orientaciones que apuntan a realizar las correspondientes reformulaciones del problema. Las reformulaciones se apoyan en el critero de construcción de una recta y en las propiedades de los puntos de la paralela, de donde se desprenden los problemas T y Q. Las reformulaciones permiten identificar los problemas del espacio. El profesor muestra y justifica lo que va haciendo y de este modo se va evidenciando el primer paso del método (9). El episodio 10 proviene de hacer el análisis, en él se lleva a considerar el problema Q', y en el episodio 11 se hace referencia a la definición de un concepto implicado lo cual lleva a la fase de comprensión de este problema del espacio. El episodio 12 se dirige a la consideración de Q", construcción que está implicada en la resolución de Q'.

Posteriormente se dedican un par de minutos para que los alumnos piensen el problema mientras el docente hace comentarios acerca de lo que está enseñando,

nuevamente las indicaciones atienden a la enseñanza, señala que además de instruir en el método se irán repasando construcciones elementales ya conocidas.

Los episodios 13 a 16 tienden a configurar un plan para el problema Q" y básicamente llevan a transformarlo a la construcción de una mediatriz. Las sugerencias iniciales evocan el concepto de mediatriz y su reformulación como lugar geométrico, continuan indicaciones que van en la dirección del método "...en el caso de los problemas de regla y compás que vamos a resolver nos va a interesar mirar siempre a las figuras geométricas como lugar de los puntos que cumplen una determinada condición..."; luego de lo cual sigue un episodio de gestión que apunta al control de la dirección del plan, ya que el docente lleva a evaluar la utilidad de resolver Q", y por último (16) las orientaciones se centran en reducir Q" al trazado de la mediatriz de un segmento auxiliar, adquiere presencia el Método de la Figura Auxiliar aunque no se hace alusión al respecto.

Las sugerencias que conforman la fase de elaboración del plan inducen el paseo por la mayor parte del espacio de problemas. El espacio teórico de la paralela que hicimos en el capítulo 2 no concuerda con éste, esta construcción elemental provenía de otra construcción elemental, la perpendicular, y el plan utilizado se basaba en considerar a la paralela como la perpendicular de la perpendicular, lo cual conducía a un esquema acorde al Método de la Figura Auxiliar. En cambio, el espacio real de problemas se compone de sucesivas reformulaciones y de problemas generados por el análisis, que desembocan en el problema E, que se resuelve mediante el Método de los Dos Lugares.

En el episodio 17 comienza la fase de ejecución del plan, en la cual el trabajo de síntesis viene a hacer el motor de esta parte del proceso; las orientaciones que la conforman son de índole heuristica y de gestión. Las primeras indicaciones para llevar a cabo el plan hacen referencia al algoritmo de construcción de la mediatriz, el cual está implicado en Q". El episodio 18 se ubica en una fase de visión retrospectiva del problema Q", ya que se lleva a considerar su solución evaluando la transformación del problema que se deriva de ésta, de modo que apunta a la reflexión del proceso. Los episodios 19 y 20 corresponden a evaluaciones globales. El camino emprendido por el docente para guiar hacia las reformulaciones se interrumpe a causa de la intervención de una alumna que apenas esboza una idea de plan para Q, más bien verbaliza alguna idea para explorar, por lo que el docente lleva a evaluar su pertinencia (21). Este tipo de

sucesos que cambian el curso del camino de solución, se ha indicado con línea punteada en la poligonal del proceso, de ahí que los episodios 20 y 21 esten unidos por una línea tal, ya que de indicaciones que persiguen determinar el lugar del espacio en el que se está, se pasa a una fase de elaboración del plan de un problema del espacio donde las sugerencias docentes llevan a una evaluación de las ideas a considerar. Tras esto, el docente focaliza la reformulación de Q usando la información que se desprende de Q', es decir el problema se tranforma en ubicar un punto a una distancia conocida, y para ello sugiere trazar una perpendicular; pero la intervención de un alumno hace cambiar el punto de vista y con ello la naturaleza del plan. Esto se traduce en la ejecución de un plan para Q por parte de ese alumno, que implica la construcción de dos triángulos isósceles congruentes apoyados en la recta dada, siendo la altura de uno de ellos la distancia del punto dado a dicha recta; las indicaciones docentes se limitan al uso de notación adecuada (24).

Hay un número significativo de indicaciones incluidas en la fase de visión retrospectiva, y corresponden tanto a un problema del espacio –como ser los próximos cinco episodios pertenecen a esta fase en el problema Q- como al problema original. En el episodio 25 el docente revisa el plan de solución implementado acentuando las relaciones de congruencia implicadas, y puesto que este plan se aleja del método, lleva a validar la solución (26). Gestiona el plan del alumno en dos sentidos, por un lado en dar una notación adecuada y acentuar las relaciones de congruencia, y por otro en reformular el problema, transforma el problema en un problema de probar, y en este caso el alumno es el que prueba.

A pedido del docente una alumna pasa a ejecutar un nuevo plan, hemos considerado a este episodio como el que deviene de la sugerencia "resolver el problema de forma diferente", en este caso el proceso aun gira alrededor del problema Q. Este nuevo plan consiste en trazar la bisectriz del ángulo formado entre la recta dada y su perpendicular y ubicar en ella un punto a una cierta distancia de los lados del ángulo, lo que desemboca en la construcción de un cuadrado. En el episodio 28 el docente lleva a validar la solución, lo cual responde a la necesidad que es propia de los problemas de matemática, de probar que los pasos que se han hecho conducen a lo que se requería. Es decir, que tal como ocurrió anteriormente cuando el primer alumno cambia el punto de vista, el profesor reconduce el proceso transformando el problema en un problema de

probar, sólo que en este caso el mismo docente brinda los elementos que permiten validar la solución (28). En este sentido lleva a visualizar el cuadrado que subyace en la construcción y a reformular el concepto de bisectriz como lugar geométrico (29) a fin de poder utilizarlo en otros problemas.

Como lo que se pretende enseñar es el uso del método, el docente apunta a aquella solución en la que es aplicable el método, por lo cual volviendo a la fase de ejecución del problema original, en el siguiente episodio lleva a retomar el plan abandonado, o sea lleva a situarse en el lugar donde se produjo el cambio en el punto de vista. En los episodios 31 y 32 lleva a cabo el plan que originalmente trató de sugerir, focaliza el acarreo de información de un problema a otro y lleva implícitamente a aplicar el segundo paso del Método de los Dos Lugares. El episodio 33 corresponde a una fase de visión retrospectiva del problema original, en la que se explicitan hechos implicados en la solución. Los dos episodios restantes, correspondientes también a esta fase, se desarrollan en una segunda clase al hacer la revisión de la solución del problema, en ellos se explicita el criterio para construir una recta y se reinterpreta la solución de acuerdo al Método de los Dos Lugares. El relato de la solución se institucionaliza como modelo para imitar, está centrado en dar el problema por resuelto, en reformular de acuerdo a las propiedades de los puntos de la paralela y sobre todo en reducir el problema a encontrar un punto, el que puede determinarse mediante dos lugares geométricos. O sea que al reinterpretar la solución, la intervención docente apunta tanto a ciertos conocimientos básicos como son los criterios de construcción, o las propiedades de los conjuntos de puntos, sobre los cuales se edificarán las reformulaciones de los problemas, como a llevar a descubrir los pasos del método.

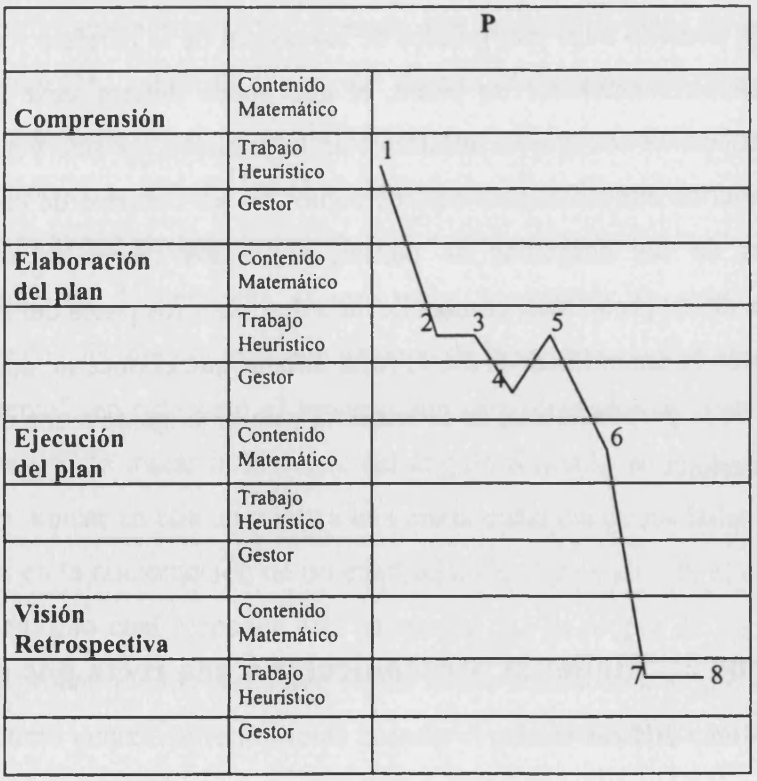
Retomando la dinámica de la clase, resta señalar que el docente deja como tarea la construcción de la perpendicular, de la bisectriz y de la tangente a una circunferencia por un punto exterior.

4.4.2. Problema 2: "Hallar la perpendicular a una recta por un punto"

4.4.2.1. Tabla de Episodios

	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA P		1- establecer qué es lo dado y lo buscado	
ELABORACIÓN DE UN PLAN P		2- reformular basándose en criterio de construcción 3- dar el problema por resuelto y remarcar datos 5- trabajar hacia atrás (significado de"dar el probl por resuelto")	4- evaluar información que se desprende de la figura de análisis
EJECUCIÓN DEL PLAN	▸ Una alumna explicita los pasos del algoritmo de construcción de la perpendicular 6- algoritmo de construcción		
VISIÓN RETROSPECTIVA		7- validar la solución 8- reinterpretar la solución sobre la base del Método de Figura Auxiliar	

4.4.2.2. Poligonal del proceso

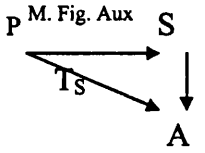


4.4.2.3. Espacio real de problemas

P: Hallar la perpendicular a una recta por un punto perteneciente a la misma.

S: Determinar un segmento contenido en la recta dada tal que el punto dado pertenezca a su mediatriz

A: Construir la mediatriz de dicho segmento



4.4.2.4. Reconstrucción del proceso

Ya hemos indicado que la segunda clase comienza con una revisión de la solución del problema de la paralela, luego de lo cual se enfocan los problemas que quedaron de tarea. En primer lugar se trata el problema de construir la perpendicular a una recta dada, el cual estuvo implicado en el problema de la paralela, sólo que en ese caso se trabajó con un punto exterior a la recta y ahora el docente lleva a trabajar con un punto perteneciente a la recta.

Tiene lugar un breve episodio para la comprensión del problema, en el cual se explicita lo dado y lo buscado. Le sigue una fase de elaboración del plan, que se inicia con indicaciones tendientes a reformular el problema de acuerdo al criterio de construcción de una recta, luego el docente hace la figura de análisis y lleva a evaluar la información que se desprende de la misma, lo cual ayuda a establecer con precisión los datos y lo que se busca y a comprender las relaciones entre datos e incógnita. El episodio 5 es una indicación para hacer el análisis, concretamente el docente sugiere dar el problema por resuelto y explica el significado de ello.

A continuación tiene lugar un episodio de ejecución del plan, en el cual una alumna realiza a mano alzada los pasos de la técnica de construcción de la perpendicular por un punto perteneciente a la recta dada; las indicaciones son para que se explicite dicho algoritmo de construcción.

A patir de esto comienza una fase de visión retrospectiva compuesta de dos episodios, en el primero de ellos el docente invita a validar la solución ya que ésta se corresponde con un algoritmo de construcción usado en forma mecánica, y el otro episodio lleva a reinterpretar dicha solución sobre la base del Método de la Figura Auxiliar. En este caso los pasos del método aparecen implícitamente, las indicaciones

docentes acentúan la transformación del problema "....el problema se transforma en trazar una mediatriz....".

Respecto al siguiente problema, a la construcción de la bisectriz de un ángulo, sólo se hace mención a la misma y se la considera como un algoritmo a disposición de los alumnos que no ofrece mayores dificultades –sin realizar una reiterpretación del mismo-; cabe señalar que dicha construcción estuvo implicada en uno de los planes de solución del primer problema, y que en esa instancia el docente aprovecha el hecho para hacer la reformulación de la bisectriz como lugar geométrico. En este punto de la instrucción se pone fin al tratamiento de las construcciones elementales; lo que resta de la segunda clase se dedica al problema que analizaremos en el siguiente apartado.

4.4.3. Problema 3: "Tangente a una circunferencia por un punto exterior"

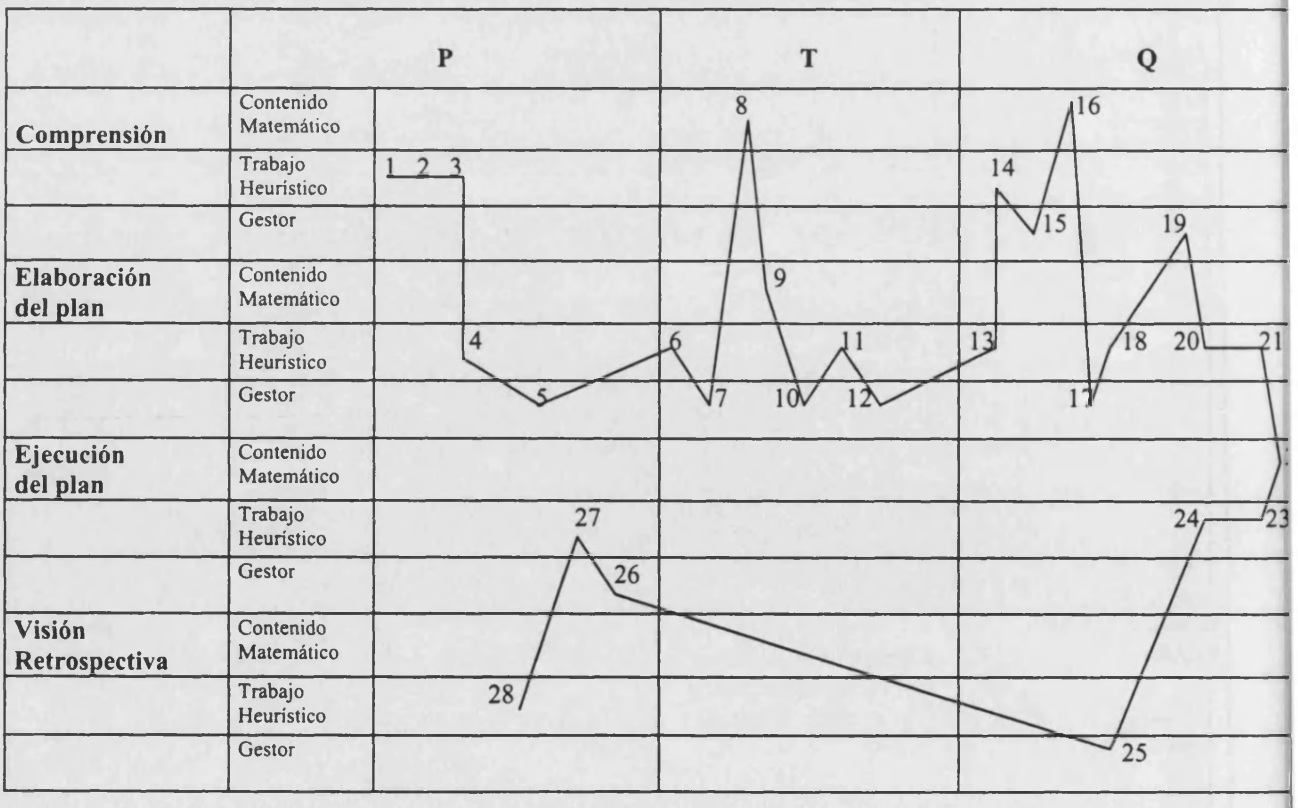
4.4.3.1. Tabla de Episodios

	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA P		1- hacer una figura para visualizar la situación descrita en el enunciado 2- uso de notación adecuada 3- establecer lo dado y lo buscado	
	8- ejemplificación de concepto implicado en el enunciado (tg. a una circunferencia)		
Q		14- hacer una figura para visualizar la situación descrita en el enunciado	
			15- evaluar pertinencia y suficiencia de datos
	16- Propiedad o relación entre los lados de un triángulo rectángulo		
			19- analizar diferentes alternativas al considerar lo dado
ELABORACIÓN DE UN PLAN P		4- dar el problema por resuelto y remarcar datos	

			5- evaluar información que se desprende de la figura de análisis
	T	6- indicaciones dirigidas por el método: reducir el problema a determinar un punto y hallarlo como intersección de dos lugares (T: determinar el punto de tangencia)	
			7- evaluar información utilizada y la que no se ha utilizado
		9- hecho para configurar plan (la tg a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia)	
			▸ Una alumna explicita su plan
			10- analizar qué se conoce y qué falta determinar
		11- marcar información complementaria en la figura de análisis	
			12- evaluar la información utilizada y la que no se ha utilizado
	Q	13- indicaciones dirigidas por el Método de la Figura Auxiliar (Q: Construir triángulo rectángulo dada la hipotenusa y un cateto)	
			17- evaluar utilidad de resolver Q
		18- hacer figura de análisis	
		20- indicaciones dirigidas por el Método de los Dos Lugares (reducir el problema a la determinación de un punto)	
		21- marcar información complementaria en la figura de análisis (ángulo recto)	
EJECUCIÓN DEL PLAN	Q	22- establecer a priori los segmentos que serán considerados como dato; regla y compás	
		▸ Un alumno le indica el plan para resolver Q	
		23- uso de notación	

P		adecuada 24- fijar un dato y reformular 27- Indicaciones dirigidas por el Método de dos Lugares (hallar el punto de tangencia como intersección de la circunferencia dada y otra de centro en el punto dado y radio congruente al cateto hallado del triángulo rectángulo auxiliar)	26- evaluar nueva información que se desprende de Q
VISIÓN RETROSPECTIVA		28- reinterpretar la solución de Q sobre la base del Método de los Dos Lugares	25- comprobar resultado del problema Q

4.4.3.2. Poligonal del proceso

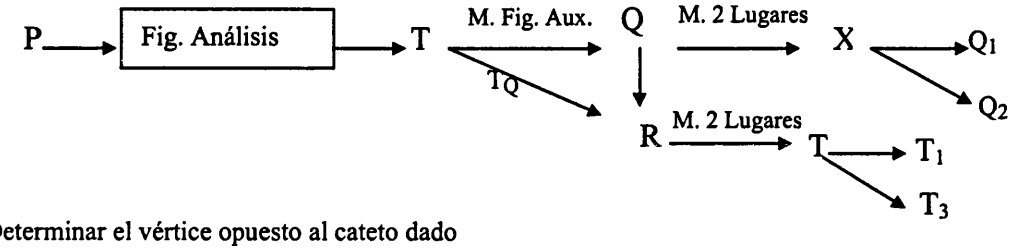


P: Construir la tangente a una circunferencia por un punto exterior

T: Determinar el punto de tangencia

Q: Construir triángulo rectángulo dados la hipotenusa y un cateto

4.4.3.3. Espacio real de problemas



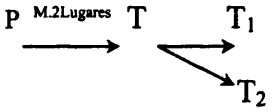
X: Determinar el vértice opuesto al cateto dado

Q_1 y Q_2: son las construcciones de la perpendicular por un extremo del cateto dado y de la circunferencia con centro en el otro extremo y radio congruente a la hipotenusa.

R: Hallar el punto de tangencia habiendo construido el triángulo rectángulo -es decir sabiendo la distancia que hay entre el punto dado y el punto de tangencia-

T_3: Construir circunferencia C(p,px) -siendo px el cateto hallado del triángulo rectángulo auxiliar, -

El espacio teórico de problemas estaría compuesto por la serie de problemas que se desprenden de la aplicación inmediata del Método de los Dos Lugares:



T_1: circunferencia dada

T_2: construcción del arco capaz AC($\overline{po}$,90°) –siendo $\overline{po}$ la distancia entre el punto dado y el centro de la circunferencia dada-

4.4.3.4. Reconstrucción del proceso

El docente hace pasar a una alumna para que resuelva el problema, las tres primeras indicaciones tienden a la comprensión del problema, concretamente se sugiere hacer una figura a fin de visualizar la situación descrita en el enunciado, se requiere la inclusión de notación adecuada en dicha figura, al mismo tiempo que se presenta la notación que se utilizará para la circunferencia, y por último se explicita qué es lo dado y lo buscado.

Luego el docente sugiere dar el problema por resuelto y dibujar la figura final, es decir orienta a hacer una figura de análisis (4), lo cual da inicio a la fase de elaboración del plan. La siguiente sugerencia netamente es de gestión, de algún modo tiende a que el trabajo se haga en forma organizada, ante la posibilidad de dos resultados se sugiere

centrar el trabajo en hallar uno para lo cual se lleva a evaluar la información que se desprende de la figura de análisis. A esto le sigue un episodio dirigido por el Método de los Dos Lugares, lo cual lleva a tranformar el problema inicial en el problema T. El punto de tangencia pertenece a dos lugares geométricos, uno de los cuales es la circunferencia dada y el otro es la tangente que surgiría de resolver el problema inicial; esto lleva al docente a gestionar el proceso orientando a realizar una evaluación de la información disponible y cómo puede explotarse dicha información (7). En el siguiente episodio el docente trata de favorecer la comprensión del problema mediante la ejemplificación del concepto de recta tangente a una circunferencia. La solución del problema original implica la de T y viceversa, y ambos problemas parecen tener la misma complejidad a los ojos de los alumnos. Es entonces cuando las sugerencias docentes conducen a situarse en la fase de elaboración y a tener en cuenta un hecho -la tg. a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia- para configurar el plan. A continuación una alumna comienza a explicitar un plan partiendo de considerar como conocido al punto buscado, y al mismo tiempo surgen preguntas de algunos alumnos que muestran que se ha perdido la brújula, hay dudas respecto a qué es lo dado, en consecuencia el docente lleva a analizar lo que se conoce y lo que falta determinar (10). Los dos siguientes episodios conducen a la obtención de información, ya sea marcando información complementaria en la figura de ánalisis, como evaluando qué información se ha utilizado y cuál todavía no se ha considerado. En el episodio 13 las indicaciones están dirigidas por el Método de la Figura Auxiliar, aquí el docente sugiere construir una figura auxilar, el triángulo rectángulo que permite hallar el punto buscado, teniendo como datos la hipotenusa y un cateto, los cuales provienen de considerar tanto la distancia entre el punto dado y el centro de la circunferencia, como el radio de dicha circunferencia. Los tres siguientes episodios tienden a la comprensión de este nuevo problema Q, en los cuales el docente lleva a marcar lo conocido para visualizar la situación, a evaluar la suficiencia de los datos para construir el triángulo y a atender la relación entre sus lados - teorema de Pitágoras-. En el episodio 17 se vuelve a la fase de elaboración del plan, la intervención docente tiende al control en la dirección del plan por lo que lleva a evaluar la utilidad de resolver Q, de este modo se establece la relación entre el problema original y este problema del espacio. Luego de esto se

termina la clase y el profesor solicita examinar las posibles construcciones de triángulos rectángulos tomando aleatoriamente ciertos datos referidos a ángulos y lados.

La clase siguiente se inicia con un breve comentario que expresa la intención de la instrucción, el uso del método. A partir de ello el profesor retoma el problema Q con el objetivo de elaborar un plan y la intervención docente se dirige a la consideración del Método de los Dos Lugares para hallar la figura auxiliar; la primera sugerencia es dar el problema por resuelto y marcar los datos, o sea hacer la figura de análisis (18), luego lleva a analizar diferentes posibilidades en lo dado, lo que puede facilitar la comprensión del problema, concretamente orienta a reflexionar sobre si es lo mismo considerar un cateto u otro como conocido y enseguida lleva a decidir por el cateto menor, lo cual está acorde a la figura de análisis correspondiente al problema original (19). Le sigue una breve sugerencia que se dirige al uso explícito del método que se intenta instruir "... analizamos en lo posible el problema como resuelto y la construcción la referíamos no como a la construcción de toda la figura sino...¿a qué?...a la determinación de...¿se acuerdan?....". Este uso explícito parece ser prematuro en este momento por lo que deja 5 minutos para trabajar individualmente el problema.

Luego de ello sugiere marcar información complementaria en la figura de análisis.

El proceso continúa con una fase de ejecución del plan, en la que el docente da indicaciones iniciales para precisar algunas reglas de juego en el ámbito de la regla y el compás, en este caso se establece que antes de comenzar la construcción se deben dibujar los segmentos que serán considerados como dato, ya que ellos no estaban incluidos en el enunciado.

A continuación el docente hace un dibujo a mano alzada para representar los pasos que un alumno le va indicando para resolver Q, -trazar el cateto, hacer una perpendicular por un extremo y hacer una circunferencia con centro en el otro extremo y radio igual a la hipotenusa- en cuya solución subyace el Método de los Dos Lugares; en esta instancia sólo hay indicaciones sobre el uso de notación adecuada y otras que apuntan a fijar un dato y reformular -si se conoce el cateto se conocen dos vértices del triángulo-; además el docente escribe las instrucciones para llevar a cabo los pasos de solución. En el episodio siguiente se lleva a verificar si el resultado de este problema es

correcto, en este tipo de episodios en los que se comprueban los resultados parciales, el profesor gestiona el proceso tendiendo al control de errores.

En los episodios 26 y 27 se vuelve al problema orignal, lo que lleva a focalizar el problema R, el primero lleva a evaluar la información que se desprende de resolver Q y que es útil para resolver el problema original, y el otro conduce a hallar el punto de tangencia mediante la intersección de la circunferencia dada con otra, cuyo centro es el punto dado y su radio es congruente al cateto que se ha determinado al construir el triángulo rectángulo. En este caso la figura auxiliar que se construye mediante la aplicación del método de los dos lugares, permite la solución inmediata del problema original, ya sea por eso o porque se pretende el uso explicito del Método de los Dos Lugares, así como también mostrar su funcionamiento para la construcción de triángulos, es que se pasa a una fase de visión retrospectiva en la cual se vuelve a retomar el problema Q, reinterpretando su solución sobre la base del método aplicado. En este sentido se acentúa en dar el problema por resuelto, reducir el problema a hallar un punto y descubrir los lugares geométricos a los que pertenece el punto. El docente va mostrando cómo se presentan los pasos del método al construir el triángulo, resaltando que para determinarlo se necesitan los tres vértices y que si se conoce un lado se conocen dos vértices, con lo cual el problema se reduce a hallar el vértice restante.

Hay un buen número de episodios que tienden a la comprensión aunque prevalecen los episodios destinados a la elaboración del plan, encaminados al trabajo heurístico y a la gestión.

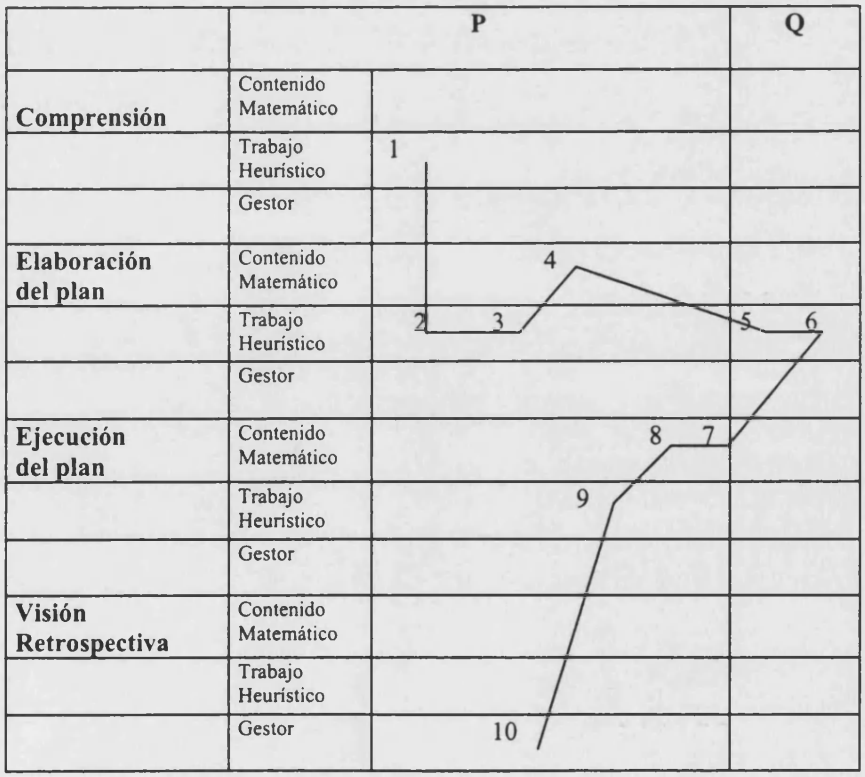
4.4.4. Problema 4: "Construir un triángulo dados sus tres lados"

4.4.4.1. Tabla de Episodios

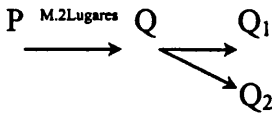
	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA		1- establecer lo dado y lo buscado	
ELABORACIÓN DE UN PLAN P		2- dar el problema por resuelto y remarcar los datos	

Q	4- criterio de construcción	3 - trabajar hacia atrás (significado de "dar el problema por resuelto") 5- reformular basándose en criterio de construcción 6- indicaciones dirigidas por el método: reducir el problema a determinar un punto y hallarlo como intersección de dos lugares	
EJECUCIÓN DEL PLAN	7- algoritmo de operación básica (copiar segmento) 8- Conocimiento de reglas del dominio: naturaleza genérica de la figura de análisis	9- Indicaciones dirigidas por el Método de los Dos Lugares	
VISIÓN RETROSPECTIVA			10- comprobar resultado

4.4.4.2. Poligonal del proceso



4.4.4.3. Espacio real de problemas



Q: determinar un punto

Q_1 y Q_2 son las construcciones de cada circunferencia

4.4.3.4. Reconstrucción del proceso

Una vez enunciado el problema, un alumno pregunta cuales son las medidas de los lados del triángulo y en respuesta a ello, el docente dibuja los tres segmentos correspondientes sin hacer alusión a medida alguna, y explicita que se busca construir un triángulo de modo que dichos segmentos sean los lados del mismo. En este episodio las indicaciones llevan a establecer lo dado y lo buscado, lo cual apunta a la comprensión del problema. Los cinco episodios que se dan a continuación se ubican en la fase de elaboración del plan, están dirigidos por el trabajo hacia atrás y por el Método de los Dos Lugares. En ellos, las primeras indicaciones son para dar el problema por resuelto y remarcar los datos (2), a lo cual sigue un breve comentario acerca del significado de "dar el problema por resuelto" (3), luego las sugerencias llevan a considerar el criterio para construir un triángulo (4) y a tenerlo en cuenta para hacer la reformulación del problema (5) y en el episodio 6 el docente va mostrando la forma que adquieren los pasos del método al ser aplicados al problema.

Luego el docente ejecuta el plan, la solución está dirigida por el Método de los Dos Lugares. Se comienza fijando un lado y por tanto en el episodio 7 se muestra la forma de realizar la operación básica "copia de un segmento". La medida de los datos no se corresponde con la medida de los elementos de la figura de análisis, el lado A corresponde al segmento de menor longitud y en la figura de análisis es el lado mayor, lo cual produce cierta incertidumbre en algunos alumnos, y alguno de ellos en vez de considerar lo dado, pretenden hacer un triángulo congruente a la figura de análisis; esto lleva a que la intervención docente se centre en la naturaleza genérica de la figura de análisis.

Las indicaciones del próximo episodio llevan a visualizar las construcciones que provienen de aplicar los pasos del método. Luego se pasa a una fase de visión retrospectiva, ya que el docente invita a comprobar el resultado (10), lo cual además de ser una de las tareas del gestor parece apuntar a la comprensión de ciertas reglas de trabajo en el dominio.

En los último minutos de clase las indicaciones apuntan a la enseñanza, el profesor hace referencia a lo enseñado y a lo que se va a enseñar, hace alusión a las dos construcciones de triángulos vistas e informa que todos los problemas previstos en la unidad de enseñanza versarán en construcciones de triángulo.

El grado de complejidad de los problemas 3 y 4 es muy diferente, que no debe dejarse de lado al analizar las respectivas poligonales de los procesos, por lo cual decir que tal problema tiene más o menos episodios, o inferir que prevalecen indicaciones de cierta naturaleza, sería minimizar el análisis. Incluso si queremos comparar los episodios del último problema con la secuencia de episodios correspondientes a la construcción del triángulo rectángulo auxiliar del problema 3, debemos tener en cuenta que dicha figura está inmersa en un problema y que varios episodios atenderán a esto, por lo cual tampoco podemos hacer caso omiso a esto y simplificar el análisis a comparar el número de episodios o el tipo de indicaciones.

4.4.5. Problema 5: "Construir un triángulo dados dos lados y la altura respecto a uno de ellos" (A, B, H_A)

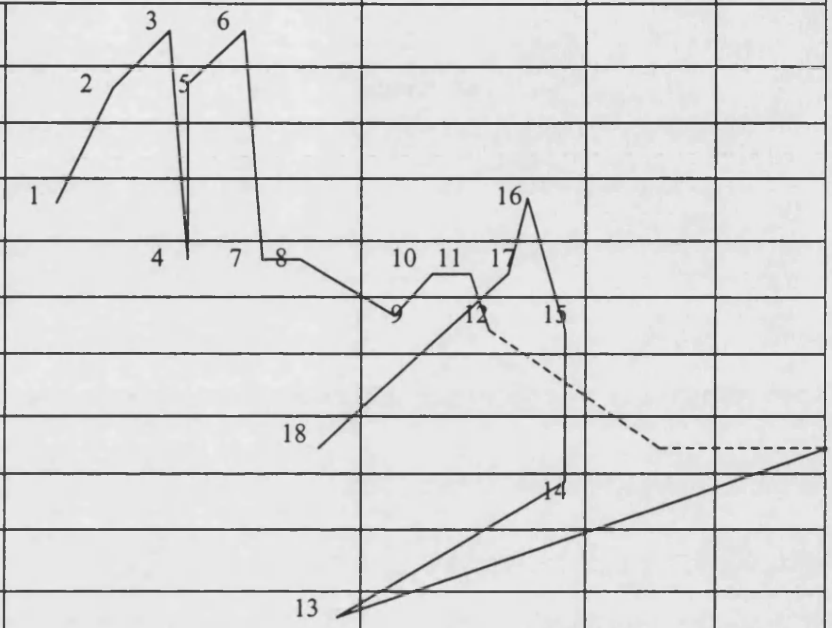
4.4.5.1. Tabla de Episodios

	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA P	3- ejemplificación y definición de altura de un triángulo 6- definición de concepto implicado en enunciado (altura)	2- uso de notación adecuada 5- establecer lo dado y lo buscado	
ELABORACIÓN DE UN PLAN P	1- reglas de trabajo en el		

Q	dominio: criterio de construcción 16- definiciones equivalentes de un concepto (altura: distancia desde un vértice a la recta que contiene al lado opuesto)	4- dar el problema por resuelto y remarcar los datos 7 – trabajar hacia atrás (significado de "dar el problema por resuelto") 8- indicaciones dirigidas por el Método de los Dos Lugares (reducir el problema a determinar un punto) ▸ Indicaciones dirigidas por pasos del método 10- fijar un dato y reformular 11- hallar el punto como intersección de lugares geométricos 17 - reinterpretar la información de la figura de análisis sobre la base de lugares geométricos	9- Decisión (a qué punto referir el problema) 12- evaluar información que se desprende de la figura de análisis (*) 15- evaluar información utilizada y la que no se ha utilizado aun
EJECUCIÓN DEL PLAN P		(*) ▸ Un alumno cambia el punto de vista y explicita su plan para resolver P, la solución está dirigida por el Método de la Figura Auxiliar. 18- hacer la síntesis	14 - retomar plan abandonado
VISIÓN RETROSPECTIVA		13- reinterpretar la solución sobre la base del Método de la Figura Auxiliar	

4.4.5.2. Poligonal del proceso

		P	Q	S	R
Comprensión	Contenido Matemático				
	Trabajo Heurístico				
	Gestor				
Elaboración del plan	Contenido Matemático				
	Trabajo Heurístico				
	Gestor				
Ejecución del plan	Contenido Matemático				
	Trabajo Heurístico				
	Gestor				
Visión Retrospectiva	Contenido Matemático				
	Trabajo Heurístico				
	Gestor				



4.4.5.3. Espacio real de problemas

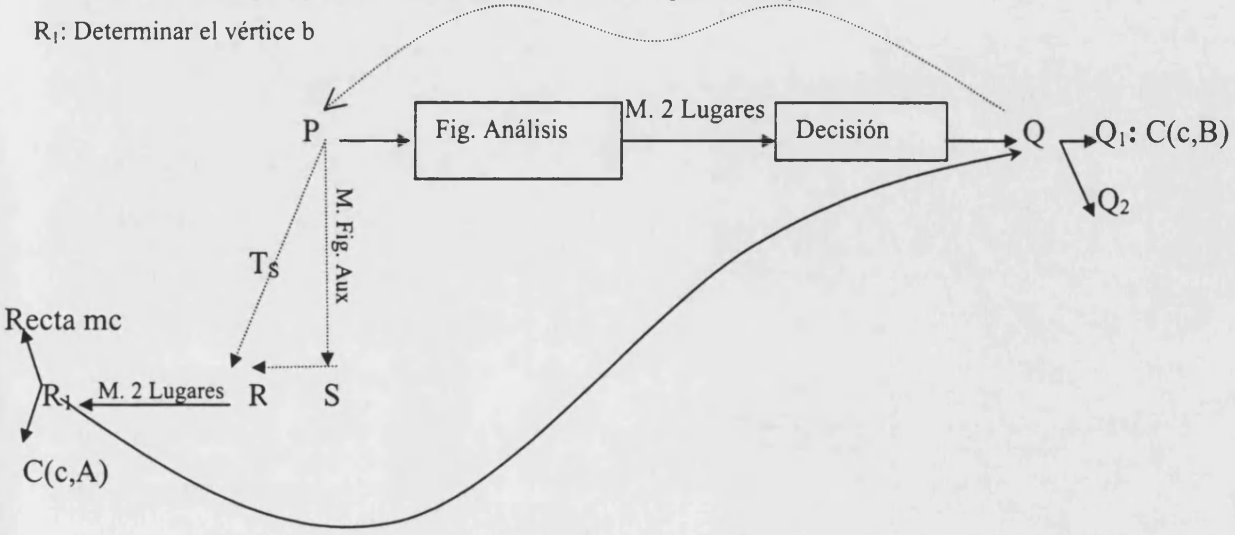
Q_2: Construir la paralela al lado A que está a una distancia H_A

Q: Determinar el vértice a

S: Construir un triángulo rectángulo dado el cateto H_A y la hipotenusa B

R: Construir el triángulo pedido teniendo construido el triángulo rectángulo

R_1: Determinar el vértice b



4.4.5.4. Reconstrucción del proceso

Esta clase corresponde a una etapa intermedia en la enseñanza de resolución de problemas de regla y compás. Al iniciar la clase el docente da indicaciones que hemos ubicado dentro del problema que posteriormente plantea puesto que son pertinentes para el mismo, no obstante van más allá de éste. Se atiende tanto al conocimiento de reglas de trabajo en el dominio como a la adquisición de destrezas, se lleva a tener en cuenta el criterio para la construcción de un triángulo -que establece que dicha figura queda determinada si se conocen sus tres vértices- y a considerar y dar nombre a las distintas ternas de vértices, ángulos y lados de la figura, fomentando así el uso de notación adecuada.

Luego la intervención docente se centra en la ejemplificación y definición del concepto de altura de un triángulo, concepto implicado en el problema que se abordará a continuación. Una vez hecho esto se presenta el problema y se dejan 15 minutos para que los alumnos trabajen en él.

A continuación el docente sugiere dar el problema por resuelto, es decir hacer el triángulo marcando los datos e incluyendo notación adecuada, por tanto sus indicaciones están destinadas a la elaboración del plan (4).

A esto le siguen dos episodios que llevan a la fase de comprensión, se orienta a establecer lo dado, por tanto se dibujan los segmentos que serán considerados como datos del problema, y además se alude a la definición de altura. Luego las indicaciones apuntan a la elaboración de un plan y van en la línea del trabajo heurístico, se vuelve a la sugerencia de dar el problema por resuelto y se hacen algunos comentarios sobre el significado de ello y además se orienta a aplicar el primer paso del Método que es objeto de instrucción.

El episodio 9 es de gestión, del diálogo entre docente y alumnos surgen las dos opciones a las cuales se puede reducir el problema, a encontrar el vértice a o el b; se plantea una situación de decisión en la que el docente lleva a optar por el vértice a. En un capítulo anterior ya hemos establecido una secuencia para los métodos, y hemos dicho que el gestor es el que organiza la secuencia, en este caso el docente hace de gestor, su intención es el uso del Método de los Dos Lugares y sólo hay un vértice que haga posible esto, por tanto conduce a elegirlo. Reducir el problema a construcciones elementales también forma parte de la enseñanza, se advierte un principio general "el

método se usa siempre que pueda reducirse el problema a construcciones elementales", lo cual inhabilita a considerar el vértice b, ya que dicho punto no se puede hallar mediante dos lugares geométricos correspondientes a construcciones elementales –sería preciso trazar la tangente a una circunferencia por un punto exterior, que no es una construcción elemental-. Los análisis teóricos que hemos hecho de los problemas, muestran que cualquier espacio teórico de problemas se apoya sobre construcciones elementales, además hemos caracterizado a la conducta competente por cierto paseo por el espacio teórico, por ende podemos decir que en este episodio el profesor lleva a optar acorde al ideal competente.

Los episodios 10 y 11 se corresponden con indicaciones para llevar a cabo los dos pasos del Método de los Dos Lugares. Uno de los lugares geométricos al cual pertenece el vértice a resulta inmediato, pero el otro no fue así, lo que genera un nuevo problema "Encontrar un segundo lugar para el vértice a", entonces el docente lleva a evaluar la información que se desprende de la figura de análisis (12). Esto da lugar a un nuevo punto de vista, un alumno explicita y ejecuta otro plan para resolver el problema inicial, basado en el Método de la figura auxiliar. Durante la ejecución no hubo indicaciones del docente, en la poligonal del proceso se ha señalado este cambio en la dirección del plan sin intervención docente, mediante una línea punteada que indica el recorrido por los problemas generados por dicho método.

El episodio 13 corresponde a una fase retrospectiva, las orientaciones se dirigen a reinterpretar la solución sobre la base del Método de la Figura Auxiliar, se destacan los pasos del método y se hace notar que para hallar la figura auxiliar se utiliza el Método de los Dos Lugares. De algun modo el docente aprovecha esta instancia para hacer uso explícito del método ya que en oportunidades anteriores se había hecho un uso implícito del mismo.

En el episodio 14 el docente lleva a retomar su plan inicial, el cual está guiado por el Método de los Dos Lugares. En los episodios 15 a 17 se regresa a la fase de elaboración del plan inicial y las orientaciones responden a los tres aspectos cognitivos, respectivamente tienden a que se evalúe la información utilizada y la que no se ha utilizado aún, a considerar una definición equivalente de la altura (distancia de un vértice a la recta que contiene al lado opuesto) y a reinterpretar la información de la figura de análisis sobre la base de lugares geométricos –se visualiza en la figura de

análisis la propiedad de los puntos de la paralela-. El episodio 18 se conforma de sugerencias para hacer la síntesis.

La poligonal del proceso muestra unas pocas sugerencias para la comprensión, una concentración de episodios en la fase de elaboración del plan -a esta altura de la etapa de instrucción se pueden discriminar distintas instancias que se derivan de la aplicación del método-, y prácticamente no hay indicaciones en la ejecución y el episodio correspondiente a visión retrospectiva apunta al uso explícito de un nuevo método.

4.4.6. Problema 6: "Construir un triángulo dados dos lados y la mediana respecto a uno de ellos" (A, B M_A)

4.4.6.1. Tabla de Episodios

	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA	2- definición y ejemplificación de concepto implicado en el enunciado (mediana)	1- uso de notación adecuada 3- establecer lo dado y lo buscado	
ELABORACIÓN DE UN PLAN P		4- hacer figura de análisis ▸ indicaciones dirigidas por el método 5- primer paso del método	
Q		7- segundo paso del método 9- reinterpretar la información de la figura de análisis sobre la base de lugares geométricos	6- Decisión (a qué punto referir el problema) 8- analizar qué se conoce y qué falta determinar 10-evaluar la información utilizada y

R		11- reinterpretar la información de la figura de análisis sobre la base de lugares geométricos 12-establecer problemas generados por el análisis R: determinar m	la que no se ha utilizado
	13- hecho para configurar plan para R (para determinar el punto medio de un segmento se traza su mediatriz)		
EJECUCIÓN DEL PLAN		14-hacer la síntesis	
VISIÓN RETROSPECTIVA			

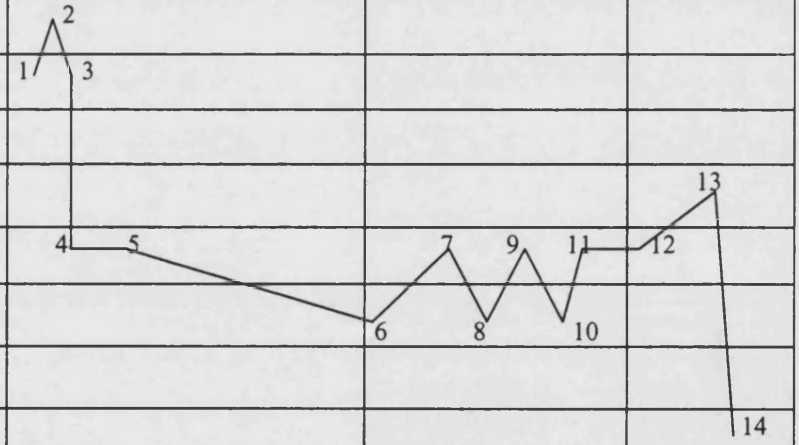
4.4.6.2. Poligonal del proceso

P: Construir un triángulo dados los lados A y B y la mediana M_A

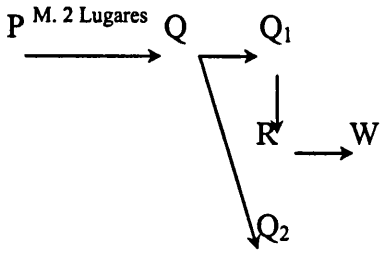
Q: Determinar el vértice a

R: Determinar el punto medio m del lado A

		P	Q	R
Comprensión	Contenido Matemático			
	Trabajo Heurístico			
	Gestor			
Elaboración del plan	Contenido Matemático			
	Trabajo Heurístico			
	Gestor			
Ejecución del plan	Contenido Matemático			
	Trabajo Heurístico			
	Gestor			
Visión Retrospectiva	Contenido Matemático			
	Trabajo Heurístico			
	Gestor			



4.4.6.3. Espacio real de problemas



Q_1 y Q_2 son las construcciones de las circunferencias C(m, M_A) y C(c,B)
W: Trazar mediatriz del segmento A

4.4.6.4. Reconstrucción del proceso

Luego de unos días de receso se retoma el tema. El docente ubica a los alumnos en el tema y explicita que se seguirá con las construcciones de triángulos.

A continuación presenta el problema y sus primeras indicaciones tienden a la comprensión. Se recuerdan convenciones sobre notación, apuntando así a cierta destreza, luego se define y ejemplifica el concepto de mediana, y se dibujan los tres segmentos que se consideran datos del problema explicitando la meta del problema, lo que lleva a establecer lo dado y lo buscado .

Se dedican un par de minutos para que los alumnos aborden el problema y enseguida la intervención docente se dirige a la elaboración de un plan, fase en la cual se distribuyen casi todos los episodios que conforman este proceso. La secuencia de episodios correspondientes a esta fase está estructurada por el Método de los Dos Lugares, no obstante en su interior subyacen rasgos del análisis problemático. La primera orientación es dar el problema por resuelto y remarcar los datos, y a la figura resultante se la presenta con el nombre de figura de análisis (4); los siguientes tres episodios persiguen llevar a cabo los pasos del método, correspondiendo cada uno de ellos a instancias en las que se orienta a aplicar cada paso (5 y 7) y a decidir a qué punto referir el problema (6). En la instancia de decisión el docente lleva a establecer como punto incógnita al vértice a, nuevamenta actúa como gestor, organiza la secuencia para considerar los métodos, y puesto que el Método de los Dos Lugares encabeza dicha secuencia, sugiere reducir el problema al único punto que permite aplicarlo "...dado que el lado A lo conocemos, los vértices b y c estarán donde situemos al lado A ¿verdad?

entonces el problema es localizar a...". Reducir el problema a determinar el vértice b conduciría a la aplicación del Método de la figura auxiliar, método que está en segundo lugar en la secuencia.

El episodio 8 surge de ciertas dudas de algunos alumnos que evidencian tener las cosas no muy claras, corresponde a una evaluación sobre lo que se conoce y lo que falta determinar. Los alumnos trabajan por unos momentos, mientras el docente recorre los bancos. Luego y con intención de orientar el tránsito por esta fase, su intervención es para reinterprertar la información de la figura de análisis, o sea que sugiere observar dicha figura para inferir los lugares geométricos a los que pertenece el punto incógnita (9 y 11), así como para evaluar la información utilizada y no utilizada (10). A continuación enuncia el problema R, que resulta de hacer análisis, y sugiere considerar un hecho para configurar el plan de ese problema -para determinar el punto medio de un segmento se traza su mediatriz-.

El último episodio es de ejecución del plan, se compone de una cadena de indicaciones con un objetivo común, hacer la síntesis, concretamente se hace un recorrido verbal por los problemas del espacio en el sentido inverso al anterior. Luego de ello el docente invita a reflexionar sobre el método a fin de aplicarlo a nuevos problemas, aunque esto queda sólo como sugerencia.

4.4.7. Problema 7: "Construir un triángulo dados un lado y la altura y la mediana respecto al mismo" (A, H_A Y M_A)

4.4.7.1. Tabla de Episodios

	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA	4- definición de concepto implicado en el enunciado (H_A y M_A)	1- establecer lo dado y lo buscado (se explicita lo dado y el objetivo)	
ELABORACIÓN DE UN PLAN P	3-conocimiento de	2- hacer figura de análisis	

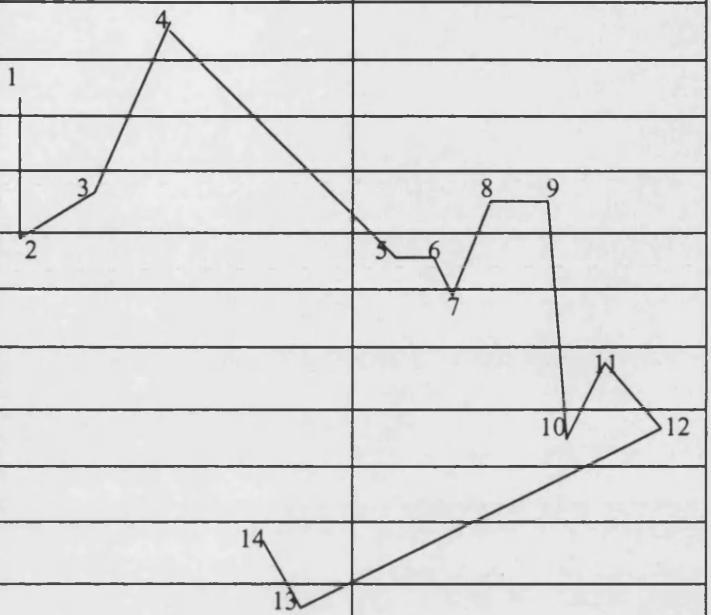
Q	reglas del dominio: naturaleza genérica de figura de análisis 8- definición equivalente de un concepto (altura: distancia desde un vértice a la recta que contiene al lado opuesto) 9- concepto reformulado como lugar geométrico (propiedad de los puntos de la paralela)	5- indicaciones dirigidas por el Método de los Dos Lugares: reducir el problema a determinar un punto y buscar los lugares geométricos a los cuales dicho punto pertenece Q: determinar a 6-utilizar un hecho empleado en un problema anterior	7-evaluar la información utilizada y la que no se ha utilizado
EJECUCIÓN DEL PLAN	11- reglas de juego: establecer a priori los segmentos que serán considerados como dato	10- fijar un dato y reformular 12- Indicaciones que llevan a construir los dos lugares geométricos	
VISIÓN RETROSPECTIVA	14- Inferencia de la relación entre la altura y mediana de un triángulo ($H_A < M_A$)	13 -analizar unicidad y existencia del resultado	

4.4.7.2. Poligonal del proceso

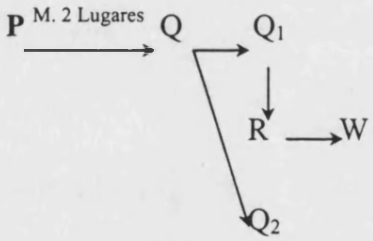
P: Construir un triángulo dados A, H_A Y M_A

Q: Determinar el vértice a

		P	Q
Comprensión	Contenido Matemático		
	Trabajo Heurístico		
	Gestor		
Elaboración del plan	Contenido Matemático		
	Trabajo Heurístico		
	Gestor		
Ejecución del plan	Contenido Matemático		
	Trabajo Heurístico		
	Gestor		
Visión Retrospectiva	Contenido Matemático		
	Trabajo Heurístico		
	Gestor		



4.4.7.3. Espacio real de problemas



Q_1 y Q_2 son las construcciones de C(m, M_A) y de la Paralela a una distancia H_A de A

R: Determinar m

W: Trazar la mediatriz del segmento A

4.4.7.4. Reconstrucción del proceso

Una vez escrita la terna correspondiente a los datos, se explicita lo dado y el objetivo tendiendo así a la comprensión del problema. Luego se sugiere hacer la figura de análisis, el docente dibuja dicha figura en posición no-standard y nombra a los vértices de acuerdo al criterio que ha venido utilizando -con las tres primeras letras del abecedario y recorriendo el sentido antihorario-, lo que lleva a desprenderse de las

particularidades de la figura de análisis, a considerarla como una figura que representa al resultado del problema, y de esta manera se atiende a la naturaleza genérica de dicha figura. El episodio 4 pertenece a una fase de comprensión, en él se hace referencia a las definiciones de altura y mediana. La siguiente secuencia de episodios (5 a 9) apunta a la elaboración de un plan, en el primero de ellos se insinúan los pasos del Método de los Dos Lugares e inmediatamente el problema se reduce a determinar el vértice a. Uno de los lugares al que pertenece dicho punto se explicita rápidamente ya que el docente sugiere usar un hecho empleado en un problema anterior –si el punto pertenece a la mediana está en una circunferencia con centro en el punto medio del lado-, por tanto las indicaciones siguientes tienden a encontrar el otro lugar geométrico. En consecuencia las mismas son sugerencias para hacer una evaluación en busca de información y para tener en cuenta el contenido matemático -definición equivalente de altura, propiedad de los puntos de la paralela-.

Los episodios 10, 11 y 12 componen la fase de ejecución del plan, en esta fase las indicaciones parecen destinarse a la organización de dicha ejecución, el primero de ellos es el producto de considerar el primer paso del método, que se traduce en la sugerencia "fijar un dato y reformular"; el episodio 11 atiende a cierta regla de trabajo en el dominio, en este caso lleva a establecer a priori los segmentos que se considerarán como dados; y las orientaciones que componen el episodio 12 guian la aplicación del segundo paso del Método de los Dos Lugares. En ese episodio las sugerencias se centran en la construcción de la circunferencia C(m, M_A) y de la paralela a una distancia H_A del lado A, no obstante, a esta altura de la instrucción las construcciones correspondientes son tratadas como algoritmos a disposición de los alumnos, por tanto las indicaciones se traducen en breves comentarios sobre ciertos hechos a tener en cuenta al construir cada uno de dichos lugares –para hallar el punto medio de un segmento se traza la mediatriz; trazando dos perpendiculares se puede hallar la paralela a una recta-.

Los episodios 13 y 14 son de visión retrospectiva, en ellos se analiza la unicidad y existencia del resultado, y se hace inferencia acerca de la relación entre la altura y mediana de un triángulo -$H_A < M_A$- lo cual condiciona el resultado.

4.4.8. Problema 8: "Construir un triángulo dados dos lados y la altura respecto al lado restante" (A, H_B, C)

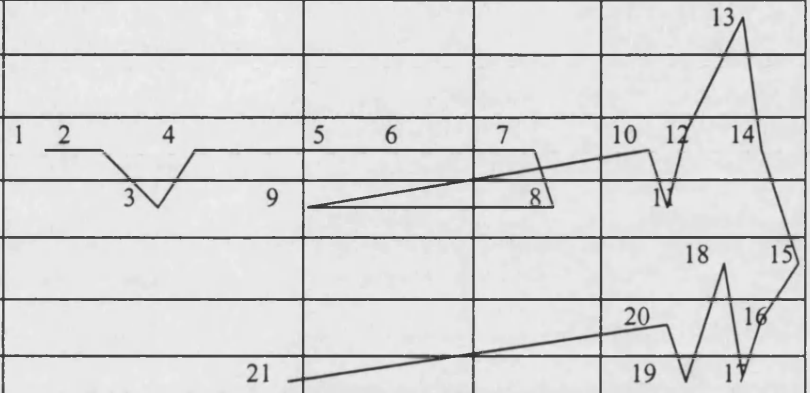
4.4.8.1. Tabla de Episodios

	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA S			13- evaluar suficiencia de datos para construir el triángulo rectángulo
ELABORACIÓN DE UN PLAN P		1- hacer figura de análisis y marcar información complementaria ▸indicaciones dirigidas por el método 2- primer paso	
Q		4- segundo paso 5- reformular teniendo en cuenta datos y criterios de construcción (Q: determinar a)	3- decisión
Z		6- Indicaciones para aplicar el segundo paso del Método de los Dos Lugares. Al intentar hallar el segundo lugar se genera un nuevo problema (Z: trazar recta cm, con m pie de la altura) 7- reformular teniendo en cuenta datos y criterios de construcción (Q': Determinar el pie m de la altura)	▸ Una alumna explica su plan, vuelve al problema Q y dibuja un lugar para el vértice, la C(b,C); luego enfoca el problema Q' y halla un lugar para m, la C(b,H_B). 8- evaluar la pertinencia del plan
P			9- cambiar el punto de vista
S		10- Indicaciones para considerar la figura auxiliar	

		(S: construir triángulo rectángulo dados la hipotenusa C y el cateto H_B) 12- hacer figura de análisis	11- evaluar aplicabilidad de método de resolución usado anteriormente 14- evaluar utilidad de resolver un problema del espacio
EJECUCIÓN DEL PLAN P	15-reglas de juego: establecer a priori los segmentos que serán considerados como dato	16- hacer la síntesis	17- evaluar dificultades al concretar el plan (secuencialidad de los pasos a seguir)
S	18-conocimiento de reglas del dominio: naturaleza genérica de la figura de análisis		▸ El docente construye la figura auxiliar, la solución está dirigida por el Método de dos lugares 19- seleccionar información de figura de análisis y transportarla
R		20- uso de notación adecuada	▸ De la aplicación del Método de figura auxiliar se genera el problema R. (R: construir el triángulo pedido habiendo construido la figura auxiliar) 21- seleccionar información de figura de análisis y transportarla
VISIÓN RETROSPECTIVA			

4.4.8.2. Poligonal del proceso

		P	Q	Z	S
Comprensión	Contenido Matemático				
	Trabajo Heurístico				
	Gestor				
Elaboración del plan	Contenido Matemático				
	Trabajo Heurístico				
	Gestor				
Ejecución del plan	Contenido Matemático				
	Trabajo Heurístico				
	Gestor				
Visión Retrospectiva	Contenido Matemático				
	Trabajo Heurístico				
	Gestor				



P: Construir un triángulo dados A, H_B, C

Q: Determinar a

S: Construir triángulo rectángulo dados un cateto y la hipotenusa

Z: Construir recta cm (con m pie de la altura)

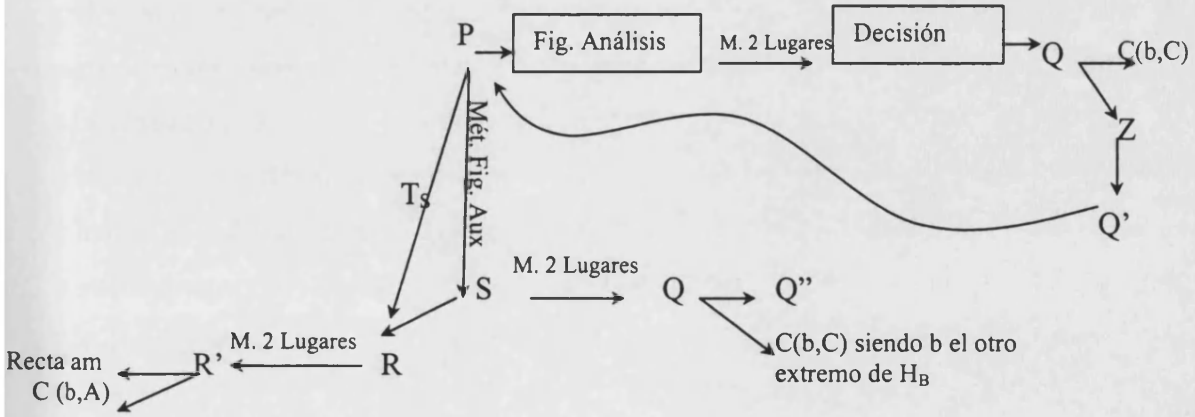
4.4.8.3. Espacio real de problemas

Q': Determinar el pie m de la altura

R: Construir el triángulo pedido habiendo construido el triángulo rectángulo

Q": Construir la perpendicular a H_B por uno de sus extremos (m)

R': Determinar c



4.4.8.4. Reconstrucción del proceso

Este es el último problema de la secuencia de instrucción; fue planteado en los minutos finales de la clase anterior. Al mismo tiempo que el docente presenta el problema hace algunos comentarios acerca del tipo particular de datos que componen las distintas ternas de construcción de triángulos que se vienen trabajando "son siempre tres longitudes". Luego de unos instantes en que los alumnos abordan el problema en forma individual, su intervención atiende a la elaboración de un plan, sugiere hacer la figura de análisis y lleva a cabo su trazado, marcando la información complementaria (ángulo recto correspondiente al trazado de la altura) y da indicaciones que apuntan a los pasos del Método de los Dos Lugares.

En la siguiente clase las sugerencias iniciales son de la misma naturaleza que las anteriores. Los episodios 2 a 4 están guiados por el Método de los Dos Lugares, pero el desglosamiento de estos episodios muestra en detalle lo que sucede cuando el docente sugiere aplicar el Método de los Dos Lugares; las indicaciones iniciales son para considerar el primer paso del método, el episodio 3 es una instancia de decisión que está a cargo de los alumnos, o sea que en este momento de la instrucción se traspasa la responsabilidad de la decisión al alumno, y en el episodio 4 las indicaciones son para considerar el segundo paso del método. El quinto episodio lleva a la reformulación basada en los datos y en el criterio de construcción de un triángulo, reformulación que resulta de considerar el método.

Los episodios 6 a 8 atienden al problema Q. El primero de ellos lleva a considerar el segundo paso del método y aplicarlo, a partir de lo cual surgen dos lugares para el vértice a, la circunferencia de centro b y radio C y una recta perpendicular a la altura. En el intento de hallar un segundo lugar para el punto se genera el problema Z , las sugerencias entonces se destinan a precisar dicha recta, y teniendo en cuenta el criterio para construir rectas se lleva a tranformar el problema a la determinación de un punto, el pie de la altura. Es entonces cuando una alumna explicita un esbozo de plan para resolver Q, por un lado encuentra un lugar para el vértice a, la circunferencia C(b,C) y por otro lado halla un lugar para el pie de la altura, la circunferencia C(b, H_B), es decir que se buscan dos lugares pero los lugares no corresponden a un mismo punto, de ahí el docente interviene para el control en la dirección del plan (8).

Se dejan unos minutos para que los alumnos piensen el problema y en el episodio 9 el docente lleva a cambiar el punto de vista, se dejan atrás los lugares mencionados y se lleva a mirar la figura de análisis y descubrir alguna figura que puede ser útil para la solución.

Los episodios 10 a 14 se centran en la construcción de la figura auxiliar. En el primero de ellos las sugerencias son para considerar dicha figura. A esto le sigue un episodio (11) de gestión, corresponde a una evaluación de la aplicabililidad del Método de los Dos Lugares para la resolución del problema original, las sugerencias señalan la imposibilidad de aplicación de dicho método, lo cual de alguna manera delinea la secuencia de su uso. El episodio 12 atiende a hacer la figura de análisis correspondiente al triángulo rectángulo y el episodio 13 es un episodio de gestión para la comprensión de este problema del espacio, en él se lleva a evaluar la suficiencia de datos para hacer dicha construcción. Por último las indicaciones son para evaluar la utilidad de resolver este problema del espacio, apuntan al control en la dirección del plan (14).

A partir de este momento comienza una fase de ejecución del plan. El docente atiende al conocimiento de las reglas de juego en el dominio, para lo cual establece a priori los segmentos que serán considerados como dato (15); luego sus indicaciones se dirigen a hacer la síntesis (16). Los alumnos trabajan unos minutos en el problema, luego de lo cual la intervención docente se dirige a la evaluación de dificultades encontradas al concretar el plan (17). El episodio 18 se atiende a la construcción del triángulo rectángulo auxiliar y las indicaciones son para tratar la naturaleza genérica de la figura de análisis, para lo cual el docente señala que la posición de la figura auxiliar que construirá es diferente a la que tenía en la figura de análisis hecha al abordar el problema. A continuación el docente hace la construcción de la figura auxiliar, la solución está dirigida por el Método de los Dos Lugares, pero las sugerencias más marcadas son para seleccionar información de la figura de análisis y transportarla a este problema (19) y al uso de notación adecuada (20), lo cual puede ayudar posteriormente a visualizar la información que se desprende de este problema del espacio y a establecer su relación con el problema original. Luego de esto se vuelve al problema original, el cual ya está transformado por esta última construcción, o sea que ha de resolverse el problema inicial habiendo construido el triángulo rectángulo; en este episodio las indicaciones son para seleccionar la información de la figura de análisis y transportarla,

lo que lleva a traducir la información que se desprende de la figura de análisis y hacer la reformulación correspondiente del problema.

La poligonal del proceso evidencia la concentración de episodios en la fase de elaboración del plan, la mayoría de naturaleza heurística; el resto de episodios se ubican en la ejecución y corresponden a los tres aspectos cognitivos.

4.5. RASGOS DE COMPETENCIA

El análisis de clases del experto ha permitido identificar ciertos rasgos de la conducta competente. Su manera de actuar, su forma de decir, la naturaleza de las indicaciones que ha proporcionado a lo largo de la enseñanza del tema, nos llevan a descubrir ciertas características que deben estar presentes a la hora de ayudar a los alumnos a apropiarse de un estilo heurístico de resolución de problemas.

Su **estrategia general** se resume en **"anticipar a los alumnos lo que se va a enseñar, enseñar en ese sentido y luego hacer referencia a lo que se ha enseñado"**.

Al comenzar el tratamiento del tema, la anticipación de lo que se va a enseñar deviene en una fase preliminar que se incluye en la organización de la enseñanza –ver primer párrafo de 4.4.1.4., donde se hace la reconstrucción del proceso correspondiente al primer problema, o consultar la transcripción de la clase 1 atendiendo a los minutos iniciales -. Es un espacio de información para los alumnos y de toma de contacto con el tema que se va a abordar, y para el profesor es una mecanismo que le permite descubrir los conocimientos previos de sus alumnos sobre la temática a trabajar.

Así también, en distintas oportunidades el docente expresa cuál es el fin de hacer la tarea, transmitiendo de este modo el sentido global de la ésta –por ejemplo las indicaciones ubicadas entre los episodios 4 y 5 o 12 y 13 del primer problema-.

De igual modo, una vez que ha enseñado aquello que ha proyectado enseñar, hace comentarios sobre lo enseñado. En oportunidades simplemente hace alusión a ello - como lo muestra la transcripción de la tercera clase, la cual se cierra con comentarios con relación a lo trabajado-. Otras veces, resalta el conocimiento aparecido en la actividad de clase que debe ser retenido para el trabajo posterior, de este modo destaca

los métodos o ciertas destrezas, resignifica conceptos, etc.; instancias de este estilo componen episodios que hemos incluido en una fase de visión retrospectiva - por ejemplo se dejan ver en el episodio 28 correspondiente al problema 3, donde se da énfasis a ciertas pautas de trabajo basadas en el método; o los momentos iniciales de la segunda clase, que etiquetamos como episodios 34 y 35 del problema 1, están acorde a este espíritu-.

Ya hemos anticipado en el capítulo anterior algunos resultados de los datos experimentales correspondientes a este estudio exploratorio. Hemos mencionado que los objetivos de las fases del proceso de resolución y la consideración de los métodos delinean la conducta competente al enseñar a resolver los problemas que nos ocupan. El propósito de la fase de elaboración del plan es que el alumno tenga una idea clara del plan que va a ejecutar, y el de la fase de ejecución es que la implementación de dicho plan sea ordenada. ¿Qué hace el profesor para ello?.

En el primer caso su actividad se dirige a orientar el recorrido por el espacio de problemas, llevando a identificar los problemas que lo componen y a establecer las relaciones entre los mismos, en particular las relaciones con el problema original.

En el segundo caso, lleva a recorrer el espacio de problemas en sentido contrario, sin dejar de lado las relaciones existentes.

Este camino de ida y vuelta por el espacio de problemas nos conduce a establecer que la actuación competente **introduce un método para organizar el tránsito en las fases mencionadas, se trata del Método de Análisis-Síntesis**. Esta característica se trasluce en las poligonales del proceso correspondientes a diversos problemas, ya que tal como lo hemos comentado, fue a partir de la observación de esta particularidad en la conducta del experto que adaptamos dicho instrumento de análisis para ponerla en evidencia.

El método de Análisis-Síntesis está implícito en los espacios teóricos de problemas presentados en el segundo capítulo. Al elaborar esos espacios de problemas hemos considerado que los pasos de un método se traducen en problemas, los cuales también pueden resolverse mediante uno de los tres métodos heurísticos o pueden requerir la solución de un problema auxiliar, cuyo resultado los transformará en uno conocido, o en su defecto en uno más accesible, el que también podrá resolverse

actuando análogamente. De esta forma, nos valemos del análisis para hacer el examen teórico de los problemas, el cual culmina al llegar a alguna construcción elemental.

En los espacios teóricos elaborados no aparecen problemas de probar, esto es razonable ya que el propio análisis prueba, podemos decir que este método además de heurístico es demostrativo. No obstante, esta apreciación no resulta inmediata; atendiendo a algunas reflexiones de Lakatos[3] al respecto, y puesto que el camino entre lo buscado y lo dado se recorre en dos sentidos, diremos que el método es demostrativo a condición de que todas las implicaciones que se establecen sean reversibles.

Así como **los problemas de probar no conforman los espacios teóricos** de problemas, debido a las peculiaridades del método de Análisis- Síntesis, en la práctica **aparecen naturalmente en el proceso de enseñanza de resolución de problemas** derivado de la actuación competente. Por tanto, vamos a describir en líneas generales la forma en que esto ha ocurrido en este estudio exploratorio.

El profesor orienta a transitar por el espacio de problemas correspondiente a un determinado problema, de este modo va sugiriendo las reformulaciones que se adecuan al método o a los métodos. Sin embargo, a veces ocurre que el alumno hace caso omiso a ciertas sugerencias heurísticas y decide cambiar el punto de vista y resolver el problema a su aire, es entonces cuando tiene lugar la elaboración o la ejecución de un plan por parte del alumno. En muchas ocasiones este plan se basa en hechos intuitivos y difícilmente comunicables, es entonces cuando la intervención docente se centra en la validación de la solución.

---

[3] Lakatos (1981) presenta un esquema representativo del método, en el cual puede visualizarse la cadena de teoremas y los lemas que se van incorporando a ella– designados respectivamente como P_i y Q_i –, esta cadena de inferencias culmina cuando se llega a un teorema cuya verdad o falsedad ya ha sido establecida. Al examinar su potencial demostrativo, señala que los pasos seguidos desde la conjetura hasta la premisa verdadera no consisten simplemente en ir de teorema en teorema, sino que además hay que apoyarse en distintos lemas, por lo cual las implicaciones establecidas en cada tríada compuesta por teorema-lema-teorema son las que en realidad deben ser reversibles. Destaca que las inferencias realizadas al recorrer el camino de la síntesis difieren de las originales, así por ejemplo el lema Q_1 que hace válida la inferencia de P a P_1, no siempre garantiza la validez de la inferencia inversa desde P_1 a P, y para que esto ocurra Q_1 y P deben ser condición necesaria y suficiente de P_1 y viceversa.

El alumno, de alguna manera ha reformulado el problema, y explicita o ejecuta el plan para resolverlo, entonces el docente promueve el paso hacia una fase de visión retrospectiva, lleva a reconsiderar la solución, en algunos casos haciendo referencia a conceptos o hechos implicados, pero además plantea un nuevo problema "Probar que el resultado cumple con las condiciones requeridas". A veces el alumno llega a esbozar una prueba, y en otras es el mismo docente quien da los elementos que permiten la validación, luego de ello, las indicaciones docentes conducen a retomar el plan inicial. Tal es el caso de los episodios 26 y 28 del protocolo del problema 1. El episodio 28 se genera a partir de la ejecución de un plan que desemboca en la construcción de un cuadrado, y la intervención docente responde a la necesidad propia de los problemas de matemática, de probar que los pasos seguidos conducen a lo buscado. En dicho episodio el docente invita a proponer caminos de validación y ante la ausencia de propuestas, brinda los elementos para llevarla a cabo. A diferencia de ello, en el episodio 26, es el propio alumno quien esboza ciertas ideas para validar su solución.

Otra de las características que se desprenden de la actuación del experto es que **rescata y lleva a reinterpretar todas las soluciones apoyadas en los métodos.**

En otras oportunidades el docente hace sugerencias para considerar un método pero a propuesta de algún alumno surge un nuevo plan que lleva a cambiar el enfoque, siendo dicho plan pertinente pero que está en un lugar posterior en la secuencia de uso de los métodos que hemos establecido en la teoría. En este caso, el profesor lleva a transitar una fase retrospectiva, hace reconsiderar la solución, puede aludir a conceptos o propiedades utilizadas, pero el foco de atención es la reinterpretación de dicha solución sobre la base del método utilizado. En este punto, a diferencia del caso anterior, aquí no hay una instancia de prueba sino un examen de la solución basado en el método, luego de lo cual se retoma el plan inicial.

Situaciones de este tipo se presentan cuando los alumnos ya disponen de cierta base de conocimientos heurísticos. La intervención docente puede apuntar al uso del Método de los Dos Lugares, no obstante suelen producirse cambios de enfoque que se corresponden con otro de los métodos heurísticos, lo cual es razonable ya que los estudiantes disponen de conocimientos anteriores que los llevan a descubrir otra forma de resolver el problema. Es entonces cuando las indicaciones docentes apuntan al trabajo heurístico y llevan a reinterpretar la solución sobre la base del método aplicado.

En este estudio exploratorio, el Método de la figura auxiliar estuvo implícito en algunas construcciones –por ejemplo en el episodio 13 del problema 3-, lo que posteriormente lleva a los alumnos a hacer uso del mismo pero sin tener conciencia de ello, por lo cual el docente hace la revisión de la solución evidenciando los pasos de dicho método y la obtención de la figura auxiliar mediante la intersección de dos lugares – tal como lo muestra el episodio 13 en el problema 5-. Se institucionaliza el nuevo método y se destaca la presencia del Método de los Dos Lugares en la construcción de la figura auxiliar. Después, tal como lo señalamos, el profesor lleva a retomar el plan abandonado, o sea que de una fase de visión retrospectiva se vuelve a la fase de elaboración del plan, en donde las indicaciones conducen al método que inicialmente se ha intentado sugerir.

Situaciones puntuales llevarían a pensar que el docente intenta ordenar la secuencia de uso de los métodos. Tal es el caso del último problema, el cual no admite la aplicación inmediata del Método de los Dos Lugares, no obstante el docente lleva a considerarlo y a evaluar su aplicabilidad, y ante la imposibilidad de ello induce a considerar una figura auxiliar. De este modo pareciera tender a organizar la secuencia para considerar los métodos: primero pensar en el uso del Método de los Dos Lugares y ante la imposibilidad de aplicarlo, construir una figura auxiliar.

Sin embargo, el proceso de enseñanza en su conjunto, muestra que se otorga el mismo status a los diferentes métodos. En distintas oportunidades, el docente sugiere un método determinado y también rescata las soluciones de los alumnos que involucran otro de los métodos, lo cual se deriva en la respectiva reinterpretación de la solución basada en el método implicado. Podríamos decir que el docente gestiona el proceso de enseñanza de modo que los distintos métodos estén presentes en la resolución de los problemas. La modalidad de hacerlo es pidiendo resolver el problema de forma diferente o rescatando las soluciones que aparecen naturalmente en una situación de resolución de problemas en clase. En ambos casos se concluye con la reinterpretación de la solución acorde al método subyacente.

El profesor no sigue una secuencia ideal, tiene en cuenta el espacio teórico de problemas, la secuencia de los métodos y la situación real. La serie de problemas

generados por un método involucra ciertos conceptos matemáticos, destrezas, etc., que el resolutor necesita saber. El profesor puesto que actúa como gestor, considera tanto los métodos como los conocimientos a disposición de sus alumnos. Por ende, si la aplicación de un método requiere por ejemplo de un concepto que los alumnos no disponen, tal puede ser el caso del arco capaz -construcción que hemos incorporado en las elementales pero con ciertas reservas-, entonces la intervención del docente apuntaría a la aplicación de otro método. Esto es lo que muestra el protocolo correspondiente al problema de "trazar la tangente a una circunferencia por un punto exterior", puesto que una solución guiada por el Método de los Dos Lugares implicaría la construcción de un arco capaz –caracterizado por un ángulo recto y el segmento cuyos extremos son el punto dado y el centro de la circunferencia dada-, entonces el docente lleva a considerar una figura auxiliar. Estas consideraciones llevan a entender el por qué el espacio real no coincide con el espacio teórico en varios problemas.

Por otra parte, **el análisis de la actuación del experto nos lleva a distinguir dos partes en la enseñanza**. Hay una etapa inicial en la que se hace la presentación del método y otra etapa en la cual los alumnos ya disponen del método, en ellas los alumnos pasan de ser "simples resolutores" a "resolutores y observadores de su propio proceso".

El profesor que persigue un estilo heurístico presenta un problema para introducir el método; utiliza un ejemplo relativamente simple "trazar la paralela a una recta por un punto", para mostrar lo que posteriormente se convertirá en los pasos del método. Su manera de enseñar es actuar como resolutor, muestra mediante ese ejemplo lo que debe hacerse para resolver el problema, y a la vez va justificando el por qué de cada paso de solución. Su forma de enseñanza no consiste en presentar el método e inmediatamente resolver un problema de aplicación, sino que se presenta el método planteando un problema y luego se exhibe todo lo que hay que hacer para resolverlo, justificando lo que se va haciendo, y al hacer dicha justificación van apareciendo los pasos del método que se quiere enseñar. Así por ejemplo, se hace figura de análisis, se van haciendo sucesivas reformulaciones basadas en criterios de construcción o en las propiedades de ciertos conjuntos de puntos, lo cual lleva a transformar el problema a la determinación de un punto, se divide la condición en dos partes y se identifican los lugares geométricos a los que pertenece dicho punto. Las construcciones elementales

surgen en forma natural en la enseñanza ya que se corresponden con los lugares geométricos implicados.

Posteriormente se procede de manera similar en otros problemas con intención de esquematizar todo lo que se va haciendo para convertirlo en pasos del método.

En otra etapa de la enseñanza, o sea cuando alumnos se hallan en el estado resolutor /observador de sí mismo, ya que se les ha presentado el método y están familiarizados con las construcciones elementales, entonces el profesor interviene en el trabajo o en la resolución de los alumnos. Los problemas de esta etapa son más complejos, son construcciones de triángulos que requieren el uso de conceptos no utilizados en problemas anteriores –como ser altura, mediana- y de lugares geométricos que no se infieren de forma inmediata. La modalidad adoptada por el docente consiste en hacer las sugerencias necesarias para la comprensión y dejar unos cuantos minutos para la resolución individual, a partir de lo cual su intervención se centra en guiar el camino para la elaboración del plan. Es aquí cuando aparece una instancia de decisión, se debe optar por el punto al cual se reducirá el problema, lo cual incorpora un nuevo elemento en el proceso ya que hasta el momento no había tenido lugar este tipo de instancia puesto que no había mucho por decidir en los problemas. En este punto, el docente hace de gestor, su intención es el uso del Método de los Dos Lugares, por tanto lleva a optar por el vértice que es pertinente para ello. Una vez hecho esto toma el papel de sugeridor heurístico y sus orientaciones son para aplicar los pasos del Método. Finalmente en la fase de ejecución se verbalizan los pasos para hacer la construcción, sólo hay sugerencias para hacer la síntesis.

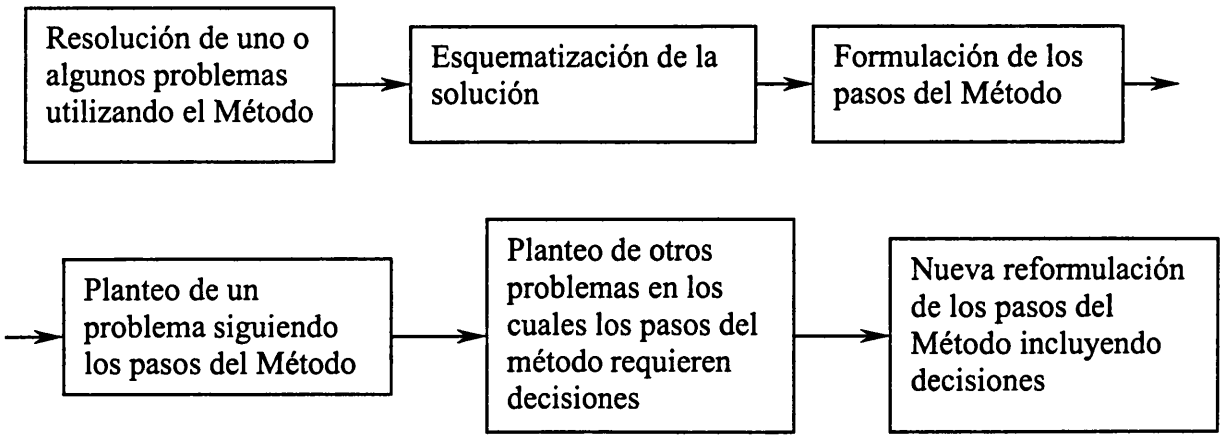
Esta modalidad de trabajo persiste hasta el final de la enseñanza observada, aunque gradualmente el profesor involucra a los alumnos en la toma de decisiones, la responsabilidad de la decisión se traspasa al alumno, lo cual apunta a hacer un uso autónomo del método.

Modelización:

Podemos decir que la estructuración de la enseñanza del método sigue un esquema, el cual puede describirse de la siguiente manera: En una primera etapa se introduce el método mediante la resolución de un problema sencillo y en el cual la aplicación de dicho método es inmediata; la intervención docente consiste en mostrar

una manera de proceder y justificar lo que va haciendo, lo que desemboca en la aparición de los pasos del método. Luego se resuelven algunos otros problemas que no ofrecen mayores dificultades a fin de realizar la esquematización de las respectivas soluciones, lo que conduce a la formulación de dicho método. Una vez hecha la institucionalización del mismo, se plantea un problema para el que se requiere utilizarlo, es decir que la tarea es "resolver siguiendo los pasos del método". A esto sigue el planteo de más problemas en los que el uso del método necesita ir acompañado de cierto razonamiento, de esta manera se van introduciendo dificultades provenientes de la aplicación de cada uno de los pasos. A diferencia de los primeros problemas, en los cuales no hay mucho por decidir –en la construcción de la paralela sólo hay un punto al cual puede referirse el problema-, en los problemas que se dan en una etapa posterior se hace necesario tomar decisiones en cada uno de los pasos –en los problemas de triángulos hay tres puntos que pueden ser candidatos al aplicar el primer paso del Método de los Dos Lugares- y la intervención docente apunta a ayudar a resolver esas dificultades; en este sentido es que las tareas de gestión se incrementan. Este proceso conduce a otra esquematización más compleja del método, o a una reformulación del método que incluye decisiones. La intención de la enseñanza es hacer una nueva institucionalización, que se traduce en una descripción más detallada del método, en la cual se incorpora la toma de decisiones. Llevar a cabo esta segunda institucionalización depende de varios factores -grupo de alumnos, tiempo destinado para trabajar la temática, etc.-, por lo cual aunque deseable a veces no es concretable.

El proceso que acabamos de describir puede representarse mediante el siguiente esquema



Por otra parte, **el análisis del tipo y número de indicaciones docentes** -ver poligonales del proceso y tablas de episodios-, ya sea al comenzar la instrucción como en la etapa en que los alumnos disponen del método, también nos **brinda algunas características de la actuación**.

Inicialmente las indicaciones docentes son muchas y responden a las distintas fases del proceso de resolución. En la segunda etapa de la enseñanza el número de indicaciones es mucho menor, y prácticamente se concentran en la elaboración del plan.

Si examinamos el tipo de indicaciones por fase también encontramos diferencias en ambas etapas de enseñanza.

Las indicaciones iniciales para la comprensión hacen alusión a los conceptos implicados y además apuntan a la adquisición de ciertas destrezas –tales como usar notación adecuada, dibujar la situación descripta en el enunciado, separar lo dado y lo buscado-.

Además, atendiendo a la elaboración del plan, el docente lleva a hacer la figura de análisis, luego de lo cual las indicaciones se dirigen a concebir ciertas nociones como lugares geométricos, a establecer criterios de construcción, a hacer las reformulaciones que llevan a descubrir los pasos del método, y otras veces se corresponden con tareas de gestión asociadas, que inducen a evaluar la información que se dispone y la pertinencia del plan o de las exploraciones que se hacen a fin de configurar un plan.

Así también, las sugerencias para la ejecución, tienen el propósito de llevar a cabo los pasos del método y ciertas tareas de gestión, que permiten hacer el recorrido por el espacio de problemas.

En esta primera etapa, las indicaciones que conforman la fase de visión retrospectiva, llevan a comprobar el resultado, a validar soluciones que no responden al método, a evaluar cómo se transforma una construcción elemental –por ejemplo el trazado de la perpendicular se reduce a la construcción de la mediatriz de un segmento-, así también el relato de la solución del problema se institucionaliza como modelo para imitar a la vez que se aprovecha para evidenciar los pasos del método y para resaltar ciertos hechos o conceptos que serán útiles para el trabajo posterior.

Ubicados ya en una segunda etapa de la enseñanza, las indicaciones para la comprensión casi desaparecen, no obstante en algunos casos se observa alguna sugerencia referida a los conceptos implicados, o que lleva a establecer lo dado y lo buscado, o a evaluar la suficiencia de datos.

La fase de elaboración se mantiene con un buen número de indicaciones, que en general son de naturaleza heurística. Se continúa fomentando el uso de la figura de análisis, y se hacen sugerencias que están asociadas a los diferentes pasos del método, además se da lugar a una instancia de decisión, en la que se delega en los alumnos la responsabilidad de la elección del punto al cual referir el problema.

En la ejecución las orientaciones se reducen a hacer la síntesis, aunque a veces se da alguna sugerencia relativa al conocimiento de ciertas reglas de trabajo en el dominio –tal como la naturaleza genérica de la figura de análisis o el establecimiento de los segmentos que serán considerados como datos-. Esta fase en general se compone de pocas indicaciones, no obstante en el último problema se incorporan algunas para la gestión, debido a que se hace necesaria la construcción de una figura auxiliar, lo cual ha llevado al docente a hacer sugerencias tendientes a interpretar y transportar información a fin de guiar el tránsito por el espacio de problemas.

En esta etapa, las orientaciones correspondientes a la fase de visión retrospectiva, se centran en la institucionalización del nuevo método y en alguna ocasión llevan a analizar la unicidad y existencia del resultado.

CAPÍTULO 5

MODELO DE ENSEÑANZA

Este capítulo atiende al componente de enseñanza del modelo teórico local, al cual nos referiremos como "modelo de enseñanza", lejos de pretender atribuir a esta expresión el sentido de "enseñanza modelo" sino queriendo con ello dar cuenta de la enseñanza que efectivamente se ha impartido.

Inicialmente haremos algunas consideraciones referentes a los contenidos susceptibles de incorporar en la enseñanza de resolución de problemas y a la metodología a implementar, para luego hacer una somera descripción de la instrucción que se ha dado a la docente de media y de la modalidad de trabajo utilizada.

5.1. SOBRE LA ENSEÑANZA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Los cursos de resolución de problemas en general tienen como objetivo mejorar la capacidad de los alumnos para resolver problemas. Algunos de ellos se reducen a resolver listas inmensas de problemas adecuadamente elegidos, otorgando a la práctica un papel fundamental; otros en cambio introducen el tratamiento de determinadas heurísticas, para lo cual se eligen las colecciones de problemas de modo de poder utilizarlas para presentar explícitamente las herramientas heurísticas o métodos que se ha proyectado enseñar.

Cuando se piensa en un curso de resolución de problemas, centrado en el estudio de heurísticas, que está dirigido a profesores de matemática, deben considerarse dos cuestiones, una es el conocimiento que suelen tener de este tema, y la segunda tiene que ver con el uso que se espera hagan de lo que se les va a enseñar. Esto se traduce en una pregunta ¿qué necesita saber un profesor acerca de heurística?.

Una forma de abordar este asunto es considerar por un lado a los docentes como resolutores y por otro, como los que van a enseñar resolución de problemas en el ámbito escolar. Por lo cual la instrucción podría apuntar tanto a que adquieran cierta pericia en resolución de problema como a que dispongan de elementos teóricos para interpretar las

conductas de sus alumnos al resolver problemas y a su vez integrarlos a la planificación de la tarea docente.

Kilpatrick (1985) señala algunos puntos que todo profesor debiera saber, destaca que principalmente necesita comprender que la resolución de problemas es muy compleja, que las dificultades de los estudiantes no pueden simplificarse a una falta de comprensión del lenguaje en que se expresa el enunciado, ya que la competencia en resolución de problemas de un cierto dominio implica un conocimiento organizado del dominio, técnicas para representar y transformar el problema, y un mecanismo para monitorear y guiar el proceso de resolución. Además indica que se requiere bastante tiempo para hacer progresos en la actividad de resolución de problemas, lo cual queda en evidencia en distintas investigaciones, en las que los estudiantes usan determinados procedimientos heurísticos pero sólo luego de haber sido explicitados, ilustrados y practicados. Un docente tambíen necesita saber que hay varias clases de problemas y que los problemas se usan con distintos fines en la instrucción. Otro aspecto importante a considerar es el aprendizaje activo. Polya (1962) establece como primer principio de enseñanza "dejar a los estudiantes descubrir por si mismos tanto como sea posible" (vol 2 pág 104), su óptica es que se debe dar a los estudiantes la responsabilidad de sus propios aprendizajes, las ideas deberían nacer en la mente de éstos y la misión del docente es hacerlas emerger. Hay muchas formas de involucrar al estudiante en resolución de problemas, entre ellas hacerle formular y resolver sus propios problemas, o rescribir el enunciado de los problemas[1].

Las intenciones que puede tener la instrucción en resolución de problemas pueden ser muy variadas. Lester (1985) hace una clasificación de las investigaciones en enseñanza de resolución de problemas, la cual pone en evidencia la intención de la instrucción en cada caso. Establece cuatro categorías: 1) enseñanza para el desarrollo de estrategias de pensamiento – creatividad, originalidad-, 2) instrucción en habilidades específicas, las que hemos llamado destrezas –hacer una tabla, organizar datos, plantear

[1] El formato del enunciado puede afectar la dificultad del problema, la inclusión de un diagrama, o de datos superfluos, o la ubicación de la pregunta, son variables a tener en cuenta; por eso algunos investigadores, bajo la hipótesis de que si ciertos cambios en el formato reducen las dificultades del problema entonces vale la pena enseñar a los estudiantes a hacer esos cambios, trataron con sus alumnos actividades que requerían agregar un diagrama, sacar información irrelevante, o reordenar información, y lograron mejorar las habilidades de resolución del tipo de problemas trabajados.

una ecuación-, 3) instrucción en el uso de heurísticas específicas –buscar un modelo, trabajar hacia atrás-, y 4) instrucción en el uso de heurísticas generales –análisis de medios y fin, hacer planes-. Afirma que es esencial resolver una amplia variedad de problemas y dedicar bastante tiempo a esto, y señala que una buena enseñanza en resolución de problemas requeriría la instrucción tanto de heurísticas específicas como de generales y un adiestramiento para el desarrollo de habilidades específicas, o sea que debería conjugar los aspectos que caracterizan las categorías anteriores, pero además destaca que no debe dejar de atender el aspecto metacognitivo.

Asimismo, este autor comenta las causas de algunas dificultades que tienen los resolutores principiantes y organiza esta discusión alrededor de las fases de Polya. Una de ellas es el poco tiempo que dedican a hacer una representación significativa del problema y a ordenar los recursos que tienen a su disposición. A diferencia de un experto, quien se toma el tiempo para hacerse una idea cabal del problema y ordenar los conocimientos que puede traer a la solución, un resolutor principiante actúa por impulso y decide la acción a realizar atendiendo a rasgos superficiales del enunciado -se basa en información sintáctica o en detalles de contexto-. A menudo podemos ver esto en la actuación de los alumnos, pareciera ser que el objetivo que tienen es hacer algo, ven al problema como una tarea escolar más que como un desafío intelectual y dan la respuesta para finalizar de una buena vez la tarea.

Así también otros obstáculos suelen aparecer al elaborar e implementar planes, provienen de dificultades para darse cuenta bajo qué condiciones puede utilizarse una cierta heurística y para seleccionar la apropiada entre un conjunto de heurísticas.

Estas fuentes de explicación de las dificultades de los resolutores nos sugieren un ingrediente para incorporar en un curso de resolución de problemas destinado a profesores, pues ellos tendrán que orientar a sus alumnos para que superen estas dificultades. Las implicaciones para la enseñanza son claras, es necesario propiciar el espacio para reflexionar sobre el enunciado y así transformar los términos de la relación del alumno con el problema, así también ayudar al alumno a darse cuenta cuando una heurística puede ser útil, a seleccionar una apropiada y a utilizarla correctamente. Además, si convenimos en que el fin de la resolución de un problema no es obtener el resultado sino aumentar los conocimientos en matemática, entonces no es suficiente con que el alumno adquiera el hábito de chequear el resultado o la solución, sino que debería

asimilar la idea de que la fase de visión retrospectiva –que incluye verificar el resultado, comprobar el razonamiento, buscar otras derivaciones, utilizar el método o el resultado en otros problemas, buscar otras formas de solucionar el problema- es una parte importante del proceso de resolución, ya que permite lograr una plena comprensión de la solución, conectándola con los conocimientos anteriores y posibilitando su transferencia a nuevas situaciones. Las actividades incluidas en esta fase así como también la metodología utilizada por el docente durante el desarrollo de la clase, llevan a hacer frente a la dificultad de tener que incorporar en la instrucción de resolución de problemas, algo que se configura por el conjunto de prácticas escolares, como son las creencias de los alumnos sobre la naturaleza de las matemáticas y en particular sobre la tarea de resolver problemas de matemática en la escuela.

Podemos acordar que hay ciertos principios generales, propios del aprendizaje de la matemática basado en la resolución de problemas, pero hay escasa información acerca de la manera de implementarlos. Sin ánimo de hacer una comparación metodológica entre diferentes cursos de resolución de problemas, comentaremos algunas enfoques sólo para ilustrar la forma en que se puede organizar la enseñanza y la naturaleza de las actividades que pueden conformarlos.

Schoenfeld (1983) brinda algunas sugerencias para la enseñanza de resolución de problemas matemáticos, e introduce la discusión con estas palabras "No existe una única manera "correcta" de enseñar a resolver problemas, y sería presunción de mi parte recomendar una; existen tantas maneras de enseñar eficazmente a pensar matemáticamente como existen profesores de talento. Además, los métodos empleados en clase son una cuestión de estilo personal, lo que "funciona" con un profesor puede que con otro tenga que modificarse para que éste pueda usarlo cómodamente, si es que consigue beneficiarse de ello en algún sentido. Hago estas sugerencias, por tanto, teniendo esto en cuenta, y por eso están escritas de manera informal y en primera persona. Las ideas que presento han funcionado bien en mi clase. Por favor sírvanse considerarlas como lo harían con las de un colega mío. Estúdienlas, prueben las que les parecen apropiadas a su clase y adáptenlas para que se sientan cómodos utilizándolas". Entre otras cosas, atribuye al profesor la tarea de explicitar los procesos de pensamiento

que llevan al resultado, e indica tres maneras distintas de hacerlo. Una de ellas es recorriendo el proceso paso a paso, es decir el profesor no se limita a mostrar la solución sino que expone los pasos que ha dado al pensarla, y en este sentido muestra de dónde provienen las ideas, destaca heurísticas, etc. Pero si resolver un problema es una experiencia personal, entonces el alumno necesita verse involucrado, lo cual conduce a Schoenfeld a considerar una segunda manera de actuar, que consiste en resolver el problema con el alumno, utilizando sus ideas. La intención es que la clase en conjunto solucione el problema, con el profesor como moderador, el docente no da la solución sino que se embarca en la resolución a partir de las ideas de los alumnos y los ayuda a utilizarlas lo mejor posible. La tercer manera que propone es resolver problemas sin preparación previa, por tanto los alumnos son los que plantean el problema y el docente lo resuelve utilizando estrategias que no han sido preparadas.

Polya (1962, pág. 210-211) esboza la metodología implementada en un seminario para profesores impartido por él. En su papel de instructor, presenta problemas previamente elegidos que implican alguno de los métodos generales de resolución de problemas, actuando como modelo de comportamiento y llevando a descubrir y formular el método. A fin de aplicar, clarificar e incluso ampliar el dominio del método, se plantean otros problemas como tarea. El instructor examina estas tareas, eligiendo -ya sea por corresponder a una solución original o a una particularmente errónea- la que va a ser presentada por su autor al resto de la clase. En este sentido sus acciones se dirigen a resaltar los puntos que se propone enseñar y a encauzar la discusión grupal. En una etapa en que los participantes están familiarizado con la dinámica de trabajo, uno de ellos toma el rol del instructor. Otra faceta del seminario es el trabajo en pequeños grupos, lo cual se hace del siguiente modo: al comenzar una sesión, se da a cada participante un problema para resolver individualmente durante la misma, pudiendo hacer consultas al instructor. Entre dicha sesión y la siguiente, cada participante chequea la solución, la completa o simplifica en lo posible, busca nuevos enfoques y planifica una forma de presentar el problema y la solución a la clase, teniendo para ello la oportunidad de consultar con el instructor. En la siguiente sesión se forman pequeños grupos, un participante de cada grupo presenta su problema a los demás y toma el rol de profesor -cuestionando puntos de vista, dando orientaciones hacia la solución, etc-. Al llegar al resultado, el grupo evalúa la actuación del supuesto

profesor; posteriormente otro miembro toma su lugar y se repite el procedimiento hasta culminar con la lista de integrantes. Una vez hecho esto se forman nuevos grupos y se procede de manera análoga, o sea que los participantes tienen la posibilidad de hacer varias presentaciones de su problema. Por último se tratan con el total de la clase algunas presentaciones o problemas interesantes que hayan surgido.

Las metodologías descriptas se corresponden con alguna de las cinco categorías identificadas en Kilpatrick (1985) referentes a los modos de enseñar a resolver problemas, e incluso puede encontrarse más de una en las diferentes instancias de la instrucción. La que propone Schoenfeld, que adjudica al profesor la función de actuar como modelo de resolutor de tres maneras distintas, se corresponde con la categoría denominada "imitación", que se caracteriza por mostrar al alumno un proceso de resolución derivado de la conducta competente y se lo orienta a analizarlo y compararlo con sus propias conductas. Una buena parte del seminario implementado por Polya puede inscribirse en la categoría de "cooperación", en la cual los alumnos ya no sólo se limitan a observar y analizar conductas competentes para su imitación, sino que tienen que observar y analizar las conductas de sus pares para cooperar con ellos -en el caso de este seminario, la discusión en grupos no apunta solamente al desarrollo de ciertas habilidades en resolución de problemas sino que permite a los participantes entrenarse en enseñar a resolver problemas. Las categorías restantes de la clasificación de Kilpatrick son "ósmosis", "memorización" y "reflexión". En la primera se organiza la enseñanza sobre la base de una colección de problemas que implican las heurísticas que se quiere enseñar, se resuelven muchos problemas que llevan a un uso implícito de heurísticas. La segunda está en la línea de las teorías de aprendizaje basadas en la jerarquías de aprendizaje y el análisis de tareas, donde la solución se disgrega en procedimientos que se enseñan uno a uno, y se hace una enseñanza explícita de las heurísticas. De este estilo es el estudio descripto en Schoenfeld (1979) en el que se enseñan cinco heurísticos, cuya metodología consistía en intentar resolver el problema, para luego leer y escuchar un proceso de resolución que ilustra el uso de una determinada heurística que es apropiada para el problema, o sea que se sugiere la solución a través de materiales escritos y grabados, explicitando las heurísticas al principio de la enseñanza y toda vez que eran aplicadas. La última categoría otorga a la reflexión del propio proceso de resolución un lugar privilegiado en la enseñanza,

Schoenfeld la introduce en la instrucción ya sea mediante el análisis de lecturas o proyecciones de videos, mediante la inclusión de preguntas generales de gestión al trabajar en pequeños grupos, ejerciendo de gestor en la discusión de problemas con la totalidad de la clase -coordinando las ideas de los estudiantes, siguiéndolas y objetándolas- o actuando como modelo de reflexión de sus propios procesos cognitivos ya sea al resolver problemas previamente planificados como problemas nuevos para él mostrando qué ideas pueden ser útiles, cómo evaluar algunos enfoques, qué lo lleva a cambiar de enfoque, etc.

Si nos situamos en el ámbito escolar, tenemos que considerar a la enseñanza de resolución de problemas desde otra perspectiva. Schroeder-Lester (1989) llaman enseñanza de la matemática vía resolución de problemas a un enfoque del aprendizaje de la matemática. La idea central es que el problema se usa como medio para aprender algún contenido; la enseñanza de un cierto tópico comienza con un problema que envuelve aspectos del mismo y como respuesta razonable al problema se van desarrollando las técnicas matemáticas. O sea que se enfoca el estudio de una noción matemática especifica a través de la discusión de problemas particulares. Sugieren que este enfoque podría usarse para el estudio de los contenidos escolares, por medio de la selección de problemas apropiados, ya que a través de la discusión de tales problemas los estudiantes tienen la oportunidad de desarrollar el contenido matemático necesario para resolverlos. Desde esta óptica podemos considerar que los problemas son los que proporcionan el campo semántico, a partir del cual el que aprende puede dotar de sentido al contenido matemático. Sin embargo, en la práctica escolar los problemas pueden tener diferentes roles[2], a veces pueden ser el medio para aprender el contenido, pero otras veces se les asigna una función evaluativa, o pueden utilizarse para la aplicación de conocimientos previamente adquiridos, para motivar el aprendizaje, para reforzar o para resignificar conceptos.

[2] Chartnay (1994) abre la discusión respecto a la utilización de problemas en las clases de matemática, identificando tres modelos de enseñanza –normativo, incitativo y aproximativo-, caracterizados por las relaciones existentes en la tríada profesor-alumno-saber, los cuales adjudican un rol específico al problema –como criterio de aprendizaje, como móvil del aprendizaje y como recurso de aprendizaje, considerando en este último caso, a la resolución de problema como fuente, lugar y criterio de elaboración del saber-.

En el sistema escolar argentino, según se desprende de las actuales orientaciones ministeriales para los programas de los primeros cursos de escuela media, el cometido de la enseñanza y aprendizaje de la matemática es que los alumnos se apropien de sus formas de razonamiento y comunicación, encontrando el sentido de las mismas al describir y explicar aspectos del mundo que los rodea, de ahí que se considera al problema como la herramienta epistemológica y didáctica apropiada para ello. Se recomienda el tratamiento de distintos tipos de problemas, para permitir la construcción de conceptos y procedimientos, la reconstrucción de conocimientos en diferentes contextos -que provee nuevos usos y alcances de los mismos-, la adquisición de competencias metodológicas, y el control del aprendizaje de los alumnos – o evaluación del estado de sus conocimientos -.

En este sentido, la resolución de problemas tiene por objetivo la adquisición de conceptos, el aprendizaje de procedimientos, y la formación de actitudes. Esto implica un cambio radical en el uso del problema en la enseñanza con respecto al que se le ha dado tradicionalmente, ya no es situar el problema sólo al fin de la enseñanza, como práctica o aplicación de conocimientos ya adquiridos, ni como motivador de los aprendizajes, con la sola intención de captar el gusto o la curiosidad del alumno; es considerar la resolución de problemas como la forma privilegiada para la construcción de los conocimientos, y por tanto, ubicada en el proceso de enseñanza-aprendizaje como objetivo, contenido de estudio y recurso didáctico. Esto lleva a un tratamiento de los problemas por sí mismos como actividad matemática creativa, lo que se traduce, entre otras cosas, en la necesidad de una instrucción explícita en métodos generales de resolución de problemas o en diferentes tipos de heurísticas.

Si tenemos en cuenta que los propios problemas contienen implícitamente heurísticas -en la medida en que la solución standard obliga en cierta forma a usarlas- y que las intenciones curriculares apuntan al uso de las mismas por parte de los alumnos, entonces va a ser preciso instruirlos en ello – ya que no puede pretenderse que las incorporen en su comportamiento al resolver problemas sin instrucción alguna-, y en consecuencia resulta necesario, en la formación de profesores, poner en evidencia la existencia de las heurísticas implícitas y enseñar a aprovechar tal potencial heurístico.

Las consideraciones anteriores, ya sea las que atienden a ciertos aspectos de los cursos de resolución de problemas como las que se refieren a la resolución de problemas en la enseñanza escolar, tiene un carácter muy general, y debido a ello pueden ser el terreno preliminar sobre el cual planificar la instrucción. Muchas de ellas han estado presentes al diseñar el modelo de enseñanza que compone nuestro modelo teórico local. Sin embargo, los pilares fundamentales sobre los que se ha apoyado la enseñanza, se han construido a partir del análisis teórico que hemos hecho de los problemas de regla y compás, y de la identificación de algunos elementos involucrados en la conducta competente al resolver estos problemas. Es decir, nuestro modelo de enseñanza se ha basado en los elementos de un modelo inicial de competencia -que se deriva del estudio teórico de los problemas y de algunos elementos teóricos provenientes del mundo de la pura resolución de problemas-, y esto se debe a que la planificación de la instrucción y su puesta en marcha, ha tenido lugar antes de elaborar la versión del modelo de competencia que resulta de tener en cuenta los datos experimentales provenientes de la actuación del experto.

En los siguientes apartados comentaremos una secuencia didáctica, diseñada con intención de integrar el contenido matemático escolar y los procesos de pensamiento propios de la actividad de resolución de problemas, la cual posteriormente formó parte de la enseñanza impartida a la docente de escuela media, y además describiremos las etapas seguidas al implementar dicha enseñanza.

5.2. LA SECUENCIA DIDÁCTICA

Al planificar la enseñanza a impartir a la docente de media, hubo que hacer frente a la primera dificultad: los problemas de regla y compás son un contenido curricular que en los textos argentinos –textos destinados a alumnos de 13 a 14 años- se los ha limitado a la categoría de problemas de aplicación, lo cual en gran parte se debe a la secuencia habitual de presentación de los contenidos geométricos.

Asimismo, algunas observaciones de clases correspondientes a trabajos exploratorios que hicimos en una etapa incipiente de esta investigación, mostraron lo que naturalmente cabe esperar, y es que los docentes siguen el orden de contenidos

acorde a los textos, dedicando un tiempo muy reducido al trabajo con las construcciones de regla y compás y acotándolo a un tratamiento algorítmico de las mismas.

Por tanto, al diseñar la instrucción fue necesario atender a estas dificultades. Una instrucción centrada en el potencial heurístico de dichos problemas y en algunos elementos de competencia de resolución de problemas hubiese puesto a la docente en la responsabilidad de compatibilizar todos estos nuevos conocimientos –correspondientes a una temática ajena a su formación- con los contenidos previstos en el currículum escolar, con el agravante de que el orden habitual de contenidos lleva a minimizar el tratamiento de nuestros problemas.

En la enseñanza de resolución de problemas, vista desde el mundo de la "pura resolución de problemas", los contenidos matemáticos brindan el campo para hacerse con modos y medios de resolución, y el objetivo es transmitir el espíritu propio de la actividad de resolución de problemas. En la escuela media, los problemas giran en torno a los conceptos, y son los problemas los que proporcionan el campo semántico que da sentido a los conceptos. Por ende, la enseñanza de resolución de problemas en el ámbito escolar debería armonizar dos componentes, por un lado los contenidos específicos de la matemática y por otro, los modos y medios de resolución correspondientes a la heurística.

Ante la falta de una propuesta de enseñanza del tema, acorde al espíritu de la resolución de problemas y adaptada a los objetivos curriculares de la matemática escolar, lo primero que se hizo al planificar la instrucción fue una "secuencia didáctica", que consiste en la organización de los contenidos curriculares, de modo que tengan una coherencia matemática y que posibiliten el uso de los problemas de regla y compás como medio para enseñar ciertas formas de trabajo heurístico.

5.2.1. Sobre los objetivos

La secuencia de contenidos ha sido elaborada para proporcionar al docente un punto de partida al abordar los problemas de regla y compás en la enseñanza escolar. Fue la base sobre la cual la docente confeccionó su propia planificación de clases –cambiando algunos problemas e incorporando otros de modo de constituir una versión adaptada al grupo de alumnos-.

Esta secuencia intenta brindar un enfoque en el que se puedan utilizar los conceptos geométricos y sus propiedades en la resolución de problemas, que posibilite la reformulación de conceptos como lugares geométricos, la utilización de métodos de resolución de problemas de regla y compás en construcciones elementales y en construcciones de triángulos, y la aplicación de otras heurísticas y reglas de trabajo en el dominio.

El propósito de la misma en el plan general de esta investigación es brindar un medio de organización de la enseñanza que ponga en juego los elementos implicados en la resolución de esta clase de problemas, sobre los cuales se va a examinar la actuación docente.

5.2.2. Sobre el diseño

La secuencia sigue un estilo de presentación abierto, en el que se propone un orden para tratar los conceptos, propiedades y problemas; se compone de enunciados directos que el docente debe adaptar teniendo en cuenta las intenciones de enseñanza y el grupo de alumnos con los que va a abordar el tema. La misma incluye definiciones, propiedades y problemas, así como también algunos comentarios para llamar la atención del docente en un determinado punto.

La metodología de trabajo implicada está acorde a las orientaciones para abordar los contenidos curriculares de la escuela media en el sistema educativo argentino. Según las mismas, la enseñanza de la geometría ha de hacerse buscando el significado y el sentido de los contenidos geométricos a través de su utilidad para resolver problemas, y el tratamiento intuitivo ha de ser el punto de partida de toda conceptualización geométrica a trabajar; en este nivel el objetivo es ayudar al alumno a evolucionar de un nivel globalizador e intuitivo, en que se ven los objetos como totalidades, a un nivel de análisis de las propiedades de los mismos y de sus relaciones, estimulándolo a rigorizar sus representaciones, su lenguaje, sus inferencias y sus deducciones, sin que esto signifique hacer un tratamiento deductivo formal de la geometría. Asimismo, las recomendaciones ministeriales acentúan que la resolución de problemas tiene que

pensarse como un proceso que debe penetrar todo el diseño curricular y proveer el contexto en el cual los conceptos y actitudes pueden ser aprendidos.

Siguiendo el espíritu de estas apreciaciones, los diferentes conceptos se introducen mediante un problema motivador y la visualización o comprobación de sus propiedades se realiza mediante actividades de plegado de papel.

La estructura global de esta secuencia didáctica es la siguiente: se indica una serie de conocimientos preliminares con los que se aborda la temática, se trabajan las construcciones elementales siguiendo el esquema "presentación de un problema motivador, definición del concepto, reformulación como lugar geométrico a partir de actividades de plegado, y construcción con regla y compás", y se organiza el estudio del triángulo a través de los problemas de regla y compás, para lo cual se incluyen comentarios acordes al nuevo enfoque y se señalan los métodos heurísticos implicados en los problemas.

5.2.3. Sobre el contenido

La secuencia habitual de contenidos comienza con triángulos –elementos, clasificación, propiedad de la suma de ángulos interiores, del ángulo exterior-, luego se introducen las rectas notables -bisectrices, mediatrices, medianas, alturas- y por tanto se presentan algunos algoritmos de construcciones elementales. A continuación se enuncian los criterios de congruencia y se plantean algunos problemas en los que se utiliza este contenido. He aquí donde se abordan algunas construcciones de triángulos, caracterizados por ternas compuestas por lados y ángulos, que en la práctica se reduce al empleo de procedimientos algorítmicos que requieren el uso de los instrumentos de geometría.

Las nociones de circunferencia y lugar geométrico se incluyen en los últimos capítulos de los textos, donde se justifican las construcciones de la mediatriz y de la bisectriz mediante los criterios de congruencia de triángulos, pero en general el tratamiento de este tema pasa a un segundo plano en el ámbito escolar.

El análisis de textos da muestra del papel secundario que se asigna a las construcciones de regla y compás en la geometría escolar. Por tanto, hemos tenido que

reestructurar los contenidos geométricos del primer curso de escuela media (alumnos de 13 y 14 años) a fin de aprovechar el potencial heurístico de estos problemas, para lo cual nos hemos basado en el estudio teórico presentado en el capítulo 2.

La nueva secuencia se inicia con algunos conocimientos preliminares para empezar a trabajar, tales como ciertas reglas de trabajo en el dominio y las nociones de rectas paralelas y secantes -tomando a las perpendiculares como un caso particular- y se incluye una actividad de plegado que apunta a la familiarización con tareas de este tipo.

La secuencia continúa con la idea de lugar geométrico, para luego centrarse en cada uno de los lugares construibles con regla y compás –se obvia el tratamiento del arco capaz, por tener una complejidad mayor-, que serán la base para trabajar las construcciones de triángulos. Luego se hace referencia a las operaciones básicas y se aborda el estudio del triángulo, para lo cual se listan los items a tratar y se incluyen construcciones de esta figura dadas distintas ternas de datos, compuestas por lados y ángulos, lo cual conlleva a la aplicación de los métodos heurísticos.

El análisis de los resultados provenientes de estas ternas de datos, lleva a inferir los criterios de congruencia de triángulos, sobre los cuales se apoyará el estudio de otras figuras previstas para un curso posterior –tales como los cuadriláteros-.

Por último se tratan otras construcciones de triángulos caracterizados por ternas que además de lados y ángulos, implican alturas, medianas, etc., lo cual permite el uso de los distintos métodos de resolución.

5.2.4. Descripción de la Secuencia Didáctica

A continuación detallaremos los contenidos que conforman esta secuencia didáctica, y en el Anexo III presentaremos la adaptación que hace la docente de la misma.

CONOCIMIENTOS PRELIMINARES

- **Conocimiento de reglas del dominio**:

  - Regla y compás: la regla se considera no graduada y se la utiliza para trazar rectas y segmentos, el compás se usa para trazar circunferencias

- Criterio para construir rectas: dos puntos determinan una recta

- Criterio para construir circunferencias: una circunferencia queda determinada por el centro y el radio

- Posiciones relativas de rectas:

rectas → - secantes
→ - perpendiculares (caso particular)
→ - paralelas

Definiciones: *Dos rectas que tienen un punto en común se llaman secantes y paralelas en otro caso.*

Dos rectas que forman dos ángulos adyacentes congruentes se llaman perpendiculares.

- **Actividad**: Trazar mediante plegado la perpendicular a una recta (dada una recta y un punto, doblar el papel por el punto de modo que la recta coincida con si misma)

CIRCUNFERENCIA

- **Problema motivador**: a elección del docente; por ejemplo puede ser el siguiente problema, para cuya resolución se aplica la idea de circunferencia y de puntos interiores a la misma

Un detective está situado en A con un radiotransmisor que alcanza 4km, tiene que dar un mensaje a su compañero que circula en un coche por la ruta ¿desde qué tramos de la ruta lo podrá oír?.

A

- **Definición**: La circunferencia está formada por los puntos del plano que se encuentran a una distancia dada de un punto fijo. Diremos que *la $C_{o,R}$ es el conjunto de puntos del plano cuya distancia al punto o es igual a R.*

Nota: la circunferencia es un lugar geométrico particular y puede utilizarse para introducir esta noción, aunque la idea de lugar geométrico va más allá de las particularidades de este caso.

IDEA DE LUGAR GEOMÉTRICO

- **Problema**: En papel cuadriculado situar un punto A en un vértice de un cuadradito, ubicar puntos donde el recorrido más corto desde A sean 3 cuadras - el lado de cada cuadradito equivale a 1 cuadra-

- **Definición**: *El conjunto de todos los puntos que cumplen una determinada propiedad recibe el nombre de lugar geométrico.*

De aquí que:

i) todo punto que pertenece a un lugar geométrico cumple una cierta propiedad

ii) Todo punto que cumple dicha propiedad pertenece al lugar geométrico

MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

- **Problema motivador**: a elección del docente. Ejemplo:

Juan y José decidieron reunirse para festejar el día del amigo y puesto que ninguno quería caminar más que el otro, acordaron encontrarse en un bar a la misma distancia de cada una de sus casas. Este es el plano de los bares que están en el barrio de estos dos amigos (en papel cuadriculado se muestran la ubicación de sus casas y de los distintos bares). ¿Cuales son los lugares posibles para dicho encuentro?. Ubica en el plano otros puntos que se encuentren a la misma distancia de ambas casas.

- **Plegado**: En papel de calcar hacer un segmento $\overline{ab}$ y doblar de modo que coincidan a y b. ¿Qué determina el doblez?.

Nota: concepto de mediatriz y la correspondiente notación.

- **Definición**: *La mediatriz es la recta perpendicular a un segmento por su punto medio*

- **Reconceptualización como lugar geométrico**:

A) Se toma un punto p de la mediatriz, y se une dicho punto con los extremos a y b del segmento. Utilizar el doblez del papel de calcar para comprobar que los segmentos $\overline{pa}$ y $\overline{pb}$ se superponen -se establece la congruencia mediante la superposición-, luego p equidista de a y de b.

Idem para diferentes puntos de la mediatriz. Se conjetura la propiedad

* Propiedad: *"Los puntos de la mediatriz de un segmento equidistan de los extremos del mismo"*

B) Para trabajar la recíproca: utilizar el compás para hallar un punto q que equidiste de a y b (q es la intersección de dos arcos de circunferencias del mismo radio y con centro a y b respectivamente). Doblar el papel hasta hacer coincidir a y b; comprobar que q pertenece al doblez –mediatriz-.

Idem con otros puntos.

* Propiedad: *"Los puntos que equidistan de los extremos de un segmento pertenecen a la mediatriz"*

De A) y B): **La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento.**

- **Construcción con regla y compás**

Construir con regla y compás la mediatriz de un segmento **(construcción elemental)**

- Corolario: construcción del punto medio de un segmento

PERPENDICULAR A UNA RECTA

- **Construcción con regla y compás**

Construir con regla y compás la recta perpendicular a R por un punto **(construcción elemental)**:

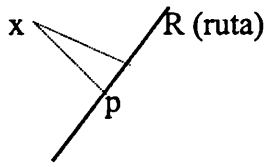
A) por un punto p perteneciente a R – aplicación de la mediatriz: luego de determinar un segmento $\overline{ab}$ el problema se convierte en hallar su mediatriz o en encontrar un punto x para determinar la recta $\overleftrightarrow{px}$ -

B) por un punto exterior q -aplicación de la mediatriz: luego de determinar un segmento $\overline{ab}$ el problema se convierte en hallar su mediatriz o en encontrar un punto x para determinar la recta $\overleftrightarrow{qx}$ -

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

- **Problema motivador**: a elección del docente. Por ejemplo:

César se encuentra a algunos metros de la ruta, en el lugar marcado con x. ¿Cuál es el camino más corto desde x hasta la ruta?



- **Definición**: *Dados un punto x y una recta R, llamamos distancia del punto a la recta, al segmento de perpendicular entre el punto y la recta.*

- **Construcción con regla y compás**

Construir con regla y compás la distancia de un punto a una recta (basada en la mediatriz)

PARALELA A UNA RECTA

- **Problema motivador**: a elección del docente. Por ejemplo:

En el siguiente plano se ubican las tiendas de la ciudad que están cercanas a la calle principal -en papel cuadriculado se muestran la ubicación de la calle principal y de las tiendas de alrededor-. ¿Cuales son las tiendas cuyo recorrido más corto a dicha calle sean 3 cuadras?. Ubica en el plano otros puntos que se encuentren a esa distancia de la calle principal.

Nota: es una ciudad cuadriculada y cada calle tiene 100m de largo.

- **Reconceptualización como lugar geométrico**:

Se puede observar que

* propiedad: *Los puntos que están a una distancia dada de una recta pertenecen a una paralela a la misma.*

Puede comprobarse también, usando papel cuadriculado que

* propiedad: *Los puntos que están en una paralela a una recta están a una misma distancia de la recta.*

La paralela a una recta R es el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de la recta

- Construcción con regla y compás

Construir con regla y compás la paralela a R que pasa por p **(construcción elemental)**:

Dos formas: A) encontrar un punto que esté a la misma distancia de la recta que el punto dado -hallar la distancia de p a la recta y determinar un punto x que se encuentre a esa distancia de la recta-.

B) construir perpendicular de perpendicular

Nota: En ambas formas está implícito el trazado de rectas perpendiculares, por tanto se usa mediatriz. Nos valemos del segundo procedimiento para considerarla construcción elemental.

BISECTRIZ

- Problema motivador: a elección del docente. Por ejemplo:

Ubicar puntos que equidisten de dos rutas provinciales que se cortan.

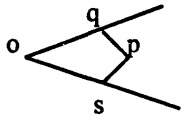
- Plegado: En papel de calcar hacer un ángulo $a\hat{o}b$; doblar de modo que coincidan los lados $\overrightarrow{oa}$ y $\overrightarrow{ob}$. ¿Qué determina el doblez?.

Nota: concepto de bisectriz y la correspondiente notación

- Definición: *La bisectriz es la semirrecta interior al ángulo que lo divide en dos ángulos congruentes*

- Reconceptualización como lugar geométrico:

A) Tomar un punto p de la bisectriz, y usando plegado de papel, hallar la distancia de este punto a cada uno de los lados -trazar mediante plegado la perpendicular a cada uno de los lados por ese punto; o sea doblar el papel por el punto y de modo que coincida un lado con si mismo, idem con el otro lado-, sean pq y ps las respectivas distancias.



Volver a doblar por la bisectriz y comprobar que los segmentos $\overline{pq}$ y $\overline{ps}$ son congruentes.

Idem para diferentes puntos de la bisectriz. Esto sugiere una propiedad general:

* Propiedad: *Todo punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del mismo*

B) Para tratar la recíproca puede simplemente observarse que todo punto que no pertenece a la bisectriz no equidista de los lados ($P \Rightarrow Q$ equivale a $\sim Q \Rightarrow \sim P$) (usando plegado hacer las perpendiculares y ver que los segmentos no se superponen, se superponen las perpendiculares pero el doblez no es la bisectriz). Esto sugiere que:

* Propiedad: *Todos los puntos que equidistan de los lados de un ángulo pertenecen a la bisectriz de dicho ángulo*

Nota: para un tratamiento posterior se podría la recíproca como aplicación para hacer otra construcción de la bisectriz; "buscar un punto t que esté a una distancia d de cada uno de los lados", para ello se trazan las respectivas paralelas al lado $\overrightarrow{oq}$ y al lado $\overrightarrow{os}$ que están a una distancia d determinada. La intersección de dichas rectas es el punto t.

La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus lados.

- Construcción con regla y compás

Construir con regla y compás la bisectriz de un ángulo **(construcción elemental)**:

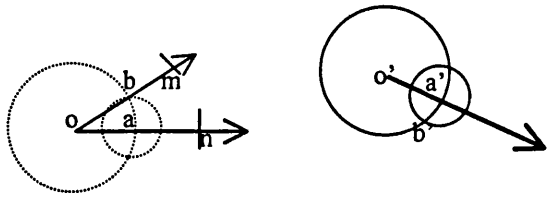
Se utiliza el vértice o para hallar un segmento $\overline{ab}$ apoyado en los lados del ángulo y el problema se convierte en hallar su mediatriz o en encontrar un

punto x para determinar la recta $\overleftrightarrow{ox}$). Verificar mediante plegado que la mediatriz contiene a la bisectriz.

OPERACIONES BÁSICAS

A) Transportar segmentos (en una semirrecta dada)

B) Copiar ángulos (dados una semirrecta y un semiplano, o una semirrecta y un sentido): transportar una circunferencia de la cual el ángulo dado es un ángulo central de la misma y usar la cuerda de ese ángulo para reproducirlo.



Nota: las operaciones básicas pueden tratarse a medida que se necesitan.

TRIÁNGULOS

- Elementos. Clasificación

-Suma de ángulos interiores de un triángulo. Ángulo exterior.

- Rectas notables y puntos notables:

. Problemas motivadores o de aplicación de estos conceptos: a elección del profesor

. Hacer notar que "la mediana es la distancia entre un vértice y el punto medio del lado opuesto" y que "la altura es la distancia entre un vértice y la recta que contiene al lado opuesto"; estas nociones se usarán posteriormente al hallar ciertos lugares geométricos implicados en algunas construcciones.

CRITERIOS DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

- Reglas de trabajo en el dominio:

- Criterio para construir triángulos: un triángulo queda determinado por tres puntos no alineados.

- Establecer a priori los segmentos y/o ángulos que serán considerados como dato

- Necesidad y suficiencia de datos: "para construir un triángulo basta con tener los datos de tres elementos". Análisis de las distintas ternas de datos constituidas por lados y ángulos:

A) *Construir un triángulo dados los tres lados* (Método de los dos lugares)

Analizar los casos en que no hay solución. Desigualdad triangular.

B) *Construir un triángulo dados un lado y dos ángulos:*

- un lado y dos ángulos adyacentes (Método de los dos lugares)
- un lado, un ángulo adyacente y el ángulo opuesto (Método de Figura Semejante o Método de dos lugares en donde uno de ellos es arco capaz) (aplicación de rectas paralelas cortadas por una transversal)

C) *Construir un triángulo dados dos lados y un ángulo*:

- ángulo comprendido (Método de los dos lugares)
- ángulo opuesto al mayor (Método de los dos lugares)
- ángulo opuesto al menor (Método de los dos lugares)

De estas ternas, se eligen aquellas en las que el triángulo es único salvo congruencias. Cualquier otro triángulo que se construya con las ternas de datos elegidas resultará congruente al construido. Cada una de estas ternas garantiza la congruencia entre pares de triángulos, y por esto la llamamos criterio de congruencia de triángulos.

- Enunciado de los cuatro criterios de congruencia de triángulos.
- Construcciones de triángulos rectángulos dados:
  - dos catetos
  - la hipotenusa y un cateto
  - un cateto y un ángulo
  - la hipotenusa y un ángulo
- Enunciado de los criterios de congruencia de triángulos rectángulos.

OTRAS CONSTRUCCIONES: no sólo están implicados lados y ángulos, sino también alturas, medianas, etc.

- Construir un triángulo isósceles dados un lado y la altura.

- Construir un triángulo dados dos lados y la altura respecto a uno de ellos.
- Construir un triángulo dados un lado, la altura y la mediana respecto al mismo.
- Construir un triángulo dados H_A, y los ángulos $\angle b$ y $\angle c$.

5.3. DESCRIPCIÓN DE LA ENSEÑANZA IMPARTIDA A LA DOCENTE

En instalaciones del Centro Regional Universitario Bariloche, de la Universidad Nacional del Comahue, sito en la provincia de Río Negro – Argentina, se realizaron cinco encuentros de trabajo entre la docente y la investigadora. Los mismos se concretaron en un lapso de tres semanas y la duración de cada uno fue de aproximadamente dos horas.

La enseñanza impartida se ha organizado en tres etapas, que se corresponden con cada una de las semanas de trabajo conjunto: la primera abarca los dos primeros encuentros, la segunda abarca los dos siguientes, y la tercera se lleva a cabo en el último encuentro.

La etapa inicial se centra en el uso de los métodos heurísticos. Con ese objetivo, se eligieron problemas en los que el método a enseñar fuera de aplicación inmediata y además se vieran implicados una diversidad de lugares geométricos.

En primer término se presentó el "Método de los Dos Lugares" mediante la construcción de un triángulo dados los tres lados. Para ello, se rescata el procedimiento automático que la docente conoce para responder al problema, y se hace su reinterpretación de acuerdo al método, lo que lleva a formular los pasos del mismo. Una vez explicitados estos pasos, se plantean problemas que requieren el trazado de una bisectriz, o de una paralela, o de una perpendicular, e incluso en uno de ellos se debe recurrir a la construcción de un arco capaz -lugar de los vértices de un ángulo dado que subtiende un segmento dado-. En todos los casos se lleva a resolver el problema a partir de una figura de análisis.

A continuación enunciamos los problemas trabajados:

- Hallar la circunferencia circunscripta a un triángulo dado.

- Dadas dos rectas paralelas y un punto entre ellas, trazar una circunferencia tangente a ambas rectas y que pase por el punto dado.

- Dadas tres rectas que se cortan dos a dos, construir una circunferencia tangente a dos de ellas y con centro en la tercera recta.

- Construir un triángulo dados un lado, la mediana respecto a dicho lado y el ángulo opuesto al mismo.

Con intención de optimizar el tiempo previsto para la instrucción, el arco capaz fue la única construcción elemental tratada en detalle en esta instancia, ya que era nueva para la docente, y se postergó el tratamiento de las demás para la segunda etapa.

El estudio del método se cierra con un espacio de reflexión, en el que se atiende a ciertas variables que afectan la complejidad de los problemas. En este sentido se focaliza el tipo de lugares implicados, observando que a veces son sencillos porque corresponden a circunferencias y rectas de fácil construcción, inclusive en ocasiones uno de los lugares es un dato del problema, pero otras veces uno de los lugares involucrados, a pesar de ser una construcción elemental, merece un tratamiento especial - como es el caso del arco capaz-. También se atiende a la dependencia o independencia de los lugares, observando que hay problemas en los que los dos lugares pueden encontrarse independientemente, en cualquier orden, en cambio en otros problemas se necesita hallar un primer lugar el cual es necesario para encontrar el segundo. En definitiva, el sentido que tiene esta instancia de reflexión docente es detectar algunas implicaciones didácticas que surgen de la aplicación del método y que habrá de considerarse a la hora de diseñar actividades que faciliten el aprendizaje del tema.

El tratamiento de los demás métodos heurísticos se redujo a la presentación de los mismos a través de un problema, donde a partir de la figura de análisis se descubre la figura que va a permitir obtener el resultado. En cada caso se hace la formulación de los pasos del método, lo que fue seguido por la tarea de enunciar ejemplos de aplicación sin llevar a cabo la resolución.

El "Método de la Figura Auxiliar" se presenta mediante la construcción de un triángulo dados dos lados y la altura respecto al lado restante, y el "Método de la Figura

Semejante", mediante la construcción de un triángulo del que se conoce la mediana correspondiente a un lado y los ángulos adyacentes a dicho lado.

De una primera etapa, donde la profesora actúa como resolutor, pasamos a una segunda etapa de la instrucción, en la cual se vale de su experiencia docente y de los elementos heurísticos presentes en los problemas trabajados, para discutir y reflexionar acerca de una propuesta didáctica presentada por la investigadora.

En esta segunda etapa el trabajo se centra en la "secuencia didáctica" comentada en el apartado anterior. Se hizo referencia a los distintos items que la componen y a su rol en la secuencia, y se resolvieron los problemas previstos en la misma.

Concretamente, se fueron interpretando los algoritmos de construcciones elementales y de operaciones básicas de acuerdo a los métodos implicados en ellas, y se discutieron distintas formas de resolver los problemas de la secuencia, analizando la presencia de los métodos a medida que aparecían y explicitando las transformaciones del problema original surgidas por su aplicación.

En algunos problemas se indujo a plantear distintos caminos de solución sin llegar a ejecutarlos, a compararlos examinando ventajas y desventajas, y en otros casos, se llevó a analizar el resultado –ya sea la unicidad o la existencia, lo cual depende de la medida de los datos-. A su vez se previeron algunas dificultades de los alumnos que podrían generarse a raíz de un determinado enfoque.

Se trataron algunas reglas del dominio, tales como el significado de "lo dado", el significado de solucionar el problema, y los criterios de construcción, sobre los cuales se basan las reformulaciones de los problemas. Se presenta la figura de análisis - representación del resultado en la cual se refleja todo aquello que se conoce- como herramienta útil en la resolución de un problema, señalando la irrelevancia de su forma y posición, y se destacan algunas actividades de la secuencia que tienden a la reconceptualización de las figuras geométricas.

La tercera etapa apunta a que la docente delinee su propia estrategia de enseñanza. Para ello, en el último encuentro se presentaron nuevos elementos de la teoría que le permiten indagar el proceso.

En esta instancia se hizo una revisión de la secuencia didáctica, a fin de garantizar la comprensión del enfoque propuesto y de prevenir dificultades en su puesta en aula, lo cual brindó un espacio de análisis global de la secuencia antes de que la docente realice su versión particular. En este sentido surgieron algunas implicaciones derivadas del formato de presentación de los problemas, lo que llevó a adoptar el criterio de incorporar al enunciado el dibujo de los datos para posibilitar la comprobación del resultado de los problemas mediante la superposición de figuras, lo cual es sólo factible si todos los alumnos parten de elementos de igual "medida".

Además, tal como lo anticipamos, se trataron algunos elementos teóricos con el objetivo de llamar la atención del docente en cuestiones que influyen en el proceso de resolución y que debieran ser consideradas en la organización de la enseñanza. En esta dirección, se presentó el modelo multifase de Polya y se explicitaron los objetivos por fase; además se comentaron los trabajos de Schoenfeld, particularmente su esquema de episodios y los componentes del conocimiento y la conducta, explicando a partir de ellos algunas dificultades de los resolutores en ejemplos puntuales.

CAPÍTULO 6
LA ACTUACIÓN DE LA DOCENTE DE ESCUELA MEDIA

En este capítulo se examina cómo aparecen los elementos del modelo de competencia en la actuación de una profesora que ha recibido una cierta instrucción -a la cual hemos hecho referencia anteriormente-, al tratar en el aula algunos contenidos geométricos curriculares, previstos en el sistema escolar argentino para el nivel medio.

6.1. PROPÓSITO Y METODOLOGÍA

Con el propósito de identificar elementos que componen la competencia en la enseñanza de resolución de problemas de regla y compás, vamos a analizar la actuación de una docente de media, a la cual se le ha dado una instrucción en la temática.

Los resultados que se desprenden al explorar la actuación del experto, nos han permitido descubrir ciertos rasgos de competencia al enseñar a resolver nuestra clase de problemas, que incorporaremos a los elementos del modelo de competencia inicial, basado en ciertas competencias de resolución. Por tanto ahora vamos a interpretar la actuación de la docente en función de los elementos identificados. A su vez, estos datos empíricos proporcionarán otros elementos a incorporar al modelo, lo cual llevará a su posterior reformulación.

En este nuevo estudio, se han observado dieciocho clases impartidas por una docente, en un Colegio de Enseñanza Media de la ciudad de San Carlos de Bariloche - provincia de Río Negro, Argentina-. Las clases corresponden a la asignatura "matemáticas" para alumnos del primer curso de escuela media –alumnos de 13 y 14 años-.

La metodología utilizada para la observación y el análisis de clases, es la misma que hemos utilizado para explorar la conducta del experto. La única diferencia estriba

en que para examinar la actuación de esta docente, ahora nos valdremos tanto de los instrumentos de análisis ya descriptos en el capítulo 4, como de los resultados que se desprenden del análisis del estudio exploratorio.

6.2. LA ACTUACIÓN DOCENTE

Inicialmente, haremos una descripción de las actividades y del contenido matemático desarrollados en las clases, como así también haremos referencia a la dinámica observada, atendiendo para ello a la naturaleza de las orientaciones docentes.

Las transcripciones de las clases se recogen en el Anexo IV. En los casos en que se trabajan problemas de regla y compás, hemos procedido a la fragmentación de las mismas a partir de la noción de episodio, ya mencionada anteriormente. No obstante, en la descripción global de la actuación, hemos interpretado las indicaciones que se dan en todos los problemas que conforman la enseñanza.

La unidad de enseñanza que se presenta en el Anexo III, es la versión que realiza la docente de la secuencia didáctica, a la que hemos hecho referencia en el capítulo anterior, adaptada al grupo de alumnos y enriquecida por sus aportes personales.

Los problemas de regla y compás forman parte del conjunto de tareas previstas, por lo cual naturalmente van a aparecer al hacer la descripción global de la actuación, sin embargo en un comienzo nos limitaremos a señalar el momento de su aparición durante la enseñanza y a hacer algún comentario al respecto. Posteriormente presentaremos mediante subapartados –6.2.1 a 6.2.20- el análisis minucioso de las mismas, valiéndonos para ello de los instrumentos comentados en un capítulo anterior.

La **primera clase** comienza con la lectura de los contenidos que se trabajarán en la unidad de enseñanza. Enseguida se aborda un ejercicio de reconocimiento de rectas paralelas y concurrentes –perpendiculares y oblicuas-, introduciendo la simbología correspondiente al presentarlo. Se dejan unos minutos para el trabajo individual y pasa una alumna a resolverlo; la intervención docente se dirige a analizar la posibilidad de

obtener distintas respuestas, a hacer un repaso de las nociones implicadas y a buscar ejemplos de las mismas en el aula.

Luego se lleva a cabo el procedimiento de plegado para trazar la perpendicular a una recta por un punto, para lo cual se enuncia la tarea de la siguiente manera "Dibujá una recta en el papel; ponele nombre; marcá un punto en la recta, ponele nombre. Tratá de encontrar plegando la recta perpendicular a la dada que pase por ese punto. Anotá en tu carpeta como lo hiciste". El enunciado podría haber sido "mediante plegado hallar la perpendicular a una recta por un punto que pertenece a la misma", sin embargo tal como fue propuesto, incluye pautas que pueden ser útiles para la comprensión, guian el camino para establecer lo dado y lo buscado, incluyendo notación adecuada. Además se pide explicitar el procedimiento por escrito, es decir que la respuesta a la tarea implica el plegado más la descripción de este procedimiento. En una fase de revisión la docente lleva a descartar restricciones innecesarias o particularidades –tales como la ubicación del punto en "la mitad" de la recta dibujada, dirección horizontal de la recta dada- y a buscar un procedimiento general, dejando de lado la exigencia de una descripción precisa del procedimiento –una respuesta aceptable fue "plegué de modo que la recta seaperpendicular al doblez"-.

A continuación se aborda un problema relacionado "Describir el procedimiento si el punto es exterior a la recta", el que puede resolverse transfiriendo el procedimiento; las sugerencias para la elaboración del plan van en este sentido –llevan a evaluar la aplicabilidad del procedimiento usado anteriormente-, y las sugerencias en la ejecución llevan a evaluar dificultades al concretar el plan -que surgen de ubicar el punto exterior en un lugar que complejiza la manipulación -.

Las indicaciones siguientes apuntan a la enseñanza, se explicita el objetivo de las actividades anteriores, se hace alusión a lo que se ha enseñado "estuvimos usando el papel de calcar para obtener rectas perpendiculares por un punto que pertenece a la recta dada y por un punto que no pertenece a la recta dada".

En los ultimos minutos se presenta el problema que motiva el trabajo con la circunferencia. Se deja unos minutos para que los alumnos lo resuelvan y se hace la puesta en común. La docente rescata algunos procedimientos que requieren el uso de un hilo de la regla, o del compás, y presenta a la circunferencia como herramienta para la solución, estableciendo a su vez la notación simbólica de ésta.

En la **segunda clase** se retoma este problema. El objetivo del mismo parece ser el uso del concepto de circunferencia como medio de solución y la presentación de la notación correspondiente, apuntando a una primera aproximación a la idea de lugar geométrico y a la conceptualización de la circunferencia como lugar. El trabajo en el problema se compone de una instancia en que los alumnos buscan un procedimiento para resolverlo y lo llevan a cabo, y una instancia de puesta en común. En ella se rescatan los procedimientos empleados para encontrar puntos a una determinada distancia de un cierto punto –medir con la regla, usar hilo o usar compás- y la naturaleza de las indicaciones docentes va en la línea del objetivo mencionado.

Luego se reparten la fotocopia con los siguientes enunciados y se deja 15 minutos para resolverlos.

1) "Donde deberían pararse todos uds para estar a igual distancia de mí? Dibuja mostrando la situación".

2) "Donde deberán colocarse las bolitas de un conjunto para que estén a la misma distancia de un hoyo. Dibuja mostrando la situación".

3) "Traza 5 o 6 circunferencias congruentes que pasen por un punto m cualquiera. Marca sus centros con color. A) ¿Qué observas?. B) ¿Puedes definir un lugar geométrico?".

4) "Ubica el punto A en un vértice de un cuadradito, ubica todos los puntos donde el recorrido más corto desde A sea 3 cuadras. El lado del cuadradito equivale a 1 cuadra".

Se hace la revisión de las respectivas soluciones, en cada caso un alumno lee el problema y explicita la solución.

El 1° y el 2° son de aplicación directa del concepto de circunferencia, el 3° es un problema de aplicación de circunferencia como lugar geométrico y el 4° se dirige a la formación del concepto de lugar geométrico. Al abordar este último problema surgen contradicciones, se genera una relectura y las indicaciones apuntan a evaluar la pertinencia del resultado y a considerar el concepto de cuadrado -se explicitan algunas propiedades y se lo diferencia del rombo- implicado en el problema.

Finalmente se dan los enunciados de cinco problemas que quedan como actividad para la casa.

En la **tercera clase** se abordan dichos problemas:

1) "Don Mateo es jardinero y le gusta hacer canteros de formas variadas. En este caso clavó una estaca en el lugar donde quiere hacer un cantero de petuniasy ha atado un piolín a la estaca con un lazo flojo. Del otro extremo ató un palo. Sosteniendo ese palo en forma vertical de modo que vaya haciendo un surco en el piso, da toda la vuelta alrededor de la estaca. ¿Qué figura ha quedado marcada en la tierra?".

2) "Cada uno de uds debe dibujar una circunferencia congruente con la de sus compañeros. ¿Qué datos necesitan? Dibujen y verifiquen".

3) "Dado este radio ¿cuántas circunferencias no congruentes se pueden dibujar?. Dibuja y explica".

4)"Dado un punto que se tomará como centro o ¿cuántas circunferencias no congruentes se pueden dibujar? Dibuja y explica".

5) "Cecilia y Mariana decidieron reunirse en un bar para preparar un trabajo que les encargó la prof de historia. Como ninguna de las dos quería caminar más que la otra, acordaron encontrarse en un bar ubicado a la misma distancia de cada una de sus casas. Las dos amigas repasaron los bares que hay en el barrio e hicieron el siguiente plano. ¿Cuáles son los bares que están más cerca de la casa de Cecilia?"

Los cuatro primeros problemas involucran la noción de circunferencia; el primero es un problema de aplicación del concepto y los tres siguientes son preguntas que enfocan las condiciones necesarias y suficientes para construir circunferencias congruentes. Se leen y comentan los resultados de dichos problemas y las sugerencias apuntan a concebir la circunferencia como lugar geométrico.

El problema restante es para aplicar el concepto de mediatriz como herramienta para la solución, las orientaciones docentes van en ese sentido y además se institucionaliza la definición de dicho concepto.

Luego se plantea la siguiente tarea "Dibujar en el papel de calcar un segmento ab y determinar plegando su mediatriz", y en la revisión de la solución la docente explicita el procedimiento encontrado por los alumnos "ella dice que plegó el papel de tal forma que los extremos a y b coincidan, de esa forma el doblez determina la mediatriz".

A continuación la docente apunta a la reformulación de la mediatriz como lugar geométrico. Para ello sugiere considerar diferentes puntos en la mediatriz y comprobar que equidistan de los extremos del segmento, generalizando dicha propiedad para todo punto de la misma –concretamente dice " marcar un punto cualquiera en la mediatriz, que lo van a llamar r y van a trazar los segmentos ar y rb, ¿cómo son esos segmentos?... ahora prueben con otro punto, tomen otros puntos y prueben lo mismo"-. Con intención de tratar la propiedad recíproca enuncia la siguiente actividad "Dibujar un segmento ab y encontrar con el compás un punto f que esté a igual distancia de a y de b. Explicar como lo hicieron" y da sugerencias para la comprensión, para lo cual explicita las reglas de juego – no se puede medir, ni usar el cuadriculado- y hace una figura para visualizar la situación descrita en el enunciado. En una fase de visión retrospectiva, lleva a inferir la propiedad -los puntos que equidistan de los extremos del segmento están en la mediatriz- y a reformular el concepto como lugar geométrico.

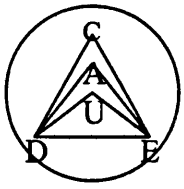
Por último se dan nuevos problemas que quedan como actividad para la casa.

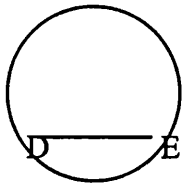
Hasta el momento, la metodología empleada consiste en presentar el problema, dejar un tiempo para el trabajo individual o en pequeños grupos, y revisar la solución enfocando los contenidos conceptuales o explicitando los procedimientos que son objeto de la tarea.

En la **cuarta clase** se trabajan los problemas que quedaron pendientes:

1)"Dibuja varias circunferencias que pasen por p y q ¿dónde se encuentran los centros de las circunferencias que trazaron?".

2) "El Club de Andinistas Unidos encargó la confección de un escudo con el siguiente dibujo simétrico que representa tres montañas de diferentes alturas. Completen el dibujo del escudo con regla y compás y redacten el procedimiento que utilizaron".





3) "Dibuja cinco puntos que equidisten de los centros de las flores"

B

A

El primer problema es de aplicación de la mediatriz. Se procede a la lectura del problema y un alumno lo resuelve; usa el tanteo para hallar los centros. La intervención docente es para destacar el concepto que se utiliza como medio de solución y además tiende a la adquisición del lenguaje.

El segundo problema requiere la aplicación de conceptos estudiados y además en él se debe explicitar el procedimiento de resolución. Las indicaciones docentes se centran en la fase de comprensión y de visión retrospectiva. Inicialmente se lee el problema y se establecen reglas de juego -no medir, usar regla y compás-; luego una alumna pasa a resolverlo -traza la mediatriz con regla y compás y sobre ella ubica tres puntos al azar que pertenecen al interior de la circunferencia y une dichos puntos con los extremos del segmento dado-. Es entonces cuando se revisa la solución y se evalúa la pertinencia de resultado, lo que lleva a algunas indicaciones para la comprensión del problema, indicaciones para hacer una formulación propia "si estuvieramos copiando un dibujo y estos puntos están ubicados en un determinado lugar ¿cómo haríamos para poner estos puntos en el lugar que corresponde?". Finalmente se rescatan dos procedimientos en los que subyace el Método de los Dos Lugares; en uno de ellos se utiliza una mediatriz y una circunferencia para hallar cada uno de los puntos buscados, en cambio en el otro dichos puntos se hallan mediante la intersección de dos circunferencias congruentes. Luego y a fin de concluir la tarea, la docente lleva a formular por escrito el procedimiento que implica el uso de la mediatriz.

El tercer problema también es de aplicación de la mediatriz. Se procede a la lectura del mismo y se pasa a una fase de visión retrospectiva. En ella, se hace un análisis de errores que se desprenden de interpretaciones del enunciado que llevaron a algunos alumnos a responder al problema mediante dos circunferencias conguentes de centros A y B respectivamente -"los compañeros que hicieron esto estaban pensando que los puntos estuvieran a la misma distancia de A y B por separado, pero en realidad la idea era que pensaran a la misma distancia de ambos centros"-. Luego se comenta el resultado y se buscan analogías con problemas ya resueltos –problemas que se resuelven aplicando el concepto de mediatriz-.

En general la metodología utilizada al tratar los problemas consiste en leer el enunciado, en algún caso se hacen comentarios para la formulación propia del

problema, pasa un alumno a resolverlo, y luego comienza una fase de visión retrospectiva, donde se comenta el resultado y se rescatan los conceptos implicados y las diferentes formas de resolver el problema.

Una vez resueltos estos problemas, la docente ubica dos láminas en una pared del aula, una de ellas contiene las nociones de circunferencia y mediatriz formuladas como lugar geométrico, y en la otra se listan las propiedades del conjunto de puntos que conforman cada uno de estos lugares.

A continuación se trabajan algunas construcciones elementales: construcción con regla y compás de la mediatriz, de la perpendicular a una recta por un punto de la misma y por un punto exterior a la misma (ver tabla de episodios y poligonales en 6.2.1. a 6.2.3.).

En primer lugar se establece lo dado y lo buscado, y se rescata el conocimiento que los alumnos tienen de estos algoritmos de construcción. Luego las orientaciones llevan a descubrir qué hay detrás de ese procedimiento mecánico: en el caso de la mediatriz, lo que se está determinando son dos puntos que permiten construir la recta buscada, y en el caso de la perpendicular, se está hallando un segmento auxiliar y el problema se reduce a hallar la mediatriz de dicho segmento. En una fase de visión retrospectiva se analiza el resultado y se lleva a reinterpretar la solución sobre la base del método implicado, sin llegar a realizar una formulación del mismo. Concretamente, en el problema de la mediatriz, se estudia la posibilidad de encontrar otros pares de puntos -que se derivan de la consideración de circunferencias con otro radio- a fin de mostrar la unicidad del resultado, y en la reinterpretación de la solución se destaca la reformulación del problema y los dos lugares geométricos implicados. En la construcción de la perpendicular, se analizan otros posibles puntos que pueden ser extremos del segmento auxiliar – cualquier par de puntos que pertenezca a la recta y equidiste del punto dado, pueden ser extremos de dicho segmento- y al reinterpretar la solución, se destaca el segmento auxiliar y la transformación del problema

Por último se deja como tarea la construcción de algunas mediatrices y perpendiculares para ejercitarse en estas construcciones elementales.

En la **quinta clase** se presenta un problema motivador del concepto de distancia de un punto a una recta -"El dibujo muestra un tablero de ajedrez en cuya segunda fila están ubicados un alfil, una torre y un caballo....."- y se deja 15 minutos para trabajar en él. Luego tiene lugar una fase de visión retrospectiva en la que se comentan los resultados. En ella se presenta el algoritmo para copiar segmentos como medio para comparar los espacios recorridos por las piezas de ajedrez – en cada caso se halla el segmento suma, representativo del espacio total recorrido por cada pieza, y luego se los compara-. Además en dicha fase se introduce la definición de distancia de un punto a una recta.

Una vez presentada esta noción, se realiza la construcción con regla y compás de la distancia de un punto a una recta (ver tabla de episodios y poligonal en 6.2.4.). Una alumna lleva a cabo la construcción e inmediatamente se centra en el trazado de una recta perpendicular. Las indicaciones docentes tienden a resaltar el segmento auxiliar implicado y a destacar la transformación del problema al trazado de la mediatriz. Las siguientes sugerencias llevan a evaluar la información que se desprende de dicho problema en vías de resolver el problema original.

Luego se plantean dos problemas para aplicar el concepto de distancia de un punto a una recta:

1) Traza una recta A y un punto exterior p. Traza ahora varios segmentos tales que todos tengan un extremo en p y el otro en la recta. ¿Hay alguno que sea mayor que todos los demás?. ¿Hay uno que es menor que todos los demás? ¿Cómo es ese segmento respecto a la recta?

2) Una persona se encuentra cerca de una ruta. Realiza un dibujo mostrando cual es el camino más corto que tiene para llegar a la ruta.

Se dejan 15 minutos para trabajar en ellos y se pasa a una fase de visión retrospectiva, en la que se comentan los resultados y se lleva a inferir que el segmento de perpendicular es el camino más corto entre un punto y una recta.

Una vez hecho esto se plantea el siguiente problema:

"Observar el cuadriculado. Se ha marcado una línea en él. Marcar con color puntos cuya distancia a esa recta sean 3 cuadras.¿Qué observas?".

Se comenta el resultado, se analiza la unicidad de dicho resultado y se orienta a conceptualizar la paralela como lugar geométrico.

A continuación se aborda la construcción de la paralela a una recta por un punto dado (ver 6.2.5).

En la **sexta clase** se retoma dicho problema y posteriormente se plantea un problema motivador para trabajar el concepto de bisectriz y su reformulación como lugar geométrico:

"El plano muestra un sector de la ciudad. En este plano se ve que la calle Elordi y la diagonal Capraro se cortan formando un ángulo

A) Marcar el ángulo en tu plano

B) Ubicar los puntos que equidistan de las dos calles señaladas

C) ¿Qué particularidad tienen esos puntos?"

Se procede a la lectura del enunciado y se alude a un concepto implicado en él – equidistar-. Luego se pasa a la visión retrospectiva, donde se hace referencia a la definición de bisectriz y se lleva a inferir la propiedad de los puntos de la misma.

Se realizan plegados para trazar la bisectriz de un ángulo y para inferir propiedades de los puntos de la misma. En el primer caso la docente guía las acciones a realizar "dibujar un ángulo, doblar de modo que los lados coincidan, ¿qué determina el doblez?. En el segundo caso, la actividad se enuncia de la siguiente manera "Marcar en la bisectriz un punto p. Plegando el papel hallar la distancia de p a cada uno de los lados", y se dan algunas indicaciones para la comprensión – definición de la distancia de un punto a una recta , y se sugiere hacer una figura para visualizar la situación descripta en el enunciado-.

En la **séptima clase** se retoma esa actividad de plegado. Se dan otras sugerencias para la comprensión – se lleva a establecer lo dado y lo buscado, se alude a la definición de la distancia de un punto a una recta, y se lleva a hacer una figura para visualizar la situación descripta en enunciado- Luego la intervención se dirige a la inferencia de la propiedad de los puntos de la bisectriz y a la reformulación del concepto como lugar geométrico

Posteriormente se hace la construcción de la bisectriz con regla y compás (ver 6.2.6). Se rescata el conocimiento previo que los alumnos tienen -pasan dos alumnas a realizar el algoritmo que recuerdan-. Se hace una reinterpretación de dicho algoritmo,

indicando que el problema se tranforma en "hallar la mediatriz del segmento hallado en el primer paso".

Finalmente se comienza el trabajo con triángulos. Se presentan sus elementos, la notación, se hace un repaso de algunas propiedades -un ángulo exterior es igual a la suma de los interiores que no sean adyacentes a él; suma de ángulos interiores; suma de ángulos exteriores-, se realiza la clasificación según lados y ángulos -clasificación inclusiva: el equilátero incluido en los isósceles-, y se lleva a inferir la medida de los ángulos de un triángulo equilátero. Se da la siguiente tarea para la casa –la cual se recomienda hacerla en hoja lisa-:

"Dibujar en una hoja de tu carpeta un triángulo equilátero, en otra un triángulo isósceles obtusángulo y en otra un triángulo escaleno rectángulo. Trazar las mediatrices de los lados en cada triángulo y las bisectrices de los ángulos en cada triángulo".

Los primeros 50 minutos de la **octava clase** se dedican a la evaluación de lo visto hasta el momento -lugares geométricos, trazado de perpendiculares, paralelas, bisectriz-. Luego se aborda la actividad que quedó de tarea "trazar mediatrices y bisectrices en diferentes triángulos". El objetivo parece ser la fijación de los algoritmos de construcción y la presentación de conceptos tales como circuncentro e incentro. Se hace un repaso de las definiciones de mediatriz y bisectriz y de sus reformulaciones como lugares geométricos. En la fase de ejecución la docente fomenta la precisión en los trazados, con lo que se apunta a las destrezas, y además destaca ciertas reglas de juego en el dominio -regla y compás-. Luego se pasa a una fase de visión retrospectiva en la que se hace inferencia de algunas propiedades -las mediatrices y bisectrices coinciden en un equilátero; las mediatrices se cortan en un punto; las bisectrices se cortan en un punto-.

La **novena clase** comienza con una revisión de lo que se ha tratado la clase anterior, se hace un repaso de la definición de circuncentro e incentro, y se infieren propiedades –las mediatrices y bisectrices coinciden en un equilátero-. Sigue una instancia en la cual se hace referencia a lo que se va a enseñar.

Luego se hace la construcción de las medianas con regla y compás –ver 6.2.7.-. Para ello se toma el caso del triángulo equilátero, de un triángulo isósceles obtusángulo y de un triángulo escaleno rectángulo. Si bien no se requiere la regla y el compás para

dibujar estos triángulos, se rescata la construción del equilátero utilizando estos instrumentos.

Después se hace un primer acercamiento a la construcción de las alturas de un triángulo: se define y ejemplifica el concepto de altura, se trazan las alturas utilizando la escuadra, se comentan los resultados, se infiere que las alturas y medianas coinciden en el equilátero y por último se dicta definición de altura y de ortocentro.

Por último se confecciona un cuadro para integrar los conceptos trabajados

	Rectas notables		Puntos notables
Rectas	Mediatrices	Interior o exterior	Circuncentro
Semirrectas	Bisectrices	Interior	Incentro
Segmentos	Medianas	Interior	Baricentro
Segmentos	Alturas	Interior o exterior	Ortocentro

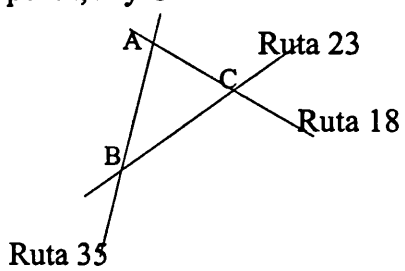
Se dan cuatro actividades para la próxima clase, siendo la actividad 1) preguntas para integrar todo lo que se vió sobre rectas notables, la 2) para reforzar el trazado de rectas notables, y los problemas 3) y 4) son de aplicación.

1) De esos tres triángulos que tienen dibujados (equilátero, isósceles obtusángulo y escaleno rectángulo) se pide que analicen: En algún caso coincide la mediana con la altura? En algún caso coincide la altura con un lado? En qué caso coinciden las tres medianas con las tres alturas? ¿Qué particularidad tiene el triángulo equilátero? ¿Dónde está el circuncentro y el ortocentro en el isósceles obtusángulo? ¿Dónde está el circuncentro y el ortocentro en el triángulo escaleno rectángulo?.

2) Hacer tres triángulos diferentes, un escaleno obtusángulo, un isósceles acutángulo y un isósceles rectángulo, y determinar en ellos alturas y ortocentro, medianas y baricentro, mediatrices y circuncentro, bisectrices e incentro

3) Encontrar graficamente el lugar donde debe colocarse una antena:

A- para que resulte equidistante de las rutas provinciales 23, 35 y 18 que unen los pueblos representados en el esquema por A, B y C"



B- Y si tienen que equidistar de los pueblos ¿dónde se la ubicaría?

4) Construye diseños de azulejados de cocina, utilizando en cada caso una de las baldosas siguientes, combinadas con baldosas lisas

La **décima clase** se inicia con un repaso de conceptos y propiedades -rectas y puntos notables-. Luego se retoma la construcción de las alturas de un triángulo; y a diferencia de la clase anterior, en la que se admitía la escuadra para hacer esta construcción, en esta clase se requiere el uso de la regla y el compás -ver 6.2.8-

Luego se recoge las actividades que habían quedado para casa, se reparte una fotocopia con nuevos problemas y se comienza a abordar la construcción de un triángulo dados sus tres lados.

En los primeros minutos de la **clase once** la profesora hace la devolución de las tareas que se llevó para corregir. La actividad 1 se conforma de preguntas para integrar todo lo que se vió sobre rectas notables. Se comentan las respuestas a todas las preguntas. La actividad 2 consiste en trazar medianas, mediatrices, bisectrices y alturas en diferentes triángulos; se apunta a la precisión en los trazados y a que las construcciones deben mostrar los puntos de intersección de cada tipo de rectas notables. Se leen los problema 3 y 4, los cuales son de aplicación; en el primero de ellos se ven la bisectriz y la mediatriz como medio de solución; y en el segundo se sugiere formar un rectángulo con cada tipo de baldosas y se clasifican los triángulos de los modelos.

Luego se aborda la construcción de un triángulo dados los tres lados -ver 6.2.9-. y por último se resuelve el problema de "Construir un triángulo dados un lado y dos ángulos adyacentes" -ver 6.2.10-.

En la **clase doce** se resuelve el problema "Construir un triángulo dados un lado, el ángulo adyacente y el ángulo opuesto a dicho lado" –ver 6.2.11.-

En la **clase trece** se resuelven los siguientes problemas:

1) Construir un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido
2) Construir un triángulo dados dos lados y el ángulo opuesto al mayor
3) Construir un triángulo dados dos lados y el ángulo opuesto al menor
4) Construir un triángulo dados tres ángulos.

El análisis de los tres primeros se presenta en 6.2.12 a 6.2.14. Luego se plantea el cuarto problema y se deja unos minutos para que los alumnos trabajen en él, enseguida tiene lugar una fase de visión retrospectiva, en la cual se superponen las producciones y las indicaciones se centran en destacar la diversidad de resultados.

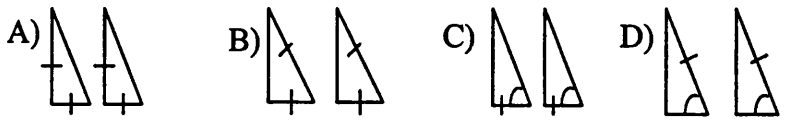
Por último se pide hacer un resumen de las construcciones de triángulos vistas hasta el momento, analizando la unicidad de los resultados.

En la **clase catorce** se realiza el análisis de la unicidad de los resultados de los problemas de construcción de triángulos vistos. Las indicaciones docentes tienden a señalar las condiciones necesarias y suficientes para construir triángulos congruentes, y así poder establecer los criterios de congruencia de triángulos.

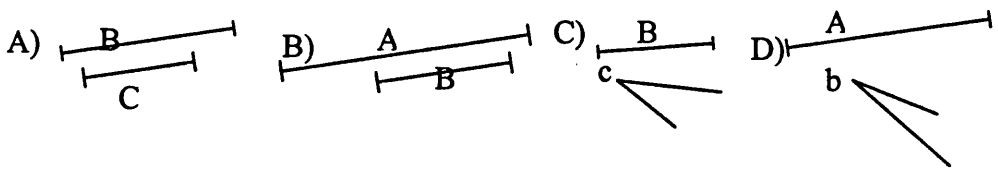
En los últimos minutos se comienza a trabajar las construcciones de triángulos rectángulos, se da lectura a los problemas i) y ii); y se deja a los alumnos trabajar en ellos.

Problema i): Dibuja un triángulo rectángulo escaleno y otro rectángulo isósceles; nombra y marca sus elementos en ambos casos

Problema ii): En el caso de la construcción del triángulo rectángulo no es necesario dar 3 datos pues ya hay un dato conocido que es el ángulo recto. Construiremos triángulos rectángulos dados:



En cada caso construir el triángulo rectángulo con los datos que se dan:



En la **clase quince** se resuelve el problema ii) –ver 6.2.15-, y la intervención docente apunta a la inferencia de los criterios de congruencia de triángulos rectángulos.

En la **clase dieciseis** se hace un repaso de conceptos vistos, tales como mediatrices, bisectrices, alturas y medianas de un triángulo. Luego se resuelve el problema "Construir un triángulo dados H_A y los ángulos adyacentes al lado A" –ver 6.2.16.-. En los últimos minutos tienen lugar los cinco episodios correspondientes a la construcción de un triángulo dados dos lados y la altura respecto a uno de ellos –ver 6.2.17.-.

En la **clase diecisiete** se sigue trabajando en dicho problema. Luego se resuelve el problema "Construir un triángulo dados un lado, la altura y un ángulo adyacente respecto a dicho lado"-ver 6.2.18.-. La docente explica el plan - primero fija el lado A y copia el ángulo b; luego se cambia el punto de vista y se comienza con H_A trabajando hacia delante. La docente sigue instrucciones de los alumnos para repasar la construcción de la paralela (buscar un punto a la misma distancia de la recta que el punto dado). Una alumna lo resuelve de otra forma, su solución está dirigida por el Método de los Dos Lugares -transporta A, copia el ángulo en un extremo de A, y traza la paralela (para esto traza dos puntos a igual distancia de la recta que contiene a A).

Luego se aborda el problema "Construir un triángulo dados dos lados y la mediana respecto a uno de ellos" –ver 6.2.19.-. La profesora hace una propuesta de plan, para lo cual hace un dibujo para representarla. Está dirigida por el Método de los Dos Lugares. Pasa una alumna a ejecutar este plan; pequeña confusión (su intención es hacer una circunferencia con centro en el punto medio de B y radio A, en lugar de hacer radio igual a la mediana) que se clarifica.

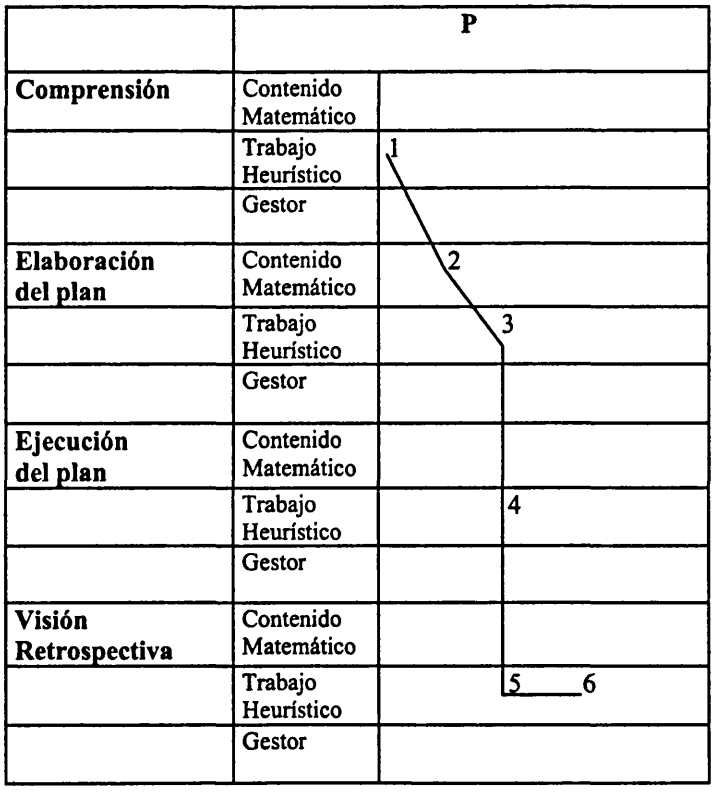
En la **última clase** se resuelve "Construir un triángulo dados un lado, la altura y la mediana respecto a dicho lado" -ver 6.2.20.-. En los últimos 40 minutos se toma evaluación escrita del tema.

6.2.1. Problema : "Construcción de la mediatriz con regla y compás"

6.2.1.1. Tabla de Episodios

	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA		1- establecer lo dado y lo buscado	
ELABORACIÓN DE UN PLAN	2- conocimiento informal del algoritmo de construcción	3- reformular basándose en criterio de construcción	
EJECUCIÓN DEL PLAN		4- indicaciones dirigidas por el Método de los Dos Lugares (los puntos buscados se determinan mediante la intersección de dos circunferencias)	
VISIÓN RETROSPECTIVA		5- analizar unicidad del resultado 6- reinterpretar la solución destacando la reformulación y los lugares geométricos implicados	

6.2.1.2. Poligonal del proceso



6.2.2. Problema : "Construcción de la perpendicular a una recta por un punto perteneciente a la misma"

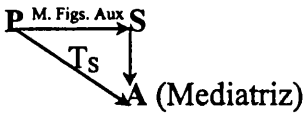
6.2.2.1. Tabla de Episodios

	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA		1- hacer figura para visualizar situación descripta en enunciado 2-establecer lo dado y lo buscado	
ELABORACIÓN DE UN PLAN			
EJECUCIÓN DEL PLAN		▸ Una alumna resuelve el problema. 3- indicaciones dirigidas por el Método de la figura auxiliar	
VISIÓN RETROSPECTIVA		4- reinterpretar la solución sobre la base del Método de figura auxiliar (se destaca el segmento auxiliar y la transformación del problema)	

6.2.2.2. Poligonal del proceso

		P	
Comprensión	Contenido Matemático		
	Trabajo Heurístico	1	2
	Gestor		
Elaboración del plan	Contenido Matemático		
	Trabajo Heurístico		
	Gestor		
Ejecución del plan	Contenido Matemático		
	Trabajo Heurístico	3	
	Gestor		
Visión Retrospectiva	Contenido Matemático		
	Trabajo Heurístico		4
	Gestor		

6.2.2.3. Espacio real de problemas



6.2.3. Problema : "Construcción de la perpendicular a una recta por un punto exterior"

6.2.3.1. Tabla de Episodios

	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA		1- hacer figura para visualizar situación descripta en enunciado	
ELABORACIÓN DE UN PLAN			
EJECUCIÓN DEL PLAN		▸ Una alumna resuelve el problema. 2- indicaciones dirigidas por el Método de figura auxiliar	
VISIÓN RETROSPECTIVA		3- analizar alternativas que pueden presentarse en los pasos de solución (otros extremos para el segmento auxiliar)	

6.2.3.2. Poligonal del proceso

	P		
Comprensión	Contenido Matemático		
	Trabajo Heurístico	1	
	Gestor		
Elaboración del plan	Contenido Matemático		
	Trabajo Heurístico		
	Gestor		
Ejecución del plan	Contenido Matemático		
	Trabajo Heurístico		2
	Gestor		
Visión Retrospectiva	Contenido Matemático		
	Trabajo Heurístico		3
	Gestor		

6.2.4. Problema : "Construcción con regla y compás de la distancia de un punto a una recta"

6.2.4.1. Tabla de Episodios

	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA		1- hacer figura para visualizar situación descripta en enunciado	
ELABORACIÓN DE UN PLAN			
EJECUCIÓN DEL PLAN **P'**		.►Una alumna hace la construcción. Aborda un problema del espacio (P': perpendicular por el punto dado) 2- indicaciones dirigidas por el Método de la figura auxiliar (se destaca el segmento auxiliar y la transformación de P')	
P			3- evaluar nueva información que se desprende de un problema del espacio
VISIÓN RETROSPECTIVA			

6.2.4.2. Poligonal del proceso

P': Trazar la perpendicular por el punto dado

		P	P'
Comprensión	Contenido Matemático		
	Trabajo Heurístico	1	
	Gestor		
Elaboración del plan	Contenido Matemático		
	Trabajo Heurístico		
	Gestor		
Ejecución del plan	Contenido Matemático		
	Trabajo Heurístico		2
	Gestor		3
Visión Retrospectiva	Contenido Matemático		
	Trabajo Heurístico		
	Gestor		

6.2.5. Problema : "Construcción con regla y compás de la paralela a una recta que pasa por un punto dado"

6.2.5.1. Tabla de Episodios

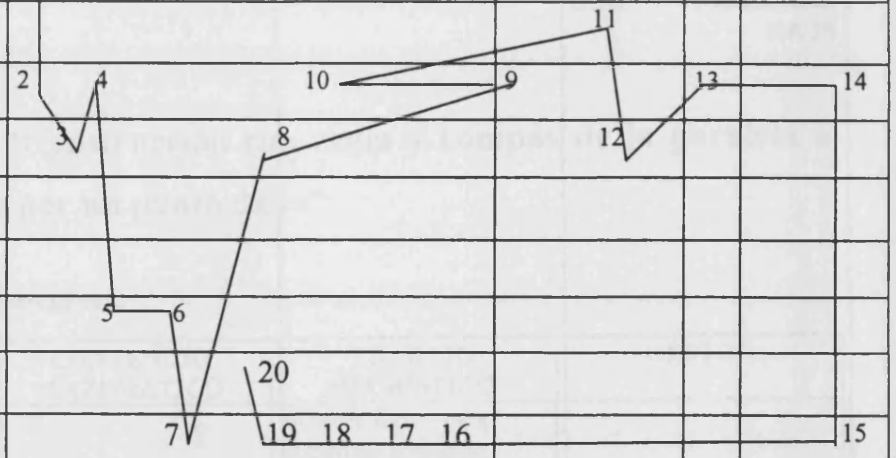
	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA		1- hacer figura para visualizar situación descripta en enunciado	
ELABORACIÓN DE UN PLAN		2- establecer diferencias con problemas anteriores 4- reformular basándose en datos y criterio de construcción	3-evaluar posibilidad de usar construcciones conocidas 8. ▸Dos alumnas hacen algunas exploraciones para configurar un plan, que en definitiva no llevan al resultado.

T Q Q'	11- propiedad de los puntos de la paralela	9- reformular basándose en datos y criterio de construcción (T: encontrar un punto que esté en la paralela) 10- hacer figura de análisis 13- reformular basándose en la propiedad del conjunto de puntos implicado (Q: encontrar un punto que esté a la misma distancia de la recta que el punto dado) 14- estableces problemas generados por el análisis (Q': hallar la distancia del punto dado a la recta)	- evaluar pertinencia del plan 12- evaluar posibilidad de usar construcciones conocidas
EJECUCIÓN DEL PLAN			5.► Un alumno intenta reproducir el algoritmo de construcción, el cual aparece en el libro de texto. Comienza con el primer paso, sin interpretar lo que va haciendo ya que su intención es trazar a ojo la paralela por s. - evaluar la pertinencia del paso a ejecutar del plan 6.►Otra alumna continua los pasos restantes del algoritmo, luego de algunos tropiezos logra reproducirlos. - evaluar la pertinencia del paso a ejecutar del plan
VISIÓN RETROSPECTIVA **Q'**		7- resolver el problema de forma diferente P_R : Encontrar una nueva forma de resolver P. 15- reinterpretar algoritmo de construcción elemental	

P	20- concepto de paralela reformulado como lugar geométrico	(perpendicular) sobre la base del método 16- repasar el plan (se resalta utilidad de un problema del espacio) 17- analizar alternativas que pueden presentarse en los pasos de solución 18- resolver el problema de forma diferente 19- repasar el plan	

6.2.5.2. Poligonal del proceso

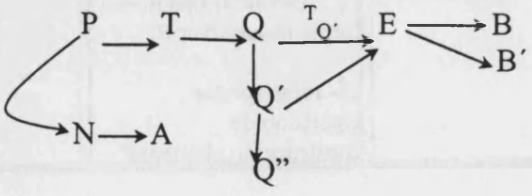
		P	T	Q	Q'
Comprensión	Contenido Matemático				
	Trabajo Heurístico				
	Gestor				
Elaboración del plan	Contenido Matemático				
	Trabajo Heurístico				
	Gestor				
Ejecución del plan	Contenido Matemático				
	Trabajo Heurístico				
	Gestor				
Visión Retrospectiva	Contenido Matemático				
	Trabajo Heurístico				
	Gestor				



Q: encontrar un punto que esté a la misma distancia de la recta dada que el punto dado

Q': determinar la distancia que hay desde el punto dado a la recta dada

6.2.5.3. Espacio real de problemas



T: encontrar un punto que esté en la paralela

Q": trazar recta perpendicular a la dada por el punto dado

E: hallar un punto a una distancia d (resultado de Q') de la recta

B: trazar la perpendicular a la recta dada por un punto arbitrario

B': construir circunferencia C(o,d) (siendo o la intersección de la recta dada con la recta que resulta de resolver B)

N: construir un segmento perpendicular a la recta dada, cuyos extremos equidisten del punto dado

A: trazar la mediatriz del segmento

6.2.5.4. Reconstrucción del proceso

Los cuatro primeros episodios tienen lugar en los últimos minutos de la clase anterior. En el primero de ellos, la docente hace una figura para visualizar la información del enunciado, por tanto corresponde a la fase de comprensión. Los restantes corresponden a una fase de elaboración del plan; se comienza con orientaciones que se dirigen a la comprensión plena del problema, para lo cual se establece la diferencia con la construcción de una paralela vista tiempo atrás, en donde no se requería que pase por un punto determinado, luego le sigue una breve instancia en la que se hace referencia a las construcciones vistas hasta el momento, quizás con el objetivo de considerarlas para configurar un plan, y por último las indicaciones llevan a reformular el problema basándose en el criterio de construcción de una recta.

Comienza una fase de ejecución de un plan. Un alumno intenta reproducir el algoritmo de construcción de la paralela, el cual aparece en el libro de texto. Comienza con el primer paso, traza una semicircunferencia de centro o y radio os, con $o \in R$, pero no la usa ya que pretende trazar a ojo la paralela por s. Otra alumna continua los pasos restantes del algoritmo, luego de algunos tropiezos logra reproducirlos. En ambos casos las intervenciones docentes están dirigidas a evaluar la pertinencia del paso a ejecutar del plan

El episodio 7 corresponde a una fase retrospectiva, en él la profesora pide resolver el problema de forma diferente, esto genera un nuevo episodio de elaboración de un plan. Dos alumnas hacen algunas exploraciones para configurar un plan, una de ellas comienza trazando una circunferencia de radio arbitrario R con centro en el punto

e dado y que corta a la recta en a y b. Puesto que no sabe como seguir, otra alumna sugiere continuar hallando los puntos m y n (m= C(e,R) ∩ C(a,R); n= C(e,R) ∩ C(b,R)); los cuales determinan una paralela que no pasa por e. Por tanto no lleva al resultado que se espera; en este caso las indicaciones docentes apuntan a evaluar la pertinencia del plan.

Luego la docente propone una nueva perspectiva, lo que genera una cadena de episodios destinados a elaborar un nuevo plan. En ellos, las indicaciones apuntan a evaluar la posibilidad de uso de contrucciones anteriores (12), a hacer reformulaciones basadas en datos y criterio de construcción (9) o en las propiedades del conjunto de puntos implicado (11 y 13); el episodio 10 en el que la docente hace la figura de análisis y el 14 donde explicita el problema auxiliar que se genera del análisis, muestran cómo a su vez las indicaciones también estan dirigidas por el objetivo. Pasa una alumna a ejecutar el plan derivado de las indicaciones anteriores -consiste en trazar la perpendicular a R por el punto dado, luego trazar otra perpendicular a R por otro punto exterior y hallar en esta última un punto a igual distancia que el dado-, la docente lleva a reinterpretar los pasos del algoritmo de construcción de perpendicular (15). Los siguientes episodios corresponde a una visión retrospectiva de la solución en general, se repasa el plan acentuando la utilidad de trazar la perpendicular para resolver el problema original (16) y se analizan las alternativas que podrían presentarse en los pasos de solución (17).

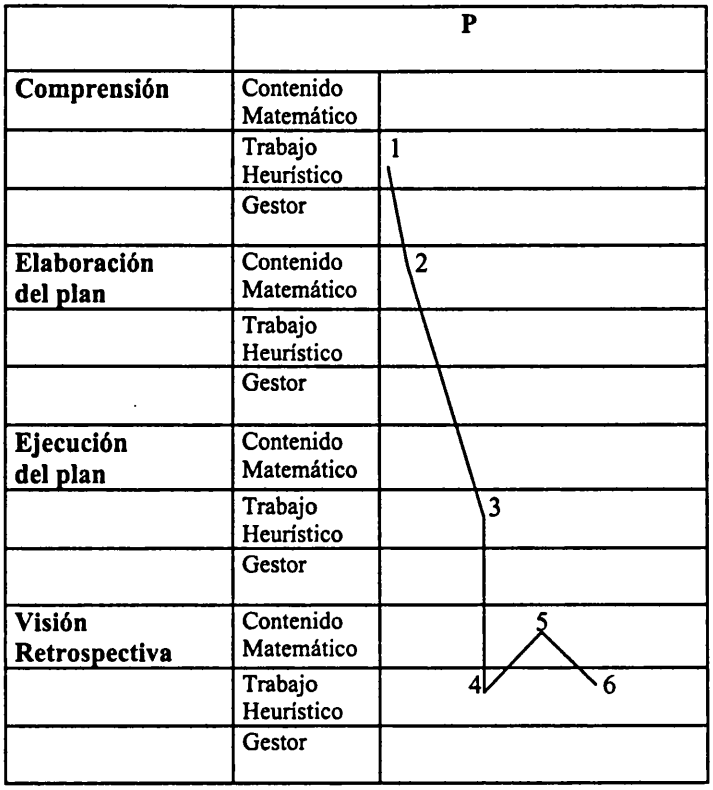
Luego se pide encontrar otra nueva forma de resolver el problema (18), lo que genera una nueva instancia de ejecución de un plan, en la cual una alumna pasa a desarrollar otro plan de solución. Dicho plan consiste en trazar una circunferencia de centro en el punto dado y que corte a la recta en dos puntos, luego trazar una cuerda perpendicular a la recta dada y hallar su mediatriz. -implicitamente se usa que la perpendicular de la perpendicular es una paralela-. La profesora trata de que se explicite qué se está haciendo, deja pasar el trazado a ojo de la cuerda perpendicular y comienza una nueva fase de visión retrospectiva, conformada por el episodio 19, en el que se rescata el plan y se explicitan los pasos seguidos, y el episodio 20 en el que se hace la reformulación de la paralela como lugar geométrico.

6.2.6. Problema : "Construcción con regla y compás de la bisectriz de un ángulo"

6.2.6.1. Tabla de Episodios

	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA P		1- establecer lo dado y lo buscado	
ELABORACIÓN DE UN PLAN P	2- conocimiento informal del algoritmo de construcción		
EJECUCIÓN DEL PLAN P		3. ▸Pasa una alumna. Dibuja un ángulo obtuso, apoya el compás en el vértice y hace dos marquitas en los lados, con otra abertura apoya el compás en cada marquita y hace el arco correspondiente. - uso de notación adecuada	
VISIÓN RETROSPECTIVA P	5-Inferencia de hechos: la bisectriz es una semirrecta contenida en la mediatriz del segmento hallado en el primer paso	4. ▸ Pasa otra alumna . Dibuja un ángulo agudo y hace un procedimiento análogo, sólo que en lugar de hacer las marquitas hace un arco de circunferencia que corta a los lados y usa la misma abertura para hacer los arcos en el segundo paso de la construcción. - descartar restricciones innecesarias en la construcción (abertura del compás en el primer paso puede ser diferente a la del segundo paso) 6- reinterpretar la solución sobre la base de los hechos inferidos	

6.2.6.2. Poligonal del proceso



6.2.7. Problema : "Construir con regla y compás las medianas de un triángulo"

6.2.7.1. Tabla de Episodios

	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA P	1- definición de mediana		
ELABORACIÓN DE UN PLAN P	4- hecho para configurar el plan (para determinar el punto medio de un segmento se traza su mediatriz)		3- analizar qué se conoce y qué falta determinar
EJECUCIÓN DEL PLAN P	2- algoritmo de construcción del		

	triángulo equilátero	5- precisión en los trazados	
VISIÓN RETROSPECTIVA P	7 - Conocimiento de reglas del dominio: criterio de construcción (para trazar la mediatriz hacen falta dos puntos) 8- Conceptos y hechos implicados en la solución (se dicta definición de mediana y de baricentro)		6- evaluar pertinencia del resultado

6.2.7.2. Poligonal del proceso

		P
Comprensión	Contenido Matemático	1
	Trabajo Heurístico	
	Gestor	
Elaboración del plan	Contenido Matemático	4
	Trabajo Heurístico	
	Gestor	3
Ejecución del plan	Contenido Matemático	2
	Trabajo Heurístico	5
	Gestor	
Visión Retrospectiva	Contenido Matemático	7 8
	Trabajo Heurístico	
	Gestor	6

6.2.8. Problema : "Construir con regla y compás las alturas de un triángulo"

6.2.8.1. Tabla de Episodios

	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA P	1- definición de altura		
ELABORACIÓN DE UN PLAN P	6- hechos para configurar el plan (la recta que contienen a la altura es la perpendicular al lado que pasa por el vértice opuesto)		3. ▸ Otra alumna propone hallar el punto medio de la hipotenusa - evaluar pertinencia del plan 4- cambiar el punto de vista 7- evaluar posibilidad de usar construcciones conocidas (T: trazar perpendicular a una recta por un punto exterior)
EJECUCIÓN DEL PLAN P	2. ▸Pasa una alumna, marca las alturas respecto a los catetos; el problema se reduce a " Trazar la altura respecto a la hipotenusa" (usa la escuadra) - regla y compás		
VISIÓN RETROSPECTIVA P	8 - Inferencia de definiciones equivalentes (altura es la distancia entre un vértice y la recta que contiene al lado opuesto)	5.- resolver el problema de forma diferente 9. ▸ Se trazan las alturas en otro triángulo a fin de utilizar la definición equivalente de altura y de afianzar el algoritmo de construcción de la perpendicular a una recta por un punto exterior. - abordar problema que puede resolverse habiendo resuelto el problema planteado	

6.2.8.2. Poligonal del proceso

		P
Comprensión	Contenido Matemático	1
	Trabajo Heurístico	
	Gestor	
Elaboración del plan	Contenido Matemático	6
	Trabajo Heurístico	
	Gestor	3 4 7
Ejecución del plan	Contenido Matemático	2
	Trabajo Heurístico	
	Gestor	
Visión Retrospectiva	Contenido Matemático	8
	Trabajo Heurístico	5 9
	Gestor	

6.2.8.3. Reconstrucción del proceso

Se toma el caso del triángulo isósceles rectángulo. Luego de un episodio en el que se hace referencia a la definición de altura, pasa una alumna a resolver el problema. Marca la altura respecto a los catetos y el problema se reduce a "Trazar la altura respecto a la hipotenusa"; emplea la escuadra y es entonces cuando la docente requiere el uso de la regla y el compás. Es decir que cambia las condiciones de la tarea respecto a la clase anterior, la misma se transforma en construir las alturas con regla y compás. Otra alumna propone hallar el punto medio de la hipotenusa y las sugerencias llevan a evaluar la veracidad de este hecho. Las indicaciones hacen dejar de lado este plan y pensar en otra forma de resolver el problema. La alumna que está en el pizarrón ejecuta un nuevo plan y el problema se transforma en "Trazar la bisectriz de un ángulo recto", o sea que implícitamente usa el hecho de que en un triángulo isósceles la bisectriz respecto al ángulo opuesto a la base contiene a la altura respecto a dicha base. No hay indicaciones en dicha ejecución. Luego la docente propone una nueva forma de resolver el problema, sugiere la idea de tomar a la altura como una distancia y su intervención se dirige a evaluar la posibilidad de usar construcciones conocidas -Trazar perpendicular a una recta por un punto exterior- y a inferir una definición equivalente de la altura -como

distancia entre un vértice y la recta que contiene al lado opuesto-. Por último la docente pide abordar un problema análogo, pide trazar las alturas en otro triángulo a fin de utilizar la definición equivalente de altura y de afianzar el algoritmo de construcción implicado.

6.2.9. Problema : "Construir un triángulo dados los tres lados"

6.2.9.1. Tabla de Episodios

	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA P	2- Reglas de juego: regla y compás	1-establecer lo dado y lo buscado 4-establecer lo dado y lo buscado	3- evaluar la posibilidad de satisfacer la condición
ELABORACIÓN DE UN PLAN P			
EJECUCIÓN DEL PLAN P	5- Algoritmo de operación básica (copiar segmento)	▸ Uso implícito del Método de los Dos Lugares 6- fijar un dato y reformular 7- indicaciones para aplicar un paso del Método (el punto buscado es la intersección de dos arcos de circunferencia) 8- uso de notación adecuada	
VISIÓN RETROSPECTIVA P	10- Inferencia de "Desigualdad triangular"	9- conjeturar el resultado al variar la medida de los datos (el inciso B es el mismo problema pero con otras medidas)	

6.2.9.2. Poligonal del proceso

		P
Comprensión	Contenido Matemático	2
	Trabajo Heurístico	1 4
	Gestor	3
Elaboración del plan	Contenido Matemático	
	Trabajo Heurístico	
	Gestor	
Ejecución del plan	Contenido Matemático	5
	Trabajo Heurístico	6 7 8
	Gestor	
Visión Retrospectiva	Contenido Matemático	10
	Trabajo Heurístico	9
	Gestor	

6.2.9.3. Reconstrucción del proceso

Se lee el problema y se dan algunas orientaciones para la comprensión –se establece lo dado y lo buscado; se establecen las reglas de juego, regla y compás; se evalua la posibilidad de satisfacer la condición-. En una clase posterior se retoma este problema, nuevamente se establece lo dado y lo buscado. En forma inmediata se pasa la ejecución. La docente sigue un plan a propuesta de una alumna. En este sentido las primeras sugerencias llevan a copiar uno de los segmentos dados sobre una línea auxiliar, sobre la cual se apoyará la construcción "me parece que es conveniente que tracemos una semirrecta, entonces ya tenemos como pasarlo con más comodidad,....Lo conveniente es hacer una semirrecta entonces así tengo de dónde empezar y adonde llevar las cosas. Abro el compás, tomo A y lo paso acá". Las siguientes indicaciones están guiadas por el método – fijar un dato y reformular, el punto buscado se halla mediante la intersección de dos arcos de circunferencia-, requiriendo además el uso de notación adecuada.

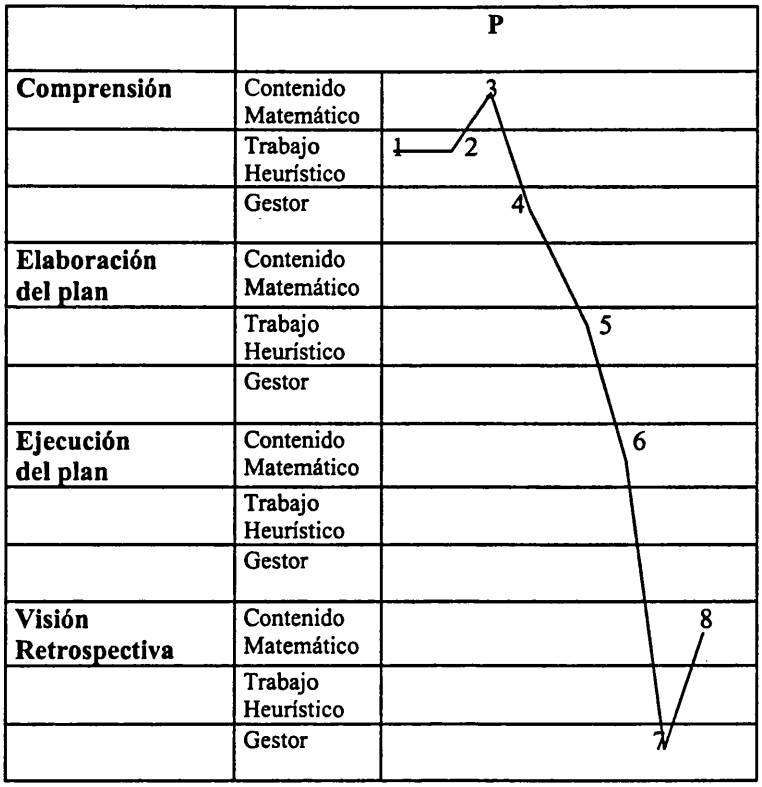
Por último se lleva a resolver el problema pero con otros segmentos, tendiendo así a conjeturar el resultado al variar la longitud de los segmentos dados. Esto desemboca en el análisis de la relación entre los lados de un triángulo, lo cual lleva a inferir la desigualdad triangular.

6.2.10. Problema: "Construir un triángulo dados un lado y dos ángulos adyacentes"

6.2.10.1. Tabla de Episodios

	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA P	3 - ejemplificación de concepto implicado en el enunciado (ángulo adyacente al lado)	1- establecer lo dado y los buscado 2 – hacer una figura para visualizar información descrita en el enunciado	4 - evaluar pertinencia de datos (contradicción entre enunciado verbal y lo establecido como dado)
ELABORACIÓN DE UN PLAN P		5 – Indicaciones dirigidas por el trabajo hacia delante	
EJECUCIÓN DEL PLAN P	6 - Algoritmo de operación básica (copiar ángulo)		
VISIÓN RETROSPECTIVA P	8- Reglas de juego (regla y compás; los segmentos o ángulos que hay que trasladar son los dados)		7- Comprobar el resultado (usando superposición)

6.2.10.2. Poligonal del proceso



6.2.10.3. Reconstrucción del proceso

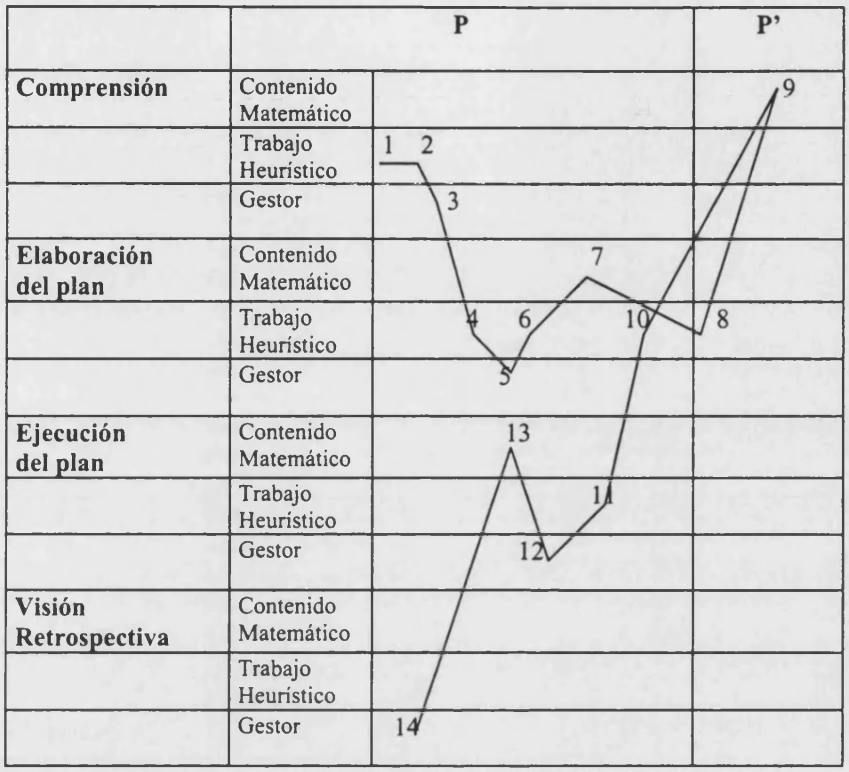
Las primeras indicaciones son para la comprensión. Se establece lo dado y lo buscado, se sugiere hacer una figura para visualizar la información descripta en el enunciado, a la cual llama figura de análisis. A modo de clarificar el concepto de "ángulo adyacente al lado", hace un dibujo que lo ejemplifica. Luego se advierte una incoherencia entre el enunciado del problema expresado en forma verbal y las letras con las cuales se ha asignado a los ángulos que se han establecido como dato, ya que no siguen la convención previamente determinada, por lo cual se lleva a subsanar esta cuestión. En la fase de elaboración las indicaciones están dirigidas para trabajar hacia adelante. En la ejecución se alude al algoritmo para copiar ángulos, al igual que en el problema anterior se traza una semirrecta inicial a partir de la cual se apoya la construcción. Por último se lleva a comprobar el resultado usando superposición y se resalta que al hacer la construcción se deben respetar los segmentos y ángulos establecidos.

6.2.11. Problema : "Construir un triángulo dados un lado, el ángulo adyacente y el ángulo opuesto a dicho lado"

6.2.11.1. Tabla de Episodios

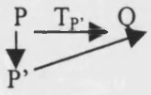
	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA P		1 – establecer lo dado 2 – hacer figura para visualizar información	3- evaluar pertinencia de datos (contradicción entre enunciado verbal y lo establecido como dado)
P'	9- Reglas de juego		
ELABORACIÓN DE UN PLAN P		4- indicaciones dirigidas por el trabajo hacia adelante	5- evaluar las dificultades de un paso del plan (¿dónde ubicar el vértice de ∠c?)
		6. ▶Intento de tomar ∠c como ángulo adyacente - establecer diferencias y similitudes con problemas anteriores	
	7- propiedad para configurar el plan (suma ángulos ineriores de un triángulo es 180°)		
P'		8- reformular utilizando hechos conocidos (P': hallar ∠b con regla y compás)	
P		10- reducir el problema a un problema resuelto anteriormente (Q: construir un triángulo dados un lado y los dos ángulos adyacentes)	
EJECUCIÓN DEL PLAN P		11- destrezas: precisión en los trazados	12- Afianzar la comprensión del plan antes de ejecutarlo
	▶ La profesora ejecuta el plan 13- algoritmos de operaciones básicas (copiar segmento y ángulo)		
VISIÓN RETROSPECTIVA P			14- comprobar el resultado usando superposición

6.2.11.2. Poligonal del proceso



6.2.11.3. Espacio real de problemas:

P: construir triángulo dados C, ∠c y ∠a)



Q: construir un triángulo dados un lado y los dos ángulos adyacentes

P': hallar ∠b con regla y compás

6.2.11.4. Reconstrucción del proceso

Se dan algunas indicaciones para la comprensión y se pasa a la elaboración del plan. El grueso de las indicaciones está en dicha fase. Las sugerencias llevan a trabajar hacia adelante –copiar el lado, luego uno de los ángulos adyacentes-. Algunos alumnos consideran como adyacente al ángulo opuesto dado, por tanto la docente lleva al análisis en ese sentido. Las siguientes indicaciones son para tener en cuenta la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, y a partir de ella transformar el problema en uno ya resuelto. Más precisamente, la consideración de tal propiedad genera el

problema P'-hallar ∠b con regla y compás-, por tanto el problema inicial se reduce a la construcción de un triángulo dados un lado y los dos ángulos adyacentes.

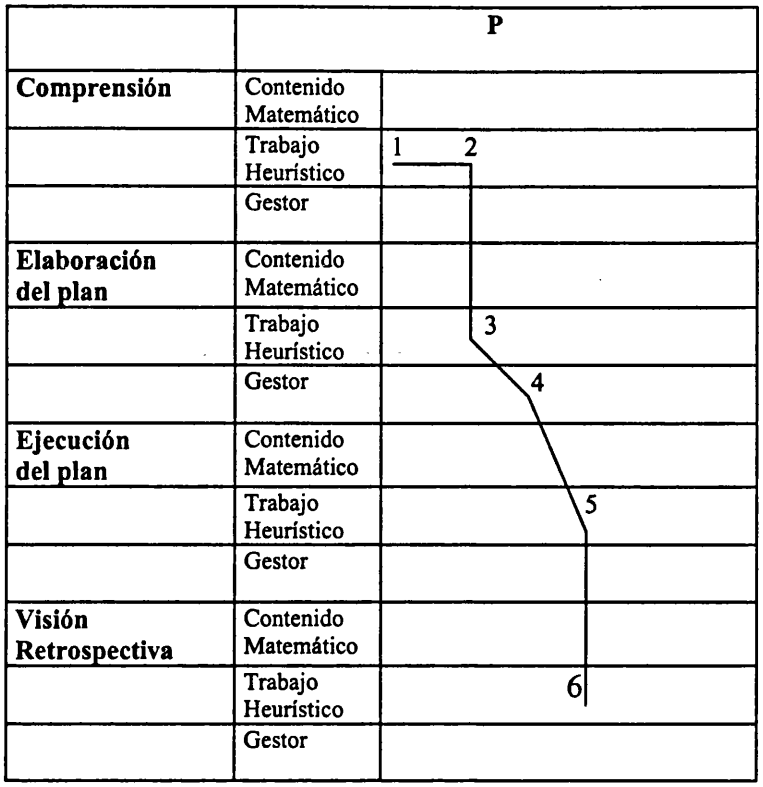
Una alumna esboza la idea par hallar con regla y compás el ángulo desconocido. Luego la docente relata el plan para su plena comprensión y lo ejecuta, detallando el algoritmo para copiar ángulos y segmentos y destacando el trazado de una semirrecta para basar la construcción. Finalmente lleva a comprobar el resultado.

6.2.12. Problema : "Construir un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido"

6.2.12.1. Tabla de Episodios

	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA P		1- establecer lo dado 2- Hacer figura para visualizar la información	
ELABORACIÓN DE UN PLAN P		3- indicaciones para el trabajo hacia adelante	4- evaluar la secuencialidad en que se considerará lo dado
EJECUCIÓN DEL PLAN P		5. ▸Pasa una alumna a ejecutar el plan - destrezas: uso de útiles de geometría; uso de notación adecuada	
VISIÓN RETROSPECTIVA P		6- analizar alternativas que pueden presentarse en los pasos de solución	

6.2.12.2. Poligonal del proceso



6.2.12.3. Reconstrucción del proceso

Los dos primeros episodios apuntan a la comprensión del problema. Las indicaciones que se dan en uno de ellos "Estamos haciendo hasta ahora una figura de análisis para ver cómo nos quedarían esos datos y cómo quedaría armado el triángulo", muestran el rol asignado a la figura hecha a mano alzada al inicio del proceso, a la que se ha acordado en denominar "figura de análisis" –el sentido que en este trabajo hemos dado a la figura de análisis es muy diferente, por eso consideramos que episodios de esta naturaleza responden al descriptor "hacer una figura para visualizar la información descripta en el enunciado"-.

Las indicaciones para la elaboración del plan conducen al trabajo hacia adelante. Luego pasa una alumna a ejecutar el plan y las indicaciones docentes van en el sentido de las destrezas. Por último se lleva a analizar alternativas que pueden presentarse en la solución.

6.2.13. Problema : "Construir un triángulo dados dos lados y el ángulo opuesto al mayor"

6.2.13.1. Tabla de Episodios

	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA P		2- establecer lo dado	1- Leer el problema
ELABORACIÓN DE UN PLAN P		3- hacer figura de análisis	
EJECUCIÓN DEL PLAN P		4. ▸ Pasa una alumna. Copia el lado C, el ángulo adyacente, y hace arco de C(b,A) - precisión en los trazados	
VISIÓN RETROSPECTIVA P		6- repasar el plan (se acentúa el uso de un lenguaje apropiado) 7- reinterpretar la solución desde la heurística "fijar un dato y reformular"	5- comprobar usando superposición

6.2.13.2. Poligonal del proceso

		P
Comprensión	Contenido Matemático	
	Trabajo Heurístico	2
	Gestor	1
Elaboración del plan	Contenido Matemático	
	Trabajo Heurístico	3
	Gestor	
Ejecución del plan	Contenido Matemático	
	Trabajo Heurístico	4
	Gestor	
Visión Retrospectiva	Contenido Matemático	
	Trabajo Heurístico	6 7
	Gestor	5

6.2.13.3. Reconstrucción del proceso

Los dos primeros episodios son para la comprensión. El tercer episodio lo hemos incluido en la fase de elaboración puesto que las indicaciones concretas fueron: "hacen la figura de análisis y vemos cómo sería ese problema resuelto", lo cual llevarían a hacer el "Análisis". Sin embargo, no se aprecian más sugerencias al respecto.

Luego pasa una alumna a ejecutar el plan, para lo cual traza una semirrecta inicial y a partir de ella realiza los trazados derivados de la consideración sucesiva de cada uno de los datos del problema; las sugerencias son para la precisión en dichos trazados.

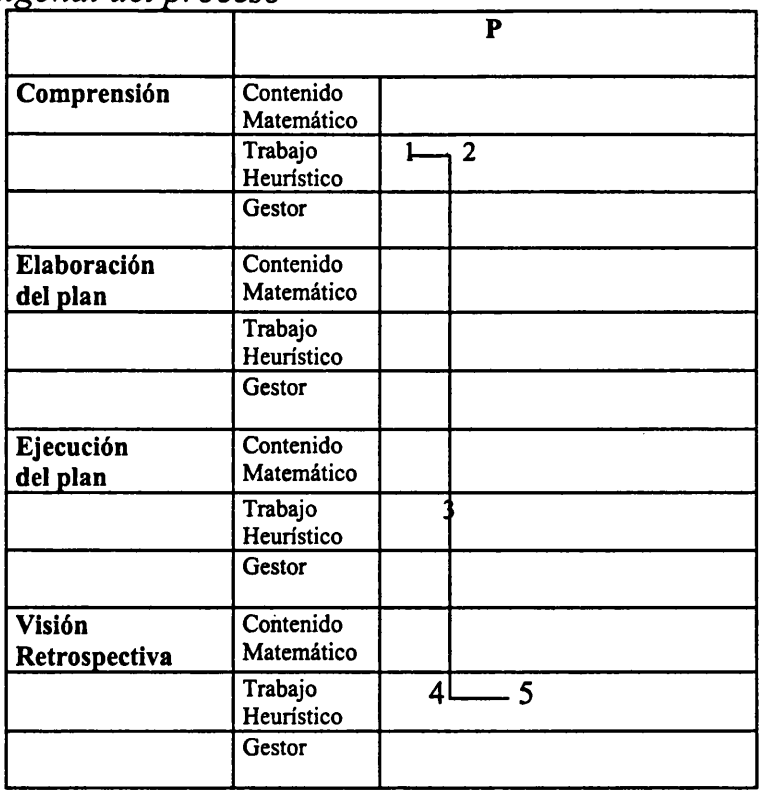
Las orientaciones siguientes llevan a comprobar el resultado mediante superposición. Finalmente la alumna explicita los pasos seguidos y las indicaciones apuntan al uso de un lenguaje apropiado y para destacar la reformulación del problema a partir de fijar uno de los lados.

6.2.14. Problema: "Construir un triángulo dados dos lados y el ángulo opuesto al menor"

6.2.14.1. Tabla de Episodios

	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA P		1- establecer lo dado 2- hacer figura para visualizar la información	
ELABORACIÓN DE UN PLAN P			
EJECUCIÓN DEL PLAN P		3.► Pasa una alumna a ejecutar su plan. Hace una semirrecta y copia A, luego el ángulo ∠b adyacente y por último arco de C(c,B). - precisión en el trazado (prolongar semirrectas y arcos	
VISIÓN RETROSPECTIVA P		4- analizar unicidad del resultado 5- establecer diferencias con problemas ya resueltos	

6.2.14.2. Poligonal del proceso



6.2.14.3. Reconstrucción del proceso

Las primeras orientaciones son para la comprensión del problema. Luego pasa una alumna a ejecutar su plan, que básicamente es el mismo que el del problema anterior: el primero paso es hacer una semirrecta y copiar A, después el ángulo ∠b adyacente y por último trazar la circunferencia C(c, B); y la intervención docente es en cuanto al trazado -prolongar semirrectas y arcos-.

En una fase retrospectiva se analiza la unicidad del resultado y se destaca que a diferencia de los problemas anteriores, en este caso se obtienen dos triángulos que cumplen las condiciones requeridas.

6.2.15. Problema: Construir un triángulo rectángulo dados

A) los catetos

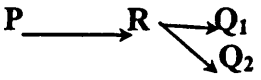
Tabla de Episodios

	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA P	2- concepto "triángulo rectángulo"(elementos) 3- reglas de juego		1- evaluar la suficiencia de datos
ELABORACIÓN DE UN PLAN P			
EJECUCIÓN DEL PLAN P	4- establecer a priori los segmentos que serán considerados como dato 7.▸ Pasa otra alumna; toma como datos los dos catetos. Copia C y por un extremo traza la perpendicular con escuadra. - regla y compás		
VISIÓN RETROSPECTIVA P	8- reglas de juego	5- analizar el resultado (posibilidad de resultados congruentes) 6- resolver el problema de forma diferente 9- reinterpretar la solución atendiendo a los problemas en que se traduce	

Poligonal del proceso

		P
Comprensión	Contenido Matemático	2 3
	Trabajo Heurístico	
	Gestor	1
Elaboración del plan	Contenido Matemático	
	Trabajo Heurístico	
	Gestor	
Ejecución del plan	Contenido Matemático	4 7
	Trabajo Heurístico	
	Gestor	
Visión Retrospectiva	Contenido Matemático	8
	Trabajo Heurístico	5 6 9
	Gestor	

Espacio real de problemas:



R: determinar c

Q_1: trazar la recta perpendicular al lado C por el extremo a

Q_2: Construir la circunferencia C(a, B)

B) un cateto y la hipotenusa

Tabla de Episodios

	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA P			
ELABORACIÓN DE UN PLAN P			
EJECUCIÓN DEL PLAN P	➤Pasa una alumna a ejecutar su plan. 1- establecer a priori los segmentos que serán considerados como dato 2- usar notación adecuada		
VISIÓN RETROSPECTIVA P		3- reinterpretar la solución de un problema del espacio (trazar la perpendicular) acentuando la reformulación derivada de considerar criterio de construcción	

Poligonal del proceso

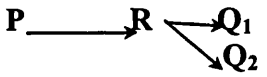
		P
Comprensión	Contenido Matemático	
	Trabajo Heurístico	
	Gestor	
Elaboración del plan	Contenido Matemático	
	Trabajo Heurístico	
	Gestor	
Ejecución del plan	Contenido Matemático	1 2
	Trabajo Heurístico	
	Gestor	
Visión Retrospectiva	Contenido Matemático	
	Trabajo Heurístico	3
	Gestor	

Espacio real de problemas:

Q_1: trazar la recta perpendicular al lado B por el extremo a

Q_2: construir la circunferencia C(c,A)

R: determinar b



C) un cateto y un ángulo adyacente

Tabla de Episodios

	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA P			
ELABORACIÓN DE UN PLAN P			
EJECUCIÓN DEL PLAN P	1- establecer a priori el segmentos y ángulo que serán considerados como dato		

VISIÓN RETROSPECTIVA **Q** **S** **P**		2 -reinterpretar algoritmo de construcción elemental sobre la base del método (perpendicular) 3- reinterpretar un algoritmo de operación básica basándose en intersección de lugares geométricos (copia de ángulo) 5- analizar el resultado (posibilidad de resultados congruentes)	4- chequear el plan implementado

Poligonal del proceso

		P	Q	S
Comprensión	Contenido Matemático			
	Trabajo Heurístico			
	Gestor			
Elaboración del plan	Contenido Matemático			
	Trabajo Heurístico			
	Gestor			
Ejecución del plan	Contenido Matemático	1		
	Trabajo Heurístico			
	Gestor			
Visión Retrospectiva	Contenido Matemático			
	Trabajo Heurístico	5	2	3
	Gestor	4		

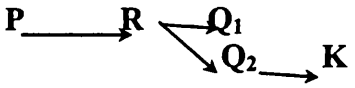
Espacio real de problemas:

R: determinar b

Q_1: trazar la recta perpendicular al lado B por el extremo a

Q_2: construir en el otro extremo de B una recta que forma un ángulo $\angle c$ con dicho segmento

K: copiar ángulo



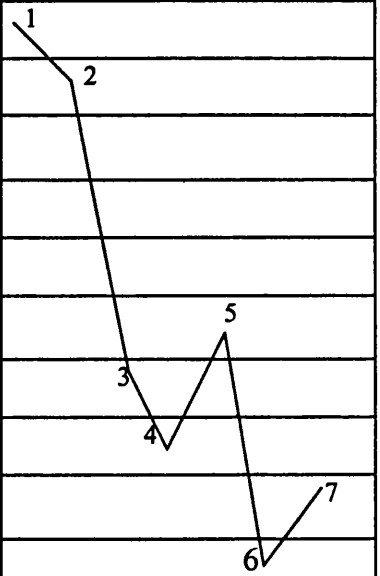
D) un ángulo y la hipotenusa

Tabla de Episodios

	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA P		1- establecer lo dado	2- evaluar la pertinencia de datos
ELABORACIÓN DE UN PLAN P			
EJECUCIÓN DEL PLAN P	5- Algoritmo de construcción implicado (perpendicular)	3► Una alumna hace la construcción. La solución está dirigida por el trabajo hacia adelante. Copia el ángulo; transporta A y toma la escuadra para trazar perpependicular - destrezas: uso de notación adecuada	4- evaluar la pertinencia del paso a ejecutar del plan
VISIÓN RETROSPECTIVA P	7- Construcciones vistas de triángulos rectángulos reformuladas como criterios de congruencia de estos triángulos	6- analizar resultados congruentes	

Poligonal del proceso

		P
Comprensión	Contenido Matemático	
	Trabajo Heurístico	
	Gestor	
Elaboración del plan	Contenido Matemático	
	Trabajo Heurístico	
	Gestor	
Ejecución del plan	Contenido Matemático	
	Trabajo Heurístico	
	Gestor	
Visión Retrospectiva	Contenido Matemático	
	Trabajo Heurístico	
	Gestor	



Espacio real de problemas:

R: determinar a

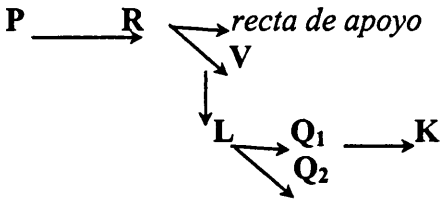
V: construir recta perpendicular a la recta de apoyo que pase por el punto c

L: determinar c

Q_1: construir una recta que forma un ángulo $\angle b$ con la recta de apoyo

K: copiar ángulo

Q_2: construir circunferencia C(b,A) (siendo b la intersección de recta soporte con recta que resulta de Q_1)



En este caso el espacio teórico implicaría la construcción de un arco capaz AC(A,90°) y de una recta que forma un ángulo $\angle b$ con la hipotenusa.

Reconstrucción del proceso:

Se presenta en los minutos finales de una clase y se dan algunas indicaciones para la comprensión. Las mismas llevan a estudiar la suficiencia de datos, a identificar elementos de un triángulo rectángulo y al uso de regla y compás. En la clase siguiente se pasa en forma directa a una fase de ejecución.

Se comienza con la construcción de un triángulo rectángulo dados los catetos. Se establecen los segmentos que serán considerados como dato.

Pasa una alumna a ejecutar el plan pero cambia el problema, ya que considera como datos un cateto y la hipotenusa – para resolverlo hace una triángulo isósceles de base 2C y lados congruentes a B-, pero no se percibe este cambio. Las indicaciones siguientes son para analizar la posibilidad de resultados congruentes.

En el episodio 6 se requiere resolver el problema de forma diferente. Pasa otra alumna a resolver el problema original. Traza una recta sobre la cual apoyar la construcción, copia C y por un extremo traza la perpendicular con escuadra. Las indicaciones tienden a resaltar el uso de regla y compás y a reinterpretar la solución destacando que una vez copiado el cateto C, el problema se traduce en trazar una perpendicular.

Luego se comienza a trabajar en el segundo inciso, tomando como datos un cateto y la hipotenusa. Una alumna pasa a ejecutar su plan, y las sugerencias se refieren a establecer a priori los segmentos correspondientes y al uso de notación. Al revisar la solución, la docente acentúa la reformulación implicada en la construcción de la perpendicular.

Atendiendo al tercer inciso, se establece el ángulo y segmento que serán considerados como datos. Pasa una alumna a realizar la construcción, La intervención docente se centra en una fase retrospectiva; lleva a reinterpretar la construcción de la perpendicular y el copiado de ángulos sobre la base del método, a chequear el plan implementado y a analizar el resultado.

Luego se establecen los datos para trabajar en el cuarto inciso y se lleva a analizar la posibilidad de considerar un ángulo recto o uno obtuso como datos del problema. Una alumna hace la construcción y las indicaciones docentes son para que utilice notación adecuada. Puesto que en un momento esta alumna pierde el rumbo de la solución, las sugerencias son para evaluar la pertinencia del paso a ejecutar, y para

recordar los pasos para construir una perpendicular. Posteriormente se pasa a analizar el resultado.

Por último se hace una revisión de las cuatro construcciones que se han visto y se lleva a reformularlas como criterios de congruencia de triángulos rectángulos.

Cabe destacar que al ejecutar el plan, en todos los casos los alumnos trazan una recta auxiliar sobre la cual apoyan su construcción, lo cual va a tener algunas connotaciones en el proceso. En este tipo de planes de solución podemos percibir algunos rasgos del Método de los Dos Lugares, que no se traducen en los pasos del método, sino que llevan a una versión del método guiada por una recta de apoyo.

En los espacios reales de problemas se ha reflejado esta forma característica de hacer uso del método, sin embargo se ha optado por no incluir en ellos el nombre del método.

6.2.16. Problema: "Construir un triángulo dados H_A y los ángulos adyacentes al lado A "

6.2.16.1. Tabla de Episodios

	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA P		1- establecer lo dado 2- hacer una figura para visualizar la situación descrita en el enunciado 3- usar notación adecuada	
ELABORACIÓN DE UN PLAN P			
EJECUCIÓN DEL PLAN P	4.▸Una alumna ejecuta su plan. Traza una recta horizontal, apoya el compás en uno de sus puntos y traza un arco de radio H_A, con la escuadra traza una perpendicular desde el segmento hasta el arco - Reglas de juego (regla		

	y compás)		▸La alumna hace un nuevo intento. Dibuja una recta y traza la perpendicular por un punto con regla y compás, transporta H_A sobre esa perpendicular, por tanto fija a. Luego traza semirrecta que forma un ángulo ∠b con la recta inicial, con intención de trazar la paralela a esa semirrecta por el punto a. El plan consiste en construir dos triángulos rectángulos dados el cateto y el ángulo opuesto.
P_1			5- afianzar comprensión del plan antes de ejecutarlo
P		7- reformular basándose en el resultado de un problema del espacio	
P_2			8- afianzar comprensión del plan antes de ejecutarlo
P		▸ La docente propone otra solución 10- Indicaciones dirigidas por el Método de la figura semejante	
VISIÓN RETROSPECTIVA			
P_1 P		6- validar la solución 9- resolver el problema de forma diferente. 11- validar la nueva solución	
			12- comprobar usando superposición
		13- precisión en los trazados	

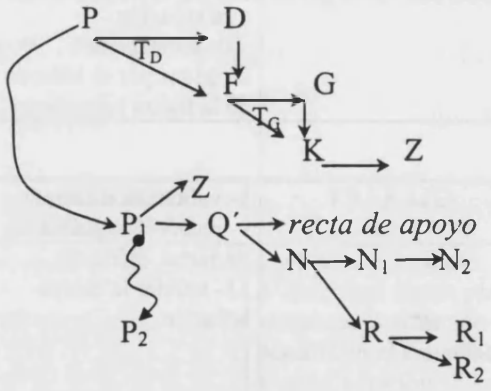
6.2.16.2. Poligonal del proceso

P_1: consruir triángulo rectángulo apb dado un cateto y el ángulo opuesto al mismo

P_2: construir triángulo rectángulo apc dado un cateto y el ángulo opuesto al mismo

		P	P1	P2
Comprensión	Contenido Matemático			
	Trabajo Heurístico			
	Gestor			
Elaboración del plan	Contenido Matemático			
	Trabajo Heurístico			
	Gestor			
Ejecución del plan	Contenido Matemático			
	Trabajo Heurístico			
	Gestor			
Visión Retrospectiva	Contenido Matemático			
	Trabajo Heurístico			
	Gestor			

6.2.16.3. Espacio real de problemas



D: construir una figura semejante a la pedida

F: construir la figura pedida teniendo construída la figura semejante a la misma

Z: validar la solución

G: tener en cuenta otra parte de la condición y construir un segmento X que se corresponda por una homotecia a un segmento auxiliar X' de la figura semejante construida, el cual permita la construcción de la figura buscada mediante el trazado de paralelas.

K: construir la figura pedida teniendo construida la figura semejante y el segmento X.

Q´: determinar b

R: determinar a

$\mathbb{N}$: construir la paralela a la recta L que pasa por a

$\mathbb{N}_1$: construir recta L que forma un ángulo $\angle$b con la recta inicial (2° recta soporte)

$\mathbb{N}_2$. copiar ángulo

$\mathbb{R}_1$: construir la perpendicular a la recta de apoyo

$\mathbb{R}_2$: construir circunferencia C(p,H_A) (siendo p la intersección de la recta de apoyo y su perpendicular)

El espacio teórico de este problema ya fue presentado en el segundo capítulo – apartado 2.4- y se ha elaborado a partir del Método de la Figura Auxiliar.

6.2.16.4. Reconstrucción del proceso

Una alumna hace una figura para visualizar información y la borra antes de hacer la construcción.

En un primer intento, traza una recta, apoya el compás en un punto y traza un arco de radio H_A, con la escuadra traza una perpendicular desde la recta hasta el arco. La profesora hace referencia al uso de regla y compás para la construcción (4). Entonces la alumna traza la perpendicular con regla y compás, transporta H_A sobre esa perpendicular, traza semirrecta que forma un ángulo $\angle$b con la recta soporte (copia el ángulo $\angle$b) y traza una paralela a esta semirrecta que pasa por un extremo de H_A.

La solución implica la construcción de dos triángulos rectángulos conocidos un cateto y el ángulo opuesto.

Se hace la construcción de uno de los triángulos rectángulos, para ello se traza una recta de apoyo y se comienza a trabajar hacia adelante, este procedimiento implica ubicar un punto a una determinada distancia, trazar una recta que forme cierto ángulo con la recta soporte y trazar una paralela. Cabe señalar que el espacio de problemas implicado en esta construcción auxiliar en nada se parece al espacio teórico asociado, lo cual es esperable ya que la aplicación del método de dos lugares llevaría a la construcción de una recta perpendicular y de un arco capaz, es decir involucraría algunos conocimientos que los alumnos no disponen. A diferencia de ello, la versión del Método de los Dos Lugares guiado por una recta soporte conduce a construcciones elementales sencillas y conocidas por los alumnos, y aunque la estructura del espacio de problemas tenga más ramificaciones y aumente el número de problemas, este procedimiento parece facilitar la inducción de los pasos a seguir

Una vez construido el triángulo rectángulo, la docente lleva a validar la solución. Luego, la alumna prosigue con su plan, "explota la simetría de la situación" y actúa en forma similar para construir el segundo triángulo rectángulo. En este punto podría decirse que el método se diluye, ya que la propia heurística es la que lleva a repetir el esquema.

Finalmente la docente explica otra forma de resolución, en la que se hace uso del método de la figura semejante pero también guiado por una recta soporte, y valida esta nueva solución. Por último las sugerencias son para comprobar el resultado mediante superposición y resaltar la importancia de la precisión en el trazado.

6.2.17. Problema: "Construir un triángulo dados dos lados y la altura respecto a uno de ellos" (A, B, H_A)

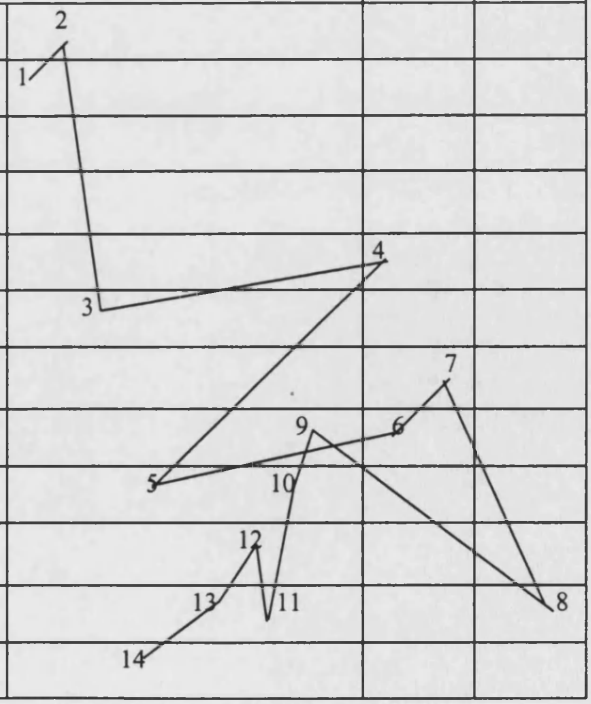
6.2.17.1. Tabla de Episodios

	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA P	2 - hechos (la altura no tiene por qué pasar por el punto medio del lado)	1-establecer lo dado	
ELABORACIÓN DE UN PLAN P		4-indicaciones dirigidas por método de la figura auxiliar	3- evaluar la secuencialidad en que se considerará lo dado
EJECUCIÓN DEL PLAN P	7- reglas de juego: regla y compás	▸ Pasa una alumna a ejecutar el plan. Fija la semirrecta que contendrá al lado A, y con abertura H_A apoya el compás en un punto de la semirrecta y hace un arco 6.- Establecer problemas auxiliares (Trazar perpendicular; determinar a) 9- fijar un dato y reformular (copiando la	5- Afianzar la comprensión del plan antes de ejecutarlo

		altura se tiene un vértice del triángulo buscado)	▸ La alumna continua la construcción. La solución está dirigida por la condición 10- acarreo de información de un problema a otro
VISIÓN RETROSPECTIVA **Q´** P	12- Concepto y hecho implicados en la solución (def de altura; la altura en general no pasa por el punto medio del lado)	8- Reinterpretar el algoritmo de construcción elemental basándose en intersección de lugares geométricos 11-analizar alternativas que pueden presentarse en los pasos de solución 13- resolver el problema de forma diferente	14- evaluar pertinencia del resultado

6.2.17.2. Poligonal del proceso

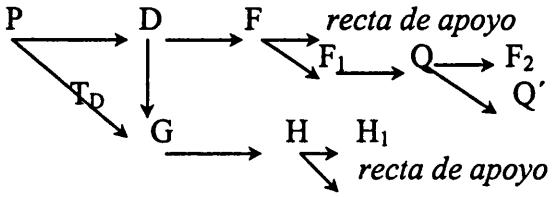
		P	D	F_2
Comprensión	Contenido Matemático			
	Trabajo Heurístico			
	Gestor			
Elaboración del plan	Contenido Matemático			
	Trabajo Heurístico			
	Gestor			
Ejecución del plan	Contenido Matemático			
	Trabajo Heurístico			
	Gestor			
Visión Retrospectiva	Contenido Matemático			
	Trabajo Heurístico			
	Gestor			



D: construir el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{acr}$ conocida la hipotenusa B y el cateto H_A

F_2: construir recta perpendicular

6.2.17.3. Espacio real de problemas



F: determinar *c*

F_1: construir circunferencia C(a,B)

G: construir $\overset{\Delta}{abc}$ teniendo construido $\overset{\Delta}{acr}$

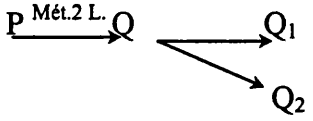
H: determinar *b*

H_1: construir circunferencia C(c,A)

Q: determinar a

Q': construir circunferencia $C(r,H_A)$ (con r intersección de recta de apoyo con la perpendicular)

El espacio teórico de este problema está generado por el Método de los Dos Lugares:



Q: determinar a

Q_1: construir la paralela al lado A a una distancia H_A

Q_2: construir la circunferencia C(c,B)

6.2.17.4. Reconstrucción del proceso

Se establece lo dado y puesto que los alumnos tienden a considerar que la altura tiene un extremo en el punto medio del lado, la docente hace comentarios tratando de clarificar este aspecto. Luego se vale de un dibujo para representar el plan, lo llama figura de análisis. Las primeras indicaciones están dirigidas por el método de figura auxiliar aunque dicho método se aplica a partir de una recta de apoyo.

El problema se retoma en la clase siguiente. Pasa una alumna a ejecutar el plan sugerido en la clase anterior. Hace una semirrecta y su intención en fijar H_A. A modo de organizar la ejecución la docente explicita los problemas auxiliares. La alumna hace una perpendicular con escuadra y los mismos alumnos evocan el uso de regla y compás; entonces otra alumna lleva a cabo la construcción de la perpendicular con regla y compás. La docente focaliza Método de dos lugares en el trazado de perpendicular. La alumna que comenzó la ejecución del plan prosigue la resolución del problema; la solución se apoya en el método de la figura auxiliar -luego de fijar la altura se halla el vértice c, y a partir de este último el vértice b-. Por último otra alumna propone otra resolución. Cambia el problema, sólo considera dos datos y construye un triángulo isósceles de lado A y altura H_A -caso particular-, por lo cual la docente lleva a evaluar la pertinencia del resultado.

Este problema es muy apropiado para mostrar las diferencias entre las actuaciones en la escuela media y en el curso de Resolución de problemas, donde el objeto de enseñanza estaba centrado en el uso de los métodos.

La intención del experto fue guiar a los alumnos por el espacio teórico de problemas, por tanto sus sugerencias se dirigieron a la aplicación del Método de los Dos Lugares. No obstante ante un nuevo enfoque propuesto por un alumno, organizado por el método de la figura auxiliar, lleva a reinterpretar la solución sobre la base de dicho método y destaca el uso del métodod de los dos lugares al hallar la figura auxiliar. O sea que rescata una solución que implica alguno de los métodos, pero en una instancia posterior orienta a retomar el plan inicial que pretendió insinuar.

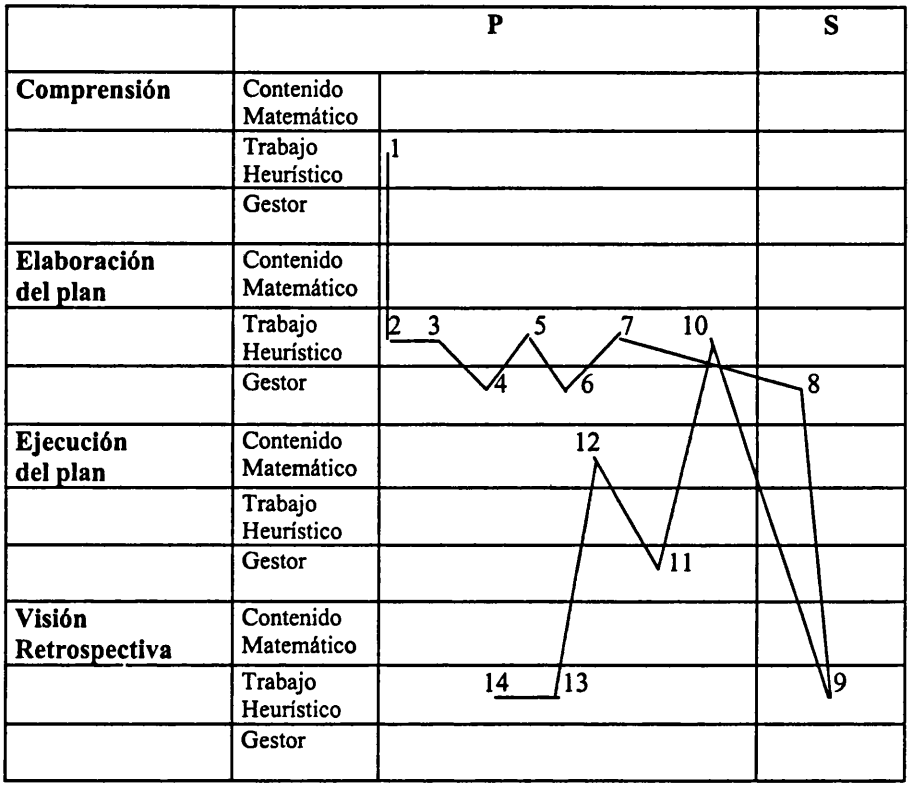
En la escuela media se aborda el problema de forma diferente. A partir de una recta en la que se va a apoyar la construcción, se comienza a trabajar desde los datos y a la vez pareciera ser que se hace la síntesis y el análisis. Hay un análisis oculto que lleva a descubrir la figura auxiliar, la cual se construye utilizando los resultados parciales de los dostintos problemas del espacio, y la intervención docente llevaría a acentuar la presencia del método en las construcciones elementales que integran dicho espacio.

6.2.18. Problema: "Construir un triángulo dados un lado, la altura y un ángulo adyacente respecto a dicho lado" (A, H_A, $\angle b$)

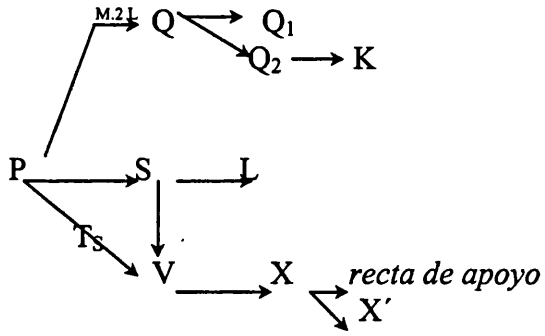
6.2.18.1. Tabla de Episodios

	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA P		1- establecer lo dado	
ELABORACIÓN DE UN PLAN P		2- hacer un dibujo para representar el plan 3- indicaciones dirigidas por el trabajo hacia adelante	
			4- evaluar la pertinencia del paso del plan
		5- reformular basándose en datos y criterio de construcción	
			6- evaluar la secuencialidad en que se considerará lo dado
		7- indicaciones dirigidas para construir una figura auxiliar	
S			8- evaluar la posibilidad de usar construcciones conocidas
P		10- Indicaciones dirigidas por el 2° paso del Método de Figura Auxiliar	
EJECUCIÓN DEL PLAN			11- afianzar la comprensión del plan antes de ejecutarlo
Q	12-algoritmo de construcción elemental (Trazar la paralela se transforma en encontrar un punto a igual distancia de la recta que el punto dado)		
		* (13) Pasa una alumna. La solución está dirigida por el Método de los Dos Lugares	
VISIÓN RETROSPECTIVA S		9- Validar la solución 13- resolver el problema de forma diferente (*) 14- repasar el plan (destacando la reformulación)	
P			

6.2.18.2. Poligonal del proceso



6.2.18.3. Espacio real de problemas



S: construir el triángulo rectángulo apb dados un cateto y el ángulo opuesto

V: construir el triángulo abc habiendo construido el triángulo rectángulo apb

X: determinar c

X′: construir circunferencia C(b,A)

L: probar que el triángulo construido cumple las condiciones del problema

Q: determinar a

Q_1: construir la paralela al lado A a una distancia H_A

Q_2: construir por el extremo de A una recta que forme un ángulo $\angle b$ con dicho segmento
K: copiar ángulo

La serie de problemas implicados en la resolución de S tiene la misma estructura que la correspondiente al problema P_1 ya delineada en 6.2.16.3.

6.2.18.4. Reconstrucción del proceso

Se establece lo dado e inmediatamente se pasa a la fase de elaboración. Se sugiere hacer un dibujo para representar el plan. La docente sigue el enfoque que los alumnos le van indicando y en ese sentido las primeras indicaciones son para trabajar hacia adelante –fijar el lado y su ángulo adyacente- y hacer la reformulación que lleva a reducir el problema a hallar el tercer vértice. Posteriormente en el episodio 7, también las indicaciones son para el trabajo hacia adelante, sólo que partiendo de otra dupla de datos –ángulo y altura-, aunque se dirigen a la construcción de una figura auxiliar. La nueva dupla de datos se utiliza para construir un triángulo rectángulo del cual se conoce un cateto y el ángulo opuesto. La docente propone un procedimiento ya utilizado en un problema anterior – en 6.2.16-, el cual necesita un argumento que lo avale, por tanto lleva a validar la solución de este triángulo auxiliar (9). Luego las sugerencias son para valerse de esta figura al construir el triángulo buscado.

Se pasa a la fase de ejecución, comenzando con indicaciones para afianzar la comprensión del plan (11). Además se rescata la construcción de la paralela, se toma como algoritmo de construcción elemental a disposición de los alumnos, pero se dan orientaciones para el repaso del plan correspondiente, destacando que dicho problema se reduce a encontrar un punto a igual distancia de la recta que el punto dado.

Luego se pide resolver el problema de forma diferente. Pasa un alumno y resuelve el problema mediante el Método de los Dos Lugares - transporta A, copia el ángulo en un extremo de A, traza la paralela al lado A ubicando dos puntos a una distancia H_A. Por último se repasa el plan implicado destacando la reformulación.

En este caso puede observarse que el espacio teórico formaría parte del espacio real sobre el que se desarrolla la actuación.

6.2.19. Problema: "Construir un triángulo dados dos lados y la mediana respecto a uno de ellos" (A, B, M_{eB})

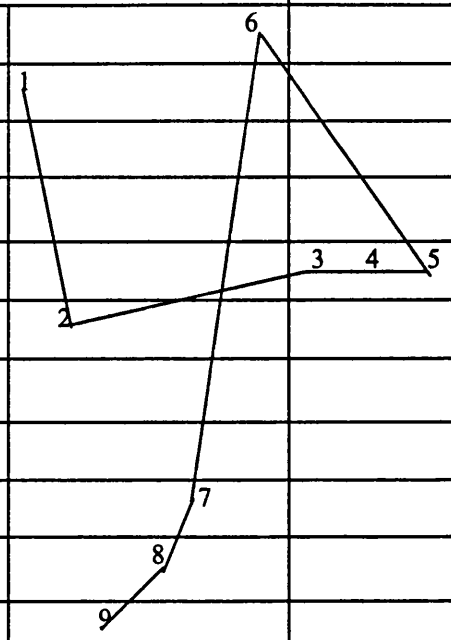
6.2.19.1. Tabla de Episodios

	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA P	6- hecho para una mejor comprensión del problema (la mediana no tiene por qué ser perpendicular al lado)	1- establecer lo dado	
ELABORACIÓN DE UN PLAN Q		3- fijar un dato y reformular (si nos dan un lado nos dan dos vértices) 4- establecer problemas auxiliares 5- indicaciones dirigidas por el segundo paso del Método de los Dos Lugares	2- decisión: a qué punto referir el problema
EJECUCIÓN DEL PLAN P			7.➤ Pasa una alumna. Transporta B y hace su mediatriz, su intención es hacer una circunferencia con centro en el punto medio de B y radio A. - evaluar la pertinencia del paso a ejecutar del plan
VISIÓN RETROSPECTIVA P	8- inferencia de propiedades del resultado	9- analizar alternativas que pueden presentarse en los pasos de solución, observar su influencia en el resultado	

6.2.19.2. Poligonal del proceso

Q: Determinar el vértice b

		P	Q
Comprensión	Contenido Matemático		
	Trabajo Heurístico		
	Gestor		
Elaboración del plan	Contenido Matemático		
	Trabajo Heurístico		
	Gestor		
Ejecución del plan	Contenido Matemático		
	Trabajo Heurístico		
	Gestor		
Visión Retrospectiva	Contenido Matemático		
	Trabajo Heurístico		
	Gestor		



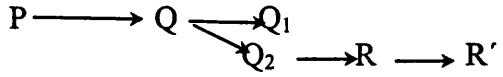
6.2.19.3. Espacio real de problemas

R: determinar m

R′: construir la mediatriz del lado B

Q_1: construir circunferencia C(c,A)

Q_2: construir circunferencia C(m, M_{eB})



6.2.19.4. Reconstrucción del proceso

La intervención docente en la elaboración está dirigida por el trabajo hacia adelante y en este sentido aparecen las indicaciones en esta fase. El episodio 2 es una instancia en la que se decide qué dato fijar, por tanto esto lleva a la elección del punto al cual referir el problema. Esta decisión está traspasada a los alumnos. Los episodios 3 a 5 apuntan a la aplicacioón del Método de los Dos Lugares pero están guiados por el trabajo hacia adelante.

Luego pasa una alumna a ejecutar el plan y en un momento pierde la dirección del trabajo, entonces la docente lleva a una evaluación de los pasos a seguir. En el episodio 8 se analiza el tipo de triángulo que resulta de tal construcción. Por último, se analiza cómo hubiera sido el resultado si el lado A se hubiera copiado en el otro extremo del segmento B, tratando con ello de llevar a la reflexión acerca de ciertos atributos irrelevantes de las figuras –tal como su posición en la hoja-.

Nuevamente, si consideramos la actuación del experto -ver 4.4.6-, podemos advertir una forma diferente de trabajo en el problema, aunque coincidan los problemas que componen el espacio real de ambas actuaciones. El proceso que se deriva de la conducta competente, está modelado por el "Análisis-Síntesis", y al hacer el "Análisis" van apareciendo los problemas generados por el Método de los Dos Lugares. En cambio, las sugerencias de la docente de media, apuntan al trabajo hacia adelante, y a partir de ello se van explicitando los problemas que conforman el espacio generado por el Método de los Dos Lugares. En la actuación parece haber un análisis oculto y una síntesis que se verbaliza.

6.2.20. Problema: "Construir un triángulo dados un lado, la altura y la mediana respecto a dicho lado" (A, H_A, M_{eA})

6.2.20.1. Tabla de Episodios

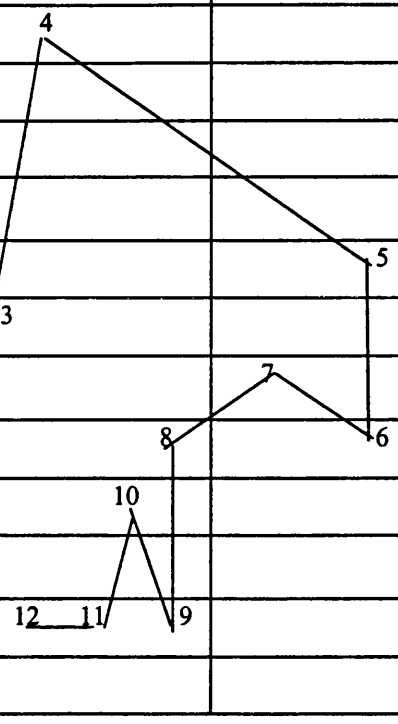
	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA P	4- hecho para una mejor comprensión del problema (la altura no tiene por qué tener como extremo al punto medio del lado)	1- establecer lo dado y lo buscado	
ELABORACIÓN DE UN PLAN P		2. - fijar un dato y reformular (si nos dan la altura tenemos un vértice) 5- indicaciones dirigidas por el método de la	3 - evaluar la secuencialidad en que se considerará lo dado

		figura auxiliar	
EJECUCIÓN DEL PLAN P **S** **P**	▸ Pasa una alumna. Hace una recta horizontal y con escuadra traza una perpendicular y transporta con compás H_A sobre la perpendicular 7- Reglas de juego: regla y compás	6- indicaciones dirigidas por los pasos del método de figura auxiliar S: Construir triángulo rectángulo apm dados un cateto y la hipotenusa 8- fijar un dato y reformular (copiando la altura H_A se tiene el vértice a)	10- evaluar información que se desprende de un problema del espacio
VISIÓN RETROSPECTIVA P		9- analizar alternativas que pueden presentarse en un paso de solución 11- analizar el resultado (la existencia depende de cierta relación entre altura, mediana y lado de un triángulo) 12- resolver el problema de forma diferente (se hizo esta indicación pero a falta de tiempo no se concreta)	

6.2.20.2. Poligonal del proceso

S: Construir triángulo rectángulo apm dados un cateto y la hipotenusa

		P	S
Comprensión	Contenido Matemático		
	Trabajo Heurístico		
	Gestor		
Elaboración del plan	Contenido Matemático		
	Trabajo Heurístico		
	Gestor		
Ejecución del plan	Contenido Matemático		
	Trabajo Heurístico		
	Gestor		
Visión Retrospectiva	Contenido Matemático		
	Trabajo Heurístico		
	Gestor		



6.2.20.3. Espacio real de problemas

S: construir triángulo rectángulo apm dados un cateto y la hipotenusa

R: determinar m

R_2: construir circunferencia $C(a,M_{cA})$

Q: determinar a

L: construir recta perpendicular

V: construir la figura requerida teniendo construido el triángulo rectángulo apm

V_R: determinar los vértices b y c

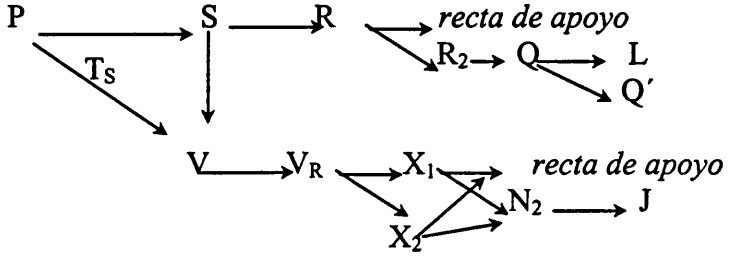
X_1: determinar b

X_2: determinar c

N_2: construir circunferencia $C(m,A/2)$

J: construir mediatriz del segmento A

Q′: construir circunferencia $C(p,H_A)$ (siendo p intersección de recta de apoyo y de recta perpendicular)



El espacio teórico estaría generado por el Método de los Dos Lugares:

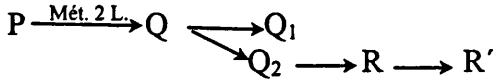
Q: Determinar el vértice a

Q_1: construir recta paralela al lado A que esté a una distancia H_A

Q_2: construir circunferencia C(m, A/2)

R: determinar m

R': construir la mediatriz del lado A



6.2.20.4. Reconstrucción del proceso

Una alumna esboza algunas ideas para el plan, la profesora se vale de un dibujo para representarlo y para hacer algunas sugerencias. A diferencia de lo observado en la actuación del experto, donde las orientaciones se dirigen a la aplicación del Método de los Dos Lugares, lo cual lleva a recorrer el espacio teórico de problemas, las sugerencias en la escuela media están basadas en el método de la figura auxiliar a partir de una recta de apoyo. La figura auxiliar es el triángulo rectángulo apm cuya hipotenusa y cateto se corresponden respectivamente con M_{cA} y H_A. En la construcción de dicha figura se hace uso de la versión del Método de los Dos Lugares que también está guiada por una recta soporte. Este triángulo permite hallar los dos vértices restantes del triángulo buscado mediante la intersección de la recta de apoyo y la circunferencia C(m,A/2).

Las indicaciones que conforman la fase de visión retrospectiva llevan a analizar algunas opciones que pueden considerarse en los pasos de solución, así como a analizar el resultado –de donde se infiere que su existencia depende de cierta relación entre los datos-.

6.3. ALGUNOS RASGOS EN LA ACTUACIÓN

Al igual que lo observado en la actuación del experto, los protocolos muestran **momentos que llevan a dar un sentido global al trabajo realizado o que se va a realizar**. Antes de comenzar el tema la docente anticipa lo que va a enseñar. Así también en ocasiones expresa cuál es el fin de la tarea o hace comentarios acerca de lo

enseñado, por ejemplo, los procedimientos de plegado para hallar perpendiculares requirieron buen tiempo de la primera clase dedicado a la exploración y manipulación del material, y a la puesta en común de resultados, es entonces cuando para transmitir el sentido de la tarea realizada, la docente señala el objetivo de dichas actividades.

Del mismo modo **resalta el conocimiento que será útil para el trabajo posterior**. Por ejemplo en los problemas introductorios de las primeras clases se distinguen fragmentos en la transcripción, asociados a una fase de visión retrospectiva, en los que la docente hace referencia a la notación a utilizar, o lleva a inferir propiedades o tiende a la conceptualización de las figuras como lugares geométricos. Asimismo, algunos episodios identificados en clases posteriores son de este estilo, se destaca el contenido matemático y ciertas heurísticas implicadas en los problemas. En ellos se institucionalizan conceptos y hechos –ver episodio 8 en 6.2.7.1. donde se define mediana y baricentro-, se presentan definiciones equivalentes –en episodio 8 de 6.2.8.1 se alude a la altura como la distancia entre el vértice y la recta que contiene al lado opuesto-, se reformulan conceptos como lugares geométricos –episodio 20 en 6.2.5.1-, se focalizan las reglas de trabajo en el dominio –en episodio 8 de 6.2.10.1 se trata el significado de lo dado- y se orienta a interpretar los algoritmos de construcciones elementales sobre la base del método implicado –ver tabla de episodios correspondientes en 6.2.1, 6.2.2 y 6.2.5 -.

Por otra parte, algunas tareas previstas en la enseñanza requieren explicitar los procedimientos de resolución. En este punto, se observa una **progresiva exigencia respecto al grado de precisión para hacer la formulación.** Por ejemplo, en el plegado para trazar una perpendicular a una recta, llevado a cabo en la primer clase, se admiten descripciones imprecisas, en cambio en la copia de un escudo, hecha en la cuarta clase, la docente lleva a expresar por escrito la resolución, dando indicaciones para describir los pasos seguidos, que llevan a listar las construcciones elementales y operaciones básicas involucradas.

En la actuación de esta docente **"trabajar hacia delante" es la heurística que conduce el proceso de resolución.**

A diferencia del experto, cuya intervención en las fases de elaboración y de ejecución, está estructurada por el Análisis-Síntesis, en la actuación de la docente de media, las indicaciones para la elaboración suelen apoyarse en el "trabajo hacia adelante" –ver las tablas de episodios en 6.2.10.1, 6.2.11.1, 6.2.12.1, 6.2.18.1-, y en la fase de ejecución también se encuentran indicaciones de esta naturaleza –por ejemplo en el episodio 6 de 6.2.17.1 se establecen problemas auxiliares que se derivan al seguir esta dirección de trabajo-, podríamos decir que en general se utiliza esta idea para hacer progresos en la solución.

El examen de la actuación arroja que en situaciones escolares de resolución de problemas de regla y compás, **se utiliza una nueva versión de los métodos.**

El "trabajo hacia adelante" se traduce en la aplicación del Método de los Dos Lugares guiado por una recta de apoyo, o bien del método de la figura auxiliar o de la figura semejante pero diagramados respecto a una recta de referencia.

Hemos visto que en la conducta competente, el "Análisis" organiza la elaboración de un plan en el que están presentes los métodos descriptos en el capítulo 2; y en este sentido es que decimos que el "Análisis" va a configurar la aparición de los demás métodos. Dicho método organiza el plan para elaborar el plan de resolución del problema, modelado a partir de los métodos heurísticos.

En cambio, en la actuación se utiliza una nueva versión de los métodos, ya no es el método puro el que se aplica sino el método guiado por una recta de apoyo, la cual sirve para fijar la construcción y a partir de ella se dirige la atención a las partes de la figura a construir (o se atiende a lo dado).

El punto de partida ya no es la figura de análisis en abstracto, la cual se contempla en su totalidad para elegir el punto al que se va a referir el problema o para descubrir la figura auxiliar que servirá para construir la figura requerida, sino que en este caso se parte de una recta soporte y recién entonces se dirige la atención a los métodos (o a lo dado).

En consecuencia, **los espacios reales de problemas generados por los métodos se diferencian de los previstos en la teoría.**

A partir del "trabajo hacia adelante" van teniendo lugar los pasos del método o de los métodos, pero ya no son los métodos puros sino que están guiados por una recta de apoyo. Por ende, la estructura del espacio de problemas será distinta a la teórica o a la que se deriva de la conducta competente, puesto que la estructura no es la que corresponde al método o a los métodos, sino que proviene de un uso muy particular de estos procedimientos de generación de problemas.

Por ejemplo el espacio real descripto en 6.2.15.D) es una versión del Método de los Dos Lugares guiado por una recta soporte, puede observarse que en este caso uno de los lugares utilizados para hallar el punto incógnita es la misma recta que sostiene la construcción, y el otro lugar se construye mediante la consideración de los datos a partir de dicha recta. En esta versión del método la recta soporte se adiciona a los datos del problema.

Del mismo modo, en el espacio esbozado en 6.2.16.3. la resolución de P_1 implica esta versión del Método de los Dos Lugares, sólo que en este caso uno de los lugares requiere el trazado previo de una segunda recta soporte construida a partir de la primera.

El Método de la Figura Auxiliar guiado por una recta de apoyo, genera un espacio de problemas como el presentado en 6.2.17.3 o en 6.2.20.3. La figura auxiliar provee un punto, que es utilizado en conjunción con otro de los datos, para determinar uno de los lugares geométricos que llevará a encontrar la incógnita –en general el segundo lugar es la recta soporte-.

La estructura del espacio de problemas generado por la aplicación del Método de la Figura Semejante guiado por una recta de apoyo, sería similar a la que hemos diseñado en la teoría –ver el espacio descrito en 6.2.16.3 en el cual una parte del mismo se deriva del uso de este método-, no obstante estaría organizada de distinta forma ya que la aplicación del método no está basada en el análisis previo de la figura..

El examen del proceso en los distintos problemas estaría mostrando que la nueva versión de los métodos, en algunos casos llevaría a modificar los espacios de problemas generados por los mismos, y en otros se mantendrían los problemas que componen el espacio teórico pero estarían organizados de manera diferente a la que hemos previsto en los análisis teóricos, ya que los pasos de los métodos se estructuran por el "trabajo hacia adelante".

Los espacios reales muestran que **no se sigue una secuencia ideal de uso de los métodos.**

En la teoría se ha establecido una secuencia de uso de los métodos y a partir de ella se han elaborado los espacios teóricos de problemas.

En la práctica, el uso de los métodos no sigue una secuencia, ya que depende entre otras cosas, de los conocimientos a disposición de los alumnos, de las intenciones de la enseñanza, etc.

Hemos visto que en la actuación competente el espacio teórico suele formar parte del espacio real. Esto es razonable ya que en las clases del experto el objetivo no es resolver el problema con un método sino que se trata del dominio de los métodos, por tanto el espacio real contiene la serie de problemas que proviene de distintos enfoques, cada uno de los cuales brinda un entretejido de problemas derivado de la aplicación de alguno de los métodos.

En el ámbito escolar, donde los objetivos curriculares apuntan tanto a contenidos conceptuales como procedimentales, también se hace uso de los distintos métodos. La aparición de los distintos métodos surge de la variedad de perspectivas de resolución, las cuales tienen lugar a partir de indicaciones para resolver el problema de forma diferente; a veces estas sugerencias quedan como tal, y otras veces se llegan a concretar nuevos planes de solución -por ejemplo en los problemas comentados en 6.2.16 o en 6.2.18, se llevan a cabo nuevas formas de abordar el problema que envuelven distintos métodos-.

Asimismo, otras situaciones también nos dan pauta de que los métodos se usan dejando a un lado la secuencia de uso. Por ejemplo, a veces se lleva a cabo un sólo enfoque para resolver el problema, el cual proviene de la aplicación de uno de los métodos que en la elaboración teórica ubicamos en segundo lugar; tal es el caso en 6.2.17 o 6.2.20 que se resuelven mediante el Método de la Figura Auxiliar aunque bien podrían haberse resuelto por el Método de los Dos Lugares.

En el caso del experto, también hubo oportunidades en que se ha llevado a encontrar una figura auxiliar en vez de aplicar el Método de los Dos Lugares –ver 4.4.2- aunque ello se debe a la necesidad de considerar procedimientos alternativos para evadir

la dificultad que conlleva la aplicación de un método que involucra conocimientos que los alumnos no disponen –como ser la construcción de un arco capaz en ese problema-.

El **uso de los métodos en la escuela media se hace en forma implícita**, ya que los métodos en sí no constituyen el propósito de la enseñanza. El análisis de los problemas comentados en 6.2.16 a 6.2.20, abordados una vez los alumnos disponen de una base de conocimientos que permitiría la formulación de los distintos métodos heurísticos implicados, muestra que la intervención docente no se dirige en ese sentido. Particularmente si enfocamos la resolución propuesta por una alumna al problema visto en 6.2.18, la cual es el único ejemplo en toda la instrucción donde se utiliza el Método de los Dos Lugares en su forma canónica, puede observarse que esta situación no se aprovecha para llevar a la institucionalización de dicho método.

Otro aspecto que surge de la observación de la conducta, es que **el sentido otorgado a la "figura de análisis" difiere del que se adoptó en las sesiones de enseñanza.**

La "figura de análisis" fue la heurística que acompañó a la presentación de los métodos y a la resolución de los problemas que han conformado el Modelo de Enseñanza descripto en el capítulo anterior. El sentido que se ha pretendido dar a esta noción, es el de ser la figura que lleva a hacer el "Análisis", es decir la figura que resulta de dar el problema por resuelto y destacar en ella los datos, para así establecer las relaciones de los datos unos con otros y con la figura incógnita, y descubrir el punto al cual referir el problema o la figura que será útil para hacer progresos en la solución.

En la actuación se suele hacer referencia a esta noción, hacer una "figura de análisis" es una indicación usual al abordar el problema, y a la que se ha otorgado diferentes sentidos.

La construcción de la paralela a una recta – ver 6.2.5- es el único problema en el que este término adopta el mismo significado que en las sesiones de enseñanza.

Otras veces se utiliza tal expresión para hacer referencia a un dibujo a mano alzada en el que se representan distintas exploraciones a fin de configurar un plan –ver la reconstrucción de los procesos en 6.2.17.4 y 6.2.18.4-, por lo cual indicaciones de

esta naturaleza las hemos hecho corresponder al descriptor "hacer un dibujo para representar el plan".

Sin embargo, en general con esta expresión, lo que se requiere es hacer una figura en la que estén plasmados los datos, es una sugerencia que va en la línea de las destrezas que tienden a la comprensión del problema, por tanto la hemos calificado como "hacer una figura para visualizar la información descrita en el enunciado".

La reinterpretación que se hace de la "figura de análisis" es acorde con el estilo seguido para hacer y ejecutar los planes de solución, ya que salvo raras excepciones – problema comentado en 6.2.5- el proceso está conducido por el trabajo hacia delante.

Por otra parte, el espacio real de problemas presentado en 6.2.16 y 6.2.18 muestra que **los problemas de probar también forman parte de la enseñanza** de regla y compás llevada a cabo por esta docente.

El primer caso aparece en la construcción de un triángulo dados (H_A, $\angle b$, $\angle c$). Una alumna ejecuta su plan, el cual consiste en la construcción de dos triángulos rectángulos en los que se conoce un cateto y el ángulo opuesto. Construye uno de los triángulos y repite el esquema de solución para construir el segundo. Dicho esquema está conducido por el trabajo hacia delante: se traza una recta sobre la que se "apoya" la construcción, con relación a la cual se copian los datos, y se completa tal construcción con el trazado de una paralela. La docente lleva a validar la solución de este problema del espacio, por tanto plantea un nuevo problema "Probar que este resultado cumple con las condiciones requeridas", brindando además, los elementos que permiten concretarla. La simetría de la situación hace prescindir de la validación de la solución en el caso del segundo triángulo.

Asimismo, la docente propone un nuevo enfoque para resolver el problema, en el que subyace el método de la figura semejante, y también lleva a validar la nueva solución, otorgando los elementos para ello.

Análogamente, las indicaciones de la fase de elaboración, en el problema presentado en 6.2.18. (A, H_A, $\angle b$), llevan a considerar un triángulo rectángulo auxiliar con idénticas características que los triángulos utilizados en 6.2.16, y a seguir el mismo esquema de solución. Luego de ello, nuevamente la docente conduce a la validación y en esta oportunidad son los alumnos los que dan el argumento para la prueba.

Pareciera ser que los problemas de probar adquieren entidad en el ámbito escolar observado, como consecuencia del "trabajo hacia adelante", el cual resulta ser el medio de organización del proceso en conjunto.

En capítulos anteriores, ya hemos mencionado que cuando el plan de solución está organizado por el "Análisis", es el mismo método el que prueba. Por ende, en la conducta del experto, quien se vale del "Análisis" para configurar la aparición de los métodos, sólo están presentes los problemas de probar cuando el plan se desvía del uso de dichos métodos.

A diferencia de ello, en la actuación que se está examinando, se podría decir que aparece la necesidad de probar cuando lo que se hace no está probado por el "Análisis" y además el problema tiene cierto grado de complejidad, ya que implica la construcción de una figura auxiliar o de una semejante, pues cuando se hace una aplicación directa del Método de los Dos Lugares – por ejemplo en 6.2.19- no se lleva a la prueba. Sin embargo este siempre no es el caso, si bien los problemas examinados en 6.2.17 y en 6.2.20 cumplen estas condiciones, en ellos no se recurre a la validación, aunque cabe destacar que la figura auxiliar involucrada en los mismos es un triángulo rectángulo, del que se conoce la hipotenusa y un cateto, cuya construcción ya había sido tratada previamente -ver 6.2.15.B)-.

Además, **el examen de la actuación permite identificar tres partes en la enseñanza.**

Al inicio de la enseñanza se trabajan problemas que implican el uso de una cierta noción que se pretende introducir o bien el uso de nociones ya conocidas. Los problemas serían el recurso didáctico para acordar ciertas reglas de trabajo en el dominio –la regla se considera no graduada y se la utiliza para trazar rectas y segmentos, el compás se usa para trazar circunferencias-, para presentar conceptos como herramientas para la solución de los problemas, para reconceptualizar las figuras como lugares geométricos, y para realizar convenciones acerca de la notación.

Las actividades parecen estar destinadas a familiarizar a los alumnos con los conceptos y formas de trabajo, que van a ser la base para el tratamiento de las construcciones elementales.

La metodología para guiar el proceso de resolución es la siguiente: se lee el problema, un alumno ejecuta su plan para resolverlo y se hace una revisión de dicha resolución apuntando a los objetivos mencionados.

Gradualmente se van abordando las construcciones elementales de regla y compás. Se rescata el conocimiento que los alumnos tienen de los algoritmos de construcción y se lleva a descubrir qué hay detrás de ese procedimiento mecánico.

En el caso de la mediatriz se sugiere trazar las circunferencias implicadas –en lugar de hacer arcos de circunferencia- a fin de visualizar los puntos que permiten construir la recta buscada y los dos lugares geométricos que lo determinan. En el caso de la perpendicular y de la bisectriz, se destaca el segmento auxiliar que se deriva del primer paso de la construcción y se enfatiza que el problema se reduce a hallar la mediatriz de dicho segmento.

En todos estos casos se hace la **reinterpretación de los algoritmos de construcción sobre la base del método implicado pero sin llegar a formularlo.**

La construcción de la paralela, aunque en el análisis teórico la hemos incluido en las construcciones elementales, en la práctica parece no ser considerada como tal. Si bien los alumnos ponen en marcha un algoritmo de construcción que se presenta en el libro de texto utilizado en el curso –que implica el trazado de una circunferencia con centro en la recta dada y que pasa por el punto dado, a partir de la cual se apoya el procedimiento de construcción-, no se realiza una reinterpretación del mismo sino que la docente propone un nuevo plan, que está organizado por el "Análisis". En líneas generales, este enfoque coincide con el que ha seguido el experto al tratar este problema.

Las orientaciones son para el trabajo hacia atrás, llevan a reducir el problema a la determinación de un punto, para lo cual se requiere resolver algunos problemas auxiliares. En el recorrido por el espacio de problemas, la docente hace de sugeridor heurístico, lleva a realizar reformulaciones, a establecer problemas auxiliares, centra la atención en las construcciones elementales e insiste en la reinterpretación de sus algoritmos -los pasos del algoritmo de construcción de la perpendicular se reinterpretan de acuerdo al método subyacente-. Por último hace el repaso del plan ejecutado y, enfocando el contenido matemático, da indicaciones que llevan a la conceptualización de la paralela como lugar geométrico.

En una segunda etapa de la enseñanza, cuando los alumnos están medianamente familiarizados con las construcciones elementales, se abordan las construcciones de triángulos caracterizadas por una terna compuesta por lados y ángulos. **La organización de la instrucción gira alrededor de los criterios de congruencia de triángulos.**

Los problemas comentados en 6.2.9 a 6.2.15 muestran que las indicaciones que apuntan a la comprensión se refieren a las reglas de trabajo en el dominio –regla y compás, establecer a priori los segmentos y ángulos que se considerarán como dados- y llevan a hacer una figura para visualizar la información del enunciado.

En relación a la elaboración del plan, las sugerencias son para el "trabajo hacia adelante" –ver 6.2.10 a 6.2.12- y de este modo se hacen presentes los métodos, conforme a esta línea de trabajo van apareciendo los problemas intermedios que llevan a construir la figura requerida -ver 6.2.11-. Otras veces no hay orientaciones en esta fase y se pasa directamente a la ejecución, donde inicialmente la intervención docente se centra en el trazado de una recta de apoyo en la cual basar la construcción, para luego considerar los pasos del Método de los Dos Lugares a partir de la misma –ver episodios 6 y 7 en 6.2.9.-

Durante la ejecución se presentan los algoritmos de operaciones básicas a medida que se necesitan. Las indicaciones apuntan a ciertas destrezas como la precisión en los trazados y uso de notación adecuada; además se insiste en el uso de la regla y el compás y se acuerdan nuevas reglas de trabajo en el dominio –establecer a priori los segmentos o ángulos que se consideraran como dados-.

Finalmente, en una fase de visión retrospectiva la docente hace sugerencias de diferente naturaleza. Por un lado hace de gestor y lleva a verificar si es correcto el resultado mediante superposición; en algunas ocasiones actúa como sugeridor heurístico, ya que lleva a analizar la unicidad de éste -6.2.14-, a reinterpretar la solución desde la heurística "fijar un dato y reformular" -6.2.13.-, a reinterpretar la solución destacando alguno de los problemas del espacio -6.2.15 A)-, a interpretar los algoritmos de construcciones elementales abordados previamente sobre la base del método implicado -ver 6.2.15 B) y 6.2.15 C)-. Además, apuntando al contenido, destaca las reglas para trabajar en el dominio –regla y compás, establecer a priori los segmentos y

ángulos que se considerarán como dados-, y lleva a inferir propiedades –en episodio 10 de 6.2.9.1 se analiza la relación entre los lados de un triángulo, lo que desemboca en la inferencia de la desigualdad triangular-.

Por último, el análisis de la unicidad de los resultados lleva a focalizar los criterios de congruencia de triángulos.

El examen de la actuación muestra que en la escuela media, se ha abordado esta serie de problemas con el propósito de introducir un contenido curricular, por tanto la organización de la instrucción como la intervención docente ha girado en torno a ello.

En una tercera etapa de la enseñanza, se tratan construcciones de triángulos, ya no sólo caracterizados por ternas de ángulos y lados, sino que también se incluyen alturas, medianas, etc. En esta etapa, los alumnos disponen de cierta habilidad para realizar operaciones básicas o construcciones elementales y además está consolidada la idea de la recta soporte como punto de partida para la construcción.

Las tablas de episodios de los problemas analizados en 6.2.16 a 6.2.20, muestran que las indicaciones para la comprensión van en la línea de las destrezas y en ocasiones se hace alusión a algún hecho relacionado con los elementos implicados en el enunciado.

Las fases de elaboración y de ejecución están estructuradas por el "trabajo hacia adelante", se pueden percibir ciertos rasgos de los métodos, que hemos interpretado como la versión de los métodos en la actuación. Hay **tres preguntas** que orientan el tránsito por estas fases "¿qué harían primero? ¿qué pueden hacer ahora? y ¿qué harían después?", las cuales **van a delinear el "trabajo hacia adelante", heurística que organiza la versión de los métodos**. Las indicaciones relativas a la gestión del proceso, corresponden a evaluaciones de la pertinencia del paso del plan o llevan a reflexionar acerca de cual será el dato que se considerará inicialmente.

En la visión retrospectiva, la docente institucionaliza conceptos y enfatiza ciertos hechos –por ejemplo en 6.2.17, define altura de un triángulo y recalca que la altura no tiene por qué pasar por el punto medio-. Las sugerencias heurísticas que componen esta fase son para validar la solución, resolver el problema de forma diferente, hacer los trazados con precisión, analizar alternativas que pueden presentarse en los pasos de solución, y repasar el plan destacando la reformulación –en 6.2.18 se acentúa que el

problema se reduce a encontrar un vértice-. Por otro lado, las sugerencias en la línea del gestor, llevan a comprobar el resultado o a evaluar su pertinencia.

Hasta aquí el examen de la actuación muestra que se ha hecho una reinterpretación de los métodos y de la noción de "figura de análisis", lo cual conlleva a esta pregunta: ¿hasta qué punto esta difusión de los contenidos heurísticos conduce a la apropiación de un estilo heurístico de resolución de problemas?. Si nos ponemos en una postura radical podríamos decir que en el ámbito escolar, la práctica de los métodos poco tiene que ver con los métodos, ya que desaparece la esencia de los mismos.

Por ejemplo, el problema que viene dado por la terna (A, H_A, B), comentado en 6.2.17, se puede organizar con dos lugares: se fija el lado A y el problema se reduce a determinar el vértice a. Las propiedades de dicho punto son 1) estar a distancia H_A del lado bc, 2) estar a distancia B del punto c. Cada una de estas propiedades corresponde a un lugar geométrico, la primera se corresponde con la paralela a bc a distancia H_A y la segunda con la circunferencia C(c,B).

Esta forma de resolución es la prevista en los espacios teóricos, y la que se ha observado en la actuación del experto, quien además rescata otra manera de resolver el problema acorde al Método de Figura Auxiliar, y en este sentido alude a sus pasos y señala la presencia del Método de los Dos Lugares en la construcción de la figura auxiliar. Sin dudas, este proceso está modelado por los métodos.

En la escuela media, las sugerencias también conducen a la construcción de un triángulo rectángulo auxiliar, que servirá de base para resolver el problema original, pero esa figura auxiliar se reconoce como tal una vez construida. Esta forma de proceder estaría tergiversando el espíritu del método.

El Método de la Figura Auxiliar, consiste en hacer una figura de análisis, descubrir cierta figura que permitirá la construcción de la original y resolver el problema con lo que se deriva de haber construido dicha figura auxiliar. En la actuación se parte de una recta soporte y se lleva a considerar los datos que permiten la construcción de la figura auxiliar, y una vez construida recién se destaca el rol que tiene en la solución.

El Método de la Figura Semejante, también está basado en el análisis previo de la figura, que nos muestra la posibilidad de construir una figura semejante y de

determinar un centro de homotesia y dos puntos homólogos –uno en la figura semejante y otro en la figura requerida-, lo cual nos permita construir la figura que buscamos a partir de la figura semejante. Lo fundamental del método no es hacer un figura semejante, sino que es hacer una figura semejante pero sabiendo cómo se utilizará para construir la figura requerida. A diferencia de ello, el proceso en la actuación está organizado por el trabajo hacia adelante, lo que lleva a "construir una figura semejante", en lugar de "construir una figura semejante que ya esté enlazada con la que se quiere construir gracias a un análisis previo".

De igual modo en el problema caracterizado por (A,B,M_{cB}), descripto en 6.2.19, se trazan las dos circunferencias correspondientes a los dos lugares geométricos implicados, pero las orientaciones no llevan a aplicar los pasos del método –reducir el problema a determinar un punto, para lo cual será necesario encontrar dos lugares geométricos a los que el punto pertenezca-, sino que luego de construir sendas circunferencias se dice que el vértice puede estar en cualquiera de estos lugares. Por tanto el método se estaría desarrollando en sentido inverso.

En este caso los problemas que componen el espacio real coinciden con los que conforman el espacio teórico, sólo que estaría organizados de forma distinta. En cambio en otros casos –ver 6.2.17 y 6.2.20- los problemas del espacio real difieren de los problemas que se derivarían de la aplicación del Método de la Figura Auxiliar en su forma canónica.

Si nos restringimos a las producciones verbales que se registran, las expresiones "acá ya tengo un vértice ¿qué me falta ahora?" –en clase 17, episodio 9 de correspondiente al problema comentado en 6.2.17-, "¿qué harían primero?, ¿después qué copiaríamos? y ¿qué hago después?" –preguntas que conforman el episodio 3 correspondiente al problema 6.2.18-, "a ver qué pasa si empezamos por la altura,....¿qué puedo hacer ahora?" –episodio 6 del mismo problema-, son indicaciones que no corresponden a la enseñanza del método, puesto que no contienen el análisis de la figura. En todo momento el "Análisis" está oculto, lo que lleva a transformar los métodos.

Las tres preguntas que orientan el tránsito por las fases de elaboración y ejecución "¿qué harían primero? ¿qué pueden hacer ahora? y ¿qué harían después?", son sugerencias que no corresponden a la enseñanza de los métodos sino que llevan a

una generación primaria de datos, que tarde o temprano conducen al resultado. Esta línea de acción hace aguas cuando el problema es un poco más complejo.

El carácter de las indicaciones respondería a una fase en la cual el problema ya ha sido analizado, ya se han identificado los problemas del espacio y se está haciendo la síntesis. Es decir, en este proceso el "Análisis" ha desaparecido y precisamente en la enseñanza de los métodos éste no debiera estar oculto, ya que forma parte de la enseñanza.

Por otra parte, si se quiere analizar la actuación de la docente de media e interpretar las diferencias existentes respecto a lo observado en las clases del experto, debemos tener en cuenta las diversas intenciones curriculares referidas a los problemas en general y las específicas a la resolución de los problemas de regla y compás, en los dos ámbitos en de trabajo.

Desde el punto de vista de los mundos de la resolución de problemas con los que se clasifican los usos de los problemas en la enseñanza, en esta investigación claramente podemos discriminar el mundo de la *pura resolución de problemas* y el mundo llamado *resolución de problemas y conceptos*, en los cuales está ubicado respectivamente el trabajo del experto y de la docente.

Los usos y funciones de los problemas en la escuela media son los correspondientes a la enseñanza de un campo conceptual. Los problemas se asocian a los conceptos y son los problemas los que brindan el campo semántico de los conceptos.

En cambio, en las clases del experto, los problemas son vistos desde los propios problemas y se utilizan para enseñar los modos y medios de resolución que pueden considerarse independientes del contenido, y que hemos llamado heurísticos.

En el esquema teórico, podemos encontrar tres ingredientes que hacen falta en la enseñanza de resolución de problemas con regla y compás: los métodos, la idea de lugar geométrico y las construcciones elementales. Los dos últimos están implicados al usar el Método de los Dos Lugares, el cual es el pilar fundamental en la enseñanza de estas construcciones.

La idea de lugar geométrico obliga a la reconceptualización de conceptos, por un lado un concepto está formulado como el conjunto de puntos que cumplen tal

propiedad, y por otro esa propiedad se traduce en un figura –por ejemplo estar a distancia H_C de A, se traduce en paralela a A a una distancia H_C-. A veces la propiedad y la figura prácticamente son lo mismo –por ejemplo, la propiedad es estar en la recta R y la figura es la recta R-, pero otras, tal como el caso de la paralela o la mediatriz, la propiedad y la figura son claramente distinguibles; las definiciones de las figuras no siempre se corresponden con las propiedades utilizadas al formularlas como lugares geométricos.

Por otro lado, hemos visto que los métodos no resuelven el problema sino que lo transforman en otro, de modo que la aplicación del método finalmente se reduce a resolver un problema mediante construcciones elementales. De esta forma las construcciones elementales son las "terminales" de los espacios de problemas, y son lugares geométricos que permiten resolver el problema.

Situados en el mundo de la pura resolución de problemas, observamos que los lugares geométricos y las construcciones elementales son consecuencia del método, y podemos acordar que en la enseñanza cabe tratar estas dos ideas en forma previa a los métodos, ya que estarán involucradas en los mismos.

Sin embargo, si queremos entender el modo de organizar la enseñanza en la escuela media deberíamos delimitar la óptica desde la cual se abordan las construcciones geométricas.

Fundamentalmente el trabajo escolar está inmerso en el mundo de la resolución de problemas, donde los problemas se miran desde los conceptos. La intención de la enseñanza se centra en los conceptos para lo cual se usan los problemas, lo que va a delinear la manera de organizarla. En esa dirección la docente institucionaliza conceptos y propiedades, pero además incorpora otros elementos que intervienen en la resolución de los problemas de regla y compás y que ya han sido esbozados al referirnos al Modelo de Competencia. En este sentido las sugerencias apuntan a las destrezas, a las reglas para trabajar en el dominio y al conocimiento de las construcciones elementales.

Desde esta perspectiva, podemos distinguir tres partes en la enseñanza con un objetivo específico. La primera, se centra en la conceptualización de las figuras como lugares geométricos y en el conocimiento de las construcciones elementales. La segunda, está dirigida a la enseñanza de los criterios de congruencia de triángulos. La tercera, se conforma por un conjunto de problemas con un fuerte componente heurístico,

ya que pueden resolverse mediante la aplicación de diferentes métodos. Esta última parte de la enseñanza podría considerarse centrada en los métodos, aunque ya no son los descriptos en la teoría sino una reinterpretación de los mismos organizada por el "trabajo hacia adelante".

Si examinamos la actuación en la escuela media desde la pura resolución de problemas, donde las construcciones de regla y compás son un componente para el profesor que pretende enseñar modos y medios de resolución heurísticos, podemos observar que el potencial heurístico de estos problemas prácticamente se reduce a ciertas formas adecuadas de trabajo que son útiles para descubrir y al uso ingenuo de figuras auxiliares y semejantes. Podríamos decir que hay una incorporación de algunos elementos del Modelo de Enseñanza, los cuales han sido reinterpretados con los significados de la propia práctica docente.

En la enseñanza tradicional los problemas de regla y compás están en el terreno de los algoritmos y en general son utilizados para ilustrar el funcionamiento de los criterios de congruencia. Es un contenido curricular escondido tras otras nociones y muchas veces sólo responde al objetivo de introducir el uso de los instrumentos de geometría en las clases de matemática.

Estas consideraciones llevan a entender la conducta observada y más aún, muestran la dificultad que surge al tratar de modificar ciertas concepciones provenientes de las prácticas escolares.

Si a esto añadimos, que la actuación no se desarrolla en el mundo de la pura resolución de problemas sino en un mundo en que los problemas se abordan para dar sentido a los conceptos, entonces podemos comprender el lineamiento de las intervenciones docentes. La enseñanza gira en torno a conceptos y propiedades, y los métodos aparecen implícitamente ya que no son objeto de la misma.

El papel que históricamente han jugado los problemas de regla y compás en el ámbito escolar, así como las intenciones de la enseñanza, son factores que modelan el accionar docente. El uso de los problemas de regla y compás que lleve a la apropiación de elementos propios de la heurística, y que además esté acorde a los objetivos curriculares de la enseñanza media argentina, debe hacer frente a las resistencias que

genera esta nueva perspectiva. No obstante, las reinterpretaciones observadas a lo largo de la unidad de enseñanza pueden ser indicios que llevan al cambio, es decir pueden considerarse indicadores de una primera aproximación, a una enseñanza de las construcciones geométricas, que rescata el potencial heurístico de las mismas.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES

El trabajo que hemos presentado indaga el mundo de la pura resolución de problemas desde la enseñanza de las construcciones de regla y compás, con la intención de elaborar elementos de un modelo de competencia al enseñar a resolver estos problemas específicos, que pueda utilizarse para dar cuenta de los datos empíricos obtenidos de la actuación docente.

La naturaleza del trabajo ha llevado a comentar, a lo largo de los capítulos que conforman esta memoria, las aportaciones de distinta índole que se realizan en el mismo. A continuación vamos a indicar las conclusiones de orden teórico, de orden metodológico y los resultados de la observación de la conducta que consideramos más relevantes.

7.1. En relación con las *producciones teóricas*:

Cada método actúa sobre el proceso de resolución de una manera muy particular, característica del método en sí, un método puede ser considerado como generador de una serie de problemas que le es propia, por tanto interesa describir esa serie de problemas. En este sentido hemos elaborado los respectivos **esquemas de generación de problemas de cada uno de los métodos heurísticos**.

La **elaboración del espacio teórico de problemas correspondiente a las construcciones elementales**, lo cual lleva a la interpretación de sus algoritmos de construcción sobre la base de los métodos y se plasma en un entretejido de problemas que terminan en construcciones de circunferencias y rectas - a veces son datos, otras son arbitrarias, y otras se realizan recurriendo a las operaciones básicas -.

La **sistematización del análisis teórico del proceso de resolución de los problemas**, mediante la delimitación del uso del Método de los Dos Lugares -a los casos en que los lugares implicados correspondan a una construcción elemental o se

hallen mediante el trazado de circunferencias y rectas a partir de los datos- y el establecimiento de una secuencia teórica de uso de los métodos.

La **identificación del contenido matemático, heurísticas y tareas de gestión implicadas en la resolución de problemas de regla y compás,** lo que ha llevado a determinar distintas competencias que se ponen en juego en el proceso.

La **adaptación a los problemas de regla y compás de los tipos de heurísticas** definidas por Puig, que ha sido utilizada para diferenciar los componentes del plano heurístico que se ponen en juego al abordar esta clase de problemas y para poner de relieve la atención que se les dispensa en la enseñanza.

La **determinación del contenido matemático, heurísticas y tareas de gestión que pueden estar implicadas en el tránsito por las fases** que conforman el esquema de Polya, lo que lleva a profundizar el conocimiento de los componentes del proceso y describir la forma en que están presentes durante el mismo.

La idea de **"figura de análisis"**, lo que lleva a establecer el punto de partida sobre el cual se apoya el uso de los distintos métodos.

A diferencia de Schoenfeld, quien estudia los problemas en general y describe los elementos que hacen falta para resolver problemas, examinando su presencia para cada problema y en la actuación de cada resolutor, **nuestras elaboraciones teóricas permiten caracterizar la conducta competente prescindiendo de los sujetos concretos.** Nos hemos basado en los análisis teóricos de nuestros problemas particulares para identificar los problemas involucrados y los elementos para la competencia. Es decir, enfocamos al resolutor ideal y construimos el espacio teórico de problemas, a partir de lo cual sabemos de todos los problemas, operaciones básicas y construcciones elementales implicados, además detectamos las nociones matemáticas que hay que considerar, el tipo de heurísticas a utilizar, sabemos por dónde se debe transitar para resolver el problema y las actividades de gestión asociado a ello. Por ende, no es necesaria la observación del resolutor para descubrir estos elementos de competencia ya que todo esto está definido para cada problema.

La **caracterización de la conducta competente en función del espacio teórico de problemas y de los aspectos relacionados al contenido matemático, al trabajo heurístico y a las tareas de gestión implicadas en los problemas,** es uno los

resultados más importantes de este trabajo ya que sobre esta base se ha interpretado la actuación.

7.2. Respecto a las *conclusiones de tipo metodológico*:

El **espacio teórico de problemas correspondiente a diferentes construcciones de regla y compás**, examinando los procesos de resolución generados por los métodos, y determinando la serie de problemas por los que se atraviesa hasta llegar a una construcción elemental, lo que ha permitido hacer la comparación entre la actuación ideal y la actuación de los sujetos.

Los **espacios reales de problemas** elaborados a partir del análisis de la actuación, que contienen el análisis de la presencia de los métodos en situaciones de enseñanza y de la forma particular que adoptan en la actuación, lo que permite interpretar la conducta y aumentar el conocimiento de los métodos.

La **redefinición de los componentes del conocimiento y la conducta** que surgen de la obra de Schoenfeld, realizada ya no en torno al resolutor sino a los propios problemas, lo que ha permitido diferenciar los aspectos relacionados al contenido matemático, a la heurística y a la gestión del proceso implicados en las construcciones geométricas, y en función de ello se ha podido caracterizar la conducta competente y analizar la actuación docente.

La **incorporación al modelo multifasético de Polya de la idea de espacio de problemas de Puig**, lo cual lleva a considerar las fases respecto al problema del espacio que se está abordando.

La **resignificación de la noción de espacio de problemas de un proceso de resolución de un problema**, noción que se desprende de los análisis de Puig hechos con resolutores, en esta investigación se plasma en la idea de **espacio real de problemas**, lo que da cuenta de la estructura de la actuación docente al adaptarse tanto a las demandas cognitivas de la tarea, como a los conocimientos y al nivel de los alumnos a quienes se está impartiendo la enseñanza.

La **modificación de la idea de episodios del esquema de análisis de Schoenfeld**, realizada como consecuencia de la introducción de la noción de espacio de problemas, de la división en fases y de los componentes de la cognición, lo que brinda

información detallada acerca del sentido local y global que toda conducta puntual tiene respecto al proceso. Por tanto, en lugar de tener grandes bloques de conducta que poco dicen acerca de lo que sucede en su interior, esta idea ha llevado a fragmentar la transcripción en tipos de conducta descriptibles según la fase y el aspecto cognitivo al que hacen referencia, y además nos hemos servido del espacio real de problemas en el que se está ejerciendo dicha conducta para establecer el sentido que tiene en el proceso.

La **elaboración de una lista de descriptores de la actuación según fases y aspectos relativos al contenido matemático, al trabajo heurístico y a tareas de gestión**, la cual ha sido uno de los pilares para realizar la clasificación de episodios.

La **incorporación de la tabla de episodios como instrumento de análisis**, lo cual permite observar la naturaleza e intención de las indicaciones docentes durante el proceso.

El **diseño de un esquema representativo del proceso de enseñanza de resolución de un problema "la poligonal del proceso"**, lo que brinda un medio para observar al espacio de problemas como a un todo, permitiendo una visualización inmediata del número de transformaciones del problema, de la cantidad de indicaciones y de su distribución en el espacio de problemas, del tipo de orientaciones en las fases recorridas y en los distintos problemas, de las fases que efectivamente se recorren y el modo en que se recorren.

La **interpretación desde la heurística de una docencia que persigue un estilo heurístico de resolución de problemas**, la cual ha permitido examinar la actuación docente en la escuela media desde un referente de actuación.

7.3. En referencia a los *resultados que provienen de los datos empíricos*:

Estos resultados se derivan del análisis de la conducta del experto y de la docente de media y es de destacar que responden a objetivos diferentes en esta investigación. Aquellos que se desprenden de la observación de la actuación competente han sido utilizados para identificar elementos del Modelo de Competencia y nos hemos valido de ellos para examinar la actuación docente en la escuela media. Exponemos a modo de conclusión los resultados más relevantes de ambos estudios.

A) Las *conclusiones relativas a la observación de la conducta del experto* se resumen en los siguientes puntos:

- Su estrategia general de enseñanza es **"anticipar a los alumnos lo que se va a enseñar, enseñar en ese sentido y luego hacer referencia a lo que se ha enseñado"**.

- El **proceso de resolución está conducido por el Método de Análisis-Síntesis**, por ende se vale del método para organizar el tránsito en las fases de elaboración y ejecución del plan. En el primer caso su actividad se dirige a orientar el recorrido por el espacio de problemas, llevando a identificar los problemas que lo componen y a establecer las relaciones entre los mismos, en particular las relaciones con el problema original; esta fase contiene todo el paseo por el espacio de problemas. En el segundo caso, lleva a recorrer dicho espacio en sentido contrario, sin dejar de lado las relaciones existentes. Cabe señalar que este resultado tuvo consecuencias sobre la elaboración de uno de los instrumentos de análisis.

- Los **problemas de probar aparecen como consecuencia de la propuesta de un plan que se desvía de los métodos**, el cual está basado en hechos intuitivos y difícilmente comunicables.

- **Rescata e interpreta todas las soluciones apoyadas en los métodos** puesto que el objetivo de la instrucción es el uso de todos los métodos heurísticos. El docente suele sugerir un método aunque también rescata las soluciones de los alumnos que involucran otro de los métodos; gestiona el proceso de enseñanza de modo que los distintos métodos estén presentes en la resolución de los problemas. La modalidad de hacerlo es pidiendo resolver el problema de forma diferente o rescatando las soluciones que aparecen naturalmente en una situación de resolución de problemas en clase, y en ambos casos se concluye con la reinterpretación de la solución acorde al método subyacente.

- En lugar de seguir la secuencia ideal de uso de los métodos **opta por el método que considera más adecuado**. Se observan instancias en las que sugiere encontrar una figura auxiliar en vez de aplicar el Método de los Dos Lugares, llevando así a considerar procedimientos alternativos a fin de evitar dificultades provenientes de la aplicación de dicho método, debidas a la complejidad de las nociones implicadas. En la práctica todas las piezas funcionan a la vez, por un lado está la jerarquía de los métodos, en los cuales hay involucrados conceptos matemáticos, destrezas, etc., y por

otro lado están los conocimientos a disposición de los alumnos, lo que lleva al docente a optar por el método que a su criterio es más adecuado para ese momento de la enseñanza.

- **Se pueden distinguir dos partes de la enseñanza.** Hay una etapa inicial en la que se hace la presentación del método, y otra etapa en la cual los alumnos ya disponen del método, en ellas los alumnos pasan de ser "simples resolutores" a "resolutores y observadores de su propio proceso".

- **Introduce el método mediante un problema y su manera de enseñar es actuar como resolutor.** Utiliza un ejemplo para mostrar lo que posteriormente se convertirá en los pasos del método, exhibe todo lo que hay que hacer para resolver el problema y a la vez lo va justificando, y al hacer esta justificación van apareciendo los pasos del método que se quiere enseñar. A partir de la figura de análisis va conduciendo a las sucesivas reformulaciones que llevan a transformar el problema hasta reducirlo a construcciones elementales. De este modo las construcciones elementales surgen en forma natural en la enseñanza ya que se corresponden con los lugares geométricos implicados.

- **Gradualmente va aumentando la complejidad de los problemas e involucrando a los alumnos en la toma de decisiones y sus sugerencias se centran en la aplicación de los pasos del método.**

- **El Método de los Dos Lugares y el Método de la Figura Auxiliar** aparecen en la enseñanza como medios de solución que **se apoyan en cierta manera de actuar que puede justificarse, y que gradualmente se va esquematizando hasta para convertirla en pasos del método.**

- El **número de indicaciones va disminuyendo. Inicialmente** las indicaciones docentes son muchas y **responden a las distintas fases del proceso de resolución. En la segunda etapa** de la enseñanza el número es mucho menor, y prácticamente **se concentran en la elaboración del plan.**

- El **tipo de indicaciones docentes para transitar las diferentes fases varía según la etapa de la enseñanza:**

  Las indicaciones para la **comprensión** disminuyen notablemente de un la primera a la segunda etapa de la enseñanza. Éstas hacen alusión a los conceptos implicados, apuntan a la adquisición de ciertas destrezas –tales como usar

notación adecuada, dibujar la situación descripta en el enunciado, separar lo dado y lo buscado-, y a evaluar la suficiencia de datos.

La cantidad de sugerencias para la **elaboración** del plan prácticamente se mantiene a lo largo de la instrucción. Inicialmente responden a los distintos aspectos cognitivos, llevan a hacer la figura de análisis, a concebir las nociones como lugares geométricos, a establecer criterios de construcción, a hacer las reformulaciones que conducen a descubrir los pasos del método, y otras veces se corresponden con tareas de gestión asociadas, que inducen a evaluar la información que se dispone y la pertinencia de las exploraciones que se hacen para configurar un plan. En una segunda etapa prevalecen las de naturaleza heurística, se persiste en el uso de la figura de análisis y se dan sugerencias que podemos asociar a los diferentes pasos del método, que incluso alguna de ellas se traduce en una instancia de toma de decisiones.

En la **fase de ejecución**, las sugerencias de la primer etapa tienden a llevar a cabo los pasos del método y además responden a ciertas tareas de gestión que permiten hacer el recorrido por el espacio de problemas. En una segunda etapa apenas hay orientaciones para la ejecución, las mismas se reducen a hacer la síntesis, aunque a veces se da alguna sugerencia relativa al conocimiento de ciertas reglas de trabajo en el dominio –tal como la naturaleza genérica de la figura de análisis o el establecimiento de los segmentos que serán considerados como datos-, o cuando el problema es más complejo, se dan sugerencias tendientes a interpretar y transportar la información a fin de guiar el tránsito por el espacio de problemas.

La **fase de visión retrospectiva**, inicialmente se compone de indicaciones para comprobar el resultado, validar planes de solución que no responden al método, focalizar las transformaciones del problema en el caso de las construcciones elementales y resaltar ciertos hechos o conceptos útiles para el trabajo posterior, además el relato de la solución de los problemas se institucionaliza como modelo para imitar, lo que desemboca en la formulación de los pasos del Método de los Dos Lugares. En una segunda etapa, las orientaciones se centran en la institucionalización del Método de la Figura

Auxiliar y en alguna ocasión llevan a analizar la unicidad y existencia del resultado.

B) Las *conclusiones relativas a la observación de la actuación de la docente de media* pueden sintetizarse en los siguientes puntos:

- Se observan momentos en que la docente **lleva a dar un sentido global al trabajo realizado o al que se va a realizar.**

- La **heurística que conduce el proceso de resolución es el "trabajo hacia adelante".**

- Se utiliza una **versión de los métodos organizada por el "trabajo hacia adelante"**, lo cual se traduce en la **aplicación de los métodos** –de los Dos Lugares, de la Figura Auxiliar y de la Figura Semejante- **guiados por una recta de apoyo.**

- Los **espacios reales de problemas generados por los métodos se diferencian de los previstos en la teoría** debido a la consideración de la recta de apoyo.

- **El uso de los métodos se hace en forma implícita,** ya que los métodos en sí no constituyen el propósito de la enseñanza.

- El **uso de los métodos no sigue la secuencia ideal.** La aparición de los distintos métodos surge de la variedad de perspectivas de resolución, que tienen lugar a partir de indicaciones para resolver el problema de forma diferente. Asimismo, a veces se lleva a cabo un sólo procedimiento de solución que implica la construcción de una figura auxiliar aunque el Método de los Dos Lugares hubiera sido pertinente para el caso, ya que los lugares involucrados habían sido tratados en problemas anteriores.

- El **sentido otorgado a la "figura de análisis" difiere del que se adoptó en las sesiones de enseñanza impartida a la docente,** ya que se utiliza tal expresión para hacer referencia a un dibujo a mano alzada en el que se representan distintas exploraciones que apuntan a configurar un plan, o para hacer una figura en la que estén plasmados los datos a fin de facilitar la comprensión del problema.

- Los **problemas de probar forman parte de la enseñanza,** ya que se recurre a la validación de la solución en algunos casos en los que el problema tiene cierto grado de complejidad, puesto que implica la construcción de una figura auxiliar o de una semejante.

- **Se identifican tres etapas en la enseñanza.** En la primera, se tratan los conceptos y formas de trabajo del campo específico de regla y compás, y las construcciones elementales. En esta etapa se hace la reconceptualización de las nociones geométricas, se abordan las construcciones elementales rescatando el conocimiento que los alumnos tienen de los algoritmos de construcción y reinterpretándolos sobre la base del método implicado pero sin llegar a formularlo. En una segunda etapa, se abordan las construcciones de triángulos caracterizadas por una terna compuesta por lados y ángulos, y la organización de la instrucción gira alrededor de los criterios de congruencia de triángulos. La tercera etapa podría considerarse centrada en los métodos, ya que se tratan problemas que pueden resolverse mediante la aplicación de diferentes métodos, aunque ya no son los descriptos en la teoría sino una reinterpretación de los mismos organizada por el "trabajo hacia adelante".

- **En las distintas etapas de la enseñanza se registran las siguientes indicaciones para transitar las fases del proceso:**

Las indicaciones para la **comprensión** en las distintas etapas hacen referencia a los conceptos implicados en el enunciado, a las reglas de trabajo en el dominio, y apuntan a ciertas destrezas - establecer lo dado y lo buscado, uso de notación, hacer una figura para visualizar la información del enunciado-

Respecto a la **elaboración** del plan, las indicaciones docentes en la primera etapa de la enseñanza llevan a rescatar el conocimiento que los alumnos tienen de los algoritmos de las construcciones elementales, a destacar algún hecho para configurar el plan, a realizar reformulaciones basadas en algún criterio de construcción, a establecer diferencias con problemas anteriores, y a evaluar la pertinencia del plan. En las dos etapas restantes las indicaciones correspondientes a esta fase apuntan al "trabajo hacia adelante" y conforme a esta línea de acción van apareciendo los problemas intermedios que llevan a construir la figura requerida; se pueden percibir ciertos rasgos de los métodos, que hemos interpretado como la versión de los métodos en la actuación.

Las indicaciones docentes que conforman la fase de **ejecución**, inicialmente se refieren al uso de notación adecuada, al uso de la regla y el compás, y a evaluar la pertinencia del paso a ejecutar del plan; en las construcciones elementales están dirigidas por los métodos que subyacen en

ellas, aunque no se hace la formulación del mismo. En la segunda etapa se presentan los algoritmos de operaciones básicas a medida que se necesitan, y todas las construcciones se realizan a partir del trazado de una recta de apoyo. El grueso de las indicaciones apunta a ciertas destrezas -como la precisión en los trazados y uso de notación adecuada-, y reglas de trabajo en el dominio – regla y compás, establecer a priori los segmentos o ángulos que se consideraran como dados-. En la tercera etapa hay tres preguntas que orientan el tránsito por esta fase así como por la fase anterior "¿qué harían primero? ¿qué pueden hacer ahora? y ¿qué harían después?", las cuales van a delinear el "trabajo hacia adelante", heurística que organiza el uso de los métodos.

Respecto a las orientaciones correspondientes a una fase de **visión retrospectiva**, en una primera etapa se dirigen a institucionalizar conceptos y hechos implicados en la solución, a inferir definiciones equivalentes, a destacar reglas del dominio –tal como algunos criterios de construcción-, además llevan a analizar alternativas que pueden presentarse en los pasos de solución, a reinterpretar la solución de las construcciones elementales acentuando algunos rasgos de los métodos implicados, y a evaluar la pertinencia del resultado. En una segunda etapa, las sugerencias llevan a verificar si es correcto el resultado mediante superposición, a analizar la unicidad del resultado, a interpretar los algoritmos de construcciones elementales abordados previamente sobre la base del método implicado; y apuntando al contenido, se destacan las reglas para trabajar en el dominio –regla y compás, establecer a priori los segmentos y ángulos que se considerarán como dados-, se lleva a inferir propiedades de las figuras, y el análisis de la unicidad de los resultados de toda la serie de problemas trabajados en esta etapa, lleva a institucionalizar los criterios de congruencia de triángulos. En la tercera etapa, la intervención docente se dirige a institucionalizar conceptos y enfatizar ciertos hechos, a validar la solución, a resolver el problema de forma diferente, a realizar los trazados con precisión, a analizar alternativas que pueden presentarse en los pasos de solución, a repasar el plan destacando la reformulación, y a comprobar el resultado o evaluar su pertinencia.

Los resultados presentados en A) y B) que respectivamente corresponden al análisis de la conducta del experto y de la docente de media, responden a dos mundos distintos de la resolución de problemas, lo cual debe considerarse al hacer la interpretación de los mismos. Los primeros están situados en el mundo de la "pura resolución de problemas", donde los problemas se miran desde los propios problemas, en cambio los otros pertenecen a mundo de la "resolución de problemas y conceptos", en el cual los problemas se miran desde los conceptos. La forma diferente de concebir a los problemas en estos dos mundos repercute en la organización de la enseñanza y en el tipo de orientaciones que se dan a los alumnos.

En el primer caso la tarea es el uso de los métodos para construir la figura requerida y en ese sentido la intervención docente gira en torno a ciertas destrezas, a la reconceptualización de las nociones como lugares geométricos, a las construcciones elementales y a los pasos del método. El esquema general del proceso está marcado por el Método de Análisis-Síntesis y la "figura de análisis" es el punto de partida para descubrir el método a utilizar.

En el segundo caso, el objetivo de la enseñanza son los conceptos y por tanto las orientaciones se centran en la noción de lugar geométrico, en la reconceptualización de las figuras como lugares geométricos, en las definiciones de los conceptos implicados, en propiedades de los mismos, y en los criterios de congruencia de triángulos. No obstante, se advierten algunas indicaciones que apuntan a ciertas destrezas, a una concepción de las construcciones elementales más allá del terreno algorítmico y al uso de una versión de los métodos de resolución organizada por el "trabajo hacia adelante".

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Beppo Levi (1947): *Leyendo a Euclides*. (Ed. Rosario S. A.).

Butts T. (1980): Posing Problems Properly, en Krulik, S. y Reys, R. eds. (1980): *Problem Solving in School Mathematics*. (NCTM:Reston,VA), págs. 23-33

Chartnay R. (1994): Aprender por medio de la resolución de problemas, en Parra, C. y Saiz, I., eds.(1994): *Didáctica de matemáticas: Aportes y Reflexiones*. (Paidós Educador), págs. 51 - 63.

Chevallard, Y. y Jullien M. (1991): Autour de L'enseignement de la Geometrie au College (Première part), *Petit x*, vol. 27, 1, págs. 41-76.

Euclides (1991): *Elementos*. (Editorial Gredos: Madrid).

Kilpatrick, J. (1985): A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving, en Silver E., ed. (1985): *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*. (Lawrence Erlbaum Associates: Hillsdale, NJ), págs. 1 - 15.

Lakatos, I. (1981): El método de análisis y síntesis, en *Matemáticas, Ciencia y Epistemología*. Vol.2 Alianza Ed: Madrid.

Lester, F. K. (1985): Methodological consideratios in research on mathematical problem solving instruction, en Silver E., ed. (1985): *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*. (Lawrence Erlbaum Associates: Hillsdale, NJ), págs. 41 - 69.

Newell, A. y Simon, H. (1972): *Human problem solving*. (Prentice Hall: Englewood Cliffs, NJ.).

Polya, G. (1945): *How to solve it*. (Princeton University Press, Princeton NJ). [Traducción castellana de J. Zugazagoitia: *Cómo plantear y resolver problemas* (Trillas: México) 1965].

Polya, G. (1954): *Mathematics and Plausible Reasoning*, 2 vols. (Princeton University Press: Princeton, NJ). [Traducción Castellana de J. L. Abellán: *Matemáticas y Razonamiento Plausible*. (Tecnos: Madrid), 1966].

Polya, G. (1962-1965): *Mathematical Discovery*, 2 vols. (John Wiley and Sons, New York).

Puig, L. (1994): *Semiótica y Matemáticas*. (Episteme, col. Eutopías: Valencia).

Puig, L. (1996): *Elementos de resolución de problemas*. (Editorial Comares: Granada).

Puig, L. y Cerdán, F. (1988): *Problemas aritméticos escolares*. (Síntesis: Madrid).

Scandura, J. M. (1977): *Problem Solving. A structural/process approach with instructional implications.* (Academic Press: Nueva York).

Schoenfeld, A. H. (1979): Explicit heuristic training as a variable in problem solving performance, en *Journal for research in Mathematics Education*, vol 10, págs. 173-187

Schoenfeld, A.H. (1980): Heuristics in the classroom, en Krulik, S. y Reys, R. eds. (1980): *Problem Solving in School Mathematics*. (NCTM:Reston,VA), págs. 9-22

Schoenfeld, A. H. (1983): *Problem Solving in the mathematics curriculum: a report, recomendations and an annotated bibliography.* (Mathematical Association of America: Washington, DC).

Schoenfeld, A.H. (1985): *Mathematical problem solving.* (Academic Press: Orlando, FL).

Schoenfeld (1992): Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics, en Grows ed. (1992): *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* (McMillan, Nueva York), págs. 334-370.

Schroeder y Lester, F. (1989): Developing understanding in mathematics via problem solving, en Trafton P.R., ed (1989): *New directions for elementary school mathematics.* (NCTM: Reston, VA), págs. 31-56.

ANEXOS

ANEXO I: Las clases del experto

ANEXO II: Programa de la asignatura a cargo del experto

ANEXO III: Unidad de Enseñanza

ANEXO IV: Las clases de la docente de la escuela media

ANEXO I

Correspondiente al capítulo 4

Las clases del experto

En las transcripciones de clase se ha respetado la notación utilizada. En este caso, el docente sigue el convenio de notación español para la representación de las figuras, el cual no coincide con el que hemos adoptado en esta memoria.

Se han indicado con la letra F las intervenciones del profesor Fernando Cerdán, que ha sido el experto que ha colaborado en esta investigación.

Se hace referencia a cada uno de los alumnos mediante la inicial de su nombre, se utiliza la sigla Al cuando se trata de un alumno que no ha sido individualizado, y se emplea Als para indicar la pluralidad, o sea las intervenciones de los alumnos en su conjunto.

Se han numerado los fragmentos de la transcripción que corresponden a los diferentes episodios y se han rotulado con *IE las indicaciones generales de enseñanza.

CLASE 1

"Construcciones con regla y compás"

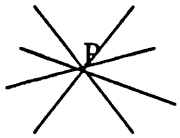
*IE:

► Reglas de juego

F: Hoy vamos a ver problemas de construcción geométrica con regla y compás. ¿Qué quiere decir con regla y compás? pues simplemente que vamos a tratar problemas de construcción geométrica y que nos vamos a servir para trazar cualquier construcción de figuras geométricas con estos instrumentos, regla y compás. Regla, obviamente es para trazar rectas y el compás para trazar círculos.

► Recta, criterio de construcción

F: Sin embargo creo que deberíamos decir qué entendemos por recta y qué es una recta. Si tengo una regla trazo una recta (mientras traza una recta horizontal a mano alzada). Pero a veces me interesa tener la recta en una posición determinada, que la recta pase por un punto y por ese punto puedo dibujar ésta, y ésta, y ésta.

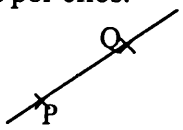


(Nota: todas las figuras son hechas a mano alzada)

F: Y si deseamos trazar una recta y la única condición que nos ponemos es que la recta pase por ese punto, la recta no está absolutamente determinada. Creo que todos sabemos que para tener una única recta hay que darse...

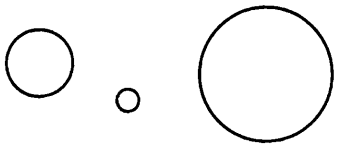
Als: Dos.

F: Esto es, que si uno quiere determinar una recta en particular debe de conocer dos puntos, y cuando elige esos dos puntos, un punto P y un punto Q ya no tiene más que una ubicación. Recordar la geometría que visteis en la escuela, el axioma de Euclides "dados dos puntos existe una única recta que pasa por ellos.

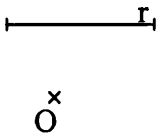


► Circunferencia, criterio de construcción

F: En cuanto a la circunferencia vamos a ver qué nos hace el compás. Puedo trazar una circunferencia u otra, u otra, con el compás.



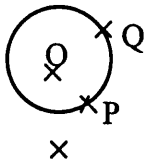
Lo puedo abrir a voluntad ¿qué decido en cada uno de los casos? El radio. ¿Y qué decido más? El centro. Luego, después de haber escogido un centro y un radio tengo determinada la circunferencia. Luego, puedo construir o dibujar una circunferencia cuando elijo el centro y el radio. Con este centro y este radio sólo es posible dibujar una circunferencia.



► Circunferencia como lugar geométrico

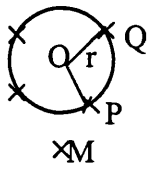
F: Me gustaría también decir algo acerca de lo que hemos dibujado. Porque... aunque una recta nos sea familiar y no podamos describir lo que es, o una circunferencia nos sea familiar...convendría describir un poquito lo que hemos dibujado. Es decir, estos puntos que he dibujado como pertenecientes a una circunferencia ¿qué es lo que los caracteriza?. A los puntos que están sobre una recta no sé que es lo que los caracteriza, pero... a los puntos que están sobre una circunferencia sí que los caracteriza algo ¿verdad?.

Si este es el centro y este un punto de la circunferencia (los agrega en una de las circunferencias anteriores), cómo digo que este está, este está y este no está.... si este es P y este es Q.



Als: Porque están a igual distancia.

F: Equidistan del centro los dos. Una de las formas que vamos a concebir es ver a todas las figuras geométricas como lugares o conjuntos de puntos que cumplen una determinada condición. En el caso de la circunferencia podemos decir que la circunferencia es el lugar geométrico de los puntos que están a igual distancia de uno dado que llamamos centro, y a la distancia le llamo el radio de la circunferencia. ¿Está eso?...Es lo que me acabáis de decir, el punto que he dibujado, que no le he puesto nombre por cierto (mientras agrega el nombre), este punto lo puedo llamar M y no está en la circunferencia porque no está a igual distancia de O que Q y que P; Q está a una distancia r, P está a una distancia r (lo agrega en el dibujo) y cualquier punto de la circunferencia está a una distancia r (agrega otros puntos sobre la circunferencia). Luego si en lugar de pensar cuando un punto está en la circunferencia, pensamos en todos los puntos que están en la circunferencia, diremos que la circunferencia es un conjunto de puntos que están a igual distancia de uno determinado, este O que es el que llamamos centro de la circunferencia, ¿verdad?..., y la distancia que hay desde cualquier punto al centro es el radio.



Esto no es nada más que recordar la idea de circunferencia, nada más que ahora vista desde otro punto de vista. De ahí que para dibujar la circunferencia con el compás, uno deja la abertura fija y siempre va rayando aquellos puntos que están a igual distancia; ¿no?... (mientras hace el movimiento y dibuja a mano alzada una circunferencia).

► Construcciones elementales que se usarán en los problemas

F: Me gustaría también decir algunas palabras referentes a algunas situaciones geométricas... a ver si se acuerdan. ¿Se acuerdan de la palabra perpendicular? ¿Qué quiere decir?... perpendicular es perpendicular a una recta, o se habla de rectas perpendiculares, porque... saben que perpendicular es un concepto relacional, por lo tanto no se puede aludir a un objeto sino a dos objetos, entonces hablamos de rectas perpendiculares. ¿Se acuerdan de la palabra paralela?, ¿Se acuerdan de la palabra

mediatriz? mediatriz de un segmento ¿se acuerdan también qué es?. Me imagino que no hace falta preguntar si recuerdan lo que es un ángulo, pero... ¿recuerdan también la palabra bisectriz de un ángulo?. Bueno pues, en principio vamos a hacer algunos problemas que hacen referencia a estos constructos elementales que todos me dicen que recuerdan. Si hay alguno que haga falta matizar de manera en particular, pues nos detendremos y precisaremos un poco lo qué es. Pues, va el primer problema:

"Dada una recta y un punto exterior a ella, trazar una recta paralela a la dada que pase por el punto dado"

Als: ¿Qué?,....dada una recta....

1.

F: ¿Me permitís que a la vez que vaya enunciando el problema represente sobre la pizarra la situación?.

2.

F: Dada una recta y un punto exterior a ella, que no pertenezca a la recta eso quiere decir, trazar una recta que sea paralela a la recta dada y que pase por el punto dado.

3.

F: Como ya tenemos nombre para los objetos, he puesto r para la recta ...En general siempre utilizaremos letras minúsculas para las rectas, r, s, p,... y mayúsculas para los puntos como antes P o Q o para el centro de la circunferencia... Utilizamos siempre notaciones que nos digan algo.

4.

F: Ahí tienen la recta y un punto; el objeto del problema es, utilizando la regla y el compás, trazar una recta que pase por P y sea paralela a r. Tiempo para uds. Los que no tengan regla y compás pueden imaginar las acciones que realizan si los tuviesen.

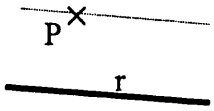
*I.E.

► Explicita cual es el objetivo de trabajar en estos problemas "iniciarse en el método"

F: Como siempre hemos hecho con los problemas, vamos a intentar un poquito ir iniciándonos en el método que vamos a utilizar siempre para construir.

5.

F: Entonces ¿cuál es mi problema?...., construir una recta paralela a esa recta que pase por ese punto. Pues, voy a imaginar que ya lo he hecho, es decir que tengo la recta paralela construida. Esto no me cuesta nada, ¿verdad?. Imaginar que aquí tengo una recta paralela no me cuesta absolutamente nada (mientras agrega recta punteada en la figura). Siempre voy a procurar marcar más gruesos los datos (mientras remarca la recta r). Esta es la recta dada y mi problema es trazar esta recta (señala recta punteada).



6.

F: Entonces mi problema es trazar una...recta (mientras lo escribe). Pero no una recta cualquiera sino una recta que sea...

Als: Paralela

F: Paralela y además quiero que pase por P (lo escribe)

Trazar una recta → paralela a r
→ pase por P

Digamos que estas son las dos condiciones requeridas para la recta objeto del problema.

7.

F: Como es trazar una recta, no una recta cualquiera, sino una determinada recta ¿cuántos puntos hemos hablado antes que hay que tener para determinar una recta?.

Als: Dos.

F: ¿De cuántos puntos disponemos?.

Als: Uno.

F: De uno solo. Luego, ¿a qué puedo reducir el problema de trazar una recta?...

Als: A un punto.

F: A buscar un punto. Si yo determino un punto que necesariamente esté sobre la recta paralela que quiero trazar, uniré esos dos puntos y ya he acabado el problema; ¿verdad?. Pues si ud. tuviese la suerte de determinar un punto X (agrega en el dibujo un punto X arbitrario sobre la recta punteada) de modo que sepa ud. que está en la paralela, uniendo P con X hubiésemos resuelto el problema; ¿verdad?. Luego, dense cuenta que de alguna manera si tomamos como estrategia una idea de este estilo, el problema se reduce a encontrar un punto.

8.

F: Ahora vamos a ver qué condiciones cumple ese punto. ¿Qué condiciones tiene que cumplir ese punto?....estar en la paralela, ¿verdad?; ¿qué quiere decir que esté en la paralela?...que esté a la misma distancia que el punto P de la recta r. O sea que paralela a r se traduce que esté a la misma distancia que P de la recta (mientras lo agrega en donde escribió las condiciones)

Trazar una recta → paralela a r (que esté a la misma distancia que P de la recta)
→ pase por P

9.

F: Esta es la condición para el X que buscamos; ¿de acuerdo?. Pues ahora el problema queda reducido a encontrar un punto que esté a la misma distancia que P de la recta. ¿No es así? Ya sabemos que buscamos, ahora...a ver como lo buscamos.

10.

F: Me dicen ¿cómo lo buscamos?...

Als: Con el compás.

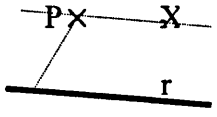
F: Con el compás aquí me dicen...

Al: Pongo la punta en la recta.

F: ¿En qué recta?

Al: En la que partimos, y lo abrimos hasta el punto P.

F: Pongo la punta en esta recta, por ejemplo aquí,. y lo abro hasta llegar al punto P ¿Esto para qué lo hago?



Al: Para tomar la distancia de la recta al punto P.

F: Entonces; primer problema es que debo determinar la distancia que hay desde el punto P a la recta, ¿verdad?; y ¿ahora?. ¿Tú no me has dicho que ponga el compás y lo abra?, pues lo pongo aquí y lo abro. ¿Dónde tengo que ponerlo?

Al: Hay que ponerlo debajo, en la perpendicular.

F: En la perpendicular; o sea que aquí hay algo desconocido que es la distancia de P a la recta; allí lo pone pero no lo sabemos. Tenemos que tener la distancia de P a la recta, ¿verdad?.

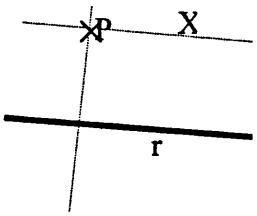
11.

F: Si hoy cuando les he recordado los conceptos de mediatriz...., si hubiésemos recordado la distancia de un punto a una recta, hubiésemos recordado que es el segmento de perpendicular que une el punto P y la recta. Esto es que para medir distancia tengo que hacer perpendiculares.

12.

F: Entonces aquí tengo un problema que es "hallar la distancia de P a r" (mientras escribe este enunciado). Esto implica perpendicular; por eso uds. no me dejaban poner el compás ahí sino en la perpendicular (mientras agrega una perpendicular por el punto P en el dibujo). Pero no sólo una perpendicular a la recta r, porque perpendiculares hay muchas...

Al: Que pase por P



F: Entonces para hallar la distancia ¿qué tengo que hacer?. Trazar una recta perpendicular a r que pase por P (mientras lo escribe debajo del enunciado anterior). Y cuando tenga resuelto este problema tendré medida la distancia desde P a r.

"Hallar la distancia de P a r"

(Trazar una recta perpendicular a r que pase por P)

Luego, ¿cuál es el problema que tienen ahora?.

Al: Hallar la perpendicular.

F: Pues a ver cómo trazan ahora la perpendicular por P a la recta r.

(Deja trabajar a los alumnos unos minutos)

*I.E.

► Explicita cuál es el objetivo al trabajar en este problema

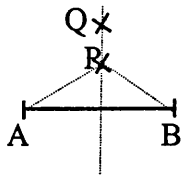
F: De hecho lo que estamos haciendo con este problema, aparte de que vayamos cogiéndole un poco el trencillo al método, es repasar algunas ideas básicas de cómo trazar perpendiculares, paralelas, etc...

13.

F: Les voy a mencionar la palabra mediatriz. ¿Se acuerdan lo que es mediatriz?...¿la mediatriz de un segmento?... Es una perpendicular, ¿verdad?. Vamos a hacer un pequeño repaso. Si tienen un segmento (lo dibuja) AB cualquiera, saben que la mediatriz es perpendicular al segmento (la dibuja). ¿Saben algo más de la mediatriz?...

Al: Lo divide en dos partes

F: Que lo divide en dos partes iguales...¿qué más?. Este punto P que está en la perpendicular, y esa perpendicular es la mediatriz, ¿qué cumple además? (mientras agrega P en el dibujo)



Al: Que está a igual distancia.

F: Que está a igual distancia de A y B. Si escojo otro punto cualquiera Q también sobre la mediatriz, siempre está a igual distancia de A y de B. Luego, cuando hablan de la mediatriz de un segmento pueden concebirla de dos maneras: como la perpendicular del segmento en el punto medio, o también como el lugar geométrico de los puntos que están a igual distancia de los extremos del segmento. ¿Queda clara esta idea?.

14.

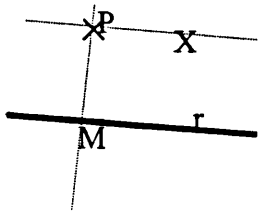
F: Siempre se puede hablar de las nociones matemáticas y en particular de las geométricas, sobre todo por la riqueza que tienen, de dos maneras o de muchas más maneras

diferentes. En el caso de los problemas de regla y compás que vamos a resolver nos va a interesar mirar siempre a las figuras geométricas como lugar de los puntos que cumplen una determinada condición. ¿Se acuerdan qué les había dicho que era la circunferencia? ...el lugar de puntos que estaban a igual distancia del centro. ¿Qué es la mediatriz de un segmento?...el lugar de puntos que están a igual distancia de los extremos del segmento, y además tenemos la suerte de que es perpendicular al segmento. Pues a ver si con esta idea pueden recordar o pueden utilizarla para trazar la perpendicular a la recta r que pasa por el punto P. Lo habrán hecho muchas veces pero no se acuerdan...

15.

F: Estamos en este problema (señala el enunciado y deja unos minutos).

F: En realidad ¿para qué quiero trazar la perpendicular?...para determinar un punto por aquí (lo señala en el dibujo), que le puedo llamar M



¿No es mi problema trazar la perpendicular para determinar M?.

16.

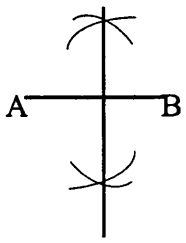
F: Fíjense, que podemos utilizar una idea muy simple para siempre trazar perpendiculares. La perpendicular tiene que pasar por P, ¿verdad?. Si tuviera otro punto yo haría la perpendicular, ¿no?. Imagínense un segmento sobre la recta r, por ejemplo este (mientras sombrea un segmento incluido en r). Este es un segmento AB que está sobre la recta r. Pregunta: ¿es esta perpendicular mediatriz de ese segmento?....No, ¿por qué?...porque el punto P no está a igual distancia, y quiero que A y B estén a la misma distancia de P. ¿No?. Entonces esto debe ser muy fácil (borra en el dibujo el segmento sombreado). ¿Cómo puedo buscar puntos que estén a igual distancia de P?. Con una circunferencia, ¿no?; si hago una circunferencia con centro en P y un radio determinado.

Al: Mayor que la distancia.

F: Mayor que la distancia, que no sé cuál es; pero dicen mayor, perfecto; entonces apoyan acá (mientras hace el movimiento del compás y traza un arco a mano alzada determinando A y B). ¿Qué tienen aquí? tienen A y B; tienen un segmento y ¿saben trazar la mediatriz de un segmento?. La mediatriz va por P, ¿verdad?...Pues, tracen la mediatriz del segmento!. La mediatriz del segmento me determina el punto M.

17.

F: Bueno pues los que tienen regla y compás hagan todo esto. Recuerdan que para trazar la mediatriz de un segmento hago arco y arco con extremo en A, círculo, con extremo en B otro círculo y trazaban la recta. ¿Así hacían la mediatriz?



18.

F: Fíjense que al problema "trazar una recta perpendicular a r que pase por P" ¿a qué problema lo hemos reducido?...a "trazar la mediatriz del segmento AB"(agrega este enunciado a la lista de problemas ya enunciados), con la seguridad que la mediatriz pasará por P, porque el segmento AB previamente lo hemos determinado para que A y B estén a la misma distancia de P.

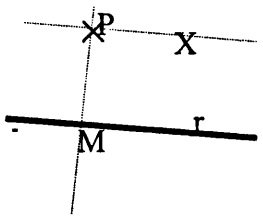
"Hallar la distancia de P a r"

(Trazar una recta perpendicular a r que pase por P)

(Trazar la mediatriz del segmento AB)

19.

F: ¿Ya hicieron la mediatriz? Pues si la hicieron borro y vemos en qué situación estamos en el problema original.



El AB era el auxiliar, lo que ocurre que al trazar esta perpendicular hemos determinado el punto M. Luego, saben la distancia que hay entre el punto P y la recta r. Basta hacer centro en P y abrir el compás hasta M. Si este era el problema que teníamos "Hallar la

distancia de P a r" ya lo tenemos resuelto. Díganme cómo continuamos. Ya saben que de P a M hay una cierta distancia que la conocen. Ahora ¿qué hacemos con esa distancia?.

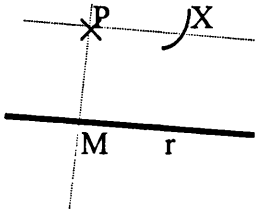
20.

F: Recuerden que buscamos un punto X que está a la misma distancia que P de r; ya conozco esa distancia. Luego, mi problema no es medir una distancia sino determinar...

► Una alumna con gestos esboza un plan para resolver Q; su intención es hallar un punto a una distancia PM del punto P; el docente sigue sus indicaciones y va dibujando

21.

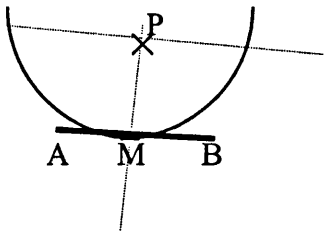
Al: Con el compás, con la punta en P.



F: Si hago centro en P y abro el compás determinaré un círculo, que todos sus puntos estén a la misma distancia de P que P de la recta. Pero determino muchos ¿verdad?...necesito uno.

Murmullo.

F: Yo hago la circunferencia, venga!. Voy a borrar acá X y hago la circunferencia.



Al: Y ahora como tiene el punto P, que es centro de la circunferencia, haces la recta.

F: Pero ¿qué recta? ésta no la tengo (mientras borra la recta punteada).

Al: La haces.

F: Pero ¿cómo la hago? ¡si sólo tengo un punto!. Tengo todos los puntos de la circunferencia; si quieres que le preste atención a uno, tengo este, tengo este... (va señalando diferentes puntos de la circunferencia)

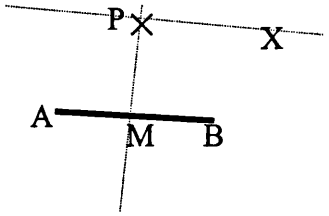
Murmullo.

22.

F: A ver, el X que buscamos queremos que esté a una cierta distancia de la recta r; ¿verdad?; que conocemos ¿no?; ¿y cómo hallamos la distancia de P a r? ...por medio de una....

Al: Mediatriz.

F: Mediatriz, y luego es una perpendicular (mientras borra la circunferencia que había agregado en el dibujo). Este es el punto X que buscábamos ¿cuál es la distancia de X a la recta?.



Al: No se sabe

F: ¡Cómo que no se sabe!...ésta (señala $\overline{PM}$).

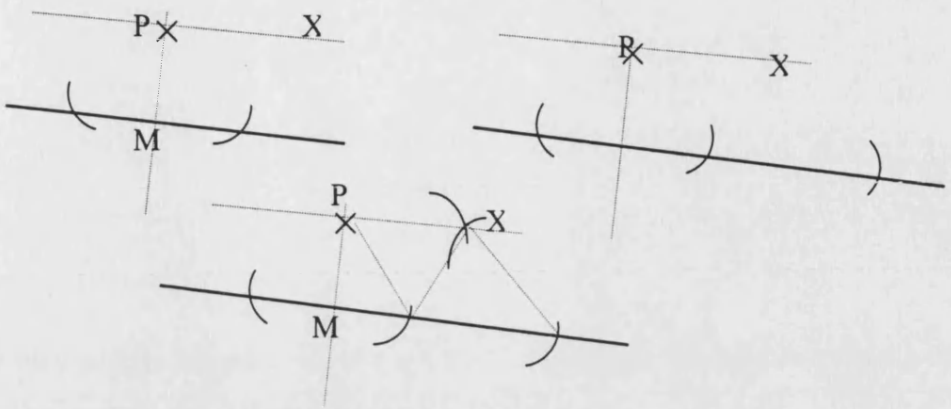
23.

F: Y ¿cómo puedo medir esta distancia? ...Si esta es la recta r dada (resalta la recta), esta distancia la conozco ($\overline{PM}$) ¿cómo mido la distancia a la cual está X de esa recta?... con una perpendicular (traza a mano alzada la perpendicular a r por X); mido la distancia de X a r con una perpendicular ¿no he medido así la distancia de P a r?. Luego imagínense que tengo una perpendicular como la que está ahí trazada.

▸ Un alumno explicita un plan y el docente le pide que lo ejecute. Consiste en hacer dos triángulos isósceles congruentes, con un vértice común y apoyados en la recta dada, y trazar las alturas de ambos.

24.

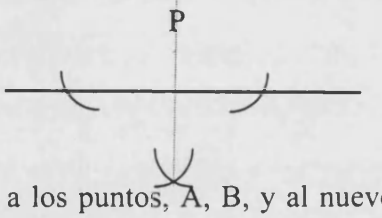
Al: Si antes la mediatriz la tenía así y así (señala los arcos que determinan a A y B), ahora esta distancia la pasas aquí (transporta un segmento consecutivo a AB, sobre r y de la misma medida que éste) y corta aquí. Entonces con la distancia que tienes de aquí a P (PB), hallas otra mediatriz y corta aquí y aquí (hace coincidir el corte con el X dibujado antes). Entonces ese punto... es paralela a la recta.



F: ¡Vuélvemelo a contar!. Ponle nombres y borra todo lo que te haga falta.

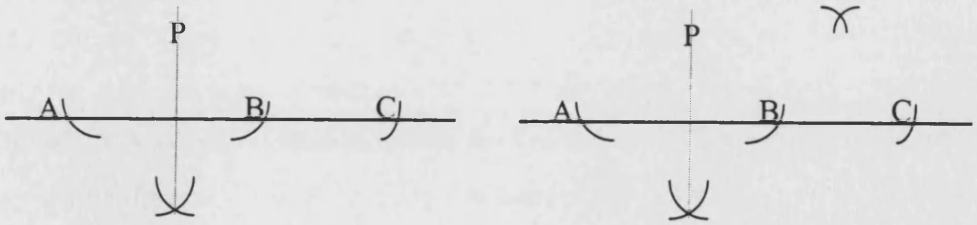
(El alumno borra)

Al: Esta es la recta r y cuando hacemos la mediatriz hacemos esto, ¿no?; juntamos aquí y aquí. Con el compás cogemos esta distancia y la pasamos aquí.



F: Ponle nombres a los puntos, A, B, y al nuevo punto que has hecho; C está a la misma distancia de B que …

Al: Que B de A; entonces cogemos la distancia que hay de P a B o de P a A, que es la misma, cogemos el compás y lo ponemos en C y cortamos aquí, lo ponemos en B y cortamos aquí (hace la recta PX).



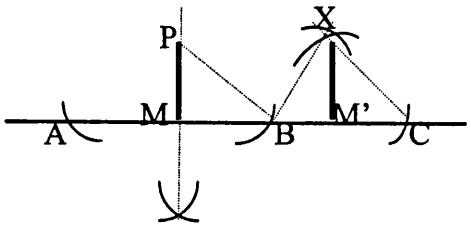
F: Y este es el punto X, ¿no?. O sea has hecho centro en C....

Al: Con la distancia de P a B he hecho centro en C y centro en B.

25.

► El docente comienza a explicar el procedimiento del alumno mientras va remarcando cada una de las líneas auxiliares en cada paso

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA



F: vamos a ver. Vamos a marcar los radios de los círculos que has hecho. Esto está bien claro que esto (AB) es igual a esto (BC). Luego ha tomado esta distancia (PB) y con esta distancia ha hecho centro en C y este arco; la distancia que hay entre C y X es igual que la distancia entre B y P (mientras escribe d(CX)= d(BP)). Luego has hecho centro en B con la misma distancia (mientras escribe d(BX)= d(CX)).

26.

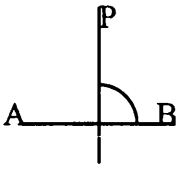
F: Y dices que éste es el punto que deseamos ¿no?. Y debe de ocurrir que si a esto lo llamo M, esta distancia (PM) debe ser igual que esta (XM'). Si esto es así este es el punto X. ¿Para todos es la misma?... Deberíamos de darnos algún argumento para ver que es la misma ¿no?. Piensen si tienen algún argumento para ver que la distancia de P a M es la misma que la de X a M'.

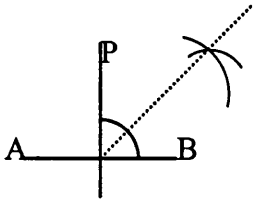
Al: Si; si la mediatriz de AB pasa por P, y de B a C es la misma distancia que de B a A, tiene que ser...

F: Dice que, como esta recta es la mediatriz y este es el punto medio (M) y este es el mismo segmento (se refiere a BC=AB) y ha llevado lo mismo, entonces es lo mismo. ¿Les parece bien ese argumento?, así ¿sin precisar más?...¿todo el mundo está de acuerdo con esto?. Si este argumento nos parece bueno lo que está claro es que X está a la misma distancia de la recta r que P del punto M; luego X está determinado y como final trazamos la paralela. ¿De acuerdo?...¿Otros argumentos?. De momento hoy vamos a contar las cosas sin mucha precisión, conforme vayamos avanzando utilizaremos el lenguaje de la regla y el compás.

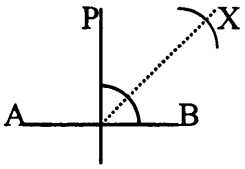
27.

► El docente hace pasar a una alumna. Su plan consiste en trazar la bisectriz de un ángulo recto y hallar un punto de esa bisectriz que esté a una cierta distancia de los lados del ángulo





(traza bisectriz)

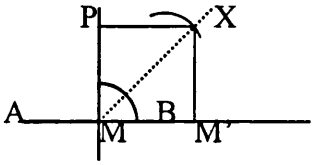


(hace Circunf de centro P y radio PM; PM=PX)

28.

F: Dinos por qué te da el punto X. Nos convenceremos que es el punto buscado cuando nos des un argumento...La construcción me parece espléndidamente, pero ahora necesitamos un argumento para saber que X está a la misma distancia de r que P.

► El docente se acerca al pizarrón y marca el rectángulo que subyace en la construcción de la alumna



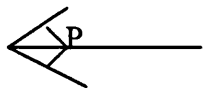
F: ¿Qué ha hecho?; al hacer la bisectriz tiene un ángulo de 45° aquí. Este triángulo (PXM) no sabemos como será pero....esta distancia (PM) y esta (PX) son iguales y este ángulo de 45 (ángulo PMX). ¿Les parece que ese triángulo que está ahí va a ser rectángulo? y además ¿rectángulo isósceles?.

Als: Sí.

F: ¿Y en definitiva que esto es un rectángulo?. ¿Les parece que esto basta para ver que la distancia de X a r es la misma que la de P a r?. Si esto basta entonces el X es bueno ¿no?.

F: Para determinar X hemos determinado la bisectriz del ángulo recto y dijimos X tiene que estar en la bisectriz; ¿por qué X tiene que estar en la bisectriz?. ¿Saben que propiedad tienen todos los puntos que están en la bisectriz de un ángulo?...Primero voy a dibujar un ángulo (lo dibuja). Antes les había preguntado si se acordaban lo que era la bisectriz. La bisectriz de un ángulo es aquella línea que divide al ángulo en dos partes iguales. Esta es una forma de pensar en la bisectriz pero creo que hay otra forma de pensar en

la bisectriz que es la que nos va a interesar aquí, y es mirar la distancia que hay entre los puntos de la bisectriz y los lados de un ángulo.



F: Si marcan un punto cualquiera P, como este, en la bisectriz, ésta es la distancia que hay de P al lado de este ángulo y ésta es la que hay al otro lado del ángulo; pues...esta distancia y esta distancia son iguales. Todos los puntos de la bisectriz están a igual distancia de los lados del ángulo ¿de acuerdo?...Miren pues el punto X, está en la bisectriz del ángulo M; luego X está a igual distancia de los lados del ángulo. ¿Qué ha hecho ella al hacer centro en P y tomar este radio PM)?...determinar el punto de la bisectriz que estaba a esta distancia (PM), que era lo que necesitaba. Por eso X está en la bisectriz y está a la misma distancia de r que P; porque la distancia de X a P es igual que la distancia a este punto M'. Si la distancia de X a P es PM, la distancia de x a M'(agrega M' en el dibujo) es PM.

29

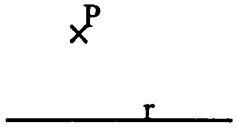
F: Me interesa que se guarden en la cabeza la idea de lugar geométrico para la bisectriz; el lugar de los puntos que están a igual distancia de los lados del ángulo. Con lo cual la idea es que uno siempre dice voy a trazar la bisectriz y después ya escogeré el punto que esté a la distancia conveniente, ¿verdad?. Aquí (señala la bisectriz en la construcción) están los puntos que están a igual distancia de aquí que de aquí, ¿de acuerdo?.

30.

► El docente propone el plan que intentó sugerir a lo largo del proceso. Consiste en resolver Q' (distancia de P a r), y luego hallar un punto que esté a una distancia dada (resultado de Q') de la recta r.

F: ¿Alguien más lo ha hecho de otra manera?....Bueno les voy a contar cómo lo habría hecho yo, que de alguna manera se los he tratado de sugerir.

F: Borro y pongo la situación original



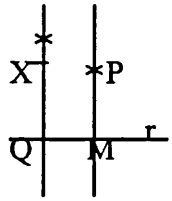
Esta era la situación original y la cuestión era hallar un X.

31.

F: ¿Qué he hecho para medir la distancia de P a r?. He hecho una perpendicular ¿verdad?; y así he determinado M. El punto X que busco ¿a qué distancia está de la recta r?...a igual que P ¿verdad? y ¿cómo voy a medir la distancia de r a cualquier punto?...mediante una perpendicular. Luego puedo trazar una perpendicular cualquiera a la recta (mientras la traza) y en la perpendicular están todos los puntos que están a diversas distancias de la recta;.... esta es una distancia, esta es otra distancia...(marca diferentes puntos sobre esta perpendicular), cada punto está a una distancia. Pero ¿qué distancia es la que quiero?...ésta (PM), que la conozco, ¿verdad?.

32.

F: Luego, me hago una perpendicular cualquiera que corte a la recta en Q. Haciendo centro en Q y con radio PM voy a determinar el punto X.



33.

F: Esto es, si para medir distancias utilizo perpendiculares, medir distancias a una recta desde un punto; para determinar el punto que esté a una cierta distancia de una recta también tendré que usar perpendiculares, o puedo usar ...hemos visto que teníamos otros modos ¿verdad?. Echen un momento sobre esa construcción y si tienen alguna pregunta que hacer sobre este problema, la hacen.

► En los últimos minutos el docente pasa por los bancos contestando dudas. Como tarea para la próxima clase, da tres construcciones (perpendicular, bisectriz, tangente a una circunferencia por un punto exterior)

F: Bueno, el problema para el próximo día, porque creo que no ha quedado bien claro y a sonado la campana. Aunque parezca un poco bobo es...."Dada una recta trazar una perpendicular cualquiera a esa recta". Sí, así de simple. Y también "Dado un ángulo trazar la bisectriz de ese ángulo", para que recordemos cómo se hace. Y también tres, son construcciones de las que podemos llamar básicas. "Trazar una perpendicular cualquiera a una recta dada", "Trazar la bisectriz de un ángulo" y "Trazar la tangente, o una tangente, a una circunferencia desde un punto exterior a ella.

CLASE 2

F: Bueno vamos a continuar si es posible, con los tres problemas de construcción que dimos. Hoy como era el segundo día, el compás no lo he traído pero la regla sí. Ya vamos avanzando!.

► En los primeros minutos de la clase 2 se revisa la solución del problema *"Dada una recta y un punto exterior a ella, trazar una recta paralela a la misma que pase por el punto dado"*.

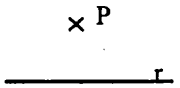
34.

F: Me gustaría que reflexionásemos sobre el problema que hicimos el día anterior, ¿se acuerdan cómo era?

Al: Si, trazar una paralela....

F: El que hicimos era "dado una recta y un punto trazar una paralela a r" ¿era una arbitraria?, sí arbitraria! (mientras hace el dibujo y escribe el problema)

Trazar una paralela (p) a r



F: A ver ¿cómo hicimos esto?

Al: Hallando la paralela

F: Hallando la paralela....

Al: Hallando la perpendicular.

F: No, pero ¿qué es lo que hicimos?

Al: Hallar la bisectriz.

F: Hallar la bisectriz, también hicimos eso. Pero ¿cómo intentamos resolver el problema? ¿se acuerdan? al menos en el sentido del método qué íbamos a tratar de poquito a poco instruir. En la pizarra había escrito...que teníamos que determinar una recta, que era la paralela ¿no?. Trazar una paralela.

F: Para trazar una recta necesitábamos....

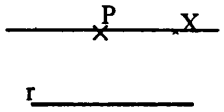
Al: Dos puntos.

F: Habíamos quedado que siempre que tratásemos de dibujar las figuras geométricas íbamos a fijarnos en algunos criterios que permitían construirlas. En particular para las rectas, habíamos quedado que dos puntos ¿verdad?, y el problema decía P.

35.

F: Creo recordar que decíamos que podíamos dar el problema por resuelto, que podíamos dibujar la solución (mientras dibuja una recta paralela a r por P)

Recta (P,X)



F: Si teníamos P necesitábamos únicamente otro punto para construir la recta, y era una estrategia de resolución del problema. Habíamos referido todos los problemas a determinar este otro punto que nos permitía construir la recta. Recta, P que lo conozco, y X. Alguien había dicho, X es un punto que por estar en una paralela está a una distancia de la recta r igual que P. Y nos entretuvimos en ver cómo se podía construir X que esté a igual distancia de la recta r que P. Y entonces apareció alguien por ahí que hizo un rombo o un cuadrilátero, otro una bisectriz más no sé qué, pero el problema era solamente determinar X.

F: X es un punto determinado entre una mediatriz y un no sé qué, o una recta y un no sé qué, pero X es un punto determinado en función de dos cosas. ¿Van a pensar que alguna vez vamos a determinar un punto en función de menos de dos cosas?... recta mediatriz, circunferencia, pero el punto que determinemos estará en función de lo que llamábamos dos cosas, ahora serán los dos lugares geométricos. Le llamamos a la bisectriz lugar geométrico, a una recta lugar geométrico.... Es decir en los problemas que vamos a ver siempre, verán que, si tenemos que trazar una recta y tenemos como dato un punto, tendremos que determinar otro punto. Si tenemos como dato una circunferencia, tenemos como dato el centro ¿verdad? ¿cómo determinan la circunferencia?...si tienen un punto fijo determinado y si tienen el radio, pero ese hay que determinarlo, y lo pueden determinar como intersección de dos cosas. Estas dos cosas a partir de ahora las llamamos lugares geométricos. La paralela que estaban determinando era el lugar geométrico de los puntos que estaban a igual distancia de otra recta; y así cualquier figura que consideremos va a ser el lugar geométrico de puntos que están a igual distancia, distan, que están en la bisectriz, etc; y cualquier punto que uno pueda imaginar será la intersección o la conjugación de las propiedades de dos lugares de ese estilo.

▸Luego se comienza a trabajar las tres construcciones que habían quedado de tarea (perpendicular, bisectriz, tangente a una circunferencia por un punto exterior)

F: Bueno, vamos a ver qué pasa con los problemas del día anterior. Creo que el primero decía *"Hallar la perpendicular a una recta por cualquier punto"*.

1.

F: Así que tengo una recta (dibuja una recta horizontal) y el problema es trazar una perpendicular.

2.

F: ¿Cómo hacerlo?.

Al: Dos puntos y con el compás.

F: Necesitas dos puntos. ¡No corras!. Dime dónde pongo los dos puntos...

Al: En la recta.

F: ¿Los dos sobre la recta? ¿Cuál es la recta que quieres trazar?

Al: La perpendicular

F: De acuerdo

Murmullo, otra alumna le da otra respuesta

F: ¿Estás de acuerdo con ella?...uno en la recta y otro fuera de la recta.

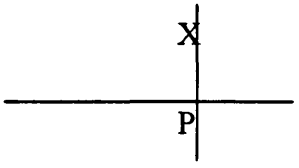
F: Ésta es la recta y necesito trazar la perpendicular (mientras lo escribe)

Trazar la perpendicular

F: ¿A qué referir el problema de trazar la perpendicular?. Aquí siempre que tengamos el problema de trazar una perpendicular....¿una perpendicular no es una recta? y una recta ¿cuántos puntos son....?, dos; pues cuando nos digamos los dos puntos que deseamos tendremos resuelto el problema de la recta que queríamos trazar.

3.

F: Si es perpendicular a esta recta la corta (mientras dibuja una perpendicular). Luego un punto está sobre la recta, no sé dónde estará porque me han dicho que es arbitrario, me lo dan a elegir.



4.

F: Pero ese punto está predeterminado porque está sobre las dos rectas. Un punto está sobre la recta ¿cuál queremos, ese? (remarca el punto de intersección de las dos rectas dibujadas) ¿y cuál nos queda?...otro ¿verdad?. Entonces el problema de trazar una perpendicular por una recta dada consiste en determinar un punto. Hemos elegido

éste y cuando uno sepa cómo elegir el otro (lo marca y nombra en el dibujo) tendrá resuelto el problema de trazar la perpendicular. Pues vamos a ver cómo elegimos ese punto; le hemos llamado como siempre, X. El problema es elegirlo, obviamente exterior a la recta dada, de modo que cuando uno construye esa recta que determina el X y el P, esa recta no sea cualquiera, sino sea perpendicular, como he tratado de indicar con el dibujo. Obviamente, si me desplazo en el dibujo nadie va a pensar que es perpendicular, si hubiese elegido X de modo que esté ahí no sería perpendicular (dibuja recta secante no perpendicular).

5.

F: Entonces imaginarse el problema como resuelto, quiere decir que uno puede examinar las condiciones y elegir X para que la recta sea perpendicular.

6.

▸ Una alumna (C) pasa a realizar a mano alzada los pasos de la técnica de construcción de la perpendicular por un punto perteneciente a la recta dada

F: Ahora díganme cómo puedo escoger X. Con el compás seguro que lo hacemos. Venga, dime!.

C: El compás en P

F: Clavo el compás en P, no traje compás pero traje regla (mientras apoya un extremo de la regla en P)

C: Ruedas...

F: Ruedas de dónde a dónde, porque el compás tiene abertura...

C: Lo abres a ojo

F: Está estupendo esto!. De P ¿a dónde voy?

C: Para arriba y para abajo, hasta donde corte la recta. No, espera!

El docente le cede la regla y le pide que pase

C: la pones aquí y luego aquí,....y haces igual abajo

(Se vale de la regla y mediante gestos indica la técnica para trazar la mediatriz, ubica en la figura de análisis dos arcos sobre la recta dada, equidistantes de P, y dibuja nuevos arcos que se interceptan en dos puntos de la recta dibujada como solución)

7.

F: Aplausos!. Es así como se hace!. ¿Por qué?

C: Porque si hago así se va ahí, y si hago así se va ahí (mientras señala los arcos que se interceptan sobre la recta); no sé decir por qué.

Risas

F: No sé si dejarlo como algoritmo o dar alguna razón. Obviamente lo que está bien claro es que aunque todos lo sepamos hacer, la prueba está porque nos lo ha contado tan deprisa y no nos hemos enterado, pero obviamente sale; es así como se hace, pero... a veces, nos van a hacer falta algunas reconsideraciones del por qué una construcción determinada es así.

8.

F: Vamos a ver en pequeños apuntes consideraciones de así y así (mientras señala los arcos en la recta dada). Me imagino que no cambiaste la abertura, luego esto es A y esto es B (agrega los nombres en la figura). Si esto es A y B, veo que P es un punto que está en medio del segmento AB. Luego cuando hizo así y así (se apoya en A y hace dos arcos, idem en B) sin variar la abertura, de hecho construimos la mediatriz del segmento. De hecho, recordemos que esta línea, que es el objeto que queríamos encontrar, lo hemos construido como la mediatriz de un segmento. Luego, si la perpendicular se ve como la perpendicular a una recta, y no como lugar geométrico ¿la podremos trazar?, ¿sí?...dime cómo. Yo no sé si se puede o no; ella me dijo que primero un segmento y luego mediatriz; como sabía que la mediatriz era perpendicular... ¿Se dieron cuenta cómo hicimos esto?. No hicimos recta, buscamos punto, no buscamos punto sino buscamos propiedades del punto. Y de ahí que el punto tuviera que estar en la mediatriz de un segmento porque estaba en la perpendicular, ¿Está más o menos?.

► El trazado de la bisectriz se considera como conocimiento a disposición de los alumnos

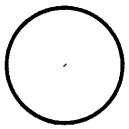
F: El siguiente problema ¿qué decía?. *"Dado un ángulo hallar la bisectriz"*. ¿Todo el mundo ha recordado como era eso?. ¿Algún problema con la bisectriz?...porque si alguna vez vamos a tener que trazar la bisectriz de un ángulo y hay problemas..., bueno, lo podremos reconsiderar.

F: Y el tercero decía, *"dada una circunferencia y un punto exterior..."* y el problema era...

1.

F: ¿Se atreve alguien al menos a hacer el dibujo de la situación del problema?

Pasa una alumna (A)



F: A ver si eres capaz de relatarnos, al estilo que he intentado, contar la solución del problema. A ver, los datos

A: Ésta es la circunferencia y éste el centro.

2.

F: Pues ponle nombre, ponle nombre a la circunferencia

A: ¿A la circunferencia?

F: Ponerle nombre a la circunferencia ¿qué quiere decir?

A: Ponerle una letra

F: Ponerle una letra ¿dónde?

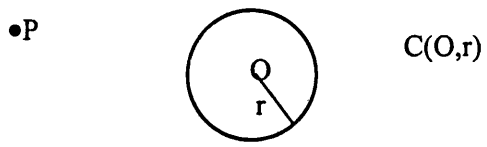
A: Acá

F: Eso, ponerle una letra en el centro; y con eso no basta ¿no?

A: El radio, pero ¿dónde lo pongo?

F: Como quieras mujer!, pon una O gorda, el centro es O y el radio r. Esto es para que todos sepamos que la circunferencia está dada así, ¿verdad?. Otra cosa es que, la línea que hemos llamado r, es para la construcción, pero es imaginario, hay que imaginarlo en todas las posiciones posibles. ¿Tú te lo imaginas rodando por ahí?...vale. Y ahora el punto P.

(El docente remarca en el dibujo los puntos O y P, marca el radio y agrega la notación de circunferencia)



3.

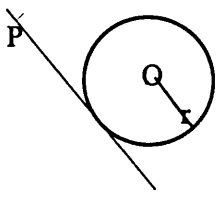
F: Lo dado, P y la circunferencia de centro O y radio r, que nos habían dicho que estaba dado. ¿Y cuál era el problema?

A: Que tengo que trazar una recta donde la distancia de aquí a aquí....

F: Tienes que trazar una tangente

4.

F: Entonces imagínatela dibujada. Esto es dar el problema por resuelto. Dibuja la que tú te imagines que va a quedar.



A: Ésta es una y la otra sería... (mientras señala la posición de la otra tangente).

5.

F: Hay dos. Nos dices que el problema que ha propuesto el profesor tiene más de una solución. ¿No?, bueno...encuentra una al menos. Nos dices que hay dos, encuentra una y puedes para ello mirar la figura. ¿No?.

6.

A: No sé como se hace

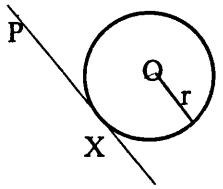
F: ¿Cómo que no sabes cómo se hace?. Seguro que lo sabes!. Eso es una....

A: Recta.

F: ¿Cuántos puntos necesitas?.

A: Uno.

F: Pues ponlo! Ponlo, no tengas miedo, si lo tienes!, ponle nombre, le llamas....X.



Bueno, pues ¿qué tienes que hacer? decir dónde está...X. ¿Qué problema tenemos? decir dónde está X. Pues pon ahí: X está.... Habíamos quedado que X estaría siempre en función....; era un punto, entonces de dos lugares. ¿No era así? Bueno, pues ¿donde está X?. Si tienes el problema resuelto ahí!, sólo tienes que decir dónde está X....En el círculo y en la tangente ¿a que sí?.

A: Sí

F: Pues ponlo! ya tienes los dos lugares, el círculo y la tangente!

T (otro alumno): ¿Eso hay que ponerlo?

F: Sí, X está en el círculo y X está en la tangente

(Ana escribe)

X está en C

X está en la tangente

7.

F: ¿Puedes hacer el círculo?. Vamos a ver...El círculo lo puedo hacer, sé dónde están todos estos puntos (desplaza su mano por la circunferencia) pero además tengo que decir

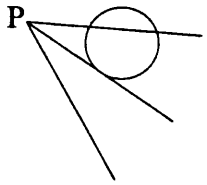
otro. Este lugar lo tengo (subraya la condición: X está en C). Sé que si trazo esto (círculo) es dado. El problema es que de todos estos (puntos del círculo) dónde ubico éste (X) de modo que sea tangente (señala a la recta). Luego ¿qué he explotado de lo dado?...que está en el círculo, ¿qué es lo que no he explotado?...que sea tangente ¿verdad?; ¿dónde hemos aprovechado la idea o la condición de que X está en la tangente?...porque en el círculo ya sé que está.

Murmullo

F: No sé como explotar que X está en la tangente ¿verdad?, luego siempre que nos den dos condiciones tenemos que explotar las dos. Si no hay problema las dos, si hay problema una por lo menos, ¡por dios!. ¿Cómo aprovechamos esto de que X está en la tangente?

8.

F: Dicho de otra manera ¿qué quiere decir que una recta es tangente a una circunferencia? porque puedo hacer un punto y un círculo y ésta no es tangente (dibuja recta secante a una circunferencia) ¿verdad?, en esta recta hay dos puntos; pero ésta tampoco es tangente (agrega una recta exterior) y ésta sí que lo es.



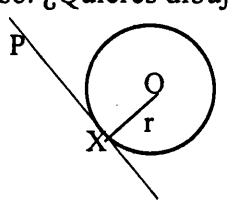
Entonces este hecho de alguna manera se debe explotar para determinar ese punto X, y no lo hemos explotado en absoluto, la situación singular de que el punto X no sea un punto cualquiera que pertenece a una de las rectas que pasan por P y se relacionan con la circunferencia. A esta recta se la llama exterior, a ésta, secante y a ésta, tangente. Bueno pues debe haber alguna peculiaridad en las tangentes ¿recordamos algo de ellas?

Al: Pasan por un punto de la circunferencia

F: Sólo por un punto.

9.

F: Vamos a ver como explotamos eso. ¿Quieres dibujar el radio? el que va a X ...



F: Después de esta línea (radio) que ha trazado Ana ¿se les ocurre algo?

A: Perpendicular

F: Sabemos algo de los elementos, de la recta y el radio. Ana dice que tiene que ser una perpendicular. ¿Se acuerdan de aquella propiedad de que "el radio es perpendicular en el punto de tangencia"?. Quiere decir que este X ya no es solo un punto que está en la recta, es un punto que está en la recta y además sabemos....

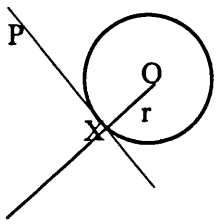
A: La tangente tiene que ser perpendicular al radio.

F: Perpendicular al radio en el punto de tangencia. ¿Eso lo podemos tratar de alguna manera?...pues dinos cómo, y así igual avanzamos. Puedes hacer lo que quieras y seguro que está bien.

10.

► La alumna explicita su plan; su intención es hallar la perpendicular a OX por X

A: Yo prolongaría el radio y haría la perpendicular como lo hemos hecho antes, haría la mediatriz pero por X



F: En el X, si lo conoces...ojalá!, ¡por dios eso es una buena idea!. No la desperdicies Apúntatelo.

A: Pondría el compás aquí...

F: No me digas cómo lo harás, luego lo pensamos; vamos a ser sistemáticos. Tú me has dicho, si supiese donde está X, pero no lo sabes; haría...

Murmullo

M (Otra alumna): ¿No sabemos dónde está X?

F: Estamos algo perdidos. Si supiese dónde está X, con P y X hubiese hecho una línea, pero Ana nos dice que no. Sabemos dónde está, pero no lo tenemos estrictamente localizado. Está en la circunferencia y tiene que unirse con P de modo que sea tangente, pero...¿cómo? creo que estamos en ello ¿no?.

(La alumna agrega en las condiciones: la tangente es perpendicular al radio por el punto X)

11.

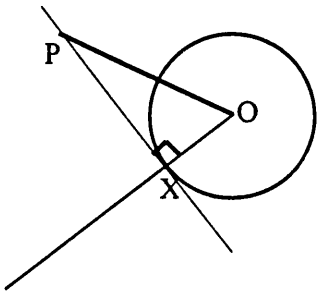
F: Bueno, por qué no dibujas dónde tiene que ser perpendicular, aquí tiene que ser perpendicular (remarca el ángulo recto en el dibujo de Ana), luego ahí debe haber un ángulo de 90°.

12.

F: Vamos a ver qué no hemos tenido en consideración de los datos. El círculo era dado, el punto era dado, a la recta la hemos imaginado como solución ¿verdad?, pero ya que era dado el punto y la circunferencia, había algo más dado..., aparte del radio; el radio es una distancia ¿qué otra distancia era dada?

J (Otro alumno): PO

F: PO, estupendo! (mientras lo marca en el dibujo).



PO era dado. Obviamente ese dato es importante, uno no cae en la cuenta porque el problema no dice conoce ud. PO, pero si conocen el punto y el círculo, obviamente conocen la distancia.

13.

F: Pues díganme ¿qué problema tienen? ¿Quieren prestar atención a una figura que se puede llamar POX?

Als: Triángulo rectángulo

F: Ah! triángulo rectángulo, ¿qué hay que hacer ahora?. No construir la tangente, sino ¿qué?.

Al: La bisectriz

F: No sean ambiciosos hacia el final. Si el problema era el triángulo rectángulo ¿qué pueden dedicarse a hacer en primer lugar?

Als: La perpendicular

F: La perpendicular, sí. ¡Son tan ambiciosos!.

Al: Coger el radio

F: No me digas coger el radio; ¿por qué no me dices lo que está esperando el profesor?, porque estamos hablando del triángulo rectángulo. ¿Todos están de acuerdo que si conocéis este triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{POX}$ sabremos trazar la tangente?. Sabéis

dónde está P, el centro O de la circunferencia, los datos, y X, lo que busco. Si supiese trazar el triángulo rectángulo POX ¿sabría dónde está X?. Mi triángulo rectángulo, que no sé dónde está, ni sé cómo construirlo, se llamaría POX (a parte hace un dibujo del triángulo). P y O son datos, si supiese hacer este triángulo rectángulo podría encontrar X y luego ya vería como lo pongo allí ¿verdad? (señala el problema original). ¿Están de acuerdo? ¿No es más sencillo hacer un triángulo rectángulo?.

14.

F: Vamos a ver qué conocemos de ese triángulo rectángulo. A ver Ana, raya lo que conoces aquí

(Ana marca PO y está en dudas de marcar OX)

F: ¿Cómo que no? ¡OX lo conoces!, aunque esté deformado porque Fernando....¿no es OX el radio de la circunferencia?, lo que pasa que Fernando es bastante engañador. Es OX, ¿no?. Ese es un triángulo rectángulo.

15.

F: ¿Se puede hacer un triángulo rectángulo en el cual se conocen dos lados?...¿Sin duda?. Pues si hago este triángulo rectángulo a parte, esto lo conozco porque es el radio de la circunferencia (escribe r sobre el lado correspondiente en el triángulo), esto lo conozco, es la distancia del centro O al punto que me han dado ¿no es así? ¿puedo hacer este triángulo?. Aunque no lo sepa hacer...¿me imagino que soy capaz de hacer un triángulo rectángulo del cual conozco dos lados?, el otro está determinado.

16.

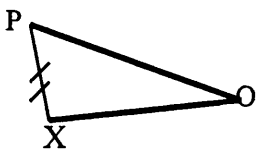
F: Recuerden para que sepan que está determinado, el teorema de Pitágoras, que dice (lo escribe)

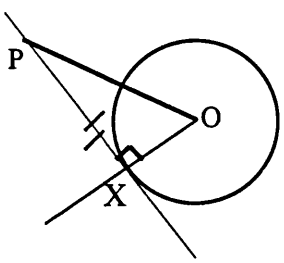
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Algebraicamente la hipotenusa depende de los catetos y los catetos de la hipotenusa. Si conozco dos conozco el tercero en discordia. Luego seguramente podría hacerlo, no sé cómo, tendría que pensarlo, pero podría hacerlo.

17.

F: Luego, si pudiese hacer este triángulo podría trazar la tangente, ¿por qué? porque sabría qué distancia hay de P a X (mientras marca en el dibujo del triángulo y en el dibujo de Ana el segmento PX)





Entonces la distancia del P dado y el X a determinar, la podríamos determinar si somos capaces de determinar ese triángulo rectángulo. ¿Dónde está X?, X está a distancia PX del punto P, pero cuando digo PX, PX es el cateto de un triángulo rectángulo del cual está dado la hipotenusa y un cateto. El problema quedaría reducido a la construcción de un triángulo rectángulo. ¿Es así?.

▸ Esa construcción quedó pendiente; se da como tarea algunas construcciones de triángulos rectángulos

F: Bueno, pues para no ir muy deprisa ni muy despacio, para mañana no les voy a dar enunciados. Ahí tienen un triángulo rectángulo dada la hipotenusa y un cateto; pues les ruego que para mañana examinen las posibilidades de construir triángulos rectángulos dado la hipotenusa y un cateto, me imagino que será igual el cateto que nos den, el grande o el chico, o los dos iguales; o los dos catetos; o un ángulo y un cateto, etc. Examinen esas cosas sin más; entonces para mañana el profesor ruega que todo el mundo tenga al menos ciertas estrategias para construir triángulos rectángulos dados aleatoriamente algunos datos referentes a lados y ángulos también.

CLASE 3

F: bueno, hoy tengo regla y compás; hoy, el tercer día, tenemos regla y compás. Espero que uds. también. Si quieren vamos a tratar hoy de ser productivos, en el sentido de darnos varios problemas y ver si somos capaces de acabarlos del modo conveniente.

▸ Se retoma el problema de la clase anterior, se comienza a trabajar Q: "Construir un triángulo rectángulo dada la hipotenusa y un cateto".

***IE** (comentario sobre qué se va a enseñar)

F: Vamos a empezar por el problema que teníamos pendiente de ayer. Me lo recuerdan...

Al: *"Construir un triángulo rectángulo dada la hipotenusa y un cateto".*

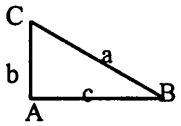
F: ¿Habéis trabajado en él y tenéis la solución? ¿o simulamos cómo puede hacerse?. Si simulamos el profesor va a ser autoritario y va a intentar de instruir, de alguna manera, en el método que estamos tratando estos días. ¿Simulamos que lo hacemos? ¿Lo hago? ¿o alguien tiene la solución y lo cuenta?. Bueno, ya saben que el profesor les amenazaría con un problema a continuación que es parecido al que acabamos de hacer.

18.

F: Entonces me apunto el problema

"Construir un TR conociendo un cateto y la hipotenusa"

F: Si simulamos, creo que estaba claro que la estrategia para resolver este problema es dar el problema por resuelto. Este que tengo que construir, ya lo he construido, me lo dibujo como si estuviese construido. ¿Les parece bien esta posición (horizontal) para el triángulo rectángulo? ¿o prefieren cualquier otra?; como siempre ponemos nombres a los elementos de la figura, A, B, C para los vértices, por tanto a, b, c para los lados



Esta figura que debemos construirnos nos es bastante familiar, de hecho si el triángulo rectángulo que nos piden construir fuese cualquiera, no tendríamos inconveniente y de seguro cada uno sabría como hacerlo de miles de maneras. Pero

tenemos algunos datos. Exactamente en nuestro caso... ¿me dicen cuales son los datos?. Empiezo por la hipotenusa, quedamos en marcar los datos siempre que fuese posible para decir que éste es un elemento conocido a la hora de construir la figura deseada (mientras remarca en la figura). Y el otro elemento conocido es... un cateto.

19.

F: Tienen preferencia por alguno de ellos? les da igual? piensan que ambos juegan el mismo papel?. Ya sé que esta es una pregunta que quizá no es pertinente ahora, pero a veces es posible que alguien desee, cuando puede elegir, marcarse uno u otro. Por lo tanto me voy a marcar el vertical. El problema es por tanto construir este triángulo rectángulo, que allá aparece como construido, conociendo el cateto y la hipotenusa.

20.

F: Recuerden que el problema se resuelve siempre que nos digan cómo realizar la construcción. Pero, cual es la estrategia que estamos usando aquí para realizar la construcción? analizamos en lo posible el problema como resuelto y la construcción la referíamos no como a la construcción de toda la figura sino...¿a qué?...a la determinación de...¿se acuerdan? ¿no?. ¡Diablos! ¡qué mal lo debí haber contado estos días!. Pues díganme cómo construimos éste. Dejamos unos momentos.

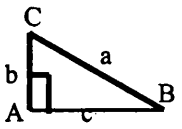
► Los alumnos trabajan durante 5 minutos en el problema

21.

F: Vamos a seguir con el problema. Les voy a preguntar, antes de seguir, si el profesor ha reflejado en el dibujo como conocido todo aquello que conoce?. Sé que tengo que construir un triángulo....

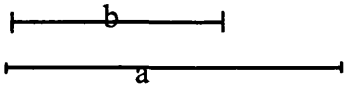
Al: El ángulo.

F: Ah! el ángulo, ¿qué ángulo?....recto. Obviamente como tengo que construir un triángulo rectángulo tengo un dato más, que aunque no esté explícitamente expresado, en dados...(señala el enunciado) tengo un ángulo recto. Me voy a marcar aquí que también es conocido que este ángulo es recto, a ese ángulo le llamo A porque en su vértice coinciden los dos catetos (lo marca en el dibujo). Bueno, pues esto puede ayudar



22.

F: Ahora, ¿se le ocurre a alguien cómo construir esto? ¿me dan instrucciones y las copio en la pizarra?, y luego como tengo regla y compás igual soy capaz de hacerlo. ¿Tenemos instrucciones ya? Recuerden que las instrucciones deben partir de lo siguiente: este es el cateto y esta la hipotenusa (mientras dibuja los segmentos); este es b y esta es a, y me deben decir qué hago con a y con b utilizando un compás y una regla para construir ese triángulo.



▸ Un alumno (W) le va indicando los pasos de su plan; consiste en trazar el cateto, hacer una perpendicular por un extremo y hacer una circunferencia con centro en el otro extremo y radio igual a la hipotenusa. El docente hace un dibujo a mano alzada para representar dicho plan.

23.

F: Venga, ¡díganme qué hago!

W: Una perpendicular a b por el vértice A.

F: Hallar una perpendicular a b por el vértice A; esto me parece estupendo en el sentido de que ahí es donde colocaré B, pero para esto, prácticamente tengo que tener algo ¿verdad?. Dime donde está A y dónde está b ¿qué me dices que haga primero?

W: Trazas el cateto b, a partir del cateto b hallas la perpendicular...

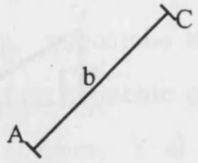
F: Trazo el cateto b, ahí lo tienes (señalando los segmentos dibujados) ¿cómo quieres que lo ponga? así o así, si lo pongo ahí ya he trazado el cateto b (lo dibuja a mano alzada dándole otra dirección)

W: Ahora la perpendicular por cualquiera de los vértices.

F: Le voy a poner nombre, ¿dónde quieres que quede el ángulo recto?...¿ahí o ahí?...bajo para que sea como el de la figura....Esto es simplemente para tener nombres a que referirnos, A y ahí se llama C.

24.

F: Como el cateto b era dado, es conocido A y C. Supóngase b, el cateto, b supone que uno conoce A y C (mientras lo escribe). ¿Y ahora?



▸ El docente sigue representando en un dibujo las indicaciones del alumno y escribe los pasos del plan

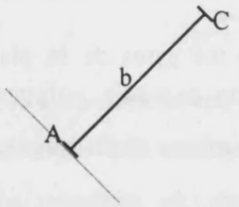
W: Por A la perpendicular.

F: Dos, trazar una perpendicular a b por A ¿qué más? (mientras dibuja la perpendicular lo escribe)

1. Supóngase b (A,C)
2. Trazar una perpendicular a b por A

W: Y ahora con el compás, abres....

F: Bueno después de esto (señala 1 y 2) tendríamos una cosa así ¿y el paso 3?



W: Abrimos el compás como la hipotenusa y cortamos ahí a la perpendicular

F: Cuéntame esto un poco mejor, o resúmelo. Me voy aquí con el compás (señala el segmento a, dibujado en los datos), hago centro en C y luego corto a la línea. ¿Todo el mundo entiende cómo se hace esto? ¿Cómo le estamos llamando a esto?...pongo el compás en C con una abertura, la abertura se llama radio; ¿y este es el centro, verdad?, luego lo que voy a hacer es trazar una circunferencia (traza a mano alzada un arco donde corta a la recta) Díganme donde está el centro y el radio

W: C y a

(Agrega la instrucción 3)

1. Supóngase b (A,C)
2. Trazar una perpendicular a b por A
3. trazar una C (C,a)

F: Y me dices que corto....

W: En la perpendicular, ahí y ahí (señala dos puntos de corte)

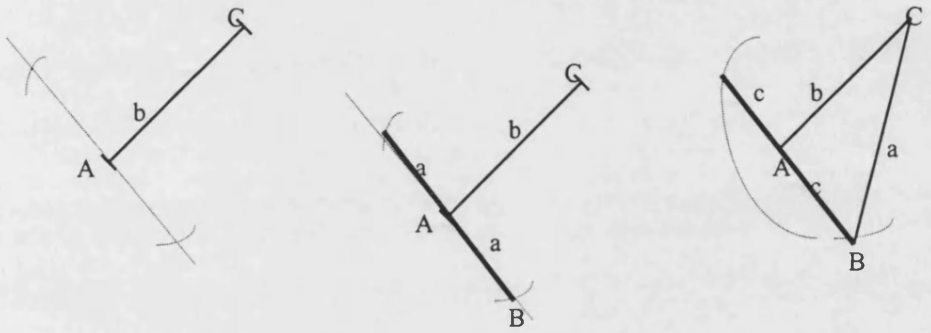
F: Ahí también, y este debe ser el vértice que llamamos...Esto es de tamaño a y este de tamaño b, los conocidos, y aquí aparece el vértice B y ahí tenemos ya el triángulo.

25.

F: Porque ¿qué buscamos en realidad?. ¿Eso buscábamos? (señala los segmentos determinados en la perpendicular a AC) ¿Por qué me han dejado que marcase como cateto el radio?... ¿este elemento era conocido o era este (hipotenusa)?

W: El radio

F: Y el radio era éste (hipotenusa) y éste el que buscábamos (mientras corrige las letras); a no era la distancia que había desde el pie de la perpendicular hasta donde cortaba la circunferencia, sino que era el radio de la circunferencia.



▸ Durante 5 minutos, los alumnos trabajan y Fernando pasa por pos bancos

26.

F: Me han preguntado cómo llevar este problema al problema de trazar la tangente. Obviamente el día anterior quedamos que para trazar la tangente necesitábamos conocer una distancia, que aquí podemos identificar con la longitud del cateto c que al construir este triángulo acabamos de determinar.

27.

F: Luego, si quieren acabar el problema del día anterior de cómo trazar la tangente, uno diría: váyase al punto P y como él decía, abra el compás con la abertura c haciendo centro en P, los dos lugares del punto de encuentro con la circunferencia serán los puntos que me ayudarán a determinar junto con el punto P, otras rectas que son las tangentes (intersección de la circunferencia dada con otra circunferencia de centro P y radio c=PX)

Consultas

28.

F: Miren bien las instrucciones que tenemos ahí para trazar la figura. Esta figura que es un triángulo, se puede considerar determinado ¿por cuántos puntos?...si piensan en un triángulo ¿cuántos puntos tienen que conocer para determinarlo?...tres. ¡Quieren mirar las instrucciones!. Supóngase b, esto es conocer dos puntos A y C. Luego de

suponer este y este conocido (señala A y C en el dibujo auxiliar) el problema de determinar el triángulo se puede reducir a encontrar...B. Como siempre, el problema puede reducirse a la determinación de un punto, B. Aquí no lo hemos hecho explícitamente, pero...fíjense bien qué hemos hecho para encontrar B. Número 1, ¿qué dice ahí?...trazar una perpendicular por A. Recuerden que la perpendicular la podríamos ver como el lugar geométrico de...; hemos determinado el lugar geométrico. Después ¿qué dice?... círculo de centro C y radio a. Luego, podría haber empezado, si hubiese querido, a resolver este problema en vez de pensar qué es lo que tengo que hacer para trazarlo, pensar que es lo que tengo que encontrar. Si me dan un lado, y estoy construyendo un triángulo, dos vértices son conocidos, luego mi problema es determinar B. Y si hubiese partido desde este punto de vista, hubiese tenido que decir donde está B. ¿Y qué hubiese dicho de B? en vez de trazar hubiese dicho (mientras va reenunciando las instrucciones 2 y 3)

B está en → 2. la perpendicular. a b por A
está en → 3. una C (C,a)

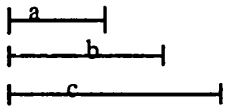
F: Se dan B está en → 2. la perpendicular. a b por A
está en → 3. una C (C,a) ensar qué es lo que necesitamos construir para localizar aquello que desconocíamos, que era B. El triángulo está ya ahí dibujado (fig. de análisis), ahí están mis datos; de mis datos C y A son conocidos porque es conocido b, el problema es B, determinar B, el problema se reduce a determinar un punto. Para determinar un punto ¿qué es lo que hacemos? buscar perpendicular y circunferencia, o si quieren dos lugares geométricos cuya intersección me produce el punto deseado. Miro B, está en la perpendicular y en la circunferencia. ¿De acuerdo?. Luego, es conveniente a partir de ahora que cualquier problema que intentemos resolver lo reduzcamos a buscar un punto y pensar donde ese punto está situado; y estará situado en rectas perpendiculares, en circunferencias, en bisectrices de ángulos,....pero cuando localicemos dos lugares para un punto tendremos localizado el punto, si tenemos la suerte que los dos lugares se crucen o encuentren.

F: Problema, un problema que han hecho muchísimas veces *"Construir un triángulo dados sus tres lados"*

1.

Al: ¿Cuánto mide cada lado?

F: Pues lo vamos a dar, lo vamos a poner ahí (Borra el pizarrón y escribe el enunciado y dibuja los tres segmentos)

Construir un T dados los tres lados 

F: Estos son los tres lados y quiero construir un triángulo de modo que estos sean sus tres lados.

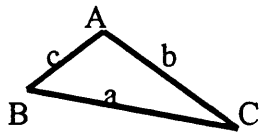
Murmullo

2.

F: En este momento están trazando una perpendicular. ¿No sería bueno que construyésemos con el método que hemos intentado aprender?

Al: Coger los tres lados, medirlos

F: Coger los tres lados, medir los tres lados y hacer el triángulo. Pero hacer el triángulo a ver cómo lo hacemos, ahí es donde está la cuestión. Vamos a predicar de nuevo; ¿por qué no empezamos a ver el problema como resuelto? ¿qué tengo que dibujar? ¿un triángulo?. Ahí lo tienen, este es el triángulo que tengo que dibujar; vamos a ponerle como siempre nombres, A, B y C, ¿qué conozco de ahí?. Este es c, este es a y este es b (mientras los resalta y nombra). ¡Son todos conocidos!. Díganme cómo hacemos el triángulo.



3.

Al: ¡Si ya está hecho!

F: Como ya lo di por hecho, ya está hecho. Pero una vez que he imaginado que está hecho, debo de explicarme cómo está hecho para poder describir cómo lo haría ¿no?.

4.

F: Recuerdan qué hicimos con el triángulo rectángulo? ¿qué podemos suponer? ¿qué tengo que determinar para determinar un triángulo?....tres.

Al: Lados.

F: ¡Vértices!, los lados no los tengo que determinar porque me los dan ¿verdad?; cuando me digan donde están situados los tres vértices me han dicho de que triángulo se trata.

5.

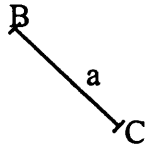
F: Y de nuevo vamos a ver si me hacen falta determinar tres vértices o cuántos. Díganme cuántos me hacen falta determinar, ¿qué conocen? ¿conocen a?

Als: Sí

F: Si suponen que conocen a ¿qué vértices conocen?

Als: B y C

F: Como a a lo conozco lo puedo poner en cualquier sitio ¿verdad?. Como a es conocido lo supongo situado ahí (mientras lo dibuja), entonces conozco B y C



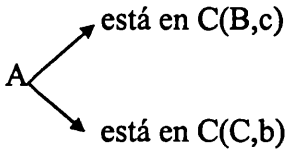
F: ¿Quién debería determinar?.... me falta determinar donde está este otro punto, que no lo sé todavía; me falta decir donde está situado A.

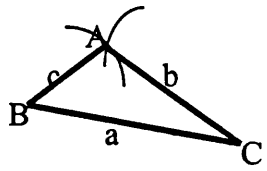
6.

F: Dense cuenta que, de nuevo construir un triángulo no es construir un triángulo, sino es determinar un punto, punto que vamos a determinar diciendo donde está situado ese punto; o si quieren de otra manera, diciendo cómo lo podremos localizar; depende que lo vean como echo o cómo ir hacia él. ¿Cómo lo puedo localizar? ¿Dónde está A?...si miro el segmento AB ¿donde está A?

Al: A esa distancia de B

F: A está situado a esta distancia de B (señala lado AB) y esto quiere decir que está en el círculo de radio c y centro en B (mientras lo escribe). ¿Están de acuerdo que si pongo el compás en B estaría acá? (agrega arco en el dibujo auxiliar). Está situado en el círculo de radio c y centro B, ¿y dónde más?. Si miro AC estaría en un círculo...(mientras lo escribe lo que un alumno le va diciendo, y agrega el otro arco).

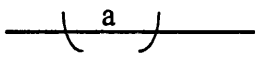




Ya sé donde está situado, pues creo que ya tengo reglas para construir el triángulo ¿no?. Cómo lo haría?...

7.

F : Veo esto al revés, tengo el a dado y ahí está puesto. Este lo voy a hacer (borra y deja sólo la fig. de análisis y los segmentos dados). Primero me hago una raya, una recta donde voy a situar el lado a (traza recta con regla). Para situar el lado a no hay problema porque tengo que transportar este segmento (transporta con hilo el segmento a, el cual según los datos dibujados es el más pequeño). Aquí tienen el lado a.



8.

▸Las medidas de los segmentos dados no se corresponden con las de la figura de análisis, en ésta el lado a es el más grande, lo cual produce comentarios entre los alumnos, una alumna parece tener intención de construir un triángulo congruente al de la figura de análisis.

F: Sí, ya sé que a es el lado mayor y todo eso

S (Silvia): Pero...por qué no es igual?

F: Pues, porque si es igual no aprenderíamos nada!. Ahí qué dice: ud. llévese a ¿me he llevado a? pues no mires la impresión de lo grande que te parece sino mira si me he llevado a. ¿Esto no es a? ¿me he llevado a? no tengo ninguna culpa si ahí era más grande y aquí más chico, lo siento muchísimo; ahí esto se llama a y este es el triángulo que tengo que hacer.

S: Pero no te saldrá igual, eso es más grande

F: ¡Qué más me da que salga más grande o más chico! mi problema es si puedo hacerlo con estos tres datos. Si mi triángulo no tiene por dato estos tres segmentos (los datos) me hechas la bronca que quieras, habremos fracasado; pero no me digas que ahí (señala a la figura de análisis) el lado es más grande, ahí también estaba así (inclinado) y yo lo voy a poner recto (horizontal) aquí!.

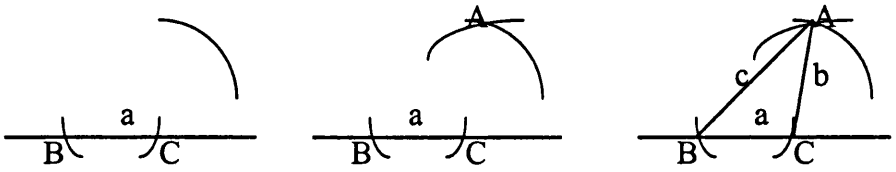
S: Pues.... todavía no me lo creo

F: Bueno pues intentaremos que eso sea posible.

9.

F: He hecho el lado a de la misma medida que me dieron, y los vértices se llaman B y C (les da nombre en el segmento que transportó). Ya tengo dado un paso y ahora ¿qué me dice ahí que haga?...una circunferencia con centro en B y radio c (hace el arco con el hilo). El arco de abajo no lo haré porque no tengo lugar en la pizarra. Ahora, paso número 2, que no es el paso 2 sino el segundo lugar donde está A; dice centro en C

y radio b (hace el arco con el hilo). ¿Dónde se cortan?...aquí está A. Hombre! obviamente no tengo los lados pero basta unir los puntos.



10.

F: Ahora me pregunto ¿es el triángulo que deseaba?, vamos a ver...¿es este c?...porsupuesto si lo he trazado así, y este es b?...porsupuesto si lo he trazado así.

F: Bueno hoy hemos dado una paso, en donde Silvia ha protestado un poquito, porque una vez definido cómo hacíamos la construcción o cómo encontrábamos el punto a, realmente hemos resuelto un problema real, porque antes hemos imaginado el problema resuelto e imaginado cómo lo haríamos. Pero en este segundo paso hemos dicho: en realidad los tres lados que ud. tiene aquí son estos tres (señala los segmentos dados) construya entonces el triángulo como dice. He puesto ahí (en la construcción) lo que ahí estaba dicho (instrucciones) y creo que lo hemos encontrado. Pues, lo hemos encontrado, y aquello de que los hechos valen más que mil palabras....; debe ser buena la descripción de la construcción ¿no?. ¿Preguntas?.

*IE

F: Bueno vamos a dedicarnos a partir de ahora sólo a problemas, en primer lugar de construcción de triángulos. Acabamos hoy de ver dos casos, uno de un triángulo rectángulo que nos daban un cateto y la hipotenusa, y otro de un triángulo cualquiera donde nos daban los tres lados. El juego éste de construir triángulo puede justificarse hasta el infinito siempre que cambie los datos ¿verdad?. No sé si se acuerdan los conceptos de mediana de un triángulo, altura de un triángulo, bisectriz,... ¿se acuerdan?.

Timbre.

CLASE 4

► En los primeros quince minutos se da teoría.

1.

F: Vamos a dar de nuevo algunas reflexiones sobre algunos conceptos relativos al triángulo. Recordáis, que hemos pintado un triángulo en alguna posición peculiar y teníamos siempre que nombrar a los vértices A, B y C (hace dibujo incluyendo notación). Os recuerdo que el día anterior los últimos problemas que hicimos eran de construcción de un triángulo, habíamos quedado que un triángulo se determinaba cuando dábamos por conocidos o determinados los tres puntos.

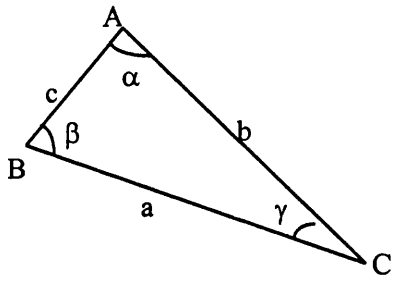
2.

F: Recordad también que para los lados eran letras minúsculas y siempre opuestas al ángulo o al vértice. Vamos a dar el nombre α para el ángulo A, β para el ángulo con vértice en B, y γ para el ángulo de vértice C. Esto es para distinguir entre el punto, que es el vértice y la amplitud del ángulo correspondiente a ese vértice. De momento tenemos tres ternas: A,B,C para los vértices; α, β, γ para los ángulos y, a,b,c para los lados, los lados que se oponen al ángulo (mientras las escribe)

A, B, C

α, β, γ

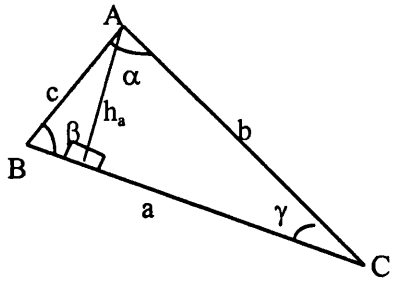
a, b, c



3.

F: El único concepto nuevo que hoy nos falta recordar es el de altura de un triángulo. Cuando de hecho, cuando uno se refiere a la altura de un triángulo está mintiendo, porque un triángulo tiene más de una altura. Vamos a presentar la altura de un triángulo vista desde un vértice. Voy a dibujar de momento la línea (agrega en el dibujo una recta perpendicular a BC por A). ¿Imaginan una perpendicular por el vértice A a la recta en la que está el lado a?. Este ángulo es recto y este también es recto (los marca en el dibujo). Trazo una perpendicular desde A hasta el lado a. Si en vez de pensar en la recta, pienso que no tengo más que el triángulo, Fernando todo esto te sobra (borra y deja solo el segmento de perpendicular) y tu mundo es el triángulo, ahí hay un segmento que es perpendicular desde el vértice A al lado a; a la longitud de ese

segmento o al segmento propiamente dicho se lo llama la altura correspondiente al lado a, y que vamos a nombrar h_a.



Se imaginan que puedo hacer lo mismo con los otros lados. No lo voy a dibujar, pero podrían pensar en una perpendicular desde el vértice C al lado c y hubiese un segmento que uniese C con el pie de la perpendicular. Le llamaría la altura correspondiente al lado c; y con b igual. Un triángulo tiene tres alturas. Si quieren pueden pensar esto, haciendo analogía con una figura semejante, piensen en un rectángulo, a esto lo llamo base y a esto altura (mientras dibuja un rectángulo de lados b y h). La altura mide como la anchura en otra dimensión del rectángulo. Pues si piensan un poco, aquí la altura del triángulo está midiendo la anchura según una dirección, pues si pensasen en la otra....el triángulo no es una figura tan simétrica como el rectángulo y no parece que es igual de ancho por todos los lados. Pues si quieren tener una imagen intuitiva de lo que es la altura quizás puedan pensar que se está midiendo lo de ancho que es el triángulo en cada una de las tres direcciones. Visto desde el vértice A es así de ancho, visto desde el vértice C parece que es más ancho ¿no?; visto desde el vértice B también tiene una anchura, y la anchura la medimos por una perpendicular desde ese punto hasta la recta que está sobre el otro lado. (Agrega la terna de las alturas en la pizarra y borra todo lo demás dejando sólo las ternas).

A, B, C

α, β, γ

a, b, c

h_a, h_b, h_c

► Se presenta el problema y se dejan quince minutos para que los alumnos lo resuelvan

"Construir un triángulo dados dos lados y la altura respecto a uno de ellos"

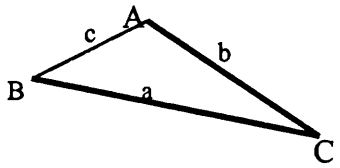
F: Ahora les toca trabajar sobre el problema, recuerden que tienen ahí la regla y el compás que pueden utilizar.

4.

F: Permítanme algunas reflexiones sobre el método que necesitan para resolver el problema. ¿Recuerdan por dónde empezamos? ¿qué había que hacer?

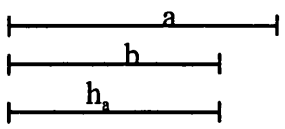
Al: Dar el problema por hecho

F: Dar el problema por hecho. Yo he andado por ahí, ¡no borren nada!...pero no he visto en ninguno de los papeles que hayan dado el problema por hecho; y habíamos quedado que a lo mejor era una buena estrategia. Pues, vamos a ver, si nos damos el problema por hecho y a partir de ahí ver qué podemos hacer. Por hecho quiere decir por resuelto; el profesor como siempre abusa de todas las cosas, dibuja un triángulo y dice éste es el triángulo que tengo que construir. Y luego diré esto es lo que me han dado, y lo remarco. ¿Es así? ¿es por dónde empezábamos?. ¡Vamos a hacerlo! a ver si es tan complicado este problema como parece. Primero vamos a dibujar el triángulo, como tengo que construir un triángulo pues dibujo el triángulo (dibuja un triángulo con vértices A, B y C). Este es el triángulo que tengo que construir y se llama ABC. ¿Qué es lo que me dijeron que se daba?...dos lados y la altura; entonces se ha dado a, b y.... Voy a ponerle nombres (agrega el nombre de los lados). Luego ¿qué se ha dado como dado? y lo remarcamos como siempre en grueso, a y b como lados.



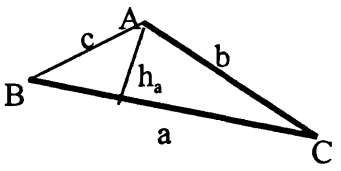
5.

F: Ya sé que todos se pusieron aquí a y b, como es obligatorio cuando tenemos que construir un triángulo (dibuja dos de los segmentos que son dato). Dados dos lados, y hay otro segmento, que algunos lo situaron y otros no, pero también es dada la altura de uno de los lados, pero...como hay tres alturas...¿la llamaron h_a? (agrega este segmento en los datos).



6.

F: Pues voy a pintarme h_a en mi triángulo ya hecho. (la agrega en la figura de análisis).



F: Hemos quedado que h_a es la perpendicular desde el vértice A al lado a.

7.

F: Esta fase, por la que creo que casi ninguno ha pasado, en la imaginación me imagino que sí, pero...no he visto que hayan reflejado sobre el papel esta fase de darse el problema por resuelto y representar los datos. Con eso de ya está hecho, ya está hecho, pues no lo tengo que hacer!. Estamos creo, instruyéndonos justo en este truco, de por qué alguien fue capaz de imaginar que dando un problema por hecho podría saber cómo hacía lo que tenía que hacer. Es bien claro que si uno imaginara como desea vivir, la da por hecha a la vida y luego imagina como la hace ¿verdad?, y eso con cualquier cosa, cuando uno se va a comprar un traje o un vestido, caso como antes lo imagina y después lo busca, incluso piensa en las distintas composiciones que puede hacer de ello. Pues eso es lo que hemos hecho, ya está hecho.

8.

F: Y ahora, ¿recuerdan la otra estrategia ineludible que seguía aquí?...reducir el problema de encontrar lo hecho en este caso, o lo que había que hacer, reducir un triángulo que ya está hecho ¿a qué?.....a la determinación de un punto.

9.

F: Ese punto a que se refiere el problema depende obviamente de la figura que está hecha, sin estar hecha. ¿A qué puntos referimos en este caso? ¿qué punto sería el problema en este caso?....conozco el lado a, conozco el lado b, conozco h_a, ¿a qué punto puedo referir el problema?.

Q (alumno): Al lado

F: Si me hablas de lado no es un punto

Q: Al vértice A

Otro alumno: Al B

F: Al vértice A o al vértice B, son dos alternativas que ambas me parecen sensatas. Podemos referirlo a determinar A o a determinar B, ¿os parece A por estar arriba...y lo podemos mirar de forma más natural en la construcción del triángulo?.

De todos modos les pido que también miremos B o quien ha hecho B que piense qué es lo que sirve para lo que vamos a decir para A. Si hemos elegido A, el problema es

¿A, dónde está ? (lo escribe)

10.

F: Me pregunto dónde está A porque como conozco el lado a, lo ponga donde lo ponga, conozco B y C. Creo que quien ha dicho determinar B es porque ha pensado como conozco b, conozco A y C luego tendría que pensar en B, y la pregunta sería ¿B donde está?. Luego, creo que desde este punto de vista es igual si tengo a o b como primer elemento. Vamos a ver donde está A.

11.

F: Recuerden la estrategia que utilizábamos para determinar A, ¿pensar en qué?...en dos...Ahora ya problema por resuelto, y dos lugares geométricos que permitiesen determinar A, ¿era así?. Yo a todos les he visto hacer círculos, luego algún círculo está ahí por el medio. De las pocas que he visto estaban con el compás, luego está el círculo, y han pinchado en los extremos de los lados. Pues, a ver, un lugar para A debe ser un círculo ¿no?; díganme en qué circulo está, o miren su dibujo y díganme qué han hecho

Al: En C

F: Círculo con centro en C y radio

Al: a

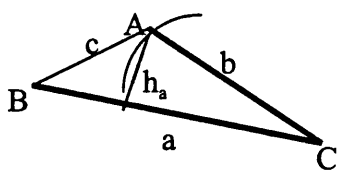
F: ¿a?

Al: No, radio b

F: Radio b (mientras lo escribe)

$A \longrightarrow$ está en C(C,b) (*)

y trazo un círculo, todavía no tengo A pero está por ahí ¿verdad? (agrega arco en la figura de análisis). Ya tenemos un lugar; ese todos lo han hecho. Nos falta otro lugar, si tengo otro lugar tengo determinado A.



12.

F: A ver...tú antes me habías dicho....

Al: A está en una perpendicular

F: A grosso modo A está en una perpendicular ¿verdad?. Ahora vamos a pensar qué quiere decir esto. Pensemos que está en una perpendicular. Como A está en la altura y la altura está en una perpendicular al lado, entonces A está en una perpendicular ¿es así?. ¿Imaginan cuál perpendicular? Pongo simplemente el brazo, no hago los dibujos, una perpendicular, otra, otra, otra,...(mientras pone el brazo perpendicular al lado a y lo desplaza sobre dicho lado y fuera de él, siguiendo la recta). Me imagino que sobre el lado puedo trazar muchas perpendiculares, tantas y cuantas desee ¿esas son todas candidatas para A?

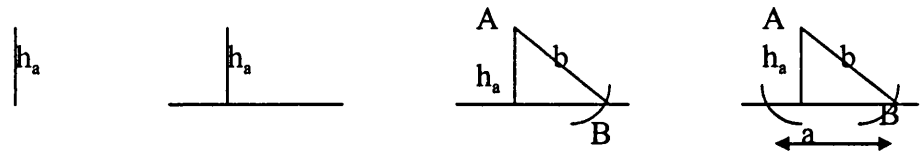
Al: Todas no

F: ¡Todas no! es bien claro que todas no!; alguna...alguna muy especial.

▸ Un alumno (Joan) cambia el punto de vista; explica y dibuja a mano alzada los pasos de su plan.

J: Al construir ese triángulo la altura ya la sabes, tienes que buscar.....

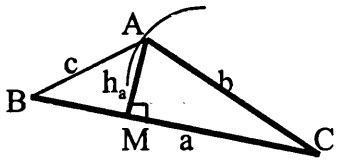
J: Trazas h_a, trazas la perpendicular; con centro en un extremo haces circunferencia de radio b y tienes entonces A y B, luego esta distancia la sabes (de B hasta el pie de la perpendicular) entonces ya tienes esto (señala en la figura de análisis el triángulo rectángulo de hipotenusa b) y tienes que hacer esto (señala en la figura de análisis el triángulo rectángulo de hipotenusa c). Pones en B el compás y haces arco a.

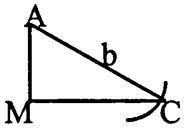


13.

F: ¡Me parece estupendo!. Sí, ¡por dios que es estupenda!. Vamos a analizar la solución de Joan. Lo que ha hecho es prestar atención a este punto que está aquí, que es el pie de la altura (mientras lo agrega en la figura de análisis). Primero lo que ha hecho es construir un triángulo rectángulo. Esto es, lo ha pensado no para determinar A directamente sino dice: como miro ahí y presto atención y este es un ángulo recto (lo marca en la figura auxiliar), podría construir ese trozo de altura y un triángulo rectángulo (hace a aparte un dibujo de un triángulo rectángulo AMC). ¿Qué conozco de este

triángulo rectángulo? este trozo y este trozo (h_a y b), un cateto y la hipotenusa. Creo que es uno de los problemas que resolvimos ayer. Como esto ya lo sé hacer, pues este trozo de mi figura ya lo tengo resuelto (señala el triángulo AMC en la figura de análisis).





Cuando resuelva esto mi problema será determinar B y él ha dicho que estaba en la recta MC, que la acababa de determinar porque ha construido el triángulo rectángulo y, además ha dicho que abría el compás y estaba en el círculo de centro C y radio a (mientras lo escribe)

B → está en la recta MC
→ está en C(C,a)

Luego al final nos ha dicho que aparte de hacer esa figura el problema era determinar un punto, que era más fácil determinar luego de hacer la figura, entonces el problema era una bobada. También ha utilizado dos lugares para determinar B pero previamente se ha servido de una construcción auxiliar, de este triángulo rectángulo que en nuestro dibujo aparece claramente, pues está remarcado en grueso. ¿Nadie tiene dudas?....

14.

▸ El docente retoma el plan de solución inicialmente sugerido

F: Como siempre los profesores tratamos de conducirlos por los caminos más difíciles. Yo quería aplicar estrictamente el modelo de los dos lugares ¿verdad? y teníamos que A estaba en el círculo C (C,b). Estoy regresando aquí (señala *). En esta situación el profesor, o el resolutor, no ha prestado atención a que si este triángulo era rectángulo lo podría construir, no ha caído en la cuenta. Ha dicho mi problema es A y mirando desde aquí (C) igual que lo ha hecho él para determinar B, solo que allí ha utilizado de radio al segmento a, hago centro en C y radio b y ahí estará A.

15.

F: ¿Qué otro lugar podría utilizar para determinar A? ¿han leído aquí?... (señala *), aquí he usado b. Cuando he pensado que el problema era determinar el vértice A he

utilizado como dato conocido el lado b, cuando he dicho que el círculo es de centro C y radio b he utilizado el radio b (condición escrita para A). ¿Qué no he utilizado hasta ahora?

Als: Altura.

F: La altura, luego el lugar que me falta por determinar debe de tener que ver con la altura. Eso está claro ¿verdad?.

16.

F: Ya sé que aunque antes les he sugerido esto de la anchura no piensan donde está la altura, que es una perpendicular a una distancia, que me está marcando la distancia que hay de aquí a aquí (vértice y recta que contiene al lado)

17.

F: Yo no sé si está exactamente ahí (señala la altura en la figura de análisis) pero sí que sé que sea donde sea, esto que es la altura del triángulo tiene que ser siempre la misma (mientras agrega en la figura de análisis segmentos equipolentes al h_a dibujado, estos segmentos están sobre el lado y sobre la recta que contiene al lado). ¿Saben dónde están todos estos puntos? (señala el extremo libre de los segmentos equipolentes a h_a). Están en una ....paralela (mientras une los puntos y traza la paralela). Sea cual sea la posición del punto A como es de altura h_a, A no sé dónde está pero el lado a está acá y el vértice A está ahí, en una recta (la señala) paralela al lado a, y ¿a qué distancia?....h_a (lo agrega en las condiciones)

A ⟶ está en C(C,b)
A ↘ está en P (a, h_a)

De todas las paralelas que puedan imaginar, esta es una, esta es otra (traza en la fig de análisis distintas paralelas al lado a), A no está en cualquiera, está en la que está situada en h_a.

18.

F: ¿Y ahora cómo se hace esto? Pues ahora es bien fácil; sitúese el lado a... Ahora hacemos la construcción. Cojo el lado a (señala el segmento a que es dato), lo pongo así (sobre el lado a de la figura de análisis), hago centro en C y radio b y hago un arco (gestos), después trazo una paralela a a pero a distancia h_a, que... creo que fue el primer problema del curso; luego... evoco todos los pasos para construir esa paralela y ya está. Construir la paralela y el círculo, y ya acabé.

CLASE 5

► Se retoma el tema después de Fallas.

***IE**

F: Os recuerdo que estamos resolviendo problemas con regla y compás, vamos a seguir con los problemas con regla y compás pero sin forzar demasiado la máquina y siguiendo la secuencia que pensamos era razonable seguir en clase. Vamos a seguir el transcurso normal de la lección y vamos a poner, como siempre un problema; recuerden también que los problemas que vamos a plantear son de construcciones de triángulo. Pues el problema dice así:

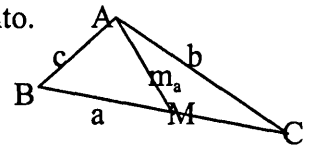
Construir un triángulo dado a, b y m_a

1.

F: Recuerdan las notaciones que utilizábamos para los distintos elementos del triángulo? (mientras escribe a, b y m_a) a y b son las longitudes de los lados y m_a...¿se la había presentado?, se las presento inmediatamente. Acá tenemos un triángulo ABC, creo que les había presentado h_a, h_b y h_c (escribe esta terna) que eran las alturas respecto de los lados a, b y c. Bueno, m_a es la mediana correspondiente al lado a, y ahora les digo que es la mediana. Si este es el triángulo ABC estos son los lados a, b, c (los nombra en el triángulo); recuerden siempre las notaciones, el orden alfabético y el sentido contrario a las agujas del reloj, mayúscula para los vértices y minúscula para los lados.

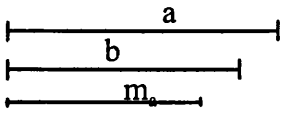
2.

F: El segmento BC, que es el lado a, tiene un punto medio y hay una segmento que une el vértice A con el punto medio M del lado a (lo dibuja), a esto lo llamo m_a, a la longitud de ese segmento.



3.

F: Luego el problema propuesto es: dado el lado a, el lado b y la mediana m_a correspondiente al lado a (mientras va señalando estos elementos en el dibujo) construir el triángulo. Recuerden que lo que se pedía es dado a, dado b y m_a (mientras dibuja los segmentos) construir un triángulo donde uno de los lados sea este segmento, otro de los lados sea este segmento y la longitud de este segmento sea la mediana correspondiente al lado a.



Tenemos que describir como debemos proceder con estos tres segmentos para construir el triángulo. ¿Es así?. Se me ha olvidado comentar que así como hay una mediana correspondiente al lado a, habrá otra correspondiente al lado b y al lado c.

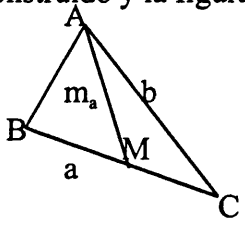
▸ Se deja unos minutos para que trabajen los alumnos.

4.

F: ¿Les recuerdo la estrategia? ¿Cómo se empezaba a resolver estos problemas?.

Als: Dándolo por hecho.

F: Dándolo por resuelto. Bueno a esa figura de ahí, la llamamos figura de análisis. Damos el problema por resuelto y por lo tanto construimos la figura de análisis (borra y hace una nueva figura) que será muy diferente a aquella (a la que borró) pero... marcamos los vértices del triángulo, y aquí acordábamos en remarcar lo que era dado (mientras resalta datos), el lado a, el lado b y m_a, donde llamaremos a este punto M, que es el punto medio del lado a. Esto es dar el problema por resuelto y aquí tenemos el triángulo imaginado como construido y la figura de análisis.



5.

F: Además ¿se acuerdan a qué teníamos que referir el problema siempre que sea posible? a la determinación ¿de qué?.

Al: De un punto

6.

F: De un punto, ¿qué punto les parece es el problema en este caso?, A, pues el problema consiste en decidir dónde está A. ¿Donde está situado A?

Mientras escribe ¿A está situado?

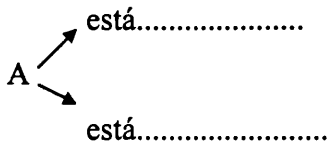
Este es el problema y recuerden la estrategia que utilizábamos para un punto...

Al: ¿Dónde está situado A? o B?

F: A, dado que el lado a lo conocemos, los vértices B y C estarán donde situemos al lado a ¿verdad? entonces el problema es localizar A.

7.

F: Se acuerdan también que de ser posible buscábamos dos lugares donde estuviese A y hacíamos algo así como esto, donde los puntos suspensivos son para el lugar



8.

Al: Pero ¿cómo que A está ahí?

F: A está ahí porque imaginamos que el triángulo está construido y marco los tres segmentos que tengo que utilizar y a partir de ahí empiezo a razonar cómo lo construyo. El lado a lo conoces, sitúas el lado a, y este vértice y este lo conoces (B y C)

Al: Lo que falta conocer es el lado

F: El lado c y el vértice A

Al: ¿Por qué no pones el lado c?

F: Si quieres pongo aquí el lado c (lo nombra en la figura) pero lo que me falta por determinar es el punto A. Un triángulo lo determinaré en cuanto conozca los tres vértices, conozco este y este y falta el otro vértice.

▸ Los alumnos trabajan y hay algunas explicaciones individuales de Fernando

F: éste es así o así, me da igual, el triángulo es el mismo

F: si tiene b tienes algo!

F: puedo poner de base a o b, lo que quieras!

9.

F: Por aquí me dicen...A ver... Si uno mira esta figura, A está a una distancia b de C, luego por aquí me decían que cogiese b, lo llevara aquí (C) y con el compás hiciese así (gestos de arco de circunferencia), esto es que A está situado en un círculo que tiene por centro el vértice C y por radio el lado b (mientras anota este lugar en las condiciones).

10.

F: Bueno, hemos avanzado algo, con eso he aprovechado b ¿verdad? ¿qué me falta por aprovechar?...m_a

11.

Al: Habría que hacer una .... y luego coger m_a y trazarlo y....(habla muy bajo)

F: ¡Perfecta! la construcción que me acabas de decir es perfecta. Pero a mí me interesa pensar un poquito hacia atrás. Lo que estás diciendo es que A también está en un círculo. Para aprovechar m_a podemos pensar.... ¿qué está marcando m_a? De aquí (A) a aquí (M), una distancia. Luego A está ¿a qué distancia de aquí (M)?...obviamente este punto todavía no lo sé porque este es el punto medio del lado a, pero sé que A está en un círculo cuyo centro es M y cuyo radio es m_a (lo agrega en las condiciones). Seguro que estos dos círculos, bueno seguro si no son concéntricos ni pasa nada raro, se cortan, pues donde se corten esos dos círculos está A.

12.

F: Luego construir el triángulo se reduce a determinar el punto A, y determinar el punto A se reduce a construir dos círculos, dos circunferencias, ¡perdón! Siempre utilizo la palabra círculo pero son circunferencias. ¿Conocemos qué circunferencias tenemos que trazar? Sí. ¿Qué es lo único que queda como desconocido? que no hemos dicho como trazar?...es M.

13.

F: Pero si M es la mitad del segmento a se determina trazando la mediatriz (lo escribe debajo de la segunda condición). Luego, lo único que tengo como desconocido es M y para determinar M se traza la mediatriz del segmento BC, que es el lado a.

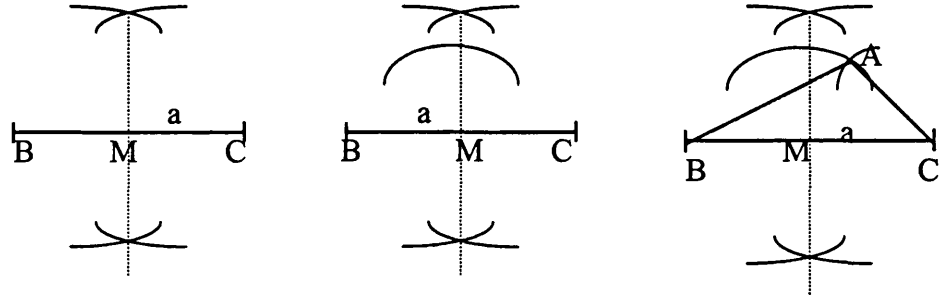
F: Este es el análisis del problema. Ya sé que siempre tienden a decirme qué harían para construirlo, pero lo que harían para construirlo se deduce inmediatamente de aquí, y como siempre ahora vamos a proceder a la construcción.

14.

F: ¿Ya sabemos todo lo que tenemos que hacer para construirlo?...no hay más que leer de abajo hacia arriba. Ahora borro (fig. de análisis) y mis datos son estos tres segmentos. Pueden empezar a construir con el compás. Primer paso: el segmento a (lo traza a mano alzada y le pone nombre). Si tienen los tres datos en el papel, por favor transporten el segmento a. ¿Ya lo tienen? ¿qué es lo primero que tienen que hacer?...determinar el punto M. Para ello ¿qué tienen que hacer?...la mediatriz, que ya la están haciendo. Hagan la mediatriz del segmento BC y determinen el punto M.

► Pasa por los bancos. Un alumno quería medir para ubicar el punto medio y F. le dice: No, mira la regla y el compás permiten trazar rectas y transportar segmentos.

F: Ya tienen M, han hecho mediatriz y determinado M (mientras dibuja la mediatriz a mano alzada). Pues ahora es todo fácil! ¿qué es lo que tengo que hacer? Una circunferencia con centro en M y radio m_a (agrega arco en el dibujo). Hacen centro en M y con radio ma, la mediana, hacen un círculo. ¿Ya lo han hecho? Y ahora ¿ahí qué dice?, hacen círculo con centro en C y radio b (agrega arco) y este es el punto deseado A. ¡Triángulo construido! (mientras une los vértices)



F: ¿Alguien tiene alguna duda?. Más que dudas lo que me interesa es que reflexionen sobre el método, porque si procedemos siempre así verán que todos los problemas son absolutamente elementales. ¿Tenéis alguna dificultad? Pues, les cambio el problema inmediatamente (mientras borra la pizarra). Bueno, ahora verán que cuando hagamos un par más salen como churros todos!.

Construir el triángulo dados a, h_a y m_a

Escribe

a, h_a y m_a

1.

F: Nos dan tres longitudes que pertenecen a un triángulo, un lado, la altura correspondiente a ese lado y la mediana correspondiente al mismo lado, y hemos de construir el triángulo.

2.

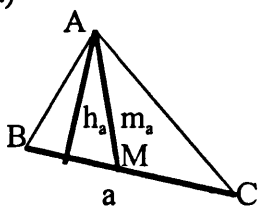
F: Primer paso, la figura de análisis, dando el problema por resuelto, y nos dibujamos el triángulo.

3.

F: Cuando uno trabaja en esto tendría que hacerse una fotocopia con un montón de triángulos y después raya, si todos son iguales ¿verdad?. Voy a ponerlo un poco inclinado porque a esta muchacha siempre le interesan que estén los triángulos en las posiciones estándares. Me niego a cambiar el orden de los vértices, no es que me niegue, porque los puedo situar de otra manera, sino es que así pienso mejor situándolos en la misma posición y no tengo ningún elemento perturbador. Los datos son a, h_a y m_a.

4.

F: Marco a, h_a es la altura correspondiente al lado a, la altura es la perpendicular por el vértice a la base (mientras la marca), esto debe ser pues h_a. ¿Qué más datos me dan?...la mediana, y uno puede pensar en el punto medio M del lado a y unir el vértice con ese punto y esto es m_a (la marca)



Al: ¿Y cómo se hace eso?

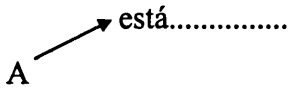
F: ¿Cómo se hace? Ahora lo he hecho a ojo porque he dado el problema por resuelto ¿verdad? Luego veré como se hace. Ahí tienen la figura de análisis, como siempre.

5.

F: Y ahora díganme a qué se puede, como siempre, reducir la construcción de este triángulo?...a determinar....

Als: A

F: El punto A; y ahora diré dónde está A situado



6.

F: ¿Podemos aprovechar algo del problema anterior, pues tenemos la mediana?. Luego A está situado en ¿qué?...en una circunferencia de centro M y radio....m_a (lo escribe en las condiciones). Bueno, pues ya tenemos un lugar. Esto es aprovechando la mediana, cosa que sabíamos antes, ya incluso esta construcción la saben hacer.

7.

F: ¿Qué nos falta ahora?...aprovechar...la altura ¿qué nos marca la altura?, h_a es la altura, a ver si esto nos da una pista de algún lugar

8.

Als: Una perpendicular

F: Sí, la altura es el segmento que está en la perpendicular y a una distancia tal.

Al: Sacas un punto en el cateto a con la perpendicular.... (no se escucha bien)

F: Cuántas perpendiculares tiene? Ésta, ésta, ésta...(hace gestos con distintas perpendiculares al lado a), la altura ¿qué les está marcando respecto de la base?...a la distancia que está el punto A del lado a

9.

F: ¿Y esto qué es?...una paralela. Todos los puntos que están a igual distancia de una recta dada están en una recta paralela. Yo no sé si este dibujo lo llegamos a hacer, creo que sí, pero miren si este es un segmento determinado y esta es la altura, este triángulo tiene esta altura, y este tiene la misma altura, y este también (dibuja flia. de triángulos de igual base y la misma altura). Todos los que estén en una recta paralela (la agrega) están a la misma altura. Luego, la altura respecto a una base les está dando la pista del lugar geométrico donde está el punto A, en la paralela. Recuerden que hablamos de altura como la anchura del triángulo; la anchura en esta dirección; todos los triángulos que estén ahí en la paralela tienen la misma anchura en esa dirección. Por más que A sea distinto, así de largo por ejemplo (dibuja en la flia de triángulos uno de base mayor pero de igual altura) pero siempre la altura será la misma. Bueno pues A está en una paralela al lado a y a una distancia h_a (lo agrega en las condiciones).

10.

F: Y ahora ¿saben cómo se construye el triángulo?. ¿Recapitulamos? Recapitular ahora ¿qué quiere decir? ¿Cómo procedería a construir el triángulo?. Lo borro (borra figura de análisis) y ahora lo voy a construir.

F: ¿Qué es lo que tengo que hacer para construirlo? Vamos a ir por partes. Desde luego que tengo que hacer un círculo y una paralela. Si no sé trazar círculos y paralelas estoy perdido. Pero, como el círculo y la paralela son para determinar A, voy a decidir primero dónde están B y C. Como antes, cojo el lado a.

11.

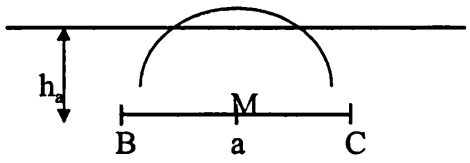
F: ¿No se han dado tres segmentos? ¡No se engañen! Dense tres segmentos cualesquiera, a los que les llaman a, h_a y m_a.

►Pasa por los bancos:

F: ¡la paralela ya la hicimos! Cómo trazar una paralela a una distancia ya lo hicimos.

12.

F: Lado a (dibuja un segmento a mano alzada), y esto B y C ¿qué tengo que hacer? un círculo con centro en M y radio m_a. Primero hay que hacer obviamente la mediatriz para determinar M, imprescindible; después hago círculo con centro en M y radio ma (agrega arco). Como ven hasta ahora, lo que han hecho es abrir dos veces el compás, una para la mediatriz y otra para...He obviado ahí el dibujo de la mediatriz para determinar M



F: Y ahora ¿qué es lo que hace falta?...pues trazar la paralela a distancia h_a (la agrega en el dibujo). Recuerden que es el primer problema que hicimos en clase. Para trazar una paralela a una recta a una distancia deben recordar la construcción. Por aquí me han dicho que con dos perpendiculares se puede hacer. Paralela a esta distancia, recordar el problema que hicimos de trazar una paralela a una recta dada que estaba a una distancia dada. Se podía hacer con perpendiculares

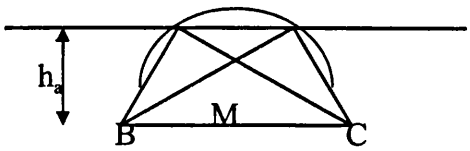
►Pasa por los bancos.

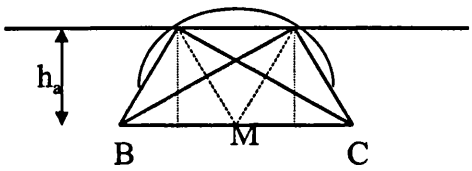
13.

F: ¡Escuchar! siempre estas construcciones ya están hechas previamente, trazar una paralela, hacer un círculo...¿Algún problema? Como ven ¿cuántos puntos de corte hay?

Als: Dos

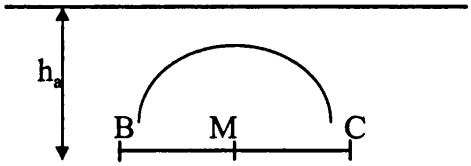
F: Pues entonces tiene dos soluciones, ésta y ésta. Esos son dos triángulos iguales porque son simétricos; porque el círculo y la paralela se cortan en dos sitios. Esta son las alturas y estas las medianas (marca altura y mediana en las dos soluciones).





¿Nadie ha tenido problemas con las dimensiones que se ha dado? con las longitudes de a, h_a y m_a para construir el triángulo? Tú la has tenido? Miren a esta muchacha, me imagino que le ha pasado a alguien más.

(En la construcción borra la paralela y las dos soluciones)



F: Aquí he trazado el círculo de radio ma; he hecho esto y después he hecho la paralela y se ha ido a parar para arriba. La paralela me ha salido por arriba, por lo tanto el círculo y la paralela no se cortan. Luego ¿dónde está A? Si no se cortan A no está en ningún lado. Vamos a analizar por primera vez problemas que no tienen solución dadas medidas arbitrarias de los datos.

14.

F: ¿Qué es lo que ha ocurrido aquí? Esto es m_a, esto también es m_a (mientras agrega dos radios m_a en el dibujo) y esto es h_a. ¿Qué relación hay entre h_a y m_a? ¿Quién es mayor?....h_a. Si la altura es mayor, obviamente la paralela no va a cortar al circulo y entonces no habrá solución. Piensen qué es lo que pasa en un triángulo en general. Ahí tienen dibujada la altura y la mediana (dibuja a parte un triángulo) correspondientes al mismo lado. La altura está marcando siempre la distancia mínima, y la mediana la distancia al punto medio. Luego, ¿cómo debe ser siempre la mediana?...mayor que la altura. Pues si alguien se da tres segmentos de modo que la mediana se la da de menor longitud que la altura, no va a poder construir el triángulo, aunque utilice las normas que hemos previsto para el triángulo; no va a poder construirlo porque tal triángulo no existe. No existe ningún triángulo cuya mediana sea de menor longitud que su altura. Dense cuenta, también, que en los problemas de regla y compás uno de hecho está proponiendo proposiciones o teoremas respecto a los triángulos. En aquellos casos en que la construcción sea imposible, hay alguna

propiedad relativa a los segmentos que uno se ha dado que imposibilita que tal triángulo la cumpla. ¿Dudas?.

Construir el triángulo a, h_b y c

***IE**

F: Otro. Este es una variante de uno que hicimos. Los enunciados de los problemas, como verán, son elementales. Les cambio los nombres de las longitudes. (mientras escribe la terna a, h_b y c).

F: De momento con longitudes; no he querido tratar todavía con ángulos. Dados dos lados y una altura, lo que pasa que la altura es correspondiente al lado que no es dado.

▸Pasa por los bancos

F: El próximo día, al empezar la clase, recuérdenme que les hable del arco capaz

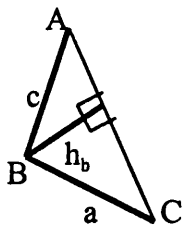
F: ¿Por dónde tienen que empezar? por la figura de análisis

1.

F: ¿Se han hecho la figura de análisis? (mientras la hace). A ver, no sé porque en tu figura tenías problemas. ¿Es más o menos de esta forma? A, B, C,... conocidos a y c (los remarca) y me falta la altura correspondiente al lado b. ¿Cómo se determina la altura correspondiente al lado b?...pienso en una perpendicular al lado b desde B, ésta (la marca) h_b. Ahí está la figura de análisis.

2.

F: Recuerden que este es un ángulo recto (lo marca).



3.

F: Y ahora ya como siempre...¿a qué se reduce este problema?...a determinar ¿qué?

Als: B

F: B lo conoces si conoces el lado a; a determinar A. Pues ya saben, este problema se reduce a determinar, como siempre, el punto A. Cuando encuentren dos lugares donde está A ¡problema resuelto!, Después será construir los lugares.

► El docente propone actividades para casa, enfoca notación y sugiere trabajar hacia atrás para resolver los problemas.

F: Les voy a poner una lista, por si se quieren entretener en el autobús al menos haciendo la figura de análisis en los siguientes problemas.

a, h_b, h_c a, h_b, D_γ

D_γ es la bisectriz correspondiente al ángulo γ. ¿Se acuerdan que en los triángulos los ángulos se llaman α, β, γ? (los señala y nombra en la figura del último problema) y hay una línea que es la bisectriz de este ángulo(γ) que corta a este lado (c). ¡Voy a hacer un dibujo separado! (hace triángulo a parte). La bisectriz de este ángulo (γ) cortará a este lado (c) y este segmento tendrá una determinada longitud, es la bisectriz D_γ.; D por no ponerle igual al lado. Para mañana estos dos, lo que importa es que piensen en la estrategia hacia atrás. Insisto, no piensen en como haría yo para hacer sino que ya está hecho.

CLASE 6

F: Teníamos algunos problemas pendientes. Aquí tengo (lee del cuaderno de un alumno) Construir el triángulo dados ...si se recuerdan las notaciones...; estos eran los dos primeros de la lista

a, h_b, c

a, h_b, h_c

"Construir un triángulo dados a, h_b, c"

1.

F: Después de estos días ¿se acuerdan cómo lo teníamos? ¿por dónde empezábamos?

Als: Dando el problema por hecho

F: Dando el problema por hecho, que quiere decir que haga.... ¡Dime qué hago!

G (Alumna): El triángulo, ... a, y la altura....

F: El triángulo (lo dibuja), dime qué pongo

G: Remarcas los datos que tienes, el lado a,...

F: ¡No corras tanto! El triángulo ya lo tengo, ahora le pongo nombres ¿a qué? ¿A los lados o a los vértices? ¿Por dónde empezábamos?

Als: Vértices

F: Por los vértices que les llamo A, B, C. Este es el triángulo que tenemos que construir. Y ahora seguimos...

G: Remarcas el lado

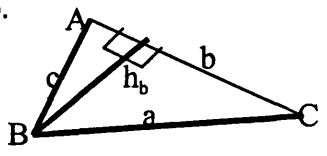
F: El lado que tengo es....Estamos haciendo este problema (destaca la terna a, h_b, c). O sea que seguimos poniendo nombres a, b, c. Y remarco a porque es dato

G: Luego c y la altura de b

F: ¿Cómo marco la altura de b?

G: La perpendicular desde el vértice B al lado b

F: Marco la perpendicular, me hago aquí como que esto es recto y esto es h_b (agrega h_b). Y a esto siempre le llamo la figura de análisis ¿verdad?. Ya está ahí reflejado el problema resuelto, y lo que es conocido.



2.

F: Y recuerden como siempre, para resolver el problema ¿qué es lo que teníamos que hacer?...buscar un punto

3.

F: ¿Qué punto en este caso?...uds. decidan

Al: Pues A

F: Pues A ¿por qué A? Porque el lado a es conocido luego conocemos los vértices B y C (los señala en la figura de análisis). Luego el problema es encontrar A.

4.

F: ¿Se acuerdan cómo encontrábamos A? ¿Con el método de qué? De los Dos Lugares. Había que encontrar dos lugares en los cuales estuviese A. Ya sé que hemos tenido un tiempo de vacaciones pero...nos acordamos ¿verdad? ¿Vamos muy deprisa?

Als: No

5.

F: Recuerden, tenemos que construir un triángulo, tenemos las líneas marcadas con grueso como conocidas. Para un triángulo se deben conocer tres vértices, como nos dan un lado conocemos dos, tenemos que determinar el tercero, y el tercero en este caso es A.

►Indicaciones para aplicar el método. Al intentar hallar el segundo lugar se genera un nuevo problema (Z: trazar recta CM, con M pie de la altura)

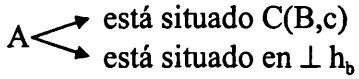
6.

F: Y ahora hay que determinar los dos lugares porque es el método de resolución de problemas que estamos utilizando para ver donde está A.Y esperamos que uds. me digan dónde está A. A está en dos lugares ¿cuales son? y este es siempre el problema.

Al: A se encuentra en la circunferencia con centro en B y radio c

F: A se encuentra, poníamos está situado, en la circunferencia con centro en B y radio c. Ya tenemos un lugar para A (lo escribe en las condiciones). Nos falta pues el otro lugar.

►(El docente hace pasar a una alumna H para agregar el segundo lugar en las condiciones.



F: Si la sabes trazar estupendo!. Pues vamos a ver si sabemos. Crees que tienes algún problema con ello? Venga! dinos eso un poco mejor.

7.

F: Está situado en la perpendicular a h_b. Eso dice la figura, pero eso no es un lugar exactamente ¿verdad?. Sabes que una perpendicular es una recta y una recta cuántos puntos son?...dos. A ver si seguimos la idea, que A está situado en una perpendicular a la altura. Esta es la idea, la idea intuitiva pero a ver si la precisamos. Le llamo M a este punto (pie de la perpendicular). A ver si esto nos ayuda. aunque este es el problema resuelto no sabemos tampoco donde está M; pero...a ver.

H: Pero sí que puedes saber donde está M

F: Dime donde está M

8.

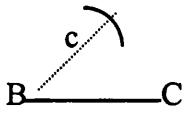
.► H explica su plan, vuelve al problema original y dibuja un lugar para A, la C(B,c). Luego encuentra un lugar para M, la C(B,h_b). La intervención del docente apunta al control en la dirección del plan.

H: Esta distancia la tienes (a) y la dibujas; después pones el compás en B y dibujas h_b

F: Venga, a ver!

H: La distancia c que la tienes, la marcas con el compás

F: ¡Márcala!



F: Bueno,...por ahí está A. Nos falta otro trocito, A está en el circulo....

H: Tienes la altura

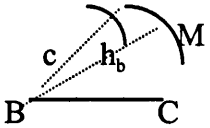
F: Y ahora tienes la altura. ¿La altura no es una distancia?

(H dibuja arco con centro en B y radio h_b)

F: La altura no te marca radio, la altura te marcaba siempre la anchura del triángulo ¿verdad?...pero no radio.

H: Pero si coges el radio h_b sabes el punto M

F: Cógelo! el punto M está en un circulo con centro en B y radio h_b (H escribe M en el arco)



F: Pero ¿cual es el objetivo? ¿encontrar quién?...pero A no está ahí

H: Pero A tiene que estar en una línea que une C con M

F: Estupendo!. Ya tenemos un avance. Ya sabemos algunas cosas de M y de A. De hecho lo que vamos a hacer es encontrar un lugar para M y un lugar para A. Pero recuerden cómo funciona este método para encontrar un punto...., cuando encuentren dos lugares para un mismo punto. Vamos a concedernos dos minutillos porque este es un problema algo diferente y luego haremos algunas consideraciones.

▸Los alumnos trabajan. Luego el docente retoma el problema Q con una perspectiva acorde con el Método de la Figura Auxiliar

9.

F: ¿Borro la segunda parte? ¿Todos están de acuerdo que A está en el círculo?. Ahora vamos a ver a qué podemos prestar atención dada la figura de análisis. Ahí tenemos triángulos rectángulos y por ahí me dijeron que hicieron un triángulo rectángulo.

10.

F: Bueno, porque aunque sea la primera vez que hacemos esto, no describimos directamente donde está A, sino decimos A está en una determinada figura que no conocemos directamente. Vamos a hacer esto por primera vez. No nos dan instrucciones claras de como construirlo. Entonces me permites que ponga triángulo rectángulo...¿cómo quieren que lo llame? ¿por los vértices? entonces triángulo rectángulo (A,B,M)

Murmullo

11.

F: ¿Cuántos triángulos rectángulos hay ahí?...dos, A está en uno de ellos ¿verdad?...en (A,B,M) (mientras borra la segunda condición y escribe esto), en el otro triángulo rectángulo A no está, sí que está como alguien decía, en la prolongación de no sé qué; lo cual no era un mal paso de análisis y ya aprenderemos que a veces no es tan fácil en el primer paso encontrar A.

F: ¿Qué es lo que pasa aquí? ¿qué hay de nuevo aquí?...que A no está determinado inmediatamente con dos lugares porque...¿qué es lo que tenemos que hacer antes para determinar A?....la circunferencia la sabemos hacer pero aquí tenemos un triángulo rectángulo donde está A.

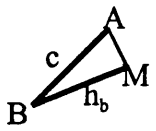
12.

F: Vamos a ver si este problema lo hemos hecho o lo conocemos. ¿Quieren que separe este triángulo rectángulo aquí al lado? Vamos a ver si este problema lo hemos hecho alguna vez. Pongo aquí B, aquí A y aquí M (mientras dibuja un triángulo rectángulo con esos vértices). Este es el triángulo rectángulo donde está A. Díganme qué conozco

Als: c y h_b

F: ahora no piensen en h_b sino que en el triángulo rectángulo es un cateto y este otro segmento (c) que en el triángulo rectángulo es la hipotenusa (mientras los marca en este último dibujo).

13.



F: Recuerden que si nos dan un cateto y la hipotenusa podemos construir un triángulo rectángulo. Se acuerdan de la construcción o la han perdido? Podíamos construir un triángulo rectángulo siempre que nos diesen dos elementos, entre ellos un cateto y la hipotenusa. Luego este es un triángulo rectángulo que tiene por cateto h_b y por hipotenusa c.

14.

F: Luego si pensamos un poquito para encontrar A tenemos que construir un circulo o una circunferencia, y además un triángulo rectángulo, y a esta la vamos a llamar una figura auxiliar porque es una figura básica, porque regla y compás se refiere solo a rectas y a círculos pero aquí debemos construir además un triángulo rectángulo.

F: Luego construido esto, que es la segunda parte , y ahora pongo en función de los datos dados la hipotenusa c y un cateto h_b (agrega esta nueva notación del triángulo rectángulo). A está en un triángulo rectángulo de hipotenusa c y cateto h_b y en un circulo de centro B y radio c. ¿Está claro donde está? Borramos y la construcción. Si tienen hagan preguntas.

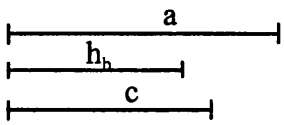
A
- está situado C(B,c)
- está situado en T.R. (A,B,M)
  -T.R (c, h_b,_)

➤Contesta algunas dudas individuales

15.

F: Puedo borrar todo y como siempre, darse los tres segmentos, a, h_b y c y empezar la construcción. Borro todo incluso la figura de análisis? les dejo la figura auxiliar?... como no me dicen nada lo borro todo incluso donde está situado A (las condiciones)

F: Y ahora el problema es, dados los segmentos tienen con regla y compás que construir el triángulo.



►Pasa por los bancos

16.

F: Como siempre después del análisis saben las normas que tienen que seguir para construirlo. ¡Pueden empezar!. ¡Cómo que no te acuerdas las normas! Las normas son las que teníamos ahí escritas y...en primer lugar ¿qué teníamos que hacer? Un triángulo rectángulo que tiene por hipotenusa no sé qué y por cateto no sé cuanto. Esta era la norma, lo escribo aquí (vuelve a escribir la segunda condición), triángulo rectángulo que tiene por hipotenusa c y por cateo h_b, el otro cateto está determinado

Cuando hagamos esto lo seguimos porque A estaba situado ahí. Luego tienen que determinar un triángulo rectángulo de cateto tal e hipotenusa cual.

►Los alumnos trabajan

17.

F: Aquí tienen todos un problema que creo tiene que ver....Hemos empezado el análisis por saber donde está situado A, que estaba situado en un circulo ¿verdad? Después hemos dicho que A estaba también situado en una figura auxiliar, en un triángulo rectángulo. Ahora, cuando empezamos a hacer la construcción efectiva, dados los datos, resulta que si empezamos por el primer lugar, como otras veces hemos hecho, tenemos dificultades para construir el segundo lugar. ¿No es así?. ¿Todos han tenido la misma dificultad? ¿Todos?. Luego, por no hacer más análisis de la situación, ¿por dónde deberíamos empezar? Por construir la figura auxiliar, el triángulo rectángulo. Pues empiecen por construir el triángulo rectángulo y a lo mejor resuelven sus problemas. Solo sugiero eso. ¿Por qué? Porque la figura

auxiliar guarda una relación con la otra figura, que no he analizado profundamente por lo tanto construyan el triángulo rectángulo, que para eso se llama figura auxiliar, y me imagino que a partir de ahí no tendrán más problemas. Lo hacemos?. Esto es una perversión de la clase de procedimientos, porque es un dificultad técnica, pero...como no tenemos tiempo de hacer mas cosas...Vamos a hacerlo!.

18.

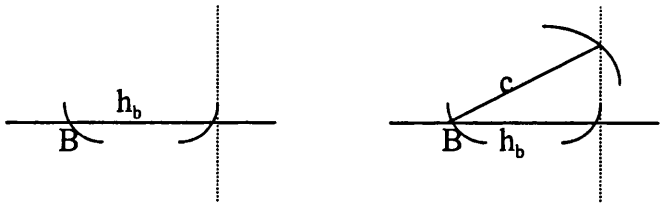
F: El segundo lugar que tengo que construir lo construyo, triángulo rectángulo....¿me perdonas si el triángulo rectángulo está fuera de tu posición? que la figura construida no esté en la misma posición que la figura de análisis?.

19.

F: Recta (dibuja una recta), cateto h_b, tengo aquí un compás (transporta h_b sobre la recta). Miren ahí un triángulo rectángulo de cateto h_b e hipotenusa c. Para poner la hipotenusa tengo que tener una perpendicular. ¿Quieren que haga la perpendicular o la pongo así? (traza a mano alzada una perpendicular). Me dirán donde están los vértices del triángulo rectángulo, porque no recuerdo la figura de análisis. Si esto es h_b ¿aquí está B? ¿sí?. Bueno, y ¿dónde está A? ¿allá? ¿y qué hago?

Al: Coges c y centro en B

F: Cojo c y centro en B (transporta y hace arco) y se supone que este es el triángulo rectángulo que deseábamos construir, que es una de las figuras auxiliares



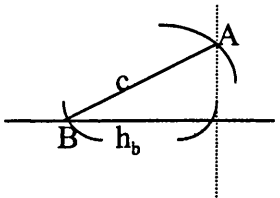
20.

Al: Ese vértice tiene que ser A?

F: Este es B y esta h_b

Al: ¿Y el A?

F: Mira tu figura de análisis y dime donde está A. Desde luego tengo h_b y c ¿dónde pongo A? ¿ahí?

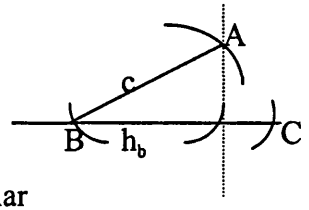


21.

F: Y ahora me falta C ¿dónde pongo C?. A estaba en la circunferencia de centro....

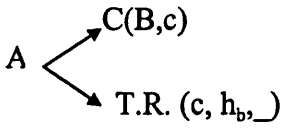
Als: B y radio c

F: Ahora, como nos han trastabillado todo, nos falta C. Luego c está situado en...Vamos a ver, aquí me dicen en la circunferencia de centro en B y radio a. Yo lo hago



Als:¡No! en la perpendicular

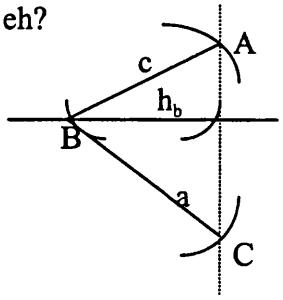
El docente escribe



H (Alumna): ¡No! haces centro en B pero prolongas la perpendicular

F: Tienen su hoja, su figura de análisis la pueden mirar y poner en la posición de la pizarra tanto y cuanto deseen, eh?

(Pasa H)



F: ¿Todos están de acuerdo? Lo que pasa que el profesor ha cortado en la perpendicular y esta muchacha me ha dicho que no. Les he hecho una pequeña broma porque...¿este punto cómo se llama?

Als: M

F: M (lo agrega en la construcción en el extremo de h_b). Este punto no lo he puesto, es M. Y si ahora miran en la figura de análisis ¿quien es el punto M?...pueden girar su hoja, era la prolongación no?. Pero al final en lugar de construir A hemos construido C. Verdad?.

▸Consultas (muestra que A cumple las dos condiciones y que C se construye luego de construir la figura auxiliar)

F: Bueno, el jueves continuamos, haremos algún problemas más y lo dejamos.

ANEXO II

Correspondiente al capítulo 4

Programa de la asignatura a cargo del experto

DIDÁCTICA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y HEURÍSTICA MATEMÁTICA

Curso 96-97 Prof: Fernando Cerdán

OBJETIVOS: Aprender a resolver problemas-(estado de resolutor).
Ser consciente -saber mirar- en el proceso de resolución de un problema.que uno resuelve o resuelven otros-(estado de resolutor - observador-investigador)
Sugerir qué se puede hacer cuando al resolver un problema alguien no sabe qué hacer o está atascado -(estado de profesor)

LECCIONES:

1.-De los modos y maneras de resolver un problema.

2.-Los problemas que pueden describirse como el paso del Estado inicial al Estado final.

3.-Un caso particular del Método de Análisis-Síntesis. El modelo de los dos lugares. La resolución de problemas geométricos con regla y compás.

4.-Del ensayo y error a los métodos experimentales para resolver problemas. La búsqueda de pautas patrones y modelos

5.-El análisis de la actividad del resolutor resolviendo un problema. Modelos de fases. Categorías de conocimiento y conducta.

6.-Los problemas aritméticos escolares. Problemas aditivos y multiplicativos. Problemas de varias etapas. El método de Análisis-Síntesis.

7.-La familia de problemas aritméticos-algebraicos. Estructura de la familia. El método de las inferencias análiticas sucesivas. El método de las aproximaciones analíticas sucesivas. El modelo cartesiano.

8.-El Estilo Heurístico en la resolución de problemas. Problemas relacionados. Las Herramientas Heurísticas. Las Herramientas Heurísticas y las fases del proceso de resolución. De los patrones plausibles.

9.-El profesor y la resolución de problemas. Las tareas del profesor. Modelos de actuación.

BIBLIOGRAFIA:

Polya G.(1972) ¿Cómo plantear y resolver problemas? Ed. Trillas. México D.F.

Polya G.(1967) La découverte des mathematiques. T.1 Ed. Dunod..Paris

Guzman M. (1991) Para pensar mejor. Ed. Labor. Madrid.

Mason J. et col (1988) Pensar Matemáticamente Ed. Labor. Madrid.

Rubio G. (1996) La familia de problemas aritmético-algebraicos. Modelos didácticos. Tésis teóricas y observaciones empíricas. (CINVESTAV) México D.F.

Puig L., Cerdán F. (1989) Problemas aritméticos escolares. Ed. Síntesis. Madrid.

ANEXO III

Correspondiente al capítulo 6

Unidad de Enseñanza

Esta **UNIDAD DE ENSEÑANZA** se desarrolla en el marco de un proyecto de investigación a cargo de la Prof. Liliana Siñeriz.(Universidad Nacional del Comahue - Centro Regional Bche).

Contenidos.
Lugar geométrico: Definición. Circunferencia, mediatriz de un segmento, paralela a una recta, bisectriz de un ángulo como lugares geométricos.
Circunferencia: Definición. Mediatriz de un segmento: definición. Construcción de la mediatriz con regla y compás. Construcción de la recta perpendicular: por un punto perteneciente a la recta y por un punto exterior a la recta.
Distancia de un punto a una recta: definición. Construcción con regla y compás. Rectas paralelas. Definición. Construcción de la paralela a una recta que pase por un punto dado.
Bisectriz de un ángulo: definición. Construcción.
Triángulos. Elementos de un triángulo. Clasificación de triángulos. Propiedades de los ángulos interiores y de los ángulos exteriores de un triángulo. Relación entre los lados.
Rectas notables de un triángulo: mediatrices, bisectrices, alturas y medianas. Puntos notables de un triángulo: circuncentro, incentro, ortocentro y baricentro.
Criterios de congruencia de triángulos. Problemas. Construcciones.
Criterios de congruencia de triángulos rectángulos. Construcciones.
Resolución de situaciones problemáticas.

Propósitos.
- Favorecer la construcción de conceptos, procedimientos y actitudes para lograr en los alumnos conocimientos significativos, funcionales, transferibles y perdurables.
- Centralizar el enfoque didáctico en las situaciones problemáticas y en los distintos procedimientos para resolverlas.
- Promover el aprendizaje de los contenidos de la Geometría, para que el alumno amplíe su visión acerca de en qué consiste la Matemática y de sus múltiples aplicaciones en la resolución de problemas propios, del mundo real y de otras disciplinas.
- Estimular el uso de las diferentes formas de pensamiento, intuitivo, analógico y especialmente lógico, para formular hipótesis, crear pruebas, elaborar argumentos válidos y convincentes y juzgar los argumentos de otros.
- Propiciar un trabajo cooperativo y responsable como medio de aprendizaje personal e integración socio cultural.
- Estimular el esfuerzo, la disciplina y la perseverancia en la resolución de problemas y la presentación honesta de sus resultados.
- Promover en los alumnos confianza y seguridad en sus posibilidades de pensar y comunicarse con autonomía en los lenguajes de esta disciplina.

Objetivos específicos.
- Adquirir destrezas en el uso de la regla y el compás, diferenciando tambien sus usos.
- Adquirir el vocabulario geométrico preciso e interpretar el lenguaje escrito a través del dibujo geométrico.
- Buscar la precisión en las construcciones.
- Analizar las condiciones de las construcciones.
- Distinguir e identificar diferentes rectas en el plano.
- Conceptualizar como lugares geométricos: la circunferencia, la mediatriz de un segmento, la paralela a una recta, la bisectriz de un ángulo.
- Clasificar los triángulos por sus lados y por sus ángulos.
- Afianzar las propiedades del ángulo exterior de un triángulo y de los ángulos interiores de un triángulo.
- Identificar y trazar los rectas notables de un triángulo: mediatrices, bisectrices, alturas y medianas.
- Identificar los puntos notables de un triángulo: circuncentro, incentro, ortocentro y baricentro.
- Resolver situaciones problemáticas que permitan conceptualizar los criterios de congruencia de triángulos.
- Resolver situaciones problemáticas que permitan conceptualizar los criterios de congruencia de triángulos rectángulos.
- Identificar las ternas de datos que permiten construir un triángulo único, de aquellas que no permiten que el triángulo sea único.
- Resolver situaciones problemáticas de construcciones de triángulos.

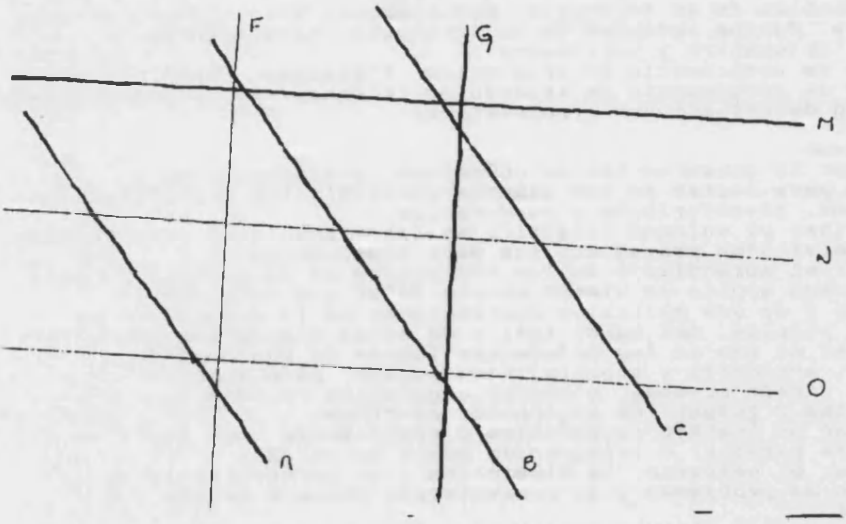
GEOMETRÍA → Planificación de la Unidad de Enseñanza. ①

- Afianzar el concepto de rectas oblícuas, paralelas y perpendiculares.

Consigna: Identifica en el siguiente dibujo:
- Tres pares de rectas oblícuas.
- Tres pares de rectas paralelas.
- Tres pares de rectas perpendiculares.

→ se llaman Concurrentes ¿Por qué?

Porque tienen un punto en común o sí y sólo sí su intersección es un punto.

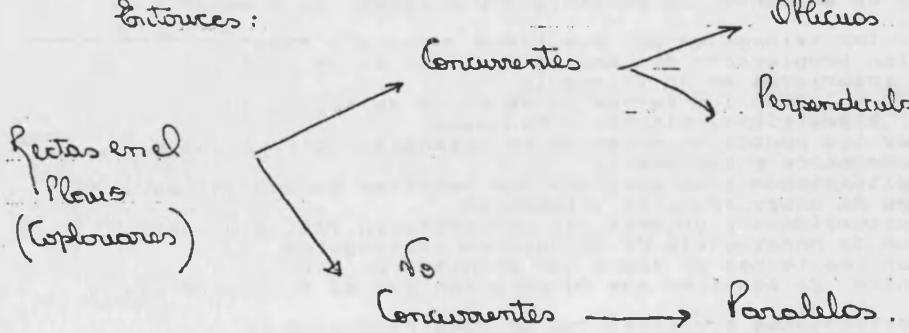


* Entonces, si las rectas son concurrentes pueden también ser oblícuas o perpendiculares.

¿Cómo definimos las rectas perpendiculares? Dos rectas concurrentes son perpendiculares sí y sólo si forman cuatro ángulos congruentes.

¿Y las rectas paralelas? Si y sólo si tienen todos los puntos en común o no tienen ningún punto en común.

Entonces:

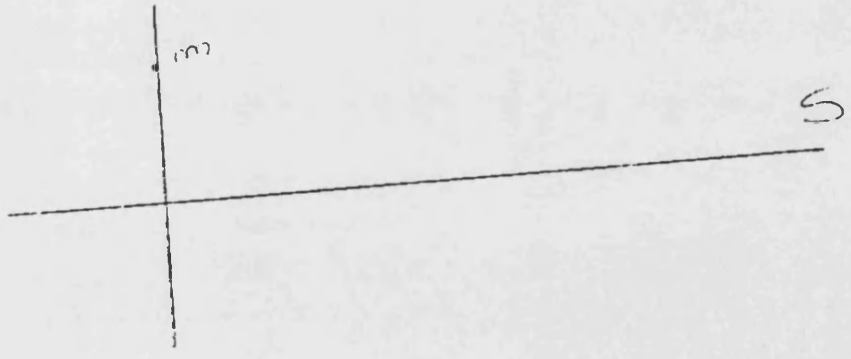


- Distribuiré papel de calcar para obtener plegando la perpendicular a una recta dada.

Consigna: "Dibujá una recta en el papel. Ponele nombre. Marcá un punto en la recta. Ponele nombre. Tratá de encontrar plegando la recta perpendicular a la dada que pase por ese punto". "Anotá en tu carpeta cómo lo hiciste."

Procedimiento: Se debe doblar el papel por el punto de modo que la recta coincida con sí misma.

Consigna: "En otro papel de calcar, realizá la actividad anterior pero ahora el punto no está en la recta sino que es exterior a ella." "Anotá en tu carpeta cómo lo hiciste."



Procedimiento: Análogo al anterior. Se debe doblar el papel por el punto de modo que la recta coincida con sí misma.

Tarea:

1) ¿Qué objetos o elementos pueden representar rectas //, ⊥ y ∠ en la calle o el campo, en una casa y en el aula? Traer ejemplos.

(3)

Circunferencia

(1) PROBLEMA: Una persona está situada en A con un radiotransmisor que alcanza 4 km, tiene que dar un mensaje a su compañero que circula por la ruta. ¿Desde qué tramos de la ruta lo podrá oír?

¿Cómo se resuelve el problema? Debe surgir la idea de circunferencia y de puntos interiores a la misma.

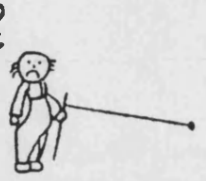
- Circunferencia → anotamos $C(0,R)$ $C_{0,R}$ Circunferencia de centro 0 y radio R. Poner esto en la hoja de Vocabulario y símbolos.
- Figura formada por los puntos del plano que se encuentran a una distancia dada de un punto fijo.

> La $C_{0,R}$ es el conjunto de puntos del plano cuya distancia al punto 0 es igual a R.

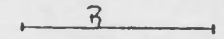
Consigna: Dibuja distintas circunferencias y nómbralas.

A continuación, les entregué una fotocopia con Problemas:
(2) (3) (4) (5)

(2) Don Mateo es jardinero y le gusta hacer canteros de formas variadas. En este caso clavó una estaca en el lugar donde quiere hacer un cantero de petunias y ha atado un piolín a la estaca con un lazo flojo. Del otro extremo ató un palo. Sosteniendo ese palo en forma vertical de modo que raya haciendo un surco en el piso, da toda la vuelta alrededor de la estaca. ¿Qué figura ha quedado marcada en la tierra?



(3) Cada uno de ustedes debe dibujar una circunferencia congruente con la de sus compañeros. ¿Qué datos necesitan? Dibujen y verifiquen.

(4) Dado este radio: 

¿Cuántas circunferencias no congruentes se pueden dibujar? Dibuja y explica.

(5) Dado un punto que se tomará como centro O ¿Cuántas circunferencias no congruentes se pueden dibujar? Dibuja y explica.

Tarea:

En una hoja lisa, hacé un dibujo usando sólo circunferencias. Podés pintarlo si querés.

Lo vamos a exponer mañana.

(4)

LUGAR GEOMÉTRICO

Consigna: Dibuja una circunferencia cualquiera. Nómbrala.

1) ¿Qué condición cumplen los puntos de la circunferencia con respecto a O?

Están a una distancia de O igual a R.

2) Todos los puntos del plano de la hoja que están a una distancia de O igual a R ¿dónde están?

En la circunferencia

Estos puntos que estamos analizando cumplen una condición o propiedad (estar a una distancia de O igual a R). Muchas veces en lugar de hablar del conjunto de puntos que cumplen con una condición hablamos de:

lo lugar Geométrico de los puntos que cumplen la condición.

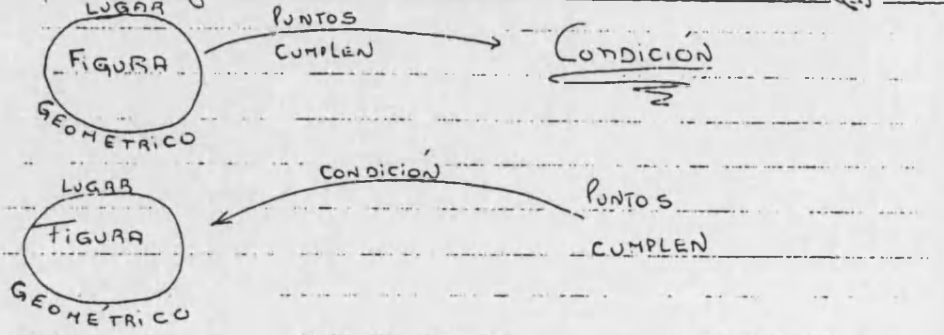
Conjunto de puntos que cumplen una determinada propiedad o condición.

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos que cumplen con una determinada condición: ¿Cuál es la condición? Estar a una distancia de O igual a R.

Entonces para la $C_{(O,R)}$, ondamos:

> Dado un punto O y un radio R, la circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que están a una distancia de O igual a R.

> Si una figura es el Lugar Geométrico de los puntos que cumplen una condición, todos los puntos de la figura deben cumplir la condición y todo punto que cumpla la condición debe estar en la figura.



Analizaremos una situación real para ver si se parece a esta o no...
Seguramente en tu casa hay un lugar para los cubiertos. Generalmente

(5)

es un cajón de un mueble del comedor, la cocina o un estuche especial Rotalmente, todo lo que hay en el cajón es un cubierto. Pero si tu mamá encuentra un cubierto en el piso, no dice: "Esto no es un cubierto, porque no está en su lugar!" Seguramente dirá: "¡Todos los cubiertos deben estar en el cajón!"
La geometría es mucho más exigente con el asunto del lugar para cada cosa, que tu mamá.

¿Con qué te parece que se muestra esa exigencia? Piensa en el ejemplo de los cubiertos y en el de la circunferencia como lugar geométrico.

En el caso de los cubiertos, están donde están, son cubiertos y muchos ocupan su lugar.
En el caso de la circunferencia, si hay "puntos" que no cumplen con la condición de estar a una distancia de o igual a R, no están en la circunferencia.

Completa:
Todos los puntos de la circunferencia están a una distancia de o igual a R
Todo punto que está a una distancia de o igual a R, está en la circunferencia

Lugares geométricos. Problemas...

(1) ¿Dónde deberían pararse todos ustedes para estar a igual distancia de mí? Dibuja mostrando la situación.

(2) ¿Dónde deberán colocarse los bolitos de un conjunto para que estén a la misma distancia de un hoyo? Dibuja mostrando la situación.

(3) Traza cinco o seis circunferencias congruentes que pasen por un punto cualquiera. Marca sus centros con color. (A) ¿Qué observas?
(B) ¿Puedes definir un lugar geométrico?

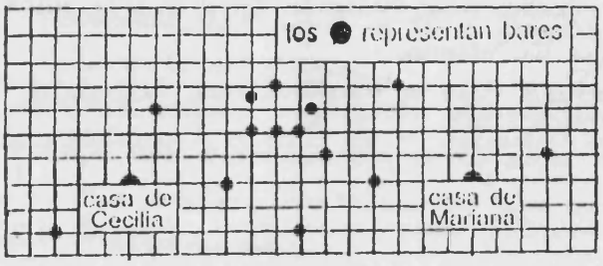
(4) Toma un papel cuadriculado (puede ser la hoja de tu carpeta) y ubica un punto a en un vértice de un cuadradito. Ubica todos los puntos donde el recorrido más corto desde a sea 3 cuadras (el lado del cuadradito equivale a una cuadra). (A) ¿Qué observas?
(B) ¿Puedes definir un lugar geométrico?

(6)

MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO.

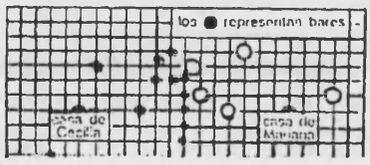
Problema:

Cecilia y Mariana decidieron reunirse en un bar para preparar un trabajo que les encargó la profesora de historia. Como ninguna de las dos quería caminar más que la otra, acordaron encontrarse en un bar ubicado a la misma distancia de cada una de sus casas. Las dos amigas repasaron los bares que hay en el barrio e hicieron el siguiente plano:



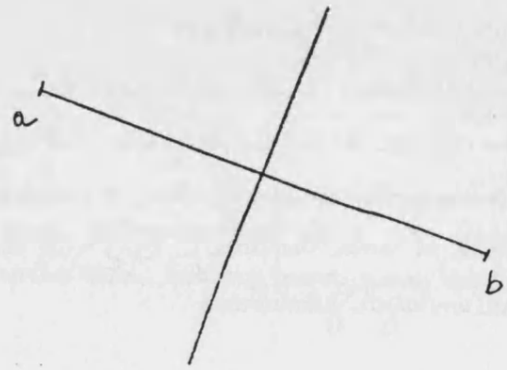
- ¿Cuáles son los bares que están más cerca de la casa de Cecilia?
- ¿Cuáles son los que están más cerca de la de Mariana?
- ¿Cuáles son los bares **que cumplen la condición** exigida por las dos amigas (estar a la misma distancia de ambas casas)?
- Ubica en un plano como el que hicieron Cecilia y Mariana, otros puntos que se encuentran a la misma distancia de cada casa

A la derecha reproducimos nuevamente el plano. Hemos indicado con ● los bares más cercanos a la casa de Cecilia; con blanco, los más cercanos a la de Mariana y con ● los bares equidistantes de ambas casas. Observa también que hemos marcado con negro otros puntos que están a la misma distancia de las dos casas.



Surgirá de este problema la idea de Mediatriz, para luego llegar a Conceptualizar Mediatriz de un segmento.

Consigna: "En el papel de calcar, dibuja un segmento $\overline{ab}$. ¿Cómo determinarías la mediatriz de $\overline{ab}$? Anotá en tu carpeta cómo lo hiciste".



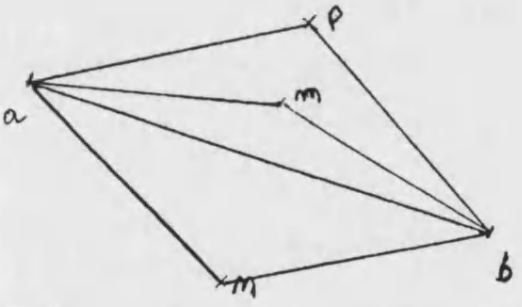
(7)

Procedimiento: Se dobla el papel de modo tal de hacer coincidir a y b. Tal doblez determina una recta. Observar que es perpendicular al segmento y pasa por su punto medio. Esa recta es la Mediatriz de $\overline{ab}$.

Se anota M_{ab}

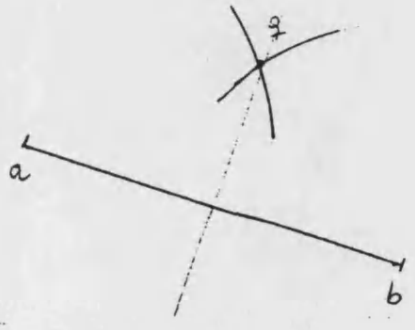
Mediatriz de un segmento: es la recta perpendicular al segmento por su punto medio.

Consigna: Marca un punto p en la mediatriz. Une ese punto p con los extremos del segmento.
¿Qué puedes decir de $\overline{pa}$ y $\overline{pb}$? Son congruentes.
Compruebe con otros puntos. ¿Qué observas?



Los puntos de la Mediatriz, equidistan de los extremos del mismo

Consigna: Con otro papel de calcar, hacemos lo siguiente:
Dibuja un segmento $\overline{ab}$. Trata de encontrar con el compás un punto q que esté a igual distancia de a y de b. ¿Cómo hiciste? Trazando 02 circunf de = R. R debe ser mayor que la mitad de $\overline{ab}$
Pliega luego el papel de forma tal que a y b coincidan
¿Qué observas? que q pertenece a la mediatriz.
Prueba con otros puntos.
Escribe una conclusión:
Los puntos que equidistan de los extremos de un segmento pertenecen a la mediatriz.



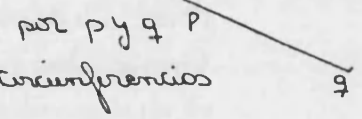
(8)

Analizaremos las conclusiones (propiedades) anteriores.
¿Qué puedes decir de los puntos de la mediatriz?
¿Dónde se encuentran?
¿Cuál es la condición que cumplen los puntos de la mediatriz?
Enunciaremos:

La Mediatriz de un segmento es el LUGAR GEOMÉTRICO de los puntos que equidistan de los extremos del segmento.

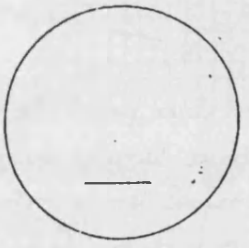
(1) Construye un segmento a pulso y traza también a pulso su mediatriz.

(2) Dibuja varias circunferencias que pasen por P y Q
¿Dónde se encuentran los centros de las circunferencias que trazaron?



(3) El Club de Andinistas Unidos encargó la confección de un escudo con el siguiente dibujo simétrico que representa tres montañas de diferentes alturas.

a) Completen el dibujo del escudo con regla y compás y redacten el procedimiento que utilizaron.

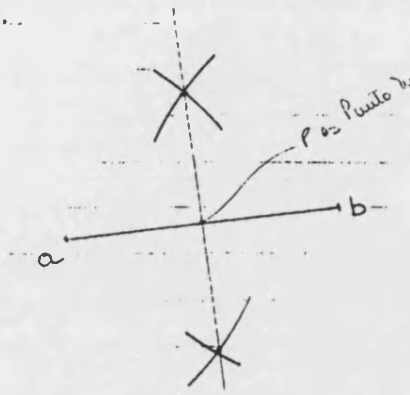


(4) Dibuja por lo menos 5 puntos que equidisten de los centros de las flores.

Construcciones con regla y compás.

- Construcción de la mediatriz con regla y compás.

¿Cuál es el problema? Construir dos puntos que equidisten de a y b.



Dos puntos determinan una recta y esa recta es la mediatriz.
¿Cómo construiríais el punto medio del segmento?
Trazando la mediatriz.

- Perpendicular a una recta por un punto que pertenece a la R

Datos:

¿Qué sabemos hacer?
* Trazar la mediatriz de un segmento con regla y compás.
* La mediatriz es una perpendicular al segmento por el punto medio.

¿Cuándo estaría el problema resuelto?
Tener esa ⊥ ya trazada.
La recta que debemos trazar es mediatriz de un segmento. ¿Cuál es el segmento? ¿Cómo determinaríos los extremos?
¿Cuál es el problema que tenemos? Encontrar $\overline{ab}$ a y b dos puntos sobre la recta.
Luego, trazar $M_{\overline{ab}}$

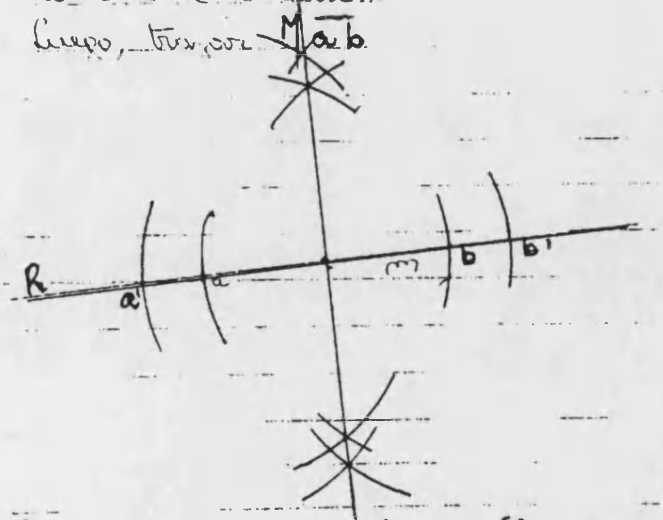
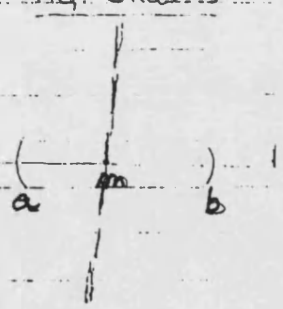


Fig. auxiliar



Los puntos a y b ¿son únicos? Averiguarlo.

(10)

• Perpendicular a R por un punto exterior q.

DATOS: • q

B

¿Qué tenemos hacer?

• Trazar la mediatriz de un segmento con regla y compás.

¿Cuándo estaría el problema resuelto?

Al tener la ⊥ ya trazada.

La recta que hemos trazado es mediatriz de un segmento ¿Cuál es el segmento? ¿Cómo determinarías sus extremos?

¿Cuál es el problema que hemos? Encontrar el $\overline{ab}$ y a y b dejar estar sobre la recta.

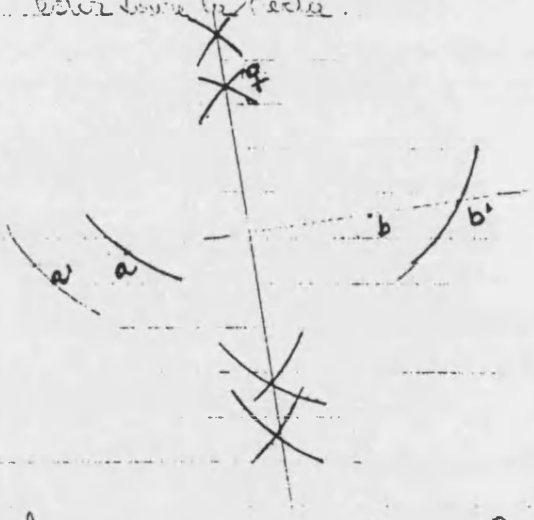


Fig. de análisis

a y b equidistan de q

$\overline{aq} \cong \overline{qb}$

los puntos a y b ¿son únicos? Averiguarlo. (Puede ser que ellos marquen otro punto distinto al punto q y tracen la ⊥ que pase por q. Trazar ⊥ de $\overline{ab}$ sin tener en cuenta q).

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

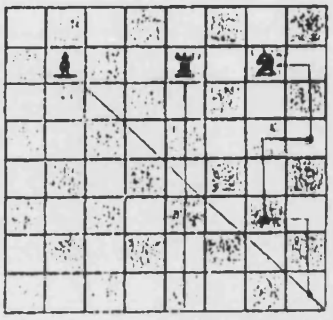
PROBLEMA...

En este problema, consideramos como punto, cualquiera de las piezas y recta, la otra fija del tablero. Entonces llamamos Distancia de un punto a una recta al segmento de ⊥ entre el punto y la recta.

PARA CAMINAR MENOS

6. El dibujo muestra un tablero de ajedrez en cuya segunda fila están ubicados un *alfil*, una *torre* y un *caballo*.

a) Respetando los movimientos propios de cada pieza en el juego mencionado, dibujen, en un tablero como el de la figura, el menor recorrido que puede realizar cada pieza para llegar a la octava fila del tablero.
b) ¿Cuál de las trayectorias dibujadas es de menor longitud?
c) Dibujen los menores recorridos que pueden realizar la *torre* y el *caballo* para llegar a la octava columna y comparen sus longitudes.



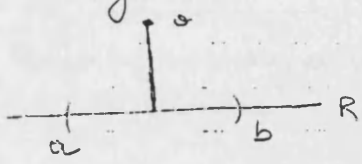
Recuerden que en el ajedrez el alfil se mueve en diagonal, la torre por casilleros de una misma fila o columna y el caballo describiendo una L de 3 casilleros por 2 o de 2 por 3.

(11)

- Trazar la Distancia de un Punto a una Recta con regla y compás.

Datos:-

Fig. auxiliar

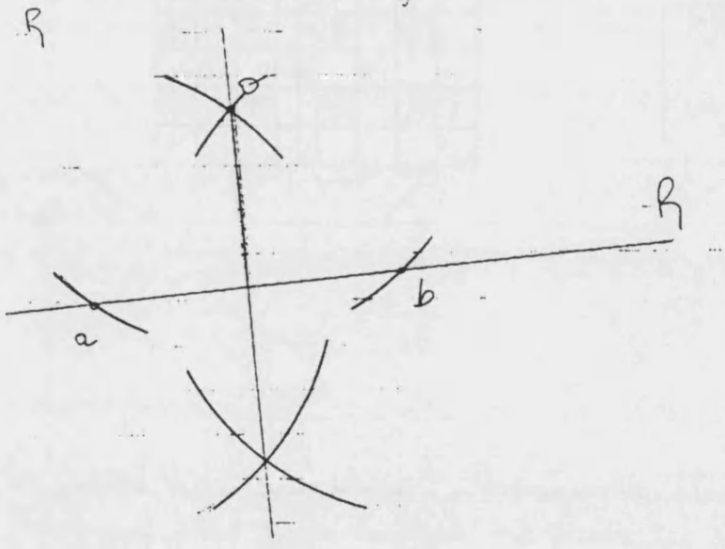


Este problema es como el anterior (la ⊥ por un punto exterior a R) pero acá debe tener la circunferencia. No necesaria, puede tener otra. Cual es el problema? punto ≠ a o

¿Encontrar la mediatriz de un segmento que está sobre R.

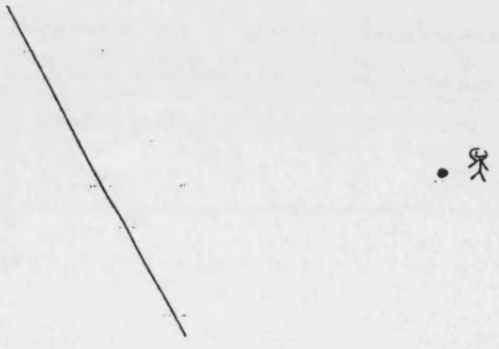
¿Cómo ubicamos los puntos a y b?

El paso de realizar el trazado de la ⊥ por un punto exterior a una



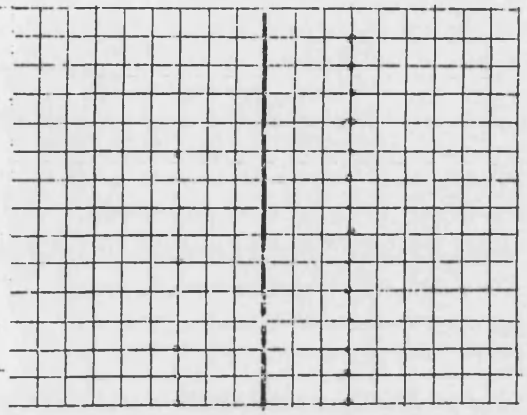
Problema.

Una persona se encuentra a metros de una ruta como muestra el dibujo. ¿Cuál es el camino más corto para llegar hasta la ruta?



(12)

RECTAS PARALELAS



Observa el cuadriculado. Se ha marcado una línea en él.

(A) Marca con color puntos cuya distancia a esa recta sea 3 cuadrados.

(B) ¿Qué observas?

Los puntos que están a una distancia dada de una recta pertenecen a una paralela a la misma.

Conclusión: los puntos que están en una paralela a una recta están a una misma distancia de la recta.

La paralela a una recta es el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de la recta.

7. Construcción de una Paralela a R que pase por un punto M.

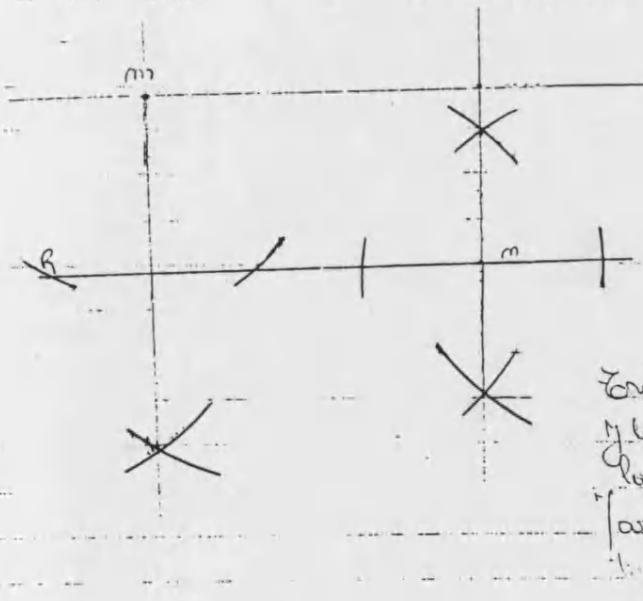
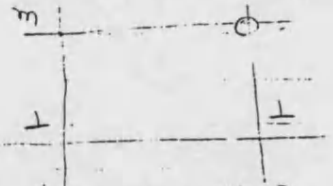
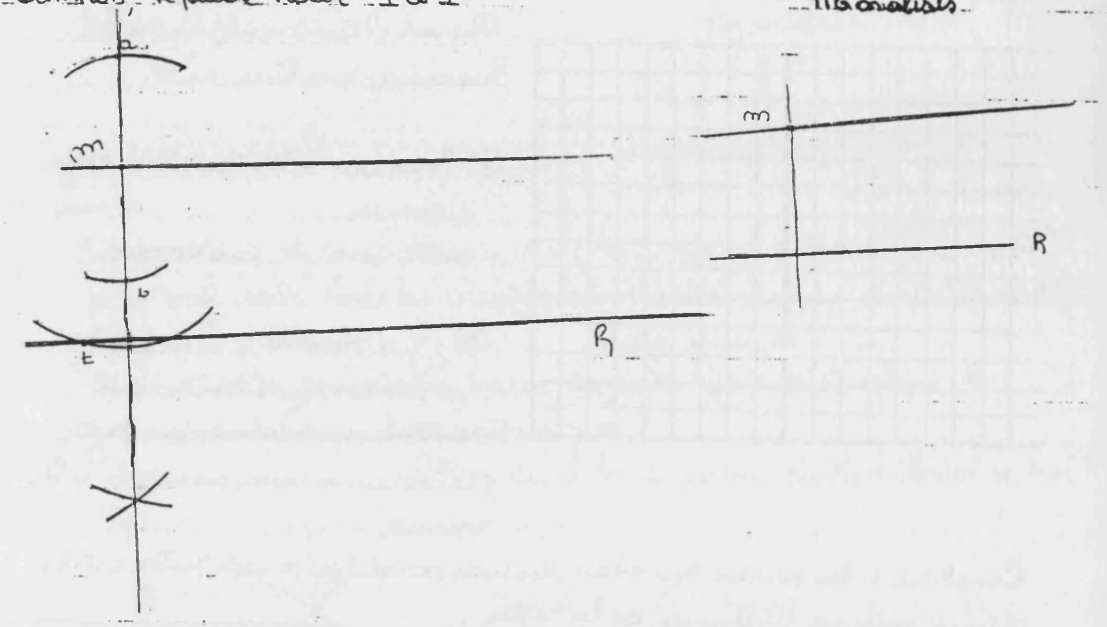


Fig. de Análisis
Como ya teníamos resuelto el problema



¿Cómo obtengo ese punto?
Trazo una ⊥ en cualquier punto y luego transporto con el compás la distancia de m a la recta trazo un punto s/ la recta y la ⊥

También se puede hacer ⊥ de ⊥

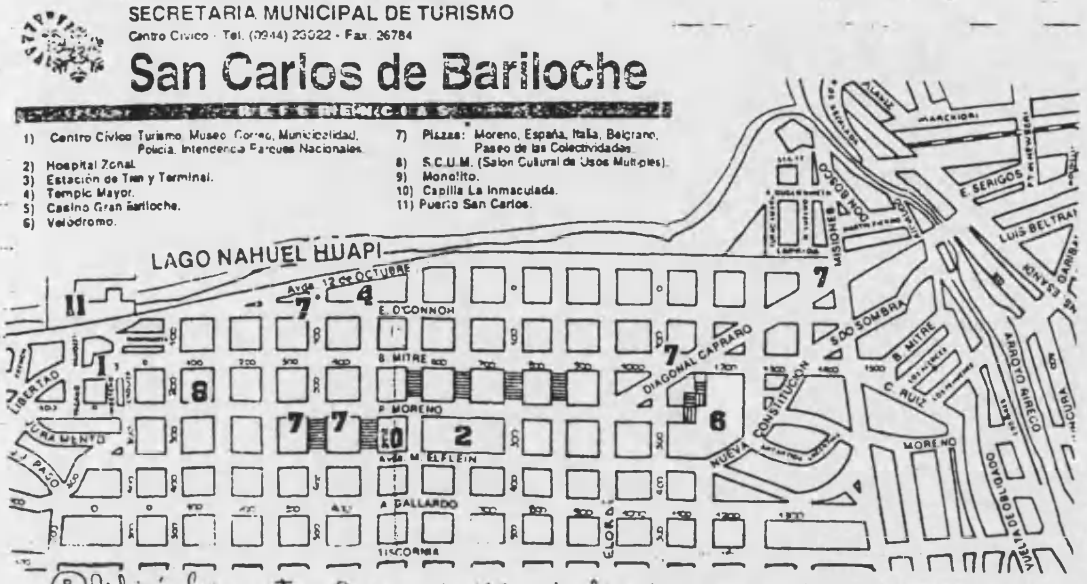


Copiado de SEGMENTOS, CIRCUNFERENCIAS y ANGULOS... usando el compás.

(13)

BISECTRIZ DE UN ÁNGULO.

Se muestra un sector del plano de nuestra ciudad. En ese plano vemos que la calle Elordi y la Diag. Capraro se cortan formando un ∡. (A) Marcalo en el plano



(B) Ubicá los puntos que equidistan de los dos calles señalados.

(C) ¿Qué particularidad tienen los puntos?

Que están a = distancia de ambas. Que forman 2 ∡ es una recta (no, es una semirecta).

BISECTRIZ del ∡ es la semirecta interior del ∡ que lo divide en dos ∡ congruentes.

* Uso del papel de calcar. Marcar en él un ∡ $a\hat{o}b$; doblar de modo que los lados oa y ob coincidan.

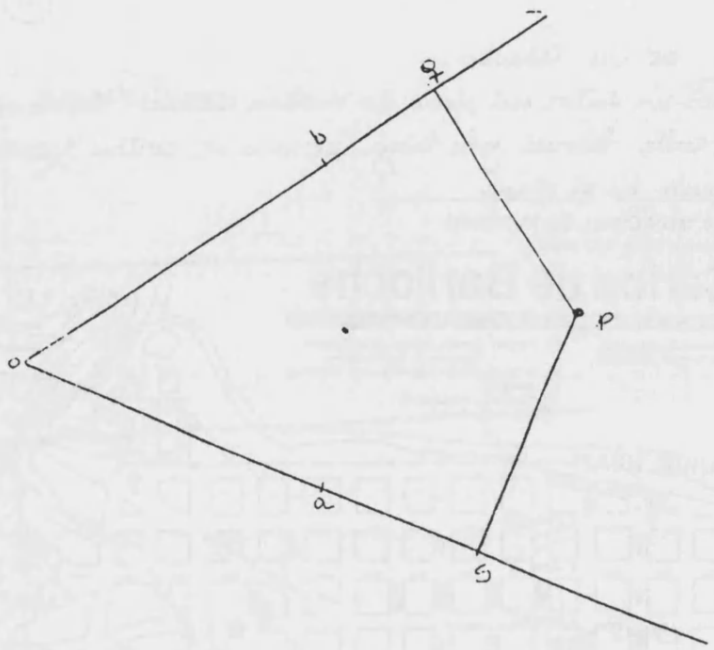
¿Qué determina el doblez? una recta.

Es la semirecta interior al ∡ que lo divide en dos ∡ congruentes. Esta semirecta se llama bisectriz del ∡ $a\hat{o}b$.

Consigna: Tomar un punto p de la bisectriz, usando plegado con papel hallar la distancia de p a c/u de los lados ¿Cómo hacías?

(Determinar los ⊥ a los lados del ∡ por ese punto... o sea doblar el papel por el punto y de modo que coincida un lado con sí mismo, pero con el otro lado). $\overline{ps}$ y $\overline{pt}$ son las distancias.

Volver a doblar por la bisectriz y verificar que $\overline{ps}$ y $\overline{pt}$ son congruentes.

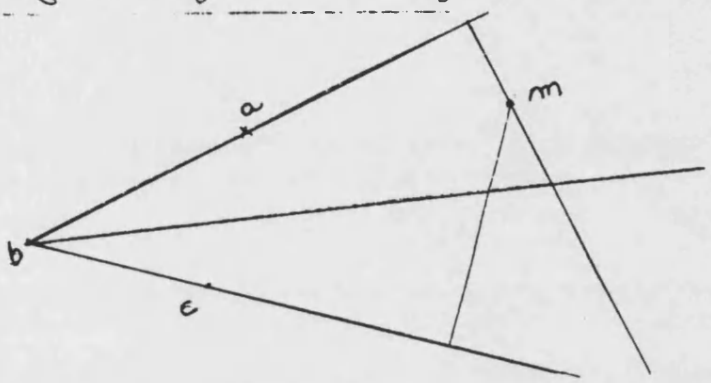


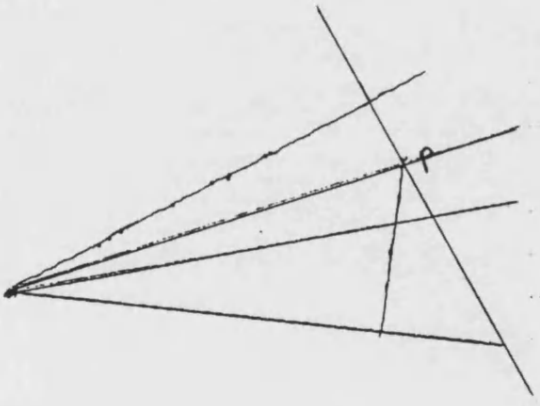
Probar con otros puntos de la bisectriz.

(14)

Propiedad: "Todo punto de la bisectriz de un ∡ equidista de los lados del mismo."

Para tratar la recíproca puede hacerse el mismo procedimiento con un punto que no pertenezca a la bisectriz.

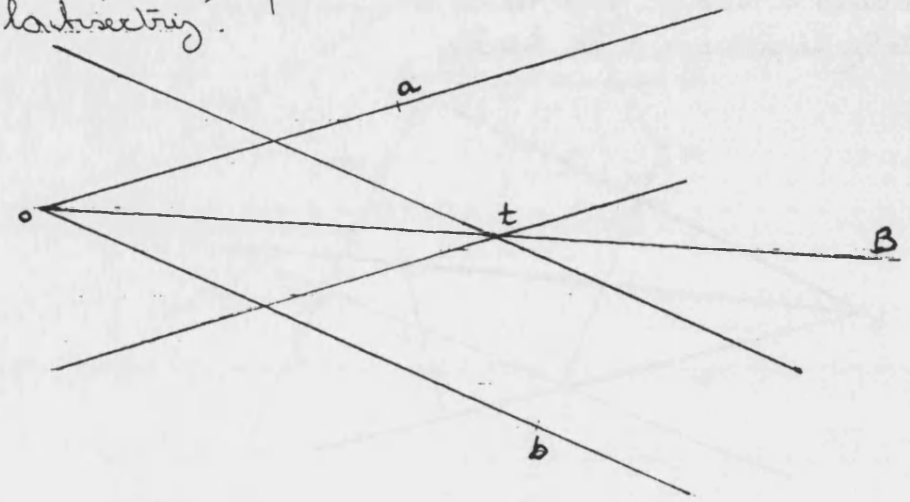




Todo punto que equidista de los lados de un ∡ pertenece a la bisectriz de dicho ∡.

- La Bisectriz es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados.

Nota → (después) Recíproca como operación p/hacer construcción de bisectriz.

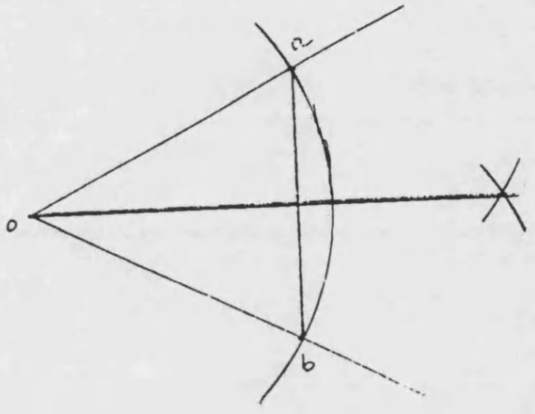


Usando la regla trazo las // a los lados del ∢ y queda ≡ el punto t que me faltaba p/poder trazar una recta por ot. La semirecta $\overrightarrow{ot}$ es la bisectriz del a ∢ b.

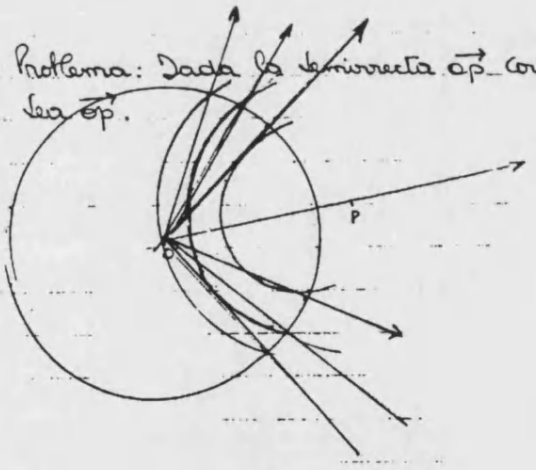
(15)

CONSTRUCCIÓN DE LA BISECTRIZ CON EL COMPÁS.

Esto lo que dado.. Yo trataría de rescatar ese método y hacerles ver que el problema se reduce a hallar la mediatriz del segmento $\overline{ab}$ y también que la mediatriz contiene a la bisectriz.



Problema: Dada la semirrecta $\overrightarrow{op}$ construye tres $\measuredangle$ cuya bisectriz sea $\overrightarrow{op}$.



(16)

TRIÁNGULOS

¿Qué sabemos de los triángulos? Recordemos ...

Elementos de un Δ: Vértices – lados – ∢ interiores – ∢ exteriores.

Clasificación de Δ por sus lados: equilátero. isósceles. escaleno.

por sus ángulos: acutángulo. rectángulo. obtusángulo.

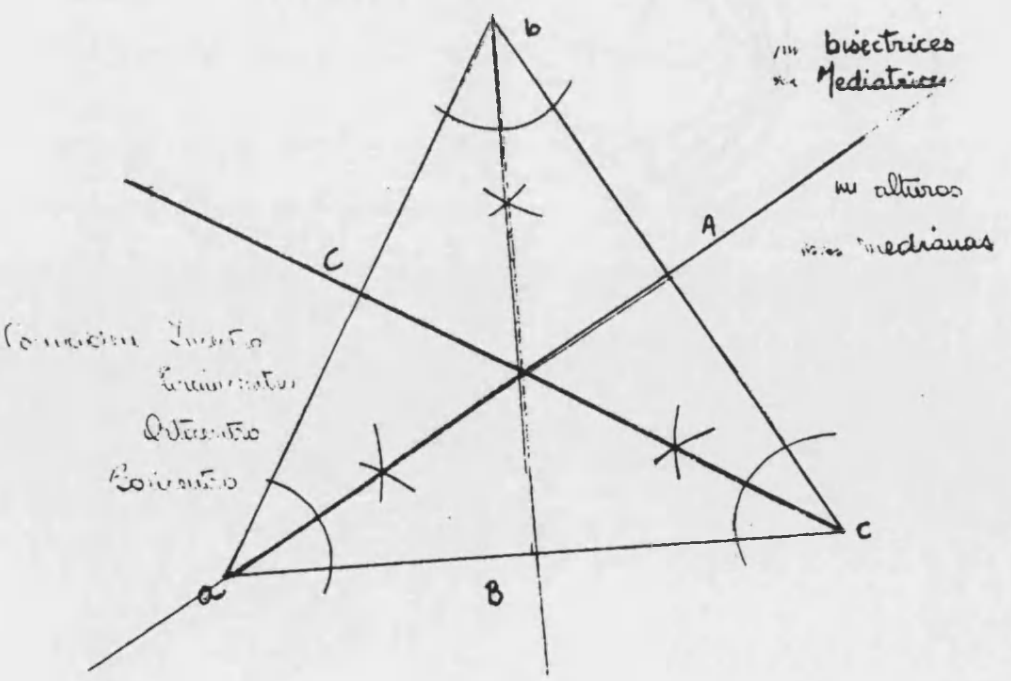
Propiedad de los ∢ interiores. "La suma de los ∢ interiores de un triángulo es igual a 180°."

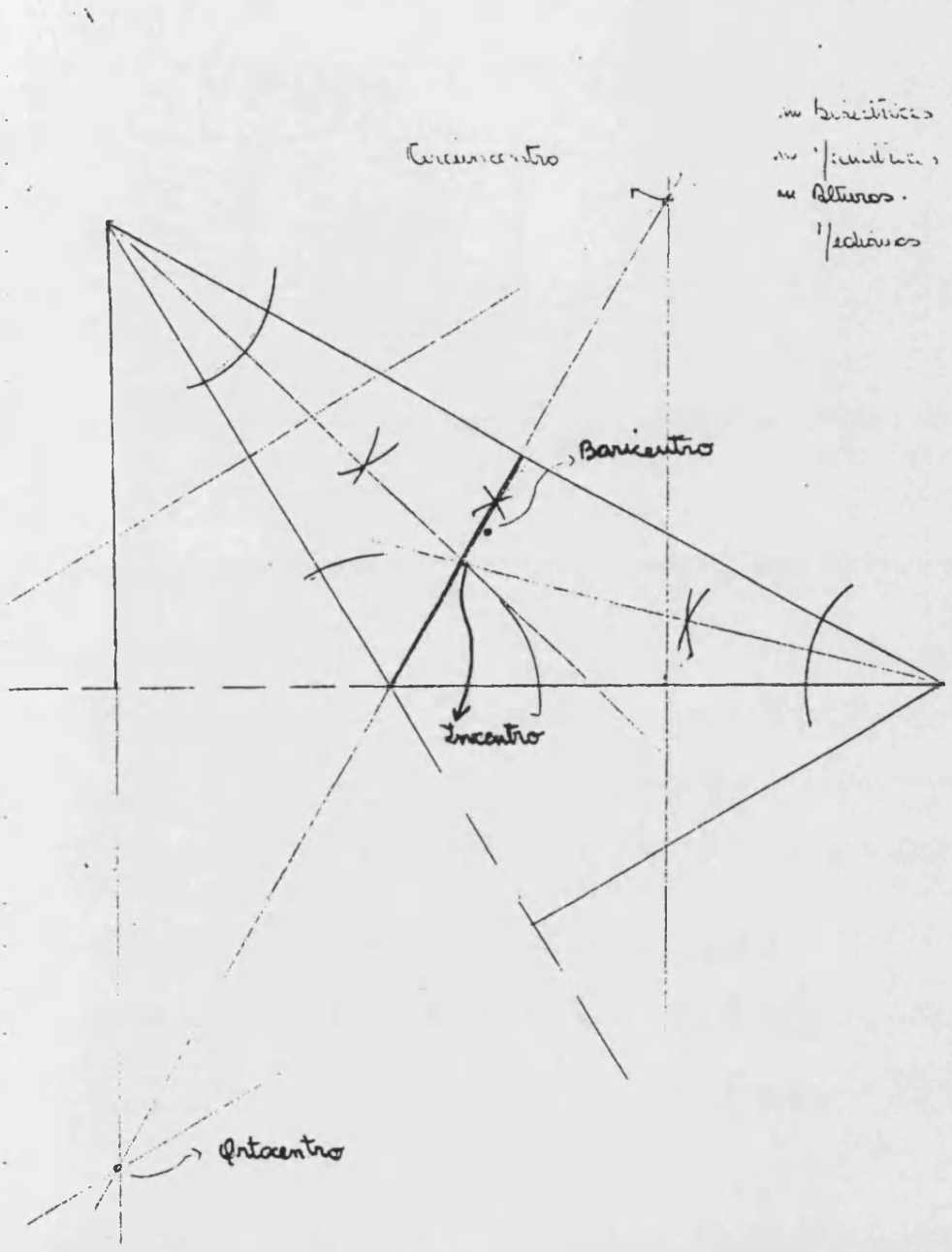
Propiedad del ∢ exterior. "El ∢ exterior de un Δ es igual a la suma de los ∢ interiores no adyacentes a él."

Tarea: (A) Dibujá en una hoja de tu carpeta un Δ equilátero, en otra un Δ isósceles rectángulo y en otra un Δ escaleno rectángulo.

(B) De la misma manera que trazaste la mediatriz de un ⊢, trazá las mediatrices de los lados en c/u de los Δ.

(C) De la misma manera que trazaste la bisectriz de un ∴, trazá las bisectrices de los ángulos en c/u de los Δ.

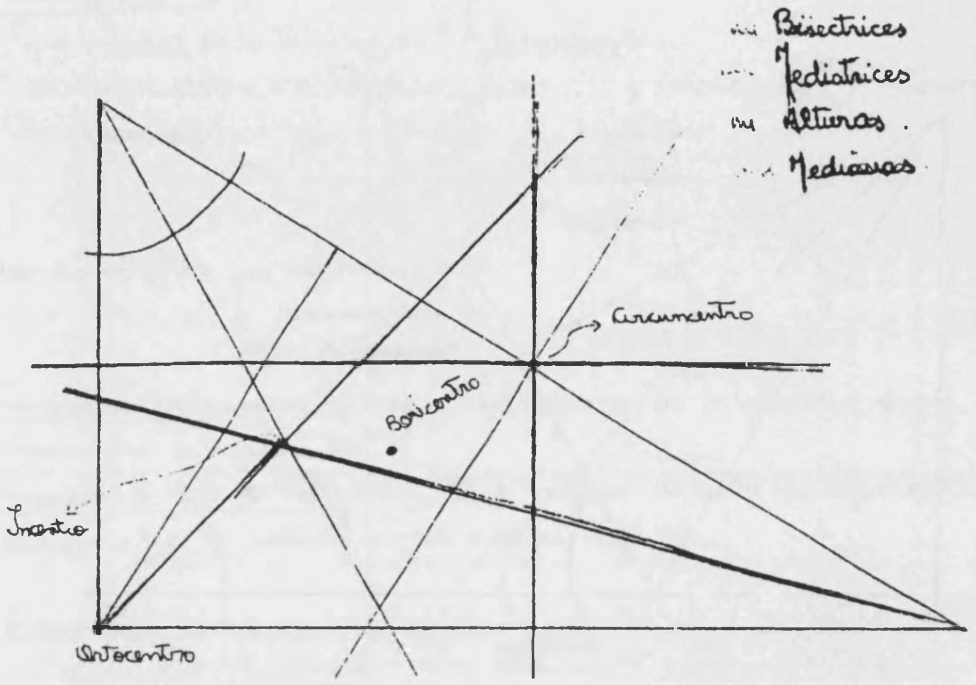




Mediatriz del lado de un Δ, se llama así a la recta que es ⊥ al lado por su punto medio. Las tres mediatrices se cortan en un punto que equidista de los vértices del Δ, llamado Circuncentro.

Bisectriz del ∠ del Δ, se llama así a la semirrecta que lo divide en dos ∠ congruentes. Las tres bisectrices se cortan en un punto que equidista de los lados del Δ, llamado incentro.

(17)



Cuando ellos rengan con los Δ, definiremos Medianas y Alturas para que ellos los hagan.

Alturas de un triángulo. Se llama altura (h) correspondiente al lado de un Δ al H de ⊥ al lado que tiene un extremo en el vértice opuesto al lado, y el otro extremo, en dicho lado o su prolongación. Las rectas que incluyen a las alturas se cortan siempre en un punto denominado ortocentro. Es la distancia entre un V y la recta que contiene al lado opuesto.

Medianas. La mediana correspondiente al lado de un Δ es el H que tiene un extremo en el punto medio de dicho lado y el otro extremo es el vértice opuesto. Las medianas se cortan en un punto, denominado baricentro. Es la distancia entre un V y el pto medio del lado opuesto.

Resumiendo:

	Rectas notables		Puntos notables
Recta →	Mediatrices	(Int o Ext)	Circuncentro (equid. de los V)
Semirrecta →	Bisectrices	Int	Incentro (equid. de los lados)
Segmento →	Alturas	(Int o Ext)	Ortocentro
Segmento →	Medianas	Int	Baricentro

Aplicación

1) De estos 3 Δ que dibujamos, analiza:
   (A) ¿En algún caso coincide una mediana con la altura?
   (B) ¿En algún caso coincide una altura con un lado?
   (C) ¿En qué caso coinciden los 3 medianos con los 3 alturas?
   (D) ¿Qué particularidad tiene el Δ equilátero?
   (E) ¿Dónde están el circuncentro y el ortocentro en el Δ ~~triángulo~~ ?
   (F) ¿Dónde están el circuncentro y el ortocentro en el Δ rectángulo?

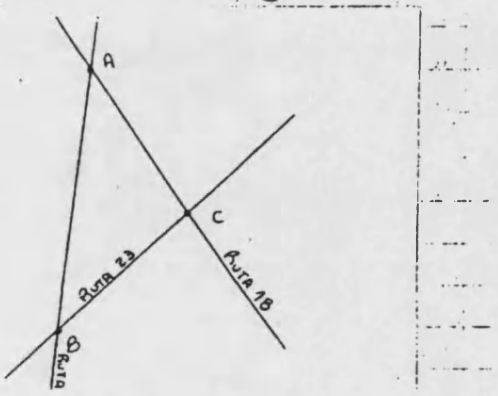
2) Dibuja 3 Δ ~~triángulo~~ - acutángulo - rectángulo - Determinar alturas y ortocentro de ellos.

3) Dibuja 3 Δ como en el caso anterior y determinar las medianas y el baricentro de ellos.

4) Dibuja 3 Δ como en el caso anterior y determinar las mediatrices y el circuncentro de ellos.

5) Dibuja 3 Δ como en el caso anterior y determinar las bisectrices el incentro de ellos.

6) Encuentren gráficamente el lugar donde debe colocarse una antena:
   (A) Para que resulte equidistante de los ~~pueblos~~ puntos provinciales 23, 35 y 18, que unen los tres pueblos representados en el esquema por A, B y C. Bisectriz de los ∢
   (B) Y si tiene que equidistar de los pueblos ¿dónde la ubicarías? Mediatrices



¿Cómo vamos? MATEMÁTICA . 1ºA . . Vi 15/10/97.

(1) Completa las propiedades:

A) Todos los puntos de la circunferencia .....

B) Todo punto ....., está en la circunferencia.

C) Los puntos de la Mediatriz de un segmento .....

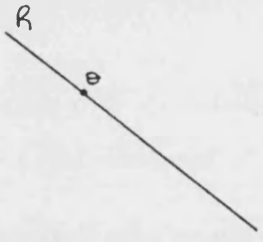
D) Los puntos ....., pertenecen a la Mediatriz.

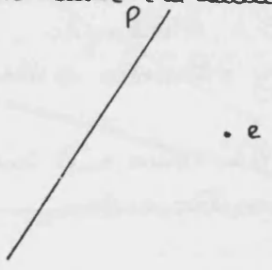
E) La paralela a una recta es el LUGAR GEOMÉTRICO .....

.....

(2) En cada caso, trazar la recta perpendicular a la dada por el punto marcado.

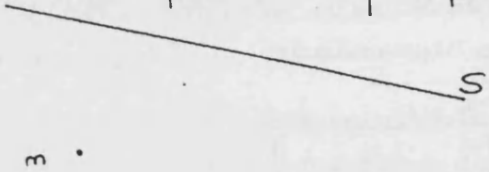
a)





(3) ¿Qué es la distancia de un punto a una recta? Poner un ejemplo.

(4) Construir la recta paralela a S por el punto m.



(5)

Repetir en un papel de calcar la actividad que debías traer de tarea. "Tomar un punto p de la bisectriz, usando plegado del papel hallar la distancia de p a cada uno de los lados. ¿Cómo hacías?"

ACTIVIDADES.

(1) En esos triángulos que dibujaste, analiza:

(A) ¿En algún caso coincide una mediana con la altura?

(B) ¿En algún caso coincide una altura con un lado?

(C) ¿En qué casos coinciden los tres medianos con los tres alturas?

(D) ¿Qué particularidad tiene el triángulo equilátero?

(E) ¿Dónde están el circuncentro y el ortocentro en el triángulo isósceles obtusángulo?

(F) ¿Dónde están el circuncentro y el ortocentro en el triángulo rectángulo escaleno?

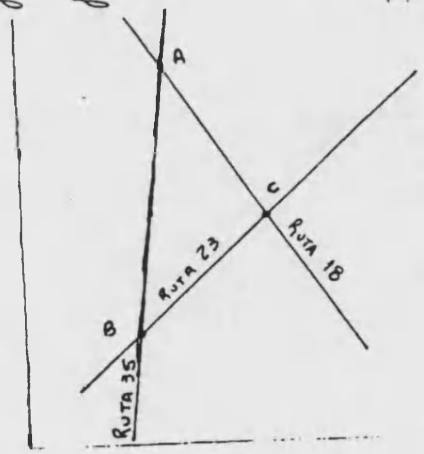
(2) Dibujá estos tres triángulos: escaleno obtusángulo – isósceles acutángulo – isósceles rectángulo.

Determinar en cada uno de ellos: (A) alturas y ortocentro.
(B) Medianas y baricentro.
(C) Mediatrices y circuncentro.
(D) Bisectrices e incentro.

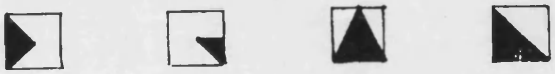
(3) Encontrar gráficamente el lugar donde debe colocarse una antena:

(A) Para que resulte equidistante de las rutas provinciales 23, 35 y 18, que unen los pueblos representados en el esquema por A, B y C.

(B) Y si tiene que equidistar de los pueblos, ¿dónde la ubicarías.



(4) Construye diseños de azulejados de cocina, utilizando en cada caso una de los baldosas siguientes, combinados con baldosas lisas.



28/10 CRITERIOS DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS.

¿Cuándo dos figuras son congruentes?

Cuando tiene sus lados y sus ángulos congruentes. En el caso de los Δ, sus 3 lados y sus 3 ángulos congruentes.

Sin embargo, no es necesario conocer todos estos datos para decir que 2 Δ son congruentes ... Sólo basta con 3 elementos bien determinados y los criterios de congruencia nos indicarán cuáles son esos elementos.

!! Armaremos una Fotocopia poniendo en ella los problemas por que construyan y luego verifiquen la congruencia por Superposición.

(1) Primer Criterio Construir un triángulo dados 3 lados.

Dibujar 3 ⊢ cualquiera. (Si es así puede suceder que los segmentos no formen Δ).

DATOS L.L.L.

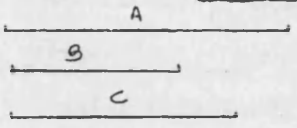
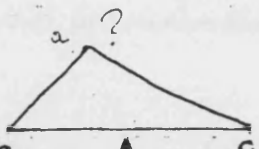
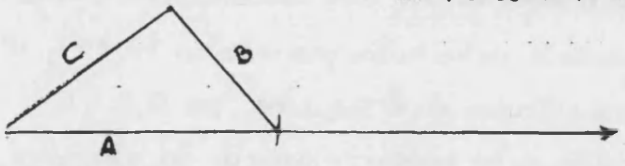


Fig análisis



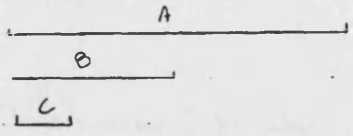
Al tener un lado tengo 2 vértices. El problema es encontrar dónde va a estar el otro vértice.

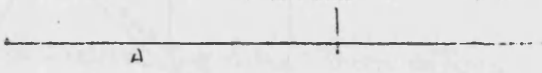


Dar también el caso en que los ⊢ no permiten armar un Δ.

(Desigualdad triangular). "En todo Δ, cada lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia."

DATOS L.L.L.





Comprobar con material manipulable que no todos los segmentos elegidos en ternas, permiten armar un triángulo.

(19)

② Segundo Criterio. Construir un triángulo dados 1 lado y 2 ∡ adyacentes a él. **A.L.A.**

Datos

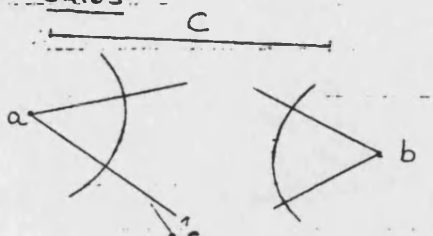
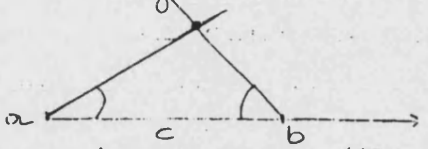
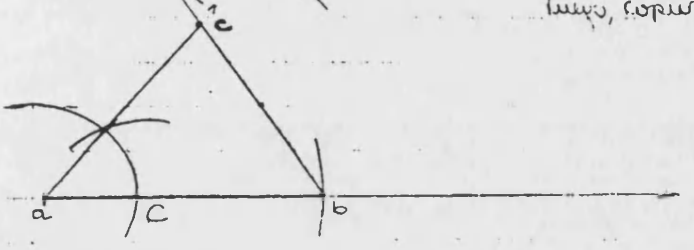


Fig. auxiliar



Si tenemos un lado tenemos 2 vértices, luego, copiar los ∡ a y b.



③ Construir un Δ dados un lado, un ∡ adyacente y un ∡ opuesto.

Datos → Construcción que se transforma en la anterior.

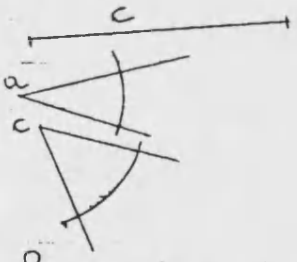
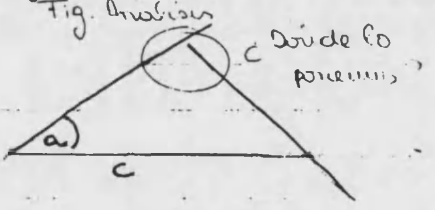
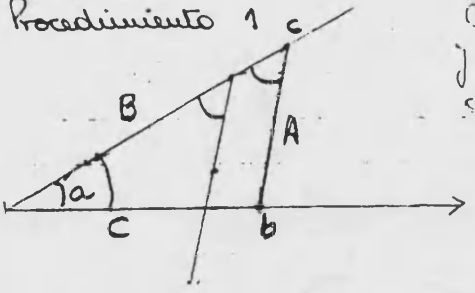


Fig. Análisis

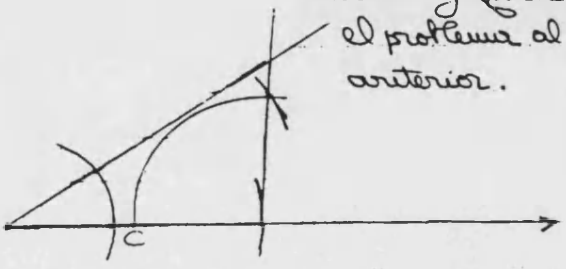


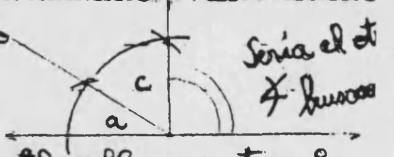
Procedimiento 1



Copiamos c en cualquier lugar y luego trasladamos el lado // para obtener C.

Procedimiento 2. Se copian los ∡ dados adyacentes y como la ∑ de los ∡ interiores de un Δ es 180°, el otro ∡ es el buscado y queda determinado. Reduciéndose el problema al caso anterior.



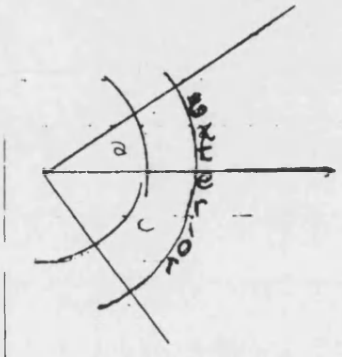


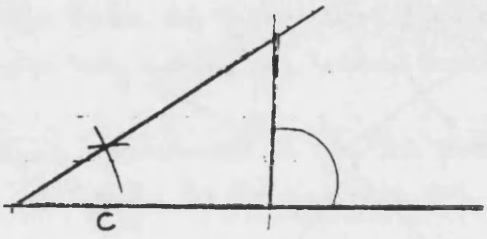
Sería el ∡ buscado

El problema se transforma en el anterior

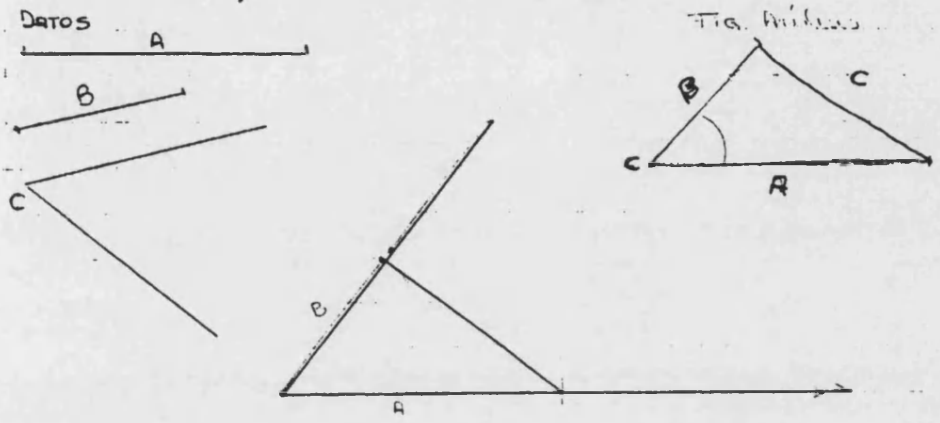
Procedimiento 3.

Puedes considerarse estos ∠ sumados y luego el exterior no adyacente a ellos con lo cual también se ≡ el interior adyacente que falta.

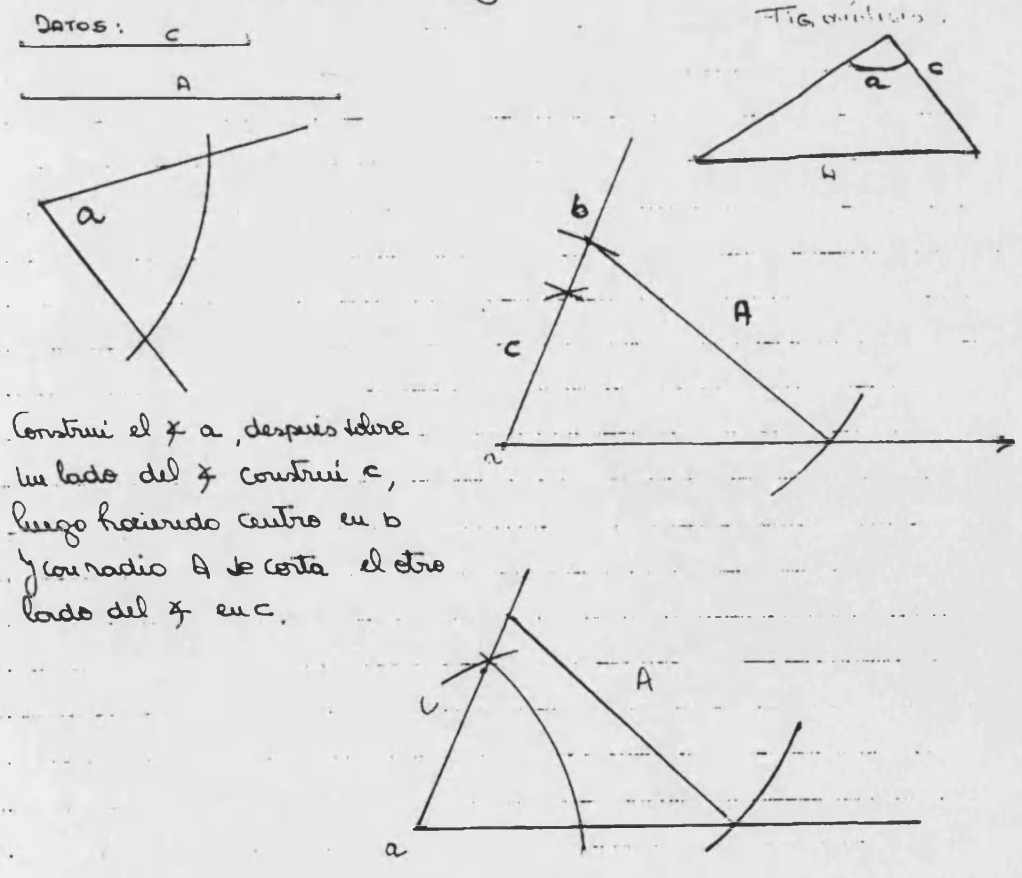




④ Tercer Criterio. Problema: Construir un Δ dados dos lados y el ∠ comprendido. LAL



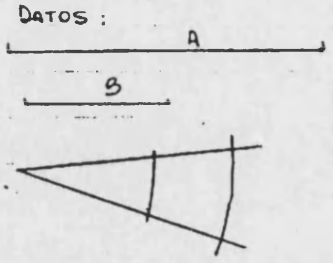
⑤ Cuarto criterio. Problema: Construir un Δ dados dos lados y el ∠ opuesto al mayor.

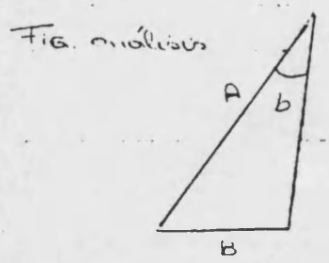


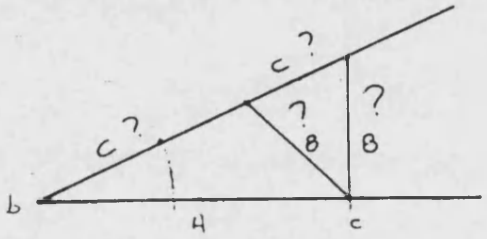
Construí el ∠ a, después sobre un lado del ∠ construí c, luego haciendo centro en b y con radio A se corta el otro lado del ∠ en c.

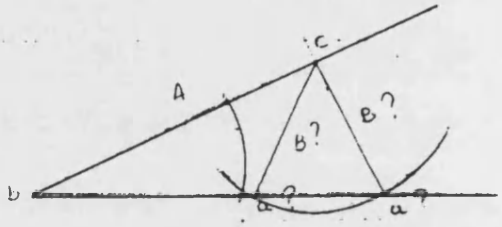
⑥ Construir un triángulo dados dos lados y un ∠ opuesto al menor de ellos. (¿Es único el triángulo?) No es criterio

DATOS:



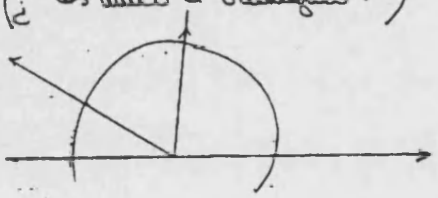


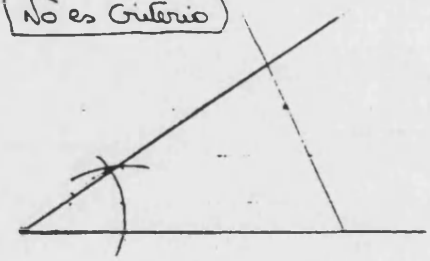


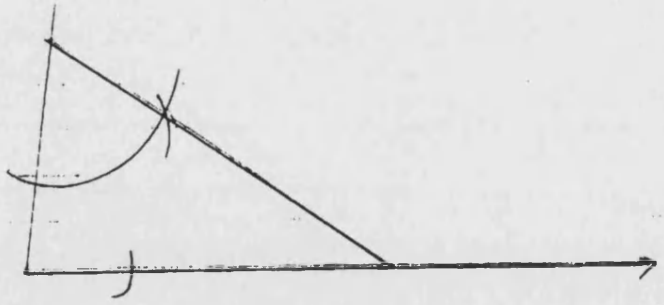


⑦ Construir un Δ dados 3 ∠. (¿Es único el triángulo?)

No es criterio







Hacer ver en los Problemas los Contenidos que se están trabajando.

M. 29/10 Casos en que se puede construir un triángulo solamente.
(Extraído de los 4 problemas resueltos).

1) Se puede construir dado los tres lados. (Desigualdad triángulos un lado debe ser menor que la suma de los otros dos). LLL

2) Dados un lado y los dos ángulos adyacentes. ALA

3) Construir el triángulo dados un lado, un ángulo adyacente y un ángulo opuesto al lado.

4) Construir un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido
LAL

5) Construir un triángulo dados dos lados y el ángulo opuesto al lado mayor de los dados. $L\,A_{op}\,L$

CRITERIOS DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS.

Dos triángulos son congruentes cuando tienen sus tres lados y sus tres ángulos respectivamente congruentes. Sin embargo, nosotros vimos recién que para construirlos, no necesitamos conocer los 6 elementos de uno y los 6 elementos del otro para asegurar que son congruentes.

Bastó con tener los datos de tres elementos bien elegidos de un triángulo para asegurar su congruencia con otro triángulo que tenga sus elementos congruentes con estos tres.

¿Cuáles son estos elementos bien elegidos?

¿Pueden ser distintos ternos de datos. Cada uno de estos ternos es un Criterio de Congruencia de triángulos.

Primer Criterio

Dos triángulos son congruentes si tienen los tres lados respectivamente congruentes. LLL

21"

Segundo Criterio. Dos Δ que tienen un lado y dos ∠ =/ dispuestos, respectivamente congruentes, son congruentes.

Dos triángulos son congruentes si tienen un lado y dos ángulos adyacentes respectivamente congruentes, o un ángulo opuesto y otro adyacente al lado dado respectivamente congruentes. A L A

Tercer Criterio

Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente congruentes. L A L

Cuarto criterio

Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo opuesto al lado mayor de los dados respectivamente congruentes.

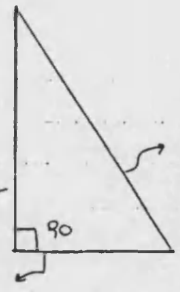
L A op L

(22)

V: 31/10 Triángulos rectángulos:

Dibujen un Δ rectángulo.

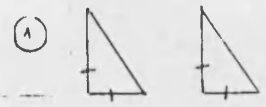
Cuando se trata de demostrar las consecuencias de Δ rectángulos pueden reducirse aún más las condiciones suficientes puesto que existe ya un dato conocido: el ∠ recto.



¿Cómo pueden ser los Δ Rectángulos

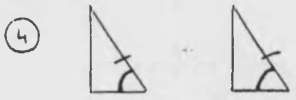
Isósceles - Escalenos

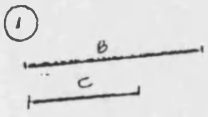
Construir Δ rectángulos dados:

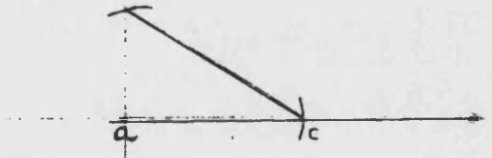
1) 

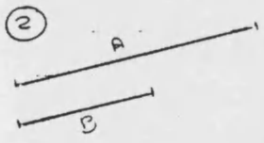
2)

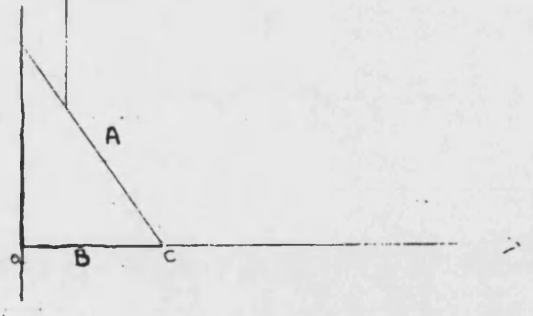
3)

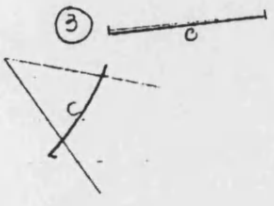
4) 

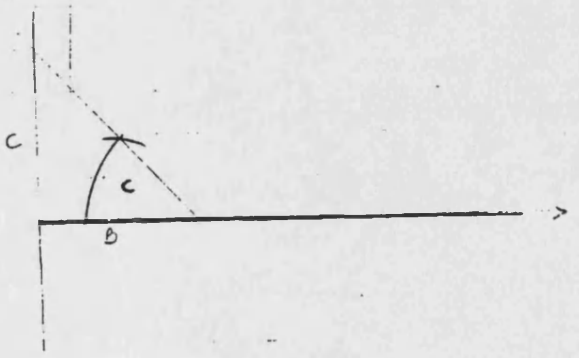
1) 

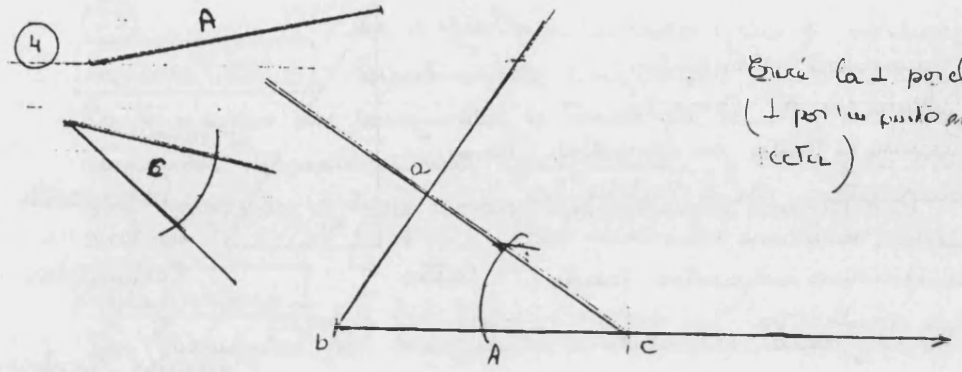


2) 



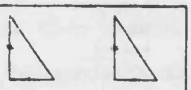
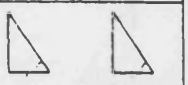
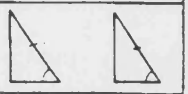
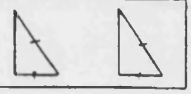
3) 





Trazá la ⊥ por el pto b
(⊥ por un punto exterior a la recta)

En consecuencia: Podemos enunciar las siguientes condiciones para los triángulos rectángulos.

1.	Es suficiente que dos triángulos rectángulos tengan dos catetos respectivamente congruentes para que sean congruentes.	
2	Es suficiente que dos triángulos rectángulos tengan un cateto y un ángulo agudo respectivamente congruentes para que sean congruentes.	
3.	Es suficiente que dos triángulos rectángulos tengan la hipotenusa y un ángulo agudo respectivamente congruentes para que sean congruentes.	
4.	Es suficiente que dos triángulos tengan la hipotenusa y un cateto respectivamente congruentes para que sean congruentes.	

279

PROBLEMAS... 1º A

① Construir un triángulo dados tres lados.

A) A
B
C

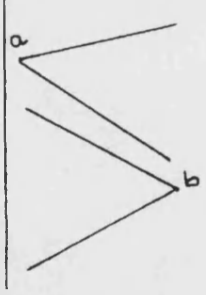
B) D
E
L

B_1) ¿Se puede construir el triángulo? Explica

B_2) ¿Qué condición deben cumplir los segmentos para que se pueda construir un triángulo? _____

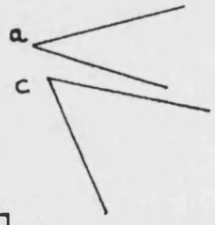
② Construir un triángulo dados un lado y dos ángulos adyacentes

A



③ Construir un triángulo dados un lado, un ángulo adyacente y un ángulo opuesto al lado.

C

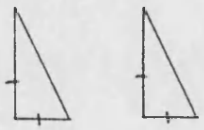


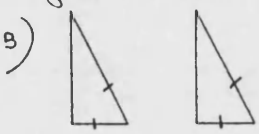
NOTA: En todos los casos. Compara tu triángulo con el de tus compañeros.

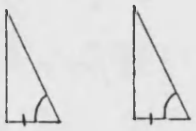
(8) Dibuja un triángulo rectángulo escaleno y otro rectángulo isósceles. Nombra y marca sus elementos en ambos casos.

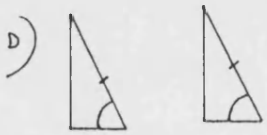
(9) En el caso de la construcción del triángulo rectángulo, no es necesario dar tres datos, pues ya hay un dato conocido que es el ángulo recto.

Construiremos triángulos rectángulos dados:

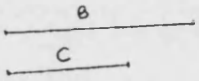
a) 

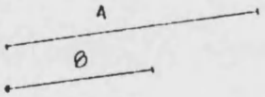
b) 

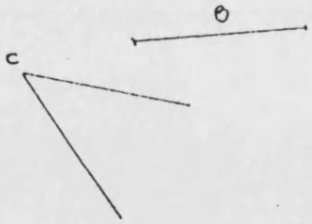
c) 

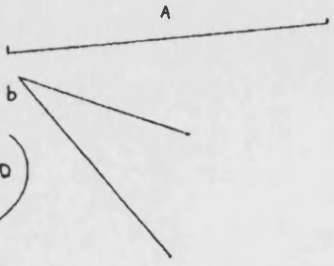
d) 

En cada caso construir el triángulo rectángulo con los datos que se dan:

A) 

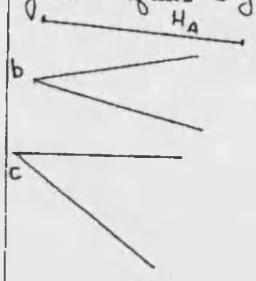
B) 

C) 

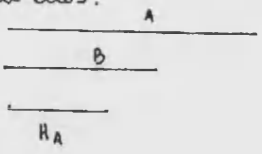
D) 

TRATAMIENTO DE LA FIGURA HACER DE ANÁLISIS

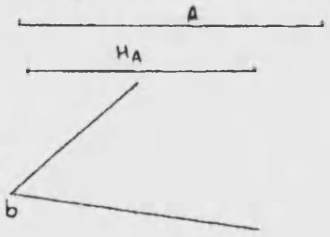
(10) Construir un triángulo dados la altura con respecto al lado A y los ángulos b y c.



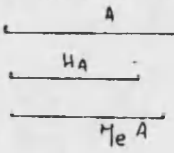
(11) Construir un triángulo dados dos lados y la altura respecto a uno de ellos.



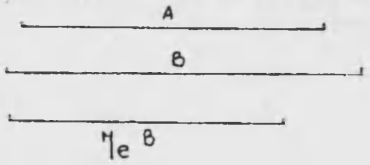
(12) Construir un triángulo dados un lado, un ángulo adyacente y el segmento de altura correspondiente a ese lado.



(13) Construir un triángulo dados un lado, la altura y la mediana correspondiente a ese lado.

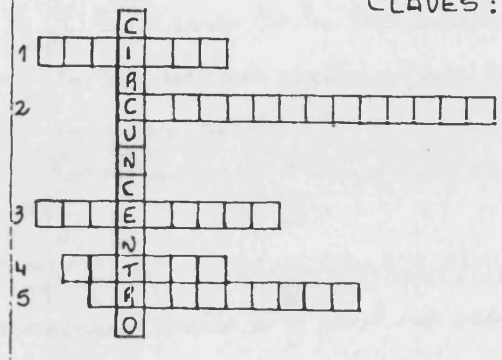


(14) Construir un triángulo dados dos lados y la mediana correspondiente a uno de ellos.



EVALUACIÓN: MATEMÁTICA 1ro A Vi 07/11/97

① Completa:



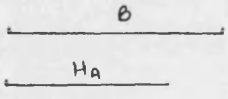
CLAVES:

1. Segmento cuyos extremos son un vértice y el punto medio del lado opuesto.
2. Lugar geométrico de los puntos que están a una distancia de o igual a R
3. Lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del ángulo.
4. Distancia entre un vértice (punto) y la recta que contiene al lado opuesto en un triángulo.
5. Punto donde concurren las alturas o sus prolongaciones.

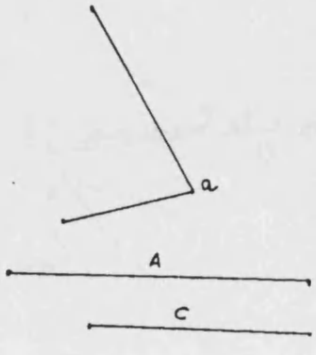
② (A) Elegí convenientemente un triángulo de manera tal que al trazar las alturas y determinar el ortocentro, este punto sea exterior al triángulo.

(B) Elegí convenientemente un triángulo de manera tal que al trazar las mediatrices y determinar el circuncentro, este punto sea un punto del lado del triángulo.

③ Construí el triángulo rectángulo dados un cateto y la altura correspondiente a la hipotenusa.



④ (A) Construí un triángulo dados dos lados y el ángulo opuesto al mayor.



ANEXO IV

Correspondiente al capítulo 6

Las clases de la docente de la escuela media

En las transcripciones de clase se ha respetado la notación utilizada. En este caso, la docente sigue el convenio de notación para la representación de las figuras que hemos adoptado en esta memoria.

Se ha indicado con Prof las intervenciones de la docente de escuela media y se ha seguido el criterio utilizado en las transcripciones del experto para aludir a las que corresponden a los alumnos. Por tanto, se hace referencia a cada uno de ellos mediante la inicial de su nombre o se emplea la sigla Al en los casos que no han sido individualizados, y con Als se indica la pluralidad, o sea las intervenciones de los alumnos en su conjunto.

Se han numerado los fragmentos de la transcripción que corresponden a los diferentes episodios y se han rotulado con *IE las indicaciones generales de enseñanza.

CLASE 1

***IE:**

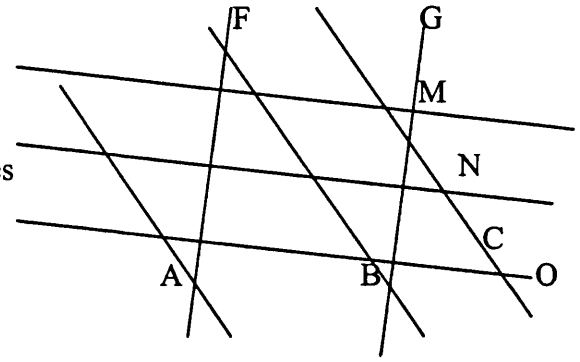
▸ Se leen los contenidos de la unidad de enseñanza -cada alumno tiene un impreso de los mismos- y se hacen algunos comentarios al respecto.

Prof: Hay temas que ya los vimos, vamos a repasar algunos temas y otros los vamos a aprender. Para hacer ese repaso vamos a comenzar con rectas. Para hoy tenían esas páginas del libro que tenían rectas. ¿Qué tipo de rectas hay?

Als: Oblicuas, paralelas y perpendiculares

▸8.20hs: la docente coloca una lámina de rectas con diferentes posiciones relativas, reparte a cada alumno una reproducción de la misma y dicta el siguiente enunciado.

Identifica en el siguiente dibujo
-tres pares de rectas oblicuas
-tres pares de rectas perpendiculares
-tres pares de rectas paralelas



Prof: Vamos a indicar con estos símbolos cuando las rectas son perpendiculares, oblicuas o paralelas

⊥ perpendicular ∠ oblicua ∥ paralela

▸Los alumnos trabajan y la profesora recorre los bancos. Luego pasa una alumna a resolver el primer inciso y la profesora explicita posibilidad de diversas respuestas:

G ∠ B F ∠ B

Prof: ¿Vamos a tener todos las mismas respuestas?

Als: No

Prof: ¿Por qué?

Als: Porque hay varias.

Prof: Exactamente, esos son ejemplos que puso Florencia, a lo mejor si pasa otro compañero va a tener otras respuestas. A ver Romina pasá a contestar el segundo y Tatiana el tercero.

Romina: F ⊥ M G ⊥ M G ⊥ O

Tatiana: A ‖ B O ‖ N F ‖ G

Prof: Algunos me preguntaban si podían poner A ‖ C ¿qué les parece? ¿puedo poner A‖C aunque B esté en el medio? ¿tiene algo que ver que B esté en el medio?

Als: No

Prof: Entonces ¿es A paralela a C?

Als: Sí

Prof: ¿M paralela a O?

Als: Sí!

Prof: Bien. En los dos primeros casos, los tres pares de rectas oblicuas y los tres pares de rectas perpendiculares ¿cómo se llaman?. Mírenlo en la carpeta porque lo vimos.

Al: Rectas del plano

Prof: ¡Son todas rectas del plano!

Al: Concurrentes

Prof: Concurrentes. ¿Porqué se llaman rectas concurrentes?. ¿Cecilia? ¿Paula? (mientras las destaca en el enunciado)

-tres pares de rectas oblicuas ——\ Rectas concurrentes

-tres pares de rectas perpendiculares ——/

-tres pares de rectas paralelas

Paula: Porque tienen un punto de intersección

Prof: Bien. ¿qué es lo que diferencia a las oblicuas de las perpendiculares Romina?. Dicen que las concurrentes tienen un punto de intersección, se cortan en un punto, bueno... pero hay dos clases, oblicuas y perpendiculares. ¿María?...Pensémoslo al revés, ¿cuándo dos rectas son perpendiculares? Cuando forman cuatro ángulos....

Als: Congruentes. Se cortan y forman cuatro ángulos

Prof: ¿Perpendiculares cuándo? ¿Agustina?

Ag: Están en el mismo plano

Prof: Están en el mismo plano, todas están en el mismo plano, y forman...

Al: Cuatro ángulos congruentes

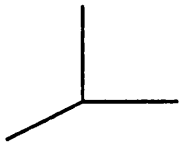
Prof: ¿Y las paralelas?

Als: No tienen ningún punto en común

Prof: No tienen ningún punto en común o ¿qué puede pasar?

Als: Tienen todos

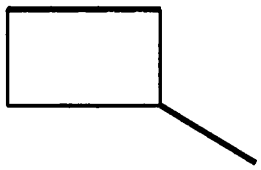
Prof: Lo que estamos queriendo decir es que estamos analizando ejemplos de representaciones de una recta. Eso no es una recta, es una parte de una recta lo que estamos dibujando. Pablo ¿qué pensaste?



P: La pared y la otra pared, es de rectas perpendiculares

Prof: Pero ¿esta pared es una recta?

P: El borde, ese borde y el de abajo (señala borde vertical y el zócalo)



Als: Los bordes del pizarrón es ejemplo de paralelas

Prof: ¿Podría decir esto? ¿Este borde con el zócalo?

Als: No porque no están en el mismo plano

Prof: Exactamente

► La docente reparte papel de calcar y dicta consigna

Prof: Escriban. Dibujá una recta en el papel. Ponele nombre. Marcá un punto en la recta. Ponele nombre. Tratá de encontrar plegando la recta perpendicular a la dada que pase por ese punto. Anotá en tu carpeta cómo lo hiciste.

► Los alumnos encuentran el procedimiento pero les resulta difícil escribirlo

Prof: A ver Vanesa ¿qué escribiste?

V: Hice la recta en la mitad del plano, a la recta le puse A, hice un punto en la mitad de la recta y lo llamé c y lo plegué por el punto de tal modo que la recta A sea perpendicular al doblez

Prof: ¿Es necesario poner la recta en la mitad? ¿es necesario poner el punto en la mitad? ¿Puedo dibujar la recta en cualquier lugar de esto (del papel de calcar)? ¿Y el punto en cualquier parte de la recta?

Als: Sí

Prof: Bueno, ¿cómo lo leerías obviando eso?

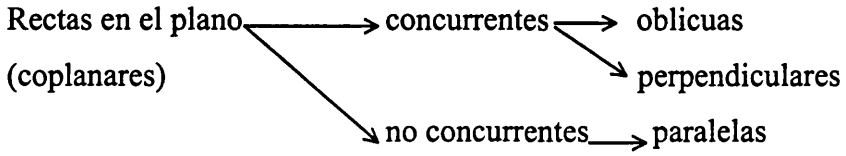
V: Hice una recta en el plano y la llamé A, hice un punto en la recta y lo llamé c y lo plegué por el punto de tal modo que la recta A sea perpendicular al doblez

Prof: Bueno ¿pueden los demás escribir eso? ¿O Vanesa se los dicta?. Vanesa dictalo; ese sería el procedimiento para lograr una recta perpendicular plegando.

(Vanesa lo dicta)

Prof: Escriban ahora esto. "Escribe el procedimiento si el punto que marcaste antes en la recta ahora es exterior"

Prof: Bien. Todo esto lo tienen en la carpeta, estamos repasando, entonces no vamos a escribir nuevamente las definiciones. Esto que estamos viendo son rectas en el plano o coplanares. ¿Cómo pueden ser las rectas en el plano? Pueden ser concurrentes o no concurrentes. Si son concurrentes ¿cómo pueden ser? Oblicuas o perpendiculares, y ¿si no son concurrentes? Paralelas. Esto lo van a escribir y van a pensar ejemplos en el aula y fuera del aula



▸ Búsqueda de ejemplos en el entorno que impliquen las nociones utilizadas en el problema; diferenciación entre recta y la representación de una recta.

Prof: Cada uno va a decir un ejemplo en el aula de rectas paralelas, perpendiculares y oblicuas. Pero...vamos a ponernos de acuerdo ¿un solo objeto vamos a decir? ¿cuántos necesitamos como mínimo?

Als: dos

Prof: Dos por ejemplo. Bueno, los cordones de las veredas, ¿serían ejemplos de qué cosa?

Als: De paralelas.

Als: El borde de arriba y de debajo del tablón ubicado en la parte superior de la pared; esos dos caños de luz sobre el techo

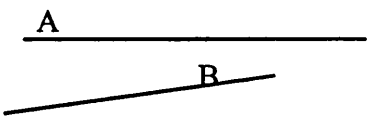
Prof: Estos son los ejemplos de recta que vemos en la geometría? ¿qué dijimos que es un recta?

Als: Un conjunto de puntos

Prof: Pero ¿es limitado ese conjunto de puntos?

Als: No

Prof: Es infinito, o sea que si dibujo esto y esto, llamémosle A y B ¿cómo son esas rectas?



Als: Oblicuas

Prof: ¿Por qué? A ver Cecilia

C: Porque se van a cortar

Al: Es igual

Prof: ¿Y para vos Pía?

P: No sé, tengo que hacerlo

Prof: ¿Todos tienen que hacerlo otra vez?

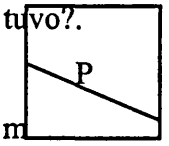
► Los alumnos trabajan. Luego la profesora explicita algunas dificultades que surgieron.

Prof: La idea es la misma, tengo que encontrar la perpendicular no la oblicua!. Ella puso una recta acá y el punto lo puso acá ¿qué pasa acá? (La profesora traza con escuadra una recta horizontal y ubica el punto en una posición similar a la de la alumna)

A

×m

Prof: La recta continúa, o sea que prolongo la recta. Lo que hizo Romina es, tengo este papel (dibuja), hizo la recta acá y el punto aquí ¿qué problema tuvo?.



Para uds el trabajo fue el mismo ¿no? en este caso donde Romina ubicó el punto es incómodo doblarlo, pero...no es que no se pueda, sino que pusiste el punto en un lugar complicado y no se puede doblar pero si lo pones en cualquier otro lado vas a ver que lo podes hacer.

*IE: Se explicita objetivo de las actividades anteriores

Prof: Bueno, ¿qué estuvimos haciendo con esta actividad del plegado? ¿Ivan? ¿Diego?

D: Trazamos la línea y pusimos el punto en otro lado para ver si era igual

Prof: Me refiero a las dos actividades, cuando hicimos una recta y pusimos el punto en la recta y a esta otra actividad que pusimos el punto fuera.

Al: estuvimos demostrando

Prof: ¿Estuvimos demostrando o comprobando?; estuvimos usando el papel de calcar para obtener rectas perpendiculares por un punto que pertenece a la recta dada y por un punto que no pertenece a la recta dada.

► Se reparte el enunciado del problema que motiva el trabajo con la circunferencia (ver Anexo AIII-6)

Prof: Ahora les voy a dar un problema para que comiencen a pensar hoy y si no alcanzamos a terminarlo lo terminamos mañana

►Alumnos trabajan. Luego se explicitan procedimientos y se presenta a la circunferencia como herramienta para la solución.

Prof: Fijate si se te ocurre alguna estrategia

Al: Con un hilo

Prof: Miren lo que dice Ayelén

A: Con el compás lo pones en 4km y llevas la medida al punto y marcás la circunferencia que pasa por la ruta y ves

Prof: Carlitos, ¿qué habías pensado?

C: Poner la regla en cero en el punto a, e ir marcando 4 hasta donde alcance

Prof: ¿Y qué está haciendo Carlitos? ¿Es válido lo que dice de usar la regla e ir midiendo? ¿Es lo mismo que usar el compás?

Als: Sí

Prof: Pero ¿qué es lo que estamos haciendo cuando usamos la regla?

Al: El radio

Prof: O sea que ¿con qué se soluciona este problema? Con el compás; y ¿qué trazamos con el compás?

Als: Una circunferencia

Prof: ¿y cual es el centro de la circunferencia?

Als: el punto a

Prof: ¿Cuál es el radio de esa circunferencia?

Als: 4km

Prof: Marquen un radio de esa circunferencia, ¿puedo marcar cualquiera? ¿De dónde va el radio?

Als: Desde a hasta la circunferencia

Prof: Vamos a decir que trazamos una

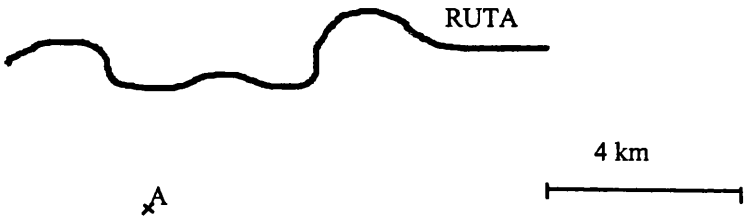
C (a,R) (simbología)

En este caso a es el centro y el radio 4km. Mañana vamos a continuar.

CLASE 2

▸ Se retoma el problema de la circunferencia. Una alumna lee el problema mientras la profesora hace el croquis en el pizarrón.

Al: "Una persona está situada en A con un radiotransmisor que alcanza 4km, tiene que dar un mensaje a su compañero que circula por la ruta ¿desde qué tramos de la ruta lo podrá oír?."



Al: Yo agarré un compás y lo puse en A y dí la vuelta, entonces donde coincidía con la ruta era donde podía oír.

Prof: A ver Tatiana pasá a resolverlo, en el escritorio tenés el compás. ¿Qué otra forma habían pensado también para resolverlo?

Als: Con la regla

Prof: Vos Carlitos, ¿cómo habías pensado hacerlo?. Con la regla pero... me parece que habías dicho otra cosa ¿no?. Con un hilo.

Tatiana dibuja la circunferencia de centro A en el pizarrón.

Prof: ¿Qué nos quedó ahí determinada?

Als: El area donde alcanza la radio

Prof: Bien, el área donde alcanza la radio. Porque la ruta no está en el borde ¿no? ¿la ruta donde está?

Tatiana señala

Prof: Y esa zona ¿cómo está con respecto a la circunferencia? ¿Está afuera o adentro?. Está en el interior, entonces toda la parte de ruta que está en el interior se alcanza con el radiotransmisor. Bien.

▸ Concepto de circunferencia, notación; idea de lugar geométrico, circunferencia como lugar geométrico.

Prof: ¿Cómo podríamos decir qué es una circunferencia? ¿Qué es para uds una circunferencia? De lo que recuerdan de la primaria...¿qué es?

Als: Es el borde de un círculo

Prof: ¿Qué es el borde de un círculo?

Al: un giro de 360°

Prof: ¿Qué es en realidad? Esto sería ¿no? (señala la circunferencia dibujada de centro a y radio 4km). Esto sería lo que dicen es el borde y...¿cómo está formado este borde?

Murmullo

Als: Puntos

Prof: Por puntos, es un conjunto de puntos, pero ¿es un conjunto de puntos cualquiera?

Als: no

Prof: A ver, ¿qué condiciones cumple ese conjunto de puntos que tenemos?

Al: Tiene forma de círculo, en vez de una recta es una línea curva

Prof: Bien, es un conjunto de puntos, pero nosotros estamos usando esto (señala el segmento de 4km que se dio como dato)

Als: El radio

Prof: Este es el radio, entonces ¿estos puntos dónde están?. Tatiana apoyó el compás acá, abrió el compás con esta abertura y trazó este conjunto de puntos. Entonces... a ver si encuentran la relación

Al: del punto a la línea hay 4km

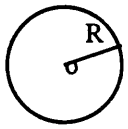
Prof: Sí, este sería el centro; tiene un centro y un radio. ¿ A qué es igual el conjunto de puntos que se encuentra a una distancia de este punto?

Als: Al radio

Prof: Igual al radio. Esa sería la definición. La circunferencia es el conjunto de puntos que se encuentra a una distancia del centro igual al radio. En general, la circunferencia se anota C(o,R) o también la van a encontrar así $C_{o,R}$

Circunferencia C(o,R) $C_{o,R}$

Vamos a anotar qué es. Escriban, la vamos a definir en general, este era un caso particular para el problema. "Se llama circunferencia de centro o y radio R al conjunto de puntos que se encuentran a una distancia de o igual a R". Dibujen una circunferencia y le van a marcar el centro y el radio.



1) ¿Qué condición cumplen los puntos de la circunferencia respecto a o?

2) Todos los puntos del plano de la hoja que están a una distancia de o igual a R ¿dónde se encuentran?

Prof: Vanesa, ¿Qué condición cumplen todos estos puntos de la circunferencia (los

señala) con respecto a o?

V: La misma medida

Prof: Tienen la misma distancia; o sea todos los puntos que están acá están a la misma distancia de o ¿igual a qué es esa distancia?

Als: Al radio

Prof: Entonces ahí donde dice ¿Qué condición cumplen los puntos de la circunferencia respecto a o? vamos a poner (mientras escribe debajo de la pregunta 1)

Están a una distancia de o igual a R.

Después, en la otra pregunta. Todos los puntos que están a una distancia de o igual a R ¿dónde se encuentran?. En la circunferencia. O sea, que todos los puntos del plano que cumplen la condición de estar a una distancia de o igual a R ¿dónde van a estar?. En este borde y precisamente ésta es la circunferencia. Vamos a escribir (mientras escribe debajo de la pregunta 2)

En la circunferencia

Prof: Entonces ¿qué es la circunferencia?

Al: Un conjunto de puntos

Prof: Un conjunto de puntos que están... Lean!, si lo acabamos de poner!

Al: Que están a una distancia de o igual a R

Prof: Bien. Es el conjunto de puntos que están a una distancia de o igual a R. Y además, todos los puntos que están a una distancia de o igual a R ¿dónde van a estar?

Als: En la circunferencia

Prof: En la circunferencia. ¿Se dan cuenta que lo estamos diciendo de dos formas a esto?. En geometría, muchas veces en lugar de hablar del conjunto de puntos que cumplen una condición, se habla de lugar geométrico. Entonces ahora vamos a definir la circunferencia como un lugar geométrico. ¿Cómo vamos a definir este lugar geométrico?, diciendo que la circunferencia es el lugar geométrico de los puntos que cumplen la condición de estar a una distancia de o igual a R. Vamos a anotar.

"La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a una distancia de o igual al radio".

"Lugar geométrico: es el conjunto de puntos que cumplen una determinada condición o propiedad".

Prof: En este caso definimos a la circunferencia como lugar geométrico, pero después vamos a ver que hay otros lugares geométricos además de la circunferencia. Hay otros conjuntos de puntos que cumplen determinadas condiciones, también los vamos a definir como lugar geométrico. Ahora vamos a resolver unas situaciones que les traje respecto a esto.

► Se reparte fotocopia con cuatro problemas (ver AIII-9) y los alumnos trabajan 15 minutos en ellos.

Comentarios en el último problema de esta serie:

Al: es un rombo o un cuadrado, según

Prof: ¿esto va a cambiar de nombre según lo pongas como lo pongas? Vos parada sos Romina ¿y agachada vas a ser Cecilia?. La ubicación no tienen nada que ver con lo que la figura es. Lo pongas como lo pongas (mientras da vuelta la figura) siempre va a ser un cuadrado.

Prof: A ver ¿quién lee el primero?

Al: No sé si está bien

Prof: Pero lo vemos, para eso hacemos esto

Al: "Dónde deberían pararse todos uds para estar a igual distancia de mí? Dibuja mostrando la situación".

Al: Yo hice una circunferencia, el centro serías vos, y en la circunferencia estaríamos nosotros.

Prof: Bien, todos contestaron de esa forma?

Als: Sí

Prof: ¿Y el dos?. Lo va a leer María José.

MJ: "Dónde deberán colocarse las bolitas de un conjunto para que estén a la misma distancia de un hoyo. Dibuja mostrando la situación". Hice una circunferencia, en el centro le hice el hoyo y alrededor le hice las bolitas, alrededor de la circunferencia

Prof: Ben, ¿todos lo hicieron así?

Als: Sí

Prof: ¿El tres? ¿Quién va a hacerlo en el pizarrón?. Bueno, dale Ceci. ¿Y vos querés hacer el cuatro?. Bueno Tatiana, hacelo en este lado del pizarrón mientras Ceci acá hace el tres.

(Tatiana hace un cuadriculado y marca los puntos del conjunto solución.)

T: Eso me dio pero...algunos encontraron más puntos

Prof: ¿Cuál?

T: Uno, dos, tres (señala un punto que haciendo una recorrido de tres calles está a una calle de distancia de A)

Prof: ¿Qué les parece? ¿Está bien? ¿Qué dice el enunciado?. Vamos a leerlo. "Ubica el punto A en un vértice de un cuadradito, ubica todos los puntos donde el recorrido más corto desde A sea 3 cuadras. El lado del cuadradito equivale a 1 cuadra". ¿Puede ser lo que dijo Ayelén?

Als: Sí

Prof: A ver Tatiana, escuchá lo que dice Florencia

F: Tenés 3 cuadras pero si lo ves desde A tenés una sola cuadra.

Prof: Ella dice, vos hacés una, dos, tres, pero si lo miro desde A es una sola cuadra. ¿Entienden?.

Als: Sí

Prof: ¿Hay otros puntos en esas condiciones? ¿Marcamos todos no?. Ahora dice "¿Qué observas? ¿podés definir un lugar geométrico?". ¿Podemos definir un lugar geométrico?

Als: Sí

Prof: ¿Cuál es el lugar geométrico? Los puntos que están...

Als: A la misma distancia de A

Prof: ¿A qué distancia están de A?

Als: Tres cuadras

Prof: Bien

►Ceci explica su resolución al problema "Traza 5 o 6 circunferencias congruentes que pasen por un punto m cualquiera. Marca sus centros con color. A) ¿Qué observas?. B) ¿Puedes definir un lugar geométrico?".

C: Todos los puntos están a la misma distancia de m

Prof: ¿Qué son esos puntos?

C: Los centros

Prof: Exactamente, los centros de las circunferencias que dibujaste están todos a la misma distancia. Pero todos estos centros ¿dónde me quedarían?

C: En una circunferencia

Prof: En una circunferencia. Acá terminamos los problemas que teníamos. Les voy a

dar de tarea problemas y los traen para el viernes.

▸ La profesora reparte la tarea (ver AIII-7); mientras tanto hace un interrogatorio sobre el cuadrado y el rombo

Prof: ¿Por qué la figura del problema era un cuadrado?. Tienen todos los lados iguales y los ángulos de 90°. Si fuera un rombo ¿qué pasaría? ¿Ivan? ¿Tendría los lados uno más largo que otro?

I: No

Prof: ¿Qué tendría?. Los lados iguales pero los ángulos... desiguales. ¿Cómo son los ángulos del rombo?

Al: Iguales

Prof: ¿Todos iguales?

Al: Dos iguales y los otros....

Prof: Iguales dos a dos. Dos iguales y los otros también iguales pero desiguales con los anteriores.

CLASE 3

▸ Se cometan los resultados de los problemas que quedaron de tarea.

Prof: Vamos a corregir la tarea, vamos a revisar el de don Mateo. ¿Ivan? Léelo

I: "Don Mateo es jardinero y le gusta hacer canteros de formas variadas. En este caso clavó una estaca en el lugar donde quiere hacer un cantero de petunias y ha atado un piolín a la estaca con un lazo flojo. Del otro extremo ató un palo. Sosteniendo ese palo en forma vertical de modo que vaya haciendo un surco en el piso, da toda la vuelta alrededor de la estaca. ¿Qué figura ha quedado marcada en la tierra?".

I: Queda marcada un círculo.

Prof: ¿Un círculo o qué?

Als: Una circunferencia

Prof: O sea que si pongo un palo, un hilo, otro palo y doy vuelta, lo que va a quedar marcado es una circunferencia. A ver, el 2.

Al: "Cada uno de uds debe dibujar una circunferencia congruente con la de sus compañeros. ¿qué datos necesita? Dibujen y verifiquen".

Al: Lo que necesitamos saber es la medida del radio

Prof: ¿Es cierto eso?

Als: Sí

Prof: ¿Qué serían circunferencias congruentes?

Als: Iguales

Prof: ¿Iguales?

Als: Con el mismo radio

Prof: Tienen el mismo radio, significa que cuando las superponga las circunferencias van a coincidir en todos sus puntos. Eso significa congruentes. O sea que para poder lograr eso necesitamos como dato...

Als: El radio

Prof: El radio. ¿Necesitamos que nos den el centro?

Als: No

Prof: No, bien. El 4. ¿Diego?

D: "Dado este radio ¿cuántas circunferencias no congruentes se pueden dibujar?. Dibuja y explica". Se puede hacer una

Prof: El 5

Un alumno lo lee

Al: "Dado un punto que se tomará como centro o ¿cuántas circunferencias no congruentes se pueden dibujar? Dibuja y explica". Se pueden hacer muchas, infinitas

Prof: ¿Por qué?

Al: Porque pones el compás en el centro, en un punto, y ahí lo podes ir abriendo o cerrando

Prof: Cuando voy abriendo o cerrando ¿qué es lo que estoy variando?

Al: El radio

Prof: ¿Todos hicieron esto?. Si alguno no lo hizo, lo va a hacer y tiene la ventaja que hubo compañeros que dijeron cómo debía hacerse la tarea.

▸Repaso de circunferencia como lugar geométrico. Se alude a una actividad para completar dada en la clase anterior.

Prof: Para cerrar vamos a contar qué es una circunferencia, un poco repasando lo que habíamos visto la clase anterior, lo que habíamos definido, lo que completamos en ese papel que les entregué. Christian, a ver si podes explicar qué es una circunferencia, o buscalo. A ver, vamos a dibujar una circunferencia, ponemos un centro (mientras la dibuja)

Ch: Todos los puntos de una circunferencia forman un ángulo de 360°

Prof: ¿Está bien eso?

Als: ¡No!. Todos los puntos de una circunferencia están a una misma distancia de o igual a R.

Prof: Bueno, pero ...¿por qué le decimos que está mal lo que dice?. ¿Los puntos forman un ángulo? ¿Qué necesito para formar un ángulo?. Dos semirrectas y...¿acá tengo dos semirrectas?

Als: No

Prof: ¿Qué tengo? Un punto y además.... ¿qué es lo que tiene que poner en ese papel? (actividad para completar)

Los puntos de la circunferencia ---están a una distancia de o igual a R---

Todo punto ---que está a una distancia de o igual a R--→ está en la circunferencia

Prof: Hubo compañeros que ponían en esta parte (item2) todo punto del plano está en la circunferencia. ¿Es cierto eso?. A ver Romina

R: No porque pueden estar fuera de la circunferencia.

Prof: Entonces acá no puedo poner todo punto del plano, son los puntos que cumplen con una determinada condición. A ese conjunto de puntos que cumple con una condición ¿cómo lo llamamos el otro día?. Fíjense, lugar geométrico. Dijimos que todos los puntos del plano que cumplen con una cierta condición o propiedad lo llamamos lugar geométrico, y definimos a la circunferencia como lugar geométrico. ¿Queda claro que estos son los únicos puntos? No hay en el plano otros puntos que cumplan con esta condición. ¿Les queda claro?

Als: Sí

▸ Problema para aplicar el concepto de Mediatriz como herramienta para la solución

Prof: Vamos a tomar el otro problema, el del cuadriculado. A ver Pía leelo

P: "Cecilia y Mariana decidieron reunirse en un bar para preparar un trabajo que les encargó la profesora de historia. Como ninguna de las dos quería caminar más que la otra, acordaron encontrarse en un bar ubicado a la misma distancia de c/u de sus casas. Las dos amigas repasaron los bares que hay en el barrio e hicieron el siguiente plano. ¿Cuales son los bares que están más cerca de la casa de Cecilia?"

Prof: ¿Podes explicarlo desde allí?

P: La mitad del plano para allá, del lado izquierdo

Prof: Bien

P: "Cuales son los que están más cerca de la de Mariana?". Los del otro lado. De la mitad del plano para el otro lado. "Cuales son los bares que cumplen la condición exigida por las dos amigas (estar a la misma distancia de ambas casas)?". Los que están en el medio.

Prof: Dice "Ubica en un plano como el que hicieron Cecilia y Mariana otros puntos que se encuentran a la misma distancia de cada casa". ¿Cómo hicieron?

P: Ubiqué las dos casa y en la mitad puse puntos

Prof: ¿Cuantos puntos? ¿Cuántos bares podríamos poner ahí?

Als: seis,...., nueve...., ocho sin contar los que están

Prof: A ver, Ayelén dice ¿por qué tengo que poner los bares solo en las esquinas? ¿Podríamos poner más?

Als: Diez

Prof: ¿Por qué diez?. Pensemos en general, ¿en qué lugar quedarán ubicados?

Al: En la mitad del plano

Prof: ¿Forman alguna figura que conocen?

Als: Sí, una recta

Prof: Si forman una recta estamos diciendo que son muchísimos los bares que pueden poner. Además esa recta ¿qué particularidad tiene?

Al: Es vertical

Prof: Es vertical en este caso. Dijeron que está a la misma distancia de las casas. ¿Cómo se llama esa recta donde están los bares que cumplen con la condición? A ver si recuerdan ¿cómo se llama esa recta que está a la misma distancia de la casa de Cecilia y de la casa de Mariana?. Es perpendicular y ¿qué más? ¿Dónde quedó ubicada?. En el medio. ¿y cómo se llama entonces?

Al: Mediatriz

Prof: Sí, mediatriz. Los bares quedaron en la recta mediatriz. Bueno debajo ponemos

Mediatriz de un segmento

Las casas estarían representando el segmento. Un esquema estoy haciendo. ¿Qué es entonces la mediatriz?

Al: Es la recta que divide al plano en dos partes

Prof: ¿Divide al plano?

Als: No, al segmento en dos partes iguales

Prof: Y además ¿cómo es?

Al: Vertical. Ah no! perpendicular

"Mediatriz de un segmento: es la recta perpendicular al segmento en su punto medio"

Prof: Van a determinar la mediatriz de un segmento que lo vamos a llamar ab. "Dibujar en el papel de calcar un segmento ab y determinar plegando su mediatriz"

►Los alumnos trabajan

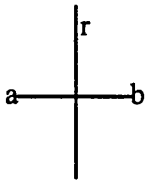
Prof: A ver ¿cómo obtuvieron la mediatriz?. Tatiana

Tatiana explica en voz baja

Prof: Bien, o sea que ella dice que plegó el papel de tal forma que los extremos a y b coincidan, de esa forma el doblez determina la mediatriz. ¿Todos hicieron así?. Bueno, ahora van a marcar un punto cualquiera en la mediatriz, que lo van a llamar

r y van a trazar los segmentos ar y rb.(Mientras traza un segmento ab, y a mano alzada traza su mediatriz y ubica r en ella.). ¿Cómo son esos segmentos?. Bien

ar y rb son congruentes



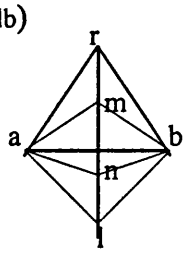
Ahora prueben con otro punto, tomen otros puntos y prueben lo mismo (mientras ubica puntos m, n y l en la mediatriz que dibujó a mano alzada). De todos estos puntos, este punto ¿qué nombre recibe? ¿Qué es del segmento?

Al: El centro, la mitad

Prof: Si leen arriba se darían cuenta. Exacto Pía, es el punto medio del segmento ab. Pónganle nombre, o. Con esto que hicimos ¿cómo quedarán los segmentos de los puntos a los extremos del segmento? (mientras traza ma y mb, na y nb, la y lb)

Als: Iguales

Prof: esto nos está mostrando que

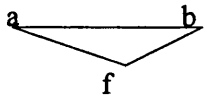


"Los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento"

¿Qué quiere decir equidistan?. Aquí es igual, igual distancia, están a igual distancia. ¿De donde?, de los extremos del segmento. Esta es una conclusión del trabajo que hicimos. Ahora, en el papel "dibujar un segmento ab. Encontrar con el compás un punto f que esté a igual distancia de a y de b. Explicar como lo hicieron"

▸Los alumnos trabajan

Prof: ¡Sin medir! No usamos la regla. Nadie usa regla ni cuadraditos del cuadriculado. Vamos a pensar un poquito qué es lo que tenían que hacer. Había que dibujar un segmento (lo hace a mano alzada), eso dice acá, dibujar un segmento ab, y tenían que encontrar con el compás un punto que esté a igual distancia de a y de b. Tengo que encontrar, puede ser acá o acá (arriba o abajo del segmento) un lugar para f de modo que ese f tenga la misma distancia de los extremos. Este es un esquema. Esa era la consigna



▸Los alumnos trabajan y hacen consultas

Prof: Bueno, ubiquen otro punto ahora. ¿Listo?, no pueden medir ni usar el

cuadriculado, ¿qué observan? ¿Dónde están?

Als: En el punto medio

Prof: No, en el punto medio solo esta éste. ¿Dónde están los puntos?

Al: En la mediatriz

Prof: Bien. ¿Cómo sabemos si es la mediatriz? Plegando puedo darme cuenta. ¿Qué condición cumplen esos puntos?

Al: Equidistan de a y de b

Prof: Los puntos que equidistan de a y de b están en la mediatriz

"Los puntos que equidistan de los extremos del segmento están en la mediatriz"

Prof: ¿Esto es lo mismo que escribimos hace un momento? ¿Qué habíamos dicho en el trabajo anterior?

Al: Los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos. Es lo mimo pero al revés

Prof: Es lo mismo pero al revés, entonces no es tan lo mismo. Antes decíamos los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos, y ahora decimos que si los puntos equidistan de los extremos del segmento están en la mediatriz. ¿Es lo mismo? Es lo mismo pero al revés, entonces ¿es lo mismo o no es lo mismo?. En matemática decimos que lo estamos diciendo recíprocamente. Lo enunciamos de una forma y después lo estamos haciendo de otra. No es lo mismo. ¿Estos puntos de la mediatriz están cumpliendo una condición?

Als: Sí

Prof: ¿Cómo llamamos al conjunto de puntos que cumplen con una condición?

Als: Lugar geométrico

Prof: Bien chicos. Ahora vamos a anotar la definición de mediatriz como lugar geométrico

"La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los extremos del segmento"

► Se reparte nuevo práctico (ver AIII-12)

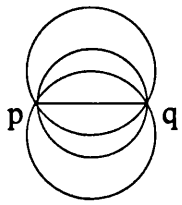
Prof: Hasta ahora hemos definido como lugar geométrico a la mediatriz y a la circunferencia. Para la próxima tienen que estudiar y hacer la tarea.

CLASE 4

▸Se comienza a trabajar con los problemas que quedaron de tarea.

"Dibuja varias circunferencias que pasen por p y q ¿dónde se encuentran los centros de las circunferencias que trazaron?".

▸ Christian pasa a hacerlo. Dibuja un segmento horizontal y a ojo apoya el compás, primero en el punto medio del segmento y hace la circunferencia correspondiente, luego lo apoya en dos puntos de dicha circunferencia que parecen pertenecer a una vertical. Tanteo.



Prof: ¿Dónde se encuentran los centros?

Al: En ese palito

Prof: ¡Cómo en ese palito! Hablemos con propiedad

Al: En la mediatriz

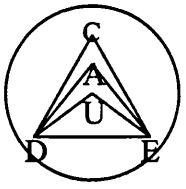
Prof: Y la mediatriz ¿qué es?

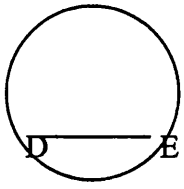
Al: Una recta

Prof: Bien, o sea que los centros de esas circunferencias van a estar en la mediatriz. Bueno, el otro problema.

▸La profesora lee el problema y establece reglas de juego "usar regla y compás"

"El Club de Andinistas Unidos encargó la confección de un escudo con el siguiente dibujo simétrico que representa tres montañas de diferentes alturas. Completen el dibujo del escudo con regla y compás y redacten el procedimiento que utilizaron".





Prof: ¿Cómo hicieron?

Al: Medimos el cosito del triángulo con la regla

Prof: Ah! ¿Pero eso era lo que había que hacer?. Manuel, ¿hiciste el ejercicio que había que hacer del escudo igual al que estaba?. ¿Cómo lo hiciste?

M: Hice una circunferencia

Prof: La circunferencia ya estaba. ¿Vos mediste?

M: Sí

Prof: ¿Había que medir?. Mira dice "Completen el dibujo del escudo con regla y compás y redacten el procedimiento que utilizaron"

(La profesora hace el dibujo para completar incluido en el enunciado)

▸Se evalúa la pertinencia del resultado, lo que lleva a algunas indicaciones para la comprensión del problema, indicaciones para hacer una formulación propia. Luego se rescatan dos procedimientos.

Prof: A ver Tatiana

T: Primero hice la mediatriz y después ...

Prof: A ver si lo pasas a hacer. Es decir, un procedimiento puede ser midiendo pero no estamos buscando el procedimiento de medir, estamos buscando usar la regla y el compás, no medir. ¿Qué es lo que está haciendo Tatiana? Está buscando de hacer la mediatriz.

▸Tatiana traza la mediatriz con regla y compás y sobre ella ubica tres puntos al azar que pertenecen al interior de la circunferencia y une dichos puntos con los extremos del segmento dado.

Prof: Tatiana, ¿cómo encontraste esos puntos?

T: No los encontré, los marqué

Prof: ¿Cómo los marcaste? Ahí los marcaste en cualquier parte pero... me refiero a la hoja, para que el dibujo te quede idéntico

T: Ah, no sé. Los puse así nomás

Prof: Suponete que nos estuviéramos copiando un dibujo y estos puntos están ubicados en un determinado lugar ¿cómo haríamos para poner estos puntos en el lugar que corresponde?

Pía: Abrís el compás con esa medida y lo pones en un vértice y trazas

Prof: ¿En un vértice?

P: En el punto D o E

Tatiana la escucha pero usa el compás con abertura MU, siendo U vértice del triángulo de menor altura y M punto medio del segmento DE dado.(los puntos están con mayúscula en el dibujo debido a que se usa fotocopia de un texto)

Prof: A ver, Tatiana dice apoyar ahí en el centro, vos Pía ¿qué decís? ¿Sería lo mismo o no? ¿Por qué no?. Pía dice tomar esto y con esto ¿no estaría haciendo lo mismo que Tatiana? ¿No determinaría el mismo punto?. Pregunto, en vez de tomar lo que

dijiste vos Pía, ella toma esto porque primero hizo la mediatriz. Pía decía de tomar este segmento porque no tenía la mediatriz, pero Tatiana tiene la mediatriz porque la dibujó primero. ¿Es el mismo punto?

Als: Sí

Prof: Bien, redactemos el procedimiento

- Construimos la mediatriz del segmento
- Transportamos con el compás los puntos C, A, U. Luego unimos los puntos marcados con los extremos del segmento quedando reproducida la figura.

Eso es lo que hicimos acá, Pía hizo otra cosa, se podía hacer de otra forma.

▸ Para la comprensión del siguiente problema se dibuja la situación descripta en el enunciado y se hace un análisis de errores que se desprenden de interpretaciones incorrectas del enunciado

Prof: A ver el próximo, tienen una flor en A y otra en B por acá

B

A

Y qué dice textualmente ¿quién lo lee?

Un alumno lo lee

"Dibuja cinco puntos que equidisten de los centros de las flores"

Prof: Hay compañeros que hicieron esto (dibuja una circunferencia con centro en A y otra congruente con centro en B). Eso hicieron ¿qué es lo que pensaron estos compañeros al hacer esto?

F: Que los puntos estaban a la misma distancia pero de cada flor por separado

Prof: Claro, los compañeros que hicieron esto estaban pensando que los puntos estuvieran a la misma distancia de A y B por separado, pero en realidad la idea era que pensaran a la misma distancia de ambos centros. Entonces esta no es la respuesta que estamos buscando, ¿cuál es la respuesta que estamos buscando?

Al: Que eso sea un segmento y... la mediatriz

Prof: Exacto, lo que estamos buscando es pensar que los centros de las flores sean los extremos de un segmento. Entonces los puntos que estamos buscando ¿dónde estarán? En el segmento?

Als: No, en la mediatriz

▸ Se buscan analogías con problemas ya resueltos

Prof: Tengo que buscar los puntos sobre la mediatriz. No les recuerda este problema al de los bares? ¿al de Cecilia y Mariana? ¿no es similar pero con otro enunciado?. Entonces los puntos que estamos buscando son los puntos de la mediatriz, esos puntos están equidistando de los centros de las flores.

▸ La profesora presenta láminas con definiciones y propiedades ya vistas

Prof: En estos carteles escribí los lugares geométricos que vimos hasta ahora. ¿Cuáles son esos lugares geométricos?

Als: Mediatriz y circunferencia

Lugares Geométricos
• Circunferencia: Dado un punto o y un radio R la circunferencia es el LUGAR GEOMÉTRICO de todos los puntos del plano que estan a una distancia de o igual a R.
• La mediatriz de un segmento es el LUGAR GEOMÉTRICO de todos los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento

Prof: Y por otro lado traje las propiedades, también escritas, para que les quede en el aula. ¿Dónde los ponemos? A ver uno acá y el otro acá. (los cuelga)

PROPIEDADES
• Todos los puntos de la circunferencia están a una distancia de o igual a R
• Todo punto que está a una distancia de o igual a R, está en la circunferencia
• Los puntos de la mediatriz de un segmento equidistan de los extremos del mismo
• Los puntos que equidistan de los extremos de un segmento pertenecen a la mediatriz

Prof: ¿Se acuerdan que estas propiedades les habían traído problemas el otro día? (Lee las propiedades). Con esto nos aseguramos que esos puntos son únicos, que no hay en el plano otros puntos que cumplen con esas propiedades o condiciones. Les va a quedar esto acá y después cuando definamos otros lugares los vamos a ir

agregando.

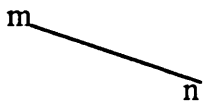
► Reinterpretación del algoritmo de construcción de la Mediatriz

Prof: Ahora en la carpeta escriban

Construcción de la mediatriz con regla y compás

1.

Prof: Vamos a dibujar al segmento en esta posición



Les quiero aclarar algunas cosas. ¿Qué es lo que tenemos que hacer? A ver ¿Florencia?. ¿Para poder trazar la mediatriz qué necesito?

Als: El compás

Prof: Además de los instrumentos ¿qué necesito?. Esperen, vamos a hacer acá una figura auxiliar (hace en un rincón un segmento horizontal a mano alzada).Tengo un segmento ab y quiero trazar la mediatriz.

2.

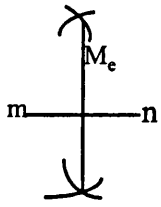
Prof: Uds dicen tomo el compás, abro el compás ¿cómo tengo que abrir el compás? Si, más de la mitad, ¿por qué? ¿sino que pasaría?. Bien, no se cortan; entonces abro el compás más de la mitad, pincho en los extremos del segmento y hago arcos y después corto.

3.

Prof: Pero en realidad ¿qué estoy determinando?

Als: Dos puntos

Prof: Dos puntos, entonces para trazar la mediatriz de un segmento ¿qué necesito determinar? (agrega los arcos en la figura y traza la recta que pasa por los mismos)



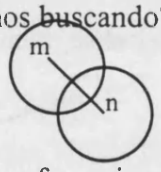
Als: Dos puntos

Prof: Necesito determinar dos puntos porque esos puntos van a determinar después la recta, con dos puntos puedo trazar la recta que sería la mediatriz del segmento. Entonces lo que necesitamos para trazar la mediatriz es determinar dos puntos y

esos dos puntos los determinamos como dijeron uds.

4.

Prof: Vamos a tomar el compás con una abertura mayor que la mitad, vamos a trazar entera la circunferencia, no sólo los arcos, trácenla entera (mientras traza en el segmento mn dado dos circunferencias congruentes de centros m y n respectivamente). ¿Qué nos quedaron determinadas? Dos circunferencias. Fíjense, tenemos las dos circunferencias y ¿dónde están los puntos que estamos buscando?



Als: Ahí

Prof: Acá, donde tenemos la intersección de las dos circunferencias tenemos los puntos que estamos buscando (los remarca).

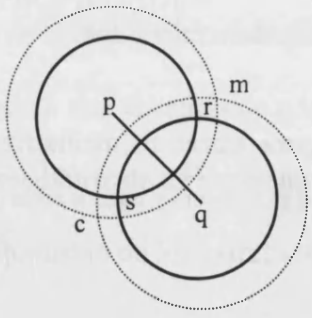
5.

Prof: ¿Son únicos estos puntos? ¿Hay otros puntos que cumplen la condición?. No, estos son únicos. A ver..., miren lo que dice Tatiana, escuchen.

T: Si abro más de la mitad el compás y trazo otras...

Prof: Dice ¿qué pasa si abro más el compás? (mientras traza dos circunferencias congruentes pero de mayor radio y de centros m y n respectivamente). ¿Qué pasó? Las dos circunferencias que trazo en cada caso ¿qué están determinando?. Están determinando dos puntos (marca los dos puntos determinados por las nuevas circunferencias). Vamos a ponerles nombres, en el primer caso r y s y en este caso m y c. ¿Y dónde están todos los puntos?

Als: En la mediatriz



Prof: O sea que cada vez que trazo dos circunferencias me determinan dos puntos que están en la mediatriz. ¿Es necesario todos estos que marqué?. No, sólo con los dos primeros hubiera bastado (mientras traza la recta que pasa por los cuatro puntos). La pregunta mía iba dirigida a que cada vez que trazas una circunferencia en las condiciones que dijimos recién ....

6.

Prof: La circunferencia es un lugar geométrico, vos estás trazando dos circunferencias, para ese caso, para esas dos circunferencias los puntos que tenés son estos dos, no hay otros. Ahora, como vos dijiste abro el compás y ¿cuántos puntos voy a determinar así?. Infinitos puntos, porque la recta tiene infinitos puntos. Queríamos que lo vieran así porque, recuerdan que siempre trazábamos arquitos, y esos arquitos no permiten ver bien lo que está pasando, uno traza esos arquitos que se cortan y no ve bien qué es lo que está ocurriendo cuando se traza la mediatriz y qué es lo que estamos buscando. ¿Qué es lo que estamos buscando?. Estamos buscando dos puntos, porque con dos puntos puedo trazar la mediatriz. ¿Está?

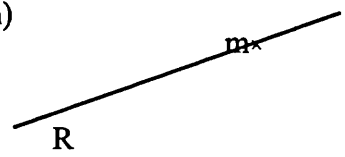
► Reinterpretación de algoritmo de construcción de la perpendicular a una recta por un punto de la misma

Prof: Ahora debajo vamos a trazar, también con regla y compás, la perpendicular a una recta por un punto que pertenece a la recta.

Perpendicular a una recta por un punto que pertenece a la recta

1.

Prof: Entonces ¿qué tenemos?. La recta R y un punto cualquiera que le vamos a llamar m (mientras dibuja la situación)



2.

Prof: ¿Cuál es el problema que tenemos? Paula, ¿qué es lo que tenemos que hacer? ¿Qué es lo que tenemos que hacer para tener el problema solucionado?

Als: Trazar la perpendicular

Prof: Trazar la perpendicular por el punto m. A ver si piensan cómo pueden hacer para resolver el problema que tenemos. Tenemos que trazar la perpendicular pero por m

Al: ¿El punto lo trazamos en cualquier lado de la recta?

Prof: El punto en cualquier parte de la recta

Los alumnos comienzan a trabajar

3.

► Pasa Ayelén.

A: Hice una circunferencia apoyando el centro en m (mientras la dibuja)

Prof: Esa circunferencia ¿qué es lo que te permite hacer? O ¿qué es lo que determina?

A: Marcar la mediatriz de la circunferencia

Prof: ¿Por qué?

A: El punto (m) pasa por la mitad de la circunferencia y estaría en la mediatriz de la circunferencia

Prof: ¿Por qué la hacemos así a la circunferencia? ¿Qué es lo que determinaste sobre la recta?

A: Al segmento (señala al segmento contenido en la recta que es diámetro de la circunferencia)

Prof: Exactamente, eso es. Fíjense chicos, lo que hizo es determinar sobre la recta al segmento (lo señala). Ponele nombre a esos puntos. Bueno, ahora tenemos al segmento af. ¿Qué es lo que vamos a trazar?

A: La mediatriz

Prof: La mediatriz de ese segmento af

(Ayelén termina la construcción, resalta los dos puntos que determinan la mediatriz y los nombra)

Prof: ¿Puede tener cualquier abertura el compás?

A: No

Prof: ¿Qué abertura tiene que tener?

A: La misma pero tiene que ser mayor que la mitad

4.

Prof: ¿Qué trazamos entonces?

Als: Un segmento

Prof: No, ¿qué trazamos?. A ver Pía

P: Una circunferencia

Prof: ¿Una circunferencia con centro en dónde? En m. Esa circunferencia con centro en m determina un segmento af, entonces el problema consiste en encontrar ¿qué cosa de ese segmento af?, la mediatriz. O sea tengo que encontrar la mediatriz de ese segmento af y uds ya saben como trazar la mediatriz. O sea que el problema se reduce al trazado de la mediatriz, que uds ya saben.

► Reinterpretación de algoritmo de construcción de la perpendicular a una recta por un punto exterior a la misma

Prof: Ahora vamos a hacer un problema similar pero en lugar de estar el punto en la

recta, el punto va a ser exterior

Perpendicular a una recta por un punto exterior a la misma

1.

2.

▶Pasa Romina. Traza una circunferencia con centro en n y remarca los puntos de intersección de dicha circunferencia y la recta y los llama r y o.

Prof: ¿Ahora el problema en qué consiste? ¿Qué estamos buscando?

Als: La mediatriz

Prof: Bien chicos, la mediatriz de ese segmento

Romina termina la construcción, acota la mediatriz entre el punto dado n y un punto hallado usando compás

Prof: ¿Qué es lo que tenemos que hacer?

Als: Encontrar la mediatriz

Prof: ¿Encontrar la mediatriz de qué?. La mediatriz corresponde a un segmento, entonces tenemos que escoger cual es ese segmento.

3.

Prof: Me olvidé de preguntarles algo que se los pregunto ahora para los dos casos. Los puntos a y f en el primer caso, y los puntos r y o en este caso ¿son únicos?

Als: Sí

Prof: ¿No hay otros puntos que me permiten trazar la perpendicular por m?

Als: Hay más

Prof: ¿Hay más?. ¡Chicos no es un acertijo!, a ver si intentan mostrar si son únicos o no ¿r y o son únicos?

Als: No

Prof: ¿Y cómo mostraríamos que no son únicos?

Al: Porque depende de la abertura del compás

Prof: Ahí está!. ¿Qué ocurriría en este caso (primer caso)? Hacemos centro en m pero abrimos el compás con una abertura menor. Por ejemplo hago esto en vez de lo que hizo Ayelén, hago así (hace una circunferencia concéntrica de radio menor) ¿qué ocurriría si marco acá? (resalta los puntos de intersección de esta circunferencia con la recta y traza la mediatriz de este nuevo segmento)

Als: Es lo mismo

Prof: ¿Entonces son únicos los puntos?

Als: No

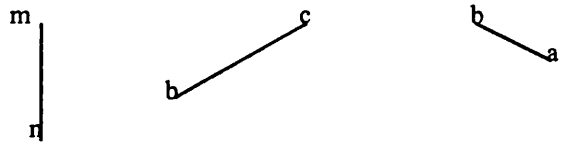
Prof: No, no son únicos los puntos. ¿Cuántos puedo tomar? Infinitos puntos que me van a determinar la mediatriz del segmento.

► Se da tarea

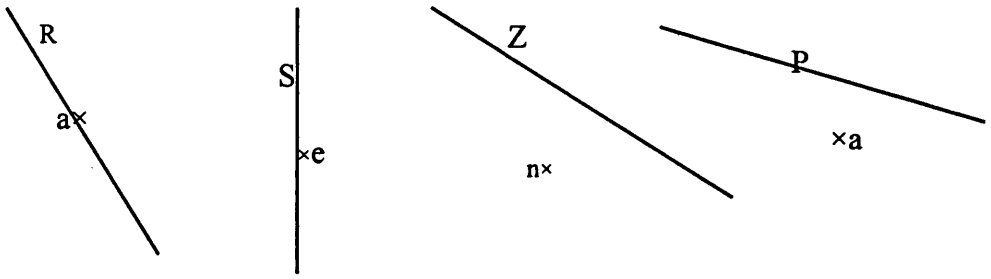
Prof: Vamos a dejar una tarea planteada. Escuchen tienen que aprender estos trazados y no dudar con esto, porque todo lo que viene después se va a basar en esto que estamos viendo ahora. Si no saben esto el problema después va a ser el doble, van a tener problema para trazar mediatrices para trazar perpendiculares y van a tener otros problemas que son los que le vamos a plantear después. Nadie se va a morir por sentarse media hora en su casa y hacer algunos trazados. Entonces chicos debajo pongan

Tarea

1)Construir la mediatriz de los siguientes segmento



2) En cada caso trazar la recta perpendicular a la dada por el punto marcado



CLASE 5

► En los primeros 15 minutos cada alumno trabaja individualmente o con el compañero un problema, el cual se utiliza como problema motivador del concepto de distancia de un punto a una recta. Su enunciado verbal es el siguiente, el cual va acompañado de un dibujo que muestra las posiciones de las piezas en el tablero de ajedrez.

"El dibujo muestra un tablero de ajedrez en cuya segunda fila están ubicados un alfil, una torre y un caballo.

A) Respetando los movimientos propios de cada pieza en el juego mencionado, dibujen, en un tablero como el de la figura, el menor recorrido que puede realizar cada pieza para llegar a la octava fila del tablero.

B) ¿Cuál de las trayectorias dibujadas es de menor longitud?

C) *Dibujen los menores recorridos que pueden realizar la torre y el caballo para llegar a la octava columna y comparen sus longitudes"*

Prof: Hice un cuadriculado para que lo pudieran ver. El problema preguntaba dos cosas diferentes. Hice dos cuadriculados diferentes para poder mirar con uds el problema. A ver cómo les dio. Les salió a todos?

Als: No

Prof: A todos no, a algunos no les salió. ¿Hay que saber jugar al ajedrez para poder hacer eso?

Als: No

Prof: El que juega al ajedrez mueve con más soltura pero el que no, igual puede resolverlo. Bueno, hay que ver dónde estaban ubicadas las piezas (mientras pega el cuadriculado en el pizarrón). A ver Cecilia

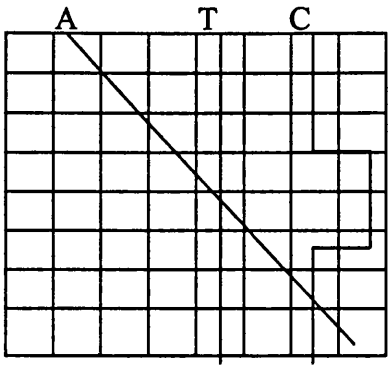
C: segunda fila, ahí,...un cuadrito más, ahí.

(La profesora marca con una cruz la ubicación de las piezas siguiendo las indicaciones y en la columna correspondiente escribe las letras A, T y C, según se trate del alfil, torre o caballo).

Prof: Ahí estaría el alfil, acá la torre y acá el caballo, para saber quienes son, porque no mueven todos de la misma manera. ¿Hasta dónde había que llevarlos? Había que traerlos hasta esta fila (8° fila). ¿Quién puede mostrar cómo lo llevó? ¿Romina?. Bueno, mostralo.

(Romina pasa y hace cruces para indicar el camino que realiza cada pieza. La profesora une las

correspondientes cruces determinando los respectivos caminos).



Prof: Bien ¿qué pregunta ahora?

Als: "¿Cuál de las trayectorias dibujadas es la de menor longitud?"

Prof: ¿Cuál es?

Als: La de la torre

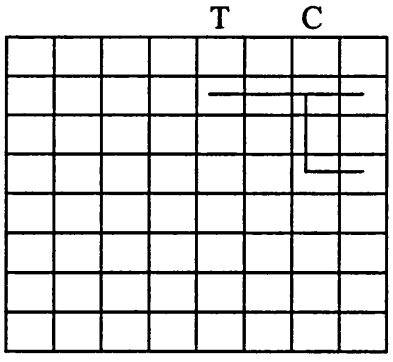
Prof: Fíjense, si tenemos acá un recta (con la escuadra en posición horizontal apoyada en la 8° fila señala una recta imaginaria) ¿Cómo es la trayectoria de la torre respecto a esta línea?

Al: Perpendicular

Prof: ¿Cómo sería la trayectoria del alfil?

Als: Oblicua

Prof: ¿Cómo sería la del caballo? ¿Tenemos nombre para eso?. No, no tenemos nombre pero viene zigzagueando el caballo. ¿Qué otra pregunta hace?, "Dibujen los menores recorridos que puedan hacer el caballo y la torre para llegar a la 8° columna y comparen sus longitudes". ¿Qué movimientos tienen que hacer? ¿Cuál es la 8° columna?, ésta (mientras traza los recorridos)



Dice que hay que comparar las longitudes, ¿cómo son? ¿son iguales? ¿cuántos cuadraditos movió la torre?

Als: Tres

Prof: ¿Cuántos cuadraditos movió el caballo?

Als: Tres

Prof: ¿Movieron los dos en el mismo sentido? Antes el alfil comía en diagonal y dijimos que esta longitud (recorrido de la torre hasta la 8° fila) no es lo mismo que ésta (recorrido del alfil hasta la 8° fila). ¿Es esta longitud (recorrido de la torre hasta la 8° columna) lo mismo que ésta (recorrido del caballo hasta la 8° columna)?.

Als: Si..., no...

Prof: Cecilia está diciendo que no. ¿Por qué no? ¿Cómo podríamos convencerla de que es la misma longitud o no? ¿Vanesa qué pensas? ¿es la misma longitud?

V: Sí, si pones a la del caballo horizontal te queda lo mismo

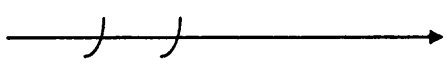
Prof: Uds dicen que podríamos superponer esas longitudes y sería lo mismo. Eso están diciendo. ¿Cómo podríamos hacer para compararlas?

Als: Medir

Prof: Sin usar la regla para medir ¿qué puedo hacer?

Al: Con el compás

Prof: Y qué hago con el compás? Puedo trazar una semirrecta (mientras la traza con escuadra en posición horizontal) ¿están de acuerdo? Con el compás mido, tenemos que tener el cuidado de empezar del mismo lugar, del centro del cuadrado en ambos casos, porque sino nos va a cambiar. Tomo con el compás la medida y la transporto (transporta el segmento horizontal correspondiente al primer trozo de recorrido del caballo) y luego transporto lo otro que quedó (transporta el segmento vertical correspondiente al último trozo de recorrido del caballo) y me fijo si coinciden o no sobre la semirrecta que estoy marcando. Puedo medir con el compás sin usar centímetro.



Prof: Estamos, en realidad, contando uno, dos, tres cuadraditos y aquí también tenemos uno, dos, tres cuadraditos. El problema es que acá tendríamos un segmento (recorrido de la torre hasta la 8° columna) y acá tenemos dos segmentos que están consecutivos uno del otro (recorrido del caballo hasta la 8° columna). Bueno, entonces la primera pregunta "¿cuál de las trayectorias es la de menor longitud?" Dijimos que es la de la torre. "Dibujar los recorridos que hacen torre y caballo para llegar a la 8° columna y comparar sus longitudes". Dijimos que las longitudes son las mismas pero el

recorrido no es el mismo. Estamos haciendo todo esto para ver lo que se llama distancia de un punto a una recta. Pongan en la carpeta

"Distancia de un punto a una recta:

Se llama distancia de un punto a una recta al segmento de perpendicular entre el punto y esa recta"

Prof: Vamos a volver a mirar el dibujo. Vamos a suponer que el alfil, la torre y el caballo son puntos, o sea tenemos tres acá y que la 8° fila es una recta. Entonces de acuerdo a eso ¿en qué casos hemos trazado la distancia de un punto a una recta?

Al: La torre

Prof: En el caso de la torre hemos trazado la distancia entre un punto y una recta. ¿Por qué? Porque dice que la distancia de un punto a una recta es el segmento de perpendicular entre el punto y la recta. Ahora, si considero como recta la 8° columna y de nuevo estos puntos ¿en qué casos tracé la distancia?. Claro, de nuevo en la torre.

▸ Distancia de un punto a una recta con regla y compás

1.

Prof: Ahora van a *dibujar una recta cualquiera y con regla y compás van a dibujar la distancia entre este punto y la recta* (dibuja la situación)

Al: Es como hacer el trazado de una perpendicular

Prof: Sí, es como hacer el trazado de una perpendicular, solamente que...¿qué es lo que voy a tener en cuenta?. Bueno, después lo explicamos.

▸ Los alumnos trabajan

2.

▸Pasa una alumna a hacer la construcción, mientras tanto la docente interroga a Cecilia

Prof: ¿Qué es lo que tenemos que hacer?. A ver Cecilia

C: El trazado de la recta perpendicular

Prof: ¿Qué tenemos que hacer primero?

C: Primero una circunferencia que el centro sea m

Prof: Esa circunferencia ¿qué hace sobre la recta?

C: Determina dos puntos

Als: Un segmento

C: Bueno, un segmento que...

Prof: Entonces ¿ a qué se reduce el problema?

C: Y después en uno de los puntos hago una circunferencia y después con el otro también

La alumna que pasó inicialmente termina la construcción de la perpendicular

Prof: Esa recta que tengo ahora ¿qué es?

Als: La mediatriz

Prof: Es la mediatriz del segmento y además es perpendicular a la recta.

3.

Prof: Pero ¿nos interesa toda la recta? o ¿qué es lo que tenemos que marcar?. La distancia entre.... Esto es lo que tenemos que marcar (mientras marca el segmento de perpendicular).

▸ Se dictan problemas de aplicación

Prof: Debajo vamos a escribir una actividad también para aplicar esto.

1) Traza una recta A y un punto exterior p. Traza ahora varios segmentos tales que todos tengan un extremo en p y el otro en la recta. ¿Hay alguno que sea mayor que todos los demás?. ¿Hay uno que es menor que todos los demás? ¿Cómo es ese segmento respecto a la recta?

2) Una persona se encuentra cerca de una ruta. Realiza un dibujo mostrando cual es el camino más corto que tiene para llegar a la ruta.

Los alumnos trabajan.

Algunos comentarios en los grupos:

Prof: ¿va a haber uno más grande que todos? ¿Siempre se va a poder trazar alguno más grande? ¿Y menor? ¿Cuál es ese?¿ y cómo lo describirías? ¿Cómo es ese segmento respecto a la recta?

▸Puesta en común

Prof: A ver si leemos las respuestas.

Al: ¿Hay uno mayor que todos los demás?

Als: No

Prof: ¿Siempre puedo encontrar uno mayor? Si, porque la recta es infinita; por ejemplo puedo marcar éste y viene otro y marca éste (mientras va trazando los segmentos). No puedo decir que hay uno mayor que los demás pero... ¿uno menor que los demás?

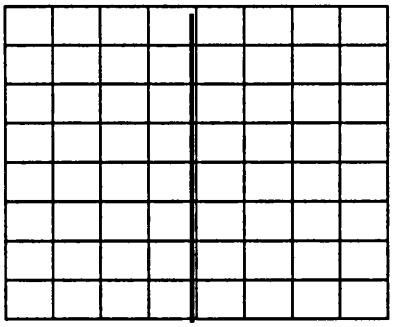
Als: Sí, el perpendicular

Prof: Bien, ¿qué otra pregunta había?. Una persona quiere llegar a una ruta y pregunta cuál es el camino más corto que tiene para llegar a la ruta.

Als: La perpendicular

Prof: Supongamos que queremos ir a la costanera y lo más corto sería ir en forma perpendicular. Estamos considerando en ese caso que la persona es un punto y la ruta una recta, estamos marcando la distancia entre un punto y una recta.

▸ Se reparte una fotocopia con el siguiente problema, con el fin de concebir a la paralela como lugar geométrico. Se deja 5 minutos para que lo resuelvan.



Observar el cuadriculado. Se ha marcado una línea en él.

A) Marcar con color puntos cuya distancia a esa recta sean 3 cuadras

B) ¿qué observas?

Prof: Todos esos puntos están a una misma distancia de la recta que estaba marcada en el papel, y esos puntos entonces ¿a dónde pertenecen?

Al: A la paralela

Prof: Y ¿cuántas pudieron determinar?

Al: Dos

Prof: Entonces de título ponen

"Rectas Paralelas:

Los puntos que están a una misma distancia de una recta pertenecen a la paralela a esa recta".

Prof: Sino también podríamos decirlo, como dicen uds, al revés

"Los puntos que están en la paralela....."

A ver complétenlo uds. Decíamos que los puntos que están a una distancia de una recta pertenecen a la paralela. Ahora, si están en la paralela

Al: Están a la misma distancia

Prof: Entonces cuando hay un conjunto de puntos que cumplen una determinada propiedad ¿qué podemos decir?

Al: Un lugar geométrico

Prof: ¡Bien chicos!

"La paralela a una recta es el LUGAR GEOMETRICO de todos los puntos que están a la misma distancia de la recta dada".

Prof: ¿Y el otro cómo quedó?

"Los puntos que están en la paralela están a la misma distancia de la recta dada".

Prof: ¿Qué lugares geométricos vimos hasta ahora?

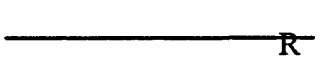
Als: Tres, la circunferencia, la mediatriz y la paralela

Prof: ¡Bien!

Construcción de la paralela a R que pasa por un punto dado.

1.

Prof: Entonces ¿qué datos tenemos? ¿qué datos les tengo que dar?. La recta R y un punto, lo vamos a llamar s (mientras dibuja la situación)



2.

Prof: Se acuerdan que en clases anteriores (meses atrás) habíamos visto el trazado de paralelas. Lo que pasa es que trazábamos paralelas sin tener el punto dado.

Al: Sí, por un punto de la recta

Prof: ¿Para paralela voy a tener un punto en la recta?

Al: Sí

Prof: ¿Y dónde va a estar la paralela? Va a coincidir con ésta. Antes no teníamos el punto dado, ahora tenemos que trazar una paralela por el punto s. Pensemos un poquito para ver si podemos orientar el problema.

3.

Prof: ¿Qué es lo que sabemos trazar hasta ahora? Perpendiculares, mediatrices.

4.

Prof: Para trazar una recta ¿cuántos puntos necesitamos?

Als: Dos

Prof: Dos puntos determinan una recta, quiere decir que si logro ubicar otro punto voy a poder trazar la paralela a ésta. Piensen el problema y lo traen para la clase que viene.

CLASE 6

▸ Se retoma el problema de la construcción de la recta paralela a R que pasa por un punto dado

5.

▸ Pasa Christian a reproducir el algoritmo que resuelve el problema de la construcción de la paralela. Con centro en un punto r arbitrario de la recta, traza una circunferencia de centro r y radio rs.

Prof: Christian dice, yo hice esto y después tracé directamente la recta

Als: ¡No!

Prof: ¡Esperen! ¿Por qué no? ¿Cuántos puntos necesito?

Als: Dos

Prof: Entonces estoy buscando otro punto para poder trazarla. A ver Cecilia terminalo

6

▸ Pasa Cecilia. Apoya el compás en un punto arbitrario p del diámetro de la circunferencia y lo abre hasta s, con centro en un extremo del diámetro hace arco de circunferencia de radio ps, determinando un punto sobre la circunferencia

Prof: ¿Cómo hiciste? Está la circunferencia trazada, que Christian trazó pasando por el punto s y haciendo centro en la recta. ¿Vos qué hiciste?

C: Yo con la medida de la recta....

Prof: ¿De qué medida? ¿De cualquier lado? ¿Dónde vas a apoyar el compás?

C: Yo hice así, pero el punto (p) no sé dónde está

Prof: A ver Ceci, tratá de encontrar el centro de la circunferencia

Ceci apoya el compás en un punto de la recta, a ojo ubica el centro y traza la circunferencia que pasa por el punto s.

Prof: Bien este es el centro (lo marca) de esa circunferencia

C: Ahora tomé la distancia que había desde la recta hasta acá (s)

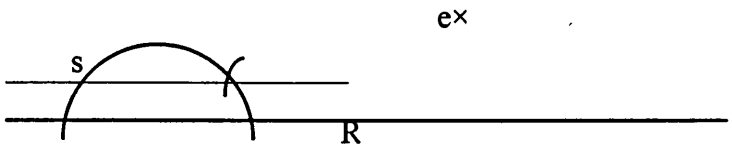
Ceci cambia su procedimiento anterior; ahora toma la distancia entre un extremo del diámetro y el punto s, y con ese radio y centro en el otro extremo del diámetro traza arco de circunferencia, determinando así un punto sobre la semicircunferencia inicial

Prof: Ahora Ceci, vos antes no decías eso. Ahora sí, pero en el primer momento no decías eso. ¿Te habías olvidado no?

7.

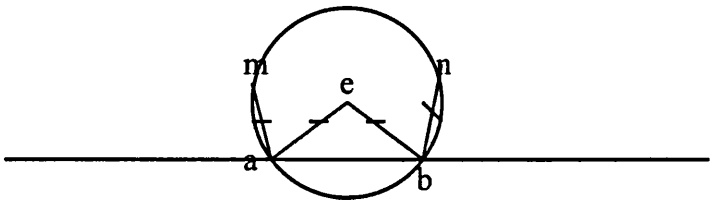
Prof: Bueno, ¿alguna otra estrategia?. A ver si podemos pensar en otra forma. Supongamos que queremos repetirlo pero con otro método. A ver Mariana.

La profesora prolonga la recta R y ubica otro punto exterior e



8.

▸Pasa una alumna y traza una circunferencia con centro en el punto dado e y que corta a la recta; no sabe como seguir. Otra alumna, Tatiana, sugiere encontrar los puntos m y n que son respectivamente C (e,R) ∩ C(a,R) y C(e,R) ∩ C(b,R), los cuales determinan una paralela que no pasa por e.



T: ¡Ah! Pero tiene que pasar por el punto ¿no?

Prof: ¡Sí!. O sea que esto no nos conduce al resultado, pero por ahí podemos tomarlo para poder llegar al resultado. Esta (primer procedimiento) es una estrategia, vamos a ver si llegamos a otra estrategia con esto.

▸ La profesora sugiere otra perspectiva

9.

Prof: Para trazar la recta paralela ¿qué necesito?

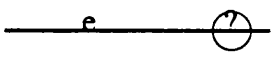
Al: un punto

Prof: otro punto.

10.

Prof: Vamos a hacer acá una figura para analizar lo que está pasando. Tenemos la recta y tenemos el punto e. Tengo que buscar el otro punto. Para poder trazar la recta tengo que encontrar un punto, que todavía no sé dónde está (lo marca en la figura de análisis y le agrega un signo de interrogación)

Figura de Análisis



11.

Prof: ¿En cualquier lugar va a estar el otro punto?. Tengo que ponerlo a la misma distancia. ¿Cómo hago para poner otro punto a la misma distancia? ¿qué podría hacer?.

12.

Prof: Entonces ¿cómo podría hacer con lo que sabemos? ¿qué sabemos trazar hasta ahora?

Als: Mediatrices

Prof: ¿Qué otra cosa?

Als: Perpendiculares, circunferencias

Prof: Bueno, también sabemos trazar perpendiculares, circunferencias. ¿Cómo se les ocurre que podemos hacer de otra forma para encontrar este punto?. Piensen. Volvamos a eso, sabemos trazar mediatrices, perpendiculares....

13.

Prof: Uds dijeron que el punto que tenemos que encontrar tenía que estar a la misma distancia ¿si o no?

Als: Sí

Prof: Tenemos que tratar que esta distancia (del punto e a la recta) sea la misma que esta distancia (del punto incógnita a la recta) con relación al punto que tenemos que encontrar.

14.

Prof: ¿Sabemos trazar con el compás la distancia de un punto a una recta?

Al: Sí

Prof: Sí, sabemos. ¿Cómo haríamos?.

Los alumnos trabajan y le hacen consultas

Prof: ¿cómo es ese segmento?

R: perpendicular

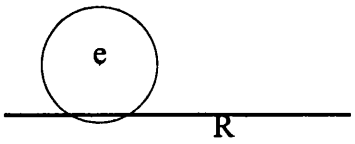
Prof: entonces tenés que encontrar la perpendicular por ese punto

15.

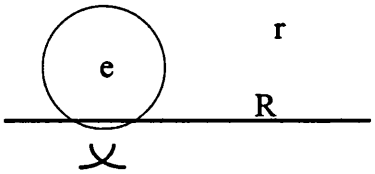
▸ Pasa Romina a ejecutar el plan. Consiste en trazar la perpendicular a R por e, luego trazar otra perpendicular a R por otro punto exterior y hallar en esta última un punto a igual distancia que el dado.

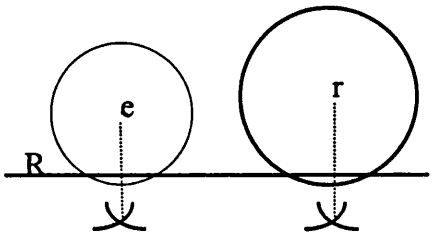
R: apoyé el compás en e, hice un círculo y me quedaron dos puntos (lo explica sobre la figura de análisis).

Prof: ¿Qué es eso?, lo que tenés ahí (la hace trabajar en la construcción empezada, o sea en la circunferencia con centro en e que corta a la recta)



R: Si, después apoyé el compás en ese punto (intersección de recta y circunferencia) e hice una circunferencia y apoyé en el otro lado e hice la otra circunferencia. Y ahí tracé la recta perpendicular y al lado hice un punto r en cualquier lugar, fuera de la recta, y otra vez hice una circunferencia (repite el procedimiento para trazar la perpendicular por dicho punto)





Prof: Al dibujar la circunferencia ¿qué determina la circunferencia sobre la recta?

R: Un segmento

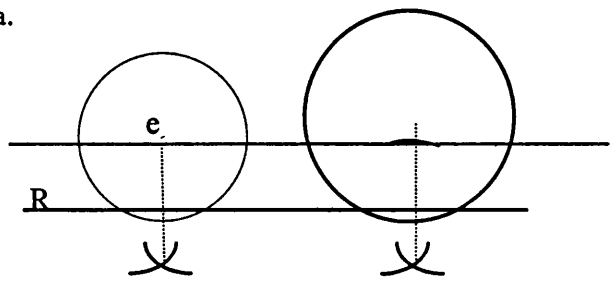
Prof: ¿Y ahora qué hacemos nuevamente?

R: Y me queda otra vez la recta (une r con el punto hallado y traza la perpendicular a R, acota la recta al segmento determinado por dichos puntos).

16.

Prof: ¿Qué tenemos que hacer ahora? ¿Qué estas haciendo? Tomando la distancia del punto que teníamos al principio y la recta. Y ahí hago lo mismo, lo transporto. Marcalo.

Romina transporta dicha distancia en la nueva perpendicular para determinar el punto buscado, y luego traza la paralela buscada.



▸ Revisión de la solución

17.

Prof: Repasamos, a ver cual era la idea

Al: ¿La mediatriz de qué sirvió?

Prof: ¿Para qué sirvió la mediatriz? Para buscar ¿qué punto?. A ver, lo que pasa es que uds tienen papel cuadriculado y es muy obvio, toman esta distancia (de e a R) y no necesitan esta recta (la perpendicular a R por e) porque tienen los cuadritos del cuadriculado, pero en un papel liso, como tengo que la distancia es un segmento, necesito los extremos para poder apoyar el compás. ¿Sí o no?. Entonces trazamos la perpendicular que pasa por el punto e para poder determinar ese punto (pie de la perpendicular). ¿Están de acuerdo?. Lo que ocurre es que este punto en los cuadraditos de uds es obvio, no ven ahí la necesidad de tener que hacer esta perpendicular.

18.

Prof: Entonces ¿después qué hacemos?, volvemos a trazar en cualquier lugar otra perpendicular por un punto, en este caso Romina eligió r, ¿podría haber elegido un punto sobre la recta?

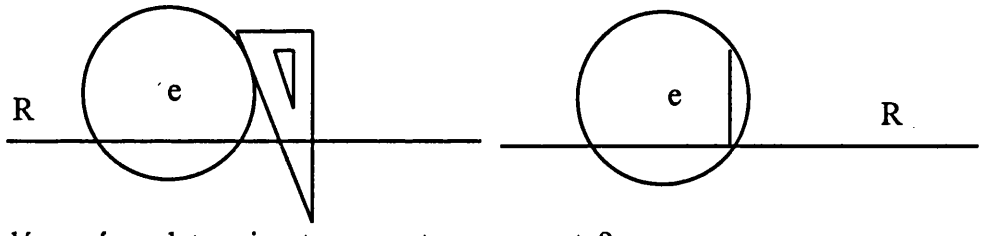
Als: Sí

Prof: Sí, podríamos haber elegido también cualquier punto sobre la recta. Trazamos otra perpendicular y entonces después transportamos ahí la distancia. Eso es lo que Romina hizo recién.

19.

Prof: Ayelen ¿tenes lo mismo?, me parece que no, a ver si lo mostras

▸ Pasa Ayelén. Hace una circunferencia de centro en el punto dado que corta a R en dos puntos; a ojo traza un segmento perpendicular a R con extremo en uno de los puntos de intersección de R y la circunferencia y el otro extremo sobre la circunferencia



Prof: Ayelén, ¿cómo determinaste esa recta o segmento?

A: Puse el punto donde se unía la circunferencia con la recta y después hice un segmento hasta donde llegaba la circunferencia

Prof: Pero ese segmento ¿sería perpendicular a la recta?

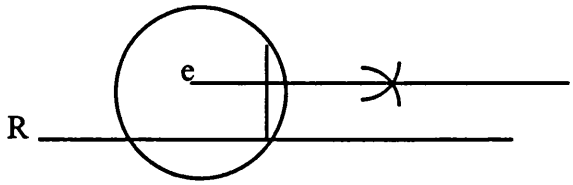
A: Sí

Prof: tu intención es que sea perpendicular ¿si o no?

A: Sí

Prof: Bueno, o sea que hiciste la circunferencia, determinamos un segmento, tomamos uno de los extremos del segmento y trazamos una perpendicular hasta la circunferencia.

Ayelén termina su construcción, trazando la mediatriz del segmento perpendicular que trazó a ojo.



20.

Prof: Ayelén hizo la circunferencia, pareciera que siempre partimos de la circunferencia ¿no?; entonces determinó un segmento sobre la recta. Tomó uno de los extremos y trazó un segmento que tendría que haber sido perpendicular, tiene que ser perpendicular a la recta que tenemos; tiene un extremo en la recta y la circunferencia y el otro extremo acá en la circunferencia. ¿Y después qué hiciste Ayelen?

A: La mediatriz de ese segmento

Prof: Después trazó la mediatriz de ese segmento que le queda determinado. Entonces tiene un punto y el punto que ya teníamos, y por ahí pasa la paralela. ¿Cuántos procedimientos encontramos?. Tres, encontramos el primero que traían uds, encontramos este (hecho por Romina) y ahora el que expone Ayelén acá. Uds van a usar el que les resulte más conveniente pero todos tienen que saber trazar la paralela a una recta dada.

21.

Prof: El lugar de puntos que cumplen una determinada condición era un lugar geométrico. Habíamos definido la paralela a una recta dada como el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de una recta.

▸ Se aborda un problema motivador para trabajar la bisectriz y su reformulación como lugar geométrico.

Prof: Vamos a continuar con un problema de algo que ya saben, entonces no les va a resultar ajeno. Les voy a repartir parte de un plano de la ciudad y ahora les voy a decir qué hacer.

El plano muestra un sector de la ciudad. En este plano se ve que la calle Elordi y la diagonal Capraro se cortan formando un ángulo

A) Marcar el ángulo en tu plano

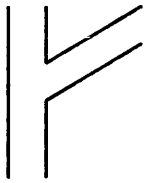
B) Ubicar los puntos que equidistan de las dos calles señaladas

C) ¿Qué particularidad tienen esos puntos?

Prof: ¿Qué quiere decir equidistan?, que están a la misma distancia

Los alumnos trabajan

Prof: ¿Hay alguna casa de uds en este plano?



Al: La mía, en Rolando casi O'Connor

Prof: No importa que pasemos arriba de las manzanas del plano.

▸ Visión retrospectiva

Prof: ¿Cómo se llama la recta que dibujamos?. Los puntos que equidistan de las dos calles ¿dónde van a estar respecto al ángulo?

Al: En la bisectriz

Prof: En la bisectriz, ¿qué es la bisectriz?

Al: Es la mitad del ángulo

Prof: Pero ¿qué es?, ¿es una recta, una semirrecta, un segmento?

Al: Una semirrecta

Prof: Una semirrecta que tiene origen en el vértice y ¿qué le hace al ángulo?

Al: Lo divide

Prof: Lo divide en dos parte congruentes. O sea que los puntos que equidistan de las dos calles señaladas están en la bisectriz. En C) contestamos

Están en la bisectriz del ángulo

Prof: ¿A qué llamamos bisectriz? ¿Cómo la podemos definir?. Vamos a poner lo que es bisectriz. "Bisectriz de un ángulo es la semirrecta interior que divide al ángulo en dos partes congruentes o iguales".

▸ Plegados para trazar la bisectriz de un ángulo e inferir propiedades de los puntos de la misma.

Prof: Bueno, ahora vamos a hacer algunas verificaciones (mientras reparte papel de calcar).

Dibujar un ángulo aob

Doblar de modo que los lados oa y ob coincidan

¿Qué determina el doblez?

Prof: ¿El doblez determina una semirrecta o un recta?

Al: Una semirrecta

Prof: ¿Dónde tiene el origen?

Al: Ah, no!, una recta

Prof: Una recta. Entonces ponen "el doblez determina una recta". Entonces esa recta contiene a la semirrecta que es bisectriz del ángulo. O sea la bisectriz de ese ángulo lo está dividiendo en dos partes congruentes.

Marcar en la bisectriz un punto p.

Plegando el papel hallar la distancia de p a cada uno de los lados.

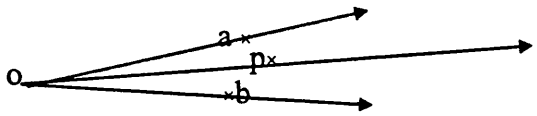
Prof: Chicos, primero tienen que pensar cómo lo van a hacer y después lo hacen. ¿Cómo tiene que ser esta distancia? ¿Cómo hago para hallar la distancia de p a cada lado del ángulo plegando? ¿Qué es la distancia de un punto a una recta?

Los alumnos trabajan

Prof: ¿Cuál es la distancia?. ¡Nadie sabe qué es y todos están doblando el papel! ¿Qué es la distancia de una recta a un punto? ¡Búsquenlo en la carpeta! Lo vimos en la clase anterior y hace un rato.

Al: "Se llama distancia de un punto a una recta al segmento de perpendicular entre el punto y esa recta"

Prof: O sea que tenemos un ángulo, tenemos la bisectriz del ángulo (mientras dibuja a mano alzada), marcamos un punto p en esa bisectriz, y hay que marcar la distancia entre p y los lados del ángulo



Prof: Mariana, volvé a leer lo que es la distancia

M: "Se llama distancia de un punto a una recta al segmento de perpendicular entre el punto y esa recta"

Prof: En este caso es la distancia entre el punto y un lado, y entre el punto y el otro lado. A ver cómo sale ahora.

Los alumnos trabajan

Prof: ¿Cómo tengo que doblar el papel para obtener eso?. Uds solos pueden comprobarlo, ver si ese doblez quedó perpendicular al lado del ángulo; cuando quedó perpendicular me doy cuenta si quedó bien o no.

Prof: para la clase que viene van a traer compás, regla, lápiz, goma; y van a estudiar, porque les voy a tomar lección. Miren cómo hicimos las construcciones anteriores, las definiciones y las condiciones de todas las figuras y elementos que estamos nombrando.

CLASE 7

▸ Se retoman los plegados para trazar la bisectriz de un ángulo y para inferir propiedades de los puntos de la misma.

Prof: Tenían una actividad. Había que dibujar un ángulo, marcar en el doblez ¿qué cosa del ángulo?

Als: La mediatriz

Prof: La mediatriz no! ¿Cómo se llama si es del ángulo?

Als: La bisectriz

Prof: La bisectriz del ángulo, marcar un punto sobre esa bisectriz y marcar la distancia de ese punto a los lados del ángulo.

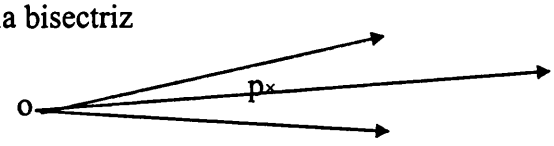
Prof: Lo que pasaba era que no se acordaban qué era la distancia. ¿Lo pudieron hacer? ¿Qué es la distancia desde ese punto a los lados del ángulo? ¿Cómo tiene que quedar?

Als: Perpendicular

Prof: Es el segmento de perpendicular que va desde el punto a los lados del ángulo. Y lo que ocurría era que como no sabían que era perpendicular doblaban el papel por cualquier parte.

Prof: Bien, voy a mirar ahora como les salió y mañana vamos a hacer una tarea escrita que me voy a llevar para corregir. No la tomé hoy porque no les había avisado. Si estudiaron la clase de hoy va a andar mejor; repasan para mañana y mañana me voy a llevar esa tarea escrita para saber como andan en todo esto. Bueno, tengo más papel por si alguien necesita. Voy a recorrer los bancos a ver que hicieron.

Prof: A ver si nos ponemos de acuerdo. Dibujan un ángulo cualquiera (mientras dibuja), pliegan el papel y van a poder marcar la bisectriz



Yo la voy a marcar (a mano alzada) para hacer un análisis. ¿Qué hay que hacer? Hay que marcar en esta bisectriz un punto p y hay que trazar plegando las distancias desde p a los lados del ángulo.

Prof: ¿Cómo tienen que ser esos segmentos?

Als: Iguales

Prof: Vamos a ver si son iguales, pero ¿cómo lo tengo que trazar?

Als: Perpendicular

Prof: Perpendicular, me tiene que quedar perpendicular a este lado el doblez, y de este lado lo mismo, perpendicular al doblez (mientras marca en el dibujo los segmentos). Cualquier cosa doblaron, a ver si lo hacen otra vez. ¿Cómo tengo que doblar el papel para que estos segmentos sean perpendiculares a los lados del ángulo?. A ver si piensan eso.

Los alumnos trabajan y la profesora pasa por los bancos.

Prof: Me dicen el lado superpuesto, pero ¿por dónde tiene que quedar superpuesto?, por el punto. O sea que tengo que hacer un doblez que tome al punto y el lado tiene que superponerse. Esto lo hicimos hace un tiempo cuando vimos la perpendicular ¿se acuerdan?. Miren la carpeta.

Al: Sí, acá

Prof: ¿Qué título tiene? ¿Qué encontrábamos ahí plegando? La perpendicular por un punto que pertenecía a la recta y por un punto que no pertenecía a la recta, y hacíamos un procedimiento similar al que hicimos ahora.

Prof: Bien, ¿cómo son esos segmentos que les quedaron determinados ahí?

Als: Perpendiculares

Prof: Son perpendiculares al lado, pero ¿cómo son los segmentos entre sí?

Als: Iguales

Prof: Iguales o congruentes. ¿Y qué significa eso con respecto a p? ¿Qué quiere decir? que p está ...

Al: A la misma distancia de los lados del ángulo

Prof: Entonces el punto p equidista de los lados del ángulo. Bueno, si hubiera sido en otro momento y no les hubiera costado tanto esto, les hubiera dicho que hagamos lo mismo con otro punto. Pero, si buscáramos otro punto y hacemos lo mismo ¿qué va a ocurrir?. Si tomo otro punto sobre la bisectriz y vuelvo a hacer el mismo procedimiento ¿los segmentos van a volver a quedar congruentes?

Als: Sí

Prof: Sí, entonces ese punto .... ¿Qué va a pasar también?

Al: Va a estar a la misma distancia

Prof: Va a estar a la misma distancia de ...

Al: Equidista de los segmentos

Prof: ¿Equidista de dónde? De los lados del ángulo. Entonces vamos a poder escribir

ahí que

"Todo punto de la bisectriz equidista de los lados del ángulo"

Prof: Si tomamos un punto que no pertenece a la bisectriz, ¿serían congruentes los segmentos que determinaríamos?

Als: No

Prof: O sea que los puntos que cumplen con esa condición ¿cuales son?, los puntos de la bisectriz. O sea que los puntos que equidistan de los lados del ángulo son los que están en la bisectriz del ángulo. Entonces ¿qué podríamos enunciar?, que todo punto que equidista de los lados del ángulo va a estar en la bisectriz. ¿Es lo mismo? (refiriéndose a la primera proposición). Empezamos de nuevo, es lo mismo pero al revés ¿se acuerdan?

"Todo punto que equidista de los lados de un ángulo pertenece a la bisectriz".

Prof: ¿Cómo podemos llamar a la bisectriz si sus puntos cumplen esta condición?

Als: Lugar geométrico

Prof: Entonces ¿qué es la bisectriz?, definámosla como lugar geométrico. Piensen, lo elaboramos y lo decimos. ¿Podemos decir que la bisectriz es un lugar geométrico?

Als: Sí

Prof: Sí, es un lugar geométrico ¿de qué puntos?

Als: De los puntos que están a la misma distancia de los lados del ángulo

Prof: Eso es, eso es lo que hay que escribir

"La bisectriz es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del ángulo"

Prof: Les volví a traer un cartel con los lugares geométricos que nos faltaban. Acá tenemos el de la circunferencia y la mediatriz, ¿qué nos faltaba? el de bisectriz y el de paralela a una recta (mientras los cuelga)

Lugares Geométricos
La paralela a una recta R es el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia dada de la recta
La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus lados

Prof: ¿Cuántos lugares geométricos tenemos hasta ahora?

Als: Cuatro

Prof: Cuatro, circunferencia, mediatriz, bisectriz y la paralela a una recta. Y les traje las propiedades ¿las pegamos de este lado?

Propiedades
. Los puntos que están a una distancia dada de una recta pertenecen a un paralela a la misma . Los puntos que están en una paralela a una recta están a una misma distancia de la recta . Todo punto de la bisectriz de un ángulo equidistan de los lados del mismo . Todos los puntos que equidistan de los lados de un ángulo pertenecen a la bisectriz de dicho ángulo

Construcción de la bisectriz de un ángulo con regla y compás

1.

Prof: Van a dibujar un ángulo cualquiera y le van a trazar la bisectriz con regla y compás.

2.

Prof: Uds ya lo saben hacer a eso ¿se acuerdan?

3.

▸8.43hs: pasa Iris. Dibuja un ángulo obtuso, apoya el compás en el vértice y hace dos marquitas en los lados, con otra abertura apoya el compás en cada marquita y hace el arco correspondiente.

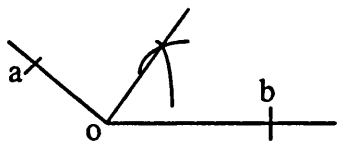
I: Puse el compás acá (en uno de los lados) y marqué

Prof: ¿esa es cualquier distancia?

I: Sí. Luego con la misma distancia lo puse acá (en el otro lado) y marqué

Otra Al: Yo hice distinto pero....es lo mismo

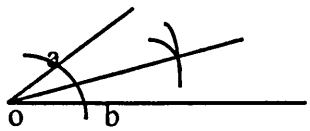
Prof: Ahora vamos a ver como lo hicieron los demás, a ver si queda lo mismo. Vamos a ponerle letras



Prof: A ver Tatiana cómo lo hiciste

4.

▸ Pasa Tatiana. Dibuja un ángulo agudo y hace un procedimiento análogo, sólo que en lugar de hacer las marquitas hace un arco de circunferencia que corta a los lados y usa la misma abertura para hacer los arcos en el segundo paso de la construcción.



T: Primero hice un arquito acá para marcar estos dos puntos

Prof: Exacto, para tener los puntos sobre los lados. Después apoyaste ¿dónde?

T: En los puntos, y con la misma abertura

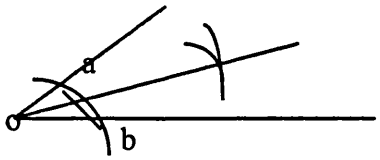
Prof: ¿Tiene que ver la abertura? ¿Podría haber sido más grande o más chica? ¿Si o no?. Sí. ¿Puedo abrir de cualquier forma el compás después?

Als: Sí

Prof: Lo que hizo Iris ¿es lo mismo que esto? Sí, solo que Tatiana hizo el arco en forma continua.

5.

Prof: Fíjense una cosa en los dibujos de uds, a los puntos que tienen sobre los lados del ángulo pónganle nombre (mientras remarca estos puntos en la construcción que hizo Tatiana) y unan esos puntos, los puntos que quedaron determinados sobre los lados del ángulo. ¿Qué queda? un segmento, en este caso el segmento mío se llama ab



Prof: Fíjense qué ocurre en el dibujo que tenemos

Als: Es perpendicular

Prof: ¿Quién es perpendicular?

Als: El segmento ab

Prof: ¿Qué es esto que marcamos del ángulo?

Als: La bisectriz

Prof: Del ángulo es la bisectriz ¿y del segmento?

Als: La perpendicular

Prof: Es perpendicular pero además ¿qué es?. Es la mediatriz (mientras la remarca).

6.

Prof: Fíjense, al final el problema se reduce a hallar ¿qué cosa del segmento? ¿Con qué coincide la mediatriz? Con la bisectriz. Nosotros hicimos un segmento con estos puntos que habíamos determinado sobre los lados del ángulo y después vimos que

esa bisectriz que teníamos para el ángulo es también mediatriz del segmento que teníamos. Es decir que la mediatriz contiene a la bisectriz del ángulo. ¿Por qué lo decimos así? Porque la mediatriz es una recta y la bisectriz ¿qué es?

Al: Lo divide en dos partes iguales

Prof: Pero yo pregunto si es un segmento, una semirrecta, una recta....

Als; Una semirrecta

Prof: Una semirrecta porque tiene el origen en el vértice del ángulo, entonces es una semirrecta y la mediatriz ¿qué es?

Al: Una recta

Prof: Entonces la bisectriz está contenida en la mediatriz. ¿Hicieron el dibujo?. Fíjense que todo se reduce al final a trazar la mediatriz de un segmento, la mediatriz de este segmento. O sea que cuando estoy trazando la bisectriz del ángulo estoy trazando la mediatriz del segmento.

▸Se introduce un nuevo tema "Triángulos".

Prof: Vamos a ver triángulos

TRIÁNGULOS

Vamos a dibujar un triángulo cualquiera (hace con regla un triángulo en posición horizontal que aparentemente es equilátero), le ponemos nombre. Vamos a recordar qué elementos tiene. ¿Los vértices qué son? Puntos, los lados son conjuntos de puntos que ¿cómo se llaman? Segmentos. ¿Qué mas tiene? Ángulos. ¿Va a tener aristas?

Als: No

Prof: No, los cuerpos tienen aristas. Vamos a nombrar los ángulos $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$. Ahora los ángulos exteriores ¿dónde los dibujo?, prolongo un lado, ésta es la recta que contiene al lado y lo dibujo entre esta prolongación y el lado, vamos a ponerle un número, ese sería un ángulo exterior. Marquemos los otros (marca el $\hat{2}$ y $\hat{3}$). ¿Puede ser para cualquier lado? ¿Podría haber marcado otro ángulo exterior? prolongo este lado ($\overline{ca}$) y marco acá ¿cómo son esos ángulos?

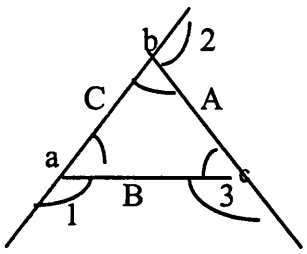
Als: Opuestos

Prof: Y si son opuestos ¿cómo son?

Als: Congruentes

Prof: Bien, vamos a incorporar también otra notación, al lado que enfrenta a un vértice

le vamos a poner la letra mayúscula de ese vértice. El lado va a llevar la letra del vértice opuesto y con mayúscula



Triángulo $\overset{\Delta}{abc}$
lados $\overline{ab}$ - $\overline{ca}$ - $\overline{bc}$
vértices a b c
ángulos interiores: $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$
ángulos exteriores: $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$

Al: El ángulo de afuera es la suma de los dos ángulos interiores que no sean adyacentes

Prof: Bien, cada ángulo exterior es igual a la suma de los interiores que no sean adyacentes a él (mientras señala en el dibujo). Si tomo $\hat{1}$ ¿a quién va a ser igual?

Als: $\hat{b}$ más $\hat{c}$

Prof: ¿si tomo $\hat{2}$?

Als: $\hat{c}$ más $\hat{a}$

Prof: ¿y $\hat{3}$?

Als: $\hat{a}$ más $\hat{b}$

Prof: Bien, ¿y los interiores?

Als: Suman 180°

Prof: Entonces sabemos también que la suma de los ángulos interiores es 180°. Eso se lo tienen que grabar. Y cada ángulo exterior es igual a la suma de los no adyacentes a él. Y acá pregunta Diego ¿la suma de los exteriores cuánto mide?.

Al: 360°

Prof: 360°. Eso también lo sabían, sabemos bastantes cosas de los triángulos

Al: Sabemos cómo clasificar

Prof: Entonces ya que sabemos cómo se clasifican ahora les voy a repartir un triángulo a cada uno, uds lo van a identificar, es decir van a decir cómo se llama ese triángulo, y entonces vamos a ver cómo los clasificaríamos. ¡No usen la regla!.

Prof: Clasificación según los ángulos, acutángulo, rectángulo y obtusángulo; ¿y según los lados? equilátero, isósceles y escaleno

Clasificación de Triángulos

	Acutángulo	Rectángulo	Obtusángulo
Equilátero			
Isósceles			
Escaleno			

Prof: ¿Hay triángulos en todos los cuadros?

Als: No

Prof: ¿Dónde no hay?

Al: Isósceles y obtusángulo

Prof: ¿Isósceles y obtusángulo no puedo?

Als: Sí

Prof: Vamos a dibujarlo (lo dibuja en el cuadro, usa regla). En equilátero rectángulo no voy a poder (hace una cruz) y ¿en equilátero obtusángulo?. Todos los equiláteros ¿cómo son?

Al: ¡Equiláteros!

Prof: Equiláteros por los lados pero por los ángulos ¿cómo son?. Ahi me lo dijeron!. Si al equilátero no lo puedo dibujar rectángulo, no lo puedo dibujar obtusángulo ¿cómo lo puedo dibujar?

Als: Acutángulo

Prof: ¿Cuánto miden los ángulos de un equilátero? ¡piensen!

Al: Menos de 90

Prof: Menos de 90 pero ¿cuánto?

Als: 30,...60

Prof: 60 ¿por qué 60?

Florencia: Porque los ángulos tienen que sumar 180°

Prof: Tienen que sumar 180 y además estás diciendo que ¿cómo son los ángulos?

F: Iguales

Prof: También habíamos dicho en un momento dado que el equilátero va a estar acá de acuerdo a cómo definiríamos al isósceles ¿se acuerdan?. En el libro que teníamos definíamos al isósceles como el que tiene por lo menos dos lados congruentes; entonces el equilátero ¿tiene por lo menos dos lados congruentes?

Als: Sí

Prof: Tiene tres, pero ¿dos?. Sí, entonces ¿podemos decir que el equilátero también es isósceles?

Als: Sí

Prof: Sí, también podemos decir que el equilátero es isósceles. Si al equilátero lo quiero sacar de acá con esa definición ¿dónde lo dibujarían? En isósceles ¿qué?

Als: Isósceles acutángulo

Prof: En isósceles acutángulo, en esta parte haríamos un triángulo especial que es el equilátero. Nos vamos a quedar con este cuadro. Entonces para los triángulos que tienen van a poner el nombre que llevan por los lados y el que lleva por los ángulos. ¿Quién tiene un equilátero?, ¿isósceles acutángulo?, ¿isósceles rectángulo?, ¿isósceles obtusángulo?, ¿escaleno rectángulo?, ¿escaleno obtusángulo? (A cada pregunta los alumnos levantan los triángulos correspondientes). Bueno, entreguen, pongan su nombre.

▸ Se dicta la tarea

A) "Dibujar en una hoja de tu carpeta un triángulo equilátero, en otra un triángulo isósceles obtusángulo y en otra un triángulo escaleno rectángulo". Si es hoja lisa mejor, quiero que lo hagan grandote, ahora les digo que van a hacer con eso.

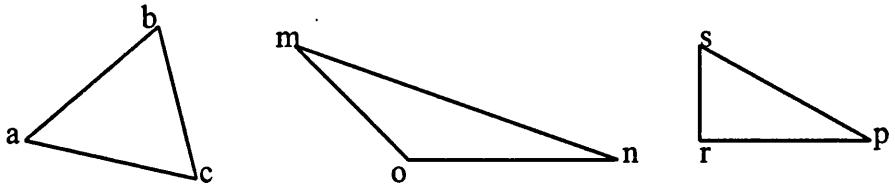
B) De la misma manera que trazaste la mediatriz de un segmento, traza las mediatrices de los lados en cada triángulo

C) Traza las bisectrices de los ángulos en cada triángulo

CLASE 8

▸ En los primeros 50 minutos se toma evaluación –ver AIII-28-. Luego se aborda la actividad que quedó de tarea "trazar mediatrices y bisectrices en diferentes triángulos".

La profesora dibuja tres triángulos en el pizarrón, un equilátero, un obtusángulo isósceles y un escaleno rectángulo (para dibujar el equilátero hace una circunferencia y marca los vértices de un hexágono, une vértice por medio, luego borra la circunferencia y los vértices que no usa; los demás triángulos los hace con regla). Pide que dibujen esos tres triángulos y que tracen las mediatrices y bisectrices; además reparte una hoja con nuevas actividades.



Los alumnos trabajan.

Comentarios a los grupos:

Prof: borrá los trazos del compás para limpiar el dibujo

Prof: ¿qué son las bisectrices? ¿Rectas? ¿Semirrectas?. Bien, semirrectas, entonces las vamos a prolongar a ver si se cortan o no en un punto.

▸ La profesora entabla un diálogo con los alumnos mientras Ayelén traza las mediatrices del equilátero con regla y compás.

Prof: ¿Cómo hacíamos para dibujar las mediatrices de un segmento?. ¿Cuántos puntos necesitas? Dos puntos. A ver ¿cómo decís que se hace?

Al: Busco un punto en el lado

Prof: Pero ¿cómo busco el punto medio en el lado? ¿Cómo lo hiciste?

Al: Con la regla

Prof: ¡Ah!, con la regla ¿se puede medir acá?

Al: No

Prof: ¿Es necesario encontrar el punto medio con la regla?

Al: No

Prof: No es necesario. Si buscan el punto medio en el lado estarían trazando la perpendicular por un punto ¿no?. Nosotros estamos trazando la mediatriz; no necesitamos el punto medio determinado previamente. La mediatriz ¿pasa por el punto medio del segmento?, si. O sea que no necesito determinar previamente al punto medio. Con una abertura mayor que la mitad ...

Prof: Bien Ayelén, trazale ahora las bisectrices. ¿Cómo les quedaron las bisectrices en

ese triángulo?

Als: Coinciden

Prof: Bien

(Ayelen traza las bisectrices)

Prof: Chicos ¿qué son las mediatrices? ¿Rectas? ¿Segmentos?

Al: Rectas

Prof: Entonces puedo prolongarlas cuanto quiera. ¿Y las bisectrices?

Als: Semirrectas

Prof: Semirrectas, o sea que desde el vértice las puedo prolongar todo lo que quiera, hasta que me dé la hoja. Los dibujos tienen que estar correctos, no pueden estar llenando de corrector, si les sale mal lo hacen de nuevo.

Prof: ¿Listo?. Cuando decimos que vamos a limpiar un poquito el dibujo es borrarle los trazos del compás para que se vea mejor. Dijimos que las mediatrices son rectas, o sea que las puedo prolongar cuanto quiera. ¿Se cortaron en un punto?

Als: Sí

Prof: Sí, pareciera que acá. Las mediatrices se tienen que cortar en un punto; si no se cortaron es que el dibujo de uds no tiene precisión. Y este punto recibe un nombre, el nombre es circuncentro

"El punto de intersección de las mediatrices se llama circuncentro"

Prof: ¿Qué es la mediatriz? ¿Cómo la definimos?

Al: Son los puntos que equidistan ...

Prof: Ahí lo tienen (señala el cartel), es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento. Pero también ¿qué podemos decir que es la mediatriz? ¿Cómo es la recta respecto a los lados?

Als: Perpendicular

Prof: Perpendicular, ¿por dónde pasa?

Als: Por el medio

Prof: O sea que también podemos decir que es la perpendicular al lado por el punto medio y si no, es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los lados. Las bisectrices también se cortan en un punto. En este caso, ¿coincidieron los puntos en el dibujo de uds?. Sí, el punto de intersección de las bisectrices tendría que estar coincidiendo

"El punto de intersección de las bisectrices se llama incentro"

Prof: ¿Qué es la bisectriz de un ángulo? ¿Ivan?

I: Es la que divide al ángulo en dos partes iguales

Prof: Es la semirrecta interior al ángulo que lo divide en dos partes iguales o congruentes, pero también ¿cómo la habíamos definido?

Al: Es el lugar geométrico

Prof: ¿De qué puntos? De los puntos que equidistan ¿de dónde?

Als: De los lados del ángulo

Prof: De los lados del ángulo. El punto de intersección de las mediatrices se llama circuncentro y el punto de intersección de las bisectrices se llama incentro. Bien, tienen que completar esto en los otros triángulos y determinar los puntos de intersección. Ahora saben ya que las mediatrices se cortan en un punto y que las bisectries también se cortan en un punto. ¿Dibujaron ya el segundo triángulo? ¿ocurre como en el equilátero?

Prof: Para el viernes hacen los dibujos y estudian la parte de triángulos.

CLASE 9

*IE: Instancia de revisión de lo trabajado en la clase anterior.

La profesora dibuja un equilátero en posición no standard, para lo cual hace una circunferencia, ubica los vértices de un hexágono regular y une vértice por medio, luego borra la circunferencia.

Prof: Vamos a trabajar sobre los triángulos que teníamos. La última clase ¿qué habíamos definido?. Tienen trazadas en el triángulo las mediatrices de los lados ¿y qué habíamos dicho?, el punto de intersección de las mediatrices ¿cómo se llama?

Als: Circuncentro

Prof: Circuncentro ¿qué otra cosa tienen trazadas en los triángulos?

Als: Las bisectrices

Prof: Y el punto de intersección de las bisectrices ¿cómo se llama?

Als: Incentro

Prof: Incentro. Bien

Mediatrices—— Circuncentro

Bisectrices —— Incentro

¿Qué pasaba en el triángulo equilátero con las bisectrices y las mediatrices?

Als: Coincidían

Prof: Coincidían todas. Los trazos que habíamos hecho coincidían todos. ¿Los puntos de intersección de las bisectrices y las mediatrices también coincidían?. Sí, coincidían todos en el triángulo equilátero.

*IE: comentario acerca de los conceptos que se van a enseñar

Prof: Ahora vamos a trazar dos segmentos especiales, por decirlo de alguna manera, uno se llama altura y el otro se llama mediana. Uds conocen la altura de un triángulo, ¿qué es la altura?, es un segmento ¿desde dónde va?

Al: Desde el vértice al punto medio del lado

Prof: No, al punto medio no, eso sería la mediana. ¿Cómo trazaríamos la altura?

Otra Al.: Desde el vértice al punto medio del lado

Prof: Eso justo es la mediana. Entonces, si quieren, podemos trazar primero la mediana.

Construcción de las medianas de un triángulo:

1.

Prof: Entonces, la mediana es el segmento que va desde el vértice ¿a dónde?

Als: Al punto medio

tienen y lo vamos a ir haciendo también en el pizarrón.

► Al lado del triángulo $\overset{\Delta}{abc}$ equilátero, la profesora dibuja con regla un triángulo $\overset{\Delta}{mnp}$ isósceles obtusángulo y un $\overset{\Delta}{rsp}$ escaleno rectángulo, ambos en posición standard. Los alumnos trazan las medianas de los triángulos en sus carpetas.

Al: Ya lo tengo dibujado

Prof: ¿En dónde? en el equilátero, en los demás habría que hacerlo

► La profesora recorre los bancos. Si bien admite las construcciones del triángulo equilátero basadas en la medida, rescata su construcción con regla y compás:

Prof: ¿Cómo haces Pamela para dibujar el equilátero?

P: Con el compás, tomamos la medida de la base, pinchas acá (vértice) y haces así y pinchas acá y haces así

Prof: ¡Bárbaro! ¿Todos hacen así con el compás? Miren como dice Pamela. Hago un segmento cualquiera, abro el compás con esa medida, apoyo en un vértice y marco, apoyo en el otro y marco, y me queda equilátero. ¿Todos hacen así?

Ayelén: No

Prof: ¿Cómo hacés Ayelén? (Mientras se acerca al banco de Ayelén). Ah! con los cuadraditos lo hacés.

Prof: Mirá (dirgiéndose a otro alumno), Pamela dice, haces un segmento cualquiera, abrís el compás con la abertura del segmento, apoyas acá, marcas el arco, apoyas en el otro vértice y marcas el arco. Pamela dice que queda equilátero así. ¿Es cierto?

Als: Sí

Prof: ¿Vos cómo haces Romina?

R: Con la regla

2.

Prof: Escuchen ¿qué necesitamos de los lados del triángulo?

Ceci: El medio

Prof: El punto medio. ¿Ya lo tenemos a ese punto medio?

C: Sí

Prof: ¿Por qué lo tenemos?

C: Por la mediatriz

Prof: Por la mediatriz. Si lo voy a hacer en el mismo triángulo, como tengo la mediatriz, ya tengo el punto medio. Si lo voy a hacer en otro triángulo tengo que determinar el

Prof: Por la mediatriz. Si lo voy a hacer en el mismo triángulo, como tengo la mediatriz, ya tengo el punto medio. Si lo voy a hacer en otro triángulo tengo que determinar el punto medio

3.

Prof: Y ¿cómo lo determinarían? ¿Qué trazarían?

C: La mediatriz

Prof: La mediatriz. Si trazo la mediatriz, ésta me va a determinar el punto medio

▸ Pasan alumnos a hacer las construcciones

4.

Prof: Christian vas a dibujar las medianas (del equilátero) en el pizarrón y vos Tatiana las del segundo triángulo (isósceles obtusángulo).

Christian traza dos arcos y une dicho punto y el vértice b

Prof: ¿Hasta dónde llega?

C: Hasta acá

Prof: Entonces hacele un punto ahí gordo (punto medio). ¿Es un segmento o es una semirrecta?

C: Un segmento

Prof: Bueno, marcá los otros. Florencia hacé las del otro triángulo (escaleno rectángulo). Márquenlas con color también en el pizarrón.

Prof: No hay que trazar la mediana con el compás. ¿Con el compás qué se halla? los puntos medios de los lados

5.

▸En la construcción de Florencia las medianas no se interceptan en un punto

Prof: Florencia, a lo mejor está corrido. Sabes que tienen que cortarse en un punto ¿no es cierto?. A lo mejor una de las medidas está con error y eso hace que tengas un error ahí, y el punto no te queda. Habrá algún trazo que tiene problemas ¿no será sp (hipotenusa)? ¿Te fijaste que pasa con el punto medio de sp?

Florencia intenta encontrar su error

Prof: A ver Florencia, para trazar el punto medio del lado ¿qué es lo que estás buscando hacer con el compás? ¿Qué queres trazar?

Tatiana: pero.... ella no le pone el punto del otro lado

Prof: Exactamente ¿cuántos puntos necesitas para la mediatriz?

Prof: ¿Te das cuenta Flor cuál era el error que hacías?

F: Sí (mientras arregla su construcción)

6.

Prof: ¿Cuántos puntos necesito para la mediatriz?

Als: Dos

Prof: Dos, porque es una recta, no puedo hacerla con uno. Bueno, ahí están las medianas de todos los triángulos.

7.

▸ Definición de mediana y baricentro

Prof: Vamos a escribir en la carpeta qué es la mediana. (mientras dicta)

"La mediana de un lado del triángulo es el segmento que tiene un extremo en el punto medio del lado y el otro extremo en el vértice opuesto. El punto de intersección de las medianas se llama baricentro".

Medianas—— Baricentro

▸ Se Define y ejemplifica el concepto de altura, se trazan las alturas utilizando la escuadra, se comentan los resultados y por último se dicta definición de altura y de ortocentro.

Construcción de las alturas de un triángulo

Prof: Ahora vamos a trazar las alturas. La altura de un triángulo es un segmento que tiene un extremo en un vértice del triángulo y el otro extremo ¿dónde lo tiene?. Cuando en la primaria trabajaban con el área del triángulo ¿cuál es la fórmula para calcular el área?

Als: Base por altura sobre dos

Prof: Bien. O sea que trazaban la altura. En este triángulo (equilátero) la altura va a coincidir acá, porque además de pasar por el punto medio ¿cómo es este segmento (mediana dibujada) respecto al lado?

Als: Perpendicular

Prof: Entonces, la altura es el segmento de perpendicular al lado que tiene sus extremos en un vértice del triángulo y en el lado opuesto

Tatiana: ¿Qué es el lado del triángulo?

Prof: ¿Qué es el lado de un triángulo? ¿Un segmento? ¿Una semirrecta? ¿Una recta?

Als: Un segmento

Prof: Un segmento. Las medianas que trazamos ¿qué son?

Tatiana: ¿Qué es el lado del triángulo?

Prof: ¿Qué es el lado de un triángulo? ¿Un segmento? ¿Una semirrecta? ¿Una recta?

Als: Un segmento

Prof: Un segmento. Las medianas que trazamos ¿qué son?

Als: Segmentos

Prof: Las alturas que vamos a trazar ¿qué son?

Als: Segmentos

Prof: Entonces vamos a trazar la altura, perpendicular al lado y pasando por el vértice opuesto. Las alturas son perpendiculares a los lados y pasan por el vértice opuesto. A ver si les sale.

Prof: ¿En el equilátero qué pasó con las alturas y medianas?. En el equilátero, que es un triángulo particular, todas las rectas coinciden; pero.... Esto no quiere decir que en los otros triángulos pase lo mismo. Vamos a trazar las alturas en los otros triángulos. Supónganse que quiero trazar la altura de np (lado del triángulo isósceles obtusángulo) ¿cómo hago?. Tendría que buscar la perpendicular a este lado que pase por este punto (punto de intersección de los lados congruentes). ¿Es ésta? (mientras apoya el cateto de la escuadra en el lado y compueba que coincide con la mediana correspondiente). Sí, y entonces les quedaría ahí superpuesta, le vamos a poner hache (agrega notación en el dibujo). ¿Cómo trazo la altura del lado mp?. Tiene que estar perpendicular a este lado y pasar por n.

Al: Hay que prolongar

Prof: Hay que prolongar el lado

T: Por eso yo preguntaba si era una recta, porque si era una recta se podría...

Prof: No, el lado es un segmento que está contenido en la recta; un segmento es un trozo de recta. Entonces prolongo el lado (lo hace con línea punteada) y marco la perpendicular (la traza con escuadra y la llama también h). ¿Cómo trazo la altura de mn? ¿Qué tengo que hacer?.

Al: Prolongar

Prof: También tengo que prolongar

Al: Es oblicuo

Prof: ¿Cómo que es oblicuo? El lado es oblicuo, pero ahora tengo que buscar cual es la

Prof: Sí, se van a cortar, a mí no me alcanzó pero vamos a ver si a uds les alcanza; sino no importa, basta que sepan como se construyen.

Prof: ¿Y en el triángulo rectángulo escaleno (Δrsp)?. Tiene que ser perpendicular a este lado (rs) y pasar por acá (p)

Als: El lado

Prof: Coincide con el lado. ¿Dónde estaría la altura del lado sp (hipotenusa)? Está trazada?

Als: No

Prof: Tendría que ser perpendicular al lado y pasar por el vértice opuesto (la traza con escuadra). ¿Y dónde estaría la altura del lado rp?

Al: La de abajo

Prof: Este lado. ¿Por qué pasa esto en este triángulo?

Al: Porque es recto

Prof: ¿Cómo son los lados rs y rp?

Als: Forman un ángulo recto

Prof: Y si forman un ángulo recto ¿cómo están puestos?. Son perpendiculares. Ahí trazamos las alturas (nombra con h a cada altura)

Prof: Escriban. "Se llama altura correspondiente al lado de un triángulo al segmento de perpendicular al lado que tiene un extremo en el vértice opuesto y el otro extremo en el lado o su prolongación. El punto de intersección de las alturas se llama ortocentro".

▸ Cuadro para integrar conceptos

Prof: Vamos a hacer abajo un cuadro sintetizando todo esto.

Cuadro General de lo trabajado

	Rectas notables		Puntos notables

Prof: No escriban nada, primero lo vamos a hacer juntos en el pizarrón y después lo copian.

La profesora va interrogando y completando el cuadro

Prof: ¿Qué es lo primero que trazamos?

Als: Mediatrices

Prof: Las mediatrices, ¿son rectas? ¿segmentos?

Prof: No escriban nada, primero lo vamos a hacer juntos en el pizarrón y después lo copian.

La profesora va interrogando y completando el cuadro

Prof: ¿Qué es lo primero que trazamos?

Als: Mediatrices

Prof: Las mediatrices, ¿son rectas? ¿segmentos?

Als: Rectas

Prof: Son rectas ¿cómo se llama el punto donde se cortan?

Als: Circuncentro

Prof: Circuncentro, fíjense en los triángulos que hicimos si el punto está siempre adentro o puede estar adentro o afuera

Als: Adentro y afuera

Prof: Puede ser interior o exterior al triángulo. ¿Qué otra cosa trazamos?

Als: Bisectrices

Prof: ¿Qué son?

Als: Semirrectas

Prof: ¿Cómo se llama el punto de intersección?

Als: Incentro

Prof: ¿Está adentro o afuera?

Als: Adentro

Prof: ¿Puede estar afuera alguna vez?. Piensen ¿las bisectrices pueden estar afuera?

Als: No

Prof: Pero no sólo porque son semirrectas, dividen al ángulo en dos partes iguales ¿van a poder estar afuera alguna vez?

Als: No

Prof: Entonces, el punto es interior. ¿Qué otra cosa trazamos?

Als: Medianas

Prof: ¿Cómo se llama el punto de intersección?. Baricentro. ¿Es una recta? ¿un segmento?

Als: Segmento

Prof: ¿Está adentro o puede estar afuera?

ortocentro. Bueno ahora los copian, así les queda el resumen

	Rectas notables		Puntos notables
Rectas	Mediatrices	Interior o exterior	Circuncentro
Semirrectas	Bisectrices	Interior	Incentro
Segmentos	Medianas	Interior	Baricentro
Segmentos	Alturas	Interior o exterior	Ortocentro

► Se reparte hoja de actividades (AIII-29) y se dan algunas explicaciones

Prof: Donde dice analiza, se refiere a los triángulos que tienen dibujados hasta ahora, que son el triángulo equilátero, el isósceles obtusángulo y el escaleno rectángulo. De esos tres triángulos que tienen dibujados se les pide que analicen esto: ¿En algún caso coincide la mediana con la altura? ¿En algún caso coincide la altura con un lado? ¿En qué caso coinciden las tres medianas con las tres alturas? ¿Qué particularidad tiene el triángulo equilátero? ¿Dónde está el circuncentro y el ortocentro en el isósceles obtusángulo? ¿Dónde está el circuncentro y el ortocentro en el triángulo escaleno rectángulo?. Toda esta primera parte está referida a los triángulos que tienen dibujados. Ahora viene el punto 2, hay que hacer tres triángulos diferentes, un escaleno obtusángulo, un isósceles acutángulo y un isósceles rectángulo. Y de nuevo hay que determinar en ellos alturas y ortocentro, medianas y baricentro, mediatrices y circuncentro, bisectrices e incentro. Después tienen dos problemas aplicando esto que estuvimos viendo. Todo esto lo van a traer terminado para el martes.

CLASE 10

▸Se confecciona el siguiente cuadro

Rectas	Mediatrices	Circuncentro	Este punto equidista de los V
Semirrectas	Bisectrices	Incentro	Este punto equidista de los L
Segmentos	Medianas	Baricentro	
Segmentos	Alturas	Ortocentro	

Prof: ¿Tuvieron en cuenta estas cosas al dibujar?. Cuando termine la hora me voy a llevar la tarea que tenían para hoy; voy a mirar qué es lo que pudieron hacer solos y mañana si hace falta vemos lo que no entendieron. Al final de la clase me la entregan.

Construcción de las alturas de un triángulo isósceles rectángulo

Prof: Bueno vamos a trazarle las alturas a un triángulo ¿qué triángulo podemos dibujar en el pizarrón?

Al: Isósceles rectángulo

Prof: Un isósceles rectángulo. (lo dibuja usando escuadra). Le vamos a poner letras a los vértices.

1.

Prof: ¿Qué es la altura?, es un segmento

Al: Es un segmento perpendicular al lado que pasa por el vértice opuesto

2.

▸Pasa Tatiana, marca las alturas respecto a los catetos y luego halla la altura respecto a la hipotenusa usando escuadra

Prof: Bueno Tatiana, vamos a dibujar las alturas trazando esos segmentos perpendiculares.

(Tatiana nombra a cada cateto con la letra h)

Prof: Ahora tenés que trazar la recta que va a contener a la altura con el compás (altura respecto a la hipotenusa)

T: No, no puedo porque no lo hice así, no sé cómo hice. Hice así con la escuadra para que sea perpendicular (desliza el cateto menor de la escuadra sobre la hipotenusa hasta que el otro cateto pase por el vértice a)

Prof: ¿Cómo tendría que hacer para trazar la recta que va a contener a la altura?

3.

▸ Florencia propone hallar el punto medio de la hipotenusa

F: Buscar el punto medio

Prof: ¿Va a pasar por el punto medio?

F: Sí

Prof: Escuchen, en este caso va a pasar por el punto medio, pero ... ¿es condición que pase por el punto medio?, cuando definimos la altura ... ¿decimos que pasa por el punto medio? ¿Qué decimos? Decimos que es perpendicular y ¿pasa por dónde?

Als: Por el vértice opuesto

Prof: O sea que hay casos especiales, como éste, pero en general no tiene por qué pasar por el punto medio

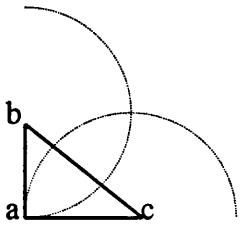
4.

Prof: Bien, ese es un procedimiento. ¿Qué otro procedimiento podríamos utilizar?.

Al: Marcarla igual que la bisectriz

Prof: Claro, en este caso se podría hacer eso. ¿Con el compás cómo harían?. Tiene que ser perpendicular al lado bc y pasar por a.

▸ Tatiana ejecuta su nuevo plan; hace un arco de circunferencia de centro c y radio ac y un arco de circunferencia de centro b y radio congruente, y une a con la intersección de los arcos (bisectriz del ángulo recto)



▸ La profesora propone otro procedimiento, surge la idea de tomar a la altura como una distancia

5.

Prof: Bien ¿qué otra cosa podríamos haber hecho?. A ver si les doy una orientación...

6.

Prof: El segmento que es la altura está contenido en la recta perpendicular, y la recta perpendicular tiene que pasar por acá (a). ¿En qué otra forma puedo trazar la recta que estoy buscando?. La recta perpendicular que pasa por a, en este caso también pasa por el punto medio, pero eso en el caso especial de este triángulo, no en todos.

7.

Prof: ¿Qué otra cosa saben trazar uds?, si piensan un poquito para atrás, ¿qué puede

ayudar a hacer esto? ¿qué sabemos trazar también?

Als: Mediatrices

Prof: Sabemos mediatrices

Als: Bisectrices

Prof: Sabemos bisectrices. Las perpendiculares... ¿por dónde las trazábamos?. Trazábamos perpendiculares pero ¿por dónde?. Tenía una recta y dibujaba la perpendicular pero ¿qué datos tenía?

Al: Un punto

Prof: Por un punto ¿dónde estaba el punto?

Al: En la recta y ...

Prof: Podía estar en la recta y podía estar afuera ¿éste qué caso sería?

Al: Afuera

8.

Prof: La perpendicular a bc por un punto que está afuera

Ceci: ¡La distancia!

Prof: ¡Ahí está!, y ¿qué más es eso?

C: Podría ser la distancia

Prof: Podría ser no, es la distancia ¿desde quien?

C: Desde el punto hasta la recta

Prof: Desde el punto a hasta bc. O sea que también la altura es la distancia entre el vértice y el lado opuesto. O sea que podemos definir la altura como la distancia entre un punto y la recta que contiene al lado opuesto. Vamos a anotar eso.

9.

▸ Se trazan las alturas en otro triángulo

Prof: Van a dibujar un triángulo cualquiera que no sea éste y le van a trazar las alturas usando el compás y la regla, y vamos a anotar lo que dijimos recién

Als: ¿Puede ser escaleno obtusángulo?

Prof: Puede ser escaleno obtusángulo

Alturas de un triángulo

- dibuja un triángulo cualquiera

- traza las alturas con regla y compás

Prof: No lo hagan chiquito que después no se puede dibujar nada

La profesora pasa por los bancos y les hace ver cual es la recta y cual el punto exterior por el que tiene

que pasar la perpendicular, y les sugiere que miren la carpeta.

Comentarios en uno de los grupos:

Prof: Tatiana, a vos el método te funcionó porque el triángulo era rectángulo isósceles; tenés que pensar en esto, en realidad lo que tenés que trazar es la perpendicular pasando por el vértice opuesto

Prof: ¡Chicos escuchen!. En la carpeta en algún lugar, nosotros hemos trazado perpendiculares por un punto exterior; además hicieron de tarea... ¿se acuerdan que les daba la recta y un punto? (mientras dibuja una recta y un punto exterior) ¿y no sería lo mismo? Nada más que ahora tengo un triángulo. Pero ¿el método no sería el mismo? Tengo la recta y el punto y tengo que trazar la perpendicular. A ver si les sale.

8.41hs: los alumnos trabajan

Comentarios en uno de los grupos:

Prof: Pía, dijimos que la altura es la distancia, o el segmento de perpendicular, por ejemplo de este lado, que va a pasar por acá (señala en el dibujo de Pía). Entonces el problema se reduce a trazar la perpendicular a una recta pasando por un punto dado, y eso lo hicimos.

Prof: Habíamos dicho entonces que la altura es la distancia entre el vértice ...

Als: Y el lado

Prof: A veces es al lado y a veces es a la recta que contiene al lado. Entonces vamos a decir, a la recta que contiene al lado. Vamos a escribir eso.

"La altura de un triángulo es la distancia desde el vértice a la recta que contiene al lado opuesto"

Prof: Para mañana van a traer un triángulo cualquiera en una hoja lisa y trazadas las alturas con regla y compás, y en el dibujo se tienen que notar las marcas del compás. Cada uno va v a hacer el triángulo que quiera pero vamos a poner algunas condiciones porque sino van a dibujar el que más fácil les resulte. Tiene que ser un triángulo escaleno y obtusángulo.

► Se reparte hoja de actividades (ver AIII-39) y los alumnos trabajan en ella

Prof: Ahora les voy a entregar una hoja de problemas para resolver, y los resuelven en esta misma hoja

"Construir un triángulo dados tres lados"

► Se lee el problema y se dan algunas orientaciones para la comprensión

1.

Prof: A ver Diego, lee el problema

Diego lo lee

Prof: Ahí están los tres lados y tienen que construir el triángulo. ¿Tienen idea de cómo hacerlo?

Als: Sí,....no...

2.

Prof: Con la regla y el compás. Chicos estamos trabajando con regla y compás, y estamos haciendo todas las construcciones con esos instrumentos. Entonces ahora no van a empezar a medir.

Ceci: Es fácil, tenés que hacer así (gestos), la medida y lo pasas a la carpeta

Prof: Bueno en realidad lo tienen que resolver en esa hoja. La regla la van a usar sólo para hacer trazos, pero no para tomar medidas. O sea pueden usar la regla para trazar pero no para medir 4cm o 5cm...

3.

Prof: ¿Había algunas condiciones en los segmentos para que se pueda...?

Ceci: Sí, que no haya mucha diferencia

Prof: ¿Qué quiere decir que no haya mucha diferencia?

C: Que no puede ser uno de 10cm, otro de 2cm y el otro así grandote

Prof: Pero ¿cuál es el límite? Es muy ambiguo decir mucha diferencia o poquita diferencia, ¿habrá un límite o algo más matemático para poder determinar eso?

C: ¿Está en el libro?

Prof: En el libro está, si uds lo buscan y entienden lo que dice el libro...

Prof: Bueno, esta hoja de actividades no la hagan de tarea porque la vamos a hacer acá. Ahora me entregan la tarea que tenían para hoy.

CLASE 11

.► La profesora entrega las tareas que se llevó la clase anterior (Trazar medianas, mediatrices, bisectrices y alturas en diferentes triángulos; responder algunas preguntas de estas construcciones y problemas de aplicación) y hace la devolución.

Prof: Vamos a conversar sobre algunos puntos que tengan dudas para aclararlos; los vamos a corregir, vamos a aclarar las dudas y el viernes me los van a entregar como corresponde. Si se pide en papel liso, lo deben hacer en papel liso. Las alturas de un triángulo se tienen que cortar en un punto y ese punto tiene que estar marcado. No pueden marcar solamente rayitas sobre los lados. ¿Cuántos puntos notables tenemos? Cuatro. Esos cuatro puntos tienen que estar en cada uno de los triángulos que dibujan, ya sea adentro o afuera del triángulo. Vamos a revisar. "¿En algún caso coincide la mediana con la altura?". En algún caso, coincide una mediana con una altura, no se pide todas; uds. miren si en alguno de los triángulos coincide una mediana con una altura. ¿En qué casos coincide?

Als: El equilátero

Prof: El equilátero seguro, ¿en quién más?

Als: En el isósceles obtusángulo

Prof: Bien, después dice "¿En algún caso coincide la altura con un lado?"

Als: Sí

Prof: ¿En cuál?

Als: En el escaleno rectángulo

Prof: Bien, "¿En qué caso coinciden las tres medianas con las tres alturas?"

Als: En el equilátero

Prof: "¿Qué particularidad tiene el triángulo equilátero?". Capaz que está mal enunciado, porque uds contestan: tiene tres lados iguales y tres ángulos iguales; que es cierto que los tiene, pero la pregunta se refería a las rectas notables y a los puntos notables.

Christian: Que coincide con la altura la mediatriz, la mediana y la bisectriz

Prof: Claro, que coinciden todas las rectas notables. Eso quería que pongan pero tal vez la pregunta está confusa. "¿Dónde está el circuncentro y el ortocentro en el isósceles obtusángulo?"

Al: Afuera del triángulo

Prof: En el exterior. "¿Dónde está el circuncentro y el ortocentro en el triángulo escaleno rectángulo?"

Al: En el borde

Prof: ¿Qué sería el borde?. Uno en el vértice, a ver si podemos precisar más ¿en qué vértice? ¿Qué se unen en ese vértice?. Sí, dos lados pero ¿qué lados son? ¿Cómo se llaman en el triángulo rectángulo?. Supónganse que fueran estos dos (muestra una escuadra y los señala)

Als: Forman el ángulo recto

Prof: ¿Cómo se llaman los lados que forman el ángulo recto?. A ver, esto se llama hipotenusa que es el lado que enfrenta al ángulo recto, y ¿cómo se llaman estos?

Al: Catetos

Prof: Catetos. O sea que en el triángulo rectángulo tienen nombre los lados, estos son los catetos y esta la hipotenusa. Entonces, un punto (notable) ¿dónde lo tienen?

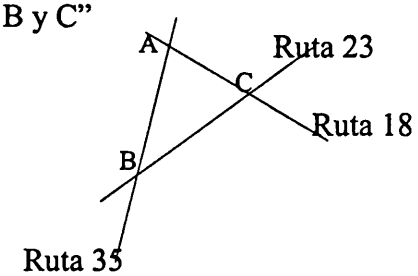
Diego: En el vértice

Prof: En el vértice y ¿el otro?

D: En la hipotenusa

Prof: Sobre la hipotenusa. ¿Qué dudas tienen?. Uds lo que hacen en general, marcan pero no lo prolongan, entonces no sé dónde se cortan. Lo que podríamos hacer para solucionar esto es hacer triángulos diferentes para cada cosa que tracen, para que no se les mezclen. Nadie les pide que hagan un solo triángulo, digo que el que tiene problemas haga un triángulo y trace las altura, otro triángulo y haga la mediatrices... o hagan dos y dos. Bueno, el punto 3 ¿qué decía?. Florencia léelo

F: "Encontrar gráficamente el lugar donde debe colocarse una antena para que resulte equidistante de las rutas provinciales 23, 35 y 18 que unen los pueblos representados en el esquema por A, B y C"



Prof: Tiene que resultar equidistantes de las rutas ¿qué se ha formado ahí en el dibujo?

Al: Un triángulo

Prof: Un triángulo, y las rutas ¿qué son de ese triángulo?

Als: Lados

Prof: Los lados. Entonces ¿qué tengo que trazar para que la antena quede puesta en un punto equidistante de los lados del triángulo?

Al: Las medianas

Prof: Las bisectrices. ¿Cómo se llama el punto de intersección de las bisectrices?.

Als: Incentro

Prof: Ese punto, incentro, equidista de los lados del triángulo. Entonces si dibujo las bisectrices y veo donde se cortan, el punto va a equidistar de los lados. Y después ¿qué les pide?

Als: "Que equidiste de los pueblos"

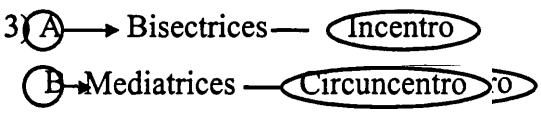
Prof: Y para que equidiste de los pueblos ¿qué tengo que dibujar?

Als: Las mediatrices

Prof: Las mediatrices. ¿Cómo se llama el punto de intersección?

Als: Circuncentro

Prof: Entonces para contestar el punto A, tenemos que dibujar bisectrices, entonces va a quedar el incentro, y este punto va a equidistar de los lados. Y para contestar el punto B, las mediatrices y va a quedar el circuncentro



Y el último punto, el 4 dice "Construye diseños de azulejados de cocina, utilizando en cada caso una de las baldosas siguientes, combinadas con baldosas lisas". O sea que no podían mezclar todas. Por ejemplo háganse un rectángulo ¿cuántos dibujos de esas baldosas van a tener? cuatro como mínimo. Si tienen hoja cuadriculada pueden usarla para hacer estos diseños. ¿Qué tipo de triángulo es el primero que tienen?

Als: Acutángulo, equilátero

Prof: A ver piensen

Al: Isósceles

Prof: Es isósceles, y es rectángulo porque tiene un ángulo recto

Al: ¡Ah! el segundo

Prof: No, el primero

Otro Al: Si lo miras así es rectángulo

Prof: ¿Sobre qué están trazados los lados de ese triángulo?

Florencia: Sobre un lado

Prof: Sobre un lado del cuadrado y ¿los otros dos?

F: En las diagonales

Prof: Y las diagonales del cuadrado ¿cómo se cortan? cómo son? son iguales, y además hay un ángulo recto ahí. Se cortan formando un ángulo de 90° o sea son perpendiculares. Entonces el primero es isósceles rectángulo. ¿Y el que sigue?

Als: Isósceles rectángulo

Prof: ¿Y el que sigue?

Als: Isósceles acutángulo

Prof: ¿Y el último?

Als: Isósceles rectángulo

Prof: Bien. Ya acordamos que el viernes vuelven a entregar todo corregido y en condiciones óptimas.

.► Se retoma problema planteado la clase anterior

Prof: Vamos a ver las actividades que empezamos a hacer la otra clase. El 1A). ¿Pudieron construirlo?

Als: Sí

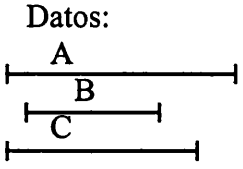
"Construir un triángulo dados tres lados"

4

Prof: ¿Qué es lo que hicieron?. Vamos a dibujar tres segmentos cualquiera en el pizarrón y vamos a explicar como lo hicieron.

La profesora dibuja tres segmentos horizontales. Los alumnos le indican: A es el más largo, el B más corto y el C un poquito más corto que A y más largo que B

Prof: Esto que tenemos acá ¿qué sería?



Als: Los lados

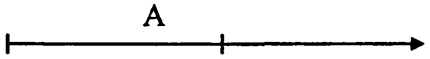
Prof: Los lados pero además son los datos. Nos dan estos datos y con esto tenemos que hacer el triángulo.

5.

Prof: ¿Cómo hicieron?. A ver Cecilia

C: Agarré el compás, puse así y medí A....

Prof: Bueno, pero para poder traspasarlo sin problemas, me parece que es conveniente que tracemos una semirrecta, entonces ya tenemos como pasarlo con más comodidad. Sobre todo acá en el pizarrón, miren, hago así (abertura de compás según el segmento A) y después ¿cómo hago? Uds. porque tienen ahí el papel cuadriculado pero yo.... ¿cómo hago?. Lo conveniente es hacer una semirrecta (dibuja con regla una semirrecta horizontal) entonces así tengo de donde empezar y adonde llevar las cosas. Abro el compás y tomo A y lo paso acá.



6.

Prof: ¿Qué es lo que tengo ahora?

Als: La base

Prof: Pero ¿qué es lo que queda determinado del triángulo?

Als: Un lado

Prof: Sí, esto es un lado, pero estos qué serían del triángulo?

Als: Dos puntos

Prof: Dos puntos, pero son los vértices. ¿Qué me faltaría determinar acá?

Als: Dos lados

Prof: Tengo dos vértices ¿cuántos vértices tiene?

Als: Tres

Prof: O sea que tengo que ubicar acá ...

Als: El otro vértice

7.

Prof: ¿Dónde va a estar? ¿en qué lugar va a estar el tercer vértice?. ¿Ahora qué hicieron? ¿tomo B?

Ceci: No, C

Prof: ¿Por qué?

C: Porque es más grande, lo pones ahí en ese vértice

La profesora sigue las indicaciones de Ceci y hace un arco de circunferencia de radio C y centro en un extremo de A.

Prof: ¿Puedo hacer algo más?

Als: Llevo B

Prof: ¿Y qué determino? (hace arco de circunferencia de radio B y centro en el extremo restante)

Als: Un punto

Prof: Un punto. La intersección me da el vértice (lo remarca).

8.

Prof: Ahora uno acá y acá. Este sería C y este B (pone el nombre a los lados). Vamos a poner nombre a los vértices enfrentando a los lados. Este sería a, este b, este c. Bueno ¿entendieron?.

9.

▶ Se comenta el inciso B), el cual apunta a analizar la situación cuando se varía la medida de los datos

Prof: ¿Y el punto B)?

Als: No se puede

Prof: ¿Por qué no se puede?

Ceci: Hay mucha diferencia entre los lados

Prof: Y entonces nunca se van a unir, y no se puede armar un triángulo. La idea era que vieran que no siempre tres segmentos arman un triángulo. Si les dicen ¿con cualquier terna de segmentos puedo armar un triángulo?, uds. saben que no.

10.

Prof: Pero ahora tenemos que buscar qué condición tienen que cumplir estos segmentos. Para que sí armen un triángulo ¿qué condición tienen que cumplir?. Ayer estuvieron mirando los libros, yo quería mostrarles gráficamente que era más o menos lo que pasaba (mientras arma terna de varillas, dos de ellas tienen la mitad de longitud que la restante). Estaría pasando algo así. ¿Puedo armar un triángulo?, no. ¿Cómo tendrían que ser esos segmentos?

C: La suma tiene que ser más grande que la base

Prof: ¿A ver qué decía el libro? A ver, vamos a hacerlo con relación al naranja (varilla más grande) ¿cómo tiene que ser el naranja respecto a estos?

Al: Menor que los dos más chicos juntos

Prof: ¿Y los lados más chicos juntos cómo son? ... O sea que el lado naranja tiene que ser menor que la suma de los otros dos. O sea que cada lado tiene que ser menor que los otros dos sumados para poder tener el triángulo. ¿Qué condición tenemos que poner ahi?. Cada lado....

Al: Cada lado tiene que ser menor que la suma de los otros dos

Prof: Y vos Ceci ¿qué estas diciendo?

C: La suma de dos lados tiene que ser mayor que la base

Prof: O que el otro, porque si lo pongo así (cambia la ubicación espacial de las varillas) ese lado no es la base; tiene que ser mayor que el otro lado. ¿Es lo mismo lo que dice ella?

Als: Sí

Prof: Sí, solamente que lo enuncia al revés

"Construir un triángulo dados un lado y dos ángulos adyacentes"

1.

Prof: El otro. ¿Qué datos tenemos?

Als: Un lado y dos vértices

Prof: ¡Cómo un lado y dos vértices!. Tengo un lado (dibuja segmento) y dos ángulos. ¿Cómo se llama el lado?, A. Y el ángulo... ¿qué letra tiene en el vértice? (dibuja un ángulo agudo)

Als: a

Prof: ¿Y el otro?

Als: b

La profesora dibuja el segundo ángulo en una posición similar a la del primero

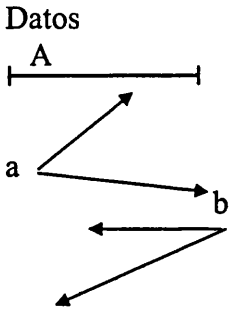
Als: ¡No!, al revés

Al: Es lo mismo

La profesora borra y lo dibuja tal como estaba en la fotocopia

Prof: ¿Con el vértice para allá? ¿Así?. ¿Qué sería lo que tenemos acá?

Als: los datos



Prof: Estos serían los datos. Tenemos un lado y dos ángulos que tienen que ser adyacentes a este lado.

2.

Prof: ¿Por qué no tratan de hacer con lápiz un esquema de cómo tendrían que quedar ubicados estos datos?. Y después lo haríamos bien con el compás y la regla. Pero

primero, a ver si nos podemos hacer la idea de qué nos tiene que quedar. Esto se llama hacer una figura de análisis (lo escribe). No es necesario usar la regla, hagan a mano alzada un dibujo de un triángulo, y cómo quedarían ubicados esos datos. A ver si sale, a ver si lo pueden imaginar.

Al: Un borrador

Prof: Un borrador, un esquema a ver cómo tendría que quedar

Alumnos trabajan

3.

Prof: ¿Qué quiere decir adyacentes?. Tienen que ser los ángulos adyacentes al lado A ¿qué significa eso?

Al: Tienen que sumar 180°

Prof: Bueno, está bien. Pero en el dibujo adyacentes quiere decir que están sobre este lado, en este caso (los señala en el dibujo).

Alumnos trabajan

Prof: Miren. Los ángulos adyacentes al lado A son los que están determinados sobre A, son este ángulo y este ángulo (los señala en la construcción del problema 1). Si quiero los ángulos adyacentes a C ¿qué ángulos serían adyacentes a este lado C? Serían el a y el b. Si quiero los ángulos adyacentes a B ¿quiénes serían?

Al: a y c

Prof: Volvemos al principio, si quiero los adyacentes al lado A serían los ángulos b y c. Estos dos, los adyacentes tienen sus lados sobre un lado del triángulo.

Alumnos trabajan.

4.

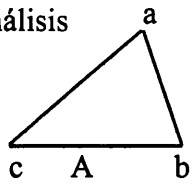
Prof: Vamos a cambiar de nombre a este ángulo (borra la letra a en el ángulo dato) porque dijimos que los ángulos tienen que ser adyacentes al lado A, entonces le vamos a poner c a este ángulo, porque sino nos queda opuesto al lado A. Miren (lo muestra en la construcción del problema 1), éste es A y llamamos a, al ángulo que está enfrente, éste es B y llamamos b al ángulo que está enfrente, y éste es C y al ángulo enfrentado lo llamamos c. Siempre lo vamos a hacer así. Entonces, cámbienle la letra, yo me equivoqué, en las fotocopias donde dicen a pongan c.

► Pasa una alumna a hacer la figura para visualizar información del enunciado, se la llama figura de análisis

Prof: Entonces, a ver Romina hacelo en el pizarrón ¿cómo tiene que quedar?. Sin regla, a mano alzada

Pasa Romina

Figura de Análisis



5.

Prof: Bien ahora tienen que usar el compás ¿se acuerdan de cómo usar el compás? ¿Qué tenemos que hacer?. Hay que llevar el ángulo c y el ángulo b. ¿Se acuerdan de cómo copiar ángulos acá? ¿Cómo hacer un ángulo igual a otro?

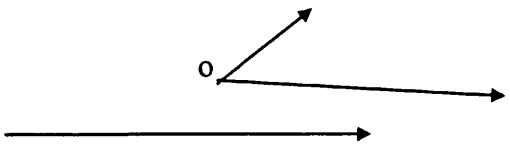
Als: No,...sí

6.

Prof: Vamos a intentarlo. Quiero llevar este ángulo (dibuja con regla un ángulo agudo en un costado), hacerlo de nuevo tal cual está. ¿Los lados del ángulo qué son? ¿segmentos o semirrectas?, semirrectas

Al: Hago una recta

Prof: Hago una semirrecta (la dibuja) ¿qué tengo que hacer ahora?

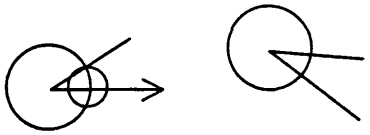


Florencia: Tomo el compás y hago un segmento

Prof: ¿Un segmento o un arco?

F: Un arco

Prof: Tomo el compás, trazo un arco, y acá de nuevo hago el arco. En realidad ¿qué es el arco? Una circunferencia (hace una circunferencia con centro en el origen de la semirrecta). Y ahora tomo esta abertura y la paso acá. ¿Y ahí qué tengo?. Un punto, y con la regla trazo. Este ángulo tiene la misma abertura que este. ¿Importan los lados? ¿Importa la longitud? No, ¿importa qué cosa?. Que tenga la misma abertura, no nos importan los lados, lo que importa es que tengan la misma abertura. A ver si lo pueden hacer.



Comentarios a un grupo:

Prof: Fijate Ceci, si haces una marquita acá y otra acá (arcos sobre los lados del ángulo) funciona, porque ¿el compás qué está marcando de la circunferencia?, el radio. Entonces el radio que tengo acá lo tengo que tener también acá, para tener la misma circunferencia. ¿Cuántas circunferencias tengo?. Dos, y tengo el punto que tienen de intersección; uno de los puntos, me va a dar la abertura del compás

7.

Prof: También lo que tienen que ver es si el triángulo que encuentran es igual al de los compañeros. ¿Lo hicieron para el primer caso?. Tienen que comparar la hoja de uds. con la de los compañeros, y ver si el triángulo 1 es el mismo o no para todos

8.

Prof: Chicos escuchen. Uds. tienen un segmento A; las medidas que tienen que trasladar son las medidas que tienen dadas, no pueden cambiar los segmentos ni los ángulos estamos tratando de construir triángulos con regla y compás, pero también con precisión. Si copian mal los ángulos el trabajo es doble, porque sale mal y hay que hacerlo de nuevo. Los ángulos tienen que copiarlos bien, los segmentos tienen que tener la medida que tienen en la hoja. No pueden cambiarlos. ¡No está saliendo un triángulo igual a otro con los mismos ángulos y los mismos segmentos!.

Alumnos trabajan.

CLASE 12

►La profesora devuelve la tarea que llevó para corregir consistente en marcar las alturas de un triángulo obtusángulo

Prof: Ya les devolví a todos?. Ahora voy a llamar de nuevo por lista y voy a ir preguntando

La profesora recorre los bancos

Comentarios:

Prof: Si son segmentos, ¿desde dónde hasta dónde hay que marcarlos?

Prof: Iris, ¿éstas qué son?

I: Las medianas

Prof: Bien, y ¿ trazaste las alturas?, marcalas y ponele letras al triángulo

"Construir un triángulo dados un lado, el ángulo adyacente y el ángulo opuesto a dicho lado"

1.

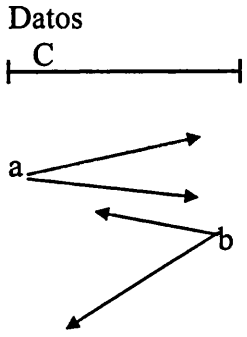
Prof: Ahora vemos el problema 3. ¿Qué datos teníamos?

Als: Un segmento y dos ángulos

Prof: Pero ¿dónde van los ángulos?

Als: Uno adyacente y el otro opuesto

Prof: Ahora vamos a poner los datos que tenemos. Entonces hay un segmento que es C, un ángulo que es ∠a y está puesto un ángulo ∠b así ¿no? (dibuja los elementos en el pizarrón)



Prof: ¿Pudieron construir el triángulo?

Als: No

2.

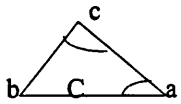
Prof: ¿Les parece hacer una figura de análisis para ver cómo quedaría ubicado eso de acuerdo a lo que dice?. Entonces ¿cómo habría que hacer la figura de análisis de acuerdo al enunciado del problema?. Un ángulo tiene que ser adyacente y ¿el otro?

Als: Opuesto

Prof: A ver Cecilia hacé la figura en el pizarrón. A mano alzada, y vamos a ubicar los datos.

Ceci hace la figura de análisis

Figura de Análisis



3.

Prof: Ceci ¿ese cual sería?

C: ∠c

Prof: ¿Puse bien las letras ahí?

(Ceci corrige las letras usadas al dibujar los datos, y cambia b por c)

4.

Prof: Ahora chicos ¿cuál es el problema que tenemos? ¿sabemos construir esto?. ¿sabemos construir C?

Als: Sí

Prof: ¿Y podemos poner el ángulo adyacente?

Als: Sí

5.

Prof: ¿Cuál es la dificultad que tenemos?

Ceci: Éste (señala en ángulo c en el dibujo)

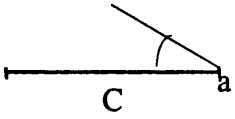
Prof: No sabemos dónde tenemos que poner ¿a quién?

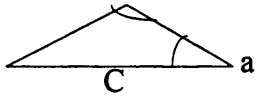
Als: ∠c

Prof: No sabemos dónde poner ∠c; si va más arriba, más abajo (señala en el pizarrón) ¿Cómo podemos hacer para solucionar esto?.... Vuelvo atrás; si construimos C (lo dibuja) ¿qué es lo que tenemos del triángulo?

Als: Los vértices

Prof: Nosotros podemos poner ∠a acá ¿cuál es el problema?, que no sabemos dónde, o en qué lugar de este lado poner ∠c para que nos quede armado el triángulo. ¿Cómo podemos hacer? ¿qué se les ocurre?





6.

►Intento de tomar ∠c como ángulo adyacente

Al: Lo que hice fue en vez de hacer el ángulo como hizo ella ahí, puse ∠c y lo hice como si fuera ∠b, lo marqué directamente

Prof: Pero si ahí marco el ángulo lo estoy poniendo adyacente, no opuesto, y estoy en el caso anterior. Volvamos al caso anterior. En el caso anterior ¿qué tenían? (mientras dibuja).

Tenían estos dos ángulos, y no había problemas porque en el lugar donde se cortan estos lados nos quedó el triángulo. Pero si tomamos este ángulo (∠c) como si fuera ∠b volvemos al caso anterior. No es ese el planteo del problema. A ver si les doy una ayuda.

7.

Prof: Uds. saben algunas cosas de los triángulos; por ej. saben cuánto suman los ángulos interiores del triángulo. ¿Cuánto suman?

Als: 180°

8.

Prof: O sea que tengo acá dos ángulos ¿qué me está faltando?

Als: El tercero

Prof: ¿Qué letra le puso Ceci?

Als: b

Prof: Me está faltando ∠b (señala en el pizarrón). ¿Tendría forma de averiguarlo? ¿cómo hago?

9.

Ceci: ∠a, ∠c y medimos ∠b

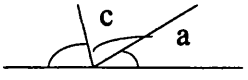
Prof: En realidad tendría que..., nosotros no vamos a medir. ¿Cómo podemos hacer?

►Una alumna esboza un plan para hallar el ángulo restante

10.

Romina: Podemos hacer un ángulo llano e ir ubicando los ángulos que tenemos

Prof: Vamos a hacer un ángulo llano, vamos a copiar ∠a, copiar ∠c ¿y lo que nos queda qué será? (dibuja en pizarrón)



Als: ∠b

Prof: Y entonces el problema ¿a cuál va a ser igual?

Als: Al anterior

Prof: Si logro tener el ángulo adyacente que me falta, el problema será igual que el anterior. Bueno, a ver si podemos hacer eso.

11.

Prof: Copien los ángulos con precisión, hagan los dibujos con precisión. Pónganse cómodos en el banco y trabajen bien.

►La profesora pasa por los bancos contestando dudas

12.

Prof: Vamos a repetir qué es lo que hay que hacer. Vamos a repetir entre todos. Iris, empezá vos

I: Agarro el compás y lo marco

Prof: No digo el procedimiento, sino cómo se soluciona el problema. A ver... para construir el triángulo. ¿Qué dificultad tenemos?.... Volvemos atrás con todo. A ver Romina.

R: No podemos sacar la medida del ángulo

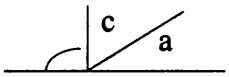
Prof: Podemos construir C, copiar ∠a, pero no sabemos donde copiar ∠c. Entonces ¿qué idea se nos ocurrió?

R: Que como los ángulos interiores del triángulo miden 180°, medimos ∠a y ∠b y lo restamos de 180°

Prof: Nosotros no vamos a medir nada

R: Bueno, los ubicamos en un ángulo llano

Prof: Exacto. Vamos a copiar ∠a acá, vamos a copiar ∠c y lo que nos quede ¿qué ángulo es?



Als: ∠b

Prof: ¿Cómo es ∠b respecto al lado C?

Als: Adyacente

Prof: Y entonces vamos a poder copiar ∠b acá (señala en la figura). A ver si les sale

(La profesora recorre los bancos, compara las producciones de los alumnos con la suya para ver si los triángulos se superponen)

Comentarios en los grupos:

Prof: Romina, tenés problemas con todos los ángulos

Prof: Paula, revisá ∠b que está apenas corrido

Prof: Perfecto Ceci!, ayudale a los vecinos

Prof: Iris, ahora ya tenés todo

I: Y el ángulo recto

Prof: No es recto, ahora tenés los tres ángulos así que es cuestión de hacerlo como el anterior (la suma de los ángulos dados resultaba aproximada a un recto)

► La profesora ejecuta el plan; copia los dos ángulos dados en forma consecutiva dando para este copiado una explicación apoyada en dibujos, y luego reduce el problema a uno resuelto anteriormente.

13.

Prof: Bueno, ahora lo vamos a hacer. Pincho el compás en el vértice y hago un arco, con cualquier abertura del compás. Pincho acá y hago un arco. Tomo con el compás la abertura y por este punto y éste va a pasar el otro lado del ángulo. ¿Qué ángulo es este?

Als: ∠c

Prof: ¿Y éste que queda acá?

Als: ∠b

Prof: ¿No hay duda con esto?. Lo primero que hay que hacer es una semirrecta para apoyar el dibujo. Los chicos dicen que pongamos C ahí. Pincho con el compás en un extremo, abro el compás hasta el otro extremo. Ahora pincho el compás en un punto y marco un arco. ¿A quién traje?

Als: a C

Prof: Si esto es C; a este vértice le llamamos b y a este otro a.

Prof: ¿Qué hay que hacer ahora?, copiar el ángulo ∠a que lo tengo acá (señala) y en este vértice ¿qué ángulo voy a copiar?

Als: ∠b

Prof: Primero voy a copiar ∠a. El copiado de ángulos es siempre lo mismo. Voy a limpiar acá un poco el dibujo para que no tenga tantos trazos.

(La profesora explica nuevamente el copiado de ángulos para poder construir el triángulo)

Prof: Ahí ya tenemos el ángulo ∠a. y ahora tenemos que poner ∠b. El problema es el mismo que el anterior (mientras copia los ángulos en el pizarrón)

14.

Al: Profesora, ¿puedo mirar acá en su dibujo?

Prof: Sí, como no. También miren con el de un compañero.

►Para la próxima clase se pide saber copiar ángulos, segmentos, trazar mediatriz, bisectriz, mediana y altura

Prof: Para la clase que viene van a estudiar desde triángulos en adelante, todo. Tienen que saber copiar un ángulo, saber cómo se traslada un segmento, tienen que saber cómo se trazan las bisectrices, las mediatrices, lo que es la altura de un triángulo, lo que es la mediana de un triángulo. Todo eso lo tienen que saber. Y lo van a estudiar para la próxima. O sea que llevan tarea y mucha.

Al: ¿Hay que hacer algo de otra cosa?

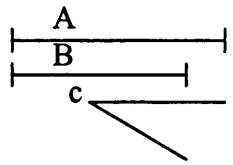
Prof: Sí, el problema 4.

CLASE 13

"Construir un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido"

1.

Datos



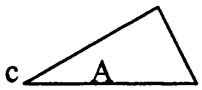
2.

Prof: Estamos haciendo hasta ahora una figura de análisis para ver cómo nos quedarían esos datos y cómo quedaría armado el triángulo. ¿Hicieron eso ya?, ¿cómo les quedó?. ¿Hiciste Vanesa la figura de análisis?.

V: Sí.

Prof: Bueno, hacela en el pizarrón, ¿cómo quedaría?. Así nomás, a mano alzada. ¿Cómo tendrían que quedar ubicados los datos?.

(Vanesa dibuja en el pizarrón).



Prof: Es una figura precisamente para ubicarnos. ¿Está bien eso que hizo Vanesa?.

3.

Prof: Este sería A. ¿Después de poner A qué hay que hacer?.

Als: Poner el ángulo.

Prof: Y después que ponemos el ángulo ¿qué hacemos sobre el lado del ángulo?.

Murmullo

Prof: Esperen, esperen. Pusimos A. Cuando pusimos A, ¿qué cosa tenemos del triángulo?.

Als: Un lado.

Prof: ¿Y además?

Als: Dos vértices.

Prof: ¿Después qué hacemos?. Copiamos ∠c, el ángulo, y una vez que copiamos el ángulo, esto seguiría así ¿no es cierto?. (dibuja un segmento A y en un extremo dibuja ∠c). Copiamos el ángulo. Y después ¿qué hacemos sobre el lado del ángulo?.

Als: Copiamos B.

Prof: Copiamos B sobre este lado (hace una marca). ¿Qué sería este punto del triángulo?.

Als: Un vértice.

Prof: Ya tenemos uno, dos, y este sería el tercero, ¿Y después que me falta hacer?

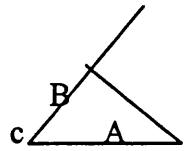
Als: Unir.

Prof: ¿Cómo llamo a este vértice?

Als: a

Prof: Uno a con b. ¿Me quedaría el triángulo?

(a mano alzada)



Als: Sí.

Prof: Hicieron eso ya? A ver si les sale. Bueno, a ver haganlo y después vemos

Comentarios a un grupo:

Prof: Dice que hay que hacer un triángulo dados los dos lados y el ángulo comprendido. El ángulo tiene que estar entre los lados.

4.

Prof: A ver chicos. Una cosa, ¿importaría si pongo B acá (en lugar de A)?

Als: No.

Prof: Sería lo mismo. El ángulo debe estar comprendido entre los dos lados que tengo.

Prof: ¿Ya está?. Háganlo y después lo miramos en el pizarrón.

► La profesora recorre los bancos. Algunos alumnos superponen los dibujos para ver si los triángulos coinciden. Luego pasa una alumna al pizarrón

5.

Prof: ¿Trazaste eso con regla?

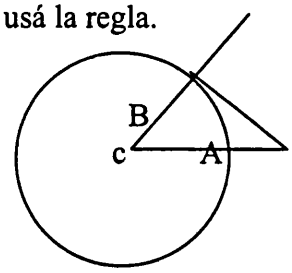
Andrea: Sí. (ríe)

Ceci: Mentirosa!

Prof: ¿En serio?

A: Sí, lo tracé con la regla (sigue riendo).

Prof: Trazalo de nuevo. Hacé un segmento en el pizarrón, copia el ángulo ∠c. Poné quién es A, poné el vértice c, ¿quién va a ser B?. Y ahora usá la regla.



6.

Prof: Es decir, si nosotros copiamos el ángulo acá el ángulo tiene que estar comprendido entre los lados que me dan.. Ahora, ¿yo podría haber copiado el ángulo de este lado también? (Señala el otro extremo de A).

Als: Sí.

Prof: Sí. Copio el ángulo de este lado y B sobre el lado del ángulo. Lo mismo sería.

Comentarios a los grupos:

Prof: ¿Listo?, ¿todos pudieron hacer la figura de análisis?

Diego: vení.

Prof: ¿Dónde está la figura de análisis?. Diego, vos no lo podés dibujar si no hacés una figura para ubicar los datos. No, sin regla, a mano alzada. Hacé una figura para ver cómo quedarían los datos según lo que dice el problema. Si querés, lo hacés chiquito por ahí, pero tenés que hacer primero eso.

Prof: Cristian ¿vos lo hiciste?

C: Sí.

Prof: ¿Dónde está la figura de análisis?

C: acá.

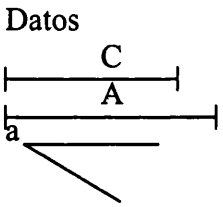
"Construir un triángulo dados dos lados y el ángulo opuesto al mayor"

1.

Prof: Bueno, vamos a pasar al problema 5. Lean el problema.

2.

La Profesora dibuja los datos en el pizarrón



3.

Prof: Hacen la figura de análisis y vemos cómo sería ese problema resuelto. A ver si les sale.

Flor: Primero la figura de análisis.

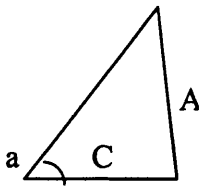
Prof: Primero la figura de análisis. Siempre.

Florencia pasa al pizarrón con su hoja, hace un triángulo y ubica los lados A y C

Prof: A ver chicos si miran, si cumple con las condiciones "dice que tenemos dos lados y el ángulo tiene que ser opuesto al mayor". ¿Cuál es el ángulo que nos dan?.

F: Éste (señala)

Prof: Ponele un arquito para marcarlo.



Prof: A tiene que quedar allá y tiene que ser opuesto.

Florencia se sienta

Prof: Esa sería la figura. ¿Hicieron eso ustedes?

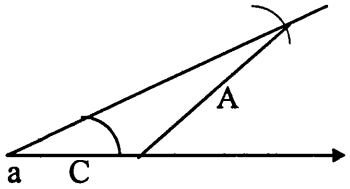
La profesora modifica el ángulo que es dato para que su amplitud sea similar a la que los alumnos tienen en el práctico. Los alumnos trabajan.

Comentarios a los grupos:

Prof: Esteban, el ángulo está mal copiado, el ángulo es un poquito más grande de lo que vos copias...Ese es el problema. Apenas. Pero la idea está bien. Debe tener 2° o 3° grados más de lo que es.

4.

►Pasa Romina. Copia el lado C, el ángulo ∠a adyacente, y hace arco de circunferencia de centro b y radio A.



Prof: Copien bien los ángulos porque sino no salen los triángulos.

5.

►Mientras Romina hace la construcción en el pizarrón, la profesora. recorre los bancos y ayuda a los alumnos a superponer sus producciones para ver si los triángulos coinciden

Prof: Comprueben si les dió con el compañero

6.

► La profesora pide a la alumna que explicite su procedimiento; le hace correcciones en cuanto al lenguaje.

Prof: ¿A ver cómo hiciste vos?, ¿podrías explicar cómo hiciste? Escuchan los demás.

R: ¿ Así como hice todo?

Prof: Desde que empezaste el dibujo.

R: Tracé una línea y medí...

Prof: Una semirrecta.

R: Una semirrecta , medí el lado C con el compás e hice un arquito acá.

Prof: Bien.

R: Después medí el ángulo, bueno, puse el pinche acá y ...

Prof: Copiaste el ángulo

R: Copié el ángulo. Después medí otra vez el lado y lo puse acá.

7.

Prof: Una vez que tenés C ¿qué tenés determinado del triángulo?.

R: La base.

Prof: No sé si es la base, es un lado, pero... en los extremos del lado ¿qué tenés del triángulo?.

R: ¿Cómo en los extremos?

Prof: Hay un lado, pero esto y esto ¿qué son del triángulo?.

R: El segmento.

Prof: No.

R: Ah, los vértices.

Prof: Y hay que ver dónde va a estar el tercero. ¿Les quedó?.

Comentarios a los grupos:

Prof: A ver dame el compás. ¿Qué te está pasando?. Marco acá y acá. ¿Qué tenés entonces?

Ceci: Dos.

Prof: ¿Dos qué?

Ceci: Puedo hacer así o así.

Prof: ¿Entonces qué van a quedar determinados?

Ceci: Dos triángulos.

Prof: Dos triángulos. Porque no sé si C es éste o éste otro. Bien, porque B corta dos veces...

"Construir un triángulo dados dos lados y el ángulo opuesto al menor"

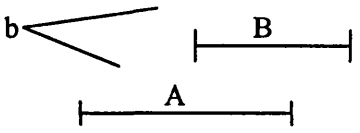
Iris pide resolver el problema

1.

Prof: ¿Qué querés hacer Iris? ¿el problema 6? ¿Vos ponés los datos sola?

Iris: Sí

Prof: Bueno, vos ponés los datos solita acá. Te acomodás todo, agarra tu hoja, no lo tenés que hacer de memoria.



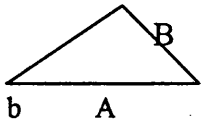
I. ¿Está muy chico así?

Prof: No, está bien.

2.

Prof: ¿Cómo sería la figura de análisis?. Hacé una figura sin la regla y el compás. Una figura para....

Iris hace esta figura



Comentarios a los grupos:

Prof: Pamela, la circunferencia corta ahora en dos partes, entonces cuántos triángulos tendrías.

P: dos.

Prof: Claro, el triángulo no es único ahora

3.

► La alumna ejecuta su plan que básicamente es el mismo que el del problema anterior. El primer paso es hacer una semirrecta y copiar A, luego el ángulo ∠b adyacente y por último arco de circunferencia de centro c y radio B. La intervención docente es en cuanto al trazado (prolongar semirrectas y arcos).

Prof: A ver, está A. ¿Ahora qué vamos a hacer?

(Iris copia el ángulo).

Prof: Más largo Iris. Extendelo más porque eso facilita el dibujo después. Iris, hacé un arco más grande.

I: Me queda por acá.

Prof: Por donde sea, con la medida de B. Lo que tenés que mantener es la medida de B.

4.

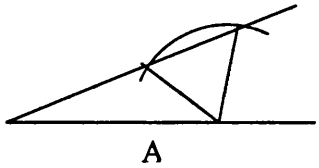
Prof: Bueno entonces ahora qué pasa, cuando queremos poner B ¿que nos pasa?. ¿Qué pasa cuando queremos poner B en este caso?.

Al: Se forman dos puntos.

Prof: Corta en dos puntos. ¿Cuántos triángulos tenemos?

Als: Dos.

Prof: ¿Cuáles pueden ser?, marcá los dos ¿cuáles serían?



5.

Prof: En el caso este se nos han formado dos triángulos. Hasta ahora ¿cuántos triángulos teníamos siempre?.

Als: Uno

Prof: En todos los casos anteriores teníamos un sólo triángulo, y en este caso se han formado dos triángulos. Hagan el último problema ahora a ver qué pasa.

"Construir un triángulo dados sus tres ángulos"

► Los alumnos trabajan y enseguida tiene lugar una fase de visión retrospectiva, en la cual se superponen las producciones y la intervención docente focaliza la diversidad de resultados.

Prof: Ya tenemos el punto 6 que en este caso nos dió dos triángulos. Y ahora tenemos que hacer el 7. Los ángulos serán siempre los mismos.

Prof: Pamela ¿te coincide con el de ella?

P: El de ella es más grande.

Prof: ¿Y por qué el de ella es más grande que el tuyo?. ¿Que le estará pasando?. ¿Es la abertura el problema?

Ceci: Es la medida

Prof: La medida de qué

C: De los lados.

Prof: ¿Tienen los lados?

C: La medida de la base

Florencia: La medida de la base. (Están superponiendo hojas para comparar).

Prof: ¿La medida solo de la base es el problema?

Als: No

Prof: ¿Tienen alguna medida de lados?

Als: No

Prof: ¿Y entonces qué va a pasar?

Al: Tienen diferente tamaño.

Prof: ¿Van a ser iguales los triángulos?

Als: No

Prof: No. Los ángulos, ¿los ángulos se van a mantener?

Als: Sí

Prof: Sí. ¿Qué es lo que no se va a mantener?

Als: Los lados

Prof: Los lados. Bien. Lo vamos a hacer en el pizarrón. ¿Qué es lo que teníamos que hacer?. A ver Pía ¿qué te pasó? ¿Qué pasó cuando comparaste el dibujo con el de tus compañeros?

Prof: Bueno, a ver Ceci ¿qué pasó con los triángulos en el último problema?

Ceci: Que no iban a dar todos los mismos triángulos.

Prof: ¿Por qué no iban a dar todos los mismos triángulos?

C: Porque los lados no son iguales y la base tampoco, va a dar los mismos ángulos pero no los mismos lados.

Prof: Bien. O sea que nos pasó que tenemos triángulos grandes y chicos. Diferentes tamaños de los triángulos.

► Se pide hacer una síntesis de las construcciones de triángulos vistas hasta el momento, analizando la unicidad de los resultados.

Prof: Ahora yo les voy a pedir... ¿Cuántos problemas resolvimos hasta ahora?

Als: siete

Prof: Les voy a pedir a ustedes que hagan una síntesis, pueden hacer un cuadro, como quieran ustedes, que organicen la información y anoten esos problemas en donde se pudo construir un triángulo y el triángulo fue único. ¿Se entendió?. Ustedes tienen que anotar, no solamente poner problema 1, problema 2, problema 3, no, hay que poner qué cosas tenía yo de datos para que el triángulo se construyera y fuera único. ¿Se entendió?

Als: Sí.

Prof: Lo van a anotar como quieran ustedes, si quieren hacer un cuadro, ponerlo uno debajo del otro en la carpeta entonces van a anotar estas conclusiones sobre estos siete problemas. Si se pudo construir el triángulo, qué problema fue y qué datos teníamos.

"Casos en que se pudo construir un triángulo solamente"

Prof: Porque hubo casos en que se pudo construir más de un triángulo. A ver Iris ¿qué pusiste?.

I: En el 1A) puedo construir un triángulo dados tres lados.

Prof: Por ejemplo. Bien. Dados tres lados pudimos construir un triángulo y fue único. A ver los demás. Mariana, tenés que agarrar las dos hojas de fotocopias que tenés, y

mirar en esas fotocopias y anotar en tu carpeta los casos en los que pudiste construir un único triángulo solamente. Mirá, ahí lo tenés en el pizarrón. Casos en que se pudo construir un triángulo solamente. Es decir revisás los siete problemas y te vas fijando en qué casos pudiste construir un triángulo. ¿Entendiste?

M: Sí.

Ayelén: si nos dan tres lados cualquiera, no se puede construir.

Prof: Claro ¿escuchaste Iris?, Ayelén dice que esos tres lados que te dan tienen que cumplir una condición porque en ese primer problema tienen dos casos: Una parte A) donde se pudo construir y una parte B) donde no se pudo construir. Ayelén dice que esos lados tienen que estar cumpliendo una condición.

Ceci: En el 1A) pudimos construir un triángulo dados tres lados y cada lado tiene que ser menor que la suma de los otros dos.

Prof: Ayelén estaba diciendo lo mismo pero enunciándolo al revés. La suma de los lados va a ser menor que el otro, dice Ayelén.

Andrea: ¿se puede construir un triángulo con los tres lados de diferentes medida?

Prof: Sí, tienen diferente medida pero tienen que cumplir una condición.

A: ¿Cómo?

Prof: Es lo que están diciendo Ceci y Ayelén. Escuchame Andrea, aunque tengan la misma medida..., ¿no puede armarse un triángulo con los tres lados iguales?

A: Sí

Prof: ¿Y entonces?. Bueno, pero lo ponemos más general. Todos traen estos casos en donde se puede construir un triángulo copiados en sus carpetas y esta parte terminada.

CLASE 14

► Análisis de la unicidad de los resultados de los siete problemas de construcción vistos. Se infieren criterios de congruencia.

Prof: Vamos a trabajar hoy los casos en que se podía hacer un triángulo con los datos que nos daban y ese triángulo era único. ¿Se acuerdan de eso?.

Als: Sí

Prof: Bien. Vamos a ver si coincidimos. ¿Qué pusieron en eso?. A ver ¿Santiago?. Buscá la hoja.

S: Primero, siempre y cuando sea mayor a la suma de los otros dos.

Prof: ¿Siempre y cuándo qué?, ¿qué me tienen que dar?

Ceci: Tres lados.

Prof: ¿De qué estás hablando? ¿De los lados o de los ángulos?

S: De los ángulos.

Ceci: De los lados.

Prof: ¿De qué estas hablando en realidad?.

S: De los lados.

Prof: De los lados.

Prof: Esteban. ¿Con 3 lados se puede construir un único triángulo?

E: A veces.

Prof: ¿Qué condición tienen que tener los lados?

E: Siempre y cuando la suma de los lados sea mayor al otro.

Prof: Ahí tenemos un caso que está enlazado con el primer problema. ¿Qué otro caso tenemos?. A ver Diego.

D: No, ese no lo hice.

Prof: ¿Por qué no hicieron la tarea?, ¿Christian?

C: No.

Prof: ¿Ayelén?

Aye: No sé si lo hice bien, yo puse de la fotocopia qué habíamos necesitado para construir un único triángulo.

Prof: Bueno. Eso es. Eso es lo que hay que sacar. Ya dijeron un caso.

Aye: Se pueden construir dos triángulos dada la medida de los dos ángulos y un lado

Prof: Sí. ¿Y cómo estaban esos ángulos?, ¿Te acordás?

A: Adyacentes.

Prof: ¿Y después? ¿en el otro caso?

A: Se puede construir un triángulo dados la medida de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

Prof: Sí, ese es otro ya. En el anterior. Volvemos al anterior. Estamos hablando del problema en que vos tenés un lado y dos ángulos adyacentes. Pero a continuación de ese había otro problema donde tenés un lado y los ángulos, ¿cómo estaban?. Uno adyacente y el otro...

A: Opuesto.

Prof: ¿Se acuerdan que ese problema se reducía al de tener un lado y los dos ángulos adyacentes?, ¿se acuerdan de eso?

Mientras va hablando escribe en el pizarrón

Prof: En el primer caso tenemos los tres lados y todo lo que ustedes le agregaron. En el segundo caso tenemos un lado y dos ángulos adyacentes. Hay otra posibilidad que era un lado y ¿qué más?..... Un ángulo adyacente y otro opuesto. Y este se reducía al caso anterior. ¿Se acuerdan de eso?

Als: Sí, no

Prof: ¿Sí o no?.

Als: Sí.

Prof: Poco miraron. Nada prácticamente. Pía, ¿qué sigue?

Pía: Yo puse en el caso que había dos lados y un ángulo opuesto al mayor.

Prof: ¿Qué más? Acá, Paula.

P: Dos lados y un ángulo comprendido

Prof: ¿Qué más? Mariana

Als: No

Prof: ¿Están todos?

En el pizarrón quedó escrito:

1) 3 lados.

2) 1 lado y 2 ángulos adyacentes

3) 1 lado, un ángulo adyacente y otro opuesto.

4) 2 lados y un ángulo opuesto al mayor

5) 2 lados y un ángulo comprendido

Al: Faltan dos

Als: ¡No!

Prof: Estos cinco eran los problemas en donde nosotros construimos el triángulo y el triángulo era uno solo. ¿Qué casos nos quedaron afuera? porque había siete problemas... A ver Iris

Iris: Yo puse el 6

Prof: ¿Cuántos triángulos construimos en el 6?, ¿se acuerdan cuál era el 6?

Als: Dos triángulos.

Prof: ¿Y en el 7?

Als: Muchos

Prof: Un montón. En el 6 teníamos de datos dos lados y el ángulo opuesto al menor de los lados, ¿se acuerdan?, y en el 7 teníamos los tres ángulos. En estos casos, los triángulos que construimos ¿cómo eran?; ustedes comparaban la hoja de uno con la hoja de otro ¿y cómo eran?

Als: Iguales.

Prof: O congruentes. Andrea, para que sean congruentes ¿qué es lo que tiene que pasar?

A: Tienen que ser iguales

Prof: Pero ¿qué tienen que tener igual?

A: Los ángulos.

Prof: ¿Y qué más?

A: Los lados.

Prof: Tienen que tener congruentes los lados y los ángulos. Bien. Nosotros ahora vimos que podemos construir triángulos que son congruentes pero no nos dan necesariamente todos los datos. ¿Qué les di a ustedes en cada caso?. ¿Cuántos datos tenemos en cada caso?

Als: tres

Prof: O sea que, si a nosotros nos dan tres datos convenientemente elegidos, podemos construir un triángulo único. O sea el triángulo que ustedes construyeron en todos estos casos que tenemos acá (señala el pizarrón) fue único. Comparábamos el de Andrea con el de Iris, el de Iris con el de Ceci y todos esos triángulos eran únicos.

Prof: Esto que está acá (señala el pizarrón), estas ternas que les di para construir los triángulos, constituyen los criterios de congruencia de triángulos. No les di datos

cualquiera. O sea, se va a poder construir el triángulo y va a ser único, cuando damos los datos convenientemente elegidos ¿cuántos datos dimos en cada caso?

Als: Tres

Prof: Tres datos bien elegidos. Porque vieron que por ejemplo en el caso 7 ¿qué les di como dato?

Als: Tres ángulos.

Prof: Tres ángulos. Pero con eso ¿es único el triángulo?

Als: No

Prof: No. O sea dimos tres datos, tres ángulos, pero no fue único. En el caso 6 ¿qué dimos?

Als: Dos ángulos

Prof: Dos ángulos no.

Als: Dos lados

Prof: Dos lados y el ángulo opuesto ¿a dónde?.

Als: Al menor de ellos.

Prof: ¿Y ahí fue único?

Ceci: No, se podían formar dos triángulos

Prof: Pero fíjense que en otros casos como por ejemplo en éste (señala el pizarrón), nos dan dos lados y el ángulo comprendido, nos dan dos lados y ángulo opuesto al mayor y en estos casos sí que se puede, entonces los datos tienen que estar bien elegidos para que el triángulo sea único. ¿Estamos hasta ahí? bien. Vamos a anotar ahora abajo pongan de título: (borra lo anterior y escribe en el pizarrón)

"Criterios de congruencia de triángulos"

Prof: Los vamos a enunciar bien. Vamos a hacer una pequeña introducción que escribí para antes de poner los criterios, para que les quede bien ordenado todo ¿sí?. No van a tener que escribir mucho.

La profesora dicta

Prof: Dos triángulos son congruentes cuando tienen sus tres lados y sus tres ángulos congruentes. Sin embargo, nosotros vimos que para construirlos no necesitamos los seis elementos de uno y los seis elementos de otro para asegurar que son congruentes. Bastó con tener como datos tres elementos bien elegidos de un triángulo para asegurar su congruencia con otro triángulo; que tenga sus elementos

congruentes con estos tres. ¿Cuáles son esos elementos bien elegidos?. Abajo vamos a contestarla, vamos a poner: pueden ser diferentes ternas de datos. Cada uno de estas ternas es un criterio de congruencia de triángulos. Ahora abajo vamos a poner los criterios. Lean lo que escribimos a ver si entienden, si todo el mundo está al día con lo que escribimos hasta ahora. Todo el mundo está al día ¿nadie se quedó atrás?

►Paso de la construcción a los criterios de congruencia

Prof: Ahora vamos a poner primer criterio. (escribe en el pizarrón)

"Dos triángulos son congruentes cuando tienen los tres lados respectivamente congruentes".

No vamos a poner... A ver les voy a aclarar algo. En el criterio nosotros no ponemos la relación que tienen que cumplir los lados porque suponemos que se puede armar el triángulo ya. Obviamente que si no nos dan los lados adecuados no vamos a poder construir el triángulo; pero nosotros estamos partiendo de que si hay dos triángulos que tienen los tres lados congruentes esos triángulos son congruentes. ¿Se entendió?. Basta con mirarle los lados para decir que van a ser congruentes. Esto es la idea.

Prof: Segundo criterio. (Escribe en el pizarrón).

"Dos triángulos son congruentes si tienen un lado y dos ángulos adyacentes respectivamente congruentes o, un ángulo opuesto y otro adyacente al lado dado respectivamente congruente".

Prof: ¿Qué hacemos en este?. A ver si se dan cuenta. Decimos un lado y dos ángulos adyacentes o un ángulo opuesto y otro adyacente al lado dado respectivamente congruentes. (Va señalando lo escrito en el pizarrón a medida que lee). De los problemas que tenían...

Al: Hay dos.

Prof: Claro, acá están juntos dos problemas que teníamos ¿por qué?, porque el segundo problema que teníamos con los ángulos y el lado se podía resolver como el primero entonces por eso los pusimos juntos acá. ¿Está hasta ahí?

Prof: Vamos a poner tercer criterio.

Al: ¿Cuántos criterios son?

Prof: Cuatro. Vamos a enunciar cuatro. Dice el Tercer Criterio (lo escribe en el pizarrón).

"Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente congruente".

Prof: Cuarto criterio

"Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo opuesto al mayor de los dados, respectivamente congruentes".

Al: ¿Listo?

Prof: Ahí está listo. Miren qué quiere decir... Siempre estamos poniendo respectivamente congruentes, respectivamente congruentes, ¿qué quiere decir eso?

Ceci: Que son iguales.

Prof: ¿Qué son iguales?. Yo tengo dos triángulos y entonces ¿qué quiere decir eso? ¿qué se corresponden? ¿Qué es lo que tendría que comparar?.

Als: Los lados ..., ángulo.

Prof: ¿Cómo haríamos?. Vamos a dibujar dos triángulos.

Supongan que estos son los triángulos, vamos a anotarlos abc y vamos a poner def, esos son los triángulos. Yo los hice congruentes, entonces, vamos a decir que si son congruentes ¿qué van a tener?

Als: Los lados y los ángulos congruentes.

Prof: Pero no tenemos que comparar todos porque lo que escribimos ahí es que nosotros necesitamos tres datos convenientemente elegidos para decir que son congruentes. Entonces, por ejemplo ¿qué diríamos que tienen congruente?

Al: Los tres ángulos.

Prof: Y si tienen los tres ángulos ¿es un criterio?

Als: No, no.

Al: No, tienen la misma altura.

Prof: Escuchen una cosa. Nosotros recién estuvimos escribiendo criterios de congruencia de triángulos. ¿Para qué son esos criterios que escribimos ahí?. A ver Iris.

I: Los casos en que se puede construir un sólo triángulo.

Prof: ¿Qué quiere decir eso?

Al: Vamos a comparar los datos.

Prof: Exacto. Si yo comparo esos datos los ángulos van a ser todos iguales. ¿Qué cosas podríamos comparar? Tomemos un criterio. ¿Cuál puede ser?. Puede ser este. (Señalando el cuarto que quedó en el pizarrón) o el que ustedes quieran.

Al: El primer criterio.

Prof: Bueno.

Al: Dos triángulos son congruentes cuando tienen los tres lados respectivamente congruentes.

Prof: Respectivamente congruentes. Entonces ¿qué tendríamos que decir acá en estos triángulos?, ¿Quién es igual a quién?

Als: Lado ab igual a lado de.

Prof: Bueno vamos a poner congruente (escribe en el pizarrón). Esperen, ¿podrían poner que ab es congruente con bc, por ejemplo?.

Als: Sí.

Prof: ¿Por qué? ¿Qué triángulo dibujé yo en este caso?

Als: Isósceles acutángulo.

Prof: En este caso son iguales. Pero en realidad este lado (señala) es respectivamente congruente con qué lado (señala); y este lado con este. Nosotros tendríamos que decir que bc es congruente a ef y además ac es congruente con df. (Los alumnos acompañan a coro estas relaciones).

Prof: ¿Con esto ya basta para asegurar que los triángulos son congruentes?

Als: Sí

Prof: Sí, porque lo pusimos como criterio ¿nos importan los ángulos?

Als: No

Prof: No, en este caso no. Si los lados son congruentes los triángulos van a ser congruentes también. El tema del respectivamente se refiere a la ubicación, precisamente es lo que ustedes hacen acá sin darse cuenta prácticamente. Este lado lo voy a comparar con éste, este lado lo voy a comparar con éste y este lado con éste (señalando en el dibujo del pizarrón). A eso se está refiriendo. Esas ternas que escribimos ¿a qué se están refiriendo?. ¿ Estos criterios para qué nos sirven?.

Al: Para construir triángulos. ¿Y cómo van a ser esos triángulos?

Al: Congruentes.

Prof: Con esas ternas yo voy a tener ¿cuántos triángulos?

Al: Uno.

Prof: Un único triángulo. O sea que si a ustedes les doy los datos ya puestos, como hicimos en estas fotocopias, yo sé con eso que no van a aparecer veintisiete triángulos, sino que tiene que aparecer un sólo triángulo en todos los casos. Si es que lo hacemos bien, porque si copian mal los ángulos, si copian mal los lados más vale que no. Pero si ustedes lo hacen con precisión tendría que aparecer un sólo triángulo. Bien.

►Triángulos rectángulos; se reparte fotocopias con actividades (ver AIII-40). Suficiencia de datos, elementos y reglas de juego.

Prof: Ahora vamos a hacer otros problemas. Ahora les voy a entregar lo que vamos a trabajar. Me gustaría que se pusieran en grupo a trabajar, a ver si pueden resolver los problemas por grupos y mostrar cómo lo hacen.

Al: ¿De a cuántos?

Prof: De a cuatro. No vamos a hacer grupos multitudinarios.

Prof: Bueno, Vanesa leé.

V: Dibujá un triángulo rectángulo escaleno y otro rectángulo isósceles, nombra y marca sus elementos en ambos casos.(problema 8)

►Problema 9

1.

Prof: En el caso de la construcción del triángulo rectángulo no es necesario dar tres datos pues ya hay un dato conocido que es el ángulo recto. Construiremos triángulos rectángulos dados A) B) C) y D). Ahí tienen pares de triángulos rectángulos dibujados. ¿Bien?. Y después ¿qué dice abajo?.

V: En cada caso construir el triángulo rectángulo con los datos que se dan.

Prof: ¿Cuántos datos les estoy dando acá?

Als: Dos.

Prof: ¿Cuántos datos necesitamos en realidad?

Als: Tres.

Prof: ¿Dónde está el otro entonces?

Al: Hay que buscarlo.

Prof: ¿Hay que buscarlo?

Als: No.

Prof: Tienen dos datos ¿cuál es el tercer dato?.

Al: El ángulo recto.

Prof: El ángulo recto. Por eso no lo ponemos. Ustedes ya saben que si va a ser un triángulo rectángulo tiene además un ángulo recto.

2.

Prof; ¿Recuerdan cómo se llamaban los lados en el triángulo rectángulo?. Miren. Supongamos que fuera la escuadra. ¿La escuadra (toma la escuadra y muestra) es un triángulo rectángulo?

Als: Sí.

Prof: ¿Qué tipo de triángulo rectángulo?

Prof: Bah, no tiene que tener este agujero acá.

Als: Escaleno rectángulo.

Prof: ¿Cómo se llaman entonces los lados?

Als: Catetos.

Prof: ¿Cuáles son los catetos?

(Los chicos señalan en la escuadra)

Prof: Bien, serían los que forman el ángulo recto

Prof: ¿Y ésta? (Señalando la escuadra)

Als: La hipotenusa.

3.

Prof: Bien chicos. Después cada grupo va a contar los problemas, a ver cómo lo resuelven. ¡Nadie mide!. Todo el mundo usa el compás y la regla y nadie toma medidas de nada.

La profesora recorre los bancos, trabajan en grupos.

Comentarios a un grupo

Prof: En este problema A) los datos son estos. ¿Se entiende?. En el B) los datos que tenés son la hipotenusa y un cateto. En el C) bien y en el D) lo mismo. ¿se entiende?.

Prof: Chicos ¿a ver si escuchan?. Los problemas los resuelven en la fotocopia para eso dejé tanto lugar. No voy a dejar tanto lugar para que después hagan el cuadriculado ustedes. Nada de cuadriculado. Acá con regla y compás (señalando la fotocopia).

Prof: Les voy a contar cuál es la idea por si hoy no terminamos para que el día viernes lo traigan hecho. El hecho de trabajar en grupo es parar que en grupo vayan resolviendo las construcciones. Después, cada grupo se va a hacer cargo de una construcción y la va a explicar en el pizarrón para los demás compañeros. Por eso están en grupo para corregir las construcciones; para ver como se hacen y para poder explicarlas. El objetivo del grupo es que el grupo vea el procedimiento para resolver esos problemas. Entonces, charlen pero trabajen también.

La profesora recorre los grupos. Los alumnos trabajan y comparan las producciones al trasluz

Prof: Para la clase del viernes, van a traer terminado este trabajo y además van a traer pensado como trabajaron porque cada grupo lo va a hacer en el pizarrón y además, vayan viendo qué datos tuvieron en cada uno de los problemas para hacer las construcciones y lo anotan también en la hoja. En cada caso qué datos me dieron para hacer las construcciones.

CLASE 15

►Se retoma problema 9, se resuelve el inciso A)

Construir un triángulo rectángulo dados dos catetos

4.

Prof: ¿Para el primer problema qué datos teníamos?.

Ceci: Como era el triángulo.

Prof: No, no. Arranquemos de las construcciones directamente porque lo otro ustedes ya lo saben. Bien.

Prof: Para la primera construcción ¿qué datos teníamos?

Al: Dos lados.

Prof: ¿Qué lados?

Al: Catetos

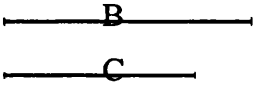
Prof: Los dos catetos teníamos. ¿Quién va a pasar a resolver el problema?

Iris: Yo.

Prof: Bueno, dale Iris, llevate si querés la hoja a mi escritorio y la mirás. Poné los datos que teníamos. ¿Cuáles son los datos que nos dan?.

Prof: Ponele las letras. Bien, Iris

Iris dibuja y agrega notación



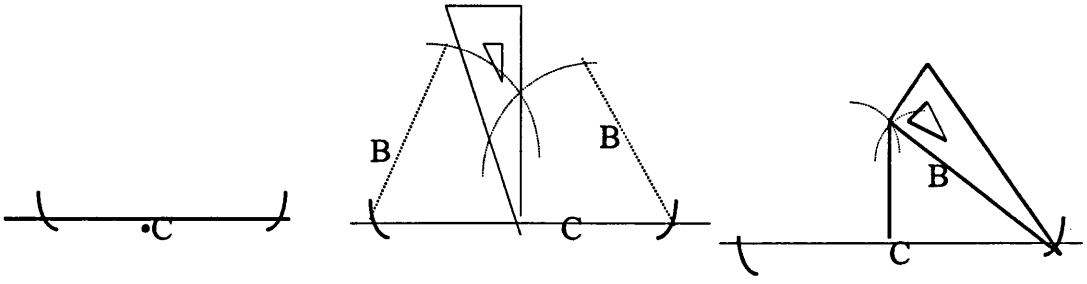
► La alumna hace la construcción, cambia el problema, construye un triángulo rectángulo dados un cateto y la hipotenusa (inciso B). No se percibe este error.

I: No sé si está bien. Nosotros lo hicimos así. Marcamos C para un lado y para el otro.

Prof: ¿C para el otro?

I: No...

Iris transporta C, con compás, a ambos lados de un punto de una recta. Apoya el compás en los extremos determinados y hace dos arcos de circunferencias de radio B.



5.

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA BIBLIOTECA DE CIÈNCIES

Prof: Ella podría tener ahí el triángulo del otro lado ¿no es cierto?

6.

Prof: ¿Alguien lo hizo de otra forma a esto? ¿Todos hicieron este procedimiento? ¿Vos lo hiciste así Ayelén? ¿Hiciste como hizo ella? ¿Copiaste C dos veces ¿todo así?.

A: Sí.

Prof: ¿Todos hicieron así? ¿Todos pusieron un punto en una recta, pusieron el compás y pusieron C dos veces?

Al: No.

7.

► Otra alumna hace otra resolución; toma como datos los catetos

Prof: ¿Cómo hiciste vos Florencia?

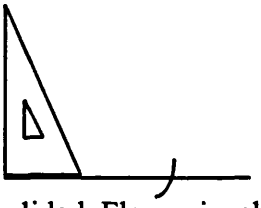
F: Puse una línea.

Prof: Trazaste la línea.

F: Marqué C con el compás.

Prof: Hacelo Florencia acá abajo.

Flor. transporta C, toma la escuadra...



Prof: Una línea, es una semirrecta en realidad. Florencia, ahí trazaste la perpendicular.

F: Sí.

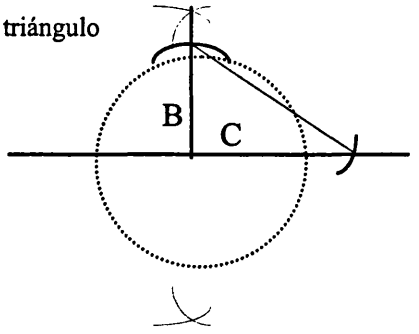
Prof: Suponete que no usamos la escuadra ¿cómo te arreglarías para hacer con el compás esa perpendicular?

F: Y con...

Prof: Hacelo. La intención tuya está bárbara pero vamos a prescindir de la escuadra. Vamos a ver si podés con el compás hacer esa perpendicular ahí. Ustedes saben hacer perpendiculares por un punto, por un punto exterior.

Prof: Bien, hiciste una circunferencia. Y ahora ¿qué hacemos?.

Florencia traza la perpendicular con regla y compás. Toma la escuadra y como ve que no le alcanza toma la regla. Luego transporta B y con la escuadra termina el triángulo



8.

Prof: Bien, ¿hicieron así ustedes? ¿Todos usaron el compás?

Als: Sí.

Prof: ¿Por qué están diciendo cosas que no son si el otro día estaban haciendo con los cuadritos todo?

Andrea: Yo lo hice así. (Muestra su hoja).

Prof: Con los cuadritos de las hojas de las carpetas. Había algunos que hacían estos triángulos midiendo. Florencia tuvo la primera intención de usar escuadra porque es cierto, si yo tengo el cateto C y si apoyo la escuadra convenientemente .... La escuadra me está marcando un ángulo recto acá, pero nosotros estamos haciendo la construcción sin la escuadra con la regla y el compás. Es como que la escuadra no existiera en este tipo de construcciones.

9.

Prof: Fíjense, trazamos el cateto C y después todo se reduce a trazar una recta perpendicular.

Construir un triángulo rectángulo dados un cateto y la hipotenusa

►Pasa una alumna a ejecutar su plan.

1.

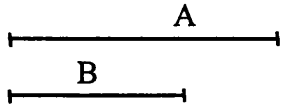
Prof: Vamos a hacer ahora el que sigue. ¿Qué datos tenían?

Als: ¿Pero cuáles son esos lados ahora?

Al: Un cateto y la hipotenusa

Prof: A ver quién va a hacer ahora la construcción que sigue. Bueno Paula.

Paula usa los segmentos que son datos del problema anterior modificando las letras



Prof: Vamos a corregir los datos.

2.

Paula resuelve, hace una recta, marca un punto y transporta B a ambos lados

Prof: ¿Qué marcaste primero Paula?

P: Un punto.

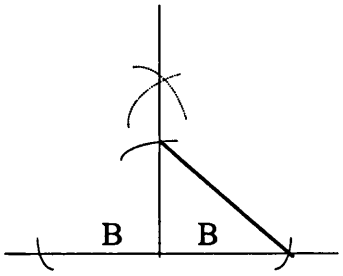
Prof: ¿Ahí que llevaste?

P: B (señalando en el pizarrón)

Prof: Ponele B a quién es B. Bueno, ahí está, es B y ese también es B.

Paula sigue su resolución, apoya el compás en los extremos determinados y hace arcos de circunferencia,

traza la perpendicular. En la solución está implícito el método de los dos lugares (el tercer vértice es la intersección de la perpendicular a B por uno de sus extremos y la C(x,A), siendo x el otro extremo de B)



P: Podría ser acá...

Prof: Podría ser del otro lado también.

3.

Prof: ¿Cómo hiciste Paula?, ¿haber si lo podés contar?

P: Marqué B de un lado y el otro y después marqué los arquitos el ángulo recto, más de la mitad dos arquitos y después A.

Prof: Estos dos arquitos que vos decís ahí ¿qué determinan?

P: La mitad.

Prof: No, no. Esos arquitos ahí. ¿Para qué hacés esos arquitos ahí?

P: Para hacer la perpendicular...

Prof: No, más simple todavía. ¿Para qué hacés los arquitos? ¿Qué te dan esos arquitos?

P: El ángulo recto. (ríe). ¡Ah!, un punto.

Prof: Un punto. Ves, necesito otro punto. Porque para una recta ¿cuántos puntos necesito?

Als: dos puntos.

Prof: Ya tengo uno sobre la recta que está en este momento horizontal entonces necesito otro para trazar la recta perpendicular ¿alguien hizo esto de otra manera?. Vamos a hacer el que sigue.

Construir un triángulo rectángulo dados un cateto y un ángulo adyacente

1.

Prof: ¿Cuáles son los datos del otro problema?

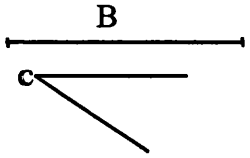
Als: Un ángulo y un lado.

Prof: ¿Qué lado? Hablemos si es un cateto o la hipotenusa

Als: Un cateto.

Prof: Bien. ¿Quién va a dibujarlos en el pizarrón?.

▸Pasa Ayelén, dibuja los datos



2.

▸ Ayelén ejecuta su plan, transporta el cateto B y traza una perpendicular por uno de sus extremos

Prof: ¿Qué hiciste Aye?

A: Una recta.

Prof: Sí, una semirrecta. Hacé toda la circunferencia. ¿Podrás?. Porque esos arcos ¿son arcos de qué?, ¿a qué pertenecen esos arcos?

A: A la circunferencia.

Prof: ¿Cuántas circunferencias tenés ahí?

A: Dos

Prof: ¿Y ese punto que tenés arriba? ¿Cómo es ese punto con respecto a la circunferencia?

A: Corta a las dos circunferencias.

Prof: Es un punto que corta o es de la circunferencia.

A: O sea es de las dos... es la intersección

Prof: Exactamente es la intersección de las dos circunferencias ese punto ¿cómo habíamos definido nosotros a la circunferencia?

Als: Como lugar geométrico.

Prof: Como el lugar geométrico

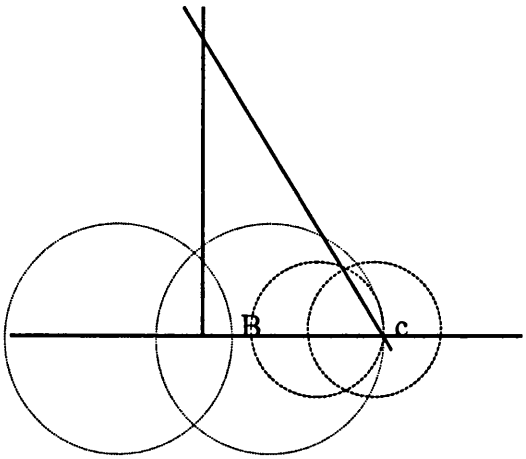
Prof: En realidad ¿cuántos puntos de intersección tenemos de esas circunferencias ahí?

A: Dos

3.

▸ Luego Ayelén copia el ángulo en el otro extremo de B.

Prof: Bien. También es una circunferencia esa. Más grande Aye ¿qué es eso también?...o sea que de nuevo ahí tenemos la intersección ¿de qué?...de dos circunferencias.



4.

► Ayelén explicita su resolución:

Prof: ¿Cómo hiciste Aye?. A ver si lo podés contar.

A: Primero tracé una semirrecta y tracé dos veces B. Después del punto que me quedó en el medio tracé la mediatriz, que me daría el ángulo recto y en el otro extremo de B tracé una circunferencia.

Prof: ¿Para qué hiciste eso?

A: Para que una marcara el c.

Prof: ¿Y qué es el c?

A: El ángulo.

Prof: El ángulo. Estabas copiando el ángulo ahí.

A: Después tomé la medida y tracé desde B hasta la recta donde me había quedado la medida del ángulo.

5.

Prof: Con eso que tenés hecho ¿dónde podría haber quedado el mismo triángulo?

A: (Señala a la izquierda).

Prof: ¿Ahí o dónde? de acuerdo al ángulo que tenés ahí. Mirá Aye, esto te estoy preguntando: vos no tenés el ángulo copiado acá (señala a la izquierda), vos lo tenés acá (señala a la derecha). Si nosotros hubiéramos prolongado esto (señala la perpendicular), hubiéramos tenido un punto acá (señala abajo). ¿Dónde estaría el triángulo?

(Ayelén señala a la derecha abajo)

Prof: O sea que este dibujo que hizo Ayelén acá también lo podríamos haber tenido acá. ¿Serían congruentes los triángulos?.

Als: Sí.

Prof: Bien.

Construir un triángulo rectángulo dados un ángulo y la hipotenusa

1.

Prof: El último queda. ¿Qué datos te dan en el último?

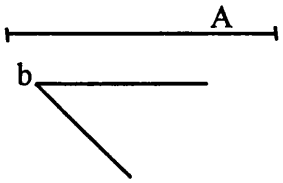
Al: Un ángulo y la hipotenusa.

Prof: ¿Quién va a hacer la construcción del último problema?

Prof: Bueno Iris dale.

►Pasa Iris, dibuja los datos

Datos



2.

Prof: ¿Cómo son esos ángulos que han tenido de datos?

Als: Agudos.

Prof: ¿Podríamos haber tenido de datos un ángulo recto?

Al: No sería lo mismo.

Prof: ¿Podríamos haber tomado de datos un ángulo recto sabiendo las condiciones del problema?

W: Para mí que no.

Prof: ¿Para vos que no? ¿Por qué no?.

C: Para mí que sí.

Aye: No, no podría Ceci porque si tenés otro ángulo recto y hacés un ángulo recto te queda así el triángulo. No queda triángulo.

Prof: Ceci; teniendo en cuenta las condiciones del problema que hay que construir un triángulo rectángulo. Vos ya sabés que hay un ángulo recto.

Ceci: Yo pensaba que era este, que daría este.

Prof: Ah...ella pensaba que era un ángulo recto de ahí.

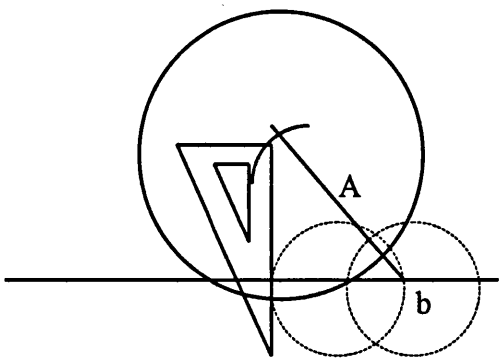
Prof: ¿Un ángulo obtuso podría tener de dato?

Als: No.

Prof: O sea que el dato siempre tiene que ser un ángulo agudo para un triángulo rectángulo

3.

▸ Iris realiza su resolución. Copia el ángulo; transporta A; toma la escuadra y la pone sobre el pizarrón.



Prof: Esperá Iris. Ponele nombre a lo que ya copiaste. Ponele letras. Iris pone A y b.

4.

Prof: ¿Qué falta ahora?

I: Para trazar la perpendicular hice la circunferencia...

Prof: Pero vos querés trazar la perpendicular ¿por dónde?

(I. señala en el pizarrón la recta horizontal)

Prof: Desde ahí y que corte ¿dónde?.

Iris señala el extremo de A recientemente hallado.

Prof: Bien. Vos tenés que trazar una perpendicular ahí.

▸ Iris se pierde al tratar de trazar la perpendicular

Prof: ¿Y cómo hiciste?.

I: Por éste punto (señala el extremo de A).Tracé una circunferencia.

Prof: Trazaste una circunferencia y te quedaron ahí ¿cuántos puntos?.(Iris señala la recta horizontal)

I: Dos.

Prof: Pero ahí. ¿Sobre esa, es que tengo que determinar los puntos?

I: Si hay que trazar una perpendicular a ésta.

Prof: Una perpendicular a esa pero ¿por dónde?.

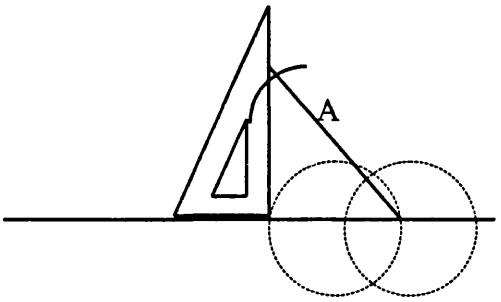
I: Por este punto (señala el extremo de A).

Prof: ¿Y entonces?

I: Y entonces lo estoy haciendo.

Prof: Se te están mezclando los tantos. A ver.

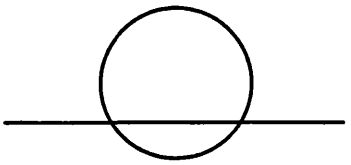
I: No sé, yo lo había hecho así. Yo había copiado el A y había hecho así. (Señala poniendo la escuadra para trazar la perpendicular)



5.

► La profesora hace un dibujo a parte para repasar el trazado de perpendicular

Prof: Yo tengo que trazar la perpendicular a esta recta (señala la horizontal) que pase por este punto (señala el extremo de A). Esto vamos a sacarlo de ahí. Mirá cómo hay que hacer.



I: Desde ese punto.

Prof: Trazo desde ese punto la circunferencia. Quedaron estos puntos (marca ahora en la construcción original). Eso es lo que hay que ir diciendo.

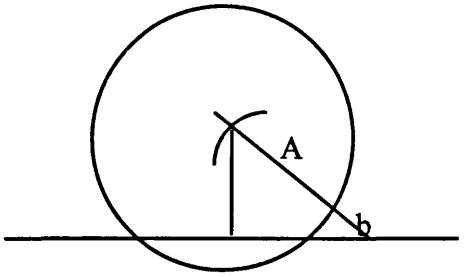
Iris hace el procedimiento

I: Queda un punto.

Prof: Hacé más grande para que se note que son dos circunferencias.

Prof: ¿Qué te determinan esas circunferencia ahí?

I: Un punto.



6.

Prof: ¿Dónde hubiera quedado el otro triángulo aprovechando ese dibujo? Iris:

Iris señala la izquierda.

Prof: ¿Para aquel lado?. Mirá Iris, esto te estoy preguntando. Suponete que vos prolongaras acá (la recta perpendicular) y trazaras estas circunferencias acá (la del

copiado del ángulo), tendrías el ángulo también ahí ("abajo") ¿dónde te quedaría el otro triángulo? ¿Allá?

I: No, acá (señala abajo y a la derecha).

Prof: Podríamos haber hecho lo mismo acá. ¿Son congruentes los triángulos?

Als: Sí.

7.

▸ De las construcciones de los cuatro últimos problemas se infieren los criterios de congruencia de triángulos rectángulos

Prof: Estos casos que vimos en estos problemas también constituyen criterios de congruencia de triángulos rectángulos. Entonces ustedes van a redactar los criterios de congruencia de los triángulos rectángulos. ¿Lo decimos oralmente?. A ver mirando esos dibujos. ¿Cómo podríamos enunciar? ¿Qué teníamos como dato en el primer caso?

Als: Dos catetos.

Prof: ¿Cómo podemos enunciar?

Ayelén: Podemos trazar un triángulo rectángulo teniendo la medida de sus dos catetos.

Prof: Exacto. O decir: *"Dos triángulos rectángulos son congruentes cuando tienen los dos catetos respectivamente congruentes"*. Ese sería uno.

A: Un cateto y la hipotenusa.

Prof: Bien, en el caso que dije, ¿el c)? ¿Qué sería?. Cecilia, Romina.

R: En el 3) sería un cateto y un ángulo.

Prof: Un ángulo ¿cómo sería ese ángulo?

R: Adyacente.

Prof: ¿Por qué decís cualquier cosa? Romina, ¿adyacente a quiénes? ¿Cómo es ese ángulo?

R: Agudo.

Prof: Agudo. ¿ Y para el caso que sigue? ¿Para el último? ¿Qué nos dan como dato?. El ángulo y ...

Al: Un lado.

Prof: ¿Qué lado? Christian.

C: Un ángulo y la hipotenusa.

Prof: Un ángulo agudo y la hipotenusa.

Prof: ¿Cuántos criterios tenemos?

Als: cuatro

Prof: Los vamos a redactar correctamente y lo vamos a leer. Lo hacen en un ratito y lo vamos a leer. Puede ser atrás de la hoja que tienen o puede ser en la carpeta.

La profesora recorre los bancos.

Comentarios:

Prof: Santiago ponele quién es A, B y C, todas las letras de los datos en los triángulos que hacés.

Prof: A ver tus triángulos Romi. (Le muestra la hoja).

Prof: ¿A es esto?. C anda volando por ahí... Están mal puestos los datos, ponelos bien.

Prof: Diego ¿qué datos tenés en el punto B?

D: El cateto y la hipotenusa.

Prof: ¿Quién es la hipotenusa de estos dos?

D: A.

Prof: ¿Y por qué le ponés A al cateto?. Arreglalo, B y C. Está B que anda volando acá ¿qué sería? ... Bien, ¿a ver acá abajo qué hiciste?. Este C es el ángulo ponelo acá en el vértice, no acá. Acá volvemos a lo mismo. ¿Quién es A en este último?. Donde ponés B es A.

Prof: ¿Empezamos? Diego leé uno.

D: ¿El primero?

Prof: El que quieras supongo que lo habrán hecho en orden.

D: Se pueden construir dos triángulos congruentes sabiendo que las medidas de sus catetos es menor que la hipotenusa.

Prof: ¿Está bien lo que dice Diego?

Prof: Vamos por parte. Nosotros dijimos que estos problemas que resolvimos originaron o son criterios de congruencia de triángulos rectángulos. En el caso A ¿qué me dan de dato?

Als: Los catetos.

Prof: Entonces dos triángulos rectángulos van a ser congruentes cuando tienen ¿qué cosa congruente?. Si las medidas de sus catetos son congruentes yo ya puedo decir que los triángulos son congruentes. Eso es. Volvemos a lo mismo.

Prof: ¿Cuándo dos triángulos son congruentes? ¿Qué tienen que tener igual?

Als: Los ángulos.

Prof: ¿Cuántos ángulos?

Als: Los tres.

Prof: ¿Cuántos lados?

Als: Los tres.

Prof: Son congruentes cuando tengo la congruencia de los tres lados y los tres ángulos. Pero la otra clase pasada habíamos dicho que no necesitamos mirar todo eso, que basta con tres datos que elegimos convenientemente ¿si o no?

Als: Sí.

Prof: Acá, qué dato es el que ya tenemos que solamente hay dos... por qué hay dos ¿cuál es el dato que ya tenemos?.

Al: El ángulo recto.

Prof: O sea que si sabemos que es un triángulo rectángulo tiene un ángulo recto. Entonces nos fijamos, a ver, qué dos cosas más le vamos a mirar. Bueno, si tienen los dos catetos congruentes, entonces son congruentes. Entonces ¿qué tendrías que haber enunciado ahí?

Prof: Pía ¿qué escribiste?

Pía: ¿En el número uno?

Prof: Sí

Pía: Si dos triángulos rectángulos son congruentes también la medida de sus catetos.

Ayelén: La medida de sus catetos son congruentes.

Prof: Bueno, si sus catetos son congruentes.

Prof: Milagros leé el segundo.

M: Se pueden obtener dos triángulos congruentes dados un cateto y la hipotenusa.

Prof: Si tienen un cateto y la hipotenusa respectivamente congruentes.

Prof: Esteban. El tercero.

E: Dado un ángulo agudo y un cateto se puede formar un triángulo congruente.

Prof: Pero estamos viendo que es congruente con otro. Redactalo correctamente.

Prof: Pamela, para ese mismo qué escribiste.

P: Para formar dos ángulos iguales....

Prof: ¿Dos ángulos?, dos triángulos congruentes.

P: Que tengan un cateto igual y un ángulo agudo igual.

Prof: Bien. Andrea. El último, el triángulo....

A: Podemos construir un triángulo rectángulo teniendo la medida de un ángulo y la hipotenusa.

Prof: Un triángulo rectángulo congruente con otro, eso es lo que hay que decir.

Prof: Agustina, leé el primero.

Ag: Podemos construir un rectángulo teniendo las medidas de sus catetos.

Prof: ¿Un rectángulo?

Ag: Un triángulo rectángulo teniendo la medida de sus catetos.

Prof: Yo lo que tengo que tratar de decir es que tiene que ser congruente con otro. Entonces: Dos triángulos rectángulos son congruentes cuando tienen ¿qué cosa? ... dos catetos respectivamente congruentes.

Prof: Iván, ¿qué escribiste?

I: ¿De cuál?

Prof: Del primero.

I: Se puede un triángulo rectángulo...

Prof: ¿Qué?... Florencia.

Flor: Se puede hacer un triángulo rectángulo teniendo las medidas de sus dos catetos también congruentes.

Prof: Hay un problema de enunciado.

Flor: Se pueden formar dos triángulos rectángulos congruentes con las medidas de sus dos catetos respectivamente congruentes.

Prof: Pablo ¿escribiste algo?, ¿Mariano?.

M: ¿Cuál?

M: Se pueden construir triángulos rectángulo congruentes...(no se escucha)

Prof: Leé el segundo...

M: Se pueden construir dos triángulos con un cateto y la hipotenusa.

Prof: Paula, el tercero.

P: Se pueden construir dos triángulos congruentes rectángulos cuando tenemos un lado, un cateto, un ángulo agudo respectivamente congruente.

Prof: Iris, los dos primeros.

I: Se pueden construir dos triángulos rectángulos sabiendo que sus catetos son respectivamente congruentes.

Prof: Santiago, el segundo.

S: Se pueden construir dos triángulos rectángulos si se sabe la medida de sus dos catetos.

Prof: Chicas allá...¿María José?

MJ: Cuál

Prof: El tercero leé por ejemplo.

MJ: Dos triángulos rectángulos son congruentes cuando sus catetos son iguales.

Prof: Pero ahí no tenés, está bien lo que decís, pero no es justo. El tercero que es el c) ¿qué datos tenías?. Mirá la fotocopia.

MJ: Los catetos.

Prof: ¿De datos los catetos? ¿Qué tenías?. Mirá lo marcado en el c).

MJ: Un cateto y un ángulo.

Prof: Exacto. ¿Qué había que decir?. Son congruentes dos triángulos rectángulos cuando tienen...

MJ: Dos catetos y sus ángulos iguales.

Prof: En ese caso un cateto y un ángulo.

MJ: Son iguales cuando un ángulo y sus catetos son iguales.

Prof: Bien. A ver María.

Ma: ¿El tercero?. Bueno. Dos triángulos rectángulos son congruentes teniendo un cateto y un ángulo agudo.

Prof: Respectivamente congruentes. A ver Vanesa, el último.

V: Dos triángulos rectángulos son congruentes teniendo la misma medida la hipotenusa y un ángulo agudo.

Prof: Juan, el último.

J: Dos triángulos rectángulos son congruentes cuando tienen un ángulo agudo y una hipotenusa.

Prof: Respectivamente congruentes.. Les falta siempre el pedacito final. A ver Ceci

Ceci: ¿Cuál?

Prof: El primero.

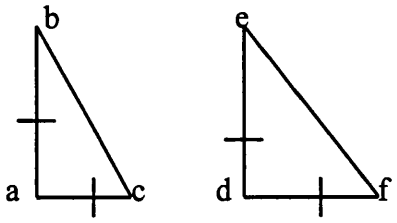
C: Dos ángulos...

Prof: Dos ángulos no.

C: Dos triángulos son congruentes cuando tienen dos catetos respectivamente congruentes.

Prof: Yo quiero aclararles algo que me parece que no tienen claro cuando enuncian estas cosas.

(Dibuja en el pizarrón):



Prof: Yo dibujé estos dos triángulos congruentes. Si son congruentes ¿cómo son sus elementos? ..... $\overline{ab}$ va a ser congruente con ...

Als: $\overline{de}$

Prof: $\overline{bc}$ va a ser congruente con ...

Als: $\overline{cf}$

Prof: $\overline{ac}$ va a ser congruente con ...

Als: $\overline{df}$

Prof: ¿Y los ángulos?. También van a ser congruentes. Pero lo que estamos viendo hay algunos que me parece que lo entienden pero hay otros que no. Yo no necesito comprobar todos esos datos para decir que son conguentes. ¿Se entiende?. Si tengo estos dos triángulos y me dan estos dos catetos (señalando), yo ya sé con eso solo que todo lo demás va a coincidir o que van a ser congruentes. ¿Se entiende cuál es la idea?. Si después me dicen, bueno mirá ahora tienen un ángulo agudo y la hipotenusa. ¿Puedo asegurar que son congruentes?

Als: Sí.

Prof: Sí, también. Es decir no tengo que decir ah!!, no porque me tenés que dar los catetos también, ¿se entiende lo que estamos hablando?. Con esos datos me aseguro que los triángulos son congruentes. Obviamente que todo lo demás me a coincidir porque si yo agarro este triángulo (señalando), y lo superpongo con este (hace el gesto), van a coincidir en todos sus puntos. Pero no necesito que me den los 6 datos para decir que hay congruencia. De eso se trata. Hay gente que la tiene clara y otros que no por las cosas que escriben.

Romina: Parece que yo también me pensaba que los dos catetos miden lo mismo, que un ángulo y la hipotenusa miden lo mismo, no comparándolo con el otro triángulo. Eso sea quizá lo que piensan.

Prof: A ver lo que pensabas vos. Repetilo.

R: Que, supongamos, el cateto $\overline{ba}$ y $\overline{ac}$ son iguales los dos, no comparandolo con el otro

triángulo.

Prof: ah!, que son respectivamente congruentes esos catetos.

R: Claro.

Prof: Ah!, en realidad uno dice que $\overline{ab}$ es congruente con el cateto correspondiente del otro triángulo. Y que $\overline{ac}$ va a ser congruente con el correspondiente del otro triángulo (señalando todo en el pizarrón). Ahora entiendo lo que decís, Romi. ¿Hay gente que pensaba lo que dice Romi? ¿Vos también Esteban?. ¿Vos creías que era así?. No. Nosotros tenemos dos triángulos, viste que vos agarrás la figura que construiste y la miraste con otra figura la de Paula, por ejemplo. La superponemos a las dos figuras y vemos que esas figuras coinciden. Entonces ¿qué quiere decir eso?. Que están coincidiendo todos los elementos que tienen. Bueno, estamos aclarando algunas cosas, chicos. ¿Se entendió?.

Als: Sí.

Prof: Por favor el que redactó incorrectamente lo hace correctamente y lo completa.

►Reparte las fotocopias con nuevas actividades.

Prof: Ahora les voy a dar para completar este trabajo cinco problemas de construcción, que van a traer hechos para el día martes. A ver qué hacen con esto. Lo van a traer para el día martes y van a estudiar porque la semana que viene ya vamos a hacer una evaluación o el miércoles o el viernes. Y vamos a terminar esto. Se van a tener que sentar un rato largo y pensar y usar la regla y el compás. El 19 tenemos cuatrimestral de matemática.

Prof: Miren el mensaje que puse en el borde ¿no?. Lean el problema. Miren el mensaje del borde... qué da como dato el primero de esa serie.

Al: Un lado.

Prof: ¿Da un lado?. A ver Ceci.

Ceci: La altura y los ángulos.

Prof: Ahora les doy la altura con respecto al lado A y los ángulos $\angle b$ y $\angle c$. O sea que ahora ya no les doy de dato ningún lado, eso es la altura correspondiente al lado. ¿Se entiende?. Por eso tienen que hacer la figura de análisis para ayudarse. O sea el dato es los dos ángulos del triángulo pero... ¿hay lado de dato?

Als: No.

Prof: ¿El dato quién es ahí?

Al: La altura.

Prof: La altura de un lado. ¿Cómo se traza la altura?

Ceci: Desde el... desde la mediana.

Aye: No.

Ceci: Sí, va de un vértice a donde está la mediana, a la mitad del lado.

Prof: No, esa es la mediana!. Primero, ¿la altura es una recta, un segmento, una semirrecta? ¿Qué es la altura?

Als: Un segmento

Prof: Un segmento. Hasta ahí estamos de acuerdo. ¿Cómo se traza la altura de un lado?

Als: Al lado opuesto

Prof: Pero ¿a cualquier parte del lado opuesto?

Al: Al punto medio

Prof: No señor, eso es la mediana.

CLASE 16

▸ 8.19hs: repaso de Mediatrices, Bisectrices, Alturas y Medianas de un triángulo.

Prof: ¿Cómo trazabamos las mediatrices? ¿Qué son las mediatrices en los triángulos?. A ver Ceci

C: Semirrectas

Prof: ¿Semirrectas o rectas?

Als: Rectas

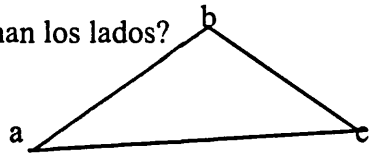
Prof: ¿Y cómo trazo esas rectas?

Al: Desde un punto del lado ...

Prof: ¿Desde un punto del lado? si son rectas!. O sea tengo el triángulo, vamos a dibujar un triángulo cualquiera y ¿cuál va a ser la mediatriz?. Va a ir por el medio del lado y ¿qué más? ¿Qué otra condición cumple? ¿Cómo tienen que ser?

Als: Perpendicular

Prof: Perpendicular al lado por el punto medio. Si ponemos a, b y c, sería como trazarle ¿qué cosa a los segmentos que forman los lados?



Al: La perpendicular

Prof: Por el punto medio. O sea son las mediatrices de los segmentos. O sea que para trazar las mediatrices tengo que trazar las mediatrices de estos segmentos, que son los que forman los lados. ¿Van a pasar por los vértices opuestos?

Als: No,... si

Prof: ¿Necesariamente?

Als: No

Prof: No, puede pasar pero ¿es condición?. No. ¿Cuál es la condición entonces?; tiene que ser perpendicular y pasar por el punto medio, esas son las condiciones. O sea que tengo que encontrar el punto medio y la perpendicular al lado, estoy trazando loa mediatriz. ¿Y las bisectrices qué son? ¿es recta, semirrecta o segmento?

Als: Semirrecta

Prof: ¿Desde dónde va?

Al: Desde el vértice al lado opuesto

Prof: ¿Y qué le hace al ángulo?

Als: Lo divide en dos

Prof: En dos partes que son ...

Als: Congruentes

Prof: ¿Qué son las alturas?

Als: Segmentos

Prof: Bien. ¿Cómo se trazan las alturas de un triángulo?; o sea un extremo lo tienen en el vértice opuesto

Al: Hasta el otro lado en forma perpendicular

Prof: O sea que es perpendicular al lado que quiero trazarle la altura y pasa por el vértice opuesto. Y la mediana ¿es un segmento? ¿una recta?

Als: Segmento

Prof: Segmento también. ¿Desde dónde hasta dónde va?, si es un segmento tienen extremos ¿no es cierto? ¿y dónde están?

Als: En el interior

Prof: Pero ¿en dónde? Uno en el vértice opuesto, ¿y el otro?...Mediana, la palabra lo está diciendo también ...

Al: Al medio

Prof: Al medio, a la mitad del lado. Esa era la más fácil, o sea que tomo la mitad del lado y al vértice opuesto

En la explicación va señalando cada recta notable en el triángulo dibujado

Prof: Repasemos, la altura ¿cómo sería?

Florencia: Desde un vértice al lado opuesto en forma perpendicular

Prof: Bien, perpendicular desde un vértice al lado opuesto. Bien. ¿Por qué estamos mirando estas cosas? porque las vamos a necesitar para los triángulos que tenían que dibujar o que vamos a dibujar. ¿Cómo anduvieron con esto?

Als: Bien

Prof: Intentaron algunas cosas?

Als: Todo

Prof: ¿Y? ¿No anduvo?

Als: Algunos

Prof: ¿Cuál por ejemplo? ¿El segundo?. Bueno, vamos a empezar por el primero, por el problema 10, a ver qué pasa.

"Construir un triángulo dados H_A y los ángulos adyacentes al lado A"

1.

Prof: ¿Qué datos tenemos?

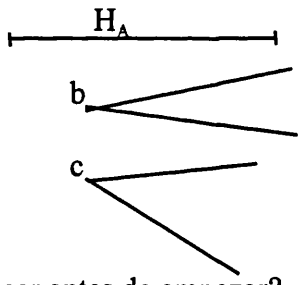
Als: Un lado

Prof: No, no tenemos un lado ¿qué tenemos?

Als: La altura

Prof: Tenemos una altura (dibuja un segmento) y tenemos dos ángulos. ¿Tenemos la altura de quien? Del lado A (la nombra) y tenemos dos ángulos ¿cómo se llaman? b y c. Estos serían los datos del problema.

Datos



2.

Prof: ¿Qué es lo que nos conviene hacer antes de empezar?

Als: Una figura

Prof: Una figura de análisis (lo escribe). La hicieron? ¿cómo les quedó?. A ver ¿quien la dibuja?. Ayelén hiciste la figura de análisis?

Ayelén: No, lo hice directamente

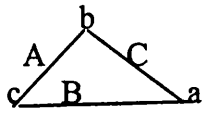
Prof: A ver Ayelén ¿cómo hiciste?, dibujalo en el pizarrón. El triángulo no, después se la van a arreglar para hacerlo.

3.

Prof: Chicos, cómo habría que hacer?. A ver, pensemos cómo habría que ubicar esos ángulos y cómo habría que ubicar la altura, ponganse a pensar. Si esto es H_A , es la altura con respecto al lado A y ¿donde van a estar b y c?. Nosotros no poníamos en un

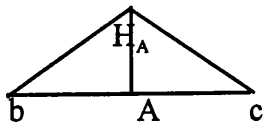
triángulo los datos de cualquier forma, siempre poníamos un lado y la misma letra al vértice opuesto. O sea en un triángulo (lo dibuja en un costado) si este es A ¿quién es a?, si este es B ¿quién es b? si este es C ¿quién es c?

4.



►Ayelén hace la figura y la borra antes de ejecutar su plan.

A: Éste es el lado A (dibuja un segmento horizontal), ésta la altura del lado A, el lado B y el C

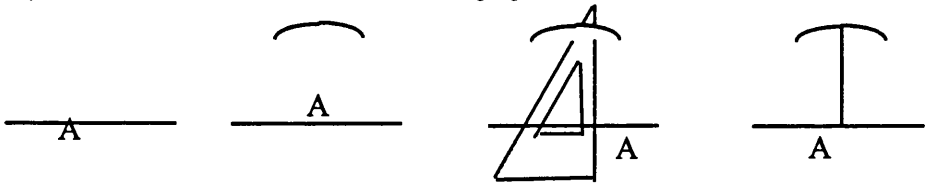


Prof: Bien, eso sería la idea. Y cómo empezarías a dibujar?

Prof: Por qué la borraste?

A: Porque así lo hago....

Risas. Ayelén traza una recta horizontal y la llama A, luego con abertura H_A apoya el compás en un punto de la misma y traza un arco, con la escuadra traza una perpendicular desde el lado hasta el arco.



Prof: Aparentemente lo que estas trazando Ayelén, es la altura ¿cómo va a ser esa altura que estás poniendo ahí?

A: Perpendicular

Prof: ¿Y así trazamos las perpendiculares?

Als: No

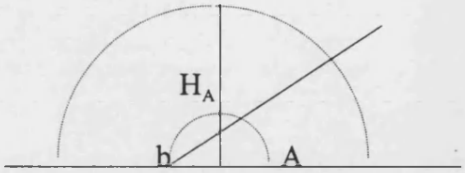
Prof: Entonces ¿qué es lo que tendríamos que hacer primero?

Aye: Encontrar dos puntos

Prof: ¿Y por qué no lo hacemos como corresponde?. Vos querés poner la altura, ¿por qué no hacemos con el compás la perpendicular que corresponde?. Borrala.

5.

►Nuevo intento de Ayelén. Traza con regla y compás la perpendicular por un punto perteneciente a la recta dibujada; transporta H_A sobre esa perpendicular, remarca H_A, copia el ángulo ∠b ubicando el vértice en uno de los puntos que era extremo del segmento auxiliar utilizado para trazar la perpendicular anterior.



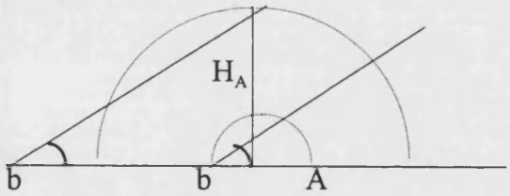
A: Ahora voy a trazar la paralela

Prof: Miren, ¿por qué ella quiere hacer otra cosa?. Miren si se entiende. Esta sería la altura, cuando copié el ángulo la altura quedó afuera. Si este es un ángulo del triángulo, miren donde está y miren donde está la altura. Ella copió el ∠b en cualquier parte, no hay un punto donde ponerlo entonces lo copió y la altura le quedó afuera, y ahora quiere ver si puede hacer que quede adentro. Entonces ¿qué vas a hacer?

A: Una paralela al lado (mientras hace la paralela al lado C)

6.

Prof: Éste es ∠b, y éste también es ∠b ¿no es cierto? ¿Por qué este ∠b es igual a éste?



Als: Entre paralelas

Prof: Están entre paralelas y ¿cómo son? ¿Cómo se llaman? Mírenlos a ver si recuerdan. Estas son las paralelas y ésta la transversal. A ver si recuerdan los nombres...

Al: Correspondientes

Prof: Correspondientes..., están en el mismo lado de la transversal, uno es interior y el otro exterior ¿es cierto eso?

Als: Si

Prof: Entonces este ángulo y éste nos quedan iguales porque son correspondientes. Ahora ¿está la altura en el triángulo?. Si, ahora logramos que esté adentro.

7.

Prof: ¿Qué nos faltaría ahora?, encontramos un vértice acá (b) y el otro vértice lo tenemos ahí (a) ¿qué nos faltaría?

Al: El otro vértice

8.

Prof: ¿Qué tenemos que hacer ahora?

Al: Copiar el ángulo c

Prof: Copiar el ∠c, y ¿sabemos dónde lo copiamos? ¿qué vamos a hacer? ¿sabemos dónde poner acá (señala recta A) el vértice que nos falta?. No.

Ayelén copia el ∠c y la H_A no se corresponde con el nuevo punto determinado, entonces traza la paralela con regla y compás y determina el vértice c.

Prof: ¿Qué le está pasando? ¿Está en el vértice que habíamos marcado?. No, Entonces ¿qué tenemos que hacer?

Als: La paralela

Prof: Bien, muy bien!.

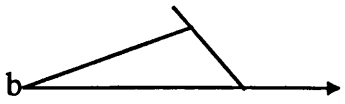
9.

Prof: Esta es una forma ¿Alguien tiene otra idea para hacer esto? ¿una idea más fácil?. No sé si es más fácil pero hay otra estrategia que podrían hacer; yo se las voy a contar.

10.

▸ La solución de la docente está dirigida por el Método de la Figura Semejante

Prof: Uds. trazan una semirrecta (dibuja a mano alzada) para empezar a dibujar. ¿Qué nos ocurre acá? Que no sabemos dónde copiar el ∠b y donde copiar el ∠c, que era lo que le pasaba a Ayelén. Entonces podemos copiar en cualquier punto, por ejemplo ahí. Vamos a hacer una figura de análisis y copiar ∠b acá (lo dibuja) y después copio ∠c en cualquier punto también (lo dibuja). La altura HA ¿dónde va a estar en esta figura? Desde este vértice (a) hasta..., pero ¿alguien me asegura que va a terminar acá (recta A)?. Yo de casualidad busqué este punto y copié ∠b, de casualidad busqué este punto y copié ∠c ¿y la voy a pegar justo en que ésta es la altura? (la dibuja). No, capaz que me pasa que la altura me quede hasta acá. Entonces ¿qué tendría que hacer? ¿se les ocurre?



Al: Bajar

Prof: Exactamente, prolongo este lado (C) y prolongo este (B) y es como que prolongo las semirrectas.

11.

Prof: Este ángulo (∠b) va a ser igual a éste?

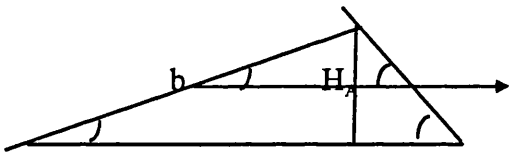
Als: Si

Prof: ¿Por qué?

Als: Están entre paralelas

Prof: ¿Y cómo son? Los dos del mismo lado de la transversal, uno afuera y uno adentro. ¡Correspondientes!, lo mismo que allá, es el mismo caso. Y este ángulo de acá ¿va a ser el mismo que el de acá?

Als: Sí, correspondientes



Prof: También correspondientes. Estas serían las paralelas y esta la transversal, y ahí me tendría que quedar. ¿Es más fácil?

Als: Sí

Prof: Bueno, a ver si les sale. No sé si es más fácil, es similar, a ver si les sale

12.

▸ La profesora pasa por los bancos; comprueba si los triángulos de los alumnos están bien superponiendolos con el triángulo que ella hizo en la planificación o les solicita que comprueben con otros compañeros.

Prof: Comprueben con el compañero

13.

Prof: ¡Revisen los ángulos!. Si no sale es porque no copian bien los ángulos. Están teniendo problemas porque copian mal los ángulos, hay falta de precisión. Están usando unos lápices con unas minas gordas, entonces ...¿cómo va a salir preciso?, Abren el compás un poquito más y se corre cuatro o cinco grados, y eso es mucho.

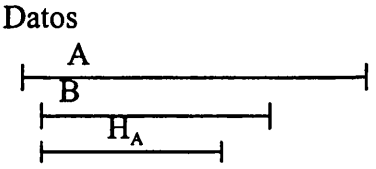
"Construir un triángulo dados dos lados y la altura respecto a uno de ellos"

1.

Prof: Vamos a hacer el problema 11. ¿Qué datos tenemos?

Als: Dos lados y la altura

Prof: ¿La altura de quien? De A



Mantuve la relación de los tamaños? Si. ¿A es el más largo? Luego B y luego la altura.

► La profesora se vale de un dibujo para representar el plan, lo llama figura de análisis. Las indicaciones están dirigidas por la condición.

2.

Prof: Bueno, ¿qué haríamos?. Hacemos la figura de análisis (lo escribe). Voy a hacer un segmento (dibuja segmento horizontal a mano alzada). ¿Este quien sería?

Als: A

Prof: A, no lo van a cambiar nunca de lugar ¿eh? (mientras lo nombra). ¿Dónde pongo la altura de A?

Al: En el medio

Prof: Pero...¿la altura va en el medio?

Florencia explicita un procedimiento que no se alcanza a oir

Prof: ¿En dónde va a estar la perpendicular?

Al: En el medio

Prof: ¿La altura está en el medio?

Als: No

3.

Prof: ¡Ah!. Florencia dice que primero no hay que hacer A (borra A). Primero ¿qué es lo que vamos a hacer? ¿Qué nos conviene?. La semirrecta y marco una perpendicular y marco la altura.

4.

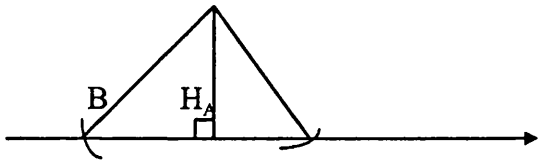
Prof: Si pusiera la altura acá ¿qué es este punto?. Bien, el vértice del triángulo. Acá tengo la altura sola, ¿qué puedo hacer ahora? ¿Puedo agarrar el compás y poner B? ¿Dónde pincharía?

Als: Ahí

Prof: Acá (a) y cortaría acá (hace a mano alzada un arco en la semirrecta). ¿Este punto qué sería?

Al: El otro vértice

Prof: el otro vértice (lo remarca y escribe B en el lado que corresponde). En realidad ¿qué dibujé?



Al: Un triángulo

Prof: Un triángulo, ¿qué triángulo?

Al: Rectángulo

Prof: ¿Rectángulo dónde? Acá (marca el ángulo recto). ¿Y ahora qué hago? ¿Puedo saber dónde va A?. Si, pongo el compás acá (c) y marco (hace un arco en la semirrecta y al segmento determinado lo llama A), y ahora uno y me quedaría.

5.

Prof: ¿Por dónde empezamos la construcción?

Als: Por la semirrecta

Prof: Bueno, la semirrecta es para...¿Por qué datos?

Als: La altura

Prof: La altura y ¿después qué copio?

Als: B y después A

Prof: Esa es una estrategia. No se si a alguien se le ocurre hacerlo de otra manera. Bueno, a ver si lo pueden hacer.

Prof: Sigan trabajando con los problemas y los traen terminados; el viernes vamos a evaluar esto.

CLASE 17

▸8.18hs: Se retoma el problema que quedó inconcluso

"Construir un triángulo dados dos lados y la altura respecto a uno de ellos"

Prof: Ayer habíamos hecho el 11?

Als: No, habíamos hecho la figura de análisis

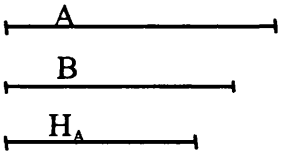
Prof: Ah, bueno, lo vemos para ver cómo quedó? Lo hicieron?

Als: Sí

Prof: ¿Qué datos tenemos?

Al: Dos lados y la altura de uno

Prof: Bueno, esos son los datos



¿Lo construyeron?. Bueno, a ver quién pasa para contarlo?. A ver... ¿Romina?

6.

▸ Pasa Romina: hace una semirrecta, y con abertura HA apoya el compás en un punto de la semirrecta y hace un arco

Prof: ¿Qué vas a hacer primero Romi?

R: La altura

Prof: Pero... para trazar la altura ¿qué tenías que hacer primero? ¿la altura va de cualquier forma?

R: La perpendicular. ¿La hago con la regla?

Prof: No, mirá toma un punto por acá (en la semirrecta) y trazá una perpendicular. En cualquier parte la perpendicular. A ver, escuchame, querés poner la altura, la altura tienen que ser perpendicular a esta semirrecta, por lo tanto lo que te estoy diciendo es que traces una recta perpendicular para después poner la altura ahí arriba. ¿Se entiende?

7.

► La profesora pasa por los bancos. Romina traza la perpendicular con la regla y quiere transportar sobre ésta H_A con compás.

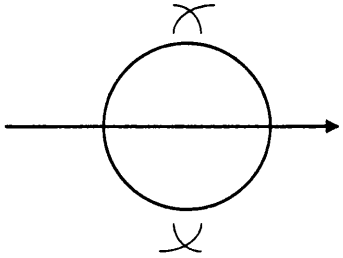
Als: ¡No! ¡Así no!

Prof: ¿Qué hizo?

Al: En vez de trazar con el compás y todo, lo hizo con la regla

Prof: Cómo se traza una perpendicular a una recta?. Pincha el compás ahí y ...¿qué tienen que hacer?. A ver Florencia hacé la perpendicular

Pasa Florencia



8.

Prof: ¿Qué es lo que trazamos en realidad?. Claro, una circunferencia. Y después con esos arquitos ¿qué estamos trazando también?. Claro, dos circunferencias.Y los puntos ¿dónde los tenemos?

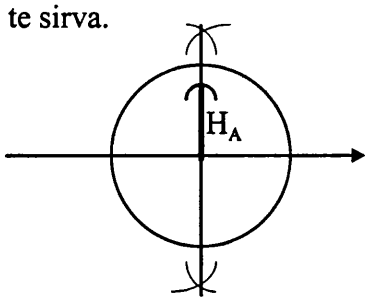
Als: En la intersección

Prof: En la intersección de las dos circunferencias

►Romina continúa el trabajo y traza la recta que pasa por los dos puntos hallados (tiene aspecto de segmento). Luego transporta H_A . Remarca la altura y la nombra

9.

Prof: Ahora vamos a poner la altura sobre esa perpendicular. Si querés limpia un poco el dibujo, borrá lo que no te sirva.



Prof: si acá tengo la altura ¿qué tengo acá del triángulo? (señala el extremo de la altura no perteneciente a la semirrecta)

Als: Un vértice

Prof: Acá ya tengo un vértice ¿qué me falta ahora?

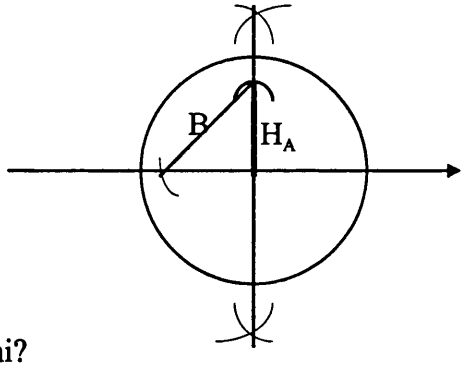
Als: Los otros

Prof: Los otros dos, que hay que ver donde están. Sé que éste es un vértice porque sé que la altura tiene un extremo en un vértice.

10.

► La alumna continua la construcción. La solución está dirigida por la condición.

Romina transporta B pero apoya el compás en el pie de la altura en lugar de hacerlo en el vértice, no obstante nombra con B al lado determinado por el punto hallado y el vértice inicial (error que pasó desapercibido)



Prof: ¿Ahí qué pusiste Romi?

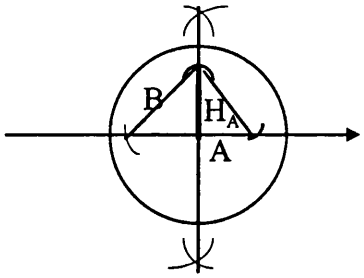
R: B

Prof: Bueno, ese es B. Y ese otro punto que tenés ahí qué es?

R: El otro vértice

Prof: Bien

Luego Romina transporta A sobre la semirrecta apoyando el compás en el ultimo vértice hallado, remarca A y termina su construcción.



► Se revisa la solución

11.

Prof: Bien, repasemos. ¿Primero qué puso Romina?

Als: Puso la altura

Prof: Bien; ¿podríamos haber puesto A primero?

Als: Sí

Prof: Y ¿qué hacíamos si trazábamos A primero?

Al: Le trazábamos la altura

Prof: ¿Y en dónde la trazábamos?

Al: En el punto medio

12.

Prof: ¿Y la altura va por el punto medio?

Als: No

Prof: A veces sí, a veces no; pero en general ¿va a ir la altura por el punto medio?

Als: Sí

Prof: ¿Sí?. ¡Vuelta a lo mismo!. ¿Cómo definimos la altura? ¿Qué es la altura?. Es la perpendicular al lado que pasa por el vértice opuesto. ¿Estamos diciendo algo del punto medio cuando definimos la altura?

Als: No

Prof: No, entonces no es condición; en algunos casos particulares pasa por el punto medio

13.

Tatiana: Yo lo hice distinto

Prof: ¿Cómo hiciste?. Hacelo en el pizarrón o por lo menos hacé una figura de análisis si no querés hacerlo. Lo primero que vamos a hacer es prolongar esta semirrecta porque sino no vas a tener donde poner A (prolonga la semirrecta inicial para ubicar esta construcción al lado de la otra)

► Pasa Tatiana y explicita su resolución. Construye un triángulo isósceles de lado A y altura H_A (caso particular): Transporta A y construye su mediatriz, luego sobre ella transporta la altura y une un extremo de A con el extremo de H_A, llamando B a este lado, y por último une los vértices restantes.

T: Yo copié primero A

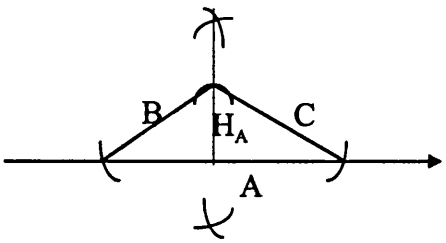
Prof: Ahí pusiste A, ¿y ahora qué estas marcando?

T: La bisectriz

Prof: No, la ....

T: Mediatriz

Prof: La mediatriz de A



14.

Prof: ¿Qué dicen uds? ¿son iguales los triángulos? El triángulo que hace Tatiana ¿cómo es?. Isósceles. ¿Y tenemos como dato que el triángulo es isósceles?

Als: No

Prof: ¿Qué es lo que supone Tatiana ahí para hacer ese triángulo?

Al: Que la altura va a estar en la mitad

Prof: Vos estás suponiendo que la altura está en la mitad del lado. Pero ¿es cierto eso en general?

T: No, algunas veces es cierto

Prof: Exacto, no tengo ningún indicio que el triángulo va a ser isósceles. ¿Qué está suponiendo ella? Que la altura va a estar en la mitad del lado, que en este caso va a ser base. ¿Eso es cierto? A veces si, pero no hay nada que nos diga que es así. Entonces el caso general ¿cual sería? éste que hicimos nosotros (señala la primera construcción) ¿Y éste qué sería?

Al: Una casualidad

Prof: No, sería un caso particular donde suponemos que este triángulo tiene dos lados iguales. A muchos se les debe haber ocurrido esto que hizo Tatiana, ¿o no?. Muchos habrán tenido la intencionalidad de decir lo pongo el medio y a otra historia pero... lo más general es lo que tenemos acá. Bueno, ¿hay otro método para esto?

Als: No

Prof: ¿Lo hicieron todos? ¿Lo entendieron?

"Construir un triángulo dados un lado, la altura y un ángulo adyacente respecto a dicho lado"

1.

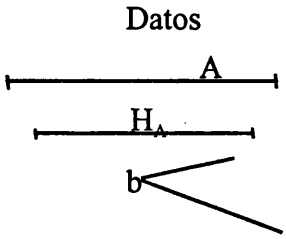
Prof: Bueno vamos a hacer el 12. ¿Cómo anduvieron con el 12?

Als: Mal

Prof: ¿Qué datos tenemos?

Als: Un lado, la altura del lado y un ángulo adyacente

Prof: Un ángulo adyacente al lado A, porque miren lo que dice "un ángulo adyacente y el segmento de altura correspondiente al lado"



2.

Prof: ¿Qué vamos a hacer primero? Vamos a hacer una figurita acá que nos permita ver cómo quedarían las cosas (escribe figura de análisis).

3.

Prof: ¿Qué harían primero?

Als: La base

Prof: La base A (dibuja segmento horizontal a mano alzada). ¿Después qué copiaríamos?

Al: El ángulo

Prof: Entonces acá tendríamos que copiar el ángulo (agrega el ángulo con vértice en un extremo del segmento). ¿Qué hago después?

Tatiana: La altura, con el compás marcas...

4.

Prof: ¿Y dónde pones el compás acá?

Tatiana: Así lo pones (gestos)

Prof: No, pero no puedo ponerlo en cualquier parte

5.

Prof: Escuchen, ¿cuántos vértices del triángulo tengo?

Als: Dos

Prof: Tengo este vértice y este (remarca los extremos del segmento). ¿Qué necesito?

Als: El tercero

Prof: El tercero, resulta que ahora voy a tener que ver dónde pongo el tercero, pero... no puedo calcularlo a ojo. Tengo que tratar de encontrar un punto y a partir de ahí poner lo que sería la altura. Porque uds podrían decir, agarro el compás, hago así (lo abre con abertura H_A) y más o menos ahí calculo, mas o menos... (lo apoya en diferentes puntos del segmento); calculo más o menos en algún lado y lo pongo. Pero no puedo hacer así. Tengo que encontrar donde está el tercer punto. Tengo que encontrar con precisión el punto donde ubicar el tercer vértice.

► Los alumnos balbucean algún plan pero no se los puede oír

6.

Prof: Si empezáramos la construcción por otro lado..., ¿por dónde?. Acá empezamos por A, pero si empezáramos por otro lado...

Al: H_A

Prof: A ver si empezamos por la altura ¿qué pasaría? (borra la figura). Parece que siempre quieren poner primero A, pero no siempre A es el más conveniente ¿vieron?, a veces hay que empezar por otro lado. En el problema anterior ¿por dónde empezamos?

Als: Por la altura

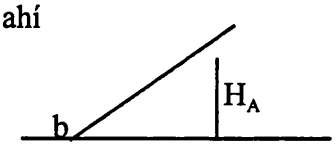
Prof: Por la altura, o sea que no se enganchen con que siempre va a ser A porque es la base y a partir de ahí voy a seguir, a veces no se puede y entonces hay que empezar por otro lado que es más conveniente. Probamos a ver qué pasa, no se puede, y entonces empezamos por otro lado. A ver, qué pasa si empezamos por la altura

7.

Prof: Pongo la altura H_A (dibuja recta horizontal y un segmento vertical y lo nombra H_A). ¿Qué puedo hacer ahora?

Al: El ángulo

Prof: Pongo el ángulo, no sé donde pero... , acá tengo un vértice (remarca extremo superior de H_A). Tengo acá un vértice pero acá (recta horizontal) no sé dónde está el otro; pero puedo copiar el ángulo, copio el ángulo ahí (lo dibuja sin pasar por el vértice), copié ∠b. Lo copié acá pero la altura está ahí

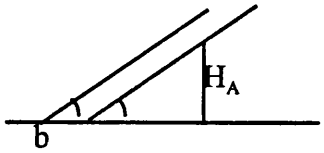


8.

Prof: ¿Qué puedo hacer? que ayer también lo hicimos...

Als: La paralela

Prof: La paralela, o sea que voy a desplazar el ángulo acá



9.

Prof: ¿Esto también es b? ¿Son estos ángulos iguales?

Als: Sí

Prof: ¿Cómo son?

Als: Correspondientes

Prof: Son correspondientes entre paralelas (borra la letra b del vértice del primer ángulo y llama b al vértice del nuevo ángulo).

10.

Prof: Acá ¿tengo un vértice del triángulo?

Als: Sí

Prof: ¿Cuántos vértices tengo?

Als: Dos

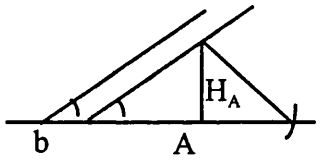
Prof: ¿Qué me falta ahora?

Als: El otro

Prof: El tercero. ¿Cómo hago ahora?

Al: Pones A

Prof: Pongo A acá. A ver si lo pueden hacer



11.

Prof: ¿Les va a salir? ¿Repasamos?

Als: Sí,...no,...

Prof: ¿Qué pusimos primero?

Als: La altura

Prof: Después de poner la altura ¿qué hicimos?

Als: El ángulo

Prof: Copiamos el ángulo en cualquier parte, pero no sabemos dónde, porque no tenemos el otro vértice. No nos quedó pasando por este vértice, entonces ¿qué hicimos?. Hicimos la paralela y lo trasladamos. Y después ¿qué hicimos?

Als: Pusimos A

Prof: Después copiamos A y nos quedó el triángulo

▸ La profesora pasa por los bancos. Los alumnos comparan sus construcciones al trasluz

Comentrarios a los grupos:

Al: ¿en cualquier lado la altura?

Prof: si, en cualquier lado

Prof: Ceci, tenes problemas en las paralelas, a simple vista se ve que no son paralelas. ¿Cómo se hacían las paralelas?. Bueno, no vamos a ponernos .... pero la idea es ésta.

Los alumnos comparan sus construcciones al trasluz

Prof: ¿Cómo trazaste la paralela Romi?

R: Así nomás

Prof: ¿Con el compás cómo hacíamos?

12.

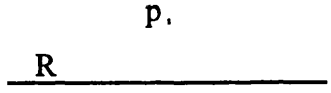
Prof: Chicos, ¿cómo trazábamos paralelas con el compás? Hacíamos paralela por un punto. ¿Cómo se hacían las paralelas con compás? Habían varios métodos o era único el método... ¿cómo se hacían?

R: Poníamos un punto

Prof: Había un punto porque trazábamos la paralela por un punto

R: Hacíamos una circunferencia con ese punto y determinamos dos puntos

Prof: A ver, para hacer la paralela tengo una recta y un punto (dibuja la situación a mano alzada), esto es R y esto es p



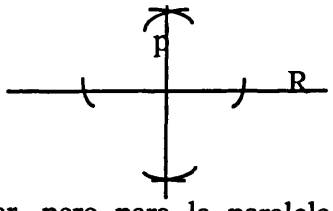
Ceci: Hay que poner el compás en el punto y hacer una circunferencia que pase por la recta y va a tocarla

Prof: Bueno, va a cortar acá (hace dos arcos en R) ¿Qué me permite hacer esto?

Al: La intersección de la recta y la circunferencia...

C: En un arquito pinchas y vas a hacer un arquito, después también en el otro punto....

La profesora sigue las instrucciones de Ceci y dibuja



Prof: ¿Y ahora? Ésta es la perpendicular, pero para la paralela ¿cuántos puntos necesito?

Als: Dos

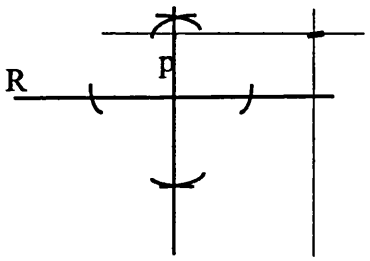
Prof: ¿Cómo encuentro el otro punto? ¿Qué harían? ¿Cómo busco otro punto para trazar la paralela?

Al: Hago otra perpendicular

Prof: Escuchen, hago otra perpendicular en cualquier lugar (la dibuja)

Al: Abro el compás

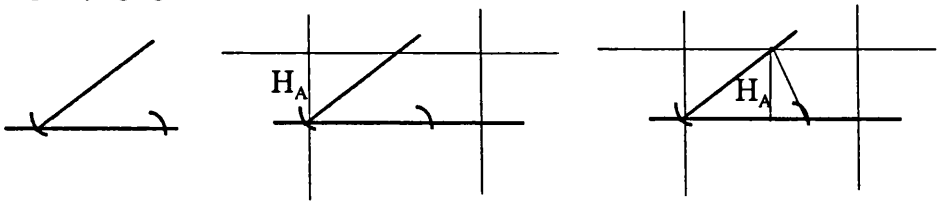
Prof: Abro el compás y esto sería la distancia de la recta a un punto (la señala). Tomo esta distancia y la llevo acá y ahí va la línea. Este es un método, no el método sino uno de tantos.



13.

Prof: ¿Se acuerdan que habíamos empezado con otra forma de hacer esto? Habíamos empezado con el lado; fue el método que proponía Tatiana, que ahora lo terminó de redondear, a ver si lo puede contar para que vean que hay otro método para resolver esto. ¿Lo hacés Tatiana?. Vieron que primero intentamos poner el lado A, vamos a poner A.

► La solución de la alumna está dirigida por el método de los dos lugares: Tatiana hace recta horizontal, transporta A, copia el ángulo en un extremo de A, y en ese extremo traza con regla y compás la perpendicular, luego traza otra perpendicular por otro punto de la recta inicial. Sobre ambas perpendiculares transporta H_A. Traza la paralela determinada y remarca el vértice buscado. Une y hace el triángulo y agrega la altura



14.

Prof: ¿Qué hiciste primero?

T: Primero puse A

Prof: Cuando tengo A ¿qué tengo determinado del triángulo?

T: Dos vértices

Prof: Ya tengo dos vértices y tengo que ver dónde va el otro

T: Después puse el ángulo b; después hice la perpendicular de la recta que había trazado al principio y abrí el compás con esta distancia (H_A) y lo puse ahí, la altura. Después hice lo mismo acá, tracé la perpendicular y trasladé la altura; y puse dos

puntos donde tracé la paralela; y en el punto donde la paralela cortaba en el lado del ángulo puse el otro vértice y después uní.

Prof: Bien.

"Construir un triángulo dados dos lados y la mediana respecto a uno de ellos"

Prof: Ahora vamos a hacer el último problema porque es más fácil que el penúltimo.

Al: No va a dar los temas de la prueba? ¿Sólo construir?

Prof: Construir, tienen que estudiar alturas, mediatrices, bisectrices y medianas de un triángulo. Obviamente que para eso tienen que saber trazar paralelas, perpendiculares, mediatrices.... Eso para el viernes

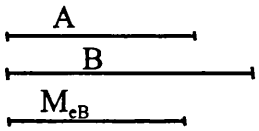
1.

Prof: ¿Cuáles son los datos del problema?

Als: Dos lados y ...

Prof: Dos lados, A y B, y la mediana. ¿Es A el más grande?, no

Datos



► La profesora hace una propuesta de plan, para lo cual hace un dibujo para representarla.

2.

Prof: Vamos a ver cómo nos quedan los datos (escribe figura de análisis).

Prof: ¿Qué harían? ¿B o A?

Als: B

3.

Prof: Bueno, pongo B (dibuja segmento horizontal). O sea que cuando tomo B ¿qué tengo del triángulo?

Als: Dos vértices

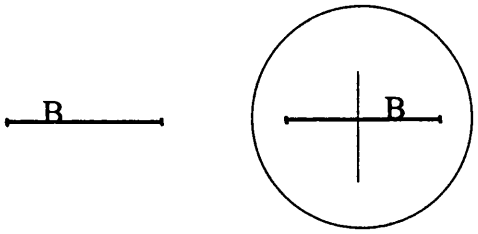
Prof: Tengo dos vértices.

4.

Prof: Ahora busco el punto medio, ¿qué haría para hallar el punto medio?. Si, la perpendicular, pero ...es la mediatriz. Voy a trazar la mediatriz del segmento(la dibuja y remarca el punto medio)

5.

Prof: ¿qué hago ahora? tomo esto (M_{eB}) y hago una circunferencia. ¿Qué sería eso?, ¿La mediana podría estar en cualquier punto de acá? (señala la circunferencia que dibujó)



Als: Si

Prof: Ahora cómo sé donde va a estar?

Ceci: Pinchamos el compás en el vértice y hacemos así (gestos de compás) para cortar a la circunferencia, y ahí me va a dar...

Prof: ¿Con qué medida hago?

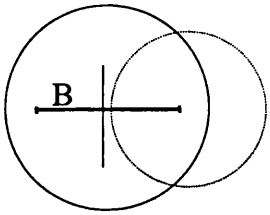
C: Con esa

Prof: Con la que me faltaba, con la de A. Ceci, dice ahora agarro la medida de A y apoyando en un vértice ¿qué hago con el compás? (dibuja circunferencia)

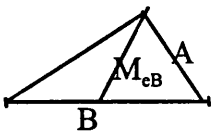
Als: Una circunferencia

Prof: Y eso ¿qué me va a dar?

Als: Un punto



Prof: El punto que va a ser el otro vértice, va a ser el punto de intersección de las dos circunferencias que dibujé. O sea que el dibujo en definitiva va a quedar así (borra las circunferencias para "limpiar el dibujo"). Vamos a poner A en algún lado y ahí la mediana de B



6.

Prof: ¿Qué particularidad tiene la mediana?, va desde un vértice hasta el punto medio; pero... ¿tiene que ser perpendicular?

Als: No

Prof: No, a veces sí. Bueno a ver si les sale

►Los alumnos trabajan y comparan al trasluz sus construcciones (verificación mediante superposición)

7.

► La profesora le pide a Ceci que lo haga en el pizarrón. La alumna hace una recta, transporta B y hace su mediatriz

Prof: ¿Y ahora qué hacemos?

C: Una circunferencia con la medida de A (comienza a construir una circunferencia con centro en el punto medio y radio A)

Prof: Ceci, pensemos un poquito. Cuando pusiste B ¿qué te quedaron determinados del triángulo?

C: Dos vértices

Prof: Ahora abriste el compás ¿con qué medida?, con A. ¿Y dónde va a tener que ponerse el compás ahí?. ¿Qué es A del triángulo?

C: Un lado

Prof: ¿Y dónde estas apoyando el compás?

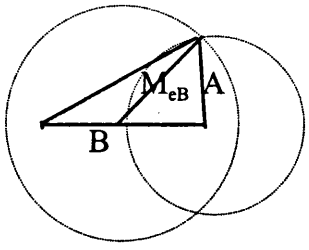
C: Acá, porque iba a hacer así.... y se van a cortar y ahí va el otro vértice

Prof: Pero con la medida del lado, ¿ahí donde va el punto medio?

Tatiana: Del punto medio tenés que sacar con la medida de la mediana, y de allá con la medida de A

Prof: Pensemos. Acá pusiste B y tenés dos vértices, después tomaste esta medida (A), si este es un lado ¿acá, adonde voy a apoyar el compás? ¿en la mitad va a estar el lado?. Tatiana te estaba explicando que lo hacías al revés. Si te apoyas en el punto medio ¿qué medida vas a tomar?

C: ésta (M_{eA})



8.

Prof: Chicos, no puse medidas que sean proporcionales con esas, puse cualquiera. ¿Alguien hizo otro método? ¿Qué triángulo nos quedó?

Als: Acutángulo

Prof: ¿Y con respecto a los lados?

Als: Isósceles

Prof: ¿Son iguales?

Als: No

Prof: Entonces es escaleno.

9.

Prof: Miren lo que pregunta Paula; si al lado A lo ponemos de este otro lado ¿va a ser lo mismo?. ¿Cómo quedaría?. Y... va a quedar para el otro lado. Vieron que a veces uds. tienen que dar vuelta el triángulo para ver si les da; es porque han tomado A en distinto lugar que yo. O sea que cuando hay que dar vuelta a la hoja es porque los datos no los tomamos en la misma posición. Pero... ¿importa la posición? No, importa que tomemos los datos que nos dan.

Prof: En la primera hora del viernes vamos a ver el problema que queda y luego hacemos la evaluación. Tienen que traer compás, lápices con punta, regla. Todos los dibujos los van a tener que hacer con regla y compás. Y los trazos del compás van a estar en la hoja. Estudien todo hasta acá. Fundamentalmente van a construir así que estudien construcción de paralela, perpendicular, mediatriz, bisectriz, altura, mediana,.... Nos vemos el viernes.

CLASE 18

▸ En la primera mitad de la clase se resuelve el problema que completa la secuencia de enseñanza. Luego se hace una evaluación escrita del tema (ver AIII-42).

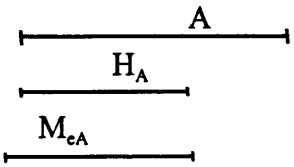
"Construir un triángulo dados un lado, la altura y la mediana respecto a dicho lado"

1.

Prof: ¿Qué datos tenemos?

Als: Un lado, la altura y la mediana del lado

Datos



Prof: Bien ¿es ésta la relación que tenemos entre los elementos?

Als: Sí

Prof: ¿Qué vamos a hacer ahora?

Al: Hacer un triángulo

2.

Prof: Pero ¿cómo hacemos? ¿uds lo hicieron? ¿Cómo hiciste Iris?

I: Está mal, tracé mal la altura

Prof: Trazaste mal la altura pero... ¿cómo hiciste? ¿Podrías contarlo?. Vamos a hacer una figura (escribe figura de análisis), hacemos la semirrecta, acá vamos a apoyar el dibujo. ¿Qué pusiste primero?

I: La altura

Prof: Primero la altura (la dibuja y nombra)

I: Después el lado A

Prof: Ésta es la altura. Si tengo la altura ¿qué tengo del triángulo en este extremo?

Als: Un vértice

Prof: Seguro que acá tengo un vértice, entonces ... ¿qué puedo poner?

3.

Prof: ¿Puedo poner la mediana?

Als: Sí...no...sí

Al: Pongo A

Prof: ¿Y dónde pongo A?.

4.

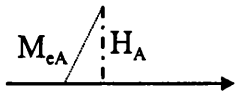
Prof: Suponete que esto es A (señala el cateto mayor de la escuadra) ¿la altura va estar en el punto medio de A?, volvemos siempre a lo mismo.

Als: No

Prof: A lo mejor sí, a lo mejor no; no sabemos. Pero ... ¿dónde pongo A?, puedo ponerlo acá o acá o acá (apoya la escuadra en diferentes lugares de la semirrecta).

5.

Prof: ¿Qué pondríamos ahora?, la mediana. Como la mediana tienen mayor longitud (señala los datos) entonces ésta sería la mediana (la dibuja y nombra). ¿Y ahora?



Tatiana: Pongo A y como tengo....

Prof: ¿El extremo de la mediana va a ser el punto medio del lado?

Al: Si

Prof: Entonces ¿qué voy a tratar de hacer? ¿ este punto qué será del lado A? (se refiere al extremo de la mediana)

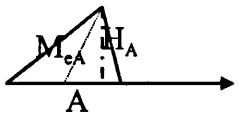
Al: Un vértice

Prof: No, ¿cómo un vértice de A? ¿Qué va a ser de A?

Als: Punto medio

Prof: El punto medio, entonces voy a tratar de poner A acá. Sería algo así (ubica segmentos en la semirrecta a ambos lados del extremo de la mediana). ¿Esto sería A? (lo remarca y nombra)

Figura de Análisis:



6.

Prof: ¿Hay otra forma de hacer esto? ¿Intentaron uds?. Bueno, vamos a repasar. ¿Qué hicimos acá?, Iris dijo que primero pongamos la altura, primero pusimos la altura, después...

Als: La mediana

Prof: Cuando puse la altura y la mediana ¿qué se forma también?

Al: Un triángulo

Prof: Se forma un primer triángulo ahí. Bien, y ¿después qué hacemos?

Als: Se pone A

Prof: Después ponemos A ¿cómo se pone A? ¿de cualquier forma?

Ceci: No, que la mediana quede en el centro del lado

Prof: O sea que este extremo de la mediana va a ser el punto medio ¿de quién?

Als: De A

Prof: Bueno, a ver si lo pueden construir ahora.

▸ Pasa por los bancos Los alumnos comparan su construcción con la hoja de la profesora o con la de sus compañeros (fase de verificación)

Comentarios de la profesora a distintos grupos:

Prof: ¿Cómo hiciste?. Fijate en esta mediana ¿es éste punto medio de A?. Esta altura no está perpendicular a la base.

Al: ¿Está bien?

Prof: ¿Miraste con tu compañero? ¿Por qué no miras con tu compañero?

7.

▸ La profesora hace pasar a una alumna. Dicha alumna hace una recta horizontal y con escuadra traza una perpendicular y transporta con compás H_A sobre la perpendicular

Prof: Hacemos esto en el pizarrón?. Bueno, dale Ceci

Prof: ¿Cómo trazaste esa perpendicular Ceci? ¿Con el compás?

C: Primero hice en cualquier lado una recta

Prof: Pero ¿cómo hiciste esa perpendicular? Porque no te vi

C: Hice una recta en cualquier lado

Al: ¡Con la regla!

Prof: ¿Cómo hay que hacer esa perpendicular?

C: Bueno, como si estuviera haciendo perpendiculares (gesticula con el compás)

Prof: ¿Y por qué no lo hiciste?. Borrala y hacela de nuevo bien.

(Ceci hace la perpendicular con regla y compás, y transporta con compás H_A sobre dicha perpendicular)

8.

Prof: Bueno, ahí ¿qué tenes determinado?

C: La altura y la perpendicular

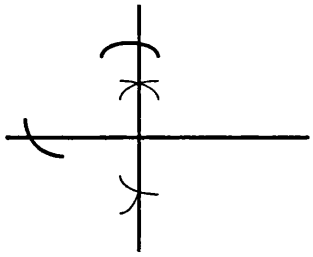
Prof: La altura y la perpendicular; y ese punto que marcaste ¿qué es del triángulo?

C: Un vértice

Prof: Ya tenemos un vértice

9.

► La alumna continua su resolución. Ceci apoya el compás en el vértice y con abertura M_{cA} hace un arco que corta a la recta dibujada inicialmente; y une el vértice con el último punto determinado. Luego establece un problema auxiliar "Dado A construir el segmento A/2".



Prof: ¿Esa sola marca se puede hacer con el compás?. Claro, si seguís el arco también se podría hacer del otro lado

C: Sí, se podría hacer de acá

Prof: Bien

10.

C: Entonces para que me quede bien en el medio, hice así para que me quede la mitad (traza la mediatriz del segmento A que es dato para obtener el segmento A/2).

Prof: Bien, ¿qué le trazaste ahí al segmento A?

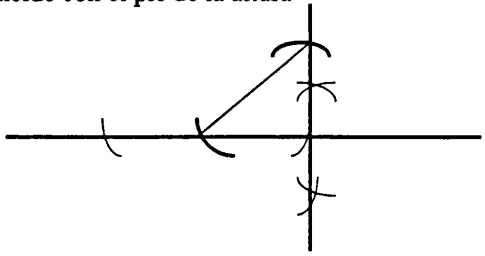
C: La mediatriz

Prof: ¿La mediatriz qué nos va a dar?

C: El punto medio

Prof: Bien

Ceci transporta A/2 sobre la recta inicial de uno y otro lado del punto correspondiente. Uno de los vértices que determina le coincide con el pie de la altura



11.

▸ La construcción de la alumna desemboca en un triángulo rectángulo que no coincide con el tipo de triángulo correspondiente a los datos que trabajó en su carpeta, por tanto dice que no ha llegado al resultado.

C: ¡No da!, tiene que ser un poquito más grande (el A/2)

Prof: ¿Y por qué les parece que no da?

Al: Porque hiciste más corto el lado

Prof: ¿Podrían ser cualquiera los datos?, ¿la altura, la mediana y el lado?

C: No, era que la suma de dos...

Prof: Eso era para el lado ¿qué decía la relación para el lado?

C: La suma de dos lados tiene que ser mayor que el otro lado

Prof: Pero, eso era para los lados. Pero, cuando tenemos el caso de tener la altura, la mediana y el otro lado ¿por qué no sale el dibujo?

C: Tiene que ser A un poco más grande

Prof: Porque es corto A; o sea que A no puede ser de cualquier forma. El error fue mío cuando puse los datos, bueno el error... No tuve en cuenta las medidas y puse tres segmentos cualquiera. ¿Funciona así con tres segmentos cualquiera?; entonces ¿qué tendríamos que hacer en este caso?

Al: Hacer más grande el lado

Prof: Entonces una solución podría haber sido hacer más grande el lado

C: O hacer más chicos a los otros

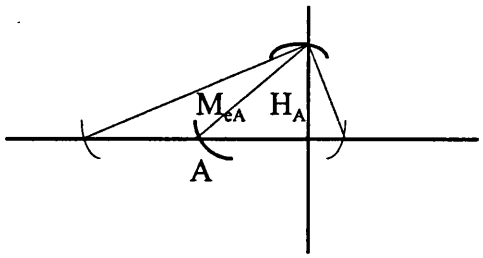
Prof: O haber reducido la medida de los otros

C: ¿Alargo A?

Prof: Bueno, hacé un poco más grande el lado A

▸Ceci borra parte de la construcción y alarga A. Repite el procedimiento y construye el triángulo con un nuevo valor de A.

Prof: ¿Ahora va a andar Ceci? Sí, justito. Bueno ponele los datos, quién es A, cuál es la altura y cuál la mediana



12.

►Hace referencia a resolver el problema de otra forma

Prof: Bien, quedaría pensar si hay otro método para resolver este problema. Ahora vamos a hacer la evaluación. Cada uno trabaja en su hoja, todo lo hacen con compás y regla; los trazos del compás tienen que estar en la hoja.

► En los cuarenta minutos restantes se realiza una evaluación escrita del tema – las actividades incluidas en esta instancia se hallan en la última hoja del Anexo III.

UNIVERSIDAD DE VALENCIA FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Reunido el Tribunal que suscribe, en el día de la fecha, acordó otorgar, por unanimidad, a esta Tesis doctoral de D.ª Liliana Eva Siñeriz de Cuello

la calificación de Sobresaliente Cum Laude

Valencia, a 27 de Septiembre de 1997 2000

El Secretario,

El Presidente