



Matemàtiques
T.D
209

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

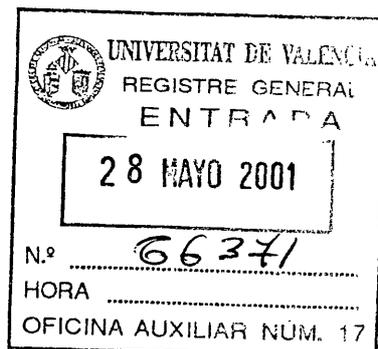
Departament d'Astronomia i Astrofísica

**Geometría del tensor de Weyl y simetrías
del campo gravitatorio**

Memoria presentada por **Juan Antonio Sáez Moreno** para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Dirigida por **Joan J. Ferrando Bagues**, profesor titular del Departament d'Astronomia i Astrofísica.

Burjassot, mayo de 2001



UMI Number: U603102

All rights reserved

INFORMATION TO ALL USERS

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted.

In the unlikely event that the author did not send a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if material had to be removed, a note will indicate the deletion.



UMI U603102

Published by ProQuest LLC 2014. Copyright in the Dissertation held by the Author.
Microform Edition © ProQuest LLC.

All rights reserved. This work is protected against
unauthorized copying under Title 17, United States Code.



ProQuest LLC
789 East Eisenhower Parkway
P.O. Box 1346
Ann Arbor, MI 48106-1346

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
BIBLIOTECA CIÈNCIES

Nº REGISTRE 17.964

DATA 3-2-02

SIGNATURA Biblioteca
T.D. 209 (Matemàtica)

Nº LIBIS: i18899298

b16739498

25cm

Joan J. Ferrando Bagues, Professor titular del Departament d'Astronomia i Astrofísica de la Universitat de València,

CERTIFICA:

Que la present Memòria, **GEOMETRÍA DEL TENSOR DE WEYL Y SIMETRÍAS DEL CAMPO GRAVITATORIO**, ha estat realitzada per **Juan Antonio Sáez Moreno** sota la meua direcció. Aquest treball constitueix la memòria presentada per l'autor per a optar al Grau de Doctor en Matemàtiques.

I perquè en prengueu coneixement i tinga els efectes que corresponguen, signe aquesta certificació, a Burjassot, el 21 de maig del 2001.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Joan Ferrando Bagues'. The signature is stylized with a large initial 'J' and a long horizontal stroke.

*TIRA la piedra de hoy,
olvida y duerme. Si es luz,
mañana la encontrarás,
ante la aurora, hecha sol.*

J. Ramón Jiménez, ETERNIDADES, 1917

Mientras escribo estas líneas empiezo a ser consciente de que parte del trabajo se ha acabado. No sé por qué, me acuerdo de mi pueblo. De la lluvia cayendo sobre el río. De un arco iris enorme después de la tormenta. Nunca he visto arco iris iguales. El cielo limpio. Y el aire de jara y de retama. Recuerdo los domingos de caza con mi padre. El silencio del monte. Tampoco luego he visto un monte como aquél, tan grande y tan callado. Toda la infancia duerme allí. Impregnada de monte, bautizada de lluvia, ungida de resina de jara. Acaso lo recuerdo porque salimos de allí para estudiar. No sé por qué, pero hoy me acuerdo de mi pueblo.

Aquí he encontrado otras cosas. Amigos como Vicente, que siempre ha estado cerca. Como Morales, que espero no vea pasar de largo otra Copa de Europa. Tengo que darles las gracias porque han estado ahí todo este tiempo, brindando apoyo y alegría.

Y gracias a Joan. Por su trabajo, sus risas y su tiempo. Aún tiene mucho que enseñarme.

Oso sigue aún aquí. Más cansado, más viejo y bastante más gordo. Pero su mirada es la misma. Y Carmen sigue aquí. Todo el tiempo a mi lado. Cuidando de una niña que llegó no hace mucho y que lo es todo. Y mis padres, que renunciaron a aquel pueblo pequeño. Y mis hermanos, Pepe, Raquel y Guada. Con ellos aún puedo hablar todo aquello: del río y de la lluvia; de montes y de caza. Gracias, porque me ayudan a no olvidarme de mi infancia.

A Ana Sáez Morillo

Índice

INTRODUCCIÓN	7
CAPÍTULO 1. Clasificación del tensor de Weyl	21
1.1 Algunas propiedades de las 2-formas	22
1.2 El espacio de las 2-formas autoduales	24
1.3 Clasificación de Petrov-Bel	28
1.4 Sobre las 2-formas de Debever	33
CAPÍTULO 2. Geometría del tensor de Weyl	37
2.1 Geometría del tipo N	38
2.2 Geometría del tipo III	40
2.3 Geometría del tipo D	43
2.4 Geometría del tipo II	45
2.5 Geometría del tipo I	48
2.6 Algunas clases de espacios de Tipo I	52
2.7 Tensor de Weyl puramente eléctrico	56
CAPÍTULO 3. Estructuras casi-producto $2 + 2$	61
3.1 Estructuras casi-producto	62
3.2 Tensores de Killing de orden 2	68
3.3 Métricas con simetría esférica	70
3.4 Espacios-tiempo estáticos	73
3.5 Espacios de Tipo I con radiación isótropa	80
3.6 Formalismo de Cartan complejo	81

CAPÍTULO 4. Métricas de Tipo I	87
4.1 Métricas de Tipo I y $\delta W = 0$	88
4.2 Killings con derivada propia del Weyl	90
4.3 Soluciones de vacío con valores propios constantes	94
4.4 Métricas de clase I_1 y Ricci nulo: Simetrías	97
4.5 Soluciones de vacío de clase I_1	105
4.5.1 Soluciones de clase I_{13}	107
4.5.2 Soluciones de clase I_{12}	112
4.6 Resumen en forma de algoritmo	117
CAPÍTULO 5. Métricas de tipo D	119
5.1 Una clasificación de las soluciones de tipo D	120
5.2 Métricas de Tipo D y $\delta W = 0$	122
5.3 Soluciones de vacío y $d\theta = 0$	125
5.3.1 Integración de las ecuaciones	127
5.3.2 Caracterización intrínseca de las soluciones	129
5.4 Métricas de tipo D y Ricci nulo: Simetrías	133
5.5 Soluciones de vacío y $d\theta \neq 0$	138
5.5.1 Soluciones de clase $D\{11,11\}$	140
5.5.2 Soluciones de tipos $D[\cdot, 0\cdot]$ y $D[0\cdot, \cdot]$	150
5.6 Algunas soluciones interiores con $d\theta = 0$	154
5.6.1 Soluciones de Einstein–Maxwell	156
5.6.2 Soluciones fluido perfecto y $\delta W = 0$	167
BIBLIOGRAFÍA	173

Introducción

a) Una de las ideas más innovadoras de la Relatividad General es la de atribuir y tratar de comprender la gravitación como un fenómeno físico ligado a la existencia de curvatura del espacio-tiempo. El objeto geométrico “más simple” que contiene *toda* la información de dicha curvatura es el tensor de Riemann, de ahí el papel esencial que ha desempeñado y desempeña en el desarrollo de esta teoría. Su estructura algebraica puede analizarse considerando por separado la de sus dos ingredientes complementarios: el tensor de Ricci y el tensor de Weyl. El primero se relaciona con el contenido energético vía las ecuaciones de Einstein, lo que permite interpretar el segundo como una “curvatura de vacío” cuya presencia indica en qué medida el espacio-tiempo no es conformemente plano.

Por ello es de resaltar, y no nos debe extrañar, el gran esfuerzo realizado hasta el momento para comprender geoméricamente e interpretar cómo interviene el tensor de curvatura en diferentes situaciones físicas. Citemos, por ejemplo, que el tensor de curvatura determina tanto el movimiento relativo de partículas materiales prueba (Pirani) como las ecuaciones de transporte de los escalares ópticos asociados a rayos de luz (Sachs, Ehlers). Señalemos también el papel desempeñado por el tensor de Weyl en la comprensión de la radiación gravitatoria. En este sentido, existen criterios físicos para asociar estados de radiación gravitatoria intrínseca a determinadas clases algebraicas (Lichnerowicz, Bel, Pirani), y dichas clases permiten analizar el comportamiento con la distancia del campo gravitatorio de sistemas acotados (Sachs, Bondi).

Podemos también destacar cómo la existencia de un grupo de isometrías impone restricciones sobre el tensor de curvatura y cómo, de manera semejante, el tensor de Weyl permite establecer las condiciones de integrabilidad para la existencia de movimientos conformes (Yano, Eisenhart). Por otra parte, desde los inicios de la Relatividad General, la diversidad de los tipos algebraicos del tensor de Riemann ha sido básica en la obtención y clasificación de familias de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein (Petrov, Ehlers, Kundt), y ha permitido imponer condiciones físicamente

admisibles sobre el tensor de energía (Plebański) o sobre concomitantes algebraicos cuadráticos de la curvatura (Bel, Robinson).

Esta memoria está dedicada a mejorar el conocimiento del tensor de Weyl y a poner en evidencia como dicho conocimiento puede contribuir a la mejor comprensión del campo gravitatorio.

b) En el estudio algebraico del tensor de Ricci y del tensor de Weyl podemos distinguir tres aspectos complementarios. distinguir tres aspectos complementarios. El primero es el de caracterizar los diferentes tipos atendiendo a la multiplicidad de los valores propios y al grado del polinomio mínimo de un endomorfismo asociado. El segundo consiste en ofrecer algoritmos que permitan distinguir el tipo algebraico de un tensor dado. Por último, es necesario también obtener expresiones covariantes y explícitas para el cálculo de subespacios propios y de cualquier otra dirección característica que pudiera existir, así como dar las condiciones que determinan su carácter causal.

Como consecuencia de las ecuaciones de Einstein, la clasificación del tensor de Ricci es equivalente a la clasificación del tensor energía-momento. La primera clasificación de un 2-tensor simétrico es debida a Churchill [13], y los primeros algoritmos de determinación del tipo algebraico se remontan a principios de los setenta [23]. Estos resultados han sido mejorados y tratados ampliamente con posterioridad. Así, en un artículo de Bona, Coll y Morales [7] puede encontrarse una extensa bibliografía sobre el tema. En este trabajo se presentan parte de los resultados de la Tesis de J.A. Morales [21] relativos a la determinación covariante de los subespacios propios y de su carácter causal. Este estudio completa la clasificación algebraica del tensor energía-momento y presenta un algoritmo de determinación de los posibles tipos basado en condiciones tensoriales.

De manera similar, un estudio algebraico completo del tensor de Weyl implica, además de la obtención de los posibles tipos y los algoritmos que distinguen el tipo algebraico de un tensor dado, el conocimiento de expresiones covariantes que determinen los autovectores del Weyl, es decir, las 2-formas principales. *En el Capítulo 2 se hace un amplio análisis de este tema y se obtienen, para cada tipo algebraico, los proyectores sobre las 2-formas principales y las direcciones de Debever. Para ello se utilizan los resultados del Capítulo 1, en el que se presenta la clasificación de Petrov-Bel, y se dan algoritmos de determinación del tipo algebraico con el formalismo covariante adecuado.*

c) La clasificación algebraica del tensor de Weyl ha sido considerada desde dos puntos de vista diferentes. La línea iniciada por Petrov [71] estudia el problema de autovalores y autovectores para el tensor de Weyl considerado como un endomorfismo del espacio de las 2-formas. Esta clasificación fue

completada por G eh eniau [46] y Bel [3] considerando, no sólo el número de subespacios invariantes independientes, sino también la multiplicidad de los autovalores. Desde este punto de vista aparece de manera natural la noción de 2-forma principal que fue analizada ampliamente por Bel [4] para los diferentes tipos algebraicos. Un planteamiento alternativo [78] [26] consiste en el estudio de la posición relativa entre los conos isotropos determinados, en el espacio de las 2-formas, por la métrica canónica y el tensor de Weyl considerado como forma cuadrática. Desde este punto de vista, equivalente al enfoque espinorial [70], la clasificación del Weyl se reduce al estudio de las raices de un polinomio de cuarto grado con coeficientes complejos. Asociada a cada raiz, aparece una dirección isotropa principal o dirección de Debever [24], [25], [70].

Ambos puntos de vista muestran la gran riqueza de direcciones y 2-planos que pueden ser asociados al tensor de Weyl. Estos elementos geométricos que aparecen cuando se considera cada uno de los enfoques son, genéricamente, diferentes. Pero cuanto más degenerado es el tensor de Weyl, más elementos comunes tienen. En general la relación entre las direcciones de Debever y las 2-formas principales es compleja, y sólo las direcciones de Debever múltiples son direcciones fundamentales de 2-formas principales nulas [4]. En el caso más regular, el tipo I, ninguna dirección de Debever coincide con una dirección principal de alguna 2-forma propia, y la relación entre ellas depende en gran medida de los invariantes escalares del Weyl.

Después del trabajo de Sachs [79], en el que ofrece una jerarquía de ecuaciones para caracterizar la multiplicidad de las direcciones de Debever, y con la publicación del algoritmo de d'Inverno y Rusell-Clark [27] de obtención del tipo Petrov, el punto de vista de las direcciones isotropas principales ha sido el más utilizado en la literatura. Desde entonces, la geometría de las 2-formas principales no ligadas a las direcciones de Debever ha sido considerada pocas veces. De este modo, aunque en los trabajos pioneros de Penrose [70], Bel [4] y Debever [26] fue subrayada la riqueza geométrica de ambas interpretaciones, su relación no ha sido suficientemente analizada en los casos menos degenerados. Sin embargo, sobre este asunto podemos citar los trabajos sobre el tipo I de Trümper [85] y Narain [64], o los más recientes de McIntosh *et al* [58] y Bonanos [8]. En este último se calculan las bases canónicas del Weyl a partir de las direcciones de Debever. En los otros tres, encontramos expresiones para las direcciones de Debever en términos de una base canónica del Weyl en casos particulares: cuando el Weyl es puramente eléctrico o puramente magnético, o cuando las cuatro direcciones de Debever generan un 3-plano.

Aquí extendemos estos resultados sobre el tipo Petrov I y presentamos resultados semejantes para los casos algebraicamente especiales. En el

capítulo 1 introducimos el concepto de 2-forma de Debever regular, concepto que nos permite en el capítulo siguiente clarificar la relación entre la geometría de las 2-formas principales y la geometría de Debever. También en el capítulo 2 presentamos unas formas canónicas alternativas para el tensor de Weyl que nos ayudan a entender mejor cómo unos tipos Petrov degeneran a otros en un diagrama de Penrose.

d) Con el desarrollo de la geometría de Riemann pronto surgió el problema de la equivalencia de métricas que fue abordado por primera vez por Christoffel. El planteamiento es claro: ¿cuando dos métricas, expresadas en sistemas de coordenadas diferentes, representan el mismo tensor?, o dicho de otro modo, ¿existe un cambio de coordenadas que transforma unas componentes en otras? El formalismo de Cartan [12] permitió tratar este difícil problema y, después de los trabajos de Karlhede [50], este tema tomó impulso en el marco de la Relatividad General (ver también las referencias de este artículo de recopilación). En un trabajo de MacCallum [56] encontramos un buen resumen sobre el problema de la equivalencia de métricas, sobre su interés en la búsqueda de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein, y sobre la importancia del álgebra computacional para abordarlo.

El método de Cartan está basado en el cálculo, en un referencial ortonormal, de las componentes de ciertas magnitudes dependientes del tensor de curvatura y de sus derivadas covariantes. Es importante que dicho referencial esté intrínsecamente ligado al tensor métrico y, en consecuencia, debe estar determinado por la geometría subyacente al tensor de curvatura. En particular, puede ser interesante elegir una de las bases canónicas del tensor de Weyl (y necesario en el caso de vacío o cuando el tensor de Ricci es bastante degenerado). El cálculo de estas bases no es inmediato, y no se conocía un método deductivo que permiera determinarlas para una métrica arbitraria. En particular, la determinación de la tetraeda principal para los espacios-tiempo de tipo I ha sido, hasta ahora, bastante problemática [56]. *En el capítulo 2 nosotros presentamos una determinación covariante y explícita de las bases canónicas para cada uno de los tipos de Petrov-Bel. Al mismo tiempo, mostramos la relación de cada uno de los vectores de dichas bases con la geometría de las 2-formas principales y las direcciones de Debever.*

e) Un referencial simétrico es el que está formado por vectores métricamente indistinguibles, es decir, tienen la misma longitud y, dos a dos, el mismo producto escalar. Los conceptos y propiedades básicas de este tipo de referenciales han sido estudiados por Coll y Morales [63] en un artículo en el que sugieren que los referenciales simétricos pueden ser apropiados para describir espacios-tiempo con propiedades de isotropía. Uno de sus resultados apoya esta idea: los únicos espacios-tiempo que admiten referenciales que son indistinguibles para cualquier concomitante del

tensor métrico son los universos de Robertson-Walker. Una pregunta se nos plantea de forma natural: los referenciales simétricos que admite un espacio-tiempo ¿están de algún modo ligados intrínsecamente al tensor métrico? o, dicho de otra forma, ¿pueden estar determinados por direcciones invariantes del tensor de curvatura? Más concretamente podemos plantearnos si las cuatro direcciones de Debever que existen en un espacio-tiempo de tipo I pueden definir un referencial simétrico. *En el Capítulo 2 hemos demostrado que la respuesta es afirmativa sólo en una subclase de métricas de tipo I que puede caracterizarse en términos de un escalar invariante M del Weyl.*

El invariante M citado en el párrafo anterior es un escalar complejo homogéneo de grado cero en el tensor de Weyl que es nulo en el caso de métricas de tipo II o D, y que fue introducido por Arianrhod y McIntosh [1] con el objetivo de refinar la clasificación de los espacios tiempo de tipo I. Ellos dieron una interpretación geométrica de dicho invariante al demostrar que los cuatro vectores de Debever generan un 3-plano cuando M es real positivo o infinito. *En el capítulo 2 nosotros completamos estos resultados en dos sentidos. En primer lugar, ampliamos la interpretación de M a cualquier valor sobre la recta real: M es real negativo si, y sólo si, los vectores de Debever son, dos a dos, métricamente indistinguibles; y, en particular, toma el valor -6 si dichos vectores constituyen un referencial simétrico. En segundo lugar, comprobamos que M es una sencilla función algebraica del escalar que Penrose denominó *cross ratio* [70], y mostramos que dicho escalar determina la relación entre la geometría de las 2-formas principales y la geometría de Debever.*

f) "La única solución de vacío esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein es la métrica de Schwarzschild". Este popular resultado, conocido como el teorema de Birkhoff [5], proporciona una caracterización completa del espacio-tiempo de Schwarzschild con el requerimiento de dos condiciones sobre el tensor métrico. La primera (C1) implica que el tensor de Ricci de la métrica es nulo, y la segunda (C2) afirma que admite un grupo de isometrías tridimensional actuando sobre órbitas espaciales bidimensionales de curvatura constante positiva. Es interesante subrayar la naturaleza diferente de cada condición: mientras que C1 es *explícita* en el tensor métrico (en uno de sus concomitantes diferenciales, el tensor de Ricci), la condición C2 es *implícita* ya que en las condiciones que la expresan aparecen, en su formulación usual, otros elementos diferentes del tensor métrico (las isometrías o los vectores de Killing de la simetría esférica).

Puesto que las condiciones *intrínsecas* (dependientes exclusivamente de la métrica) y *explícitas* pueden verificarse por sustitución directa del tensor métrico, es del todo evidente el interés que tiene una caracterización *intrínseca* y completamente *explícita* de un espacio-tiempo o de una fami-

lia de espacios-tiempo. Así, después de lo comentado sobre el teorema de Birkhoff, podemos preguntarnos si es posible expresar, sólo en términos del tensor métrico y de sus concomitantes diferenciales, las condiciones necesarias y suficientes para que un espacio-tiempo sea la solución de Schwarzschild. *En el capítulo 5 probamos que la respuesta es afirmativa y obtenemos las ecuaciones que definen explícitamente esta métrica.*

g) Con el fin de determinar todas las soluciones de vacío estáticas de tipo D, Ehlers y Kundt [31] utilizaron el formalismo 1+3 adaptado a la base de evolución ortogonal definida por el vector de Killing temporal. En su trabajo intentaron obtener una descripción intrínseca de las soluciones pero, por una parte, no escribieron intrínsecamente la condición de que la métrica era estática y, por otra, algunos escalares invariantes que usaron para discriminar diferentes soluciones dependían de la 2-forma principal del Weyl, y ésta no estaba expresada explícitamente en términos de Weyl. Así pues, ellos obtuvieron una manera *invariante* (pero no explícita) de distinguir (en el conjunto de las métricas estáticas) dos soluciones diferentes de vacío de tipo D. *Aquí, en el Capítulo 5, hemos superado estas lagunas con la obtención de los concomitantes métricos y de las condiciones intrínsecas que permiten identificar (en el conjunto de todas las métricas) cada solución de vacío estática de tipo D.*

Posteriormente, Kinnersley [54] recuperó estas soluciones, y obtuvo todos los espacios-tiempo de vacío de tipo D empleando el formalismo de Newman-Penrose adaptado a las direcciones de Debever dobles. *En este trabajo hemos utilizado un método alternativo de integración de las ecuaciones que se apoya en la estructura casi-producto 2+2 principal del tensor de Weyl, método que conduce de manera natural a la caracterización intrínseca y explícita de las soluciones.*

h) En una variedad de Riemann, una estructura casi producto regular está determinada por un campo de p -planos y el correspondiente campo de q -planos ortogonal. Desde el campo de la geometría diferencial se han clasificado estas estructuras [65], y se ha dado significado geométrico a algunas de las clases [47].

En Relatividad General, las estructuras casi producto han mostrado su utilidad para el estudio de la geometría subyacente a determinados campos físicos. Así, por ejemplo, las estructuras 2+2 asociadas a un campo de Maxwell regular [74], están en la base de algunos intentos de geometrización del campo electromagnético [62], y han permitido dar una clara interpretación geométrica [14] de las ecuaciones usadas por Teukolsky y Press [84] para el análisis de ondas electromagnéticas incidentes sobre un agujero negro de Kerr. También aparecen estructuras degeneradas definidas por una dirección isótropa geodésica y sin distorsión asociadas a los campos de Maxwell singulares [59], [77]. Otro ejemplo es la estructura

1+3 definida por el campo de velocidades de un fluido, cuyas propiedades quedan caracterizadas por los coeficientes cinemáticos. En este sentido, podemos citar la caracterización cinemática de los fluidos holónomos [17] y el estudio de las velocidades de los fluidos perfectos barótropos [19].

Las estructuras casi producto pueden aparecer también ligadas a las propias características geométricas o físicas del espacio-tiempo. Así, el contenido energético puede implicar la existencia de determinadas estructuras casi producto (como las citadas en el párrafo anterior en las soluciones de Einstein-Maxwell o en las soluciones de fluido perfecto) que, a través de las ecuaciones de Einstein, pueden restringir el Ricci de la métrica. Por otro lado, también el tensor de Weyl define estructuras casi-producto asociadas a sus 2-formas principales [4], o a las direcciones de Debever. El número y carácter (regular o singular) de estas estructuras depende del tipo algebraico del tensor de Weyl y, como mostramos en el Capítulo 2, la degeneración de un tipo a otro puede interpretarse muchas veces como la conversión a singular de una de las estructuras regulares subyacentes.

Una buena comprensión algebraica de las estructuras casi-producto 2+2 asociadas al tensor de Weyl de una métrica, nos facilita el estudio de la posible relación de sus propiedades diferenciales con las características geométricas o físicas del campo gravitatorio. *Considerar desde este punto de vista algunas familias de métricas de tipo D o tipo I nos ha permitido en este trabajo, no sólo presentar clasificaciones con un significado geométrico claro, sino también abordar la integración de las ecuaciones de Einstein con una metodología que lleva de manera natural a la clasificación intrínseca y explícita de las soluciones.*

i) El interés conceptual que tiene la caracterización intrínseca y explícita de espacios-tiempo puede comprenderse mejor si consideramos casos sencillos en los que dicha caracterización es ampliamente conocida: (i) los espacios-tiempo de vacío quedan caracterizados por la ecuación $Ric(g) = 0$, (ii) los de simetría máxima por $Riem(g) \propto g \wedge g$, (iii) los conformemente planos por $Weyl(g) = 0$. Frente a cada uno de estos sencillos ejemplos surge de manera natural un interrogante: (i) ¿qué ecuaciones verifica el tensor de Ricci de una solución interior correspondiente a un contenido energético determinado?, (ii) ¿cuáles son las condiciones que caracterizan el tensor de curvatura de espacios-tiempo que admiten grupos de isometrías no maximales?, (iii) ¿cómo quedan caracterizados los espacios-tiempo que admiten unas coordenadas canónicas particulares?

Dar respuesta al primer interrogante es lo que se denomina construir la teoría à la Rainich para los espacios-tiempo con dicho contenido energético. Son abundantes los trabajos que podemos encontrar en esta línea después del trabajo pionero de Rainich [74] que caracterizaba las soluciones de Einstein-Maxwell. En el trabajo que aborda una teoría de este tipo para

los fluidos perfectos termodinámicos [16] se puso de manifiesto el papel básico que juega en su elaboración la determinación covariante de los subespacios propios de un tensor simétrico y de su carácter causal.

De manera similar, en la respuesta a problemas de tipo (ii) y (iii), donde no es suficiente imponer condiciones al tensor de Ricci sino que también intervienen otras componentes del tensor de curvatura, serán necesarios los resultados sobre la determinación covariante de la geometría asociada al tensor de Weyl que nosotros presentamos aquí. Como muestra de la utilidad de estos resultados, *nosotros abordamos en el capítulo 3 la caracterización de los espacios-tiempo estáticos, de las métricas con simetría esférica y de los universos de tipo I en los que un observador sincronizable puede detectar radiación isótropa.*

j) Si en un espacio-tiempo existe una congruencia temporal integrable y sin distorsión, entonces el tensor de Weyl es de tipo Petrov-Bel I, D o O con valores propios reales, y el campo tangente a dicha congruencia es una de sus direcciones principales. Este resultado de Trümper [85] está basado en que, como consecuencia de las identidades de Ricci, la parte magnética del Weyl respecto a una congruencia integrable y sin distorsión es nula. Esta última propiedad es independiente del carácter causal de la congruencia. Por ello, cualquier intento de generalizar el resultado de Trümper a congruencias no necesariamente temporales, exige el estudio de las métricas que admiten congruencias para las cuales el Weyl es puramente eléctrico. *En el Capítulo 2 damos las clases de espacios-tiempo con Weyl puramente eléctrico para, al menos, una congruencia y, en cada caso, obtenemos todas las congruencias con dicha propiedad. También se presenta un estudio semejante para el Weyl puramente magnético.*

Los espacios-tiempo que admiten estados de radiación isótropos con respecto a un observador sincronizable han sido considerados [34] como un posible modelo válido para el universo actual. Es conocido [30] que estos espacios-tiempo admiten un campo conforme Killing integrable paralelo a dicho observador, lo cual implica que la congruencia que determinan es integrable y sin distorsión. Entonces, el resultado de Trümper citado en el párrafo anterior implica, si la métrica es de tipo Petrov I, que el observador es la única dirección principal temporal del tensor de Weyl. Esto nos permite, utilizando nuestro algoritmo de determinación covariante de dicha dirección, *obtener en el capítulo 3 una caracterización intrínseca y explícita de los espacios-tiempo de tipo I que admiten estados de radiación isótropa para un observador sincronizable.*

Un espacio-tiempo estático admite un campo de Killing integrable y, por lo tanto, estamos de nuevo bajo las hipótesis del resultado de Trümper: la congruencia que define es integrable y sin distorsión. Así, el campo de Killing determina una dirección principal temporal del tensor de Weyl.



Para el caso de métricas de tipo I podemos obtener la única dirección con esa propiedad e imponerle la condición de Killing. En cambio, cuando la métrica sea de tipo D, tenemos que todas las direcciones temporales del 2-plano principal son direcciones principales, y para la detección de la dirección del vector de Killing es necesario estudiar la posición relativa de éste con respecto a las segundas formas fundamentales de la estructura casi producto principal del Weyl. *En el capítulo 3 ofrecemos las condiciones necesarias y suficientes (intrínsecas y explícitas) para que un espacio tiempo no conformemente plano sea estático, y damos el algoritmo de determinación del correspondiente Killing temporal integrable.* El estudio del caso conformemente plano, que no consideramos en esta memoria, implica un análisis semejante a partir de la geometría que define el tensor de Ricci, y está basado en que un Killing integrable es una dirección propia de dicho tensor.

k) El grupo de isometrías que admite un espacio-tiempo puede implicar o incluso quedar caracterizado por la existencia de estructuras casi producto (que no son más que las definidas por las órbitas del grupo) con determinadas propiedades. En este sentido es conocida la caracterización de los universos de Robertson-Walker (simetría máxima sobre órbitas tridimensionales espaciales) en términos de la estructura 1+3 que define el observador cosmológico: sincronización umbilical de curvatura constante con normal geodésica y expansión uniforme. Es interesante subrayar que esta caracterización intrínseca de los universos de Robertson-Walker permite obtener una caracterización también explícita, si tenemos en cuenta que el observador cosmológico es un vector propio del Ricci que podemos determinar de manera covariante.

Nosotros hemos abordado un estudio semejante para los espacios-tiempo con simetría esférica. *En el capítulo 3 obtenemos las condiciones necesarias y suficientes para que una estructura casi producto sea la definida por las órbitas del grupo de rotaciones.* Como para el tipo D dicha estructura es la principal del tensor de Weyl, su determinación covariante dada en el capítulo anterior, permite *obtener una caracterización intrínseca y explícita de los espacios-tiempo de tipo D esféricamente simétricos.*

Hay familias de soluciones de las ecuaciones de Einstein en las que existen estructuras casi producto que mantienen parte de las propiedades de la estructura definida por un grupo de isometrías. Podemos hablar así de espacios-tiempo con 'simetrías' no necesariamente asociadas a isometrías, y que pueden describir situaciones físicas semejantes a aquellas en las que las isometrías están presentes. Citemos, por ejemplo, los universos de Stephani [81], que genéricamente no admiten isometrías de espacio-tiempo, pero que pueden considerarse una generalización de las métricas de Robertson-Walker, puesto que en ellos existe también una sincronización umbilical de curvatura constante [6]. Creemos que el estudio de

las propiedades geométricas de las estructuras casi producto definidas por un grupo de isometrías, y la consideración de métricas a las que se impone parte de dichas propiedades, puede ser una camino fructífero en la búsqueda de nuevas soluciones de las ecuaciones de Einstein que no admitan, necesariamente, isometrías.

l) El concepto de tensor de Killing generaliza el de campo de Killing a tensores simétricos de cualquier orden y, así como un vector de Killing define integrales primeras de la ecuación de las geodésicas, lo mismo ocurre con los tensores de Killing. Así, la existencia de tensores de Killing en un espacio-tiempo puede permitir la separación de variables en la ecuación de las geodésicas [86]. Por tanto puede ser de interés conocer si una familia de soluciones los admite, y en caso afirmativo, disponer de métodos para su obtención. Lo mismo sucede con los llamados tensores conforme Killing, que son invariantes por conformidad, y que pueden ser útiles en la integración de la ecuación de las geodésicas nulas.

Los tensores de Killing de orden 2 definen integrales primeras cuadráticas. Según su tipo algebraico, las estructuras geométricas que definen pueden coincidir con las asociadas al tensor de curvatura. Así, es conocido que las soluciones de vacío de tipo D admiten un tensor conforme Killing de segundo orden ligado a la estructura principal de tensor de Weyl. *En el capítulo 3, consideramos los tensores de Killing y los tensores conformes Killing cuyos subespacios propios definen una estructura casi producto, y los caracterizamos a partir de las propiedades de dicha estructura. Este punto de vista nos permite, en el capítulo 5, recuperar fácilmente resultados sobre la existencia de tensores de Killing en las soluciones de vacío de tipo D e incluso generalizarlos para métricas con divergencia del Weyl nula.* El conocimiento geométrico de la estructura definida por un tensor de Killing ha permitido también obtener una caracterización intrínseca de los espacios-tiempo que son producto alabeado [20], completando así algunos resultados sobre los tensores de Killing que admiten estas métricas [49].

m) La búsqueda de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein con un contenido material concreto implica, en una primera etapa, imponer que el tensor de Ricci es de un determinado tipo algebraico. La complejidad de las ecuaciones resultantes exige el uso de métodos que, aunque implican usualmente la restricción del conjunto de posibles soluciones a determinar, permiten al menos simplificar las ecuaciones y hacerlas tratables analíticamente. Así, gran parte de las soluciones conocidas se han encontrado bajo la hipótesis de que la métrica admitiera un determinado grupo de isometrías. También ha sido fructífero imponer otras restricciones algebraicas al tensor de curvatura y, en ello ha jugado un papel fundamental la clasificación de Petrov-Bel. En efecto, bajo la hipótesis de que el espacio-tiempo es algebraicamente especial se han buscado y

encontrado soluciones, en muchas ocasiones trabajando en referenciales o coordenadas adaptadas a la dirección múltiple de Debever que existe en ese caso. Como ejemplo podemos citar que éste fue el método utilizado por Kinnersley [54] para obtener todas las soluciones de vacío de tipo D. Por el contrario, existe una gran laguna en el conocimiento de espacios-tiempo de tipo I. Una prueba de ello es que el conjunto de las soluciones de vacío algebraicamente generales dista mucho de conocerse en su totalidad, y las pocas métricas conocidas se han determinado normalmente imponiendo, a priori, simetrías. Una forma de paliar esta situación es imponer alguna condición al tensor de Weyl que, sin abandonar el caso algebraicamente general, simplifique la integración de las ecuaciones. Esto significa considerar un refinamiento en la clasificación de los espacios-tiempo de tipo I, y buscar las soluciones en las clases definidas.

Fue Debever [26] el primero que apuntó una subclasificación de las métricas de tipo I basada en la nulidad de alguno de los invariantes escalares del Weyl y, como hemos comentado más arriba, la clasificación de Arianrhod y McIntosh [1] también tiene en cuenta el comportamiento de un invariante algebraico. Una línea alternativa de clasificación es la de considerar las propiedades (diferenciales) de la geometría asociada al tensor de Weyl. Por ejemplo, puede hacerse una clasificación atendiendo a las propiedades cinemáticas de la dirección principal temporal o, en cambio, considerar las propiedades de las estructuras casi producto definidas por las 2-formas principales. Esta última es la opción tomada por Edgar [29] al proponer una clasificación de las soluciones de vacío de tipo I que tiene en cuenta la dependencia funcional de los valores propios. *Nosotros en el capítulo 4 proponemos una ligera modificación de la clasificación de Edgar y damos una interpretación geométrica e intrínseca de sus clases basándonos en los resultados del Capítulo 3.*

En cuanto a la determinación de soluciones algebraicamente generales pertenecientes a alguna de las clases citadas en el párrafo anterior señalemos, en primer lugar, un resultado de Brans [10] que afirma que no existen soluciones de vacío de tipo I con un valor propio del Weyl nulo, caso que corresponde a una de las clases consideradas por Debever [26]. *En el capítulo 4 hemos generalizado este resultado de no existencia de soluciones al caso en que el tensor de Weyl es de divergencia nula. En el mismo capítulo hemos estudiado también las soluciones de vacío de la clase más degenerada de nuestra clasificación, hemos demostrado que admiten siempre un G_3 sobre órbitas tridimensionales, y que el tipo Bianchi es diferente para cada una de las subclases que también nosotros introducimos. La integración de las ecuaciones en el caso de dos de dichas subclases nos conduce a las métricas de Petrov [72], Kasner [51] y Taub [83] (ver también [55]), así como a tres familias (a uno o dos parámetros) de soluciones que no hemos encontrado en la literatura.*

n) Es mucho lo que se ha escrito sobre los espacios-tiempo de tipo D y podemos destacar, tanto el gran número de familias de soluciones exactas conocidas, como el interés físico de algunas de estas soluciones. Citemos, por ejemplo, las métricas de Schwarzschild y Kerr que modelizan el campo gravitatorio exterior a un objeto acotado con simetría esférica, sin o con rotación respectivamente, o las correspondientes soluciones cuando el objeto está cargado, las métricas de Reissner-Nordström y Kerr-Newman. Los métodos de integración de las ecuaciones de Einstein han sido diversos y no siempre permiten obtener con sencillez la caracterización intrínseca y explícita de las soluciones obtenidas. Ya hemos comentado anteriormente nuestra aportación en este sentido para las soluciones estáticas de vacío y, en particular, nuestra caracterización de la solución de Schwarzschild. Sin embargo, nos parece necesaria una clasificación de los espacios-tiempo de tipo D, que no sólo permita tipificar el amplio conjunto de métricas ya conocidas, sino que también ofrezca otros elementos para la obtención de nuevas soluciones.

Además de la clasificación algebraica basada en el valor propio del Weyl que nos lleva a los casos puramente eléctrico (valor propio real) o puramente magnético (valor propio imaginario puro), en un espacio-tiempo de tipo D podemos considerar de manera natural dos clasificaciones en las que intervienen invariantes diferenciales de primer orden del tensor de Weyl. La primera es, sencillamente, la clasificación de la estructura casi producto principal, con clases determinadas por la condición de que alguno de los 2-planos principales tenga o no las propiedades de foliación, minimalidad o umbilicidad. La segunda considera la posición relativa entre los gradientes del módulo y el argumento del valor propio y los dos 2-planos principales. *En el Capítulo 5 presentamos estas dos clasificaciones y demostramos que, si la divergencia del tensor de Weyl es nula, la estructura principal es umbilical, lo cual implica un fuerte restricción de las posibles clases. Mostramos además que, bajo la misma hipótesis, las clases admisibles coinciden en las dos clasificaciones presentadas.*

Ya hemos comentado más arriba que las soluciones de vacío de tipo D son todas conocidas. Aunque algunas de ellas habían sido encontradas utilizando otros métodos, en el trabajo donde completó la integración, Kinnersley [54] trabajó adaptando coordenadas a una de las direcciones dobles de Debever y no impuso, a priori, la existencia de simetrías. Sin embargo, a posteriori, comprobó que todas las soluciones admiten, al menos, un G_2 conmutativo. *Nosotros, en el capítulo 5, demostramos la existencia de estas simetrías sin necesidad de integrar las ecuaciones, y damos algoritmos de determinación de los vectores de Killing en términos de invariantes diferenciales del tensor de Weyl. Además abordamos la integración de las ecuaciones basándonos en nuestra clasificación, con lo que obtenemos una caracterización intrínseca y explícita de todas las so-*

luciones y, en particular, de la métrica de Kerr.

o) Todo vector de Killing puede ser considerado como potencial vector para generar una 2-forma campo electromagnético y, si el espacio-tiempo es de Ricci nulo, dicho campo es una solución de las ecuaciones de Maxwell sin corrientes. Este resultado es debido a Papapetrou [69] y, recientemente, se ha señalado el papel que puede jugar dicha 2-forma de Maxwell (a la que se ha denominado campo de Papapetrou), tanto en la búsqueda de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein como en la determinación de soluciones prueba de las ecuaciones de Maxwell en espacios-tiempo con alguna isometría [32]. Con vistas al estudio y clasificación de soluciones de vacío puede ser interesante analizar la relación entre las direcciones principales del campo de Papapetrou y la geometría asociada al tensor de curvatura. En este sentido se ha considerado el posible alineamiento con alguna de las direcciones de Debever [32] y se ha demostrado que, para el caso particular de la métrica de Kerr, las dos direcciones dobles de Debever coinciden con las direcciones principales del campo de Papapetrou [60], [32].

En un espacio-tiempo de tipo D que admita un campo de Killing podemos preguntarnos cuándo el campo de Papapetrou asociado está alineado con la estructura principal del tensor de Weyl. *En el Capítulo 5 de este trabajo se prueba que, entre todas las soluciones de vacío de tipo D, solamente la subclase de las métricas de Kerr-NUT goza de dicha propiedad.* Por otra parte, es conocido que a cada solución de vacío de tipo D, se le puede asociar una 2-forma de Maxwell cuyas direcciones principales son las direcciones de Debever dobles, y con escalares invariantes determinados por el valor propio del tensor de Weyl [14]. Entonces, en las soluciones de Kerr-NUT y como consecuencia de las ecuaciones de Maxwell, dicha 2-forma de Maxwell y el campo de Papapetrou deben diferir, a lo sumo, en una rotación de dualidad constante. *Aquí comprobamos que esta rotación de dualidad depende del parámetro de NUT [67] y que, para el caso de la métrica de Kerr toma el valor $\pi/3$.*

En el caso de espacios-tiempo de tipo I con simetrías puede analizarse el alineamiento de un campo de Papapetrou con alguna de las tres 2-formas principales. *En el capítulo 4 demostramos que, en el caso de métricas de vacío, una condición necesaria para que la geometría del campo de Papapetrou sea principal del tensor de Weyl es que el espacio-tiempo sea de la clase I_1 introducida por nosotros. Además estudiamos dicho alineamiento en cada una de las soluciones de vacío encontradas.*

1. Clasificación del tensor de Weyl

La clasificación de Petrov es el estudio de los posibles tipos algebraicos del endomorfismo del espacio de las 2-formas asociado canónicamente a la doble 2-forma de Weyl. En este capítulo se caracterizan los tipos algebraicos con el formalismo covariante adecuado para abordar en el capítulo 2 el cálculo de todos los elementos geométricos asociados al Weyl. En este enfoque aparece de forma natural la noción de 2-forma principal del Weyl, introducida por Bel [4].

Un punto de vista alternativo [78], [26] consiste en el estudio de la posición relativa entre el cono isótropo de la métrica usual del espacio de las 2-formas y el cono isótropo de la doble 2-forma de Weyl como forma cuadrática en dicho espacio. Desde este punto de vista, aparecen asociadas al tensor de Weyl unas direcciones isótropas privilegiadas que llamaremos direcciones de Debever [24], [25].

El capítulo está estructurado en cuatro secciones. En la sección 1 se recogen algunos resultados conocidos sobre 2-formas, y en particular se recuerdan los procedimientos covariantes para el cálculo de los elementos geométricos definidos por estos objetos.

Dado que la ecuación característica del endomorfismo asociado al Weyl puede tener raíces complejas, se complexifica el espacio de las 2-formas y se extiende el endomorfismo al complexificado. Podemos hablar entonces de 2-formas complejas propias del Weyl. En la sección 2, se recogen algunas propiedades de dicho espacio vectorial. Los conceptos de 2-plano principal y dirección principal, se generalizan para las 2-formas complejas, y en particular para las 2-formas autoduales. Se comprueba asimismo que existe una biyección entre las bases ortonormales (resp. isótropas) de 2-formas autoduales y las bases ortonormales (resp. isótropas reales) del tangente y se ofrece un algoritmo para el cálculo covariante de cualquiera de ellas dada la otra. Este resultado es clave para calcular en los capítulos siguientes las bases canónicas del Weyl y caracterizar espacios en los que existen congruencias con propiedades particulares.

El estudio algebraico del Weyl, queda reducido al estudio de un endomorfismo en el espacio vectorial complejo de dimensión tres de las 2-formas autoduales. En la sección 3, se resuelve el problema de valores

propios para el Weyl autodual y se recuperan los tipos Petrov–Bel del Weyl en términos del polinomio característico y del polinomio mínimo del Weyl autodual. Ofrecemos al final de la sección dos algoritmos para la clasificación de un tensor de Weyl dado, en los que sólo intervienen condiciones tensoriales.

En la última sección recogemos la clasificación alternativa del tensor de Weyl basada en la existencia de direcciones de Debever. Escribiremos las ecuaciones de Sachs en términos de 2–formas autoduales isótropas, que nos permitirán posteriormente el cálculo de estas para los diferentes tipos algebraicos del tensor de Weyl. Introducimos además el concepto de 2–forma unitaria de Debever que resultará de gran utilidad en el capítulo siguiente para entender la relación entre los elementos que aparecen asociados al tensor de Weyl según se opte por el formalismo de 2–formas principales o por el de direcciones de Debever.

1.1 Algunas propiedades de las 2–formas

a) Consideremos la variedad espacio–tiempo (V_4, g) , donde la métrica g tiene la signatura $(-, +, +, +)$, con una orientación temporal y un elemento de volumen dados. En cada punto, el conjunto de las 2–formas con la suma y el producto por un escalar ordinarios tiene estructura de espacio vectorial de dimensión seis. Una 2–forma define un endomorfismo del espacio tangente en cada punto. Dado un vector x , denotaremos $F(x)$ al vector cuyas componentes son $(F(x))^\alpha = x^\mu F^\alpha{}_\mu$. De igual manera denotaremos $(i(x)F)^\alpha \equiv x^\mu F_\mu{}^\alpha$, es decir al vector ${}^tF(x)$.

En el espacio vectorial de las 2–formas podemos considerar dos métricas diferentes: la métrica usual $G = \frac{1}{2}g \wedge g$ (donde \wedge denota el producto exterior de doble 1–formas) inducida por la métrica de la variedad, y la métrica inducida por el elemento de volumen η , es decir

$$G(F, H) \equiv (F, H) = \frac{1}{4} G_{\alpha\beta\epsilon\delta} F^{\alpha\beta} H^{\epsilon\delta}$$

$$\eta(F, H) \equiv (*F, H) = \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta\epsilon\delta} F^{\alpha\beta} H^{\epsilon\delta}$$

Dada una 2–forma F , se definen los invariantes:

$$\Psi = (F, F); \quad \Phi = (F, *F) \quad (1.1)$$

que son los cuadrados de F con las métricas G y η . Una 2–forma se dice singular si $\Psi^2 + \Phi^2 = 0$, y se llama regular en caso contrario. Una 2–forma se dice simple si existen dos vectores x, y de manera que $F = x \wedge y$. En términos de los invariantes (1.1), esta condición es equivalente a $\Phi = 0$. Las 2–formas regulares simples que verifican $\Psi < 0$ ($\Psi > 0$) se llaman temporales (espaciales). Nosotros llamaremos 2–formas unitarias a las 2–formas simples temporales U tales que $(U, U) = -1$.

Clasificación del tensor de Weyl

Como sobre las 2-formas $*^2 = -Id$, se comprueba fácilmente que para cualquier par de 2-formas F y H :

$$(*F, *H) = -(F, H) \quad (F, *H) = (*F, H) \quad (1.2)$$

Entonces los invariantes asociados a $*F$ son $-\Psi$ y $-\Phi$ y F es regular, singular o simple si y sólo si $*F$ lo es. Además, F es temporal (espacial) si y sólo si $*F$ es espacial (temporal).

b) Una 2-forma unitaria U , determina una pareja de 2-planos invariantes (uno temporal y otro espacial cuyos elementos de volumen son U y $*U$ respectivamente) que se llaman 2-planos principales. En términos de U y $*U$, los proyectores sobre esa pareja de 2-planos son

$$v = U \times U; \quad h = g - v = - *U \times *U$$

donde \times denota la contracción de índices adyacentes en el producto tensorial. Las dos direcciones isotropas l_{\pm} contenidas en el 2-plano U se denominan direcciones principales de la 2-forma U . Podemos elegir la parametrización de las direcciones principales de manera que $U = l_- \wedge l_+$. Si además imponemos que las dos direcciones estén orientadas al futuro, l_- y l_+ no son intercambiables y en ese sentido nos referiremos a ellos como primer y segundo vector principal de la 2-forma U . Estos vectores están fijados salvo una reparametrización que mantenga la orientación temporal, es decir

$$l_{\epsilon} \rightsquigarrow e^{\epsilon\lambda} l_{\epsilon}; \quad (\epsilon = \pm 1)$$

Cada parametrización de esos vectores principales determina una única base ortonormal $\{e_0, e_1\}$ del 2-plano U de manera que $l_{\epsilon} = e_0 + \epsilon e_1$, donde además se verifica que e_0 está orientado al futuro. Las direcciones principales l_{\pm} de U son las únicas direcciones reales propias comunes a U y a $*U$ y pueden calcularse resolviendo en cada caso la ecuación de vectores propios. Pero también podemos dar un algoritmo para calcular de modo covariante las direcciones principales como [15]

$$l_{\pm} \propto -i(x) [-U \times U \pm U] \quad (1.3)$$

Sin embargo, un problema que no resuelven los concomitantes anteriores es el siguiente: dada l una de las direcciones principales con una parametrización fijada y orientado al futuro, determinar el otro vector principal, l' , tal que $U = \epsilon l \wedge l'$. Un cálculo directo prueba que

$$l' = -\frac{[U \times U + \epsilon U](x)}{2(x, l)} \quad (1.4)$$

donde $\epsilon = \text{signo}(U(x, l))$ y x es cualquier vector temporal orientado al futuro.

c) Dada una 2-forma regular F , existen dos escalares μ y ν , y una 2-forma unitaria U , de manera que

$$F = \mu U + \nu * U$$

Diremos que U es la geometría de la 2-forma F . Los conceptos de 2-plano principal y direcciones principales se trasladan a F a través de su geometría. Las direcciones principales de F , se caracterizan por ser las únicas direcciones reales propias de F y de $*F$, es decir, que satisfacen

$$l_{\pm} \wedge i(l_{\pm})F = 0; \quad l_{\pm} \wedge i(l_{\pm}) * F = 0$$

La geometría de una 2-forma regular F , puede calcularse a partir de sus invariantes como $U = \alpha F + \beta * F$ donde

$$\alpha = -\frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{\Omega - \Psi}{2\Omega}} \quad \beta = \frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{\Omega + \Psi}{2\Omega}} \quad \Omega = \sqrt{\Phi^2 + \Psi^2} \quad (1.5)$$

Conocida la geometría de F , las direcciones principales pueden obtenerse de la expresión (1.4).

d) Una 2-forma singular H y su dual $*H$ tienen una dirección (isótropa) propia común l con valor propio cero, $H(l) = 0 = *H(l)$, que se llama dirección fundamental de H . La dirección fundamental de H puede obtenerse como [15]

$$l \propto H^2(x) \quad (1.6)$$

para cualquier vector temporal x . Ahora bien, dada H , existe una única parametrización de la dirección fundamental l tal que está orientado al futuro y tal que $H = l \wedge e_2$, con e_2 unitario. A la dirección fundamental de H con esa parametrización privilegiada le llamaremos vector fundamental de H . Es claro que e_2 no es único, sino que está dado salvo la transformación $e_2 \rightsquigarrow e_2 + \mu l$. Llamaremos 2-planos principales de la 2-forma H a los 2-planos isótropos definidos por H y por $*H$. El vector fundamental de una 2-forma singular H , puede obtenerse como

$$l = \frac{H^2(x)}{\sqrt{-H^2(x, x)}} \quad (1.7)$$

donde x es cualquier vector temporal y orientado al futuro.

1.2 El espacio de las 2-formas autoduales

a) La complejificación del espacio tangente en cada punto induce de forma natural una complejificación del espacio de las 2-formas. Diremos que una 2-forma compleja $F + iH$ es autodual [resp. antiautodual] si verifica $*(F + iH) = i(F + iH)$ [$-i(F + iH)$]. Es inmediato comprobar que toda

Clasificación del tensor de Weyl

2-forma autodual (resp. antiautodual) se expresa como $F - i * F$ ($F + i * F$) donde F es una 2-forma real. Nosotros denotaremos \mathcal{F} ($\tilde{\mathcal{F}}$) a la 2-forma autodual (antiautodual) definidas por F con la normalización

$$\mathcal{F} = \frac{1}{\sqrt{2}}(F - i * F) \quad \tilde{\mathcal{F}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(F + i * F)$$

El espacio vectorial complejo de las 2-formas se descompone como suma ortogonal de las autoduales y las antiautoduales.

La métrica inducida por la del espacio de las 2-formas sobre el subespacio de las 2-formas autoduales puede extenderse a un tensor sobre todo el espacio de las 2-formas que coincide con esta métrica sobre el las autoduales y es cero sobre las antiautoduales. Denotaremos \mathcal{G} a este tensor. En términos de G y η se verifica que

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2}(G - i\eta) \tag{1.8}$$

Dado que el espacio de las 2-formas autoduales no contiene 2-formas reales, no tiene sentido hablar de signatura de esta métrica ya que si $\mathcal{G}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = -1$, $\mathcal{G}(i\mathcal{F}, i\mathcal{F}) = 1$. Llamaremos 2-forma autodual unitaria a \mathcal{U} tal que $(\mathcal{U}, \mathcal{U}) = -1$, que equivale a que su parte real U sea temporal y unitaria. Se dice que una 2-forma autodual \mathcal{H} es isótropa si $(\mathcal{H}, \mathcal{H}) = 0$, lo que corresponde al caso de que H sea singular.

Dada \mathcal{F} regular, se verifica que $\mathcal{U} = (\alpha + i\beta)\mathcal{F}$ es unitaria, donde α y β son los invariantes definidos en (1.5). A \mathcal{U} le llamaremos geometría de \mathcal{F} . De igual manera llamaremos 2-planos principales y direcciones principales de \mathcal{F} a los definidos por su geometría. No hay ambigüedad en estos conceptos, en el sentido de que cualquier 2-forma $(\mu + i\nu)\mathcal{F}$ determina la misma geometría y por tanto los mismos 2-planos y direcciones principales. Las direcciones principales quedan definidas por ser las únicas direcciones reales propias de \mathcal{U} , es decir

$$i(l_{\pm})\mathcal{U} \wedge l_{\pm} = 0$$

Si \mathcal{H} es isótropa, H determina un 2-plano $\{l, e_2\}$ tal que $H = l \wedge e_2$, y $*H$ otro 2-plano de manera que $*H = -l \wedge e_3$. Los vectores $\{l, e_2, e_3\}$ generan el subespacio ortogonal a l . Una combinación arbitraria de H y $*H$ determina un 2-plano diferente generado por l y una combinación de e_2 y e_3 . Entonces, si \mathcal{H} es isótropa, llamaremos vector fundamental de \mathcal{H} al vector fundamental de H y 2-planos principales a los definidos por H y por $*H$. El vector fundamental es el único vector real propio de \mathcal{H} con valor propio cero.

$$i(l)\mathcal{H} = 0$$

b) Una base ortonormal del espacio de las 2-formas autoduales está formada por tres 2-formas autoduales $\{\mathcal{U}_i\}$ de manera que

$$\mathcal{G}(\mathcal{U}_i, \mathcal{U}_j) = -\delta_{ij}$$

Sea $\{e_\alpha\}$ una base ortonormal orientada y ortócrona y consideremos $\eta = e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$. Si definimos $U_i = e_0 \wedge e_i$, la base ortonormal $\{\mathcal{U}_i\}$ es una base ortonormal del espacio de las 2-formas autoduales que tiene una orientación inducida por

$$\mathcal{U}_k = i\sqrt{2} \epsilon_{ijk} \mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_j \quad (1.9)$$

Recíprocamente, cada base ortonormal $\{\mathcal{U}_i\}$, orientada por (1.9), del espacio de las 2-formas autoduales determina una única base ortonormal orientada $\{e_\alpha\}$ con e_0 orientado al futuro de manera que $U_i = e_0 \wedge e_i$. Esta biyección es consecuencia del isomorfismo entre el subgrupo ortócrono propio del grupo de Lorentz y el grupo $SO(3, \mathbb{C})$ de las rotaciones conservando la orientación del espacio de las 2-formas autoduales

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+^\dagger &\longrightarrow SO(3, \mathbb{C}) \\ L &\longrightarrow \frac{1}{2}[L \wedge L - i * L \wedge L] \end{aligned}$$

Para la determinación covariante de la geometría del tensor de Weyl en el capítulo siguiente, necesitamos expresiones explícitas que permitan calcular cualquiera de las bases dada la otra.

Hasta aquí sólo sabemos construir la base $\{\mathcal{U}_i\}$ dada $\{e_\alpha\}$. Obtendremos ahora expresiones para calcular de modo covariante la base $\{e_\alpha\}$ en términos de la base $\{\mathcal{U}_i\}$. La 2-forma real $U_i = \sqrt{2} \text{Re}(\mathcal{U}_i)$ verifica que $U_i \times U_i = -e_0 \otimes e_0 + e_i \otimes e_i$. Entonces se tiene que

$$e_0 \otimes e_0 = \frac{1}{2} \left(g - \sum_{i=1}^3 U_i \times U_i \right) \equiv P_0$$

Por lo tanto P_0 proyecta cualquier vector sobre la dirección e_0 con lo que podemos calcularlo multiplicando por un vector arbitrario. Conocido e_0 , si tenemos en cuenta que $U_i(e_0) = e_i$, podemos obtener la base ortonormal $\{e_\alpha\}$. Resumimos estos resultados en la siguiente

Proposición 1 *Si $\{e_\alpha\}$ es una base ortonormal orientada y ortócrona y definimos $\mathcal{U}_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(U_i - i * U_i)$ siendo $U_i = e_0 \wedge e_i$, entonces la terna $\{\mathcal{U}_i\}$ es una base ortonormal orientada del espacio de las 2-formas autoduales. La inversa de esta biyección está dada por*

$$e_0 = \frac{-P_0(x)}{\sqrt{P_0(x, x)}}; \quad e_i = U_i(e_0)$$

donde x es cualquier vector temporal orientado al futuro y

$$P_0 = \frac{1}{2} \left(g - \sum_{i=1}^3 U_i \times U_i \right)$$

Clasificación del tensor de Weyl

c) Podemos asociar biunívocamente una base isótropa real orientada y ortócrona $\{l_-, l_+, e_2, e_3\}$ a cada base ortonormal orientada y ortócrona $\{e_\alpha\}$ a través de las relaciones

$$l_\epsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_0 + \epsilon e_1); \quad e_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (l_- + l_+); \quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (l_+ - l_-) \quad (1.10)$$

En el mismo sentido, dada una base ortonormal orientada $\{\mathcal{U}_i\}$ del espacio de las 2-formas autoduales, podemos asociarle biunívocamente la base isótropa orientada $\{\mathcal{U}, \mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+\}$. Las relaciones explícitas entre las dos bases están dadas por

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1; \quad \mathcal{H}_\epsilon = \mathcal{U}_2 - i\epsilon \mathcal{U}_3 \quad (\epsilon = \pm 1) \quad (1.11)$$

Una base isótropa orientada $\{\mathcal{U}, \mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+\}$ queda definida porque \mathcal{U} es unitaria, \mathcal{H}_\pm son isótropas, y por las relaciones

$$(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+) = -2, \quad \mathcal{U} \times \mathcal{H}_\epsilon = \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \mathcal{H}_\epsilon \quad (1.12)$$

Si l_\pm son las direcciones principales de \mathcal{U} , las relaciones (1.11) nos dicen que l_\pm son las direcciones fundamentales de \mathcal{H}_\pm . El recíproco también es inmediato. Sea \mathcal{U} unitaria, y \mathcal{H} isótropa tal que $(\mathcal{U}, \mathcal{H}) = 0$. Si completamos $\{\mathcal{U}, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3\}$ una b.o.n. se tiene que las únicas direcciones isótropas ortogonales a \mathcal{U} tienen la dirección de \mathcal{H}_\pm , y por lo tanto \mathcal{H} tiene la dirección de una de ellas. Entonces, la dirección fundamental de \mathcal{H} coincide con una de las direcciones principales de \mathcal{U} . Enunciaremos explícitamente este resultado que nos será útil en el capítulo siguiente para obtener la relación entre las direcciones de Debever y las 2-formas principales del Weyl.

Lema 1 *Si \mathcal{U} es una 2-forma unitaria y \mathcal{H} es una 2-forma isótropa, la condición necesaria y suficiente para que \mathcal{U} y \mathcal{H} sean ortogonales es que la dirección fundamental de \mathcal{H} coincida con una de las direcciones principales de \mathcal{U} .*

En este punto, conviene señalar una diferencia entre las bases ortonormales orientadas y las bases isótropas. En el primer caso tenemos un procedimiento sencillo para determinar un elemento de la base conocidos los otros tres. Por ejemplo, $e_0 = *(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)$. La expresión (1.9) nos dice que hay una propiedad equivalente para las bases ortonormales \mathcal{U}_i . En ambos casos tenemos un algoritmo deductivo para completar la base. Este procedimiento no es válido para las bases isótropas $\{l_-, l_+, e_2, e_3\}$. Evidentemente, conocidos tres elementos, siempre podemos resolver las ecuaciones que restringen el cuarto. Pero si queremos un algoritmo deductivo, podemos utilizar las expresiones (1.4) que nos determinan las direcciones principales de una 2-forma. Más precisamente, en una base

isótropa real orientada y ortócrona $\{l_-, l_+, e_2, e_3\}$ el vector l_+ está dado en función de los otros tres elementos por (1.4) con $U = *(e_2 \wedge e_3)$.

Pero de cara a determinar de forma covariante la geometría del tensor de Weyl, será más útil un resultado similar al de la proposición 1 para las bases ortonormales. En ese sentido, consideremos una 2-forma unitaria \mathcal{U} y una isótropa ortogonal \mathcal{H} . Sea $H = \sqrt{2}\text{Re}(\mathcal{H})$. La dirección fundamental l de H , que coincide con una de las direcciones principales de \mathcal{U} , está dada por (1.7). Conocida l , podemos usar (1.4) para calcular la otra dirección principal l' de \mathcal{U} . Conocidas l y l' , podemos completar la base sin más que considerar $e_2 = H(l')$, $e_3 = -*H(l')$. Así tenemos:

Proposición 2 *Dadas \mathcal{U} y \mathcal{H} una 2-forma autodual unitaria y una isótropa ortogonal respectivamente con $\mathcal{U} \times \mathcal{H} = -\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\mathcal{H}$, existe una única base isótropa real $\{l, l', e_2, e_3\}$ de manera que*

$$U = \epsilon l \wedge l'; \quad H = l \wedge e_2$$

donde, si x es cualquier vector temporal orientado al futuro.

$$\begin{aligned} l &= \frac{H^2(x)}{\sqrt{-H^2(x, x)}}; & l' &= -\frac{[U \times U + \epsilon U](x)}{2(x, l)} \\ e_2 &= H(l') & e_3 &= *H(l') \end{aligned} \quad (1.13)$$

siendo $\epsilon = \text{signo}(U(x, l))$.

Entonces, como caso particular, conocidas $\{\mathcal{U}, \mathcal{H}_-\}$, tenemos un algoritmo covariante para calcular la base isótropa real orientada y ortócrona, haciendo $\epsilon = 1$ en la proposición anterior.

1.3 Clasificación de Petrov–Bel

a) Denotaremos W a la doble 2-forma de Weyl. Recordemos que W se define a partir del tensor de Riemann, \mathcal{R} , como:

$$W = \mathcal{R} - \frac{1}{2}\text{Ric} \wedge g + \frac{R}{12}g \wedge g$$

donde $\text{Ric} = \text{tr}_{13}(\mathcal{R})$ y $R = \text{tr}(\text{Ric})$ y tr_{13} representa la contracción del primer y tercer índice.

Algebraicamente, W es una doble 2-forma con todas sus trazas nulas, $W^\alpha_{\beta\alpha\delta} = 0$ y $W^{\alpha\beta}_{\alpha\beta} = 0$, y que verifica además $*W = W*$. Desde un punto de vista exclusivamente algebraico, la doble 2-forma de Weyl puede considerarse como un endomorfismo del espacio de las 2-formas en cada punto de la variedad espacio-tiempo. El estudio de tal endomorfismo y de sus posibles tipos algebraicos, es el que da lugar a los diferentes tipos Petrov–Bel. Recordemos que, dada una 2-forma F , se define la

Clasificación del tensor de Weyl

imagen por W de F , $W(F)$, como la nueva 2-forma cuyas componentes son $W(F)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}W_{\alpha\beta}{}^{\epsilon\delta} F_{\epsilon\delta}$. El estudio de este problema de valores y vectores propios fue iniciado por Petrov [71] y refinado por G eh eniau [46] y Bel [3] considerando no sólo el número de subespacios invariantes independientes, sino también la multiplicidad de los valores propios.

Teniendo en cuenta que $*W = W*$, el estudio algebraico de la doble 2-forma de Weyl se reduce [46] al estudio del problema de vectores y valores propios del endomorfismo del espacio de las 2-formas autoduales definido por el tensor de Weyl autodual $\mathcal{W} = \frac{1}{2}(W - i * W)$. En función de los invariantes escalares complejos

$$a = \text{tr}(\mathcal{W}^2), \quad b = \text{tr}(\mathcal{W}^3)$$

la ecuación característica se escribe

$$x^3 - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{3}b = 0 \tag{1.14}$$

En la resolución del problema de valores propios distinguiremos los casos de que las tres raíces sean iguales (y como \mathcal{W} es de traza nula las tres son nulas), que haya dos iguales y una diferente o que las tres sean diferentes. En términos de invariantes se tiene

Lema 2 *Sea \mathcal{W} el tensor de Weyl autodual y consideremos la ecuación característica (1.14). Se verifica:*

1. *La ecuación característica tiene tres raíces diferentes ρ_k si, y sólo si, $6b^2 \neq a^3$. Además, en términos de a y b están dadas por*

$$\rho_k = \beta e^{\frac{2\pi k}{3}i} + \frac{a}{6\beta} e^{-\frac{2\pi k}{3}i}; \quad \beta = \sqrt[3]{\frac{1}{6} \left(b + \sqrt{b^2 - \frac{a^3}{6}} \right)}$$

2. *La ecuación característica tiene dos raíces iguales $\rho = \frac{-b}{a}$, y una diferente -2ρ , si, y sólo si, $6b^2 = a^3 \neq 0$.*
3. *Las tres raíces de la ecuación característica son iguales, y por lo tanto iguales a cero, si, y sólo si, $a = b = 0$.*

b) Si ahora refinamos cada uno de los casos anteriores teniendo en cuenta los posibles polinomios mínimos se obtienen los seis tipos algebraicos que aparecen en la literatura. Recordando que el polinomio mínimo es divisor del característico y que tiene las mismas raíces que aquél pero no necesariamente con la misma multiplicidad, se tiene que si las tres raíces son nulas, los únicos divisores del polinomio característico son x , x^2 y x^3 y que corresponden a los tipos *O*, *N* y *III* respectivamente. Como

todo endomorfismo es raíz de su polinomio mínimo, en términos del Weyl autodual y de sus invariantes tenemos

$$\begin{aligned} \text{Tipo O} & \iff \mathcal{W} = 0 \\ \text{Tipo N} & \iff \mathcal{W} \neq 0, \mathcal{W}^2 = 0 \\ \text{Tipo III} & \iff a = b = 0, \mathcal{W}^2 \neq 0 \end{aligned}$$

En el caso de que haya dos raíces iguales las únicas posibilidades para el polinomio mínimo son $(x - \rho)(x + 2\rho)$ y $(x - \rho)^2(x + 2\rho)$ que dan lugar a los tipos *D* y *II* respectivamente. Tenemos en concreto

$$\begin{aligned} \text{Tipo D} & \iff 6b^2 = a^3 \neq 0, (\mathcal{W} - \alpha\mathcal{G})(\mathcal{W} + 2\alpha\mathcal{G}) = 0 \\ \text{Tipo II} & \iff 6b^2 = a^3 \neq 0, (\mathcal{W} - \alpha\mathcal{G})(\mathcal{W} + 2\alpha\mathcal{G}) \neq 0 \end{aligned}$$

Por último si las tres raíces son diferentes, el polinomio mínimo coincide necesariamente con el característico y obtenemos el tipo *I*, que queda caracterizado por la condición escalar

$$\text{Tipo I} \iff 6b^2 \neq a^3$$

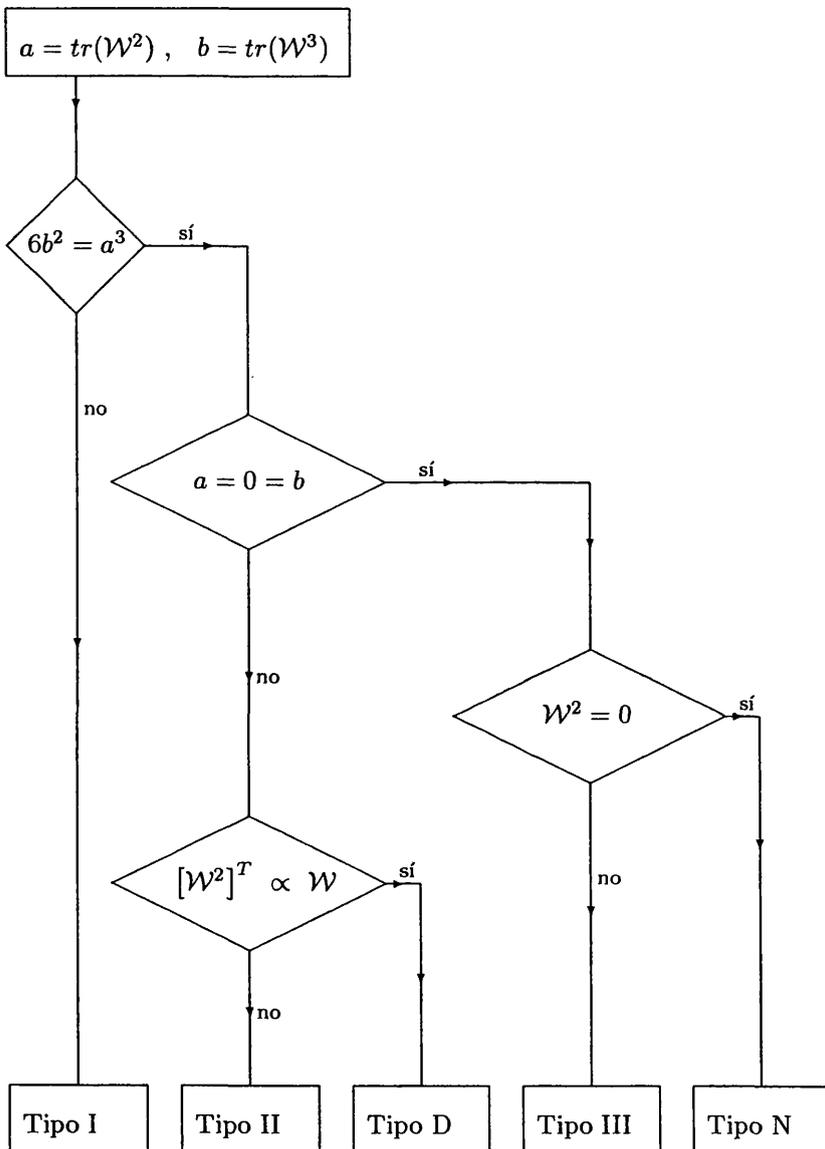
c) Ofrecemos a continuación dos algoritmos para la determinación del tipo algebraico de la doble 2-forma de Weyl. El primero es equivalente al de d'Inverno y Rusell Clark en cuanto a número de pasos y esquema de decisiones pero en lugar de trabajar con las componentes del Weyl en una tetrada isótropa compleja, trabajaremos con el Weyl autodual y sus invariantes. El segundo está estructurado según el grado del polinomio mínimo de \mathcal{W} .

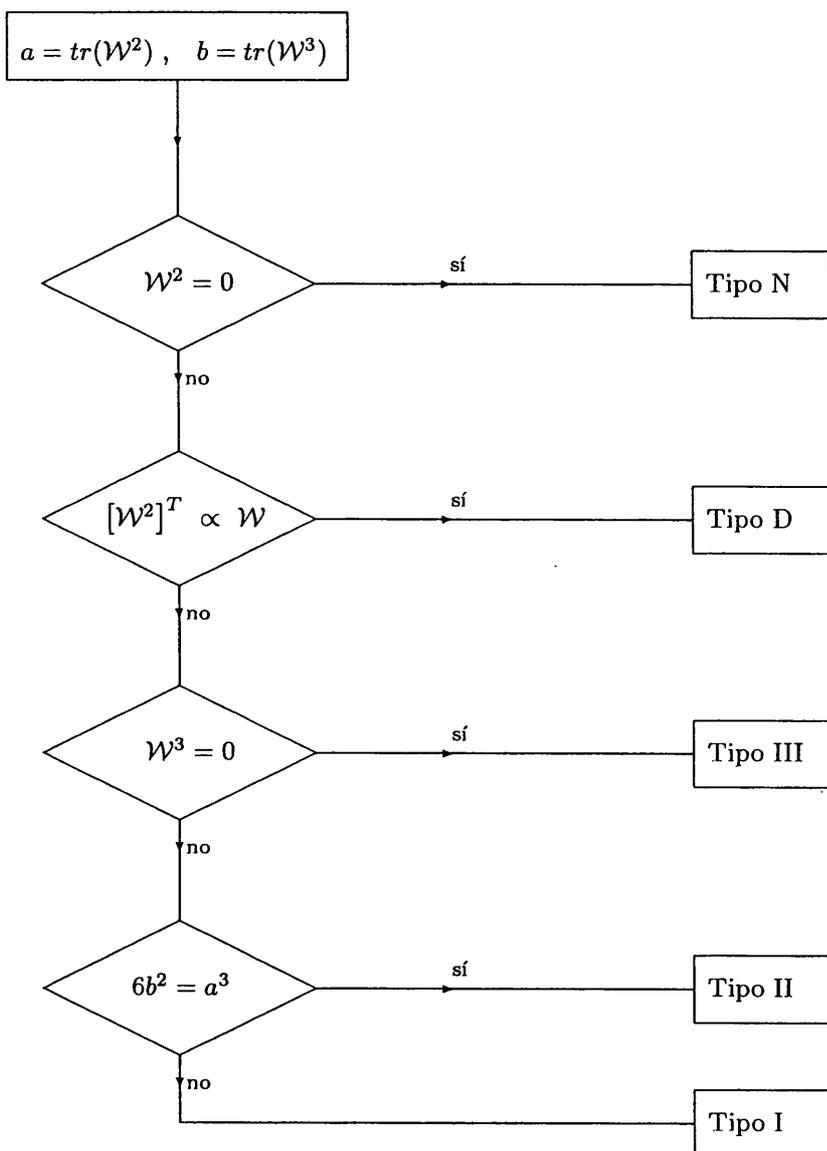
Para cualquier doble 2-forma simétrica P denotemos P^T al tensor

$$[P]^T_{\alpha\beta\epsilon\delta} = P_{\alpha\beta\epsilon\delta} - \frac{1}{3} (\mathcal{G}^{\mu\nu\lambda\delta} P_{\mu\nu\lambda\delta}) \mathcal{G}_{\alpha\beta\epsilon\delta}$$

Si la doble 2-forma de Weyl es diferente de cero, su tipo algebraico puede calcularse a partir de uno cualquiera de los siguientes diagramas.

Clasificación del tensor de Weyl





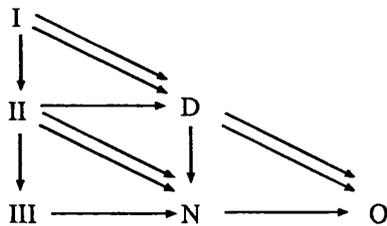
1.4 Sobre las 2-formas de Debever

a) Un punto de vista alternativo al de la clasificación del Weyl como endomorfismo del espacio de las 2-formas es el planteado por Debever [24]. Si consideramos el tensor de Weyl como forma cuadrática en el espacio de las 2-formas autoduales, podemos calcular la intersección de los conos isotropos del Weyl y de la métrica, es decir, calcular las 2-formas autoduales \mathcal{H} que satisfagan

$$\mathcal{G}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) = 0 = \mathcal{W}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$$

Llamaremos *2-formas isotropas de Debever* a las 2-formas intersección de los dos conos de luz, y *direcciones nulas principales* o *direcciones de Debever* a las direcciones fundamentales de esas 2-formas.

Dada una base isotropa $\{\mathcal{U}, \mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+\}$, busquemos una 2-forma isotropa \mathcal{H} que contenga una de las direcciones de Debever. Salvo reparametrización, podemos escribir $\mathcal{H} = 2\nu\mathcal{U} - \nu^2\mathcal{H}_+ + \mathcal{H}_-$. La condición $\mathcal{W}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) = 0$ se convierte en una ecuación para ν de grado cuatro, con coeficientes complejos que son las componentes del Weyl en la base $\{\mathcal{U}, \mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+\}$. Cada raíz diferente de esa ecuación nos proporciona una 2-forma isotropa \mathcal{H} solución de la ecuación $\mathcal{W}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) = 0$, y por lo tanto una dirección de Debever. La degeneración de tales direcciones corresponde a la degeneración en la multiplicidad de esas raíces. Así, el tipo I corresponde al caso de que existan cuatro direcciones de Debever simples. En el tipo II, aparece una dirección de Debever doble y dos direcciones simples. En el tipo D tenemos dos direcciones dobles. El tipo III corresponde al caso de que exista una dirección triple y una simple, y por último, en el tipo N existe una única dirección de Debever cuádruple. El diagrama de Penrose resume estas degeneraciones de las direcciones de Debever entre los diferentes tipos algebraicos



b) Sea \mathcal{H}_- una 2-forma autodual isotropa cualquiera y l_- su dirección fundamental, y completamos una base isotropa $\{\mathcal{U}, \mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+\}$ del espacio de las 2-formas autoduales. Es claro que esa base no es única y que, además de la reparametrización de \mathcal{H}_- , tenemos la libertad de la elección de la 2-forma unitaria \mathcal{U} ortogonal a ella $(\mathcal{U} + \lambda\mathcal{H}_-)$. Una vez fijadas estas 2-formas, la otra isotropa es única. En concreto, todas las bases isotropas

que podemos elegir manteniendo la parametrización de la isotropa dada son

$$\{\mathcal{U} + \lambda\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_-, -2\lambda\mathcal{U} - 2\lambda^2\mathcal{H}_- + \mathcal{H}_+\}$$

Como las direcciones principales de \mathcal{U} son las direcciones fundamentales de las 2-formas isotropas ortogonales, cualquiera de estas bases verifica

$$\mathcal{U}(l_-) \wedge l_- = 0 = \mathcal{H}_-(l_-); \quad \mathcal{H}_+(l_-) \wedge l_- \neq 0$$

En una cualquiera de estas bases isotropas $\{\mathcal{U}, \mathcal{H}_-, \mathcal{H}_+\}$, el Weyl autodual se escribe como

$$\mathcal{W} = \alpha\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} + \beta\epsilon\mathcal{U} \tilde{\otimes} \mathcal{H}_\epsilon + \gamma\mathcal{H}_- \otimes \mathcal{H}_- + \lambda\mathcal{H}_- \tilde{\otimes} \mathcal{H}_+ + \delta\mathcal{H}_+ \otimes \mathcal{H}_+ \quad (1.15)$$

Un cálculo directo demuestra que $\mathcal{W}(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_-) = 0 \iff \delta = 0$. Por otra parte, si en (1.15) calculamos $l_- \wedge \mathcal{W}(l_-; l_-) \wedge l_-$ se verifica que la condición necesaria y suficiente para que tal expresión se anule es $\delta = 0$. Recuperamos así el resultado de Sachs [79] que caracteriza las direcciones de Debever simples:

$$l_- \wedge \mathcal{W}(l_-; l_-) \wedge l_- = 0 \iff \mathcal{W}(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_-) = 0 \quad (1.16)$$

Las sucesivas degeneraciones de esta condición nos llevan a la existencia de direcciones de Debever múltiples. Una primera degeneración que podemos considerar es $\mathcal{H}_- \times \mathcal{W}(\mathcal{H}_-) = 0$. De la expresión (1.15) se deduce que $\mathcal{H}_- \times \mathcal{W}(\mathcal{H}_-) = 0 \iff \beta^+ = 0 = \delta$

Razonando como antes se prueba que esto ocurre si, y sólo si, la dirección fundamental l_- de \mathcal{H}_- satisface la ecuación $\mathcal{W}(l_-; l_-) \wedge l_- = 0$ que corresponde a la ecuación de Sachs [79] para las direcciones de Debever dobles, es decir

$$\mathcal{W}(l_-; l_-) \wedge l_- = 0 \iff \mathcal{H}_- \times \mathcal{W}(\mathcal{H}_-) = 0 \quad (1.17)$$

Una degeneración más la encontramos en la condición $\mathcal{W}(\mathcal{H}_-) = 0$. Tal condición equivale a que la dirección fundamental de \mathcal{H}_- satisfaga la ecuación de Sachs [79] para las direcciones triples,

$$l_- \wedge \mathcal{W}(l_-;) = 0 \iff \mathcal{W}(\mathcal{H}_-) = 0 \quad (1.18)$$

Por último, podemos considerar el caso $\mathcal{H} \times \mathcal{W} = 0$. Tal condición equivale a que la dirección fundamental de \mathcal{H} satisfaga la ecuación de Sachs [79] para las direcciones de Debever cuádruples

$$\mathcal{W}(l_-;) = 0 \iff \mathcal{H}_- \times \mathcal{W} = 0 \quad (1.19)$$

Si tenemos en cuenta que, dada una 2-forma isotropa \mathcal{H} , las únicas 2-formas \mathcal{F} que satisfacen la condición $\mathcal{H} \times \mathcal{F} = 0$ son $\mathcal{F} = \lambda\mathcal{H}$, se deduce que $\mathcal{H} \times \mathcal{W}(\mathcal{H}) = 0$ si, y sólo si, $\mathcal{W}(\mathcal{H}) = \lambda\mathcal{H}$, es decir, \mathcal{H} es propia del Weyl autodual. Recuperamos así el resultado conocido

Clasificación del tensor de Weyl

Lema 3 *Las direcciones múltiples de Debever son direcciones fundamentales de 2-formas isótropas propias del Weyl. Las direcciones de Debever simples nunca son direcciones fundamentales de 2-formas isótropas propias.*

c) Para un tensor de Weyl dado, cada par \mathcal{H}_{\mp} de 2-formas isótropas de Debever definen un 2-plano en el espacio de las 2-formas autoduales que es el ortogonal a una dirección regular \mathcal{V} ($\sqrt{2}\mathcal{V} = g - \mathcal{H}_- \times \mathcal{H}_+$). La 2-forma unitaria \mathcal{V} tiene como direcciones principales las direcciones fundamentales de las 2-formas isótropas \mathcal{H}_{\mp} , es decir, que \mathcal{V} tiene como direcciones principales dos direcciones de Debever. A una 2-forma unitaria con esta propiedad le llamaremos *2-forma unitaria de Debever*. En tipo N, no existe ninguna de estas 2-formas. En los espacios de tipo III y en los de tipo D, existe una única 2-forma unitaria de Debever. En los espacios de tipo II, tenemos tres: una de ellas contiene a las dos direcciones simples, y las otras dos contienen cada una la dirección doble y una dirección simple. Por último, si el Weyl es de tipo I, podemos formar seis 2-formas de Debever con las cuatro direcciones simples que tenemos.



2. Geometría del tensor de Weyl

Como hemos visto en el capítulo anterior, hablar de 2-formas propias del Weyl, es hablar de 2-formas propias autoduales. Siguiendo a Bel, llamaremos 2-forma principal del Weyl a toda 2-forma autodual propia de W . Con ello, la riqueza geométrica de las 2-formas se traslada al Weyl a través de las 2-formas principales. En ese sentido llamaremos 2-plano principal del Weyl al 2-plano principal de cualquier 2-forma principal del Weyl. De igual manera se puede hablar de direcciones principales del Weyl, como de las direcciones principales de las 2-formas autoduales regulares propias del Weyl y de vectores fundamentales, que serán los vectores fundamentales de las 2-formas isótropas propias. Nosotros hablaremos en general de geometría del Weyl para referirnos a todos los elementos que aparecen asociados a la doble 2-forma de Weyl a través de las 2-formas principales o de otras 2-formas características como por ejemplo las 2-formas de Debever.

El objetivo de este capítulo es ofrecer algoritmos covariantes y explícitos para calcular todas los elementos geométricos asociados al Weyl: las 2-formas propias, las direcciones de Debever y todas las direcciones privilegiadas que aparezcan de modo natural en cada uno de los tipos Petrov.

El primer paso es la obtención de los vectores propios, que aquí serán 2-formas propias, y el cálculo de la expresión del Weyl adaptada a esas direcciones propias. Este primer nivel es equivalente al que aparece en la determinación covariante de autovectores para un tensor simétrico en el espacio-tiempo [7].

Las 2-formas propias determinan a su vez direcciones privilegiadas en el tangente (direcciones principales de 2-formas regulares o vectores fundamentales de 2-formas isótropas). Pero no sólo encontramos direcciones isótropas privilegiadas, sino también referenciales ortonormales privilegiados: los determinados por una base ortonormal de 2-formas autoduales, o por una 2-forma autodual unitaria y una isótropa ortogonal. Tales bases ortonormales del tangente asociadas a las 2-formas que aparecen en la expresión canónica del Weyl, son las bases canónicas. Dependiendo del tipo algebraico existe una única base canónica o una familia de bases

canónicas. En cualquier caso, obtenemos expresiones covariantes de tales bases en todos los tipos Petrov.

Hemos estructurado la primera parte del capítulo en cinco secciones que corresponden a los cinco tipos no nulos de Petrov–Bel. Para cada uno de los tipos obtenemos en el apartado a) la expresión canónica usual para el tensor de Weyl. En el apartado b) de cada sección obtenemos la relación entre las direcciones de Debever y las direcciones principales de las 2–formas que aparecen en la expresión canónica. Como en algunos tipos no localizamos así toda la geometría de Debever, buscamos expresiones alternativas que permitan localizar estas direcciones. Estas expresiones adaptadas a las 2–formas de Debever permiten explicar algunas degeneraciones de unos tipos a otros en un diagrama de Penrose que no permite la forma canónica usual. En el apartado c) calculamos explícitamente las 2–formas principales y las direcciones de Debever, y por último, en el apartado d), las bases canónicas que define el tensor de Weyl.

Hemos incluido dos secciones más en este capítulo. En la sexta, presentamos algunos resultados algebraicos sobre espacios de tipo I, y en concreto, completamos la interpretación del invariante M considerado por Arianrhod y otros [1] para el caso de que sea real negativo. La última sección recoge los resultados del cálculo, para cada tipo Petrov, de las direcciones que anulan la parte eléctrica o la parte magnética del Weyl.

Los resultados de este capítulo han sido presentados en los Encuentros Relativistas de los años 1994 [36] y 2000 [42] y constituyen el contenido básico de dos artículos [39], [35].

2.1 Geometría del tipo N

a) Después del Tipo 0, el Tipo N es algebraicamente el más degenerado y corresponde al caso $\mathcal{W} \neq 0$ y $\mathcal{W}^2 = 0$. Como $\mathcal{W} \neq 0$ existen 2–formas \mathcal{X} tales que $\mathcal{W}(\mathcal{X}) \neq 0$. Pero para cualquier \mathcal{X} se verifica que $\mathcal{W}(\mathcal{W}(\mathcal{X})) = \mathcal{W}^2(\mathcal{X}) = 0$, se cumple que $\mathcal{W}(\mathcal{X})$ es propia de \mathcal{W} . Además, como para cualquier par de 2–formas se verifica que $(\mathcal{W}(\mathcal{X}), \mathcal{W}(\mathcal{Y})) = \mathcal{W}^2(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$, se deduce que $\mathcal{W}(\mathcal{X})$ y $\mathcal{W}(\mathcal{Y})$ son isótropas ortogonales y por tanto colineales. Así el subespacio imagen del endomorfismo \mathcal{W} es un subespacio isótropo de dimensión 1, y podemos reparametrizar esa dirección isótropa \mathcal{H} de manera que

$$\mathcal{W} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \quad (2.1)$$

A la 2–forma \mathcal{H} con esa parametrización privilegiada le llamaremos 2–forma canónica. La 2–forma canónica está definida salvo cambio de signo.

Las 2–formas principales son entonces todas las ortogonales a \mathcal{H} . Contendidas en ese subespacio isótropo existen 2–formas regulares propias. Dada \mathcal{U} unitaria y ortogonal a \mathcal{H} todas las demás son $\mathcal{U} + \lambda\mathcal{H}$ donde $\lambda \in \mathbb{C}$. Todas esas 2–formas regulares contienen a la dirección fundamental l de \mathcal{H} y esa es la condición que las define. En concreto, los 2–planos prin-

Geometría del tensor de Weyl

principales del Weyl, son todos los que contienen al vector fundamental l de la dirección isótropa propia. Si son temporales, corresponden a 2-planos principales de 2-formas propias regulares, y si son isótropos, son los 2-planos fundamentales de las 2-formas isótropas propias del Weyl, $\mu\mathcal{H}$, con μ complejo. A los dos 2-planos isótropos definidos por la 2-forma canónica \mathcal{H} les llamaremos 2-planos canónicos y al vector fundamental l de \mathcal{H} , *vector fundamental del Weyl*.

b) El tipo N queda caracterizado porque admite una dirección de Debever cuádruple, es decir, porque existe una 2-forma isótropa que satisface la segunda condición de (1.19). A partir de (2.1) resulta que la 2-forma canónica es solución de esta ecuación y por lo tanto

Proposición 3 *Si el tensor de Weyl es de tipo N, el vector fundamental determina la dirección de Debever cuádruple.*

c) Abordaremos ahora el cálculo covariante de los elementos geométricos que aparecen asociados a un tensor de Weyl de Tipo N: la 2-forma canónica \mathcal{H} y el vector fundamental l . A partir de la expresión (2.1), podemos calcular la primera multiplicando por una 2-forma arbitraria, y conocida \mathcal{H} podemos utilizar (1.7) para obtener l . Más precisamente se tiene

Proposición 4 *Sea \mathcal{W} un tensor de Weyl de Tipo N. Entonces su 2-forma canónica \mathcal{H} puede obtenerse como*

$$\mathcal{H} = \frac{\mathcal{W}(\mathcal{X})}{\sqrt{\mathcal{W}(\mathcal{X}, \mathcal{X})}} \quad (2.2)$$

donde \mathcal{X} es cualquier 2-forma tal que $\mathcal{W}(\mathcal{X}) \neq 0$.
El vector fundamental l está dado por

$$l = \frac{i(x)H \times H}{\sqrt{-i^2(x)H \times H}} \quad (2.3)$$

donde H es la 2-forma real asociada a \mathcal{H} y x es cualquier vector temporal orientado al futuro.

d) La familia a dos parámetros de bases canónicas asociadas al un tensor de Weyl de tipo N, son las definidas por \mathcal{H} y por cualquier 2-forma unitaria \mathcal{U} ortogonal a ella. Como, dada una de estas 2-formas $\tilde{\mathcal{U}}$, todas las demás son $\mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}} + \lambda\mathcal{H}$ con λ complejo, los dos grados de libertad en las bases canónicas son los de elegir el parámetro λ . Si escribimos $\lambda = \mu + i\nu$, se tiene que $\mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}} + \mu\mathcal{H} + \nu * H$. Como además sabemos que la condición necesaria y suficiente para que $\tilde{\mathcal{U}}$ y \mathcal{H} sean ortogonales es que la dirección fundamental de \mathcal{H} coincida con una de las principales de \mathcal{U} , podemos construir $\tilde{\mathcal{U}}$ sin más que considerar $\tilde{\mathcal{U}} \propto l \wedge x$, donde x es cualquier vector temporal. Teniendo entonces en cuenta la proposición 2, y recordando que \mathcal{H} está fijada salvo signo, se deduce

Proposición 5 Si un tensor de Weyl \mathcal{W} es de tipo N y si \mathcal{H} y l son la 2-forma canónica y el vector fundamental dados en (2.2) y (2.3) respectivamente, entonces existe una familia a dos parámetros de bases canónicas orientadas y ortócronas $\{l, l', e_2, e_3\}$ de manera que $H = \epsilon l \wedge e_2$ y $*H = -\epsilon l \wedge e_3$. Estas bases están dadas por

$$l' = -\frac{[U^2 + U](x)}{2(x, l)}; \quad e_2 = \epsilon H(l'); \quad e_3 = -\epsilon * H(l') \quad (2.4)$$

donde $\epsilon = \pm 1$, y donde

$$U = \tilde{U} + \mu H + \nu * H, \quad \tilde{U} = -\frac{l \wedge x}{(l, x)}, \quad \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

y siendo x cualquier vector temporal orientado al futuro.

Podemos entender los grados de libertad en la elección de las bases canónicas desde otro punto de vista: un tensor de Weyl de tipo N, determina y sólo determina el vector fundamental l y los dos 2-planos canónicos H y $*H$. Conocido l , podemos determinar dos direcciones espaciales unitarias e_2 y e_3 en H y $*H$ respectivamente, y luego completar la base $\{l, l', e_2, e_3\}$. Esta base no es única porque e_2 y e_3 están dados salvo $e_2 = \epsilon \tilde{e}_2 + \mu l$, $e_3 = \epsilon \tilde{e}_3 + \nu l$ con $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Esta idea proporciona un algoritmo de cálculo de las bases canónicas equivalente al anterior, ya que podemos calcular los vectores \tilde{e}_2 y \tilde{e}_3 como

$$\tilde{e}_2 = \frac{H(x)}{\sqrt{-H^2(x, x)}}; \quad \tilde{e}_3 = \frac{*H(x)}{\sqrt{-H^2(x, x)}}$$

Entonces para cada elección de μ y ν , tenemos un par e_2, e_3 . El vector l' que completa la base puede calcularse ahora de la primera de las expresiones en (2.4) tomando $U = *(e_2 \wedge e_3)$. Por lo tanto es claro qué transformaciones están permitidas dentro de la familia de bases canónicas. Explícitamente se tiene.

Corolario 1 Si $\{l, l', e_2, e_3\}$ es una cualquiera de las bases canónicas del Weyl en tipo N, todas las demás bases canónicas son

$$\{l, l' - \epsilon \mu e_2 - \epsilon \nu e_3, \epsilon e_2 + \mu l, \epsilon e_3 + \nu l\}$$

donde $\epsilon = \pm 1$, y $\mu, \nu \in \mathbb{R}$.

2.2 Geometría del tipo III

a) Si el Weyl es de Tipo III, los cuatro invariantes de vacío son nulos, y se cumple que $\mathcal{W}^3 = 0$ pero $\mathcal{W}^2 \neq 0$. Entonces existe alguna 2-forma \mathcal{X} , tal que $\mathcal{W}^2(\mathcal{X}, \mathcal{X}) \neq 0$ (si no existiera, como $2 \mathcal{W}^2(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \mathcal{W}^2(\mathcal{X} + \mathcal{Y}, \mathcal{X} +$

Geometría del tensor de Weyl

$\mathcal{Y}) - \mathcal{W}^2(\mathcal{X}, \mathcal{X}) - \mathcal{W}^2(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) = 0$ tendríamos que $\mathcal{W}^2 = 0$). La 2-forma $\mathcal{Y} = \frac{\mathcal{X}}{\sqrt{-\mathcal{W}^2(\mathcal{X}, \mathcal{X})}}$ verifica que $\mathcal{W}(\mathcal{Y}) = \mathcal{U}'$ unitaria. Ahora $\mathcal{W}(\mathcal{U}') = \mathcal{W}^2(\mathcal{Y})$ es isótropa, ortogonal a \mathcal{U}' y propia de \mathcal{W} . Si denotamos \mathcal{H} a esta 2-forma, su ortogonal (generado por ella y por \mathcal{U}') es un subespacio invariante que coincide con el subespacio imagen de \mathcal{W} . Como además $\mathcal{W}(\mathcal{U}', \mathcal{U}') = \mathcal{W}^3(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) = 0$, se tiene que

$$\mathcal{W} = \mathcal{U}' \tilde{\otimes} \mathcal{H} + \alpha \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} = (\mathcal{U}' + \frac{\alpha}{2} \mathcal{H}) \tilde{\otimes} \mathcal{H}$$

Redefiniendo $\mathcal{U} = \mathcal{U}' + \frac{\alpha}{2} \mathcal{H}$ que sigue siendo unitaria y ortogonal a \mathcal{H} , recuperamos la expresión canónica de \mathcal{W} usual para este tipo Petrov,

$$\mathcal{W} = \mathcal{U} \tilde{\otimes} \mathcal{H} \tag{2.5}$$

Llamaremos *2-forma isótropa canónica* a \mathcal{H} con la parametrización que aparece en (2.5), y llamaremos *vector fundamental del Weyl* al vector fundamental l de \mathcal{H} . Las 2-formas reales asociadas H y $*H$, definen los *2-planos isótropos canónicos*. La dirección isótropa que define \mathcal{H} determina la única dirección propia del Weyl que existe en este caso. Pero en el subespacio invariante ortogonal a \mathcal{H} tenemos una 2-forma unitaria \mathcal{U} privilegiada. Llamaremos *2-forma canónica unitaria* a esta 2-forma. Por ser ortogonal a la isótropa \mathcal{H} , la dirección fundamental l coincide con una de las direcciones principales de \mathcal{U} . El par $\{\mathcal{U}, \mathcal{H}\}$ está determinado salvo un cambio de signo de ambos elementos (que equivale a que l sea el primer o el segundo de los vectores principales de \mathcal{U}). Sin embargo, la orientación espacio-temporal permite distinguir entre ambas parejas, ya que sólo una verifica $\mathcal{U} \times \mathcal{H} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{H}$. Es decir, podemos determinar una única pareja $\{\mathcal{U}, \mathcal{H}\}$ asociadas a un tensor de Weyl de tipo III.

b) El tipo III, está caracterizado también porque existen una dirección de Debever triple y una dirección simple. Es evidente que la 2-forma isótropa canónica verifica la ecuación (1.18) que caracteriza a las direcciones triples, y por lo tanto el vector fundamental del Weyl define la dirección de Debever triple. Por otro lado, si consideramos \mathcal{H}' la otra 2-forma isótropa ortogonal a \mathcal{U} , a partir de (2.5) es evidente que satisface la ecuación (1.16), y por lo tanto su dirección fundamental (que coincide con la otra dirección principal de \mathcal{U}) es la dirección de Debever simple. Así, la 2-forma canónica unitaria contiene a las dos direcciones de Debever que existen y por lo tanto es la única 2-forma unitaria de Debever que existe en este caso. Hemos probado entonces el siguiente resultado.

Proposición 6 *Si el tensor de Weyl es de tipo III, el vector fundamental l determina la dirección de Debever triple. Ésta y la dirección de Debever simple son las direcciones principales de la 2-forma canónica unitaria.*

Además, de las expresiones (2.1) y (2.5) resulta claro que la degeneración de tipo III a tipo N en el diagrama de Penrose se produce cuando la 2-forma \mathcal{U} se hace singular e igual a \mathcal{H} .

c) Consideremos de nuevo la expresión (2.5), $\mathcal{W} = \mathcal{U} \tilde{\otimes} \mathcal{H}$. Sea \mathcal{X} una 2-forma que cumpla que $\mathcal{W}^2(\mathcal{X}, \mathcal{X}) \neq 0$, es decir una 2-forma que no sea ortogonal a la dirección isótropa propia ($\mathcal{H} \propto \mathcal{W}^2(\mathcal{X})$). Como $\mathcal{W}^2 = -\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\mathcal{X}) &= (\mathcal{U}, \mathcal{X})\mathcal{H} + (\mathcal{H}, \mathcal{X})\mathcal{U} & \mathcal{W}^2(\mathcal{X}) &= -(\mathcal{H}, \mathcal{X})\mathcal{H} \\ \mathcal{W}(\mathcal{X}, \mathcal{X}) &= 2(\mathcal{U}, \mathcal{X})(\mathcal{H}, \mathcal{X}) & \mathcal{W}^2(\mathcal{X}, \mathcal{X}) &= -\mathcal{H}(\mathcal{X})\mathcal{H}(\mathcal{X}) \end{aligned}$$

Se comprueba entonces que

$$\mathcal{W}^2(\mathcal{X}, \mathcal{X})\mathcal{W}(\mathcal{X}) - \frac{1}{2}\mathcal{W}(\mathcal{X}, \mathcal{X})\mathcal{W}^2(\mathcal{X}) = (\mathcal{H}, \mathcal{X})^3 \mathcal{U}$$

Tenemos determinada así la dirección de la 2-forma \mathcal{U} y por lo tanto podemos calcular \mathcal{U} salvo signo. Para cada elección, la única 2-forma \mathcal{H} en la que el Weyl adopta la expresión (2.5) está dada por $\mathcal{H} = -\mathcal{W}(\mathcal{U})$. Calculadas así, no podemos garantizar que $\mathcal{U} \times \mathcal{H} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{H}$, es decir, que la dirección fundamental del Weyl sea el primer o el segundo vector principal de \mathcal{U} . Evidentemente, una vez hecha una elección de \mathcal{U} y calculada \mathcal{H} , podemos comprobar si $\mathcal{U} \times \mathcal{H} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{H}$ o $\mathcal{U} \times \mathcal{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{H}$. Si estamos en el segundo caso podemos cambiar de signo ambas 2-formas y ahora verifican la primera de las condiciones. Pero como la proposición 2 nos permite calcular cualquiera de las direcciones principales de \mathcal{U} dada la otra, podemos mantener un signo que nos dice cuál de las dos parejas hemos elegido. En concreto se tiene

Proposición 7 *Sea \mathcal{W} un tensor de Weyl de tipo III. Entonces la 2-forma canónica unitaria \mathcal{U} y la 2-forma isótropa canónica \mathcal{H} pueden obtenerse como*

$$\mathcal{U} \propto 2\mathcal{W}^2(\mathcal{X}, \mathcal{X})\mathcal{W}(\mathcal{X}) - \mathcal{W}(\mathcal{X}, \mathcal{X})\mathcal{W}^2(\mathcal{X}); \quad \mathcal{H} = -\mathcal{W}(\mathcal{U}) \quad (2.6)$$

donde \mathcal{X} es cualquier 2-forma autodual que verifique $\mathcal{W}^2(\mathcal{X}, \mathcal{X}) \neq 0$. El vector fundamental l y la dirección de Debever simple l' están dados por

$$l = \frac{H^2(x)}{\sqrt{-H^2(x, x)}}; \quad l' = -\frac{[U^2 + \epsilon U](x)}{2(x, l)} \quad (2.7)$$

donde H y U son las 2-formas reales asociadas a \mathcal{H} y \mathcal{U} , $\epsilon = \text{signo}(U(x, l))$ y x es cualquier vector temporal orientado al futuro.

d) En un espacio de tipo III podemos determinar una única base canónica asociada a la única pareja $\{\mathcal{U}, \mathcal{H}\}$ que verifica $\mathcal{U} \times \mathcal{H} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{H}$, pero como la proposición 2 nos permite calcular el primer o el segundo vector principal de \mathcal{U} dado el otro, podemos enunciar el siguiente resultado.

Proposición 8 Si el tensor de Weyl es de tipo III y \mathcal{U} y \mathcal{H} son las 2-formas canónicas dadas en (2.6), entonces existe una única base ortonormal orientada y ortócrona $\{l, l', e_2, e_3\}$ de manera que $U = \epsilon l \wedge l'$, $H = l \wedge e_2$ y $*H = -l \wedge e_3$, siendo $\epsilon = \text{signo}U(x, l)$ con x cualquier vector temporal orientado al futuro. Los vectores l y l' están dados en (2.7) y

$$e_2 = H(l'); \quad e_3 = - * H(l')$$

2.3 Geometría del tipo D

a) En este caso, \mathcal{W} tiene un valor propio doble ρ , y un valor propio simple -2ρ . El polinomio mínimo de \mathcal{W} es $P_{\min}(x) = (x - \rho)(x + 2\rho)$, y por lo tanto $(\mathcal{W} + 2\rho\mathcal{G})(\mathcal{W} - \rho\mathcal{G})(\mathcal{X}) = 0$ para cualquier 2-forma \mathcal{X} . Como -2ρ es simple, el subespacio propio a ese valor propio es regular y de dimensión 1. Además, para cualquier 2-forma \mathcal{X} tal que $(\mathcal{W} + 2\rho\mathcal{G})(\mathcal{X}) \neq 0$, $(\mathcal{W} + 2\rho\mathcal{G})(\mathcal{X})$ es propia con valor propio ρ , y razonando como en el tipo III, $[(\mathcal{W} + 2\rho\mathcal{G})(\mathcal{X})]^2$ no puede ser cero para toda 2-forma \mathcal{X} . Entonces existe al menos una 2-forma regular con valor propio ρ . Consideremos \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 unitarias y propias con valores propios -2ρ y ρ respectivamente. Si tomamos \mathcal{U}_3 que completa una base ortonormal se tiene que $(\mathcal{W}(\mathcal{U}_3), \mathcal{U}_1) = 0$, $(\mathcal{W}(\mathcal{U}_3), \mathcal{U}_2) = 0$. Por tanto, \mathcal{U}_3 es también propia. Se ha probado entonces que \mathcal{W} diagonaliza en cualquier base ortonormal en la que \mathcal{U}_1 es propia con valor propio -2ρ . En particular, contenidas en ese subespacio propio de dimensión 2 están las dos direcciones isótropas \mathcal{H}_\pm que contienen a las direcciones principales de la 2-forma \mathcal{U}_1 . Si denotamos $\mathcal{U}_1 \equiv \mathcal{U}$, la expresión canónica del Weyl es

$$\mathcal{W} = 3\rho\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} + \rho\mathcal{G} \quad (2.8)$$

Llamaremos a \mathcal{U} 2-forma canónica del Weyl en tipo D, y llamaremos 2-planos canónicos o principales a sus 2-planos principales. Esta 2-forma está fijada salvo signo y no hay ninguna parametrización privilegiada de sus dos direcciones principales.

b) En el subespacio propio ortogonal a \mathcal{U} tenemos las dos únicas direcciones isótropas \mathcal{H}_\pm , cuyas direcciones fundamentales son las direcciones principales de \mathcal{U} . Entonces se cumple que $\mathcal{W}(\mathcal{H}_\pm) = \rho\mathcal{H}_\pm$, y por lo tanto esas 2-formas isótropas verifican la ecuación de Sachs para las direcciones de Debever dobles (1.17). Por lo tanto \mathcal{H}_\pm son las 2-formas nulas de Debever y \mathcal{U} la única 2-forma unitaria de Debever que existe en este caso. Por lo tanto se tiene

Proposición 9 Las dos direcciones de Debever dobles que existen en Tipo D son las direcciones principales de la 2-forma canónica \mathcal{U} .

En el diagrama de Penrose, el tipo D puede degenerar a los tipos N y O. Esta segunda degeneración se obtiene de modo natural haciendo

$\rho = 0$ en la forma canónica (2.8). Pero con esa expresión para el Weyl no podemos pasar de tipo D a tipo N. Podemos interpretar esa degeneración considerando una forma canónica alternativa a la forma canónica (2.8) como sigue. Consideremos \mathcal{H}_\pm las 2-formas isotropas ortogonales a \mathcal{U} parametrizadas de manera que $(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-) = 6\rho$. En términos de \mathcal{U} y de estas 2-formas así parametrizadas se verifica que $\mathcal{G} = -\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} - \frac{1}{6\rho} \mathcal{H}_- \tilde{\otimes} \mathcal{H}_+$. Si utilizamos esta expresión para despejar $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ y llevamos esa expresión a (2.8) se obtiene la expresión

$$\mathcal{W} = -2\rho\mathcal{G} + \frac{1}{2} \mathcal{H}_- \tilde{\otimes} \mathcal{H}_+ \quad (2.9)$$

De esta expresión, podemos pasar a la de tipo N haciendo $\rho = 0$ y $\mathcal{H}_- = \mathcal{H}_+$.

c) Hemos visto hasta aquí que basta con determinar la geometría de la 2-forma propia correspondiente al valor propio simple del Weyl, para tener determinados todos los demás elementos asociados al Weyl. Pero de la expresión (2.8) se deduce que $\mathcal{W} - \rho\mathcal{G} = 3\rho\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$. Si definimos $\mathcal{P} = \mathcal{W} - \rho\mathcal{G}$, tenemos que $\mathcal{P}^2 = -9\rho^2\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$, y se tiene demostrada la siguiente propiedad:

Proposición 10 *Si la doble 2-forma de Weyl es de Tipo D, entonces la 2-forma canónica \mathcal{U} puede obtenerse como*

$$\mathcal{U} = \frac{\mathcal{P}(\mathcal{X})}{\sqrt{-\mathcal{P}^2(\mathcal{X}, \mathcal{X})}}; \quad \mathcal{P} = \mathcal{W} - \rho\mathcal{G}; \quad \rho = \frac{-\text{tr}\mathcal{W}^3}{\text{tr}\mathcal{W}^2} \quad (2.10)$$

donde \mathcal{X} es cualquier 2-forma autodual tal que $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \neq 0$.

Las direcciones de Debever dobles l_\pm pueden calcularse como

$$l_\pm = \alpha [U^2 \pm U](x)$$

donde U es la 2-forma real asociada a \mathcal{U} y x es cualquier vector temporal orientado al futuro.

d) En los espacios de tipo D, podemos considerar bases ortonormales $\{\mathcal{U}_i\}$ formadas por 2-formas propias del Weyl. Las correspondientes bases ortonormales $\{e_\alpha\}$ constituyen las bases canónicas de un tensor de Weyl de tipo D. Como todo el subespacio ortogonal a \mathcal{U} es propio, tenemos la libertad de elegir una 2-forma unitaria \mathcal{U}_2 ortogonal a \mathcal{U} , y (1.9) nos determina la tercera. Esta elección de \mathcal{U}_2 tiene dos grados de libertad (una rotación compleja en el espacio ortogonal a \mathcal{U}) y por eso tenemos una familia a dos parámetros de bases canónicas en este caso. Estas bases están definidas porque $U = \pm e_0 \wedge e_1$, $*U = \mp e_2 \wedge e_3$, y conocida una cualquiera $\{\tilde{e}_\alpha\}$, todas las demás se obtienen por una rotación hiperbólica en el 2-plano U y una rotación en el plano $*U$ (que son los dos parámetros de la rotación

Geometría del tensor de Weyl

compleja). Por lo tanto basta determinar una base cualquiera en cada 2-plano. Dado cualquier vector temporal x , el vector no nulo $U(x)$ nos fija una dirección espacial en el 2-plano U . Del mismo modo, dado cualquier vector y , $*U(y)$ nos determina, si no es nulo, una dirección en el plano $*U$. Como además tenemos la libertad en la elección del signo de U , se demuestra

Proposición 11 *Si el tensor de Weyl es de tipo D y si \mathcal{U} es la 2-forma canónica dada en (2.10), entonces existe una familia a dos parámetros de bases ortonormales orientadas y ortócronas de manera que $U = \epsilon e_0 \wedge e_1$ y $*U = -\epsilon e_2 \wedge e_3$. Estas bases están dadas por*

$$\begin{aligned} e_0 &= ch\psi \bar{e}_0 + \epsilon sh\psi \bar{e}_1; & e_1 &= sh\psi \bar{e}_0 + \epsilon ch\psi \bar{e}_1 \\ e_2 &= \cos\phi \bar{e}_2 - \epsilon \sin\phi \bar{e}_3; & e_3 &= \sin\phi \bar{e}_2 + \epsilon \cos\phi \bar{e}_3 \end{aligned}$$

donde $\phi \in \mathbb{R}$ y $\psi \in [0, 2\pi]$, ϵ toma los valores ± 1 y donde

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= \frac{U(x)}{\sqrt{-U^2(x, x)}}; & \bar{e}_0 &= U(\bar{e}_1) \\ \bar{e}_2 &= \frac{*U(y)}{\sqrt{-*U^2(y)}}; & \bar{e}_3 &= *U(\bar{e}_2) \end{aligned}$$

siendo x cualquier vector temporal orientado al futuro, y siendo y cualquier vector espacial que verifique $*U(y) \neq 0$.

2.4 Geometría del tipo II

a) El Tipo II verifica las mismas condiciones escalares que el Tipo D, $6b^2 = a^3$, con lo que \mathcal{W} tiene un valor propio doble ρ , y uno simple -2ρ . Además el polinomio mínimo coincide con el característico y por lo tanto $(\mathcal{W} - \rho\mathcal{G})^2(\mathcal{W} + 2\rho\mathcal{G}) = 0$ pero $(\mathcal{W} - \rho\mathcal{G})(\mathcal{W} + 2\rho\mathcal{G}) \neq 0$. El subespacio invariante al valor propio simple es de dimensión 1 y por lo tanto es propio y regular. Llamemos \mathcal{U} a la 2-forma propia en esa dirección. Si consideramos $(\mathcal{W} - \rho\mathcal{G})^2$, se verifica que $(\mathcal{W} + 2\rho\mathcal{G}) [(\mathcal{W} - \rho\mathcal{G})^2(\mathcal{X})] = 0$, con lo que $(\mathcal{W} - \rho\mathcal{G})^2$ proyecta el subespacio de las 2-formas autoduales sobre la dirección \mathcal{U}_1 , y por lo tanto

$$(\mathcal{W} - \rho\mathcal{G})^2 = \lambda \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \quad (2.11)$$

Ahora, dada cualquier 2-forma autodual \mathcal{Y} , $(\mathcal{W} + 2\rho\mathcal{G})(\mathcal{W} - \rho\mathcal{G})(\mathcal{Y})$ es isótropa propia y ortogonal a $(\mathcal{W} + 2\rho\mathcal{G})(\mathcal{W} - \rho\mathcal{G})(\mathcal{Z})$ para cualquier otra \mathcal{Z} autodual. Por tanto, el subespacio imagen de $(\mathcal{W} + 2\rho\mathcal{G})(\mathcal{W} - \rho\mathcal{G})$ es isótropo y de dimensión 1. Existe entonces una parametrización de esa dirección isótropa \mathcal{H}' de manera que

$$(\mathcal{W} + 2\rho\mathcal{G})(\mathcal{W} - \rho\mathcal{G}) = 3\rho\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \quad (2.12)$$

Desarrollando las expresiones (2.11) y (2.12) y eliminando entre ambas \mathcal{W}^2 , se tiene

$$3\rho\mathcal{W} = 3\rho\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} + 3\rho^2\mathcal{G} - \lambda\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$$

Imponiendo que $\mathcal{W}(\mathcal{U}) = -2\rho\mathcal{U}$ se obtiene la expresión canónica usual

$$\mathcal{W} = 3\rho\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} + \rho\mathcal{G} + \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \quad (2.13)$$

Llamaremos a \mathcal{H} *2-forma isótropa canónica* y llamaremos *vector fundamental del Weyl* al vector fundamental l de \mathcal{H} . La 2-forma isótropa canónica determina la única dirección propia asociada al valor propio doble ρ . Llamaremos *2-forma unitaria canónica* a \mathcal{U} , que por ser ortogonal a \mathcal{H} tiene a l como una de sus direcciones principales. \mathcal{U} y \mathcal{H} están definidas salvo cambio de signo $\pm\mathcal{U}$, $\pm\mathcal{H}$, lo que nos da cuatro posibilidades que mantienen la forma canónica (2.13). La orientación espacio-temporal permite distinguir dos de ellas imponiendo que el vector fundamental de \mathcal{H} sea el primer vector principal de \mathcal{U} , es decir porque $\mathcal{U} \times \mathcal{H} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{H}$.

b) Si el Weyl es de tipo II, existen dos direcciones de Debever simples y una doble. Aparecen así tres 2-formas unitarias de Debever. Una de ellas tiene como direcciones principales las dos direcciones de Debever simples, y cada una de las otras dos, la dirección doble y una de las simples. De la forma canónica (2.13) se deduce que la 2-forma isótropa canónica satisface la ecuación de Sachs para las direcciones de Debever dobles (1.17), luego el vector fundamental es la dirección de Debever doble que existe en este caso. Es claro que coincide además con una de las direcciones principales de \mathcal{U} , pero a diferencia del tipo III, la otra 2-forma isótropa ortogonal a \mathcal{U} no satisface ninguna de las ecuaciones de Sachs y, por lo tanto, no coincide con ninguna de las direcciones de Debever. La forma canónica (2.13) sólo contiene en este caso parte de la información sobre la geometría de Debever. Para localizar ahora las direcciones simples, llamemos \mathcal{V}_\pm a las 2-formas unitarias de Debever que contienen a la dirección doble y a una simple. Por ser unitarias y ortogonales a \mathcal{H} (contienen a su dirección fundamental) admiten la expresión

$$\mathcal{V}_\pm = \mathcal{U} + \lambda_\pm\mathcal{H}$$

Un cálculo directo prueba que si $\lambda_\pm = \pm\frac{i}{\sqrt{3\rho}}$ la expresión (2.13) se convierte en

$$\mathcal{W} = \rho\mathcal{G} + \frac{3}{2}\rho\mathcal{V}_+ \tilde{\otimes} \mathcal{V}_- \quad (2.14)$$

Entonces se comprueba que las 2-formas isótropas ortogonales a \mathcal{V}_\pm satisfacen la ecuación de Sachs para las direcciones de Debever simples (1.16). Podemos enunciar por lo tanto,

Proposición 12 *El vector fundamental l de un tensor de Weyl de tipo II determina la dirección de Debever doble. Las 2-formas unitarias de*

Geometría del tensor de Weyl

Debever que tienen como direcciones principales a la dirección doble y a una simple son \mathcal{V}_\pm , que en términos de las 2-formas canónicas \mathcal{U} y \mathcal{H} se escriben

$$\mathcal{V}_\pm = \mathcal{U} \pm \frac{i}{\sqrt{3\rho}} \mathcal{H} \quad (2.15)$$

La degeneración en el diagrama de Penrose de tipo II a tipo N, aparece si en la forma canónica usual (2.13) hacemos $\rho = 0$. En cambio, la degeneración a tipo D, aparece claramente en la forma canónica adaptada a las direcciones de Debever (2.14) haciendo $\mathcal{V}_- = \mathcal{V}_+ = \mathcal{U}$. Por último, la degeneración a tipo III aparece considerando una expresión alternativa a (2.14) que hace intervenir a la 2-forma unitaria de Debever \mathcal{V} que contiene a las dos direcciones simples. En términos de esta 2-forma tenemos $\mathcal{W} = -2\rho\mathcal{G} + \hat{\mathcal{H}} \otimes \mathcal{V}$, donde $\hat{\mathcal{H}}$ es una reparametrización de la 2-forma isotropa canónica \mathcal{H} . Haciendo $\rho = 0$ en esta expresión recuperamos la forma canónica del tipo III.

c) En este tipo Petrov, basta calcular las 2-formas canónicas \mathcal{U} y \mathcal{H} para determinar el resto de elementos que aparecen asociados a un tensor de Weyl de tipo II: 2-formas de Debever y direcciones de Debever simples. El cálculo de \mathcal{U} es inmediato y fue apuntado al principio de la sección, ya que, para cualquier 2-forma \mathcal{X} , $(\mathcal{W} - \rho\mathcal{G})^2(\mathcal{X})$ está en la dirección de \mathcal{U} . De la misma manera, la 2-forma isotropa canónica se obtiene sin más que considerar que $(\mathcal{W} - \rho\mathcal{G})(\mathcal{W} + 2\rho\mathcal{G}) = 3\rho \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. Una vez calculadas estas 2-formas, la expresión (2.15) nos proporciona las 2-formas unitarias de Debever \mathcal{V}_\pm . Notar que el cambio de signo bien en \mathcal{U} , bien en \mathcal{H} o simultáneo, nos proporciona la misma pareja de 2-formas de Debever salvo signo. Las direcciones principales de \mathcal{V}_\pm son l y l_\pm respectivamente. Además, de (2.15) se tiene que $\mathcal{V}_\pm \times \mathcal{H} = \mathcal{U} \times \mathcal{H}$. Por lo tanto, si utilizamos (1.4) podemos calcular las direcciones de Debever simples a partir de estas 2-formas de Debever. Más precisamente, se tiene

Proposición 13 *Sea \mathcal{W} un tensor de Weyl de tipo II. Entonces las 2-formas canónicas \mathcal{U} y \mathcal{H} pueden obtenerse como*

$$\mathcal{U} = \frac{\mathcal{P}(\mathcal{X})}{\sqrt{\mathcal{P}(\mathcal{X}, \mathcal{X})}}; \quad \mathcal{H} = \frac{\mathcal{Q}(\mathcal{Y})}{\sqrt{\mathcal{Q}(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})}}$$

donde $\mathcal{P} = (\mathcal{W} - \rho\mathcal{G})^2$, $\mathcal{Q} = \frac{1}{3\rho} [(\mathcal{W} - \rho\mathcal{G})(\mathcal{W} + \rho\mathcal{G})]$, $\rho = -\frac{\text{tr}\mathcal{W}^3}{\text{tr}\mathcal{W}^2}$, y donde \mathcal{X} y \mathcal{Y} son 2-formas cualesquiera verificando $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \neq 0$, $\mathcal{Q}(\mathcal{Y}) \neq 0$.

El vector fundamental l del Weyl y las dos direcciones de Debever simples l_\pm , están dados por

$$l = \frac{H^2(x)}{\sqrt{-H^2(x, x)}}; \quad l_\pm = -\frac{[V_\pm^2 + \epsilon V_\pm](x)}{2(x, l)} \quad (2.16)$$

donde H y V_{\pm} son las 2-formas reales asociadas a \mathcal{H} y a $\mathcal{V}_{\pm} \equiv \mathcal{U} \pm \frac{i}{3\rho}\mathcal{H}$, y donde $\epsilon = \text{signo}U(x, l)$ con x cualquier vector temporal orientado al futuro.

d) Las bases canónicas en este caso son las definidas por \mathcal{U} y \mathcal{H} , y ambas están dadas salvo signo. Entonces la proposición 2 nos permite calcular las bases asociadas como

Proposición 14 Si el tensor de Weyl es de tipo II, y si \mathcal{U} y \mathcal{H} son las 2-formas canónicas dadas en la proposición 13, entonces existen dos bases orientadas y ortócronas $\{l, l', e_2, e_3\}$ de manera que $U = \epsilon l \wedge l'$, $H = \delta l \wedge e_2$, $*H = -\delta l \wedge e_3$. El vector l está dado en (2.16) y

$$l' = -\frac{[U^2 + \epsilon U](x)}{2(x, l)}; \quad e_2 = \delta H(l'); \quad e_3 = -\delta * H(l')$$

siendo $\delta = \pm 1$ y donde $\epsilon = \text{signo}U(x, l)$, con x cualquier vector temporal orientado al futuro.

2.5 Geometría del tipo I

a) El tipo I es algebraicamente el caso más general. El polinomio mínimo y el característico coinciden $P_{min} = P_{car} = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$ y la relación entre las raíces y los invariantes de vacío es

$$a = -2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2); \quad b = 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \quad (2.17)$$

Como los valores propios son todos diferentes, los subespacios propios son ortogonales, y por lo tanto el Weyl diagonaliza en una base ortonormal construida con 2-formas propias con lo que la forma canónica es

$$\mathcal{W} = \sum_{i=1}^3 -\alpha_i U_i \otimes U_i \quad (2.18)$$

Tenemos entonces tres 2-formas unitarias canónicas $\{U_i\}$, fijadas salvo signo, y seis 2-planos canónicos asociados a U_i y $*U_i$. Las intersecciones de estos 2-planos definen cuatro direcciones ortogonales privilegiadas $\{e_{\alpha}\}$ a las que llamaremos *direcciones principales del Weyl*.

b) El tipo I queda caracterizado también porque existen cuatro direcciones de Debever simples. Estas direcciones no coinciden con las direcciones principales de ninguna de las 2-formas principales que aparecen en la forma canónica usual (2.18). Cada par de direcciones de Debever determina una 2-forma unitaria de Debever cuya parte real es el producto exterior de esas dos direcciones con el parámetro adecuado. Para obtener la relación entre las 2-formas de Debever y las 2-formas principales

Geometría del tensor de Weyl

consideremos para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ el tensor del subespacio ortogonal a \mathcal{U}_i

$$\mathcal{A}_i \equiv \mathcal{W} - \alpha_i \mathcal{G} \quad (2.19)$$

Consideremos por ejemplo $i = 3$. A partir de la expresión (2.18) se tiene que

$$\mathcal{A}_3 = \sum_{j \neq 3} (\alpha_3 - \alpha_j) \mathcal{U}_j \otimes \mathcal{U}_j$$

En el subespacio ortogonal a \mathcal{U}_3 existen dos únicas direcciones cuyas bisectrices son las 2-formas principales \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 y que forman entre sí un ángulo 2Ω donde

$$\cos^2 \Omega = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \quad (2.20)$$

Este invariante complejo coincide con el *cross-ratio* definido por Penrose [70]. Si ahora denotamos \mathcal{V}_\pm a las 2-formas unitarias que definen esas direcciones características, se cumple que $\mathcal{A}_3 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \mathcal{V}_+ \tilde{\otimes} \mathcal{V}_-$, y por lo tanto

$$\mathcal{W} = \alpha_3 \mathcal{G} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \mathcal{V}_+ \tilde{\otimes} \mathcal{V}_- \quad (2.21)$$

Con lo que las 2-formas isotropas ortogonales a \mathcal{V}_ϵ satisfacen la ecuación de Sachs (1.16) y por lo tanto las direcciones de Debever son las direcciones principales de esas 2-formas \mathcal{V}_ϵ . Recogemos estos resultados en la siguiente proposición.

Proposición 15 *Si el tensor de Weyl es de tipo I y $\{\mathcal{U}_i\}$ son las 2-formas principales, las direcciones de Debever son*

$$l_\epsilon \pm \propto [V_\epsilon^2 \pm V_\epsilon](x) \quad (2.22)$$

con x cualquier vector temporal orientado al futuro y donde V_ϵ son las 2-formas reales asociadas a

$$V_\epsilon = \cos \Omega \mathcal{U}_1 + \epsilon \sin \Omega \mathcal{U}_2, \quad \epsilon = \pm 1, \quad \cos^2 \Omega = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \quad (2.23)$$

La degeneración en el diagrama de Penrose de tipo I a tipo D, se observa haciendo $\alpha_2 = \alpha_3 = \rho$ y $\alpha_1 = -2\rho$ en la forma canónica usual (2.18). Sin embargo, para entender la degeneración de tipo I a tipo II, hay que recurrir a la forma canónica (2.21) adaptada a las direcciones de Debever. Imponiendo en ésta la misma degeneración anterior a los valores propios llegamos a la expresión (2.14) para el Weyl de tipo II.

Si denotamos $\Omega = \phi - i\psi$, podemos desarrollar las expresiones anteriores y calcular la parte real de las 2-formas autoduales de Debever en función de las 2-formas principales. Resulta entonces que

$$V_\epsilon = \cos \phi \cosh \psi (U_1 + \epsilon U_2) + \sin \phi \sinh \psi (*U_1 - \epsilon *U_2) \quad (2.24)$$

Estas expresiones se han obtenido privilegiando α_3 . Es claro que hay expresiones equivalentes si consideramos los demás valores propios. En particular, el invariante (2.20) tiene sus equivalentes $\cos \Omega_1$ y $\cos \Omega_2$. Expresándolos en términos de los valores propios se comprueba que están relacionados con Ω por

$$\cos^2 \Omega_1 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \Omega}, \quad \cos^2 \Omega_2 = -\tan^2 \Omega \quad (2.25)$$

c) Para determinar las 2-formas principales $\{\mathcal{U}_i\}$ del Weyl basta tener en cuenta que como \mathcal{W} es raíz de su polinomio característico se cumple

$$\prod_{i=1}^3 (\mathcal{W} - \alpha_i \mathcal{G}) = 0$$

Así, denotando $\mathcal{P}_i = \prod_{j \neq i} (\mathcal{W} - \alpha_j \mathcal{G})$, se verifica $(\mathcal{W} - \alpha_i \mathcal{G})(\mathcal{P}_i(\mathcal{X})) = 0$ para cualquier 2-forma autodual \mathcal{X} . Entonces $\mathcal{P}_i(\mathcal{X})$ es propia con valor propio α_i , es decir \mathcal{P}_i es el proyector al subespacio propio correspondiente al valor propio α_i . Hemos probado entonces:

Proposición 16 *Consideremos \mathcal{W} el tensor de Weyl autodual de un espacio-tiempo de tipo I. La 2-forma principal correspondiente al valor propio α_i puede obtenerse como*

$$\mathcal{U}_i = \frac{\mathcal{P}_i(\mathcal{X})}{\sqrt{-\mathcal{P}_i^2(\mathcal{X}, \mathcal{X})}}$$

donde $\mathcal{P}_i = \mathcal{W}^2 + \alpha_i \mathcal{W} + (\alpha_i^2 - \frac{1}{2}a)\mathcal{G}$, $a = \operatorname{tr} \mathcal{W}^2$, y \mathcal{X} es cualquier 2-forma autodual tal que $\mathcal{P}_i(\mathcal{X}) \neq 0$.

d) La proposición anterior nos ofrece un procedimiento covariante para calcular las 2-formas principales del tensor de Weyl. Estas 2-formas quedan determinadas salvo signo y permutación. Existen entonces 48 bases ortonormales de 2-formas principales del Weyl. Esas 48 bases quedan reducidas a la mitad si consideramos sólo las que están bien orientadas: el signo de dos de ellas nos da cuatro posibilidades y la tercera queda fijada por (1.9). Tenemos entonces 24 bases $\{\mathcal{U}_i\}$ bien orientadas [4], [9] que definen por lo tanto 24 bases canónicas $\{e_\alpha\}$. Aunque tenemos 24 bases, éstas sólo definen cuatro direcciones ortogonales: una temporal y tres espaciales. La proposición 1 nos permite calcular estas bases a partir de $\{\mathcal{U}_i\}$.

Proposición 17 *Las bases canónicas asociadas al tensor de Weyl en un espacio de tipo I pueden calcularse como*

$$e_0 = \frac{-P_0(x)}{\sqrt{P_0(x, x)}}; \quad e_i = U_i(e_0)$$

Geometría del tensor de Weyl

para cualquier vector temporal x orientado al futuro, donde

$$P_0 = \frac{1}{2} \left(g - \sum_{i=1}^3 U_i \times U_i \right), \quad U_i = \text{Re}(\sqrt{2}\mathcal{U}_i)$$

y donde \mathcal{U}_i son las 2-formas principales dadas en la proposición 16.

La proposición 15 nos permite calcular las direcciones de Debever una vez calculadas las 2-formas principales \mathcal{U}_i . Por otra parte, conocida la expresión de las 2-formas de Debever en términos de las principales, como $U_i = e_0 \wedge e_i$, podemos tomar $x = e_0$ en (2.22) y (2.23) y obtenemos la siguiente expresión para los vectores de Debever en función de la base canónica $\{e_\alpha\}$.

Proposición 18 *En cualquier espacio-tiempo de tipo I los vectores de Debever pueden calcularse como*

$$l_{\epsilon\pm} = \cosh \psi e_0 \pm \cos \phi e_1 \pm \epsilon \sin \phi e_2 + \epsilon \sinh \psi e_3 \quad \epsilon = \pm 1 \quad (2.26)$$

donde $\cos^2(\phi - i\psi) = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$ y donde $\{e_\alpha\}$ es una base canónica del Weyl.

Es inmediato comprobar la consistencia de estos resultados con los obtenidos por Debever [26], [25]. Posteriormente, Bonanos [9] resolvió el problema inverso al de la proposición anterior: conocidas las direcciones de Debever, obtener las bases canónicas del tensor de Weyl. A partir de nuestras expresiones podemos obtener los mismos resultados desde dos puntos de vista alternativos al de Bonanos y obtener un algoritmo sencillo que proporciona las bases canónicas a partir de los vectores de Debever. Sean $l_{\epsilon\pm}$ los vectores de Debever normalizados de forma que $(l_{\epsilon+}, l_{\epsilon-}) = -2$, y consideremos las 2-formas de Debever

$$\mathcal{V}_\epsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} (l_{\epsilon-} \wedge l_{\epsilon+} - i * (l_{\epsilon-} \wedge l_{\epsilon+}))$$

Teniendo en cuenta la relación entre las 2-formas de Debever y las principales que nos da la proposición 15, se tiene

Proposición 19 *Sean $\mathcal{V}_\epsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} (l_{\epsilon-} \wedge l_{\epsilon+} - i * (l_{\epsilon-} \wedge l_{\epsilon+}))$ dos 2-formas de Debever de un espacio-tiempo de tipo I. Las 2-formas principales $\{\mathcal{U}_i\}$ pueden calcularse como*

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mathcal{V}_+ + \mathcal{V}_-}{\sqrt{1 - (\mathcal{V}_+, \mathcal{V}_-)}} \\ \mathcal{U}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mathcal{V}_+ - \mathcal{V}_-}{\sqrt{1 + (\mathcal{V}_+, \mathcal{V}_-)}} \\ \mathcal{U}_3 &= i\sqrt{2} \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Una vez calculadas las 2-formas principales por (2.27), la proposición 17 nos permite calcular las direcciones principales. Un procedimiento más directo se sigue de invertir las expresiones (2.26).

Corolario 2 Sean $\{k_a\}$ ($a = 1, 2, 3, 4$) las direcciones de Debever de un espacio-tiempo de tipo I. Si renormalizamos esas direcciones como

$$l_1 = \sqrt{\frac{\kappa_{42}\kappa_{43}}{\kappa_{12}\kappa_{13}}} k_1, \quad l_2 = \sqrt{\frac{\kappa_{41}\kappa_{43}}{\kappa_{12}\kappa_{23}}} k_2$$

$$l_3 = \sqrt{\frac{\kappa_{41}\kappa_{42}}{\kappa_{13}\kappa_{23}}} k_3, \quad l_4 = k_4$$

donde $\kappa_{ab} = (k_a, k_b)$. Entonces las direcciones principales pueden obtenerse como

$$e_0 \propto \sum_{a=1}^4 l_a \quad e_i \propto l_4 - \sum_{a=1}^3 (-1)^{\delta_{ia}} l_a \quad (i = 1, 2) \quad e_3 = - * (e_0 \wedge e_1 \wedge e_2)$$

2.6 Algunas clases de espacios de Tipo I

a) En la literatura pueden encontrarse subclasificaciones puramente algebraicas de los espacios-tiempo de tipo I. El caso de que uno de los invariantes complejos $a = \text{tr}\mathcal{W}^2$, $b = \text{tr}\mathcal{W}^3$ sea cero, ya fue considerado en los primeros trabajos de Debever [26]. Arianrhod y otros [1] introducen un invariante complejo $M = \frac{a^3}{b^2} - 6$ que es nulo si el espacio tiempo es algebraicamente especial y proponen una clasificación según los valores de ese invariante de los espacios de tipo I. Así los tipos $I(M^+)$ o $I(M^\infty)$ corresponden a que M sea real positivo o infinito respectivamente. También aparecen en la literatura las expresiones de los vectores de Debever en función de las bases canónicas del Weyl en los casos en los que, respecto a una congruencia temporal, éste sea puramente eléctrico (valores propios reales) [85] o puramente magnético (valores propios imaginarios puros) [64]. Ambos son casos particulares de que los vectores de Debever generen un 3-plano [1], [57] y equivale a que $M \in I(M^+)$ o $M \in I(M^\infty)$. Veremos ahora que podemos completar la interpretación del invariante M en toda la recta real en términos de propiedades geométricas de los vectores de Debever.

Teniendo en cuenta la relación entre los invariantes de vacío y los valores propios (2.17) se prueba

$$M = \frac{2}{9} \frac{\prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2}{\prod_{i=1}^3 \alpha_i^2} \quad (2.28)$$

Geometría del tensor de Weyl

En función del invariante $\cos 2\Omega$ definido en (2.20), se verifica que

$$\frac{2}{9} \frac{1}{M} = \frac{\cos^2(2\Omega) (\cos^2(2\Omega) - 9)^2}{3^6 (\cos^2(2\Omega) - 1)^2} \quad (2.29)$$

El invariante M es simétrico en los valores propios, y por tanto, invariante por permutaciones de estos. Además es cero cuando el espacio degenera a tipo D o II, e infinito cuando uno de los valores propios es cero, es decir, cuando $b = 0$.

b) El caso de que los cuatro vectores de Debever sean dependientes, es decir, generen un 3-plano, puede traducirse al lenguaje de 2-formas de Debever como que, para cualquier elección de dos de ellas V_{\pm} sin ninguna dirección principal común, se verifique $V_+ \wedge V_- = 0$. De las expresiones de estas 2-formas (2.24), se deduce directamente que esto ocurre si, y sólo si, $\cos(2\Omega)$ es real o de forma equivalente, si $\sinh\psi \cos\phi \sin\phi = 0$, ya que $\Omega = \phi - i\psi$. Según el factor que se anule, los vectores de Debever están en el 3-plano ortogonal a e_3 a e_1 o a e_2 respectivamente. Además, de la expresión (2.23) se prueba que el 3-plano es el ortogonal a e_i , donde α_i es el valor propio de menor módulo. Si suponemos que éste es e_3 , haciendo $\psi = 0$ en (2.26) se recuperan las expresiones para los vectores en los casos degenerados abordados en [85], [64], [58]. Además, la dirección común de los 2-planos V_{\pm} es la dirección principal temporal e_0 . Para los valores propios esta degeneración se traduce como que el cociente entre cada dos de ellos es real. Una degeneración más de esta situación es que uno de ellos sea cero, con lo que los otros son opuestos. Dicha degeneración corresponde a $b = 0$ que equivale a que M sea infinito. Podemos resumir estos resultados, que completan los de McIntosh y otros [58], en el siguiente

Teorema 1 *Si \mathcal{W} es un tensor de Weyl de tipo I, $\{\alpha_i\}$ son los valores propios, y $\cos 2\Omega$ y M definidos por (2.23) y (2.28) respectivamente. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. M es real positivo o infinito.
2. $\cos 2\Omega$ es real.
3. El cociente de cada par de valores propios es real (o infinito).
4. Los vectores de Debever generan un 3-plano.

Además, el 3-plano que generan los vectores de Debever es el ortogonal a e_3 si α_3 es el valor propio con menor módulo, y la dirección común a los 2-planos temporales definidos por las 2-formas de Debever es e_0 . El caso M infinito corresponde a $b = 0$.

c) Así como el caso de que los vectores de Debever generen un 3-plano, equivale a $V_+ \wedge V_- = 0$, otra posible degeneración es la de que uno de

los 2-planos de Debever tenga una dirección común con el dual del otro, es decir $V_+ \wedge *V_- = 0$. En función de Ω , este caso equivale a que $\cos 2\Omega$ sea imaginario puro. Esta condición depende de la elección que hagamos de α_3 o, de forma equivalente, de la elección de la pareja de 2-formas de Debever. De la expresión (2.20) se prueba que la condición necesaria y suficiente para que $\cos(2\Omega)$ sea imaginario es que dos de los valores propios tengan el mismo módulo, es decir, que $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = e^{i\theta}$ para alguna elección de α_2 y α_1 y por lo tanto dos de los valores propios están sobre una circunferencia centrada en el origen. Es inmediato teniendo en cuenta (2.29) que $\cos(2\Omega) \in i\mathbb{R}$ implica que M es real negativo. Recíprocamente, supongamos que M es real negativo, y denotemos $N = \sqrt{\frac{6}{M}}$. Es claro que M es real negativo si, y sólo si N es imaginario puro. Si resolvemos la ecuación (2.29), se tiene que

$$\cos(2\Omega_k) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{1 + N^2} \left[\sqrt[3]{N + i} e^{\frac{2\pi k}{3}i} + \sqrt[3]{N - i} e^{-\frac{2\pi k}{3}i} \right] + \sqrt{3} N$$

donde k varía de 1 a 3. Estas tres soluciones son los tres cosenos relacionados con uno cualquiera de ellos por (2.25). Si N es imaginario puro se verifica que al menos una de las tres raíces es imaginaria pura, y que además es $\cos 2\Omega_3$ si denotamos α_1 y α_2 a los valores propios con el mismo módulo. Los tres cosenos son imaginarios cuando $a = 0$, es decir $M = -6$, y por lo tanto $N = i$ y los tres cosenos son además iguales $\cos \Omega_i = \sqrt{3}i$.

Tenemos hasta aquí resultados paralelos a los tres primeros del teorema anterior. Daremos ahora una interpretación equivalente al último de aquellos, es decir en términos de los vectores de Debever. En ese sentido recordemos que Morales y Coll [21] clasificaron los referenciales de espacio-tiempo. Cuando no generan un 3-plano, los vectores de Debever $\{l_a\}_{a=1}^4$ forman un referencial isótropo. Se dice que dos vectores de ese referencial $\{l_1, l_2\}$ son permutables o que el referencial es de tipo P_2 , si $(l_1, l_b) = (l_2, l_b)$ ($b = 3, 4$) es decir, si no podemos distinguir entre los dos haciendo sus productos con los otros dos. Una propiedad de los referenciales isótropos es que si dos vectores son permutables, podemos reparametrizar los vectores del referencial de manera que también sean permutables los otros dos. Esto quiere decir que dado un referencial isótropo de tipo P_2 , por reparametrización de estos vectores obtenemos uno de tipo $P_2 \times P_2$. De la misma manera, se dice que los cuatro vectores son permutables o que el referencial es de tipo P_4 , si todos los productos escalares dos a dos son iguales. A partir de la expresión de los vectores de Debever en la base canónica (2.26), es inmediato comprobar que el referencial de vectores de Debever admite una reparametrización de tipo P_2 (y por tanto $P_2 \times P_2$) si, y sólo si, M es real negativo. Además las parejas de vectores permutables son las que definen las parejas de 2-formas

Geometría del tensor de Weyl

de Debever cuyas bisectrices son las 2-formas principales asociadas a los valores propios que tienen el mismo módulo. Más aún, el caso $a = 0$ ($M = -6$) equivale a que exista una reparametrización de los vectores de Debever de tipo P_4 . En este caso, las propiedades anteriores se cumplen para cualquier permutación entre los valores propios. Podemos resumir estos resultados en el siguiente

Teorema 2 Sea W un tensor de Weyl de tipo I, $\{\alpha_i\}$ los valores propios del Weyl y consideremos los escalares $\cos 2\Omega$ y M definidos por (2.23) y (2.28) respectivamente. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. M es real negativo.
2. $\cos 2\Omega$ es imaginario puro.
3. Existen dos valores propios cuyo cociente es de módulo unidad.
4. Dos de los vectores de Debever son permutables (y por tanto los otros dos también)

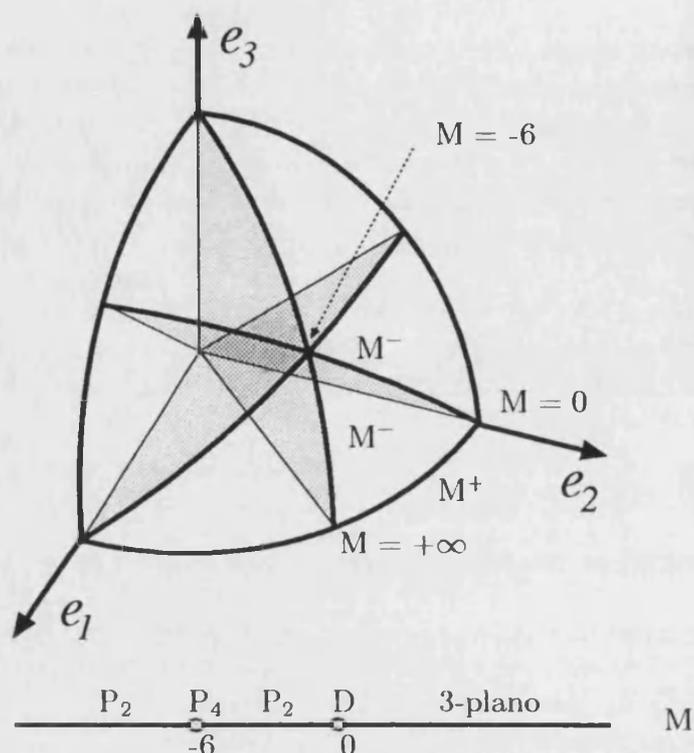


Además, si α_1 y α_2 son los valores propios que tienen el mismo módulo, los vectores de Debever que son permutables son las direcciones fundamentales de las 2-formas de Debever V_ϵ dadas en (2.23). En este caso V_ϵ y $*V_{-\epsilon}$ se cortan en las bisectrices del 2-plano que generan e_1 y e_2 . Los vectores de Debever definen un referencial permutable si, y sólo si, $a = 0$.

d) Podemos reparametrizar las direcciones de Debever dividiendo la expresión (2.26) por $\cosh \psi$, de manera que con la nueva parametrización

$$\hat{l}_{\epsilon\pm} = e_0 + m_{\epsilon\pm}$$

donde los vector $m_{\epsilon\pm}$ son espaciales, unitarios y ortogonales a e_0 . Podemos representar esas cuatro direcciones $m_{\epsilon\pm}$ sobre la esfera unidad, y como los cuatro vectores sólo difieren entre sí por cambios de signo entre las componentes, basta con representar uno para tenerlos localizados a todos en cuatro octantes diferentes de la esfera unidad. El caso de que las direcciones de Debever generen un 3-plano, equivale a que estas direcciones generen un 2-plano, y por lo tanto, cuando el invariante M es real positivo o infinito, este vector está sobre uno de los círculos máximos intersección de la esfera con los 2-planos principales. En el caso de que M sea negativo, este vector está sobre uno de los círculos máximos intersección de la esfera unidad con los 2-planos bisectores de los 2-planos principales. Estos tres círculos máximos se cortan en un punto, que corresponde a $M = -6$ y que equivale a que el referencial de Debever sea de tipo P_4 .



2.7 Tensor de Weyl puramente eléctrico

a) Es conocido que si un espacio-tiempo admite una congruencia temporal u , integrable y sin distorsión, entonces es de Tipo I, D o O con valores propios reales, y esa dirección es una dirección principal del Weyl. Este resultado de Trümper [85] ha sido ampliamente utilizado en la literatura y, en concreto, nosotros lo hemos utilizado en el capítulo siguiente para obtener una caracterización intrínseca de los espacios-tiempo que admiten un estado de radiación isótropa para un observador sincronizable. La demostración que ofrece Trümper combina dos resultados de naturaleza diferente: primero se prueba que la nulidad de la rotación y de la distorsión de una congruencia temporal es una condición suficiente para que la parte magnética del tensor de Weyl respecto a ella se anule con lo que la matriz de Petrov es una matriz simétrica real de traza nula. Por otro lado, sabemos que cualquier matriz simétrica real en un espacio euclídeo tridimensional diagonaliza. De la combinación de ambos resultados se sigue que la matriz de Petrov para un observador integrable diagonaliza en cada punto, y por lo tanto sólo puede ser de tipo I, D o O. Una consecuencia inmediata de este resultado es que todos los espacios-tiempo estáticos son de tipo I, D o O (el unitario en la dirección de un campo de Killing integrable es integrable y sin distorsión).

Geometría del tensor de Weyl

Surge de forma natural la pregunta de si este resultado es cierto también para congruencias espaciales. En ese sentido si una congruencia espacial v es integrable y sin distorsión la primera parte de la demostración de Trümper sigue siendo cierta y las identidades de Ricci permiten probar que la *parte magnética* del Weyl relativa a v es cero $*W(v; v) = 0$. Si generalizamos el concepto de matriz de Petrov a congruencias espaciales ($Q = W(v; v) - i*W(v; v)$), la matriz de Petrov relativa a v es real. En cada punto tenemos entonces una matriz simétrica real en el espacio tridimensional ortogonal a v . Pero este espacio no es euclídeo y por lo tanto no podemos concluir que diagonalice. Las congruencias espaciales integrables y sin distorsión (y por lo tanto los campos de Killing espaciales integrables) tienen cabida en cualquier tipo Petrov.

En esta sección calcularemos todas las congruencias v (no necesariamente temporales) que sean solución de $*W(v; v) = 0$, y en particular tendremos todas las direcciones candidatas a ser campos de Killing integrables. El número de soluciones nos restringe también el número máximo de campos de Killing integrables que admiten determinados tipos Petrov y cuando este número sea finito, podemos obtener una caracterización intrínseca de estos, sin más que imponer que una de esas direcciones determine un Killing integrable.

Para calcular estas direcciones basta tener en cuenta la expresión canónica del Weyl autodual e imponer que la parte imaginaria de $\mathcal{W}(v; v)$ sea nula. Sabemos que cada 2-forma unitaria U define una pareja de 2-planos invariantes (uno temporal y uno espacial) a los que para simplificar la notación estamos denotando como a su elemento de volumen U o $*U$. En el mismo sentido, denotamos H tanto a una 2-forma singular como al 2-plano isótropo que define.

Tipo N

En Tipo N, la forma canónica del Weyl autodual es $\mathcal{W} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. Entonces

$$\mathcal{W}(v; v) = \frac{1}{2} \left(H(v) \otimes H(v) - *H(v) \otimes *H(v) - iH(v) \tilde{\otimes} *H(v) \right)$$

Con lo que $*W(v; v)$ es cero si, y sólo si, $H(v) = 0$ ó $*H(v) = 0$. Como las únicas direcciones que son propias de un 2-plano isótropo H son las contenidas en su dual $*H$, se demuestra que las direcciones que anulan la parte magnética del Weyl son todas las de los 2-planos H y $*H$. Tenemos entonces que si el Weyl es de Tipo N y \mathcal{H} es la 2-forma isótropa canónica,

$$*W(v; v) = 0 \iff v \in H \text{ (eq. } *H(v) = 0) \text{ ó } v \in *H \text{ (eq. } H(v) = 0)$$

La dirección común a estos 2-planos isótropos es la dirección de Debever cuádruple. Todas las demás direcciones son espaciales.

Tipo III

La expresión canónica del Weyl es $\mathcal{W} = \mathcal{U} \otimes \mathcal{H}$. Si tenemos en cuenta las expresiones de estas 2-formas en la base canónica $\{l, l', e_2, e_3\}$ determinada en la sección correspondiente a este tipo Petrov, y escribimos v como combinación lineal de los elementos de esta base para calcular $\mathcal{W}(v; v)$, se llega directamente a que si el Weyl es de tipo III y $\{l, l', e_2, e_3\}$ es la base canónica, entonces

$$*W(v; v) = 0 \iff v = l, \text{ o } v = e_3$$

Es decir, que las únicas direcciones con parte magnética del Weyl cero, son la dirección de Debever triple y la dirección espacial intersección de $*U$ y $*H$.

Tipo D

La forma canónica del tensor de weyl es $\mathcal{W} = 3\rho \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} + \rho\mathcal{G}$, donde $\rho \equiv \alpha + i\beta$ es el valor propio doble. La parte imaginaria de $\mathcal{W}(v; v)$ es entonces

$$\begin{aligned} *W(v; v) = & 3\alpha U(v) \tilde{\otimes} *U(v) - 3\beta(U(v) \otimes U(v) - \\ & - *U(v) \otimes *U(v)) - \beta(v^2 g - v \otimes v) \end{aligned}$$

Contrayendo esa expresión con $U(v)$ y $*U(v)$ se llega a que la condición necesaria y suficiente para que exista un vector con parte magnética cero es que los valores propios sean reales $\beta = 0$. Además, en ese caso, v es cualquier vector del 2-plano U o del 2-plano $*U$. Es decir

$$*W(v; v) = 0 \iff \rho \in \mathbb{R} \text{ y } U(v) = 0 \text{ ó } *U(v) = 0$$

Tipo II

La forma canónica del Weyl es $\mathcal{W} = 3\rho\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} + \rho\mathcal{G} + \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. Si escribimos v en términos de la única base que definen esas 2-formas y calculamos la parte imaginaria de $\mathcal{W}(v; v)$ se llega, igual que en tipo D, a que la condición necesaria y suficiente para que exista una congruencia con parte magnética cero es que los valores propios sean reales. Además en este caso las únicas direcciones que satisfacen $*W(v; v) = 0$ son la dirección de Debever doble l y las dos direcciones espaciales e_2 y e_3 , que están definidas por ser las intersecciones de los 2-planos H y $*H$ con $*U$. Es decir

$$*W(v; v) = 0 \iff \rho \in \mathbb{R}, \text{ y } v = l, \text{ o } v = e_2 \text{ o } v = e_3$$

Tipo I

En este caso el tensor de Weyl diagonaliza en una base ortonormal $\{\mathcal{U}_i\}$. Si denotamos $\rho_j \equiv \alpha_j + i\beta_j$ a los valores propios se prueba que caben dos posibilidades: la equivalente a la de los tipos D y II, es decir los valores propios son reales y v es una de las direcciones principales o bien hay dos valores propios complejos conjugados y entonces v está en la dirección de la bisectriz del 2-plano correspondiente. Es decir

$$*W(v; v) = 0 \iff \begin{cases} \beta_j = 0 \forall j \text{ y } v = e_\alpha \text{ para algún } \alpha \\ \beta_1 = 0, \alpha_2 = \alpha_3 \text{ y } v = e_2 \pm e_3 \end{cases}$$

Entonces los espacios-tiempo de Tipo I que admiten congruencias con parte magnética cero tienen el invariante M real: real positivo si los valores propios son reales (en particular, el cociente entre cada par de ellos es real) o real negativo si hay dos de ellos que sean complejos conjugados (en particular tienen el mismo módulo).

Hemos resumido estos resultados en la tabla siguiente.

Tipo	Forma canónica	$v / *W(v; v) = 0$
N	$\mathcal{W} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$	$H(v) = 0$ ó $*H(v) = 0$
III	$\mathcal{W} = \mathcal{U} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$	$v = l$ ó $v = e_3$ $U = l \wedge k, *U = e_3 \wedge e_2, H = l \wedge e_2$
D	$\mathcal{W} = 3\rho\mathcal{A} \otimes \mathcal{U} + \rho\mathcal{G}$	$\rho \in \mathbb{R}$ y $v / U(v) = 0$ y $*U(v) = 0$
II	$\mathcal{W} = 3\rho\mathcal{A} \otimes \mathcal{U} + \rho\mathcal{G} + \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$	$\rho \in \mathbb{R}$ y $v = l$ ó $v = e_2$, ó $v = e_3$ $*U = e_3 \wedge e_2, H = l \wedge e_2$
I	$\mathcal{W} = \sum \rho_j (\mathcal{U}_j \otimes \mathcal{U}_j)$	$\rho_j \in \mathbb{R} \forall j$ y $v = e_\alpha$ ó $\exists j, k / \rho_j = \bar{\rho}_k, \text{ y } v = e_j \pm e_k$

b) Los cálculos realizados sirven también para contestar a la pregunta de qué congruencias anulan a la parte eléctrica del Weyl, es decir, satisfacen la ecuación $W(v; v) = 0$. Pero la parte eléctrica del Weyl depende del tensor de Ricci y no sólo de los coeficientes cinemáticos de la congruencia, y por lo tanto, no hay resultados equivalentes al de Trümper para estos espacios-tiempo. En cualquier caso, para calcular las soluciones de esta ecuación, basta tener en cuenta que la condición $W(v; v) = 0$ equivale a que $\mathcal{W}(v; v)$ sea imaginario puro, o también a que $i\mathcal{W}(v; v)$ sea real. Entonces, en los tipos I, D o O, se obtiene la misma ecuación que para el caso puramente eléctrico cambiando los valores propios $\alpha + i\beta$ por $i\alpha - \beta$. En los otros tipos, como no hay invariantes, ese factor i puede eliminarse cambiando el parámetro de la 2-forma \mathcal{H} como sigue.

En Tipo III, la forma canónica de \mathcal{W} es $\mathcal{W} = \mathcal{U} \otimes \mathcal{H}$, y, por tanto, $i\mathcal{W} = \mathcal{U} \otimes \mathcal{H}'$, donde $\mathcal{H}' = i\mathcal{H}$. Entonces tenemos la misma ecuación que para el caso puramente eléctrico cambiando H por $*H$. En tipo N, $i\mathcal{W} = i\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \equiv \mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}'$, donde $\mathcal{H}' = \pm\sqrt{i}\mathcal{H}$ y se obtiene que las congruencias son las de los 2- ρ -planos $H \pm *H$.

La tabla siguiente resume estos resultados.

Tipo	Foma canónica	$v / W(v; v) = 0$
N	$\mathcal{W} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$	$(H + *H)(v) = 0$ ó $(H - *H)(v) = 0$
III	$\mathcal{W} = \mathcal{U} \otimes \mathcal{H}$	$v = l$ ó $v = e_2$ $U = l \wedge k, *U = e_3 \wedge e_2, H = l \wedge e_2$
D	$\mathcal{W} = 3\rho \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} + \rho \mathcal{G}$	$\rho \in i\mathbb{R}, v / U(v) = 0$ ó $*U(v) = 0$
II	$\mathcal{W} = 3\rho \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} + \rho \mathcal{G} + \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$	$\rho \in i\mathbb{R}, v = l, v = e_2$ ó $v = e_3$ $H = l \wedge e_2$
I	$\mathcal{W} = \sum \rho_j (\mathcal{U}_j \otimes \mathcal{U}_j)$	$\rho_j \in i\mathbb{R} \quad \forall j$ y $v = e_\alpha$ o $\exists j, k / \rho_j = -\bar{\rho}_k, y v = e_j \pm e_k$

c) Estos resultados nos dicen que en los tipos N y III, es decir en aquellos en los que los invariantes $a = \text{tr}\mathcal{W}^2, b = \text{tr}\mathcal{W}^3$ son nulos, siempre existen congruencias para los que el Weyl es puramente eléctrico y puramente magnético. En los tipos D y II, existen si, y sólo si, los valores propios son reales o imaginarios puros. Si tenemos en cuenta que el valor propio doble es $\rho = -\frac{b}{a}$ y que $6b^2 = a^3$, se prueba que la condición necesaria y suficiente para que ρ sea real (resp. imaginario puro) es que a y b sean reales (resp. a real y b imaginario puro).

En los espacios de tipo I, existen congruencias para las que el Weyl es puramente eléctrico si, y sólo si, hay dos valores propios conjugados (que incluye el que todos sean reales) y, como la suma de todos es cero, esto es equivalente a que haya un valor propio real. Con estas condiciones (2.17) implican que a y b son reales. Recíprocamente, si a y b son reales la ecuación característica (1.14) tiene al menos una solución real. El mismo razonamiento permite probar que existen congruencias para las que el Weyl es puramente magnético si, y sólo si, a es real y b imaginario puro. Se ha probado entonces el siguiente resultado.

Teorema 3 *Un tensor de Weyl es puramente eléctrico (resp. magnético) para alguna congruencia, si, y sólo si, los invariantes de vacío $a = \text{tr}\mathcal{W}^2$ y $b = \text{tr}\mathcal{W}^3$ son reales (resp. a y b son reales).*

3. Estructuras casi-producto 2 + 2

La determinación covariante y explícita de la geometría asociada al tensor de Weyl permite caracterizar determinadas familias de espacios-tiempo que admiten grupos de isometrías o congruencias temporales (observadores) con propiedades particulares. En estos casos, las órbitas del grupo o la congruencia temporal están relacionadas con la geometría del tensor de Weyl por las identidades de Ricci. Si sabemos calcular esos elementos, podemos imponerle al propio tensor de Weyl las restricciones correspondientes y obtener una caracterización intrínseca de estas familias de métricas.

En la primera sección recogemos resultados conocidos sobre estructuras casi-producto y en particular enunciamos algunas propiedades de las estructuras 2+2 en el espacio tiempo. Utilizaremos estos resultados tanto en los dos últimos capítulos de esta memoria dedicados a las métricas de tipos I y D, en los que aparecen estructuras casi producto 2+2 asociadas al tensor de Weyl, como en las secciones siguientes de este mismo capítulo. En la sección 2 probamos que la existencia de tensores de Killing de orden 2 y de tipo $[(1,1), (1,1)]$ puede caracterizarse en términos de las propiedades geométricas de la estructura 2+2 que definen, y en la sección 3 caracterizamos las métricas con simetría esférica no conformemente planas en términos de las propiedades de la estructura casi-producto que definen las órbitas del grupo de rotaciones. Estas métricas son de tipo D, y la estructura principal coincide con la definida por las órbitas del grupo.

Asimismo, en la sección 4, caracterizamos los espacios estáticos no conformemente planos teniendo en cuenta que cualquier campo de Killing debe dejar invariantes a los elementos geométricos definidos por el tensor de Weyl. Probaremos que si no podemos además localizar en términos de la geometría del Weyl el campo de Killing, es porque la métrica admite más simetrías: al menos un G_3 con órbitas bidimensionales. En la sección 5, ofrecemos una caracterización de los espacios de tipo I que admiten estados de radiación isótropa para un observador sincronizable. Terminaremos el capítulo con un resumen del formalismo de Cartan complejo que utilizaremos en el capítulo siguiente.

Algunos de los resultados de este capítulo forman parte de un artículo

ya publicado [39] y de dos trabajos en fase de redacción [20], [43].

3.1 Estructuras casi-producto

a) Una estructura casi producto regular $p + q$ en una variedad de Riemann de dimensión n es un par (v, h) donde v es una p -distribución y h la $q = (n - p)$ -distribución ortogonal. Denotaremos también v y h a los respectivos proyectores y $P = v - h$ al tensor de estructura. Se define la segunda forma fundamental generalizada de la distribución v y la denotamos Q_v como el $(2,1)$ -tensor

$$Q_v(X, Y) = h(\nabla_{v(X)}v(Y)) \quad (3.1)$$

para cualquier par de campos X, Y . Por tanto, las componentes covariantes en un sistema de coordenadas arbitrario son

$$(Q_v)_{ab,j} = v_a^\alpha v_b^\beta \nabla_\alpha v_{\beta j}$$

Denotaremos A_v y S_v a las partes antisimétrica y simétrica de Q_v . La p -distribución v es foliación (eq. h es integrable) si, y sólo si, $A_v = 0$. En este caso $Q_v = S_v$ y coincide con la segunda forma fundamental de las variedades integrales de la foliación v [75]. Se demuestra además que en ese caso v es totalmente geodésica, umbilical o minimal si satisface respectivamente $S_v = 0$, $S_v = v \otimes a$, $\text{tr}(S_v) = 0$ [47]. Tales conceptos se generalizan con la misma definición al caso de que v no sea necesariamente foliación [18]. Estas propiedades, determinadas por la nulidad o no de los elementos que aparecen en la descomposición invariante de la segunda forma fundamental de una distribución, induce de forma natural una clasificación de éstas [65], [47]. Así, se dice que una distribución D tiene la propiedad F si es foliación, y diremos que tiene las propiedades D_3 , D_2 o D_1 si es umbilical, minimal o totalmete geodésica respectivamente. Usaremos F_i para denotar a una foliación que además tiene la propiedad D_i . De la definición, se deducen trivialmente las siguientes relaciones:

Lema 4 Sea (v, h) una estructura casi producto $p + q$. Se verifica que

(i) Si v tiene la propiedad F_i entonces tiene la propiedad D_i .

(ii) v tiene la propiedad D_1 si, y sólo si, tiene las propiedades D_2 y D_3 .

Tenemos así una clasificación de las estructuras casi producto atendiendo a las propiedades de las distribuciones que la definen. Teniendo en cuenta que en el espacio-tiempo el carácter causal nos permite distinguir entre las dos distribuciones, las 36 clases que aparecen en una variedad riemanniana se convierten en 64 clases de estructuras casi-producto de espacio-tiempo.

En algunos casos la dimensión de las distribuciones restringe el número de clases que no son vacías: por ejemplo, toda estructura $1 + q$ es de tipo

Estructuras casi-producto 2 + 2

(F_3, D) , y por lo tanto sólo son posibles 16 clases de estructuras 1 + q . Nosotros diremos que una estructura es umbilical, minimal o integrable cuando las dos distribuciones tengan esa propiedad.

b) Las segundas formas fundamentales de v y h determinan y sólo determinan la derivada covariante de los proyectores (v, h) . En concreto, se tiene

$$\nabla v = \overset{23}{\tilde{Q}}_v - \overset{23}{\tilde{Q}}_h \quad (3.2)$$

donde $\overset{23}{\tilde{Q}}$ denota la simetrización del segundo y tercer índice para un tensor dado Q .

Una estructura producto es una estructura casi producto de clase $[F_3, F_3]$, es decir, en la que ambas distribuciones son foliaciones totalmente geodésicas. Es conocido que una estructura producto queda caracterizada (localmente) por la existencia de cartas adaptadas. Así, (v, h) define una estructura producto $(p + q)$ en una variedad con métrica g si, y sólo si, existen coordenadas (x^A, x^i) ($A = 1, \dots, p$), ($i = 1, \dots, q$), de manera que

$$g = v_{AB}(x^C) dx^A dx^B + h_{ij}(x^k) dx^i dx^j \quad (3.3)$$

c) En el espacio-tiempo sólo son posibles las estructuras 1 + 3 y las 2 + 2. Las primeras suelen aparecer asociadas a un vector temporal unitario y han sido ampliamente consideradas en la literatura. Nos centraremos ahora en las estructuras 2 + 2. Si denotamos U y $*U$ a los elementos de volumen del 2-plano temporal y del espacial respectivamente, se verifica

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha U_{\beta\lambda} &= (Q_v)_{\alpha\mu, [\beta} U^{\mu}_{\lambda]} - (Q_h)_{\alpha[\beta, \mu} U^{\mu}_{\lambda]} \\ \nabla_\alpha *U_{\beta\lambda} &= (Q_h)_{\alpha\mu, [\beta} *U^{\mu}_{\lambda]} - (Q_v)_{\alpha[\beta, \mu} *U^{\mu}_{\lambda]} \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde los corchetes indican antisimetrización en los índices que no están contraídos. A cada estructura casi-producto 2 + 2 podemos asociarle la 2-forma autodual unitaria \mathcal{U} construida con los elementos de volumen de los planos que la definen, y recíprocamente, cada 2-forma \mathcal{U} define una estructura 2 + 2 cuyo tensor de estructura $P \equiv v - h$ se calcula como $2P = \mathcal{U} \times \tilde{\mathcal{U}} = \tilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{U}$. De (3.4) se comprueba que

$$\begin{aligned} 2\text{Re}[i(\delta\mathcal{U})\mathcal{U}] &\equiv *U(\delta *U) - U(\delta U) = \text{tr}Q_v + \text{tr}Q_h \\ 2\text{Im}[i(\delta\mathcal{U})\mathcal{U}] &\equiv *U(\delta U) + U(\delta *U) = Q_v(U) \times *U + Q_h(*U) \times U \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde hemos denotado $[Q_v(U)]_\mu = (Q_v)_{\alpha\beta\mu} U^{\alpha\beta}$. Por lo tanto $\delta\mathcal{U}$ contiene la información sobre el carácter minimal o integrable de los 2-planos de la estructura que define. Más precisamente, se verifica [17].

Lema 5 *Sea (v, h) una estructura casi-producto 2 + 2 y U el elemento de volumen del 2-plano temporal. Entonces se verifica:*

1. v (resp. h) es foliación sii, $*U(\delta U) = 0$ (resp. $U(\delta * U) = 0$).

2. v (resp. h) es minimal sii $*U(\delta * U) = 0$ (resp. $U(\delta U) = 0$).

d) Una estructura casi-producto $2 + 2$ se dice Maxwelliana si la 2-forma autodual \mathcal{U} que la define es la geometría de una solución de las ecuaciones de Maxwell de vacío; es decir, si existe $\mathcal{F}_M = e^{\phi + i\psi} \mathcal{U}$ que verifica $\delta \mathcal{F}_M = 0$. Para \mathcal{U} esta condición se escribe como

$$\delta \mathcal{U} = d(\phi + i\psi) \times \mathcal{U} \quad (3.6)$$

Multiplicando por \mathcal{U} y teniendo en cuenta que $\mathcal{U} \times \mathcal{U} = \frac{1}{2} g$, se deduce el resultado conocido [74], [14]

Lema 6 *La condición necesaria y suficiente para que la 2-forma autodual unitaria \mathcal{U} sea la geometría de una solución de las ecuaciones de Maxwell es que*

$$di(\delta \mathcal{U})\mathcal{U} = 0$$

Teniendo en cuenta (3.5) la expresión (3.6) es equivalente a

$$*U(\delta * U) - U(\delta U) = d\phi; \quad *U(\delta U) + U(\delta * U) = d\psi$$

Nosotros diremos que una estructura $2 + 2$ es minimal (resp. integrable) salvo el gradiente de una función si verifica la primera (resp. segunda) de las ecuaciones anteriores para alguna función ϕ (ψ).

e) El carácter umbilical de los dos 2-planos de una estructura (v, h) es equivalente a que las direcciones principales de la 2-forma U sean geodésicas y sin distorsión. Si completamos con $\{\mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3\}$ una base ortonormal del espacio de las 2-formas autoduales, el carácter umbilical de los 2-planos v y h puede expresarse en términos de las 1-formas $\lambda_i \equiv -i(\delta \mathcal{U}_i)\mathcal{U}_i$, o en términos de las direcciones isotropas ortogonales a \mathcal{U} como indica el siguiente lema.

Lema 7 *Sea \mathcal{U} una 2-forma autodual unitaria, y consideremos la estructura (v, h) que define. Completamos con $\{\mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3\}$ una base ortonormal, y denotemos $\{\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-\}$ a las dos 2-formas isotropas ortogonales a \mathcal{U} con cualquier parametrización. Son equivalentes:*

- (i) *La estructura tiene ambos 2-planos umbilicales.*
- (ii) *Las direcciones principales de U son geodésicas y sin distorsión.*
- (iii) $\lambda_2 = \lambda_3$.
- (iv) $\delta \mathcal{H}_+ \times \mathcal{H}_+ = 0 = \delta \mathcal{H}_- \times \mathcal{H}_-$.

f) Las propiedades F y D_1 son propiedades invariantes por conformidad [47], pero no lo es el carácter minimal. En ese sentido, si $g = v + h$ es

Estructuras casi-producto 2 + 2

una métrica casi-producto y consideramos $\hat{g} = e^{2\lambda}g$, entonces $\hat{g} = \hat{v} + \hat{h}$ verifica que

$$Q_{\hat{v}} = e^{2\lambda} (Q_v - v \otimes h(d\lambda)) \quad (3.7)$$

Es decir, que el carácter minimal de una estructura cambia por conformidad como la proyección al ortogonal del gradiente de la función de conformidad. La expresión anterior es válida para una estructura casi producto $p + q$ arbitraria. Entonces, calculando trazas en la expresión anterior se deduce que por conformidad, las traza de la segunda formas fundamental cambia como

$$\text{tr}Q_{\hat{v}} = \text{tr}Q_v - ph(d\lambda)$$

de donde se deduce inmediatamente el siguiente resultado

Lema 8 *Si una métrica $g = v + h$ es una estructura casi-producto $p + q$, la condición necesaria y suficiente para que sea conforme a una métrica para la que la estructura es minimal es*

$$d\left(\frac{1}{p}\text{tr}Q_v + \frac{1}{q}\text{tr}Q_h\right) = 0$$

Para una estructura casi-producto 2 + 2, esa condición es equivalente a que la suma de las trazas de las segundas formas fundamentales sea cerrada, o, teniendo en cuenta (3.5), a que $d\text{Re}(\delta\mathcal{U} \times \mathcal{U}) = 0$.

g) Si en una variedad con una estructura casi-producto (v, h) la distribución v es foliación, la fórmula de Gauss nos dice que

$$\text{Riem}(v) = v(\text{Riem}(g)) + \frac{1}{2}Q_v \wedge \bar{Q}_v \quad (3.8)$$

donde denotamos $v(\text{Riem}(g))$ a la proyección total sobre v del tensor de Riemann de la variedad, y donde $Q_v \wedge \bar{Q}_v$ denota el producto exterior usual de dobles 1-formas respecto a los índices que están en v y la traza respecto a los de h , es decir

$$\frac{1}{2} [Q_v \wedge \bar{Q}_v]_{\alpha\beta\lambda\gamma} = h^{\mu\nu} [(Q_v)_{\alpha\lambda,\mu}(Q_v)_{\beta\gamma,\nu} - (Q_v)_{\alpha\gamma,\mu}(Q_v)_{\beta\lambda,\nu}]$$

Conocidos el tensor de Riemann de v y la segunda forma fundamental Q_v , la fórmula de Gauss nos permite calcular la proyección total del Riemann de la variedad sobre la foliación v en función de ellos. Ahora, independientemente de que v sea foliación o no, las identidades de Ricci para v nos dicen que

$$\nabla_{[\alpha} \nabla_{\beta]} v_{\mu\nu} = v_{\mu}^{\lambda} R_{\lambda\nu\beta\alpha} + v_{\nu}^{\lambda} R_{\lambda\mu\beta\alpha}$$

Como la contracción con v_{ν}^{ω} de la ecuación anterior es idénticamente nula, y utilizando (3.2) para sustituir ∇v en términos de las segundas formas



fundamentales de v y h , las identidades de Ricci para v son equivalentes a

$$v_\mu^\lambda h_\nu^\gamma R_{\lambda\gamma\beta\alpha} = v_\mu^\lambda h_\nu^\gamma (\nabla_{[\alpha}(Q_v)_{\beta]\lambda,\gamma} - \nabla_{[\alpha}(Q_h)_{\beta]\gamma,\lambda}) \quad (3.9)$$

Estas ecuaciones son las fórmulas de Codazzi. Teniendo en cuenta las simetrías del tensor de Riemann, las fórmulas de Codazzi permiten calcular las componentes del tensor de Riemann en función de Q_v , Q_h y de sus primeras derivadas salvo las proyecciones totales sobre las distribuciones que definen la estructura. Cuando estas distribuciones son foliaciones, las fórmulas de Gauss nos determinan el resto del Riemann en función de los tensores de curvatura de las variedades integrales. Sin embargo, en una estructura $2 + 2$ arbitraria, como la proyección total del Riemann sobre cada 2 -plano es una doble 2 -forma simétrica, necesariamente debe tener cumplirse

$$v(\text{Riem}(g)) = X U \otimes U$$

y por lo tanto, las fórmulas de Codazzi para una estructura $2 + 2$ determinan el Riemann salvo dos escalares (que son las curvaturas de cada 2 -plano cuando estos son foliación).

h) En la tabla de la página siguiente hemos resumido la caracterización de las propiedades de una estructura casi-producto $2 + 2$ en diferentes formalismos: hemos utilizado los proyectores (v, h) , las 2 -formas reales o la autodual que define la estructura, los símbolos de la conexión para una tetraeda ortonormal $\{e_\alpha\}$ adaptada a la estructura ($v = \langle e_0, e_1 \rangle$). Así, l y k son las direcciones principales de U , y m y \bar{m} los vectores isótropos complejos que generan h y hemos denotado de la forma usual [55] a los coeficientes de Newmann-Penrose asociados a la tetraeda isótropa compleja $\{l, k, m, \bar{m}\}$. Además $A \in \{2, 3\}$, $i \in \{0, 1\}$.

Estructuras casi-producto 2 + 2

	Umbilical	Minimal	Foliación
v	$S_v = v \otimes a$	$v^{\alpha\beta} \nabla_\alpha v_{\beta\lambda} = 0$	$A_v = 0$
h	$S_h = h \otimes b$	$h^{\alpha\beta} \nabla_\alpha h_{\beta\lambda} = 0$	$A_h = 0$
v	$h\{e_0, e_0\} + h\{e_1, e_1\} = 0$ $h\{e_0, e_1\} = 0$	$h\{e_0, e_0\} =$ $= h\{e_1, e_1\}$	$h\{e_0, e_1\} = 0$
h	$v\{e_2, e_2\} = v\{e_3, e_3\};$ $v\{e_2, e_3\} = 0$	$v\{e_2, e_2\} =$ $= -v\{e_3, e_3\}$	$v\{e_2, e_3\} = 0$
v	$\gamma_{01}^A + \gamma_{10}^A = 0 = \gamma_{00}^A + \gamma_{11}^A$	$\gamma_{00}^A = \gamma_{11}^A$	$\gamma_{23}^i - \gamma_{32}^i = 0$
h	$\gamma_{23}^i + \gamma_{32}^i = 0 = \gamma_{22}^i - \gamma_{33}^i$	$\gamma_{22}^i = -\gamma_{33}^i$	$\gamma_{01}^A - \gamma_{10}^A = 0$
v	$v^\alpha \nabla_\alpha v = v \overset{23}{\otimes} a + U \overset{23}{\otimes} c$		$U^{\alpha\beta} \nabla_\alpha v_{\beta\lambda} = 0$
h	$h^\alpha \nabla_\alpha h = h \overset{23}{\otimes} b + U \overset{23}{\otimes} d$		$U^{*\alpha\beta} \nabla_\alpha h_{\beta\lambda} = 0$
v	$U_\alpha^m U_\beta^n \nabla_m U_{n\lambda} = U_{\alpha\beta} a_\lambda$	$i(\delta U) \overset{*}{U} = 0$ $[U^{\alpha\beta} \nabla_\alpha U_{\beta\lambda} = 0]$	$i(\delta U) \overset{*}{U} = 0$ $[U^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \overset{*}{U}_{\beta\lambda} = 0]$
h	$\overset{*m}{U}_\alpha \overset{*n}{U}_\beta \nabla_m \overset{*}{U}_{n\lambda} = \overset{*}{U}_{\alpha\beta} b_\lambda$	$i(\delta U) U = 0$ $[\overset{*}{U}^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \overset{*}{U}_{\beta\lambda} = 0]$	$i(\delta \overset{*}{U}) U = 0$ $[\overset{*}{U}^{\alpha\beta} \nabla_\alpha U_{\beta\lambda} = 0]$
v	$v(\lambda_2 - \lambda_3) = 0$	$\text{Re } h(i(\delta U)U) = 0$	$\text{Im } h(i(\delta U)U) = 0$
h	$h(\lambda_2 - \lambda_3) = 0$	$\text{Re } v(i(\delta U)U) = 0$	$\text{Im } v(i(\delta U)U) = 0$
v	$\kappa = 0 = \nu$	$\bar{\pi} = \tau$	$\bar{\pi} = -\tau$
h	$\lambda = 0 = \sigma$	$\text{Re}(\rho) = 0 = \text{Re}(\mu)$	$\text{Im}(\rho) = 0 = \text{Im}(\mu)$
v	l, k geodésicos		$dm \wedge \overset{*}{U} = 0$
h	l, k sin distorsión	l, k sin expansión	$dl \wedge U = 0$ $dk \wedge U = 0$

3.2 Tensores de Killing de orden 2

a) El concepto de campo de Killing puede generalizarse al de tensor de Killing como

Definición 1 *Un tensor de Killing de orden m es un tensor simétrico K_{a_1, a_2, \dots, a_m} que satisface*

$$\nabla_{(a} K_{a_1, a_2, \dots, a_m)} = 0$$

Si $m = 1$, recuperamos el concepto de campo de Killing $\nabla_{(a} X_{b)} = 0$. Nos centraremos brevemente en los tensores de Killing de orden 2 en el espacio-tiempo. Un tensor simétrico K de orden 2 es un tensor de Killing si verifica

$$\nabla_{(a} K_{bc)} = 0 \quad (3.10)$$

Consideremos P la parte sin traza de K , es decir

$$K = P + \frac{1}{4} \text{tr} K g \quad (3.11)$$

Entonces si reescribimos la expresión (3.10) separando la traza y la parte sin traza, se tiene

$$4\delta P = 3\text{dtr} K; \quad \nabla_{(a} P_{bc)} + \frac{1}{3} \delta P_{(a} g_{bc)} = 0 \quad (3.12)$$

donde hemos denotado $\delta P \equiv -\nabla_a P_b^a$. Las expresiones anteriores dan pie a la siguiente definición

Definición 2 *Un tensor simétrico P de orden 2 y de traza nula se dice que es un tensor conforme Killing si satisface la segunda ecuación en la expresión (3.12).*

Así, si P es un tensor conforme Killing cuya divergencia es cerrada, y por lo tanto coincide con el gradiente de una función $\frac{3}{4} \text{tr} K$, el tensor K construido a partir de (3.11) es un tensor de Killing.

b) Los tensores de Killing de orden 2 en el espacio tiempo, pueden clasificarse según los valores y vectores propios del endomorfismo asociado. Utilizando la notación de Segré, un tensor de Killing de tipo $[(1, 1), (1, 1)]$ es el que tiene dos subespacios propios de dimensión 2, es decir, $K = \alpha v + \beta h$ con $\alpha \neq \beta$, donde (v, h) es una estructura casi producto 2+2. Las ecuaciones (3.10) pueden escribirse entonces en términos de los valores propios y la estructura, y se obtiene que las condiciones necesarias y suficientes para que K sea un tensor de Killing son

$$v(d\alpha) = 0; \quad h(d\beta) = 0$$

$$(Q_v)_{(ab),c} = -v \otimes \frac{h(d\alpha)}{\alpha - \beta}$$

$$(Q_h)_{(ab),c} = -h \otimes \frac{v(d\beta)}{\beta - \alpha}$$

Combinando estas cuatro expresiones con los resultados sobre estructuras de la sección precedente, podemos enunciar

Lema 9 Sea (v, h) una estructura casi producto 2+2. Entonces $K = \alpha v + \beta h$ ($\alpha \neq \beta$) es un tensor de Killing si, y sólo si, se verifican

1. v y h son umbilicales, y
2. $\text{tr}Q_v = -\frac{d\alpha}{\alpha-\beta}$, y $\text{tr}Q_h = \frac{d\beta}{\alpha-\beta}$.

De igual manera pueden obtenerse las condiciones para que la estructura (v, h) sea la definida por un tensor conforme Killing. Se tiene que

Lema 10 Sea (v, h) una estructura casi producto 2+2. Entonces $P = \mu(v - h)$ es un tensor conforme Killing si, y sólo si, se verifican

1. v y h son umbilicales, y

2. $\text{tr}Q_v + \text{tr}Q_h = -\frac{d\mu}{\mu}$

c) La pregunta que surge de forma natural es la de si podemos dar condiciones sólo para la estructura, que garanticen que es la definida por un tensor de Killing. Si denotamos $a \equiv \text{tr}Q_v$ y $b \equiv \text{tr}Q_h$ la segunda condición del lema anterior se escribe como

$$(\alpha - \beta)a = -d\alpha; \quad (\alpha - \beta)b = d\beta \quad (3.13)$$

La suma de las dos ecuaciones nos dice

$$a + b = -d \ln(\alpha - \beta)$$

Y diferenciando las dos ecuaciones y sustituyendo $d \ln(\alpha - \beta)$ se obtiene

$$da + a \wedge b = 0 = db + b \wedge a \quad (3.14)$$

Supongamos ahora que a y b son dos 1-formas que verifican las ecuaciones (3.14). Entonces, podemos resolver el sistema y tenemos garantizada la existencia de dos funciones F y G (únicas salvo el cambio $G \rightsquigarrow G + c$ con c constante) de manera que

$$a + b = dF; \quad a - b = e^F dG$$

Si consideramos α y β dadas por

$$2\alpha = e^{-F} - G; \quad 2\beta = -G - e^{-F}$$

entonces verifican el sistema (3.13). La libertad en la elección de G lleva a la libertad $\alpha \rightsquigarrow \alpha + c$ y $\beta \rightsquigarrow \beta + c$ para la misma constante c . O, en términos del tensor de Killing que definen, a la libertad $\alpha v + \beta h \rightsquigarrow \alpha v + \beta h + cg$. Es decir, los tensores de Killing difieren en una homotecia de la métrica. Por lo tanto, hemos encontrado ecuaciones que caracterizan el que una estructura 2+2 (v, h) sea la estructura definida por un tensor de Killing (diferente del trivial g). Podemos enunciar este resultado como

Proposición 20 *Una estructura casi-producto $2 + 2$ (v, h) es la estructura definida por un tensor de Killing si, y sólo si, verifica*

1. $Q_v = \frac{1}{2}v \otimes \text{tr}Q_v; \quad Q_h = \frac{1}{2}h \otimes \text{tr}Q_h$
2. $d\text{tr}Q_v + \text{tr}Q_v \wedge \text{tr}Q_h = 0 = d\text{tr}Q_h + \text{tr}Q_h \wedge \text{tr}Q_v$

La primera condición establece el carácter umbilical de ambos 2-planos, es decir, que las direcciones principales del 2-plano temporal son geodésicas y sin distorsión. La suma de las dos expresiones que aparecen en la segunda condición nos dice que la suma de las trazas de las segundas formas fundamentales es cerrada, lo que, teniendo en cuenta el lema 8, implica que la estructura puede hacerse minimal por una conformidad. Los tensores de Killing de orden 2 han sido ampliamente considerados en la literatura (ver [82], [22] y las referencias de este último). Una condición más débil que la de tensor de Killing es la de tensor conforme Killing. De la misma forma las condiciones para que $P = \alpha(v - h)$ sea un tensor conforme Killing pueden traducirse en propiedades geométricas para la estructura $2 + 2$ (v, h) como

Proposición 21 *Una estructura casi-producto $2 + 2$ (v, h) es la estructura definida por un conforme Killing si, y sólo si, verifica*

1. $Q_v = \frac{1}{2}v \otimes \text{tr}Q_v; \quad Q_h = \frac{1}{2}h \otimes \text{tr}Q_h$
2. $d(\text{tr}Q_v + \text{tr}Q_h) = 0$

La segunda condición establece el que la estructura es conforme a una estructura minimal y es exactamente la suma de las dos ecuaciones del apartado 2 de la proposición 20.

3.3 Métricas con simetría esférica

a) Una métrica con simetría esférica define de forma natural una estructura casi producto $2+2$, donde la distribución espacial es tangente a las órbitas del grupo de rotaciones. Es conocido que una métrica tiene simetría esférica si, y sólo si, existen coordenadas (r, t, θ, ϕ) , de manera que

$$g = -\alpha^2 dt^2 + \beta^2 dr^2 + \Omega^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) \quad (3.15)$$

donde α , β y Ω son funciones de r y t . Por lo tanto, podemos escribir cualquier métrica con simetría esférica como

$$g = \Omega^2 \left[-\frac{\alpha^2}{\Omega^2} dt^2 + \frac{\beta^2}{\Omega^2} dr^2 + d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \right]$$

Entonces cualquier métrica con simetría esférica es conforme a una métrica producto $2+2$. Además, el factor de conformidad tiene gradiente contenido en el 2-plano temporal y el 2-plano espacial tiene curvatura constante.

Estructuras casi-producto 2 + 2

Teniendo en cuenta cómo cambia la segunda forma fundamental por una conformidad, estas propiedades nos proporcionan una primera caracterización, en términos de la estructura, de las métricas con simetría esférica.

Lema 11 *Una métrica de espacio-tiempo g tiene simetría esférica si, y sólo si, admite una estructura casi producto 2+2 (v, h) , de manera que*

1. v es foliación totalmente geodésica ($Q_v = 0$).
2. h es foliación umbilical y su traza es cerrada ($Q_h = h \otimes df$).
3. La curvatura de h es positiva ($K(h) > 0$) y la proyección de su gradiente a h es cero ($h(dK(h)) = 0$).

Además las variedades integrales de la foliación h son las órbitas del grupo de rotaciones.

b) El lema anterior proporciona una caracterización de las métricas con simetría esférica, pero no es una caracterización explícita, ya que no nos dice cómo localizar la estructura que debe tener las propiedades que exige. Podemos dar un primer resultado en ese sentido si tenemos en cuenta que g es conforme a una métrica producto 2+2. Si $\hat{g} = \hat{v} + \hat{h}$ es una métrica producto 2+2, entonces $\nabla v = 0 = \nabla h$. Por tanto, las relaciones de Codazzi de la primera sección nos dicen que la proyección mixta del Riemann es nula, esto es, $v^\alpha h^\beta R_{\mu\nu\epsilon\delta} = 0$. Ahora, como las segundas formas fundamentales de v y h son nulas, las fórmulas de Gauss nos dicen que la proyección total del Riemann a cada 2-plano coincide con el Riemann bidimensional correspondiente, es decir

$$Riem(\hat{g}) = Riem(\hat{v}) + Riem(\hat{h})$$

Podemos entonces calcular el tensor de Weyl de una métrica producto y se deduce

Lema 12 *Si $\hat{g} = \hat{v} + \hat{h}$ es una métrica producto 2+2, entonces es de tipo D (o O) con (\hat{v}, \hat{h}) la estructura principal, los valores propios del tensor de Weyl son reales y el valor propio doble es $\rho = -\frac{1}{6}[K(\hat{v}) + K(\hat{h})]$. Además es de tipo O si, y sólo si, la suma de las dos curvaturas es cero.*

Así, una métrica no conformemente plana tiene simetría esférica si, y sólo si es de tipo D con valores propios reales, y la estructura principal verifica las condiciones del lema 11. Como en el capítulo 2 hemos determinado un proyector sobre la estructura principal del Weyl, podemos calcular intrínsecamente esta estructura.

c) Lo que veremos ahora, es que para el caso de valores propios reales podemos simplificar las expresiones y trabajar únicamente con el tensor

de Weyl real. Si en la forma canónica (2.8) separamos la parte real, en el caso de que los valores propios sean reales se tiene que el tensor de Weyl es

$$W = 3\rho(U \otimes U - *U \otimes *U) + \rho G \quad (3.16)$$

con $G = \frac{1}{2}g \wedge g$ y $\rho = -(\frac{1}{12}\text{tr}W^3)^{\frac{1}{3}} \neq 0$. Si consideramos entonces

$$S \equiv \frac{1}{3\rho}(W - \rho G) \quad (3.17)$$

teniendo en cuenta (3.16) se deduce que $S = U \otimes U - *U \otimes *U$, y por lo tanto satisface $S^2 + S = 0$. Recíprocamente, si $S^2 + S = 0$, el tensor autodual $S = \frac{1}{2}(S - i * S)$ verifica la misma condición, y por lo tanto el tensor de Weyl autodual tiene un polinomio mínimo de grado 2. Como además suponemos $\rho \neq 0$, debe ser de tipo D. Tenemos entonces una caracterización intrínseca que sólo involucra elementos reales del hecho de que el Weyl sea de tipo D con autovalores reales. Resumiendo estos resultados, se tiene

Lema 13 *Un tensor de Weyl es de tipo D con autovalores reales si, y sólo si,*

$$\rho = -(\frac{1}{12}\text{tr}W^3)^{\frac{1}{3}} \neq 0; \quad S^2 + S = 0$$

donde $S \equiv \frac{1}{3\rho}(W - \rho G)$.

Utilizando las expresiones (1.5), podemos calcular la 2-forma principal U que es simplemente la geometría de $S(X)$, donde X es cualquier 2-forma tal que $S(X)$ es no nulo. Calculada U , tenemos determinado el proyector $h = g - U \times U$. Con estos elementos podemos imponer intrínsecamente las condiciones 1 y 2 del lema 11. Para la tercera necesitamos calcular la curvatura de h . Pero si tenemos en cuenta que las 2 primeras condiciones nos garantizan que $Q_v = 0$, $Q_h = \frac{1}{2}h \otimes \text{tr}Q_h$, la fórmula de Gauss (3.8) nos dice que

$$\text{Riem}(h) = h[\text{Riem}(g)] + \frac{1}{8}(\text{tr}Q_h)^2 h \wedge h$$

La doble traza con h (tr_h^2) en la expresión anterior nos proporciona entonces la curvatura del 2-plano h , a la que debemos imponerle las condiciones del lema 11. Los resultados de los apartados b) y c) nos permiten escribir las condiciones del lema 11 sólo en términos de la estructura como:

Teorema 4 *Sea $W \equiv W(g)$ el tensor de Weyl de un espacio-tiempo no conformemente plano ($W \neq 0$), y consideremos los concomitantes de la métrica g*

$$\rho = -(\frac{1}{12}\text{tr}W^3)^{\frac{1}{3}}; \quad S = \frac{1}{3\rho}(W - \frac{1}{2}\rho g \wedge g)$$

Estructuras casi-producto 2 + 2

$$h = g - U^2; \quad R(h) = \text{tr}_h^2 \text{Riem}(g) + \frac{1}{2}(\delta h)^2$$

donde $U = \alpha S(X) + \beta *S(X)$ con

$$\alpha = -\frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{\Omega - \Psi}{2\Omega}} \quad \beta = \frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{\Omega + \Psi}{2\Omega}} \quad \Omega = \sqrt{\Phi^2 + \Psi^2}$$

$$\phi = S^2(X, X); \quad \psi = *S^2(X, X);$$

y donde X es cualquier 2-forma que verifique que $S(X) \neq 0$. Entonces, g tiene simetría esférica si, y sólo si, verifica

1. $\rho \neq 0; \quad S^2 + S = 0.$

2. $\nabla h = -\frac{1}{2}h \tilde{\otimes} \delta h, \quad d\delta h = 0.$

3. $R(h) > 0; \quad h[dR(h)] = 0.$

3.4 Espacios-tiempo estáticos

a) Obtener una caracterización intrínseca de los espacios estáticos de Tipo I resulta sencillo ya que la dirección del campo de Killing integrable coincide con la dirección principal e_0 . Este resultado es consecuencia de que, como hemos visto en el capítulo 2, e_0 es la única dirección temporal que puede tener parte magnética cero en Tipo I. Cualquier espacio tiempo algebraicamente general que contenga un observador cuyas propiedades impliquen la nulidad de la parte magnética del Weyl respecto a la congruencia que define queda caracterizado intrínsecamente, ya que necesariamente ese observador es e_0 . Por otra parte, tengamos en cuenta que la condición de que un campo ξ sea un campo de Killing (espacial o temporal) puede escribirse en términos de la congruencia unitaria que define como

Lema 14 *Dado un campo unitario v , el campo $\xi = \lambda v$ es un campo de Killing si, y sólo si v es de deformación cero y su aceleración es cerrada, es decir*

$$d = 0 \quad d\dot{v} = 0$$

donde $\dot{v} = i(v)\nabla v$, $2d = \gamma[\nabla v + {}^t\nabla v]$, siendo $\gamma = g - v^2 v \otimes v$ el proyector ortogonal a v .

Además el Killing es integrable si, y sólo si, $dv \wedge v = 0$.

Si escribimos las condiciones anteriores en términos del proyector γ y tenemos en cuenta los resultados del capítulo anterior sobre la determinación de e_0 , se tiene

Proposición 22 *Un espacio-tiempo de tipo I es estático, si y sólo si, el tensor de Weyl satisface*

$$\gamma_\alpha^\lambda \gamma_\beta^\mu \nabla_\lambda \gamma_\mu^\nu = 0; \quad d\delta\gamma = 0$$

donde $\gamma = \gamma(g) \equiv \frac{1}{2}(3g - \sum U_i^2)$ y donde U_i son las 2-formas reales asociadas a las principales \mathcal{U}_i dadas en la proposición 16. Además la dirección del campo de Killing es

$$u \propto (\gamma - g)(x)$$

con x cualquier vector temporal.

b) Nos centraremos ahora en los espacios de tipo D. La condición necesaria y suficiente para que exista una congruencia con parte magnética cero es que los valores propios sean reales, y entonces, todas las direcciones de los 2-planos principales tienen parte magnética cero. Entonces la condición $*W(v; v) = 0$ no nos permite elegir entre todas las del 2-plano temporal una dirección privilegiada. Por tanto, el hecho de que el vector unitario en la dirección de un Killing temporal integrable tenga parte magnética cero sólo nos dice que ese campo es uno temporal contenido en U . Una primera condición para localizar la dirección del Killing es tener en cuenta los invariantes escalares del tensor de Riemann. Si ξ es un Killing debe cumplirse que $\mathcal{L}_\xi \rho \equiv (\xi, d\rho) = 0$ para cualquier invariante ρ . Pero como si $\xi \in U$ se tiene que $(\xi, d\rho) = v(\xi, d\rho)$, y hemos probado que ξ es una dirección en U ortogonal a $d\rho$, es decir, debe cumplirse $\xi \wedge U(d\rho) = 0$. Esto permite determinar la dirección del Killing si existe algún invariante escalar cuyo gradiente tenga proyección no nula al 2-plano principal U . En concreto, tenemos

Lema 15 *Sea g una métrica estática de tipo D. Entonces, para cualquier invariante ρ , si el campo $U(d\rho)$ no es nulo, nos determina la dirección del campo de Killing integrable.*

c) Este resultado no permite determinar el Killing en todos los espacios de tipo D, ni ofrecemos un listado exhaustivo de los invariantes escalares que podemos considerar. Pero podemos decir más cosas sobre la dirección del Killing utilizando las direcciones invariantes y no sólo los escalares. Así, si tenemos en cuenta que en un espacio de Tipo D cualquier Killing debe dejar invariante a la estructura principal, es decir $\mathcal{L}_\xi v = 0 = \mathcal{L}_\xi h$, se tiene

$$\mathcal{L}_\xi v = 0 \iff \xi^\mu (\nabla_\alpha v_{\mu\beta} + \nabla_\beta v_{\mu\alpha} - \nabla_\mu v_{\alpha\beta}) = \nabla_\alpha v(\xi)_\beta + \nabla_\beta v(\xi)_\alpha$$

$$\mathcal{L}_\xi h = 0 \iff \xi^\mu (\nabla_\alpha h_{\mu\beta} + \nabla_\beta h_{\mu\alpha} - \nabla_\mu h_{\alpha\beta}) = \nabla_\alpha h(\xi)_\beta + \nabla_\beta h(\xi)_\alpha$$

Por lo tanto, si ξ es un Killing tal que $h(\xi) = 0$, la segunda de las ecuaciones anteriores implica que

$$\xi^\mu (\nabla_\alpha h_{\mu\beta} + \nabla_\beta h_{\mu\alpha} - \nabla_\mu h_{\alpha\beta}) = 0$$

Estructuras casi-producto 2 + 2

Si calculamos las proyecciones a ambos 2-planos se tiene

$$\xi^\mu(Q_v)_{[\alpha\mu],\beta} = 0 = \xi^\mu(Q_h)_{(\alpha\beta),\mu}$$

donde los corchetes denotan la antisimetrización y los paréntesis la simetrización como es usual. Pero como ξ es del 2-plano U , la primera condición implica que v es foliación y la segunda puede reescribirse como

$$Q_h = S \otimes U(\xi) + *U \otimes X$$

para alguna dirección X en U . Es decir, se tiene

Lema 16 *Si g es una métrica de tipo D que tiene un campo de Killing contenido en el 2-plano principal U , entonces la estructura principal (v, h) verifica*

1. v es foliación
2. $Q_h = S \otimes U(\xi) + *U \otimes X$ donde S es un tensor simétrico

De este resultado se deduce que si h no es minimal, es decir si $i(\delta U)U \equiv \text{tr}Q_h \neq 0$, entonces

$$U(\text{tr}Q_h) \wedge \xi = 0$$

con lo que la traza de la segunda forma fundamental de h nos determina la dirección del Killing. Por otra parte, si h no es umbilical y denotamos $s^2 \equiv S^{ab}S_{ab}$ y $(Q_h)^2 \equiv (Q_h)^{ab}{}_{\alpha}(Q_h)_{ab\beta}$ se tiene que

$$(Q_h)^2 = 2s^2 U(\xi) \otimes U(\xi)$$

con lo que para cualquier dirección temporal x , se verifica

$$(Q_h)^2(U(x)) = -2s^2(x, \xi)U(\xi)$$

Por lo tanto, contrayendo la expresión anterior con U , tenemos determinada la dirección del Killing. Se ha probado:

Lema 17 *Sea g una métrica de tipo D que admite un Killing en el 2-plano U , y sea (v, h) la estructura principal del Weyl. Entonces se verifica:*

1. Si h no es minimal, entonces $i(\delta U)U$ determina la dirección del campo de Killing.
2. Si h no es umbilical, los campos $U \times (Q_h)^2(U(x))$ y $U \times (Q_h)^2(x)$ determinan la dirección del Killing, siendo x un vector temporal arbitrario.

El resultado anterior es cierto independientemente del carácter causal del Killing. Si queremos caracterizar sólo los estáticos, hay que exigir además que la dirección sea temporal, y entonces de las dos direcciones que aparecen en el segundo apartado del lema anterior es suficiente con calcular la primera, ya que si x y ξ son temporales su producto no es cero.

d) Supongamos entonces que no hemos localizado invariantes en el 2-plano v y que h es una 2-distribución totalmente geodésica. Entonces

$$Q_h = *U \otimes X, \quad \text{con} \quad X_i = \frac{1}{2} *U^{ab} \nabla_a h_{bi}$$

Si multiplicamos ξ por X y usamos que ξ está en v , se tiene

$$\xi^i X_i = -\frac{1}{2} *U^{ab} h_b^c \nabla_a \xi_c = -\frac{1}{2} *U^{ac} \nabla_a \xi_c$$

Por otro lado, si ξ es integrable (no es necesario imponer que sea de Killing), existe una 1-forma Z (dada salvo $Z \sim Z + \lambda \xi$) tal que $d\xi = \xi \wedge Z$, y por lo tanto se verifica

$$*U^{ac} \nabla_a \xi_c = \frac{1}{2} *U^{ac} (d\xi)_{ac} = \frac{1}{2} *U^{ac} (\xi \wedge Z) = *U(\xi, Z)$$

Con lo que si ξ está en el 2-plano U , $*U(\xi) = 0$, y por lo tanto,

$$(\xi, X) = 0$$

Lo que dice el resultado anterior es que en una estructura casi producto $2+2$, si h no es foliación (v no es integrable), la 2-distribución ortogonal v tiene a lo sumo una dirección integrable que es $*U^{ab} \nabla_a h_{bi}$, o, teniendo en cuenta 3.4, la dirección $U(\delta * U)$. Por lo tanto, si h no es foliación y buscamos un campo de Killing integrable en v y , necesariamente debe estar en la dirección $U(\delta * U)$. Podemos enunciar este resultado como

Lema 18 *Sea (v, h) una estructura casi producto $2+2$ y supongamos que h no es foliación. Entonces, o v no contiene ninguna dirección integrable o existe a lo sumo una dirección integrable en el 2-plano v y es la determinada por $U(\delta * U)$.*

*Por lo tanto, si existe un Killing integrable contenido en el 2-plano v éste tiene la dirección de $U(\delta * U)$.*

También es resultado es independiente del carácter causal del Killing. Si queremos caracterizar los espacios-tiempo estáticos, habría que imponer además que $U(\delta * U)$ sea temporal.

e) Si con los lemas anteriores no localizamos el Killing integrable es porque todas las direcciones que hemos considerado son nulas, es decir, tenemos una estructura casi producto (v, h) en la que

Estructuras casi-producto 2 + 2

- 1) v es foliación
- 2) h es foliación totalmente geodésica.

Lo que probaremos ahora es que, si ξ es un campo de Killing integrable contenido en v , es una dirección propia de la segunda forma fundamental de v , es decir $\xi \wedge (i(\xi)Q_v) = 0$. Para ello, sea Z cualquiera de las 1-formas tales que $\nabla\xi = \xi \wedge Z$. Entonces,

$$\begin{aligned} (i(\xi)Q_v)_{\alpha\mu} &= \xi^\lambda v_\alpha^\beta \nabla_\beta v_{\lambda\mu} = -\xi^\lambda v_\alpha^\beta \nabla_\beta h_{\lambda\mu} = \\ &= v_\alpha^\beta h_\mu^\lambda \nabla_\beta \xi_\lambda = v_\alpha^\beta h_\mu^\lambda (\xi_\beta Z_\lambda - \xi_\lambda Z_\beta) = \xi_\alpha h(Z)_\mu \end{aligned}$$



Entonces se ha probado

Lema 19 Si ξ es un campo de Killing integrable contenido en el 2-plano U de una estructura casi producto 2+2, entonces ξ es propio de la segunda forma fundamental de v , es decir

$$\xi \wedge i(\xi)Q_v = 0$$

Como además sabemos por el lema 16 que v es foliación, el lema anterior implica que existen dos 1-formas X, Y , contenidas en el 2-plano $*U$ de manera que

$$Q_v = \xi \otimes \xi \otimes X + U(\xi) \otimes U(\xi) \otimes Y$$

Si calculamos la traza de la segunda forma fundamental, se deduce

$$\text{tr}Q_v = \xi^2(X - Y)$$

y por lo tanto para la parte sin traza se obtiene

$$Q_v^T = Q_v - \frac{1}{2}v \otimes (\text{tr}Q_v) = (\xi \otimes \xi + U(\xi) \otimes U(\xi)) \otimes \left(\frac{1}{2}(X + Y)\right)$$

Denotemos u y w a las direcciones unitares proporcionales a ξ y a $U(\xi)$. Si llamamos $T = \frac{1}{2}\xi^2(X + Y)$, se tiene que

$$Q_v^T = (u \otimes u + w \otimes w) \otimes T$$

Cosideremos ahora y arbitrario tal que $h(y) \neq 0$. Entonces, Si T no es cero, es decir, si v no es umbilical, o bien (T, y) o bien $T(*U(y))$ no son cero. Denotemos z al que no sea ortogonal a T (si ninguno lo es, elegimos cualquiera de los dos). Entonces,

$$Q_v^T(z) = (T, z) (u \otimes u + w \otimes w)$$

Luego se verifica que

$$\text{tr}(Q_v^T(z)^2) \equiv (Q_v^T(z))_{\alpha\beta} (Q_v^T(z))^{\beta\alpha} = 2(T, z)^2$$

Además, como T y z son espaciales, su producto es positivo, y por lo tanto

$$Q_v^T(z) - \sqrt{\frac{1}{2}(\text{tr}(Q_v^T(z)^2))} v = u \otimes u$$

y determinamos la dirección del Killing contrayendo con una dirección temporal arbitraria.

Lema 20 *Sea g una métrica de tipo D que admite un Killing temporal integrable en el 2-plano U , y sea (v, h) la estructura principal del Weyl. Si v no es umbilical, entonces el campo*

$$\left(Q_v^T(z) - \sqrt{\frac{1}{2}(\text{tr}(Q_v^T(z)^2))} v \right) (x)$$

tiene la dirección del campo de Killing donde x es cualquier vector temporal, y donde z es cualquier vector para el que la expresión anterior no se anule.

Si no buscáramos sólo caracterizar los espacios-estáticos, sino también los que admiten un Killing espacial integrable contenido en v , habría que sustituir en el lema anterior ξ_1 por $U(\xi_1)$.

f) Si con los apartados anteriores no hemos determinado el Killing, es porque la estructura (v, h) verifica

- 1) v es foliación umbilical ($Q_v = \frac{1}{2}v \otimes \text{tr}Q_v$),
- 2) h es foliación totalmente geodésica ($Q_h = 0$).

Consideremos ahora la dirección $\text{tr}Q_v$ contenida en el 2-plano $*U$. Como la estructura debe ser invariante por ξ , también lo es esta dirección, con lo que, si tenemos en cuenta que además es ortogonal a ξ , debe cumplir

$$0 = d(\xi, \text{tr}Q_v) = -\xi \times \text{dtr}Q_v$$

Luego $\text{dtr}Q_v$ es una 2-forma ortogonal a ξ . Por lo tanto, si $v_\alpha^a(\text{dtr}Q_v)_{a\beta}$ no es cero, debe tener la dirección de $U(\xi)$, con lo que

$$U(\text{tr}Q_v \times \text{dtr}Q_v) \wedge \xi = 0 = U(*U(\text{tr}Q_v) \times \text{dtr}Q_v) \wedge \xi$$

Entonces, si alguna de esas direcciones no es nula, nos proporciona la dirección de ξ , es decir, se tiene

Lema 21 *Sea g una métrica de tipo D que admite un Killing integrable en el 2-plano U , y consideremos (v, h) la estructura principal del Weyl. Supongamos que $v \times \text{dtr}Q_v \neq 0$, y consideremos los campos*

$$U(\text{tr}Q_v \times \text{dtr}Q_v), \quad U(*U(\text{tr}Q_v) \times \text{dtr}Q_v)$$

Entonces al menos uno de estos dos campos es no nulo y determina la dirección del campo de Killing.

Estructuras casi-producto 2 + 2

g) Si el lema anterior no permite calcular la dirección ξ es porque las dos direcciones consideradas son nulas o, equivalentemente, porque $\text{dtr}Q_v$ es proporcional a $*U$, es decir $v \times \text{dtr}Q_v = 0$. El hecho de que v sea foliación umbilical y h sea foliación totalmente geodésica implica que existen coordenadas $\{x^A, x^i\}$ de manera que

$$g \equiv v + h = \phi^2(x^\alpha) \tilde{v}_{AB} dx^A dx^B + h_{ij} dx^i dx^j$$

En ese sistema de coordenadas se cumple que

$$Q_v = -\frac{1}{2} \partial_i (\ln \phi) (\phi^2 \tilde{v}) \otimes dx^i = -\frac{1}{2} \phi^2 \tilde{v} \otimes h(\text{dln} \phi)$$

Con lo que $\text{tr}Q_v = -\partial_i \ln \phi dx^i$. Si imponemos que además $v \times \text{dtr}Q_v$ sea cero, se deduce

$$v \times \text{dtr}Q_v = -\partial_A \partial_i \ln \phi = 0$$

Con lo que en esas coordenadas se tiene

$$\phi = \mu(x^i) \nu(x^A)$$

Luego g se escribe como

$$g = \mu^2(x^i) \nu^2(x^C) \tilde{v}_{AB}(x^C) dx^A dx^B + h_{ij}(x^k) dx^i dx^j$$

Ahora, si tenemos un Killing contenido en v el gradiente de la curvatura debe ser ortogonal a éste. Es decir,

Lema 22 *Sea g una métrica de tipo D con un Killing integrable contenido en el 2-plano principal temporal y sea (v, h) la estructura principal, donde v es foliación umbilical y h foliación totalmente geodésica, y supongamos que la curvatura del 2-plano v verifica $v(dK(v)) \neq 0$. Entonces, el campo de Killing tiene la dirección de $U(dK(v))$.*

Sólo nos queda el caso de que la proyección a v del gradiente de la curvatura de v sea cero. Esta condición es equivalente a que $\nu^2(x^A) \tilde{v}$ sea de curvatura constante, y por lo tanto admite un G_3 . Así, los únicos espacios-tiempo estáticos de Tipo D en los que no podemos determinar la dirección del Killing integrable son de la forma

$$\frac{1}{\lambda^2(x^i)} (v_c + h)$$

donde v_c es una métrica bidimensional hiperbólica de curvatura constante, y $h \equiv h_{ij}(x^k) dx^i dx^j$ es una métrica bidimensional elíptica arbitraria. Por lo tanto, todos estos espacios admiten al menos un G_3 con órbitas bidimensionales temporales. Podemos enunciar estos resultados como

Teorema 5 Sea g una métrica de tipo D y (v, h) la estructura principal del Weyl. Supongamos además que alguna de las direcciones $\hat{\xi}$ definidas en los lemas 17 al 22 no es nula. Entonces, g es estática si, y sólo si, el vector unitario en la dirección de $\hat{\xi}$ satisface las condiciones del lema 14.

Si todas las direcciones de los lemas anteriores son nulas, entonces, si la métrica es estática admite al menos un G_3 con órbitas bidimensionales temporales que coinciden con el 2-plano principal v .

3.5 Espacios de Tipo I con radiación isótropa

a) Los espacios-tiempo en los que existe un observador sincronizable que puede medir un estado de radiación isótropa han sido considerados en la literatura como un posible modelo del universo actual [34]. Estos espacios pueden caracterizarse [30] como los que admiten un campo conforme Killing integrable. En términos del campo unitario en la dirección del conforme Killing, estas ecuaciones equivalen a

$$\Omega = 0; \quad \sigma = 0; \quad d(\dot{u} - \frac{1}{3}\theta u) = 0 \quad (3.18)$$

donde Ω es la 2-forma de rotación, y σ , θ y \dot{u} son respectivamente la distorsión, la expansión y la aceleración de u . El carácter integrable y sin distorsión de la congruencia implica [85] que el Weyl es de tipo I, D o O y que u es una dirección principal del Weyl. Por lo tanto, en los espacios de tipo I, este observador coincide con la dirección principal e_0 , y en ese sentido, llamamos a esta congruencia *observador principal* del Weyl. Resumimos estos resultados conocidos en el siguiente lema.

Lema 23 En un espacio-tiempo de tipo I, los tres enunciados siguientes son equivalentes.

1. Existe un conforme Killing integrable.
2. Existe una solución de la ecuación de Liouville isótropa para un observador sincronizable.
3. El observador principal definido por el Weyl satisface (3.18).

b) Una congruencia temporal u ($u^2 = -1$) define en el espacio-tiempo una estructura casi producto $1+3$ (v, h) donde $v = -u \otimes u$, $h = g + u \otimes u$. Las segundas formas fundamentales generalizadas dependen de los coeficientes cinemáticos del vector u a través de

$$Q_v = -v \otimes \dot{u}; \quad Q_h = (\Omega + \sigma + \frac{1}{3}\theta h) \otimes u \quad (3.19)$$

Entonces, las ecuaciones (3.18) nos dicen que la estructura $1+3$ que define u es umbilical e integrable ($\Omega = 0 = \sigma$) y que $d(\text{tr}Q_v + \frac{1}{3}\text{tr}Q_h) = 0$, con

lo que, teniendo en cuenta el lema 8, es conforme a una métrica para la que la estructura 1 + 3 es minimal. Como el resto de propiedades de una estructura son invariantes conformes, se deduce:

Lema 24 *Un espacio-tiempo admite un conforme Killing temporal integrable si, y sólo si, es conforme a una métrica que admite una estructura producto 1 + 3 donde la distribución 1-dimensional es temporal.*

c) Teniendo en cuenta (3.2), las condiciones (3.18) pueden escribirse en términos de ∇h como

$$\begin{aligned}\Omega = 0 = \sigma &\iff h_\alpha^\lambda h_\beta^\mu \nabla_\lambda h_\mu^\nu = h_{\alpha\beta} h^{\lambda\mu} \nabla_\lambda h_\mu^\nu \\ d(\dot{u} - \frac{1}{3}\theta u) &\iff d[4h(\delta h) - \delta h] = 0\end{aligned}$$

donde hemos denotado $(\delta h)_a = -\nabla_\lambda h_\alpha^\lambda$. Teniendo en cuenta los resultados del capítulo anterior en el que determinamos proyectores sobre las 2-formas y las direcciones principales, se obtiene la caracterización intrínseca de esta familia de espacios

Proposición 23 *Un espacio-tiempo de tipo I admite un conforme Killing temporal integrable si, y sólo si, el tensor de Weyl satisface*

$$h_\alpha^\lambda h_\beta^\mu \nabla_\lambda h_\mu^\nu = h_{\alpha\beta} h^{\lambda\mu} \nabla_\lambda h_\mu^\nu; \quad d[4h(\delta h) - \delta h] = 0$$

donde $h = h(g) \equiv \frac{1}{2}(3g - \sum U_i^2)$ y donde U_i son las 2-formas reales asociadas a las principales \mathcal{U}_i dadas en la proposición 16. Además la dirección del conforme Killing es

$$u \propto (h - g)(x)$$

donde x es cualquier vector temporal.

3.6 Formalismo de Cartan complejo

a) Dada una tetraeda ortonormal $\{e_\alpha\}$ y su base dual algebraica $\{\theta^\alpha\}$ denotaremos como es usual $\gamma_{\alpha\beta}^\rho$ a los símbolos de la conexión y w_α^β a las 1-formas de conexión

$$\nabla e_\alpha = \gamma_{\alpha\beta}^\rho \theta^\beta \otimes e_\rho = w_\alpha^\rho \otimes e_\rho \quad (3.20)$$

Si consideramos la base de las 2-formas autoduales $\{\mathcal{U}_i\}$ asociada, las seis 1-formas de conexión w_i^j pueden agruparse en tres 1-formas complejas Γ_i^j , con $\Gamma_i^j = -\Gamma_j^i$ que en términos de las 1-formas de conexión w_α^β se escriben

$$\Gamma_i^j = w_i^j - i\epsilon_{ijk}\omega_0^k$$

y de manera que las ecuaciones (3.20) son

$$\nabla \mathcal{U}_i = \Gamma_i^j \otimes \mathcal{U}_j \quad (3.21)$$

Las tres ecuaciones complejas (3.21) constituyen las primeras ecuaciones estructurales de Cartan. El segundo grupo de ecuaciones de estructura se obtiene de las identidades de Ricci para las 2-formas \mathcal{U}_i ,

$$\nabla_{[\alpha} \nabla_{\beta]} \mathcal{U}_{i\epsilon\delta} = \mathcal{U}_{i\epsilon}{}^\mu R_{\mu\delta\beta\alpha} + \mathcal{U}_i{}^\mu{}_\delta R_{\mu\epsilon\beta\alpha}$$

Si denotamos $Riem(\mathcal{U}_m) = \frac{1}{2} R_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathcal{U}_m)^{\mu\nu}$, este segundo grupo de ecuaciones se escribe

$$d\Gamma_i^k - \Gamma_i^j \wedge \Gamma_j^k = i\sqrt{2}\epsilon_{ikm} Riem(\mathcal{U}_m)$$

Si tenemos en cuenta la descomposición del Riemann en términos de su parte sin traza y del Ricci, se tiene

$$Riem = W + Q \wedge g, \quad \text{donde} \quad Q = \frac{1}{2}(Ric - \frac{R}{6}g), \quad R = \text{tr}(Ric)$$

Entonces, teniendo en cuenta que $\mathcal{W}(U - i * U) = \mathcal{W}(U - i * U)$ las segundas ecuaciones de Cartan se escriben

$$d\Gamma_i^k - \Gamma_i^j \wedge \Gamma_j^k = i\sqrt{2}\epsilon_{ikm} [\mathcal{W}(\mathcal{U}_m) + \mathcal{U}_m \times Q + Q \times \mathcal{U}_m] \quad (3.22)$$

Sabemos que cada 2-forma \mathcal{U}_i define una estructura casi producto $2 + 2$, cuyo tensor de estructura $T_i = v_i - h_i$ puede calcularse como $T_i = 2\mathcal{U}_i \times \bar{\mathcal{U}}_i$. Si denotamos además $\text{tr}_i Q \equiv T_i^{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}$ a la traza calculada con este tensor, donde $Q^{\alpha\beta}$ son las componentes de Q en la tetraeda $\{e_\alpha\}$ definida por $\{\mathcal{U}_i\}$ se comprueba que

$$\mathcal{U}_m \times Q + Q \times \mathcal{U}_m = \sum_{m \neq j} (Q^{mj} - i\epsilon_{mjk} Q^{0k}) \bar{\mathcal{U}}_j + \frac{1}{2} \text{tr}_m Q \bar{\mathcal{U}}_m + \frac{1}{2} \text{tr} Q \mathcal{U}_m$$

Si en (3.22) separamos la parte real y la imaginaria obtenemos las ecuaciones de Cartan en formalismo real.

b) De las primeras ecuaciones de estructura (3.21) se tiene que

$$-\delta \mathcal{U}_i \equiv \text{tr} \nabla \mathcal{U}_i = \Gamma_i^j \times \mathcal{U}_j$$

Sean $\lambda_i = \mathcal{U}_i(\delta \mathcal{U}_i)$ las tres 1-formas complejas que como vimos en el lema 5 contienen la información sobre la minimalidad y la integrabilidad de los 2-planos que definen la estructura. Teniendo en cuenta (1.9) y (3.21) se verifica que

$$\lambda_i = \frac{i}{\sqrt{2}} \epsilon_{ijk} \Gamma_i^j \times \mathcal{U}_k$$

Invirtiendo las ecuaciones anteriores obtenemos que para i, j, k diferentes entre sí,

$$\Gamma_i^j \times \mathcal{U}_k = \frac{i}{\sqrt{2}}(\lambda_k - \lambda_i - \lambda_j)\epsilon_{ijk} \quad (3.23)$$

Si en las segundas ecuaciones de estructura (3.22) contraemos cada una de las ecuaciones $d\Gamma_i^j$ con $\epsilon_{ijk}\mathcal{U}_k$, se obtienen tres ecuaciones escalares complejas que contienen explícitamente a las 1-formas λ_i y que para i, j, k diferentes entre sí, podemos escribir como

$$\nabla \cdot \lambda_i = \lambda_i^2 - \frac{1}{2}(\lambda_j - \lambda_k)^2 - \mathcal{W}(\mathcal{U}_i, \mathcal{U}_i) - \frac{1}{2} \operatorname{tr} Q \quad (3.24)$$

c) Para terminar esta sección incluiremos algunos resultados generales y algunos lemas técnicos que nos serán útiles en lo que sigue. Dada $\{\mathcal{U}_i\}$ una base ortonormal de 2-formas autoduales y dado x cualquier vector complejo no isótropo, los vectores $\{x, \mathcal{U}_i(x)\}$ definen cuatro direcciones ortogonales e independientes, y por lo tanto podemos normalizarlos para obtener una base ortonormal. En términos de esos vectores, la métrica se escribe como

$$g = \frac{1}{x^2} \left[x \otimes x - 2 \sum_{i=1}^3 \mathcal{U}_i(x) \otimes \mathcal{U}_i(x) \right]$$

También cada una de las 2-formas $\{\mathcal{U}_i\}$ puede ser escrita relativa a la dirección no isótropa x como

$$\mathcal{U}_i = -\frac{1}{x^2} \left(x \wedge \mathcal{U}_i(x) + i\sqrt{2} \epsilon_{ijk} \mathcal{U}_j(x) \wedge \mathcal{U}_k(x) \right) \quad (3.25)$$

Si x es isótropo (complejo), es claro que los vectores isótropos ortogonales $\{x, \mathcal{U}_i(x)\}$ no pueden ser independientes. Si lo fueran, cualquier otro vector y sería combinación de ellos y por tanto cualquier otro vector tendría cuadrado cero. Como el sistema es ligado, algún vector debe ser combinación de los demás. Si $\mathcal{U}_i(x) = ax + b^j \mathcal{U}_j(x) + b^k \mathcal{U}_k(x)$, para i, j, k diferentes entre sí, contrayendo con \mathcal{U}_i se prueba que x es combinación lineal de los demás. Es decir, se tiene

Lema 25 Para cualquier vector isótropo complejo x , existen escalares b^i de manera que

$$x = \sum b^i \mathcal{U}_i(x)$$

d) En los capítulos que siguen trabajaremos en un espacio-tiempo real pero utilizando el formalismo de Cartan complejo. Entonces cada punto de la variedad tiene un entorno coordinado real. Supongamos que tenemos cuatro funciones diferenciables reales a, b, f, g de manera que las funciones complejas $A = a + ib$ y $F = f + ig$ verifican el sistema $dA \wedge dF = 0$. Desarrollando esta expresión y separando la parte real de la imaginaria, se tiene que

$$\begin{aligned} da \wedge df &= db \wedge dg \\ db \wedge df &= -dg \wedge da \end{aligned}$$

Entonces si a y b son funcionalmente independientes, es decir, $da \wedge db \neq 0$, se tiene que f y g son funciones de a y b y verifican $f_a = g_b$ y $f_b = -g_a$. Por lo tanto F es una función holomorfa de A . Si a y b son funcionalmente dependientes podemos suponer $b \equiv b(a)$, y se tiene que $df \wedge da = 0 = dg \wedge da$, con lo que todas las funciones dependen de una única variable real a . El siguiente lema resume este resultado.

Lema 26 Sean $A = a + ib$ y $F = f + ig$ dos funciones complejas de variable real y tales que $dA \wedge dF = 0$. Entonces se verifica una de las dos condiciones siguientes:

1. F es una función holomorfa de A , o
2. Existe una función real t , de manera que las partes reales e imaginarias de A y F dependen de t .

e) Dada una base ortonormal de 2-formas autoduales $\{\mathcal{U}_i\}$ y una 1-forma arbitraria (en general compleja) ξ , podemos calcular la derivada de Lie de la métrica g en términos de las 1-formas complejas de conexión y de la diferencial exterior de las 1-formas $\{\mathcal{U}_i(\xi)\}$ como sigue:

Lema 27 Sea ξ una 1-forma arbitraria (en general compleja), y denotemos

$$F_i \equiv -d(\mathcal{U}_i(\xi))$$

Entonces, $\frac{1}{2}(\nabla \xi + {}^t \nabla \xi) = \mathcal{U}_1 \times \Omega_1 + \Omega_2 \times \mathcal{U}_2 + i\sqrt{2}\mathcal{U}_1 \times \Omega_3 \times \mathcal{U}_2$
donde $(\Omega_i)_{\alpha\beta} = (F_i)_{\alpha\beta} - \xi_\epsilon \left(\nabla_\alpha (\mathcal{U}_i)^\epsilon{}_\beta - \nabla_\beta (\mathcal{U}_i)^\epsilon{}_\alpha \right)$

f) Un problema que nos aparecerá al integrar las ecuaciones de vacío en algunos casos particulares, será la necesidad de imponer que un cierto tensor escrito en una base compleja, sea real. En ese sentido, consideremos una base real $\{e_\alpha\}$ y su dual $\{\theta^\alpha\}$, y la base de 2-formas autoduales $\{\mathcal{U}_i\}$ asociada. Sea $x = x_\alpha \theta^\alpha$ una 1-forma real. Las condiciones para que el tensor

$$T = (u^0 + iv^0)x \otimes x + \sum_{j=1}^3 (u^j + iv^j) (x \times \mathcal{U}_j) \otimes (x \times \mathcal{U}_j)$$

sea real se escriben como

$$2v^0 x_0^2 + \sum v^j x_j^2 = 0$$

$$2v^0 x_i^2 + v^i x_0^2 = v^j x_k^2 + v^k x_j^2 \quad (i, j, k \text{ diferentes})$$

$$(2v^0 + v^i)x_0 x_i + \epsilon_{ijk}(u^j - u^k)x_j x_k = 0 \quad (i, j, k \text{ diferentes})$$

$$(2v^0 + v^i)x_j x_k - \epsilon_{ijk}(u^j - u^k)x_0 x_i = 0 \quad (i, j, k \text{ diferentes})$$

Estructuras casi-producto 2 + 2

Si resolvemos el sistema anterior para el caso de que x no sea isótropo se obtiene que

Lema 28 *Sea x una 1-forma real no isótropa que tiene componentes x_α en la base ortonormal real $\{\theta^\alpha\}$. El tensor simétrico*

$$T = (u^0 + iv^0)x \otimes x + \sum_{j=1}^3 (u^j + iv^j) (x \times \mathcal{U}_j) \otimes (x \times \mathcal{U}_j)$$

es real si, y sólo si, se verifica una de las condiciones siguientes:

- a) $x_\alpha \neq 0, v^\alpha = 0, \forall \alpha$ y $u^i = u^j \forall i, j$.
- b) $\exists! x_\alpha = 0, v^\alpha = 0, \forall \alpha$ y $u^i = u^j \forall i, j$.
- c) $x_0 = 0 = x_1, v^\alpha = 0 \forall \alpha$ y $u^i = u^j \forall i, j$.
- d) $x_0 = 0 = x_1, x_2^2 = x_3^2, v^0 = 0 = v^1$ y $u^2 + iv^2 = u^3 - iv^3$.
- e) $x_2 = 0 = x_3, v^\alpha = 0 \forall \alpha$ y $u^2 = u^3$.
- f) $\exists! x_\alpha \neq 0$ y $v^\alpha = 0 \forall \alpha$.

Las condiciones c, d) y e) están escritas salvo intercambios entre las componentes de x para simplificar la notación. Notar que en todos los casos salvo en d) todos los escalares tienen que ser reales.

4. Métricas de Tipo I

En este capítulo presentamos algunos resultados sobre los espacios de tipo I. Utilizaremos el formalismo de Cartan complejo, introducido en el capítulo anterior, adaptado a la base principal ortonormal de 2-formas autoduales. La sencillez de las identidades de Bianchi y de sus condiciones de integrabilidad (post-Bianchi) en este formalismo y los resultados sobre estructuras del capítulo anterior, permiten generalizar un resultado que Brans [10] probó para vacío, al caso de divergencia del Weyl cero. En la primera sección proponemos también una clasificación intrínseca de las soluciones de tipo I basada en propiedades diferenciales de las estructuras principales.

El formalismo complejo resulta adecuado para plantear y resolver en la sección 2 el problema de existencia de campos de Killing alineados con alguna de las 2-formas principales del Weyl. Esta condición junto con el hecho de que el Ricci sea nulo, restringe fuertemente las posibles métricas, y en concreto caen dentro de la clase más degenerada en nuestra clasificación. Probamos también en la sección siguiente que la única solución con valores propios del Weyl constantes y Ricci nulo es la solución de Petrov [72], lo que proporciona una caracterización intrínseca de esta solución. En la sección 4, estudiamos la existencia de simetrías para el caso de vacío en la clase más degenerada. Se prueba que todas estas soluciones admiten un G_3 . El tipo Bianchi de este grupo de isometrías queda determinado por el número de direcciones integrables de una tetrada ortogonal construida con el único escalar independiente que existe. Esta propiedad permite refinar la clasificación de estos espacios introduciendo cuatro subclases caracterizadas por el tipo Bianchi del grupo.

Por último, en la sección 5, resolvemos las ecuaciones de vacío en las clases más degeneradas I_{12} y I_{13} . En esta última, obtenemos las soluciones de Kasner [51] y una solución que parece no haber sido considerada en la literatura [52], [55] pero que aparece en el caso de que exista un Killing integrable que no coincide con una dirección principal, igual que ocurre con la solución de Petrov. En la clase I_{12} aparecen la solución de Taub [83] y la equivalente con órbitas temporales, y también un caso paralelo al último de la clase anterior con un Killing en la dirección de una de las bi-

sectrices de un 2-plano principal. Tampoco hemos encontrado referencias de estas dos últimas soluciones. Creemos muy adecuado lo sistemático de este acercamiento y esperamos podemos integrar los casos I_{11} y I_{10} que admiten tipos Bianchi para los que no se conocen soluciones de tipo I [55].

Los resultados de las secciones 3 y 4 forman parte de las comunicaciones [41], [42] presentadas en los encuentros relativistas de Salamanca y Valladolid. Estos resultados constituyen el contenido básico de un artículo en fase de redacción [44].

4.1 Métricas de Tipo I y $\delta W = 0$

a) Trabajaremos con el formalismo de Cartan complejo adaptando la base de 2-formas autoduales a las 2-formas principales del Weyl. Con objeto de descargar la notación de índices y dado que sólo tenemos tres ecuaciones en cada grupo de las ecuaciones de estructura, las escribiremos explícitamente. Para ello denotaremos $\mathcal{A} \equiv \Gamma_1^2$, $\mathcal{B} \equiv \Gamma_1^3$, $\mathcal{C} \equiv \Gamma_2^3$. Con esta notación tenemos que las primeras ecuaciones de estructura son

$$\begin{aligned}\nabla \mathcal{U}_1 &= \mathcal{A} \otimes \mathcal{U}_2 + \mathcal{B} \otimes \mathcal{U}_3 \\ \nabla \mathcal{U}_2 &= -\mathcal{A} \otimes \mathcal{U}_1 + \mathcal{C} \otimes \mathcal{U}_3 \\ \nabla \mathcal{U}_3 &= -\mathcal{B} \otimes \mathcal{U}_1 - \mathcal{C} \otimes \mathcal{U}_2\end{aligned}\tag{4.1}$$

Teniendo en cuenta las relaciones entre las 1-formas de conexión complejas y los vectores λ_i dadas en (3.23) se verifica que

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{i}{\sqrt{2}}[\mathcal{A} \times \mathcal{U}_3 - \mathcal{B} \times \mathcal{U}_2], & \mathcal{C} \times \mathcal{U}_1 &= \frac{i}{\sqrt{2}}(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) \\ \lambda_2 &= \frac{i}{\sqrt{2}}[\mathcal{A} \times \mathcal{U}_3 + \mathcal{C} \times \mathcal{U}_1], & \mathcal{B} \times \mathcal{U}_2 &= \frac{i}{\sqrt{2}}(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) \\ \lambda_3 &= \frac{i}{\sqrt{2}}[\mathcal{C} \times \mathcal{U}_1 - \mathcal{B} \times \mathcal{U}_2], & \mathcal{A} \times \mathcal{U}_3 &= \frac{i}{\sqrt{2}}(-\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)\end{aligned}\tag{4.2}$$

Las segundas ecuaciones de estructura (3.22) para Tipo I en la base principal de 2-formas del tensor de Weyl quedan como

$$\begin{aligned}d\mathcal{A} &= \mathcal{C} \wedge \mathcal{B} + i\sqrt{2} \alpha_3 \mathcal{U}_3 + i\sqrt{2} (\mathcal{U}_3 \times Q + Q \times \mathcal{U}_3) \\ d\mathcal{B} &= \mathcal{A} \wedge \mathcal{C} - i\sqrt{2} \alpha_2 \mathcal{U}_2 - i\sqrt{2} (\mathcal{U}_2 \times Q + Q \times \mathcal{U}_2) \\ d\mathcal{C} &= \mathcal{B} \wedge \mathcal{A} + i\sqrt{2} \alpha_1 \mathcal{U}_1 + i\sqrt{2} (\mathcal{U}_1 \times Q + Q \times \mathcal{U}_1)\end{aligned}\tag{4.3}$$

Y el subsistema de las ecuaciones anteriores que se obtiene contrayendo la primera con \mathcal{U}_3 , la segunda con \mathcal{U}_2 y la tercera con \mathcal{U}_1 se escribe

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \lambda_1 &= \lambda_{11} - \lambda_{22} - \lambda_{33} + 2\lambda_{23} + \alpha_1 - \frac{1}{2}\text{tr}Q \\ \nabla \cdot \lambda_2 &= -\lambda_{11} + \lambda_{22} - \lambda_{33} + 2\lambda_{13} + \alpha_2 - \frac{1}{2}\text{tr}Q \\ \nabla \cdot \lambda_3 &= -\lambda_{11} - \lambda_{22} + \lambda_{33} + 2\lambda_{12} + \alpha_3 - \frac{1}{2}\text{tr}Q\end{aligned}\tag{4.4}$$

Métricas de Tipo I

donde hemos denotado $\lambda_{ij} \equiv (\lambda_i, \lambda_j)$.

b) La ecuación $\delta W = 0$ es equivalente a $\delta \mathcal{W} = 0$ y si tenemos en cuenta la forma canónica del Weyl en tipo I y las relaciones (4.2) entre las 1-formas de conexión y las direcciones λ_i , se prueba que la divergencia del Weyl es cero en tipo I si, y sólo si

$$\begin{aligned} d\alpha_1 &= (\alpha_1 + 2\alpha_2)(\lambda_2 - \lambda_3) - 3\alpha_1\lambda_1 \\ d\alpha_2 &= (2\alpha_1 + \alpha_2)(\lambda_1 - \lambda_3) - 3\alpha_2\lambda_2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Estas ecuaciones son las identidades de Bianchi para los espacios de Tipo I y de divergencia del Weyl cero.

De las ecuaciones anteriores, se tiene que si $\alpha_1 = 0$, entonces $\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_3) = 0$, con lo que o bien $\alpha_2 = 0$ y por tanto caemos en Tipo 0, o bien $\lambda_2 = \lambda_3$, es decir las direcciones principales de \mathcal{U}_1 son geodésicas y sin distorsión con lo que el resultado de Goldberg–Sachs [48] nos asegura que el espacio–tiempo es algebraicamente especial. Así, hemos generalizado a los espacios de tipo I y divergencia del Weyl cero un resultado previo de Brans [10] para espacios tiempos de vacío.

Proposición 24 *No existen espacios–tiempo de Tipo I con divergencia del Weyl nula y con un valor propio cero.*

Las identidades de Bianchi son las condiciones de integrabilidad de las identidades de Ricci. Es sabido que en una tetraedra arbitraria, las condiciones de integrabilidad de las identidades de Bianchi se satisfacen idénticamente. Sin embargo, cuando imponemos que la tetraedra sea la principal las identidades de Bianchi tienen condiciones de integrabilidad no triviales. Tales condiciones han sido consideradas por Brans [11]. Con nuestro formalismo, estas ecuaciones post–Bianchi cuando la divergencia del Weyl es cero son las condiciones de integrabilidad de (4.5) y se escriben

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_3} d\lambda_1 + \frac{1}{\alpha_3 - \alpha_1} d\lambda_2 + \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} d\lambda_3 &= 0 \\ \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_1} d\lambda_2 + \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2} d\lambda_3 + 4(\lambda_1 - \lambda_3) \wedge (\lambda_2 - \lambda_3) &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Un cálculo directo demuestra que las condiciones de integrabilidad de éstas son una identidad. Es decir, para la base principal del Weyl en un espacio–tiempo de tipo I, el sistema formado por las primeras ecuaciones de estructura (4.1), las segundas (4.3), las identidades de Bianchi (4.5) y las post–Bianchi (4.6) es completamente integrable [11], [28].

c) En un trabajo de Edgar [29] se propone una clasificación de los espacios–tiempo de tiempo I que tiene en cuenta el carácter funcionalmente dependiente o no de los valores propios del Weyl. A partir de las identidades de Bianchi recuperamos con formalismo tensorial uno de los resultados de Edgar

Proposición 25 *En un espacio-tiempo de Tipo I y con divergencia del Weyl nula los valores propios del Weyl son funcionalmente dependientes si, y sólo si, se verifica una de las siguientes condiciones:*

1. $\lambda_i \wedge \lambda_j = 0, \forall i, j.$
2. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son linealmente dependientes ($p \lambda_1 + q \lambda_2 + r \lambda_3 = 0$, $p^2 + q^2 + r^2 \neq 0$) y $p(\alpha_2 - \alpha_3)^2 + q(\alpha_1 - \alpha_3)^2 + r(\alpha_1 - \alpha_2)^2 = 0.$

En su artículo [29], Edgar clasifica las soluciones de vacío y de tipo I según la posición relativa de tres vectores definidos a partir de los coeficientes de Newman–Penrose. Un cálculo directo prueba que esos tres vectores son $\lambda_1, \lambda_3 - \lambda_2, \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1)$. Nosotros proponemos una clasificación de los espacios-tiempo de tipo I, atendiendo a la dimensión del subespacio que generan los vectores $\{\lambda_i\}$. Nuestra clasificación, además de ser simétrica en las tres estructuras principales, utiliza tres vectores que tienen una interpretación geométrica clara: cada uno de ellos nos da información sobre el carácter integrable y minimal de las estructuras principales.

Definición 3 *Diremos que un espacio-tiempo de tipo I es de clase I_a si la dimensión del subespacio que generan los vectores $\{\lambda_i\}$ es a ($a = 1, 2, 3$).*

Teniendo en cuenta la proposición 25, para el caso de que la divergencia del Weyl sea cero se deduce el siguiente resultado.

Corolario 3 *Sea g una métrica de tipo I de divergencia del Weyl nula. Entonces, se verifica:*

1. *Si g es de clase I_1 , los valores propios son funcionalmente dependientes.*
2. *Si g es de clase I_2 los valores propios son funcionalmente dependientes si, y sólo si, se verifica la segunda condición de la proposición anterior.*
3. *Si g es de clase I_3 , los valores propios son funcionalmente independientes.*

4.2 Killings con derivada propia del Weyl

a) Si un espacio-tiempo admite un campo de Killing ξ (real), la derivada covariante de la 1-forma métricamente equivalente es una 2-forma y como tal tendrá unas componentes $\{\Omega^i, \bar{\Omega}^i\}$ en cualquier base $\{\mathcal{U}_i, \bar{\mathcal{U}}_i\}$ del espacio de las 2-formas. Es decir

$$\nabla \xi = \sum \Omega^i \mathcal{U}_i + \sum \bar{\Omega}^i \bar{\mathcal{U}}_i \quad (4.7)$$

Supongamos ahora que una de las 2-formas de la base, digamos \mathcal{U}_1 sea invariante por ξ . Como en la sección anterior, denotaremos \mathcal{A}, \mathcal{B} y \mathcal{C} a

Métricas de Tipo I

las 1-formas complejas de la conexión. Si imponemos que $\mathcal{L}_\xi \mathcal{U}_1 = 0$, se tiene

$$0 = \xi \times \nabla \mathcal{U}_1 + (\nabla \xi \times \mathcal{U}_1) - (\nabla \xi \times \mathcal{U}_1)^t$$

y contrayendo la esta ecuación con \mathcal{U}_2 y \mathcal{U}_3 se tiene que

$$\Omega_3 = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\xi, \mathcal{A}), \quad \Omega_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\xi, \mathcal{B})$$

Es decir, que el hecho de que una 2-forma \mathcal{U}_i sea invariante implica que cuatro de las componentes de $\nabla \xi$ (o dos componentes complejas) están localmente determinadas por las propias componentes de ξ . Si otra de las 2-formas es invariante por ξ , la derivada está completamente determinada por las componentes del Killing y por lo tanto la dimensión del álgebra de Lie de los campos de Killing es a lo sumo cuatro (por poder elegir ξ en un punto). Además como la libertad en las componentes de la derivada covariante coincide con la dimensión del grupo de isotropía, en los espacios en los que existe una base invariante el grupo es simplemente transitivo. Si en lugar de una 2-forma regular el campo deja invariante una 2-forma isótropa \mathcal{H} , en cualquier base $\{\mathcal{U}_i\}$ en la que $\mathcal{H} = \mathcal{U}_2 - i\mathcal{U}_3$ se tendría que

$$\Omega_3 = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\mathcal{A} + i\mathcal{B}, \xi), \quad \Omega_1 = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\mathcal{C}, \xi)$$

Con lo que también en este caso cuatro de las seis componentes de la derivada de ξ están determinadas por ξ . Por lo tanto, en los espacios en los que existe una 2-forma autodual, unitaria o isótropa, invariante por los Killings, la dimensión máxima del álgebra que generan es seis. Entonces se recupera un resultado conocido:

Lema 29 *La dimensión máxima del grupo de isometrías en los espacios de tipo I, II y III es cuatro. Además cualquier grupo de isometrías en estos espacios es simplemente transitivo. Los espacios de tipo D y N, admiten a lo sumo un grupo de isometrías de dimensión seis. Por lo tanto, cualquier espacio que admita un G_7 es conformemente plano.*

b) En trabajos recientes han sido considerados espacios en los que alguno de los campos de Killing tiene derivada covariante en la dirección de alguna de las 2-formas principales del Weyl, como ocurre por ejemplo con la métrica de Kerr [60], [32]. Este tipo de condiciones también han sido consideradas en otras soluciones de vacío [32]. Lo que probaremos aquí es que cualquier espacio tiempo de Tipo I y de Ricci nulo que admita un vector de Killing cuya derivada covariante sea principal del Weyl es de tipo I_1 . Como en la sección siguiente probaremos que este tipo de espacios admite como mínimo un G_3 , concluiremos que los espacios tiempo de tipo I que admiten un Killing cuya derivada covariante sea propia del tensor de Weyl admiten como mínimo un G_3 .

Para ello supongamos ξ un Killing en un espacio de tipo I. Como la base principal de 2-formas autoduales tiene que ser invariante, la derivada covariante de la 1-forma ξ está dada por (4.7) donde

$$\Omega_3 = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\xi, \mathcal{A}); \quad \Omega_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\xi, \mathcal{B}); \quad \Omega_1 = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\xi, \mathcal{C})$$

Obtenemos entonces que:

Proposición 26 *La condición necesaria y suficiente para que la derivada covariante de un campo de Killing en un espacio-tiempo de tipo I, tenga como geometría una 2-forma principal del tensor de Weyl es que sea ortogonal a dos 1-formas complejas de conexión asociadas a la base principal del Weyl.*

Obtenemos así resultados similares a los que obtuvieron Fayos y Sopena [33] trabajando en una base isótropa. Si suponemos que el tensor de Ricci es nulo y tenemos en cuenta que también deben ser invariantes las 1-formas de conexión, es decir, $d(\xi, \Gamma_i^j) = -i(\xi)d\Gamma_i^j$ y usando las segundas ecuaciones de estructura (4.3) para sustituir la diferencial de las 1-formas de conexión, resulta

$$\begin{aligned} d\Omega_3 &= -\Omega_2\mathcal{C} - \Omega_1\mathcal{B} - \alpha_3 \xi \times \mathcal{U}_3 \\ d\Omega_2 &= -\Omega_1\mathcal{A} + \Omega_3\mathcal{C} - \alpha_2 \xi \times \mathcal{U}_2 \\ d\Omega_1 &= \Omega_3\mathcal{B} + \Omega_2\mathcal{A} - \alpha_1 \xi \times \mathcal{U}_1 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Luego si ξ es un Killing ortogonal a \mathcal{B} y \mathcal{C} , se tiene que $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$, y las ecuaciones anteriores quedan como

$$\begin{aligned} d\Omega_3 &= -\alpha_3 \xi \times \mathcal{U}_3 \\ \Omega_3\mathcal{C} &= \alpha_2 \xi \times \mathcal{U}_2 \\ \Omega_3\mathcal{B} &= \alpha_1 \xi \times \mathcal{U}_1 \end{aligned} \tag{4.9}$$

y por lo tanto, de cualquiera de las dos últimas podemos despejar ξ y se tiene

$$2\frac{\Omega_3}{\alpha_2} \mathcal{C} \times \mathcal{U}_2 = \xi$$

Entonces, si ξ_1 y ξ_2 son dos campos de Killing ortogonales a las mismas 1-formas de conexión, se tiene $\xi_1 \wedge \xi_2 = 0$. Podemos enunciar con ello el siguiente:

Corolario 4 *Sea g una métrica de tipo I y de Ricci cero. Para cada 2-forma principal, existe a lo sumo un campo de Killing tal que esa 2-forma es la geometría de su derivada covariante.*

Métricas de Tipo I

c) Probaremos, para terminar esta sección que la existencia de Killings alineados está relacionada con la clase a la que pertenece la métrica en la clasificación que hemos propuesto para los espacios de tipo I.

Si de la primera de las ecuaciones (4.9) despejamos ξ , tenemos

$$\xi = -\frac{2}{\alpha_3} d\Omega_3 \times \mathcal{U}_3 \quad (4.10)$$

Si se sustituye esta expresión en las otras dos se llega a

$$C = -i\sqrt{2} \frac{\alpha_2}{\alpha_3} d \ln \Omega_3 \times \mathcal{U}_1, \quad B = i\sqrt{2} \frac{\alpha_1}{\alpha_3} d \ln \Omega_3 \times \mathcal{U}_2 \quad (4.11)$$

Ahora, de las identidades de Bianchi (4.5) obtenemos

$$d\alpha_3 = \frac{2}{\alpha_3} (\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3^2) d \ln \Omega_3$$

es decir,

$$d(\alpha_3)^2 = 2(\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3^2) d \ln \Omega_3 \quad (4.12)$$

Si diferenciamos de nuevo esa expresión y tenemos presente que de (4.12) $d\alpha_3 \wedge d \ln \Omega_3 = 0$ se deduce

$$0 = (2\alpha_2 + \alpha_3) d\alpha_2 \wedge d \ln \Omega_3$$

Como el espacio es de tipo I, $2\alpha_2 + \alpha_3 \neq 0$, y por lo tanto

$$d\alpha_2 \wedge d \ln \Omega_3 = 0 \quad (4.13)$$

Además de (4.12) se tiene que si $a \equiv 2(\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3^2) = 0$, entonces $d\alpha_3 = 0$. Pero si α_3 es constante entonces α_2 también es constante, y si los valores propios son constantes, las identidades de Bianchi (4.5) llevan a que $\lambda_i \wedge \lambda_j = 0$ (veremos que además en este caso existe un G_4), y por tanto el espacio es de clase I_1 .

Supongamos entonces que $a \neq 0$, con lo que de (4.12) y (4.13) se tiene que

$$d\alpha_2 \wedge d\alpha_3 = 0$$

Pero como de (4.11), se deduce también que $\mathcal{U}_1(C)$ y $\mathcal{U}_2(B)$ son colineales, de las identidades de Bianchi (4.5) se obtiene

$$d\alpha_2 \wedge d\alpha_3 = \frac{2}{\alpha_1} (\alpha_1 - \alpha_2) (\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3^2) (\mathcal{B} \times \mathcal{U}_2) \wedge (\mathcal{A} \times \mathcal{U}_3)$$

Por lo tanto también se cumple que

$$(\mathcal{B} \times \mathcal{U}_2) \wedge (\mathcal{A} \times \mathcal{U}_3) = 0$$

y entonces $\lambda_i \wedge \lambda_j = 0$, con lo que el espacio-tiempo es de clase I_1 . Hemos probado así:

Proposición 27 *Si un espacio tiempo de Ricci nulo y de tipo I admite un Killing ortogonal a dos 1-formas complejas de la conexión entonces es de clase I_1 .*

4.3 Soluciones de vacío con valores propios constantes

a) Consideremos una métrica g de tipo I y Ricci nulo. Si los valores propios son constantes, las identidades de Bianchi 4.5 se escriben como

$$\begin{aligned}(\alpha_1 + 2\alpha_2)(\lambda_2 - \lambda_3) - 3\alpha_1\lambda_1 &= 0 \\(2\alpha_1 + \alpha_2)(\lambda_1 - \lambda_3) - 3\alpha_2\lambda_2 &= 0\end{aligned}$$

La solución a estas ecuaciones es

$$\lambda_2 = \frac{(2\alpha_1 + \alpha_2)^2}{(\alpha_1 + 2\alpha_2)^2} \lambda_1, \quad \lambda_3 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{(\alpha_1 + 2\alpha_2)^2} \lambda_1 \quad (4.14)$$

Y por lo tanto los vectores $\{\lambda_i\}$ son dos a dos linealmente dependientes, con lo que tenemos

Lema 30 *Todo espacio-tiempo de tipo I con valores propios del Weyl constantes y divergencia del Weyl cero es de clase I_1 .*

b) Teniendo en cuenta las expresiones (4.2), podemos calcular B y C en términos de A y se tiene

$$B = \Lambda A \times U_1, \quad C = \Omega A \times U_2 \quad (4.15)$$

donde

$$\Lambda = \sqrt{2}i \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2\alpha_1 + \alpha_2}, \quad \Omega = \sqrt{2}i \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1 + 2\alpha_2}$$

Si en las ecuaciones escalares (4.4) hacemos $Q = 0$ y sustituimos λ_2 y λ_3 por las expresiones en términos de λ_1 calculadas en (4.14), se deduce

$$\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 = 0, \quad (\lambda_1, \lambda_1) = \frac{-\alpha_1}{4}, \quad \delta\lambda_1 = 0 \quad (4.16)$$

La primera de las ecuaciones nos dice que el invariante $a = \text{tr}W^2$ es nulo, y que por lo tanto, teniendo en cuenta los resultados de sección 6 del capítulo 2, los vectores de Debever determinan un referencial de tipo P_4 .

Conocido el cuadrado de λ_1 y teniendo en cuenta las relaciones (4.14) y (4.2), podemos calcular el cuadrado de cualquiera de las 1-formas de conexión, y en concreto, para A se verifica

$$A^2 = -\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} = -\alpha_3$$

donde en la última igualdad hemos tenido en cuenta la relación (4.16) entre los valores propios. Por lo tanto A no puede ser isótropo. Si usamos el lema 3.25 para escribir las 2-formas principales del Weyl en términos de

Métricas de Tipo I

\mathcal{A} , las segundas ecuaciones de estructura (4.3) con Ricci cero, se reducen

a

$$\begin{aligned} d\mathcal{A} &= -i\sqrt{2}\mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \times \mathcal{U}_3) \\ d(\mathcal{A} \times \mathcal{U}_1) &= i\sqrt{2}\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_2} (\mathcal{A} \times \mathcal{U}_1) \wedge (\mathcal{A} \times \mathcal{U}_3) \\ d(\mathcal{A} \times \mathcal{U}_2) &= -i\sqrt{2}\frac{\alpha_1}{\alpha_2} (\mathcal{A} \times \mathcal{U}_2) \wedge (\mathcal{A} \times \mathcal{U}_3) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Como los valores propios son constantes, las condiciones de integrabilidad de esas ecuaciones implican que

$$d(\mathcal{A} \times \mathcal{U}_3) = 0$$

Este sistema exterior que verifica la tétrada ortogonal $\{\mathcal{A}, \mathcal{A} \times \mathcal{U}_i\}$ puede integrarse en coordenadas complejas $\{x, y, z, F\}$ y se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= e^{i\sqrt{2}F} dx \\ \mathcal{A} \times \mathcal{U}_1 &= e^{-i\sqrt{2}\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_2} F} dy \\ \mathcal{A} \times \mathcal{U}_2 &= e^{i\sqrt{2}\frac{\alpha_1}{\alpha_2} F} dz \\ \mathcal{A} \times \mathcal{U}_3 &= dF \end{aligned} \quad (4.18)$$

Tenemos una base ortogonal construida con invariantes, y por lo tanto también sus cuadrados son invariantes. Entonces la condición necesaria y suficiente para que un campo ξ sea un campo de Killing es que deje invariante dicha base ortogonal. Si planteamos que $\xi = m\partial_F + u\partial_x + v\partial_y + w\partial_z$ verifique la condición anterior, se tiene que para valores arbitrarios de las constantes k_i ($i = 1, 2, 3, 4$) el campo

$$\xi = k_4\partial_F + (-i\sqrt{2}k_4x + k_1)\partial_x + (-i\sqrt{2}\frac{\alpha_3}{\alpha_2}k_4y + k_2)\partial_y + (-i\sqrt{2}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}k_4z + k_3)\partial_z$$

es un campo de Killing. Existe entonces un G_4 y, por lo tanto la métrica es la solución de Petrov que es la única solución de tipo I con un G_4 [72]. Podemos enunciar entonces el siguiente resultado que proporciona una caracterización intrínseca de esta métrica.

Teorema 6 *La única solución de vacío y de tipo I con valores propios del Weyl constantes es la solución de Petrov.*

Ésta es la única solución de tipo I y vacío que admite un G_4 . Además las cuatro direcciones de Debever definen un referencial simétrico.

Escrita en coordenadas reales, la solución de Petrov es [72], [55]

$$k^2 g = dx^2 + e^{-2x}dy^2 + e^x \left(\cos\sqrt{3}x (dz^2 - dt^2) - 2\sin\sqrt{3}x dzdt \right) \quad (4.19)$$

Los campos de Killing de la solución (4.19) son [55]

$$\partial_t, \partial_z, \partial_y, \partial_x + y\partial_y + \frac{1}{2}(\sqrt{3}t - z)\partial_z - \frac{1}{2}(t + \sqrt{3}z)\partial_t$$

Además los valores propios del Weyl son proporcionales a las tres raíces cúbicas de -1 , es decir, son $k^2 \sqrt[3]{-1}$.

c) Aunque conocemos explícitamente la solución, vamos a adaptar coordenadas reales a las complejas que hemos encontrado, y a recuperar la expresión de la métrica (4.19). Para ello, tengamos en cuenta que hemos encontrado un G_4 complejo que genera un G_4 real, y que contiene un G_3 conmutativo. Como el carácter conmutativo del grupo sí es invariante por transformaciones complejas, el G_3 real conmutativo está generado por los tres Killings complejos que conmutan. En particular, el subespacio ortogonal a este G_3 conmutativo tiene que estar generado por una dirección real. Es decir, $dF = (a + ib)df$ con f una función real y donde a y b dependen de f . Como además $(dF)^2 = -\frac{1}{2}\alpha_3$ que es constante y $(df)^2$ es real, se deduce que $(a + ib)$ es producto de una función real de f por una constante compleja. Redefiniendo f , podemos suponer que $a + ib$ es constante. Teniendo en cuenta las relaciones (4.15), (4.17) y que $\mathcal{A} = dF \times \mathcal{U}_3$, podemos reescribir el sistema (4.17) en términos de la tétrada $\{dF, dF \times \mathcal{U}_i\}$, y se obtiene

$$\begin{aligned} d(dF \times \mathcal{U}_3) &= i\sqrt{2}dF \wedge (dF \times \mathcal{U}_3) \\ d(dF \times \mathcal{U}_2) &= -i\sqrt{2}\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_2} dF \wedge (dF \times \mathcal{U}_2) \\ d(dF \times \mathcal{U}_1) &= i\sqrt{2}\frac{\alpha_1}{\alpha_2} dF \wedge (dF \times \mathcal{U}_1) \end{aligned}$$

Si ahora utilizamos el lema 27 y tenemos en cuenta que ∇df es simétrico, se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla df &= \\ -2i\sqrt{2}(a + ib) &\left((df \times \mathcal{U}_3)^2 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + 2\alpha_2} (df \times \mathcal{U}_1)^2 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\alpha_1 + \alpha_2} (df \times \mathcal{U}_2)^2 \right) \end{aligned}$$

Con lo que si esa expresión debe ser real, utilizando el lema 28, y teniendo en cuenta que $\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 = 0$, se obtiene que la única posibilidad es que df esté en la dirección de alguna de las bisectrices, digamos $\theta^1 + \theta^2$, y que los coeficientes correspondientes a $(df \times \mathcal{U}_1)^2$ y $(df \times \mathcal{U}_2)^2$ sean complejos conjugados y el de $df \times \mathcal{U}_3$ sea real. Esta última condición se cumple si, y sólo si,

$$-2i\sqrt{2}(a + ib) \in \mathbb{R}$$

Entonces $a = 0$ y redefiniendo f tenemos $F = if$. Con esa condición ya se verifica el que los otros coeficientes son conjugados.

$$df = e_1(f)(\theta^1 + \theta^2)$$

Métricas de Tipo I

Además teniendo en cuenta la relación entre df y \mathcal{A} se tiene

$$(df)^2 = \frac{-\alpha_3}{2}$$

con lo que el valor propio α_3 es real negativo.

Con esas condiciones, sustituyendo las expresiones (4.18) en

$$g = \frac{1}{\mathcal{A}^2} \left(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} - 2 \sum (\mathcal{A} \times \mathcal{U}_i) \otimes (\mathcal{A} \times \mathcal{U}_i) \right)$$

y teniendo presente que como $\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 = 0$ se tiene que $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$, se obtiene la expresión de la solución de Petrov.

d) Debemos notar que las 1-formas que tienen la dirección de gradientes de funciones reales son además Γ_1^2 y $\Gamma_1^2 \times \mathcal{U}_3$ donde α_3 es el valor propio real. Además, dado que cada 1-forma compleja de conexión tiene la dirección de un Killing, existen tres Killings complejos ortogonales cada uno a dos de las 1-formas de conexión. Para ver si alguno de ellos es alineado, tenemos que ver cuál de ellos es proporcional a un Killing real.

Como en este caso ya hemos visto la relación entre las coordenadas complejas y las reales, se deduce que hay un único Killing complejo en una dirección real y que es el campo tiene la dirección de Γ_1^2 , y por tanto su derivada está en dirección \mathcal{U}_3 donde α_3 es el valor propio real. Así, podemos enunciar el siguiente resultado.

Proposición 28 *La solución de Petrov admite un único Killing tal que la geometría de su derivada covariante es principal del Weyl. Si denotamos α_3 al valor propio real de esta solución, este campo de Killing tiene la dirección de Γ_1^2 y la geometría de su derivada covariante es \mathcal{U}_3 .*

4.4 Métricas de clase I_1 y Ricci nulo: Simetrías

a) Trabajaremos con el sistema de ecuaciones formado por las primeras ecuaciones de estructura (4.1), las segundas ecuaciones de estructura (4.3) y el subsistema (4.4) con $Q = 0$, y las identidades de Bianchi (4.5). Supongamos que $\lambda_i \wedge \lambda_j = 0$. Las relaciones (4.2) implican que este caso es equivalente a que los vectores $\mathcal{A} \times \mathcal{U}_3$, $\mathcal{B} \times \mathcal{U}_2$ y $\mathcal{C} \times \mathcal{U}_1$ sean colineales. Si vamos a las identidades de Bianchi, se tiene que o los valores propios son ambos constantes o los vectores considerados tienen la dirección del gradiente de uno de ellos. Como el caso de valores propios constantes lo tratamos en la sección anterior, podemos suponer que al menos un valor propio, digamos α_1 no es constante.

Tenemos entonces que existen tres funciones Γ , L y E de manera que

$$2\mathcal{A} \times \mathcal{U}_3 = \Gamma d\alpha_1; \quad 2\mathcal{B} \times \mathcal{U}_2 = Ld\alpha_1; \quad 2\mathcal{C} \times \mathcal{U}_1 = Ed\alpha_1$$

Y por lo tanto, se verifica que

$$\mathcal{A} = \Gamma d\alpha_1 \times \mathcal{U}_3; \quad \mathcal{B} = L d\alpha_1 \times \mathcal{U}_2; \quad \mathcal{C} = E d\alpha_1 \times \mathcal{U}_1 \quad (4.20)$$

que, teniendo en cuenta (4.2), se expresa en términos de los vectores λ_i como

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\Gamma - L) d\alpha_1; \quad \lambda_2 = \frac{i}{2\sqrt{2}}(\Gamma + E) d\alpha_1; \quad \lambda_3 = \frac{i}{2\sqrt{2}}(E - L) d\alpha_1$$

Probaremos en primer lugar que el gradiente de Γ , L y E , tiene también la dirección del gradiente de α_1 . Las identidades de Bianchi (4.5) se escriben

$$\begin{aligned} d\alpha_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma(\alpha_2 - \alpha_1) + L(2\alpha_1 + \alpha_2)) d\alpha_1 \\ d\alpha_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma(\alpha_1 - \alpha_2) - E(\alpha_1 + 2\alpha_2)) d\alpha_1 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Si en las segundas ecuaciones de estructura (4.3) hacemos $Q = 0$ y sustituimos las 1-formas de conexión por su expresión (4.20) en términos del gradiente del valor propio, se obtiene

$$\begin{aligned} d(d\alpha_1 \times \mathcal{U}_1) &= i \frac{L\Gamma}{E} (d\alpha_1 \times \mathcal{U}_3) \wedge (d\alpha_1 \times \mathcal{U}_2) - d \ln E \wedge (d\alpha_1 \times \mathcal{U}_1) - \sqrt{2} \frac{\alpha_1}{E} \mathcal{U}_1 \\ d(d\alpha_1 \times \mathcal{U}_2) &= i \frac{E\Gamma}{L} (d\alpha_1 \times \mathcal{U}_1) \wedge (d\alpha_1 \times \mathcal{U}_3) - d \ln L \wedge (d\alpha_1 \times \mathcal{U}_2) + \sqrt{2} \frac{\alpha_2}{L} \mathcal{U}_2 \\ d(d\alpha_1 \times \mathcal{U}_3) &= i \frac{EL}{\Gamma} (d\alpha_1 \times \mathcal{U}_2) \wedge (d\alpha_1 \times \mathcal{U}_1) - d \ln \Gamma \wedge (d\alpha_1 \times \mathcal{U}_3) - \sqrt{2} \frac{\alpha_3}{\Gamma} \mathcal{U}_3 \end{aligned} \quad (4.22)$$

y las ecuaciones escalares (4.4) son ahora

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} (d(\Gamma - L), d\alpha_1) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\Gamma - L) \Delta \alpha_1 + \Gamma L (d\alpha_1)^2 &= 2\alpha_1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (d(E + \Gamma), d\alpha_1) + \frac{1}{\sqrt{2}} (E + \Gamma) \Delta \alpha_1 - \Gamma E (d\alpha_1)^2 &= 2\alpha_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (d(E - L), d\alpha_1) + \frac{1}{\sqrt{2}} (E - L) \Delta \alpha_1 + EL (d\alpha_1)^2 &= 2\alpha_3 \end{aligned} \quad (4.23)$$

La primera de las identidades de Bianchi nos dice que L es función de α_1 , α_2 y Γ . Si probamos que $d\Gamma \wedge d\alpha_1 = 0$ se habrá probado entonces que también $dL \wedge d\alpha_1 = 0$, y la segunda de las identidades de Bianchi nos dice que entonces $dE \wedge d\alpha_1 = 0$.

Como estamos suponiendo que $\mathcal{A} = -i\Gamma d\alpha_1 \times \mathcal{U}_3$, si calculamos $\nabla \mathcal{A}$ y usamos las primeras ecuaciones de estructura (4.1) para sustituir $\nabla \mathcal{U}_3$ se tiene que

$$\nabla \mathcal{A} = d \ln \Gamma \otimes \mathcal{A} - i\Gamma (\nabla d\alpha_1) \times \mathcal{U}_3 - \frac{\Gamma}{E} \mathcal{B} \otimes \mathcal{C} - \frac{\Gamma}{L} \mathcal{C} \otimes \mathcal{B}$$

Proyectando esta ecuación sobre \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 y teniendo presente que la Hessiana de α_1 es simétrica y las expresiones (4.20) para sustituir \mathcal{B} y \mathcal{C} en función de $d\alpha_1$, se prueba

$$\nabla_\alpha \mathcal{A}_\beta \mathcal{U}_1^{\alpha\beta} = \mathcal{U}_1(d \ln \Gamma, \mathcal{A}), \quad \nabla_\alpha \mathcal{A}_\beta \mathcal{U}_2^{\alpha\beta} = \mathcal{U}_2(d \ln \Gamma, \mathcal{A})$$

Métricas de Tipo I

Pero de las segundas ecuaciones de estructura obtenemos que

$$2\mathcal{U}_1^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\mathcal{A}_\beta \equiv \mathcal{U}_1^{\alpha\beta}(d\mathcal{A})_{\alpha\beta} = 0 = \mathcal{U}_2^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\mathcal{A}_\beta$$

Por lo tanto se ha probado que $(d\Gamma, \mathcal{B}) = 0 = (d\Gamma, \mathcal{C})$. Si repetimos el proceso con \mathcal{B} proyectando su derivada covariante con \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_3 se obtiene que también $(dL, \mathcal{A}) = 0 = (dL, \mathcal{C})$. Pero como L depende de α_1 , α_2 y Γ , hemos probado que Γ (y por lo tanto L y E) verifica

$$(d\Gamma, \mathcal{A}) = (d\Gamma, \mathcal{B}) = (d\Gamma, \mathcal{C}) = 0$$

En el caso de que $d\alpha_1$ no sea isótropo, las condiciones anteriores equivalen a $d\Gamma \wedge d\alpha_1 = 0$. Lo que probaremos ahora es que $d\alpha_1$ no puede ser isótropo. Si lo fuera, teniendo en cuenta el lema 25, $d\alpha_1$ sería combinación de $d\alpha_1 \times \mathcal{U}_i$ y entonces debería cumplirse

$$(d\alpha_1, d\Gamma) = (d\alpha_1, dL) = (d\alpha_1, dE) = (d\alpha_1)^2 = 0$$

Las ecuaciones escalares (4.23) implican que

$$(\Gamma - L)\Delta\alpha_1 = 2\sqrt{2}\alpha_1, \quad (\Gamma + E)\Delta\alpha_1 = 2\sqrt{2}\alpha_2, \quad (E - L)\Delta\alpha_1 = 2\sqrt{2}\alpha_3$$

Entonces se tiene que $E = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}\Gamma$ y $L = -\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\Gamma$, con lo que, usando la primera de las identidades de Bianchi, se concluye

$$\Gamma = \frac{\sqrt{2}\alpha_3}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}, \quad L = \frac{-\sqrt{2}\alpha_2}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}, \quad E = \frac{\sqrt{2}\alpha_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} \quad (4.24)$$

Luego aunque $d\alpha_1$ fuera isótropo las funciones Γ , L y E tienen su gradiente en la dirección del de α_1 . El lema 27 y las ecuaciones (4.21) permiten calcular $(\nabla d\alpha_1, d\alpha_1)$ y se obtiene

$$(\nabla d\alpha_1, d\alpha_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-\alpha_1}{E} + \frac{\alpha_2}{L} + \frac{\alpha_3}{\Gamma} \right) d\alpha_1$$

Ahora, como estamos suponiendo que $d\alpha_1$ es isótropo, se debería cumplir que $(\nabla d\alpha_1, d\alpha_1) = 0$, es decir, $\frac{\alpha_1}{E} = \frac{\alpha_2}{L} + \frac{\alpha_3}{\Gamma}$. Pero sustituyendo las expresiones obtenidas en (4.24) se llega a que $(\alpha_1 - \alpha_2)^2 = 0$ y la métrica sería de tipo D. Por lo tanto se ha probado que $d\alpha_1$ no puede ser isótropo. Podemos enunciar este resultado como

Lema 31 *Sea g una métrica de clase I_1 y de Ricci cero. Entonces, se tiene*

$$d\alpha_1 = 0 \iff (d\alpha_1)^2 = 0$$

donde α_1 es cualquiera de los valores propios del Weyl.

Pero hemos probado algo más. Se ha probado que $(\nabla d\alpha_1, d\alpha_1) \wedge d\alpha_1 = 0$. Como $d(d\alpha_1)^2 = 2(\nabla d\alpha_1, d\alpha_1)$, se tiene también que el cuadrado del gradiente del valor propio tiene gradiente en la dirección del de α_1 . Con ello, de las ecuaciones escalares (4.23) se prueba que la laplaciana de α_1 verifica esta misma condición. Se ha demostrado entonces que tanto las funciones Γ , L y E como los escalares construidos con el cuadrado del gradiente de α_1 y su laplaciana tienen gradiente en la dirección de $d\alpha_1$. Es decir

Lema 32 *En un espacio de Ricci cero y de clase I_1 , los escalares $(d\alpha_1)^2$, $\Delta\alpha_1$, y las funciones Γ , L y E de la expresión (4.20) dependen de α_1 , donde α_1 es uno de los valores propios no constantes del Weyl.*

b) Hasta aquí, tenemos que $d\alpha_1$ no puede ser isótropo, y que por tanto las 1-formas $\{d\alpha_1, d\alpha_1 \times \mathcal{U}_i\}$ forman una base ortogonal. Los cuadrados de los vectores de esta base además dependen sólo de α_1 . Como por el lema 26 todas las funciones dependen de α_1 o de una función real de gradiente colineal con $d\alpha_1$, denotaremos ' a la derivada respecto a α_1 o, si la parte real y la imaginaria fueran dependientes a la derivada respecto a esta función real. Usando las expresiones (3.25) para escribir \mathcal{U}_i en función de $d\alpha_1$, las segundas ecuaciones de estructura quedan explícitamente como

$$\begin{aligned} d(d\alpha_1 \times \mathcal{U}_1) &= m d\alpha_1 \wedge (d\alpha_1 \times \mathcal{U}_1) + n(d\alpha_1 \times \mathcal{U}_2) \wedge (d\alpha_1 \times \mathcal{U}_3) \\ d(d\alpha_1 \times \mathcal{U}_2) &= p d\alpha_1 \wedge (d\alpha_1 \times \mathcal{U}_2) + q(d\alpha_1 \times \mathcal{U}_3) \wedge (d\alpha_1 \times \mathcal{U}_1) \\ d(d\alpha_1 \times \mathcal{U}_3) &= r d\alpha_1 \wedge (d\alpha_1 \times \mathcal{U}_3) + s(d\alpha_1 \times \mathcal{U}_1) \wedge (d\alpha_1 \times \mathcal{U}_2) \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde

$$\begin{aligned} m &= -\frac{E'}{E} - \frac{\sqrt{2}\alpha_1}{E(d\alpha_1)^2}; & n &= i \left(\frac{2\alpha_1 - \Gamma L(d\alpha_1)^2}{E(d\alpha_1)^2} \right) \\ p &= -\frac{L'}{L} + \frac{\sqrt{2}\alpha_2}{L(d\alpha_1)^2}; & q &= -i \left(\frac{2\alpha_2 + \Gamma E(d\alpha_1)^2}{L(d\alpha_1)^2} \right) \\ r &= -\frac{\Gamma'}{\Gamma} - \frac{\sqrt{2}\alpha_3}{\Gamma(d\alpha_1)^2}; & s &= i \left(\frac{2\alpha_3 - E L(d\alpha_1)^2}{\Gamma(d\alpha_1)^2} \right) \end{aligned}$$

Como todas las funciones dependen de α_1 existen tres funciones $F_j(\alpha_1)$, de manera que si consideramos $M_j \equiv F_j d\alpha_1 \times \mathcal{U}_j$, el sistema exterior que verifican es

$$dM_1 = \delta_1 M_3 \wedge M_2; \quad dM_2 = \delta_2 M_3 \wedge M_1; \quad dM_3 = \delta_3 M_2 \wedge M_1$$

donde cada δ_j es uno o cero según que el correspondiente $d\alpha_1 \times \mathcal{U}_j$ fuera o no integrable. Esta condición proporciona además un refinamiento de los espacios tiempo de tipo I que como veremos tiene (en el caso de Ricci

Métricas de Tipo I

nulo que es el que nos ocupa) una interpretación clara en función del tipo Bianchi del grupo de simetrías que admiten estos espacios. En concreto, podemos clasificar los espacios de clase I_1 en cuatro subclases atendiendo a la siguiente definición.

Definición 4 Consideremos g una métrica de tipo I_1 para la que los valores propios del Weyl sean funcionalmente dependientes y tal que existe al menos un valor propio no constante. Diremos que es de clase I_{1N} con $N \in \{0, 1, 2, 3\}$ si el número máximo de vectores integrables en el conjunto $\{d\alpha_1, d\alpha_1 \times \mathcal{U}_i\}$ es N .

Notar que las clases están bien definidas ya que como los valores propios son funcionalmente dependientes, cualquiera de ellos, si no es constante, define el mismo número de direcciones integrables. Para el caso de divergencia del Weyl cero, la condición de dependencia funcional de los valores propios se verifica si la métrica es de tipo I_1 como vimos en el corolario 3. Analizaremos ahora cada una de esas clases con $Ricci = 0$.

Clase I_{10} .

Si ninguno de los campos $d\alpha_1 \times \mathcal{U}_i$ es integrable podemos escoger la las funciones F_j de manera que $\delta_j = 1$. El sistema resultante puede integrarse explícitamente en coordenadas complejas $\{x, y, z\}$ y se obtiene

$$\begin{aligned} M_3 &= dx - ydz \\ M_1 + M_2 &= e^x dz \\ M_1 - M_2 &= e^{-x} [2dy - (y^2 + f(z)) dz] \end{aligned}$$

donde $f(z)$ es una función arbitraria de z . Este resultado puede utilizarse para probar que existen simetrías en estos espacios. Para ello, basta tener en cuenta que si un campo ξ deja invariante los vectores y los productos y cuadrados de los vectores de una base, entonces ξ es un campo de Killing. Además, cualquier Killing está en el subespacio ortogonal al generado por los gradientes de los invariantes.

Así, las condiciones necesarias y suficientes para que $\xi = u\partial_x + v\partial_y + w\partial_z$ sea un campo de Killing son

$$d(\xi, M_j) = -\xi \times dM_j$$

La solución a este sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales es

$$u(z) = -w'(z); \quad v(z, y) = -w''(z) + yw'(z), \quad w(z)$$

donde $w(z)$ es solución de la ecuación diferencial lineal

$$2w'''(z) + 2w'(z)f(z) + w(z)f'(z) = 0$$

Esta ecuación admite un sistema fundamental de soluciones $\{w_1, w_2, w_3\}$. Cada una de ellas proporciona un Killing. El carácter independiente de estas soluciones garantiza además la independencia de los tres Killings encontrados, con lo que tenemos garantizada la existencia de un G_3 . Se puede probar además que el conmutador de cada dos de las soluciones tiene la dirección de la tercera, y por lo tanto sólo puede ser de tipo Bianchi real VIII o IX [72]. Es decir,

Proposición 29 *Toda solución de vacío y de clase I_{10} admite un G_3 de tipo Bianchi VIII o IX.*

Hemos probado en la sección anterior que una condición necesaria para que un espacio de tipo I admita un Killing tal que la geometría de su derivada covariante sea principal del Weyl es que exista algún Killing ortogonal a dos de las 1-formas complejas de conexión. Como, en este caso, cada una de ellas es proporcional a una de las M_i , es necesario que sea ortogonal a dos de esas 1-formas. Como todos los campos de Killing son $u\partial_x + v\partial_y + w\partial_z$ donde u, v y w están dados arriba, un cálculo directo prueba

$$(\xi, M_3) = u - yw$$

$$(\xi, M_1) = e^x w + e^{-x}(2v - (y^2 + f(z))w)$$

$$(\xi, M_2) = e^x w - e^{-x}(2v - (y^2 + f(z))w)$$

Teniendo en cuenta las expresiones para u, v y w , es claro que si un Killing es ortogonal a M_3 debe ser $u = 0 = w$, con lo que imponiendo que sea ortogonal a cualquiera de las otras dos, se llega a que $v = 0$. La única posibilidad es entonces que el Killing sea ortogonal a M_1 y M_2 , pero usando que e^x y e^{-x} son linealmente independientes y que ninguna de las funciones u, v o w dependen de x , se llega a que $w = 0$ y por lo tanto a $w = v = u = 0$. Por lo tanto se ha demostrado

Proposición 30 *En las soluciones de vacío y de clase I_{10} no existe ningún campo de Killing alineado con una 2-forma principal del Weyl.*

Clase I_{11}

Supongamos ahora que uno de los vectores, digamos M_2 es integrable, es decir, que $\delta_2 = 0$. Como antes, podemos elegir F_j de manera que el sistema exterior que verifica la tríada ortogonal $\{M_j\}$ es

$$dM_1 = M_3 \wedge M_2, \quad dM_2 = 0, \quad dM_3 = M_1 \wedge M_2$$

Entonces, existen coordenadas complejas $\{x, y, z\}$ de manera que

$$M_1 + M_3 = e^{-z} dx, \quad M_1 - M_3 = e^z dy, \quad M_2 = dz$$

Métricas de Tipo I

Como antes, dado que la base la hemos construido con invariantes del Riemann, la condición necesaria y suficiente para que ξ sea un campo de Killing es que esté en el subespacio ortogonal a $d\alpha_1$, y que deje invariantes a las 1-formas $d\alpha_1 \times \mathcal{U}_i$. En las coordenadas usadas para integrar las ecuaciones de estructura, se tiene que para valores arbitrarios de las constantes K_1 , K_2 y K_3 , los campos

$$\xi = (K_1 + K_3x)\partial_x + (K_2 - K_3y)\partial_y + K_3\partial_z$$

son de Killing. Tenemos entonces un G_3 , y un cálculo directo de los conmutadores prueba que el tipo Bianchi es *VI* complejo, que corresponde a los tipos Bianchi *VI* o *VII* reales [72].

Proposición 31 *Toda solución de vacío y de clase I_{11} admite un G_3 de tipo Bianchi VI o VII.*

Como en el caso anterior, si buscamos algún Killing alineado con alguna 2-forma principal del Weyl, podemos empezar viendo si hay algún Killing complejo ortogonal a dos de las 1-formas de conexión. A partir de la expresión general de los campos de Killing en este caso, se deduce

$$(\xi, M_2) = K_3$$

$$(\xi, M_1) = (K_1 + K_3x)e^{-z} + (K_2 - K_3y)e^z$$

$$(\xi, M_3) = (K_1 + K_3x)e^{-z} - (K_2 - K_3y)e^z$$

Luego un Killing es ortogonal a M_2 si, y sólo si, $K_3 = 0$. Pero entonces, para que sea ortogonal a cualquiera de los otros dos debe ser $K_1 = 0 = K_2$. Entonces no puede ser ξ ortogonal a M_2 con lo que debe ser ortogonal a M_1 y M_3 . Pero usando que e^z y e^{-z} son independientes, tendría que cumplirse $K_1 = K_2 = K_3 = 0$. Con lo que el resultado es el mismo que en el caso anterior y no existen Killings con derivada covariante principal del Weyl.

Proposición 32 *En las soluciones de vacío y de clase I_{11} no existe ningún campo de Killing alineado con una 2-forma principal del Weyl.*

Clase I_{12}

Si dos de las 1-formas, digamos M_1 y M_2 son integrables, encontramos coordenadas complejas de manera que

$$M_1 = dx, \quad M_2 = dy, \quad M_3 = -xdy + dz$$

Luego $\xi = u\partial_x + v\partial_y + w\partial_z$ es Killing si, y sólo si, para valores arbitrarios de las constantes K_i se verifica

$$\xi = K_1 \partial_x + K_2 \partial_y + (K_1 y + K_3) \partial_z$$

Por lo tanto se ha probado que estos espacios admiten un G_3 de tipo Bianchi II.

Proposición 33 *Toda solución de vacío y de clase I_{12} admite un G_3 de tipo Bianchi II.*

Además el Killing ∂_z es el único ortogonal a dos de las 1-formas complejas de la conexión, y por lo tanto puede ser alineado con alguna 2-forma principal del Weyl. Para que lo fuera, habría que probar que la parte real y la parte imaginaria de ese campo son colineales y definen un campo de Killing real alineado. En la sección siguiente integraremos las ecuaciones de vacío y estudiaremos si es o no alineado este campo de Killing.

Clase I_{13}

Si todas las 1-formas del conjunto $\{M_j\}$ son integrables, se tiene que

$$M_j = dx_j$$

y por lo tanto tenemos un G_3 conmutativo (Bianchi I). Todos los campos M_j están en la dirección de Killings complejos que cumplen la condición necesaria de ser ortogonales a dos de las 1-formas complejas de la conexión. Igual que en el caso precedente, cuando integremos las ecuaciones de vacío para este caso, comprobaremos si estos campos definen o no campos de Killing alineados.

Proposición 34 *Toda métrica de vacío y de clase I_{13} admite un G_3 conmutativo.*

c) Hemos probado entonces que todos los espacios de tipo I_1 con algún valor propio no constante admiten y sólo admiten un G_3 (como hay al menos un escalar invariante, α_1 , las órbitas son ortogonales a $d\alpha_1$ y por lo tanto no puede haber un G_4) y que el tipo Bianchi de este grupo depende del número de 1-formas integrables que hay en el sistema $\{M_j\}$. Podemos enunciar entonces el siguiente resultado.

Teorema 7 *Todo solución de vacío y de clase I_1 admite como mínimo un G_3 , y admite un G_4 y por lo tanto es la solución de Petrov si, y sólo si, los valores propios son constantes. El tipo Bianchi del G_3 está determinado por el número de vectores integrables que hay en el conjunto $\{d\alpha_1 \times \mathcal{U}_i\}$.*

Si ahora recordamos que en la sección anterior probamos que un espacio de tipo I y de Ricci nulo que admite un Killing alineado con una 2-forma principal del Weyl es de clase I_1 , se ha demostrado

Corolario 5 Si un espacio tiempo de Tipo I y de Ricci nulo admite un Killing tal que la geometría de su derivada covariante es una 2-forma principal del Weyl, entonces admite al menos un G_3 de tipo Bianchi I o II. Además existe un G_4 si, y sólo si, los valores propios del Weyl son constantes.



4.5 Soluciones de vacío de clase I_1

a) Como hemos visto que existe un G_3 sólo tenemos un invariante y por lo tanto todos los escalares invariantes dependen de éste. Denotaremos τ a la función real de la que dependen todos los escalares, y denotaremos F' a la derivada respecto a esta función real. Entonces, se tiene que $d\alpha_j = \alpha'_j d\tau$. La condición de que todos los vectores λ_j sean colineales y por lo tanto tengan la dirección del gradiente de los valores propios del Weyl equivale a que existan tres funciones $F(\tau)$, $G(\tau)$ y $H(\tau)$ de manera que

$$A = -iF d\tau \times U_3, \quad B = -iG d\tau \times U_2, \quad C = -iH d\tau \times U_1$$

Si en las segundas ecuaciones de estructura (4.3) sustituimos las 1-formas de conexión por esta expresión en términos de $d\tau$ y escribimos las 2-formas U_i relativas a esta misma dirección usando las expresiones (3.25), se obtiene

$$\begin{aligned} d(d\tau \times U_1) &= m d\tau \wedge (d\tau \times U_1) + n(d\tau \times U_2) \wedge (d\tau \times U_3) \\ d(d\tau \times U_2) &= p d\tau \wedge (d\tau \times U_2) + q(d\tau \times U_3) \wedge (d\tau \times U_1) \\ d(d\tau \times U_3) &= r d\tau \wedge (d\tau \times U_3) + s(d\tau \times U_1) \wedge (d\tau \times U_2) \end{aligned} \quad (4.26)$$

donde

$$\begin{aligned} m &= -\frac{H'}{H} - \frac{\sqrt{2}\alpha_1}{H(d\tau)^2} & n &= i \left(\frac{2\alpha_1 - FG(d\tau)^2}{H(d\tau)^2} \right) \\ p &= -\frac{G'}{G} + \frac{\sqrt{2}\alpha_2}{G(d\tau)^2} & q &= -i \left(\frac{2\alpha_2 + FH(d\tau)^2}{G(d\tau)^2} \right) \\ r &= -\frac{F'}{F} - \frac{\sqrt{2}\alpha_3}{F(d\tau)^2} & s &= i \left(\frac{2\alpha_3 - HG(d\tau)^2}{F(d\tau)^2} \right) \end{aligned}$$

Si expresamos además las 1-formas λ_i en función de $d\tau$ teniendo en cuenta las relaciones (4.2), las ecuaciones escalares (4.4) se escriben

$$\begin{aligned} [(F - G)' + \sqrt{2}FG] (d\tau)^2 + (F - G)\Delta\tau &= 2\sqrt{2}\alpha_1 \\ [(F + H)' - \sqrt{2}FH] (d\tau)^2 + (F + H)\Delta\tau &= 2\sqrt{2}\alpha_2 \\ [(H - G)' + \sqrt{2}HG] (d\tau)^2 + (H - G)\Delta\tau &= 2\sqrt{2}\alpha_3 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Por último, las identidades de Bianchi (4.5) se escriben en este caso

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\alpha'_1 &= (\alpha_2 - \alpha_1)F + (2\alpha_1 + \alpha_2)G \\ \sqrt{2}\alpha'_2 &= (\alpha_1 - \alpha_2)F - (\alpha_1 + 2\alpha_2)H\end{aligned}\tag{4.28}$$

b) Integraremos las ecuaciones de vacío en las clases I_{13} y I_{12} . En la integración, aparecerán coordenadas complejas y tendremos que localizar coordenadas reales. Para ello, tengamos en cuenta que como τ es una función real, tanto el cuadrado de su gradiente como su Hessiana tienen que ser reales. Usando las segundas ecuaciones de estructura (4.26) y el lema 27, y teniendo en cuenta que $\nabla d\tau$ es simétrica, se tiene

$$\begin{aligned}\nabla d\tau &= \frac{1}{2}(m + p + \frac{1}{\sqrt{2}}(G - H) - \frac{1}{\sqrt{2}}s) d\tau \otimes d\tau + \\ &+ (r - m - \frac{1}{\sqrt{2}}(F + H) - \frac{1}{\sqrt{2}}q) (d\tau \times \mathcal{U}_1) \otimes (d\tau \times \mathcal{U}_1) + \\ &+ (r - p + \frac{1}{\sqrt{2}}(G - F) - \frac{1}{\sqrt{2}}n) (d\tau \times \mathcal{U}_2) \otimes (d\tau \times \mathcal{U}_2) + \\ &+ (\frac{1}{\sqrt{2}}(s - q - n) - \sqrt{2}F) (d\tau \times \mathcal{U}_3) \otimes (d\tau \times \mathcal{U}_3)\end{aligned}\tag{4.29}$$

Además sabemos que tanto el cuadrado del gradiente de τ como su laplaciana son escalares que dependen de la propia τ . Entonces, si consideramos una función $u(\tau)$ se tiene que

$$\Delta u = u''(d\tau)^2 + u' \Delta \tau$$

y por lo tanto si imponemos que $u(\tau)$ verifique

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{\Delta \tau}{(d\tau)^2}$$

se tiene $\Delta u = 0$. Podemos por lo tanto elegir τ de forma que sea de laplaciana cero. Notar además que esta función está entonces definida salvo una transformación lineal. Para esa función τ , las ecuaciones escalares (4.27) se reducen a

$$\begin{aligned}[(F - G)' + \sqrt{2}FG] (d\tau)^2 &= 2\sqrt{2}\alpha_1 \\ [(F + H)' - \sqrt{2}FH] (d\tau)^2 &= 2\sqrt{2}\alpha_2 \\ [(H - G)' + \sqrt{2}HG] (d\tau)^2 &= 2\sqrt{2}\alpha_3\end{aligned}\tag{4.30}$$

Integraremos ahora las ecuaciones anteriores en los casos I_{13} y I_{12} . El procedimiento para calcular la solución de estas ecuaciones es el siguiente:

i) Utilizaremos las condiciones sobre la integrabilidad de las 1-formas e integraremos las ecuaciones escalares (4.30) (y eventualmente las identidades de Bianchi (4.28)) para encontrar las funciones F , G , H , $(d\tau)^2$ y los valores propios.

Métricas de Tipo I

ii) Calcularemos las funciones m , n , etc... que aparecen en las segundas ecuaciones de estructura (4.26). Conocidas estas funciones de τ , podemos integrar el sistema exterior (4.26) en coordenadas complejas.

iii) Calcularemos $\nabla d\tau$ a partir de (4.29) y utilizaremos el lema 28 para imponer que esa expresión sea real. Esto nos dará la dirección $d\tau$ y nos permitirá adaptar a las 1-formas $\{d\tau \times \mathcal{U}_i\}$ coordenadas reales.

4.5.1 Soluciones de clase I_{13}

Este caso equivale a que $n = q = s = 0$ en las ecuaciones (4.26). Teniendo presente la definición de n y q , resulta inmediato integrar las ecuaciones escalares (4.30) y las identidades de Bianchi (4.28) para llegar a

$$\alpha_1 = be^{2a\tau}, \quad \alpha_2 = k\alpha_1, \quad (d\tau)^2 = \frac{b\beta^2 e^{2a\tau}}{a^2 k(k+1)}$$

$$F = \frac{\sqrt{2}Ka}{\beta}, \quad G = \frac{\sqrt{2}a(k+1)}{\beta}, \quad H = -\frac{\sqrt{2}k(k+1)a}{\beta}$$

donde hemos denotado $\beta = 1 + k + k^2$. Las segundas ecuaciones de estructura (4.26) se escriben entonces como

$$\begin{aligned} d(d\tau \times \mathcal{U}_1) &= \frac{a}{\beta} d\tau \wedge (d\tau \times \mathcal{U}_1) \\ d(d\tau \times \mathcal{U}_2) &= \frac{k^2 a}{\beta} d\tau \wedge (d\tau \times \mathcal{U}_2) \\ d(d\tau \times \mathcal{U}_3) &= \frac{(1+k)^2 a}{\beta} d\tau \wedge (d\tau \times \mathcal{U}_3) \end{aligned}$$

La integración de estas últimas ecuaciones es inmediata y resulta que existen tres funciones $\{x_1, x_2, x_3\}$ tales que

$$d\tau \times \mathcal{U}_1 = e^{\frac{a}{\beta}\tau} dx_1, \quad d\tau \times \mathcal{U}_2 = e^{\frac{ak^2}{\beta}\tau} dx_2, \quad d\tau \times \mathcal{U}_3 = e^{\frac{a(1+k)^2}{\beta}\tau} dx_3 \quad (4.31)$$

Como $\{d\tau, d\tau \times \mathcal{U}_i\}$ es una base ortogonal, para la métrica g tenemos la expresión

$$g = \frac{1}{(d\tau)^2} \left(d\tau \otimes d\tau - 2 \sum_{j=1}^3 (d\tau \times \mathcal{U}_j) \otimes (d\tau \times \mathcal{U}_j) \right) \quad (4.32)$$

Si ahora sustituimos las expresiones de esas 1-formas por las expresiones (4.31), obtenemos una expresión para g en coordenadas complejas. Pero sabemos que τ es real. Luego una condición que debe cumplirse es que $\nabla d\tau$ sea real. Lo que probaremos es que, en este caso, esta condición nos permite adaptar coordenadas reales y calcular todas las soluciones

reales del sistema anterior. De (4.29), para la Hessiana de τ se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} \nabla d\tau &= ad\tau^2 + \\ &+ \frac{2a}{\beta} \left[k(k+1)(d\tau \times \mathcal{U}_1)^2 + (1+k)(d\tau \times \mathcal{U}_2)^2 - k(d\tau \times \mathcal{U}_3)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.33)$$

Si utilizamos el lema 28 y tenemos en cuenta que $d\tau$ no es isótropo, las únicas posibilidades para que la Hessiana de τ sea real son que $d\tau$ tenga la dirección de alguna de las direcciones principales y todos los coeficientes de la expresión de la Hessiana sean reales, o que tenga la dirección de una de las bisectrices y los coeficientes correspondientes sean complejos conjugados y los otros reales. Analizaremos por separado cada caso. Teniendo en cuenta que $d\alpha_1 \wedge d\tau = 0$, las condiciones que imponamos a la dirección $d\tau$ pueden reescribirse en términos del valor propio del Weyl.

$d\alpha_1$ es principal

Todos los coeficientes de la Hessiana de τ (4.33) deben ser reales y por lo tanto a y k deben ser reales. Debemos notar que si $d\tau$ es principal, también lo son todos los vectores $d\tau \times \mathcal{U}_i$, pero el que sean reales o imaginarios puros depende de que τ tenga gradiente espacial o temporal. Este hecho es el que nos dirá si las coordenadas adaptadas a esas direcciones son o no reales, y por lo tanto hay que analizar por separado cada caso.

• Caso $d\tau \wedge \theta^0 = 0$.

Aquí tenemos que $d\tau = e_0(\tau)\theta^0$. Entonces $d\tau \times \mathcal{U}_i = \frac{1}{\sqrt{2}}e_0(\tau)\theta^i$, y por lo tanto los gradientes de todas las funciones x_i en (4.31) son reales, con lo que tenemos un sistema de coordenadas reales adaptado a la tetrada principal del Weyl. La métrica (4.32) obtenida, es entonces

$$g = \frac{-a^2 k(k+1)}{b\beta^2} e^{-2a\tau} \left[-d\tau^2 + e^{2\frac{a}{\beta}\tau} dx_1^2 + e^{2\frac{ak^2}{\beta}\tau} dx_2^2 + e^{2\frac{a(1+k)^2}{\beta}\tau} dx_3^2 \right]$$

donde hemos tenido en cuenta que $d\tau$ es temporal y que por lo tanto la constante $\frac{-a^2 k(k+1)}{b\beta^2}$ debe ser positiva y hemos redefinido las x_j para absorber el factor 2 que aparece en la expresión (4.32). Si ahora tenemos en cuenta que τ está dada salvo el cambio $\tau \rightsquigarrow u\tau + v$ y que podemos cambiar las coordenadas $x_i \rightsquigarrow wx_i$, podemos reabsorber la homotecia y reescribir esta métrica como

$$g = -e^{2\tau} d\tau^2 + e^{2(\frac{1}{\beta}-1)\tau} dx_1^2 + e^{2(\frac{k^2}{\beta}-1)\tau} dx_2^2 + e^{2(\frac{(1+k)^2}{\beta}-1)\tau} dx_3^2 \quad (4.34)$$

Métricas de Tipo I

donde $\beta = 1 + k + k^2$. El cambio de coordenadas $e^{-\tau} = t$ nos lleva a la expresión conocida de la métrica de Kasner [51] ,[55]. La diferencia entre aquellas coordenadas y las nuestras es que mientras t es el tiempo propio del observador e_0 , nuestra coordenada τ es armónica.

Los campos de Killing reales de esta métrica son

$$K_1 \partial_{x_1} + K_2 \partial_{x_2} + K_3 \partial_{x_3}$$

con lo que esta solución admite un G_3 de tipo I con órbitas espaciales. Si recordamos que las 1-formas complejas de conexión tienen la dirección de $d\tau \times \mathcal{U}_i$, cada uno de los campos ∂_{x_i} es ortogonal a dos 1-formas complejas de conexión y por lo tanto esos tres Killings tienen derivada covariante principal del Weyl. Tenemos entonces una representación del grupo conmutativo privilegiada que es la que tiene los tres campos con derivada principal del Weyl o, también, porque son los campos en las tres direcciones principales del Weyl.

• Caso $d\tau \wedge \theta^1 = 0$.

Ahora se tiene que $d\tau = e_1(\tau) \theta^1$, con lo que $(d\tau)^2 = \frac{b\beta^2 e^{2a\tau}}{a^2 k(k+1)} > 0$.

Para obtener coordenadas reales en la expresión (4.31) debemos tener en cuenta que en este caso

$$\begin{aligned} d\tau \times \mathcal{U}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} e_1(\tau) \theta^0 \\ d\tau \times \mathcal{U}_2 &= -\frac{i}{\sqrt{2}} e_1(\tau) \theta^3 \\ d\tau \times \mathcal{U}_3 &= \frac{i}{\sqrt{2}} e_1(\tau) \theta^2 \end{aligned}$$

con lo que ahora las coordenadas asociadas a las dos últimas 1-formas son imaginarias puras, $x_a = iy_a$ ($a = 2, 3$) con y_a funciones reales, y por lo tanto

$$d\tau \times \mathcal{U}_1 = e^{\frac{a}{\beta}\tau} dx_1, \quad d\tau \times \mathcal{U}_2 = i e^{\frac{ak^2}{\beta}\tau} dy_2, \quad d\tau \times \mathcal{U}_3 = i e^{\frac{a(1+k)^2}{\beta}\tau} dy_3$$

Y para g obtenemos una expresión análoga a la del caso anterior pero donde ha cambiado el carácter causal de $d\tau$ y de $d\tau \times \mathcal{U}_1$, es decir

$$g = \frac{a^2 k(k+1)}{b\beta^2} e^{-2a\tau} \left[d\tau^2 - e^{2\frac{a}{\beta}\tau} dx_1^2 + e^{2\frac{ak^2}{\beta}\tau} dy_2^2 + e^{2\frac{a(1+k)^2}{\beta}\tau} dy_3^2 \right]$$

El mismo cambio de coordenadas que en el caso anterior nos lleva a la expresión equivalente para g

$$g = e^{2\tau} d\tau^2 - e^{2(\frac{1}{\beta}-1)\tau} dx_1^2 + e^{2(\frac{k^2}{\beta}-1)\tau} dy_2^2 + e^{2(\frac{(1+k)^2}{\beta}-1)\tau} dy_3^2 \quad (4.35)$$

donde $\beta = 1 + k + k^2$, que es la métrica estática de Kasner [51]. Entonces queda además claro que el cambio de coordenadas complejo [55] que pasa de las métricas estáticas de Kasner a las soluciones de Kasner (4.34) en la que los campos de Killing son todos espaciales, tiene la interpretación de que el gradiente del valor propio del Weyl ha pasado de ser espacial a ser temporal.

Esta solución tiene, como la anterior tres Killings con derivada principal del Weyl que son ∂_{x_1} , ∂_{y_2} y ∂_{y_3} , y, por lo tanto, admite un G_3 de tipo I con órbitas temporales.

Proposición 35 *Las únicas soluciones de clase I_{13} en las que el gradiente de los valores propios del Weyl tiene la dirección de uno de los vectores principales del Weyl son las métricas de Kasner (4.34), (4.35). Además, las tres 2-formas principales del Weyl son las geometrías de tres campos de Killing.*

$d\alpha_1$ no es principal

En este caso $d\tau$ está en la dirección $\theta^2 + \theta^3$ de una de las bisectrices de un 2-plano principal espacial del Weyl. Para que la Hessiana de τ (4.33) sea real, usando el lema 28, debe cumplirse que los coeficientes de esta Hessiana en $d\tau^2$ y en $(d\tau \times \mathcal{U}_1)^2$ sean reales y los coeficientes en $(d\tau \times \mathcal{U}_2)^2$ y $(d\tau \times \mathcal{U}_3)^2$ sean complejos conjugados. En términos de los parámetros que hemos calculado antes, dichas condiciones se cumplen si, y sólo si

$$a \in \mathbb{R}, \quad \frac{2a}{\beta}k(k+1) \in \mathbb{R}, \quad \frac{2a}{\beta}(1+k) = -\text{Conj}\left(\frac{2a}{\beta}k\right)$$

donde hemos denotado $\text{Conj}(\alpha)$ al complejo conjugado de α . Teniendo en cuenta que $\beta = 1 + k + k^2$, un cálculo directo prueba que la solución a las ecuaciones anteriores es

$$a \in \mathbb{R}, \quad k = -\frac{1}{2} + ip$$

donde p es diferente de cero. Las expresiones (4.31) nos proporcionan coordenadas complejas adaptadas a la base ortogonal construida con $d\tau$. Como además sabemos que el gradiente de τ está en la dirección $\theta^2 + \theta^3$, tenemos

$$\begin{aligned} d\tau &= e_2(\tau)(\theta^2 + \theta^3) \\ d\tau \times \mathcal{U}_1 &= \frac{i}{\sqrt{2}}e_2(\tau)(\theta^3 - \theta^2) \\ d\tau \times \mathcal{U}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}e_2(\tau)(\theta^0 + i\theta^1) \\ d\tau \times \mathcal{U}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}e_2(\tau)(\theta^0 - i\theta^1) \end{aligned}$$

Luego la coordenada x_1 debe ser imaginaria pura $x_1 = ix$, y dado que $(k+1) = -\bar{k}$, x_2 y x_3 son complejas conjugadas, $x_2 = y + iz$. Tenemos

Métricas de Tipo I

por tanto un sistema de coordenads real $\{\tau, x, y, z\}$ en el que se cumple que

$$\begin{aligned} d\tau \times \mathcal{U}_1 &= i e^{\frac{a}{\beta}\tau} dx \\ d\tau \times \mathcal{U}_2 &= e^{\frac{ak^2}{\beta}\tau} d(y + iz) \\ d\tau \times \mathcal{U}_3 &= e^{\frac{a(1+k)^2}{\beta}\tau} d(y - iz) \end{aligned}$$

Por lo tanto la métrica se escribe como

$$g = \frac{1}{(d\tau)^2} \left[d\tau^2 + 2e^{\frac{2a}{\beta}\tau} dx^2 - 4\text{Re} \left(e^{\frac{2ak^2}{\beta}\tau} (dy + idz)^2 \right) \right]$$

Si desarrollamos esta expresión sustituyendo la expresión para $(d\tau)^2$ calculada al principio de la sección se llega a

$$\begin{aligned} \frac{b\beta^2}{a^2k(1+k)} g &= e^{-2a\tau} d\tau^2 + 2e^{2a\tau(\frac{1-\beta}{\beta})} dx^2 - \\ &- 4e^{2a\tau\frac{-2}{3-4p^2}} \left[\cos(2a\frac{p}{\beta}\tau)(dy^2 - dz^2) + 2\text{sen}(2a\tau\frac{p}{\beta})dydz \right] \end{aligned}$$

Recordando que tenemos la libertad de elegir τ salvo una transformación lineal y redefiniendo las coordenadas $\{x, y, z\}$, podemos escribir la métrica anterior como

$$\begin{aligned} g &= e^{-\tau} d\tau^2 + e^{\frac{1+4p^2}{3-4p^2}\tau} dx^2 + \\ &+ e^{\frac{-2}{3-4p^2}\tau} \left[\cos\left(\frac{4p}{3-4p^2}\tau\right)[dz^2 - dy^2] - 2\text{sen}\left(\frac{4p}{3-4p^2}\tau\right)dydz \right] \end{aligned} \quad (4.36)$$

Los campos de Killing reales de esta métrica son de la forma

$$\xi = K_1\partial_x + K_2\partial_y + K_3\partial_z$$

y como las 1-formas de conexión complejas tienen las direcciones $d\tau \times \mathcal{U}_i$, se tiene

$$(\xi, C) = 0 \iff K_1 = 0$$

$$(\xi, B) = 0 \iff K_2 + iK_3 = 0 \iff K_2 = 0 = K_3$$

$$(\xi, A) = 0 \iff K_2 - iK_3 = 0 \iff K_2 = 0 = K_3$$

Con lo que el único Killing que es ortogonal a dos de las 1-formas de conexión es ∂_x , y que además es el que tiene la dirección de la bisectriz del 2-plano principal ortogonal a la que define el invariante. De las tres 2-formas principales del Weyl, la que está en la dirección de la derivada del Killing es la U_i que verifica que el invariante tiene proyección nula al 2-plano que define, es decir $U_i(d\alpha_1) = 0$. Se tiene entonces,

Proposición 36 *La única solución de las ecuaciones de vacío en la clase I_{13} en la que la dirección del gradiente de los valores propios del Weyl no coincide con ninguna dirección principal del Weyl es la métrica (4.36). Además existe una única 2-forma principal U_i tal que $U_i(d\alpha_1) = 0$. Esta 2-forma principal es la única que coincide con la geometría de la derivada de un campo de Killing.*

4.5.2 Soluciones de clase I_{12}

Supongamos que $d\tau \times \mathcal{U}_2$ y $d\tau \times \mathcal{U}_3$ son integrables. En las segundas ecuaciones de estructura (4.26) esto equivale a $q = 0 = s$. De la definición de n y q y teniendo presente que la suma de los valores propios es cero esas condiciones equivalen a

$$2\alpha_3 = HG(d\tau)^2, \quad 2\alpha_2 = -FH(d\tau)^2, \quad 2\alpha_1 = H(F - G)(d\tau)^2 \quad (4.37)$$

Las ecuaciones escalares (4.27) se escriben en ahora como

$$(F + H)' = 0, \quad (H - G)' = 0, \quad \left((F - G)' + \sqrt{2}FG \right) (d\tau)^2 = 2\sqrt{2}\alpha_1 \quad (4.38)$$

Existen entonces dos constantes complejas a y k de manera que

$$F = k - H, \quad G = \frac{-a^2}{k} + H \quad (4.39)$$

Sustituyendo estas expresiones y la última de las ecuaciones de (4.37) para eliminar α_1 en la última de las ecuaciones de (4.38) se obtiene para H la ecuación de Ricatti

$$\sqrt{2}H' - H^2 + a^2 = 0$$

La solución general de esta ecuación es en términos de la constante compleja b

$$H = a \frac{be^{-\sqrt{2}a\tau} + 1}{be^{-\sqrt{2}a\tau} - 1} \quad (4.40)$$

Conocidas entonces F , G y H , nos falta calcular el cuadrado del gradiente de τ . De (4.37) se deduce que

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{G - F}{F}$$

Llevado a la segunda de las identidades de Bianchi (4.28) ésta queda como

$$\frac{\alpha_2'}{\alpha_2} = \sqrt{2} \frac{F'}{F} - 2F - \frac{2a^2}{k} \quad (4.41)$$

Integrando esta ecuación aparece una nueva constante c y tenemos

$$\alpha_2 = cF e^{-\sqrt{2} \frac{a^2 + ak + k^2}{k} \tau} (be^{-\sqrt{2}a\tau} - 1)^{-2} \quad (4.42)$$

Métricas de Tipo I

Y entonces de (4.37) podemos calcular $(d\tau)^2$ y queda

$$(d\tau)^2 = \frac{-2c}{a} e^{-\sqrt{2}\frac{a^2+ak+k^2}{k}\tau} (b^2 e^{-2\sqrt{2}a\tau} - 1)^{-1} \quad (4.43)$$

Para los escalares m , p , n y r de las ecuaciones (4.26) obtenemos

$$\begin{aligned} m &= -\frac{H'}{H} + \sqrt{2}H - \frac{a^2 + k^2}{\sqrt{2}k}; & n &= -i \frac{4abe^{-\sqrt{2}a\tau}}{b^2 e^{-2\sqrt{2}a\tau} - 1} \\ p &= \frac{-k}{\sqrt{2}}; & r &= \frac{-a^2}{\sqrt{2}k} \end{aligned} \quad (4.44)$$



Antes de integrar el sistema exterior (4.26) calcularemos la Hessiana de τ y, como en el caso anterior, impondremos que sea real.

$$\begin{aligned} \nabla d\tau &= \frac{1}{2} \left(-\frac{H'}{H} + \sqrt{2}H - \sqrt{2}\frac{a^2+k^2}{k} \right) d\tau \otimes d\tau + \\ &+ \left(\frac{H'}{H} - \sqrt{2}H \right) (d\tau \times \mathcal{U}_1) \otimes (d\tau \times \mathcal{U}_1) + \\ &+ \left(-\frac{H'}{H} + \sqrt{2}H - \sqrt{2}\frac{a^2}{k} \right) (d\tau \times \mathcal{U}_2) \otimes (d\tau \times \mathcal{U}_2) + \\ &+ \left(-\frac{H'}{H} + \sqrt{2}H - \sqrt{2}k \right) (d\tau \times \mathcal{U}_3) \otimes (d\tau \times \mathcal{U}_3) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Como $(d\tau)^2 \neq 0$ podemos razonar como cuando todas las 1-formas $d\tau \times \mathcal{U}_i$ eran integrables, y utilizando el lema 28, las únicas posibilidades que tenemos son que $d\tau$ esté en la dirección de alguna de las direcciones principales y todos los coeficientes sean reales o que el gradiente de τ esté en la dirección de alguna de las bisectrices y haya dos coeficientes complejos conjugados.

$d\alpha_1$ es principal

Todos los coeficientes deben ser reales lo que equivale a que k , a^2 y $\frac{H'}{H} - \sqrt{2}H$ sean reales. Teniendo en cuenta la expresión (4.40) sabemos

$$\frac{H'}{H} - \sqrt{2}H = -\sqrt{2}a \frac{b^2 + e^{2\sqrt{2}\tau}}{b^2 - e^{2\sqrt{2}\tau}} \quad (4.46)$$

Para integrar el sistema exterior (4.26) y localizar las coordenadas reales, distinguiremos el caso de que $d\tau$ sea temporal o espacial.

• Caso $d\tau \wedge \theta^0 = 0$.

Como en este caso $d\tau = e_0(\tau)\theta^0$, se tiene que $d\tau \times \mathcal{U}_i$ debe ser real para todo i . Llevando las expresiones (4.44) al sistema (4.26), sabemos que

existen funciones $\{x, y, z\}$ de manera que

$$\begin{aligned} d\tau \times \mathcal{U}_2 &= e^{-\frac{k}{\sqrt{2}}\tau} dx \\ d\tau \times \mathcal{U}_3 &= e^{-\frac{a^2}{\sqrt{2}k}\tau} dy \\ d\tau \times \mathcal{U}_1 &= -i \frac{4abe^{-\sqrt{2}a\tau}}{b^2e^{-2\sqrt{2}a\tau}-1} e^{-\frac{a^2+k^2}{\sqrt{2}k}\tau} (dz + xdy) \end{aligned} \quad (4.47)$$

Como todos los vectores son reales podemos elegir $\{x, y, z\}$ reales. Sabemos además que a^2 es real, y que por tanto a es real o imaginario puro. Si $a = i\alpha$, de (4.46) se sigue que $b^2 = e^{2i\beta}$ con β real. Pero desarrollando $d\tau \times \mathcal{U}_1$ se sigue que $\frac{-2i\alpha}{\text{sen}(\beta-\sqrt{2}a\tau)}$ debe ser real, luego a no puede ser imaginario puro. Tenemos así que a debe ser real y por lo tanto para que $d\tau \times \mathcal{U}_1$ sea real b debe ser imaginario puro, $b = i\beta$. Sustituyendo b en (4.43) calculamos el cuadrado del gradiente de τ , con lo que se obtiene para g la expresión

$$g = \frac{-a}{2c} \frac{(\beta^2 e^{-2\sqrt{2}a\tau} + 1)}{e^{-\sqrt{2}\left(\frac{a^2 + ak + k^2}{k}\right)\tau}} \left[-d\tau^2 + 2e^{-\sqrt{2}k\tau} dx^2 + 2e^{-\sqrt{2}\frac{a^2}{k}\tau} dy^2 + \frac{32\beta^2 a^2 e^{-2\sqrt{2}a\tau}}{(\beta^2 e^{-2\sqrt{2}a\tau} + 1)^2} e^{-2\frac{a^2+k^2}{\sqrt{2}k}\tau} (dz + xdy)^2 \right]$$

Manteniendo $\Delta\tau = 0$ podemos cambiar $\tau \rightsquigarrow \alpha\tau + \tau_0$. Eligiendo τ_0 podemos absorber el factor β y la constante α permite absorber la homotecia con lo que podemos reescribir g como

$$g = \frac{\cosh(\sqrt{2}a\tau)}{\sqrt{2}a} \left(-e^{\sqrt{2}\frac{a^2+k^2}{k}\tau} d\tau^2 + e^{\sqrt{2}\frac{a^2}{k}\tau} dx^2 + e^{\sqrt{2}k\tau} dy^2 \right) + \frac{\sqrt{2}a}{\cosh(\sqrt{2}a\tau)} (dz + xdy)^2 \quad (4.48)$$

Con lo que se obtiene la expresión de la métrica de Taub [83].

Los Campos de Killing de esta métrica son

$$\xi = K_1 \partial_x + K_2 \partial_y + (K_3 - K_1 y) \partial_z$$

y teniendo en cuenta que las 1-formas complejas de conexión están en las direcciones $d\tau \times \mathcal{U}_i$, a partir de las expresiones (4.47) se deduce que el único Killing que es ortogonal a dos de ellas es $\xi = \partial_z$, que en concreto es ortogonal a \mathcal{A} y \mathcal{B} , es decir, que su derivada tiene la dirección de la 2-forma \mathcal{U}_1 , es decir a la 2-forma principal que verifica que $d\tau \times \mathcal{U}_1$ no es integrable.

• **Caso $d\tau \wedge \theta^1 = 0$.**

Aquí $d\tau = e_1(\tau)\theta^1$ y por lo tanto no todas las direcciones $d\tau \times \mathcal{U}_i$ son

Métricas de Tipo I

reales. En concreto se tiene

$$d\tau \times \mathcal{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1(\tau) \theta^0, \quad d\tau \times \mathcal{U}_2 = -\frac{i}{\sqrt{2}} e_1(\tau) \theta^3, \quad d\tau \times \mathcal{U}_3 = \frac{i}{\sqrt{2}} e_1(\tau) \theta^2$$

Luego las coordenadas asociadas a los dos últimos son imaginarias puras. Entonces podemos considerar $\{x, y, z\}$ coordenadas reales tales que

$$\begin{aligned} d\tau \times \mathcal{U}_2 &= ie^{-\frac{k}{\sqrt{2}}\tau} dx \\ d\tau \times \mathcal{U}_3 &= ie^{-\frac{a^2}{\sqrt{2}k}\tau} dy \\ d\tau \times \mathcal{U}_1 &= \frac{-4\beta}{\beta^2 e^{-2\sqrt{2}a\tau} + 1} e^{-\frac{a^2+k^2}{\sqrt{2}k}\tau} (dz - xdy) \end{aligned}$$

Con lo que de forma similar al caso anterior se tiene

$$\begin{aligned} g &= \frac{a}{2c} \frac{(\beta^2 e^{-2\sqrt{2}a\tau} + 1)}{e^{-\sqrt{2}\frac{a^2+k^2}{k}\tau} \tau} \left[d\tau^2 + 2e^{-\sqrt{2}k\tau} dx^2 + 2e^{-\sqrt{2}\frac{a^2}{k}\tau} dy^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{32\beta^2 a^2 e^{-2\sqrt{2}a\tau}}{(\beta^2 e^{-2\sqrt{2}a\tau} + 1)^2} e^{-2\frac{a^2+k^2}{\sqrt{2}k}\tau} (dz - xdy)^2 \right] \end{aligned}$$

Como antes, una redefinición de τ manteniendo la laplaciana nula y un cambio de escala en las otras coordenadas permiten obtener para g la expresión

$$\begin{aligned} g &= \frac{\cosh(\sqrt{2}a\tau)}{\sqrt{2}a} \left(e^{\sqrt{2}\frac{a^2+k^2}{k}\tau} d\tau^2 + e^{\sqrt{2}\frac{a^2}{k}\tau} dx^2 + e^{\sqrt{2}k\tau} dy^2 \right) - \\ &\quad - \frac{\sqrt{2}a}{\cosh(\sqrt{2}a\tau)} (dz - xdy)^2 \end{aligned} \quad (4.49)$$

Igual que en la métrica de Taub, aquí hay un único Killing con derivada principal del Weyl que es ∂_z y que tiene las mismas propiedades que el de la solución anterior. Como resumen de los resultados obtenidos podemos enunciar

Proposición 37 *Las únicas soluciones de vacío y de clase I_{12} en las que el gradiente de los valores propios del Weyl está en la dirección de uno de los vectores principales del Weyl son la métrica de Taub (4.48) que tiene órbitas temporales y su equivalente con órbitas espaciales (4.49). Además hay una única 2-forma principal \mathcal{U}_i del Weyl que coincide con la geometría de la derivada covariante de un Killing y es aquella para la que $d\alpha_1 \times \mathcal{U}_i$ no es integrable.*

$d\alpha_1$ no es principal

En este caso $d\tau$ está en la dirección de una de las bisectrices $\theta^2 + \theta^3$. El coeficiente de $\nabla d\tau$ debe ser real y entre los otros tres debe haber

uno real y los otros dos tienen que ser complejos conjugados. Entonces $\frac{H'}{H} - \sqrt{2}H$ debe ser real y por tanto los complejos conjugados tienen que ser los coeficientes de (4.45) en $d\tau \times \mathcal{U}_2$ y $d\tau \times \mathcal{U}_3$ (es decir, son reales los coeficientes de $\nabla d\tau$ en $d\tau^2$ y en $d\tau \times \mathcal{U}_i$ donde esta última es la dirección no integrable. Se cumple entonces que $\frac{a^2}{k} = \bar{k}$, es decir que $a^2 = |k|^2$. Luego como a^2 es real positivo, necesariamente a es real. Usando (4.40) se tiene que como a es real, $\frac{H'}{H} - \sqrt{2}H$ es real si, y sólo si, b^2 es real. Para la base ortogonal definida por $d\tau$ y \mathcal{U}_i y dado que $d\tau$ tiene la dirección $\theta^2 + \theta^3$, se tiene

$$\begin{aligned} d\tau &= e_2(\tau) (\theta^2 + \theta^3) \\ d\tau \times \mathcal{U}_1 &= \frac{i}{\sqrt{2}} e_2(\tau) (\theta^3 - \theta^2) \\ d\tau \times \mathcal{U}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} e_2(\tau) (\theta^0 + i\theta^1) \\ d\tau \times \mathcal{U}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} e_2(\tau) (\theta^0 - i\theta^1) \end{aligned}$$

Luego las dos últimas 1-formas deben ser complejas conjugadas. El sistema exterior que verifican es el que se obtiene de (4.26) con $q = 0 = s$ y donde el resto de coeficientes están dados en (4.44), es decir,

$$d(d\tau \times \mathcal{U}_2) = -\frac{k}{\sqrt{2}} d\tau \wedge (d\tau \times \mathcal{U}_2), \quad d(d\tau \times \mathcal{U}_3) = -\frac{a^2}{\sqrt{2}k} d\tau \wedge (d\tau \times \mathcal{U}_3)$$

existen coordenadas reales $\{u, v\}$ de manera que

$$d\tau \times \mathcal{U}_2 = e^{-\frac{k}{\sqrt{2}}\tau} (du + idv), \quad d\tau \times \mathcal{U}_3 = e^{-\frac{k}{\sqrt{2}}\tau} (du - idv)$$

y por lo tanto se tiene

$$d\tau \times \mathcal{U}_1 = \frac{8bae^{-\sqrt{2}a\tau}}{b^2 e^{-2\sqrt{2}a\tau} - 1} e^{-\frac{a^2+k^2}{\sqrt{2}k}\tau} (dz - udv)$$

Como además $d\tau \times \mathcal{U}_1$ es imaginario puro, debe cumplirse que $b = i\beta$, con lo que

$$d\tau \times \mathcal{U}_1 = -i \frac{8a}{\beta e^{-\sqrt{2}a\tau} + \frac{1}{\beta} e^{\sqrt{2}a\tau}} e^{-\frac{a^2+k^2}{\sqrt{2}k}\tau} (dz - udv)$$

Así, utilizando (4.37) para calcular $(d\tau)^2$ se tiene y teniendo en cuenta que $k = m + in$ y $a^2 = m^2 + n^2$, se tiene

$$\begin{aligned} g &= \frac{a\beta}{2c} e^{\sqrt{2}\frac{a^2+k^2}{k}\tau} (e^{-\sqrt{2}a\tau} + e^{\sqrt{2}a\tau}) [d\tau^2 + \\ &\quad + \frac{128a^2}{(\beta^2 e^{-2\sqrt{2}a\tau} + 1)^2} e^{\sqrt{2}\frac{a^2+k^2}{k}\tau} (dz - udv)^2 + \\ &\quad [+ 4e^{-\sqrt{2}m\tau} [\cos(\sqrt{2}n\tau)(dv^2 - du^2) - 2\text{sen}(\sqrt{2}n\tau)dudv]] \end{aligned}$$

Métricas de Tipo I

Redefiniendo las coordenadas τ , u , v y z manteniendo la laplaciana de τ igual a cero permite escribir la métrica como

$$g = e^{2\sqrt{2}m\tau} \left[\frac{\cosh(\sqrt{2}a\tau)}{\sqrt{2}a} d\tau^2 + \frac{\sqrt{2}a}{\cosh(\sqrt{2}a\tau)} e^{2\sqrt{2}m\tau} (dz - u dv)^2 + \frac{\cosh(\sqrt{2}a\tau)}{\sqrt{2}a} e^{-\sqrt{2}m\tau} \left[\cos(\sqrt{2}n\tau)(dv^2 - du^2) - 2\operatorname{sen}(\sqrt{2}n\tau)dudv \right] \right] \quad (4.50)$$

donde $a^2 = m^2 + n^2$.

Los campos de Killing reales de esta métrica son

$$\xi = K_1\partial_u + K_2\partial_v + (K_1v + K_3)\partial_z$$

y los productos con las 1-formas de conexión que son colineales con $d\tau \times \mathcal{U}_i$ nos llevan a

$$(\xi, \mathcal{A}) = 0 \iff K_1 - iK_2 = 0 \iff K_1 = 0 = K_2$$

$$(\xi, \mathcal{B}) = 0 \iff K_1 + iK_2 = 0 \iff K_1 = 0 = K_2$$

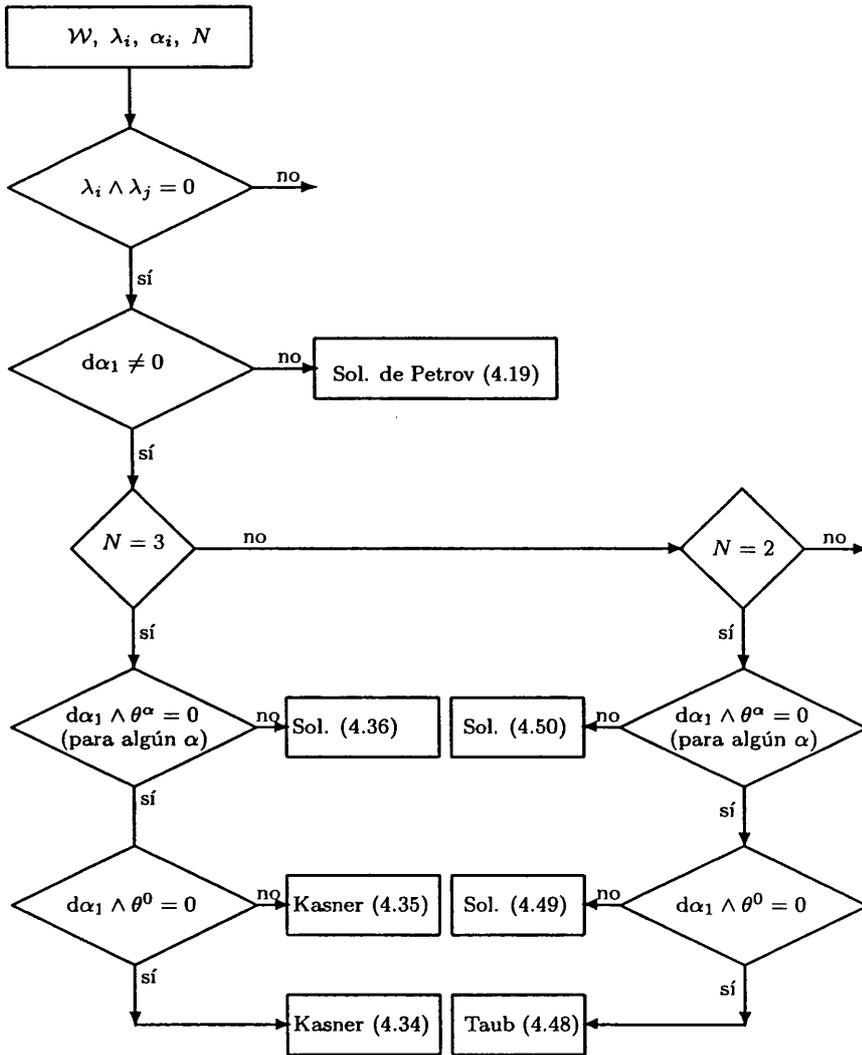
$$(\xi, \mathcal{C}) = 0 \iff K_1v + K_3 - uK_2 = 0 \iff K_1 = K_2 = K_3 = 0$$

Con lo que sólo hay un Killing ∂_z con derivada principal del Weyl y la 2-forma principal en la dirección $\nabla\xi$ es \mathcal{U}_1 , es decir, la que verifica que $d\tau \times \mathcal{U}_1$ no es integrable. Resumimos este caso en la siguiente proposición.

Proposición 38 *La única solución de vacío y de clase I_{12} en la que el gradiente de los valores propios del Weyl no define una dirección principal del Weyl es la métrica (4.50). Además existe una única 2-forma principal \mathcal{U}_i del Weyl que coincide con la geometría de la derivada de un campo de Killing. Además, está caracterizada porque $d\alpha_1 \times \mathcal{U}_i$ no es integrable.*

4.6 Resumen en forma de algoritmo

Hemos resuelto hasta aquí las ecuaciones de vacío en la clase I_1 : i) cuando los valores propios no son constantes, en los casos en que dos o las tres direcciones $\{d\alpha_1 \times \mathcal{U}_i\}$ sean integrables, y ii) el caso de valores propios constantes que nos lleva a la solución de Petrov [72]. El siguiente esquema clasifica las soluciones obtenidas. Utilizando los resultados del capítulo 2, todos los elementos que aparecen pueden calcularse de forma intrínseca y explícita (con concomitantes de la propia g). Hemos denotado además N , al número máximo de direcciones integrables que hay en el conjunto $\{d\alpha_1 \times \mathcal{U}_i\}$.



5. Métricas de tipo D

Todas las soluciones de vacío y de tipo D fueron determinadas por Kinnersley [54], integrando las ecuaciones en formalismo de Newman-Penrose. Sin embargo, no conocemos un acercamiento sistemático basado en condiciones intrínsecas, que sirva además para definir y clasificar intrínsecamente las soluciones obtenidas. Este problema es el que abordamos a continuación. Los espacios de tipo D definen de modo natural una estructura casi producto 2+2 asociada a la 2-forma principal del Weyl a la que llamaremos *estructura principal*. En la sección 1, proponemos una clasificación de las métricas de tipo D que tiene en cuenta las propiedades geométricas de esta estructura. En la sección siguiente, probamos que, si la divergencia del Weyl es cero, las clases quedan caracterizadas por la nulidad o no de las proyecciones de los invariantes a los 2-planos principales. Las propiedades de la estructura permiten obtener la forma canónica de todas las métricas de tipo D, divergencia del Weyl cero y valores propios reales. Este hecho permite integrar con facilidad, en la sección 3, las ecuaciones de vacío. Lo importante es que ese procedimiento se basa en propiedades de la estructura, y por lo tanto, permite definir de modo intrínseco todas las soluciones. La caracterización de las soluciones de Ehlers y Kundt [31] (posteriormente redescubiertas por Kinnersley [54]), y en particular el teorema de caracterización de la solución de Schwarzschild, es un ejemplo de la utilidad de este acercamiento sistemático.

El caso de valores propios complejos se complica porque, en general, no tenemos unas coordenadas *canónicas* adaptadas a estructuras no integrables como las que aparecen en este caso. Pero la existencia de simetrías permite obtener una forma canónica también para estos espacios. Queremos destacar el hecho de que podemos demostrar, en la sección 4, la existencia de un G_2 conmutativo en los casos más generales antes de integrar las ecuaciones de vacío en la sección 5. El hecho de que dos campos de Killing, que calculamos intrínsecamente, sean colineales es lo que distingue las métricas de Kerr-NUT dentro de la clase más general de soluciones. Además, utilizando los resultados sobre campos de Killing alineados del capítulo anterior, esa es la condición para que la geometría de la derivada

del Killing sea una 2-forma principal del Weyl. Dentro de esta clase de soluciones, la métrica de Kerr aparece cuando la constante de proporcionalidad entre los campos de Killing considerados toma un valor concreto. Este valor es interpretable como la rotación de dualidad entre la 2-forma de Killing (que, en vacío, es una solución de las ecuaciones de Maxwell) y la solución de las ecuaciones de Maxwell que puede construirse a partir del valor propio del Weyl y de las identidades de Bianchi. Un teorema de caracterización de la métrica de Kerr se sigue de estas consideraciones.

Acabaremos el capítulo estudiando otros contenidos energéticos en el caso de que el tensor de Weyl tenga valores propios reales: Por una parte determinamos las soluciones de fluido perfecto con divergencia del Weyl cero, y obtenemos una subclase de las soluciones calculadas por Barnes [2]. Por otra parte, consideramos soluciones de Einstein–Maxwell regulares. Como es demasiado restrictivo imponer divergencia del Weyl cero, relajamos la condición manteniendo parte de las propiedades geométricas de la estructura. Aparecen así casos paralelos a las A, B y C-métricas de vacío, y en particular la solución de Reissner–Nordstrom [76], [68]. También se plantea cómo caracterizar intrínsecamente las soluciones de esta familia.

Parte de los resultados de este capítulo forman parte de las comunicaciones presentadas en los Encuentros Relativistas de Tenerife [38] y de Valencia [37]. La caracterización de la solución de Schwarzschild, constituye el núcleo de un artículo ya publicado [40]. De este capítulo esperamos publicar otro artículo ahora en fase de redacción [45].

5.1 Una clasificación de las soluciones de tipo D

a) Desde un punto de vista exclusivamente algebraico, un tensor de Weyl de tipo D tiene un único escalar independiente (valor propio) y la estructura casi producto 2+2 asociada a la 2-forma principal, a la que llamamos *estructura principal*. Una clasificación de los espacios de tipo D debe hacer intervenir sólo esos elementos. A orden algebraico, una primera clasificación puede tener en cuenta el carácter real o no de los valores propios. Vimos en el capítulo 2 que este hecho sirve para caracterizar los espacios que admiten congruencias para los que el Weyl es puramente eléctrico o puramente magnético.

A primer orden de derivación, podemos plantear diversas clasificaciones según hagamos intervenir sólo los invariantes escalares, sólo la 2-forma principal, o ambas. Un ejemplo de clasificación del primer tipo, se obtiene de considerar el módulo (o de una función de éste) y el argumento del valor propio del Weyl y estudiar si son o no constantes.

b) Una clasificación más rica y más adecuada a los objetivos de este capítulo es la que hace intervenir la primera derivada de la 2-forma principal \mathcal{U} . Esta 2-forma define una estructura casi producto 2+2 cuyo

Métricas de tipo D

tensor de estructura es $2(v - h) = \mathcal{U} \times \bar{\mathcal{U}}$. Entonces, la clasificación de las estructuras presentada en el capítulo anterior induce de modo natural una clasificación de las métricas de tipo D. Denotaremos a las clases como D_{stu}^{pqr} donde cada superíndice es 0 ó 1 según v tenga o no, por este orden, la propiedad de ser foliación, de ser minimal o de ser umbilical ya que el tener o no una propiedad es equivalente a la nulidad o no de los elementos que aparecen en la descomposición de la derivada covariante de v . Los subíndices recogen con el mismo criterio las propiedades de h . Más precisamente

Definición 5 En el conjunto de las métricas de tipo D, consideremos las clases que denotamos D_{lmn}^{pqr} donde los índices toman los valores 0 ó 1 y recogen las propiedades de la estructura principal (v, h) con el siguiente criterio:

1. $p = 0$ [resp. $l = 0$] si v [resp. h] es foliación.
2. $q = 0$ [resp. $m = 0$] si v [resp. h] es minimal.
3. $r = 0$ [resp. $n = 0$] si v [resp. h] es umbilical

Aparecen entonces 64 clases de espacios de tipo D. Esta clasificación está basada en la nulidad o no de los elementos que aparecen en la descomposición invariante de la primera derivada de \mathcal{U} . Después de los resultados del capítulo 2 en donde determinamos un proyector sobre esta dirección, tenemos una caracterización intrínseca y en términos del propio tensor de Weyl de las clases consideradas.

Para indicar que alguno de los 2-planos tiene una propiedad y que puede o no tener las demás, utilizaremos un punto en los espacios correspondientes a las propiedades de las que no decimos nada. Así, por ejemplo, Diremos que g es de tipo $D^{0\cdot\cdot}$ si v es foliación y de tipo $D^{1\cdot\cdot}$ si no lo es. De igual manera, diremos que g es de tipo $D^{1\cdot}_0$ si v no es foliación y h es minimal. El tipo $D^{\cdot\cdot}$ contiene a las clases D_{stu}^{pqr} donde q, r, s, t y u toman cualquier valor en $\{0, 1\}$.

c) Podemos también plantear una clasificación mixta a primer orden de derivación en los valores propios y algebraica en la 2-forma principal según sean nulas o no las proyecciones de los gradientes del módulo y del argumento del valor propio a los 2-planos principales, y en concreto, según sean nulas o no las 1-formas $(U(d\theta), U(d\rho), *U(d\theta), *U(d\rho))$. Más precisamente, tenemos

Definición 6 En el conjunto de las métricas de tipo D consideremos las clases que denotamos $D[pq, rs]$ donde p, q, r, s toman los valores 0 ó 1 e indican si son nulas o no las proyecciones del valor propio del Weyl $e^{-3\rho+3i\theta}$ con el siguiente criterio:

1. $p = 1$ [resp. $r = 1$] si $U(d\theta) \neq 0$ [resp. $*U(d\theta) \neq 0$].

2. $q = 1$ [resp. $s = 1$] si $U(d\rho) \neq 0$ [resp. $*U(d\rho) \neq 0$]

Aparecen así 16 clases de métricas de tipo D atendiendo a la nulidad o no de las proyecciones del módulo y del argumento del valor propio del Weyl a cada uno de los 2–planos principales. De la misma manera que en el caso anterior, hablaremos por ejemplo de *tipo D*[1, ··] para indicar que tenemos una métrica de tipo D en la que la proyección del argumento del valor propio al 2–plano principal temporal es no nula.

5.2 Métricas de Tipo D y $\delta W = 0$

a) La forma canónica del tensor de Weyl autodual es

$$\mathcal{W} = 3\alpha\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} + \alpha\mathcal{G} \quad (5.1)$$

Consideremos $\{\mathcal{U} \equiv \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3\}$ una b.o.n. de 2–formas principales del Weyl. En general, esta base no es única, ya que todo el subespacio ortogonal a \mathcal{U} es propio del Weyl, aunque veremos que en muchos casos los invariantes nos permiten privilegiar una de ellas. Para cualquiera de estas bases ortonormales podemos utilizar el formalismo de Cartan complejo introducido en el capítulo anterior. En ese sentido seguiremos denotando $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\}$ a las 1–formas complejas de conexión asociadas a la base anterior. De la forma canónica (5.1) podemos calcular $\delta\mathcal{W}$ y, recordando que $\lambda_i \equiv \mathcal{U}_i(\delta\mathcal{U}_i)$, llegamos a

$$\delta\mathcal{W} = 0 \iff \begin{cases} (i) \mathcal{U}(\delta\mathcal{U}) \equiv \lambda_1 = -\frac{1}{3}d \ln \alpha \\ (ii) \lambda_2 = \lambda_3 \end{cases} \quad (5.2)$$

Teniendo en cuenta los lemas 6 y 7 se tiene que \mathcal{U} define una estructura casi producto 2+2 umbilical (las direcciones principales de \mathcal{U} que son las de Debever dobles son geodésicas y sin distorsión) y maxwelliana con valor propio relacionado por (i) con el valor propio del Weyl. En concreto, la solución de Maxwell asociada al valor propio es

Lema 33 Si g es de tipo D y de divergencia del Weyl cero y α es el valor propio doble del Weyl, la 2–forma

$$\mathcal{F}_M = \alpha^{\frac{2}{3}}\mathcal{U} \quad (5.3)$$

es una solución de las ecuaciones de Maxwell

Otra consecuencia de las identidades de Bianchi, es, teniendo en cuenta la proposición 21

Lema 34 En todo espacio de tipo D y divergencia del Weyl cero, la estructura principal del Weyl es la estructura de un tensor conforme Killing de orden 2.

Métricas de tipo D

Esta condición generaliza el resultado conocido de que en vacío, todas las soluciones de tipo D admiten un conforme Killing de orden 2 [86], [55].

En términos de las 1-formas complejas de conexión asociadas a esa base ortonormal principal del Weyl, se tiene

$$\delta W = 0 \iff \mathcal{A} = \frac{i\sqrt{2}}{3} d \ln \alpha \times \mathcal{U}_3, \quad \mathcal{B} = -\frac{i\sqrt{2}}{3} d \ln \alpha \times \mathcal{U}_2 \quad (5.4)$$



Hemos escrito las ecuaciones $\delta W = 0$ de varias formas según qué elementos hagamos intervenir en ellas. Estas relaciones también pueden reescribirse de forma que sólo intervenga la 2-forma principal y el valor propio como

Proposición 39 *Sea g una métrica de tipo D, α el valor propio doble del Weyl y \mathcal{U} la 2-forma principal. Entonces, la divergencia del Weyl es cero si, y sólo si*

$$\nabla \mathcal{U} = i(\delta \mathcal{U})[\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} + \mathcal{G}]; \quad \delta \mathcal{U} = \frac{2}{3} d \ln \alpha \times \mathcal{U} \quad (5.5)$$

b) La condición $\delta W = 0$ restringe el número de clases que son posibles en este caso. Así, si la divergencia del Weyl es cero, la estructura principal es de tipo $D_{\cdot 0}^0$, es decir ambos 2-planos son umbilicales. Por lo tanto de las 64 clases de espacios de tipo D, nos quedamos con 16 clases de espacios de tipo D y divergencia del Weyl cero. Además, el resto de propiedades de la estructura principal quedan caracterizadas porque la proyección del módulo o del argumento del valor propio al 2-plano temporal o espacial sea o no nula. En adelante, consideraremos ρ y θ de manera que el valor propio del Weyl se escribe

$$\alpha \equiv e^{-3\rho + 3i\theta} \quad (5.6)$$

Si separamos la parte real de la imaginaria en la primera de las ecuaciones (5.2), se verifica

$$\begin{aligned} U(\delta \mathcal{U}) - *U(\delta * \mathcal{U}) &= d\rho \\ U(\delta * \mathcal{U}) + *U(\delta \mathcal{U}) &= d\theta \end{aligned} \quad (5.7)$$

A partir de estos resultados podemos relacionar las dos clasificaciones a primer orden de derivadas en los invariantes del Weyl, y se tiene

Proposición 40 *Sea g una métrica de tipo D con divergencia del Weyl cero. Se verifica:*

1. Siempre es de tipo $D_{\cdot 0}^0$.
2. Es de clase D_{rs0}^{pq0} si, y sólo si, es de clase $D[rs, pq]$

Por lo tanto sólo tenemos 16 clases de métricas de tipo D y $\delta W = 0$. Además las dos clasificaciones diferenciales consideradas definen las mismas clases.

c) De la proposición anterior se deduce que si $d\theta = 0$, la estructura principal tiene ambos 2-planos integrables. Además, teniendo en cuenta (3.5) y (5.7) tenemos

$$-2d\rho = \text{tr}Q_v + \text{tr}Q_h \quad (5.8)$$

Si ahora tenemos en cuenta cómo cambia por conformidad la segunda forma fundamental (3.7), se ha probado que la métrica $e^{-2\rho}g$ es una métrica producto. Se tiene entonces que

Lema 35 *Toda métrica g de Tipo D con valores propios de argumento constante y con divergencia del Weyl cero, es conforme a una métrica producto. En concreto, si $\alpha = e^{-3\rho+3i\theta}$ es el valor propio doble del Weyl y $d\theta = 0$, la métrica $\tilde{g} = e^{-2\rho}g$ es una métrica producto.*

Supongamos ahora que $\tilde{g} = v + h$ donde v es bidimensional hiperbólica y h bidimensional elíptica, es una métrica producto $2 + 2$ arbitraria. Si denotamos X e Y a las curvaturas gaussianas de v y h respectivamente, las fórmulas de Gauss y de Codazzi (3.9) nos dicen que

$$\text{Riem}(\tilde{g}) = \frac{1}{2}Xv \wedge v + \frac{1}{2}Yh \wedge h \quad (5.9)$$

y por lo tanto

$$\text{Ric}(\tilde{g}) = Xv + Yh$$

Entonces podemos calcular el Weyl de estas métricas y se tiene que, si denotamos \mathcal{U} a la 2-forma autodual que define la estructura casi-producto,

$$\mathcal{W} = 3\bar{\rho}\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} + \bar{\rho}\mathcal{G}, \quad \text{donde } \bar{\rho} = -\frac{1}{6}(X + Y)$$

Es decir, se demuestra que

Lema 36 *Toda métrica producto $2 + 2$ es de tipo D (o O) con valores propios reales y el valor propio doble es $\bar{\rho} = -\frac{1}{6}(X + Y)$.*

Un primer resultado se deduce de los dos lemas anteriores, ya que como por conformidad el valor propio del Weyl cambia según

$$\tilde{g} = e^{2\mu}g \rightsquigarrow \bar{\rho} = e^{2\mu}\rho$$

entonces si los valores propios de la producto son reales, también lo son los de la conforme. Como hemos escrito el valor propio en términos del módulo y del argumento, esto quiere decir que el argumento debe ser múltiplo de π (de 2π si el valor propio es positivo, o múltiplo impar de π si es negativo). Es decir

Proposición 41 *En un espacio de tipo D y divergencia del Weyl cero, el argumento de los valores propios del Weyl es constante si, y sólo si, los valores propios son reales.*

Como además en este caso el valor propio doble es $|\alpha| = e^{-3\rho}$, se tiene que

$$\tilde{\rho}^2 = e^{4\rho} e^{-6\rho} = e^{-2\rho}$$

Con lo que los valores propios del Weyl de la métrica conforme dependen también de la suma de las curvatura de la métrica producto. En concreto se tiene

Teorema 8 *Si g es de tipo D con valores propios reales y divergencia del Weyl cero, entonces*

$$g = \frac{1}{(X+Y)^2}(v+h)$$

donde $v = v(x^C)dx^A dx^B$, $h = h(x^k)dx^i dx^j$, son dos métricas bidimensionales arbitrarias, v hiperbólica y h elíptica, con curvaturas gaussianas X e Y respectivamente.

5.3 Soluciones de vacío y $d\theta = 0$

Como $Ric(g) = 0 \implies \delta W = 0$, las posibles soluciones de vacío tienen la forma dada en el teorema 8, es decir

$$g = \frac{1}{(X+Y)^2}(v+h) \quad (5.10)$$

donde v y h son dos métricas bidimensionales hiperbólica y elíptica respectivamente

$$v = v_{AB}(x^C)dx^A dx^B; \quad h = h_{ij}(x^k)dx^i dx^j$$

Si tenemos en cuenta que para una métrica producto $v+h$ el tensor de Riemann es

$$Riem(v+h) = \frac{1}{2}Xv \wedge v + \frac{1}{2}Yh \wedge h \quad (5.11)$$

y que por una transformación conforme $\bar{g} = e^{2\lambda}g$, el tensor de Ricci cambia como

$$Ric(\bar{g}) = Ric(g) - 2(\nabla d\lambda - d\lambda \otimes d\lambda) - (\Delta\lambda + 2g(d\lambda, d\lambda))g$$

la condición necesaria y suficiente para que la métrica (5.10) sea solución de vacío es

$$\begin{aligned} \nabla dX + \nabla dY &= -\frac{X+Y}{2} \left[\frac{1}{3}(2X-Y) - \frac{(d(X+Y))^2}{(X+Y)^2} \right] v + \\ &\quad -\frac{X+Y}{2} \left[\frac{1}{3}(2Y-X) - \frac{(d(X+Y))^2}{(X+Y)^2} \right] h \end{aligned}$$

donde ∇ indica la derivada covariante con la métrica bidimensional que corresponda en cada caso y donde el cuadrado del gradiente de $X+Y$ está calculado con la métrica producto $v+h$. La ecuación anterior no tiene proyección mixta vh , y por lo tanto es equivalente a las dos ecuaciones

$$\begin{aligned}\nabla dX &= -\frac{X+Y}{2} \left[\frac{1}{3}(2X-Y) - \frac{g(d(X+Y))^2}{(X+Y)^2} \right] v \\ \nabla dY &= -\frac{X+Y}{2} \left[\frac{1}{3}(2Y-X) - \frac{(d(X+Y))^2}{(X+Y)^2} \right] h\end{aligned}\quad (5.12)$$

Como los primeros miembros de las ecuaciones anteriores solo dependen de las coordenadas adaptadas al 2-plano correspondiente, la traza de cada una de ellas sólo depende de esas mismas coordenadas. Entonces se debe cumplir

$$\begin{aligned}\frac{X+Y}{2} \left[\frac{1}{3}(2X-Y) - \frac{(d(X+Y))^2}{(X+Y)^2} \right] &\equiv \mu(x^A) \\ \frac{X+Y}{2} \left[\frac{1}{3}(2Y-X) - \frac{(d(X+Y))^2}{(X+Y)^2} \right] &\equiv \nu(x^i)\end{aligned}$$

Restando las dos ecuaciones se tiene

$$\mu(x^A) - \nu(x^i) = \frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$$

Debe existir entonces una constante C de manera que

$$\mu(x^A) = \frac{1}{2}(X^2 + C); \quad \nu(x^i) = \frac{1}{2}(Y^2 + C)$$

Este mismo resultado puede obtenerse si pensamos que dada una métrica bidimensional arbitraria de curvatura X , las condiciones de integrabilidad de la ecuación $\nabla dX = \kappa v$ son exactamente $\kappa = -\frac{1}{2}(X^2 + C)$. Por lo tanto el sistema (5.12) se escribe como

$$\begin{aligned}\nabla dX &= -\frac{1}{2}(X^2 + C) v \\ \nabla dY &= -\frac{1}{2}(Y^2 + C) h \\ (X+Y) \left[\frac{1}{3}(2X-Y) - \frac{(d(X+Y))^2}{(X+Y)^2} \right] &= X^2 + C\end{aligned}\quad (5.13)$$

Si desarrollamos la tercera ecuación y tenemos en cuenta que

$$(d(X+Y))^2 = v(dX, dX) + h(dY, dY)$$

se llega a

$$-3v(dX, dX) - 3h(dY, dY) = (X^3 + 3CX) + (Y^3 + 3CY)$$

Métricas de tipo D

con lo que debe existir una constante D de manera que

$$v(dX, dX) = -\left(\frac{1}{3}X^3 + CX + D\right); \quad h(dY, dY) = -\left(\frac{1}{3}Y^3 + CY - D\right) \quad (5.14)$$

Resumimos los resultados obtenidos hasta aquí en el siguiente lema

Lema 37 *Todas las soluciones de tipo D con valores propios reales y Ricci nulo son*

$$g = \frac{1}{(X+Y)^2}(v+h)$$

donde X e Y son las curvaturas de las métricas bidimensionales v y h respectivamente, y son solución de las ecuaciones

$$\begin{aligned} \nabla dX &= -\frac{1}{2}(X^2 + C)v; & v(dX, dX) &= -\frac{1}{3}X^3 - CX - D \\ \nabla dY &= -\frac{1}{2}(Y^2 + C)h; & h(dY, dY) &= -\frac{1}{3}Y^3 - CY + D \end{aligned} \quad (5.15)$$

con C y D constantes.



5.3.1 Integración de las ecuaciones

a) Las ecuaciones de vacío (5.15) son ecuaciones para dos métricas bidimensionales acopladas por las constantes comunes C y D . Es claro que las ecuaciones anteriores pueden tener como solución métricas de curvatura constante o no. Como la integración de estas ecuaciones depende de que lo sea o no, estudiaremos separadamente cada caso.

Sea σ una métrica bidimensional arbitraria, de curvatura de Gauss X no constante, que verifica

$$\nabla dX = -\frac{1}{2}(X^2 + C)\sigma; \quad \sigma(dX, dX) = -\frac{1}{3}X^3 - CX - D$$

Si completamos el sistema de coordenadas con una coordenada ortogonal Z , se tiene

$$\sigma = \frac{-1}{\frac{1}{3}X^3 + CX + D} dX^2 + \epsilon \Omega^2(X, Z) dZ^2 \quad (5.16)$$

donde $\epsilon = \pm 1$ según la signatura de σ . En esas coordenadas tenemos

$$\nabla dX = -\Gamma_{XX}^X dX \otimes dX - \Gamma_{XZ}^X dX \otimes dZ - \Gamma_{ZZ}^X dZ \otimes dZ$$

Los símbolos de Christoffel de σ son $\Gamma_{XZ}^X = 0$ y

$$\Gamma_{XX}^X = -\frac{1}{2} \frac{X^2 + C}{\frac{1}{3}X^3 + CX + D}, \quad \Gamma_{ZZ}^X = \epsilon \Omega \left(\frac{1}{3}X^3 + CX + D \right) \partial_X \Omega$$

Y por lo tanto, la condición para que $\nabla dX = -\frac{1}{2}(X^2 + C)\sigma$ con σ dada en (5.16) es

$$\Omega^2 = \left(\frac{1}{3}X^3 + CX + D \right) f^2(Z)$$

donde f es una función arbitraria de Z . Redefiniendo $dZ \rightsquigarrow f(Z)dZ$, se tiene

$$\sigma = \frac{-1}{\frac{1}{3}X^3 + CX + D}dX^2 + \epsilon\left(\frac{1}{3}X^3 + CX + D\right)dZ^2$$

Estos cálculos valen para v y para h tomando ϵ como -1 o $+1$ respectivamente, y por lo tanto se ha probado

Lema 38 *La única solución de (5.15) con curvaturas no constantes es*

$$v = \frac{-1}{\frac{1}{3}X^3 + CX + D}dX^2 + \left(\frac{1}{3}X^3 + CX + D\right)dT^2$$

$$h = \frac{1}{-\frac{1}{3}Y^3 - CY + D}dY^2 + \left(-\frac{1}{3}Y^3 - CY + D\right)dZ^2$$

Luego la solución de tipo D y vacío que corresponde a este caso es la C-métrica de Ehlers y Kundt [31].

b) Supongamos ahora que una de las curvaturas, digamos X es constante. Entonces, v es conforme a una de las métricas hiperbólicas de curvatura constante $(+1, -1, 0)$, y además, imponiendo $dX = 0$ en (5.15), se obtiene para las constantes C y D

$$C = -X^2; \quad D = \frac{2}{3}X^3$$

mientras que h tiene la forma dada en el lema 38. Este caso nos conduce a las B-métricas [31]. Además, según la curvatura de v sea positiva, negativa o nula, tenemos las B_1, B_2 o B_3 -métricas respectivamente.

De igual modo, si $dY = 0$, la métrica bidimensional elíptica es homotética a la métrica bidimensional de curvatura $+1, -1$ ó 0 , mientras que v tiene la expresión general dada en el lema 38, donde las constantes están dadas por

$$C = -Y^2; \quad D = -\frac{2}{3}Y^3$$

Este caso nos lleva a las A-métricas [31], y en particular a las A_1, A_2 o A_3 según Y sea positiva, negativa o nula. La A_1 -métrica es la solución de Schwarzschild.

c) Una última posibilidad a considerar, es la de que las dos curvaturas sean constantes, con lo que se deben verificar simultáneamente las dos relaciones anteriores entre las constantes y las curvaturas, con lo que se deduce que $X = -Y$. Entonces, la expresión del teorema 8 no es válida porque si tenemos en cuenta que el valor propio del Weyl de la producto es proporcional a $X + Y$, se deduce que la métrica producto (y por lo tanto cualquier conforme a ella) es de tipo O, con lo que sería la métrica plana.

En términos de la clasificación de las métricas de tipo D, se ha probado,

Proposición 42 *Todas las soluciones de vacío y de tipo D con valores propios reales son de tipo D[0·, 0·]. Además*

1. *Las soluciones de clase D[01, 01] son las C-métricas de Ehlers y Kundt.*
2. *Las soluciones de clase D[00, 01] son las B-métricas.*
3. *Las soluciones de clase D[01, 00] son las A-métricas.*

Las C-métricas, admiten un G_2 conmutativo con un Killing en cada uno de los 2-planos principales. Las A y las B-métricas, admiten un G_4 , que contiene un G_3 con órbitas bidimensionales temporales en el caso B y espaciales en el A. En concreto, la A_1 métrica tiene simetría esférica y es la solución de Schwarzschild.

5.3.2 Caracterización intrínseca de las soluciones

a) El lema 13 nos permite caracterizar en términos del propio Weyl el hecho de que sea de tipo D con valores propios reales. El segundo paso para caracterizar de modo intrínseco las soluciones obtenidas es el de distinguir si una solución que verifique las condiciones del lema 13 es una A, B o C-métrica. Hemos visto que estos tres casos corresponden a que alguna de las curvaturas de la métrica producto a la que es conforme sea o no constante. Sabemos además que el valor propio del Weyl de las métricas (5.10) es

$$\rho = -\frac{1}{6}(X + Y)^3$$

Entonces $dX = 0$ o $dY = 0$ si, y sólo si, el gradiente de ρ está contenido en el 2-plano principal espacial o temporal respectivamente, es decir, si $U(d\rho) = 0$ o $*U(d\rho) = 0$. Por otra parte, un cálculo directo, teniendo en cuenta las expresiones de ρ y de g , demuestra que, si alguna de las curvaturas, digamos X , es constante, entonces ésta puede calcularse como

$$X = (6\rho)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{9} g(d\ln\rho, d\ln\rho) - 2\rho \right)$$

Con lo que el signo de ese escalar nos determina el signo de la curvatura cuando ésta sea constante. Como tenemos determinados proyectores sobre las 2-formas principales en el capítulo 2, las condiciones anteriores caracterizan ya de modo intrínseco las soluciones. Pero veremos ahora que podemos reescribir los resultados anteriores explícitamente en términos del propio tensor de Weyl. Para ello, si tenemos en cuenta que para cualquier métrica de tipo D y valores propios reales el tensor de Weyl está dado por (3.16), obtenemos que

$$*W = 3\rho U \tilde{\otimes} *U + \rho\eta$$

Entonces,

$$*W(d\rho; d\rho) = U(d\rho) \tilde{\otimes} *U(d\rho)$$

Por lo tanto, el que alguna de las curvaturas sea constante, es equivalente a que la expresión anterior sea cero, y la no nulidad del invariante anterior nos da una caracterización de las C-métricas. Si $*W(d\rho; d\rho) = 0$, es porque el gradiente del valor propio está contenido en uno de los 2-planos principales. Para decidir en cuál de ellos, consideremos de nuevo el tensor S dado por (3.17). Entonces, se tiene que la forma cuadrática

$$Q \equiv S(d\rho; d\rho) = U(d\rho) \otimes U(d\rho) - *U(d\rho) \otimes *U(d\rho)$$

es semidefinida negativa si, y sólo si, $U(d\rho) = 0$, y semidefinida positiva si $*U(d\rho) = 0$. Luego el signo de esta forma cuadrática distingue entre las A y las B-métricas. Esta condición puede comprobarse de forma sencilla (cuando ya tenemos que es semidefinida) calculando la traza de Q con cualquier métrica elíptica asociada a g . Reunimos todos estos resultados en la siguiente proposición.

Proposición 43 *Sea g una métrica de tipo D con autovalores reales (caracterizadas en el lema 13) y de Ricci nulo. Consideremos los concommitantes de g*

$$\alpha \equiv \frac{1}{9}g(d\ln\rho, d\ln\rho) - 2\rho, \quad P \equiv *W(d\rho; d\rho), \quad Q \equiv S(d\rho; d\rho)$$

y sea x un vector unitario temporal arbitrario. Entonces

1. g es una C-métrica si $P \neq 0$.
2. g es una A-métrica si $P = 0$ y $2Q(x, x) + \text{tr}Q > 0$. Más aún, g es de tipo A_1 , A_2 o A_3 si $\alpha > 0$, $\alpha < 0$ o $\alpha = 0$ respectivamente.
3. g es una B-métrica si $P = 0$ y $2Q(x, x) + \text{tr}Q < 0$. Más aún, es de tipo B_1 , B_2 o B_3 si $\alpha > 0$, $\alpha < 0$ o $\alpha = 0$ respectivamente.

b) La A_1 métrica tiene simetría esférica, y por tanto, es la métrica de Schwarzschild. Será este el caso que analicemos más detenidamente, aunque resultados similares pueden obtenerse para el resto de métricas. La A_1 métrica aparece cuando la curvatura Y de la métrica elíptica h es constante y positiva. Sabemos que en este caso las constantes C y D que aparecen al integrar las ecuaciones de vacío están dadas por

$$C = -Y^2; \quad D = -\frac{2}{3}Y^3$$

Además, como h es de curvatura constante positiva, es homotética a la métrica de la esfera, es decir

$$h = \frac{1}{Y}d\Omega^2; \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2$$

Métricas de tipo D

Entonces, tenemos que

$$\frac{1}{3}X^3 + CX + D = \frac{1}{3}(X + Y)^2(X - 2Y)$$

Con lo que la expresión (5.10) para g queda como

$$g = \frac{-3}{(X + Y)^4(X - 2Y)}dX^2 + \frac{X - 2Y}{3}dT^2 + \frac{1}{Y(X + Y)^2}d\Omega^2$$

Haciendo el cambio de coordenadas $r = \frac{1}{Y^{\frac{1}{2}}(X+Y)}$, resulta

$$g = -\frac{3Y^{\frac{3}{2}}r - 1}{3Y^{\frac{3}{2}}r}(YdT)^2 + \frac{3Y^{\frac{3}{2}}r}{3Y^{\frac{3}{2}}r - 1}dr^2 + r^2d\Omega^2$$

Redefiniendo $t = \sqrt{Y}T$, se tiene

$$g = -\left(1 - \frac{1}{3Y^{\frac{3}{2}}r}\right)dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3Y^{\frac{3}{2}}r}\right)}dr^2 + r^2d\Omega^2$$

Es decir, g es la métrica de Schwarzschild con masa $m = \frac{1}{6}Y^{-\frac{3}{2}}$. Además, el Killing integrable del 2-plano v está en la dirección $U(d\rho)$. Teniendo en cuenta la expresión de la forma cuadrática Q que proyecta sobre la dirección del Killing, se tiene

Teorema 9 Sean $Ric(g)$ y $W \equiv W(g)$ los tensores de Ricci y de Weyl de una métrica espacio-temporal g , y consideremos los concomitantes de la métrica definidos por

$$\rho \equiv -\left(\frac{1}{12}trW^3\right)^{\frac{1}{3}}; \quad \alpha \equiv \frac{1}{6}g(d\ln\rho, d\ln\rho) - 2\rho; \quad S \equiv \frac{1}{3\rho}(W - \frac{1}{2}\rho g \wedge g)$$

$$P \equiv *W(d\rho, \cdot, d\rho, \cdot), \quad Q \equiv S(d\rho, \cdot, d\rho, \cdot)$$

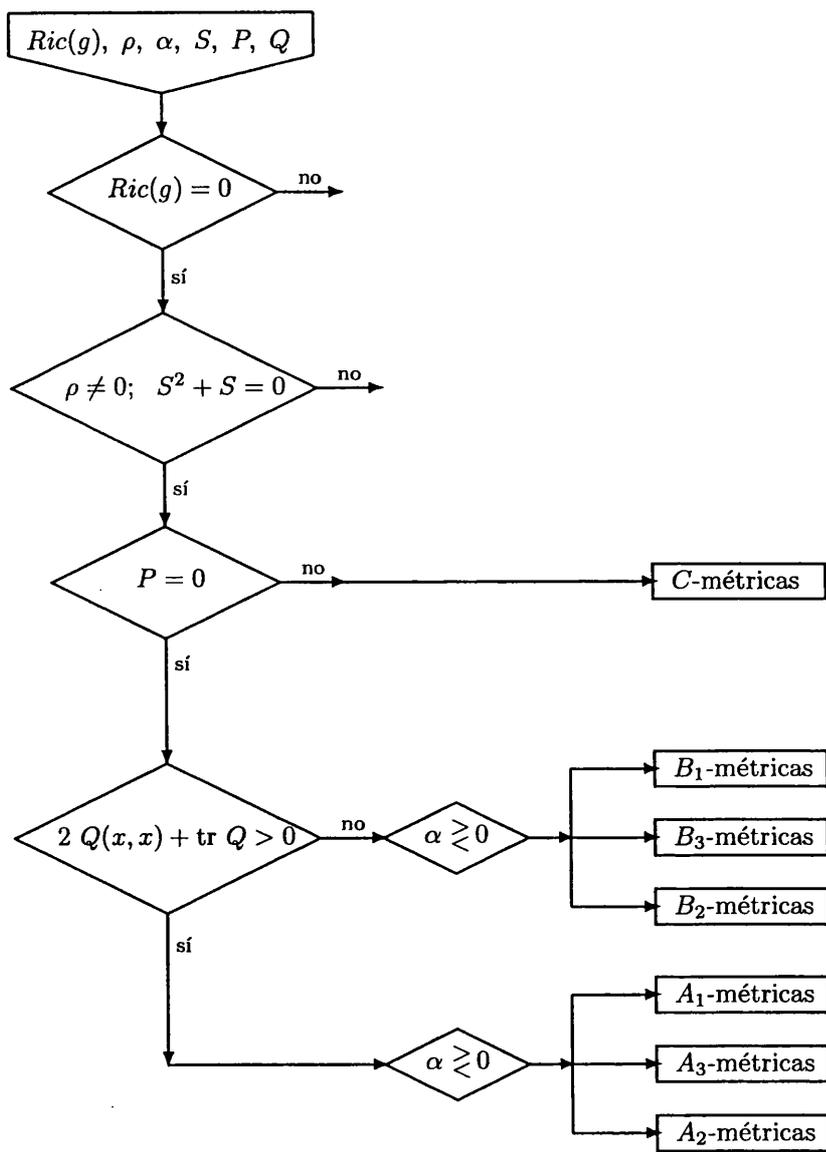
Las condiciones necesarias y suficientes para que g sea la solución de Schwarzschild son

$$Ric(g) = 0, \quad \rho \neq 0, \quad S^2 + S = 0$$

$$P = 0, \quad 2Q(x, x) + trQ > 0, \quad \alpha > 0$$

donde x es un vector temporal arbitrario. Además, la masa de Scharzschild asociada es $m = \rho\alpha^{-\frac{3}{2}}$. El campo de Killing contenido en el 2-plano temporal principal del Weyl está dado por $\xi = \rho^{-\frac{4}{3}} \frac{Q(x)}{\sqrt{Q(x,x)}}$.

d) Presentamos a continuación un algoritmo que resume los resultados obtenidos y destaca su carácter intrínseco. Los elementos que aparecen en él, están dados en el lema 13 y en la proposición 43.



5.4 Métricas de tipo D y Ricci nulo: Simetrías

a) Vamos a estudiar las simetrías de las soluciones de vacío y de tipo D. Probaremos a continuación que, para $Ric = 0$, la 1-forma $\delta\mathcal{U}$ tiene la dirección de un campo de Killing. Del formalismo de Cartan complejo sabemos que las dos primeras ecuaciones de estructura (4.3), que son equivalentes a las identidades de Ricci para \mathcal{U} , se escriben:

$$dA = C \wedge B + i\sqrt{2}\alpha\mathcal{U}_3; \quad dB = A \wedge C - i\sqrt{2}\alpha\mathcal{U}_2 \quad (5.17)$$

Teniendo en cuenta la relación (5.4), estas dos ecuaciones determinan $d(\ln\alpha \times \mathcal{U}_3)$ y $d(\ln\alpha \times \mathcal{U}_2)$. Como además $d(\ln\alpha) = 0$, podemos usar el lema 27 y obtener $\nabla(\ln\alpha \times \mathcal{U}_1) + {}^t\nabla(\ln\alpha \times \mathcal{U}_1)$. Teniendo en cuenta la relación (5.5) entre $\delta\mathcal{U}$ y $d\ln\alpha \times \mathcal{U}_1$, se obtiene que

$$\nabla(\delta\mathcal{U}) + {}^t\nabla(\delta\mathcal{U}) = \frac{1}{3}\delta\mathcal{U} \otimes \tilde{\otimes} d\ln\alpha \quad (5.18)$$

Por lo tanto, es inmediato probar que

$$X = \alpha^{-\frac{1}{3}} \delta\mathcal{U} \quad (5.19)$$

es un campo de Killing complejo, y, por lo tanto, sus partes real e imaginaria son campos de Killing reales. Si tenemos en cuenta las relaciones (5.4) y (5.5), se tiene

Proposición 44 *Sea g de Tipo D y de Ricci nulo. Si α es el valor propio doble del Weyl y \mathcal{U} la 2-forma principal, entonces el campo*

$$X = d(\alpha^{-\frac{1}{3}}) \times \mathcal{U} \quad (5.20)$$

es un campo de Killing.

Teniendo en cuenta la relación (5.6) entre α y ρ y θ , podemos escribir la parte real y la parte imaginaria de ese campo de Killing complejo $X = X_1 + iX_2$, y obtener dos campos de Killing reales. Notar que aún no hemos probado que exista un G_2 , ya que la parte real y la imaginaria podrían ser colineales. Volveremos sobre esto un poco más adelante. Lo que sí es claro es que si $X_1 \wedge X_2 \neq 0$, entonces, como ambos campos están contruidos con invariantes, se tiene $[X_1, X_2] = 0$. Es decir, se tiene

Corolario 6 *Sea g una solución de vacío y de tipo D, $\alpha \equiv e^{-3\rho+3i\theta}$ el valor propio doble del Weyl y \mathcal{U} la 2-forma principal. Entonces, los campos*

$$X_1 = e^\rho[\cos\theta \xi_1 - \sin\theta \xi_2]; \quad X_2 = e^\rho[\sin\theta \xi_1 + \cos\theta \xi_2] \quad (5.21)$$

son dos campos de Killing, donde hemos denotado

$$\xi_1 = U(d\rho) - *U(d\theta), \quad \xi_2 = U(d\theta) + *U(d\rho) \quad (5.22)$$

Además $[X_1, X_2] = 0$, con lo que si son independientes generan un G_2 conmutativo.

Podemos obtener otra consecuencia inmediata de la proposición anterior. Como ρ y θ son invariantes, $d\rho$ y $d\theta$ son ortogonales a cualquier campo de Killing. Si imponemos $(X_1, d\rho) = 0 = (X_1, d\theta)$, se obtiene

$$\cos\theta U(d\rho, d\theta) - \operatorname{sen}\theta *U(d\rho, d\theta) = 0$$

$$\operatorname{sen}\theta U(d\rho, d\theta) + \cos\theta *U(d\rho, d\theta) = 0$$

Con lo que siempre se verifica que $U(d\rho, d\theta) = 0$, $*U(d\rho, d\theta) = 0$. Es decir, las proyecciones a cada uno de los 2-planos principales de $d\rho$ y $d\theta$ son colineales. En concreto, se tiene

Corolario 7 *Si g es de tipo D y de Ricci nulo, entonces*

$$U(d\rho, d\theta) = 0 = *U(d\rho, d\theta)$$

donde $e^{-3\rho}$ y 3θ son el módulo y el argumento del valor propio del Weyl.

b) Teniendo en cuenta la expresión (5.21), es inmediato calcular el producto exterior de los dos campos de Killing y se obtiene

$$X_1 \wedge X_2 = 2e^{2\rho}\xi_1 \wedge \xi_2$$

donde ξ_1 y ξ_2 están dados en (5.22). Entonces los dos campos de Killing son dependientes si, y sólo si, $\xi_1 \wedge \xi_2 = 0$. Esta condición admite las soluciones siguientes

- $\xi_2 = 0$. Esta condición equivale a que $U(d\theta) = 0$ y $*U(d\rho) = 0$. Además tenemos que $X_1 = e^\rho \cos \theta \xi_1$, $X_2 = e^\rho \operatorname{sen} \theta \xi_1$, son campos de Killing colineales, y por lo tanto difieren en una constante, es decir, θ es constante. Luego tenemos $d\theta = 0$ y además $*U(d\rho) = 0$, con lo que la métrica es de clase D[01, 00] y teniendo en cuenta la proposición 42, es una de las A-métricas que admiten un G_4 .

- $\xi_1 = 0$. Ahora se tiene que $d\theta = 0$ y que $U(d\rho) = 0$. Entonces g es de Clase D[00, 01] y recordando la proposición 42, es una de las B-métricas.

- Si $\xi_1 = 0 = \xi_2$, los valores propios del Weyl tendrían que ser constantes, y por lo tanto g sería una métrica producto 2 + 2 con lo que si es de Ricci nulo, es la métrica plana.

- Supongamos entonces que ninguno de los campos ξ_a son cero, pero que $\xi_1 \wedge \xi_2 = 0$. Desarrollando esta expresión, llegamos a que es equivalente a

$$v(d\rho) \wedge h(d\rho) + v(d\theta) \wedge h(d\theta) = 0$$

Entonces existe una función $\Omega \neq 0$ de manera que $\xi_2 = \Omega \xi_1$. Teniendo en cuenta la expresión (5.22), se verifica

$$U(d\theta) = \Omega U(d\rho); \quad *U(d\theta) = -\frac{1}{\Omega} *U(d\rho) \quad (5.23)$$

Métricas de tipo D

y por lo tanto de (5.21) obtenemos para los Killings la expresión

$$X_1 = e^\rho (\cos \theta - \Omega \operatorname{sen} \theta) \xi_1; \quad X_2 = e^\rho (\operatorname{sen} \theta + \Omega \cos \theta) \xi_1$$

Como deben diferir en una constante, se tiene que existe una constante k de manera que

$$\Omega = \frac{\cos \theta - k \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta + k \cos \theta} \quad (5.24)$$

Para el análisis de este caso, hemos recurrido al formalismo real. Las condiciones de que la estructura principal del Weyl (v, h) sea umbilical, y minimal e integrable salvo el gradiente del valor propio del Weyl (5.5) se escriben para v como

$$\nabla v = -v \overset{23}{\otimes} h(d\rho) - U \overset{23}{\otimes} *U(d\theta) + h \overset{23}{\otimes} v(d\rho) + *U \overset{23}{\otimes} U(d\theta) \quad (5.25)$$

donde $\overset{23}{\otimes}$ indica el producto tensorial simetrizado en los dos últimos índices. Si tenemos en cuenta que estamos imponiendo que el Ricci sea cero, es decir, que el Riemann coincida con el Weyl y que éste sea de tipo D con valor propio $e^{-3\rho+3i\theta}$, las identidades de Ricci para v se expresan como

$$\begin{aligned} h \times (\nabla d\theta) \times U - *U \times (\nabla d\rho) \times v &= h(d\rho) \otimes U(d\theta) - \\ &- *U(d\theta) \otimes v(d\theta) + *U(d\rho) \otimes v(d\rho) + h(d\theta) \otimes U(d\rho) \\ h \times (\nabla d\rho) \times h &= - *U(d\theta) \otimes *U(d\theta) - h(d\rho) \otimes h(d\rho) + A h \\ h \times (\nabla d\theta) \times h &= *U(d\rho) \otimes *U(d\theta) - h(d\theta) \otimes h(d\rho) + B h \\ v \times (\nabla d\rho) \times v &= -v(d\rho) \otimes v(d\rho) + U(d\theta) \otimes U(d\theta) + C v \\ v \times (\nabla d\theta) \times v &= -U(d\theta) \otimes U(d\rho) - v(d\rho) \otimes v(d\theta) + D v \\ e^{-3\rho} \cos 3\theta &= -A - C - g(d\rho, d\rho) \\ e^{-3\rho} \operatorname{sen} 3\theta &= -B - D - g(d\rho, d\theta) \end{aligned} \quad (5.26)$$

donde hemos denotado

$$\begin{aligned} 2A &= \Delta_h \rho + h(d\rho, d\rho) + h(d\theta, d\theta); & 2B &= \Delta_h \theta \\ 2C &= \Delta_v \rho + v(d\rho, d\rho) + v(d\theta, d\theta); & 2D &= \Delta_v \theta \end{aligned}$$

Antes de continuar con el análisis de este caso, recordemos que, por el corolario 7 las proyecciones de los gradientes del módulo y del argumento a cada 2-plano son colineales. Entonces, existen dos funciones α y β de manera que

$$d\theta = \alpha v(d\rho) + \beta h(d\rho) \equiv (\alpha - \beta) v(d\rho) + \beta d\rho$$

Si calculamos la diferencial exterior de la expresión anterior se deduce que

$$(\alpha - \beta)d(v(d\rho)) = d\rho \wedge d\beta + v(d\rho) \wedge d(\alpha - \beta)$$

Y si utilizamos (5.25) para sustituir la derivada covariante de v , se llega a que si $\alpha - \beta \neq 0$, tenemos

$$\begin{aligned} (\nabla d\rho) \times v - v \times (\nabla d\rho) &= \frac{1}{\alpha - \beta} (d\rho \wedge d\beta + v(d\rho) \wedge d(\alpha - \beta)) + \\ &+ 2v(d\rho) \wedge h(d\rho) + (\alpha + \beta) U(d\rho) \wedge *U(d\rho) \end{aligned}$$

De esa ecuación podemos calcular la proyección mixta vh de la Hessiana de ρ , y usando que $\nabla d\rho$ es simétrica y las ecuaciones (5.26), obtener $\nabla d\rho$.

No entraremos en el análisis de estas expresiones en general, pero las utilizaremos en el caso de que los campos de Killing que hemos determinado sean colineales. Teniendo en cuenta (5.23), este caso corresponde a $\alpha = -\frac{1}{\beta} = \Omega$, donde Ω está dado en (5.24), y por lo tanto verifica $d\Omega = -(1 + \Omega^2)d\theta$. Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} \nabla U(d\rho) + {}^t\nabla U(d\rho) &= \frac{1}{1+\Omega^2} [\Omega(\Omega^2 + 3)d\theta - (3\Omega^2 + 1)d\rho] \tilde{\otimes} U(d\rho) + \\ &+ \frac{1}{1+\Omega^2} \left[\frac{2}{\Omega} d\rho + 2d\theta \right] \tilde{\otimes} *U(d\rho) \\ \nabla *U(d\rho) + {}^t\nabla *U(d\rho) &= \frac{1}{1+\Omega^2} \left[-(\Omega^2 + 3)d\theta - \frac{(3\Omega^2 + 1)}{\Omega} d\rho \right] \tilde{\otimes} *U(d\rho) + \\ &+ \frac{1}{1+\Omega^2} [2\Omega^3 d\rho - 2\Omega^2 d\theta] \tilde{\otimes} U(d\rho) \end{aligned}$$

Vamos a probar que existe otro Killing en el 2-plano que generan $U(d\rho)$, $*U(d\rho)$. Para ello, nos preguntamos si existen dos funciones λ y ϕ , de manera que el campo $\Psi \equiv \phi U(d\rho) + *U(d\rho)$ sea solución de la ecuación

$$\nabla \Psi + {}^t\nabla \Psi = d\lambda \tilde{\otimes} \Psi$$

Un cálculo directo prueba que $\phi = \Omega$, $\lambda = -\rho - \int \frac{1}{\Omega} d\theta$ es solución y nos lleva al Killing conocido X_1 . Pero $\phi = -\Omega^3$ y $\lambda = -3\rho - \int (2\Omega + \frac{1}{\Omega}) d\theta$ es otra solución. El Campo de Killing asociado a esta última es

$$Y = e^{-\lambda} \left(-\Omega^3 U(d\rho) + *U(d\rho) \right)$$

que podemos reescribir como

$$Y = e^{-3\rho} (\cos \theta - k \operatorname{sen} \theta) \left[U(d\theta) + \frac{1}{\Omega} *U(d\theta) \right] \quad (5.27)$$

Si calculamos el producto exterior de estos campos se tiene

$$X_1 \wedge Y = \Omega(1 + \Omega^2) U(d\rho) \wedge *U(d\rho)$$

y por lo tanto son independientes siempre que $d\rho$ tenga proyección no nula a los dos 2-planos principales. Reuniendo los resultados hasta aquí, hemos probado que todo espacio de tipo D y de Ricci nulo en el que $U(d\rho) \wedge *U(d\rho) \neq 0$ admiten dos campos de Killing que conmutan ya que están contruidos con invariantes. Al integrar las ecuaciones Einstein para el caso de Ricci nulo, veremos que si los campos contruidos hasta aquí son colineales, el espacio admite un G_4 y es una de las A o B métricas de Ehlers y Kundt, o las generalizaciones con uno de los 2-planos no integrables (métricas de NUT [67])

Proposición 45 *Sea g una métrica de Ricci nulo y de tipo D y sea $e^{-3\rho+3i\theta}$ el valor propio doble del Weyl. Entonces, los campos X_1 y X_2 dados en (5.21) son dos campos de Killing que conmutan.*

Estos campos son independientes y por tanto forman un G_2 conmutativo si, y sólo si, $F \equiv v(d\rho) \wedge h(d\rho) + v(d\theta) \wedge h(d\theta) \neq 0$.

Además si $F = 0$ pero $v(d\theta) \wedge h(d\theta) \neq 0$, el campo X_1 y el campo Y dado en (5.27) son dos campos de Killing independientes que conmutan.

d) En general, en un espacio de tipo D, no podemos determinar una única base ortonormal $\{U_i\}$ ya que todo el 2-plano ortogonal a U_1 es propio. Pero si alguno de los invariantes o si alguna dirección invariante tiene proyección no nula a uno de los 2-planos principales, esta dirección y su ortogonal dentro del 2-plano, determinan una única base en ese 2-plano. Si ocurre lo mismo en el otro, podemos tener una única base ortonormal privilegiada y adaptada a la estructura principal, y por lo tanto una única base $\{U_i\}$ privilegiada. Si esta base se construye con invariantes, además cualquier campo de Killing debe dejarla invariante, y, lo mismo que sucede en Tipo I, II o III, la dimensión del grupo de isometrías coincide con la dimensión de las órbitas, y la derivada covariante del Killing está determinada por las propias componentes del Killing. En concreto, supongamos que g es de Tipo D y de Ricci nulo, y supongamos que $U(d\rho)$ y $*U(d\rho)$ son no nulos. Las direcciones $\{v(d\rho), U(d\rho), h(d\rho), *U(d\rho)\}$, determinan una única b.o.n. $\{e_\alpha\}$, y por tanto una única base $\{U_i\}$ que debe ser invariante por cualquier campo de Killing. Por lo tanto la expresión para $\nabla\xi$ que vimos en el capítulo del tipo I en términos de los productos por las 1-formas complejas de conexión siguen siendo válidas. Si recordamos además que de (5.4) dos de las 1-formas de la conexión son $A \propto d\alpha \times U_3$, $B \propto d\alpha \times U_2$ y que el Killing que hemos determinado en (5.20) es $X \propto d\alpha \times U$, se verifica que

$$(X, A) = 0 = (X, B)$$

y por lo tanto es ortogonal a dos de las 1-formas de conexión complejas. Entonces es propio del Weyl autodual, y la condición para que defina un Killing real con esta propiedad es que

$$X \wedge \bar{X} = 0$$

Veremos más adelante que la métrica de Kerr satisface esa condición, con lo que el único campo de Killing que define X será un campo de Killing con derivada covariante principal del Weyl [60].

5.5 Soluciones de vacío y $d\theta \neq 0$

a) Todas las soluciones de tipo D y divergencia del Weyl cero satisfacen (5.25), donde $\alpha + i\beta \equiv e^{-3\rho+3i\theta}$ es el valor propio doble del Weyl y (v, h) la estructura principal. Esas condiciones se traducen en que la estructura principal es umbilical (de acuerdo con el teorema de Goldberg y Sachs) y minimal e integrable *salvo* el gradiente del valor propio del Weyl. Teniendo en cuenta cómo varía por conformidad la segunda forma fundamental (3.7), podemos conseguir que la estructura principal de una métrica conforme sea también minimal. Más precisamente, se cumple

Lema 39 *Si \tilde{g} es de tipo D con valor propio doble $e^{-3\rho+3i\theta}$ y de divergencia del Weyl nula, entonces la métrica $g = e^{-2\rho}\tilde{g}$ es de tipo D con valor propio doble $e^{-\rho+3i\theta}$ y la estructura principal verifica*

$$\nabla v = -U \overset{23}{\otimes} *U(d\theta) + *U \overset{23}{\otimes} U(d\theta) \quad (5.28)$$

Este primer resultado es el equivalente al que vimos en el caso de valores propios reales y que nos permitió escribir aquellas métricas como conformes a métricas producto. Aquí, como no tenemos la integrabilidad de ninguno de los 2-planos, en general no podemos adaptar coordenadas. Por ello trabajaremos en una tetraada adaptada a la estructura. El primer paso que dimos para valores propios reales fue el de probar que todas las métricas producto son de tipo D o O y calculamos el valor propio del Weyl para expresar el valor propio del Weyl (y por lo tanto la propia función de conformidad) en términos de invariantes de la métrica producto. Sólo nos interesan aquí las soluciones de vacío, y por lo tanto admiten un G_2 con órbitas generadas por $U(d\theta)$ y $*U(d\theta)$ en el caso en que $U(d\theta) \wedge *U(d\theta) \neq 0$.

b) Empezaremos probando que $U(d\theta)$ no es isótropo. Si lo fuera, los campos de Killing formarían un grupo con órbitas nulas. Llamemos $l = U(d\theta)$, y completemos una tétrada isótropa real $\{l, k, \theta^2\theta^3\}$, donde k es el otro vector principal del Weyl, y θ^3 está en la dirección de $*U(d\theta)$. El 2-plano isótropo generado por l y θ^3 está generado por vectores de Killing, que además dejan invariantes a la tetraada construida. Más precisamente, si denotamos

$$*U(d\theta) = \pi\theta^3, \quad U(d\theta) = l$$

estas condiciones junto con las ecuaciones (5.28) se escriben

$$\begin{aligned}\nabla l &= \omega l \otimes l + \mu \theta^2 \otimes l + \pi l \tilde{\otimes} \theta^3 \\ \nabla k &= -\omega l \otimes k - \mu \theta^2 \otimes k - \pi \theta^3 \tilde{\otimes} k + \theta^2 \wedge \theta^3 \\ \nabla \theta^2 &= -l \tilde{\otimes} \theta^3 + \nu \theta^3 \otimes \theta^3 \\ \nabla \theta^3 &= \pi l \wedge k + l \tilde{\otimes} \theta^2 - \nu \theta^3 \otimes \theta^2\end{aligned}$$

Si imponemos que el tensor de Weyl sea de tipo D con U la 2-forma principal y escribimos las identidades de Ricci para la base anterior se prueba que $\pi = 0$, y que también es nula la parte imaginaria del valor propio del Weyl. Los valores propios son entonces necesariamente reales (en realidad se llega a las B-3 métricas), con lo que se contradice el que $d\theta \neq 0$. Podemos suponer entonces que la proyección del gradiente de θ al 2-plano principal no es isótropa.

c) En lo que sigue supondremos que $U(d\theta)$ es temporal, aunque veremos que los resultados que obtengamos sirven para el caso de que sea espacial y por tanto no dependen de esta hipótesis inicial, igual que ocurría con las soluciones de valores propios reales. Teniendo en cuenta los resultados que hemos probado sobre estructuras y que resumimos en la tabla del capítulo 3, se verifica

Lema 40 *Sea $g = v + h$ es una métrica casi-producto $2 + 2$ donde la estructura (v, h) es umbilical, minimal, y es integrable salvo el gradiente de una función θ (i.e. verifica (5.28)). Supongamos que $U(d\theta)$ es temporal. Entonces, si consideramos la tetrad ortonormal $\{e_\alpha\}$ adaptada a las direcciones $\{U(d\theta), v(d\theta), h(d\theta), *U(d\theta)\}$, ésta verifica las reglas de conmutación:*

$$\begin{aligned}[e_0, e_1] &= X e_0 + Y e_1 + 2e_2(\theta)e_3 \\ [e_2, e_3] &= A e_2 + B e_3 + 2e_1(\theta)e_0 \\ [e_0, e_2] &= u e_1 + v e_3 \\ [e_1, e_2] &= u e_0 + n e_3 \\ [e_1, e_3] &= p e_0 - n e_2 \\ [e_0, e_3] &= p e_1 - v e_2\end{aligned}$$

Si la proyección de $d\theta$ a algún 2-plano es cero, cualquier base ortonormal de es 2-plano satisface esas condiciones con la proyección correspondiente de $d\theta$ nula. Aunque no lo probaremos aquí porque necesitamos un resultado un poco menos general (para las soluciones que nos interesan tenemos garantizada la existencia de simetrías), todas las métricas que verifiquen el lema anterior son de tipo D (o O) igual que ocurre con las métricas producto. Pero para lo que sigue sólo nos interesan las que son conformes a soluciones de Ricci cero. Comenzaremos estudiando el caso en que $d\theta$

tiene proyección no nula a los dos 2-planos principales. Después estudiaremos lo que ocurre en los más degenerados, es decir, cuando alguno de los 2-planos principales sea integrable.

5.5.1 Soluciones de clase D[11, 11]

a) Si $d\theta$ tiene proyección no nula a los dos 2-planos principales, las soluciones de vacío admiten un G_2 cuyas órbitas coinciden con el 2-plano generado por e_0 y e_3 . Además, la métrica minimal conforme del lema 39 es de clase D_{100}^{100} . Como la conformidad entre ambas también depende de invariantes, la métrica minimal admite también dos campos de Killing generados por e_0 y e_3 , y por lo tanto $[e_0, e_3] \wedge e_0 \wedge e_3 = 0$, con lo que $p = 0 = v$. Además el gradiente de cualquier invariante es ortogonal a las órbitas del grupo con lo que $e_0(e_1(\theta)) = 0$ y por lo tanto $[e_0, e_1](\theta) = 0$. Luego $Y = 0$ en este caso. El mismo razonamiento con $[e_2, e_3]$ nos lleva a que $A = 0$. Si continuamos con el resto de conmutadores, se demuestra

Lema 41 *Sea \hat{g} una métrica de tipo D con valor propio doble $e^{-3\rho+3i\theta}$ de clase D[11, 11] y tal que el 2-plano $\langle U(d\theta), *U(d\theta) \rangle$ está generado por campos de Killing. Entonces la métrica $g = e^{-2\rho}\hat{g}$ es de clase D_{100}^{100} y la tetrad principal adaptada a las direcciones $\{U(d\theta), v(d\theta), h(d\theta), *U(d\theta)\}$ verifica*

$$\begin{aligned} [e_0, e_1] &= X e_0 + 2e_2(\theta)e_3 \\ [e_2, e_3] &= B e_3 + 2e_1(\theta)e_0 \\ [e_0, e_2] &= 0; & [e_1, e_2] &= 0 \\ [e_1, e_3] &= 0; & [e_0, e_3] &= 0 \end{aligned}$$

Además, las identidades de Jacobi implican que

$$\begin{aligned} e_1 e_1(\theta) &= X e_1(\theta); & e_2(X) &= -4 e_1(\theta)e_2(\theta) \\ e_2 e_2(\theta) &= -B e_2(\theta); & e_1(B) &= 4 e_1(\theta)e_2(\theta) \end{aligned} \quad (5.29)$$

b) Lo que haremos a continuación es encontrar un sistema de coordenadas adaptado a las propiedades de la estructura. Para ello, como $[e_1, e_2] = 0$, existen dos funciones u y w de manera que $e_1 = \partial_u$, $e_2 = \partial_w$. Además, de las relaciones (5.29) sabemos que

$$X = \partial_u \ln |\partial_u \theta|; \quad B = -\partial_w \ln |\partial_w \theta|; \quad \partial_w X = -\partial_u B$$

En consecuencia,

$$\partial_{uw} \ln \left| \frac{\partial_u \theta}{\partial_w \theta} \right| = 0$$

y por lo tanto podemos separar variables en la función $\ln \left| \frac{\partial_u \theta}{\partial_w \theta} \right|$, es decir

$$\ln \left| \frac{\partial_u \theta}{\partial_w \theta} \right| = \ln f(u) + \ln g(w)$$

Métricas de tipo D

Esta condición implica que

$$\frac{\partial_u \theta}{f(u)} = \partial_w \theta g(w)$$

Y redefiniendo las coordenadas $u \equiv u(F)$, $w \equiv w(G)$, tenemos

$$\partial_F \theta = \partial_G \theta$$

de donde se deduce que θ depende de $F + G$. Tenemos así que

$$\theta \equiv \theta(F + G); \quad e_1 = \alpha(F) \partial_F; \quad e_2 = \beta(G) \partial_G \quad (5.30)$$

Con esas coordenadas y denotando ' a la derivada respecto al argumento correspondiente en cada caso tenemos

$$\begin{aligned} e_1(\theta) &= \alpha\theta'; & e_1 e_1(\theta) &= \alpha(\alpha'\theta' + \alpha\theta'') \\ e_2(\theta) &= \beta\theta'; & e_2 e_2(\theta) &= \beta(\beta'\theta' + \beta\theta'') \\ X &= \alpha' + \alpha \frac{\theta''}{\theta'} & B &= \beta' + \beta \frac{\theta''}{\theta'} \end{aligned} \quad (5.31)$$

con lo que la segunda ecuación de (5.29) que es la última que nos queda por resolver queda como

$$\frac{\theta'''}{\theta'} - \frac{\theta'' \theta''}{\theta' \theta'} + 4\theta' \theta' = 0$$

Como la ecuación anterior no contiene a la variable independiente podemos reducir el orden de la misma y se obtiene una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Integrando esta ecuación y redefiniendo además las funciones F y G para eliminar dos de las constantes arbitrarias que aparecen en la integración y llamando x e y a las nuevas funciones de F y G respectivamente, se tiene

$$\tan \theta = \frac{x - ky}{y + kx}$$

Por lo tanto, hasta aquí hemos obtenido las siguientes expresiones:

$$e_1 = \alpha(x) \partial_x; \quad e_2 = \beta(y) \partial_y; \quad \tan \theta = \frac{x - ky}{y + kx}$$

Para terminar de adaptar coordenadas a una tetrada que satisfaga las reglas de conmutación del lema (41), buscamos dos campos ψ_1 y ψ_2 en el plano generado por e_0 y e_3 que conmuten entre sí y con e_1 y e_2 , y se obtiene que

$$\psi_1 = \frac{1}{x^2 + y^2} (\alpha e_0 + \beta e_3); \quad \psi_2 = \frac{\alpha}{x^2} e_0 - \frac{\beta}{y^2} e_3$$

satisfacen esas condiciones. Así hemos encontrado un sistema de coordenadas $\{x, y, z, t\}$, de manera que

$$e_0 = \frac{1}{\alpha} (\partial_t + x^2 \partial_z), \quad e_3 = \frac{1}{\beta} (-\partial_t + y^2 \partial_z)$$

Se ha probado entonces:

Lema 42 Si una tetraada $\{e_\alpha\}$ verifica las condiciones del lema 41, existen coordenadas $\{t, x, y, z\}$ y dos funciones $\alpha(x)$, $\beta(y)$, tales que

$$\begin{aligned} e_0 &= \frac{1}{\alpha} (\partial_t + x^2 \partial_z); & e_1 &= \alpha \partial_x \\ e_2 &= \beta \partial_y; & e_3 &= \frac{1}{\beta} (-\partial_t + y^2 \partial_z) \end{aligned}$$

y además $\tan \theta = \frac{x - ky}{y + kx}$.

c) La expresión anterior para los vectores $\{e_\alpha\}$ es válida siempre que se satisfagan las condiciones del lema 41 para una función θ que sea invariante por los campos de Killing. Ahora bien, para las métricas que nos interesan, θ no es un función arbitraria, sino que queremos que 3θ sea exactamente el argumento del valor propio del Weyl (que no cambia por una transformación de conformidad). Lo que haremos será calcular el Riemann de las métricas del lema 41 utilizando el formalismo de Cartan. Este paso es equivalente al que en las métricas producto nos dice que el valor propio del Weyl es proporcional a la suma de las curvaturas. Para ello, si traducimos la expresión de los conmutadores a las derivadas covariantes de la base dual $\{\theta_\alpha\}$, se tiene

$$\begin{aligned} \nabla \theta^0 &= -X \theta^0 \otimes \theta^1 + e_2(\theta) \theta^1 \tilde{\otimes} \theta^3 + e_1(\theta) \theta^3 \wedge \theta^2 \\ \nabla \theta^1 &= -X \theta^0 \otimes \theta^0 + e_2(\theta) \theta^0 \tilde{\otimes} \theta^3 \\ \nabla \theta^2 &= -B \theta^3 \otimes \theta^3 + e_1(\theta) \theta^0 \tilde{\otimes} \theta^3 \\ \nabla \theta^3 &= B \theta^3 \otimes \theta^2 - e_1(\theta) \theta^0 \tilde{\otimes} \theta^2 + e_2(\theta) \theta^1 \wedge \theta^0 \end{aligned}$$

Y utilizando las ecuaciones de Cartan, se demuestra

Lema 43 Si un espacio-tiempo admite una tetraada $\{e_\alpha\}$ que verifica las relaciones de conmutación del lema 41, entonces es de tipo D con estructura principal (v, h) donde v es el 2-plano generado por $\{e_0, e_1\}$, y donde si denotamos $\mu + i\nu$ al valor propio doble del Weyl y $Q = \frac{1}{2}(\text{Ric} - \frac{R}{6}g)$,

Métricas de tipo D

se verifica

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{1}{6} (5e_2(\theta)e_2(\theta) - e_1(\theta)e_1(\theta) - e_2(B) + B^2 - 2e_1(X) - 2X^2) \\
 Q_{22} &= \frac{1}{6} (5e_1(\theta)e_1(\theta) - e_2(\theta)e_2(\theta) + 2 e_2(B) - 2 B^2 + e_1(X) + X^2) \\
 Q_{00} &= \frac{1}{6} (7 e_1(\theta)e_1(\theta) - 5 e_2(\theta)e_2(\theta) + e_2(B) - B^2 + 2 e_1(X) + 2X^2) \\
 Q_{33} &= \frac{1}{6} (5 e_1(\theta)e_1(\theta) - 7 e_2(\theta)e_2(\theta) + 2 e_2(B) - 2 B^2 + e_1(X) + X^2) \\
 Q_{12} &= 3e_1(\theta)e_2(\theta) \\
 Q_{03} &= -e_1e_2(\theta) \\
 Q_{01} &= Q_{02} = Q_{13} = Q_{23} = 0 \\
 \mu &= \frac{1}{6} (e_1(X) + X^2 - e_2(B) + B^2 - 4e_1(\theta)e_1(\theta) - 4e_2(\theta)e_2(\theta)) \\
 \nu &= e_1e_1(\theta) + e_2e_2(\theta)
 \end{aligned}$$



d) Como queremos que la métrica del lema anterior sea conforme a una de Ricci cero, y teniendo en cuenta que los valores propios de ambas métricas están relacionados como indica el lema 39, una condición necesaria para que esto ocurra es que el valor propio $\mu + i\nu$ de la métrica del lema 43 esté relacionado con el valor propio de la solución que buscamos por

$$\mu + i\nu = e^{-\rho+3i\theta}$$

Si imponemos entonces esta condición y tenemos presentes las ecuaciones (5.31), se obtiene una relación entre $\tan 3\theta$ y las derivadas de X , B y la propia θ . Derivando dos veces esa expresión respecto a x y dos veces respecto a y se obtiene que

$$(\alpha^2)^{iv} = (\beta^2)^{iv}$$

y por lo tanto esas derivadas deben ser constantes. Entonces α^2 y β^2 son polinomios de grado cuatro a lo sumo. Volviendo de nuevo a la ecuación para $\tan 3\theta$ se obtiene que los coeficientes de los polinomios están relacionados como sigue

$$\begin{aligned}
 \alpha^2 &= m x^4 + (3k^2 - 1)n x^3 + p x^2 + k(3 - k^2)q x + s \\
 \beta^2 &= m y^4 + k(3 - k^2)n y^3 - p y^2 + (3k^2 - 1)q y + s
 \end{aligned}$$

Si calculamos ahora $e^{-2\rho} \equiv \mu^2 + \nu^2$ se obtiene

$$e^{2\rho} = \frac{1}{(1+k^2)^3} \frac{x^2+y^2}{(nxy+q)^2}$$

donde $n^2 + q^2 \neq 0$. Recordemos que buscamos las métricas de vacío y de tipo D, es decir las conformes a las minimales con factor de conformidad $e^{2\rho}$. Teniendo en cuenta que hemos calculado el tensor $Q = \frac{1}{2} \left[Ric - \frac{R}{6} g \right]$ para la métrica minimal conforme, y usando que

$$\hat{g} = e^{2\rho} g \implies \hat{Q} = Q - \nabla d\rho + d\rho \otimes d\rho - \frac{1}{2} g(d\rho, d\rho) g$$

se deduce del lema 43 que

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{00} &= Q_{00} + X e_1(\rho) + \frac{1}{2} (e_1(\rho)e_1(\rho) + e_2(\rho)e_2(\rho)) = \frac{mq^2 + sn^2}{2} \hat{g}_{00} \\ \hat{Q}_{11} &= Q_{11} - e_1 e_1(\rho) + \frac{1}{2} (e_1(\rho)e_1(\rho) - e_2(\rho)e_2(\rho)) = -\frac{mq^2 + sn^2}{2} \hat{g}_{11} \\ \hat{Q}_{22} &= Q_{22} - e_2 e_2(\rho) + \frac{1}{2} (e_2(\rho)e_2(\rho) - e_1(\rho)e_1(\rho)) = -\frac{mq^2 + sn^2}{2} \hat{g}_{22} \\ \hat{Q}_{33} &= Q_{33} + B e_2(\rho) - \frac{1}{2} (e_1(\rho)e_1(\rho) + e_2(\rho)e_2(\rho)) = -\frac{mq^2 + sn^2}{2} \hat{g}_{33} \\ \hat{Q}_{03} &= Q_{03} - e_1(\rho) e_2(\theta) - e_1(\theta) e_2(\rho) = 0 \\ \hat{Q}_{12} &= Q_{12} - e_1 e_2(\rho) + e_1(\rho) e_2(\rho) = 0 \end{aligned}$$

Es decir,

$$\hat{Q} = -\frac{1}{2} (mq^2 + sn^2) \hat{g}$$

Luego la condición necesaria y suficiente para que \hat{g} sea solución de las ecuaciones de vacío es que las constantes satisfagan

$$mq^2 + sn^2 = 0$$

Hemos probado entonces

Lema 44 *Todas las métricas \hat{g} de tipo D y de Ricci nulo de la clase $D[11, 11]$, admiten un sistema de coordenadas (x, y, z, t) de manera que*

$$\begin{aligned} \hat{g} &= \frac{1}{(1+k^2)^3} \frac{1}{(nxy+q)^2} \left[\frac{-\alpha^2}{x^2+y^2} (y^2 dt + dz)^2 + \frac{x^2+y^2}{\alpha^2} dx^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta^2}{x^2+y^2} (-x^2 dt + dz)^2 + \frac{x^2+y^2}{\beta^2} dy^2 \right] \end{aligned}$$

con $mq^2 + sn^2 = 0$ y donde

$$\alpha^2 = m x^4 + (3k^2 - 1)n x^3 + p x^2 + k(3 - k^2)q x + s$$

$$\beta^2 = m y^4 + k(3 - k^2)n y^3 - p y^2 + (3k^2 - 1)q y + s.$$

Además el valor propio simple del Weyl es $e^{-3\rho+3i\theta}$, donde

$$tg\theta = \frac{x - ky}{y + kx}; \quad e^{2\rho} = \frac{1}{(1+k^2)^3} \frac{x^2 + y^2}{(nxy + q)^2}$$

Métricas de tipo D

e) Un cambio de coordenadas $(x, y, z, t) \rightsquigarrow (a\hat{x}, y = a\hat{y}, \frac{t}{a}, a\hat{z})$, no cambia la expresión de la métrica ni de los invariantes, pero modifica las constantes como $(\hat{m}, \hat{n}, \hat{p}, \hat{q}, \hat{s}) = (ma^2, na, p, \frac{q}{a}, \frac{s}{a^2})$. Además, como n o q son diferentes de cero y el cambio de x e y por sus inversas no cambia la expresión de la métrica pero intercambia p por q , podemos suponer que $q \neq 0$ y elegir a de manera que $\hat{q} = 1$. Por lo tanto la condición $mq^2 + sn^2 = 0$ implica que $m = -sn^2$. Redefiniendo además las constantes y las coordenadas z y t , podemos reabsorber el factor $\frac{1}{(1+k^2)^3}$ que aparece delante de la métrica. Se obtiene entonces el siguiente resultado.

Proposición 46 Si g es una solución de las ecuaciones de vacío, de tipo D, y de clase D[11, 11], entonces existen coordenadas (x, y, z, t) , de manera que

$$g = \frac{1}{(nxy + 1)^2} \left[-\frac{\alpha^2}{x^2 + y^2} (y^2 dt + dz)^2 + \frac{x^2 + y^2}{\alpha^2} dx^2 + \frac{\beta^2}{x^2 + y^2} (-x^2 dt + dz)^2 + \frac{x^2 + y^2}{\beta^2} dy^2 \right]$$

donde

$$\alpha^2 = -sn^2 x^4 + \frac{3k^2 - 1}{(1 + k^2)^3} nx^3 + px^2 + \frac{k(3 - k^2)}{(1 + k^2)^3} x + s$$

$$\beta^2 = -sn^2 y^4 + \frac{k(3 - k^2)}{(1 + k^2)^3} ny^3 - py^2 + \frac{3k^2 - 1}{(1 + k^2)^3} y + s$$

y donde el valor propio doble del Weyl es $e^{-3\rho + 3i\theta}$ siendo

$$\tan \theta = \frac{x - ky}{y + kx} \quad e^{2\rho} = \frac{1}{(1 + k^2)^3} \frac{x^2 + y^2}{(nxy + 1)^2}$$

La ecuación $mq^2 + sn^2 = 0$ nos dice que si $qn \neq 0$, entonces m y s tienen signos opuestos y puede hacerse un cambio de coordenadas $(x, y, z, t) \rightsquigarrow (a\hat{x}, y = a\hat{y}, \frac{t}{a}, a\hat{z})$ de manera que $\hat{s} = -\hat{m}$. Si además cambiamos y por $\hat{y} = \frac{1}{y}$ recuperamos la expresión de las C-métricas generalizadas que puede encontrarse en un trabajo de Weir y Kerr [87]. Por lo tanto la clase más general de las consideradas por estos autores, se obtiene de la proposición anterior si $n \neq 0$. Con nuestros resultados podemos interpretar geoméricamente el parámetro n de tres formas diferentes: la primera, mostrando su relación con la existencia de un tensor de Killing de orden 2, la segunda en términos de la posición relativa de los campos de Killing calculados en (5.21), y la tercera, en relación con el hecho de que la derivada covariante de un campo de Killing sea principal del Weyl.

f) La proposición 3.10 caracteriza el hecho de que una estructura 2+2 (v, h) sea la estructura definida por un tensor de Killing, en términos de las propiedades geométricas de los 2-planos. El hecho de que la divergencia del Weyl sea cero, garantiza la primera condición (umbilicidad de los 2-planos) y parte de la segunda, en concreto, el que la suma de las trazas de las segundas formas fundamentales sea una 1-forma cerrada (estructura definida por un tensor conforme Killing como vimos en el lema 34). Teniendo en cuenta que de (??) se tiene $\text{tr}(Q_v) = -2h(d\rho)$ y que $\text{tr}(Q_h) = -2v(d\rho)$, y teniendo en cuenta la expresión de ρ y las de v y h en la proposición 46, resulta inmediato comprobar

$$\text{dtr}Q_v + \text{tr}Q_v \wedge \text{tr}Q_h = \frac{-3n}{(nxy + 1)^2} dx \wedge dy$$

Por lo tanto, se tiene

Lema 45 *La estructura principal de las soluciones de la proposición 46 es la estructura definida por un tensor de Killing si, y sólo si, $n = 0$.*

Como en la literatura [22] [55], se llaman C-métricas generalizadas a las que no admiten un tensor de Killing, éstas se obtienen de nuestra forma canónica suponiendo $n \neq 0$.

La expresión (5.21) nos proporciona de forma intrínseca dos campos de Killing (no necesariamente independientes) de la métrica g . Teniendo en cuenta que el 2-plano principal temporal del Weyl de g es el generado por θ^0 y por θ^1 y que

$$\begin{aligned} \theta^1 &= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\alpha(nxy+1)} dx; & \theta^0 &= \frac{\alpha}{(nxy+1)\sqrt{x^2+y^2}} (dz + y^2 dt) \\ \theta^2 &= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\beta(nxy+1)} dy; & \theta^3 &= \frac{\beta}{(nxy+1)\sqrt{x^2+y^2}} (dz - x^2 dt) \end{aligned}$$

Podemos calcular explícitamente los campos de (5.21) y se obtiene

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{(1+k^2)^{-2}}{\sqrt{x^2+y^2}(nxy+1)} [\alpha(k+ny^2)\theta^0 + \beta(nx^2+k)\theta^3] \\ X_2 &= \frac{(1+k^2)^{-2}}{\sqrt{x^2+y^2}(nxy+1)} [\alpha(1-kny^2)\theta^0 - \beta(1+kx^2)\theta^3] \end{aligned} \quad (5.32)$$

Con estas expresiones, un cálculo directo permite probar

Lema 46 *En un espacio de tipo D, de Ricci nulo y de clase D[11, 11], los campos de Killing X_1 y X_2 calculados en el lema 46 son colineales si, y sólo si, $n = 0$. Además, en ese caso, k es el factor de proporcionalidad entre los dos campos de Killing, es decir*

$$X_1 = kX_2$$

Métricas de tipo D

Si ahora tenemos en cuenta que X_1 y X_2 son la parte real y la imaginaria de un Killing complejo ortogonal a dos de las 1-formas de conexión, se verifica

Proposición 47 *Sea g una métrica de Ricci cero y de tipo D y de clase $D[11, 11]$, y sea X el campo de Killing complejo determinado en (5.20). La condición necesaria y suficiente para que la geometría de ∇X sea la 2-forma principal del Weyl es $n = 0$.*

Si tenemos en cuenta esta proposición y hacemos $n = 0$ en la proposición 46 se demuestra el siguiente corolario

Corolario 8 *Las soluciones de tipo D y de Ricci cero de la clase $D[11, 11]$ en las que el campo de Killing determinado en (5.20) tiene derivada covariante principal del Weyl son las métricas de Kerr-NUT [87], y se escriben como*

$$g = -\frac{\alpha^2}{x^2 + y^2} (y^2 dt + dz)^2 + \frac{x^2 + y^2}{\alpha^2} dx^2 + \frac{\beta^2}{x^2 + y^2} (-x^2 dt + dz)^2 + \frac{x^2 + y^2}{\beta^2} dy^2 \quad (5.33)$$

donde

$$\alpha^2 = px^2 + \frac{k(3 - k^2)}{(1 + k^2)^3} x + s; \quad \beta^2 = -py^2 + \frac{3k^2 - 1}{(1 + k^2)^3} y + s$$

Las métricas de Kerr-NUT generalizan a la métrica de Kerr y a las soluciones de NUT, aunque estas últimas se obtienen como límite y no para valores concretos de los parámetros, ya que en las métricas de NUT el argumento del valor propio del Weyl tiene proyección nula a uno de los 2-planos principales (son de clase $D[11, 01]$ o $D[01, 11]$), mientras que las coordenadas que aparecen en la forma canónica que hemos dado en el corolario anterior están adaptadas a la tetraeda que define el gradiente de θ y por lo tanto sólo son válidas en la clase $D[11, 11]$ y no en sus degeneraciones. En el artículo de Weir y Kerr, se clasifican las métricas de tipo D atendiendo a la expresión de los campos de Killing en un cierto sistema de coordenadas. La generalización de las C-métricas, aparece en aquel trabajo en una clase diferente de las métricas de Kerr-NUT, ya que, como hemos visto, este caso equivale a una degeneración en los campos de Killing encontrados. El caso general para estos autores corresponde en nuestro trabajo a que los campos de la proposición 45 sean independientes. Como hemos visto, las métricas de Kerr-NUT se obtienen haciendo $n = 0$ en nuestra expresión general, y no mediante un límite, como sucede en el trabajo mencionado. Podemos resumir estos resultados en el siguiente

Corolario 9 *Sea g una solución de vacío y de tipo D de clase $D[11, 11]$, y sea X el campo dado en la proposición 45. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. g es la métrica de Kerr-NUT 5.33.
2. La estructura principal del Weyl, es la estructura definida por un tensor de Killing.
3. La parte real y la parte imaginaria de X son proporcionales.
4. La geometría de ∇X es la 2-forma principal del Weyl.

g) Si en la expresión de g del corolario anterior hacemos $3k^2 = 1$, se tiene que

$$\beta^2 = s - py^2$$

Entonces, si p es positivo necesariamente s debe ser positivo, y existe una coordenada ω de manera que $y = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{p}} \cos \omega$. Se comprueba sustituyendo en la expresión de la métrica que el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= -\sqrt{pr}; & z &= \frac{1}{\sqrt{p}}T - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{p^3}}\varphi \\ y &= \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{p}} \cos \omega; & t &= \frac{1}{\sqrt{ps}}\varphi \end{aligned}$$

nos lleva a la métrica de Kerr con masa m y momento angular a dados en términos de p y s por

$$2m = \frac{3\sqrt{3}}{2^3\sqrt{p^3}}; \quad a^2 = \frac{s}{p^2}$$

Las otras posibilidades de signo para p nos dan las correspondientes generalizaciones de las A_2 y de las A_3 -métricas. Además, si $k^2 = 3$, se tienen expresiones equivalentes pero en el 2-plano temporal, y que corresponden a las generalizaciones de las B-métricas.

Analizaremos más detenidamente el caso de la métrica de Kerr. Teniendo en cuenta el lema 46, ésta se obtiene cuando la constante de proporcionalidad entre los dos campos de Killing X_1 y X_2 calculados en (5.21) verifica $3k^2 = 1$. Teniendo en cuenta que X_1 y X_2 son la parte real y la imaginaria del campo de Killing complejo $X = \mathcal{U}(d\alpha^{-\frac{1}{3}})$, la condición $X_1 = kX_2$ con $3k^2 = 1$ puede expresarse en términos de X y de su conjugado \bar{X} como

$$X \otimes X + \bar{X} \otimes \bar{X} + \frac{1}{2}X \tilde{\otimes} \bar{X} = 0$$

Además, en ese caso, la función β^2 se puede obtener como

$$\frac{\beta^2}{(1+k^2)^3} = e^{2\rho} (h(d\rho, d\rho) + h(d\theta, d\theta))$$

y teniendo en cuenta que $e_2 = \frac{\beta}{\sqrt{x^2+y^2}} \partial_y$ se obtiene que

$$p = -\frac{e_2(\beta^2)}{2(1+k^2)^3 e^{2\rho} e_2(\rho)}$$

Métricas de tipo D

Como además $h(d\rho, d\rho) = \frac{\beta^2 y^2}{(x^2 + y^2)^3}$, podemos calcular y^2 . Teniendo en cuenta que $s = \beta^2 + py^2$, podemos calcular de forma intrínseca p y s , y se obtiene la siguiente caracterización de la métrica de Kerr.

Teorema 10 Sea g una solución de Ricci nulo y de tipo D con valor propio doble $\alpha \equiv e^{-3\rho + 3i\theta} \equiv -\left(\frac{1}{6} \text{tr} \mathcal{W}^3\right)^{\frac{1}{3}}$ y sea $\mathcal{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}(U - i * U)$ la 2-forma principal calculada en (2.10). Consideremos los concomitantes de g

$$X = \mathcal{U}(d\alpha^{-\frac{1}{3}}); \quad v = U^2; \quad h = g - v$$

$$\Omega \equiv e^{2\rho}(h(d\rho, d\rho) + h(d\theta, d\theta))$$

Entonces g es la métrica de Kerr si, y sólo si,

- (i) $v(d\theta) \neq 0 \neq h(d\theta)$
- (ii) $X \otimes X + \bar{X} \otimes \bar{X} + \frac{1}{2} X \tilde{\otimes} \bar{X} = 0$
- (iii) $p \equiv -\frac{h(d\Omega, d\theta)}{h(de^{2\rho}, d\theta)} > 0$

Además, la masa m y el momento angular a correspondientes son

$$2m = \frac{3\sqrt{3}}{2^3 \sqrt{p^3}}; \quad a^2 = \frac{s}{p^2}$$

siendo $3k^2 = 1$ y $s = (1 + k^2)^3 \Omega + p \frac{(1 + k^2)^6 e^{6\rho} h(d\rho, d\rho)}{\Omega}$

h) Es conocido [69] que en vacío, la diferencial de un Killing define una estructura maxwelliana. Como en las métricas de Kerr–NUT, además, la 2-forma de Killing está alineada con la 2-forma principal del Weyl que es Maxwelliana y que tiene asociada la solución de las ecuaciones de Maxwell (5.3), ambas 2-formas deben estar relacionadas por

$$\mathcal{F}_M = e^{\mu+i\nu} (\nabla X_1 - i * \nabla X_1)$$

donde μ y ν son constantes. A partir de la expresión (5.32) con $n = 0$, se demuestra que

$$dX_1 = \frac{K}{(1+K^2)^2(x^2+y^2)^2} \left[R(x^2 - y^2) - 2Txy \right] \theta^1 \wedge \theta^0 +$$

$$+ \left[T(x^2 - y^2) + 2Rxy \right] \theta^2 \wedge \theta^3$$

donde $R = \frac{k(3 - k^2)}{(1 + k^2)^3}$, $T = \frac{3k^2 - 1}{(1 + k^2)^3}$. Y si escribimos explícitamente la solución \mathcal{F}_M de las ecuaciones de Maxwell (5.3), su parte real es

$$F_M = \frac{(1 + k^2)^2}{(x^2 + y^2)^2} \left[((1 - k^2)(y^2 - x^2) + 4kxy) U + 2((1 - k^2)xy + k(x^2 - y^2) * U) \right]$$

Con lo que se prueba directamente que la rotación de dualidad entre ambas está dada por

$$\tan \nu = \frac{1}{k}$$

Es decir, se ha obtenido una interpretación del parámetro de NUT que recogemos en la siguiente:

Proposición 48 *Supongamos que g es una métrica de tipo D y de vacío y de clase $D[11, 11]$ en la que los Killings dados en (5.21) son colineales, y consideremos la 2-forma (5.3) solución de las ecuaciones de Maxwell definida por el valor propio del Weyl. Entonces,*

$$F_M = e^\mu (\cos \nu dX_1 + \sin \nu * dX_1)$$

donde $\tan \nu = \frac{1}{k}$.

5.5.2 Soluciones de tipos $D[\cdot, 0\cdot]$ y $D[0\cdot, \cdot\cdot]$

a) Empezaremos considerando el caso $D[\cdot, 0\cdot]$. Además, podemos suponer que g es de clase $D[1\cdot, 0\cdot]$, ya que la clase $D[0\cdot, 0\cdot]$ nos lleva a valores propios reales, y por lo tanto a las soluciones consideradas en la sección 3. Tenemos así que, el 2-plano principal temporal es foliación ya que $*U(d\theta) = 0$. Así, la métrica minimal dada en el lema 39, y que es conforme a la de Ricci cero que queremos calcular, admite una estructura casi producto $2 + 2$ de clase D_{100}^{000} . Como en el caso anterior, ahora sabemos que además existe un campo de Killing en el 2-plano temporal que está en la dirección $U(d\theta)$. Supondremos que $v(d\theta)$ es espacial. Si consideramos una tetrad $\{e_\alpha\}$ adaptada a la estructura principal donde $\{e_0, e_1\}$ es la única base de v que verifica

$$e_0 \wedge U(d\theta) = 0; \quad e_1 \wedge v(d\theta) = 0$$

y por lo tanto e_0 está en la dirección de un campo de Killing, y si $\{e_2, e_3\}$ es cualquier b.o.n. del 2-plano h , se verifica

$$[e_0, e_1] = X e_0; \quad [e_2, e_3] = A e_2 + B e_3 + 2e_1(\theta) e_0$$

$$[e_0, e_2] = v e_3; \quad [e_1, e_2] = n e_3$$

$$[e_1, e_3] = -n e_2; \quad [e_0, e_3] = -v e_2$$

Las identidades de Jacobi permiten probar que existe una rotación que nos lleva de la base $\{e_2, e_3\}$ de h , a una nueva base en la que los coeficientes n y v son nulos. Es decir, podemos suponer que nuestra tetrad verifica

$$[e_0, e_1] = X e_0$$

$$[e_2, e_3] = A e_2 + B e_3 + 2e_1(\theta) e_0$$

Métricas de tipo D

y el resto de conmutadores son nulos. Además en este caso las identidades de Jacobi son

$$\begin{aligned} e_1(B) = 0 = e_0(B); & \quad e_1(A) = 0 = e_0(A) \\ e_2(X) = 0 = e_3(X); & \quad e_1 e_1(\theta) = X e_1 \theta \end{aligned} \quad (5.34)$$

Igual que en el caso anterior podemos traducir estas condiciones para la derivada covariante de la base dual de 1-formas $\{\theta^\alpha\}$, y se obtiene

$$\begin{aligned} d\theta^0 &= -X\theta^0 \wedge \theta^1 + 2e_1(\theta) \theta^3 \wedge \theta^2; & d\theta^1 &= 0 \\ d\theta^2 &= -A\theta^2 \wedge \theta^3 & d\theta^3 &= B\theta^3 \wedge \theta^2 \end{aligned} \quad (5.35)$$

Notar que el 2-plano h es integrable y totalmente geodésico, y que por tanto, h_{ab} admite la expresión de una métrica bidimensional arbitraria. En términos de los escalares A y B , la curvatura de esta métrica es $K(h) = e_2(B) - B^2 - e_3(A) - A^2$. Veremos que las ecuaciones de vacío implican que $K(h)$ es constante, con lo que h se podrá escribir como una métrica bidimensional de curvatura constante.

El formalismo de Cartan permite calcular el Riemann de estas métricas y se obtiene que el Weyl siempre es de tipo D (ó O) con (v, h) la estructura principal. Si notamos $\mu + i\nu$ al valor propio doble del Weyl y $Q = \frac{1}{2}(Ric - \frac{R}{6}g)$, obtenemos las mismas expresiones que en el caso general con $e_2(\theta) = 0$ y cambiando $e_2(B) - B^2$ por $e_2(B) - B^2 - e_3(A) - A^2$. Por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{6} (e_1(X) + X^2 - 4e_1(\theta)e_1(\theta) + (e_3(A) + A^2 + B^2 - e_2(B))) \\ \nu &= e_1 e_1(\theta) \\ Q_{22} &= \frac{1}{6} (e_1(X) + X^2 + 5e_1(\theta)e_1(\theta) - 2(e_3(A) + A^2 + B^2 - e_2(B))) \\ Q_{33} &= Q_{22} \\ Q_{11} &= e_1(\theta)e_1(\theta) - Q_{00} \\ Q_{00} &= \frac{1}{6} (2e_1(X) + 2X^2 + 7e_1(\theta)e_1(\theta) - (e_3(A) + A^2 + B^2 - e_2(B))) \end{aligned}$$

y el resto de componentes del Ricci son nulas. Imponer que g sea conforme a una métrica con divergencia del Weyl cero se reduce a pedir que el valor propio del Weyl esté relacionado con la función de conformidad $e^{2\rho}$ y con la función θ como:

$$\mu + i\nu = e^{-\rho+3i\theta}$$

Nosotros buscamos las soluciones de Ricci cero y de tipo D, que deben ser entonces $\hat{g} = e^{2\rho}g$. Teniendo en cuenta cómo varía por conformidad el tensor Q , se verifica que $\hat{Q}_{03} = -e_1(\theta)e_2(\rho)$. Entonces, $\hat{Q}_{03} = 0$ implica que o bien $e_1(\theta) = 0$, con lo que caemos en valores propios reales que ha

sido estudiado, o bien $e_2(\rho) = 0$, con lo que las proyecciones del gradiente del valor propio del Weyl al 2-plano espacial son todas nulas. En términos de la clasificación que tenemos, esto se traduce como

Proposición 49 *Si una solución de vacío y de tipo D es de tipo $D[\cdot, 0\cdot]$, entonces es de tipo $D[0\cdot, 0\cdot]$ o $D[\cdot, 00]$.*

b) Como hemos comentado al principio de la sección, el caso $D[01, 01]$ lo estudiamos en la sección tercera, y por lo tanto sólo nos falta estudiar la clase $D[11, 00]$, que equivale a sustituir $e_2(\rho) = 0$ en las expresiones que tenemos. Las condiciones que debe cumplir g para que la métrica \hat{g} sea de Ricci nulo son

$$e^{-\rho} \operatorname{sen} 3\theta = e_1 e_1(\theta)$$

$$e^{-\rho} \operatorname{cos} 3\theta = e_1(X) + X^2 - 4e_1(\theta)e_1(\theta) + e_3(A) + A^2 + B^2 - e_2(B)$$

$$e_1 e_1(\rho) - e_1(\rho)e_1(\rho) - X e_1(\rho) = e_1(\theta)e_1(\theta)$$

$$3e_1(\rho)e_1(\rho) = e_1(X) + X^2 + 5e_1(\theta)e_1(\theta) - 2e_3(A) + A^2 + B^2 - e_2(B)$$

$$6X e_1(\rho) + 3e_1(\rho)^2 = e_3(A) + A^2 + B^2 - e_2(B) - 2e_1(X) - 2X^2 - 7e_1(\theta)^2$$

Si denotamos $F = \operatorname{tg}(\theta)$, se tiene que, como el gradiente de θ tiene la dirección de θ^1 y el subespacio ortogonal a θ_1 es integrable, existe una función $\lambda(F)$ de manera que $e_1 = \lambda(F)\partial_F$. Si denotamos $'$ a la derivada respecto a F , la tercera de las ecuaciones anteriores nos dice que ρ es tal que

$$\rho'' - \rho'\rho' + \frac{2F}{(1+F^2)}\rho' - \frac{1}{(1+F^2)^2} = 0$$

Integrando esta ecuación, tenemos

$$\rho = \ln \left| \frac{2K\sqrt{1+F^2}}{F-c} \right|$$

donde K y c son constantes arbitrarias. De las tres siguientes, y teniendo en cuenta la expresión de los conmutadores y las identidades de Jacobi, se obtiene que $e_3(A) + A^2 + B^2 - e_2(B)$ es constante. Utilizando ahora la primera de las ecuaciones se llega a

$$\lambda^2 = w(1+F^2)^2 - \frac{1}{K}F^3 + \frac{c}{2K}F^2 - \frac{c}{2K}$$

donde w es otra constante. El resto de ecuaciones sólo relacionan las constantes como sigue

$$-K(h) \equiv e_3(A) + A^2 + B^2 - e_2(B) = \frac{c(c^2-3)}{2K(1+c^2)}, \quad w = \frac{c}{2K(1+c^2)}$$

Métricas de tipo D

Falta encontrar la expresión de la métrica en un sistema de coordenadas. Para ello, tengamos en cuenta que la tetrada $\{\theta^\alpha\}$ verifica el sistema exterior (5.35), y que como $dK(h) = 0$, h_{ab} se escribe como una métrica de curvatura constante. Por tanto, para obtener la expresión de esta familia de métricas distinguiremos el que $K(h)$ sea positiva, nula o negativa.

- $K(h) > 0$

Aquí, $h = \frac{1}{K(h)} [dy^2 + \text{sen}^2 y dz^2]$. Tenemos coordenadas de manera que, en este caso

$$\theta^1 = \frac{1}{\lambda} dF; \quad \theta^2 = \frac{1}{\sqrt{K(h)}} dy; \quad \theta^3 = \frac{1}{\sqrt{K(h)}} \text{sen} y dz$$

Además, el vector $\tilde{\theta}^0 = \frac{1}{e_1(\theta)} \theta^0$ verifica $d\tilde{\theta}^0 = 2\theta^3 \wedge \theta^2$. Es fácil probar que existen dos funciones t y Ω tales que $\tilde{\theta}^0 = dt + \Omega dz$. A partir de la expresión de $d\tilde{\theta}^0$, se obtiene

$$\theta^0 = e_1(\theta) \left[dt + \frac{2}{\sqrt{K(h)}} \cos y dz \right]$$



y como $e_1(\theta) = \frac{\lambda}{1+F^2}$ y la solución de vacío $\hat{g} = e^{2\rho} g$ resulta

$$\hat{g} = \frac{4K^2}{(F-c)^2} \left(-\frac{\lambda^2}{(1+F^2)} \left(dt + \frac{2}{\sqrt{K(h)}} \cos y dz \right)^2 + \frac{(1+F^2)}{\lambda^2} dF^2 + \frac{1+F^2}{K(h)} d\sigma^2 \right) \quad (5.36)$$

donde $d\sigma^2 = dy^2 + \text{sen}^2 y dz^2$ es la métrica de la esfera unidad. Hemos obtenido así la primera de las métricas de NUT [67] que corresponde a la generalización de las A_1 -métricas estáticas al caso de que el 2-plano temporal no sea foliación.

- $K(h) = 0$

Aquí, $h = dy^2 + dz^2$. Tenemos coordenadas de manera que,

$$\theta^1 = \frac{1}{\lambda} dF; \quad \theta^2 = dy; \quad \theta^3 = dz$$

Además, el vector $\tilde{\theta}^0 = \frac{1}{e_1(\theta)} \theta^0$ verifica $d\tilde{\theta}^0 = 2\theta^3 \wedge \theta^2$. A partir de la expresión de $d\tilde{\theta}^0$, se obtiene

$$\theta^0 = e_1(\theta) [dt - 2y dz]$$

con lo que la solución de vacío es

$$\hat{g} = \frac{4K^2}{(F-c)^2} \left(-\frac{\lambda^2}{(1+F^2)}(dt - 2ydz)^2 + \frac{(1+F^2)}{\lambda^2}dF^2 + (1+F^2)(dy^2 + dz^2) \right) \quad (5.37)$$

donde además $c^2 = 3$ ya que $K(h) = 0$.

- $K(h) < 0$

Como en los casos precedentes, tenemos que

$$\theta^2 = \frac{1}{\sqrt{|K(h)|}}dy ; \quad \theta^3 = \frac{1}{\sqrt{|K(h)|}}\text{senhy} dz ;$$

$$\theta^0 = e_1(\theta) \left[dt - \frac{2}{\sqrt{|K(h)|}}\text{coshy} dz \right]$$

y por lo tanto la métrica se escribe

$$\hat{g} = \frac{4K^2}{(F-c)^2} \left(-\frac{\lambda^2}{(1+F^2)} \left(dt - \frac{2}{\sqrt{|K(h)|}}\text{cosh} y dz \right)^2 + \frac{(1+F^2)}{\lambda^2}dF^2 + \frac{1+F^2}{|K(h)|}d\sigma^2 \right) \quad (5.38)$$

donde $d\sigma^2 = dy^2 + \text{senh}^2 y dz^2$

Hemos obtenido así las tres métricas que generalizan las A-métricas estáticas y que aparecen en la literatura con el nombre de métricas de NUT [67]. Todas ellas admiten un G_4 con órbitas tridimensionales y el valor propio del Weyl $e^{-3\rho+3i\theta}$ está dado por

$$e^\rho = \frac{2K\sqrt{1+F^2}}{F-c}, \quad \theta = \arctan F$$

c) El caso de que g sea de clase $D[\cdot, 0]$ es completamente paralelo al anterior, y se obtiene que las soluciones son de clase $D[0, 0]$ (y las soluciones degeneran a valores propios reales) o que es de clase $D[11, 00]$. Ahora la métrica de curvatura constante es la del 2-plano temporal v . Se obtienen entonces las B-métricas generalizadas al caso de que los valores propios no sean reales.

5.6 Algunas soluciones interiores con $d\theta = 0$

Hemos probado que todas las soluciones de Tipo D y valores propios reales con divergencia del Weyl cero son conformes a métricas producto y que el factor de conformidad está dado en términos de las curvaturas

Métricas de tipo D

gaussianas de las métricas bidimensionales (teorema 8). Tal expresión ha sido utilizada para integrar el caso de $Ricci = 0$ y ha servido para caracterizar de modo intrínseco todas las soluciones. Pretendemos ahora extender estos resultados a contenidos materiales diferentes del vacío, y en concreto preguntarnos qué ocurre con las soluciones de Einstein–Maxwell o de fluido perfecto. Como veremos que las soluciones del primer tipo con divergencia del Weyl cero son conformemente planas, buscaremos soluciones de Einstein–Maxwell en un caso un poco más general que nos llevará a localizar la solución de Reissner–Nordstrom [76] [68]. En concreto, consideraremos las métricas conformes a métricas producto con factor de conformidad arbitrario,

$$\tilde{g} = \frac{1}{\Omega^2} g; \quad g = v_{AB}(x^C) dx^A dx^B + h_{ij}(x^k) dx^i dx^j \quad (5.39)$$

Notar que todas estas métricas son de tipo D[0·, 0·] o de tipo O. Si, igual que en el caso de Ricci cero, denotamos X e Y a las curvaturas de Gauss de v y h respectivamente, es claro que estas métricas pueden reescribirse como

$$\tilde{g} = \frac{(X + Y)^2}{\Omega^2} \frac{1}{(X + Y)^2} g \quad (5.40)$$

es decir, \tilde{g} es de tipo D con valores propios reales y conforme a una métrica de divergencia del Weyl cero. Las identidades de Bianchi se escriben:

$$\nabla_\mu W^\mu{}_{\delta\alpha\beta} = \nabla_{[\alpha} Q_{\beta]\delta} \equiv P_{\alpha\beta,\delta}$$

donde $Q = \frac{1}{2}(Ric - \frac{R}{6}g)$ y P es el tensor de Cotton. Si además tenemos en cuenta que por una transformación conforme la divergencia del Weyl cambia como

$$\tilde{g} = e^{2\lambda} g \rightsquigarrow \tilde{P}_{\alpha\beta,\delta} = P_{\alpha\beta,\delta} + \lambda_{,\mu} W^\mu{}_{\delta\alpha\beta}$$

y que el tensor de Weyl $W^\alpha{}_{\beta\epsilon\delta}$ es invariante por conformidad, se llega a que la divergencia del Weyl de las métricas (5.39) es

$$P = d \ln \left(\frac{X + Y}{\Omega} \right) \times W \quad (5.41)$$

Además, el valor propio doble del Weyl de la métrica (5.39) es

$$\tilde{\rho} = -\frac{1}{6}\Omega^2(X + Y) \quad (5.42)$$

Sabemos que la estructura $2 + 2$ (v, h) es la principal del Weyl, y que es umbilical, integrable y minimal salvo el gradiente de una función. Como en el capítulo 2 hemos calculado proyectores sobre la 2-forma principal, estas condiciones pueden imponerse en términos del propio Weyl, y caracterizar las métricas de la familia (5.39) como

Lema 47 Una métrica \tilde{g} de tipo D , es conforme a una métrica producto si, y sólo si, es de tipo D con valores propios reales y además la 2-forma principal del Weyl verifica

$$\nabla\mathcal{U} = \mathcal{U}(d\lambda) \times [\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} + \mathcal{G}]$$

donde λ es una función real.

Teniendo en cuenta cómo cambia el Ricci por conformidad y que para una métrica producto $g = v + h$, el tensor de Riemann está dado en (5.9), se obtiene para el Ricci de la métrica (5.39) la expresión

$$\begin{aligned} Ric(\tilde{g}) = & \frac{2}{\Omega} \nabla d\Omega + \\ & [X + \frac{1}{\Omega} \Delta\Omega - \frac{3}{\Omega^2} g(d\Omega, d\Omega)] v + \\ & [Y + \frac{1}{\Omega} \Delta\Omega - \frac{3}{\Omega^2} g(d\Omega, d\Omega)] h \end{aligned} \quad (5.43)$$

donde todos los operadores corresponden a la métrica producto g . Impondremos ahora que el tensor impulso-energía sea de tipo Einstein-Maxwell o de fluido.

5.6.1 Soluciones de Einstein-Maxwell

a) Si buscamos soluciones de tipo c.e.m. regular el Ricci debe tener la forma

$$Ric(\tilde{g}) = \kappa (v - h)$$

donde (v, h) define una estructura casi producto 2+2 en principio diferente de la que define el tensor de Weyl. Si imponemos que la divergencia del Weyl sea cero, se tiene que

$$d\kappa \wedge^{12} (v - h) + 2\kappa d_{12}v = 0$$

donde hemos denotado $d_{12}v$ a la antisimetrización en los dos primeros índices de la derivada covariante de v . La única solución de la ecuación anterior es κ constante y (v, h) una estructura producto. Por lo tanto la propia métrica \tilde{g} es una métrica producto 2 + 2, y para que su Ricci sea solución de Einstein-Maxwell, las curvaturas deben ser iguales cambiadas de signo y por lo tanto constantes. Pero entonces la suma de las curvaturas es cero, y el tensor de Weyl es cero, es decir, \tilde{g} es conformemente plana. Se tiene entonces

Lema 48 Las únicas soluciones de Einstein-Maxwell y de divergencia del Weyl cero son métricas producto 2 + 2 conformemente planas. Además estas soluciones se escriben

$$g = v_{AB}(x^C) dx^A dx^B + h_{ij}(x^k) dx^i dx^j$$

Métricas de tipo D

donde v es hiperbólica de curvatura constante X y h es riemanniana de curvatura constante $-X$. Si U es el elemento de volumen de v , las soluciones de las ecuaciones de Maxwell son

$$F = e^\phi [\cos\psi U + \operatorname{sen}\psi *U]$$

con ϕ y ψ constantes.

b) Podemos intentar debilitar la condición $\delta W = 0$ manteniendo las propiedades geométricas de la estructura principal, es decir, la umbilicidad y el carácter maxwelliano. Esto nos garantiza la existencia de una solución de las ecuaciones de Maxwell alineada con la estructura principal, y podemos buscar soluciones alineadas utilizando la forma canónica (5.39). Teniendo en cuenta la expresión (5.43) del tensor de Ricci de \tilde{g} , las condiciones para que sea solución de Einstein-Maxwell alineado son

$$\Omega = \lambda(x^A) + \epsilon(x^i) \quad (5.44)$$

$$\nabla d\lambda = \alpha v; \quad \nabla d\epsilon = \beta h \quad (5.45)$$

$$(X + Y) + \frac{6}{\Omega} (\alpha + \beta) = \frac{6}{\Omega^2} g(d\Omega, d\Omega) \quad (5.46)$$

$$d\alpha + X d\lambda = 0; \quad d\beta + Y d\epsilon = 0 \quad (5.47)$$

Además el valor propio del 2-plano temporal propio del Ricci es

$$\kappa = \frac{2}{\Omega} \alpha + X + 2 \frac{\alpha + \beta}{\Omega} - \frac{3}{\Omega^2} g(d\Omega, d\Omega)$$

donde los operadores diferenciales corresponden a la métrica g o a la métrica bidimensional adecuada en cada caso. Las ecuaciones (5.47) son las condiciones de integrabilidad de (5.45). Para obtener las soluciones del sistema anterior distinguimos los casos de que ninguna de las curvaturas sea constante o de que alguna lo sea igual que hicimos en el caso de Ricci nulo. Debido a la similitud entre los casos que aparecen y los equivalentes en el caso de vacío, denotaremos también aquí A, B y C métricas al caso equivalente.

Caso C: $dX \neq 0 \neq dY$

Podemos considerar entonces X e Y como coordenadas, una en cada 2-plano. Calculando la diferencial de las ecuaciones (5.47), se deduce que

$$dX \wedge d\lambda = 0 \rightarrow \lambda \equiv \lambda(X) \rightarrow \alpha \equiv \alpha(X)$$

$$dY \wedge d\epsilon = 0 \rightarrow \epsilon \equiv \epsilon(Y) \rightarrow \beta \equiv \beta(Y)$$

Consideremos ahora la ecuación (5.46)

$$\Omega^2 (X + Y) + 6\Omega (\alpha + \beta) = 6 g(d\Omega, d\Omega)$$

Si calculamos la derivada respecto a X de esta expresión se tiene

$$2\Omega(X + Y)\partial_X\Omega + \Omega^2 + 6(\alpha + \beta)\partial_X\Omega + 6\Omega\partial_X\alpha = 6 \partial_X(d\Omega)^2$$

Si ahora calculamos la derivada respecto a Y teniendo en cuenta que $\partial_{XY}\Omega = 0 = \partial_{XY}(d\Omega)^2$, y denotamos $\dot{\epsilon} = \frac{d}{dY}$, $\dot{\lambda}' = \frac{d}{dX}$, se verifica

$$2(X + Y) \dot{\epsilon}\lambda' = \Omega (\dot{\epsilon} + \lambda')$$

De esta ecuación se deduce que $\lambda' = 0$ si $\dot{\epsilon} = 0$, es decir si Ω es constante, con lo que \tilde{g} sería producto y caemos en los casos tratados en el lema 48. Por lo tanto, como estamos suponiendo que ninguna curvatura es constante, podemos dividir por $\lambda'\dot{\epsilon}$, y se llega a

$$\Omega \left(\frac{1}{\lambda'} + \frac{1}{\dot{\epsilon}} \right) = 2(X + Y)$$

Derivando de nuevo esta ecuación respecto a X y después respecto a Y podemos separar variables y obtener ϵ y λ . Imponiendo la ecuación inicial para relacionar las constantes se llega a

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{2}{C}\sqrt{CY + D} - K; & \dot{\epsilon} &= \frac{1}{\sqrt{CY + D}} \\ \lambda &= -\frac{2}{C}\sqrt{D - CX} + K; & \lambda' &= \frac{1}{\sqrt{D - CX}} \end{aligned}$$

donde las constantes y el rango de variación de las coordenadas X e Y son tales que los radicandos sean positivos.

Ahora, de las condiciones de integrabilidad (5.47) sabemos que

$$\alpha = - \int X d\lambda = - \int \frac{X}{\sqrt{D - CX}} dX$$

El cambio de variable

$$r = \sqrt{D - CX} \tag{5.48}$$

conduce a la siguiente expresión para α

$$\alpha = -\frac{2}{C^2} \left[\frac{r^3}{3} - Dr + S \right]$$

En el caso de β , si definimos

$$Z = \sqrt{CY + D}$$

se deduce que

$$\beta = -\frac{2}{C^2} \left[\frac{Z^3}{3} - DZ + T \right]$$

Métricas de tipo D

Tenemos hasta aquí, las siguientes expresiones:

$$\epsilon = \frac{2}{C} Z - K; \quad \frac{d\epsilon}{dY} = \frac{1}{Z}; \quad Z = \sqrt{CY + D}$$

$$\beta = -\frac{2}{C^2} \left[\frac{Z^3}{3} - DZ + T \right]$$

$$\lambda = -\frac{2}{C} r + K; \quad \frac{d\lambda}{dX} = \frac{1}{r}; \quad r = \sqrt{D - CX}$$

$$\alpha = -\frac{2}{C^2} \left[\frac{r^3}{3} - Dr + S \right]$$

Consideremos ahora de nuevo la ecuación (5.45). Teniendo en cuenta que las funciones que aparecen en (5.46) sólo dependen de X y de Y , se concluye que $v(d\lambda, d\lambda)$ sólo depende de X , y de modo equivalente sólo depende de r . Entonces, en las coordenadas $\{t, r\}$, v tiene la forma:

$$v = \gamma^2(r) dr^2 + \sigma \Delta^2(r, t) dt^2$$

donde σ es $+1$ ó -1 según la signatura de v , y donde como hicimos en el caso de Ricci cero, suponemos que el gradiente de la curvatura es espacial. Teniendo en cuenta la expresión de λ en términos de r se tiene

$$\nabla d\lambda = -\frac{2}{C} \nabla dr = \frac{2}{C} (\Gamma_{rr}^r dr^2 + 2\Gamma_{rt}^r dr dt + \Gamma_{tt}^r dt^2)$$

Los símbolos de Christoffel para la métrica v son

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{d \ln \gamma}{dr}; \quad \Gamma_{rt}^r = 0; \quad \Gamma_{tt}^r = -\frac{\sigma \Delta}{\gamma^2} \partial_r \Delta$$

Si imponemos entonces que $\nabla d\lambda = \alpha v$, se llega a

$$\partial_r \ln \Delta = -\frac{C}{2} \alpha \gamma^2$$

$$\frac{d \ln \gamma}{dr} = \frac{C}{2} \alpha \gamma^2$$

Sumando las dos expresiones se tiene que

$$\partial_r \ln \Delta \gamma = 0$$

Luego, $\Delta^2 = \kappa^2(t) \gamma^{-2}$, y redefiniendo la coordenada t se llega a que

$$v = \gamma^2(r) dr^2 + \frac{\sigma}{\gamma^2} dt^2$$

que en particular implica que todas las soluciones admiten a ∂_t como Killing integrable. Pero además tenemos la ecuación

$$\frac{d\gamma}{dr} = \frac{C}{2} \alpha \gamma^3$$

y como la expresión $\alpha(r)$ es conocida se llega a

$$\frac{1}{\gamma^2} = \frac{2}{C} \left[\frac{1}{12} r^4 - \frac{D}{2} r^2 + Sr + P \right]$$

De la misma manera, las condiciones de integrabilidad para h implican que $h(dZ, dZ) \equiv h(dZ, dZ)(Z)$, y por lo tanto se verifica que

$$h = \mu^2(Z) dZ^2 + \nu^2(Z, w) dw^2$$

Conocemos además las expresiones de ϵ y β . Calculando como antes y redefiniendo la coordenada w se tiene que

$$h = \mu^2 dZ^2 + \frac{1}{\mu^2} dw^2$$

siendo

$$\frac{1}{\mu^2} = -\frac{2}{C} \left[\frac{1}{12} Z^4 - \frac{D}{2} Z^2 + TZ + Q \right]$$

donde T y Q son nuevas constantes que aparecen en la integración. Pero si imponemos ahora la ecuación (5.46), se obtiene que

$$S = T; \quad P = Q$$

Podemos enunciar por lo tanto el siguiente resultado

Proposición 50 *La única solución de Einstein-Maxwell alineada, conforme a una métrica producto $v + h$ en la que las curvaturas de v y h no son constantes es*

$$\tilde{g} = \frac{1}{\Omega^2} (v + h)$$

donde

$$\Omega = \frac{2}{C} (Z - r); \quad X = \frac{D-r^2}{C}; \quad Y = \frac{Z^2-D}{C}$$

$$v = \gamma^2 dr^2 - \frac{1}{\gamma^2} dt^2; \quad h = \mu^2 dZ^2 + \frac{1}{\mu^2} dw^2$$

$$\gamma^{-2} = \frac{2}{C} \left[\frac{1}{12} r^4 - \frac{D}{2} r^2 + Sr + p \right]$$

$$\mu^{-2} = -\frac{2}{C} \left[\frac{1}{12} Z^4 - \frac{D}{2} Z^2 + SZ + p \right]$$

Casos A ($dY = 0, dX \neq 0$) y **B** ($dX = 0, dY \neq 0$)

Distinguiremos a su vez el que alguna de las métricas sea plana o que no lo sea y utilizaremos los mismos subíndices que en las métricas estáticas para indicar estos casos.

Casos A₃ (Y = 0) y B₃

Para el caso A₃, tenemos que $h = da^2 + db^2$, y de la ecuación (5.47) se llega a que $\beta = c \equiv \text{const.}$ Como h es plana, $\nabla_i \epsilon_{,j} = \partial_{ij} \epsilon$, y de la ecuación (5.45) se deduce que

$$\epsilon = C(a^2 + b^2) + Ca + Db + E$$

donde C, D, E son constantes arbitrarias. Pero si tenemos presente la ecuación (5.46) con $Y = 0$, se cumple que

$$\Omega^2 X + 6\Omega(\alpha + c) = 6(v(d\lambda, d\lambda) + h(d\epsilon, d\epsilon))$$

Si utilizamos la expresión conocida de ϵ y de h para calcular $h(d\epsilon, d\epsilon)$, y calculamos la segunda derivada ∂_{ab} de (5.46), se obtiene

$$2(\partial_a \Omega)(\partial_b \Omega) X = 0$$

Sin pérdida de generalidad suponemos que $\partial_b \Omega = 0$. Entonces la constante c debe ser nula, con lo que se tiene,

$$\epsilon = Ca + D; \quad \beta = 0$$

Pero de nuevo, la derivada de (5.46) respecto a a , nos lleva a

$$(\partial_a \Omega)[2\Omega X + 6\alpha] = 0$$

ecuación que implica en cualquier caso que $\partial_a \Omega = 0$. Entonces $\Omega \equiv \lambda(v)$, $h = da^2 + db^2$, $\epsilon = 0 = \beta$ y las ecuaciones a resolver son

$$\nabla d\lambda = \alpha v \quad (5.49)$$

$$X + 6\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{6}{\lambda^2} v(d\lambda, d\lambda) \quad (5.50)$$

$$\alpha \equiv \alpha(X); \quad \lambda \equiv \lambda(X); \quad \alpha' + X\lambda' = 0 \quad (5.51)$$

Las ecuaciones (5.51) son las condiciones de integrabilidad de (?). De (5.50) y (5.51) se deduce que el cuadrado con v del gradiente de la curvatura X sólo depende de X , y como $\lambda' \neq 0$, se tiene que X es función de λ , con lo que podemos escribir la métrica v como

$$v = A^2(\lambda)d\lambda^2 + \sigma B^2(\lambda, t)dt^2$$

donde σ es +1 ó -1 según la signatura de v . Con esta expresión de v podemos trabajar como en el caso general. Los símbolos de Christoffel son

$$\Gamma_{\lambda\lambda}^\lambda = \frac{d \ln A}{d\lambda}; \quad \Gamma_{\lambda t}^\lambda = 0; \quad \Gamma_{tt}^\lambda = -\sigma \frac{B}{A^2} \partial_\lambda B$$

Si ahora imponemos la ecuación (5.49) teniendo presente que

$$\nabla d\lambda = -\Gamma_{\lambda\lambda}^{\lambda} d\lambda^2 - 2\Gamma_{\lambda t}^{\lambda} d\lambda dt - \Gamma_{tt}^{\lambda} dt^2$$

se llega a que $\partial_{\lambda}(\ln AB) = 0$, con lo que $B = \frac{1}{\lambda^2} B_2(t)$. Redefiniendo la coordenada t , se tiene la expresión para h

$$h = A^2(\lambda) d\lambda^2 + \sigma \frac{1}{A^2} dt^2$$

y las ecuaciones (5.49), (5.50) y (5.51) se escriben como

$$A' = -\alpha A^3 \quad (5.52)$$

$$\lambda^2 X + 6\lambda\alpha = \frac{6}{A^2} \quad (5.53)$$

$$\frac{d\alpha}{dX} + X \frac{d\lambda}{dX} = 0 \quad (5.54)$$

Si denotamos $'$ la derivada respecto a λ , de la ecuación (5.54) se tiene que

$$X = -\frac{d\alpha}{d\lambda} = -\alpha'$$

Por otro lado de (5.52), se tiene que

$$\alpha = -\frac{A'}{A^3} = \left(\frac{1}{2A^2} \right)'$$

Si derivamos (5.53) respecto a λ y tenemos en cuenta que $X = -\alpha'$, se deduce que la relación entre α y λ viene dada a través de la siguiente ecuación diferencial de Euler:

$$\lambda^2 \alpha'' - 4\lambda \alpha' + 6\alpha = 0$$

La sustitución $\lambda = e^p$ la transforma en la ecuación lineal de coeficientes constantes

$$\ddot{\alpha} - 5\dot{\alpha} + 6\alpha = 0$$

donde $\dot{} \equiv \frac{d}{dt}$. La solución general de esta ecuación es entonces

$$\alpha = C_1 \lambda^3 + C_2 \lambda^2$$

La ecuación (5.52) nos permite ahora obtener

$$\frac{1}{A^2} = 2 \int \alpha d\lambda = \frac{C_1}{2} \lambda^4 + \frac{2}{3} C_2 \lambda^3 + C_3$$

Y de (5.54) conocemos $X(\lambda)$,

$$X = -(3C_1 \lambda^2 + 2C_2 \lambda)$$

Si imponemos ahora la ecuación (5.53), se tiene que $C_3 = 0$. Hemos demostrado así el siguiente resultado.

Proposición 51 Las soluciones de Einstein-Maxwell del Tipo A_3 , son

$$\tilde{g} = \frac{1}{\lambda^2} [v + h]$$

donde

$$h = da^2 + db^2$$

$$v = A^2 d\lambda^2 - \frac{1}{A^2} dt^2$$

$$\frac{1}{A^2} = \frac{C_1}{2} \lambda^4 + \frac{2}{3} C_2 \lambda^3$$

El mismo razonamiento nos proporciona las B_3 métricas

Proposición 52 Las soluciones de Einstein-Maxwell del Tipo B_3 , son

$$\tilde{g} = \frac{1}{\epsilon^2} [v + h]$$

donde

$$v = -dt^2 + dr^2$$

$$h = B^2 d\epsilon^2 + \frac{1}{B^2} dZ^2$$

$$\frac{1}{B^2} = \frac{C_1}{2} \epsilon^4 + \frac{2}{3} C_2 \epsilon^3$$

Casos A_1 ($Y > 0$), A_2 ($Y < 0$), B_1 y B_2

Podemos expresar $h = \frac{1}{|Y|} (d\theta^2 + f^2(\theta)d\phi^2)$, donde $f(\theta) = \text{sen}\theta$ ó $f(\theta) = \text{sh}\theta$, según la curvatura Y de h sea positiva o negativa. La ecuación (5.46) es

$$(X + Y)\Omega^2 + 6\Omega(\alpha + \beta) = 6((d\lambda)^2 + (d\epsilon)^2)$$

Si derivamos respecto a X , se tiene

$$\Omega^2 + 2(X + Y)\Omega\lambda' + 6\lambda'(\alpha + \beta) + 6\Omega\alpha' = 6\partial_X((d\lambda)^2 + (d\epsilon)^2)$$

Derivamos ahora esta expresión respecto a θ , con lo que

$$\Omega(\partial_\theta\epsilon) + (X + Y)\lambda'(\partial_\theta\epsilon) + 3\lambda'(\partial_\theta\beta) + 3\alpha'(\partial_\theta\epsilon) = 0$$

Si tenemos en cuenta que de (5.47), $\alpha' = -X\lambda'$, y $d\beta = -Yd\epsilon$, se llega a

$$\Omega(\partial_\theta\epsilon) = 2(X + Y)\lambda'(\partial_\theta\epsilon)$$

ecuación que implica que $\partial_\theta\epsilon = 0$ (si suponemos que no lo es y simplificamos se llega a $2(X + Y)\lambda' = \lambda + \epsilon$ que implica que ϵ es constante). De la misma manera se deduce que $\partial_\phi\epsilon$ es nula. Por lo tanto ϵ es constante,

con lo que $\beta = 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $\Omega = \lambda(v)$, con lo que las ecuaciones a resolver para v son

$$\nabla d\lambda = \alpha v \quad (5.55)$$

$$(X + Y) + 6\frac{\alpha}{\lambda} = 6\frac{1}{\lambda^2}v(d\lambda, d\lambda) \quad (5.56)$$

$$d\alpha + Xd\lambda = 0 \quad (5.57)$$

De (5.56), razonando como en el caso anterior, se tiene que λ y α sólo dependen de X , y que como $d\Omega \neq 0$, podemos considerar $X \equiv X(\lambda)$, con lo que

$$v = A^2(\lambda)d\lambda^2 + \frac{1}{A^2}dt^2$$

Las ecuaciones anteriores se escriben entonces como

$$A' = -\alpha A^3 \quad (5.58)$$

$$\lambda^2(X + Y) + 6\lambda\alpha = \frac{6}{A^2} \quad (5.59)$$

$$X = -\frac{d\alpha}{d\lambda} \quad (5.60)$$

Si denotamos $' \equiv \frac{d}{d\lambda}$, la ecuación (5.58) nos dice

$$\alpha = -\frac{A'}{A^3} = \left(\frac{1}{2A^2}\right)'$$

Si ahora derivamos la ecuación (5.59) respecto a λ se obtiene para α la ecuación de Euler no homogénea

$$\lambda^2\alpha'' + 6\alpha - 4\lambda\alpha' = 2Y\lambda$$

que generaliza la que obtuvimos en el caso $Y = 0$. Si denotamos $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dp}$, La sustitución $\lambda = e^p$ la convierte en lineal no homogénea

$$\ddot{\alpha} - 5\dot{\alpha} + 6\alpha = 2Ye^p$$

donde $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dp}$. Teniendo en cuenta que $\alpha = Ye^p$ es una solución particular de la completa, la solución general de la ecuación anterior es

$$\alpha = C_1\lambda^3 + C_2\lambda^2 + Y\lambda$$

Teniendo ahora en cuenta (5.58), se deduce

$$\frac{1}{A^2} = \frac{C_1}{2}\lambda^4 + \frac{2}{3}C_2\lambda^3 + Y\lambda^2 + 2C_3$$

Métricas de tipo D

Y si imponemos la ecuación (5.59), se tiene que $C_3 = 0$. Además,

$$X = -(3C_1\lambda^2 + 2C_2\lambda + Y)$$

Con lo que se ha probado



Proposición 53 Las soluciones de los casos A_1 y A_2 , son

$$\tilde{g} = \frac{1}{\lambda^2} \left[A^2 d\lambda^2 - \frac{1}{A^2} dt^2 + \frac{1}{|Y|} d\sigma^2 \right]$$

donde $d\sigma^2$ es la métrica riemanniana bidimensional de curvatura $+1$ ó -1 según Y sea positiva o negativa y donde

$$\frac{1}{A^2} = \frac{C_1}{2}\lambda^4 + \frac{2}{3}C_2\lambda^3 + Y\lambda^2$$

• Si $Y > 0$, el cambio de coordenadas

$$r = \frac{1}{\sqrt{Y} \lambda}$$

conduce a

$$\tilde{g} = - \left(1 + \frac{2}{3} \frac{C_2}{Y^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{r} + \frac{C_1}{2Y^2} \frac{1}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 + \frac{2}{3} \frac{C_2}{Y^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{r} + \frac{C_1}{2Y^2} \frac{1}{r^2} \right)^{-1} dr^2 +$$

$$+ r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2)$$

es decir a la solución de Reissner-Nordström. Si $C_2 < 0$, redefiniendo r y t para reabsorber $|C_2|$, y haciendo $C_1 = 0$, recuperamos la métrica de Schwarzschild.

De la misma manera se obtienen las soluciones cuando la curvatura de v es constante, que recogemos en el siguiente enunciado.

Proposición 54 Las soluciones correspondientes a los casos B_2 , y B_3 son

$$\tilde{g} = \frac{1}{\epsilon^2} \left[\frac{1}{|X|} d\sigma^2 + \frac{1}{A^2} d\epsilon^2 + A^2 dZ^2 \right]$$

donde $d\sigma^2$ es la métrica lorentziana bidimensional de curvatura $+1$ ó -1 según X sea positiva o negativa y donde

$$\frac{1}{A^2} = \frac{C_1}{2}\epsilon^4 + \frac{2}{3}C_2\epsilon^3 + X\epsilon^2$$

Caracterización intrínseca de las soluciones

Hemos probado que todas las soluciones de Einstein–Maxwell alineadas con un Weyl de tipo D con valores propios reales y estructura principal umbilical, integrable y minimal salvo el gradiente de una función, admiten al menos un G_2 y permiten una clasificación equivalente a la de las métricas estáticas de vacío. Todas caen en la clase $D[0, 0]$. Además, la suma de las trazas de las segundas formas fundamentales es cerrada. Como sabemos calcular de modo intrínseco la estructura principal del Weyl (o la del Ricci [7]) podemos imponer estas condiciones de modo intrínseco. Ahora bien, una vez en este punto, tenemos que distinguir el que alguna de las curvaturas de los factores de la métrica producto conforme sea o no constante, y además calcular el signo de ésta. Consideremos de nuevo la expresión (5.39) para esta familia de métricas. y recordemos que el Ricci es

$$Ric(\tilde{g}) = \kappa(v - h) \equiv \kappa\Omega^2(\tilde{v} - \tilde{h}) \quad (5.61)$$

y denotamos $\tilde{\rho}$ al valor propio doble del Weyl ($\tilde{\rho} = \frac{-1}{6}(X + Y)\Omega^2$). Si vamos a la expresión de las soluciones obtenidas, se verifica que igual que en el caso de Ricci nulo, $*W$ nos permite distinguir los casos C, A y B, sin más que considerar el valor propio del Weyl y calcular $*W(d\rho, d\rho)$. Si no es cero, es de tipo C y por tanto dada en la proposición 50. Si es cero, tenemos una solución de tipo A o B, dependiendo de cuál de las curvaturas sea constante. Si, como en el caso de Ricci cero, llamamos $S = \frac{1}{3\tilde{\rho}}(W - \rho G)$, se tiene que la forma cuadrática $S(d\rho; d\rho)$ es semidefinida y el signo de ella distingue los casos A y B. Falta sólo el equivalente para este caso del invariante α que nos proporcionaba el signo de la curvatura. Puede comprobarse directamente que si Y es constante, entonces

$$Y = \frac{1}{\Omega^2} [\tilde{g}(d\ln\Omega, d\ln\Omega) - 2\tilde{\rho} - \kappa\Omega^2]$$

Si tenemos en cuenta que de (5.61) $\kappa\Omega^2$ es el valor propio del 2–plano propio temporal del Ricci, tenemos un invariante que nos determina el signo de la curvatura cuando esta es constante y que es

$$\alpha_h \equiv \tilde{g}(d\ln\Omega, d\ln\Omega) - 2\tilde{\rho} - \kappa\Omega^2$$

Si consideramos $\kappa = 0$ y tenemos en cuenta que en vacío $\ln\tilde{\rho} = 3\ln\Omega$, recuperamos el invariante α que fue utilizado en el caso de las soluciones de vacío. De la misma manera, si la que es constante es la curvatura de v , se tiene

$$X = \frac{1}{\Omega^2} [\tilde{g}(d\ln\Omega, d\ln\Omega) - 2\tilde{\rho} + \kappa\Omega^2]$$

Por lo tanto tenemos otro invariante α_v que nos proporciona el signo de la curvatura de v cuando es constante está dado por

$$\alpha_v \equiv \tilde{g}(d\ln\Omega, d\ln\Omega) - 2\tilde{\rho} + \kappa\Omega^2$$

Métricas de tipo D

que coincide con α_h si $\kappa = 0$, es decir, si estamos en vacío.

5.6.2 Soluciones fluido perfecto y $\delta W = 0$

Buscaremos ahora las soluciones de fluido perfecto y de tipo D con la propiedad de que la divergencia del Weyl sea cero. Barnes [2], calculó explícitamente todas las soluciones de fluido perfecto en los que la velocidad es integrable y sin distorsión. Shepley y Taub [80], buscaron las soluciones de fluido perfecto con divergencia del Weyl cero, aunque no consideraron los fluidos de tipo D, que es el caso que trataremos nosotros.

El tensor impulso-energía de un fluido perfecto es

$$T = (\rho + p)u \otimes u + pg \quad (5.62)$$

donde $\dot{u}^2 = -1$ y ρ y p son la densidad y la presión. Las ecuaciones de Einstein nos dicen entonces que el tensor de Ricci de un espacio-tiempo con un contenido de fluido perfecto es

$$Ric = \mu u \otimes u + \nu g; \quad \mu = \rho + p; \quad 2\nu = \rho - p \quad (5.63)$$

Si denotamos $6\epsilon \equiv 2\nu + \mu$, se verifica [80]

Lema 49 *El tensor de Cotton asociado a (5.63) es cero si, y sólo si, el espacio es de Einstein (es decir $\mu = 0$, $d\epsilon = 0$), o los coeficientes cinemáticos de u verifican*

$$\omega = 0 = \sigma; \quad \gamma(d\epsilon) = 0; \quad \frac{1}{3}\theta\mu + \dot{\epsilon} = 0; \quad \mu\dot{u} + \gamma(d\mu) = 0$$

donde hemos denotado $\gamma = g + u \otimes u$ al proyector ortogonal a u .

Por lo tanto todos los fluidos de con divergencia del Weyl cero, tienen velocidad integrable y sin distorsión, y caen dentro del caso considerado por Barnes [2]. La clasificación de las soluciones que puede encontrarse en este artículo, tiene el inconveniente de que no es intrínseca ya que se basa en condiciones del tipo de que la densidad, la presión o la expansión dependan o no de coordenadas adaptadas a tetradas particulares que no se definen intrínsecamente. Los resultados que ofrecemos pueden servir también para clasificar intrínsecamente estas soluciones.

Teniendo en cuenta el lema anterior, estos espacios son de tipo I, D, o O, con valores propios reales, y con u una dirección principal temporal del Weyl (la única que hay en tipo I o cualquiera del 2-plano principal temporal en tipo D). Nosotros hemos encontrado en la sección 2 que todas las métricas de tipo D con valores propios reales y divergencia del Weyl cero se escriben

$$g = \frac{1}{(X + Y)^2}(v + h) \quad (5.64)$$

El tensor de Ricci de esta familia de métricas es

$$Ric(g) = \frac{2}{X+Y} \nabla dX + \frac{2}{X+Y} \nabla dY + Xv + Yh + \left[\frac{1}{X+Y} (\Delta(X+Y)) - \frac{3}{(X+Y)^2} (d(X+Y))^2 \right] (v+h) \quad (5.65)$$

donde los operadores diferenciales ∇ , Δ y los cuadrados de los gradientes de las curvaturas están referidos a la métrica bidimensional correspondiente en cada caso. Entonces, para que g sea un fluido perfecto con cuadrivelocidad u , debe cumplirse

$$\nabla dY = \lambda h \quad (5.66)$$

$$\nabla dX = \alpha v + \beta u \otimes u \quad (5.67)$$

$$X + \frac{2\alpha}{X+Y} = Y + \frac{2\lambda}{X+Y} \quad (5.68)$$

Además, la presión y la densidad asociados (teniendo en cuenta que la solución de fluido es la conforme a la producto) pueden calcularse a partir de (5.64) y de (5.63) con

$$\begin{aligned} \mu &= 2\beta(X+Y); \\ \nu &= (X+Y)[X(X+Y) + 2\alpha + \Delta(X+Y)] - 3(d(X+Y))^2 \end{aligned} \quad (5.69)$$

donde las laplacianas y los cuadrados de los gradientes están calculados con la métrica producto. No hace falta imponer que la divergencia del Weyl sea cero, ni que el espacio sea de tipo D porque esas condiciones están implícitas en la forma canónica (5.64). Sí utilizaremos el siguiente resultado que se demuestra teniendo en cuenta que para una métrica bidimensional v , el tensor de Riemann es $Riem(v) = \frac{X}{2} v \wedge v$, y utilizando las identidades de Ricci.

Lema 50 *Sea v una métrica bidimensional de curvatura de Gauss X . Las condiciones de integrabilidad de la ecuación $\nabla d\lambda = \alpha v + \beta u \otimes u$, son*

$$\begin{aligned} &(\alpha_{,c} + X\lambda_{,c}) v_{ab} - (\alpha_{,a} + X\lambda_{,a}) v_{cb} + \\ &+(\beta_{,c} u_a - \beta_{,a} u_c) u_b + \beta [\nabla_c u_a - \nabla_a u_c] u_b + \\ &\beta [u_a \nabla_c u_b - u_c \nabla_a u_b] = 0 \end{aligned}$$

Si particularizamos dichas condiciones para la ecuación (5.66), se concluye

$$\lambda = -\frac{1}{2}(Y^2 + C)$$

Métricas de tipo D

Con esta expresión para λ , la ecuación (5.68) nos dice que

$$\alpha = -\frac{1}{2}(X^2 + C)$$

La solución general de la ecuación (5.66) es conocida, ya que es la misma ecuación que aparecía en el caso de vacío. Notar que contrayendo la ecuación con dY , se obtiene

$$\frac{1}{2}d[(dY)^2] = -\frac{1}{2}(Y^2 + C) dY$$

y por lo tanto $(dY)^2 = -\frac{1}{3}Y^3 - CY + D$. Entonces h tiene la forma de la métrica h que aparece en las soluciones de vacío de la sección 3 y sólo falta calcular v . Para resolver la ecuación (5.67) distinguiremos los casos $\beta = 0$ (espacio de Einstein) o $\beta \neq 0$.

Caso 1: $\beta = 0$

Las ecuaciones (5.66) y (5.67) son las mismas que para el caso de vacío y valores propios reales, con la salvedad de que las nuevas constantes que aparece en $v(dX, dX)$ y en $h(dY, dY)$ no están relacionadas. Igual que en el caso de vacío, podemos considerar los casos de que ninguna curvatura sea constante, o de que alguna lo sea, y además, el caso de que ambas curvaturas sean constantes. Denotaremos caso C, B y A a los que tienen equivalente con Ricci cero.

Caso C: $dX \neq 0 \neq dY$

La solución es

$$g = \frac{1}{(X+Y)^2} \left[\frac{-1}{\frac{1}{3}X^3 + CX + D_1} dX^2 + \left(\frac{1}{3}X^3 + CX + D_1 \right) dt^2 \right] + \frac{1}{(X+Y)^2} \left[\frac{1}{-\frac{1}{3}Y^3 - CY + D_2} dY^2 + \left(-\frac{1}{3}Y^3 - CY + D_2 \right) dZ^2 \right]$$

El caso $D_1 = D_2$ implica que el Ricci es cero y recuperamos las C-métricas de la sección 3. Como estamos imponiendo $Ric \propto g$, se tiene $Ric(g) = \frac{1}{4}R(g)g$. Directamente se obtiene que $R(g) = 12(D_1 - D_2)$, y por lo tanto

$$Ric(g) = 3(D_1 - D_2)g$$

Caso B: $dX = 0 \neq dY$

En este caso v es de curvatura X constante y según sea positiva, negativa o cero, es conforme a la métrica bidimensional de curvatura $+1$,

-1 ó a la métrica plana. Entonces, se tiene

$$g = \frac{1}{(X+Y)^2} \left[v + \frac{1}{-\frac{1}{3}Y^3 - CY + D_2} dY^2 + \left(-\frac{1}{3}Y^3 - CY + D_2\right) dZ^2 \right]$$

En este caso se obtiene para el Ricci

$$Ric(g) = (2X^3 - 3D_2) g$$

Entonces, para $2X^3 = 3D_2$ (como X es constante y $\beta = 0$ además $C = -X^2$), obtenemos las B-métricas.

Caso A: $dY = 0 \neq dX$

En este caso h es bidimensional de curvatura constante, y por lo tanto es conforme a la métrica riemanniana bidimensional de curvatura +1, -1 o es plana, según la curvatura sea positiva, negativa o cero.

$$\tilde{g} = \frac{1}{(X+Y)^2} \left[\frac{-1}{\frac{1}{3}X^3 + CX + D_1} dX^2 + \left(\frac{1}{3}X^3 + CX + D_1\right) dt^2 + h \right]$$

Igual que en el caso anterior $R(\tilde{g}) = 4(2Y^3 + 3D_1)$, con lo que

$$Ric(\tilde{g}) = (2Y^3 + 3D_1) \tilde{g}$$

De nuevo podemos incluir las A-métricas como caso particular de éste cuando $2Y^3 + 3D_1 = 0$.

Caso D: $dX = 0 = dY$

Las ecuaciones entonces sólo dicen que además $X = Y$. Así, g es salvo una homotecia, suma de dos métricas bidimensionales con curvaturas +1, -1 ó 0.

Caso 2: $\beta \neq 0$

Si $\beta \neq 0$ queda excluido el caso de que X sea constante, con lo que ahora no habrá un caso parecido a las B-métricas. Como de (5.66) tenemos determinada h que es la misma métrica de las soluciones de vacío de la sección 3, la única ecuación que hay que resolver es (5.67). Sustituyendo la expresión de α en ésta, se llega a

$$\nabla dX = -\frac{1}{2}(X^2 + C) v + \beta u \otimes u \quad (5.70)$$

Las condiciones de integrabilidad del lema 50, particularizadas para $\alpha = -\frac{1}{2}(X^2 + C)$, $\lambda = X$, nos dicen que

$$(\beta_{,c} u_a - \beta_{,a} u_c) u_b + \beta [\nabla_c u_a - \nabla_a u_c] u_b + \beta [u_a \nabla_c u_b - u_c \nabla_a u_b] = 0$$

Métricas de tipo D

Contrayendo con u^b , y proyectando al ortogonal, se llega a que dicha condición es equivalente a

$$(\beta_c u_a - \beta_a u_c) + \beta [\nabla_c u_a - \nabla_a u_c] = 0 \quad (5.71)$$

$$\{u_a \nabla_c u_b - u_c \nabla_a u_b\} = 0 \quad (5.72)$$

Si calculamos (5.72) $\times u^c$, se obtiene

$$\nabla_a u_b = -u_a \dot{u}_b$$

Con lo que u es integrable, sin distorsión y sin expansión. Entonces, la ecuación (5.71) sólo nos dice

$$\dot{u} = -(\ln \beta)_{\perp u}$$

Estas condiciones acerca de u dicen y sólo dicen que existen coordenadas r y t de manera que

$$v = dr^2 - \beta^2 dt^2, \quad u = \beta dt \quad (5.73)$$

La curvatura de esa métrica es $X = -\frac{\beta_{rr}}{\beta}$. Si escribimos $dX = X_r dr + X_t dt$, y calculamos ∇dX , la ecuación (5.70) se escribe

$$\begin{aligned} X_{tt} - X_t \frac{\beta_t}{\beta} - X_r \beta \beta_r &= -\alpha \beta^2 + \frac{1}{\beta} \\ X_{tr} - X_t \frac{\beta_r}{\beta} & \\ X_{rr} &= \alpha \end{aligned} \quad (5.74)$$

donde $\alpha = -\frac{1}{2}(X^2 + C)$. Supongamos primero que $X_t \neq 0$. Entonces la segunda de las ecuaciones anteriores nos dice que $\beta = X_t f(t)$ y redefiniendo la coordenada t , podemos suponer

$$\beta = X_t$$

Y la tercera de ellas dice que

$$X_r = \sqrt{-\left(\frac{1}{3}X^3 + CX + H(t)\right)}$$

Entonces la primera ecuación nos dice

$$\frac{1}{2}((X_r)^2)_t + \frac{1}{2}(X^2 + C)X_t + \frac{1}{(X_t)^2}$$

Y utilizando la ecuación tercera para calcular $((X_r)^2)_t$ se llega a

$$2(X_t)^2 = H'(t)$$

De donde X_t sólo dependería de t , y por tanto $X_{rt} = 0$, que es incompatible con el resto de ecuaciones. Por lo tanto X no puede depender de t . Entonces $(u, dX) = 0$, y por lo tanto contrayendo (5.70) con dX , se obtiene $d[(dX)^2] = -(X^2 + C)dX$, y con ello, podemos reescribir la métrica como

$$v = \left(-\frac{1}{3}X^3 - CX - E\right)^{-1} dX^2 - \Omega^2(X, t) dt \quad (5.75)$$

Con lo que la ecuación (5.70) queda como

$$\left(\frac{1}{3}X^3 + CX + E\right)\Omega_X = \frac{1}{2}(X^2 + C)\Omega + 1$$

Expresión que podemos integrar como una ecuación diferencial lineal para cada t fijo, y se obtiene

$$\Omega = \sqrt{-\left(\frac{1}{3}X^3 + CX + E\right)} \left[A(t) - \int \left(-\left(\frac{1}{3}X^3 + CX + E\right)\right)^{-\frac{2}{3}} dX \right]$$

Conocida Ω , la expresión (5.75) nos proporciona la métrica v . Combinada con cada una de las soluciones h de la ecuación (5.66) que son las mismas métricas que aparecieron en la sección 3, tenemos todas las soluciones de este caso. Notar que de (5.69) podemos calcular la densidad y se obtiene que

$$\rho = 3(E - D)$$

es decir, todas las soluciones tienen densidad constante.

Bibliografía

- [1] Arianrhod R and McIntosh C B G 1992 *Class. Quantum Grav.* **9** 1969
- [2] Barnes A 1973 *Gen. Rel. Grav.* **4** 105–29
- [3] Bel L 1959 *La radiation gravitationnelle* in "Les théories relativistes de la gravitation" Royaumont
- [4] Bel L 1962 *Cah. de Phys.* **16** 59
- [5] Birkhoff G D 1923 *Relativity and Modern Physics* (Cambridge, MA: Harvard University Press)
- [6] Bona C y Coll B 1988 *Gen. Rel. Grav.* **20** 297–303
- [7] Bona C, Coll B y Morales J A 1992 *J. Math. Phys.* **33** 670–81
- [8] Bonanos S 1989 *Gen. Rel. Grav.* **21** 953
- [9] Bonanos S 1989 *Gen. Rel. Grav.* **21** 1073
- [10] Brans C H 1975 *J. Math. Phys.* **16** 1008–10
- [11] Brans C H 1977 *J. Math. Phys.* **18** 1378–81
- [12] Cartan E 1946 *Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann* (Gauthier-Villars, Paris)
- [13] Churchill R V 1932 *Trans. Am. Soc.* **34** 784–94
- [14] Coll B, Fayos F y Ferrando J J 1987 *J. Math. Phys.* **28** 1075–9
- [15] Coll B y Ferrando J J 1988, *Gen. Rel. Grav.* **20** 51–64
- [16] Coll B y Ferrando J J 1989 *J. Math. Phys.* **30** 2918–22
- [17] Coll B y Ferrando J J 1989, *Gen. Rel. Grav.* **21** 1159–70

- [18] Coll B y Ferrando J J 1990 *Almost-Product structures in Relativity* in Recent developments in Gravitation, Proceedings of the "Relativistic Meeting-89" (World Scientific, Singapore) 338-41
- [19] Coll B y Ferrando J J 1990 *J. Math. Phys.* **31** 1020-25
- [20] Coll B, Ferrando J J y Sáez J A *Killing tensor geometry and warped products*, en preparación
- [21] Coll B y Morales J A 1991 *J. Math. Phys.* **32** 2450-5
- [22] Collison C D 1974 *Tensor* **28** 173-6
- [23] Collison C D y Shaw R 1972 *Int. Jour. Phys* **6** 347-57
- [24] Debever R 1956 *Bull Acad. R. Belgique* **42** 313
- [25] Debever R 1959 *Bull Soc. Math. Belgique* **10** 112
- [26] Debever R 1964 *Cah. de Phys.* **168-169** 303
- [27] d'Inverno R y Russell-Clark R 1971 *J. Math. Phys.* **12** 1258
- [28] Edgar S B 1979 *Int. J. Theor. Phys.* **18** 251-70
- [29] Edgar S B 1986 *Int. J. Theor. Phys.* **25** 425-33
- [30] Ehlers J, Geren P y Sachs J 1968 *J. Math. Phys.* **9** 1344
- [31] Ehlers J y Kundt W 1962 in *Gravitation: An Introduction to Current Research*, L Witten Ed. (John Wiley & Sons, Inc., New York.)
- [32] Fayos F y Sopena C F 1999 *Class. Quantum Grav.* **16** 2965-85
- [33] Fayos F y Sopena C F 2001 *Class. Quantum Grav.* **18** 353-72
- [34] Ferrando J J, Morales J A y Portilla M 1992 *Phys. Rev. D* **46** 578
- [35] Ferrando J J, Morales J A y Sáez J A 2001 *Covariant determination of the Weyl tensor geometry*, enviado al *Class. Quantum Grav.*
- [36] Ferrando J J y Sáez J A 1995 *On the principal directions of the Weyl tensor* in Inhomogeneous cosmological models, Proceedings of the Spanish Relativity Meeting-94 (World Scientific, Singapore) 233-6
- [37] Ferrando J J y Sáez J A 1997 *On type D space-times* in Some topics on General Relativity and gravitational radiation, Proceedings of the Spanish Relativity Meeting-96 (Ed. Frontieres, Paris) 209-12
- [38] Ferrando J J y Sáez J A 1997 *An intrinsic characterization of the Schwarzschild metric* in Relativistic Astrophysics and Cosmology, Proceedings of the Spanish Relativity Meeting-95 (World Scientific, Singapore) 28-33

Bibliografía

- [39] Ferrando J J y Sáez J A 1997 *Class. Quantum Grav.* **14** 129–38
- [40] Ferrando J J y Sáez J A 1998 *Class. Quantum Grav.* **15** 1323–30
- [41] Ferrando J J y Sáez J A 1999 *A classification of algebraically general space-times* in Relativity and Gravitation in General, Proceedings of the Spanish Relativity Meeting–98 (World Scientific, Singapore) 247–50
- [42] Ferrando J J y Sáez J A 2001 *Some comments on purely electric Weyl tensors*, Proceedings of the Spanish Relativity Meeting–00 (World Scientific, Singapore), en prensa
- [43] Ferrando J J y Sáez J A *An intrinsic and explicit characterization of static space-times*, en preparación
- [44] Ferrando J J y Sáez J A *A class of type I vacuum solutions*, en preparación
- [45] Ferrando J J y Sáez J A *On the type D vacuum solutions: an intrinsic approach*, en preparación
- [46] Géhéniau J 1957 *Comptes Rendus Acad. Sci.* **244** 723
- [47] Gil O 1983 *Rend. Circ. Mat. Palermo* **32** 315–29
- [48] Goldberg J N y Sachs R 1962 *Acta Phys. Polon* **22** 13
- [49] Haddow B M y Carot J 1996 *Class. Quantum Grav.* **13** 289–301
- [50] Karlhede A 1980 *Gen. Rel. Grav.* **12** 693–707
- [51] Kasner E 1921 *Amer. J. Math.* **43** 217
- [52] Kellner A 1975 *1-dimensionale Gravitationsfelder*, Dissertation Göttingen
- [53] Kerr R P 1963 *Phys. Rev. Lett.* **11** 237
- [54] Kinnersley W 1969 *J. Math. Phys.* **10** 1195–203
- [55] Kramer H, Stephani E, Hertl E y McCallum M A H 1980 *Exact solutions of the Einstein's field equations* (Cambridge Univ. Press, Cambridge)
- [56] McCallum M A H 1990 *Computer Algebra and exact solutions of Einstein Equations* en Recent Developments in Gravitation, Proceedings of the 'Relativistic Meeting–89' (World Scientific, Singapore) 163–91
- [57] McIntosh C B G y Arianrhod R 1990 *Class. Quantum Grav.* **7** L213

- [58] McIntosh C B G, Arianrhod R, Wade S T y Hoenselaers C 1994 *Class. Quantum Grav.* **11** 1555
- [59] Mariot L 1954 *C. R. Acad. Sc. Paris* **238** 2055–6
- [60] Mars M 1999 *Class. Quantum Grav.* **16** 2507–23
- [61] Mars M 2000 *Class. Quantum Grav.* **17** 3353–73
- [62] Misner C W y Wheeler J A 1957 *Ann. Phys.* **2** 525
- [63] Morales J A 1988 *Tesis doctoral*, Universitat de València
- [64] Narain U 1970 *Phys. Rev. D* **2** 278
- [65] Naveira A M 1983 *Rend. Circ. Mat. Palermo* **3** 577–92
- [66] Newman E T y Penrose R 1979 *J. Math. Phys.* **3** 566
- [67] Newman E T, Tambourino L y Unti T 1963 *J. Math. Phys.* **4** 915–23
- [68] Nordström G 1918 *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.* **20** 1238
- [69] Papapetrou A 1966 *Ann. Inst. H Poincaré A* **4** 83
- [70] Penrose R 1960 *Ann. Physics* **10** 171
- [71] Petrov A Z 1954 *Sci. Not. Kazan Univ.* **114** 55
- [72] Petrov A Z 1962 *Gravitational field geometry as the geometry of automorphisms* in Recent developments in General Relativity, Pergamon Press-PWN 379
- [73] Pirani F A E 1957 *Phys. Rev.* **105** 1089
- [74] Rainich G Y 1925 *Trans. Am. Math. Soc.* **27** 106–36
- [75] Reinhart B 1977 *J. Diff. Geom.* **12** 619–27
- [76] Reissner H 1916 *Annalen Physik* **50** 106
- [77] Robinson I 1961 *J. Math. Phys.* **2** 290–1
- [78] Ruse H S 1936 *Proc. London Mth. Soc* **41** 302
- [79] Sachs R 1961 *Proc. Royal Soc. A* **264** 302
- [80] Shepley L C y Taub A H 1967 *Commun. Math. Phys.* **5** 237–56
- [81] Stephani H 1967 *Comm. Math. Phys.* **4** 137–42
- [82] Stephani H 1978 *Gen. Rel. Grav.* **9** 789–92

Bibliografía

- [83] Taub A H 1951 *Ann. Math.* **53** 472
- [84] Teukolsky S A y Press W H 1974 *Ap. J.* **193**, 443-61
- [85] Trümper M 1965 *J. Math. Phys.* **6** 584-9
- [86] Walker M y Penrose R 1970 *Commun. Math. Phys.* **18** 265
- [87] Weir G J y Kerr R P 1977 *Proc. R. Soc. Lond. A* **355** 31-52

Reunido el Tribunal que suscribe, en el día de la fecha, acordó otorgar, por unanimidad, a esta Tesis doctoral de

D. Juan Antonio Sáez Moreno

la calificación de EXCEL·LENT CUM LAUDE

Valencia, a 26 de setembre de 19~~97~~2001

El Secretario,

El Presidente

J. MARTIN



Juan A. Morales LL

