

CIRCUITOS EULERIANOS OPTIMOS EN
GRAFOS DIRIGIDOS : EL PROBLEMA
DEL CARTERO RURAL DIRIGIDO.

Memoria presentada por D. Enrique
Mota Vidal para optar al grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas.
Realizada bajo la dirección de
D.Marco Antonio López Cerdá, Cate-
drático de Investigación Operativa
de la Facultad de Matemáticas de -
la Universidad de Valencia.



UMI Number: U607784

All rights reserved

INFORMATION TO ALL USERS

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted.

In the unlikely event that the author did not send a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if material had to be removed, a note will indicate the deletion.



UMI U607784

Published by ProQuest LLC 2014. Copyright in the Dissertation held by the Author.
Microform Edition © ProQuest LLC.

All rights reserved. This work is protected against
unauthorized copying under Title 17, United States Code.



ProQuest LLC
789 East Eisenhower Parkway
P.O. Box 1346
Ann Arbor, MI 48106-1346

UNIVERSIDAD DE VALENCIA	
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS	
EPISTEMOLOGIA	
N.º Hoja 1432	
SIGNATURA	$\frac{T.D.}{57}$
C. D. U.519.14(043.2)	

i 19086039
b 16832541

D. Marco Antonio López Cerdá , Catedrático
de Investigación Operativa de la Facultad de
Matemáticas de la Universidad de Valencia,

CERTIFICA:

Que la presente Memoria , *Circuitos Euleria-
nos Optimos en Grafos Dirigidos: el Proble-
ma del Cartero Rural Dirigido* , ha sido rea-
lizada bajo su dirección en el Departamento
de Estadística e Investigación Operativa de
la Facultad de Matemáticas de la Universidad
de Valencia por D. Enrique Mota Vidal, y cons-
tituye su Tesis para optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas.

Y para que conste en cumplimiento de la legis-
lación vigente firma el presente certificado
en Valencia a 17 de Junio de mil novecientos
ochenta y dos.

A handwritten signature in black ink, enclosed within a large, hand-drawn oval. The signature is cursive and appears to read 'Marco A. López Cerdá'.

A Ruth y Myriam

A mis padres

Nuestro agradecimiento a todas las personas que nos han ayudado y estimulado y, en particular, al personal del Centro de Cálculo de la Universidad Politécnica de Valencia, sin cuya amable colaboración no habría sido posible una parte importante de este trabajo.

INDICE

RESUMEN	3
INTRODUCCION: CONCEPTOS PREVIOS	
1. Algunas notas sobre la NP-Complejidad	8
2. Teoría de Grafos	12
3. Relajación Lagrangiana	21
SECCION I: EL DRPP: ANTECEDENTES Y ESTADO ACTUAL	
I.1 Antecedentes históricos: el CPP	31
I.2 El DRPP: Definición y Aplicaciones	36
I.3 Problemas relacionados	42
SECCION II: FORMULACION DEL DRPP	
II.1 Transformaciones del grafo original	51
II.2 Una formulación del DRPP	58
SECCION III: SOLUCIONES POSIBLES. COTA SUPERIOR	
III.1 Soluciones posibles para el DRPP	81
III.2 La cota superior	88
III.3 Mejoras en las soluciones posibles	90
SECCION IV: COTAS INFERIORES DEL DRPP	
IV.1 Posibles relajaciones del DRPP	97
IV.2 Cota inferior a partir de la arborescencia generadora de mínimo peso (SSA)	106

IV.3 Mejoras de la cota inferior	113
IV.4 Procedimiento general de obtención de la cota inferior	118
IV.5 Procedimientos heurísticos de ob- tención de los multiplicadores	123
SECCION V: PROCEDIMIENTO DE BRANCH AND BOUND PARA EL DRPP	
V.1 Estrategia de ramificación	138
V.2 Elección de la variable a ramificar	142
V.3 Características del árbol de ramifi- cación	148
SECCION VI: RESULTADOS COMPUTACIONALES	
VI.1 Resolución óptima del DRPP: Ejemplo	164
VI.2 Resultados computacionales	168
REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA	177

RESUMEN

La presente memoria ofrece el estudio y resolución exacta de un problema conocido como el Problema del Cartero Rural Dirigido (DRPP).

Dado un grafo conexo y dirigido, con costes no negativos asociados a sus arcos, el DRPP consiste en determinar un circuito que atraviere, al menos una vez, un cierto conjunto de arcos, llamados requeridos, con el mínimo coste total.

Como en el caso de un grafo no dirigido, objeto de la memoria presentada por A. Corberán con el título de Circuitos Eulerianos Óptimos en Grafos no dirigidos: el RPP, el DRPP es un problema NP-Completo y también una generalización del conocido Problema del Agente Viajero asimétrico (TSP-a).

Ciertos problemas directamente relacionados con el DRPP son, por ejemplo, la recogida de basuras, el reparto de correspondencia y, en general, problemas de inspección de sistemas de distribución (tendidos eléctricos, líneas férreas, telefónicas, etc.), en las que todas, o algunas de sus componentes, deben ser inspeccionadas.

Existe una relación mucho más íntima entre el TSP

asimétrico y el simétrico, (los algoritmos que resuelven el caso asimétrico pueden ser aplicados al caso simétrico), que entre el DRPP y el RPP, que, aunque persiguiendo objetivos similares, no pueden ser transformados el uno en el otro, como puede comprobarse fácilmente. Presentamos, por lo tanto, un algoritmo exacto, basado en la obtención de cotas inferiores, utilizando la Relajación Lagrangiana, y su inserción en un procedimiento de branch and bound, para resolver el DRPP.

La presente memoria está estructurada como sigue:

En la Introducción se resumen algunos conceptos previos utilizados, sobre todo de la Teoría de Grafos y la Relajación Lagrangiana.

En la Sección I exponemos los antecedentes históricos, aplicaciones y problemas relacionados con el DRPP. Se presenta el DRPP dentro de una importante clase de problemas de optimización combinatorial, conocida como problemas de routing por arcos y para la mayoría de los cuáles sólo se conocen procedimientos aproximados de solución.

En la Sección II presentamos nuestra formulación del DRPP como un problema de Programación Lineal Entera. Ciertas transformaciones del grafo original, necesarias para simplificar la estructura y formulación del pro-

blema, se presentan en primer lugar.

La Sección III ofrece un algoritmo heurístico eficiente desarrollado para obtener soluciones posibles del DRPP. El algoritmo utiliza una Arborescencia Generadora de Mínimo Peso (SSA) y un flujo de coste mínimo como subproblemas. Una solución posible mejorada, a partir de la solución proporcionada por el heurístico, ha sido utilizada como cota superior inicial en el procedimiento de "branch and bound" descrito en la Sección V.

La Sección IV estudia las posibles relajaciones del problema. Una de ellas, obtenida utilizando la Relajación Lagrangiana, ha sido utilizada como cota inferior en el procedimiento de ramificación. Tratando de conjugar la potencia de la cota con la rapidez de cálculo, el método del subgradiente ha sido sustituido por procedimientos heurísticos para la obtención de "buenos" multiplicadores.

En la Sección V se detalla el procedimiento de branch and bound construido, describiendo la estrategia de ramificación y criterios de elección adoptados. La Sección concluye describiendo ciertas características del procedimiento que permiten evitar el cálculo de cota inferior en cada nudo del árbol, acelerando el

proceso de búsqueda.

La Sección VI, finalmente, recoge los resultados computacionales obtenidos sobre 22 problemas de test, cuyas características principales se especifican. El tiempo de computación crece exponencialmente y el procedimiento expuesto permite resolver problemas de 76 vértices y 166 arcos en poco más de 200 segundos de CPU, en una máquina UNIVAC 1100/60.

I N T R O D U C C I O N

CONCEPTOS PREVIOS

1 ALGUNAS NOTAS SOBRE LA NP-COMPLETITUD

Un pilar básico para el desarrollo de la optimización combinatorial fué el descubrimiento por Cook (1971) y Karp (1972) de una amplia clase NPC de problemas combinatoriales tales que:

- (i) NPC incluye muchos de los problemas importantes y difíciles de la optimización combinatorial, problemas para los que se han buscado, en vano, buenos algoritmos durante muchos años.
- (ii) Muchos problemas en NPC son, al menos superficialmente, similares a problemas para los que se conocen buenos algoritmos.
- (iii) Si un miembro de NPC admite un buen algoritmo, también lo admiten todos los demás.

La definición precisa de NPC depende de las nociones de una Máquina de Turing Determinista (DTM), Máquina de Turing No Determinista (NTM) y de otras nociones de la teoría de computación que no van a ser expuestas aquí. Presentamos, simplemente, algunas nociones y definiciones, no completamente precisas, que permitan dar una idea de las complejidades intrínsecas de los problemas NPC y de la dificultad y limitaciones de los algoritmos exactos para resolverlos, como el presentado

en esta memoria para el Problema del Cartero Rural Dirigido.

El texto de Garey and Johnson (1979) presenta las definiciones formales, la más extensa lista de problemas NP-completos y una discusión de las distintas estrategias para demostrar la NP-completitud.

Emplearemos los términos Problema y Ejemplo en el sentido siguiente: Cada ejemplo está asociado a unos datos numéricos particulares y un problema es la clase de todos los ejemplos con una determinada forma.

Para Problemas relacionados con un grafo $G=(X,A)$, los parámetros $n = |X|$ y $a = |A|$ proveen una medida natural del tamaño de un Ejemplo. Es de esperar, por supuesto, que Ejemplos grandes sean resueltos más lentamente que Ejemplos pequeños.

Un Algoritmo es un procedimiento mecánico que, seguido paso a paso, permite resolver un Problema, en el sentido de que aplicado a cualquier Ejemplo concreto de dicho Problema, proporciona siempre la solución.

Cuando τ es una función de los parámetros n y a de un Problema, un Algoritmo se dice que es de complejidad $O(\tau(n,a))$ si existe una constante c tal que para todo Ejemplo concreto del Problema, el Algoritmo requiere, como máximo, $c\tau(n,a)$ pasos computacionales.

Un Paso puede considerarse como una única operación aritmética (adición, multiplicación, comparación, etc.)

Un buen Algoritmo es uno que está acotado polinomialmente, i.e., que es de complejidad $O(n^p a^q)$ para algún p y q . Por supuesto, es de desear que los exponentes p y q sean tan pequeños como sea posible. Esta noción fué establecida por Edmonds.

Con estos conceptos, podemos dar las siguientes definiciones:

Clase P: La clase P puede considerarse como la formada por todos aquellos Problemas que pueden ser resueltos óptimamente por buenos algoritmos.

Clase NP: La clase NP puede considerarse como la formada por todos aquellos Problemas para los que una solución a un Ejemplo cualquiera puede obtenerse en un tiempo (complejidad) acotado polinomialmente.

Aunque, obviamente $P \subset NP$, la inclusión en sentido contrario no ha podido ser demostrada. Cada día crece la convicción de que $P \neq NP$.

Un Problema X se dice que es reducible (polinomialmente) a un Problema Y si cada buen algoritmo que resuelve Y puede ser utilizado para producir un buen algoritmo que resuelva X.

Un Problema Y es NP-hard si todo Problema en NP es reducible a Y ; si, además, el Problema Y pertenece a NP, diremos que Y es NP-completo. NPC es la clase de todos los Problemas NP-completos.

En esta memoria empleamos el término "algoritmo eficiente" o "polinomial" como sinónimo de "buen algoritmo", en el sentido antes definido.

Concluimos este apartado señalando algunos resultados ya conocidos:

El Problema del Cartero Chino Dirigido pertenece a la Clase P, mientras que el Problema del Agente Viajero pertenece a la Clase NP.

Las definiciones precisas de estos Problemas se verán en la Sección siguiente, donde se señalará también que el Problema del Cartero Rural Dirigido es un Problema NP-completo, por lo que, probablemente, no exista ningún algoritmo polinomial que lo resuelva.

2 TEORIA DE GRAFOS

En la definición de los conceptos básicos de la Teoría de Grafos, que presentamos a continuación, seguimos, fundamentalmente, los textos de Christofides (1975) y Minieka (1975). Otros textos de referencia obligada son los de Berge (1962), Harary (1969) y Bondy and Murty (1976).

Algunas definiciones y resultados básicos

Un grafo G es una colección de puntos o vértices x_1, x_2, \dots, x_n (que denotamos por el conjunto X) y una colección de líneas a_1, a_2, \dots, a_m (que denotamos por el conjunto A) que unen todos, o algunos, de estos puntos. Denotamos el grafo G por el par (X, A) .

Si las líneas de A tienen una dirección, reciben el nombre de arcos y el grafo resultante, el de grafo dirigido. Si no están orientadas, reciben el nombre de aristas y el grafo es no dirigido.

Cuando un arco es denotado por sus dos vértices terminales, su dirección se supone desde el primer vértice (vértice inicial) al segundo (vértice final).

Una forma alternativa de describir un grafo dirigido G es especificar el conjunto de vértices X y una correspondencia r que indica cómo se relacionan los vér-

tices entre sí. Así, $\Gamma : X \rightarrow X$ y si, por ejemplo, $\Gamma(x_1) = \{x_2, x_5\}$, estamos indicando que los vértices x_2 y x_5 son los vértices finales de arcos cuyo vértice inicial es x_1 . Denotamos el grafo por el par $G = (X, \Gamma)$.

En el caso de un grafo no dirigido, la correspondencia Γ se considera la correspondiente a un grafo dirigido equivalente en el que toda arista ha sido sustituida por dos arcos en direcciones opuestas.

Análogamente se define la correspondencia inversa $\Gamma^{-1}(x_i)$. Es obvio que, para un grafo no dirigido, $\Gamma^{-1}(x_i) = \Gamma(x_i) \forall x_i \in X$. Dos vértices x_i y x_j se dice que son adyacentes si el arco (x_i, x_j) o el arco (x_j, x_i) , o ambos, existen en el grafo.

El número de arcos que tienen al vértice x_i como su vértice inicial es el grado de salida del vértice x_i (que denotamos por $d_o(x_i)$), y el número de arcos cuyo vértice final es el x_i es el grado de entrada del vértice x_i (denotado por $d_t(x_i)$).

$$\text{Entonces, } d_o(x_i) = |\Gamma(x_i)| \text{ y } d_t(x_i) = |\Gamma^{-1}(x_i)|.$$

Si un vértice x_i cumple que $d_o(x_i) = d_t(x_i)$ diremos que es simétrico.

$$\text{Es obvio que } \sum_{i=1}^n d_o(x_i) = \sum_{i=1}^n d_t(x_i) = m,$$

donde n es el número total de vértices y m el número total de arcos de G .

Para un grafo no dirigido $G=(X,\Gamma)$, el grado de un vértice x_i se define, análogamente, como $d(x_i) \equiv |\Gamma(x_i)|$.

Un camino en un grafo dirigido es cualquier sucesión de arcos donde el vértice final de uno es el vértice inicial del siguiente.

Un camino simple es un camino que no usa el mismo arco más de una vez. Un camino elemental es un camino que no usa el mismo vértice más de una vez.

El concepto equivalente al de camino, en grafos no dirigidos, es el de cadena, y de forma totalmente análoga se definen cadena simple y elemental.

En ocasiones existen pesos o costes c_{ij} asociados a los arcos (x_i, x_j) de un grafo. Dado un camino μ , representado por la sucesión de arcos (a_1, a_2, \dots, a_q) , la longitud (o coste) del camino $l(\mu)$ se define como:

$$l(\mu) = \sum_{(x_i, x_j) \in \mu} c_{ij}$$

La cardinalidad del camino μ se define como el número de arcos que integran el camino.

Para el problema de determinar los caminos más cortos (i.e., de coste mínimo) entre un subconjunto de vértices dado de un grafo dirigido $G=(X,A)$ y con pesos, existen diversos algoritmos eficientes. En esta memoria ha sido utilizado (ver Transformación 1 de la Sección II) el conocido algoritmo de Dijkstra, de $O(n^3)$; para

una descripción detallada del mismo, remitimos a Christofides (1975) (pág. 152 y ss).

Un circuito es un camino a_1, a_2, \dots, a_q en el que el vértice inicial de a_1 coincide con el vértice final de a_q .

Un ciclo es el equivalente de un circuito, en grafos no dirigidos.

Un circuito elemental que pasa a través de todos los vértices de un grafo G recibe el nombre de circuito Hamiltoniano.

Un circuito simple que atraviesa todos los arcos de un grafo dirigido G recibe el nombre de circuito Euleriano.

El teorema básico de existencia de un circuito Euleriano en un grafo dirigido G es el siguiente:

Teorema 1

Un grafo G dirigido y conexo contiene un circuito Euleriano si y solamente si los grados de entrada $d_t(x_i)$ y de salida $d_o(x_i)$ de los vértices satisfacen la condición:

$$d_t(x_i) = d_o(x_i) \quad \forall x_i \in X$$

La definición de conexo será dada más adelante.

Dado un grafo $G = (X, \Gamma)$, un subgrafo G_S es el grafo (X_S, Γ_S) con $X_S \subseteq X$ y, para cada $x_i \in X_S$,

$\Gamma_S(x_i) = \Gamma(x_i) \cap X_S$. Denotaremos a menudo el subgrafo G_S por $\langle X_S \rangle$. También se dice que G_S es el subgrafo

inducido por el conjunto de vértices X_S .

Dado un grafo dirigido $G = (X, A)$ y $A_p \subseteq A$, el grafo G_p cuyo conjunto de arcos es A_p y cuyo conjunto de vértices son los terminales de los arcos de A_p , recibe el nombre de subgrafo inducido por el conjunto de arcos A_p .

Si $G = (X, A)$ es un grafo dirigido, un grafo parcial (llamado también, por algunos autores, subgrafo generador) G_p de G es el grafo (X, A_p) , con $A_p \subset A$.

Un grafo se denomina planar si puede ser dibujado en un plano de forma que no existan dos arcos que se intersecten.

Diremos que un grafo dirigido es simétrico si todos sus vértices lo son. Un grafo es simple cuando no existen dos o más arcos, en la misma dirección, entre un mismo par de vértices. Salvo que no se afirme explícitamente lo contrario, los grafos considerados en esta memoria son simples. Diremos que un grafo es completo si todo vértice es adyacente con todos los demás vértices.

Un grafo se dice que es fuertemente conexo o fuerte si para cualesquiera dos vértices distintos x_i y x_j existe al menos un camino de x_i a x_j . Esta definición implica que cualesquiera dos vértices de un grafo fuerte son mutuamente alcanzables.

Un grafo se dice que es debilmente conexo o debil si existe al menos una cadena entre cada par de vértices distintos. Si para un par de vértices tal cadena no existe, se dice que el grafo es disconexo. Usaremos indistintamente los términos fuertemente conexo y conexo.

Dada cualquier propiedad P para caracterizar un grafo, un subgrafo maximal $\langle \hat{X}_S \rangle$ en un grafo G , con respecto a dicha propiedad, es un subgrafo que tiene la propiedad y tal que no existe otro subgrafo $\langle X_S \rangle$, con $X_S \supset \hat{X}_S$, que también la tenga.

Arboles y arborescencias

Definición 1:

Un árbol no dirigido es un grafo conexo con n vértices y $n-1$ aristas.

Proposición 2:

Los siguientes condiciones son equivalentes:

- a) G es un árbol
- b) G es un grafo conexo y sin ciclos
- c) G es un grafo en el que cada par de vértices está conectado por una, y solamente una, cadena elemental.

Un árbol dirigido, llamado también arborescencia se define también de forma similar.

Definición 2:

Una arborescencia es un grafo dirigido y sin circuitos en el que el grado de entrada de todo vértice, excepto uno que llamaremos raíz, es 1. El grado de entrada de la raíz es cero.

Proposición 3:

Si $G = (X,A)$ es una arborescencia, entonces:

- a) Si $|X|=n$, el número de arcos en A es, exactamente, $n-1$.
- b) Existe un camino elemental dirigido desde la raíz a cada vértice de G .

Dado un grafo dirigido $G=(X,A)$, una Arborescencia Generadora de G es un subgrafo generador que forma una arborescencia. El Problema de la Arborescencia Generadora de Mínimo Peso (abreviadamente, SSA), que es utilizado en la obtención de soluciones posibles y cotas inferiores del DRPP, objeto de esta memoria, consiste en:

Dado un grafo dirigido $G = (X,A)$ y fuertemente conexo, con costes $c_{ij} \geq 0$ asociados a los arcos del conjunto A , se trata de encontrar una arborescencia generadora de G , que representamos por SA , tal que

$$\sum_{(x_i, x_j) \in SA} c_{ij} \quad \text{sea mínimo.}$$

Existe un algoritmo eficiente, debido a Edmonds, que permite resolver este problema. Un caso particular

utilizado en esta memoria, y resoluble también mediante dicho algoritmo, es el problema de determinar una SSA con raíz en un vértice determinado x_α . Los detalles de este algoritmo pueden encontrarse también en Minieka (1975).

Teorema 4:

Dado un grafo dirigido y fuertemente conexo $G = (X, A)$, con costes asociados $c_{ij} \geq 0$, el problema de obtener la SSA con raíz en el vértice $x_\alpha \in X$ es equivalente al problema de Programación Lineal Entera

$$\text{Min} \sum_{(x_i, x_j) \in A} c_{ij} y_{ij}$$

Sometido a las restricciones

$$\sum_{(x_i, x_j) \in K_t} y_{ij} \geq 1 \quad \forall K_t = \{ (x_i, x_j) / x_i \in V, x_j \in \bar{V}, x_\alpha \in V, V \subset \mathcal{F}(X) \}$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \quad i \neq j$$

Donde $\mathcal{F}(X)$ es el conjunto de las partes de X y V cualquier subconjunto propio $\bar{V} = \mathcal{F}(X) - V$.

Si $y_{ij} = 1$, el arco $(x_i, x_j) \in A$ está en la SSA con raíz en x_α .

El Problema de Flujo de Coste Mínimo

Dado un grafo dirigido y conexo $G=(X,A)$, donde cada arco (x_i, x_j) tiene dos números asociados, una capacidad q_{ij} y un coste por unidad de flujo que atraviese

dicho arco, que denotamos por c_{ij} , consideramos n_s vértices fuentes y n_t vértices sumideros. El problema de encontrar un flujo total, de valor v , con el mínimo coste, desde todas las fuentes a todos los sumideros, suponiendo que el flujo puede ser enviado desde cualquier fuente a cualquier sumidero, puede transformarse en el problema de encontrar el flujo de coste mínimo, y valor v , desde una única fuente s a un único sumidero t (tal transformación se detalla en III.1.3)

La aproximación primal-dual para determinar flujos de coste mínimo, con una sola fuente s y un solo sumidero t , condujo al algoritmo general de programación lineal primal-dual de Dantzig, Ford and Fulkerson (1956). Una unificación significativa del problema de flujo máximo, del problema de flujo de coste mínimo y de otras partes de la teoría de flujos en redes se consiguió en el estudio de las circulaciones de coste mínimo y el método, denominado de out-of-kilter, para determinarlas ([20] y Ford and Fulkerson (1962)).

Una descripción detallada del algoritmo de out-of-kilter para resolver el problema de flujo de coste mínimo puede encontrarse en Ford and Fulkerson (1962) y Minieka (1975).

Aunque existen otros algoritmos (ver por ejemplo

[17] y [5], el algoritmo de Ford and Fulkerson ofrece el mejor procedimiento conocido y acepta costes negativos para los arcos del grafo G.

Teorema 5:

El Problema de Flujo de Coste Mínimo, con una sola fuente s y un solo sumidero t, es equivalente al Problema de Programación Lineal

$$\text{Min} \quad \sum_{(x_i, x_j) \in A} c_{ij} f(x_i, x_j)$$

Sometido a las restricciones:

$$\sum_i [f(s, x_i) - f(x_i, s)] = v$$

$$\sum_{j \neq i} [f(x_i, x_j) - f(x_j, x_i)] = 0 \quad \forall x_i \neq s, x_i \neq t$$

$$\sum_i [f(t, x_i) - f(x_i, t)] = -v$$

$$0 \leq f(x_i, x_j) \leq q_{ij} \quad \forall (x_i, x_j)$$

Otra formulación equivalente puede encontrarse en [10, pág. 119].

3 RELAJACION LAGRANGIANA

La Relajación Lagrangiana es el nombre, debido a Geoffrion (1974), que ha recibido una de las ideas computacionalmente más útiles de la década de los '70. Aunque estos métodos habían sido aplicados con anterioridad a algunos problemas de optimización discreta, el "nacimiento" de la aproximación Lagrangiana, tal y como la conocemos hoy, se produce en 1970 cuando Held and Karp [14, 15] usaron un problema Lagrangiano, basado en árboles generadores de mínimo peso, para diseñar, con gran éxito, un algoritmo para el Problema del Agente Viajero (TSP).

Desde entonces, la lista de aplicaciones de la Relajación Lagrangiana ha crecido mucho, incluyendo a muchos de los más famosos problemas de optimización combinatorial. Para muchos de estos problemas, la Relajación Lagrangiana proporciona el mejor algoritmo existente y ha permitido solucionar problemas de tamaño "real".

Lo que sigue es un resumen de los principales aspectos teóricos y computacionales, considerando, fundamentalmente, el trabajo de Geoffrion [12]. Otros resúmenes de la teoría y aplicaciones de la Relajación Lagrangiana se pueden encontrar en [11] y [25].

Algunos resultados básicos

El Problema General de Programación Lineal Entera puede escribirse como:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min } cx \\ x \geq 0 \\ \text{sometido a:} \\ Ax \geq b \quad Bx \geq d \\ x_j \text{ entero, } j \in I \end{array} \right\} (P)$$

donde b , c y d son vectores y A y B matrices de dimensiones adecuadas; el conjunto de índices I denota las variables que deben ser enteras.

Definimos la Relajación Lagrangiana de (P) con respecto a las restricciones $Ax \geq b$ y a un vector no negativo λ , de dimensiones adecuadas, como:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min } cx + \lambda(b - Ax) \\ x \geq 0 \\ \text{sometido a:} \\ Bx \geq d \\ x_j \text{ entero, } j \in I \end{array} \right\} (PR_\lambda)$$

Notación 3:

Si (\cdot) es un problema de optimización, entonces $v(\cdot)$ es su valor óptimo, $F(\cdot)$ es el conjunto de sus soluciones posibles, y $(\bar{\cdot})$ se refiere al mismo problema sin requerir la condición de que las variables sean enteras; el vector $\bar{\lambda}$ denota un vector de multiplicadores

óptimo, asociado a las restricciones $Ax \geq b$, del problema de programación lineal ordinario (\bar{P}) .

Supondremos que todas las restricciones $Ax \geq b$ son desigualdades. Si algunas de ellas fueran igualdades, las componentes correspondientes de λ no estarían restringidas en signo. Supondremos, finalmente, que las restricciones $Bx \geq d$ incluyen cotas superiores para todas las variables.

El término relajación se utiliza en el siguiente sentido: Un problema de minimización (Q) se dice que es una relajación de un problema de minimización (P) si $F(Q) \supseteq F(P)$ y la función objetivo de (Q) es menor o igual que la de (P) en $F(P)$.

Claramente, (PR_λ) es una relajación en este sentido para todo $\lambda \geq 0$, puesto que el término Lagrangiano $\lambda(b-Ax)$ en la función objetivo de (PR_λ) debe ser no positivo cuando la restricción $Ax \geq b$ se satisface.

La utilidad potencial de cualquier relajación de (P), y de la Relajación Lagrangiana en particular, viene determinada por la proximidad de su valor óptimo al valor óptimo de (P). La elección ideal del vector λ sería tomar una solución óptima del problema.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Max } v(PR_\lambda) \\ \lambda \geq 0 \end{array} \right\} (D)$$

El siguiente teorema describe algunas de las relaciones básicas entre (P) , (PR_λ) , (D) y (\bar{P}) .

Teorema 6:

- (a) $F(\bar{P}) \supseteq F(P)$ $F(PR_\lambda) \supseteq F(P)$
 $v(\bar{P}) \leq v(P)$ $v(PR_\lambda) \leq v(P) \quad \forall \lambda \geq 0$
- (b) Si (\bar{P}) es posible, entonces $v(\bar{P}) \leq v(PR_\lambda) \leq v(P)$
- (c) Si para un λ dado y un vector x se satisfacen las tres condiciones siguientes
- (i) x es óptimo en (PR_λ)
- (ii) $Ax \geq b$
- (iii) $\lambda(b-Ax) = 0$

entonces x es una solución óptima de (P) . Si x satisface (i), (ii) pero no (iii), entonces x es una solución ϵ -óptima de (P) con $\epsilon = \lambda(Ax-b)$.

Comentario 4:

El apartado (a) señala las relaciones más obvias entre (P) y sus relajaciones (\bar{P}) y (PR_λ) .

El apartado (b) demuestra que $\bar{\lambda}$, obtenido al resolver la relajación lineal (\bar{P}) , proporciona una relajación Lagrangiana que es al menos tan buena como la lineal.

El apartado (c) indica las condiciones, ya conocidas, bajo las que una solución de una relajación Lagrangiana es también óptima, o casi óptima, en (P) . Se

reconoce así el hecho de que la Relajación Lagrangiana es de interés no sólo por las cotas inferiores que proporciona para $v(P)$, sino también por la posibilidad de que produzca soluciones óptimas, o casi óptimas, de (P). (PR_λ) proporciona una solución ϵ -óptima de (P) solamente si $v(PR_\lambda) \geq v(P) - \epsilon$, luego la calidad de las soluciones posibles obtenidas a partir de la Relajación Lagrangiana, como aplicación del apartado (c), está limitada por la diferencia (si existe) entre $v(P)$ y $v(D)$.

La Relajación Lagrangiana puede ser utilizada, entonces, en sustitución de la lineal en procedimientos de enumeración implícita. En otros casos puede actuar como "colaboradora" de la relajación lineal usual; en este sentido, algunas de sus aplicaciones se detallan en las Secciones 5 y 6 del artículo de Geoffrion [12].

Si el valor óptimo de (PR_λ) no varía al ser eliminada la condición de que las variables sean enteras, i.e., si $v(PR_\lambda) = v(\overline{PR}_\lambda) \forall \lambda \geq 0$, diremos que (PR_λ) tiene la propiedad de la integralidad. En esta situación se cumple el siguiente teorema:

Teorema 7:

Si (\overline{P}) es posible y (PR_λ) tiene la Propiedad de la Integralidad, se cumple que $v(\overline{P}) = v(PR_\lambda) = v(D)$.



En estas circunstancias, la Relajación Lagrangiana no puede superar a la relajación lineal usual (\bar{P}) y la mejor elección de λ es entonces $\bar{\lambda}$, obtenido a partir de (\bar{P}). La única ventaja que puede seguir ofreciendo en este caso la Relajación Lagrangiana es, quizá, su mayor sencillez y rapidez de cálculo. Puede ocurrir también que la relajación lineal (\bar{P}) contenga tal número de restricciones que la hagan computacionalmente intratable con los algoritmos usuales.

El método del subgradiente

El método más comúnmente utilizado para determinar $v(D)$ es el empleado por Held and Karp en [15] y que denominaron "subgradiente"; es una aplicación del método de Agmon-Motzkin-Schoenberg para la resolución de sistemas de desigualdades lineales. En un trabajo posterior, Held, Wolfe y Crowder [16] estudian con detalle el método y presentan resultados de su aplicación en distintos problemas de optimización discreta. Resultados teóricos y estudios de convergencia se encuentran también en [23] y [24].

Básicamente, el método consiste en, dado un vector inicial $\lambda^0 \geq 0$, que puede ser el vector nulo, determinar una sucesión $\{\lambda^v\}$ de acuerdo con la si-

giente regla:

$$\lambda^{v+1} = \max \left\{ \lambda^v + \theta^v (b - Ax^v), 0 \right\}$$

donde el máximo se aplica a cada componente, θ^v es un escalar positivo y x^v es una solución óptima de (PR_{λ^v}) .

El resultado básico fundamental viene expresado en el siguiente teorema.

Teorema 8:

$$\left(v(PR_{\lambda^v}) \right) \rightarrow \left(v(D) \right) \text{ si } \theta^v \rightarrow 0 \text{ y } \sum_{i=0}^v \theta^i \rightarrow \infty$$

El valor de θ^v utilizado generalmente es:

$$\theta^v = \frac{t_v (z^* - v(PR_{\lambda^v}))}{\|Ax^v - b\|^2}$$

donde t_v es un escalar tal que $0 < t_v \leq 2$ y z^* es una cota superior de $v(D)$, obtenida frecuentemente aplicando un procedimiento heurístico a (P) . La justificación de este resultado aparece en [16].

La sucesión $v(PR_{\lambda^v})$ no es necesariamente monótona y, generalmente, el método termina, sin alcanzar $v(D)$, después de un número arbitrario de iteraciones. A menudo, la sucesión $\{t_v\}$ se determina tomando $t_0 = 2$ y dividiendo dicho valor por dos cada vez que $v(PR_{\lambda^v})$ no ha aumentado en un número prefijado de iteraciones.

S E C C I O N I

EL DRPP : ANTECEDENTES

Y ESTADO ACTUAL

En esta Sección nos hemos limitado, voluntariamente, a presentar los antecedentes históricos y algunos de los problemas más íntimamente relacionados con el Problema del Cartero Rural Dirigido (DRPP). Una introducción más general a los problemas de atravesar arcos se presenta en la Sección I de la memoria de A. Corberán, titulada Circuitos Eulerianos óptimos en grafos no dirigidos: El RPP, que puede ser considerada como sección introductoria tanto al RPP como al DRPP, y a la que nos remitimos.

El antecedente histórico más próximo es el conocido Problema del Cartero Chino en un grafo dirigido (DCPP). El DRPP incluye, como caso particular, al Problema del Agente Viajero (TSP) asimétrico, y es también un problema NP-completo. A su vez, el DRPP es un caso particular del General Routing Problem (GRP), cuya formulación, propuesta por Orloff, se demuestra incorrecta.

El problema más directamente relacionado con el DRPP es el RPP, con el que se señalan las diferencias. Un problema secundario y mucho más sencillo es la determinación de un circuito Euleriano en un grafo conexo, dirigido y simétrico, para lo que existen distintos pro-

cedimientos; el utilizado es debido a Edmons y Johnson.

Recientemente, el DRPP ha sido considerado como un caso particular de un problema de routing por arcos, con capacidades, denominado CARP. Los problemas de routing de vehículos, en general, han sido objeto de mucha atención y una muestra reciente fué una reunión internacional celebrada en Junio de 1979, fruto de la cual es el Volumen 11 de la revista Networks (1981).

La presente memoria se inscribe en el marco de los esfuerzos que se están realizando en el estudio de esta importante clase de problemas de optimización combinatorial.

I.1 ANTECEDENTES HISTORICOS: EL CPP

Uno de los más famosos y antiguos problemas de la Teoría de Grafos fué propuesto por Euler en 1736 y es conocido como el Problema de los Puentes de Königsberg. Se trata de determinar si un grafo G (que supondremos no dirigido) contiene o no un circuito que atraviesa cada arista de G exactamente una vez; en honor a Euler, tales circuitos reciben el nombre de Eulerianos, como ya definimos en la introducción.

Un problema de optimización combinatorial relacionado es el conocido como el Problema del Cartero Chino, propuesto por K. Mei-ko (1962) [19] y J. Edmonds (1965) [9].

Dado un grafo conexo $G = (X, A)$, dirigido o no, y con costes no negativos c_{ij} asociados a los arcos (aristas) de A , se trata de determinar un circuito que atravesase cada arco (arista) de G al menos una vez y cuyo coste total sea mínimo. Obviamente, si G contiene un circuito Euleriano, dicho circuito es óptimo puesto que cada arco (arista) es atravesado exactamente una vez. Este problema está resuelto eficientemente, salvo en el caso en que el conjunto A esté formado por arcos y aristas, en cuyo caso G recibe el nombre de grafo mixto.

Señalamos a continuación, brevemente, los distintos casos y procedimientos de resolución.

I.1.1 El Problema del Cartero Chino en un grafo

no dirigido

Cuando todos los costes de las aristas son la unidad, este problema fué considerado por Bellman and Cook [2] usando programación dinámica. El problema más general, con costes arbitrarios, fué formulado y resuelto como un problema de matching por Edmonds [9], Edmonds and Johnson [10], Busacker and Saaty (1965) y Christofides [6].

Presentamos la formulación, debida a Edmonds y Johnson, de este problema como uno de Programación Lineal Entera.

$$\text{Min} \quad \sum_{l \in A} c_l x_l$$

sometido a:

$$\sum_{l \in A} a_{il} (1 + x_l) \equiv 0 \pmod{2} \quad \forall i$$

$$x_l \geq 0, \text{ entera} \quad \forall l \in A$$

donde $l = (i,j)$ representa una arista de A y x_l representa el número de veces que se repite, en un circuito óptimo, la arista l . $[a_{il}]$ es la matriz de incidencia vértices-aristas, i.e.,

$$a_{il} = \begin{cases} 1 & \text{si la arista } l \text{ es incidente con el v\u00e9rtice } i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

I.1.2 El Problema del Cartero Chino en un grafo dirigido (DCPP)

Este problema constituye el antecedente hist\u00f3rico m\u00e1s pr\u00f3ximo del presentado en esta memoria. Como se\u00f1alan Edmonds y Johnson, el DCPP es m\u00e1s sencillo que el caso no dirigido y puede ser resuelto por medio de un problema de flujo de coste m\u00ednimo.

La \u00fanica condici\u00f3n para la existencia de un circuito Euleriano es (ver introducci\u00f3n a esta memoria) que cada v\u00e9rtice i sea sim\u00e9trico, i.e.: $d_o(i) = d_t(i) \quad \forall i \in X$. Para conseguirlo, deben repetirse arcos, una o m\u00e1s veces, de forma que la suma de los costes de los arcos repetidos sea m\u00ednima. La formulaci\u00f3n, pues, del problema como uno de Programaci\u00f3n Lineal Entera es:

$$\text{Min } \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} .$$

sometido a:

$$\sum_j (1 + x_{ij}) b_{ij} = \sum_j (1 + x_{ji}) b_{ji} \quad \forall i \in X \quad (1)$$

$$x_{ij} \geq 0, \text{ entera} \quad \forall (i,j) \in A \quad (2)$$

donde x_{ij} representa el n\u00famero de veces que se repite

el arco (i,j) , en un circuito óptimo y

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si existe el arco } (i,j) \in A \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

La restricción (1) puede escribirse como:

$$\sum_j x_{ij} b_{ij} - \sum_j x_{ji} b_{ji} = d_t(i) - d_o(i) \equiv D(i) \quad \forall i \in X \quad (1')$$

El problema con función objetivo $\text{Min} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$

y restricciones (1'), (2) es un problema de flujo de coste mínimo, donde cada vértice i con $D(i) > 0$ es una fuente con oferta $D(i)$, y cada vértice j con $D(j) < 0$ es un sumidero con demanda $-D(j)$. Obviamente se cumple que:

$$\sum_{i, D(i) > 0} D(i) = \sum_{i, D(i) < 0} D(i), \text{ es decir, la oferta total}$$

coincide con la demanda total.

El problema de flujo tiene solución siempre que no exista un subconjunto propio de vértices S ($S \subset X$) tal que todo arco con vértices terminales i en S y j en $X-S$ está dirigido desde i a j . La condición anterior se cumple siempre que el grafo G sea fuertemente conexo.

I.1.3 El Problema del Cartero Chino en un grafo mixto

Este problema está resuelto eficientemente sólo en el caso de que el grafo G sea "par" (en el sentido de que, prescindiendo de las direcciones de los arcos, cada vértice $i \in X$ sea incidente con un número par de aristas

y/o arcos). Si el grafo no es simétrico (considerando sólo los arcos), la resolución de un problema de flujo de coste mínimo en un grafo transformado proporciona la solución óptima (ver, por ejemplo, Minieka, (1975)).

Papadimitriou [22] demostró que el caso general, cuando existen vértices "impares", es un problema NP-completo. Solamente son conocidos algunos algoritmos heurísticos, como el propuesto por Edmonds y Johnson [10] que consiste en conseguir un grafo "par" mediante la resolución de un matching y, a continuación, aplicar el procedimiento para el caso "par". El CPP en un grafo mixto puede considerarse como todavía no resuelto.

I.2 EL DRPP: DEFINICION Y APLICACIONES

El Problema del Cartero Rural Dirigido es un caso más general del Problema del Cartero Chino en un grafo dirigido, definido en el apartado anterior. Se obtiene cuando un subconjunto propio $A_R \subset A$ del conjunto de arcos del grafo G debe ser recorrido, con coste total mínimo. Dado el grafo $G = (X,A)$ dirigido y conexo, con costes $c_{ij} \geq 0$ asociados a los arcos de A , el DRPP consiste, pues, en determinar el circuito Euleriano de coste mínimo que atraviesa cada arco de A_R al menos una vez. La formulación de este problema como uno de Programación Lineal Entera y su resolución exacta es el objeto de las siguientes secciones de esta memoria. Presentamos a continuación dos de los problemas más íntimamente relacionados con el DRPP.

I.2.1 El Problema del Agente Viajero asimétrico (TSP-a)

Dado un grafo conexo y dirigido $G = (X,A)$ (que podemos suponer completo), con costes $c_{ij} \geq 0$ asociados a los arcos de A , el TSP-a puede definirse como el problema de encontrar el circuito de coste total mínimo que pasa por cada vértice al menos una vez. Es un resultado conocido que este problema puede considerarse como un caso especial del TSP general (pasar por cada vértice

exactamente una vez) en el que los costes asociados satisfacen la desigualdad triangular.

Vamos a comprobar que el TSP-a puede ser transformado en un DRPP. En efecto:

Cada vértice $i \in X$ se descompone en dos vértices i' e i'' ; definimos un nuevo grafo transformado $G^T = (X^T, A^T)$, donde

$$X^T = \{ i' \text{ e } i'' \text{ , correspondientes a } i \in X \}$$

$$A^T = \{ (i', i''), (i'', i') \text{ / } i \in X \} \cup \{ (i', j') \text{ / } (i, j) \in A \}$$

$$c_{i'j'}^T = c_{ij} \quad (i, j) \in A$$

$$c_{i'i''}^T = c_{i''i'}^T = 0 \quad i \in X$$

$$A^T \supset A_R^T = \{ (i', i''), (i'', i') \text{ / } i \in X \}$$

Los arcos de $A^T - A_R^T$ en la solución óptima del DRPP sobre G^T proporcionan una solución óptima del TSP-a en G , con el mismo coste.

Luego el TSP-a es un caso particular del DRPP en el que tenemos tantas componentes disconexas (inducidas por los arcos de A_R^T) como vértices de G .

Una transformación similar es propuesta por Lenstra y Rinnooy Kan en [18], donde demuestran que cualquier circuito Hamiltoniano puede ser reducido a un circuito para el Cartero Rural Dirigido en un número polinomial de pasos.

Queda establecido, pues, el siguiente resultado:

Teorema I.1

El DRPP es un problema NP-completo.

Si se requiere que un cierto vértice i sea el origen del circuito del cartero (y si este vértice no es incidente con un arco requerido), una transformación, similar a la efectuada para comprobar que el TSP-a es un caso particular del DRPP, puede realizarse sobre dicho vértice i .

I.2.2 El Problema del Cartero Rural no dirigido (RPP)

Cuando el grafo G es no dirigido, el problema equivalente al DRPP es el del Cartero Rural (RPP). Su resolución exacta se presenta en [8]. Siendo ambos problemas muy similares en cuanto a su objetivo, e íntimamente relacionados, no son transformables el uno en el otro. La razón, obvia, es que mientras que una arista requerida puede ser atravesada en cualquier dirección en un circuito óptimo, cada arco requerido debe ser recorrido desde su vértice inicial al final; la sustitución de una arista requerida por dos arcos (también requeridos), uno en cada dirección, o su transformación en un arco requerido (asignándole una dirección aleatoria), varía sustancialmente las condiciones del problema y puede producir, en cualquier caso, soluciones muy alejadas del valor

óptimo.

Siendo el DRPP y el RPP casos generales del Problema del Agente Viajero (asimétrico y simétrico, respectivamente), las técnicas de solución para el caso dirigido no pueden ser aplicadas, como ya hemos señalado, a la resolución del caso no dirigido, a diferencia de lo que ocurre entre el TSP-a y el TSP simétrico. Es ésta, quizá, la razón más importante para considerar los dos problemas separadamente.

I.2.3 Aplicaciones

Muchos problemas reales pueden ser representados sobre un grafo G (dirigido, no dirigido o mixto) en el que ciertos (o la totalidad) arcos y/o aristas requieren un determinado servicio. Si se trata de todos los arcos (aristas) del grafo, el CPP puede ser aplicado a problemas como la recogida de basuras, reparto de correspondencia y, en general, a problemas de inspección de sistemas de distribución (tendidos eléctricos, líneas férreas, telefónicas, etc.), en los que todas, o algunas de sus componentes deben ser inspeccionadas.

Algunos de estos problemas corresponden mucho mejor a un grafo dirigido (por ejemplo, la recogida de basuras) y el DCPP, y su extensión, el DRPP pueden ser utilizados en la resolución de problemas más generales (va-

rios "vehículos"; restricciones de tiempo, capacidad,...); algunos de estos problemas relacionados se presentan en el siguiente apartado.

Debemos señalar, finalmente, que el DRPP puede aplicarse a situaciones bastante generales, sin ninguna de las restricciones que algunos de los algoritmos de resolución de problemas relacionados requieren (grafos planares, matriz de costes que satisfaga la desigualdad triangular, etc.).

I.2.4 Determinación de un Circuito Euleriano

La resolución del DRPP en un grafo G , dirigido y conexo, se consigue, como veremos, repitiendo arcos, una o más veces, para obtener un cierto grafo simétrico, en el que se sabe existe un circuito Euleriano que proporciona la solución óptima. Un problema secundario y mucho más sencillo es la determinación de dicho circuito. Presentamos a continuación, brevemente, un procedimiento para determinar un circuito Euleriano en un grafo dirigido, conexo y simétrico.

El procedimiento comienza por determinar un subgrafo generador de G de forma que, respecto del conjunto de arcos del subgrafo, todo vértice tenga grado de salida igual a uno, excepto un vértice que denominamos raíz, y en el que no existan circuitos. Notemos que, puesto que

el grafo es fuertemente conexo, el subgrafo generador puede tener como raíz cualquier vértice r de G . A continuación, para cualquier vértice $i \in X$, excepto la raíz r , especificar un orden para los arcos que salen del vértice i , de forma que el arco del subgrafo que sale del vértice i sea el último de dicha ordenación. Para la raíz r , especificar cualquier orden para los arcos que salen de r .

El circuito de Euler se obtiene comenzando en la raíz r y procediendo de acuerdo con la siguiente regla:

Regla: Cada vez que un vértice i es alcanzado, salir de él por el siguiente arco no utilizado.

El proceso continúa hasta que se vuelve al vértice r y ya no existen arcos que salgan de él que todavía no hayan sido utilizados.

Este procedimiento fué utilizado por van Aardenne-Ehrenfest y de Bruin para enumerar todos los circuitos Eulerianos en un cierto grafo dirigido. La demostración de que el procedimiento descrito produce un circuito Euleriano se presenta en [10].

1.3 PROBLEMAS RELACIONADOS

El Problema del Cartero Rural, dirigido o no, se plantea por primera vez en el trabajo de Orloff [21], quien lo incluye como un caso especial, junto con el TSP y el CPP, de un problema de optimización combinatorial que denomina General Routing Problem (GRP).

Dado un grafo G , dirigido o no, el GRP consiste en encontrar el circuito de coste mínimo que atraviesa cada arco de un subconjunto de arcos requeridos de G y que visita cada uno de los vértices de un subconjunto requerido de vértices de G .

Antes de presentar la formulación, indicamos la notación utilizada.

Notación I.1:

Dado un grafo dirigido $G = (X,A)$,

$A_R \subseteq A$ representa el conjunto de arcos requeridos y X_R el conjunto de vértices incidentes con los arcos de A_R .

$Q \subset X$ representa el conjunto de vértices requeridos.

Suponemos $Q \cap X_R = \emptyset$

Sea E_* el conjunto de vértices asimétricos de X_R y

$T = E_* \cup Q$

$E_1 = \{j \in E_* : d_t(j) - d_0(j) < 0\}$ y $E_2 = E_* - E_1$

$F(T_G)$ es el grafo completo cuyo conjunto de vértices es T y matriz de costes C' , donde c'_{ij} es el coste del camino más corto dirigido de i a j , μ_{ij} , calculado sobre el grafo original G ($c'_{ii} = \infty$).

La formulación presentada por Orloff para el GRP

dirigido es:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^{|T|} \sum_{j=1}^{|T|} c'_{ij} x_{ij} \\ \text{sometido a:} \quad & \sum_{i=1}^{|T|} x_{ij} = d_t(j) - d_0(j) \quad \forall j \in E_1 \\ & \sum_{i=1}^{|T|} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in Q \\ & \sum_{j=1}^{|T|} x_{ij} = d_t(i) - d_0(i) \quad \forall i \in E_2 \\ & \sum_{j=1}^{|T|} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in Q \\ & x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se utiliza el camino } \mu_{ij} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \end{aligned}$$

Esta formulación es incorrecta como lo demuestra el siguiente contraejemplo.

Contraejemplo:

La Figura 1(a) representa el grafo original G .

Los arcos requeridos se presentan con trazo continuo y

con discontinuo los no requeridos. El número sobre cada arco representa su coste. Según la notación utilizada $Q = \{1\}$, $T = \{4,5\} \cup \{1\}$, $E_1 = \{4\}$ y $E_2 = \{5\}$. La solución al problema de transporte consiste en enviar una unidad del vértice 5 al 4 utilizando los arcos $(5,1)$ y $(1,4)$ del grafo completo $F(T_G)$. La Figura 1(b) representa la solución obtenida sobre el grafo original G ; los arcos punteados corresponden a repeticiones. Finalmente, la Figura 1(c) representa una solución posible para el GRP, sobre el grafo original, de menor coste.

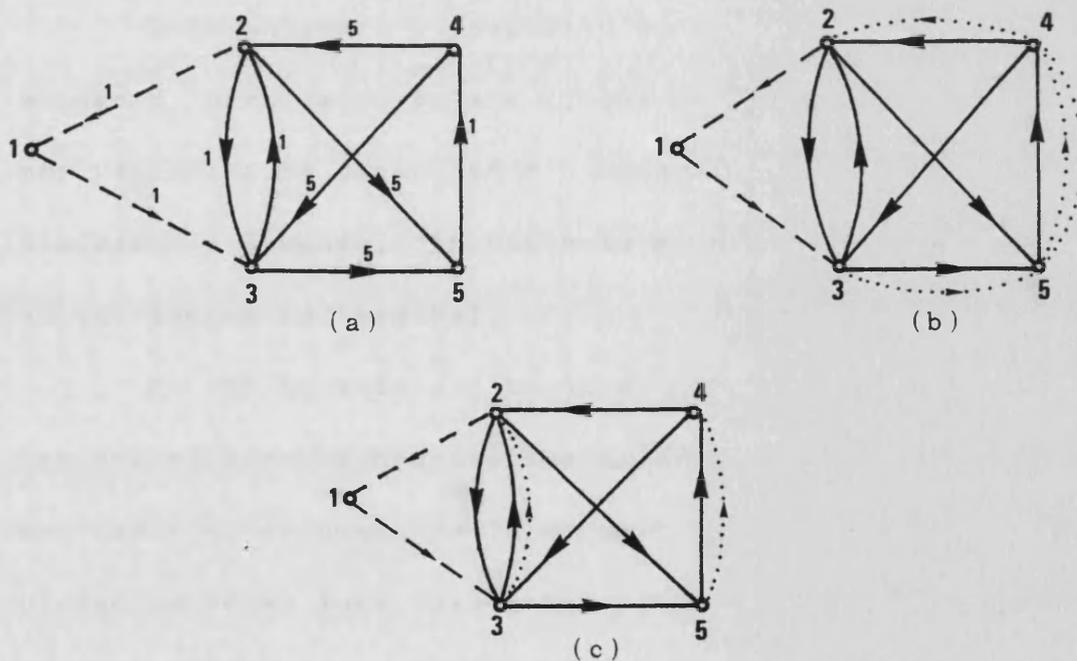


Figura 1: Contraejemplo para la formulación de Orloff.

Los problemas de routing no capacitados (se supone que existe un "vehículo" con capacidad ilimitada), como el GRP antes definido, pueden ser clasificados como problemas de routing por vértices, problemas de routing por arcos, o problemas de routing generales (ver la taxonomía propuesta por Bodin [4]).

Los problemas capacitados reflejan, de forma más directa, las situaciones reales. Un problema de routing por vértices, capacitado, conocido como el Vehicle Routing Problem (VRP) puede ser definido en los siguientes términos:

Dado un grafo G (supuesto no dirigido), con demandas d_i para cada vértice i , que deben ser satisfechas por vehículos de capacidad W , encontrar ciclos que satisfagan la demanda, con coste total mínimo y con origen en un "domicilio" central.

El VRP ha sido objeto de mucha atención, desde los procedimientos heurísticos de Beltrami y Bodin [3], aplicados al problema de la recogida de basuras en la ciudad de Nueva York, hasta los procedimientos exactos de Christofides et al [7].

Por otra parte, los problemas capacitados de routing por arcos han sido, comparativamente, poco estudiados. Stern y Dror (1979) [26] presentan un procedimiento

heurístico, para el caso no dirigido, de resolución de un problema capacitado de routing por arcos (la lectura de contadores eléctricos en ciertos barrios de una ciudad), en el que tendría aplicación el RPP (y el DRPP para la versión dirigida).

El problema general, denominado por Golden y Wong [13] Capacitated Arc Routing Problem (CARP), es el definido como:

Dado un grafo G , supuesto no dirigido, con demandas $q_{ij} \geq 0$ asociadas a cada arista (i,j) y que deben ser satisfechas por uno de los vehículos disponibles, todos ellos de capacidad W , encontrar un cierto número de ciclos, que pasen por un "domicilio" central, y que satisfagan las demandas con coste total mínimo.

Como casos particulares del CARP aparecen el CPP, el RPP, el TSP, el VRP y el GRP, entre otros. En [13] se presenta un procedimiento de solución aproximado para esta clase de problemas.

La mayoría de estos problemas son de la clase NP. Una muestra del interés que despiertan fué el Workshop to Investigate Future Directions in Routing and Scheduling of Vehicles and Crews, celebrado en la Universidad de Maryland en Junio de 1979. Los trabajos de la

citada reunión aparecen en un reciente número especial de la revista Networks, que incluye muchos de los artículos citados aquí.

La presente memoria ofrece un estudio detallado y un algoritmo exacto para la resolución de un problema particular de esta importante clase de problemas de optimización combinatorial.

SECCION II

FORMULACION DEL DRPP

Dado un grafo dirigido y fuertemente conexo, $G = (N, A)$, donde N es un conjunto de n vértices y A es un conjunto de m arcos, con costes asociados c_{ij} no negativos, y dado un subconjunto propio $A_R \subset A$, el Problema del Cartero Rural Dirigido (DRPP) consiste en encontrar el circuito de coste mínimo que atraviese cada arco requerido, es decir, en A_R , al menos una vez.

Debemos señalar, en primer término, que la restricción de fuerte conexión sobre el grafo original G puede relajarse, ya que solamente es necesaria la existencia de caminos dirigidos, en uno y otro sentido, entre todos los vértices que sean incidentes con algún arco requerido. Denotamos este conjunto de vértices por $N_R \subseteq N$. La única condición, pues, exigida sobre el grafo original G es:

\exists camino dirigido del vértice i al vértice j
 y \exists camino dirigido del vértice j al vértice i
 para todo par de vértices $i, j \in N_R$, $i \neq j$

Presentamos en esta Sección una formulación del DRPP como un problema de Programación Lineal Entera. Ciertas transformaciones del grafo original, que son necesarias para simplificar la estructura y formulación

del problema, son presentadas en primer lugar. Se demuestran las relaciones entre los conjuntos de soluciones posibles y óptimas de las diferentes transformaciones, así como la existencia de mejores cotas inferiores para las variables que definen el problema como un problema de Programación Lineal Entera.

II.1 TRANSFORMACIONES DEL GRAFO ORIGINAL

Cualquier solución posible del Problema del Cartero Rural Dirigido (DRPP) es un circuito que contiene cada arco requerido al menos una vez.

Denotamos por $G_R = (N_R, A_R)$ el grafo inducido por el subconjunto de arcos A_R , es decir, G_R es el subgrafo de G que tiene como conjunto de arcos A_R y como conjunto de vértices todos aquellos vértices de G que son incidentes con algún arco de A_R .

Como ya señalamos en la introducción, G_R es un grafo disconexo, formado por un cierto número de componentes no necesariamente fuertemente conexas. Cualquier solución posible del DRPP debe ser un circuito que contenga al menos una vez los arcos de G_R y, finalmente, que satisfaga las condiciones de simetría de todos los vértices de N_R .

Para expresar de una forma más sencilla las condiciones anteriores, presentamos a continuación ciertas transformaciones del grafo original que simplifican la estructura y formulación del problema.

Transformación 1: El grafo \bar{G}_C

A partir del grafo inducido G_R construimos el grafo completo \bar{G}_C de la siguiente forma:

Añadimos al grafo G_R un arco entre cada par de vértices de N_R .

El coste de este arco es igual al coste del camino más corto dirigido entre esos vértices, calculado en el grafo original G .

El grafo completo resultante es $\bar{G}_C = (N_R, A_R \cup \bar{A}_S)$, siendo \bar{A}_S el conjunto de arcos añadidos.

Notemos que en \bar{G}_C existen dos arcos adicionales en paralelo, uno en cada dirección, por cada arco de A_R . La figura 1 muestra el grafo original G , mientras que la figura 2 presenta el grafo \bar{G}_C correspondiente a G .

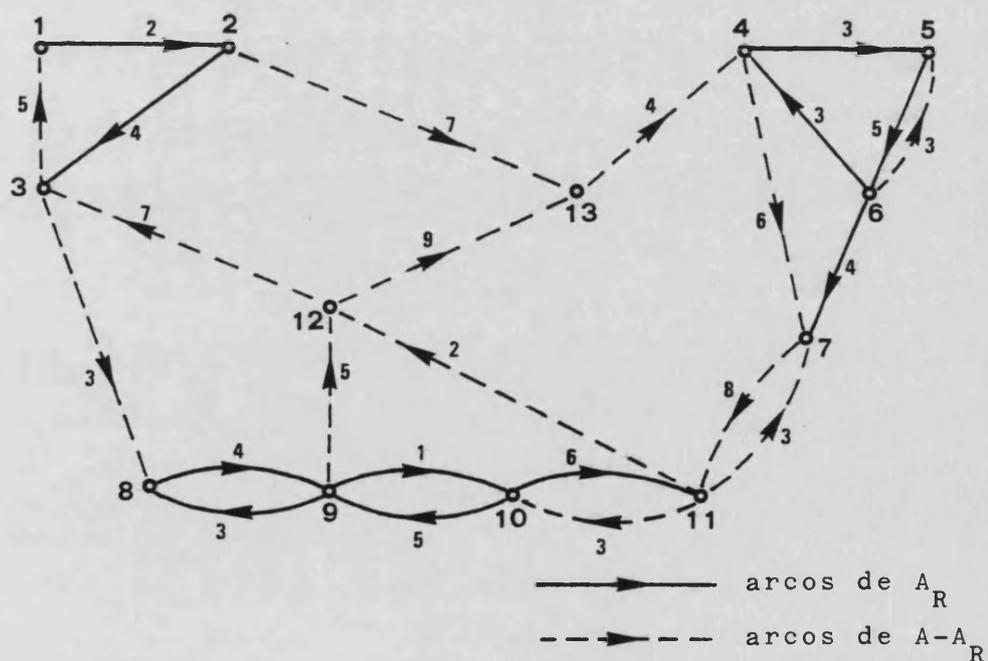


Figura 1 : El grafo original $G=(N,A)$

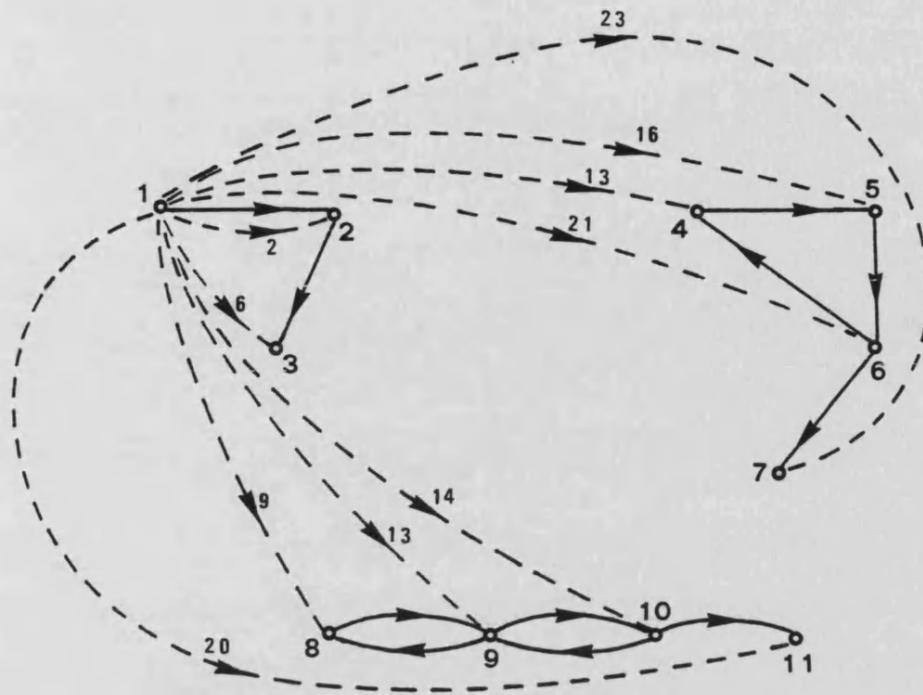


Figura 2:

Representación parcial del grafo \bar{G}_C correspondiente al grafo G de la Figura 1. Las líneas discontinuas representan los caminos más cortos dirigidos desde el vértice 1 a los restantes. El número de arcos de \bar{A}_S en este caso es de 110. Notemos que todos los arcos no requeridos que salen del vértice 1 corresponden a caminos más cortos que pasan por los vértices 2 ó 3 y por lo tanto van a ser eliminados en la simplificación que proporciona el grafo G_C .

Proposición II.1:

Cualquier solución posible del DRPP en \bar{G}_C produce una solución posible del DRPP en el grafo original G , con el mismo coste.

Demostración:

Consideremos una solución posible cualquiera del DRPP en \bar{G}_C , que es un subgrafo sobre \bar{G}_C fuertemente conexo y tal que, respecto a él, todo vértice de N_R es simétrico.

A cada arco $(i,j) \in A_R$ en G le añadimos tantas copias como aparezcan de él en el circuito solución en \bar{G}_C .

Cada arco $(i,j) \in \bar{A}_S$ se descompone en el camino más corto que lo originó en G y cada arco del camino más corto en G se repite tantas veces como copias del arco $(i,j) \in \bar{A}_S$ aparezcan en la solución posible en \bar{G}_C .

El subgrafo sobre G inducido por los arcos requeridos (y sus copias) y los arcos en los caminos más cortos (y sus copias) es una solución posible del DRPP en G , ya que:

- 1) Respecto a dicho subgrafo todos los vértices de G son simétricos

$i \in N_R$, i es un vértice simétrico, si no, tampoco lo sería en la solución posible en \bar{G}_C .

$j \in N - N_R$, j es simétrico por estar en un camino

dirigido simple entre dos vértices de N_R .

2) Es un subgrafo fuertemente conexo, pues, si no,

tampoco lo sería la solución posible en \bar{G}_C .

Proposición II.2:

Toda solución óptima del DRPP en \bar{G}_C produce una solución óptima del DRPP en el grafo original G , con el mismo coste.

Demostración:

La transformación de una solución posible en \bar{G}_C en una solución posible en G viene dada en la anterior proposición. La optimalidad se mantiene ya que cualquier solución del DRPP en G que no utilice para conectar dos vértices en diferentes componentes de G_R el camino más corto dirigido entre ellos, no es una solución óptima.

Si $SP(\cdot)$ y $SO(\cdot)$ representan, respectivamente, los conjuntos de soluciones posibles y soluciones óptimas del DRPP en el grafo (\cdot) , las proposiciones 1.1 y 1.2 establecen la siguiente relación:

$$\boxed{SP(\bar{G}_C) \subseteq SP(G) \quad \wedge \quad SO(\bar{G}_C) \subseteq SO(G)}$$

Transformación 2: El grafo G_C

Como veremos en la formulación del DRPP como un problema de Programación Lineal Entera, existirá una variable entera asociada a cada arco $(i,j) \in \bar{A}_S$.

El número de arcos en el conjunto \bar{A}_S puede reducirse sustancialmente, eliminando por lo tanto gran número de variables enteras en la formulación del DRPP, simplificando el grafo \bar{G}_C y obteniendo como resultado el grafo simplificado $G_C = (N_R, A_R \cup A_S)$, del que se han eliminado

- a) todos los arcos $(i,j) \in \bar{A}_S$ para los que $c_{ij} = c_{ik} + c_{kj}$, para algún $k \in N_R$, y
- b) el arco adicional en paralelo y con la misma dirección que el arco requerido, si ambos tienen el mismo coste.

Obviamente, $|A_S| \leq |\bar{A}_S|$, y por lo tanto el conjunto de soluciones posibles del DRPP en G_C está incluido en el conjunto de soluciones posibles del DRPP en \bar{G}_C . Respecto a las soluciones óptimas, en \bar{G}_C podemos encontrar más soluciones óptimas equivalentes, ya que los arcos eliminados de \bar{A}_S eran, por decirlo así, redundantes, pues no eran más que combinaciones de otros arcos de \bar{A}_S .

Tenemos, pues, la siguiente relación entre los conjuntos de soluciones posibles y óptimas del DRPP en

\bar{G}_C y en G_C :

$$SP(G_C) \subseteq SP(\bar{G}_C) \quad \wedge \quad SO(G_C) \subseteq SO(\bar{G}_C)$$

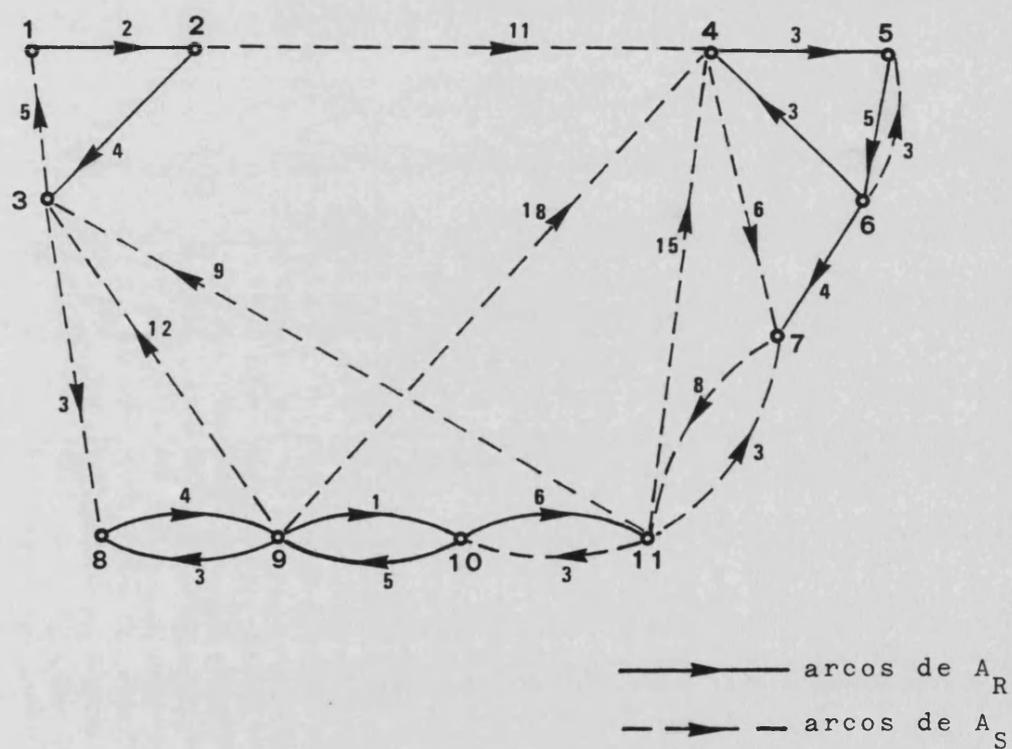


Figura 3 : El grafo simplificado G_C correspondiente al grafo original de la Figura 1.

II.2 UNA FORMULACION DEL DRPP

El grafo simplificado $G_C = (N_R, A_R \cup A_S)$ es un grafo dirigido y fuertemente conexo. Esta última propiedad es consecuencia directa de

- i) Desde cada vértice de N_R existe un camino dirigido a cualquier otro vértice de N_R (ésta era la única condición requerida al grafo original G).
- ii) La simplificación del grafo \bar{G}_C explicada en la transformación 2 sigue manteniendo la fuerte conexión, pues solamente se elimina el arco $(i,j) \in \bar{A}_S$ si todavía existe un camino entre i y j a través de algún otro vértice k .

Sean $B = [b_{ij}]$ y $\bar{B} = [\bar{b}_{ij}]$ las matrices de adyacencia del grafo G_C , referidas a los arcos requeridos, es decir, en A_R y a los no requeridos, es decir, en A_S , respectivamente.

Entonces:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si existe el arco } (i,j) \in A_R, \quad i,j \in N_R \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\bar{b}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si existe el arco } (i,j) \in A_S, \quad i,j \in N_R \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

II.2.1 Definición de las variables

Definición II.1:

La variable entera x_{ij} representa el número de veces que el arco $(i,j) \in A_R$ se repite en un circuito óptimo del DRPP en G_C .

Entonces, $1 + x_{ij}$ es el número de veces que el arco $(i,j) \in A_R$ ha sido atravesado en un circuito óptimo del DRPP en G_C .

Definición II.2:

La variable entera y_{ij} representa el número de veces que el arco $(i,j) \in A_S$ aparece en un circuito óptimo del DRPP en G_C .

Sean C_1, C_2, \dots, C_k las componentes, no necesariamente fuertemente conexas, del grafo inducido por los arcos de A_R en G_C . Usaremos también C_i para indicar el conjunto de vértices de N_R que pertenecen a la i -ésima componente. La familia de las $C_i, i=1, \dots, k$, será denotada por F . Si $V \subset F$ es una subfamilia de F , denotaremos por $N(V)$ el conjunto de todos los vértices en los elementos de V , i.e. $N(V) = \bigcup_{C_i \in V} C_i$

El Problema del Cartero Rural Dirigido (DRPP) puede formularse (representando también por c_{ij} los costes de los arcos $(i,j) \in A_S$) como:

$$\text{Min} \left\{ \sum_{(i,j) \in A_R} c_{ij} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in A_S} c_{ij} y_{ij} + \sum_{(i,j) \in A_R} c_{ij} \right\} \quad (0)$$

sometido a las restricciones:

$$\sum_j (1+x_{ij})b_{ij} + \sum_j y_{ij}\bar{b}_{ij} = \quad \forall i \in N_R \quad (1)$$

$$\sum_j (1+x_{ji})b_{ji} + \sum_j y_{ji}\bar{b}_{ij}$$

$$\sum_{(i,j) \in K_t} y_{ij} \geq 1 \quad \forall K_t = \{(i,j) \in A_S / i \in N(V_t), j \in N(\bar{V}_t), V_t \subset F\} \quad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0, \text{ entera} \quad \forall (i,j) \in A_R \quad (3)$$

$$y_{ij} \geq 0, \text{ entera} \quad \forall (i,j) \in A_S$$

Denotamos por (P) al problema de Programación Lineal Entera con función objetivo (0) y restricciones (1), (2) y (3).

La función objetivo minimiza el coste de las repeticiones de arcos requeridos y de apariciones de arcos no requeridos que necesitamos añadir al grafo inducido G_R para tener una solución posible. Un sumando constante es, obviamente, el coste de los arcos requeridos.

Las restricciones (1), una por cada vértice, obligan a que todo vértice de N_R sea simétrico en cualquier solución posible.

Las restricciones (2), cuyo número crece exponencialmente con el de componentes en el grafo inducido por los arcos de A_R en G_C , obligan a que cualquier solución

posible conecte todas las componentes.

Llamaremos a K_t conjunto de arcos de corte de G_C , ya que, dada una subfamilia V_t de F , si eliminamos todos los arcos en el conjunto K_t correspondiente a V_t , no es posible encontrar un camino en G_C desde un vértice en $N(V_t)$ a otro en el complementario, $N(\bar{V}_t)$.

Si $A_S = \emptyset$, la formulación del problema se reduce a:

$$\text{Min} \sum_{(i,j) \in A_R} c_{ij}(1+x_{ij})$$

sometido a:

$$\sum_j (1+x_{ij})b_{ij} = \sum_j (1+x_{ji})b_{ji} \quad \forall i \in N_R$$

$$x_{ij} \geq 0, \text{ entera, } \forall (i,j) \in A_R$$

que es la propuesta por Edmonds y Johnson [10] para el Problema del Cartero Chino Dirigido, como se vió en la Sección I de esta memoria.

Haciendo referencia expresa a una componente dada C_{t_α} , las restricciones (2) del problema (P) pueden escribirse como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{(i,j) \in K_t} y_{ij} \geq 1 \\ \forall K_t = \{(i,j) \in A_S / i \in N(V_t), j \in N(\bar{V}_t), V_t \subseteq F, C_{t_\alpha} \in V_t\} \end{array} \right. \quad (2.a)$$

$$y \left\{ \begin{array}{l} \sum_{(i,j) \in K_t} y_{ij} \geq 1 \\ \forall K_t = \left\{ (i,j) \in A_S / i \in N(V_t), j \in N(\bar{V}_t), V_t \subset F, C_{t_\alpha} \in \bar{V}_t \right\} \end{array} \right. \quad (2.b)$$

El problema con función objetivo (0) y restricciones (1), (2.a), (2.b) y (3) será denotado por $P(t_\alpha)$.

Debemos comprobar la equivalencia entre el conjunto de soluciones posibles (circuitos dirigidos) del DRPP en el grafo simplificado G_C y el conjunto de soluciones posibles del problema (P) o, equivalentemente, de $P(t_\alpha)$, que son valores enteros de las variables x_{ij} que satisfacen (1), (2.a) y (2.b).

Este resultado se establece en el siguiente teorema, en cuya demostración utilizamos el lema que se enuncia a continuación.

Lema:

En un grafo dirigido y simétrico $G = (N,A)$, sea $S \subset N$ cualquier subconjunto de vértices y G_S el subgrafo inducido por dichos vértices. El número de arcos que salen de G_S es igual al número de arcos que entran a G_S .

Demostración:

Denotamos por $d_0(i)$ el grado de salida del vértice i en el grafo G y por $d_t(i)$ el grado de entrada. Por ser G simétrico, $d_0(i) = d_t(i) \quad \forall i \in N$.

$$\text{Entonces, } \sum_{i \in S} d_0(i) = \sum_{i \in S} d_t(i) \quad (1)$$

También es cierto, para cualquier subconjunto de vértices en un grafo dirigido, que:

$$\sum_{i \in S} d_0^{G_S}(i) = \sum_{i \in S} d_t^{G_S}(i), \text{ siendo } d_t^{G_S}(i) \text{ y } d_0^{G_S}(i)$$

los grados de entrada y salida, respectivamente, del vértice i con respecto al subgrafo G_S .

$$\text{Pero } \sum_{i \in S} d_0^{G_S}(i) = \sum_{i \in S} d_0(i) - p, \text{ siendo } p \text{ el número}$$

de arcos con vértice inicial en S y vértice final en \bar{S} ;

$$\text{y, análogamente } \sum_{i \in S} d_t^{G_S}(i) = \sum_{i \in S} d_t(i) - q, \text{ siendo}$$

q el número de arcos con vértice final en S y vértice inicial en \bar{S} .

$$\text{Luego } \sum_{i \in S} d_0(i) - p = \sum_{i \in S} d_t(i) - q \text{ y por (1): } p=q$$

Teorema II.3:

Toda solución posible del DRPP en el grafo G_C proporciona una solución posible del problema $P(t_\alpha)$ y reciprocamente.

Demostración:

La demostración de que las restricciones del problema $P(t_\alpha)$ son necesarias es sencilla.

Consideremos, en primer lugar, una solución posible del DRPP en el grafo G_C y el subgrafo sobre G_C inducido por los arcos en la solución.

$$\forall (i,j) \in A_R, \quad x_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} \text{número de apariciones del arco } (i,j) \\ \text{en la solución posible} \end{array} \right\} - 1$$

$$\forall (i,j) \in A_S, \quad y_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} \text{número de apariciones del arco } (i,j) \\ \text{en la solución posible} \end{array} \right\}$$

Vamos a comprobar que estos valores enteros de las variables x_{ij} e y_{ij} son posibles para el problema $P(t_\alpha)$.

En primer lugar, estos valores satisfacen la restricción (1) $\forall i \in N_R$, ya que si $\exists i \in N_R$ para el que la restricción de tipo (1) correspondiente no se satisface, este vértice sería asimétrico en el subgrafo sobre G_C inducido por los arcos de la solución posible, lo cual es absurdo.

También se cumplen las restricciones de tipo (2.a) y (2.b), ya que, dada la componente C_{t_α} y una subfamilia V_t de F que contiene a C_{t_α} , si la restricción correspondiente (la (2.a), por ejemplo) se incumple, i.e.

$$\sum_{(i,j) \in K_t} y_{ij} = 0, \quad \text{ésto implica que en la solución po-}$$

sible en G_C existen dos conjuntos de vértices, $N(V_t)$ y $N(\bar{V}_t)$ de forma que no existe ningún camino entre un

vértice $i \in N(V_t)$ y un vértice $j \in N(\bar{V}_t)$, lo cual es absurdo, ya que el circuito solución sobre G_C es un subgrafo fuertemente conexo.

La demostración de que la solución posible en G_C satisface las restricciones (2.b) es análoga.

Comprobamos ahora que una solución posible a (1), (2.a) y (2.b), junto con la condición de que las variables tomen valores enteros, proporciona una solución posible del DRPP en G_C .

Consideremos el subgrafo sobre G_C inducido por los arcos requeridos, tantas copias del arco $(i,j) \in A_R$ como indique la correspondiente variable x_{ij} y tantas apariciones del arco $(i,j) \in A_S$ como indique la variable asociada y_{ij} . Vamos a comprobar que este subgrafo es una solución posible del DRPP en G_C , i.e., que respecto a él los vértices son simétricos y que es fuertemente conexo.

La condición de simetría es inmediata, pues si un vértice del subgrafo fuera asimétrico, no se cumpliría la restricción de tipo (1) correspondiente a dicho vértice.

Vamos a comprobar que es fuertemente conexo. La demostración procede, como en los casos anteriores, por reducción al absurdo.

Si el subgrafo no es fuertemente conexo, sean G_1, \dots, G_l las l componentes sobre G_C fuertemente conexas y maximales con respecto a esta propiedad.

Consideremos la componente, que denotamos por G_i que incluye, total o parcialmente, a la componente C_{t_α} del grafo inducido G_R . En cualquier caso, puesto que se cumplen las restricciones (2.a), existirá un arco, requerido o no, que sale de la componente G_i ; denotamos este arco por (i_1, j_1) , siendo i_1 el vértice inicial, en G_i , y j_1 el vértice final en otra componente fuertemente conexas G_j .

(La demostración es análoga en el caso de que entre un arco, usando las restricciones (2.b)).

Aplicando el lema a la componente G_j , de ella debe salir otro arco, que representaremos por (j_2, h_1) , siendo h_1 el vértice final del mismo, en otra componente fuertemente conexas G_h . Si $G_h = G_i$, el subgrafo inducido por los arcos en G_i , los arcos en G_j y los arcos (i_1, j_1) , (j_2, h_1) es fuertemente conexo, en contra de la suposición de que la componente G_i era maximal respecto a la propiedad de fuerte conexión. Si $G_h \neq G_i$, como el número l de componentes fuertemente conexas es finito, en un número finito de etapas, volveríamos a conectar la componente G_j con la componente G_i , lo cual

es absurdo.

Comentario II.1:

El Teorema II.3 establece una correspondencia uno a uno entre las soluciones posibles del DRPP en G_C y las soluciones posibles del problema $P(t_\alpha)$.

La conveniencia de hacer referencia explícita a una componente dada del grafo inducido G_R se verá en la sección dedicada a estudiar las cotas inferiores del DRPP.

II.2.2 Mejores cotas inferiores para las variables

Como señalamos en la introducción de esta memoria, las variables que definen el Problema del Cartero Rural como un problema de Programación Lineal Entera, están obligadas a tomar los valores 0,1 y 0,1,2 en el caso de un grafo no dirigido.

En el caso de que el grafo original sea totalmente dirigido, las variables x_{ij} e y_{ij} , definidas en el apartado anterior, ya no están restringidas a tomar los valores 0,1 y 0,1,2, respectivamente. Sin embargo, para ciertos vértices $i \in N_R$, pueden obtenerse mejores cotas inferiores para las variables x_{ij} e y_{ij} asociadas a los arcos, requeridos y no requeridos, incidentes con el vértice i . Las siguientes proposiciones proporcionan

estas cotas inferiores.

Denotaremos por $d_0^G(i)$ el grado de salida del vértice $i \in N_R$ en el grafo G , y por $d_t^G(i)$ el grado de entrada, en G , del vértice $i \in N_R$.

Proposición II.4:

a) Para todo vértice $i \in N_R$ tal que $d_0^{G_C}(i) = 1$, es decir, existe un único arco (i,j) que sale del vértice i en el grafo G_C :

$$x_{ij} \geq d_t^{G_R}(i) - 1, \text{ si } (i,j) \in A_R$$

$$y_{ij} \geq d_t^{G_R}(i), \text{ si } (i,j) \in A_S$$

b) Para todo vértice $j \in N_R$ tal que $d_t^{G_C}(j) = 1$:

$$x_{ij} \geq d_0^{G_R}(j) - 1, \text{ si } (i,j) \in A_R$$

$$y_{ij} \geq d_0^{G_R}(j), \text{ si } (i,j) \in A_S$$

Demostración:

La demostración es sencilla, ya que para todo vértice de N_R , el grado de entrada de dicho vértice debe ser igual a su grado de salida en cualquier solución posible, es decir, todo vértice de N_R debe ser simétrico en una solución.

Proposición II.5:

Para cualquier componente C_1 del grafo inducido

G_R tal que existe un único arco no requerido que sale de ella, es decir, $\exists! (i,j) \in A_S$, $i \in C_1$, $j \in C_t$, $t \neq 1$:

$y_{ij} \geq 1$ en cualquier solución óptima.

Análogamente, $y_{ji} \geq 1$ si el arco $(j,i) \in A_S$ es el único arco que entra a la componente C_1 .

Demostración:

Si eliminamos el arco $(i,j) \in A_S$ del grafo G_C , alguna de las restricciones de tipo (2.a) se incumpliría y por lo tanto no podríamos encontrar un circuito óptimo en G_C .

Definición II.3:

El arco $(i,j) \in A_S$ es un "arco crítico" si le es aplicable la proposición II.5.

Comentario II.2:

Las proposiciones II.4 y II.5, aunque sencillas, son importantes puesto que permiten explotar la estructura del grafo G_C , en orden a obtener soluciones posibles del DRPP y pueden producir un nuevo grafo G'_C en el que:

(i) existen menos componentes que en G_C , y por lo tanto menos restricciones de tipo (2.a) y (2.b), si existen arcos críticos en G_C . Ello es debido a que cada

arco crítico $(i,j) \in A_S, i \in C_i, j \in C_j$, debe aparecer al menos una vez (según la Proposición II.5) en cualquier solución, y, por lo tanto, puede considerarse como requerido. Los arcos requeridos en las componentes C_i y C_j más el arco (i,j) inducen una nueva componente en G_C . Al subconjunto de arcos requeridos A_R se añaden todos los arcos críticos y nuevas variables x_{ij} sustituyen a las antiguas variables y_{ij} asociadas a los arcos críticos. Un mismo proceso se aplica a los arcos no requeridos $(i,j) \in A_S$ para los que se dan las condiciones establecidas en la Proposición II.4.

- (ii) existen menos vértices $i \in N_R$ cuyo grado de entrada sea distinto del grado de salida, y por lo tanto se incumplen menos restricciones de tipo (1). Cuando se incorporan al grafo G_C tantas copias del arco $(i,j) \in A_R$ como indique la cota inferior obtenida para la variable asociada, y tantas copias del arco $(i,j) \in A_S$ (si le es aplicable la Proposición II.4) como indique la cota inferior obtenida para la variable correspondiente, el vértice $i \in N_R$, que era asimétrico en G_C , es ahora simétrico.

Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación de las Proposiciones II.4 y II.5 al grafo G_C .

Ejemplo 1:

Aplicamos las Proposiciones II.4 y II.5 al grafo simplificado G_C de la Figura 3.

Por la Proposición II.4, $y_{3,1} \geq 1$, y el arco (3,1) pasará a ser requerido, y $x_{5,6} \geq 1$

Por la Proposición II.5, $y_{7,11} \geq 1$, y el arco crítico (7,11) pasará también a ser requerido.

En algunos casos, ciertas apariciones o repeticiones de arcos provocan, a su vez, otras, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2:

Consideremos los arcos de la Figura 4.a como una parte de un cierto grafo simplificado G_C . Una primera aplicación de la Proposición II.4 proporciona las siguientes cotas inferiores: $x_{1,2} \geq 1$, $x_{2,3} \geq 1$, $x_{3,4} \geq 2$, $y_{5,7} \geq 1$, $x_{6,8} \geq 3$. El resultado se muestra en la Figura 4.b, pero en ella vemos que algunas de estas cotas inferiores pueden mejorarse. Por ejemplo, si en cualquier solución posible del DRPP sobre G_C el grado de salida del vértice 2 debe ser, como mínimo, 3, para que en la solución posible dicho vértice sea simétrico, el arco (1,2), el único que le entra, debe repetirse, por lo menos, 2 veces, i.e., $x_{1,2} \geq 2$, y, análogamente, $x_{2,3} \geq 3$,

lo cual obliga, a su vez, a que $x_{1,2} \geq 4$. Ninguna repetición más puede producirse ahora y la Figura 4.c muestra la parte resultante del nuevo grafo G'_C , que se definirá en la Transformación 3.

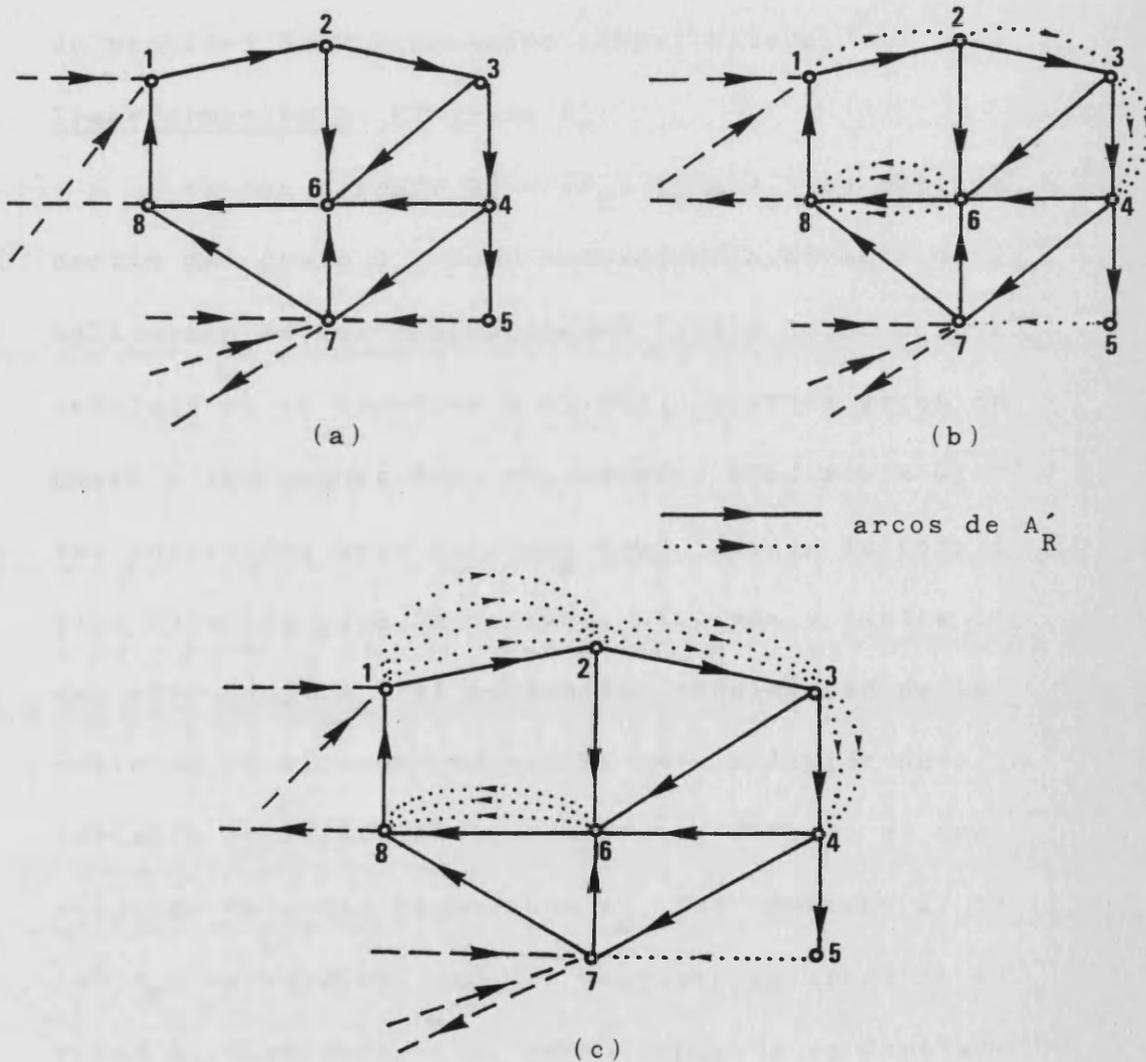


Figura 4 : Aplicación de las proposiciones.

Describimos a continuación el último eslabón de la cadena de transformaciones que nos ha conducido, hasta este momento, del grafo original G al grafo simplificado G_C . Sobre el nuevo grafo G'_C ofrecemos la formulación final del Problema del Cartero Rural Dirigido como un problema de Programación Lineal Entera.

Transformación 3: El grafo G'_C

El nuevo grafo $G'_C = (N_R, A'_R \cup A'_S)$ se obtiene a partir del grafo G_C , como consecuencia directa de la aplicación de las Proposiciones II.4 y II.5. Como hemos señalado en el comentario II.2(i), ciertos arcos de A_S pasan a ser requeridos; si, además, añadimos a G_C tantas copias del arco $(i,j) \in A_R$ como indique la cota inferior obtenida para la variable asociada, y tantas copias del arco $(i,j) \in A_S$ (si se dan las condiciones de la Proposición II.4) como indique la cota inferior para la variable correspondiente menos una, éste es el nuevo conjunto de arcos requeridos A'_R , que contiene al original A_R . La cardinalidad del conjunto de arcos no requeridos A_S disminuye, y el nuevo conjunto es denotado por A'_S .

Por construcción, los conjuntos de soluciones posibles del DRPP en G_C y en G'_C siguen siendo iguales.

Denotamos por r_{ij} el número de veces que se repite el arco $(i,j) \in A'_R$ en el nuevo grafo G'_C .

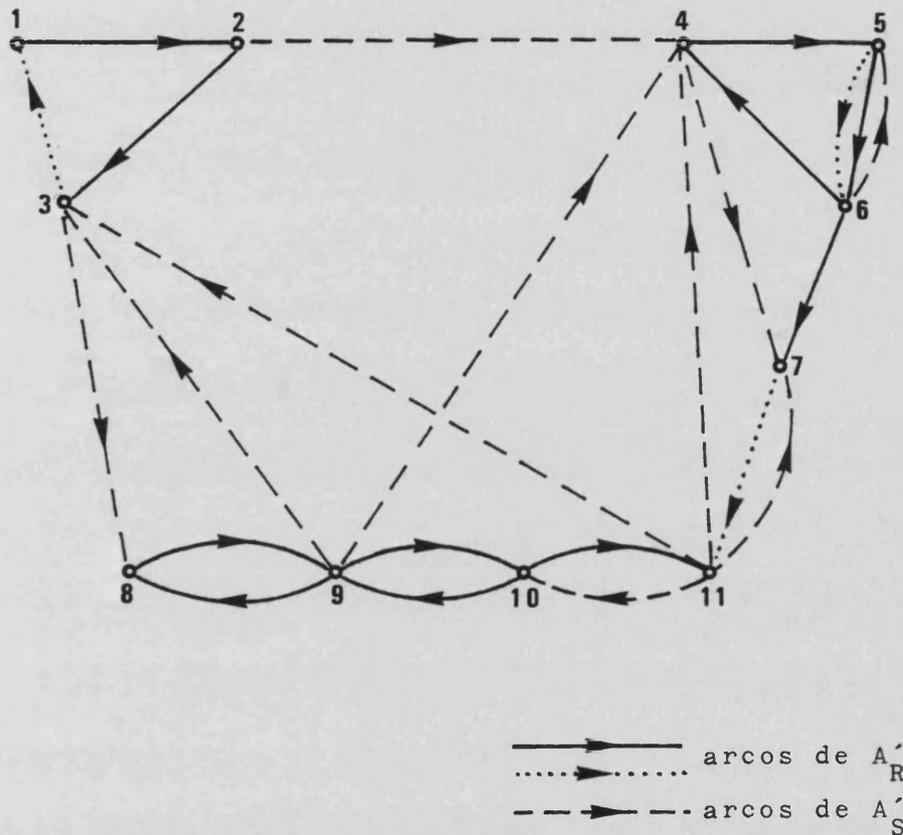


Figura 5:

El grafo G'_C obtenido a partir del grafo simplificado G_C . Las líneas punteadas corresponden a los arcos añadidos a A_R . El arco $(7,11)$, el único que sale de la segunda componente, es arco crítico, y, por lo tanto, el número de componentes de G'_C inducidas por los arcos de A'_R es ahora 2.

Definiendo unas nuevas variables x'_{ij} como

$x'_{ij} = x_{ij} - r_{ij}$, el problema $P(t_\alpha)$ puede reformularse, sustituyendo x_{ij} por $x'_{ij} + r_{ij}$, y_{ij} por y'_{ij} , A_R por A'_R y A_S por A'_S , como:

$$\text{Min} \left\{ \sum_{(i,j) \in A'_R} c_{ij} x'_{ij} + \sum_{(i,j) \in A'_S} c_{ij} y'_{ij} + \sum_{(i,j) \in A'_R} c_{ij} (1+r_{ij}) \right\} \quad (0')$$

sometido a las restricciones:

$$\left. \begin{aligned} \sum_j \left((1+r_{ij}) + x'_{ij} \right) b'_{ij} + \sum_j y'_{ij} \bar{b}'_{ij} &= \\ \sum_j \left((1+r_{ji}) + x'_{ji} \right) b'_{ji} + \sum_j y'_{ji} \bar{b}'_{ji} & \end{aligned} \right\} \quad \forall i \in N_R \quad (1')$$

$$\left. \sum_{(i,j) \in K_t} y'_{ij} \geq 1 \right\} \quad (2.a')$$

$$\forall K_t = \{ (i,j) \in A'_S / i \in N(V'_t), j \in N(\bar{V}'_t), c'_{t_\alpha} \in V'_t, V'_t \subset F' \}$$

$$\left. \sum_{(i,j) \in K_t} y'_{ij} \geq 1 \right\} \quad (2.b')$$

$$\forall K_t = \{ (i,j) \in A'_S / i \in N(V'_t), j \in N(\bar{V}'_t), c'_{t_\alpha} \in \bar{V}'_t, V'_t \subset F' \}$$

$$x'_{ij} \geq 0 \quad \text{entera} \quad \forall (i,j) \in A'_R \quad (3')$$

$$y'_{ij} \geq 0 \quad \text{entera} \quad \forall (i,j) \in A'_S$$

Notemos que el sumando constante en (0') es mayor o igual que el correspondiente en (0). Las matrices de adyacencia B' y \bar{B}' se definen de forma análoga a B y \bar{B} . F' denota la familia de las componentes, no necesariamente fuertemente conexas, inducidas en G'_C por los arcos de A'_R .



La nueva componente C'_{t_α} es igual a la componente C_{t_α} en G_C : (salvo los arcos repetidos), si ésta no era incidente con ningún arco crítico en G_C ; en caso contrario, la componente C'_{t_α} es la inducida en G'_C por los arcos de C_{t_α} y los de todas las componentes unidas a ella por arcos críticos de G_C , junto con dichos arcos críticos y las repeticiones originadas como consecuencia de la Proposición II.4.

Debemos señalar también que las variables x'_{ij} e y'_{ij} son de nuevo variables con una cota inferior de cero.

El problema definido por la función objetivo (0') y el conjunto de restricciones (1'), (2.a'), (2.b') y (3') será denotado por $P_R(t_\alpha)$.

Proposición II.6:

En presencia de las restricciones (1'), las restricciones de tipo (2.a') o las restricciones de tipo (2.b') son redundantes.

Demostración:

La demostración es la misma que la utilizada en el Teorema II.3 para comprobar la suficiencia de las restricciones de tipo (1), (2.a) y (2.b) para producir una solución posible del DRPP sobre el grafo G_C . Que

dicha solución posible era un subgrafo sobre G_C simétrico y fuertemente conexo, se demostraba utilizando únicamente las restricciones de tipo (1) y (2.a) (o bien las de tipo (2.b)).

Comentario II.3:

La correspondencia uno a uno entre las soluciones posibles del DRPP en G'_C y las soluciones posibles de $P_R(t_\alpha)$ se puede establecer de forma totalmente análoga al Teorema II.3, pero dado que $P_R(t_\alpha)$ no es más que una reformulación de $P(t_\alpha)$ y la construcción de G'_C explicada en la Transformación 3, dicha correspondencia es evidente.

Concluimos esta sección con una valoración de las distintas transformaciones y formulaciones del Problema del Cartero Rural Dirigido. La Transformación 1 tiene la ventaja de poder referir las condiciones de simetría a los vértices de N_R , y no a los n vértices del grafo original G ; asimismo, las condiciones de conexión se refieren a las k componentes del grafo inducido G_R . Si denotamos por n_R el número de vértices de N_R , el número de arcos no requeridos en \bar{G}_C es $n_R(n_R - 1)$. En la Transformación 2, el número de arcos no requeridos del grafo G_C

disminuye, mientras que el número de restricciones de conexión de tipo (2) o de tipo (2.a) y (2.b) del problema $P(t_\alpha)$ es $2^k - 2$. La última transformación permite reducir el número de restricciones de conexión, ya que por cada arco crítico detectado en G_C se eliminan 2^{k-1} restricciones de tipo (2.a) y (2.b).

S E C C I O N I I I

SOLUCIONES POSIBLES. COTA SUPERIOR

Presentamos en esta Sección un algoritmo heurístico eficiente que ha sido desarrollado para obtener soluciones posibles del Problema del Cartero Rural Dirigido. El algoritmo se basa en la determinación de una arborescencia generadora de mínimo peso, (SSA) (remitimos a la introducción de esta memoria para su definición, ciertas propiedades que utilizamos y referencia a un algoritmo polinomial, debido a Edmonds, que la determina), sobre un grafo condensado y en la resolución de un problema de flujo de coste mínimo.

La solución posible obtenida es susceptible de ser mejorada y ha sido utilizada como cota superior inicial en el procedimiento de branch and bound (ver Sección V de esta memoria) empleado para determinar la solución óptima del DRPP.

Los resultados computacionales de esta cota superior se comentan con detalle en la Sección VI. Baste señalar aquí que en 10 del total de 22 problemas de test, esta cota proporcionó la solución óptima. En promedio, el valor de la solución posible obtenida por este procedimiento heurístico está a un 1.4 % del valor de la solución óptima.

III.1 SOLUCIONES POSIBLES PARA EL DRPP

III.1.1 El grafo condensado \tilde{G}_C

Como hemos señalado, el procedimiento heurístico que desarrollamos en esta Sección determina una arborescencia generadora de mínimo peso (SSA) sobre un cierto grafo, que denotamos por $\tilde{G}_C = (\tilde{N}, \tilde{A})$.

Este grafo \tilde{G}_C es una condensación del grafo $G'_C = (N_R, A'_R \cup A'_S)$ definido en la Transformación 3 de la Sección II, en el sentido de que:

(1) un vértice $i \in \tilde{N}$ corresponde a una componente

C'_i de G'_C y

(2) un arco $(i, j) \in \tilde{A}$ existe si, y solamente si, hay

un arco $(i', j') \in A'_S$ con $i' \in C'_i$ y $j' \in C'_j$. El cos-

te del arco (i, j) en \tilde{G}_C es: $\tilde{c}_{ij} = \min_{\substack{i' \in C'_i \\ j' \in C'_j}} \{ c_{i'j'} \}$

La Figura 1 representa el grafo condensado \tilde{G}_C correspondiente al grafo G'_C de la Figura 5 de la Sección II.



Figura 1: El grafo condensado \tilde{G}_C .

III.1.2 El problema de la arborescencia generadora de mínimo peso (SSA).

Consideremos $\tilde{N} = \{1, 2, \dots, k\}$, es decir, en el grafo G'_C existen k componentes, inducidas por los arcos de A'_R , no necesariamente fuertemente conexas, y sea t_α un vértice dado del grafo condensado \tilde{G}_C .

Aplicando el algoritmo de Edmonds descrito en la introducción de esta memoria, determinamos la arborescencia generadora de mínimo peso del grafo \tilde{G}_C , con raíz en el vértice t_α . Denotamos por \tilde{T}_{t_α} la solución de dicha arborescencia de \tilde{G}_C y sea T_{t_α} el conjunto de arcos del grafo G'_C correspondientes a los arcos de \tilde{T}_{t_α} de \tilde{G}_C .

III.1.3 El problema de flujo de coste mínimo.

Una vez determinado el conjunto de arcos T_{t_α} de la SSA, denotamos por $N_R^{t_\alpha}$ el conjunto de vértices de G'_C para los que $D(i) = d_t(i) - d_o(i) \neq 0$, donde $d_t(i)$ y $d_o(i)$ representan, respectivamente, el grado de entrada y de salida del vértice i , pero calculados con respecto a los arcos de $A'_R \cup T_{t_\alpha}$. Consideramos ahora el grafo completo \bar{G}_C definido en la Transformación 1 de la Sección II, y denotamos por $\langle N_R^{t_\alpha} \rangle$ el subgrafo de \bar{G}_C inducido por el conjunto de vértices $N_R^{t_\alpha}$, i.e. $\langle N_R^{t_\alpha} \rangle$ es el subgrafo de \bar{G}_C cuyo conjunto de vér-

tices es $N_R^{t_\alpha}$ y cuyos arcos son todos los caminos más cortos dirigidos entre dichas vértices.

Sobre $\langle N_R^{t_\alpha} \rangle$ resolvemos un problema de flujo de coste mínimo en el que:

- a) Todos los vértices con $D(i) < 0$ son sumideros con demanda igual a $-D(i)$.
- b) Todos los vértices con $D(i) > 0$ son fuentes con oferta igual a $D(i)$.
- c) Las capacidades de todos los arcos son infinito.

Este problema de flujos, con varias fuentes y sumideros, puede reducirse a un problema de flujo de coste mínimo entre una sola fuente y un solo sumidero, añadiendo al conjunto $N_R^{t_\alpha}$ dos vértices más, f y s , que llamaremos superfuente y supersumidero, respectivamente.

Existe también un arco, de coste cero, desde f a cada fuente, con capacidad igual a la oferta de dicha fuente y un arco de cada sumidero a s , también de coste cero, y con capacidad igual a la demanda del sumidero correspondiente.

Puesto que las capacidades, ofertas y demandas son valores enteros, la solución también lo será.

El siguiente ejemplo ilustra la resolución del problema de flujos sobre el subgrafo $\langle N_R^1 \rangle$ correspondiente al grafo G'_C de la Figura 5 de la Sección II.

Ejemplo 1

El único arco de la arborescencia con raíz en la componente 1 (ver Figura 1) corresponde al arco (3,8) del grafo G'_C . Los vértices de N_R asimétricos con respecto a $A'_R \cup \{(3,8)\}$ son 3, 5, 8, 10 y 11. El problema de flujos tiene como fuentes los vértices 8 y 11, con ofertas de 1 y 2, respectivamente, y como sumideros, los vértices 3, 5 y 10, todos ellos con demanda 1.

La Figura 2 representa gráficamente este problema, después de añadir la superfuente y el supersumidero. Los números sobre cada arco corresponden a (capacidad, coste).

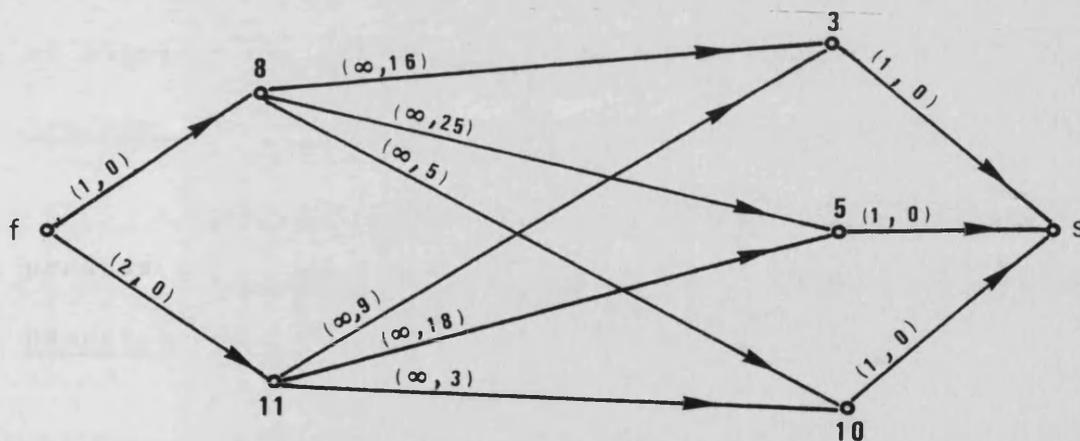


Figura 2: El problema de flujo de mínimo coste.

Si $f(i,j)$ representa el número de unidades de flujo a través del arco (i,j) en la solución óptima del problema de flujo de coste mínimo, para el problema representado en la Figura 2 tenemos: $f(8, 10) = 1$, $f(11,3) = 1$ y $f(11,5) = 1$.

III.1.4 La solución posible obtenida por el procedimiento heurístico.

Manteniendo la notación $f(i,j)$ para representar el número de unidades de flujo que recorren el arco (i,j) , como se definió en el Ejemplo 1 anterior, denotamos por F el conjunto de arcos formado por tantas copias del arco (i,j) como indique $f(i,j)$. Añadiendo el conjunto de arcos F al grafo G'_C , definido en la Transformación 3 de la Sección II, el procedimiento heurístico descrito proporciona una solución posible del Problema del Cartero Rural Dirigido como se demuestra en el siguiente Teorema.

Teorema III.1

La unión de los conjuntos de arcos A'_R , T_{t_α} y F produce una solución posible del DRPP.

Demostración:

Comprobamos que los arcos en estos conjuntos satisfacen las restricciones (1') y (2.a') del problema lineal entero asociado a G'_C , que definimos en la Sección II como $P_R(t_\alpha)$. (Por la Proposición 2.6, las restricciones de tipo (2.b') son redundantes). Respecto a los arcos de $A'_R \cup T_{t_\alpha}$, los únicos vértices asimétricos son los del conjunto $N_R^{t_\alpha}$ (ver III.1.3); puesto que el flujo óptimo satisface todas las ofertas y demandas, al añadir

los arcos del conjunto F , todos los vértices del subgrafo inducido por los arcos $A'_R \cup T_{t_\alpha} \cup F$ son simétricos, i.e., se cumplen las restricciones (1') $\forall i \in N_R$.

Las restricciones (2.a') se cumplen gracias a los arcos de T_{t_α} , ya que cualquier conjunto de corte del tipo definido en dichas restricciones contiene al menos un arco de la arborescencia generadora de mínimo peso con raíz en la componente C'_{t_α} . Como vimos en la introducción de esta memoria, desde la componente C'_{t_α} existe un camino dirigido a cualquier otra componente C'_i de G'_C , lo que justifica la anterior afirmación.

La Figura 3 presenta la solución posible del DRPP obtenida por el heurístico correspondiente al grafo G'_C de la Sección II, Figura 5.

Los arcos de F lo son del grafo completo \bar{G}_C . En el caso de la Figura 3, algunos de estos arcos fueron simplificados en la Transformación 2 de la Sección II. El arco (8,10) de F corresponde a los arcos (8,9) y (9,10) de G'_C ; asimismo, el arco (11,5) corresponde en G'_C a los arcos (11,4) y (4,5).

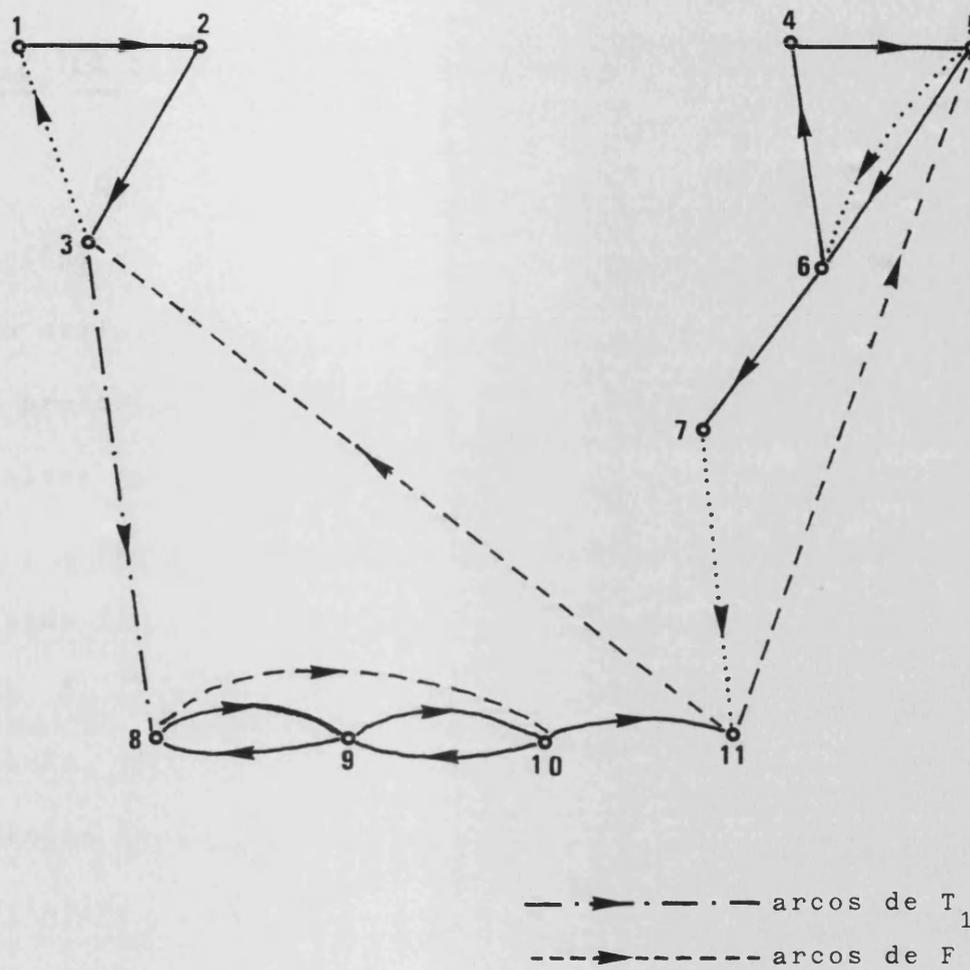


Figura 3 : Una solución posible sobre el grafo G'_C de la Sección II, Figura 5.

III.2 LA COTA SUPERIOR

Como hemos señalado en la introducción de esta Sección, el algoritmo heurístico descrito en III.1 ha sido utilizado para determinar la cota superior inicial del procedimiento de branch and bound desarrollado para resolver óptimamente el DRPP.

Puesto que el heurístico construido en III.1 lo ha sido tomando un vértice fijo $t_\alpha \in \tilde{N}$ del grafo condensado \tilde{G}_C , es decir, una componente dada del grafo G'_C , tomando, sucesivamente, como raíz cada una de las k componentes diferentes de G'_C y aplicando el procedimiento heurístico, podemos producir k soluciones posibles del DRPP (no siempre todas diferentes). Como cota superior inicial del procedimiento de branch and bound eligimos la mejor solución de entre ellas, es decir, el circuito solución de menor coste.

Continuando con el mismo grafo G'_C que nos ha servido de ejemplo en esta Sección, la Figura 4 representa la solución posible del DRPP sobre G'_C correspondiente a la otra posible arborescencia generadora de mínimo peso sobre \tilde{G}_C (aquella que tiene como raíz la segunda componente).

Como en la solución posible de la Figura 3, el arco (3,5) de F corresponde en G'_C al camino cuyos arco son (3,1), (1,2), (2,4) y (4,5). El coste del circuito solución representado en la Figura 4 es dos unidades menor que el correspondiente a la Figura 3. La cota superior es, pues, la representada en la Figura 4.

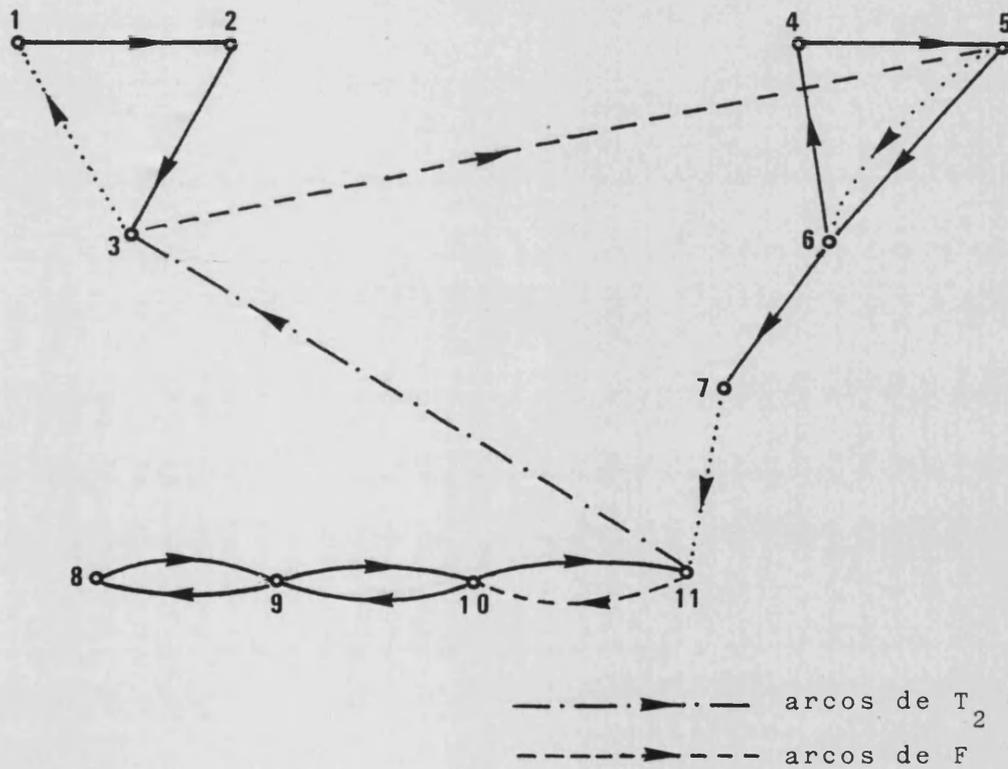


Figura 4 : Circuito correspondiente a la cota superior.

III.3 MEJORAS EN LAS SOLUCIONES POSIBLES

La solución posible obtenida por el procedimiento heurístico descrito en III.1, y en particular la cota superior inicial de III.2, es susceptible de ser mejorada en muchos problemas considerando el siguiente procedimiento:

Dado el conjunto de arcos $A'_R \cup T_{t_\alpha} \cup F$ que proporciona la solución posible del DRPP a partir de una componente dada, C'_{t_α} de G'_C , tomada como raíz (ver Teorema III.1), sean $(i,j) \in T_{t_\alpha}$ y $(j,l) \in F$ dos arcos tales que al ser eliminados del conjunto de arcos $A'_R \cup T_{t_\alpha} \cup F$ y sustituidos por el arco (i,l) del conjunto de arcos de G'_R hacen que el grafo resultante, inducido por el conjunto de arcos:

$$A'_R \cup T_{t_\alpha} \cup F \cup \{(i,l)\} - \{(i,j), (j,l)\}$$

siga siendo fuertemente conexo. Este grafo resultante produce otra solución posible del DRPP sobre G'_C , ya que, además de ser fuertemente conexo, los vértices continúan siendo simétricos (los grados de entrada y de salida de los vértices i y l son los mismos, mientras que, para el vértice j , los grados de salida y de entrada disminuyen, cada uno de ellos, en una unidad).

Si además $c_{il} < c_{ij} + c_{jl}$, el coste de la solu-

ción posible resultante es estrictamente menor que el de la solución posible primitiva.

Este procedimiento ha sido codificado y aplicado a la cota superior inicial del branch and bound. Determina todas las posibles combinaciones de arcos de la arborescencia (T_{t_α}) y arcos del flujo (F), comprobando si pueden ser mejorados. En 11 del total de 22 problemas de test recogidos en la Sección VI de esta memoria, la cota superior inicial pudo ser mejorada; en 4 de estos casos, la mejora proporcionó la solución óptima del problema. El siguiente ejemplo muestra un caso donde esta mejora es posible.

Ejemplo 2

La Figura 5 representa, sobre un cierto grafo G'_C la cota superior obtenida por el procedimiento heurístico descrito en III.1. Los arcos del conjunto F han sido descompuestos en los correspondientes arcos de G'_C .

La cota superior se obtiene a partir de una SSA con raíz en la segunda componente, y $T_2 = \{(10,11), (16,5)\}$; los arcos de F son (5,4), (5,6) y (9,6); el arco (5,6) aparece en la figura descompuesto en el camino dirigido (5,4), (4,2), (2,3) y (3,6). La mejora se consigue sus-

tituyendo los arcos $(16,5)$ y $(5,4)$ por el arco $(16,4)$. La reducción de dos unidades en el coste proporciona la solución óptima del DRPP sobre el grafo G'_C de la Figura 5.

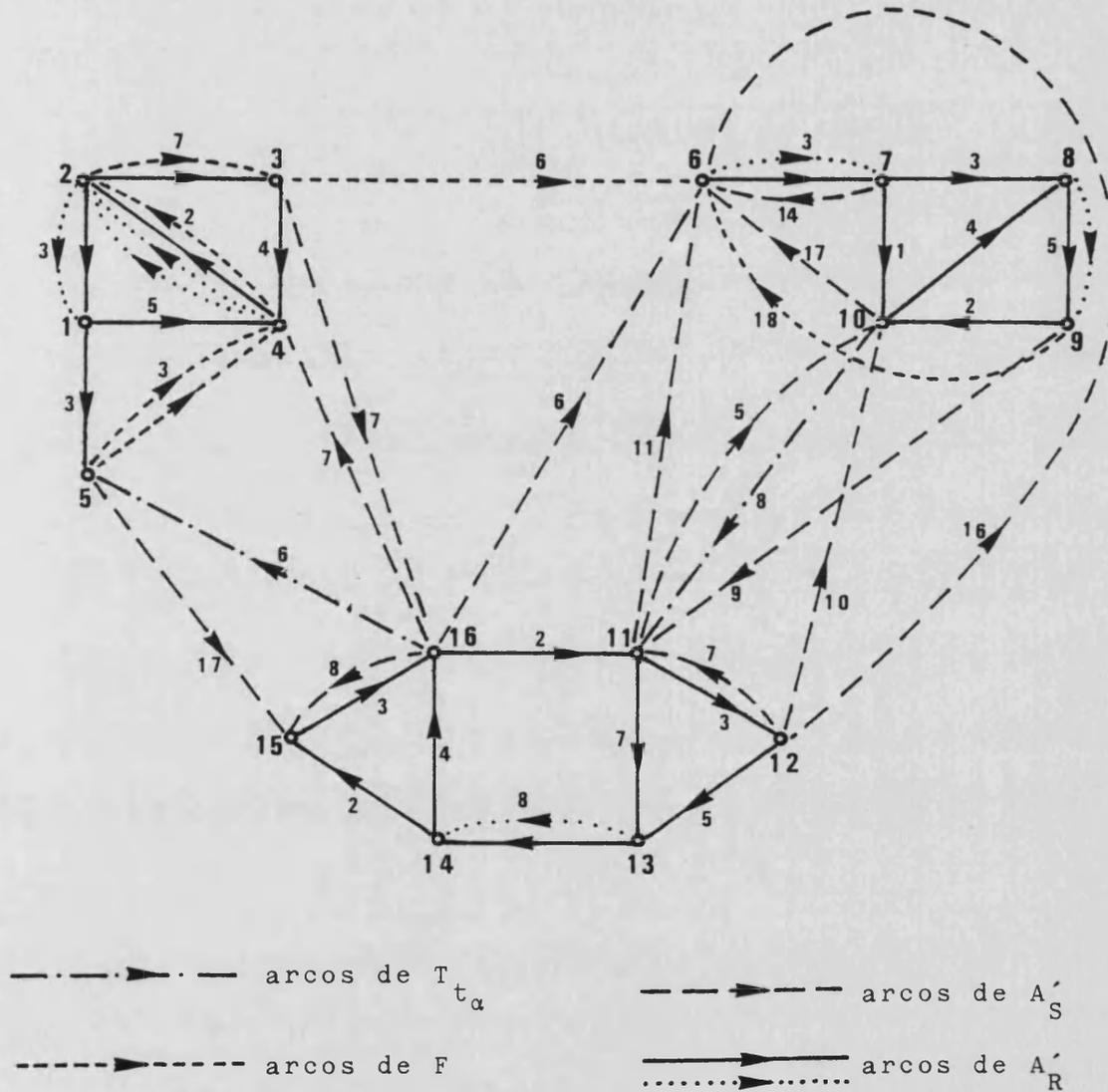


Figura 5 : Circuito correspondiente a la cota superior mejorada.

Concluimos esta Sección con una breve valoración del procedimiento heurístico para la obtención de soluciones posibles y la mejora de éstas. Computacionalmente, el proceso de obtención de la cota superior inicial mejorada parece costoso, ya que implica la determinación de k arborescencias generadoras de mínimo peso y la resolución de los correspondientes k problemas de flujo de coste mínimo; sin embargo, este número es muy pequeño en comparación con el número total de SSA calculadas en el árbol de búsqueda (como señalaremos en la Sección siguiente, la cota inferior en cada nudo del árbol implica la resolución de una SSA) y el número total de problemas de flujo de coste mínimo a resolver; existen además algoritmos eficientes para la resolución de estos dos problemas y la experiencia computacional demuestra (como ya hemos indicado y desarrollaremos con detalle en la Sección VI) que la cota superior a la solución óptima del DRPP obtenida por el procedimiento descrito en esta Sección es muy buena.

SECCION IV

COTAS INFERIORES DEL DRPP

Presentamos en esta Sección un estudio de las posibles relajaciones del Problema del Cartero Rural Dirigido, según la última formulación de éste como un problema de Programación Lineal Entera (ver Sección II).

Describimos en detalle la relajación que ha sido utilizada como cota inferior, en el procedimiento de branch and bound presentado en la Sección V, al valor de la solución óptima del DRPP.

Dicha cota inferior se basa en la relajación Lagrangiana de las restricciones de simetría (las denotadas como (1') en la formulación del problema $P_R(t_\alpha)$, definido en la Sección II) y en la resolución de una arborescencia generadora de mínimo peso (SSA) sobre el grafo condensado \tilde{G}_C , definido en la Sección III.

La cota inferior resultante puede ser mejorada introduciendo restricciones que eran redundantes en la formulación original.

El método del subgradiente (ver la introducción de esta memoria), utilizado generalmente para optimizar el problema relajado, ha sido sustituido por procedimientos heurísticos, uno de ellos iterativo, para la obtención de buenos multiplicadores. Una descripción detallada y justificación de los mismos aparece al final

de esta Sección.

Ciertas ventajas de cálculo de los procedimientos heurísticos aplicados, en particular la posibilidad de determinar fácilmente cotas superiores e inferiores al incremento experimentado en la cota inferior del DRPP en el proceso de ramificación, se verán en la Sección V de esta memoria.

Los resultados computacionales de la cota inferior construida en esta Sección se comentarán con detalle en la Sección VI.

IV.1 POSIBLES RELAJACIONES DEL DRPP

IV.1.1 La relajación lineal

Consideremos el problema $P_R(t_\alpha)$ definido al final de la Sección II. Por la Proposición II.6, las restricciones de $P_R(t_\alpha)$ pueden reducirse a las denotadas por:

- (1') condición de simetría de los vértices requeridos,
- (2.a') una de las condiciones de conexión, y
- (3') condiciones de integralidad para las variables del problema.

La primera relajación, obvia, consiste en eliminar las restricciones (3'). Denotamos por $\bar{P}_R(t_\alpha)$ el problema con función objetivo (0') y restricciones (1') y (2.a'). Esta es la relajación lineal usual, cuya resolución óptima proporciona, como es bien sabido, una cota inferior al valor óptimo de $P_R(t_\alpha)$. Sin embargo, el problema $\bar{P}_R(t_\alpha)$ no ofrece ninguna ventaja, en el sentido que la estructura del problema sigue sin ser fácilmente manejable y el algoritmo del simplex utilizado se demuestra mucho más costoso, computacionalmente, que la cota inferior que ofrecemos en esta Sección.

Este resultado concuerda con la experiencia obtenida en el caso del Cartero Rural para un grafo no dirigido, presentada en [8], donde, incluso en problemas

pequeños, el valor óptimo del problema lineal correspondiente quedaba muy alejado del valor proporcionado por la cota inferior obtenida utilizando la relajación Lagrangiana.

Debemos mencionar, finalmente, el excelente trabajo que sobre el Problema del Agente Viajero asimétrico presentan Balas y Christofides en [1]. Como señalamos en la introducción de esta memoria, nuestro problema es un caso más general que el del agente viajero (TSP) asimétrico y, en el artículo antes mencionado, los autores utilizan, en lugar de la relajación lineal, métodos Lagrangianos que denominan "restringidos".

Por lo anterior, no es aconsejable la utilización de $\bar{P}_R(t_\alpha)$ para la obtención de cotas inferiores del DRPP.

IV.1.2 Relajaciones Lagrangianas del DRPP

Para el problema $P_R(t_\alpha)$, definido en la Sección II por la función objetivo (0') y las restricciones (1'), (2.a') y (3'), dos son las posibles relajaciones Lagrangianas.

Vamos a describirlas brevemente señalando las ventajas e inconvenientes que ofrecen. La primera de ellas, que proporciona el problema relajado denotado por $P_R(u, t_\alpha)$ será expuesta con detalle en IV.2, ya que ha

sido utilizada como cota inferior en el procedimiento de branch and bound descrito en la Sección V.

Primera Relajación Lagrangiana:

Se obtiene relajando, de forma lagrangiana, las restricciones de simetría (1'). La única condición exigida, además de la de integralidad de las variables, es pues la de conexión, expresada por las restricciones de tipo (2.a'). Se relajan tantas restricciones como vértices "requeridos" (es decir, vértices incidentes con al menos un arco de A'_R en el grafo G'_C definido en la Transformación 3 de la Sección II), con la ventaja de que existen ya más vértices de G'_C simétricos respecto de los arcos de A'_R como consecuencia de la aplicación a G_C de las proposiciones II.4 y II.5. Además, el problema es separable en un problema para las variables x'_{ij} , asociadas a arcos requeridos y otro problema con variables y'_{ij} ; ambos problemas son muy sencillos de resolver óptimamente, dada una cierta componente "raíz" C'_{t_α} y un vector de multiplicadores u , uno por cada restricción de tipo (1'). El número de restricciones de tipo (2.a') crece exponencialmente con el de componentes, no necesariamente fuertemente conexas, inducidas por los arcos de A'_R sobre el grafo G'_C , pero conservan una estructura muy

sencilla (que corresponderá, como veremos en IV.2, a una aborescencia generadora de mínimo peso en el grafo condensado \tilde{G}_C definido en la Sección III). En los problemas de test, que figuran en la Sección VI de esta memoria, y que han podido ser resueltos óptimamente por el algoritmo propuesto en un tiempo de computación razonable, el número de restricciones de tipo (2.a') no es muy elevado. Remitimos a IV.2 para una descripción más detallada de esta relajación.

Segunda Relajación Lagrangiana:

Se obtiene a partir de $P_R(t_\alpha)$ relajando lagrangianamente las restricciones (2.a'). El problema resultante, que denotamos por $P_R(\lambda, t_\alpha)$, es:

$$\text{Min} \quad \sum_{(i,j) \in A'_R} c_{ij} x'_{ij} + \sum_{(i,j) \in A'_S} c_{ij} y'_{ij} + \sum_{(i,j) \in A'_R} c_{ij} (1+r_{ij}) + \sum_{t=1}^{|KT|} \lambda_t \left(1 - \sum_{(i,j) \in K_t} y'_{ij} \right)$$

Sujeto a las restricciones:

$$\left. \begin{aligned} \sum_j [(1+r_{ij}) + x'_{ij}] b'_{ij} + \sum_j y'_{ij} \bar{b}'_{ij} &= \\ \sum_j [(1+r_{ji}) + x'_{ji}] b'_{ji} + \sum_j y'_{ji} \bar{b}'_{ji} & \end{aligned} \right\} \forall i \in N_R \quad (1')$$

$$x'_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A'_R, \quad y'_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A'_S \quad \text{y enteras} \quad (3')$$

$$\lambda_t \geq 0 \quad \forall t$$

Notación IV.1:

Por KT representamos el conjunto cuyos elementos son todos los conjuntos de arcos de corte, K_t , y por $|KT|$ el número de elementos de KT . La cardinalidad de KT , y por lo tanto el número de restricciones de tipo (2.a') es $(2^{k-1} - 1)$, siendo k el número de componentes, no necesariamente fuertemente conexas, inducidas sobre G'_C por los arcos de A'_R .

Denotamos por I el conjunto de arcos no requeridos del grafo G'_C que son incidentes con vértices de una misma componente de G'_C , inducida por arcos de A'_R , i.e.:

$I = \{(i,j) \in A'_S : \exists i ; i,j \in C'_\alpha\}$; entonces, estos arcos no intervienen en las restricciones de tipo (2.a').

Llamaremos a los arcos de $A'_S - I$ arcos no requeridos de conexión.

Entonces, de acuerdo con la expresión de la función objetivo de $P_R(\lambda, t_\alpha)$, el coste de cada arco de $A'_S - I$ está modificado por tantos multiplicadores λ_t como conjuntos de arcos de corte K_t contienen a dicho arco no requerido de conexión.

Dada una cierta componente C'_t de G'_C , tomada como "raíz" y dado un vector de multiplicadores λ no negativo, la siguiente proposición determina los valores óptimos de las variables x'_{ij} e y'_{ij} del problema $P_R(\lambda, t_\alpha)$.

Proposición IV.1:

La asignación óptima de valores a las variables x'_{ij} e y'_{ij} del problema $P_R(\lambda, t_\alpha)$, dados λ y t_α es:

$$x'_{ij} = f(i,j) \quad \text{si el arco } (i,j) \in A'_R$$

$$y'_{ij} = f(i,j) \quad \text{si el arco } (i,j) \in A'_S$$

donde $f(i,j)$ representa el número de unidades de flujo que recorren al arco (i,j) .

Demostración:

Puesto que la única restricción del problema relajado es que los vértices requeridos sean simétricos, en el caso de que todos los costes modificados de los arcos no requeridos de conexión sean no negativos, calculamos, para cada vértice i requerido, $D(i)$, definido como:

$$D(i) = d_t(i) - d_0(i) \quad , \text{ siendo}$$

$d_t(i) \equiv$ grado de entrada del vértice i en el grafo G'_C con respecto a los arcos de A'_R .

$d_0(i) \equiv$ grado de salida del vértice i en el grafo G'_C con respecto a los arcos de A'_R .

Sea $N_{t_\alpha}^R$ el conjunto de vértices de G'_C tales que

$$D(i) \neq 0.$$

Sobre el grafo $\langle N_{t_\alpha}^R \rangle$ inducido por dichos vértices en \bar{G}_C resolvemos un problema de flujo de coste

mínimo (ver Sección III.1.3 para definición de fuentes, sumideras y capacidades de los arcos).

Descomponiendo los arcos de \bar{G}_C utilizados por el flujo óptimo en los correspondientes arcos de G'_C , la asignación:

$$x'_{ij} = f(i,j) \quad \text{si el arco } (i,j) \text{ pertenece a } A'_R$$

$$y'_{ij} = f(i,j) \quad \text{si el arco } (i,j) \text{ pertenece a } A'_S$$

satisface las restricciones (1') de $P_R(\lambda, t_\alpha)$ con el mínimo coste.

En el caso de que existan arcos no requeridos de conexión cuyo coste modificado sea negativo, el algoritmo de flujo de coste mínimo puede aplicarse, considerando que la capacidad del arco (i,j) es UB, siendo este valor una cota superior al valor de la variable asociada correspondiente y_{ij} (un ejemplo de cota superior se presentará al final de esta Sección).

La resolución del problema de flujo de coste mínimo, para una "raíz" dada y unos multiplicadores λ no negativos, puede producir soluciones posibles de $P_R(t_\alpha)$; como señalamos en las propiedades de la Relajación Lagrangiana presentadas en la Sección introductoria de esta memoria; ésto ocurrirá cuando los arcos no requeridos de conexión utilizados por el flujo óptimo hagan

que se satisfagan todas las restricciones (2.a'). Sin embargo, en problemas reales, generalmente el coste original de dichos arcos de conexión es mayor que el coste de los arcos requeridos y se tenderá a simetrizar los vértices utilizando éstos últimos.

Como hemos visto, la resolución del problema $P_R(\lambda, t_\alpha)$, dada una componente C'_{t_α} y un conjunto de multiplicadores λ , implica la resolución de un problema de flujo de coste mínimo, que es computacionalmente más costoso que la determinación de una arborescencia generadora de mínimo peso (SSA).

El número de restricciones relajadas crece exponencialmente, con lo que, para problemas grandes, la cota inferior a la solución óptima del DRPP obtenida por esta segunda Relajación Lagrangiana será, generalmente, menos potente que la proporcionada por la primera.

La primera Relajación Lagrangiana, además de proporcionar problemas separables y más sencillos, como veremos en IV.2, facilita la elaboración de criterios de ramificación en el proceso de branch and bound, como se explicará en la Sección V. Restricciones redundantes pueden incorporarse a la función objetivo de $P_R(u, t_\alpha)$ y son del mismo tipo que las que aparecen en la función objetivo de $P_R(\lambda, t_\alpha)$ (como veremos en IV.3 son las res-

tricciones de tipo (2.b')), con la ventaja de que no es necesario calcular todos los multiplicadores λ_t correspondientes a todos los posibles conjuntos de arcos de corte K_t , como ocurre en la Segunda Relajación Lagrangiana, sino que pueden calcularse uno tras otro, conforme se detectan restricciones incumplidas.

IV.2 COTA INFERIOR A PARTIR DE LA SSA

Consideremos el problema $P_R(t_\alpha)$ y el problema relajado obtenido a partir de él, que denotamos por $P_R(u, t_\alpha)$, en el que:

- a) se han eliminado las restricciones (2.b') por ser redundantes, según la Proposición II.6
- b) las restricciones de simetría (1') han sido relajadas, de forma Lagrangiana, usando multiplicadores u_i asociados a los vértices $i \in N_R$.

Su formulación es, pues:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad \sum_{(i,j) \in A'_R} c_{ij} x'_{ij} + \sum_{(i,j) \in A'_S} c_{ij} y'_{ij} + \sum_{(i,j) \in A'_R} c_{ij} (1+r_{ij}) - \\ - \sum_{i \in N_R} u_i \left[\sum_j [(1+r_{ij}) + x'_{ij}] b'_{ij} + \sum_j y'_{ij} \bar{b}'_{ij} - \right. \\ \left. - \sum_j [(1+r_{ji}) + x'_{ji}] b'_{ji} - \sum_j y'_{ji} \bar{b}'_{ji} \right] \\ \text{Sometido a las restricciones} \\ (2.a'), (3') \text{ y } u_i \text{ no restringido, } i \in N_R \quad (4) \end{array} \right.$$

Reescribiendo la función objetivo, el problema relajado

$P_R(u, t_\alpha)$ puede formularse como:

$$\text{Min} \quad \sum_{(i,j) \in A'_R} x'_{ij} (c_{ij} + u_j - u_i) + \sum_{(i,j) \in A'_S} y'_{ij} (c_{ij} + u_j - u_i) + \\ + \sum_{(i,j) \in A'_R} c_{ij} (1 + r_{ij}) + \sum_{i \in N_R} u_i (d_t(i) - d_0(i))$$

Sometido a las restricciones:

$$\sum_{(i,j) \in K_t} y'_{ij} \geq 1 \quad (2.a')$$

$$VK_t = \{(i,j) \in A'_S / i \in N(V'_t), j \in N(\bar{V}'_t), c'_{t_\alpha} \in V'_t, V'_t \subseteq F'\}$$

$$x'_{ij} \geq 0 \quad \text{entera} \quad \forall (i,j) \in A'_R \quad (3')$$

$$y'_{ij} \geq 0 \quad \text{entera} \quad \forall (i,j) \in A'_S$$

$$u_i \text{ no restringido} \quad \forall i \in N_R \quad (4)$$

donde $d_t(i)$ y $d_0(i)$ representan los grados de entrada y de salida, respectivamente, del vértice $i \in N_R$ en el grafo G'_C pero sólo con respecto a los arcos de A'_R .

Comentario IV.2:

Como hemos señalado en IV.1.2, esta relajación de $P_R(t_\alpha)$ tiene la ventaja de que, dado un vector arbitrario de multiplicadores u , la resolución de $P_R(u, t_\alpha)$ puede efectuarse en dos etapas, minimizando un problema en el que sólo intervienen las variables x'_{ij} , asociadas a los arcos requeridos de G'_C (denotaremos este problema por $P_R(u, t_\alpha/x)$), y, por otro lado, minimizando un problema en el que sólo aparecen variables y'_{ij} , asociadas a los arcos A'_S de G'_C (este problema será denotado por

$P_R(u, t_\alpha / y)$.

El Problema $P_R(u, t_\alpha / x)$ es el definido por

$$P_R(u, t_\alpha / x) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \sum_{(i,j) \in A'_R} x'_{ij} (c_{ij} + u_j - u_i) \\ \text{sometido a la restricción} \\ x'_{ij} \geq 0, \text{ entera, } \forall (i,j) \in A'_R \end{array} \right.$$

El Problema $P_R(u, t_\alpha / y)$ es el definido por

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \sum_{(i,j) \in A'_S} y'_{ij} (c_{ij} + u_j - u_i) \\ \text{sometido a las restricciones} \\ \sum_{(i,j) \in K_t} y'_{ij} \geq 1 \\ \forall K_t = \{ (i,j) \in A'_S / i \in N(V'_t), j \in N(\bar{V}'_t), c'_{t_\alpha} \in V'_t, V'_t \subset F' \} \\ y'_{ij} \geq 0, \text{ entera } \forall (i,j) \in A'_S \end{array} \right. \quad (2.a')$$

IV.2.1 La solución de $P_R(u, t_\alpha)$

La solución óptima de $P_R(u, t_\alpha)$, dada una componente C'_{t_α} del subgrafo inducido sobre G'_C por los arcos de A'_R y un vector de multiplicadores u , asociados a los vértices requeridos, se obtiene determinando la asignación óptima de valores a las variables x'_{ij} e y'_{ij} , i.e., resolviendo óptimamente los subproblemas $P_R(u, t_\alpha / x)$ y $P_R(u, t_\alpha / y)$.

Las siguientes proposiciones determinan la asignación de valores óptimos a las variables.

Proposición IV.2:

La asignación óptima de valores a las variables de $P_R(u, t / x)$ viene dada por:

$$x'_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad c_{ij} + u_j - u_i \geq 0$$

$$x'_{ij} = UB_1 \quad \text{en caso contrario}$$

donde UB_1 es una cota superior al valor de las variables.

Demostración: Es obvia

Proposición IV.3:

La asignación óptima de valores a las variables de $P_R(u, t_\alpha / y)$ es la siguiente:

$$a) \quad y'_{ij} = 1 \quad \text{si el arco } (i, j) \in A'_S \text{ está en } T_{t_\alpha}$$

$$y'_{ij} = 0 \quad \text{en caso contrario}$$

si los costes modificados $(c_{ij} + u_j - u_i)$ de todos los arcos (i, j) pertenecientes a A'_S son no negativos

$$b) \quad y'_{ij} = UB_2 \quad \forall (i, j) \in A'_S \mid c_{ij} + u_j - u_i \leq 0$$

siendo UB_2 una cota superior al valor de las variables

$$y'_{i'j'} = 1 \quad \text{para todo arco } (i', j') \in A'_S \text{ asociado a un arco}$$

$(i, j) \in \tilde{A}$ para el que $\tilde{c}_{ij} > 0$, si el arco (i, j)

pertenece a \tilde{T}_{t_α}

$$y'_{ij} = 0 \quad \text{en otro caso}$$

Demostración:

Notemos que las restricciones (2.a') obligan a la existencia de un camino dirigido desde la componente "raíz" C'_{t_α} a cada una de las restantes componentes inducidas sobre G'_C por los arcos de A'_R .

Distinguiremos dos casos:

Caso a:

Los costes modificados $(c_{ij} + u_j - u_i)$ de todos los arcos (i,j) pertenecientes a A'_S son no negativos.

En este caso, como señalamos en la introducción de esta memoria, $P_R(u, t_\alpha / y)$ corresponde a la formulación, como un problema de Programación Lineal Entera, del problema de la arborescencia generadora de mínimo peso (SSA) con raíz en la componente C'_{t_α} .

Consideremos el grafo condensado \tilde{G}_C , definido en III.1.1; calculamos sobre él la arborescencia generadora de mínimo peso con raíz en el vértice t_α y sea \tilde{T}_{t_α} la solución de dicha arborescencia en \tilde{G}_C . Denotamos por T_{t_α} el conjunto de arcos del grafo G'_C correspondientes a los arcos de \tilde{T}_{t_α} de \tilde{G}_C .

En este caso, la asignación:

$$y'_{ij} = 1 \quad \text{si el arco } (i,j) \in A'_S \text{ esta en } T_{t_\alpha}$$

$$y'_{ij} = 0 \quad \text{en caso contrario}$$

proporciona el valor óptimo de $P_R(u, t_\alpha / y)$.

Caso b:

Los costes modificados $(c_{ij} + u_j - u_i)$ de algunos arcos (i,j) pertenecientes a A'_S son negativos.

En este caso, en la solución óptima de $P_R(u, t_\alpha / y)$ se debe cumplir

$$(1) \quad y'_{ij} = UB_2 \quad \forall (i,j) \in A'_S \quad \Bigg| \quad c_{ij} + u_j - u_i \leq 0$$

siendo UB_2 una cota superior al valor de las variables.

Consideremos de nuevo el grafo condensado

$\tilde{G}_C = (N, \tilde{A})$, definido en III.1.1, pero, en este caso, con una pequeña modificación:

denotando por \tilde{c}_{ij} el coste de un arco de \tilde{A} , hacemos

$$\tilde{c}_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad \min_{\substack{i' \in C'_i \\ j' \in C'_j}} \{ c_{i'j'} \} < 0$$

donde $c_{i'j'}$ representa el coste modificado por los multiplicadores correspondientes (recordemos que, originalmente, el coste del arco $(i,j) \in \tilde{A}$ era siempre

$\min_{\substack{i' \in C'_i \\ j' \in C'_j}} \{ c_{i'j'} \}$)

Con estos costes \tilde{c}_{ij} , calculamos en \tilde{G}_C la arborescencia generadora de mínimo peso con raíz en el vértice t_α ; como antes, T_{t_α} representa la solución en \tilde{G}_C y T_{t_α} el conjunto de arcos del grafo G'_C correspondientes a los arcos de T_{t_α} de \tilde{G}_C .

$$\text{Si } \sum_{(i,j) \in \tilde{T}_{t_\alpha}} \tilde{c}_{ij} = 0 ,$$

la anterior asignación, (1), de valores a las variables y'_{ij} produce la solución óptima del problema $P_R(u, t_\alpha / y)$, ya que los arcos correspondientes a estas variables satisfacen todas las restricciones (2.a').

$$\text{Si } \sum_{(i,j) \in \tilde{T}_{t_\alpha}} \tilde{c}_{ij} > 0 , \text{ hacer } y'_{i'j'} = 1 \text{ para todo}$$

arco $(i',j') \in A'_S$ asociado a un arco $(i,j) \in \tilde{A}$ para el que $\tilde{c}_{ij} > 0$, si el arco (i,j) pertenece a \tilde{T}_{t_α} .

Esta asignación, junto con (1) proporciona, en este caso, el valor óptimo de $P_R(u, t_\alpha / y)$.

Estos resultados, teniendo en cuenta que el problema $P_R(u, t_\alpha)$ es "separable", se resumen en el siguiente teorema.

Teorema IV.4:

Dada una componente C'_{t_α} del subgrafo inducido sobre G'_C por los arcos de A'_R y un vector de multiplicadores u , asociados a los vértices requeridos, la solución óptima de $P_R(u, t_\alpha)$ se obtiene asignando a las variables x'_{ij} e y'_{ij} los valores dados en las Proposiciones IV.2 y IV.3.

IV.3 MEJORAS DE LA COTA INFERIOR

La cota inferior al valor óptimo de $P_R(t_\alpha)$ obtenida en IV.2 es susceptible de ser mejorada.

Una primera mejora se obtiene considerando que la resolución óptima de $P_R(u, t_\alpha)$, dado un vector de multiplicadores u y una cierta componente C'_{t_α} implica la determinación de una arborescencia generadora de mínimo peso con "raíz" en la componente C'_{t_α} (ver Teorema IV.4 y Proposición IV.3).

Notación IV.3:

$V_u(P_R(u, t_\alpha))$ representa el valor óptimo del problema $P_R(u, t_\alpha)$, dado u y C'_{t_α} . Representamos por (i^*, j^*) el arco de $A'_S - I$, en G'_C . (ver Notación IV.1), de menor coste tal que su vértice final $j^* \in C'_{t_\alpha}$, y por c_{ij}^* el coste de dicho arco, modificado por los correspondientes multiplicadores.

Proposición IV.5:

Si $\forall (i, j) \in A'_S - I$, $c_{ij} + u_j - u \geq 0$, $V_u(P_R(u, t_\alpha)) + c_{ij}^*$ es una cota inferior al valor óptimo de $P_R(t_\alpha)$.

Demostración:

Si los costes modificados de todos los arcos no requeridos de conexión son no negativos, la solución óptima del subproblema $P_R(u, t_\alpha/y)$ es una arborescencia

generadora de mínimo peso (SSA) con raíz en la componente C'_{t_α} (ver Proposición IV.3, Caso a). Por lo tanto, respecto de ella, el grado del vértice t_α es cero, como ya señalamos en la definición presentada en la introducción de esta memoria. Como, en cualquier solución posible, a la componente C'_{t_α} debe "entrarle" al menos un arco de $A'_S - I$ (por las restricciones de tipo (2.b')), el coste de ese arco no puede ser menor que c_{ij}^* .

La mejora que acabamos de describir está generalmente dominada por la que vamos a exponer a continuación.

La segunda mejora se obtiene considerando las restricciones (2.b'). Notemos que estas restricciones, que eran redundantes en presencia de las de simetría, denotadas por (1'), ya no lo son cuando éstas últimas han sido relajadas. Por lo tanto, las restricciones de tipo (2.b') pueden ser incorporadas a $P_R(u, t_\alpha)$, de forma Lagrangiana, para aumentar el valor de la cota inferior.

Como señalamos al final de IV.1, los multiplicadores asociados a las restricciones (2.b') no necesitan ser calculados conjuntamente, sino que pueden ser calculados, y añadidos a la función objetivo de $P_R(u, t_\alpha)$, a medida que van siendo detectadas restricciones de tipo (2.b') incumplidas.

Si una restricción t del tipo:

$$\sum_{(i,j) \in K_t} y'_{ij} \geq 1 \quad (2.b')$$

$$\forall K_t = \left\{ (i,j) \in A'_S / i \in N(V'_t), j \in N(\bar{V}'_t), C'_{t_\alpha} \in \bar{V}'_t, V'_t \subset F' \right\}$$

que se incumple, puede ser detectada en la solución al problema $P_R(u, t_\alpha/y)$, esta restricción puede relajarse, utilizando un multiplicador λ_t asociado a ella, y añadirse a la función objetivo de $P_R(u, t_\alpha)$.

La restricción relajada se añade a la función objetivo como $+\lambda_t (1 - \sum_{(i,j) \in K_t} y'_{ij})$, con $\lambda_t \geq 0$, como ya vimos, de una forma totalmente análoga a como aparece en la función objetivo del problema $P_R(\lambda, t_\alpha)$ definido en IV.1.2. El multiplicador λ_t asociado a la restricción disminuye los costes (inicialmente no negativos) de todos los arcos del correspondiente conjunto de arcos de corte K_t .

La siguiente proposición señala unas restricciones de tipo (2.b') que no son satisfechas por la solución óptima del subproblema $P_R(u, t_\alpha/y)$.

Proposición IV.6:

Cada arco en la arborescencia generadora de mínimo peso (SSA) que produce la solución óptima del subproblema $P_R(u, t_\alpha/y)$ proporciona una restricción t del tipo

(2.b') que no es satisfecha por dicha solución óptima.

Demostración:

Sea \tilde{T}_{t_α} el conjunto de arcos en la arborescencia generadora de mínimo peso (SSA) sobre \tilde{G}_C , con raíz en el vértice t_α , y sea (i,j) un arco cualquiera de \tilde{T}_{t_α} .

Denotamos por $R(j)$ el conjunto de vértice de N que son alcanzables desde j , utilizando arcos de \tilde{T}_{t_α} . Evidentemente, $t_\alpha \notin R(j)$, ya que su grado de entrada respecto a los arcos de \tilde{T}_{t_α} es cero.

Considerando la subfamilia de F' , que denotamos por V'_t , formada por las componentes sobre G'_C correspondientes a los vértices de $R(j)$, comprobamos que para el conjunto de arcos de corte K_t definido por:

$$K_t = \left\{ (i,j) \in A'_S / i \in N(V'_t), j \in N(\bar{V}'_t), C'_{t_\alpha} \in \bar{V}'_t, V'_t \subset F \right\}$$

la correspondiente restricción de tipo (2.b')

$$\sum_{(i,j) \in K_t} y'_{ij} \geq 1 \quad \text{se incumple, i.e.:} \quad \sum_{(i,j) \in K_t} y'_{ij} = 0.$$

De acuerdo con la Proposición IV.3 que determina la asignación óptima de valores a las variables del subproblema $P_R(u, t_\alpha / y)$, debemos comprobar que no existe, pues, ningún arco de \tilde{T}_{t_α} con vértice inicial en $R(j)$ y vértice final en $\bar{R}(j)$. Pero ésto es obvio, ya que la existencia de un arco (l,m) con $l \in R(j)$ y $m \in \bar{R}(j)$ implicaría que $m \in R(j)$, en contra de la hipótesis.

Comentario IV.4:

Considerábamos en la primera mejora de la cota inferior, la adición a $V_u(P_R(u, t_\alpha))$ del coste, c_{ij}^* , del arco más pequeño que entra en la componente "raíz" C'_{t_α} . Notemos que ésto corresponde a un cierto conjunto de arcos de corte K_t de tipo (2.b') (aquél en el que $\bar{V}'_t = C'_{t_\alpha}$); el valor del multiplicador correspondiente λ_t (ver IV.5) coincidirá con c_{ij}^* . Debemos señalar, finalmente, que de los $2^{k-1} - 1$ cortes correspondientes a las restricciones de tipo (2.b'), algunas de las cuales pueden satisfacerse, $k-1$ se incumplen necesariamente por la Proposición IV.6. Remitimos a IV.5, para un estudio más detallado, y a la Sección V donde señalaremos su incidencia en la estrategia de ramificación.

IV.4 PROCEDIMIENTO GENERAL

El procedimiento descrito en IV.2 para obtener una cota inferior al valor óptimo del problema $P_R(t_\alpha)$, definido al final de la Sección II, y las mejoras posibles de dicha cota inferior, explicadas en IV.3, lo han sido siempre referidas a una raíz dada t_α del grafo condensado \tilde{G}_C (una componente dada inducida sobre G'_C por el conjunto de arcos requeridos A'_R).

Exponemos a continuación el procedimiento general de obtención de la cota inferior al valor óptimo del Problema del Cartero Rural Dirigido (DRPP). La cota inferior obtenida por dicho procedimiento ha sido utilizada en el proceso de branch and bound, descrito en la Sección V de esta memoria, construido para obtener la solución óptima del DRPP.

El procedimiento general es, esquemáticamente, el siguiente:

STEP 0: Inicialización. Dado el conjunto de vértices del grafo condensado \tilde{G}_C , $\tilde{N} = 1, 2, \dots, k$, tomar $t_\alpha = 1$.

STEP 1: Encontrar los valores óptimos de los multiplicadores de forma que se maximice el valor $V(P_R(u, t_\alpha))$, el valor óptimo del problema $P_R(u, t_\alpha)$.

STEP 2: A partir de la solución del subproblema

$P_R(u, t_\alpha / y)$ obtenido en el STEP 1, computar los valores de los multiplicadores λ_t (ver Proposición IV.6) y añadirlos a la función objetivo de $P_R(u, t_\alpha)$.

Volver al STEP 1 si es necesario.

STEP 3: Si $t_\alpha = k$, STOP

Si no, hacer $t_\alpha = t_\alpha + 1$ e ir al STEP 1.

Comentario IV.5:

El Teorema IV.4 indicaba el valor óptimo, denotado por $V_u(P_R(u, t_\alpha))$, del problema $P_R(u, t_\alpha)$, dados t_α y u . Para determinar $V(P_R(u, t_\alpha))$, STEP 1 del procedimiento general, el método más comúnmente utilizado es el del subgradiente (ver la introducción de esta memoria); normalmente, el método del subgradiente acaba tras un número finito de iteraciones (en cada una de ellas se debe determinar $V_u(P_R(u, t_\alpha))$, sin obtener el valor óptimo de $P_R(u, t_\alpha)$. Con el mejor valor obtenido en el STEP 1, deben obtenerse los multiplicadores λ_t asociados a los conjuntos de arcos de corte definidos por cada arco en la arborescencia generadora de mínimo peso solución óptima del subproblema $P_R(u, t_\alpha / y)$; con los nuevos costes modificados se puede volver a

reoptimizar. El proceso se repite para cada vértice de \tilde{N} .

Como vemos, el procedimiento general de obtención de la cota inferior es, computacionalmente, costoso. En el código construido (ver Sección VI, donde se detallan los resultados computacionales) el procedimiento ha sido simplificado. Un algoritmo heurístico ha sido utilizado, en lugar del método del subgradiente, en el STEP 1. Es un procedimiento iterativo, que se detalla y justifica en IV.5, para obtener unos "buenos" multiplicadores u . Estos multiplicadores, calculados inicialmente, se mantienen constantes mientras se calculan todas las posibles arborescencias generadoras de mínimo peso sobre \tilde{G}_C ; sobre la mejor de ellas (la de mayor coste) se determinan los cortes incumplidos y los correspondientes multiplicadores λ_t , para lo que se utiliza, de nuevo, un procedimiento heurístico. Tal procedimiento ha sido utilizado por Balas y Christofides [1] para el Problema del Agente Viajero (TSP) asimétrico, y se detalla también en IV.5. Con los costes modificados por los multiplicadores obtenidos λ_t vuelve a calcularse la arborescencia generadora de mínimo peso sobre \tilde{G}_C (con la misma raíz que la que produjo los multiplicadores λ_t). El valor utilizado en el código como cota inferior al valor

de la solución óptima del DRPP es, finalmente:

$$\sum_{(i,j) \in A'_R} c_{ij} (1+r_{ij}) + \sum_{i \in N_R} u_i D(i) + \sum_{t=1}^{k-1} \lambda_t + \sum_{(i,j) \in \tilde{T}^*} c_{ij}^* \quad (I)$$

Notación IV.6:

$D(i)$ representa la diferencia entre el grado de entrada y de salida del vértice i , en el grafo G'_C , pero con respecto a los arcos de A'_R .

\tilde{T}^* representa los arcos en la arborescencia que ha sido calculada después de obtener los multiplicadores λ_t ; c_{ij}^* es el coste del arco $(i,j) \in \tilde{T}^*$ (modificado por los multiplicadores u y los λ_t obtenidos).

Comentarios IV.7:

Los multiplicadores u y λ_t obtenidos por los procedimientos heurísticos que serán detallados en IV.5 hacen que los costes modificados de todos los arcos del grafo G'_C sean no negativos, por lo que la resolución óptima del subproblema $P_R(u, t_\alpha/x)$ es $x'_{ij} = 0 \quad \forall (i,j) \in A'_R$. Asimismo, la resolución óptima de $P_R(u, t_\alpha/y)$, con los costes modificados por los multiplicadores λ_t , es (por la Proposición IV.3, Caso a) $y'_{ij} = 1$ para los $k-1$ arcos de G'_C correspondientes a los arcos de \tilde{T}^* . Recordando la

función objetivo del problema $P_R(u, t_\alpha)$, dada en IV.2, y la forma en que se incorporan a ella las restricciones redundantes, explicada en la segunda mejora de la cota inferior (ver IV.3), la expresión (I) es la obtenida para la función objetivo de $P_R(u, t_\alpha)$, y, por lo tanto, para el valor de la cota inferior.

IV.5 PROCEDIMIENTOS HEURISTICOS

Los multiplicadores u y λ que aparecen en el procedimiento general de obtención de la cota inferior, usada en el árbol de branch and bound de la Sección V, a la solución óptima del Problema del Cartero Rural Dirigido, se obtienen mediante algoritmos heurísticos, uno de ellos iterativo, que van a ser expuestos a continuación.

Los algoritmos se justifican, en primer lugar, por su rapidez, en comparación con el método del subgradiente, utilizado generalmente para obtener, en un número finito de iteraciones, unos "buenos" multiplicadores. En segundo lugar, los resultados obtenidos son buenos, como veremos en la Sección VI, y, además, los procedimientos heurísticos permiten obtener, de una forma sencilla, cotas (superiores e inferiores) al aumento del valor de la cota inferior del DRPP (ver IV.4) al descender en el árbol de búsqueda y, por lo tanto, el cálculo de una cota inferior en cada nudo del árbol puede ser evitado (como veremos en la Sección V).

Los multiplicadores obtenidos mantienen, además, los costes modificados de todos los arcos del grafo G'_C no negativos; la razón para ello es la no existencia de cotas superiores, ajustadas, a los valores de las varia-

bles x'_{ij} e y'_{ij} , a diferencia de como ocurre en el caso de un grafo totalmente no dirigido, como se expone en [8]. Una cota superior (a la que hemos hecho referencia en apartados anteriores de esta Sección), evidente y rústica, al número de veces que puede aparecer o repetirse, según sea de A'_S o de A'_R , el arco (i,j) viene dada por el procedimiento heurístico descrito en la Sección III de esta memoria.

Denotando por $V(H)$ el valor de la cota superior inicial obtenida por el procedimiento heurístico mencionado (ver Sección III).

$$V(H) = \sum_{(i,j) \in A'_R} c_{ij} (1+r_{ij}) / c_{ij} \quad (II)$$

es una cota superior al valor de la variable asociada al arco (i,j) en cualquier solución óptima.

Comentario IV.8:

La cota superior (II), al valor de la variable correspondiente al arco (i,j) es mala y se ha intentado mejorar. Podría pensarse que, considerando el grafo G'_C , la suma de todas las demandas (ofertas) es también una cota superior, pero el problema estriba en que este valor no está bien definido (¿con respecto a los arcos de A'_R ?, ¿contando todos los arcos de G'_C ?); cuando $k-1$ arcos de $A'_S - I$ han sido fijados en la solución, la reso-

lución del problema de flujo de coste mínimo proporciona, a posteriori, cotas para las variables, pero en esta situación (ver Sección V), el correspondiente nudo del árbol de búsqueda queda saturado.

La no existencia de cotas superiores ajustadas para los valores de las variables x'_{ij} e y'_{ij} produce que el método del subgradiente, al originar costes modificados negativos, necesite muchas iteraciones para estabilizarse, por lo que su convergencia es muy lenta.

Este resultado concuerda con el obtenido en [8] para el caso del Cartero Rural en un grafo no dirigido.

Por las razones antes expuestas, hemos construido procedimientos heurísticos que van a ser detallados a continuación.

IV.5.1. Procedimiento heurístico iterativo para la obtención de los multiplicadores u

Recordemos la función objetivo del problema relajado $P_R(u, t_\alpha)$:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{(i,j) \in A'_R} x'_{ij} (c_{ij} + u_j - u_i) + \sum_{(i,j) \in A'_S} y'_{ij} (c_{ij} + u_j - u_i) + \\ & + \sum_{(i,j) \in A'_R} c_{ij} (1 + r_{ij}) + \sum_{i \in N_R} u_i D(i) \end{aligned}$$

donde $D(i)$ representa la diferencia entre los grados de

entrada y de salida del vértice $i \in N_R$, en el grafo G'_C , pero con respecto a los arcos de A'_R .

La restricción correspondiente a los multiplicadores u es:

$$u_i \text{ no restringido } \forall i \in N_R \quad (4)$$

Como ya hemos señalado, la primera condición exigida a los multiplicadores es:

$$c_{ij} + u_j - u_i \geq 0 \quad \forall i, j \quad (\text{III})$$

De acuerdo con la expresión de la función objetivo de $P_R(u, t_\alpha)$, interesa que el multiplicador u_i asociado a un vértice $i \in N_R$ tenga el mismo signo que $D(i)$.

Notemos, finalmente, que el orden en que se calculan los multiplicadores u_i influye en el resultado final. El heurístico trata de, satisfaciendo la condición (III), maximizar $\sum_{i \in N_R} u_i D(i)$, y, tras varias

pruebas, el que proponemos consiste, esquemáticamente en:

- Ordenar los vértices de mayor a menor valor absoluto de $D(i)$.
- Para cada vértice i , el multiplicador u_i se calcula de la forma siguiente:

$$\text{si } D(i) < 0 \quad , \quad u_i = -\min_{j \in N_R} \{ c_{ji} \}$$

$$\text{si } D(i) > 0 \quad , \quad u_i = \min_{j \in N_R} \{ c_{ij} \}$$

y se actualizan los costes de todos los arcos incidentes con el vértice i como sigue:

$$c_{ij} = c_{ij} - u_i \quad , \quad j \in N_R \quad \text{y} \quad c_{ji} = c_{ji} + u_i \quad , \quad j \in N_R$$

Un multiplicador u_i puede ser calculado para un vértice $i \in N_R$ tal que $D(i) = 0$ si este multiplicador puede mejorar, al cambiar los costes de algunos arcos, otro multiplicador u_j , correspondiente a un vértice j para el que $D(j) \neq 0$.

El procedimiento se repite hasta que todos los multiplicadores u_i permanecen inalterados.

Se calculan, finalmente, multiplicadores u_i asociados a vértices i con $D(i) = 0$ (que no influyen en el valor de la función objetivo de $P_R(u, t_\alpha)$) si con ellos podemos aumentar los costes de algunos arcos no requeridos de conexión y, por lo tanto, posiblemente, el valor de las arborescencias generadoras de mínimo peso que deben ser calculadas a continuación (ver IV.4).

El siguiente ejemplo ilustra la aplicación de este algoritmo heurístico iterativo.

Ejemplo 1:

Consideremos el grafo G'_C de la Figura 5 de la Sección II.

Respecto a los arcos de A'_R , $D(i)$ toma los siguientes valores:

$$D(1)=D(2)=D(3)=D(4)=D(6)=D(7)=D(8)=D(9)=0$$

$$D(5) = -1 \quad D(10) = -1 \quad D(11) = 2$$

El orden, pues, para calcular los multiplicadores es:

$$u_{11}, u_5, u_{10}$$

1ª iteración: $u_{11} = 3, u_5 = -3, u_{10} = 0$

2ª iteración: los multiplicadores no cambian

Notemos que u_5 podría mejorarse asignando multiplicadores adecuados a los vértices 4 y 6, pero el código no contempla la posibilidad de mejora (para evitar complicaciones excesivas) cuando interviene más de un vértice.

Fin del proceso iterativo.

Todavía es posible asignar multiplicadores a los vértices 2, 3 y 8 para aumentar los costes de los arcos no requeridos de conexión; haciendo $u_2 = -2$, $u_3 = 3$ y $u_8 = 4$, la Figura 1 muestra el grafo G'_C con los costes modificados.

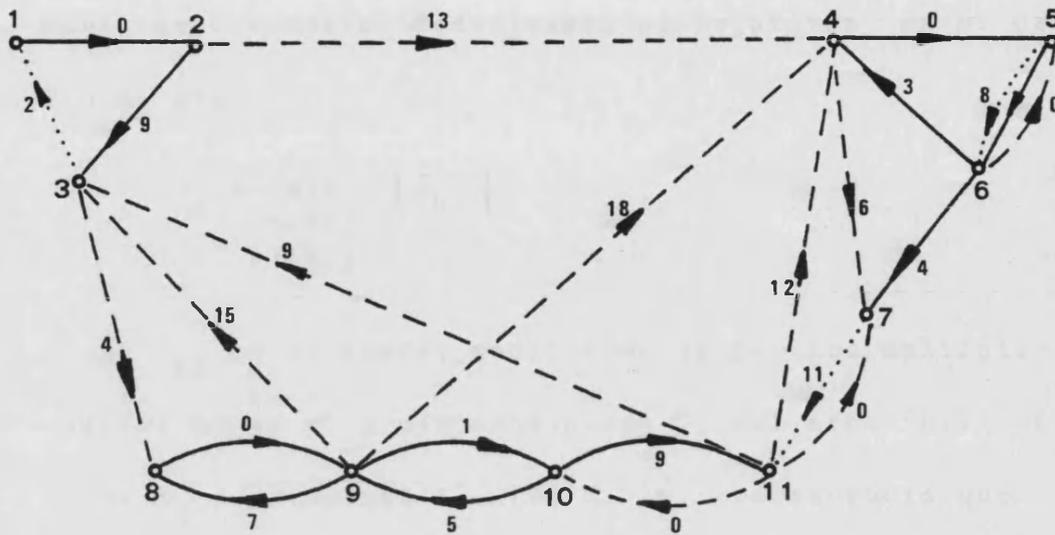


Figura 1

IV.5.2 Procedimiento heurístico para la obtención de los multiplicadores λ

Como ya hemos señalado, el procedimiento heurístico que describimos ha sido utilizado por Balas y Christofides en [1], donde se presentaban el mismo tipo de restricciones relajadas que las que aparecen en la segunda mejora de la cota inferior presentada en IV.3.

Según la Proposición IV.6, cada arco de la arborescencia generadora de mínimo peso, solución óptima del subproblema $P_R(u, t_\alpha/y)$, determina un conjunto K_t de arcos de corte que incumple la correspondiente restricción de tipo (2.b').

Como se afirma en el artículo antes mencionado, el mejor multiplicador λ_t asociado a dicho corte y que

mantiene los costes modificados no negativos, es el definido por

$$\lambda_t = \min_{\substack{h \in R(j) \\ l \in \bar{R}(j)}} \{ \tilde{c}_{hl} \}$$

donde \tilde{c}_{hl} es el coste, modificado ya por los multiplicadores u , en el grafo condensado \tilde{G}_c del arco (h,l) . El corte K_t corresponde al arco de la arborescencia que denotamos por (i,j) . $R(j)$ es el conjunto de vértices de \tilde{N} alcanzables desde el j , utilizando arcos de \tilde{T}^* , y $\bar{R}(j)$ el complementario de $R(j)$ con respecto a \tilde{N} .

Determinado el multiplicador λ_t , los costes de los arcos en el correspondiente conjunto K_t son actualizados: $c_{ij} = c_{ij} - \lambda_t$, y se pasa a calcular otro multiplicador para otro corte $K_{t'}$, que corresponderá a otro arco de la arborescencia.

El proceso termina después de obtener $k-1$ multiplicadores, que han modificado los costes de ciertos arcos de $A'_S - I$, y que aparecen sumando en la expresión final de la función objetivo de $P_R(u, t_\alpha)$.

Finalmente, como se indica en IV.4, se calcula una nueva arborescencia generadora de mínimo peso, con los costes modificados, y así concluye la obtención de la cota inferior al valor óptimo del DRPP, que será

utilizada en el procedimiento de branch and bound descrito en la Sección siguiente.

Presentamos a continuación un ejemplo para ilustrar la obtención de la cota inferior, construida en esta Sección, al valor de la solución óptima del DRPP en el nudo cero del árbol de branch and bound.

Ejemplo 2: Obtención de la cota inferior

Consideremos el grafo G'_C de la Figura 5 en el Ejemplo 2 de la Sección III. Todos los arcos de F y T_{t_α} son también de A'_S .

Vamos a calcular la cota inferior al valor óptimo del DRPP.

1) Cálculo de los multiplicadores u :

Para este grafo, $D(i)$ es el siguiente:

$$D(1)=D(2)=D(3)=D(7)=D(8)=D(12)=D(13)=D(14)=D(15) = 0$$

$$D(4) = -1, D(5) = 1, D(6) = -2, D(9) = 1, D(10) = 1,$$

$$D(11) = -1, D(16) = 1$$

El orden, pues, establecido para el cálculo de los multiplicadores es el siguiente:

$$u_6, u_4, u_5, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{16}$$

1ª iteración:

$$u_4 = -3, u_5 = 0, u_6 = -6, u_9 = 2, u_{10} = 4,$$

$$u_{11} = -2, u_{16} = 0$$

2ª iteración:

Se mejora u_9 y se determina u_8 para poder mejorar u_{10} .

$$u_4 = -3, u_5 = 0, u_6 = -6, u_8 = 11, u_9 = 6,$$

$$u_{10} = 6, u_{11} = -2, u_{16} = 0$$

3ª iteración:

Sólo varía u_9

$$u_4 = -3, u_5 = 0, u_6 = -6, u_8 = 11, u_9 = 7,$$

$$u_{10} = 6, u_{11} = -2, u_{16} = 0$$

Ya no se produce ningún cambio y, por lo tanto, termina el proceso iterativo.

Se calculan a continuación multiplicadores que puedan aumentar los costes de los arcos no requeridos de conexión.

$$\text{Estos son: } u_3 = -7 \quad u_{12} = -5 \quad u_{15} = 3$$

Con los costes de los arcos modificados, el correspondiente grafo condensado \tilde{G}_C está representado en la Figura 2.

2) Cálculo de los multiplicadores λ :

La mejor arborescencia generadora de mínimo peso se obtiene con raíz en la primera componente. Sus arcos son (1,2) y (2,3), con un coste total de 7 unidades.

El multiplicador asociado al primer arco de \tilde{T}_1

es $\lambda_1 = 4$; análogamente $\lambda_2 = 0$, para el segundo arco. Los costes actualizados aparecen en la Figura 3. La arborescencia generadora de mínimo peso, calculada con estos costes modificados, con raíz en la primera componente, no varía, y, por lo tanto, $\tilde{T}^* = \{(1,2), (2,3)\}$.

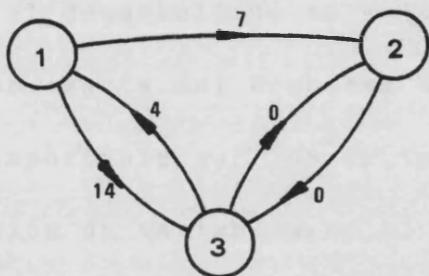


Figura 2

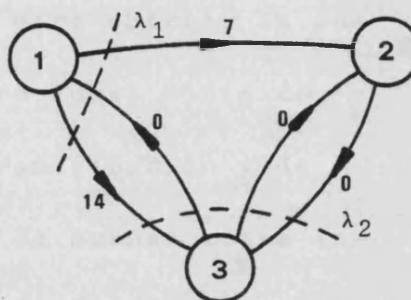


Figura 3

El valor, pues, de la cota inferior al valor de la solución óptima del DRPP sobre el grafo G'_C de este ejemplo es, de acuerdo con la expresión (I) de IV.4:

$$\sum_{(i,j) \in A'_R} c_{ij} (1+r_{ij}) + \sum_{i \in N_R} u_i^{D(i)} + \sum_{t=1}^{k-1} \lambda_t + \sum_{(i,j) \in \tilde{T}^*} c_{ij}^* = 99 + 30 + 4 + 7 = 140$$

La solución óptima del Problema del Cartero Rural Dirigido sobre el grafo G'_C de este ejemplo coincide con el valor de la cota superior inicial, mejorada, construida en el Ejemplo 2 de la Sección III, que era

de 150 unidades. Este ejemplo aparece entre los problemas de test que figuran en la Sección VI de esta memoria.

Concluimos esta Sección con una breve valoración de los resultados obtenidos en ella. Como es bien conocido, en cualquier procedimiento de branch and bound, como el desarrollado en esta memoria para obtener la solución exacta del Problema del Cartero Rural Dirigido, más importante que los criterios de ramificación y de elección de variables, es el disponer de buenas cotas inferiores. En esta Sección, empleando la técnica que hemos considerado más conveniente para el tipo de problema (la Relajación Lagrangiana), hemos desarrollado una cota inferior y estudiado su implementación. Hemos tratado de conjugar la economía de cálculo con la potencia de la cota, por lo que el método del subgradiente ha sido sustituido por procedimientos heurísticos, con un significado intuitivo grande y con cuya descripción concluye la Sección. Las ventajas de cálculo que hemos mencionado se detallan en la Sección siguiente, mientras que una valoración global de los resultados obtenidos, teniendo en cuenta también la cota superior y las estrategias de ramificación, será presentada en la última Sección de esta memoria.

S E C C I O N V

PROCEDIMIENTO DE BRANCH AND BOUND

PARA EL DRPP

Presentamos en esta Sección una descripción del procedimiento de branch and bound construido para determinar la solución exacta del Problema del Cartero Rural Dirigido.

Se detalla, en primer lugar, la estrategia de ramificación, que es del tipo conocido como depth-first, con la intención de llegar, cuanto antes, a buenas soluciones (posiblemente la solución óptima) del problema.

Se estudia a continuación el criterio de elección de la variable a ramificar, que depende del número de componentes originales inducidas por los arcos de A'_R sobre el grafo G'_C , y de la estructura que tenga el grafo en cada momento (según los arcos ya fijados por el procedimiento).

Se detallan, finalmente, algunas de las características del árbol de ramificación construido que, como ya señalamos en la Sección IV, permiten utilizar las ventajas de cálculo que proporcionan los procedimientos heurísticos de obtención de los multiplicadores, descritos al final de la Sección anterior. En particular, la elaboración de un criterio sencillo de determinación de

cotas superiores e inferiores al valor de la cota inferior (ver Sección IV) en cada nudo del árbol permite evitar el cálculo de cota inferior en muchos nudos, acelerando, por lo tanto, el procedimiento de búsqueda.

Los resultados computacionales se detallan en la Sección VI.

V.1 ESTRATEGIA DE RAMIFICACION

La ramificación se realiza sobre las variables y'_{ij} correspondientes a arcos $(i,j) \in A'_S$, cuando los vértices iniciales y finales de dichos arcos pertenecen a componentes (inducidas sobre G'_C por los arcos de A'_R) diferentes. La dificultad del problema depende, pues, además del número k de componentes diferentes, no necesariamente fuertemente conexas, sobre el grafo G'_C , que, como ya señalamos en la introducción de esta memoria, hace que el Problema del Cartero Rural Dirigido sea NP-completo, del número de arcos en $A'_S - I$, que hemos llamado arcos no requeridos de conexión. Entre problemas de dificultad semejante (en el sentido antes mencionado) otro factor que aumenta la complejidad, como veremos en los resultados computacionales sobre los problemas de test que se presentan en la Sección VI, es el número de vértices requeridos (de N_R) con grado de entrada distinto del grado de salida, calculados sobre G'_C con respecto a los arcos de A'_R .

Cada nudo (subproblema) del árbol de branch and bound conduce a dos subproblemas, que corresponden a dos nudos que llamaremos descendientes; en el primero de ellos, la variable seleccionada y'_{ij} (ver V.2

para criterio de elección) toma valores mayores o iguales que 1 (el arco de A'_S-I correspondiente es obligado a aparecer en la solución, al menos una vez), mientras que en el segundo, la variable y'_{ij} seleccionada debe tomar el valor 0 (lo que significa que el arco de A'_S-I correspondiente no debe aparecer en la solución).

Notemos que, en este último caso, la desaparición de un cierto arco de G'_C puede provocar las apariciones o repeticiones de otros arcos (por ejemplo, cuando de una cierta componente de G'_C , inducida por los arcos de A'_R , solamente salían dos arcos no requeridos de conexión, la desaparición de uno de ellos durante el proceso de ramificación obliga a que la variable y'_{ij} asociada al otro arco tome valores mayores o iguales que 1). La aplicación de las Proposiciones II.4 y II.5 puede producir, en este caso, nuevas repeticiones o apariciones, con las consiguientes ventajas en cuanto a simplificación y reducción del tamaño del problema, como se señaló en el Comentario II.2 (ver Sección II). El aumento en el tiempo de computación no es apreciable y los resultados de la Sección VI, en cuanto al número total de nudos del árbol de ramificación y tiempo, se presentan habiendo incorporado al código ciertas posibilidades de reducción.

En cuanto a la Elección del Nudo a ramificar, co-

mo hemos señalado en la introducción de esta Sección, se selecciona entre los nudos abiertos (i.e. aquellos subproblemas que todavía no han sido examinados) aquél que corresponde a una variable y'_{ij} obligada a tomar valores mayores o iguales que 1.

La estrategia de ramificación adoptada es la que requiere menor capacidad de memoria. Cuando en el árbol de ramificación se debe volver atrás (backtracking) para examinar un nudo abierto, las modificaciones necesarias para producir la estructura del subproblema correspondiente a dicho nudo pueden realizarse, bien desde el último nudo examinado o bien a partir del problema original (correspondiente al nudo cero del árbol de ramificación); hemos preferido esta última posibilidad, que es, por su sencillez, la utilizada generalmente cuando la profundidad del árbol no es excesiva.

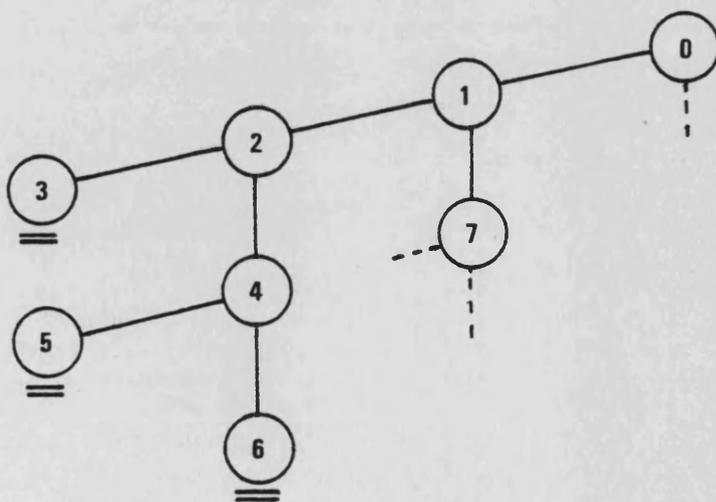


Figura 1

Un ejemplo del árbol de búsqueda construido para determinar la solución exacta del DRPP se representa, en la Figura 1; los números de los nudos corresponden al orden en que van siendo examinados los subproblemas correspondientes.

Los nudos subrayados corresponden a subproblemas saturados, como explicaremos más adelante, pues antes necesitamos explicitar el criterio de elección de la variable a ramificar.

V.2 ELECCION DE LA VARIABLE A RAMIFICAR

El procedimiento de branch and bound no queda determinado hasta que no se especifica el criterio con que se elige la variable a ramificar en cada nudo (subproblema) del árbol. Congruentemente con la estrategia de ramificación adoptada, que trata de conseguir buenas soluciones cuanto antes, el criterio de elección de la variable a ramificar utiliza la proximidad, comprobada computacionalmente, de la cota superior proporcionada por el procedimiento heurístico descrito en la Sección III al valor de la solución óptima del DRPP.

El criterio de elección depende del número de componentes, no necesariamente fuertemente conexas, que existan en el subproblema en cuestión (inducidas por los arcos de A'_R junto con las ya fijadas en el procedimiento de ramificación). Si este número coincide con el de componentes originales sobre G'_C , se elige una variable y'_{ij} entre las asociadas a los arcos que estén en la arborescencia generadora de mínimo peso (SSA), calculada sobre el grafo condensado \tilde{G}_C , con la misma raíz que la arborescencia que produjo la cota superior (ver Sección III). (Notemos que si el número de componentes en el nudo dado coincide con el original, las modifica-

ciones necesarias para conseguir la estructura del subproblema correspondiente a dicho nudo, a partir del problema original, han obligado a toda una serie de arcos no requeridos de conexión a no aparecer en la solución).

Si el número de componentes del subproblema es menor que el original, la variable elegida debe hacer que se vaya cumpliendo que el grado de entrada y de salida de cada componente original (inducidas sobre G'_C por los arcos de A'_R) sea 1, como, obviamente, debe serlo en cualquier solución del DRPP.

En cualquier caso, entre las variables candidatas, se elige aquella cuyo arco asociado satisface más condiciones de simetría.

Como hemos visto, el criterio seleccionado finalmente para la elección de la variable a ramificar busca dos objetivos, uno de ellos prioritario, que esquemáticamente pueden resumirse como:

Primer objetivo: Seleccionar un conjunto de arcos no requeridos de conexión, que llamaremos A^* ; de forma que el grafo inducido sobre G'_C por los arcos de $A'_R \cup A^*$ sea débilmente conexo, y que cada componente de G'_C tenga grado de entrada y de salida (en el correspondiente grafo condensado \tilde{G}_C)

iguales a 1 (calculados con respecto a los arcos en A^*).

Segundo objetivo: Entre los arcos candidatos (i.e., los que satisfacen el primer objetivo) seleccionar aquél que satisface más restricciones de simetría.

Cuando $k-1$ arcos han sido obligados, en el proceso de ramificación, a estar en la solución (las variables y'_{ij} correspondientes deben tomar valores mayores o iguales que 1), en el grafo G_F formado por estos arcos y el conjunto de arcos requeridos A'_R , denotamos por N_R^F el conjunto de vértices asimétricos. Sea $\langle N_R^F \rangle$ el subgrafo inducido sobre \bar{G}_C (el grafo completo definido en la Transformación 1 de la Sección II) por el conjunto de vértices de N_R^F . El nudo correspondiente del árbol de ramificación puede ser saturado resolviendo en $\langle N_R^F \rangle$ el problema de flujo de coste mínimo correspondiente (ver Sección III).

Evidentemente, cualquier nudo del árbol de ramificación en el que el valor de la cota inferior correspondiente supere o iguale el valor de la mejor solución posible obtenida hasta el momento queda saturado.

Para concluir este apartado, señalamos una justi-

ficación adicional a la estrategia de ramificación (ver V.1) y criterio de elección presentados en esta Sección. El resultado que presentamos enlaza también con IV.3, donde se estudiaban las mejoras de la cota inferior para el procedimiento de branch and bound construido en esta Sección. Como señalamos en IV.3, la segunda mejora de la cota inferior se obtenía introduciendo de forma lagrangiana en la función objetivo de $P_R(u, t_\alpha)$ las restricciones de tipo (2.b') que eran incumplidas por la solución del subproblema $P_R(u, t_\alpha/y)$ (una arborescencia generadora de mínimo peso con raíz en la componente C'_{t_α}). La Proposición IV.6 demostraba que cada arco de la arborescencia obtenida proporcionaba una restricción t de tipo (2.b') que se incumplía. Por lo tanto, del total de $2^{k-1} - 1$ restricciones de tipo (2.b') se determinaban $k-1$, incumplidas necesariamente (aunque podían existir más restricciones no satisfechas) (ver Comentario IV.4). Vamos a comprobar que, si los arcos del conjunto A^* forman una arborescencia y cumplen el primer objetivo, antes mencionado, el número de restricciones de tipo (2.b') incumplidas por los arcos de A^* es, exactamente, $k-1$.

Este resultado se demuestra mediante las dos proposiciones siguientes:

Proposición V.1:

Dado un grafo dirigido $G=(N,A)$ y fuertemente conexo, donde $|N|=k$ y $c_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A$, en una arborescencia generadora de mínimo peso (que tiene $k-1$ arcos) sobre G , con raíz en el vértice 1, tal que el grado de salida de todo vértice sea 1 (excepto para un vértice $i^* \in N$), todos los vértices de G están en el camino dirigido simple de 1 a i^* .

Demostración:

Es obvia.

Proposición V.2:

Si sobre el grafo condensado \tilde{G}_C tenemos una estructura de arborescencia como la dada en la proposición anterior, el número de restricciones de tipo (2.b'), sobre el correspondiente grafo G'_C , que se incumplen es, exactamente, $k-1$.

Demostración:

Consideremos cualquier subfamilia \bar{V}'_t de F' que contenga a la componente "raíz" C'_{t_a} . La restricción de tipo (2.b') correspondiente afirma que a dicha subfamilia debe entrarle un arco de $A'_S - I$ que sea de la arborescencia sobre \tilde{G}_C .

La estructura de dicha arborescencia sobre \tilde{G}_C

permite ordenar los vértices (componentes) de \tilde{N} , según la posición que ocupan en el camino de t_α a i^* (que ocupa la posición k , manteniendo la notación de la proposición anterior).

Denotamos por i_t^* el último vértice (según la ordenación anterior) de la subfamilia dada \bar{V}'_t . Si los elementos de \bar{V}'_t (sin incluir t_α e i_t^*) ocupan todas las posiciones desde t_α a i_t^* , el corte asociado a dicha subfamilia corresponde al arco de la arborescencia (i_t^*, j_1) , siendo j_1 el vértice de \tilde{N} que ocupa la posición siguiente a i_t^* . Este corte se incumple necesariamente.

Si los elementos de \bar{V}'_t (sin incluir t_α e i_t^*) no ocupan todas las posiciones, existe al menos un vértice, $j_0 \notin \bar{V}'_t$, que ocupa una posición anterior a i_t^* ; el corte correspondiente a \bar{V}'_t se satisface ya que al menos existe el arco (j_0, i_1) , siendo i_1 el vértice de \bar{V}'_t que ocupa la posición que sigue inmediatamente a la ocupada por j_0 .

V.3 CARACTERISTICAS DEL ARBOL DE RAMIFICACION

El procedimiento de branch and bound construido en V.1 y V.2 utiliza además, como hemos señalado en la introducción de esta Sección, ciertas ventajas de cálculo derivadas de los procedimientos heurísticos de obtención de multiplicadores (ver IV.5) para determinar, sencillamente, cotas superiores e inferiores al aumento experimentado por la cota inferior en cada nudo durante el proceso de ramificación.

Denotamos por l el último nudo examinado y por $(l+1)$ y $(l+2)$ sus descendientes.

De acuerdo con la estrategia de ramificación adoptada, el siguiente nudo a examinar es el $(l+1)$, que se obtiene a partir de l al obligar al arco, que denotamos por (IV, FV) , a estar en la solución. Presentamos un criterio simple de determinación de cota superior al incremento del valor de la cota inferior en el nudo $(l+1)$, con respecto al valor en el nudo l .

Cuando el nudo $(l+1)$ es saturado, el siguiente nudo a examinar es, en este caso, el denotado por $(l+2)$, que se obtiene a partir del l obligando al arco (IV, FV) a no aparecer en la solución. En esta situación, presentamos un criterio de determinación de cota inferior al

aumento experimentado por la cota inferior en el nudo (1+2), con respecto al valor de dicha cota en el nudo 1. Cuando el nudo (1+1) es saturado mediante la resolución de un problema de flujo de coste mínimo, diremos que dicho nudo corresponde a una cola.

Notación V.1:

Representamos por CINF el valor de la cota inferior; por $c_1(i,j)$ el coste original (no modificado por multiplicadores) del arco (i,j) y empleamos $u(i)$ en lugar de u_i para denotar el multiplicador asociado al vértice i.

Finalmente:

IR \equiv suma de los costes de los arcos (y sus repeticiones) obligados a estar en la solución

MULTCO \equiv suma de los multiplicadores λ_t

c(SSA) \equiv coste de los arcos de \tilde{T}^* (ver notación

IV.6)

Los subíndices empleados harán siempre referencia al nudo (subproblema) en cuestión.

Presentamos los dos criterios, antes mencionados, por separado.

V.3.1 Máximo incremento de la cota inferior

De acuerdo con la expresión (I) de IV.4, el valor de la cota inferior a la solución óptima del DRPP en el nudo 1 es, utilizando la notación V.1:

$$CINF_1 = IR_1 + \sum_{i \in N_R} u_1(i)D_1(i) + MULTCO_1 + c_1(SSA)$$

y en el nudo (1+1) la cota inferior toma el valor

$$CINF_{1+1} = IR_{1+1} + \sum_{i \in N_R} u_{1+1}(i)D_{1+1}(i) + MULTCO_{1+1} + c_{1+1}(SSA)$$

La siguiente proposición proporciona una cota superior al valor de $CINF_{1+1} - CINF_1$.

Proposición V.3:

El incremento experimentado en el valor de la cota inferior al fijar el arco (IV, FV) no puede superar el coste actualizado de dicho arco, es decir:

$$CINF_{1+1} - CINF_1 \leq c_1(IV, FV) + u_1(FV) - u_1(IV)$$

Demostración:

Notemos, en primer lugar, que multiplicadores u obtenidos en el nudo 1 son también válidos para el nudo (1+1). Manteniendo, pues, los mismos multiplicadores u ,

$$IR_{1+1} = IR_1 + c_1(IV, FV) \quad y$$

$$D_{1+1}(IV) = D_1(IV) - 1$$

$$D_{1+1}(FV) = D_1(FV) + 1$$

Evidentemente, $MULTCO_{l+1} + c_{l+1}(SSA) \leq MULTCO_l + c_l(SSA)$, ya que en el nudo (l+1) tenemos, con los mismos costes modificados por los mulitplificadores u, una componente menos que en el nudo l.

Reescribiendo $CINF_{l+1}$ Y $CINF_l$:

$$CINF_{l+1} = IR_{l+1} + c_{l+1}(IV, FV) + \sum_{\substack{i \in N_R \\ i \neq IV \\ i \neq FV}} u_{l+1}(i) D_{l+1}(i) + \\ + u_{l+1}(IV) D_{l+1}(IV) + u_{l+1}(FV) D_{l+1}(FV) + MULTCO_{l+1} + \\ + c_{l+1}(SSA)$$

$$CINF_l = IR_l + \sum_{\substack{i \in N_R \\ i \neq IV \\ i \neq FV}} u_l(i) D_l(i) + u_l(IV) D_l(IV) + \\ + u_l(FV) D_l(FV) + MULTCO_l + c_l(SSA)$$

$$\text{En consecuencia, } CINF_{l+1} - CINF_l \leq c_l(IV, FV) - \\ - u_l(IV) + u_l(FV)$$

Como consecuencia de la proposición, el cálculo de la cota inferior correspondiente al nudo (l+1) puede evitarse si

$$CINF_l + c_l(IV, FV) + u(FV) - u(IV) < FSOL$$

donde FSOL representa el valor de la mejor solución posible conocida hasta el momento.

El procedimiento, pues, se dirige a examinar el siguiente nudo (subproblema) abierto.

V.3.2 Mínimo incremento de la cota inferior

En la práctica, el incremento mínimo experimentado por el valor de la cota inferior correspondiente al nudo (1+2) solamente se calcula cuando el nudo (1+1) corresponde a una cola.

En este caso, en el nudo 1, al igual que en el (1+2), solamente existen dos componentes (inducidas por los arcos de $A'_R \cup A^*$); denotamos por $E(IV)$ la componente que contiene al vértice IV y por $E(FV)$ la otra componente, que contiene al vértice FV.

Antes de exponer la Proposición V.5 que proporciona el mencionado incremento mínimo, un resultado previo, que es utilizado en ella, va a ser demostrado.

Proposición V.4:

Supongamos que $u_1(i) = u_{1+2}(i) \quad \forall i \in N_R$,
 $i \neq IV, i \neq FV$. Si, al eliminar el arco (IV,FV):

$$\begin{aligned} |u_{1+2}(IV)| &\geq |u_1(IV)| \\ |u_{1+2}(FV)| &\geq |u_1(FV)| \end{aligned} \quad \text{y} \quad D_1(IV) \neq 0, D_1(FV) \neq 0, \text{ entonces}$$

$$MULTCO_{1+2} + c_{1+2}(SSA) \geq MULTCO_1 + c_1(SSA).$$

Demostración:

Supondremos en la demostración que el arco (IV,FV) no es de corte en el nudo 1 y que, al ser eliminado, no se producen arcos de corte en el nudo (1+2).

Entonces:

$MULTCO_i + c_i(SSA) = c'_i + c_i^*$, para $i=1, 1+2$, donde
 c'_i representa el coste modificado, en el nudo i ,
 del arco más pequeño que entra a $E(FV)$, y
 c_i^* representa el coste modificado, en el nudo i ,
 del arco más pequeño que sale de $E(FV)$.

Debemos señalar que, puesto que los arcos no re-
 queridos de conexión corresponden a caminos más cortos
 entre los vértices requeridos del grafo original G , entre
 dos vértices cualesquiera de G'_C existe, como máximo,
 un arco no requerido de conexión en una determinada di-
 rección.

Notemos que, de acuerdo con el procedimiento
 heurístico de obtención de los multiplicadores u , los
 multiplicadores asociados a los vértices IV y FV no pue-
 den modificarse en la mayoría de los casos simultáneamen-
 te, al ser eliminado el arco (IV, FV) .

Obviamente, si $|u_{1+2}(IV)| = |u_1(IV)|$ y
 $|u_{1+2}(FV)| = |u_1(FV)|$, se cumple esta proposición, pero,
 como veremos en la proposición siguiente, el incremento
 mínimo producido es cero.

Consideramos los siguientes casos:

① $u_1(IV) > 0$, $u_1(FV) > 0$

En el nudo (1+2), el multiplicador asociado al vértice FV no puede cambiar, ya que al ser $u_{1+2}(FV) \geq u_1(FV) > 0$, debe calcularse como $\min_j \{c_1(FV, j) + u_1(j) - u_1(FV)\}$, y la eliminación del arco (IV, FV) no influye en el cálculo de $u_{1+2}(FV)$. Luego $u_{1+2}(FV) = u_1(FV)$.

Si $u_{1+2}(IV) > u_1(IV) > 0$ es porque $c_1(IV, FV) + u_1(FV) - u_1(IV) = 0$ y, para todos los demás arcos que salen del vértice IV, $c_1(IV, i) + u_1(i) - u_1(IV) > 0$.

En consecuencia $MULTCO_{1+c_1}(SSA) = c_1^*$.

Si c_1^* corresponde a un arco que entra en el vértice IV, $c_{1+2}^* > c_1^*$ y, además, al calcular $u_{1+2}(IV) = u_1(IV) + \min_{\substack{i \\ i \neq FV}} \{c_1(IV, i) + u_1(i) - u_1(IV)\}$, el coste modificado, en el nudo (1+2), de los arcos no requeridos de conexión desde E(IV) a E(FV) disminuirá, como máximo, hasta tomar nuevamente el valor cero. Por lo tanto

$$MULTCO_{1+c_{1+2}}(SSA) \geq MULTCO_{1+c_1}(SSA).$$

② $u_1(IV) < 0, u_1(FV) < 0$

La eliminación del arco (IV, FV) no influye en la determinación de $u_{1+2}(IV)$ que, puesto que debe ser

negativo, se calcula como

$$\min_j \{c_1(j, IV) + u_1(IV) - u_1(j)\}. \text{ Por lo tanto:}$$

$$|u_{1+2}(IV)| = |u_1(IV)|$$

La demostración para el vértice FV es análoga a la del caso 1 .

$$\textcircled{3} \quad u_1(IV) < 0, \quad u_1(FV) > 0$$

En este caso, $|u_{1+2}(IV)| = |u_1(IV)|$ y $|u_{1+2}(FV)| = |u_1(FV)|$. Se cumple la proposición pero, como ya hemos señalado, el incremento mínimo producido es cero.

$$\textcircled{4} \quad u_1(IV) > 0, \quad u_1(FV) < 0$$

En este caso pueden modificarse los dos multiplicadores asociados a los vértices IV y FV.

Si $u_{1+2}(IV) > u_1(IV)$ y $|u_{1+2}(FV)| > |u_1(FV)|$, es porque $c_1(IV, FV) + u_1(FV) - u_1(IV) = 0$ y

$$\min_{\substack{j \\ j \neq FV}} \{c_1(IV, j) + u_1(j) - u_1(IV)\} > 0, \text{ para todos los}$$

arcos que salen del vértice IV,

$$\min_{\substack{i \\ i \neq IV}} \{c_1(i, FV) + u_1(FV) - u_1(i)\} > 0, \text{ para todos los}$$

arcos que entran al vértice FV.

En consecuencia, $MULTCO_1 + c_1(SSA) = c_1^*$.

Si c_1^* corresponde a un arco que sale del vér-

tice FV, $c_{1+2}^* > c_1^*$ y, además, el coste modificado de todo arco desde E(IV) a E(FV), en el grafo asociado al subproblema correspondiente al nudo (1+2), es, como mínimo, cero.

$$\text{Luego } \text{MULTCO}_{1+2} + c_{1+2}(\text{SSA}) \geq \text{MULTCO}_1 + c_1(\text{SSA}).$$

Finalmente, representando por i los vértices IV y FV, si $u_1(i) = 0$ y $D_1(i) \neq 0$, alguno de los arcos que entran al (salen del) vértice i tiene coste modificado cero, en el nudo 1, si $D_1(i) < 0$ ($D_1(i) > 0$); si dicho coste modificado no corresponde al del arco (IV,FV), ningún cambio en los multiplicadores $u_{1+2}(i)$ puede producirse en el subproblema asociado al nudo (1+2); en caso contrario, la demostración se reduce a uno de los casos anteriores, considerando u_{1+2} en lugar de u_1 .

Proposición V.5:

El incremento en el valor de la cota inferior en el nudo (1+2), con respecto al valor obtenido en el nudo 1, es, como mínimo:

$$D_1(\text{IV})(u_{1+2}(\text{IV}) - u_1(\text{IV})) + D_1(\text{FV})(u_{1+2}(\text{FV}) - u_1(\text{FV}))$$

Demostración:

El grafo asociado al subproblema que define el nudo (1+2) es el mismo que el correspondiente al sub-

problema definido por el nudo 1, excepto que ha sido eliminado el arco (IV,FV). Todos los multiplicadores u pueden mantenerse, excepto los asociados a los vértices IV y FV, que pueden, quizá, mejorarse, dado que ha desaparecido el arco no requerido de conexión (IV,FV).

Por lo tanto:

$$IR_1 = IR_{1+2}, D_{1+2}(i) = D_1(i) \quad \forall i \in N_R,$$

$$u_1(i) = u_{1+2}(i) \quad \forall i \in N_R, i \neq FV, i \neq IV,$$

$$|u_{1+2}(IV)| > |u_1(IV)|, |u_{1+2}(FV)| > |u_1(FV)|, \text{ y, de}$$

acuerdo con la proposición anterior:

$$MULTCO_{1+2} + c_{1+2}(SSA) \geq MULTCO_1 + c_1(SSA).$$

En consecuencia, por una demostración análoga a la utilizada en la proposición V.3:

$$\begin{aligned} CINF_{1+2} - CINF_1 &\geq D_1(IV)(u_{1+2}(IV) - u_1(IV)) + \\ &+ D_1(FV)(u_{1+2}(FV) - u_1(FV)) = IMPROV \end{aligned}$$

Si $CINF_1 + IMPROV \geq FSOL$, el nudo (1+2) está saturado, sin necesidad de cálculo de la cota inferior correspondiente, y se continúa examinando el siguiente nudo abierto.

Comentario V.2:

Si el incremento proporcionado por la Proposición V.5 no consigue saturar el nudo (1+2), el siguiente

nudo a examinar debe ser el primero de los dos descendientes del nudo (1+2), y se debería calcular entonces $CINF_{1+2}$, el valor de la cota inferior. Existe un caso en que este cálculo puede evitarse, ya que, si se da la condición mencionada a continuación, se cumple que:

$$CINF_{1+2} = CINF_1 + IMPROV.$$

Considerando el grafo correspondiente al subproblema asociado al nudo (1+2), representamos por (i^*, j^*) el arco de menor coste desde la componente, en dicho grafo, que contiene al vértice IV a la componente que contiene a FV. El coste de dicho arco es:

$$c_1(i^*, j^*) + u_{1+2}(j^*) - u_{1+2}(i^*)$$

$$\text{Si } c_1(i^*, j^*) + u_{1+2}(j^*) - u_{1+2}(i^*) =$$

$$= c_1(IV, FV) + u_{1+2}(FV) - u_{1+2}(IV), \text{ se cumple,}$$

evidentemente, que:

$$\begin{aligned} MULTCO_{1+2} + c_{1+2}(SSA) &= MULTCO_1 + c_1(SSA) - \\ &- (c_1(IV, FV) + u_{1+2}(FV) - u_{1+2}(IV)) + (c_1(i^*, j^*) + u_{1+2}(j^*) - u_{1+2}(i^*)) \end{aligned}$$

y, por lo tanto, $CINF_{1+2} = CINF_1 + IMPROV.$

Debemos señalar, finalmente, cierta posibilidad de simplificación del árbol de ramificación que, junto con las características ya descritas, permite acelerar el proceso de búsqueda. Se trata de que ciertos nudos

(subproblemas) del árbol solamente pueden tener un descendiente.

La demostración se deduce de las siguientes proposiciones.

Proposición V.6:

Consideremos un nudo l cualquiera del árbol de ramificación, y sea t_α la raíz de la arborescencia generadora de mínimo peso \tilde{T}^* .

Sea $(i', j') \in A_S - I$, tal que $i' \in V'_{t_\alpha}$, $j' \in \bar{V}'_{t_\alpha}$, $C_{t_\alpha} \subset V'_{t_\alpha}$, y $c^1(SSA)$ el coste de la arborescencia generadora de mínimo peso calculada sobre \tilde{G}_C (en el nudo l), habiendo eliminado previamente el arco (i', j') , con la misma raíz t_α .

Si $c^1(SSA) - c_1(SSA) \geq FSOL - CINF_1 \rightarrow y'_{i', j'} \geq 1$ (el arco está en la solución).

Demostración:

Consideremos el nudo $l+2$ obtenido a partir del l al imponer la restricción $y'_{i', j'} = 0$. Vamos a comprobar que una cota inferior en dicho nudo supera el valor de la mejor solución posible conocida hasta el momento.

Consideramos en el nudo $l+2$ la misma raíz t_α que produjo \tilde{T}^* en el nudo l , y, manteniendo los mismos multiplicadores u y λ (que son posibles en el nudo $l+2$), se cumple que:

$$c^1(SSA) = c_{1+2}(SSA) \leq c_1(SSA) + c^* - c^1(i',j') + u_1(j') - u_1(i')$$

$$\text{donde } c^* = \min_{\substack{i \neq i' \\ j \neq j'}} \left\{ c_1(i,j) + u_1(j) - u_1(i) \mid i \in V'_{t_\alpha}, j \in \bar{V}'_{t_\alpha} \right\}$$

Puesto que los demás sumandos que intervienen en la cota inferior, en el nudo 1+2, permanecen constantes (respecto del nudo 1), si

$$c_{1+2}(SSA) - c_1(SSA) \geq \text{FSOL} - \text{CINF}_1, \text{ entonces}$$

$$\text{CINF}_{1+2} \geq \text{FSOL} \text{ y el nudo } 1+2 \text{ queda saturado.}$$

Por lo tanto, el arco (i',j') debe estar en la solución del subproblema asociado al nudo 1 y en todos los sucesores de 1. En consecuencia, de los dos descendientes del nudo 1, solamente tiene sentido el primero de ellos, obtenido al imponer la restricción $y'_{i'j'} = 1$, si ramificamos por el arco no requerido de conexión (i',j') .

Comentario V.3:

Notemos que, a diferencia del Problema del Carro Rural en un grafo no dirigido, la obligatoriedad de que el arco no requerido de conexión (i',j') aparezca en la solución no puede demostrarse considerando únicamente su coste modificado y el coste c^* , ya que la sustitución del arco (i',j') por el de coste c^* puede proporcionar falsas cotas inferiores, en el sentido de que no sean arborescencias generadoras de mínimo peso con raíz en t_α .

Proposición V.7:

Consideremos un nudo l cualquiera del árbol de ramificación, y sea t_α la raíz de la arborescencia generadora de mínimo peso \tilde{T}^* .

Sea $(i', j') \in A_S - I$, tal que $i' \in V'_{t_\alpha}$, $j' \in \bar{V}'_{t_\alpha}$, y sea

$$\hat{c} = \max_{\substack{i \neq i' \\ j \neq j'}} \left\{ c_1(i, j) + u_1(j) - u_1(i) \mid i \in V'_{t_\alpha}, j \in \bar{V}'_{t_\alpha} \right\}$$

Supondremos $c_1(i', j') + u_1(j') - u_1(i') - \hat{c} \geq c$.

Si $c' - \hat{c} - \lambda_t \geq \text{FSOL-CINF}_1 \rightarrow y'_{i'j'} = 0$ (el arco (i', j') no está en la solución), donde c' representa el coste modificado del arco (i', j') y λ_t el multiplicador asociado al conjunto de arcos de corte correspondiente al corte $(\bar{V}'_{t_\alpha}, V'_{t_\alpha})$.

Demostración:

Consideremos el nudo $l+1$ obtenido a partir del l añadiendo la restricción $y'_{i'j'} \geq 1$. Vamos a comprobar que una cota inferior en el nudo $l+1$ supera o iguala el valor de la mejor solución posible conocida hasta el momento.

Consideramos en el nudo $l+2$ la misma raíz que produjo \tilde{T}^* en el nudo l , y manteniendo los mismos multiplicadores u y λ (que son posibles en el nudo $l+1$, excepto el multiplicador λ_t que en el nudo $l+1$ tomamos ahora igual a cero), se cumple que:

$$\text{MULTCO}_{1+1} = \text{MULTCO}_1 - \lambda_t$$

$$c_1(\text{SSA}) \leq c_{1+1}(\text{SSA}) + \hat{c}$$

Recordando la expresión de la cota inferior:

$$\begin{aligned} \text{CINF}_1 = & \text{IR}_1 + \sum_{\substack{i \in N_R \\ i \neq i' \\ i \neq j'}} u_1(i)D_1(i) + u_1(i')D_1(i') + u_1(j')D_1(j') + \\ & + \text{MULTCO}_1 + c_1(\text{SSA}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{CINF}_{1+1} = & \text{IR}_{1+1} + \sum_{\substack{i \in N_R \\ i \neq i' \\ i \neq j'}} u_1(i)D_1(i) + u_{1+1}(i')D_{1+1}(i') + \\ & + u_{1+1}(j')D_{1+1}(j') + \text{MULTCO}_{1+1} + c_{1+1}(\text{SSA}) \end{aligned}$$

Puesto que $D_{1+1}(i') = D_1(i') - 1$, $D_{1+1}(j') = D_1(j') + 1$ y

$$\text{IR}_{1+1} = \text{IR}_1 + c_1(i', j') :$$

$$\begin{aligned} \text{CINF}_{1+1} - \text{CINF}_1 & \geq c_1(i', j') - u_1(i') + u_1(j') - \lambda_t - \hat{c} = \\ & = c' - \hat{c} - \lambda_t \geq \text{FSOL} - \text{CINF}_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\text{CINF}_{1+1} \geq \text{FSOL}$ y el nudo 1+1

queda saturado.

Análogamente a la proposición anterior, de los dos descendientes del nudo 1, solamente tiene sentido el segundo de ellos, obtenido al imponer la restricción $y'_{ij} = 0$, si ramificamos por el arco no requerido de conexión (i', j') .

S E C C I O N V I

RESULTADOS COMPUTACIONALES

VI.1 RESOLUCION OPTIMA DEL DRPP:EJEMPLO

Presentamos, en primer lugar, un ejemplo completo de determinación de la solución óptima del DRPP sobre el grafo original G representado en la Figura 1. Este ejemplo figura con el nombre de P4 en los problemas de test que se incluyen en esta Sección. El grafo simplificado G'_C , correspondiente al grafo original G , está representado en el Ejemplo 2 de la Sección III.

Para este ejemplo hemos obtenido ya, en esta memoria, la cota superior inicial (Figura 5, Sección III), y la cota inferior correspondiente al nudo cero del árbol de ramificación (ver Ejemplo 2 en IV.5.2). El valor de la cota superior coincide con el de la solución óptima y ésta se representa, sobre el grafo original G , en la Figura 3.

Ejemplo:

Arbol de ramificación para el grafo representado en la Figura 5 de la Sección III.

Nudo 0: CSUP = 150 , FSOL = 150

$$CINF_0 = 140$$

Nudo 1: Se fija el arco (10,11), que pertenece a T_2 y hace que sus vértices incidentes sean simétricos, con respecto a $A'_R \cup A^*$, donde $A^* = \{(10,11)\}$

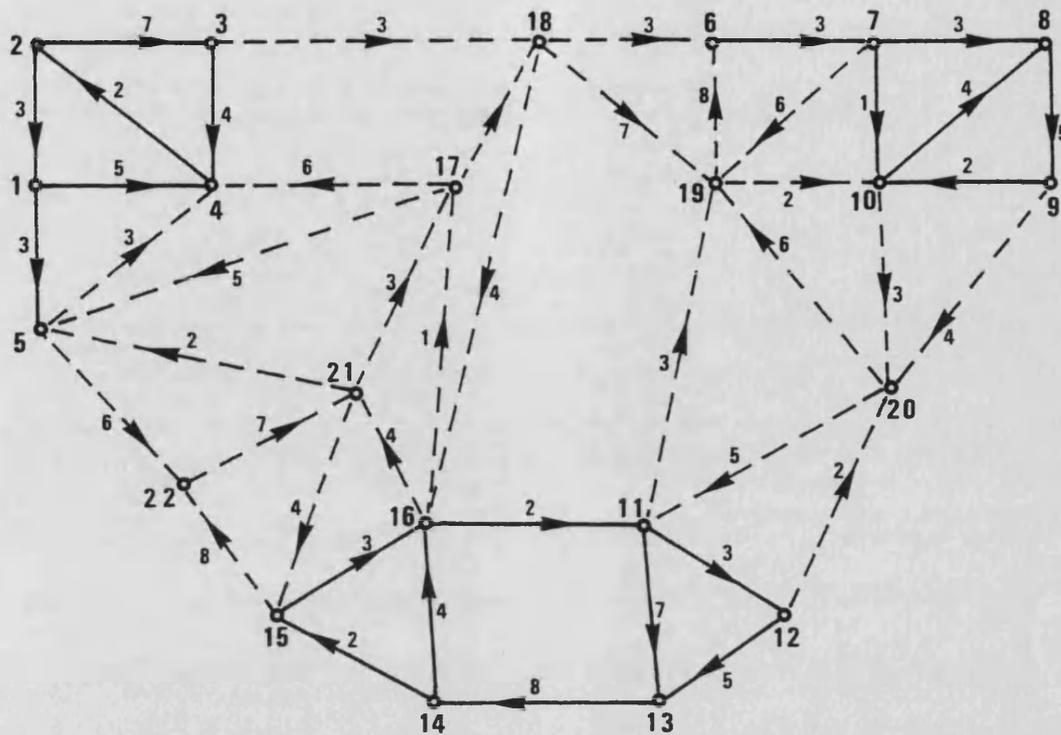


Figura 1: El grafo original G

Puesto que $CINF_0 + c_1(10,11) + u_0(11) - u_0(10) =$
 $= 140 + 8 + (-2) - (+6) = 140$, no se calcula
 $CINF_1$.

Los arcos candidatos para ramificar son (3,6) y
 (16,5).

Nudo 2: Se fija el arco (3,6), que hace que los vérti-
 ces 3 y 6 sean simétricos con respecto a $A'_R \cup A^*$,
 donde $A^* = \{(10,11), (3,6)\}$

El nudo queda saturado resolviendo un problema
 de flujo de coste mínimo. La solución posible

obtenida es de coste 150.

Nudo 3: El nudo anterior era una cola. El arco (3,6) no debe aparecer en la solución. En este caso $u_3(3) = u_1(3)$ y $u_3(6) = u_1(6)$, y por lo tanto el incremento mínimo dado en la Proposición V.5 es cero.

El valor de la cota inferior calculada en este nudo resulta ser de 146.

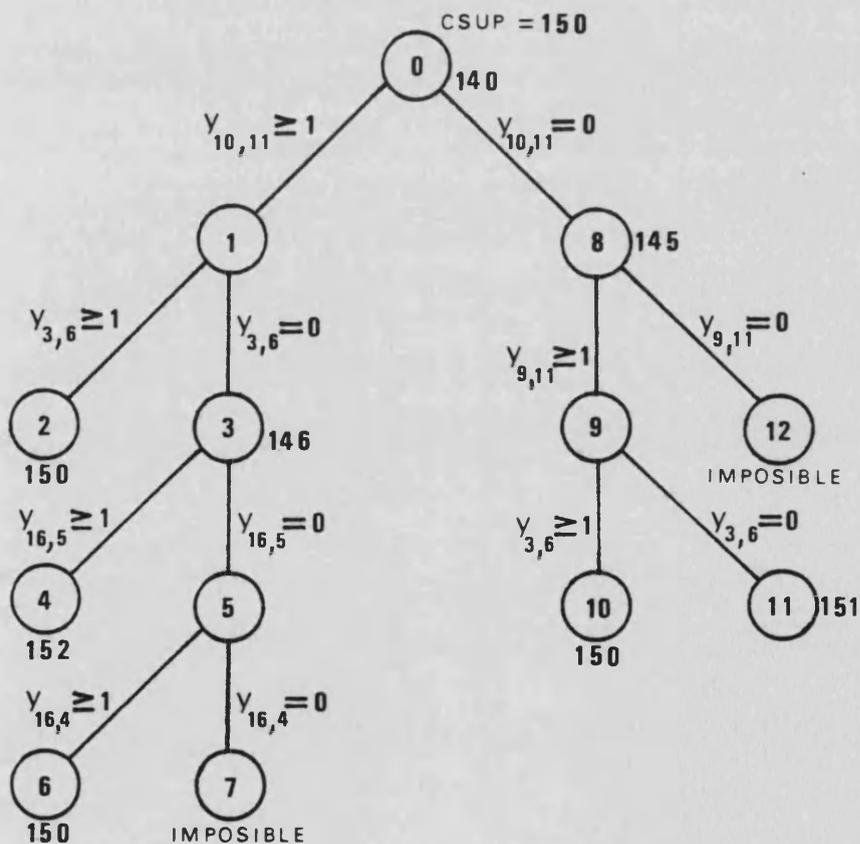


Figura 2: El árbol de ramificación del Ejemplo 1

El árbol de ramificación completo aparece representado en la Figura 2. El número al lado de cada nudo indica el valor de la correspondiente cota inferior (para aquellos nudos en que ha sido calculada). Los nudos señalados como imposibles indican que el arco eliminado era crítico. Los valores de las soluciones posibles obtenidas, que corresponden a colas del árbol de ramificación, aparecen debajo. El tiempo total de resolución de este ejemplo, que incluye el tiempo de todas las transformaciones del grafo original y el cálculo de la cota superior inicial por el procedimiento heurístico descrito en la Sección III, fué de 0.611 segundos de CPU.

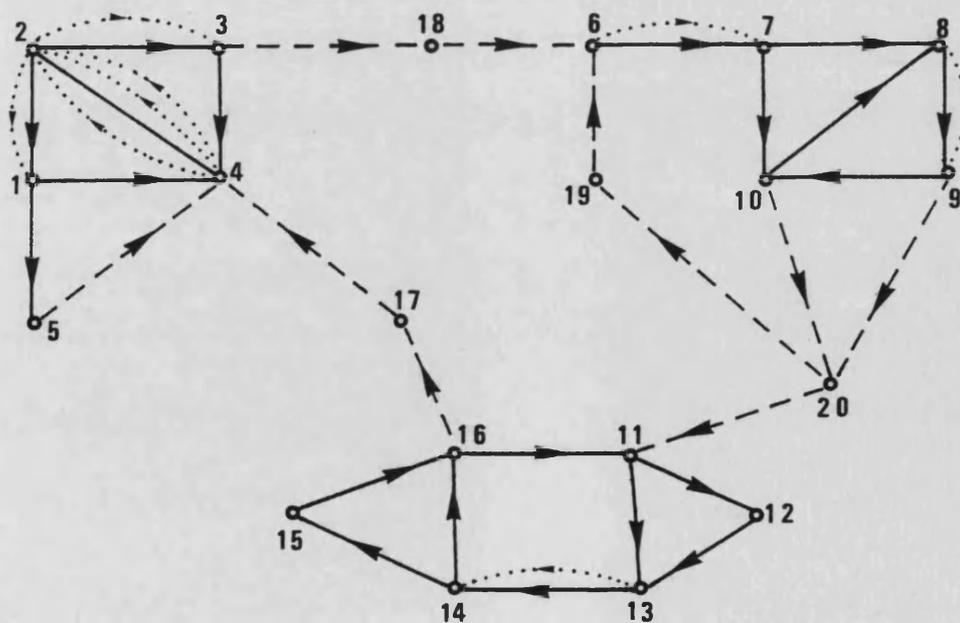


Figura 3: Una solución óptima del DRPP sobre el grafo original

VI.2 RESULTADOS COMPUTACIONALES

El procedimiento exacto de resolución construido en esta memoria ha sido probado sobre 23 problemas de test, cuyas características principales se resumen en la TABLA I.

La primera columna de dicha TABLA indica el número de componentes del subgrafo inducido sobre G , grafo original, por los arcos requeridos. La existencia de un arco crítico, como se definió en la Sección II (ver Definición II.3), reduce en uno el número de componentes iniciales; éste es el caso de los problemas denotados por P2, P3 y P23. Notemos que el número de arcos no requeridos en el grafo G'_C (construido en la Transformación 3 de la Sección II), que se indica en la columna 6 de la TABLA I, es sensiblemente inferior al correspondiente en el grafo completo \bar{G}_C . Dicho número es, como ya hemos señalado, uno de los elementos que aumentan el tiempo de computación necesario para resolver óptimamente el DRPP. Los costes asociados a los arcos de G se tomaron en el intervalo $[0,20]$.

T A B L A I

Problema	1	2	3	4	5	6
P1	2	15	11	31	17	6
P2	3/2	13	11	24	12	11
P3	4/2	27	18	55	23	24
P4	3	22	16	45	20	18
P5	3	29	22	56	34	18
P6	3	29	19	59	25	19
P7	4	26	15	51	21	19
P8	4	44	31	91	7	33
P9	4	51	36	118	55	78
P10	4	51	36	123	60	75
P11	4	64	45	144	68	65
P12	5	35	23	82	27	35
P13	5	65	43	149	64	57
P14	5	65	43	153	69	54
P15	5	65	44	139	61	68
P16	5	65	44	139	62	64
P17	5	80	50	160	74	62
P18	6	70	48	136	67	43
P19	6	80	50	157	61	54
P20	6	80	50	179	71	60
P21	6	76	50	166	67	65
P22	6	76	50	180	65	122
P23	8/7	42	29	81	27	42

1 = n° componentes conexas

2 = n° total de vértices de G

3 = n° total de vértices de G_C

4 = n° total de arcos en G

5 = n° de arcos requeridos

6 = n° de arcos no requeridos en G'_C

La TABLA II presenta los resultados computacionales obtenidos sobre los 23 problemas ya descritos. El procedimiento construido en las anteriores secciones de esta memoria fué codificado en FORTRAN-ASCII, usando el compilador FTN. Los valores de la columna 4 corresponden al tiempo total, en segundos de CPU, empleado para resolver óptimamente cada problema, en una máquina UNIVAC 1100/60. Dicho tiempo total incluye el tiempo utilizado en las sucesivas transformaciones del grafo original, el empleado por el procedimiento heurístico descrito en la Sección III, para obtener una cota superior inicial al valor óptimo del DRPP, y, finalmente, el utilizado por el procedimiento de branch and bound descrito en la Sección V.

De los 23 problemas de test, solamente el denotado por P22 excedió el tiempo máximo permitido, que fué de 300 segundos de CPU. Para este problema, la mejor solución posible fué de 694 unidades, obtenida en el nudo 169 del árbol de ramificación, que quedó incompleto.

La primera columna de la TABLA II indica los valores de la cota superior inicial, obtenida por el procedimiento heurístico descrito en la Sección III. El segundo número, en algunos de los elementos de dicha

columna indica la mejora obtenida, sobre el valor inicial, utilizando el método presentado en III.3. Como puede comprobarse, en 10 de los 22 problemas resueltos óptimamente esta cota proporcionó la solución óptima. En promedio, el valor de la mencionada cota superior está a un 1.4% del valor de la solución óptima.

La segunda columna de la tabla indica el valor óptimo de cada problema, mientras que la tercera corresponde al valor de la cota inferior obtenida en el nudo cero del árbol de ramificación. El valor de dicha cota inferior está, en promedio, a un 5% del valor de la solución óptima.

La columna cuarta presenta los tiempos totales, en segundos de CPU, de resolución de cada problema. Como ya hemos indicado, el tiempo máximo permitido fué de 300 segundos de CPU. Salvo el problema P22, debido al gran número de arcos no requeridos del grafo correspondiente G'_C , todos los demás pudieron resolverse óptimamente en tiempos sensiblemente inferiores.

La quinta columna indica el número total de nudos examinados en el correspondiente árbol de ramificación y la sexta, el número de nudos saturados por el valor de la cota inferior correspondiente (sin incluir

los nudos saturados mediante la resolución de un problema de flujo de coste mínimo, que hemos llamado colas). El número total de nudos no es excesivamente grande y, aunque el porcentaje de nudos saturados (indicado en la columna seis) es bajo, debemos señalar que las características especiales del procedimiento de branch and bound construido (ver Sección V) hacen que en muchos nudos sea innecesario el cálculo de cota inferior y por lo tanto el tiempo empleado en el estudio de dichos nudos es mínimo.

T A B L A I I

Pro- blema	1	2	3	4	5	6
P1	124	124	120	0.236	5	1
P2	91	91	80	0.230	5	1
P3	165	165	156	0.757	3	1
P4	152/150	150	140	0.611	13	3
P5	394	394	372	1.307	23	3
P6	237	237	230	0.950	5	2
P7	201/196	196	196	0.624	0	0
P8	551/545	535	510	13.219	475	55
P9	904/882	839	826	12.058	195	38
P10	801/783	757	753	11.342	197	33
P11	799/789	758	746	19.686	287	25
P12	215/211	211	205	1.962	13	5
P13	692	677	630	57.480	819	126
P14	708	694	670	18.534	199	43
P15	698	688	642	73.968	1203	247
P16	663	663	618	42.766	733	119
P17	817	794	745	126.354	2139	246
P18	678/672	652	620	30.772	415	44
P19	704/695	695	668	21.240	67	21
P20	627	618	605	92.880	1051	213
P21	710/707	703	639	210.339	3005	592
P22	714	694*	640	-----	-----	---
P23	420/416	405	351	32.263	1369	341

1 = Cota superior

2 = Valor óptimo del DRPP

3 = Cota inferior en el nudo cero

4 = Tiempo total de resolución

5 = Nudos del árbol de branch and bound

6 = Nudos saturados por la cota inferior

Concluimos esta Sección, y con ella la memoria, con algunos comentarios finales que expresan nuestra valoración del trabajo presentado. Al principio de cada Sección (excepto en la Introducción y ésta última), y en algunos comentarios (colocados, preferentemente al final de cada Sección), hemos resumido los principales resultados presentados y emitido ya algunas consideraciones.

Si tuviéramos que presentar, esquemáticamente, los resultados principales de esta memoria, dos serían los puntos fundamentales a destacar:

En primer lugar, que se ofrece, por primera vez, un procedimiento de resolución exacto para el Problema del Cartero Rural Dirigido, que había sido presentado hasta ahora como caso particular de problemas de routing más generales, para los que solamente eran conocidos procedimientos aproximados. El estudio presentado en esta memoria explota las características de cada problema concreto, obteniendo información que permite acelerar el proceso de búsqueda de una solución óptima.

En segundo lugar, los resultados computacionales obtenidos, que creemos son satisfactorios. Aunque los métodos exactos para problemas NP-completos, como el DRPP, tienen sus limitaciones (recordemos que el tiempo

de computación crece exponencialmente con el número de componentes de cada problema), algunos de los problemas resueltos óptimamente (ver TABLAS I y II) tienen ya un tamaño significativo: grafos de 76 vértices, 166 arcos y 6 componentes (con 65 arcos no requeridos en el grafo simplificado G'_C) pueden ser resueltos óptimamente en poco más de 200 segundos de CPU.

En las aplicaciones prácticas del DRPP y otros problemas relacionados (ver Sección I), la posibilidad de que nuestro procedimiento pueda ser empleado para determinar soluciones ϵ -óptimas, permite suponer que el mismo puede ser aplicado con éxito a problemas reales, de dimensiones incluso mayores que las utilizadas para los problemas de test, con unos tiempos de computación razonables.



REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA

- BALAS,E. "Cutting planes from conditional bounds:
a new approach to set covering" Math.
Prog, 12 (1980) 279-312.
- [1] BALAS,E. and CHRISTOFIDES,N. " A restricted Lagran-
gean approach to the Traveling Salesman
Problem " Math. Prog, 21 (1981) 19-46
- BAZARAA,M.S. and JARVIS,J.J. " Linear Programming
and Network Flows" John Wiley, New York,
(1977).
- [2] BELLMAN,R. and COOK,K.L. " The Konigsberg bridges
problem generalized" J. of Math. Anal.
and Applic. ,25 (1969) 1
- [3] BELTRAMI,E. and BODIN,L. "Networks and Vehicle
Routing for Municipal Waste Collection"
Networks,4 (1974) 65-94
- BERGE,C. "The Theory of Graphs and Its Applica-
tions" John Wiley, New York (1962)
- [4] BODIN,L. "A Taxonomic Structure for Vehicle Rou-
ting and Scheduling Problems" Comp. Urb.
Soc., 1 (1975) 11-29
- BONDY,J. and MURTY,U. "Graph Theory with Applica-
tions" MacMillan Press, London (1976)
- [5] BUSACKER,R.G. and GOWEN,P.J. "A procedure for deter-
mining a family of minimal-cost network
flow patterns" O.R. Off., Tech. paper, 15
(1961)

- BUSACKER, R.G. and SAATY, T.L. "Finite graphs and networks" McGraw Hill, New York (1965)
- CHRISTOFIDES, N. "Graph Theory. An Algorithmic approach" Academic Press, New York (1975)
- CHRISTOFIDES, N. "Bounds for the Travelling Salesman Problem" Op. Research, 20 (1972) 1044
- CHRISTOFIDES, N. "The Travelling Salesman Problem" in Con. Optimization, John Wiley (1979)
- CHRISTOFIDES, N. "Worst case analysis of a new heuristic for the Travelling Salesman Problem" Tech. Rep., Carnegie Mellon Univ. (1976)
- CHRISTOFIDES, N. , MINGOZZI, A. and TOTH, P. "The Vehicle Routing Problem" in Con. Optimization, John Wiley (1979)
- [6] CHRISTOFIDES, N. "The optimum traversal of a graph" Omega-The Int. J. of Manag. Sc., 1 (1973)
- [7] CHRISTOFIDES, N. , MINGOZZI, A. and TOTH, P. "Exact Algorithms for the Vehicle Routing Problem, based on spanning tree and shortest path relaxations" Math. Prog., 20 (1981)
- [8] CORBERAN, A. "Circuitos Eulerianos óptimos en grafos no dirigidos: el RPP" Tesis Doctoral, Universidad de Valencia, (1982)
- CORNUEJOLS, G. and NEMHAUSER, G.L. "Tight bounds for the Christofides' Travelling Salesman heuristic" Math. Prog., 14 (1978) 116-121
- [9] EDMONDS, J. "The Chinese postman problem" Op. Research 13, Suppl. 1 (1965) 373

- EDMONDS, J. "Maximum matching and a polyhedron with (0,1) vertices" J.Res.Nat.Bur.Stand. 69B (1965) 125-130
- [10] EDMONDS, J. and JOHNSON, E.L. "Matching, Euler tours and the Chinese postman" Math. Prog., 5 (1973) 88-124
- FORD, L.R. and FULKERSON, D.R. "Flows in networks" Princeton Univ. Press, Princeton (1962)
- [11] FISHER, M. "Lagrangian relaxation methods for solving Integer Programming" Manag. Sc., 27 (1981) 1-18
- GARFINKEL, R. "Branch and Bound methods for Integer Programming" in Comb. Optimization, John Wiley (1979)
- GARFINKEL, R. and NEMHAUSER, G. "Integer Programming" John Wiley, New York (1972)
- [12] GEOFFRION, A. "Lagrangian relaxation for integer programming" Math. Prog. Study, 2 (1974)
- GOFFIN, J.L. "On the convergence rates of subgradient optimization methods" Math. Prog. 13 (1977) 329-347
- [13] GOLDEN, B.L. and WONG, R.T. "Capacitated arc routing problems" Networks, 11 (1981) 305-315
- HAMMER, P.L., JOHNSON, E.L. and KORTE, B.H. "Discrete Optimization I" North Holland (1977)
- HAMMER, P.L., JOHNSON, E.L. and KORTE, B.H. "Discrete Optimization II" North Holland (1977)
- HARARY, F. "Graph Theory" Addison-Wesley (1969)

- [14] HELD,M. and KARP,R. "The Travelling Salesman Problem and minimum spanning trees.I" Op. Research 18 (1970) 1138
- [15] HELD,M. and KARP,R. "The travelling Salesman Problem and minimum spanning trees.II" Math. Prog. 1 (1971) 6-25
- [16] HELD,M.,WOLFE,P. and CROWDER,H.P. "Validation of subgradient optimization" Math Prog.,6 (1974) 62-88
- KLEE,V. "Conbinatorial Optimization: What is the state of the art?" Math. of O.R.,5 (1980)
- [17] KLEIN,M. "A primal method for minimal cost flows with applications to the assignment and transportation problems" Manag. Sc.,14 (1967) 205
- LAWLER,E. "Conbinatorial Optimization: networks and matroids" Holt,Rinehart and Winston (1976)
- [18] LENSTRA,J.K. and RINNOOY KAN,A.H.G. "On General Routing Problems" Networks,6 (1976)
- LOVASZ,L. "Conbinatorial Problems and Exercises" North Holland (1979)
- [19] MEI-KO,K. "Graphic programming using odd or even points" Chinese Math.,1 (1962) 273-277
- MILIOTIS,P. "Integer Programming approach to the Travelling Salesman Problem" Math. Prog. 10 (1976) 367-378
- MINIEKA,E. "Optimization Algorithms for Networks and Graphs" Marcel Dekker, New York (1975)

- [20] MINTY,G.J. "Solving steady-state nonlinear networks of monotone elements" I.R.E.Trans.Circuit Theory CT,8 (1961) 99-104
- [21] ORLOFF,C. "A Fundamental Problem in Vehicle Routing" Networks,4 (1974) 147-162
- PADBERG,M.W. and HONG,S. "On the symmetric Travelling Salesman Problem: a computational study" Math. Prog. Study,12 (1980) 78-107
- [22] PAPADIMITRIOU,C.H. "On the complexity of Edge Traversing" J.A.C.M.,23 (1976) 544-554
- [23] POLJAK,B.T. "A general method of solving extremum problems" Soviet Math. Doklady,8 (1967)
- [24] POLJAK,B.T. "Minimization of unsmooth functionals" USSR Comp.Math. and Math. Phys. (1969)
- SANDI,C. "Subgradient Optimization" in Comb. Optimization, John Wiley, (1979)
- SHAPHIRO,J. "Mathematical Programming: Structures and Algorithms" John Wiley, New York(1979)
- [25] SHAPHIRO,J. "A survey of Lagrangean techniques for discrete optimization" Annals of Discrete Math.,5 (1979) 113-138
- [26].STERN,H. and DROR,M. "Routing electric meter readers" Comp.O.Research,6 (1979) 209-223