TRES NUEVAS CLASES DE ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS

Memoria presentada para
optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas,
por

JOSE MANUEL MAZON RUIZ

MANUEL VALDIVIA UREÑA,Catedrático de Análisis Matemático y Director del Departamento de Teoría de Funciones y Ecuaciones funcionales de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Valencia

CERTIFICO: Que la presente memoria "Tres nuevas clases de espacios localmente convexos",ha sido realizada bajo mi dirección por D.José Manuel Mazón Ruiz y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que conste en cumplimiento de la legislación vigente,presento y apadrino ante la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Valencia la referida tesis,firmando el presente certificado

Valencia 2 de Abril de 1980

Manuel Vald

Fdo.Manuel Valdivia Ureña.

Mi sincero agradecimiento al Prof. Dr.D.Manuel Valdivia Ureña por su constante orientación y estímulo en la elaboración de esta Memoria.

A mis padres

INDICE

Pág

INTRODUCCION

En esta memoria se introducen tres nuevas clases de espacios localmente convexos. Está dividida en tres capítulos, cada uno de los cuales está dedicado al estudio de una de estas clases.

En el primer capítulo introducimos una clase de espacios de tipo casi-tonelado, a los que llamamos C-casi-tonelados. Después de dar dos teoremas de caracterización de estos espacios, los localizamos en el contexto de las clases de espacios de tipo casi-tonelados ya conocidas, quedando:

$$\begin{tikzcd} \text{numerablemente casi-tonelado} \arrow[r] \arrow[d] & \text{C-casi-tonelado} \arrow[d] \\ \omega\text{-casi-tonelado} \arrow[r] & \text{sucesionalmente casi-tonelado} \end{tikzcd}$$

Separamos también los espacios C-casi-tonelados de tres clases de espacios introducidas por NOUREDDINE [22] (*). Acabamos el capítulo viendo las propiedades hereditarias de estos espacios.

En el capítulo segundo estudiamos la clase de los espacios C-casi-tonelados que poseen una sucesión fundamental de acotados. Por su similitud con los espacios (DF) de

(*) Los números entre [ ] remiten a la bibliografia.

GROTHENDIECK,les llamamos casi-(DF).La nueva clase queda localizada de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd}
\text{(DF)-espacios} \arrow[r] \arrow[d] & \text{casi-(DF)} \arrow[d] \\
\text{dual métrico} \arrow[r] & \text{sucesionalmente-(DF)}
\end{tikzcd}$$

Después de separar estos espacios,vemos que algunas de las propiedades importantes de los espacios (DF) no las cumplen estos espacios;por ejemplo,existen espacios casi-(DF) separables que no son casi-tonelados.

Estudiamos después las propiedades hereditarias,deteniendonos especialmente en el estudio de los subespacios de codimensión numerable,donde usando tecnicas del Profesor M.VALDIVIA,mejoramos los resultados obtenidos en este sentido para los espacios C-casi-tonelados.

En el siguiente apartado de este capítulo,caracterizamos los espacios $C_c(X)$ casi-(DF),obteniendo la misma caracterización que obtuvo WARNER en [44] para los espacios (DF),i.e," $C_c(X)$ es casi-(DF) si y solo si,en X cada unión numerable de compactos es un relativamente compacto ".

Demostramos después que si E(T) es un espacio casi-(DF),también lo es su bidual con la topologia natural.Esta cuestión está planteada como problema abierto por NOUREDDINE [33] para una clase de espacios muy próxima a los casi-(DF).Son estos los D_b-espacios.El apartado siguiente está dedicado a separar los D_b-espacios de los casi-(DF). La clase de los D_b-espacios es también introducida por RUESS [29] (él les llama (DF)-generalizados).La importancia de esta clase y,por tanto,de los espacios casi-(DF),reside en que todos los espacios de funciones con topologias estrictas (para este tipo de espacios ver por ejemplo: BUCK [1] y [2] ;SENTILLES [34] ;FREMLIN,GARLING y HAYDON [5]) son de esta clase y en general no son espacios (DF).

En el apartado 6 demostramos que todo espacio casi-(DF) tiene la propiedad (B) de PIETSCH,y como consecuencia demostramos que un espacio casi-(DF) es nuclear si y sólo si su dual fuerte es nuclear.Damos también como consecuencia de la propiedad (B),un teorema de tipo Dvorestki-Roger para los espacios casi-(DF).

Acabamos el capítulo dando algunos resultados relativos a las aplicaciones debilmente compactas entre espacios casi-(DF) y espacios de Fréchet.Para ello nos basamos en resultados dados por VAN DULST [43].

En el último capítulo,usando las redes ultimamente acotadas introducidas por DE VITO en [3] ,definimos la clase de los espacios fuertemente semi-reflexivos.Esta clase resulta ser estrictamente más pequeña que la de los espacios semi-reflexivos.Demostramos que las dos clases coinciden en el caso metrizable.Estudiamos las propiedades hereditarias de estos espacios,obteniendo para la suma directa un teorema de tipo Mackey-Ulam.Acabamos el capítulo obteniendo el espacios bornológica asociado al dual fuerte de un casi-tonelado;y como consecuencia de ello,un resultado de VALDIVIA [42].

NOTACION Y DEFINICIONES

A lo largo de esta memoria los espacios vectoriales que se utilizarán se supondrán definidos sobre el cuerpo K de los números reales o complejos (R o C).Denotaremos mediate el simbolo E(T) al espacio vectorial E dotado de la topologia T localmente convexa y separada.A veces en lugar de espacio localmente convexo,diremos simplemente espacio.Como es usual,escribiremos E' y E^* para referirnos al dual topológico y algebraico,respectivamente.

Usaremos las siguientes notaciones y definiciones:

1.- Dado un subconjunto A de un espacio E(T),denotaremos por ΓA,la envoltura absolutamente convexa de A.La clausura de A en E(T) la denotaremos por $\overline{A}^T$,$\overline{A}^E$ o simplemente $\overline{A}$ cuando no haya confusión.

2.- Si T y T' son dos topologias localmente convexas en un espacio E, $T \prec T'$ significará que T es menos fina que T'.

3.- Sea E(T) un espacio y F un subespacio de E,cuando en el subespacio F consideremos la restricción de la topologia T,lo denotaremos por F(T).Igualmente,en el caso en que F sea cerrado,al espacio cociente E/F,con su topologia cociente lo denotaremos por (E/F)(T).

4.- La envoltura lineal de un conjunto A la denotaremos por LIN{A} .

5.- Dado un subconjunto B absolutamente convexo, cerrado y acotado de un espacio E(T), entenderemos por E_B el espacio normado sobre la envoltura lineal de B, con norma el funcional de Minkowski de B.

6.- Diremos que un espacio E(T) es <u>localmente completo</u> si para cada B absolutamente convexo, cerrado y acotado de E(T), E_B es un espacio de Banach.

7.- Diremos que un espacio localmente convexo E(T) es <u>submetrizable</u> si existe una topología localmente convexa metrizable T' en E que es menos fina que T.

8.- Sea $\langle E,F\rangle$ un par dual, denotaremos por $\sigma(E,F)$, $\mu(E,F)$ y $\beta(E,F)$ las topologias débil, de Mackey y fuerte, respectivamente sobre E.

9.- Cuando la topología de un espacio E(T) coincida con la $\mu(E,E')$, decimos que E(T) es un <u>espacio de Mackey</u>.

10.- A la topología en E' de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos precompactos de un espacio E(T) la denotaremos por $\lambda(E',E)$.

11.- Cuando hablamos del polar de un subconjunto A de un espacio E(T), nos referimos a su polar absoluto, i.e,

$$A^o = \{ f \in E' : |\langle f,x\rangle| \leq 1, \text{para todo } x \in A \} .$$

12.- Una aplicación $f:E \longrightarrow F$ es <u>casi-abierta</u> si la clausura de la imagen de cada entorno de cero en E es un entorno de cero en F.

13.- Si I es un conjunto de índices, y $K_i = K = (R \text{ o } C)$ para cada $i \in I$, denotaremos:

$$\omega(I) = \prod_{i\in I} K_i \quad \text{y} \quad \varphi(I) = \bigoplus_{i\in I} K_i \; .$$

14.- La completación de un espacio localmente convexo E(T) la denotaremos por $\hat{E}(\hat{T})$.

15.- Si E es un espacio normado, a su bola unidad cerrada la denotaremos por U(E).

16.- Usaremos los clásicos espacios de Banach c_0, ℓ^∞ y ℓ^p, $1 \leq p < +\infty$. Para su definición y propiedades ver [15] .

17.- El cardinal de un conjunto A lo representaremos por $|A|$ .Tomaremos $\aleph_0 = |N|$,siendo N el conjunto de los números naturales.

18.- Diremos que un <u>cardinal</u> m es <u>medible</u>, si un conjunto X de cardinal m admite una medida $\{0,1\}$–valuada que no es de tipo trivial, i.e, $\mu(X) = 1$ y $\mu(\{x\}) = 0$ para cada $x \in X$.

Diremos que un <u>cardinal</u> m es <u>fuertemente inaccesible</u> si cumple:

(i) $m > \aleph_0$

(ii) $\sum_{\alpha\in A} m_\alpha < m$ cuando $m_\alpha < m$ y $|A| < m$

(iii) si $n < m$ entonces $2^n < m$.

En lo referente a las envolturas localmente convexas, límites inductivos,límites proyectivos,sumas directas,productos,etc;seguiremos la notación del libro de Köthe [15] . Seguimos también este texto en todo lo referente a las definiciones y propiedades generales de los espacio tonelados,casi-tonelados,bornológicos,semi-reflexivos y Montel.

CAPITULO I

ESPACIOS C-CASI-TONELADOS

1.- DEFINICION Y TEOREMAS DE CARACTERIZACION

(I,1.1) DEFINICION.- Diremos que un espacio localmente convexo $E(T)$ es C-casi-tonelado si para cada sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos T-equicontinuos que fuertemente converja a cero (i.e, dado un W $\beta(E',E)$-entorno de 0 en E', existe un $n_0 \in N$, tal que, $A_n \subset W$ para todo $n \geq n_0$) se tiene que,

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \text{es un T-equicontinuo.}$$

(I,1.2) DEFINICION.- Sea $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de un espacio localmente convexo $E(T)$. Diremos que $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión casi-bornívora si para cada acotado B de $E(T)$ existe un $n_0 \in N$, tal que,

$$B \subset \bigcap_{n \geq n_0} U_n .$$

Vamos a dar una caracterización de los espacios C-casi-tonelados por medio de entornos del origen:

(I,1.3) <u>TEOREMA</u>.- Un espacio localmente convexo $E(T)$ es C-casi-tonelado si y solo si para toda sucesión $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ casi-bornívora en $E(T)$ de entornos de 0 en $E(T)$ absolutamente convexos y cerrados, se tiene que,

$$U = \bigcap_{n\in N} U_n$$

es un T-entorno de 0 en E.

Demostración: Sea $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión casi-bornívora de entornos de 0 en $E(T)$ absolutamente convexos y cerrados. Para cada $n \in N$, $A_n = U_n^o \subset E'$ es un T-equicontinuo. Sea W un $\beta(E',E)$-entorno de 0 absolutamente convexo y $\beta(E',E)$-cerrado, entonces $W^o \subset E$ es un T-acotado, por tanto, existirá un $n_o \in N$:

$$W^o \subset \bigcap_{n\geq n_o} U_n,$$

de aqui que,

$$W = W^{oo} \supset \Big(\bigcap_{n\geq n_o} U_n\Big)^o \supset \bigcup_{n\geq n_o} U_n^o = \bigcup_{n\geq n_o} A_n.$$

Luego la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\beta(E',E)$-converge a cero, con lo cual,

$$A = \bigcup_{n\in N} A_n$$

será un T-equicontinuo. De aqui que,

$$A^o = \Big(\bigcup_{n\in N} A_n\Big)^o = \bigcap_{n\in N} A_n^o = \bigcap_{n\in N} U_n = U$$

es un T-entorno de cero en E.

Supongamos ahora que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de T-equicontinuos que fuertemente converge a cero. Tenemos que demostrar que $A = \bigcup_{n\in N} A_n$ es un T-equicontinuo.

Veamos que la sucesión de T-entornos de 0 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$, tal que $U_n = A_n^o$ para todo $n \in N$, es una sucesión casi-bornívora en

$E(T)$.Sea B un T-acotado en E,entonces $W = B^{o}$ es un $\beta(E',E)$-entorno de cero en E',por tanto,existe un $n_o \in N$ tal que

$$A_n \subset W \quad \text{para todo } n \geqslant n_o,$$

luego

$$B \subset B^{oo} = W^{o} \subset A_n^{o} = U_n \quad \text{para todo } n \geqslant n_o.$$

Por tanto,la sucesión $\{U_n\}$es casi-bornívora,con lo cual:

$$U = \bigcap_{n \in N} U_n$$

es un entorno de cero en $E(T)$.Ahora como:

$$U^{o} = \Big(\bigcap_{n \in N} U_n \Big)^{o} = \overline{\Gamma_{n \in N} U_n^{o}} = \overline{\Gamma_{n \in N} A_n^{oo}} \supset A,$$

tendremos que A será un T-equicontinuo.

C.Q.D.

Usando unas técnicas dadas por RUESS en [28],vamos a dar una caracterización de los espacios C-casi-tonelados por medio de seminormas.Necesitamos la siguiente notación:

Si $E(T)$ es un espacio localmente convexo,denotaremos por C_T el cono de todas las seminormas continuas en $E(T)$,y por E_T el espacio vectorial generado por C_T.La polaridad en el par dual $\langle E,E_T \rangle$ es definida de la siguiente forma:
Para $A \subset E$,definimos su polar en C_T como:

$$A_T^{o} = \{ h \in C_T : \ h(a) \leqslant 1 \quad \forall a \in A \}$$

y su polar en E_T como:

$$A_T^{*} = \{ h \in E_T : \ |h(a)| \leqslant 1 \quad \forall a \in A \}.$$

Para un $D \subset E_T$ definimos su polar en E como:

$${}^{o}D = \{ x \in E : \ |d(x)| \leqslant 1 \quad \forall d \in D \}.$$

En E_T consideraremos la topologia β_E de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos acotados de E(T).

(I,1.4) <u>TEOREMA</u>.- Sea E(T) un espacio localmente convexo.

Son equivalentes:

(i) E(T) es C-casi-tonelado

(ii) Si $\{p_n\}$ es una sucesión de elementos de C_T que es β_E-nula, entonces $p = \sup\{p_n : n \in N\}$ (supremo puntual) es T-continua en E.

Demostración: (i) implica (ii): Sea $p_n \in C_T$ tales que, la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ es β_E-nula, y sea $p = \sup\{p_n : n \in N\}$. Vamos a demostrar que la sucesión de T-entornos de cero $\{U_n\}$ con

$$U_n = \{x \in E : p_n(x) \leq 1\}$$

es casi-bornivora en E(T). Si B es un acotado de E(T), como $\{p_n\}$ es β_E-nula, existirá un $n_o \in N$ tal que

$$p_n \in B_T^o \quad \text{para todo } n \geq n_o,$$

con lo cual:

$$B \subset U_n \text{ para todo } n \geq n_o.$$

Aplicando entonces (i) tenemos que

$$U = \bigcap_{n \in N} U_n$$

es un entorno de cero en E(T). Ahora, como:

$$U = \{x \in E : p(x) \leq 1\}$$

tendremos que p será el funcional de Minkowski U, con lo cual $p \in C_T$.

Veamos ahora que (ii) implica (i): Sea $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión casi-bornívora de entornos de cero en E(T) absolutamente convexos y cerrados. Tenemos que demostrar que

$$U = \bigcap_{n \in N} U_n \text{ es un entorno de } 0 \text{ en } E(T).$$

Para cada $n \in N$, sea p_n el funcional de Minkowski de U_n, entonces $p_n \in C_T$ y $U_n = \{x \in E : p_n(x) \leq 1\}$ para todo $n \in N$. $\{p_n\}$ es β_E-nula. En efecto: sea B un acotado de E(T), entonces como $\{U_n\}$ es casi-bornívora, existirá un $n_o \in N$ tal que

$$B \subset U_n \quad \text{para todo} \quad n \geq n_o,$$

de aqui que

$$p_n \in B_T^o \quad \text{para todo} \quad n \geq n_o.$$

Luego aplicando (ii) tendremos que

$$p := \sup\{p_n : n \in N\} \in C_T,$$

y como

$$U = \{x \in E : p(x) \leq 1\},$$

tendremos que U será un entorno de cero en E(T).

C.Q.D.

2.- RELACION CON LOS DISTINTOS TIPOS DE CASI-TONELACION

En este apartado vamos a localizar la clase de los espacios C-casi-tonelados en el contexto de las clases ya conocidas. Para ello recordemos las siguientes definiciones:

(1) Diremos que un espacio localmente convexo $E(T)$ es numerablemente casi-tonelado si cada $\beta(E',E)$-acotado que es unión numerable de T-equicontinuos es un T-equicontinuo. Este tipo de espacios fué introducida por HUSAIN en [11].

(2) Diremos que un espacio localmente convexo $E(T)$ es ω-casi-tonelado si cada sucesión en E' que es $\beta(E',E)$-acotada es un T-equicontinuo. Este tipo de espacios fué introducido en [17] y [4] ,en este último trabajo se les llama espacios σ-evaluables.

(3) Diremos que un espacio localmente convexo $E(T)$ es sucesionalmente casi-tonelado si cada sucesión de E' $\beta(E',E)$-nula es un T-equicontinuo. Esta clase de espacios fué definida por WEBB en [45].

De las propias definiciones se desprende el siguiente cuadro de implicaciones:

$$\begin{tikzcd}
\text{numerablemente casi-tonelado} \arrow[r] \arrow[d] & \text{C-casi-tonelado} \arrow[d] \\
\omega\text{-casi-tonelado} \arrow[r] & \text{sucesionalmente casi-tonelado}
\end{tikzcd}$$

Luego para separar la nueva clase introducida (los espacios C-casi-tonelados) de las clases (1),(2) y (3),bastará con que la separemos de la clase de los ω-casi-tonelados.Para ello veamos primero el siguiente lema:

(I,2.1) LEMA.- Si E(T) es un espacio casi-completo y tonelado,entonces $E'[\lambda(E',E)]$ es un espacio C-casi-tonelado

Demostración: Como E(T) es casi-completo tenemos que $\lambda(E',E)$ es menos fina que $\mu(E',E)$ (§ 21,6.(1) de [15]),con lo cual:

$$(E'[\lambda(E',E)])' = E.$$

Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de $\lambda(E',E)$-equicontinuos que fuertemente converja a cero.Entonces,cada A_n es un T-precompacto en E y,$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ T-converge a cero.Tenemos que demostrar que

$$A = \bigcup_{n\in N} A_n$$

es un T-precompacto en E.Sea U un T-entorno de cero en E, existirá un $n_0 \in N$ tal que,

$$\bigcup_{n>n_0} A_n \subset U.$$

Ahora,como

$$\bigcup_{n=1}^{n_0} A_n \quad \text{es un T-precompacto,}$$

existirán

$$x_1,\ldots\ldots\ldots,x_p \in \bigcup_{n=1}^{n_0} A_n$$

tales que,

$$\bigcup_{n=1}^{n_0} A_n \subset \bigcup_{i=1}^{p} (x_i + U).$$

Luego si tomamos $x_{p+1} = 0$,tenemos:

$$A = \bigcup_{n\in N} A_n \subset \bigcup_{i=1}^{p+1} (x_i + U)$$

C.Q.D.

(I,2.2) <u>EJEMPLO</u> (Un C-casi-tonelado que no es ω-casi-tonelado)

Por el lema anterior tenemos que $\ell^\infty[\lambda(\ell^\infty,\ell^1)]$ es un espacio C-casi-tonelado.Este espacio no es ω-casi-tonelado. En efecto:como en ℓ^1 los norma compactos y los $\sigma(\ell^1,\ell^\infty)$-compactos son los mismos (§22,4.(3) de [15]),tenemos que

$$\lambda(\ell^\infty, \ell^1) = \mu(\ell^\infty, \ell^1).$$

Sea $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset U(\ell^1)$ una sucesión $\sigma(\ell^1,\ell^\infty)$-densa en $U(\ell^1)$.Si $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ fuera un $\lambda(\ell^\infty, \ell^1)$-equicontinuo,existiria un A absolutamente convexo y $\sigma(\ell^1,\ell^\infty)$-compacto,tal que,

$$\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A,$$

con lo cual:

$$U(\ell^1) \subset A,$$

por tanto,$U(\ell^1)$ seria un $\sigma(\ell^1,\ell^\infty)$-compacto.Absurdo pues $(\ell^1, \| \|_1)$ no es reflexivo.

(I,2.3) <u>EJEMPLO</u> (Un ω-casi-tonelado que no es C-casi-tonelado)

Sea $\{I_n\}$ una sucesión de conjuntos de índices tales que,

$$|I_1| = a_1 \ , \quad |I_n \sim I_{n-1}| = a_n \quad (n \geq 2)$$

de forma que,

$$2^{\aleph_0} < a_1 < a_2 \ \ldots\ldots < a_n < \ldots\ldots$$

Sea

$$I = \bigcup_{n\in N} I_n,$$

y sea E el espacio de Hilbert

$$\ell^2(I) = \{x = (x_i)_{i\in I} : \sum_{i\in I} |x_i|^2 < +\infty\}$$

con la norma:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i\in I} |x_i|^2\right)^{1/2}.$$

Sean $e^j = (\delta_{i,j})_{i\in I}$ siendo:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

y tomemos:

$$A_1 = \{e^j : j \in I_1\}, \quad A_n = \{e^j : j \in I_n \sim I_{n-1}\} \quad (n \quad 2).$$

Entonces:

$$B_n = \overline{\Gamma A_n}^{\|\ \|_2} \subset U(E).$$

Sea $\mathcal{A}$ la familia saturada engendrada por los $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ y todos los subconjuntos de E absolutamente convexos, cerrados, acotados y separables. Consideremos en E' = $\ell^2(I)$ la topología localmente convexa $T_{\mathcal{A}}$ de la convergencia uniforme sobre los elementos de $\mathcal{A}$. Evidentemente, esta topología es compatible con el par dual $\langle E',E\rangle$, ya que al ser E reflexivo, U(E) es un débil compacto y, por tanto, también lo serán los B_n.

Evidentemente, $E'(T_{\mathcal{A}})$ es ω-casi-tonelado, pues si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión $\beta(E,E')$-acotada, $\overline{\Gamma\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}$ es un absolutamente convexo, cerrado, acotado y separable. Veamos por último que $E'(T_{\mathcal{A}})$ no es C-casi-tonelado. Para cada $n \in N$ sea

$$K_n = 1/n B_n,$$

la sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de $T_{\mathcal{A}}$-equicontinuos que $\beta(E,E')$-converge a cero, pues dado un $\varepsilon > 0$, si tomamos $n_o \in N$ tal que $1/n_o < \varepsilon$, tenemos que

$$K_n \subset \varepsilon\, U(E) \quad \text{para todo } n \geqslant n_o.$$

Sin embargo,

$$K = \bigcup_{n\in N} K_n$$

no es un $T_{\mathcal{A}}$ -equicontinuo,pues si lo fuera,existiría un $B\subset E$ absolutamente convexo,acotado y separable,y un B_{n_o} tales que

$$K\subset \overline{\Gamma(B\cup B_{n_o})} = A.$$

Ahora,A es a_{n_o} -separable,ya que,B_{n_o} es a_{n_o}-separable,B es χ_0-separable y $2^{\chi_0} < a_{n_o}$.Sin embargo:

$$\frac{1}{n_o+1}A_{n_o+1} \subset K\subset A,$$

y

$$\left\|\frac{1}{n_o+1}e^j - \frac{1}{n_o+1}e^i\right\|_2 = \frac{\sqrt{2}}{n_o+1} \quad \forall\, i,j\in I_{n_o+1}\sim I_{n_o}.$$

Luego A tendría un subconjunto discreto de cardinal a_{n_o+1} mayor que a_{n_o}.Absurdo.

Vamos a estudiar ahora la relación existente entre los espacios C-casi-tonelados y tres clases de espacios introducidas por NOUREDDINE en [22].Sea E(T) un espacio localmente convexo,NOUREDDINE da las siguientes definiciones:

(4) Se dice que E(T) es un b-espacio si cada subconjunto absolutamente convexo U de E tal que,$U\cap B$ es un T-entorno de cero en B para todo B absolutamente convexo y acotado de E(T),es un T-entorno de cero en E.

(5) Se dice que E(T) es b-tonelado si cada tonel U de E(T) tal que,$U\cap B$ es un T-entorno de cero en B para todo B absolutamente convexo y acotado de E(T),es un T-entorno de cero en E.

(6) Se dice que E(T) es un <u>b'-espacio</u> si toda forma lineal en E continua sobre los acotados de E(T) es continua, i.e,(teniendo en cuenta el teorema de la completación de Grothendieck) si $E'(\beta(E',E))$ es completo.

NOUREDDINE demuestra en [22] que

(7) E(T) es un b-espacio si y solo si es un b'-espacio b-tonelado.

(I,2.4) <u>PROPOSICION</u>.- Todo espacio b-tonelado es un C-casi-tonelado.

Demostración: Sea E(T) un espacio b-tonelado y sea $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión casi-bornívora de entornos de cero en E(T) absolutamente convexos y cerrados.Tenemos que demostrar que

$$U = \bigcap_{n \in N} U_n$$

es un T-entorno de cero en E,o lo que es lo mismo,que si B es un subconjunto absolutamente convexo y T-acotado de E,entonces

$$B \cap U = \bigcap_{n \in N} (B \cap U_n)$$

es un T-entorno de cero en B.En efecto:como $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ es casi-bornivora en E(T),existirá un $n_0 \in N$ tal que

$$B \subset \bigcap_{n > n_0} U_n$$

con lo cual:

$$B \cap U = \bigcap_{n=1}^{n_0} (B \cap U_n)$$

que evidentemente es un T-entorno de cero en B.

C.Q.D.

En el capítulo siguiente separaremos los espacios b-tonelados de los C-casi-tonelados. Vamos a separar ahora los C-casi-tonelados de los b-espacios y de los b'-espacios; teniendo en cuenta (7), bastará con que los separemos totalmente de los b'-espacios:

(I,2.5) EJEMPLO (Un C-casi-tonelado que no es b'-espacio)

Sea E(T) un espacio de Montel no completo (ver por ejemplo KOMURA[14]), entonces $E'(\lambda(E',E))$ es un espacio C-casi-tonelado (ver lema (I,2.1)) y sin embargo no es un b'-espacio, pues su dual fuerte que es E(T) no es completo.

(I,2.6) EJEMPLO (Un b'-espacio que no es C-casi-tonelado)

En el ejemplo (I,2.3) teníamos que si E era el espacio de Hilbert $\ell^2(I)$, para un conjunto particular de indices I, encontramos una topología $T_{\mathcal{A}}$ compatible con el par dual de forma que $E'(T_{\mathcal{A}})$ no era un espacio C-casi-tonelado. Ahora, como $T_{\mathcal{A}}$ es compatible, el dual fuerte de $E'(T_{\mathcal{A}})$ será el espacio de Hilbert E, con lo cual, $E'(T_{\mathcal{A}})$ será un b'-espacio.

3.- PROPIEDADES HEREDITARIAS

(I,3.1) PROPOSICION.- Cada envoltura localmente convexa de espacios C-casi-tonalados es un espacio C-casi-tonelado.

Demostración: (Para la definición de envoltura localmente convexa ver § 22,1. de [15]). Sean $E_i(T_i)$ espacios C-casi-tonelados y $f_i : E_i \longrightarrow E$ aplicaciones lineales (para todo $i \in I$). Consideremos la envoltura localmente convexa

$$E(T) = \sum_{i \in I} f_i(E_i(T_i)).$$

Sea $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión casi-bornívora de entornos de cero en E(T) absolutamente convexos y cerrados, y sea

$$U = \bigcap_{n \in N} U_n.$$

Tenemos que demostrar que U es un T-entorno de cero en E, o lo que es lo mismo, que $f_i^{-1}(U)$ es un T_i-entorno de cero en E_i para cada $i \in I$. Ahora como:

$$f_i^{-1}(U) = f_i^{-1}(\bigcap_{n \in N} U_n) = \bigcap_{n \in N} f_i^{-1}(U_n),$$

las $f_i : E_i(T_i) \longrightarrow E(T)$ son continuas y los espacios $E_i(T_i)$ son C-casi-tonelados, bastará con que demostremos que cada sucesión $\{f_i^{-1}(U_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es casi-bornívora en $E_i(T_i)$. Si B es un acotado de $E_i(T_i)$, $f_i(B)$ es un acotado de E(T), por tanto, existe un $n_o \in N$ tal que

$$f_i(B) \subset U_n \quad \text{para todo } n \geq n_o,$$

de aquí que

$$B \subset f_i^{-1}(f_i(B)) \subset f_i^{-1}(U_n) \quad \text{para todo } n \geq n_o.$$

C.Q.D.

Como una consecuencia inmediata de la proposición anterior, podemos enunciar los siguientes corolarios (ver § 22, 1. de [15]):

(I,3.2) COROLARIO.- Cada cociente por un subespacio cerrado de un espacio C-casi-tonelado es un espacio C-casi-tonelado.

(I,3.3) COROLARIO.- Cada suma directa localmente convexa de espacios C-casi-tonelados es un espacio C-casi-tonelado

(I,3.4) COROLARIO.- El límite inductivo de una familia de espacios C-casi-tonelados es un espacio C-casi-tonelado.

(I,3.5) PROPOSICION.- Sea E(T) un espacio C-casi-tonelado y F(T') un espacio localmente convexo. Si existe una aplicación lineal f de E(T) en F(T') continua y casi-abierta, entonces F(T') es tambien un espacio C-casi-tonelado.

Demostración: Sea $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión casi-bornívora de entornos de cero en F(T') absolutamente convexos y cerrados. Tenemos que demostrar que

$$U = \bigcap_{n\in N} U_n$$

es un entorno de cero en F(T'). $f^{-1}(U_n)$ es un entorno de cero en E(T) absolutamente convexo y cerrado y además la sucesión $\{f^{-1}(U_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es casi-bornívora en E(T) (esto se demuestra igual que en la proposición (I,3.1)). Por tanto,

$$\bigcap_{n\in N} f^{-1}(U_n) = f^{-1}(U)$$

es un T-entorno de cero en E. Ahora, como f es casi-abierta, tendremos que

$$\overline{f(f^{-1}(U))}^{T'} = \overline{U}^{T'} = U$$

es un T'-entorno de cero en F.

C.Q.D.

El corolario (I,3.2) lo podiamos haber obtenido también como una consecuencia inmediata de esta última proposición.

(I,3.6) <u>PROPOSICION</u>.- Si $E(T) = \bigoplus_{i\in I} E_i(T_i)$ es un espacio C-casi-tonelado, entonces cada $E_i(T_i)$ es también C-casi-tonelado.

Demostración: Para cada $i \in I$, sea $\{A_n^i\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de T_i-equicontinuos que $\beta(E_i',E_i)$-converja a cero. Tenemos que demostrar que

$$A^i = \bigcup_{n\in N} A_n^i$$

es un T_i-equicontinuo. Para cada $n \in N$, sea

$$A_n = \left\{ x=(x_i) \in E' = \prod_{i\in I} E_i' \;:\; x_i \in A_n^i \;,\; x_j = 0 \quad \forall j \neq i \right\}.$$

Entonces:

$$p_i(A_n) = A_n^i \quad \text{para todo } n \in N,$$

con lo cual los A_n son T-equicontinuos. Además como:

$$E'(\beta(E',E)) = \prod_{i\in I} E_i'(\beta(E_i',E_i)) \quad (\S\, 22,5.(3), [15]),$$

tendremos que, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\beta(E',E)$-converge a cero. Por tanto,

$$A = \bigcup_{n\in N} A_n$$

será un T-equicontinuo, con lo cual:

$$A \subset \prod_{j \in I} B_j \text{ , siendo } B_j \text{ un } T_j\text{-equicontinuo,}$$

con lo cual $A^i \subset B_i$, por tanto, A^i es un T_i-equicontinuo.

C.Q.D.

(I,3.7) <u>PROPOSICION</u>.- Sea $E(T) = \prod_{i \in I} E_i(T_i)$. Entonces, E(T)

E(T) es C-casi-tonelado si y solo si cada $E_i(T_i)$ es C-casi-tonelado.

Demostración: Supongamos primero que E(T) es C-casi-tonelado. Sea $\{A_n^i\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de T_i-equicontinuos que converja a cero en $E_i'(\beta(E_i',E_i))$ y

$$A^i = \bigcup_{n \in N} A_n^i .$$

Sea $A_n = I_i(A_n^i)$, siendo

$$I_i : E_i' \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} E_i' = E'$$

la inyección canónica. Como

$$E'(\beta(E',E)) = \bigoplus_{i \in I} E_i'(\beta(E_i',E_i)) \quad (\S\, 22,5.(4),[15]),$$

se tiene que la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\beta(E',E)$-converge a cero y, por tanto,

$$A = \bigcup_{n \in N} A_n$$

es un T-equicontinuo, con lo cual (ver $\S\, 22,5.(3),[15]$):

$$A \subset \bigoplus_{p=1}^{K} B_{i_p} ,$$

siendo B_{i_p} un T_{i_p}-equicontinuo. Luego

$$A^i = p_i(A) \subset p_i\Big(\bigoplus_{p=1}^{K} B_{i_p}\Big).$$

Por tanto:

$$A^i = \{0\} \quad \text{o} \quad A^i \subset B_{i_{p_o}} = B_i .$$

Con lo cual, A^i es un T_i-equicontinuo.

Supongamos ahora que cada uno de los factores $E_i(T_i)$ es un espacio C-casi-tonelado.Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de T-equicontinuos que $\beta(E',E)$-converge a cero.Tenemos entonces que

$$A = \bigcup_{n\in N} A_n$$

es un $\beta(E',E)$-acotado,y como:

$$E'(\beta(E',E)) = \bigoplus_{i\in I} E_i'(\beta(E_i',E_i)) \quad (\S\, 22,5.(4),[15]),$$

tendremos:

$$A \subset \bigoplus_{p=1}^{k} E_{i_p}' \quad (\S\, 18,5.(4),[15]).$$

Ahora,como:

$$(\bigoplus_{p=1}^{k} E_{i_p}')(\beta(E',E)) = \bigoplus_{p=1}^{k} E_{i_p}'(\beta(E_{i_p}',E_{i_p}))$$

por ($\S$18,5.(2),[15]).Tendremos que

$$\{p_{i_t}(A_n)\}_{n=1}^{\infty} \quad \beta(E_{i_t}',E_{i_t})\text{-converge a cero en } E_{i_t}', \text{para}$$

t=1,2,.....,k.Con lo cual,

$$B_t = \bigcup_{n\in N} p_{i_t}(A_n)$$

será un T_{i_t}-equicontinuo para t=1,2,....,k;y como:

$$A \subset \bigoplus_{t=1}^{k} B_t ,$$

A será un T-equicontinuo.

C.Q.D.

(I,3.8) <u>PROPOSICION</u>.- Sea F un subespacio denso de E(T).

Si F(T) es C-casi-tonelado, entonces E(T) es C-casi-tonelado.

Demostración: Sea $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión casi-bornívora de entornos de cero en E(T) absolutamente convexos y cerrados, y sea

$$U = \bigcap_{n \in N} U_n .$$

Para cada $n \in N$ sea:

$$V_n = U_n \cap F .$$

Evidentemente $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión casi-bornívora de entornos de cero en F(T) absolutamente convexos y cerrados, con lo cual:

$$V = \bigcap_{n \in N} V_n = U \cap F .$$

es un T-entorno de cero en F. Ahora, como F es denso en E(T), se tiene que $\overline{U} = U$ es un T-entorno de cero en E.

C.Q.D.

Como una consecuencia inmediata de esta última proposición tenemos el siguiente corolario:

(I,3.9) <u>COROLARIO</u>.- La completación y la casi-completación de un espacio C-casi-tonelado es un espacio C-casi-tonelado.

Veamos por último que ocurre con los subespacios de los espacios C-casi-tonelados.

(I,3.10) <u>PROPOSICION</u>.- Sea E(T) un espacio C-casi-tonelado. Si F es un subespacio de codimensión finita de E, entonces F(T) es también un espacio C-casi-tonelado.

Demostración: Evidentemente, será suficiente con demostrarlo en el caso en que F es un hiperplano de E. Puede ocurrir:

1.- F cerrado en E(T) .Entonces existirá un $x \in E \sim F$ tal que

$$F(T) \simeq \left(\frac{E}{LIN\{x\}}\right)(T)$$

por tanto, F(T) será un espacio C-casi-tonelado (ver (I,3.2)).

2.- F denso en E(T).Como $E'(\beta(E',E))$ es localmente completo, ya que todo espacio sucesionalmente casi-tonelado tiene dual fuerte localmente completo (ver RUESS [30]),aplicando el teorema 1 de [41] en el caso en que $\mathcal{B}$ es la familia de todos los acotados de E(T) y G = E;obtenemos:

(a) "En E' = F' los $\beta(E',F)$-acotados y los $\beta(E',E)$-acotados son los mismos".

Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de T-equicontinuos que $\beta(E',F)$-converge a cero.Tenemos que demostrar que

$$A = \bigcup_{n \in N} A_n$$

es un T-equicontinuo.Ahora,como E(T) es C-casi-tonelado, bastará con que demostremos que la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a cero en la topologia $\beta(E',E)$.Supongamos que esto no ocurre,entonces existirá un B acotado de E(T) absolutamente convexo y cerrado tal que,

dado un $k \in N$, existirá un $n_k \in N$: $A_{n_k} \not\subset B^{o}$.

Luego podemos obtener una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ en A que no tiene ninguna subsucesión que $\beta(E',E)$-converja a cero en E'.

Sea D un acotado de E(T) absolutamente convexo y cerrado, y sea $\overline{D \cap F}$ la clausura de $D \cap F$ en E(T).Existirá un $z \in D$ tal que

$$E_{\overline{D \cap F}} \oplus LIN\{z\} = E_D.$$

Aplicando (a), tendremos que $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un $\beta(E',E)$-

acotado y, por tanto, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ será un $\sigma(E',E)$-precompacto. Luego existe una subsucesión $\{x_{k_p}\}_{p=1}^{\infty}$ de $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ que es $\sigma(E',E)$-Cauchy, con lo cual:

(b) $\{\langle x_{k_p}, z\rangle\}_{p=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en K.

Si $T = \overline{\Gamma\{z\}}$, entonces $\overline{D\cap F}+T$ es un entorno de cero en E_D, luego existirá un $\rho\in K$, $\rho\neq 0$ tal que

$$\rho D\subset \overline{D\cap F}+T.$$

Dado un $\varepsilon>0$, como $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ es $\beta(E',F)$-Cauchy, existirá un $p_0\in N$ tal que, para todo $n,m\geqslant p_0$:

$$|\langle x_{k_n}-x_{k_m}, x\rangle|\leqslant \frac{|\rho|\,\varepsilon}{2} \qquad \text{para todo } x\in \overline{D\cap F},$$

y teniendo en cuenta (b):

$$|\langle x_{k_n}-x_{k_m}, z\rangle|\leqslant \frac{|\rho|\,\varepsilon}{2}$$

Ahora, si $y\in D$, $\rho y=y_1+y_2$ con $y_1\in\overline{D\cap F}$, $y_2=\lambda z$ con $|\lambda|\leqslant 1$.

Luego:

$$|\langle x_{k_n}-x_{k_m}, y\rangle| = \frac{1}{|\rho|}|\langle x_{k_n}-x_{k_m}, \rho y\rangle| \leqslant$$

$$\frac{1}{|\rho|}\left(|\langle x_{k_n}-x_{k_m}, y_1\rangle| + |\langle x_{k_n}-x_{k_m}, z\rangle| \right)\leqslant$$

$$\frac{1}{|\rho|}\left(\frac{|\rho|\,\varepsilon}{2} + |\lambda|\frac{|\rho|\,\varepsilon}{2}\right)\leqslant \varepsilon .$$

Por tanto, la sucesión $\{x_{k_p}\}_{p=1}^{\infty}$ es $\beta(E',E)$-Cauchy. Por otra parte, como $\{x_{k_p}\}_{p=1}^{\infty}$ tiene un punto $\sigma(E^*,E)$-adherente, este punto será $\sigma(E^*,F)$-adherente, con lo cual será el 0. Luego $\{x_{k_p}\}_{p=1}^{\infty}$ es $\beta(E',E)$-Cauchy y tiene al 0 como punto $\sigma(E',E)$-adherente, por tanto, $\{x_{k_p}\}_{p=1}^{\infty}$ es $\beta(E',E)$-convergente. Absurdo.

C.Q.D.

(I,3.11) PROPOSICION.- Sea $E(T)$ un espacio C-casi-tonelado y de Mackey. Si F es un subespacio cerrado de $E(T)$ de codimensión numerable y, tal que, para cada acotado B de $E(T)$ F tiene codimensión finita en la envoltura lineal de $F \cup B$. Entonces $F(T)$ es un espacio C-casi-tonelado.

Demostración: Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una co-base de F en E. Denotaremos:

$$E_1 = F, \text{ y } E_n = \mathrm{LIN}\{F \cup \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}\} \text{ para } n \geqslant 2.$$

Sea $\mathcal{B}$ la familia de todos los acotados de $E(T)$, entonces, por las hipótesis de la proposición tendremos que,

dado un $B \in \mathcal{B}$, existe un $n_0 \in N$ tal que $B \subset E_{n_0}$.

Además, $E'(T_{\mathcal{B}}) = E'(\beta(E',E))$ es localmente completo. Por tanto, aplicando el teorema 2 de [19] tendremos que

$$(1) \qquad E(T) = \varinjlim_{n \in N} E_n(T).$$

Sea H la envoltura lineal de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, π la proyección de E en F con núcleo H, y sean π_n las restricciones de π a E_n. Como F es un subespacio cerrado de E_n (para cada $n \in N$) y de codimensión finita, tendremos que las π_n serán continuas, y teniendo en cuenta (1), π será continua. De aquí que, H es el complemento topológico de F y, por tanto, $F(T)$ es topológicamente isomorfo a $(\frac{E}{H})(T)$, con lo cual, aplicando (I,3.2), tendremos que $F(T)$ será un espacio C-casi-tonelado.

C.Q.D.

(I,3.12) NOTA.- No sabemos si en general la propiedad de ser C-casi-tonelado se conserva por los subespacios cerrados de codimensión numerable.En general esta propiedad no es heredada por los subespacios cerrados,ya que, como tado espacio localmente convexo de Hausdorff es un subespacio cerrado de un espacio tonelado (teorema 1.1 de KOMURA [13]),bastará con considerar el ejemplo (I,2.3).

CAPITULO II

ESPACIOS CASI-(DF)

En este capítulo vamos a estudiar la clase de los espacios C-casi-tonelados que tienen una sucesión fundamental de acotados,a los que llamaremos espacios casi-(DF), ya que es una clase más amplia que la de los espacios (DF) introducida por GROTHENDIECK en [8] .

1.- DEFINICION Y CLASIFICACION

(II,1.1) DEFINICION.- Diremos que un espacio localmente convexo E(T) es casi-(DF) si es C-casi-tonelado y tiene una sucesión fundamental de acotados.

Vamos a localizar este nuevo tipo de espacios dentro de los ya conocidos.Para ello recordemos las siguientes definiciones:

(1) GROTHENDIECK en [8] llama espacios (DF) a aquellos espacios numerablemente casi-tonelados que poseen una sucesión fundamental de acotados (para un estudio de estos espacio ver tambien § 29 de [15]).

(2) A los espacios sucesionalmente casi-tonelados que tienen una sucesión fundamental de acotados les llamaremos

aqui <u>sucesionalmente-(DF)</u> .Este tipo de espacios es ya apuntado por GROTHENDIECK en [8] .

(3) PIETSCH en [24] llama espacios <u>dual métrico</u> a aquellos espacios ω-casi-tonelados que tienen una sucesión fundamental de acotados.

De las propias definiciones se deduce, teniendo en cuenta la localización que hemos hecho de los espacios C-casi-tonelados, el siguiente cuadro de implicaciones:

$$\begin{tikzcd}
\text{(DF)-espacio} \arrow[r] \arrow[d] & \text{casi-(DF)} \arrow[d] \\
\text{dual métrico} \arrow[r] & \text{sucesionalmente-(DF)}
\end{tikzcd}$$

Luego para separar la nueva clase introducida (los espacios casi-(DF)) de las clases (1),(2) y (3), bastará con que la separemos de la clase de los dual métricos. Ahora, teniendo en cuenta la clasificación que hemos hecho en el capítulo anterior de los espacios C-casi-tonelados, bastará con que demostremos que los espacios de los ejemplos (I,2.2) y (I,2.3) poseen sucesión fundamental de acotados.

(II,1.2) <u>EJEMPLO</u> (Un dual métrico que no es casi-(DF))

Sea $E'(T_{\mathcal{A}})$ el espacio del ejemplo (I,2.3). Demostramos allí que este espacio era un ω-casi-tonelado que no era C-casi-tonelado. Evidentemente, este espacio tiene una sucesión fundamental de acotados, pues al ser $T_{\mathcal{A}}$ compatible con el par dual $\langle E',E \rangle$, aplicando el teorema de Banach-Mackey (§ 20,11.(7) de [15]), tendremos que si $B_n = nU$, siendo U la bola unidad del espacio de Hilbert $\ell^2(I)$, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión fundamental de acotados de $E'(T_{\mathcal{A}})$.

(II,1.3) EJEMPLO (Un casi-(DF) que no es dual métrico)

En el ejemplo (I,2.2) vimos que el espacio $\ell^\infty(\lambda(\ell^\infty,\ell^1))$ era un espacio C-casi-tonelado que no era ω-casi-tonelado. Veamos que este espacio tiene una sucesión fundamental de acotados: si $B_n = nU(\ell^\infty)$, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión fundamental de $\beta(\ell^\infty,\ell^1)$-acotados (§ 29,1.(6) de [15]). Ahora, como $\lambda(\ell^\infty,\ell^1)$ es compatible con el par dual $\langle \ell^\infty,\ell^1\rangle$, teniendo en cuenta el teorema de Banach-Mackey (§ 20,11.(8) de [15]), tendremos que $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión fundamental de $\lambda(\ell^\infty,\ell^1)$-acotados.

La siguiente proposición nos proporciona una clase bastante amplia de espacios casi-(DF) que no son (DF).

(II,1.4) PROPOSICION.- Si E(T) es un espacio de Fréchet no reflexivo, entonces $E'(\lambda(E',E))$ es un espacio casi-(DF) que no es (DF).

Demostración: Por el lema (I,2.1) tenemos que $E'(\lambda(E',E))$ es un espacio C-casi-tonelado. Como $E'(\beta(E',E))$ tiene una sucesión fundamental de acotados (§ 29,1.(6) de [15]) y $\lambda(E',E)$ es compatible con el par dual $\langle E',E\rangle$ (§ 21,6.(1) de [15]), aplicando el teorema de Banach-Mackey tendremos que $E'(\lambda(E',E))$ tiene una sucesión fundamental de acotados. Luego $E'(\lambda(E',E))$ es un espacio casi-(DF). Sin embargo, $E'(\lambda(E',E))$ no es un espacio (DF) pues VALDIVIA demuestra en [36]:

"Si E(T) es un espacio metrizable y tonelado, entonces $E'(\lambda(E',E))$ es (DF) si y sólo si E(T) es un Fréchet-Montel".

C.Q.D.

(II,1.5) NOTA.- En el capítulo anterior vimos que todo espacio sucesionalmente casi-tonelado tenia dual fuerte localmente completo,por tanto,tendremos que si E(T) es un espacio sucesionalmente-(DF),entonces $E'(\beta(E',E))$ es un espacio de Fréchet.

Vamos a ver ahora que algunas de las propiedades importantes de los espacios (DF) no las cumplen los espacios casi-(DF):

(II,1.6) EJEMPLO.- GROTHENDIECK en [8] (ver tambien § 29,3.(12), [15]) demuestra que todo espacio (DF) separable es casi-tonelado.Este resultado es generalizado por VALDIVIA en [36] dando el siguiente resultado:

(a):"Si E(T) es un espacio (DF) que tiene una sucesión de compactos cuya unión es total en E,entonces E(T) es casi-tonelado".

Vamos a demostrar con un contraejemplo que este resultado no se cumple para los espacios casi-(DF).En el ejemplo (II,1.3) hemos visto que el espacio $\ell^\infty(\lambda(\ell^\infty,\ell^1))$era un espacio casi-(DF) que no era dual métrico;luego este espacio no será casi-tonelado.Veamos que tiene una sucesión de compactos cuya unión es total:como en ℓ^1 los normacompactos y los $\sigma(\ell^1,\ell^\infty)$-compactos son los mismos (§22, 4.(2), [15]),tendremos que en ℓ^∞coinciden las topologias $\lambda(\ell^\infty,\ell^1)$ y $\mu(\ell^\infty,\ell^1)$.Además como $\ell^\infty(\mu(\ell^\infty,\ell^1))$ es semireflexivo(ya que en ℓ^1 coinciden la $\mu(\ell^1,\ell^\infty)$ y la $\beta(\ell^1,\ell^\infty)$)tendremos que cada acotado de $\ell^\infty(\mu(\ell^\infty,\ell^1))$ es un $\sigma(\ell^\infty,\ell^1)$-relativamente compacto.Tenemos por tanto, que $U(\ell^\infty)$ es un $\sigma(\ell^\infty,\ell^1)$-relativamente compacto,luego $U(\ell^\infty)$ es un $\mu(\ell^1,\ell^\infty)$-equicontinuo,con lo cual en $U(\ell^\infty)$

coinciden las topologias $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$ y $\lambda(\ell^\infty, \ell^1)=\mu(\ell^\infty, \ell^1)$. De aqui que los conjuntos

$$A_n = \overline{nU(\ell^\infty)}^{\sigma(\ell^\infty, \ell^1)}$$

sean $\mu(\ell^\infty, \ell^1)$-compactos.Además:

$$\ell^\infty = \bigcup_{n\in N} A_n .$$

(II,1.7) EJEMPLO.- Otra de las condiciones para la casi-tonelación de un espacio (DF) dada por GROTHENDIECK en [8] (ver tambien §29,3.(12),[15]) es la siguiente:

"Todo espacio (DF) en el cual todo acotado es metrizable es casi-tonelado".

Vamos a ver con un ejemplo que esta propiedad no la tienen los espacios casi-(DF).Sea E(T) el espacio de Banach c_o,por la proposición (II,1.4) sabemos que

$$E'(\lambda(E',E)) = \ell^1(\lambda(\ell^1,c_o))$$

es un espacio casi-(DF) que no es (DF).Luego bastará con que demostremos que los $\lambda(\ell^1,c_o)$-acotados son $\lambda(\ell^1,c_o)$-metrizables.En efecto:sea B un $\lambda(\ell^1,c_o)$-acotado,entonces como $\ell^1(\lambda(\ell^1,c_o))$ es semi-reflexivo,B será $\sigma(\ell^1,c_o)$-relativamente compacto y,por tanto,B es un T-equicontinuo. Luego aplicando (§21,6.(2),[15])tendremos que en B coinciden las topologias $\sigma(\ell^1,c_o)$ y $\lambda(\ell^1,c_o)$;con lo cual B será $\lambda(\ell^1,c_o)$-metrizable,pues B es $\sigma(\ell^1,c_o)$-metrizable (ver §21,3.(4) de [15]).

(II,1.8) EJEMPLO.- DE VITO en [3]da las siguientes definiciones:

(1) Sea $E(T)$ un espacio localmente convexo y sea $\mathcal{U}$ la familia de los $\beta(E',E)$-entornos de cero en E'. Una red

$$\{u_i : i \in I, \geqslant\}$$

de puntos de E' es <u>ultimamente acotada</u> si dado un $U \in \mathcal{U}$ existe un $\lambda \in K$ y un $i_0 \in I$ tales que

$$u_i \in \lambda U \quad \text{para todo } i \geqslant i_0.$$

(2) Un espacio localmente convexo $E(T)$ es un <u>ab-espacio</u> si es un espacio de Mackey y en E' cada red ultimamente acotada y $\sigma(E',E)$-Cauchy es $\sigma(E',E)$-convergente.

Tambien prueba que

(3) "bornologico $\longrightarrow$ ab-espacio $\longrightarrow$ casi-tonelado".

VALDIVIA en [40] da los siguientes resultados:

(4) Cada espacio (DF) casi-tonelado es un ab-espacio

(5) Sea $E(T)$ un espacio (DF). Si existe en E una sucesión de $\sigma(E,E')$-compactos cuya unión es densa en $E(T)$, entonces $E(\mu(E,E'))$ es un ab-espacio.

Como todo espacio casi-(DF) que sea casi-tonelado es un (DF), (4) se podrá enunciar cambiando (DF) por casi-(DF). Vamos a ver con un ejemplo que, sin embargo, en (5) no se puede cambiar (DF) por casi-(DF): Sea $E(T)$ el espacio $\ell^\infty(\mu(\ell^\infty, \ell^1))$. En el ejemplo (II,1.3) vimos que este espacio era un casi-(DF) que no era casi-tonelado, con lo cual no será un ab-espacio (por (3)), y ademas, si

$$A_n = \overline{nU(\ell^\infty)}^{\sigma(\ell^\infty, \ell^1)},$$

cada A_n es un $\sigma(E,E')$-compacto y

$$E = \bigcup_{n \in N} A_n.$$

2.- PROPIEDADES HEREDITARIAS

RUESS en [29] enuncia sin demostrar,ya que su demostración es análoga a la dada por KOTHE en §29,5.(1) y §29,5.(2) de[15]para los espacios (DF),la siguiente proposición:

(II,2.1) PROPOSICION.- (a) Si E(T) es un espacio sucesionalmente-(DF) y H es un subespacio cerrado de E(T). Entonces en $H^{\perp} = (\frac{E}{H})'$ coinciden las toplogias $\beta(E',E)$ y $\beta(H^{\perp},E/H)$.

(b) Si H es un subespacio vectorial de E(T) y H(T) es sucesionalmente-(DF),entonces el dual fuerte de H(T) es topológicamente isomorfo a

$$\frac{E'(\beta(E',E))}{H^{\perp}} .$$

Como consecuecia de esta proposición podemos enunciar los tres siguientes corolarios:

(II,2.2) COROLARIO.- Si E(T) es un espacio casi-(DF) y H es un subespacio cerrado de E(T),entonces (E/H)(T) es tambien casi-(DF).

Demostración: De la parte (a) de la proposición anterior se deduce que cada acotado de (E/H)(T) está contenido en la clausura de la imagen canónica de un acotado de E(T), por tanto,al tener E(T) una sucesión fundamental de acotados,(E/H)(T) tambien la tendrá.Y como el cociente por un subespacio cerrado de un espacio C-casi-tonelado es C-casi-tonelado (corolario (I,3.2)),tendremos que (E/H)(T) es un espacio casi-(DF).

C.Q.D.

(II,2.3) <u>COROLARIO</u>.- Sea E(T) un espacio localmente convexo.Se tiene:

(a) Si E(T) es casi-(DF),entonces:

E(T) es completo si y solo si es casi-completo

(b) La completación de un espacio casi-(DF) es tambien un casi-(DF).

(c) Todo espacio casi-(DF) semi-reflexivo es completo.

Demostración: (a):Supongamos que E(T) es un espacio casi-(DF) y casi-completo;aplicando la proposición (II,2.1) a E y $\hat{E}$,tendremos que en E' coinciden $\beta(E',E)$ y $\beta(E',\hat{E})$.Luego cada acotado de $\hat{E}(\hat{T})$ es la clausura en $\hat{E}(\hat{T})$ de un acotado de E(T),con lo cual $E = \hat{E}$.

(b):Supongamos que E(T) es un espacio casi-(DF).Si $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión fundamental de acotados de E(T),por lo visto anteriormente, $\{\overline{B_n}^{\hat{T}}\}_{n=1}^{\infty}$ será una sucesión fundamental de acotados de E(T),y como la completación de un espacio C-casi-tonelado es C-casi-tonelado (corolario (I,3.9)), tendremos que $\hat{E}(\hat{T})$ es casi-(DF).

(c):Es una consecuencia inmediata de (a),ya que,cada espacio semi-reflexivo es casi-completo (§23,3.(2),[15]).

C.Q.D.

(II,2.4) <u>COROLARIO</u>.- Si E(T) es sucesionalmente-(DF),entonces:

E(T) es casi-tonelado si y solo si $\hat{E}(\hat{T})$ es tonelado.

Demostración: Teniendo en cuenta § 27,1.(2) de [15] ,bastará con demostrar que la condición es necesaria.En efecto:

aplicando la parte (b) de la proposición (II,2.1) a E y $\hat{E}$, tendremos que en E' coinciden las topologias $\beta(E',E)$ y $\beta(E',\hat{E})$. Entonces como cada acotado de $E'(\beta(E',\hat{E}))$ es un T-equicontinuo (al ser $\hat{E}(\hat{T})$ tonelado), E(T) será casi-tonelado.

C.Q.D.

(II,2.5) PROPOSICION.- Sean $E_n(T_n)$ espacios casi-(DF), y sea $E(T) = \bigoplus_{n\in N} E_n(T_n)$ la suma directa localmente convexa de la sucesión $\{E_n(T_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces E(T) es casi-(DF).

Demostración: Como la suma directa localmente convexa de una familia cualquiera de espacios C-casi-tonelados es un espacio C-casi-tonelado (corolario (I,3.3)), bastará con que veamos que E(T) tiene una sucesión fundamental de acotados. Ahora, si para cada $n \in N$, $\{B_i^n\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión fundamental de acotados de $E_n(T_n)$, como cada acotado de E(T) está contenido en un conjuto de la forma $\bigoplus_{i=1}^{n} B_i$, con B_i un acotado de $E_i(T_i)$ (§ 18,5.(4),[15]); tendremos que los conjuntos de la forma

$$\bigoplus_{n=1}^{K} B_{i_n}^n$$

variando k en N, e i_n en N, forman una sucesión fundamental de acotados de E(T).

C.Q.D.

(II,2.6) COROLARIO.- La envoltura localmente convexa

$$E(T) = \sum_{n\in N} f_n(E_n(T_n))$$

de una sucesión $\{E_n(T_n)\}_{n=1}^{\infty}$ de espacios casi-(DF) es un espacio casi-(DF). Además cada subconjunto acotado de $E(T)$ está contenido en la envoltura absolutamente convexa y cerrada de una cantidad finita de $f_n(B_n)$, siendo B_n un acotado de $E_n(T_n)$. El dual fuerete de $E(T)$ es el núcleo localmente convexo de los espacios $f_n^{(-1)}(E_n'(\beta(E_n', E_n))$.

Demostración: Puesto que $E(T)$ es topológicamente isomorfo a un cociente de la suma directa $\bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n(T_n)$ (§ 19,1.(3), [15]), la primera afirmación se sigue de (II,2.2) y (II,2.5). Igualmente se sigue de (II,2.1), que cada acotado de $E(T)$ está contenido en la clausura de la imagen canónica de un acotado de $\bigoplus_{n\in N} E_n(T_n)$; y como los acotados de la suma directa están contenidos en sumas directas finitas de acotados, tendremos que cada acotado de $E(T)$ estará contenido en un conjunto de la forma

$$\overline{\Gamma_{i=1}^{n} f_i(B_i)}\quad , \text{ con } B_i \text{ acotado de } E_i(T_i).$$

De esto último y de (§ 22,7.(5), [15]), se sigue la última afirmación del corolario.

C.Q.D.

En particular tendremos que el límite inductivo de una sucesión de espacios casi-(DF) es un espacio casi-(DF).

Vamos a ver por último, que ocurre con los subespacios de los espacios casi-(DF):

En el capítulo anterior hemos demostrado que todo subespacio de codimensión finita de un espacio C-casi-tonelado es C-casi-tonelado. Por tanto, como las sucesiones fundamentales de acotados se heredan por subespacios, tendremos que todo subespacio de codimensión finita de un casi-(DF) es un casi-(DF). Vamos a dar una demostración directa de este resultado, basada en el siguiente resultado dado por VALDIVIA en [39]:

(a):" Sea F un hiperplano de E. Sea $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de E que satisfacen:

I.- Si $B\in\mathcal{B}$, entonces B es absolutamente convexo, cerrado y acotado en E.

II.- Si B_1 y B_2 son elementos de $\mathcal{B}$, existe un $B_3\in\mathcal{B}$ tal que $B_1\cup B_2\subset B_3$.

III.- Si $B\in\mathcal{B}$, entonces $\lambda B\in\mathcal{B}$ para todo $\lambda\in K, \lambda\neq 0$.

Entonces, si existe un $M\in\mathcal{B}$ tal que $M\cap F$ no es cerrado, se tiene que,

dado un $P\in\mathcal{B}$, existe un $Q\in\mathcal{B}$ tal que,

$$P\subset\overline{Q\cap F}\ ".$$

(II,2.7) <u>PROPOSICION</u>.- Si E(T) es un espacio casi-(DF) y F es un subespacio de codimensión finita de E, entonces F(T) es tambien casi-(DF).

Demostración: Evidentemente bastará con considerar el caso en que F es un hiperplano de E. Puede ocurrir:

1.- F cerrado en E(T). Entonçes, si $x\in E\sim F$, se tiene que F(T) es topológicamente isomorfo a

$$\left(\frac{E}{LIN\{x\}}\right)(T),$$

por tanto, aplicando (II,2.2), tendremos que F(T) es casi-(DF).

2.- F denso en E(T). Como $E'(\beta(E',E))$ es completo y F es un hiperplano denso de E(T), aplicado el teorema de Pták-Grothendieck (§ 21,9.(6),[15]), tendremos que existirá un M absolutamente convexo, cerrado y acotado de E(T) tal que, $M\cap F$ no es cerrado. Por tanto, aplicando (a), tomando como la familia de todos los absolutamente convexos, cerrados y acotados de $E(T)$, tendremos:

(1) dado $B \in \mathcal{B}$, existe un $B_1 \in \mathcal{B}_1 = \{ B \cap F \ : \ B \in \mathcal{B} \}$, tal que $B \subset \overline{B_1}$.

Sea $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión casi-bornívora de entornos de cero en $F(T)$ absolutamente convexos y cerrados. Tenemos que demostrar que

$$U = \bigcap_{n \in N} U_n$$

es un entorno de cero en $F(T)$. Consideremos la sucesión $\{\overline{U_n}\}_{n=1}^{\infty}$ de T-entornos de cero en E. Si B es un acotado de $E(T)$, entonces por (1), existirá un B_1 acotado de $F(T)$ tal que, $B \subset \overline{B_1}$. Ahora como $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ es casi-bornívora en $F(T)$, existirá un $n_o \in N$ tal que,

$$B_1 \subset U_n \quad \text{para todo} \quad n \geq n_o,$$

luego

$$B \subset \overline{B_1} \subset \overline{U_n} \quad \text{para todo } n \geq n_o.$$

Por tanto, al ser $E(T)$ casi-(DF), tendremos que

$$V = \bigcap_{n \in N} \overline{U_n}$$

es un T-entorno de cero en E. Ahora:

$$V \cap F = \bigcap_{n \in N} (\overline{U_n} \cap F) = \bigcap_{n \in N} U_n = U,$$

con lo cual U será un T-entorno de cero en F.

C.Q.D.

(II,2.8) PROPOSICION.- Sea $E(T)$ un espacio casi-(DF) de Mackey. Sea F un subespacio cerrado de $E(T)$ con la propiedad de que para cada acotado B de $E(T)$

F tiene codimensión finita en $LIN\{F \cup B\}$.Entonces F(T) es casi-(DF).

Demostración:Como E(T) tiene una sucesión fundamental de acotados,la codimensión de F en E será a lo sumo numerable. Por tanto,esta proposición será una consecuencia inmediata de la proposición (I,3.11).

C.Q.D.

El siguiente lema es una generalización del lema 1 de VALDIVIA [39] :

(II,2.9) LEMA.- Sea E(T) un espacio localmente convexo, $\mathcal{B}$ una familia que satisface las condiciones I, II y III de (a),tal que $\bigcup\{B:\ B\in\mathcal{B}\} = E$;y sea F un subespacio denso de E(T) de codimesión finita.Si $E'(T_{\mathcal{B}})$ es completo,entonces:

si $P\in\mathcal{B}$,existe un $Q\in\mathcal{B}$ tal que $P\subset \overline{Q\cap F}^{E}$.

Demostración: Sea $P\in\mathcal{B}$,y sea L el subespacio de E_P generado por la clausira en E_P de $P\cap F$.Tenemos entomces que L es un subespacio cerrado de E_P de codimensión finita.

Como F es denso en E(T) y de codimensión finita;y E' es $T_{\mathcal{B}}$ -completo,aplicando el teorema 1 de [39],tendremos que existe un $B_1\in\mathcal{B}$ tal que $B_1\cap F$ no es cerrado en E(T), con lo cual:

existe $y_1\in\overline{B_1\cap F}^{E}$ tal que $y_1\notin F$.

Sea $F_1 = LIN\{F\cup\{y_1\}\}$,entonces aplicado el razonamiento anterior tendremos que,

existe $A_1\in\mathcal{B}$ tal que $\overline{A_1\cap F_1}^{E} \neq A_1\cap F_1$,

con lo cual:

existe $y_2\in\overline{A_1\cap F_1}^{E}$ tal que $y_2\notin F_1$.

Ahora, aplicando el teorema 2 de [39], tendremos que si

$$\mathcal{B}_1 = \{B \cap F_1 \ : \ B \in \mathcal{B}\},$$

F_1' es $T_{\mathcal{B}_1}$-completo. Luego aplicando el teorema de la completación de Pták-Grothendieck:

existe un $M \in \mathcal{B}_1$: $M \cap F$ no es cerrado en $F_1(T)$,

de aqui, que aplicando el lema 1 de [39], tengamos que

dado un $A \in \mathcal{B}_1$, existe un $Q \in \mathcal{B}_1$: $A \subset \overline{Q \cap F}^{F_1}$.

Por tanto, existe un $B_2 \in \mathcal{B}_1$ tal que,

$$A_1 \cap F_1 \subset \overline{B_2 \cap F}^{F_1} \subset \overline{B_2 \cap F}^{E},$$

luego

$$\overline{A_1 \cap F_1}^{E} \subset \overline{B_2 \cap F}^{E},$$

con lo cual

$$y_2 \in \overline{B_2 \cap F}^{E} \quad \text{e} \quad y_2 \notin F_1.$$

Continuando de esta forma, si n es la codimesión de F en E, encontraremos:

$$B_j \in \mathcal{B} \quad \text{e} \quad y_j \in \overline{B_j \cap F}^{E}, \ j=1,2,\ldots\ldots,n\ ,$$

y de forma que, $\{y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n\}$ es una cobase de F en E. Sea $A \in \mathcal{B}$ tal que,

$$\bigcup_{j=1}^{n} B_j \subset A.$$

Y sea $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ una cobase de L en E_p. Entonces si H es la envoltura absolutamente convexa de $\{y_1, \ldots\ldots, y_m\}$ tendremos (al ser E_p la suma directa topológica de L y $\mathrm{LIN}\{y_1, \ldots\ldots, y_m\}$) que,

$(\overline{P\cap F}^{E_P}) + H$ será un entorno de cero en E_P, luego existe un $\lambda\in K$, $\lambda>0$, tal que,

$$P \subset \lambda(\ (\overline{P\cap F})^{E_P}+H) \subset \lambda(\ (\overline{P\cap F})^{E}+H\ ).$$

Por otra parte, $H\subset\overline{A\cap F}^{E}$. Sea $Q\in\mathcal{B}$ tal que,

$$2\lambda(A\cup P)\subset Q.$$

Entonces:

$$\overline{Q\cap F} = 1/2\ \overline{Q\cap F}+1/2\ \overline{Q\cap F} \supset \lambda\overline{(A\cup P)\cap F}+\lambda\ \overline{(A\cup P)\cap F} \supset$$

$$\supset \lambda\ \overline{(P\cap F)} + \lambda\overline{(A\cap F)} \supset \lambda\ \overline{(P\cap F)} + \lambda H =$$

$$= \lambda(\ \overline{(P\cap F)} + H\ ) \supset P.$$

C.Q.D.

(II,2.10) PROPOSICION.- Sea E(T) un espacio casi-(DF) con la propiedad de que para cada B absolutamente convexo, cerrado y acotado se tiene que E_B es tonelado. Entonces, si F es un subespacio denso de E(T) de codimensión numerable, se tiene que, F(T) es casi-(DF).

Demostración: VALDIVIA en la demostración del teorema 6 de [39] da el siguiente resultado:

(b):" En el espacio E(T) sea $\mathcal{B}$ una familia que cumpla las condiciones I, II y III de (a), $\bigcup\{B:\ B\in\mathcal{B}\}= E$, y tal que E_B sea tonelado para todo $B\in\mathcal{B}$. Si F es un subespacio denso de E(T) de codimensión numerable y E' es $T_{\mathcal{B}}$-completo, entonces:

dado $P\in\mathcal{B}$, existe un $Q\in\mathcal{B}$ tal que $P\subset\overline{Q\cap F}^{E}$ ".

Sea $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión casi-bornívora de entornos de cero en $F(T)$ absolutamente convexos y cerrados. Bastará con que demostremos que la sucesión $\{\overline{U_n}\}_{n=1}^{\infty}$ es cai-bornívora en $E(T)$, pues en tal caso,

$$W = \bigcap_{n\in N} \overline{U_n}$$

será un T-entorno de cero en E, con lo cual:

$$W \cap F = \bigcap_{n\in N} (\overline{U_n} \cap F) = \bigcap_{n\in N} U_n$$

será un T-entorno de cero en F.

Sea $\mathcal{B}$ la familia de todos los acotados, absolutamente convexos y cerrados de $E(T)$, y sea $B \in \mathcal{B}$; entonces aplicando (b) tendremos que exisrirá un $B_1 \in \mathcal{B}$ tal que,

$$B \subset \overline{B_1 \cap F}.$$

Ahora, como $B_1 \cap F$ es un acotado de $F(T)$, existirá un $n_0 \in N$, tal que

$$B_1 \cap F \subset \bigcap_{n \geq n_0} U_n,$$

con lo cual:

$$B \subset \overline{B_1 \cap F} \subset \bigcap_{n\geq n_0} \overline{U_n}.$$

C.Q.D.

(II,2.11) <u>COROLARIO</u>.- Sea $E(T)$ un espacio casi-(DF) con la propiedad de que para cada B absolutamente convexo, cerrado y acotado de $E(T)$, E_B es tonelado. Si F es un subespacio denso de $E(T)$ tal que, para todo acotado B de $E(T)$ F tiene codimensión finita en $LIN\{F \cup B\}$. Entonces $F(T)$ es casi-(DF).

Demostración: Es una consecuencia inmediata de la proposición anterior, pues al tener $E(T)$ una sucesión fundamental de acotados,la codimesión de F será a lo sumo numerable.

C.Q.D.

Este corolario se puede demostrar tambien como una consecuencia del lema (II,2.9) de la siguiente forma:

Podemos suponer que F tiene codimesión infinita numerable.Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una cobase de F en E,y tomemos:

$$E_1 = F \ , \quad E_n = \text{LIN}\{F \cup \{x_1,\ldots\ldots,x_{n-1}\}\} \text{ para todo } n \geq 2.$$

Sea $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión casi-bornívora de entornos de cero en F(T) absolutamente convexos y cerrados.Igual que en la proposición anterior,bastará con que demostremos que la sucesión $\{\overline{U_n}\}_{n=1}^{\infty}$ es casi-bornívora en E(T).En efecto:sea B un acotado de E(T),existe un $n_o \in N$ tal que $B \subset E_{n_o}$.Por el teorema 6 de [39],E'_{n_o} es $\beta(E'_{n_o}, E_{n_o})$-completo,ahora,como F es denso en $E_{n_o}(T)$ y tiene codimensión finita en este espacio,si aplicamos el lema (II,2.9),existirá un $B_1 \subset E_{n_o}$ T-acotado,tal que,

$$B \subset \overline{B_1 \cap F}^{E_{n_o}} \subset \overline{B_1 \cap F}^{E}.$$

Entonces,como $B_1 \cap F$ es un acotado de F(T),existirá un $n_1 \in N$, tal que,

$$B_1 \cap F \subset U_n \quad \text{para todo } n \geq n_1,$$

con lo cual:

$$B \subset \overline{B_1 \cap F} \subset \overline{U_n} \quad \text{para todo } n \geq n_1.$$

C.Q.D.

(II,2.12) <u>COROLARIO</u>.- Sea E(T) un espacio casi-(DF) de Mackey con la propiedad de que E_B es tonelado para todo B absolutamente convexo,cerrado y acotado.Si F es un subespacio de E,tal que,F tiene codimensión finita en LIN$\{F \cup B\}$ para todo B acotado de E(T). Entonces F(T) es un espacio casi-(DF).

Demostración: Sea $G = \overline{F}^{E}$. Si G es de codimesión finita en E, aplicado la proposición (II,2.7), G(T) será un espacio casi-(DF). Y si G es de codimensión infinita numerable, aplicando la proposición (II,2.8), G(T) será un espacio casi-(DF). Luego en cualquiera de los casos G(T) es un espacio casi-(DF). Ahora, como F tiene codimesión numerable en G y es denso en G(T), aplicando el corolario (II,2.11), F(T) será un espacio casi-(DF).

C.Q.D.

(II,2.13) <u>PROPOSICION</u>.- Sea E(T) un espacio de Mackey casi-(DF) y localmente completo. Si F es un subespacio de codimensión numerable de E, entonces F(T) es casi-(DF).

Demostración: Sea T^x la topologia bornológica asociada a T, i.e,

$$E(T^x) = \varinjlim_{B \in \mathcal{B}} E_B \quad ,$$

siendo $\mathcal{B}$ la familia de todos los absolutamente convexos, cerrados y acotados de E(T). Como E(T) es un espacio localmente completo, E_B es un espacio de Banach para todo $B \in \mathcal{B}$ y, por tanto, $E(T^x)$ es tonelado (en realidad es ultrabornológico).

Sea $E_1 = \overline{F}^{T^x}$. Vamos a demostrar que $E_1(T)$ es casi-(DF). Si E_1 tiene codimensión finita en E, entonces aplicando la proposición (II,2.7), $E_1(T)$ será casi-(DF). Supongamos que E_1 tiene codimensión infinita numerable en E, y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ cobase de E_1 en E. Tomemos:

$$E_n = \mathrm{LIN}\{E_1 \cup \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}\} \qquad (n \geq 2).$$

Aplicando el corolario 1.5 de [37], tendremos que,

$$E(T^x) = \varinjlim_{n \in N} E_n(T^x) \qquad \text{(estricto)}$$

Puesto que E_1 tiene codimensión finita en E_n, y E_1 es cerrado en $E(T^x)$, E_n será cerrado en $E(T^x)$ para todo $n \in N$, luego aplicando (§ 19,4.(4), [15]) tendremos que,

dado un $B \in \mathcal{B}$ existe un $n_o \in N$ tal que $B \subset E_{n_o}$.

Por tanto, $E_1(T)$ satisface las condiciones del corolario (II,2.12), de aqui que, $E_1(T)$ sea un espacio casi-(DF).

Si F tiene codimensión finita en E_1, entonces aplicando la proposición (II,2.7), F(T) será un espacio casi-(DF). Supongamos pues que F tiene codimensión infinita numerable en E_1. Sea $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión casi-bornívora de entornos de cero en F(T) absolutamente convexos y cerrados. Tenemos que demostrar que

$$U = \bigcap_{n \in N} U_n$$

es un entorno de cero en F(T). Veamos que $E_1(T)$ cumple las hipótesis de (b)(proposición (II,2.10)). En efecto:

1.- E_1' es fuertemente completo (al ser $E_1(T)$ un espacio casi-(DF))

2.- F es denso en $E_1(T)$ (al ser T menos fina que T^x)

3.- Si B es un absolutamente convexo, cerrado y acotado de $E_1(T)$, entonces $(E_1)_B$ es tonelado. En efecto: por las hipótesis de la proposición, E_B es tonelado. Ahora, como $(E_1)_B$ tiene codimensión numerable en E_B y, evidentemente, la topologia de $(E_1)_B$ es la restricción de la topologia de E_B;

$(E_1)_B$ será tonelado,ya que,"cada subespacio de codimensión numerable de un tonelado es tonelado" ([37] , [32]).

Por tanto,si B es un acotado de $E_1(T)$,existe un B_1 acotado de F(T) tal que,

$$B \subset \overline{B_1}^{E_1},$$

con lo cual,teniendo en cuenta que $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ es casi-bornívora en F(T),tendremos que $\{\overline{U_n}\}_{n=1}^{\infty}$ es casi-bornívora en $E_1(T)$;de aqui que,

$$W = \bigcap_{n \in N} U_n$$

sea un T-entorno de cero en E_1 y,por tanto,

$$U = W \cap F$$

es un T-entorno de cero en F.

C.Q.D.

Gran parte de las tecnicas utilizadas para demostrar las proposiciones referentes a los subespacios de codimensión numerable,nos las han sugerido las demostraciones dadas por VALDIVIA en [38].

3.- LOS $C_c(X)$ CASI-(DF)

Sea X un espacio completamente regular de Huasdorff, y sea C(X) el espacio vectorial de las funciones reales y continuas en X.Cuando sobre este espacio consideremos la topologia compacta-abierta,i.e,la topologia localmente convexa definida por la familia de semi-normas:

$$P_K(f) = \sup_{x\in K} |f(x)| \quad , \ f \in C(X),$$

cuando K varia en la familia de todos los compactos de X; lo simbolizaremos por $C_c(X)$.

Antes de dar las caracterizaciones que queremos,vamos a dar algunas propiedades de los espacios C-casi-tonelados y casi-(DF) que necesitamos.

(II,3.1) PROPOSICION.- Sea E(T) un espacio C-casi-tonelado.Para cada sucesión $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ de T-equicontinuos tal que

$$\bigcup_{n\in N} H_n$$

es un $\beta(E',E)$-acotado,y para cada sucesión de escalares $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converja a 0,se tiene que,

$$\bigcup_{n\in N} \lambda_n H_n \quad \text{es un T-equicontinuo.}$$

Demostración:Al ser E(T) un C-casi-tonelado,bastará con que demostremos que $\{\lambda_n H_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\beta(E',E)$-converge a cero.En efecto: dado U un $\beta(E',E)$-entorno de cero,como

$$\bigcup_{n\in N} H_n$$

es un $\beta(E',E)$-acotado,existirá un $\rho>0$,tal que,

$$H = \bigcup_{n\in N} H_n \subset \rho U.$$

Sea $n_o \in N$, tal que $\lambda_n \leq \frac{1}{\rho}$ para todo $n \geq n_o$. Entonces:

$$\rho \lambda_n H \subset H \subset \rho U \quad \text{para todo} \quad n \geq n_o,$$

con lo cual:

$$\lambda_n H_n \subset U \quad \text{para todo } n \geq n_o.$$

C.Q.D.

(II,3.2) <u>PROPOSICION</u> (Esta proposición es enunciada en [29])

Sea E(T) un espacio casi-(DF). Para toda sucesión $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ de T-entornos de cero en E, existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de escalares tal que,

$$\bigcap_{n\in N} a_n V_n$$

es un T-entorno de cero en E.

Demostración: Podemos suponer sin quitar generalidad que los V_n son absolutamente convexo y cerrados. Para cada $n \in N$, sea $H_n = V_n^o$. Los H_n son T-equicontinuos y, por tanto, acotados en el espacio de Fréchet $E'(\beta(E',E))$, entonces aplicando (§29,1.(5), [15]), existiran $\lambda_n \in K$, $\lambda_n > 0$, tales que,

$$\bigcup_{n\in N} \lambda_n H_n$$

es un $\beta(E',E)$-acotado. Tomemos $a_n = \frac{n}{\lambda_n}$, $n \in N$, aplicando entonces la proposición anterior tendremos que,

$$H = \bigcup_{n\in N} \frac{\lambda_n}{n} H_n$$

es un T-equicontinuo; por tanto,

$$H^o = \bigcap_{n\in N} \left(\frac{\lambda_n}{n} H_n\right)^o = \bigcap_{n\in N} \frac{n}{\lambda_n} H_n^o = \bigcap_{n\in N} a_n V_n$$

es un T-entorno de cero en E.

C.Q.D.

WARNER en [44], da la siguiente caracterización:

" $C_c(X)$ es un espacio (DF) si y solo si en X cada unión numerable de compactos es un relativamente compacto ".

Nosotros vamos a demostrar que esta es tambien la caracterización de los $C_c(X)$ casi-(DF).

(II,3.3) <u>TEOREMA</u>.- Sea X un espacio completamente regular de Hausdorff. Son equivalentes:

(i) $C_c(X)$ es un espacio (DF)

(ii) $C_c(X)$ es un espacio casi-(DF)

(iii) En X cada unión numerable de compactos es un relativamente compacto.

Demostración: Evidentemente será suficiente con que demostremos que (ii) implica (iii). Sea $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de compactos de X. Entonces los conjuntos:

$$U_n = \left\{ f \in C(X) \ : \ P_{K_n}(f) \leq 1 \right\}$$

son entornos de cero en C(X) para cada $n \in N$. Aplicando entonces la proposición (II,3.2), tendremos que existirán $a_n > 0$, tales que,

$$U = \bigcap_{n \in N} a_n U_n$$

es un entorno de cero en $C_c(X)$. Por tanto, existirá un compacto $K \subset X$, y un $\varepsilon > 0$, tales que,

$$V = \left\{ f \in C(X) : \ P_K(f) \leq \varepsilon \right\} \subset U,$$

con lo cual:

$$K_n \subset K \quad \text{para todo } n \in N,$$

pues si existiera un $x \in K_n$ tal que $x \notin K$, por la completa regularidad de X, tendriamos que existiria $f \in C(X)$ tal que,

$$f(K) = \{0\} \text{ y } f(x) = b_n > a_n,$$

con lo cual:

$$f \in V \text{ y, sin embargo, } f \notin a_n U_n.$$

Luego tenemos que

$$\bigcup_{n \in N} K_n \subset K,$$

con lo cual,

$$\bigcup_{n \in N} K_n$$

será un relativamente compacto.

C.Q.D.

(II,3.4) COROLARIO.- Sea X un espacio completamente regular de Hausdorff. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $C_c(X)$ es un espacio casi-(DF) semi-Montel

(ii) $C_c(X)$ es un espacio casi-(DF) semi-reflexivo

(iii) X es finito.

Demostración: Será suficiente con que demostremos que (ii) implica (iii). En efecto: por el teorema anterior, cada unión numerable de compactos es un relativamente compacto, y como al ser $C_c(X)$ semi-reflexivo, X es discreto (teorema 10 de [44]), entonces X será finito.

C.Q.D.

4.- EL BIDUAL DE UN ESPACIO CASI-(DF)

Sabemos que si $E(T)$ es un espacio sucesionalmente-(DF) entonces $E'(\beta(E',E))$ es un espacio de Fréchet y, por tanto, $E''(\beta(E'',E))$ es un espacio (DF); luego $E''(\beta(E'',E))$ será un espacio casi-(DF).

Sea T_n la topologia natural del bidual, i.e, la topologia en E'' de la convergencia uniforme sobre los T-equicontinuos de E'. En general T_n es menos fina que la $\beta(E'',E)$, siendo iguales solo en el caso en que $E(T)$ es casi-tonelado (§ 23,4.(4), [15]). Luego es natural el preguntarse si $E''(T_n)$ es casi-(DF) cuando lo sea $E(T)$. En este apartado vamos a dar una respuesta afirmativa a esta pregunta.

(II,4.1) PROPOSICION.- Sea $E(T)$ un espacio sucesionalmente-(DF) y sea T_n la topologia natural de su bidual, entonces:

(i) $E''(T_n)$ es completo y tiene una sucesión fundamental de acotados.

(ii) La completación de $E(T)$ es la adherencia de E en $E''(T_n)$.

Denostración: Por el teorema de la completación de Pták-Grothendieck, para demostrar que $E''(T_n)$ es completo, bastará con que demostremos que si f es una forma lineal $\sigma(E',E'')$-continua sobre los T-equicontinuos de E', entonces f es un elemento de E''. Ahora, como $E'(\beta(E',E))$ es un espacio de Fréchet (por tanto, bornológico), será suficiente con que demostremos que f es localmente acotada en $E'(\beta(E',E))$. Si no ocurriera esto, existiria un B $\beta(E',E)$-acotado tal que f(B) no es acotado,con lo cual,existiria una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset B$,tal que,

$$|f(x_n)| \geqslant n^2 \qquad \text{para todo } n\in N.$$

Ahora,como la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es $\beta(E',E)$-acotada,tendremos que,la sucesión $\{\frac{1}{n}x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\beta(E',E)$-converge a cero en E',con lo cual,al ser E(T) un espacio sucesionalmente-(DF),

$$A = \left\{\frac{1}{n}x_n: \quad n\in N\right\}$$

es un T-equicontinuo.Ahora:

$$\left|f(\frac{1}{n}x_n)\right| \geqslant n \qquad \text{para todo } n\in N.$$

Luego f no acotada en A.Absurdo.

Sabemos que E''(β(E'',E')) tiene una sucesión fundamental de acotados (formada por los polares en E'' de una sucesión fundamental de β(E',E)-entornos de cero).Por otra parte T_n es menos fina que β(E'',E').Luego para demostrar que E''(T_n) tiene una sucesión fundamental de acotados,bastará con que demostremos que todo T_n-acotado es un β(E'',E')-acotado.Sea B un T_n-acotado,si B no fuera un β(E'',E')-acotado,existiria un $A\subset E'$,A β(E',E)-acotado, tal que,B no estaria uniformemente acotado en A,por tanto, existirian:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A \quad \text{y} \quad \{b_n\}_{n=1}^{\infty}\subset B,$$

tales que,

$$|\langle b_n,a_n\rangle| \geqslant n^2 \quad \text{para todo } n\in N.$$

Como antes,la sucesión $\{\frac{1}{n}a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un T-equicontinuo de E', y

$$\left|\left\langle \tfrac{1}{n} a_n , b_n \right\rangle\right| \geq n \quad \text{para todo } n \in N.$$

Absurdo,ya que B es T_n-acotado y,por tanto,B está uniformemente acotado sobre los T-equicontinuos.

(ii) es una consecuencia inmediata de (i) al ser T igual a la restricción de T_n a E.

(II,4.2) <u>TEOREMA</u>.- Si E(T) es un espacio casi-(DF),entonces $E''(T_n)$ es tambien casi-(DF).

Demostración:Por el teorema naterior sabemos que $E''(T_n)$ tiene una sucesión fundamental de acotados.Vamos ademostrar entonçes que $E''(T_n)$ es un espacio C-casi-tonelado.Sea $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión casi-bornívora de entornos de cero en $E''(T_n)$ absolutamente convexos y cerrados.Como la restricción de T_n a E coincide con T,si $U_n = W_n \cap E$,para cada $n \in N$, tendremos que $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$es una sucesión casi-bornívora de entornos de cero en E(T) absolutamente convexos y cerrados. Por tanto,al ser E(T) un espacio casi-(DF),

$$U = \bigcap_{n\in N} U_n = (\bigcap_{n\in N} W_n) \cap E,$$

será un T-entorno de cero en E.Ahora,

$$U^{oo} = \overline{(\bigcap_{n\in N} W_n) \cap E}^{\,\sigma(E'',E')} \subset \bigcap_{n\in N} W_n,$$

con lo cual:

$$W = \bigcap_{n\in N} W_n$$

es un T_n-entorno de cero en E''.

C.Q.D.

5.- RELACION CON LOS D_b-ESPACIOS

NOUREDDINE en [21] y [22] (ver también [23]) introduce la siguiente clase de espacios:

(1).- Se dice que un espacio localmente convexo E(T) es un D_b-espacio si es un b-espacio (o un b-tonelado) que tiene una sucesión fundamental de acotados.

Esta clase de espacios es también definida por RUESS en [29], aunque RUESS para definir estos espacios usa los límites inductivos generalizados de GARLING [6] (ver también ROELCKE [26]). Como evidentemente esta clase es más amplia que la de los espacios (DF), RUESS en [31] les llama (DF)-generalizados. RUESS estudia esta clase de espacios para resolver algunos problemas relativos a las topologias estrictas en espacios de funciones; ya que, los espacios con topologias estrictas son siempre (DF)-generalizados y en general, no son espacios (DF).

(II,5.1) NOTA.- La original topologia estricta en $C^*(X)$, con X localmente compacto, fué introducida por BUCK en [1] y [2]; posteriormente fué extendida por SENTILLES [34] y FREMLIN, GARLING y HAYDON [5] al caso en que X es un espacio completamente regular. RUBEL y SHIELDS en [27], consideran la topologia estricta en el espacio $H^\infty(D)$ de las funciones holomorfas y acotadas en una región D del plano. Actualmente existe una extensa literatura sobre la topologia estricta en los espacios de funciones.

Evidentemente, teniendo en cuenta (I,2.4), se tiene:

(2).-" Todo D_b-espacio es un espacio casi-(DF) ".

(II,5.2) <u>NOTA</u>.- (2) también se puede obtener como una consecuencia de la proposición 2.2 de [29], teniendo en cuenta la caracterización por semi-normas dada en (I,1.4) de los espacios C-casi-tonelados.

En este apartado vamos a separar los D_b-espacios y los espacios casi-(DF), con lo cual, también separaremos los espacios b-tonelados de los C-casi-tonelados. Para ello tenemos que ver primero algunos resultados previos.

(II,5.3) <u>LEMA</u>.- Sea $(E,\| \ \|)$ un espacio normado con bola unidad U, y sea $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión casi-bornívora de entornos de cero en E absolutamente convexos y cerrados. Existe una sucesión $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ de entornos de cero básicos (i.e, de la forma ρU) tal que,

$$W_n \subset V_n \quad \text{para cada } n \in N,$$

y $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ es casi-bornívora en $(E,\| \ \|)$.

Demostración: Para cada $k \in N$, sea $B_k = kU$; evidentemente, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión fundamental de acotados en E. Tendremos entonces, al ser $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ casi-bornívora, que dado un $k \in N$, existe un $n_k \in N$, tal que,

$$2 B_k \subset V_n \quad \text{para todo } n \geq n_k .$$

Podemos suponer que $n_1 \leq n_2 \leq \dots\dots$. Por otra parte, para cada $n \in N$, existe un $\rho_n > 0$, tal que,

$$\rho_n U \subset V_n .$$

Por tanto:

$$W_n^k = B_k + \frac{1}{2}\rho_n U = (k + \frac{1}{2}\rho_n)\, U \subset V_n$$

para todo $n \geq n_k$ y para todo $k \in N$.

Formamos entonces la sucesión $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ de la siguiente forma:

$$W_n = \rho_n U, \text{ para } n=1,2,\ldots\ldots,n_1-1$$

$$W_{n_k} = W_{n_k}^k \text{ , para todo } k \in N$$

$$W_n = W_n^k \text{ , para } n_k < n < n_{k\ 1}.$$

Por su construcción es evidente que,

$$W_n \subset V_n \quad \text{para cada } n \in N,$$

y además, $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ es casi-bornívora en E, pues para cada $k \in N$,

$$B_k \subset W_n \quad \text{para cada } n \geq n_k.$$

C.Q.D.

(II,5.4) <u>NOTA</u>.- De forma análoga a como lo hemos hecho en el lema anterior, se puede operar en el caso en que $E = \bigoplus_{n \in N} E_n$, siendo E_n un espacio normado. Con lo cual, en este caso, dada una sucesión casi-bornívora $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ de entornos de cero en E absolutamente convexos y cerrados, existirá una sucesión $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ de la forma:

$$W_n = \bigoplus_{p \in N} \rho_p^n U_p$$

siendo U_p la bola unidad de E_p, y $\rho_p^n > 0$; tal que, $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ es casi-bornívora en E y $W_n \subset V_n$ para cada $n \in N$. Luego en el caso en que $E = \bigoplus_{n \in N} E_n$, con E_n normado, bastará con que trabajemos con sucesiones casi-bornívoras de entornos básicos.

(II,5.5) TEOREMA.- Sean $(E_n, \|\ \|_n)$ espacios normados con bola unidad U_n, y sea $E(T) = \bigoplus_{n \in N} E_n$. Para cada $n \in N$ sea F_n un subespacio no nulo de E_n. Si H es un subespacio de E tal que, $\bigoplus_{n \in N} F_n \subset H$. Entonces H(T) es un espacio casi-(DF).

Demostración: Sea $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión casi-bornívora en H(T) de entornos de cero absolutamente convexos y cerrados; y sea

$$V = \bigcap_{n \in N} V_n.$$

Teniendo en cuenta la nota (II,5.4), podemos suponer que

$$V_n = W_n \cap H,$$

siendo:

$$W_n = \bigoplus_{p \in N} \rho_p^n U_p, \text{para cada } n \in N.$$

Tenemos que demostrar que V es un T-entorno de cero en H; ahora, como E(T) es un espacio casi-(DF), bastará con que demostremos que la sucesión $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ es casi-bornívora en E(T). En efecto: sea B un acotado de E(T), entonces por (§ 18,5.(4), [15]), existirá un $p_o \in N$, tal que,

$$B \subset G = \bigoplus_{p=1}^{p_o} E_p,$$

y además, B es acotado en G(T), con lo cual, como G(T) es un espacio normado con bola unidad

$$U = \bigoplus_{p=1}^{p_o} U_p,$$

existirá un $\lambda > 0$, tal que,

$$B \subset \lambda U.$$

Ahora, como $\lambda U \cap H$ es un acotado de $H(T)$, existirá un $n_o \in N$, tal que,

$$\lambda U \cap H \subset V_n \quad \text{para todo } n \geq n_o.$$

Supongamos que existiera un $n_1 \geq n_o$ tal que,

$$\lambda U \not\subset W_{n_1},$$

entonces:

$$\lambda U \not\subset W_{n_1} \cap G = \bigoplus_{p=1}^{p_o} \rho_p^{n_1} U_p,$$

con lo cual, existirá un p_1, $1 \leq p_1 \leq p_o$, tal que $\rho_{p_1}^{n_1} < \lambda$.

Para cada p, $1 \leq p \leq p_o$, sea $y_p \in F_p$ tal que $\|y_p\|_p = 1$, y consideremos el elemento

$$x = (\lambda y_1, \lambda y_2, \ldots\ldots, \lambda y_{p_o}, 0, \ldots\ldots, 0, \ldots\ldots) \in F.$$

Entonces:

$$x \in \lambda U \cap \left(\bigoplus_{n \in N} F_n \right) \subset \lambda U \cap H \subset V_n$$

para todo $n \geq n_o$, con lo cual:

$$x \in V_{n_1} = W_{n_1} \cap H,$$

por tanto:

$$\lambda y_{p_1} \in \rho_{p_1}^{n_1} U_{p_1},$$

de aqui que,

$$\lambda \leq \rho_{p_1}^{n_1} \quad \text{.Absurdo.}$$

Luego:

$$B \subset \lambda U \subset W_n \quad \text{para todo } n \geq n_o,$$

con lo cual $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ es casi-bornívora en $E(T)$.

C.Q.D.

(II,5.6) EJEMPLO (Un espacio casi-(DF) que no es D_b-espacio)

GROTHENDIECK en [8] pag 98 (ver también § 31,5. de[15]), da un ejemplo de un subespacio H de $E = \bigoplus_{n\in N} E_n$,con $E_n = \ell^\infty$ para cada $n \in N$,tal que,si T es topología en E de la suma directa y T' es la topología de la suma directa

$$\bigoplus_{n\in N} (E_n \cap H),$$

entonces en H T' es estrictamente más fina que T.H(T) no es un D_b-espacio.En efecto:como T' es estrictamente más fina que T en H,existirá un $U \subset H$,tal que U es un T'-entorno de cero en H absolutamente convexo y,sin embargo,U no es un T-entorno de cero en H.Sea B un subconjunto absolutamente convexo y acotado de H(T),entonces como B es un acotado de E(T),aplicando (§18,5.(4), [15]),existirá un $p_o \in N$,tal que,

$$B \subset \left(\bigoplus_{p=1}^{p_o} E_p \right) \cap H = G,$$

y además B es acotado en G(T).Ahora,como en G coinciden las topologias T y T' (con la topología de la norma),tendremos que $U \cap B$ es un T-entorno de cero en B.Con lo cual queda demostrado que H(T) no es un D_b-espacio.

Veamos por último que el espacio H(T) es un casi-(DF); para ello,teniendo en cuenta el teorema (II,5.5),bastará con que demostremos que existen F_n subespacios no nulos de E_n (para cada $n \in N$),tales que,

$$\bigoplus_{n\in N} F_n \subset H.$$

El espacio H lo construye Grothendieck de la siguiente forma:

Para cada $n \in N$, sea $G_n = \ell^1$. Construye un espacio escalonado

$$G \subset \prod_{n \in N} G_n,$$

y toma $H = F^{\perp}$, siendo

$$F = \left\{ x = (x^n) \in G : \quad \sum_{k \in N} x_k^n = 0, \quad \forall k \in N, \quad x^n = (x_k^n) \right\}.$$

Luego, si para cada $n \in N$, tomamos:

$$T_n = \ell_0^1 = \left\{ x = (x_n) \in \ell^1 : \quad \sum_{n \in N} x_n = 0 \right\},$$

tendremos:

$$F = \left(\prod_{n \in N} T_n \right) \cap G,$$

con lo cual:

$$H = F^{\perp} \supset \left(\prod_{n \in N} T_n \right)^{\perp} \supset \bigoplus_{n \in N} T_n^{\perp}.$$

Ahora, si llamamos

$$F_n = T_n^{\perp} \subset \ell^{\infty} = E_n,$$

tenemos lo que buscábamos, ya que,

$$e = (1,1,\ldots,1,\ldots \quad) \in F_n = (\ell_0^1).$$

C.Q.D.

Evidentemente, el espacio $H(T)$ del ejemplo anterior no es un espacio de Mackey. Vamos a demostrar que para espacios de Mackey la clase de los espacios casi-(DF) coincide con la de los D_b-espacios.

(II,5.7) <u>TEOREMA</u>.- Si E(T) es un espacio de Mackey, entonces:

E(T) es un D_b-espacio si y sólo si es un casi-(DF).

Demostración: Teniendo en cuenta (2), será suficiente probar que si E(T) es un espacio de Mackey casi-(DF), entonces E(T) es un D_b-espacio. Al ser E(T) de Mackey bastará con que tenga dual fuerte completo (i.e, que sea un b'-espacio, ver (2.1.2) de [22]). Ahora bien, como E'(β(E',E)) es un espacio de Fréchet, el teorema queda demostrado.

C.Q.D.

6.-LA PROPIEDAD (B) DE PIETSCH EN LOS ESPACIOS CASI-(DF)

Sea E(T) un espacio localmente convexo, e I un conjunto de índices; siguiendo el libro de PIETSCH [24] designaremos por $\ell^1_I(E)$ (resp, $\ell^1_I\{E\}$) el espacio de las familias sumables (resp, absolutamente sumables) del espacio E(T), con índices en I. Estos dos espacios los supondremos dotados de la π-topologia, i.e, la topologia localmente convexa sobre $\ell^1_I\{E\}$ cuyo sistema de semi-normas viene dado por:

$$\pi_U\left((x_i)_{i\in I} \right) = \sum_{i\in I} P_U(x_i) \quad , \quad (x_i)_{i\in I} \in \ell^1_I,$$

cuando U varia en la familia de los entornos de cero en E(T) absolutamente convexos y cerrados. P_U es el funcional de Minkowski de U.

(II,6.1) DEFINICION (Pietsch)

Se dice que un espacio localmente convexo E(T) tiene la propiedad (B) si para cada acotado B de $\ell^1_N\{E\}$ existe un A absolutamente convexo, cerrado y acotado de E(T) tal que,

$$\sup\left\{ \sum_{n\in N} P_A(x_n) \ : \ (x_n)\in B \right\}$$

es finito.

PIETSCH en (1,5.8) de [24] demuestra que todo espacio dual métrico (y todo espacio métrico) tienen la propiedad (B). Usando la misma técnica que PIETSCH, vamos a demostrar que los espacios casi-(DF) también tienen esta propiedad.

(II,6.2) TEOREMA.- Todo espacio casi-(DF) tiene la propiedad (B)

Demostración: Sea E(T) un espacio casi-(DF) y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión fundamental de acotados en él, formada por subconjuntos absolutamente convexos y cerrados. Si E(T) no verificara la propiedad (B), entonces existiría un B acotado en $\ell_N^1\{E\}$ tal que, para cada $n \in N$:

$$r_n = \sup\left\{\sum_{m\in N} P_{B_n}(x_m) \ : \ (x_m) \in B\right\} = +\infty .$$

Luego para cada $n \in N$, existirá una sucesión $\{(x_m^n)\}_{m=1}^{\infty}$ contenida en B, y un $I_n \subset N$ finito, tales que,

$$\sum_{m\in I_n} P_{B_n}(x_m^n) > 2^{2n}.$$

Por tanto, para cada $m \in I_n$ y $n \in N$, existe un $a_m^n \in B_n^o$ tal que,

$$\sum_{m\in I_n} \left|\langle x_m^n, a_m^n\rangle\right| > 2^{2n}.$$

Tomemos

$$A_n = \left\{a_m^n \ : \ m \in I_n\right\},$$

entonces como I_n es finito, A_n es un T-equicontinuo. Sea

$$A = \bigcup_{n\in N} A_n.$$

Evidentemente, A es un $\beta(E',E)$-acotado, pues $\{B_n^o\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de $\beta(E',E)$-entornos de cero en E' y

$$a_m^n \in B_n^o \ , \quad \text{para cada } m \in I_n \text{ y } n \in N.$$

Aplicando entonces la proposición (II,3.1) tendremos que

$$K = \bigcup_{n\in N} \frac{1}{2^n} A_n$$

es un T-equicontinuo, con lo cual, existirá un U entorno de cero en E(T), tal que $K \subset U^o$. Ahora, como B es un $\mathcal{T}$-acotado de $\ell^1_N\{E\}$, existirá un $\rho > 0$ tal que,

$$\sum_{n\in N} P_U(x_n) \leq \rho \quad \text{para cada} \quad (x_n) \in B.$$

Entonces, para cada $k \in N$:

$$k \leq \sum_{n=1}^{K} \frac{1}{2^{2n}} \sum_{m\in I_n} \left| \left\langle x^n_m, a^n_m \right\rangle \right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{K} \frac{1}{2^n} \sum_{m\in I_n} \left| \left\langle x^n_m, \frac{1}{2^n} a^n_m \right\rangle \right| \leq \sum_{n\in N} \frac{1}{2^n} \sum_{m\in N} P_U(x^n_m) \leq \rho$$

lo cual es absurdo.

C.Q.D.

Vamos a estudiar ahora la nuclearidad de los espacios casi-(DF).

GROTHENDIECK en [9] da el siguiente resultado:

(1).-" Un espacio (DF) es nuclear si y solo si su dual fuerte es nuclear ".

Este resultado es extendido a los espacios dual métrico por PIETSCH (ver (4.3.3) de [24]). Vamos a demostrar que (1) es también cierto para los espacios casi-(DF):

(II,6.3) TEOREMA.- Un espacio casi-(DF) es nuclear si y sólo si su dual fuerte es nuclear.

Demostración: Que la condición es necesaria es una consecuencia inmediata de (4.3.1) de [24] y del teorema (II,6.2). Veamos que la condición es suficiente: sea E(T) un espacio casi-(DF), tal que, $E'(\beta(E',E))$ es nuclear; teniendo en cuenta ((4.3.2), [24]), para demostrar que E(T) es nuclear, bastará con que demostremos que es casi-tonelado. Sea B un subconjunto de E' $\beta(E',E)$-acotado, como $E'(\beta(E',E))$ es nuclear, aplicando (4.4.7) de [24], B será un $\beta(E',E)$-precompacto; ahora, como $E'(\beta(E',E))$ es metrizable, aplicando el teorema de Banach-Dieudonné (§ 21,10.(3), [15]), existirá una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E'$, $\beta(E',E)$-nula, tal que,

$$B \subset \overline{\Gamma \{f_n : n \quad N\}}^{\beta(E',E)}$$

Ahora, como E(T) es casi-(DF), B será un T-equicontinuo. Con lo cual E(T) será casi-tonelado.

C.Q.D

El teorema anterior se puede obtener como corolario del teorema 2.14 de [29], pues RUESS demuestra allí que todo espacio sucesionalmente-(DF) cumple (1). La demostración dada por RUESS no se basa en la propiedad (B), por esta razón hemos considerado de interes demostrar el teorema.

Vamos a dar por último, como consecuencia del teorema (II,6.2), una generalización del teorema de DVORESTKI-ROGER.

Recordemos la siguiente definición ((1.5.1), [24]): Una familia $(x_i)_{i \quad I}$ en E(T) es <u>totalmente sumable</u> si existe un B absolutamente convexo, cerrado y acotado de E(T) tal que,

$$\sum_{i \in I} P_B(x_i) \quad .$$

Como en cada espacio que cumpla la propiedad (B),toda familia absolutamente sumable es totalmente sumable ((1.5.1), [24]),podemos enunciar el siguiente lema:

(II,6.4) <u>LEMA</u>.- En un espacio casi-(DF) toda familia absolutamente sumable es totalmente sumable.

(II,6.5) <u>TEOREMA</u>.-Sea E(T) un espacio casi-(DF) en el cual existe un acotado bornívoro B.Si en E(T) toda sucesión sumable es absolutamente sumable,entonces E es de dimensión finita.

Demostración: Podemos suponer que B es absolutamente convexo y cerrado.Como la topologia del espacio normado E_B es más fina que T,toda sucesión sumable en E_B es sumable en E(T).Además,aplicando el lema anterior,tenemos que toda sucesión absolutamente sumable en E(T) es absolutamente sumable en E_B.Por tanto,en E_B toda sucesión sumable es absolutamente sumable;con lo cual,aplicando el clásico teorema de Dvorestki-Roger (ver (3.4.1) de [24] ó pag 206 de [33])tendremos que $E = E_B$ es de dimensión finita.

C.Q.D

7.- APLICACIONES (DEBIL) COMPACTAS ENTRE LOS ESPACIOS CASI-(DF) Y LOS ESPACIOS DE FRECHET

En primer lugar vamos a demostrar que todo espacio casi-(DF) es quasi-normable.Recordemos que un espacio localmente convexo E(T) es quasi-normable si dado un T-equicontinuo A existe un U entorno de cero en E(T) tal que, en A coinciden las topologias $\beta(E',E)$ y T_U; siendo T_U la topologia de la convergencia uniforme en U.Para la definición y propiedades de estos espacios ver GROTHENDIECK [8] .

La técnica que vamos a usar es la misma que utiliza KATS en [12] para demostrar que todo espacio (DF) es quasi-normable.

(II,7.1) TEOREMA.- Todo espacio casi-(DF) es quasi-normable.

Demostración: Sea E(T) un espacio casi-(DF), y sea A un T-equicontinuo absolutamente convexo.Como E'(β(E',E)) es metrizable, existirá una sucesión $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos absolutamente convexos de E', con:

$$U_1 \supset U_2 \supset \ldots\ldots\ldots \supset U_n \supset \ldots\ldots ,$$

que forman una base de β(E',E)-entornos de cero en E'. Para cada $n \in N$, tomemos:

$$D_n = n\, A \cap U_n \qquad y \qquad D = \bigcup_{n \in N} D_n .$$

D será un T-equicontinuo, ya que, cada D_n lo es y por su construcción la sucesión $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ es β(E',E)-nula.Por tanto, existirá un U entorno de cero en E(T), tal que, $D \subset U^o$.

Evidentemente, la topologia T_U es más fina que la $\beta(E',E)$. Veamos que se da la otra desigualdad entre estas topologias: sea $x \in A$ y V un T_U-entorno de x en A, entonces existirá un $\varepsilon > 0$ tal que,

$$(x + \varepsilon U^o) \cap A \subset V.$$

Sea $n_o \in N$ tal que $\frac{1}{n_o} < \varepsilon$. Tenemos entonces:

$$\varepsilon U^o \supset \frac{1}{n_o} U^o \supset \frac{1}{n_o} D \supset \frac{1}{n_o} (2n_o A \cap U_{2n_o}) = 2A \cap \frac{1}{n_o} U_{2n_o}.$$

Y como A es absolutamente convexo:

$$V \supset A \cap (x + \varepsilon U^o) \supset A \cap (x + (2A \cap \frac{1}{n_o} U_{2n_o})) \supset$$

$$\supset A \cap (x + \frac{1}{n_o} U_{2n_o}).$$

Por tanto, V es un $\beta(E',E)$-entorno de x en A. Con lo cual $\beta(E',E)$ y T_U coinciden en A.

C.Q.D.

RUESS en [29] da otra demostración de este teorema.

Sean E y F espacios localmente convexos. Una aplicación lineal y comtinua $f: E \longrightarrow F$ se dice que es <u>(debilmente) compacta</u> si transforma algun entorno de cero de E en un (debilmente) relativamente compacto de F. ¿Bajo que condiciones la compacidad (débil) de f se sigue del hecho de que f transforme los acotados de E en subconjuntos (debilmente) retivamente compactos de F?. GROTHENDIECK en [8] pag 114, demuestra que esto es cierto en el caso en que E es un espacio quasi-normable y F es un espacio de Banach.

Una generalización de este resultado es dada por VAN DULST en [43] donde demuestra el siguiente resultado:

(a).-" Sea $f:E \longrightarrow F$ una aplicación lineal y continua que transforma los (débil) acotados de E en (débil) relativamente compactos de F.Entonces f es una aplicación (débil) compacta,si F es un espacio de Fréchet y E satisface las siguientes condiciones:

(i) E es quasi-normable

(ii) Para cada sucesión $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ de entornos de cero en E(T) absolutamente convexos y cerrados,existe una sucesión $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ de escalares positivos tal que,

$$\bigcap_{n\in N} \rho_n U_n$$

es un entorno de cero en E(T) ".

Como todo espacio casi-(DF) es quasi-normable (teorema (II,7.1)) y cumple la condición (ii) de (a) (proposición (II,3.2)),podemos enunciar el siguiente teorema:

(II,7.2) <u>TEOREMA</u>.- Sea $f:E \longrightarrow F$ una aplicación lineal y continua que transforma los subconjuntos (débil) acotados de E en (débil) relativamente compactos de F.Si E es un espacio casi-(DF) y F es un espacio de Fréchet,f es (débil) compacta.

Sean E y F dos espacios localmente convexos,y L(E,F) el espacio de las aplicaciones lineales y continuas de E en F.GROTHENDIECK en [9] da la siguiente definición (ver también KÖTHE [16],pag 160):

(II,7.3) DEFINICION.- Un subconjunto H de L(E,F) se dice que es un equi-acotado si existe un U entorno de cero en E,tal que,

$$H(U) = \bigcup_{f \in H} f(U)$$

es un acotado de F.

Evidentemente,todo subconjunto equi-acotado de L(E,F) es un equicontinuo ([33],pag 87).Vamos a demostrar que bajo ciertas condiciones se da el reciproco.

(II,7.4) TEOREMA.- Si E es un espacio casi-(DF) y F es metrizable,entonces cada equicontinuo de L(E,F) es un equi-acotado.

Demostración: Sea H un subconjunto equicontinuo de L(E,F), y sea $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión fundamental de entornos de cero en F.Entonces,para cada $n \in N$,

$$U_n = \bigcap_{f \in H} f^{-1}(V_n)$$

es un entrono de cero en E;por tanto,aplicando la proposición(II,3,2),existirá una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de escalares positivos,tal que,

$\{a_n\}_{n=1}$ de escalares po-

$$U = \bigcap_{n \in N} a_n U_n$$

es un entorno de cero en E.Tenemos entonces que

$$H(U) = \bigcup_{f \in H} f(U) = \bigcup_{f \in H} f\Big(\bigcap_{n \in N} a_n U_n\Big)$$

es un acotado de F.En efecto:dado un V_n,si $x \in H(U)$,existirá $f_o \in H$,tal que,

$$x \in f_o\left(\bigcap_{n \in N} a_n U_n\right),$$

con lo cual:

$$x \in a_n f_o(U_n) \subset a_n V_n,$$

luego

$$H(U) \subset a_n V_n.$$

C.Q.D.

Como una consecuencia inmediata de este teorema tenemos el siguiente corolario:

(II,7.5) <u>COROLARIO</u>.- Toda aplicación f lineal y continua de un espacio casi-(DF) E en un espacio metrizable F es acotada (i.e,existe un entorno de cero en E cuya imagen por f es un acotado de F).

Como consecuencia de este corolario,tenemos el siguiente resultado relativo a las aplicaciones (debilmente) compactas:

(II,7.6) <u>COROLARIO</u>.- Toda aplicación lineal y continua de de un espacio casi-(DF) en un espacio metrizable de Montel (reflexivo) es compacta (débil compacta).

<u>NOTA</u>.- El teorema (II,7.4) es dado para espacios (DF) en § 40,2.(9) de [16].

CAPITULO III

ESPACIOS FUERTEMENTE SEMI-REFLEXIVOS

1.- DEFINICION Y CARACTERIZACIONES

Sea E(T) un espacio localmente convexo. Denotaremos por $\check{E}$ el subespacio de E'^* de todas las formas lineales en E' que estan acotadas en los subconjuntos T-equicontinuos de E'. Si A es un subconjunto de $\check{E}$, la clausura de A en $\check{E}(\sigma(\check{E},E'))$ la denotaremos por $\check{A}$ o $(A)^{\vee}$, y la unión de las clausuras en $\check{E}(\sigma(\check{E},E'))$ de todos los $\sigma(\check{E},E')$-acotados contenidos en A la denotaremos por A''. Es fácil comprobar que E'' (segun la notación anterior) coincide con el bidual de E.

(III,1.1)DEFINICION.- Sea $\{x_\alpha: \alpha\in D, \geqslant\}$ una red en E(T). Diremos que $\{x_\alpha: \alpha\in D, \geqslant\}$ es una red ultimamente acotada en E(T) (o T-ultimamente acotada) si dado U T-entorno de cero en E, existen un $\lambda > 0$, y un $\alpha_0\in D$, tales que,

$$x_\alpha \in \lambda U \quad \text{para todo } \alpha \geqslant \alpha_0$$

El concepto de red ultimamente acotada fué introducido por DE VITO en [3] para definir los ab-espacios (ver

(II,1.8)).

(III,1.2) <u>DEFINICION</u>.- Sea A un subconjunto de E,definimos su <u>clausura ultimamente acotada</u> como:

$$A^a = \{\text{límites en } E'^*(\sigma(E'^*,E')) \text{ de las redes ultimamente acotadas contenidas en } A\}$$

(III,1.3) <u>LEMA</u>.- Dado un espacio localmente convexo E(T) se tiene que,

$$\check{E} = \bigcap \{LIN(\overline{U}^{\sigma(E'^*,E')}) : U \text{ es un T-entorno de 0 en}$$

Demostración: Sea $f \in \check{E}$ y U un T-entorno de cero en E absolutamente convexo,entonces como U^o es un T-equicontinuo, $f(U^o)$ será un acotado;luego existe un $n \in N$ tal que,

$$f \in nU^{oo} = n\overline{U}^{\sigma(E'^*,E')},$$

por tanto,

$$f \in LIN(\overline{U}^{\sigma(E'^*,E')}).$$

Inversamente,sea

$$f \in \bigcap \{LIN(\overline{U}^{\sigma(E'^*,E')}) : U \text{ es un T-entorno de 0 en E}\},$$

y sea $A \subset E'$ un T-equicontinuo.Entonces $U = A^o$ es un T-entorno de cero,por tanto,existe un $n \in N$,tal que,

$$f \in n\overline{U}^{\sigma(E'^*,E')} = nA^{ooo} = A^o,$$

con lo cual:

$$\sup_{x \in A} |\langle f,x\rangle| \leq n$$

por tanto, $f \in \check{E}$.

C.Q.D.

(III,1.4) <u>PROPOSICION</u>.- Para todo espacio localmente convexo $E(T)$ se cumple que

$$E'' \subset E^a \subset \check{E}.$$

Demostración: Por (§ 23,2.(3), [15]) sabemos que,

$$E'' = \bigcup \left\{ \overline{A}^{\sigma(E'^*,E')} : A \text{ es un acotado de } E(T) \right\},$$

luego si $x \in E''$,existe un A acotado de $E(T)$,tal que,

$$x \in \overline{A}^{\sigma(E'^*,E')} ,$$

por tanto,existe una red $\{x_\alpha : \alpha \in D, \geqslant\}$ acotada en $E(T)$, tal que,

$$\{x_\alpha : \alpha \in D, \geqslant\} \xrightarrow{\sigma(E'^*,E')} x,$$

y como toda red acotada es ultimamente acotada,tendremos que $x \in E^a$.Con lo cual $E'' \subset E^a$.

Sea $x \in E^a$,existirá una red $\{x_\alpha : \alpha \in D, \geqslant\}$ ultimamente acotada en $E(T)$ que $\sigma(E'^*,E')$-converge a x.

Sea U un entorno de cero en $E(T)$,teniendo en cuenta el lema (III,1.3),para demostrar que $x \in \check{E}$,bastará con que demostremos que

$$x \in LIN(\overline{U}^{\sigma(E'^*,E')}).$$

Ahora,como la red es ultimamente acotada,existirá un $\lambda > 0$, y un $\alpha_0 \in D$,tales que,

$$x_\alpha \in \lambda U \subset \lambda \overline{U}^{\sigma(E'^*,E')} \quad \text{para todo } \alpha \geqslant \alpha_0 ,$$

con lo cual:

$$x \in LIN(\overline{U}^{\sigma(E'^*,E')}).$$

C.Q.D.

(III,1.5) NOTA.- Evidentemente para espacios normados se tiene:

$$E'' = E^a = E,$$

pues si $x \in \check{E}$,se tiene que $x(U^o)$ es acotado,con lo cual, x es continua en $E'(\beta(E',E))$,i.e,x E''.

Otro tipo de espacios para los cuales $E'' = E^a = \check{E}$, son los espacios metrizables tales que $E''(\mu(E'',E'))$ es submetrizable;ya que,para este tipo de espacio VALDIVIA demuestra en [42] que $E'' = \check{E}$. .

Veremos más adelante que los contenidos de la proposición anterior son estrictos.

(III,1.6) TEOREMA.- Si E(T) es un espacio localmente convexo metrizable se tiene que

$$E'' = E^a.$$

Demostración: Sea $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base de entornos de cero en E(T) (con $U_n \supset U_{n+1}$ para todo $n \in N$),y sea x un elemento de E^a;entonces existe una red $\{x_\alpha : \alpha \in D, \geqslant\}$ ultimamente acotada en E(T) que $\sigma(E'^*,E')$-converge a x.Como la red es ultimamente acotada,dado un $n \in N$,exitirá un $\lambda_n > 0$,y un $\alpha_n \in D$,tales que,

$$x_\alpha \in \lambda_n U_n \quad \text{para todo} \quad \alpha \geqslant \alpha_n .$$

Sea $D_o = \{\alpha \in D : \alpha \geqslant \alpha_n \ \forall n \in N\} \cup \{\alpha_n : n \in N\}$;evidentemente D_o es cofinal en D,con lo cual $\{x_\alpha : \alpha \in D_o, \geqslant\}$ es una subred de $\{x_\alpha : \alpha \in D, \geqslant\}$ .Además esta subred es acotada en E(T),ya que,dado un U_{n_o} se tiene que,

$$x_\alpha \in \lambda_{n_0} U_{n_0} \quad \text{para todo} \quad \alpha \geqslant \alpha_{n_0}$$

y

$$x_{\alpha_n} \in \lambda_{n_0} U_{n_0} \quad \text{para todo } n \geqslant n_0,$$

pues evidentemente podemos tomar $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots\cdots \leq \alpha_n \leq \cdots\cdots$.

Por tanto, como

$$x \in \overline{\{x_\alpha : \alpha \in D_0, \geqslant\}}^{\sigma(E'^*, E')},$$

tenemos que $x \in E''$ (ver (§23,2.(3), [15]). Luego $E^a \subset E''$, y como siempre $E'' \subset E^a$, tenemos $E^a = E''$.

C.Q.D.

Como consecuencia de este teorema, vamos a ver que incluso para espacios de Fréchet, E^a es distinto de $\check{E}$:

(III,1.7) EJEMPLO.- En §31,7. de [15] se da un ejemplo de un espacio de Fréchet E(T) que no es distinguido, con lo cual $E'(\beta(E',E))$ no es bornológico (§29,4.(3), [15]); luego existirá una $f \in E'^*$ acotada en los $\beta(E',E)$-acotados, con lo cual pertenecerá a $\check{E}$, tal que $f \notin E''$. Ahora, como $E'' = E^a$, tendremos que $f \in \check{E}$ y $f \notin E^a$.

(III,1.8) DEFINICION.- Diremos que un espacio localmente convexo E(T) es fuertemente semi-reflexivo si $E = E^a$. Es decir, si los puntos $\sigma(E'^*,E')$-adherentes a las redes ultimamente acotadas de E(T) son puntos de E.

Como consecuencia de la proposición (III,1.4) tendremos que todo espacio fuertemente semi-reflexivo es semi-reflexivo. Veremos con un contraejemplo que el recíproco no es cierto en general.

Como consecuencia inmediata del teorema (III,1.6) podemos enunciar la siguiente proposición:

(III,1.9) PROPOSICION.- En un espacio localmente convexo metrizable E(T) son equivalentes:

(i) E(T) semi-reflexivo

(ii) E(T) fuertemente semi-reflexivo

Vamos a dar ahora un teorema de caracterización de los espacios fuertemente semi-reflexivos.

(III,1.10) TEOREMA.- Sea E(T) un espacio localmente convexo. Son equivalentes:

(i) E(T) es fuertemente semi-reflexivo

(ii) Cada red ultimamente acotada de E(T) que sea débil Cauchy es débil convergente.

Demostración: (i) implica (ii): sea $\{x_\alpha : \alpha \in D, \geqslant\}$ una red ultimamente acotada en E(T) y $\sigma(E,E')$-Cauchy. Como E'^* es la débil completación de E, existirá un $x \in E'^*$ tal que,

$$\{x_\alpha : \alpha \in D, \geqslant\} \xrightarrow{\sigma(E'^*,E')} x.$$

Luego $x \in E^a = E$, de aquí que,

$$\{x_\alpha : \alpha \in D, \geqslant\} \xrightarrow{\sigma(E,E')} x.$$

(ii) implica (i): sea $x \in E^a$, existe una red $\{x_\alpha : \alpha \in D, \geqslant\}$ ultimamente acotada en E(T) que $\sigma(E'^*,E')$-converge a x; luego $\{x_\alpha : \alpha \in D, \geqslant\}$ es $\sigma(E,E')$-Cauchy y, por tanto, esta red será $\sigma(E,E')$-convergente, con lo cual $x \in E$.

C.Q.D.

(III,1.11) LEMA.- En un espacio localmente convexo E(T) toda red de Cauchy es ultimamente acotada.

Demostración: Sea $\{x_\alpha : \alpha\in D, \geqslant\}$ una red de Cauchy en E(T), y sea U un T-entorno de cero en E.Tomemos W un T-entorno de cero en E absolutamente convexo tal que,

$$W+W\subset U.$$

Dado W existe un $\alpha_0\in D$ tal que,

$$x_\alpha\in x_{\alpha_0}+W \quad \text{para todo} \quad \alpha\geqslant\alpha_0 .$$

Ahora,dado x_{α_0} existe un $\lambda>1$ tal que,

$$x_{\alpha_0}\in \lambda W.$$

Por tanto,

$$x_\alpha \in \lambda W+W\subset \lambda(W+W)\subset\lambda U \quad \text{para todo} \quad \alpha\geqslant\alpha_0 .$$

C.Q.D.

(III,1.12) <u>TEOREMA</u>.- Todo espacio fuertemente semi-reflexivo es completo.

Demostración: Sea E(T) un espacio fuertemente semi-reflexivo y $\{x_\alpha : \alpha\in D, \geqslant\}$ una red de Cauchy en él.Por el lema anterior tenemos que la red $\{x_\alpha : \alpha\in D, \geqslant\}$ es ultimamente acotada en E(T),con lo cual,aplicando el teorema (III,1.10), $\{x_\alpha : \alpha\in D, \geqslant\}$ es débil convergente en E.Ahora,aplicando el lema de Bourbaki-Robertson (§ 18,4.(4),[15]),tendremos que $\{x_\alpha : \alpha\in D, \geqslant\}$ es convergente en E(T).Con lo cual E(T) será completo.

C.Q.D.

(III,1.13) <u>EJEMPLO</u>.- KOMURA en [14] da un ejemplo de un espacio E(T) de Montel no completo,entonces teniendo en cuenta el teorema anterior,tendremos que E(T) es un Montel, por tanto,un espacio reflexivo que no es fuertemente semi-reflexivo.Evidentemente,para este espacio se tiene que,

$$E'' \neq E^{a}.$$

2.- PROPIEDADES HEREDITARIAS

(III,2.1) PROPOSICION.- Cada subespacio cerrado de un espacio fuertemente semi-reflexivo es fuertemente semi-reflexivo.

Demostración: Sea E(T) un espacio fuertemente semi-reflexivo y H un subespacio cerrado de E(T). Sea $\{x_\alpha : \alpha \in D, \geqslant\}$ una red ultimamente acotada en H(T) y $\sigma(H,H')$-Cauchy. Evidentemente, $\{x_\alpha : \alpha \in D, \geqslant\}$ es ultimamente acotada en E(T); y como $\sigma(E,E')$ coincide en H con la $\sigma(H,H')$, la red también será $\sigma(E,E')$-Cauchy. Luego existe un $x \in E$ tal que $\{x_\alpha : \alpha \in D, \geqslant\}$ $\sigma(E,E')$-converge a x. Ahora, como H es un $\sigma(E,E')$-cerrado, tendremos que,

$$\{x_\alpha : \alpha \in D, \geqslant\} \xrightarrow{\sigma(H,H')} x,$$

con lo cual H(T) será fuertemente semi-reflexivo.

C.Q.D.

(III,2.2) PROPOSICION.- El producto de una familia cualquiera de espacios fuertemente semi-reflexivos es un espacio fuertemente semi-reflexivo.

Demostración: Sean $E_i(T_i)$ espacios fuertemente semi-reflexivos y sea

$$E(T) = \prod_{i \in I} E_i(T_i).$$

Sea $\{x_\alpha : \alpha \in D, \geqslant\}$ una red ultimamente acotada en E(T) y $\sigma(E,E')$-Cauchy. Tenemos que demostrar que $\{x_\alpha : \alpha \in D, \geqslant\}$ es $\sigma(E,E')$-convergente.

Cada red $\{p_i(x_\alpha) : \alpha \in D, \geqslant\}$ es ultimamente acotada en

$E_i(T_i)$.En efecto:si U_i es un entorno de cero en $E_i(T_i)$,entonces:

$$U = \prod_{j\in I} V_j \text{ ,con } V_i = U_i \text{ y } V_j = E_j \qquad j\in I, j\neq i,$$

es un entorno de cero en E(T).Por tanto,existirá un $\lambda > 0$ y un $\alpha_0 \in D$,tales que,

$$x_\alpha \in \lambda\, U \quad \text{para todo} \quad \alpha \geqslant \alpha_0 \,,$$

con lo cual:

$$p_i(x_\alpha) \in \lambda\, U_i \quad \text{para todo} \quad \alpha \geqslant \alpha_0 \,.$$

Además,como cada $\{p_i(x_\alpha): \alpha\in D, \geqslant\}$ es $\sigma(E_i,E_i')$-Cauchy,tendremos que,

$$\{p_i(x_\alpha): \alpha\in D, \geqslant\} \xrightarrow{\sigma(E_i,E_i')} x_i \in E_i$$

para cada $i \in I$.Entonces como $E(\sigma(E,E')) = \prod_{i\in I} E_i(\sigma(E_i,E_i'))$ (§ 22,5.(3), [15]),se tendrá que,

$$\{x_\alpha : \alpha\in D, \geqslant\} \xrightarrow{\sigma(E,E')} x=(x_i)\in E.$$

C.Q.D.

Como todo límite proyectivo es un subespacio cerrado del producto de los espacios que lo definen (§19,10.(3), [15]),es consecuencia inmediata de las dos últimas proposiciones,el siguiente corolario:

(III,2.3) <u>COROLARIO</u>.- Todo límite proyectivo de espacios fuertemente semi-reflexivos es un espacio fuertemente semi-reflexivo.

En general la propiedad de ser fuertemente semi-reflexivo no se conseva por paso al cociente como veremos en el siguiente ejemplo:

(III,2.4) <u>EJEMPLO</u>.- KÖTHE en § 31,5. de [15] da un ejemplo de un espacio de Fréchet $E(T)$ reflexivo que tiene un cociete E/H que no es reflexivo. Como en los espacios metrizables fuertemente semi-reflexivo y semi-reflexivo coinciden, tendremos que $E(T)$ es un espacio fuertemente semi-reflexivo y, sin embargo, E/H no es ni siquiera semi-reflexivo.

Veamos por último que ocurre con la suma directa. Para ello necesitamos el siguiente lema:

(III,2.5) <u>LEMA</u>.- Si $\{x_\alpha : \alpha \in D, \geqslant\}$ es una red ultimamente acotada en $E(\beta(E,E'))$ y $\sigma(E'^*,E')$-converge a $x_0 \in E'^*$. Entonces x_0 es localmente acotada en $E'(\mu(E',E))$.

Demostración: Si A es un $\mu(E',E)$-acotado, A^0 es un entorno de cero en $E(\beta(E,E'))$. Luego existe un $\lambda > 0$, y un $\alpha_0 \in D$, tales que,

$$x_\alpha \in \lambda A^0 \quad \text{para todo} \quad \alpha \geqslant \alpha_0 .$$

De aquí que,

$$|\langle x_\alpha, f\rangle| \leqslant \lambda \qquad \text{para toda } f \in A \text{ y } \alpha \geqslant \alpha_0 ,$$

con lo cual:

$$|\langle x_0, f\rangle| \leqslant \lambda \qquad \text{para toda } f \in A.$$

Luego $x_0(A)$ es acotado.

C.Q.D.

(III,2.6) <u>TEOREMA</u>.- Sea $E(T) = \bigoplus_{i\in I} E_i(T_i)$ un espacio de Mackey. Si los espacios $E_i(T_i)$ son fuertemente semi-reflexivos y el cardinal de I es no medible, entonces E(T) es fuertemente semi-reflexivo.

Demostración: Supongamos que E(T) no es fuertemente semi-reflexivo. Existirá entonces una red $\{x_\alpha : \alpha\in D, \succ\}$ que es T-ultimamente acotada, $\sigma(E,E')$-Cauchy, y tal que,

$$\{x_\alpha : \alpha\in D, \succ\} \xrightarrow{\sigma(E'^*,E')} y \in E'^* \sim E.$$

Cada $x_\alpha = (x_\alpha^i)_{i\in I}$, siendo $x_\alpha^i = 0$ excepto para un número finito de i.

Como $\sigma(E,E')$ restringida a E_i coincide con $\sigma(E_i,E_i')$, tendremos que cada $\{x_\alpha^i : \alpha\in D, \succ\}$ es una red $\sigma(E_i,E_i')$-Cauchy. Además cada una de estas redes es ultimamente acotada en $E_i(T_i)$. En efecto: sea $j\in I$, y sea U_j un T_j-entorno de cero en E_j, entonces:

$$U = \prod_{i\in I} U_i, \text{siendo } U_i = E_i \text{ para todo } i\neq j,$$

es un entorno de cero en E(T). Luego existe un $\lambda > 0$, y un $\alpha_0\in D$, tales que,

$$x_\alpha \in \lambda U = \prod_{i\in I} \lambda U_i \quad \text{para todo } \alpha \succ \alpha_0$$

De aquí que,

$$x_\alpha^j \in \lambda U_j \quad \text{para todo } \alpha \succ \alpha_0 .$$

Por tanto, como cada $E_i(T_i)$ es fuertemente semi-reflexivo, tendremos que,

$$\{x_\alpha^i : \alpha\in D, \succ\} \xrightarrow{\sigma(E_i,E_i')} x_0^i \in E_i .$$

Vamos a demostrar que $x_0^i = 0$ excepto para un número finito de $i \in I$, con lo cual tendremos que $x_0=(x_0^i)$ será un elemento de E. Si no ocurriera esto, existiría una sucesión $\{i_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$, tal que,

$$x_0^{i_n} \neq 0 \quad \text{para todo } n \in N.$$

Para cada $n \in N$, sea U_{i_n} un entorno de cero en E_{i_n} ($\sigma(E_{i_n},E'_{i_n})$) absolutamente convexo y cerrado, tal que,

$$x_0^{i_n} \notin nU_{i_n},$$

y tomemos $U_i = E_i$ para cada $i \in I$, $i \neq i_n$, $n=1,2,\ldots\ldots\ldots$.
Entonces,

$$U = \prod_{i \in I} U_i$$

es un T-entorno de cero en E, con lo cual, existirá un $\lambda > 0$, y un $\alpha_0 \in D$, tales que,

$$x_\alpha \in \lambda U \quad \text{para todo} \quad \alpha \geq \alpha_0,$$

luego:

$$x_\alpha^{i_n} \in \lambda U_{i_n} \qquad \text{para todo } \alpha \geq \alpha_0 \text{ y } n \in N.$$

Ahora, como

$$\left\{x_\alpha^{i_n} : \alpha \in D, \geq\right\} \xrightarrow{\sigma(E_{i_n},E'_{i_n})} x_0^{i_n},$$

tendremos que,

$$x_0^{i_n} \in \lambda U_{i_n} \qquad \text{para cada } n \in N,$$

con lo cual llegamos a que $\lambda \geq n$ para todo $n \in N$. Absurdo. Luego tendremos que $x_0 \in E$. Por lo tanto, $y-x_0$ es un elemento no nulo de E'^*. Además $y-x_0$ es el límite débil de la red ultimamente acotada en $E(T)$ $\{x_\alpha - x_0 : \alpha\in D, \geq\}$.

Sea $F = \bigoplus_{i\in I} E_i' \subset E' = \prod_{i\in I} E_i'$. $y-x_0$ se anula en F. En efecto: si $f = (f_i)\in F$, existe un subconjunto finito I_f de I, tal que, si $i\in I\sim I_f$, $f_i = 0$. Tenemos entonces:

$$\langle y-x_0, f\rangle = \lim_{\alpha\in D} \langle x_\alpha - x_0, f\rangle = \lim_{\alpha\in D} \langle x_\alpha, f\rangle - \langle x_0, f\rangle =$$

$$= \lim_{\alpha\in D} \sum_{i\in I_f} \langle x_\alpha^i, f_i\rangle - \sum_{i\in I_f} \langle x_0^i, f_i\rangle =$$

$$= \sum_{i\in I_f} \left(\lim_{\alpha\in D} \langle x_\alpha^i, f_i\rangle - \langle x_0^i, f_i\rangle \right) = 0.$$

Como $y-x_0 \neq 0$, existirá un $f^1\in E'\sim F$, tal que,

$$\langle y-x_0, f^1\rangle \neq 0.$$

Luego si J es el subconjunto de I, tal que,

$$f_j^1 \neq 0 \quad \text{para todo } j\in J,$$

se tendrá que $|J| \geq \aleph_0$.

Para cada $i\in I$, sea $F_i = \mathrm{LIN}\{f_i^1\}$ en E_i', entonces $\prod_{i\in I} F_i$ como subespacio de $E'(\sigma(E',E))$ es topológicamente isomorfo a $\omega(J)$ $(\sigma(\omega(J), \varphi(J)))$; luego existirá una función lineal y continua

$$i:\omega(J)(\sigma(\omega(J), \varphi(J))) \longrightarrow E'(\sigma(E',E)).$$

Por tanto, si $i^* : E \longrightarrow \varphi(J)$ es la adjunta de i, tendremos que i^* es $\mu(E,E')$-$\mu(\varphi(J), \omega(J))$-continua (ver §12 cap 3 de [10]).Ahora, como la imagen por una aplicación lineal y continua de una red ultimamente acotada es una red ultimamente acotada, tendremos que la red

$$\{ i^*(x_\alpha - x_o) : \alpha \in D, \geq \}$$

es ultimamente acotada en $\varphi(J)(\mu(\varphi(J), \omega(J)))$; además, esta red es $\sigma(\varphi(J), \omega(J))$-Cauchy (ya que i^* es también débil continua).Por tanto,

$$\{ i^*(x_\alpha - x_o) : \alpha \in D, \geq \} \xrightarrow{\sigma(\omega(J)^*, \omega(J))} u \in \omega(J)^*.$$

u se anula en $\varphi(J)$.En efecto: sea $f \in \varphi(J)$, entonces:

$$\langle u, f \rangle = \lim_{\alpha \in D} \langle i^*(x_\alpha - x_o), f \rangle = \lim_{\alpha \in D} \langle x_\alpha - x_o, i(f) \rangle =$$

$$= \langle y - x_o, i(f) \rangle = 0 \quad \text{pues } i(f) \in F.$$

Como $\{ i^*(x_\alpha - x_o) : \alpha \in D, \geq \}$ es $\beta(\varphi(J), \omega(J))$-ultimamente acotada, al ser $\beta(\varphi(J), \omega(J)) = \mu(\varphi(J), \omega(J))$ (ver pag 64 de [25]),y $\omega(J)(\mu(\omega(J), \varphi(J))) = \prod_{j \in J} K_j$ (§22, 5.(3), [15]); aplicando el lema (III,2.5) tendremos que u es localmente acotada en $\omega(J) = \prod_{j \in J} K_j$.

Por otra parte, u no es continua en $\omega(J)$, ya que u no es nula y se anula en $\varphi(J) = \omega(J)'$ (§ 22,5.(2), [15]).Por tanto, $\omega(J)$ no es bornológico; ahora, como $\omega(J)$ es topológicamente isomorfo a $C_c(J)$, considerando en J la topologia discreta, aplicando el teorema de Nachbin-Shirota ([35], [40]), tendremos que J con la topologia discreta no será realcompacto. Entonces, como un espacio discreto es realcompacto si y sólo si su cardinal es no medible (12.3 de [7]), tendremos que el cardinal de J será medible,por tanto,el cardinal de I también lo será.Absurdo.

Luego E(T) es fuertemente semi-reflexivo.

C.Q.D.

Como el menor cardinal medible es fuertemente inaccesible (ver 12.5 de [7]),tenemos el siguiente corolario:

(III,2.7) <u>COROLARIO</u>.- Sea $E(T) = \bigoplus_{i \in I} E_i(T_i)$ un espacio de Mackey.Si los espacios $E_i(T_i)$ son fuertemente semi-reflexivos y el cardinal de I es menor que el menor cardinal fuertemente inaccesible,entonces E(T) es fuertemente semi-reflexivo.

3.- EL ESPACIO BORNOLOGICO ASOCIADO AL DUAL FUERTE DE UN CASI-TONELADO

Siguiendo a KÖTHE ([15], § 28,2.), si E(T) es un espacio localmente convexo, la topología bornológica asociada a T (i.e, la más fina de las topologías localmente convexas en E que tiene los mismos acotados que T) la denotaremos por T^x.

(III,3.1) TEOREMA.- Si E(T) es un espacio casi-tonelado, se tiene que,

$$\beta(E',E)^x = \beta(E',\check{E}).$$

Demostración: Al ser E(T) casi-tonelado, tendremos:

$$(E'(\beta(E',E)^x))' = \{ f \in E'^* : f(A) \text{ acotado para cada } A \ \beta(E',E)\text{-acotado} \} =$$

$$= \{ f \in E'^* : \ f(A) \text{ acotado para cada } A \text{ T-equicontinuo} \} =$$

$$= \check{E}.$$

Luego aplicando el teorema de Mackey-Arens (§ 21,4. (3),[15]) tendremos:

$$\beta(E',E)^x \preccurlyeq \mu(E',\check{E}) \preccurlyeq \beta(E',\check{E}).$$

Veamos que $\beta(E',\check{E}) \preccurlyeq \beta(E',E)^x$: sea $\{U_\alpha : \alpha \in D\}$ una base de entornos de cero en E(T) absolutamente convexos y cerrados. Entonces como E(T) es casi-tonelado, si para cada $\alpha \in D$ tomamos $B_\alpha = U_\alpha^o$, tenemos que $\{B_\alpha : \alpha \in D\}$ es un sistema fundamental de acotados de $E'(\beta(E',E))$. Ahora, teniendo en cuenta que " un espacio es bornológico si y sólo si, cada absolutamente convexo bornívo y algebraicamente cerrado (o lo que es lo mismo, cerrado en la topología localmente convexa más fina) es un entorno de cero", tendremos que los conjuntos de la forma:

$$W = \overline{\Gamma_{\alpha \in D} \rho_\alpha B_\alpha}^{\mu(E',E'^*)} = \overline{\Gamma_{\alpha \in D} \rho_\alpha B_\alpha}^{\sigma(E',E'^*)} =$$

$$= \overline{\Gamma_{\alpha \in D} \left(\frac{1}{\rho_\alpha} U_\alpha \right)^o}^{\sigma(E',E'^*)} = \overline{\Gamma_{\alpha \in D} (\lambda_\alpha U_\alpha)^o}^{\sigma(E',E'^*)} =$$

$$= \overline{\Gamma_{\alpha \in D} \left(\lambda_\alpha \overline{U_\alpha}^{\sigma(E'^*,E')} \right)^o}^{\sigma(E',E'^*)} =$$

$$= \left(\bigcap_{\alpha \in D} \lambda_\alpha \overline{U_\alpha}^{\sigma(E' \,,E')} \right)^o , \quad \lambda_\alpha > 0 \text{ para todo } \alpha \in D,$$

forman una base de entornos de cero en $E'(\beta(E',E)^x)$.

Sea V un $\beta(E',\check{E})$-entorno de cero en E', entonces existirá un $B \subset \check{E}$ absolutamente convexo y $\sigma(\check{E},E')$-acotado, tal que, $B^o \subset V$. Como B es un $\sigma(\check{E},E')$-acotado, B^o será un tonel en E'. Entonces, para cada $\alpha \in D$, como U^o es un T-equicontinuo, $(E')_{U^o}$ será un espacio de Banach. Con lo cual B^o será un entorno de cero en $(E')_{U^o}$; de aquí que, existirá un $\rho_\alpha > 0$, tal que,

$$\rho_\alpha U^o \subset B^o,$$

luego:

$$B \subset (\rho_\alpha U^o)^o = \frac{1}{\rho_\alpha} U^{oo} = \lambda_\alpha \overline{U}^{\sigma(E'^*,E')} .$$

Por tanto:

$$B \subset \bigcap_{\alpha \in D} \lambda_\alpha \overline{U_\alpha}^{\sigma(E'^*,E')},$$

con lo cual:

$$W = \Big(\bigcap_{\alpha \in D} \lambda_\alpha \overline{U_\alpha}^{\sigma(E'^*,E')} \Big)^{o} \subset B^{o} \subset V.$$

Luego $\beta(E',\check{E}) \prec \beta(E',E)^{x}$.

C.Q.D.

(III,3.2) <u>NOTA</u>.- GROTHENDIECK en [8] (ver también §29,4. (2), [15]) demuestra:

(1).-" Si E(T) es un espacio localmente convexo metrizable, se tiene que,

$$\beta(E',E)^{x} = \beta(E',E'')."$$

Nuestro teorema (III,3.1) junto con (1) nos proporciona el siguiente resultado:

(2).-" Si E(T) es un espacio metrizable, se tiene que,

$$\beta(E',E'') = \beta(E',\check{E})."$$

Con lo cual, obtenemos el siguiente resultado de VALDIVIA [42] :

(3).-" Sea T un subconjunto convexo de un espacio metrizable E(T), y sea $A \subset \check{T}$ un $\sigma(\check{E},E')$-acotado. Entonces, existe un subconjunto acotado B de T'' tal que,

$$A \subset \check{B}."$$

En el caso particular en que T = E.

BIBLIOGRAFIA

[1] BUCK R.C. "Operator algebras and dual spaces" Proc. Amer.Math.Soc. 3 (1952),681-687.

[2] BUCK R.C. "Bounded continuous functions on a locally compact spaces" Michigan Math.J. 5 (1958), 95-104.

[3] DE VITO C.L. "On Alaoglu's Theorem,Bornological Spaces and the Mackey-Ulam Theorem" Math.Ann. 192 (1971),83-89.

[4] DE WILDE M.,HOUET C. "On Increasing Sequence of Absolutely Convex Sets in Locally Convex Spaces" Math.Ann.192 (1971),257-261.

[5] FREMLIN D.H.,GARLING D.J.H.,HAYDON R.G. "Bounded measures on topological spaces" Proc.London Math.Soc.(3) 25 (1972),115-136.

[6] GARLING D.J.H. "A generalized form of inductive limit topology for vector spaces" Proc.London Math.Soc. (3) 14 (1964),1-28.

[7] GILLMAN L., JERISON M. "Rings of Continuous Functions" Univ. Series in Higher Math., Van Nostrand, Princeton N.J., 1960.

[8] GROTHENDIECK A. "Sur les espaces (F) et (DF)" Summa Bras. Math. 3 (6) (1954), 57-123.

[9] GROTHENDIECK A. "Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires" Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[10] HORVATH J. "Topological Vector Spaces and Distributions Vol I" Addison-Wesley 1966.

[11] HUSAIN T. "Two new classes of locally convex spaces" Math. Ann. 116 (1966), 289-299.

[12] KATS M.P. "Every (DF)-space is quasinormable" Funct Analysis Appl 7 (1973), 157-158.

[13] KOMURA Y. "On linear topological spaces" Kumamoto J. Sci. Ser A, 3 (1962), 148-157.

[14] KOMURA Y. "Some exemples on linear topological spaces" Math. Ann. 153 (1964), 150-162.

[15] KÖTHE G. "Topological Vector Spaces I" Springer-Verlag 1969.

[16] KÖTHE G. "Topological Vector Spaces II" Springer-Verlag 1979.

[17] LEVIN M., SAXON S. "A note on the inheritance of properties of locally convex spaces of countable codimension" Proc.Amer.Math.Soc. 29 (1971), 97-102.

[18] MARQUINA A., PEREZ P. "On quasibarrelled spaces" Manuscripta Math. 12 (1974), 387-397.

[19] MARQUINA A. "Sobre límites inductivos estrictos numerables" Collectanea Math. 26 (1975), 3-9.

[20] NACHBIN L. "Topological vector spaces of continuous functions" Proc.Nat.Acad.Sci.USA. 40 (1954), 471-474.

[21] NOUREDDINE K. "Espaces du type D_b" C.R.Acad.Sc.Paris, Série A, 276 (1973), 1301-1301.

[22] NOUREDDINE K. "Nouvelles classes d'espaces localement convexes" Publ.Dép.Math.Lyon. 10-3 (1973), 259-277.

[23] NOUREDDINE K. "Note sur les Espaces D_b" Math.Ann. 219 (1976), 97-103.

[24] PIETSCH A. "Nuclear Locally Convex Spaces" Springer-Verlag 1972.

[25] ROBERTSON A.P.,ROBERTSON W.J. "Topological Vector Spaces" Cambridge University Press 1973.

[26] ROELCKE W. "On the Finest Locally Convex Topology Agreeing with a Given Topology on a Sequence of Absolutely Convex Sets" Math. Ann. 198 (1972),57-80.

[27] RUBEL L.A.,SHIELDS A.L. "The space of bounded analytic functions on a region" Ann.Inst Fourier 16 (1966),235-277.

[28] RUESS W. "A Grothendieck Representations for the Completion of Cones of Continuous Seminorms" Math.Ann. 208 (1974),71-90.

[29] RUESS W. "On the Locally Convex Structure of Strict Topologies" Math.Z. 153 (1977),179-192.

[30] RUESS W. "Closed graph theorems for generalized inductive limit topologies" Math.Proc.Cambridge Soc. 82 (1977),67-83.

[31] RUESS W. "The Strict topology and (DF) Spaces" Funct Analysis:Surveys and Recent Results.North-Holland (1977),105-118.

[32] SAXON s.,LEVIN M. "Every countable-codimensional subspaces of a barrelled spaces is barrelled" Proc.Amer.Math.Soc. 29 (1971),91-96.

[33] SCHAEFER H.H. "Espacios vectoriales topológicos" Teide,Barcelona 1974.

[34] SENTILLES F.D. "Bounded continuous functions on a completely regular spaces" Trans.Amer. Math.Soc. 168 (1972),311-336.

[35] SHIROTA T. "On locally convex vector spaces of continuous functions" Proc.Jap.Acad. 30 (1954),294-298.

[36] VALDIVIA M. "Sobre los conjuntos compactos de los espacios DF" Collectanea Math. 21 (1970),3-7.

[37] VALDIVIA M. "Absolutely convex sets in barrelled spaces" Ann.Inst Fourier. 21 (1971), 3-13.

[38] VALDIVIA M. "On DF Spaces" Math.Ann. 191 (1971), 38-43.

[39] VALDIVIA M. "On subspaces of countable codimension of a locally convex spaces" J.reine angew.Math. 256 (1972),185-189.

[40] VALDIVIA M. "On a class of Quasibarrelled Spaces" Math.Ann. 202 (1973),295-300.

[41] VALDIVIA M. "On quasi-completeness and sequential completeness in locally convex spaces" J.reine angew.Math. 276 (1975),190-199.

[42] VALDIVIA M. "Convex sets in metrizable spaces" (pendiente de publicación)

[43] VAN DULST D. "(Weakly) Compact Mapping into (F)-Spaces" Math.Ann. 224 (1976),111-115.

[44] WARNER S. "The topology of compact convergence on continuous functions spaces" Duke Math.J. 25 (1958),265-282.

[45] WEBB J.H. "Sequential convergence in locally convex spaces" Proc.Cambridge.Phil.Soc. 64 (1968),341-364.

UNIVERSIDAD DE VALENCIA — FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Reunido el Tribunal que suscribe en el día de la fecha, acordó otorgar, por unanimidad, a esta Tesis doctoral de

D. JOSE MANUEL MAZÓN RUIZ

la calificación de Sobresaliente cum laude

Valencia, a 14 de JUNIO de 1980

El Secretario,

El Presidente

UNIVERSIDAD DE VALENCIA - FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS -