Departament de Didàctica de la Matemàtica

Facultat de Matemàtiques
Universitat de València

Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo: Un análisis en la formación de profesores.

Tesis doctoral que presenta
Bernardo Gómez Alfonso

bajo la dirección del
Dr. Eugenio Filloy Yagüe

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA BIBLIOTECA DE CIÈNCIES

Curso Académico 1993-1994

UMI Number: U603095

All rights reserved

INFORMATION TO ALL USERS
The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted.

In the unlikely event that the author did not send a complete manuscript
and there are missing pages, these will be noted. Also, if material had to be removed,
a note will indicate the deletion.

UMI U603095
Published by ProQuest LLC 2014. Copyright in the Dissertation held by the Author.
Microform Edition © ProQuest LLC.
All rights reserved. This work is protected against
unauthorized copying under Title 17, United States Code.

ProQuest LLC
789 East Eisenhower Parkway
P.O. Box 1346
Ann Arbor, MI 48106-1346

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
BIBLIOTECA CIÈNCIES

Nº Registre 6512
DATA 2·V·94
SIGNATURA
143 T.D
Nº LIBIS: i18951090

b16763993

. Matemáticas.

30 cms.

CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N.

Dr. D. EUGENIO FILLOY YAGÜE, Profesor Titular del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México, D.F.

CERTIFICO:

1) Que la presente memoria titulada *El cálculo mental en el contexto educativo: un análisis en la formación de profesores* ha sido realizada bajo mi dirección por D. BERNARDO GOMEZ ALFONSO, en el Departament de Didàctica de la Matemàtica de la Universitat de València, y constituye su tesis para optar al Grado de Doctor en Matemáticas.

2) Que esta memoria cumple los requisitos exigidos por la legislación vigente, por lo que autorizo su presentación en la Universitat de València.

Y para que así conste, firmo el presente certificado.

En México, Distrito Federal, a los veintiocho días del mes de febrero de Mil Novecientos Noventa y Cuatro.

A t e n t a m e n t e.

Fdo. EUGENIO FILLOY YAGUE.

Av. Instituto Politecnico Nacional 2508 Col. San Pedro Zacatenco México, D.F. C.P. 07300
Tels: 752-0677 y 754-0200 Telex: 1772826 PPTME Fax: 752-0590 y 586-6290

Agradecimientos.

Cúmpleme agradecer la colaboración que me han prestado las siguientes personas:

En primer lugar, Eugenio Filloy, director de la tesis, cuyos comentarios han ido centrando y encauzando las ideas que dieron sentido a este trabajo.

A Angel Gutiérrez, tutor de la tesis y director del programa de doctorado que la ha hecho posible, cuyas acertadas correcciones han mejorado notablemente la memoria.

A mi amiga y entrañable colega, Olimpia Figueras, quien ha tenido la inmensa paciencia de leer y releer mis múltiples borradores y la delicadeza de transmitirme sus valiosísimas impresiones.

A Joaquin Giménez, cuyo conocimiento sobre el cálculo mental ha permitido puntualizar magistralmente mis impresiones.

A Luis Puig, cuyas correcciones del último borrador han evitado algunos defectos de presentación imperdonables.

A los estudiantes de primero de Magisterio de las especialidades de educación especial y de ciencias, por su desinteresada colaboración, sin ellos nunca se hubiera podido hacer este trabajo.

Al resto de mis compañeros del Departamento de Didàctica de la Matemàtica de la Universitat de València, por el clima de camaraderia con que me han envuelto durante estos años.

Por último, quiero dedicar este trabajo a mi familia: A Jóse, Carlos, Alfons, a mi madre, y también a la memoria de mi padre.

INDICE

Portada..... 1

Agradecimientos..... 2

Indice..... 4

Resumen..... 8

1 Descripción del estudio..... 9
2 Resultados y conclusiones del estudio panorámico..... 10
3 Resultados y conclusiones del estudio experimental..... 14

Capítulo I. PRESENTACION..... 19

I.0 Presentación de este capítulo..... 20
I.1 Problemática Educativa..... 20
I.2 Objeto y finalidad del estudio..... 25
I.3 La investigación precedente..... 27
I.4 Problemática específica que se va a investigar..... 30
I.5 Hipótesis..... 32
I.6 Diseño y desarrollo de la investigación..... 33
I.7 Significado que se da en este trabajo al cálculo mental..... 37

Capítulo II. MOTIVACION EDUCATIVA..... 41

II.0 Presentación de este capítulo..... 42
II.1 El cálculo mental en el currículum oficial español reciente..... 42
II.2 Importancia utilitaria del cálculo mental en comparación con el de lápiz y papel..... 48
II.3 Razones, no utilitarias, que motivan la inclusión del cálculo mental en el currículum para la Educación Obligatoria..... 49
II.4 Reticencias frente a la enseñanza del cálculo mental..... 53
II.5 Resumen..... 56

Capitulo III. LA CONFIGURACION DE LOS METODOS HISTORICOS DE CALCULO MENTAL 58

III.0 Presentación de este capítulo 59
III.1 La historia del cálculo mental como objetivo educativo 59
III.1.1 El siglo XIX como punto de inflexión en las Aritméticas 59
III.1.2 Cambios fundamentales en el siglo XIX 60
III.1.3 La evolución del cálculo mental en las Aritméticas 63
III.2 Los métodos recogidos en las Aritméticas 79
III.2.1 Las Aritméticas analizadas 79
III.2.2 Los métodos que ya se conocían desde la época de los árabes.. 81
III.2.3 Textos impresos anteriores al siglo XIX 92
III.2.3.1 La Aritmética de Treviso (1478) 92
III.2.3.2 El Tratado de Juan Pérez de Moya (1563) 94
III.2.4 Textos del siglo XIX 106
III.2.4.1 El Tratado de José Mariano Vallejo (1813) 106
III.2.4.2 El Tratado de S. F. Lacroix (1797) 114
III.2.5 Los textos del siglo XX, precedentes de los actuales 121
III.2.5.1 La aritmética de Dalmáu Carles (1898) 121
III.2.5.2 El Tratado de Bruño (1932) 127
III.2.6 Las series de libros escolares actuales 136
III.2.6.1 El texto de Anaya 136
III.2.6.2 El texto de Santillana 141
III.2.7 Otros métodos 143
III.2.8 Resumen de la evolución de los métodos 145
III.3 Compendio, síntesis y organización de los métodos 148
III.3.1 Criterios para organizar los métodos de cálculo mental 148
III.3.2 Diferenciación entre estrategia, método, etc 150
III.3.3 Esquema de la organización global de los métodos 154
III.3.4 Catálogo ilustrado con ejemplos, de los métodos de cálculo mental de acuerdo con la organización global anunciada 155

Capítulo IV. LA INVESTIGACION AFIN PRECEDENTE 170

IV.0 Preámbulo 171
IV.1 Líneas de investigación localizadas 171

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA BIBLIOTECA FACULTAT DE CIÈNCIES

IV.2 Resultados de la investigación precedente 172
IV.3 Conclusiones 199
IV.4 Líneas que abren estas investigaciones 201

Capítulo V. LA EXPERIMENTACION 203

V.0 Presentación 204
V.1 Descripción del experimento 204
V.1.1 Propósito 204
V.1.2 Etapas 205
V.1.3 Las pruebas tests realizadas 207
V.1.4 Las variables estudiadas 210
V.1.5 Las entrevistas 211
V.1.7 La muestra de estudiantes seleccionada 212
V.1.8 La propuesta didáctica 213
V.2 Resultados 220
V.2.1 Análisis de las respuestas en el pretest de restar 220
V.2.1.1 Exito 220
V.2.1.2 Tipos de respuesta incorrecta 221
V.2.1.3 Flexibilidad 224
V.2.1.4 Disponibilidad 225
V.2.1.5 La forma de operar la coma decimal 232
V.2.2 Análisis de las respuestas en el pretest de multiplicar 233
V.2.2.1 Exito 233
V.2.2.2.Tipos de respuesta incorrecta 234
V.2.2.3 Flexibilidad 242
V.2.2.4 Disponibilidad 243
V.2.2.5. La forma de operar la coma decimal 250
V.2.3 Análisis de las respuestas en el postest de restar 252
V.2.3.1 Exito 252
V.2.3.2 Tipos de respuesta incorrecta observados 253
V.2.3.3 Flexibilidad 258
V.2.3.4 Disponibilidad 259
V.2.3.5 La forma de operar la coma decimal 265

V.2.4 Análisis de las respuestas en el postest de multiplicar..... 266
V.2.4.1 Exito..... 266
V.2.4.2 Tipos de respuesta incorrecta..... 267
V.2.4.3 Flexibilidad..... 273
V.2.4.4 Disponibilidad..... 274
V.2.4.5 La forma de operar la coma decimal..... 279
V.3 Análisis de la problemática observada en las pruebas..... 281
V.3.1 La problemática emergente al calcular mentalmente..... 281
V.3.2 Análisis de la problemática identificada..... 282
V.3.2.1 Teoremas implícitos en la resta..... 283
V.3.2.2 Teoremas implícitos en la multiplicación..... 303
V.4 Conclusiones de la experimentación..... 385
V.4.1 Introducción..... 385
V.4.1 Resultados..... 386
V.4.3 Implicaciones para la enseñanza..... 399

Anexos..... 405
Tests..... 406
Tablas de respuestas de los estudiantes..... 411
Citas textuales de otros autores..... 430

Referencias..... 436

RESUMEN

1. Descripción del estudio

En esta memoria se presenta un estudio panorámico y experimental sobre los métodos histórico-intrínsecos (los utilizados en la literatura que no se sirven de otros artilugios que la propia elaboración simbólica) de cálculo mental de las cuatro operaciones en el contexto educativo. Su finalidad ha sido conocer cuál es el saber transmitido por la tradición recogida en los libros de aritmética, y analizar cómo se apropian de este saber los que aprenden. En última instancia se ha pretendido hacer aportaciones que contribuyan a fundamentar sugerencias para el currículum y la enseñanza.

El estudio panorámico se enfocó hacia el análisis de la configuración de estos métodos de cálculo a lo largo de su historia como objetivo educativo. En otras palabras, se trató de conocer cuáles han sido, cómo se han organizado y secuenciado para la enseñanza y cuál ha sido su motivación curricular, todo ello a la vista de tal y como ha quedado reflejado en las Aritméticas antiguas y modernas y en los documentos oficiales que determinan el currículum general y público español.

El estudio experimental se centró en aprovechar la información obtenida en el apartado anterior, para elaborar una propuesta didáctica para la enseñanza de los métodos de cálculo mental, conducente a un análisis en la formación de profesores del nivel de la enseñanza obligatoria.

Este análisis se orientó hacia la confirmación de las hipótesis que se plantearon, sobre la aplicabilidad y transferibilidad de los métodos, y hacia la determinación de las concepciones que podrían explicar la falta generalizada de competencia de los estudiantes, y, en particular, a explicitar aquéllas que motivan los errores de tipo cognitivo-matemático que cometen.

Subyace en este trabajo la idea de que los métodos de cálculo mental comportan un tipo de análisis de las situaciones numéricas que son un

dominio privilegiado para hacer emerger y contrastar las concepciones que los estudiantes tienen sobre los procedimientos de cálculo, que de otra manera, cuando sólo utilizan los métodos de columnas, permanecen ocultas. Se tiene el convencimiento de que conocer estas concepciones y enfrentar a los estudiantes con ellas, no sólo redundará en un beneficio funcional sino que contribuirá a sentar bases más firmes para la enseñanza de la aritmética y para su transición al álgebra, porque, como se ha dicho (Matz, 1982), algunos de los errores que en ésta se dan tienen su origen en una falta de dominio y comprensión de los procedimientos de aquélla.

2. Resultados y conclusiones del estudio panorámico

La motivación educativa

El cálculo mental vuelve a ser incluido en los nuevos currícula oficiales escolares españoles (DCB, 1989 y DBR, 1990), en un enfoque que no es principalmente el utilitario, rápido o agilizador de la mente como antaño, sino otro basado en planteamientos que, pretendiendo disminuir el énfasis tradicional sobre el cálculo escrito rígido para otorgárselo a la calculadora y al calculo variado, dan al cálculo mental un papel en la adquisición de los conceptos relacionados con las técnicas de cálculo, con la profundización de los conocimientos matemáticos intuitivos antes de su formalización y como medio para promover la reflexión de los estudiantes y la evaluación y reorientación del trabajo del profesor.

Las opiniones de los expertos puntualizan este nuevo papel del cálculo mental en el currículum con argumentos tales como que sirve para fortalecer la comprensión del valor de posición, comprender y desarrollar los aplicabilidad de los equivalentes numéricos del sistema de numeración, descubrir que el sistema numérico está repleto de pautas aritméticas recurrentes, atender a todos los pasos del procedimiento, contrastar y hacer emerger las concepciones de los

estudiantes sobre los métodos de cálculo, analizar las situaciones numéricas, e incluso, para trabajar la transición del lenguaje de la aritmética al del álgebra.

En definitiva, se podría decir que, en la actualidad, se defiende la inclusión del cálculo mental en los nuevos currícula por varias razones, las cuales se podrían resumir en dos, a saber, porque puede contribuir el desarrollo del pensamiento aritmético y porque puede ser un medio para el diagnóstico y reorientación del proceso de enseñanza.

La configuración y evolución histórica

El cálculo mental no aparece de un modo explícito en los libros de aritmética estudiados hasta el final del siglo XIX. Eso no quiere decir que sus métodos no fueran conocidos, ya que se encuentran documentados, al menos, desde la época de los árabes.

Para explicar cómo se han configurado en su larga historia, se distinguen, en este trabajo, tres momentos claves.

1. El primero, que abarca hasta el siglo XIX, es la época de las reglas breves para ser aprendidas de memoria. Los manuales presentaban varios métodos alternativos en coexistencia para cada operación, de un modo reglado, sobre ejemplos ilustrativos, y sin nada que se parezca a lo que hoy llamaríamos una fundamentación.

El concepto de método estándar no existe todavía y por eso los métodos se presentan compendiados, unos detrás de otros, siguiendo una secuencia, detallada en un capítulo posterior, que en el caso de la multiplicación es: primero los métodos para la tabla o números de una cifra, después los métodos para la tabla mayor o números de dos cifras, y por último los métodos para números cualesquiera. Para la suma no se dan métodos alternativos, mientras que para la resta sí, pero todos de columnas y generales. Tampoco para la división se presentan métodos particulares, y los pocos métodos alternativos que se

consideran apenas se diferencian en cuanto a la forma de disponer los restos parciales y los términos dividendo, divisor, y cociente.

2. El segundo, que coincide prácticamente con el siglo XIX, es el de los métodos para la abreviación. Este enfoque es paralelo a la institucionalización del sistema general y público de enseñanza que trae consigo un currículum obligatorio, y como consecuencia la estandarización de cuatro métodos o cuatro reglas que todos deben aprender. Esto se traducirá en que los métodos varios o alternativos de las aritméticas precedentes pasarán a ocupar un lugar secundario y sólo serán recogidos por su valor como métodos para la abreviación. Así, serán presentados en el formato vertical de los algoritmos de columnas y en un apéndice recogido al final de los libros. El interés de los autores seguirá centrado, como antaño, en abreviar la multiplicación, porque en el caso de la suma y de la resta no hay necesidad de abreviar las reglas estándar, y en el caso de la división no hay alternativas para simplificarla.

En esta época, irrumpe la concepción de la aritmética como ciencia y los autores, que se preocupan por el orden, enlace y fundamentación de las ideas, debaten entre la conveniencia de presentarlas analítica o sintéticamente. El lenguaje preferido para explicar los métodos de cálculo es el retórico que se apoya en la definición de la operación y en los órdenes de unidad de las cifras, de un modo en el que se separa la descripción de la fundamentación. Por otra parte, en el caso de la multiplicación, se consolida la secuencia analítica que perdura hasta nuestros días: tablas, producto de un número de varias cifras por otro de una sola, y producto de dos números de varias cifras reduciéndolo al caso anterior que ya se sabe resolver.

En cuanto a los métodos alternativos, se abandonan los de la Tabla Mayor, que son los que corresponden a la casuística de los números de dos cifras, y también, los de los Complementos, que son los que consisten en cambiar una multiplicación por la de sus complementos aritméticos. En cambio, se aumenta la casuística a la que se aplican los

otros métodos alternativos, en particular los vinculados a las relaciones alícuotas o "ser divisor de". Esto último tiene que ver con la inclusión en los textos de secciones dedicadas a estudiar las alteraciones de los resultados por las de los datos, y a hacer comparaciones entre los resultados de diversas operaciones relacionadas, una consecuencia de las cuales es el convencimiento de que a veces la división facilita la multiplicación, con la consiguiente pérdida del temor a dividir que se intuye en las Aritméticas precedentes.

3. El tercero y último, ya en el siglo XX, es el de los métodos rápidos o de cálculo mental propiamente dicho. Comienza este momento marcado por la influencia de la "psicología de las facultades" que considera la aritmética mental como un objetivo educativo por su papel como disciplina de la mente, e irá virando a lo largo del siglo XX hacia la justificación utilitaria, es decir, hacia la justificación por las necesidades de la vida diaria convirtiéndose en consecuencia en cálculo rápido.

En este siglo, en el que se consolida la asunción por la aritmética de los medios del álgebra, se unifica la presentación y la fundamentación de los métodos gracias a la utilización del lenguaje horizontal de igualdades y paréntesis que hace que los métodos aparezcan como consecuencias de las propiedades de las operaciones y del sistema simbólico de la numeración decimal.

Esto supone una ruptura con el formato vertical de columnas que permite incorporar métodos alternativos para la suma y la resta, que, si bien no son propiamente métodos para abreviar, son en cambio valiosos para el cálculo mental. Además se continúa ampliando la casuística a la que se aplican los métodos, en particular a los números decimales, gracias a que su forma fraccionaria hace que se le puedan aplicar los mismos métodos que se aplican a los naturales. Por último, se incorporan también algunos métodos tales como los basados en las fórmulas cuadráticas del "binomio", o de "la suma por la diferencia", y

alguna que otra fórmula, tal como la de la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética de diferencia uno.

3. Resultados y conclusiones del estudio experimental

Se estudió el desempeño de los estudiantes para profesores en la resolución de ejercicios de cálculo mental con números naturales y decimales, antes y después de recibir enseñanza de una selección actualizada de los métodos histórico-intrínsecos obtenidos a partir del análisis bibliográfico, exclusivamente con naturales, en dos pruebas tipo test que consistieron en la resolución de 14 y 20 ejercicios respectivamente, mitad de restar y mitad de multiplicar.

El estilo fue escrito-escrito, es decir pregunta escrita y respuesta escrita, como es usual en los tests, estas últimas completadas con la explicación del procedimiento seguido. No se plantearon ejercicios de sumar y de dividir porque se tenía el convencimiento, basado en experiencias piloto previas, de que la suma mental no presenta dificultades notables y la división apenas se hace mentalmente.

A partir del análisis de las explicaciones que dieron los estudiantes sobre sus respuestas, tanto en las pruebas como mediante entrevistas videograbadas con individuos seleccionados, se obtuvieron evidencias confirmatorias de que:

1º Antes de recibir enseñanza la gran mayoría de los estudiantes estaban anclados en los métodos de columnas, es decir, no usaban ningún otro método alternativo. No obstante, los pocos estudiantes que los usaron pusieron de manifiesto que los métodos históricos ya estaban vigentes en sus mentes.

Tras la enseñanza se obtuvo como consecuencia un avance significativo en cuanto a la flexibilidad y autonomía en el uso de métodos alternativos por los estudiantes, tanto para la resta como para

la multiplicación, y tanto para los números naturales como para los números decimales, que se caracterizó por el desanclaje (abandono) de los métodos de columnas, uso de métodos distintos para situaciones distintas, por personas distintas, y uso de los mismos métodos histórico-intrínsecos enseñados, y no otros.

2º. De la misma manera que el análisis bibliográfico evidenció que los métodos y estrategias para el cálculo mental con números decimales eran los mismos que para el cálculo mental con números naturales, también lo evidenció el desempeño de los estudiantes, los cuales aplicaron en los ejercicios con números naturales los mismos métodos que también aplicaron en los ejercicios con números decimales, y viceversa.

3º. La enseñanza de los métodos de cálculo mental con números naturales produjo un avance en la disponibilidad o surtido de métodos que aplicaron los estudiantes, que fue de la misma medida o amplitud con los números naturales que con los números decimales, ya que aumentó el surtido de métodos que aplicaron con frecuencias significativas, y además los métodos que fueron usados con más frecuencia fueron los mismos en los ejercicios con números naturales que en los ejercicios con números decimales.

4º. Los estudiantes, al aplicar los métodos de cálculo mental cometieron una gran variedad de tipos de errores. Contrariamente a lo que ocurrió antes de la enseñanza la incidencia de los errores fue muy superior a la de los fallos de descuido, lo que evidenció que el uso de los métodos históricos de cálculo mental pudo ser utilizado como un dominio privilegiado para hacer emerger una problemática ligada al aprendizaje de la aritmética que, de otra manera, mientras calculaban con los métodos de columnas, permaneció oculta.

La problemática que evidenciaron estos errores consistió en ciertos procedimientos autoadaptados o autofabricados, que parecieron relacionados con la influencia de los conocimientos previos sobre los

sobrevenidos. Estos procedimientos parecieron basados en malentendidos provocados por propiedades no explicitadas de determinadas situaciones numéricas, que ellos perciben como verdaderas porque les han funcionado en un determinado campo de validez, pero que no siempre funcionan, por lo que se denominan en este trabajo teoremas implícitos.

Se identificaron tres clases de estos teoremas implícitos erróneos: Generalizaciones inapropiadas de métodos alternativos que son válidos en una operación a otra donde no lo son; extrapolaciones improcedentes de reglas de un determinado algoritmo de columnas a otros algoritmos donde no funcionan; y centramientos inadecuados en los datos o cifras que se alteran en un determinado método, en vez de fijarse en el efecto que produce sobre el resultado la alteración efectuada.

5º La enseñanza de los métodos histórico-intrínsecos de cálculo mental para los números naturales, produjo su uso no sólo con estos números sino también con los decimales, salvo en aquellos estudiantes, los menos, que vincularon las reglas para operar la coma decimal exclusivamente a los algoritmos estándar del formato vertical de columnas, en vez de al cálculo con decimales en general.

La transferencia de los métodos fue desigual en la resta y en la multiplicación ya que en la resta los estudiantes prefirieron aplicar los métodos alternativos a los de columnas directamente, es decir, no tratándolos como naturales, sino arrastrando la coma. Y en la multiplicación, prefirieron aplicarlos indirectamente, bien reduciendo previamente los datos a naturales mediante alguna expresión fraccionaria equivalente, o bien prescindiendo de la coma para recuperarla al final, tras operar mediante la regla usual de contar las cifras a la derecha de la coma decimal.

6º La confrontación con las formas inapropiadas de resolución que se llevó a cabo por medio de entrevistas, usando la representación

simbólica del lenguaje horizontal de ecuaciones y paréntesis, desencadenó procesos cognitivos que permitió a los estudiantes reconceptualizar los procedimientos de cálculo en base a una mejor comprensión del significado y de las propiedades de las operaciones, y también, del uso del sistema de numeración, de las expresiones numéricas equivalentes, del efecto invariante en el resultado de ciertas alteraciones de los datos, y en última instancia de la representación de esos métodos vía expresiones de tipo algebraico.

Implicaciones para la enseñanza

Por un lado, la problemática identificada, en cuanto a la aplicabilidad y transferibilidad de los métodos históricos, indica que muchos estudiantes construyen mal sus concepciones relacionadas con el cálculo aritmético, de una manera que no se debe tanto a conceptos mal desarrollados, como a fallos en el dominio, significación, y comprensión de las reglas de los algoritmos estándar, una comprensión pobre del efecto que las alteraciones en los datos produce en los resultados, un débil reconocimiento de los conceptos, leyes, y principios que rigen la operatoria, una no aceptación de resultados parciales negativos, y también, ausencia de la necesaria comprobación o estimación de la razonabilidad del resultado, que en caso de discrepancia con el resultado primeramente obtenido podría hacerles recapacitar sobre su forma de proceder.

Por otra parte, los métodos de cálculo mental tal y como se han utilizado en este trabajo, se han revelado especialmente valiosos para:

1 El desarrollo del pensamiento aritmético, en particular lo relacionado con el análisis de las situaciones numéricas y el manejo de los hechos de la numeración para la expresión flexible, significativa y no automática de sus acciones sobre los números.

2 El diagnóstico, tanto para que el profesor conozca las concepciones que sobre los procedimientos de cálculo tienen los estudiantes, como para que ellos se vean obligados a enfrentarse con ellas, sentando así las bases para su posible reconceptualización.

En consecuencia, en la medida en que la problemática identificada en este trabajo indica la existencia de algunos efectos no deseados de una enseñanza escolar excesivamente volcada al automatismo en las operaciones y prácticamente centrada en los algoritmos de columnas, cabe postular la conveniencia de un cambio en la enseñanza que aproveche los métodos de cálculo mental, en la forma como se ha descrito en esta memoria, para hacer emerger estos efectos perniciosos y sentar las bases para hacerlos desaparecer.

CAPITULO I. PRESENTACION

I. PRESENTACION

I.0 Presentación de este capítulo

En este capítulo se describen los elementos que configuran la investigación que se describe después con más detalle en los capítulos siguientes.

En primer lugar se pone de manifiesto la problemática educativa en relación con el cálculo mental (en el punto 1.7 se explica su acepción) que da lugar a este trabajo. Esto permite centrar el estudio en puntos concretos y situarlo en el marco de las investigaciones precedentes.

A continuación se plantea una problemática específica que da lugar a hipótesis principales, a partir de las cuales se diseña la secuencia de pasos conducentes a su confirmación.

Se termina el capítulo estableciendo el significado que se asigna a algunos de los términos habituales usados en el estudio.

I.1 Problemática Educativa

El currículum

En España ha existido hasta la fecha un Currículum Nacional para el período de la Educación Obligatoria que ha contemplado la enseñanza del cálculo mental en el nivel denominado Ciclo Medio (de 8 a 10 años), cuyos resultados no se puede decir que sean satisfactorios. Hay varias razones que justifican esta afirmación.

En términos generales los profesores han primado el éxito en el resultado y la rapidez en la contestación, y así lo que han conseguido

ha sido el desánimo y la pérdida de interés de los estudiantes que calculan más lentamente, o bien de aquéllos que más errores cometen.

Las orientaciones ministeriales para este currículum nacional han defendido el cálculo mental en relación con la rapidez y el desarrollo de la agilidad de la mente en el cálculo de las cuatro operaciones (MEC, 1981).

Los libros de texto en vigor otorgan al tema un papel secundario, dedicando la mayor parte de las páginas al cálculo escrito con los algoritmos estándar o de columnas y relegando los ejercicios de cálculo mental a una posición marginal al final de las lecciones, de un modo que está desvinculado del desarrollo de las mismas.

Los profesores, con el marco de referencia delineado por los libros de texto, han tendido a abandonar su enseñanza y a obstaculizar su uso. Se explica así que la mayoría de los estudiantes que estudiaron con este currículum se muestren anclados en los métodos de lápiz y papel y que no utilicen con soltura otras alternativas de cálculo, mostrando poca flexibilidad de pensamiento, tal como se evidencia en el estudio realizado y que se describe en esta memoria en el capítulo quinto.

En el modelo de enseñanza actual se ha puesto tanta importancia en los algoritmos convencionales, que la finalidad de la enseñanza del cálculo se ha pervertido, ya que la palabra cálculo ha llegado a ser sinónimo de las "cuatro reglas", perdiéndose su significado histórico de herramienta o medio para expresar, componer y descomponer las cantidades.

> ...entendemos por cantidad todo aquello que puede ser mayor o menor, o todo lo que es susceptible de aumento y disminución. Pues que la cantidad no depende de ninguna otra propiedad de los cuerpos, es sumamente adecuada para formar el objeto de una ciencia abstracta que se conoce con el nombre de Matemáticas; de manera que matemáticas son las ciencias que tratan de averiguar las relaciones y propiedades de la cantidad; y siendo ésta susceptible sólo de aumento, o de disminución, se sigue

que las Matemáticas sólo podrán dar medios para expresar, componer y descomponer las cantidades; y cuando se ejecuta alguna de estas operaciones se dice que se calcula. (Vallejo, 1841, Introducción, p. XL, IV)

En la actualidad un nuevo modelo educativo, de corte descentralizado, comienza a ponerse en práctica. En los nuevos diseños curriculares vuelve a incluirse el cálculo mental en la enseñanza de la aritmética, fortaleciendo y actualizando su papel en la formación de los estudiantes y proyectándolo más allá del período de la Educación Primaria hasta la Secundaria.

Ahora bien, se va a abandonar un modelo de currículum oficial cuyos resultados en lo que respecta al cálculo mental no se puede decir que hayan sido satisfactorios, y se va a asumir uno nuevo cuyos beneficios educativos están por ver, y, aunque hay suficiente consenso en cuanto a la necesidad de llevarlo adelante y cierto acuerdo en cuanto a la manera de hacerlo, lo cierto es que las recomendaciones y sugerencias que se postulan para el cálculo mental carecen de una fundamentación rigurosa.

Por otra parte, por lo que se refiere al contenido, el problema concreto cuando se piensa en la enseñanza práctica del cálculo mental es el de determinar cuáles son los métodos con interés educativo, es decir, cuáles son los métodos que es necesario transmitir para asegurar una apropiación óptima del saber.

De acuerdo con Schubring (1987) la enseñanza práctica no está tanto más determinada por los decretos ministeriales y programas oficiales como por los libros de texto usados para la enseñanza, por lo que cabe pensar que los métodos de cálculo mental que es necesario reunir para asegurar la transmisión del saber son los que se encuentran recogidos por la tradición escrita en los libros de aritmética, una vez actualizados y seleccionados de acuerdo con los criterios que se siguen de los objetivos curriculares que se proponen.

De aquí que se considere necesaria:

1. Una investigación histórica que revisando un abanico suficientemente representativo de las Aritméticas antiguas y modernas, permita aportar un catálogo o lista de los métodos de cálculo mental, para ser presentado y organizado con criterios de actualidad.

2. Una investigación didáctica que precise cuáles son los beneficios educativos del cálculo mental y que contribuya a hacer efectiva la implantación del nuevo currículum.

Los errores

En los últimos tiempos se ha despertado un cierto interés por conocer las concepciones de los estudiantes, en un enfoque que entronca con el punto de vista constructivista del conocimiento en el que se asume que el conocimiento es construido por los individuos en función del conocimiento previo.

> La resolución de problemas es la fuente y el criterio del saber. Es en la resolución de problemas, o más generalmente en el tratamiento de situaciones-problema, que son elaboradas las nociones y son abstraidas las propiedades pertinentes. También es en la resolución de problemas que son puestos a prueba los conocimientos operatorios. El psicólogo y el maestro pueden formarse una imagen de los conocimientos y de las representaciones de los alumnos, a partir de los observables de que disponen, es decir de las acciones del sujeto en una situación problema y de los testimonios simbólicos que el sujeto proporciona de su actividad: formulaciones verbales, dibujos, esquemas, escrituras ...
>
> Muchas veces las diferentes respuestas y soluciones aportadas por los alumnos en el tratamiento de situaciones-problema pueden ser consideradas como concebidas por reglas de producción o procedimientos. Desde un punto de vista metodológico, es decisivo identificar estas reglas o procedimientos. Sin embargo, solamente podremos comprender su significado teniendo en cuenta las relaciones a las que dichas reglas o

procedimientos se aplican. En otros términos, es necesario considerarlos como "teoremas implícitos". El concepto de "teorema factual" denota a las propiedades de las relaciones percibidas y utilizadas por el sujeto en situación de resolución de un problema, entendiéndose que esto no significa que el sujeto sea capaz de explicitarla o de justificarla" (Vergnaud, 1981).

En este marco se explican algunas investigaciones conducentes a conocer las fuentes de los errores de los estudiantes. Error se utiliza aquí en el sentido de concepto equivocado, juicio falso, contrario a la verdad que no se debe a distracción o inadvertencia, casualidad o fallo de memoria (Centeno, 1988). Se considera que estos errores son muy interesantes porque revelan la existencia de modelos implícitos erróneos que están relacionados con malentendidos instalados y consolidados (Centeno, 1988).

En este sentido, el artículo de Matz (1982) sobre los errores en la resolución de problemas algebraicos, propone que son el resultado de adaptaciones razonables, pero que no siempre funcionan, a nuevas situaciones de los conocimientos previos adquiridos y que algunos de estos errores de álgebra tienen su origen en una falta de dominio y comprensión de los procedimientos aritméticos.

En el cálculo mental se ha constatado empíricamente (Carpenter, Matthews, Lindquist, Silver, 1984; Reys, Trafton, Reys, Zawojewski, 1984) la falta generalizada de competencia, y en particular la disminución de la misma cuando se pasa de calcular con números naturales a números decimales. Para explicar esto se ha dicho que es porque los conceptos no están bien desarrollados o porque faltan estrategias (entendidas como sinónimo de métodos), pero también cabe pensar que, en mayor o menor grado, esta falta de competencia puede estar asociada a errores en el sentido mencionado antes.

En otras palabras, algunas de las diferentes respuestas incorrectas de los estudiantes en la resolución de ejercicios de cálculo mental podrían ser debidas a reglas de producción o procedimientos autoadaptados o

inventados por ellos, que estarían relacionados con la influencia del conocimiento previo sobre el sobrevenido. Estos procedimientos, nunca enseñados en la forma en que los usan los estudiantes, se basarían en malentendidos provocados por propiedades no explicitadas de determinadas situaciones numéricas, que ellos perciben como verdaderas, quizás porque les han funcionado en un determinado campo de validez, pero que no siempre funcionan, por lo que se denominan aquí, usando la terminología introducida por Vergnaud (1981), en un sentido distinto del suyo, como teoremas implícitos.

De aquí que sea de desear una investigación que haga que estos teoremas implícitos se vuelvan explícitos produciendo los errores que den las pistas conducentes a conocer los malentendidos instalados y consolidados que afectan al desempeño en cálculo mental.

I.2. Objeto y finalidad del estudio

Se tiene el convencimiento de que el cálculo mental es beneficioso, no sólo para obtener una mayor competencia numérica, sino también para el desarrollo del pensamiento cuantitativo, en relación con el análisis de las situaciones numéricas y la toma conciencia de los procesos subyacentes en el cálculo.

También parece, de acuerdo con Butlen y Pezard (1991), que el cálculo mental es un dominio privilegiado para el aprendizaje de la aritmética porque permite contrastar y hacer emerger concepciones aritméticas de los estudiantes, que de otra manera, cuando sólo se aplican los algoritmos estándar o de columnas, permanecen ocultas.

En este marco de pensamiento, el presente trabajo se centra en conocer cuál es el saber transmitido por la tradición recogida en los libros de aritmética, sobre el tema en cuestión, y cómo se apropian de este saber los estudiantes, en este caso, estudiantes para profesores del nivel de la educación obligatoria.

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA BIBLIOTECA DE CIÈNCIES

En concreto se pretende trabajar en los tres aspectos siguientes:

1. En el aspecto de la tradición.

Para conocer lo que ha sido la motivación del cálculo mental como objeto del currículum de aritmética.

Para compilar los métodos histórico-intrínsecos del cálculo mental y analizar cómo se han configurado como objeto educativo a lo largo de la historia.

2. En el ámbito de los estudiantes.

Para conocer como es su desempeño en el cálculo mental de ejercicios numéricos de restar y multiplicar números naturales y decimales.

Para hacer emerger los errores que permitan analizar las concepciones que los explican.

3. En el ámbito de la enseñanza.

Para experimentar una nueva propuesta didáctica, en relación con el cálculo mental, que contribuya al cambio en la enseñanza que se postula en la actualidad en favor de una mayor comprensión de la aritmética elemental.

Para fundamentar sugerencias que contribuyan a solucionar la problemática específica observada en la falta de competencia de los estudiantes y especialmente en el tránsito de los números naturales a los decimales.

Para llevar adelante este estudio se toma como base:

La historia de los métodos de cálculo mental reflejada en una selección de libros de aritmética antiguos y modernos, del sistema escolarizado.

Las aportaciones de la investigación precedente más relevante.

La experimentación con estudiantes españoles para profesores del nivel obligatorio.

I.3 La investigación precedente

Algunos investigadores interesados en la problemática afín han realizado estudios de diferentes tipos (en un capítulo posterior aparece una descripción más detallada del trabajo realizado en esta dirección). En esta sección sólo se describen a grandes rasgos algunas de sus conclusiones:

Se ha observado que mientras que las matemáticas escolares llaman al cálculo de lápiz y papel, éste es el último recurso en las matemáticas de la calle, que son principalmente mentales, y que éstas últimas revelan una fuerte carga de conocimientos acerca del sistema de numeración decimal, que debe ser aprovechada en la escuela.

Las propuestas didácticas de los textos escolares llevan muy pocos problemas en relación con los que llevan para el cálculo escrito, a pesar de lo cual no todos pueden ser resueltos por lo profesores.

Los programas experimentales de enseñanza para el cálculo mental siempre producen un mayor avance en la habilidad de cálculo mental, que los programas correspondientes de los libros de texto, sin afectar negativamente al avance total en Aritmética, incluso en los estudiantes de menos habilidad.

Faltan instrumentos adecuados para la evaluación del cálculo

mental. En cualquier caso los test diseñados para medir el avance de los estudiantes en determinadas variables, como por ejemplo, la rapidez o el grado de dificultad, recomiendan limitar el número de ítems por sesión a un máximo de 10, para evitar pérdida de interés por parte de los resolutores, que los ítems deben estar puestos por orden de dificultad para evitar saltos y renuncias, y que se tenga en cuenta que el tiempo que requieren ejercicios diferentes también es diferente.

El formato de presentación influye en el nivel de éxito de los estudiantes. Los ítems presentados oralmente, de viva voz, resultan más difíciles que los presentados visualmente, para ser leídos, por ello no se puede esperar que los estudiantes alcancen, por arriba, el mismo nivel de competencia en la aritmética mental cuando la presentación es oral que cuando es escrita.

Los estudiantes usan diferentes procesos de pensamiento para llegar a la respuesta de un problema de aritmética mental, aunque la mayoría usan siempre, o alguna vez, el método de columnas. En cualquier caso, los estudiantes de habilidad alta varían más de método que los de habilidad baja, y lo superan en el número de métodos que usan. Los primeros parece que exploran y aprenden con la práctica mientras que los otros se mantienen siempre en el mismo método.

Ninguna de las variables asociadas, inteligencia, sexo, etc., asume un papel sobresaliente para explicar la habilidad en cálculo mental. No obstante, la memoria está positivamente asociada a los logros de los estudiantes, en particular, la memoria para recordar equivalentes numéricos y la memoria para recordar métodos.

También hay una relación positiva entre habilidad en cálculo mental y habilidad general en Aritmética, y entre la comprensión numérica (entiéndase por numérica, del número y el sistema de numeración) y de las operaciones y sus propiedades, y la habilidad en cálculo mental. De aquí que se recomiende que la enseñanza de la aritmética mental no se haga aisladamente, sino de un modo integrado

con el resto de los hechos aritméticos.

Estas conclusiones dejan entrever algunas consideraciones que parecen importantes desde el punto de vista de esta investigación.

En primer lugar, señalan que ya hay indicios referidos a otros países de que el cálculo mental reporta beneficios para los estudiantes tanto en la flexibilidad como en el desarrollo del pensamiento y competencia numérica.

No obstante, parece ser que los libros de texto presentan los ejercicios de cálculo mental de un modo cuyo cuestionamiento obliga a plantear la elaboración de nuevos materiales curriculares, y también un nuevo enfoque en la formación de profesores. No basta con nuevos libros, ni nuevos currículums si los profesores no pueden enseñar de acuerdo con los que en ellos se pretende.

La enseñanza siempre produce un avance en los estudiantes, pero para que ésta suponga una mejora en el desarrollo del pensamiento numérico no debería hacerse aisladamente, sino de un modo integrado con el resto de los hechos aritméticos.

Por otra parte, se puede interpretar que el cálculo mental podría ser un medio para conocer la carga de conocimientos relacionados que tienen los estudiantes y su disponibilidad, pero para ello hace falta utilizar medios apropiados para la evaluación del desempeño de los estudiantes diferentes a los que se centran en el éxito, la rapidez, o el nivel de dificultad que alcanzan los estudiantes.

En este aspecto, se puede tener en cuenta que las pruebas que se utilicen deberían ser en el formato escrito y sin limitación de tiempo, si lo que se quiere es ser lo menos reactivos posibles en las respuestas de los estudiantes, o dicho de otra manera, si lo que se quiere es disminuir la dificultad que no es la intríseca de los ejercicios.

Ninguno de los trabajos revisados aporta una síntesis de lo que ha sido la historia en la educación matemática del cálculo mental, ni una lista global de sus métodos, que es clave para la formulación del currículum escolar en coordinación con la que se obtiene de la observación de lo que son capaces de hacer los estudiantes.

En consecuencia, se puede decir que la investigación que se plantea sobre una nueva propuesta didáctica, que, teniendo en cuenta la historia y configuración de los métodos de cálculo mental, contribuya al mejor desarrollo del pensamiento numérico y haga emerger las concepciones y errores de los estudiantes en relación con la aplicabilidad y transferibilidad de los métodos de cálculo mental, es pertinente en general y en particular para el ámbito del Estado Español y el de la Comunidad Valenciana.

I.4 Problemática específica que se va a investigar

Si es verdad que (como se ha dicho al presentar la problemática) la falta de pericia generalizada y en particular la disminución de la misma cuando se pasa de problemas con números naturales a problemas con decimales se explica porque faltan estrategias (entendidas como sinónimo de métodos) para calcular mentalmente el resultado, o porque los conceptos no están bien desarrollados, o por errores producidos por teoremas implícitos relacionados con la influencia del conocimiento previo sobre el sobrevenido, entonces, cabe formularse dos cuestiones centrales, que darán origen a hipótesis de trabajo.

Esas cuestiones son:

a) Cuáles son los métodos y estrategias que convendría que los estudiantes conocieran.

b) Hasta qué punto la falta de competencia generalizada, y en

particular su disminución al pasar de calcular con números naturales a decimales, está asociada a conceptos no bien desarrollados, o a errores producidos por teoremas implícitos, y cuáles son estos.

Métodos para el cálculo mental

Como quiera que los métodos de cálculo mental (y sus antecedentes las reglas breves y los métodos de abreviación) tienen una larga tradición en los libros de aritmética, es razonable pensar que los métodos que hay que poner a disposición de los estudiantes son los que que configuran este saber, aunque seleccionándolos y organizándolos con criterios actuales.

De aquí que se considere imprescindible una investigación histórica que, revisando un abanico suficientemente representativo de las Aritméticas antiguas y modernas, permita aportar un catálogo o lista de los métodos de cálculo mental para una posterior selección y organización con criterios de actualidad.

Por lo que respecta al cálculo mental con números decimales se viene considerando que es posible tratarlos como si fueran números enteros, sin más que apartar la coma para recuperarla después de operarlos de acuerdo con determinadas reglas. Y así se los trata de hecho en el cálculo escrito de columnas, como se ve reflejado, por ejemplo, en las citas siguientes de textos escolares de comienzos de siglo.

> La sustracción de números decimales se hace como la de los números naturales, y en la diferencia se separan tantas cifras decimales como el dato que más tenga. (Bruño, 1932).

> Para multiplicar un número decimal por un entero cualquiera o por otro número decimal se opera como si ambos factores fuesen naturales; en el producto se separan, a la derecha, tantas cifras decimales cuantas tengan los dos factores en junto ...
>
> En las multiplicaciones mentales se observarán ordinariamente las mismas

reglas... (Edelvives, 1934)

En consecuencia, cabe pensar que la falta de métodos para el cálculo mental con números decimales es una cuestión de falta de métodos para el cálculo mental con números naturales. Si esto es así, bastará con producir un avance en cuanto a la disponibilidad de métodos para el cálculo mental con números naturales para obtener un avance en la disponibilidad de métodos para el cálculo mental con números decimales.

Hechos que impiden que los estudiantes apliquen correctamente los métodos a su alcance

Si es verdad que los métodos que conviene poner a disposición de los estudiantes son los históricos, se puede pensar que, si como consecuencia de un programa de enseñanza se logra un avance en el conocimiento y disponibilidad de estos métodos por parte de los estudiantes, los hechos que explican su falta de competencia serán aquéllos que impiden que los apliquen o que impiden que los apliquen correctamente.

Si también es verdad que los métodos que se necesitan para calcular con números decimales son los mismos que se necesitan para calcular con los números naturales, también los hechos que explican la disminución de su competencia al pasar de números naturales a decimales deben ser aquéllos que impiden la transferencia, o la correcta transferencia, de los métodos que se usan con los primeros a los segundos.

I.5. Hipótesis

En este orden de cosas se hacen las siguientes hipótesis:

1º La enseñanza de una selección actualizada de los métodos

histórico-intrínsecos de cálculo mental con números naturales tiene como consecuencia un avance significativo en cuanto a la flexibilidad y autonomía en el uso de métodos alternativos, por los estudiantes, que se caracteriza por el desanclaje de los métodos de columnas, uso de métodos distintos para situaciones distintas por personas distintas, y uso de los métodos histórico intrínsecos-enseñados, y no otros.

2º. Los métodos y estrategias para el cálculo mental con números decimales son los mismos que para el cálculo mental con números naturales, es decir que los estudiantes no utilizan métodos diferentes en un caso y en el otro.

3º. Enseñar los métodos de cálculo mental con números naturales produce un avance en la disponibilidad o surtido de métodos que aplican los estudiantes, que es de la misma medida con los números naturales que con los decimales, en el sentido de que los métodos más usados con los primeros también son los más usados con los segundos.

4º. Cuando los estudiantes aplican los métodos histórico-intrínsecos de cálculo mental cometen una gran variedad de errores que son indicio de una problemática que está ligada a la influencia de los conocimientos previos sobre los sobrevenidos y que se manifiesta en forma de malentendidos que se podrían interpretar como teoremas implícitos o en acto erróneos.

5º La enseñanza de los métodos histórico-intrínsecos de cálculo mental con números naturales produce su uso no sólo con estos números sino también con los decimales, salvo en aquellos estudiantes que ligan rígidamente las reglas para operar la coma decimal a los algoritmos estándar del formato vertical de columnas.

I.6 Diseño y desarrollo de la investigación

Para llevar adelante este trabajo se han previsto tres fases cuyos

detalles se describen minuciosamente, más adelante, en los capítulos correspondientes.

Someramente estas fases son: una panorámica, en la que se ha procedido a la revisión de documentación; otra, de diseño del material necesario para la experimentación; y una última, de experimentación para tratar de confirmar las hipótesis planteadas y precisar la problemática.

Fase panorámica

En esta fase se ha procedido a revisar:

Los documentos oficiales con el fin de conocer el porqué de la inclusión del cálculo mental en el currículum obligatorio, y las recomendaciones pasadas y presentes para su enseñanza.

La literatura profesional para conocer la opinión de los expertos vertida en ella.

La investigación afín precedente para conocer y sintetizar sus aportaciones.

Una selección de libros de aritmética antiguos y modernos para conocer la historia de la configuración del cálculo mental como objeto del currículum de matemáticas español, y hacer un compendio de los métodos históricos de cálculo mental.

Fase de diseño

1. En esta fase se diseñó un material de enseñanza cuyo objetivo fue ofrecer una alternativa al modelo dominante en los manuales escolares en vigor.

Esta alternativa se configuró atendiendo a:

a. Una secuencia de presentación en tres etapas de una selección de los métodos de cálculo mental. La primera para aquéllos que sirven como suplemento para el aprendizaje de las tablas, otra para los que son su generalización a la clase de números que en la vida diaria no hay por qué hacer con calculadora ni con lápiz y papel, y una última para aquellas otras reglas que históricamente han coexistido con los algoritmos estándar, y para el resto de métodos que parecieron relevantes.

b. El análisis, formalización y generalización de viejas reglas tradicionales en el marco de la aritmética generalizada (uso de representaciones literales tales como 10a+b, etc.), y, a la recíproca, el uso de igualdades literales, como por ejemplo, las cuadráticas, para mostrar cómo el cálculo mental puede ser un campo de aplicación de las mismas.

c. El "diálogo de resoluciones" (entiéndase como la verbalización de los distintos métodos usados por los estudiantes sobre un mismo ejercicio) y la posterior formalización de las mismas en el lenguaje horizontal de ecuaciones y paréntesis.

d. La discusión de las propiedades, principios subyacentes, y estructura común de los métodos, con el fin de plantear una organización en forma de esquema, de modo que se obtenga una síntesis y compendio de todos ellos.

Nota: El esquema elaborado en presencia de los estudiantes coincide prácticamente con un esquema previamente elaborado por este investigador a partir de su análisis de los métodos histórico-intrínsecos y de experiencias piloto elaboradas en cursos académicos anteriores. Las características unificadoras y globalizadoras de este esquema permiten reducir la casuística de los métodos que hay que enseñar y el número de los mismos, evitando así una presentación exhaustiva que no estaría justificada por el papel preponderante que le

daría al cálculo mental, ni, por otra parte, sería posible debido al escaso tiempo escolar disponible.

2. Se procedió también al diseño de dos pruebas tipo pretest y postest, para documentar y analizar el desempeño de los estudiantes cuando calculan mentalmente ejercicios de restar y de multiplicar, antes y después de recibir enseñanza de los métodos históricos con números naturales. La prueba pretest fue sólo con números naturales y la prueba postest con números naturales y con números decimales.

En el pretest se resolvieron 14 ejercicios de cálculo mental con números naturales, 7 de restar y 7 de multiplicar, mientras que en el postest se resolvieron 20 ejercicios con números enteros y decimales, mitad y mitad, y también la mitad de restar y la otra mitad de multiplicar. El estilo de las pruebas fue el de presentación escrita-respuesta escrita, distribuidas cada una en dos sesiones correspondientes a una hora de clase en dos días diferentes, una para la resta y otra para la multiplicación.

Los ejercicios fueron elegidos tras experiencias piloto llevadas a cabo previamente por el que suscribe y atendiendo a consideraciones de dificultad no excesiva, vinculación a métodos alternativos, presencia de números naturales y decimales y número de ejercicios, dentro de un límite razonable para que los estudiantes pudieran resolverlos.

Los estudiantes tenían que resolver los ejercicios de cabeza y sin limitación de tiempo. Se les encareció que escribieran exclusivamente el resultado, por lo que debían esperar a tenerlo completado. Después debían explicar en la misma hoja y a su manera cómo los habían resuelto.

3. Los resolutores de la muestra estudiada fueron estudiantes de nivel universitario, 144 en el pretest y 133 en el postest, concretamente de primer curso de una escuela para futuros profesores de educación obligatoria (periodo de 6 a 14 años) de la Universitat de València.

Se consideró la idoneidad de estos estudiantes porque tendrán como misión desarrollar el nuevo modelo de currículo español, y necesitan conocer lo relacionado con el cálculo mental. Pero antes es preciso saber la problemática que sobre el cálculo mental arrastran y que podrían transmitir más adelante a sus futuros alumnos.

Además se les supone que ya dominan, o al menos conocen, los hechos aritméticos necesarios para el cálculo mental, tienen la suficiente madurez y experiencia para usar sus conocimientos con eficiencia, y su competencia no tiene por qué ser diferente de los de los estudiantes que finalizan la educación secundaria.

Fase de experimentación

En esta fase se ha procedido a caracterizar el desempeño de los estudiantes cuando calculan mentalmente, a partir de las respuestas documentadas en las dos pruebas tipo pretest y postest mencionadas antes, en las que se han analizado variables conducentes a determinar la competencia, los errores cometidos, la dependencia de los métodos de columnas, los distintos métodos usados, y la forma de operar la coma decimal de los estudiantes.

I.7 Significado que se da en este trabajo al cálculo mental

La idea central de esta sección es dotar de significado a algunas expresiones que aparecen en este trabajo y en la literatura, con el propósito de especificar el sentido que se le da a las mismas.

Cálculo de Lápiz y Papel o Métodos de Columnas

Usaremos esta expresión para referirnos al cálculo algorítmico escrito estándar y con datos exactos, es decir, a los artificios de cálculo aritmético conocidos como "las cuatro reglas".

Cálculo Abreviado

Usaremos esta expresión para referirnos al cálculo escrito con datos exactos, usando métodos alternativos y adaptaciones particulares de los algoritmos estándar que ahorran o simplifican la tarea.

Casi podría considerarse el cálculo mental como la restricción del cálculo abreviado cuando se prescinde del soporte escrito, pero no siempre los métodos mentales ahorran o simplifican tarea. Piénsese, por ejemplo en los métodos idiosincráticos o informales (no escolares), como los descritos, por ejemplo, en Cockcroft (1985).

> Encontramos situaciones donde la gente se desvía de los más tradicionales métodos escolares, por ejemplo, un muchacho que había dejado la escuela antes de los exámenes, y en el trabajo realizó una comprobación bastante compleja (que hizo con seguridad) para ver si él mismo entraba o no en el cupo. Necesitaba multiplicar 7x96, que nosotros catalogaríamos como uso de la tabla del 7. Sin embargo, procedió del modo siguiente:
>
> Primero 3x96 = 288. Luego
>
> $$\begin{array}{r} 288 \\ +288 \\ \hline 576 \\ +96 \\ \hline 672 \end{array}$$
>
> Aunque este chico no se sabía la tabla del 7, su método demuestra que sí se sabía lo que quiere decir «siete veces» algo. Este es uno de los muchos ejemplos que encontramos en que la gente recurre a métodos con los que se siente segura, antes de usar lo que para un profesor de matemáticas sería el método obvio. (Cockcroft, 1985).

Cálculo Mental

Usaremos esta expresión para referirnos al cálculo de cabeza o de memoria (sin ayuda externa) con datos exactos. Algunos autores (Trafton, 1978) reservan esta denominación para los métodos alternativos, pero nosotros la tomaremos en el sentido más amplio que incluye, por lo harto frecuente que es, la emulación y adaptación

mental de los artificios estándar y los métodos de recuento.

Podría decirse que utilizar la coletilla "mental" para referirse sólo al tipo de cálculo sin soporte escrito no es del todo apropiado. Estrictamente hablando en todo cálculo se hace uso de la mente, pero en la práctica el significado que se le da al cálculo mental se puede considerar acuñado y aceptado universalmente.

Así, en este trabajo, cuando se hable de métodos de cálculo mental, debe entenderse que se trata de los métodos histórico-intrínsecos utilizados en la literatura y que no se sirven de otros artilugios que la propia elaboración simbólica.

Cálculo Estimado

La expresión cálculo estimado se utiliza cuando los números que se operan son aproximaciones subjetivas de los datos para obtener una respuesta razonablemente cerca del resultado real.

Se puede distinguir entre cálculo estimado comprobativo, que es "a posteriori", cuando los datos y el resultado son conocidos, como cuando se comprueba una factura; y cálculo estimado predictivo, que es "a priori", cuando los datos son hipotéticos, como cuando se hace un presupuesto de gastos.

Segovia (1989) precisa el uso del término estimación ante los múltiples usos del mismo y de los diferentes campos a los que puede aplicarse. Considera que estimación en matemáticas es un juicio de valor del resultado de una operación o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite. Lo primero es la estimación en el cálculo, que es cuando se refiere a las operaciones aritméticas y a los juicios que pueden establecerse sobre sus resultados; y lo segundo es la estimación en medida, que es cuando se refiere a los juicios de valor de una determinada cantidad o bien la valoración que nos merece el resultado de una medida.

Cálculo Aproximado

La expresión cálculo aproximado se utiliza cuando los números que se operan son aproximaciones objetivas, por restricciones obligadas o limitaciones derivadas de una acotación o magnitud del error acordada. Por ejemplo, los datos que resultan al aplicar instrumentos de medida, al manejar representaciones decimales de irracionales o de racionales como 1/7, o de logaritmos, o de valores trigonométricos, o al manejar datos cuyas cifras exceden el visor de la calculadora, etc.

No obstante, en la práctica no suele diferenciarse entre cálculo estimado y cálculo aproximado, quizá porque en el cálculo estimado se utilizan datos aproximados. Pero esto es una confusión que debe evitarse porque mientras que el cálculo estimado es una cuestión de conjeturas, el cálculo aproximado es una cuestión de precisión: en un caso se trabaja con datos subjetivos; en el otro, con datos objetivos obtenidos mediante alguna medición o mediante alguna acotación o margen de error admitido.

> La estimación es la destreza mental que permite adivinar de manera educada. La aproximación es encontrar un resultado suficientemente preciso para un propósito específico (Lucien, 1984).

CAPITULO II. MOTIVACION EDUCATIVA

II. MOTIVACION EDUCATIVA

II.0 Presentación de este capítulo

En este capítulo se sintetizan los argumentos que se encuentran en las revistas científicas y documentos oficiales en defensa del cálculo mental como objeto del currículum escolar.

Primero se describe cómo se contempla el cálculo mental en el currículum oficial español más reciente, después se establece su importancia utilitaria en comparación con el cálculo escrito, y a continuación se recogen los motivos que se alegan hoy en día para justificar su inclusión en el nivel de la educación obligatoria.

Para terminar se hace una síntesis de las creencias más o menos populares sobre lo que tiene de valioso y también sobre las razones que explican las reticencias para su enseñanza.

II.1 El cálculo mental en el currículum oficial español reciente

La actual ordenación del sistema educativo español entró en vigor en el año 1992, hasta entonces se venía regulando para todo el Estado por una ley nacional del año 1970. Se organizaba en tres ciclos, inicial para los 6 y 7 años, medio para los 8, 9 y 10 años, y superior para los 11 y 12 años. En la nueva ordenación se amplía la educación obligatoria hasta los 16 años, organizándose en dos tramos: uno de primaria, 6 a 12 años, y otro de secundaria obligatoria, 12 a 16 años. Su propuesta educativa plantea un currículum descentralizado, abierto y flexible que ha de ser concretado por las Comunidades autónomas, los Centros Educativos y por los propios profesores[1].

---

[1] Nota: Hasta la entrada en vigor en 1992 de la "ley General del Sistema Educativo Español (LOGSE, 1/1990 de 3 de octubre), la propuesta del currículum nacional se venía

La propuesta del currículum español

En la propuesta del currículum del año 1970, el cálculo mental no aparece de modo explícito, únicamente se señala entre los objetivos específicos del área de matemáticas el "Desarrollo de la agilidad mental", expresión cuyo significado no es explicado en el texto donde se recoge la propuesta.

En cambio, en una posterior renovación de esta propuesta en el año 1981 sí se menciona el cálculo mental. Se lo centra en el Ciclo Medio, se relaciona con la aplicación de las propiedades de las operaciones y con la resolución de situaciones de la vida real, en un enfoque que está vinculado al cálculo rápido. Así queda reflejado en la cita siguiente:

> Cálculo mental y rápido de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones.
> Desarrollo de la agilidad mental en el cálculo de estas cuatro operaciones.
> Aplicar las propiedades conocidas para simplificar y agilizar el cálculo mental.

---

estableciendo para todo el estado por la "Ley General de Educación y Financiación de la Reforma Educativa" de 1970. Esta ley estableció una ordenación del sistema educativo desarrollada curricularmente en las "Orientaciones Pedagógicas para la EGB", (MEC, 1970), y posteriormente en los "Programas Renovados para Preescolar, Ciclo Inicial, Medio y Superior de EGB" (MEC, 1981). Estos programas renovados no llegaron a aplicarse en la segunda etapa de EGB, a la que sólo afectó el cambio de este nombre por el de Ciclo Superior. La referencia por tanto para este ciclo siguió siendo el documento "Orientaciones" de 1970.

La propuesta del currículum de la reciente ley de ordenación general del sistema educativo, la LOGSE, se plasma en el documento denominado "Diseño curricular base" (DCB, 1989). Este currículum se ha establecido para la Comunidad Valenciana mediante el Decreto 20/1992, de 17 de Febrero del Gobierno Valenciano, y se ha recogido en el "Documento Base para la reforma de la EGB" (D. B. R (1990), a falta de posteriores niveles de concreción por parte del profesorado.

Bloque temático 2.

Conjuntos numéricos. 2.2. Operaciones con números naturales.

Curso 3º. 2.2.7 Desarrollar la agilidad mental en el cálculo de estas cuatro operaciones.

Jugar a comprar y vender ...

Sin utilizar lápiz y papel, decir el resultado de diversas operaciones de dificultad creciente (teniendo en cuenta los niveles fijados para tercero).

Plantear situaciones reales y resolverlas mentalmente.

Ejercitar al alumno en el cálculo mental de las operaciones estudiadas aumentando gradualmente la dificultad y observando la importancia que tiene el aplicar las propiedades estudiadas.

Curso 4º. 2.2.5 Desarrollar la agilidad mental en el cálculo de estas cuatro operaciones.

Realizar mentalmente operaciones de creciente complejidad. Ejemplo: Sin utilizar lápiz y papel efectuar las siguientes operaciones: 1.800:3= ; 1530-1300= ; 560x2= ; 40+35= .

Aplicar las propiedades conocidas para simplificar y agilizar el cálculo mental.

Plantear situaciones de la vida diaria y resolverlas mediante el cálculo mental.

Curso 5º. 2.2.5 Desarrollar la agilidad mental en el cálculo de dichas operaciones.

Realizar mentalmente operaciones de creciente complejidad.

Aplicar las propiedades conocidas para simplificar y agilizar el cálculo mental.

Resolver mentalmente problemas relacionados con estas operaciones.

Ejemplo: a) Si reparto 250 pesetas entre 10 niños, ¿a cuánto toca cada uno?

b) Tengo 2 jaulas, de 2 apartados cada una y en cada apartado hay dos conejos. ¿Cuántos conejos hay en total?

Ejercitar al alumno en el cálculo mental combinando dos o más operaciones.

(MEC, 1981)

Como se ve, en esta propuesta no se explicitan los métodos que hay que estudiar, ni tampoco se dice la manera de desarrollar los objetivos propuestos, más allá de lo que significa "ejercitar". Esto ha permitido que los autores libros de texto traten el tema con total libertad

metodológica y de contenido, de tal modo que, a diferencia de lo que ocurre con el cálculo escrito estándar, la información que reciben los estudiantes es diferente según sea el libro utilizado.

En la nueva propuesta del currículum oficial español se otorga al cálculo mental un renovado protagonismo, y se exponen orientaciones concretas tanto para el aprendizaje del alumno, como para la actuación del profesor. Así, se le concede prioridad para profundizar los conocimientos matemáticos intuitivos antes de su formalización, se explicita el tipo de estrategias que hay que manejar y el proceso que hay que seguir para que no sea un mero conocimiento, sino algo que sirva para la reflexión de los estudiantes y la evaluación y reorientación del proceso seguido por parte del profesor.

> Conceder prioridad al trabajo mental (y, en especial, al cálculo mental) con el fin de profundizar los conocimientos matemáticos intuitivos antes de su formalización.
>
> ... el aprendizaje de una serie de métodos y estrategias que permitan al alumno operar tanto en el cálculo mental aditivo (conmutación, descomposición, redondeo, conteo, duplicado, etc.), como en el cálculo mental multiplicativo (distribución, factorización, etc.). Todo ello mediante un proceso de exploración que le permita, no sólo conocer la existencia de determinadas estrategias, sino también reflexionar sobre ellas para elegir o utilizar la más adecuada en cada situación.
>
> ... el aprendizaje del cálculo mental supone la reflexión y verbalización de diversas estrategias utilizadas en una determinada operación. Al profesor le servirá para aprovechar errores, evaluar y reorientar el proceso seguido.
>
> (DCB 1989)

También en la propuesta del currículum para la Comunidad Valenciana se contempla el cálculo mental desde una perspectiva innovadora en la que se rompe con la identificación de cálculo escrito-cálculo único y se lo valora por su papel en la adquisición de los conceptos y en la flexibilidad del cálculo. Así se dice que el cálculo mental es prioritario cuando lo que se persigue es la adquisición del

concepto antes que la memorización de la técnica y que las técnicas no deben ser únicas.

> Al trabajarse determinados contenidos surge la necesidad de memorizar algunas informaciones. La memorización ha de entenderse como un medio y no como un fin. Es más importante poseer el concepto que memorizar tablas, algoritmos, procedimientos. Por ello el cálculo mental y con calculadora son contenidos prioritarios.
>
> Las operaciones no se han de confundir con las técnicas para efectuarlas, razón por la que se presentan de forma separada. Las operaciones se trabajan para su comprensión y uso bajo modelos muy variados. Las técnicas, los algoritmos tampoco han de ser únicos. Interesan los algoritmos escritos distintos de los estándar tanto o más que éstos y el cálculo mental y el uso de la calculadora, tanto o más que los algoritmos de lápiz y papel.
>
> Mental: (estrategias de descomposición, de conservación-compensación, emuladoras del cálculo con lápiz y papel).
>
> (DBR, 1990)

Otro aspecto novedoso en la propuesta oficial española es que se proyecta el cálculo mental sobre la educación secundaria obligatoria en un enfoque en el que se recomienda la utilización de estrategias personales, no sólo con una finalidad utilitaria sino también cognitiva (autoestima, etc.) y como expresión de la creatividad y el desarrollo de formas de pensamiento originales.

> Se debe favorecer que los alumnos utilicen sus propias estrategias en la actividad matemática, no sólo para lograr un aprendizaje más funcional y desarrollar su nivel de autoestima y autoeficacia, sino también como expresión de la creatividad y las formas de pensamiento originales.
>
> (DCB, 1989)

También en otros países la propuesta oficial u oficialista discurre por estos derroteros, así por ejemplo, la propuesta Norteamericana

plasmada en el documento "Standards" (NCTM, 1989) para los años 90 recomienda repensar el cálculo enfatizando más variación y menos predominio del cálculo escrito.

> El propósito del cálculo es resolver problemas. Así, aunque el cálculo es importante en matemáticas y en la vida diaria, nuestra tecnológica era nos obliga a repensar cómo se hace hoy el cálculo. Casi todos los cálculos complicados se hacen hoy con calculadoras y ordenadores. En muchas situaciones diarias, la respuesta es calculada mentalmente o es suficiente con estimarla, y los algoritmos de lápiz y papel son útiles cuando el cálculo es razonablemente sencillo. Este documento enfatiza la importancia de enseñar al niño varias formas de calcular, tal como la utilización de la calculadora para resolver problemas que contienen números grandes o que requieren cálculos complejos. En relación con este objetivo está la necesidad de poseer un nivel razonable de eficiencia en el cálculo de lápiz y papel. Claro que el cálculo de lápiz y papel no puede seguir dominando el currículum o no habrá suficiente tiempo para que los niños aprendan otras matemáticas más importantes que ellos necesitarán ahora y en el futuro.
>
> En los cursos de Preescolar a 4º, el currículum debe desarrollar el cálculo con números naturales, por ello los estudiantes podrán usar un surtido de técnicas de cálculo mental y estimado, seleccionar y usar las técnicas apropiadas para los problemas específicos y determinar si el resultado es razonable.
>
> En los cursos de 5 a 8, el currículum de matemáticas debe desarrollar los conceptos que subyacen en el cálculo exacto y en el cálculo estimado en varios contextos, por ello los estudiantes podrán desarrollar, analizar, y explicar procedimientos de cálculo y técnicas de estimación, y seleccionar y usar el método apropiado para calcular entre los de aritmética mental, lápiz y papel, calculadora, y de ordenador.
>
> NCTM (1989)

En definitiva, puede verse en los documentos oficiales que hay una serie de planteamientos innovadores en relación a la anterior propuesta del currículum donde el cálculo mental atendía a un requerimiento utilitario, centrado en el Ciclo Medio que es la época del aprendizaje de las operaciones. Estos nuevos planteamientos restan

importancia al cálculo escrito y se la otorgan al cálculo variado, y en particular al mental, por el papel que puede desempeñar en la adquisición de los conceptos relacionados con las técnicas de cálculo y su flexibilización, para profundizar los conocimientos matemáticos intuitivos antes de su formalización y como medio para promover la reflexión de los estudiantes y la evaluación y reorientación de los procesos por parte del profesor. Por eso se va más allá de la edad del aprendizaje de las cuatro reglas y se proyecta el cálculo mental sobre la educación secundaria, no sólo para lograr un aprendizaje más funcional sino también como medio para favorecer la autoeficacia, autoestima, y expresión de la creatividad.

II.2 Importancia utilitaria del cálculo mental en comparación con el cálculo de lápiz y papel

En el año 1979, Plunkett, en un artículo de divulgación, decía que es un hecho constatable que el tiempo que se dedica al cálculo mental es ínfimo, al menos en comparación con el que se dedica al cálculo de lápiz y papel. Esto es algo que le parecía sorprendente al tener en cuenta la utilidad social del cálculo mental en comparación con la del cálculo escrito.

Para realzar este hecho, se ayudaba de una tabla, en la que, de un modo subjetivo, organizaba en cinco bandas los tipos más usuales de problemas de cálculo, y sobre ella hacía ver que eran muchas más las situaciones susceptibles de cálculo mental que las de cálculo escrito.

Rojo	Naranja	Amarillo	Verde	Azul
5+9	135+100	139+28	592+276	3964+7123+4918+5960
13-8	85-20	83-26	592-276	
4x7	5x30	17x3	931x8	931x768
35:5	90:3	72:4	693:7	8391:57

> En la banda roja se sitúan los cálculos de recuerdo instantáneo. En la naranja, los que solemos ver como inapropiados para usar el algoritmo estándar de lápiz y papel. En la amarilla se encuentran los que una persona normal, en la calle, en un contexto motivador, haría en su cabeza. La banda verde, se podría hacer mentalmente, pero poca gente es capaz de hacerlo; y por último, en la azul, es absurdo usar un proceso mental, y absurdo usar lápiz y papel si hay a disposición una calculadora (Plunkett, 1979).

Abundando en esto mismo, la aparición de las calculadoras no sólo reduce las necesidades de cálculo escrito, sino que obliga a dirigirse hacia aquellas destrezas que parecen más necesarias para una utilización efectiva de las mismas (Dickson, Brown y Gibson, 1984). Entre ellas son especialmente importantes las que tienen que ver con la habilidad para estimar y comprobar los resultados.

En consecuencia, y desde un punto de vista utilitario, es posible admitir que hay que cambiar el énfasis escolar puesto en el cálculo tradicional de columnas en favor de los algoritmos alternativos susceptibles de ser aplicados mentalmente.

> Creo que las razones para la enseñanza de los algoritmos escritos estándar están anticuadas, y que es hora de tomar nota de ello. Creo que hay sitio para los algoritmos mentales, para las calculadoras, y para los algoritmos no estándar. Creo que en la actualidad se pierde una gran cantidad de tiempo en intentar enseñar y aprender los algoritmos estándar, y que el resultado más común es frustración, infelicidad y una actitud deteriorada hacia las matemáticas. (Plunkett, 1979)

II.3 Razones, no utilitarias, que motivan la inclusión del cálculo mental en el currículum para la Educación Obligatoria

Como se acaba de decir, el cálculo mental es una habilidad que puede sustituir al cálculo escrito en la mayoría de los casos cotidianos en que no se requiere de calculadora, hasta el punto de que cada vez

En la banda roja se sitúan los cálculos de recuerdo instantáneo. En la naranja, los que solemos ver como inapropiados para usar el algoritmo estándar de lápiz y papel. En la amarilla se encuentran los que una persona normal, en la calle, en un contexto motivador, haría en su cabeza. La banda verde, se podría hacer mentalmente, pero poca gente es capaz de hacerlo; y por último, en la azul, es absurdo usar un proceso mental, y absurdo usar lápiz y papel si hay a disposición una calculadora (Plunkett, 1979).

Abundando en esto mismo, la aparición de las calculadoras no sólo reduce las necesidades de cálculo escrito, sino que obliga a dirigirse hacia aquellas destrezas que parecen más necesarias para una utilización efectiva de las mismas (Dickson, Brown y Gibson, 1984). Entre ellas son especialmente importantes las que tienen que ver con la habilidad para estimar y comprobar los resultados.

En consecuencia, y desde un punto de vista utilitario, es posible admitir que hay que cambiar el énfasis escolar puesto en el cálculo tradicional de columnas en favor de los algoritmos alternativos susceptibles de ser aplicados mentalmente.

Creo que las razones para la enseñanza de los algoritmos escritos estándar están anticuadas, y que es hora de tomar nota de ello. Creo que hay sitio para los algoritmos mentales, para las calculadoras, y para los algoritmos no estándar. Creo que en la actualidad se pierde una gran cantidad de tiempo en intentar enseñar y aprender los algoritmos estándar, y que el resultado más común es frustración, infelicidad y una actitud deteriorada hacia las matemáticas. (Plunkett, 1979)

II.3. Razones, no utilitarias, que motivan la inclusión del cálculo mental en el currículum para la Educación Obligatoria

Como se acaba de decir, el cálculo mental es una habilidad que puede sustituir al cálculo escrito en la mayoría de los casos cotidianos en que no se requiere de calculadora, hasta el punto de que cada vez

hay menos oportunidades para el cálculo escrito en la vida diaria y que las clases de matemáticas escolares son casi el único lugar donde se usa.

> Llegará el día en que será suficiente con una combinación de métodos mentales fiables y habilidad para usar la calculadora, prácticamente para todos los casos (Brown, 1981).

Pero, con ser importante esta argumentación, las razones utilitarias no son las que principalmente se utilizan en los documentos oficiales recientes para solicitar el abandono del cálculo escrito largo o de muchas cifras y su sustitución por la calculadora, y una menor consideración al cálculo escrito estándar en beneficio del cálculo variado (el que convenga según la situación: mental, estimado, aproximado, escrito o mixto).

> Hoy hay que reconocer que los cálculos largos y complicados se hacen normalmente con calculadora. El conocimiento de las tablas es esencial y la aritmética mental es una destreza valiosa (NCSM, 1977).

En particular, como se ha reflejado antes con otras palabras, parece que se pide un mayor énfasis en el cálculo mental por el papel que puede jugar cuando se le contempla en el aula de clase como cálculo pensado, inteligente, más bien lúdico y no como conjunto de reglas que fomentan un conjunto de habilidades (Giménez y Gómez, 1991).

Todo esto, en un marco en el que las viejas propuestas didácticas basadas en la rapidez, ejercitación de la memoria y desarrollo de la agilidad de la mente, dejan paso a nuevas propuestas derivadas de los cambios sociales, de las nuevas teorías del aprendizaje y de los cambios de enfoque sobre la finalidad de la enseñanza de las matemáticas.

Esto es así, de tal modo que en vez de enseñanza maquinal se pide hoy exploración y reflexión. En vez de estandarización se pide hoy autonomía y flexibilidad. En vez de cálculo en soledad y silencio

mirando sólo si la respuesta es correcta se pide hoy verbalización, explicitación, diálogo, mirar los errores y aprender de ellos.

En definitiva, es en relación con estos requerimientos que se acaban de mencionar como parece que debería plantearse cualquier propuesta didáctica sobre el cálculo mental.

> Exploración que le permita, no sólo conocer la existencia de determinadas estrategias, sino también reflexionar sobre ellas para elegir o utilizar la más adecuada en cada situación.
>
> Flexibilidad en la búsqueda de soluciones; y la capacidad para relacionar, comparar, seleccionar o dar prioridad a unos datos frente a otros a la hora de operar.
>
> El aprendizaje del cálculo mental supone la reflexión y verbalización de diversas estrategias utilizadas en una determinada operación. Al profesor le servirá para aprovechar errores, evaluar y reorientar el proceso seguido.
>
> (DCB 1989)
>
> Mostrar que puede aplicarse más de una regla en una situación determinada, lo cuál se promueve fundamentalmente por medio del diálogo y la explicitación de las estrategias utilizadas en el marco de la resolución de problemas con enunciado.
>
> (Giménez y Gómez, 1991)

Este panorama que se ha señalado aquí, es el reflejo de un estado de opinión que es debido al trabajo de divulgación de profesionales de reconocido prestigio y entidades influyentes en foros y revistas científicas. Algunas de sus opiniones, que se recogen en un apéndice al final de esta memoria, consideran que el cálculo mental no es la panacea para resolver los problemas escolares aritméticos, pero reconocen que puede ser valioso en muchos aspectos, algunos de los cuales ya se han mencionado antes. A saber:

a) El cálculo mental puede contribuir a la comprensión y sentido del número al hacer uso de la forma en que está constituido: de sumandos

y factores, del valor de posición y de los órdenes de unidad, de sus formas equivalentes derivadas de la estructura decimal y de los contextos culturales (docenas, en monedas). También puede ayudar a tener un sentimiento de dominio de los grandes números, haciéndolos ver globalmente y no como cifras aisladas, en relación con otros números, y en las pautas recurrentes del sistema de numeración.

b) El cálculo mental puede ser un dominio para contrastar las concepciones de los estudiantes sobre los procedimientos de cálculo y su disponibilidad ya que hace emerger procesos cognitivos, que de otra manera, cuando sólo se calcula con los algoritmos estándar, permanecen ocultos.

c) El cálculo mental puede contribuir a enriquecer y flexibilizar la experiencia y comprensión algorítmica al trabajar con reglas histórico-culturales vinculadas a propiedades estructurales fundamentales (asociatividad, distributividad), las cuales, al hacerlas funcionar adquieren un sentido que va más allá del que da el mero conocimiento de su existencia abstracta. También, puede estimular la búsqueda de soluciones por caminos alternativos, hacer indagar formas abreviadas de cálculo, y prestar atención a todos los pasos del procedimiento, que se diversifican y extienden. Además puede ser una ayuda para el cálculo estimado predictivo y un estilo de comprobación de determinados resultados.

d) El cálculo mental, también puede intervenir en el desarrollo de capacidades cognitivas ya que favorece la versatilidad e independencia de procedimientos, la reflexión para decidir y elegir, la autoeficacia, la confianza en sí mismo, la confianza e intuición en el cálculo aritmético, el interés y la concentración.

e) El cálculo mental puede estimular el análisis de situaciones numéricas, bien como objeto de estudio por sí mismo, bien en un enfoque de aritmética generalizada (estimular la generalización de los procesos descubiertos), ya que además de capacitar para relacionar,

comparar, seleccionar o dar prioridad a unos datos o a unas relaciones numéricas frente a otras a la hora de operar, se postula que lleva a profundizar en los conocimientos matemáticos intuitivos previamente a la formalización, jugando un papel importante en la transición del lenguaje aritmético al algebraico, y viceversa como campo de aplicación de identidades literales tales como las cuadráticas.

f) Y, en otro orden de cosas, se considera que el cálculo mental puede dar una visión participativa de las matemáticas, puede ser lúdico ya que su componente divertida y desafiadora da lugar a multitud de juegos en las matemáticas recreativas, puede ser revitalizador del cálculo puesto que no hay rutina, y por último, puede ser motivador y hacer adeptos ya que es un arte que requiere de la habilidad y del gusto personal.

II.4 Reticencias frente a la enseñanza del cálculo mental

A pesar de toda la batería de argumentos a favor del cálculo mental que se acaban de señalar, persisten algunas reticencias para su enseñanza por parte de los profesores que pueden ser debidas, tomando opiniones de los autores antes señalados, a hechos como los siguientes:

a) Creencias inapropiadas, como, por ejemplo:

El cálculo mental es personal, cada uno hace una cosa por más que se insista en la escuela sobre uno u otro procedimiento.

El cálculo mental obstaculiza el aprendizaje de métodos generales.

El cálculo mental funciona a base de métodos particulares. Es mejor aprender métodos generales.

Es una pérdida de tiempo porque la calculadora puede suplirlo.

Es una cuestión ligada a la capacidad de memoria.

b) Consecuencias de la falta de éxito esperado.

La falta del éxito esperado por los profesores en la enseñanza del cálculo mental, ya sea por una idea equivocada de lo que es el éxito en cálculo mental, ya sea por falta de preparación de alumnos y profesores, ya sea por falta de buenas propuestas didácticas, o por cualquier otra razón, es una de las causas del desánimo y pérdida de interés escolar.

c) Consecuencias de la planificación oficial.

La masificación escolar, la presión de los programas, el escaso y limitado tiempo para la clase de matemáticas, y el tratamiento en "aparte" en los libros de texto, lleva a muchos profesores a relegar la enseñanza del cálculo mental a un plano secundario o incluso a abandonarlo.

d) Efectos de los sentimientos negativos del profesor como su propia dificultad y el temor al fracaso ante sus alumnos.

Se sigue de ello la creencia de que el cálculo mental no es apropiado para la mente infantil, y de que es más sencillo el cálculo de lápiz y papel; o de que la mayoría de la gente no está capacitada para el cálculo mental, que sólo es apropiado para unos pocos especialmente hábiles, de buena memoria, y que sienten fascinación por los números.

e) El efecto en contra que provocan algunas prácticas usuales del modelo educativo dominante.

La exhortación escolar del tipo: "a ver lo que has hecho", como consecuencia de un currículum orientado al examen.

El énfasis en esas pruebas de "a ver quién contesta antes", tan frecuentes en la época del aprendizaje de las tablas.

El énfasis en el método de cálculo estándar, que no sólo no deja sitio para la intervención libre, sino que potencia la emulación mental del artificio de lápiz y papel.

f) El efecto en contra derivado de sobrevaloraciones equivocadas.

El pánico al error como consecuencia de sobrevalorar el éxito.

La presión del tiempo derivada de sobrevalorar la rapidez.

g) El efecto en contra que provocan viejas teorías obsoletas.

Como por ejemplo la que liga el cálculo mental con la inteligencia, o la vieja teoría de "la disciplina mental" (se comenta en un capítulo posterior), que han provocado que algunos maestros guarden desagradables recuerdos sobre lo que fue su experiencia escolar con el cálculo mental, o que lo utilizaran para identificar a los estudiantes brillantes con los rápidos y a los lentos con los torpes.

> Por ejemplo, se ha señalado que una diferencia entre los unos y los otros, al resolver la suma 135+26 sin lápiz ni papel, es que los lentos hacen (130+20)+(5+6) mientras que los brillantes hacen (135+20)+6 (Clark y Eads,1954).

h) El efecto en contra del ambiente social

Son muchas las personas que teniendo necesidad (profesional) de efectuar cálculos mentales adoptan, en público, posturas de huida (conmigo que no cuenten) acompañadas de cierta ostentación, e, incluso, desprecio burlón. Además, se suele creer que las personas que son hábiles en cálculo mental son las que ejercen profesiones poco consideradas, como son empleados de tienda, camareros, etc., y se relaciona esto con la idea de que estas personas no tuvieron un buen

aprendizaje escolar. Es decir, que su habilidad en cálculo les viene de imperativos laborales, y no de lo que aprendieron en la escuela.

i) La falta de investigación actual

Se han hecho muy pocos esfuerzos en esta línea de investigación, con lo que hay pocas sugerencias didácticas fundamentadas y ausencia de buenos tests, desde el punto de vista de los objetivos educativos que se postulan hoy en día, para evaluar la habilidad de los estudiantes.

> Es importante señalar que, a pesar de los valores que hipotéticamente se logran con este aspecto del cálculo, poco se sabe acerca del desarrollo del pensamiento de los estudiantes en este tema o acerca de la manera de ayudarles a ser competentes y seguros en sus destrezas (Trafton, 1978).

j) La falta de materiales actualizados

Es un hecho fácilmente constatable que los libros de texto están anticuados aunque sólo sea porque la dinámica de cambio que provoca cualquier reforma educativa es lenta.

> Es un hecho que los libros de texto escolares prestan muy poca atención al desarrollo de la habilidad de cálculo mental. También es verdad que hay disponibles unos pocos materiales suplementarios para ayudar en la orientación de los profesores que quieren enfatizar este tema (Reys, 1985).

II.5 Resumen

En definitiva parece que el cálculo mental adquiere en la actualidad un renovado protagonismo, el cual, a pesar de que todavía se conservan reticencias de diversos tipos frente a su enseñanza, se manifiesta en que vuelve a ser incluido en los nuevos currícula oficiales escolares españoles (DCB, 1989 y DBR, 1990), en un enfoque que no es principalmente el utilitario, rápido o agilizador de la mente

como antaño, sino otro basado en planteamientos que pretendiendo disminuir el énfasis tradicional sobre el cálculo escrito rígido para otorgárselo a la calculadora y al calculo variado, otorgan al cálculo mental un papel en la adquisición de los conceptos relacionados con las técnicas de cálculo, con la profundización de los conocimientos matemáticos intuitivos antes de su formalización, y como medio para promover la reflexión de los estudiantes y la evaluación y reorientación del trabajo del profesor.

Sin embargo las opiniones de los expertos documentadas en las revistas científicas son menos tímidas que las de los responsables oficiales y van más allá a la hora de resaltar la importancia del cálculo mental en la enseñanza. Algunos de los argumentos que emplean parecen tan interesantes como los que se mencionan en los diseños de los currícula. Así, por ejemplo, puntualizan que el cálculo mental sirve para fortalecer la comprensión del valor de posición, comprender y desarrollar los aplicabilidad de los equivalentes numéricos, descubrir que el sistema numérico está repleto de pautas aritméticas, atender a todos los pasos del procedimiento, contrastar y hacer emerger las concepciones de los estudiantes sobre los métodos de cálculo, para el análisis de las situaciones numéricas, e incluso para trabajar la transición de la aritmética al álgebra.

Estas puntualizaciones pueden resumirse en dos, a saber, que el cálculo mental debe ser aceptado en los currícula escolares por su contribución al desarrollo del pensamiento aritmético y como medio para el diagnóstico y reorientación del proceso de enseñanza.

CAPITULO III. LA CONFIGURACION DE LOS METODOS HISTORICOS DE CALCULO MENTAL

III. LA CONFIGURACION DE LOS METODOS HISTORICOS DE CALCULO MENTAL

III.0 Presentación de este capítulo

En este capítulo se estudia la configuración de los métodos históricos de cálculo mental en tres aspectos:

1. En el primero se estudia su historia como objetivo educativo.

2. En el segundo se analiza su evolución en los libros de aritmética antiguos y modernos.

3. En el tercero se compendian, sintetizan y organizan.

III.1 LA HISTORIA DEL CALCULO MENTAL COMO OBJETIVO EDUCATIVO

III.1.1 El siglo XIX como punto de inflexión en las Aritméticas

Ciertamente, hay que situar el siglo XIX como punto de inflexión en cuanto a la configuración de las aritméticas, ya que es el momento en que se da el golpe de timón para por primera vez establecer un sistema general y público de enseñanza de corte estatal y centralista.

Este nuevo sistema educativo situó a las matemáticas en una elevada posición que se tradujo en una amplia difusión social sin precedentes históricos. Como quiera que la estructura de presentación del conocimiento matemático no estaba preparada y adaptada a la demanda de esta nueva clase de enseñanza, se hizo necesaria una reestructuración y redefinición del conocimiento matemático que dio lugar a la producción de libros con espíritu elementalizador,

entendido como poner la ciencia en el mejor orden, de la manera más simple y del modo más claro, y no en el sentido reduccionista de limitarla a sus elementos básicos fundamentales. Esta significación del término elementalizar, que es la que llegará hasta nuestros días, algo así como poner el conocimiento en tal forma y método que lo haga enseñable, es una preocupación de la época, cuya perversión va a dar lugar a la consideración del texto elemental como texto abreviado, o texto que condensa uno voluminoso en uno más corto a base de prescindir de rigor y coherencia.

Uno de los efectos que conviene resaltar de este movimiento elementalizador fue el que dio lugar a la producción diferenciada de libros para la formación profesional, para maestros y gente con interés en profundizar en la ciencia, y libros para las escuelas de niños y gente que sólo deseaba o necesitaba iniciarse.

III.1.2 Cambios fundamentales en el siglo XIX

El siglo XIX supone el despertar de los cambios que son clave para entender la forma en que se configuran las matemáticas escolares de nuestros días. Varios fenómenos concurren para ello:

1. El establecimiento de un currículum obligatorio común para los estudiantes de un mismo nivel educativo.

2. La incorporación de las nuevas ideas pedagógicas, basadas fundamentalmente en las de Pestalozzi (1746-1827) y Fröebel (1782-1852), que hacen que la enseñanza deje de mirar únicamente al objeto de estudio y tenga también en cuenta la psicología de los niños, para adaptarse a sus posibilidades y a sus necesidades.

3. La popularización y generalización de la educación, que rompe con el carácter elitista de la enseñanza y provoca la creación de Instituciones para la formación profesional, como son las Escuelas de

Maestros, y para el progreso de la sociedad a través de una reforma educativa, como es el caso de la Institución Libre de Enseñanza (Fundada en 20-10-1876).

> ... porque educar para los institucionistas es equivalente a hacer hombres, desenvolver integral, individual y socialmente todas las potencias intelectuales, manuales, afectivas y físicas (Núñez y Servat, 1988).

4. El convencimiento de que las matemáticas ocupan un lugar esencial en el conjunto de las ciencias, y de que es necesario que se propague su estudio, reflejado en la creación de círculos ilustrados tales como las Reales Academias.

> Por ejemplo en las memorias de la Real Academia de las Ciencias de Barcelona (1770-en adelante) se encuentran muchas referencias a las cuestiones didácticas que afectan al currículo, la enseñanza y el aprendizaje, y la revisión o realización de libros de matemáticas. Aunque, en general, estas memorias no reflejan un parecer común, se puede decir que reconocen la necesidad de introducir las matemáticas en todos los niveles de enseñanza , y que guardan una afinidad de pensamiento con los ideales promovidos por la Revolución Francesa, según los cuales, las matemáticas se erigen en la base del desarrollo científico y su enseñanza obliga a reemplazar los sabios amateurs por profesores más numerosos y más especializados que conviertan la docencia en su oficio (ver Montanuy, Núñez y Servat, 1990).

5. El mayor recurso al razonamiento y la mayor preocupación por el método de presentación de las ideas.

> Cuando las ciencias han llegado a un alto grado de perfección, cuando todas las partes profundizadas por los genios más vastos y penetrantes se han enriquecido con un gran número de verdades que han alejado sus límites, viene a ser su estudio más largo y penoso, y sus progresos son por consiguiente más lentos y difíciles. Entonces la memoria obligada a retener una inmensidad de objetos, reclama sin cesar los socorros del razonamiento, y pide un método que clasifique estos objetos del modo más propio para volver a encontrarlos cuando se han perdido de vista (Cit. Vallejo, 1841).

6. La asunción de los medios del álgebra con el consiguiente aumento en la brevedad y pérdida de retórica.

> Antes de adelantar más en la explicación de la ciencia de los números, y para descubrir mas fácilmente sus nuevas propiedades, es indispensable tomar del álgebra algunos de sus medios, como las letras y los signos, con cuya ayuda se indican de una manera general y abreviada las operaciones y las reflexiones que requiere la resolución de una cuestión (Bourdon, 1797).

7. La asunción del sistema métrico decimal a partir de la ley de Julio de 1849 que lo implanta en España y hace obligatoria (art. 11) su enseñanza desde 1º de Enero de 1852.

> En todas las escuelas públicas o particulares en que se enseñe o deba enseñarse la aritmética o cualquiera otra parte de las matemáticas será obligatoria la del sistema legal de medidas y pesas y su nomenclatura científica, desde primero de 1852, quedando facultado el gobierno para cerrar dichos establecimientos siempre que no cumplan con aquella obligación (Cit. Montanuy, Núñez y Servat, 1989).

Esta ley obligó a reestructurar los libros de texto, ganando en simplificación y brevedad en virtud de la unificación de métodos de cálculo que supuso introducir los números decimales. Así, al perder importancia los tediosos capítulos dedicados a los diferentes sistemas de pesas y medidas, y al cálculo con complejos, irá disminuyendo su tiempo escolar, aumentando el de otros contenidos.

> Si bien los números decimales ya eran estudiados en los libros para enseñanzas profesionales, no es hasta la implantación del sistema métrico decimal que se hace sentir su necesidad de enseñarlo en la escuela elemental. En este sentido destaca por su carácter precursor la labor de J. M. Vallejo, en su libro "Aritmética de niños" de 1804, donde se dedican dos capítulos al concepto y cálculo con números decimales (ver Montanuy, Núñez, y Servat, 1989).

8. Amén de estos fenómenos que se acaban de señalar hay otros que también imprimen un giro a la enseñanza de las matemáticas, como

son: el espectacular avance de la ciencia, el abandono de la finalidad más o menos inmediata de las matemáticas, y la polémica de los fundamentos.

La conjunción de todos ellos provocará en las aritméticas un cambio radical, que se manifiesta en una mejor constitución de su contenido como un sistema de proposiciones y consecuencias legitimadas por la demostración y organizadas siguiendo un discurso lógico, que acabará haciendo que la Aritmética fuera considerada la "ciencia de los números" (ver NCTM. 1970a y 1970b). Así, la Aritmética acabará por unificar teoría y práctica y dejará de ser un compendio de reglas para efectuar sobre números, como aún se decía al iniciarse el siglo XIX, para constituirse en la rama de la ciencia matemática que trata del número.

> La Aritmética tiene por objeto especial establecer reglas fijas y ciertas para efectuar sobre los números todas las operaciones posibles (Bourdon, 1797).

> Aritmética (de arifmoz, arihtmus, el número), es la ciencia que trata de los números. Su OBJETO es el número determinado de valor constante. Su FIN, la exacta y breve composición y descomposición de los números. Sus MEDIOS, la numeración y las operaciones fundamentales (Moya, 1897)

III.1.3 La evolución del cálculo mental reflejada en las Aritméticas

Los antecedentes

Desde antiguo se conocen una gran variedad de métodos para el cálculo aritmético. Esto se explica por el interés natural de los aritméticos en ahorrar tarea, en aliviar la dificultad del cálculo, en evitar errores, en comprobar resultados, en calcular deprisa, o porque en matemáticas siempre se ha considerado que es más elegante y brillante utilizar el camino más corto que no el innecesariamente más largo.

En una época en que no había calculadoras, las aritméticas tenían que atender a la enseñanza del cálculo con un nivel de exigencia que hoy consideraríamos excesivo. Un buen calculista no sólo tenía que saber calcular bien sino que tenía que hacerlo deprisa, esto explicaría el empeño que tuvieron los autores antiguos, en su afán por desarrollar e introducir el nuevo arte de calcular, en mostrar los métodos más cómodos, simples, y breves posibles:

> En matemáticas, se han buscado métodos para abreviar el cálculo, no sólo para ahorrar tiempo sino también para reducir la posibilidad de cometer errores. Hay otra razón para reducir la cantidad de trabajo al hacer un cálculo. Los matemáticos se enorgullecen de tomar el camino más corto cuando emprenden un "viaje". Ellos ven una solución corta de un problema como elegante, y una innecesariamente larga como chapucera (Bowers y Bowers, 1961).

En las situaciones más elementales, cuando los números con los que se opera son lo suficientemente pequeños, muchos de estos métodos pueden llegar a realizarse prescindiendo del soporte escrito, es decir, que pueden llegar a realizarse de una manera exclusivamente mental, por ello, se puede entender que los métodos de cálculo mental no se pueden desligar de los métodos no estándar para el cálculo escrito que se encuentran en la literatura, porque en ellos hunden sus raíces y son sus antecedentes aritméticos.

El cálculo en las Aritméticas anteriores al siglo XIX

Desde la aparición de las primeras Aritméticas impresas, los métodos de cálculo ya están prácticamente configurados como los conocemos hoy en día.

En el largo período de tiempo que abarca desde ese momento hasta el final del siglo XVIII, las Aritméticas apenas muestran diferencias remarcables en cuanto a la forma de presentar los métodos de cálculo,

más allá de la mayor o menor exhaustividad que requiere el carácter de manual o tratado del libro.

La tónica dominante consiste en presentar varios modos de calcular una misma operación, unos más breves que otros. La forma de presentarlos es reglada, ilustrándolos sobre un ejemplo, sin nada que se parezca a una fundamentación, y coexistiendo unos junto a los otros, los algoritmos generales con los particulares y los más populares con los menos conocidos.

En esta época, en que no hay un currículo obligatorio, la razón que explica por qué un autor opta por una u otra selección de métodos no es otra que su libre albedrío, dar al lector la posibilidad de "que cada uno haga lo que mejor le pareciere" (Pérez de Moya, 1563), y emular o diferenciar un texto de sus precedentes.

> Coexisten muchos tipos de multiplicación con denominaciones variables según los manuscritos. Se puede multiplicar en cruz, método que exige retener una cantidad considerable de resultados parciales, con el riesgo de cometer muchos errores, por *gelosia* o *carrat*, disponiendo en un retículo los resultados intermedios de tal modo que no sea necesario hacer uso de las retenciones, en fin según una técnica muy próxima a la que hacemos en nuestros días. Había incluso más métodos, la imaginación de los abacistas italianos fue muy fecunda (Benoit, 1989).

> A pesar de los esfuerzos de los autores, el nivel matemático exigido para aplicar al comercio las lecciones de los manuales no parece que fuera alcanzado por todos los comerciantes. Después de muchos intentos, Nicolas Chuquet insiste en las dificultades del cálculo y propone reglas «simples y breves», recetas que consisten bien en reemplazar las divisiones por una serie de mediaciones, bien en hallar la relación entre las unidades de cuenta y medida. Francés Pellos recomienda el empleo de simplificaciones que requieren «menos fatiga» (Benoit, 1989).

En el caso de la multiplicación, estos métodos de carácter reglado se distribuyen a lo largo del libro atendiendo a tres grupos. Uno dedicado a los que sirven para calcular las tablas o números dígitos, otro para los

que sirven de tabla mayor, o números de dos cifras, y el tercero para los que sirven para números de más de dos cifras.

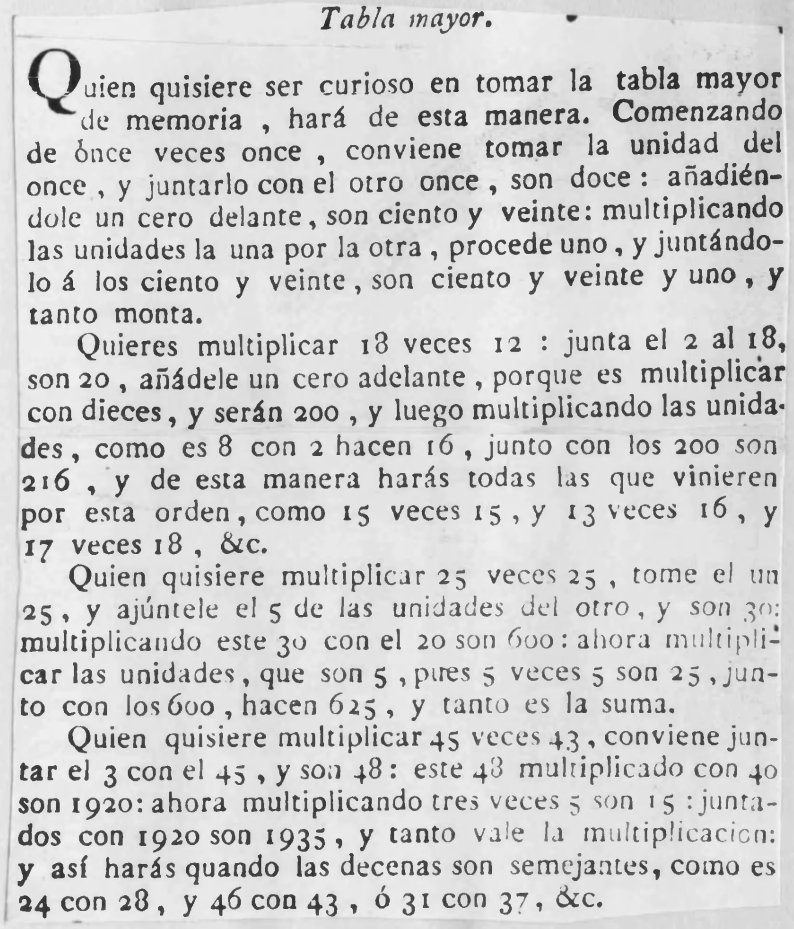


Tabla mayor.

Quien quisiere ser curioso en tomar la tabla mayor de memoria, hará de esta manera. Comenzando de ónce veces once, conviene tomar la unidad del once, y juntarlo con el otro once, son doce: añadiéndole un cero delante, son ciento y veinte: multiplicando las unidades la una por la otra, procede uno, y juntándolo á los ciento y veinte, son ciento y veinte y uno, y tanto monta.

Quieres multiplicar 18 veces 12: junta el 2 al 18, son 20, añádele un cero adelante, porque es multiplicar con dieces, y serán 200, y luego multiplicando las unidades, como es 8 con 2 hacen 16, junto con los 200 son 216, y de esta manera harás todas las que vinieren por esta orden, como 15 veces 15, y 13 veces 16, y 17 veces 18, &c.

Quien quisiere multiplicar 25 veces 25, tome el un 25, y ajúntele el 5 de las unidades del otro, y son 30: multiplicando este 30 con el 20 son 600: ahora multiplicar las unidades, que son 5, pues 5 veces 5 son 25, junto con los 600, hacen 625, y tanto es la suma.

Quien quisiere multiplicar 45 veces 43, conviene juntar el 3 con el 45, y son 48: este 48 multiplicado con 40 son 1920: ahora multiplicando tres veces 5 son 15: juntados con 1920 son 1935, y tanto vale la multiplicacion: y así harás quando las decenas son semejantes, como es 24 con 28, y 46 con 43, ó 31 con 37, &c.

Reproducción de una vieja aritmética deteriorada por lo que se desconoce su autor.

No debe sorprender que, aunque se presente la tabla de multiplicar, también se den reglas para los números de una cifra porque de acuerdo con la tradición raramente se memorizaba la tabla, como se hace ahora en las escuelas infantiles (Smeltzer, 1974).

Tampoco debe extrañar que hubiera interés por los métodos propios para los números de dos cifras o de la tabla mayor, porque entonces no se usaba el modelo analítico de casos que actualmente utilizamos para enseñar la multiplicación. Este modelo, que ya aparece en Bézout,

(1781), sigue la secuencia: primero los productos de los números de una cifra, después los de un número de varias cifras por otro de una, y, por último, los de varias cifras entre sí apoyándose en el caso anterior que ya se sabe resolver.

El cálculo en las Aritméticas del siglo XIX

Una consecuencia de la implantación en el siglo XIX del sistema general y público de enseñanza, es que todos los estudiantes deben recibir la misma información, lo que lleva aparejado que a todos se les debe enseñar los mismos cuatro métodos de cálculo.

Estos cuatro métodos son desde entonces lo que hoy conocemos como los algoritmos convencionales o estándar, y su efecto perverso ha sido que para muchos cálculo es sinónimo de "las cuatro reglas", también conocidas como los algoritmos de columnas.

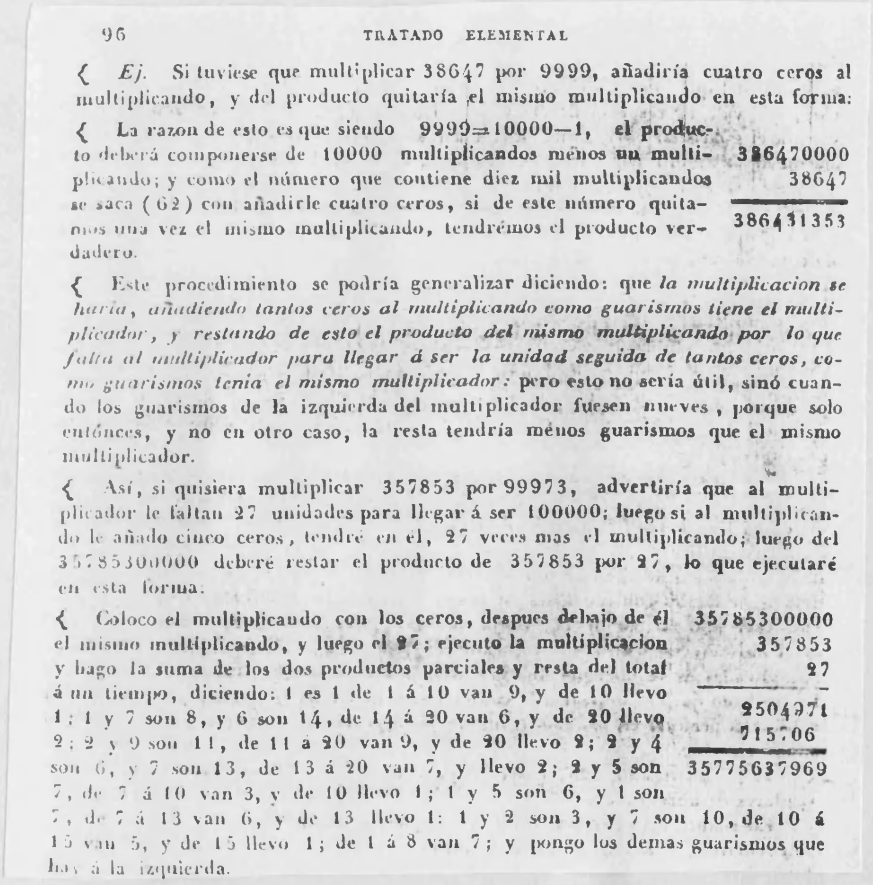
Al ponerse el énfasis en los algoritmos estándar, el resto de métodos alternativos se ve obligado a repartirse en dos bloques, uno constituido por los algoritmos que abrevian el algoritmo convencional, que se presentará inmediatamente tras él, y otro constituido por el resto de métodos alternativos, que irá en un apéndice al final del libro, únicamente para aquéllos que deseen profundizar en el tema.

Estos métodos serán valorados en la medida en que permitan ahorrar el número de cálculos intermedios, o la escritura de cifras, en la disposición práctica vertical de columnas. De esta manera los métodos alternativos pasarán a ser considerados como métodos para la abreviación.

Como la filosofía dominante en esa época obliga a justificar o, como se decía entonces, a dar la razón de los mismos, se suele completar la presentación del método, una vez enunciado con el lenguaje retórico e ilustrado con un ejemplo, con la demostración en el sentido que se

le daba en la época, esto es, un razonamiento retórico apoyado en la definición de la operación y, también cuando es necesario, en el valor de los órdenes de unidad de las cifras.

Además, como consecuencia de la mayor preocupación por el modo de presentar las ideas, se apuntará hacia un nuevo orden en la secuenciación de los métodos que, en vez de presentarlos como hechos aislados, tenga en cuenta primero el caso particular y después su posible generalización. La siguiente reproducción así lo ilustra.



96 TRATADO ELEMENTAL

Ej. Si tuviese que multiplicar 38647 por 9999, añadiría cuatro ceros al multiplicando, y del producto quitaría el mismo multiplicando en esta forma:

La razon de esto es que siendo 9999=10000—1, el producto deberá componerse de 10000 multiplicandos ménos un multiplicando; y como el número que contiene diez mil multiplicandos se saca (62) con añadirle cuatro ceros, si de este número quitamos una vez el mismo multiplicando, tendrémos el producto verdadero.

386470000	
38647	
386431353	

Este procedimiento se podría generalizar diciendo: que *la multiplicacion se haría, añadiendo tantos ceros al multiplicando como guarismos tiene el multiplicador, y restando de esto el producto del mismo multiplicando por lo que falta al multiplicador para llegar á ser la unidad seguida de tantos ceros, como guarismos tenia el mismo multiplicador:* pero esto no sería útil, sinó cuando los guarismos de la izquierda del multiplicador fuesen nueves, porque solo entónces, y no en otro caso, la resta tendria ménos guarismos que el mismo multiplicador.

Así, si quisiera multiplicar 357853 por 99973, advertiría que al multiplicador le faltan 27 unidades para llegar á ser 100000; luego si al multiplicando le añado cinco ceros, tendré en él, 27 veces mas el multiplicando; luego del 35785300000 deberé restar el producto de 357853 por 27, lo que ejecutaré en esta forma:

Coloco el multiplicando con los ceros, despues debajo de él el mismo multiplicando, y luego el 27; ejecuto la multiplicacion y hago la suma de los dos productos parciales y resta del total á un tiempo, diciendo: 1 es 1 de 1 á 10 van 9, y de 10 llevo 1; 1 y 7 son 8, y 6 son 14, de 14 á 20 van 6, y de 20 llevo 2; 2 y 9 son 11, de 11 á 20 van 9, y de 20 llevo 2; 2 y 4 son 6, y 7 son 13, de 13 á 20 van 7, y llevo 2; 2 y 5 son 7, de 7 á 10 van 3, y de 10 llevo 1; 1 y 5 son 6, y 1 son 7, de 7 á 13 van 6, y de 13 llevo 1: 1 y 2 son 3, y 7 son 10, de 10 á 15 van 5, y de 15 llevo 1; de 1 á 8 van 7; y pongo los demas guarismos que hay á la izquierda.

35785300000	
357853	
27	
2504971	
715706	
35775637969	

Reproducción del texto de Vallejo, 1813.

Otro hecho relevante de este siglo es que en él recobra fuerza la vieja teoría de la Psicología de las facultades, atribuida al filósofo y matemático alemán Christian Wolf (1679-1754) y descrita en su obra *Psychologia Rationalis* (1734) (NCTM, 1970b), que considera que la mente está constituida por diversas facultades, como imaginación, memoria, percepción y razonamiento, y que estas facultades son en cierto modo análogas a los músculos y como tales se fortalecen y forman con el entrenamiento, cuánto más duro y fatigoso mejor.

Bajo esta teoría, en la medida que una persona hace más uso de su capacidad de razonamiento, más desarrolla su "facultad de razonar", sin tener en cuenta si, al igual que hay músculos diferentes, con funciones distintas, en el razonamiento también puede haber diferentes formas de razonar, y diferencias según sea la cosa sobre la que se razona.

En este marco de pensamiento se explica la creencia de que la "disciplina mental" es un objetivo educativo. Esto dará lugar a una propuesta de enseñanza consistente en un programa de duro trabajo intelectual en torno a un cóctel de aquellas materias que se consideraban más apropiadas para entrenar la mente. A saber: las lenguas clásicas (Latín y Griego), la filosofía, y las matemáticas. No debe extrañar que a estas materias se las denominara "disciplinas", realmente lo eran.

En Europa, impulsaba esta corriente Pestalozzi, el cual enfatizaba el adiestramiento en la Aritmética mental "como medio importante para alcanzar su objetivo de mejora de la educación elemental en términos de habilidad para formar ideas claras de las confusas impresiones de los sentidos" (Monroe, 1919).

En Estados Unidos, su seguidor, el pionero autor de libros de texto Warren Colburn (1793-1833), contribuía a hacer que la aritmética mental asumiera un importante papel en los programas escolares, al

incluir, en sus libros para la educación infantil, conocidos como "Primeras lecciones en Aritmética según el plan de Pestalozzi" (1821), y "Continuación de las primeras lecciones" (1822), una gran colección de problemas de cálculo para ser resueltos mentalmente (ver Walbesser, 1973) por sus efectos como disciplina de la mente.

> Pocos ejercicios fortalecen y maduran la mente tanto como los cálculos aritméticos (Colburn, 1821).

> La aritmética es importante desde todos los puntos de vista, tanto si consideramos sus aplicaciones en los asuntos de la vida como sus efectos como disciplina de la mente, o por el tiempo usualmente dedicado a él (Colburn, 1830).

Las Aritméticas de esta época toman de los viejos métodos alternativos para abreviar el cálculo aquéllos que son susceptibles de operar mentalmente, y los presentan como antaño, en las mismas lecciones dedicadas a las operaciones, con largas listas de ejercicios para ser repetidos por el estudiante sin que se le permita el recurso al lápiz y papel.

El cálculo en las Aritméticas del siglo XX

Poco a poco, con la asunción de la sintaxis del álgebra, se consolidará en el siglo XX el formato horizontal simbólico y contraído, por medio del cual se unifica la descripción, el ejemplo y la fundamentación del método, como una realización de las propiedades fundamentales de las operaciones. De ésta manera el formato horizontal será asumido como el propio para la presentación de los métodos de abreviación en su versión de métodos para el cálculo mental. Así lo atestigua el siguiente ejemplo.

8.º **Multiplicación por 15.** — Se multiplica el número por 5 y por 3, puesto que $15 = 5 \times 3$.

EJEMPLO: $18 \times 15 = 18 \times 5 \times 3 = 90 \times 3 = 270$.

Se puede también añadir al producto del número por 10, la mitad de dicho producto.

EJEMPLO: $34 \times 15 = 340 + 170 = 510$
$23 \times 15 = 230 + 115 = 345$.

Reproducción del texto de Edelvives, 1934.

Desde entonces el cálculo mental, bajo distintas denominaciones tales como aritmética mental o aritmética oral, será algo más o menos común en los libros de texto escolares, suponiendo esto un cambio radical con las aritméticas precedentes donde el cálculo era sólo una cuestión de símbolos para ser escritos.

Aunque, a diferencia del significado reducido que se le da en la actualidad (vinculado a los métodos), al principio se aplicaría la coletilla "mental" a casi todo lo que tuviera que hacerse de cabeza: ejercicios de contar, problemas con enunciado, preguntas en relación con las alteraciones de los datos por el resultado, preguntas relacionadas con la comprensión del artificio de las operaciones.

Así se explica que encontremos en el texto de Dalmáu Carles (1898), bajo el epígrafe *ejercicios mentales sobre la suma/ resta*, ejercicios de todos estos tipos señalados.

Añadir 2 a un número, añadirle de nuevo al número obtenido, y así sucesivamente, hasta llegar a un número mayor que 100. Así: 1 y 2 son 3, y 2 son 5, y 2 son 7, y 2 son 9 ... Los mismos ejercicios con el número 3.

Si quitamos nuestra edad del año en que nos hallamos ¿qué indica la resta?

Cuando se hace la suma de dos o más números ¿por qué empezamos por la derecha?

¿Qué debe añadirse o quitarse al minuendo o al sustraendo de una resta para aumentar la diferencia en 9? ¿Y para disminuirla?

La suma de 4 números es 60. ¿Cuánto será dicha suma si multiplicamos cada uno de los números por 4?

Cuando se practica la resta de dos números, ¿por qué empezamos por la derecha?
Hallar el producto de 25 por 9 sin efectuar directamente la multiplicación.

Dalmáu Carles (1898)

El declive de esta teoría de "la Psicología de las facultades" comenzó cuando, a partir de los años veinte, Thorndike (1922) formuló su teoría de que la transferencia de una tarea a otra sólo era posible si se daban las condiciones de "elementos idénticos", basándose en el nulo efecto que observó en su investigación comparando el resultado del adiestramiento en una disciplina sobre otra diferente.

El declive de esta teoría de la "disciplina mental" comenzará cuando, en los años veinte, Thorndike presentó los resultados de su investigación con test de inteligencia comparando estudiantes que han estudiado "disciplinas" con estudiantes de educación física: las puntuaciones obtenidas eran similares (Ausubel, 1969).

Thorndike planteó que la transferencia de una tarea a otra sólo era efectiva cuando en ambas se dan "elementos idénticos". Williams James investigó si aprender una cosa podría ayudar a aprender otra y encontró que la memorización de ciertas clases de poesías no mejoraban la habilidad para memorizar otras. James concluyó que la retentiva no podía ser mejorada por adiestramiento (Payne, 1966).

Este fenómeno llevó aparejado un cambio en la concepción del cálculo mental como disciplina en favor del cálculo mental como cálculo rápido.

Posteriormente, a partir de los años 50, bajo la idea de que el cálculo mental debía tener un puesto en el currículum por sus aplicaciones a

la vida real (Payne, 1966), fueron muchos los autores que abogaron por su regreso.

Esta vez, las ideas que les movían dejaban claro que la clase de aritmética mental necesaria no es la que se apoya en la gimnasia mental que implica hechos sin significación, sino la que tiene que ver con (ver Grumbling, 1970):

La resolución mental de problemas utilitarios tanto con números aproximados como exactos.

El incremento de la comprensión del valor de posición, el papel del diez y los fundamentos de nuestro sistema de numeración.

El reconocimiento de las relaciones numéricas que descubren atajos convenientes para el cálculo.

La motivación recreativa que enriquece la experiencia numérica.

El cálculo mental en los textos del sistema escolarizado actual

Estas ideas quedarán en el currículum español de los años 70 reducidas a agilidad, funcionalidad y aplicación de las propiedades.

> Cálculo mental y rápido de sumas, resta multiplicaciones y divisiones.
> Desarrollo de la agilidad mental en el cálculo de estas cuatro operaciones.
> Aplicar las propiedades conocidas para simplificar y agilizar el cálculo mental.
> (MEC, 1981)

Todo ello en un marco de enseñanza cíclica (volver al tema aumentando el orden de dificultad en cursos sucesivos), en el que se distribuyen los métodos a lo largo de libro de texto de cada curso, durante tres cursos, y se procede a darles un tratamiento de periodos de tiempo, cortos pero intensivos. El modelo de presentación que se

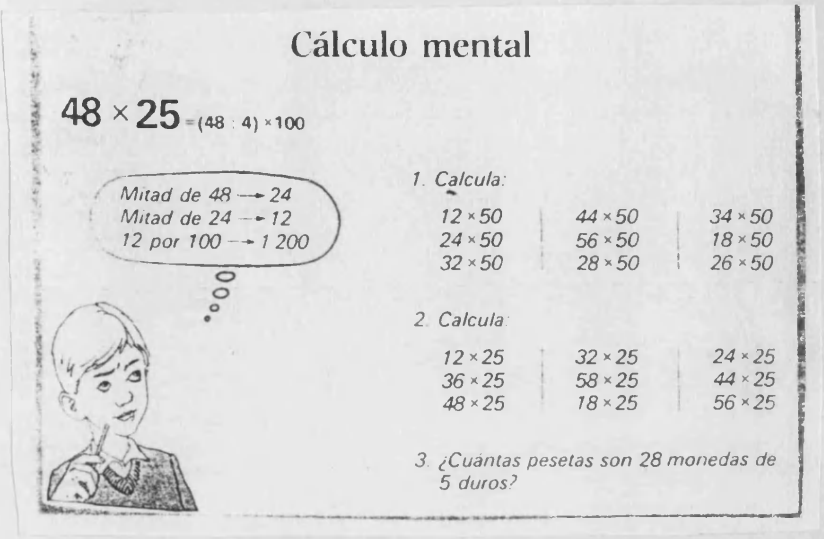
sigue es el analítico, que es el modelo de casos que tienen un método vinculado. Bajo este modelo parece ser que se aprenden reglas para calcular rápidamente por ciertos números, como multiplicar por 5 o 25, pero no está claro que también se aprenda a calcular en general, con cualquiera que sea el número.

> Los manuales de la época preveían por ejemplo el aprendizaje de una regla de cálculo para multiplicar por 1,25. Los alumnos debían saber que primero hay que multiplicar por 10 y enseguida dividir por 8, regla que se aplicaba colocando un cero a la derecha del número y después dividiendo por 2 tres veces seguidas. En cambio, los programas no preveían técnicas de cálculo mental para multiplicar por 1,2. Los alumnos debían saber calcular mentalmente 48x1,25 pero no estaban obligados a conocer otro modo que el cálculo escrito para encontrar 48x1,2 (ERMEL, 1981).

Otra característica de este modelo dominante es su rigidez, ya que al vincular los métodos a casos no se hace ver que también hay otros métodos posibles.

Además, como la metodología de aprendizaje es de ejercicios repetitivos, se prima el trabajo individual, lo que va en detrimento del enfoque colectivo con reflexión y verbalización en voz alta.

En la actualidad los textos escolares españoles actúan con total libertad metodológica, encontrándose en ellos combinaciones de tres tipos principales de lenguajes: el de la modelización explícita gráfica (descrita por Giménez y Girondo, 1993) con pictogramas y diagramas con flechas, el horizontal algebraico de ecuaciones y el vertical de columnas de los algoritmos estándar. Los ejemplos de las páginas siguientes ilustran estos tipos:



Cálculo mental

$48 \times 25 = (48 : 4) \times 100$

Mitad de 48 → 24
Mitad de 24 → 12
12 por 100 → 1 200

1. Calcula:

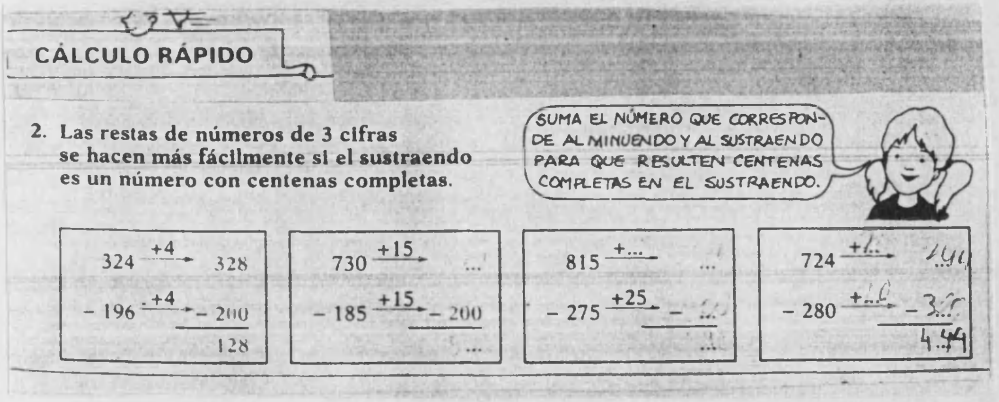
12 × 50	44 × 50	34 × 50
24 × 50	56 × 50	18 × 50
32 × 50	28 × 50	26 × 50

2. Calcula:

12 × 25	32 × 25	24 × 25
36 × 25	58 × 25	44 × 25
48 × 25	18 × 25	56 × 25

3. ¿Cuántas pesetas son 28 monedas de 5 duros?

Reproducción de uno de los textos de Anaya, 1986.



CÁLCULO RÁPIDO

2. Las restas de números de 3 cifras se hacen más fácilmente si el sustraendo es un número con centenas completas.

SUMA EL NÚMERO QUE CORRESPONDE AL MINUENDO Y AL SUSTRAENDO PARA QUE RESULTEN CENTENAS COMPLETAS EN EL SUSTRAENDO.

324 $\xrightarrow{+4}$ 328	730 $\xrightarrow{+15}$ ...	815 $\xrightarrow{+...}$ ...	724 $\xrightarrow{+...}$ ...
− 196 $\xrightarrow{+4}$ − 200	− 185 $\xrightarrow{+15}$ − 200	− 275 $\xrightarrow{+25}$ − ...	− 280 $\xrightarrow{+...}$ − ...
128	...	...	...

Reproducción de uno de los textos de Santillana, 1988

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA BIBLIOTECA DE CIÈNCIES

1. Algunas multiplicaciones abreviadas.

Multiplicación normal	Multiplicación abreviada
325	3250
× 9	− 325
2925	2925

Multiplicación de un número por 9

Se quiere multiplicar **325 × 9**.

Observa que:

$325 \times 9 = 325 \times (10-1) = 325 \times 10 - 325 = 3.250 - 325$.

Para multiplicar un número por 9 se agrega un cero al número y después se resta dicho número.

Multiplicación normal	Multiplicación abreviada
496	
× 99	49600
4464	− 496
4464	49104
49104	

Multiplicación de un número por 99

Se quiere multiplicar **496 × 99**.

Observa que:

$496 \times 99 = 496 \times (100-1) = 496 \times 100 - 496 =$
$= 49.600 - 496$.

Para multiplicar un número por 99 se agregan dos ceros al número y después se resta dicho número.

Multiplicación de un número de dos cifras terminado en 5 por sí mismo.

Los productos de 15×15, 25×25, 35×35, 45×45, etc., acaban todos en **25**.

Observa cómo se obtiene el producto completo:

1 × siguiente (2) = 2 — 2 × siguiente (3) = 6

15 × 15 = 225 — 25 × 25 = 625

3 × siguiente (4) = 12 — 4 × siguiente (5) = 20

35 × 35 = 1225 — 45 × 45 = 2025

1. Aplica las reglas anteriores para obtener los siguientes productos:

55 × 55	65 × 65	75 × 75	85 × 85	95 × 95
36 × 9	36 × 99	47 × 9	47 × 99	56 × 99

Reproducción del texto de Santillana, 1988

Propuestas alternativas para la enseñanza

En contra de este modelo han surgido voces que sugieren una enseñanza integradora del cálculo, que no separe el cálculo mental del escrito, en una perspectiva de cálculo variado. Esta perspectiva parece ser una tendencia actual en los currícula de diferentes países y ubica el cálculo mental en una situación importante, aunque no como la panacea que va a resolver la problemática del desarrollo del pensamiento numérico, en particular lo relacionado con y el dominio de las cantidades, sus relaciones, las operaciones y sus propiedades.

En este sentido se recogen a continuación pronunciamientos que marcan un punto de inflexión en cuanto al modelo de enseñanza seguido hasta ahora, porque aportan ideas que sugieren hacia dónde debería encaminarse cualquier nueva propuesta didáctica. Estas ideas son importantes para este trabajo porque serán recogidas más adelante al elaborar la propuesta didáctica que se va a experimentar.

French (1977), propone que el cálculo mental no debe ser algo para hacer individualmente en soledad, sino a través de la discusión en clase de sus métodos, no para buscar el mejor de ellos, sino para favorecer la flexibilidad del enfoque en una línea, que puede ligarse con el modelo de la "resolución de problemas" de Polya (1945), que comienza por la pregunta ¿de qué maneras diferentes se puede hacer?

Plunkett (1979) sugiere poner el énfasis en los hechos del sistema de numeración y nociones del valor de posición y en el significado y naturaleza de las cuatro operaciones.

Greene (1985) postula introducir las estrategias de cálculo mental ya en la enseñanza de las tablas para suplementar, que no suplantar, el programa de clase, para que los niños solos se ayuden a obtener aquellas soluciones en las que encuentran más dificultad, tal como pueda ser 7+8.

Hazekamp (1986) plantea enseñar el cálculo mental de modo integrado con el algoritmo escrito, incluso antes de que dominen éste, para evitar que éste influya negativamente en aquél.

Esta última idea va especialmente dirigida contra la práctica escolar de ejercitar el cálculo mental después del cálculo escrito ya que, en opinión de Hazekamp, esto produce que muchos alumnos, en particular aquellos con buena destreza en cálculo escrito, tiendan a resolver el problema de cálculo mental utilizando las técnicas del cálculo escrito pero olvidando o equivocándose en las "llevadas", porque normalmente el formato escrito exacto es demasiado difícil para hacerlo mentalmente.

Además, si se puede operar satisfactoriamente con la emulación al cálculo escrito los estudiantes no percibirán la ventaja o la necesidad de desarrollar estrategias del cálculo mental, o simplemente no harán el esfuerzo que comporta todo nuevo aprendizaje.

Kennedy y Tipps (1988) se aprovechan de las equivalencias entre diferentes monedas para presentar los métodos relacionados con ellas. Así, por ejemplo, la equivalencia entre dos monedas de cinco centavos y una de diez, o entre cuatro cuartos de dólar y un dólar, las utiliza para enseñar los métodos que aplican la transformación 5=10/2 y 25=100/4 .

Presente la multiplicación 24x5=?. Piense en 24 "nickels" (moneda de cinco centavos). Cambie 2 "nickels" por un "dime" (moneda de diez centavos).
Piense: 24 "nickels" igual (24:2) "dimes", luego 24x5 igual (24:2) veces 10, o 12 veces 10, que es 120. Multiplique por otro número para practicar.

Presente la multiplicación 24x25. Piense 24 cuartos (de dólar).
Cambie 4 cuartos por un dólar.
Piense: 24 cuartos igual (24:4) dólares, luego 24x25 igual (24:4) veces 100, que es 600.
Multiplique 25 por otros números pares para practicar.
Anime a los niños a pensar en otros números a los cuales pueda aplicar este proceso.

III.2 LOS METODOS RECOGIDOS EN LAS ARITMETICAS

III.2.1 Las Aritméticas analizadas

Conforme a lo dicho en la sección anterior se ha creído conveniente tomar el siglo XIX como punto de inflexión diferenciador de las Aritméticas, por ello se procede a la revisión de las mismas distinguiendo tres clases cronológicas de textos: Textos anteriores al siglo XIX, textos del siglo XIX y textos del siglo XX.

La metodología seguida para la revisión ha sido la de consultar varios textos renombrados de cada una de estas épocas, tras lo cual se ha procedido a la selección de aquéllos que tratan el tema con mayor exhaustividad, los cuales se analizan y describen con detalle en esta sección.

Antes del XIX

Para conocer el estilo y configuración de los métodos de cálculo en las Aritméticas anteriores al siglo XIX, se ha hecho un estudio dividido en dos partes.

Ante todo, se hace una síntesis de aquellos métodos de los que se tiene constancia que ya eran conocidos antes de la aparición de la imprenta, fundamentalmente a través de lo que son las aportaciones de la vieja cultura indo-arábiga documentadas básicamente por Smith (1923) y Sánchez Pérez (1949).

Después, se estudian con detalle dos textos representativos de la época de las primeras Aritméticas impresas, seleccionadas, una por su carácter de manual y la otra por ser un tratado exhaustivo. Estas son, la Aritmética de Treviso (1478), cuyo carácter mercantil da una idea de cuales eran los métodos más comunes en su tiempo, y el Tratado de Matemáticas de Juan Pérez de Moya (1563), que es una de las

Aritméticas más notables de las producidas en España en el siglo XVI por la cantidad de material histórico interesante que aporta (Smith 1923).

El siglo XIX

Al comenzar este siglo aparecen los primeros textos que recibieron una impronta o respaldo oficial al haber sido sometidos a la aprobación de una comisión de enseñanza central o estatal. Por ello, estos libros van a tener una gran influencia en la totalidad del Estado, y son determinantes para entender como se configuran las aritméticas desde su aparición, y en particular, los métodos para abreviar.

De este periodo se han revisado varias Aritméticas importantes en razón de su difusión e influencia, entre ellas las de Bourdon (1797) y Bails (1779). Finalmente se ha optado por las renombradas y muchas veces reeditadas Aritméticas de José Mariano Vallejo (1813) y de Sylvestre François Lacroix (1797), ésta última varias veces traducida. De ambos autores se puede decir que desarrollaron un cuerpo coherente de conocimientos que sirvió como curso completo para la formación en esta ciencia durante muchos años.

El siglo XX

Para condensar lo que ha supuesto el cálculo mental en este siglo se han revisado multitud de libros de Aritmética y textos del sistema escolarizado, de todos ellos se ha optado finalmente, en razón de su popularidad (múltiples veces reeditadas) y exhaustividad con que se trata el tema, por el Tratado de Aritmética Razonada de Dalmáu Carles (1898), que es una serie de las que corresponden al periodo de transición de un siglo al otro, el Tratado Teórico-práctico de Aritmética Razonada de Bruño (1932), que corresponde al periodo intermedio del siglo, y dos textos escolares que corresponden al momento actual de la educación obligatoria en España, concretamente los libros de Anaya (1986) y de Santillana (1982 y 1988).

III.2.2 Los métodos que ya se conocían desde la época de los árabes

La adición

Según Smith (1923), el algoritmo de la adición no ha cambiado mucho desde que los numerales Indo-arábigos comenzaron a utilizarse: a lo largo de la historia no ha habido métodos alternativos, salvo lo que son diferencias referidas a la colocación del resultado arriba o abajo, a empezar a operar por la derecha o por la izquierda rectificando los parciales, a poner las sumas parciales completas o reagrupadas a medida que se obtienen, y a poner o no señales para indicar las unidades que se llevan de una columna a la siguiente.

La sustracción

Para la sustracción, en cambio, decía Smith (1923) a comienzos de siglo, que el procedimiento nunca ha sido estandarizado, que hay cuatro o cinco métodos que todavía se usan hoy en día y que la ventaja relativa de uno sobre los otros aún no ha sido decidida. Estos métodos, que se recogen con detalle más adelante, son:

1. El del Complementario, que se basa en usar la forma a-b=a+(10-b)-10, o lo que es lo mismo, en intermediar las restas parciales de cada cifra pasando primero por su complemento a diez. Para los hindúes, según Sánchez Pérez (1949), este método consiste en empezar a operar por la derecha restando la primera cifra del sustraendo de 10, y al resto se añade la cifra del minuendo, escribiendo el resultado debajo de la raya que se habrá trazado como se hace actualmente, y para continuar se añade uno a la cifra siguiente del sustraendo y se continúa del mismo modo.

2. El de Llevar o Pedir y pagar, que se basa en el principio de conservación de la diferencia, consiste en sumar una decena a la cifra

del minuendo que es menor que la correspondiente del sustraendo y llevar una unidad a la cifra de orden inmediato superior de ésta.

3. El de Prestar, que se basa en las expresiones equivalentes del sistema de numeración, consiste en tomar una unidad de la cifra de orden inmediato superior de aquélla del minuendo que es menor que la correspondiente del sustraendo.

4. El Aditivo, que consiste en imaginar la suma cuyo resultado es el minuendo, ya sea llevando o prestando.

La multiplicación

De los hindúes, Sánchez Pérez (1949) señala dos métodos, el de empezar a multiplicar por la izquierda de una forma similar a la actual de columnas, pero usando a menudo la simplificación de multiplicar directamente por 11 o 12 que consiste en tomar las dos cifras juntas como si fueran un solo número cuando en el multiplicador existen seguidos dos unos o un uno y un dos. Y el método que consiste en descomponer el multiplicador en sumandos para efectuar los dos productos y sumarlos después. Así, por ejemplo, 275x14=274x8+274x6.

A su vez Smith, menciona el método que consiste en descomponer el multiplicador en factores, como cuando para multiplicar por 72 se multiplica por 9 y por 8, y dice de él que es uno más de los heredados de los h a través de los árabes.

De los árabes, señala Sánchez Pérez que es la operación que con más detenimiento tratan, debido al gran número de casos particulares que exponen

Para corroborar esta afirmación, presenta una impresionante y exhaustiva lista de métodos particulares, que viene dada casi toda ella en el lenguaje general del álgebra, es decir, poniendo exclusivamente la transformación algebraica en la que se basa, sin ejemplos que la

ilustren, ni comentarios sobre la casuística a la que se aplica cada uno de ellos, salvo en los métodos de Benalbana y de Alcalsadí, que no justifica, y salvo los casos de la multiplicación por números con ceros. Esto hace difícil reconocerlos cuando se los encuentra en las Aritméticas, donde vienen descritos más retóricamente y particularizados a los casos a los que se aplican. Para disminuir esta dificultad se presentan a continuación, completando su descripción con comentarios significativos que ilustran, aclaran, o suavizan la pura formulación algebraica. Estos son:

Multiplicación por números acabados en ceros.

7x1.000=7.000

30x4=120

5x700=3.500

600x700=4.200.000

Multiplicación por números de una cifra doblando en el caso del 2, doblando y añadiendo el sencillo en el del 3, doblando el doble en el del 4, añadiendo un cero y dimidiando en el del 5, y añadiendo un cero y restando el número en el caso del 9.

nx2=se dobla

nx3=nx2+n= se dobla y se suma el sencillo.

nx4=se dobla el doble

nx5=$nx\frac{10}{2}$=se le añade un cero y se dimidia.

nx9=(nx10)-n.

Multiplicación por un número compuesto de nueves tomando su centena, millar, etc. superior, que consiste en añadir tantos ceros como nueves tiene y restar el otro número.

nx9.999=(nx10.000)-n.

Multiplicación por 15 descomponiendo, que consiste en multiplicar por diez y sumar al resultado su propia mitad.

$nx15=nx10+nx5=nx10+nx\frac{10}{2}$= se le añade un cero, y al número que resulta se le suma su mitad.

Multiplicación de un número de nueves por otro con otras tantas cifras iguales, o regla de Benalbana.

Por ejemplo, para multiplicar 999x444, se escriben los nueves y a la izquierda los cuatros. Se multiplica 9x4 y el producto, 36, se escribe poniendo el 3 encima del primer cuatro de la derecha y el 6 encima del primer nueve. En los dos lugares que quedan entre el 3 y el 6 se pone 9-4, y en los dos lugares de la izquierda del 3 se ponen dos cuatros. En esta forma:

Producto. 443556

999 Multiplicando

Multiplicador 444

Multiplicación por un número tomando su decena, centena ... , superior (inferior) y restando (sumando) el producto del número por su complemento aritmético.

$Nxa=ax10^n-a(10^n-N)$.

$axb=(a\pm\frac{x}{10^n}xb10^n)\pm bx$, En este caso dice Benalbana se toma un número x conveniente para que $a\pm\frac{x}{10^n}$ sea divisible 10^n

Multiplicación de dos números de dos cifras usando las transformaciones que resultan de reagrupar los parciales con factor común de varias maneras, según los casos.

$(10+a)(10+b)=[a+(10+b)]10+ab$. Aplicable a dos factores entre 10 y 20.

$(10+a)(10b+c)=[ab+(10b+c)]10+ac$. Aplicable a un factor mayor que 10 y menor que 20, y otro factor mayor que 20 y menor que 100.

$(10a+b)(10a+c)=[(10a+b)+c]10a+bc$. Para dos factores con igual número de decenas.

$(10a+b)(10c+d)=[(10a+b)c+da]10+bd.$

Multiplicación de dos números cualesquiera contemplándolos a través de su número central, como si fuera un caso de "suma por diferencia" para aplicar la "diferencia de cuadrados".

$axb=([(a+b)/2]^2-[(a-b)/2]^2.$

Multiplicación descomponiendo un factor en dos sumandos, uno de los cuales es el otro factor.

$axb=a^2-(a-b)a$

$axb=b^2+(b-a)b$

Multiplicación descomponiendo un factor en dos factores de varias maneras.

$axb=a^2xb/a$

$axb=a^2:a/b$

axb=axcxd, siendo b=cxd

$axb=[\frac{a}{(a+b)}x\ b](a+b)$

$axb=[\frac{b}{(a+b)}x\ a](a+b)$

$axb=[\frac{a-10}{10}x\ b+b](a+b)$

Multiplicación de dos números tomando una parte alícuota de uno y el correspondiente múltiplo del otro, es decir dividiendo uno por otro número auxiliar y multiplicando el segundo por el mismo número auxiliar, como cuando se hace "doble y mitad".

$axb=\frac{axnxb}{n}$

Multiplicación de dos números formados cada uno por cifras iguales y con igual número de cifras, como por ejemplo 7.777x6.666, basándose en la transformación factorial 7.777x6.666=7x6x1111x1111 y en que los

números capicúa de la serie natural se generan con los productos de la forma 1111x1111.

Se forma el número capicúa con la serie natural hasta llegar al número de cifras de los factores: en este caso es el número 1.234.321, y este número se multiplica por el producto de las cifras, o sea 7x6=42.

Multiplicación de un número por sí mismo, o regla de Alcalsadí, basado en el desarrollo del cuadrado de un suma.

Sea, por ejemplo 438x438. Comienza por escribir el número separando las cifras con tres asteriscos. Escribe debajo de los asteriscos el doble de la cifra de la izquierda. Traza una raya horizontal por encima del 438. Ve colocando encima los productos que van indicados al margen. Traza otra raya horizontal sobre dichos productos. Efectúa la suma de éstos hacia arriba y obtén el producto.

	1 9 1 8 4 4
8x8	6 4
2x3x8	4 8
2x4x8	6 4
3x3	9
2x4x3	2 4
4x4	1 6 .
	4 ***3***8
	8 6

No hace más que desarrollar el cuadrado: $(400+30+8)^2$= ...

También conocían los árabes los métodos generales que son propios del cálculo escrito, porque están vinculados a una determinada disposición práctica de las cifras que se van obteniendo. Estos son:

De la Red, Enrejado o Celosía, que es una forma del algoritmo disponiendo los productos parciales en una tabla de doble entrada en la que se agrupan las cifras del mismo orden mediante líneas diagonales.

De la Copa o de Abenezra, por la forma en que se escriben los productos parciales completos, es decir sin llevar nada de memoria, unos debajo de otros formando una copa o cáliz.

Del Castillo o Cuadrilátero, que es casi como el actual, pero escribiendo los productos parciales completados con sus ceros de orden de unidad en vez de desplazándolos a la izquierda, de modo que todos comienzan en la misma columna.

Del Escaque o del Ajedrez, que ya es prácticamente el método actual, salvo que se dibujan casillas para cada cifra como si de un ajedrez se tratara.

De la Cruceta, que es como el actual pero sumando mentalmente los productos parciales del mismo orden de unidad.

> Es un método que requiere mucha práctica de cálculo mental, puesto que no escriben más que los factores y el producto. Ejemplo. Sea 53x27
>
> 53
> X
> 27
> 1431
>
> Se dice: 7 por 3, 21. Se escribe el 1 y se llevan 2. 7 por 5, 35 y 2 que se llevan 37; 2 por 3 son 6 y 37 son 43. Se escribe el 3 y se llevan 4. 2 por 5 son 10 y 4 que se llevan 14. Se escribe el 14 y resulta 1431 (Sánchez Pérez, 1949)

Smith aporta otros métodos a la lista anterior, también en forma de relación algebraica. Los más reconocibles son:

Multiplicación por números entre 5 y 10 completando la decena, que se basa en la transformación: ab=10b-(10-a)b, como por ejemplo 7x8=10x8-(10-7)x8. (Este método está en Sánchez Pérez en forma más general).

Multiplicación por complementos cuando un número es menor que diez y el otro mayor.

$ab=(a+b-10)10-(a-10)(10-b)$, $a>10$, $b<10$.

Multiplicación de dos números de dos cifras iguales entre sí.

$(10a+a)(10b+b)=((10a+a)b+ab)10+ab$.

Multiplicación de dos números haciéndolos iguales en decenas, como por ejemplo, $48x37=48x(40-7)=4^2x100+4x8x10-.(10x4x7+7x8)$.

$(10a+b)(10a-c)=100a^2+10ab-(10ac+bc)$.

Multiplicación utilizando la fórmula "suma por diferencia igual diferencia de cuadrados".

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Varios métodos para hallar el cuadrado de un número.

$(3a)^2=10a^2-a^2$; $(3a+1)^2=(3a)^2+((3a+1)+3a))$; $(3a-1)^2=(3a)^2-((3a-1)+3a)$.

$a^2=10a-(10-a)a$; $a^2=(ax\frac{1}{3})^2x10-(ax\frac{1}{3})^2$, cuando $a=3m$

$a^2=(a-1)^2+(a+(a-1))$, cuando $a=3m+1$; $a^2=(a+1)^2-(a+(a+1))$, cuando $a=3m+2$.

$(5a)^2=10a^2x(2+\frac{1}{2})$

La división

Se puede decir que los métodos para la división que ya se conocían desde los árabes son variaciones sobre un mismo tema. Para Sánchez Pérez el método para dividir de los hindúes era como el actual, sólo que cambiando la disposición práctica de las cifras de tal modo que el divisor se ponía debajo del dividendo, las restas parciales arriba, y el cociente a la derecha, separado o no por una línea.

También dice que en la Aritmética árabe se practicaba esta operación en el caso general, con una disposición práctica que permite utilizar el ábaco, en la que el cociente se escribe arriba del dividendo poniendo cada cifra en el lugar que le corresponde por su orden de unidad.

Otro método, que para Smith era el favorito hasta el año 1600 para esta operación, que era considerada como la más difícil, era el de la Galera, cuya característica diferenciadora es también su determinada disposición práctica, cuya forma recuerda a un velero.

Por último, menciona Smith el método Arabe, que es un método distinto al actual. Este método se basa en obtener los productos parciales empezando por la cifra de mayor orden del divisor, en vez de por la menor como es usual, y en escribirlos todos sin omitirlos. Así por ejemplo, para dividir 625 por 25 se procedía:

25)625(25
4__ 6: 2 (primera cifra del divisor) cabe a 2, 2x2 son 4, se resta de 6
22 2 que tengo de la resta de antes y bajo 2 son 22
10_ El 2 (del cociente) x5 (2ª cifra del divisor) son 10, se resta
125 12 de la resta y bajo 5, 125 entre 2 cabe a 5.
10__ 5x2 (primera cifra del divisor) 10, que se resta
25 El 5 del cociente por 5 (2ª cifra del divisor) son 25, que se resta
25

Diferencias en cuanto a las aportaciones de la cultura indo-arábiga a cada una de las operaciones

En resumidas cuentas, se podría decir que el conocimiento que aporta la cultura indo-arábiga se centra en buscar los algoritmos más apropiados para cada una de las operaciones.

Los árabes en su afán por desarrollar las matemáticas del cálculo se aplicaron a buscar los algoritmos más apropiados para cada una de las cuatro operaciones en

consonancia con el sistema hindú de numeración. No debe sorprender que aplicaran toda una serie de recursos para multiplicar por ciertos números determinados como el 5, el 9, el 15 (Paradís y Malet, 1989).

Pero donde parece que realmente fructifica su labor es en la multiplicación, lo que ocurrió en el resto de las operaciones es interpretable de modo diferente.

En la adición, parece como si no hubieran logrado encontrar ni métodos alternativos generales ni métodos particulares, y no porque no los hay, como se verá más adelante, sino porque el método general hallado no parece que tenga una dificultad que justifique el empeño en encontrar alternativas ni atajos para ningún caso particular.

En la resta tampoco encontraron métodos particulares, pero sí métodos generales cuya coexistencia en grado de igualdad perdura hasta nuestros días, en parte porque objetivamente ninguno parece mejor que el otro.

La división no acaba de adquirir su forma final hasta bien recientemente (Vallejo, 1813, todavía usa la forma extendida escribiendo las restas parciales completas), y las alternativas que se presentan son tan difíciles que ya es suficiente esfuerzo con aprender una, por eso el empeño de los aritméticos va dirigido a hacer más fácil la disposición práctica de las cifras que se van obteniendo durante el cálculo. Además, de todas ellas, ninguna es verdaderamente susceptible de ser aplicada mentalmente.

La ilustración de la página siguiente permite explicar esta afirmación:

La forma primitiva de dividir, conservada por Alamulí, es la siguiente, sin las aclaraciones que añadimos al margen:

Aclaraciones.	División.					
Cociente.		1	8	4	1	0
Dividendo	9	7	5	7	4	1
1×53	5	3				
Primer resto	4	4				
8×5 del 53	4	0				
Parte del resto		4				
8×3 del 53		2	4			
Segundo resto		2	1			
4×5 del 53		2	0			
Parte del resto			1			
4×3 del 53			1	2		
Tercer resto				5		
1×53				5	3	
Resto final					1	1
Quinto divisor					5	3
Cuarto divisor				5	3	
Tercer divisor			5	3		
Segundo divisor		5	3			
Primer divisor	5	3				

Los aritméticos posteriores fueron simplificando la técnica de la operación hasta que llegaron a realizarla en la misma forma que actualmente.

Reproducción del texto de Sánchez Pérez, 1949

La falta de métodos alternativos sencillos para la división explica por qué el análisis que a continuación se desarrolla, conducente a la elaboración del compendio de los métodos de cálculo mental y la investigación subsecuente sobre su aplicabilidad y transferenciabilidad de enteros a decimales, no se centre en esta operación. De aquí que en lo que sigue sólo se enumerarán sin detallarlos los métodos para la división.

III.2.3 Textos impresos anteriores al siglo XIX

III.2.3.1 La Aritmética de Treviso (1478)

La Aritmética de Treviso da pie a iniciar los comentarios sobre las aritméticas impresas. Este libro es un manual mercantil que permite conocer qué métodos de cálculo eran usuales en la época.

En Treviso, no se presentan métodos alternativos particulares que se pueda considerar que están pensados para la abreviación, los únicos métodos que se muestran son generales.

La adición

Unicamente se presenta un método, que es el usual hoy en día.

> Si deseamos sumar un número con otro, escribiremos el más grande arriba y el más pequeño abajo, colocando las cifras en el orden conveniente, por ejemplo, las unidades debajo de las unidades, decenas debajo de las decenas, centenas debajo de las centenas, etc. Siempre empezamos a sumar con el menor orden, que es el de menos valor.

La sustracción

Unicamente presenta un método, que es el del Complementario.

> Es necesario que hayan dos números en la sustracción, el número del que sustraemos y el número que es sustraído de aquél. El número del cual es sustraído el otro se escribe arriba, y el número que es sustraído debajo, en el orden conveniente, es decir, unidades debajo de unidades y decenas debajo de decenas, y así sucesivamente. Entonces, si deseamos sustraer un número de algún orden a otro, encontraremos que el número que tenemos que sustraer puede ser igual al otro, mayor o menor. Si es igual, como en el caso de 8 y 8, el resto es cero, que escribimos debajo de éstos en su columna apropiada. Si el número del que sustraemos es mayor, entonces se quita el número de

unidades del número más pequeño, escribiendo el resto debajo, como en el caso de 3 de 9, donde el resto es 6. Si, no obstante, el número es menor, ya que no podemos quitar un número mayor de uno que es menor que él, se toma el complemento del mayor respecto a 10, y se suma éste al otro, pero con esta condición: que se le sume 1 a la siguiente cifra de la izquierda. Y mucho cuidado siempre que se reste un número menor de uno mayor, usando el complemento, de recordar la condición arriba mencionada.

La multiplicación

En Treviso se dice que presenta tres métodos generales para multiplicar, que en realidad son más según los criterios de la época. En este orden:

Método "per Colona" para multiplicar un número de varias cifras por otro de una sola cifra, que es el usual hoy en día.

Método "per Crocetta" o de la Cruceta simple para multiplicar números de dos cifras.

Método del "Scachieri" o del ajedrez para multiplicar números de varias cifras. Este método lo presenta en varios formatos, uno sin dibujar las casillas, que es el usual de hoy en día, y los otros dibujándolas de tal modo que obtiene los métodos del Cuadrilátero y del Enrejado.

La división

Esta operación se resuelve en Treviso con dos métodos. Uno que denomina por la Tabla, y que es similar al actual pero con una disposición práctica diferente, y otro que es el de la Galera.

III.2.3.2 El Tratado de Juan Pérez de Moya (1563)

El Tratado de Matemáticas de Pérez de Moya es realmente completo en cuanto a los modos varios de calcular que interesan para el propósito de este trabajo.

Su estilo de presentación consiste en un listado de métodos reglados que se suceden sin encabezados o epígrafes. El lenguaje es el retórico propio de la época, sin ninguna clase de símbolos y sin nada que se parezca a una fundamentación o demostración, aunque en algunos casos excepcionales da una razón de su veracidad que no termina de argumentar.

> Cuando la unidad de alguno de los números que hubieres de multiplicar fuese 9 (sea el otro lo que fuere) multiplica la decena más cercana al número que tuviere el 9 por todo el otro número, y del producto quita el otro número, esto es por razón que la diferencia de nueve a diez es la unidad.

A continuación se detallan los métodos de Pérez de Moya encabezándolos con el tipo de enunciados significativos y actualizados que se introdujeron en la sección anterior al hablar del conocimiento indo-arábigo.

La adición

Pérez de Moya no aporta métodos alternativos para esta operación, sólo el común.

La sustracción

Con respecto a esta operación presenta varios modos "para que cada uno haga lo que mejor le pareciere". No porque "un modo sea más verdadero que otro, sino porque unos son más claros y otros más breves". En realidad sólo presenta el método de complementar,

aunque en tres variantes y el de Llevar. No dice nada del método de Prestar, ni por supuesto de métodos particulares.

Sí el número de abajo, o menor trajere algunos carácteres mayores (tomados separadamente) que el número mayor, se podrá restar de muchos modos. Y porque es malo de desarraigar la común usanza, pondré primero lo que usa la mayor parte del vulgo, y después otros modos más breves, para que cada uno haga de lo que mejor le pareciere. No quiero decir que un modo sea más verdadero que otro, porque todos van a parar a una misma verdad, sino que unos modos serán más claros que otros, y otros más breves, y de esta manera lo que se usa en común, es más prolijo y no muy claro.

A continuación se reseñan brevemente sus métodos de restar:

Método del Complementario, o de intermediar pasando por diez las cifras del sustraendo que son mayores que las correspondientes del minuendo y llevando una unidad a la cifra siguiente.

Método del Complementario generalizado a todas las cifras con independencia de si la cifra de abajo es menor o mayor que la de arriba.

Cuando restares, después de puesto el menor número debajo del mayor, quita siempre los carácteres del número de abajo de un diez y lo que restare júntalo con las letras de arriba, y si la suma no llegare a diez, pon lo que fuere debajo de la raya, y llevarás uno para juntarlo con la primera letra que se siguiera del renglón de abajo, y si pasara de diez, pon lo que pasara, y no lleves nada.

Método del Complementario particularizado según sea la diferencia entre la cifra de abajo y la de arriba.

Cuando quisieras restar un cualquier número de otro, asienta el menor número debajo del mayor, (como en todos se ha dicho) y guarda las reglas siguientes. Si el carácter del número de abajo fuese semejante al de arriba, pon siempre un cero debajo de la raya enfrente de ellos.

Si el carácter del número de arriba fuese mayor que el de abajo, resta el menor del mayor, y lo que dare ponlo debajo.

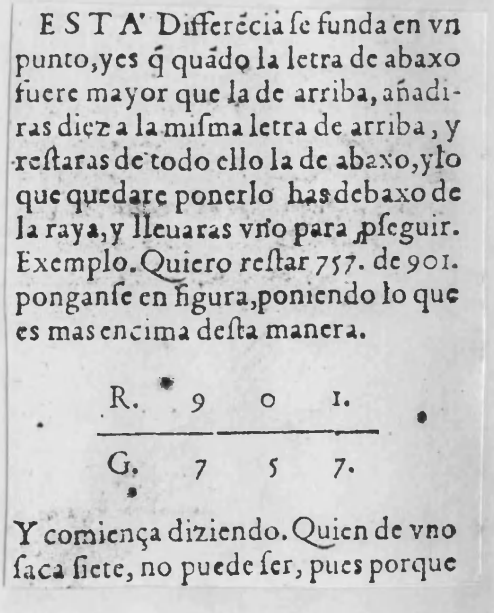
Si la letra de abajo excede a la de arriba en un punto, pon nueve, debajo de la raya, y lleva uno para juntarlo con la primera letra que se siguiere del mismo renglón de abajo.

Si la letra de abajo excediere en dos a la de arriba, pon 8 debajo de la raya, y lleva otro. Y si excediera en tres, pondrás 7. Y si excediera en cuatro, pondrás seis. Y si excediera en cinco, pondrás cinco. Y si excediera en seis, pondrás cuatro. Y si en siete, pon tres. Y si en ocho, pon dos. Y si en nueve, pon uno.

Cuando llevaras uno, y lo juntaras con algún nueve de arte que llegue a diez, pondrás lo de arriba cualquiera cosa que fuera, y llevarás uno.

Si en la suma de arriba hubiere alguna letra, o letras más que en la de abajo, ponlas abajo cuando llegare ella como estuviera.

Método de Llevar, cuya descripción aparece en su forma original en la siguiente reproducción del texto.



ESTA Differẽcia ſe funda en vn punto, yes q̃ quãdo la letra de abaxo fuere mayor que la de arriba, añadiras diez a la miſma letra de arriba, y reſtaras de todo ello la de abaxo, y lo que quedare ponerlo has debaxo de la raya, y lleuaras vno para ꝓſeguir. Exemplo. Quiero reſtar 757. de 901. ponganſe en figura, poniendo lo que es mas encima deſta manera.

R.	9	0	1.
G.	7	5	7.

Y comiença diziendo. Quien de vno ſaca ſiete, no puede ſer, pues porque

Reproducción del texto de Pérez de Moya, 1563

La multiplicación

Tras presentar los productos de los números dígitos que es lo que "el vulgo llama tabla", en una escalera de columnas decrecientes, Moya aborda los modos varios de multiplicar separándolos en dos grandes bloques, en medio de los cuales sitúa al algoritmo general, lo que significa que toma partido por uno, que ya es el actual. Esto supone una toma de posición frente a la vieja usanza de presentar varios métodos generales para multiplicar como se vio en Treviso.

En el primer bloque presenta las reglas para números dígitos del 9 al 4, un método de los Complementos a 10 para esos números y su generalización a Complementos a 100 para números de dos cifras, también un método que no es de columnas para números iguales en decenas y menores que 100. Del tres y del dos no da reglas porque dice que ya están cubiertas con las anteriores, salvo en los casos 3x3, 3x2, y 2x2 porque "¿quién ignora que tres veces tres hacen nueve, y dos doses hacen cuatro?"

Método para multiplicar por el nueve que se basa en el patrón que se sigue de su tabla: 9xa=10(a-1)+[(a-1)-a)].

> Todas las veces que multiplicando un número dígito por sí mismo, o por otro, el uno, o ambos, fueren nueves, se tendrá esta regla. Quita uno del número menor, y los que quedaren serán dieces, y mira de esto que quedare cuanto falta para nueve, y lo que faltare serán unidades, y juntarle has con los dieces.

Métodos para multiplicar por los números dígitos entre 8 y 4, que se basan en completar la decena superior o en descomponer y tomar relaciones alícuotas con 10. Concretamente, en las transformaciones 8=10-2; 7=10/2+2; 7=10-3; 6=10/2+1; 5=10/2; 4=10/2 -1.

Cuando multiplicares un número dígito por otro, si el uno a lo menos fuere 8, o ambos, harás dieces el menor, y si fueren iguales el uno de ellos, y de estos dieces quitarás tantas unidades cuantas montaren el duplo del mismo número menor.

... y si fuere 7 ... tomarás tantos dieces como unidades hubiere en la mitad del número menor, y juntarle has con ellos tantas unidades como hubiere en el doble del mismo número.

... y si fuere 6 ... añade al número menor tantos dieces como unidades hubiere en la mitad del número menor.

... y si fuere 5 ... toma tantos dieces como hubiere unidades en la mitad del otro.

Dos veces cuatro, ¿qué será? Toma la mitad del dos que es uno, y hazlo dieces, y será 10, saca el mismo dos y quedarán ocho, y así en los demás.

¿Ocho veces siete, ¿cuánto montan? Haz el ocho dieces, y serán 80, mira de siete (que es el otro) cuánto le falta para 10, y serán 3, multiplica 3 por 8, y serán 24, resta 24 de los 80, y quedarán 56, y tanto monta. Al contrario haz con el siete lo que hiciste con el ocho, y vendrá lo mismo.

Método de los Complementos para multiplicar por números dígitos, que se basa en la transformación ab=(10-a)(10-b)+10[a-(10-b)], llamado de los Perezosos.

Si quieres multiplicar un número Dígito por sí mismo, o por otro cualquiera número Dígito, como ocho veces seis, o siete veces seis, asentarás en un número (cualquiera de ellos) encima del otro, poniendo delante de cada uno hacia la mano derecha lo que le faltare para llegar a diez, como si dijéramos ¿ocho veces siete cuánto montan? Pon el uno encima del otro, poniendo delante del ocho un dos, y poniendo delante del siete un tres (que es lo que les falta para diez) como parece:

8 —— 2
7 —— 3

Hecho esto, multiplicarás las faltas que a los tales números les falta para llegar a diez la una por la otra, ¿como son? y tras, diciendo dos veces tres hacen seis, estos seis se asentarán debajo de la raya por unidades como parece:

8 —— 2
7 —— 3
6

Y luego restarás la falta del un número del otro número contrario, y no importa que sea cualquiera, quiero decir que el tres (que es la falta del siete) lo restas del ocho o los dos (que es la falta del ocho) lo restas del siete, que de una manera y de otra quedarán cinco, los cuales harás dieces, y juntarlos has con los seis que tenías de la multiplicación del dos por el tres, y montarán cincuenta y seis, y tanto dirás que montan ocho veces siete.

8 2
7 3
5 6

Nota, que cuando la suma de ambos los dos números que multiplicamos no pasara de 10, no curarás de esta regla porque, será cosa más embarazosa que comprensible.

Método de los Complementos para multiplicar números hasta 100, que se basa en la transformación: ab=(100-a)(100-b)+100[a-(100-b)].

Nota más, que así como has multiplicado un número dígito por otro, teniendo respecto a 10, por la misma orden se pueden multiplicar los números que no llegaran a 100, teniendo respecto a ciento, y así de otros números notando lo que del número Dígito fue dicho.
1

---

[1]Nota: Este método, que consiste en obtener un producto mediante el producto de los complementos aritméticos de los datos, y era conocido en la época como método de los Perezosos (Smeltzer, 1974, Corachán, 1699) y como método de San Andrés (Recorde (1543, cit. Yeldham, 1938), sólo es verdaderamente funcional para los números de 6 a 9.

Método para multiplicar números de dos cifras, iguales en decenas, que se basa en la transformación (10a+b)(10a+c)=10a(10a+b+c)+bc.

En que se pone regla para multiplicar desde once veces once, hasta diecinueve veces diecinueve. Finalmente, es regla general para multiplicar cualesquiera números, siendo iguales en decenas, y puede servir de tabla mayor.

Para multiplicar desde 11 veces 11, hasta 19 veces 19, u otros números iguales en decenas, así como 12 veces 14, 11 veces 15, 26 veces 25, y asi de otros cualesquiera, tendrás la regla que en estos ejemplos declarare. ¿Doce veces trece, cuanto monta? Junta los 2 del 12 con el 13, o los 3 del 13, con los doce, que de una manera y otra monta 15. Estos 15 serán dieces. Multiplica ahora las unidades de estos dos números una por otra (que son 2 y 3) diciendo, dos veces tres, son seis, estos seis juntarás por unidades a los quince dieces que tenias, y será 156, y tanto monta doce veces trece...

Otro ejemplo, 24 veces 26, ¿cuánto monta? Junta el 4 (que es la unidad del 24) con los 26, o el seis del 26 con los 24 (que no hace mas uno que lo otro) y de cualquiera suerte hacen treinta, los cuales doblarás (por causa que cada uno de los dos números que multiplican trae dos dieces) y serán 60, estos 60 serán dieces que son seiscientos, hecho esto, multiplicarás las unidades de los dos números (que son 4 y 6) diciendo, seis veces cuatro son 24, juntos con los seiscientos, son seiscientos veinticuatro, y tanto montan veinticuatro veces veintiseis...

Nota. Que así como en el ejemplo precedente doblaste los treinta, por causa que cada uno de los números trajo dos dieces: que si trajeran a tres dieces: tresdoblar hemos, y si a cuatro cuatrodoblar, etc.

Existen varias versiones de este método, una de ellas es el método para multiplicar con los dedos conocido con el nombre de método Turco, al menos con esta denominación se encuentra en la Aritmética de Chuquet (Campligio y Eugeni, 1992). En su forma generalizada, para números de más de una cifra, aparece en Dalmáu (1898) como método de los Complementos.

En el segundo bloque de contenido, tras el algoritmo general de columnas, presenta las reglas para números de más de una cifra. Estas reglas vienen divididas en tres bloques de contenido. Uno en el que sólo incluye la multiplicación por números acabados en ceros, otro para todos los demás métodos y un tercero para el producto de los órdenes de unidad.

Método para multiplicar los números acabados en ceros que consiste en añadirlos al multiplicando.

Cuando en la multiplicación, o multiplicador estuviere la unidad sola con ceros pocos, o muchos. Digo que añadiendo los ceros que hubiere en la parte de la unidad, a la otra quedará hecha la multiplicación.

Nota más, que si hubiere en la multiplicación, o multiplicador un dos, sin otra letra (cifra) de las significativas, doblarás la otra partida, y añadirás los ceros que hubiere en el dos a la otra (como se dijo de la unidad).

Nota lo que hemos dicho del dos, porque si fuere 3, tresdoblarás, y añadirás los ceros, y si cuatro, cuatrodoblarás, y si cinco, cincodoblarás, y añadirás los ceros, y si seis, seisdoblarás, y así procede en infinito.

Método para multiplicar descomponiendo un dato en sumandos.

Puédese multiplicar dividiendo el multiplicador, o multiplicación, y multiplicar las partes por el número, no dividido. Ejemplo multiplica 10 por 12. Divide los 12, o el diez en cualesquiera parte muchas, o pocas de suerte, que todas hagan tanto como el número que dividieres, como 3. 4. 5, que juntos hacen 12. Multiplica ahora el 10 que no se dividió por cada una de estas partes 3. 4. 5 y montará 30. y 40. y 50. Juntos estos productos harán 120, que es lo mismo que multiplicar juntamente 10 por 12, como se demuestra por la primera proposición del segundo de Euclides.

Otros multiplican de este modo, como queriendo saber que montan 123 cosas a 24 cada una? Toma los 20 de los 24 y multiplica con ellos los 123 cada letra por si,

diciendo 20 veces 100, serán 20 cientos, que son dos mil, asienta esto, y veinte veces veinte son cuatrocientos, y 20 veces 3 son 60, esto junto monta 2460. Luego toma los cuatro que dejaste de los 24, y multiplica con ellas cada letra de las del número 123 diciendo, 4 veces 100 son 400, y 4 veces 20 serán 80, y 4 veces 3 son 12, juntos estos tres productos con los 2490 (que tenías) será todo 2952, tanto es 123 veces 24.

Método para multiplicar descomponiendo un dato en factores.

Otros multiplican el uno de los dos números que ocurren en el multiplicar por los repriegos del otro. Como si quisieres multiplicar 16 por 10. Toma los repriegos del 16 (que son números que multiplicados todos unos por otros hacen 16, así como 4 y 4, ó 2 y 8, ó 2, 2 y 4). Y por cualesquiera de estas divisiones multiplicas los 10 diciendo 4 veces 10 son 40, y 40 veces 4 son 160. O con las otras dos partes (que son 2 y 8) diciendo 2 veces 10 son 20, y 20 veces 8 son 160. O con las otras tres partes que son 2, 2, 4 dirás 2 veces 10 son 20, y 20 veces 2 son 40, y 40 veces 4 son 160 (que todo es uno). O toma los repriegos del 10 (que son 2 y 5) y multiplica por ellos el 16. Diciendo 2 veces 16 son 32, y 32 veces 5 son 160 (que es lo mismo) de cualquier manera que multiplicar juntamente 16 por 10.

Método para multiplicar por un número de dos cifras tomándolas juntas, como si fueran una.

Otros cuando el multiplicador, o multiplicación trae dos letras las multiplican juntas por cada una de las del otro número. Como si dijesen 124 veces 12, ¿cuánto monta? Porque en el multiplicador hay dos letras que valen 12 multiplican por 12 cada una de las de la multiplicación diciendo, 12 veces 4 son 48, ponen 8 y llevan 4 dieces. Luego dicen 12 veces 2 son 24, con estos (porque son dieces) juntan los 4 que traen en la memoria, y hacen 28, ponen 8 y guardan 2. Luego dicen 12 veces 1 que son 12, juntan los 2 que traen, y hacen 14, ponenlos todos adelante y quedan 1488, y tanto es 124 veces 12.

Método para multiplicar de la Cruceta simple.

Método para multiplicar números de dos cifras en general, sin usar columnas, que se basa en la transformación:
(10a+b)(10c+d)=10a[(10c+d)+b]+b[(10c+d)+b-(10a+b)].

Otros para ver que montan 17 veces 21 juntan los siete de los 17 con 21 y serán 28, multiplica 28 por los 10 que quedaron después de quitados los siete y montara 280. Mira la diferencia que hay de 28 a 17 y serán 11, multiplica 11 por 7 (que es la unidad) del 17, y serán 77, junta 77 con doscientos ochenta, y montará 357, y tanto es 17 veces 21. Y así se hace en cualesquiera números mayores, o menores. Otro ejemplo ¿5 veces 7 qué serán? Del cinco quita tres (o lo que quisieres) y júntalos con el siete y serán diez, multiplica diez por dos (que fue lo que quedó después de quitados los tres) y serán veinte. Luego mira la diferencia de diez a cinco, y serán cinco, multiplica cinco por el tres (que apartaste de los cinco) y serán quince, júntales con veinte y serán treinta y cinco, tanto monta multiplicando 5 por 7. Otro ejemplo, 125 multiplicado por 234 qué montan? Junta (cinco que es la unidad del uno) con 234 (que es todo el otro números) y serán 239, multiplica estos 239 por 120 (que es lo que quedo al primero número después de quitado cinco) y montará 28680. Mira ahora la diferencia que hay de 239 a 125 (que es el primero número) y serán 114. Multiplica 114 por 5 (que es la unidad del primero) y montará 570, juntalos con los 28680, y será todo 29250, y tanto monta multiplicando 125 por 234.

Método para multiplicar mediante doble y mitad, cuando la unidad de un número es el 5 y el otro un número par y también cuando el otro número es impar, descomponiendo previamente el impar en par más uno, o usando mitades

Cuando la unidad de algún número de los dos que hubieres de multiplicar fuere cinco, y el otro número fuere par, dobla siempre el número donde estuviere el cinco, y multiplica lo doblado por la mitad del otro. Ejemplo 35 veces 24 ¿qué montan? Dobla 35 y serán 70, multiplica 70 por 12 (que es la mitad de 24) y vendrá a ser todo 840, tanto es 35 veces 24. Si el otro número no fuese par como si dijesen 25 veces 17, dobla 25 (como la regla manda) y serán 50, multiplica esto por 8 (que es la mitad de 17 menos uno) y será 400, junta (por el 1 que quitaste) un 25, y será todo 425. O multiplica 50 (que es el duplo de 25) por 8 y medio (que es mitad de 17) y montará otros 425, y tanto es 17 veces 25.

Método para multiplicar cuando la unidad de un número es el 9, tomando su decena superior.

Cuando la unidad de alguno de los números que hubieres de multiplicar fuese 9 (sea el otro lo que fuere) multiplica la decena más cercana al número que tuviere el 9 por todo el otro número, y del producto quita el otro número, esto es por razón que la diferencia de nueve a diez es la unidad. Ejemplo 29 veces 20 ¿qué monta? Multiplica treinta (que es la decena más cercana a veintinueve) por veinte (que es el otro número) y montará seiscientos, quita de esto los veinte y quedará quinientos ochenta, pon lo que monta 29 veces 20.

Método para multiplicar por el 25 descomponiendo, es decir, tomando dos dieces y medio, y también completando el otro factor a su decena superior.

Multiplicando 37 por 25 ¿qué monta? Mira qué dieces son los 25 y serán 2 y medio, convierte por tanto en dieces los 37 (añadiéndoles un cero) y serán 370, dóblalos y añádeles su mitad por razón que el otro número es dos dieces y medio, y será todo 925. O toma los 37 y hazlo 40, y porque en cuarenta hay cuatro dieces, haz dieces el 25 y cuatrodóblalo, y montará mil, ahora porque al 37 le añadiste 3 cuando le hiciste cuarenta, multiplica 3 por 25 y serán 75, y esto se restará de los mil que tenías y quedará 925, como por la otra vía.

Método para multiplicar por 11, 12, 13, 14, 20 ..., 100, 101, 102 tomando el otro factor como parcial, y doblándo, tresdoblándo, etc., según sea el caso.

Cuando el uno de los números que multiplicares fuere 11 (sea el otro cualquiera), deja los 11, y pon el otro debajo de sí mismo adelantado una unidad, y la suma de ambas partidas será el producto. Ejemplo 37 veces 11 ¿qué monta? Pon el 37 de este modo

37
37

y sumando monta 407.

Y si el uno de los dos números que se multiplicaren fuere 12, pon el duplo del otro número una casa adelante del mismo número, y la suma de ambas partidas será lo que monta. Ejemplo 324 veces 12 ¿qué será? ...

Nota lo que hiciste cuando el un número es doce, por razón que la unidad del doce es 2, que si fuera tres, como habiendo de multiplicar algún número por 13, tresdoblarás, y si por catorce cuatrodoblarás, y si quince cincodoblarás. & hasta llegar a 19, que nuevedoblarás fuere, y si fuere 20, dobla y añade un cero. & hasta llegar a ciento, que se añadirán dos ceros. Y si el un fuere 101, pon el otro dos veces pasando la una vez dos letras adelante. Ejemplo. Multiplica 152, por 101, ...

Y si el un número fuere 102, porque fenesce en 2, dobla el otro número, poniendo el duplo dos letras adelante. Ejemplo 134 veces 102, ...

Y si el un número fuere 103, tresdobla el otro pasando el tresdoblo dos letras adelante y así procede en esta regla en infinito.

Regla para multiplicar los órdenes de unidades: Unidades por decenas, decenas por decenas, dieces por cientos, cientos por cientos...

Multiplicando unidades por decenas, lo que viniere será decenas. Ejemplo 6 veces 40, ¿cuánto monta? Multiplica 6 por el 4 (del cuarenta) y será 24, estos 24 son dieces que valen 240, tanto es seis veces cuarenta. Multiplicando decenas por decenas, el producto es cientos. Ejemplo...Etc.

La división

Después de la multiplicación Pérez de Moya aborda la división, siguiendo la secuencia normal, pero como ya hemos dicho en el apartado anterior, a continuación sólo se enumerarán sus métodos, sin transcribir literalmente su texto.

Método para dividir descomponiendo el divisor en factores.

Método para dividir simplificando o amplificando, o lo que es lo mismo sacando un mismo número del dividendo y divisor o por el contrario multiplicándolo.

Método para dividir restando múltiplos del divisor, o lo que es lo mismo quitando cantidades que se considera que el divisor entra en ellas.

Método para dividir descomponiendo el dividendo en sumandos, o lo que es lo mismo dividiéndolo en muchas partes, después dividiendo cada parte y luego sumando los cocientes.

Diferencias con el conocimiento de los árabes

Como se ve, Pérez de Moya trata el tema con gran exhaustividad. Contempla la mayor parte de los métodos reseñados en el apartado anterior, salvo el método de Prestar de la resta, los de multiplicar que usan las transformaciones alícuotas tales como: 25=100/4 o 125=1000/8, y los cuadráticos.

III.2.4 Textos del siglo XIX

III.2.4.1 El Tratado de José Mariano Vallejo (1813)

El tratado de J. M. Vallejo (1813) constituye el gran manual del siglo XIX desde el famoso "Elementos de Matemáticas" de Benito Bails (1779), que a su vez bebe, entre otros, en las fuentes del Padre Tosca (D. Thomas Vicente Tosca, 1709, Compendio matemático. Valencia) de Chistiani Wolf (1743, Elementa Matheseas Universe. Ginebra) y, en la parte aritmética, sobre todo de M. Bezout (1781, Paris).

Este tratado manifiesta el sentir de su época, en la que se estandarizan las "cuatro reglas" y se vinculan los métodos alternativos a la abreviación. Se cuida el modelo de presentación de las ideas dando

razón de las mismas con el lenguaje retórico propio de la época, en el que se argumenta con los órdenes de unidades de las cifras, el significado de la operaciones y se generaliza la inclusión en el discurso de los términos formales actuales: multiplicando, multiplicador, decenas, centenas, etc.

De acuerdo con ello, Vallejo organiza el contenido anteponiendo el método general al que acompaña de "los casos de abreviación de que es susceptible esta operación". Después, pospone o relega al final del capítulo el resto de métodos "particulares de abreviación de las operaciones explicadas" porque, "siendo el tiempo lo que más debe economizar el hombre, se le deben proporcionar todos los medios para conseguirlo".

A continuación se detallan los métodos que presenta Vallejo encabezándolos con el tipo de enunciados actualizados que se vienen usando hasta aquí. Cuando el método aporta alguna novedad con relación a lo anteriormente descrito, se transcribe completamente, en caso contrario sólo se enuncia.

La suma y la resta

En cuanto a la suma y la resta, Vallejo no considera ningún método alternativo, porque dice que "son sencillas y lo que se adquiere con el ejercicio es una práctica por medio de la cual se ejecutan de memoria estas operaciones, cuando los números no son muy complicados". En consecuencia presenta un solo método que, rompiendo con la tradición española, no es el método de "llevar" sino el de Prestar.

Método de Prestar, que consiste en tomar una unidad de la cifra inmediata de la izquierda de aquélla del minuendo que es menor que su correspondiente del sustraendo.

Para poder ejecutar esta resta parcial se toma una unidad del guarismo inmediato de la izquierda: y como vale 10 respecto de aquel que está a su derecha, se

añaden estas 10 a las unidades que había en dicho lugar: de esta suma siempre se podrá restar el guarismo que le corresponde, y se pondrá la resta debajo; luego, es menester llevar en cuenta aquella unidad que se tomó y rebajarla del guarismo del minuendo; pero es más análogo con el modo de proceder en las demás operaciones, el añadir esta unidad al guarismo del sustraendo, dejar el del minuendo conforme era, y hallar la diferencia.

La multiplicación

Como se ha dicho anteriormente, tras el método general presenta los casos en que éste se puede abreviar. Estos son:

Método para multiplicar los números acabados en ceros, que consiste en añadirlos al multiplicando, ampliado al caso en que los ceros están intercalados, donde en vez de multiplicar por ellos se corre el producto de las demás cifras hacia la izquierda tantos lugares más uno, cuantos ceros hay.

Método reglado para multiplicar por 11, y su generalización a 111, 1.111, etc., poniendo la cifra de las unidades del otro factor; después sumando ésta con la de las decenas, etc.

Cuando se tiene que multiplicar por 11, se puede ejecutar inmediatamente poniendo el último guarismo; después se suma este con el anterior, y la suma si se puede expresar con un número dígito se pone; en el caso contrario, se ponen las unidades y se guarda la decena para añadirla a la suma del penúltimo con su anterior, y así se continúa. Así, si quiero multiplicar 7890356 por 11, diré: 6 es 6, que pondré en un lugar separado, y luego diré: 6 y 5 son 11; pongo el 1 a la izquierda del 6, y llevo 1 para añadir a la suma siguiente; continuo, 5 y 3 son 8, y 1 que llevaba son 9 que pongo a la izquierda; luego, 3 y 0 son 3 que pongo; y sigo, 0 y 9 son 9 que pongo también siempre a la izquierda del último; 9 y 8 son 17, pongo el 7 y guardo el 1, y digo: 8 y 7 son 15, y 1 son 16, pongo el 6 y guardo el 1, diciendo: 7 que es el último guarismo y 1 que llevaba son 8, que pongo a la izquierda y saco el producto 86793916. La razón de esta práctica es que, al hacer la multiplicación, los productos parciales serían iguales con el multiplicando, y quedarán colocados como aquí se ve:

7890356
x11
7890356
7890356
86793916

De modo que está reducido a sumar los guarismos como dice la regla. Del mismo modo hallaríamos las reglas para cuando el multiplicador fuese 111, y 1111, etc.

Método para multiplicar por 12 como si fuere número dígito, contando por docenas.

Método para multiplicar por un número de dos cifras significativas siendo una la unidad, que consiste en multiplicar sólo por la cifra que no es la unidad.

Posteriormente, Vallejo dedica un apartado al estudio de "las alteraciones que sufren los resultados de las cuatro operaciones explicadas hasta aquí por las que sufren los datos" porque esto le va a permitir dar razón de los métodos alternativos que presenta al finalizar el capítulo dedicado a las operaciones, bajo el epígrafe: "Disgresión acerca de otros diversos medios que hay para probar las operaciones, y de algunos métodos particulares de abreviación en las operaciones". Estos son:

Método para multiplicar descomponiendo un dato en factores.

Método para multiplicar por un número cualquiera de nueves, tomando su decena, centena, etc, inmediata superior. Y también, generalizándolo a cualquiera que sea el número, y en especial a los números acabados en nueve.

Si tuviese que multiplicar por un número cualquiera de nueves, añadiría al multiplicando tantos ceros como nueves había, de esto restaría el multiplicando, y

lo que me resultase sería el producto pedido. Ejemplo, si tuviese que multiplicar 38647 por 9999, añadiría cuatro ceros al multiplicando en esta forma:

386470000
38647
386431353

La razón de esto es que siendo 9999=10000-1, el producto deberá componerse de 10000 multiplicandos menos un multiplicando; y como el número que contiene diez mil multiplicandos se saca (62)[1] con añadirle cuatro ceros, si de este número quitamos una vez el mismo multiplicando, tendremos el producto verdadero.

Este procedimiento se podría generalizar diciendo: que la multiplicación se haría, añadiendo tantos ceros al multiplicando como guarismos tiene el multiplicador, y restando de esto el producto del mismo multiplicando por lo que falta al multiplicador para llegar a ser la unidad seguida de tantos ceros, como guarismos tenía el multiplicador: pero esto no sería útil, sino cuando los guarismos de la izquierda del multiplicador fuesen nueves, porque sólo entonces, y no en otro caso, la resta tendría menos guarismos que el mismo multiplicador.

Así, si quisiera multiplicar 357853 por 99973, advertiría que al multiplicador le faltan 27 unidades para llegar a ser 100000; luego si al multiplicando le añado cinco ceros, tendré en él, 27 veces mas el multiplicando; luego del 35785300000 deberé restar el producto de 357853 por 27, lo que ejecutaré en esta forma: ...

Método para multiplicar por 25, 125, tomando la relación alícuota 25=100/4, 125=1000/8.

Cuando el multiplicador es 25, podemos ejecutar la multiplicación añadiendo dos ceros al multiplicando, y tomando la cuarta parte de esto; porque con añadir dos ceros le multiplico por 100; y como 100 es cuatro veces mayor que 25, resulta que el producto también será cuatro veces mayor que el verdadero, y por lo mismo le deberemos hacer este número de veces menor.

[1] Aquí remite a una propiedad estudiada anteriormente.

Por ejemplo: si quisiera multiplicar 57834 por 25 (o si quisiera reducir 57834 arrobas a libras), añadiría dos ceros y tendría 5783400; y tomando la cuarta parte por el método expuesto (72), resultará 1445850.

Si le hubiera tenido que multiplicar por 125 le hubiera añadido tres ceros y esto lo hubiera dividido por 8 y tendría 7229250.

Método para multiplicar cuando dos guarismos seguidos del multiplicador son múltiplo de alguno de los anteriores. Este método consiste en aprovechar el parcial correspondiente al factor del que son múltiplos.

Cuando dos guarismos seguidos del multiplicador equivalen al producto de algunos de los anteriores, se multiplica este por el otro factor y se excusa la repetición, como se ve en el ejemplo:

	547253052
	123287364
Producto por 4	2189012208
Producto del anterior por 9	19701109872
Producto del multiplicando por 7	3830771364
Producto del anterior por 4	15323085456
Producto del multiplicando por 3	1641759156
Producto del anterior por 4	6567036624
Producto total	6746938622203928

Donde advierto, después de multiplicado por 4, que como 36 equivale a 9 veces 4, habré multiplicado por 36, si multiplico el anterior por 9; después multiplico por 7, y su producto le corro dos lugares hacia la izquierda porque he multiplicado a un tiempo por los dos guarismos 36; luego multiplico esto por 4, y así continúo como se ve en el ejemplo.

También se pueden hacer semejantes abreviaciones, aun cuando en el multiplicador se hallasen los múltiplos a la derecha de sus factores; pues en este caso no se necesitaría más que empezar a multiplicar por los últimos, teniendo el

cuidado de ir colocando cada producto parcial los lugares que corresponda hacia la derecha, como se ve en el ejemplo...

Método de la Cruceta, en las formas simple y general.

Finalizaremos este asunto con un método abreviado y general, por cuyo medio se obtiene el producto final sin escribir los productos parciales intermedios. Para esto recordaremos, que si se observan con atención los productos parciales de algunas multiplicaciones, se ve que todos están dispuestos de manera que los mismos órdenes de unidades se hallan en una misma columna vertical; y analizando su formación, se verá ademas que las unidades por las unidades deben siempre dar unidades, pudiendo también dar decenas, pero nada más; que para tener todas las decenas, es necesario añadir este exceso de decenas que provienen de las unidades por las unidades; 1º a las decenas por las unidades; 2º a las unidades por las decenas, lo que podrá dar centenas además; que para tener todas las centenas es necesario añadir este exceso; 1º a las centenas por las unidades; 2º a las unidades por las centenas; 3º a las decenas por las decenas, lo que podrá ocasionar millares además; que para tener todos los millares es necesario añadir este exceso, 1º a los millares por las unidades; 2º a las unidades por los millares; 3º a las centenas por las decenas; 4º a las decenas por las centenas; lo que podrá dar decenas de millar, etc.

Luego podremos establecer esta regla general para encontrar a un tiempo el producto de dos factores cualesquiera. Multiplíquense las unidades por las unidades: escríbanse las unidades del producto y reténganse las decenas; multiplíquense después las decenas por las unidades; luego las unidades por las decenas, y a su suma agrégense las decenas retenidas: escríbanse las decenas de esa suma total, y reténganse las centenas; multiplíquense las centenas por las unidades, las unidades por las centenas, y las decenas por las decenas, al total añádanse las centenas retenidas: escríbanse las centenas contenidas en este nuevo total, y reténganse los millares para añadirlos a la suma de los millares por las unidades, de las unidades por los millares, de las centenas por las decenas, de las decenas por las centenas, etc.

La división

En la división, Vallejo presenta la forma extendida del método estándar que consiste en escribir las restas parciales y deja como un caso de abreviación la forma más popular en la que se multiplica y resta juntamente. Además, considera en este apartado los casos en que el dividendo, el divisor, o ambos terminan en ceros. El resto de los métodos alternativos para la división, que relega a una disgresión posterior, son (sólo se enumeran):

Método para dividir descomponiendo el divisor en factores.

Método para dividir por 5, 25, 125, etc., tomando la relación alícuota.

Diferencias entre los métodos de Vallejo y Pérez de Moya

La diferencia más notable entre la lista de métodos de Vallejo y de Pérez de Moya, es que el primero renuncia a los métodos de carácter reglado para la tabla menor y mayor, salvo el de la cruceta, quizá porque no es fácil fundamentarlas en términos de los significados de las operaciones, como hace él con los otros métodos.

Aparte de esto, se observa la introducción del método de Prestar para la sustracción, que no es el usual en España, y un cambio de opción para multiplicar por 25 y 125 tomando en vez de la descomposición aditiva 25=10+10+5 la relación alícuota 100/4 o 1000/8. Este cambio se puede enlazar con el hecho de que no presenta métodos, ni el general ni los particulares, para multiplicar descomponiendo un factor en sumandos, quizá porque estos métodos parecen menos de abreviación que de extensión, ya que son procedimientos más largos, aunque más sencillos.

Esto mismo ocurre con la división, donde no contempla los métodos, presentados por Pérez de Moya, de descomponer el dividendo en sumandos o de restar múltiplos conocidos del divisor.

III.2.4.2 El Tratado de S. F. Lacroix (1797)

En 1797, Sylvestre François Lacroix publicó su "Traité élémentaire d'Arithmétique" que es en su origen una adaptación de los "Eléments d'Algèbre" de Clairaut (Schubring, 1987).

En este libro, de gran influencia en España, Lacroix dedica un apartado a los métodos alternativos de cálculo situándolos todos juntos al final de la Aritmética. Para él, estos métodos son aplicaciones de los principios que se siguen, según sus propias palabras, de la "comparación de los resultados de varias multiplicaciones u divisiones" cuyos datos están relacionados de alguna manera particular, las cuales sirven para abreviar y facilitar los cálculos o para ejecutar con mayor comodidad.

> Siempre que en dos multiplicaciones sea común alguno de los factores, y uno de los factores restantes sea múltiplo del otro, el producto correspondiente al mayor de éstos deberá ser equimúltiplo del otro.
>
> Si al mismo tiempo que uno de los factores propuestos para una multiplicación, es múltiplo de alguno de los propuestos para otra, el factor restante de ésta fuere múltiplo del restante de la primera, los dos productos deberán ser exactamente iguales entre sí.
>
> Esta observación nos proporciona la facultad de poner, siempre que nos acomode, en lugar de los factores dados para una multiplicación, otros muy distintos que nos den el mismo producto.
>
> ... tratándose de abreviar y de ejecutar con mayor comodidad las multiplicaciones y las divisiones, no son de omitir las aplicaciones que a este objeto pueden hacerse de los principios establecidos en los párrafos 55 y siguientes.

El modelo de presentación que sigue Lacroix comienza por plantear el principio en el que se va a apoyar, después enuncia la regla y por último da razón de su veracidad.

Al mismo tiempo, al enfatizar principios directrices de los métodos, adopta una organización que va más allá de la separación entre métodos vinculados al algoritmo general y métodos alternativos, ya que dispone de un enfoque unificador. Así, pone primero los métodos que se basan en su idea de relación numérica y después los que se basan en la idea de descomposición.

> Relaciones numéricas: "... es fácil ver que hallados por el método ordinario ciertos productos parciales, podremos inferir de ellos otros varios por la relación que tengan entre sí los respectivos multiplicadores".

> Descomposición: "A veces suele ser conveniente considerar como descompuesto en dos o más partes a uno de los factores que nos hayan propuesto para efectuar una multiplicación, pudiendo hacer la descomposición por partes cuya suma sea igual al número dado, o en partes que multiplicadas entre si lo produzcan".

La Adición y sustracción

No presenta ningún método alternativo para la adición, y para la sustracción no va más allá de presentar como método principal el de Prestar y como método secundario el de Llevar. Por lo tanto, se puede decir que para Lacroix, estas dos operaciones no están necesitadas de ningún tipo de alternativa para la abreviación o simplificación.

La multiplicación

Método general de Doble y Mitad.

> ... si uno de los factores fuese doble, y el otro mitad, cada uno de su correspondiente; o si fuese triple el uno y tercera parte el otro; el uno cuádruplo y el otro cuarta parte

etc. para determinar el producto no tendremos que hacer operación alguna; puesto que debe ser el que ya conocemos.

Método para multiplicar cuando un factor es 5 ó 2+1/2 ó 25 ó 500 ó 250 ó 125 etc o parte alícuota de 10, ó de 100, ó de 1000, usando las relaciones alícuotas correspondientes.

Método para multiplicar cuando hay cifras que son múltiplo particular de otras anteriores, y en general, infiriendo de ciertos productos parciales otros varios "por la relación que tengan entre sí los respectivos multiplicadores". En particular, cuando un factor es 842, 248, 963, 396, 2468 ó 8462.

Siendo el cuatro doble del dos; el ocho doble del cuatro, y cuádruplo del dos; el seis doble del tres, y triple del dos; el nueve triple del tres; y debiendo ocurrir con frecuencia combinaciones de las cifras que representan a estos números, entre las que designan al multiplicador, es fácil ver que hallados por el método ordinario ciertos productos parciales, podremos inferir de ellos otros varios por la relación que tengan entre sí los respectivos multiplicadores. Si, por ejemplo, tuviésemos que multiplicar un número cualquiera por 842 ó por 248, que como se ve, están representados por la combinación de las cifras 2, 4 y 8, bastará con doblar primeramente el multiplicando; doblar en seguida este doble; y doblar en seguida este segundo doble; y sumar por último las tres partes colocadas con arreglo a la situación que en el multiplicador ocupe la cifra correspondiente. Lo mismo podríamos decir y ejecutar en caso que el multiplicador fuere 963 ó 396, o 2468 ú 8462 etc.

Método para multiplicar descomponiendo en sumandos o factores, y en particular, cuando un factor es 15, tomando 10+5 o 3x5.

Método para multiplicar por 75 o 175, usando las relaciones alícuotas y descomposiciones: 75=100/2+50/2 y 175=100+100/2+50/2.

Considerando a 75 como equivalente que es a la suma de 50 y 25, de los cuales 50 es mitad de 100, y 25 mitad de 50; se ve que escribiendo dos ceros a la derecha de las cifras con que está representado un número cualquiera; tomando la mitad del número

que así resulta; tomando en seguida la mitad de aquella mitad; y sumando estas dos últimas mitades, en la suma de ellas tendremos el producto...

Si juntamente con las dos mitades sumásemos el número que nos ha resultado después de haber escrito los dos ceros a la derecha de las cifras que representan el número dado, en la suma de las tres partidas tendríamos el producto de la multiplicación del mismo número por 175.

Método para multiplicar por 125, (otra vez) o 1125, descomponiendo 125=100+25 y 1125=1000+125.

Ya hemos dicho como hallaremos el producto de la multiplicación de cualquier número por 125 considerando a éste como octava parte que es de 1000: pero en caso que lo consideremos como equivalente a la suma de los dos 100 y 25, veremos que con sólo escribir dos ceros a la derecha de las cifras con que esté representado un número cualquiera; con tomar la cuarta parte del nuevo número que así resulta, y sumar las dos partidas, tendremos el producto de la multiplicación por 125.

Del mismo modo, podemos hallar el producto de la multiplicación de cualquier número por 1125, con sólo escribir tres ceros a la derecha de las cifras que representan el multiplicando; tomar en seguida la octava parte del número nuevamente representado, y sumar las dos partidas.

Método para multiplicar por 34 descomponiendo 34=10+20+4. Del mismo modo: 31, 36 ó 38,

Si tratamos de multiplicar un número cualquiera por 34, y tenemos presente que este equivale a la suma de los tres menores 10, 20 y 4; y que 2 es el doble de 1, y 4 es doble de 2, podremos efectuar la multiplicación propuesta con sólo escribir debajo del multiplicando, cualquiera que sea, su doble; escribir en seguida debajo el doble de este doble, adelantando un lugar hacia la derecha las cifras de este cuádruplo del multiplicando, y sumar por último las tres partidas.

Método para multiplicar completando la decena, centena, etc., cuando algún dato es próximamente menor que 10, 100, 1000 etc., o le

falta un número que es parte alícuota de alguno de éstos. En particular, 999, 998, 997, etc. o 7+1/2, 75, 87+1/2, 875 etc.

> Cuando éste sea uno de los números próximamente menores que 10, 100, 1000 etc., lo podremos considerar como resultado de una sustracción cuyo minuendo haya sido uno de estos números; y a consecuencia nos será fácil determinar por medio de una sustracción el producto que buscamos. Si, por ejemplo, tenemos que multiplicar un número cualquiera por 999, ó por 998, ó por 997 etc. que están, como se ve, muy próximos a 1000; con sólo escribir tres ceros a la derecha de las cifras con que esté representado el multiplicando, y quitar del número así representado el mismo multiplicando o su doble o su triple etc., en los resíduos tendremos los respectivos productos de las multiplicaciones por 999, por 998, por 997 etc. Con efecto, escribiendo tres ceros a la derecha de las cifras que representan al multiplicando, formamos una nueva combinación de cifras que representa al producto de la multiplicación por 1000, o lo que es lo mismo a la suma o conjunto de mil multiplicandos; con que si de estos mil se quitan uno o dos o tres etc. multiplicandos, los resíduos habrán de contener 999, 998, 997, etc. multiplicandos, es decir, deberán ser los respectivos productos de las multiplicaciones por estos números.
>
> Por el mismo medio se podrá determinar el producto, siempre que al multiplicador le falte para llegar a 10, o a 100, o a 1000 etc. un número que sea parte alícuota de alguno de estos. Si advertimos, por ejemplo, que a 7 1/2 le falta para ser igual a 10 la cuarta parte del mismo 10; que a 75 le falta para ser igual a 100 la cuarta parte de 100; que a 87 1/2 le falta para llegar a 100 la octava parte del mismo 100; que a 875 le falte para igualarse con 1000 la octava parte de este último número, podemos fácilmente hallar por medio de la sustracción los productos de la multiplicación de cualquier número por 7 1/2, por 75, por 87 1/2, por 875 etc. ...

La división

Su método principal es el extendido, que consiste en escribir las restas parciales para obtener los dividendos parciales, y como abreviación recomienda el método actual. Después, en otro apartado, plantea las alternativas al algoritmo general a partir de las aplicaciones que se siguen de las comparaciones entre operaciones cuyos datos están

relacionados, y también las que se siguen a partir de las descomposiciones de los datos. Estas son:

Método para dividir apoyándose en otra división de cociente múltiplo o submúltiplo de la primera, porque su dividendo es múltiplo o submúltiplo del dividendo de la primera.

Método para dividir apoyándose en otra división de cociente igual, obtenida por amplificación o simplificación de la primera, ya sea porque tanto el dividendo como el divisor de la segunda división fueren ambos dobles, o triples, o cuádruplos, etc. , o mitades, o tercias, o cuartas, etc. partes del dividendo y divisor en la primera.

Método para dividir cuando el divisor es parte alícuota de la unidad seguida de ceros, en particular 25 y 125, usando las transformaciones: a:25=ax4/100 y a:125=ax8/1000

Método para dividir descomponiendo el divisor en factores, en particular el 15.

Diferencias entre los métodos de Lacroix y de Vallejo

Lacroix incluye en su texto una mayor casuística que Vallejo, esto es, considera más casos particulares en los que se aplica la relación alícuota o la relación con la unidad seguida de ceros, o ambas combinadas, y también los que aplican la descomposición en sumandos que Vallejo no tuvo en cuenta.

Recupera y amplia los métodos para dividir basados en divisiones relacionadas.

Además renuncia al método de la Cruceta, con lo que se completa el abandono de las viejas reglas para números de dos cifras.

Pero la característica más diferenciadora de Lacroix es su forma unificadora de presentar los métodos agrupando aquéllos que aplican un mismo tipo de relación numérica.

Otro hecho que interesa destacar es el interés de Lacroix en presentar métodos particulares para determinados números, como son el 15 y el 34. La razón de ello, es que estos números estaban vinculados entonces al sistema monetario, el 15 es el número para pasar de pesos a reales, y el 34 es el número para pasar de reales a maravedíes. Esta idea de relacionar el cálculo abreviado con el sistema monetario, se encuentra recogida también en la actualidad. Concretamente, como se ha comentado en la sección anterior, Kennedy y Tipps (1988) se aprovechan de las equivalencias entre diferentes monedas norteamericanas para presentar los métodos alícuotos relacionados con ellas, tales como los que usan las transformaciones: 5=10/2 y 25=100/4.

III.2.5 LOS TEXTOS DEL SIGLO XX, PRECEDENTES DE LOS ACTUALES

III.2.5.1 La aritmética Razonada de Dalmáu Carles (1898)

Esta Aritmética, alcanzó una gran popularidad como lo atestiguan sus múltiples reediciones a lo largo de la primera mitad del siglo XX. Se puede considerar un texto de transición del estilo retórico al algebraico, y también del enfoque de métodos para la abreviación al enfoque de métodos para el cálculo mental.

En el texto, que ya corresponde al periodo en que el concepto de algoritmo estándar está consolidado, se presta atención a los métodos alternativos, incluso a los de la suma, esto es algo que no se vio en las aritméticas anteriormente comentadas. Los métodos alternativos para la suma los vincula Dalmáu explícitamente al cálculo mental y los ilustra con ejemplos en los que usa el lenguaje horizontal del álgebra. Así: 49+8= (49+10-2)=57. Mientras que en la resta, multiplicación y división lo hace vinculándolos todavía al cálculo escrito y al lenguaje vertical de columnas.

Los métodos alternativos que presenta son:

La adición

Método para sumar completando o descomponiendo en decenas o centenas, añadiendo o quitando unidades. En particular cuando un sumando es 9, 8, o termina en 9.

> Reglas para la suma mental abreviada. A menudo, añadiendo o quitando una o más unidades a cualquiera de los sumandos, queda éste transformado en un número compuesto de una cantidad exacta de decenas o centenas, lo que facilita la operación.
>
> Ejemplos: Para sumar, por ejemplo, 47 y 9, se suman 47+10=57, y se quita 1, la que da 56. Así aconsejamos se proceda siempre que se trate de añadir 9 a otro número.

Si se han de sumar 35 y 19, diremos: 35+20=55; quitando 1 quedan 54.
Para añadir 8, sumaremos 10 y restaremos 2. Así: 49+8=(49+10-2)=57

Método para sumar descomponiendo un dato en sus órdenes de unidad para sumarlos empezando por los de la izquierda u orden superior.

Cuando se quieran sumar dos números de dos o más guarismos, sin alterarlos ni descomponerlos, se principiará por los guarismos de la izquierda. Así, para sumar 154 y 26, se dirá: 15+2=17=170; más 4+6=10, son 180. Para sumar 1526+3442, diremos:15+34=49 centenas, más 26+42=68 unidades. Total, 4968

La sustracción

Método aditivo de la resta, que consiste en convertirla en suma imaginándola ya hecha.

Puede convertirse la operación de restar en otra de sumar, sin recurrir al complemento aritmético.

Propongámonos restar 2486 de 8637. Fundándonos en que el minuendo es igual a la suma del sustraendo con el resto, operaremos como si la sustracción estuviese hecha y fuésemos a comprobarla, así: 6 y 1 (escribimos 1 en el resto) son 7; 8 y 5 (escribimos 5 en el resto) son 6; 2 y 6 (escribimos 6 en el resto) son 8.

La multiplicación

En el caso de la multiplicación Dalmáu organiza el contenido siguiendo la costumbre precedente de Vallejo. Diferencia dos bloques, uno para lo que es la abreviación del algoritmo y otro para lo que son métodos alternativos propiamente. Estos últimos los presenta bajo el epígrafe: "Elementos de estenoritmia", que define como la parte de la aritmética que se ocupa de la abreviación y simplificación de los cálculos.

Los primeros son:

Método para multiplicar números terminados en ceros.

Método para multiplicar prescindiendo de las unidades de orden superior que llevamos, que es la forma extendida del algoritmo en la que se escriben todos los parciales.

Propongámonos la multiplicación de 1875x9.

1875	1875
x9	x9
45	9
63	72
72	63
9	45
16875	16875

Método para multiplicar cuando uno de los factores se compone de cifras consecutivas, que consiste en suplir la multiplicación por una suma.

Propongámonos multiplicar 426x123.

426
426
426
426
426
426
52398

Método para multiplicar cuando uno de los factores se compone de uno o más nueves, que consiste en tranformar la multiplicación en resta por columnas.

Multipliquemos: 1.º, 875x9, 2.º, 2496x99; 3.º, 4620x999 ...

	875	2496	4620
	-875	- 2496	- 4620
Producto	7875	247104	4615380

Método para multiplicar por 45, completando a 50 para tomar relaciones alícuotas y hacer de la multiplicación una resta: 45=100/2 - 10/2.

Multiplicar un número cualquiera por 45; por ejemplo, 864.

864x100	86400
Mitad de 86400	43200
Esta 1/2, corriendo un lugar a la derecha	-43200
Diferencia, que es el producto	38880

Método para multiplicar por 11, 111, 1111, etc., que consiste en tomar el otro factor como sumando parcial repetidamente.

Método para multiplicar por un número que tiene la unidad como cifra, tomando el otro factor como producto parcial por dicha unidad.

Método para multiplicar por 5, 50, 500, 5000, etc, tomando relaciones alícuotas para hacer de la multiplicación una dimidiación.

Métodos para multiplicar por 4 o por 6, completando en un caso y descomponiendo en el otro, para tomar relaciones alícuotas: 4=(10/2)-1 ó 6=(10/2)+1.

Basta añadir un cero a la derecha del multiplicando, sacar la mitad y restar en el primer caso, o sumar en el segundo.

Ejemplos: 256 x 4 =	256	256 x 6 =	256
Mitad de 2560	1280	Mitad de 2560	1280
Resta, que es el producto	1024	Suma, que es el producto	1536

Método para multiplicar por 25, que consiste en tomar la relación alícuota 25=100/4.

Método para multiplicar por 125, que consiste en tomar la relación alícuota 125=1000/8.

Métodos para multiplicar por 150 y por 155, descomponiendo y tomando relaciones alícuotas: 150=100+100/2 y 155=100+100/2+10/2.

Método general de las partes alícuotas, que consiste en descomponer un dato en partes que tienen un método alícuoto vinculado.

Multipliquemos 492 por 166

Para repetir 100 veces el multiplicando, bastará		añadirle dos ceros	49200
"	50 "	tomar la 1/2	24600
"	10 "	añadirle un cero	4920
"	5 "	tomar la 1/2 del 10	2460
"	1 "	añadirlo a la suma	492
Repetido 166 veces el multiplicando, el producto es la suma			81672

Método de los Complementos, para factores con igual número de cifras.

Se toma la diferencia entre uno de los factores y el complemento del otro a una potencia de 10, colocando a la derecha tantos ceros como tenga esta potencia; se añade a este resultado el producto de los dos complementos, y la suma es el producto buscado. Sea la multiplicación 989x998:

Producto de los complementos a 1000	11x2 =	22
998-11=987, añadiendo tres ceros		987000
Suma, que es el producto		987022

Método de los Complementos, generalizado a factores con desigual número de cifras.

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA BIBLIOTECA DE CIÈNCIES

Si ambos factores no tienen igual número de cifras, se practica la regla dada en el caso anterior, igualando antes las cifras, añadiendo los ceros necesarios a la derecha del factor que tenga menos, teniendo cuidado de suprimir después estos ceros de la derecha del producto. Sea la multiplicación 9986x95. Igualando las cifras del segundo factor, tendremos 9986x9500.

Producto de los complementos a 10000	14 x 500 =	7000
9986-500 = 9486, añadiendo cuatro ceros		94860000
Suma que es el producto		94867000

Método de los Complementos, para factores iguales, o lo que es lo mismo, para hallar el cuadrado de cualquier número.

Podemos aplicar el recomendable método de los complementos aritméticos, que ya hemos explicado.

Hallaremos el cuadrado de 896.

Producto de los complementos a 1000	104 x 104 =	10816
896 - 104 = 792, añadiéndole tres ceros		792000
Suma, que es la segunda potencia buscada		802816

La división

En la división continúa Dalmáu con el modelo de presentar casos con método vinculado que viene usando en la multiplicación:

Métodos para dividir por 5, 50, 500, 5000, etc., que consisten en tomar las relaciones alícuotas: 1/5=2/10, 1/50=2/100, etc.

Método para dividir por 25, que consiste en tomar la relación alícuota 1/25=4/100.

Método para dividir por 125, que consiste en tomar la relación alícuota 1/125=8/1000.

Método para dividir por un divisor que pueda descomponerse en dos o más factores.

Diferencias entre los métodos de Dalmáu y Lacroix

La propuesta de Dalmáu destaca en relación a las anteriores en que incluye métodos para la suma, y además vinculados al cálculo mental y al lenguaje horizontal.

En cuanto a la multiplicación aporta casuística nueva tal como son los métodos para multiplicar por 45, 4, o 6; el método general de las partes alícuotas y algunas generalizaciones del método de los complementos. En cambio, no contempla los métodos introducidos por Lacroix de descomposición general, factorización, o los que se aplican para multiplicar números terminados en 5, 9, en otros próximos a la unidad seguida de ceros o que les falta una parte alícuota de ella.

Por último, en la división no presenta ningúna novedad digna de mención.

III.2.5.2 Tratado Teórico-Práctico de Aritmética Razonada de Bruño (1932)

En este libro el cálculo mental es objeto de estudio explícitamente, con su propio epígrafe. Corresponde a una época en la que el lenguaje algebraico está instalado y consolidado, y donde el cálculo se considera que es el cálculo de memoria con procedimientos más rápidos.

> Calculo mental es el que se hace de memoria sin escribir nada.
>
> No existen reglas generales y absolutas para el cálculo mental; la práctica únicamente dará a conocer los procedimientos más rápidos.

Establece principios generales, bajo el epígrafe: "observaciones prácticas", tales como la conveniencia de usar números redondos, descomponer en sumandos que den redondos, descomponer el sustraendo en sus órdenes de unidad para restar sucesivamente, multiplicar redondeando cuando un dato sea próximo a un potencia de 10, cambiar multiplicación por división o viceversa y reducir decimales a fracciones cuando convenga.

El procedimiento del número redondo, que es el que termina en uno o varios ceros, es la base del cálculo mental.

Es ventajoso descomponer mentalmente un sumando para obtener sumandos que dan un número exacto de decenas o centenas.

Es ventajoso, a veces, descomponer el sustraendo en una suma de varios números que se van restando sucesivamente.

Si el multiplicador se aproxima a una potencia de 10, se efectuará la multiplicación por esa potencia y del resultado se restará o añadirá el producto del multiplicando por la diferencia del multiplicador y de dicha potencia.

La división facilita la multiplicación por ciertos números. Inversamente, la multiplicación facilita a veces la división.

La reducción de una fracción decimal a quebrado ordinario facilita a menudo el cálculo mental, como, por ejemplo, cuando el multiplicador o el divisor es una de las fracciones siguientes: 0,50 =1/2 ; 0,25=1/4 ; 0,125=1/8; 0,75=3/4 ; 1,25=5/4; 1,5=3/2.

En cuanto a la distribución del contenido, no queda relegado a un apéndice al final del libro para el que quiera profundizar como en el enfoque de la abreviación, sino que se vuelve a ubicar en las lecciones dedicadas a las operaciones como se hacía en las aritméticas primitivas, recuperando protagonismo. Tampoco se agrupa aprovechando los principios comunes sino que se extiende en una larga casuística de ejemplos numéricos con método vinculado.

La adición

Método para sumar descomponiendo un dato en función del otro para completar decenas o centenas en las sumas parciales.

Si dos o más sumandos dan un número exacto de decenas o centenas se sumarán aparte. Ejemplo: 28+17+13+12=(28+12)+(17+13)=40+30=70.

A veces será ventajoso descomponer mentalmente un sumando para reducir la suma al caso anterior. Ejemplo: 257+84+9=257+84+3+6=(257+3)+(84+6)=260+90=350.

La práctica indicará entre las diversas maneras de descomponer un sumando, cuál sea la más apropiada al caso y de resultado más rápido.

Método para sumar descomponiendo un dato en sus órdenes de unidad para sumarlos empezando por los de la izquierda u orden superior.

Se añaden al primero las unidades del segundo, empezando por las de orden superior. 63+45=63+40+5=108. Se dice: 63 y 40=103+5= 108.

Método para sumar completando o descomponiendo en decenas o centenas, añadiendo o quitando unidades, en este último caso sumando por grupos de orden de unidad empezando por los de la izquierda u orden superior.

Se convierten los sumandos o uno solo en números redondos y se corrige luego el total.

56+17=56+20 = 76 - 3 = 73

84+52=80+50=130; 130+4+2

Método para sumar números que terminan en ceros sumando sólo las cifras significativas.

Cuando son varios los sumandos y terminan en 1, 2, 3, ... ceros se suman sólo las cifras significativas y se añaden a la derecha del total 1, 2, 3 ... ceros.

EJEMPLO: 600+700+4.500 = 6+7+45 = 5.800.

La sustracción

Método para restar descomponiendo el sustraendo en sus órdenes de unidad para restarlos empezando por la izquierda.

En el cálculo mental, es ventajoso a veces, descomponer el sustraendo en una suma de varios números que se van restando sucesivamente.

Ej. : 1748-549=1748-(500+1+48)=1700-(500+1)=1200-1=1199

Método para obtener el complemento aritmético, o para restar de la unidad seguida de ceros, usando nueves en cada parcial, en vez de los dieces, para no tener que llevar (Es el que se usa en el algoritmo de Lagrange, ver Gómez, 1988).

El complemento aritmético de un número se obtiene con rapidez restando de 10 la primera cifra significativa de la derecha y las demás de 9. Si el número termina en ceros, estos se escriben primero.

Nota: Este método era utilizado preferentemente como algoritmo de izquierda a derecha. Así aparece en Gironza (1957) "Es particularmente interesante para el cálculo mental el caso de ser el minuendo la unidad seguida de ceros, en que la sustracción puede realizarse mentalmente de izquierda a derecha, restando de 9 cada cifra del sustraendo, excepto la de las unidades, que se resta de 10".

Método para restar descomponiendo el sustraendo en sus diversos órdenes de unidad y empezando los de orden superior.

Se restan sucesivamente del minuendo los diversos órdenes de unidades del sustraendo, empezando por las de orden superior.

Ejemplo: 894-632=894-600-30-2=262.

Método para restar haciendo el sustraendo un número completo de decenas o centenas (redondo) y sumando el complemento aritmético del sustraendo.

Se convierte el sustraendo en número redondo y luego se corrige el resultado.
Ejemplo: 346 - 176. Se procede así: 346 - 180 = 166 + 4 = 170.

Método para restar descomponiendo el sustraendo en función del minuendo de modo que se tenga un parcial con la misma terminación que en el minuendo.

Se descompone el sustraendo en una suma en que se obtengan dos sumandos, uno de los cuales ha de terminar en las mismas cifras que el minuendo.
Ejemplo: 461 -166. Se dice: 461 - 161 = 300 - 5 = 295.

La multiplicación

Método para multiplicar completando la decena, centena, superior del multiplicador cuando éste se aproxima a una potencia de 10, que consiste en convertir la multiplicación en resta.

Se efectuará la multiplicación por esa potencia y del resultado se restará o añadirá el producto del multiplicando por la diferencia del multiplicador y de dicha potencia de 10.

Método reglado para multiplicar por 11 poniendo la cifra de las unidades del otro factor, después sumando ésta con la de las decenas, etc. Y también el método para multiplicar por 11 descomponiéndolo en 10+1, que consiste en multiplicar primero por 10 y añadir al producto el mismo número.

Se podría también multiplicar el número por 10, y añadir al producto el mismo número. Ejemplo: 2.347x11 = 23.470+2.347 = 25. 817. Esto equivale a sumar el número consigo mismo corriendo cada cifra de un lugar a la izquierda... "

Método para multiplicar por 22, 33, 44, etc., descomponiendo en factores: 22=2x11, 33=3x11...

Método para multiplicar por un número compuesto de nueves, completando a la unidad seguida de ceros, convirtiendo la multiplicación en resta.

Método para multiplicar por 12, 13, ..., 19, descomponiendo en 10+2, 3, ... 9.

Método para multiplicar por 21, 31, ..., 91, descomponiendo en 20+1, 30+1, ... , 90+1.

Método para multiplicar por 19, 29, ..., 99 completando la decena inmediata superior para transformar la multiplicación en resta.

Método doble para multiplicar por 15, descomponiendo en factores o en suma para usar una relación alícuota 3x5, o 10+10/2

Método para multiplicar dos números de dos cifras iguales en decenas, particularizado según sea el caso.

Caso general.

Se añaden al uno las unidades del otro, se multiplica la suma por las decenas y por 10, y se añade al resultado el producto de las unidades de ambos factores.

Ejemplo: 25x27 = (32x20)+35 = 640 + 35 = 675. En efecto: 25x27=(20+5)(20+7)= (20+5)20+(20+5)7=(20+5)20+20x7+5x7=(20+5+7)20+7x5=32x20+5x7.

Casos particulares.

1º Los dos números están comprendidos entre 10 y 20.

La operación es más sencilla por tener cada factor sólo una decena

13x18= (13+8)10+8x3 ...

2º Los dos factores sólo difieren en las cifras de sus unidades, las cuales suman 10.

El aplicar la regla general equivale, en este caso, a multiplicar la cifra común de las decenas por la misma aumentada de 1, multiplicar el resultado por 100 y añadir el producto de las unidades. Ejemplos 89x81 = (8x9)100+(9x1)=7.209

3º Los dos números están comprendidos entre 100 y 110.

Se podrá también aplicar la regla general, teniendo en cuenta que cada factor tiene 10 decenas; luego, después de añadir a uno de los factores las unidades del otro, se multiplicará por 100, y se añadirá el producto de las unidades de los dos números.

Ejemplos: 103x106 = (109x100)+3x6=10.918.

4º Los dos números están comprendidos entre 1.000 y 1.010.

Ejemplo: 1.005x1.008 = (1.013x1.000)+(5.8)=1.013.040.

5º Los dos números están comprendidos entre 90 y 100.

Ejemplo: 92x97. Por la regla general resulta (92+7)90+(2x7)=(99x90)+14=8.910+14= 8.924.

Método para multiplicar de los Complementos, para números comprendidos entre 90 y 100, o entre 900 y 1000.

Se puede simplificar la operación en este caso como sigue: 92=100-8; 97=100-3; de donde 92x97=(100-8)(100-3).

Aplicando la regla de la multiplicación de dos diferencias indicadas, se obtiene

92x97=100x100+8x3-(100x8+100x3)=100x100+8x3-100(8+3)=

100(100-(8+3))+8x3=100x89+8x3.

Regla.- Para multiplicar uno por otro dos números comprendidos entre 90 y 100, se resta de 100 cada factor; la suma de las diferencias obtenidas se resta a su vez de 100 y se escribe a continuación del resultado el producto de las diferencias.

Nota. Se obtendría de modo idéntico el producto de dos números comprendidos entre 900 y 1.000, tomándose entonces las diferencias entre cada factor y 1.000.

Método para multiplicar por 5, usando la relación alícuota 10/2.

Método para multiplicar por 25, usando la relación alícuota 25=100/4.

Método para multiplicar por 125, usando la relación alícuota 125=1000/8.

Método para multiplicar por 0,50, usando la relación alícuota 0,50=1/2.

Método para multiplicar por 0,25, usando la relación alícuota 0,25=1/4.

Método para multiplicar por 0,125, usando la relación alícuota 0,125=1/8.

Método para multiplicar por 0,75, usando la relación alícuota 0,75=3/4, o completando y transformando en la resta 1-1/4.

Método para multiplicar por 1,25, usando la relación alícuota 1,25=5/4 o descomponiendo en 1+1/4.

Método para multiplicar por 1,5, usando la relación alícuota 1,5 = 3/2 o descomponiendo en 1+1/2.

Método para hallar el cuadrado de un número descomponiéndolo en suma o resta para aplicarle la fórmula del cuadrado del binomio (Este método lo plantea Bruño en el libro "solucionario" en respuesta a los ejercicios del libro de teoría: "Hállese el cuadrado de los números siguientes: 21, 41, 61, 19, 39, 49").

$21^2=20^2+2x20+1$

$19^2=(20-1)^2=20^2-2x20+1$, ...

La división

En esta operación se extiende en una gran casuística usando relaciones alícuotas en casi todos los casos.

Método para dividir por 5, usando la relación alícuota 1/5 = 2/10.

Método para dividir por 25, usando la relación 1/25 = 4/100.

Método para dividir por 125, usando la relación 1/125 = 8/1000.

Método para dividir por descomposición del divisor en factores.

Método para dividir por 0,50, usando 1/0,50 =2.

Método para dividir por 0,25, usando 1/0,25=4.

Método para dividir por 0,125, usando 1/0,125=8.

Método para dividir por 0,75, usando 1/0,75=4/3 o 1+1/3.

Método para dividir por 1,25, usando 1/1,25=4/5 o 1-1/5.

Método para dividir por 1,5, usando 1/1,5=2/3 o 1-1/3.

Diferencias entre los métodos de Bruño y Dalmáu

En Bruño, se amplía la casuística de métodos para la suma y la resta iniciada por Dalmáu, y se introducen los métodos para los números decimales. También, aunque de soslayo, se introduce un método cuadrático basado en el desarrollo del cuadrado del binomio. Además se recuperan y amplian algunas de las viejas reglas que parecían olvidadas, quizá por su vinculación a la rapidez y porque atienden a sus principios o bases del cálculo mental, aunque ahora fundamentándolas con el lenguaje horizontal del álgebra.

III.2.6 LAS SERIES DE LIBROS ESCOLARES ACTUALES

Las pautas señaladas en Bruño están definitivamente asentadas en las series actualmente en vigor: lenguaje horizontal algebraico que unifica la presentación y la fundamentación, y concepción de los métodos alternativos como métodos de cálculo mental y cálculo rápido.

En cambio, los métodos alternativos ya no forman un todo en el texto, sino que se gradúan, de acuerdo con el modelo cíclico dominante, a lo largo de los tres libros del Ciclo Medio, que son los de los tres cursos 3º, 4º y 5º (8, 9, y 10 años), como es preceptivo por mandato del currículum oficial.

III.2.6.1 El texto de Anaya

En la serie de Anaya (1986), el estilo de presentación es el de colección de "fichas" (como recetas de cocina[1]) aisladas y de dificultad creciente, que van apareciendo al final de todas y cada una de las lecciones del texto y sin relación con lo que allí se trata.

Cada una de las fichas está pensada para mostrar un método, que se ilustra resolviendo un ejercicio que hace de prototipo y que debe ser reproducido exactamente igual en la lista de ejercicios que completan la ficha. Implícitamente se supone que todos los ejercicios de una misma ficha son análogos.

Bajo este modelo, en Anaya se aborda prácticamente toda la casuística que ya se ha reseñado en las Aritméticas precedentes, con algunas novedades en cuanto a la inclusión de métodos generales para sumar, restar y multiplicar decimales.

---

[1] Ver ilustración de la página 75.

La adición

Método para sumar completando decenas o centenas, etc., añadiendo unidades.

Método para sumar descomponiendo en decenas o centenas, para operar por grupos de orden de unidad, empezando por los de la izquierda u orden superior.

Método para sumar descomponiendo un dato en sus órdenes de unidad para sumarlos empezando por el de la izquierda u orden superior.

Método para sumar números que terminan en ceros sumando sólo las cifras significativas.

Método para sumar números decimales descomponiéndolos para operar por partes, las enteras y las decimales entre sí.

3,48+5,65=((48+65):100+(3+5).

La sustracción

Método para restar descomponiendo el sustraendo en sus órdenes de unidad para restarlos empezando por el de la izquierda.

Método para restar completando las decenas, centenas, etc., del sustraendo.

Método para restar descomponiendo el sustraendo en función del minuendo de modo que se tenga una resta parcial con la misma terminación que el minuendo.

Método para restar descomponiendo el minuendo en grupos de órdenes de unidad y cambiando el signo del parcial si la parte que hace de sustraendo es mayor que la que hace de minuendo.

435-72=400-(72-35).

Método para restar empezando por la derecha y llevando, como en columnas, pero completando las cifras.

34-6=(14-6)+(30-10)

Método para restar números en los que el minuendo está compuesto de parte entera y parte decimal y el sustraendo sólo es entero, que consiste en operar por órdenes de unidad, empezando por la izquierda y prestando del minuendo al parcial que se forma con la parte decimal.

24,75-8=(24-8)+0,75.

Método para restar números en los que el minuendo es entero y el sustraendo está compuesto de parte entera y parte decimal, que consiste en sacar una unidad del minuendo para formar una resta parcial con la parte decimal del sustraendo.

13-8,25=(12-8)+(1-0,25).

Método para restar dos números decimales que no tienen parte entera, reduciendo la parte decimal a fracción decimal.

0,45=0,23=(45-23):100.

Método para restar dos números decimales descomponiéndolos en sus partes entera y decimal para restarlas entre sí, cambiando el signo del parcial que se forma con los decimales si la parte que hace de sustraendo es mayor que la que hace de minuendo.

2,23-1,58=(2+0,23)-(1+0,58)=(2-1)-(0,58-0,23).

La multiplicación

Método para multiplicar por un número seguido de ceros.

Método para multiplicar descomponiendo un dato en sus órdenes de unidad para proceder a aplicar la distribución ordenadamente.

Método para multiplicar por 11, descomponiendo: 11=10+1.

Método para multiplicar por 102, descomponiendo: 102=100+2.

Método para multiplicar por 111, descomponiendo: 111=100+10+1.

Método para multiplicar por 101, descomponiendo: 101=100+1, y enunciando la regla subsiguiente.

Método para multiplicar por 1001, descomponiendo: 1001=1000+1, y enunciando la regla subsiguiente.

Método para multiplicar de la Cruceta.

Método para multiplicar cuando las decenas son iguales.

Método para multiplicar por 99, completando a la centena superior, y enunciando la regla subsiguiente.

Método para multiplicar por 33, descomponiendo en factores: 33=11x3.

Método para multiplicar por 25, tomando la relación alícuota 25=10/4.

Método para multiplicar por 75, tomando la relación alícuota 75=300/4.

Método para multiplicar por 0,25, tomando la relación alícuota 0,25=1/4.

Método para multiplicar por 0,50, tomando la relación alícuota 0,50=1/2.

Método para multiplicar por 0,75, tomando la relación alícuota 0,75=3/4.

Método general para multiplicar por un número decimal, prescindiendo de la coma mediante multiplicación y división por la unidad seguida de ceros.

3,45x3=(345x3):100.

La división

Método para dividir por 5, usando la relación 1/5=2/10.

Método para dividir por 50, usando la relación 1/50=2/100.

Método para dividir por 25, usando la relación 1/25=4/100.

Método para dividir por 0,25, usando la relación 1/0,25=4.

Método para dividir por 0,50, usando la relación 1/0,50=2.

Método para dividir por 0,75, usando la relación 1/0,75=4/3.

Método para dividir cuando dividendo y divisor acaban en ceros.

Método para dividir descomponiendo el dividendo en sumandos.

384:4=(380:4)+(4:4).

Método para dividir por 11, descomponiendo el dividendo en múltiplos suyos.

792:11=(770+22):11=770:11+22:11.

III.2.6.2 El texto de Santillana

En los textos de Santillana (Ediciones de 1982, y de 1988) se presenta una selección de métodos más reducida que la de Anaya, pero con novedades en relación al formato de presentación, diferente del de Anaya, y también en cuanto a los métodos que se han reseñado hasta el momento:

Método doble para restar sumando o restando el mismo número al minuendo y al sustraendo para completar decenas, centenas, etc.

Consigue decenas completas en el sustraendo

Suma al minuendo y al sustraendo de cada resta el mismo número

Resta dada		Resta equivalente
46	+2 →	48
-18	→	-20
		28

Método para sumar completando y descomponiendo, que consiste en añadirle a un dato lo que se le quita al otro para obtener un número completo de decenas, centenas, etc.

Observa el ejercicio resuelto y haz las sumas que siguen por el procedimiento de compensación.

81+59=80+60=140.

Método para sumar secuencias de números naturales que empiezan por el uno, usando la fórmula: 1+2+3+ ...+n=(n(n+1):2).

Comprueba que son correctas las siguientes igualdades

1+2=(2x3):2=...

1+2+3=(3x4):2=...

1+2+3+4= ...

Ahora calcula rápidamente la siguiente suma. 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+...+40.

Método cuadrático para multiplicar dos números en condiciones de cero o cinco central, es decir números que equidistan de otro que termina en cero o en cinco, que consiste en usar la fórmula de la diferencia de cuadrados.

En cada caso, observa la igualdad que resulta.

1, 2, 3 ---> 1x3 = (2x2)-1 =3

2, 3, 4 ---> 2x4 = (3x3)-1 = 8

3, 4, 5 ---> 3x5 = (4x4)-1 = 15

4, 5, 6 ---> 4x6 = (5x5) -1 = 24

Observa que en cada caso hay tres números consecutivos.

Calcula los siguientes productos aplicando la regla anterior:

19x21 --> (20x20)-1 = ...; 64x66= (65x65)-1=...; 39x41

Método para multiplicar por 9, 99, completando decenas, centenas, etc. y transformando en resta.

Método para multiplicar números de dos cifras iguales en decenas, restringido al caso de multiplicar un número de dos cifras terminado en 5 por sí mismo.

Multiplicación de un número de dos cifras terminado en 5 por sí mismo

Los productos de 15x15, 25x25, 35x35, 45x45, etc., acaban en 25.
Observa cómo se obtiene el producto completo:
1xsiguiente (2) = 2; 15x15 = 225.

Diferencias con los métodos de los textos del siglo precedente

En los textos revisados de este siglo se observa que no sólo continúan vigentes los mismos métodos del siglo pasado, sino que se amplía la casuística, principalmente con el hecho de que se presta atención a la suma, a la resta, y al cálculo con números decimales.

III.2.7 Otros métodos

En los libros de divulgación del cálculo mental o en los de matemática recreativa es posible encontrar más métodos de los que aquí se han reseñado, pero éstos no son métodos de los que se pueda decir que han sido objeto del currículum educativo en un determinado momento. Como el propósito de este trabajo no es el de hacer la lista total de métodos, no se van a recoger aquí.

No obstante, algunos de ellos no presentan mayor dificultad que otros de los que ya se han reseñado. Así, por ejemplo.

En la Aritmética de Polo (190?), bajo el epígrafe: "Multiplicación de números enteros. Cálculo mental: Ejercicios y problemas", se incluye:

Método para multiplicar dos números de dos cifras iguales en las cifras de las unidades y tales que las de las decenas suman 10, usando la relación: $(10a+b)(10c+b)=100(ac+b)+b^2$), con $a+c=10$.

Ejemplo. 34x74 = 2.516. Se multiplican las cifras de las decenas, al producto se le suma la cifra de las unidades, y el total son las centenas del producto que se quiere averiguar, a las que se añade el producto de las unidades por sí mismas.

En el libro de divulgación de Bowers & Bowers (1961) se han encontrado, además de otros que ya hemos referido, los siguientes:

Método para multiplicar por 375, 625, y 875, usando las relaciones alícuotas: 375=3000/8, 675=5000/8, 875=7000/8.

Método para multiplicar 18, 22; 27, 33; 36, 44; 45,55; 54, 66; 63, 77; 72, 88; 91,110, usando las relaciones: 18=20 - $\frac{1}{10}$ de 20, 22=20+ $\frac{1}{10}$ de 20...

Se observará que estos números están agrupados por parejas.
¿Cuál es la diferencia entre 20 y 18? ¿Entre 22 y 20? ¿Qué fracción de 20 es 2?
¿Cuál es la diferencia entre 30 y 27? ¿¿Entre 33 y 30? ¿Qué fracción de 30 es 3?
20-18=2=1/10 de 20; 22-20=2=1/10 de 20.
Para multiplicar 67 por 18, uno puede multiplicar 67 por 20 y restar del producto obtenido una décima de él:

Método para dividir por 15, 35, 45, 75, 125, 375, 625, 875, usando las relaciones de doble y mitad: 1/15=2/30, ...

Por ultimo, y por no hacer más larga esta relación, presentamos un último método, tomado de Donovan & William (1965):

Método de las diferencias a 25 y 50 para multiplicar números iguales comprendidos entre ellos. Usando $N^2=100\ (N-25) + (50-N)^2$.

46x46= ... 46-25, 21 — x100 — 2100
50-46, 4 — - 4x4 – +16
2116

III.2.8 Resumen de la evolución de los métodos de cálculo en las Aritméticas

La evolución de los métodos susceptibles de cálculo mental en las Aritméticas presenta diferencias notables según sea la operación.

La adición

En la medida en que el algoritmo general de la adición está prácticamente estandarizado desde que los numerales indo-arábigos comenzaron a utilizarse, se puede entender la falta de interés que ha despertado la búsqueda de alternativas que lo mejoren. En efecto, si se admite que las alternativas surgen como respuesta a la necesidad de encontrar un método más sencillo que el hallado previamente, se entiende que no se haya hecho este esfuerzo ya que el obtenido desde el primer momento apenas presenta ninguna dificultad.

Sin embargo, la irrupción del cálculo mental como objetivo educativo hará que se replantee esta situación, dando lugar a la inclusión en los textos de métodos aditivos que no facilitan el cálculo escrito pero sí el cálculo mental.

Para que esto ocurra se requiere un nuevo elemento, como es la asunción del lenguaje horizontal del álgebra. Desde el primer momento, (ver Dalmáu, 1898) los métodos aditivos valiosos para el cálculo mental se presentan a través de este lenguaje, lo que indica que existe una positiva vinculación entre ambos fenómenos, es decir entre los métodos aditivos de cálculo mental y el lenguaje horizontal del álgebra.

La sustracción

Tampoco en la sustracción se reproduce este fenómeno. Aunque para esta operación sí que hay métodos alternativos, éstos son de columnas y generales, el resto de los métodos alternativos no aparecen

en las Aritméticas hasta que la irrupción del cálculo mental como objetivo educativo obliga a ello, y esto a su vez no ocurre hasta que se consolida el lenguaje horizontal de ecuaciones y paréntesis.

La multiplicación

Con la multiplicación las cosas se suceden de otra manera. Ya desde antes de la imprenta se conocen métodos alternativos. Desde entonces su presencia en las aritméticas se irá adaptando de acuerdo con la filosofía dominante en cada momento. Primero en coexistencia con igualdad de rango entre todos ellos, más adelante relegados a un apéndice como métodos subsidiarios del algoritmo principal y por ello adaptados al formato vertical de columnas, y por último con renovado protagonismo como métodos de cálculo mental con su propio lenguaje horizontal algebraico.

Otro elemento diferenciador en la evolución de los métodos alternativos de la multiplicación es el progresivo fortalecimiento de los métodos que usan relaciones alícuotas, que comporta un aumento de la casuística a la que se aplican y la extensión de estos métodos a los números decimales. Todo esto tiene que ver con la inclusión en los textos de secciones dedicadas a estudiar las alteraciones de los resultados por las de los datos, y a hacer comparaciones entre los resultados de diversas operaciones relacionadas, una consecuencia de los cuales es el convencimiento de que a veces la división facilita la multiplicación, con la consiguiente pérdida del temor a dividir que se intuye en las Aritméticas anteriores al XIX.

Con el tiempo algunos métodos han ido desapareciendo y otros han ido incorporándose, unos pocos han oscilado: unas veces dentro y otras fuera. En particular, la mayoría de los métodos reglados para los diversos casos de la Tabla mayor y de los Complementos han quedado prácticamente fuera, y se han incorporado algunos métodos cuadráticos y fórmulas como la de sumar secuencias de números.

La división

Esta operación, que es considerada como la más difícil, no ha terminado de presentar un algoritmo estándar en el formato definitivo hasta bien recientemente (en Vallejo, 1813, y Lacroix, 1797, todavía se usa la forma extendida escribiendo las restas parciales completas), y las alternativas que se presentan difícilmente son susceptibles de ser aplicadas mentalmente.

En general

La falta de interés por la suma y la falta de métodos alternativos a los de columnas para la resta, se va a arrastrar prácticamente hasta el siglo XX, hasta el cambio de enfoque que supone la irrupción del cálculo mental.

Hasta entonces, se podría decir que las Aritméticas tampoco consideran los métodos alternativos para abreviar la multiplicación como métodos de cálculo mental. En el momento en que esto sucede dejan de ser vistos bajo el enfoque del lenguaje vertical de columnas para ser mirados bajo el enfoque del lenguaje horizontal del álgebra.

Una vez consolidado este lenguaje, los métodos alternativos se desvincularán del cálculo escrito para ser vistos únicamente, como en la actualidad, como métodos de cálculo mental. Además se ampliará sustancialmente la casuística a la que se aplican los métodos, en particular a los números decimales, a través de sus formas fraccionarias equivalentes. Esto se hará, sobre todo, como refleja el análisis bibliográfico, exportando los mismos métodos de los números naturales a los números decimales.

III.3 COMPENDIO, SINTESIS Y ORGANIZACION DE LOS METODOS HISTORICOS DE CALCULO MENTAL

III.3.1 Criterios para organizar los métodos de cálculo mental

Las listas de métodos alternativos encontradas en la revisión de las Aritméticas son incompletas, en la medida de que ninguna los incluye en su totalidad. No obstante, todas ellas en conjunto permiten elaborar una lista unificadora suficientemente exhaustiva a los efectos de servir de apoyo para diseñar una propuesta de enseñanza, que fortalezca la comprensión de las relaciones numéricas y su papel en el cálculo.

En la medida en que los métodos de cálculo mental no se pueden desligar de las reglas breves y métodos de cálculo abreviado, es de suponer que esta lista recogerá también todos aquellos métodos que son susceptibles de cálculo mental.

Ahora bien, para elaborar esta lista se echan de menos criterios organizadores, claros y precisos, del contenido, que eviten redundancias o dobles inclusiones, que permitan agrupar la amplia casuística observada para facilitar una visión de conjunto, y que pongan de manifiesto los principios y relaciones comunes.

Una mirada detenida a los enunciados de los métodos recogidos en el apartado anterior sobre las Aritméticas permite hacer las siguientes inferencias sobre sus características y estructura

Enfoques diferentes en los enunciados de los métodos

Por un lado se detectan diferentes enfoques en los enunciados de los métodos que llevan los libros de aritmética. Así, se observan métodos que se enuncian vinculándolos a una casuística de datos particulares, como por ejemplo los que se usan para multiplicar por 5, 25, 9, 45, etc., métodos que se enuncian vinculándolos a determinadas condiciones que son susceptibles de cumplir los datos, como por ejemplo, ser

próximos a la unidad seguida de ceros, o ser parte alícuota de la misma, etc., y por último, métodos que se enuncian vinculándolos a principios que sirven para cualquiera que sea el dato, como por ejemplo el de descomposición en sumandos, o el de completar a la decena, centena, superior, etc.

Principios directores y relaciones estructurales algebraicas

Por otro lado, en el análisis bibliográfico, ya se han destacado principios directores para el cálculo (Lacroix, 1797, Bruño, 1932) y relaciones estructurales algebraicas (Smith, 1923, y Sánchez Pérez, 1949). En un caso, se ha señalado la conveniencia de aprovechar determinadas relaciones numéricas entre los datos, basar el cálculo mental en el número redondo, y operar cambiando multiplicación por división o viceversa, cuando esto haga más fácil obtener el resultado; esto mismo también se ha dicho en el caso de la reducción de decimales a fracciones. En el otro caso, se ha optado por una formulación algebraica de los métodos que abrevia la presentación, pero no deja ver con facilidad la casuística a la que se aplica.

Propiedades de las operaciones y hechos del sistema de numeración

En tercer lugar, los métodos de cálculo mental se basan en gran medida en la aplicación de las mismas propiedades de las operaciones y hechos del sistema de numeración, como por ejemplo, las propiedades conmutativa o asociativa, o los órdenes de unidad de las cifras. Estas propiedades y hechos, se aplican por igual sea cual sea la operación implicada.

Estructura común

Los elementos que se acaban de señalar: enfoques de los enunciados, principios directores, relaciones estructurales y lenguaje algebraico, y propiedades y hechos numéricos, son en sí mismos criterios para organizar los métodos de cálculo mental. Estos criterios son en gran

parte comunes a las cuatro operaciones, por lo que cabe pensar en la posibilidad de considerarlos globalmente para organizar los métodos en torno a una estructura unificadora.

Previamente, es obligado hacer ciertas precisiones con el fin de eliminar ambigüedades y de disponer de terminología apropiada.

III.3.2 Diferenciación entre estrategia, método, procedimiento, etc.

Estrategia y Método

Aunque los términos estrategia y método, que se usan para referirse a las diversas formas con que se resuelven los problemas de cálculo mental, son utilizados unas veces como sinónimos y otras veces no, según quien sea el autor, tal como se puede observar en las siguientes citas:

> Método de cálculo o estrategia es un procedimiento esquemático que descompone su trabajo en una preorganizada secuencia de pasos (Hunter, 1978).

> ... el aprendizaje de una serie de métodos y estrategias que permitan al alumno operar ... (DCB, 1989)

en este trabajo, se entiende (siguiendo la tendencia oficial del DCB español) que es posible y conveniente diferenciarlos por razones de organización y descripción.

Estrategias de cálculo mental

Son los principios directores generales de la resolución, y por lo tanto, que funcionan con cualquiera que sea la operación atendiendo a la manera de tratar los datos. A saber:

1. ARTIFICIOS. Bajo esta denominación se incluyen todos los métodos de cálculo que consisten en operar tomando hechos aislados, es decir prescindiendo de las relaciones intermedias que los ligan. En este caso los artificios pueden ser de COLUMNAS, REGLAS, o FORMULAS.

2. DESCOMPOSICIONES. Bajo esta denominación se incluyen todos los métodos de cálculo que, dotando a los datos de significado numérico y relacional, usan cantidades más pequeñas que las dadas. En este caso las descomposiciones pueden ser DISOCIATIVAS que es cuando la descomposición de uno o ambos datos es en sumandos, y FACTORIALES que es cuando la descomposición es en factores.

> La propiedad disociativa consiste en descomponer o disociar sumandos, es, pues, la misma propiedad asociativa, interpretada en sentido inverso (Rey Pastor y Puig Adam, 1932).

A su vez, la disociación puede ser por DESCABEZAMIENTO, que es cuando se separan y completan las cifras con sus órdenes de unidad, como por ejemplo 34 en 30+4 o en 3 decenas y 4 unidades, y también por SUBSIDIACION, que es cuando se descompone un dato en función del otro, como por ejemplo cuando para sumar 25+26 se descompone 26 en 25+1.

3. COMPENSACIONES. Bajo esta denominación se incluyen todos los métodos de cálculo que, dotando a los datos de significado numérico y relacional, usan cantidades mayores y menores que las dadas, como cuando se aplican alteraciones invariantes en las que se incrementa un dato y se corrige después el efecto del incremento sobre el otro dato o sobre el resultado final. En un caso las compensaciones se denominarán INTERMEDIAS y en el otro FINALES.

4. RECUENTOS. Bajo esta denominación se incluyen todos los métodos de cálculo que consisten en operar los datos mediante acciones contadoras inmersas en la secuencia numérica.

Métodos de cálculo mental

Son las diversas formas en que se concretan las estrategias en función de los hechos y relaciones numéricas involucradas en los datos. A saber: usando los órdenes de unidad o completando las cifras con sus ceros, usando la relación de proximidad a números superiores con decenas o centenas completas (redondos), usando las relaciones alícuotas o "ser divisor de", en particular de la unidad seguida de ceros, usando las relaciones numéricas entre los datos que hacen emerger hechos conocidos tales tales como dobles, cuadrados, complementos, mitades, tercios, etc.

En lo que sigue se utilizaran estas relaciones para asignar nombre a los métodos guardando, en lo posible, correspondencia con lo que son denominaciones históricas más o menos universalmente admitidas. Así, se hablará de resta llevando, resta prestando, resta complementando, añadir y quitar en la suma, multiplicación cruzada, multiplicación de los complementos, reglas de la tabla mayor, multiplicación por doble y mitad, alicuotar, que es cuando se aplica la relación "ser divisor de", redondear, que es cuando se toma la decena, centena ..., inmediata superior, etc.

Modalidades de los métodos

Son las diversas variantes de un mismo método según sea la operación a la que se aplique: Suma, resta, multiplicación o división. Con esta diferenciación se puede distinguir, por ejemplo, el método de redondear de la suma, del de la resta o del de la multiplicación.

Enfoques de los métodos

Son las opciones posibles con que se pueden aplicar las modalidades de los métodos, ante la posibilidad de aplicarlos a uno u al otro dato, juntando cifras o por separado, operando los parciales en uno u otro

orden, etc.

Procedimientos

Son las secuencias ordenadas y explícitas de cálculos que desarrollan las modalidades de los métodos y que llevan hasta el resultado.

Con la diferenciación en los términos usuales que se ha planteado, se entiende que se agrupan bajo un mismo método procedimientos diferentes. Por ejemplo, el procedimiento para multiplicar por 25 que consiste en multiplicar por 100 y dividir por 4, es diferente del procedimiento para multiplicar por 5 que consiste en multiplicar por 10 y dividir por 2, pero en cambio, son el mismo método ya que en ambos se aplica el mismo tipo de relación alícuota (ser divisor de) con la unidad seguida de ceros.

Del mismo modo, diferentes métodos se agrupan bajo una misma estrategia. Por ejemplo, el método para sumar 54+66 haciendo (50+60)+(4+6) es diferente del método para sumar haciendo (54+60)+6. Pero ambos se basan en el mismo tipo de descomposición, esto es, se basan en el descabezamiento que consiste en completar los ceros del orden de unidad de las cifras.

III.3.3 Esquema de la organización global de los métodos de cálculo mental usados en la literatura

1. ARTIFICIOS

1.1 Columnas

- Resta llevando
- Resta prestando
- Resta complementando
- Resta aditiva

1.2 Reglas

- Terminación en ceros
- Multiplicación reglada de números formados sólo por unos
- Multiplicación reglada de números formados sólo por nueves
- Multiplicación reglada de los números de la Tabla Mayor
- Multiplicación reglada de números con coma decimal
- Multiplicación por Complementos
- Multiplicación Cruzada o Cruceta

1.3 Fórmulas

- Cuadráticas
- Numéricas

2 DESCOMPOSICIONES

2.1 Disociaciones

2.1.1 Disociaciones por descabezamiento

- De un dato: Agregar, segregar, distribuir
- De los dos datos: Primeros Dígitos reagrupando, recuperando y cambiando

2.1.2 Disociaciones subsidiarias

- Resta haciendo la misma terminación
- Resta prestando
- Patrones-Hecho conocido

2.2 Factorizar

2.2.1 Factorizaciones Simples

2.2.2 Factorizaciones Subsidiarias

3 COMPENSACIONES

3.1 Compensaciones Intermedias

- Añadir y quitar
- Promediar
- Doble y mitad
- Conservar-Doble suma
- Alicuotar

3.2 Compensaciones finales.

- Redondeo
- Incremento Subsidiario

4 Recuentos

4.1 Contar a saltos

- Repetición de grupo

III.3.4 Catálogo, ilustrado con ejemplos, de los métodos de cálculo mental presentados de acuerdo con la organización global anunciada

Se procede, a continuación, a presentar la lista de los métodos de cálculo mental que sigue de aplicar los criterios anteriormente señalados a los métodos encontrados en la literatura, actualizando su terminología y sintaxis, y prescindiendo de aquellos que no parecen propios del cálculo mental.

(Las estrategias y sus tipos aparecen en negrita y mayúsculas, los métodos en cursiva y letra normal)

I. ARTIFICIOS

I.1 Columnas

Consiste en reproducir mentalmente el algoritmo estándar de lápiz y papel, o algunas de sus variantes. Se actúa siempre en términos de posición, de tal modo que actuando por columnas se hallan resultados parciales con cifras o grupos aislados de cifras.

En esta estrategia sólo se han encontrado métodos alternativos en el caso de la resta.

Resta Llevando

672-458= 12 menos 8 ó de 12 a 8, 4; de 7 a 6, 1; de 6 a 4, 2.

Resta Natural o Prestando

672-458=12 menos 8 ó de 8 a 12, 4; de 6 a 5, 1; de 6 a 4, 2.

Resta Complementando

672-458=2 es el complemento de 8, 2 y 2 son 4; 5 es el complemento de 5, 5 y 6 son 11; 6 es el complemento de 4, 6 y 6 son 12.

Resta Aditiva

672-458=8 y 4 son 12, llevo una, 5 y una son 6, 6 y 1, son 7, 4 y 2 son 6. Total 214.

I.2 Reglas Breves

Consiste en aplicar las técnicas recogidas por la tradición escrita en las Aritméticas antiguas vinculadas a requisitos particulares de los datos.

Multiplicación de números terminados en ceros

Suma cuando los sumandos terminan en ceros sumando sólo las cifras significativas.

600+700+4500= 6+7+45 cientos=5800.

Multiplicación por números que terminan en ceros.

7x1000="7 y añado tres ceros"=7000.
7x300="7x3 y añado dos ceros"=2100.
7x120="7x12 y añado un cero"=840.

División cuando el dividendo y divisor terminan en ceros, o sólo el divisor.

36000:500=360:5="72 y resto 0".
75.000:4.500="750:45, cociente 10 y resto 30, al que le añado dos ceros, 3000".

Multiplicación reglada de números formados sólo por unos

Multiplicación por 11.

57x11= "Dejo el 7, sumo 5+7,12, dejo el 2 y llevo 1 al 5, que son 6. Total 627".

Multiplicación de 101 por un número de 2 cifras, y 1.001 por uno de tres.

58x101= "a 58 le añado 58. Total 5858".
988x1001= "988 y añado 988. total 988988".

Multiplicación reglada de números formados sólo por nueves

47x99= ..."47-1, 46. 100-47, 53. Total 4653".

Multiplicación de números de dos cifras o Tabla Mayor

Son las reglas que resultan de agrupar factores comunes al aplicar la doble distribución a toda la casuística de los números comprendidos entre 10 y 100.

Los dos números son iguales en decenas:
(10a+b)(10a+c)=10a(10a+b+c)+bc.

25x27=(25+7)x2x10+7x5=675. "Uno más unidades del otro por decenas y añado unidades por unidades".
13x18=(18+3)x10+3x8=234.
103x106=(103+6)x100+3x6=10918.
1005x1008=1013x1000+5x8=1013040.

Los dos números son iguales en decenas, y sus unidades suman diez: (10a+b)(10a+c)=100a(a+1)+bc.

47x43=40x50+3x7=2021 "Primero por siguiente y añado unidades por unidades".
35x35="12 y añado 25"=1225.

Los dos números son iguales en unidades y sus decenas suman diez: $(10a+b)(10c+b)=100(ac+b)+b^2$).

34x74= (3x7+4)100+4x4=2516."uno por otro más unidades y añado el cuadrado de las unidades".

Multiplicación por Complementos

Consiste en apoyarse en el producto de los complementos aritméticos cuando éste es más fácil que el de los dados.

Multiplicación por la regla de los Perezosos:
ab=(10-a)(10-b)+10[a-(10-b)]).

8x7="10-8=2; 10-7=3; 8-3=5, son las decenas, y 2x3=6 son las unidades. Total 56".

Multiplicación por la regla de San Andrés:
ab=(100-a)(100-b)+100[a-(100-b)].

89x98="100-98=2, 100-89=11, 98-11=87 son las centenas, 2x11=22, son las unidades"=8722.
96x96=4x4+(96-4)x100=9216.
989x998=11x2+(998-11)x1000=987022.

Multiplicación Cruzada o Cruceta

Consiste en sumar los parciales del mismo orden, al tiempo que se obtienen, para ahorrarse filas de las que salen en el algoritmo escrito.

17x16= "6x7, 52, 2 y me llevo 4. 6 y 7, 13. 13 y 4 que me llevo 17, 7 y me llevo 1. Siempre 1 y una que me llevo son 2. Total 272".

I.3 Fórmulas

Consiste en aplicar identidades literales o numéricas conocidas.

Cuadráticas

Son las conocidas del cuadrado del binomio o la diferencia de cuadrados.

Cuadrado de un número por la fórmula del binomio.

$31^2=(30+1)^2=30^2+2x1x30+1=961$.
$18^2=(20-2)^2=20^2-2x2x20+4=324$.
$1001^2=(1000+1)^2=1000.000+2x1.000+1=1.002.001$.

Multiplicación por la fórmula de la diferencia de cuadrados:
$axb=([(a+b)/2]^2-[(a-b)/2]^2$.

$19x21=20^2-1=399$. Condición de cero central.
$64x66=65^2-1=4224$. Condición de 5 central.
$6,5x7,5=7^2-0,5^2=49-0,25=48,75$.

Cuadrado de números comprendidos entre 25 y 50, por el método de las diferencias a 25 y 50. $N^2=100x(N-25)+(50-N)^2)$.

46x46= "46-25=21; 50-46=4. 21x100+4x4 "a 21 le añado 16" Total 2116.

Numéricas

Suma de secuencias naturales limitadas: 1+2+...+ n, o trozos de ella por la fórmula correspondiente.

1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+...+40=40x41:2=820.
61+63+65+67+69=5x65=325.

II. DESCOMPOSICIONES

II.1 Disociaciones

Consiste en la descomposición de uno o ambos datos en sumandos.

II.1.1 Disociaciones por descabezamiento

Consiste en la descomposición de uno o ambos datos en los sumandos que resultan completando las cifras con sus ceros correspondientes, esto es, la descomposición en los órdenes de unidad.

De un dato

Agregar: Suma sucesiva de los diversos órdenes de unidad de un sumando, empezando por el orden superior.

63+45=63+40+5=108.

Segregar: Resta sucesiva de los diversos órdenes de unidad del sustraendo, empezando por el orden superior.

894-632=894-600-30-2=262.

Distribuir: Multiplicación sucesiva de los diversos órdenes de unidad de un factor.

Caso general.

46x32=(40+6)x32=40x32+6x32.

Caso de un número que sólo tiene dos guarismos significativos siendo uno la unidad: 11,12,13,...19; 21,31,...,91; 101,102,...,109; 201,301,...,901.

34x21=34(20+1)=714.
36x102=36x(100+2)=3600+72=3672.

Caso de un número formado sólo por unos: 11,111, y 1.111.

34x11=34(10+1)=340+34=374.
68x111=68x(100+10+1)=6800+680+68=7548.

División sucesiva de los diversos órdenes de unidad del dividendo.

1500:25=1000:25+500:25=60.

División descomponiendo el dividendo en sumandos que son múltiplos del divisor.

792:11=(770+22):11=770:11+22:11=72.
88:17=(34+34+17+3):17= ..."cociente 5 y resto 3".

<u>De los dos datos-Primeros dígitos</u>

Resta descabezando los dos datos y recuperando.

725-443=((700-400)+25)-43.

Suma descabezando los dos datos y reagrupando.

154+26=(150+20)+(4+6), o 15+2, 17, 170, 4+6, 10. Total 180.
58,4+7,5=(58+7)+(0,4+0,5)=65,9; o 58+7+(4+5):10.

Resta descabezando los dos datos y cambiando el signo de la resta parcial cuando la parte que hace de sustraendo es mayor que la que

hace de minuendo.

725-443=(700-400)-(43-25) o +(700-400)+(25-43).
2,23-1,58=(2-1)-(0,58-0,23)=0,65.

II.1.2. Disociaciones subsidiarias

Consiste en descomponer un dato en función del otro.

Resta haciendo la misma terminación.

461-166=461-161-5=295.

Resta prestando o pidiendo refuerzos del minuendo a una resta parcial.

13-8,25=(12-8)+(1-0,25).

Patrones-Hecho conocido.

25+28=25+25+3=53. Doble
54+48=54+46+2=102. Complemento.
25x26=25x(25+1)=650. Cuadrado.
36x1,25=36x(1+1/4)=45. Cuarto.
38x1,5=38x(1+1/2)=57 Mitad.
27:0,75=27x(1+1/3)=36 Tercio.
46x22=46x(20+20/10)="Doble de 46, 92, 920 y añado su décima parte".
46x33=46(30+30/10)
Idem, 44 ... , 110.

Multiplicación 5, 25, 35,... por un número no par.

25x17=25x(16+1)=50x8+25=425. "Dobla el número donde está el 5 y multiplica lo doblado por la mitad del otro".

Multiplicación por 25, 1215, 1125, 75, 175, 15, 150, 155.

34x25=34x(10x2+10/2)=850. "Haz el 34, dieces, dóblalos, y añade su mitad".
36x125=36x(100+100/4)=4500.
36x1125=36x(1000+100+100/4)=40500.
36x75=36x(50+25)=36x(1/2 de 100+1/2 de 50)=2700.
38x15=38x(10+10/2)=570. "Al producto x10 añade su mitad".

II.2 Factorización

Consiste en aplicar la descomposición de uno o ambos datos en factores.

II.2.1 Factorizaciones Simples

Multiplicación por 12, 15, 22, 33, 44, ...

37x12=37x3x4=111x4=444.
18x15=9x2x5x3=27x10=270.
26x33=(26x11)x3.

División descomponiendo el divisor en factores.

75:15=75:3:5=5.
36,90:6=36,90:2:3=18,45:3=6,15.

II.2.2 Factorizaciones Subsidiarias

División descomponiendo el dividendo en factores.

1500:25=15x(100:25)=15x4=60.

III. COMPENSACIONES

III.1 Compensación intermedia

Consiste en servirse del incremento de uno o los dos datos compensando el resultado durante el proceso intermedio, antes de operar los parciales.

Añadir y quitar

Consiste en añadir a un dato las unidades que se le quitan al otro.

Suma completando decenas.

81+59=80+60.

Suma doblando el número central, conocida (Green, 1985) como procedimiento del "número misterioso".

34+36=35+35=70.

Promediar

Consiste en hallar la media de otros dos productos formados de modo que uno de sus datos es el mismo que uno de los dados y los otros dos son números equidistantes del otro dado.

60x25=...60x20=1200, 60x30=1800. Luego 60x25=(1200+1800)/2=1500.

Doble y mitad

Consiste en doblar un dato y dimidiar el otro simultáneamente.

Multiplicación por 15, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95, por un número par.

28x35=14x70=980.

Multiplicación por un número que es potencia de 2.

16x36=8x72=4x144=2x288=576.

Conservar

Consiste en sustraer sumando o restando el mismo número al minuendo y al sustraendo para hacer decenas, centenas, ..., completas.

Resta sumando a los dos datos el complemento del sustraendo.

46-18=48-20=28.

Alicuotar

Consiste en aplicar una relación alícuota, esto es, una relación de "ser divisor de". En particular, de la unidad seguida de ceros o de múltiplo de la misma.

Multiplicación por 5, 2 y 1/2 o 2,5, 25, 125, 75, 375, 625, 875 etc., o cualquier otro número que sea parte alícuota de 10, 100, 1000.

420x5=420x10/2.
82x(2 y 1/2) o 82x2,5=82x10/4=205.
64x25=64x100/4=1600.
36x75=(36:4)x3x100=2700.
72x125=72x1000/8=9000.
nx375, x625, x875 = nx3000/8, x5000/8, x7000/8.

División cuando el divisor es 5; 25; 125; 75; 0,50; 0,25; 0,125; 0,75; 1,25; 1,5; etc., y en general cuando el divisor es múltiplo o parte alícuota de 10, 100.

480:5=480x2/10
2400:25=2400x4/100=96

Multiplicación por 0,5; 0,25; 0,2; 0,125; dividiendo por 2, 4, 5, 8.

128x0,50=128x(1/2)=64.
36x0,25=36x(1:4)=36:4=9.
18,5x0,2=18,5:5=3,7.
46:5=46x0,20=9,2.

División por 0,5; 0,25; 0,2; 0,125; multiplicando por 2, 4, 5, 8.

36:0,5=36x2=72.
38:0,25=38:(1/4)=38x4=152.
18,50:0,2=18,50x5=92,5.

Multiplicación por 0, 75 1,25; 1,5.

28x0,75=(28:4)x3=21.
24x1,25=24x5/4=30.
34x1,5=34x3/2=51.

División por 0,75; 1,25; 1,5.

69:0,75=69:(3/4)=(69:3)x4=92.

División por un número al que a su inverso le falta una parte alícuota de 1, 10, 100,...

65:1,25=65x(1-1/5)=65-13=52.
93:1,5=93x(1-1/3)=93-31=62.

III.2 Compensación final

Consiste en servirse del incremento de uno o los dos datos, compensando el resultado al acabar las operaciones parciales.

Redondeo

Consiste en completar la decena, centena,..., inmediata superior de alguno de los datos.

Suma añadiendo unidades a cualquiera de los sumandos para hacer una cantidad exacta de decenas o centenas y corrigiendo después el resultado.

56+17=56+(20-3)=(56+20)-3=73.

Resta completando las decenas o centenas del sustraendo y corrigiendo después el resultado.

265-199=265-(200-1)=265-200+1.

Multiplicación por un número cualquiera de nueves: 9, 99,...

nx9.999=(nx10.000)-n.
84x9=84x(10-1)=840-84=756.
47x99=47x(100-1)=4700-47=4653.

Multiplicación por un número próximamente menor que un número múltiplo 10, 100, 1000.

34x19=34(20-1)=646.
25x47=25x(50-3)=1175.

Multiplicación por un número próximamente menor que 10, 100, 1000 al que le falta un número que es parte alícuota de alguno de

éstos.

36x7,5=36x(10-1/4 de 10)=270.
32x75=32x(100-1/4 de 100)=2400.
48x0,75=48x(1-1/4)=36.
64x87,5=64x(100-1/8 de 100)=5600.
48x875=48x(1000-1/8 de 1000)=42000.

División cuando al dividendo le falta un múltiplo del divisor para ser 100, 1000, ...

975:25=(1000-25):25=39.

Multiplicación por un número al que le falta la décima parte de su decena inmediata superior: 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 91.

67x18=67x(20-1/10 de 20)=1206.

Incremento Subsidiario

Consiste en suplir un dato por otro mayor que tiene un método vinculado o da lugar a un hecho de resultado conocido.

Multiplicación por 7, 6, 4, 45.

256x4=256x(10/2 -1) "mitad de 2560-256=1.024.

IV. RECUENTOS

4.1 Contando a saltos

Repetición de grupo

Consiste en servirse de actuaciones aditivas repetitivas que

involucran a las pautas recurrentes de la secuencia numérica.

División restando del dividendo múltiplos del divisor.

570:38=570-38x10, son 570-380, 190, y 190 son 5x38 Total 10+5.
1500:25=4 veces 25 son 100, 1000 serán 40, y 500 la mitad, 20. Total 60.

CAPITULO IV. LA INVESTIGACION AFIN PRECEDENTE

IV. LA INVESTIGACION AFIN PRECEDENTE

IV.0 Preámbulo

En este capítulo se sintetizan los resultados de los trabajos de investigación relacionados con el cálculo mental que han sido consultados, algunos lo han sido directamente de las fuentes originales, otros en cambio a través de fuentes intermedias.

IV.1 Líneas de investigación localizadas

Varias son las cuestiones que han preocupado a los investigadores en materia de cálculo mental. A saber:

1. ¿Qué uso hacen los ciudadanos del cálculo mental?

2. ¿Cómo deben ser los tests para evaluar la habilidad de cálculo mental? ¿Qué variables o aspectos se deben medir? ¿Cómo afecta el formato de presentación de los ítems a las respuestas de los calculistas?

3. ¿Qué tratamiento dan los textos escolares al cálculo mental, en relación con los tipos y cantidad de los problemas que lleva y la habilidad de estudiantes y profesores para resolverlos?

4. ¿Cuál es el efecto de un determinado programa experimental de instrucción que enfatice el cálculo mental en comparación con el que usualmente reciben los estudiantes, en cuanto a los logros o el avance en la resolución de ejercicios y problemas y el dominio general en Aritmética?

5. ¿Cuáles son las concepciones, métodos y procesos de pensamiento de los estudiantes de los distintos cursos y de niveles de habilidad diferentes cuando calculan mentalmente?

6. ¿Qué relación hay entre la habilidad en cálculo mental y ciertos factores asociados tales como: sexo, inteligencia, memoria, y habilidad general en Aritmética?

7. ¿Qué relación hay entre la habilidad en cálculo mental y la comprensión numérica?

IV.2 Resultados de la investigación precedente

1 ¿Qué uso hacen los ciudadanos de su habilidad de cálculo mental?

La investigación en esta línea entronca con la idea común de que la inclusión del cálculo mental en el currículum escolar se justifica por su utilidad social, por ello se ha pretendido evidenciar la mayor importancia relativa del cálculo mental en comparación con el cálculo escrito, y cómo las matemáticas escolares incitan al cálculo de lápiz y papel cuando éste es el último recurso en las matemáticas corrientes de la calle. Esto se ha interpretado diciendo que las matemáticas mentales corrientes o de la calle deben ser aprovechadas en la escuela no como curiosidades sino por la carga de conocimientos que comportan.

En cuanto a las investigaciones que apoyan estas afirmaciones, destacan, por seguir un orden cronológico:

Wandt y Brown (1957, cit. Reys, 1985) efectuaron un trabajo de seguimiento durante un período de tiempo de 24 horas de una muestra seleccionada de la población, que cubría un amplio espectro de la sociedad, para determinar qué uso se hacía de las matemáticas en un sentido no profesional. Se registraron las situaciones de cálculo con las que se enfrentaron 147 sujetos de ocupaciones variadas, 66 de los cuales eran profesores, 44 estudiantes o amas de casa, y el resto de diferentes profesiones. Categorizadas las situaciones en cuatro tipos, a saber: mental exacto, mental aproximado, lápiz y papel-exacto, y lápiz y papel aproximado, se halló que de 634 usos de las matemáticas (con un

promedio de 4,3 por persona) el 75% fue clasificado de "mental", casi la mitad de los 634 usos lo fueron de cálculo mental exacto y sólo cerca del 20% lo fue de lápiz y papel-exacto.

Maier (1977, cit. Reys, 1985) estudió ejemplos de matemáticas corrientes, como los de compraventa que se dan en el juego del "Monopoly", trasladados a la clase de matemáticas. Maier concluyó que algunas de las diferencias entre las matemáticas escolares y las matemáticas corrientes son claras. Una es que las matemáticas escolares son mayormente matemáticas de lápiz y papel mientras que las corrientes son más de estimaciones y cálculos mentales. Cuando los cálculos son demasiado difíciles o complicados para ser ejecutados mentalmente, cada vez más, los matemáticos corrientes se vuelven hacia las calculadoras. En las matemáticas corrientes el lápiz y papel es el último recurso, aunque sea lo principal en las matemáticas escolares.

Una conclusión similar obtuvieron Carraher y sus colegas (Carraher, Carraher y Schliemann, 1987 y 1989), quienes, tras estudiar a niños brasileños con diferentes niveles de escolarización resolviendo problemas aritméticos en situaciones de mercado (callejero) frente a situaciones escolares encontraron que mientras que los problemas de tipo escolar llamaban a ser resueltos de modo escrito los de tipo callejero, de pagar y devolver el cambio, llamaban a ser resueltos mentalmente. De su estudio concluyeron que las matemáticas mentales deben dejar de ser consideradas como simples curiosidades sin consecuencias ya que revelan una fuerte carga de conocimientos acerca del sistema de numeración decimal que debe ser aprovechada en la escuela.

2. ¿Cómo deben ser los tests para evaluar la habilidad de cálculo mental? ¿Qué variables o aspectos se deben medir? ¿Cómo afecta el formato de presentación de los ítems a las respuestas de los calculistas?

En este terreno son muchos los aspectos que hay que considerar y muchas las preguntas implicadas, pero, citando a Reys (1985), pocas son las que han sido abordadas por la investigación. A saber:

¿De qué manera se han de presentar los tests para asegurar que los calculistas resuelvan mentalmente y no con ayudas, más o menos disimuladas, del lápiz y papel?

¿Debe controlarse el tiempo en la evaluación del cálculo mental? Si es así, ¿el de los ítems o el de la prueba?, y si el de los ítems ¿cuánto tiempo, igual o diferente?

¿Qué aspectos o variables (rendimiento, estrategias, rapidez, habilidad general en aritmética, etc.) interesa evaluar y cómo en cada caso?

¿Qué efectos tiene el formato de presentación de los ítems, oral o visual, sobre las respuestas de los calculistas?

¿Cómo deben presentarse los ítems, aleatoriamente, siguiendo un orden de dificultad, agrupados por operaciones, uno tras otro haciendo pausas, o todos a la vez?

Algunos expertos han teorizado que la magnitud de estas no bien contestadas cuestiones ha supuesto un freno para la evaluación de la habilidad en cálculo mental. Así, se ha dicho que la falta de esfuerzos en cuanto a la evaluación del cálculo mental es lo que ha retardado la inclusión de este tema en el currículum de matemáticas (Reys, 1984, cit. Reys, 1985).

De hecho, parece ser que la primera vez que se incluye el cálculo mental en los NAEP (Evaluación Nacional Norteamericana del Progreso Educativo) fue en el año 1983, que corresponde a la evaluación del curso 1981-1982. En esta prueba se administraron oralmente 18 ítems, todos con números naturales, y con un tiempo

permitido de entre 9 y 13 segundos. Del examen de los datos obtenidos, parece que a los 9 años la habilidad de cálculo mental apenas comienza a emerger y que como en esa edad el currículo de matemáticas todavía centra su interés en los algoritmos escritos, este énfasis tal vez interfiera con la habilidad de los estudiantes para tratar más abstractamente con números (Reys, 1985).

Esto no quiere decir que no se hayan hecho esfuerzos para encontrar los mejores tests que permitieran hacer mediciones sobre el cálculo mental, sino que los tests disponibles no están consolidados e instalados en la práctica escolar, como lo puedan estar las pruebas que miden el avance en la aritmética escrita, probablemente por culpa del carácter volátil del cálculo mental y porque lo que evalúan estos test no es del todo satisfactorio, al menos desde el punto de vista actual.

En cualquier caso, de los trabajos revisados se pueden extraer algunas recomendaciones interesantes.

Parece ser que los ítems deberían limitarse a un máximo de 10 por sesión, también que deberían presentarse graduados en orden creciente de dificultad medida en términos de la frecuencia de éxito que se espera que obtengan, y que no todos los ítems requieren del mismo tiempo, por lo que no se les debe limitar por igual.

El formato de presentación, oral o visual, influye en el nivel de éxito de los estudiantes. Los ítems presentados de oído, como cuando los lee el profesor en voz alta, resultan más difíciles que cuando los estudiantes los pueden leer. Esto sugiere que se deben esperar mejores resultados cuando se presente el material de esta segunda manera que de la primera.

No se puede decir que el cambio de formato de oral a visual en la presentación de los ítems se corresponde con algún cambio en cuanto a las estrategias que se utilizan en cada caso. No obstante parece que en el formato oral los estudiantes de menor habilidad se ven más impelidos

VNIVERSITAT DE VALÈNCIA BIBLIOTECA

a abandonar los métodos impropios del cálculo mental como los de contar o de columnas mentales.

Estas afirmaciones se apoyan básicamente en lo siguiente:

En cuanto a los tests, obviamente, no todos han sido diseñados con los mismos propósitos. A principios de siglo se tenía muy en cuenta la variable rapidez porque se tenía la creencia de que rapidez era sinónimo de habilidad en cálculo. Por ello, las pruebas diseñadas primaban la evaluación de esta variable. Entre las pruebas más conocidas de esta época debe citarse la de Burt (1898) que consistía en una serie de problemas con enunciado que van numerados en forma de series graduadas en orden creciente de dificultad para ser presentadas a los alumnos en el formato pregunta oral-respuesta escrita y sin limitación de tiempo. De esta prueba hay una versión renovada debida a Giménez (1986) con enunciados actualizados y ampliados, entre otros contenidos, a la división de fracciones y a la regla de tres con complejos. El orden de dificultad que esta prueba propone ha sido utilizado por Giménez para la elaboración de manuales del tipo de colección de problemas de cálculo mental para el trabajo escolar de capacidad, dominio, transcripción y retención de hechos numéricos.

También basándose en la rapidez, en los años treinta, Galí (1934, reed. 1985, y 1935) presenta una propuesta de valoración del cálculo aritmético en general y de sistematización del proceso de enseñanza, en donde defiende la formulación oral para este tipo de pruebas, distinguiendo entre la rapidez de mecanismo y la rapidez de cálculo. En sus pruebas se valora la cantidad de respuestas acertadas en un límite de tiempo, y el objetivo es analizar el progreso del alumno midiendo el avance en el mecanismo de las operaciones, en la rapidez de cálculo y en la aptitud de aplicación a la solución práctica de problemas (Giménez, 1986). Otra característica de estas pruebas es que se basan en escalas de graduación previamente establecidas para medir las etapas del educando a medida que avanza.

Hall (1947, cit. Reys, 1985), en un trabajo de este estilo, con ítems para evaluar la habilidad de un grupo de 179 estudiantes de 6º grado norteamericanos para resolver mentalmente quince problemas verbales de sumar, restar, multiplicar y dividir enteros, de una, dos y tres etapas, presentados individualmente cada uno por escrito en una ficha y leídos en voz alta, concluyó que el tiempo debería variar con la dificultad del problema y que había que limitar a un máximo de 10 el número de problemas que debía plantearse por cada sesión, para mantener el interés de los estudiantes.

Más recientemente, Sachar (1978), utilizó el formato oral con los ítems puestos en orden de dificultad para permitir que los estudiantes presten toda su atención y esfuerzo a los ejercicios que son capaces de contestar correctamente y reducir la probabilidad de que un ítem que puede ser contestado por los estudiantes se encuentre emparedado en un grupo de ítems de los que no pueden contestar.

El test de Sachar, denominado S.M.A.T fue diseñado en seis niveles de acuerdo con los grados 1-6 del currículo de los E.E.U.U, con el propósito de cubrir todo el espectro de dificultades posibles en las siete ramas: suma, resta, conceptos de la numeración, multiplicación, división, medida, y fracciones. El orden de dificultad consistió en empezar por los fáciles, entendidos como los que todos en el nivel apropiado pueden contestar correctamente, para ir ascendiendo hasta los difíciles que son aquéllos que probablemente ningún estudiante puede contestar correctamente.

Recientemente, en España, han surgido algunos intentos individuales como los de Giménez (1986) y Segovia (1989), éste último en cálculo estimado, que han adaptado viejas pruebas, como la de Burt, cuyo valor está consolidado por la experiencia.

En cuanto al efecto del formato de presentación, Brown (1957) efectuó un estudio para conocer, entre otras cosas, hasta qué punto la

habilidad para resolver ejemplos de restar depende de si los ejercicios están presentados oralmente, visualmente con tarjetas "flash", o por escrito. Brown se interesó por las frecuencias de éxito en cada caso y por averiguar si los estudiantes usaban métodos distintos en cada una de las presentaciones y, a su vez, en cada uno de diversos cursos del sistema escolar norteamericano.

Brown trabajó con unos 200 estudiantes de cada uno de los cursos 6º a 12º, a los que sometió a tres tests de dificultad similar cuyos 26 ítems abarcaban cinco tipos de ejercicios de restar. A saber: ejercicios con números naturales (la mayoría), con decimales, con fracciones, con números denominados, y con números naturales en problemas con enunciado. Un test fue presentado en forma oral para ser resuelto mentalmente con limitación de tiempo para cada ejercicio. En otro test se mostraban los ítems durante un número limitado de segundos, los estudiantes debían resolver mentalmente mientras los tenían a la vista, en cuanto se apartaba la tarjeta debían escribir su respuesta. El tercer test se presentó en forma escrita y los estudiantes podían resolverlo con lápiz y papel.

Los resultados mostraron que los ítems presentados oralmente resultaban más difíciles que los presentados visualmente mediante tarjetas flash. Aunque las frecuencias de éxito crecieron a medida que se aumentaba de curso, las diferencias entre el test oral y el escrito se mantuvieron en una misma tónica, dando como media que en el test oral se resolvieron correctamente el 50,4% de sus 26 ítems, en el test con tarjetas "flash" el 78,8%, y en el test escrito el 88,9%. En cuanto al progreso por cursos, el mayor se daba al pasar de 6º a 7º y de 7º a 8º, a partir del cual se estabilizaba. Brown concluyó que no se puede esperar que los estudiantes alcancen el mismo nivel de altura en la aritmética mental cuando la presentación es oral que cuando es escrita.

En cuanto a la variabilidad de los métodos generales al cambiar de formato de presentación, en las entrevistas que llevó a cabo con dos grupos reducidos de estudiantes seleccionados, uno por ser de un nivel

de habilidad alta y el otro por ser de un nivel de habilidad baja, encontró que en la sustracción en el formato oral se resolvieron más ejemplos con los métodos propios de la aritmética mental, bien entendido que son los distintos de contar uno a uno y del lápiz y papel mental empezando por la derecha, que en la sustracción en el formato de tarjetas flash y que en la sustracción escrita (106 contra 29, y 13)

La gran mayoría, 129 de los 143 estudiantes entrevistados fueron consistentes en las dos presentaciones oral y visual con tarjetas, en el sentido de que usaron el mismo método general en ambas, el sustractivo prestando que es el habitual en EEUU. Sólo 14 (10,4 %) de los que usaron este método general lo cambiaron al pasar de la presentación escrita a la oral o con tarjetas, 9 de alta habilidad y 5 de baja.

Resultados similares en cuanto al nivel de éxito fueron obtenidos por Josephina (1960, cit. Reys, 1985) al comparar dos técnicas instruccionales de presentación de problemas de aritmética mental. En una, los estudiantes leían los ítems; en la otra, los oían. Sus resultados mostraron que se obtuvieron mejores logros cuando los estudiantes podían ver el problema que cuando sólo podían oírlo, por lo que los profesores deben esperar mejores resultados cuando presenten el material de esta manera.

La técnica que utilizó en su trabajo consistió en que todos los días durante cuatro semanas, estudiantes de una clase de quinto grado leyeron y resolvieron diez problemas de aritmética mental de un libro. En otra clase de quinto, los estudiantes practicaron aritmética mental oyendo los diez problemas y registrando las respuestas. Después de un período de cuatro semanas los grupos se invirtieron, cada uno usando la técnica que no utilizaron durante las cuatro primeras semanas.

También Reys (1985) aborda, en su investigación sobre la suma y la multiplicación, la cuestión de si los resolutores de diversos grupos de habilidad cambian de estrategia al cambiar el modelo de presentación

de los ítems del formato oral al formato visual. Como conclusión de sus entrevistas afirma que de su investigación no se puede concluir que el cambio de formato de presentación haga emerger diferentes estrategias. Reys obtiene resultados similares en ambos casos, y, como presentó antes el test visual que el oral, sospecha que los estudiantes de habilidad alta parece que a medida que progresa la entrevista buscan algoritmos alternativos para ejercicios similares, mientras que los de habilidad media se mantienen en el uso la misma estrategia (preferentemente el lápiz y papel) que usaron de entrada. Los primeros, dice, parecen explorar y aprender con la práctica que les da la resolución de ejercicios precedentes, mientras que los segundos no parecen capaces de intentar enfoques distintos, aunque en el caso del formato oral parece que se ven más impelidos a ello.

En el mismo trabajo, en la suma, 12 de los 17 estudiantes de habilidad alta seleccionados usaron la misma estrategia en los ítems paralelos: 547+199 y 358+199, el primero del test visual y el segundo del oral. Concretamente usaron el método que consiste en completar la centena de 199. En cambio, esto sólo ocurrió en 3 de los 7 de habilidad media que usaron lápiz y papel. La razón de la diferencia pudo estar, dice el investigador, en el aprendizaje que se produjo en el proceso de las entrevistas entre un ejercicio y el otro, o quizás en que el formato visual evoca el lápiz y papel y que esta evocación implica una mayor carga mental en el oral.

En las multiplicaciones 7x499 y 6x199, ocurrió lo mismo en 16 de los 17 estudiantes de habilidad alta seleccionados, y en 4 de los 7 de habilidad baja, los 3 restantes de estos 7 usaron lápiz y papel en el ejercicio visual y completaron la centena en el ejercicio oral.

En 25x4400 y 50x684, fueron 11 de 17 y 7 de 7, aunque aquí parece que se invierte el proceso. Lo que pasó fue que los 7 de habilidad media iniciaron lápiz y papel y no llegaron al final correcto de 25x4400, mientras que los otros mayoritariamente usaron el método que usa la relación alícuota.

3 ¿Qué tratamiento dan los textos escolares al cálculo mental en relación con el tipo y la cantidad de los problemas que incluye, y la habilidad de los estudiantes y profesores para resolverlos?

La investigación revisada sobre este punto no corresponde a textos de programas de estudios actuales, no obstante, pueden ser relativamente consideradas como extrapolables. De ellas se sigue que, aunque existen programas oficiales que marcan el currículum, los libros de texto difieren en cuanto a la cantidad y variedad de problemas y ejercicios para ser resueltos mentalmente, que además éstos son muy pocos en relación con los que están pensados para el cálculo escrito, y que no todos ellos pueden ser resueltos normalmente por los profesores.

Esta afirmación procede del estudio que hizo Hall (1951, cit. Brown, 1957 y Groumbling, 1970) sobre ocho series de textos publicados en E.E.U.U. desde 1943, y dos tests que fueron sometidos a 179 profesores y a los niños norteamericanos de dos clases de 6º grado, enfocados a averiguar en qué medida los textos incluían problemas para ser resueltos mentalmente y los profesores eran capaces de resolverlos. Para Hall, aunque los textos diferían en cuanto al número de ejercicios para la aritmética mental y no seguían las recomendaciones de los expertos, como media sólo 4,73% del número total de los problemas que contenían los textos estaban pensados para ser resueltos sin lápiz ni papel. Hall también encontró que los profesores eran capaces de resolver 4/5 de los 25 problemas que seleccionó de los textos, mientras que la puntuación media de los niños de sexto fue de 1/2.

4. ¿Cuál es el efecto de un determinado programa experimental de instrucción que enfatice el cálculo mental en comparación con el que usualmente reciben los estudiantes, en cuanto a los logros o el avance en la resolución de ejercicios y problemas y el dominio general en Aritmética?

Los estudios localizados sobre el efecto de una enseñanza del cálculo mental en relación con el avance de los estudiantes han constatado que los programas experimentales de corte tradicional, siempre producen un mayor avance que los programas de los libros de texto usuales del lugar, sin afectar negativamente al avance total en Aritmética. Sin embargo, no se han encontrado datos concluyentes sobre el efecto de programas basados en tecnologías como las máquinas de calcular o los programas informáticos.

Las investigaciones conducentes a estas afirmaciones no son recientes, salvo la de Yábar (1981). En su mayoría, son trabajos que han tratado de aplicar instrucción del tipo de adiestramiento orientado a la práctica, mediante breves tratamientos intensivos y durante periodos de tiempo más o menos espaciados para medir su efecto mediante tests, antes y después de las lecciones.

Flournoy (1953, cit. Brown, 1957, Reys, 1985, Groumbling, 1970) se planteó averiguar la efectividad de un determinado programa de instrucción midiendo el avance que experimentaron estudiantes de grado medio en la resolución mental de problemas y ejercicios presentados oralmente. Para ello se basó en un cuadernillo de lecciones de aritmética mental y en un test que aplicó a 550 estudiantes de 20 clases de 6º grado norteamericano.

Encontró que las lecciones de aritmética oral mejoraron significativamente la habilidad de los estudiantes para resolver sin lápiz y papel ejemplos y problemas con enunciado presentados oralmente. La ganancia media en el test de cálculo oral de los estudiantes del nivel alto de habilidad aritmética fue superior que la ganancia media de los estudiantes del nivel de habilidad aritmética inferior. Mientras que las ganancias en ambos grupos fueron casi las mismas en el test de resolución de problemas orales y en el de resolución de problemas escritos.

Flournoy también observó que se lograba una mayor comprensión y confianza para los estudiantes que cuando sólo se resolvían problemas con enunciado de modo escrito, y que el progreso de los estudiantes en la aritmética escrita no se veía impedido por el programa de aritmética mental, ya que encontró que los estudiantes mejoraron más de lo normal en el promedio de un test estandarizado de logros aritméticos.

Esto es algo que fue investigado también por Groumbling (1970), quien llevó a cabo un estudio para saber si seguir su programa de enseñanza en el que se enfatizaba el cálculo mental hacía avanzar a los estudiantes sin afectar negativamente a su avance total en aritmética.

En su trabajo, midió mediante dos tests el avance en cálculo mental y en aritmética de dos grupos de estudiantes norteamericanos de 4º grado, uno de control y otro experimental. El primero siguió el curso normal con los libros de texto del lugar y el segundo siguió un programa en el que se enfatizaba el cálculo mental. Mediante un pretest comprobó que no había diferencias significativas de partida entre los dos grupos en cuanto a su dominio de la aritmética y del cálculo mental. Comparando el pretest con un postest comprobó que los programas de enseñanza habían provocado un avance en los estudiantes tanto en aritmética como en cálculo mental. Por último comprobó que en el postest no había diferencias significativas en cuanto al avance en aritmética entre los dos grupos, pero sí que las había en cuanto al avance en cálculo mental en favor del grupo experimental.

En sus conclusiones afirma que las lecciones de cálculo mental que usó en su trabajo incrementaron el desarrollo de la habilidad general en aritmética, y perfeccionaron la habilidad del grupo experimental para resolver problemas mentalmente por encima de la del grupo de control, y que por lo tanto los estudiantes pueden beneficiarse de las series de lecciones preparadas de cálculo mental sin sufrir por ello una pérdida en su avance en aritmética.

También Payne (1966) trabajó en esta línea de determinar si se daban diferencias en cuanto a la habilidad aritmética general media entre los estudiantes que seguían un curso normal y los estudiantes que recibieron un programa de instrucción experimental. Su estudio fue con 1724 estudiantes norteamericanos de 5º grado, que siguieron un programa de 30 lecciones de cálculo mental, una a lo largo de cada semana. En sus conclusiones afirma que un programa de cálculo mental con un tiempo definido asignado fue más deseable para los estudiantes de su estudio que la presentación del libro de texto, ya que produjo mayores logros en el grupo experimental que en el grupo de control tanto en el test de cálculo mental como en un test estandarizado de aritmética.

En cuanto al efecto de programas basados en tecnologías, los datos más recientes encontrados son los de Yábar (1981) quien llevó a cabo un trabajo de investigación sobre el efecto de las máquinas de calcular en el aprendizaje del cálculo mental en el que concluyó que no parece que haya ningún efecto claro sobre los resultados.

5 ¿Cuáles son las concepciones, métodos y procesos de pensamiento de los estudiantes de los distintos cursos y de niveles de habilidad diferentes cuando calculan mentalmente?

En esta cuestión se ha trabajado especialmente sobre la sustracción y la multiplicación, y se ha concluido que los estudiantes usan una gran variedad de procedimientos, aunque la mayoría recurren casi siempre a estrategias que son más propias del cálculo escrito que del mental.

En cualquier caso, parece que los estudiantes diestros (de habilidad alta en el sentido de que están en la parte alta de las puntuaciones en los tests) son flexibles en su enfoque de cada problema, mientras que los menos diestros son muy rígidos y tienden a usar versiones mentales de los algoritmos de lápiz y papel. Los primeros suelen emplear estrategias basadas en las propiedades y las formas numéricas equivalentes que sugieren los números de la tarea para traducir un

ejercicio dado en otro más fácil de resolver mentalmente y parece que exploran y aprenden con la práctica, mientras que los otros se mantienen siempre con el mismo método.

Flournoy (1953, cit. Brown, 1957, Reys, 1985, Groumbling, 1970), en su trabajo sobre la sustracción encontró que después de recibir enseñanza y práctica los estudiantes aplicaron con éxito ocho métodos, a parte del de lápiz y papel, siendo el más usado el de descomposición de un dato en sus órdenes de unidad para proceder ordenadamente empezando por la izquierda, como en el ejemplo:

62-24=(62-20)-4

Sobre la sustracción, también Brown (1957) estudió y comparó los métodos que usaban los estudiantes norteamericanos. Concretamente, dos grupos seleccionados de entre los estudiantes de los grados 6º a 12º por su alto y bajo nivel de habilidad (puntuaron respectivamente en el 5% superior y en el 5% inferior) en un test sobre 12 ejercicios orales y de 4 a 6 escritos. De lo observado en sus entrevistas con los 143 (72 y 71) estudiantes seleccionados señala dos tipos de procedimientos. Estos son métodos generales y enfoques:

Métodos generales:

Sustractivo-Prestando. 672-458="8 de 12, 4; 5 de 6, 1; 4 de 6, 2.

Sustractivo -Llevando. 672-458="8 de 12, 4; 6 de 7, 1; 4 de 6, 2.

Aditivo-Prestando. 672-458="8 y 4 son 12; 5 y 1 son 6; 4 y 2 son 6".

Aditivo-Llevando. 672-458="8 y 4 son 12; 6 y 1 son 7; 4 y 2 son 6".

Complementar. 672-458="2 es el complemento de 8, 2 y 2 son 4; 5 es el complemento de 5, 5 y 6 son 11; 6 es el complemento de 4, 6 y 6 son 12.

Enfoques:

Empezar por la derecha como en el método tradicional de lápiz y papel.

Empezar por la izquierda. 672-458="4 de 6, 2; 5 de 6, 1; 8 de 12, 4".

Contar (se refiere a uno a uno, pero no a saltos): 29-14 ... "15, 16, 17, 18, 19, 20; esto es 6; luego 9, son 15".

Redondeo por abajo (Se refiere a varios métodos que son diferentes desde el punto de vista de los criterios de organización que se han presentado en este trabajo en el capítulo anterior).

70-44=70-40-4; 26. Este enfoque se corresponde con el método de descomposición por órdenes de unidad para proceder a restar empezando por el de orden superior del sustraendo, o de izquierda a derecha.

51-34=50-30, 20; 11-4, 7; 17...tiene que ser menos que 20 por eso es 17". Este enfoque se corresponde con el método de descomposición de los dos datos para restar llevando.

95-42=90-40, 50; 5-2, 3; 53. Este enfoque se corresponde con el método de descomposición de los dos datos reagrupando.

439-327=39-27, 12; 400-300, 100; 112. Idem.

6000-2249=1000-249, 751; 5000-2000, 3000; 3751. Este enfoque se corresponde con el método de descomposición prestando.

Redondeo de arriba (Se refiere a varios métodos que son diferentes desde el punto de vista de los criterios de organización que se han presentado en este trabajo en el capítulo anterior).

51-34=34+1, 35; 35+15,50; +1, 51; 17. Este enfoque se corresponde con el método de recuento hacia arriba intermediando con múltiplos de cinco.

51-34=35+15+1+1; 17 "... suma 1 a 51 y a 34, sabiendo que la diferencia entre 35 y 52 es la misma que la del ejemplo original. Piensa: 35 y 15, 50, y 1, 51 y 1, 52; 15, 1, y 1 son 17". Este enfoque se corresponde con el método de conservar, sumando uno para hacer cincos en vez de hacer ceros, y seguir contando.

51-34=34+6, 40; +11, 51; 17. Este enfoque se corresponde con el método de recuento hacia arriba haciendo puentes del tipo de intermediar con una decena completa.

51-34=34+10+6+1; 17. Este enfoque se corresponde con el método de recuento hacia arriba haciendo puentes del tipo de ir sumando diez y completando decenas.

51-34=34 a 44, 10; 4 a 11, 7; 17. Este enfoque se corresponde con el método de recuento hacia arriba haciendo puentes del tipo contar a saltos sobre números de la misma terminación.

672-458=58 a 72, 14; 400 a 600, 200; 214. Este enfoque se corresponde con el método de descomposición de los dos datos en grupos de órdenes de unidad para restar por partes aisladas.

Redondeo Compensatorio (Se refiere a varios métodos desde el punto de vista de los criterios de organización que se han presentado en este trabajo en el capítulo anterior).

34-9=34-10+1; 25. Este enfoque se corresponde con el método de descomposición de los dos datos en grupos de órdenes de unidad para restar.

126-89=89+1, 90; 126-1, 125; 125-90, 35; 37. Idem.

51-34=50-30, 20; -4, 16; +1; 17. Este enfoque se corresponde con el método de descomposición de los dos datos en grupos de órdenes de unidad para restar recuperando.

Grupos de cifras. Este enfoque se corresponde con el método de columnas, pero en vez de tomar las cifras aisladas de una en una se las toma de dos en dos o de tres en tres, etc.

6000-2249=100-49, 51; 60-22, 38; -1, 37; 3751.

Números relacionados. Este enfoque se corresponde con el método de descomposición subsidiaria que consiste en apoyarse en hechos conocidos como los dobles, etc.

29-14= dos 14s + 1, 29; un 14 + 1; 15.

La mayoría de los estudiantes entrevistados por Brown, el 93% de los de habilidad alta y el 100% de los de habilidad baja, o usaron siempre o al menos alguna vez el método de columnas sustractivo-prestando en el enfoque usual de empezar por la derecha. Los estudiantes de habilidad alta variaron más de método que los de habilidad baja y les superaron en el número de métodos que usaron. Los de habilidad baja usaron casi exclusivamente métodos básicos del tipo de contar o de operar empezando por la derecha como en el lápiz y papel, que es lo que se enfatiza en la mayoría de las escuelas, mientras que los de habilidad alta usaron más frecuentemente otros métodos tales como el de operar empezando por la izquierda o los de redondear.

Los enfoques "grupos de cifras" y "números relacionados" sólo se observaron en el grupo de alta habilidad, pero en muy pocos estudiantes (5 y 3). "Contar" fue casi exclusivo del grupo de baja habilidad (16 contra 2), mientras que "empezar por la izquierda" y

"redondear" fueron mucho más usados por los de habilidad alta (52 y 24 contra 16 y 6).

Sesenta y cinco (45,5%) estudiantes fueron consistentes en su método sin tener en cuenta el tipo o complejidad del ejemplo. Setenta y ocho (54,5%) variaron su método básico usando al menos una vez otro método. Esta variabilidad fue superior en el grupo de alta habilidad (76,4%) en comparación con el de baja (32,4%). Pero no sólo variaron más, sino que también usaron más métodos, y usaron más los propios de la aritmética mental (se refiere a los que son distintos de contar uno a uno y al de lápiz y papel mental empezando por la derecha).

Hechos similares en cuanto a la flexibilidad fueron observados por Reys (1985) en su estudio sobre la suma y la multiplicación. En su memoria señala, además, que los calculistas de nivel alto hacen un amplio uso de las propiedades de los números y de las formas numéricas equivalentes para traducir un ejercicio dado en otro más fácil de resolver mentalmente. Los calculistas de nivel medio tienden a usar una versión mental del tradicional algoritmo de lápiz y papel, mientras que los de nivel alto son flexibles en su enfoque de cada problema. El grupo de habilidad media fue muy rígido y tendió a considerar el cálculo mental como una tarea muy difícil.

Hope (1984), quien trabajó sobre la multiplicación, llega a conclusiones parecidas. Dice que los no diestros hicieron un extenso uso de estrategias que son más propias del cálculo escrito que del mental, mientras que los estudiantes diestros tendieron a emplear estrategias basadas en las propiedades numéricas que sugerían los números de la tarea.

En estos dos trabajos, el de Reys (1985) y el de Hope (1984), se caracterizaron también las estrategias que usaron los estudiantes representantes de diversos grupos de nivel de éxito, en la resolución de problemas de multiplicar.

El trabajo de Reys se basó en el denominado modelo de expertos, que ya fue utilizado por otros colegas (Reys, Rybolt, Bestgen, & Wyatt, 1982) en un tema relacionado, como es el cálculo estimado, para perfilar una teoría para la enseñanza. En particular, se trata de identificar lo que hacen los estudiantes expertos, entiéndase los de alta y media habilidad en cálculo mental, para conocer qué estrategias como máximo es posible enseñar a los estudiantes que no son expertos en esa tarea.

Reys, identificó las estrategias de cálculo mental utilizadas por calculistas norteamericanos de 7º y 8º grados, seleccionados como de alto y medio nivel de habilidad en una prueba de 68 ítems de sumar, restar, multiplicar y dividir naturales, fracciones, decimales y porcentajes, presentada paralelamente en la forma oral y visual, y con una limitación del tiempo a siete segundos por ejercicio. En su informe, Reys afirma que las estrategias más comúnmente observadas en los entrevistados, a los que se pasó una prueba reducida de 22 ítems, 12 en forma visual y 10 oral, presentados por orden de dificultad, fueron:

Distribución. Uso de la propiedad distributiva (Se refiere a varios métodos desde el punto de vista de los criterios de organización que se han presentado en este trabajo en el capítulo anterior).

8x56=8x(50+6).
7x499=7x(400+90+9).
Se corresponde con el método de descomposición disociando un dato por órdenes de unidad.

8x56=8x(55+1).
Se corresponde con el método de descomposición disociando subsidiariamente, o un dato en función del otro.

8x56=8x(60-4)
7x499=7x(500-1) y 7x(400+100-1).

Se corresponde con el método de redondeo, que es completar la decena, centena, etc. superior.

Traslación: Uso de las propiedades asociativa y conmutativa u otra forma alternativa de uno o más de los números dados.

547+299=547+9+90+200. Se corresponde con el método de descomposición disociando un dato por órdenes de unidad.

547+299=550+300-3-1. Se corresponde con el método de redondeo, que es completar la decena, centena, etc. superior.

Como Lápiz y Papel. Uso del algoritmo estándar de cabeza, reproduciéndolo en la mente.

Otras estrategias y variantes de las anteriores usadas menos a menudo, fueron:

Promediación: el 15% de 12,40 está en medio de su 10% y 20%.

Uso del 100: 75% de 200, es dos veces el 75% de 100.

Forma Equivalente: 0,25x80=1/4 de 80. Esto se corresponde con los métodos alícuotos.

Redondeo-Cálculo-Ajuste. Es el redondeo propiamente.

Primeros Dígitos. Es el método descomposición de los dos datos, empezando a operar por la izquierda.

Razonamiento Proporcional: 0,25x80, 0,25/1 = ?/80.

Modelo Monetario: 0,25x80=80 cuartos de dolar.

Hacer Grupos : Emparejar cuando hay varios datos.

Por su parte, Hope (1984), centrado en la multiplicación, encontró que sus estudiantes de una escuela superior clasificados como no diestros, diestros y muy diestros, utilizaron cuatro métodos generales de solución y doce estrategias de cálculo:

Método mental análogo al de lápiz y papel. De este método de cálculo, que implica la aplicación de los algoritmos convencionales de lápiz y papel para resolver las tareas de cálculo mental, identificó cuatro variantes, según la forma en que el resolutor lo adapta al dominio mental. Todos ellos proceden dígito a dígito y empezando por la derecha, pero se diferencian en la forma en que completan los productos parciales.

(1) Sin reformular ningún parcial
25x480="480 arriba y 25 debajo. 5x0, 5x8 es 40, llevo 4, 5x4 es 20, y 4 es 24. Ya sé que el segundo número es uno más. 2x0, 2x8 es 16, llevo 1, 2x4 es 8 y 1 es 9 luego 960, 9600. Luego 9600 y 2400 es 0, 0, ...19 mil y 860".

(2) Reformulando un parcial
25x48="5x48 es ... 5x8=40, llevo 4, 24, 240. Y 2x48 es 96. Sé esto. Pienso que 96 se corre un lugar. Luego 1200".

(3) Reformulando los dos parciales
12x250="2x250 es 500 y 1x250 es 250. Se corre un lugar, 3000".

(4) Arrastrando
8x999="8x9=72, 72, y 72 en diagonal".

Método de Distribución, que puede ser:

(1) Aditivo
8x4.211="8x4.000 es 32.000, 8x200 es 1600, luego 33.600. 8x11=88, luego la respuesta es 33.688".

15x16="15x(15+1)".

(2) Fraccional
15x48="10x48, 480 y 162 de 480 es 240; luego es 720".

(3) Sustractivo
8x999="8.000-8=7992".

(4) Cuadrático
49x51="50^2-1^2".
125=$(100+25)^2$=10.000+5.000+625".

Nótese que la distribución fraccional corresponde, de acuerdo con los criterios de la organización que se propuso en el capítulo anterior, con una descomposición aditiva para aprovechar una relación alícuota que allí se ubicó en las disociaciones subsidiarias.

De la misma manera, la distribución aditiva se ubicó en disociar un dígito, y la sustractiva en redondeo. En cambio, cuadrática se ubicó con el mismo nombre.

Método de Factorización, que tiene las variantes:

General
25x48="5x5x48=5x48 y 5x240".

Doble y Mitad
12x16="hice la mitad de 12 es 6. doble de 16 da 32. y 6x30 es 180, luego 192".

Partes Alícuotas
25x48="100/4 x 48=100x48/4=100x12=12000".

Exponencial

32x32="32 es 2 elevado a cinco, luego su cuadrado es 2 elevado a diez, que es 1024.

Reformulando con Equivalente Numérico
25x25="Hice 5x25, después como si recordara que 25x25 es 625".

Estos métodos se corresponden en sus denominaciones con los usados en el capítulo anterior, salvo el exponencial y reformulando con equivalente, que allí no se recogen.

Por último, también Carraher y sus colegas (1987), en el estudio que llevaron a cabo en Brasil con niños callejeros, identifican las heurísticas típicas en la resolución de las situaciones de mercado. Concretamente señalan dos principales: Una que aparece sobre todo en la resolución de sumas y restas y que consiste en recurrir a la "Descomposición", entendida como trabajar con cantidades más pequeñas buscando números con ceros, como cuando en vez de 243 se toma 200+40+3; y otra, que aparece en la resolución de multiplicaciones y divisiones y que consiste en recurrir a la "Repetición de grupo", entendida como trabajar con cantidades iguales o mayores que las mencionadas en el problema.

6 ¿Qué relación hay entre la habilidad en cálculo mental y ciertos factores asociados tales como: sexo, inteligencia, memoria, y habilidad general en Aritmética?

Algunos estudios han intentado establecer la influencia de ciertas variables en la habilidad en cálculo mental, en sus conclusiones se desprende que no hay ninguna que asuma un papel sobresaliente.

En concreto parece que la correlación entre inteligencia y habilidad en cálculo mental es la misma que entre inteligencia y habilidad en cálculo escrito. No obstante, hay datos que confirman que sí que existe una relación positiva entre habilidad en cálculo mental y habilidad general en Aritmética.

También parece que los chicos son más diestros en cálculo mental que las chicas, mientras que las chicas lo son en el cálculo escrito, aunque en este terreno los datos no son estadísticamente muy significativos.

Lo que sí se ha constatado es que la memoria está positivamente asociada a los logros de los estudiantes. En particular, la memoria para recordar equivalentes numéricos y la memoria para recordar métodos.

Con todo, no hay plena coincidencia en todos los trabajos revisados. Brown (1957) en su investigación sobre si había relación entre la flexibilidad (variación en el uso de métodos) en la sustracción oral y el sexo, la inteligencia, la memoria, o el dominio aritmético, concluyó que estos factores están positivamente asociados con los logros de los estudiantes.

En su trabajo Brown, concluye que los chicos no sólo superaron a las chicas en pericia en la sustracción oral sino que también las superaron en la variedad de métodos que usaron. El 66% de los chicos variaron de método frente a sólo el 29% de las chicas.

También encontró que se incrementaba la flexibilidad (variación de método o usar dos o más métodos) y decrecía el anclaje (la consistencia o uso del mismo método) a medida que se incrementaba el cociente de inteligencia. Concretamente, la mayoría de los estudiantes que cambiaron de método adoptaron el método de lápiz y papel mental con el enfoque de izquierda a derecha, y sólo los de mayor cociente de inteligencia suplementaron su método escrito, o el de izquierda a derecha, con algún otro de los tipos de métodos que identificó.

Además, los estudiantes que usaron varios métodos en la sustracción mental estaban a un nivel de dominio de la aritmética por encima de los que se anclaron (fueron consistentes) con un solo método.

Por último, en cuanto a la relación entre memoria y flexibilidad, la midió con un test consistente en recordar números de varias cifras de seis niveles de dificultad, las puntuaciones fueron superiores (0,9 puntos) en los estudiantes que variaron de método que en aquellos que fueron consistentes o anclados en un solo método.

La relación entre inteligencia general y el logro en la sustracción oral, medida por correlación, fue similar con la que había entre inteligencia y sustracción escrita (0,50). La correlación entre el logro en aritmética general y el logro en la sustracción oral fue del 0,65 y la correlación entre el nivel de memoria a corto plazo y el logro en la sustracción oral fue 0,35.

Aunque su trabajo no tenía por objetivo documentar diferencias en cuanto a los niveles de ejecución por sexo, también Reys (1985) encontró que el nivel de éxito de los chicos fue algo mayor que el de las chicas, sobre todo cuando el formato de presentación era el oral, en cambio las chicas mostraron superioridad en el test de lápiz y papel, aunque esto no fue estadísticamente significativo.

Hope (1984) comparó a tres grupos de habilidad, alta, media y baja, para determinar si había relación entre los diferentes niveles de pericia en cálculo mental multiplicativo y la memoria, esta última diferenciada en: memoria de métodos, memoria de equivalentes numéricos, y memoria de trabajo.

Hope entronca su investigación con las de Hunter (1962, 1978, 1979), Hitch (1978, 1980), y Howe & Ceci (1979) sobre el papel de la memoria en la aritmética mental. Señala Hope que estos investigadores han argumentado que la manera en que los resolutores usan su memoria durante el cálculo mental es un importante factor en la determinación de su nivel de eficiencia. En particular, dice citando a Hunter, un cálculo mental utiliza tres clases de memoria diferenciables: memoria

de métodos de cálculo, memoria de equivalentes numéricos y memoria de tarea interrumpida.

Las dos primeras se encuentran en la llamada memoria a largo plazo, mientras que la última corresponde, citando a Hitch, Howe y Ceci, al almacenamiento temporal o memoria de trabajo y es ésta la que se encarga de algo así como de registrar los pasos y llevar la cuenta o el rastro de la ruta de cálculo. Es ésta una memoria que no se requiere en el cálculo escrito porque allí se emplean cifras para llevar el rastro del estado del cálculo en cada momento.

Esta diferenciación de la memoria, entiende Hope, podría explicar las diferencias individuales en las ejecutorias, por lo que se propone identificarlas averiguando si los individuos que difieren en eficacia difieren también en la estrategia utilizada, en los equivalentes numéricos que recuperan o recuerdan durante el cálculo, o en su capacidad de almacenar la información temporal del proceso.

Señala Hope que encontró diferencias estadísticamente significativas entre la ejecución media de cada grupo en un test de multiplicar. Los sujetos del nivel alto de habilidad recuperaban más equivalentes numéricos mayores durante la resolución que los del grupo de menor nivel. Los muy diestros recordaron rápidamente la mayoría de los cuadrados de números de dos cifras y algunos de tres cifras.

También encontró diferencias estadísticamente significativas entre las ejecutorias de los grupos de diestros y de los no diestros en cuatro medidas de la capacidad de memoria a corto plazo. Aunque un posterior análisis indicó que sólo existe una débil relación lineal entre capacidad (memoria a corto) y ejecutoria (mental).

7. ¿Qué relación hay entre la habilidad en cálculo mental y la comprensión numérica?

La investigación precedente muestra que hay una positiva vinculación entre la comprensión numérica (entiéndase del número y del sistema de numeración) y de las operaciones y de sus propiedades, y el cálculo mental. Hasta el punto de que se ha dicho que dedicar tiempo de instrucción a explorar las diferentes estrategias lleva a una mejor comprensión del valor de posición, de la descomposición de los números, del orden de operar y de las propiedades numéricas.

Según Sowder (1988), de las investigaciones precedentes se desprenden indicios de que el cálculo mental está vinculado con la comprensión numérica (entiéndase por numérica del número y el sistema de numeración) y de las operaciones y de sus propiedades. Indicios adicionales han sido obtenidos, por Markovits y Sowder (1988) y por Dworking (1988). Los primeros, tras entrevistar estudiantes norteamericanos de 4º grado que han recibido instrucción en un tratamiento que, en vez de dar reglas, enfatiza la resolución de problemas de varias maneras, afirman que dedicar tiempo de instrucción a explorar las diferentes estrategias lleva a una mejor comprensión del valor de posición, de la descomposición de los números, del orden de operar y de las propiedades numéricas.

El segundo, Dworking, tras plantear problemas de sentido numérico (magnitud, proximidad, orden de los números, múltiplos de diez y propiedades de las operaciones) para analizar la relación que hay entre las estrategias que manifiestan usar estudiantes norteamericanos de 5º y los conocimientos numéricos subyacentes, concluye la positiva vinculación que hay entre el sentido numérico y el cálculo mental.

Un estudio parecido hicieron Murray y Olivier (1989), quienes establecen la existencia de una relación entre las estrategias que manifiestan los niños sumando números pequeños y la comprensión que tienen de esos números (de uno y dos dígitos).

En ese estudio se formula un modelo que describe cuatro tipos de abstracción creciente, a partir de las estrategias observadas en los niños

sumando números de uno y dos dígitos y su relación con los prerrequisitos de comprensión numérica (número y numeración). El primer y el segundo nivel coinciden con las estrategias prenuméricas como la de conteo total de una colección, y las estrategias numéricas como la de conteo a partir de un número determinado, el tercer nivel corresponde a las estrategias que no se basan en recuentos, como la descomposición decimal en múltiplos de diez y unidades del tipo: 67 = 60+7, y el cuarto con las estrategias de descomposición en órdenes y grupos de unidades, del tipo : 23 es 2 dieces y 3 unidades.

En esta misma línea Booth (1989) concluye, en un estudio llevado a cabo con alumnos de octavo grado (13 años) para conocer su comprensión de la conmutatividad y asociatividad para la suma y la resta y su comprensión de las operaciones inversas, que estos estudiantes tienen una muy incompleta comprensión de estas ideas, y que esto les causa dificultad para distinguir lo que está permitido y lo que no lo está en las transformaciones de las expresiones numéricas.

Aunque este estudio fue enfocado por Booth para explicar las dificultades infantiles en álgebra, es claro que también se puede concluir que la incompleta comprensión de nociones estructurales aritméticas implican dificultades en cálculo mental, que se traducen en inseguridad sobre lo que está permitido o no.

IV.3 Conclusiones

La investigación precedente ha abordado aspectos relacionados con el cálculo mental que revelan cuáles han sido las cuestiones que han preocupado a los investigadores. De sus conclusiones destacan algunos hechos que interesa resaltar desde el punto de vista de los objetivos del presente trabajo.

Las matemáticas mentales revelan una fuerte carga de conocimientos acerca del sistema de numeración decimal, y su

enseñanza siempre produce un avance en la competencia de los estudiantes sin afectar negativamente al avance general en aritmética.

Los textos escolares llevan muy pocos problemas en relación con los que llevan para el cálculo escrito, no parece que guarden relación con las recomendaciones de los expertos, y no todos pueden ser resueltos por los profesores.

El formato de presentación influye en el nivel de éxito de los estudiantes. Los ítems presentados oralmente, en viva voz, resultan más difíciles que los presentados visualmente, para ser leídos, por ello son más reactivos.

La evaluación del cálculo mental se ha dirigido principalmente a medir variables como la rapidez, el éxito o el grado de dificultad.

Los estudiantes usan diferentes procesos de pensamiento para llegar a la respuesta de un problema de aritmética mental, aunque la mayoría usan siempre, o alguna vez, el método de Columnas. Sólo los más diestros son flexibles.

Ninguna de las variables asociadas, inteligencia, sexo, etc., asume un papel sobresaliente para explicar la habilidad en cálculo mental. No obstante, la memoria para recordar equivalentes numéricos y la memoria para recordar métodos están positivamente asociadas a los logros de los estudiantes.

También hay una relación positiva entre habilidad en cálculo mental y habilidad general en Aritmética, y entre la comprensión numérica (entiéndase por numérica, del número y el sistema de numeración), y de las operaciones y sus propiedades, y la habilidad en cálculo mental. Por ello, parece recomendable que a los estudiantes se les enseñe a resolver problemas de aritmética mental sin desligarlos de estos hechos aritméticos.

IV.4 Líneas que abren estas investigaciones

Los estudios mencionados dejan entrever algunas consideraciones que sugieren la apertura de nuevas investigaciones.

1. Todos los trabajos son de carácter local, es decir, de un determinado país y cultura, por lo que cabe pensar en la conveniencia de reproducirlos totalmente, o en parte, en otros lugares y momentos para conocer lo que tienen de universal sus conclusiones.

2. Algunos trabajos, como por ejemplo los de análisis de libros de texto, o los que investigan el uso que hacen los ciudadanos del cálculo mental están anticuados, en el sentido de que sus conclusiones podrían haber variado con los cambios sociales. No obstante, si las conclusiones que desprenden fueran válidas actualmente, sería necesario efectuar importantes cambios en el diseño de los materiales curriculares.

3. Los estudios sobre las estrategias y métodos de resolución son del tipo restringido a una sola operación. Esto deja abierta la puerta a un estudio global que haga el análisis desde una perspectiva unificadora en la medida en que todos ellos se basan en un número limitado de principios numéricos, leyes y propiedades, que prácticamente son las mismas para todas las operaciones.

4. Ninguno de los trabajos revisados aporta una síntesis de lo que ha sido la historia en la educación matemática del cálculo mental, ni una lista global de sus métodos. Estos dos aspectos son clave para la formulación del currículum escolar en coordinación con la que se obtiene de la observación de lo que son capaces de hacer los estudiantes.

5. Hay estudios, como los de Reys (1985), Brown (1957), y Hope (1984), que caracterizan el desempeño de los estudiantes de unos determinados niveles de escolaridad, pero no los hay en relación con

la habilidad de los futuros profesores y de qué es lo que realmente se puede esperar de ellos.

6. Observar lo que hacen los resolutores aporta información sobre su desempeño, pero no dice nada acerca de cómo han logrado desarrollar sus estrategias. Obviamente, no todos los estudiantes han recibido la misma instrucción y no todos han conocido los mismos métodos, por lo que al compararlos no se obtiene información acerca de cómo han aprovechado la enseñanza y de qué es lo que la ha obstaculizado.

7. Se ha teorizado sobre el hecho de que la ausencia de instrumentos adecuados para la evaluación del cálculo mental podría ser una de las causas de la falta de énfasis que se ha puesto últimamente en el cálculo mental. En este sentido no basta con medir la rapidez, o el avance de los estudiantes en una escala graduada de ejercicios de dificultad creciente, esto no dice nada acerca de cuál es su comprensión y dominio de los hechos aritméticos involucrados, de su dependencia de los métodos de columnas o disponibilidad de métodos alternativos, y de su capacidad de tranferibilidad de un tipo de números a otros, tal como de naturales a decimales o a fraccionarios.

8. En los estudios precedentes se ha hurgado en la caracterización de los procesos de pensamiento de los estudiantes para resolver ejemplos mentalmente con números enteros, pero no se dice nada sobre los procesos que se aplican cuando se trabaja con decimales, negativos, o números inmersos en contextos algebraicos.

En definitiva, estos comentarios sugieren hacia dónde se deberían encaminar nuevas investigaciones. En línea con el propósito de este trabajo, muestran la necesidad de avanzar en el diseño de nuevas propuestas didácticas que teniendo en cuenta la historia y configuración de los métodos de cálculo mental, se basen en la mejor comprensión de las concepciones de los estudiantes en relación con la aplicabilidad y transferibilidad de los métodos en los diversos tipos de números, en particular, en los naturales y decimales.

CAPITULO V. LA EXPERIMENTACION

V. LA EXPERIMENTACION

V.0 PRESENTACION

En este capítulo se detalla la experimentación llevada a cabo, tal como quedó planteada en la presentación de este trabajo.

El capítulo se divide en cuatro secciones:

1. En la primera se describe el experimento.

2. En la segunda se analizan los datos de las pruebas test.

3. En la tercera se analizan los errores identificados y se interpretan las manifestaciones de los estudiantes en las pruebas y en las entrevistas realizadas.

4. En la cuarta se comparan los datos de las pruebas pretest y postest, y se establecen los resultados del experimento.

V.1 DESCRIPCION DEL EXPERIMENTO

V.1.1 Propósito

Como se recordará del capítulo de presentación, lo que se pretendía con esta fase experimental del estudio era poner a prueba una propuesta didáctica que permitiera analizar el desempeño de los estudiantes en situaciones que requieren del cálculo mental, tanto con números enteros positivos (naturales) como con decimales.

El análisis en cuestión estaba enfocado a contestar a las preguntas planteadas sobre la aplicabilidad y transferibilidad de los métodos de cálculo mental, y en particular, sobre la motivación de los errores que cometen cuando los aplican.

V.1.2. Etapas

La fase experimental estuvo constituida por las siguientes etapas:

1. Diseño de una propuesta didáctica en torno a un esquema que organiza y sintetiza los métodos históricos de cálculo mental. Este esquema se derivó de la fase anterior, el análisis bibliográfico. Es importante resaltar que los contenidos de esta secuencia de experiencias de aprendizaje se limitó al trabajo con números naturales, debido a que había un interés particular en comprender fenómenos de transferencia y aplicabilidad de estos métodos al cálculo con números decimales en relación con la resta y la multiplicación, que son las operaciones que concentran los métodos de cálculo mental porque en la suma no hay gran necesidad de ellos y los que hay son pocos, y porque en la división apenas se usan.

Una primera versión de la propuesta se puso a prueba durante el curso 91-92, con un grupo de estudiantes para profesores de la Escuela Universitaria de Formación del Profesorado de la Universitat de València. De esta experiencia se derivó la segunda versión que se utilizaría en la experimentación.

2. Se diseñó y llevó a cabo un diagnóstico de la población seleccionada por medio de un pretest escrito para identificar los métodos que usaban los estudiantes y las formas incorrectas, en el sentido de conducentes a respuesta falsa o no acertada, de resolver los ejercicios con naturales y decimales que se les planteó, antes de pasar por un proceso de enseñanza de los métodos históricos de cálculo

mental en una propuesta de trabajo restringida a los números naturales.

Este diagnóstico se centró en posibilitar el estudio de los fenómenos de transferencia y aplicabilidad de los métodos de cálculo mental con enteros al cálculo con decimales, así como de las concepciones de los estudiantes cuyos rastros se manifiestan en los errores que ellos cometen.

3. Se puso a prueba la propuesta didáctica con un grupo de unos 150 estudiantes de nivel universitario, concretamente de primer curso de la Escuela Universitaria de Formación del Profesorado de la Universitat de València.

4. Se diseñó y llevó a cabo una evaluación por medio de un postest escrito para identificar los métodos que usaron los estudiantes y las formas incorrectas de resolver los ejercicios con naturales y decimales que se les planteó, tras la enseñanza. Esta evaluación se enfocó en menor medida hacia el proceso de enseñanza y principalmente hacia el estudio de los fenómenos y concepciones señalados en 1.

5. Se llevó a cabo un análisis de corte cualitativo de los datos, utilizando la clasificación de los métodos elaborada como consecuencia del análisis de las Aritméticas y una clasificación de las respuestas incorrectas, en el sentido señalado antes, elaborada a posteriori de su obtención. Para tal efecto, se definieron las variables consideradas relevantes para evaluar el desempeño de los estudiantes en relación a diferentes aspectos, ésas son: éxito, tipo de respuesta incorrecta, flexibilidad, disponibilidad y forma de operar la coma decimal.

6. Con el esquema clasificatorio y el escrutinio de los trabajos de los estudiantes se procedió a diferenciar las respuestas incorrectas debidas a descuido o fallos de memoria de las que pudieran ser indicio de verdaderos errores en el sentido dado en la presentación de este trabajo.

Posteriormente se elaboraron descripciones que permiten explicar las concepciones que intervienen en los razonamientos que conducen a estos errores.

7. Finalmente, se llevaron a cabo entrevistas con un grupo reducido de estudiantes seleccionados con el objeto de corroborar las descripciones mencionadas en 6, así como para mejor comprender las dificultades relacionadas con la transferencia y aplicabilidad de los métodos históricos de cálculo mental con números naturales a la resolución de ejercicios con decimales.

V.1.3 Las pruebas tests realizadas

La prueba previa a la enseñanza, el Pretest, consistió en la resolución de 14 ejercicios de cálculo mental distribuidos en dos sesiones correspondientes a una hora de clase en dos días diferentes. En la primera sesión se resolvieron 7 ejercicios de restar, de los cuales 5 eran con números naturales y 2 con decimales. En la segunda sesión se resolvieron 7 ejercicios de multiplicar, 4 con números naturales y 3 con decimales.

La prueba posterior a la enseñanza, el Postest, consistió en la resolución de 20 ejercicios de cálculo mental distribuidos en dos sesiones correspondientes a una hora de clase en dos días diferentes. En la primera sesión se resolvieron 10 ejercicios de restar, de los cuales 5 eran con números naturales y 5 con números decimales. En la segunda sesión se resolvieron 10 ejercicios de multiplicar, 5 con números naturales y 5 con números decimales.

Los estudiantes tenían que resolver los ejercicios de cabeza y sin limitación de tiempo. Se les encareció que escribieran exclusivamente el resultado por lo que debían esperar a tenerlo completado. Después debían explicar en la misma hoja y a su manera cómo los habían resuelto. Es importante señalar que los estudiantes en este nivel

educativo no tienen obligación de asistir a clase por lo que un número indeterminado de ellos, aunque pequeño, no presenciaron todas las lecciones desarrolladas en el aula.

Los ejercicios fueron elegidos tras experiencias piloto llevadas a cabo previamente por el que suscribe y atendiendo a cuatro consideraciones. La primera fue que la dificultad de los ejercicios no fuera excesiva, esto es, que estuvieran en la banda que Plunkett (1979) considera que se podrían hacer mentalmente. La segunda fue que permitieran aplicar métodos alternativos, esto es, que sus datos guardaran relación con los que tienen uno o varios métodos alternativos vinculados. La tercera fue que hubiera ejercicios tanto con naturales como con decimales y de tal modo que se pudieran hacer comparaciones entre ellos porque sus cifras significativas fueran iguales o similares. La cuarta fue que el número de ejercicios de cada prueba estuviera dentro de los límites razonables para que los estudiantes pudieran resolverlos sin rechazos de acuerdo con su preparación. Los ejercicios fueron:

Ejercicios del Pretest-antes de enseñanza de los métodos

547-189	243-75	1300-875	461-166	265-199	13-8,75	2,23-1,58
$3,1^2$	37x0,25	28x35	47x99	41x42	3,4x0,15	64x25

Ejercicios del Postest-después de enseñanza

737-289	634-75	1400-675	481-186	245-197	14-7,75	2,32-1,67	54,7-18,9	24,3-7,5	46,1-16,6
$4,1^2$	47x0,25	26x35	37x98	31x42	2,4x0,15	64x75	2,8x0,45	4,9x5,1	19x18

Los cuales corresponden a la siguiente casuística:

547-189 y 737-189. Resta cuando el sustraendo termina en 9.

243-75 y 634-75. Resta cuando el sustraendo es 75

1300-875 y 1400-675. Resta cuando el minuendo termina en dos ceros y el sustraendo termina en 75.

461-166 y 481-186. Resta de dos números cuyas cifras de la decena son iguales.

265-199 y 245-197. Resta cuando el sustraendo es un número proximamente menor que un número de centenas completas, en particular terminado en 99, 97.

13-8,75 y 14-7,75. Resta cuando el minuendo es un número natural y el sustraendo es un número compuesto de parte entera y decimal, esta última 75.

2,23-1,58 y 2,32-1,67. Resta de dos números compuestos de parte entera y decimal.

54,7-18,9. Resta de dos números decimales cuando el sustraendo termina en 9.

46,1-16,6. Resta de dos números decimales cuyas cifras centrales o de la decena cuando se quita la coma, son iguales.

$3,1^2$ y $4,1^2$. Multiplicación de un número de dos cifras compuesto de parte entera y decimal por si mismo, siendo ésta última uno.

37x0,25 y 47x0,25. Multiplicación de un número natural por otro decimal, que es 0,25.

28x35 y 26x35. Multiplicación de dos números de dos cifras, siendo uno de ellos terminado en 5 y el otro número par.

47x99 y 37x98. Multiplicación por un número proximamente menor que 100, en particular 99, 98.

41x42 y 31x42. Multiplicación de dos números de dos cifras, siendo uno de ellos terminado en 1.

3,4x0,15 y 2,4x0,15. Multiplicación de dos números decimales, siendo uno de ellos 0,15.

64x25 y 64x75. Multiplicación cuando un número es parte alícuota de la unidad seguida de ceros o múltiplo de ella y el otro a tono para aprovecharla.

2,8x0,45. Multiplicación de dos números decimales, siendo uno 0,45, y el otro par.

4,9x5,1. Multiplicación de dos números en condiciones de cero central.

19x18. Multiplicación de dos números comprendidos entre 10 y 20.

V.1.4 Las variables estudiadas

Para analizar el desempeño de los estudiantes se definieron las siguientes variables:

Exito. Bajo esta denominación se analizó la frecuencia de estudiantes que cometieron fallos, en el sentido amplio de respuestas incorrectas, falsas o no acertadas, y también la frecuencia de fallos que se dieron en cada ejercicio. Con esta variable se pretendía conocer la evolución del nivel de competencia de los estudiantes y determinar en qué ejercicios radicaba la problemática en cada caso.

Tipos de error. Bajo esta denominación se analizó la casuística de los fallos que cometieron los estudiantes. Con esta variable se pretendían recoger los diversos tipos de respuesta incorrecta de los estudiantes para posteriormente proceder a diferenciar las que pudieran ser consideradas como debidas a descuido o fallo de memoria de las que podrían ser verdaderos errores.

Flexibilidad. Bajo esta denominación se analizó la frecuencia de estudiantes anclados en los métodos de columnas y las frecuencias con que los ejercicios fueron resueltos de modo alternativo. Con esta variable se pretendía conocer la evolución y la casuística de la dependencia de los métodos de columnas.

Disponibilidad. Bajo esta denominación se analizó la gama de métodos que aplicaron los estudiantes y sus frecuencias en cada ejercicio. Con esta variable se pretendía conocer qué métodos en particular usaban los estudiantes y sobre qué clase de ejercicios, con números naturales o decimales, antes y después de la enseñanza.

Forma de operar la coma decimal. Bajo esta denominación se analizó la frecuencia con que los estudiantes aplicaron los métodos alternativos en los ejercicios con decimales y si lo hicieron directa o indirectamente, es decir arrastrando la coma o dejándola de lado para tratarlos como enteros y recuperarla al final. Con esta variable se pretendía conocer hasta qué punto se transferían los métodos usados en los ejercicios con números naturales a los decimales y de qué forma.

V.1.5 Las entrevistas

Para obtener información complementaria sobre la problemática de la que dieron indicio las respuestas no acertadas de los estudiantes en las pruebas test, se llevaron a cabo entrevistas semi-individualizadas, trabajando en grupos de dos y tres estudiantes para disminuir el grado de intimidación y para facilitar la comunicación entre los alumnos y entre los alumnos y el profesor, de modo que pudieran manifestarse oralmente los procesos de razonamiento y los estudiantes pudieran contrastar los procedimientos usados entre ellos.

Se seleccionó una muestra de unos 20 estudiantes representativos de la diferente casuística observada. El estilo de la entrevista fue el de

darles a repasar su propio documento, poniéndoselo delante se les pedía que pensaran sobre su respuesta, si estaba bien o mal y si era razonable su procedimiento. Cuando no veían nada anormal, es decir cuando no encontraban su fallo, se les pedía que resolvieran con lápiz y papel usando el método de columnas para que contrastaran los resultados. Tras esto, se les iniciaba en un proceso de reflexión para ver si por ellos mismos eran capaces de encontrar explicación a su fallo, cuando no lo conseguían se aprovechaba su formación en relación con el manejo del lenguaje simbólico del álgebra para hacerles reflexionar sobre sus erróneos procesos mentales con ayuda de la representación con igualdades y paréntesis del método que habían utilizado. Si aún así, esto no era suficiente porque, aunque veían que su respuesta no era correcta, seguían pensando en que su proceso estaba razonablemente bien, entonces se les hacía reflexionar en el lenguaje retórico de los órdenes de unidad y del significado de la operación sobre el efecto que la alteración efectuada producía en el resultado.

V.1.7 La muestra de estudiantes seleccionada

Los resolutores de la muestra estudiada fueron, 144 en el pretest y 133 en el postest, estudiantes de nivel universitario, concretamente de primer curso de la Escuela de Formación del Profesorado de la Universitat de València. Estos estudiantes, cuya edad ronda en torno a los 20 años y su formación es de nivel preuniversitario, correspondían a dos grupos de clase de especialidades diferentes. Uno de ellos era de la especialidad de "Educación Especial", en adelante grupo EE, y el otro de la especialidad de "Ciencias", en adelante grupo C, ambos con un número similar de estudiantes.

Es una creencia generalizada, basada únicamente en la experiencia profesional de los profesores de estos estudiantes, que los dos grupos elegidos corresponden a dos estereotipos bien diferenciados. Los primeros podrían caracterizarse como poco amantes de la matemáticas, algunos incluso con resentimientos hacia ella. Por el contrario, los del

segundo grupo podrían caracterizarse como proclives o predispuestos hacia las matemáticas y con sentimientos positivos hacia ellas.

La razón por la que se lleva a cabo el estudio con estos dos grupos es la de tener un espectro suficientemente representativo de los estudiantes para futuros profesores, de tal modo que abarcando tanto a los que están más predispuestos hacia las matemáticas como a los que menos, se les pueda considerar como un grupo de estudiantes promedio en el sentido de que contiene una amplia representatividad de las tendencias hacia el gusto por la matemática.

V.1.8 La propuesta didáctica

Se trató de presentar una alternativa al modelo dominante de enseñanza del cálculo mental, es decir, una alternativa al modelo que mayoritariamente habían recibido los estudiantes de la muestra. Este modelo es de suponer que es el que predomina en los manuales escolares en vigor hasta el momento en que se realizó el experimento, y que, como ya se ha dicho en otro lugar de esta memoria, es el analítico de casos que tienen métodos vinculado, cíclico, desvinculado de los algoritmos generales del cálculo escrito y pensado para periodos cortos de adiestramiento intensivo con una finalidad eminentemente funcional.

El carácter marginal con que bajo este modelo se presentan los métodos de cálculo mental en los libros de texto explica por qué no todos los estudiantes reciben enseñanza de los mismos, ya que los profesores anteponen otros temas a éste cuando les falta tiempo escolar.

Objetivos específicos del modelo alternativo

El modelo alternativo planeado ha pretendido:

1. Hacer ver que el papel que han jugado históricamente los métodos de cálculo es distinto al actual, y que hay reglas de un valor histórico cultural que perdura.

2. Hacer reflexionar a los estudiantes sobre lo que ha supuesto para ellos el modelo con el que aprendieron en relación con su dominio y comprensión de los hechos numéricos y los principios y leyes que rigen la operatoria.

3. Cambiar el estilo de cálculo rígido y maquinal por un estilo en la línea de plantear cuestiones tales como: ¿de qué otra manera se puede resolver esto?, rompiendo con la identificación generalizada hoy en día entre el cálculo y "las cuatro reglas", dejando aplicar más de un método a una misma situación, no para hacer ver cuál es el mejor sino para enfatizar la flexibilidad.

4. Evidenciar las diferencias, ventajas e inconvenientes de una presentación de los métodos de cálculo estructurada y sintetizada frente a una presentación extendida a lo largo de toda una casuística desordenada.

5. Impulsar el análisis y generalización de los viejos métodos y reglas usando el lenguaje algebraico en el marco de la aritmética generalizada, con el fin de resaltar los principios y relaciones que los fundamentan y también para poner de manifiesto las ventajas de la utilización del lenguaje horizontal de ecuaciones y paréntesis frente al lenguaje retórico y de columnas de las viejas Aritméticas y frente al lenguaje informal de los estudiantes.

6. Utilizar el cálculo mental como campo de aplicación de algunas expresiones literales tales como las del cuadrado del binomio y las de la suma por diferencia, para mejorar su dominio, comprensión y aplicabilidad.

Principios metodológicos que rigen el desarrollo de las lecciones

De las recomendaciones encontradas en la literatura (Polya, 1945; French, 1977; Plunkett 1979; Hazekamp, 1986; Kennedy y Tipps, 1988, Gómez, 1988; Giménez y Girondo, 1993; Giménez y Gómez, 1991) y en virtud de la experiencia de varios años del investigador que suscribe enseñando los métodos de cálculo mental, la fase de enseñanza se ha desarrollado de acuerdo con:

Una secuencia de presentación de los métodos de cálculo mental que comienza introduciendo los métodos de cálculo mental ya en las tablas, como preparación para cuando los datos son de varias cifras, y que sigue con aquellas reglas que históricamente han coexistido con los algoritmos estándar en su papel de algoritmos ultrarrápidos.

La discusión del papel de los principios del sistema de numeración, de las propiedades Conmutativa, Asociativa y Distributiva, y de la naturaleza y significado de las operaciones, como elementos que fundamentan el cálculo mental de un modo integrado con el cálculo escrito, en vez de como hechos aislados.

Aprovechar cuando se puede las equivalencias entre los diferentes valores de las piezas del sistema monetario para presentar los métodos relacionados con ellas.

Promover el trabajo colectivo mediante la discusión en gran grupo de los distintos procedimientos utilizados o posibles, facilitando la verbalización y comunicación de los métodos y estrategias aportados por los estudiantes.

Tomar situaciones numéricas de cálculo mental como campo de aplicación de determinadas igualdades literales, como por ejemplo las cuadráticas.

Discutir las relaciones numéricas subyacentes en los métodos y organizarlos de acuerdo con la estructura común puesta de relieve en esta discusión en un esquema, de modo que se obtenga una síntesis y compendio de todos ellos.

Desarrollo y temporización de las lecciones

El desarrollo de las lecciones ha ocupado un periodo escolar de algo menos de un mes, a razón de tres clases semanales de unos 50 minutos. En total 12 sesiones durante el curso 92-93. Más de la mitad de estas sesiones estuvieron dedicadas a las cuestiones relacionadas con la aritmética generalizada, esto es, a las cuestiones relacionadas con la casuística de las reglas de la tabla mayor, y la de los complementos (El perezoso, San Andrés y Turco o de las Manos), ya que se trabajaron buscando sus campos de validez, sus formalizaciones, demostraciones, generalizaciones, reglas análogas, y estructura común.

El resto de las sesiones se dedicó a:

1. Los métodos que funcionan con números de una cifra. En concreto los recomendados por Green (1985) para las tablas de sumar y multiplicar. A saber: Los de compensación y los de descomposición.

2. La generalización de los métodos anteriores a números de más de una cifra.

3. El resto de métodos seleccionados del catálogo histórico.

En concreto se presentaron seis métodos en la modalidad de la resta y quince en la modalidad de la multiplicación, cinco de ellos eran reglas y uno fórmulas.

Estrategias y métodos presentados sobre la resta

METODOS DE DESCOMPOSICION

Disociar descabezando

1. Descabezar un dato-Segregar
2. Descabezar los dos datos-Primeros dígitos: Reagrupar

Disociar subsidiariamente

3. Haciendo la misma terminación
4. Prestando o pidiendo refuerzos
5. Hecho conocido

METODOS DE COMPENSACION

Compensaciones Intermedias

5. Conservar-Doble suma

Compensaciones finales

6. Redondear el sustraendo

Estrategias y métodos presentados sobre la multiplicación

ARTIFICIOS

Reglas

1. De los números formados sólo por unos: 11, 111
2. De los números formados sólo por nueves. 9, 99
3. De los números de la Tabla Mayor
4. De los complementos: Perezoso, San Andrés, y Turco
5. De la multiplicación Cruzada o Cruceta

Fórmulas

6. Cuadráticas: De la diferencia y del binomio

METODOS DE DESCOMPOSICION

Disociar descabezando
7. Descabezamientos de un dato: Distribuir

Disociar subsidiariamente
8. Haciendo patrones conocidos

Factorizar
9. Factorizaciones Simples
10. Factorizaciones Subsidiarias: caso del 33

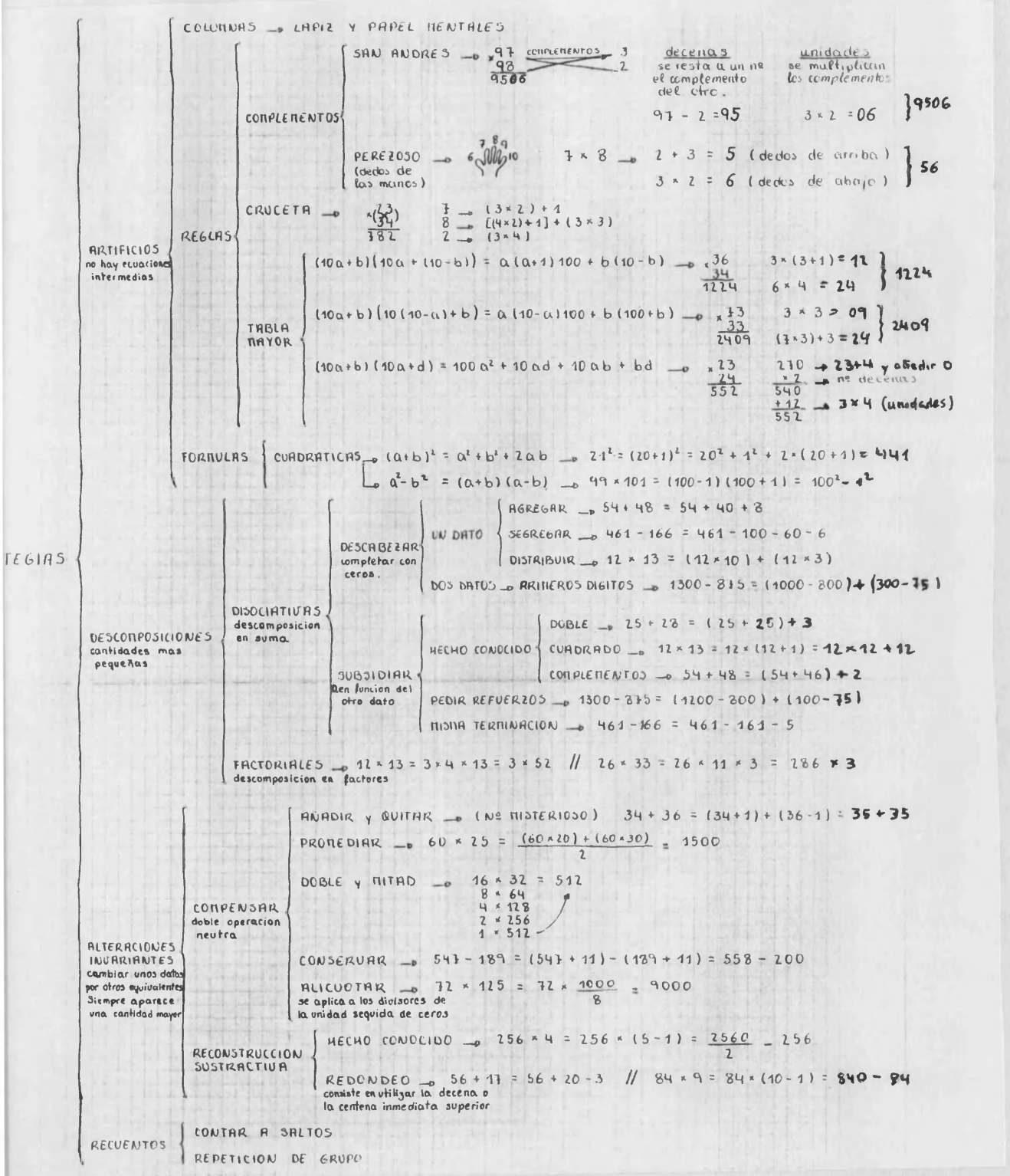
METODOS DE COMPENSACION

Compensaciones Intermedias
11. Alicuotar: casos del 5, 25, 125, y 75
12. Doble y mitad
13. Promediar

Compensaciones finales
14. Redondear
15. Incrementar subsidiariamente en el producto por 4 o 24

El esquema elaborado durante las clases

A medida que se efectuaba la presentación de los métodos se fue completando ante los estudiantes un esquema organizativo, síntesis y compendio de todos ellos. A continuación se adjunta una de las copias de este esquema que circuló entre los estudiantes, donde se aprecian leves diferencias en la terminología y en la forma de agrupar los métodos, con relación al esquema presentado anteriormente en el capítulo de III.3, debido al carácter experimental de la clasificación en el momento de presentarlo a los estudiantes.



Esquema que circuló entre los alumnos, copiado del que se elaboró durante las clases y se presentó en el encerado.

V.2. RESULTADOS

V.2.1 Análisis de las respuestas en el pretest de restar
(En adelante PRER)

Ejercicios:

547-189	243-75	1300-875	461-166	265-199	13-8,75	2,23-1,58

Muestra: Contestaron 144 estudiantes: 68 del grupo C y 76 del EE.

V.2.1.1 Exito

El 21,5 % de los estudiantes cometieron algún fallo, es decir que contestaron incorrectamente al menos una vez. Cada uno de estos estudiantes falló una vez, salvo uno que falló dos veces.

Porcentaje de estudiantes que cometieron algún fallo en el PRER

Nº de estudiantes	Fallaron alguna vez	No fallaron nunca
144	31=21,5%	113=78,5%

Las frecuencias de los fallos que se dieron en los ejercicios con decimales fueron ligeramente mayores que las que se dieron en los ejercicios con naturales, siendo el ejercicio que menos fallos obtuvo el tercero: 1300-875, y el que más el sexto: 13-8,75.

Tabla de frecuencias de los fallos que se dieron en cada ejercicio

Ej.	547-189	243-75	1300-875	461-166	265-199	13-8,75	2,23-1,58	Total
Total.	4	4	2	3	3	9	7	32

Aunque estos datos son insuficientes para hacer inferencias significativas, dejan entrever una posible mayor problemática en los ejercicios con números decimales que en los ejercicios con números

naturales, y en particular cuando se restan números que no son homogéneos en los que el minuendo es entero y el sustraendo decimal.

V.2.1.2 Tipos de respuesta incorrecta observados

Los estudiantes cometieron fallos de diversos tipos. A continuación se recogen distribuidos en grandes grupos o categorías que obedecen a un deseo de presentarlos agrupados, por lo que no deben tomarse como si fueran el resultado de una clasificación en sentido estricto.

1 ESPECIFICO DE LOS DECIMALES

1.1 No reconocimiento u olvido de la forma inicial " 0, " (cero coma) para indicar parte entera nula en el resultado de la resta.

> 2,23-1,58=65. "He imaginado la posición 2,23 y 1,58, realizando la resta como usualmente".

1.2 No reconocimiento de los ceros a la derecha de la coma decimal, necesarios para restar cuando el minuendo es entero y el sustraendo está compuesto de parte entera y decimal.

> 13-8,75=5,75. "Sabía que 13-8 eran 5 luego he añadido el 75".

2 DE CALCULO INTERMEDIO

2.1. 2.1 Cálculo parcial con resultado incorrecto.

> 1300-875=0525. "Diez menos 5 igual 5 me llevo una, diez menos ocho dos me llevo una, trece menos 9 cinco y me llevo una".

3 AL "LLEVAR"

3.1 No reconocimiento o no recuperación de la cifra que se "lleva".

13-8,75=5,25. "Primero 13-8 y lo que le falta de 100-75".

2,23-1,58=0,75 "A 2,23 le quito 1; y luego a 1,23 le quito 0,58 y me queda 0,75".

4 DE ALGORITMO O PROCEDIMIENTO

4.1 Resta en vez de suma, en el redondeo del sustraendo.

265-199=64. "Como 199+1 es 200 a 265 le quito 200-1 y da 64".

5 INDESCRIFRABLE.

Se incluye esta quinta categoría para recoger aquellas respuestas incorrectas en las que el error no ha sido podido descifrado porque la explicación que hace el estudiante es insuficiente para entenderle.

En la página siguiente se resume esta casuística y se presenta una tabla con sus frecuencias.

Esquema-resumen de los tipos de fallos en el PRER

1 ESPECIFICO DE LOS DECIMALES

1.1 No reconocimiento u olvido de la forma "0,"

1.2 No reconocimiento de los ceros a la derecha de la coma

2 DE CALCULO INTERMEDIO

2.1 Cálculo parcial con resultado incorrecto (resta)

3 AL "LLEVAR"

3.1 No reconocimiento o recuperación de la cifra que se "lleva"

4 DE ALGORITMO O PROCEDIMIENTO

4.1 Resta en vez de Suma en el redondeo del sustraendo

5 INDESCIFRABLE

Frecuencias de cada uno de los tipos de fallos observados en el PRER

Ej.	547-189	243-75	1300-875	461-166	265-199	13-8,75	2,23-1,58	Tot.
1								11
1.1							4	4
1.2						7		7
2								8
2.1	4		1	1	1		1	8
3								4
3.1				1		2	1	4
4								1
4.1					1			1
5		4	1	1	1		1	8
Tot.	4	4	2	3	3	9	7	32

Entre las respuestas incorrectas observadas en el PRER las más frecuentes fueron las del grupo de los específicos de los decimales, y después las de cálculo intermedio. El tipo particular de fallo con mayor incidencia fue el de no reconocimiento de los ceros a la derecha de la coma decimal, que sólo se dio en el ejercicio con datos no homogéneos, aquél en el que el sustraendo es un número entero y el minuendo está compuesto de parte entera y decimal.

V.2.1.3 Flexibilidad

Se estudia aquí la dependencia de los métodos de columnas.

El porcentaje de estudiantes que estuvieron anclados en los métodos de Columnas, es decir que no hicieron uso de ningún otro método, fue del 62,5%.

Porcentaje de estudiantes anclados en los métodos de columnas

Nº de estudiantes	Anclados en Columnas	No anclados
144	90=62,5%	54=37,5%

El porcentaje de estudiantes que prefirieron los métodos de columnas, es decir, que los usaron en más de la mitad de los ejercicios, fue el 84%.

Porcentaje de estudiantes que usaron preferentemente columnas

Nº de estudiantes	Prefirieron Columnas	No prefirieron Colum.
144	121=84%	23=16%

Casi la mitad de los estudiantes flexibles lo fueron únicamente en los ejercicios con naturales. En otras palabras, se anclaron en los métodos de Columnas cuando los datos fueron números decimales, pero no cuando fueron naturales.

Nº de estudiantes flexibles	Anclados en decimales, flexibles con naturales
54=37,5%	24/54

El ejercicio que más veces fue resuelto con un método distinto a Columnas fue el quinto: 265-199; y el que menos fue el séptimo: 2,23-1,58.

Tabla de frecuencias de métodos alternativos a columnas usados en cada ejercicio

547-189	243-75	1300-875	461-166	265-199	13-8,75	2,23-1,58	Tot.
15=8%	24=13%	35=19%	21=13%	43=24%	29=16%	13=7%	180

Estos datos hacen pensar en que los estudiantes sufren una gran dependencia de los métodos de columnas, y que esta dependencia es mayor en los ejercicios con números decimales que con números naturales. No obstante, esta afirmación debe tomarse con cautela ya que en el caso del ejercicio mixto, con números no homogéneos, uno entero y el otro decimal, 13-8,75 hubo más flexibilidad que en tres de los cinco casos con naturales.

V.2.1.4 Disponibilidad

Se estudian aquí los tipos de métodos alternativos observados.

En el PRER, los estudiantes utilizaron un amplio abanico de métodos con enfoques diversos. A continuación se recoge un ejemplo representativo de cada uno de ellos tomándolo de las respuestas que documentaron los estudiantes en la prueba. Estos ejemplos se presentan siguiendo el orden y los criterios señalados en el capítulo anterior donde se compendian y organizan los métodos recogidos en los libros de aritmética.

Después se sintetizan en un esquema-resumen que se completa con una tabla de las frecuencias con que se dieron en las pruebas.

1. METODOS DE COLUMNAS

Las métodos de Columnas observados fueron los de Llevar, Prestar y Complementar. De ellos, el preferido por la gran mayoría de los estudiantes fue el primero, en el enfoque "cifra a cifra", aunque también se dio a veces el enfoque "grupo de cifras".

1.1 Llevar.

1.1.1 Cifra a cifra.

547-189=358. "Diecisiete menos 9=8 me llevo una. Catorce menos nueve cinco y me llevo una. Cinco menos dos =3".

547-189=358. "A 9 le sumo un nº para que dé 17, 9+8=17; 8+1 que llevaba 9, 9+5=14; 1+1 que llevaba=2, 2+3=5".

1.1.2 Grupos de cifras.

1300-875=425. "He completado hasta 100 el 75 que me da 25. Luego he hecho 8+ la que llevamos (1)=9 y se lo he restado a trece y me da 4".

265-199=66. "de 9 a 15 ->de 20 a 26".

1.2 Prestar (Préstamo tomado del Minuendo).

1.2.1 Cifra a cifra.

547-189=358. "17 menos 9 son 8 y como le he quitado una al 4, 13 menos 8 son 5 y le quito una al 5 por lo que 4 menos 1 son 3".

1.2.2 Grupos de cifras.

1300-875=425. "El primer nº podríamos decir que es redondo 100-75

/ 12-8 = 4 y ahora lo junto 425".

1.3 Complementar.

1.3.1. Cifra a cifra, o intermediando con el 10.

547-189=358. "De 9 a 10 van 1, y más 6 son 17. De 9 a 10 van 1 más 4, 14. De 2 a 5 van 3".

1 3 2. Grupo de cifras, o intermediando con el 100.

2,23-1,58=0,65. "Debe ser menor que 1 porque 2,23 es menor que 2,58. De 58 a 100=42; de 0 a 23=23; 42+23=65 como es 0, => 0,65".

2 METODOS DE DESCOMPOSICION

2.1 Disociar Descabezando.

2.1.1 Descabezando un dato.

2.1.1.1 El Sustraendo.

547-189=358. "A 547 le he quitado 100; luego, a 447 le he quitado 80; y al final, al 367 le he quitado 9, y me ha dado 358".

2.1.1.2 El Minuendo.

243-75=168. "Al número 200 le he quitado 75 quedándome 125 y después le he sumado 43, el cuarenta de 20 en 20 y después el 3".

2.1.2. Descabezando los dos datos o Primeros Dígitos.

2.1.2.1 Recuperando.

547-189=358. "Al 500 le quito 100=400 que son 447 y le quito 89

quedando después 358".

2.1.2.2 Reagrupando.

461-166=295. "A 460 le quito 160 y me da 300 y luego le quito 5 y me da 295".

2.2 Disociar Subsidiariamente.

2.2.1 Haciendo la misma terminación.

Consiste en disociar para obtener una resta parcial con la misma terminación en el sustraendo que en el minuendo.

461-166=295. "461-161=300-5=295".

2.2.2 Prestando del minuendo a una resta parcial.

1300-875=425. "100 menos 75 y 1200 menos 800 igual a 400 y 25".

2.2.3 Por patrones numéricos.

461-166=295. "al 461 le he restado 150 y después las 16 últimas unidades".

3. METODOS DE COMPENSACION

3.1 Compensaciones intermedias-Conservar.

3.1.1 Doble suma para hacer redondo el sustraendo.

265-199=64. "Aqui resulta más fácil hacer sumar 1 al 199 que se convierte en 200 y sumar 1 al 265 que pasa a 266, al hacer la resta sale justo el 66".

3.2 Compensaciones finales-Redondear.

3.2.1 Restando del minuendo un número que es el redondeado del sustraendo y corrigiendo el resultado sumándole el complemento aritmético que se ha restado de más.

547-189=358. "A 547 le he restado 200 y le he sumado 11".

3.2.2 Restando el sustraendo del redondo del minuendo, y después restando el complemento del minuendo.

243-75=168. "250-75 son 175 menos 7 son 168".

4 METODOS DE RECUENTO

4.1 Contando a saltos.

4.1.1 Contando por decenas, centenas etc.

461-166=295. "1º de 166 a 466 =300 2º 300-5=295".

4.1.2 Contando hasta el minuendo con intermediación de un número redondo desde el sustraendo.

547-189=358. "De 189 a 200=11+347=358".

4.1.3 Descontando desde el minuendo con intermediación de un número redondo.

1300-875=425. "Al 1300 le quito 300. Luego al 1000 le quito 125 para que me de 875. 300+125=425".

Esquema-resumen de las estrategias y métodos observados en el PRER

Se ha prescindido de los enfoques para centrar el estudio en los métodos y estrategias

1 COLUMNAS
- 1.1 Resta Llevando
- 1.2 Resta Prestando
- 1.3 Resta complementando

2 DESCOMPOSICION-DISOCIACION
- 2.1 Descabezar
  - 2.1.1 Descabezando un dato
  - 2.1.2. Descabezando los dos datos o Primeros Dígitos
- 2.2 Subsidiar
  - 2.2.1 Haciendo la misma terminación
  - 2.2.2 Prestando del minuendo a una resta parcial
  - 2.2.3 Por patrones numéricos

3 COMPENSACION
- 3.1 Compensaciones intermedias.-Conservar
- 3.2 Compensaciones finales-Redondear

4 RECUENTO
- 4.1 Contando a saltos

Tabla de frecuencias de las estrategias y métodos del PRER

	547-189	243-75	1300-875	461-166	265-199	13-8,75	2,23-1,58	Tot.
1	39	30	19	33	11	24	41	197
2								62
2.1								49
2.1.1	3	7	13	6	2	7	3	41
2.1.2	2		1	4			1	8
2.2								13
2.2.1		1		7				8
2.2.2			1			2		3
2.2.3		1		1				2
3								93
3.1					3		1	4
3.2	9	13	13	2	34	15	3	89
4								25
4.1	1	2	7	1	4	5	5	25

De los datos recogidos, se sigue que los métodos que usaron los estudiantes son los históricos y no otros métodos más o menos idiosincráticos. Salvo los de Columnas y Recuento, usaron con este orden de preferencia: Redondear, Descabezar un dato, Hacer la misma terminación, Descabezar los dos datos o Primeros Dígitos, Conservar, Prestando del minuendo a un parcial, y Por patrones numéricos.

Redondear	89
Descabezar un dato	41
Descabezar los dos datos	8
Hacer la misma terminación	8
Conservar	4
Prestando del minuendo a ...	3
Patrones numéricos	2

Los tres métodos alternativos a columnas más frecuentados se dieron prácticamente en todos los ejercicios, tanto con números naturales como con números decimales. Los otros métodos se dieron muy pocas veces, con frecuencias insignificantes, aunque dos de ellos también se dieron tanto en los ejercicios con números naturales como decimales.

	con naturales	con decimales
Redondear	61	18
Descabezar un dato	30	10
Descabezar los dos datos	7	1
Hacer la misma terminación	8	0
Conservar	3	1
Prestando del minuendo a ...	1	2
Patrones numéricos	2	0

V.2.1.5 La forma de operar la coma decimal

Casi todos los estudiantes flexibles operaron los ejercicios con números decimales aplicando los métodos alternativos directamente, es decir, sin apartar la coma decimal.

Sólo dos de ellos los operaron indirectamente, es decir, tratando a los datos decimales como naturales.

2,23-1,58="Redondeando, a 223 le quito 160, queda 63 más dos 65, que poniéndolo en decimal 0,65".

2,23-1,58="De 158 a 200=42, 42+23=65".

Ninguno de los resolutores declaró haber aprovechado el resultado del ejercicio 1300-875 para averiguar el del 13-8,75. ¿Lo callaron, o no vieron su analogía? Lo segundo parece que es más acertado ya que, casi la mitad, 15 de los 33 estudiantes que usaron un método distinto a Columnas en el ejercicio 1300-875 repitieron el mismo método en el ejercicio 13-8,75, y el resto usó un métodos diferente.

En consecuencia, se puede decir que cuando se restan decimales con métodos que no son de Columnas, la tendencia mayoritaria es aplicar los métodos directamente, y que sólo excepcionalmente se opera tratando a los decimales como naturales.

V.2.2 Análisis de las respuestas en el pretest de multiplicar
(En adelante PREM)

Ejercicios:

$3,1^2$	37x0,25	28x35	47x99	41x32	3,4x0,15	64x25

Muestra: Contestaron 137 estudiantes: 71 del grupo C y 66 del EE.

V.2.2.1 Exito

El 76,5% de los estudiantes cometieron algún fallo, es decir que contestaron incorrectamente al menos una vez.

Porcentaje de estudiantes que cometieron algún fallo en el PREM

Nº de estudiantes	Fallaron alguna vez	No fallaron nunca
137	105=76,5%	32=23,5%

Las frecuencias de los fallos que se dieron en los ejercicios con decimales fueron mayores que las que se dieron en los ejercicios con números naturales. Siendo el ejercicio en el que más fallos se dieron el segundo: 37x0,25; y el que menos el quinto: 41x32.

Tabla de frecuencias de los fallos que se dieron en cada ejercicio

	$3,1^2$	37x0,25	28x35	47x99	41x32	3,4x0,15	64x25	Total
Total	45=17%	68=26%	22=8%	35=13%	17=6%	50=19%	29=11%	266

El 40% de los estudiantes que cometieron fallos lo hicieron exclusivamente en los ejercicios con decimales.

Cometieron algún fallo	105/137
Tanto en naturales como en decimales	51/105=48,5%
Exclusivamente con naturales	12/105=11,5%
Exclusivamente con decimales	42/105=40%

Estos datos revelan la existencia, en el PREM, de una problemática significativamente mayor en los ejercicios con números decimales que en los ejercicios con números naturales.

V.2.2.2.Tipos de respuestas incorrectas observados

Los estudiantes cometieron fallos de diversos tipos. A continuación se presenta un ejemplo de cada uno de ellos, distribuidos, a los únicos efectos de presentarlos agrupados, en las mismas categorías que ya se vieron en la resta.

1. ESPECIFICO DE LOS DECIMALES

1.1 No recuperación de la coma tras efectuar el cálculo.

$3,1^2=961$.

1.2 Eliminación-recuperación impropia de la coma decimal después de haberla corrido el mismo número de lugares en ambos factores.

3,4x0,15=10,5. "He multiplicado 34 por 1,5 y me da 6,0+4,5=10,5".

1.3 Producto incorrecto de números decimales de la forma 0,1x0,1.

$3,1^2=9,11$. "Multiplico 0,1x0,1 y al resultado le sumo 9 que sale de multiplicar 3x3".

Nota: Además de contestar 0,1x0,1=0,11 el estudiante multiplicó por separado y entre sí las partes enteras y decimal, por lo que también cometió un fallo de algoritmo o procedimiento del tipo "primeros dígitos impropio" que se comenta más adelante.

1.4 Resultado incompleto por división tras sustituir la multiplicación dada por una división equivalente.

37x0,25=9,2 aprox. "Cuando se multiplica un número por 0,25 es igual que si lo dividieses entre 4 -> porque 0,25=1/4".

Nota: el estudiante sólo dio una cifra decimal, no terminó de dividir

1.5 Ubicación incorrecta de la coma decimal en el resultado.

Se observó en dos modalidades:

1.5.1 Las comas se colocan en la misma posición y se bajan de acuerdo con el lugar que ocupan.

$3,1^2$=96,1. "Imagino el 3,1x3,1 y entonces empiezo a multiplicar el 1x1 y no me llevo ninguno luego el 1x3=3 y tampoco llevo nada. Hago lo mismo con el 3x1=3 y entonces se lo tengo que sumar al 1x3=3 que son 6 y finalmente el 3x3=9. Total 96,1 porque tiene una cifra decimal".

$3,1^2$=96,1. "He multiplicado 3,1x3,1 ->3,1

3,1
3 1
93 .
96,1".

1.5.2 Las cifras significativas se colocan unas debajo de las otras y se baja la coma que ocupa el lugar más a la izquierda.

3,4x0,15=5,14. "Multiplico olvidándome de las comas: 3,4

0,15
170
34 .
5,10".

37x0,25=0,259. "He colocado mentalmente el 37 y debajo el 0,25 dejando el "0" sin estar debajo de ningún número, he multiplicado 5x7 y 5x3 y he conservado el resultado después he hecho lo mismo con el dos después he sumado mentalmente los 2 resultados".

Nota: Parece que hizo: 37

025

185

74

0,259.

El estudiante también cometió el fallo de "fila no desplazada" que se comenta más adelante.

37x0,25=0,925. "Multiplico 5x37=185 y 2x37=74 Sumo 185+740= 925 luego añado el cero a la izquierda 0,925".

2. DE CALCULO INTERMEDIO

2.1 Cálculo parcial con resultado incorrecto.

64x25=1650. "He hecho 60x25 y me daba 1550 y luego le he sumado 4 veces 25 que es 100 y me daba 1650".

2.2 Contabilización incorrecta de los ceros tras multiplicar números acabados en ceros.

2.2.1 Ceros de menos.

47x99=423. "47x100=470-47=423".

2.3 No recuperación de los ceros apartados tras multiplicar por números acabados en ceros.

28x35=234. "28x30 más 28 por 5".

Nota: Sumó 28x3 y 28x5.

3. AL "LLEVAR".

3.1 No reconocimiento o no recuperación de la cifra que se "lleva".

3.1.1 "Llevada" de menos u olvidada.

37x0,25=9,15. "5x7=35 -> La última cifra será un cinco; 5x3=15; 37x2=74 -> 740+155=895 ->8,95. El resultado tendrá tantos decimales como los factores".

3.1.2 "Llevada" de más.

37x0,25=10,25.

4. DE ALGORITMO O PROCEDIMIENTO

4.1 Primeros dígitos impropio, que es cuando se opera por órdenes de unidad: unidades con unidades y decenas con decenas, sin reconocer los productos intermedios o en cruz.

4.1.1 Con cifras completadas.

28x35=640. "He multiplicado 20x30=600 y después 8x5=40 y he sumado 600+40=640".

4.1.2 Con cifras aisladas

$3,1^2$=9,1. "Multiplico la primera cifra por ella misma y luego la segunda, después mantengo la misma forma decimal".

4.2 Incremento de un factor y posterior compensación, restando el producto del incremento por el factor incrementado en vez del producto por el otro factor.

47x99=4601. "47x100=4700, 4700-99=4601"

4.3 Descabezamiento de un dato encadenando, es decir, haciendo el segundo producto parcial sobre el resultado del primer producto parcial.

28x35= "He multiplicado 5x28 y luego el resultado por 3".

4.4 Descomposición tomando el segundo producto parcial sobre el factor descabezado en vez de sobre el otro factor.

41x32=1294. "41 por 30=1230 y le sumo 64".

4.5 Descabezamiento con no reconocimiento del cero del orden de unidad de los sumandos.

28x35=224. "28x3 ->3x8=24, 3x2=6+2 que llevo 84; luego 5 por 8=40 y llevo 4; cinco por 2=10 y 4 son 14 total 140+84=224".

4.6 Columnas con fila no desplazada.

37x0,25=0,259. "He colocado mentalmente el 37 y debajo el 0,25 dejando el "0" sin estar debajo de ningún número he multiplicado 5x7 y 5x3 y he conservado el resultado después he hecho lo mismo con el dos después he sumado mentalmente los 2 resultados".

Nota: Parece que puso las dos filas alineadas para sumarlas así:

185
74
0,259

4.7 Algoritmo o procedimiento incompleto.

37x0,25=1,75. "He multiplicado 0,25x4=1´00. Luego 0,25x3= =0,75 y lo he sumado 1,75".

Nota: Ha multiplicado por 7 transformándolo en 3+4, pero le falta multiplicar por 30.

5. INDESCIFRABLE

Se incluye esta quinta categoría para recoger aquellas respuestas incorrectas en las que el error no ha podido ser descifrado, porque la explicación que hace el estudiante es insuficiente para entenderle.

6. RESPUESTA EN BLANCO

Se incluye esta sexta categoría para recoger los casos de ausencia de respuesta.

Esquema resumen de los tipos de respuesta incorrecta

1 ESPECIFICO DE LOS DECIMALES
- 1.1 No recuperación de la coma decimal
- 1.2 Eliminación-recuperación impropia de la coma
- 1.3 Producto incorrecto de decimales de la forma 0,1x0,1
- 1.4 Resultado incompleto por división equivalente
- 1.5 Ubicación incorrecta de la coma

2 DE CALCULO INTERMEDIO
- 2.1 Cálculo parcial con resultado incorrecto
- 2.2 Contabilización incorrecta de los ceros
- 2.3 No recuperación de los ceros aparcados

3 AL "LLEVAR"
- 3.1 No reconocimiento o recuperación de la cifra que se "lleva"

4 DE ALGORITMO O PROCEDIMIENTO
- 4.1 Primeros dígitos impropio
- 4.2 Incremento y compensación impropia
- 4.3 Descabezamiento encadenando
- 4.4 Descomposición tomando el 2º parcial sobre el descompuesto
- 4.5 Descabezamiento con no reconocimiento del cero del orden de unidad
- 4.6 Columnas con fila no desplazada
- 4.7 Algoritmo incompleto

5. INDESCIFRABLE

6. BLANCO-NO CONTESTARON

Frecuencias de cada uno de los tipos de fallos observados en el PREM

	$3,1^2$	37x0,25	28x35	47x99	41x32	3,4x0,15	64x25	Total
1								44
1.1	2	4				4		10
1.2						1 (Enc)		1
1.3	1							1
1.4		2						2
1.5	16	4				10		30
2								31
2.1	14	4	1	2	1		1	23
2.2				4	1		1	6
2.3			1		1			2
3								72
3.1		33	9	3	1	14	12	72
4								35
4.1	8		1	1	1	2	1	14
4.2			1	2				3
4.3			1	1	1		1	4
4.4					2			2
4.5		1	1			1		3
4.6		1		1	1	2	1	6
4.7	1	1			1			3
5	1	14	7	20	7	6	11	66
6	2	4		1		10	1	18
Total	45	68	22	35	17	50	29	266

Nota: El número de la primera columna es el código que se corresponde con el del esquema anterior. No se han incluido los subtipos para no hacer el análisis excesivamente detallado.

Como los datos disponibles son realmente escasos, se ha incluido acompañándolo de la coletilla "Enc" un error que aparece encubierto en lo que manifiesta el alumno.

Entre los grupos de respuesta incorrecta observados en el PREM los más frecuentes fueron con mucho los de "llevar", seguidos, por este orden, de los específicos con los decimales, los de procedimiento o algoritmo y los de cálculo intermedio. Aparte del de "llevar", el tipo particular de fallo con mayor incidencia fue el de ubicación incorrecta de la coma.

V.2.2.3 Flexibilidad

Se estudia aquí la mayor o menor dependencia de métodos de columnas.

El porcentaje de estudiantes que estuvieron anclados en el método de columnas, es decir, que no hicieron uso de ningún otro método, fue del 63%.

Porcentaje de estudiantes anclados en los métodos de columnas

Nº de estudiantes	Anclados en Columnas	No anclados
137	86=63%	51=37%

El porcentaje de estudiantes que prefirieron los métodos de columnas, es decir que los usaron en más de la mitad de los ejercicios, fue el 79%.

Porcentaje de estudiantes que usaron preferentemente columnas

Nº de estudiantes	Prefirieron Columnas	No prefirieron Columnas
137	108=79%	29=21%

Un quinto de los estudiantes flexibles lo fueron únicamente en los ejercicios con naturales. En otras palabras, se anclaron en los métodos de Columnas cuando los datos fueron números decimales, pero no cuando fueron naturales.

Nº de estudiantes flexibles	Anclados en decimales, flexibles con naturales
51	11/51

El ejercicio que más veces fue resuelto con un método alternativo distinto a Columnas fue 37x0,25 y después 64x25, y el que menos fue $3,1^2$, seguido de 3,4x0,15. Es decir que en dos de los tres ejercicios con números decimales la frecuencia con que se usaron los métodos alternativos fue inferior a la frecuencia con que se usaron los métodos alternativos en los ejercicios con números naturales.

Tabla de frecuencias de métodos alternativos a columnas usados en cada ejercicio.

	$3,1^2$	37x0,25	28x35	47x99	41x32	3,4x0,15	64x25
Tot	5	36	26	34	27	16	36

Estos datos hacen pensar que los estudiantes sufren una gran dependencia de los métodos de columnas, y que esta dependencia es mayor en los ejercicios con números decimales que con números naturales. No obstante, esta afirmación debe tomarse con cautela, ya que en ciertos casos particulares, como cuando se multiplica por 0,25, aparece mayor flexibilidad que en los ejercicios con números naturales.

V.2.2.4 Disponibilidad

Se estudian aquí los tipos de métodos alternativos observados.

En el PREM, los estudiantes utilizaron un amplio abanico de métodos con diversos enfoques. A continuación se recoge un ejemplo representativo de cada uno de ellos, tomándolo de las respuestas que documentaron los estudiantes en la prueba, y se organizan de acuerdo con el esquema propuesto en el capítulo en el que se compendian y organizan los métodos recogidos en los libros de aritmética. Después se sintetizan en un esquema-resumen que se completa con una tabla de sus frecuencias.

1 ARTIFICIOS

1.1 Columnas.

1.1.1 Cifras aisladas o cifra a cifra.

28x35=980 "Multiplico 5x8=40 pongo 0 y llevo cuatro; 5x2=10+4=14 arriba 140. Bajo 3x8=24 pongo el cuatro bajo el segundo lugar del de arriba y llevo 2 3x2+2=8; bajo da 84 sumo cero 4+4=8, 8+1=9".

1.1.2 Cifras tomadas juntas o Grupos de cifras.

64x25=4000 "Idem / 25, cuatro veces=100 25, seis veces, =150 / luego lo sumo".

1.1.3 Completando las filas con ceros.

41x32=1312. "He sumado mentalmente 32
+280"

1.1.4 Símil cruceta.

28x35=980. "Multiplico 8 por 5 y pongo el cero de las unidades. Me llevo 4 que memorizo. Multiplico el 5 por el 2 y le sumo las 4 de antes. Memorizo el 14. Multiplico el 3 por 8 y me llevo 2. El 4 que da le sumo el 4 del 14 y da 8. Multiplico 3 por 2 y le sumo las 2 que me llevaba mas el 1 del 14".

2. METODOS DE DESCOMPOSICION

2.1 Disociar.

2.1.1 Descabezar un dato.

28x35=980. "(28x30)+(28x5)=840+140=980".

2.1.2 Descabezar los dos datos.

41x32=1312. "40x30=1200
40x2=80
1280+32=1312".

2.2 Factorizar.

2.2.1 Factorización simple.

41x32=1312. "Partiendo de la descomposición 32=8x4, he multiplicado el 41 por 8 y el resultado por 4, así resulta mucho más fácil".

3 METODOS DE COMPENSACION

3.1 Compensaciones intermedias.

3.1.1 Alicuotar.

37x0,25=9.25. "0,25=1/4; 37:4=9+1; 1:4=0,25; 9+0,25=9,25".

3.1.2 Doble y Mitad.

28x35=980. "Transformé esta multiplicación dividiendo 28:2 (14), y 35x2 (70). Esto no varía el resultado y es más fácil de operar mentalmente (14x70)".

3.2 Compensaciones finales.

3.2.1 Redondear

47x99=4653. "(47x100)-(47x1)=4700-47=653".

4 METODOS DE RECUENTO

4.1 Repetición de Grupo.

28x35=980. "(28x10)+(28x10)+(28x10)+(28x5)".

Esquema-resumen de las estrategias y métodos del PREM.

1 ARTIFICIOS

- 1.1 Columnas
  - 1.1.1 Cifras aisladas o cifra a cifra
  - 1.1.2 Cifras tomadas juntas o Grupos de cifras
  - 1.1.3 Completando las filas con ceros
  - 1.1.4 Símil cruceta

2 METODOS DE DESCOMPOSICION

- 2.1 Disociar
  - 2.1.1 Descabezar un dato
  - 2.1.2 Descabezar los dos datos
- 2.2 Factorizar
  - 2.2.1 Factores simples

3 METODOS DE COMPENSACION

- 3.1 Compensaciones intermedias
  - 3.1.1 Alicuotar
  - 3.1.2 Doble y Mitad
- 3.2 Compensaciones finales
  - 3.2.1 Redondear

4 RECUENTO

- 4.1 Repeticiones de Grupo

Tabla de frecuencias de las estrategias y métodos del PREM.

	$3,1^2$	37x0,25	28x35	47x99	41x32	3,4x0,15	64x25	Total
1.1								147
1.1.1	33	8	11	8	9	15	7	91
1.1.2	3	3	7	5	7	8	5	38
1.1.3	1		1		1	1	1	5
1.1.4	4	1	2	1	3	2		13
2								100
2.1								88
2.1.1	5	7	16	5	24	14	16	87
2.1.2					1			1
2.2								12
2.2.1			4	2	2	1	3	12
3								81
3.1								49
3.1.1		29	1			1	16	47
3.1.2			1				1	2
3.2								32
3.2.1			5	27				32
4								11
4.1		1	4		3		3	11

De estos datos se sigue que los estudiantes usaron varios de los métodos históricos, además de los de columnas y de recuento, concretamente usaron por este orden de preferencia: Descabezar un dato, Alicuotar, Redondear, y Factorizar.

Excepcionalmente, los estudiantes usaron el método de Doble y mitad, y el de Descabezar los dos datos. No usaron nunca las reglas tradicionales, salvo un símil de la cruceta que hace pensar en que éste es un método fácilmente construible por los estudiantes.

Tampoco usaron métodos subsidiarios, ni el de promediar o el de las fórmulas cuadráticas, lo que dice mucho acerca de la manera en que los estudiantes aprendieron éstas en su época escolar.

Es importante señalar que no se observaron enfoques idiosincráticos, por lo que se puede pensar en que la alternativa real en el cálculo mental multiplicativo a los métodos de columnas son los métodos históricos.

Por otra parte, Descabezar un dato, Alicuotar y Factorizar, se dieron tanto en los ejercicios con naturales como con decimales, el último excepcionalmente.

Frecuencias de los métodos con	naturales	decimales
Descabezar un dato	61	26
Alicuotar	17	30
Redondear	32	0
Factorizar	11	1
Doble y mitad	2	0
Descabezar los dos datos	1	0

No obstante, aunque redondear sólo se dio en los ejercicios con naturales esto no quiere decir nada, ya que las características de los ejercicios con decimales no son apropiadas para este método, es decir que no hay un ejercicio con decimales que termine en nueve o sea próximo a nueve.

V.2.2.5 La forma de operar la coma decimal

La mayoría de los estudiantes flexibles en los ejercicios con números decimales lo fueron porque aplicaron la expresión equivalente o sustitución alícuota 0,25=1/4. En el resto de los casos en los que se aplicaron métodos alternativos, actuaron casi siempre indirectamente, es decir que transfirieron la regla del algoritmo de columnas que consiste en tratar los datos decimales como si fueran naturales, apartando la coma y recuperándola, al finalizar los cálculos, en el resultado, en el lugar que indica la suma de los números de cifras decimales de cada uno de los factores.

No obstante, hubo tres estudiantes que aplicaron métodos alternativos directamente sobre los decimales, es decir, arrastrando la coma.

37x0,25=9,25. "He multiplicado 0,25x3=0,75; 0,75x10=7,5 ->Falta ahora 0,25x7->0,25x4=1 queda -> 0,25x3=0,75-> se suma 7,5+1+0,75=9,25".

$3,1^2$=9,61. "Multiplico mentalmente 3,1x3->3x3=9 y le sumo 0,1x3 =0,3, ya tenemos 9,3, luego multiplico 0,1x3,1=0,31 y le sumo 9,3, lo que nos da 9,61".

3,4x0,15="0,51. He hecho 3,4x10 y daba 34, luego le he sumado 3,4x5=17 y daba 34+17=51, luego le he quitado dos decimales".

Nº de estudiantes flexibles que operaron directa e indirectamente los decimales

Nº de estudiantes flexibles en los ejercicios con decimales	40
Aplicaron expresiones equivalentes	29
Aplicaron los métodos indirectamente, transfiriendo la regla	14
Aplican otros métodos directamente	3

Estos datos revelan que, en el PREM, los estudiantes flexibles

prefirieron operar los números decimales mediante sus fracciones equivalentes, cuando esto era posible, y cuando no, optaron por tratarlos como si fueran naturales. Sólo muy pocos estudiantes manejaron directamente la operatoria con decimales, bien entendido que esto no significa que al final no tuvieran que aplicar la regla usual de contar cifras decimales, sino que optaron por hacer transformaciones previas antes de verse abocados a ello.

V.2.3 Análisis de las respuestas en el postest de restar
(En adelante POSTR)

Ejercicios:

737-289	634-75.	1400-675	481-186	245-197	14-7,75.	2,32-1,67	54,7-18,9	24,3-7,5	46,1-16,6

Muestra: Contestaron 133 estudiantes: 59 de C y 74 de EE.

V.2.3.1 Exito

El 43% de los estudiantes cometieron algún fallo, es decir que dieron alguna respuesta incorrecta.

Porcentaje de estudiantes que cometieron errores

Nº de estudiantes	Fallaron alguna vez	No fallaron nunca
133	57=43%	76=57%

El número de fallos que se dieron en los ejercicios con números decimales fue mayor que el de los que se dieron en los ejercicios con números enteros.

Nº de fallos en los números decimales y en los enteros

Fallos en los enteros	Fallos en los decimales	Total
47=42%	64=58%	111

No obstante, no todas las frecuencias de los fallos en los ejercicios con números decimales fueron mayores que las frecuencias de los fallos en los ejercicios con números enteros.

Tabla de frecuencias de los fallos que se dieron en cada ejercicio

737-289	634-75	1400-675	481-186	245-197	14-6,75	2,32-1,67	54,7-18,9	24,3-7,5	46,1-16,6	Tot.
12	8	3	12	12	18	12	14	11	9	111

El ejercicio que menos errores obtuvo fue 1400-675 y el que más 14-6,75. Obsérvese que estos dos ejercicios tienen las mismas cifras significativas. En otras parejas similares se invierte la tendencia, la frecuencia de fallos en 46,1-16,6 es menor que la de 481-186, y las de 245-197 y 2,32-1,67 son iguales.

Por lo tanto, no hay indicio de la existencia de una mayor problemática en los ejercicios con números decimales que en los ejercicios con números enteros del PRER, salvo cuando se restan números en los que el minuendo es un número entero y el sustraendo es decimal.

V.2.3.2 Tipos de respuesta incorrecta observados

Además de los tipos ya vistos y reseñados en el PRER, aparecieron los siguientes:

1 ESPECIFICO DE LOS DECIMALES

1.3 Ubicación incorrecta de la coma decimal, al ponerla en el resultado en el lugar que corresponde a la suma del número de las cifras decimales de los datos.

54,7-18,9=3,58.

2 DE CALCULO INTERMEDIO

2.1 Cálculo parcial con resultado incorrecto (en suma).

737-289=438. "737 le añado 11; 289 le añado 11; después resto los dos resultados".

2.2 Cálculo del complemento aritmético incorrecto.

54,7-18,9=36´8. "Redondeo 18´9 a 20; 18´9+2´1=20; 54´7-20=34´7+2´1= 36´8".

2.3 Disociación con cifras incorrectas.

481-186=294. "481-(181+6)=(481-181)-6=300-6=294".

3 AL "LLEVAR"

3.2 Ubicación incorrecta de la cifra que se "lleva", al añadirla a la cifra inmediata del minuendo en vez de a la del sustraendo.

54,7-18,9=37´8. "De 17 a 9 me da 8 y llevo una. De 15 a 8 me da 7 y llevo una. A 5 le quito 2 porque una de ellas es la que llevaba del anterior".

4 DE ALGORITMO O PROCEDIMIENTO

4.2 Resta en vez de suma de los resultados parciales, en la Descomposición del minuendo.

634-75=491. "600-75=525-34=501-10=491".

4.3 Suma en vez de resta de los resultados parciales en el Descabezamiento de los dos datos o Primeros Dígitos, cuando el resultado de un parcial es negativo, o lo que es lo mismo, cuando la parte que hace de minuendo del parcial es menor que la que hace de sustraendo.

737-289=552. "Primero descompongo y resto por una parte el 700-200=500 y por otra 89-37=52 después he sumado el 500+52=552".

4.4 De suma en vez de resta en la Descomposición subsidiaria del sustraendo para obtener la misma terminación que el minuendo.

634-75=561. "He restado directamente el 634-74 y me da 560 luego le he sumado el 1 del 75 Por lo tanto me da 561".

4.5 De suma en vez de resta en el Incremento Subsidiario del minuendo para obtener la misma terminación que el sustraendo.

481-186=391. A 481 le he sumado 5 entonces quedan 486 a lo que le he restado 186 y al resultado le he sumado 5".

4.6 Algoritmo incompleto.

481-186=300. "Sumo 5 a 481+5=486-186=300".

Nota: Olvidó corregir la alteración del resultado, sumando 5 al resultado.

Esquema-resumen de los tipos de respuesta incorrecta en el POSTR

1 ESPECIFICO DE LOS DECIMALES

1.1 No reconocimiento u olvido de la forma "0,"
1.2 No reconocimiento de los ceros a la derecha de la coma decimal
1.3 Ubicación incorrecta de la coma decimal

2 DE CALCULO INTERMEDIO

2.1 Cálculo parcial con resultado incorrecto (resta, suma)
2.2 Cálculo del complemento aritmético incorrecto
2.3 Disociar con cifras incorrectas

3 AL "LLEVAR"

3.1 No reconocimiento o no recuperación de la cifra que se "lleva"
3.2 Ubicación incorrecta de la cifra que se "lleva"

4 DE ALGORITMO O PROCEDIMIENTO

4.1 De resta en vez de suma en el redondeo del sustraendo
4.2 De resta en vez de suma en la descomposición del minuendo
4.3 De suma en vez de resta en el descabezamiento de los dos datos
4.4 De suma en vez de resta en en la descomposición subidiaria
4.5 De suma en vez de resta en el incremento subsidiario
4.6 Algoritmo incompleto

5 ERRORES INDESCIFRABLES

6 BLANCOS (No contestan)

En la página siguiente se adjunta una tabla con las frecuencias de estos tipos de respuesta incorrecta, sin incluir los subtipos para no ser excesivamente detallistas. Los códigos que se utilizan son los mismos que los del esquema.

Frecuencias de los tipos de respuesta incorrecta en el POSTR

	737-289	634-75	1400-675	481-186	245-197	14-7,75	2,32-1,67	54,7-18,9	24,3-7,5	46,1-16,6	
1											12
1.1							3				3
1.2						4				1	5
1.3						1		1	1	1	4
2											31
2.1	5	3		2	2		1	4	3	2	22
2.2							2	2	1		5
2.3				3					1		4
3											20
3.1	2			2	1	7	1		3	3	19
3.2								1			1
4											38
4.1	3	2	1	1	9	3		3	2		24
4.2		2									2
4.3	2			2			2	1			7
4.4		1									1
4.5				1							1
4.6			1	1			1				3
5			1			2	1	2		1	7
6						1	1			1	3
Tot	12	8	3	12	12	18	12	14	11	9	111

Entre los grupos de respuesta incorrecta observadas en el PRER el más frecuente fue el de algoritmo o procedimiento, y el que menos, el específico de los decimales. El tipo particular de fallo con mayor incidencia fue el de resta en vez de suma.

V.2.3.3 Flexibilidad

Se estudia aquí la dependencia del método de Columnas.

El porcentaje de estudiantes que estuvieron anclados en los métodos de Columnas, es decir, que no hicieron uso de ningún otro método, fue del 4,5%.

Nº de estudiantes	Anclados en Columnas	No anclados
133	6=4,5%	127=95,5%

El porcentaje de estudiantes que prefirieron los métodos de columnas, es decir, que los usaron en más de la mitad de los ejercicios, fue el 20%.

Nº de estudiantes	Prefirieron Columnas	No prefirieron Columnas
133	27=20%	106=80%

Una décima parte de los estudiantes flexibles lo fueron únicamente en los ejercicios con enteros, es decir que fueron flexibles con los naturales pero no con los decimales.

Nº de estudiantes flexibles	Anclados con decimales, flexibles con naturales
127	13/127=10%

Las frecuencias de los métodos alternativos en los ejercicios con decimales fueron siempre menores que las de los ejercicios con naturales.

Tabla de frecuencias de los métodos alternativos a columnas

737-289	634-75	1400-675	481-186	245-197	14-7,75	2,32-1,67	54,7-18,9	24,3-7,5	46,1-16,6
89	100	108	107	103	88	61	72	74	90

En general, en los ejercicios con decimales los estudiantes usaron más veces los métodos de columnas que en los ejercicios con naturales.

Frecuencias de los métodos de alternativos y de columnas con naturales y con decimales

	Enteros	Decimales
Métodos alternativos	507	385
Métodos de columnas	130	233

Los datos del POSTR revelan que la gran mayoría de los estudiantes actuaron con flexibilidad. No sólo se desanclaron de los métodos de columnas, sino que en su mayoría prefirieron los métodos alternativos en más de la mitad de los ejercicios, tanto en los enteros como en los decimales, aunque más veces en los primeros que en los segundos, ya que hubo unos pocos estudiantes que siendo flexibles con los naturales no lo fueron con los decimales.

V.3.1.4 Disponibilidad

Se estudian aquí los tipos de métodos alternativos observados.

Los estudiantes utilizaron un amplio abanico de métodos con enfoques diversos, alguno de ellos ya fueron descritos en el PRER.

Para evitar repeticiones, ahora sólo se recoge un ejemplo representativo de los que entonces no aparecieron. Después se compendian en un esquema-resumen y se recogen en una tabla sus frecuencias.

2 METODOS DE DESCOMPOSICION-DISOCIACION

2.1 Disociar descabezando.

2.1.2 Descabezando los dos datos o primeros dígitos.

2.1.2.3 Con préstamo tomado del parcial.

737-289= "37-89=>48 (llevo 1. No puedo trabajar con negativos) 700-200=500-100 (la centena que llevo de antes) =400".

2.1.2 4 Mixto: Combinación de descabezar e incrementar.

737-289=. "al 700 le he quitado el 200 al 37 le he sumado 3 y al 89 le sumo1 por lo tanto resto 40-80 y me queda -50 y le resto 500-50 y le vuelvo a restar 2 que me da la diferencia".

3 METODOS DE COMPENSACION

3.1 Compensaciones intermedias-Conservar.

3.1.2 Doble suma para hacer redondo el minuendo.

634-75=559. "(634+6)-(75+6)=640-81=640-80-1=559".

3.1.3 Doble resta para truncar el minuendo.

481-186=295. "Resto 1 a los dos 480-185".

3.2 Compensaciones finales-Redondear.

3.2.3 Doble Redondeo, tanto del minuendo como del sustraendo.

245-197=48. "Sumo 5 al 245=250. sumo 3 al 197=200. Resto 250-200=50. Resto 5-3=2. Resto 50-2=48".

3.3 Compensaciones finales-Incrementos subsidiarios.

3.3.1 Incremento del minuendo para obtener la misma terminación que el sustraendo.

481-186. "A 481 le sumo 5 y así los dos números tienen la misma terminación (481+5=486) Después resto los 86 y el 400 y el 200".

3.3.2 Incremento del sustraendo para obtener la misma terminación que el minuendo.

24,3-7,5=16,8. "24,5-7,5=17; 17-0,2=16,8".

Esquema-resumen de estrategias y métodos del POSTR

1 COLUMNAS

- 1.1 Resta Llevando
- 1.2 Resta Prestando
- 1.3 Resta Complementando

2 DESCOMPOSICION-DISOCIACION

- 2.1 Descabezar
  - 2.1.1 Descabezando un dato
  - 2.1.2 Descabezando los dos datos o Primeros Digitos
- 2.2 Subsidiar
  - 2.2.1 Haciendo la misma terminación
  - 2.2.2 Prestando del minuendo a una resta parcial
  - 2.2.3 Por patrones numéricos

3 COMPENSACION

- 3.1 Compensaciones intermedias-Conservar
- 3.2 Compensaciones finales-Redondear
- 3.3 Compensaciones finales-Incrementos subsidiarios

4 RECUENTO

- 4.1 Contando a saltos

Se adjunta a continuación, en la página siguiente, una tabla que recoge las frecuencias de estos métodos usando los mismos códigos que en este esquema. No se recogen las frecuencias de los enfoques para no ser excesivamente detallistas.

Tabla de frecuencias de los métodos y estrategias del POSTR.

	737-289	634-75	1400-67	5481-186	245-197	14-7,75	2,32-1,67	54,7-18,9	24,3-7,5	46,1-16,6	Tot
1	35	26	25	26	18	35	65	54	53	36	371
2											337
2.1											177
2.1.1	9	14	35	3	3	9	4		4	3	84
2.1.2	8	1	11	17	3	4	7	8	9	25	93
2.2											160
2.2.1	3	3	5	64			10		8	39	133
2.2.2		2	13			2	1	1	1	3	23
2.2.3		1	1			2	1				5
3											527
3.1	25	5	4	5	22	10	12	20	12	8	123
3.2	41	70	36	6	71	54	20	38	23	5	364
3.3	1	2		12			2	2	14	7	40
4											
4.1	3	2	3		4	7	4	3	3		29

De los datos recogidos se sigue que los estudiantes usaron los métodos alternativos, aparte de los métodos de columnas y de recuento, con este orden de preferencia:

Frecuencias de los métodos

Redondear	364
Misma terminación	132
Conservar	123
Descabezar los 2 datos	93
Descabezar un dato	84
Incremento	40
Disociar prestando	23
Disociar por patrones	5

Todos ellos son métodos históricos, salvo el Incremento subsidiario, que es una variante del redondeo, en la que en vez de tomar la decena, centena superior del sustranedo, se toma la del minuendo. Este método fue por tanto inesperado.

Por otra parte, todos los métodos alternativos se utilizaron tanto en los ejercicios con números enteros como con decimales.

Frecuencias de los métodos	con enteros	con decimales
Redondear	224	140
Misma terminación	75	57
Conservar	61	62
Descabezar los 2 datos	40	53
Descabezar un dato	64	20
Incremento	15	25
Disociar prestando	15	8
Disociar por patrones	2	3

No obstante, se observaron diferencias en cuanto al orden de preferencia con que se usaron los métodos alternativos, según los datos fueron enteros o decimales. En efecto, aunque el más frecuentado, redondear lo fue en ambos casos, Descabezar un dato fue significativamente más preferido en los ejercicios con enteros que Descabezar los dos datos, y al revés, Descabezar los dos datos fue más preferido en los ejercicios con decimales que Descabezar un dato.

Esto hace pensar en que los números decimales se ven como partes separables, que hay que operar reagrupando las que son homogéneas o del mismo tipo, que los números naturales se ven como compuestos de unidades, decenas, centenas, etc., que hay que sumar reagrupando según su orden de unidad. Esto, por otra parte, hace pensar también, que para muchos estudiantes está latente la concepción incorrecta de que los números decimales son parejas de números separados por la coma.

V.3.1.5 La forma de operar la coma decimal

La mayoría de los estudiantes flexibles operaron los ejercicios con números decimales aplicando los métodos directamente, es decir, sin deprenderse de la coma decimal para operar los datos como si fueran enteros y recuperarla al finalizar el cálculo.

No obstante, algo más de una décima parte de los estudiantes operaron alguna vez los datos decimales indirectamente, es decir tratándolos como enteros. Esta técnica fue aplicada casi todas las veces por estudiantes del grupo de éxito, es decir, estudiantes que no cometieron ningún error, lo que hace pensar en que es una técnica de expertos.

V.2.3 Análisis de las respuestas en el postest de multiplicar
(En adelante POSM)

Ejercicios:

$4,1^2$	47x0,25	26x35	37x98	31x42	2,4x0,15	64x75	2,8x0,45	4,9x5,1	19x18

Muestra: Contestaron 128 estudiantes: 61 del grupo C y 67 de EE.

V.2.3.1 Exito

El 78% de los estudiantes cometieron algún fallo, es decir que contestaron incorrectamente al menos una vez.

Porcentaje de estudiantes que cometieron algún fallo en el POSM

Nº de estudiantes	Fallaron alguna vez	No fallaron nunca
128	100=78%	28=22%

Las frecuencias de los fallos que se dieron en los ejercicios con decimales fueron siempre mayores que las que se dieron en los ejercicios con naturales, salvo en el caso 19x18. Siendo el ejercicio en el que más fallos se dieron el 4,9x5,1 y el que menos el 37x98.

Frecuencias de los fallos que se dieron en cada ejercicio

$4,1^2$	47x0,25	26x35	37x98	31x42	2,4x0,15	64x75	2,8x0,45	4,9x5,1	19x18
39=10%	41=11%	25=7%	26=7%	25=7%	42=11%	29=8%	50=14%	52=14%	40=11%

Total de fallos con los naturales y con los decimales

Naturales	Decimales	Totales
136=39%	211=61%	347

El 26% de los estudiantes que cometieron fallos lo hicieron exclusivamente en los ejercicios con decimales, mientras que sólo el 13% los cometieron exclusivamente con los naturales

Estudiantes que cometieron fallos exclusivamente con naturales o con decimales

Cometieron algún fallo	100
Cometieron fallos con naturales y decimales	61%
Exclusivamente con naturales	13%
Exclusivamente con decimales	26%

Estos datos revelan una mayor problemática en los ejercicios con números decimales que en los ejercicios con números naturales.

V.3.2.2 Tipos de respuesta incorrecta observados

Los estudiantes cometieron fallos de una gran variedad de tipos. A continuación se presenta un ejemplo de aquéllos que son diferentes a los que ya se reseñaron en el PREM.

1 ESPECIFICO CON LOS DECIMALES

1.5 Ubicación incorrecta de la coma decimal, en una nueva modalidad:

1.5.3 Contabilización de ceros a la derecha de la última cifra significativa, en la cuenta del número de cifras decimales para ubicar la coma decimal.

2,4x0,15=0,036. "2,4x0,15=1,2x0,30=0,6x0,60=0,036".

2 DE CALCULO INTERMEDIO

2.2 Contabilización incorrecta de los ceros en el resultado, al multiplicar por números acabados en ceros, en la modalidad

2.2.2 Ceros de más.

19x18=3582. "He hecho 20x18 y me da 3600. luego le quito 18 y tengo 3582".

2.4 Cifra recuperada distinta a la calculada.

37x98=9626. "He multiplicado 7x98 y me da 686 y después 3x98 y me da 294, pero como el 3 ocupa el lugar de las decenas se corre un lugar y se suma".

Nota: sumó 686
+294 pero escribió 9626 en vez de 3626.
3626

4 DE ALGORITMO O PROCEDIMIENTO

4.8 Doble Redondeo con compensación impropia, por no reconocimiento de los productos intermedios en cruz

2,8x0,45=1,4. "He redondeado 2,8 a 3. Luego he redondeado 0,45 a 0,5. Multiplico 3 por 0,5 que es 1/2 y da 1,5. Luego multiplico 0,2 x0,05 y da 0,1. Se lo resto 0,1 a 1,5 y da 1,4".

4.9 Añadir y quitar impropio, multiplicando en vez de los datos dados los que resultan al aumentar uno y disminuir el otro en la misma cantidad.

64x75=4830. "Al 75 le quito 5, y al 64 le pongo 5, de manera que queda 69x70; (multiplico por un número más fácil y me da el mismo resultado)".

4.10 Factorización tomando los factores como sumandos.

64x75=1200. "8x75=600+8x75=600".

4.11 Doble incremento con compensación impropia, multiplicando en vez de los datos dados los que se obtienen al incrementar ambos en la misma cantidad.

47x0,25=47,75. "(47+0,75)x(0,25+0,75)=(47+0,75)x1=47,75".

4.12 Columnas con fila cambiada.

4,9x5,1=7,35. "He multiplicado 49x1=49 y luego 49x5=245 lo he desplazado un lugar y lo he sumado 735 y después pongo las comas.

Nota: Sumó así: 245
+49

4.13 Descabezamiento restando los productos parciales en vez de sumarlos.

64x75=4200. "He redondeado 64 a 60 y lo he multiplicado por 75, que da 4500. Luego he multiplicado 4x75 que da 300, y a 4500 le resto 300 y da 4200".

4.14 Doble descabezamiento con productos parciales impropios.

31x42=1304. "30x40=1200; 1x42=42; 2x31=62 1200+42+62=
1200+104 =1304".

31x42=1262. "30 veces 40+30 veces 2 + 2".

4.15 Cuadrática incorrecta.

4.15.1 Desarrollo incorrecto del Cuadrado del Binomio: $(a+b)^2=$ a^2+b^2+2a+b

4.11 Doble incremento con compensación impropia, multiplicando en vez de los datos dados los que se obtienen al incrementar ambos en la misma cantidad.

47x0,25=47,75. "(47+0,75)x(0,25+0,75)=(47+0,75)x1=47,75".

4.12 Columnas con fila cambiada.

4,9x5,1=7,35. "He multiplicado 49x1=49 y luego 49x5=245 lo he desplazado un lugar y lo he sumado 735 y después pongo las comas.

Nota: Sumó así: 245
+49

4.13 Descabezamiento restando los productos parciales en vez de sumarlos.

64x75=4200. "He redondeado 64 a 60 y lo he multiplicado por 75, que da 4500. Luego he mutiplicado 4x75 que da 300, y a 4500 le resto 300 y da 4200".

4.14 Doble descabezamiento con productos parciales impropios.

31x42=1304. "30x40=1200; 1x42=42; 2x31=62 1200+42+62=
1200+104 =1304".

31x42=1262. "30 veces 40+30 veces 2 + 2".

4.15 Cuadrática incorrecta.

4.15.1 Desarrollo incorrecto del Cuadrado del Binomio: $(a+b)^2=$ a^2+b^2+2a+b

$4,1^2=24,21$. "4,1 descompongo en 4+0,1 y con esto hago, el cuadrado del primeros + el cuadrado del segundo + 2 veces el primero más el segundo"

4.15.2 Fórmula incorrecta: $(a-b)(a+c)=a^2-b$; $(a-b)(a+c)=(a-b)^2$

4,9x5,1=24,9. "5x5-0,1=25-0,1=24,9".

4,9x5,1=24.01. "5,1=(5+0,1), 4,9=(5-0,1), (5-0,1)x(5+0,1)=$(5-0,1)^2$= 25+ 0,01 -1=24,01".

7 OTROS TIPOS

Se incluyen aquí otros tipos de respuesta que no encajan en las anteriores categorías.

7.1 Dato calculado distinto al dado.

2,4x0,15=1,776. "He multiplicado 24x100 (sin considerar decimales) =2400 y luego he multiplicado 24x25=624 y me ha dado al restar 2400-624=1,776".

Nota: Confundió 0,15 con 0,75. Además comete error de cálculo.

7.2 Expresión equivalente falsa: 0,25=10/4; 25=100/5; 75=100/4, ...

47x0,25=117,5. "47x10/4=11,75x10=117,5".

26x35=735. "(35x100/5)+35".

64x75=1600. "1º) 75 es 100/4. 2º) divido 64/4=16. 3º) multiplico 100x16=1600".

Esquema-resumen de los tipos de respuesta incorrecta

1 ESPECIFICO DE LOS DECIMALES
- 1.1 No recuperación de la coma decimal
- 1.2 Eliminación-recuperación impropia de la coma
- 1.3 Producto incorrecto de decimales de la forma 0,1x0,1
- 1.4 Resultado incompleto por división equivalente
- 1.5 Ubicación incorrecta de la coma decimal

2 DE CALCULO INTERMEDIO
- 2.1 Cálculo parcial con resultado incorrecto
- 2.2 Contabilización incorrecta de los ceros del resultado
- 2.3 No recuperación de los ceros apartados
- 2.4 Cifra recuperada distinta a la calculada

3 AL "LLEVAR"
- 3.1 No reconocimiento, o no evocación de la cifra que se "lleva"

4 DE ALGORITMO O PROCEDIMIENTO
- 4.1 Primeros dígitos impropio
- 4.2 Incremento y compensación impropia
- 4.3 Descabezamiento encadenando
- 4.4 Descomposición tomando el 2º parcial sobre el descompuesto
- 4.5 Descabezamiento con no reconocimiento del cero de orden de unidad
- 4.6 Columnas con fila no desplazada
- 4.7 Algoritmo incompleto
- 4.8 Doble redondeo con compensación impropia
- 4.9 "Añadir y quitar" impropio
- 4.10 Factorización tomando los factores como sumandos.
- 4.11 Doble incremento con compensación impropia
- 4.12 Columnas con fila cambiada
- 4.13 Descomposición restando en vez de sumando los parciales
- 4.14 Doble descabezamiento con productos parciales impropios
- 4.15. Cuadrática incorrecta

5 NO DESCIFRADOS

6 RESPUESTA EN BLANCO

7 OTROS TIPOS
- 7.1 Dato calculado distinto al dado
- 7.2 Expresión equivalente equivocada

Frecuencias de los tipos de respuesta incorrecta observados

	$4,1^2$	47x0,25	26x35	37x98	31x42	2,4x0,15	64x75	2,8x0,45	4,9x5,1	19x18	
1											58
1.1		3						1	2		6
1.2	1	3				8		6	2		20
1.3	5										5
1.4		8									8
1.5	4					6		7	2		19
2											84
2.1	3	11	4	10	7	5	6	6	2	9	63
2.2			1	5		1	1			2	10
2.3			2		4	1	1	1			9
2.4				2							2
3											7
3.1			2							5	7
4											132
4.1	17		4	1	4	2	3	3	2	3	39
4.2		1		5		1		2	2	5	16
4.3			3	1		1		1		1	7
4.4			1		1				2		4
4.5	2	1					1			1	5
4.6			1							1	2
4.7		1		1			1		1		4
4.8								1			1
4.9			2	1	1	1	2	1	17	1	26
4.10					1		1			1	3
4.11		1				1		1	1		4
4.12						1			1		2
4.13			1		2		1		1		5
4.14	1	1	2		2		2	1	1		10
4.15	1								3		4
5	2				2	1	2	2	1	2	12
6	3	8	1		1	12	3	17	12	9	66
7											10
7.1						1	1				2
7.2		3	1				4				8
Tot	39=10%	41=11%	25=7%	26=7%	25=7%	42=11%	29=8%	50=14%	52=14%	40=11%	369

Entre los grupos de respuesta incorrecta observados en el POSM, los más frecuentes fueron con mucho los de algoritmo, seguidos, por este orden, por los de cálculo intermedio, las respuestas en blanco, y los específicos con los decimales. El tipo particular de fallo con mayor incidencia fue el de cálculo parcial de resultado equivocado, a continuación le siguen por este orden: Primeros dígitos impropio, añadir y quitar impropio, eliminación-recuperación de la coma

decimal, ubicación incorrecta de la coma decimal, incremento y compensación impropia, etc.

V.3.2.3 Flexibilidad

Se estudia aquí la dependencia de los métodos de Columnas.

El porcentaje de estudiantes que estuvieron anclados en el método de columnas, es decir, que no hicieron uso de ningún otro método, fue del 6%.

Porcentaje de estudiantes anclados en los métodos de columnas

Nº de estudiantes	Anclados en Columnas	No anclados
128	8=6%	120=94%

El porcentaje de estudiantes que prefirieron los métodos de columnas, es decir que los usaron en más de la mitad de los ejercicios, fue el 20%.

Porcentaje de estudiantes que usaron preferentemente columnas

Nº de estudiantes	Prefirieron Columnas	No prefirieron Columnas
128	25=20%	103=80%

Una décima parte de los estudiantes flexibles lo fueron únicamente en los ejercicios con naturales. En otras palabras, se anclaron en los métodos de Columnas cuando los datos eran decimales, pero no cuando eran naturales.

Nº de estudiantes flexibles	Anclados en decimales, flexibles con naturales
120	14/120=12%

La frecuencia con que se usaron los métodos alternativos en los ejercicios con números decimales fue ligeramente inferior a la

frecuencia con que se usaron los métodos alternativos en los ejercicios con números naturales, en todos los casos menos en uno.

Tabla de frecuencias de métodos alternativos a columnas usados en cada ejercicio.

$4,1^2$	47x0,25	26x35	37x98	31x42	2,4x0,15	64x75	2,8x0,45	4,9x5,1	19x18
125	120	129	122	126	111	127	106	103	116

En general los estudiantes usaron los métodos de columnas más veces en los ejercicios con decimales que en los ejercicios con naturales.

Frecuencias de los métodos alternativos y de columnas con naturales y con decimales

	Con naturales	Con decimales
Métodos alternativos	620	565
Métodos de columnas	166	250

Los datos del POSM revelan que revelan que la gran mayoría de los estudiantes actuaron con flexibilidad. No sólo se desanclaron de los métodos de columnas, sino que en su mayoría prefirieron los métodos alternativos en más de la mitad de los ejercicios, tanto en los enteros como en los decimales, aunque más veces en los primeros que en los segundos, ya que hubo unos pocos estudiantes (12%) que siendo flexibles con los naturales no lo fueron con los decimales.

V.3.2.4 Disponibilidad

Se estudian aquí los tipos de métodos alternativos observados.

Los estudiantes utilizaron un amplio abanico de métodos con diversos enfoques. Algunos de ellos ya fueron descritos en el PREM, el resto se describen a continuación y se compendian en un esquema-resumen que se completa con la tabla de sus frecuencias.

1 ARTIFICIOS

1.2 Reglas.

1.2.1 Cruceta.

26X35=910. "5X6=30 (2X5)+(3X6)+3=31; 2X3+3=9".

1.2.2 Tabla Mayor.

19x18=342. "19+8=27 y le añado un 0=>270. 9x8=72 y se lo sumo a 270 270+72=342".

1.3 Fórmulas.

1.3.1 Cuadráticas.

1.3.1.1 Cuadrado del binomio.

$4,1^2=16,81$. "$(4+0,1)^2=16+2x4x0,1+0,01=16,81$".

1.3.1.2 Diferencia de cuadrados.

$4,9x5,1=24,99$. "$(5-0,1)x(5+0,1)=5^2-0,1^2=25-0,01$".

2 METODOS DE DESCOMPOSICION.

2.1 Disociar

2.1.3 Disociar subsidiariamente.

26x35=910. "35x25=875+35=910".

64x75=4800. "64x1/2x100+64x1/4x100".

UNIVERSITAT DE VALENCIA BIBLIOTECA DE CIENCIES

19x18=344. "Multiplico 18x18+18. o sea hago primero el cuadrado de 18 de cabeza y luego sumo 18".

26x35=910. "(25+1)x(25+10)=625+250+25+10=910".

26x35=910. "25x30=750; 1x30=30; 750+30=780; luego 25x5=125; 1x5=5; 125+5=130; 780+130=910".

2,8x0,45=1260. "(30-2)x(40+5)=1200+150-80-10=1350-50-40=1260".

3 METODOS DE COMPENSACION

3.1 Compensaciones (Intermedias).

3.1.3.Promediar.

26x35=910. "Multiplico 26x30=780; le sumo el resultado de 26x40= 1040; lo divido por 2".

3.2 Compensaciones finales.

3.2.2 Incremento Subsidiario.

47x0,25=11,75. "48x25=1200-25=1175".

Esquema resumen de las estrategias y métodos del POSM.

1 ARTIFICIOS
- 1.1 Columnas
  - 1.1.1 Cifras aisladas o cifra a cifra
  - 1.1.2 Cifras tomadas juntas o Grupos de cifras
  - 1.1.3 Completando las filas con ceros
  - 1.1.4 Símil cruceta
- 1.2 Reglas
  - 1.2.1 Cruceta
  - 1.2.2 Tabla Mayor
- 1.3 Fórmulas
  - 1.3.1 Cuadráticas

2 METODOS DE DESCOMPOSICION
- 2.1 Disociar
  - 2.1.1 Descabezar un dato
  - 2.1.2 Descabezar los dos datos
  - 2.1.3 Disociar subsidiariamente
- 2.2 Factorizar
  - 2.2.1 Factores simples.

3 METODOS DE COMPENSACION
- 3.1 Compensaciones intermedias
  - 3.1.1 Alicuotar
  - 3.1.2 Doble y Mitad
  - 3.1.3 Promediar
- 3.2 Compensaciones finales
  - 3.2.1 Redondear
  - 3.2.2 Incremento subsidiario

4 RECUENTO
- 4.1 Repetición de Grupo.

Tabla de frecuencias de métodos observados en el POSM

	$4,1^2$	47x0,25	26x35	37x98	31x42	2,4x0,15	64x75	2,8x0,45	4,9x5,1	19x18	
1											416
1.1											347
1.1.1	48	13	16	11	15	27	12	21	25	12	200
1.1.2	5	5	9	7	7	8	7	7	6	4	65
1.1.3			3	2	3	2	2	2	1		15
1.1.4	12	3	7	3	8	7	9	7	5	6	67
1.2											33
1.2.1	1	2	6	1	6	2	3	3	2	2	28
1.2.2										5	5
13											36
1.3.1	24								12		36
2	10	6	61	6	77	38	36	24	28	20	305
21											291
2.1.1	10	5	44	6	74	36	25	21	26	13	260
2.1.2					1		1				2
2.1.3		1	15		1	1	3	2	2	4	29
2.2			2		1	1	6	1		3	14
3											388
3.1											172
3.1.1		83	3			5	34	4	2		131
3.1.2		1	8			14	3	13			39
3.1.3		1	1								2
3.2											216
3.2.1		2	6	91	2	6	19	20	8	56	210
3.2.2		2								4	6
4											7
4.1			3		2			2			7

De los datos de la tabla se sigue que los estudiantes usaron, además de los métodos de columnas y de recuento, todos los métodos

históricos. Concretamente en este orden de preferencia: Disociar descabezando un dato, Redondear, Alicuotar, Doble y mitad, Cuadráticos, Disociar subsidiariamente, Cruceta y Factorizar. Todos se dieron con naturales y con decimales, salvo los Cuadráticos, que sólo se dieron con los decimales. Los demás tuvieron frecuencias poco significativas, no obstante, la mayoría de ellos también se dieron en los dos tipos de ejercicios.

Frecuencias	decimales	naturales
Descabezar un dato	98	162
Redondear	36	175
Alicuotar	94	36
Doble y mitad	28	11
Cuadráticos	36	0
Cruceta	10	18
Disociar subsidiariamente	6	23
Factorizar	2	13
Incremento subsidiario	2	4
Descabezar los dos datos	0	2
Promediar	1	1

Los datos del POSM revelan que los estudiantes usaron los métodos históricos, siendo el Redondeo y el Descabezamiento de un dato los más frecuentes. Todos los métodos fueron usados tanto en los ejercicios con naturales como con decimales, salvo los métodos Cuadráticos y el Descabezamiento de los dos datos.

V.3.2.5 La forma de operar la coma decimal

Los estudiantes operaron los ejercicios con números decimales aplicando los mismos métodos que aplicaron en los ejercicios con números naturales, pero lo hicieron principalmente de tres modos bien diferenciados:

Uno, directo, que consistió en aplicar los métodos sobre los números decimales de la misma manera que si fueran naturales; es decir, descomponiéndolos, redondeándolos, haciendo uso de la alteración invariante "doble y mitad", etc.

$4,1^2$="4,1x4,1=; 4,1x4=16,4; 4,1x0,1=0,41; 16,4+0,41=16,81".

Y dos, indirectos, que consistieron en:

a) Hacer abstracción de la coma decimal para operar los datos como si fueran naturales, transfiriendo la regla de sumar las cifras decimales de los factores.

b) Reducir los datos a números naturales sustituyendo por fracción decimal (1), fracción equivalente (2), o multiplicando y dividiendo por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales suman los datos.

(1) 47x0,25=11,09. "Multiplico 50x25, lo que me da le resto 3x47 y luego divido por 100"

(2) 47x0,25= "47x1/4=47:4=11,75".

(3) 2,8x0,45=1,260. "He hecho 2,8x10=28 y 2,8:2=14. Luego 0,45x100=45. 45x2=90. 90x14=1260. Luego 1260:1000=1,260.

La mayoría de los estudiantes optaron por aplicar los métodos indirectamente, siendo la opción más frecuentada la de reducir a naturales transfiriendo la regla del algoritmo de columnas. No obstante, hubo un número significativo de estudiantes que optaron por aplicar los métodos directamente.

Aplicaron métodos directamente	28
Aplicaron métodos indirectamente transfiriendo la regla de col.	43
Aplicaron los métodos indirectamente reduciendo a naturales	84

V.3 ANALISIS DE LA PROBLEMATICA OBSERVADA EN LAS PRUEBAS

V.3.1 La problemática emergente al calcular mentalmente

1. Básicamente los estudiantes dieron dos tipos de respuesta incorrecta en las pruebas tipo test: Una es el fallo que puede ser achacado a un descuido o falta de memoria, y la otra es el fallo que podría ser sintomático o indicio de un verdadero error, esto es, un conocimiento malentendido y consolidado que los estudiantes no reconocen como error porque les parece verdadero.

2. También se dieron respuestas en blanco, o falta de respuesta, que podría significar tanto abandono por cansancio como por un sentimiento de incapacidad.

3. En cuanto a la transferencia de las reglas de los algoritmos de columnas para operar la coma decimal a los métodos alternativos, se dieron dos posibilidades: los que las transfirieron y los que no, bien porque no fueron capaces, bien porque no lo consideraron necesario ya que podían operar sin necesidad de hacerlo.

Estos tres puntos revelan la existencia de una problemática especifica del cálculo que emerge cuando es mental y alternativo, mientras que permanece oculta cuando sólo es escrito y de columnas.

A continuación se aborda el análisis de esta problemática a partir de las manifestaciones de los estudiantes en las pruebas tipo test, donde se pidió a los estudiantes que describieran la forma en que habían procedido, y en las entrevistas individuales que se llevaron a cabo con algunos de ellos.

El objetivo de las entrevistas era hacer una exploración con el fin de confirmar o rechazar la índole sintomática de los tipos de fallos que

cometieron los estudiantes en las pruebas test. El estilo fue el de darles a repasar su propio documento, poniéndoselo delante. Se les pedía que pensaran sobre su respuesta, si estaba bien o mal, y si era razonable su procedimiento. Cuando no veían nada anormal, se les pedía que resolvieran usando el método de columnas para que hicieran comparaciones. Tras esto, si ellos no eran capaces de encontrar explicación a su problema, se les hacían propuestas usando el lenguaje algebraico de igualdades y paréntesis, o bien se les hacía reflexionar sobre el significado y efecto en el resultado de las alteraciones que habían realizado.

Nota 1. Como quiera que las entrevistas se desarrollaron sentando en la misma mesa a dos estudiantes, a veces las conversaciones se interfieren, porque uno de los dos está escuchando lo que se habla con el otro. No obstante las preguntas que hace el entrevistador son individuales.

Nota 2. Los comentarios entre paréntesis que aparecen en las transcripciones de los protocolos son incisos aclaratorios sobre el sentido de las frases, obligados porque el lenguaje coloquial utilizado no es tan preciso como debiera ser, y porque éste va acompañado de señalamientos, gestos y ademanes.

V.3.2 Análisis de la problemática identificada

De las manifestaciones de los estudiantes en los documentos de las pruebas y en las entrevistas realizadas sobre su desempeño, parece desprenderse la existencia de dos tipos de respuestas incorrectas, las que son debidas a descuidos o faltas de memoria, y las que son debidas a concepciones que son malentendidos, instalados y consolidados, estas segundas son verdaderos errores y así se entenderán en lo que sigue.

Estos errores parece que pueden explicarse en términos de tres tipos de teoremas implícitos, o reglas de acción autofabricadas y nunca enseñadas. A saber:

1. Extrapolaciones o inserciones improcedentes de alguna regla de los algoritmos de columnas o de otros métodos.

2. Generalizaciones de métodos, válidos en unas situaciones, a otras situaciones donde no lo son.

3. Centramientos, en el dato o cifra alterada, en vez de en el efecto de la alteración.

V.3.2.1 Teoremas implícitos en la resta

En el PRER.

Los estudiantes cometieron fallos de cinco tipos diferentes, de los cuales dos podrían ser de descuido o de memoria:

Cálculo parcial con resultado incorrecto.

No reconocimiento o no recuperación de la cifra que se "lleva".

y los otros tres podrían sintomáticos o indicativos de verdaderos errores:

No reconocimiento u olvido de la forma inicial "0," (cero coma).

No reconocimiento de los ceros a la derecha de la coma decimal.

Resta en vez de suma en el redondeo del sustraendo.

En el POSTR.

Los estudiantes cometieron fallos de quince tipos, de ellos cinco parecieron de descuido o de memoria, los mismos dos ya observados en el PRER, y estos otros tres:

Cálculo del complemento aritmético incorrecto.

Disociar con cifras incorrectas.

Algoritmo incompleto.

Los nueve restantes parecieron verdaderos errores, los mismos tres observados en el PRER, y estos otros seis:

Ubicación errónea de la coma decimal, al ponerla en el resultado en el lugar que corresponde a la suma del número de las cifras decimales de los datos.

Ubicación incorrecta de la cifra que se "lleva".

Resta en vez de suma de los resultados parciales en la descomposición del minuendo.

Suma en vez de resta de los resultados parciales (en el descabezamiento de los dos datos cuando el resultado de un parcial es negativo).

Suma en vez de resta de los resultados parciales (en la descomposición del sustraendo para obtener la misma terminación que el minuendo).

Suma en vez de resta de los resultados parciales (en el incremento del minuendo para obtener la misma terminación que el sustraendo).

En el cómputo total, la incidencia de los fallos de descuido o de memoria fue, en el PRER, superior a la de los errores, mientras que en el POSTR, fue análoga. Esto se explica porque en el POSTR aumentó la utilización de métodos alternativos lo que hizo emerger concepciones

de los estudiantes conducentes a error, que permanecieron ocultas mientras usaban los algoritmos de columnas mentalmente.

A continuación se estudian con detalle cada uno de los errores observados con el fin de precisar el tipo de teoremas implícitos que podría explicarlos.

Errores que parecen reglas extrapoladas

1. El error de ubicación de la cifra que se "lleva", al añadirla a la cifra inmediata del minuendo en vez de a la del sustraendo,

> 54,7-18,9=37,8. "De 17 a 9 me da 8 y llevo una. De 15 a 8 me da 7 y llevo una. A 5 le quito 2 porque una de ellos es la que llevaba del anterior".

podría ser una extrapolación de la regla de "llevar"una unidad a la cifra inmediata del minuendo, cuando la correspondiente del sustraendo es mayor, que indicaría falta de dominio y significación de los pasos del algoritmo estándar.

La entrevista con Lourdes apunta en este sentido, ya que revela que no sabe con seguridad adonde va la cifra que lleva: "muchas veces la que me llevo igual la pongo aquí que aquí".

Desarrollo de la entrevista:

P. Mira lo que haces (en 54,7-18,9=37,8).

L. De 17 a 9 me da 8 y me llevo una. Luego a 5 le quito. Humm. Está mal, ¿no?

P. Sí. ¿Por qué crees que está mal?

L. Hombre, porque. Espérate. De 17 a 9, 8 y llevo una, ahora la comita. Sería de 14 le quito 9.

P. A ver.

L. Trae. Lo hago otra vez. (Escribe 54,7-18,9 en columnas y obtiene 35,8) ¿Da esto?

P. Ahora lo haces bien. Ya sé lo que hacías. Dices de 17 a 9, 8, y llevo una. Pero esa una que llevas, en lugar de decir ahora de 8 a 14, la ponías aquí (señalando el 4 del minuendo en: 54,7-18,9).

L. Ahí.

P. Y decías de 15 a 8.

L. A 8.

P. Pero te pasó otra vez. Te pasó dos veces.

L. Sí. Es que muchas veces la que me llevo igual la pongo aquí que aquí (señalando arriba y abajo).

P. Pero tú tienes claro que se lleva aquí abajo.

L. Sí.

P. ¿Y sabes por qué?

L. No.

2. El error de suma en vez de resta de los resultados parciales, en el descabezamiento de los dos datos cuando el resultado de un parcial es negativo, o, lo que es lo mismo, cuando la parte que hace de

minuendo parcial es menor que la parte correspondiente que hace de sustraendo parcial,

> 737-289=552. "Primero descompongo y resto por una parte el 700-200=500 y por otra 89-37=52 después he sumado el 500+52=552".

podría ser una extrapolación de la regla para hallar la diferencia de dos números que consiste en quitar el menor del mayor. Esta regla está fuertemente influida por la manera infantil de acceder al concepto, ya que es frecuente oír que la resta es quitar el menor del mayor, o que en la resta se pone el menor debajo.

Además, este error indica un no reconocimiento de resultados parciales negativos en el cálculo aritmético, probablemente como consecuencia de que la aparición de los números negativos se hace en un momento en el que ya ha terminado el aprendizaje de los algoritmos escritos.

En el ejemplo, el estudiante le da la vuelta a los números que va a restar como si el mayor estuviera donde no debe, y después no reconoce el signo que debe acompañar al parcial obtenido.

La entrevista con Inma apunta en este sentido. Ella afirma que no cae en la cuenta de que puede usar resultados negativos: "No. Ahora sí que lo veo, pero de entrada no. Yo creo que no".

Desarrollo de la entrevista.

P. Hazlo (54,7-18,9) mentalmente. ¿Te da 35,8?

I. Sí.

P. ¿Qué es lo que has hecho?

I. Pues, en columnas. Yo cuento de 9 a 17, 8, a 8 le sumo 1. O sea, 8 y 1, 9; hasta 14. Después, 1 y 1, 2, hasta 5, le quito 2 y quedan 3.

P. Eso lo has hecho ahora en columnas, pero el otro día hiciste una especie de "primeros dígitos". O sea, restaste por un lado la parte entera y por otro la parte decimal. Vamos a ver si eres capaz de hacerlo ahora. A ver, ¿cómo lo harías? ¿Sabes lo que te quiero decir?

I. Sí.

P. ¿Crees que podrías?

I. No.

P. ¿Ahora no podrías?

I. No.

P. ¿Por qué?

I. Porque si lo hago así no tengo en cuenta la que me llevo.

P. ¿Estás segura? ¿No podrías restar 54-18?

I. Sí podría y luego le quitaría uno al número final que me diera.

P. ¿Para qué?

I. Para. O sea, es lo que me llevaría de antes, la que me llevaría del 9 hasta el 17.

P. O sea, harías. ¿Cómo lo harías?

I. 54-18 que son 36.

P. ¿Qué más?

I. Pues, ahora al 6 le quitaría 1, que sería lo que llevaría de antes (señala el 7 y el 9 de 54,7-18,9).

P. De acuerdo, serían 35, ¿y qué más?

I. Pues, ahora de 9 a 17.

P. ¿Y son, cuánto? ¿Entonces el resultado cuánto sería?

I. 35,8.

P. Bien. Tú sabes restar de cabeza 0,7-0,9

I. ¿0,7-0,9? No.

P. ¿Qué harías? ¿Qué se te ocurre? Porque si supieras restar 0,7-0,9 sería más fácil (restar 54,7-18,9), 54-18, ¿y luego qué? ¿0,7?

I. Menos 0,9

P. ¿Se podría hacer así?

I. Sí.

¿Y cómo lo haríamos? A ver, 54-18 son 36 y. O sea, vamos a ver, por un lado 54-18 y por otro 0,7-0,9, ¿qué son?

I. ¿?

P. ¿Eso es lo que no sabes?

I. Eso es lo que no sé. Claro. No lo sé.

P. En cambio, si el 7 estuviera aquí (en vez del 9 del 18,9 haciendo 18,7) y el 9 aquí (en vez del 7 del 54,7 haciendo 54,7). Me explico 54,9-18,7. ¿Esto lo sabrías hacer?

I. Sí.

P. ¿Cómo lo harías?

I. Aquí te quedaría 0,2. O sea, 0,9-0,7=0,2.

P. ¿Y luego qué?

I. Y luego ese 0,2 se lo añadiría al resultado que me dé 54-18.

P. ¿Que son cuánto?

I. 36. Sería en total 36,2.

P. ¿Luego, así sí que sabrías hacerlo?

I. Sí.

P. En cambio, aquí no. Pero 0,7 menos 0,9 es menos 0,2.

I. Claro.

P. ¿Y ahora qué? (Se queda pensando) ¿Tienes alguna idea?

I. No.

P. Te lo voy a escribir así (con el lenguaje algebraico):
54,7=18,9=(54+0,7)-(18+0,9)
¿Y esto es igual a qué? ¿Podrías escribirlo quitando los paréntesis y juntando éste con éste (señalando las partes enteras) y éste con éste (señalando las partes decimales).

I. Sí, quedaría igual.

P. Yo lo que te quería decir es (54-18)+(0,7-0,9), y ahora calcula.

I. Es que yo creo que ya. Ya lo veo claro. Porque esto da 36 y esto da -0,2; a 36 le quito las 2 décimas y me da.

P. Sí que se puede restar 0,7-0,9, ¿verdad?

I. Sí, sí.

P. Pero es que tú no caías en la cuenta de usar negativos.

I. No. Ahora sí que lo veo, pero de entrada no. Yo creo que no.

3. El error de suma en vez de resta de los resultados parciales, en el incremento del minuendo para obtener la misma terminación que el sustraendo,

> 481-186=391. A 481 le he sumado 5 entonces quedan 486 a lo que le he restado 186 y al resultado le he sumado 5".

parece una extrapolación de la regla para restar haciendo la misma terminación, basada en el principio de conservación, que consiste en sumar a un dato lo que se le suma al otro para que la resta no varíe. En este caso parece que el estudiante incrementa el minuendo y luego, en vez de incrementar también el sustraendo en la misma cantidad, lo que incrementa es el resultado.

4. El error de ubicación de la coma decimal, al ponerla en el resultado en el lugar que corresponde a la suma del número de las cifras decimales de los datos,

54,7-18,9=3,58.

podría ser una extrapolación de la regla para colocar la coma decimal de la multiplicación, que consiste en sumar el número de cifras decimales de cada uno de los datos.

Errores que parecen métodos generalizados.

5. El error de no reconocimiento de los ceros a la derecha de la coma decimal, necesarios para restar cuando el minuendo es entero y el sustraendo está compuesto de parte entera y decimal,

13-8,75= 5,75. "Sabía que 13-8 eran 5 luego he añadido el 75".

podría ser una generalización del método para sumar un número entero y un número compuesto de parte entera y parte decimal, o del método para restar cuando el sustraendo es entero y el minuendo está compuesto de parte entera y decimal. En ambos casos se opera la parte entera y se añade al resultado la parte decimal.

Esta generalización podría tener que ver con el hábito de operar por separado la parte entera y la parte decimal, y como en un dato no hay parte decimal ésta no se opera y se añade tal cual.

6. El error de resta en vez de suma, en el redondeo del sustraendo.

265-199= "64. Como 199+1 es 200 a 265 le quito 200-1 y da 64".

podría ser una generalización del método para sumar redondeando, basado en el principio de compensación, que consiste en quitar al resultado lo añadido a un sumando. En este caso parece que el

estudiante lleva la idea de que ha de quitar el uno añadido al 199, lo que hace al final quitándolo al resultado de 265-200.

La entrevista con Beatriz deja ver que ella cree que, si sumó, después debe restar lo sumado, y que no entiende que esto tenga que ser diferente en la suma y en la resta: "lo que pasa es que no sé por qué en la suma sí y en la resta no".

P. ¿Quieres explicar lo que has hecho? (245-197=245-200=45+3=48)

B. He sumado para que me sea más fácil restar. ¿Entonces qué hago? Le he quitado a 245 las 200 y da 45. Hasta ahí está bien.

P. Sí.

B. Pero si he sumado. Claro, ahora tengo que restar. Si le sumo, resto.

P. ¿Para qué?

B. Para quitar la equiv (interrumpe). Bueno, yo he sumado para igualarlo. Ahora le tengo que restar la misma cantidad que he sumado para que quede bien el resultado.

P. Bien razonado. ¿Porque todo lo que se suma?

B. Se tiene que restar, si no, la solución no sería la misma.

P. ¿Quieres hacerlo aquí mismo? Al lado, en columnas. ¿A ver si te da lo mismo? ¿Sabes lo que quiero decir?

B. Sí, que reste.

P. ¿Te da?

B. 48.

P. ¿No da lo mismo?

B. No.

P. ¿Y eso?

B. No tendría que restar, tendría que sumar para que se quedara igual. Si yo a una cantidad le sumo 3, a la otra le tengo que sumar 3. No restar.

P. ¿A cuál le tienes que sumar 3?

B. Si le he sumado a 197 tres para igualar a 200, tengo que volver a sumar a 245 tres, no restarle, porque restarle es quitarle, debería de sumarle para que entonces los dos tuvieran la misma cantidad sumada. Entonces serían iguales.

P. Sí, serían iguales, pero eso no es lo mismo que tú has hecho. Este método del que tú estás hablando ahora es el método de conservación, en el que aumentas la misma cantidad a los dos lados. Pero tú estás haciendo el redondeo, que es otro método. En el redondeo aumentas o sumas 3 a 197, operas, haces la operación, y al final corriges, ¿eh? Tienes que corregir, como aquí has sumado 3, ahora luego tendré que restar, eso es lo que tú dices (señalando en el documento de la prueba).

B. Sí.

P. ¿Y eso es razonable, no?

B. Sí.

P. ¿Entonces?

B. Entonces no entiendo por qué no da. Si lo razonable es que yo reste y no da, no es tan razonable.

P. ¿Pero tú crees que lo razonable es que lo restes?

B. ¿Que si lo he sumado a uno, tengo que restarle? No sé.

P. Vamos a hacer la suma 245+197. Pero quiero que lo hagas de cabeza y redondeando. ¿Sabes lo que quiero decir, o no?

B. Sí, igual que lo resto, pero redondeando.

P. Pero ahora una suma, ¿eh?, y quiero que redondees 197 a 200. ¿A ver cómo lo vas a hacer? Dilo en voz alta.

B. 197 más 3, 200, más 245, 445.

P. Muy bien. ¿Y ahora qué tienes que hacer?

B. Si lo he sumado, restarle 3, lo que le he sumado aquí.

P. ¿Total?

B. 242.

P. O sea, ¿por qué le restas?

B. Porque le he sumado.

P. Le has sumado 3. Como le has sumado 3 aquí, luego le restas 3.

B. Al resultado.

P. Razonable. ¿Quieres ver si funciona (se le pide que lo compruebe por columnas)? ¿Tú crees que va a funcionar, o no?

B. Lo que pasa es que no sé por qué en la suma sí y en la resta no.

P. Estás segura que en la suma va a funcionar, pero en la resta no te ha funcionado. Lo que no sabes es por qué. ¿Porque debería funcionar, no?

B. Claro (Hace la suma en columnas y obtiene 242).

P. Eso es lo que habías sacado antes. Por lo tanto en la suma funciona y en la resta no. ¿Qué explicación tiene?

B. ¡Jover!

P. Escríbete la resta, a ver si mirando lo descubres.

B. Ya está aquí escrita.

P. Bueno, pero ahí está de una manera. Escríbelo de otra. ¿Si no lo ves, por qué no lo planteas con paréntesis? (Escribe una igualdad falsa 245-197=245-(197+3) Eso no es igual.

B. ¡Cómo que no es igual! Ah claro, es verdad.

P. ¿Para que sea igual cómo lo tendrías que escribir? ¿No sé si entiendes mi pregunta?

B. No.

P. ¿Cómo lo podrías escribir para que de verdad sea el signo igual el que va ahí? (Señalando 245-197=245-(197+3)) Claro, tú aquí has sumado 3, y no es lo mismo.

B. No es lo mismo. No.

P. ¿Cómo lo podrías poner?

B. Poniéndolo fuera del paréntesis (Pone 245-197=245-197+3).

P. ¿Ahora sería igual? Al poner +3 fuera del paréntesis.

B. Tampoco sería igual si lo pongo.

P. Por eso, ¿qué tienes que hacer? ¿Qué haces cuando lo haces mentalmente?

B. Yo le resto 3.

P. Ponlo, más 3 y menos 3, pero en paréntesis.

B. ¿Pongo más 3 y menos 3, pero en otro paréntesis? (Pone 245-197=245-(197+3-3))

P. ¿Y ahora sería igual?

B. Sí.

P. Ves haciendo cálculos. ¿A ver qué sacas de ahí? Escribe 245-197=245 menos, pero en lugar de 197 quiero que pongas 200.

B. Pero si pongo 200, no es igual.

P. ¿Qué tendrías que poner para que fuera igual?

B. Aquí (señala la igualdad que ha escrito), sumaría 3.

P. ¿Adónde?

B. A 197. Y restaría 3 (Escribe 245-197=245-200-3).

P. Ahora crees que a los dos lados de la igualdad está lo mismo.

B. Sí.

P. Léelo, eso.

B. Menos 200 y menos 3, me lleva a 197.

P. Vamos a pensar en lo que tú hacías. A 245 le resto 200 y luego le resto el 3, ¿igual a cuánto?

B. A 42.

P. ¿Sí o no? Míralo bien.

B. No, da 48. (Repasa los cálculos) A ver, 245, y como tienen el mismo se suman. Es que yo no me acuerdo cómo se hacía esto, 245, éste está con signo positivo, menos 200 y menos 3, pues son menos 203, y eso es más grande. No lo entiendo.

P. Claro, eso no es 197.

B. No.

P. Pero 197 no es, menos 200 menos 3. Vamos a ver (comparando los dos lados de la igualdad) El 245 está aquí y aquí, el menos está aquí y aquí, y aquí tienes 197, lo que hay aquí tiene que ser igual.

B. Debería poner aquí más 3.

P. ¿Por qué?

B. Si esto es menos 200 menos 3, se suman porque tienen el mismo signo. Si pongo más 3, se restarían. Entonces ...

P. A ver, escríbelo. ¿Cómo lo escribirías? (Escribe 245-197=245-200+3)

B. ¿No?

P. Eso sí que es 197. Y ahora sí que son iguales las dos cosas.

B. Sí. Es el fallo que yo tenía.

(Bis)

En otra entrevista, con Victoria, se observa la misma problemática, pero en vez de hacer la reflexión sobre el procedimiento usando el lenguaje algebraico, se cambia de enfoque y se hace la reflexión sobre el efecto que la alteración efectuada produce en los datos.

P. Este ejercicio está mal. A ver, ¿qué está mal ahí?

245-197=42. "A 197 le he sumado 3 que es lo que le falta hasta llegar a 200, luego he restado al 245, 200 y al resultado le he restado 3".

V. Hombre, si le he sumado, luego le tendré que restar. Si yo se las añado para redondear, luego se las tendré que quitar, esas tres, ¿no?

P. ¿A quién, al resultado?

V. Al resultado total, ¿o no?

P. ¿Quieres hacer la resta en un rincón? (lo hace aparte). No da. ¿Verdad que no da?

V. No.

P. ¿Y qué es lo que habrá mal ahí?

V. No lo sé.

El entrevistador propone en este momento que revise los otros ejercicios en los que ha cometido el mismo tipo de error: 14-6,75 y 54,7-18,9, tras lo cual le regresa al anterior.

P. Tú tienes que restar 197, pero no restas 197, sino que restas 200. ¿Es más o menos?

V. Más.

P. ¿Estás quitando más?

V. Claro.

P. ¿Entonces, la solución qué será mayor o menor?

V. Mayor. Si estoy restando más, la solución es mayor.

P. ¿El resultado?

V. No, espera. No, calla. El resultado es menor. Si resto más el resultado es menor.

P. ¿Entonces qué tendrás que hacer para arreglarlo?

V. Añadirle.

P. ¿Cuál?

V. Lo que le he quitado de más.

P. ¿Y tú qué has hecho ahí?

V. Restarle más. Volverle a quitar tres.

P. Está claro, ¿no?

V. Sí, ya.

7. El error de suma en vez de resta de los resultados parciales, en la descomposición del sustraendo para obtener la misma terminación que el minuendo,

> 634-75=561. "He restado directamente el 634-74 y me da 560 luego le he sumado el 1 del 75 Por lo tanto me da 561."

podría ser una generalización del método para sumar descomponiendo un dato, basado en el principio de compensación, que consiste en añadir al resultado lo que se le ha quitado al sumando descompuesto. En este caso parece que el estudiante lleva al resultado de la resta la idea de que ha de añadirle el 1 que quitó al 75.

Errores que parecen de centramientos

8. El error de resta en vez de suma de los resultados parciales, en la descomposición del minuendo,

> 634-75=491. "600-75=525-34=501-10=491."

podría ser un centramiento en la operación inicial. Es como si los estudiantes siguieran restando en vez de sumar la cantidad apartada. No obstante, también cabe pensar en una extrapolación de la regla para restar por segregación, cuando se descompone el sustraendo, que consiste en restar una detrás de otra las partes resultantes de la descomposición.

9. El error de no reconocimiento u olvido de la forma inicial "0," (cero coma), para indicar parte entera nula en el resultado de la resta,

> 2,23-1,58=65. "He imaginado la posición 2,23 y 1,58 realizando la resta como usualmente".

podría ser un centramiento en el hecho de que las partes enteras se anulan, por lo que no hay que escribir nada, pero también podría ser simplemente un descuido u olvido. No parece que quede claro en la entrevista siguiente.

P. En este ejercicio diste como solución 65 y no pusiste el "cero coma".

L. Se me olvidaría.

P. ¿Se te olvidaría? Sabes seguro que hay que ponerlo.

L. Sí, sí.

P. O sea, está claro. ¿Qué haces, cómo lo has restado?

L. En columnas.

P. Uno arriba y otro abajo. Lo que pasa es que luego se anula la parte entera.

L. Yo pensé que como se anulaba la parte entera, esta parte de aquí (señalando) no le puse el cero.

P. Pero no es eso, ¿no? Lo tienes claro.

L. Sí.

V.3.2.2 Teoremas implícitos en la multiplicación

En el PREM

Los estudiantes cometieron fallos de dieciséis tipos diferentes, de los cuales seis podrían ser de descuido o fallo de memoria. A saber:

No recuperación de la coma decimal.

Cálculo parcial con resultado incorrecto.

No recuperación de los ceros apartados.

No reconocimiento, o no evocación de la cifra que se "lleva".

Columnas con fila no desplazada.

Algoritmo incompleto.

y los otros diez podrían ser verdaderos errores. A saber:

Eliminación-recuperación impropia de la coma.

Producto incorrecto de decimales de la forma 0,1x0,1.

Resultado incompleto por división equivalente.

Ubicación incorrecta de la coma decimal.

Contabilización incorrecta de los ceros del resultado.

Primeros dígitos impropio.

Incremento y compensación impropia.

Descabezamiento encadenando.

Descomposición tomando el 2º parcial sobre el descompuesto.

Descabezamiento con no reconocimiento del cero de orden de unidad.

A pesar de la menor variedad fallos de descuido que de errores, su incidencia o frecuencia fue muy superior a la de los segundos, del orden de 116 a 65, aún incluyendo en este último grupo las respuestas en blanco. No obstante, los datos indican que en el PREM los errores tuvieron una importancia significativa.

En el POSM

Los estudiantes cometieron fallos de 27 tipos, de los cuales 10 parecieron de descuido o de memoria, los mismos 6 observados en el PREM, y además, estos otros cuatro:

Cifra recuperada distinta a la calculada.

Cuadrática incorrecta.

Dato calculado distinto al dado.

Expresión equivalente equivocada.

Y 17 parecieron errores, los mismos 10 observados en el PREM, aunque de 2 de ellos aparecen nuevas modalidades, y además, estos otros siete:

Doble redondeo con compensación impropia.

Añadir y quitar impropio.

Factorización tomando los factores como sumandos.

Doble incremento con compensación impropia.

Columnas con fila cambiada.

Descomposición restando en vez de sumando los parciales.

Doble descabezamiento con productos parciales impropios.

La incidencia de los fallos de descuido fue inferior a la de los errores, 102 veces los primeros 179 los segundos. Si además se incluyen en este grupo las respuestas en blanco, que fueron 66, se obtiene que, tras la enseñanza, y como consecuencia del desanclaje de los métodos de columnas que ésta produjo, dos de cada tres respuestas incorrectas de los estudiantes fueron debidas a errores que tienen una motivación cognitiva matemática, lo que evidencia que el cálculo mental con métodos alternativos es un dominio privilegiado para hacerlas emerger, mientras que el cálculo de columnas las mantiene ocultas.

Esta proporción es aún mayor si se miran por separado los ejercicios con números enteros y con números decimales.

Frecuencias de los fallos de descuido y errores en los enteros y en los decimales

	Con enteros	Con decimales
Descuido o fallo de memoria	59	43
Errores	51	128
En blanco	14	52

A continuación se estudian los errores de los estudiantes con el fin de establecer los teoremas implícitos que los explican, y la razón de la no transferencia de las regla de columnas para ubicar la coma decimal en el producto.

Errores que parecen reglas extrapoladas

1. El error de columnas con fila cambiada.

31x42=168. "Multiplico 42x30. Luego al resultado le sumo 42".

Aquí el estudiante multiplicó 42x3, obteniendo 126 y sin tener en cuenta el cero del orden de unidad del 3 le sumó 42, imaginándolo debajo de aquél pero desplazado un lugar a la izquierda.

Este error podría ser una extrapolación de la regla de columnas que consiste en poner como primera fila el producto parcial de la primera cifra que se multiplica y como segunda el producto por la siguiente, y también, de la regla de no hacer uso de los ceros del orden de unidad.

En este caso parece que el estudiante aplica el descabezamiento y se deja llevar por la idea de que el orden en que están escritas las cifras de izquierda a derecha especifica el orden de operarlas, y de acuerdo con la regla que extrapola el orden de operarlas especifica el orden de escribirlas. De esta manera, al estar extrapolando una regla de columnas, parece que no necesita reconocer el cero del orden de unidad.

La entrevista con Inma revela su falta de reconocimiento del papel de los órdenes de unidad de las cifras en el algoritmo. Ella no se da cuenta de que el producto 49x1 no puede ocupar la fila correspondiente al producto de las cifras de la decena, no ve que procede del producto por la cifra de las unidades. Por eso: "Lo ponía al revés. O sea, esto tenía que estar aquí arriba y yo lo ponía abajo".

Desarrollo de la entrevista.

P. ¿Te parece que está bien?

31x42=168. "Multiplico 42x30. Luego al resultado le sumo 42".

I. No.

P. ¿No está bien?

I. A ver. 30x42 serían 126, y luego 1x42, 42.

P. ¿Qué harías ahora?

I. Ponerlos así: (Escribe) 126
42
546

P. ¿Y eso está bien ahora?

I. Yo creo que sí.

P. ¿Quieres hacerlo aquí, al lado, para ver si está bien?

I. Serían (Ahora escribe) 42 .
31
42
126
1302.
Ah, Claro, claro.

P. Ya ves lo que has hecho mal, ¿no?

I. Que le tenía. O sea, el lugar. Lo ponía al revés. O sea, esto (señala 126) tenía que estar aquí arriba y yo lo ponía abajo. Ya.

P. ¿Por qué debe ir abajo y no arriba? ¿Por qué crees que está mal?

I. Porque el 1 está primero.

P. ¿El 1 está primero?

I. Claro.

P. Y tú lo ponías.

I. Y yo lo ponía al final. O sea, ponía como si fuera 13 (en vez de 31).

P. O sea, que el que va primero se pone arriba, ¿o qué? ¿Cómo razonas?

I. Sí. Claro. Primero multiplicas el 1 por esto (42) y después multiplicas el 3 por esto (42) y lo colocas. Pero yo lo hacía al revés. O sea, primero ponía el 3 y luego colocaba abajo el 1 que es el resultado que me tenía que haber dado antes.

P. Te equivocabas. ¿Y por qué crees que te pasó eso?

I. Porque no me di cuenta del lugar. No sé.

P. Vuelve a hacer el método.

I. Porque yo creo que digo: tengo 30 lo multiplico por 42, me sobra 1 y luego ese 1.

P. (Interrumpiendo) ¿30x42 es 126?

I. Sí.

P. ¿Seguro?

I. Sí.

P. Calcúlalo por escrito.

I. No. Claro. No. Sería, 1260.

P. No tienes en cuenta el cero. ¿Y luego qué habría que hacer?

I. Pues, sumarle otro 42, porque el 1x42.

P. (Interrumpiendo) ¿A qué número sumarías el 42?

I. ¿A qué número? Al 60.

P. Vale, y te daría, ¿cuánto?

I. 13.

P. ¿Qué crees ahora que estabas haciendo mal?

I. Que no tenía en cuenta el cero. O sea, yo en lugar. Ese cero no lo ponía. Multiplicaba 3x42 y el cero no lo ponía.

P. ¿No multiplicabas 30x42?

I. Multiplicaba por 3, y luego 1x42, y luego lo ponía debajo, y lo ponía al revés.

2. El error de descabezamiento con no reconocimiento del cero del orden de unidad,

> 28x35= 224. "28x3 ->3x8=24, 3x2=6+2 que llevo 84; luego 5 por 8=40 y llevo 4; cinco por 2=10 y 4 son 14 total 140+84=224"

podría ser una extrapolación de la regla de columnas que consiste en tomar las cifras aisladas, sin reconocer el papel del cero del orden de unidad de la cifra de las decenas.

3. El error de ubicación incorrecta de la coma decimal, que se dio en varias modalidades, podría ser una extrapolación de las reglas para colocar la coma decimal, vinculadas a la posición, de los algoritmos de columnas de la suma y de la resta.

En esta modalidad:

$3,1^2$=96,1. "He multiplicado 3,1x3,1 -> 3,1

3,1
3 1
93 .
96,1".

parece que el estudiante lleva a la multiplicación la regla de la suma por la que la coma se pone en la misma posición y se baja guardándola.

3,4x0,15=5,14. "Multiplico olvidándome de las comas:

3,4
0,15
170
34 .
5,10 ".

En esta modalidad:

37x0,25=. 0,259. "He colocado mentalmente el 37 y debajo el 0,25 dejando el "0" sin estar debajo de ningún número he multiplicado 5x7 y 5x3 y he conservado el resultado después he hecho lo mismo con el dos después he sumado mentalmente los 2 resultados".

parece que el estudiante baja la coma, como antes, pero además está utilizando un hábito, posiblemente producto de la enseñanza, que consiste en poner las cifras significativas unas debajo de las otras.

En esta modalidad:

2,4x0,15=. "0,036. 2,4x0,15=1,2x0,30=0,6x0,60=0,036".

parece que el estudiante cuenta también los ceros a la derecha de la última cifra significativa tras la coma decimal, como si para él 0,60 fuera distinto a 0,6 .

4. El error de eliminación-recuperación impropia de la coma decimal,

3,4x0,15=10,5. "He multiplicado 34 por 1,5 y me da 6,0+4,5 =10,5" En este ejemplo se produce además el error de "No reconocimiento del cero del orden de unidad del 3 de 34".

podría ser una extrapolación de la regla que se usa en el algoritmo de la división para eliminar la coma del divisor cuando éste es decimal, que consiste en "correr la coma" simultáneamente en el dividendo y en el divisor.

La entrevista con César, que cometió este tipo de error al resolver

2,4x0,15=36. "2,4x0,15=240x15=240x10=2400
2400+1/2 2400=2400+1200= 3600->36'00".

revela que se fija en el factor que tiene más cifras decimales para quitar la coma. Se la quita a éste y multiplica el otro factor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el primero. Al finalizar el cálculo divide el resultado obtenido por la unidad seguida del número de ceros que ha usado. Su error es que multiplica dos veces los dos factores por la unidad seguida de ceros pero sólo divide por ella una vez.

A primera vista, este tipo de error hace pensar que el estudiante generaliza la ley distributiva del producto respecto a la suma, al

producto respecto al producto, como si entendiera que el 100 es un factor común, tal como sería si el signo de multiplicar entre 2,4 y 0,15 fuera un signo de sumar. Así:

2,4x0,15x100=2,4x100x0,15x100.

de donde para compensar la alteración efectuada sólo necesita dividir por 100.

No obstante a este estudiante se le reconoce el dominio de las propiedades asociativa y distributiva por su nivel educativo, y además ha evidenciado este dominio en su forma de resolver otros ejercicios de las pruebas; por lo tanto cabe pensar en que este error tiene otra explicación diferente.

En efecto, la entrevista revela que el estudiante quita la coma del factor que más cifras decimales tiene, en este caso el de la derecha, y multiplica el otro factor, el de la izquierda, por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene aquél. Esta regla de acción es la que se usa en la división cuando el divisor es un número decimal, se quita la coma del divisor y se "corre" en el dividendo tantos lugares a la derecha como cifras decimales tiene aquél, o lo que es lo mismo, se multiplica por la unidad seguida de tantos ceros como eso indica. Pero lo que en la división es una alteración invariante, no lo es en la multiplicación, y por lo tanto para completar la operación el estudiante compensa la alteración dividiendo por el número por el que él cree que ha multiplicado.

Desarrollo de la entrevista:

P. ¿Quieres volver a hacer este ejercicio (Obtiene como resultado 3800). ¿Qué has hecho?

C. Multiplico por 100 las dos partes.

P. ¿Para qué?

C. Para que, de esta forma quitar aquí el decimal (Señala el 0,15).

P. ¿A los dos?

C. Me interesa más al de la derecha.

P. ¿Y luego qué pasa?

C. Pues que luego descompongo el 240 y lo multiplico todo. O sea hago una distribución de la suma por el producto. Serán 240 que ya lo tengo redondeado, lo multiplico por 15 que es 10 más 5 y he hallado el producto y lo sumo.

P. Muy bien. ¿Seguro que eso es el resultado? (Señalándole 3800)

C. Sí.

P. ¿No te parece muy grande?

C. No. Porque si tú multiplicas por decimales es como si estuvieras multiplicando por una división. Entonces aumenta.

P. Bien. Sin embargo aquí (Señalándole la respuesta 36,00 del test) mira lo que has hecho. Aquí has puesto 36,00. ¿Y, está mal o bien?

C. ¡Ya, ya. Está mal! O sea; ahí posiblemente no caí en la cuenta, pero soy consciente que multiplicar por 100 es como una estrategia para ayudarte a tener una multiplicación mas asequible que de esta forma es imposible sacarla, y luego aquí (señala el muevo resultado que obtuvo, 3800) no hace falta porque multiplicas los dos miembros de la multiplicación.

P. ¿Los dos factores por 100?

C. Los dos factores.

P. ¿Y entonces qué pasa?

C. Pues que al multiplicar los dos factores obtienes el resultado. Estamos haciendo una multiplicación, si multiplicamos los dos factores por 100 cuando lleguemos al final debemos de quitarlo otra vez, quitarle los dos decimales. Si tú has multiplicado por 100 los dos miembros para que te sirva de ayuda, pues luego, cuando termines, cuando llegues al resultado final tendrás que quitarlo también, tendrás que quitarle el 100.

P. ¿1 o 2?

C. 100.

P. ¿Dos ceros?

C. Dos ceros. Por lo tanto el resultado será 38.

P. ¿Y no 3800 que decías tú aquí?

C. 38.

P. ¿Quieres mirar otro (ejercicio) a ver si está bien?. De estos que tienen decimales.

Nota: La entrevista se centra ahora en el ejercicio 2,8x0,45 que fue resuelto así:

2,8x0,45=178,00. "280x45; -> 200x40=16000; (80x5)=400
5x280=(5x200)+(5x80)=1000+400=1400
16000+400+1400=178,00".

C. He hecho el mismo método que antes lo que pasa es que dentro he hecho otro método, digamos particular, que ha sido descomponer, que luego, cuando terminé lo comprobé, y está mal. Lo que he hecho es 280 por 45, descomponer, bueno, lo mismo de antes.

P. (Interrumpiendo) ¿Multiplicas también por 100?

C. Sí.

P. ¿A los dos?

C. Sí a los dos factores.

p. ¿O a uno?

C. A los dos.

P. ¿Por qué multiplicas por cien a los dos?

C. ¿Por qué multiplico por 100? Para obtener aquí también, ... quitar.

P. (Interrumpiendo) ¿Para quitar la coma?

C. Para quitar la coma.

P. ¿En los dos factores?

C. Me interesa más el de la derecha.

P. ¿Por qué te interesa más el de la derecha?

C. Pues para tener como unidades y quitarle después la coma.

P. ¿Al de la derecha?

C. Sí.

P. ¿Al de la izquierda, no?

C. Al de la izquierda ya no se lo quito, porque ya, si quito dos a la derecha (se refiere a las dos cifras decimales de 0,15), tengo uno a la izquierda (se refiere a la cifra decimal de 3,4) que ya es seguro que lo voy a quitar.

P. ¿En realidad el que miras es el que tiene más cifras?

C. Por supuesto.

P. ¿No porque sea el de la derecha?

C. No, no, no, si hubiera sido el de la izquierda el que tiene más, siempre miro el que más decimales tiene.

P. ¿Y luego operas?

C. Y luego opero, ya mal, porque luego lo comprobé y sé que está mal. O sea, creía que era, nunca había multiplicado yo números tan altos mentalmente. Entonces qué hice, establecer un método, a ver si podía salir. Entonces yo hice, descomponer el 280, o sea descabezarlo y poner el 200, y después descabezar el 45, 200 por 40 y ya teníamos un hecho conocido, después hacíamos el 80 por las 5 unidades del 45 y ya teníamos otro hecho conocido, y luego las 5 unidades del 45 por los 80, después sumábamos todo y ya teníamos el resultado final. Creía que se podía hacer así. Después quitaba los dos ceros.

P. ¿Y después pones la coma? ¿Cómo quitas los dos ceros?

C. ¿Cómo los quito?

P. ¿Por qué decides poner la coma ahí?

C. Porque al principio multipliqué por 100.

P. ¿A cuántos factores?

C. A los dos. Entonces ahora se lo quito al resultado final que es la suma de los dos.

P. ¿Has multiplicado por 100 a los dos factores?

C. Al principio sí.

P. Y luego quitas al 100. Como has multiplicado por 100 quitas el 100.

C. Claro.

P. Pero tú has multiplicado por 100, ¿a quién? Aquí (señalando 0,45), Sólo por un cien, sólo por 100. ¿Y al otro? (2,8)

C. Por 100.

P. Vamos a ver el siguiente (ejercicio).

Nota: La entrevista se centra ahora en el ejercicio 4,9x5,1, que fue resuelto así:

4,9x5,1=230,0. "40x50=2000; 9x51=451; 1x49=49; 2000+451+49= 2500. Mal"

(Obsérvese que dio dos resultados diferentes. 230,0 y 2500. También, que cometió el otro tipo de error que cometió).

P. Aquí dices: mal, y das 2500 como resultado. ¿Qué es lo que está mal? ¿Por qué das este resultado?

C. Ahora mismo no sé por qué lo dije. Seguramente porque me daría cuenta que multiplicar 4,9x5,1 no te puede dar 230.

P. ¿2500?

C. 2500.

P. ¿No te puede dar, porque te parece muy grande?

C. Claro.

P. Pero al principio (de la entrevista) habías dicho algo sobre esto. Habías dicho que. Al principio sí que te había parecido razonable el 3800.

C. Claro. Estaba confundido un poco con la división. Tú multiplicas el de arriba, multiplicas el de abajo, no pasa nada. O sea, ahí me he confundido. Sí.

P. Ahora te das cuenta que esto no podía ser.

C. Por supuesto. Claro, si tú multiplicas. Es como si tuvieras 25 pesetas cada 4 meses que no es lo mismo que tengas 2,5 cada 2 meses.

P. O sea, que va a ser más pequeño. El producto de los decimales va a ser un número pequeño.

C. No necesariamente.

P. ¿En este caso?

C. En este caso sí.

P. ¿No tan grande, no tan grandísimo? ¿De qué tamaño? Haz una estimación.

C. No sé, 20 o 30.

P. ¿Tú sabes cuánto es 0,2x0,3?

C. 0,06.

P. ¿Cómo lo sabes?

C. Porque cuando multiplicamos cero coma algo por cero coma algo, depende de los decimales, se suman los decimales que hay y se hace la multiplicación, así normal.

P. ¿Y en estos problemas? (señalando la hoja de ejercicios resueltos en el test) Por ejemplo en este problema ¿Cuántas cifras decimales habían? ¿cómo podemos saber dónde poner la coma?

C. Sumando. Sí, pero, lo que pasa es que lo que he hecho yo ha sido pensar cómo he estado sumado. Es lo que me imagino ya que habré hecho, como he estado sumando mucho he tenido luego la imagen mental de 4,9x5,1 que se bajan las comas. Quizá puede ser que haya sido eso.

P. Vamos a ver otro (ejercicio). Este mismo (2,4x0,15). ¿Cuántos decimales hay?

C. 3. Tiene que haber 3.

P. ¿Y al final, en el resultado, cuántos crees que tiene que haber?

C. 2.

P. ¿Qué ha pasado ahí?

C. He puesto 2.

¿Y eso por qué?

C. Yo lo que he hecho. O sea, me he dado cuenta de que estaba multiplicando por 100 y no es preciso.

P. ¿Has caído en la cuenta de que no era preciso multiplicar por 100?

C. Claro.

P. ¿Y has caído en la cuenta por lo que hemos comentado antes?

C. Sí. Cuando me has hecho ver la diferencia entre ése y ése. ¿No? (Señala anotaciones que ha ido haciendo a lo largo de la entrevista).

p. ¿Al ver que el resultado no coincidía?

C. No el resultado, sino la diferencia que me has dicho (Se refiere a la diferencia entre ubicar la coma de acuerdo con la suma de las cifras decimales y ubicarla de acuerdo con su propia regla autofabricada).

P. ¿Entonces aquí por qué has puesto 2? (dos cifras decimales en 2,8x0,45=178,00)

C. Aquí serían 3, porque hay 3 cifras decimales,

P. ¿Y ahora qué estas pensando?

P. Pues nada, que no había que multiplicar por 100, sino simplemente hacer la operación, luego poner las comas,

P. Es verdad. ¿Y por qué multiplicabas por 100?

C. Pues, no sé.

P. Porque tú sabes operar. Te he preguntado 0,2x0,3 y lo has hecho. En cambio, aquí no haces eso de operar como si fueran enteros, sino que te inventas la estrategia de multiplicar por 100. ¿Está mal, tú crees que multiplicar por 100 está mal?

C. Yo creo que no. Es correcto si luego quitas dos. Sí (se refiere a quitar dos ceros del resultado final).

P. ¿Por qué crees que es correcto?

C. Porque tú cuando multiplicas los dos factores de una multiplicación, el resultado luego es el mismo, no es proporcional.

P. Luego, ¿dónde está el error? Quieres mirar éste (4,9x5,1. Aquí, ¿por cuánto has multiplicado? Ahí has multiplicado por 10 y luego, ¿dónde hubieras puesto la coma según tu estrategia?

C. Ahora que me he dado cuenta la hubiera puesto aquí.

P. ¿Por qué?

C. Porque hay dos decimales.

P. Pero si yo no te hubiera dicho nada.

C. Hubiera puesto uno, porque me creía que estaba sumando.

P. Como multiplicas por 10. ¿Al final qué hubieras hecho?

C. Al final hubiera dividido por 10.

P. Quieres mirar el tercero (2,4x0,45). ¿Por qué número multiplicas?

C. Por 100.

P. ¿Al final qué tienes que hacer?

C. Dividir por 100.

P. Luego, la coma. ¿Adónde iría?

C. Ahí (señala).

P. En cambio, ¿cuántas cifras decimales hay?

C. 3.

P. ¿Y, según eso, la coma dónde iría?

C. Ahí (señala).

P. ¿Dónde está el error?

C. En que no es preciso. Pero es válido. Déjame pensarlo.

P. ¿Por qué pensabas que tenías que multiplicar por 100?

C. ¿Por qué veía esto (señala 0,45). Veía dos cifras decimales.

Nota: En este momento el entrevistado busca una explicación de compromiso entre su regla y la de sumar las cifras decimales pero no logra hacerla encajar en los ejercicios de la prueba. Tras esta pausa el entrevistador insiste.

P. ¿Para qué has querido multiplicar por 100?

C. Es que. ¿No estaré yo confundido con la división?

P. Algo de la división hay ahí, ¿verdad?

C. Claro. Por ejemplo. ¿No sé? 160 entre 30 quito esto, un cero de aquí y otro de aquí.

P. ¿Y si fuera con decimales? Pon la división 2,4 : 0,15.

C. Pues, ¿qué haría?, quito una de aquí y corro ésta un lugar (le da 24:1,5).

P. Pero no has terminado. Aún no puedes dividir.

C. Claro. Entonces aquí quedaría uno y pondría un cero (le da 240:15).

P. ¿Y eso? ¿Qué operación has hecho en realidad?

C. Multiplicar.

P. ¿Multiplicar por cuánto?

C. Por 100.

P. ¿Adónde?

C. A los dos lados.

P. Entonces, ¿crees que es eso lo que estabas pensando?

C. Inconscientemente lo estaba pensando, lo que pasa es que no te lo quería decir porque no sabía sí...

P. ¡Ah! Ya lo pensabas. Lo has estado pensando todo el rato.

C. No todo el rato, no. O sea, lo tenía en cuenta, sabía que había algo ahí por el cual yo estaba haciendo eso y me estaba dando cuenta.

5. El error de resultado incompleto por división equivalente.

37x0,25= "9,2 aprox. Cuando se multiplica un número por 0,25 es igual que si lo dividieses entre 4 -> porque 0,25=1/4".

podría ser una extrapolación de la regla típica de la división inexacta que consiste en detener la división cuando ya se ha obtenido un determinado y corto número de cifras decimales en el cociente. En el caso del ejemplo parece que el estudiante olvida que está resolviendo una multiplicación, y que por lo tanto el cociente de la división equivalente ha de ser exacto, y se deja llevar por un hábito producto de la enseñanza usual.

La entrevista con Chelo abunda en este interpretación.

Desarrollo de la entrevista:

P. Mira lo que hiciste: 47x0,25=4,7. "47:4=11,7". Tú aquí pusiste 47:4. ¿Por qué?

Ch. Sí, porque pensé que el 0,25 es la cuarta parte de aquí (señala 100), y en vez de multiplicar éste (señala 0,25) dividí éste (señala 4).

P. Sí.

Ch. Eso es en lo que fallé.

P. ¿Qué? Vuélvelo a decir.

Ch. Que, al pensar que éste era la cuarta parte, pues, ...

P. ¿De quién? ¿La cuarta parte de quién?

Ch. De cien.

P. Sí

Ch. Cogí y dividí éste, en vez de multiplicar éste por cuatro.

P. Vale. Quieres intentarlo otra vez.

Ch. ¿El qué?

P. Hacer la división.

Ch. ¿Como te lo estoy diciendo?

P. Sí, que la hagas. Como la hiciste la otra vez.

Ch. Pero estará mal.

P. ¿Eh?

Ch. ¡Que estará mal!

P. Pero vamos a ver adónde está el error, ¿no?

Ch. Dividí 47 entre 4.

P. Tú lo hiciste de cabeza aquel día, crees que lo hiciste de cabeza o escribiendo.

Ch. ¿Ese? (Ejercicio)

P. Sí.

Ch. De cabeza.

P. Inténtalo. A ver si averiguamos dónde te equivocaste. ¿Qué te da la división?

Ch. Once.

P. Sólo once.

Ch. Once coma...

P. ¿Coma qué?

Ch. Coma tres.

P. No.

Ch. Bueno, once y de resto tres.

P. Ah. Bueno. Y no sigues dividiendo.

Ch. Sí. Puedo bajar el decimal. Bajo un decimal y será 1,7.

P. ¿Y por qué no lo bajas?

Ch. 11,7.

P. ¿Y ya has terminado?

Ch. Y vuelven a quedar 3.

P. ¿3 qué?

Ch. 2 de resto.

P. ¿Y qué pasa?

Ch. Pues se baja otro cero.

P. ¿Y de resto que queda?

Ch. Cero

P. Así, sí. ¿Y por qué no has acabado la división antes? ¿Por qué te quedabas a medias?

Ch. Creía que no tenía que seguir.

P. Como es una división creías que no tenías que seguir. ¿En cambio si hubieras multiplicado, qué resultado hubieras dado, de cuántas cifras?

Ch. De tres.

P. O sea, si en lugar de dividir hubieras multiplicado, qué resultado hubieras dado 11,75.

Ch. 11,75.

P. Si haces la multiplicación lo das completo, pero como es una división, no. ¿Es así, o no?

Ch. Sí, pero no hubiera estado bien.

P. Eso es lo que yo quiero saber. ¿Por qué?

Ch. Porque pensé que como queda 2 bajo un cero, y tampoco me da exacto, y no pensé luego que sí, porque si cabe a 7 (se equivoca, cabe a 5). Supongo que sería así.

P. O sea, no pensaste que iba a dar exacto.

Ch. Claro. Entonces la división. Supongo que entonces pensaría así. No sé. Porque ahora he pensado lo mismo.

P. ¿Y como no va dar exacto no sigo? ¿Eh?

Ch. Sí.

P. Pero el producto tiene que dar exacto, ¿o no?

Ch. Sí. Bueno, según, puede que no.

P. La multiplicación puede no dar exacta.

Ch. No lo sé. Si hay decimales, no da exacta.

P. ¿Una multiplicación que tiene decimales a veces no da exacta?

Ch. No lo sé. Bueno, a veces sí. Me estás liando.

P. Mira, tú no terminaste la división. Aquí no terminaste, y no la acabaste porque me has dicho que pensaste que no iba a dar exacta, y no seguiste dividiendo. ¿Eh?

Ch. Es que ahí ni me di cuenta del resto. Aquí sí que lo he pensado.

P. Aquí lo has pensado, pero allí diste de respuesta 11,7. No acabaste.

Ch. No.

P. ¿Y por qué no acabaste?

Ch. Es que ni pensé en el resto.

P. ¿Te pareció bastante con un decimal.

Ch. Sí. Es que como a veces me decían que con un decimal basta, pues supongo que daría eso. Porque en el instituto, y tal, dicen, un decimal y ya está.

P. Pero yo te había puesto una multiplicación y no una división.

Ch. Pero como yo divido y no multiplico ... y no pensé que era multiplicar, sino una división.

6. El error de descomposición restando en vez de sumando los parciales,

> 64x75=. 4200. "He redondeado 64 a 60 y lo he multiplicado por 75, que da 4500. Luego he multiplicado 4x75 que da 300, y a 4500 le resto 300 y da 4200".

podría ser una extrapolación de la regla de restar el parcial correspondiente cuando se multiplica redondeando a la decena superior. En este caso parece que el estudiante entiende que al descomponer 64 en 60+4 ha redondeado, y actuando en consecuencia resta en vez de sumar.

7. El error de producto incorrecto de decimales de la forma 0,1x0,1.

> $3,1^2$=9,11. "Multiplico 0,1x0,1 y al resultado le sumo 9 que sale de multiplicar 3x3".

parece una extrapolación de pautas, como las que se dan cuando en el multiplicador está la unidad y el cero, ante una situación extrema en la que los números decimales no tienen parte entera.

La entrevista con Inma aporta alguna luz en este sentido.

Desarrollo de la entrevista:

P. ¿Quieres hacer $4,1^2$? ¿Qué te da?

I. 16.

P. ¿Ahora qué has hecho? ¿Por columnas?

I. No, pensando en la multiplicación mentalmente. O sea, uno arriba y otro abajo.

P. Sí. Pero no hiciste eso la otra vez. Mira lo que hiciste:
$4,1^2=16,1$. "$4x4=16+(0,1x0,1)^2=16,1$".
¿Te parece bien o mal?

I. Mal.

P. ¿Por qué?

I. Porque estoy haciendo 4,1+4,1.

P. ¿Y qué?

I. Que está mal. O sea, 4x4,1 son 16,4.

P. ¿Mayor? ¿No?

I. Sí, claro.

P. O sea ves que está mal, ¿no?

I. Sí.

P. ¿Y por qué crees que hiciste eso? (Pausa) ¿No tienes ni idea, no? ¿Y, cuánto es 0,1x0,1?

I. 0,2.

P. ¿0,2?

I. No.

P. ¿Cuánto?

I. 0,1. No. Sí.

P. ¿0,1x0,1=?

I. 0,01. ¿No? ¿Será?

P. Lo que tú digas.

I. Sí, sí, sí.

P. ¿0,1 ó 0,01?

I. Sí. 0,01.

P. ¿Estás segura?

I. Sí.

P. ¿Por qué?

I. Humm.

P. ¿No sabes por qué?

I. Porque. Sí. Espera. ¡Si es 0,1!

P. ¿0,1, ó 0,01?

I. No.

P. ¿Cómo lo sabes?

I. Porque es 1x0,1 que es 0,1 y luego el 0 no lo multiplico. Sería 0,1.

P. ¿El cero no lo multiplicas?

I. No.

P. ¿No estás segura?

I. No. Porque no. Porque entonces sería (Se queda pensando).

P. ¿Ya lo tienes claro?

I. Yo creo que sí. Sería 1,1.

P. ¿1,1? Cada vez me dices una cosa.

I. Sí, 1,1.

Errores que parecen generalización de métodos de una operación a otra.

8. El error de descabezamiento encadenando,

26x35=420. "35x20=70; 70x6=420".

podría ser una generalización del método para sumar descabezando, combinado con un no reconocimiento del cero del orden de unidad del 3

Nota: Este error, recuerda, aunque en sentido inverso, al que Matz (1982) identifica como motivado por una confusión en la transferencia del lenguaje. Puesto que se dice axb=ab, entonces 3x2=32.

No obstante, aquí se ponen de manifiesto ciertas diferencias con aquél, ya que el estudiante contempla el factor 26 como 20+6 y no como 2 y 3.

Las dos entrevistas que se adjuntan apuntan hacia esta última idea. En la primera, cuando a Mónica se le pregunta: ¿Y por qué pensabas así?, contesta: "Pues, porque en la suma se hace así. No lo sé. ... Es que en la suma sería eso. Si fuera una suma sería, 35+20 y (el resultado) más 6"

También en la segunda entrevista que se adjunta, con Beatriz, se obtiene un diálogo similar:

P. ¿Y tú qué método estabas aplicando?
B. La suma. Pero dentro de la multiplicación. ¡Es verdad! ¡Qué lío!

Desarrollo de la entrevista:

P. Mira cómo lo hiciste: 26x35=420. "35x20=70; 70x6=420"

M. He hecho 35x20 da 70 y luego como de aquí le había quitado 6 pues 70x6

P. ¿Pero a quién le pones el 6?

M. O sea, el 6 se lo he quitado al 26. Espera. ¿Qué he hecho aquí? Ah, ya 35x20, 70 y luego el 6 que le había quitado al 20 se lo he multiplicado al resultado.

P. ¿Al 70?

M. Al 70

P. Sí. ¿Y qué te parece?

M. Pues que está mal. ¡Hombre, por el resultado que me da, tiene que estar mal!.

P. Pero la regla es razonable, ¿no?

M. No sé.

P. Mira el siguiente (ejercicio: 37x98=2066. "98x3=294; 294x7=2066)

M. 37x98, ¿98x3?

P. (Ese 3 viene) Del 30. Hay un 3. 98x3

M. Pero para eso tenía que haber puesto 30

P. Ya. Sí.

M. ¿Está mal esto, no?

P. Sí. Sigue. 38x30

M. Y luego por 7.

P. ¿Y luego por 7 el qué?

M. El resultado.

P. ¿Por qué?

M. Porque es 30+7.

P. Y (esto) lo vuelves a hacer. Mira éste (ejercicio: 31x42=168. "42x30=126; 126+42=168")

M. 42x30. Ah, aquí sí que está bien.

P. Ah

M. Aquí sí que lo hice bien.

P. A ver

M. Es que en todos estos lo único que he hecho es como si tan sólo le sumara 7 unidades. O sea, multiplicara por 7 y en realidad tenía que multiplicar, pues, 7 veces 98.

P. Sí.

M. Así, sí. Pero aquí en que fallé (en 31x42 aplicó el método correctamente pero obtuvo un resultado falso ya que no consideró el cero del orden de unidad del 30)

P. Quieres volver a repetir lo que has visto ahora. Has visto de pronto que esto está bien. ¿Qué es lo que has visto ahora?

M. Pues que había hecho 42x30, ¿no? O sea, la multiplicación es 31x42 y yo había hecho 42x30 y luego me da 126, el 126, si hubiera seguido con lo que estaba haciendo antes, lo hubiera multiplicado por 1, pero ese 1 lo que significa es 42.

P. Un 42.

M. Un 42, entonces 126+42.

P. Ahora está bien. Bueno. En lo que te has equivocado aquí (31x42=168) es en que el producto no está bien. ¿Quieres hacerlo?

M. 126. Ah, no, le falta un cero.

P. Correcto (42x30=1260, no 126). Ves al último (ejercicio, al nº 10: 19x18=1420. "19x10=190; 190x8=1420)

M. ¿Al 10?

P. Sí.

M. 19x10. También está mal. Tenía que haber hecho 8x19 y luego sumárselo.

P. Sí. ¿Y por qué pensabas así?

M. Pues.

P. Lo has hecho cuatro veces.

M. Pues, porque en la suma se hace así. No lo sé. Porque aquí sí que lo ví, en éste (32x42).

P. O sea, tú multiplicabas (en 36x25) 35x20 y el resultado por 6.

M. Es que en la suma sería eso. Si fuera una suma, sería 35+20 y (el resultado) más 6.

Entrevista Bis sobre este mismo error, con otro estudiante.

El entrevistado tras un rato observando lo que escribió: 26x35= "26x30 1780x5", dice:

B. Ya está.

P. ¿Qué pasa?

B. Lo que yo hago es que éste lo multiplico por 30 y al resultado lo multiplico por 5. Pero no es lo mismo multiplicar este número por 30 y después multiplicarlo por 5, que sumarlo.

P. ¿Entonces, cómo sería correcto?

B. ¿Cómo sería correcto? Multiplicar ese número por 30, volver a multiplicarlo por 5 y realizar la suma mental. Así es como si lo hiciera en columnas. ¿Es eso?

P. Sí, sí. Es correcto.

B. Jolín. Pero parece que sea lo mismo, y no es lo mismo.

P. Vamos a hurgar un poco más. Porque ya has descubierto el error. ¿Por qué crees que hacías eso? Porque tú me estás diciendo que parece que es columnas. Es que no te he entendido. Has hecho un comentario, has dicho (Interrumpe)

B. Sí. O sea que si yo multiplico lo verdadero.

P. ¿Primero por 30?

B. Sí, y después por 5 el mismo número.

P. Sí.

P. Pero no es eso lo que tú haces.

B. No.

P. Tú multiplicas primero por 30 y el resultado por 5. ¿Y eso por qué?

B. ¿Por qué? Pues no lo sé.

P. ¿A qué te recuerda? Eso lo has hecho porque te recuerda a algo. Eso mismo lo haces en algún otro sitio. Hay una razón. La razón es que esto te ha funcionado en otras circunstancias. ¿Dónde crees que haces algo (Interrumpe) ?

B. En la suma se puede hacer eso.

P. ¿En la suma? Por ejemplo, ¿cómo sería la suma?

B. Huy. Si tuviera que sumar esto (35) a esto (26), primero sumaría, a lo mejor, el 30, y después el 5, separándolos.

P. ¿El 5 a quién se lo sumarías?

B. Al resultado, claro. Y aquí (en la multiplicación) no puedo hacer eso.

P. ¿Y tú qué método estabas aplicando?

B. La suma, pero dentro de la multiplicación. ¡Es verdad! ¡Qué lío!

9. El error de doble redondeo con compensación impropia,

> 2,8x0,45=. 1,4. "He redondeado 2,8 a 3. Luego he redondeado 0,45 a 0,5. Multiplico 3 por 0,5 que es 1/2 y da 1,5. Luego multiplico 0,2 x0,05 y da 0,1. Se lo resto 0,1 a 1,5 y da 1,4".

podría ser una generalización del método para sumar redondeando los dos datos que consiste en sumar los redondos y restar la suma de los complementos. Aquí el estudiante lleva esta regla a la multiplicación, redondea 2,8 y 0,45, a 3 y 0,5, multiplica los redondos y luego resta el producto de los complementos 0,2x0,05.

10. El error de "añadir y quitar" impropio,

> 64x75=4830. "Al 75 le quito 5, y al 64 le pongo 5, de manera que queda 69x70; (multiplico por un número más fácil y me da el mismo resultado)"

podría ser una generalización del método de compensación para sumar, que consiste en añadir una cantidad a un dato y quitársela al otro. Aquí el estudiante lleva esta regla a la multiplicación.

La entrevista con Juan Pedro, que resolvió así:19x18=340. "Hago 17x2 y añado un cero", revela cómo él se da cuenta de que hace igual que en la suma.

Desarrollo de la entrevista.

P. Veamos qué es lo que has hecho aquí. Lo que has hecho mal.

J. Sí ya sé lo que he hecho mal.

P. Ah. Ya lo sabes. A ver, dímelo

J. Pues que igual que en la suma podría redondear diciendo aquí sumo 1 para que me quede bonito y aquí sumo 1, y me da igual. Entonces, aquí no puedo hacerlo porque en la multiplicación esa regla no se puede cumplir. No es lo mismo multiplicar 19x18, que es lo que yo había hecho ahí, que 17x20.

P. ¿Y por qué no es lo mismo?

J. Porque son números diferentes.

P. Sí pero en la suma también son números diferentes y sale. Busca una explicación. En la suma son diferentes y sale, se compensa. Pero en la multiplicación dices, no. Sí que tendría que salir, ¿no?

J. Sí, sí.

P. Además, tú te lo habías creído, que salía, porque lo has hecho así (realmente).

j. Sí, sí.

P. En todos (los ejercicios) has cometido el mismo tipo de error. Dices, Ah, bueno, quito de aquí y pongo aquí, y multiplico que es más fácil. Sería una regla maravillosa (si funcionara).

J. Claro.

P. Si funcionara. ¿Pero debería funcionar?

11. El error de doble incremento con compensación impropia,

47x0,25=47,75. "(47+0,75)x(0,25+0,75)=(47+0,75)x1=47,75"

parece una generalización del método de conservación de la resta que consiste en cambiarla por otra formada con los datos que se obtienen al aumentar en la misma cantidad los dos datos dados. Aquí el estudiante lleva este método a la multiplicación.

La entrevista con Eva, que cometió este tipo de error sistemáticamente en varios ejercicios, deja ver que está aplicando un método de otra operación. Ella dice: "Sí, pero es que esto es un método de la suma" (en realidad es de la resta).

Desarrollo de la entrevista.

P. ¿El método qué te parece?

47x0,25=47+0,75)x(0,25+0,75)=(47+0,75)x1=47,75

E. Bueno, es que está claro. No es la misma multiplicación. Por eso está mal.

P. ¿Este resultado no es correcto?

E. ¿Si es correcto? ¿No sé si daría bien? Pero no será de 47x0,25.

P. No, sino de (47+0,75)x1, ¿eh?

E. Claro. No es lo mismo.

P. Has contestado (multiplicando) un número distinto a éste (al dado).

E. Claro, he hecho una multiplicación diferente a la de aquí.

P. ¿Pero lo que has hecho es correcto o no?

E. No, no es correcto.

P. ¿Ah, no?

E. ¿No?

P. Yo creo que no.

E. No. Pues ya está. Es que estoy haciendo otra multiplicación. Aunque esté sumando lo mismo (se refiere a que suma la misma cantidad 0,75 a los dos factores).

P. ¿Pero el método que has usado que te parece? Has incrementado o has sumado a los dos factores la misma cantidad.

E. Sí, pero es que esto es un método de la suma (en realidad de la resta).

P. ¿Es un método de la suma?

E. Claro.

P. Aquí no vale, ¿verdad?

E. Yo pienso que no.

P. En realidad es un método de la resta. Es el principio de conservación.

E. Sí.

12. El error de factorización tomando los factores como sumandos,

64x75=1200. "8x75=600+8x75=600".

podría ser una generalización del método para multiplicar un dato descompuesto en sumandos a la descomposición del dato en factores. Aquí el estudiante suma los productos parciales por 75, en vez de encadenarlos, uno por el resultado del otro.

13. El error de primeros dígitos impropio,

Cifras completadas

28x35=640. "He multiplicado 20x30=600 y después 8x5=40 y he sumado 600+40=640".

podría ser una generalización del método para sumar operando por separado los distintos órdenes de unidad: unidades con unidades y decenas con decenas.

Cifras aisladas

$3,1^2$= "9,1. He elevado el 3 al cuadrado y el uno también (He multiplicado 3,1x3,1)"

Esta modalidad podría ser indicio del mismo teorema implícito que el anterior, aunque ahora además no se reconoce la forma decimal inicial "0," (cero coma) previa al 1 de 3,1 cuando éste se descompone en 3+0,1.

Nota: Este error ha sido identificado por Matz (1982) como una generalización de determinadas operaciones, tal como cuando se hace $(3+5)^2=3^2+5^2$. Esta interpretación no contradice el hecho de que puede ser debido a la influencia de un conocimiento previo, como pueda ser la forma en que se resuelve (3+5)x2. En efecto así como (3+5)x2=3x2+5x2, también debería ser $(3+5)^2= 3^2+5^2$. Algunos estudiantes incluso contestan en un primer intento $3,1^2=6,2$.

En el caso anterior, cifras completadas, parece que el estudiante resolvió 28x35 influido por un conocimiento previo como puede ser la forma de resolver 28+35=(20+30)+(8+5) . Así, hace 20x30 y 8x5.

La entrevista con Chelo, que resolvió así: $4,1^2=16,1$. "4x4=16; 1x1=1, revela que aborda el cuadrado que se le plantea en términos de hacer el doble: "Yo ahí me fui a los eso, por eso me lié, a los dobles".

Desarrollo de entrevista:

P. Quieres hacer este $(4,1^2)$. ¿Qué te da?

Ch. 16,1.

P. ¿Lo mismo que la otra vez?. ¿Y a ti qué te parece?

Ch. Que está mal.

P. Sabes que está mal. ¿Verdad? ¿En qué crees que está mal? ¿Qué sospechas? Dime lo que piensas.

Ch. Estoy multiplicando de cabeza. Estoy mirando en qué me he equivocado y creo que es que no lo he sumado 4.

P. Dime como has operado.

Ch. 4,1x4,1.

P. ¿Y cómo lo has hecho?

Ch. De cabeza, 1x1 y 4x1 es 4, después 4x1 es 4 y 4x4, 16.

P. ¿Y te da eso (señalando 16,1)? Tú no has hecho eso.

Ch. Sí que he hecho eso. Lo he hecho así.

P. Mira lo que pusiste aquí (En el documento de la prueba).

Ch. Ahora no lo he hecho así.

P. Ves lo que pone aquí: 4x4=16 y 1x1=1. Total 16,1. ¿Ahora (que lo has hecho de otra manera, en columnas) también te da 16,1?

Ch. Sí, y no lo he hecho así. Lo he multiplicado como si estuviera así, pero de cabeza.

P. O sea, ¿que ahora lo has hecho así (en columnas) y te da el mismo resultado?

Ch. Es que no le he sumado el 4.

P. Pero entonces lo hiciste así (Señalando la forma 4x4 y 1x1).

Ch. Entonces lo hice así.

P. ¿Y cuál de las dos crees que está bien?

Ch. Este (Señalando el procedimiento de ahora, el de columnas).

P. ¿Este (el anterior del documento) no está bien? ¿Seguro?

Ch. Es que ahí metí la gamba bien metida. Porque es que. No sé porque hice cuatro ... , porque lo separé. No tiene sentido.

P. ¿A ver si encuentras la explicación?

Ch. ¿Por qué lo separé?

P. Sí.

Ch. Porque como 1x1 es 1.

P. Sí.

Ch. Pues lo mismo. Como era al cuadrado. Supongo que sería eso. Pensaría eso.

P. Bien, ¿cómo crees que había que hacerlo?

Ch. Pues como lo he hecho ahora.

P. Pero eso es columnas. Eso es el método de columna. ¿No?

Ch. Sí. Pero de cabeza. También se puede hacer así.

P. Sí. ¿Y no se te ocurre de otra manera?

Ch. Sí, multiplicándolo. Haciéndolo un entero.

P. ¿Cómo lo harías?

Ch. Pues lo multiplico por 10 y me queda 41. 41x41 daría, pues, 161. Espera, no, daría doscientas.

P. Ah. Quitarías la coma.

Ch. Quitaría la coma. Lo multiplicaría como un entero.

P. Si. ¿Pero volverías a multiplicar en columnas?

Ch. O a lo mejor pondría, como es 41, quitaría el 1 y pondría 40x40=160.

P. Hazlo así.

Ch. ¿Que te lo repita? Quitaría la coma.

P. Multiplicando por ...

Ch. Por 10. Se me quedaría 41. entonces si le resto 1 se me queda 40. saco el doble de 40 son 160. No. Sí. 160, y después le sumaría. ¡Pero es que está mal! ¡Entonces me sale mal!

P. Por columnas lo sabes hacer. No hay problema. Tú sabes aplicar otros métodos, porque aquí (en la prueba) los has usado. Pero cuando yo te digo "aplica otro método a este ejercicio" se te ocurre 40+1, o quitarle 1 al 40. ¿Algo así? ¿No?

Ch. Sí.

P. ¿Y qué harías?

Ch. 40x40 son 1600 y después 1x1. Pero es que 1x1 no tenía que ser. 1x1 sería 10x1. Si éste lo pongo como 40 este también lo tendría que poner como 10, porque es una unidad, si quito una unidad, ¿no?

P. Estás muy liada. Mira escríbelo con paréntesis. ¿Sabes lo que quiero decir?¿No?

Ch. Sí. 40x40, sería 1x1 pero es que yo no creo que fuera 1x1, serían 10x1.

P. ¿Y qué resultado te daría?¿de dónde viene ese producto? ¿De dónde partes?

Ch. De éste.

P. ¿De 41x41?

Ch. Sí

P. ¿Igual a qué?

Ch. Igual a lo de abajo (Señalando lo que ha ido escribiendo).

P. Míralo bien.

Ch. Yo creo que estaría bien, pero es que tampoco da.

P. Efectivamente, 41x41 crees que es 40x40+1x1. Si lo resuelves verás el resultado que te da.

Ch. No da.

P. Pero resuélvelo.

Ch. 1600+1=1601. Total 1601.

P. Mira el resultado que diste (en el documento). ¿A que se parece bastante?

Ch. Sí.

P. Porque luego habría que poner la coma. ¿Dónde la pondrías?

Ch. Aquí (Señala lo correcto).

P. ¿Por qué?

Ch. Porque lo he multiplicado por 10.

P. ¿Y luego qué harías para recuperar?¿Cómo lo has multiplicado por 10?¿Y qué significa eso con relación a la coma?

Ch. Que se corre un lugar la coma.

P. Se parece bastante a lo que dijiste.

Ch. Sí, pero de todas formas eso tampoco da.

P. Porque está mal. Piénsalo.

Ch. Que creo que me he equivocado. No tengo que quitar una coma, tengo que correrla dos lugares, no uno.

P. ¿Por qué?

Ch. Porque es como si tuvieramos dos 4,1 y le quito la coma a los dos.

P. Efectivamente.

Ch. Y luego aquí no tengo que multiplicar 1x1. Tengo que multiplicar 4,1x1.

P. ¿Por qué?

Ch. No lo sé.

P. Estás superliada.

Ch. Es que si no, no da. Haciéndolo así no da, ¿o es que yo no lo he sabido hacer?

P. No da, no.

Ch. Es que no podrá ser quitar ese 1.

P. Pero tú has hecho muy bien los métodos (señalándole el documento de la prueba). Aquí has aplicado Redondeo, Descabezar, y ahora no lo aplicas bien.

Ch. Pero éste no me sale.

P. ¿Por qué crees que se multiplica 40x40 y 1x1 y no otra cosa? ¿Cuando haces columnas qué productos haces?

Ch. Es por eso que te he dicho que es así (4,1x1), y no da la otra forma.

P. Claro.

Ch. Porque ahí multiplico 1x4,1 y luego 4.

P. Mirando columnas, ¿verdad? Eso lo has pensado porque estás mirando columnas.

Ch. Claro, es que, ...

P. Y el 1x4,1 aparece y luego, ¿el 4 porqué?

Ch. 4x4,1. No sé, yo esto no sé sacarlo.

P. Quieres mirar uno de los otros (ejercicios) que has hecho. Uno de los que están bien. Este mismo.

Ch. ¿El 5? (31x42=31x40=1240; 31x2=62; 1240+62=1302).

P. ¿Qué has hecho aquí?

Ch. Restarle 2. Redondear. 31x40 y 31x2. Pero ahí (en $4,1^2$) he hecho lo mismo.

P. ¿Sí?

Ch. Lo que pasa es que me lía la coma esa.

P. Quítala.

Ch. Ya la he quitado.

P. ¿Y si la quitas que números ta quedan?

Ch. Pues lo mismo, me da esto (41). Es que si lo hago como aquí (señala 31x42=31x40+31x2) (escribe 40x40).

P. Espérate. No multipliques 40x40. ¿Qué números tienes que multiplicar?

Ch. 4.1x ...

P. ¿Y cuando quitas la coma qué queda?

Ch. 41.

P. ¿Por?

Ch. 41.

P. Eso sí. ¿Y 41x41 cómo se multiplica?

Ch. 40x40, 1600 y ...

P. No has hecho eso ahí (en 31x42). Ahí no pone 30x40.

Ch. Sí claro. Entonces sería 41x40 y 41x1.

P. Perfecto.

Ch. Pero es que ahí lo he hecho así.

P. Ahí no pone 41x40 (ponía 40x40).

Ch. No, y luego 41x1.

P. Así tiene que ser. Pero ahí te empeñabas en 40x40.

Ch. ¿Y cómo es que me da?

P. Te da mal. ¿Ves algo claro ya? ¿Este lo ves?

Ch. Lo veo claro. Dejo bien uno y le quito al otro.

P. ¿La palabra es quitar?

Ch. No lo quito, lo descompongo. Pues me he equivocado (mirando el $4,1^2$). Porque no.

P. Ahí no descomponías.

Ch. Ahí no descompongo.

P. Ahí hacías algo misterioso.

Ch. Lo que me daba la gana.

P. ¿De dónde venía eso? ¿De dónde te venía esa idea de 40x40 y 1x1? ¿No lo sabes?

Ch. Es que no lo sé, porque como los cuadrados es así.

P. ¿Como son los cuadrados, a ver?

Ch. Como el cuadrado era 40x40.

P. ¿El cuadrado de quién?

Ch. De 41. Me voy al doble. Por eso que te decía, es que no me acuerdo. Yo el 41 lo descompongo en 40x40 y 1x1, en vez de, ...

P. ¿Sigues pensando que está bien eso?

Ch. No. Está mal.

P. ¿Por qué está mal?

Ch. Porque mirando esto (los comentarios acerca del ejercicio 31x42) sé que está mal. Porque no lo tenía que descomponer.

P. Sigues pensando que el cuadrado de 41 es 40x40 y 1x1. ¿Verdad?

Ch. Claro.

P. ¿Y de dónde crees que viene eso de que el cuadrado sea eso?

Ch. ¿El cuadrado de quién? El cuadrado de 2 es 4, el cuadrado de 3 es 9 y el cuadrado de 41, 40x40 más 1x1.

P. ¿Qué es lo que te han enseñado, qué te han dicho alguna vez, para que tú pienses eso?

Ch. Yo creo que me viene de cuando tú decías os vais al cuadrado de arriba cuando ponías las tablas esas.

P. ¿Qué tablas?

Ch. Las que ponías tú de los cuadrados cuando explicabas esto del redondeo y todo eso. Por ejemplo tenías 45 y subes al 50.

P. Pero esto no es redondeo.

Ch. Bueno, pero yo he hecho lo mismo me he ido al redondo, al 40.

P. Pero el redondo el 41 por arriba es 50. Pero si redondeas luego has de compensar. Y tú has redondeado bien en este otro (ejercicio de la prueba).

Ch. Pues no sé. Yo no sé por qué pensé.

P. Ya no es que lo pienses, es que crees que lo que hay que hacer con un cuadrado es eso. Para calcular el cuadrado de 41, 40x40 y 1x1. ¿Para calcular el cuadrado de 11?¿Sabes cuánto es?

Ch. Pues.

P. 121, ¿no? Entonces cómo lo haces? ¿10x10 y 1x1?

Ch. Hombre, si aplico esto, sí.

P. ¿Crees que sería eso?

Ch. No yo sé que está mal. Yo pensé en hacer eso y eso.

P. Tu tienes ahí una regla que te creías que era buena. ¿Y ahora cuando has venido aquí (31x42), por qué no has hecho 30x40 y 1x2?

Ch. ¿Cómo?

P. Podrías haber multiplicado 30x40 y 1x2 y hubiera sido la misma regla.

Ch. No.

P. 40x40 y 1x1.

Ch. Y aquí sería 30x40 y 1x2. Pero no.

P. Y ahí no has aplicado esa regla.

Ch. Yo ahí me fui a los eso, por eso me lie, a los dobles.

P. A los cuadrados.

Ch. A los cuadrados. Por eso. Pensé, pues el cuadrado de 40 y el cuadrado de 1, y ya está.

P. Sí, eso lo hemos visto.

Ch. Es que no sé por qué.

P. ¿Pero te parece que es así, que es razonable?

Ch. No, es razonable, pero está mal.

P. ¿Y no sabes por qué?

En este momento el entrevistador discute sobre un tercer ejercicio, tras lo cual le plantea a la entrevistada la situación en términos algebraicos 4,9x5,1=(4+0,9)x(5+0,1). A raíz de esto se sigue lo siguiente:

Ch. Me como las cosas.

P. ¿Te comes las cosas en la distributiva?

Ch. Ya, es que no la aplicaba.

P. ¿Tú de dónde crees que viene eso? Eso de comerse las cosas intermedias en la distributiva. ¿Dónde has encontrado un método en el que pase eso? ¿A ver si encuentras algún método en dónde esto se calcule operando éste con éste y éste con éste? ¿Si fuera una suma, como sumarías 31+42?

Ch. Ahí sí que puede hacerse.

P. 30+40.

Ch. Y 1+2. Claro, y yo lo aplicaba a la multiplicación.

13 (bis). El error de primeros dígitos impropio.

La entrevista con Beatriz, que resolvió así:

26x35=630. "Primero descompongo los números en (20x30)+(6x5) =600+30=630"

revela que al buscar explicación sobre su forma de proceder tropieza con su falta de dominio de la ley distributiva, y con un centramiento

en los datos alterados: "me faltan 6 veintes", en vez de en el efecto de la alteración.

Desarrollo de la entrevista.

P. Primero que nada yo lo que te preguntaba es si te parecía razonable (Lo que has hecho). Y claro, es razonable. Desde luego es un método sencillo, incluso demasiado sencillo.

B. Demasiado sencillo.

P. Lo que te hace sospechar que hay algo que está mal.

B. Sí.

P. Este es un método que está mal, hay algo que está mal ahí, y que lo has hecho varias veces.

B. Sí.

P. Piensa a ver si llegas a alguna conclusión y, si no, ya intentaré ayudarte.

B. Es que cuando, o sea, he dudado entre coger el 20 y el 30 o el 25 en los dos hacer un cuadrado conocido. Pero es que después lo que me queda, que me quedará de aquí uno (del 26) y de aquí 15 (del 35), o sea no de aquí 10, también, 10x1 y después se lo hubiera sumado, o sea que hubiera sido lo mismo.

P. Y eso no hubiera estado bien.

B. Tampoco. Si hago después también la suma.

P. ¿No se te ocurre nada más?

B. No.

P. ¿Por qué no lo haces en columnas?

B. ¿O sea, normal?

P. Sí. Es para asegurarte del resultado.

P. Sabrías usar otro método. Yo creo que sí. Aquí (en la prueba escrita) tienes "alicuotar" y "redondear". ¿Por qué no usas el redondeo? Por ejemplo del 35 a 40. Porque aquí lo has aplicado correctamente y por lo tanto sabes usarlo.

B. Vale.

P. ¿Cómo vas?

B. Es que no me acuerdo, me parece que 26x40 y le resto la, me parece, creo que me falta, de 35 a 40, 5, pero si le resto 5, tampoco me da.

P. ¿Quieres probar por otro camino?

B. Al hacer el redondeo, o sea el método del redondeo, me he dado cuenta de que aquí; o sea, si yo pongo 20 por 30 me faltan 6 veintes para llegar a, para ser 26; y 5 treintas para ser, para que me salga la multiplicación, pero vale. Entonces he multiplicado 20 por 30 y después he cogido 6 por 20 que eran lo que me faltaba y el 5 por el 30 que eran lo que me faltaba, los he sumado y después lo he vuelto a sumar a 600, pero tampoco me da.

P. Bien, ya estás bien encaminada. Ya sabes que aquí (señalando a su prueba escrita) te faltaban cosas.

B. Sí.

Errores que parecen un centramiento en lo alterado, en vez de en el efecto de la alteración

14. El error de doble descabezamiento con productos parciales impropios,

31x42= 1304. "30x40=1200; 1x42=42; 2x31= 62;
1200+42+62=1200+104 =1304"

parece ser debido a un centramiento. La entrevista que se desarrolla simultáneamente con el estudiante anterior y con otro estudiante, llamado César, así lo atestigua.

Desarrollo de la entrevista.

P. (A César) Beatriz comete el mismo tipo de error que tú en este ejercicio (en 31x42), le faltan productos parciales.

P. (A Beatriz) Mira cómo lo ha resuelto César. ¿Te parece razonable?

B. No.

P. (A César) A ti te parece razonable?

C. Ya sé que está mal.

B. Pero lo hace al revés que yo. Yo cojo el que me falta de aquí. Si lo he redondeado a 30, 1 por 30; y el 2 por 40. El lo hace al revés.

P. En cambio, él multiplica ese 1 por 42.

B. Sí.

P. ¿Y ese 2?¿ Y a ti que te parece más lógico.

B. ¿Yo? Lo que he hecho yo. ¡Hombre, si te falta 1 para el 31, te faltará un 30 y te faltará 2 cuarentas! ¡Humm!

P. Ya no lo ves claro.

B. No. No. Es como lo ha hecho él.

P. ¿Como él lo hace?

B. Me parece que sí. A ver, 31x42, si yo multiplico 30x40 me falta un 42. O sea, me parece que. No. No lo veo.

P. Vamos a pensar. ¿Por qué crees que hay que multiplicar 30x40?

B. Porque es más fácil. ¿No?

P. Pero tú sospechas que este producto tiene que estar en algún sitio, y ¿qué más productos tienen que estar? Lo que tú decías antes es que como el 1 no lo has tocado tendrás que cogerlo. ¿No?

B. Claro.

P. Y lo multiplicas por 30. ¿Por qué por 30?

B. Por eso, por lo que te he dicho antes. Porque me falta un. A ver, antes te he dicho aquí que me faltan 6 para llegar a 26, es como si me faltaran 6 veintes.

P. ¿6 veintes?

B. ¿O me faltarían 6 treintas?

P. Por ahí va la cosa. ¿6 veintes o 6 treintas?

B. 6 treintas. Porque. A ver. Sí. Si yo multiplico 20 por 35, me faltarán 6 treinta y cinco, y por eso es más razonable lo que ha hecho él.

P. ¿Pero lo que ha hecho no está bien?

B. Tampoco.

P. Pero ya estas muy cerca. Incluso tienes un método. ¿Quieres anotarlo para que no se te olvide?

B. Lo voy a hacer por ese método. A ver.

P. (A César) A ti qué te parece.

C. A mí me parece más razonable el mío.

P. ¿El tuyo?

C. Sí.

P. Pero el tuyo tiene un error.

C. Ya, ya.

B. (Resolviendo 26x35) 20x35=700, y ahora me faltan 6x35=215=915.

P. ¿Sale?

B. Sí.

P. Ya tenemos algo.

B. ¿Y si lo hago de esta manera, me dará? A ver, si yo ahora lo hago de esta manera, pero si en vez de descabezar el 26 descabezo también el 35. Sería. Esto igual. Y ahora haría, 5x20 y 6x30.

P. Muy bien. Anótalo. Ponlo indicado.

B. ¿Cómo?

P. Indicado es con paréntesis, para que no hagas operaciones.

B. Vale. A ver. 5x20. Lo sumaría. Bueno, 5x20. Y esto, imagino que lo tengo que sumar.

P. ¿Y no te falta nada? Hasta ahí has hecho lo mismo que César. Ya está donde tú estás. Mira (señalando el ejercicio resuelto por César) 30x40. Bueno, tú haces el otro (César hizo el 31x42 y Beatriz el 26x36) 20x30. Luego. No, no ha hecho lo mismo, porque él hace 2x31 y tú, en cambio, haces, sabes lo que quiero decir, él hace 5x26, y tú haces 5x20, y luego tú haces 6x30 y él hace 6x35.

B. No, pero, el error está aquí, entonces. Porque yo aquí. Aunque yo. A ver. No, claro, me faltan 5 veintiséis, no 5 veintes. (Beatriz hace diversos ensayos) Me ha salido de otra manera.

P. Y te sale bien ahora.

B. Sí.

P. Vamos a ver.

B. He hecho lo mismo que te estaba explicando antes. O sea, me faltan 5 veintes y 6 treintas, lo sumo y me da eso (señala) y después he multiplicado 5x6 y la suma sí que me da.

P. Ahora está bien.

E. Sí, pero, yo esto no sé porqué lo he hecho. Yo he probado y me ha salido.

P. Ahora está bien. ¿Quieres poner (20+6)x(30+5)? (Lo escribe). Tú crees que esto (lo escrito) es igual que lo que tienes aquí (señalando lo último que ha ensayado).

B. A ver. ¿Esto? Sí es lo mismo que he hecho yo aquí.

P. ¿Y cómo se resuelve eso?

B. Este por éste que me da 600, 20x5 y 6x30, y después 6x5 .

P. ¿Eso está bien?

B. Sí.

P. Fíjate cuántas cosas te habías comido (comparando con la forma en que resolvió en el test). Porque tú hacías esto y hacías esto.

B. Sí.

P. Pero no hacías esto.

B. Sí.

P. Entonces, ¿qué es lo que pasaba? ¿Lo que yo querría saber es por qué te comías esto (señalando los parciales)? ¿Ahora lo ves razonable que te faltaba eso?

B. Sí, sí. Al hacer así, todo de redondeo, me he dado cuenta de que eso. O sea, si yo redondeo, lo que me queda es, lo que te estaba diciendo antes, a mí me falta 5 por ...

P. Te faltan partes. Si tú multiplicas 26x35 y si tú haces 20x30, también te faltan el 6x30 y el 6x5 y también el 20x5. O sea, te faltan piezas del producto. Bueno, ya lo has encontrado. Es un problema de que no

aplicabas bien la propiedad distributiva. Es un problema de que la propiedad distributiva, que tú te la sabes, no la veías ahí. Cuando viene dado así el número (señalando 26x35) no la reconocías. Y mi pregunta es por qué no la reconoces. ¿Por qué esto te parecía razonable? ¿Dónde has visto tú este método, este de multiplicar 20x30 y 5x6? ¿De dónde puede venir?

B. No sé.

P. No lo recuerdas. ¿Suma 26+35?

B. ¿26? ¿Lo sumo?

P. ¿Cómo lo sumarías? Mentalmente.

B. Pues, la unidad con la unidad, y la decena con la decena.

P. ¿Quieres ponerlo indicado?

B. Sí.

P. ¿Te recuerda algo?

B. Sí.

P. ¿Qué te recuerda?

B. Lo que he hecho aquí (señala la multiplicación), que es lo que te estaba diciendo yo al principio, que yo había multiplicado las decenas y las unidades.

P. Tú has pensado eso. Yo no podía decírtelo. Estabas aplicando el método de sumar.

B. Sí.

15. El error de incremento (redondeo) y compensación impropia, restando el producto del incremento por el factor incrementado, en vez del producto por el otro factor,

28x35= "994. Multiplico 35x30 y le resto 56"

podría ser un centramiento en el dato alterado que indicaría una falta de dominio o no reconocimiento de la ley distributiva. Aquí parece que el estudiante hace: 28x35=(30-2)x35=30x35-2x28.

La entrevista con Celia sobre el ejercicio 37x98, apunta en este sentido y deja ver que el error de descabezar tomando el producto parcial sobre el factor descabezado y no sobre el otro factor se apoya en un razonamiento análogo.

Desarrollo de la entrevista.

P. ¿Quieres hacer 37x98? Por redondeo. ¿Cómo lo harías?

C. Pues 100x37, 3700 y luego dos veces más 98, que es lo que me falta.

P. Si. Escríbelo.

C. Sí (Escribe).

P. ¿Tú crees que está bien hecho?

C. Sí.

P. Parece razonable. ¿Quieres hacerlo? Pon uno arriba y otro abajo (Como en columnas).

C. ¿Que lo haga así?

P. Sí. Que multipliques y compruebes. (Tras una pausa) ¿Qué pasa? ¿No sale?

C. No da.

P. ¿Y por qué?

C. ¿Y por qué?

P. ¿Que por qué no da?

C. Porque habré aplicado mal el redondeo, ¿no?

P. No lo sé. A ver si lo descubrimos. Venga.

C. (Tras una pausa) Porque tengo que multiplicar dos veces el 37. Dos veces más.

P. Te has dado cuenta enseguida.

C. ¿Es eso?

P. ¿Tú crees que sí?

C. Yo creo que sí. En vez de haber multiplicado 98x2 tendría que ser 37x2.

P. ¿Seguro?

C. Restándolo. O. Huyuyuy. Espera. Lo hago. A ver si da.

P. Haz lo que quieras. Si puedes descubrirlo tú sola mejor.

C. Me sale restar en vez de sumar. A ver.

P. ¿Ya tienes dudas?

C. Espera. Sí, da.

P. Ya lo tienes claro, ¿no? Vamos a ver.

C. Porque era multiplicar el 2x37, pero en vez de sumar era restarlo.

P. ¿Pero eso te parece razonable, o es que, bueno, para que dé? (Ya que) Así sale.

C. No, porque lo he hecho mal. Porque al multiplicar por. Al redondear he aumentado 100 dos veces, lo que tenía que haber hecho en vez de seguir sumando era restar, porque al aumentarlo.

P. (Interrumpiendo) ¿Has aumentado 98 en 2 unidades?

C. En dos unidades. Entonces, sería. Luego lo que tengo que hacer es restar, pero las dos unidades que he aumentado, en vez de multiplicar por 98, las tenía que haber multiplicado por 37.

P. Sí. ¿Lo ves claro ya, no?

C. Sí.

16. El error de descabezar tomando el segundo producto parcial sobre le factor descabezado y no sobre el otro factor,

31x42= "Multiplico 30x42 y le sumo 31"

podría ser, como el anterior, un centramiento en el dato alterado. Aquí parece que se hace: 31x42=(30+1)x42=30x42+1x31.

La entrevista, que se desarrolla también con Celia continuando la anterior, deja ver el mismo tipo de razonamiento.

Desarrollo de la entrevista.

P. ¿Quieres mirar éste otro?

C. ¿31x42?

P. A ver, ¿qué ha pasado aquí?

C. No está bien, ¿no?

P. ¿No está bien?

C. No.

P. ¿Y ya sabes por qué?

C. Sí.

P. ¿Por qué?

C. Al multiplicar 30x42 da. Espera, 3x2, 1260, más una vez más (31).

P. ¿Quieres hacerlo por columnas, para comprobarlo? (Lo hace) ¿Lo tienes clarísimo, verdad?

C. Sí.

P. ¿Qué te ha pasado?

C. Lo mismo de antes.

P. Sí. Pero es que no lo veías.

C. Ya.

P. Lo vuelves a hacer. Lo acabamos de detectar aquí arriba (en el ejercicio 37x98). Vuelves a cometer el mismo error y cuando te he preguntado no lo has visto.

C. Es que no había caído. No me había dado cuenta.

P. Sigues pensando que es éste el que ...

C. No, si ahora sí que lo veo. Es que entre paréntesis el 30+1 lo más lógico es que me dé 42x30, más 42x1 otra vez. Pero no sé porqué ...

P. Pero fíjate que aquí (en 37x98) has redondeado y aquí (31x42), no. Esto es un descabezamiento (30+1). En los dos casos has cometido el mismo tipo de error. En el redondeo has cometido un tipo de error que consiste en restar el 98 (dos veces) y aquí que es descabezamiento, que es diferente. Ahora sumas. En lugar de sumar el 42, ahora sumas el 31. Es que te fijas en el que estás manipulando. Como es el 31 el que tocas, es el que luego manejas aquí. Como el 98 es el que tocas, ...

C. Es el que luego pongo.

16. (bis) El error de descomposición tomando el segundo producto parcial sobre el factor descompuesto, en vez de sobre el otro factor,

41x32=1294. "41 por 30=1230 y le sumo 64".

26x35=951. "He multiplicado 25x35 que es un hecho conocido y luego le sumo 26 => 25x35=925+26=951.

podría ser un centramiento en el dato alterado combinado con una falta de dominio de la ley distributiva, como ya se ha comentado en las

entrevistas anteriores. En el primer caso parece que el estudiante multiplica cada parte de la descomposición del 32 en 30+2, por cada uno de los datos: 30x41 y 2x32; y en el segundo toma 25+1 en vez de 26 y luego multiplica 25x35 y suma 1x26.

La entrevista con Amparo apunta en este sentido y deja ver que se centra en que lo que quita luego lo tiene que añadir, pero con el mismo número: "No, no pensaba que se lo quitaba al otro número, sino que se lo quitaba a ese mismo número".

Abunda en esta idea una segunda entrevista, con otra estudiante llamada también Amparo, quien comete también el error de "añadir y quitar" sin reconocimiento de los productos intermedios", como una consecuencia de aplicar dos veces su método equivocado.

Desarrollo de la entrevista.

P. Ves mirando lo que tienes mal.

26x35=. 951. "He multiplicado 25x35 que es un hecho conocido y luego le sumo 26 => 25x35=925+26=951".

(Tras un rato) ¿Ya tienes algo?

A. Sí, que el 3, el 6 y el 10 es lo mismo (Se refiere a los ejercicios 3º, 6º y 10º donde ha cometido el mismo tipo de error).

Pero le he quitado un 35 al 26 y luego, al sumar, en vez de sumar un 35 le he sumado un 26. tenía que haber sumado un 35.

P. Claro. Te das cuenta que sumaste la cantidad que no tocaba, ¿y por qué 26? Sumaste 26 y no 35.

A. Pues, no sé.

P. ¿Y el otro? (el 6º, 2,4x0,15=0,301. "He multiplicado 15x25 y me da 325, le resto 24 y me da 301 y corro las comas").

A. El otro, ¿el 6? Es lo mismo. He cogido y he quitado el decimal y luego lo añado al final.

P. ¿Y ahora qué más haces?

A. Y luego lo mismo. En vez de restarle 15, le resto 24.

P. ¿Y eso por qué?

A. Pues, no lo sé.

P. ¿Y sin embargo ahora lo has visto? (lo que debería haber hecho)

A. Sí, porque pensaba que lo que le quitaba luego se lo tenía que añadir, pero con el mismo número. No, no pensaba que se lo quitaba al otro número, sino que se lo quitaba a ese mismo número.

P. O sea, que la que le quitas se la tienes que añadir, pero al mismo número. No, a ver.

A. No. Creo que es porque yo pensaba, al decir le quito una, luego se la tengo que volver a añadir en ese, ese 26 que le he quitado.

P. ¿Y en el 10? Has hecho lo mismo (Aplica su método erróneo dos veces y olvida poner los decimales).

4,9x5,1=2502. "Multiplico 50x50=2500; luego le resto 49 y le sumo 51: 2500-49=2451; 2451+51=2502".

A. Es al revés.

P. ¿Le sumas 51 y le restas 49?

A. Sí, porque yo he cogido y al 49. Lo hago por partes, al 49 le sumo un 0,1. O sea, le voy a quitar primero las comas y da 49x51. Al 49 le sumo 1 y me da 50. Entonces yo le he puesto un 51 más. Entonces tengo que quitárselo. Lo que hago es eso.

P. Luego para ti esto (le sumo 51) es resta (debe restar 51).

A. Es resta. Y luego el 51 lo mismo. He cogido y he quitado un 49 y luego lo que debo hacer es sumárselo. Y luego, lo que se me ha olvidado es poner los decimales.

P. ¿Y tú crees que con ese resultado lo tendrías bien?

A. Si pongo los decimales, sí.

P. ¿Sí? Quieres hacerlo con lápiz y papel (en columnas), toda esa operación. ¿A ver si es verdad?

A. ¿La operación y luego hago lo mismo?

P. Sí (Lo hace) ¿Qué pasa?

A. Que no sale. Me sale uno menos.

P. ¿Te faltan cosas?

A. ¿Y por qué?

P. Escríbelo de modo indicado, con paréntesis. ¿Sabes lo que quiero decir, ¿no?

A. Sí.

P. Escribe 49 es 50-1 y 51 es 50+1. Pon los paréntesis y calcula. ¿Eso es lo que te piden, no? ¿Qué productos salen ahí?

A. (Tras resolver) Al hacer el paréntesis sí que se ve.

16 (Tris). El error de descomposición tomando el segundo producto parcial sobre el factor descompuesto,

La entrevista se lleva a cabo con otra estudiante, llamada también Amparo, que resolvió así:

19x18=341. "20x18=360; 19x1=19. 360-19=341".

Desarrollo de la entrevista.

A. He redondeado y he considerado que ese 19 estaba muy próximo a 20. Entonces he multiplicado 18x20, que es como si multiplicara 18x2, sólo que luego se le añade un cero.

P. Vale, vale, 360. ¿Y luego qué?

A. Y luego como me había pasado. O sea, como de 19 a 20 va uno solo, pues he multiplicado 19, que es el número que a mí me dan, por 1, porque me faltaba 1. Entonces me da 19, y como en la primera multiplicación me pasaba del resultado que me tenía que dar, porque 20 era un número mayor que 19, pues entonces lo he restado para saber lo que me daba.

P. Y has restado 1. ¿Y eso está bien?

A. ¿El qué, lo de la resta o el resultado?

P. El resultado. El resultado está mal. (A. rehace la resta 360-19=341) La resta esa está bien, lo que está mal es el método.

A. No sé.

P. A ver piensa. Coges el 20. ¿Has tomado el 18 cuántas veces?

A. Una.

P. Y luego tú dices: cómo lo he aumentado una vez, el 19, lo he aumentado una vez, ¿no?

A. Sí.

P. Restas el que se aumenta. ¿Pero estás en la multiplicación? ¿Por qué números?

A. Por 18.

P. ¿Y cuántas veces has tomado el 18 en ese producto?

A. 20 veces.

P. ¿Y cuántas veces lo tenías que tomar?

A. Entonces, tenía que haber multiplicado 18x2.

P. Sí, sí, pero digo lo de abajo (Escribió 19x1 debajo del 20x18) .

A. Que si el 18 es el multiplicador y 19 el multiplicando, pues tenía que haber multiplicado 18x1, y luego tendría que haberle restado al 360 el 18.

P. Pero no lo hiciste así. Restaste el 19.

A. Porque como lo había redondeado al 20.

P. Te creías que hay que quitar el mismo que has redondeado.

A. Sí. Porque es que el 20 es con el que. O sea, a causa del 20 yo me paso en la multiplicación, y no pasa con el 18. El 18 yo no lo muevo, lo dejo como está. Entonces, para saber de cuántos veintes me he pasado.

P. (Interrumpiendo) ¿De qué te has pasado de veintes o de dieciochos?

A. De veintes.

P. Vuelve a mirar la multiplicación. Tienes que tomar muchas veces el 18, no el 20. Tienes que tomarlo 19 veces. ¿Y tú cuántas veces lo tomas?

A. 20.

P. ¿Entonces de qué te estás pasando? ¿Es que te estás pasando de 18? ¿Sí o no?

A. Sí.

P. ¿Seguro?

A. Ahora sí.

14 (bis). El error de doble descabezamiento con productos parciales impropios,

> 31x42=1304. "30x40=1200; 1x42=42; 2x31=62; 1200+42+62=1200+104 =1304".

podría ser indicio del mismo tipo de teorema implícito que antes, esto es, el de centramiento, pero además se revela una posible extrapolación de la regla de columnas que consiste en multiplicar cada una de las cifras del multiplicador por el multiplicando.

17. El error de contabilización incorrecta de los ceros, tras multiplicar números acabados en ceros,

47x99="423. 47x100=470-47=423".

podría ser de descuido, porque es de suponer que los estudiantes saben que 47x100 no son 470. No obstante este error se produjo con una frecuencia significativamente elevada e incluso en algunos estudiantes de modo sistemático, por lo que cabe pensar en un centramiento en el cien al multiplicar por cien y no en el efecto que produce.

La entrevista con Josefa apunta en esta interpretación: "es que cojo el concepto de que tiene que ser cien. Entonces yo cuento que 35x100 como si no tuviera que pasar de los miles al ser multiplicado por cien. Como si se tuviera que quedar en el 350 ... La idea del cien, me domina ahí".

Desarrollo de la entrevista:

P. Mira lo que hiciste: 26x35=122'5. "35x100/4=350/4=87'5+35=122'5". El error que cometes es que cuentas mal los ceros al multiplicar. ¿Lo ves?

J. Sí, que he puesto uno menos.

P. Te das cuenta, ¿no? Es un error de descuido.

J. Sí. Eso ha sido. De descuido.

P. Pero, es que vuelves a hacerlo.

J. ¿Sí?

P. En el problema 5º: 31x42=168. "30x42=126; 126+42=168".

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA BIBLIOTECA DE CIÈNCIES

J. No me digas. ¿En el cinco? ¡Huy! Es verdad.

P. Y en el ocho (dices): 2,8x0,45=0'045. "Primero opero como si no hubieran comas y al final las pongo. 30x45=135; 2x45=90 ->135-90=45->0'045".

J. ¿Y por qué me como yo un cero cada vez?

P. Te lo comes cada vez porque dices: 3x45 es 3x5, 15, 3x4, 1, 13 y ...

J. ¿En cuál? (ejercicio)

P. En el ocho.

J. Sí.

P. Te olvidas.

J. (Interrumpiendo) Del cero.

P. ¿Eh? Lo aparcas y no lo pones.

J. Sí, sí.

P. O sea, que ese es el único error que has tenido. Lo que yo no sé.

J. No. Y aparte. Es que en este primero (se refiere al ejercicio nº 3: 26x35), por ejemplo, en 35x100 es que cojo el concepto de que tiene que ser cien. Entonces yo cuento que 35x100 como si no tuviera que pasar de los miles al ser multiplicado por cien. Como si se tuviera que quedar en el 350.

P. Sí.

J. Es la idea esa.

P. Sí, si.

J. Me doy cuenta que no paso a la otra unidad.

P. Arrastras la idea del cien.

J. La idea de que tiene que ser cien, porque multiplico por cien. Es la idea esa. En el tercer ejercicio (26x35) por lo menos.

P. Lo sabes, pero predomina la idea del cien.

J. La idea del cien, me domina ahí.

P. Lo sabe. ¿No? Lo ves claro.

J. Sí, pero me domina la idea del cien, de la centena.

P. Pero eso te vuelve a pasar al hacer 30x42 en el (ejercicio) cinco.

J. Ese yo creo que es más por fallo de olvidarme.

No transferencia de la regla para ubicar la coma decimal en el producto, de los algoritmos de columnas a los métodos alternativos.

Algunos estudiantes dejaron los ejercicios con decimales sin contestación, las entrevistas revelan que no conciben que se pueda prescindir de la coma para operar con los datos como si fueran enteros, porque o no saben cómo recuperarla o porque creen que los números que les aparecen son otros diferentes a los dados y que por lo tanto tienen un producto diferente, con cifras diferentes.

La entrevista con M. Carmen revela que no quita la coma porque luego no sabe cómo recuperarla:

Desarrollo de la entrevista.

P. ¿Al ver la coma no sabes qué hacer? ¿No sabes ni siquiera que se puede aparcar la coma?

M. C. Sí.

P. Ahora lo sabes porque lo hemos hablado (a lo largo de la entrevista), pero antes ni siquiera sabías que se podía quitar la coma (para operar como enteros).

M. C. No, sabía que la podía quitar, pero no sabía cómo ponerla.

P. Sí. Sin embargo si yo te hubiera escrito así, (En columnas) seguro que lo habrías hecho.

M. C. Sí que lo hago.

P. O sea, que en columnas lo sabes hacer, pero al verlo en horizontal no.

M. C. Sí. ¿qué hago yo con la coma?

P. Fíjate. ¿Por qué en columnas sí, y aquí (en la prueba) no?

M. C. Porque en columnas me lo han enseñado de toda la vida.

P. Pero en horizontal no lo has visto nunca.

M. C. No.

P. Y como no lo has visto nunca no caes en la cuenta.

M. C. No.

Entrevista bis sobre la no transferencia de la regla para ubicar la coma decimal en el producto, de los algoritmos de columnas a los métodos alternativos.

Victoria confiesa que no puede quitar la coma porque aparecen otros números y su producto sería diferente al dado.

Desarrollo de la entrevista.

P. Los (ejercicios de multiplicar) que no has hecho son precisamente los que son con decimales.

V. Claro, porque veía que no, y digo, para qué voy a entrar ahí.

P. ¿Y qué es lo que te molesta de ahí? ¿La coma?

V. Todo. Es que no sé cómo colocar. No sé. Al intentar hacerlo de cabeza no sé cómo colocarlo y me armo un lío.

P. Claro. No sabes qué hacer con la coma. Pero tú ahí podías usar el redondeo, la descomposición. Porque tú los has usado muy bien (en otros ejercicios). Fíjate que en los otros ejercicios con enteros has aplicado descabezar, redondeo.

V. Sí.

P. O sea, que sabes los métodos.

V. Sí.

P. Cuando llegas aquí (2,8x0,45). Fíjate. Si fuera 28x45.

V. Pero es que, ¿cómo? Si esto es coma ocho yo no entiendo por qué pongo 28. ¿Por qué pongo 28 si hay un 2,8?

P. Claro. ¿Cómo vas a hacerlo? ¿No? Porque si hubiera sido 28 lo hubieras hecho (hubiera multiplicado).

V. Si por ejemplo pongo 28 y luego, ¿cómo lo multiplico por 0,45?

P. ¿Y por qué no pones también 45?

V. Es que 45 y 28 son otros números.

P. Son otros números y te darían un resultado diferente.

V. Bueno, me darían un resultado diferente. Entonces lo que luego tendría que hacer es contar, ¿no? Contaría uno, dos, y tres (cuenta cifras decimales) y pondría, ¿no? la coma. Contaría uno, dos tres. ¿Sería eso?

P. ¿Tu que crees?

V. Te pregunto.

P. Yo te lo voy a explicar luego, pero primero quiero saber qué piensas.

V. Pues yo pienso que 28x45 no lo podría poner.

P. ¿No lo podrías poner porque el resultado es el de otros números?

V. A mí me parece que sí.

P. ¿Y además las cifras que saldrían serían iguales o diferentes?

V. Pues yo creo que diferentes.

P. Entonces, ¿como no sabes operar con la coma no la puedes quitar porque saldría otra cosa?

V. Yo pienso que sí.

P. Entonces no haces nada.

V. Claro.

P. ¿Quieres hacer este otro (4,9x5,1).

V. Ya (Lo hace en columnas).

P. Así sí que sabes hacerlo. ¿Eh?

V. Sí.

P. ¿Y qué números has multiplicado?

V. 4,9x5,1.

P. ¿O (En realidad) 49x51?

V. Claro, ahora ya sí que lo entiendo. Porque luego lo único que tengo que hacer es multiplicar esto y sumar. O sea, contar y poner.

P. O sea, que en columnas que números multiplicas.

V. En realidad multiplico 49x51. ¡Claro!

P. Pero luego la coma la pones. O sea, que lo hubieras podido hacer (igual que el 2,8x0,45) .

V. Pero es que no. Yo pensaba que eran números diferentes.

P. Escribe 2,8=. ¿A ver cómo podrías quitar la coma pasándolo a fracción? ¿Sería 2,8=28/10?¿Es lo mismo?

V. Sí.

P. Ahora el otro número, 0,45. Escríbelo sin coma, pasándolo a fracción.

V. 45/100.

P. ¿Cómo multiplicarías estos dos números? Ahora ya no llevan coma, ¿verdad? ¿Cómo los multiplicarías? (Escribe: 2,8x0,45=28x45= 28/10x45/100 = 28x45/1000=13200/1000). Ahora pon la coma. ¿Cuántas cifras decimales?

V. Tres.

P. Bueno, ¿qué has multiplicado, enteros o decimales?

V. Enteros.

P. Te has olvidado de la coma, ¿verdad?

V. Sí.

P. ¿Pero, qué tienes en cuenta?

V. Los ceros.

P. ¿Y cuando acabas cuántos ceros hay?

V. Tres.

P. ¿Por qué hay tres ceros? Porque ahí (señalando 28/10) hay un cero. A ver, porque aquí (2,8), ... ¿cuántas cifras decimales hay?

V. Una.

P. ¿Y aquí (0,45) cuántas hay?

V. Dos.

P. ¿Y si aquí hay una cifra (decimal), aquí (28/10) cuántos ceros habrán?

V. Uno.

P. ¿Y si aquí (o,45) hay dos, aquí (45/100) cuántos?

V. Dos.

P. ¿Y en total cuántos ceros habrá ahí abajo?

V. Tres.

P. Tantos como cifras decimales. ¿Y cuando divides por un número (acabado en tres ceros) con ceros que le pasa a la coma?

V. ¿Se corre tres lugares?

P. ¿Entonces, si quieres operar cualquier otra pareja de números, los pones con fracciones decimales, operas los enteros (de los numeradores) y al final qué tendrás que poner? Los decimales. Teniendo en cuenta ¿qué?

V. Tres cifras.

P. Entonces la regla viene de que en realidad operas las fracciones decimales y para multiplicar fracciones uno multiplica los numeradores ... (Ahora interviene el estudiante J, que ha asistido a la entrevista)

J. ¿Y eso lo saben todos los profesores?

P. Sí, y te lo han explicado.

J. ¿A mí?

P. Lo que pasa es que no te acuerdas.

J. Pero a mí no me han relacionado lo que son fracciones con lo que es multiplicar números decimales.

V. Igual es que no nos acordamos.

J. A mí, cuando me explicaron números decimales, era multiplicación de números decimales.

P. Pero a lo mejor es que no te acuerdas.

J. ¡Cómo que no me acuerdo!

P. Eso está en los libros.

J. Claro que sí que me acuerdo (que no me lo han explicado).

J. ¡Pues eso a mí no me lo han dado!

V.4 Resultados y conclusiones de la experimentación

V.4.1 Introducción

Se pretendía aprovechar la información que se desprende del análisis bibliográfico, para elaborar una propuesta didáctica para la enseñanza de los métodos de cálculo mental histórico-intrínsecos, conducente a hacer un análisis en la formación de profesores del nivel de la enseñanza obligatoria.

Este análisis se orientó hacia la confirmación de las hipótesis que se plantearon en el primer capítulo, sobre la aplicabilidad y transferibilidad de los métodos, y hacia las concepciones que pueden explicar la falta generalizada de competencia, y en particular, a explicitar aquéllas que motivan los errores de tipo cognitivo-matemático que cometen.

Se estudió el desempeño de los estudiantes para profesores en la resolución de ejercicios de cálculo mental con números naturales y decimales, antes y después de recibir enseñanza de una selección actualizada de los métodos histórico, exclusivamente con naturales, en dos pruebas tipo test que consistieron en la resolución de 14 y 20 ejercicios respectivamente, mitad de restar y mitad de multiplicar.

El estilo fue escrito-escrito, es decir pregunta escrita y respuesta escrita, como es usual en los test, completa con la explicación del procedimiento seguido. No se plantearon ejercicios se sumar y de dividir porque se tenía el convencimiento, basado en experiencias piloto previas, de que la suma mental no es difícil y la división apenas se hace mentalmente.

Del análisis de la información documentada a lo largo de las pruebas tipo test, y de las entrevistas individualizadas, se extrajeron las siguientes conclusiones:

V.4.1 Resultados

1º Antes de recibir enseñanza de la selección de métodos históricos de cálculo mental, con números naturales, que se propuso a partir del análisis bibliográfico, la mayoría de los estudiantes estaban anclados en los métodos de columnas, es decir, no usaban ningún otro método alternativo. No obstante, los pocos estudiantes que los utilizaron, pusieron de manifiesto que los métodos históricos ya estaban vigentes en sus mentes, aunque de un modo desigual y esporádico.

Tras la enseñanza de la selección de métodos, se obtuvo como consecuencia un avance significativo en cuanto a la flexibilidad y autonomía en el uso de métodos alternativos por los estudiantes, tanto para la resta como para la multiplicación. La tabla siguiente revela que se pasó de un porcentaje de estudiantes anclados del orden del 63% antes de enseñanza, a otro de orden del 5% después de enseñanza.

Incidencia del anclaje en los métodos de columnas.

	Anclados en columnas	Más de la mitad de veces usan columnas, pero no siempre	Más de la mitad de veces usan métodos alternativos
PRER	62,5%	84%	16%
POSTR	4,5%	20% "	80%
PREM	63%	79% "	21%
POSM	6%	20% "	80%

Este avance se caracterizó por el uso de métodos distintos para situaciones distintas, por personas distintas, siendo éstos los mismos métodos histórico intrínsecos enseñados, y no otros, salvo excepciones que se explican más adelante.

El anclaje o uso exclusivo de los métodos de columnas, tuvo la misma incidencia (similar porcentaje de estudiantes) en los ejercicios de restar que en los de multiplicar, de cada una de las pruebas. Es decir,

el mayor o menor uso que hacen los estudiantes de los métodos de columnas en el cálculo mental parece que es un fenómeno que no depende tanto de cuál sea la operación en particular, como de la concepción general que tienen sobre cómo deben abordarse las situaciones de cálculo. En otras palabras, los estudiantes que dependen de los métodos de columnas para restar suelen depender también de los métodos de columnas para multiplicar, y viceversa.

2º. De la misma manera que el análisis bibliográfico evidenció que los métodos y estrategias para el cálculo mental con números decimales eran los mismos que para el cálculo mental con números naturales, también lo evidenció el desempeño de los estudiantes en la prueba postest, tras la enseñanza, que como se recordará sólo fue con números naturales. En efecto, los estudiantes aplicaron en los ejercicios con números decimales los mismos métodos que también aplicaron en los ejercicios con números naturales, y viceversa.

No obstante, antes de la enseñanza, cuando la disponibilidad de métodos era débil y la proporción de ejercicios con números decimales de la prueba era inferior a la de los ejercicios con números naturales, ya se observaron en los ejercicios con los números decimales los métodos que con más frecuencia se usaron en los ejercicios con los números naturales. En cambio, tras la enseñanza, al aumentar significativamente las frecuencias con que se usaron todos los métodos históricos, prácticamente todos los métodos que los estudiantes aplicaron en los ejercicios con números naturales los aplicaron también en los ejercicios con números decimales, y viceversa.

En las tablas que se adjuntan en la página siguiente, se ponen de manifiesto estos hechos.

Frecuencias de los métodos con	PRER naturales	PRER decimales	POSTR naturales	POSTR decimales
Redondear	61	18	224	140
Descabezar un dato	30	10	64	20
Descabezar los dos datos	7	1	40	53
Hacer la misma terminación	8	0	75	57
Conservar	3	1	61	62
Dis. Prestando del minuendo a	1	2	15	8
Patrones numéricos	2	0	2	3
Incremento	0	0	15	25

Frecuencias de los métodos con	PREM enteros	PREM decimales	POSM enteros	POSM decimales
Descabezar un dato	61	26	162	98
Redondear	32	0	175	36
Alicuotar	17	30	36	94
Factorizar	11	1	13	2
Doble y mitad	2	0	11	28
Descabezar los dos datos	1	0	2	0
Cuadráticas	0	0	0	36
Cruceta	0	0	18	10
Disociar subsidiariamente	0	0	23	6
Incremento subsidiario	0	0	4	2
Promediar	0	0	1	1

3º. La enseñanza de los métodos de cálculo mental con números naturales produjo un avance en la disponibilidad o surtido de métodos que aplicaron los estudiantes, que fue de la misma medida o amplitud con los números naturales que con los números decimales, ya que aumentó el surtido de métodos que aplicaron en ambos casos, y los métodos que aumentaron su frecuencia con los números naturales también la aumentaron con los números decimales. Veánse las tablas.

Incrementos en las frecuencias con que se usaron los métodos	PRER naturales	POSTR naturales	PRER decimales	POSTR decimales
Redondear	61	224	18	140
Descabezar un dato	30	64	10	20
Descabezar los dos datos	7	40	1	53
Hacer la misma terminación	8	75	0	57
Conservar	3	61	1	62
Dis. Prestando del minuendo a ..1		15	2	8
Patrones numéricos	2	2	0	3
Incremento	0	15	0	25

Incrementos en las frecuencias con que se usaron los métodos	PREM naturales	POSM naturales	PREM decimales	POSM decimales
Descabezar un dato	61	162	26	98
Redondear	32	175	0	36
Alicuotar	17	36	30	94
Factorizar	11	13	1	2
Doble y mitad	2	11	0	28
Descabezar los dos datos	1	2	0	0
Cuadráticas	0	0	0	36
Cruceta	0	18	0	10
Disociar subsidiariamente	0	23	0	6
Incremento subsidiario	0	4	0	2
Promediar	0	1	0	1

Por otra parte, a pesar de que los estudiantes no fueron igualmente flexibles en los ejercicios con números naturales que en los ejercicios con números decimales, ya que utilizaron más veces los métodos alternativos en los primeros que en los segundos, la enseñanza de los métodos históricos también provocó una disminución de la proporción de los estudiantes flexibles con naturales pero no con decimales, sobre el total de estudiantes flexibles.

	Flexibles	Flexibles con naturales pero no con decimales
PRER	54	24/54 sobre 5 ejercicios con naturales y 2 con decimales
POSTR	127	13/127 sobre 5 ejercicios con naturales y 5 con decimales
PREM	51	11/51 sobre 5 ejercicios con naturales y 3 con decimales
POSM	120	14/120 sobre 5 ejercicios con naturales y 5 con decimales

En cuanto al orden de preferencia de los métodos, al pasar de una prueba a otra, se observó que el método más usado en las dos pruebas fue el mismo, tanto en la resta: Redondear, como en la multiplicación: Descabezar un dato, pero esto no ocurrió con el resto de los métodos. Veánse la tablas.

Frecuencias de los métodos en el PRER

Redondear	89
Descabezar un dato	41
Descabezar los dos datos	8
Hacer la misma terminación	8
Conservar	4
Prestando del minuendo a ...	3
Patrones numéricos	2

Frecuencias de los métodos en el POSTR

Redondear	364
Hacer la misma terminación	132
Conservar	123
Descabezar los dos datos	93
Descabezar un dato	84
Incremento subsidiario	40
Prestando del minuendo a ...	23
Patrones numéricos	5

Frecuencias de los métodos en el PREM

Descabezar un dato	87
Alicuotar	47
Redondear	32
Factorizar	12
Doble y mitad	2
Descabezar los dos datos	1

Frecuencias de los métodos en el POSM

Descabezar un dato	260
Redondear	211
Alicuotar	130
Doble y mitad	39
Cuadráticas	36
Disociar subsidiariamente	29
Cruceta	28
Factorizar	15
Incremento subsidiario	6
Descabezar los dos datos	2
Promediar	2

En cuanto al orden de preferencia de los métodos, al pasar de naturales a decimales, se observó que, antes de la enseñanza, en la resta el orden fue el mismo en los ejercicios con naturales que con decimales, mientras que tras la enseñanza se observaron diferencias. La más significativa de ellas fue que Descabezar un dato pasó de ser más frecuente que Descabezar los dos datos con los naturales, a lo contrario, Descabezar los dos datos fue más frecuente que Descabezar un dato con los decimales. Este hecho podría interpretarse como una consecuencia de la idea de que con los decimales hay que operar por un lado la parte entera y por otro la parte decimal.

En la multiplicación, antes de la enseñanza, se observaron diferencias en cuanto a Redondear que fue el segundo más frecuente con los naturales y en cambio no fue usado con los decimales, y a Alicuotar que fue muy usado en los ejercicios con decimales y muy poco en los ejercicios con naturales. En principio, estas diferencias podrían ser atribuidas al menor número de ejercicios con decimales del pretest y a la cifras que los conforman, pero, tras la enseñanza, se mantuvo esta diferencia, ya que Redondear fue el método más usado en los ejercicios con naturales, y lo fue mucho menos con los decimales. Y en el otro sentido, Alicuotar, fue muy frecuente en los ejercicios con decimales y mucho menos con los naturales.

En consecuencia, se puede pensar que los estudiantes perciben la conveniencia de transformar los decimales en fracciones, coincidiendo de esta manera con lo que se vió en el análisis bibliográfico, mientras que son reticentes a usar los complementos aritméticos de los números decimales.

4º. Los estudiantes, al aplicar los métodos de cálculo mental cometieron una gran variedad de tipos de errores. Contrariamente a lo que ocurrió antes de la enseñanza la incidencia de los errores fue muy superior a la de los fallos de descuido, lo que evidenció que el uso de los métodos históricos de cálculo mental pudo ser utilizado como un dominio privilegiado para hacer emerger una problemática ligada al aprendizaje de la aritmética que, de otra manera, mientras calculaban con los métodos de columnas, permaneció oculta.

La problemática que evidenciaron los errores

La problemática que evidenciaron estos errores consistió en ciertos procedimientos autoadaptados o autofabricados, que parecieron relacionados con la influencia de los conocimientos previos sobre los sobrevenidos. Estos procedimientos parecieron basados en malentendidos provocados por propiedades no explicitadas de determinadas situaciones numéricas, que ellos perciben como verdaderas porque les han funcionado en un determinado campo de validez, pero que no siempre funcionan, por lo que han sido denominados en este trabajo como teoremas implícitos.

En la resta.

En la resta la reglas que parece que se extrapolaron fueron:

La regla de "llevar" una unidad a la cifra inmediata del minuendo cuando la correspondiente del sustraendo es mayor, que parece que se extrapoló para llevarla a la cifra inmediata del sustraendo.

La regla para hallar la diferencia de dos números que consiste en quitar el menor del mayor, que parece que se extrapoló a las restas parciales que resultan al descabezar los dos datos.

La regla del método de conservación que consiste en sumar a los dos datos de la sustracción la misma cantidad, que parece que se extrapoló sumando la misma cantidad al sustraendo y al resultado.

La regla para colocar la coma decimal en la multiplicación que consiste en sumar el número de cifras decimales de cada uno de los datos, que parece que se extrapoló a la resta de números decimales.

Los métodos que parece que se generalizaron en la resta fueron:

El método para sumar un número entero y un número compuesto de parte entera y parte decimal, equivalente al método para restar cuando el sustraendo es entero y el minuendo está compuesto de parte entera y decimal, que consiste en operar la parte entera y añadir al resultado la parte decimal, el cual parece que se generalizó a la resta cuando el minuendo es entero y el sustraendo está compuesto de parte entera y decimal.

El método para sumar redondeando, basado en el principio de compensación, que consiste en quitar al resultado lo que se ha añadido a un sumando, que parece que se generalizó para restar redondeando el sustraendo y quitando al resultado lo que se le añadió a aquél.

El método para sumar descomponiendo un dato, basado en el principio de compensación, que consiste en añadir al resultado lo que se le ha quitado al sumando descompuesto, que parece que se generalizó a la resta descomponiendo el sustraendo.

Los centramientos en la resta fueron:

En la operación inicial planteada, cuando al descabezar el minuendo se resta el resultado del parcial obtenido en vez de sumarlo. No obstante, este error podría ser interpretado también como una extrapolación de la regla para restar por segregación cuando se descompone el sustraendo, que consiste en restar una detrás de otra las partes resultantes de la descomposición.

En la multiplicación, las reglas que parece que se extrapolaron fueron:

Las reglas de columnas que consisten en poner como primera fila en la disposición vertical el producto parcial de la primera cifra que se multiplica y como segunda el producto por la siguiente, y la de no hacer uso de los ceros del orden de unidad, parece que se extrapolaron al descabezamiento, operando según el orden en que están escritas las cifras, de izquierda a derecha, y escribiendo los parciales resultantes en columnas en el orden en que se obtuvieron.

Las reglas para colocar la coma decimal vinculadas a la posición, de los algoritmos de columnas de la suma y de la resta, que consisten en "bajarla" guardando la posición, parece que se extrapolaron a la multiplicación de decimales.

La regla para colocar la coma decimal en el producto que consiste en contar las cifras decimales de los datos parece que se extrapoló para contar también los ceros a la derecha de la última cifra significativa tras la coma decimal.

La regla que se usa en el algoritmo de la división para eliminar la coma del divisor, cuando éste es decimal, que consiste en "correr la coma" simultáneamente en el dividendo y en el divisor, parece que se extrapoló a la multiplicación de decimales.

La regla de la división inexacta que consiste en detener la división cuando ya se ha obtenido un determinado número de cifras decimales en el cociente, una o dos, parece que se extrapoló a la división exacta decimal procedente de una multiplicación equivalente.

La regla de restar el parcial correspondiente cuando se multiplica redondeando a la decena superior, parece que se extrapoló al descabezamiento o redondeo a la decena inferior.

Las reglas que se dan cuando en el multiplicador está la unidad o el cero parece que se extrapolaron en una situación extrema en la que los números decimales no tienen parte entera.

Los métodos que parece que se generalizaron fueron:

El método para sumar descabezando que consiste en sumar ordenadamente cada una de las partes del dato descabezado, primero por la primera, al resultado la segunda, etc., parece que, combinado con el no reconocimiento del cero del orden de unidad, se generalizó a la multiplicación descabezando un dato para encadenar los productos parciales, primero por la primera cifra, el resultado por la segunda, etc.

El método para sumar redondeando los dos datos que consiste en sumar los redondos y restar la suma de los complementos parece que se generalizó a la multiplicación haciendo el producto de los redondos y restando los complementos aritméticos correspondientes.

El método de compensación para sumar que consiste en añadir una cantidad a un dato y quitársela al otro parece que se generalizó para multiplicar aumentando un dato y disminuyendo el otro en la misma cantidad.

El método de conservación de la resta que consiste en cambiarla por otra formada con los datos que se obtienen al aumentar en la misma

cantidad los dos datos dados parece que se generalizó para multiplicar cambiando los datos dados por otros obtenidos incrementándolos en la misma cantidad.

El método para multiplicar descomponiendo un dato en sumandos parece que se generalizó para multiplicar un dato descompuesto en factores, sumando los parciales en vez de encadenar un producto por el resultado del otro.

El método para sumar operando por separado los distintos órdenes de unidad, unidades con unidades y decenas con decenas, parece que se generalizó para multiplicar por órdenes de unidad sin reconocer los productos intermedios cruzados.

Los centramientos parece que fueron:

En el dato incrementado, cuando para multiplicar se incrementa un factor y se hace la compensación del resultado restando el producto del incremento por el factor incrementado, en vez de por el otro factor.

En el dato descompuesto, cuando para multiplicar se descompone o descabeza un factor, y se hace uno de los productos parciales correspondiente sobre el factor descabezado y no los dos sobre el otro factor.

En los datos iniciales, cuando para multiplicar se descabezan los dos datos y en los productos parciales se utilizan aquéllos, en vez de las partes de la descomposición. No obstante, también podría ser que se estuviera extrapolando la regla de columnas que consiste en multiplicar cada una de las cifras del multiplicador por el multiplicando.

En la coletilla "cientos", cuando se contabilizan erróneamente los ceros del resultado al multiplicar por 100.

5º La enseñanza de los métodos histórico-intrínsecos de cálculo mental para los números naturales produce su uso no sólo con estos números sino también con los decimales, salvo en aquellos estudiantes que ligan rígidamente las reglas para operar la coma decimal a los algoritmos estándar del formato vertical de columnas, en vez de al cálculo con decimales en general. Es como si las reglas para operar la coma fueran una más de las del formato de columnas y no una consecuencia del carácter de los números decimales.

Esta transferencia fue desigual en la resta y en la multiplicación, ya que en la resta los estudiantes prefirieron aplicar los métodos alternativos a los de columnas directamente, es decir, no tratándolos como naturales, sino arrastrando la coma. Y en la multiplicación, prefirieron aplicarlos indirectamente, bien reduciendo previamente los datos a naturales mediante alguna expresión fraccionaria equivalente, o bien prescindiendo de la coma para recuperarla al final, tras operar mediante la regla usual de contar las cifras a la derecha de la coma decimal.

No obstante, en la resta, unos pocos estudiantes de entre los más expertos, usaron la regla que permite tratar a los decimales como naturales, concretamente esto lo hicieron 32 de las 127 veces en que se usaron métodos alternativos. Mientras que en la multiplicación ocurrió al revés, hubo una minoría significativa de estudiantes que optaron por aplicar los métodos directamente, sin apartar la coma previamente.

Por otra parte, no todos los estudiantes fueron igualmente flexibles en los ejercicios con números naturales que con decimales, ya que hubo una minoría que siendo flexibles con los naturales se ancló en los métodos de columnas en los ejercicios con los números decimales. Esto pudo ser debido a que no pudieron transferir las reglas para operar la coma decimal por una excesiva vinculación de la misma al formato vertical del algoritmo de columnas.

En efecto, los estudiantes pensaban que la regla de apartar la coma para ponerla después tras contar las cifras decimales a su derecha en cada uno de los factores no funcionaba fuera del cálculo de columnas, ya que tenían la creencia de que, si se prescindía de la coma, los datos que se obtenían eran otros diferentes a los dados, y por lo tanto deberían tener un producto diferente y con cifras diferentes.

Sin embargo, se esclareció que los estudiantes sospechaban que tenían que quitar la coma, pero que no lo hacían porque no sabían como recuperarla después, por lo que se ha dicho antes de que las vinculaban rígidamente a los algoritmos estándar de columnas.

6º La confrontación con las formas inapropiadas de resolución que se llevó a cabo por medio de entrevistas, usando la representación simbólica del lenguaje horizontal de ecuaciones y paréntesis, desencadenó procesos cognitivos que permitieron a los estudiantes reconceptualizar sus procedimientos de cálculo.

Esta reconceptualización se hizo fundamentalmente sobre la base de una mejor comprensión del significado y de las propiedades de las operaciones, y también, del uso del sistema de numeración, de las expresiones numéricas equivalentes, del efecto en el resultado de ciertas alteraciones de los datos, y en última instancia de la representación de esos métodos vía expresiones de tipo algebraico.

Sin embargo, no siempre la descripción de los procedimientos usados en el lenguaje horizontal del álgebra fue suficiente para remover los malentendidos de los estudiantes. Eso sí, les enfrentaba con un razonamiento que inquietaba y ponía de manifiesto que algo andaba mal en su manera de argumentar, pero no era suficiente, porque ellos seguían sin ver qué es lo que pensaban mal. Para salir de esta situación de bloqueo se hizo necesario recurrir a un lenguaje

porque ellos seguían sin ver qué es lo que pensaban mal. Para salir de esta situación de bloqueo se hizo necesario recurrir a un lenguaje retórico, basado en el significado de la alteración efectuada, del tipo de "si aumentas el sustraendo, que le ocurre a la diferencia ...".

V.4.3 Implicaciones para la enseñanza

En definitiva, la problemática identificada, en cuanto a la aplicabilidad y transferibilidad de los métodos históricos, indica que muchos estudiantes construyen mal sus concepciones relacionadas con el cálculo aritmético, de una manera que no se debe tanto a conceptos mal desarrollados como puedan ser el concepto de suma, resta, multiplicación, división, o de número decimal, como a fallos en el dominio, significación, y comprensión de las reglas de los algoritmos estándar, una comprensión pobre del efecto que las alteraciones en los datos produce en los resultados, y un débil reconocimiento de los conceptos, leyes, y principios que rigen la operatoria.

Probablemente, todo esto sea una consecuencia de una enseñanza excesivamente volcada al automatismo, centrada en el cálculo de columnas y que no tiene en cuenta el papel que podría desempeñar el cálculo mental en el desarrollo del pensamiento aritmético.

Esta problemática, que se manifestó en forma de errores debidos a rigideces, generalizaciones, extrapolaciones y centramientos, lleva aparejada:

Dependencia y por lo tanto anclaje, en los algoritmos de columnas.

Vinculación de las reglas para operar la coma decimal a los algoritmos de columnas, en vez de al carácter de los propios números decimales.

No reconocimiento de la función de los órdenes de unidad de las cifras en el cálculo.

No reconocimiento de los números negativos implícitos en la resta de naturales cuando una parte del sustraendo es mayor que la correspondiente del minuendo.

Falta de significación y reconocimiento de la ley distributiva de la multiplicación en las situaciones donde se aplica.

Falta de valoración de la razonabilidad de los resultados.

No reconocimiento de las ventajas del lenguaje simbólico sobre el retórico para describir las alteraciones efectuadas en las cantidades en juego.

Para evitar los efectos no deseados de la enseñanza usual, parece razonable recomendar un cambio que incluya los métodos de cálculo mental en el currículum, pero bajo un nuevo enfoque, que aproveche el papel que desempeñan en los siguientes aspectos:

1. Como dominio para romper la dependencia de los automatismos de columnas y para hacer emerger los conceptos, leyes y principios que rigen la operatoria.

2. Como medio para una mayor reflexión escolar sobre el efecto que las alteraciones en los datos produce en los resultados.

En la medida en que los métodos alternativos son fruto de alteraciones invariantes, la problemática de la que dan indicio los errores de los estudiantes revela una insuficiente reflexión sobre el

efecto que las alteraciones en los datos produce en el resultado y sobre el campo de validez de las mismas.

Por lo tanto cabe pensar en la necesidad de que el currículum preste una mayor atención a estas alteraciones, favoreciendo una mayor reflexión escolar sobre ellas y tomando los métodos de cálculo mental como dominio para ponerlas en práctica y evaluar su disponibilidad y comprensión. Especialmente, cuando estas alteraciones son motivo de error para los estudiantes, que de esta manera pueden inquietarse ante su efecto y hacerles frente.

481-186=305. "481-(186-5)=481-181=300+5 Con lápiz y papel me da 295. ¿Porque restándole de nuevo el 5 me da y sumándoselo no?"

245-197=42. "Debería darme 48".

245-197=42. "No entiendo por qué al restarle lo que antes he sumado, no da el resultado".

3. Como medio para desvincular la reglas para operar la coma decimal de los algoritmos de columnas y enlazarlas con las alteraciones invariantes que las fundamentan y permiten operar sin preocuparse de ella.

Especialmente cuando esta vinculación impide aplicar métodos distintos a columnas y revelan que los estudiantes son incapaces de darle un giro a la situación, como sí lo lograron los del ejemplo:

3,4x0,15=. "0,15x100=15; 34x10=340; 34x5 =170; 340+170= 510 lo dividimos entre 1000=0,51".

0,2x0,3=. "2/10x3/10=2x3/100=0,06".

4. Como medio de diagnóstico para el profesor de las concepciones que sobre los procedimientos de cálculo tienen los estudiantes.

Pero no sólo mirando los errores como se ha hecho en este trabajo, sino también mirando los enfoques que los estudiantes dan a los métodos no enseñados, ya que a veces parece como si los retorcieran, empeñados en hacer encajar lo aprendido, porque huyen de una problemática específica. Como, por ejemplo, es el caso del enfoque de Descabezar los dos datos prestando que parece ser que es indicio de una renuncia a trabajar con números negativos implícitos.

737-289=. "37-89=>48 (llevo 1. No puedo trabajar con negativos) 700-200=500-100 (la centena que llevo de antes) =400".

5. Como medio para hacer ver las ventajas del lenguaje simbólico y sus convenciones sobre el retórico.

La mayoría de los estudiantes no reconocieron la necesidad de usar el lenguaje simbólico y sus convenciones formalmente, sino que abusaron de la retórica y del lenguaje simbólico informal para relatar sus procesos de pensamiento.

Aunque estudiar su utilización no era el objetivo de este trabajo, era, sin embargo, un elemento digno de tener en cuenta, ya que, además de las implicaciones didácticas que podía sugerir, en la fase de enseñanza se tenía que utilizar para presentar los métodos y en las entrevistas como recurso para enfrentar a los estudiantes con los procedimientos equivocados que habían utilizado en sus errores sintomáticos.

Cuando al comienzo de las pruebas se requirió a los estudiantes para que describieran lo que habían hecho para calcular sus respuestas, se sintieron sorprendidos. Algunos dijeron "no sé cómo decirlo" o "no sé

cómo explicarlo", y la mayoría contestó abusando de la retórica y manifestando una renuencia a usar las convenciones del lenguaje de las ecuaciones. En general, no les pareció necesario usar los paréntesis y los términos históricos tales como minuendo, sustraendo, unidades, decenas, centenas ..., incluso cuando se trataba de métodos que no eran de columnas, como en el ejemplo:

13-8,75= "A 13 le quito 8; y me quedan 5 y a 5 le quito 0,75 que me queda, 4,75".

La mayoría de las veces que se utilizó el signo igual lo fue como indicativo del resultado, sin preocuparse de si enlazaba o no expresiones equivalentes

547-189= "De 189 a 200=11+347=358".

Cabe pensar que para los estudiantes la retórica reflejaba más fielmente su pensamiento que el lenguaje algebraico y que para ellos no era necesario ni importante cuidar el uso riguroso de sus términos. Sin embargo, en la enseñanza y en las entrevistas, sí que que se puso especial énfasis en su utilización, y con ello se logró que vieran que los procedimientos erróneos que en su lenguaje retórico les parecían razonables, no lo eran en el lenguaje formal.

Esto fue suficiente para que, en la mayoría de los casos, recondujeran su razonamiento, pero no siempre, ya que, en algunos casos, la descripción de sus procesos en el lenguaje simbólico no fue suficiente para que los estudiantes comprendieran en qué se habían equivocado o que es lo que hacían que no estaba permitido, por lo que hubo que complementar el razonamiento simbólico con razonamientos retóricos sobre el efecto que sus alteraciones en los datos habían producido sobre el resultado esperado.

6. Como dominio para el desarrollo del pensamiento aritmético, en particular lo relacionado con el análisis de las situaciones numéricas y el manejo de los hechos de la numeración y de las operaciones.

Por último, es probable que parte de la problemática identificada esté relacionada con procedimientos aritméticos, que bajo una forma generalizada se dan también en el cálculo con expresiones algebraicas (Esta es una sugerente linea de investigación que se abre con este trabajo). Si así fuera, es posible que el trabajo con los métodos de cálculo mental pudiera hacerla emerger prematuramente, dando una oportunidad para experimentarla y reflexionarla sobre un campo más concreto como es el de los números, sin tener que esperar a que aparezcan en el campo más abstracto de las letras.

Final

En definitiva, de este estudio experimental se sigue la necesidad de un cambio que rompa con los efectos no deseados de una enseñanza volcada al automatismo, centrada en el cálculo de columnas y que no tiene en cuenta el cálculo mental como dominio para los siguientes dos aspectos:

1 Para el desarrollo del pensamiento aritmético, en particular lo relacionado con el análisis de las situaciones numéricas y el manejo de los hechos de la numeración para la expresión flexible, significativa y no automática de sus acciones sobre los números.

2 Para el diagnóstico, tanto para que el profesor conozca las concepciones mal construidas que sobre los procedimientos de cálculo tienen los estudiantes, como para que ellos se vean obligados a enfrentarse con ellas, sentando así las bases para su posible reconceptualización.

ANEXOS

V.1.5 LAS PRUEBAS TEST

PRER Alumno : _____ Grupo: Fecha: _____.

Resuelve mediante el algoritmo usual: 127 - 9,45

_____.

1. 547 - 189 = ☐
2. 243 - 75 = ☐
3. 1300 - 875 = ☐
4. 461 - 166 = ☐
5. 265 - 199 = ☐
6. 13 - 8,75 = ☐
7. 2,23 - 1,58 = ☐

_____.

Describe como lo has hecho en cada caso. No corrijas lo de arriba aunque te hayas equivocado

1. 547 - 189

_____.

2. 243 - 75

_____.

3. 1300-875

_____.

4. 461 - 166

_____.

5. 265 - 199

_____.

6. 13 - 8,75

_____.

7. 2,23 - 1,58

POSTR Alumno : Grupo: Fecha: .

Resuelve de cabeza, escribe sólo el resultado final. Si te equivocas tacha y escribe al lado
Despues explica como la has hecho paso por paso

1. 737-289 = ☐

2. 634-75 = ☐

3. 1400-675 = ☐

4. 481-186 = ☐

5. 245-197 = ☐

6. 14-6,75 = ☐

7. 2,32-1,67 = ☐

8. 54,7-18,9 = ☐

9. 24,3 - 7,5 = ☐

10. 46,1 - 16,6 = ☐

PREM Alumno : _____ Grupo... Fecha.....

Resuelve como tengas costumbre: 12,7 x 9,45

Resuelve de cabeza, escribe sólo el resultado final Si te equivocas tacha y escribe al lado

1. $3,1^2 =$ ☐
2. $37x0,25 =$ ☐
3. $28x35 =$ ☐
4. $47x99 =$ ☐
5. $41x32 =$ ☐
6. $3,4x0,15 =$ ☐
7. $64x25 =$ ☐

Describe como lo has hecho en cada caso. No corrijas lo de arriba aunque te hayas equivocado

1. $3,1^2$

---

2. 37x0,25

---

3. 28x35

---

4. 47x99

---

5. 41x32

---

6. 3,4x0,15

---

7. 64x25

POSM Alumno : _____ Grupo: _____ Fecha: _____.

Resuelve de cabeza, escribe sólo el resultado final. Si te equivocas tacha y escribe al lado
Despues explica como la has hecho paso por paso

1. $4,1^2$ = ☐

_____.

2. 47X0,25 = ☐

_____.

3. 26X35 = ☐

_____.

4. 37X98 = ☐

_____.

5. 31X42 = ☐

_____.

6. 2,4X0,15 = ☐

_____.

7. 64X75 = ☐

_____.

8. 2,8X0,45 = ☐

_____.

9. 4,9X5,1 = ☐

_____.

10. 19X18 = ☐

TABLAS DE RESPUESTAS EN LOS TESTS

TABLA 1, PRER. Tipos de error cometidos por los estudiantes de C.

El número que aparece en cada casilla es el código del esquema de los tipos de error.

	547-189	243-75	1300-875	461-166	265-199	13-8,75	2,23-1,58
C1					2.1		
C2	2.1						2.1
C3			5.1				
C4						1.2	1.1
C5		5.1					
C6						1.2	
C7		5.1					
C8			2.1				
C9		5.1					
C10					4.1		
C11							3.2
C12				2.1			

TABLA nº 2, PRER. Tipos de métodos usados por los estudiantes de C

	547-189	243-75	1300-875	461-166	265-199	13-8,75	2,23-1,58
C9					3211		
C10					3211		
C11	2111	223	2111	2111	3211	2111	2111
C12	3211	3211	3211	223	3211	3211	311
C13			2112		3211		
C14			3213	2211	3211	3214	3213
C15	3211	3211	3211	2122	3211	3211	3211
C16	3211	3211	2111		3211	2111	
C17	3211	3211	3211	2211	3211	3214	3213
C18	3213	3213	3213	2122	3213	3213	3213
C19			412		3212	3212	
C20			222		3211	222	
C21					3213	3212	3213
C22		3211	2111	2211	3211	3211	
C23	3211	3211	3211	2211	3211	3211	
C24		3211	3211		3211	3213	
C25	3211	3211	3211	3211	3211	3211	
C26					3211		
C27	2121	2112	2122	2111	3211	2111	2111
C28		3211	211		3211	3211	
C29			3212				
C30			3211		3211	3211	3211
C31	2111	2111	2111	2111	2111	3211	2122
C32						222	
C33			3213				
C34	3211	3211	3211	2211	3211	3211	3211

Tabla nº 3, PRER. Tipos de error de los estudiantes de EE.

	547-189	243-75	1300-875	461-166	265-199	13-8,75	2,23-1,58
E1					5.2		
E2						3.1	
E3						1.2	
E4	2.1						
E5				5.2			
E6		5.2					
E7	2.1						
E8				3.2			
E9							1.1
E10							5.2
E11							1.1
E12						3.1	
E13							1.1
E14	2.1						
E15						1.2	
E16						1.2	
E17						1.2	
E18						1.2	

Tabla nº 4-PRER: Tipos de métodos de los estudiantes de EE

	547-189	243-75	1300-875	461-166	265-199	13-8,75	2,23-1,58
E11			3212				
E12			2111		3211		
E13	3211	3211	3211	2111	3211		
E14					311		
E15			2111				
E16					3211		
E17			2111				
E18			2112	2211			
E19				2211	3212		
E20		3212			3212	3212	
E21	2121	2112	2111	2121	311	2111	2111
E22					3214		
E23		2112	3211	2111	3211	3211	
E24			3213				
E25		2211	2111	2121	3211		
E26						3213	3213
E27					3213		
E28					311		
E29		2112			2112		
E30			3213				
E31	2111	2112	2111	2111	3211	2111	
E32					3211		
E33						2111	
E34					3214		
E35	3212	2112	3211	3211	3212	3213	
E36		3211			3211		
E37		3213	3213	411	3213	3213	
E38					3212	2111	

Tabla nº 5, PREM. Tipos de error de los estudiantes de C.

	$3,1^2$	37x0,25	28x35	47x99	41x32	3,4x0,15	64x25
C1		3	3				
C2		6				6	
C3		3			4.7		5
C4		3	3			3	
C5		3					3
C6		3					5
C7						3	5
C8		5					
C9		3					
C10		5	5				
C11		5	5	5		5	3
C12							5
C13				5			3
C14	1.5	6				6	
C15							3
C16		3		5			
C17	1.1+2.1	5			5	6	6
C18	1.5	5					
C19	1.5					3	3
C20		3		5	5	3	
C21	1.5	3					
C22	2.1	3		5	5		5
C23		2.1	3	6		6	
C24		3					3
C25	2.1	5	5	5	5		5
C26		6	5		5		
C27		3		5			
C28						1.5	
C29		1.1+3					
C30			5				
C31				2.2			
C32	2.1		2.3	2.2	4.4	6	
C33		3					
C34			3				3
C35							2.1
C36				2.2		3	2.2
C37	4.1		4.2		4.4	1.1	
C38		4.7					
C39	2.1			2.1	2.1		
C40	4.7	1.4					
C41	41+15						
C42		1.5					
C43	4.1+1.3						
C44				2.2		6	
C45		1.5					
C46			4.5	4.2	2.2	6	
C47	1.5	4.5		5		4.5	
C48	2.1		2.1				

C49		2.1					
C50		2.1		4.2		4.1+5	
C51		1.4	3				
C52						3	
C53				5			
C54	2.1						

Tabla nº 6PREM: Tipos de Métodos de los estudiantes de C

	$3,1^2$	37x0,25	28x35	47x99	41x32	3,4x0,15	64x25
C31	112	112	112	321	211	112	112
C32	111	311	111	321			211
C33	211	211	211	211	211	211	211
C34	111	311	112	112	112	112	112
C35	111	211	321	321	211	211	211
C36	111	311	112	321	112	112	311
C37		311		321			312
C38	211		321	321	211	211	211
C39	112	311	112	112	112	112	112
C40	111	311	111	111	111	111	111
C41		311	321	321	211	111	311
C42	211	211	211	211	211	211	211
C43		311	211	321	211	211	311
C44	111	311	312	321	211		311
C45	111	111	111	321	111	111	111
C46	111	311			211		311
C47	111		111	111	111		111
C48	113	311	113	321	113	113	113
C49	111	311	211+41	321	211+41	211	311
C50	111	311	211+41		211+41		211+41
C51	111	311	112	112	112	112	112
C52	114	311	114	114	114	114	311
C53	111	112	112	112	112	112	311
C54	111	311	321	321	211	11	311
C55	111	111	111	111	211	111	111
C56	114	311	111	111	111	111	111
C57	111	311	211+41+311	321	212	211+311	311
C58	111	311	211	321	211	211	311+41
C59	114	311	211	211	114	211	211
C60	111	311	211	321	211	111	211
C61	111	311	111	321	111	111	211
C62	111	211	211	321	211	211	211
C63	211	211	211	211	211	211	211
C64	211	311	321	321	211	211	311
C65	111	111	111	111	111	111	311

Tabla nº 7,PREM. Tipos de error de los estudiantes de EE.

	$3,1^2$	37x0,25	28x35	47x99	41x32	3,4x0,15	64x25
E1						3	
E2		3				1.1	
E3	1.5	5				1.5	
E4	2.1			3	3		
E5	2.1			5			
E6	1.5	1.1		5		11	
E7		3		5			3
E8	6	1.5+4.6		5	5	1.5+4.6+3	4.6
E9	4.1						
E10	1.5	3		5	5	4.6	
E11		3					
E12						3	
E13				3	2.3		
E14	4.1	3				1.5	
E15		3		3			3
E16	4.1						
E17						3	
E18	1.5	3					
E19			3			6	3
E20						6	
E21	1.5	3					
E22		5	5	5		5	
E23		5		4.6+2.1	4.6		
E24		3					5
E25		3					
E26				5			
E27		3				1.1	
E28		3				3	
E29	4.1	1.1+5		5			
E30	.5+2.1	5		5		5	3
E31	11	3					5
E32		5		5		3	5
E33		1.5+2.1					
E34	1.5					5	
E35	1.5+2.1	5		5			3
E36	2.1	3	3				
E37		3				1.5	5
E38		3				1.5	
E39	1.5	1.1+5				1.5	
E40	2.1	3					
E41	4.1	3				1.5	
E42	1.5+2.1						
E43			3				
E44							5
E45	5	6	4.3	4.3	4.3	6	4.3
E46						3	
E47			4.1	4.1	4.1	4.1	4.1
E48		3					

E59			5			3	
E50			3			5	
E51	6						

Tabla nº 8, PREM. Tipos de métodos delos estudiantes de EE.

	$3,1^2$	37x0,25	28x35	47x99	41x32	3,4x0,15	64x25
E42	111	111	211	321	211	111	211
E43	111	111	111	321	111	111	111
E44	111	311	112	112	112	112	112
E45	111						
E46	111	311	22	321	22	111	22
E47	111	211+41					
E48	112	112	22	22	112	112	22
E49	111	211	211	321	211	211	211
E50	114	114	114	321	114	114	311
E51		311	211	321	211	211	311
E52	11	311	211	211	211	211	211
E53	11	311	22	321	211	11	311
E54	11	11	211+41	11	211+41	11	211+41
E55	11	11	22	22	22	22	22
E56	11	11	11	11	11	11	211
E57	11	311	11	321	11	11	11

TABLA nº 10, POSTR. Tipos de métodos de los estudiantes de C

	737-289	634-75.	1400-675	481-186	245-197	14-7,75.	2,32-1,6	754,7-18,9	23,3-7,5	46,1-16,6
C1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
C2	211	321	321	321	321	-	1	1	1	1
C3	321	321	321	2211	321	321	-	-	332	332
C4	321	211	321	2211	321	211	222	321	321	2211
C5	-	321	211	332	321	321	1	321	1	2123
C6	321	321	321	2211	321	1	1	321	321	2211
C7	-	321	321	2211	321	321	2211	321	321	2211
C8	321	321	321	2211	321	321	321	222	222	222
C9	321	321	222	2211	321	42	321	321	321	2123
C10	2121	321	321	2121	2121	1	2121	2121	2121	2121
C11	-	-	211	2211	311	311	311	311	311	311
C12	311	321	222	2211	321	321	2123	2123	2123	2123
C13	1	211	223	2123	321	223	321	321	332	2122
C14	42	42	211	2211	42	42	42	42	42	2123
C15	321	-	211	2211	3	211	2	321	332	2211
C16	321	321	-	211	-	1	1	1	1	1
C17	321	321	321	2211	321	321	321	321	2211	2123
C18	1	321	211	2211	321	321	1	1	1	2211
C19	-	-	222	2211	321	1	1	1	1	1
C20	321	321	321	2123	321	321	1	-	1	2121
C21	1	-	211	2211	1	321	1142	1	1	1
C22	321	321	321	321	321	321	321	321	321	321
C23	321	211	321	2211	321	211	114	321	332	2123
C24	311	311	311	2211	311	311	211	311	311	2123
C25	321	321	321	2123	321	321	311	1	1	-
C26	321	321	211	-	321	1	1	1	1	1
C27	321	321	222	2211	321	321	321	321	321	2211
C28	321	222	222	2211	211	321	313	321	321	2121
C29	1	211	211	2211	321	321	1	311	313	2211
C30	1	1	211	1	1	1	1	1	1	1
C31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
C32	321	321	211	2211	321	311	2123	311	311	2211
C33	311	321	311	2211	311	311	311	311	332	2123
C34	311	321	2123	2211	311	321	311	311	311	311
C35	321	321	321	2211	321	321	321	321	321	2211
C36	2121	2123	211	2211	321	211	2211	332	211	211
C37	321	2212	42	2211	42	42	42	42	322	2211
C38	321	211	321	332	321	321	321	321	321	321
C39	211	211	211	2211	321	321	211	321	321	2211
C40	321	321	2211	2211	321	321	211	321	321	321
C41	321	321	321	2211	321	321	1	311	321	311
C42	1	1	211	2211	321	1112	1	1	1	332
C43	321	321	222	2211	311	311	1	311	311	311
C44	321	321	321	2211	321	321	321	321	1	2121
C45	1	332	321	2123	321	1112	1	1112	332	2211
C46	2123	2212	211	2123	321	321	311	321	2211	2211
C47	321	321	211	2123	2123	211	2123	2123	2123	2123
C48	1	1	222	1	1	1	1	1	1	1

TABLA nº 9, POSTR. Tipos de error de los estudiante de C.

	737-289	634-75.	1400-675	481-186	245-197	14-7,75.	2,32-1,6	754,7-18,9	23,3-7,5	46,1-16,6
C1						3.1				
C2						6		5		3.1
C3							4.3	4.3		
C4						5				
C5	4.1									
C6						1.2				
C7	4.1			2.1						2.1
C8								2.1		
C9				2.3				5		
C10						3.1			3.1	
C11	4.1	4.1								1.2
C12				2.3						
C13							2.2			
C14									2.3	
C15		4.2			4.1		4.3			
C16			4.1		4.1					
C17				2.3				2.2		
C18									3.1	
C19	4.3	4.4				3.1	3.1			3.1
C20								41		
C21		4.1								
C22							2.2	2.1		
C23	2.1							2.2		
C24	2.1			2.1						
C25										6
C26				4.1						
C27									2.2	

C49	1	1	222	2211	311	311	2211	311	2211	2211
C50	211	321	321	2123	321	321	1	321	332	211
C51	1	1	1	1	1	321	1	1	1	1
C52	2123	211	211	2211	321	211	2123	321	321	2211
C53	321	321	321	321	321	321	321	331	1122	1122
C54	321	211	321	2211	321	321	211	321	322	2211
C55	321	321	321	2211	321	321	1	321	332*	2211
C56	311	2211	311	2211	311	321	2211	311	321	2211
C57	2211	321	321	2211	321	321	1	1	2211	2211
C58	311	311	211	2211	311	321	311	321	311	2211
C59	42	42	42	2211	42	42	42	4	4	4

TABLA nº 11, POSTR. Tipo de error de los estudiantes de EE.

	737-289	634-75.	1400-675	481-186	245-197	14-7,75.	2,32-1,6754,7-18,922,3-7,5		46,1-16,6	
E1									2.1	
E2									3.1	
E3	4.3	2.1		4.5	4.1	4.1	6	4.1		5
E4							1.1	3.2		
E5	2.1									
E6						3.1				
E7										2.1
E8	3.1	2.1			2.1					
E9	3.1	2.1		4.3	4.1	3.1				
E10						1.3		1.3	1.3	1.3
E11							1.1			
E12						5			2.1	
E13	2.1	4.1		4.6	4.1			2.2	4.1	
E14					4.1	4.1	5	4.1	4.1	
E15						4.1				
E16										3.1
E17	2.1									
E18				31						
E19			5							
E20			4.6			1.2		21		
E21					4.1		21			
E22					2.1					
E23				3.1		3.1				
E24					4.1		4.3			
E25						3.1				
E26							1.1			
E27					3.1					
E28						1.2			2.1	
E29				4.3	4.1					
E30						1.2				

TABLA nº 12, POSTR. Tipos de métodos de los estudiantes de EE

E1	332	332	321	1	311	1	1	1	1	1
E2	311	321	1111	2211	321	321	1	331	331	2211
E3	-	321	321	-	-	-	-	-	321	
E4	1	211	1	2123	1	1	1	1	1	2211
E5	311	321	211	2211	321	321	1	1	321	2211
E6	311	321	1	1	311	1	1	1	311	332
E7	321	321	321	321	311	321	321	321	321	321
E8	-	321	211	2123	211	211	1142	2122	2122	2122
E9	1	321	2123	-	-	1	1	1	2121	1
E10	311	1	211	2123	311	1	1	1	1	1
E11	1	321	321	323	323	321	323	1	323	323
E12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2211
E13	321	-	211	332	-	321	321	321	-	2211
E14	211	321	211	2211	-	-	-	-	-	2211
E15	1	1	1	1	1	-	321	1	1	1
E16	1121	1121	1122	1121	1121	1122	1121	2121	2121	-
E17	311	321	211	2211	321	1	1	311	321	2211
E18	321	321	1111	1	321	1111	1	1	2121	1
E19	1	1		211	211	1	1	1	1	1
E20	1	1	1111	332	1111	-	1111	1111	1	1111
E21	311	321	321	332	-	321	321	321	1	1
E22	1	321	211	311	311	311	311	311	1	311
E23	1	1	1111	1	1111	1	1111	1	1	1
E24	311	321	321	313	-	321	311	313	332	31321
E25	1121	1121	1121	1121	1121	1121	1121	1121	1121	1121
E26	1	1	211	1	311	1	1	1	1	2122
E27	211	-	2123	211	211	321	1	2122	2122	2122
E28	321	321		2211	322	-	1	1111	1111	1111
E29	1	1	1121	-	-	2121	1	1	1	1
E30	1	1	1	1	1	-	1	1	1	1
E31	311	1	1122	1	311	311	311	311	1121	222
E32	1	321	2211	2211	321	1112	1	1	1	2122
E33	321	321	1	1	321	1	1	1	1112	2122
E34	211	211	211	2211	321	321	2211	321	2211	2211
E35	1112	1	222	2211	321	1112	2211	321	2211	2122
E36	2123	321	2211	2123	311	321	42	321	311	2123
E37	321	321	321	2123	321	321	321	321	321	2123
E38	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
E39	1	321	222	332	1	1	1	1	1	1
E40	311	311	311	332	321	321	321	322	332	332
E41	2211	321	321	313	321	321	2211	321	211	222
E42	211	321	2123	2211	1	1	1	1	1	2211
E43	321	321	321	332	321	321	332	2122	2122	332
E44	321	321	222	2211	321	1	1	1	1	1
E45	1	321	1	332	321	2121	112	112	1	1
E46	1	1	211	1	311	1	1112	1	1	2122
E47	311	211	2211	2211	311	211	2211	311	2211	2211
E48	211	312	211	2123	311	222	311	311	311	1112
E49	321	321	321	2211	321	321	332	321	332	2211

E50	311	211	211	2211	321	321	321	311	211	2211
E51	1	1	1	1	1	1112	1	1	1	1
E52	2121	321	211	2211	321	2121	311	1	332	2211
E53	1	1	2123	1	1	42	1	1	1	1
E54	321	321	2123	2211	321	321	321	321	321	2211
E55	311	321	321	2211	311	1	1	1	1	2211
E56	321	321	211	2123	321	321	223	321	321	222
E57	321	321	321	2211	321	321	1	1	1	2122
E58	311	1	1112	1	321	1112	1	1	1	2211
E59	1	-	211	2123	322	321	1		1	-
E60	211	223	2123	1	311	311	1	1	311	1
E61	311	1	222	2211	321	321	1121	311	1121	332
E62	311	321	211	211	321	211	2123	321	211	211
E63	42	321	42	2211	42	42	1	1	1	2211
E64	321	321	321	2211	321	321	2211	321	321	2211
E65	311	311	222	332	321	321	2211	311	311	332
E66	311	222	2122	311	1	2122	1	1	222	1
E67	1141	1	2123	332	321	1112	1121	1	1	1
E68	2123	321	222	2211	2123	222	2123	2123	2123	2211
E69	311	321	211	2123	311	42	1	311	42	311
E70	321	321	2123	2211	321	321	321	321	321	2123
E71	2124	211	2123	2211	321	321	1	1	1	1
E72	321	321	321	332	321	321	1	1	1	1
E73	321	321	2211	311	321	321	311	42	42	313
E74	311	211	211	2211	321	223d	1	1	1	1

TABLA nº 13-POSM: Tipos de error de los estudiantes del grupo C.

	$4,1^2$	47x0,25	26x35	37x98	31x42	2,4x0,15	64x75	2,8x0,45	4,9x5,1	19x18
C1		7				7	5	7	7	7
C2						12	414	48	410	21
C3		72				16		21		
C4										31
C5	45	6		21		6	45	6	6	6
C6	13									
C7									416	
C8								42	410	
C9			41	41	41	12	41	12		41
C10	41							16+21	416	22
C11	41								410	22
C12	41		41		41			41		41
C13	41	42							410	42
C14		11					21			
C15			49			42		42	42+49	42
C16						16		16	6	42
C17					5				44	
C18					415	12	415	12+415	12+415	
C19				21						3
C20	417					12+23				
C21										21
C22		11								
C23	21									
C24				22						
C25		12				6		6		
C26	41		41		41		41		410	41
C27	6	6	410	410	41	6	41	6	410	
C28	416									21
C29	6						410	6	6	
C30				24					413	
C31	12	412	41	24	6	41	21	41	6	6
C32			21							
C33	5			42					410	
C34			22		23			23		
C35								6		
C36										3
C37		21	46					6	6	6
C38					21	12		12		
C39					21	21	21	6	6	6
C40						12		12		
C41					23					21
C42				42						
C43			72			16				
C44									42	
C45								5	410	21
C46			43			43		43		
C47	41								410	

TABLA nº 14, POSM. Tipos de métodos de los estudiantes de C

	4,1[2]	47x0,25	26x35	37x98	31x42	2,4x0,15	64x75	2,8x0,45	4,9x5,1	19x18
C1	114	-	11	321	11	-	-	-	-	-
C2	11	311	321	321	321	312	-	-	-	-
C3	121	311	121	321	121	312	312	312	1312	122
C4	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
C5	-	-	212	321	212	-	-	-	-	-
C6	1311	312	212	321	212	212	212	212	212	321
C7	114	311	114	321	114	312	114	312	-	114
C8	212	212	212	321	212	212	311	-	-	321
C9	1311	311	-	-	-	212	-	212	212	-
C10	-	311	2211	321	212	321	321	321	-	321
C11	-	212	212	321	212	312	212	312	-	321
C12	-	311	-	321	-	212	321+311	-	212	-
C13	-	-	312	321	212	312	312	312	-	-
C14	212	311	312	321	321	321+311	321+311	321	321	321
C15	-	311	-	321	212	-	311	-	-	-
C16	11	322+311	212	321	212	312	212	321	-	-
C17	212	311	212+23	321	212	-	311	321	-	321
C18	11	2211	212	321	-	212	-	-	-	321
C19	¿	311	¿	212	121	212	121	121	1312	212
C20	-	311	41	321	212	212	11	212	212	11
C21	1311	311	212	321	212	311	212	311	1312	321
C22	11	311	321	321	212	321	311	321	1312	321
C23	11	311	2211	321	212	11	321	11	11	11
C24	212	311	312	321	212	11	212	11	212	321
C25	1311	11	114	321	114	-	114	-	212	122
C26	-	311	-	321	-	321	-	321	-	-
C27	-	-	-	-	-	-	-	-	-	122
C28	-	311	212	212	212	212	212	212	11	2212
C29	-	311	11	321	212	-	-	-	-	321
C30	112	112	112	112	212	11	212	11	f11	212
C31	1311	-	-	321	-	-	321	-	-	-
C32	1311	311	212	321	212	11	11	312	11	321
C33	11	311	2221	-	212	11	212	321	-	321
C34	11	311	2211+31	321	212	212	311	321	321+311	321
C35	11	311	2211+31 1	321	212	11	321	-	11	321
C36	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
C37	114	11	11	11	11	114	114	-	-	-
C38	11	311	212+41	321	212+41	212	321	212+41	212	321
C39	1311	311	2212	321	2212	212	2211	-	-	-
C40	121	311	121	212	121	312	121	121	121	121
C41	11	311	321	321	212	11	311	11	11	321
C42	1311	322	212	-	212	312	212	312	1312	321
C43	1311	212	2211	321	212	212	311	212	1312	122
C44	114	311	11	321	114	312	311	312	-	321
C45	212	311	212	321	212	11	212	311	-	321
C46	11	311	-	321	212	-	212	-	11	321
C47	-	311	312	321	212	212	311	312	-	321
C48	212	311	212	321	212	321	23	321	212	321

C49	11	311	212	321	212	311	212	311	212	321
C50	1311	311	312	321	212	312	212	312	212	321
C51	1311	311	212	321	212	312	311	312	212	321
C52	11	311	212	321	212	11	212	11	11	212
C53	114	311	212+311	321	212	212	23+311	321	321	321
C54	114	311	114	114	212	212	23+311	321	321	321
C55	212	311	312	321	212	312	311	312	212	212
C56	114	114	212	321	114	114	114	114	114	114
C57	11	311	212	321	212	311	212	311	1312	321
C58	112	112	112	112	112	112	112	112	112	112
C59	11	311	321	321	212	321+311	311	321	1312	321
C60	212	212	2211	321	212	212	212	212	212	212
C61	1311	311	114	321	114	114	23+311	114	1312	321

TABLA nº 15-POSM: Tipos de error de los estudiantes del grupo E.

	$4,1^2$	47x0,25	26x35	37x98	31x42	2,4x0,15	64x75	2,8x0,45	4,9x5,1	19x18
E1							21			3
E2	15	21				15		15	11	42+21
E3		6				6		6	6	
E4	41.1		417				417			
E5	41		414					21	416	
E6		12				12+413	72	12	6	6
E7			21						410	
E8	13	12+21		21+22		12+22		12+5	410	5
E9	4.11		21		21		23		41	
E10		21				6	72	6	6	42
E11				21		21	72+5			3
E12		21								
E13		14								
E14			417							
E15	15	417								
E16		en12						en12	12+47	
E17						15				
E18	41+13	21		22						21
E19			23							
E20		14	410		410	410	410	410	410	410
E21		6				6		6	6	46
E22	4.11	14		42	411	412	411	412	412	411
E23	15								410	22
E24										6
E25	15	21								
E26	5	21	43			71+21	71		414	5
E27					414					
E28	4.11	14	3	21+22				16+21	16	
E29	41	21	43+23	43+21	23	21	21+47	21	21	43
E30	21	14+11		21				21		
E31								11		
E32	4.11				415	5		6	6	6
E33	4.11	14				6		6	410	
E34		14						15	5	
E35		45			21					21
E36	4.11				23	15en			21	
E37	6	6	3			41+15		41+15	41	
E38				42		15en			16	
E39		6	21			6			410	
E40		72		22	415		22			
E41				47	21	6	72	6		
E42					21				410	
E43								16		
E44		21								
E45		72								
E46		47		21						45
E47							6		11	
E48	13	14	6			6		6	410	

E49	45			42	44					
E50	21			21		21	21			
E51		21								
E52					5	6	6	6		
E53	41+13	6		21			6	6	6	6

TABLA nº 16, POSM. Tipos de métodos de los estudiantes de E.

	$4,1^2$	47x0,25	26x35	37x98	31x42	2,4x0,15	64x75	2,8x0,45	4,9x5,1	19x18
E1	112	112	112	112	112	112	112	112	112	112
E2	11	311	11	11	11	11	311	11	11	322
E3	11	-	213	321	212	-	212	-	-	321
E4	-	311	114	321	114	114	114	114	114	114
E5	-	311	2211	321	212	312+2212	311	312+2211	-	321
E6	-	311	112	-	112	112	-	23	-	-
E7	1311	311	312	321	212	212	212	321	-	321
E8	1311	311	121	321	212	212	311	212	-	-
E9	-	311	212	321	212	212	311	321	-	321
E10	11	311	212	321	212	-	-	-	-	322
E11	11	11	11	11	11	11	-	11	11	11
E12	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
E13	11	311	212	321	212	11	311	11	11	321
E14	114	114	-	114	114	114	114	114	114	114
E15	114	f114	114	321	212	114	114	212	114	321
E16	11	311	212	321	212	212	321	321	212	321
E17	11	121	121	321	121	121	321	121	121	121
E18	-	11	212	321	212	212	212	212	11	322
E19	11	311	212	321	212	11	311	11	213	114
E20	1311	311	-	321	-	-	311	-	-	-
E21	11	-	113	113	113	-	113	-	-	11
E22	-	311	313	321	-	-	-	-	-	-
E23	11	11	11	11	11	11	11	11	-	11
E24	11	313	212	321	212	212	2211	212	212	-
E25	11	311	112	112	112	112	112	112	112	112
E26	11	11	212	321	212	-	321	321	212	2212
E27	212	311	212	321	212	212	321	212	212	321
E28	-	311	212	321	212	212	212	212	212	212
E29	-	311	-	-	212	11	311	11	11	-
E30	114	311	212	212	114	114	114	114	114	114
E31	1311	321	2211	321	212	212	321	213	213	2212+23
E32	-	311	212+41	321	-	-	321	-	-	-
E33	-	311	212	321	212	-	321+311	-	-	321
E34	11	311	212	321	212	11	311	112	212	321
E35	11	11	212	212	23	212	23	11	11	212
E36	-	311	112	321	212	112	112	114	11	321
E37	-	-	212	321	212	-	321	11	-	321
E38	11	311	212	321	212	212	212	212	321	321
E39	13	-	212	321	212	-	321+212	212	-	212
E40	1311	311	212	321	212	212	311	212	212	23
E41	11	311	11	321	11	-	311	-	11	11
E42	212	311	212	321	212	212	321+311	212	-	212
E43	1311	311	321	321	212	11	212	321	11	122
E44	11	11	113	113	212	113	113	113	113	212
E45	114	311	113	321	113	113	311	113	212	2212
E46	114	-	112	112	112	112	112	112	112	-
E47	112	311	321	321	212	212	-	321	321	321
E48	1311	311	-	321	212	-	321	-	-	212

E49	-	311	212	-	-	212	212	212	212	321
E50	112	112	112	321	112	112	112	112	112	112
E51	11	311	11	11	11	11	11	11	11	321
E52	1311	112	112	112	¿	-	-	-	¿	23
E53	-	-	212	212	212	212	-	-	-	-
E54	11	311	2211	321	11	11	11	11	321	321
E55	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
E56	1311	311	312	321	212	312	312	312	212	321
E57	11	311	212	321	212	212	212	212	212	321
E58	11	311	23	321	212	23	23	23	212	321
E59	1311	121	121	121	121	121	121	321	1312	321
E60	11	321	11	112	112	112	112	112	112	321
E61	11	11	11	11	11	11	11	11	11	322
E62	1311	311	2211	321	212	212	23+311	321	1312	321
E63	11	311	212	321	212	11	11	212	212	212
E64	11	311	2211	321	212+41	212	2211	321+41	321+311	321
E65	11	212	121	11	121	11	11	11	11	11
E66	11	114	114	114	11	11	114	114	11	11
E67	11	311	11	321	1	212	321+311	212	11	212+321

Selección de citas textuales de otros autores

La irrupción de la calculadora electrónica ha significado que los educadores son finalmente libres para reemplazar el tradicional enfoque curricular en la práctica y la memorización por un énfasis en la comprensión y creativa resolución de problemas. Podemos concentrarnos en ayudar a los niños a desarrollar su comprensión del número, incluyendo el significado de valor de posición, de tal manera que se vuelvan pensadores matemáticos. Aunque no podemos permitirnos totalmente actividades abiertas, de investigación sin estructura global entorno a cuestiones, estas deben ser lo suficientemente no estructuradas para que animen al niño a construir sus propios modelos de los problemas dados basándose en sus preexistentes métodos de razonamiento. Esos modelos deben representar problemas e implicar operaciones y cantidades antes que símbolos formales u objetos concretos, y esto supone prestar atención a todos los pasos del procedimiento. Una manera obvia de facilitar este proceso es fomentar un surtido de métodos de cálculo informales. Aprender a ejecutar sofisticadas técnicas mentales y, en particular, atajos, necesariamente implica reflexión sobre el procedimiento mismo (Hennessy, 1989).

Muchos niños aprenden de manera informal que la relación «uno más uno son dos» se aplica a combinaciones mayores como una centena más una centena son dos centenas, o incluso que un billón más un billón son dos billones. Esta conexión puede servir como base para descubrir que el sistema numérico está repleto de pautas aritméticas recurrentes (por ejemplo, 4+3=7, 40+30=70, 400+300=700, 4000+3000=7000, etc.). Estas relaciones descubiertas de una manera informal pueden ayudar más adelante a la realización de cálculos escritos con números de varias cifras.

La aritmética mental también provoca un pensamiento cuantitativo más flexible. El cálculo mental y las estimaciones estimulan a los niños a pensar en porciones de diez y múltiplos de diez. Por ejemplo, es más

fácil calcular mentalmente 542+135 en función de centenas, decenas y unidades que emplear el algoritmo normal. El enfoque usual de derecha a izquierda (2+5=7, 4+3=7, 5+1=6: 677) requiere almacenar primero y transponer después (invertir el orden de) las sumas parciales para obtener la respuesta. Mediante el empleo del procedimiento no usual, el niño puede sumar de izquierda a derecha y evitar la transposición de cifras (por ejemplo, «[500+100 son] seiscientos, [40+30 son] setenta y [2+5 son] siete») (Baroody, 1988).

Como el fomento de la aritmética mental estimula la comprensión y la flexibilidad, puede tener algunos efectos secundarios de gran importancia. Los niños pueden obtener un sentimiento de dominio de los números grandes (Trafton, 1981).

Ya hemos indicado que los alumnos pequeños no deben pasar demasiado rápidamente al trabajo escrito en matemáticas. En los primeros cursos, el trabajo mental y oral ha de formar el núcleo de la enseñanza de la asignatura. a medida que el niño crece, necesita ir desarrollando los métodos de cálculo mental que empleará a lo largo de su vida y que tal vez difieran de los que utilice en el trabajo escrito. En lo años de primaria debe practicarse con la manipulación de dinero, la devolución de cambio tal como se hace en las tiendas, el cálculo de tiempos de desplazamiento, y distintas operaciones de cálculo mental relacionadas con mediciones de distintas clases. Aunque sea posible la práctica de métodos de cálculo escrito en forma de rutinas con una comprensión muy baja del método subyacente, hemos de indicar que los métodos de cálculo mental adecuados se basan en la comprensión del valor de posición, acompañada del recuerdo de los resultados básicos de la suma y la multiplicación; de aquí que la práctica de estos métodos mentales sea de tanta utilidad en la comprensión y desarrollo de los equivalentes escritos. Las matemáticas mentales pueden ser útiles en los años de primaria para desarrollar la velocidad y confianza necesarias en cuanto al recuerdo de los hechos numéricos básicos, y

para profundizar en los conocimientos matemáticos intuitivos sin la complicación adicional del registro formal (Cockcroft, 1985).

Metodólogos Soviéticos han considerado siempre el cálculo mental como una de las mejores maneras de profundizar en el conocimiento teórico que el niño adquiere en las lecciones de aritmética. Cálculo mental facilita la formación de los conceptos básicos matemáticos, un más completo conocimiento de cómo los números están compuestos de sumandos y factores, una mejor asimilación de las leyes de las operaciones aritméticas. También se ha atribuido siempre una gran importancia educativa a los ejercicios de cálculo mental. se ha creído que facilitan el desarrollo del ingenio de los niños, rapidez de ingenio , inteligencia, atención, memoria, rapidez, versatilidad e independencia de pensamiento (Menchinskaya and Moro, 1965).

He intentado demostrar que ese cambio, el autor se refiere a la manera en que se debería enseñar aritmética a los niños, debería ser acompañado de una mayor atención a los métodos mentales, como medio para incrementar la comprensión infantil de las operaciones numéricas y la flexibilidad de su pensamiento matemático. Como profesores debemos buscar constantemente oportunidades para aumentar el uso y la apreciación infantil de los métodos mentales (French, 1977).

Investigadores que han trabajado en el terreno del cálculo mental (Dickson, Brown, & Gibson, 1984; Hope, 1986; Reys, 1984) reivindican que la adquisición de las destrezas de cálculo mental fomentan el desarrollo de la comprensión del número porque animan a indagar formas abreviadas de cálculo basadas en las propiedades numéricas (Sowder,1988).

Enseñar técnicas mentales no llevarán al niño a hacer menos cálculos en la escuela: probablemente harán más. Pero lo que es más importante, los niños adquirirán mejor comprensión del número a partir de la utilización de su propios algoritmos mentales que a partir de la aplicación repetida de los algoritmos estándar no entienden (Plunkett, 1989).

El cálculo mental nos parece un dominio privilegiado para chequear las concepciones numéricas de los alumnos y su disponibilidad.

En efecto, la necesidad de calcular rápidamente lleva a los estudiantes a abandonar sus algoritmos escritos, seguros pero demasiado lentos, y a poner en obra procedimientos reveladores de concepciones que ellos se hacen de los números, estas concepciones están ligadas a la numeración decimal y a las propiedades de las operaciones (funcionando a menudo de manera implícita.

El cálculo mental nos parece que es un momento privilegiado del aprendizaje porque enriquece las concepciones numéricas y su dominio de disponibilidad, hace funcionar y hace que se apropien las propiedades de las operaciones, y diversifica y extiende los procedimientos de calculo (Butlen, Denis y Pezard, 1991).

Por medio del cálculo mental se desarrollan la concentración, la atención, el interés y la reflexión para decidir y elegir; la autoafirmación y la confianza en sí mismo, la flexibilidad en la búsqueda de soluciones; y la capacidad para relacionar, comparar, seleccionar o dar prioridad a unos datos frente a otros a la hora de operar (DCB, 1989. Primaria. Orientaciones específicas).

En la secundaria es bastante común que se insista en el empleo de los métodos tradicionales de escritura de las operaciones, que con frecuencia se enseñan como si se tratara de rutinas estándar obligatorias. No obstante, incluso los alumnos para los que esto no

presenta dificultad alguna, necesitan un estímulo que les impulse a desarrollar métodos alternativos, que con frecuencia serán similares a los empleados para realizar cálculos mentales, o hagan uso de «atajos» de diversa índole. Las discusiones sobre el empleo de estos métodos alternativos con un grupo de alumnos o con la clase entera, brindarán una excelente oportunidad para el desarrollo de la confianza e «intuición» en el cálculo numérico.

Las matemáticas mentales pueden emplearse también para introducir de modo informal ideas matemáticas que luego se desarrollarán más en profundidad, y quizá de forma diferente, por los distintos alumnos. Preguntas del tipo de «si 2x¿?+¿?=17, ¿qué números han de escribirse en el cuadrado y el triángulo?» pueden ser útiles para introducir ideas algebraicas.

Creemos que la decadencia del trabajo oral y mental en las clases de matemáticas es consecuencia de la falta de reconocimiento de la importancia que el cálculo mental tiene en ésta asignatura. Incluso los métodos de cálculo sobre papel utilizados tradicionalmente se basan en la realización mental de determinadas operaciones (Cockcroft, 1985).

La aritmética mental es importante porque insta a los niños a pensar y a resolver problemas de una manera más flexible y se trata de una técnica muy empleada en el quehacer cotidiano (Baroody, 1988).

Algunas investigaciones (por ejemplo Driscoll, 1981) indican que el adiestramiento en el cálculo mental puede mejorar la aptitud general de los niños para la resolución de problemas matemáticos (Reys 1984, cit. Baroody, 1988).

En suma, para ayudar al niño a aprender a usar las matemáticas como herramienta poderosa para explorar su entorno y resolver problemas del mundo real eficientemente y con comprensión, el

curriculum de la escuela primaria debe promover explícitamente los métodos informales de cálculo (Hennessy, 1989).

... ayuda a desarrollar las estrategias de cálculo estimado (Reys, Rybott, Bestgen y Wyatt, 1987).

La aritmetica mental requiere pensar los números como entes completos, más que como entes fraccionados, como ocurre en los procesos algoritmicos usuales (Ewbank, W. A. 1977)

Aunque estos métodos a menudo no son los más eficientes para resolver el problema en mente, tienen la gran ventaja de que, más que por el maestro, son controlados y creados por el niño.

Esto incide en el principio de que el niño debe mostrar imaginación, iniciativa y flexibilidad de pensamiento matemático (Smith, 1988).

REFERENCIAS

Anaya (1986. Serie). Libros de texto para la EGB. AZIMUT. Equipo Signo. Madrid. Ediciones Anaya.

Ausubel, D. P. y Robinson, F. G. (1969). *School Learning. An introduction to Educational Psychology*. London, New York. Holt, Rinehart y Winston.

Bails, B. (1779, 2ª Ed. 1793). *Elementos de Matemática*. Madrid. Tomo I. Imprenta de viuda de D. Joaquín Ibarra.

Baroody, A. J. (1988). *El Pensamiento matemático de los niños..* Madrid. Visor-MEC.

Benoit, P. (1989). "Calcul, algèbre et marchandise". En M. Serres (Dir), *Éléments D'Histoire des Sciences*. Bordas, Paris, 197-221.

Bézout, M. (1781). *Cours de Mathématiques à l'usage du Corps Royal de L'Artillerie*. Paris. Tome premier. De L'Imprimerie de Ph. Pierres.

Booth, L. (1989). Grade 8, student's understanding the structural properties in mathematics. *Proceedings, PME 13,,* 141-149. Paris.

Bourdon, M. (1797). Aritmética. En Agustín Gómez Santa Maria (trad.) *Tratado completo de matemáticas* (1848, 21ª Edición). Madrid. Imprenta de D. J. M. Alonso.

Bowers, H., y Bowers, J. (1961). *Arithmetical Excursions. An enrichment of Elementary Mathematics*. New York. Dover.

Brown, B. I. (1957). A study in mental arithmetic: Proficiency and thought processes of pupils solving subtraction examples (Doctoral dissertation, University of Pittsburgh). *Dissertation Abstracts International*, 17, 2219A.

Brown, G. (1957). An area of neglect in the study of arithmetic-mental arithmetic. *The Mathematics Teacher*, 50, 166-169.

Brown, M. (1981). Number operations. In K. Hart (ed.), *Children Understanding of Mathematics: 11 to 16.* Oxford, London and Northampton. John Murray, 23-48.

Bruño (1932). *Tratado Teórico-Práctico de Aritmética Razonada. Curso Sup. (2ª. Ed.)* y *Solucionario*. Madrid, Barcelona. Ed. "La instrucción popular". S. A.

Burt, C. (1898). *Handbook of test.* London

Butlen, D. y Pezard, M. (1991). Calcul mental, calcul rapide. *Grand N*, 47, 35-59.

Carpenter, T. P.; Lindquist, M. M.; Matthews, W. y Silver, E. A. (1984). Achievement in mathematics: results from the national assessment. *Elementary School Journal.* 84(5), 485-495.

Carraher, T. N., Carraher, D.W. y Schliemann, A. D. (1987). Written and Oral Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(2), 83-97.

Carraher, T. N. (1989). Numeracy without schooling. *Proceedings, PME 13,*, 164-171. Paris.

Centeno, J. (1988). *Números decimales, ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid. Ed. Síntesis.

Clark, J., y Eads, L. (1954). Guiding Arithmetic Learning Yonkers. N. Y., World Book. Co. (Cit. Lankford, 1959).

Cokckoft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan..* Madrid. MEC. (Trad. de: *Mathematics Counts*. London. HMSO, 1982).

Colburn, W. (1821). First Lessons in Arithmetic on the Plan of Pestalozzi with some improvements. En J. K. Bidwell y R. G. Clason (eds.). *Readings in the History of Mathematicas Education.* (1970). Washinton, D.C., NCTM.

Colburn, W. (1822). Continuación de las primeras lecciones. En J. K. Bidwell y R. G. Clason (eds.). *Readings in the History of Mathematicas Education.* (1970). Washinton, D.C., NCTM.

Colburn, W. (1830). Teaching of Arithmetic. En J. K. Bidwell y R. G. Clason (eds.). *Readings in the History of Mathematicas Education.* (1970). Washinton, D.C., NCTM.

Compiglio, A. y Eugeni, V. (1992). *De los dedos a la calculadora. La evolución del sistema de cálculo.* (Trad. de Dalle dita al calculatore) Barcelona. Ed. Paidós.

Corachán, J. B. (1699). *Arithmetica Demonstrada Theórico-Práctica para lo mathemático y mercantil.* Valencia.

D. B. R. (1990). *Documento Base para la reforma de la EGB* . Valencia. Consellería de Cultura. E. y C. de la C. Valenciana.

D. C. B. (1989). *Documento Diseño curricular base.* Madrid. MEC.

Dalmáu Carles. J. (1898, Serie). *Aritmética razonada y Nociones de álgebra. Tratado teórico-práctico demostrado con aplicación a las diferentes cuestiones mercantiles para uso de las Escuelas Normales y de las de Comercio..* Libro del alumno. Grado profesional. Barcelona, Madrid y Gerona.

Dickson L., Brown M. y Gibson O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas.* Madrid. Labor-MEC. (Trad. de: *Children Learning*

Mathematics. A Teacher's guide to recent research 1984. London. Casell).

Donovan A. J. y William H. G. (1965, Serie, 1ª Ed., 1960). *Exploring Mathematics on your short cuts in calculations.* Vol. 9. London. Ed. John Murray.

Dworking (1988). A study of mental computation ability and its relationship to whole number sense in fifth grade students. Unpublished *master's thesis.* University of California, Berkeley, C. A. (Cit. Sowder, 1988).

Edelvives (1933). *Aritmética. Enciclopedia escolar 3º grado.* J. E. George Brouillette. Zaragoza. Edit. Luis Vives.

Edelvives (1934, 7ª ed.). *Aritmética 2º grado..* J. E. George Brouillette. Zaragoza. Edit. Luis Vives.

ERMEL (1981). *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire.* Cicle Moyen. Tome 1. Paris. Sermap Hatier.

Ewbank, W. A. (1977) Mental a neglected. *Mathematics in School.* 5(6), 28-31.

Flournoy, M, F. (1953). A study of the Effectiveness of an oral Arithmetic program prepared for use at the Intermediate grade level. Unpublished *Ph. D. thesis,* University of Iowa. (Cit. Brown, B. I. 1957; Reys, B. B. 1985).

French, D (1977). Mental methods in mathematics. *Mathematics in School.* (March), 39-41.

Galí, A. (1986). La mesura del treball escolar. Vic. Eumo (Reed. de 1934).

Giménez, J. (1986). Propostes pel cálcul mental pels Cicles Inicial i Mitjà d'EGB. Centre de Recursos d'Igualada.

Giménez, J. y Girondo, L. (1993). *Cálculo en la escuela. Reflexiones y propuestas.* Barcelona. Ed. Graó.

Giménez, J. y Gómez, B. (1991). Cálcul mental: atractiu i apassionat. *Guix,* nº 169, Nov. 4-9 y 29-31. Barcelona.

Gironza A. (1957, 4ª ed 1960). *Aritmética y su metodología, y álgebra para estudios de magisterio..* Barcelona. Ed. Alfonso Gironza.

Gómez, B. (1988). *Numeración y Cálculo..* Madrid. Ed. Síntesis.

Green, G. (1985). Math-Facts Memory Made Easy. *Arithmetic Teacher* 33, 21-25.

Grumbling, B. N. (1970). An experimental study of the effectiveness of instruccion in mental computation in grade IV. Doctoral dissertation. University of Northern Colorado. *Dissertation Abstracts International,* February, 1971, 31, 3775A-3776A.

Hall, J. V. (1947). Solving verbal arithmetic problems without pencil and paper. *Elementary School Journal,* 48, 212-217. (Cit. Reys, 1985).

Hall, J. V. (1951). The ability of Elementary Teacher in training sixt grade children to solve certain Arithmetic Problems Mentally, and in Any Manner. Unpublished. Ed. *D. Research Study* Nº. 2, Colorado State College (Cit. Brown, 1957, y Groumbling, 1970).

Hazekamp, D. W. (1986). Components of Mental Multiplying. In H.L. Schoen y M. J. Zweng (Eds.), *Estimation and mental Computation.:1986 Yearbook,* (116-126). Reston, VA: NCTM.

Hennessy, S., et al. (1989). Its Approach to mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 20, 273-292.

Hitch, G. J. (1978). The role of short term-memory in mental arithmetic. *Cognitive Psychology.* 10, 302-323 (Cit. Hope, 1984).

Hitch, G. J. (1980). Developing the concept of working memory. In G. Claxton (ed.) *Cognitive Psychology.* Londres. Routledge y Kegan Paul, 154-196. (Cit. Hope, 1984).

Hope, J. A. (1984). *Characteristics of unskilled, skilled and highly skilled mental calculators.* Unpublished doctoral dissertation. University of Brithis Columbia, Vancouver, Canada.

Howe, M. J. A. y Ceci, S. J. (1979). Educational implications of memory research. In M. M. Gruneberg y P. E. Morris (eds.), *Applied Problems in memory.* Londres. Academic Press, 59-94 (Cit. Hope, 1984).

Hunter, I. M. L. (1962). An excepcional talent for calculative thinking. *British Journal of Psychology.* 243-258 (Cit. Hope, 1984).

Hunter, I. M. L. (1978). The role of memory in expert mental calculations. In M. M. Gruneberg; P. E. Morris y R. N. Sykes (eds.), *Practical aspects of memory.* Londres. Academic Press, 339-345 (Cit. Hope, 1984).

Hunter, I. M. L. (1979). Memory in everyday life. In M. M. Gruneberg y P. E. Morris (eds.) *Applied Problems in memory.* Londres. Academic Press, 1-24 (Cit. Hope, 1984).

Josephina, Sr. (1960). Mental arithmetic in today's clasroom. *The Arithmetic Teacher,* 7 (April), 199-207 (Cit. Reys,1985).

Kennedy, L. M. y Tipps S. (1988, 5ª Ed., 1ª de 1979). *Guiding Children's Learning of Mathematics..* California. Wadsworth P. Co. Belmont.

Lacroix, S. F. (1797). *Tratado elemental de Aritmética* Traducción española de Rebollo Morales. Edición de 1846. Madrid. Imprenta Nacional.

Lankford, F. G. (1959) Implications of the Psychology of Learning for the Teaching of Mathematics. In *The Growth of Mathematical Ideas. Grades K-12. The Twenty-Fourth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (405-430). Washington, D. C., NCTM.

Lucien, T. y Hall, Jr. (1984). Estimation and aproximation. Not Synonyms. *Mathematics Teacher*. Vol 77, nº7, 516-517.

Maier, E. (1977). Folk Math. *Instructor*, 86 (Feb.) 84-89, y 92. (Cit. Reys, 1985).

Markovits, Z. y Sowder, J. (1988). Mental computation and number sense. *Proceedings PME-NA 10.* (pp. 58-64). DeKalb, IL. (Cit. Sowder, 1988).

Matz, M. (1982). Towards computational theory of algebraic competence. In *Intelligent Tutoring Sistems*. Ed. D. Sleeman y J. S. Brown. Academic Press.

MEC (1970). Nuevas Orientaciones Pedagógicas para la Educación General Básica. *Magisterio Español*.. Madrid. Ministerio de Educación y Ciencia.

MEC (1981). Programas Renovados de E.G.B. Ciclo Medio y Ciclo Superior. *Escuela española*.. Madrid. Ministerio de Educación y Ciencia.

Menchinskaya, N. A., y Moro, M. J. (1975). Instruction in mental and written calculation. In J. Kilpatrick, J. Wirszup, E. Begle, y J. Wilson (Eds.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching*

mathematics 14, 73-88. Standford, CA: School Mathematics Study Group.

Monroe, W. S. (1919). *Development of Arithmetic as a School Subject,* U. S. Department of Interior, Bureau of Education Bulletin Nº 10, Washington: U S. Government Printing Office (P. 57). (Cit. Payne, 1966).

Montanuy, M.; Nuñez, J. M. y Servat, J. (1989). La influencia de la Revolución Francesa en la enseñanza elemental de la matemática. *Suma,* 4. 21-25.

Montanuy, M.; Nuñez, J. M. y Servat, J. (1990). La matemática en la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona: Las memorias durante el período 1770-1890. *Llul,* vol 13. 107-130.

Moya, A. (1897, 6ª ed.). *Elementos de Matemáticas. Tomo I. Aritmética y Algebra.* Madrid, Librería de Hernando y Compañía.

Murray, H. y Olivier, A. (1989). A model of understanding two-digit numeration and computation. *Proceedings PME 13.* 3, 3-11. Paris.

NAEP (1983). *The Third National Mathematics Assessment: Results, Trends, and Issues.* Denver, Colorado. NAEP (Cit. Reys, 1985).

NCSM (1977). *Position paper on basic mathematical skills.* National Council of Supervisors of Mathematics (Cit. Reys, 1985).

NCTM (1959). *The Growth of Mathematical Ideas. Grades K-12. The Twenty-Fourth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics.* Eds. J. K. Bidwell y R. G. Clason. Washington, D. C., National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (1970a). *Readings in the History of Mathematicas Education..* Washinton, D.C., National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (1970b). *A History of Mathematics Education in the United States and Canada.* Thirty-second Yearbook. Washinton, D. C., National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation. Standards for School Mathematics.* Reston, VA. National Council of Teachers of Mathematics.

Nuñez, J. M. y Servat, J. (1988). La matemática en la institución Libre de Enseñanza: Concepciones teóricas y pedagógicas. *Llul,* vol 11, 75-96.

Paradís, J. y Malet, A. (1989). Los orígenes del álgebra: De los árabes al renacimiento. (Vol 1). *La génesis del álgebra simbólica.* PPU. Barcelona.

Payne, J. F. (1966). An experimental study on the effectiveness of instruction in mental computation in grade V. Doctoral Dissertation, University of Northern Colorado, *Dissertation Abstracts International, 27A,* 0608.

Pérez de Moya, J. (1563). *Tratado de Mathematica en que se contienen cosas de Arithmetica, Cosmografía, y Philosophia natural.* Alcalá de Henares.

Plunkett, S. (1979). Decomposition and All That Rot. *Mathematics in School,* 8(3), 2-5.

Polo, R. (¿Final del XIX?). *Aritmética..* Salamanca. Libreria de F. Pablos.

Polya, G. (1945). How to solve it. Princeton U. P. (Versión en catellano: Cómo resolver y plantear problemas. 1951, Trillas, México).

Recorde, R. (1543). *The ground of Arts* . (Cit. Yeldham, F., 1938, The Teaching of Arithmetic Trough Four Hundred Years. Ed. George G. Harrap y Co. Ltd. London. 1535-1935).

Rey Pastor y Puig Adam, (1932, 6ª Ed.). *Elementos de Aritmética.* Col. Elemental intuitiva. Tomo I. Madrid

Reys, B. B. (1985). Identification and characterization of mental computation algorithms used by seventh and eighth grade students on visually and orally presented mental computation exercises. Doctoral dissertation, University of Missouri-Columbia. *Dissertation Abstracts International, 46,* 3279A.

Reys, B. J.; Trafton, P. R.; Reys, R. E. y Zawojeski, J. (1984). Developing computational estimation materials for the middle grades-final report, Nº NSF8113601, National Institute of Education: Washington D. C. National Science Foundations (cit. Reys, 1985).

Reys, R. E.; Rybolt, J. F.; Bestgen, B. J. y Wyatt, J. W. (1982). Processes used by good estimators. *Journal for Research in Mathematics Education.* 13(3), 183-201.

Sachar, J. O. (1978). An instrument for evaluating mental arithmetic skills. *Journal for Research in Mathematics Education.* 9, 233-237.

Sánchez Pérez, J. A. (1949). *La Aritmética en Roma, en India y en Arabia..* Madrid. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Patronato Marcelino Menéndez y Pelayo. Instituto Miguel Asín.

Santillana (Ediciones de1982, 1988. Serie). Libro de texto para la EGB.

Schall, W. E. (1970). A comparison of mental arithmetic modes of presentation in elementary school mathematics. Doctoral dissertation, University of Northern Colorado. *Dissertation Abstracts International, 31A, 3775.*

Schubring, G. (1987). On the Methodology of Anaysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author *For the learning of mathematics*. vol 7, nº 3, 41-51.

Segovia, I.; Castro, Enr.; Castro, Enc. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*.. Madrid. Ed. Síntesis.

Smeltzer, D. (1974). *Man and Number* . New York. Emerson.

Smith, D. E. (1923, reed. 1958). *History of Mathematics*. New York. Dover P.

Smith, S. B. (1983). *The great mental calculators : The Psychology, Methods, and Lives of Calculating Prodigies, Past and Present*. New York. Columbia. University Press.

Sowder, J. T. (1988). Mental Computation and Number Comparison: Their roles in the development of number sense and computational estimation. In J. Hiebert y M. Behr (Eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades.*, 182-197. Hillsdale, NJ: Erlbaum y Reston, VA: N.C.T.M.

Swetz, F. J. (1987, ed. 1989). *Capitalism y Arithmetic. The new Math of 15th Century*. La Salle, Illiois. Open Court.

Thorndike, E. L. (1922). *The psychology of arithmetic*.. New York. Macmillan.

Trafton, P. R. (1978). Estimation and mental Arithmetic: Important Components of Computation. En M. N. Suydam y R. E. Reys (eds.), *Developing Computational Skills:: 1978 Yearbook*. 196-213. Reston, VA. NCTM.

Treviso (1478). Aritmética (Trad. de D. E. Smith). En Frank J. Swetz, *Capitalism y Arithmetic. The New Math of the 15 th Century.* (1987, ed 1989). La Salle, Illiois. Open Court.

Vallejo, Jose M. (1813, 4ª Ed. 1841). *Tratado Elemental de Matemáticas. Tomo I.* Madrid.

Vergnaud, G. (1981). Quelques Orientations Theoriques et Methodologiques des Recherches Francaises en Didactique des Mathematiques. Conferencia Plenaria. *Proceedings. PME 5,* 7-17.

Vicens Básica. (1986. Serie). Libros de texto.para la EGB.

Walbesser, H. (1973). The textbook as an instructional aid. In *Instructional Aids in Mathematics. Thirty-four Yearbook.* Washington, D. C., NCTM.

Wandt, E. y Brown, G. W. (1957). Non occupational uses of mathematics. *Arithmetic Teacher,* 4, 151-154 (cit. Reys, B. B. 1985).

Yábar, J. M. (1981). *Les màquines de calcular i l'aprenentatge del cálcul mental.* Barcelona. Tesis de Licenciatura. UAB.

Yeldham, F. A. (1938). *The Teaching of Arithmetic through Four Hundred Years. (1535-1935).* London. Harrap. Co.

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
BIBLIOTECA
DE CIÈNCIES

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

Reunido el Tribunal que suscribe en el día de la fecha, acordó otorgar, por unanimidad a esta Tesis doctoral de

D. Bernardo Gómez Alfonso

la calificación de APTO CUM LAUDE

Valencia, a 28 de abril de 1994

El Secretario,

El Presidente

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA — FACULTAT DE CIÈNCIES MATEMÀTIQUES — DUPLICADO