UNIVERSITAT DE VALENCIA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

NORMALIZADORES Y SUBGRUPOS DE PREFRATTINI DE GRUPOS FINITOS

POR

ADOLFO BALLESTER BOLINCHES

Memoria presentada para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA

La presente Memoria ha sido realizada en el Departamento de Algebra de la Facultad de Ciencias Matématicas de la Universitat de Valencia, bajo la dirección del Profesor Titular de la misma Dr. D. Luis Miguel Ezquerro Marín.

Quiero expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas que directa o indirectamente han contribuido a que pueda optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas: Al Dr. D. Francisco Pérez Monasor, por la confianza y apoyo que siempre me ha demostrado; a la Dra. Dña. María Jesús Iranzo Aznar, por la cual siento profunda admiración, por haberme contagiado su pasión por el Algebra en mis primeros cursos de Licenciatura; agradezco también a la Dra. Dña. María Dolores Pérez Ramos su colaboración desinteresada y su apoyo decidido y firme.

Sería injusto no expresar mi más sincero agradecimiento al Director de este Trabajo, Dr. D. Luis Miguel Ezquerro Marín. De él he recibido, además de orientaciones científicas que han sido decisivas en la elaboración de esta Memoria, constantes pruebas de amistad y confianza.

Finalmente, agradezco a la Sta. Ana Segura la ayuda recibida en la tarea mecanográfica.

A mis padres
A mis abuelas

INDICE.

Lista de símbolos 1
Introducción 3
Capítulo 0 1

Capítulo I. Subgrupos $\mathfrak{H}$-críticos.
Sección 1. Subgrupos $\mathfrak{H}$-críticos. 1
Sección 2. Clases de Schunck y Formaciones. 5

Capítulo II. $\mathfrak{H}$-normalizadores.
Sección 1. Primeras propiedades. 9
Sección 2. $\mathfrak{F}$-normalizadores y $\mathfrak{F}$-proyectores. 14
Sección 3. $\mathfrak{F}$-normalizadores y $\mathfrak{F}$-hipercentro. 22
Sección 4. $\mathfrak{F}$-normalizadores y $\mathfrak{F}$-residual. 25

Capítulo III. Normalizadores y Formaciones.
Sección 1. Teoremas de Complementación. 32
Sección 2. Formaciones locales. 37
Sección 3. Grupos cuyo $\mathfrak{F}$-hipercentro contiene a los subgrupos simples. 44

Capítulo IV. Subgrupos Maximales y Formaciones.
Sección 1. Los subgrupos $R_{\mathfrak{F}}(G)$ y $L_{\mathfrak{F}}(G)$. 51
Sección 2. Los subgrupos $L_{\mathfrak{F}}(G,p)$ y $Cl_{\mathfrak{F}}(G)$. 54
Sección 3. El subgrupo $CL_{\mathfrak{F}}(G,\pi)$. 59
Sección 4. Los Subgrupos $S_{\mathfrak{F}}(G)$, $S_{\mathfrak{F}}(G,p)$ y $U_{\mathfrak{F}}(G)$. 62

Capítulo V. Sistemas Maximales y Subgrupos de Prefrattini.
Sección 1. Sistemas Maximales. 65
Sección 2. Subgrupos de Prefrattini. 71
Bibliografía 77

LISTA DE SIMBOLOS.

G	Grupo finito.
$\|G\|$	Orden de G.
$o(x)$	Orden del elemento x.
π	Un conjunto de números primos.
π'	Complementario de π en el conjunto de números primos.
$\pi(G)$	Conjunto de divisores primos de G.
$Aut(G)$	Grupo de los automorfismos de G.
$Int(G)$	Grupo de los automorfismos internos de G.
$Hol(G)$	Holomorfo de G.
$Aut_G(H/K)$	Grupo de los G-automorfismos de la sección H/K.
$\mathfrak{N}$	Clase de los grupos nilpotentes.
$\mathfrak{U}$	Clase de los grupos superresolubles.
$\mathfrak{S}$	Clase de los grupos resolubles.
$\mathfrak{N}^*$	Clase de los grupos cuasinilpotentes.
$\mathfrak{S}_\pi$	Clase de los π-grupos resolubles.
$\mathfrak{E}_\pi$	Clase de los π-grupos.
$\mathfrak{E}$	Clase de los grupos finitos.
$Soc(G)$	Socle de G.
$H \leq G$	H subgrupo de G.
$H < G$	H subgrupo propio de G.
$H \trianglelefteq G$	H subgrupo normal de G.
H car G	H subgrupo característico de G.
$H \cong G$	H grupo isomorfo a G.
$A \subseteq B$	A subconjunto de B.
$\langle S \rangle$	Subgrupo generado por S.
$\phi(G)$	Subgrupo de Frattini de G.
$F(G)$	Subgrupo de Fitting de G.
$F^*(G)$	Subgrupo de Fitting generalizado de G.
$Z(G)$	Centro de G.
G'	Subgrupo derivado de G.

$O^{\pi}(G)$	$\mathfrak{E}_{\pi}$-residual de G.
$O_{\pi}(G)$	Mayor π-subgrupo normal de G.
$[B, A]$	Conmutador de B y A.
$C_G(H/K)$	Centralizador de H/K en G.
$N_G(H)$	Normalizador de H en G.
$Syl_p(G)$	Conjunto de los p-subgrupos de Sylow de G.
$[H]G$	Producto semidirecto de H por G.
C_n	Grupo cíclico de orden n.
Sym(n)	Grupo simétrico de grado n.
Alt(n)	Grupo alternado de grado n.
GF(q)	Cuerpo finito de q elementos.

INTRODUCCION

El objetivo de esta Memoria es la obtención de información sobre la estructura de los grupos finitos a través del estudio de formaciones saturadas y clases de Schunck. Más concretamente nuestro objetivo es el estudio de los $\mathfrak{H}$-normalizadores y de los subgrupos de $\mathfrak{H}$-prefrattini en universos de grupos finitos no necesariamente resolubles y su influencia en la estructura del grupo: teoremas de complementación normal, estudio de los subgrupos maximales, etc...

En 1872, P. M. L. Sylow presenta sus investigaciones a Jordan en un encuentro auspiciado por S. Lie. Jordan reconoce inmediatamente su valor y recomienda al editor de "Mathematische Annalen" la publicación de la forma más rápida posible de los "Theoremes sur le groupes de substitutions". De esta forma aún no había terminado aquel mismo año de 1872 cuando el celebérrimo teorema de Sylow nace para cimentar todo el desarrollo posterior de la Teoría de Grupos Finitos.

Posteriormente, P. Hall en una serie de trabajos publicados entre 1929 y 1940 y apoyándose en la teoría de Sylow, obtiene las líneas maestras de la estructura de los grupos finitos resolubles. Generalizando los subgrupos de Sylow, Hall obtiene en 1928 los llamados subgrupos de Hall: subgrupos cuyo índice y orden son primos entre sí: En un grupo finito resoluble, para cada conjunto de primos π, existe una clase conjugación de π-subgrupos maximales; esta clase se mantiene para subgrupos y cocientes. El hecho de restringir la cuestión a grupos resolubles no es sólo debido a un problema de técnicas de demostración (que normalmente descienden a la misma esencia de la resolubilidad: el carácter abeliano de los factores principales) sino algo impuesto por la realidad: de hecho nueve años más tarde, Hall demuestra que la propiedad de poseer p-complemento de Sylow para cada primo p es realmente definitoria de los grupos resolubles.

En 1937, P. Hall obtiene en cada grupo finito resoluble G los llamados sistemas de Hall de G escogiendo un p-complemento de Sylow para cada primo p y realizando intersecciones entre ellos. El conjunto de sistemas de Hall de G es invariante bajo la acción de Aut(G). Además, P. Hall demuestra que dicho conjunto forma una única órbita bajo la acción de Int(G); en otras palabras, si Σ y Σ^* son dos sistemas de Hall de G, existe un elemento $g \in G$ tal que $\Sigma^* = \Sigma^g$.

Surge entonces, de manera natural, el número de sistemas de Hall de un grupo resoluble G: es el índice en G del estabilizador de un sistema de Hall de G con respecto a la acción de Int(G). Tal estabilizador fue introducido por P. Hall en [28] y es el normalizador de sistema de G, denotado por $N_G(\Sigma)$. En este mismo trabajo, Hall observa que los normalizadores de sistema son nilpotentes, se mantienen pòr epimorfismos y forman una clase de conjugación de subgrupos "cubre-evita" de G.

Las dos caracterizaciones de grupos resolubles: por su estructura normal y por su estructura de Sylow sugieren una íntima conexión entre ambas. Los normalizadores de sistemas, genuinos representantes por su definición de la estructura de Sylow, cubren los factores principales centrales y evitan los excéntricos; de esta forma, conectan ambas estructuras y proporcionan una medida de la nilpotencia del grupo G.

Por sus repercusiones posteriores, conviene citar una caracterización de los normalizadores de sistemas obtenida también por P. Hall que se manifiesta independiente de la estructura aritmética del grupo G:

" Un subgrupo D de un grupo resoluble G es un normalizador de sistema de G sí y sólo sí D es minimal con respecto a la siguiente propiedad:

D puede unirse con G mediante una cadena de subgrupos $D = D_0 \leq D_1 \leq .....\leq D_n= G$ tal que D_i es subgrupo maximal abnormal en D_{i+1}, para todo i ".

A partir de la generalización de los subgrupos de Carter al ámbito de las formaciones saturadas realizada por W. Gaschütz y, pensando en las relaciones entre los normalizadores de sistemas y los subgrupos de Carter, el propio R. Carter y T. O. Hawkes investigaron en [11] la existencia en cada grupo resoluble G de una clase de conjugación de subgrupos relacionados con formaciones saturadas $\mathfrak{F}$ que generalizasen a los normalizadores de sistemas, esto es, que gozasen de propiedades análogas a los normalizadores de sistemas y coincidiesen con ellos cuando $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$. En cada grupo resoluble G aparece así una clase de conjugación de subgrupos "cubre-evita" de G, invariantes por epimorfismos: los $\mathfrak{F}$-normalizadores de G. Estos subgrupos se definen considerando la definición local de formación saturada dada por W. Gaschütz y U. Lubeseder y por tanto, siguen dependiendo aparentemente de la estructura aritmética del grupo G. No obstante, Carter y Hawkes demuestran una propiedad análoga a la de los normalizadores de sistemas que caracteriza a los $\mathfrak{F}$-normalizadores por medio de cadenas de ciertos subgrupos maximales.

Con la introducción del concepto de clase de Schunck, respondiendo al problema de la existencia universal de envolturas en todo grupo resoluble, era razonable pensar en una extensión de los normalizadores de Carter y Hawkes al contexto de clases de Schunck. Esta investigación fue llevada a cabo por A. Mann en 1970, pero el éxito fue sólo parcial: no se pudo construir una teoría completa de $\mathfrak{H}$-normalizadores para clases de Schunck $\mathfrak{H}$ cualesquiera. Es menester imponer condiciones sobre $\mathfrak{H}$.

Para la definición de los $\mathfrak{H}$-normalizadores, Mann escoge la más abstracta de las caracterizaciones de los normalizadores: por medio de cadenas de subgrupos $\mathfrak{H}$-críticos. No obstante, Mann demuestra que estos $\mathfrak{H}$-normalizadores siguen dependiendo de la estructura aritmética del grupo G. De nuevo, el carácter resoluble del grupo interviene de manera decisiva.

Es P. Förster, en [19], quien caracteriza las clases de Schunck de grupos resolubles tales que para todo grupo resoluble $G \notin \mathfrak{H}$, G posee un subgrupo $\mathfrak{H}$-crítico: son las clases de la forma $E_{\Phi}\mathfrak{F}$ con $\mathfrak{F}$ formación.

De esta manera, los $\mathfrak{H}$-normalizadores son verdaderamente una generalización de los $\mathfrak{F}$-normalizadores de Carter y Hawkes y se conservan la mayoría de las propiedades: los $\mathfrak{H}$-normalizadores forman una clase de conjugación de $\mathfrak{H}$-subgrupos de G invariantes por epimorfismos y cada $\mathfrak{H}$-envoltura de G contiene un $\mathfrak{H}$-normalizador de G. Sin embargo, las propiedades sobre cubrir y evitar factores principales predeterminados no se verifican a pesar que son subgrupos "cubre-evita".

A la vista de las propiedades "cubre-evita" de los normalizadores de sistemas (cubren los factores principales centrales y evitan los excéntricos) es razonable pensar en una clase de conjugación de subgrupos que cubran o eviten los factores principales de un grupo G atendiendo a si son suplementados o de Frattini. De nuevo, es W. Gaschütz el que aparece como creador de esta nueva teoría. En 1962, [49], publica el descubrimiento, en cada grupo resoluble G, de una clase de conjugación de subgrupos, llamados de prefrattini, que cubren los factores principales de Frattini y evitan los complementados. Su intersección era justamente el subgrupo de Frattini de G, $\Phi(G)$.

Al igual que en el caso de los normalizadores de sistemas, los subgrupos de prefrattini han sido sucesivamente generalizados, siempre en el universo resoluble. En la Conferencia de Teoría de Grupos de Canberra de 1965, T. O. Hawkes, [50], presenta sus subgrupos de $\mathfrak{F}$-prefrattini, con $\mathfrak{F}$ una formación saturada. La generalización a clases de Schunck fue realizada por P. Förster y publicada en 1983, [21]. En esta ocasión, la generalización fue totalmente satisfactoria.

A la vista de las tres clases de conjugación que aparecen en cada grupo resoluble G asociadas a una formación saturada ó a una clase de Schunck con determinadas propiedades, parece natural preguntarse: ¿puede extenderse la teoría de proyectores, normalizadores y subgrupos de prefrattini a universos de grupos finitos no necesariamente resolubles?.

R. Erickson en [17] y P. Förster en [20], estudian las clases proyectivas en universos de grupos finitos con ciertas propiedades de clausura. En este contexto más general, las clases proyectivas son de nuevo las clases de Schunck. Sin embargo, los proyectores pierden alguna de sus clásicas propiedades como la conjugación y la persistencia en subgrupos intermedios.

Es de resaltar en el estudio de la Teoría de Proyectores en grupos finitos un hecho importante: P. Schmid en [42], demuestra que si $\mathfrak{F}$ es una formación saturada y G un grupo con $\mathfrak{F}$-residual resoluble, los $\mathfrak{F}$-proyectores de G son una clase de conjugación de subgrupos de G. Más tarde, Erickson, [17] , demuestra que si $\mathfrak{H}$ es una clase de Schunck y G es un grupo en $\mathfrak{S}\mathfrak{H}$, los $\mathfrak{H}$-proyectores de G coinciden con las $\mathfrak{H}$-envolturas de G.

Inspirados por la Teoría de Proyectores desarrollada por Erickson y Förster, nos planteamos la posibilidad de definir $\mathfrak{H}$-normalizadores y $\mathfrak{H}$-prefrattinis en universos de grupos finitos.

El principal obstáculo tanto para la definición de $\mathfrak{H}$-normalizador como para la de subgrupo de $\mathfrak{H}$-prefrattini lo constituía la inexistencia de propiedades de tipo aritmético, recogidas en los sistemas de Hall. Este obstáculo no existía en el caso de los proyectores y envolturas cuya definición no dependía de tales propiedades aritméticas.

En el caso de los $\mathfrak{H}$-normalizadores hubo, pues, que recurrir a una definición vía su caracterización mediante cadenas de subgrupos $\mathfrak{H}$-críticos. Esto conllevaba nuevas dificultades:

a) Los subgrupos maximales $\mathfrak{H}$-críticos en el caso resoluble se definían como aquellos maximales $\mathfrak{H}$-abnormales que suplementan al subgrupo de Fitting. En general, la utilización del subgrupo de Fitting e incluso del radical cuasinilpotente planteaba problemas debido a la existencia de grupos G tales que $F(G) = F^*(G) = \Phi(G)$; estas igualdades jamás se verifican en el caso resoluble.

Para dar una definición de subgrupo $\mathfrak{H}$-crítico en el caso general, era preciso observar qué propiedades de F(G) en el caso resoluble intervenían de una forma decisiva en el comportamiento de estos subgrupos. De los diversos subgrupos definidos como generalizaciones del subgrupo de Fitting, se escogió $F'(G) = \mathrm{Soc}(G \text{ mód } \Phi(G))$ aún a costa de la pérdida de propiedades de tipo radical que aparecen en F(G).

Como primera prueba de la bondad de esta definición, se afrontan algunas cuestiones conocidas de formaciones saturadas y clases de Schunck mediante la utilización de estos nuevos subgrupos $\mathfrak{H}$-críticos.

b) La caracterización de aquellas clases de Schunck para las cuales todo grupo que no está en la clase posee al menos un subgrupo $\mathfrak{H}$-crítico. En definitiva, aquellas clases de Schunck $\mathfrak{H}$ tales que todo grupo finito G posee $\mathfrak{H}$-normalizadores.

Basándonos en la caracterización hecha por Förster en el caso resoluble, observamos que con nuestra definición de subgrupo crítico dicho teorema sigue siendo válido en el caso general.

Salvados estos problemas, se definen ya los $\mathfrak{H}$-normalizadores y se trata de obtener el mayor número posible de propiedades, teniendo siempre como referencia fundamental el comportamiento de éstos en el caso resoluble.

La principal conclusión, ya apuntada por Erickson y Schmid en el caso de los proyectores, es que, en el caso de formaciones saturadas $\mathfrak{F}$, la hipótesis de resolubilidad del grupo puede rebajarse a la resolubilidad del $\mathfrak{F}$-residual sin mengua de propiedades: los $\mathfrak{F}$-normalizadores de grupos G con $\mathfrak{F}$-residual resoluble son una clase de conjugación de subgrupos cubre-evita de G.

Una vez definidos estos normalizadores, abordamos problemas ya clásicos dentro del universo resoluble: teoremas de complementación del $\mathfrak{F}$-residual y definición local maximal de una formación saturada.

Por otra parte, estos normalizadores se manifiestan como herramienta útil para el estudio de la influencia en la estructura del grupo tanto de sus subgrupos simples como de sus subgrupos maximales. Recordemos a este respecto, la importancia, manifestada por Aschbacher en Proceedings of the Rutgers Group Theory Year (1983-84), del estudio de los subgrupos maximales para reducir cuestiones de representaciones por permutaciones transitivas a cuestiones de representaciones por permutaciones primitivas.

Las dificultades para la introducción de los subgrupos de $\mathfrak{H}$-prefrattini eran mucho mayores, dado que en el caso resoluble dichos subgrupos aparecían como intersecciones de subgrupos maximales en los que un sistema de Hall reducía. Cada sistema de Hall de un grupo resoluble distingue un único subgrupo maximal de su clase de conjugación: aquél en el que dicho sistema reduce. La importancia de los sistemas de Hall en los subgrupos de prefrattini era pues la de "distinguir" maximales.

En el caso general, este proceso de "distinción" de maximales se afronta en esta Memoria con la introducción de los llamados sistemas maximales, que en el caso resoluble están en correspondencia biunívoca con los sistemas de Hall.

Sin embargo el éxito es sólo parcial: no conocemos la existencia de sistemas maximales en todo grupo finito, si bien no hemos podido encontrar ejemplos de grupos que no los posean. No obstante, en grupos con sistemas maximales es posible definir subgrupos de prefrattini de forma paralela al caso resoluble. Además, en todo grupo finito aperecen ciertos subgrupos de tipo prefrattini a través de los cuales se puede obtener información sobre la estructura normal no abeliana del grupo. Dichos subgrupos proporcionan una medida de la resolubilidad del $\mathfrak{F}$-residual en el caso de formaciones saturadas $\mathfrak{F}$.

Los resultados obtenidos se presentan en cinco capítulos:

En el Capítulo I se estudian los subgrupos $\mathfrak{H}$-críticos y se caracterizan las clases de Schunck de la forma $E_{\Phi}\mathfrak{F}$, con $\mathfrak{F}$ formación. Estas técnicas se aplican a un análisis de la relación entre clases de Schunck y formaciones.

Es en el Capítulo II donde se introduce el concepto de normalizador de un grupo finito asociado a una clase de Schunck $\mathfrak{H}$ de la forma $E_{\Phi}\mathfrak{F}$, con $\mathfrak{F}$ formación. En este Capítulo se estudian las primeras propiedades de estos subgrupos: permanencia por epimorfismos, propiedades de tipo "cubre-evita" y relación con los maximales monolíticos . Siguiendo el caso resoluble, analizamos la relación de los $\mathfrak{F}$-normalizadores con los $\mathfrak{F}$-proyectores y con el $\mathfrak{F}$-hipercentro en el caso de formaciones saturadas $\mathfrak{F}$. Observamos, además, que en grupos G con el $\mathfrak{F}$-residual resoluble se mantienen las propiedades clásicas de los normalizadores: son una clase de conjugación de subgrupos "cubre-evita" de G y los $\mathfrak{F}$-proyectores de $N_G(\Sigma)$, siendo Σ un sistema de Hall del $\mathfrak{F}$-residual, son exactamente los $\mathfrak{F}$-normalizadores de G.

En el Capítulo III, utilizamos los normalizadores para obtener teoremas de complementación de subgrupos normales de grupos finitos, en la línea marcada por Higman, Carter y Hawkes, Semetkov y Schmid. Además, estudiamos el problema de la existencia de una definición local maximal de una formación saturada $\mathfrak{F}$, aportando condiciones suficientes que permiten caracterizar dicha existencia. Finalmente, en este capítulo, analizamos la infuencia de los subgrupos minimales y los subgrupos simples en la estructura de un grupo finito.

En el Capítulo IV, definimos en cada grupo finito familias de subgrupos maximales relacionados con una formación saturada, un conjunto de primos y con el llamado índice normal. La intersección de estas familias de subgrupos maximales originan subgrupos característicos que contienen al subgrupo de Frattini. Como esquema central en el desarrollo de este estudio, se tiene que la intersección de los maximales que "apartan" a un grupo de tener una determinada propiedad, satisface dicha propiedad. Un teorema de

Bathia aclarará lo que pretendemos decir: se sabe que un grupo G es superresoluble sí y sólo sí todos sus maximales son de índice primo: pues bien, la intersección de los subgrupos maximales de índice compuesto es superresoluble , ver [7].

En el Capítulo V, afrontamos el estudio del segundo tipo de subgrupos mencionados más arriba: los subgrupos de prefrattini. Consta de dos párrafos; en el primero se introducen los sistemas maximales como medio para "distinguir" un maximal de cada clase de conjugación; es, por consiguiente, una extensión del concepto de sistema de Hall en el universo resoluble. Con esta herramienta, se construyen los subgrupos de prefrattini en el segundo párrafo.

Hemos creído conveniente introducir un Capítulo 0 donde se recogen resultados conocidos sobre factores principales, operadores clausura, Clases de Schunck y Formaciones, grupos primitivos...,etc.

Las definiciones y resultados se numeran dentro de cada Capítulo, de la forma (A . B), donde A corresponde a la numeración del párrafo y B a la colocación dentro del mismo. Cuando nos refiramos a una numeración de un Capítulo anterior emplearemos notación del tipo (A . B) Cap. C, donde C es la numeración romana del Capítulo en cuestión y A y B como antes. Las referencias bibliográficas se indican entre corchetes con un número que corresponde a la bibliografía insertada al final de la Memoria.

CAPITULO 0

Todos los grupos considerados en esta Memoria se suponen finitos.

En cualquier clase de grupos que se considere, supondremos que si un grupo G pertenece a la clase también pertenecen todos los isomorfos a G.

Un operador clausura es una aplicación c de las clases de grupos a las clases de grupos que verifica:

i) Para cada clase $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X} \subset c\mathfrak{X}$, y $c\mathfrak{X} = c^2\mathfrak{X}$.

ii) Si $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{Y}$ son dos clases de grupos tal que $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}$, entonces $c\mathfrak{X} \subset c\mathfrak{Y}$.

Una clase de grupos $\mathfrak{X}$ se dice c-cerrada, si $\mathfrak{X} = c\mathfrak{X}$.

Si a y b son dos operadores clausura, $<a,b>\mathfrak{X}$ denota la menor clase a-cerrada y b-cerrada conteniendo a $\mathfrak{X}$. Se tiene, evidentemente, que $<a,b>$ es también un operador clausura.

Seguidamente, definimos los operadores clausura especialmente tratados y manejados en la presente Memoria.

OPERADOR Q ([10])

Si $\mathfrak{X}$ es una clase de grupos, un grupo G está en $Q\mathfrak{X}$ sí y sólo sí G es imagen homomorfa de un grupo de $\mathfrak{X}$.

A una clase de grupos Q-cerrada se le llama homomorfo.

OPERADOR R_0 ([10])

Si $\mathfrak{X}$ es una clase de grupos, un grupo G está en $R_0\mathfrak{X}$ sí y sólo sí G posee subgrupos normales N_i, $(i = 1,\dots,n)$, tales que $\cap \{N_i : i = 1,\dots,n\} = 1$ y de forma que $G/N_i \in \mathfrak{X}$ para todo $i = 1,\dots,n$.

OPERADOR S

Si $\mathfrak{X}$ es un clase de grupos, un grupo G está en $S\mathfrak{X}$ sí y sólo sí G es subgrupo de algún grupo de $\mathfrak{X}$.

Frecuentemente, a las clases S-cerradas se les denomina cerradas para subgrupos.

OPERADOR E_Φ([10])

Si $\mathfrak{X}$ es una clase de grupos, un grupo G está en $E_\Phi\mathfrak{X}$ sí y sólo sí G posee un subgrupo normal $N \leq \Phi(G)$, tal que G/N está en $\mathfrak{X}$.

A una clase E_Φ–cerrada, se le denomina saturada.

Dada una clase de grupos $\mathfrak{X}$, diremos que G es un $\mathfrak{X}$-grupo si G pertenece a la clase $\mathfrak{X}$. Dado un grupo G, un subgrupo H de G se dirá $\mathfrak{X}$-maximal si H es un $\mathfrak{X}$-grupo y ningún subgrupo de G que contenga estrictamente a H es un $\mathfrak{X}$-grupo.

Una clase $\mathfrak{X}$ es R_0-cerrada sí y sólo sí cada grupo G tiene un subgrupo normal K, verificando la siguiente propiedad: si N es un subgrupo normal de un grupo G tal que G/N es un $\mathfrak{X}$-grupo, entonces $K \leq N$. A dicho subgrupo K se le llama $\mathfrak{X}$-residual de G y se denota por $G^{\mathfrak{X}}$.

Una formación $\mathfrak{F}$ es una clase de grupos $< Q, R_0 >$-cerrada. A las formaciones E_{Φ}–cerradas se les denomina formaciones saturadas.

Un grupo G se dice primitivo, si G posee un subgrupo maximal U tal que $U_G = 1$.

(0.1) **Teorema:** ([1]) Un grupo primitivo G es uno de los tres tipos siguientes:

(1) Soc(G) es un normal minimal abeliano de G complementado por U.

(2) Soc(G) es un normal minimal no abeliano de G.

(3) Soc(G) es producto directo de dos normales minimales de G, ambos no abelianos y complementados por U.

Denotamos por $\mathfrak{P}$ la clase de todos los grupos primitivos y por $\mathfrak{P}_i$, $i \in \{1,2,3\}$, la clase de todos los grupos primitivos de tipo i.

Un homomorfo $\mathfrak{H}$ es una clase de Schunck si verifica la siguiente propiedad: si un grupo G tiene todos sus cocientes primitivos en $\mathfrak{H}$, entonces G es un $\mathfrak{H}$-grupo.

El concepto de frontera, introducido por Doerk, se manifiesta muy útil en el estudio de las clases de Schunck. Si $\mathfrak{X}$ es una clase de grupos, la frontera de $\mathfrak{X}$, denotada por $b(\mathfrak{X})$, consiste de aquellos grupos G que satisfacen:

(1) G no es un $\mathfrak{X}$-grupo, y

(2) G/N es un $\mathfrak{X}$-grupo para todo $1 \neq N \trianglelefteq G$.

(0.2) **Teorema:** ([20]) Un homomorfo $\mathfrak{H}$ es una clase de Schunck sí y sólo sí $b(\mathfrak{H})$ consiste de grupos primitivos.

(0.3) **Definición:** ([17, 20, 26]) Consideremos una clase de grupos $\mathfrak{X}$.

a) Un $\mathfrak{X}$-proyector de un grupo G, es un subgrupo H de G tal que HN/N es $\mathfrak{X}$-maximal en G/N para todo subgrupo normal N de G.

b) Una $\mathfrak{X}$-envoltura de un grupo G, es un subgrupo H de G verificando la siguiente propiedad: si $H \leq X \leq G$, $Y \trianglelefteq X$ y $X/Y \in \mathfrak{X}$ entonces $X = HY$. Es decir, H es un $\mathfrak{X}$-proyector de K para todo subgrupo K de G tal que $H \leq K$.

Denotamos por $\mathrm{Proy}_{\mathfrak{H}}(G)$ (resp. $\mathrm{Cov}_{\mathfrak{H}}(G)$) al conjunto, posiblemente vacío, de $\mathfrak{H}$-proyectores (resp. $\mathfrak{H}$-envolturas) de G.

(0.4) **Teorema:** ([20]) Para una clase de grupos $\mathfrak{H}$ son equivalentes:

(i) $Proy_{\mathfrak{H}}(G)$ es no vacío para cada grupo G.

(ii) $\mathfrak{H}$ es una clase de Schunck.

(0.5) **Teorema:** ([20]) Consideremos un homomorfo $\mathfrak{H}$. Denotamos por e un funtor que asigna a cada grupo G un conjunto posiblemente vacío de subgrupos de G. Si e es $Proy_{\mathfrak{H}}(\ )$ ó $Cov_{\mathfrak{H}}(\ )$, entonces se satisfacen:

(i) $G \in e(G)$ sí y sólo sí G es un $\mathfrak{H}$-grupo.

(ii) Si $N \trianglelefteq G$, $N \leq V \leq G$, $U \in e(V)$ y $V/N \in e(G/N)$ entonces $U \in e(G)$.

Un funtor e que satisface (ii) se le llama $\mathfrak{H}$-inductivo.

(0.6) **Teorema:** ([28]) Consideremos un grupo resoluble H y K un subgrupo normal de H. Sea Σ^* un sistema de Hall de K tal que $\Sigma^* = \Sigma \cap K$ para algún sistema de Hall Σ de H. Si denotamos por $M = N_H(\Sigma^*)$, se tiene:

a) $N_H(\Sigma) \leq M$.

b) $\Sigma_1 = \Sigma \cap M$ es un sistema de Hall de M.

c) $N_M(\Sigma_1) = N_H(\Sigma)$.

(0.7) **Teorema:** ([16]) Consideremos un grupo G con un subgrupo normal minimal A contenido en un subgrupo normal resoluble M de G. Sea p el primo divisor del orden de A y S un p'-subgrupo de Hall de M. Si $A \cap N_G(S) \neq 1$, entonces $A \leq Z(M)$.

CAPITULO I

SUBGRUPOS $\mathfrak{H}$-CRITICOS.

En todo el capítulo, $\mathfrak{V}$ denotará un universo arbitrario pero fijo de grupos finitos, tal que $\mathfrak{V} = \{Q, S, R_0, E_\Phi\}\mathfrak{V}$. Todas las clases de grupos consideradas serán $\mathfrak{V}$- clases, es decir si $\mathfrak{X}$ es una clase de grupos, supondremos que $\mathfrak{X}$ está contenida en $\mathfrak{V}$.

1. SUBGRUPOS $\mathfrak{H}$-CRITICOS.

(1.1) **Definición**: Consideramos M un subgrupo maximal de un grupo G. Entonces el grupo $X = G/M_G$ es un grupo primitivo; decimos que M es de *tipo* i si $X \in \mathfrak{P}_i$, (i =1,2,3), y M es un *subgrupo maximal monolítico* de G si M es de tipo 1 ó de tipo 2.

(1.2) **Definiciones**:

(a)Dada una clase de Schunck $\mathfrak{H}$, un subgrupo maximal U de un grupo G se dice *$\mathfrak{H}$-normal* en G si $G/U_G \in \mathfrak{H}$ y *$\mathfrak{H}$-abnormal* en caso contrario.

(b)([20]) Consideremos H/K un factor principal de G. Denotamos:

$$[H/K]^* G = \begin{cases} [H/K](G/C_G(H/K)) & \text{si } H/K \text{ es abeliano,} \\ \\ G/C_G(H/K) & \text{si } H/K \text{ no es abeliano.} \end{cases}$$

El grupo primitivo $[H/K]^* G$ es el *grupo primitivo monolítico asociado al factor principal* H/K *de* G.

Notemos que si H/K es un factor principal suplementado de G y M es un subgrupo maximal monolítico de G suplementando H/K en G , entonces $G/M_G \cong [H/K]^* G$.

(1.3) **Definición**: Consideremos U, G y $\mathfrak{H}$ como antes. U es *$\mathfrak{H}$-crítico* en G, si U es un subgrupo maximal $\mathfrak{H}$-abnormal monolítico de G y $G = UF'(G)$ siendo $F'(G)$ el subgrupo Soc(G mód $\Phi(G)$).

(1.4) **Lema**: Si U es $\mathfrak{H}$-crítico en G y N es un subgrupo normal de G tal que $N \leq U$ entonces U/N es $\mathfrak{H}$-crítico en G/N.

Demostración: Existe un subgrupo normal T de G tal que $T/\Phi(G)$ es un subgrupo normal minimal de $G/\Phi(G)$, verificando que $G/\Phi(G)= (U/\Phi(G))(T/\Phi(G))$. Si N cubre $T/\Phi(G)$, entonces $G = U$, contradicción. De esta manera, N evita $T/\Phi(G)$ y $TN/\Phi(G)N$ es un factor principal de G, G-isomorfo a $T/\Phi(G)$. Por otra parte, si $R = \Phi(G \text{ mód } N)$, se tiene que $N\,\Phi(G) \leq R$. En consecuencia R no debe cubrir a $TN/\Phi(G)N$. Así, TR/R es un factor principal de G. Denotando por V el subgrupo normal de G cumpliendo $V/N = \mathrm{Soc}(G/N \bmod \Phi(G/N))$, tenemos que $TR \leq V$. De esta manera, $G/N = (U/N)(V/N)$ y U/N es $\mathfrak{H}$-crítico en G/N.

Pretendemos caracterizar las clases Schunck con la siguiente propiedad:

(C) Si $G \notin \mathfrak{H}$, entonces G posee un subgrupo $\mathfrak{H}$-crítico.

No todas las clases de Schunck verifican la propiedad (C). Por ejemplo, consideramos $\mathfrak{H}$ la clase de Schunck generada por un grupo simple no abeliano S y $\mathfrak{V} = \mathfrak{E}$. Entonces $G = S \times S \in b(\mathfrak{H})$ y G no posee ningún subgrupo $\mathfrak{H}$-crítico.

El siguiente teorema caracteriza las clases de Schunck que satisfacen la propiedad (C). El teorema análogo en el universo resoluble $\mathfrak{V} = \mathfrak{S}$ fue obtenido por Förster en [19]. En nuestro caso, debemos considerar grupos primitivos no resolubles.

(1.5) **Teorema**: Para una clase de Schunck $\mathfrak{H}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\mathfrak{H}$ verifica la propiedad (C).

(ii) $\mathfrak{H} = E_\Phi Q\, R_0\, \mathrm{Pr}(\mathfrak{H})$ con $\mathrm{Pr}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{P}$.

(iii) $\mathfrak{H} = E_\Phi \mathfrak{F}$ para alguna formación $\mathfrak{F}$.

Demostración: (i) implica (ii): Es claro que si $\mathfrak{H}$ es una clase de Schunck se tiene que $\mathfrak{H} \subset E_\Phi Q\, R_0\, \mathrm{Pr}(\mathfrak{H})$. Ahora, si $G \in R_0\, \mathrm{Pr}(\mathfrak{H})$, existen $N_i \trianglelefteq G$, $i= 1,\dots,t$, verificando que la intersección $\cap \{N_i ; i=1,\dots,t\} = 1$ y $G/N_i \in \mathrm{Pr}(\mathfrak{H})$, $i= 1,\dots,t$. En consecuencia $\Phi(G)=1$. Si el grupo $G \notin \mathfrak{H}$, consideramos $U \leq G$ $\mathfrak{H}$-crítico en G. Como $\Phi(G)=1$, $F'(G) = \mathrm{Soc}(G)$ y de esta manera podemos suponer que $G = UN$ donde N es un subgrupo normal minimal de G. Por otra parte, existe un i, $1 \leq i \leq t$ tal que N no está contenido en N_i y así NN_i/N_i es un factor principal de G, G-isomorfo a N.

Si $G/N_i \in \mathfrak{P}_1$, tenemos que $G/N_i \cong [N](G/C_G(N)) \cong G/U_G$ y entonces $G/U_G \in \mathfrak{H}$, contradicción.

Si $G/N_i \in \mathfrak{P}_2$, $N_i = C_G(NN_i/N_i) = C_G(N)$. Así $G/U_G \in \mathfrak{P}_2$, $C_G(N) = U_G$ y se verifica que $G/U_G \in \mathfrak{H}$, contradicción.

Finalmente, si $G/N_i \in \mathfrak{P}_3$ consideramos el subgrupo normal T de G, tal que $T \neq NN_i$, y T/N_i subgrupo normal minimal de G/N_i. Entonces, $T = C_G(N) = U_G$ y de esta manera obtenemos que $G/U_G \in Q([N](G/C_G(N))) = Q\ (G/N_i) \subset \mathfrak{H}$, contradicción.

En consecuencia, $G \in \mathfrak{H}$ y se obtiene la igualdad $\mathfrak{H} = E_\Phi Q\, R_0\, Pr(\mathfrak{H})$.

Para toda clase de grupos $\mathfrak{X}$, $QR_0\mathfrak{X}$ es una formación. Por consiguiente, (ii) implica (iii) es claro.

(iii) implica (i): Consideremos $G \notin \mathfrak{H}$ y suponemos primero que $\Phi(G)=1$. Si para cada subgrupo normal minimal N de G y cada subgrupo maximal monolítico U(N) de G verificando $N \nleq U(N)$, U(N) es $\mathfrak{H}$-normal en G se tiene $\cap$ { U(N) ; N subgrupo normal minimal de G } = 1. En consecuencia, $G \in R_0\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$ contradicción.

Por lo tanto, existe un subgrupo normal minimal N de G y un subgrupo maximal monolítico U(N) de G con $N \nleq U(N)$ y U(N) $\mathfrak{H}$-abnormal en G. Así, U(N) es $\mathfrak{H}$-crítico en G.

Finalmente, si $\Phi(G) \neq 1$, consideramos el grupo $G^* = G/\Phi(G)$ y denotamos con estrellas las imágenes en G^*. Como $\Phi(G^*) = 1$ y G^* no pertenece a $\mathfrak{H}$, aplicando el caso anterior determinamos un subgrupo $\mathfrak{H}$-crítico U^* de G^* . Pero U es entonces $\mathfrak{H}$-crítico en G. En definitiva, $\mathfrak{H}$ satisface la propiedad (C).

Denotamos por $\mathfrak{J}$ la clase de todos los grupos simples. Si H/K es un factor principal de un grupo G, H/K es producto directo de grupos simples isomorfos a un grupo simple dado J. En este caso, decimos que H/K es un J-factor principal de G y escribimos $J \in H/K$.

Consideremos una clase de Schunck $\mathfrak{H}$. Para cada $J \in \mathfrak{J}$, defimimos: h(J) = (G / Todo J-factor principal suplementado de G es $\mathfrak{H}$-central).

(1.6) <u>**Proposición:**</u> Dada una clase de Schunck $\mathfrak{H}$, $b(\mathfrak{H})$ consta de grupos primitivos monolíticos sí y sólo sí $\mathfrak{H} = \cap\ \{h(J)\ ;\ J \in \mathfrak{J}\}$.

<u>Demostración:</u> En general, se tiene la inclusión $\mathfrak{H} \subset \cap\ \{h(J); J \in \mathfrak{J}\}$. Supongamos ahora que $b(\mathfrak{H})$ consta de grupos primitivos monolíticos. Si $\mathfrak{H} \neq \cap\ \{h(J); J \in \mathfrak{J}\}$, consideremos un grupo G de orden minimal tal que $G \in \cap\ \{h(J)\ ;\ J \in \mathfrak{J}\} - \mathfrak{H}$. Entonces $G \in b(\mathfrak{H})$. Si Soc(G) es un J-factor principal de G, como G está en h(J), se tiene que $[Soc(G)]^*\ G \in \mathfrak{H}$. Ahora bien, $G \cong [Soc(G)]^*\ G \in \mathfrak{H}$, contradicción.

Recíprocamente, supongamos que existe un grupo G en $b(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{P}_3$. Existen A y B, subgrupos normales minimales de G, tal que $Soc(G) = A \times B$. Además, G/A es isomorfo a

G/B. Como $G \notin \mathfrak{H}$, existe un grupo simple J tal que $G \notin h(J)$. Ahora bien, como $G/A \in \mathfrak{H}$, J debe ser factor de composición de A y B. En consecuencia, $G/B \cong [A]^* G \in h(J)$. Pero esto implica que A y B son factores principales $\mathfrak{H}$-centrales de G, contradicción.

(1.7) __Proposición:__ Consideramos $\mathfrak{H}$ una clase de Schunck de frontera monolítica. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $G \in \mathfrak{H}$.

ii) Todo factor principal suplementado de G es $\mathfrak{H}$-central.

__Demostración:__ Si H/K es un factor principal suplementado de G, $[H/K]^*G$ es isomorfo a un cociente de G. En consecuencia, si $G \in \mathfrak{H}$ todo factor principal suplementado de G es $\mathfrak{H}$-central.

Recíprocamente, si $\mathfrak{J}_0 = (J \in \mathfrak{J}$ / J es factor de composición de algún factor principal suplementado de G), tenemos que $G \in \cap \{h(J) ; J \in \mathfrak{J}_0\}$. Ahora bien, si J es un grupo simple tal que $J \notin \mathfrak{J}_0$ se tiene que $G \in h(J)$. En consecuencia, $G \in \cap \{h(J) ; J \in \mathfrak{J}\} = \mathfrak{H}$.

(1.8) __Proposición__: Consideramos $\mathfrak{H}$ una clase de Schunck. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $\mathfrak{H} = E_\Phi \mathfrak{F}$ para alguna formación $\mathfrak{F}$.

ii) $G \in \mathfrak{H}$ sí y sólo sí todo normal minimal de $G/\Phi(G)$ es $\mathfrak{H}$-central.

__Demostración:__ i) implica ii). Si $G \in \mathfrak{H}$ y $N/\Phi(G)$ es un normal minimal de $G/\Phi(G)$, entonces $N/\Phi(G)$ es un factor principal de G suplementado. Por (1.7), $N/\Phi(G)$ es $\mathfrak{H}$-central. Recíprocamente, supongamos que todo normal minimal de $G/\Phi(G)$ es $\mathfrak{H}$.-central y $G \notin \mathfrak{H}$. En virtud de (1.5), G posee un subgrupo $\mathfrak{H}$-crítico M. Como M suplementa a F'(G), existe un subgrupo normal minimal $N/\Phi(G)$ de $G/\Phi(G)$ tal que $G/\Phi(G) = (M/\Phi(G))(N/\Phi(G))$. Como M es $\mathfrak{H}$-abnormal en G, se tiene que $N/\Phi(G)$ es un factor principal de G $\mathfrak{H}$-excéntrico, contradicción.

ii) implica i). Consideremos $G \notin \mathfrak{H}$. Por ii), existe un normal minimal $\mathfrak{H}$-excéntrico $N/\Phi(G)$ de $G/\Phi(G)$. Sea M un subgrupo maximal de G, tal que $G = MN$ y $G/M_G \cong [N/\Phi(G)]^*G$. Así, M es $\mathfrak{H}$-crítico en G. Aplicando (1.5), $\mathfrak{H} = E_\Phi \mathfrak{F}$ para alguna formación $\mathfrak{F}$.

2. CLASES DE SCHUNCK Y FORMACIONES.

Nuestro objetivo en este párrafo es caracterizar las clases de Schunck que son formaciones saturadas utilizando los resultados de la sección anterior. Como corolario, obtenemos un conocido resultado de J. Lafuente que caracteriza las clases de Schunck que son formaciones saturadas mediante el operador clausura E (ver [33]).

(2.1) **Definición**: Dada una clase de Schunck $\mathfrak{H}$, un factor principal H/K de un grupo G se dice *$\mathfrak{H}$-central* en G si verifica $[H/K]^{*}G \in \mathfrak{H}$ y se dice *$\mathfrak{H}$-excéntrico* en caso contrario.

Un factor principal H/K de un grupo G se dice *$\mathfrak{H}$-crítico* en G si H/K es un factor principal suplementado en G, $\mathfrak{H}$-excéntrico, tal que cada factor principal de G por debajo de K es ó $\mathfrak{H}$-central ó un factor principal de Frattini.

Dada una clase de Schunck $\mathfrak{H}$, denotamos:

$g(\mathfrak{H}) = \{G$ / Cada factor principal de Frattini de G es $\mathfrak{H}$-central$\}$.

Si $\mathfrak{H}$ es una formación saturada, por [9] lemma 1.8, tenemos que $\mathfrak{H} \subset g(\mathfrak{H})$. Sin embargo, esta propiedad no es cierta para clases de Schunck en general:

EJEMPLO 1: Consideremos E la extensión de Frattini de G = Alt(5) correspondiente al primo p = 3, i.e.

(i) $0 \to M \to E \to G \to 0$

(ii) $M \leq \Phi(E)$.

(Cf. Gaschütz [25] y Griess-Schmid [27]).

Tomando $\mathfrak{V} = \mathfrak{E}$ y $\mathfrak{H}$ la clase de Schunck generada por E , tenemos que $E \notin g(\mathfrak{H})$. En consecuencia, $\mathfrak{H}$ no está contenida en $g(\mathfrak{H})$.

(2.2) **Teorema:** Consideremos $\mathfrak{H}$ una clase de Schunck, tal que $\mathfrak{H} \subset g(\mathfrak{H})$. Entonces: $b(\mathfrak{H})$ consiste de grupos primitivos monolíticos sí y sólo sí $\mathfrak{H} = E_{\Phi}\mathfrak{F}$ para alguna formación $\mathfrak{F}$.

Demostración: Es claro que si $\mathfrak{H} = E_{\Phi}\mathfrak{F}$ para alguna formación $\mathfrak{F}$, $b(\mathfrak{H})$ consiste de grupos primitivos monolíticos.

Recíprocamente, supongamos que $b(\mathfrak{H})$ consiste de grupos primitivos monolíticos. Afirmamos que si $G \notin \mathfrak{H}$, entonces G posee subgrupos $\mathfrak{H}$-críticos. En otro caso, tomamos G contraejemplo minimal a la afirmación. Se tiene entonces que $\Phi(G)=1$. Si $G \in b(\mathfrak{H})$, tomamos un subgrupo maximal M de G tal que $G = M\, Soc(G) = MF'(G)$, pero entonces M es $\mathfrak{H}$-crítico en G, contradicción. En consecuencia, $G \notin b(\mathfrak{H})$ y así existe un subgrupo normal minimal N de G tal que $G/N \notin \mathfrak{H}$. Por minimalidad de G, G/N tiene subgrupos $\mathfrak{H}$-críticos, es decir, existe un subgrupo maximal monolítico M/N de G/N tal que $G/N = (M/N)F'(G/N)$ y $G/M_G \notin \mathfrak{H}$. Por otra parte, N es $\mathfrak{H}$-central en G. Sea $F^*/N = F'(G/N)$. Entonces, $F'(G) = F^* \cap C^*$, siendo C^* el subgrupo $N\, C_G(N)$. Como N es $\mathfrak{H}$-central, $G/C^* \in \mathfrak{H}$. Además, podemos suponer que $F'(G)$ está contenido estrictamente en F^*. Si $F'(G) \leq M$, determinamos un factor principal H/K de G tal que $K \leq M$, M no cubre H/K y $F'(G) \leq K \leq H \leq F^*$. Entonces, M suplementa H/K y se verifica que $G/M_G \cong [H/K]^*\, G$. Además, HC^*/KC^* es un factor principal de G, G-isomorfo a H/K. Como $G/C^* \in \mathfrak{H}$, HC^*/KC^* es un factor principal de G $\mathfrak{H}$-central. Esto implica que $G/M_G \in \mathfrak{H}$, contradicción. En consecuencia $F'(G)$ no está contenido en M y M es $\mathfrak{H}$-crítico en G, contradicción final.

(2.3) **<u>Definición:</u>** ([33]) Consideremos G un grupo y $\mathfrak{X}$ una clase de grupos. Denotamos:

$e(G) = \{\ [F](Aut_G F)\ /\ F$ es un factor principal de G $\}$.

$e(\mathfrak{X}) = \cup\ \{\ e(G)\ /\ G \in \mathfrak{X}\ \}$.

$E(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X} \cup e(\mathfrak{X})$.

$f(\mathfrak{X}) = \{\ G\ /\ e(G) \subseteq \mathfrak{X}\ \}$.

E es un operador clausura y si $\mathfrak{X}$ es una clase de Schunck, entonces $f(\mathfrak{X})$ es la mayor formación contenida en $\mathfrak{X}$.

(2.4) **<u>Corolario:</u>** Consideremos $\mathfrak{H}$ una clase de Schunck. $\mathfrak{H}$ es una formación saturada sí y sólo sí $\mathfrak{H} \subset g(\mathfrak{H})$ y $b(\mathfrak{H})$ consiste de grupos primitivos monolíticos.

<u>Demostración:</u> Si $\mathfrak{H}$ es una formación saturada, claramente $b(\mathfrak{H})$ consiste de grupos primitivos monolíticos. Por lemma 1.8 de [9], se tiene también que $\mathfrak{H} \subset g(\mathfrak{H})$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathfrak{H} \subset g(\mathfrak{H})$ y $b(\mathfrak{H})$ es monolítica. Por (2.2) $\mathfrak{H}$ es de la forma $\mathfrak{H} = E_\Phi \mathfrak{F}$ para alguna formación $\mathfrak{F}$ y por lo tanto, $\mathfrak{H} = E_\Phi f(\mathfrak{H})$. En consecuencia, basta probar que $f(\mathfrak{H})$ es saturada.

Consideremos un grupo G tal que $G/\Phi(G) \in f(\mathfrak{H})$. Como $\mathfrak{H} \subset g(\mathfrak{H})$, si F es un factor principal de G por debajo de $\Phi(G)$ se tiene que $[F](Aut_G F) \in \mathfrak{H}$. En consecuencia, todos los factores principales de G son $\mathfrak{H}$ -centrales y así e(G) está contenido en $\mathfrak{H}$. Por lo tanto, G $\in$ f($\mathfrak{H}$) y f($\mathfrak{H}$) es saturada. En definitiva, $\mathfrak{H} = E_{\Phi}f(\mathfrak{H}) = f(\mathfrak{H})$.

(2.5) **Corolario:** ([33]) Una clase de Schunck $\mathfrak{H}$ es formación saturada sí y sólo sí es E-cerrada.

Demostración: Si $\mathfrak{H}$ es formación, entonces $\mathfrak{H} = g(\mathfrak{H})$ por lemma 1.8 de [9]. Recíprocamente, si $\mathfrak{H}$ es E-cerrada, se tiene que $\mathfrak{H} \subset g(\mathfrak{H})$. Por otra parte, si G $\in$ b($\mathfrak{H}$) entonces G es primitivo monolítico. En otro caso, Soc(G) = N x M, siendo M, N normales minimales de G. Como G/M es un $\mathfrak{H}$-grupo, y NM/M es un normal minimal de G/M se tiene que $[NM/M](Aut_{G/M}(NM/M))$ es un $\mathfrak{H}$-grupo. Pero G es isomorfo a $[NM/M](Aut_{G/M}(NM/M))$, contradicción.

Consideremos h una función que asocia a cada primo p, una clase de grupos h(p). Denotamos por $\mathfrak{X}$ la clase de todos los grupos G que satisfacen: para cada factor principal H/K suplementado de G y para cada primo p que divide a |H/K|, se tiene que $Aut_G(H/K) \in$ h(p).

Es bien conocido que $\mathfrak{X}$ es una clase de Schunck de frontera monolítica (ver [16]).

Utilizando los resultados anteriores, demostramos el siguiente resultado de Gaschütz (ver [16]):

(2.6) **Corolario:** Si para todo primo p, h(p) es formación entonces $\mathfrak{X}$ es formación saturada.

Demostración: Aplicando (2.4), sólo resta probar que $\mathfrak{X} \subset g(\mathfrak{X})$. Supongamos que G es un $\mathfrak{X}$ -grupo, H/K un factor principal de Frattini de G y p un primo divisor del orden de H/K. $O_{p'p}(G)$ es la intersección de los centralizadores de los factores principales de G cuyo orden es divisible por p. Esta intersección coincide también con la intersección de los centralizadores de los factores principales de G suplementados cuyo orden es divisible por p. Como h(p) es formación, $G/O_{p'p}(G) \in h(p)$. En particular, $G/C_G(H/K) \in h(p)$. Si consideramos $T = [H/K](G/C_G(H/K))$, se tiene que $T/C_T(H/K) \in h(p)$. Como $G/C_G(H/K) \in h(p)$, de la definición de $\mathfrak{X}$ obtenemos que $T \in \mathfrak{X}$. Así, $\mathfrak{X} \subset g(\mathfrak{X})$.

(2.8) **Nota:** Existen clases de Schunck tal que $\mathfrak{H} \subset g(\mathfrak{H})$ que no son formaciones saturadas: consideremos $\mathfrak{V} = \mathfrak{E}$, un grupo simple no abeliano S, y $\mathfrak{H}$ la clase de Schunck tal que b($\mathfrak{H}$) = (S x S). Entonces, $\mathfrak{H} \subset g(\mathfrak{H})$, pero $\mathfrak{H}$ no es una formación.

El siguiente teorema analiza la relación existente entre subgrupos $\mathfrak{H}$-críticos y factores principales $\mathfrak{H}$-críticos de un grupo G.

(2.9) **Teorema:** Consideremos $\mathfrak{H}$ una clase de Schunck tal que $\mathfrak{H} \subset g(\mathfrak{H})$ y G un grupo con un subgrupo maximal monolítico M. Entonces: M es $\mathfrak{H}$-crítico en G sí y sólo sí M suplementa un factor principal $\mathfrak{H}$-crítico de un grupo G.

Demostración: Si M es $\mathfrak{H}$-crítico en G, existe un subgrupo normal N de G tal que $N/\Phi(G)$ es un factor principal de G y se tiene que $G = MN$. En consecuencia, M suplementa $N/\Phi(G)$ y $N/\Phi(G)$ es un factor principal $\mathfrak{H}$-crítico de G.

Recíprocamente, supongamos que M suplementa H/K, factor principal $\mathfrak{H}$-crítico de G. Es claro que podemos suponer $\Phi(G) = 1$. Si $K = 1$, entonces H está contenido en F'(G) y entonces M es $\mathfrak{H}$-crítico en G. Si $K \neq 1$, tomamos un subgrupo normal minimal N de G con $N \leq K$. Entonces, N es $\mathfrak{H}$-central. Razonando como en (2.2), obtenemos que M es $\mathfrak{H}$-crítico en G.

CAPITULO II

$\mathfrak{H}$-NORMALIZADORES.

En este capítulo, al igual que el anterior, $\mathfrak{V}$ denotará un universo arbitrario pero fijo de grupos finitos, tal que $\mathfrak{V} = \{Q, D, R_0, E_\Phi\}\,\mathfrak{V}$. Todas las clases de grupos consideradas serán $\mathfrak{V}$-clases.

1. PRIMERAS PROPIEDADES.

En lo que sigue, salvo mención en contra, supondremos que $\mathfrak{H}$ es una $\mathfrak{V}$-clase de Schunck de la forma $\mathfrak{H} = E_\Phi\mathfrak{F}$ para alguna formación $\mathfrak{F}$. De esta manera, está asegurada la existencia de subgrupos $\mathfrak{H}$-críticos en todo grupo $G \in \mathfrak{V}-\mathfrak{H}$.

Esto nos permite definir $\mathfrak{H}$-normalizadores en todo grupo G del universo $\mathfrak{V}$ de una forma abstracta.

(1.1) **<u>Definición:</u>** Consideramos un grupo G. Decimos que un subgrupo D de G es un $\mathfrak{H}$-normalizador de G, si existe una cadena de subgrupos:

$$D = H_n \leq H_{n-1} \leq .....\leq H_1 \leq H_0 = G \quad (1)$$

tal que H_i es un subgrupo $\mathfrak{H}$-crítico de H_{i-1}(i= 1,...... ,n) y H_n no contiene ningún subgrupo $\mathfrak{H}$-crítico.

Si $G \in \mathfrak{H}$, entonces G es el único $\mathfrak{H}$-normalizador de G. La condición sobre H_n es equivalente a $D \in \mathfrak{H}$.

Si $G \in \mathfrak{V}$, denotamos por $\mathrm{Nor}_{\mathfrak{H}}(G)$ al conjunto de todos los $\mathfrak{H}$-normalizadores de G.

La siguiente proposición demuestra que los $\mathfrak{H}$-normalizadores son invariantes bajo epimorfismos.

(1.2) **<u>Proposición:</u>** Consideremos D un $\mathfrak{H}$-normalizador de un grupo G y N un subgrupo normal de G, entonces DN/N es un $\mathfrak{H}$-normalizador de G/N.

<u>Demostración:</u> Si $G \in \mathfrak{H}$, entonces D= G y no hay nada que probar. En otro caso consideremos la cadena:

$$D = H_n \leq H_{n-1} \leq ...... \leq H_1 \leq H_0 = G$$

tal que H_i es un subgrupo $\mathfrak{H}$-crítico de H_{i-1}(i= 1,...,n).

Es claro que $D \in \mathrm{Nor}_{\mathfrak{H}}(H_1)$. Por inducción, DN/N es un $\mathfrak{H}$-normalizador de H_1N/N.

Si G coincide con H_1N, no hay nada que probar y si $N \leq H_1$, por (1.4) Cap I, H_1/N es un subgrupo $\mathfrak{H}$-crítico de G/N. De esta manera, $DN/N \in Nor_{\mathfrak{H}}(G/N)$.

No es cierto que en general $Nor_{\mathfrak{H}}(G)$ sea una clase de conjugación de subgrupos de G. Por ejemplo, tomemos $\mathfrak{V} = \mathfrak{E}$ and $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$ la clase de grupos nilpotentes, los subgrupos $\mathfrak{N}$-críticos de Alt(5) son isomorfos a Alt(4) y Dih(10). De esta manera aparecen dos clases de conjugación de $\mathfrak{N}$-normalizadores, isomorfos a C_2 y C_3 respectivamente.

Tampoco podemos hablar de la propiedad cubre-evita en general. No obstante, obtenemos ciertos resultados parciales.

(1.3) **Lema:** Consideremos un grupo G y M un subgrupo maximal de G suplementando a F'(G). Si H/K es un factor principal de G evitado por $\Phi(G)$ y cubierto por M, entonces $H \cap M/K \cap M$ es un factor principal de M verificando $Aut_G(H/K) \cong Aut_M(H \cap M/K \cap M)$.

Demostración: Notemos primero que $C_M(H/K) = C_M(H \cap M/K \cap M)$. En efecto, si $K \leq M$ entonces $H \leq M$ y la igualdad es clara. Si K no está contenido en M, G = MK. Así si $h \in H$, h= my con $m \in M \cap H$, $y \in K$. En consecuencia, si $x \in C_M(H \cap M/K \cap M)$ y $h \in H$ tenemos que: $[x,h]K = [x,my]K = (x^{-1}K)(m^{-1}xm)K = [x,m]K = K$ puesto que $[x,m] \in K \cap M$.

Distinguimos dos casos:

a) $\Phi(G)= 1$. Si K no está contenido en M, entonces G = MK y $G/K \cong M/M \cap K$. La imagen por este isomorfismo de $C_G(H/K)/K$ es $C_M(H \cap M/K \cap M)/K \cap M$. En consecuencia, $Aut_G(H/K) \cong Aut_M(H \cap M/K \cap M)$ y así $H \cap M/K \cap M$ es factor principal de M.

Si $K \leq M$, entonces $H \leq M$ pues M cubre H/K. Como M suplementa a F'(G), tenemos que G = M Soc(G). En consecuencia, G = MN para algún normal minimal N de G. Es claro que $N \cap H = 1$ y así N está contenido en $C_G(H/K)$. Por lo tanto, $G = MC_G(H/K)$ y así, $G/C_G(H/K)$ es isomorfo a $M/C_M(H/K)$. De esta manera, H/K es un factor principal de M.

b) $\Phi(G) \neq 1$. Denotamos con estrellas las imágenes en $G^* = G/\Phi(G)$. H^*/K^* es un factor principal de G^* cubierto por M^*. Por a) $H^* \cap M^*/K^* \cap M^*$ es un factor principal de M^* y $Aut_{G^*}(H^*/K^*) \cong Aut_{M^*}(H^* \cap M^*/K^* \cap M^*)$.Ahora, $H^* \cap M^*/K^* \cap M^*$ es M-isomorfo a la sección de M, $H \cap M/K \cap M$. Por lo tanto, $H \cap M/K \cap M$ es un factor principal de M y se tiene que $Aut_G(H/K) \cong Aut_M(H \cap M/K \cap M)$.

(1.4) **Lema:** Consideramos un grupo G y M un subgrupo $\mathfrak{F}$-crítico de G. Si H/K es un factor principal $\mathfrak{F}$-central de G, entonces M cubre H/K y $[H \cap M/K \cap M] * M \cong [H/K] * G$. De esta manera, $H \cap M/K \cap M$ es un factor principal $\mathfrak{F}$-central de M.

Demostración: Supongamos que M no cubre H/K, entonces $K = H \cap M_G$ y H/K es un factor principal suplementado de G. Además, HM_G/M_G es el único normal minimal de G/M_G y $HM_G/M_G \cong_G H/K$. En consecuencia, G/M_G es isomorfo a $[H/K] * G$, contradicción. Así, M cubre H/K y $C_G(H/K)$ no está contenido en M_G puesto que H/K es $\mathfrak{F}$-central. Por consiguiente, $G = MC_G(H/K)$ y $H \cap M/K \cap M$ es un factor principal de M.

Si H/K no es abeliano, claramente se tiene que $[H \cap M/K \cap M]^* M \cong [H/K]^* G$. Supongamos ahora que H/K es un factor principal abeliano de G. Distinguimos 2 casos:

a) $K \leq M$. Como M cubre H/K, $H \leq M$ y así H/K es un factor principal de M. Es evidente entonces que $[H \cap M/K \cap M]^* \cong [H/K]^* G$.

b) $K \not\leq M$. Se tiene que $G = MK$. Si $h \in H$, $h = mk$ con $k \in K$ y $m \in H \cap M$. Así $hK = mK$. Por otra parte, si $g \in G$, $gC_G(H/K)=mC_G(H/K)$ para algún $m \in M$. Por consiguiente, la aplicación f de $[H/K](G/C_G(H/K))$ a $[H \cap M/K \cap M]$ $(M/C_M(H \cap M/K \cap M))$ dada por $f(mK, m_1C_G(H/K)) = (m(K \cap M), m_1C_M(H \cap M/K \cap M))$ es un isomorfismo. Así tenemos que $[H \cap M/K \cap M] * M \cong [H/K] * G$. Por lo tanto, $H \cap M/K \cap M$ es un factor principal $\mathfrak{F}$-central de M.

(1.5) **Corolario:** Consideramos D un $\mathfrak{F}$-normalizador de un grupo G. Si H/K es un factor principal $\mathfrak{F}$-central de G, entonces D cubre H/K y $H \cap D/K \cap D$ es un factor principal de D. Además, $Aut_G(H/K)$ es isomorfo a $Aut_D(H \cap D/K \cap D)$.

Demostración: Podemos suponer que $G \notin \mathfrak{F}$. Como D es un $\mathfrak{F}$-normalizador de G, existe una cadena (1). Si $n=1$, la afirmación es cierta en virtud de (1.4). Supongamos que $1< n$. Se tiene que $D \in Nor_{\mathfrak{F}}(H_1)$ y $H \cap H_1/K \cap H_1$ es un factor principal $\mathfrak{F}$-central de H_1. Por inducción, D cubre $H \cap H_1/K \cap H_1$ y $H \cap D/K \cap D$ es un factor principal de D. Además tenemos que $Aut_D(H \cap D/K \cap D) \cong Aut_H(H \cap H_1/K \cap H_1)$. Es claro, entonces, que D cubre H/K y aplicando (1.4) concluimos que $Aut_D(H \cap D/K \cap D) \cong Aut_G(H/K)$.

(1.6) **Proposición:** Consideramos D un $\mathfrak{F}$-normalizador de un grupo G. Si H/K es un factor principal de G suplementado cubierto por D, entonces $[H \cap D/K \cap D] * D \cong [H/K] * G \in \mathfrak{F}$.

Demostración: Supongamos primero que D es un subgrupo $\mathfrak{H}$-crítico de G. Como H/K es un factor principal de G evitado por $\Phi(G)$ y cubierto por D, $H \cap D/K \cap D$ es un factor principal de D y $Aut_D(H \cap D/K \cap D) \cong Aut_G(H/K)$ por (1.3). Así, si H/K no es abeliano, $[H/K] * G \in Q(D) \subset \mathfrak{H}$. Si H/K es abeliano, entonces H/K es complementado por un subgrupo maximal T de G. Entonces, $T \cap D$ es un subgrupo maximal de D y se verifica $D = (H \cap D)(T \cap D)$. Así, tenemos que $H \cap D/K \cap D$ es un factor principal suplementado de D. Como $D \in \mathfrak{H}$, se tiene que $[H \cap D/K \cap D] * D \in Q(D) \subset \mathfrak{H}$. Como en (1.4), se demuestra que $[H \cap D/K \cap D] * D \cong [H/K] * G$ y así $[H/K] * G \in \mathfrak{H}$. En el caso general, consideramos la cadena (1). Si H/K es un factor principal de G suplementado y cubierto por D, H/K es cubierto por H_1 y evitado por $\Phi(G)$. Por (1.3), $H \cap H_1/K \cap H_1$ es un factor principal suplementado de H_1. Ahora bien, como $D \in Nor_{\mathfrak{H}}(H_1)$, aplicando inducción, $[H \cap D/K \cap D] * D \cong [H \cap H_1/K \cap H_1] * H_1 \in \mathfrak{H}$. Por otra parte, es claro que el grupo $[H/K] * G$ es isomorfo a $[H \cap H_1/K \cap H_1] * H_1$. Por consiguiente, se tiene que $[H \cap D/K \cap D] * D \cong [H/K] * G$ y H/K es un factor principal $\mathfrak{H}$-central de G.

Aplicando los resultados anteriores, podemos demostrar:

(1.7) **Teorema:** Consideremos un grupo G y $D \in Nor_{\mathfrak{H}}(G)$. Entre los factores principales suplementados de G, D cubre exactamente los $\mathfrak{H}$-centrales.

Un $\mathfrak{H}$-normalizador puede cubrir un factor principal no suplementado y $\mathfrak{H}$-excéntrico, como lo demuestra el ejemplo siguiente:

EJEMPLO 1: Tomamos E y M como en ejemplo 1 del capitulo I, i. e. E/M isomorfo a Alt(5) y $M \leq \Phi(E)$. Consideramos la formación saturada $\mathfrak{F} = (G \,/\, Alt(5) \notin Q(G))$. Existe un normal minimal N de E contenido en M tal que N es un factor principal $\mathfrak{F}$-excéntrico de E. Consideramos un subgrupo maximal T de E tal que T/M es isomorfo a Alt(4). Entonces, T es un $\mathfrak{F}$-normalizador de E y T cubre N.

(1.8) **Proposición:** Consideremos un grupo G y M un subgrupo maximal $\mathfrak{H}$-abnormal monolítico de G. Entonces, M contiene un $\mathfrak{H}$-normalizador de G.

Demostración: Denotamos con $R = Soc(G \bmod M_G)$. Se tiene que R/M_G es el único normal minimal de G/M_G. Si M es $\mathfrak{H}$-crítico en G, el resultado es obvio. En otro caso,

$F'(G) \leq M_G$. Sea X un subgrupo $\mathfrak{H}$-crítico de G. Es claro que M_G no está contenido en X. Entonces, $G = XM_G$ y tenemos que $R = M_G(R \cap X)$. Como $M_G \leq C_G(R/M_G)$, se tiene $G = X\, C_G(R/M_G)$. De esta manera, $R \cap X/M_G \cap X$ es un factor principal de X y el grupo de automorfismos $\mathrm{Aut}_X(R \cap X/M_G \cap X)$ es isomorfo a $\mathrm{Aut}_G(R/M_G)$. Además, tenemos que el grupo $[R \cap X/M_G \cap X]^* X$ es isomorfo a $[R/M_G] * G$. En consecuencia, $R \cap X/M_G \cap X$ es un factor principal $\mathfrak{H}$-excéntrico de X. Por otra parte, $M \cap X$ es un subgrupo maximal de X. Como, $M_G \cap X = (M \cap X)_X$ y $X = (M \cap X)(R \cap X)$ tenemos que $X/(M \cap X)_X \notin \mathfrak{H}$. En definitiva, $M \cap X$ es un subgrupo maximal $\mathfrak{H}$-abnormal monolítico de X. Por inducción, concluimos que $M \cap X$ contiene un $\mathfrak{H}$-normalizador de X. Como $\mathrm{Nor}_{\mathfrak{H}}(X)$ está contenido en $\mathrm{Nor}_{\mathfrak{H}}(G)$, M contiene un $\mathfrak{H}$-normalizador de G.

(1.9) **Lema:** Consideremos M un subgrupo maximal de un grupo G. Si M contiene un $\mathfrak{H}$-normalizador de G, entonces M es un subgrupo $\mathfrak{H}$-abnormal de G.

Demostración: Sea D un $\mathfrak{H}$-normalizador de G tal que $D \leq M$ y consideramos H/K un factor principal de G con $K = H \cap M_G$. Si H/K es $\mathfrak{H}$-central, H/K es cubierto por D y M cubre H/K, contradicción. De esta manera, H/K es un factor principal $\mathfrak{H}$-excéntrico de G y M es un subgrupo $\mathfrak{H}$-abnormal de G.

Aplicando (1.8) y (1.9), podemos demostrar:

(1.10) **Teorema:** Consideramos M un subgrupo maximal monolítico de un grupo G. Entonces: M contiene un $\mathfrak{H}$-normalizador de G si y sólo si M es $\mathfrak{H}$-abnormal de G.

2. $\mathfrak{F}$- NORMALIZADORES Y $\mathfrak{F}$- PROYECTORES.

En este párrafo y en el siguiente, $\mathfrak{F}$ denotará siempre una $\mathfrak{V}$-formación saturada y F(p) su definición p-local integrada y plena. $\mathfrak{H}$ será una $\mathfrak{V}$-clase de Schunck de la forma $\mathfrak{H} = E_{\Phi}\mathfrak{X}$ para alguna formación $\mathfrak{X}$.

Además, frecuentemente usaremos el siguiente resultado: si $\mathfrak{H}$ es una clase de Schunck y G un grupo tal que $G = EF(G)$ con $E \in \mathrm{Max}_{\mathfrak{H}}(G)$, entonces $E \in \mathrm{Proj}_{\mathfrak{H}}(G)$ (ver [20]).

El objeto de este párrafo es extender los resultados de [11], párrafo 5, del universo resoluble a un universo $\mathfrak{V}$ de grupos finitos con las propiedades de clausura mencionadas al comienzo del capítulo.

Decimos que un $\mathfrak{H}$-normalizador D de un grupo G es de *tipo* 1, si existe una cadena de subgrupos (1) tal que $H_i/(H_{i+1})_{H_i} \in \mathfrak{P}_1$ para todo i= 0,......,n-1.

Denotamos por $\mathrm{Nor}_{\mathfrak{H}}(G)_1$ el conjunto, posiblemente vacío, de $\mathfrak{H}$-normalizadores de tipo 1 de G. Si $G \in \mathfrak{H}$, $\mathrm{Nor}_{\mathfrak{H}}(G)_1 = \mathrm{Nor}_{\mathfrak{H}}(G) = \{G\}$.

(2.1) <u>Lema:</u> Si M es un subgrupo maximal $\mathfrak{F}$-abnormal de un grupo G, entonces $M^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$.

<u>Demostración:</u> Como G/M_G no es un $\mathfrak{F}$-grupo, se tiene que $G = MG^{\mathfrak{F}}$ y así, $M/M \cap G^{\mathfrak{F}}$ es isomorfo a $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. En consecuencia, $M^{\mathfrak{F}} \leq M \cap G^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$.

(2.2) <u>Teorema:</u> Consideremos un grupo G con $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{S}$, entonces:

(1) $\mathrm{Nor}_{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{Nor}_{\mathfrak{F}}(G)_1$.

(2) Si D es un $\mathfrak{F}$-normalizador de G, D es un subgrupo cubre-evita de G que cubre los factores principales $\mathfrak{F}$-centrales de G y evita los $\mathfrak{F}$-excéntricos.

<u>Demostración:</u> Podemos suponer que $G \notin \mathfrak{F}$. Si M es un subgrupo maximal $\mathfrak{F}$-abnormal de G, $G^{\mathfrak{F}}$ no está contenido en M y, en consecuencia, M es un subgrupo maximal de tipo 1 de G. Aplicando el lema anterior y un razomamiento inductivo llegamos a que $\mathrm{Nor}_{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{Nor}_{\mathfrak{F}}(G)_1$.

Para demostrar (2), utilizamos inducción sobre |G|. Consideramos D en $\mathfrak{F}$-normalizador de G y supongamos que D es un subgrupo maximal de G. Si H/K es un factor principal de G no abeliano, D cubre H/K puesto que D es de tipo 1. Si H/K es abeliano y D no cubre H/K, HD_G/D_G es el único subgrupo normal minimal de G/D_G y $D_G(H \cap D) = D_G$. Entonces, $H \cap D = K$ y D evita H/K.

Si D no es un subgrupo maximal de G, existe un subgrupo $\mathfrak{F}$-crítico M de G tal que D $\leq$ M, D $\in$ $Nor_{\mathfrak{F}}(M)$ y G = MF(G). Por inducción, D es un CE-subgrupo de M. Ahora bien, M es un CE-subgrupo de G y así D es un CE-subgrupo de G (ver [18] lemma 4.4).

Si H/K es un factor principal $\mathfrak{F}$-central de G, por (1.5), D cubre H/K. Supongamos que H/K es un factor principal $\mathfrak{F}$-excéntrico de G. Si D cubre H/K, entonces H $\cap$ D/K $\cap$ D es un factor principal de D y se tiene que $[H/K]^* G \cong [H \cap D/K \cap D]^* D$. Ahora bien, D es un $\mathfrak{F}$-grupo y por tanto todo factor principal de D es $\mathfrak{F}$-central. En consecuencia, $[H/K]^* G \in \mathfrak{F}$ contradicción. Así, H/K es evitado por D.

La afirmación (2) del teorema anterior no es cierta para clases de Schunck $\mathfrak{H}$ que no son formaciones saturadas (ver, por ejemplo, [18] ejemplo 3).

(2.3) **Definición:** a) Un subgrupo maximal M de G se dice $\mathfrak{H}$-*crucial* si M es $\mathfrak{H}$-abnormal en G y $M/M_G \in \mathfrak{H}$.

b)Si G $\notin$ $\mathfrak{H}$, un $\mathfrak{H}$-normalizador D de G se dice $\mathfrak{H}$-*crucial* en G si existe una cadena de subgrupos (1) con H_{i-1} $\mathfrak{H}$-crucial en H_i para cada i.

(2.4) **Nota:** Si D es un $\mathfrak{H}$-normalizador $\mathfrak{H}$-crucial de G, entonces D es un $\mathfrak{H}$-proyector de G.

Demostración: Supongamos primero que D es un subgrupo maximal de G. Entonces, D/D_G es un subgrupo $\mathfrak{H}$-maximal de G/D_G y $G/D_G \in b(\mathfrak{H})$. Como D/D_G es un $\mathfrak{H}$-proyector de G/D_G, obtenemos que D es un $\mathfrak{H}$-proyector de G por $\mathfrak{H}$-inductividad.

Ahora, si D no es un subgrupo maximal de G, sea M un subgrupo maximal $\mathfrak{H}$-crucial de G tal que D es un $\mathfrak{H}$-normalizador $\mathfrak{H}$-crucial de M. Por inducción, D es un $\mathfrak{H}$-proyector de M. Como cada $\mathfrak{H}$-proyector de M es un $\mathfrak{H}$-proyector de G, D es un $\mathfrak{H}$-proyector de G.

Denotamos por $\mathfrak{N}\mathfrak{H}$ = (G $\in$ $\mathfrak{E}$ / G/F(G) $\in$ $\mathfrak{H}$).

(2.5) **Lema**: Consideremos G $\in$ $\mathfrak{N}\mathfrak{H}$ y E un subgrupo $\mathfrak{H}$-maximal de G verificando que G = EF(G). Entonces, E es un $\mathfrak{H}$-normalizador de G.

Demostración: Si E = G, no hay nada que probar. Podemos suponer entonces que el grupo G $\notin$ $\mathfrak{H}$ y E < G. Sea M un subgrupo maximal de G conteniendo a E. Ahora bien, E es un $\mathfrak{H}$-proyector de G y por tanto, M es $\mathfrak{H}$-crítico en G. Por otra parte, M = EF(M) y E es un subgrupo $\mathfrak{H}$-maximal de M. En consecuencia, E es un $\mathfrak{H}$-normalizador de M, por inducción. Como M es un subgrupo $\mathfrak{H}$-crítico de G, E es un $\mathfrak{H}$-normalizador de G.

(2.6) <u>Teorema:</u> Si $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{H}$, entonces $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{H}}(G) = \mathrm{Nor}_{\mathfrak{H}}(G)$.

<u>Demostración:</u> Si $G \in \mathfrak{H}$, el resultado es trivial. Entonces, podemos suponer que el grupo $G \notin \mathfrak{H}$ y demostramos que los $\mathfrak{H}$-normalizadores de G son $\mathfrak{H}$-cruciales en G. Sea M un subgrupo $\mathfrak{H}$-crítico de G, entonces $G = MF(G)$ y $M \cap F(G) \leq M_G$. Por lo tanto, $M/M_G \in Q(M/M \cap F(G)) \subset \mathfrak{H}$. De esta manera, M es $\mathfrak{H}$-crucial. Si $D \in \mathrm{Nor}_{\mathfrak{H}}(G)$ existe M, subgrupo $\mathfrak{H}$-crítico de G, tál que $D \leq M$ y $D \in \mathrm{Nor}_{\mathfrak{H}}(M)$. Como $M \in \mathfrak{N}\mathfrak{H}$, por inducción, D es un $\mathfrak{H}$-normalizador de M $\mathfrak{H}$-crucial. Como M es $\mathfrak{H}$-crucial en G, D es $\mathfrak{H}$-crucial en G. En consecuencia, aplicando (2.4), obtenemos que cada $\mathfrak{H}$-normalizador de G es un $\mathfrak{H}$-proyector de G.

Ahora, sea E un $\mathfrak{H}$-proyector de G. Como $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{H}$, los $\mathfrak{H}$-proyectores de G suplementan a F(G). Así, $G = EF(G)$ y E es un subgrupo $\mathfrak{H}$-maximal de G. Aplicando el lema anterior, E es un $\mathfrak{H}$-normalizador de G. En consecuencia, $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{H}}(G) = \mathrm{Nor}_{\mathfrak{H}}(G)$.

Si $\mathfrak{K}$ es una $\mathfrak{V}$-formación, entonces $\mathfrak{L} = \mathfrak{N}\mathfrak{K} \cap \mathfrak{V}$ es una $\mathfrak{V}$-formación saturada conteniendo a la clase de Schunck $\mathfrak{H} = E_{\Phi}\mathfrak{K}$.

(2.7) <u>Teorema:</u> Consideramos $\mathfrak{H}$ y $\mathfrak{L}$ como antes, G un grupo $D \in \mathrm{Nor}_{\mathfrak{L}}(G)$. Entonces, los $\mathfrak{H}$-proyectores de D son $\mathfrak{H}$-normalizadores de G.

<u>Demostración:</u> Si $G \in \mathfrak{L}$, entonces $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{H}}(G) = \mathrm{Nor}_{\mathfrak{H}}(G)$ por (2.6). Podemos suponer $G \notin \mathfrak{L}$. Consideremos D un $\mathfrak{L}$-normalizador de G. Entonces, existe una cadena (1) con H_{i-1} $\mathfrak{L}$-crítico en H_i para cada i. Como $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{L}$, existe $D^* \in \mathrm{Nor}_{\mathfrak{H}}(G)$ tal que $D^* \leq D$. Como $D \in \mathfrak{L}$, por (2.6), D^* es un $\mathfrak{H}$-proyector de D. Así, cada $\mathfrak{H}$-proyector de D es un $\mathfrak{H}$-normalizador de G.

Consideremos $G \in \mathfrak{N}^r\mathfrak{F}$.

Construimos la cadena, $D_{r-1} \leq D_{r-2} \leq \ldots\ldots \leq D_1 \leq D_0$ donde D_i es un $\mathfrak{N}^{r-i}\mathfrak{F}$-$\mathrm{Proj}(D_{i-1})$, $1 \leq i \leq r-1$.

Entonces, D_{r-1} es un $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$-normalizador de G. Como $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}^{r-1}\mathfrak{F}$, aplicando la proposición (2.6), $\mathfrak{N}^{r-1}\mathfrak{F}$-$\mathrm{Proj}(G) = \mathfrak{N}^{r-1}\mathfrak{F}$-$\mathrm{Nor}(G)$. Supongamos, trabajando por inducción sobre i, que $D_{i-1} \in \mathfrak{N}^{r-(i-1)}\mathfrak{F}$-$\mathrm{Nor}(G)$. Aplicando (2.7), $\mathfrak{N}^{r-i}\mathfrak{F}$-$\mathrm{Proj}(D) \subset \mathfrak{N}^{r-i}\mathfrak{F}$-$\mathrm{Nor}(G)$. En consecuencia, $D_i \in \mathfrak{N}^{r-i}\mathfrak{F}$-$\mathrm{Nor}(G)$. De esta manera, obtenemos que D_{r-1} es un $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$-normalizador de G.

Por lo tanto, si $D_r \in \mathrm{Proj}_{\mathfrak{F}}(D_{r-1})$ se tiene que D_r es un $\mathfrak{F}$-normalizador de G.

(2.8) **Teorema:** Consideramos $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{H}$ y H un subgrupo de G que cubre los factores principales $\mathfrak{H}$-centrales de una serie principal dada de G, entonces H contiene un $\mathfrak{H}$-normalizador de G.

Demostración: Razonamos como en el Teorema 5.7 de [11]. Podemos suponer $G \notin \mathfrak{H}$ y $H < G$. Si M es un subgrupo maximal de G tal que $H \leq M$, entonces M es $\mathfrak{H}$-crítico en G y M es un CE-subgrupo de G. Además, la intersección de M con una serie principal de G es una serie principal de M y si R/K es un factor principal de G en dicha serie cubierto por M, $R \cap M / K \cap M$ es un factor principal de M y se tiene que $[R/K]^* G$ es isomorfo al grupo $[R \cap M / K \cap M]^* M$. En consecuencia, H cubre todos los factores $\mathfrak{H}$-centrales en una serie principal de M. Aplicando inducción, H contiene un $\mathfrak{H}$-normalizador de M. Pero $Nor_{\mathfrak{H}}(M) \subset Nor_{\mathfrak{H}}(G)$.

(2.9) **Corolario:** Si $\mathfrak{F}$ es una $\mathfrak{V}$-formación saturada y $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$, los $\mathfrak{F}$-normalizadores de G son los únicos subgrupos que cubren los factores principales $\mathfrak{F}$-centrales de G y evitan los $\mathfrak{F}$-excéntricos en una serie principal dada de G.

(2.10) **Proposición:** Si $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}\mathfrak{F}$, entonces cada $\mathfrak{F}$-normalizador de G está contenido en un único $\mathfrak{F}$-proyector de G.

Demostración: Claramente podemos suponer que $F = F(G) \neq 1$. Sea D un $\mathfrak{F}$-normalizador de G. Como $G/F \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$ y $DF/F \in Nor_{\mathfrak{F}}(G/F)$, entonces $DF/F \in Proj_{\mathfrak{F}}(G/F)$ aplicando (2.6). Designamos por $T = DF$ y tomamos $E \in Max_{\mathfrak{F}}(T)$ de forma que $D \leq E$. Por (2.5), $E \in Nor_{\mathfrak{F}}(T) = Proj_{\mathfrak{F}}(T)$ puesto que $T \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$. De esta manera, E es un $\mathfrak{F}$-proyector de G.

Supongamos ahora que D es un $\mathfrak{F}$-normalizador de G contenido en los $\mathfrak{F}$-proyectores A y B de G. Como, $G/F \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$ tenemos que $DF = AF = BF$. Si N es un subgrupo normal minimal de G contenido en F, $G/N \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ y entonces que $AN = BN$ aplicando inducción. Como $AN \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$ y A, B son $\mathfrak{F}$-proyectores de AN, A y B son conjugados en AN por corolario 5.3 de [42]. Entonces $A = B^n$ para algún $n \in N$. Como $N \leq Z(F)$, $A = B$.

(2.11) Nota: Consideramos G tal que $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{S}$. Si $G \notin \mathfrak{F}$, entonces G tiene un subgrupo maximal $\mathfrak{F}$-crucial.

Demostración: Como $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$, tomamos K un subgrupo normal de G tal que $G^{\mathfrak{F}}/K$ es un factor principal de G complementado. Si M es un subgrupo maximal de G tal que $G = MG^{\mathfrak{F}}$,

$K = G^{\mathfrak{F}} \cap M$ entonces M es un subgrupo maximal $\mathfrak{F}$-crucial de G.

(2.12) **Teorema:** Si $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$ y H es un subgrupo de G tal que $G = HF(G)$, cada $\mathfrak{F}$-proyector de H es de la forma $H \cap E$, donde E es un $\mathfrak{F}$-proyector de G.

Demostración: Claramente, podemos suponer que $F(G) \neq 1$, $G \neq H$ y $G \notin \mathfrak{F}$. Además razonando por inducción sobre $|G|$, podemos suponer H es un subgrupo maximal de G. Como $H/H \cap F(G) \in \mathfrak{F}$, todo $\mathfrak{F}$-normalizador A de H satisface $H = A(H \cap F(G))$. Entonces $G = AF(G)$. Si $A \leq E \in Max_{\mathfrak{F}}(G)$, entonces $E \in Proj_{\mathfrak{F}}(G)$ por (2.5). Es sencillo comprobar que A y $E \cap H$ cubren y evitan los mismos factores principales en una serie principal dada de G. En consecuencia, $A = E \cap H$.

(2.13) **Teorema:** Consideramos un grupo G tal que $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{S}$ y H un subgrupo de G verificando $G = HF(G)$. Existe $A \in Proj_{\mathfrak{F}}(H)$ y $E \in Proj_{\mathfrak{F}}(G)$ tal que $A = H \cap E$.

Demostración: Por (2.12), podemos suponer que $G \notin \mathfrak{N}\mathfrak{F}$. Entonces G tiene un subgrupo maximal $\mathfrak{F}$-crucial contendio a F(G) y tal que $G = MG^{\mathfrak{F}}$ por (2.11). Si denotamos $R = Soc(G \text{ mód } M_G)$, H cubre R/M_G y así $R \cap H/M_G \cap H$ es un factor principal $\mathfrak{F}$-excéntrico de H. También, $H = (R \cap H)(M \cap H)$ y $R \cap H/M_G \cap H$ es un factor principal abeliano de H. Por consiguiente, $M \cap H$ es un subgrupo maximal de H $\mathfrak{F}$-crucial. Por otra parte, $M = (M \cap H)F(M)$ y $M^{\mathfrak{F}}$ es resoluble. Por inducción, existe $A \in Proj_{\mathfrak{F}}(M \cap H)$ y $E \in Proj_{\mathfrak{F}}(M)$ tal que que $A = H \cap E \cap M = H \cap E$. Como, $M \cap H$ es $\mathfrak{F}$-crucial en H, tenemos que $A \in Proj_{\mathfrak{F}}(H)$. Además, M es $\mathfrak{F}$-crucial en G y así $E \in Proj_{\mathfrak{F}}(G)$.

(2.14) **Teorema:** Consideremos un grupo G con $G^{\mathfrak{F}}$ resoluble. Entonces, cada $\mathfrak{F}$-normalizador de G está contenido en un $\mathfrak{F}$-proyector de G.

Demostración: Utilizamos inducción sobre $|G|$. Podemos suponer que $G \notin \mathfrak{F}$. Sea D un $\mathfrak{F}$-normalizador de G. Existe un subgrupo $\mathfrak{F}$-crítico M de G tal que $D \leq M$ y $D \in Nor_{\mathfrak{F}}(M)$. Como $M^{\mathfrak{F}}$ es resoluble, existe $A \in Proj_{\mathfrak{F}}(M)$ tal que $D \leq A$. Ahora, $G = MF(G)$. Por (2.13), existe $B \in Proj_{\mathfrak{F}}(M)$ y $E \in Proj_{\mathfrak{F}}(G)$ tal que $B = M \cap E$. Al ser $M^{\mathfrak{F}}$ resoluble, por corolario (5.3) de [42], A y B son conjugados en M, o sea, $A = B^m$ para algún elemento $m \in M$. Así, $A = M \cap E^m$ y D está contenido en $E^m \in Proj_{\mathfrak{F}}(G)$.

Consideremos un grupo G con $G^{\mathfrak{F}}$ resoluble. Como $Proj_{\mathfrak{F}}(G)$ es una clase de conjugación de subgrupos de G, cada $\mathfrak{F}$-proyector de G contiene un $\mathfrak{F}$-normalizador de G.

Esta propiedad se verifica en general. Si tomamos $\mathfrak{V} = \mathfrak{E}$ y $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$, la clase de los grupos nilpotentes, el grupo G = Alt(5) tiene tres clases de conjugación distintas de $\mathfrak{N}$-proyectores, $Syl_p(G)$ p=2,3,5. Si $P \in Syl_5(G)$, entonces P no contiene ningún $\mathfrak{N}$-normalizador de G.

(2.15) **Teorema:** Consideremos un grupo G de p-longitud 1 cuyos $\mathfrak{F}$-normalizadores tienen índice potencia del primo p. Entonces, todo $\mathfrak{F}$-normalizador de G es un $\mathfrak{F}$-proyector de G.

Demostración: Podemos suponer que G no es un $\mathfrak{F}$-grupo. Consideremos M un subgrupo $\mathfrak{F}$-crítico de G y sea D y un $\mathfrak{F}$-normalizador de G tal que $D \leq M$. Como $|G : D|$ es potencia de p, entonces $|G :M|$ es potencia de p. Si G/M_G es de tipo 2 y T/M_G es su único normal minimal, se tiene que $M_G = C_G(T/M_G)$. Como $O_{p'p}(G)$ es la intersección de los centralizadores de todos los factores principales de G cuyo orden es divisible por p, se tiene que $O_{p'p}(G) \leq M_G$. Como G es de p-longitud 1, G/M_Gy es un p'-grupo, contradicción. Así todo maximal $\mathfrak{F}$-crítico de G es de tipo 1. Manteniendo la notación anterior, $M/M_G \cong G/C_G(T/M_G)$ que es un p'-grupo. En consecuencia, tenemos que G $= DC_G(T/M_G)$ y así M es $\mathfrak{F}$-crucial. Ahora bien, M es de p-longitud 1 y los $\mathfrak{F}$-normalizadores de G tienen índice potencia de p. Por inducción, D es un $\mathfrak{F}$-proyector de M. Comó M es $\mathfrak{F}$-crucial, D es un $\mathfrak{F}$-proyector de G.

(2.16) **Definición:** ([29]) Consideremos una $\mathfrak{V}$-formación saturada $\mathfrak{F}$. Decimos que un subgrupo H de un grupo G es $\mathfrak{F}$-subnormal en G, y escribimos H $\mathfrak{F}$-sn G , si existe una cadena de subgrupos: $H = H_r \leq H_{r-1} \leq \ldots\ldots \leq H_0 = G$, tal que H_i es un subgrupo maximal $\mathfrak{F}$-normal en H_{i-1}, para cada i.

Si X e Y son dos subgrupos de un grupo G que satisfacen:

i) X $\mathfrak{F}$-sn Y.

ii) Si X $\mathfrak{F}$-sn Z para algún subgrupo Z de G, entonces $Z \leq Y$.

Decimos entonces que Y es el *$\mathfrak{F}$-subnormalizador* de X.

Es claro, a partir de la definición, que si existe $\mathfrak{F}$-subnormalizador de un subgrupo X de G este es único.

(2.17) **Lema:** Consideremos un $\mathfrak{F}$-grupo G y H un subgrupo de G, verificando que $G = HF(G)$. Entonces H es $\mathfrak{F}$-subnormal en G.

Demostración: Razonamos por inducción sobre |G|. Podemos suponer que $H < G$. Si M es un subgrupo maximal de G tal que $H \leq M$, entonces $M \in \mathfrak{F}$ aplicando [9; 1.8]. Como M

= HF(M), por inducción, H $\mathfrak{F}$-sn M. Como M es $\mathfrak{F}$-normal en G, H es $\mathfrak{F}$-subnormal en G.

(2.18) **Lema:** Supongamos que $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$, y H un $\mathfrak{F}$-subgrupo de G tal que G = HF(G). Si H es $\mathfrak{F}$-subnormal en $Y \leq G$, entonces Y es un $\mathfrak{F}$-grupo.

Demostración: Razonando por inducción sobre |G|, podemos suponer que Y = G y H subgrupo maximal $\mathfrak{F}$-normal de G. Si $G \notin \mathfrak{F}$, H es un subgrupo $\mathfrak{F}$-maximal de G. Por (2.5), H es un $\mathfrak{F}$-normalizador de G. Por (1.10), H debe ser $\mathfrak{F}$-abnormal en G, contradicción.

Una ligera modificación de la demostración de (3.23) en [16], permite demostrar:

(2.19) **Proposición:** Consideremos una $\mathfrak{V}$-formación saturada $\mathfrak{F}$ y G un grupo con un subgrupo normal nilpotente N, tal que $G/N \in \mathfrak{F}$. Se considera L un suplemento de N en G. Entonces:

a) Los suplementos $\mathfrak{F}$-maximales de N en G coinciden con los $\mathfrak{F}$-proyectores de G.

b) Si E es un $\mathfrak{F}$-proyector de L, existe un único $\mathfrak{F}$-proyector de G conteniendo a E.

(2.20) **Teorema:** Consideremos una $\mathfrak{V}$-formación saturada $\mathfrak{F}$ y G un $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$-grupo. Si H es un $\mathfrak{F}$-subgrupo de G verificando que G = HF(G), el $\mathfrak{F}$-normalizador de G que contiene a H es el $\mathfrak{F}$-subnormalizador de H en G.

Demostración: Aplicando la proposición anterior, existe un único $\mathfrak{F}$-proyector E de G conteniendo a H. Por (2.5), E es un $\mathfrak{F}$-normalizador de G. Se tiene que E = HF(G) y así H es $\mathfrak{F}$-subnormal en E por (2.17). Ahora, si $L \leq G$ tal que H $\mathfrak{F}$-sn L, aplicando (2.18) concluimos que L es un $\mathfrak{F}$-grupo. Como G = LF(G), L está contenido en un $\mathfrak{F}$-normalizador de G por (2.5). Por unicidad de E , tenemos que $L \leq E$.

Según la proposición (2.10), en grupos de $\mathfrak{N}\mathfrak{N}\mathfrak{F}$, cada $\mathfrak{F}$-normalizador está contenido en un único $\mathfrak{F}$-proyector. Nuestro próximo objetivo es dar una descripción explícita de dicho $\mathfrak{F}$-proyector.

En lo que sigue, supondremos que **$\mathfrak{F}$ es una formación saturada cerrada para subgrupos.**

(2.21) **Definición:** Si H es un subgrupo de un grupo G, llamamos *$\mathfrak{F}$-cuasi-normalizador* de H al siguiente subgrupo:

$N_G(H,\mathfrak{F}) = \langle x \in G \,/\, \langle H,x\rangle^{\mathfrak{F}} \leq H \rangle$.

Un subgrupo H de G, se dice $\mathfrak{F}$*-cuasi-normal* en G, si $N_T(H,\mathfrak{F}) = T$ para todo subgrupo T de G tal que $H \leq T \leq G$.

Un sencillo argumento inductivo, permite demostrar:

(2.22) **Teorema:** Un subgrupo H de $G \in \mathfrak{S}\mathfrak{F}$ es $\mathfrak{F}$-subnormal en G sí y sólo sí existe una cadena de subgrupos $H = H_0 \leq H_1 \leq \ldots\ldots\ldots \leq H_n = G$, tal que H_i es $\mathfrak{F}$-cuasi-normal en H_{i+1}, para cada i.

(2.23) **Teorema:** Si $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}\mathfrak{F}$, y D es un $\mathfrak{F}$-normalizador de G, entonces $N_G(D,\mathfrak{F})$ es el único $\mathfrak{F}$-proyector de G que contiene a D.

Demostración: Razonamos por inducción sobre el orden de G. Es claro que podemos suponer que G no es un $\mathfrak{F}$-grupo. Entonces $F := F(G) \neq 1$. Consideremos N un subgrupo normal minimal de G tal que $N \leq F$ y sea E el único $\mathfrak{F}$-proyector de G tal que $D \leq E$. Tomamos $x \in E$. Se tiene que $1 = \langle D,x\rangle^{\mathfrak{F}} \leq D$. En consecuencia, E está contenido en $N_G(D,\mathfrak{F})$. Aplicando inducción al grupo G/N, y dado que los $\mathfrak{F}$-normalizadores y $\mathfrak{F}$-proyectores son invariantes bajo epimorfismos, tenemos que $EN = N_G(D,\mathfrak{F})N = T$. Así, el $\mathfrak{F}$-residual de T es abeliano. Si $N \leq E$, entonces $E = N_G(D,\mathfrak{F})$ y el teorema queda demostrado. En consecuencia, $T = ET^{\mathfrak{F}}$ y $E \cap T^{\mathfrak{F}} = 1$. Sea $g \in N_G(D,\mathfrak{F})$ y $R = \langle D,g\rangle$ tal que $R^{\mathfrak{F}} \leq D$. Como $R \leq T$ y $\mathfrak{F}$ es cerrada para subgrupos, tenemos que $R^{\mathfrak{F}} \leq T^{\mathfrak{F}} \cap D = 1$. Por consiguiente, R es un $\mathfrak{F}$-grupo. Por otra parte, como G/F es un $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$-grupo tenemos que $EF = DF$ en virtud de (3.6) y $N_G(D,\mathfrak{F})F = EF = DF = RF = Q$, aplicando inducción. Consideremos H un subgrupo $\mathfrak{F}$-maximal de Q tal que $R \leq H$. Por (3.5), H es un $\mathfrak{F}$-proyector de Q. Por consiguiente, H es un $\mathfrak{F}$-proyector de G y $D \leq H$. Por unicidad de E, tenemos que $H = E$ y $g \in E$. En definitiva, $N_G(D,\mathfrak{F}) \leq E$ y el teorema queda demostrado.

3. $\mathfrak{F}$-NORMALIZADORES Y $\mathfrak{F}$-HIPERCENTRO.

(3.1) <u>Definición:</u> Un subgrupo normal N de un grupo G se dice *$\mathfrak{F}$-hipercentral* en G si existe una cadena:

$1 = N_0 \trianglelefteq N_1 \trianglelefteq \ldots\ldots \trianglelefteq N_r = N$ with $N_i \trianglelefteq G$ y N_{i+1}/N_i factor principal $\mathfrak{F}$-central de G para cada i.

Es bien conocido que el producto de subgrupos normales $\mathfrak{F}$-hipercentrales de un grupo G es un subgrupo normal $\mathfrak{F}$-hipercentral de G. Así, cada grupo finito G tiene un único subgrupo normal $\mathfrak{F}$-hipercentral de mayor orden, llamado $\mathfrak{F}$-hipercentro de G y denotado por $Z_{\mathfrak{F}}(G)$.

En este párrafo, analizamos la relación existente entre el $\mathfrak{F}$-hipercentro y un $\mathfrak{F}$-normalizador de un grupo $G \in \mathfrak{V}$. Supondremos que $\mathfrak{F}$ contiene a $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{V}$, donde $\mathfrak{N}$ es la clase de los grupos nilpotentes.

(3.2) <u>Lema:</u> Consideremos un grupo G. Si un $\mathfrak{F}$-normalizador de G es un subgrupo normal de G, entonces G es un $\mathfrak{F}$-grupo.

<u>Demostración:</u> Supongamos que el resultado no es cierto y sea G un contraejemplo de orden minimal a nuestra afirmación. Entonces tenemos que $G \notin \mathfrak{F}$ y G posee un $\mathfrak{F}$-normalizador D tal que $D \trianglelefteq G$. Sea M un subgrupo $\mathfrak{F}$-crítico de G tal que $D \leq M$ y tal que $D \in \mathrm{Nor}_{\mathfrak{F}}(M)$. Como $D \trianglelefteq M$, $D = M$ por minimalidad de G. Esto implica que el grupo $G/D \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{V} \subset \mathfrak{F}$ y esto contradice la $\mathfrak{F}$-abnormalidad de D.

Como consecuencia, si $D \in \mathrm{Nor}_{\mathfrak{F}}(G)$ entonces $D^G = G$. En otro caso tendríamos que $1 = DD^G/D^G \in \mathrm{Nor}_{\mathfrak{F}}(G/D^G)$ y esto contradice (3.2).

La hipótesis $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{V} \subset \mathfrak{F}$ en (3.2) es esencial. Si tomamos $\mathfrak{V} = \mathfrak{E}$ y $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_7$, la clase de los 7-grupos, y $G = \mathrm{Alt}(5)$ entonces $\mathrm{Nor}_{\mathfrak{F}}(G) = \{1\}$ y $G \notin \mathfrak{F}$.

Por (1.5), el $\mathfrak{F}$-hipercentro de un grupo G está contenido en cada $\mathfrak{F}$-normalizador de G. Además, tenemos que:

(3.3) **Lema:** Consideremos un grupo G, tal que $G^{\mathfrak{F}}$ es resoluble. Si D es un $\mathfrak{F}$-normalizador de G, entonces $Z_{\mathfrak{F}}(G) = D_G$.

Demostración: Supongamos primero que $Z_{\mathfrak{F}}(G) = 1$. Si $D_G \neq 1$, tomamos un subgrupo normal minimal N de G tal que $N \leq D_G$. Como D cubre N, tenemos que N es un factor principal $\mathfrak{F}$-central de G por (2.2). Pero entonces $N \leq Z_{\mathfrak{F}}(G) = 1$, contradicción.

Si $Z_{\mathfrak{F}}(G) \neq 1$, el grupo $G/Z_{\mathfrak{F}}(G)$ tiene $\mathfrak{F}$-hipercentro trivial. También, el grupo cociente $DZ_{\mathfrak{F}}(G)/Z_{\mathfrak{F}}(G)$ es un $\mathfrak{F}$-normalizador de $G/Z_{\mathfrak{F}}(G)$. En consecuencia, $D_G \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$.

EJEMPLO 2: La condición $G^{\mathfrak{F}}$ resoluble en el teorema anterior es esencial. Consideremos $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{F}$, E y M como en ejemplo 1. Es claro que $Z_{\mathfrak{F}}(E) = 1$. Si tomamos un subgrupo maximal T de E tal que T/M es isomorfo a Alt(4), entonces T es un $\mathfrak{F}$-normalizador de E y $T_E = M \neq 1$.

(3.4) **Proposición:** Consideremos un grupo G. Si D es un $\mathfrak{F}$-normalizador de G, entonces $Z_{\mathfrak{F}}(G) = C_D(G^{\mathfrak{F}})$.

Demostración: En virtud del lema anterior, $Z_{\mathfrak{F}}(G) \leq D$. Por otra parte, es conocido que $G^{\mathfrak{F}}$ centraliza a $Z_{\mathfrak{F}}(G)$. En consecuencia, $Z_{\mathfrak{F}}(G) \leq C_D(G^{\mathfrak{F}})$. Notemos que $C_D(G^{\mathfrak{F}})$ es un subgrupo normal de G, pues $G = DG^{\mathfrak{F}}$. Si H/K es un factor principal de G verificando que $K < H \leq C_D(G^{\mathfrak{F}})$, se tiene que $G^{\mathfrak{F}} \leq C_G(H/K)$ y así, $G = DC_G(H/K)$. En consecuencia, H/K es un factor principal de D. Como D es un $\mathfrak{F}$-grupo, H/K es $\mathfrak{F}$-central en D, luego en G. Hemos demostrado entonces que $C_D(G^{\mathfrak{F}})$ es un subgrupo normal $\mathfrak{F}$-hipercentral de G. En consecuencia, $C_D(G^{\mathfrak{F}}) \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$.

Concluimos este párrafo con una propiedad de $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$-grupos, que en el caso resoluble ha sido demostrada por Carter y Hawkes en [11; Th. 5.8].

(3.5) **Teorema:** Consideramos $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$ y H un $\mathfrak{F}$-subgrupo de G tal que $G = HF(G)$. Si X es un subgrupo de G tal que H es subnormal en X, entonces X está contenido en algún $\mathfrak{F}$-proyector de G.

Demostración: Utilizamos inducción sobre |G|. Podemos suponer que $G \notin \mathfrak{F}$, entonces

$F(G) \neq 1$. Consideremos N un subgrupo normal minimal de G tal que $N \leq F(G)$. Las hipótesis del teorema se satisfacen para G/N, HN/N y XN/N. Así, XN/N está contenido en un $\mathfrak{F}$-proyector T/N de G/N. Si E es un $\mathfrak{F}$-proyector de T, entonces $T = EN$ y E es un $\mathfrak{F}$-proyectorde G. Si $EN < G$, podemos aplicar inducción y concluir que X está contenido en un $\mathfrak{F}$-proyector, R, de EN. Pero, R es un $\mathfrak{F}$-proyector de G y el teorema está entonces demostrado. De esta manera, podemos suponer que $G = EN$. Además, si $Z_{\mathfrak{F}}(G) \cap F(G) \neq 1$, podemos tomar $N \leq Z_{\mathfrak{F}}(G) \cap F(G)$. Por (2.6) y (3.3), $N \leq E$ y el resultado se sigue por inducción. Podemos suponer entonces que $G = EN$ y $Z_{\mathfrak{F}}(G) \cap F(G) = 1$. Como $E \cap F(G)$ es normal en G, $E \cap F(G) = E_G \cap F(G) = Z_{\mathfrak{F}}(G) \cap F(G) = 1$. Entonces, $G = HN$ y $N = F(G)$. También, H es un subgrupo maximal de G y $H = X$ aplicando (3.2). De esta manera, H es un $\mathfrak{F}$-proyector de G.

4. $\mathfrak{F}$-NORMALIZADORES Y $\mathfrak{F}$-RESIDUAL.

En todo el párrafo, G será un grupo con $\mathfrak{F}$-residual $G^{\mathfrak{F}}$ resoluble. Σ denotará siempre un sistema de Hall de $G^{\mathfrak{F}}$ y con T denotaremos el normalizador de Σ en el grupo G, $N_G(\Sigma)$.

Demostraremos que los $\mathfrak{F}$-normalizadores de G son exactamente los $\mathfrak{F}$-proyectores de $N_G(\Sigma)$. Para ello, seguiremos el esquema de demostración de [46].

Notemos, en primer lugar, que si G es un $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$-grupo, entonces T = G. En consecuencia, todo $\mathfrak{F}$-proyector de T es un $\mathfrak{F}$-proyector de G.

(4.1) <u>**Lema:**</u> Consideremos un grupo G con un subgrupo normal H resoluble conteniendo a $G^{\mathfrak{F}}$. Si Σ^* es un sistema de Hall de H, se tiene:

a) $N_G(\Sigma^*)$ es un $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$-grupo. Además, si $R = N_G(\Sigma^*)$ entonces Σ^* reduce en $R^{\mathfrak{F}}$.

b) Cada $\mathfrak{F}$-proyector de $N_R(\Sigma^* \cap R^{\mathfrak{F}}) = R$ está contenido en un $\mathfrak{F}$-proyector del subgrupo $N_G(\Sigma^* \cap G^{\mathfrak{F}})$.

<u>Demostración:</u> a) Al ser H subgrupo normal de G y los sistemas de Hall de H una clase de conjugación de subgrupos de H, se tiene que $G = HN_G(\Sigma^*)$. De esta manera, $N_G(\Sigma^*)/N_H(\Sigma^*)$ es isomorfo a G/H que es un $\mathfrak{F}$-grupo. Por lo tanto, $R^{\mathfrak{F}} \leq N_H(\Sigma^*)$ que es nilpotente por ser un normalizador de sistema de H. En definitiva, $R^{\mathfrak{F}}$ un grupo nilpotente. Además, Σ^* reduce en $N_H(\Sigma^*)$ y $R^{\mathfrak{F}}$ es un subgrupo normal de $N_H(\Sigma^*)$, luego Σ^* reduce en $R^{\mathfrak{F}}$. Es claro por otra parte que $N_G(\Sigma^*)$ es un $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$-grupo.

b) Supongamos, por reducción al absurdo, que b) no es cierta y sea G un contraejemplo minimal. Tonmemos H un subgrupo normal de G de índice $|H : G^{\mathfrak{F}}|$ minimal para el cual la afirmación b) no es cierta. Consideremos H/K un factor principal de G con $G^{\mathfrak{F}} \leq K$. La afirmación es cierta para el subgrupo normal K; en consecuencia, cada $\mathfrak{F}$-proyector del subgrupo $N_B(\Sigma^* \cap B^{\mathfrak{F}})$ donde $B = N_G(\Sigma^* \cap K)$ está contenido en un $\mathfrak{F}$-proyector del subgrupo $N_G(\Sigma^* \cap G^{\mathfrak{F}})$. Según (0.6) Cap.0, $\Sigma^* \cap N_K(\Sigma^* \cap K)$ es un sistema de Hall del subgrupo $H \cap B = N_H(\Sigma^* \cap K)$. Por otra parte, B y $H \cap B$ satisfacen las hipótesis del lema. Así, si B es distinto de G cada $\mathfrak{F}$-proyector de $N_P(\Sigma^* \cap P^{\mathfrak{F}})$, donde $P = N_G(\Sigma^* \cap H \cap B)$ está contenido en un $\mathfrak{F}$-proyector de $N_B(\Sigma^* \cap B^{\mathfrak{F}})$ que a su vez está contenido en un $\mathfrak{F}$-proyector del subgrupo $N_G(\Sigma^* \cap G^{\mathfrak{F}})$. Finalmente, veamos que $P = N_G(\Sigma^*)$. En efecto, según (0.6) Cap 0, tenemos la igualdad, $N_{H \cap B}(\Sigma^* \cap H \cap B) = N_H(\Sigma^*)$. Además, $N_G(\Sigma^*)$ está contenido en P. Como $G = H\,N_G(\Sigma^*)$, $B = N_G(\Sigma^*)(H \cap B)$. En consecuencia, $P = N_G(\Sigma^*)(P \cap H \cap B) = N_{H \cap B}(\Sigma^* \cap H \cap B)N_G(\Sigma^*) = N_G(\Sigma^*)$. De esta manera, b) sería cierto para H contradicción. Así B = G , K es un grupo nilpotente y G es un $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$-grupo. Supongamos que p es el primo divisor del orden de H/K y sea S_p el p-subgrupo de Sylow en Σ^*. Se tiene que $H = S_pK$ y $N_G(\Sigma^*) = N_G(S_p)$. Si denotamos por $R = N_G(\Sigma^*)$, tenemos que $R = N_R(\Sigma^* \cap R^{\mathfrak{F}})$. Si E es un $\mathfrak{F}$-proyector de R, se tiene que $R = R^{\mathfrak{F}}E$ y $G = KE$. Aplicando (2.5), E está contenido en un $\mathfrak{F}$-proyector de G que es igual a $N_G(\Sigma^* \cap G^{\mathfrak{F}})$, contradicción final.

(4.2) __Lema:__ Si N es un subgrupo normal de G, entonces $TN/N = N_{G/N}(\Sigma N/N)$. En consecuencia, si E es un $\mathfrak{F}$-proyector de T entonces EN/N es un $\mathfrak{F}$-proyector de $N_{G/N}(\Sigma N/N)$.

__Demostración:__ Claramente podemos suponer que N es un subgrupo normal minimal de G. Distinguimos dos casos:

a) $N \cap G^{\mathfrak{F}} = 1$. entonces, $|G/N : N_{G/N}(\Sigma N/N)|$ es el número de sistemas de Hall de $G^{\mathfrak{F}}N/N$, es decir, el número de sistemas de Hall de $G^{\mathfrak{F}}$. Además, tenemos las siguientes desigualdades: $|G : TN| = |G^{\mathfrak{F}} : G^{\mathfrak{F}} \cap TN| \leq |G^{\mathfrak{F}} : G^{\mathfrak{F}} \cap T| = |G/N : N_{G/N}(\Sigma N/N)|$. Como $TN \leq N_{G/N}(\Sigma N/N)$ se tiene que $|G/N : N_{G/N}(\Sigma N/N)| = |G/N : TN/N|$ y así, $TN/N = N_{G/N}(\Sigma N/N)$.

b) $N \leq G^{\mathfrak{F}}$. Dado que los normalizadores de sistemas son invariantes bajo epimorfismos, tenemos que $N_{R/N}(\Sigma N/N) = N_R(\Sigma)N/N$, siendo $R = G^{\mathfrak{F}}$. Así, se tienen las igualdades $|G/N : N_{G/N}(\Sigma N/N)| = |R/N : N_{R/N}(\Sigma N/N)| = |R : N_R(\Sigma)N| = |G/N : TN/N|$. En definitiva, $TN/N = N_{G/N}(\Sigma N/N)$.

(4.3) __Teorema:__ Consideremos M un subgrupo maximal $\mathfrak{F}$-abnormal de G. Si Σ reduce en $M \cap G^{\mathfrak{F}}$, existe un $\mathfrak{F}$-proyector de T contenido en un $\mathfrak{F}$-proyector del subgrupo $N_M(\Sigma \cap M^{\mathfrak{F}})$.

__Demostración:__ Demostramos primero que existe un $\mathfrak{F}$-proyector de T contenido en M. Esto lo razonamos por inducción sobre |G|. Notar que las hipótesis del teorema se mantienen para G/M_G y M/M_G. Si M_G es no trivial, por inducción existe un $\mathfrak{F}$-proyector de TM_G/M_G, D/M_G, contenido en M/M_G. Se tiene que el $\mathfrak{F}$-residual de TM_G/M_G es nilpotente, luego los $\mathfrak{F}$-proyectores de TM_G/M_G son conjugados. Si tomamos un $\mathfrak{F}$-proyector de T, entonces EM_G/M_G es un $\mathfrak{F}$-proyector de TM_G/M_G. De esta manera, existe un elemento g de T tal que $D = E^gM_G$ con lo cual E^g es un $\mathfrak{F}$-proyector de T contenido en M.

Podemos, pues, suponer que $M_G = 1$. Como M es $\mathfrak{F}$-abnormal en G, tenemos que G es un grupo primitivo de tipo 1 y G = MN con N subgrupo normal minimal de G autocentralizante verificando que $M \cap N = 1$. Es claro, además, que $N \leq G^{\mathfrak{F}}$ y $M \cap G^{\mathfrak{F}} = M^{\mathfrak{F}}$. Si $M^{\mathfrak{F}} = 1$, entonces M es un $\mathfrak{F}$-grupo y $N_M(\Sigma \cap M^{\mathfrak{F}}) = M$. Entonces M ès $\mathfrak{F}$-crucial en G y M es un $\mathfrak{F}$-proyector de $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$. En este caso, $G = T$ y la afirmación queda demostrada.

Supongamos pues que $M^{\mathfrak{F}} \neq 1$. Veamos entonces que $T \leq M$. Si $am \in T$ con $a \neq 1$, $a \in A$ y $m \in M$ se tiene que $S^p = (S^p)^{am}$, siendo S^p el p-complemento de Sylow de $G^{\mathfrak{F}}$ en el sistema de Hall Σ. Además, $S^p \leq M^{\mathfrak{F}} \leq M$ y entonces $(S^p)^a \leq M$. Si $x \in S^p$, $[x,a] \in M \cap A = 1$. En consecuencia, a centraliza a S^p. Aplicando (0.7) Cap. 0, A está contenido en el centro de $G^{\mathfrak{F}}$. Así, $G^{\mathfrak{F}} \leq C_G(A) = A$ y $M^{\mathfrak{F}} \leq M \cap A = 1$, contradicción. Por lo tanto, $a = 1$ y $T \leq M$.

Consideremos, pues, un $\mathfrak{F}$-proyector D de T tal que $D \leq M$. Entonces tenemos las inclusiones $D \leq N_M(\Sigma) \leq N_M(\Sigma \cap M \cap G^{\mathfrak{F}}) = DN_{M \cap G^{\mathfrak{F}}}(\Sigma \cap M \cap G^{\mathfrak{F}})$. Concluimos entonces que $G = DF(N_M(\Sigma \cap M \cap G^{\mathfrak{F}})$ y $N_M(\Sigma \cap M \cap G^{\mathfrak{F}})$ es un $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$-grupo. Sea E un $\mathfrak{F}$-proyector de $N_M(\Sigma \cap M \cap G^{\mathfrak{F}})$ tal que $D \leq E$. Aplicamos ahora (4.1) a M, $M \cap G^{\mathfrak{F}}$ y $M^{\mathfrak{F}}$. Cada $\mathfrak{F}$-proyector de $N_M(\Sigma \cap M \cap G^{\mathfrak{F}})$ está contenido en un $\mathfrak{F}$-proyector de $N_M(\Sigma \cap M^{\mathfrak{F}})$. Así E, luego D, está contenido en un $\mathfrak{F}$-proyector de $N_M(\Sigma \cap M^{\mathfrak{F}})$.

(4.4) **Teorema:** Si D es un $\mathfrak{F}$-proyector de T, D cubre los factores principales $\mathfrak{F}$-centrales de G y evita los $\mathfrak{F}$-excéntricos.

Demostración: Por (4.2), es suficiente probar que D cubre todo normal minimal $\mathfrak{F}$-central de G y evita todo normal minimal $\mathfrak{F}$-excéntrico de G. Tomemos A un normal minimal $\mathfrak{F}$-central de G, i.e. , $[A]^*G \in \mathfrak{F}$. Como $A \leq C_G(G^{\mathfrak{F}})$, se tiene que $A \leq T$ y $G = DG^{\mathfrak{F}} = DC_G(A)$. Por tanto, A es un subgrupo normal minimal de AD verificando que $[A]^*AD \cong [A]^*G$. Como $\mathfrak{F}$ es saturada y AD/A es un $\mathfrak{F}$-grupo, se tiene que AD es un $\mathfrak{F}$-grupo. Como D es $\mathfrak{F}$-maximal en T, $A \leq D$. Supongamos ahora que A es $\mathfrak{F}$-excéntrico, entonces A está contenido en $G^{\mathfrak{F}}$ y así A es abeliano. Si D no evita A, entonces $A \cap T$ no es trivial. En definitiva, $1 \neq A \cap N_G(S)$, siendo S el p'-subgrupo de Hall de $G^{\mathfrak{F}}$ y p el primo divisor del orden de A. Aplicando (0.7) Cap.0, $A \leq Z(G^{\mathfrak{F}})$ lo cual implica que A es $\mathfrak{F}$-central, contradicción.

(4.5) **Teorema:** Para cualquier sistema de Hall Σ de $G^{\mathfrak{F}}$, todo $\mathfrak{F}$-proyector de $N_G(\Sigma)$ es un $\mathfrak{F}$-normalizador de G. En consecuencia, $\{E \in \mathrm{Proy}_{\mathfrak{F}}(N_G(\Sigma))/ \Sigma$ es sistema de Hall de $G^{\mathfrak{F}}\}$ coincide con $\mathrm{Nor}_{\mathfrak{F}}(G)$ y $\mathrm{Nor}_{\mathfrak{F}}(G)$ es una clase de conjugación de subgrupos de G.

Demostración: Podemos suponer que G no es un $\mathfrak{F}$-grupo. Consideremos M un subgrupo $\mathfrak{F}$-crítico de G tal que Σ reduce en $M \cap G^{\mathfrak{F}}$. Por (4.3), existe un $\mathfrak{F}$-proyector de $N_G(\Sigma)$, D, contenido en un $\mathfrak{F}$-proyector D* de $N_M(\Sigma \cap M^{\mathfrak{F}})$. Aplicando inducción, D* es un $\mathfrak{F}$-normalizador de M, luego de G. Veamos que D y D* tienen el mismo orden y para ello veamos que cubren o evitan los mismos factores principales en una serie principal dada de M. Si (*) es una serie principal de G, la intersección de dicha serie con M es una serie principal de M. Si H/K es una factor principal de (*) cubierto por M, $H \cap M/K \cap M$ es un factor principal de M y se verifica que [H/K]*G es isomorfo a $[H \cap M/K \cap M]$*M. Así, H/K es $\mathfrak{F}$-central en G sí y sólo sí $H \cap M/K \cap M$ es $\mathfrak{F}$-central en M. En consecuencia, aplicando (4.4) y (2.2), D y D* cubren o evitan los mismos factores principales en una serie dada de M. En definitiva, D = D*. Ahora bien, los $\mathfrak{F}$-proyectores de $N_G(\Sigma)$ son una clase de conjugación de subgrupos de G. En consecuencia, todo $\mathfrak{F}$-proyector de $N_G(\Sigma)$ es un $\mathfrak{F}$-normalizador de G.

Ahora, si D es un $\mathfrak{F}$-normalizador de G y E es un $\mathfrak{F}$-proyector de $N_G(\Sigma)$, existe un elemento $g \in G$ tal que $D = E^g$. Así, D es un $\mathfrak{F}$-proyector de $N_G(\Sigma^g)$. De esta manera tenemos que $\{E \in \mathrm{Proy}_{\mathfrak{F}}(N_G(\Sigma)) / \Sigma$ es sistema de Hall de $G^{\mathfrak{F}}\} = \mathrm{Nor}_{\mathfrak{F}}(G)$.

(4.6) **Corolario:** Consideremos H un $\mathfrak{F}$-proyector de un grupo G complementando a $G^{\mathfrak{F}}$. Entonces, H normaliza a algún p-subgrupo de Sylow de $G^{\mathfrak{F}}$ para cada primo p.

Demostración: Por (2.14), H contiene un $\mathfrak{F}$-normalizador de G. Como en este caso ambos complementan a $G^{\mathfrak{F}}$, se tiene que H es un $\mathfrak{F}$-normalizador de G. Por el teorema anterior, existe Σ sistema de Hall de $G^{\mathfrak{F}}$ tal que $H \leq N_G(\Sigma)$. Tomando, para cada primo p, el p-subgrupo de Sylow de $G^{\mathfrak{F}}$ en Σ, H normaliza a dicho subgrupo.

(4.7) **Lema:** Consideremos Σ un sistema de Hall de $G^{\mathfrak{F}}$ y V un $\mathfrak{F}$-proyector de G tal que Σ reduce en $V \cap G^{\mathfrak{F}}$. Entonces V = G ó existe un subgrupo maximal M de G, tal que $V \leq M$ y Σ reduce en $M \cap G^{\mathfrak{F}}$.

Demostración: Razonamos por inducción sobre |G|. Si $G^{\mathfrak{F}} = 1$, entonces V = G y el lema queda demostrado. Supongamos, pues, que $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$ y consideremos N un normal minimal de G tal que $N \leq G^{\mathfrak{F}}$. Las hipótesis del lema se mantienen para G/N, VN/N, $G^{\mathfrak{F}}/N$ y $\Sigma N/N$. Por inducción, G = VN ó existe un subgrupo maximal M/N de G/N tal que $\Sigma N/N$ reduce en $M/N \cap G^{\mathfrak{F}}/N$ y $VN/N \leq M/N$. Si G = VN, entonces V es un subgrupo maximal de G y el lema queda demostrado. En otro caso, M verifica la tesis del lema.

(4.8) **Teorema:** Consideremos Σ un sistema de Hall de $G^{\mathfrak{F}}$ y V un $\mathfrak{F}$-proyector de G tal que Σ reduce en $V \cap G^{\mathfrak{F}}$. Entonces existe un $\mathfrak{F}$-proyector D de $N_G(\Sigma)$ contenido en algún conjugado de V.

Demostración: Si V = G, entonces $G^{\mathfrak{F}} = 1$, D = G y el lema queda demostrado. Podemos suponer que V es un subgrupo propio de G. Por lema anterior, existe un subgrupo maximal M de G tal que $V \leq M$ y Σ reduce en $M \cap G^{\mathfrak{F}}$. Como V es un $\mathfrak{F}$-proyector de M y $M^{\mathfrak{F}}$ es resoluble, aplicando inducción, existe un $\mathfrak{F}$-proyector D^* de $N_M(\Sigma \cap M^{\mathfrak{F}})$ y un elemento m de M de forma que $D^* \leq V^m$. Por otra parte, por (4.3) existe un $\mathfrak{F}$-proyector D de $N_G(\Sigma)$ tal que $D \leq E$, siendo E un $\mathfrak{F}$-proyector de $N_M(\Sigma \cap M^{\mathfrak{F}})$. Como los $\mathfrak{F}$-proyectores de $N_M(\Sigma \cap M^{\mathfrak{F}})$ son conjugados, existe un elemento t de $N_M(\Sigma \cap M^{\mathfrak{F}})$ tal que $E = (D^*)^t$. Así, $D \leq (D^*)^t \leq V^{mt}$ y el teorema queda demostrado.

Supongamos que f es la función formación integrada y plena tal que $\mathfrak{F} = LF(f)$. Denotamos por $\pi = \{p \mid f(p)$ es no vacía $\}$. El siguiente lema es consecuencia inmediata de la definición local de $\mathfrak{F}$.

(4.9) **Lema:** Para todo primo $p \in \pi$, el f(p)-residual, $G^{f(p)}$, de G pertenece a la clase $\mathfrak{S}\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{E}_p$.

(4.10) **Lema:** Si un grupo G pertenece a la clase $\mathfrak{S}\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{E}_p$, entonces G posee una única clase de conjugación de p-complementos. Además, si H es un p'-subgrupo de G entonces H está contenido en un p-complemento de G.

Demostración: Denotamos por $\mathfrak{H}$ la formación $\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{E}_p$. Razonamos por inducción sobre el orden de G. Es claro que podemos suponer que $G^{\mathfrak{H}} \neq 1$. Consideramos N un subgrupo normal minimal de G tal que $N \leq G^{\mathfrak{H}}$. Entonces N es un p-grupo o N es un p'-grupo. Por inducción el grupo G/N posee una única clase de conjugación de p-complementos. Consideremos T/N un p-complemento de G/N. Si N es un p'-grupo, T es un p-complemento de G. Si N es un p-grupo, el teorema de Schur-Zassenhaus asegura la existencia de un p'-subgrupo Q de G tal que T = QN. Así, Q es un p-complemento de G. Ahora, si Q y L son dos p-complementos de G, entonces QN y LN son conjugados en G por inducción. Si N es un p'-grupo, entonces $N \leq Q \cap L$ y Q y L son conjugados en G. Si N es un p-grupo, el teorema de Schur-Zassenhaus asegura la conjugación de Q y L en G.

La última afirmación del lema se demuestra de forma análoga a las anteriores.

(4.10) __Definición:__ Un *$\mathfrak{F}$-sistema de complementos* de un grupo G, es un conjunto formado eligiendo un p-complemento de $G^{f(p)}$, para cada $p \in \pi$, y un p-complemento de $G^{\mathfrak{F}}$ para cada primo $p \notin \pi$. Si $\Sigma(\mathfrak{F})$ es un $\mathfrak{F}$-sistema de complementos de G, denotamos por $N_G(\Sigma(\mathfrak{F}))$ a la intersección de los normalizadores de los elementos de $\Sigma(\mathfrak{F})$.

(4.11) __Proposición:__ Consideremos $\Sigma(\mathfrak{F})$ un $\mathfrak{F}$-sistema de complementos de un grupo G. Si N es un subgrupo normal de G, entonces $\Sigma(\mathfrak{F})N/N$ es un $\mathfrak{F}$-sistema de complementos de G/N. Además, $N_G(\Sigma(\mathfrak{F}))N/N = N_{G/N}(\Sigma(\mathfrak{F})N/N)$.

__Demostración:__ Es claro que $\Sigma(\mathfrak{F})N/N$ es un $\mathfrak{F}$-sistema de complementos de G/N. Para demostrar la segunda afirmación podemos suponer, trabajando por inducción sobre el orden de G, que N es un subgrupo normal minimal de G. Si N es $\mathfrak{F}$-central en G, entonces N normaliza a todo p-complemento de $G^{\mathfrak{F}}$ y a todo p-complemento de $G^{f(p)}$ para todo primo p que divide al orden de N. Supongamos que p es un primo en π tal que p no divide al orden de N. Entonces, si $N \leq G^{f(p)}$ se tiene que N está contenido en todo p-complemento de $G^{f(p)}$ en virtud de (4.10). Si N no está contenido en $G^{f(p)}$, es claro entonces que N normaliza a todo p-complemento de $G^{f(p)}$. En definitiva, $N \leq N_G(\Sigma(\mathfrak{F}))$ y la proposición queda demostrada.

Supongamos ahora que N es $\mathfrak{F}$-excéntrico en G. Entonces $N \leq G^{\mathfrak{F}}$. Supongamos que p es el primo que divide al orden de N. Si q es un primo distinto de p tal que $q \notin \pi$, entonces N está contenido en cada q-complemento de $G^{\mathfrak{F}}$. Ahora, si p es un primo en π entonces N está contenido en $G^{f(p)}$ y se verifica que $N_G(X_p)N = N_G(X_pN)$, para cada p-complemento X_p de $G^{f(p)}$. Si r es un primo en π distinto de p, es claro que N normaliza a cada r-complemento de $G^{f(r)}$. Razonando de manera análoga en el caso $p \notin \pi$, tenemos que $N_G(\Sigma(\mathfrak{F}))N = N_G(\Sigma(\mathfrak{F})N)$ y la proposición queda demostrada.

(4.12) __Teorema:__ Cada $\mathfrak{F}$-normalizador D de $N_G(\Sigma(\mathfrak{F}))$ cubre los factores principales $\mathfrak{F}$-centrales de G y evita los factores principales $\mathfrak{F}$-excéntricos de G.

__Demostración:__ Consideremos A/B un factor principal de G, en virtud de la proposición anterior, podemos suponer que B = 1. Si A es $\mathfrak{F}$-central, podemos razonar como en (4.11) y concluir que $A \leq N_G(\Sigma(\mathfrak{F}))$. Ahora bien, como $G = N_G(\Sigma(\mathfrak{F}))C_G(A)$, se tiene que A es un normal minimal $\mathfrak{F}$-central de $N_G(\Sigma(\mathfrak{F}))$. Aplicando (2.2) de Cap. II, tenemos que D cubre A. Supongamos que A es un normal minimal $\mathfrak{F}$-excéntrico de G y sea p el primo divisor del orden de A. Distinguimos dos casos:

a) $p \in \pi$. Denotamos por X el p-complemento de $G^{f(p)}$ en $\Sigma(\mathfrak{F})$. Si $A \cap N_G(X) \neq 1$, se tiene que $A \cap N_G(X \cap G^{\mathfrak{F}}) \neq 1$ y al ser $X \cap G^{\mathfrak{F}}$ un p-complemento de $G^{\mathfrak{F}}$, podemos aplicar (0.7) de Cap. 0 y concluir que A es central en $G^{\mathfrak{F}}$. Se tiene que $G = DG^{\mathfrak{F}} = DC_G(A)$. En consecuencia, A es un normal minimal $\mathfrak{F}$-excéntrico de $N_G(\Sigma(\mathfrak{F}))$ y $D \cap A = 1$.

b) $p \notin \pi$. Razonando como en a) para el p-complemento de $G^{\mathfrak{F}}$, se tiene que D evita A.

(4.13) **Teorema:** Consideremos $\Sigma(\mathfrak{F})$ un $\mathfrak{F}$-sistema de complementos de un grupo G y sea Σ el sistema de Hall de $G^{\mathfrak{F}}$ originado por Σ. Entonces, cada $\mathfrak{F}$-normalizador de $N_G(\Sigma(\mathfrak{F}))$ es un $\mathfrak{F}$-proyector de $N_G(\Sigma)$.

Demostración: Es claro que $N_G(\Sigma)$ contiene a $N_G(\Sigma(\mathfrak{F}))$. Si D es un $\mathfrak{F}$-normalizador de $N_G(\Sigma(\mathfrak{F}))$, D cubre todos los factores principales $\mathfrak{F}$-centrales de G. Por consiguiente, $G = DG^{\mathfrak{F}}$. Además, $N_G(\Sigma) = DN_{G^{\mathfrak{F}}}(\Sigma)$. Ahora bien, $N_{G^{\mathfrak{F}}}(\Sigma)$ es un subgrupo nilpotente y normal en $N_G(\Sigma)$. En consecuencia, $N_G(\Sigma) = TF(N_G(\Sigma))$. Como D es un $\mathfrak{F}$-grupo, D está contenido en un $\mathfrak{F}$-proyector H de $N_G(\Sigma)$ por (2.5). Ahora bien, H y D cubren y evitan los mismos factores principales de G por (4.4). En consecuencia, H = D.

CAPITULO III

NORMALIZADORES Y FORMACIONES.

A lo largo de todo el capítulo $\mathfrak{V}$, al igual que en capítulos anteriores, denota un universo de grupos finitos con las mismas propiedades de clausura que en capítulos anteriores.

En este capítulo recogemos algunas aplicaciones de la teoría de normalizadores a la teoría de formaciones saturadas.

1. TEOREMAS DE COMPLEMENTACION.

El siguiente teorema es una generalización de un teorema de Higman sobre complementación de subgrupos normales abelianos. El teorema análogo en el universo resoluble fue obtenido por Carter y Hawkes en [11].

(1.1) Teorema: Consideremos $\mathfrak{F}$ una $\mathfrak{V}$-formación saturada y G un grupo en $\mathfrak{V}$ tal que el $\mathfrak{F}$-residual $G^{\mathfrak{F}}$ de G es abeliano. Entonces $G^{\mathfrak{F}}$ es complementado en G y dos complementos son conjugados. Los complementos son los $\mathfrak{F}$-normalizadores de G.

Demostración: Primero, demostramos que un $\mathfrak{F}$-normalizador de G es un complemento de $G^{\mathfrak{F}}$. Supongamos que dicha afirmación no es cierta y sea G un contraejemplo de orden minimal. Entonces , existe $D \in Nor_{\mathfrak{F}}(G)$ tal que $D \cap G^{\mathfrak{F}} \neq 1$. Consideremos N un subgrupo normal minimal de G contenido en $R = G^{\mathfrak{F}}$. Entonces $DN/N \in Nor_{\mathfrak{F}}(G/N)$ y R/N es el $\mathfrak{F}$-residual de G/N. Por minimalidad de G, $R \cap D \leq N$.

Si N es $\mathfrak{F}$-excéntrico, D evita N por (2.2) Cap. II y así $R \cap D = 1$, pero esto contradice la elección de G. Por consiguiente, N es $\mathfrak{F}$-central. Ahora bien, $R \cap D \trianglelefteq G$ puesto que $G = RD$ y R es abeliano. Así, $N = R \cap D$. Por otra parte, si T es un subgrupo normal minimal de G tal que $T \neq N$ entonces T es $\mathfrak{F}$-central en G y $T \leq D$ por (2.2) Cap. II. Por minimalidad de G, tenemos que $R \cap D \leq T$ y $T = R \cap D = N$ contradicción. En consecuencia, N es el único subgrupo normal minimal de G.

Consideremos M un subgrupo $\mathfrak{F}$-crítico de G tal que $D \leq M$ y $D \in Nor_{\mathfrak{F}}(M)$. Como $G = RM$ tenemos que $M/R \cap M \in \mathfrak{F}$. Así, $M^{\mathfrak{F}} \leq R \cap M$. Ahora bien, $M^{\mathfrak{F}}$ es un subgrupo normal de M y R es abeliano. De esta manera, $M^{\mathfrak{F}}$ es un subgrupo normal de G. Si $M^{\mathfrak{F}} \neq 1$, de la minimalidad de G deducimos que $M^{\mathfrak{F}} \cap D = 1$ y esto contradice $N \leq D$. En definitiva, $M^{\mathfrak{F}} = 1$ y $D = M \in \mathfrak{F}$. Entonces, R/N es un factor principal de G complementado por M/N. Si p es el primo divisor del orden de N, entonces R es un p-grupo. Si $\{F(q)\}$ es la definición local integrada y plena de $\mathfrak{F}$, tenemos que $F(p)$ no es vacía y $R \leq G^{F(p)}$. Ahora bien, $G^{F(p)}/R$ es un p'-grupo y así R es un p-subgrupo de Sylow de $G^{F(p)}$. Por el teorema de Schur-Zassenhaus, existe un complemento Q de R en $G^{F(p)}$. Como M no cubre R/N, R/N es un factor principal $\mathfrak{F}$-excéntrico de G. En consecuencia, $G/C_G(R/N) \notin F(p)$ y $G^{F(p)}$ no está contenido en $C_G(R/N)$. Consideramos RQ actuando sobre R por conjugación. Entonces, $R = [R, Q] \times C_R(Q)$. Ahora bien, $C_R(Q) = C_R(QR)$ es un subgrupo normal de G y $[R, Q] = [R, QR]$ es un subgrupo normal de G. Como N es el único subgrupo normal minimal de G, ó $C_R(Q) = 1$ ó $[R, Q] = 1$. Como N es $\mathfrak{F}$-central tenemos que $G^{F(p)} \leq C_G(N)$. Así, $C_R(Q) \neq 1$. En consecuencia, $QR \leq C_G(R) \leq C_G(R/N)$, contradicción.

En consecuencia, cada $\mathfrak{F}$-normalizador de G complementa a $G^{\mathfrak{F}}$. Ahora, consideremos H un subgrupo de G tal que $G = HG^{\mathfrak{F}}$ y $H \cap G^{\mathfrak{F}} = 1$.Podemos suponer $G \notin \mathfrak{F}$. Como todo factor principal de G por debajo de $G^{\mathfrak{F}}$ es $\mathfrak{F}$-excéntrico, H cubre todos los factores principales $\mathfrak{F}$-centrales de una serie principal de G, pasando por $G^{\mathfrak{F}}$. Aplicando (2.8) de Cap. II, existe $D \in Nor_{\mathfrak{F}}(G)$ tal que $D \leq H$. De esta manera, $D = H \in Nor_{\mathfrak{F}}(G)$.

Aplicando (4.5) Cap. II, $Nor_{\mathfrak{F}}(G)$ es una clase de conjugación de subgrupos de G. En consecuencia, los complementos de $G^{\mathfrak{F}}$ son conjugados y son precisamente los $\mathfrak{F}$-normalizadores de G.

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es el siguiente resultado de P. Schmid ([42]):

(1.2) <u>Corolario:</u> Para cada grupo finito G, se tiene que $G^{\mathfrak{F}} \cap Z_{\mathfrak{F}}(G)$ está contenido en $(G^{\mathfrak{F}})' \cap Z(G^{\mathfrak{F}})$.

El teorema anterior proporciona también una demostración más corta de un conocido teorema de complementación de Šemetkov ([45]):

(1.3) <u>Teorema:</u> Si, para algún primo p, los p-subgrupos de Sylow de $G^{\mathfrak{F}}$ son abelianos, entonces cada factor principal de G por debajo de $G^{\mathfrak{F}}$ cuyo orden es divisible por p es $\mathfrak{F}$-excéntrico.

<u>Demostración:</u> Supongamos que el teorema no es cierto y consideremos G un contraejemplo minimal al teorema. Entonces $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$. Sea N subgrupo normal minimal de

G tal que $N \leq G^{\mathfrak{F}}$. Como el teorema es cierto para G/N y $G^{\mathfrak{F}}/N$, se tiene que p divide al orden de N y N es $\mathfrak{F}$-central en G. En consecuencia, N está contenido en $Z(G^{\mathfrak{F}})$ y es el único normal minimal de G contenido en $G^{\mathfrak{F}}$. Por consiguiente, si $(G^{\mathfrak{F}})'$ no es trivial, tenemos que N está contenido en $(G^{\mathfrak{F}})'$. Por otra parte, existe un p-subgrupo de Sylow, P, de G tal que $N \leq P$. De esta manera, $N \leq P \cap (G^{\mathfrak{F}})' \cap Z(G^{\mathfrak{F}}) = 1$ contradicción. En consecuencia, $G^{\mathfrak{F}}$ es abeliano. Aplicando (1.1), $G^{\mathfrak{F}}$ es complementado por un $\mathfrak{F}$-normalizador. Pero esto implica que N es $\mathfrak{F}$-excéntrico, contradicción.

P. Schmid en [42], obtiene un teorema de complementación del $\mathfrak{F}$-residual, $G^{\mathfrak{F}}$, de un grupo G, bajo ciertas hipótesis para $G^{\mathfrak{F}}$. El teorema siguiente describe los complementos de $G^{\mathfrak{F}}$ obtenidos en dicho teorema:

(1.4) __Teorema:__ Consideremos un grupo G, tal que todo factor principal de G por debajo de $G^{\mathfrak{F}}$ es $\mathfrak{F}$-excéntrico. Supongamos, además, que $G^{\mathfrak{F}}$ es p-nilpotente para todo primo p divisor de $|G : G^{\mathfrak{F}}|$. Si denotamos por $\pi = \pi(|G : G^{\mathfrak{F}}|)$, entonces todo complemento de $G^{\mathfrak{F}}$ en G es un $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{E}_\pi)$-normalizador de G.

__Demostración:__ Denotamos por $\mathfrak{L}$ la formación saturada $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{E}_\pi$. Como $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{L}$, tenemos que $G^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{L}}$. Si N es un π-complemento normal de $G^{\mathfrak{F}}$, entonces $G^{\mathfrak{F}}/N$ es un π-grupo nilpotente. Veamos por inducción sobre $|G|$ que todo $\mathfrak{L}$-normalizador de G complementa a $G^{\mathfrak{F}}$. Si $N \neq 1$, por inducción, si E es un $\mathfrak{L}$-normalizador de G, $E \cap G^{\mathfrak{F}} \leq N$. Al ser N un π'-grupo y E un π-grupo, se tiene que $N \cap E = 1$. Podemos suponer, pues, que $N = 1$ y así $G^{\mathfrak{F}}$ es un π-grupo nilpotente. Entonces G es un π-grupo y todo $\mathfrak{L}$-normalizador de G es un $\mathfrak{F}$-normalizador de G. Por (2.2) de Cap. II, E evita todo factor principal de G por debajo de $G^{\mathfrak{F}}$. De esta manera, $E \cap G^{\mathfrak{F}} = 1$.

Por (5.2) de [42], los complementos de $G^{\mathfrak{F}}$ en G son conjugados. En consecuencia, los complementos de $G^{\mathfrak{F}}$ en G son exactamente los $\mathfrak{L}$-normalizadores de G.

(1.5) __Teorema:__ Consideremos un grupo G con $G^{\mathfrak{F}}$ resoluble y $D \in \mathrm{Nor}_{\mathfrak{F}}(G)$. Supongamos que para cada primo p, los p-subgrupos de Sylow de D actúan libres de puntos fijos por conjugación sobre cada p'-factor principal de G por debajo de $G^{\mathfrak{F}}$. Entonces $G^{\mathfrak{F}}$ es complementado por D.

__Demostración:__ Denotamos por $R = G^{\mathfrak{F}}$. Se tiene que $G = RD$. Supongamos que R no es complementado por D y tomamos G contraejemplo de orden minimal. Sea N un subgrupo normal minimal de G tal que $N \leq R$. Las hipótesis del teorema se mantienen para G/N y R/N. De la minimalidad de G, deducimos que $R \cap D \leq N$. Además, N es $\mathfrak{F}$-central en G. Por

(2.2) de Cap. II, D cubre N. En consecuencia, $N = R \cap D$ y N es el único normal minimal de G . Ahora bien, N es central en R y si p es el primo divisor del orden de N, N actúa libre de puntos fijos sobre cada p'-factor principal de G por debajo de R. En consecuencia, $R \leq O_p(G)$. Si $\{F(p)\}$ es la definición local integrada y plena de $\mathfrak{F}$, se tiene que $[N]^*G \in F(p)$. En consecuencia, $G^{F(p)}$ centraliza a N. Por otra parte, si existe un elemento $1 \neq a \in G^{F(p)} \cap D$ de orden primo con p, a actuaría libre de puntos fijos por conjugación sobre N. Pero $N \leq C_G(a)$, contradicción. Por consiguiente, $G^{F(p)} \cap D$ es un p-grupo. En definitiva, $G^{F(p)}$ es un p-grupo y $R = G^{F(p)}$. Esto implica que todo factor principal de G entre R y N es $\mathfrak{F}$-central. Por otra parte, D evita todo factor principal entre R y N, contradicción.

(1.6) __Proposición:__ Supongamos que $\mathfrak{F}$ contiene a $\mathfrak{N}$. Consideremos un grupo G tal que el $\mathfrak{N}$-residual , $G^{\mathfrak{N}}$, de G es distinto de G. Si, para algún primo p, los p-subgrupos de Sylow de un $\mathfrak{F}$-normalizador de D de G actúan libres de puntos fijos por conjugación sobre cada factor principal de G cuyo orden es divisible por p, entonces D es un p-grupo. En consecuencia, D es un $\mathfrak{N}$-normalizador de G.

__Demostración:__ El grupo $G/G^{\mathfrak{N}}$ es un grupo nilpotente no trivial. Si consideramos un factor principal H/K de G, tal que $G^{\mathfrak{N}} \leq K < H \leq G$, entonces H/K es central en G. Si p es el primo divisor del orden de H/K, se tiene que D es un p-grupo.

Consideremos un grupo G tal que $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{S}$. Podemos preguntarnos si la propiedad cubre-evita de los $\mathfrak{F}$-normalizadores de G los caracteriza. En general, la respuesta es 'no'. En [11], Carter y Hawkes obtienen un ejemplo de un grupo G y un subgrupo H de G que cubre cada factor principal cíclico de G y evita cada factor principal no cíclico de G, pero no es un normalizador superresoluble de G. Sin embargo, hemos visto que en un $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$-grupo, la propiedad cubre-evita caracteriza a los $\mathfrak{F}$-normalizadores de ese grupo.

Aplicando (1.1), podemos extender este resultado al caso de un grupo G con $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{S}$, cumpliendo $\mathrm{Nor}_{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{Proj}_{\mathfrak{F}}(G)$.

(1.7) __Teorema:__ Consideremos un grupo G con $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{S}$, tal que $\mathrm{Nor}_{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{Proj}_{\mathfrak{F}}(G)$. Entonces, los $\mathfrak{F}$-normalizadores de G son los únicos subgrupos que cubren los factores principales $\mathfrak{F}$-centrales y evitan los $\mathfrak{F}$-excéntricos en una serie principal dada de G.

Demostración: Razonamos por inducción sobre el orden de G. Supongamos que H es un subgrupo de G que cubre los factores principales $\mathfrak{F}$-centrales y evita los $\mathfrak{F}$-excéntricos en una serie principal dada de G. Consideremos N el subgrupo normal minimal de G que aparece en dicha serie. Entonces, HN/N cubre los factores principales $\mathfrak{F}$-centrales y evita los $\mathfrak{F}$-excéntricos en una serie principal dada de G/N. Como el $\mathfrak{F}$-residual de G/N es resoluble, $Nor_{\mathfrak{F}}(G/N)$ y $Proy_{\mathfrak{F}}(G/N)$ son dos clases de conjugación de G/N. En consecuencia, $Nor_{\mathfrak{F}}(G/N) = Proy_{\mathfrak{F}}(G/N)$. Además, por inducción, $HN/N \in Nor_{\mathfrak{F}}(G/N)$. Así, existe un $\mathfrak{F}$-normalizador D de G tal que $T = DN = HN$. Si N es $\mathfrak{F}$-central, D y H cubren N y entonces D =H. Supongamos, pues, que N es un factor principal $\mathfrak{F}$-excéntrico de G. Como T es un $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$-grupo y D es un $\mathfrak{F}$-proyector de T, tenemos que $D \in Nor_{\mathfrak{F}}(T)$. Si T es un $\mathfrak{F}$-grupo, D = T contradicción. Entonces, $T^{\mathfrak{F}} \neq 1$ y $T^{\mathfrak{F}}$ es abeliano. Por (1.1), $T = DT^{\mathfrak{F}}$ y $D \cap T^{\mathfrak{F}} = 1$. Entonces $N = T^{\mathfrak{F}}$ y H es un $\mathfrak{F}$-normalizador de T. Ahora bien, HN/N es un $\mathfrak{F}$-proyector de G/N. Así, H es un $\mathfrak{F}$-proyector de G. En consecuencia, $H \in Nor_{\mathfrak{F}}(G)$.

2. FORMACIONES LOCALES

(2.1) **Definiciones:** a) Decimos que un subgrupo E de un grupo $G \in \mathfrak{V}$ está *pseudo -bien situado* en G, si existe una cadena:

$$E = E_n \leq E_{n-1} \leq .... \leq E_0 = G, \text{ tal que } E_{i-1} = E_i F'(E_{i-1}) \text{ para cada i.}$$

Denotamos por $S_W^!$ el operador clausura definido por:

$S_W^! \mathfrak{X}$ = (E : E está pseudo-bien situado en algún $\mathfrak{X}$-grupo), para cada clase de grupos $\mathfrak{X}$.

b) Una función formación g = {g(p): p primo} se dice $S_W^!$-cerrada si g(p) es una formación $S_W^!$-cerrada, para cada primo p.

Consideremos $\mathfrak{H}$ una $\mathfrak{V}$-clase de Schunck de la forma $\mathfrak{H} = E_\Phi \mathfrak{F}$ para alguna formación $\mathfrak{F}$. Los subgrupos $\mathfrak{H}$-críticos y los $\mathfrak{H}$-normalizadores de un grupo G son dos ejemplos de subgrupos pseudo-bien situados en G.

Además, razonando como en [29], si N es un π–subgrupo de Hall normal de un grupo $G \in \mathfrak{V}$ y X es un complemento de N en G, entonces X está pseudo-bien situado en G.

Las formaciones no son $S_W^!$-cerradas en general. Por ejemplo, consideremos $\mathfrak{N}^*$ la formación de los grupos cuasinilpotantes y $\mathfrak{V} = \mathfrak{E}$. Cada subgrupo de Alt(5) está bién situado en Alt(5). Si H es un subgrupo de Alt(5) isomorfo a Dih(10), entonces tenemos que $H \in S_W^! \mathfrak{N}^* - \mathfrak{N}^*$. En consecuencia, $\mathfrak{N}^*$ no es $S_W^!$-cerrada.

(2.2) **Definición**: Consideremos $\mathfrak{H}$ una $\mathfrak{V}$-clase de Schunck de la forma $E_\Phi \mathfrak{F}$ para alguna formación $\mathfrak{F}$ y sea $\mathfrak{K}$ una $\mathfrak{V}$-formación.

Definimos $\mathfrak{H}_\mathfrak{K} = Q(G \in \mathfrak{V} \ / \ Nor_\mathfrak{H}(G) \subset \mathfrak{K})$. Entonces, la clase $\mathfrak{H}_\mathfrak{K}$ es una $\mathfrak{V}$-formación conteniendo a $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{K}$.

En efecto, denotamos por $\mathfrak{A} = (G \in \mathfrak{V} \ / \ Nor_\mathfrak{H}(G) \subset \mathfrak{K})$. Primero, demostramos que $\mathfrak{A}$ es R_0-cerrada . Tomemos $N_i \trianglelefteq G$, $i \in \{1,2\}$ y $G/N_i \in \mathfrak{A}$ de forma que $N_1 \cap N_2 = 1$. Si $D \in Nor_\mathfrak{H}(G)$, entonces $DN_i/N_i \in Nor_\mathfrak{H}(G/N_i)$. Como $D/D \cap N_i \in \mathfrak{K}$, se tiene que $D \in R_0\mathfrak{K} = \mathfrak{K}$. En consecuencia, $R_0\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$. De esta manera, $R_0 \mathfrak{H}_\mathfrak{K} = R_0 Q\mathfrak{A} \subset QR_0\mathfrak{A} = Q\mathfrak{A} = \mathfrak{H}_\mathfrak{K}$. En consecuencia , $\mathfrak{H}_\mathfrak{K}$ es R_0-cerrada . Como $\mathfrak{H}_\mathfrak{K}$ es Q-cerrada, se tiene que $\mathfrak{H}_\mathfrak{K}$ es una $\mathfrak{V}$-formación.

(2.3) **Definición**: Consideremos $\mathfrak{F}$ una $\mathfrak{V}$-formación saturada definida localmente por la función formación integrada y plena f.

Förster y Salomon en [23], introducen el concepto de densidad con respecto a $\mathfrak{F}$ en los términos siguientes: Un grupo G $\in$ b($\mathfrak{F}$) se dice denso con respecto a $\mathfrak{F}$, si G $\in$ b(f(p)) para cada primo p $\in \pi$(Soc(G)). La frontera b($\mathfrak{F}$) se dice amplia si no contiene grupos densos con respecto a $\mathfrak{F}$.

Para cada primo p, denotamos por f*(p) la formación :

$F_{f(p)} = Q(G : Nor_{\mathfrak{F}}(G) \subset f(p))$.

Un grupo G $\in$ b($\mathfrak{F}$) se dice *fuertemente denso* (con respecto a $\mathfrak{F}$) si G $\in$ f*(p) para cada primo p $\in \pi$(Soc(G)).

La frontera b($\mathfrak{F}$) se dice *fuertemente amplia* si no contiene grupos fuertemente densos.

(2.4) <u>**Nota:**</u> Si un grupo G es fuertemente denso con respecto a $\mathfrak{F}$, entonces G es denso con respecto a $\mathfrak{F}$. El recíproco no es cierto en general.

<u>Demostración:</u> Consideremos G un grupo en b($\mathfrak{F}$) tal que G es fuertemente denso con respecto a $\mathfrak{F}$. Entonces, para cada primo p $\in \pi$(Soc(G)) tenemos que G $\in$ f*(p). Así, existe T(p) $\in$ $Nor_{\mathfrak{F}}$(G) tal que T(p) $\in$ f(p). Como G/Soc(G) $\in \mathfrak{F}$, $Nor_{\mathfrak{F}}$(G/Soc(G)) = {G/Soc(G)} y G = T(p)Soc(G). Por consiguiente, G/Soc(G) $\in$ f(p). De esta manera, G $\in$ b(f(p)), para cada primo p $\in \pi$(Soc(G)) y G es denso con respecto a $\mathfrak{F}$.

Por otra parte, tomemos $\mathfrak{V} = \mathfrak{E}$, la clase de todos los grupos finitos, y consideremos $\mathfrak{N}$ la clase de los grupos nilpotentes. La función formación integrada y plena f tal que $\mathfrak{N}$ = LF(f) viene dada por f(p) = $\mathfrak{S}_p$ para cada primo p, donde $\mathfrak{S}_p$ denota la clase de los p-grupos. Entonces, G = Alt(5) es denso con respecto a $\mathfrak{N}$, pero G no es fuertemente denso con respecto a $\mathfrak{N}$. De hecho, G $\notin$ f*(5).

Consideremos un grupo G y H/K un factor principal de G. Denotamos por C^*_G(H/K) el conjunto de todos los elementos g $\in$ G tales que la conjugación por gK induce un automorfismo interno de H/K.

Recordemos la definición de la clase de los grupos nilpotentes:

$\mathfrak{N}$ = (G $\in \mathfrak{E}$ / cada factor principal H/K de G verifica G = C_G(H/K)).

y la clase de los grupos cuasinilpotentes:

$\mathfrak{N}^*$ = (G $\in \mathfrak{E}$ / cada factor principal H/K de G verifica G = C^*_G(H/K)).

De forma similar, si $\mathfrak{F}$ es una $\mathfrak{V}$-formación saturada definida localmente por una función formación f, podemos definir:

$\mathfrak{F}^* = (G \in \mathfrak{V}$ / cada factor principal H/K de G verifica $G/C^*_G(H/K) \in f(p)$ para cada primo p que divide al orden de H/K).

(2.5) **Proposición:** Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$.

ii) $b(\mathfrak{F})$ es amplia.

Demostración: i) implica ii) Supongamos que existe un grupo $G \in b(\mathfrak{F})$ tal que G es denso con respecto a $\mathfrak{F}$. Entonces, G es un grupo primitivo monolítico y para cada primo $p \in \pi(\mathrm{Soc}(G))$ tenemos que $G \in b(f(p))$. Ahora bien $\mathrm{Soc}(G) = C^*_G(\mathrm{Soc}(G))$, $G/C^*_G(\mathrm{Soc}(G)) \in f(p)$ para cada $p \in \pi(\mathrm{Soc}(G))$. Esto implica que $G \in \mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}$, contradicción. Así, $b(\mathfrak{F})$ es amplia.

ii) implica i) Es claro que $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}^*$. Supongamos que $\mathfrak{F}^* \neq \mathfrak{F}$ y consideremos un grupo G perteneciente a $\mathfrak{F}^* - \mathfrak{F}$ de orden minimal. Entonces, $G \in b(\mathfrak{F})$. Como $G \in \mathfrak{F}^*$ tenemos que el grupo cociente $G/C^*_G(\mathrm{Soc}(G)) \in f(p)$ para cada $p \in \pi(\mathrm{Soc}(G))$. Entonces, $G/\mathrm{Soc}(G) \in f(p)$ para cada primo $p \in \pi(\mathrm{Soc}(G))$. Es decir, $G \in b(f(p))$ para $p \in \pi(\mathrm{Soc}(G))$y $b(\mathfrak{F})$ no es amplia, contradicción.

(2.6) **Corolario:** Consideremos $\mathfrak{F}$ una $\mathfrak{V}$-formación saturada. Si $\mathfrak{F}$ contiene todos los grupos nilpotentes de $\mathfrak{V}$, y $b(\mathfrak{F})$ es amplia, entonces $\mathfrak{F}$ contiene a todos los grupos cuasinilpotentes de $\mathfrak{V}$.

Dada una clase de grupos $\mathfrak{X}$, y un operador clausura C, $\mathfrak{X}^C$ denota la mayor clase de grupos C-cerrada contenida en $\mathfrak{X}$, si tal clase existe.

Consideremos $\mathfrak{F}$ una $\mathfrak{V}$-formación saturada y $\mathfrak{H}$ una $\mathfrak{V}$-formación. Consideremos $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}$ la $\mathfrak{V}$-formación definida en (2.2).

(2.7) **Lema:** Consideremos $\mathfrak{X}$ una formación S'_W-cerrada. Entonces, $\mathfrak{X}$ está contenida en $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}$ sí y sólo sí $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{X} \subset \mathfrak{H}$. En consecuencia, si $\mathfrak{T} = (\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}})^{\{QR_0, S'_W\}}$, $\mathfrak{T}$ es la mayor formación S'_W-cerrada tal que $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{T} \subset \mathfrak{H}$.

Demostración: Supongamos que $\mathfrak{X}$ es una formación S'_W-cerrada tal que $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}$. Sea G un grupo en $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}$. Existe un grupo R, verificando que $\mathrm{Nor}_{\mathfrak{F}}(R) \subset \mathfrak{H}$ y existe un subgrupo normal N de R con $G \cong R/N$. Si $D \in \mathrm{Nor}_{\mathfrak{F}}(R)$, $DN/N \in \mathrm{Nor}_{\mathfrak{F}}(R/N)$. Por otra parte $R/N \in \mathfrak{F}$; así $DN/N = R/N$. De esta manera, $G \in \mathfrak{H}$ y tenemos la inclusión $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{X} \subset \mathfrak{H}$

Recíprocamente, tomemos $G \in \mathfrak{X}$ y $D \in \mathrm{Nor}_{\mathfrak{F}}(G)$. Como $\mathfrak{X}$ es $S_W^{!}$-cerrada, $D \in S_W^{!}\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$. Entonces, $D \in \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X} \subset \mathfrak{H}$ y $G \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}$. De esta manera, $\mathfrak{X}$ está contenida en $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}$.

En lo que sigue, $\mathfrak{F}$ denotará una $\mathfrak{V}$-formación saturada y $\{f(p);\ p \text{ primo}\}$ la función formación integrada y plena, $\mathfrak{F} = LF(f)$.

(2.8) <u>Teorema:</u> Consideremos g una función formación $S_W^{!}$-cerrada. Entonces, g define localmente a $\mathfrak{F}$ sí y sólo sí se satisfacen las siguientes condiciones:

a) Si $G \in b(\mathfrak{F})$ es fuertemente denso con respecto a $\mathfrak{F}$, entonces $G \notin g(p)$ para algún primo $p \in \pi(\mathrm{Soc}(G))$.

b) $f_0 \leq g \leq f^*$, donde f_0 es la función formación minimal tal que $\mathfrak{F} = LF(f_0)$.

<u>Demostración:</u> Notemos primero que $f_0 \leq f^*$. Supongamos que $\mathfrak{F} = LF(g)$ y para cada primo p, $S_W^{!}g(p) = g(p)$. Entonces, cada grupo $G \in b(\mathfrak{F})$ fuertemente denso con respecto a $\mathfrak{F}$ y verificando que $G \in g(p)$ para cada $p \in \pi(\mathrm{Soc}(G))$ pertenece a $\mathfrak{F}$, lo cual es imposible. En consecuencia, a) se verifica.

Como f_0 es la función formación minimal tal que $\mathfrak{F} = LF(f_0)$, tenemos que $f_0 \leq g$. Además, si $h(p) = \mathfrak{S}_p(g(p) \cap \mathfrak{F})$ para cada primo p, h es una función formación integrada y plena tal que $\mathfrak{F} = LF(h)$. Como f es única, $f(p) = h(p)$ para cada primo p. En consecuencia, para cada primo p, tenemos que $g(p) \cap \mathfrak{F} \subset f(p)$. Aplicando el lema anterior, $g(p) \subset f^*(p)$. En definitiva, $f_0 \leq g \leq f^*$.

Recíprocamente, supongamos que g satisface a) y b). Es suficiente probar entonces que $LF(g) \subset \mathfrak{F}$ ya que entonces $\mathfrak{F} = LF(f_0) \subset LF(g) \subset \mathfrak{F}$. Consideremos un grupo $G \in LF(g) - \mathfrak{F}$ de orden minimal . Entonces, $G \in b(\mathfrak{F})$ y G es un grupo primitivo monolítico. Si Soc(G) es abeliano de característica p, $G/C_G(\mathrm{Soc}(G)) \in g(p) \cap \mathfrak{F}$. Como g(p) es una formación $S_W^{!}$-cerrada y $g(p) \subset f^*(p)$, $g(p) \cap \mathfrak{F} \subset f(p)$. Ahora bien, $G/\mathrm{Soc}(G) \in \mathfrak{F}$. En definitiva, $G \in \mathfrak{F}$ contradicción. Así, Soc(G) no es abeliano y tenemos que $G \in g(p) \subset f^*(p)$ para cada primo $p \in \pi(\mathrm{Soc}(G))$. Esto implica que G es fuertemente denso con respecto a $\mathfrak{F}$ y además, $G \in g(p)$ para cada $p \in \pi(\mathrm{Soc}(G))$, lo cual contradice a). Así, $\mathfrak{F} = LF(g)$.

(2.9) **Proposición:** Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $b(\mathfrak{F})$ es fuertemente amplia.

b) $\mathfrak{F} = LF(f^*)$.

Demostración: Como $f_0 \leq f^*$, tenemos que $\mathfrak{F} = LF(f_0) \subset LF(f^*)$.

a) implica b). Supongamos que $\mathfrak{F} \neq LF(f^*)$ y elegimos un grupo G en $LF(f^*)$- $\mathfrak{F}$ de orden minimal. Entonces, $G \in b(\mathfrak{F})$ y para cada $p \in \pi(Soc(G))$ tenemos que $G/C_G(Soc(G)) \in f^*(p)$. Si $1 \neq C_G(Soc(G))$, entonces Soc(G) es abeliano. Supongamos que su característica es p. Como $G/C_G(Soc(G) \in f^*(p)$, existe un grupo R verificando que $Nor_{\mathfrak{F}}(R) \subset f(p)$ y existe un subgrupo normal N de R con $G/C_G(Soc(G)) \cong R/N$. Por minimalidad de G, tenemos que $G/C_G(Soc(G)) \in \mathfrak{F}$. Sea D un $\mathfrak{F}$-normalizador de R. Entonces, DN/N es un $\mathfrak{F}$-normalizador de R/N. Como $D \in f(p)$, $DN/N \in f(p)$. En consecuencia, $G/C_G(Soc(G)) \in f(p)$ y $G \in LF(f) = \mathfrak{F}$, contradicción. Por consiguiente, $C_G(Soc(G)) = 1$ y G es un grupo primitivo de tipo 2. Como $G \in LF(f^*)$, $G \in f^*(p)$ para cada primo $p \in \pi(Soc(G))$. De esta manera, G es fuertemente denso con respecto a $\mathfrak{F}$, contradicción.

b) implica a). Supongamos que existe un grupo $G \in b(\mathfrak{F})$ fuertemente denso con respecto a $\mathfrak{F}$. Entonces, G es un grupo primitivo monolítico. Si G es de tipo 2, entonces $G \in LF(f^*) = \mathfrak{F}$, contradicción. En consecuencia, G es un grupo primitivo de tipo 1. Sea p la característica del Soc(G). Como $G \in f^*(p)$ existe un $\mathfrak{F}$-normalizador T de G verificando $T \in f(p)$. Ahora bien, T es un complemento de Soc(G) y entonces, $G \in \mathfrak{S}_p f(p) = f(p) \subset \mathfrak{F}$ contradicción.

(2.10) **Lema:** Supongamos que f es una función formación $S^!_W$-cerrada. Para cada primo p, definimos $t(p) = (f^*(p))^{\{QR_0,\ S^!_W\}}$. Si $b(\mathfrak{F})$ es fuertemente amplia, entonces $\mathfrak{F} = LF(t)$.

Demostración: Aplicando (2.8), es suficiente probar que $f_0 \leq t$. Como f(p) es una formación $S^!_W$-cerrada para cada primo p, y f es integrada, tenemos la inclusión $f(p) \subset f^*(p)$. Por definición de t(p), $f(p) \subset t(p)$. Entonces, $f_0(p) \subset t(p)$ y $\mathfrak{F} = LF(t)$.

(2.11) **Teorema:** Supongamos que f y f^* son funciones formación $S^!_W$-cerradas. Entonces: $\mathfrak{F}$ tiene una única definición local $S^!_W$-cerrada maximal sí y sólo sí $b(\mathfrak{F})$ es fuertemente amplia. Además, en este caso, f^* es la definición local $S^!_W$-cerrada maximal de $\mathfrak{F}$.

Demostración: Supongamos que $b(\mathfrak{F})$ es fuertemente amplia. Aplicando el lema anterior tenemos que $\mathfrak{F} = LF(t)$. Como, además, f^* es $S_W^!$-cerrada, tenemos $t = f^*$. Por otra parte, si g es una función formación $S_W^!$-cerrada tal que $\mathfrak{F} = LF(g)$, de (2.8) deducimos que $f_0 \leq g \leq f^*$. Así, f^* es la definición local $S_W^!$-cerrada maximal de $\mathfrak{F}$.

Recíprocamente, supongamos que g es la única definición local $S_W^!$-cerrada maximal de $\mathfrak{F}$. Si $G \in b(\mathfrak{F})$ es fuertemente denso con respecto a $\mathfrak{F}$, un razonamiento habitual demuestra que G es un grupo primitivo de tipo 2. Consideremos p el primo divisor del orden de Soc(G). Definimos:

$$g^*(r) = \begin{cases} \{QR_0, S_W^!\}\ (f(p) \cup \{G\}) & \text{if } r = p. \\ f(r) & \text{if } r \neq p. \end{cases}$$

Es claro que g^* es una función formación $S_W^!$-cerrada. Además, si T es un grupo en $b(\mathfrak{F})$ fuertemente denso con respecto a $\mathfrak{F}$, entonces T es un grupo primitivo de tipo 2. Por consiguiente, existe un primo $r \in \pi(Soc(T))$ tal que $r \neq p$. Entonces, $T \notin g^*(r) = f(r)$. Por otra parte, $f(p) \cup \{G\}$ está contenido en $f^*(p)$. En consecuencia, $g^*(p)$ está contenido en $f^*(p)$. Así, $f_0 \leq g^* \leq f^*$. Por (2.8), $\mathfrak{F} = LF(g^*)$. Entonces, $g^* \leq g$ por maximalidad de g. Por lo tanto, $G \in g(p)$ para cada primo $p \in \pi(Soc(G))$. Así, $G \in \mathfrak{F}$ contradicción.

En el caso resoluble, $S_W^! = S_W$ y cada formación es S_W-cerrada (por [9] lemma 1.8). Además, $b(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{P}_1$ y entonces es fuertemente amplia. Así, podemos deducir el siguiente:

(2.12) **Corolario:** (Doerk, [14])

En el universo $\mathfrak{S}$ de grupos finitos resolubles, cada formación local posee una definición local maximal.

Finalmente, damos algunas condiciones suficientes para que una formación saturada de grupos finitos tenga una definición local maximal. Recordemos que si $\mathfrak{X}$ es una clase de grupos $h(\mathfrak{X})$ es la clase de los grupos $\mathfrak{X}$-perfectos, es decir, aquellos grupos sin cocientes en $\mathfrak{X}$.

(2.13) **Lema:** (Doerk [15]) Consideremos $\mathfrak{H}$ y $\mathfrak{K}$ homomorfos y denotamos con $\mathfrak{M} = h(b(\mathfrak{K}) \cap \mathfrak{H})$. Entonces $\mathfrak{M}$ es el mayor homomorfo tal que $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \subset \mathfrak{K}$.

En nuestro caso, definimos para cada primo p, $f^{\#}(p) = h(b(f(p)) \cap \mathfrak{F})$. Por (2.13), $f^{\#}(p)$ es el mayor homomorfo tal que $f^{\#}(p) \cap \mathfrak{F} \subset f(p)$. De hecho tenemos que $f^{\#}(p) \cap \mathfrak{F} = f(p)$. Como $f^{*}(p) \cap \mathfrak{F} = f(p)$, $f^{*}(p) \subset f^{\#}(p)$ para cada primo p.

Supongamos que para cada primo p, $f^{\#}(p)$ es $S^{!}_{W}$-cerrada. Entonces, para cada primo p, $f^{\#}(p) = f^{*}(p)$. Así, $f^{\#}$ es función formación. Además, un grupo G es denso con respecto a $\mathfrak{F}$ sí y sólo sí G es fuertemente denso con respecto a $\mathfrak{F}$.

Utilizando razonamientos similares a los utilizados en (2.11), podemos demostrar:

(2.14) __Teorema:__ Supongamos que para cada primo p, $f^{\#}(p)$ es $S^{!}_{W}$-cerrada. Entonces: $\mathfrak{F}$ posee una única definición local maximal sí y sólo sí $b(\mathfrak{F})$ es amplia. En este caso, $f^{\#} = f^{*}$ es la definición local maximal.

Utilizando (2.7) es sencillo demostrar:

(2.14) __Proposición:__ En el universo $\mathfrak{S}$ de todos los grupos resolubles $f^{\#}$ es función formación sí y sólo sí $f^{\#}$ es S_{W}-cerrada.

(3.3) GRUPOS CUYO $\mathfrak{F}$-HIPERCENTRO CONTIENE A LOS SUBGRUPOS SIMPLES

Dada una formación saturada $\mathfrak{F}$, pretendemos estudiar aquellos grupos $G \notin \mathfrak{F}$ tales que todos sus subgrupos propios están en $\mathfrak{F}$. Esta cuestión fue estudiada por Yokoyama en el universo resoluble ([47]). Posteriormente, Semetchuv en [44] abordó esta cuestión en el universo de todos los grupos finitos.

Nuestro objetivo en èste párrafo es aplicar la teoría de normalizadores en este contexto de cara a la obtención de nuevos resultados sobre estos grupos y demostrar de forma sencilla algunos ya conocidos.

En la segunda parte de este párrafo, discutimos la relación entre una formación saturada cerrada para subgrupos, y la clase de los grupos finitos cuyo $\mathfrak{F}$-hipercentro contiene a todos los subgrupos simples de G.

(3.1) **Teorema:** Consideremos un grupo $G \notin \mathfrak{F}$, tal que todos sus subgrupos propios son $\mathfrak{F}$-grupos. Entonces:

i) $Z_{\mathfrak{F}}(G) \leq \Phi(G)$ y $F'(G)/\Phi(G)$ es el único normal minimal de G. Además, $F'(G) = G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)$ y $F'(G)/\Phi(G)$ es un factor principal $\mathfrak{F}$-excéntrico de G.

ii) $\mathrm{Nor}_{\mathfrak{F}}(G)$ consiste en los conjuntos siguientes:

$$\mathrm{Nor}_{\mathfrak{F}}(G) = \begin{cases} \{M \leq G \ / \ M \text{ es maximal monolítico de } G\} & \text{si } G^{\mathfrak{F}} = G. \\ \\ \{M \leq G \ / \ M \text{ es maximal monolítico } \mathfrak{F}\text{-abnormal de } G\} & \text{si } G^{\mathfrak{F}} \neq G. \end{cases}$$

iii) Si $\mathrm{Soc}_n(G) \neq 1$, todo factor de composición de $G^{\mathfrak{F}}$ es isomorfo a un grupo simple no abeliano X. Por $\mathrm{Soc}_n(G)$ denotamos el producto de todos los normales minimales no abelianos de G.

iv) Si $(G^{\mathfrak{F}})'$ es subgrupo propio de $G^{\mathfrak{F}}$, entonces $G^{\mathfrak{F}}$ es un grupo resoluble.

v) Si $G^{\mathfrak{F}}$ es un grupo resoluble, entonces $F'(G) = F(G)$, $Z_{\mathfrak{F}}(G) = \Phi(G)$. Para cada maximal $\mathfrak{F}$-abnormal de G, M, se tiene que $M \cap G^{\mathfrak{F}} \leq \Phi(G)$. Además, $(G^{\mathfrak{F}})' = T \cap G^{\mathfrak{F}}$ para cada $\mathfrak{F}$-normalizador T de G. En consecuencia, $G^{\mathfrak{F}}/(G^{\mathfrak{F}})'$ es un factor principal $\mathfrak{F}$-excéntrico de G.

Demostración: Como $G \notin \mathfrak{F}$, existe un subgrupo $\mathfrak{F}$-crítico M de G. Si M_G no está contenido en $\Phi(G)$, existe un subgrupo,T, de G tal que $G = TM_G$. Como T es un $\mathfrak{F}$-grupo, se tiene que G/M_G es un $\mathfrak{F}$-grupo, contradicción. En consecuencia, $M_G = \Phi(G)$ y $\mathrm{Soc}(G/M_G) = \mathrm{Soc}(G/\Phi(G)) = F'(G)/\Phi(G)$ es un factor principal de G. Por otra parte, $G^{\mathfrak{F}}$ no está contenido en M. Por lo tanto, M es un $\mathfrak{F}$-grupo. Así, M es un $\mathfrak{F}$-normalizador de G.

Entonces, $Z_{\mathfrak{F}}(G) \leq M_G = \Phi(G)$. De esta manera queda demostrado i). Observar que el razonamiento anterior es válido para cualquier subgrupo maximal monolítico $\mathfrak{F}$-abnormal de G. En consecuencia, todo maximal monolítico $\mathfrak{F}$-abnormal de G es un $\mathfrak{F}$-normalizador de G. Así, si $G^{\mathfrak{F}} = G$, todo maximal monolítico de G es $\mathfrak{F}$-abnormal en G. Por lo tanto, $Nor_{\mathfrak{F}}(G)$ coincide con el conjunto de maximales monolíticos de G. Ahora, si $G^{\mathfrak{F}}$ es un subgrupo propio de G existe M, maximal monolítico de G, tal que $G^{\mathfrak{F}} \leq M$. Por consiguiente, dicho M no es un $\mathfrak{F}$-normalizador de G. Luego ii) queda demostrado.

Supongamos ahora que $Soc_n(G) \neq 1$ y consideremos N subgrupo normal minimal de G, tal que $N \leq Soc_n(G)$. Si X es un grupo simple no abeliano tal que $X \in N$, entonces $O_X(G)$ (el mayor subgrupo normal de G, con todos sus factores de composición isomofos a X) no es trivial. Como $O_X(G)$ no está contenido en $\Phi(G)$, existe un subgrupo R de G tal que $G = RO_X(G)$. Esto implica que $G/O_X(G)$ es un $\mathfrak{F}$-grupo. En consecuencia, $G^{\mathfrak{F}} \leq O_X(G)$ y se tiene iii).

Denotamos por $R = G^{\mathfrak{F}}$. Supongamos que R' es un subgrupo propio de R. $R\Phi(G)/\Phi(G)$ es un subgrupo normal no trivial de $G/\Phi(G)$. En consecuencia, $F'(G) \leq R\Phi(G)$. Como $R \leq F'(G)$, se tiene que $F'(G) = R\Phi(G)$. El grupo G/R' verifica que R/R' es complementado por cada $\mathfrak{F}$-normalizador de G/R'. En consecuencia, si T es un $\mathfrak{F}$-normalizador de G, se tiene que $T \cap R \leq R'$. Luego, $\Phi(G) \cap R \leq R'$. Como $R/\Phi(G) \cap R$ es un factor principal de G, y R' es un subgrupo propio de R, obtenemos que $\Phi(G) \cap R = R'$. Entonces R' es nilpotente, luego R es resoluble.

Notemos también que si $R = R'$, $F'(G)/\Phi(G)$ es un factor principal $\mathfrak{F}$-excéntrico de G. En otro caso, $R \leq C_G(F'(G)/\Phi(G)) = C_G(R/R \cap \Phi(G))$. Esto implica que R es resoluble, contradicción.

Si R es un grupo resoluble, $F'(G)/\Phi(G)$ es un factor principal abeliano de G. En consecuencia, $F(G) = F'(G)$. Entonces, $Nor_{\mathfrak{F}}(G)$ es una clase de conjugación de subgrupos cubre-evita de G. Además, aplicando (3.3) Cap. II, $M_G = Z_{\mathfrak{F}}(G)$ para cada $\mathfrak{F}$-normalizador M de G. Como $\Phi(G) \leq M_G$, se tiene que $\Phi(G) = Z_{\mathfrak{F}}(G)$. Por otra parte, R' es un subgrupo propio de R. En consecuencia, $R \cap \Phi(G) = R'$ reiterando la demostración de iv). De esta manera, cada $\mathfrak{F}$-normalizador M de G evita el factor principal R/R'. Aplicando (2.2) Cap.II, concluimos que R/R' es un factor principal $\mathfrak{F}$-excéntrico de G.

Por otra parte, sabemos que $Z_{\mathfrak{F}}(G) = C_M(G^{\mathfrak{F}})$ para cada $\mathfrak{F}$-normalizador M de G. Como R' está contenido en $Z_{\mathfrak{F}}(G)$, se tiene que $R' \leq Z(R)$. Como R/Z(R) es abeliano, R es nilpotente de clase a lo sumo 2. Además, $R' = \Phi(R)$. Por consiguiente, R es un p- grupo para algún primo p.

Razonando de la misma forma que en [47] , [48], podemos demostrar:

(3.2) **Proposición:** Consideremos un grupo $G \notin \mathfrak{F}$ tal que $G^{\mathfrak{F}}$ es resoluble, y todo subgrupo propio de G está en $\mathfrak{F}$ ó existe un subgrupo maximal M de G tal que M es un $\mathfrak{F}$-grupo y $G = MF(G)$. Entonces: $G^{\mathfrak{F}}$ es un p-grupo para algún primo p. $G^{\mathfrak{F}}$ tiene exponente p, si p es mayor que 2 y exponente a lo sumo 4 si p = 2. $G^{\mathfrak{F}}$ es ó elemental abeliano ó no abeliano con $(G^{\mathfrak{F}})' = Z(G^{\mathfrak{F}}) = \Phi(G^{\mathfrak{F}})$ un grupo elemental abeliano.

(3.3) **Definición:** Dado un grupo finito G, denotamos por S(G) el subgrupo generado por todos los subgrupos simples de G.

Si $\mathfrak{F}$ es una formación saturada, denotamos por $S(\mathfrak{F}) = (G \in \mathfrak{E} \mid S(G) \leq Z_{\mathfrak{F}}(G))$.

Es sencillo probar que si $\mathfrak{F}$ es cerrada para subgrupos, entonces $S(\mathfrak{F})$ es también cerrada para subgrupos. En lo que sigue, supondremos que $\mathfrak{F}$ es **cerrada para subgrupos.** En este caso, es claro que $\mathfrak{F}$ está contenida en $S(\mathfrak{F})$. Además tenemos que:

(3.4) **Proposición:** $\mathfrak{F}$ es la mayor formación contenida en $S(\mathfrak{F})$.

Demostración: Supongamos que $\mathfrak{F}_1$ es una formación contenida en $S(\mathfrak{F})$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\mathfrak{F}_1$ no está contenida en $\mathfrak{F}$. Consideremos un grupo $G \in \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}$ de orden minimal. Entonces, $G \in b(\mathfrak{F})$ y G es un grupo primitivo monolítico. Ahora bien, N es producto directo de subgrupos simples de G luego se tiene que $N \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$. Pero esto implica que N es $\mathfrak{F}$-central en G, contradicción.

(3.5) **Corolario:** Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $S(\mathfrak{F})$ es formación saturada.

ii) $S(\mathfrak{F})$ es homomorfo.

iii) $S(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$.

(3.6) **Teorema:** Consideremos un grupo G con un subgrupo normal N tal que $G/N \in \mathfrak{F}$. Si los subgrupos minimales de N están contenidos en $Z_{\mathfrak{F}}(G)$ y los 2-subgrupos de Sylow de N son abelianos, entonces G es un $\mathfrak{F}$-grupo.

Demostración: Supongamos que el resultado no es cierto y sea G contraejemplo minimal al teorema. Las hipótesis del teorema se mantienen para todo subgrupo de G. En consecuencia, G no es un $\mathfrak{F}$-grupo, pero todos sus subgrupos propios son $\mathfrak{F}$-grupos. Si denotamos por $R = G^{\mathfrak{F}}$, distinguimos dos casos:

a) R' es subgrupo propio de R. Aplicando (3.1), R es resoluble. Como $R \leq N$, los 2-subgrupos de Sylow de R son abelianos. Aplicando (3.2), concluimos que R es un p-grupo elemental abeliano para algún primo p. En consecuencia, $R \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$. Pero R es un factor principal $\mathfrak{F}$-excéntrico de G, contradicción.

b) $R = R'$. Si T es un 2-subgrupo de Sylow de R, T es abeliano. En consecuencia, $T \cap Z(R) = 1$. Si $T \neq 1$, existe un elemento $r \in R$, tal que $o(r) = 2$. De la hipótesis deducimos que $r \in Z_{\mathfrak{F}}(G) \cap R \leq Z(R)$, contradicción. Así, R es de orden impar. Por el teorema de Feit-Thompson, R es resoluble, contradicción.

(3.7) __Corolario:__ Si $G \in S(\mathfrak{F})$ y los 2-subgrupos de Sylow de G son abelianos, se tiene que G es un $\mathfrak{F}$-grupo.

(3.8) __Proposición:__ Consideremos {F(p)} la definición local integrada y plena de $\mathfrak{F}$. Si $F(2) = \mathfrak{F}$, entonces $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}\mathfrak{F} \cap S(\mathfrak{F})$.

__Demostración:__ Denotamos por $\mathfrak{L} = \mathfrak{S}\mathfrak{F} \cap S(\mathfrak{F})$. Supongamos que el resultado no es cierto, y consideremos $G \in \mathfrak{L} - \mathfrak{F}$, de orden minimal. Si $H \leq G$, como $\mathfrak{F}$ es cerrada para subgrupos, se tiene que $H^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$. De esta manera, $H \in \mathfrak{L}$. . De la minimalidad de G, se tiene que todo subgrupo propio de G es un $\mathfrak{F}$-grupo. Aplicando (3.2), deducimos que $R = G^{\mathfrak{F}}$ es un p-grupo para algún primo p. Si p es impar, R es elemental abeliano y así $R \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$, contradicción. En consecuencia, $p = 2$. Ahora bien, R/R' es un factor principal $\mathfrak{F}$-excéntrico de G. Como $G/R \in \mathfrak{F} = F(2)$, esto implica que $G/C_G(R/R') \in F(2)$. De esta manera, tenemos que R/R' es un factor principal $\mathfrak{F}$- central de G, contradicción.

(3.9) __Lema:__ Consideremos {F(p)} la definición local integrada y plena de $\mathfrak{F}$. Sea $\mathfrak{F}^*$ la formación saturada definida localmente por la función formación f^* dada por $f^*(q) = \mathfrak{F}$, para algún primo q. Si p es un primo distinto de q, $f^*(p) = F(p)$. Entonces: $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$ sí y sólo sí $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_q\mathfrak{F}$.

__Demostración:__ Supongamos que $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$. Si $\mathfrak{S}_q\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}$, escogemos un grupo $G \in \mathfrak{S}_q\mathfrak{F} - \mathfrak{F}$, de orden minimal. Entonces, G es un grupo primitivo monolítico. Por hipótesis, existe un q-subgrupo normal no trivial N de G tal que $G/N \in \mathfrak{F}$. De esta manera, Soc(G) es un q-grupo y G es primitivo de tipo 1. Ahora bien, $G/Soc(G) \in \mathfrak{F} = f^*(q)$. Como $\mathfrak{F}^*$ es local, esto implica que G es un $\mathfrak{F}$-grupo contradicción.

Recíprocamente, el contenido $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}^*$ es claro. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\mathfrak{F}^* \neq \mathfrak{F}$ y escogemos un grupo $G \in \mathfrak{F}^* - \mathfrak{F}$ de orden minimal. Entonces, G es un grupo primitivo monolítico. Si G es primitivo de tipo 2, y q divide al orden de Soc(G), entonces $G \in \mathfrak{F} = f^*(q)$ contradicción. En consecuencia, para todo primo p que divide al orden de Soc(G), se tiene que $G \in f^*(p) = F(p)$. Pero entonces, $G \in \mathfrak{F}$ contradicción. Si

G es primitivo de tipo 1, Soc(G) es un p-grupo para algún primo p distinto de q. Entonces, $G \in \mathfrak{S}_p F(p) = F(p)$ contradicción.

(3.10) **Corolario:** Si $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_2\mathfrak{F}$, entonces $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}\mathfrak{F} \cap S(\mathfrak{F})$.

(3.11) **Definición:** Dado un grupo G y un primo p, definimos:

$\psi_p(G) = < x \in G \,/\, o(x) = p >$ si p es impar,

$\psi_p(G) = < x \in G \,/\, o(x) = 2$ ó $4>$ si $p = 2$.

Derr, Deskins y Mukherjee en [12] analizan la influencia de los subgrupos definidos en (3.12) en la estructura del grupo G, siguiendo la línea marcada por Yokoyama en [47], [48].

Concluimos este capítulo, aplicando la teoría de $\mathfrak{F}$-normalizadores para obtener una extensión del Teorema de [12].

(3.12) **Teorema:** Consideremos una formación saturada $\mathfrak{F}$ (no necesariamente cerrada para subgrupos), un primo p, y un grupo G con un subgrupo normal K tal que G/K es un $\mathfrak{F}$-grupo. Si $\psi_p(K) \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$, entonces $G/O_{p'}(K)$ es un $\mathfrak{F}$-grupo.

Demostración: Razonamos por inducción sobre |G|. Claramente podemos suponer que $O_{p'}(K) = 1$. Consideremos un elemento $a \in G^{\mathfrak{F}}$ generador de $\psi_p(G^{\mathfrak{F}})$. Tenemos entonces que $a \in \psi_p(G^{\mathfrak{F}}) \leq Z_F(G) \cap G^{\mathfrak{F}} \leq Z(G^{\mathfrak{F}})$ por (1.2). Aplicando un teorema de Ito (ver [30; p. 235]), $G^{\mathfrak{F}}$ es p-nilpotente. Como $O_{p'}(G^{\mathfrak{F}}) = 1$, tenemos que $G^{\mathfrak{F}}$ es un p-grupo.

Supongamos, por reducción al absurdo, que G no es un $\mathfrak{F}$-grupo y consideremos M un subgrupo maximal $\mathfrak{F}$-crítico de G. Entonces $G = MF(G)$. Es claro que las hipótesis del teorema se mantienen para M. Por inducción, $M/O_{p'}(M)$ es un $\mathfrak{F}$-grupo. Ahora bien; $M^{\mathfrak{F}}$ está contenido en $G^{\mathfrak{F}}$ que es un p-grupo. En consecuencia, M es un $\mathfrak{F}$-normalizador de G. Aplicando (3.2), $G^{\mathfrak{F}}$ es p-elemental abeliano, si p es impar, ó de exponente a lo sumo 4 si $p = 2$. En ambos casos, tenemos que $G^{\mathfrak{F}} \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$ y así G es un $\mathfrak{F}$-grupo, contradicción.

Notemos que el teorema es, formalmente, el mismo que el Teorema de [12]. Sin embargo, nuestra hipótesis es menos restrictiva puesto que no exigimos el carácter resoluble al $\mathfrak{F}$-hipercentro.

(3.13) **Corolario:** Consideremos una formación saturada $\mathfrak{F}$, localmente definida por la función formación integrada y plena f. Si, para algún primo p, $\psi_p(G) \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$ entonces $G/O_{p'}(G) \in f(p)$.

CAPITULO IV

SUBGRUPOS MAXIMALES Y FORMACIONES.

Gaschütz en [24] y Bechtell en [4] estudian la intersección de los subgrupos maximales autonormalizantes de un grupo finito G. Este subgrupo es denotado por L(G). Gaschütz prueba que para cualquier grupo finito G, L(G) es nilpotente. De acuerdo con nuestras definiciones, un subgrupo maximal M de un grupo G es autonormalizante en G sí y sólo sí M es $\mathfrak{N}$-abnormal en G (como es habitual, $\mathfrak{N}$ denota la formación de los grupos nilpotentes). Así, $L(G) = \cap \{ M \leq G \ / \ M$ subgrupo maximal $\mathfrak{N}$-abnormal de $G\}$.

Inspirados por el resultado de Gaschütz, podemos preguntarnos si este resultado es cierto para cualquier formación saturada $\mathfrak{F}$. En este capítulo damos una respuesta satisfactoria a esta pregunta para formaciones saturadas cerradas para subgrupos conteniendo a la formación de los grupos nilpotentes.

Siguiendo esta idea, estudiamos también otras generalizaciones del subgrupo de Frattini extendiendo, mejorando y simplificando los resultados de Bhattacharya y Mukherjee en [7], [37].

Introducimos tres subgrupos, $CL_{\mathfrak{F}}(G)$, $L_{\mathfrak{F}}(G,\pi)$ y $CL_{\mathfrak{F}}(G,\pi)$, relacionados con una formación saturada $\mathfrak{F}$ y con un conjunto de primos π y estudiamos sus propiedades aplicando la teoría de $\mathfrak{F}$-normalizadores desarrollada en el Capítulo II.

Dado un subgrupo maximal M de un grupo G, el índice normal de M es el orden de un factor principal H/K, siendo H minimal en el conjunto de suplementos normales de M en G. Lo denotaremos por $\eta(G : M)$.

Relacionados con el índice normal, introducido por Deskins en [13], y con una formación saturada $\mathfrak{F}$, introducimos en cada grupo G tres subgrupos característicos $S_{\mathfrak{F}}(G)$, $S_{\mathfrak{F}}(G,p)$ y $U_{\mathfrak{F}}(G)$. Observamos que si $\mathfrak{F}$ consiste de grupos resolubles, el subgrupo $S_{\mathfrak{F}}(G)$ coincide con el radical resoluble de G. Además, estudiamos el $\mathfrak{F}$-residual de $S_{\mathfrak{F}}(G,p)$ y de $U_{\mathfrak{F}}(G)$. El análisis de la influencia de tales subgrupos en la estructura del grupo, nos permite extender los resultados de Mukherjee y Bhattacharya en [38].

Definiciones: Dado un grupo G, una formación saturada $\mathfrak{F}$, un conjunto de primos π y un primo p, consideramos las siguientes familias de subgrupos maximales de G:

$\mathbb{R}_{\mathfrak{F}}(G) = \{ M \ / \ M$ subgrupo maximal $\mathfrak{F}$-normal de $G\}$.

$\mathbb{L}_{\mathfrak{F}}(G) = \{ M \ / \ M$ subgrupo maximal $\mathfrak{F}$-abnormal de $G\}$.

$\mathbb{L}_{\mathfrak{F}}(G, \pi)$= { M / M subgrupo maximal $\mathfrak{F}$-abnormal de G ; $|G:M|_{\pi} = 1$}.

$\mathbb{CL}_{\mathfrak{F}}(G)$= { M / M subgrupo maximal $\mathfrak{F}$-abnormal de G , |G:M| compuesto}.

$\mathbb{CL}_{\mathfrak{F}}(G, \pi)$ = { M / M subgrupo maximal $\mathfrak{F}$-abnormal de G, |G:M| compuesto $|G:M|_{\pi} = 1$}.

$\Sigma_{\mathfrak{F}}(G)$= { M / M es un subgrupo maximal $\mathfrak{F}$-abnormal de G, |G:M| compuesto $\eta(G : M) \neq |G : M|$}.

$\mathbb{U}_{\mathfrak{F}}(G)$= { M / M es un subgrupo maximal $\mathfrak{F}$-abnormal de G, |G:M| compuesto, $\eta(G : M)$ no es libre de cuadrados}.

$\Sigma_{\mathfrak{F}}(G, p)$= { M / M es un subgrupo maximal $\mathfrak{F}$-abnormal de G, |G:M| compuesto $\eta(G:M)_p \neq |G:M|_p$ }.

Definimos los subgrupos característicos siguientes:

$R_{\mathfrak{F}}(G) = \cap \{ M / M \in \mathbb{R}_{\mathfrak{F}}(G)\}$ si $\mathbb{R}_{\mathfrak{F}}(G)$ no es vacía, $R_{\mathfrak{F}}(G) = G$ en caso contrario.

$L_{\mathfrak{F}}(G) = \cap \{ M / M \in \mathbb{L}_{\mathfrak{F}}(G)\}$ si $\mathbb{L}_{\mathfrak{F}}(G)$ no es vacía, $L_{\mathfrak{F}}(G) = G$ en caso contrario.

$L_{\mathfrak{F}}(G, \pi) = \cap \{ M / M \in \mathbb{L}_{\mathfrak{F}}(G, \pi)\}$ si $\mathbb{L}_{\mathfrak{F}}(G, \pi)$ no es vacía, $L_{\mathfrak{F}}(G, \pi) = G$ en caso contrario.

$CL_{\mathfrak{F}}(G) = \cap \{ M / M \in \mathbb{CL}_{\mathfrak{F}}(G)\}$ si $\mathbb{CL}_{\mathfrak{F}}(G)$ no es vacía, $CL_{\mathfrak{F}}(G) = G$ en caso contrario.

$CL_{\mathfrak{F}}(G, \pi) = \cap \{M / M \in \mathbb{CL}_{\mathfrak{F}}(G, \pi)\}$ si $\mathbb{CL}_{\mathfrak{F}}(G, \pi)$ no es vacía, $CL_{\mathfrak{F}}(G, \pi) = G$ en caso contrario.

$S_{\mathfrak{F}}(G) = \cap \{ M / M \in \Sigma_{\mathfrak{F}}(G)\}$ si $\Sigma_{\mathfrak{F}}(G)$ es no vacía, $S_{\mathfrak{F}}(G) = G$ en caso contrario.

$S_{\mathfrak{F}}(G, p) = \cap \{ M / M \in \Sigma_{\mathfrak{F}}(G, p)\}$ si $\Sigma_{\mathfrak{F}}(G, p)$ es no vacía, $S_{\mathfrak{F}}(G, p) = G$ en caso contrario.

$U_{\mathfrak{F}}(G) = \cap \{ M / M \in \mathbb{U}_{\mathfrak{F}}(G)\}$ si $\mathbb{U}_{\mathfrak{F}}(G)$ es no vacía, $U_{\mathfrak{F}}(G) = G$ en caso contrario.

Es claro que $\Phi(G)$ está contenido en todos ellos. De hecho, $\Phi(G) = R_{\mathfrak{F}}(G) \cap L_{\mathfrak{F}}(G)$.

Denotando por S(G) cualquiera de los subgrupos arriba definidos, es sencillo demostrar que $S(G)K/K \leq S(G/K)$ para cada $K \trianglelefteq G$, y si $K \leq S(G)$ se tiene que $S(G/K) = S(G)K/K$.

Si $\pi = \{q\}$, denotamos $L_{\mathfrak{F}}(G, \pi) = L_{\mathfrak{F}}(G, q)$, etc. Notemos que si p es un primo que no divide al orden de G, entonces $L_{\mathfrak{F}}(G) = L_{\mathfrak{F}}(G, p)$.

1. LOS SUBGRUPOS $R_{\mathfrak{F}}(G)$ Y $L_{\mathfrak{F}}(G)$.

En esta sección, **$\mathfrak{F}$ denotará una formación saturada cerrada para subgrupos conteniendo a $\mathfrak{N}$, la clase de los grupos nilpotentes.**

Empezamos demostrando algunas propiedades de $R_{\mathfrak{F}}(G)$ y $L_{\mathfrak{F}}(G)$.

(1.1) <u>Lema:</u> Consideremos un grupo G. Entonces:

i)Si $R_{\mathfrak{F}}(G) < G$, $R_{\mathfrak{F}}(G) = \cap \{M$ / M es subgrupo maximal monolítico $\mathfrak{F}$-normal de G$\}$ y si $L_{\mathfrak{F}}(G) < G$, $L_{\mathfrak{F}}(G) = \cap \{$ M / M es subgrupo maximal monolítico $\mathfrak{F}$-abnormal de G$\}$.

ii) $Z_{\mathfrak{F}}(G) \leq L_{\mathfrak{F}}(G)$ y $G^{\mathfrak{F}} \leq R_{\mathfrak{F}}(G)$.

<u>Demostración:</u> i) Si M es un subgrupo maximal $\mathfrak{F}$-abnormal (respectivamente, $\mathfrak{F}$-normal) de G de tipo 3, existen subgrupos maximales M_i of G, i = 1,2 de forma que $M_G = (M_1)_G \cap (M_2)_G$ y M_i es un subgrupo maximal monolítico $\mathfrak{F}$-abnormal (respectivamente, $\mathfrak{F}$-normal) de G para cada i. En consecuencia, i) se verifica claramente.

ii)Es claro que $G^{\mathfrak{F}} \leq M_G$, para cada subgrupo maximal $\mathfrak{F}$-normal M de G. Por otra parte, si M es un subgrupo maximal monolítico $\mathfrak{F}$-abnormal de G, $Soc(G/M_G)$ es un factor principal $\mathfrak{F}$-excéntrico de G. Así, $Z_{\mathfrak{F}}(G) \leq M_G$. Por consiguiente, $Z_{\mathfrak{F}}(G) \leq L_{\mathfrak{F}}(G)$ y $G^{\mathfrak{F}} \leq R_{\mathfrak{F}}(G)$.

Seguidamente, utilizamos la teoría de normalizadores para demostrar un conocido teorema que se atribuye a Semetkov (ver [51; Lemma 3.2]).

(1.2) <u>Teorema:</u> Consideremos un grupo G y N un subgrupo normal de G. El grupo cociente $N/N \cap \Phi(G)$ es un $\mathfrak{F}$-grupo sí y sólo sí N es un $\mathfrak{F}$-grupo.

<u>Demostración:</u> Supongamos que $N/N \cap \Phi(G)$ es un $\mathfrak{F}$-grupo y $N \cap \Phi(G) \neq 1$. Entonces $N^{\mathfrak{F}} \leq N \cap \Phi(G)$ y así $N^{\mathfrak{F}}$ es nilpotente. En consecuencia, $Nor_{\mathfrak{F}}(N)$ es una clase de conjugación de subgrupos cubre-evita de N. Si D es un $\mathfrak{F}$-normalizador de N, el argumento de Frattini implica que $G = NN_G(D)$. Ahora bien, $N = N^{\mathfrak{F}}D$; en consecuencia, $G = N^{\mathfrak{F}}N_G(D)$. Así, $G = N_G(D)$ y D es un subgrupo normal de G. Aplicando (3.2) Cap. II, concluimos que N es un $\mathfrak{F}$-grupo.

Finalmente, notemos que si N es un $\mathfrak{F}$-grupo entonces $N/N \cap \Phi(G)$ es claramente un $\mathfrak{F}$-grupo.

(1.3) **Teorema:** Para cada grupo G, $L_{\mathfrak{F}}(G)$ es un $\mathfrak{F}$-grupo.

Demostración: Razonamos por inducción sobre el orden de G. Si $\Phi(G) \neq 1$, por inducción tenemos que $L_{\mathfrak{F}}(G/\Phi(G)) \in \mathfrak{F}$. Ahora bien, $\Phi(G) \leq L_{\mathfrak{F}}(G)$ y por tanto $L_{\mathfrak{F}}(G/\Phi(G)) = L_{\mathfrak{F}}(G)/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Aplicando el teorema anterior, tenemos que $L_{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$ y el teorema queda demostrado. De esta forma, podemos suponer que $\Phi(G) = 1$. Si $Z_{\mathfrak{F}}(G) = 1$, entonces $L_{\mathfrak{F}}(G) = 1$. En efecto, en otro caso existe un subgrupo normal minimal N de G tal que $N \leq L_{\mathfrak{F}}(G)$. Como suponemos $\Phi(G) = 1$, N no está contenido en $R_{\mathfrak{F}}(G)$ y así existe un subgrupo maximal monolítico $\mathfrak{F}$-normal M of G tal que N no está contenido en M ; en consecuencia, N es $\mathfrak{F}$-central en G y $N \leq Z_{\mathfrak{F}}(G) = 1$, contradicción. Por consiguiente, podemos suponer $Z_{\mathfrak{F}}(G) \neq 1$. Por hipótesis de inducción, $L_{\mathfrak{F}}(G/ Z_{\mathfrak{F}}(G)) = L_{\mathfrak{F}}(G)/Z_{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$. Como $\mathfrak{F}$ es cerrada para subgrupos, $Z_{\mathfrak{F}}(G)$ está contenido en $Z_{\mathfrak{F}}(L_{\mathfrak{F}}(G))$. Así, $L_{\mathfrak{F}}(G)/ Z_{\mathfrak{F}}(L_{\mathfrak{F}}(G))$ es un $\mathfrak{F}$-grupo y de esa manera $L_{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$.

Tomando $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ en el teorema anterior, obtenemos el conocido resultado de Gaschütz mencionado al principio del capítulo : L(G) es nilpotente para cada grupo G.

Seguidamente, describimos el subgrupo $L_{\mathfrak{U}}(G)$, siendo $\mathfrak{U}$ la clase de los grupos superresolubles . Para ello, necesitamos un lema preliminar.

(1.4) **Lema:** Consideremos un grupo G y M un subgrupo maximal de G de tipo 2 tal que $|G:M|$ es primo. Entonces, existe un subgrupo maximal T de G de tipo 2 tal que $|G:T|$ es compuesto y $M_G = T_G$.

Demostración: Razonado por inducción sobre $|G|$, podemos suponer $M_G = 1$. Tenemos entonces que $G \in \mathfrak{P}_2$. Supongamos que $|G:M| = p$, entonces $|M|$ divide a $(p-1)!$. En consecuencia, p es el mayor primo que divide al orden de G. Sea P un p-subgrupo de Sylow de Soc(G). Entonces, $N_G(P) < G$ y $G = Soc(G)\, N_G(P)$. Consideremos T un subgrupo maximal de G tal que $N_G(P) \leq T$. Entonces, $G = Soc(G)T$ y $|G : T| = 1+kp$ para algún entero k. Es claro entonces que $T_G = 1$ y $|G :T|$ es compuesto.

Aplicando el lema anterior, es fácil demostrar:

(1.5) **Corolario:** $L_{\mathfrak{U}}(G) = \cap$ {M / M es un subgrupo maximal de G tal que $|G:M|$ es compuesto} para cada grupo G.

De esta manera, tomando $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ en (1.3), obtenemos un conocido resultado de Bathia (ver [7]; Th. 3]): $L_{\mathfrak{U}}(G)$ es superresoluble.

El siguiente teorema caracteriza los grupos estudiados en (3.1) Cap. III, en el caso de que $\mathfrak{F}$ sea cerrada para subgrupos.

(1.5) <u>Teorema:</u> Consideremos $\mathfrak{F}$ una formación saturada cerrada para subgrupos, y G un grupo tal que $(G^{\mathfrak{F}})'$ es subgrupo propio de $G^{\mathfrak{F}}$. Entonces todo subgrupo propio de G es un $\mathfrak{F}$-grupo sí y sólo sí se satisfacen las dos condiciones siguientes:

i) $L_{\mathfrak{F}}(G) = Z_{\mathfrak{F}}(G)$.

ii) Todo subgrupo propio de $G/\Phi(G)$ es un $\mathfrak{F}$-grupo.

<u>Demostración:</u> Notemos, en primer lugar, que la hipótesis sobre G implica que G no está en $\mathfrak{F}$. Supongamos que se verifican i) y ii). Si H es un subgrupo propio de G, entonces $H\Phi(G)/\Phi(G)$ es un subgrupo propio de $G/\Phi(G)$. Por ii), $H/H \cap \Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Ahora bien, $H \cap \Phi(G) \leq H \cap L_{\mathfrak{F}}(G) = H \cap Z_{\mathfrak{F}}(G) \leq Z_{\mathfrak{F}}(H)$ pues $\mathfrak{F}$ es cerrada para subgrupos. En consecuencia, $H^{\mathfrak{F}} \leq Z_{\mathfrak{F}}(H)$, y $H^{\mathfrak{F}}$ resoluble. Por otra parte, $H^{\mathfrak{F}}$ centralizado por $Z_{\mathfrak{F}}(H)$ por (3.4) Cap.II. Así, $H^{\mathfrak{F}}$ es abeliano. Por (1.1) Cap. III, $H^{\mathfrak{F}}$ es complementado por un. $\mathfrak{F}$-normalizador de H el cual contiene a $Z_{\mathfrak{F}}(H)$. Por consiguiente, $H^{\mathfrak{F}} = 1$.

Recíprocamente, si cada subgrupo propio de G es un $\mathfrak{F}$-grupo, aplicando (3.1) Cap. III concluimos que $G^{\mathfrak{F}}$ es un grupo resoluble y $Z_{\mathfrak{F}}(G) = \Phi(G)$. En consecuencia, el grupo $G/\Phi(G)$ tiene $\mathfrak{F}$-hipercentro trivial. Esto implica que $L_{\mathfrak{F}}(G)/\Phi(G) = L_{\mathfrak{F}}(G/\Phi(G)) = 1$ y así se tiene i). Finalmente, ii) es claro.

2. LOS SUBGRUPOS $L_{\mathfrak{F}}(G,p)$ Y $CL_{\mathfrak{F}}(G)$.

Al igual que en la sección anterior, $\mathfrak{F}$ **denotará una formación saturada cerrada para subgrupos conteniendo a $\mathfrak{N}$, la clase de los grupos nilpotentes.**

Bhattacharya and Mukherjee en [37], estudian el subgrupo $\Phi_p(G) = \cap \{M/ M$ es un subgrupo maximal de G con $|G:M|_p = 1\}$. Demuestran que $\Phi_p(G)$ posee un p-subgrupo de Sylow normal, P, de forma que $\Phi_p(G)/P$ es un grupo nilpotente. Es decir, $\Phi_p(G) \in \mathfrak{S}_p\mathfrak{N}$ o, equivalentemente, el $\mathfrak{N}$-residual de $\Phi_p(G)$ es un p-grupo.

En este párrafo demostramos que $L_{\mathfrak{F}}(G,p)$ está en $\mathfrak{S}_p\mathfrak{F}$ y estudiamos la intersección de dos de estos subgrupos correspondientes a dos primos distintos. Además, demostramos que el $\mathfrak{F}$-residual de $CL_{\mathfrak{F}}(G)$ es nilpotente y analizamos la infuencia de este subgrupo sobre la formación $\mathfrak{F}$.

(2.1) <u>Lema:</u> Consideremos un grupo G. El $\mathfrak{F}$-residual, T, de $L_{\mathfrak{F}}(G,p)$ está contenido en $\Phi_p(G)$. Así, T es resoluble.

<u>Demostración:</u> Supongamos que T no está contenido en $\Phi_p(G)$. Entonces, existe un subgrupo maximal M de G,tal que $|G:M|_p = 1$ y $G = TM$. Como $\mathfrak{F}$ es cerrada para subgrupos, se tiene que $T \leq G^{\mathfrak{F}}$ y $G = G^{\mathfrak{F}}M$. Así, M es un subgrupo maximal $\mathfrak{F}$-abnormal de G. Esto implica que $L_{\mathfrak{F}}(G,p) \leq M$, contradicción.

(2.2) <u>Teorema:</u> Consideremos un grupo G y p un primo. Entonces $L_{\mathfrak{F}}(G,p)$ es un $\mathfrak{S}_p\mathfrak{F}$-grupo.

<u>Demostración:</u> Denotamos por $S(X) = L_{\mathfrak{F}}(X,p)$ para cada grupo X. Dividimos la demostración en tres pasos:

Paso 1: Cada p-subgrupo de Sylow de $G^{\mathfrak{F}} \cap S(G)$ es normal en G. Sea P un p-subgrupo de Sylow de $G^{\mathfrak{F}} \cap S(G)$, tenemos que $G = (G^{\mathfrak{F}} \cap S(G))N_G(P)$. Supongamos que P no es normal en G y consideremos M, subgrupo maximal de G conteniendo a $N_G(P)$. Se tiene que $G = G^{\mathfrak{F}}M$ y M es $\mathfrak{F}$-abnormal en G. Como $|G:M|_p = 1$, $S(G) \leq M$ contradicción. Por consiguiente, P es un subgrupo normal de G.

Paso 2: Si el $\mathfrak{F}$-residual de S(G) es un p'-grupo, entonces S(G) es un $\mathfrak{F}$-grupo. Denotamos por T el $\mathfrak{F}$-residual de S(G) y supongamos que T es un p'-grupo. Consideremos M un subgrupo maximal $\mathfrak{F}$-abnormal de G. Si T no está contenido en M, entonces $G = TM$. Esto implica que $|G:M|_p = 1$. Entonces, $S(G) \leq M$ contradicción. De esta manera, T está contenido en $L_{\mathfrak{F}}(G)$. Consideremos D un $\mathfrak{F}$-normalizador de S(G). Como T es resoluble, $Nor_{\mathfrak{F}}(S(G))$ es una clase de conjugación de subgrupos de $S(G)$. Así, $G = S(G)N_G(D)$. Si $N_G(D)$ es un subgrupo propio de G, existe un subgrupo maximal M de G tal que $N_G(D) \leq M$. Por otra parte, $S(G) = TD$. En consecuencia, $G = TM$ y M es un subgrupo maximal $\mathfrak{F}$-abnormal de G. Entonces tenemos que $T \leq L_{\mathfrak{F}}(G) \leq M$ y $G = M$ contradicción. Por consiguiente, D es un subgrupo normal de G. Por (3.2) Cap. II, tenemos que $S(G)$ es un $\mathfrak{F}$-grupo.

Paso 3. Conclusión. Si T es un p'-grupo entonces $S(G) \in \mathfrak{F} \subset \mathfrak{S}_p\mathfrak{F}$. Por consiguiente, podemos suponer que p divide al orden de T. Por paso 1, existe un p-subgrupo de Sylow P de T tal que P es un subgrupo normal de G. Ahora, $S(G/P) = S(G)/P$ y el $\mathfrak{F}$-residual de $S(G)/P$ es T/P. Como T/P es un p'-grupo, tenemos que $T = P$ por el paso 2. En consecuencia, $S(G)$ es un $\mathfrak{S}_p\mathfrak{F}$-grupo.

Notemos que (2.1) proporciona una nueva demostración de (1.3), tomando un primo p que no divida al orden de G.

No es cierto, en general, que $L_{\mathfrak{F}}(G,p)$ es un $\mathfrak{F}$-grupo como lo demuestra el siguiente ejemplo:

<u>EJEMPLO 1:</u> Consideramos $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$, la formación de los grupos superresolubles, y el grupo $G = G_1 \times G_2$ producto diresto de un grupo no abeliano G_1 de orden qr siendo $5 \leq q < r$, q,r primos, y G_2, el grupo alternado de grado 4. Los subgrupos maximales $\mathfrak{U}$-abnormales de G son precisamente los 2'-subgrupos de Hall de G

<u>EJEMPLO 2:</u> Si $\mathfrak{F}$ no contiene a $\mathfrak{N}$, los resultados (1.3) y (2.2) no son ciertos en general. Consideremos $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_3$, la clase de los 3-grupos y $G = SL(2,3)$. Los subgrupos maximales $\mathfrak{S}_3$-abnormales de G son $\{ N_G(S) / S \in Syl_3(G)\}$ y $L_{\mathfrak{F}}(G,3) = L_{\mathfrak{F}}(G) = Z(G)$ que no es un 3-grupo ($Z(G) \cong Z_2$).

(2.3) <u>Corolario:</u> Si $\mathfrak{F}$ es una formación saturada de grupos resolubles, para cada grupo G y para cada primo p, $L_{\mathfrak{F}}(G,p)$ es un grupo resoluble. En particular, si $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ la formación de los grupos nilpotentes, $L_{\mathfrak{N}}(G,p)$ es un grupo metanilpotente.

(2.4) <u>Corolario:</u> Consideremos un grupo G con $G^{\mathfrak{F}}$ resoluble. Si cada maximal $\mathfrak{F}$-abnormal de G es un $\mathfrak{F}$-grupo, entonces $G^{\mathfrak{F}}$ es un p-grupo para algún primo p.

<u>Demostración:</u> Es claro que $Proy_{\mathfrak{F}}(G) = \{M / M$ es un subgrupo maximal $\mathfrak{F}$-abnormal de G$\}$. Como $G \in \mathfrak{S}\mathfrak{F}$, $Proy_{\mathfrak{F}}(G)$ es una clase de conjugación de subgrupos de

G. Sea M un maximal $\mathfrak{F}$-abnormal de G y p el número primo tal que $|G:M| = p^t$. Entonces, $L_{\mathfrak{F}}(G,p) = G \in \mathfrak{S}_p\mathfrak{F}$ por (2.2).

(2.5) **Proposición:** Consideremos un grupo G tal que o $G^{\mathfrak{F}}$ es resoluble o para algún primo p, $L_{\mathfrak{F}}(G,p)$ es un grupo resoluble. Entonces: $L_{\mathfrak{F}}(G) = L_{\mathfrak{F}}(G,p) \cap L_{\mathfrak{F}}(G,q)$ para cada primo $q \neq p$.

Demostración: Denotamos por $L_p = L_{\mathfrak{F}}(G,p)$ y $L_q = L_{\mathfrak{F}}(G,q)$. Supongamos que existe un subgrupo maximal $\mathfrak{F}$-abnormal M de G, tal que $L_p \cap L_q$ no está contenido en M. Entonces, $G = ML_p = ML_q = G^{\mathfrak{F}}M$. Ahora bien, con las hipótesis de la proposición, M es un subgrupo maximal de G de tipo 1. Así, $|G:M| = r^t$ para algún primo r. En consecuencia, $|G:M|_p = 1$ o $|G:M|_q = 1$. De esta manera, $L_p \leq M$ o $L_q \leq M$, contradicción. En definitiva, $L_{\mathfrak{F}}(G) = L_p \cap L_q$.

Decimos que un grupo G posee una *torre de Sylow de tipo superresoluble* si G satisface:

Supongamos que $p_r < \dots\dots\dots < p_2 < p_1$ son los primos que dividen al orden de G. Entonces $P_1P_2 \dots P_k \trianglelefteq G$, $1 \leq k \leq r$, donde P_k es un p_k-subgrupo de Sylow de G.

En el caso superresoluble, $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ tenemos:

(2.6) **Proposición:** Consideremos un grupo G y p un primo. Si p no divide al orden de $L_{\mathfrak{U}}(G,p)$ o p es el mayor primo divisor del orden de $L_{\mathfrak{U}}(G,p)$, entonces $L_{\mathfrak{U}}(G,p)$ tiene una torre de Sylow de tipo superresoluble.

Demostración: Si p no divide al orden de $L_{\mathfrak{U}}(G,p)$, entonces $L_{\mathfrak{U}}(G,p)$ es superresoluble por (2.2). Supongamos que p es el mayor primo divisor del orden de $L_{\mathfrak{U}}(G,p)$. Es sencillo demostrar que $L_{\mathfrak{U}}(G,p)$ tiene un p-subgrupo de Sylow normal P. Entonces, $L_{\mathfrak{U}}(G,p)^{\mathfrak{U}}$ está contenido en P por (2.2). Por consiguiente, $L_{\mathfrak{U}}(G,p)/P$ es superresoluble. De esta manera, $L_{\mathfrak{U}}(G,p)$ tiene una torre de Sylow de tipo superresoluble.

EJEMPLO 3: Los subgrupos maximales $\mathfrak{U}$-abnormales de G = Alt(4), el grupo alternado de grado 4, son sus 3-subgrupos de Sylow. Así, $L_{\mathfrak{U}}(G,2) = G$ que no posee una torre de Sylow de tipo superresoluble. Aquí, 2 no es el mayor primo que divide al orden de $L_{\mathfrak{U}}(G,2)$.

Finalizamos esta sección estudiando el subgrupo $CL_{\mathfrak{F}}(G)$.

(2.7) **Proposición:** Consideremos un grupo G. Entonces, el $\mathfrak{F}$-residual de $CL_{\mathfrak{F}}(G)$ es nilpotente, i.e. $CL_{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$.

Proof: Razonamos por inducción sobre $|G|$. Denotamos por T el $\mathfrak{F}$-residual de $CL_{\mathfrak{F}}(G)$. Podemos suponer que $T \neq 1$. Sea p el mayor primo divisor del orden de T. Entonces, T tiene un p-subgrupo de Sylow normal P. Sea N un subgrupo normal minimal de G tal que $N \leq P$. Por inducción, T/N es nilpotente. Si B es otro normal minimal de G, enteonces TB/B es nilpotente. Por consiguiente, T es nilpotente y la proposición queda demostrada. Así, podemos suponer que G un único subgrupo normal minimal N, cuyo orden es una potencia de p. Supongamos que $N \leq \Phi(G)$. Entonces, $T/T \cap \Phi(G)$ es nilpotente. Aplicando [4; Corollary 2.3.1], T es nilpotente. En consecuencia, podemos suponer que G es un grupo primitivo de tipo 1 y existe un subgrupo maximal M de G tal que G = MN. Entonces, $|G:M|$ es primo y N es cíclico. Entonces, G es superresoluble y el grupo derivado, G', de G es nilpotente. Como $\mathfrak{F}$ contiene a la formación de los grupos nilpotentes, $T \leq G'$. Así, T es nilpotente y la proposición queda demostrada.

Es claro que no podemos mejorar la tesis de la proposición reemplazando nilpotente por abeliano; si G es un grupo superresoluble cuyo $\mathfrak{N}$-residual es nilpotente de clase 2, (por ejemplo, consideramos $P = \langle x,y \mid x^3 = y^3 = z^3 = 1,\ z = [x,y] \rangle$ el grupo extraespecial de orden 27 y exponente 3 y α un automorfismo de P actuando sobre los generadores $x^{\alpha} = x^{-1}$, $y^{\alpha} = y^{-1}$ y formamos el producto semidirecto $G = P\langle\alpha\rangle$), entonces G obviamente verifica que el $\mathfrak{N}$-residual de $CL_{\mathfrak{N}}(G) = G$ es un grupo nilpotente no abeliano.

En general, $CL_{\mathfrak{F}}(G)$ no es un $\mathfrak{F}$-grupo. Tomamos, por ejemplo, el grupo G del ejemplo 1 y $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$. Los subgrupos maximales $\mathfrak{N}$-abnormales de G de índice compuesto son los 2'-subgrupos de Hall de G y $CL_{\mathfrak{N}}(G) = G_1$ que no es nilpotente.

Obviamente, $CL_{\mathfrak{F}}(G)$ no es siempre un grupo superresoluble: basta tomar, por ejemplo, una formación $\mathfrak{F}$ no contenida en $\mathfrak{U}$ y un $\mathfrak{F}$-grupo no superresoluble. De hecho, en lo que sigue demostramos que las formaciones $\mathfrak{F}$ tales que $CL_{\mathfrak{F}}(G)$ es superresoluble para todo grupo G son exactamente aquellas compuestas por grupos superresolubles.

(2.8) **Teorema:** $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{U}$, sí y sólo sí $CL_{\mathfrak{F}}(G)$ es superresoluble para cada grupo G.

Demostración: Supongamos, primero, que $\mathfrak{F}$ está contenida en $\mathfrak{U}$. Demostramos que $CL_{\mathfrak{F}}(X)$ es superresoluble para cada grupo X. Supongamos que el resultado no es cierto y tomamos G un contraejemplo de orden minimal. Entonces, T= $CL_{\mathfrak{F}}(G)^{\mathfrak{F}} \neq 1$. Sea N un subgrupo normal minimal de G tal que $N \leq T$. De la minimalidad de G, tenemos que $CL_{\mathfrak{F}}(G)/N = CL_{\mathfrak{F}}(G/N)$ es superresoluble. En consecuencia, el $\mathfrak{U}$-residual de $CL_{\mathfrak{F}}(G)$ está contenido en N. Así, $N = CL_{\mathfrak{F}}(G)^{\mathfrak{U}}$. Sea R un $\mathfrak{U}$-proyector de $CL_{\mathfrak{F}}(G)$. Como el conjunto $Proj_{\mathfrak{U}}(CL_{\mathfrak{F}}(G))$ es una clase de conjugación de subgrupos de $CL_{\mathfrak{F}}(G)$, tenemos que $G = CL_{\mathfrak{F}}(G)N_G(R) = NN_G(R)$. Si $N_G(R)$ es un subgrupo propio de G, $N_G(R)$ es un subgrupo maximal $\mathfrak{F}$-abnormal de G índice primo. Así, N es cíclico. Por consiguiente, $CL_{\mathfrak{F}}(G)$ es superresoluble, contradicción. Entonces, R es un subgrupo normal de G Aplicando (2.7) y (2.6) de Cap. II así como (3.2) de Cap. II, concluimos que $CL_{\mathfrak{F}}(G)$ es superresoluble, contradicción final.

Recíprocamente, supongamos que $CL_{\mathfrak{F}}(X)$ es superresoluble para cada grupo X. Si G es un $\mathfrak{F}$-grupo, todos los subgrupos maximales de G son $\mathfrak{F}$-normales. Así, $CL_{\mathfrak{F}}(G) = G$ es superresoluble. En consecuencia, $\mathfrak{F}$ está contenida en $\mathfrak{U}$.

3. EL SUBGRUPO $CL_{\mathfrak{F}}(G,\pi)$.

Como es habitual, $\mathfrak{F}$ denotará una formación saturada cerrada para subgrupos. En esta sección extendemos y mejoramos algunos resultados de [7],[37].

(3.1) **Teorema:** Consideremos un grupo G y p un primo. El $\mathfrak{F}$-residual de $CL_{\mathfrak{F}}(G,p)$ es p-resoluble sí y sólo sí es resoluble.

Demostración: Razonamos por inducción sobre el orden de G. Denotamos por T el $\mathfrak{F}$-residual de $CL_{\mathfrak{F}}(G,p)$. Supongamos que T es p-resoluble. El resultado es claro si T = 1. Así, podemos suponer que $T \neq 1$. Sea N un subgrupo normal minimal de G tal que $N \leq T$. Como T es p-resoluble, N es un p-grupo o un p'-grupo. Si N es un p-grupo, entonces N es resoluble. Por inducción T/N es resoluble. En consecuencia, T es resoluble y el teorema queda demostrado.

En consecuencia, podemos suponer que N es un p'-grupo. Sea q el mayor primo que divide al orden de N y consideremos Q un q-subgrupo de Sylow de N . Entonces, $G = NN_G(Q)$. Si $N_G(Q)$ es un subgrupo propio de G, existe un subgrupo maximal M de G tal que $N_G(Q) \leq M$. Entonces, G = NM y M es un subgrupo maximal $\mathfrak{F}$-abnormal de G. Como N es un p'-grupo, $|G:M|_p = 1$. Si |G:M| es compuesto, $T \leq CL_{\mathfrak{F}}(G,p) \leq M$, contradicción. Así, |G:M| es un número primo. Pero entonces, |G:M| = 1+kq es un primo mayor que q dividiendo al orden de N , contradicción. En definitiva, Q es un subgrupo normal de G y N = Q. Por inducción, T/N es resoluble. Como N es resoluble, tenemos que T es un grupo resoluble.

(3.2) **Teorema:** Consideremos un grupo G y p un número primo. Si p es el mayor primo que divide al orden del $\mathfrak{F}$-residual de $CL_{\mathfrak{F}}(G,p)$ o p no divide al orden del $\mathfrak{F}$-residual de $CL_{\mathfrak{F}}(G,p)$, entonces el $\mathfrak{F}$-residual de $CL_{\mathfrak{F}}(G,p)$ posee una torre de Sylow de tipo superresoluble.

Demostración: Como en el teorema anterior, denotamos con T el $\mathfrak{F}$-residual de $CL_{\mathfrak{F}}(G,p)$. Supongamos que p no divide al orden de T. Sea q el mayor primo que divide al orden de T y Q un q-subgrupo de Sylow de T. Si $N_G(P)$ es un subgrupo propio de G, escogemos un subgrupo maximal M de G tal que $N_G(P) \leq M$. Entonces, G = TM y así M es un maximal $\mathfrak{F}$-abnormal de G. Por otra parte, |G : M| = 1+kq para algún entero k. Como $CL_{\mathfrak{F}}(G,p)$ no está contenido en M, el índice de M en G debe ser un número primo. Pero esto contradice el hecho que q sea el mayor primo que divide al orden de T. En consecuencia Q es un subgrupo normal de G. Ahora, si consideramos el grupo G/Q verifica las hipótesis del teorema. En consecuencia, T/Q posee una torre de Sylow de tipo superresoluble trabajando por inducción sobre el orden de G. Por tanto, G posee una torre de Sylow de tipo superresoluble.

Supongamos ahora que p es el mayor primo que divide al orden de T. Razonando como en el caso anterior, T posee un p-subgrupo de Sylow normal, P. Como T/P es un p'-grupo, T/P posee una torre de Sylow de tipo superresoluble en virtud del caso anterior. De esta forma, T posee dicha propiedad.

(3.3) <u>**Corolario:**</u> Supongamos que $\mathfrak{F}$ es una formacion saturada de grupos resolubles. Consideremos un grupo G. Entonces: $CL_{\mathfrak{F}}(G,p)$ es un grupo resoluble sí y sólo sí el $\mathfrak{F}$-residual de $CL_{\mathfrak{F}}(G,p)$ es p-resoluble.

Notemos que si $\mathfrak{F}$ es la formación trivial, $CL_{\mathfrak{F}}(G,p)$ es el subgrupo S(G) definido en [37]. En este caso el $\mathfrak{F}$-residual de S(G) es S(G). Así, el teorema 8 de [37] se mejora en la forma siguiente:

S(G) es resoluble sí y sólo sí S(G) es p-resoluble. Si p es el mayor primo que divide al orden de S(G), S(G) es resoluble.

(3.4) <u>**Teorema:**</u> Consideremos π un conjunto de primos y $\mathfrak{H}$ la clase de todos los grupos T tal que $CL_{\mathfrak{F}}(T,\pi) = T$. Entonces: $\mathfrak{H}$ es una clase de Schunck. Además, si G es un grupo resoluble con un $\mathfrak{H}$-proyector normal entonces G está en $\mathfrak{H}$.

<u>Demostración:</u> Para cada grupo X, denotamos $S(X) = CL_{\mathfrak{F}}(X,\pi)$. Claramente, $\mathfrak{H}$ es un homomorfo. Consideremos un grupo G tal que $G/\Phi(G) \in \mathfrak{H}$. Se tiene que $S(G)/\Phi(G) = S(G/\Phi(G)) = G/\Phi(G)$. De esta manera, $S(G) = G$ y $G \in \mathfrak{H}$. En consecuencia, $\mathfrak{H}$ es un homomorfo saturado. Tomemos G en la frontera de $\mathfrak{H}$. Entonces, $S(G) = 1$; en otro caso, sea N un subgrupo normal minimal de G tal que $N \leq S(G)$. Como $S(G/N) = S(G)/N$ y $G/N \in \mathfrak{H}$, tenemos que $S(G) = G$ contradicción; así, $S(G) = 1$. Sea A un subgrupo normal minimal de G. Existe un subgrupo maximal $\mathfrak{F}$-abnormal de G tal que $|G:M|_{\pi} = 1$, $|G:M|$ es compuesto y $G = AM$. Si B es otro subgrupo normal minimal de G, entonces $G = BM$; en otro caso, M/B sería un subgrupo maximal $\mathfrak{F}$-abnormal de G/B tal que $|G/B:M/B|_{\pi} = 1$ y $|G/B:M/B|$ compuesto. En definitiva, S(G/B) estaría contenido en M/B contradicción. En consecuencia, $G = BM$ para cada subgrupo normal minimal de G. Por consiguiente, $M_G = 1$ y G es un grupo primitivo.

Por otra parte, si q es un número primo, el grupo cíclico de orden q está en $\mathfrak{H}$

Entonces, si G es un grupo resoluble con un $\mathfrak{H}$-proyector normal, podemos razonar como en (4.2) Cap.II, y concluir que $G \in \mathfrak{H}$.

(3.5) **Teorema:** Consideremos un grupo G y π un conjunto de primos tal que $CL_{\mathfrak{F}}(G,\pi)$ es resoluble. Entonces, $CL_{\mathfrak{F}}(G,\pi)$ es un $\mathfrak{H}$-grupo.

Demostración: De nuevo denotamos por $S(X) = CL_{\mathfrak{F}}(X,\pi)$ para cada grupo X. Razonamos por inducción sobre el orden de G. Podemos suponer que $S(G) \neq 1$. Sea N un subgrupo normal minimal de G tal que $N \leq S(G)$. Entonces, N es un q-grupo para algún primo q. Distinguimos dos casos:

a) $q \in \pi$. Si M es un subgrupo maximal de S(G) tal que $|S(G):M|_q = 1$, entonces $N \leq M$. De esta manera, $N \leq \Phi_q(S(G)) \leq S(S(G))$. Por inducción, $S(S(G/N)) = S(G/N)$. Ahora bien, $S(S(G/N)) = S(S(G))/N$ y $S(G/N) = S(G)/N$. En consecuencia, $S(S(G)) = S(G)$ y S(G) está en $\mathfrak{H}$.

b) $q \notin \pi$. Consideremos M un subgrupo maximal de G. Si N no está contenido en M, tenemos que $G = NM$. Así $|G:M|_\pi = 1$. Si $|G:M|$ es compuesto, entonces $S(G) \leq M$ y $G = M$, contradicción. En consecuencia, $|G:M|$ es primo , o sea, N es un grupo cíclico. Por tanto, N está contenido en cada subgrupo maximal B de S(G) tal que $|S(G):B|$ es compuesto. Por consiguiente, $N \leq S(S(G))$. Razonando como en a), concluimos que $S(G) \in \mathfrak{H}$. En definitiva, podemos suponer que $N \leq \Phi(G)$. Sea P un $\mathfrak{H}$-proyector de S(G). Como $S(G)/N \in \mathfrak{H}$, tenemos que $S(G) = NP$. Ahora bien, $\mathrm{Proy}_{\mathfrak{H}}(S(G))$ es una clase de conjugación de subgrupos de S(G). Aplicando el argumento de Frattini, $G = S(G)N_G(P)$. En definitiva, $G = N_G(P)$. Aplicando el teorema anterior concluimos que S(G) es un $\mathfrak{H}$-grupo.

$CL_{\mathfrak{F}}(G,\pi)$, en el caso $\mathfrak{F} = \{1\}$, es el subgrupo $S_\pi(G)$ definido en [7]. Notemos que en Th. 10 de [7] la hipótesis de π-resolubilidad de G es innecesaria.

4. LOS SUBGRUPOS $S_{\mathfrak{F}}(G)$, $S_{\mathfrak{F}}(G, p)$ Y $U_{\mathfrak{F}}(G)$.

(4.1) **Teorema:** Consideremos un grupo G. Entonces, para cualquier formación saturada $\mathfrak{F}$ de grupos resolubles $\mathfrak{S}$, $S_{\mathfrak{F}}(G)$ es el radical resoluble de G.

Demostración: Para cada grupo X, denotamos $S(X) = S_{\mathfrak{F}}(X)$. Demostramos primero que S(G) es resoluble por inducción sobre el orden de G. Claramente, podemos suponer que $S(G) \neq 1$. Sea N un subgrupo normal minimal de G tal que $N \leq S(G)$. Entonces, $S(G)/N = S(G/N)$ y $S(G)/N$ es resoluble por inducción.

Sea B un subgrupo normal minimal de G distinto de N. Entonces, $S(G)B/B \leq S(G/B)$. Por inducción, S(G/B) es resoluble. En consecuencia, $S(G)/S(G) \cap B$ es resoluble y así S(G) es un grupo resoluble. Por lo tanto, podemos suponer que G tiene un único subgrupo normal minimal N tal que $N \leq S(G)$ y $N \cap \Phi(G) = 1$. Así, G es un grupo primitivo monolítico. Sea q el mayor primo que divide al orden de $N = Soc(G)$ y sea Q un q-subgrupo de Sylow de N. Se tiene que $G = N_G(Q)N$. Si $N_G(Q) < G$, existe un subgrupo maximal M de G tal que $N_G(G) \leq M$. Puesto que G no es un $\mathfrak{F}$-grupo, M es un subgrupo maximal $\mathfrak{F}$-abnormal de G. Además, $|G : M| = 1+kq$ para algún entero k. Así, $|G : M|$ es compuesto. Como N no está contenido en M, deducimos que $\eta(G : M) = |G : M|$ y $\eta(G : M) = |N|$, contradicción. En definitiva, Q es un subgrupo normal de G y $N = Q$. En consecuencia, N es resoluble. Puesto que S(G)/N es resoluble, tenemos que S(G) es un grupo resoluble. De esta manera, $S(G) \leq G_{\mathfrak{S}}$, el radical resoluble de G.

Por otra parte, si R es un subgrupo maximal de G tal que $\eta(G : R) \neq |G : R|$, R es de tipo 2 o de tipo 3. En consecuencia, $G_{\mathfrak{S}}$ está contenido en R. En definitiva, $G_{\mathfrak{S}} \leq S(G)$ y el teorema queda demostrado.

Aplicando el teorema anterior, obtenemos la siguiente extensión del teorema 2.3 de [38]:

(4.2) **Corolario:** Consideremos una formación saturada de grupos resolubles $\mathfrak{F}$ y un grupo G. Entonces: G es resoluble sí y sólo sí $\eta(G : M) = |G : M|$ para cada maximal $\mathfrak{F}$-abnormal M de G de índice compuesto.

(4.3) **Teorema:** Consideremos una formación saturada cerrada para subgrupos $\mathfrak{F}$ y un grupo G. Si p es el mayor primo divisor del orden de G, el $\mathfrak{F}$-residual de $S_{\mathfrak{F}}(G,p)$ es p-resoluble.

Demostración: Denotamos por R el $\mathfrak{F}$-residual de $S_{\mathfrak{F}}(G,p)$. Utilizamos inducción sobre el orden de G. Podemos suponer que $R \neq 1$. Sea N un subgrupo normal minimal de G de forma que $N \leq R$. Supongamos que p no divide al orden de G/N. Si $1 \neq P$ es un p-subgrupo de Sylow de N, tenemos que $G = N_G(P)N$. Supongamos, si es posible, que $N_G(P) < G$. Entonces, existe un subgrupo maximal M de G tal que $N_G(P) \leq M$. Por consiguiente, $|G : M| = 1+kp$ para algún entero k . Así, $|G : M|$ es compuesto. Por otra parte, M es $\mathfrak{F}$-abnormal en G. Como p no divide a $|G :M|$ y N no está contenido en M, tenemos que $\eta(G : M)_p = |G : M|_p = 1$. En definitiva, $1 = \eta(G : M)_p = |N|_p$, contradición. Así, P es un subgrupo normal de G y N = P. Entonces, G/N y N son p-resolubles y G es p-resoluble. Por tanto, R es p-resoluble y el teorema queda demostrado.

Podemos, pues, suponer que p divide al orden de G/N para cada subgrupo normal minimal N de G contenido en R. Además, no es dificil demostrar que R contiene un único normal minimal N y $N \cap \Phi(G) = 1$. Seguidamente, veamos que podemos suponer que G es un grupo primitivo monolítico o que el número de normales minimales de G es mayor que 2. Sea B un subgrupo normal minimal de G tal que $B \neq N$. Si p divide al orden de G/B, entonces RB/B es p-resoluble por inducción. Así, R es p-resoluble y el teorema queda demostrado. Por consiguiente podemos suponer que p no divide al orden de G/B. Supongamos que G tiene exactamente dos normales minimales, B y N. Si B es abeliano, B es un p-subgrupo de Sylow de G y entonces G es p-resoluble. En consecuencia, R es p-resoluble. Por lo tanto podemos suponer que B no es abeliano y G es un grupo primitivo de tipo 3. Pero entonces, G/N es isomorfo a G/B contradicción. Por tanto, podemos suponer que G es un grupo primitivo monolítico o que el número de subgrupos normales minimales de G es mayor que 2. Sea A un subgrupo normal minimal de G distinto de N y de B. Como G/B es un p'-grupo y p divide al orden de G, tenemos que p divide al orden de G/A. Así, RA/A y R/N son p-resolubles por inducción. En consecuencia, R es p-resoluble y el teorema quedaría demostrado.

En consecuencia, podemos suponer que G es un grupo primitivo monolítico y N = Soc(G). Si $|N|_p = 1$, R es p-resoluble. Así, podemos suponer que $|N|_p \neq 1$. Supongamos que G es un grupo primitivo de tipo 2. Sea P un p-subgrupo de Sylow de N. Entonces, $G = N_G(P)N$ y existe un subgrupo maximal M de G tal que $N_G(P) \leq M$. Ahora , es sencillo probar que M es $\mathfrak{F}$-abnormal en G, $|G : M|$ es compuesto y $|G : M|_p = 1$. Como N no está contenido en M, tenemos que $|N|_p = \eta(G : M)_p = |G : M|_p = 1$, contradicción. Así, G es un grupo primitivo de tipo 1 y N es resoluble. En definitiva, R es p-resoluble y el teorema queda demostrado.

Aplicando el teorema anterior, obtenemos la siguiente extensión del Th. 3.1 en [38]:

(4.4) **Corolario:** Sea $\mathfrak{F}$ una formación saturada cerrada para subgrupos y G un grupo. Si p es el mayor primo que divide al orden de G, el $\mathfrak{F}$-residual de G es p-resoluble sí y sólo sí $\eta(G : M)_p = |G : M|_p$ para cada maximal $\mathfrak{F}$-abnormal de G de índice compuesto.

(4.5) **Teorema:** Consideremos una formación saturada cerrada para subgrupos $\mathfrak{F}$ y un grupo G . Entonces, el $\mathfrak{F}$-residual de $U_{\mathfrak{F}}(G)$ es superresoluble.

Demostración: Denotamos por T el $\mathfrak{F}$-residual de $U_{\mathfrak{F}}(G)$. Utilizamos inducción sobre el orden de G. Claramente, podemos suponer que $T \neq 1$. Con razonamientos similares a los utilizados en (4.1), podemos suponer que G tiene un único normal minimal N tal que $N \leq T$, verificando $N \cap \Phi(G) = 1$. En consecuencia, G es un grupo primitivo monolítico. Supongamos que G es un grupo primitivo de tipo 2 y sea M un subgrupo maximal de G tal que $|G : M|$ es compuesto y verificando $G = MN$. Ahora, es sencillo probar que M es $\mathfrak{F}$-abnormal en G. Entonces, $\eta(G : M)$ es libre de cuadrados. Como $\eta(G : M) = |N|$, se tiene que N es superresoluble, contradicción. En consecuencia, G es un grupo primitivo de tipo 1. Consideremos M un subgrupo maximal de G tal que $G = MN$. Entonces, M es $\mathfrak{F}$-abnormal en G y $\eta(G : M) = |G : M| = |N|$. Si $|G : M|$ es primo, N es cíclico y T es superresoluble . Así, podemos suponer que $|G : M|$ es compuesto. Como N no está contenido en M, $\eta(G : M)$ es libre de cuadrados. Así, N es superresoluble y $|G : M|$ es primo, contradicción. En definitiva, $|G : M|$ es primo y T es superresoluble.

En particular, cuando $\mathfrak{F}$ es la formación trivial, $U_1(G) = U(G) = \cap \{M \,/\, M$ es un subgrupo maximal de G, $|G : M|$ compuesto y $\eta(G : M)$ no es libre de cuadrados$\}$ para cada grupo G. Entonces, aplicando (4.5), podemos demostrar:

(4.6) **Corolario:** Para cada grupo G, U(G) es superresoluble. Además, G es superresoluble sí y sólo sí $U(G) = G$.

CAPITULO V

SISTEMAS MAXIMALES Y SUBGRUPOS DE PREFRATTINI.

1. SISTEMAS MAXIMALES.

Dado un grupo G, denotamos por $\mathfrak{M}_1(G)$ el conjunto, posiblemente vacío, de subgrupos maximales de tipo 1 de G. Supongamos que $\mathfrak{M}_1(G)$ es no vacío y definimos en él la siguiente relación de equivalencia R_1: dados T y M en $\mathfrak{M}_1(G)$, T R_1 M sí y sólo sí $T_G = M_G$.

Consideremos $\mathfrak{T}$ un sistema completo de representantes de la relación R_1. Decimos que $\mathfrak{T}$ *reduce* en un subgrupo U de G, si U es intersección de elementos de $\mathfrak{T}$. En particular, $\mathfrak{T}$ reduce en un subgrupo maximal S de tipo 1 de G sí y sólo sí S es un elemento de $\mathfrak{T}$.

(1.1) Definición: Llamaremos *sistema maximal de tipo* 1 de un grupo G, a un sistema completo de representantes de la relación R_1, tal que :

(S1) Si T= UN, con $N \trianglelefteq G$ y $U \leq G$, es un subgrupo maximal de tipo 1 de G y $\mathfrak{T}$ reduce en U entonces T es un elemento de $\mathfrak{T}$,

junto con el grupo G.

Si $\mathfrak{M}_1(G)$ es vacío, tomamos como sistema maximal de tipo 1 el propio G.

Decimos que un sistema maximal $\mathfrak{a}$ de un grupo G *reduce* en un subgrupo U de G, si U es intersección de elementos de $\mathfrak{a}$.

(1.2) Lema: Si $N \trianglelefteq G$ y $\mathfrak{a}$ es un sistema maximal de tipo 1 de G, entonces el conjunto $\mathfrak{a}N/N := \{MN/N : M \in \mathfrak{a}\}$ es un sistema maximal de tipo 1 de G/N.

Demostración: Claramente, podemos suponer que N es un subgrupo propio de G. Afirmamos que existe un subgrupo maximal monolítico S de G tal que $N \leq S$. En efecto, en otro caso, G = NT para todo maximal monolítico T de G. Ahora bien, como N < G, existe un subgrupo maximal M de tipo 3 tal que $N \leq M_G$. Por otra parte, existe un subgrupo maximal monolítico T de G tal que $M_G \leq T$, contradicción. En definitiva, podemos encontrar un subgrupo maximal monolítico S de G tal que $N \leq S$. Si $\mathcal{M}_1(G/N)$ es vacío, entonces $\mathcal{A}N/N = \{G/N\}$ y el lema es cierto. Podemos suponer, pues, que $\mathcal{M}_1(G/N)$ no es vacío. Ahora bien, si M/N y T/N son dos elementos de $\mathcal{M}_1(G/N)$, $M/N\ R_1 T/N$ sí y sólo sí M y T son elementos de $\mathcal{M}_1(G)$ y $M\ R_1\ T$. Además, si $T/N = (U/N)(A/N)$ con A normal en G y $\mathcal{A}N/N$ reduce en U/N y T/N es un subgrupo maximal de tipo 1 de G/N, entonces $\mathcal{A}$ reduce en U y T es un maximal de tipo 1 de G. Como $\mathcal{A}$ es un sistema maximal de tipo 1 de G, T es un elemento de $\mathcal{A}$. En consecuencia, T/N es un elemento de $\mathcal{A}N/N$.

Seguidamente, analizamos la relación existente entre los sistemas maximales de un grupo resoluble G con los sistemas de Hall de dicho grupo. Si G es un grupo resoluble, el conjunto $\mathcal{M}_1(G)$ coincide con Max(G), el conjunto de todos los subgrupos maximales de G. De las propiedades de los grupos primitivos resolubles, deducimos que la relación R_1 anteriormente definida es la relación de conjugación. En consecuencia, un sistema completo de representantes $\mathcal{T}$ consta de un representante de cada clase de conjugación de subgrupos maximales.

Consideremos un sistema de Hall Σ de G y formamos el conjunto siguiente:

$\mathcal{A} = \{$ S maximal de G / Σ reduce en S$\} \cup \{G\}$.

Como cada maximal S de G es pronormal en G, Σ reduce exactamente en un conjugado de S. En consecuencia, $\mathcal{A} - \{G\}$ es un sistema completo de representantes de la relación R_1. Veamos que $\mathcal{A}$ es un sistema maximal de G. Supongamos que $T = UN$, $N \trianglelefteq G$ y $U \leq G$, es un subgrupo maximal de G tal que $\mathcal{A} - \{G\}$ reduce en U. Entonces Σ reduce en U. Como Σ reduce en N, deducimos que Σ reduce en T y de esta forma T es un elemento de $\mathcal{A}$.

(1.3) **Definición:** Dado un sistema de Hall Σ de un grupo resoluble G, al sistema maximal de tipo 1 obtenido anteriormente se le llama *sistema maximal de* G *asociado al sistema de Hall* Σ.

(1.4) **Teorema:** Consideremos un grupo resoluble G y $\mathcal{A}$ un sistema maximal de tipo 1 de G. Existe un sistema de Hall Σ de G, tal que $\mathcal{A}$ es el sistema maximal de G asociado a Σ.

Demostración: Razonamos por inducción sobre el orden de G. Claramente, podemos suponer que $\Phi(G) = 1$. Sea N un subgrupo normal minimal de G. Por (1.2), $\mathfrak{a}N/N$ es un sistema maximal de tipo 1 de G/N. Por inducción, existe Σ, sistema de Hall de G ,t al que $\Sigma N/N$ reduce en cada uno de los elementos de $\mathfrak{a}N/N$.

Como N es suplementado, existe un subgrupo maximal T de G verificando que G = TN y $T \in \mathfrak{a}$. Supongamos que $\{ T_i : i= 1,...,r \}$ es el conjunto de elementos de $\mathfrak{a}$ tal que $G = NT_i$ $i=1,...,r$. Si existe algún i ($1\leq i \leq r$) tal que $N_G(T_i) = G$ entonces N es un grupo cíclico de orden primo y así $N_G(T_j) = G$ para todo $j = 1,...,r$. De esta manera, Σ reduce en todo T_j En definitiva, Σ reduce en todo elemento de $\mathfrak{a}$ y el teorema queda demostrado.

Podemos pues suponer que para todo $i = 1,...,r$, se tiene que $N_G(T_i) = T_i$. Como T_1 es un subgrupo pronormal de G, existe un elemento $n \in N$ tal que Σ reduce en T_1. Entonces $\Sigma_0 = \Sigma^n$ reduce en T_1 y $\Sigma_0 N/N$ reduce en cada uno de los elementos de $\mathfrak{a}N/N$.

Veamos que Σ_0 reduce en cada T_i, $i =1,...,r$. Tomemos un T_j arbitrario ($2 \leq j \leq r$). Entonces, T_1 y T_j son dos subgrupos maximales de G no conjugados complementando a N.

Aplicando [50; 2.4], $P = (T_1 \cap T_j)N$ es un subgrupo maximal de G complementando un factor principal de G, G-isomorfo a N. Como $\mathfrak{a}$ es sistema maximal de G, P es un elemento de $\mathfrak{a}$. Por tanto, Σ_0 reduce en P. Sea p el primo divisor del orden de N, y consideremos Q el p-complemento de Sylow de Σ_0 contenido en P. Como todo p'-subgrupo de Hall del grupo $T_1 \cap T_j$ es un p'-subgrupo de Hall de P, existe un elemento $a \in N$ de forma que $Q \leq (T_1 \cap T_j)^a$. En consecuencia, aplicando [16,Cap I, lemma4.20], tenemos que Σ_0 reduce en T_1 y Σ_0 reduce en T_1. Como T_1 es pronormal en G, $a \in N_G(T_1) = T_1$. Por tanto, a = 1 y Σ_0 reduce en T_j.

De esta manera, Σ_0 reduce en todo elemento de $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{a}$ es el sistema maximal de G asociado a Σ_0.

En consecuencia, la aplicación:

F : {Sistemas de Hall de G} $\longrightarrow$ { Sistemas maximales de G}.

$\Sigma \longrightarrow \{ S$ maximal de G / Σ reduce en S$\} \cup \{G\}$.

es una aplicación biyectiva. Por tanto:

(1.5) **Corolario:** Los sistemas maximales de un grupo resoluble G son conjugados y su número coincide con el índice en G de un normalizador de sistema de G.

Consideremos ahora un grupo G y denotamos con $\mathfrak{M}_2(G)$ el conjunto, posiblemente vacío, de subgrupos maximales monolíticos de tipo 2 de G. Si $\mathfrak{M}_2(G)$ no es vacío, definimos la siguiente relación binaria de equivalencia en $\mathfrak{M}_2(G)$: si S y T son dos elementos de $\mathfrak{M}_2(G)$, S R_2 T sí y sólo sí $S_G = T_G$.

(1.6) **Definición:** Consideremos un grupo G, tal que $\mathfrak{M}_2(G)$ no es vacío. Un *sistema maximal de tipo* 2 de G es un sistema completo de representantes $\mathfrak{R}$ de la relación R_2 junto con el grupo G. Si $\mathfrak{M}_2(G)$ es vacío, tomamos como sistema maximal de tipo 2 el propio G.

Razonando de forma análoga a (1.2), podemos demostrar:

(1.7) **Lema:** Si N $\trianglelefteq$ G y $\mathfrak{B}$ es un sistema maximal de tipo 2 de G, entonces $\mathfrak{B}N/N$:= {MN/N : M $\in$ $\mathfrak{B}$} es un sistema maximal de tipo 2 de G/N.

(1.8) **Proposición:** Consideremos un grupo G con $\mathfrak{M}_2(G)$ no vacío. Supongamos que S y T son dos elementos de $\mathfrak{M}_2(G)$. Entonces: S R_2 T sí y sólo sí existe un factor principal H/K de G, que suplementa tanto a S como a T y que verifica $G/S_G \cong G/T_G \cong [H/K]^*G$.

Demostración: Supongamos que S R_2 T, entonces G/S_G es un grupo primitivo de tipo 2. Denotamos con R = Soc(G mód S_G). Se tiene que G = SR = TR y R/S_G es un factor principal de G que suplementa a S y a T. Además, $S_G = C_G(R/S_G)$ y $G/S_G \cong G/T_G \cong [R/S_G]^*G$.

Recíprocamente, supongamos que existe un factor principal de G tal que G = SH = TH K $\leq$ S $\cap$ T. Entonces, HS_G/S_G y HT_G/T_G son dos factores principales de G, G-isomorfos a H/K. En consecuencia, $S_G = C_G(HS_G/S_G) = C_G(H/K) = C_G(HT_G/T_G) = T_G$. De esta manera, S R_2 T.

(1.9) **Definición:** Dado un grupo G, un *sistema maximal de* G es una familia $\mathfrak{T}$ de subgrupos maximales monolíticos de G, de forma que existe un sistema maximal de tipo 1, $\mathfrak{A}$, de G y existe un sistema maximal de tipo 2, $\mathfrak{B}$, de G tal que $\mathfrak{T} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$.

Aplicando (1.2) y (1.7), es claro el siguiente resultado:

(1.10) **Lema:** Si $N \trianglelefteq G$ y $\mathfrak{T}$ es un sistema maximal de G, entonces el conjunto $\mathfrak{T}N/N := \{MN/N : M \in \mathfrak{T}\}$ es un sistema maximal de G/N.

Mientras que la existencia de sistemas maximales de tipo 2 está asegurada en cada grupo finito G, el autor no ha podido deducir la existencia de sistemas maximales de tipo 1 en cada grupo finito G, si bien tampoco ha podido encontrar ejemplos de grupos que no los posean.

La siguiente proposición ofrece condiciones suficientes que aseguran la existencia de sistemas maximales de tipo 1.

(1.10) **Proposición:** Consideremos un grupo G, tal que $\mathfrak{M}_1(G)$ es vacío o todo cociente primitivo de tipo 1 de G es un grupo resoluble. Entonces, G posee un sistema maximal de tipo 1 y dos sistemas maximales de tipo 1 de G son conjugados.

Demostración: Claramente, si $\mathfrak{M}_1(G)$ es vacío el resultado es cierto. Supongamos, pues, que $\mathfrak{M}_1(G)$ es no vacío y que todos los cocientes primitivos de tipo 1 de G son resolubles. Razonando por inducción sobre el orden de G, podemos suponer que $\Phi(G) = 1$. Por otra parte, si G es un grupo resoluble el resultado es cierto en virtud de (1.4). De esta manera, podemos suponer que el residual resoluble de G, T, no es trivial. Sea N un subgrupo normal minimal de G tal que $N \leq T$. Si N es abeliano, como $\Phi(G) = 1$, existe un subgrupo maximal M de G tal que $G = MN$ y $M \cap N = 1$. Entonces, el grupo primitivo G/M_G es de tipo 1 y así G/M_G es resoluble. Esto implica que $N \leq T \leq M_G$, contradicción. En definitiva N no es abeliano. Claramente G/N satisface la hipótesis de la proposición. Por inducción, G/N posee un sistema maximal de tipo 1 y dos sistemas maximales de tipo 1 de G/N son conjugados. Ahora bien, $\mathfrak{T}/N$ es un sistema maximal de tipo 1 de G/N sí y sólo sí $\mathfrak{T}$ es un sistema maximal de tipo 1 de G. En consecuencia, se tiene el resultado.

La segunda condición de la proposición anterior es necesaria para asegurar la conjugación, como se advierte en el siguiente:

EJEMPLO 1: Tomemos G isomorfo al holomorfo de $C_2 \times C_2 \times C_2$. Es bien conocido que G es un grupo primitivo de tipo 1, cuyos primitivadores no son conjugados (ver [30]). Como G/Soc(G) es un grupo simple no abeliano, todo sistema maximal de tipo 1 de G es de la forma $\mathfrak{A} = \{G\} \cup \{T\}$ siendo T un primitivador de G. En consecuencia, G no verifica la tesis de la proposición anterior.

(1.11) Teorema: Dado un grupo G, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) G es un grupo resoluble.

ii) La familia de cocientes primitivos de tipo 1 de G, denotada por $Pr_1(G)$, no es vacía y consta de grupos resolubles. Además, G posee sistemas maximales conjugados.

Demostración: ii) implica i). Supongamos que el resultado es falso y tomamos G contraejemplo minimal. Entonces el residual resoluble de G, T, es distinto de 1. Consideremos N un subgrupo normal minimal de G tal que $N \leq T$. Razonando como en (1.10), N no es abeliano. Sea M un subgrupo maximal monolítico de tipo 2 de G tal que $G = MN$. Consideremos $\mathcal{T}/N$ un sistema maximal de G/N. Claramente, $\mathcal{T} \cup \{M\}$ es un sistema maximal de G. Ahora si T es un subgrupo maximal monolítico de G tal que $T_G = M_G$, entonces $\mathcal{T} \cup \{P\}$ es un sistema maximal de G. Por ii), T y M son conjugados en G. En consecuencia, el grupo primitivo G/M_G tiene todos sus primitivadores conjugados. De esta manera, G/M_G es de tipo 1 contradicción.

i) implica ii). Se sigue de (1.4).

Notemos que un grupo G con $\mathfrak{M}_1(G)$ vacío, no puede poseer sistemas maximales conjugados. Sin embargo, sí que posee sistemas maximales de tipo 1 conjugados pues $\{G\}$ es el único sistema maximal de tipo 1 de G.

(1.12) Teorema: Consideremos un grupo G tal que $\mathfrak{M}_1(G)$ es vacío o todo cociente primitivo de tipo 1 de G es un grupo resoluble. Dado un subgrupo maximal monolítico M de G, existe un sistema maximal $\mathcal{T}$ de G tal que $M \in \mathcal{T}$.

Demostración: Razonamos por inducción sobre orden de G. El resultado es claro si G es resoluble. Podemos suponer, pues, que el residual resoluble T de G no es trivial. Consideramos N un subgrupo normal minimal de G tal que $N \leq T$. Distinguimos dos casos:

a) $N \leq M$. Como M/N es un subgrupo maximal monolítico de G/N, existe un sistema maximal $\mathcal{T}/N$ de G/N tal que $M/N \in \mathcal{T}/N$ por inducción. Ahora, si T es un subgrupo maximal de G de tipo 2 tal que $G = TN$ la familia $\mathcal{T} \cup \{T\}$ es un sistema maximal de G con $M \in \mathcal{T}$.

b) $G = MN$. Entonces M es un subgrupo maximal de tipo 2 de G. En consecuencia, el grupo G/N posee un sistema maximal $\mathcal{T}$ por (1.10). De esta manera, $\mathcal{T} \cup \{M\}$ es un sistema maximal de G que cumple la tesis del teorema.

2. SUBGRUPOS DE PREFRATTINI.

(2.1)**Proposición:** Consideremos un grupo G y $\mathfrak{T}$ un sistema maximal de G. Dada una corona C/R de G y una serie principal de G:

$$(*)\quad 1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \ldots\ldots\ldots \trianglelefteq G_n = G,$$

Consideramos $U(\mathfrak{T}) = \cap \{S_i: i=1....n.\}$, donde $S_i = G$ si C/R no es la corona de G asociada con G_i/G_{i-1} (incluyendo el caso de que G_i/G_{i-1} sea un factor principal de Frattini) , y $S_i \in \mathfrak{T}$, tal que $G = S_iG_i$, $G_{i-1} \leq (S_i)_G$ y $G/(S_i)_G \cong [G_i/G_{i-1}]^* G$ si G_i/G_{i-1} es un factor principal de G con corona asociada C/R.

Entonces, $U(\mathfrak{T})$ es un suplemento de C/R en G y si C/R es una corona abeliana ,$U(\mathfrak{T})$ complementa a C/R en G. Además, $U(\mathfrak{T})$ está unívocamente determinado por $\mathfrak{T}$ y no por la serie (*) puesto que $U(\mathfrak{T}) = \cap \{ S \leq G \,/\, G = SC,\ R \leq S \cap C \text{ y } S \in \mathfrak{T} \}$.

__Demostración:__ Consideramos $\{ X_i/Y_i : i = 1.....m \} = \{ G_i/G_{i-1} \,/\, G_i/G_{i-1}$ tiene a C/R como corona asociada $\}$, de forma que $X_i \leq Y_{i+1}$ ($i = 1.....m-1$). Por el teorema de Jordan-Hölder generalizado (ver [3]), m es el número de factores principales de G con corona asociada C/R en cualquier serie principal de G.

Por otra parte, es claro que R evita a X_i/Y_i para todo i. Así, aparece la cadena:

$R \leq Y_1R < X_1R \leq Y_2R < X_2R \leq \ldots\ldots\ldots < X_mR \leq C$. Aplicando el teorema de Jordan-Hölder generalizado, $R = Y_1R$ y, en general, $X_iR = Y_{i+1}R$ para todo $i = 1....m-1$ y $C = X_mR$.

Tomemos $S_i \in \mathfrak{T}$, tal que $G = S_iX_i$, $Y_i \leq (S_i)_G$ y $G/(S_i)_G \cong [X_i/Y_i]^* G$ (notemos que S_i existe). Es claro que $R \leq (S_i)_G$ para todo i. En consecuencia, $RY_i \leq (S_i)_G$ para todo i. Sea $U(\mathfrak{T}) = \cap \{S_i: i=1....m.\}$. Tenemos que $G = X_mS_m = S_mC$. Supongamos que se verifica $(\cap S_i)C = G$. Entonces, $U(\mathfrak{T})C = (U(\mathfrak{T}))(X_1R)\, X_m$. Como $X_1R \leq \cap \{S_i: i=2....m.\}$, se tiene que $U(\mathfrak{T})C = (S_1X_1R \cap (\cap S_i))X_m = (\cap S_i)\, X_mR = G$.

Consideremos ahora, $V = \cap \{ S \leq G \,/\, G = SC,\ R \leq S \cap C \text{ y } S \in \mathfrak{T} \}$. Distinguimos dos casos:

a) C/R no abeliana. Tomemos un subgrupo maximal S que interviene en la definición de V. Entonces $G/R = (S/R)(C/R)$. Como $C/R = Soc(C/R)$, existe un normal minimal T/R de G/R tal que $G/R = (S/R)(T/R)$. Ahora, S_G evita T/R y de esta manera, TS_G/S_G es un factor principal de G, G-isomorfo con T/R. Por tanto, $S_G = C_G(TS_G/S_G) =$

$C_G(T/R) = R$. En definitiva, $V_G = R$. Por otra parte, TS_G/S_G es un factor principal de G que es G-isomorfo con algún factor principal G_i/G_{i-1} de la serie (*). En consecuencia, $S_G = C_G(G_i/G_{i-1})$. De esta manera, S_G evita a G_i/G_{i-1} y G_iS_G/S_G es factor principal de G. Por consiguiente, $G = SG_i$ y $G_{i-1} \leq S_G$. Además, todo subgrupo maximal de G que suplementa a G_i/G_{i-1} tiene el mismo core que S. Así, S interviene en la definición de $U(\mathfrak{T})$. En definitiva, $U(\mathfrak{T}) \leq S$ y podemos entonces afirmar que $U(\mathfrak{T}) \leq V$.

Por otra parte, si S es un elemento de $\mathfrak{T}$ tal que $G = SG_i$ y $G_{i-1} \leq S_G$ entonces el factor principal G_iS_G/S_G es G-isomorfo a G_i/G_{i-1}. En consecuencia, $S_G = C_G(G_i/G_{i-1})$ y $R \leq S_G$. Por tanto, $G = SC$ y $R \leq S \cap C$. En definitiva, $V \leq U(\mathfrak{T})$.

b) C/R abeliana. Supongamos que S es un subgrupo maximal de G que interviene en la definición de V. Tenemos que CS_G/S_G es el único normal minimal de G/S_G y tiene a C/R como corona asociada. De esta manera, $S_G \leq C$. Como $G = U(\mathfrak{T})C$ y $S_G \leq C$, se tiene que $U(\mathfrak{T})S_G$ es un subgrupo propio de G. Además, $G/S_G = (U(\mathfrak{T})S_G/S_G)(C/S_G)$. En consecuencia, $U(\mathfrak{T})S_G$ es un subgrupo maximal de G. Como $\mathfrak{T}$ es un sistema maximal de G que reduce en $U(\mathfrak{T})$, tenemos que $U(\mathfrak{T})S_G$ es un elemento de $\mathfrak{T}$. Ahora bien, $(U(\mathfrak{T})S_G)_G = S_G$. Por tanto, $U(\mathfrak{T})S_G = S$. En definitiva, $U(\mathfrak{T}) \leq V$. La otra inclusión es obvia.

Supongamos que $R < V_G$ y tomamos $R < A \leq V_G$ tal que A/R es un factor principal de G. Es claro que A/R tiene a C/R como corona asociada. Tomamos S un elemento de $\mathfrak{T}$ tal que $G = AS$ y $G/S_G \cong [A/R]^*G$. Entonces S interviene en la definición de V y $A \leq S$, contradicción. Por consiguiente, $V_G = R$. Como $G/R = (U(\mathfrak{T})/R)(C/R)$ y C/R es abeliana, $U(\mathfrak{T}) \cap C$ es un subgrupo normal de G. Así, $U(\mathfrak{T}) \cap C = R$ y $U(\mathfrak{T})$ es un complemento de C/R en G.

En general, no todo suplemento de la corona C/R puede obtenerse como intersección de maximales en la forma anterior:

EJEMPLO 2: Consideremos un grupo primitivo G de tipo 3, $Soc(G) = A \times B$ siendo A y B los normales minimales de G. Es claro que Soc(G) es la corona asociada con A y B. Si consideramos U un primitivador de G, entonces $G = U\, Soc(G)$ y U no puede describirse como una intersección de subgrupos maximales pertenecientes a un sistema maximal de G.

Sin embargo, si A es un complemento de una corona abeliana C/R de un grupo G tal que existe un sistema maximal $\mathfrak{T}$ de G que reduce en A, entonces $A = U(\mathfrak{T})$. Es decir, $U(\mathfrak{T})$ es el único complemento de C/R en el que $\mathfrak{T}$ reduce.

En lo que resta de capítulo, $\mathfrak{H}$ denotará una clase de Schunck.

(2.2) <u>Lema:</u> Consideremos un grupo G y una corona C/R de G. Si H/K y A/L son dos factores principales de G con corona asociada C/R, entonces $[H/K]^*G \cong [A/L]^*G$.

<u>Demostración:</u> Claramente, podemos suponer que H/K no es G-isomorfo con A/L. Entonces, C/R no es abeliana y así $R_1 = C_G(H/K) \neq C_G(A/L) = R_2$. Como H/K y A/L están G-relacionados, existe un complemento común U de $R_i/R_1 \cap R_2$, i= 1,2 en G. Es decir, $G = UR_i$ i=1,2 y $U \cap R_2 = R_1 \cap U = R_1 \cap R_2$. Además, G/U_G es un grupo primitivo de tipo 3 y $C/R_i \cong_G R_{3-i}/R_1 \cap R_2$. En consecuencia, $[H/K]^*G \cong [C/R_2]^*G$. Ahora bien; $[C/R_2]^*G = G/C_G(G/R_2) = G/R_2 \cong G/R_1 = G/C_G(G/R_1) = [C/R_1]^*G \cong [A/L]^*G$ con la que el lema queda demostrado.

(2.3) <u>Definición:</u> Consideremos un grupo G. Diremos que una corona C/R de G es *$\mathfrak{H}$-central* (respectivamente, *$\mathfrak{H}$-excéntrica*) si existe un factor principal de G $\mathfrak{H}$-central (respectivamente, $\mathfrak{H}$-excéntrico) con corona asociada C/R.

Teniendo en cuenta (2.2), esta definición es consistente.

(2.4) <u>Definición:</u> Consideremos un grupo G con un sistema maximal $\mathfrak{T}$. Definimos:

a) $W_n(G,\mathfrak{T},\mathfrak{H}) = \cap \{ U(\mathfrak{T}) \ / \ U(\mathfrak{T})$ es suplemento de una corona no abeliana $\mathfrak{H}$-excéntrica $\}$, siendo $U(\mathfrak{T})$ los distintos suplementos obtenidos en (2.1). Si G no posee coronas no abelianas $\mathfrak{H}$-excéntricas, definimos $W_n(G,\mathfrak{T},\mathfrak{H}) = G$. A $W_n(G,\mathfrak{T},\mathfrak{H})$ se le llama *subgrupo de $\mathfrak{H}$-prefrattini no abeliano de* G *asociado al sistema maximal* $\mathfrak{T}$.

b) $W_a(G,\mathfrak{T},\mathfrak{H}) = \cap \{ U(\mathfrak{T}) \ / \ U(\mathfrak{T})$ es complemento de una corona no abeliana $\mathfrak{H}$-excéntrica tal que $\mathfrak{T}$ reduce en $U(\mathfrak{T})\}$. Si G no posee coronas abelianas $\mathfrak{H}$-excéntricas, definimos $W_a(G,\mathfrak{T},\mathfrak{H}) = G$. A $W_a(G,\mathfrak{T},\mathfrak{H})$ se le llama *subgrupo de $\mathfrak{H}$-prefrattini abeliano de* G *asociado al sistema maximal* $\mathfrak{T}$.

c) Llamamos *subgrupo de $\mathfrak{H}$-prefrattini de* G *asociado al sistema maximal* $\mathfrak{T}$, al subgrupo $W(G,\mathfrak{T},\mathfrak{H}) = W_a(G,\mathfrak{T},\mathfrak{H}) \cap W_n(G,\mathfrak{T},\mathfrak{H})$.

La siguiente proposición, demostrada para el caso c) de la definición anterior, es válida con ligeras modificaciones en los casos a) y b).

(2.5) <u>Proposición:</u> Con la notación anterior:

a) Dada una serie principal de G de la forma $1= G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \dots\dots\dots \trianglelefteq G_n= G$, entonces $W(G, \mathfrak{T}, \mathfrak{H})= \cap \{S_i: i=1....n.\}$, donde S_i es el suplemento de G_i/G_{i-1} en $\mathfrak{T}$ si G_i/G_{i-1} es un factor principal de G suplementado $\mathfrak{H}$-excéntrico y $S_i= G$, en otro caso.

b)Si $N \trianglelefteq G$ entonces, $W(G/N, \mathfrak{T}N/N, \mathfrak{H}) = W(G, \mathfrak{T}, \mathfrak{H})N/N$.

c)El conjunto $\{ W(G, \mathfrak{T}, \mathfrak{H}) / \mathfrak{T}$ sistema maximal de G$\}$ es una clase característica de subgrupos de G.

<u>Demostración:</u> a) Se sigue fácilmente de (2.1).

b) Razonamos por inducción sobre el orden de N. Supongamos que N es un subgrupo normal minimal de G y consideremos una serie principal de G ,

$$1= G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \dots\dots\dots \trianglelefteq G_n= G$$

tal que $G_1 = N$.

Por a) $W(G, \mathfrak{T}, \mathfrak{H})= \cap \{S_i: i=1....n.\}$, con $S_1 = G$ o S_1 subgrupo maximal de G. Como $N \leq S_i$ para cada $i = 2...n$, obtenemos $W(G, \mathfrak{T}, \mathfrak{H})N/N = \cap \{S_i/N: i=2....n.\} = W(G/N, \mathfrak{T}N/N, \mathfrak{H})$ aplicando a).

En el caso general, consideremos una serie principal de G,

$$(\alpha)\ 1= G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \dots\dots\dots \trianglelefteq G_n= G$$

tal que $G_i = N$, $i > 1$.

Denotamos con estrella la imágenes en $G^* = G/G_{i-1}$. Por inducción, $W(G^*, \mathfrak{T}^*, \mathfrak{H}) = W(G, \mathfrak{T}, \mathfrak{H})^*$. Además, (α^*) es una serie principal de G^* y N^* es un normal minimal de G^*. Aplicando el caso anterior, $W(G^*, \mathfrak{T}^*, \mathfrak{H})N^*/N^* = W(G^*/N^*, \mathfrak{T}^*N^*/N^*, \mathfrak{H})$. Ahora bien, $W(G^*/N^*, \mathfrak{T}^*N^*/N^*, \mathfrak{H})$ es isomorfo a $W(G/N, \mathfrak{T}N/N, \mathfrak{H})$ con lo cual $W(G/N, \mathfrak{T}N/N, \mathfrak{H})$ es isomorfo a $W(G, \mathfrak{T}, \mathfrak{H})N/N$. Como $W(G, \mathfrak{T}, \mathfrak{H})N/N$ está contenido en $W(G/N, \mathfrak{T}N/N, \mathfrak{H})$, se tiene la igualdad.

Finalmente c) es claro.

En todo lo que sigue, G será un grupo y $\mathfrak{T}$ un sistema maximal de G.

(2.6) <u>Proposición:</u> a) $W_a(G,\mathfrak{T},\mathfrak{H})$ cubre exactamente los factores principales de G no abelianos, los factores principales de G de Frattini y los factores principales de G abelianos $\mathfrak{H}$-centrales y evita los factores principales de G abelianos, complementados y $\mathfrak{H}$-excéntricos.

b) $W_n(G,\mathfrak{T},\mathfrak{H})$ cubre exactamente los factores principales de G abelianos y los factores principales de G no abelianos $\mathfrak{H}$-centrales.

c) $W(G,\mathfrak{T},\mathfrak{H})$ cubre exactamente los factores principales de Frattini de G y los factores principales de G suplementados $\mathfrak{H}$-centrales.

<u>Demostración:</u> a) Claramente, podemos suponer que $W_a(G,\mathfrak{T},\mathfrak{H}) \neq G$. También, en virtud de la proposición anterior, es suficiente demostrar el resultado para los subgrupos normales minimales de G. Consideremos N un subgrupo normal minimal de G. Si $N \leq \Phi(G)$, entonces es claro que $N \leq W_a(G,\mathfrak{T},\mathfrak{H})$. Supongamos que $N \cap \Phi(G) = 1$. Consideremos una serie principal de G pasando por N y utilizamos la notación de la proposición anterior. Si N no es abeliano o N es abeliano $\mathfrak{H}$-central, entonces $S_1 = G$ y N está contenido en $W_a(G,\mathfrak{T},\mathfrak{H})$. Ahora, si N es $\mathfrak{H}$-excéntrico existe un subgrupo maximal S_1 de G perteneciente a $\mathfrak{T}$ tal que $G = NS_1$ y $S_1 \cap N = 1$. Como $W_a(G,\mathfrak{T},\mathfrak{H}) \leq S_1$, deducimos que $W_a(G,\mathfrak{T},\mathfrak{H}) \cap N = 1$ y $W_a(G,\mathfrak{T},\mathfrak{H})$ evita N.

b) y c) se siguen con una demostración análoga al caso a).

(2.7) <u>Corolario:</u> Consideremos un subgrupo maximal S de G tal que $S \in \mathfrak{T}$. Son equivalentes:

i) $W(G,\mathfrak{T},\mathfrak{H}) \leq S$.

ii) S es $\mathfrak{H}$-abnormal en G.

<u>Demostración:</u> i) implica ii). Supongamos que S es $\mathfrak{H}$-normal en G, entonces $Soc(G/S_G)$ es un factor principal $\mathfrak{H}$-central de G. Por (2.6), $W(G,\mathfrak{T},\mathfrak{H})$ cubre $Soc(G/S_G)$, contradicción. En definitiva, S es $\mathfrak{H}$-abnormal en G.

ii) implica i). Si S es un subgrupo maximal $\mathfrak{H}$-abnormal en G, $R/S_G = Soc(G/S_G)$ es un factor principal $\mathfrak{H}$-excéntrico de G. En consecuencia, S interviene el la definición de $W(G,\mathfrak{T},\mathfrak{H})$. Por tanto, $W(G,\mathfrak{T},\mathfrak{H}) \leq S$.

(2.8) __Corolario:__ Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $W_n(G,\mathcal{T},\mathfrak{H}) = G$.

ii) $\mathcal{M}_2(G)$ es vacío o todo factor principal no abeliano de G es $\mathfrak{H}$-central.

__Demostración:__ i) implica ii). Supongamos que $\mathcal{M}_2(G)$ no es vacío. Si H/K es un factor principal no abeliano $\mathfrak{H}$-excéntrico de G, existe un subgrupo maximal S de G de tipo 2 tal que $S \in \mathcal{T}$ y $G = SH$, $K \leq S \cap H$. Esto implica que $W_n(G,\mathcal{T},\mathfrak{H}) \leq S$, contradicción.

ii) implica i). Si $\mathcal{M}_2(G)$ es vacío, G no posee coronas no abelianas. En consecuencia, $W_n(G,\mathcal{T},\mathfrak{H}) = G$. Supongamos que $\mathcal{M}_2(G)$ no es vacío y consideramos un subgrupo maximal S de G tal que $W_n(G,\mathcal{T},\mathfrak{H}) \leq S$. Razonando como en el corolario anterior, S debe ser $\mathfrak{H}$-abnormal en G contradicción.

(2.9) __Corolario:__ Supongamos que $\mathfrak{H}$ es una clase de Schunck de la forma $E_\Phi\mathfrak{F}$, para alguna formación $\mathfrak{F}$. Son equivalentes:

i) $W_n(G,\mathcal{T},\mathfrak{H}) = G$.

ii) G es un $\mathfrak{S}\mathfrak{H}$-grupo.

En consecuencia, si $\mathfrak{F}$ es formación saturada, $G^{\mathfrak{F}}$ es resoluble sí y sólo sí se verifica $W_n(G,\mathcal{T},\mathfrak{H}) = G$.

__Demostración:__ i) implica ii) Si $\mathcal{M}_2(G)$ es vacío, entonces G es resoluble y el resultado es claro. Así, podemos suponer que $\mathcal{M}_2(G)$ no es vacío. Por (2.8), todo factor principal no abeliano de G es $\mathfrak{H}$-central. En consecuencia, si G no es un $\mathfrak{S}\mathfrak{H}$-grupo existe un subgrupo maximal S $\mathfrak{H}$-crítico en G tal que $S \in \mathcal{T}$. Así, $W_n(G,\mathcal{T},\mathfrak{H}) \leq S$ contradicción.

ii) implica i). Si G es un $\mathfrak{S}\mathfrak{H}$-grupo, todo factor principal de G no abeliano es $\mathfrak{H}$-central. Por consiguiente, $W_n(G,\mathcal{T},\mathfrak{H}) = G$ aplicando (2.8).

La hipótesis sobre $\mathfrak{H}$ en el corolario anterior es esencial. Basta considerar la clase de Schunck $\mathfrak{H}$ generada por S , siendo S un grupo simple no abeliano. Entonces, el grupo $G = S \times S$ no es un $\mathfrak{S}\mathfrak{H}$-grupo y $W_n(G,\mathcal{T},\mathfrak{H}) = G$ para todo sistema maximal $\mathcal{T}$ de G.

BIBLIOGRAFIA.

[1] R. BAER, Classes of finite groups and their properties. Illinois J. Math. 1, 115-187 (1957).

[2] A. BALLESTER- BOLINCHES, Subgrupos con la propiedad "cubre-evita" de grupos finitos resolubles. Tesina de Licenciatura. Valencia, 1986.

[3] A. BALLESTER, L. M . EZQUERRO, A note on the Jordan-Hölder Theorem. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova (pendiente de publicación).

[4] H. BECHTELL, Pseudo-Frattini subgroups. Pacific J. Math. 14, 1129-1136 (1964).

[5] J. BEIDLEMAN, B. BREWSTER, $\mathfrak{F}$-normalizers in finite π-solvable groups (preprint).

[6] J. C. BEIDLEMAN, A. E. SPENCER, The normal index of maximal subgroups in finite groups, Illinois J. Math. 16, 95-101 (1972).

[7] P. BHATTACHARYA, N.P. MUKHERJEE, On the intersection of a class of maximal subgroups of a finite group II, J. of Pure and Applied Algebra 42, 117-124 (1986).

[8] B. BREWSTER, $\mathfrak{F}$-projectors in finite π-solvable groups, Arch. Math. 23, 133-138 (1972).

[9] R.M. BRYANT, R.A. BRYCE, B. HARTLEY, The formation generated by a finite group. Bull. Austral. Math. Soc. 2, 347-357 (1970).

[10] R. W. CARTER, B. FISCHER, T. O. HAWKES, Extreme classes of finite soluble groups. J. of Algebra 9, 285-313 (1968).

[11] R.W. CARTER, T. O. HAWKES, The $\mathfrak{F}$-normalizers of a finite soluble group. J. of Algebra 5, 175-202 (1967).

[12] J. B. DERR, W. E. DESKINS, N. P. MUKHERJEE, The influence of minimal p-subgroups on the structure of finite groups, Arch. Math. 45, 1-4 (1985).

[13] W. DESKINS, On maximal subgroups. In First Sympos. in Pure Math (AMS, Providence 1959).

[14] K. DOERK, Die maximale lokale Erklärung einer gesättigten Formation, Math. Z. 133. 133-135 (1973).

[15] K. DOERK, Über Homomorphe endlicher auflösbarer Gruppen, J. of Algebra 30. 12-30 (1974).

[16] K. DOERK and T.O. HAWKES, Finite soluble groups (Manuscrito sin publicar).
[17] R.P.ERICKSON, Projectors of finite groups, Comm. in Algebra 10(18). 1919-1938 (1982).
[18] L.M. EZQUERRO, On generalized covering subgroups and normalizers of finite soluble groups, Arch. Math. 47. 385-394 (1986).
[19] P.FÖRSTER. Carakterisierungen einiger Schunckklassen endlicher auflösbarer Gruppen 1. J. of Algebra 55 .155-187 (1978).
[20] P.FÖRSTER, Projektive Klassen endlicher Gruppen I. Schunck-und .Gaschützklassen, Math. Z. 186. 149-178 (1984). Projektive Klassen endlicher Gruppen II, a;b. Gesättigte Formationen. Pub. Sec. Mat. Univ. Aut. Barcelona 29. 39-76 (1985). Arch. Math. 44.193-209 (1985).
[21] P.FÖRSTER, Prefrattini subgroups J. Austral. Math. Soc. (Series A) 34, 234-247 (1983).
[22] P.FÖRSTER, Chief factors, Crowns and the Generalised Jordan-Hölder Theorem (preprint).
[23] P. FÖRSTER and E. SALOMON, Local definitions of local homomorphs and formations of finite groups,Bull. Austral. Math. Soc. 31, 5-34 (1985).
[24] W. GASCHÜTZ, Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen, Math. Z. 58, 160-170 (1953).
[25] W. GASCHÜTZ, Über modulare Darstellungen endlicher Gruppen, die von freien Gruppen induziert werden, Math. Z. 60. 274-286 (1954).
[26] W. GASCHÜTZ, Lectures on subgroups of Sylow type in finite soluble groups. Notes on Pure Math. 11, Canberra (1979).
[27] R. L. GRIESS and P.SCHIMD, The Frattini module, Arch. Math. 30. 256-266 (1978).
[28] P. HALL, On the system normalizers of a soluble group, Proc. London Math. Soc. 43, 507-525 (1937).
[29] T.O. HAWKES, On formation subgroups of a finite soluble group. J. London Math. Soc. 44. 243-250 (1969).
[30] B. HUPPERT, Endliche Gruppen I. Berlin-Heidelberg-New York 1967.
[31] B. HUPPERT, Zur Theorie der Formationen. Arch. Math. XIX, 561-574 (1968).
[32] N. INAGAKI, On $\mathfrak{F}$-normalizers and $\mathfrak{F}$-hypercenter, Proc. AMS. 26, 21-22

(1970).

[33] J. LAFUENTE, Nonabelian Crowns and Schunck classes of finite groups. Arch. Math. 42, 32-39 (1984).

[34] J. LAFUENTE, Eine Note Über Nichtalbelsche Hauptfactoresn und maximale untergruppen einer endlichen gruppe, Comm. in Algebra 13 (9) 2025-2036 (1985).

[35] A. MANN, $\mathfrak{H}$-normalizers of finite solvable groups, J. of Algebra. 14. 312-325 (1970).

[36] N.P. MUKHERJEE, A note on normal index and maximal subgroups in finite groups, Illinois J. Math. 75, 173-178 (1975).

[37] N.P. MUKHERJEE and P.BHATTACHARYA, On the intersection of a class of maximal subgroups of a finite group, Canad. J. Math. Vol XXXIX. No. 3, 603-611(1987).

[38] N.P. MUKHERJEE and P.BHATTACHARYA, The normal index of a finite group. Pacific J. of Math. Vol. 132, No. 1, 143-149 (1988).

[39] J. S. ROSE, The influence on a group of its abnormal structure. J. London Math. Soc. 40, 348-361 (1965).

[40] J. S. ROSE, A course on group theory, Cambridge University Press, 1978.

[41] E. SALOMON, Strukturerhaltende Untergruppen, Schunckklasen und Extreme Klassen endlicher Gruppen. Tesis Doctoral, Mainz 1987.

[42] P. SCHMID. Lokale Formationen endlicher Gruppen. Math. Z. 137. 31-48 (1974).

[43] G. M. SEITZ, C.R.B. WRIGHT, On complements of $\mathfrak{F}$-residuals in finite solvable groups, Arch. Math. 21, 139-150 (1970).

[44] V. N. SEMENCHUK, Minimal non $\mathfrak{F}$-groups, Algebra i Logika, 18 No. 3 348-382 (1979).

[45] L. A. SEMETKOV, Formation properties of finite groups. Dokl. Akad. Nauk SSSR 204 (1972) No. 6.

[46] T. YEN, On $\mathfrak{F}$-normalizers. Proc. Amer. Math. Soc.26. 49-56 (1970).

[47] A. YOKOYAMA, Finite soluble groups whose $\mathfrak{F}$-hypercenter contains all minimal subgroups, Arch. Math. 26, 123-130 (1975).

[48] A. YOKOYAMA, Finite soluble groups whose $\mathfrak{F}$-hypercenter contains all minimal subgroups II, Arch. Math. 27, 572-575 (1976).

[49] W. GASCHÜTZ, Praefrattinigruppen. Arch. Math. 13, 418-426 (1962). J. Austral. Math. Soc. (Series A) 34, 234-247 (1983).
[50] T. O. HAWKES, Analogues of Prefrattini subgroups, Proc. Internat. Conf. Austral. Nat. Univ. Canberra, 145-150 (1965).
[51] R. ERICKSON, Products of Saturated Formations, Comm. in Algebra 10 (18) 1911-1917 (1982).

UNIVERSIDAD DE VALENCIA   FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Reunido el Tribunal que suscribe, en el día de la fecha, acordó otorgar, por unanimidad, a esta Tesis doctoral de D. Adolfo Ballester Bolinches la calificación de Apto "cum laude"

Valencia, a 24 de Enero de 1989

El Secretario,

El Presidente

Pérez Monasor

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA — FACULTAT DE CIÈNCIES MATEMÀTIQUES — BURJASSOT