UNIVERSIDAD DE VALENCIA

# A L G U N O S   N U E V O S   R E S U L T A D O S

# E N   G R A F I C A   C E R R A D A

Memoria presentada para
optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas
por

TRINIDAD CASASUS ESTELLES

MANUEL VALDIVIA UREÑA, Catedrático de Análisis Matemático de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Valencia

CERTIFICO: Que la presente memoria "Algunos nuevos resultados en Gráfica Cerrada", ha sido realizada bajo mi dirección por Dña. Trinidad Casasús Estellés y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que conste en cumplimiento de la legislación vigente, presento ante la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Valencia la referidad tesis, firmando el presente certificado.

Valencia, 18 Noviembre de 1986

Manuel Valdivia

Fdo. Manuel Valdivia Ureña.

Quiero expresar mi agradecimiento
al Profesor Dr. Don Manuel Valdivia, sin cuya orientación no hubiera sido posible la realización de
esta memoria.

A mis padres y

a Mª José.

INDICE

# INTRODUCCION.

Unos de los primeros y más importantes resultados obtenidos en Análisis Funcional son los Teoremas de Gráfica Cerrada y Aplicación Abierta.

S. Banach (2) probó que cuando E y F son dos espacios de Fréchet, cualquier aplicación lineal de E en F cuya gráfica es un subconjunto cerrado de $E \times F$ es continua. Este Teorema se convirtió rápidamente en un resultado central del Análisis Funcional, y sus interesantes aplicaciones dieron pie a pensar en su generalización. Esta podía llevarse a cabo bajo dos aspectos diferentes, por una parte se trataria de suavizar las hipótesis del dominio, en las que cabia esperar algún tipo de condición relacionada con la propiedad de la categoria de Baire, y por otra parte podían suavizarse las condiciones de los espacios del rango con alguna propiedad relacionada con la completitud. Veamos los avances en estas dos direcciones:

J. Dieudonné y L. Schwartz (6) guiados por la teoria de distribuciones introducen los espacios limite inductivo estricto de espacios de Fréchet y prueban que el Teorema de Gráfica Cerrada es cierto cuando E y F son espacios pertenecientes a dicha clase. G. Köthe (18) en el mismo año extenderá dicho Teorema para espacios limites inductivos numerables no estrictos de espacios de Fréchet.

V. Pták (24) define los espacios $B_r$-completos (familia de espacios que contiene a los espacios de Fréchet) y prueba que el Teorema de Gráfica Cerrada es cierto si ponemos espacios tonelados en la partida y $B_r$-completos en la llegada. Define también en (24) los espacios B-completos (que coinciden con la completitud ordinaria en espacios metrizables y forman una subclase de los espacios $B_r$-completos) y prueba que si E es un espacio B-completo y F un tonelado entonces se verifica el Teorema de la Aplicación Abierta.

El problema que se planteaba era si el Teorema de Gráfica Cerrada era cierto para aquellos espacios localmente convexos que aparecían en las aplicaciones, como por ejemplo los espacios de distribuciones de L. Schwartz.

En 1955 Grothendieck (10) en su tesis prueba que toda aplicación lineal con gráfica sucesionalmente cerrada, de un espacio E ultrabornológico en un espacio LF es continua. Observando esto, Grothendieck conjetura que el Teorema de Gráfica Cerrada es cierto tomando espacios ultrabornológicos en el dominio y en el rango una clase de espacios que contenga a los espacios de Banach y sea estable para las operaciones: productos numerables topológicos, suma directa topológica numerable, subespacios cerrados y cocientes separados.

Este problema fue estudiado por distintos matemáticos, y en 1966, V. Raikov (28), utilizando unas ideas de W. Słowikowski da respuesta afirmativa a dicha conjetura. (M. Valdivia (39) probará que en realidad la clase de espacios definida por W. Słowikowski y la dada por Raikov son la misma).

L. Schwartz (31) prueba, usando teoria de la medida, que un Teorema de Gráfica Boreliana es cierto tomando un espacio de Banach

E, en el dominio y un espacio de Suslin en el rango, es decir, que toda aplicación lineal de E en F cuya gráfica sea un subconjunto de Borel de E F es continua, pero este resultado sólo supone una respuesta parcial a la conjetura de Grothendieck, porque no todo espacio de Banach es un espacio de Suslin. M. Martineau (22 ) extiende los resultados de L. Schwartz sin usar teoria de la medida, pero su extensión también responde parcialmente a la conjetura de Grothendieck.

En 1969 De Wilde (4 ) introduce la definición de "reseaux" en espacios localmente convexos, clase que contiene a los espacios de Fréchet y sus duales, y da una respuesta satisfactoria a la conjetura de Grothendieck.

En 1971 W. Robertson (26 ) siguiendo ideas basadas en los métodos usados por J.L. Kelley (17 ) y haciendo uso de estructuras uniformes obtiene Teoremas de Gráfica Cerrada que contienen en parte los resultados obtenidos por Pták y De Wilde y que son válidos cuando se trabaja en espacios no localmente convexos. Define las "webs" en espacios vectoriales topológicos no localmente convexos, que generalizan el concepto de "reseaux" y que permiten obtener una sencilla prueba del Teorema de Gráfica Cerrada, cuando en la partida consideramos un espacio de Baire.

En la otra dirección, es decir, si nos referimos a los espacios de partida, también distintos autores han estudiado la extensión del Teorema de Gráfica Cerrada, suavizando las hipótesis sobre dichos espacios:

S. Saxon (29 ) define los espacios Baire-like (espacios estrictamente contenidos entre los espacios localmente convexos de Baire y los espacios tonelados) y prueba un Teorema de Gráfica Cerrada para espacios Baire-like en la partida y limites inductivos numerables de espacios de Banach en el rango.

S. Saxon-A. Todd (30) dan la definición de los espacios no ordenados Baire-like (estrictamente contenidos entre los espacios de Baire y los Baire-like) y prueba que el Teorema de A.P. Robertson-W. Robertson (25) es cierto tomando en el dominio la envoltura localmente convexa de espacios no ordenados Baire-like y en el rango una unión numerable de espacios $B_r$-completos, con la topologia final para las inmersiones.

También en esta linea, M. Valdivia (36), M. Valdivia-Pérez Carreras (40) introducen las nociones de espacio supratonelado (entre los espacios no ordenados Baire-like y los Baire-like) y espacio totalmente tonelado (entre los espacios no ordenados Baire-like y los supratonelados) respectivamente, y que permiten extender los teoremas de Saxon y Todd en el primer caso, y obtener un Teorema de Gráfica Cerrada cuando tenemos espacios totalmente tonelados en la partida y espacios con redes de tipo $\mathcal{C}$ absolutamente convexas en la llegada, en el segundo caso.

En 1985 M. Valdivia (38) define los espacios Casi LB, espacios que satisfacen las propiedades de estabilidad exigidas en la conjetura de Grothendieck y prueba un Teorema de Gráfica Cerrada si consideramos en el rango dichos espacios y en la partida espacios estrictamente tonelados (clase de espacios entre los espacios totalmente tonelados y los espacios Baire-like). Los espacios Casi LB son espacios una red estricta, y contienen a los espacios localmente convexos localmente completos con una red de tipo $\mathcal{C}$. Dicha Teoria extiende en lo esencial la de De Wilde.

En 1985 B. Cascales (3 ) extiende los resultados de M. Valdivia, cuando se trata de conjuntos absolutamente p-convexos y en general absolutamente semiconvexos, y obtiene nuevos resultados para los espacios Casi LB que proporcionan el soporte para probar resultados relacionados estrechamente con el teorema de la gráfica cerrada, teorema de base débil, propiedades de localización de familias de aplicaciones etc.

Como hemos visto, ya en su versión original, el Teorema de la Gráfica Cerrada fue probado, no sólo para espacios de Banach, sino para espacios de Fréchet (en principio no localmente convexos).

W. Robertson (26 ) intentó formalizar una teoria clásica de espacios vectoriales topológicos, y siguiendo sus ideas S.O. Iyahen (11 ) guiado por la teoria de los localmente convexos encontró una aproximación satisfactoria a las nociones de "tonelación" y "bornológico", para espacios vectoriales topológicos. Para esto sustituyó los conjuntos absolutamente convexos M y su propiedades $M + M = 2M$ por una sucesión decreciente $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos absorbentes $U_n$ tal que $U_n + U_n \subseteq U_{n-1}$, las "defining sequences" ( 11) o "strings" ( 1 ) a las que en nuestra memoria denotaremos c omo "cadenas". También en esta linea podemos mencionar los trabajos de J. Köhn (15 ), S. Tomasêk (33 ) y (34 ) y L. Waelbroeck (41).

Nos proponemos en esta memoria, siguiendo por este camino, generalizar algunos de los resultados obtenidos por M. Valdivia y B. Cascales para absolutamente convexos y semiconvexos, respectivamente, así como relacionar los espacios por nosotros introducidos con los espacios con redes definidos por W. Robertson ( 26).

Brevemente, el contenido de esta memoria es el siguiente:

En el Capítulo 1, intentando extender los resultados obtenidos en espacios Casi LB y Casi $L_oB$ al contexto general de los espacios vectoriales topológicos, definimos los espacios Casi LF, a cuya clase pertenecen los espacios citados y que demostramos forman una subclase estrictamente contenida en la de los Casi LF. Probamos que los espacios Casi LF verifican las propiedades de estabilidad exigidas en la conjetura de Grothendieck y damos Teoremas de Gráfica Cerrada y Aplicación Abierta para dichos espacios. De forma natural, observando el Teorema de la Gráfica Cerrada llegamos al estudio de los espacios adecuados en el dominio para este Teorema que son aquellos que cumplen lo que denotamos por la propiedad ($\beta$) y cuya clase contiene a los espacios de Baire y está contenida en los espacios tonelados (según definición dada en (1) para espacios vectoriales topológicos). Obtenemos teoremas de localización para aplicaciones lineales continuas cuando en el dominio hay un espacio con la propiedad ($\beta$) y en el rango un espacio Casi LF y extraemos consecuencias que usaremos en el estudio de los espacios de aplicaciones lineales continuas. Dedicamos también un pequeño apartado al estudio del producto tensorial entre un espacio localmente convexo metrizable y un espacio localmente convexo Casi LF y por último analizamos la relación existente entre los espacios Casi LF y los espacios con "webs" definidos por W. Robertson (26).

En el Capítulo 2 introducimos una noción de limite inductivo generalizado que es caso particular de los limites generalizados definidos por Turpin (35) y damos condiciones para que dicho limite coincida con un limite inductivo de una familia de espacios vectoriales topológicos (según definición dada en (1)). Estudiamos condiciones para que un límite inductivo generalizado sea un espacio Casi LF, extendemos el concepto de límite inductivo Sucesionalmente retractivo dado por Floret (7) al caso que nos ocupa y obtenemos algunas propiedades de regularidad para los límites inductivos generalizados por nosotros introducidos.

El Capítulo 3 lo dedicamos al estudio de los espacios de Słowikowski y Raikov. Probamos que dichos espacios coinciden en cualquier caso, (M. Valdivia (39) probó que estos espacios coincidían en el caso separado), pero Raikov y Słowikowski no exigen dicha condición en sus artículos. Probamos que todo espacio de Słowikowski tiene una $\mathcal{T}$-red estrictamente cerrada (26), y establecemos por último condiciones bajo las cuales la implicación recíproca es cierta, extendiendo de esta forma los resultados obtenidos por Valdivia (39) en relación con los espacios con "reseaux" de De Wilde para el caso localmente convexo.

# CAPITULO 1: ESPACIOS CASI LF Y TEOREMA DE GRAFICA CERRADA.

## 0. INTRODUCCION.

Dado un espacio localmente convexo Fréchet, F, y $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema fundamental deentornos absolutamente convexos y cerrados del origen, si en el conjunto $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ de las sucesiones de enteros positivos consideramos un elemento $\alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y hacemos $A_\alpha = \bigcap_1^\infty a_n U_n$, $A_\alpha$ es un disco de Banach y se verifican las siguientes propiedades:

(i) $F = \bigcup \{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$.

(ii) Si en el conjunto $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ consideramos la relación de orden $\leq$, donde para dos elementos $\alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $\beta = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ decimos que $\alpha \leq \beta$ si y sólo si $a_n \leq b_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se verifica que si $\alpha \leq \beta$ entonces $A_\alpha \subseteq A_\beta$.

M. Valdivia observó que no solo estos espacios verificaban estas propiedades, sino que había otros espacios, por ejemplo los espacios LB en los que se cumplía un Teorema de Gráfica Cerrada, se daban estas propiedades y además éstas tenían importancia en orden a obtener resultados en dicho Teorema. Esto le llevó a definir los espacios Casi LB (38). Dicha clase de espacios verifica las propiedades de estabilidad de la conjetura de Grothendieck, y Valdivia obtuvo para ellos Teoremas de Gráfica Cerrada y de Localización, tomando en la partida una amplia clase de espacios, que potencian los Teoremas de levantamiento de M. De Wilde (4) y (5). Dedujo también que todo espacio localmente completo con una red de tipo $\mathcal{C}$ es un espacio Casi LB y que todo espacio Casi LB tiene una red estricta.

En (3) B. Cascales da las definiciones de espacios Casi $L_pB$ y Casi $L_oB$ que extienden los resultados de Valdivia a los casos absolutamente p-convexo y semiconvexo.

Es este capítulo introducimos la clase de los espacios Casi - LF, clase definida en el contexto general de los espacios vectoriales topológicos y a la que pertenecen, tanto los espacios Casi LB definidos por Valdivia como los Casi $L_pB$ y Casi $L_oB$ definidos por Cascales, y que verifican todas las propiedades de estabilidad que se dan en estos espacios. Damos también Teoremas de Gráfica Cerrada y de Localización, relacionamos dicha clase con la clase de los espacios con redes definida por W. Robertson (26) y obtenemos en este contexto resultados análogos a los obtenidos por Valdivia para localmente convexos.

## *1. NOTACION.*

Recogemos en este apartado las notaciones, definiciones y resultados a los que nos referiremos a lo largo de esta memoria. Seguiremos básicamente la notación usada en (1).

A lo largo de la memoria consideraremos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ de los números reales o complejos, $\mathbb{K}$ dotado de la topologia usual.

*1.1. Definición.*

Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Una sucesión $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de E, diremos que es una "cadena" en E si se verifica:

(i) $U_n$ es equilibrado y absorbente, para cada $n\in \mathbb{N}$.

(ii) $\mathcal{U}$ tiene la propiedad sumativa, i.e., $U_{n+1} + U_{n+1} \subseteq U_n$, $n\in\mathbb{N}$.

Diremos que $U_1$ es el "comienzo" de $\mathcal{U}$ y que $U_n$ es el "n-ésimo escalón" de $\mathcal{U}$.

Para cada cadena $\mathcal{U}$, denotaremos por $N(\mathcal{U}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ y diremos que $N(\mathcal{U})$ es el Nùcleo de $\mathcal{U}$. Por tener $\mathcal{U}$ la propiedad sumativa y ser cada escalón equilibrado, se verifica que $N(\mathcal{U})$ es un subespacio vectorial de E

Escribiremos $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ para dos cadenas $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\mathcal{V} = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si la relación $U_n \subseteq V_n$ se verifica para cada $n\in\mathbb{N}$, y denotaremos por $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ la cadena $(U_n \cap V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Denotaremos por $(E,\mathcal{T})$ un espacio vectorial dotado de una topologia lineal y Hausdorff $\mathcal{T}$. Diremos que $(E,\mathcal{T})$ es un espacio vectorial topológico. Un espacio vectorial topológico metrizable completo diremos que es un espacio de Fréchet.

*1.2. Proposición.*

*Sea $F$ un conjunto de cadenas es un espacio vectorial E, tal que para cada $\mathcal{U}$, $\mathcal{V} \in F$, existe un $\mathcal{W} \in F$ tal que $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.*

*Entonces los escalones de las cadenas de $F$ forman una base de entornos del origen para una topologia lineal $\mathcal{T}_F$ sobre E . Más aún, si $\bigcap_{\mathcal{U}\in F} N(\mathcal{U}) = \{0\}$, entonces $\mathcal{T}_F$ es Hausdorff, y $(E,\mathcal{T})$ es un espacio vectorial topológico.*

Demostración.

Ver (1), pagina 7.

*1.3. Proposición.*

*Un espacio vectorial topológico $(E,\mathcal{T})$ es metrizable si y sólo si, existe una cadena $\mathcal{U}$ en E, cuyos escalones forman una base de entornos del origen en $(E,\mathcal{T})$.*

Demostración.

Ver (1), pagina 12.

## 2. *ESPACIOS CASI LF.*

Consideraremos a lo largo de esta memoria el conjunto de las sucesiones de números enteros positivos $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dotado de la relación de orden definida en el punto (ii) del apartado 0 de este capítulo.

*2.1. Definición.*

*Sea* $(F,\mathcal{T})$ *un espacio vectorial topológico, y sea* $\mathcal{F} = \{(F_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ *una familia de subespacios vectoriales de* F *verificando las siguientes propiedades:*

*(i)* $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} F_\alpha = F$ .

*(ii) Para cada* $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ , $F_\alpha$ *tiene asociada una cadena* $\mathcal{U}_\alpha = (U^n_\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ *en* $F_\alpha$ *cuyos escalones forman una base de entornos del origen en* $(F_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, *de manera que* $(F_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ *es un espacio de Fréchet. Diremos que* $\mathcal{U}_\alpha$ *es la "cadena asociada" a* $(F_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$.

*(iii) Para cada* $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{T}_\alpha$ *es más fina que latopologia* $\mathcal{T}_{F_\alpha}$ *inducida por* $\mathcal{T}$ *sobre* $F_\alpha$ , *i.e., la inyección canónica* $\mathcal{I}_\alpha : (F_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \hookrightarrow (F,\mathcal{T})$ *es continua. Lo denotaremos* $\mathcal{T}_\alpha \succ \mathcal{T}_{F_\alpha}$ .

*(iv) Si* $\alpha \leq \beta$ *con* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *entonces* $\mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathcal{U}_\beta$ .

*Diremos entonces que* $(F,\mathcal{T})$ *es un CASI LF ESPACIO y que* $\mathcal{F}$ *es una REPRESENTACION de* F.

Evidentemente, todo espacio de Fréchet es un espacio Casi LF. Veamos ahora propiedades de estabilidad para los espacios Casi LF.

*2.2. Proposición.*

*Sea* $(F,\mathcal{T})$ *un espacio Casi LF y sea* $(G,\mathcal{T}')$ *un espacio vectorial topológico tal que existe una aplicación* T *lineal y continua de* F *sobre* G. *Entonces* $(G,\mathcal{T}')$ *es un espacio Casi LF.*

Demostración.

Sea $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ una representación de $(F,\mathcal{T})$ y consideremos la familia de los subespacios vectoriales de G, $\{T(F_\alpha) : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$.

Veamos que esta familia es una representación de $(G,\mathcal{T}')$:

(i) $\bigcup\{T(F_\alpha) : \alpha\in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\} = T(\bigcup\{F_\alpha : \alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}) = T(F) = G.$

(ii) Para cada $\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, dado $F_\alpha$ consideramos la cadena $\mathcal{U}_\alpha = (U_\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ asociada a $F_\alpha$, y denotamos por $\mathcal{U}'_\alpha$ la familia $(T(U_\alpha^n))_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de $T(F_\alpha)$. $\mathcal{U}'_\alpha$ así definida es una cadena, y si denotamos por $\mathcal{T}'_\alpha$ la topologia generada por $\mathcal{U}'_\alpha$, (hacemos uso de la Proposición 1.2.), $\mathcal{T}'_\alpha$ es una topologia separada:

Dado V un $\mathcal{T}'$-entorno del origen en G, por ser T continua, existe un $\mathcal{T}$-entorno del origen en F, tal que $T(U)\subseteq V$. Como $\mathcal{T}_\alpha \succ \mathcal{T}_{F_\alpha}$, dado U existe un $n\in\mathbb{N}$ tal que $U_\alpha^n \subseteq U\cap F_\alpha$, luego $T(U_\alpha^n)\subseteq V$. Así pues, la inyección $I_\alpha : (T(F_\alpha),\mathcal{T}'_\alpha) \longrightarrow (G,\mathcal{T}')$ es continua, y por tanto, por ser $\mathcal{T}'$ separada, $\mathcal{T}'_\alpha$ también lo es.

Entonces, si consideramos la restricción de la aplicación T a $F_\alpha$, $T_{|F_\alpha} : (F_\alpha,\mathcal{T}_\alpha) \longrightarrow (T(F_\alpha),\mathcal{T}'_\alpha)$, esta aplicación es lineal, continua, abierta y sobreyectiva, luego $F_\alpha/\mathrm{Ker}\, T_{|F_\alpha}$ es topológicamente isomorfo a $T(F_\alpha)$ y por tanto $(T(F_\alpha),\mathcal{T}'_\alpha)$ es un espacio de Fréchet, ((20), § 15.11. (4)).

(iii) $I_\alpha : (T(F_\alpha),\mathcal{T}'_\alpha) \longrightarrow (G,\mathcal{T}')$ es continua, visto en (ii).

(iv) Evidentemente se verifica que si $\alpha, \beta\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ con $\alpha\leq\beta$, entonces $\mathcal{U}'_\alpha \subseteq \mathcal{U}'_\beta$, por verificarse en $(F,\mathcal{T})$.

*2.3. Proposición.*

*El producto numerable de espacios Casi LF, es un espacio Casi LF.*

Demostración.

Sea $\{(E_j, \mathcal{T}_j) : j\in J\}$ una familia numerable de espacios Casi LF, y consideremos en cada espacio $(E_j,\mathcal{T}_j)$ la representación $\mathcal{F}_j = \{(E_\alpha^j, \mathcal{T}_\alpha^j) : \alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$. Denotaremos por $E = \prod_{j\in J} E_j$

Sea $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow J \times \mathbb{N}$ una biyección y definamos la biyección

$$\psi : (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{J} \longrightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \quad \text{que aplica}$$

$$\{\alpha_j : j \in J\} \rightsquigarrow (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

siendo $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión construida de forma que si $\{\alpha_j : j\in J\}$ es tal que $\alpha_j = (a_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$, definimos $b_n = a_{\varphi(n)}$, para $n = 1, 2, 3, \dots$.

$\psi$ es una biyección, por serlo $\varphi$ y por tanto, dado $\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ existe un único $(\alpha_j : j\in J) \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{J}$ tal que $\psi(\{\alpha_j : j\in J\}) = \alpha$.

Así pues, podemos definir para cada $\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ $E_\alpha = \prod_{j\in J} E^j_{\alpha_j}$. Veamos que la familia $\{(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ es una representación de $(E,\mathcal{T})$, donde denotamos por $\mathcal{T}_\alpha$ la topologia producto de las $\mathcal{T}^j_{\alpha_j}$, $j\in J$, y por $\mathcal{T}$ la topologia producto de las $\mathcal{T}_j$.

(i) $\bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} E = E$ :

Dado $x = (x_j)_{j\in J} \in E$, $x_j \in E_j$, existe $\alpha_j\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ / $x_j \in E^j_{\alpha_j}$, $j\in J$. Si $\psi(\{\alpha_j : j\in J\}) = \alpha$ entonces $x \in E_\alpha = \prod_{j\in J} E^j_{\alpha_j}$.

(ii) Veamos que en cada $E_\alpha$ hay definida una cadena que define la topologia $\mathcal{T}_\alpha$ con la que $(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ es un espacio de Fréchet.

Por ser $(E^j_{\alpha_j}, \mathcal{T}^j_{\alpha_j})$ un espacio de Fréchet, $\alpha_j\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $j\in J$, y ser $J$ numerable, el producto $\prod_{j\in J} (E^j_{\alpha_j}, \mathcal{T}^j_{\alpha_j}) = (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ es un espacio de Fréchet ((18), pag. 50). Veamos que cada $(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ tiene asociada una cadena que verifica todas las considiciones exigidas en la definición de casi LF.

Sea en cada $E^j_{\alpha_j}$, $\mathcal{U}^j_{\alpha_j} = (U^j_{\alpha_{j,n}})_{n\in\mathbb{N}}$ la cadena asociada.

Distinguiremos dos casos:

1. El cardinal de J es finito.

Una base de entornos vendrá dada por $\prod_{j\in J} W^j_{\alpha_j}$, donde cada $W^j_{\alpha_j}$ es un $\mathcal{T}^j_{\alpha_j}$ -entorno de del origen en $E^j_{\alpha_j}$.

Sea $\mathcal{U}_\alpha = (U^n_\alpha)_{n\in \mathbb{N}}$ la familia de subconjuntos de $E_\alpha$, donde $U^n_\alpha = \prod_{j\in J} U^j_{\alpha_{j,n}}$ . Veamos que $\mathcal{U}_\alpha$ es una cadena en $E_\alpha$ :

(i) $U^n_\alpha$ es equilibrado por serlo cada $U^j_{\alpha_{j,n}}$, $n\in \mathbb{N}$, $j\in J$.

$U^n_\alpha$ es absorbente en $E_\alpha$ ya que dado un $x\in E_\alpha$ , $x = (x_j)_{j\in J}$ , $x_j\in E^j_{\alpha_j}$, $j\in J$, existe un $\lambda_j > 0$: $x_j \in \lambda_j U^j_{\alpha_{j,n}}$ . Si hacemos $\lambda = \max_{j\in J} (\lambda_j)$ entonces $x\in\lambda U^n_\alpha$, y esto para cada $n\in\mathbb{N}$.

(ii ) Propiedad sumativa: Demostración directa, por serlo coordenada a coordenada.

Además, cada $U^n_\alpha$ es un $\mathcal{T}_\alpha$-entorno del origen en E , por la construcción hecha, siendo cada $U^j_{\alpha_{j,n}}$ un $\mathcal{T}^j_{\alpha_{j,n}}$ -entorno de 0 en $E^j_{\alpha_j}$.

Veamos por último que $\mathcal{U}_\alpha$ es una base de entornos del origen para la topologia $\mathcal{T}_\alpha$:

Sea $W = \prod_{j\in J} W^j$ un $\mathcal{T}_\alpha$-entorno del origen en $E_\alpha$, con $W^j$ $\mathcal{T}^j_{\alpha_j}$-entorno del origen en $E^j_{\alpha_j}$. Entonces, sabemos que existe un $n_j\in \mathbb{N}$ : $U^j_{\alpha_{j,n_j}} \subsetneq W^j$, $j\in J$. Sea $n_o = \max_{j\in J} (n_j)$. Tenemos entonces que $U^j_{\alpha_{j,n_o}} \subseteq U^j_{\alpha_{j,n_j}}$ aplicando propiedades de las cadenas, y esto para cada $j\in J$. Entonces, si hacemos $U^{n_o}_\alpha = \prod_{j\in J} U^j_{\alpha_{j,n_o}}$ , $U^{n_o}_\alpha \subseteq W$ y tenemos que $\mathcal{U}_\alpha$ es base de entornos.

2. Supongamos el cardinal de J infinito numerable.

Si W es un elemento de la base de $\mathcal{T}_\alpha$-entornos de 0 en $E_\alpha$, $W = \prod_{j\in J} W^j$ donde $W^j = E^j_{\alpha_j}$ , $\forall j$, excepto quizás para un número finito de subíndices, en cuyo caso $W^j$ es un $\mathcal{T}^j_{\alpha_j}$-entorno de 0 en $E^j_{\alpha_j}$. Definimos en en este caso $\mathcal{U}_\alpha = (U^n_\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ , familia de subconjuntos de $E_\alpha$ tal que

$$U^n = \prod_{j\in\mathbb{N}} V^j_{\alpha,n} \quad \text{donde} \quad V^j_{\alpha,n} = U^j_{\alpha_j,n} \quad \text{si } 1\leq j\leq n$$

$$V^j_{\alpha,n} = E^j_{\alpha_j} \quad \text{si } j > n$$

Así construidos, para las condiciones de una cadena tenemos:

(i) se verifica por razonamiento análogo al del caso finito.

(ii) La propiedad sumativa se verifica coordenada a coordenada, y por tanto se verifica en el producto.

Así pues, $\mathcal{U}_\alpha$ es una cadena, cuyos elementos, por construcción, son $\mathcal{T}_\alpha$-entornos del origen en $E_\alpha$. Veamos que $\mathcal{U}_\alpha$ es base de $\mathcal{T}_\alpha$-entornos de 0 en $E_\alpha$:

Dado $W = \prod_{j\in\mathbb{N}} W^j$ , $\mathcal{T}_\alpha$ -entorno de 0 , con $W^j = E^j_{\alpha_j}$, excepto para un conjunto finito de indices , que denotaremos por I, para cada $i\in I$ existe un $n_i \in N$ : $U^i_{\alpha_i,n_i} \subseteq W^i$, y podemos considerar $n_o = \max_{i\in I}(n_i)$. Sea $n'_o = \max(n_o, \max_{i\in I}(i))$. Si consideramos el escalón $U^{n'_o}_\alpha$ de $\mathcal{U}_\alpha$,

$$U^{n'_o}_\alpha = \prod_{j\in J} V^j_{\alpha,n'_o} \; : \; V^j_{\alpha,n'_o} = U^j_{\alpha_j,n'_o} \quad \text{si } 1\leq j\leq n'_o$$

$$V^j_{\alpha,n'_o} = E^j_{\alpha_j} \quad \text{si } j > n'_o$$

y entonces se verifica que:

si $i\in I$, $U^i_{\alpha_i,n'_o} = V^i_{\alpha,n'_o} \subseteq U^i_{\alpha_i,n_i} \subseteq W^i$ por ser $n'_o \geq n_i$.

si $i\notin I$ , evidentemente $V^i_{\alpha,n'_o} \subseteq E^i_{\alpha_i}$, por tanto $U^{n'_o}_\alpha = \prod_{j\in\mathbb{N}} V^j_{\alpha,n'_o} \subseteq W$

y $\mathcal{U}_\alpha$ es una $\mathcal{T}_\alpha$-base de entornos de 0.

(iii) Veamos la continuidad de la inyección $I_\alpha : (E_\alpha,\mathcal{T}_\alpha) \longrightarrow (E,\mathcal{T})$:

Si $E_\alpha = \prod_{j\in J} E^j_{\alpha_j}$, por la propiedad (iii) de Casi LF, sabemos que la inyección $I_{\alpha_j}:(E^j_{\alpha_j},\mathcal{T}_{\alpha_j}) \longrightarrow (E_j,\mathcal{T}_j)$ es continua, por tanto existe un $n_j$ tal que $U^j_{\alpha_j,n_j} \subsetneq W^j$.

(iii.1) Supongamos J de cardinal finito. Entonces, dado W $\mathcal{T}$-entorno de 0 , $W = \prod_{j\in J} W^j$ con $W^j$ $\mathcal{T}_j$-entorno de 0 en $E_j$. Si consideramos $n_o = \max_{j\in J} (n_j)$, $U^{n_o}_{\alpha} = \prod_{j\in J} U^j_{\alpha_j,n_o} \subsetneq \prod_{j\in J} U^j_{\alpha_j,n_j} \subsetneq W$, luego $I_\alpha$ es continua.

(iii.2) Sea J de cardinal infinito numerable.. Consideremos $W = \prod_{j\in J} W^j$ con $W^j = E^j_{\alpha_j}$, excepto para un subconjunto finito I de subíndices. Siguiendo un razonamiento análogo al del apartado (ii) de la página anterior obtendríamos que existe un $n'_o \in \mathbb{N}$ : $U^{n'_o}_{\alpha} \subsetneq W$, luego $I_\alpha$ es continua para cualquier conjunto J y para cada $\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

(iv) Veamos por último la relación de orden en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$:

Sean $\alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\beta = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos elementos de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, tal que $\alpha\leq\beta$. Por ser $\psi$ una biyección, sabemos que existen $\{\alpha_j = (a_{j,p})_{p\in\mathbb{N}} : j\in J\}$, $\{\beta_j = (b_{j,p})_{p\in\mathbb{N}} : j\in J\}$ tal que $\psi(\{\alpha_j : j\in J\}) = \alpha$ y $\psi(\{\beta_j : j\in J\}) = \beta$.

La relación entre los $\alpha_j$ y los $\beta_j$ viene determinada por el orden entre $\alpha$ y $\beta$, ya que para cada n

$$a_n = a_{\varphi(n)} = a_{(j,p)}, \quad b_n = b_{\varphi(n)} = b_{(j,p)}.$$

Como $\varphi$ es una biyección, para cada par de números enteros positivos (j,p) se verifica que si $a_n \leq b_n$, n = 1,2,... entonces $a_{(j,p)} \leq b_{(j,p)}$, $j\in J$, $p\in\mathbb{N}$, luego $\alpha_j = (a_{(j,p)}) \leq (b_{(j,p)}) = \beta_j$, $j\in\mathbb{N}$ y por tanto $U^n_\alpha = \prod_{j\in J} V^j_{\alpha,n} \subsetneq \prod_{j\in J} V^j_{\beta,n} = U^n_\beta$ , y esto para n = 1,2,...

(ya que $\alpha \leq \beta$ implica que $\alpha_j \leq \beta_j$ $\forall j \in J$, luego $U^j_{\alpha_j,n} \subseteq U^j_{\beta_j,n}$ $\forall j \in J$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

Luego $(E,\mathcal{T})$ es un espacio Casi LF.

*2.4 Definición.* (1).

1. Sea E un espacio vectorial. Para cada $i \in I$, siendo I un - un conjunto de índices, sea $A_i$ una aplicación lineal del espacio vectorial topológico $(E_i,\mathcal{T}_i)$ en E. Supongamos que $E = \sum_{i\in I} A_i(E_i)$ y consideremos es E el conjunto $\mathcal{F}$ de cadenas:

$\mathcal{F} = \{ \mathcal{U} : \mathcal{U}$ es una cadena en E y $A_i^{-1}(E_i)$ es una cadena topológica en $(E_i,\mathcal{T}_i)$, para cada $i \in I \}$. (Diremos que una cadena es topológica cuando todos sus escalones son entornos del origen para la topologia del espacio).

Entonces, la topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ (Proposición 1.2.) es la topologia más fina sobre E tal que todas las aplicaciones $A_i$, i I son continuas. La topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ diremos que es la "*Topologia Inductiva*" sobre E, - con respecto a la familia $\{(E_i,\mathcal{T}_i), A_i\}_{i \in I}$.

Un espacio vectorial topológico así construido diremos que - es el "*Límite inductivo* de los espacios $(E_i,\mathcal{T}_i)$ con respecto a las $A_i$" y lo denotaremos por $(E,\mathcal{T}) = \sum_{i\in I} A_i(E_i,\mathcal{T}_i)$. De acuerdo con nuestra definición, exigiremos siempre a un límite inductivo ser Hausdorff.

2. Definimos ahora la "*Suma directa topológica*" de la siguiente forma:

Sea, para cada $i \in I$, $(E_i,\mathcal{T}_i)$ un espacio vectorial topológico y denotemos por E la suma directa algebraica de los $E_i$, $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$. Consideremos las inyecciones canónicas $I_i : E_i \hookrightarrow E$.

Llamaremos "*Suma directa topológica*" de los $(E_i,\mathcal{T}_i)$ al espacio vectorial topológico, siendo $\mathcal{T}$ la topologia lineal más fina sobre E que hace continuas las aplicaciones $I_i$, $\forall$ $i \in I$. así definida es Hausdorff. (1), pag. 21.

3. Sea $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente de subespacios vectoriales de E tal que $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, y supongamos que existe definida una topologia lineal Hausdorff $\mathcal{T}_k$ sobre $E_k$, $k \in \mathbb{N}$, de forma que $\mathcal{T}_{k+1}|_{E_k} = \mathcal{T}_k$.

Si $\mathcal{T}$ es la topologia vectorial más fina sobre E tal que todas las inyecciones canónicas $I_k$: $E_k \hookrightarrow E$ son continuas, (topologia inductiva sobre E con respecto a la familia $\{(E_k, \mathcal{T}_k), I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, diremos que $(E, \mathcal{T})$ es un "*límite inductivo estricto*", y lo denotaremos por

$$(E,\mathcal{T}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k, \mathcal{T}_k).$$ (1), pag 27.

Se verifica que toda suma directa topológica numerable $(E,\mathcal{T}) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} (E_i, \mathcal{T}_i)$ es límite inductivo estricto de los espacios $(F_k, \mathcal{T}'_k) = \bigoplus_{i=1}^{k} (E_i, \mathcal{T}_i)$.

*2.5. Proposición.*

*La suma directa numerable de espacios Casi LF, es un espacio Casi LF.*

Demostración.

En el caso finito, por ser la suma isomorfa al producto, está ya demostrado. Veamos el caso infinito numerable.

Sea $\{(E_j, \mathcal{T}_j) : j \in \mathbb{N}\}$ una familia de espacios Casi LF, y sea para cada $j \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_j = \{(E^j_\alpha, \mathcal{T}^j_\alpha) : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ una representación de $E_j$, siendo $\mathcal{U}^j_\alpha = (U^j_{\alpha,n})_{n \in \mathbb{N}}$ la cadena asociada a cada $(E^j_\alpha, \mathcal{T}^j_\alpha)$.

Sea $(E,\mathcal{T}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} (E_j, \mathcal{T}_j)$ la suma directa de los $(E_j, \mathcal{T}_j)$, e identificaremos $E_j$ en la forma habitual como subespacio vectorial de E. Si $\alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, definimos $E_\alpha = E^1_\alpha \oplus E^2_\alpha \oplus E^3_\alpha \oplus \dots \oplus E^{a_1}_\alpha$.

Veamos que $\{(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ es una representación de $(E,\mathcal{T})$.

(i) $\bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} E = E$:

Si $x\in E$, podemos suponer, sin perdida de generalidad, $x = \bigoplus_{i=1}^{p} x_i$, con $x_i \in E_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$.

Para cada i, existe un $\alpha_i \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$: $x_i \in E^i_{\alpha_i}$, con $\alpha_i = (a_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$, $i = 1,2, \ldots, p$.

Sea $\alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ : $a_n = \max_{1\leq i\leq p} (a_{i,n})$, $n = 1,2,\ldots$

$$a_1 = \max ( p, a_{1,1}, a_{2,1}, \ldots a_{p,1}).$$

Entonces, $\alpha$ así definida verifica que $\alpha \geq \alpha_i$, $i = 1,2, \ldots p$, y por tanto $E^i_{\alpha_i} \subseteq E^i_\alpha$, $1 \leq i \leq p$. Entonces $x \in E^1_\alpha \oplus E^2_\alpha \oplus \ldots \oplus E^{a_1}_\alpha = E$.

(ii) Evidentemente, por ser cada $E^j_{\alpha_j}$ un espacio de Fréchet, los $E_\alpha$ son espacios de Fréchet. Veamos que existe una cadena asociada a cada uno de ellos, de forma que se verifican las condiciones de la definición

Definimos $\mathcal{U}_\alpha = (U^n_\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ como la familia de subconjuntos de $E_\alpha$ tal que: $U^n_\alpha = U^1_{\alpha,n} + U^2_{\alpha,n} + \ldots + U^{a_1}_{\alpha,n}$. $\mathcal{U}_\alpha$ es una cadena en $E_\alpha$:

(ii.1) Evidentemente cada $U^n_\alpha$ es equilibrado por serlo los $U^i_{\alpha,n}$.

$U^n_\alpha$ es absorbente en $E_\alpha$ ya que si $x\in E_\alpha$, $x = \bigoplus_{i=1}^{a_1} x_i$, $x_i \in E^i_\alpha$, $i= 1,2, \ldots,p$, entonces existe un $\lambda_i > 0$ : $x_i \in \lambda_i U^i_{\alpha,n}$, $i = 1,2, \ldots, a_1$ y haciendo $\lambda = \max_{1\leq i\leq a_1} (\lambda_i)$ tenemos que $x_i \in \lambda U^i_{\alpha,n}$ $i = 1,2, \ldots,p$ luego $x\in \lambda U^n_\alpha$.

(ii.2) La propiedad sumativa es evidente por verificarla cada $U^i_{\alpha,n}$.

Veamos que $\mathcal{U}_\alpha$ es una base de $\mathcal{T}_\alpha$-entornos del origen en $E_\alpha$:

Evidentemente, dado un entorno del origen de la forma $\bigoplus_{i=1}^{a_1} U^i_{\alpha,n_i}$, podemos considerar $n_o = \max_{1\leq i\leq a_1} (n_i)$ y aplicando propiedades de las cadenas, -

sabemos que $\bigoplus_{i=1}^{a_1} U^i_{\alpha,n_o} = U^{n_o}_{\alpha} \subseteq \bigoplus_{i=1}^{a_1} U^i_{\alpha,n_1}$

luego $\mathcal{U}_{\alpha}$ es una base de $\mathcal{T}_{\alpha}$-entornos de 0.

(iii) Las inyeciones $I_{\alpha}: (E_{\alpha}, \mathcal{T}_{\alpha}) \longrightarrow (E, \mathcal{T})$ son continuas:

Sabemos que $(E,\mathcal{T})$ es límite inductivo estricto de los espacios $\bigoplus_{i=1}^{k} (E_i, \mathcal{T}_i)$ , $k\in\mathbb{N}$ y por tanto, son continuas las inyecciones $I_k: \bigoplus_{i=1}^{k} (E_i, \mathcal{T}_i) \longrightarrow (E,\mathcal{T})$.

Además, por ser cada $(E_j,\mathcal{T}_j)$ un espacio Casi LF, sabemos que son continuas las inyecciones $I_{\alpha,i} : E^i_{\alpha} \longrightarrow E$, $\forall \alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Así pues, si consideramos la composición de aplicaciones continuas

$$E_{\alpha} = \bigoplus_{i=1}^{a_1} E^i_{\alpha} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{a_1} E_i \longrightarrow E,$$

tenemos que $I_{\alpha} : (E_{\alpha},\mathcal{T}_{\alpha}) \longrightarrow (E,\mathcal{T})$ es continua, y esto para cada $\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

(iv) Veamos por último que se conserva el orden:

Evidentemente, si $\alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq \beta = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, entonces $U^n_{\alpha} = \bigoplus_{i=1}^{a_1} U^i_{\alpha,n} \subseteq \bigoplus_{i=1}^{a_1} U^i_{\beta,n} \subseteq \bigoplus_{i=1}^{b_1} U^i_{\beta,n} = U^n_{\beta}$, luego $U^n_{\alpha} \subseteq U^n_{\beta}$ , $n=1, 2, \ldots.$ y entonces $\mathcal{U}_{\alpha} \subseteq \mathcal{U}_{\beta}$ .

*2.6 Proposición.*

*Si* $(E, \mathcal{T}) = \sum_{i=1}^{\infty} (E_n,\mathcal{T}_n)$ *es un límite inductivo numerable de espacios Casi LF* $(E_n, \mathcal{T}_n)$, *entonces* $(E,\mathcal{T})$ *es un espacio Casi LF.*

Demostración.

$(E,\mathcal{T})$ es topológicamente isomorfo al espacio cociente $\bigoplus_{i=1}^{\infty} (E_n,\mathcal{T}_n)/N$ , donde N es el núcleo de la aplicación

$$J : \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} E_i \longrightarrow E \quad \text{que aplica}$$

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \rightsquigarrow \sum_{i\in\mathbb{N}} x_n$$

J es continua, y por tanto, aplicando (18) Teorema 5.7., y las Proposiciones 2.2. y 2.5. , obtenemos directamente que $(E,\mathcal{T})$ es un Espacio Casi LF.

*2.7. Corolario.*

*Sea* $(E,\mathcal{T}) = \sum_{n=1}^{\infty} (E_n,\mathcal{T}_n)$, *con* $(E_n,\mathcal{T}_n)$ *espacio de Fréchet,* $n \in \mathbb{N}$ *Entonces,* $(E, \mathcal{T})$ *es un espacio Casi LF.*

Demostración.

Se obtiene directamente aplicando la proposición anterior, ya que todo espacio de Fréchet es un espacio Casi LF.

*2.8. Proposición.*

*Sea* $(E,\mathcal{T})$ *un espacio Casi LF con una representación* $\mathcal{F} = \left\{ (E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \right\}$. *Sea* G *un subespacio vectorial de* E.

*Si para cada* $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $G \cap E_\alpha$ *es* $\mathcal{T}_\alpha$*-cerrado, entonces* G *es un espacio Casi LF.*

Demostración.

Consideremos la familia de subespacios de G, $\mathcal{F}' = \left\{ G \cap E_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \right\}$, y dado un $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, sea $\mathcal{U}_\alpha = (U_\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}$ la cadena asociada a $(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$. Entonces, $\mathcal{U}'_\alpha = (U_\alpha^n \cap G)_{n \in \mathbb{N}}$ es una cadena en $G \cap E_\alpha$, que es base de entornos del origen para la topologia $\mathcal{T}'_\alpha$ inducida por $\mathcal{T}_\alpha$ sobre $E_\alpha \cap G$. Se verifica además que $(G \cap E_\alpha, \mathcal{T}'_\alpha)$ es un espacio de Fréchet, por ser $G \cap E_\alpha$ $\mathcal{T}_\alpha$-cerrado en $E_\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

$G = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} E_\alpha \cap G$, es consecuencia de que $E = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} E_\alpha$.

$I'_\alpha : G \cap E_\alpha \longrightarrow G$ es continua, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, por serlo $I_\alpha : E_\alpha \longrightarrow E$.

Y por último, la relación de orden entre las cadenas, se verifica, por verificarse en $(E,\mathcal{T})$.

Así pues, $(G,\mathcal{T}_{|G})$ es un espacio Casi LF.

## 3. TEOREMA DE GRAFICA CERRADA.

El objeto de este apartado es tratar de extender el Teorema de Gráfica Cerrada entre espacios vectoriales topológicos, que tiene en la partida espacios de Segunda Categoria, y en la llegada espacios de Fréchet, usando para ello los espacios Casi LF.

Veremos primero una propiedad de los espacios Casi LF, que usaremos a lo largo de este capítulo.

Consideremos $(F,\mathcal{T})$ un espacio Casi LF, y sea $\mathcal{F} = \{(F_\alpha, \mathcal{T}_\alpha): \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ una representación de $(F,\mathcal{T})$. Sea $\mathcal{U}_\alpha = (U_\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ la cadena asociada a cada $F_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

### 3.1. *Proposición.*

*Dada una sucesión de enteros positivos $\beta = (m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y $V$ un $\mathcal{T}$-entorno del origen, existen dos números enteros positivos, $p$, $q \in \mathbb{N}$, tales que*

$$\bigcup \{U_\alpha^q \;:\; \alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \text{con } a_n = m_n,\quad n = 1,\ 2,\ \ldots\ p\} \subseteq V.$$

Demostración.

Supongamos que la tesis no es cierta. Entonces, existirán $\beta = (m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de enteros positivos, y $V$ $\mathcal{T}$-entorno de 0, tales que

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \bigcup \{U_\alpha^q \;:\; \alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ a_n = m_n,\quad n = 1,\ 2,\ \ldots\ p\} \not\subseteq V,$$

$$q = 1,\ 2,\ \ldots.,$$

es decir,

para cada $r \in \mathbb{N}$, existe una sucesión $\alpha_r = (a_{r,n})_{n\in\mathbb{N}}$, tal que

$$a_{r,n} = m_n\ ,\ n = 1,\ 2,\ \ldots,\ r \quad \text{y} \quad U_{\alpha_r}^r \not\subseteq V.$$

Si hacemos entonces, $\alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $a_n = \max\limits_{r\in\mathbb{N}} (a_{r,n})$ , $n = 1,\ 2,\ \ldots$

tendremos que $U_{\alpha_r}^r \subseteq U_\alpha^r$, $\forall\, r \in \mathbb{N}$, y por tanto $U_\alpha^r \not\subseteq V$, $\forall\, r \in \mathbb{N}$.

Ahora bien, por definición de espacio Casi LF, la inyeción $I_\alpha : F_\alpha \longrightarrow F$ es continua, para cada $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, luego dado V, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $U_\alpha^n \subsetneq V$. Llegamos pues, a una contradicción.

*3.2. Corolario.*

*En las hipótesis anteriores, dado $\beta = (m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $V$ $\mathcal{T}$-entorno de $o$ en F , existe un $p \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\bigcup \left\{ U_\alpha^p : \alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ con } a_n = m_n, \quad n = 1, 2, \ldots, p \right\} \subseteq V$$

Demostración.

Por la proposición anterior, sabemos que existen p, q N, tales que

$$\bigcup \left\{ U_\alpha^q : \alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ con } a_n = m_n, \quad n = 1,2, \ldots, p \right\} \subseteq V.$$

Podemos considerar dos casos:

1. $p < q$, en cuyo caso el conjunto

$$\left\{ \alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ con } a_n = m_n, \quad n = 1, 2, \ldots, p, p+1, \ldots q \right\} \subseteq$$

$$\left\{ \alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ con } a_n = m_n, \quad n = 1, 2, \ldots, p \right\}$$

luego

$$\bigcup \left\{ U_\alpha^q : \alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ con } a_n = m_n, \ n = 1, 2, \ldots, q \right\} \subseteq V.$$

2. $q < p$, en cuyo caso, por definición de cadena, sabemos que $U_\alpha^p \subseteq U_\alpha^q$

luego $\bigcup \left\{ U_\alpha^p : \alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ con } a_n = m_n, \ n = 1, 2, \ldots, p \right\} \subseteq$

$$\bigcup \left\{ U_\alpha^q : \alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ con } a_n = m_n, \ n = 1, 2, \ldots, p \right\} \subseteq V.$$

c.q.d.

En las dos proposiciones siguientes, consideraremos $(E,\mathcal{S})$ un espacio vectorial topológico y $(F,\mathcal{T})$ un espacio Casi LF, con una representación $\mathcal{F} = \left\{ (F_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \right\}$, siendo $\mathcal{U}_\alpha = (U_\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena asociada a $(F_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Sea T una aplicación lineal de E en F. Dada $\beta = (m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de enteros positivos, denotaremos por

$$U_{m_1 m_2 \dots m_h} = T^{-1}\left( \cup\{U^h_\alpha : \alpha = (a_n)_{n\in \mathbb{N}} \text{ con } a_n = m_n, \ n = 1,2,\dots,h\}\right)$$

$h = 1, 2, \dots .$

Supongamos que existe una sucesión $\gamma = (r_n)_{n\in \mathbb{N}}$, tal que

$\overline{U}^{S}_{r_1 r_2 \dots r_n}$ es $S$-entorno del origen en $(E,S)$, $n = 1, 2, \dots$

*3.3 Proposición.*

*Consideremos $(E,S)$ metrizable, y supongamos que la gráfica de T corta a $E\times F_\alpha$ en un cerrado, para la topología producto de $E\times F_\alpha$, para cada $\alpha\in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Entonces:*

1. $\overset{\circ}{\overline{U}}{}^{S}_{r_1 r_2 \dots r_n} \subseteq U_{r_1 r_2 \dots r_{n-2}}$ , $n \geq 2$, $n\in\mathbb{N}$

2. *T es continua.*

Demostración.

1. Sea $k>2$, $k\in \mathbb{N}$, sea $x\in \overset{\circ}{\overline{U}}{}^{S}_{r_1 r_2 \dots r_k}$ y sea $(B_k)_{k\in \mathbb{N}}$ una sucesión fundamental de $S$-entornos del origen en E, decreciente, tal que

$$B_n \subseteq \overset{\circ}{\overline{U}}{}^{S}_{r_1 r_2 \dots r_k r_{k+1} \dots r_{k+n}}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Entonces:

$$(x - B_1) \cap U_{r_1 r_2 \dots r_k} \neq \emptyset, \text{ luego}$$

$$\exists \ x_1 \in U_{r_1 r_2 \dots r_k} : \ x - x_1 \in B_1 \subseteq \overset{\circ}{\overline{U}}{}^{S}_{r_1 r_2 \dots r_{k+1}}.$$

LLamaremos $y_1 = x - x_1$. Procediendo por recurrencia, supongamos que para $m\in\mathbb{N}$ existe $y_m \in B_m \subseteq \overset{\circ}{\overline{U}}{}^{S}_{r_1 r_2 \dots r_k r_{k+1} \dots r_{k+m}}$. Entonces,

$(y_m - B_m) \cap U_{r_1 r_2 \dots r_{k+m}} \neq \emptyset$, luego existe $x_{m+1} \in U_{r_1 r_2 \dots r_{k+m}}$

tal que $y_m - x_{m+1} \in B_{m+1}$. Denotamos $y_{m+1} = y_m - x_{m+1} \in B_{m+1}$.

Tenemos así construida una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente al origen en $(E,\mathcal{S})$. Además, por la construcción, sabemos que $y_{m+1} = x - x_1 - \dots - x_{m+1}$, y así $y_{m+1} = x - \sum_{i=1}^{m+1} x_i$ converge a 0 en $(E,\mathcal{S})$ cuando m tiende a $+\infty$, luego $x = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i$ en $(E,\mathcal{S})$.

POr otra parte,para cada $j\in\mathbb{N}$, $Tx_j \in T(U_{r_1 r_2 \dots r_{k+j-1}})$ y entonces, por definición de $U_{r_1 r_2 \dots r_{k+j-1}}$, existe

$\beta_j = (b_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $b_{j,n} = r_n$, $n = 1, 2, \dots, k+j-1$, y

$Tx_j \in U^{k+j-1}_{\beta_j}$.

Construimos $\beta = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $b_n = \max_{j\in\mathbb{N}} (b_{j,n})$, y $\beta$ verifica que $b_n = r_n$, $n = 1, 2, \dots, k$ y $Tx_j \in U^{k+j-1}_{\beta_j} \subseteq U^{k+j-1}_{\beta}$, para $j = 1, 2, \dots$ .

Tenemos así una serie $\sum_{j=1}^{+\infty} Tx_j$ que es de Cauchy en $(F_\beta, \mathcal{T}_\beta)$ ya que

$$\sum_{j=m+1}^{m+p} Tx_j = Tx_{m+1} + Tx_{m+2} + \dots + Tx_{m+p} \in Tx_{m+1} + Tx_{m+2} + \dots$$

$$Tx_{m+p-2} + U_\beta^{k+m+p-2} + U_\beta^{k+m+p-1} \subseteq Tx_{m+1} + \dots + Tx_{m+p-2} + U^{k+m+p-3} \subseteq$$

$\subseteq \dots \subseteq U^{k+m-1}$, procediendo por recurrencia, y aplicando propiedades de las cadenas.

Entonces, dado $U^n_\beta$ $\mathcal{T}_\beta$-entorno de 0 en $F_\beta$, si tomamos $m \geqslant n-k+2$, se verifica que $\sum_{j=m+1}^{m+p} Tx_j \in U_\beta^{k+m-1} \subseteq U^n_\beta$, luego $\sum_{j=1}^{+\infty} Tx_j$ es una serie de Cauchy en $(F_\beta, \mathcal{T}_\beta)$ y por tanto existe $u \in F_\beta$ tal que $\sum_{j=1}^{+\infty} Tx_j = u$ en $(F_\beta, \mathcal{T}_\beta)$.

Tenemos pues, $\sum_{j=1}^{m} x_j$ converge a x, en $(E,\mathcal{S})$, cuando m tiende a $+\infty$.

$\sum_{j=1}^{m} Tx_j$ converge a u, en $(F_\beta,\mathcal{T}_\beta)$, cuando m tiende a $+\infty$.

y por hipótesis, $\mathcal{G}(T) \cap (E \times F_\beta)$ es cerrado para la topologia producto (denotamos por $\mathcal{G}(T)$ la gráfica de T), luego Tx = u, y $x \in T^{-1}(u)$.

Además, si $u = \sum_{j=1}^{+\infty} Tx_j$, dado $U_\beta^{k+1}$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_o$ $\sum_{j=1}^{n} Tx_j - u \in U_\beta^{k+1}$, luego $u \in U_\beta^{k+1} + U_\beta^{k-1} \subseteq U_\beta^{k-2}$, y entonces $x \in T^{-1}(u) \subseteq T^{-1}(U_\beta^{k-2}) \subseteq U_{r_1 r_2 \ldots r_{k-2}}$.

Así pues, $\overset{\circ}{\overline{U}}{}^{\mathcal{S}}_{r_1 r_2 \ldots r_k} \subseteq U_{r_1 r_2 \ldots r_{k-2}}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$.

2. Dado V $\mathcal{T}$-entorno del origen en F, aplicando el Corolario 3.2., existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bigcup \{ U_\alpha^{p} : \alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ con } a_n = r_n \ , \ n = 1, 2, \ldots, p \} \subseteq V,$$

y aplicando 1. sabemos que $\overset{\circ}{\overline{U}}{}^{\mathcal{S}}_{r_1 r_2 \ldots r_p r_{p+1} r_{p+2}} \subseteq U_{r_1 r_2 \ldots r_p}$

luego, $T(\overset{\circ}{\overline{U}}{}^{\mathcal{S}}_{r_1 r_2 \ldots r_{p+2}}) \subseteq T(U_{r_1 r_2 \ldots r_p}) \subseteq \bigcup \{ U_\alpha^p : \alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_n = r_n$, $n = 1,2, \ldots p \} \subseteq V$. Entonces, T es continua.

c.q.d

*3.4. Teorema.*

*Si $\mathcal{G}(T)$ es cerrada en $E \times F$, entonces T es continua, y se verifica que $\overset{\circ}{\overline{U}}{}^{\mathcal{S}}_{r_1 r_2 \ldots r_n} \subseteq U_{r_1 r_2 \ldots r_{n-3}}$, $n \geqslant 4$, $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración.

Supongamos primero que T es inyectiva. Procedamos a la demostración en varios pasos:

1. Dada $\gamma = (r_n)_{n \in \mathbb{N}}$, consideramos la familia $(\overline{U}^{\mathcal{S}}_{r_1 r_2 \ldots r_n})_{n \in \mathbb{N}}$, que es una cadena en $(E,\mathcal{S})$:

(i) $\bar{U}^{\mathcal{S}}_{r_1r_2\ldots r_n}$ es equilibrado, por serlo cada $U^n_\alpha$, $n\in\mathbb{N}, \alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

$\bar{U}^{\mathcal{S}}_{r_1r_2\ldots r_n}$ es absorbente, por ser, por hipótesis $\mathcal{S}$-entorno del origen.

(ii) Propiedad Sumativa: Si $x,y \in U_{r_1r_2\ldots r_{h+1}}$, existen $\alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\beta = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $a_n = b_n = r_n$, $n = 1, 2, \ldots h+1$, y $Tx \in U^{h+1}_\alpha$, $Ty \in U^{h+1}_\beta$.

Consideremos $\delta = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $c_n = \text{máx}\,(a_n,b_n)$, $n\in\mathbb{N}$. Entonces $c_n = r_n$, $n = 1, 2, \ldots h+1$ y $\alpha, \beta \leq \delta$, luego $Tx + Ty \in U^{h+1}_\delta + U^{h+1}_\delta \subseteq U^h_\delta$, $x + y \in T^{-1}(U^h_\delta) \subseteq T^{-1}(\cup\{U^h_\alpha\colon \alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = r_n$, $n = 1,2, \ldots, h\}) = U_{r_1r_2\ldots r_h}$.

Así pues, $U_{r_1r_2\ldots r_{h+1}} + U_{r_1r_2\ldots r_{h+1}} \subseteq U_{r_1r_2\ldots r_h}$, y por tanto

$$\bar{U}^{\mathcal{S}}_{r_1r_2\ldots r_{h+1}} + \bar{U}^{\mathcal{S}}_{r_1r_2\ldots r_{h+1}} \subseteq \overline{U_{r_1r_2\ldots r_{h+1}} + U_{r_1r_2\ldots r_{h+1}}}^{\mathcal{S}} \subseteq \bar{U}^{\mathcal{S}}_{r_1r_2\ldots r_h}.$$

Esta cadena define sobre E una topologia $\mathcal{R}$ pseudometrizable ((1 ), pag.10 ). Además esta topologia es menos fina que la topologia $\mathcal{S}$ ya que cada elemento de la base de $\mathcal{R}$ -entornos de 0 es un $\mathcal{S}$-entorno de 0 en E, por tanto la inyección I: $(E,\mathcal{S}) \longrightarrow (E,\mathcal{R})$ es continua. (1.1).

2\. Como T: $(E,\mathcal{S}) \longrightarrow (F,\mathcal{T})$ tiene gráfica cerrada, existe una topologia $\mathcal{T}'$ sobre F, menos fina que $\mathcal{T}$ y Hausdorff, tal que T: $(E,\mathcal{S}) \longrightarrow (F,\mathcal{T}')$ es continua ((3 ), pag.20).

Veamos que $\mathcal{R}$ es Hausdorff: Si V es un $\mathcal{T}'$-entorno del origen en F, cerrado, entonces V es un $\mathcal{T}$-entorno del origen , y por el Corolario 3.2., dada $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe un $p\in\mathbb{N}$ tal que

$$\cup\{U_\alpha^p : \alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ con } a_n = r_n, \ n = 1, 2, \dots, p\} \subseteq V,$$

luego

$$U_{r_1 r_2 \dots r_p} = T^{-1}(\cup\{U_\alpha^p : \alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ con } a_n = r_n, \ n = 1, 2, \dots p\}) \subseteq$$

$\subseteq T^{-1}(V)$, y por ser $T : (E,\mathcal{S}) \longrightarrow (F,\mathcal{T}')$ continua se verifica que $T^{-1}(V)$ es cerrado, luego $\bar{U}^{\mathcal{S}}_{r_1 r_2 \dots r_p} \subseteq T^{-1}(V)$.

Así pues, $T : (E,\mathcal{R}) \longrightarrow (F,\mathcal{T}')$ es continua, y $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bar{U}^{\mathcal{S}}_{r_1 r_2 \dots r_p} = \{0\}$ por tanto $(E, \mathcal{R})$ es metrizable. (1.2.)

$T : (E,\mathcal{R}) \longrightarrow (F,\mathcal{T})$ tendrá entonces gráfica cerrada, por ser $\mathcal{T} \succ \mathcal{T}'$ y como para cada $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ $\mathcal{T}_\alpha \succ \mathcal{T}_{|F_\alpha}$, obtenemos que $\mathcal{G}(T) \cap (E \times F_\alpha)$ es cerrado en la topologia producto.

Por último, por ser $\mathcal{R} \prec \mathcal{S}$, $\bar{U}^{\mathcal{S}}_{r_1 r_2 \dots r_n} \subseteq \bar{U}^{\mathcal{R}}_{r_1 r_2 \dots r_n}$ $n = 1, 2, \dots$, y ya que por construcción, $\bar{U}^{\mathcal{S}}_{r_1 r_2 \dots r_n}$, $n = 1, 2, \dots$ son $\mathcal{R}$-entornos de 0 en E, obtenemos que $\bar{U}^{\mathcal{R}}_{r_1 r_2 \dots r_n}$, $n = 1, 2, \dots$ son $\mathcal{R}$-entornos de 0 en E.

Así pues, estamos en condiciones de aplicar la proposición 3.3., y tendremos:

1. $\mathring{\bar{U}}^{\mathcal{R}}_{r_1 r_2 \dots r_h} \subseteq U_{r_1 r_2 \dots r_{h-2}}$, $h \geq 3$, $h \in \mathbb{N}$.

2. $T : (E,\mathcal{R}) \longrightarrow (F,\mathcal{T})$ es continua, y entonces, aplicando el resultado (1.1.) tenemos que $T : (E,\mathcal{S}) \longrightarrow (F,\mathcal{T})$ es continua.

Veamos que $\mathring{\bar{U}}^{\mathcal{S}}_{r_1 r_2 \dots r_n} \subseteq U_{r_1 r_2 \dots r_{n-3}}$, $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$:

Si $x \in \bar{U}^{\mathcal{S}}_{r_1 r_2 \dots r_n}$, $x + \bar{U}^{\mathcal{S}}_{r_1 r_2 \dots r_n}$ es un $\mathcal{R}$-entorno de x tal que

$$x + \bar{U}^{\mathcal{S}}_{r_1 r_2 \dots r_n} \subseteq \bar{U}^{\mathcal{S}}_{r_1 r_2 \dots r_n} + \bar{U}^{\mathcal{S}}_{r_1 r_2 \dots r_n} \subseteq \bar{U}^{\mathcal{S}}_{r_1 r_2 \dots r_{n-1}} \subseteq \bar{U}^{\mathcal{R}}_{r_1 r_2 \dots r_{n-1}}.$$

Entonces, $x \in \overset{\circ}{\bar{U}}{}^{\mathcal{R}}_{r_1 r_2 \ldots r_n}$ y por tanto

$$\overset{\circ}{\bar{U}}{}^{\mathcal{S}}_{r_1 r_2 \ldots r_n} \subseteq \bar{U}^{\mathcal{S}}_{r_1 r_2 \ldots r_n} \subseteq \overset{\circ}{\bar{U}}{}^{\mathcal{R}}_{r_1 r_2 \ldots r_{n-1}} \subseteq U_{r_1 r_2 \ldots r_{n-3}}, \quad n \geqslant 4,\ n \in \mathbb{N},$$

y así, $U_{r_1 r_2 \ldots r_n}$ es $\mathcal{S}$ -entorno de 0, n = 1,2,...

Consideremos ahora el caso general en el que T no es inyectiva. Ker T es un conjunto cerrado en $(E,\mathcal{S})$, y dada la aplicación canónica $\varphi : E \longrightarrow E/\text{Ker } T$ , podemos considerar la aplicación lineal $S : E/\text{Ker } T \longrightarrow F$, inyectiva, que factoriza T a través de E/Ker T: $S \circ \varphi = T$.

Si $(x,y) \notin \mathcal{G}(S)$, $Sx \neq y$. Como $x \in E/\text{Ker } T$, existe un $z \in E$: $\varphi(z) = x$, luego $(S \circ \varphi)(z) = Tz \neq y$ , i.e., $(z,y) \notin \mathcal{G}(T)$, y por ser $\mathcal{G}(T)$ cerrada, existe U $\mathcal{S}$-entorno de 0 en E y V $\mathcal{T}$-entorno de 0 en F tal que $((z,y) + (U,V)) \cap \mathcal{G}(T) = \phi$ .

Si consideramos $\varphi(U)$ $\hat{\mathcal{S}}$-entorno de 0 en E/Ker T, $((x,y) + ( \varphi(U), V) \cap \mathcal{G}(S) = \phi$ y por tanto $\mathcal{G}(S)$ es cerrada en E/Ker T, con la topologia producto.

Por otra parte, $x \in \varphi(U_{m_1 m_2 \ldots m_h})$ si y sólo si

$\exists\ u \in E : x = \varphi(u)$ y $\exists\ \alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_n = m_n$ , n = 1, 2, ...h tal que $Tu \in U^h_\alpha$. Entonces $(S \circ \varphi)(u) \in U^h_\alpha$, luego $\varphi(u) = x \in S^{-1}( \cup \{U^h_\alpha : \alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_n = m_n$ , n = 1, 2, ...h$\}$ ).

Recíprocamente, si $x \in S^{-1}( \cup \{U^h_\alpha : \alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_n = m_n$ n = 1, 2, ... h$\}$), existe $\alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_n = m_n$ , n = 1,2, ...h tal que $Sx \in U^h_\alpha$. Como $x \in E/\text{Ker } T$, $\exists\ u \in E$ : $\varphi(u) = x$ y $(S \circ \varphi)(u) = T(u) \in U^h_\alpha$. Entonces $u \in U_{m_1 m_2 \ldots m_h}$, $x = \varphi(u) \in \varphi(U_{m_1 m_2 \ldots m_h})$

y tenemos demostrado que

$S^{-1}( \cup\{U^h_\alpha : \alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = m_n$ , $n = 1, 2, \dots h\}) =$

$= \varphi(U_{m_1m_2\dots m_h})$, y así pues, si suponemos que existe una sucesión

$(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\bar{U}^{\mathcal{S}}_{r_1r_2\dots r_n}$ es $\mathcal{S}$-entorno de 0, $n = 1, 2, \dots$

$\overline{\varphi(U_{r_1r_2\dots r_n})}^{\hat{\mathcal{S}}} = \overline{S^{-1}( \cup\{U^h_\alpha : \alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ con } a_n = m_n,\ n = 1,2,}$

$\overline{\dots n\})}^{\hat{\mathcal{S}}} \supseteq \varphi(\bar{U}^{\mathcal{S}}_{r_1r_2\dots r_n})$ es $\hat{\mathcal{S}}$-entorno de 0 en E/Ker T, y nos encontramos en condiciones de aplicar el caso anterior (aplicación inyectiva sin más que considerar S en lugar de T. Entonces:

1. S es continua, luego T es continua.

2. $\varphi(U_{r_1r_2\dots r_n})$ es $\hat{\mathcal{S}}$ -entorno de 0 en E/Ker T, $n = 1, 2, \dots$

luego $U_{m_1m_2\dots m_n}$ es $\mathcal{S}$-entorno de 0 en E, $n = 1, 2, \dots.$

c.q.d.

Observación.- Este Teorema, en el que hemos seguido ideas dadas por M. Valdivia (38) para espacios localmente convexos, reduce un Teorema de Gráfica Cerrada entre espacios vectoriales topológicos a un Teorema de Gráfica Cerrada con espacios metrizables en la partida.

Veamos ahora un Teorema de Aplicación Abierta.

*3.5. Teorema.*

*Sea (F, $\mathcal{T}$) un espacio Casi LF, con una representación $\mathcal{F} = \{ (F_\alpha, \mathcal{T}_\alpha): \alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \}$ y sea (E,$\mathcal{S}$) un espacio vectorial topológico metrizable.*

*Sea T una aplicación lineal de F sobre E , tal que $\mathcal{G}$(T) es cerrada en la topología producto $\mathcal{T}\times\mathcal{S}$.*

*Dados $h$, $m_1, m_2, \dots m_h \in \mathbb{N}$, denotamos por*

$$V_{m_1m_2\dots m_h} = \cup\{T(U^h_\alpha) \quad : \quad \alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ con } a_n = m_n \ ,\ n = 1,2, \dots h\}$$

*y supongamos que existe una sucesión $(r_n)_{n\in \mathbb{N}}$, tal que $\overline{V}^{S}_{r_1 r_2 \dots r_h}$ es $S$-entorno de 0 en $(E,S)$, $h = 1, 2, \dots$.*

*Entonces,* T *es abierta.*

Demostración.

Sea $\varphi$ la aplicación canónica de $(F,\mathcal{T})$ sobre $(F/\mathrm{Ker}\ T,\hat{\mathcal{T}})$, donde Ker T es cerrado en $(F,\mathcal{T})$. Entonces, aplicando la Proposición 2.2. sabemos que $(F/\mathrm{Ker}\ T,\hat{\mathcal{T}})$ es un espacio Casi LF, donde una representación vendrá dada por la familia $\mathcal{F}' = \{ (\varphi(E_\alpha),\mathcal{T}'_\alpha) : \alpha\in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$. Denotemos por S la aplicación lineal tal que $S^{-1}\circ\varphi = T$, y veamos las condiciones en que nos encontramos:

Por un razonamiento puramente conjuntista análogo al visto en el teorema anterior, se demuestra que $V_{m_1 m_2 \dots m_h} =$

$= S^{-1}( \cup\{ \varphi(U^h_\alpha) : \alpha = (a_n)_{n\in \mathbb{N}} \text{ con } a_n = m_n,\ n = 1, 2, \dots, h\} )$.

Para cada $\alpha\in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, si denotamos por $\mathcal{T}'_\alpha$ la topologia generada por la cadena $(\varphi(U^n_\alpha))_{n\in \mathbb{N}}$ sobre $\varphi(F_\alpha)$, con la que éste es un espacio de Fréchet, $\mathcal{G}(S) \cap (E\times\varphi(F_\alpha))$ es un conjunto cerrado para la topologia $S\times\mathcal{T}'_\alpha$:

Sea $(x,y)\in E\times\varphi(F_\alpha)$, tal que $(x,y)\notin\mathcal{G}(S)$. Entonces $\exists\, z\in F_\alpha : \varphi(z) = y$ de manera que $Sx \neq \varphi(z)$, y por definición de S $Tz\neq x$, luego $(z,x)\notin \mathcal{G}(T)\cap (F_\alpha\times E)$.

Por ser $\mathcal{G}(T)$ cerrada para la topologia $\mathcal{T}\times S$ y $\mathcal{T}_\alpha \succ \mathcal{T}|_{F_\alpha}$ existe un $n\in \mathbb{N}$ y un V $S$-entorno de 0 en E, tal que

$((z,x) + (U^n_\alpha,V)) \cap ( \mathcal{G}(T)\cap (F_\alpha\times E)) = \emptyset$ .

Veamos que $((x,y) + (V,\varphi(U^n_\alpha))) \cap ( \mathcal{G}(S)\cap (E\times\varphi(F_\alpha))) = \emptyset$ :

Si esta intersección fuera distinta de $\emptyset$, existirían $v\in V$ y $u\in U^n_\alpha$ : $(x+v, y+\varphi(u))\in\mathcal{G}(S)$, i.e., $S(x+v) = y+\varphi(u) = \varphi(z+u)$, luego $T(z+u) = x+v$, y tenemos que $(z+u, x+v)\in\mathcal{G}(T)\cap(F_\alpha\times E)$. Llegamos a una contradicción.

Estamos pues, en las condiciones de la Proposición 3.3., considerando S en lugar de T. Entonces

1. $\bar{V}^{S}_{r_1 r_2 \dots r_n} \subseteq V_{r_1 r_2 \dots r_{n-2}}$, $n \geqslant 3$ , $n \in \mathbb{N}$.

2. S es continua, luego $S^{-1} \circ \varphi = T$ es abierta.

c.q.d.

*3.6. Corolario.*

*Sea (F,T) un espacio Casi LF y sea (E,S) un espacio vectorial topológico.*

*Sea T una aplicación lineal de F sobre E, tal que $\mathcal{G}(T)$ es cerrada en $F \times E$ , para la topología producto $\mathcal{T} \times \mathcal{S}$.*

*Si consideramos la familia $\{V_{m_1 m_2 \dots m_h} : h, m_1, m_2, \dots, m_h \in \mathbb{N}\}$ verificando las hipótesis del teorema anterior, entonces T es abierta.*

Demostración.

Por un razonamiento análogo al del teorema anterior, si consideramos el espacio $(F/\text{Ker } T, \hat{\mathcal{T}})$, éste es un espacio Casi LF, y si denotamos por S la aplicación lineal de E en F/Ker T tal que $S^{-1} \circ \varphi = T$, $\mathcal{G}(S)$ es cerrada en $E \times F/\text{Ker } T$, para la topologia producto $\mathcal{S} \times \hat{\mathcal{T}}$, y se verifica que $V_{m_1, m_2 \dots m_h} =$

$$= S^{-1}( \cup \{\varphi(U^h_\alpha) : \alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ con } a_n = m_n, n = 1, 2, \dots, h\} ).$$

Estamos pues, en las condiciones del Teorema 3.4., donde consideramos S en lugar de T. Entonces S es continua, por lo tanto T es abierta.

## 4. EJEMPLOS.

### 4.1. Espacios Casi LB.

M. Valdivia, define en (38) los espacios Casi LB. Dado un espacio localmente convexo $(E,\mathcal{T})$, una Casi LB Representación del espacio E, es una familia $\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ de discos de Banach, satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. $\bigcup \{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\} = E$.
2. Si $\alpha \leq \beta$ entonces $A_\alpha \subseteq A_\beta$.

Un espacio que admite una Casi LB Representación, se dice que es un espacio Casi LB. Todo espacio Casi LB es un espacio Casi LF: Si denotamos por $F_{A_\alpha} = \mathrm{Lin}\,(A_\alpha)$, sabemos que $(F_{A_\alpha}, \mathcal{T}_\alpha)$ es un espacio de Banach, donde $\mathcal{T}_\alpha$ es la topologia generada por la norma $\| \ \|_{A_\alpha}$, y una base de entornos de 0 viene dada por la familia $\mathcal{U}_\alpha = (2^{-n}A_\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$. $\mathcal{U}_\alpha$ así definida es una cadena.

Se demuestra fácilmente que si consideramos la familia $\{(F_{A_\alpha}, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ es una representación del espacio $(F,\mathcal{T})$, donde para cada $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ una cadena asociada a $(F_{A_\alpha}, \mathcal{T}_\alpha)$ viene dada por $\mathcal{U}_\alpha$. Entonces $(F,\mathcal{T})$ es un espacio Casi LF.

### 4.2. Espacios Casi $L_p B$ y Casi $L_o B$.

Una sucesión decreciente $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$ de subconjuntos no vacios de un espacio vectorial topológico $(E,\mathcal{T})$, diremos que es una "Sucesión Completante", si existe una sucesión de escalares positivos $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que si $x \in A_n$, $0 \leq \mu_n \leq \lambda_n$, $n = 1, 2, \dots$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n x_n$ converge a un vector de E. Si la sucesión $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ se puede elegir de forma que $\sum_{k=p}^{+\infty} \mu_k x_k \in A_p$, $p = 1, 2, \dots$ , la sucesión $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ diremos que es "Estrictamente Completa".

B. Cascales (3) obtiene los siguientes resultados:

*4.2.1.* Sea $(E,\mathcal{T})$ un espacio vectorial topológico y $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $(0,1]$ , decreciente y con limite 0, que denotaremos por $p_n \searrow 0$ Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente completa en E, donde cada $A_n$ es absolutamente $p_n$-convexo.

Entonces, la sucesión $\{C_n = (1/2^n)^{1/p_n}.A_n : n = 1, 2, \ldots\}$ es base de entornos del origen para una topologia $\mathcal{A}$ en E, más fina que $\mathcal{T}$, con la cual, E adquiere estructura de grupo topológico aditivo, metrizable y completo.

Como Corolario obtiene:

En las condiciones anteriores, si $\langle A_k\rangle$ es el espacio vectorial generado por $A_k$, y ponemos $L = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \langle A_k\rangle$ , entonces L con la topologia inducida por $\mathcal{A}$ es un espacio vectorial topológico localmente semiconvexo, metrizable y completo.

B. Cascales da la siguiente definición:

Sea $p_n \searrow 0$ . Una Casi $L(p_n)B$-representación de un espacio vectorial topológico $(F,\mathcal{T})$ es una familia de subconjuntos de F $\{A_\alpha^n : \alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, n\in\mathbb{N}\}$ , con las siguientes propiedades:

1. $A_\alpha^n$ es absolutamente $p_n$-convexo, para cada $\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $n\in\mathbb{N}$.
2. Para cada $\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, se tiene que $A_\alpha^1 \supseteq A_\alpha^2 \supseteq \ldots \supseteq A_\alpha^n \supseteq \ldots$ , y esta sucesión es estrictamente completa en F.
3. Para cada $\alpha$, $\beta\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, con $\alpha \leq \beta$ se tiene que $A_\alpha^n \subseteq A_\beta^n$ , $n\in\mathbb{N}$.
4. Si llamamos $A_\alpha = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_\alpha^n$ , entonces $F = \bigcup\{A_\alpha : \alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ .

Un espacio vectorial topológico con una Casi $L(p_n)B$-representación se dice que es un espacio Casi $L_oB$.

Veamos que todo espacio Casi $L_oB$ es un espacio Casi LF.

Si para cada $\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, consideramos $L_\alpha = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \langle A_\alpha^k\rangle$ y denotamos por $\mathcal{A}_\alpha$ la topologia sobre E construida, según 4.2.1., por la sucesión $(A_\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$, entonces, aplicando el resultado 4.2.2., tenemos que $(L_\alpha,\mathcal{A}_\alpha|_{L_\alpha})$ es un espacio de Fréchet. Veamos que la familia $\mathcal{F} = \{(L_\alpha,\mathcal{A}_\alpha|_{L_\alpha}) : \alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ es una representación de $(F,\mathcal{T})$, con lo que $(F,\mathcal{T})$ será un espacio Casi LF:

(i) $F = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} L_\alpha$ , ya que $A_\alpha \subseteq L_\alpha$ , para cada $\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, y

$\{A_\alpha : \alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\} = F$.

(ii) Para cada $\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, consideramos la familia $\mathcal{U}_\alpha = \{C_\alpha^n = ((1/2^n)^{1/p_n}.A_\alpha^n)\cap L_\alpha\}_{n\in\mathbb{N}}$. $\mathcal{U}_\alpha$ así construida es una cadena:

(ii.1) $C_\alpha^n$ es equilibrado, por serlo $A_\alpha^n$, $\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $n\in\mathbb{N}$.

$C_\alpha^n$ es absorbente en $L_\alpha$: Si $x\in L_\alpha$ , $x\in\langle A_\alpha^n\rangle = \bigcup_{m=1}^{+\infty} mA_\alpha^n$ , por ser $A_\alpha^n$ absolutamente $p_n$-convexo. Entonces existe un $m>0$ tal que $x\in mA_\alpha^n$ .

(ii.2) Propiedad Sumativa: Por ser $A_\alpha^n$ absolutamente $p_n$-convexo,se verifica que

$$(1/2^n)^{1/p_n}.A_\alpha^n + (1/2^n)^{1/p_n}.A_\alpha^n \subseteq (1/2^n)^{1/p_n}.2^{1/p_n}.A_\alpha^n =$$

$(1/2^{n-1})^{1/p_n}.A_\alpha^n$. Además, por ser $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente y $A_\alpha^n \subseteq A_\alpha^{n-1}$ se verifica que

$$C_\alpha^n + C_\alpha^n \subseteq (1/2^{n-1})^{1/p_n}.A_\alpha^n \cap L_\alpha \subseteq (1/2^{n-1})^{1/p_{n-1}}.A_\alpha^{n-1} \cap L_\alpha = C_\alpha^{n-1}.$$

(iii) Si $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $\alpha\leq\beta$ entonces $A_\alpha^n \subseteq A_\beta^n$ y por tanto $L_\alpha = \bigcap_{n=1}^{+\infty}\langle A_\alpha^n\rangle \subseteq \bigcap_{n=1}^{+\infty}\langle A_\beta^n\rangle = L_\beta$. Entonces

$$C_\alpha^n = (1/2^n)^{1/p_n}.A_\alpha^n\cap L_\alpha \subseteq (1/2^n)^{1/p_n}.A_\beta^n\cap L_\beta = C_\beta^n.$$

(iv) Por 4.2.1. sabemos que $\mathcal{A}_\alpha$ es más fina que $\mathcal{T}$ , luego la inyección $I: (L_\alpha,\mathcal{A}_\alpha|_{L_\alpha}) \longrightarrow (F,\mathcal{T})$ es continua, para cada $\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Así pues, $\mathcal{F}$ es una representación de $(F,\mathcal{T})$ y $(F,\mathcal{T})$ es un espacio Casi LF.

B. Cascales da la siguiente definición:

Un espacio vectorial topológico $(F,\mathcal{T})$ diremos que es un espacio Casi LpB si existe una familia $\mathcal{F} = \{ A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \}$ de p-Discos de Banach, $(0 < p \leq 1)$ que verifica:

(i) $\bigcup \{ A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \} = F$.

(ii) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ con $\alpha \leq \beta$ entonces $A_\alpha \subseteq A_\beta$.

Una familia con estas propiedades se dice que es una Casi $L_pB$-representación de F.

Todo espacio Casi $L_pB$ es un espacio Casi $L_oB$, luego todo espacio Casi $L_pB$ es un espacio Casi LF.

*4.3 Contraejemplo.*

Veamos por último un espacio Casi LF que no es Casi $L_oB$. De esta manera demostramos que la familia de los espacios Casi LF contiene estrictamente a la familia de los espacios Casi $L_oB$.

Sea $(F,\mathcal{T})$ un espacio de Fréchet, no localmente semiconvexo. B. Cascales ( 3 ), demuestra que este espacio no puede ser un espacio - Casi $L_oB$. Sin embargo, evidentemente, $(F,\mathcal{T})$ es un espacio Casi LF por - ser un Fréchet.

Como ejemplo de espacio de Fréchet no localmente semiconvexo podemos considerar el espacio F de las funciones medibles Lebesgue - en $[0,1]$ dotado de la topologia de la convergencia en media. (15) 6. 10.J.

Tenemos pues así demostrado que existen espacios Casi LF - que no son espacios Casi $L_oB$.

## 5. SOBRE LOS ESPACIOS DE PARTIDA.

### 5.1. *Definición.* (26)

Una familia numerable de subconjuntos equilibrados

$W = \{ A_{n_1 n_2 \ldots n_k},\ k, n_1, n_2, \ldots n_k \in \mathbb{N} \}$ en un espacio vectorial F,

diremos que es una "Red (R)", es decir, una red, según la definición dada por W. Robertson , si se verifica:

i) $\cup \{ A_{n_1} : n_1 \in \mathbb{N} \}$ absorbe cada punto de F.

ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $n_1, n_2, \ldots n_k \in \mathbb{N}$, se verifica que

$$A_{n_1 n_2 \ldots n_{k+1}} + A_{n_1 n_2 \ldots n_{k+1}} \subseteq A_{n_1 n_2 \ldots n_k}, \text{ para cada } n_{k+1} \in \mathbb{N}$$

$\cup \{ A_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}},\ n_{k+1} \in \mathbb{N} \}$ absorbe cada punto de $A_{n_1 n_2 \ldots n_k}$.

A cada sucesión $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de enteros positivos le corresponde una familia $\{ A_{n_1 n_2 \ldots n_k} : k \in \mathbb{N} \}$ de elementos de la red. Cada una - estas familias diremos que es una "fibra" de la red.

Diremos que una red es "ordenada" si dados $r_1, r_2, \ldots, r_h$, $s_1, s_2, \ldots, s_h$ enteros positivos arbitrarios: $r_i \leq s_i$ , i = 1, 2, .. .., h, entonces $A_{r_1 r_2 \ldots r_h} \subseteq A_{s_1 s_2 \ldots s_h}$.

### 5.2. *Lema.*

*Sea* $(F, \mathcal{T})$ *un espacio Casi LF con una representación* $F = \{ (F_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \}$, *siendo* $\mathcal{U}_\alpha = (U_\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}$ *la cadena asociada a* $F_\alpha$, *para cada* $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. *Entonces , si definimos*

$$C_{r_1 r_2 \ldots r_h} = \cup \{ U_\beta^h : \beta = (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ con } b_n = r_n,\ n = 1, 2, \ldots, h \}$$

*para* $h, r_1, r_2, \ldots, r_h$ *enteros positivos arbitrarios,*

$W = \{ C_{r_1 r_2 \ldots r_h},\ h, r_1, r_2, \ldots, r_h \in \mathbb{N} \}$ *es una red ordenada en* F.

Demostración.

i) Cada $C_{r_1 r_2 \dots r_h}$ es equilibrado por serlo los $U^h_\beta$, $h \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

$\bigcup \{C_{n_1} : n_1 \in \mathbb{N}\}$ absorbe F: Dado $x \in F = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} F_\alpha$ ,

$\exists$ $\alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x \in F_\alpha$, y por ser $U^1_\alpha$ absorbente en $F_\alpha$ tenemos que $\exists \lambda > 0$ tal que $x \in \lambda U^1_\alpha$. Entonces

$$x \in \lambda C_{a_1} = \lambda \ ( \bigcup \{ U^1_\beta : \beta = (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ con } b_1 = a_1 \} ).$$

ii) $C_{r_1 r_2 \dots r_{h+1}} + C_{r_1 r_2 \dots r_{h+1}} \subseteq C_{r_1 r_2 \dots r_h}$ , $h \in \mathbb{N}$ :

Dados $x, y \in C_{r_1 r_2 \dots r_{h+1}}$ , existen $\beta_1 = (b^1_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $\beta_2 = (b^2_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $b^1_n = b^2_n = r_n$ , $n = 1, 2, \dots, h+1$ y tales que $x \in U^{h+1}_{\beta_1}$, $y \in U^{h+1}_{\beta_2}$ . Si denotamos por $\delta = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $c_n = \text{máx } (b^1_n, b^2_n)$ , $n = 1, 2, \dots$ entonces $\delta \geqslant \beta_i$, $i = 1, 2$ y

$$x + y \in U^{h+1}_{\beta_1} + U^{h+1}_{\beta_2} \subseteq U^{h+1}_\delta + U^{h+1}_\delta \subseteq U^h_\delta .$$

Además $c_n = r_n$, $n = 1, 2, \dots, h+1$, luego

$$x + y \in \bigcup \{ U^h_\beta : \beta = (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ con } b_n = r_n , \ n = 1, 2, \dots h \} = C_{r_1 \dots r_h} .$$

Dados $h, r_1, \dots r_h \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{r \in \mathbb{N}} C_{r_1 r_2 \dots r_h r}$ absorbe $C_{r_1 r_2 \dots r_h}$:

Si $x \in C_{r_1 r_2 \dots r_h}$, existe $\beta = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $b_n = r_n$, $n = 1, 2, \dots h$ : $x \in U^h_\beta$ , y por ser $\mathcal{U}_\beta$ una cadena $\exists \lambda > 0$ tal que $x \in \lambda U^{h+1}_\beta$. Entonces $x \in \lambda ( \bigcup \{ U^{h+1}_\alpha : \alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_n = r_n$ , $n = 1, 2, \dots, h$, $a_{n+1} = b_{n+1} \} ) = \lambda \, C_{r_1 r_2 \dots r_n b_{n+1}}$.

Así pues, $\mathcal{W}$ es una red (R). Veamos que es ordenada:

Dados $h, r_1, r_2 \dots r_h, s_1, s_2, \dots s_h$ con $r_i \leqslant s_i$, $i = 1, 2, \dots h$, si $x \in C_{r_1 r_2 \ldots r_h}$ $\exists \beta = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $b_n = r_n$ , n = 1, 2, ... h, tal que $x \in U^h_\beta$. Si consideramos $\delta = (d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$d_n = s_n$ , n = 1, 2, ..., h ; $d_n = b_n$ , n = h+1, h+2, ... , entonces

$\delta \geq \beta$, $U^h_\beta \subseteq U^h_\delta$ y $U^h_\delta \subseteq C_{s_1 s_2 \ldots s_h}$, luego $C_{r_1 r_2 \ldots r_h} \subseteq C_{s_1 s_2 \ldots s_h}$.

Observación.- Directamente se comprueba que si T es una aplicación lineal de E en F y $\mathcal{W}$ es una red (R) ordenada en F, entonces $\mathcal{W}' = \{T^{-1}(A) : A \in \mathcal{W}\}$ es una red ordenada en E. Así pues, la familia $\mathcal{W}' = \{U_{m_1 m_2 \ldots m_h},\ h, m_1, m_2, \ldots, m_h \in \mathbb{N}\}$ definida en la página 17, es una red (R) ordenada en $(E, \mathcal{S})$.

*5.3. Lema.* (26)

*Sea $(E, \mathcal{S})$ un espacio vectorial topológico con una red (R) $\mathcal{W} = \{A_{m_1 m_2 \ldots m_h},\ h, m_1, \ldots, m_h \in \mathbb{N}\}$.*

*Si $(E, \mathcal{S})$ es un espacio de Baire, entonces existe una sucesión $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de enteros positivos tal que $\bar{A}^{\mathcal{S}}_{r_1 r_2 \ldots r_h}$ es $\mathcal{S}$-entorno de 0 en E, h = 1, 2, ...*

Demostración.

Por definición de red, $E = \bigcup \{nA_{m_1 m_2} : n, m_1, m_2 \in \mathbb{N}\}$ y por ser $(E, \mathcal{S})$ un espacio de Baire, existen $n, r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ de forma que $nA_{r_1 r_2}$ es un conjunto no raro, luego existe $x \in E$ , existe U $\mathcal{S}$-entorno de 0 en E tal que $x + U \subseteq \bar{A}^{\mathcal{S}}_{r_1 r_2}$ . En particular, $x \in \bar{A}^{\mathcal{S}}_{r_1 r_2}$, luego $U \subseteq -x + \bar{A}^{\mathcal{S}}_{r_1 r_2} \subseteq \bar{A}^{\mathcal{S}}_{r_1 r_2} + \bar{A}^{\mathcal{S}}_{r_1 r_2} \subseteq \bar{A}^{\mathcal{S}}_{r_1}$, luego $\bar{A}^{\mathcal{S}}_{r_1}$ es un $\mathcal{S}$-entorno de 0 en E.

Si suponemos, por hipótesis de inducción que $\bar{A}^{S}_{r_1 r_2 \ldots r_k}$ es un $S$-entorno de 0 en E, para $r_1$, $r_2$, ..., $r_k$ dados, como

$A_{r_1 r_2 \ldots r_k} \subseteq \cup \{ nA_{r_1 r_2 \ldots r_k m_{k+1} m_{k+2}}, \ n, \ m_{k+1}, \ n_{k+2} \in \mathbb{N} \}$ entonces,

existe $n_o$, $r_{k+1}$, $r_{k+2} \in \mathbb{N}$ tales que $nA_{r_1 r_2 \ldots r_{k+1} r_{k+2}}$ es no raro, y aplicando un razonamiento análogo al hecho para el caso $A_{r_1}$, obtenemos que $\bar{A}^{S}_{r_1 r_2 \ldots r_{k+1}}$ es un $S$-entorno de 0 en E.

*5.4. Definición.*

*Diremos que un espacio vectorial topológico* (F,$\mathcal{T}$) *verifica la propiedad (B), si dada una red (R) ordenada* $W = \{ A_{r_1 r_2 \ldots r_h} : h, \ r_1, \ r_2, \ \ldots r_h \in \mathbb{N} \}$ *, existe una sucesión de enteros positivos* $(r_n)_{n \ N}$ *de forma que* $\bar{A}^{S}_{r_1 r_2 \ldots r_h}$ *es S-entorno de 0,* $h = 1, 2, \ldots$

*Siguiendo ( 1 ) diremos que un espacio vectorial topológico* (F,$\mathcal{T}$) *es Tonelado si toda cadena cerrada es topológica.(Una cadena decimos que es cerrada si todos sus escalones son conjuntos cerrados para la topologia del espacio).*

*5.5 Proposición.*

*Todo espacio vectorial topológico* (F,$\mathcal{T}$) *que verifica la propiedad (B) es tonelado.*

Demostración.

Sea $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una cadena cerrada en (F,$\mathcal{T}$), y consideremos la familia $\{ A_{n_1 n_2 \ldots n_k} : k, \ n_1, \ n_2, \ \ldots, \ n_k \in \mathbb{N} \}$ donde

$A_{n_1 n_2 \ldots n_k} = U_k$ , para k, $n_1$, $n_2$, ... $n_k \in$ N.

Así construida , esta familia es una red (R) ordenada en $(F,\mathcal{T})$, y por verificar la propiedad $(\mathcal{B})$, existirá una sucesión de enteros positivos $(r_n)_{n\in \mathbb{N}}$ tal que $\bar{A}^{\mathcal{T}}_{r_1 r_2 \ldots r_n}$ es $\mathcal{T}$-entorno de 0 en F, $n = 1, 2, \ldots$ Ahora bien, $\bar{A}^{\mathcal{T}}_{r_1 r_2 \ldots r_n} = \bar{U}^{\mathcal{T}}_n = U_n$ , $n = 1, 2, \ldots$, luego $\mathcal{U}$ es una cadena topológica.

5.6. *Proposición.*

*Sea $(E,\mathcal{S})$ un espacio vectorial topológico que verifica la propiedad $(\mathcal{B})$, y sea $T : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal, continua y abierta sobre el espacio vectorial topológico $(F,\mathcal{T})$. Entonces $(F,\mathcal{T})$ verifica la propiedad $(\mathcal{B})$.*

Demostración.

Dada una red (R) ordenada $\mathcal{W} = \{ A_{n_1 n_2 \ldots n_k},\ k,\ n_1, n_2 \ldots n_k \in \mathbb{N}\}$ en F, si consideramos la familia $\mathcal{W}' = \{ T^{-1}(A_{n_1 n_2 \ldots n_k}),\ k,\ n_1,\ n_2,\ \ldots n_k \in \mathbb{N}\}$ , $\mathcal{W}'$es una red ordenada en E. E verifica la propiedad $(\mathcal{B})$ y T es continua y abierta, luego se obtiene directamente que existe una sucesíón $(r_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $\bar{A}^{\mathcal{T}}_{r_1 r_2 \ldots r_k}$ es $\mathcal{T}$-entorno de 0 en F, $k = 1, 2, \ldots$

5.7. *Proposición.*

*Si $(E,\mathcal{S})$ y $(F, \mathcal{T})$ son dos espacios vectoriales topológicos que verifican la propiedad $(\mathcal{B})$, entonces $E \times F$ con la topologia producto verifica la propiedad $(\mathcal{B})$.*

Demostración.

Sea $\mathcal{W}' = \{ A_{n_1 n_2 \ldots n_k} :\ k,\ n_1,\ n_2,\ \ldots\ n_k \in \mathbb{N}\}$ una red (R) ordenada en $E \times F$, y consideremos E y F como subespacios de $E \times F$, en la forma habitual. Las familias $\{E \cap A_{n_1 n_2 \ldots n_k} : k.\ n_1, n_2, \ldots n_k \in \mathbb{N}\}$

y $\{F \cap A_{n_1 n_2 \ldots n_k} : k, n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$ son redes ordenadas en E y

F respectivamente, y por tanto existen dos sucesiones de números enteros positivos $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $\overline{E \cap A_{r_1 \ldots r_k}}^{\mathcal{S}}$ es $\mathcal{S}$-entorno de 0 en E, k = 1, 2, ... y $\overline{F \cap A_{s_1 \ldots s_k}}^{\mathcal{T}}$ es $\mathcal{T}$-entorno de 0 en F.

Si consideramos la sucesión $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donde $t_n = \text{máx}\,(r_n, s_n)$ n =1, 2, ... , entonces $\overline{A}_{t_1 \ldots t_n}$ es $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$-entorno de 0 en $E \times F$, n = 1,2, ...

*5.8. Proposición.*

*Si* F *es un subespacio denso de* (E, $\mathcal{T}$) *y* F *verifica la propiedad (B), entonces* E *verifica la propiedad (B).*

Demostración.

Dada una red ordenada $\mathcal{W} = \{A_{n_1 n_2 \ldots n_k} : k, n_1, \ldots n_k \in \mathbb{N}\}$ en E, la familia $\{F \cap A_{n_1 n_2 \ldots n_k} : k, n_1, \ldots n_k \in \mathbb{N}\}$ es una red ordenada en F, luego existe una sucesión $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de enteros positivos tal que $\overline{A_{r_1 r_2 \ldots r_k} \cap F}^{\mathcal{T}|F}$ es $\mathcal{T}_{|F}$ -entorno de 0 en F, k = 1, 2, ...

Entonces, por ser F denso en E, $\overline{A_{r_1 r_2 \ldots r_k} \cap F}^{\mathcal{T}}$ es un $\mathcal{T}$-entorno de 0 en E, k = 1, 2, ..., luego $\overline{A}^{\mathcal{T}}_{r_1 r_2 \ldots r_k}$ es $\mathcal{T}$-entorno de 0 en E.

Entonces, como consecuencia del Lema 5.3., de la Observación de la página 32 y del Teorema 3.4 obtenemos

*5.9. Corolario.*

*Si* (E, $\mathcal{S}$) *es un espacio vectorial topológico Baire,* (F, $\mathcal{T}$) *es un espacio Casi LF y* T *es una aplicación lineal de* E *en* F *con* $\mathcal{G}$(T) *cerrada en* $E \times F$ *, entonces* T *es continua.*

## 6. PROPIEDADES DE LOCALIZACION.

Sea $(F,\mathcal{T})$ un espacio Casi LF con una representación $\mathcal{F} = \{(F_\alpha,\mathcal{T}_\alpha): \alpha\in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ y sea $\mathcal{U}_\alpha = (U_\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena asociada a $F$ $\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Dado un $\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, denotaremos por

$$F_{a_1\ldots a_n} = \cup\{F_\beta : \beta = (b_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ con } b_j = a_j,\ j = 1, 2, \ldots n\},\ n\in\mathbb{N}.$$

6.1. *Proposición.*

*Para cada* $\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $F_{a_1a_2\ldots a_n}$ *es un subespacio vectorial de* $F$ *y si definimos* $E_\alpha = \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_{a_1\ldots a_n}$ *y consideramos la familia* $\mathcal{W}_\alpha = (W_\alpha^h\cap E_\alpha)_{h\in\mathbb{N}}$, *donde* $W_\alpha^h = \cup\{U_\beta^h: \beta = (b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *con* $b_j = a_j$ $j = 1, 2, \ldots h\}$, $\mathcal{W}_\alpha$ *es una cadena en* $E_\alpha$ *que define una topologia* $\mathcal{R}_\alpha$ *sobre* $E_\alpha$ *con la que* $(E_\alpha,\mathcal{R}_\alpha)$ *es un espacio de Fréchet,* $\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Demostración.

Que $F_{a_1a_2\ldots a_n}$ es un subespacio vectorial de $F$ es consecuencia inmediata de la relación de orden existente entre los subespacios vectoriales $F_\alpha$ de la representación, luego los $E_\alpha$ son subespacios vectoriales de $F$.

Veamos que cada $(E_\alpha,\mathcal{R}_\alpha)$ es un espacio de Fréchet:

Para cada $\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{W}_\alpha$ es una cadena en $E_\alpha$:

(i) Cada $W_\alpha^h\cap E_\alpha$ es equilibrado por serlo los $U_\alpha^h$, $\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $h\in\mathbb{N}$.

$W_\alpha^h\cap E_\alpha$ es absorbente en $E_\alpha$ : Si $x\in E_\alpha$, dado $n\in\mathbb{N}$, $x\in F_{a_1\ldots a_n}$ luego existe un $\beta = (b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ con $b_j = a_j$, $j = 1, 2, \ldots,n$ tal que $x\in F_\beta$ y por tanto $\exists\ \lambda > 0$: $x\in\lambda U_\beta^h \subseteq \lambda W_\alpha^h$. Entonces $x\in\lambda W_\alpha^h\cap E_\alpha$, y esto para cada $h\in\mathbb{N}$.

(ii) Propiedad Sumativa: Si $x, y \in W_\alpha^{h+1} \cap E_\alpha$, entonces existen dos suciones de enteros positivos $\beta_1 = (b_j^1)_{j\in \mathbb{N}}$ $\beta_2 = (b_j^2)_{j\in \mathbb{N}}$ con $b_j^1 = b_j^2 = a_j$ , $j = 1,2, \ldots, h+1$, tal que $x \in U_{\beta_1}^{h+1}$ , y $U_{\beta_2}^{h+1}$.
Por razonamiento análogo al visto en el Lema 5.2.(ii), existe un $\delta \geq \beta_i$ $i = 1,2$ tal que $x,y \in U_\delta^{h+1}$ , con $\delta = (d_n)_{n\in \mathbb{N}}$ tal que $d_n = a_n$, $n = 1, 2$ $\ldots, h+1$. Entonces $x + y \in U_\delta^{h+1} + U_\delta^{h+1} \subseteq U_\delta^h \subseteq W_\alpha^h$, luego $x+y \in W_\alpha^h \cap E_\alpha$.

Por otra parte, aplicando el Corolario 3.2., dado V $\mathcal{T}$-entorno de 0 en F, existe un $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bigcup\{U_\beta^p : \beta = (b_j)_{j\in \mathbb{N}} \text{ con } b_j = a_j \text{ , } j = 1, 2, \ldots p\} \subseteq V \qquad (6.1.1)$$

luego, si denotamos por $\mathcal{R}_\alpha$ la topologia sobre $E_\alpha$ definida por la cadena $\mathcal{W}_\alpha$, ( 1), $(E_\alpha, \mathcal{R}_\alpha)$ es un espacio pseudometrizable, tal que $\mathcal{R}_\alpha$ es más fina que $\mathcal{T}|_{E_\alpha}$ (aplicando 6.1.1.), así pues $(E_\alpha, \mathcal{R}_\alpha)$ es un espacio metrizable, por ser, por hipótesis $\mathcal{T}$ una topologia separada.

Veamos que $(E_\alpha, \mathcal{R}_\alpha)$ es un espacio completo:
Sea $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(E_\alpha, \mathcal{R}_\alpha)$. Entonces, existirá una subsucesión $(y_n)_{n\in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$ tal que $y_{n+1} - y_n \in W_\alpha^n$, $n \in \mathbb{N}$.
Fijemos $q \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $y_{q+k+1} - y_{q+k} \in W_\alpha^{q+k}$ luego $\exists\ \beta_k = (b_{k,n})_{n\in \mathbb{N}}$ sucesión de enteros positivos tal que $b_{k,n} = a_n$ $n = 1, 2, \ldots q+k$ y $y_{q+k+1} - y_{q+k} \in U_{\beta_k}^{q+k}$.
Denotemos por $\beta = (b_n)_{n\in \mathbb{N}}$ : $b_n = \max\limits_{k\in \mathbb{N}} (b_{k,n})$ , $n = 1, 2, \ldots$
Entonces $b_n = a_n$ , $n = 1, 2, \ldots, q+1$, $\beta \geq \beta_k$ , $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $y_{q+k+1} - y_{q+k} \in U_\beta^{q+k}$ , $k \in \mathbb{N}$, y entonces $\sum\limits_{k\in \mathbb{N}} (y_{q+k+1} - y_{q+k})$ es una serie de Cauchy en $(F_\beta, \mathcal{T}_\beta)$ (aplicando un razonamiento análogo al visto

en la Proposición 3.3.). Como $(F_\beta, \mathcal{T}_\beta)$ es un espacio de Fréchet, dicha serie converge en $(F_\beta, \mathcal{T}_\beta)$ a un punto $u \in F_\beta \subseteq F_{a_1 a_2 \ldots a_q}$, (por definición de $F_{a_1 a_2 \ldots a_q}$).

Sea $z = u + y_{q+1}$, entonces $z \in F_{a_1 a_2 \ldots a_q}$. Sabemos que $\sum_{k=1}^{m} (y_{q+k+1} - y_{q+k}) = y_{q+m+1} - y_{q+1}$ converge a u cuando m tiende a $+\infty$ luego $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a z en $(F, \mathcal{T})$ cuando n tiende a $+\infty$, y este $z \in F_{a_1 a_2 \ldots a_q}$, (sabemos que $\mathcal{T}_\beta \succ \mathcal{T}_{|F_\beta}$). Puesto que este razonamiento podemos hacerlo para cada $q \in \mathbb{N}$, $z \in F_\alpha$.

Por último, dado $W_\alpha^q \cap E_\alpha$ $\mathcal{R}_\alpha$-entorno de 0 en $E_\alpha$, $\exists$ t: si $m \geqslant t$ $u - \sum_{k=1}^{m} (y_{q+k+1} - y_{q+k}) \in U_\beta^q \subseteq W_\alpha^q$, (porque la serie converge en $(F_\beta, \mathcal{T}_\beta)$), luego $z - y_{q+m+1} \in W_\alpha^q \cap F_\alpha$ $\forall m \geqslant t$. Entonces $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a z en $(E_\alpha, \mathcal{R}_\alpha)$, y por tanto $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a z en $(E_\alpha, \mathcal{R}_\alpha)$. Así pues, $(E_\alpha, \mathcal{R}_\alpha)$ es un espacio de Fréchet, $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Tenemos así definida una familia de espacios de Fréchet que verifican las siguientes propiedades:

i) $F = \bigcup \{E_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ ya que $F_\alpha \subseteq E_\alpha$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

ii) $\mathcal{R}_\alpha \succ \mathcal{T}_{|E_\alpha}$ (visto en 6.1.1.)

iii) Dados $\alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $\beta = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones de enteros positivos, tales que $\alpha \leq \beta$, si $x \in W_\alpha^h$, existe un $\delta = (d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $d_n = a_n$, n = 1, 2, ..., h: $x \in U_\delta^h$. Sea $\gamma = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ : $c_n = \max(b_n, d_n)$ n = 1, 2, ... Entonces, $c_n = b_n$, n = 1, 2, ...h y $\gamma \geqslant \delta$ luego $x \in U_\delta^h \subseteq U_\gamma^h \subseteq W_\beta^h$, Tenemos pues, que si $\alpha \leq \beta$ entonces $\mathcal{W}_\alpha \subseteq \mathcal{W}_\beta$, y por tanto se verifica la relación de orden que habíamos exigido en la definición de representación de un espacio Casi LF.

Tenemos pues, que la familia $\{(E_\alpha, \mathcal{R}_\alpha): \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ es una representación del espacio Casi LF $(F, \mathcal{T})$.

*6.2. Definición.*

*Dado un espacio Casi LF $(F,\mathcal{T})$, con una representación $\mathcal{F} = \{(F_\alpha, \mathcal{T}_\alpha): \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$, si consideramos la familia de espacios de Fréchet $\{(E_\alpha, \mathcal{R}_\alpha): \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ definida en la proposición anterior, esta familia es una representación. Diremos que esta familia es una REPRESENTACION FUNDAMENTAL DE F ASOCIADA A $\mathcal{F}$.*

*6.3. Teorema.*

*Sea $(F,\mathcal{T})$ un espacio Casi LF con $\mathcal{F} = \{(F_\alpha, \mathcal{T}_\alpha): \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ una representación. Sea $\mathcal{F}' = \{(E_\alpha, \mathcal{R}_\alpha): \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ una representación fundamental de F asociada a $\mathcal{F}$.*

*Sea $(E, \mathcal{S})$ un espacio vectorial topológico que verifica la propiedad $(\mathcal{B})$. Entonces*

*Si $T: (E,\mathcal{S}) \longrightarrow (F,\mathcal{T})$ es una aplicación lineal continua, existe un $\delta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $T(E) \subseteq E_\delta$ y $T: (E,\mathcal{S}) \longrightarrow (E_\delta, \mathcal{R}_\delta)$ es una aplicación lineal continua.*

Demostración.

Dada la sucesión $\gamma = (m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de enteros positivos, siguiendo la notación introducida en el apartado 3 y en la proposición 6.1., tenemos que $U_{m_1 m_2 \dots m_h} = T^{-1}(W_\gamma^h)$, $h = 1, 2, \dots$ y

$\mathcal{W} = \{U_{m_1 m_2 \dots m_h}: h, m_1, m_2, \dots m_h \in \mathbb{N}\}$ es una red ordenada en E.

Entonces, por hipótesis, existe una sucesión $\delta = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\overline{U}^{\mathcal{S}}_{r_1 r_2 \dots r_n}$ es $\mathcal{S}$-entorno de 0 en E, $n = 1, 2, \dots$, y aplicando la proposición 3.3., tenemos que $U_{r_1 r_2 \dots r_n}$ es $\mathcal{S}$-entorno de 0 en E, n = 1, 2, ... Entonces:

Dado $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$ fijo, existe $\lambda > 0$: $x \in \lambda U_{r_1 r_2 \dots r_n}$, $Tx \in \lambda W_\delta^n$, y existirá $\beta = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $b_j = r_j$, j = 1, 2, ...,n tal que $Tx \in \lambda U_\beta^n \subseteq F_{r_1 r_2 \dots r_n}$. Este razonamiento podemos hacerlo para cada $n \in \mathbb{N}$, luego $Tx \in E_\delta$.

Tenemos pues que $T(E) \subseteq E_\delta$ y podemos considerar la aplicación $T : E \longrightarrow E_\delta$ tal que $\mathcal{G}(T)$ es cerrada en $\mathcal{S} \times \mathcal{R}_\delta$, por ser $\mathcal{R}_\delta \succ \mathcal{T}|_{E_\delta}$. Si aplicamos de nuevo la Proposición 3.3., considerando el espacio $(E_\delta, \mathcal{R}_\delta)$ como un espacio Casi LF, obtenemos que $T : (E, \mathcal{S}) \longrightarrow (E_\delta, \mathcal{R}_\delta)$ es una aplicación continua.

*6.4. Corolario.*

*Si* $(F, \mathcal{S})$ *es un espacio Casi LF que verifica la propiedad (B), entonces* $(F, \mathcal{S})$ *es un espacio de Fréchet.*

Demostración.

Si consideramos la aplicación identidad $I : (F, \mathcal{S}) \longrightarrow (F, \mathcal{S})$ continua, por la proposición anterior sabemos que existe $\delta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ : $I : (F, \mathcal{S}) \longrightarrow (E_\delta, \mathcal{R}_\delta)$ es continua, luego $\mathcal{S}$ es más fina que $\mathcal{R}_\delta|_F$, pero por definición de representación, sabemos que $\mathcal{R}_\delta$ es más fina que $\mathcal{S}|_{E_\delta}$. Además , como $I(F) \subseteq E_\delta$, entonces $F = E_\delta$, $\mathcal{R}_\delta = \mathcal{S}$ , y $(F, \mathcal{S})$ es un espacio de Fréchet.

*6.5. Corolario.*

*Sea* $(F, \mathcal{T})$ *un espacio Casi LF con una representación* $\mathcal{F} = \{(F_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ *y sea* $\mathcal{F}' = \{(E_\alpha, \mathcal{R}_\alpha) : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ *una representación fundamental de* F *asociada a* $\mathcal{F}$.

*Sea Q la familia de subespacios de* F *tal que si* $(E, \mathcal{S}) \in Q$

*$(E,\mathcal{S})$ es un espacio de Fréchet tal que $\mathcal{T}_{|E} \prec \mathcal{S}$.*

*Entonces, si denotamos por $(F, \mathcal{T}_Q) = \sum_{E \in Q} (E,\mathcal{S})$ y por $(F,\mathcal{T}_{F'}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} (E_\alpha, \mathcal{R}_\alpha)$, se verifica que $\mathcal{T}_{F'} = \mathcal{T}_Q$.*

Demostración.

Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ $(E_\alpha, \mathcal{R}_\alpha) \in Q$, luego la inyección $I : (E_\alpha,\mathcal{R}_\alpha) \longrightarrow (F,\mathcal{T}_Q)$ es continua y tenemos que $\mathcal{T}_Q \prec \mathcal{T}_{F'}$.

Por otra parte, como $I : (E,\mathcal{S}) \longrightarrow (F,\mathcal{T})$ es continua y $(E,\mathcal{S})$ verifica la propiedad $(\mathcal{B})$, aplicando el Teorema 6.3. existe un $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ : $I(E) \subseteq E_\alpha$ y $I: (E,\mathcal{S}) \longrightarrow (E_\alpha,\mathcal{R}_\alpha)$ es continua. Como $I : (E_\alpha,\mathcal{R}_\alpha) \longrightarrow (F,\mathcal{T}_{F'})$ es continua, tenemos que $I : (E,\mathcal{S}) \longrightarrow (F,\mathcal{T}_{F'})$ es continua y por tanto $\mathcal{T}_{F'} \prec \mathcal{T}_Q$. Entonces $\mathcal{T}_{F'} = \mathcal{T}_Q$.

*6.6. Corolario.*

*Sea $G$ un subespacio denso de $(E,\mathcal{S})$ verificando la propiedad $(\mathcal{B})$. Sea $(F,\mathcal{T})$ un espacio Casi LF, y sea $T : G \longrightarrow F$ una aplicación lineal y continua con $\mathcal{G}(T)$ cerrada en $E \times F$. Entonces $G = E$.*

Demostración.

Si $T : G \longrightarrow F$ es continua, aplicando el Teorema 6.3. existe $\beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $T : G \longrightarrow E_\beta$ es continua. Si consideramos la extensión $\tilde{T} : \bar{G} = E \longrightarrow E_\beta$ tal que $\tilde{T}_{|G} = T$ entonces se verifica que $\mathcal{G}(T) \subseteq \mathcal{G}(\tilde{T}) \subseteq \overline{\mathcal{G}(T)}^{E\times F} = \mathcal{G}(T)$. Entonces $E = G$.

*6.7 Corolario.*

*Sea $(E,\mathcal{S}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} A_\alpha(E_\alpha, \mathcal{S}_\alpha)$ límite inductivo de una familia de espacios $(E_\alpha, \mathcal{S}_\alpha)$ tal que cada $(E_\alpha,\mathcal{S}_\alpha)$ verifica la propiedad $(\mathcal{B})$.*

*Supongamos que $(E,\mathcal{S})$ es un espacio Casi LF. Entonces $(E,\mathcal{S})$ se puede poner como límite inductivo de una familia de espacios de Fréchet.*

Demostración.

Sea $\mathcal{F} = \{(G_\alpha, \mathcal{R}_\alpha) : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ una representación de $(E, \mathcal{S})$ y sea $\mathcal{F}' = \{(F_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ una representación fundamental de E asociada a $\mathcal{F}$.

Sea $\mathcal{T}_{\mathcal{F}'}$ la topologia límite inductivo de las inyecciones $I_\beta : (F_\beta, \mathcal{T}_\beta) \longrightarrow E$, es decir, $(E, \mathcal{T}_{\mathcal{F}'}) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} (F_\beta, \mathcal{T}_\beta)$. Entonces $\mathcal{S} \prec \mathcal{T}_{\mathcal{F}'}$, ya que $\mathcal{T}_\beta \succ \mathcal{S}_{|F_\beta}$.

Por otra parte, si consideramos para cada $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $A_\alpha : (E_\alpha, \mathcal{S}_\alpha) \longrightarrow (E, \mathcal{S})$ continua, aplicando el Teorema 6.3. y ya que cada $(E_\alpha, \mathcal{S}_\alpha)$ verifica la propiedad $(\mathcal{B})$, $\exists \beta_\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que la aplicación $A_\alpha : (E_\alpha, \mathcal{S}_\alpha) \longrightarrow (F_{\beta_\alpha}, \mathcal{T}_{\beta_\alpha})$ es continua. Tenemos pues que $I_{\beta_\alpha} \circ A_\alpha : (E_\alpha, \mathcal{S}_\alpha) \quad (E, \mathcal{T}_{\mathcal{F}'})$ es continua $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, y por definición de $\mathcal{S}$ entonces $\mathcal{T}_{\mathcal{F}'} \prec \mathcal{S}$. Así pues $\mathcal{S} = \mathcal{T}_{\mathcal{F}'}$, y $(E, \mathcal{S}) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} (F_\beta, \mathcal{T}_\beta)$.

*6.8. Corolario.*

*Sea $(F, \mathcal{T})$ un espacio Casi LF, sea $\mathcal{F} = \{(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ una representación de F y sea $\mathcal{F}' = \{(F_\alpha, \mathcal{S}_\alpha) : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ una representación fundamental de F asociada a $\mathcal{F}$.*

*Entonces, dada cualquier representación $\{(G_\beta, \mathcal{R}_\beta) : \beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ de $(F, \mathcal{T})$, se verifica:*

*Para cada $\beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ existe $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$: $G_\beta \subseteq F_\alpha$ y $\mathcal{R}_\beta \succ \mathcal{S}_{\alpha|G_\beta}$.*

*Si además $G_\beta$ es cerrado en $F_\alpha$ entonces $\mathcal{R}_\beta = \mathcal{S}_{\alpha|G_\beta}$.*

Demostración.

Dado $\beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $(G_\beta, \mathcal{R}_\beta)$ es un espacio de Fréchet que verifica $I_\beta : (G_\beta, \mathcal{R}_\beta) \longrightarrow (F, \mathcal{T})$ es continua, y por el Teorema 6.3., existirá $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $I_\beta : (G_\beta, \mathcal{R}_\beta) \longrightarrow (F_\alpha, \mathcal{S}_\alpha)$ es continua, luego $\mathcal{R}_\beta \succ \mathcal{S}_{\alpha|G_\beta}$ y $G_\beta \subseteq F_\alpha$.

Si además $G_\beta$ es cerrado en $(F_\alpha, \mathcal{S}_\alpha)$, entonces $(G_\beta, \mathcal{S}_{\alpha|G_\beta})$ es un espacio de Fréchet, y por la unicidad, se verifica que $\mathcal{S}_{\alpha|G_\beta} = \mathcal{R}_\beta$.

6.9. *Corolario.*

*Si $(F, \mathcal{T})$ es un espacio Casi LF con una representación $\mathcal{F} = \{(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ y una representación fundamental $\mathcal{F}' = \{(F_\alpha, \mathcal{R}_\alpha) : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ asociada a $\mathcal{F}$, y denotamos por $(G, \mathcal{S})$ un subespacio vectorial de F tal que $\mathcal{S} \succ \mathcal{T}_{|G}$, entonces existe un $\beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $G \subseteq F_\beta$ y $\mathcal{S} \succ \mathcal{R}_{\beta|G}$. Si $(G, \mathcal{S})$ es cerrado en $(F_\beta, \mathcal{R}_\beta)$ entonces $\mathcal{S} = \mathcal{R}_{\beta|G}$.*

Demostración.

Análoga a la del Corolario 6.8.

## 7. *PRODUCTOS TENSORIALES EN ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS.*

Consideremos un espacio localmente convexo metrizable $(E, \mathcal{S})$ cuya topologia viene definida por la sucesión creciente de seminormas $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, y sea $(F, \mathcal{T})$ un espacio localmente convexo Casi LF, con una representación $\mathcal{F} = \{(F_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ tal que cada $(F_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ es un espacio localmente convexo Fréchet, cuya topologia viene definida por la cadena $\mathcal{U}_\alpha = (U_\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}$, formada por conjuntos absolutamente convexos, verificando que si $\alpha \leq \beta$ entonces $U_\alpha^n \subseteq U_\beta^n$, $n = 1, 2, \ldots$

Vamos a estudiar qué ocurre si consideramos productos tensoriales.

En cada $(F_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ podemos considerar la familia creciente de seminormas $(q_{\alpha,n})_{n \in \mathbb{N}}$, donde $q_{\alpha,n}$ es el funcional de Minkowski asociado a $U_\alpha^n$, y que sabemos define la topologia $\mathcal{T}_\alpha$.

Se verifica que si $\alpha \leq \beta$ y $x \in F_\alpha$, entonces

$q_{\alpha,n}(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda U_\alpha^n\} \geq \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda U_\beta^n\} = q_{\beta,n}(x)$, luego

$q_{\alpha,n}(x) \geq q_{\beta,n}(x)$, $n = 1, 2, \ldots.$, $x \in F_\alpha$.

Si consideramos el producto tensorial $E\otimes_{\Pi}F_{\alpha}$, la topologia - proyectiva $\Pi$ viene definida por el sistema de seminormas $\left\{p_n\otimes q_{\alpha,n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

donde $p_n\otimes q_{\alpha,n}(z)= \inf\left\{\sum_{i=1}^{m} p_n(x_i).q_{\alpha,n}(y_i)\right.$ , $z = \sum_{i=1}^{m} x_i\otimes y_i$ , $z\in E\otimes F$

y esta sucesión de seminormas es una sucesión creciente, por serlò las sucesiones $(p_n)_{n\in N}$ y $(q_{\alpha,n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Una base de $\Pi$-entornos de 0 en $E\otimes F$ viene dada por la familia $\mathcal{W}_{\alpha} = (W_{\alpha}^n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $W_{\alpha}^n = \left\{z\in E\otimes F \;:\; p_n\otimes q_{\alpha,n}(z) < 1/2^n\right\}$ que es además una cadena topológica en $E\otimes_{\Pi}F$ :

Si $x,\ y\in W_{\alpha}^{n+1}$: $p_n\otimes q_{\alpha,n}(x + y) \leq p_n\otimes q_{\alpha,n}(x) + p_n\otimes q_{\alpha,n}(y)\leq$

$\leq p_{n+1}\otimes q_{\alpha,n+1}(x) + p_{n+1}\otimes q_{\alpha,n+1}(y) < 1/2^{n+1} + 1/2^{n+1} = 1/2^n$

Se verifica también la condición de orden:

Si $\alpha\leq\beta$, $z\in E\otimes F$ $\quad p_n\otimes q_{\alpha,n}(z) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{m} p_n(x_i).q_{\alpha,n}(y_i) \right.$ :

$$z = \left.\sum_{i=1}^{m} x_i\otimes y_i\right\} \geq \inf\left\{ \sum_{i=1}^{m} p_n(x_i).q_{\beta,n}(y_i) \;:\; z = \sum_{i=1}^{m} x_i\otimes y_i\right\} =$$

$= p_n\otimes q_{\beta,n}(z)$ luego $W_{\alpha}^n \subseteq W_{\beta}^n$, $n = 1, 2, \ldots$

Tenemos pues, todas las condiciones exigidas en los espacios Casi LF, excepto la completitud de los espacios $E\otimes_{\Pi}F$ .

Consideremos la familia $\left\{E\otimes_{\Pi}F_{\alpha} : \alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right\}$ de espacios de Fréchet, y sea $G = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} E\hat{\otimes}_{\Pi}F_{\alpha}$, donde por $E\hat{\otimes}F_{\alpha}$ denotamos la compleccíon de $E\otimes_{\Pi}F_{\alpha}$, sea $E\hat{\otimes}_{\Pi}F$ la compleccíon de $E\otimes_{\Pi}F$ y denotemos por $T$ la topologia restringida de $E\hat{\otimes}_{\Pi}F$ a G. Entonces

*7.1. Proposición.*

*( G,T) es un espacio Casi LF.*

Demostración.

Veamos en primer lugar que G es un espacio vectorial.

Para ello haremos uso de la relación de orden existente entre los espacios. Sean a, $b \in K$ , x, $y \in G$, existen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $x \in E\hat{\otimes}_{\eta}F_{\alpha_1}$ y $E\otimes_{\eta}F_{\alpha_2}$ , siendo $\alpha_1 = (a_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ $\alpha_2 = (a_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si consideramos $\alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ : $a_n = \text{máx}\,(a_n^1, a_n^2)$

entonces $\alpha_i \leq \alpha$ , i = 1, 2, y si consideramos las inyecciones canónicas $I_{\alpha_i,\alpha} : F_{\alpha_i} \longrightarrow F_{\alpha}$ entonces, considerando las extensiones de $I\otimes I_{\alpha_i,\alpha}$

$I\tilde{\otimes}I_{\alpha_i,\alpha} : E\hat{\otimes}_{\eta}F_{\alpha_i} \longrightarrow E\hat{\otimes}_{\eta}F_{\alpha}$ , tenemos que $x,y \in E\hat{\otimes}_{\eta}F_{\alpha}$ y por tanto

$ax + by \in E\hat{\otimes}_{\eta}F_{\alpha} \subseteq G$. Entonces G es en espacio vectorial.

Si consideramos $(G,\mathcal{T})$ espacio vectorial topológico, tenemos

1. $\bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} E\hat{\otimes}_{\eta}F_{\alpha} = G$

2. Para cada $\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ $E\hat{\otimes}_{\eta}F_{\alpha}$ es un espacio de Fréchet cuya topologia viene definida por la cadena $\mathcal{W}' = (\overline{W_{\alpha}^{n}}^{E\hat{\otimes}F_{\alpha}})_{n\in\mathbb{N}}$ que es base de entornos de 0 para la topologia $\eta$ .

3. Evidentemente se verifica que si $\alpha \leq \beta$ entonces $\mathcal{W}'_{\alpha} \subseteq \mathcal{W}'_{\beta}$ , por verificarse que $\mathcal{W}_{\alpha} \subseteq \mathcal{W}_{\beta}$.

4. Veamos que $\mathcal{T}|_{E\ \ F}$ :

Siconsideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
E\times F_{\alpha} \arrow[r, "I\times I_{\alpha}"] \arrow[dr, "\otimes"'] & E\times F \arrow[r, "\otimes"] & E\otimes_{\eta}F \\
& E\otimes_{\eta}F_{\alpha} \arrow[ur, "I_{\alpha}"'] &
\end{tikzcd}$$

$I_{\alpha}$ es continua, luego $\tilde{I} : E\hat{\otimes}_{\eta}F_{\alpha} \longrightarrow E\hat{\otimes}_{\eta}F$ es continua y por tanto $\mathcal{T}|_{E\hat{\otimes}_{\eta}F_{\alpha}} \prec \hat{\eta}_{\alpha}$, $\forall \alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Entonces $(G,\mathcal{T})$ es un espacio Casi LF.

Veamos que ocurre algo similar con el $\varepsilon$-producto.

Usando la notación de (15), denotaremos por $E\varepsilon F = (\mathcal{L}(E'_{\gamma},F),\mathcal{T}_{\varepsilon})$ el $\varepsilon$- producto de E por F, siendo $E'_{\gamma} = (E',\gamma(E',E))$, donde $\gamma(E',E)$ es la topologia de la convergencia uniforme sobre los conjuntos compactos de E, y $\mathcal{T}_{\varepsilon}$ es la topologia de la convergencia uniforme sobre los miembros de la compactologia equicontinua sobre $E'_{\varepsilon}$.

Entonces, si denotamos por $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ una base de entornos de 0 en E y F respectivamente, una base de entornos de 0 en $E\varepsilon F$ viene dada por la familia

$$\left\{ W_{U^o,V} = \left\{ T \in \mathcal{L}(E'_{\gamma},F) \ : \ T(U^o) \subseteq V \right\} \ , \quad U\in\mathcal{U}, \ V\in\mathcal{V} \right\}.$$

Sea en nuestro caso $(E,\mathcal{T})$ un espacio localmente convexo metrizable y sea $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de $\mathcal{T}$-entornos de 0 que verifica la propiedad sumativa.

Consideremos $(F,\mathcal{S})$ un espacio Casi LF con una representación $\mathcal{F} = \left\{ (F_{\alpha},\mathcal{S}_{\alpha}) : \alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \right\}$ donde denotaremos por $\mathcal{U}_{\alpha} = (U^n_{\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena asociada a $(F_{\alpha},\mathcal{S}_{\alpha})$. Entonces, una base de e tornos en $E\varepsilon F_{\alpha}$ vendrá dada por la familia $\mathcal{W}_{\alpha} = (W^n_{\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$, donde

$$W^n_{\alpha} = \left\{ T\in \mathcal{L}(E'_{\gamma},F_{\alpha}) : \ T(V^o_n) \subseteq U^n_{\alpha} \right\} \qquad , \ n = 1,\ 2,\ \ldots$$

(para demostrar que es base de entornos es suficiente con demostrar que dado $\left\{ T\in \mathcal{L}(E'_{\gamma},F_{\alpha}) : \ T(V^o_m) \subseteq U^n_{\alpha} \right\}$ elemento de la base de entornos de 0 en $E\varepsilon F_{\alpha}$, existe un $h\in\mathbb{N}$ tal que $W^h_{\alpha}$ está contenido en él, y esto se prueba sin más que distinguir los casos $m > n$, $m < n$. En el caso en que $m < n$, $V^o_m \subseteq V^o_n$ y si $m > n$ , $U^n_{\alpha} \supseteq U^m_{\alpha}$ y en los dos casos la demostración es directa). Además $\mathcal{W}_{\alpha}$ es una cadena:

Si $T,\ L \in W^{n+1}_{\alpha}$ , $(L + T)(V^o_n) \subseteq L(V^o_{n+1})+T(V^o_{n+1}) \subseteq$
$\subseteq U^{n+1}_{\alpha} + U^{n+1}_{\alpha} \subseteq U^n_{\alpha}$.

Se verifica la condición de orden: Si $\alpha \leq \beta$ sabemos que $U_\alpha^n \subseteq U_\beta^n$ y por tanto si consideramos $T \in W_\alpha^n$, $T(V_n^o) \subseteq U_\alpha^n \subseteq U_\beta^n$.

Denotemos por $\mathcal{T}_\varepsilon^\alpha$ la topologia de $E \varepsilon F_\alpha$ y consideremos la aplicación $\chi : E \otimes F_\alpha \longrightarrow \mathcal{L}(E'_\gamma, F_\alpha)$ que permite considerar $E \otimes F_\alpha$ como un subespacio de $\mathcal{L}(E'_\gamma, F_\alpha)$. Restringimos $\mathcal{T}_\varepsilon^\alpha$ a este espacio, al que denotaremos por $E \otimes_\varepsilon F_\alpha$, y entonces, su compleción $E \hat{\otimes}_\varepsilon F_\alpha$ es un espacio de Fréchet, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, y así estamos en una situación análoga a la del $\eta$-producto.

Si denotamos por $G = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} E \hat{\otimes}_\varepsilon F_\alpha$, G así definido es un subespacio vectorial de $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ razonando análogamente al caso del $\eta$-producto y teniendo en cuenta que si $I_{\alpha_i, \alpha} : F_{\alpha_i} \longrightarrow F_\alpha$ es continua, $i = 1,2$, entonces $I \otimes_\varepsilon I_{\alpha_i, \alpha} : E \otimes_\varepsilon F_{\alpha_i} \longrightarrow E \otimes_\varepsilon F_\alpha$ es lineal y continua, la extensión $I \tilde{\otimes}_\varepsilon I_{\alpha_i, \alpha} : E \hat{\otimes}_\varepsilon F_{\alpha_i} \longrightarrow E \hat{\otimes} F_\alpha$ es lineal, continua e inyectiva, por ser $F_{\alpha_i}$ un espacio completo (Corol. 2(a),(15) §16.2.).

También por el mismo razonamiento, si considermos $I_\alpha : F_\alpha \longrightarrow F$, entonces $I \tilde{\otimes}_\varepsilon I_\alpha : E \hat{\otimes}_\varepsilon F_\alpha \longrightarrow E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ es lineal, continua e inyectiva (por ser $F_\alpha$ completo) $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, y podemos considerar $E \hat{\otimes}_\varepsilon F_\alpha \subseteq E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, y así G podemos considerarlo como un subespacio de $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$, y podemos considerar en G la topologia restringida de $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ a G, que denotaremos por $\mathcal{T}$. Así definido, $(G, \mathcal{T})$ es un espacio Casi LF:

Para demostrar esto sólo nos faltaria comprobar que la aplicacion $I_\alpha : E \hat{\otimes}_\varepsilon F_\alpha \longrightarrow (G, \mathcal{T})$ es continua, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, pero hemos visto que $I \tilde{\otimes}_\varepsilon I_\alpha$ es continua, luego en particular $I_\alpha : E \hat{\otimes}_\varepsilon F_\alpha \longrightarrow (G, \mathcal{T})$ es continua.

Las demás condiciones para ser un Casi LF espacio, se verifican de manera análoga al $\eta$-producto. Entonces:

*7.2. Proposición.*

*$(G, \mathcal{T})$ es un espacio Casi LF*

*7.3. Corolario.*

*En las condiciones anteriores, si cada* $F_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *tiene la propiedad de Aproximación, entonces* $\bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} E\varepsilon F_\alpha$ *es un espacio Casi LF.*

Demostración.

Es consecuencia inmediata del resultado anterior, ya que si $F_\alpha$ tiene la Propiedad de Aproximación, entonces $E\hat{\otimes}_\varepsilon F_\alpha = E\varepsilon F_\alpha$ es un espacio de Fréchet.

## 8. ESPACIOS CASI LF Y REDES DE ROBERTSON.

Estudiaremos en este capítulo la relación existente entre los espacios Casi LF y los espacios con redes de finidos por W. Robertson (26).

*8.1. Definición.* (26)

Sea $(F,\mathcal{T})$ un espacio vectorial topológico y sea $\mathcal{W} = \left\{A_{n_1 n_2 \ldots n_k} : k, n_1, n_2 \ldots, n_k \in \mathbb{N}\right\}$ una red (R) en F.

Dada una sucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de enteros positivos, denotaremos por $(W_k)_{k\in\mathbb{N}} = \mathcal{C}$ la fibra correspondiente, $W_1 = A_{n_1}$, $W_2 = A_{n_1 n_2}$, $\ldots W_k = A_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, ...

Diremos que $\mathcal{W}$ es una "red de tipo (c)" si para cada fibra $\mathcal{C}$ se verifica que toda serie $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$, con $x_k \in W_k$, $k\in\mathbb{N}$, es $\mathcal{T}$-convergente.

Diremos que $\mathcal{W}$ es una "$\mathcal{T}$-red estrictamente cerrada" si para cada fibra $\mathcal{C}$ de la red, toda serie $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$, $x_k \in W_k$, $k\in\mathbb{N}$ es $\mathcal{T}$-convergente, y $\sum_{r=k+1}^{+\infty} x_r \in W_{k-1}$, para cada $k\in N$.

Es consecuencia inmediata de la definición que toda $\mathcal{T}$-red estrictamente cerrada es una red de tipo (c).

*8.2. Proposición.*

*Si* $(E,\mathcal{T})$ *es un espacio Casi LF, entonces existe una red estrictamente cerrada en* E.

Demostración.

Dada $\mathcal{F} = \{(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha): \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ una representación de E, con $\mathcal{U}_\alpha = (U^n_\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena asociada a $(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, se ha probado en el Lema 5.2., que si $C_{r_1 r_2 \ldots r_h} = \bigcup\{U^h_\beta : \beta = (b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ con $b_j = a_j$, $j = 1, 2, \ldots, h\}$, entonces $\mathcal{W} = \{C_{r_1 r_2 \ldots r_h}, h, r_1, r_2, \ldots r_h \in \mathbb{N}\}$ es una red ordenada en $(E,\mathcal{T})$. Veamos que $\mathcal{W}$ es estrictamente cerrada en E.

Sea $\gamma = (m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de enteros positivos, y denotemos por $\mathcal{C} = (W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la fibra correspondiente. Dada la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ con $x_k \in W_k$, $k\in\mathbb{N}$ vamos a probar que esta serie es $\mathcal{T}$-convergente, usando un razonamiento en la linea del visto en la Proposición 6.1.

Sea $q\in\mathbb{N}$ fijo. Como para cada $k\in\mathbb{N}$ $x_{q+k} \in W_{q+k}$, existirá un $\beta_k = (b_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{q+k} \in U^{q+k}_k$ y $b_{n,k} = m_n$, $n = 1, 2, \ldots, q+k$ Sea $\beta = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $b_n = \max\limits_{k\in\mathbb{N}}(b_{n,k})$, $n = 1, 2, \ldots$ Entonces $\beta \geq \beta_k$ $\forall k\in\mathbb{N}$ y $b_n = m_n$, $n = 1, 2, \ldots, q+1$, luego $x_{q+k} \in U^{q+k}_\beta$, $k = 1, 2, \ldots$

Tenemos así la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} x_{q+k}$ en $(E_\beta, \mathcal{T}_\beta)$ y aquí esta serie es de Cauchy (aplicando 8.2.1. y que $\mathcal{U}_\beta$ es una cadena), luego esta serie converge en $(E_\beta, \mathcal{T}_\beta)$ y por tanto en $(E,\mathcal{T})$ a un punto $u\in E_\beta$. Además, por ser la serie $\mathcal{T}_\beta$-convergente a u, dado $U^q_\beta$ existe un $h\in\mathbb{N}$, tal que si $m \geq h$ $u - \sum_{k=1}^{m} x_{q+k} \in U^q_\beta$. Como $\sum_{k=1}^{m} x_{q+k} \in U^q_\beta$ (aplicando la propiedad sumativa de las cadenas), entonces $u \in U_{\beta}^{q} + U_{\beta}^{q} \subseteq U_{\beta}^{q-1}$.

Entonces $\sum_{k=1}^{+\infty} x_{q+k} = \sum_{k=q+1}^{+\infty} x_k \in U_{\beta}^{q-1} \subseteq C_{m_1 m_2 \ldots m_{q-1}} = W_{q-1}$. c.q.d.

*8.3. Definición.*

Dado $k \geqslant 2$, un subconjunto A de un espacio vectorial E, diremos que es k-convexo, si $A + A \subseteq kA$. (12)

Un espacio vectorial topológico diremos que es k-semiconvexo si todo subconjunto acotado está contenido en algún conjunto acotado equilibrado, cerrado y k-convexo. (13)

Todo espacio localmente convexo es un ejemplo de k-semiconvexo, para $k = 2$.

*8.4. Lema.*

*Si* B *es un subconjunto k-convexo equilibrado de un espacio vectorial* E, *entonces* $LIN\ B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nB$.

Demostración.

Dados $x, y \in B$; $\alpha, \beta \in K$, por ser B equilibrado existen dos números $p, q \in \mathbb{N}$: $\alpha x + \beta y \in pB + qB \subseteq \underbrace{B + \ldots\ldots + B}_{(p+q \text{ veces})}$.

$B + B \subseteq kB$, $k \geqslant 2$, y entonces, si suponemos por hipótesis de inducción $\underbrace{B + B + \ldots + B}_{(p+q-1 \text{ veces}}\subseteq \mu B$, para algún $\mu \geqslant 2$ tendremos que

$\underbrace{B + B + \ldots + B}_{(p+q \text{ veces}} \subseteq \mu B + B \subseteq (\mu + 1)k.B$ con $(\mu + 1)k \geqslant 2$, por ser B

equilibrado, y entonces podemos encontrar un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$(\mu+1)kB \subseteq mB$. Así, $LIN\ B \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nB$. La otra inclusión es inmediata.

*8.5. Definición.*

Una familia $\mathcal{W} = \{A_{n_1 n_2 \ldots n_k} : k, n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$

diremos que es una "Red (D.W.)", es decir, una red según De Wilde (5) en el espacio $(E,\mathcal{T})$ si verifica las condiciones:

a) $E = \bigcup \{ A_{n_1} : \; n_1 \in \mathbb{N} \}$

b) $A_{n_1 n_2 \dots n_k} = \bigcup \{ A_{n_1 n_2 \dots n_k r} : \; r \in \mathbb{N} \}$ .

Una red (D.W.) diremos que es de"tipo $\mathcal{C}$ o Completante" si para cada sucesión de enteros positivos $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe una sucesión $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lambda_n \geq 0$, $n\in\mathbb{N}$ y $\lambda_n \neq 0$ para una cantidad numerable de forma que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n x_n$ converge en E, $\forall \mu_n \in [0,\lambda_n]$ y $x_n \in A_{m_1 m_2 \dots m_n}$, n = 1, 2, .... Se dice que la sucesión $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es "asociada" a la sucesión $(A_{m_1 m_2 \dots m_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Si $\mathcal{W}$ está formada por conjuntos absolutamente convexos y la sucesión $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puede tomarse de forma que $\sum_{n=p}^{+\infty} \mu_n x_n$ converge en E a un elemento de $A_{m_1 m_2 \dots m_p}$, diremos que la red es "estricta".

*8.6. Lema. (26)*

*Sea $\mathcal{W} = \{ A_{m_1 m_2 \dots m_n} : n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N} \}$ una red (R) de tipo (c). en $(E,\mathcal{T})$. Entonces $(E,\mathcal{T})$ admite una red (D.W.) de tipo $\mathcal{C}$.*

Demostración.

Basta con definir: $C_{n_1} = m_1 A_{r_1}$ donde $n_1 = (m_1, r_1)$

$$C_{n_1 n_2 \dots n_k} = C_{n_1 n_2 \dots n_{k-1}} \cap m_k A_{r_1 r_2 \dots r_k}, \text{ con } n_k = (m_k, r_k)$$

Para cada $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, si ponemos $\lambda_k = m_k^{-1}$, se verifica que para cada $\mu_k$: $0 \leq |\mu_k| \leq \lambda_k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k x_k$ $\mathcal{T}$-converge, cuando $x_k \in C_{n_1 \dots n_k}$ k = 1, 2, ...

En las mismas condiciones se verifica:

*8.7. Lema.(38)*

*Dada* $\alpha = (m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *sea* $P_\alpha = \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_{m_1 m_2 \dots m_n}$, *y sea*

$Q_\alpha = \bigcup \{ P_\beta : \beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \beta \leq \alpha \}$. *Entonces* $Q_\alpha$ *es* $\mathcal{T}$-*acotado.*

Demostración.

Dados los enteros n, $c_1, \dots c_n$ tal que $c_j \leq m_j$, j = 1, 2, ..., n, denotemos por

$$H_{c_1 c_2 \dots c_n} = \bigcup \{ P_\beta : \beta = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ con } \beta \leq \alpha \text{ y } b_j = c_j,\ j = 1, \dots n \}$$

Supongamos $Q_\alpha$ es no $\mathcal{T}$-acotado. Existirá V $\mathcal{T}$-entorno de 0 que no absorbe $Q_\alpha$. Ya que $\bigcup_{c_1=1}^{m_1} H_{c_1} = Q_\alpha$, existe $j_1 \leq m_1$ tal que V no absorbe $H_{j_1}$.

Por hipótesis de inducción, supongamos para $n\in\mathbb{N}$ existen $j_1$, $j_2$, ... $j_n$ tal que $j_p \leq m_p$, p = 1, 2, ..., n: V no absorbe $H_{j_1 j_2 \dots j_n} = \bigcup_{c_{m+1}=1}^{m_{n+1}} H_{j_1 j_2 \dots j_n c_{m+1}}$. Existirá un $j_{m+1} \leq m_{n+1}$ tal que V no absorbe $H_{j_1 j_2 \dots j_{n+1}}$. (8.7.1.)

Si consideramos entonces, la sucesión $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$, para cada $n\in\mathbb{N}$ existe $\lambda_n \geq 0$ tal que $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_n x_n$ $\mathcal{T}$-converge, $x_n \in C_{j_1 j_2 \dots j_n}$.

Por otra parte, para cada $k\in\mathbb{N}$, sabemos que existe un $x_k \in H_{j_1 j_2 \dots j_k}$ tal que $\lambda_k x_k \notin$ V. Esto nos lleva a una contradicción ya que $H_{j_1 j_2 \dots j_n} \subseteq C_{j_1 j_2 \dots j_n}$, $\forall\, n\in$ N.

Así pues, $Q_\alpha$ es $\mathcal{T}$-acotado.

*8.8. Proposición.*

*Sea* $(F,\mathcal{T})$ *un espacio vectorial topológico con una red* $(\mathcal{R})$ *de tipo (c). Supongamos* $(F,\mathcal{T})$ *es un espacio k-semiconvexo para algún*

*$k \geq 2$ y supongamos que para cada conjunto A acotado, cerrado, equilibrado y k-convexo, se verifica que $\sum_{n=1}^{+\infty} k^{-n} b_n$, es $T$-convergente en A, $b_n \in A$, $n = 1, 2, \ldots$*

*Entonces, $(F,T)$ es un espacio Casi LF.*

Demostración.

Dada la red $W$ consideramos la familia $\{Q_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ de conjuntos $T$-acotados, definida en el Lema anterior. Si $(F,T)$ es k-semiconvexo, para cada $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ existe $B_\alpha$ subconjunto de F acotado, equilibrado y k-convexo, tal que $Q_\alpha \subseteq B_\alpha$ (denotaremos por $B_\alpha$ la intersección de todos los subconjuntos acotados, equilibrados cerrados y k-convexos que contienen a $Q_\alpha$, y por tanto $B_\alpha$ conserva dichas propiedades).

Sea $E_\alpha = \mathrm{LIN}\, B_\alpha = \bigcup_{n=1}^{+\infty} nB_\alpha$, (Lema 8.4.). Vamos a demostrar que la familia $\{(E_\alpha, T_\alpha) : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ donde $T_\alpha$ es la topologia definida por la cadena $U_\alpha^n = k^{-n} B_\alpha$, $n = 1, 2, \ldots$ es una representación de F.

i) $U_\alpha^n$ es equilibrado por serlo $B_\alpha$ y es absorbente por $E_\alpha = \bigcup_{n=1}^{+\infty} nB$ .

ii) Propiedad sumativa: Por ser $B_\alpha$ k-convexo, $B_\alpha + B_\alpha \subseteq kB_\alpha$, luego $k^{-(n+1)} B_\alpha + k^{-(n+1)} B_\alpha \subseteq k^{-n} B_\alpha$, $n = 1, 2, \ldots$

Tenemos pues que $U_\alpha = (U_\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una cadena que define una topologia $T_\alpha$ pseudometrizable sobre $E_\alpha$. Veamos que $T_\alpha$ es Hausdorff:

Si $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} U_\alpha^n$ , $x \neq 0$, por ser $T$, Hausdorff existe U $T$-entorno de 0 en F tal que $x \notin U$. Como $B_\alpha$ es $T$-acotado, existe $\rho_\alpha > 0$: $B_\alpha \subseteq \rho_\alpha U$ Si consideramos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\rho_\alpha < k^n$ entonces $k^{-n} B_\alpha \subseteq k^{-n} \rho_\alpha U \subseteq U$. Entonces, $x \notin U_\alpha^n$ .

Veamos que $(E_\alpha, T_\alpha)$ es un espacio completo:

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(E_\alpha, T_\alpha)$. Extraemos una subsucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $y_{n+1} - y_n \in k^{-n} B_\alpha$, $n \in \mathbb{N}$

Aplicando la hipótesis, tenemos que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (y_{n+1} - y_n)$ es $\mathcal{T}$-convergente en $B_\alpha$ a un punto $y \in B_\alpha$.

Para cada p se verifica: $y - \sum_{n=1}^{p} (y_{n+1} - y_n) = y + y_1 - y_{p+1} = \sum_{n=p+1}^{+\infty} (y_{n+1} - y_n) = \sum_{n=p+1}^{+\infty} k^{-n} b_n = k^{-p}( \sum_{n=1}^{+\infty} k^{-n} b_{p+n}) \subseteq k^{-p}B$,

con $b_n \in B_\alpha$, n = 1, 2, ...

Así pues, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $y + y_1 \in E_\alpha$ en $(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$.

Por ser $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ tendremos que también $(x_n)_{n \in N}$ $\mathcal{T}_\alpha$-converge en $E_\alpha$.

Veamos las restantes condiciones de un espacio Casi LF:

1) Por ser $B_\alpha$ $\mathcal{T}$-acotado, $\mathcal{T}_\alpha \succ \mathcal{T}_{|E_\alpha}$.

2) Relación de orden: Si $\alpha \leq \delta$ $Q_\alpha = \bigcup\{P_\beta : \beta \leq \alpha\} \subseteq \{P_\beta : \beta \leq \delta\} = Q_\delta$, y como $Q_\alpha \subseteq Q_\delta \subseteq B_\delta$ k-convexo equilibrado, cerrado y $\mathcal{T}$-acotado que contiene a $Q_\alpha$, entonces $B_\alpha \subseteq B_\delta$, luego $k^{-n}B_\alpha \subseteq k^{-n}B_\delta$, n = 1, 2, ...
Entonces $\mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathcal{U}_\delta$.

3) $F = \bigcup\{E_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$: Si $x \in F$ entonces existe $\alpha = (m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x \in C_{n_1 n_2 \ldots m_n}$ : n = 1, 2, ... Entonces, $x \in P_\alpha \subseteq Q_\alpha \subseteq E_\alpha$.

*8.9. Corolario.*

*Sea* $(F,\mathcal{T})$ *un espacio vectorial topológico k-semiconvexo,* $k \geq 2$, *con una red* $\mathcal{W}$ $(\mathcal{R})$ *de tipo (c) y tal que para cada subconjunto* A *k-convexo, cerrado, acotado y equilibrado* $\sum_{n=1}^{+\infty} k^{-n} x_n$ *es* $\mathcal{T}$*-convergente en* A , $x_n \in A$ , $n = 1, 2, \ldots$

*Entonces* $(F,\mathcal{T})$ *tiene una red estrictamente cerrada.*

Demostración.

Consecuencia de la Proposición 8.2. y la Proposición 8.9.

*8.10. Corolario.*

*Sea* $(F,\mathcal{T})$ *un espacio localmente convexo con una red* $\mathcal{W}$ $(\mathcal{R})$ *de tipo (c), y supongamos* $(F,\mathcal{T})$ *espacio sucesionalmente completo (localmente completo).*

*Entonces* $(F,\mathcal{T})$ *es un espacio Casi LF.*

Demostración.

Consecuencia inmediata de la Proposición 8.8., tomando k = 2.

M. Valdivia (38) demuestra que dado un espacio localmente - convexo con una red de tipo $\mathcal{C}$ y sucesionalmente completo, tiene una red estricta. Hemos obtenido aquí, un resultado análogo, en el ámbito de - los espacios vectoriales topológicos usando las redes definidas por W. Robertson.

*8.11. Corolario.*

*Sea* $(F,\mathcal{T})$ *un espacio localmente convexo,* $(F,\mathcal{T})$ *sucesionalmente completo (localmente completo).*

*Entonces,* $(F,\mathcal{T})$ *es un espacio Casi LF si y sólo si* $(F,\mathcal{T})$ *tiene una red estricta (D.W.).*

Demostración.

Si suponemos $(F,\mathcal{T})$ un espacio Casi LF, se obtiene directamente, aplicando la Proposición 8.2. y el Teorema 23 de (26) que $(F,\mathcal{T})$ tiene una red estricta (D.W.), ya que la red $\mathcal{W}$ definida en la Proposición 8.2. es una red estrictamente cerrada formada por conjuntos absolutamente convexos.

La implicación recíproca es consecuencia del Corolario 8.11.

Veremos para finalizar este apartado que se pueden obtener estructuras de espacios Quasi-Suslin y K-Suslin a partir de espacios Casi LF, por medio de las redes obtenidas en estos espacios.

*8.12. Definición.* ( 3 )

Sea $(E,\mathcal{T})$ un espacio vectorial topológico y $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$ una sucesión decreciente de subconjuntos de E. Diremos que la sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es "Acotada", si para cada U $\mathcal{T}$-entorno de 0 existe un $n_o \in \mathbb{N}$ y $\rho_U > 0$ tal que $A_{n_o} \subseteq \rho_U U$

Diremos que una red $\mathcal{W} = \{ C_{n_1 n_2 \ldots n_k} : k, n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$ en un espacio vectorial topológico $(E,\mathcal{T})$ es "Acotada", si para cada sucesión de enteros positivos $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, la sucesión $C_{n_1} \supseteq C_{n_1 n_2} \supseteq \ldots \supseteq C_{n_1 n_2 \ldots n_k} \supseteq \ldots$ es una sucesión acotada en $(E,\mathcal{T})$.

B. Cascales ( 3 ) obtiene los siguientes resultados:

*(A) Sea* E *un espacio vectorial, y sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{R}$ dos topologías vectoriales tales que $\mathcal{R} < \mathcal{T}$ y de forma que $\mathcal{T}$ tiene una base de entornos de 0 formada por conjuntos $\mathcal{R}$-cerrados.*

*Entonces, si $(E,\mathcal{T})$ tiene una red acotada y los conjuntos $\mathcal{T}$-acotados de* E *son $\mathcal{R}$-relativamente compactos, $(E,\mathcal{R})$ es un espacio K-Suslin.*

*(B) Con las mismas hipótesis del apartado (A), si $(E,\mathcal{T})$ tiene una red acotada, y los conjuntos $\mathcal{T}$-acotados son $\mathcal{R}$-relativamente numerablemente compactos, entonces $(E,\mathcal{R})$ es un espacio Quasi-Suslin.*

Sea $(E,\mathcal{T})$ un espacio Casi LF con $\mathcal{F} = \{ (F_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \}$ una representación de F, y sea $\mathcal{U}_\alpha = (U^n_\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena asociada a $F_\alpha$, $\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

Si consideramos la familia $\mathcal{W} = \{ C_{r_1 r_2 \ldots r_n} : n, r_1, r_2, \ldots r_n \in \mathbb{N} \}$

donde $C_{r_1 r_2 \ldots r_h} = \bigcup \{ U^h_\beta : \beta = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ con } b_n = r_n,\ n = 1, 2, \ldots h \}$

se ha demostrado en el Lema 5.2. que $\mathcal{W}$ es una red (R) ordenada.

*8.13. Lema.*

*$\mathcal{W}$ es una red acotada.*

Demostración.

Supongamos que existe una sucesión de enteros positivos $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $C_{n_1} \supseteq C_{n_1 n_2} \supseteq \dots \supseteq C_{n_1 n_2 \dots n_k} \supseteq \dots$ es no acotada. Entonces, existirá un $\mathcal{T}$-entorno de 0 , U, tal que $C_{n_1 n_2 \dots n_k} \not\subseteq kU$, $k = 1, 2, \dots$, luego para cada $k \in N$ existe $\alpha_k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ : $U_{\alpha_k}^k \not\subseteq kU$, siendo $\alpha_k = (a_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ : $a_{j,k} = n_j$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Sea $\alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = \max_{k\in\mathbb{N}} (a_{n,k})$ . Se verifica entonces que $U_\alpha^k \not\subseteq kU$, $k = 1, 2, \dots$ y esto contradice el hecho de que la inyección $I_\alpha$: $(F_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) \longrightarrow (E, \mathcal{T})$ es continua, por definición de espacio - Casi LF.

Si consideramos ahora la red (D.W.) $\mathcal{R} = \{A_{n_1 n_2 \dots n_k} : k, n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$ obtenida a partir de la red $\mathcal{W}$ , (como en el Lema 8.6.), se verifica que

*8.14. Lema.*

*$\mathcal{R}$ es una red (D.W.) acotada.*

Demostración.

En el Lema 8.6. se construye la red $\mathcal{R}$ de forma que $A_{n_1} = m_1 C_{r_1}$ , con $n_1 = (m_1, r_1)$ y por recurrencia

$$A_{n_1 n_2 \dots n_k} = A_{n_1 n_2 \dots n_{k-1}} \cap m_k C_{r_1 r_2 \dots r_k} \quad \text{con } n_k = (m_k, r_k)$$

Entonces, dado $\alpha = (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y dado U $\mathcal{T}$-entorno de 0 en E sea $n_k = (m_k, r_k)$, $k = 1, 2, \dots$, con $m_k, r_k \in \mathbb{N}$.

Si consideramos la sucesión $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$, por ser $\mathcal{W}$ acotada $\exists k_o\in\mathbb{N}, \exists\rho>0$: $C_{r_1r_2\ldots r_{k_o}}\subseteq\rho U$. Ahora bien,

$A_{n_1n_2\ldots n_{k_o}} = A_{n_1n_2\ldots n_{k_o-1}} \cap m_{k_o}.C_{r_1r_2\ldots r_{k_o}} \subseteq m_{k_o}\rho U$, entonces $\mathcal{R}$ es $\mathcal{T}$-acotada.

Entonces, como consecuencia inmediata de los resultados (A) y (B) de B. Cascales y los dos lemas anteriores, tenemos:

*8.15. Teorema.*

*(A') Sea (E,$\mathcal{T}$) un espacio Casi LF y sea S una topologia vectorial menos fina que $\mathcal{T}$ de forma que $\mathcal{T}$ tiene una base de entornos de 0 formada por conjuntos S-cerrados.*

*Entonces, si los conjuntos $\mathcal{T}$-acotados de E son S-relativamente compactos, (E,S) es un espacio K-Suslin.*

*(B') En las mismas hipótesis anteriores, si los conjuntos $\mathcal{T}$-acotados son S-relativamente numerablemente compactos, entonces (E,S) es un espacio Quasi-Suslin.*

## *9. ESPACIOS DE APLICACIONES LINEALES.*

Seguiremos en este apartado la notación usada en ( 1 ). Sean (E,$\mathcal{T}$) y (F,$\mathcal{R}$) dos espacios vectoriales topológicos. Denotaremos por $\mathcal{L}$(E,F) el espacio vectorial de las aplicaciones lineales continuas de (E,$\mathcal{T}$) en (F,$\mathcal{R}$) que consideraremos como subespacio vectorial del espacio vectorial L(E,F) de todas las aplicaciones lineales de E en F.

Si B, respectivamente V, es un subconjunto de E, respectivamente de F, denotaremos por

$$[B,V] = \{T\in L(E,F):\ T(B)\subseteq V\},$$

y si M es un subconjunto de L(E,F), $[B,V]_M = [B,V]\cap M$.

Sea $\sigma$ un sistema de subconjuntos acotados en $(E,\mathcal{T})$ tal que

a) Si $B_1, B_2 \in \sigma$, entonces existe $B_3 \in \sigma$ : $B_1 \cup B_2 \subseteq B_3$.

b) Si $B \in \sigma$, $\lambda B \in \sigma$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$. (9.0.1.)

c) $\bigcup_{B\in\sigma} B = E$.

Si denotamos por $L_\sigma(E,F) = L_\sigma$ el subespacio de $L(E,F)$ formado por todas las aplicaciones lineales de E en F, acotadas sobre cada $B \in \sigma$, los conjuntos $[B,V]_{L_\sigma}$, donde $B \in \sigma$, $V \in \mathcal{V}$ (base de entornos de 0 en $(F,\mathcal{R})$), generan una topologia lineal separada, $\mathcal{T}_\sigma$, sobre $L_\sigma(E,F)$. ( ).

*9.1. Definición.* ( 1 )

Diremos que una aplicación lineal de $(E,\mathcal{T})$ en $(F,\mathcal{R})$ es "Acotada", si aplica los conjuntos acotados de $(E,\mathcal{T})$ en conjuntos acotados de $(F,\mathcal{R})$.

Un espacio vectorial topológico $(E,\mathcal{T})$ se dice que es "Bornológico", si toda aplicación lineal acotada, definida en $(E,\mathcal{T})$ es continua.

En particular, los espacios metrizables son espacios bornológicos y por tanto, si denotamos por $\mathcal{B} = \{B \subseteq E : B \text{ es } \mathcal{T}\text{-acotado}\}$, $\mathcal{B}$ verifica (9.0.1.), y se verifica que $L_\mathcal{B}(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$. En estas condiciones se verifica:

*9.2. Proposición.*

*Sea $(E,\mathcal{T})$ un espacio vectorial topológico metrizable que verifica la propiedad $(\mathcal{B})$, y supongamos existe una "sucesión fundamental" de conjuntos acotados en $(E,\mathcal{T})$, que denotaremos por $\mathfrak{T} = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, es decir, una sucesión creciente de subconjuntos acotados en $(E,\mathcal{T})$ que verifican i) $B_n + B_n \subseteq B_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$*

*ii) Dado cualquier conjunto acotado B en $(E,\mathcal{T})$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ : $B \subseteq B_n$.*

*Entonces, si $(F,\mathcal{R})$ es un espacio Casi LF, $L(E,F)$ dotado con la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ es un espacio Casi LF.*

Demostración.

Dada la topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, si consideramos un elemento de la base de entornos de 0, $[B,V]_{L}$, $B\in\mathcal{B}$, $V\in\mathcal{V}$, por ser $\mathcal{C}$ una sucesión fundamental de conjuntos acotados, existe $n\in\mathbb{N}$, tal que $B\subseteq B_n$, luego se verifica que $[B_n,V]\subseteq[B,V]$. Así pues, la familia $\{[B_n,V]_{L(E,F)}: n\in\mathbb{N}, V\in\mathcal{V}\}$ es una base de entornos de 0 en $L(E,F)$. (9.2.1.)

Sea $\mathcal{F} = \{(E_\alpha,\mathcal{R}_\alpha): \alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ una representación de F, sea $\mathcal{U}_\alpha = (U_\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena asociada a E, $\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, y denotemos por $\mathcal{F}' = \{(F_\alpha,\mathcal{T}_\alpha): \alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ una representación fundamental de F, asociada a $\mathcal{F}$, con $\mathcal{W}_\alpha = (W_\alpha^h\cap F)_{h\in\mathbb{N}}$ una cadena asociada a F, $\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (Proposición 6.1.)

Dada $T\in L(E,F)$, la familia

$$\left\{U_{m_1\dots m_h} = T^{-1}\left(\cup\left\{U_\beta^h : \beta=(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ con } b_n = m_n,\ n=1,2,\dots,h\right\}\right),\ h, m_1, \dots, m_h\in\mathbb{N}\right\}$$

es una red ordenada en $(E,\mathcal{T})$ y por verificarse la propiedad $(\mathcal{B})$, existe una sucesión $\gamma = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\overline{U}^{\mathcal{T}}_{r_1\dots r_n}$ es $\mathcal{T}$-entorno de 0 en E, n = 1, 2, ... Además, aplicando la Proposición 3.3. $U_{r_1 r_2\dots r_k}$ es $\mathcal{T}$-entorno de 0, k = 1, 2,...

Si fijamos $B\in\mathcal{B}$, un conjunto $\mathcal{T}$-acotado en E, para cada $n\in\mathbb{N}$ existe $\lambda_n > 0$ tal que $B\subseteq\lambda_n U_{r_1r_2\dots r_n}$, y entonces $T(B)\subseteq\lambda_n W_\gamma^n\subseteq F_{r_1\dots r_n}$, (según la notación del Capítulo 6). Como esto podemos hacerlo para cada $n\in\mathbb{N}$, obtenemos que $T(B)\subseteq\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_{r_1r_2\dots r_n} = F_\gamma$.

Además, por ser $(W_\gamma^n\cap F_\gamma)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de $\mathcal{T}_\gamma$-entornos de 0 en $F_\gamma$, T(B) es $\mathcal{T}_\gamma$-acotado en $(F_\gamma,\mathcal{T}_\gamma)$. Y esto podemos hacerlo para cada $B\in\mathcal{B}$. (9.2.2.)

Entonces, se verifica:

i) $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \mathcal{L}(E,F_\alpha) = \mathcal{L}(E,F)$:

Por (9.2.2.), dada $T \in \mathcal{L}(E,F)$, T es una aplicación acotada de $(E,\mathcal{T})$ en $(F_\gamma,\mathcal{T}_\gamma)$, y por ser $(E,\mathcal{T})$ bornológico, se cumple que T es una aplicación continua de $(E,\mathcal{T})$ en $(F_\gamma,\mathcal{T}_\gamma)$, luego existe un $\gamma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ $\gamma = (r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $T \in \mathcal{L}(E,F_\gamma)$.

La inclusión reciproca es evidente.

Obtenemos así, una familia de subespacios de $\mathcal{L}(E,F)$ que lo recubren. Veamos que $\mathcal{F}^* = \{\mathcal{L}(E,F_\alpha) : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ es una representación de $(\mathcal{L}(E,F),\mathcal{T}_\beta)$, donde consideramos cada espacio $\mathcal{L}(E,F_\alpha)$ dotado de la topologia $\mathcal{T}_\beta^\alpha$ correspondiente.

Por un razonamiento análogo al llevado a cabo en (9.2.1.), obtenemos que la familia $\{[B_n, W_\alpha^h \cap F_\alpha] : h, n \in \mathbb{N}\}$ es una base de $\mathcal{T}_\beta^\alpha$-entornos de 0 en $\mathcal{L}(E,F_\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Ahora bien, podemos considerar como base de $\mathcal{T}_\beta^\alpha$-entornos de 0 la familia $\mathcal{V}_\alpha = \{[B_n, W_\alpha^n \cap F_\alpha] : n \in \mathbb{N}\}$ ya que dado $[B_n, W_\alpha^h \cap F_\alpha]$, n, $h \in \mathbb{N}$

a. Si $n \geq h$, $W_\alpha^n \cap F_\alpha \subseteq W_\alpha^h \cap F_\alpha$, y entonces $[B_n, W_\alpha^n \cap F_\alpha] \subseteq [B_n, W_\alpha^h \cap F_\alpha]$

b. Si $n < h$, $B_n \subseteq B_h$ y entonces $[B_h, W_\alpha^h \cap F_\alpha] \subseteq [B_n, W_\alpha^h \cap F_\alpha]$,

luego, en cualquier caso $\exists$ $m \in \mathbb{N}$: $[B_m, W_\alpha^m \cap F_\alpha] \subseteq [B_n, W_\alpha^h \cap F_\alpha]$.

$\mathcal{V}_\alpha$ es una cadena en $\mathcal{L}(E,F_\alpha)$ que define la topologia $\mathcal{T}_\beta^\alpha$:

i) $[B_n, W_\alpha^n \cap F_\alpha]$ es absorbente y equilibrado en $\mathcal{L}(E,F_\alpha)$, por ser $\mathcal{T}_\beta^\alpha$-entorno de 0 en $\mathcal{L}(E,F_\alpha)$.

$\mathcal{V}_\alpha$ verifica la propiedad sumativa: Si $T,T' \in [B_{n+1}, W_\alpha^{n+1} \cap F_\alpha]$,

$(T + T')(B_n) \subseteq T(B_n) + T'(B_n) \subseteq W_\alpha^{n+1} \cap F_\alpha + W_\alpha^{n+1} \cap F_\alpha \subseteq W_\alpha^n \cap F_\alpha$ entonces

$(T + T') \in [B_n, W_\alpha^n \cap F_\alpha]$.

Entonces $\mathcal{T}_\beta^\alpha$ es una topologia con la que $\mathcal{L}(E,F_\alpha)$ es un espacio metrizable, y por ser $F_\alpha$ completo, entonces $(\mathcal{L}(E,F_\alpha), \mathcal{T}_\beta^\alpha)$ es metrizable completo. ((1 ), § 12.4.)

ii) Veamos que $I_\alpha : (\mathcal{L}(E,F_\alpha), \mathcal{T}_\beta^\alpha) \longrightarrow (\mathcal{L}(E,F), \mathcal{T}_\beta)$ es continua, $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Dado $[B_n, V]$ $\mathcal{T}_\beta$-entorno de 0 en $\mathcal{L}(E,F)$, con V $\mathcal{R}$-entorno de 0 en F, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $W_\alpha^m \cap F_\alpha \subseteq V$ (por ser F un espacio Casi LF) luego $[B_n, W_\alpha^m \cap F_\alpha]_{\mathcal{L}(E,F_\alpha)} \subseteq [B_n, V]_{\mathcal{L}(E,F)}$.

iii) Por último, se verifica la relación de orden, por verificarse para los $F_\alpha$:

Si $\alpha \leq \beta$ entonces $W_\alpha^n \cap F_\alpha \subseteq W_\beta^n \cap F_\beta$, n = 1, 2, ..., luego $[B_n, W_\alpha^n \cap F_\alpha]_{\mathcal{L}(E,F_\alpha)} \subseteq [B_n, W_\beta^n \cap F_\beta]_{\mathcal{L}(E,F_\beta)}$.

Obtenemos pues que $(\mathcal{L}(E,F), \mathcal{T}_\beta)$ es un espacio Casi LF.

## CAPITULO 2: LIMITES INDUCTIVOS GENERALIZADOS.

### 0. INTRODUCCION.

En 1976, Turpin (35) dió la siguiente definición:

Un espacio vectorial topológico $(E,\mathcal{T})$ se dice que es un "Límite inductivo vectorial topológico de espacios topológicos equilibrados $E_n$, $n \geq 0$, $n \in N$", cuando se verifican las tres condiciones siguientes:

(i) $E = \bigcup_{n \geq 0} E_n$, donde los $E_n$ son subconjuntos equilibrados de E, dotados cada uno de una topologia $\mathcal{T}_n$, y E dotado de la topologia vectorial $\mathcal{T}$ más fina que induce sobre los $E_n$ una topologia menos fina que $\mathcal{T}_n$.

(ii) $E_n + E_n \subseteq E_{n+1}$ y la aplicación de $E_n \times E_n$ en $E_{n+1}$ que aplica el par $(x,y)$ en $x+y$, es continua, para cada $n \geq 0$.

(iii) La aplicación de $D \times E_n$ en $E_n$ que aplica el par $(s,x)$ en $s.x$, es continua, donde D es el disco unidad del cuerpo de los escalares.

En estos espacios se constata que las propiedades usuales de límites inductivos numerables permanecen ciertas (condición para que $\mathcal{T}$ induzca $\mathcal{T}_n$, para que $(E,\mathcal{T})$ sea separado, localización de acotados, etc.), a la vez que extienden a este contexto más general los conceptos dados por D.J. Garling (8 ), de límite inductivo generalizado en localmente convexos, D.A. Raikov (27), A. Persson (23), que suponen los $E_n$ convexos y las topologias $T_n$ inducidas por una misma topologia localmente convexa, L. Waelbroeck (41) que considera los $E_n$ compactos, S.O. Iyahen (11) y (14), J. Köhn (16) y J.P. Ligaud (21) que consideran los $E_n$ espacios vectoriales topológicos, entre otros.

En este capítulo, nosotros pretendemos estudiar un caso particular de los espacios definidos por Turpin, en el que cada $E_n$ es absorbente en su envoltura lineal, donde tenemos definida una topologia vectorial $T_n$; y dar condiciones que nos permitan obtener espacios Casi LF. Estudiaremos también algunas propiedades de retractividad.

## 1. *LIMITES INDUCTIVOS GENERALIZADOS.*

### 1.1. *Definición.*

*Sea* $\sigma = (B_n)_{n\geq 0}$ *una sucesión de conjuntos equilibrados en un espacio vectorial* E: $B_n + B_n \subseteq B_{n+1}$, $n\geq 0$. *Diremos que* $\sigma$ *es ABSORBENTE si* $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n = E$.

*Sea* $\sigma = (B_n)_{n\geq 0}$ *una sucesión de conjuntos absorbente en* E *tal que cada* $B_n$ *es absorbente en su envoltura lineal. Sea* $T_n$ *una topologia lineal en* $LIN(B_n)$, $n\geq 0$, *y supongamos que la aplicación de* $B_n \times B_n$ *en* $B_{n+1}$ *tal que al par* $(x,y)$ *le aplica* $x+y$ *es continua, cuando consideramos en cada* $B_n$ *la topologia inducida por* $T_n$.

*Llamaremos TOPOLOGIA LIMITE INDUCTIVO VECTORIAL TOPOLOGICO de los espacios topológicos equilibrados* $B_n$, *y la denotaremos por* $T$, *a la topologia lineal más fina sobre* E *que induce sobre cada* $B_n$ *una topologia menos fina que la inducida por* $T_n$. *En este caso, escribiremos* $(E,T) = \lim_{n\to\infty} ((LIN(B_n),T_n), B_n)$, *y diremos que* $(E,T)$ *es el límite inductivo generalizado de la sucesión* $(B_n,T_n)$.

Esta definición es un caso particular de la dada por Turpin y aplicando (35).1.1.6. obtenemos que:

*1.2. Proposición.*

*Si* $(E,\mathcal{T}) = \lim_{n\to\infty}((LIN(B_n),\mathcal{T}_n),B_n)$, *$\mathcal{T}$ admite un sistema fundamental de entornos de 0 que viene dado por la familia*

$$\mathcal{U} = \left\{\Sigma' V_n \cap B_n = \bigcup_{N\geq 0} \sum_{n=0}^{N} V_n \cap B_n \ :\ V_n \text{ es } \mathcal{T}_n\text{-entorno de 0 en } LIN(B_n)\right\}.$$

Demostración.

Dado $U = \Sigma' V_n \cap B_n \in \mathcal{U}$, U es absorbente:

Si $x \in E$, entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_n \subseteq LIN(B_n)$, luego existe $\rho > 1$ tal que $x \in \rho V_n$, ya que $V_n$ es $\mathcal{T}_n$-entorno de 0 en $LIN(B_n)$. Tenemos entonces que $x \in B_n \cap \rho V_n \subseteq \rho(B_n \cap V_n) \subseteq \rho \Sigma' V_n \cap B_n$.

Cada $U \in \mathcal{U}$ es equilibrado por serlo los $V_n$ y los $B_n$, $n \geq 0$.

Veamos que $\mathcal{U}$ es una base de filtros:

Cada $U \in \mathcal{U}$ es no vacio, ya que $0 \in U$,

Dados $U, V \in \mathcal{U}$, $U = \bigcup_{N\geq 0} \sum_{n=0}^{N} U_n \cap B_n$, $V = \bigcup_{N\geq 0} \sum_{n=0}^{N}{}' V_n \cap B_n$

con $U_n$, $V_n$ $\mathcal{T}_n$-entornos de 0 en $LIN(B_n)$, $n \geq 0$, si consideramos

$W = \bigcup_{N\geq 0} \sum_{n=0}^{N} (U_n \cap V_n) \cap B_n$, entonces $W \subseteq U \cap V$, luego $\mathcal{U}$ es base de filtros.

Además, si consideramos $U \in \mathcal{U}$, existe un $V \in \mathcal{U}$ tal que $V + V \subseteq U$:

Si $U = \bigcup_{N\geq 0} \sum_{n=0}^{N} U_n \cap B_n$, con $U_n$ $\mathcal{T}_n$-entorno de 0 en $LIN(B_n)$, por ser la aplicación $B_n \times B_n \longrightarrow B_{n+1}$ continua, dado $U_{n+1}$ $\mathcal{T}_{n+1}$-entorno de 0 en $LIN(B_{n+1})$, existen $V_n$, $W_n$ $\mathcal{T}_n$-entornos de 0 en $LIN(B_n)$ tal que $V_n \cap B_n + W_n \cap B_n \subseteq U_{n+1} \cap B_{n+1}$, luego, si consideramos $S_n = V_n \cap W_n$ tenemos que $S_n \cap B_n + S_n \cap B_n \subseteq U_{n+1} \cap B_{n+1}$, siendo $S_n$ un $\mathcal{T}_n$-entorno de 0 en $LIN(B_n)$, y esto podemos hacerlo para cada $n \geq 0$. Entonces, si consideramos $V = \bigcup_{N\geq 0} \sum_{n=0}^{N} S_n \cap B_n$, $V + V \subseteq U$.

Tenemos así que $\mathcal{U}$ es base de entornos de 0 para una topología que denotaremos por $\mathcal{R}$ y que en principio no tiene porqué ser Hausdorff. Veamos que se verifica $\mathcal{T} = \mathcal{R}$.

Evidentemente $\mathcal{R}_{|B_n} \leq \mathcal{T}_{|B_n}$, ya que dado $U \in \mathcal{U}$, $U = \sum' V_n \cap B_n$, con $V_n$ $\mathcal{T}_n$-entorno de 0 en $LIN(B_n)$, $V_n \cap B_n \subseteq U \cap B_n$, $n \in \mathbb{N}$, y entonces, por definición de $\mathcal{T}$, $\mathcal{R} \prec \mathcal{T}$.

Recíprocamente, para ver que $\mathcal{T} \prec \mathcal{R}$ es suficiente con demostrar que cualquier topologia $\mathcal{T}'$ sobre E que induce sobre cada $B_n$ una topologia menos fina que $\mathcal{T}_{n|B_n}$ verifica que $\mathcal{T}' \prec \mathcal{R}$:

Sea U un $\mathcal{T}'$-entorno de 0 en E, podemos encontrar una sucesión $(W_n)_{n \geq 0}$ de $\mathcal{T}'$-entornos de 0 en E, tal que $W_o + W_o \subseteq U$, $W_{n+1} + W_{n+1} \subseteq W_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Por ser $\mathcal{T}'$ : $\mathcal{T}'_{|B_n} \prec \mathcal{T}_{n|B_n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $V_n$ $\mathcal{T}_n$-entorno de 0 en $LIN(B_n)$ tal que $V_n \cap B_n \subseteq W_n \cap B_n$, $n \in \mathbb{N}$. Así pues, $\sum' V_n \cap B_n \subseteq \sum' W_n \cap B_n \subseteq \sum' W_n \subseteq U$, luego U es un $\mathcal{R}$-entorno de 0 en E, y obtenemos que $\mathcal{T} = \mathcal{R}$.

Nos proponemos estudiar a continuación, si en algún caso (como ocurre en localmente convexos (38), y en localmente p-convexos ( 3)) los límites arriba definidos coinciden con el límite inductivo de espacios vectoriales topológicos (según la definición 2.4. ( 1 )).

Supongamos para las dos proposiciones siguientes, en las condiciones de la definición 1.1., que se verifica:

Para cada $n \geq 0$, existe en $LIN(B_n)$ una sucesión de conjuntos equilibrados $\sigma_n = (A_m^n)_{m=0}^{n+\infty}$ tal que $A_m^n + A_m^n \subseteq A_m^{n+1}$, $n \geq 0$, $\sigma_n$ absorbente en $LIN(B_n)$, $A_o^n = B_n$, y tal que dados m, $n \geq 0$, se verifica $A_m^n \subseteq A_m^{n+1}$ conti nuamente, es decir, la inyección $I_{m,n}: (A^n_m, \mathcal{T}_{n|A^n_m}) \longrightarrow (A^{n+1}_m, \mathcal{T}_{n+1|A^n_m})$ es continua.

Consideremos, para cada $n \geq 0$, la topologia lineal más fina sobre $LIN(B_n)$ que hace continuas en 0 las inyecciones $I^n_m : (A^n_m, \mathcal{T}_{n|A^n_m}) \longrightarrow LIN(B_n)$, $\forall\, m \geq 0$. Dicha topologia la denotaremos por $\mathcal{T}_{\sigma_n}$.

Observación.- $\mathcal{T}_{\sigma_n}$ verifica que $\mathcal{T}_n \leq \mathcal{T}_{\sigma_n}$ y es la topologia lineal más fina sobre $LIN(B_n)$ que sobre cada $A^n_m$ induce los mismos entornos de 0 que $\mathcal{T}_n$. (1) § 16.

En estas condiciones:

*1.3. Proposición.*

*Si $\mathcal{T}_{|A^n_m} \leq \mathcal{T}_{n|A^n_m}$ $\forall\, m, n \geq 0$, entonces $(E, \mathcal{T}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (LIN(B_n), \mathcal{T}_{\sigma_n})$*

Demostración.

Si denotamos por $(E, \mathcal{T}^*) = \sum_{n=0}^{+\infty} (LIN(B_n), \mathcal{T}_{\sigma_n})$, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(LIN(B_n), \mathcal{T}_{\sigma_n}) \arrow[r] & (E, \mathcal{T}^*) \\
(A^n_m, \mathcal{T}_{n|A^n_m}) \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

En particular, para $m = 0$, sabemos que $A^n_0 = B_n$, luego tendremos que la aplicación $(B_n, \mathcal{T}_{n|B_n}) \longrightarrow (E, \mathcal{T}^*)$ es continua.

Como esto se verifica para cada $n \geq 0$, obtenemos que $\mathcal{T}^*_{|B_n} \leq \mathcal{T}_{n|B_n}$ $\forall\, n \geq 0$, luego, por definición de $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}^* \leq \mathcal{T}$.

Por otra parte, para demostrar que $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}^*$, tendremos que demostrar que $\mathcal{T}_{|LIN(B_n)} \leq \mathcal{T}_{\sigma_n}$, $\forall\, n \geq 0$ (definición de límite inductivo)

Ahora bien, por definición de $\mathcal{T}_{\sigma_n}$, $\mathcal{T}_{|LIN(B_n)} \leq \mathcal{T}_{\sigma_n}$ se verifica si y sólo si la aplicación $(A^n_m, \mathcal{T}_{n|A^n_m}) \longrightarrow (LIN(B_n), \mathcal{T}_{|LIN(B_n)})$ es continua, y esto forma parte de las hipótesis, luego $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}^*$ y tenemos que $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$.

*1.4. Proposición*

$$\mathcal{T}_{\sigma_{n+1}|LIN(B_n)} \leq \mathcal{T}_{\sigma_n}.$$

Demostración.

Veamos que $\mathcal{T}_{\sigma_{n+1}}$ induce sobre cada $A^n_m$, $m \geq 0$, una topologia menos fina que $\mathcal{T}_{n|A^n_m}$.

Ahora bien, $\mathcal{T}_{\sigma_{n+1}}$ es la topologia más fina que sobre $A^{n+1}_m$ induce una topologia menos fina que $\mathcal{T}_{n+1|A^{n+1}_m}$ y como por hipótesis $A^n_m \subseteq A^{n+1}_m$ continuamente, obtenemos que $\mathcal{T}_{\sigma_{n+1}|A^n_m} \leq \mathcal{T}_{n+1|A^n_m}$ y $\mathcal{T}_{n+1|A^n_m} \leq \mathcal{T}_{n|A^n_m}$ luego $\mathcal{T}_{\sigma_{n+1}|A^n_m} \leq \mathcal{T}_{n|A^n_m}$, $\forall m \geq 0$ y así obtenemos que

$\mathcal{T}_{\sigma_{n+1}} \leq \mathcal{T}_{\sigma_n}$ sobre $LIN(B_n)$, $n \geq 0$.

*1.5. Proposición.*

*Sea $(E,\mathcal{T})$ un espacio vectorial topológico. Sea $\sigma = (A_n)_{n=1}^{+\infty}$ una sucesión absorbente de conjuntos equilibrados en $E$ tal que $A_n + A_n \subseteq A_{n+1}$, $n \geq 1$ y de forma que se verifica:*

*a. $A_n$ $l_n$-convexo, $l_n > 1$, $n \geq 1$.*

*b. $A_n$ metrizable y completo, dotado con la topologia inducida por $\mathcal{T}$, de tal manera que existe una sucesión $(V^m_n)_{m=1}^{+\infty}$ decreciente de entornos de 0 en $(E,\mathcal{T})$, $\mathcal{T}$-cerrados, $k_n$-convexos y tal que si $n > p$ entonces* *máx $(k_n, l_n) \leq$ max $(k_p, l_p)$, verificando que $\left\{A_n \cap V_n^m\right\}_{m=1}^{+\infty}$ es base de entornos de 0 en $(A_n, \mathcal{T}_{|A_n})$ y tal que si $n_1 < n_2$, entonces $A_{n_1} \cap V_{n_1}^m \subseteq A_{n_2} \cap V_{n_2}^m$, y esto para todo $m \in \mathbb{N}$.*

*Entonces, si denotamos por $(E,\mathcal{S})$ el límite inductivo generalizado $(E,\mathcal{S}) = \lim_{n\to\infty} ((LIN(A_n), \mathcal{T}_{|LIN(A_n)}), A_n)$, entonces $(E,\mathcal{S})$ es un Casi LF.*

Demostración.

Sea $\alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de enteros positivos. Definimos $B_\alpha = \bigcap_{n=1}^{+\infty} a_n(V_{a_1}^n \cap A_{a_1})$ que sabemos es equilibrado y t-convexo para algún $t > 1$:

Si $x,y \in B_\alpha$, entonces $x, y \in a_n(V_{a_1}^n \cap A_{a_1})$ $\forall n \in \mathbb{N}$, luego

$x + y \in a_n(V_{a_1}^n \cap A_{a_1}) + a_n(V_{a_1}^n \cap A_{a_1}) \subseteq a_n(k_{a_1} V_{a_1}^n \cap 1_{a_1} A_{a_1}) \subseteq$

$a_n.\text{máx}(k_{a_1}, 1_{a_1})(V_{a_1}^n \cap A_{a_1})$, y esto para cada $n \in \mathbb{N}$, luego

$x + y \in \text{máx}(k_{a_1}, 1_{a_1})(\bigcap_{n=1}^{+\infty} a_n(V_{a_1}^n \cap A_{a_1}) = p_{a_1} B_\alpha$, siendo $p_{a_1} = \text{máx}(k_{a_1}, 1_{a_1})$

(se verifica entonces que $p_{a_1} > 1$).

Entonces, $E_\alpha = LIN(B_\alpha) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} nB$ es un espacio vectorial y si consideramos $\mathcal{B}_\alpha = \left\{(1/p_{a_1}^n).B_\alpha\right\}_{n=1}^{+\infty}$, $\mathcal{B}_\alpha$ es una cadena en $E_\alpha$ tal que $\mathcal{N}(\mathcal{B}_\alpha) = \{0\}$, por ser $B_\alpha$ $\mathcal{S}$-acotado:

Dado U $\mathcal{S}$-entorno de 0, sabemos que $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ inducen sobre $A_{a_1}$ los mismos entornos de 0 (Observación hecha en la pag. 67), y por tanto existe un $n_0 \in N$ tal que $V_{a_1}^{n_0} \cap A_{a_1} \subseteq U \cap A_{a_1}$, luego $B_\alpha = \bigcap_{n=1}^{+\infty} a_n(V_{a_1}^n \cap A_{a_1}) \subseteq$

$\subseteq a_{n_0}(V_{a_1}^{n_0} \cap A_{a_1}) \subseteq a_{n_0}(U \cap A_{a_1}) \subseteq a_{n_0}.U.$

Si $B_\alpha$ es $\mathcal{S}$-acotado, y suponemos existe un $x \neq 0$, $x \in \mathcal{N}(\mathcal{B}_\alpha)$

$x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty}(1/p_{a_1}^n . B_\alpha)$, luego $p_{a_1}^n x \in B_\alpha$ $\forall n \in N$. Ahora bien, por ser $p_{a_1} > 1$ $p_{a_1}^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ y entonces, la sucesión $\left\{(1/p_{a_1}^n).(p_{a_1}^n)x\right\}_{n=1}^{+\infty}$ tiende a 0, cuando n tiende a $+\infty$, pero esto es un absurdo ya que ésta es una sucesión constante $\left\{x\right\}_{n=1}^{+\infty}$ con $x \neq 0$.

Así pues, $\mathcal{B}_\alpha$ define una topologia metrizable $\mathcal{T}_\alpha$ sobre $E_\alpha$ y por ser tanto los $V_n$ como los $A_n$ $\mathcal{T}$-cerrados, $\mathcal{B}_\alpha$ es $\mathcal{T}$-cerrada y $\mathcal{S}$-cerrada. $I_\alpha : (E_\alpha,\mathcal{T}_\alpha) \longrightarrow (E,\mathcal{S})$ es continua, por ser $B_\alpha$ $\mathcal{S}$-acotado, y la aplicación $I_\alpha:(E_\alpha,\mathcal{T}_\alpha) \longrightarrow (E,\mathcal{T})$ es continua por ser $\mathcal{T} \prec \mathcal{S}$.

Además, como $B_\alpha \subseteq a_n A_{a_1}$, para cada $n \in N$, con $A_{a_1}$ $\mathcal{T}$-completo y $B_\alpha$ $\mathcal{T}$-cerrado, entonces $B_\alpha$ es $\mathcal{T}$-completo en E, y si consideramos la inyección $I_\alpha:(E_\alpha,\mathcal{T}_\alpha) \longrightarrow (E,\mathcal{T})$ que sabemos es continua, ya que $\mathcal{T}_\alpha$ tiene una base de entornos de 0 formada por conjuntos $\mathcal{T}$-cerrados, obtenemos que $B_\alpha$ es $\mathcal{T}_\alpha$-completo ((20) 18.4.(4)'.b), y esto para cada $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Si demostramos pues, que $(E_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ es un espacio casi completo, por ser metrizable, tendremos que $(E_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ es un espacio de Fréchet

Dado C $\mathcal{T}_\alpha$-cerrado y acotado en $E_\alpha$, existe un $\rho > 0$ tal que $C \subseteq \rho B_\alpha$, luego $(1/\rho).C \subseteq B_\alpha$ y por tanto tenemos $(1/\rho)C$ $\mathcal{T}_\alpha$-cerrado y acotado incluido en un $\mathcal{T}_\alpha$-completo. Así pues, C es $\mathcal{T}_\alpha$-completo y $(E_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ es un Fréchet.

Entonces, $\mathcal{F} = \left\{(E_\alpha,\mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right\}$ es una representación de $(E,\mathcal{S})$. Nos quedaría por demostrar:

a. $\bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} E_\alpha = E$ : Si $x \in E$, existe un $a_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_{a_1}$, y existe un $b_n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in b_n V_{a_1}$, $n \in \mathbb{N}$. Si consideramos el escalar $b_1$, tal que $|1/b_1| \leq 1$, entonces $(1/b_1)x \in A_{a_1}$, $(1/b_1)x \in b_n V_{a_1}^n$, $n \geq 2$, y $(1/b_1)x \in V_{a_1}^1 \subseteq a_1 V_{a_1}$. Así pues, si denotamos por $\gamma = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$c_1 = a_1$, $c_n = b_n$, para $n \geqslant 2$, tenemos que $(1/b_1)x \in c_n(V^n_{a_1} \cap A_{a_1})$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ luego $(1/b_1)x \in B_\gamma$ y entonces $x \in E_\gamma$.

b. Si $\alpha \leq \beta$ con $\alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\beta = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entonces $a_n(V^n_{a_1} \cap A_{a_1}) \subseteq b_n(V^n_{b_1} \cap A_{b_1})$, $n = 1, 2, \ldots$ luego $B_\alpha \subseteq B_\beta$, y por ser $a_1 \leq b_1$ entonces $\max(l_{a_1}, k_{a_1}) \geqslant \max(l_{b_1}, k_{b_1})$. Así pues, $(1/p^n_{a_1})B_\alpha \subseteq (1/p^n_{b_1})B_\beta$ $n = 1, 2, \ldots$, luego $\mathcal{B}_\alpha \subseteq \mathcal{B}_\beta$.

Hemos probado entonces que $(E, \mathcal{S})$ es un Espacio Casi LF, con una representación que vendrá dada por la familia $\{(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$

*1.6. Lema.*

*Sea* F *un espacio vectorial y* A *un subconjunto equilibrado y k-convexo, para algún k>0. Si dos topologías lineales sobre* F, $\mathcal{T}$ *y* $\mathcal{S}$, *coinciden sobre* A, *entonces las uniformidades inducidas por* $\mathcal{T}$ *y* $\mathcal{S}$ *sobre* A *también coinciden.*

Demostración.

Una base de la uniformidad inducida por $\mathcal{S}$ sobre A será $\{\mathcal{N}_U = \{(x,y) \in A \times A : x - y \in U\},\ U\ \mathcal{S}\text{-entorno de } 0\}$ y por $\mathcal{T}$ sobre A será $\{\mathcal{N}_W = \{(x,y) \in A \times A : x - y \in W\},\ W\ \mathcal{T}\text{-entorno de } 0\}$.

Dado U $\mathcal{S}$-entorno de 0 en F, existe W $\mathcal{T}$-entorno de 0 en F tal que $(1/k)W \cap A \subseteq (1/k)U \cap A$. Entonces, si $(x,y) \in A \times A$: $x - y \in W$ $x - y \in W \cap (A + A) \subseteq kA \cap W$ y tendremos $(1/k)(x - y) \in A \cap (1/k)W \subseteq A \cap (1/k)U \subseteq (1/k)U$, luego $x - y \in U$ y hemos probado que $\mathcal{N}_W \subseteq \mathcal{N}_U$.

Por un razonamiento análogo obtendríamos que dado W $\mathcal{T}$-entorno de 0 en F existe un U $\mathcal{S}$-entorno de 0 en F tal que $\mathcal{N}_U \subseteq \mathcal{N}_W$.

Así pues, las uniformidades coinciden, y podemos obtener el siguiente Corolario:

*1.7. Corolario.*

*Sea* $(E,\mathcal{T}) = \lim_{n\to\infty} ((LIN(B_n),\mathcal{T}_n),B_n)$, *y supongamos que para cada* $n\in\mathbb{N}$ *existe en* $LIN(B_n)$ *una sucesión absorbente* $\sigma_n = (A^n_m)^{+\infty}_{m=0}$ *de conjuntos equilibrados, tal que* $A^n_0 = B_n$, $A^n_m + A^n_m \subseteq A^n_{m+1}$, $m\geq 0$, $n\in\mathbb{N}$ *y de manera que se verifica:*

*i) Dados* $m\geq 0$ *y* $n\in\mathbb{N}$ $A^n_m \subseteq A^{n+1}_m$ *y la inyección*

$$I_{m,n}: (A^n_m, \mathcal{T}_{n|A^n_m}) \longrightarrow (A^{n+1}_m, \mathcal{T}_{n+1|A^{n+1}_m}) \text{ es continua.}$$

*ii) Para cada* $n\in\mathbb{N}$ $A^n_m$ *es* $l_{m,n}$*-convexo, para algún* $l_{m,n} > 1$,

$A^n_m$ *es* $\mathcal{T}_n$*-metrizable y completo tal que existe una sucesión* $(V^p_{m,n})^{+\infty}_{p=1}$ *decreciente de entornos de 0 en* $(LIN(B_n),\mathcal{T}_n)$, $\mathcal{T}_n$*-cerrados,* $k_{m,n}$*-convexos, y tal que* $\max(l_{m,n},k_{m,n}) \leq \max(l_{p,n},k_{p,n})$ *si* $m>p$, *de forma que la sucesión* $\left\{A^n_m \cap V^p_{m,n}\right\}^{+\infty}_{p=1}$ *es base de entornos de 0 en* $(A^n_m, \mathcal{T}_{n|A^n_m})$ *con* $A^n_{m_1} \cap V^p_{m_1,n} \subseteq A^n_{m_2} \cap V^p_{m_2,n}$ *si* $m_1 < m_2$, $p = 1, 2, \ldots$

*iii)* $\mathcal{T}_{|A^n_m} \leqslant \mathcal{T}_{n|A^n_m}$ $\forall m\geq 0$, $n\in\mathbb{N}$

*Entonces* $(E,\mathcal{T})$ *es un espacio Casi LF.*

Demostración.

Por la Proposición 1.5., cada $(LIN(B_n),\mathcal{T}_n)$ es un espacio - Casi LF, y como podemos poner $(E,\mathcal{T}) = \sum_{n=1}^{+\infty}(LIN(B_n),\mathcal{T}_n)$ ya que se verifican las hipótesis de la Proposición 1.3.,entonces $(E,\mathcal{T})$ es un Espacio Casi LF (Capítulo 1, Prop. 2.6.)

NOTA. La hipótesis de la Proposición 1.5. y del Corolario anterior, - que aparentemente resultan ser muy complicadas, no lo son tanto en - cada caso concreto. Si consideramos por ejemplo, los límites generalizados definidos por B. Cascales ( 3 ) § 3., en espacios localmente p-conve xos, y se prueba fácilmente que las hipótesis exigidas en la Proposición 1.5. y en el Corolario son una generalización de las hipótesis exigidas por Cascales. De esta forma, todo espacio que verifica las hipótesis exigidas por Cascales, verifica las hipótesis de dicha Proposición.

## 2. ESPACIOS SUCESIONALMENTE RETRACTIVOS.

### 2.0. *Introducción.*

En 1973 Floret ( 7) introdujo el concepto de límite suce-sucesionalmente retractivo:

Un Límite inductivo $(E,T) = \lim_{n\to\infty} (E_n,T_n)$ de una sucesión - creciente de subespacios localmente convexos que recubren E, se dice que es Sucesionalmente Retractivo cuando las sucesiones convergentes - en E están localizadas en algún escalón $(E_n,T_n)$, y son convergentes en este espacio.

En 1985, Cascales ( 3) extiende estos conceptos al caso de límites inductivos de espacios localmente p-convexos, y al caso de límites generalizados de dichos espacios.

Nos proponemos en este apartado, extender estos conceptos al caso general de espacios vectoriales topológicos que nos ocupa, y - dar algunos resultados de regularidad, bajo condiciones estudiadas en el apartado anterior.

### 2.1. *Definición.*

*Un límite inductivo generalizado $(E,T)$ tal que $(E,T) = \lim_{n\to\infty}((LIN(B_n),T_n),B_n)$ , diremos que es SUCESIONALMENTE RETRACTIVO, cuando toda sucesión convergente a 0 en $(E,T)$ está localizada en algún $B_n$ y tiende a 0 en $(LIN(B_n),T_n)$.*

*Diremos que un límite inductivo $(E,T) = \sum_{n=1}^{+\infty}(E_n,T_n)$, con*

$E_n \subseteq E_{n+1}$ *y* $\mathcal{T}_{n+1}|E_n \leqslant \mathcal{T}_n$ *es SUCESIONALMENTE RETRACTIVO, si dada cualquier sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergente a 0 en* $(E,\mathcal{T})$*, existe un* $p\in\mathbb{N}$ *tal que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E_p$ *y* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a 0 en* $(E_p,\mathcal{T}_p)$.

*2.2. Proposición.*

*En las hipótesis del Corolario 1.7., si* $(E,\mathcal{T}) = \lim_{n\to\infty} ((LIN(B_n),\mathcal{T}_n),B_n)$ *es sucesionalmente retractivo, entonces* $(E,\mathcal{T}) = \sum_{n=1}^{+\infty}(LIN(B_n),\mathfrak{T}_n)$ *es sucesionalmente retractivo.*

Demostración.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 en $(E,\mathcal{T})$, por hipótesis, existe $p\in\mathbb{N}$: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_p$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a o en $(LIN(B_p),\mathcal{T}_p)$. Ahora bien como $\mathcal{T}_p$ y $\mathfrak{T}_p$ coinciden sobre $A_o^p = B_p$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 en $(LIN(B_p),\mathfrak{T}_p)$.

Análogamente a lo llevado a cabo por Cascales ( 3 ) para localmente p-convexos, vamos a tratar de establecer algunas propiedades de regularidad. Haremos uso para ello de un Lema debido a Grothendieck ( 9 ). Usamos en él la siguiente notación:

Si X es un conjunto y $\phi$ es un filtro de subconjuntos de X, una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diremos que es $\phi$-convergente si el filtro de Fréchet asociado a $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ es más fino que $\phi$, es decir, si para cada conjunto $F\in\phi$ existe un $n_F\in\mathbb{N}$ tal que $\{x_n : n \geqslant n_F\} \subseteq F$.

*2.3. Lema ( 9)*

*Sea* $\phi$ *un filtro de base numerable en un conjunto* X *, y* $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de filtros en* X *. Supongamos que para cada sucesión en* X *que converge según* $\phi$ *existe un* $k\in\mathbb{N}$*: la sucesión es* $\phi_k$*-convergente.*

*Entonces existe un* $n_o\in\mathbb{N}$*:* $\phi$ *es más fino que* $\phi_{n_o}$*, es decir,* $\phi_{n_o} \subseteq \phi$.

Se verifica entonces:

*2.4. Proposición.*

*Sea* $(E,\mathcal{T}) = \lim\limits_{n\to\infty}((LIN(B_n),\mathcal{T}_n),B_n)$. *Si* $(E,\mathcal{T})$ *es sucesionalmente retractivo, para cada red numerable* $\{x_\alpha : \alpha\in\Lambda, \geq\}$ *con* $x_\alpha \xrightarrow{\mathcal{T}} 0$ *existe un* $m\in\mathbb{N}$ *y existe un* $\alpha_0\in\Lambda$: $\{x_\alpha : \alpha\in\Lambda, \alpha\geq\alpha_0, \geq\}\subseteq B_m$ *y esta subred tiende a 0 en la topologia* $\mathcal{T}_m$.

Demostración.

Si $\{x_\alpha : \alpha\in\Lambda, \geq\}$ es numerable, si denotamos por $\phi$ el filtro de Fréchet asociado, tiene una base numerable $\{x_\alpha : \alpha\geq\beta, \beta\in\Lambda, \geq\}$ y evidentemente este filtro es más fino que el filtro de los entornos de 0 en $(E,\mathcal{T})$

Para cada $n\in\mathbb{N}$, sea $\phi_n$ el filtro generado en E por los entornos de 0 en $B_n$, para la topologia inducidapor $\mathcal{T}_n$. Por ser $(E,\mathcal{T})$ sucesionalmente retractivo y $\phi$ más fino que el filtro de los entornos de 0 en $(E,\mathcal{T})$, para cada sucesión $\phi$-convergente existe un $k\in\mathbb{N}$: la sucesión es $\phi_k$-convergente, y aplicando el Lema 2.3. tenemos que existe un $n_0\in\mathbb{N}$: $\phi_{n_0}\subseteq\phi$. Como $B_{n_0}\in\phi_{n_0}$ entonces $B_{n_0}\in\phi$ y existirá un $\alpha_0$ : $\{x_\alpha : \alpha\geq\alpha_0, \geq\}\subseteq B_{n_0}$.

De aquí, considerando nuevamente que $\phi_{n_0}\subseteq\phi$, si U es un $\mathcal{T}_{n_0}$-entorno de 0 en $LIN(B_{n_0})$, se verifica que $U\cap B_{n_0}\in\phi_{n_0}\subseteq\phi$, luego existe $\exists\beta\geq\alpha_0$ tal que $\{x_\alpha : \alpha\geq\beta, \geq\}\subseteq U\cap B_{n_0}\subseteq U$. Así pues, tenemos que $\{x_\alpha : \alpha\geq\alpha_0, \geq\}$ converge a 0 en $(LIN(B_{n_0}),\mathcal{T}_{n_0})$.

Observación.- Si en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ consideramos el orden $(n,m)\leq(n',m')$ si y sólo si $n\leq n'$, $m\leq m'$, una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en un espacio vectorial topológico $(F,\mathcal{T})$ si y sólo si la red numerable $\{x_{(n,m)} = x_n - x_m, (n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \leq\}$ converge a 0 en $(F,\mathcal{T})$.

*2.5. Corolario.*

*Sea* $(E,\mathcal{T}) = \lim_{n\to\infty}((LIN(B_n),\mathcal{T}_n),B_n)$ *en las condiciones del Corolario 1.7. Entonces, si* $(E,\mathcal{T})$ *es sucesionalmente retractivo,* $(E,\mathcal{T})$ *es sucesionalmente completo.*

Demostración.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(E,\mathcal{T})$. La red numerable $(x_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}} = (x_n - x_m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ es convergente a 0, y por la proposición anterior, existen p, $n_o$, $m_o\in\mathbb{N}$ tales que $\{x_{n,m}: (n,m)\geqslant(n_o,m_o)\}\subseteq$ $\subseteq B_p$, y esta red tiende a 0 en $(LIN(B_p),\mathcal{T}_p)$.

Si consideramos $t = \text{máx}\,(n_o,m_o)$, para cada $n\geqslant n_o$ tenemos $x_n = x_n - x_t + x_t = x_{n,t} + x_t\in B_p + B_q$ para algún $q\in\mathbb{N}$, ya que sabemos que $W = \bigcup_{q\in\mathbb{N}} B_q$.

Si consideramos $M = \text{máx}\,(p,q)$, tendremos que $x_n\in LIN(B_M)$ $\forall n\geqslant n_o$ , y así $\{x_{n,m}: (n,m)\geqslant(N,N)\}\subseteq B_p\subseteq B_M$, para $N\geqslant n_o,m_o$ y $(x_n)_{n\geqslant N,M}\subseteq LIN\,(B_M)$, con $(x_{n,m})_{n,m\geqslant N,M}$ convergente a 0 en la topología $\mathcal{T}_M$ (ya que $\mathcal{T}_{M|B_p}\leqslant\mathcal{T}_p$).

Así pues, como $\mathcal{T}_M$ y $\mathcal{T}_{\sigma_M}$ coinciden sobre $B_M$ y $(LIN(B_M),\mathcal{T}_{\sigma_M})$ es completo, $(x_n)_{n\geqslant N,M}$ converge en $(LIN(B_M),\mathcal{T}_M)$ y por tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $(E,\mathcal{T})$.

Vamos a probar ahora un Lema debido a M. Valdivia (37 ).

*2.6. Lema. (37)*

*Sea* $(E,\mathcal{T}) = \sum_{n=1}^{+\infty}(E_n,\mathcal{T}_n)$ *y* $\mathcal{T}_{n+1|E_n}\leqslant\mathcal{T}_n$. *Sea* B *un subconjunto* $\mathcal{T}$*-acotado y equilibrado de* E *: existe un* $n\in\mathbb{N}$ *de forma que* $B\subseteq E_n$.

*Si dada cualquier sucesión* $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *en* B - B *que converge a 0 en* $(E,\mathcal{T})$, *existe un* $p\in\mathbb{N}$: $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *converge a 0 en* $(E_p,\mathcal{T}_p)$, *entonces existe* $q\in\mathbb{N}$ *tal que* $(B,\mathcal{T}_{|B})$ *y* $(B,\mathcal{T}_{q|B})$ *tienen las mismas sucesiones convergentes.*

Demostración.

Supongamos que la propiedad no es cierta.

Sea $n_1 = n$. Procediendo por recurrencia, supongamos existen $n_1, n_2, \dots n_p$ ya construidos. Entonces existe $n_{p+1} > n_p + n$, $n_p > p + 1$, y una sucesión $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ que converge a x en $(B, \mathcal{T}_{|B})$ y $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ no converge a x en la topologia $\mathcal{T}_{n_p+1|B}$.

Entonces, $\left\{(1/p)(x_m - x)\right\}_{m=1}^{+\infty}$ es una sucesión en B - B que no converge a 0 en la topologia $\mathcal{T}_{n_{p+1}|B}$.

Hacemos $z_{pm} = (1/p)(x_m - x)$, $m = 1, 2, \dots, p\in N$ y reordenamos $z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{13}, z_{22}, z_{31}, \dots, z_{1m}, \dots, z_{m1}, \dots$. Veamos que $(z_{pm})$ converge a 0 en $(E,\mathcal{T})$.

Sea W un $\mathcal{T}$-entorno de 0. Por ser B acotado, $\exists$ $q\in\mathbb{N}$: $(1/q)(B - B)\subseteq W$, luego $z_{pm}\in W$, $p = q+1, q+2, \dots$, $m\in N$.

Por otra parte, como $(x_m)$ converge a x en la topologia $\mathcal{T}_{|B}$ entonces $((1/p)(x_m - x))_m$ converge a 0 en $\mathcal{T}_{|(B - B)}$ y por tanto existe $r\in\mathbb{N}$: $z_{pm}\in W$, $p = 1, 2, \dots q$, $m = r+1, r+2, \dots$. Así pues, $z_{pm}\in W$ para $p+m \geq r+q$, y obtenemos que $(z_{pm})$ converge a 0 en $(E,\mathcal{T})$. Aplicando la hipótesis, tendremos que existe un $s\in\mathbb{N}$ tal que $(z_{pm})$ converge a 0 en $(E_s,\mathcal{T}_s)$, luego $(z_{sm})_{m\in\mathbb{N}}$ converge a 0 en $(E_s,\mathcal{T}_s)$

Ahora bien, si $n_{s+1} > s$ entonces $\mathcal{T}_{n_{s+1}|E_s} \leq \mathcal{T}_s$, luego $(z_{sm})_{m\in\mathbb{N}}$ converge a 0 en $(E_{n_{s+1}},\mathcal{T}_{n_{s+1}})$. LLegamos pues a una contradicción.

*2.7 Corolario.*

*En las condiciones del Corolario 1.7., sea* $(E,\mathcal{T}) = \lim_{n\to\infty}((LIN(B_n),\mathcal{T}_n),B_n) = \sum_n LIN(B_n),\mathcal{T}_n)$, *y sea* B *un conjunto equilibrado y* $\mathcal{T}$*-acotado tal que:*

*i) existe un* $m\in\mathbb{N}$ *tal que* $B\subseteq B_m$.

*ii) Para cada sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en* B-B *que converge a 0 en* $(E,\mathcal{T})$ *exis-*

*te un $p \geq m$ tal que $(x_n)_{n\in N}$ converge a 0 en $(E_p, \mathcal{T}_p)$.*

*Entonces, existe $q \in N$, $q > m$ tal que $(B, \mathcal{T}_{|B})$ y $(B, \mathcal{T}_{q|B})$ tienen las mismas sucesiones convergentes.*

Demostración.

Vamos a demostrar que estamos en las condiciones del Lema 2.6.:

Sea $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$ una sucesión en B - B que converge a 0 en $(E, \mathcal{T})$. Aplicando la hipótesis ii) existirá $p \in \mathbb{N}$, $p \geq m$ tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 en la topologia $\mathcal{T}_p$, y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A_1^p$ ya que $B - B \subseteq B_m + B_m \subseteq A_o^m + A_o^m \subseteq A_1^m \subseteq A_1^p$, por ser $p \geq m$.

Además, sabemos que $\mathcal{T}_p$ y $\mathcal{T}_{\sigma p}$ coinciden sobre $A_1^p$, luego $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 en la topologia $\mathcal{T}_{\sigma p}$. Aplicando ahora el Lema anterior, existe $q \in \mathbb{N}$, $q > n$ tal que $(B, \mathcal{T}_{|B})$ y $(B, \mathcal{T}_{\sigma q|B})$ tienen las mismas sucesiones convergentes, y entonces se verifica que $(B, \mathcal{T}_{|B})$ y $(B, \mathcal{T}_{q|B})$ tienen las mismas sucesiones convergentes (ya que $(B, \mathcal{T}_{\sigma q|B})$ y $(B, \mathcal{T}_{q|B})$ tienen las mismas sucesiones convergentes).

2.8. *Proposición.*

*En las condiciones del Corolario 1.7., sea $(E, \mathcal{T}) = \lim\limits_{n\to\infty}((LJN(B_n), \mathcal{T}_n), B_n)$ y supongamos $(E, \mathcal{T})$ sucesionalmente retractivo.*

*Entonces, para un conjunto A equilibrado, son equivalentes:*

*a. A es $\mathcal{T}$-acotado.*

*b. Existe $q \in N$ tal que $A \subseteq B_q$ y A es $\mathcal{T}_q$-acotado.*

Demostración.

b.$\longrightarrow$a. Sea $A \subseteq B_q$ y A $\mathcal{T}_q$-acotado, y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en A. Consideremos una sucesión $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ tal que $(\rho_n)$ converge a 0 en $\mathbb{K}$. Entonces, $(\rho_n x_n)$ converge a 0 en $\mathcal{T}_q$, y existe un

$n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\rho_n x_n \subseteq A$, si $n \geqslant n_o$. De aquí, y ya que $\mathcal{T}_{|B_q} \leqslant \mathcal{T}_q$, obtenemos que $(\rho_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0 en $\mathcal{T}$, luego A es $\mathcal{T}$-acotado ((20) § 15.6.(3))

a.$\longrightarrow$b. Sea A $\mathcal{T}$-acotado. Veamos que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \subseteq nB_n$:

Si esto no fuera cierto, existiría $x_n \in A$ tal que $x_n \notin nB_n$ $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, por ser A $\mathcal{T}$-acotado, la sucesión $((1/n)x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0 en $\mathcal{T}$, y por ser sucesionalmente retractivo $\exists\, m \in \mathbb{N}$: $((1/n)x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B_m$ y $((1/n)x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0 en $\mathcal{T}_m$. En particular obtendríamos que $x_n \in nB_m \subseteq nB_n$ cuando $n \geqslant m$, luego llegamos a una contradicción.

Tenemos pues que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \subseteq nB_n$, y como podemos demostrar directamente por recurrencia que $\exists\, t \in \mathbb{N}$ tal que $nB_n \subseteq B_t$ (por las hipótesis sobre los $B_n$), , aplicando el Corolario anterior, existirá un $q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant t$, tal que $(A, \mathcal{T}_{q|A})$ y $(A, \mathcal{T}_{|A})$ tienen las mismas sucesiones convergentes. Aplicando el mismo resultado (20) §15.6.(3), obtenemos pues, que A es $\mathcal{T}_q$-acotado.

## CAPITULO 3: UNA NOTA SOBRE LOS ESPACIOS DE SŁOWIKOWSKI, RAIKOV Y W. ROBERTSON.

### 0. INTRODUCCION.

Como ya hemos dicho en la introducción a esta memoria, Raikov (28) y Słowikowski dan respuesta satisfactoria a la conjetura de Grothendieck, definiendo dos clases de espacios que M. Valdivia (39) demuestra que coinciden en el caso separado.

Nos proponemos en este capítulo, mediante un sencillo razonamiento, demostrar, basándonos en los resultados obtenidos por M. Valdivia, que éstos espacios coinciden en cualquier caso.

Estudiaremos también condiciones bajo las cuales dichos espacios coincidirán con los espacios con redes definidos por W. Robertson.

### 1. SOBRE LOS ESPACIOS DE SŁOWIKOWSKI Y RAIKOV.

*1.1. Definición.*

Sean P y Q conjuntos infinitos numerables, y sea M un subconjunto no vacio del espacio $P^Q$.

Dado un espacio vectorial E, suponemos que para cada par $(p,q)$, donde $p = f(q)$, $q \in Q$, $f \in M$, existe en E un subespacio vectorial $E_{p,q}$, dotado de una topologia vectorial pseudometrizable, definida por la F-seminorma $|.|_{p,q}$. Si $(p_q) \in M$, definimos el espacio

$E_{(p_q)} = \cap \{E_{p_q,q} : q \in Q\}$, y suponemos este espacio dotado de la topología vectorial menos fina que hace continua la inyección canónica de $E_{(p_q)}$ en $E_{p_q,q}$, para cada $q \in Q$. Entonces, dicha topologia viene definida por la F-seminorma

$$|x|_{(p_q)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x|_{p_{q_n},q_n}}{1 + |x|_{p_{q_n},q_n}}$$

donde suponemos $Q = \{q_1, q_2, \ldots\}$.

Denotamos por $F = (M, E_{p,q}, |\cdot|_{p,q})$, y diremos que $F$ es una "$\alpha\beta\gamma$-representación" de E, si se cumple:

$\alpha$) Si $(p_q) \in P^Q$ y $S(H,(p_q)) = \{(s_q) \in M : s_q = p_q , q \in H\} \neq \phi$ para cada subconjunto finito $H \neq \phi$, $H \subseteq Q$, entonces $(p_q) \in M$.

$\beta$) Para cada $r \in Q$, $(p_q) \in M$ y cada $H \subseteq Q$, H finito, $H \neq \phi$, se tiene que

$$\cap \{E_{p_q,q} : q \in H\} \subseteq \cup \{E_{k_r,r} : (k_q) \in S(H,(p_q))\} \quad y$$

$$\cup \{E_{k_r,r} : (k_q) \in M\} = E.$$

$\gamma$) Dados $\cup \{U_n : n = 1, 2, \ldots\} = Q$, donde $U_n$ es finito distinto de vacío, $\forall n \in \mathbb{N}$, y $U_n \subseteq U_{n+1}$; $(p_q) \in M$ y $x_n \in \cap \{E_{p_q,q} : q \in U_n\}$ con

$$\lim_n \sup_k \left\{ \left| \sum_{i=1}^{k} x_{n+i} \right|_{p_q,q} : x_{n+i} \in E_{p_q,q} , i = 1, 2, \ldots k \right\} = 0$$

para cada $q \in Q$, entonces existe $(p_q^*) \in S(U_1,(p_q))$ tal que

$$(x_n) \subseteq E_{(p_q^*)} \quad y \quad \lim_n \sup_k \left| \sum_{i=1}^{k} x_{n+i} \right|_{(p_q^*)} = 0.$$

Se dice que $F$ es una "$\alpha\beta\gamma$-representación completa", si el espacio $E_{(p_q)}$ es completo, para cada $(p_q) \in M$.

Diremos que E es un "ESPACIO DE SŁOWIKOWSKI" si admite una $\alpha\beta\gamma$-representación completa $\mathcal{F}$ de manera que para cada $(p_q)\in M$, la topologia inducida en $E_{(p_q)}$ por la topologia de E es menos fina que la topologia de $E_{(p_q)}$, es decir, la inyección $I_{(p_q)} : E_{(p_q)} \longrightarrow E$ es continua, para cada $q\in Q$. Cuando se verifique esta propiedad, diremos que la topologia de E es compatible con la $\alpha\beta\gamma$-representación. (Hemos usado hasta aquí la notación dada en (32)).

Siguiendo ahora (28), denotaremos:

Sea un subconjunto L de un espacio vectorial E. Diremos que una sucesión $(x_n)$, respectivamente $(x_{n,m})$ de E está "finalmente contenida" en L, si existe $h\in N$ tal que $x_n$, (respectivamente $x_{n,m}$) pertenece a L, para $n\geqslant h$ (resp. $n,m\geqslant h$).

Si F es un subespacio vectorial de E, dotado de la topologia $\mathcal{S}$, y la sucesión $(x_n)$ (resp. $(x_{n,m})$) está finalmente contenida en F, diremos que $(x_n)$ (resp. $(x_{n,m})$) converge al origen en $(F,\mathcal{S})$, si dado cualquier $\mathcal{S}$-entorno de O, U, en F, $(x_n)$ (resp. $(x_{n,m})$) está finalmente contenida en U.

Diremos que $(P,Q,M,E_{p,q})$ es una "$\mathcal{D}_o$-representación" del espacio vectorial topológico $(E,\mathcal{T})$ (no necesariamente separado), si se cumplen las condiciones $\alpha$), $\beta$) y

$\gamma$) Dado cualquier $(p_q)\in M$, si la sucesión $(x_n)\subseteq E$ es tal que la sucesión doble $(x_n - x_m)$ está finalmente contenida y converge al origen en cada $E_{p_q,q}$, $q\in Q$, entonces $(x_n)$ converge en E a algún x, donde $(x-x_n)$ está finalmente contenida y converge al origen en cda $E_{p_q,q}$, $q\in Q$.

Denotaremos por $\mathcal{D}_o = \{(E,\mathcal{T})$ espacios vectoriales topológicos tal que al menos tienen una $\mathcal{D}_o$-representación$\}$.

Vamos a demostrar que la clase $\mathcal{D}_o$ coincide con la clase de los espacios de Słowikowski.

*1.2. Lema.*

*Sea $(E,\mathcal{T})$ un espacio vectorial topológico, $F = \overline{\{0\}}^{\mathcal{T}}$ y $G$ un subespacio de $E$ que es complementario a $F$.*

*Entonces, la topologia inducida por $\mathcal{T}$ sobre $G$ es Hausdorff, y $E$ es topológicamente isomorfo a $G\times F$, donde $F$ está dotado de la topologia trivial.*

Demostración.

(18 ), pag. 41.

*1.3. Proposición.*

*Si $(E,\mathcal{T})$ es un espacio vectorial topológico, no necesariamente separado, con una $D_0$-representación, entonces $(E,\mathcal{T})$ es un espacio de Słowikowski.*

Demostración.

Sea $(E,\mathcal{T})$ un espacio vectorial topológico y sea $(P,Q,M,E_{p,q})$ una $D_0$-representación en $E$.

Sea $Q = \{U_n : n = 1, 2, \dots\}$ con $U_n$ finitos distintos de vacio, $U_n \subseteq U_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, y para $(p_q)\in M$ supongamos $\bigcap\{E_{p_q,q} : q\in U_n\}$ dotados de la topologia vectorial menos fina que hace continuas las inyecciones canónicas de dicho espacio en $E_{p_q,q}$, $q\in U_n$.

Aplicando el Lema 1.2. E es topológicamente isomorfo a $G\times F$, donde $F = \overline{\{0\}}^{\mathcal{T}}$ y $G$ es un complementario algebraico arbitrario de $F$, dotado de la topologia relativa (que es Hausdorff), es decir, existe una aplicación $\varphi: E \longrightarrow G\times F$ tal que $\varphi$ es continua, inyectiva y la inversa $\varphi^{-1}$: $\varphi(E)\longrightarrow E$ es continua.

Si denotamos estos espacios con sus topologias por $(G,\mathcal{T}')$ y $(F,\mathcal{R})$, estamos en la situación $\varphi: (E,\mathcal{T})\longrightarrow (\varphi(E),\mathcal{T}'\times\mathcal{R}|_{\varphi(E)})$

donde $\varphi$ es lineal, continua, abierta y biyectiva, y por tanto estamos en condiciones de aplicar (28)4.3., luego $\varphi(E) \in \mathcal{D}_o$.

Consideremos ahora las proyecciones canónicas

$$\Pi_1 : (\varphi(E), \mathcal{T}' \times \mathcal{R}_{|\varphi(E)}) \longrightarrow (\Pi_1\varphi(E), \mathcal{T}'_{|\Pi_1\varphi(E)})$$

que aplica a cada par $(x,y)$ la componente $x$

$$\Pi_2 : (\varphi(E), \mathcal{T}' \times \mathcal{R}_{|\varphi(E)}) \longrightarrow (\Pi_2\varphi(E), \mathcal{R}_{|\Pi_2\varphi(E)})$$

que aplica a cada par la componente $y$, y denotemos por $G_1 = \Pi_1 \circ \varphi(E)$ y $F_1 = \Pi_2 \circ \varphi(E)$.

Aplicando (28)4.4. $G_1 \in \mathcal{D}_o$ y además, por ser $\mathcal{T}'$ separada, $\mathcal{T}'_{|G_1}$ es separada.

Entonces, si denotamos por $(P', Q', M', Z_{p',q'})$ una $\mathcal{D}_o$-representación de $G_1$, estamos en las condiciones exigidas por M. Valdivia (39), y por tanto $(M', Z_{p',q'}, |.|_{p',q'})$ es una $\alpha\beta\gamma$-representación completa de $G_1$ compatible con la topologia $\mathcal{T}'$. Vamos a tratar de construir a partir de aquí una $\alpha\beta\gamma$ representación completa de $(E,\mathcal{T})$ compatible con la topologia .

Consideremos para ello la aplicación $\omega_1 = \Pi_1 \circ \varphi$ de E sobre $G_1$, que es lineal, continua y abierta, y definamos los espacios

$$X_{p',q'} = \omega_1^{-1}(Z_{p',q'}),\ q' \in Q',\ p' = f(q') \text{ para } f \in M'.$$

y queremos dotar a $X_{p',q'}$ de una topologia pseudometrizable. Para ello consideraremos el funcional $|.|'_{p',q'} : X_{p',q'} \longrightarrow R^+ \cup \{0\}$ tal que para cada $x \in X_{p',q'}$, $|x|'_{p',q'} = |\omega_1(x)|_{p',q'}$.

$|.|'_{p',q'}$ así definida es una F-seminorma, por serlo $|.|_{p',q'}$.

Consideremos pues, $X_{p',q'}$ dotado de la topologia seudometrizable definida por dicha seminorma. Probaremos que

$(M', X_{p',q'}, |.|'_{p',q'})$ es una $\alpha\beta\gamma$ representación completa de E compatible con su topologia. Veamos las condiciones:

$\alpha$) Se sigue directamente, por verificarse en $G_1$, ya que esta condición depende únicamente del conjunto M', y éste no ha cambiado, luego Si $(p'_{q'}) \in P'^{Q'}$ y $S(H,(p'_{q'})) = \{ (s'_{q'}) \in M' : s'_{q'} = p'_{q'} \ q' \in H \} \neq \emptyset$

para cada $H \subseteq Q'$ finito distinto de vacio, entonces $(p'_{q'}) \in M'$.

$\beta$) Para cada $r \in Q'$, $(p'_{q'}) \in M'$ y cada subconjunto $H \subseteq Q'$ finito distinto de vacio, tenemos

$$\bigcap \{ X_{p'_{q'},q'} : q' \in H \} = \bigcap \{ \omega_1^{-1}(Z_{p'_{q'},q'}) : q' \in H \} =$$

$$\omega_1^{-1}(\bigcap \{ Z_{p'_{q'},q'} : q' \in H \}) \subseteq \omega_1^{-1}(\bigcup \{ Z_{k'_r,r} : (k'_q) \in S(H,(p'_{q'})) \}) \subseteq$$

$$\bigcup \{ X_{k'_r,r} : (k'_q) \in S(H,(p'_{q'})) \}$$ por verificarse $\beta$) en $G_1$.

Además, como $\bigcup \{ Z_{k'_r,r} : (k'_{q'}) \in M' \} = G_1$, entonces

$$\bigcup \{ X_{k'_r,r} : (k'_{q'}) \in M' \} = \bigcup \{ \omega_1^{-1}(Z_{k'_r,r}) : (k'_{q'}) \in M' \} =$$

$$\omega_1^{-1}(\bigcup \{ Z_{k'_r,r} : (k'_{q'}) \in M' \} = \omega_1^{-1}(G_1) = E.$$

Observemos antes de pasar a probar la propiedad $\gamma$) que si consideramos la restricción de $\omega_1$ a $X_{p',q'}$, se verifica que $\omega_1 : X_{p',q'} \longrightarrow Z_{p',q'}$ es una aplicación lineal y sobreyectiva, que es continua y abierta, si consideramos en $X_{p',q'}$ y $Z_{p',q'}$ las topologias semimetrizables que definen las F-normas $|.|'_{p',q'}$ y $|.|_{p',q'}$ respectivamente:

Dado $\varepsilon > 0$ y $V_\varepsilon = \{ z \in Z_{p',q'} : |z|_{p',q'} < \varepsilon \}$, existe

$W_\varepsilon = \{ x \in X_{p',q'} : |x|'_{p',q'} < \varepsilon \} = \{ x \in X_{p',q'} : |\omega_1 x|_{p',q'} < \varepsilon \}$ tal que $\omega_1(W_\varepsilon) \subseteq V_\varepsilon$, luego $\omega_1$ es continua.

Por otra parte, si $z \in V_{\varepsilon}$, $|z|_{p',q'} < \varepsilon$ y entonces $\omega_1^{-1}(z) = y \in X_{p',q'}$ y se verifica que $|y|'_{p',q'} = |\omega_1(y)|_{p',q'} =$ $= |z|_{p',q'} < \varepsilon$ luego $z = \omega_1(y) \in \omega_1(W_{\varepsilon})$, $\omega_1(W_{\varepsilon}) = V_{\varepsilon}$ y $\omega_1$ es abierta.

Consideremos ahora $X_{(p'_{q'})} = \bigcap \{X_{p'_{q'},q'} : q' \in Q'\}$ y lo dotamos de la topologia menos fina que hace continuas las inyecciones canónicas $X_{(p'_{q'})} \longrightarrow X_{p_{q'},q'}$. Esta topologia viene definida por la F-seminorma

$$|x|'_{(p'_{q'})} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} |x|'_{p'_{q'_n},q'_n} (1 + |x|'_{p'_{q'_n},q'_n})^{-1}$$

donde suponemos $Q' = \{q'_1, q'_2 \dots\}$

Además $X_{(p'_{q'})} = \bigcap \{X_{p'_{q'},q'} : q' \in Q'\} = \bigcap \{\omega_1^{-1}(Z_{p'_{q'},q'}) : q' \in Q'\} =$ $= \omega_1^{-1}(\bigcap \{Z_{p'_{q'},q'} : q' \in Q'\} = \omega_1^{-1}(Z_{(p'_{q'})})$, y si $x \in X_{(p'_{q'})}$

$$|x|'_{(p'_{q'})} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} |x|'_{p'_{q'_n},q'_n} (1 + |x|'_{p'_{q'_n},q'_n})^{-1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} |\omega_1 x|_{p'_{q'_n},q'_n} (1 + |\omega_1 x|_{p'_{q'_n},q'_n})^{-1} = |\omega_1 x|_{(p'_{q'})}.$$

Así pues, si consideramos la restricción de $\omega_1$ a $X_{(p'_{q'})}$ tenemos que $\omega_1 : X_{(p'_{q'})} \longrightarrow Z_{(p'_{q'})}$ es una aplicación lineal y sobreyectiva que por el mismo razonamiento anterior es continua y abierta. Estamos ahora en condiciones de demostrar la propiedad $\gamma$):

$\gamma$) Dados $\bigcup \{U_n : n \in \mathbb{N}\} = Q'$, donde $U_n \subseteq U_{n+1}$, finitos distintos de vacio $(p'_{q'}) \in M'$ y $x_n \in \bigcap \{X_{p'_{q'},q'} : q' \in U_n\}$ con

$$\lim_n \sup_k \{ | \sum_{i=1}^{k} x_{n+i} |'_{p'_{q'},q'} : x_{n+i} \in X_{p'_{q'},q'},\ i = 1, 2, \dots k \} = 0,\ q' \in Q'$$

si $x_n \in \bigcap \{\bar{\omega}_1^{-1}(Z_{p'_{q'},q'}: q' \in U_n\}$, entonces $\bar{\omega}_1(x_n) \in \bigcap \{Z_{p'_{q'},q'}: q' \in U_n\}$

luego, por definición de $|\cdot|'_{p'_{q'},q'}$,

$| \sum_{i=1}^{k} x_{n+i}|'_{p'_{q'},q'} = | \sum_{i=1}^{k} \bar{\omega}_1 x_{n+i}|_{p'_{q'},q'}$ y podemos escribir

$$\lim_n \sup_k \left\{ | \sum_{i=1}^{k} \bar{\omega}_1(x_{n+i})|_{p'_{q'},q'} : \bar{\omega}_1(x_{n+i}) \in Z_{p'_{q'},q'},\ i = 1, 2, \dots k \right\} = 0$$

y por ser $(M', Z_{p',q'}, |\cdot|_{p',q'})$ una $\alpha\beta\gamma$-representación en $G_1$

existe $(p'^{*}_{q'}) \in S(U_1, (p'_{q'}))$ tal que $(\bar{\omega}_1 x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Z_{(p'^{*}_{q'})}$ y

$$\lim_n \sup_k | \sum_{i=1}^{k} (x_{n+i})|'_{(p'^{*}_{q'})} = 0$$

Ahora bien, hemos probado que $(\bar{\omega}_1 x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Z_{(p^{*}_{q'})}$ si y sólo si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X_{(p'^{*}_{q'})}$ y $\lim_n \sup_k |\sum_{i=1}^{k} \bar{\omega}_1(x_{n+i})|_{(p^{*}_{q'})} =$

$$= \lim_n \sup_k | \sum_{i=1}^{k} x_{n+i} |'_{(p'^{*}_{q'})} = 0.$$

Así pues, $(M', X_{p',q'}, |\cdot|_{p',q'})$ es una $\alpha\beta\gamma$-representación de E. Veamos ahora:

1. $X_{(p_{q'})}$ es completo para cada $(p'_{q'}) \in M'$.

2. La representación es compatible con la topologia de E.

1. Para cada $(p'_{q'}) \in M'$, $Z_{(p'_{q'})}$ es completo, por ser $(M', Z_{p',q'}, |\cdot|_{p',q'})$ una representación de $G_1$, luego, por la construcción de $X_{(p'_{q'})}$ y de $|\cdot|'_{(p'_{q'})}$, $X_{(p'_{q'})}$ es completo.

2. Para ver que la representación es compatible con $\mathcal{T}$, tenemos que

probar que las inyecciones $I : (X_{(p'_{q'})}, |\cdot|'_{(p'_{q'})}) \longrightarrow (E,\mathcal{T})$

son continuas, para cada $(p'_{q'}) \in M'$.

Ahora bien, $I$ es continua, si y sólo si la composición $\varphi \circ I : X_{(p'_{q'})} \longrightarrow \varphi(E)$ es continua,por ser $\varphi$ un isomorfismo topológico, y $\varphi \circ I$ es continua si y sólo si $\Pi_i \circ \varphi \circ I$ es continua, $i = 1, 2$. Estamos en la situación

$$\begin{tikzcd} (X_{(p'_{q'})}, |\cdot|'_{(p'_{q'})}) \arrow[r, "I"] \arrow[dr, "\omega_1"'] & (E,\mathcal{T}) \arrow[r, "\varphi"] & (\varphi(E), \mathcal{T}\times\mathcal{R}|_{\varphi(E)}) \arrow[r, "\Pi_1"] & (G_1,\mathcal{T}') \\ & (Z_{(p'_{q'})}, |\cdot|_{(p'_{q'})}) \arrow[urr, "I_1"'] & & \end{tikzcd}$$

donde es diagrama conmuta, y además, por ser $(M', Z_{p',q'}, |\cdot|_{p',q'})$ una $\alpha\beta\gamma$-representación compatible con la topologia de $G_1$, $I_1$ es continua, luego $I_1 \circ \omega_1$ es continua, y $\Pi_1 \circ \varphi \circ I$ también lo será.

Por otra parte, como $\Pi_2 : \varphi(E) \longrightarrow F_1$, y $F_1$ está dotado - de la topologia trivial, entonces $\Pi_2 \circ \varphi \circ I_2$ es continua. Así pues, $I$ es una aplicación continua, $(p'_{q'}) \in M'$.

1.4. *Proposición.*

*Si $(E,\mathcal{T})$ es un espacio de Słowikowski, entonces $(E,\mathcal{T}) \in \mathcal{D}_o$.*

Demostración.

Consideramos análogamente a la proposición anterior, $\varphi : E \longrightarrow \varphi(E)$ isomorfismo topológico, $\Pi_1 : \varphi(E) \longrightarrow G_1$ lineal, continua, abierta y sobreyectiva.

Los espacios de Słowikowski son estables para una imagen lineal y continua, luego $(G_1, \mathcal{T}')$ es un espacio de Słowikowski, Hausdorff, y por un resultado de M.Valdivia (39), $G_1$ admite una $\mathcal{D}_o$-representación.

Probemos, siguiendo a Raikov (28), que E admite una $\mathcal{D}_o$-representación.

Sea $\omega_1 : E \longrightarrow G_1$, y sea $(P,Q,M,X_{p,q})$ una $\mathcal{D}_0$-representación en $G_1$.

Definimos $Z_{p,q} = \omega_1^{-1}(X_{p,q})$, dotado de la topologia antiimagen de la de $X_{p,q}$ por $\omega_1^{-1}$. Vamos a probar que $(P,Q,M,Z_{p,q})$ es una $\mathcal{D}_0$ -representación de E:

$\alpha$) Se verifica por verificarse en $G_1$.

$\beta$) Para cada $r \in Q$, $(p_q) \in M$, $H \subseteq Q$ finito distinto de vacio,

$$\bigcap \left\{ Z_{p_q,q} : q \in H \right\} = \bigcap \left\{ \omega_1^{-1}(X_{p_q,q}) : q \in H \right\} = \omega_1^{-1}\left( \bigcap \left\{ X_{p_q,q} : q \in H \right\}\right) \subseteq$$

$$\subseteq \omega_1^{-1}\left( \bigcup \left\{ X_{k_r,r} : (k_q) \in S(H,(p_q)) \right\}\right) = \bigcup \left\{ \omega_1^{-1}(X_{k_r,r}),\ (k_q) \in S(H,(p_q)) \right\}\, )$$

$$= \bigcup \left\{ Z_{k_r,r} : (k_q) \in S(H,(p_q)) \right\}$$, por ser $(P,Q,M,X_{p,q})$ una $\mathcal{D}_0$ -representación en $G_1$. Además

$$\bigcup \left\{ X_{k_r,r} : (k_q) \in M \right\} = \bigcup \left\{ \omega_1^{-1}(Z_{k_r,r}) : (k_q) \in M \right\} =$$

$$\omega_1^{-1}\left( \bigcup \left\{ Z_{k_r,r} : (k_q) \in M \right\}\right) = \omega_1^{-1}(G_1) = E.$$

$\delta$) Tenemos que probar que dado cualquier $(p_q) \in M$, si la sucesión $(x_n) \subseteq E$ es tal que la sucesión dobre $(x_n - x_m)$ está finalmente contenida y converge al origen en cada $Z_{p_q,q}$, entonces $(x_n)$ converge en E a algún punto x, de forma que $(x - x_n)$ está finalmente contenida y converge al origen en cada $Z_{p_q,q}$. Ahora bien, dada $(x_n) \subseteq E$ tal que $(x_n - x_m)$ está finalmente contenida y converge al origen en cada $Z_{p_q,q} = \omega_1^{-1}(X_{p_q,q})$, $(\omega_1(x_n)) \subseteq G_1$ es tal que $(\omega_1(x_n) - \omega_1(x_m))$ está finalmente contenida y converge al origen en cada $X_{p_q,q}$, y como $G_1 \in \mathcal{D}_0$, la sucesión $(w_1(x_n))$ converge en $G_1$ a un punto $y \in G_1$, verificando además que $(y - \omega_1(x_n))$ está finalmente contenida y converge al origen en cada $X_{p_q,q}$. Aplicando que $\omega_1$ es sobre, sabemos existe un $x \in E$ tal que $\omega_1(x) = y$. Vamos a demostrar que $(x_n)$ converge a $x$ en $E$:

Dado $V$ un abierto distinto del vacio, en $E$, $\varphi(V)$ es abierto en $\varphi(E)$, luego existirá un $U$ abierto en $G$ tal que $(U \times F) \cap \varphi(E) = \varphi(V)$ (en $F$ consideramos la topologia trivial). Sea $U \cap G_1$ que es abierto en $G_1$, entonces, existe un $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $(\omega_1(x) - \omega_1(x_n)) \in U \cap G_1, \forall n \geq n_o$ (porque $G_1 \in \mathcal{D}_o$), es decir, $\Pi_1 \circ \varphi(x - x_n) \in U \cap G_1$, $\forall n \geq n_o$, y por ser $\Pi_1$ una proyección $\varphi(x - x_n) \in (U \times F) \cap \varphi(E) = \varphi(V)$. Así pues, por ser un isomorfismo $x - x_n \in V$, $n \geq n_o$ y $(x_n)$ converge a $x$ en $E$.

Por otra parte, si consideramos la sucesión $(x - x_n)$, existe $n_q \in \mathbb{N}$ tal que $(y - \omega_1(x_n)) \in X_{p_q,q}$, $\forall n \geq n_q$, luego $(x - x_n) \in \omega_1^{-1}(X_{p_q,q}) = Z_{p_q,q}$, $\forall n \geq n_q$, y dado $U$ un abierto en $Z_{p_q,q}$, $U = \omega_1^{-1}(V)$, $V$ abierto en $X_{p_q,q}$, existe un $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $(\omega_1(x) - \omega_1(x_n)) \in V$, $n \geq n_o$. Entonces, $(x - x_n) \in U$, $n \geq n_o$, y por tanto $(x - x_n)$ está finalmente contenida y converge al origen en $Z_{p_q,q}$, $q \in Q$

Hemos probado así la condición $\delta$), luego $E \in \mathcal{D}_o$.

## 2. *SOBRE LOS ESPACIOS CON REDES DE W. ROBERTSON.*

Vamos a estudiar a continuación la relación entre los espacios de Slowikowski, y los espacios con redes, definidos por W. Robertson (26).

En (39) M. Valdivia define los espacios estrictos de Slowikowski: Dada una $\mathcal{D}_o$-representación $(P,Q,M,E_{p,q})$ de un espacio $E$, se dice que es convexa si los espacios $E_{p,q}$, no necesariamente separados, son localmente convexos. Si además $E$ es localmente convexo, se dice que $E$ es un "Espacio estricto de Słowikowski".

Valdivia prueba que un espacio localmente convexo tiene - una red estricta (Definición 8.5.) si y sólo si es un espacio estricto de Słowikowski. Siguiendo la construcción hecha en (39), consideraremos:

Sea $(P,Q,M,E_{p,q})$ una $\mathcal{D}_0$-representación de un espacio vectorial topológico $(E, \mathcal{T})$. Supongamos sin pérdida de generalidad, que Q es el conjunto de los enteros positivos $\mathbb{N}$. Si $p_q = g(q)$ para algún - $g \in M$, $q \in Q$, tomamos

$$U_{p_q,q,1} \supseteq U_{p_q,q,2} \supseteq \dots \supseteq U_{p_q,q,k} \supseteq \dots \quad \text{tal que}$$

$$U_{p_q,q,k+1} + U_{p_q,q,k+1} \subseteq U_{p_q,q,k} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$$

un sistema fundamental de entornosequilibrados, cerrados, del origen, en $E_{p_q,q}$, y consideramos la aplicación

$$f: Q \longrightarrow \left\{ rU_{p_1,1,1} : r \in \mathbb{N},\ (p_q) \in M \right\}$$

Definimos $A_{n_1} = f(n_1)$, $n_1 \in N$, y procediendo por recurrencia, si fijamos $n_1, n_2, \dots, n_k \in Q$, y suponemos que $A_{n_1 \dots n_k} =$

$= r_1 U_{p_1,1,1} \cap r_2(U_{p_1,1,2} \cap U_{p_2,2,2}) \cap \dots \cap r_k(U_{p_1,1,k} \cap U_{p_2,2,k} \cap$

$\dots \cap U_{p_k,k,k})$, de manera que existe $(s_q) \in M$ tal que $s_j = p_j$, $j = 1, 2, \dots, k$, sea

$$f_{n_1 n_2 \dots n_k} : Q \longrightarrow \left\{ A_{n_1 \dots n_k} \cap r(U_{p_1,1,k+1} \cap U_{p_2,2,k+1} \cap \right.$$

$\left. \cap \dots \cap U_{p_{k+1},k+1,k+1}) : r \in \mathbb{N} \text{ y } p_{k+1} = g(k+1) \text{ con } g \in M, \text{ de manera que } g(j) = p_j,\ j = 1, 2, \dots, k \right\}.$

Definimos $A_{n_1 n_2 \dots n_{k+1}} = f_{n_1 n_2 \dots n_k}(n_{k+1})$

*2.1. Proposición.*

*La familia* $W = \{ A_{n_1 \ldots n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N} \}$ *es una red (D.W.) en* E, *tal que dada una sucesión cualquiera* $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq N$ *existe una sucesión* $(\rho_k)_{k\ N}$ *de números reales positivos: si* $\lambda_k \in \mathbb{K}$ *con* $0 \leq |\lambda_k| \leq \rho_k$ *y* $x_k \in A_{n_1 \ldots n_k}$, $k = 1, 2, \ldots$ *entonces la serie* $\sum_{k=h+1}^{+\infty} \lambda_k x_k$ *converge en* E *a un punto de* $A_{n_1 \ldots n_h}$, $h = 1, 2, \ldots$

Demostración.

M. Valdivia (39)

*2.2. Lema.*

*Para cada* $k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ *existe* $\alpha_{n_1 \ldots n_k} > 1$ *tal que* $A_{n_1 \ldots n_k} + A_{n_1 \ldots n_k} \subseteq \alpha_{n_1 \ldots n_k} \cdot A_{n_1 \ldots n_{k-1}}$.

Demostración.

Sean $x, y \in A_{n_1 \ldots n_k}$, $k \geq 2$, y consideremos

$(r_1 . r_2 \ldots r_k)^{-1}(x + y) \in (r_1 . r_2 \ldots r_k)^{-1} \cdot (A_{n_1 \ldots n_k} + A_{n_1 \ldots n_k})$.

Por la construcción de los $A_{n_1 \ldots n_k}$, se verificará

$(r_1 . r_2 \ldots r_k)^{-1}(x + y) \in (r_1 . r_2 \ldots r_k)^{-1} \cdot (r_2 (U_{p_1,1,2} \cap U_{p_2,2,2}) +$

$r_2 (U_{p_1,1,2} \cap U_{p_2,2,2})) \subseteq U_{p_1,1,2} \cap U_{p_2,2,2} + U_{p_1,1,2} \cap U_{p_2,2,2} \subseteq$

$U_{p_1,1,1} + U_{p_2,2,1} \subseteq r_1 U_{p_1,1,1}$, ya que $|r_2 . (r_1 . r_2 \ldots r_k)^{-1}| \leq 1$,

los $U_{p_j,j,k}$ son equilibrados $\forall j, k \in N$ y $r_k \in N$, $k \geq 2$.

En general, $(r_1 . r_2 \ldots r_k)^{-1}(x + y) \in$

$(r_1 . r_2 \ldots r_k)^{-1} (r_j (U_{p_1,1,j} \cap \ldots \cap U_{p_j,j,j}) + r_j (U_{p_1,1,1} \cap \ldots \cap U_{p_j,j,j})) \subseteq$

$$\subseteq (U_{p_1,1,j} \cap \ldots \cap U_{p_j,j,j}) + (U_{p_1,j,j} \cap \ldots \cap U_{p_j,j,j}) \subseteq$$

$$\subseteq U_{p_1,1,j-1} \cap \ldots \cap U_{p_j,j,j-1} \subseteq r_{j-1}(U_{p_1,1,j-1} \cap \ldots \cap U_{p_{j-1},j-1,j-1})$$

y esto se verifica para cada $2 \leq j \leq k$, luego se verifica que

$(r_1 . r_2 \ldots r_k)^{-1}(A_{n_1 \ldots n_k} + A_{n_1 n_2 \ldots n_k}) \subseteq A_{n_1 \ldots n_{k-1}}$, y entonces, si definimos $\alpha_{n_1 \ldots n_k} = r_1 . r_2 \ldots r_k > 1 > 0$, tenemos que

$A_{n_1 \ldots n_k} + A_{n_1 \ldots n_k} \subseteq \alpha_{n_1 \ldots n_k} . A_{n_1 \ldots n_{k-1}}$. (Consideraremos $A_{n_0} = E$)

*2.3. Lema.*

*Si $W' = \left\{ B_{n_1 \ldots n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N} \right\}$, siendo $B_{n_1 \ldots n_k} = (\alpha_{n_1} . \alpha_{n_1 n_2} . \ldots \alpha_{n_1 \ldots n_k})^{-1} A_{n_1 \ldots n_k}$, entonces $W'$ es una red $(\mathcal{R})$.*

Demostración.

Dado $x \in E$, por ser $W$ una red (D.W.) $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, luego existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_{n_1} = \alpha_{n_1} B_{n_1}$. Así pues, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ absorbe E.

Sea $x \in B_{n_1 \ldots n_k} = (\alpha_{n_1} . \alpha_{n_1 n_2} \ldots \alpha_{n_1 n_2 \ldots n_k})^{-1} A_{n_1 \ldots n_k}$.

Entonces $\alpha_{n_1} . \alpha_{n_1 n_2} \ldots \alpha_{n_1 \ldots n_k} x \in A_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ y existirá un $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_{n_1} . \alpha_{n_1 n_2} . \ldots \alpha_{n_1 \ldots n_k} x \in A_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}} =$

$(\alpha_{n_1} . \alpha_{n_1 n_2} . \ldots \alpha_{n_1 \ldots n_k} . \alpha_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}}) B_{n_1 \ldots n_{k+1}}$.

Así pues, existe un $\lambda > 0$ tal que $x \in \lambda B_{n_1 n_2 \ldots n_{k+1}}$ y tendremos que $\bigcup \left\{ B_{n_1 \ldots n_k p} : p \in \mathbb{N} \right\}$ absorbe $B_{n_1 \ldots n_k}$.

Veamos la propiedad aditiva:

$$B_{n_1\ldots n_k n_{k+1}} + B_{n_1\ldots n_k n_{k+1}} = (\alpha_{n_1}\cdot\alpha_{n_1 n_2}\cdot\ldots\alpha_{n_1\ldots n_k n_{k+1}})(A_{n_1\ldots n_{k+1}} +$$

$$+ A_{n_1\ldots n_{k+1}}) \subseteq (\alpha_{n_1}\cdot\alpha_{n_1 n_2}\cdot\ldots\alpha_{n_1\ldots n_{k+1}})^{-1}(\alpha_{n_1\ldots n_{k+1}} A_{n_1\ldots n_k}) =$$

$(\alpha_{n_1}\cdot\alpha_{n_1 n_2}\cdot\ldots\alpha_{n_1\ldots n_k})^{-1} A_{n_1\ldots n_k} = B_{n_1\ldots n_k}$, (aplicando el Lema anterior). Así pues, $\mathcal{W}'$es una red (R).

Vamos a definir ahora algunos conceptos, dados por W. Robertson ( 26) y que usaremos más adelante.

*2.4. Definición.*

Dado un espacio vectorial F, si denotamos por $\mathcal{F}$ el conjunto de todos los subconjuntos de F no vacios, dada $\mathcal{U}$ una base de filtro de F formada por subconjuntos equilibrados tales que para cada $W\in\mathcal{U}$ existe un $W'\in\mathcal{U}$: $W' + W' \subseteq W$, $\mathcal{U}$ define una estructura uniforme, que denotaremos por $\dot{\varsigma}$, sobre $\mathcal{F}$, cuyas vecindades vienen dadas por $\dot{W} = \{(A,B)$ tal que $A\subseteq B + W$, $B\subseteq A + W\}$, $W\in\mathcal{U}$.

Dada una red (R) $\mathcal{W} = \{B_{n_1\ldots n_k} : k, n_1, n_2, \ldots n_k \in\mathbb{N}\}$ en F, si denotamos por $\mathcal{C} = (W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una fibra de la red, entonces para cada $k\in\mathbb{N}$ $W_{k+1} + W_{k+1}\subseteq W_k$ y por tanto $\mathcal{C}$ define una estructura uniforme $\dot{\varsigma}$ sobre $\mathcal{F}$.

Dado un espacio vectorial F y una red $\mathcal{W}$ diremos que $\mathcal{W}$ es "Estrictamente Cerrada" si y sólo si, para cada fibra de la red, $\mathcal{F}$ es $\dot{\varsigma}$-completo, es decir, para cada fibra de la red, toda $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de Cauchy para la estructura $\dot{\varsigma}$ es $\dot{\varsigma}$-convergente.

Dado un espacio vectorial topológico $(F,\mathcal{T})$ no necesariamente separado, y $\mathcal{W}$ una red (R) en F, diremos que $\mathcal{W}$ es una $\mathcal{T}$-red si para cada fibra $\mathcal{C}$ de la red, dado $V\in\mathcal{V}$ (base de $\mathcal{T}$-entornos de 0 en F), existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $W_k \subseteq V$.

En el caso en que $(F,\mathcal{T})$ es Hausdorff, la definición de $\mathcal{T}$-red estrictamente cerrada dada aquí coincide con la dada en la Definición 8.1. (26) Teorema 18.

Nos proponemos a continuación probar que la red construida en el Lema 2.3. es una $\mathcal{T}$-red estrictamente cerrada en E. Vamos a demostrar previamente un resultado debido a W.Robertson, cuya prueba necesitaremos más adelante.

*2.5. Proposición.* (26)

*Dada $\mathcal{W}' = \{B_{n_1 \dots n_k} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$ la red construida en el Lema 2.3., para cada $C = (W_k)_{k \in \mathbb{N}}$, toda serie $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$, $x_k \in W_k$ $k = 1, 2, \dots$ es $\mathcal{T}$-convergente.*

Demostración.

Sea $C = (W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una fibra de la red, $W_k = B_{n_1 \dots n_k} =$

$= (\alpha_{n_1} \cdot \alpha_{n_1 n_2} \cdot \dots \alpha_{n_1 \dots n_k})^{-1} A_{n_1 \dots n_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 2.1. existe una sucesión $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ asociada a la sucesión $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, que podemos tomar decreciente y tal que $0 \leq \rho_n \leq 1$ de forma que la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \rho_k y_k$ es $\mathcal{T}$-convergente para $y_k \in A_{n_1 \dots n_k}$, $k \in \mathbb{N}$ y por tanto también es cierto para los $y_k \in W_k$, $k \in \mathbb{N}$. Así la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} z_k$ es $\mathcal{T}$-convergente para $z_k \in \rho_k W_k$, $k \in \mathbb{N}$. Vamos a probar que $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ es $\mathcal{T}$-convergente para $x_k \in W_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Sea $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Entonces $s_m - s_n \in W_n$ para $m \geq n$.

Sea $p(k) = k + \inf\{p : 2^{-p} \leq \rho_k\}$. Entonces $p(k)$ es creciente, y si $m \geq n \geq p(k)$, $s_m - s_n \in W_{p(k)} \subseteq \rho_k W_k$. Así tenemos que $s_{p(r+1)} - s_{p(r)} \in \lambda_r W_r$

para cada $r\in\mathbb{N}$.

Se verifica entonces que la serie $\sum_{r=1}^{+\infty}(s_{p(r+1)} - s_{p(r)})$ es $\mathcal{T}$-convergente, luego la sucesión $(s_{p(r)})_{r\in\mathbb{N}}$ es $\mathcal{T}$-convergente a un punto $s\in E$. Si $V\in\mathcal{V}$ (base de entornos de 0 en E) existe un $k\in\mathbb{N}$ tal que $\rho_k W_k\subseteq V$ (ya que $\sum_{k=1}^{+\infty} z_k$ es $\mathcal{T}$-convergente para $z_k\in\rho_k W_k$, $k\in\mathbb{N}$), y así $s_m - s_n\in V$, cuando $m,n\geqslant p(k)$

Hemos obtenido así que la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $\mathcal{T}$-Cauchy, y que $(s_{p(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es $\mathcal{T}$-convergente, luego $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $\mathcal{T}$-convergente.

*2.6. Proposición.*

*Dada la red $\mathcal{W}'$ de la Proposición anterior, para cada fibra $C = (W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se verifica que dada la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$, $x_k\in W_k$, $k\in\mathbb{N}$ $\sum_{r=k+1}^{+\infty} x_r\in W_{k-1}$, $k\in\mathbb{N}$.*

Demostración.

Sea $C = (W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ con $W_k = (\alpha_{n_1}.\alpha_{n_1n_2}.\ \ldots\alpha_{n_1\ldots n_k})^{-1}A_{n_1\ldots n_k}$ $k\in\mathbb{N}$. Por razonamiento análogo al hecho en la proposición anterior, - existe una sucesión de números reales $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ decreciente y tal que $0\leq\rho_k\leq 1$ de forma que la serie $\sum_{k=h+1}^{+\infty}\rho_k y_k\in A_{n_1\ldots n_h}$, $h\in\mathbb{N}$.

Si $r\geqslant k$ entonces $y_r\in W_r = (\alpha_{n_1}.\alpha_{n_1n_2}.\ \ldots\alpha_{n_1\ldots n_r})^{-1}A_{n_1\ldots n_r}\subseteq$ $\subseteq(\alpha_{n_1}.\alpha_{n_1n_2}.\ \ldots\alpha_{n_1\ldots n_k})^{-1}A_{n_1\ldots n_r}$ (ya que $\alpha_{n_1\ldots n_j} > 1$ por construcción), luego $\sum_{r=k+1}^{+\infty}\rho_r y_r\in(\alpha_{n_1}.\alpha_{n_1n_2}.\ \ldots\alpha_{n_1\ldots n_k})^{-1}A_{n_1\ldots n_k} =$ $= B_{n_1\ldots n_k}$, y entonces se verifica que $\sum_{r=k+1}^{+\infty} z_r\in W_k$, $k\in\mathbb{N}$, $z_r\in\rho_r W_r$.

Ahora bien, si $x_k\in W_k$, $k\in\mathbb{N}$, y $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, por razonamiento análogo al de la Proposición anterior $s_{p(r+1)} - s_{p(r)}\in\rho_r W_r$, $r\in\mathbb{N}$

y entonces $\sum_{r=k+1}^{+\infty} (s_{p(r+1)} - s_{p(r)}) \in W_k$, $k \in \mathbb{N}$, esto es, si denotamos por $s = \lim_r s_{p(r)}$ como antes, $s - s_{p(k+1)} \in W_k$, $k \in \mathbb{N}$.

También $s_m - s_n \in W_n \; \forall m \geq n$ por tanto, como $p(k+1) \geq k$, $s - s_k = s - s_{p(k+1)} + s_{p(k+1)} - s_k \in W_k + W_k \subseteq W_{k-1}$, es decir, $\sum_{r=k+1}^{+\infty} x_r \in W_{k-1}$. c.q.d.

Sea ahora $\mathcal{C} = (W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una fibra de la red $\mathcal{W}'$ y $\dot{\rho}$ la estructura uniforme que define sobre $\mathcal{F}$. Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy para dicha estructura , es decir, se cumple que para cada $W_k \in \mathcal{C}$, existe $n(k) \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subseteq A_m + W_k$, $\forall m,n \geq n(k)$. Supongamos $(n(k))_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente y definimos

$$A = \left\{ y = \lim y_r :\ y_r \in A_{n(r)} \ \text{ y } \ y_r - y_{r+1} \in W_r \ \forall r \geq k,\ k \in \mathbb{N} \right\},$$ entonces

*2.7. Lema.*

*$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\dot{\mathcal{T}}$-converge a $A$ en $\mathcal{F}$, es decir, dado $V \in \mathcal{V}$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subseteq A + V$ y $A \subseteq A_n + V$ $\forall n \geq n_o$.*

Demostración.

Dado $V \in \mathcal{V}$ existe $k$ $(k(V))$ tal que $W_{k-1} \subseteq V$ (en otro caso, $\forall k \in \mathbb{N}$ existirá $x_k \in W_k$: $x_k \notin V$. Entonces, aplicando la Proposición 2.5 la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ sería $\mathcal{T}$-convergente, sin embargo la sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ no converge a 0, llegamos pues a una contradicción.) (1.11.0.)

Sea $y_k \in A_{n(k)}$. Como $A_{n(k)} \subseteq A_{n(k+1)} + W_k$, existirá $y_{k+1} \in A_{n(k+1)}$: $y_k - y_{k+1} \in W_k$.

Repitiendo este razonamiento, obtenemos una sucesión $(y_r : r \geq k)$ con $y_r \in A_{n(r)}$ y $y_r - y_{r+1} \in W_r$, y así tenemos $y_k - y_r =$ $\sum_{r=k}^{n-1} (y_r - y_{r+1}) \in W_k + W_{k+1} + \ldots + W_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq W_{k-1}$ $\forall n \geq k$

Aplicando la Proposición 2.6., sabemos que la serie $\sum_{r=k}^{+\infty} (y_r - y_{r+1})$ es $\mathcal{T}$-convergente, luego $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{T}$-converge a un punto $y\in E$, y por la construcción de $A$, $y\in A$, luego $A \neq \phi$.

Se verifica además que $y_k - y \in \overline{W}^{\mathcal{T}}_{k-1} \subseteq W_{k-1} + V$, y entonces $y_k \in A + W_{k-1} + V \subseteq A + V + V$. Como esto podemos hacerlo para cada $y_k \in A_{n(k)}$, obtenemos que $A_{n(k)} \subseteq A + V + V$. (1.11.1)

Recíprocamente, sea $y\in A$. Entonces $y = \lim_r y_r$, $y_r \in A_{n(r)}$, $y_r - y_{r+1} \in W_r$, $r \geq k$, $k\in\mathbb{N}$. Dado $V\in \mathcal{V}$, existe un $q$ $(q(V))$: $W_{q-1} \subseteq V$. Si $n \geq m \geq q$ $y_m - y_n = \sum_{r=m}^{n-1} (y_r - y_{r+1}) \in W_{m-1}$, aplicando el mismo razonamiento anterior, luego $y_m - y \in \overline{W}^{\mathcal{T}}_{m-1}$ , y obtenemos que

$y \in A_{n(m)} + \overline{W}^{\mathcal{T}}_{m-1} \subseteq A_{n(q)} + W_q + \overline{W}^{\mathcal{T}}_{q-1}$ (por ser $m \geq q$).

Así pues, $A \subseteq A_{n(q)} + W_{q-1} + W_{q-1} + V \subseteq A_{n(q)} + V + V + V$ (1.11.2)

De (1.11.1) y (1.11.2) deducimos:

Dado $V$ $\mathcal{T}$-entorno de 0 existe $k\in\mathbb{N}$ tal que si $p \geq n(k)$

$A_p \subseteq A_{n(k)} + V \subseteq A + V + V + V$, $A \subseteq A_{n(k)} + V + V + V \subseteq A_p + V + V + V + V$,

luego $(A_n)$ es $\dot{\mathcal{T}}$-convergente.

*2.8. Proposición.*

*Para cada libra $C = (W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{W}'$, $\mathcal{F}$ es $\dot{\mathcal{S}}$-completo.*

Demostración.

Si consideramos para cada $k\in\mathbb{N}$ $y_k \in A_{n(k)}$, por el razonamiento visto en el Lema anterior, existe $y\in A$ tal que $y_k - y = \sum_{r=k}^{+\infty} (y_r - y_{r+1})$ con $y_r - y_{r+1} \in W_r$, y aplicando la Proposición 2.6. obtenemos que $y_k - y \in W_{k-2}$. Como este razonamiento podemos repetirlo para cada $y_k \in A_{n(k)}$, se tiene que $A_{n(k)} \subseteq A + W_{k-2}$.

Por otra parte, si $y\in A$, aplicando un razónamiento visto -

en el lema anterior, y la Proposición 2.6., tenemos que existe un $q \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq q$ $y_m - y = y_m - y_n + y_n - y \in W_{m-1} + W_{m-1} \subseteq W_{m-2}$, eligiendo un $n \geq m$. Como esto podemos hacerlo para cada $y \in A$, tenemos que $A \subseteq A_{n(m)} + W_{m-2} \subseteq A_{n(q)} + W_q + W_{m-2}$.

Entonces, si consideramos un $p \in \mathbb{N}$: $p \geq (n(q), n(k))$, se verifica $A_p \subseteq A_{n(k)} + W_k \subseteq A + W_k + W_{k-2}$ y $A \subseteq A_{n(q)} + W_q + W_{m-2} \subseteq$

$\subseteq A_p + W_q + W_q + W_{m-2}$ y por tanto $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es $\dot{\xi}$-convergente.

Hemos probado así que $\mathcal{W}'$ es una $\mathcal{T}$-red estrictamente cerrada.(1.11.0) justifica que $\mathcal{W}'$ es una $\mathcal{T}$-red).

*2.9. Teorema.*

*Si $(E,\mathcal{T})$ es un espacio de Słowikowski entonces $(E,\mathcal{T})$ tiene una $\mathcal{T}$-red estrictamente cerrada.*

Demostración.

Es consecuencia inmediata de los resultados anteriores.

OBSERVACION.- En el caso en que $(E,\mathcal{T})$ es un espacio de Słowikowski estricto, M. Valdivia prueba que E tiene una red estricta, y entonces, por el Teorema 22 (26 ) de W. Robertson, se sigue directamente que E tiene una $\mathcal{T}$-red estrictamente cerrada.

*2.10. Teorema.*

*Si $(E,\mathcal{T})$ es un espacio vectorial topológico Hausdorff, entonces si $(E,\mathcal{T})$ es un espacio de Słowikowski, E tiene una red de tipo $\mathcal{C}$ (D.W.)*

Demostración.

Si $(E, \mathcal{T})$ es Hausdorff, si una red es $\mathcal{T}$-estrictamente cerrada, entonces es de tipo (c) (26), y aplicando el Teorema 21 (26), obtenemos que E tiene una red (D.W.)de tipo $\mathcal{C}$.

Vamos a ocuparnos ahora de la implicación recíproca. ¿En qué casos, si un espacio $(E, \mathcal{T})$ tiene una $\mathcal{T}$-red estrictamente cerrada, entonces $E \in \mathcal{D}_o$?

Dado $(E,\mathcal{T})$ un espacio vectorial topológico, no necesariamente separado, siguiendo el razonamiento de la Proposición 1.3. consideramos $(E,\mathcal{T}) \xrightarrow{\varphi} (G \times F, \mathcal{T}'_{\times}\mathcal{R}) \xrightarrow{\Pi_1} (G_1, \mathcal{T}'_{G_1})$,

donde $\varphi$ es un isomorfismo topológico y $\Pi_1$ es la proyección canónica. Si demostramos que $G_1 \in \mathcal{D}_o$, entonces aplicando el razonamiento de la Proposición 1.4. obtendremos que $E \in \mathcal{D}_o$.

Sea $\mathcal{W} = \{B_{n_1 \ldots n_k} : k, n_1, \ldots n_k \in \mathbb{N}\}$ una $\mathcal{T}$-red estrictamente cerrada en $(E,\mathcal{T})$.

*2.11. Lema.*

$$\mathcal{W}' = \{\Pi_1 \circ \varphi(B_{n_1 \ldots n_k}) : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\} \text{ es una } \mathcal{T}'_{G_1}\text{-red}$$

*estrictamente cerrada en* $G_1$.

Demostración.

Si $\mathcal{W}$ es una red en E, evidentemente $\mathcal{W}'$ es una red en $G_1$. Veamos que es estrictamente cerrada.

Sea $\mathcal{C} = (\Pi_1 \circ \varphi(B_{n_1 \ldots n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ una fibra de $\mathcal{W}'$. Si la fibra $(B_{n_1 \ldots n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ en E define la estructura uniforme $\dot{\rho}$ en $\mathcal{F}$, denotaremos por $\dot{\rho}'$ la estructura uniforme definida por $\mathcal{C}$ sobre $\mathcal{F}'$ (familia de partes de $G_1$).

Dada una sucesión $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\dot{\rho}'$-Cauchy, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n(k) \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq n(k)$ $A_m \subseteq A_n + \Pi_1 \circ \varphi\,(B_{n_1 \ldots n_k})$ y entonces $(\Pi_1 \circ \varphi)^{-1}(A_m) \subseteq (\Pi_1 \circ \varphi)^{-1}(A_n) + B_{n_1 \ldots n_k}$ $m,n \geq n(k)$, luego la sucesión $((\Pi_1 \circ \varphi)^{-1}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión $\dot{\rho}$-Cauchy y por tanto $\dot{\rho}$-convergente a un conjunto $A \in \mathcal{F}$. Se sigue directamente que la sucesión $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\dot{\rho}'$-converge a $\Pi_1 \circ \varphi(A)$.

Se verifica además que para cada fibra $\mathcal{C} = (W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{W}'$ en $G_1$, y V un abierto de $\mathcal{T}'_{G_1}$, $(\pi_1\circ\varphi)^{-1}(V)$ es un abierto, y si consideramos la fibra $\mathcal{C}'= (B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{W}$ en E, tal que $(\pi_1\circ\varphi)(B_k) = A_k$, $k\in\mathbb{N}$, por ser $\mathcal{W}$ una $\mathcal{T}$-red existe un $k\in\mathbb{N}$ tal que $B_k \subseteq (\pi_1\circ\varphi)^{-1}(V)$, luego $A_k\subseteq V$ y teneasí probado que $\mathcal{W}'$ es una $\mathcal{T}'_{G_1}$-red en $G_1$, para dicha topologia que es Hausdorff.

*2.12. Proposición.*

*Si* $\mathcal{W}' = \left\{A_{n_1\dots n_k}: k, n_1, \dots, n_k\in\mathbb{N}\right\}$ *es una* $\mathcal{T}'_{G_1}$*-red estrictamente cerrada en* $G_1$*, entonces, si suponemos cada* $A_{n_1\dots n_k}$ $\lambda_{n_1\dots n_k}$*-convexo, para algún* $\lambda_{n_1\dots n_k} > 2$, $k = 1, 2, \dots,$ *se verifica que* $G_1\in\mathcal{D}_0$.

Demostración.

Sea Q = N, definimos el conjunto P como

$P = \left\{(m_1, m_2, \dots, m_k) : k, m_1, \dots m_k\in\mathbb{N}\right\}$ y sea M el subconjunto de $P^Q$ tal que $M = \left\{(\mu_k): \mu_k = (n_1, \dots, n_k), k = 1, 2, \dots \text{ para alguna } - \text{sucesión } (n_k)\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right\}$.

Sea $E_{(n_1, \dots, n_k),k} = \mathrm{LIN}\,(A_{n_1\dots n_k}) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} nA_{n_1\dots n_k}$.

Por ser $A_{n_1\dots n_k}$ $\lambda_{n_1\dots n_k}$-convexo, la familia $(\lambda^{-n}_{n_1\dots n_k}A_{n_1\dots n_k})_{n=1}^{+\infty}$ es una cadena en $E_{(n_1,\dots,n_k),k}$ que define una topologia pseudometrizable (1 ). Veamos que con esta familia de subespacios $G_1$ tiene una $\mathcal{D}_0$ -representación:

$\alpha$) Sea $(\mu_k)\in P^Q$ : para cada subconjunto finito distinto de vacio $H\subseteq Q$ se verifica que $S(H,(\mu_k)) \neq \phi$ . Entonces, dado $A_p = \{1, 2, \dots, p\}\subseteq Q$, sea $((n_1)(n_1,n_2)\dots (n_1,n_2,\dots n_k)\dots)$ un elemento de M que está en

$S(A_p(\mu_k))$, entonces $\mu_1 = (n_1)$, $\mu_2 = (n_1,n_2)$, ... $\mu_p = (n_1, \ldots n_p)$

Como esto podemos hacerlo para cada $p \in \mathbb{N}$, entonces $(\mu_k) \in M$.

$\beta$) Para cada $r \in Q$, $(\mu_q) = (n_1,\ldots,n_q)_{q \in \mathbb{N}} \in M$ y cada subconjunto finito $H \subseteq Q$ distinto de vacio, se tiene que

Sea m el mayor entero de H y sea $(h_k) \in S(H,(\mu_q))$.

Si $r \leq m$, como $h_m = (n_1, \ldots, n_m)$, entonces $\bigcap\left\{E_{\mu_q,q} : q \in H\right\} =$

$= E_{\mu_m,m} \subseteq E_{\mu_r,r} \subseteq \bigcup\left\{E_{k_r,r} : (k_q) \in S(H,(\mu_q))\right\}$, (las inclusiones se verifican por la relación de inclusión que existe en la red).

Si $r > m$, dado $x \in E_{\mu_m,m} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} nA_{n_1\ldots n_m}$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$x \in nA_{n_1\ldots n_m}$, y así x es absorbido por unos ciertos $s_j$, $j = m+1$, $m+2$, ...r... luego $x \in E_{(n_1,\ldots,n_m,s_{m+1},\ldots s_r),r}$. Entonces, si denotamos por

$(k_q) = ((n_1)(n_1,n_2)\ldots(n_1,n_2,\ldots s_{m+1})\ldots(n_1 m n_2,\ldots s_{m+1},\ldots s_r)\ldots)$

$x \in \bigcup\left\{E_{k_r,r} : (k_q) \in S(H,(\mu_k))\right\}$. Como esto podemos hacerlo para cada

$x \in E_{\mu_m,m}$, obtenemos que

$\bigcap\left\{E_{\mu_k,k} : k \in H\right\} = E_{\mu_m,m} \subseteq \bigcup\left\{E_{k_r,r} : (k_q) \in S(H,(\mu_k))\right\}$.

Por otra parte, si $x \in G_1$, por definición de red, existe una sucesión $(m_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $A_{m_1\ldots m_k}$ absorbe x, $k = 1, 2, \ldots$

Si $h_k = (m_1,\ldots m_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ entonces $(h_k) \in M$ y $x \in E_{h_r,r}$, luego

$G_1 = \bigcup\left\{E_{s_r,r} : (s_k) \in M\right\}$.

$\delta$) Dado cualquier $(\mu_q) \in M$, sea $(x_n) \subseteq G_1$ una sucesión tal que la sucesión doble $(x_n - x_m)$ está finalmente contenida y converge al origen en cada $E_{\mu_k,k}$, $\mu_k = (n_1,\dots,n_k)$, $k = 1, 2, \dots$ para alguna sucesión $(n_q)$ de enteros positivos. (2.12.1)

Por ser $\mathcal{T}'_{G_1}$ -red estrictamente cerrada $\sum_{k=p+1}^{+\infty} x_k$ $\mathcal{T}'_{G_1}$-converge a un punto de $A_{n_1\dots n_{p-1}}$, cuando $x_k \in A_{n_1\dots n_k}$, $k = 1, 2, \dots$

Por (2.12.1) podemos elegir una subsucesión $(x_{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)$ tal que $x_{p_k} - x_{p_{k+1}} \in A_{n_1\dots n_k}$ (que es un entorno de 0 en la topologia de $E_{\mu_k,k}$) $k = 1, 2,\dots$ y entonces se verifica que $\sum_{k=1}^{+\infty} (x_{p_k} - x_{p_{k+1}})$ converge a un punto $z \in G_1$, y si denotamos por $x = x_{p_1} - z$, se verifica que $(x_{p_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x en $G_1$.

Supongamos que $(x_n)$ no converge a x en $G_1$. Entonces, existirá un $\mathcal{T}'_{G_1}$-entorno de 0 en $G_1$, U, y existirá una subsucesión $(y_n)$ de $(x_n)$ tal que $y_k - x \notin U$, $k = 1, 2, \dots$ Por un razonamiento análogo al del párrafo anterior, podemos encontrar una subsucesión $(y_{q_k})$ de $(y_n)$ convergente a un punto y $G_1$.

Construyendo ahora una subsucesión de $(x_n)$, $(x_{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ que tenga infinitos términos de $(x_{p_k})$ e infinitos términos de $(y_{q_k})$ tal que verifique que $x_{r_k} - x_{r_{k+1}} \in A_{n_1\dots n_k}$ $k = 1, 2, \dots$ y razonando como arriba, obtenemos que $(x_{r_k})$ convergen en $(G_1,\mathcal{T}'_{G_1})$ a un punto que debe coincidir con x e y. Llegamos pues a una contradicción, luego $(x_n)$ converge a x.

Supongamos finalmente que existe un $s\in\mathbb{N}$ tal que $(x_k - x)_{k\in\mathbb{N}}$ no está finalmente contenida en $E_{(n_1,\dots,n_s),s}$ o bien está finalmente contenida, pero no converge al origen en dicho espacio. Entonces existe un $h>0$ y una subsucesión $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)$ tal que

$$x_{m_{s+2}} - x \in hA_{n_1 \dots n_s} \quad (\text{ entorno de } 0 \text{ en } E_{(n_1,\dots,n_s),s}) \text{ y}$$

$$x_{m_k} - x_{m_{k+1}} \in hA_{n_1 \dots n_k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Por ser una $\mathcal{T}'_{G_1}$-red estrictamente cerrada, se verifica entonces que la serie $\sum_{k=s+2}^{+\infty} (x_{m_k} - x_{m_{k+1}})$ $\mathcal{T}'_{G_1}$-converge al punto $x_{m_{s+2}} - x$ de $hA_{n_1 \dots n_s}$. Llegamos pues a una contradicción.

Por tanto $G_1 \in \mathcal{D}_0$ y aplicando la Proposición 1.4. obtenemos que E tiene una $\mathcal{D}_0$-representación.

*2.13. Corolario.*

*Si $\mathcal{W}'$ es una $\mathcal{T}'_{G_1}$-red estrictamente cerrada, formada por conjuntos absolutamente p-convexos ($0 \lneq p \leq 1$), entonces $G_1 \in \mathcal{D}_0$.*

Entonces, como Corolario de los resultados 2.11 y 2.12 obtenemos:

*2.14. Teorema.*

*Si $\mathcal{W} = \left\{ B_{n_1 \dots n_k} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N} \right\}$ es una $\mathcal{T}$-red estrictamente cerrada en $(E,\mathcal{T})$ de forma que cada $B_{n_1 \dots n_k}$ es $\lambda_{n_1 \dots n_k}$-convexo para algún $\lambda_{n_1 \dots n_k} > 2$, $k \in \mathbb{N}$, entonces $(E,\mathcal{T}) \in \mathcal{D}_0$.*

*BIBLIOGRAFIA.*

(1) ADASH,N. - ERNST,B. - KEIM,D.

"Topological Vector Spaces". Lecture Notes in Mathematics. No. 639. Springer-Verlag (1978)

(2) BANACH, S.

"Theorie des operations linéaires". Monografie Matematyczne. 1, Polskie Towarzysto Matematyczne. Warszawa.(1932)

(3) CASCALES,B.

Tesis Doctoral "Algunas estructuras en e.v.t. Teoremas de localización, Gráfica Cerrada y metrizabilidad de compactos". Murcia (1985)

(4) DE WILDE, M.

"Reseaux dans les espaces linéaires à semi-normes". Mem. Soc. R. Sc. Liège 18,2 (1969)

(5) -----------

"Closed Graph Theorems and webbed spaces". Pitman. London-San - Francisco - Melbourne (1978)

(6) DIEUDONNE, J. - SCHWARTZ,L.

"La dualité dans les espaces (F) et (LF)". Ann. Inst. Fourier 1,61-101.(1950)

(7) FLORET,K.

"Folgenretraktive Sequenzen Lokalconvexer Räume". J. Reine Angew. Math. 259,65-85. (1973)

(8) GARLING,D.J.H.

"A generalized form on inductive limit topology for vector spaces Proc. London Math. Soc. (3) 14, 1-28 (1964).

(9) GROTHENDIECK, A.

"Sur les espaces (F) et (DF)". Summa. Brasil. Math. 3,6,57-122. (1954).

(10) ----------------

"Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires". Mem. Am. Math. Soc. Nº 16. (1955)

(11) IYAHEN, S.O.

"On certain classes of locally convex spaces". Proc. London Math. Soc. 18, 285-307 (1968).

(12) ----------

"Semiconvex spaces" Glasgow Math. J. 9, 111-118, (1968).

(13) ----------

"A completeness Theorem" Rev. Roum. Math. Tome XVIII nº5, 681-688. Bucarest (1973).

(14) ----------

"Linear topologicar spaces with fundamental sequences of compact sets". Math. Ann. 200,179-183. (1973).

(15) JARCHOW, H.

"Locally convex spaces". B.G. Teubner-Stuttgart (1981).

(16) KOHN,J.

"Induktiven Limiten nicht Lokalconvexer Räume". Math. Ann. 181, 269-278 (1969).

(17) KELLEY, J.L.

"Hypercomplete linear topological spaces" Michigan Math.J. 5, 235-246 (1958).

(18) KELLEY,J.L.-NAMIOKA.

"Linear topological spaces". D. Van Nostrand Company Inc. (1963).

(19) KOTHE, G.

"Uber zwei Satze von Banach". Math.Z. 53, 203-209 (1950).

(20) --------

"Topological vector spaces I" Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg New York. (1969).

(21) LIGAUD, J.P.

"Sur les limites inductives d'espaces localment pseudoconvexes" Collq. Anal. Fonctions 1971. Bordeaux, Bull. Soc. Math. France Mém. 31-32 (1972) p.241-247.

(22) MARTINEAU, A.

"Sur des théoremes de S. BAnach et de L. Schwartz concernant le graphe fermé". Studia Math. 30,43-51 (1968)

(23) PERSSON, A.

"A generalization of two-norm spaces". Art. Mat.5 (1963) 27-36.

(24) PTAK,V.

"Completeness and the ppen mapping theorem". Bull Soc. Math. de France, 86, 41-47 (1958).

(25) ROBERTSON,A.P.-ROBERTSON,W.

"On the closed graph Theorem". Proc. Glasgow Math. Ass. 3,9-12. (1956)

(26) ROBERTSON,W

"On the closed graph theorem and spaces with webs". Proc. London

Math. Soc. (3)24 (1972), 692-738.

(27) RAIKOV, D.A.

"A criterion of completeness of locally convex spaces" Uspehi Math. Nauk. 14(1959) pag 242-257.

(28) ----------

"Double Closed Graph Theorem for Topological Vector Spaces". Siberian Math.J. (Translated from Russian) 7,2, (1966) 287-300.

(29) SAXON,S.

"Nuclear and product spaces, Baire-like spaces and the strongest locally convex topology". Math.Ann. 197, 87-106. (1972)

(30) SAXON,S - TODD, A.

"A property of locally convex Baire Spaces". Math. Ann. s06,23-34. (1973)

(31) SCHWARTZ, L.

"Sur le Théoreme du graphe fermé". C.R.Acad. Sc. Paris, T.263 serie A, 602-605. (1966).

(32) SŁOWIKOWSKI, W.

"On continuity of inverse operators". Bull. Am. Math. Soc. 67(5) 467-470 (1961)

(33) TOMASEK, S.

"M-Barrelled Sapces". Comment Math. Univ. Carolinae 11, 185-204 (1970)

(34) -----------

"M-Bornological Spaces". Comment Math. Univ. Carolinae 11, 235-248 (1970)

(35) TURPIN, Ph.

"Convexités dans les espaces vectoriels topologiques généraux"

Dissertations Math. (Rozprawy Mat.) 131, Polska Akademia. Warszawa (1976).

(36) VALDIVIA, M.

"On suprabarrelled spaces". Functional Analysis. Holomorphy and Aproximation Theory: Proccedings. Rio de Janeiro L.N.M. Springer Verlag 843 (1978)

(37) -----------

"Topics in locally convex spaces". North-Holland. Mathematics Studies Nº 67 (1982)

(38) ------------

""Quasi LB spaces" Pendiente de publicación.

(39) ------------

"On Słowikowski, Raikov and De Wilde Closed Graph Theorem" "Aspects of Mat. and its apli." Ed. J. Barroso. Elsevies Science Publi. North-Holland (1986)

(40) VALDIVIA,M.-PEREZ CARRERAS,P.

"On totally barrelled spaces". Math.Z. 178, 263-269 (1981)

(41) WAELBROECK, L.

"Topological vector spaces and algebras". Lecture Notes in Math. 230. Berlin-Heidelberg-New York. Springer (1971)

...ERSIDAD DE VALENCIA — FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Reunido el Tribunal que suscribe, en el día de la fecha, acordó otorgar, por unanimidad, a esta Tesis doctoral de D. TRINIDAD CASASUS ESTELLES

la calificación de APTO CUM LAUDE

Valencia, a 20 de FEBRERO de 1987

El Secretario,

El Presidente