UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
FACULTAT DE MATEMÀTIQUES

Departament de Didàctica de la Matemàtica

EL MODELO DE VAN HIELE APLICADO A LA GEOMETRÍA DE LOS SÓLIDOS. OBSERVACIÓN DE PROCESOS DE APRENDIZAJE

TESIS DOCTORAL

PRESENTADA POR:
Gregoria Guillén Soler

DIRIGIDA POR:
Dr. D. Ángel Gutiérrez Rodriguez

Valencia, 1997

s Matemáticas

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
ESCOLA UNIVERSITARIA DE
MAGISTERI "AUSIÀS MARCH"

Departament de Didàctica de la Matemàtica

Alcalde Reig, 8; Aptdo. 22045
46071-Valencia (Spain)

Dr. D. ÁNGEL GUTIÉRREZ RODRÍGUEZ, Catedrático de E.U. de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València

HAGO CONSTAR:

1) Que la presente memoria titulada *El Modelo de Van Hiele aplicado a la Geometría de los Sólidos. Observación de Procesos de Aprendizaje* ha sido realizada bajo mi dirección por Dña. GREGORIA GUILLÉN SOLER, en el Departament de Didàctica de la Matemàtica de la Universitat de València, y constituye su tesis para optar al Grado de Doctor en Matemáticas.

2) Que esta memoria cumple los requisitos exigidos por la legislación vigente, por lo que autorizo su presentación en la Universitat de València.

Y para que así conste, firmo el presente documento.

En Valencia, a 25 de junio de 1997.

Fdo.: Ángel Gutiérrez R.

DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LES MATEMÀTIQUES - UNIVERSITAT DE VALÈNCIA -

Para mi madre y ...

¡Es un pueblo para el que se han levantado esos Alleghanys y Líbanos de ensueño!...

¿Qué benévolos brazos, qué hora feliz me devolverán esa región de dónde vienen mis sueños y mis menores movimientos?

ARTHUR RIMBAUD
Illuminations

AGRADECIMIENTOS

Aún cuando este trabajo figure bajo mi nombre, bien sé que poco hubiera hecho sin tener vuestro apoyo.

Por eso, quiero agradecer al director de la tesis, Angel Gutiérrez, haberla hecho posible cuando yo ya había desistido; a Luis Puig, el haberme brindado el mar de sus ideas; a Fernando Cerdán que dedicara horas de su tiempo a conversar conmigo tan generosa como eficazmente; a José Mª Fortuny, sus desinteresadas y valiosas sugerencias, y su calidad humana; a Moisés Coriat, de quien he recibido múltiples y acertadas ideas junto a una solidaridad de compañero que sólo los verdaderos amigos ofrecen; y a Rosa y Olimpia porque, además de su inapreciable aportación, han dejado una huella más profunda que es nuestra amistad.

Agradezco la labor de mis alumnos por tantas cosas como me enseñaron, la solícita comprensión de José Eugenio Alós, al atender mis llamadas cuando ciertos problemas informáticos me agobiaban y la constante afabilidad de Pilar Torres, siempre dispuesta a mis requerimientos fotocopiadores.

Dedico esta tesis a mi padre que tanto me ha dejado; a mi madre, por estar siempre ahí y, cómo no, por sus exquisitas comidas, siempre a punto; a mis hermanos, por dejar que me pelee con ellos y a mis sobrinos y sobrinas, por sus propias historias y permitir que me entrometa en ellas.

No puedo dejar de nombrar a mis amigas y amigos, pues me han dejado reír y llorar: vosotros sabéis quién sois.

Quisiera que supierais que me declaro persona afortunada de teneros a todos, siempre junto a mi.

A cada avance de lo conocido a lo desconocido, aumenta el misterio.

LAWRENCE DURRELL,
Montoulive.

No quiero que se extravíen ustedes.

[...] No puedo sino orientarles en esta selva. Para alcanzar la felicidad, si es que todavía creen en ella, deberán emprender otros caminos.

CONNIE PALMEN,
Las leyes

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Es un hecho de sobra conocido que la geometría ha sido relegada a un segundo plano en la enseñanza elemental española (al igual que en muchos otros países de nuestro entorno cultural). Nuestro trabajo se desarrolla cuando nuestro sistema educativo está sufriendo un cambio, con la consiguiente reforma curricular que ello conlleva. Los decretos de la Generalitat Valenciana por los que se establecen los currículos para la comunidad valenciana reconocen a la geometría un papel importante para la formación general y matemática de los estudiantes de primaria (6 a 11 años) y secundaria (12 a 18 años). En ellos se incentiva el estudio de esta materia y, en particular, el de la geometría tridimensional, y se dan sugerencias sobre cómo plantear su enseñanza.

Desgraciadamente no se dispone de muchos materiales, ni de investigaciones sobre dificultades, para llevar a la práctica esta propuesta de trabajo. Si bien ya se están elaborando materiales para la enseñanza secundaria obligatoria (ESO; 12 a 16 años) (Alsina et al., 1997; Baena et al., 1996), al consultar los materiales curriculares de diversas editoriales, correspondientes a los niveles de primaria (del nuevo currículo de la educación obligatoria española), no hemos observado los cambios necesarios que podrían haberse hecho en la manera en que hasta ahora se planteaba el estudio de esta materia.

El trabajo que se presenta en esta memoria[1] consiste en la aplicación del modelo de Van Hiele a la enseñanza de la geometría de los sólidos y en la observación de procesos de aprendizaje de futuros profesores de enseñanza primaria (estudiantes de Magisterio) y de niños de 12 años, con la consiguiente aportación al propio modelo y a la mejora del proceso de enseñanza/aprendizaje de la geometría de los sólidos.

En algunas de las investigaciones consultadas relativas al modelo de Van Hiele se han diseñado materiales curriculares sobre la base de este modelo considerando de manera explícita las fases de aprendizaje. Además, como señala Jaime (1993, p. C2–2), "en la mayoría de los casos en que los

---

[1] Este trabajo ha sido subvencionado por la "Dirección General de Enseñanza Superior" del Ministerio de Educación y Cultura (Proyecto PB93-0706).

autores afirman que sí que han prestado atención a este componente del modelo, no especifican claramente cuál es la parte de la unidad que corresponde a cada una de las fases". Los únicos trabajos que conocemos en los que sí que se hace esta identificación son los de Ludwig (1986), Bobango (1987), Jaime y Gutiérrez (1990, 1996), Corberán et al. (1991, 1994) y Jaime (1993), que corresponden a unidades de enseñanza para los triángulos, cuadriláteros y polígonos en general o para las isometrías del plano.

Si bien se han realizado importantes investigaciones en todo el mundo en torno a la aplicación del modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele para la geometría plana y para otras áreas de las matemáticas, con respecto a la geometría de los sólidos se ha realizado menos investigación. La que se ha llevado a cabo, o bien tenía como objetivo, entre otros, evaluar la hipótesis de la globalidad o localidad de los niveles de razonamiento de Van Hiele para diferentes áreas de la geometría (Gutiérrez y Jaime, 1987) o evaluar si el nivel de razonamiento de los estudiantes es significativamente más alto en la geometría plana que en la espacial (Chang, 1992). También se han dado algunos intentos para caracterizar explícitamente los niveles de Van Hiele para la geometría de los sólidos (Hoffer, 1981; Lunkenbein, 1983a, 1983b, 1984; Fortuny, 1988; Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991; Pegg & Davey, 1991; Davey & Holliday, 1992; Gutiérrez, 1992a). Y para evaluar el nivel de razonamiento de grupos de estudiantes en esta área de la geometría (Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991). Pero como indica Gutiérrez (1992a) "las características que se han delimitado para los diferentes niveles de razonamiento para la geometría tridimensional son insuficientes", por lo que son necesarias más investigaciones en este campo.

Probablemente uno de los motivos que explican la existencia de pocas investigaciones basadas en los niveles de razonamiento de Van Hiele para la geometría de los sólidos es la dificultad de iniciar y de continuar el estudio. Para una investigación como la nuestra, por una parte hay que precisar los niveles de razonamiento en su aplicación concreta al caso de la geometría de los sólidos. Por otra, hay que diseñar las experiencias que se deben proponer a los estudiantes para conseguir su avance de un nivel de razonamiento al siguiente. Además, para evaluar el nivel de razonamiento de los estudiantes en esta área de la geometría resulta conveniente diseñar tests y delimitar los posibles modelos de respuesta de los estudiantes a los ítems propuestos. Pero, a pesar de su dificultad, dado que el uso de los niveles de razonamiento de Van Hiele está dando buenos resultados, como señala Jaime (1993, p. C-2-4), "resulta interesante el abrir nuevas líneas de investigación en áreas de la geometría como la proporcionalidad geométrica (semejanza), la geometría espacial o las isometrías del plano".

Hershkowitz (1990, p. 74) al comentar la teoría de Van Hiele apunta que las investigaciones recientes conducen a la cuestión de "si introducir a los estudiantes al estudio de algunos conceptos geométricos y progresar con cada uno de ellos en paralelo hasta el tercer nivel de Van Hiele (la aproximación usual) o introducir al estudiante al estudio de una estrecha colección de conceptos (ejemplo, los cuadriláteros), progresar hasta el tercer nivel, y entonces tratar otros conceptos. Esta cuestión ha sido discutida intensamente en los encuentros del grupo de geometría y en las conferencias del grupo internacional para la Psicología en Educación matemática (*International Group for the Psychology of Mathematics Education*, PME) (Hershkowitz & Vinner, 1987). Merece investigarse y puede tener un papel importante en la planificación de la enseñanza de la geometría". Otra aportación de nuestra investigación es la de proporcionar información sobre cómo progresan los estudiantes en los niveles de razonamiento cuando se aborda el estudio en paralelo de varios conceptos geométricos relacionados con diferentes familias de sólidos y de sus elementos.

Por último, cabe hacer mención a la poca investigación realizada en la que se observen procesos de aprendizaje de la geometría de los sólidos.

En esta memoria damos una propuesta para la aplicación del modelo de Van Hiele a la geometría de los sólidos y aportamos unas conclusiones extraídas de la observación del proceso de enseñanza/aprendizaje. En el capítulo 1 presentamos una caracterización de los niveles 1, 2 y 3 de Van Hiele para la geometría de los sólidos. En el capítulo 2 aportamos una secuencia de actividades organizadas teniendo en cuenta el modelo de Van Hiele junto con comentarios que explican lo que contienen las actividades propuestas, sus objetivos o el orden en que se presentan, y aportan información sobre procesos de aprendizaje de estudiantes de Magisterio y de niños de 12 años. En el capítulo 3 comentamos los tests que hemos diseñado, que incluimos en el anexo 3, para evaluar el nivel de razonamiento de los estudiantes en la geometría de los sólidos. En este mismo capítulo delimitamos los modelos de respuesta de los estudiantes para cada uno de los ítems propuestos en los tests, que incluimos en el anexo 4, y para cada uno de ellos evaluamos el nivel de razonamiento y "calidad" del mismo. Por último, en el capítulo 4 presentamos un resumen final con las aportaciones que se contemplan en este trabajo que pueden servir para mejorar la enseñanza/aprendizaje de la geometría de los sólidos y las conclusiones más interesantes que hemos obtenido del trabajo realizado.

Los resultados de este trabajo, los hemos obtenido, por un lado, del estudio de las investigaciones realizadas sobre el modelo de Van Hiele, sobre la geometría y sobre su enseñanza/aprendizaje. Por otro, del análisis de la información que aportaron las experimentaciones realizadas con estudiantes de diferentes niveles educativos, en las que utilizamos metodologías de trabajo distintas, de las que vamos a dar cuenta a continuación.

Para caracterizar los niveles de Van Hiele en la geometría de los sólidos (capítulo 1) y diseñar la unidad de enseñanza para los sólidos (capítulo 2) hemos realizado un análisis de:

- Las respuestas que dieron por escrito los estudiantes de la Escola Universitària de Magisteri «Ausiàs March»[2] a determinadas actividades (ver anexo 1) que les planteamos para que las contestaran en casa con anterioridad a que se resolvieran en clase. También aprovechamos las observaciones que hicimos sobre las cuestiones que hicieron los estudiantes en clase o las respuestas a las actividades que dieron posteriormente.

- Las entrevistas individuales efectuadas con algunos estudiantes de Magisterio de los que habían entregado una gran variedad de actividades resueltas en casa.

- Las sesiones de trabajo realizadas con estudiantes de Magisterio (de diferentes especialidades) y con estudiantes de 6º de Educación General Básica (EGB; 12 años)[3].

- Los resultados de la experimentación de una unidad de enseñanza previa utilizada para el estudio del nivel de razonamiento de estudiantes de Magisterio.

Para evaluar el nivel de razonamiento de los estudiantes (capítulo 3) diseñamos dos tests, que administramos antes y después del desarrollo de una unidad de enseñanza. También diseñamos modelos de respuestas, que facilitaron codificar la información que nos proporcionaron los tests. Finalmente aplicamos un método de evaluación que ya había sido utilizado en otras investigaciones (ver, por ejemplo, Corberán et al., 1991; Gutiérrez et al., 1991; Jaime, 1993) y que se estaba utilizando en otras (Huerta, 1997).

Este trabajo fue realizado durante varios cursos académicos (de 1992 a 1997) y la mayor parte de él lo desarrollamos tomando como ámbito grupos completos de estudiantes de Magisterio tal y como se habían distribuido en el centro educativo, con lo que no pretendemos que los resultados obtenidos sean representativos.

---

[2] En esta Escuela Universitaria es donde se prepara a los futuros profesores de educación infantil (hasta 5 años) y primaria (6-12 años); en lo sucesivo, al referirnos a estos estudiantes los nombramos como estudiantes de Magisterio.

[3] Los cursos de 1º a 6º de EGB se corresponden con lo que se denomina enseñanza primaria en la actualidad.

CAPÍTULO 1

MARCO TEÓRICO Y DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

Este capítulo tiene por objeto reseñar todos aquellos resultados, procedentes de trabajos anteriores y de nuestra propia investigación, que han supuesto el soporte teórico del estudio que se expone en esta memoria. A su vez pretende dar cuenta de cómo hemos obtenido los resultados que mostramos en ella.

En primer lugar, dado que el trabajo que presentamos es una aplicación del modelo de Van Hiele a la geometría de los sólidos, comenzamos haciendo un breve resumen de las características generales del modelo (sección 1.1).

Posteriormente, en la sección 1.2 indicamos el análisis realizado de los resultados de los estudios consultados, llevados a cabo por otros investigadores, que han tenido un papel relevante en nuestro trabajo. En la sección 1.3 exponemos nuestros trabajos sobre poliedros, realizados con anterioridad a la investigación que se describe en esta memoria.

La sección 1.4 incluye nuestra caracterización de los niveles de Van Hiele para la geometría de los sólidos. Si bien ésta es una de las aportaciones que hacemos al modelo de Van Hiele, dado que forma parte del soporte teórico en el que se ha basado el resto de nuestra investigación, nos ha parecido adecuado incluir esta caracterización en el primer capítulo.

Por último, en la sección 1.5 hacemos una presentación general, por etapas, de la investigación propia que ha dado lugar a los resultados que exponemos en esta memoria y damos cuenta del marco en el que hemos realizado la experimentación.

1.1. DESCRIPCIÓN DEL MODELO DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE

Son numerosas las publicaciones que hacen referencia al modelo de Van Hiele. En algunas se cuenta de manera detallada el origen y difusión del modelo; consultar por ejemplo Jaime (1993). En otras puede encontrarse una descripción minuciosa de sus componentes; como ejemplo cabe destacar las descripciones del modelo de Van Hiele que aparecen en Hoffer (1983), Shaughnessy (1986), Burger & Crowley (1987), Fuys et al. (1988), Hershkowitz (1990) y Clements & Battista (1992). En castellano se pueden consultar los trabajos de Corberán et al. (1989, 1991, 1994), Jaime y Gutiérrez (1990) y Jaime (1993). También cabe nombrar la publicación en castellano que ofrece una relación detallada de referencias comentadas en relación al modelo de Van Hiele; la de Gutiérrez y Jaime (1989).

Por esta razón no hacemos aquí una descripción exhaustiva del modelo de Van Hiele, sino que damos un resumen de las características generales del mismo que facilite la comprensión del trabajo que presentamos.

El modelo de Van Hiele está formado por dos componentes: El primero es la descripción de los distintos tipos de razonamiento geométrico de los estudiantes a lo largo de su formación matemática, que van desde el razonamiento intuitivo de los niños de pre-escolar hasta el formal y abstracto de los estudiantes de las licenciaturas de Matemáticas (los 5 "niveles de razonamiento"); el segundo es una descripción de cómo puede un profesor organizar la actividad en sus clases para que los estudiantes puedan acceder al nivel de razonamiento superior al que tengan (las 5 "fases de aprendizaje").

1.1.1. LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO (PRIMER COMPONENTE)

En las publicaciones sobre el modelo de Van Hiele se utilizan dos numeraciones de los niveles: De 0 a 4 y de 1 a 5; nosotros preferimos la segunda para mantener las etiquetas de los niveles de acuerdo con sus ordinales. En la bibliografía existente se pueden encontrar listas muy completas de las características generales de los cinco niveles de razonamiento; ver, por ejemplo, Hoffer (1983), Burger & Shaughnessy (1986) y Fuys et al. (1988); por lo que aquí enumeramos las principales características de cada nivel, que son suficientes para entender las referencias a los niveles de razonamiento que aparecen en lo sucesivo en esta memoria.

NIVEL 1 (RECONOCIMIENTO)

- Percepción de los objetos en su totalidad y como unidades.
- Descripción de los objetos por su aspecto físico; se diferencian o clasifican considerando semejanzas o diferencias físicas globales entre ellos.
- No se suelen reconocer explícitamente los elementos característicos ni las propiedades de los objetos.

NIVEL 2 (ANÁLISIS)

- Percepción de los objetos como formados por partes y dotados de propiedades, aunque no se identifican las relaciones entre ellas.
- Descripción de los objetos con listas de propiedades; puede que no sean suficientes para caracterizar el objeto o que se incluyan más de las necesarias.
- Deducción de nuevas propiedades a partir de la experimentación y posible generalización a todos los objetos de la misma familia.
- La demostración de una propiedad se realiza mediante la comprobación en uno o en pocos casos.

NIVEL 3 (CLASIFICACIÓN)

- Se pueden realizar clasificaciones lógicas de los objetos considerando propiedades o relaciones ya conocidas.
- Comprensión de lo que es una definición matemática y sus requisitos.
- Utilización de razonamientos deductivos informales para demostrar una propiedad. Ya se detecta una necesidad de justificar de manera general la veracidad de una propiedad.
- Comprensión de los pasos individuales de un razonamiento lógico de forma aislada, pero no del encadenamiento de estos pasos ni de la estructura de una demostración.
- Incapacidad para realizar una demostración completa en la que haya que encadenar varias implicaciones, ni se siente su necesidad. Por este motivo, tampoco se comprende la estructura axiomática de las matemáticas.

NIVEL 4 (DEDUCCIÓN)

- Se pueden reformular enunciados de problemas o teoremas, trasladándolos a un lenguaje más preciso.
- Realización de demostraciones (de varios pasos) mediante razonamientos deductivos formales.

- Capacidad para comprender la estructura axiomática de las matemáticas.
- Aceptación de la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas o mediante diferentes formas de demostración (definiciones equivalentes, etc.).

NIVEL 5 (RIGOR)

- Capacidad para desarrollar actividad matemática prescindiendo de cualquier soporte concreto.
- Capacidad para realizar deducciones abstractas basándose en un sistema de axiomas determinado.
- Aceptación de la existencia de sistemas axiomáticos diferentes y capacidad para analizarlos, compararlos y para establecer la consistencia de un sistema de axiomas.
- Comprensión de la importancia de la precisión al tratar las relaciones y los fundamentos entre estructuras matemáticas.
- Capacidad para funcionar con el máximo nivel de rigor matemático.

La definición original del modelo de Van Hiele descrita en Wirszup (1976) plantea la existencia de 5 niveles de razonamiento, si bien alguna investigación ha incluido un nivel anterior al primero de Van Hiele para clasificar a los estudiantes que no alcanzan el primer nivel (Clements, 1992; Clements & Battista, 1992); está abierta como tema de investigación la cuestión de la conveniencia o no de eliminar del modelo el quinto nivel.

Además de que no hay unanimidad para aceptar el número de niveles de Van Hiele que resulta conveniente distinguir, tampoco la hay respecto a las características que se asocian a los niveles delimitados. El mismo Van Hiele, como consecuencia del proceso de la evolución de sus ideas, en sus descripciones del modelo ha modificado en varias ocasiones la cantidad de niveles de razonamiento y las características de los mismos. En su primera descripción planteaba la existencia de tres niveles, que corresponden a los niveles 2º, 3º y 4º actuales y en Van Hiele (1986, p. 47) sugiere la posible existencia de niveles superiores. Jaime (1993, p. C1–6) señala que en la Conferencia sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría: Temas para la investigación y la práctica (*Conference on learning and teaching geometry: Issues for research and practice*), que tuvo lugar en junio de 1987 en la Universidad de Siracusa (EE.UU.), Van Hiele planteó una nueva propuesta de definición de los niveles de razonamiento, en la que contemplaba la existencia de tres niveles que corresponden a una reorganización de los niveles 1º a 4º actuales.

Por otro lado, Treffers (1987, pp. 244-245), al describir el currículo de primaria holandés (Wiskobas), también habla de tres niveles de Van Hiele, que llama macro-niveles, y considera que describen el proceso de aprendizaje realizado en un gran periodo de tiempo. Pero hay que señalar que estos macro-niveles no coinciden con los tres niveles descritos por Van Hiele, sino que se reinterpretan éstos para tomarlos como una descripción macroscópica del proceso de aprendizaje de las matemáticas en primaria. Vale la pena mencionar que el proyecto curricular Wiskobas no sólo describe el proceso de aprendizaje en un área de la geometría, sino en todo el currículo de primaria, por lo que la integración del modelo de Van Hiele en su marco teórico de referencia, que como detallaremos en el apartado 1.1.3 las investigaciones han mostrado que tiene una aplicación local, les ha llevado a la reinterpretación de los tres niveles de razonamiento descritos por Van Hiele.

Treffers (op. cit.) también distingue otros niveles, que llama microniveles, y considera que son los que describen el proceso de enseñanza/aprendizaje a corto plazo. No delimita el número de microniveles que hay, lo que sí queda claro es que éstos tampoco se corresponden con los niveles de Van Hiele. Como éste señala, "Freudenthal no está seguro de que se distingan niveles en el proceso de aprendizaje que se logren por reflexión y recursión de la misma manera como los de Van Hiele. Desde su punto de vista no hay una tripartición rígida, sino más bien, en principio, una progresión ilimitada de acuerdo a microniveles que sólo se delimitan relativamente unos y otros. Este es un punto de vista que nosotros subscribimos también" (Treffers, op. cit. p. 247). De este trabajo se puede entresacar además que se supone que hay cambio de micronivel cuando lo que hay en un nivel que sirve como medio de organización se convierte en objeto de estudio, por lo que vamos a tener muchos más microniveles en el proceso de aprendizaje que los señalados por Van Hiele.

En la actualidad la mayoría de las investigaciones referentes al modelo aceptan que en su forma más general el modelo de Van Hiele considera la existencia de cinco niveles de razonamiento, pero con frecuencia se utiliza una caracterización que ignora el quinto nivel. Esta última caracterización que consta de cuatro niveles es la que utilizamos en esta memoria.

Para nuestro trabajo, la inclusión de este nivel no aporta nada desde un punto de vista práctico, ya que se encuentra fuera del alcance de los estudiantes con los que hemos realizado la mayoría de nuestras experimentaciones (estudiantes de Enseñanza primaria y estudiantes de Magisterio). Queremos adelantar que hemos centrado la atención especialmente en los tres primeros niveles:

a) La unidad de enseñanza de los sólidos que hemos diseñado es útil para la enseñanza primaria, la secundaria y la formación de profesores de primaria y de secundaria. Como también afirma Jaime (1993, p. C1–9), todas las investigaciones llevadas a cabo en estos niveles educativos, tanto en España como en otros países señalan que son pocos los estudiantes que tienen una adquisición alta del cuarto nivel de razonamiento, y éste empieza a detectarse en algunos estudiantes al final de la Educación secundaria. La unidad de enseñanza de los sólidos propuesta aquí no incluye actividades para el cuarto nivel de Van Hiele, ya que no hemos tenido la posibilidad de trabajar con estudiantes que razonasen de acuerdo a las características del cuarto nivel, o que estuvieran en condiciones de avanzar, como consecuencia de nuestra instrucción, hasta la adquisición completa de este nivel. Por el mismo motivo las caracterizaciones propuestas aquí para los niveles de Van Hiele para la geometría de los sólidos tampoco contienen las del nivel 4. No hemos tenido la oportunidad de trabajar con suficientes estudiantes cuyo razonamiento pueda considerarse del nivel 4, como para poder caracterizarlo.

b) La propuesta de evaluación del razonamiento de los estudiantes que exponemos en esta memoria es válida para los niveles de razonamiento primero a cuarto. Pero dado que la aplicación práctica que presentamos se llevó a cabo con estudiantes de Magisterio, los tests que presentamos están dirigidos para evaluar los tres primeros niveles. Sólo uno de los ítems que contienen los tests está dirigido a la evaluación del cuarto nivel. A priori esperábamos que apenas hubiera estudiantes que pudieran ubicarse en el cuarto nivel; hecho que se ha corroborado en la realidad.

1.1.2. LAS FASES DE APRENDIZAJE (SEGUNDO COMPONENTE)

El modelo de Van Hiele propone una sucesión de cinco fases de aprendizaje para llevar a un estudiante desde un nivel de pensamiento al siguiente. Básicamente, estas cinco fases constituyen un esquema para organizar la enseñanza. En cada nivel la instrucción comienza con actividades de la fase primera y continúa con actividades de las siguientes fases. Al finalizar las actividades de la fase quinta, los estudiantes deben haber alcanzado el nivel de razonamiento siguiente. Las fases dentro de los niveles se describen de la siguiente forma:

FASE 1 (INFORMACIÓN)

- El estudiante aprende a reconocer el campo en el que va a trabajar (los tipos de problemas que va a resolver o a estudiar, los procedimientos y materiales que utilizará, etc.) por medio del profesor.

- Esta fase sirve también para que el docente averigüe los conocimientos previos de los alumnos sobre el tema que se va a abordar y su nivel de razonamiento en el mismo.

Esta fase puede ser innecesaria para algunos niveles. Por ejemplo, cuando se produce una enseñanza continua que incluye el paso de un nivel al siguiente puede ser que el profesor ya tenga información sobre los conocimientos y el nivel de razonamiento de sus estudiantes y que éstos la tengan sobre el campo de estudio. En este caso, la fase primera se puede eliminar, o reducir a una única actividad que centra la atención sobre lo que se desconoce en particular.

Por tales motivos, en la unidad de enseñanza que proponemos para los sólidos, sólo incluimos un conjunto completo de actividades para la fase de información en los dos primeros niveles (ver capítulo 2, secciones 2.4.1 y 2.5.1), mientras que para el nivel 3 hemos dado algunas orientaciones y sólo hemos propuesto una tarea (ver apartado 2.6.1). Esto se debe a que en todas nuestras experimentaciones hemos comenzado a desarrollar el estudio de los sólidos con las actividades que proponemos para los niveles primero o segundo. En caso de que la instrucción comience con el nivel 3, se pueden seleccionar tareas de los niveles segundo y tercero para averiguar hasta qué punto los estudiantes están familiarizados con las estructuras propias del nivel correspondiente.

FASE 2 (ORIENTACIÓN DIRIGIDA)

- El estudiante explora el campo de investigación por medio del material.
- El alumno sabe en qué dirección está orientado el estudio, pues sus investigaciones sobre el material son guiadas mediante actividades (diseñadas por el profesor o planteadas por los estudiantes) y ciertas directrices dadas por el profesor (por ejemplo: doblar, medir, buscar una simetría).
- Las actividades propuestas deben llevar directamente a los resultados y propiedades que los estudiantes tienen que comprender.
- El trabajo está seleccionado de tal forma que las estructuras características se le presentan al estudiante de forma progresiva.

Esta fase es fundamental ya que en ella se construyen los elementos básicos de la red de relaciones del nivel correspondiente. Van Hiele (1986, p. 97), respecto a las actividades de esta fase señala que "si se seleccionan cuidadosamente, constituyen la base adecuada del pensamiento de nivel superior". El papel del profesor es clave en esta fase, pues, por un lado, debe seleccionar las situaciones en cuya resolución aparezca alguno de los elementos (conceptos, propiedades, definiciones, relaciones entre conceptos, entre propiedades o entre familias, etc.) en los que los estudiantes tienen que basar su nueva forma de razonamiento y, por otra parte, debe guiar a los estudiantes para que adquieran correctamente las estructuras propias del nivel.

FASE 3 (EXPLICITACIÓN)

- Las experiencias adquiridas se unen a símbolos lingüísticos precisos. Los estudiantes aprenden a expresarse sobre estas estructuras en el transcurso de discusiones, que tienen lugar en el aula. El profesor procura que en las discusiones se emplee la terminología usual. Los alumnos deben intentar expresar en palabras o por escrito los resultados obtenidos y discutir sus experiencias con el profesor y los otros estudiantes, con el fin de que afiancen las propiedades y relaciones descubiertas y consoliden el vocabulario técnico que corresponde al tema objeto de estudio.

En la unidad de enseñanza que proponemos para los sólidos (ver capítulo 2) no hemos incluido actividades específicas para esta fase. En cierto modo, renunciamos a esta fase porque su contenido constituye para nosotros un invariante metodológico que se manifiesta mediante una actitud permanente de diálogo y discusión en todas las fases. Las actividades que proponemos en la unidad de enseñanza para cada nivel y los comentarios que hacemos sobre ellas dan cuenta de este espíritu de diálogo que tenemos para nuestras clases.

FASE 4 (ORIENTACIÓN LIBRE)

- Los estudiantes aplican sus nuevos conocimientos y lenguaje a investigaciones posteriores sobre el material.
- El profesor debe proponer a sus estudiantes actividades que sean "situaciones abiertas" que preferiblemente puedan desarrollarse de diversas formas o que acepten diferentes soluciones. En el campo de investigación se coloca toda clase de indicios que muestren el camino a seguir pero que el estudiante deberá combinar adecuadamente. El maestro debe orientar a los estudiantes en la resolución de las actividades sólo en caso necesario, y lo hará con sugerencias que ayuden al estudiante a salir del atolladero, en vez de dirigir completamente hacia la solución.

En esta fase se debe producir la consolidación del aprendizaje realizado en las fases anteriores. El campo de investigación es en gran parte conocido y los estudiantes tienen que combinar los conocimientos adquiridos y aplicarlos a las situaciones diferentes que se proponen; la intervención del profesor se debe reducir a lo imprescindible. Como señala Van Hiele (1986,

p. 54) "los estudiantes aprenden a encontrar su camino en la red de relaciones por sí mismos, mediante actividades generales".

FASE 5 (INTEGRACIÓN)

- Los estudiantes condensan en un todo lo aprendido sobre el tema y la red de relaciones que están terminando de formar. Integran los nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente.
- Los conocimientos nuevos que el profesor puede fomentar con las tareas propuestas para esta fase se refieren a organizaciones y comprensiones globales. Estas actividades deben ayudar a organizar lo que ya se ha aprendido con las actividades de las otras fases de este nivel.

A los estudiantes en las fases anteriores se le ha orientado, pero todavía deben adquirir una visión general de los contenidos y de los métodos que tiene a su disposición. Tienen que adoptar una red de relaciones que conectan con la totalidad del dominio explorado. Se trata de adquirir una visión general de todo lo aprendido sobre el tema objeto de estudio, integrada por los conocimientos adquiridos en este nivel y los que ya tenían los estudiantes anteriormente. Las actividades de esta fase tienen que favorecer esta integración y permitir al profesor averiguar si se ha conseguido. Como resultado de esta quinta fase se alcanza el nuevo nivel de razonamiento.

Jaime (1992, p. 65) señala que "no siempre se pueden encontrar ejercicios con una formulación particular, que no sea la petición directa de esquemas y resúmenes que pongan de manifiesto la relación de todos los elementos importantes del nivel. Por ello, los ejercicios de la fase 5 pueden consistir, en muchas ocasiones en el enunciado de relaciones y en resúmenes dirigidos por el profesor. También en esta fase se pueden incluir actividades que relacionen lo trabajado a lo largo del nivel con otros conocimientos de los alumnos, lo cual depende de la instrucción recibida en otros temas".

En la unidad de enseñanza que proponemos para los sólidos sólo hemos diseñado actividades para la quinta fase para los dos primeros niveles (ver capítulo 2, secciones 2.4.4 y 2.5.4). El hecho de que los estudiantes con los que hemos realizado las experimentaciones no hayan adquirido un dominio del nivel 3 ha influido en el hecho de que no hayamos diseñado actividades para la fase 5 para este nivel. Por otro lado, también hemos tenido en cuenta que en los niveles anteriores hemos dado indicaciones sobre el tipo de actividades que se pueden proponer.

1.1.3. PROPIEDADES DEL MODELO DE VAN HIELE

Para una adecuada comprensión y utilización del modelo de Van Hiele, junto con las características particulares de los niveles de razonamiento o fases de aprendizaje, hay que considerar y analizar algunas propiedades globales del modelo; su importancia práctica radica en que muestran las líneas básicas que debe seguir un profesor que desee basar sus clases en este modelo de enseñanza.

RECURSIVIDAD

Los elementos implícitos en el razonamiento de nivel N se hacen explícitos en el razonamiento del nivel N+1. La siguiente tabla sintetiza esta característica.

	ELEMENTOS EXPLÍCITOS	ELEMENTOS IMPLÍCITOS
Nivel 1	Objetos	Propiedades de los objetos
Nivel 2	Propiedades de los objetos	Relaciones entre propiedades y/u objetos
Nivel 3	Relaciones entre propiedades y/u objetos	Deducción formal de relaciones
Nivel 4	Deducción formal de relaciones	Reglas básicas de un sistema axiomático
Nivel 5	Reglas básicas de un sistema axiomático	

JERARQUÍA Y SECUENCIA DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO

No es posible alterar el orden de adquisición de los niveles, es decir que no es posible alcanzar un nivel de razonamiento sin antes haber superado, de forma ordenada, los niveles inferiores. Van Hiele (1986, p. 51) afirma que "el pensamiento del segundo nivel no es posible sin el del nivel básico; el pensamiento del tercer nivel no es posible sin el pensamiento del segundo nivel".

Aquí es necesario poner en evidencia un peligro que se deriva del aprendizaje memorístico: Un estudiante puede aparentar un nivel superior al que realmente tiene porque ha aprendido procedimientos rutinarios propios del nivel superior, aunque realmente no los comprenda.

Los estudios que conocemos que han analizado esta propiedad confirman su validez (ver por ejemplo, Mayberry, 1981; Usiskin, 1982; Burger & Shaughnessy, 1986; Denis, 1987; Fuys et al., 1988). La proporción de estudiantes cuyo comportamiento no se ajusta a esta propiedad suele ser poco significativa y es usual que su presencia se deba a alguna deficiencia o problema en la metodología empleada para la asignación de niveles.

El método de evaluación de las respuestas a los tests y el procedimiento de determinación de los grados de adquisición de los niveles de Van Hiele que hemos aplicado en nuestro trabajo, y que comentamos en el capítulo 3 de esta memoria, se basan en la idea de que si un problema puede ser resuelto según los niveles N–1 y N, la resolución correcta del problema por métodos del nivel N supone tener adquirido el nivel N–1.

RELACIÓN ENTRE EL LENGUAJE Y LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO

Cada nivel lleva asociado un tipo de lenguaje, entendiendo por ello no sólo las palabras o construcciones gramaticales empleadas, sino también el significado que se les da. Esta característica explica la incomprensión que puede existir entre dos personas que utilicen lenguajes de diferentes niveles. Con esto, Van Hiele nos está diciendo que si queremos que un estudiante nos entienda debemos situarnos en su nivel de razonamiento, en vez de pretender que él se sitúe en el del profesor.

En el apartado 1.4.2 de este capítulo ampliamos lo relativo a esta propiedad para la geometría de los sólidos. Explicamos el significado que los estudiantes que razonan en diferentes niveles de razonamiento pueden darle a términos que corresponden a procesos matemáticos (los ejemplos más claros que marcan las diferencias en los lenguajes) y el problema de utilización del vocabulario propio de la geometría de los sólidos que aparece en los diferentes niveles.

LOCALIDAD DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO

Por localidad de los niveles se entiende que una persona puede razonar en distintos niveles de razonamiento al trabajar en diferentes áreas de la geometría. La idea de globalidad de los niveles supone que el nivel de razonamiento de una persona es el mismo en cualquier campo de la geometría.

Los estudios que conocemos que han analizado esta propiedad se inclinan o confirman la localidad de los niveles (Mayberry, 1981; Gutiérrez y Jaime, 1987; Chang, 1992). El propio Van Hiele acepta la localidad pues sugiere que, una vez que se ha alcanzado un nivel de razonamiento para un concepto, o área de la geometría, es menos costoso alcanzar este mismo nivel para otros conceptos o áreas. Freudenthal (1973) también plantea la idea de las organizaciones locales de la geometría.

Al elaborar la unidad de enseñanza de los sólidos hemos tenido en cuenta esta característica: hemos planteado tareas para las diferentes familias de sólidos que hemos considerado. Esto es, suponemos que para que los estudiantes consigan el dominio de un nivel de razonamiento para una familia de sólidos es necesario trabajar correctamente la familia correspondiente. Si bien hemos constatado que el dominar un nivel de razonamiento para una familia de sólidos es menos costoso si ya se ha dominado para otra familia de sólidos, es necesario prestar atención a cada una de las familias para que esto ocurra.

CONTINUIDAD DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO

Esta propiedad se refiere a la manera como se produce el paso de un nivel al siguiente. Éste ha sido uno de los interrogantes que ha presentado la descripción teórica del modelo de Van Hiele, pues en sus planteamientos iniciales (Van Hiele, 1986) los autores del modelo propugnaban una secuencia discreta de niveles, es decir un paso muy rápido, casi instantáneo, de los estudiantes de un nivel al siguiente. No obstante, dado que las características de cada nivel de razonamiento son múltiples, es necesario preguntarse cómo hay que tratar a los estudiantes que presentan indicios de adquisición de un nivel y que también presentan indicios de no haberlo adquirido. Esta cuestión ha sido abordada en numerosos informes, entre ellos los de Fuys, Geddes & Tischler (1988), Burger & Shaughnessy (1990), Corberán et al. (1991, 1994) y Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991), en los que se pone en evidencia la presencia de estudiantes que muestran características propias de dos niveles consecutivos, lo cual significa que esos alumnos se encuentran en medio de un proceso de adquisición del razonamiento del nivel superior.

En la actualidad es más aceptada la consideración de la continuidad en la adquisición de los niveles y ello produce mejores resultados en los análisis de los comportamientos de los estudiantes. El trabajo que se describe en esta memoria se basa en el carácter continuo de la transición entre los niveles; supone que el paso de un nivel al siguiente no se produce de forma brusca, sino que hay un periodo de transición en el que se entremezclan razonamientos de dos niveles consecutivos.

EL PAPEL DE LA INSTRUCCIÓN EN EL MODELO DE VAN HIELE

En el modelo de Van Hiele la instrucción es un factor básico para avanzar en el nivel de razonamiento. Van Hiele (1986, p. 50) apunta que "la transición de un nivel al siguiente no es un proceso natural; tiene lugar bajo la influencia de un programa de enseñanza/aprendizaje. La transición no es posible sin el aprendizaje de un nuevo lenguaje". También llama la atención sobre el hecho de que "es posible que ciertas formas de enseñanza no permitan alcanzar los niveles superiores, pues los métodos de pensamiento usados en esos niveles permanecen inaccesibles a los estudiantes". Por otro lado señala que "la maduración que lleva a un nivel superior debe considerarse, por encima de todo, como un proceso de aprendizaje y no como una maduración de tipo biológico" (Van Hiele, 1986, p. 173). En el apartado 1.4.3 de este capítulo precisamos nuestra concepción sobre el papel de la instrucción en la geometría de los sólidos, integrada en el marco del modelo de Van Hiele.

1.2. SOBRE LA LITERATURA CONSULTADA

Cuando se diseña una unidad de enseñanza para la geometría de los sólidos, la visión que se tiene de la naturaleza de las matemáticas y de la geometría (visión que trasciende a la mera concepción como asignatura), así como el conocimiento de la geometría y de sus aplicaciones, se refleja en la unidad de enseñanza que se propone. Por otro lado, situando ya los contenidos en un sistema educativo, esto es, como objeto de enseñanza y que tienen que ser aprendidos por los estudiantes, también resulta clara la repercusión que tiene en la unidad de enseñanza propuesta la concepción que se tiene de la geometría y del proceso de enseñanza/aprendizaje, esto es, la idea que se tiene sobre cómo evoluciona el conocimiento de los estudiantes cuando, inmersos en el sistema escolar, se les plantea una secuencia de enseñanza/aprendizaje.

En esta sección vamos a mostrar los resultados de las investigaciones consultadas que han tenido influencia en nuestro trabajo. Los resultados los presentamos agrupados en tres bloques. Uno corresponde a trabajos teóricos que aportan información bien sobre nuestra concepción de la naturaleza de las matemáticas, de la geometría y de la enseñanza de la geometría o sobre el proceso de enseñanza/aprendizaje de conceptos geométricos o aportan sugerencias para la instrucción (apartado 1.2.1). Otro se refiere a investigaciones sobre materiales curriculares diseñados teniendo en cuenta los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje de Van Hiele (apartado 1.2.2). Por último, hemos agrupado trabajos que han realizado un estudio específico de la geometría tridimensional (apartado 1.2.3); concretamente los que tienen que ver con el modelo de Van Hiele aplicado a esta área de la geometría o se refieren a algunos aspectos de los sólidos, o a su enseñanza/aprendizaje.

1.2.1. TRABAJOS TEÓRICOS

Nuestro referente teórico para el diseño de la unidad de enseñanza ha sido el modelo de Van Hiele, en cuyo marco, el objetivo principal de la enseñanza es desarrollar la capacidad de razonamiento geométrico de los estudiantes. Las fases de aprendizaje (cuyas características hemos indicado en el apartado 1.1.2) permiten organizar la instrucción de modo que el nivel de razonamiento de los estudiantes evolucione de un nivel al superior (las características de los distintos niveles las hemos descrito en el apartado 1.1.1).

Hay otros estudios que se pueden integrar en el modelo de Van Hiele, que aportan otro tipo de información también muy útil para diseñar una unidad de enseñanza sobre los sólidos y de ellos nos vamos a ocupar en este apartado. Corresponden a estudios teóricos que explican de manera global nuestras tomas de postura ante diferentes concepciones que se presentan sobre la naturaleza de las matemáticas, la geometría, o su enseñanza; aportan información para organizar la enseñanza de la geometría de los sólidos que se puede interpretar en el marco del modelo de Van Hiele, o explican cómo se produce en los estudiantes el desarrollo cognitivo de algunos conceptos geométricos cuando se lleva a cabo un proceso de enseñanza determinado y las dificultades con las que se encuentran.

De todos ellos nos hemos centrado en los trabajos de Freudenthal; Puig y en los realizados por Vinner, Hershkowitz & Bruckheimer.

HANS FREUDENTHAL

Freudenthal ha difundido en numerosas ocasiones los trabajos realizados por Van Hiele (Freudenthal, 1970, 1971, 1973, 1978a). Para diseñar una unidad de enseñanza sobre los sólidos tomando como referencia el modelo de Van Hiele, pensamos que su trabajo es de referencia obligada; en nuestro caso sus reflexiones han permitido dar respuesta a una gran variedad de cuestiones que nos hemos planteado, que están repartidas en los capítulos 1 y 2 de esta memoria. No vamos a comentar aquí todo su fascinante trabajo. En lo que sigue sólo vamos a hacer referencia a los aspectos que hemos tenido en cuenta de una u otra manera para diseñar la unidad de enseñanza propuesta.

Comenzamos describiendo el curso que presenta Freudenthal (1970), ya que la manera de organizarlo, a la cual llama *organización local,* se refleja también en nuestra unidad de enseñanza. El curso corresponde a un estudio intuitivo de figuras y transformaciones, en el que la estructura deductiva aparece muy poco, y aunque paulatinamente ésta se refuerza, el curso se limita a una organización local, lo que significa que las proposiciones no evidentes se reducen mediante razonamientos a otras que se suponen evidentes, pero la estructura deductiva nunca se consolida hasta el grado de llegar a una organización global.

Esta idea de organización local sin carácter axiomático no es sólo una forma de estructurar un currículo de geometría, sino un principio pedagógico que Freudenthal ha desarrollado en otros trabajos. En 1971 y 1973, después de plantear e intentar responder lo que él llama tres cuestiones filosóficas (qué son las matemáticas, qué es la educación, y si se debería enseñar las matemáticas como un sistema deductivo) encontramos otra pregunta ¿qué es geometría?, y una fundamentación teórica de la geometría como ciencia que parte del espacio (del espacio en el que el niño vive y se relaciona) y que sirve como vehículo para desarrollar el razonamiento lógico.

Estos trabajos fundamentan teóricamente nuestra posición respecto a las relaciones que existen entre los contenidos geométricos; esto es, el tipo de razonamientos que los engarzan y que en la enseñanza pretendemos desarrollar como objetivo de primer orden: razonamientos lógicos, que significa procesos matemáticos de análisis, clasificación, definición, conjetura, generalización y demostración[1]. En el apartado 1.4.2 de este

---

[1] En el trabajo que presentamos en esta memoria con el término *procesos* nos referimos a *analizar, clasificar, definir, probar, demostrar, conjeturar, particularizar, generalizar, abstraer;* al hablar de *procesos matemáticos* nos fijamos "en las características que estas acciones tienen como componentes de la práctica matemática" (Puig, 1996b, p. 15).

Otros autores utilizan además el término *habilidad* al referirse a alguna de estas acciones y a otras que también pueden considerarse como componentes del aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, Alsina et al. (1997, p. 31) indican: "Quisiéramos hacer unas breves referencias a las habilidades deseables y a los procesos más relevantes.

Las habilidades de *observar* (visualización), *abstraer* (estructuración), *comunicar* (traducción) *y organizar* (determinación y clasificación), se corresponden con las siguientes etapas del aprendizaje".

El término de *habilidades* se utiliza especialmente referido a la *visualización.* Gutiérrez (1992b, pp. 45) indica que "la tercera componente diferenciada de la visualización son las habilidades utilizadas por los individuos para la creación y procesamiento de imágenes visuales" y enumera las habilidades que ha recopilado Del Grande (1990) como las que pueden integrar la percepción espacial de un individuo. Gutiérrez (1996, pp. 8 y 9) subraya que la lista de habilidades necesarias para procesar imágenes mentales podría ser muy larga si estuviéramos interesados en una descripción general del campo desde el punto de vista psicológico y señala las habilidades que ha delimitado McGee (1979), recopilando resultados de investigaciones previas en habilidades espaciales, realizadas desde este punto de vista. También señala las habilidades fisio-psicológicas que ha precisado Hoffer (1977) que son relevantes para el aprendizaje de las matemáticas. Concluye que "si nos limitamos al entorno de la geometría, sólo son pertinentes parte de las habilidades mencionadas ".

capítulo nos referimos de nuevo a Freudenthal al explicar lo que entendemos por alguno de estos procesos en cada uno de los niveles de Van Hiele.

Freudenthal (1970, 1971, 1973, 1983, 1984) defiende en múltiples ocasiones que el estudio de la geometría debe comenzar por el espacio y da razones que lo explican. Freudenthal (1983, p. 263) indica que el comenzar con el punto en geometría se inspira en la idea de que en aritmética se comienza con el 1, pero como desarrollo cognitivo la geometría no comienza con el punto sino con las formas rígidas. Añade que si hubiera alguna cosa de los cuerpos que en el desarrollo permitiera desvirtuarse sería la solidez más que el aire de armazón.

Nuestra postura también es que el estudio de la geometría debe comenzar por el espacio, por lo que al diseñar una unidad de enseñanza para los sólidos, presuponemos que en numerosas ocasiones tendremos que introducir actividades para el estudio de los polígonos. Si bien en la que proponemos en el capítulo 2, no ha sido así, sí que lo hemos reflejado de alguna manera: ha sido en la fase 1 donde indicamos que se desarrollarán algunas unidades de enseñanza complementarias. Dado que hay varias unidades desarrolladas sobre la base del modelo de Van Hiele para el estudio de los polígonos y que comentamos en el apartado 1.2.2, no hemos considerado interesante incorporar actividades con este propósito en la unidad de enseñanza diseñada.

Freudenthal (1971, p. 417) aporta su interpretación de los niveles de Van Hiele y de cómo se va avanzando en el dominio de los niveles correspondientes:

> El estudiante aplica determinadas reglas nuevas inconscientemente hasta que en un cierto momento llega a tomar conciencia de ellas. Del análisis de la estructura de la materia pasa a analizar su propia actividad matemática. Capta las leyes y regularidades de su actividad, lo que le permite aplicarlas más conscientemente. Incluso puede tener éxito formulando sus principios en términos generales.
>
> Los niveles de van Hiele del proceso de aprendizaje se caracterizan a menudo por rasgos lógicos: la actividad en un nivel es objeto de análisis en el siguiente, la actividad operativa en un nivel se convierte en contenido en el siguiente nivel.

En el trabajo que presentamos vamos a utilizar el término *habilidad* referido a acciones que tienen que ver con "comunicar" sólidos o con la construcción de los mismos.

Pero el trabajo que ha tenido más relevancia para el nuestro se presenta en Freudenthal (1973, 1983) en cuanto que aporta sugerencias o comentarios concretos referidos ya a la enseñanza/aprendizaje de conceptos geométricos:

- Ahí encontramos información sobre lo que ya conocen los niños sobre algunos conceptos geométricos antes de entrar en la escuela.

- Freudenthal (1983) destaca que en la experiencia de los estudiantes hay un inmenso mundo de fenómenos que son organizados por los objetos geométricos; basta con que se busque en las construcciones, la naturaleza, el arte, el mundo de los juegos, etc.

- Sitúa el estudio de los poliedros en un contexto geométrico: el contexto de los cuerpos rígidos reproducibles por congruencia y semejanza y señala otros contextos en los que se pueden presentar los fenómenos objeto de nuestro estudio (el contexto topográfico, o el contexto topológico). Incluso advierte que los objetos sólidos se pueden presentar en contextos que no son geométricos con un significado o con un conjunto de acciones permitidas en ellos que no coincide con el que tiene en ese contexto. Para ello utiliza el ejemplo de la caja, a la que en el entorno se le permiten acciones que la siguen transformando en cajas, que no se permiten en un contexto geométrico.

- También llama la atención sobre algunas acciones o resultados que se permiten o no dependiendo del contexto en el que se presentan y cuestiona dónde está el límite para esa tolerancia. Por ejemplo, plantea la cuestión de por qué un dado de marfil con las esquinas redondeadas y un dado con las esquinas afiladas se aceptan ambos como ejemplos de cubo y dónde está el límite para que un dado rugoso se acepte también como ejemplo.

- Para algunos fenómenos que se organizan con conceptos geométricos, indica y explica en qué contextos tienen que aparecer primero y cómo se van constituyendo algunos objetos mentales.

- Para algunos conceptos situados en contextos geométricos indica algunas consecuencias didácticas que hemos tenido en cuenta al diseñar la unidad de enseñanza.

Además, Freudenthal (1973, p. 408) da sugerencias sobre cómo debe desarrollarse el estudio de la geometría con material concreto:

> Lo que es más importante es cómo se utiliza el material. Claro que no debe aparecer como un simple juego. La intención de Dina Van Hiele al diseñar el material concreto es la de hacer que los chicos actúen con lógica, pensando. Las manos y el cerebro trabajan conjuntamente para responder a la cuestión de cómo está hecha una cosa concreta. Si las definiciones se les dan a ese nivel éstas serán

genéticas, esto es, diciendo cómo está hecha la cosa que se define. Si después esta definición es reformulada de un modo más formal, la nueva definición deberá conectar con la anterior. El último desarrollo lógico deberá quedar grabado en los chicos con el uso del material concreto.

Proporciona actividades (en la mayoría de los casos tomadas de los cursos de Dina Van Hiele) que, o bien compara entre ellas con la intención de mostrar que requieren razonamientos de diferente nivel, o las comenta por separado para explicar qué tipo de actividad matemática se puede desarrollar con ellas (Freudenthal, 1971, 1973, 1978, 1983, 1984).

En las introducciones que hacemos a las unidades de enseñanza diseñadas para los diferentes niveles de razonamiento y en los comentarios que hacemos sobre las tareas que incluimos en ellas citamos en repetidas ocasiones a Freudenthal; estas referencias aclaran mejor cómo hemos utilizado en nuestro trabajo lo señalado en los párrafos anteriores.

Por último, en este apartado queremos explicar el significado que hemos dado a algunos términos que utilizamos en el trabajo que presentamos, que hemos tomado de la terminología que introduce Freudenthal (1983) en el fascinante estudio fenomenológico que realiza. Pensamos que la mejor manera de hacerlo puede ser intentando responder a las siguientes preguntas:

- ¿Qué entiende Freudenthal por *concepto* y por *objeto mental?* ¿Qué diferencia hay entre *objeto mental* y *concepto*?
- ¿Cuál es el problema didáctico clave? ¿Cómo va evolucionando el objeto mental? ¿Qué es lo que entiende Freudenthal por *constitución de objetos mentales* versus *adquisición de conceptos?*

Vamos a hacerlo empleando el trabajo de Puig (1997), quien interpreta parte del estudio de Freudenthal (1983) y lo amplía al incorporar otros elementos en su análisis[2].

Si bien el término concepto suele utilizarse en el lenguaje cotidiano no es así con el término *objeto mental.* Puig (1997) indica que "en una primera aproximación, la contraposición objeto mental/concepto que plantea

---

[2] Puig (1997) expone los rasgos más importantes de una concepción de la naturaleza de las matemáticas que hace uso de ideas que se derivan de la fenomenología de las matemáticas desarrollada por Freudenthal y de una idea de sistemas matemáticos de signos que tiene su origen en trabajos realizados por Eugenio Filloy e incorpora en esta concepción ideas que proceden de Lakatos y de Kitcher. Este exhaustivo trabajo en castellano, junto con el curso desarrollado por Puig en abril-mayo de 1991, han facilitado considerablemente la comprensión del trabajo de Freudenthal (1983), y a parte de sus interpretaciones hacemos referencia en la memoria que presentamos.

Freudenthal puede verse como la consecuencia de considerar a las personas que conciben o usan las matemáticas frente a las matemáticas como disciplina o conjunto de saberes histórica, social o culturalmente establecidos". Apunta que "podemos partir pues de una imagen inicial: la contraposición objeto mental/concepto es una contraposición entre lo que está en la cabeza de las personas –los objetos mentales– y lo que está en las matemáticas como disciplina –los conceptos".

También describe en términos semióticos la diferencia entre objeto mental y concepto (y utiliza para ello el concepto de número) e interpreta lo que Freudenthal llama *objeto mental número,* que como él señala podría haberse denominado simplemente el concepto que una persona tiene de número, como "el campo semántico personal". Indica que los contextos cotidianos de los números son los distintos lugares en que podemos experimentar los fenómenos que han sido organizados mediante el concepto de número, tanto los fenómenos para los que originariamente se creó como otros a los que se encuentra extendido en la actualidad. Señala que la idea de objeto mental hay que verla también como un medio de organización de fenómenos. Y que los objetos mentales se constituyen en cadenas fenómenos/medios de organización, de la misma manera que sucede con los conceptos, con el consiguiente aumento de nivel.

Cabe aclarar que en estas cadenas no se va directamente de los fenómenos al objeto mental y de éste al concepto. Esta idea de objeto mental que estamos dando (que ya no es la del primer objeto mental que se constituye) incluye la posibilidad de que las propias definiciones de los conceptos formen parte de los objetos mentales que estamos constituyendo. Así, los objetos mentales no se constituyen sólo con fenómenos, de manera que a las definiciones no se llegue nunca. Una vez que se tiene la definición, ésta puede formar parte de alguna manera de lo que constituye el objeto mental.

Pero vale la pena señalar que no es necesario que la definición forme parte del objeto mental y que cuando ésta interviene en el objeto mental, forma parte de él pero no lo sustituye. Por ejemplo, aunque se tenga una definición de caja, además de la definición forma parte del objeto mental las cajas que se han construido con diferentes materiales, los dibujos que se han visto o que se han dibujado, las acciones que ha realizado para construirlas, dibujarlas o experimentar con ellas, el conjunto de ejemplos que esa persona ha visto o experimentado.

Respecto a lo que hay que enseñar, del trabajo de Freudenthal se desprende que éste toma partido por una enseñanza en la que uno se preocupa más de todos los fenómenos que se organizan con los conceptos que se quieren enseñar que de que se tiene que llegar a los conceptos. Esto es, cuando hay que tomar decisiones curriculares sobre lo que se tiene que enseñar, se pone el énfasis en la consideración de suficientes fenómenos de los que se organizan con los conceptos que se quieren enseñar para que los objetos mentales que se constituyan sean lo más ricos posible. Puig (1997) lo traduce, utilizando el concepto de número como ejemplo, como que la intención de los sistemas educativos tendría que ser que el campo semántico personal de los estudiantes sea lo suficientemente rico como para permitirles interpretar adecuadamente todas las situaciones en las que hay que usar "número" o los números. Esto es, constituir un objeto mental conlleva poder dar cuenta con él de todos los usos en todos los contextos o poder organizar todos los fenómenos correspondientes. Por otro lado, *adquirir un concepto* "implica examinar cómo ha sido establecido en las matemáticas organizado local o globalmente en un sistema deductivo" (Puig, op. cit. pp. 66-67).

De la unidad de enseñanza que hemos propuesto en el capítulo 2 también se desprende que tomamos partido por una enseñanza en la que más que de que se tiene que llegar a los conceptos nos hemos preocupado de delimitar una gran variedad de fenómenos que se organizan con los conceptos que se quieren enseñar. La unidad de enseñanza propuesta también tiene como propósito que se constituyan objetos mentales que sean suficientemente ricos para poder interpretar adecuadamente una gran variedad de situaciones en las que están implicados los conceptos geométricos relacionados con los sólidos. Es por esto por lo que en este trabajo utilizamos la terminología de Freudenthal; hablamos de *objeto mental,* de objeto mental inicial y del que se va constituyendo a partir de la experiencia del estudiante, de la manera como hemos indicado en los párrafos anteriores. Tenemos que advertir que lo que en términos de Freudenthal expresaríamos como que el objeto mental *se va constituyendo* nosotros a veces lo indicamos también como que el objeto mental *se va ampliando,* como que *se va construyendo* y como que *se va formando.*

Antes de acabar este apartado queremos señalar también otras informaciones que aporta Freudenthal relativas a objetos mentales y conceptos que pueden verse reflejadas en unidad de enseñanza propuesta. Freudenthal (1983) señala que con los objetos mentales se puede trabajar aunque no se llegue nunca al concepto. Y destaca la geometría como un dominio de las matemáticas en el que se puede avanzar mucho sin conceptos ya que en la geometría elemental los objetos mentales bastan para organizar los fenómenos. Además, la geometría puede considerarse especial por otra razón: como indica Puig (op. cit. p. 69), "la formación de conceptos puede hacerse con organizaciones locales en las que se resuelvan las distancias entre los objetos mentales y el concepto". Esto no quiere decir que en la geometría no haya ejemplos en los que sí que haya distancia entre el objeto mental y el concepto. Los ejemplos que utilizan Freudenthal y Puig para mostrarlo son los conceptos de punto, línea y superficie. Utilizan también otros ejemplos (la curva de Jordan) para subrayar, por un lado, que en algunos casos la distancia entre el objeto mental inicial y el concepto puede ser inmensa y, por otro, que dado que los objetos mentales no conducen muy lejos, es preciso formar conceptos, y además mediante una formación de conceptos que involucra más que una organización local.

Si tenemos en cuenta estas observaciones que acabamos de hacer, cabe matizar que hemos de tener presente que en algunos casos la distancia entre el objeto mental primero y el concepto es demasiado grande para intentar conectarlos en el nivel de enseñanza considerado. Esto ocurre por ejemplo si consideramos diferentes definiciones de poliedro, poliedro regular y poliedro arquimediano a las que hacemos referencia en el capítulo 2. Lo que explica que no hayamos pretendido que los objetos mentales primeros se constituyeran tomando como referencia esas definiciones y que haya sido para las actividades del nivel 3 para las que las hayamos sugerido como objeto de estudio; estas definiciones surgen en un proceso de precisión de ideas de conceptos provocado por la aparición de objetos que nos obligan a revisar las definiciones que tenemos para ellos, de manera que o bien elaboramos las definiciones mencionadas para aceptar modelos como ejemplos, o imponemos condiciones para restringir el mundo de ejemplos para un concepto dado.

También vamos a hacer referencia a la posibilidad[3] de que los fenómenos organizados por alguno de los conceptos considerados sean tan variados que se constituyan objetos mentales diferentes según el campo de fenómenos que se exploren en la enseñanza, o varios objetos mentales si se exploran fenómenos de varios tipos. En estos casos, para la adquisición del concepto es preciso integrar estos objetos mentales diferentes en un único objeto mental. Y este es un momento clave en la enseñanza de ese concepto. En la unidad de enseñanza propuesta un ejemplo de lo que acabamos de exponer lo encontramos en el concepto de poliedro. Al final del apartado siguiente lo explicamos con más detalle.

SHLOMO VINNER, RINA HERSHKOWITZ, MAXIM BRUCKHEIMER

En este apartado incluimos estudios teóricos sobre la formación de conceptos en geometría que intentan explicar el proceso de construcción que tiene lugar cuando una vez que se ha adquirido un concepto se pide a los estudiantes que se identifiquen o se construyan ejemplos y no ejemplos de él (Vinner & Hershkowitz, 1983; Hershkowitz, 1990). En lo que sigue vamos a hacer un breve resumen de estas publicaciones, a apuntar en qué medida

---

[3] En Puig (1997, pp. 70-72) se pueden encontrar otras que nosotros no incluimos aquí porque no se nos han presentado al analizar los conceptos que consideramos en el capítulo 2 como objeto de enseñanza

han tenido relevancia para el trabajo que presentamos y cómo hemos integrado sus resultados en nuestro marco teórico.

Vinner y sus colaboradores han investigado acerca del aprendizaje de conceptos geométricos (Hershkowitz & Vinner, 1982, 1984; Hershkowitz, Bruckheimer & Vinner, 1987; Hershkowitz, 1990; Vinner & Hershkowitz, 1980, 1983). Si bien la teoría en la que se enmarcan estos estudios no es la misma que la teoría más global en la que puede encajar el modelo de Van Hiele, como explicamos al final de este apartado, el análisis que realizan estos investigadores sí que puede acoplarse dentro del marco teórico del modelo de razonamiento de Van Hiele en el sentido que indicamos después. De hecho Vinner & Hershkowitz (1983, p. 22) señalan que los niveles de Van Hiele sugieren un marco teórico apropiado para clasificar las operaciones posibles que pueden ocurrir en tareas de construcción e identificación y en sus experimentaciones discuten las razones que dieron los estudiantes en sus respuestas usando los niveles de razonamiento de Van Hiele (p. 23. Op. cit.). Por otro lado, los resultados obtenidos por ellos han sido corroborados completamente con los resultados de nuestras experimentaciones. A continuación vamos a destacar los más relevantes.

Vinner (1983) introduce la terminología de imagen del concepto (*concept image)* y de definición del concepto (*concept definition*). La imagen del concepto se refiere al concepto como se refleja en la mente del individuo. Incluye todo lo que puede venir a la mente relacionado con el concepto (todo lo que se evoca cuando, por ejemplo, se escucha la palabra o se ve un dibujo asociado al concepto). La definición del concepto se refiere a la definición verbal que se tiene para una cierta noción (si es que se tiene alguna y no siempre recoge todo lo que sabe el individuo) que no tiene por qué ser la definición matemática. También habla del *concepto:* el concepto que se deriva de su definición matemática.

La imagen del concepto y la definición del concepto dependen de la persona y del contexto; puede que no sean matemáticamente correctas y puede suceder que no se pueda describir la imagen del concepto verbalmente:

> La imagen del concepto depende, por supuesto, de la persona o personas que tratan con ella. Si su identidad no se menciona explícitamente se supondrá fácilmente del contexto.
>
> [...] La imagen del concepto de rectángulo incluye implícitamente algunas "propiedades esenciales" que no tienen por qué ser las correctas.
>
> [...] Propiedades como las que caracterizan el conjunto de todos los dibujos mentales (*mental pictures*) se consideran como parte de la imagen del concepto. Puede ser que estas propiedades sólo se conciban implícitamente y no verbalmente, pero no se excluye la posibilidad de que la persona en consideración

tenga la habilidad para describirlas con palabras y entonces expresar su conocimiento no verbal.

Otra cosa que puede evocarse cuando se escucha la palabra "rectángulo" es, por supuesto, una definición verbal (no necesariamente la que se ha dado en clase si es que se ha dado alguna). Esto puede ocurrir especialmente si se pide que se defina un rectángulo. Es obvio que "la cosa" que viene a la mente de alguien cuando se escucha una cierta noción depende mucho del contexto.

[...] También esta noción [la definición del concepto] depende de la persona específica o de las personas que tratan con ella. La definición del concepto puede ser una descripción verbal de la imagen del concepto de uno así como la definición de un libro de texto, u otra cosa (Vinner & Hershkowitz, 1983, p. 21).

Vinner y sus colaboradores, además de preocuparse de que los estudiantes adquieran determinados conceptos de geometría plana y de que se perfeccionen y amplíen las imágenes de ellos, han tratado de explicar lo que ocurre en la mente de los estudiantes cuando, una vez que se supone que el concepto ya se ha adquirido, se pide a los estudiantes que identifiquen o construyan ejemplos de él (Vinner & Hershkowitz, 1983). También han tratado de describir, a partir de los resultados obtenidos en la experimentación, el proceso cognitivo que caracteriza la construcción de conceptos geométricos básicos y el desarrollo cognitivo de las imágenes de los conceptos (Hershkowitz, 1990).

Señalan que en la identificación o construcción de ejemplos de un concepto se pueden distinguir al menos tres elementos: 1) La imagen del concepto. 2) La definición del concepto. 3) Un grupo de operaciones, mentales o físicas, como ciertas operaciones lógicas o girar una figura dada para obtener una orientación en la que una comparación con el dibujo mental sea más fácil (Vinner & Hershkowitz, 1983, p. 21).

Aclaran que la descripción hecha es importante para la enseñanza de conceptos porque se han delimitado los elementos que deben formarse en la mente para que ocurra la identificación y la construcción: debería introducirse una variedad de ejemplos en una variedad de orientaciones, una definición verbal e instrucciones sobre cómo realizar ciertas operaciones (mentales y físicas). Pero también llaman la atención sobre que este análisis no garantiza una identificación y construcción con éxito si bien sí que tiene una repercusión en la enseñanza. Dan varias razones que lo explican, delimitan los *distractores* que ellos llaman *distractores de orientación* y *distractores de configuración* y dan sugerencias para la instrucción (Vinner & Hershkowitz, 1983, p. 21–22).

Por otra parte, Hershkowitz (1990) recopila las conclusiones del estudio realizado en los trabajos del grupo de psicología de la educación matemática (*Internacional Group for the Psichology of Mathematics Education,* PME). Destaca el papel de los procesos visuales en la formación de la imagen de un concepto. En los conceptos sobre objetos tridimensionales éste es especialmente importante. Subraya que para comprender mejor cómo construyen los estudiantes imágenes de conceptos geométricos, y los factores que tienen una importancia en su desarrollo, es necesario realizar un análisis de los conceptos y de su estructura matemática. Señala que la mayoría de las estructuras de conceptos básicos pueden describirse como conjunción de propiedades que poseen y aclaran un esquema que describe las relaciones matemáticas entre los elementos de un concepto matemático. Para ello, usa la terminología de atributos críticos (relevantes) y de atributos no críticos (irrelevantes) que nosotros utilizamos también al exponer los resultados de nuestro trabajo en esta memoria:

> El concepto se deriva de su definición matemática, por lo que tiene atributos relevantes (críticos, los atributos que un concepto tiene que tener para ser ejemplo del concepto) y atributos no críticos (los que sólo poseen algunos ejemplos). La definición verbal, ella misma, incluye un subconjunto mínimo de atributos relevantes suficientes para definir el concepto. La definición por tanto puede considerarse como un criterio para clasificar ejemplos como ejemplos positivos o como ejemplos negativos del concepto. Los ejemplos negativos (no ejemplos, o contraejemplos) que son relevantes para la investigación e instrucción en la formación de conceptos son los que tienen algún atributo relevante pero no todos ellos. Otra característica de la estructura podría llamarse "la dirección opuesta en la relación de inclusión" (Hershkowitz, 1987, p. 240) entre conjuntos de ejemplos (conceptos por ellos mismos) por un lado, y sus conjuntos de atributos por el otro (Hershkowitz, 1990, p. 81).

Para describir el desarrollo cognitivo de los estudiantes en relación a las imágenes de los conceptos cree que es necesario considerar también lo que llama el *Fenómeno prototipo* (los ejemplos prototipo son generalmente los ejemplos que tienen la lista de atributos "más grande"; se logran primero y existen en la imagen del concepto de la mayoría de los estudiantes), juicios prototípicos (el ejemplo prototipo es la base para juicios prototípicos) y *rasgos analíticos* (este tipo de razonamiento se basa en los atributos críticos del concepto) (Hershkowitz, 1990, p. 82–84).

Remarca que hay evidencia de que la construcción de la imagen de un concepto es una mezcla de procesos visuales y analíticos; que el fenómeno prototipo y los juicios prototípicos en su mayor parte son un producto de procesos visuales y que los atributos irrelevantes generalmente tienen fuertes características visuales, y por lo tanto se logran primero y actúan como distractores.

Señala otras características de la construcción de conceptos básicos: un orden jerárquico en el logro de ejemplos de conceptos, comunes a toda la población y que progresan con la práctica (comienzan con ejemplos prototipo y continúan con otros, bien por procesos visuales o analíticos), y diferentes tipos de patrones de ideas erróneas dentro de la misma población. Distinguen a) Ideas erróneas (*misconception*) que los estudiantes se resisten a abandonar (que tienen el mismo patrón de incidencia en un curso y en el siguiente), b) Ideas erróneas que los estudiantes corrigen con la adquisición del concepto c) Ideas erróneas que los estudiantes incrementan con la adquisición del concepto (que se desarrollaron con el proceso de aprendizaje).

Respecto de la enseñanza de conceptos apunta como características, a) lo incompleto, ya que sólo se presentan algunos ejemplos y atributos; b) la falta de conciencia y de conocimiento, por parte del profesor o incluso de los autores del libro de texto, de la existencia de otros elementos (Hershkowitz et al., 1987); c) la falta de conciencia de las dificultades de los estudiantes y de las ideas erróneas en la construcción de conceptos; y d) generalización por el profesor o el libro de texto de los atributos del concepto (o de las definiciones); el estudiante se ve como un receptor pasivo.

Las sugerencias que aporta para mejorar la instrucción de conceptos básicos tienen como propósito evitar la formación de la imagen de un concepto limitada por lo visual; que los estudiantes desarrollen la habilidad analítica y basen sus juicios en atributos críticos (o en definiciones); y con respecto al razonamiento geométrico, que superen lo incompleto y lo erróneo que viene del propio pensamiento visual:

> Las estrategias analíticas que mencionamos antes pueden estimularse en la construcción del pensamiento analítico y no deberíamos infraestimular las habilidades analíticas de los estudiantes. Estas estrategias en que los atributos críticos y los ejemplos negativos y positivos (los errores de los estudiantes pueden usarse para generar ejemplos negativos relevantes) se usan de diferentes maneras, son también muy útiles en la formación de profesores (Hershkowitz et al., 1987). Pero estas estrategias no deberíamos usarlas demasiado pronto, porque los niños en los niveles iniciales crean su imagen del concepto en su mayor parte visualmente (Hershkowitz, 1990, p. 85).

Sobre cómo evitar que se forme una imagen de un concepto limitada a un nivel visual, destaca el hecho de que se tiene que proveer un entorno de aprendizaje tan rico como sea posible. Sugiere además que la respuesta podría yacer en una postura intermedia entre dos puntos de vista que considera extremos, y que son:

> Un punto de vista extremo, como el de los estudios rusos (Zykova,1969), tiende a echar la culpa a la experiencia visual limitada que ofrecemos a los estudiantes en los materiales y métodos de enseñanza y asume que el enriquecimiento de la experiencia visual impedirá totalmente las limitaciones visuales. El otro extremo echa la culpa a las limitaciones de nuestra percepción; esto es, los individuos "impondrán" sus limitaciones visuales en su imagen del concepto, independientemente de la riqueza de ejemplos que hayan encontrado, y por tanto siempre tendremos imágenes del concepto limitadas (Hershkowitz, 1990, p. 85).

Las investigaciones mencionadas en los párrafos anteriores han tenido gran relevancia en la investigación que presentamos en esta memoria. Como nos centramos en conceptos geométricos, aunque éstos estén relacionados con los sólidos, las conclusiones obtenidas por estos investigadores y las sugerencias que han dado para mejorar la instrucción, aunque pasamos a comentar alguna de ellas, las hemos tenido en cuenta en la mayor parte de la investigación, como se desprende de los comentarios que hacemos en el momento oportuno.

En el diseño de algunas tareas de nivel 1 nos hemos preocupado de presentar diferentes ejemplos de cada uno de los conceptos tratados, de mostrarlos construidos con diferentes materiales, en distintos contextos y en diferentes tiempos, con objeto de que la mayoría de los estudiantes lleguen a estar libres de las posiciones prototipo y generalicen su objeto mental de una determinada familia de sólidos, o de sus elementos, para incluir todos los ejemplos de la familia que se han delimitado previamente y en diferentes posiciones. También hemos tenido en cuenta la interesante cuestión, relativa al aprendizaje y a las relaciones entre el concepto y sus atributos, que se plantea en Harris (1987). Éste enseña a los niños figuras geométricas usando atributos de la vida diaria. El énfasis se pone tanto en los atributos regulares como en los atributos más útiles (ej. el atributo más útil de los rectángulos en las cajas de manufacturar es que cubren el plano).

Por otro lado, para seleccionar los ejemplos y no ejemplos que proponemos en estas tareas (para introducir las familias de sólidos) hemos hecho un análisis de los conceptos correspondientes y de su estructura matemática. Y como sugiere Hershkowitz (1990), los errores de los estudiantes los hemos tenido en cuenta para seleccionar los ejemplos y los no ejemplos. Para delimitar los no ejemplos de la familia que se introduce hemos tenido también en cuenta que en ellos falle uno de los atributos críticos del concepto (de la familia seleccionada), o varios. Además, cuando un atributo crítico contiene algún cuantificador, presentamos algún modelo que no cumple la propiedad porque no verifica la condición impuesta por el cuantificador. Para delimitar los ejemplos, consideramos las diferentes subfamilias que se pueden establecer en la familia dada, partiendo de un universo que incluye los sólidos rectos, oblicuos, cóncavos y convexos, y presentamos un ejemplo de cada una de las subfamilias delimitadas.

No queremos acabar este apartado sin aclarar cómo hemos integrado la teoría de Vinner y sus colaboradores en nuestro marco teórico, para aprovechar sus resultados tal y como hemos indicado en los párrafos anteriores[4]. Vamos a señalar dos puntos en los que pensamos que puede haber una cierta discrepancia.

A) Del análisis que hemos hecho en este apartado y del que hemos realizado en la sección dedicada a Hans Freudenthal se podría concluir que aunque en las publicaciones de unos y otro se utiliza diferente terminología (imagen del concepto/concepto los primeros y objeto mental/concepto el segundo) están hablando del mismo fenómeno: ambas teorías con imagen del concepto y con objeto mental respectivamente intentan explicar algo que ocurre en la cabeza de los estudiantes. Ambas teorías se preocupan de cómo evolucionan éstos en un contexto escolar; esto es, suponen que el aprendizaje está desarrollado de alguna manera (hay un sistema de enseñanza por medio), lo que se enseñan son los conceptos, y tratan de explicar cómo evoluciona en la cabeza de los estudiantes la imagen del concepto o el objeto mental respectivamente. Tanto imagen del concepto como objeto mental se podrían describir como el conjunto de ideas que tiene un estudiante sobre un concepto como resultado de su experiencia.

Pero el que esta experiencia sea diferente en ambas teorías, se traduce en que, aunque tengan algo común, existen diferencias entre lo que unos llaman imagen del concepto y los otros objeto mental.

Del trabajo de Vinner y sus colaboradores se deduce que la enseñanza de conceptos (objetivo de la enseñanza de las matemáticas) no se hace vía la definición sino a través de los ejemplos, que caracterizan al concepto, y de lo que ellos llaman *no ejemplos.* Si nos fijamos en los ejemplos y no ejemplos que proponen para introducir un concepto (Hershkowitz, Bruckheimer & Vinner, 1987), dado que algunos no obligan a modificar la definición extraída de los ejemplos y no ejemplos del concepto presentados antes, podemos afirmar que lo que han pretendido al presentarlos es, por un lado, facilitar el que se noten los atributos comunes a los ejemplos y, por otro, que se incorporen los ejemplos y se eliminen los no ejemplos de la imagen del concepto correspondiente. Por otro lado, los ejemplos también tienen que servir para eliminar algún atributo no crítico del concepto (no es propio de todos los ejemplos pero sí de algunos y además tienen gran componente visual) que se sabe por la experiencia que se tiene que eliminar. Así, los ejemplos y no ejemplos tienen como objetivo, por una lado, que se amplíe la imagen del concepto y, por otro, que se reduzca.

---

[4] Las ideas que vamos a expresar a continuación provienen de conversaciones que hemos mantenido con Luis Puig , sus ideas están reflejadas en lo que sigue, si bien de los errores que puedan aparecer en las posibles interpretaciones que hacemos, solo la autora se hace responsable.

De estos trabajos se puede sacar una idea de imagen del concepto que precisa la señalada antes en este apartado: la imagen de un concepto puede estar formada por todos los ejemplos que el estudiante ha visto en su experiencia con el concepto de los cuales ha determinado sus atributos críticos, que se los ha podido incluir también en su imagen del concepto, y puede incluir también una definición. Los ejemplos que se incorporan en la imagen del concepto pueden o no ser los correctos; asimismo, se han podido incluir atributos no críticos como atributos críticos y la definición que forma parte de la imagen del concepto puede ser la dada por el profesor, el libro de texto, la elaborada por el estudiante o la que el estudiante ha adaptado de alguna de éstas.

De los trabajos de Vinner y sus colaboradores también se desprende que con la instrucción se pretende formar una imagen del concepto que sea completa y, sobre todo, que no sea incorrecta. Dado que esta imagen tiene que aparecer vía ejemplos y no ejemplos, para diseñar una secuencia de actividades para la adquisición de un concepto en concreto, el elegir bien la serie de ejemplos y no ejemplos (para que aparezcan todos los atributos que son críticos y no dejen atributos no críticos como críticos) puede considerarse como primordial. El tipo de análisis que propone Hershkowitz (1990), el análisis de la definición del concepto, es una consecuencia de que lo que se tiene presente cuando se presentan los ejemplos es que se lleguen a delimitar los atributos críticos del concepto; como éste viene dado por la definición, se juzga como conveniente analizarla para obtener sus atributos y de ahí poder seleccionar los ejemplos del concepto que llamen la atención sobre ellos. También tienen en cuenta en esta selección de ejemplos y no ejemplos que se sabe que hay atributos no críticos que los estudiantes asocian como críticos. Esto es, previo al diseño de la selección de la serie de ejemplos que hay que proponer para enseñar un concepto, de la teoría de Vinner y sus colaboradores se desprende que hay que hacer un análisis del concepto y hay que buscar en la experiencia los atributos no críticos que se sabe que se asocian como atributos críticos del concepto, y que por tanto se tienen que eliminar.

Si comparamos la concepción sobre la enseñanza de un concepto que acabamos de comentar con la que hemos descrito en el apartado referido a Freudenthal, podemos observar una diferencia fundamental:

– Vinner y sus colaboradores, prestan atención a la imagen de los conceptos que se forma vía ejemplos y no ejemplos. La enseñanza de conceptos puede convertirse en cierto modo en una técnica: la de seleccionar adecuadamente los ejemplos y no ejemplos. Decimos en cierto modo porque, como ellos señalan, esto no conduce necesariamente a éxito.

– Freudenthal distingue el objeto mental inicial, que puede formarse a partir de fenómenos que pueden ser ejemplos y no ejemplos del concepto de los otros objetos mentales que se van constituyendo en cadenas fenómenos/medios de organización, de la misma manera que sucede con los conceptos, con el consiguiente aumento de nivel. Como señala Puig (1997, pp. 52-53):

> En el nivel más bajo podríamos decir que los fenómenos que van a ser organizados por los conceptos matemáticos son fenómenos de ese mundo real, físico, cotidiano. Nuestras experiencias con ese mundo físico tienen que ver con los objetos del mundo, sus propiedades, las acciones que realizamos sobre ellos y las propiedades que tienen esas acciones. [...] Freudenthal no se queda en el nivel más bajo describiendo la actividad matemática simplemente como un juego entre fenómenos del mundo y medios de organización de las matemáticas, en el que los fenómenos solicitan ser organizados y se crean medios para ello en las matemáticas. Por el contrario, el proceso de creación de objetos matemáticos como medios de organización lo acompaña Freudenthal de un proceso por el que los medios de organización se convierten en objetos que se sitúan en un campo de fenómenos. En consecuencia los objetos matemáticos se incorporan al mundo de nuestra experiencia, en el que entran como fenómenos en una nueva relación fenómenos/medios de organización en la que se crean nuevos conceptos matemáticos, y este proceso se reitera una y otra vez.

La idea de enseñanza que puede surgir que sea coherente con la concepción de la naturaleza de los objetos matemáticos que acabamos de expresar no puede convertirse en una técnica.

Esta diferente concepción sobre la enseñanza se traduce también en el diferente tipo de análisis que proponen como previo al diseño de una unidad didáctica para enseñar un concepto:

> Los primeros proponen un análisis del concepto. Freudenthal propone el análisis fenomenológico, para el que no se parte del concepto sino que se analizan los fenómenos que se organizan con el concepto en el sentido que hemos descrito antes: los propios conceptos se convierten en fenómenos que solicitan ser organizados para lo que se crean otros conceptos que requieren ser analizados.

Estas ideas, traducidas a lo que los estudiantes elaboran, las expresamos así:

> La imagen del concepto como la entienden Vinner y sus colaboradores se forma de la experiencia que tiene el estudiante con el concepto en cuestión (cada ejemplo representa el concepto), mientras que el objeto mental es el conjunto de ideas que vienen de su experiencia con los fenómenos que se organizan con el concepto, y de su experiencia con el concepto cuando se considera como fenómeno que se organiza con otros conceptos.

Se puede expresar también diciendo que en la teoría de Vinner se supone que se tiene el concepto (dado por la definición) y lo que se mira es su reflejo en la cabeza de los estudiantes, mientras que en Freudenthal se va de los fenómenos al concepto, como medio de organización. Esto es, en estas teorías el punto de partida no es el mismo sino el inverso.

Vale la pena reparar ahora en lo que aclara Puig (1987, p. 66), utilizando como ejemplo el concepto de número elaborado por Peano o el que se deriva de la construcción cantoriana, respecto a cómo están relacionados los conceptos y los objetos mentales: "Los conceptos aparecen en esta explicación relacionados directamente con una parte del objeto mental, ya que en el proceso de definir se ha seleccionado parte del significado que abarca el objeto mental".

De este comentario, podemos concluir que si sólo seleccionamos la definición de un concepto, y ésta la consideramos como conjunción de atributos críticos de él, como considera Hershkowitz (1990), hacemos análisis de ella y seleccionamos los ejemplos y no ejemplos correspondientes, parte de los significados que podrían formar parte del objeto mental al estilo de Freudenthal no se incorporarían en la imagen del concepto. El objeto mental constituido no podría interpretar correctamente todas las situaciones en las que aparece o se puede usar el concepto considerado.

Por ejemplo, si como objeto de análisis tomamos una de las definiciones ingenuas de poliedro que encontramos en Lakatos (1978, p. 31), la que ahí se llama definición 1, que ve un poliedro como "un sólido cuya superficie consta de caras poligonales", y hacemos la selección de ejemplos y no ejemplos adecuados, la imagen del concepto podría llegar a incluir como poliedro, entre otros ejemplos, el modelo formado por un par de cubos encajado uno en otro[5] y, dado que esta definición da una idea de poliedro como el espacio comprendido por una superficie que está formada por polígonos, como atributo crítico de poliedro se incluiría que el poliedro es el espacio interior de la superficie que lo delimita.

Sin embargo, del análisis de una definición de poliedro como la que también encontramos en Lakatos (1978, p. 31), (la llamada definición 2), que lo ve como "que debe ser una *superficie:* posee caras, vértices y aristas, se puede deformar, estirar sobre un encerado y nada tiene que ver con la idea de «sólido». *Un poliedro es una superficie que consta de un sistema de polígonos*", y la selección de ejemplos y no ejemplos adecuados, se llevaría a una imagen del concepto de poliedro que excluiría el modelo y atributo mencionados como ejemplo o como atributo crítico respectivamente.

[5] En Lakatos (1978, pp. 30-31), en boca de Gamma se aplica esta definición para explicar que el par de cubos encajado uno en otro es un poliedro, y se cuenta también la historia del descubrimiento de lo que ahí llaman *contraejemplo 1*. Cabe señalar que esta definición corresponde a un concepto ingenuo de poliedro que rápidamente se sustituye por otros.

Cabe subrayar que ninguna de las definiciones daría cuenta de todas las situaciones en las que se puede presentar y usar el concepto de poliedro (tampoco lo daría el considerar sólo estas dos definiciones) y que depende de las situaciones de partida para que encaje mejor una idea u otra. Por ejemplo, como se indica en Guillén (1991, p. 153), "la idea de poliedro como superficie es la que interesa más para estudiar los poliedros estrellados, pues el considerar los poliedros como su espacio interior complica considerablemente la forma de hablar de ellos e imaginarlos (sobre todo si no se está pensando en el primer y segundo estrellado de un poliedro, sino en los siguientes). Es muy difícil imaginar los diferentes espacios encerrados (llamados celdillas) que quedan en el interior. Sin embargo, desde el punto de vista de la construcción puede ser interesante el considerar los poliedros de esta forma".

Respecto a nuestro trabajo queremos aclarar que no sólo hemos realizado análisis de los contenidos geométricos implicados en la unidad de enseñanza (de determinados conceptos relativos a los sólidos o a sus elementos, de los procesos matemáticos que abordamos, de las propiedades de familias de sólidos) para delimitar ejemplos y no ejemplos para presentarlos en tareas de identificación y construcción; éstos tenían como objeto poder presentar la mayor parte de las situaciones en las que estuviesen implicados los contenidos geométricos que consideramos objeto de estudio, y que indicamos en la sección 2. 1 del capítulo 2. Los análisis que presentamos en este apartado y los comentarios que hacemos en el capítulo 2 dan cuenta de las diferentes tareas, y de las actividades que las componen, que proponemos para que se constituyan los objetos mentales del contenido geométrico correspondiente que llamamos del primer nivel, del segundo nivel y del tercero. También nos han servido como criterio para que varias actividades las hayamos incluido en una unidad de enseñanza u otra (de las propuestas para los niveles de razonamiento 1, 2 y 3) e incluso, en algunos casos, se explica también desde ahí, la fase para la que la hemos considerado apropiada.

En nuestro caso, el punto de partida para los análisis en muchos casos no han sido los conceptos sino los fenómenos que se organizan con el concepto. Por ejemplo, para el concepto de poliedro, hemos presentado una gran variedad de fenómenos que posteriormente se organizan con uno u otro concepto ingenuo de los que hemos indicado antes; esto es, nos hemos preocupado de presentar los usos del concepto en los contextos en los que puede aparecer (topográfico, construcción, juego, arte, etc.) y con diferentes representaciones posibles (modelos macizos, modelos huecos, estructuras de vértices y aristas).

Para tratar la clasificación, hemos intentado delimitar diferentes tipos de clasificación (ver apartado 2.1) que van ampliando el objeto mental de este proceso al incorporar en él clasificaciones particiones con criterios geométricos que tienen gran componente visual, con criterios cuantitativos, clasificaciones en las que hay implicados más de un criterio, clasificaciones en las que las particiones se solapan, clasificaciones inclusivas. Además hemos planteado el problema de lo que puede considerarse o no como criterio de clasificación para un universo dado. Por otro lado, también hemos delimitado los problemas que están ligados a la clasificación; nos fijamos en los diferentes diagramas que las representan, las relaciones entre familias, las diferentes maneras de expresarlas, las diferentes situaciones que se pueden dar, bien porque cambia la relación que existe entre las familias implicadas, bien porque cambia la manera como se presentan las relaciones; hemos analizado las propiedades de las subfamilias establecidas. Para algunas clasificaciones también nos hemos fijado en otros problemas que si bien están conectados con la clasificación no son propios de ella. Por ejemplo, el nombre que se da a las subfamilias que se establecen.

Como se desprende de los comentarios que hacemos en el capítulo 2, la lista de los análisis de contenidos geométricos que hemos realizado es muy larga y sólo en algunos casos ha sido el análisis de los conceptos el que nos ha facilitado la búsqueda de todos los fenómenos que presentamos para que se organicen con el concepto considerado (por ejemplo, los prismas); en otros casos hemos recurrido a varias definiciones del concepto para poder dar cuenta de una gran variedad de fenómenos; y cuando el concepto está muy alejado del objeto mental que se podía constituir en un nivel escolar, no hemos partido del concepto, sino de nuestro conocimiento de las matemáticas. Por ejemplo, para clasificación, nuestro punto de partida para el análisis realizado fue nuestro conocimiento de las diferentes clasificaciones que pueden establecerse, determinadas por relaciones de equivalencia o de orden; de ahí delimitamos todos los tipos de clasificación que proponemos en la unidad de enseñanza y los diferentes significados que podemos asignarle dependiendo del nivel de razonamiento o del objeto mental que uno haya constituido como fruto de la experiencia con este proceso, y que indicamos en el apartado 1.4.2.

B) También queremos llamar la atención sobre la diferencia que existe entre la teoría de Vinner y sus colaboradores y la de Freudenthal respecto a lo que entienden por *adquirir un concepto* y respecto a considerar la adquisición del concepto como un objetivo prioritario o secundario.

Vinner & Hershkowitz (1983) asumen que la adquisición de un concepto es posible e indican algunas características de lo que significa que el concepto se ha adquirido:

> Como una conclusión podemos decir que *adquirir un concepto* quiere decir, entre otras cosas, adquirir un mecanismo de identificación- construcción con el que sea posible identificar y construir todos los ejemplos del concepto *como se concibe por la Comunidad Matemática* (Vinner & Hershkowitz, 1983, p. 21).

De los trabajos que hemos consultado se puede interpretar que para ellos la *adquisición de conceptos* es un objetivo bastante prioritario, en el sentido de que parece que se presta más atención al problema de elaborar la definición de un concepto que a otros problemas que en la enseñanza pueden ser anteriores a éste. De las actividades que utilizaron en investigaciones con profesores puede interpretar que la serie de ejemplos y no ejemplos pretende que se descubran los atributos críticos y no críticos del concepto y que se elabore la definición matemática (Hershkowitz, Bruckheimer & Vinner, 1987). Algunas actividades de análisis o de descripción considerando diferentes situaciones en las que pueden estar implicadas familias y propiedades (por ejemplo, situaciones en las que se consideran modelos de ejemplos de una familia para descubrir sus propiedades, situaciones en las que están implicadas varias propiedades ya enunciadas y una familia de sólidos que viene dada por el nombre, situaciones en las que hay implicadas una propiedad y varias familias de sólidos que vienen dadas por sus nombres, situaciones en las que hay implicadas varias propiedades que se dan enunciadas para descubrir las familias de sólidos que las cumplen) que pueden ser muy adecuadas para descubrir o incorporar en el objeto mental la gran variedad de atributos críticos de los conceptos considerados, o para llegar a sentir que éstos requieren una organización, que es cuando puede aparecer la definición, no pueden surgir inmersas en tareas de identificación de ejemplos y no ejemplos. Los problemas de clasificación, que pueden plantearse embebidos en una secuencia de ejemplos y no ejemplos, antes de elaborar la definición, no se presentan como un medio de organizar los ejemplos del concepto y de buscar relaciones entre subfamilias, sino en un proceso de identificación de los ejemplos de cada subfamilia como ejemplos o no ejemplos del concepto general.

Sin embargo, del trabajo de Freudenthal, del que ya hemos apuntado que *adquirir un concepto* implica examinar cómo ha sido establecido en las matemáticas organizado local o globalmente en un sistema deductivo, se desprende que "la adquisición del concepto es un objetivo educativo secundario, que puede posponerse a una sólida constitución de los objetos mentales, y, en todo caso, es posterior a ésta" (Puig, 1997, p. 66).

La unidad de enseñanza que presentamos en el capítulo 2 también refleja que para nosotros la adquisición del concepto es un objetivo educativo secundario. Como se desprende de las tareas que proponemos para los niveles 1, 2 y 3 hay una gran variedad de actividad matemática antes de abordar el proceso de elaboración de definición. Si tenemos en cuenta toda la actividad desarrollada con las tareas propuestas para el nivel 1, para las diferentes familias de sólidos (u otros conceptos geométricos implicados) se habrá constituido un objeto mental de cada una de ellas con los significados que le vienen de los contextos (topográfico, construcción, juego, arte, etc.) en los que se ha trabajado con ellas. Y estos objetos mentales los ampliamos con las tareas propuestas para el nivel 2 incorporando las propiedades (atributos críticos) y relaciones que tienen estas familias, todas las acciones que hay que realizar para descubrirlas y las propiedades de estas acciones. Por ejemplo, las actividades de análisis que proponemos surgen inmersas en diferentes procedimientos de construir y generar sólidos y en situaciones donde se relacionan modelos del mundo o familias de sólidos dadas por su nombre, con propiedades; las propiedades se dan enunciadas o no es así y para las familias se indican las familias que se han de tener en cuenta o bien éstas se tienen que determinar; en las actividades están implicadas una o varias familias y una o varias propiedades. Con el objeto mental constituido se podrá dar cuenta de una gran variedad de situaciones en las que estén implicadas propiedades de familias. Y el mismo tipo de análisis hemos realizado antes de diseñar las tareas que pretenden que se incorpore en el objeto mental correspondiente las relaciones entre familias junto con las acciones que hay que realizar para descubrirlas y las propiedades de estas acciones. Queda suficientemente claro que no tenemos como objetivo prioritario que se adquieran los conceptos (la definición) implicados. Más aún, pensamos que, dado que este problema exige nivel 3 de razonamiento, en muchos estudiantes la adquisición del concepto no se realizará.

Una vez señalados los puntos del trabajo de Vinner y sus colaboradores con los que diferimos, según la interpretación que hacemos del trabajo que conocemos, vamos a explicar ahora la adaptación que hemos hecho en nuestro caso para aprovechar sus resultados.

Hemos considerado la idea de objeto mental inicial que se desprende del trabajo de Freudenthal, que hemos mencionado antes, y hemos tenido en cuenta que una de las posibles maneras que tenemos de introducir los conceptos de las diferentes familias de sólidos es vía ejemplos y no ejemplos; aunque, como se desprende de los comentarios que hacemos en el apartado 1.4.3 y de las tareas que planteamos para el primer nivel, las experiencias que proponemos a los estudiantes no provienen sólo de actividades de este tipo.

Para diseñar tareas de introducción de familias de sólidos vía ejemplos y no ejemplos hemos realizado los análisis que sugiere (Hershkowitz, 1990) y que hemos indicado antes. Pero en algunos casos no hemos partido de una sola definición sino de varias, de manera que den cuenta de todos los significados que podrían formar parte del objeto mental al estilo de Freudenthal en el nivel correspondiente y que no se incorporarían en el objeto mental sólo con una de las definiciones. Por ejemplo, para el concepto de poliedro consideramos como punto de partida las definiciones ingenuas que hemos comentado antes, para que no se incorporen en el objeto mental atributos como "es hueco", "es macizo", " es un armazón" y si esto ocurre que uno se desprenda de ellos con relativa facilidad.

También vale la pena aclarar que como objeto de análisis no hemos comenzado con una definición cuya distancia con el objeto mental que se pueda constituir en un nivel dado sea muy grande. Para formar el objeto mental inicial, el que se va desarrollando en el nivel 1, las definiciones para una familia de sólidos que hemos considerado como de partida para hacer el análisis correspondiente sólo incluye como ejemplos los sólidos cóncavos y convexos, rectos y oblicuos (no incluye los que tienen por caras polígonos cruzados o polígonos estrellados). Si éstos aparecen en la clase en el contexto de la actividad (es decir si algún estudiante se topa con un modelo de estos y cuestiona si son ejemplos o no), o bien se descartan como ejemplos porque se ven como unión de dos ejemplos, o se ven como ejemplos de poliedros cóncavos, o como intersecciones de dos modelos.

El incluir estos poliedros como ejemplos de la familia correspondiente, considerando que tienen por caras polígonos cruzados o polígonos estrellados, no favorecería la formación del objeto mental inicial de la familia de sólidos considerada, o de sus elementos. Así es como sucedió también en la historia; estos modelos no correspondían a los fenómenos para los que originariamente se creó el concepto correspondiente sino a los fenómenos para los que se encuentra extendido el concepto en la actualidad.

Sólo en un trabajo posterior, para nivel 3, se puede ampliar el objeto mental de poliedro (o de prisma, antiprisma, pirámide o bipirámide) de manera que incluya estos ejemplos de la manera como los ve la comunidad matemática: como poliedros estrellados, o como prismas (antiprismas, pirámides o bipirámides) de bases polígonos cruzados o polígonos estrellados. El extender el concepto de poliedro (o de prismas, antiprismas, pirámides, etc.) para que incluya estos modelos como ejemplos es un problema muy complejo entre otras cosas porque en la definición intervienen otros conceptos que también necesitan extenderse (el de polígono). Además lleva consigo una revisión y ruptura de las ideas que se tienen de cara, vértice y arista de un poliedro y de otros atributos críticos del concepto que se han incorporado a partir de los ejemplos considerados. Por ejemplo, para poliedro, un atributo crítico que hay que eliminar es que las caras sólo encierran una celda en el interior.

Tenemos pues que aclarar que en nuestra concepción de la enseñanza de los conceptos parece que éstos no se terminan de adquirir nunca. Compartimos con Puig (1997) una concepción de la naturaleza de los objetos matemáticos que no supone que hay un objeto ideal preexistente y la actividad matemática lo que hace es descubrir sus propiedades; sino que consideramos que los conceptos no permanecen inmutables una vez creados, y lo que nos interesa con la enseñanza es la creación de nuevos conceptos al estilo de Lakatos: "El resultado del proceso que presenta Lakatos de tensión entre conceptos, teoremas y pruebas no es la delimitación del verdadero concepto de poliedro que se correspondería al objeto ideal preexistente, sino la creación de nuevos conceptos" (Puig, 1997, p. 59).

1.2.2. INVESTIGACIONES SOBRE MATERIALES CURRICULARES DISEÑADOS SOBRE LA BASE DEL MODELO DE VAN HIELE

Los únicos trabajos que conocemos cuyo objetivo es el diseño de secuencias de actividades teniendo en cuenta explícitamente los niveles de razonamiento o las fases de aprendizaje de Van Hiele son los de Ludwig (1986), Bobango (1987), Jaime y Gutiérrez (1990, 1996), Corberán et al. (1991, 1994) y Jaime (1993). Vamos a comentar cada uno de ellos.

La propuesta que hace Ludwig (1986) para la enseñanza de las isometrías en un entorno informático es bastante confusa. Pone más énfasis en el estudio del uso del software denominado Logo que en el de las isometrías, y la enseñanza la organiza según los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje del Logo. Esta investigación no ha sido relevante para el trabajo que aquí presentamos; si la comentamos es porque es la primera investigación que se conoce que tiene como objeto diseñar actividades teniendo en cuenta explícitamente no sólo los niveles de Van Hiele sino también las fases de aprendizaje.

Bobango (1987) presenta sólo para el nivel 2 de Van Hiele una propuesta para la enseñanza de triángulos y cuadriláteros, en un contexto informático, organizada siguiendo las fases de aprendizaje. La interpretación que hace sobre las fases tercera y quinta, ha sido utilizada también por otros investigadores (Jaime, 1991, p. C2–2) y es la que proponemos en esta memoria. En el apartado 1.1.2 comentamos esta interpretación.

Fuys, Geddes & Tischler (1988) diseñaron tres módulos de enseñanza basados en el modelo de Van Hiele. En la memoria de este proyecto, conocido como proyecto de Brooklyn, se hace un descripción muy detallada de la organización de las actividades según los niveles de razonamiento de Van Hiele, pero no se hace una propuesta concreta para su distribución en fases de aprendizaje. Jaime y Gutiérrez (1990), a partir de las sugerencias generales que aparecen en el proyecto de Brooklyn, señalan para las actividades de uno de los módulos, el titulado "estudio de relaciones angulares de los polígonos", las fases de aprendizaje a las que según ellos pueden corresponder. Además ellos amplían este trabajo desarrollando el tema traslaciones con el mismo marco referencial.

El diseño de las tres unidades de enseñanza que se proponen en el proyecto de Brooklyn, así como el trabajo que se llevó a cabo para obtener una relación de los descriptores y los formularios elaborados para facilitar la evaluación de los estudiantes en las entrevistas, han servido como referencia para organizar y llevar a cabo nuestro trabajo de investigación.

En Corberán et al. (1989) se proponen dos módulos de actividades para los tres primeros niveles de Van Hiele que versan sobre polígonos y cuadriláteros. Las actividades que se proponen están organizadas según los niveles de razonamiento, pero no se hace una propuesta concreta para su distribución en fases de aprendizaje. Es en el proyecto de investigación de Corberán et al. (1991), y en la publicación del mismo (Corberán et al., 1994), donde las actividades, para los triángulos, cuadriláteros y polígonos en general, se han organizado también teniendo en cuenta explícitamente las fases de aprendizaje de Van Hiele; cabe mencionar que sólo se presentan actividades para los niveles segundo y tercero.

Las propuestas de unidades de enseñanza que se presentan en estos trabajos están totalmente desarrolladas, preparadas para llevarlas al aula y tuvieron gran importancia en el diseño de nuestro trabajo inicial. Algunos tipos de actividades que se proponen en esos trabajos son las que extrapolamos a los sólidos, para diseñar nuestra primera unidad de enseñanza. Por otro lado, las respuestas comentadas que presentan Corberán et al. (1989) para las actividades que diseñaron para los polígonos, que permiten observar la influencia de las actividades en el proceso de aprendizaje y la evolución del nivel de razonamiento de los estudiantes, sugirieron la metodología utilizada en nuestro trabajo para caracterizar los niveles de razonamiento de Van Hiele para los sólidos y para elaborar los modelos de respuestas para los ítems de los test.

Jaime (1993) y Jaime y Gutiérrez (1996) presentan actividades dirigidas al estudio de las isometrías del plano. Las actividades que se han diseñado se han dividido en tres módulos, dirigidas a la enseñanza de las traslaciones, los giros y las simetrías. La propuesta de unidad de enseñanza que se presenta en ellos incluye bloques de actividades, formados por tipos de actividades o de situaciones, adecuados para alcanzar los objetivos propuestos y para ayudar a los estudiantes a alcanzar cierto nivel de razonamiento, pero no corresponde a una unidad totalmente desarrollada, preparada para llevar al aula. Las interpretaciones que se hacen en estos trabajos sobre las fases de aprendizaje o sobre las propiedades del modelo, que comparten con otros investigadores que ellos mencionan, son también las que proponemos en esta memoria. En la sección 1.1, al describir el modelo de Van Hiele, comentamos esta interpretación.

1.2.3. INVESTIGACIONES SOBRE GEOMETRÍA TRIDIMENSIONAL

A continuación vamos a comentar, por un lado, los trabajos en los que se ha aplicado el modelo de Van Hiele a la geometría tridimensional, que si bien en ninguno de ellos se ha aplicado el modelo para organizar una unidad de enseñanza para la geometría de los sólidos, en algunos se han hecho intentos para caracterizar los niveles de razonamiento para esta área de la geometría. Por otro lado, señalamos algunos estudios sobre sólidos, correspondientes a trabajos de investigación, a diseño de materiales para la enseñanza, o a libros sobre poliedros.

INVESTIGACIONES SOBRE EL MODELO DE VAN HIELE APLICADO A LA GEOMETRÍA TRIDIMENSIONAL

La primera investigación que conocimos que tuviera en cuenta la geometría tridimensional y el modelo de Van Hiele corresponde a Hoffer (1981), quien plantea la existencia de determinados tipos de destrezas (visuales, verbales, de dibujo, lógicas y de aplicación) que hay que desarrollar mediante actividades geométricas exploratorias e informales y establece relaciones entre ellas y los cinco niveles de razonamiento de Van Hiele. Estas relaciones se presentan de manera descriptiva y además se dan ejemplos de actividades apropiadas para cada destreza y cada nivel. Las destrezas asociadas a cada nivel son bastante generales y pueden asociarse tanto a la geometría plana como a la tridimensional; cabe mencionar que para el nivel 4 sólo propone actividades referidas a los sólidos, vinculadas con las destrezas de dibujo y de aplicación.

Esta investigación supone un primer intento para abrir líneas de trabajo sobre el modelo de Van Hiele en campos diferentes a la geometría plana. Además, en nuestra investigación sobre el modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos, si bien fueron las experimentaciones realizadas las que nos llevaron a las caracterizaciones que proponemos en esta memoria para los niveles 1, 2 y 3 (apartado 1.4.1) nuestras primeras caracterizaciones las hicimos, al igual que en la investigación de Hoffer, extrapolando a la geometría sólida las destrezas que ahí se proponen asociadas a los diferentes niveles de Van Hiele, y que en otras investigaciones realizadas hasta entonces se habían asociado a áreas concretas de la geometría plana (a los cuadriláteros especialmente).

Las investigaciones que se presentan en Lunkenbein (1983a, 1983b, 1984) apenas las hemos tenido en cuenta en nuestra investigación. Si las comentamos aquí es porque son de las pocas investigaciones que se han realizado sobre el aprendizaje de la geometría del espacio. Además en estas investigaciones el proceso de evolución de los estudiantes confirma el modelo de Van Hiele, si bien los investigadores no tenían como propósito el confirmar esta teoría.

La experiencia que se describe en Lunkenbein (1983a) pretende estimular los procesos de desarrollo de la representación espacial, la formación de conceptos geométricos y la estructuración gradual del concepto de poliedro. Estos procesos se consideran formados por el reconocimiento de propiedades de los objetos geométricos y de sus elementos, así como por las relaciones que se pueden establecer entre ellos. En Lunkenbein (1983b) se toma el concepto piagetiano de "agrupamiento" como punto de partida para definir tres tipos de agrupaciones que podríamos hacerlas corresponder con los niveles de Van Hiele 1, 2 y 3 respectivamente: infralógica, partición lógica e inclusión lógica. Estas agrupaciones se han utilizado para analizar los diferentes procedimientos que usan los estudiantes cuando resuelven actividades con poliedros. En Lunkenbein (1984) se presentan estos resultados. Las consecuencias para la enseñanza de la geometría que en estas investigaciones se sugieren se relacionan con las ideas de Van Hiele aunque no se indican explícitamente.

En nuestra investigación, estas sugerencias se reflejan en los comentarios que hacemos en el capítulo 2 sobre las tareas propuestas en la unidad de enseñanza.

Gutiérrez y Jaime (1987) reportan una investigación realizada en la Escola Universitària de Magisteri de València. Como Gutiérrez y Jaime (1989, p. 91) señalan, "tenía un objetivo doble: 1) Diseñar tests que, además del trillado tema de polígonos, abordaran otros campos apenas estudiados desde esta óptica, como son la geometría espacial y la medida de magnitudes; 2) Estudiar la globalidad (o localidad) y la discretitud (o continuidad) de los niveles que integran el modelo de razonamiento de Van Hiele".

Esta investigación no ha sido relevante para nuestro trabajo. Los tests que se proponen, para evaluar los niveles de razonamiento 1 a 5 de los estudiantes en las diferentes áreas de la geometría, constan de ítems de elección múltiple para cada nivel. Nosotros hemos propuesto en los tests que hemos diseñado ítems de respuesta libre, pues pensamos que son los que permiten identificar con mayor precisión el nivel de razonamiento de los estudiantes. Si comentamos esta investigación es porque es el primer trabajo, y además está realizado en España, en el cual se propone la evaluación de los estudiantes de acuerdo con los niveles de razonamiento en relación con la geometría espacial.

También cabe mencionar la investigación realizada por Fortuny (1988) sobre evaluación del nivel de razonamiento y la percepción tridimensional. Este trabajo junto con los que hemos nombrado en el párrafo anterior generaron el inicio de las ideas y las versiones previas sobre el método de evaluación del nivel de razonamiento de los estudiantes que utilizamos en nuestra investigación y que detallamos en el capítulo 3.

Estas versiones previas pueden verse en Gutiérrez, Fortuny y Jaime (1988) y en Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991), donde además de proponer una forma alternativa de asignación de niveles de razonamiento a los estudiantes a las utilizadas hasta entonces, se incluye un test de evaluación de los niveles de Van Hiele en la geometría de los sólidos que consta de ítems de respuesta libre.

La repercusión de estos resultados en nuestra investigación, no sólo ha tenido que ver con en el método de evaluación del nivel de razonamiento que hemos aplicado sino también con el diseño de los tests (el pre–test y el post– test). Los tests que ahí se proponen, aunque no coinciden con los que presentamos como resultado de nuestro trabajo, incluidos en el anexo 3, han sentado las bases para las versiones previas. También nos sugirieron cómo evitar en la medida de lo posible un problema de "comunicación" y de "visión espacial"[6] que conlleva el estudio de los sólidos. Así, al administrar los tests de papel y lápiz (pre–test y pos–test) diseñados intentamos eliminar el problema de la interpretación de representaciones planas de objetos tridimensionales mediante la utilización de modelos de cartulina que los estudiantes podían observar.

En Pegg & Davey (1991) se hace una extrapolación de las características generales establecidas en la investigación para los diferentes niveles de Van Hiele para los cuadriláteros, los polígonos en general y los sólidos. Además, se presentan tres tipos de actividades (descripciones, propiedades mínimas e inclusión de clases) que se utilizan para evaluar el nivel de razonamiento de los estudiantes. Si bien las actividades se refieren a la clasificación de los cuadriláteros, el tipo de actividades que se proponen se pueden trasladar a los sólidos. En este sentido hemos tenido en cuenta esta investigación en nuestra propuesta de test inicial.

Davey & Holliday (1992), para cada uno de los tipos de destrezas que ha delimitado Hoffer (1981) (destrezas visuales, verbales, de dibujo, lógicas y de aplicación) para los niveles 1, 2 y 3 de Van Hiele, describen varias actividades para desarrollar estas destrezas; algunas se refieren a los polígonos y otras a los sólidos. Al igual que la propuesta de Hoffer (1981) este

---

[6] En la literatura encontramos una gran variedad de definiciones propuestas por diferentes investigadores (psicólogos, didácticos, geómetras, etc.) para *visión espacial*. Nosotros no vamos a entrar en este debate. Utilizamos la expresión en cuanto que hace referencia a ciertas habilidades que los estudiantes tienen que desarrollar para poder comprender los objetos tridimensionales.

trabajo lo hemos tenido en cuenta en la organización de las actividades que proponemos para los diferentes niveles de Van Hiele; las cuales se describen en el capítulo 2 de esta memoria.

Gutiérrez (1992a) ha utilizado el modelo de Van Hiele para entender y organizar la adquisición de habilidades de visión espacial relativas a la geometría tridimensional. Propone descriptores de los niveles en este contexto basados en el comportamiento y respuestas de estudiantes de 6º de Enseñanza General Básica (EGB) (estudiantes de 12 años).

Cabe apuntar que en nuestro trabajo, para elaborar los descriptores de los diferentes niveles de Van Hiele para la geometría de los sólidos, utilizamos la metodología empleada en el trabajo de Gutiérrez para elaborar los descriptores de los niveles en el contexto de la visión espacial: la base para ello fue el comportamiento y respuestas de estudiantes a problemas que se les planteaban. Sin embargo, queremos aclarar que el organizar la enseñanza/aprendizaje de los sólidos tiene características propias. Como Gutiérrez (1992a, p. 18) señala, "es muy importante distinguir el proceso que se refiere a la visualización espacial del que se refiere a los sólidos y sus propiedades. Son tópicos relacionados pero diferentes, que tiene cada uno sus propias características".

TRABAJOS SOBRE LOS SÓLIDOS

En este apartado presentamos los estudios que tienen que ver de manera específica con la enseñanza/aprendizaje de los sólidos o que aportan conocimientos sobre algunos aspectos de ellos y que hemos utilizado de alguna manera para desarrollar el trabajo que presentamos en esta memoria. Los trabajos los hemos clasificado en tres apartados.

a) Investigaciones que se refieren a las diferentes maneras de "comunicar" los objetos tridimensionales.

Cuando se enseña geometría, especialmente geometría de los sólidos, aunque se trabaje con modelos materiales, una de las habilidades que hay que desarrollar es la que permite "comunicar" modelos físicos. Podemos hacerlo de diferentes maneras: podemos describirlos verbalmente, representarlos mediante dibujos en perspectiva, con otros tipos de representaciones, a través de su desarrollo plano, de su diagrama de Schlegel,... En la unidad de enseñanza que se describe en el capítulo 2, elegimos sólo plantear tareas para abordar explícitamente las descripciones verbales y la representación a partir de alguno de sus desarrollos.

Esto no quiere decir que no se permita que los estudiantes usen otro tipo de representación, o que no nos detengamos en las representaciones que ellos usen para comunicar sus modelos. Todas ellas se abordan en clase si es necesario. Por ejemplo, el dibujo en perspectiva lo hemos tenido que tratar en todas las experimentaciones que hemos realizado. Tuvimos que descalificar algunos dibujos incorrectos y corregir algunas interpretaciones ilícitas que los estudiantes daban sobre sus propios dibujos. Esto nos llevó a discutir los convenios establecidos para este tipo de representación; las propiedades que reflejan los dibujos de los sólidos, las que son propias del dibujo y las que se quedan sin reflejar (lo que Laborde, 1996, llama el *dominio de funcionamiento y dominio de interpretación*).

Lo que acabamos de mencionar explica que a continuación describamos brevemente algunas investigaciones que se han realizado sobre los diferentes tipos de representaciones de objetos tridimensionales que utilizan los estudiantes. Aunque no las hemos utilizado directamente en nuestro trabajo, aportan información que puede resultar interesante si se desarrolla la unidad de enseñanza propuesta.

- Gaulin (1985) en su trabajo ha observado que los niños tienen gran confianza para "comunicar" formas espaciales; intentan, y en ocasiones inventan, si son estimulados a ello, muchas formas de representación que no han aprendido en la escuela.
- Dickson, Brown & Gibson (1984) indican que los tests prácticos en la encuesta del proyecto inglés sobre la evaluación del rendimiento (*Assessment Performance Unit,* APU) de la educación primaria consisten en observar cómo trasladaban los estudiantes dibujos de modelos tridimensionales en modelos hechos con ladrillos de madera. También describen el interesante trabajo de Lappan y Winter, trabajo en el que los autores identificaron 4 pasos en el desarrollo de la comprensión de este esquema de representación y describen las actividades para cada paso.
- Cooper & Sweller (1989) examinan, con estudiantes de la escuela secundaria, la habilidad que tienen para interpretar representaciones de objetos tridimensionales que incluyen prototipos de componentes, dibujos en perspectiva, vistas ortogonales, descripciones por coordenadas, descripciones verbales y cuasi–descripciones verbales. Para ello dan a los estudiantes 4 cubos de madera idénticos y les piden que construyan los objetos. Establecen comparaciones entre las dificultades que enfrentan a los estudiantes de diferentes grados con los modos de representación.
- Potari & Spiliotopoulou (1992) centran su investigación en los desarrollos de los sólidos. Este estudio, llevado a cabo con niños de 9 y 11 años de edad, está diseñado para identificar sus maneras de dibujar desarrollos de sólidos y para proporcionarles oportunidades de reflejar en sus modelos las discusiones que se llevan a cabo en la clase. Sus resultados indican que el punto de vista de los niños de

los desarrollos de los sólidos progresa desde uno más global y holístico a otro más cuantitativo y analítico.

b) Estudios cuyo único objetivo ha sido el de proponer actividades concretas o secuencias de tareas para la enseñanza de uno o varios aspectos relacionados con los sólidos.

- Hart (1981) y Woodwars (1994) proponen actividades en las que se construyen modelos con material comercializado y se sugieren otras referidas a la geometría de los sólidos.
- Blake (1985) y Wallace (1992) presentan actividades que se refieren a distancias más cortas entre dos vértices de un cubo o de un ortoedro.
- Reesink (1982) y Cooper (1992) abordan el problema de las simetrías.
- Carroll (1988) centra su atención en secciones de los sólidos.
- Lichtenberg & Donovan (1988), Hoffer (1993) y Hopley (1994) describen y relacionan sólidos.

La información extraída de estos artículos ha influido en la elaboración de la unidad de enseñanza sobre los sólidos. Las actividades propuestas junto con las diferentes conclusiones extraídas, que posteriormente fueron corroboradas en nuestro estudio, permitieron, entre otras cosas, determinar los errores que comúnmente cometen los estudiantes y las dificultades con las que se encuentran, que se tuvieron en cuenta en el diseño de la secuencia de enseñanza que exponemos en el capítulo 2.

c) Este grupo incluye libros sobre geometría, o sobre los poliedros, que aportan conocimientos sobre algunos aspectos de éstos. Cabe desatacar tanto los que se han escrito desde la perspectiva de la enseñanza de la geometría (O'Daffer & Clemens, 1977; Castelnuovo, 1979; Fielker, 1987; Alsina et al. 1988; Guillén, 1991) como los que se han escrito desde un punto de vista de la construcción de modelos físicos y en los que se ha priorizado la descripción de los mismos (Holden, 1971; Wenninger, 1971; Cundy & Rollett, 1978).

La información extraída de esta literatura también ha influido de una manera clara y directa en nuestra investigación. Los libros del segundo grupo han sido la base para nuestra formación en el conocimiento de los sólidos. Los del primer grupo reflejan un punto de vista experimental del estudio de la geometría, que es el que muestra también la unidad de enseñanza propuesta en el capítulo 2.

1.3. APROXIMACIONES AL ESTUDIO

La labor docente de la autora de la tesis en la Escola Universitària de Magisteri de València, que llevó a abordar el estudio de la enseñanza/aprendizaje de los sólidos, condujo a la realización de diversos trabajos de investigación en los que han intervenido estudiantes de Magisterio y estudiantes de 6º de EGB (12 años).

Durante los cursos comprendidos entre 1983–1991, la autora de la tesis impartió en la Escuela del profesorado de EGB[7] de Valencia la asignatura que trataba de la geometría de los sólidos, que pertenecía al currículo en vigor hasta el curso académico 1993-1994, y que se impartía en el tercer curso en la especialidad de Ciencias, como asignatura anual con tres horas semanales. En vez de dar a la geometría un enfoque axiomático, que es lo que se hacía hasta entonces en la enseñanza de esta materia en España, presentamos la geometría desde un punto de vista experimental. El material utilizado como base, y que se presenta en Puig y Guillén (1983) se fue mejorando progresivamente y culmina con el libro de poliedros (Guillén, 1991).

Cabe destacar que si bien en esta época ya conocíamos el modelo de Van Hiele en relación con la enseñanza de la geometría, a través de los artículos de Hoffer (1981, 1983), no lo tuvimos en cuenta explícitamente a la hora de diseñar las actividades de enseñanza. Tampoco fuimos conscientes de que ya entonces nos preocupábamos de usar para "comunicarnos" con los estudiantes un lenguaje que no exigiera nivel de razonamiento superior al que permitiera entendernos. Un análisis de aquellas clases desde la perspectiva actual permite reconocer que el modelo de Van Hiele estaba subyacente en el diseño de las actividades propuestas (ver Guillén, 1991).

En el curso 1991–92 comenzamos a considerar explícitamente el modelo de Van Hiele en relación con la enseñanza de los sólidos. Además de seguir trabajando con estudiantes de 3º de Magisterio, comenzamos a hacer experimentaciones piloto en laboratorio, con niños de 6º de EGB (12 años). En Guillén et al. (1992) se presentan las actividades diseñadas para ello, un resumen de las sesiones que llevamos a cabo en la experimentación y las conclusiones que obtuvimos a partir de ellas.

---

[7] Actualmente *Escola Universitària de Magisteri «Ausiàs March».*

1.4. UNA CARACTERIZACIÓN DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE PARA LA GEOMETRÍA DE LOS SÓLIDOS

En el apartado 1.1.1 hemos indicado las características generales de los niveles de razonamiento de Van Hiele. En este apartado vamos a precisar estas características generales del modelo tal y como las hemos considerado en este trabajo al aplicarlas a la geometría de los sólidos.

El apartado 1.4.1 contiene los descriptores que proponemos para los niveles de razonamiento de Van Hiele, caracterizaciones que hemos elaborado con la metodología que apuntamos en la sección 1.5 y que hemos utilizado como referencia para el resto de nuestro trabajo. Para comprender mejor estas caracterizaciones, en el apartado 1.4.2 precisamos en qué sentido hemos utilizado, en los diferentes niveles de razonamiento de Van Hiele, algunos términos que utilizamos en las caracterizaciones propuestas, que en el apartado 1.2.1 hemos señalado como los que describen el tipo de razonamientos que engarzan los contenidos geométricos, y que en la enseñanza pretendemos desarrollar; en concreto aclaramos los términos de descripción, clasificación, definición y demostración. Por otro lado, en este apartado también consideramos otros términos geométricos, de acuerdo con la utilización que se hace de ellos; esto es, aclaramos nuestra interpretación de *precisión* en la utilización de lenguaje en los diferentes niveles de razonamiento de Van Hiele.

Por último, en el apartado 1.4.3 intentamos dar respuesta a preguntas que surgen de inmediato cuando se tiene que diseñar una unidad de enseñanza teniendo como referencia el modelo de Van Hiele, cuestiones que se refieren a cómo organizar las tareas que pueden introducir en el primer nivel de razonamiento y otras que tienen que ver con lo que se considera como objetivo de la enseñanza.

1.4.1. DESCRIPTORES DE LOS NIVELES

A continuación vamos a relatar nuestra propuesta sobre los descriptores de los niveles de Van Hiele en relación con la geometría de los sólidos. Estos descriptores son complemento y particularización de las los señalados en la sección 1.1 de este capítulo. Como ya hemos indicado en la introducción de esta memoria, son el resultado del análisis teórico realizado sobre las características de los diferentes niveles de razonamiento de Van Hiele, tanto generales como particularizadas a la geometría tridimensional, que han sido especificadas en la investigación realizada sobre el modelo de

Van Hiele, y del trabajo experimental que llevamos a cabo con estudiantes, sobre la base del cual realizamos las posteriores modificaciones.

Como podrá observarse, sólo hemos precisado detenidamente las características de los niveles 1, 2 y 3 de Van Hiele, que es el rango de nivel de razonamiento correspondiente a los estudiantes con los que realizamos la mayoría de las experimentaciones. El que con los estudiantes de la Facultad de Matemáticas, para los que cabía esperar que consiguieran un grado de dominio del nivel 4, no pudiéramos desarrollar la experimentación como hubiéramos deseado (ver el apartado 1.5.2), y con los estudiantes de Magisterio encontramos muy pocos que razonasen en este nivel, ha tenido como consecuencia una restricción para identificar los descriptores del nivel 4 de Van Hiele en el campo de la geometría de los sólidos, con respecto a la caracterización que hacemos para los otros niveles.

CARACTERÍSTICAS DEL NIVEL 1 (RECONOCIMIENTO)

El hecho de que en este nivel sólo se maneje información visual y los objetos sólidos se consideren globalmente se traduce en que en este nivel el estudiante:

1.– *Puede identificar un sólido, como ejemplo o no ejemplo de determinada familia de sólidos. Puede describir un sólido, una familia de sólidos, o sus elementos, por su aspecto físico o a partir de ejemplos prototipo tomados de su entorno físico. Puede también percibir características visuales y funcionales de los sólidos.*

La identificación y descripción de un sólido puede hacerse cuando éste se presenta como modelo, como objeto del entorno del estudiante (la casa, la clase y otros lugares) o inmerso en una estructura. El modelo puede estar construido con diferentes materiales; se puede mostrar de diferentes tamaños, a diferentes distancias y en diferentes posiciones. Todo esto puede hacerse en este nivel porque ya se reconoce la conservación del tamaño y la forma de los objetos y se es capaz de identificar la forma geométrica neta, prescindiendo de los detalles no esenciales (materia, color, embalaje, etc.).

Cabe hacer los siguientes comentarios:

– Aunque la posición influye considerablemente en su identificación, se pueden reconocer los sólidos en varias posiciones.

– Para identificar o describir sólidos, o familias de sólidos, se pueden utilizar ejemplos prototipo u objetos del entorno. En este nivel se puede asociar los sólidos con modelos geométricos, con objetos físicos o con otros ejemplos de la misma familia. La familiaridad con ellos influye considerablemente en su identificación y en su descripción.

Cuando las respuestas se basan en ejemplos prototipo las expresiones que se utilizan para describir los sólidos son del tipo: "... se parece a..." "... tiene la forma de..." "... es como...", etc. Por ejemplo, para describir un ortoedro se indica, "es como una caja de zapatos".

– Para identificar o describir sólidos se pueden utilizar atributos visuales (propiedades con componente fuertemente visual) o características funcionales. También se pueden señalar atributos irrelevantes o propiedades imprecisas. Por ejemplo, la posición del objeto, la esbeltez o achatamiento de un prisma, el tamaño, la orientación del modelo, etc.

Cuando se apuntan atributos visuales, éstos son del tipo: puede ser de diferente tamaño, más o menos esbelto, más o menos chato, más o menos grueso, ...

Las características funcionales pueden ser: tiene o no esquinas (o vértices), rueda perfectamente o no, tiene o no caras planas, se pueden o no apilar, se puede o no cubrir el espacio con ellos, ofrece una posición más o menos estable al apoyarlo en sus caras, el armazón es rígido o no.

– Se puede indicar la forma de las caras, pero en este caso puede que no se tengan en cuenta todas las necesarias. Esto lleva a que los modelos se pueden identificar como ejemplos de dos familias que son disjuntas. Por ejemplo, un modelo cóncavo se puede identificar como cóncavo y como convexo "porque el modelo tiene caras de ambas clases (cóncavas y convexas)" .

– También puede usarse terminología o propiedades geométricas pero éstas suelen ser incorrectas, poco precisas o inadecuadas y la redacción refleja que no es en ellas en las que se basa la respuesta. Pueden hacerlo los estudiantes que han tenido experiencia anterior con el estudio de la geometría. En este caso se recuerdan algunos términos y propiedades geométricas y lo que el profesor suele pedir en estas tareas, y se escribe lo que se recuerda de geometría, aplicado a las tareas sobre los sólidos.

– Para describir una familia de sólidos se puede tener en cuenta sólo un ejemplo de ella, con el que se ha tenido más familiaridad. La familia se sustituye por el ejemplo que se tiene de ella. Se está todavía muy pegado a los ejemplos concretos para dar explicaciones sobre la familia a la que pertenecen. En este nivel aún no se es capaz de captar que los ejemplos son representantes de una clase y que hay que elegirlos adecuadamente para que podamos basar en ellos la respuesta. Una respuesta de este tipo es: "Los prismas son regulares porque el cubo lo es y es prisma". En esta respuesta el estudiante ha considerado su ejemplo de prisma y a partir de él ha dado su respuesta.

2.- *Puede nombrar objetos físicos o modelos de sólidos concretos. También puede asociar el nombre con el modelo del sólido correspondiente. Puede nombrar los elementos que componen los sólidos: las caras, los vértices y las aristas.*

Puede emplear el vocabulario elemental de los sólidos relativo a los nombres de algunas familias (cubo, esfera, cilindro, etc.) o de sus elementos (caras vértices y aristas).

3.- *Puede construir con material comercializado o con plastilina, teniendo el modelo delante, modelos o armazones de sólidos sencillos. También puede construir desarrollos de sólidos sencillos deshaciendo algunos modelos.*

Los modelos o armazones que se pueden modelar con plastilina, o construir con material comercializado, pueden corresponder a la esfera, el cilindro, algunos prismas, etc. Como los modelos de los sólidos se pueden construir con los materiales comercializados que constan de polígonos, o de varillas y mecanismos de engarce, los estudiantes que razonan en este nivel pueden reconocer explícitamente las partes del sólido y sus componentes; es decir, pueden reconocer la forma de las caras (a nivel global), las aristas y los vértices.

4.- *Puede clasificar los sólidos considerando semejanzas o diferencias físicas globales entre ellos o atributos visuales.*

Para ello se suelen utilizar expresiones como "... se parece a..." "... tiene la forma de..." "... es como...", "tienen entrantes", "están torcidos", etc.

El estudiante puede clasificar los sólidos considerando atributos visuales; por ejemplo, se pueden separar los sólidos que tienen caras (o aristas) curvas de los que tienen todas las caras planas (rectas); se pueden separar los prismas rectos de los oblicuos o los prismas cóncavos de los convexos.

5.- *Puede identificar los polígonos y los sólidos que se generan al truncar, agrupar, descomponer, etc. algunos sólidos y recordar relaciones (visuales) que hay entre sólidos, o entre sólidos y polígonos.*

Por ejemplo, un estudiante que razona en este nivel puede resolver problemas como los que siguen:

a) Identificar las formas obtenidas cuando truncando cilindros se construyen prismas y a partir de prismas se generan otros prismas; las piezas del puzzle que encajan en el cubo: tres pirámides iguales de base cuadrada forman un cubo, 6 pirámides iguales de base cuadrada también, un tetraedro y 4 pirámides, también,...; los dos prismas triangulares que se obtienen al introducir en el cubo el rectángulo que corresponde a un plano de simetría; el tetraedro y las 4 pirámides en las que se descompone un cubo al introducir en él 4 triángulos equiláteros cuyo lado corresponde a la diagonal de la cara del cubo.

b) Encontrar el volumen de una caja introduciendo cubos y después contando. También puede determinar los cubos pequeños que son necesarios para construir determinados ortoedros o un cubo más grande.

c) Si se realizan cortes en modelos físicos y se hacen estampaciones en papel de los polígonos obtenidos como secciones (utilizando témperas), puede identificar los polígonos obtenidos como sección. También puede seleccionar el modelo sólido apropiado para que realizando estampaciones con una sección de él (que ya está realizada) resulte una figura plana determinada.

d) Recordar las relaciones entre las piezas que forman el puzzle y el modelo resultante o entre un sólido y los correspondientes a las partes en los que se ha separado: un cubo se puede obtener juntando 3 ó 6 pirámides iguales; un cubo se puede obtener juntando un tetraedro y otras 3 pirámides; un cubo lo podemos separar en dos prismas triangulares, etc.

Cuando en este nivel los modelos se obtienen truncando, juntando o descomponiendo modelos, se trabaja con las piezas correspondientes (que pueden ser sólidos o polígonos). Los modelos que forman las piezas o el sólido resultante que se considera, se juzgan globalmente y según su apariencia física. Las expresiones que se usan para plantear cuestiones o para comunicarse el profesor y los estudiantes, son del tipo: si introducimos estos rectángulos así... ¿qué forma piensas que va a tener este modelo que queda a un lado? ¿Y el que queda aquí en la esquina, tiene otro nombre? Vamos a truncar esta esquina para ver si así ya puedes averiguarlo. ¿Aún no? Pues vamos a truncar esta otra. ¿Por dónde piensas que debemos cortar? ¿Por ahí? Veamos lo que ocurre.

CARACTERÍSTICAS DEL NIVEL 2 (ANÁLISIS)

El hecho de que en este nivel ya se reconoce la presencia de propiedades matemáticas de los sólidos, de las familias de sólidos y de sus elementos, y que el razonamiento se sigue basando en la percepción física, se refleja en que en este nivel el estudiante:

1.– *Puede identificar un sólido como ejemplo o no ejemplo de una familia de sólidos, basando sus respuestas en sus propias definiciones (que son una lista de propiedades) y puede no tener en cuenta las definiciones enunciadas* *en el libro (o por el profesor). Además, el estudiante puede utilizar el análisis que ha realizado de los modelos para identificarlos a partir de desarrollos de ellos.*

El modelo, que se presenta en diferentes posiciones, se puede identificar adecuadamente tanto si se presenta como modelo material del sólido como si se presenta su estructura cuando se presenta como objeto físico, como una pieza de un juego, inmerso en una estructura compleja, o en un puzzle.

El estudiante puede comprender algunas relaciones que hay entre determinados modelos: unos se pueden ver como agregados de otros. Puede hacer descomposiciones de modelos e identificar los elementos del modelo que se introducen para ello. Puede establecer relaciones entre los elementos de los de una familia y los de las otras en que ha quedado descompuesto. Por ejemplo, se puede ver que si en el cubo se introducen las 4 diagonales del espacio, éste queda descompuesto en 6 pirámides iguales, cuya base coincide con la cara del cubo, la altura es la mitad de las aristas del cubo, y las aristas laterales miden la mitad que la diagonal del espacio del cubo.

2.– *Puede describir un sólido, o una familia de sólidos, sobre la base de propiedades geométricas, que se delimitan con la ayuda de observaciones, medida, dibujos y construcción de modelos.*

Un estudiante que razona en este nivel puede establecer propiedades para los modelos que analiza experimentalmente.

a) Puede reconocer sus componentes (caras, vértices y aristas). Puede hallar su número y establecer relaciones entre ellas. Por ejemplo, "el romboedro tiene 6 caras, 8 vértices y 12 aristas", "el romboedro tiene caras opuestas iguales".

b) Puede describir el modelo por sus propiedades. Puede enunciar sus propiedades utilizando vocabulario apropiado para componentes y relaciones. Por ejemplo, "en las pirámides hay vértices de dos tipos, en unos se juntan triángulos y en otros se juntan 2 triángulos y otro polígono". Cuando se pide que se defina una figura, recita una serie de propiedades necesarias para caracterizar la figura, en vez de determinar propiedades necesarias y suficientes.

El estudiante puede también, a partir de la experimentación, generalizando ejemplos, delimitar propiedades para una familia de sólidos, o para un caso general (por ejemplo, un prisma n–agonal). Ya capta que un ejemplo cualquiera no sustituye a una familia, que para describir familias de sólidos hay que buscar varios ejemplos y sacar conclusiones generales sobre ellos. Al comprobar la validez de una afirmación, trabajan con la geometría como si fuera una ciencia experimental.

c) Para obtener propiedades de una familia de sólidos elige varios ejemplos, observa en ellos las propiedades y se extienden a toda la familia de sólidos. Por ejemplo, elige un prisma recto cuadrangular y un prisma oblicuo pentagonal como ejemplos de prisma; observa que en ambos las aristas laterales son iguales y paralelas y se enuncia como propiedad de los prismas.

El estudiante en este nivel ya concibe los ejemplos como representantes de clases, pero puede que no los elija adecuadamente para que la respuesta basada en ellos sea matemáticamente correcta. El estudiante tampoco puede aún delimitar como atributos críticos de una familia propiedades que contengan términos del tipo "como mucho", "como mínimo", "al menos", etc. No puede reformular, utilizando estos términos, algunas propiedades para que sean propiedades de una familia que incluya a otra. Por ejemplo, una vez observado que el romboedro genérico tiene ángulos de las caras de dos tipos, no puede enunciar esta propiedad de manera que también la cumpla el cubo (el romboedro como mucho tiene 2 medidas para los ángulos de las caras). En este nivel, la lista de propiedades que se indica para familias que contienen otras familias más específicas suelen dejar fuera los ejemplos específicos. Por ejemplo, si se pide que se enuncie una propiedad de los prismas rectos de base regular en términos de medidas diferentes para las aristas, en este nivel se indica "tienen aristas de dos medidas diferentes" que deja fuera la familia de los prismas de caras regulares.

3.– *Puede separar un modelo por niveles o en casquetes, u observar las caras que bordean a una cara dada, o las que se juntan en un vértice, y aplicar las observaciones que se hacen para construir ejemplos de una familia de sólidos dada o diferentes desarrollos de algunos sólidos.*

En este nivel no se puede aún encontrar todos los desarrollos de un modelo dado, ni demostrar que no hay más.

4.– *Puede identificar la información dada en un modelo sólido o en un dibujo de éste, explicar la respuesta en términos de propiedades o aplicar esta información a uno de los desarrollos.*

En este nivel un estudiante puede:

a) Identificar la forma de algunas secciones que se han marcado sobre un modelo. Por ejemplo, se puede averiguar que determinadas secciones del cubo corresponden a hexágonos regulares, o a cuadrados, o a otro polígono dado y explicar la respuesta en términos de propiedades, pero no se puede aún justificar que no es posible obtener determinadas formas como sección de un modelo dado; como la de un pentágono regular en un cubo.

b) Reconocer en un dibujo los diferentes elementos de los sólidos (caras, vértices y aristas) o los diferentes tipos de ángulos (ángulos de las caras, ángulos diedros y ángulos de los vértices) o de diagonales (diagonales de las caras y diagonales del espacio).

c) Reconocer modelos inscritos en otros, o intersectados entre sí, y delimitar relaciones de igualdad, paralelismo o perpendicularidad entre los elementos de ambos modelos.

5.- *Puede abordar problemas sobre clasificaciones-particiones o clasificaciones inclusivas, relativos a relaciones de familias.*

En este nivel un estudiante puede:

a) Establecer clasificaciones-particiones considerando propiedades geométricas cuando los criterios tienen componente fuertemente visual o centran la atención en la regularidad o el número de lados del polígono de las bases. Nombrar las familias establecidas. Identificar los modelos de sólidos como ejemplos o no ejemplos de subfamilias. Enumerar propiedades de las familias establecidas. Delimitar todos los tipos de ejemplos de una familia que cumpla algunas condiciones. Por ejemplo, dado un conjunto de modelos sólidos, los estudiantes pueden seleccionar ejemplos de paralelepípedos que no sean ortoedros.

b) Juzgar si las relaciones que se dan para dos familias de sólidos son correctas, cuando éstas se presentan enunciadas en términos de: los ... son a veces ..., no todos ... son ..., todos ... no son ..., todos ... son ..., los ... siempre son ..., los ... nunca son ..., ningún ... es..., no hay ... que sea ... Si la relación se presenta enunciada como "no puede haber ... que no sean ...", la interpretación de estos términos y delimitar qué es lo que hay que demostrar exige razonamientos del nivel 3.

c) Verbalizar enunciados y delimitar las partículas "siempre", "a veces" o "nunca" que muestran si entre dos familias de sólidos existe relación de inclusión, tienen elementos comunes, o son excluyentes.

d) Construir un diagrama con forma de árbol o de red, que muestra las relaciones entre determinadas familias.

El estudiante en este nivel no puede aún relacionar unas propiedades con otras; no es capaz de hacer clasificaciones lógicas de figuras, basándose en sus propiedades. No siempre puede establecer las relaciones entre las familias por el hecho de que se haya observado que determinadas familias verifican las propiedades de otra. En este nivel, los estudiantes no admiten la inclusión de clases entre determinadas familias de figuras a no ser que se haya considerado previamente la inclusión en términos de ejemplos. Así, si bien se puede observar que en los ortoedros también se cumplen las propiedades de los paralelepípedos (las caras opuestas son iguales y paralelas, etc.), no se deduce de ahí que un ortoedro es un paralelepípedo. Se podría comprender y expresar esta relación si previamente se ha incluido esta familia como ejemplo de paralelepípedo, pero si se establece la relación se hace en términos de ejemplos.

6.- *Puede asociar propiedades a determinadas familias de poliedros e identificar familias de sólidos a partir de varias (o una) propiedades dadas.*

El estudiante puede:

a) Identificar propiedades como atributos críticos o no críticos de una determinada familia de sólidos.

b) Delimitar familias para las que determinadas propiedades son atributos críticos. Puede también asociar propiedades a las familias de sólidos correspondientes.

c) Nombrar un sólido, o familia de sólidos, teniendo en cuenta las propiedades que se enumeran.

Las propiedades que hay que manejar en el nivel 2 no contienen términos del tipo "como mucho", "como mínimo", "como máximo" o "al menos", etc. Si estos términos aparecen no se interpretan de manera matemáticamente correcta; se interpretan como "exactamente". El término diferentes que aparece en "tantas medidas diferentes como", "las mismas medidas diferentes que" se interpreta como que "tiene que tener elementos distintos". "Caras del mismo tipo" se suele identificar con "son iguales".

Otras propiedades que no se manejan en el nivel 2, o que sólo se hace una vez que se han descubierto, son las propiedades en las que se tiene que tener en cuenta varios elementos de diferentes tipos. Por ejemplo, los estudiantes en el nivel 2 no pueden delimitar si la familia de los prismas de caras regulares verifica o no la siguiente propiedad: el número de medidas distintas para las diagonales del espacio es como mucho el de medidas distintas para las diagonales de las caras +1.

Tampoco se consideran en este nivel las propiedades que se presentan enunciadas de manera más general a la que correspondería como propiedad específica de una familia, y su enunciado contiene términos relativos a los polígonos.

La dificultad de estas propiedades radica en aplicar correctamente lo que se conoce (que son las características específicas de la familia que se considera) y lo que se tiene que verificar (que es la propiedad que se plantea). Para este tipo de propiedades delimitar si nos cuestionamos una dirección u otra de la relación es lo que presenta la dificultad añadida. Si se proponen estas propiedades para el nivel 2, se responden de manera matemáticamente incorrecta. Por ejemplo, cuando se considera la familia de los prismas de caras regulares (PCR) y se plantea si cumplen o no que están formados por una cinta de rectángulos unida, que a su vez está cerrada por ambos lados por un polígono, respuestas de este nivel son: "No la cumplen porque todos los rectángulos no son cuadrados. Los prismas de caras regulares no pueden tener por caras laterales cualquier rectángulo sino que tiene que ser cuadrado. Además, la segunda parte de la propiedad, tampoco se cumple porque el polígono que cierra la cinta no puede ser cualquiera sino que tiene que ser regular".

Tampoco se proponen las propiedades que contienen el término *exactamente* y que obligan a que se delimite, a partir de datos numéricos (para las aristas o las medidas diferentes de los ángulos de las caras) familias o elementos muy específicos que sean posibles soluciones. Por ejemplo, la propiedad: tiene exactamente tres medidas para los ángulos de las caras. Estas propiedades conducen a un problema de demostración, porque se tienen que enumerar todas las posibles soluciones y justificar que no puede haber más.

7.– Justificar que determinadas relaciones entre familias son verdaderas o falsas y aplicar este resultado para establecer propiedades de una familia.

El estudiante puede:

a) Justificar con ejemplos que dos familias de sólidos no están relacionadas con la relación de inclusión. Puede seleccionar adecuadamente ejemplos y no ejemplos que demuestran que determinados enunciados que relacionan familias de sólidos son, o no son, adecuados, incluso cuando una de las familias implicada en la relación se ha introducido con una definición.

Por ejemplo, el estudiante puede dar el ejemplo y no ejemplo que demuestra que las pirámides de caras regulares son a veces deltaedros, aún en el caso de que la familia de los deltaedros se introduzca con una definición.

b) Para familias con gran componente visual que son muy familiares para el estudiante éste puede establecer y demostrar la relación de inclusión o exclusión que existe entre ellas. Puede justificar la respuesta verificando que las propiedades de una familia, (o su definición) también las verifica la otra, o que no hay ningún ejemplo de una familia que cumple las propiedades de la otra. En estas respuestas se aplica la idea de que las familias que sean ejemplos de otra tienen que verificar las propiedades de ésta. Por ejemplo, puede establecer que los cubos son siempre prismas y comprobar que cumplen una definición de prisma. Puede indicar también que los prismas rectos y oblicuos son familias disjuntas y comprobar que un ejemplo cualquiera de prisma recto no puede ser oblicuo.

c) Siempre que la inclusión entre familias tenga un gran componente visual o sea una inclusión que en términos de ejemplos sea usual considerarla, el estudiante puede utilizar relaciones de inclusión que hay entre familias para establecer propiedades de una familia, englobadas como propiedades de otra.

Por ejemplo, cuando el estudiante está delimitando las propiedades del romboedro puede indicar que los romboedros cumplen las propiedades de los paralelepípedos. Y también puede aplicar las relaciones de inclusión que tienen con la familia de partida, las diferentes familias establecidas en los prismas cuyo nombre contiene la palabra prisma. Por ejemplo, puede indicar que los prismas de caras regulares cumplen las propiedades de los prismas.

Pero demostrar de manera matemáticamente completa todas las relaciones de inclusión o exclusión que hay entre familias de sólidos, así como el delimitar adecuadamente todas las familias que contienen a la familia considerada (o a todas las familias consideradas), y aplicar correctamente relaciones de familias en términos de propiedades, requiere de razonamientos de nivel 3. Por ejemplo, en este nivel no se puede demostrar de manera matemáticamente completa que los prismas de caras regulares son convexos o que las pirámides de caras regulares no son nunca poliedros arquimedianos. Tampoco se puede delimitar adecuadamente que los romboedros cumplen las propiedades de los prismas cuadrangulares, las de los prismas convexos, las de los prismas de base cometa y de los paralelepípedos. Y no se puede explicar que las propiedades de las dos primeras familias son parte de las propiedades de las dos últimas.

8.– *Puede delimitar las fórmulas que dan el número de caras, vértices, aristas o un determinado tipo de ángulos* (ángulos de las caras, ángulos diedros y ángulos de los vértices), *para una familia de sólidos dada* (prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides), *y aplicar para un n particular las fórmulas encontradas. Además se puede justificar una fórmula, o bien generalizando para n los resultados obtenidos a partir de ejemplos concretos, o contando los elementos de una manera estructurada y haciendo una generalización.*

Por ejemplo, se puede elaborar la fórmula para el número de aristas de los prismas, (para un prisma n–agonal) después de observar que el número de aristas de un prisma triangular es 9, de uno cuadrangular 12, etc.. Para ello se generaliza para n los resultados obtenidos: "el número de aristas es 3n, siendo n el número de lados del polígono de las bases". Y también se pueden elaborar las fórmulas haciendo generalizaciones por el otro procedimiento señalado: por ejemplo, si el antiprisma se ve como una cinta cuyo número de triángulos es el doble que el número de lados del polígono de una base, un antiprisma n–agonal se ve como una cinta de 2n triángulos más dos polígonos, y se concluye que el número de caras es, $C = 1+2n+1 = 2n+2$, y el número de aristas es, $A = n$ (de una base) + 2n (las de la cinta de los triángulos) + n(de la otra base) = 4n.

Pero determinar las fórmulas que dan el número de diagonales de las caras o del espacio para determinadas familias y justificarlas deductivamente requiere de razonamientos de nivel 3.

9.– *Puede comprobar para familias específicas sencillas, fórmulas que dan el número de determinados elementos o la medida de ellos.*

Por ejemplo, pueden verificar que en un prisma hexagonal recto de base regular, la suma de los ángulos de los vértices viene dada por la expresión $12(180° + 120°)$.

CARACTERÍSTICAS DEL NIVEL 3 (CLASIFICACIÓN)

El hecho de que en este nivel ya se es capaz de establecer relaciones entre las propiedades de las figuras y que los razonamientos lógicos se siguen apoyando en la manipulación (las demostraciones son de tipo informal), se traduce en que en este nivel el estudiante:

1.– *Puede establecer clasificaciones-particiones que cubren todo el universo, considerando como criterio de clasificación propiedades geométricas y utilizando varios criterios de clasificación.*

Por ejemplo, se puede establecer que la familia dicotómica con los PCR es la de los prismas que no tienen todas las caras regulares. Cuando se pide que se incluya en una de las familias establecidas, un prisma de bases regulares (PBR) genérico (modelo que tiene bases regulares y caras laterales rectángulos), se incluye como ejemplo de prisma que no tiene todas las caras regulares (PCIr).

2.– *Puede comprender que en las clasificaciones se pueden utilizar varios criterios que conducen a clases cada vez más específicas. Se puede pasar de la inclusión que hay entre familias a la de sus grupos de propiedades y a la inversa. Ya se puede deducir que la inclusión que hay entre las familias de* *sólidos es la inversa de la inclusión que hay entre sus grupos de propiedades.*

Por ejemplo, el estudiante puede observar que los ortoedros también verifican las propiedades que cumplen los paralelepípedos (las caras opuestas son iguales y paralelas, etc.) y de ahí deducir que un ortoedro es un paralelepípedo. Puede observar que dentro de los ejemplos de paralelepípedos están los ortoedros, y deducir que parte del grupo de propiedades del ortoedro describe a los paralelepípedos.

3.- *Puede comprender que la organización de las familias no es única y que del tipo de clasificaciones que se hagan (particiones o clasificaciones inclusivas) van a depender los modelos que las representan, el diagrama que relaciona las familias y las propiedades o definiciones que se dan para las familias establecidas.*

Se comprende que las definiciones que se dan de las familias también informan del tipo de clasificación (partición o inclusiva) que se establece.

4.- *Puede comprender los cuantificadores y sus negaciones. El estudiante puede interpretar y negar verbalmente de manera matemáticamente correcta las partículas lógicas. Puede enumerar las propiedades de familias establecidas mediante clasificaciones inclusivas o exclusivas.* La lista de propiedades que se indican para familias que contienen otras familias más específicas ya no dejan fuera los ejemplos específicos. *Se puede evaluar si la negación de una propiedad de una familia es propiedad de la familia dicotómica. Se niegan de manera matemáticamente correcta propiedades de una familia para delimitar propiedades de una familia dicotómica con ella.*

a) Se pueden delimitar como atributos críticos de una familia, propiedades que contengan expresiones del tipo "como mucho", "como mínimo", "al menos", "tantas medidas diferentes como", "las mismas medidas diferentes que". Se pueden reformular, utilizando estas expresiones, algunas propiedades para que sean propiedades de una familia que incluya a otra.

   Por ejemplo, si se pide que se enuncie una propiedad de los prismas rectos de bases regulares (PRBR) en términos de medidas diferentes para las aristas, la que se indica en este nivel es: "las aristas tienen como mucho dos medidas diferentes". Esta propiedad ya no deja fuera los PCR.

b) Se pueden negar de manera matemáticamente correcta las expresiones "como máximo", "como mínimo", etc. El cuantificador "todo" se niega como "hay al menos uno que no...". Las propiedades de una familia relativas a igualdad de determinados elementos se traducen a propiedades de la familia dicotómica cambiando el término "iguales" por la expresión "hay al menos dos que son desiguales".

Las propiedades de una familia relativas a la regularidad de alguna de las caras se traducen a propiedades de la familia dicotómica negando al menos una de las dos condiciones de la regularidad de polígonos.

Para las familias establecidas con varios criterios de clasificación, al enunciar propiedades para la familia dicotómica de la dada, se tiene ya en cuenta que basta con negar una de las propiedades que sirven como criterio de clasificación; se comprende que no es necesario negar todas ellas. Por ejemplo, se comprende que en la familia dicotómica de los PCR, puede haber modelos que tengan las caras laterales regulares con la condición de que las bases no lo sean. En este nivel no se indica como propiedad de la familia dicotómica que las bases no son regulares o que las caras laterales no son regulares.

5.- *Pueden indicar propiedades cuando para ello hay que tener en cuenta varias familias y aplicar relaciones de inclusión entre familias para simplificar una determinada tarea.*

El estudiante puede:

a) Enunciar propiedades cuando para la respuesta hay que tener en cuenta varias familias (porque se piden propiedades comunes o propiedades de una familia que no cumplan otras). Para estas tareas se pueden enumerar propiedades de las que contienen términos del tipo *como mucho, como mínimo,* etc.

b) Deducir que las propiedades comunes a dos familias relacionadas mediante inclusión son las de la familia más general; y que las propiedades de una familia que está contenida en otra son las propiedades de ésta más otras propiedades que sólo cumple la primera. Además, puede determinar todas las familias para las que su grupo de propiedades contiene al grupo de propiedades de otra familia dada.

6.- *Puede establecer relaciones entre conceptos.*

Por ejemplo, el estudiante puede establecer que el rombododecaedro y el cuboctaedro son duales (están relacionados por dualidad) y puede comprender que el considerar estos poliedros obliga a una revisión de las características del concepto de dualidad de poliedros que se pueden delimitar para este concepto si sólo se consideran los poliedros regulares.

7.– *Puede comprender las definiciones, el papel de ellas y por qué hay que definir las familias de sólidos de una manera formal. Se pueden formular y utilizar definiciones. Se pueden aceptar formas equivalentes de una definición.*

8.– *Puede comprender los requisitos de una definición correcta y el proceso de elaboración de definiciones formales. El estudiante puede llegar a formalizarlas. Puede también modificar definiciones para una clase de sólidos.*

El estudiante puede:

a) Establecer relaciones entre propiedades; puede reconocer que unas propiedades se deducen de otras y deducir esas implicaciones (de un solo paso).

b) Identificar conjuntos diferentes de propiedades que caracterizan a una clase de sólidos, comprobar que son suficientes y justificar que no falta ni sobra ninguna para caracterizarlo completamente.

c) Formalizar diferentes definiciones para una misma familia de sólidos.

9.– *Puede demostrar propiedades con métodos ligados a la experimentación. El estudiante utiliza las representaciones físicas de las figuras o los modelos, más como una forma de verificar sus inducciones que como un medio para realizarlas.*

El estudiante que razona en este nivel puede:

a) Justificar si determinadas propiedades que no pueden obtenerse directamente de la observación son atributos críticos de la familia de sólidos considerada. Por ejemplo, el estudiante puede demostrar que la propiedad "el número de medidas diferentes para las diagonales del espacio como mucho es el número de medidas distintas de las diagonales de las caras" es un atributo crítico de los prismas rectos.

b) Demostrar propiedades de una familia. Por ejemplo, el estudiante puede demostrar que todos los prismas rectos de bases regulares son convexos.

c) Demostrar que no es posible obtener determinadas secciones en un modelo dado. Por ejemplo, la de un pentágono regular en un cubo.

d) Enumerar todos los ejemplos diferentes de determinadas familias de sólidos y demostrar que se han enumerado o descrito todos los ejemplos de ellas. También puede enumerar los ejemplos de una familia dada que verifican unas condiciones y demostrar que no hay otros que las cumplen. Por ejemplo, el estudiante puede demostrar que hay infinitos prismas o antiprismas arquimedianos (tienen las caras regulares) pero que sólo hay un número finito de pirámides o bipirámides de caras regulares. También puede demostrar que los prismas rectos de base regular que rellenan el espacio son el triangular, el cuadrado y el hexagonal.

e) Determinar y demostrar fórmulas o expresiones que dan, para determinadas familias o modelos, el número de determinados elementos o la medida de ellos. Por ejemplo, el estudiante puede hallar y demostrar la expresión que da el número de diagonales del espacio de un antiprisma n–agonal; o el número de diagonales que tiene el dodecaedro. También puede verificar que en un prisma hexagonal la suma de los ángulos de los vértices viene dada por la expresión 12(180° +120°).

10.– *Puede realizar razonamientos deductivos informales, usando implícitamente reglas lógicas* (por ej. si $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow r$ entonces $p \rightarrow r$) *y demostraciones de pocos pasos relacionadas con los sólidos. Se puede comprender que si en una familia se hace una deducción que conduce a un resultado, no supone que en la familia dicotómica con la dada se podrá deducir un resultado análogo.*

Por ejemplo, el estudiante puede demostrar, que si una pirámide es recta y su base es regular, entonces sus caras laterales son iguales. También puede explicar de manera matemáticamente correcta, una vez deducido que "en los prismas de caras laterales regulares (PCLR) la base tiene que tener lados iguales", que para los prismas que tienen al menos una cara lateral irregular (PCLIr) no se concluye que "los lados de la base no son iguales" ni que "los lados de la base son iguales", ni que "al menos dos de los lados de la base son desiguales.

CARACTERÍSTICAS DEL NIVEL 4 (DEDUCCIÓN FORMAL)

En el cuarto nivel el estudiante comprende el significado de la deducción como un medio para construir y desarrollar toda la teoría geométrica. La transición a este nivel se realiza al comprender el estudiante el papel de axiomas, definiciones y teoremas, la estructura lógica de una demostración y el análisis de las relaciones lógicas entre conceptos y enunciados. El estudiante que razona en este nivel puede:

1.– *Realizar demostraciones completas: se identifica la hipótesis, la tesis y la red de implicaciones lógicas que llevan de la primera a la segunda.*

Se pueden hacer demostraciones para familias de sólidos, sin ayuda del profesor, eligiendo el ejemplo representativo de la familia implicada. Se pueden aplicar resultados obtenidos para determinadas familias de sólidos para obtener algunas conclusiones que se pueden encadenar según el orden lógico de una demostración.

1.4.2. MATIZACIONES SOBRE LA INTERPRETACIÓN DE ALGUNOS TÉRMINOS Y EXPRESIONES EN LOS DISTINTOS NIVELES

En el apartado 1.1.3 ya hemos indicado que los ejemplos más claros de las diferencias en los lenguajes en los diferentes niveles de razonamiento corresponden a las palabras de procesos matemáticos. En este apartado vamos a precisar qué significados asociamos a descripción, clasificación, definición, demostración, etc., cuando las utilizamos en esta memoria referidas a uno u otro nivel de razonamiento (que corresponden a los significados que les dan los estudiantes cuando razonan en los diferentes niveles). También comentamos los problemas que aparecen en la geometría de los sólidos por la gran variedad de vocabulario que hay que utilizar cuando se trabaja con ellos, y lo que queremos decir cuando señalamos que la utilización del lenguaje no es muy precisa en un nivel de razonamiento dado.

LA DESCRIPCIÓN DE FAMILIAS

La palabra *describir* en todos los niveles de razonamiento puede asociarse a listas de propiedades o características de los conceptos, y lo que varía de un nivel a otro es el tipo de propiedades que se incluyen en la lista.

En el primer nivel de Van Hiele ya se tiene un objeto mental de los conceptos relacionados con los sólidos que permite distinguir los que son ejemplos de ellos de los que no, aunque se puedan presentar algunos problemas con la identificación de algunos ejemplos que no se han visto anteriormente. La descripción que se hace de ellos incluye propiedades visuales o funcionales, lo que no quiere decir que en este nivel no puedan señalarse propiedades geométricas, sino que cuando se indican a menudo son incorrectas, poco precisas o inadecuadas y no es en ellas en las que se basa la respuesta. El que se tenga un objeto mental de un concepto en este nivel no supone en absoluto que ya se tenga también la capacidad para describir los objetos en términos geométricos o que se puedan hacer dibujos de ellos; de la misma manera, en este nivel, de la habilidad para imitar un dibujo o para repetir nombres o propiedades no se puede concluir que el objeto mental está constituido en el sentido que hemos indicado al comienzo de este párrafo.

En el segundo nivel, "la figura se convierte en la portadora de sus propiedades" (Van Hiele, 1986, p. 168). Se empieza a reconocer la presencia de propiedades matemáticas de los objetos. Es el nivel propio de la descripción en el sentido matemático. Pero en este nivel todavía no se pueden enunciar propiedades que contienen términos del tipo "como máximo", "como mínimo", "tantas medidas diferentes como", o propiedades que relacionan los elementos de un tipo con los de otro. En este nivel estos términos se entienden como "exactamente" o "que tiene que haber medidas diferentes".

En el tercer nivel ya se puede enunciar y entender de manera matemáticamente correcta todo tipo de propiedades matemáticas.

LA CLASIFICACIÓN

En el primer nivel la palabra *clasificar* hace referencia a diferenciar, comparar o identificar los sólidos considerando las semejanzas o diferencias físicas globales entre ellos. Freudenthal (1983, p. 245) subraya la conveniencia de indicar a los estudiantes los aspectos que no tienen que tener en cuenta cuando se piden clasificaciones, si queremos que los estudiantes coloquen las formas en un contexto geométrico: "Se le puede decir a un niño de 5 años que no haga caso del grosor, color, acabado, pero si tales instrucciones no se dan, incluso un niño de 13 años podría ser incapaz de poner el material en un contexto geométrico, y esto ocurrirá realmente si se construyen distractores suficientemente fuertes".

En las respuestas de los estudiantes al hacer clasificaciones en el primer nivel de razonamiento, suelen utilizar expresiones como "... se parece a..." "... tiene la forma de..." "... es como...", etc., lo que no quiere decir que en este nivel no puedan señalarse también propiedades geométricas.

En el segundo nivel *clasificar* hace referencia a agrupar poliedros atendiendo a sus características pero las propiedades todavía no están relacionadas entre sí. Los estudiantes que razonan en este nivel consideran las clasificaciones como particiones. Pueden verlas también como inclusivas pero para ello, para que se admita la inclusión de clases entre determinadas familias de sólidos, se ha tenido que considerar previamente la inclusión en términos de ejemplos, o la inclusión entre familias tiene una gran componente visual.

En el tercer nivel *clasificar* hace referencia a clasificaciones lógicas de los sólidos (inclusivas–exclusivas) establecidas con propiedades o relaciones ya conocidas, formuladas con precisión matemática. Ya se pueden establecer las relaciones entre las familias por el hecho de que se haya observado que determinadas familias verifican las propiedades de otra.

LA DEFINICIÓN

En el primer nivel, los estudiantes ya pueden tratar con definiciones. Vinner (1976) expresa al respecto:

> Todos nosotros empezamos a tratar con definiciones a una edad muy joven, cuando empezamos a hablar en nuestra lengua materna. En esta edad ocurren varios tipos de definiciones y la materia es demasiado complicada para tratarse aquí (Vinner, 1976, p. 425).

Para definir una familia de ejemplos, los estudiantes o bien se apoyarán en modelos conocidos que tengan la forma de los ejemplos, o bien indicarán propiedades visuales. En el primer nivel la definición será una idea muy ingenua del concepto basada en ejemplos prototipo y pueden incluir atributos visuales o características funcionales.

Para un estudiante que razona en un segundo nivel, definir una familia de sólidos es equivalente a describirla; por definir entiende dar una lista de propiedades, que pueden caracterizar a la familia, ser insuficientes, o redundantes. Van Hiele (1986) señala que los objetos (clases de objetos) pasarán a ser la representación de todas estas propiedades y habrá una equivalencia entre el objeto con un nombre concreto y las propiedades con las que lo describen:

> Cuando, después de cierto tiempo, estos conceptos están suficientemente claros, los estudiantes pueden empezar a describirlos. Con esto, se mencionan y se llegan a hacer explícitas las propiedades geométricas de las figuras geométricas. Las figuras pasan a ser la representación de todas estas propiedades. [...] Aquí tenemos una total equivalencia: no solamente una figura posee unas determinadas propiedades, sino que también los niños pueden llamar siempre a una figura con esas propiedades con el mismo nombre. [...] Al final, las propiedades se recordarán directamente sólo con la palabra (Van Hiele, 1986, p. 168).

Es en el tercer nivel cuando la palabra *definir* adquiere un significado muy aproximado al que tiene en matemáticas. Freudenthal (1973, p. 416) indica que en las matemáticas las definiciones tienen su significado especial: "una definición no sirve sólo para explicar a la gente lo que se quiere decir con una cierta palabra; las definiciones son eslabones en cadenas deductivas". Así, las definiciones no intentan reflejar la esencia de las cosas sino que organizan propiedades, seleccionan las mínimas, se enganchan en un sistema deductivo y se colocan en él al principio.

Los estudiantes que razonan en un tercer nivel respecto a las definiciones pueden comprender lo relacionado con las dos características mencionadas primero. Como indica Van Hiele (1986, p. 170), "después que los estudiantes han examinado el carácter de señal de varias figuras, descubrirán que algunas combinaciones de propiedades producen las figuras deseadas y que otras combinaciones no". Es en el nivel 3 donde el estudiante puede comprender los requisitos de una definición formal y puede llegar a formalizarla. Pero se requiere que una persona razone en el cuarto nivel para que entienda el papel que juegan las definiciones y los axiomas en la estructura axiomática de las matemáticas.

Vale la pena llamar la atención sobre que la mayoría de las definiciones que se elaboran en nivel 3 tampoco corresponden exactamente a las que se tienen en un sistema deductivo, sino que, al igual que la mayoría de las definiciones que consideramos en la enseñanza, son descripciones de los objetos en las que se ha reducido la lista de propiedades a un conjunto suficiente que es "más o menos" mínimo. Por ejemplo, la definición de rectángulo como el cuadrilátero que tiene 4 ángulos rectos da un conjunto suficiente que no es mínimo; basta con decir que tiene 3 ángulos rectos. Este ejemplo da una idea de lo que queremos decir con que el conjunto de propiedades seleccionado es "más o menos mínimo" y explica que, si bien está muy extendida la idea de que en las definiciones el conjunto de propiedades implicadas es mínimo, y de hecho nosotros utilizamos esta expresión al diseñar y comentar las tareas correspondientes en el capítulo 2, cabe subrayar que sólo podremos afirmar con seguridad que esto es realmente así si estamos en un sistema deductivo.

Otro aspecto que cabe resaltar respecto al proceso de definir es que en el modelo de Van Hiele las definiciones se conciben como el final de un largo proceso (examen de ejemplos, análisis de propiedades, clasificaciones, etc.). Como subrayan Van Hiele (1986) y Freudenthal (1973), no se puede insistir en el aspecto deductivo de la definición antes de haber descrito las figuras, las clases y haberse familiarizado con todos los elementos de las clases. Y si en ese momento interesan las definiciones es especialmente para que sean los propios estudiantes las que las elaboren por ellos mismos o con ayuda del profesor.

> Cuando Dina Van Hiele mostró a sus niños un cubo, un rombo, un paralelogramo y les dio ejemplos de figuras congruentes, los niños lo comprendieron tan bien como ella quería ya que reconocieron en una silla, una botella y una muñeca sus especies aunque no habían aprendido ninguna definición de ellas ni se habían familiarizado con todos los de su clase. Por supuesto puede que hubiera incertidumbres, por ejemplo, en saber si un cuadrado pertenece a los rombos, o un rombo a los paralelogramos. El profesor puede imponer definiciones para decidir tales controversias, pero si lo hace está degradando las matemáticas a algo gobernado por reglas arbitrarias.
>
> Si el niño conoce lo que es un rombo, lo que es un paralelogramo, visualmente puede descubrir propiedades de estas formas. Hay muchas. [...] Hay una colección de propiedades visuales que piden organizarse. Yo ya he explicado antes como la

deductividad comienza en este punto. No se impone sino que se desdobla desde sus orígenes locales. Las propiedades del paralelogramo están conectadas unas con otras; una de ellas puede ser el origen de las demás. Así es como surge la definición y llega a ser claro por qué un cuadrado será un rombo y un rombo un paralelogramo. En este curso el estudiante aprende a definir, y experimenta que la definición es más que la descripción, que es un medio de organización deductiva de las propiedades de un objeto.

[...] La buena instrucción de la geometría puede significar mucho –el aprender a organizar una materia y el aprender lo que es la organización, el aprender a conceptualizar y lo que es conceptualización, el aprender a definir y lo que es definición. Lo cual quiere decir el conducir a los estudiantes a comprender el por qué alguna organización, algún concepto, alguna definición es mejor que otras. La enseñanza tradicional es diferente. En vez de dar a los chicos la oportunidad de organizar sus experiencias espaciales, la materia se ofrece como una estructura preorganizada. Todos los conceptos, definiciones y deducciones se preconciben por el profesor, que sabe lo que es, su uso en todo detalle – o más bien por el autor del libro de texto que guarda cuidadosamente todos los secretos en su estructura (Freudenthal, 1973, pp. 417-418).

No queremos acabar este apartado sin hacer referencia a que el significado que se tiene sobre *definir* en los diferentes niveles de razonamiento lleva asociado un significado para los *nombres* de las familias de sólidos. Vamos a aclararlo brevemente.

En el primer nivel de razonamiento los nombres de las familias de sólidos se ven como "vocabulario": como los términos que utiliza una lengua hablada por una comunidad para nombrarlas. En el segundo nivel los nombres son etiquetas de un sistema de relaciones/propiedades geométricas, y en el tercer nivel ya se comprende que estas etiquetas pueden hacer referencia a sistemas de relaciones/propiedades geométricas mínimos que caracterizan completamente a la familia considerada.

LA DEMOSTRACIÓN

La noción de demostración no es confinada a las matemáticas sino que es una palabra común en nuestro vocabulario que tiene significados especiales en contextos particulares. Vega (1990, p. 11) considera que "la gama de significados posibles se extiende desde el que tienen frases como (1) «El despliegue de la flota fue una *demostración* de fuerza», o (2) «El agente de ventas hizo una *demostración* de cómo funcionaba el aparato», o (3) «El experimento de Puy de Dôme *demostró* la hipótesis de Torricelli sobre la presión atmosférica», hasta el sentido que alcanza a tener una cláusula del tenor de (4) «Que es lo que había que demostrar», con lo que se remata la deducción de un teorema matemático".

Vega (op. cit., p. 12) añade que todos los sentidos comparten la significación común "mostrar o poner algo de manifiesto" y explica la idea de demostración que se sobreentiende con cada una de las frases:

> «Demostración» tiene en (1) el sentido de exhibir, indicar o dar a entender algo —quizás en este caso por un medio tan efectista—. En (2) tiene el sentido de hacer ver el funcionamiento de un mecanismo mediante una presentación o una «prueba» práctica de su puesta en marcha y su manejo. En (3) «demostrar» significa constituir una prueba o una evidencia empírica de que algo es el caso; equivale a verificar o comprobar una presunción, una conjetura; no es mostrar algo a secas, ni la «demostración» directa de algo, sino un mostrar en régimen completivo e indirecto: el **mostrar-que** una proposición resulta verdadera; por ello suele contraer implicaciones metodológicas que son normalmente ajenas a las demostraciones de tipo (1) o (2). Ahora bien, ninguno de los usos (1)-(3) envuelve un proceder y unas características lógicas como las que distinguen a la *demostración* de un teorema matemático en el sentido (4). Por un lado, una demostración de este tipo consiste en una argumentación hilada en el marco de una teoría deductiva, condiciones que están de más en una exhibición o en una «demostración» práctica de algo como las sugeridas en (1) y (2). Por otro lado, esa argumentación sólo tiene el valor demostrativo que corresponde a (4) si constituye una prueba lógicamente concluyente del caso en cuestión, si establece que lo demostrado tiene que ser así y no de otra manera; exigencia que, a su vez, sobrepasa lo que en justicia se podría esperar de una prueba experimental o de una evidencia empírica—en el sentido de (3)—cuando a través de ella queremos averiguar si algo es el caso: pues no hay experiencia que llegue a determinar la necesidad de que algo sea en verdad así, o la imposibilidad de que ocurra exactamente lo contrario; no hay experimentos cruciales; no hay experiencias definitivas.

También habla de otros discursos argumentados, a los que también se han llamado «demostraciones», que se caracterizan por demostrar –exhibir o mostrar– cualquier cosa salvo aquello que pretenden demostrar –probar–. Como ejemplo de estas falacias (así es como llama a estos discursos) apunta las «demostraciones» que se han dado de la existencia de Dios. Aclara que en esos ejemplos sólo se habla de «demostrar» como expresión de un deseo y que una demostración fallida no es una demostración.

Estos significados de demostración podemos asociarlos a diferentes niveles de Van Hiele.

En el primer nivel de Van Hiele la palabra *demostrar* tiene el significado con el que se utiliza en el lenguaje cotidiano; tiene el sentido que Vega (1990) ha asociado a (1) y a (2).

Así, las demostraciones sobre sólidos que se pueden dar en este nivel, tienen un sentido de exhibir, indicar o dar a entender o se basan en una *demostración* práctica de algo. En este nivel, para convencer de que algo es verdad, un diagrama o un modelo construido, o una sección encajada o dibujada en un modelo son suficientes para convencer.

En el segundo nivel de Van Hiele, *demostrar* tiene el sentido que Vega (1990) ha asociado a (3); *demostrar* una propiedad geométrica puede ser equivalente a comprobar o verificar experimentalmente, en uno o más ejemplos, que se verifica la propiedad. Se conoce que la demostración debe ir más allá de la repetición del resultado, que no es mostrar algo a secas, ni la demostración directa de algo, sino como señala Vega (1990) hay que mostrar-que una proposición resulta verdadera; lo que equivale a verificar o comprobar una presunción, una conjetura.

En este nivel ya se pueden distinguir enunciados que son intuitivamente obvios de los que hay que dar explicaciones para demostrarlos. Por ejemplo, a los estudiantes que razonan en este nivel les puede parecer claro que todas las aristas de un cubo son iguales, que para formar un vértice de un poliedro, se necesitan por lo menos 3 polígonos, etc. Estos enunciados parecen evidentes, por lo que no se requiere más explicación. Y se puede comprobar que si bien es muy importante la intuición en matemáticas y en la enseñanza de las matemáticas, no hay que fiarse ciegamente de ella, pues puede ser peligroso confiar excesivamente en la intuición. Por ejemplo, intuitivamente, también parece claro que se pueden formar vértices de poliedros en los que concurran 3 hexágonos y la experimentación con material puede llevar a una demostración, del tipo de las que vamos a comentar a continuación, que también se puede comprender en este nivel, de que esto no es posible (se quedan planos, no forman hueco).

Las *demostraciones mediante un diagrama o modelo* ya vienen acompañadas de propiedades de los sólidos implicados que refuerzan lo que se muestra visualmente, si bien todavía se dan saltos que llevan a que la demostración sea muy incompleta. Por ejemplo, una demostración de este nivel de que el modelo inscrito en el dodecaedro es un cubo puede ser la siguiente: En el modelo del par de poliedros se indica que "el sólido inscrito tiene 12 aristas iguales, que son las diagonales del pentágono, igual que aristas tiene el cubo; en cada vértice se juntan tres aristas, como en el cubo; las caras tienen 4 lados iguales que son cuadrados porque los ángulos son rectos". Estas propiedades se muestran en el modelo.

En este nivel también se puede comprobar que resulta peligroso confiar excesivamente en este tipo de pruebas debido a que hay situaciones en que los sentidos pueden "engañarnos"; un diagrama, un modelo de la situación, puede ser engañoso.

Por último vamos a señalar que en este nivel se puede razonar por *inducción* ya que "este modo de razonar conduce al descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de ejemplos particulares y de sus combinaciones" (Polya, 1965, pp. 114).

En el tercer nivel de Van Hiele *demostrar* una propiedad geométrica puede ser equivalente a argumentar para convencer que la propiedad es cierta utilizando razonamientos deductivos informales (puede haber saltos) basados en la experimentación, que están encadenados y conectan lo que se sabe con lo que se quiere demostrar. El lenguaje no está perfectamente formalizado y la red de relaciones entre los conceptos implicados es bastante simple. De lo indicado se desprende que las demostraciones en este nivel no tienen por qué corresponderse con lo que se entiende por demostraciones en un sistema deductivo. En este nivel los argumentos están basados en la experimentación con material concreto, y no necesariamente están encadenados siguiendo estrictamente las reglas impuestas para la demostración en un sistema deductivo. Dicho de otra manera, los argumentos no están basados en conceptos que se han vaciado de su contenido porque se han colocado en un sistema deductivo organizado globalmente, sino que tienen un significado ligado al contexto en el que se utilizan.

En este nivel, utilizando razonamientos inductivos o deductivos informales, pueden realizarse demostraciones de las que Wain & Woodrow (1980) llaman *pruebas mediante un diagrama, imposibilidades* y *demostraciones por agotamiento de posibilidades.*

Las primeras no se limitan a mostrar el resultado con diagramas sino que éstos tienen que venir acompañados de argumentos que demuestren lo que se puede intuir con los diagramas utilizados en la demostración. Como sugiere el trabajo de Wain & Woodrow (1980), pruebas de este tipo que también se pueden plantear, que subrayan la necesidad de acompañar los diagramas de argumentos que demuestren lo que se ve visualmente, se refieren a algunos diagramas o modelos engañosos, y lo que hay que demostrar es que lo que parece que se muestra con ellos no puede ser. Las pruebas llamadas *imposibilidades* tratan de demostrar que hay cosas que no pueden ser. Por ejemplo, demostrar que no hay poliedros regulares con caras hexagonales o que no hay deltaedros con un número impar de caras. Las *demostraciones por agotamiento de posibilidades,* como su nombre indica, tratan el proceso de demostración listando todas las posibilidades. El problema consiste en determinar un procedimiento sistemático para encontrar todos los casos posibles que permita asegurar que no va a haber ninguno más. En la unidad de enseñanza que presentamos en el capítulo 2 incluimos tareas para tratar estos tipos de demostraciones en este nivel.

También cabe señalar que en este nivel, si bien ya pueden comprenderse las demostraciones con el significado que Vega (1990) ha asociado a (4), como se entienden en un sistema deductivo, cuando las realiza el profesor o aparecen en el libro de texto, y los pasos individuales de un razonamiento lógico, como ya hemos indicado en el apartado 1.1.1

todavía no se comprende la estructura de este tipo de demostración si no se tiene ayuda del profesor.

Por último, **una persona en el cuarto nivel de Van Hiele**, ya puede comprender las *demostraciones* con el significado que Vega (1990) ha asociado a (4): como la organización de una secuencia de implicaciones formales basadas en las hipótesis del problema y en otros elementos del sistema axiomático (definiciones, otras propiedades ya demostradas, etc.). El estudiante tiene un significado de demostración como lo que liga cada proposición a los axiomas, a las proposiciones y a las definiciones que la preceden. El asimilar esta idea de demostración es necesario para comprender la geometría como un sistema lógico, como es por ejemplo tal y como se presenta en los Elementos de Euclides.

En este nivel el estudiante, además de comprender lo que Bell (1979, p. 366) llama el segundo aspecto de demostración, el de la naturaleza de las matemáticas como sistema axiomático o deductivo, también puede comprender lo que Bell (1976, p. 24) llama el tercer sentido de la demostración: la *sistematización*, es decir, la organización de resultados en un sistema deductivo de axiomas, conceptos y teoremas importantes, y resultados menores derivados de ellos". "La organización de un conjunto de resultados conocidos en una secuencia deductiva jerárquica que implica la elección de puntos de comienzo útiles como axiomas" (Bell, 1979, p. 366).

Y aunque aquí no vamos a detallarlo queremos subrayar que los estudiantes que razonan en este nivel ya pueden comprender también el proceso de prueba como se describe en Puig (1997) interpretando el trabajo de Lakatos (1976), como un proceso de tensión entre conceptos, teoremas y pruebas en el que los conceptos originales crean nuevos conceptos, con lo que se va aumentando el contenido del concepto; y las pruebas como un experimento mental en el sentido que se describe en Lakatos (1978).

LA UTILIZACIÓN DEL VOCABULARIO DE LOS SÓLIDOS

En este apartado vamos a precisar cuándo entendemos que la utilización del vocabulario geométrico es adecuada para los diferentes niveles de razonamiento. Para ello, dada la gran variedad de vocabulario que hay que utilizar cuando se trabaja con los sólidos, vamos a distinguir los siguientes términos:

- Se utilizan en el lenguaje corriente con un significado diferente, por lo que hay que romper con la idea que se puede tener de ellos.
- Tienen su análogo en el plano (por ejemplo, *lado* en el plano pasa a *arista* en el espacio y también puede considerarse análogo a cara).
- Son nombres compuestos correspondientes a tipos de ángulos o de diagonales (conceptos relacionados) que en el plano se nombran

indicando sólo el sustantivo. Por ejemplo, ángulos diedros, diagonales de las caras.

- Son nombres compuestos para una parte de un sólido, formados por un sustantivo (o un nombre compuesto) que hace referencia a elementos de los sólidos y un adjetivo (o un nombre compuesto). Por ejemplo, caras laterales, ángulos diedros de las caras laterales.
- Son nombres compuestos que corresponden a familias de sólidos, formados por un sustantivo que hace referencia a una familia más general y uno o varios adjetivos. Por ejemplo, prismas convexos, prismas rectos de bases regulares.
- Son nombres difíciles de pronunciar que hacen referencia a propiedades o a analogías con el correspondiente del plano. Por ejemplo, ortoedro y paralelepípedo.

En las respuestas del primer nivel la terminología geométrica que puede utilizarse suele corresponder a nombres de familias de sólidos o de polígonos. Es usual que el estudiante use nombres de familias del plano para las familias análogas del espacio y a la inversa.

El segundo nivel tiene como objetivo que el estudiante llegue a utilizar y a interpretar de manera precisa y correcta el vocabulario geométrico de los diferentes tipos de términos que hemos mencionado en los párrafos anteriores. A medida que se va dominando este nivel de razonamiento se mejora la utilización del lenguaje. Es por esto por lo que algunas respuestas que consideraremos incorrectas para un dominio alto del nivel 2 (porque la utilización del lenguaje la consideramos muy imprecisa), las consideraremos correctas para un dominio bajo de este nivel. Por otro lado, la utilización del lenguaje conlleva más dificultad que el interpretarlo, de ahí que, si la interpretación que se da a los términos no es la adecuada, la respuesta la consideraremos incorrecta, mientras que consideraremos correcta una respuesta aún en el caso de que algunos términos se utilicen de manera imprecisa, si éstos se nombran adecuadamente en otra ocasión y sólo se usan de manera imprecisa de alguna de las siguientes formas:

- Se utiliza terminología del plano para el espacio o a la inversa.
- Se utiliza un nombre que hace referencia a todos los elementos por otro que sólo hace referencia a parte, o a la inversa.
- Se habla de ángulos o de diagonales sin especificar a qué ángulos o diagonales se refieren.
- Se utilizan los nombres de unos polígonos o sólidos por otros de una familia contenida o que las contiene.

En el tercer nivel de razonamiento el vocabulario de los términos que hemos mencionado se utiliza de manera precisa. Sólo si se refleja que la imprecisión en el lenguaje es muy casual, no lo tendremos en cuenta y la respuesta la consideraremos correcta.

1.4.3. INTRODUCCIÓN DE CONCEPTOS Y EVOLUCIÓN DE SUS OBJETOS MENTALES

Este apartado trata con dos tipos de cuestiones. Las de un tipo se refieren a cómo se organiza la entrada en el primer nivel de razonamiento o surgen a partir de estas preguntas: ¿Sólo se pueden introducir conceptos en el primer nivel? ¿Cómo se introducen los conceptos en los diferentes niveles de razonamiento?

Por otro lado, aunque las fases de aprendizaje organizan las situaciones didácticas que según el modelo de Van Hiele se consideran como las más eficientes para que los estudiantes pasen de un nivel al siguiente, la unidad de enseñanza propuesta, además de desarrollar el nivel de razonamiento de los estudiantes, pretende *introducir* los conceptos geométricos implicados y *la constitución de objetos mentales para ellos* que sean suficientemente ricos. De ahí que en otro apartado aclaramos cómo consideramos que se van ampliando los objetos mentales cuando desarrollamos la unidad de enseñanza propuesta y nuestra postura respecto a la concepción de las matemáticas.

LA INTRODUCCIÓN DE CONCEPTOS RELACIONADOS CON LOS SÓLIDOS

Freudenthal (1983, p. 299) señala que, por su gran diversidad, los poliedros ofrecen un contexto muy rico. Destaca que en la experiencia de los estudiantes hay un inmenso mundo de fenómenos que son organizados por los objetos geométricos; basta con que se busque en las construcciones, la naturaleza, el arte, el mundo de los juegos, etc. Indica que los poliedros con los que primero se entra en contacto son los prismas y las pirámides, que suelen aparecer en un contexto topográfico y que los juguetes de construcciones proveen una oportunidad de separar estas formas de su contexto topográfico y colocarlas en el contexto geométrico. Para evitar el problema de la base, recomienda tomar bloques que se balancean en aristas y en vértices, llamar la atención sobre tejados como prismas tumbados, señalar tejados apoyados en las caras laterales. También apunta como actividad para formar el objeto mental inicial la construcción de los objetos como modelos macizos (modelos de plastilina, de espuma dura o de patata), como estructuras de superficie (modelos de cartulina), como estructuras de aristas (modelos de varillas) y la construcción a partir de desarrollos. Llama la atención sobre que los elementos de un poliedro (diagonales de las caras y diagonales del espacio) y las estructuras de un tetraedro o dos tetraedros (que él llama tetraedros diagonal cara, dado que las aristas de éstos son las diagonales de las caras del cubo) se notan claramente en una estructura de varillas del cubo. Indica que los poliedros pueden inclinarse sobre las aristas y apilarse unos sobre otros para conseguir edificios y otras formas, que el inclinar poliedros y estructurar edificios es una actividad muy provechosa, y describirlos puede ser un incentivo para crear medios lingüísticos.

Para él los conceptos pueden introducirse vía presentación, esto es, a través de ejemplos o de ejemplos y no ejemplos; y vía nombre, esto es, por medios lingüísticos: se dan algunas características que se apoyan en ejemplos concretos. Considera que introducir los conceptos en geometría es más fácil que en otras materias porque, por ejemplo, un dibujo de un triángulo puede servir como representante de los triángulos, lo que no ocurre en otras materias; esto es, se puede dibujar siempre un triángulo general representante de los triángulos. Subraya que se pueden presentar problemas porque, por ejemplo, se dibuje un triángulo con ángulos agudos u obtusos (que no son generales) pero lo que estamos comentando puede mantenerse ya que no siempre nos preocupamos de que el triángulo sea de lo más general.

Lo indicado en los párrafos anteriores responde, empleando el trabajo de Freudenthal, a una de las cuestiones que nos hemos planteado antes de diseñar la unidad de enseñanza y que ya hemos apuntado al comienzo de este apartado: ¿cómo se organiza la entrada en el primer nivel?

También nos hemos propuesto responder en este apartado a estas cuestiones: ¿Sólo se pueden introducir conceptos en el primer nivel? ¿Cómo se introducen los conceptos en los diferentes niveles de razonamiento?

Consideramos que si los estudiantes razonan en el nivel 1 ó el nivel 2 de Van Hiele, la introducción de un concepto (que en este caso corresponden a familias de sólidos o de sus elementos) sólo puede hacerse a partir de modelos y objetos del entorno que corresponden a ejemplos y no ejemplos del concepto o vía el nombre, con medios lingüísticos, a partir de ideas ingenuas que se apoyan en ejemplos concretos. Estas actividades se completan con otras de construcción, apilamiento, etc., con objeto de obtener un objeto mental visual (en el nivel 1) o analítico (en el nivel 2) de estos conceptos que permita, a partir de juicios que Hershkowitz (1990) llama del *tipo 1*, del *tipo 2* ó del *tipo 3*, identificar y construir ejemplos y no ejemplos de una familia (en el nivel 1 teniendo en cuenta su apariencia global y en el nivel 2 sus atributos críticos), describirlos, relacionarlos y clasificarlos (en el nivel 1 a partir de atributos visuales y en el nivel 2 a partir de atributos geométricos).

Las investigaciones de Hershkowitz et al. (1987) sobre el poder de una definición verbal para formar imágenes de conceptos geométricos nuevos, sugieren que en el nivel 2, los conceptos también pueden introducirse a partir de la definición del concepto, si bien es más adecuado hacerlo a partir de una secuencia de ejemplos y no ejemplos. Estos investigadores han encontrado que los estudiantes pueden construir imágenes de conceptos bastante ricas y correctas por estrategias analíticas, pero que esto lleva también a comportamientos incorrectos. Algunos estudiantes emiten juicios del *tipo* 2 y se forman imágenes de conceptos visualmente limitadas.

Nuestros trabajos nos han llevado a concluir que en el nivel 2 se pueden introducir los conceptos con una definición del nombre si éstos se introducen a partir de "ideas ingenuas", pero cuando las definiciones que se utilizan para ello son más complejas (llevan implicadas varias condiciones, tienen una estructura lógica compleja) en este nivel se presentan problemas para incluir en el objeto mental un mundo de ejemplos y de atributos que sea suficientemente rico.

Para las definiciones en las que hay implicadas varias condiciones que corresponden a propiedades que se pueden comprender en este nivel, el problema se puede resolver clasificando ejemplos y no ejemplos del concepto una vez que el concepto se ha introducido con la definición. En este nivel se puede verificar si los modelos presentados cumplen o no este tipo de definiciones y estas tareas favorecen que los ejemplos del concepto se incluyan en el objeto mental constituido.

Pero en este nivel, para introducir conceptos a partir de definiciones no se pueden utilizar definiciones que contengan términos que se tienen que interpretar (por ejemplo, exactamente, como mucho, etc.) u otros conceptos que también se tienen que definir.

Si los estudiantes razonan *en el nivel 3 de razonamiento,* los conceptos ya podrán introducirse a partir de una definición del nombre en la que haya implicadas varias condiciones de las que se pueden comprender en este nivel. Estas definiciones pueden formar objetos mentales de un concepto lo suficientemente ricos para que se pueda funcionar de manera matemáticamente correcta. En este nivel la definición ya puede considerarse como un criterio para clasificar los ejemplos y no ejemplos de un concepto y para incluir en el objeto mental un mundo de ejemplos y de atributos suficientemente rico.

Pero vale la pena señalar que en este nivel esto tampoco ocurre con todos los conceptos geométricos. Y de nuevo vamos a dar cuenta de ello tomando como referencia el trabajo de Freudenthal. Ya hemos indicado en el apartado 1.2.1 que hay casos en los que la distancia entre el objeto mental inicial y el concepto, tal y como se puede considerar, es un abismo. Freudenthal pone como ejemplo la curva de Jordan. En nuestro caso, resultan muy ilustrativas las definiciones de poliedro y de poliedro regular que encontramos en Puig (1997) como cita de las que aparecen en Coxeter (1974, pp. 3, 4 y 12):

> Un *poliedro* es un conjunto finito de polígonos planos, llamados *caras*, junto con sus *aristas y vértices*, que satisfacen las tres condiciones siguientes:
>
> i) Toda arista pertenece exactamente a dos caras y esas caras no están en el mismo plano.
>
> ii) Las caras que comparten un vértice forman un único ciclo, esto es, su sección por una esfera suficientemente pequeña, centrada en el vértice común, es un polígono esférico único.
>
> iii) Ningún subconjunto propio de las caras satisface la condición i).
>
> *Poliedro regular:*
>
> Para un poliedro cualquiera, definimos como una *bandera* (A, AB, ABC...) la figura formada por un vértice A, una arista AB que contiene a ese vértice y una cara ABC... que contiene a esa arista. Un poliedro es *regular* si su grupo de simetrías es *transitivo en sus banderas* (Puig, 1997, pp. 59-60).

O las definiciones de poliedro que encontramos en Senechal (1988, pp. 192 y 196). Lo poco oportuno que sería introducir los poliedros, o los poliedros regulares, a partir de estas definiciones, cuando los estudiantes no tienen un gran dominio del nivel 3, queda tan claro que nos exime de entrar en detalles.

También vale la pena llamar la atención sobre otros conceptos geométricos que sólo pueden constituirse en un contexto matemático avanzado. Freudenthal utiliza en este caso el ejemplo de *espacio;* indica que este concepto no es necesario para que se constituya el objeto mental de poliedro, cubo, tetraedro, etc., que se pueden tratar una gran variedad de ideas de geometría antes de que se tenga algún objeto mental de espacio, y que este objeto mental puede aparecer cuando ya se está en un contexto matemático avanzado.

LA CONSTITUCIÓN DE OBJETOS MENTALES Y LA ADQUISICIÓN DE CONCEPTOS

De lo comentado en el apartado anterior (y también en otros apartados anteriores) se desprende que presuponemos que los objetos pueden existir en la mente de quien los utiliza mucho antes de que conozca una definición de ellos; existen como objetos mentales. Éstos se van ampliando y precisando a medida que el estudiante va dominando los diferentes niveles de razonamiento. Esto es, suponemos que la introducción de conceptos permite que los estudiantes constituyan objetos mentales de ellos que con la instrucción se van ampliando y precisando para incluir o excluir, ejemplos, atributos, representaciones, relaciones con otros conceptos, clasificaciones, definiciones.

Si bien hasta ahora sólo hemos indicado que un concepto viene dado por su definición matemática (que se puede considerar la expresión verbal del concepto), y que ésta también puede formar parte del objeto mental, cabe destacar también que el mismo proceso de definir crea nuevos conceptos, que también se incorporan en el objeto mental correspondiente:

> El proceso de definir es un medio de organización deductiva de las propiedades de un objeto matemático, que pone en un primer plano las que se juzga que permiten constituir un sistema deductivo, local o global, en el que ese objeto matemático está incorporado. Ahora bien, resaltar unas propiedades como las que definen un concepto no es una operación inocente, neutral con respecto al concepto, ya que, por un lado hace aparecer ese concepto como creado originalmente para organizar los fenómenos correspondientes y, por otro lado, hace que el contenido del concepto sea a partir de ese momento lo que se derive de esa definición en el sistema deductivo al que se ha incorporado. Por tanto, al igual que sucede al probar teoremas, este proceso de definir crea también nuevos conceptos (Puig, op. cit., p. 62).

También vale la pena destacar que una vez que la definición forma parte del objeto mental (como hemos señalado al comentar el trabajo de Freudenthal la definición aunque forme parte del objeto mental no lo sustituye) todavía podemos continuar generando nuevos conceptos a partir de ellas, dado que suponemos que éstas no permanecen inmutables sino que van teniendo también su evolución; esto es, suponemos que los conceptos también se construyen progresivamente y aparecen susceptibles de modificación y ligados a un proceso de descripción, definición (que puede ser axiomática) o prueba. No vamos a entrar en detalles, dado que de nuevo en el trabajo de Puig (op. cit.) puede encontrarse una explicación, esta vez interpretando ideas de Lakatos: "De Lakatos acabo de extraer la idea de que los conceptos matemáticos no permanecen inmutables una vez creados. También he esbozado cómo los conceptos cambian, impelidos por la tensión que les produce el estar involucrados en pruebas y refutaciones" (Puig, op. cit., pp. 60-61).

En la unidad de enseñanza que proponemos tratamos en diversas ocasiones cómo en el contexto de la actividad (identificación de formas, descripciones, clasificaciones, definiciones, demostraciones, etc.), los estudiantes, como producto del trabajo que están realizando, pueden toparse con modelos (o puede ser el profesor el que los introduzca) que cuestionan si corresponden o no a ejemplos de un concepto dado, y que obligan a que se revisen las ideas, atributos y definiciones que se tienen sobre los conceptos y algunas pruebas que se han podido realizar.

Por último, volvemos a retomar que el demostrar teoremas crea también nuevos conceptos. Y lo hacemos para remitir de nuevo al trabajo de Puig (op. cit) donde explica con detalle que esto es así. De la unidad de enseñanza diseñada, se derivan caminos posibles para dirigir la actividad matemática, y que hemos sugerido en ella, que podrían mostrar que el demostrar teoremas genera también nuevos conceptos al estilo de como se describe en Puig (op. cit).

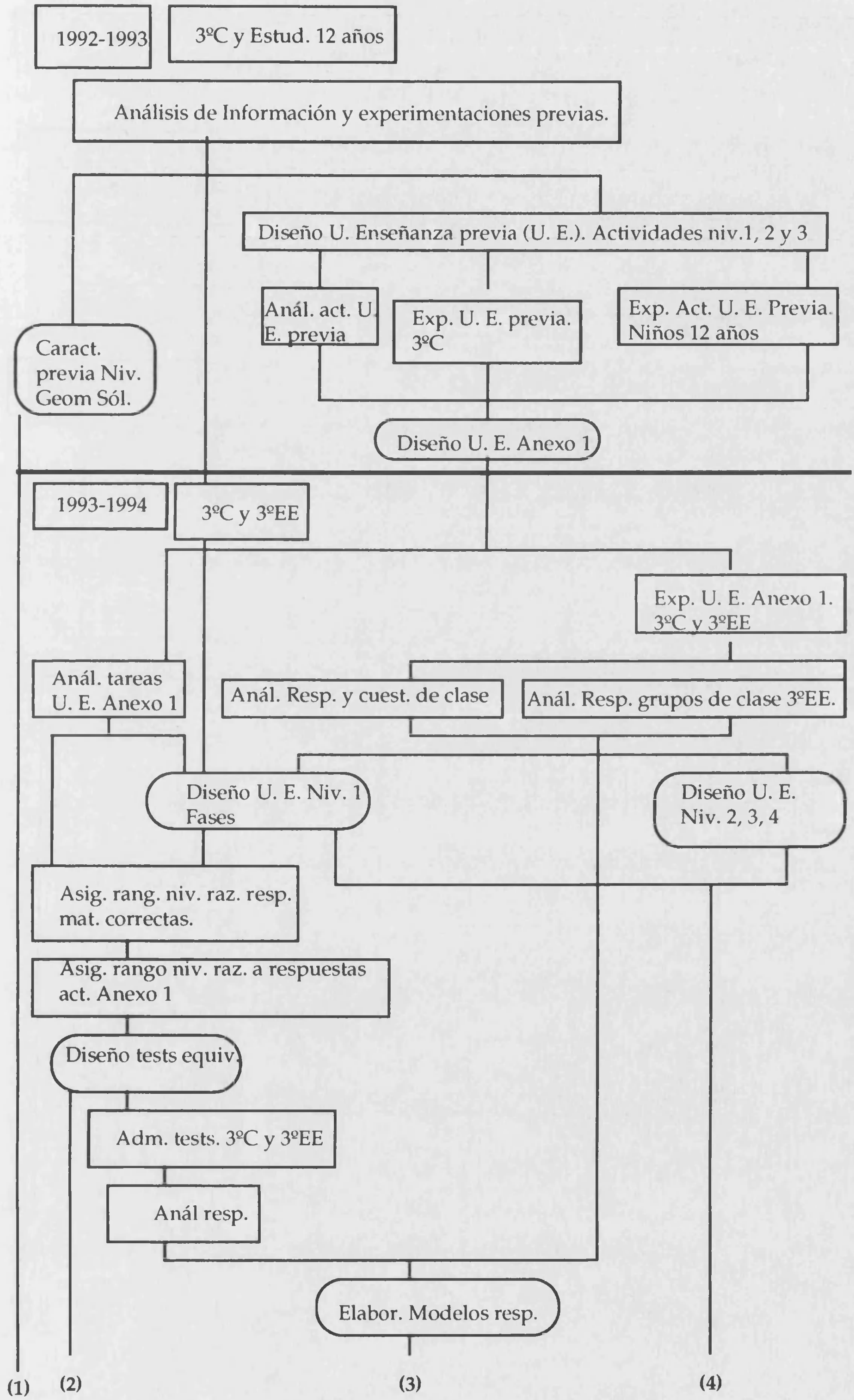
De esta manera, la idea que puede desprenderse de nuestro trabajo de *objeto mental* (generado por la experiencia del sujeto, por el examen de ejemplos, análisis de propiedades, clasificaciones, definiciones, demostraciones, etc.) es que parece que no acaba nunca; siempre cabe esperar que podamos encontrar ejemplos que cuestionan el objeto mental y la definición del concepto que tenemos hasta entonces. La inclusión de algunos ejemplos dentro del mundo de objetos posibles supondrá una expansión del objeto mental. La exclusión del mundo de ejemplos, objetos que verifican la idea o la definición que se tiene del concepto, supondrá que se precise el objeto mental o la definición del concepto considerado.

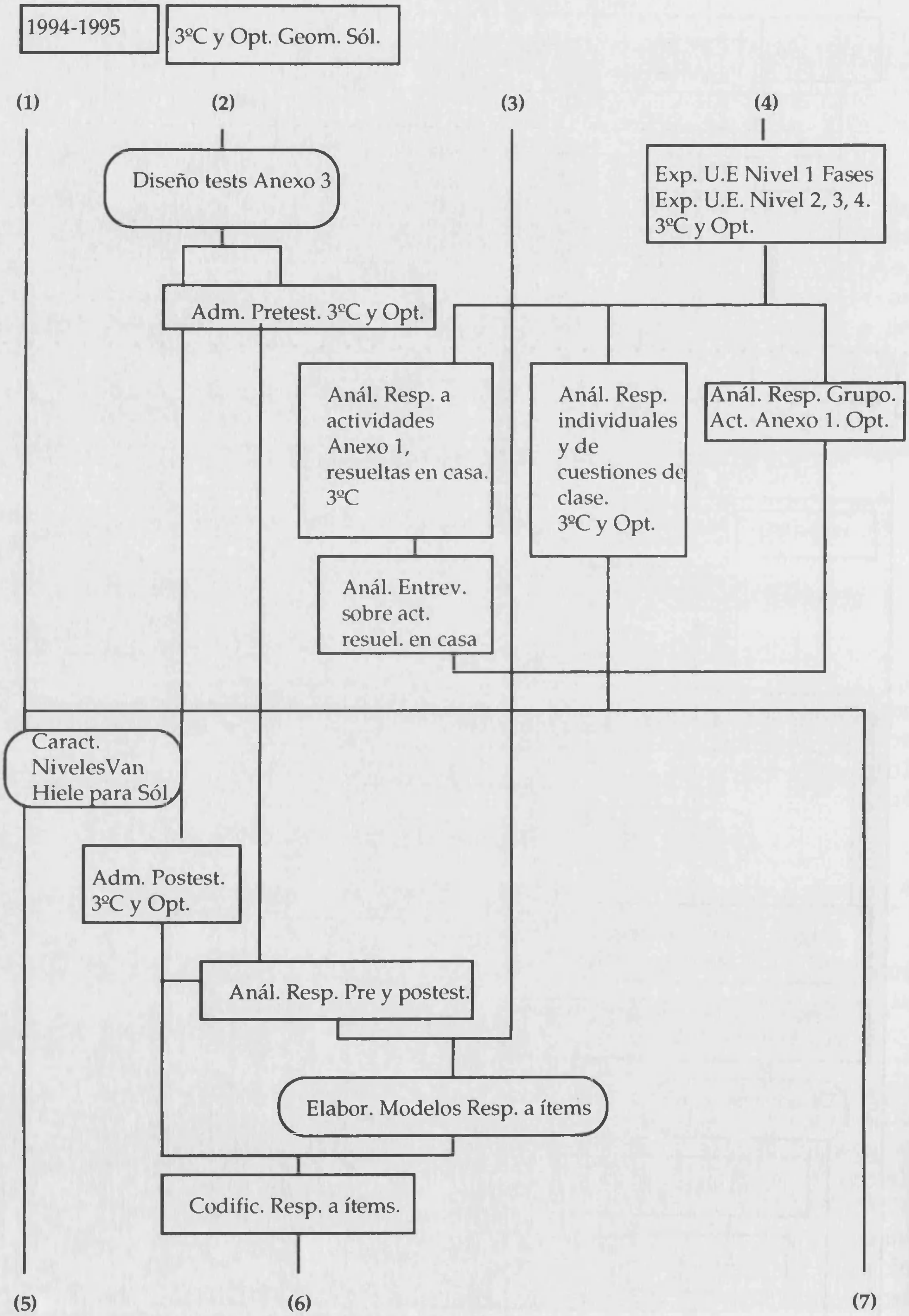
1.5. DESARROLLO Y ORGANIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

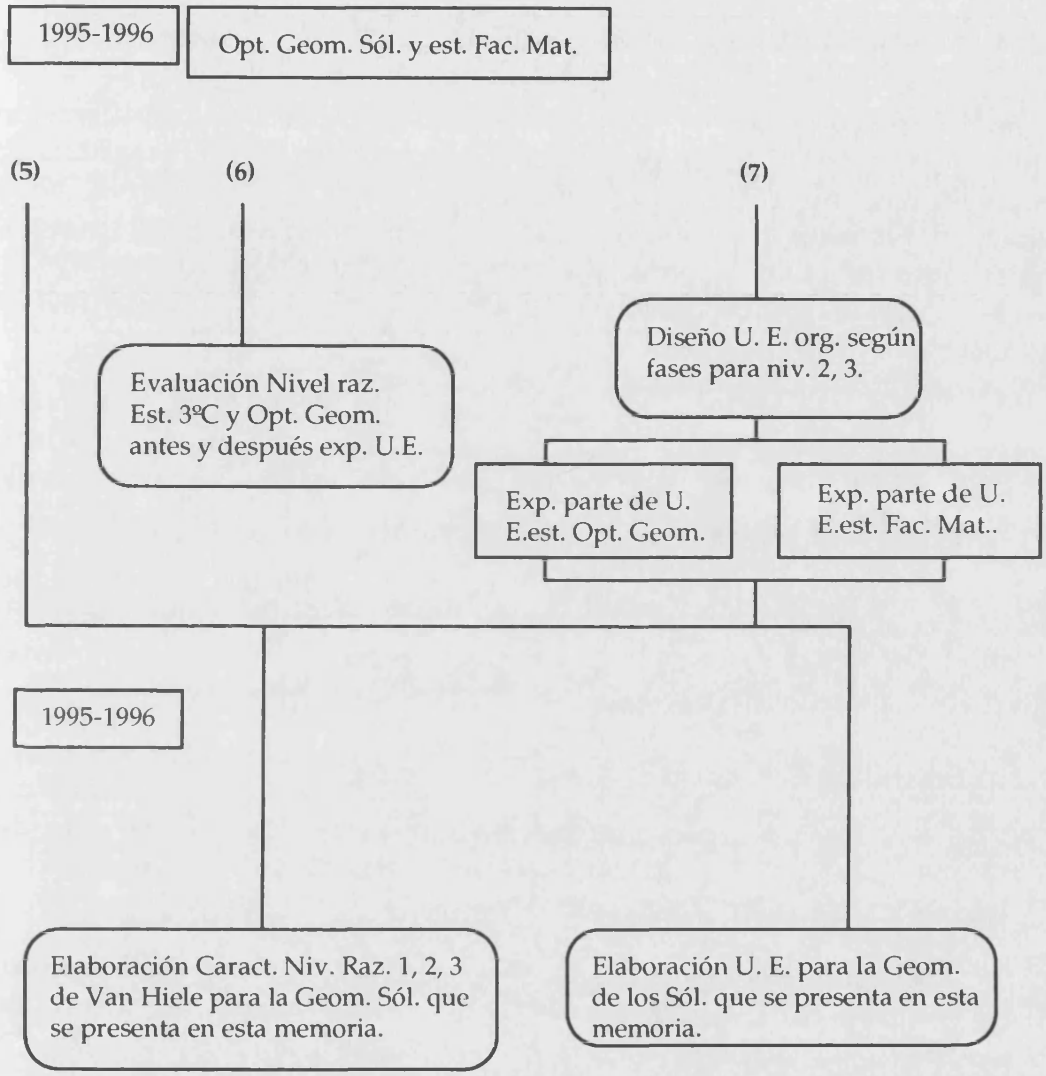
Una buena manera de dar cuenta de cuál ha sido el desarrollo y organización de la investigación que se presenta en esta memoria puede ser dando respuesta a las siguientes preguntas: ¿Qué información hemos obtenido? ¿Quién nos la ha proporcionado? ¿Cuándo la hemos obtenido? ¿Cómo? ¿Cómo la hemos registrado? ¿Qué hemos hecho con ella? ¿Qué hemos obtenido como resultado?

La tabla que se presenta en las páginas 81, 82 y 83 intenta dar respuesta a todas estas preguntas. Vamos a hacer algunos comentarios sobre ella:

- Hemos separado la investigación en etapas, que corresponden a cursos académicos, en un intento de reflejar cómo ha ido evolucionando la investigación en el tiempo.
- Al lado del curso al que corresponde la investigación de la etapa correspondiente hemos indicado abreviaturas que dan cuenta del tipo de estudiantes que participaron en las experimentaciones de esa etapa: Grupo de niños de 12 años que cursaban 6º de EGB (Estud. 12 años); grupo de tercero de Magisterio de la especialidad de Ciencias (3ºC); grupo de tercero de Magisterio de la especialidad de Educación Especial (3ºEE); grupo de Magisterio de la optativa de geometría del espacio (Opt. Geom. Sól.); grupo de estudiantes de la Facultad de Matemáticas (est. Fac. Mat.).


1992-1993
3ºC y Estud. 12 años
Análisis de Información y experimentaciones previas.
Diseño U. Enseñanza previa (U. E.). Actividades niv.1, 2 y 3
Anál. act. U. E. previa
Exp. U. E. previa. 3ºC
Exp. Act. U. E. Previa. Niños 12 años
Caract. previa Niv. Geom Sól.
Diseño U. E. Anexo 1
1993-1994
3ºC y 3ºEE
Exp. U. E. Anexo 1. 3ºC y 3ºEE
Anál. tareas U. E. Anexo 1
Anál. Resp. y cuest. de clase
Anál. Resp. grupos de clase 3ºEE.
Diseño U. E. Niv. 1 Fases
Diseño U. E. Niv. 2, 3, 4
Asig. rang. niv. raz. resp. mat. correctas.
Asig. rango niv. raz. a respuestas act. Anexo 1
Diseño tests equiv.
Adm. tests. 3ºC y 3ºEE
Anál resp.
Elabor. Modelos resp.
(1)
(2)
(3)
(4)


1994-1995
3ºC y Opt. Geom. Sól.
(1)
(2)
(3)
(4)
Diseño tests Anexo 3
Exp. U.E Nivel 1 Fases
Exp. U.E. Nivel 2, 3, 4.
3ºC y Opt.
Adm. Pretest. 3ºC y Opt.
Anál. Resp. a actividades Anexo 1, resueltas en casa. 3ºC
Anál. Resp. individuales y de cuestiones de clase. 3ºC y Opt.
Anál. Resp. Grupo. Act. Anexo 1. Opt.
Anál. Entrev. sobre act. resuel. en casa
Caract. NivelesVan Hiele para Sól.
Adm. Postest. 3ºC y Opt.
Anál. Resp. Pre y postest.
Elabor. Modelos Resp. a ítems
Codific. Resp. a ítems.
(5)
(6)
(7)



- En los rectángulos hemos indicado todo lo relativo a la metodología de trabajo.

- Los resultados, tanto los parciales como los que presentamos en esta memoria, que constituyen nuestra aportación a la investigación, se muestran enmarcados en un símbolo ovalado.

Para una exposición lineal hemos considerado conveniente distinguir dos apartados. En 1.5.1 también presentamos la investigación por etapas, que dan cuenta de cómo se ha ido produciendo la investigación en el tiempo, la metodología que hemos utilizado para ello, los estudiantes que han intervenido, y los resultados intermedios que hemos obtenido hasta llegar a los definitivos. El apartado 1.5.2 aclara las características de los estudiantes que han intervenido en nuestras experimentaciones, lo fructíferas que han resultado éstas y el contexto en el que se han desarrollado.

1.5.1. CRONOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Tal como hemos señalado en la sección 1.3, previo a la consideración de los niveles de Van Hiele como marco de referencia para organizar la enseñanza de los sólidos ya teníamos información relativa a la enseñanza/aprendizaje de esta parte de la geometría y también respecto al modelo de Van Hiele como marco muy adecuado para organizar la enseñanza de la geometría plana. Precisándolo más, contábamos con la información suministrada por:

- Los resultados de investigaciones sobre el modelo de Van Hiele aplicado a la geometría plana o a otras áreas de las matemáticas, mencionadas en el apartado 1.2.2, y las investigaciones sobre el modelo aplicado a la geometría del espacio, mencionadas en el apartado 1.2.3.

- Nuestra experiencia sobre la enseñanza de la geometría de los sólidos, desde un punto de vista experimental, en la Escola Universitària de Magisteri de València, con grupos completos de diferentes especialidades[8].

- Los resultados de las experimentaciones en laboratorio con un grupo de cinco estudiantes (pero para la mayoría de las sesiones sólo asistieron 3) de 6º curso de EGB (11–12 años de edad), todos ellos del Colegio Público de Prácticas. Para la experimentación utilizamos el módulo de actividades que aparece en Guillén et al. (1992).

- Los resultados de las investigaciones piloto en la Escola Universitària de Magisteri de València, con grupos completos de diferentes especialidades de Magisterio, de una unidad de enseñanza de los sólidos diseñada por nosotros.

Las actividades de esta unidad de enseñanza las diseñamos por extensión a los sólidos de actividades incluidas en unidades de enseñanza para la geometría plana, organizadas sobre la base del modelo de Van Hiele. En particular las primeras actividades de esta unidad estaban basadas en el trabajo realizado por Burger & Shaughnessy (1986), Fuys et al. (1988) y Jaime y Gutiérrez (1989). Así por ejemplo, planteamos la descripción de modelos y familias de sólidos, al igual que en el plano se plantea la descripción de determinados cuadriláteros.

---

[8] Las características de los estudiantes que participaron en estas investigaciones, a las que ya nos hemos referido en la introducción de esta memoria, y el contexto en el que realizamos la experimentación los explicamos en el apartado que sigue.

En ella incluimos también actividades que algunos investigadores habían propuesto para un nivel de razonamiento dado para la geometría de los sólidos (por ejemplo, Hoffer, 1981). Nuestro propósito inicial era determinar la dificultad que presentaban para los estudiantes cada una de las tareas seleccionadas como objeto de estudio (por ejemplo, asociar propiedades a familias determinadas de sólidos). Las familias de sólidos que nos sirvieron de soporte para ellas fueron las que usualmente se consideran en los libros de texto de EGB (los libros escritos para niños de 7 a 14 años); las familias de los prismas y pirámides.

Con esta unidad de enseñanza comenzamos nuestra investigación que hemos llevado a cabo mediante las siguientes etapas:

Curso 1992–93:

- Análisis de toda la información y experiencia que hemos apuntado en los párrafos anteriores.

- Identificación teórica de las características de los niveles de razonamiento de Van Hiele para el área específica de la geometría de los sólidos, a partir de las características generales del modelo, por extrapolación teórica desde el campo de los polígonos[9].

- Modificación de las actividades de las unidades de enseñanza iniciales, experimentadas con estudiantes de 6º de EGB (12 años) y con estudiantes de 3º de Magisterio. Diseño de una nueva unidad de enseñanza que incluye actividades para los niveles 1, 2 y 3.

- Caracterización más precisa de los niveles de Van Hiele en el área de la geometría de los sólidos, como consecuencia del análisis de las experimentaciones mencionadas.

- Experimentación de la unidad anterior con estudiantes de 3º de Magisterio de la especialidad de Ciencias.

- Experimentación en laboratorio de algunas actividades del nivel 1 y del nivel 2, de las que incluimos en la unidad mencionada en el párrafo anterior, con un grupo de cuatro estudiantes de 6º curso de EGB, todos ellos del Colegio Público de Prácticas.

---

[9] Las caracterizaciones de los niveles de razonamiento de Van Hiele que propone Hoffer (1983) para las áreas de lógica matemática, isometrías y números reales, también son fruto de una extrapolación teórica desde el campo de los polígonos en vez de tener su origen en investigaciones experimentales (ver Jaime, 1993, p. C2-4).

- Análisis de las actividades de la unidad de enseñanza utilizada en las anteriores experimentaciones, para determinar todas las variantes que pueden surgir, que pueden presentar diferente dificultad o diferente manera de razonar para dar la respuesta.

- Diseño de una unidad de enseñanza en la que las actividades las agrupamos en tareas. Cada tarea incluye varias actividades, que corresponden a las diferentes posibilidades delimitadas como de un mismo tipo de actividad, y en algunos casos varias de cada tipo. El anexo 1 incluye las tareas de la unidad de enseñanza elaborada.

Curso 1993–94:

- Experimentación de la unidad anterior con estudiantes de 3º de Magisterio de diferentes especialidades: 3º de Ciencias (3ºC) y 3º de Educación Especial (3ºEE).

- Análisis de las respuestas dadas en clase por los estudiantes a preguntas planteadas por la profesora, o de las cuestiones planteadas por los estudiantes cuando se experimentó la unidad de enseñanza a la que nos acabamos de referir.

- Análisis de las respuestas dadas por los grupos de trabajo de clase, formados por estudiantes de 3ºEE, a algunas tareas de las que incluimos en el anexo 1.

- Análisis de las tareas que incluimos en el anexo 1, con objeto de delimitar, para cada una de las actividades que incluyen, el nivel de razonamiento que requieren las respuestas matemáticamente correctas.

- Asignación de rango de nivel de razonamiento a las respuestas para algunas actividades incluidas en las tareas del anexo 1.

- Diseño de tests equivalentes (que incluyen actividades de los mismos tipos) para evaluar el nivel de razonamiento de los estudiantes de diferentes grupos en el estudio de la geometría de los sólidos.

- Administración del test diseñado a los grupos de estudiantes de 3ºC y de 3ºEE que hemos mencionado antes.

- Elaboración de modelos de respuestas para los ítems de los tests a partir de las dadas por los estudiantes a los que se les administraron éstos.

- Diseño de una secuencia de tareas para el primer nivel de razonamiento de Van Hiele distribuidas también de acuerdo con las fases de aprendizaje.

- Modificación de la unidad de enseñanza incluida en el anexo 1. Diseño de una unidad de enseñanza para los niveles 2, 3 y principio del 4.

Curso 1994–95:

- Precisión de los tests diseñados para evaluar el nivel de razonamiento de los estudiantes de diferentes grupos en relación con la geometría de los sólidos. Diseño del pretest y postest que incluimos en el anexo 2 de esta memoria.

- Administración del pretest en dos grupos de estudiantes de Magisterio: Un grupo de 3º de la especialidad de Ciencias (grupo de 3ºC), y el grupo de estudiantes que habían elegido la geometría del espacio como asignatura optativa.

- Experimentación con los grupos de Magisterio mencionados en el párrafo anterior de parte de las actividades de la unidad diseñada para el nivel 1, teniendo en cuenta las fases de aprendizaje del modelo, y de la unidad diseñada para los niveles 2, 3 y principio del 4.

- Análisis de las respuestas dadas en clase por los estudiantes a preguntas planteadas por la profesora, o de las cuestiones planteadas por los estudiantes cuando se experimentaron las unidades de enseñanza a las que nos acabamos de referir.

- Análisis de las respuestas dadas por los estudiantes de Magisterio de 3ºC a las tareas de la unidad de enseñanza que incluimos en el anexo 1, cuando las planteamos para que las resolvieran en casa antes de estudiarlas en clase.

- Análisis de las entrevistas individuales realizadas con algunos estudiantes de Magisterio de 3ºC de los que habían entregado una gran variedad de actividades resueltas en casa.

- Análisis de las respuestas dadas por los estudiantes de la asignatura optativa de geometría (estudiantes de Magisterio) a las tareas de la unidad de enseñanza que incluimos en el anexo 1, cuando las planteamos en clase para que las trabajaran en grupo.

- Precisión de las caracterizaciones propuestas hasta entonces de los niveles de razonamiento de Van Hiele en el área de la geometría de los sólidos.

- Administración del postest diseñado a los grupos de estudiantes de Magisterio de 3ºC y de la asignatura optativa de geometría del espacio que hemos mencionado antes.

- Elaboración de los modelos de respuestas que presentamos en el anexo 3 de esta memoria.
- Codificación de las respuestas de los estudiantes, de los grupos de 3ºC y de la asignatura optativa de geometría del espacio, a los ítems del pretest y del postest.

Curso 1995–96:

- Ampliación de la unidad de enseñanza diseñada para el nivel 1, (teniendo en cuenta explícitamente los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje de Van Hiele), para los niveles 2, 3 e inicio del 4.
- Experimentación de parte de las actividades de la unidad anterior con estudiantes de Magisterio que han elegido la asignatura optativa de geometría del espacio.
- Experimentación de parte de las actividades de la unidad anterior con estudiantes de la Facultad de Matemáticas.
- Caracterización definitiva de los niveles 1, 2 y 3 de Van Hiele en el área de la geometría de los sólidos. En Guillén (1996) incluimos también esta caracterización; la presentamos como propuesta final en esta memoria.
- Modificación de la unidad de enseñanza experimentada y elaboración de la unidad que presentamos como propuesta final en esta memoria.
- Evaluación del nivel de razonamiento de los estudiantes de Magisterio de los grupos de 3ºC y de la optativa de geometría del espacio.

Curso 1996–97:

- Elaboración de la memoria final que da cuenta de la investigación realizada.

1.5.2. EL MARCO PARA LA EXPERIMENTACIÓN

LOS ESTUDIANTES

Nuestro trabajo se desarrolló tomando como medio, entre otros, dos cursos, uno de geometría y otro de matemáticas para Educación Especial, que pertenecían al currículo en vigor en la Escuela del Profesorado de EGB de Valencia hasta el curso académico 1993-1994. Ambos cursos se impartían en el tercer curso, en la especialidad de Ciencias y de Educación Especial respectivamente, como asignatura anual o semestral respectivamente, con 3 horas semanales.

Los estudiantes de tercero de Ciencias (3ºC), con los que hicimos la mayoría de las experimentaciones, antes de introducirse en la asignatura de matemáticas de 3º, habían cursado una asignatura anual de contenidos matemáticos (la asignatura de 1º), una asignatura de resolución de problemas (las matemáticas de 2º) y una asignatura de didáctica de las matemáticas. Cabe comentar que en ninguna de estas asignaturas se había prestado mucha atención a la geometría de los sólidos. De ahí que cuando estos estudiantes comenzaron la asignatura de tercero, en la que se estudiaba la geometría de los sólidos desde un punto de vista experimental, si bien estos estudiantes ya tenían una base en matemáticas y en didáctica, el conocimiento que tenían sobre la geometría de los sólidos era prácticamente nulo. Nuestra experiencia nos mostró que también manifestaban mucho desconocimiento de la geometría plana.

Los estudiantes de 3º de Educación Especial (3ºEE) antes de cursar la asignatura de matemáticas de 3º, sólo habían cursado una asignatura anual de contenidos matemáticos (la asignatura de 1º) y tampoco se había incluido en ella el estudio de la geometría de los sólidos. La base en matemáticas y en didáctica de las matemáticas era muy inferior a la de los estudiantes de 3ºC.

Otros aspectos que cabe resaltar respecto a los estudiantes de ambas especialidades es que si bien lo usual era que los estudiantes de 3ºC tuvieran una actitud positiva hacia las matemáticas, no ocurría lo mismo con los estudiantes de 3ºEE. En estos cursos era muy usual encontrar estudiantes con un verdadero rechazo hacia las matemáticas; el captar su atención y provocar su interés era un verdadero reto. Sin embargo, las condiciones de la enseñanza en los grupos de 3ºEE eran mejores que en los grupos de 3ºC, como se refleja en la tabla siguiente: el grupo inicial de 3ºEE se desglosó en dos, por lo que el número de estudiantes de los grupos de 3ºEE era pequeño y fue posible prestarles toda la atención que requerían.

En nuestro trabajo también participaron otros dos grupos de estudiantes de Magisterio que cursaron en dos cursos académicos consecutivos la asignatura optativa de 4 créditos *geometría del espacio*, del plan de estudios de la Diplomatura de Maestro de la Universitat de València. Esta asignatura corresponde a una versión del curso de *geometría* impartido a los estudiantes de 3ºC adaptado a las nuevas circunstancias. Los estudiantes, (que cursaban segundo o tercero) pertenecían a alguna de las siguientes especialidades: Educación Física, Educación Musical, Educación Primaria y Educación Infantil, que se reflejó en que, si bien todos ellos sólo habían cursado una asignatura de análisis de contenidos matemáticos (la asignatura de 1º), ésta fue de 4, 6 u 8 créditos, dependiendo de la especialidad. Lo común a todos ellos fue que en la asignatura de primero no se había estudiado la geometría del espacio, y si se ha había hecho había sido a nivel muy elemental.

Al igual que los estudiantes del grupo de 3ºEE, la base en matemáticas y en didáctica de las matemáticas de los, estudiantes de estos grupos era muy inferior a la de los estudiantes de 3ºC. Pero las condiciones de enseñanza fueron mejores (como se refleja en la tabla 1.1, el número de estudiantes por grupo era muy inferior).

GRUPO/S y curso/s	3ºC (tres grupos) 1992-95	3ºEE (dos grupos) 1993-1994	Opt. Geom. Esp. (dos grupos) 1994-96	Fac. Mat. (dos grupos) 1995-96	Niños de 6º de EGB (dos grupos) 1991-93
Nº de estudiantes /grupo	50-60 50-60 50-60 (63)	20-30 10-15	8-11 (11) 5-8	50-70 25-35	3 4
Nº de sesiones/ grupo	19 de 1h 20 de 1h 22 de 1h	20 de 1h 20 de 1h	22 de 1h 20 de 1h	6 de 1y1/2h 2 de 2h	17 de 1h 20 de 1h

Tabla 1.1: Características del ámbito de trabajo y de la experimentación. Los números de la fila "nº de estudiantes" que hay entre paréntesis para algunos grupos corresponden al número de estudiantes que realizaron los tests; los otros números se refieren a los estudiantes del grupo correspondiente que asistían normalmente a las sesiones.

En las páginas anteriores también nos hemos referido a dos grupos de estudiantes de la Facultad de Matemáticas; estudiantes que cursaban las materias optativas de 4,5 y 3 créditos, *Elementos de didáctica de las matemáticas de enseñanza secundaria I. Elementos teóricos* y *Elementos de didáctica de las matemáticas de enseñanza secundaria I. Elementos prácticos*, del plan de estudios de la Licenciatura de Matemáticas de la Universitat de València.

Es necesario señalar que los estudiantes que pertenecían al grupo de "Elementos prácticos" con el que realizamos nuestra investigación también pertenecían al grupo de "Elementos teóricos", ya que este grupo se desglosaba en dos para la asignatura de elementos prácticos. Sólo con uno de estos grupos continuamos la experimentación.

Los estudiantes de estos grupos tenían una base matemática muy superior a la del resto de los estudiantes de nuestras investigaciones, sin embargo, tenían muy poco conocimiento de los sólidos y su formación en didáctica de las matemáticas era nula. No estaban familiarizados con ningún tipo de trabajo que se saliese de la enseñanza formal. Era muy difícil lograr que los estudiantes "contasen" lo que pensaban cuando se enfrentaban con la resolución de un problema, aparte de lo que ellos seleccionaban como solución. Comparando estos estudiantes con los de 3ºC, notamos claramente que las asignaturas impartidas a estos últimos en 2º curso, sobre resolución de problemas y sobre didáctica de las matemáticas, facilitaba considerablemente el conseguir información, a partir de las respuestas que los estudiantes escribían para algunas actividades, sobre cómo aprenden los estudiantes.

Por último vamos a referirnos a los dos grupos reducidos de estudiantes de 6º de EGB (12 años) que también participaron en nuestras experimentaciones. Los estudiantes de ambos grupos fueron seleccionados por su profesora entre un grupo de voluntarios para colaborar con nosotros de una manera desinteresada y con autorización de sus padres. La elección realizada respondió al criterio de que fuese lo más representativa posible del nivel intelectual de los estudiantes del aula. Ningún estudiante de uno de los grupos perteneció al otro grupo.

Los datos obtenidos a partir de los grupos de estudiantes a los que nos hemos referido en este apartado no han sido todos ellos igual de relevantes para el trabajo que presentamos. Los grupos de Magisterio han sido el ambito en el que hemos realizado el estudio, pasamos ahora a explicar lo relativo a los otros colectivos.

Las experimentaciones en las que participaron los niños de 12 años nos han aportado una gran información sobre *cómo y qué* aprenden de la geometría de los sólidos los estudiantes que razonan en los primeros niveles de Van Hiele y que es muy probable que en otras áreas de las matemáticas tampoco tengan muy desarrollado el nivel 2, cuando se lleva a cabo una determinada intrucción. Si bien nuestro estudio no tenía la intención de comparar los datos obtenidos a partir de ellos con los de estudiantes de Magisterio o de la Facultad de Matemáticas, sí que nos preocupamos de seleccionar alumnos que respondieran a características diferentes, para obtener una amplia información sobre procesos de aprendizaje. Los protocolos correspondientes a niños de 12 años que exponemos en el capítulo 2 muestran lo enriquecedoras que fueron estas experiencias.

Dadas las condiciones en las que se realizó la experimentación (ver apartado siguiente) y las características de estos estudiantes, que ya hemos indicado, los datos obtenidos a partir de los estudiantes de la Facultad de Matemáticas no fueron lo fructíferos que hubiéramos deseado, por lo que apenas nos referimos a ellos en este trabajo.

LA EXPERIMENTACIÓN

Todas las sesiones de las experimentaciones comentadas en los párrafos anteriores, excepto la que realizamos en la Facultad de Matemáticas, el curso 1995–96, se llevaron a cabo en el laboratorio del Departamento de Didáctica de la Matemática. Las diferentes unidades de enseñanza utilizadas fueron diseñadas y modificadas por la autora de la tesis, la cual proporcionó la instrucción en los cursos de Magisterio mencionados[10]. Para el grupo de los estudiantes de la Facultad de Matemáticas, si bien fue otro profesor el que impartió la instrucción, éste fue dirigido por ella.

La tabla 1.1 recopila el número de sesiones que realizamos con cada grupo y su duración. También muestra el número de estudiantes de los diferentes grupos que asistían normalmente a las sesiones y el número de estudiantes que realizaron los tests en los grupos que se administraron (entre paréntesis).

Los estudiantes estaban colocados por grupos en mesas hexagonales. Debido al diferente número de estudiantes de los grupos (ver tabla 1.1) hubo algunas diferencias, que vamos a precisar a continuación, respecto a cómo desarrollamos las clases y respecto a cómo obtuvimos la información en cada uno de ellos.

Estudiantes de 6º de EGB Las experimentaciones se llevaron a cabo fuera de las horas habituales de clase. Para la mayoría de las actividades, los niños estuvieron organizados en un sólo grupo, aunque también hubo actividades para las que se formaron dos grupos. Las actividades las planteaba la autora de la investigación verbalmente en forma de cuestiones, bien como pregunta dirigida a todos los niños o a uno de ellos directamente. Los niños tenían que dar la respuesta verbalmente o por escrito en una hoja que se les entregaba para que resolvieran la actividad correspondiente. Las

[10] Queremos aclarar que el que en nuestro trabajo la investigadora haya sido también la profesora de los cursos en cuyo medio se desarrolló el trabajo, si bien ha tenido algunas ventajas, también ha presentado inconvenientes. Como Puig (1996a, 1986b) expresa, "la función de investigador y la función de profesor son funciones distintas que ponen obstáculos la una a la otra. El que una sola persona encarne ambas funciones por las necesidades de una investigación trae consigo tensiones entre los objetivos de cada una de ellas, que no se resuelven sin dificultades" (Puig , 1996b, p. 15). "Ahora bien, si me niego a esta identificación confusa entre dos funciones distintas, entre dos dominios de experiencias distintos no voy por ello a concluir que la investigación en didáctica de las matemáticas no tiene nada que ver con la docencia: la docencia de las matemáticas que nos interesa se realiza en el sistema escolar y la didáctica de las matemáticas estudia los fenómenos que se producen cuando se enseñan matemáticas en los sistemas escolares, y de ahí se derivan múltiples relaciones, pero relaciones que no han de ser pensadas con el par teoría/práctica, sino con el par objeto de conocimiento/conocimiento elaborado sobre el objeto" (Puig , 1996a, p. 108).

cuestiones planteadas directamente a cada niño, en las que se pedían respuestas verbales, fueron las más frecuentes. Así, se facilitaba que no se inhibiesen las respuestas de los estudiantes más tímidos o los menos hábiles y se favorecía que se entablaran discusiones entre ellos, porque notaran que la respuesta de uno de sus compañeros no era adecuada.

Las cuestiones se plantearon a cada niño siguiendo un orden. En algunos casos comenzamos por los niños que tenían más dificultades y seguíamos progresivamente hasta los más avanzados. La intención era que las respuestas de éstos no influyeran en las respuestas de los otros, y cuando la cuestión tenía posibles respuestas, los niños con más dificultades pudieran responder especificando el atributo del concepto que tenía más influencia en ellos. Intentábamos evitar que estos niños no se desanimasen porque no podían dar ninguna respuesta. Otras veces, comenzamos por cualquiera de ellos o dejamos que ellos respondieran libremente. En las sesiones pretendíamos crear un clima distendido, donde los niños pudieran expresar sus ideas sin que una rigidez en el posible orden de respuesta pudiera restar espontaneidad.

La mayoría de las veces, las cuestiones se plantearon de manera que con la respuesta de un niño no se agotasen todas las posibles respuestas. Otras veces, lo que se pidió fue que se confirmase o refutase las respuestas de los compañeros. El objetivo era que las respuestas que daba cada uno de ellos pudiesen servir como instrucción para los otros niños, que la respuesta a la actividad se considerase como las respuestas correctas de todos ellos y que se facilitasen discusiones entre ellos. Estas discusiones facilitaban considerablemente que los niños exteriorizaran sus ideas sobre determinados conceptos.

Todas las sesiones fueron grabadas con video. Utilizamos una cámara, con la que seleccionamos la actividad de cada estudiante o de todos ellos, según lo que nos interesara. De esta forma, hemos podido recoger en videos toda la actividad de cada estudiante en las 17 o 20 sesiones según el grupo.

Estudiantes de Magisterio. Cada una de las tareas de la unidad de enseñanza que presentamos en el anexo 1 se entregaba progresivamente a los estudiantes unos días antes de que se estudiasen en clase, para que los estudiantes que quisieran las resolviesen en casa y las entregaran a la profesora antes de tratar en clase la tarea correspondiente.

Al abordar las tareas en clase, alguna de ellas se planteaba a los estudiantes para que se discutiera en grupos. Para ello los estudiantes disponían de una gran variedad de modelos de sólidos para trabajar con ellos (disponíamos de una gran variedad de modelos de prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides). Para los estudiantes de los grupos de 3ºEE y de la optativa de geometría del espacio recogimos las actividades que en clase realizaron los diferentes grupos y anotamos también todas las conversaciones de interés que surgieron respecto a cuestiones que bien los estudiantes de un grupo plantearon a la profesora o sobre las respuestas que los estudiantes dieron a alguna de las cuestiones planteadas por ella. Para los estudiantes de la optativa de geometría del curso 1994–95, además de recoger las actividades que realizaron en clase, grabamos en video y en radio cassette todas las clases.

La profesora conducía la actividad con las cuestiones necesarias para que fuesen los estudiantes los que respondiesen a las actividades incluidas en las tareas correspondientes. Las actividades incluidas en una tarea en clase no necesariamente se resolvían por turno. Para algunas tareas sólo cuando habíamos verificado que los estudiantes no tenían dificultades con un tipo de actividades que requerían de razonamientos de nivel 2, planteábamos las que hemos asociado al nivel 3; a veces retomábamos de nuevo una actividad cuando los estudiantes tenían más desarrollado el nivel de razonamiento inferior y superior asociado a ella.

Estudiantes de la Facultad de Matemáticas. Hay que mencionar que el curso escolar 1995–96 en el que realizamos nuestra investigación fue el primer curso en el que se impartían estas asignaturas, con los problemas que ello conlleva. En primer lugar nos encontramos con que los grupos teóricos tenían 75 estudiantes y las aulas donde se tenía que impartir las clases tenían bancos estándar. Esto obligó a modificar la metodología prevista, pues era muy difícil el que los estudiantes trabajasen en grupos. La mayoría de la información que nos proporcionaron estos estudiantes la obtuvimos de las respuestas por escrito que dieron algunos de ellos a algunas tareas planteadas para que las resolvieran voluntariamente.

Una vez explicado el contexto en el que hemos realizado nuestra investigación y expuesto lo que ha constituido el marco teórico, en el siguiente capítulo vamos a presentar la unidad de enseñanza que hemos diseñado.

CAPÍTULO 2º

DISEÑO DE UNA UNIDAD DE ENSEÑANZA PARA LA GEOMETRÍA DE LOS SÓLIDOS BASADA EN EL MODELO DE VAN HIELE

En este capítulo describimos una propuesta de enseñanza de los sólidos, organizada según el modelo de Van Hiele, que también tiene en consideración otras investigaciones, de las que hemos dado cuenta en el capítulo 1 (sección 1.2).

Antes de presentar la unidad de enseñanza queremos explicar cómo hemos dado respuesta, basándonos en las experimentaciones realizadas y la experiencia docente, a algunas cuestiones que nos hemos planteado antes de diseñar las unidad, relativas a los contenidos que podríamos incluir o a problemas prácticos que pueden surgir al desarrollar en clase esta unidad. En la sección 2.1 señalamos los conceptos y propiedades matemáticas que son objeto de enseñanza y las familias y subfamilias de sólidos que sirven como soporte para ello. La sección 2.2 trata sobre los materiales y formas tridimensionales que serían aconsejables como apoyo para desarrollar en clase la unidad; en ella, además de describir diferentes procedimientos que generan una gran variedad de formas, también se dan sugerencias sobre cómo construir otras, requeridas para poder llevar a cabo la instrucción.

La sección 2.3 se refiere a la unidad de enseñanza propuesta para el estudio de los sólidos, que hemos desglosado en las correspondientes a los niveles de razonamiento 1, 2 y 3; da cuenta del contenido, de cómo está organizada, de a quién va enfocada y de lo desarrollada que está para aplicarla a la instrucción. También se explica en esta sección cómo deben entenderse algunas tareas que se han incluido en unidades de enseñanza diseñadas para diferentes niveles de razonamiento.

En las secciones 2.4 a 2.6 indicamos los objetivos de las tareas propuestas y las tareas correspondientes. Éstas vienen acompañadas de comentarios que ayudan a comprender la unidad de enseñanza diseñada y lo que hay que observar, o a lo que hay que prestar atención, cuando se lleva a cabo la instrucción.

2.1. LOS CONTENIDOS MATEMÁTICOS

Hay una gran variedad de fenómenos "naturales" que se pueden organizar con conceptos geométricos relacionados con los sólidos y que pueden servir como punto de partida o como soporte posterior para abordar procesos matemáticos.

En los apartados que incluimos en esta sección damos cuenta de las formas sólidas que consideramos como objeto de instrucción, que organizan fenómenos que están en el entorno del estudiante, fuera del mundo de las matemáticas; fenómenos espaciales que inicialmente se estructuran principalmente por medios visuales, que forman lo que llamamos objetos mentales iniciales de los conceptos geométricos implicados (los que se construyen con las tareas del nivel 1), y que en un estadio más avanzado de la instrucción (en el nivel 2 o superior) se elaboran más profundamente mediante la descripción y el razonamiento.

Así, en los apartados 2.1.1 y 2.1.2 exponemos que como objeto de enseñanza hemos seleccionado subfamilias de sólidos que corresponden a prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides y como punto de partida también hemos considerado formas que no corresponden a poliedros: cilindros, conos y esferas. Aclaramos que han sido las experimentaciones realizadas y el análisis teórico de las familias y subfamilias de sólidos lo que explica nuestra selección, ya que apenas hemos podido apoyarnos en los estudios consultados. El análisis de los libros de texto usuales de primaria que se están utilizando en la Comunidad Valenciana nos ha permitido conocer las familias de sólidos que utilizan sus autores para desarrollar ideas geométricas. Sin embargo, apenas hemos podido tener en consideración estos materiales ya que, como hemos indicado en la introducción a esta memoria, el tratamiento que se hace de la geometría es muy pobre, y más pobre aún si se considera el estudio de los sólidos. Si bien sí que nos interesa subrayar que algunos materiales curriculares utilizados en España o en otros países han tenido influencia en la selección de una u otra manera (Oehl et al., 1975-1978; S. M. P., 1983-1984).

Pero aparte de dar cuenta de las formas sólidas que consideramos como objeto de enseñanza, dado que, como fruto de la instrucción, los objetos mentales iniciales de los conceptos se van ampliando de manera que en ellos se van incluyendo atributos críticos y no críticos de los conceptos, e incluso se van incorporando en ellos definiciones que se van elaborando, en esta sección también incluimos el apartado 2.1.3 que da respuesta a las siguientes preguntas: ¿qué elementos de los sólidos consideramos como objeto de instrucción? ¿qué propiedades de las familias o las subfamilias van a ocupar nuestra atención?

El apartado 2.1.4 incluye un subapartado referido a definiciones. Damos cuenta de las que hemos considerado como objeto de análisis, que nos han facilitado el seleccionar parte de los diferentes fenómenos "naturales" que se organizan con el concepto considerado (los que quedan reflejados con la definición elegida), y así seleccionarlos como ejemplos o no ejemplos. También en algunos casos las ideas ingenuas que damos para determinadas familias las hemos extraído de estas definiciones. Pero no señalamos las definiciones de las que hemos hablado en el párrafo anterior (las que son fruto de la actividad matemática en la que se implica a los estudiantes).

2.1.1. LAS FAMILIAS DE SÓLIDOS

La familia de los prismas es una familia que permite abordar la gran variedad de procesos matemáticos que ya hemos mencionado. En la unidad de enseñanza que diseñamos, vamos a considerar esta familia como soporte para desarrollar la actividad matemática. También vamos a incluir las familias de los antiprismas, pirámides y bipirámides, y como punto de partida hemos elegido formas que no corresponden a poliedros: cilindros, conos y esferas.

La introducción del concepto de poliedro no tiene como idea subyacente que pensemos que este concepto es necesario para comprender los conceptos relativos a las otras familias de sólidos que consideramos, aunque todas ellas sean poliedros para la mayoría de las actividades. Como hemos indicado en el apartado 1.2.1, al hablar del trabajo de Freudenthal, una de las características que tiene la geometría es que permite trabajar con los objetos mentales de los conceptos geométricos durante mucho tiempo; en nuestro caso se puede trabajar con las familias de sólidos y formar objetos mentales de ellas bastante ricos sin necesidad de incluirlas en el mundo de los poliedros. Una explicación de por qué hemos considerado esta familia como objeto de estudio es porque ella misma organiza fenómenos "naturales".

Esto explica que intentemos formar los objetos mentales iniciales de familias de sólidos que no son poliedros (cilindro, cono y esfera) aunque las tareas que proponemos después en la unidad de enseñanza ya no se refieren a ellas: si nos fijamos en el mundo de las formas que aparecen en la naturaleza y consideramos el concepto de poliedro como medio de organización de estas formas, no creemos que sea conveniente el restringir el mundo a esta familia en primera instancia, ya que en este caso no se sentiría que el mundo de las formas requiere una organización. Por otro lado, estas familias nos proporcionan ejemplos que permiten afinar ideas (que pueden ser visuales) que se podrían tener sobre los elementos de los sólidos (caras, aristas y vértices), conceptos geométricos que también organizan fenómenos.

Del hecho de que no hayamos continuado desarrollando actividad matemática utilizando como soporte estas familias no queremos que se desprenda que juzgamos que éstas no son adecuadas para ello. Por el contrario, pensamos que sería muy interesante desarrollar una unidad de enseñanza para estudiar los sólidos tomando como soporte, entre otras, estas familias[1]; nuestro objetivo no ha sido tan pretencioso como para abarcar el tipo de actividad que se podría desprender de "esta parte" del mundo de los sólidos y del mundo de los poliedros.

Una vez explicado por qué sólo los objetos mentales de familias de prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides son los que nos proponemos ampliar con nuestra unidad de enseñanza, o que sólo pretendemos seguir desarrollando el nivel de razonamiento de los estudiantes en la geometría de los sólidos utilizando estas familias para desarrollar actividad matemática, en lo que sigue nos vamos a ocupar de esclarecer que la selección de estas familias se ha hecho al tener en cuenta propósitos de diferente índole, referidos a la investigación y a la instrucción, y que han sido las experimentaciones realizadas y el análisis teórico de las familias y subfamilias de sólidos que podríamos considerar, las que sostienen esta elección.

Sobre "la manera de hacer". Las experimentaciones realizadas han mostrado que los estudiantes, para señalar propiedades de una familia, tienden a considerar los elementos para los que, en las familias que se han examinado anteriormente en clase, se ha indicado alguna propiedad relativa a ellos. Por ejemplo, para los antiprismas rectos se indican propiedades relativas a la altura, que no se consideraban para los prismas rectos y oblicuos. También hemos observado que para las diferentes familias de sólidos que se consideran, lo usual es que se delimiten las propiedades relativas a su número de elementos (caras, vértices, aristas, ángulos diedros, etc.) dando el mismo tipo de razonamientos que se utilizaron en clase para delimitar estos números para los prismas.

Si queremos averiguar cómo aplican los estudiantes las sugerencias que se indican en clase para resolver actividades referidas a los prismas, hay que considerar además otras familias y hay que dar para ellas unos conocimientos imprescindibles, por lo que tenemos una razón para considerar como soporte de nuestras actividades no sólo la familia de los prismas sino las otras familias mencionadas.

---

[1] El trabajo que se presenta en Baena et al. (1996) muestra la gran actividad que puede surgir tomando como soporte la esfera.

Descripción de la localidad encontrada en los niveles de razonamiento de Van Hiele para la geometría de los sólidos. El considerar diferentes familias de sólidos como objeto de instrucción permite evaluar si existe "localidad" en los niveles de razonamiento de Van Hiele para la geometría de los sólidos y si el dominio de alguna tarea para una familia dada facilita la resolución de la tarea para otras familias de sólidos.

Cuando en nuestras experimentaciones planteamos para otras familias de sólidos las actividades resueltas en clase para los prismas, las respuestas de los estudiantes reflejaron que el logro de las características asociadas al nivel 2 aumentaba a medida que avanzaba la instrucción, pero la localidad de los niveles fue patente. Si bien en éstas ya se habían corregido algunos errores, se seguían presentando dificultades de diferentes tipos. Sin embargo, pudimos comprobar que el dominio de una característica asociada a un nivel de razonamiento al considerar una familia dada, facilitaba la adquisición de ésta cuando se tenía como base otra familia de sólidos.

Ideas erróneas sobre lo que es propiedad de una familia que sí que se incluían en la familia de los prismas (por ejemplo, que basta con que una propiedad se cumpla en algunos ejemplos para que sea propiedad de la familia), ya no se mostraron en la familia de los antiprismas. En la mayoría de los estudiantes se fue precisando el vocabulario hasta que apenas se reflejaban imprecisiones en su utilización. Al enumerar propiedades para los antiprismas, o sus subfamilias, los estudiantes ya precisaban el tipo de ángulos o de diagonales al que se referían.

Pero aunque el haber estudiado en clase familias de prismas facilitó considerablemente el abordar los respectivos problemas para otras familias, los estudiantes seguían teniendo dificultades de diferentes tipos; razonaban adecuadamente sólo a nivel muy local. Se hizo necesario que el profesor considerara diferentes familias de sólidos para que lo que se dominaba a nivel local también se dominase a nivel general. De ahí otra razón para considerar como soporte de nuestras actividades no sólo la familia de los prismas sino las otras familias mencionadas.

Las propiedades que cumplen las familias estudiadas. En lo que sigue vamos a explicar por qué hemos seleccionado las familias de los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides. Nos hemos preocupado de elegir familias que compartiesen algunas propiedades y que introdujesen otras. También han sido las propiedades de estas familias las que han influido en el orden en el que las presentamos en la instrucción.

Así, primero introducimos la familia de los prismas y después estudiamos los antiprismas; éstos tienen propiedades comunes con los primeros pero no tienen todas. Además, en las subfamilias de los antiprismas que podemos considerar no se cumplen propiedades de las subfamilias correspondientes a los prismas. Para determinar las características numéricas (número de caras, de vértices, de aristas, de los diferentes tipos de ángulos o de diagonales) para un antiprisma n-agonal, se pueden utilizar los mismos procedimientos que para un prisma n-agonal, adaptándolos a la nueva situación. Ambas familias tienen subfamilias con infinitos ejemplos, que varían sólo al cambiar el polígono de la base (los prismas y antiprismas de caras regulares) y otras subfamilias que tienen un número finito: los prismas y antiprismas de caras iguales tienen dos tipos de ejemplos si los clasificamos según el número de medidas distintas para los ángulos de las caras. En ambas familias hay una formada por un poliedro regular: el cubo y el octaedro respectivamente.

Si comparamos las pirámides con los antiprismas también podemos delimitar propiedades comunes y diferencias. En ambas familias las caras laterales son triángulos, pero las pirámides sólo tienen una base. Si nos fijamos en las aristas laterales, las condiciones que se pueden delimitar para que los antiprismas rectos o las pirámides rectas tengan aristas laterales iguales, vienen dadas respectivamente en términos de los lados o de los ángulos de las bases o base (tienen que ser iguales); o en términos de circunferencia inscrita o circunscrita a las bases o base. Respecto a los vértices, la familia de las pirámides tiene una diferencia respecto a las familias de los prismas y antiprismas: mientras que en estas dos familias los vértices son todos ellos del mismo orden (de orden 3 o de orden 4 respectivamente) en las pirámides, excepto en el tetraedro, hay vértices de dos tipos; los vértices de la base son de orden 3 y el ápice es de orden "n". Para determinar las características numéricas (número de caras, de vértices, de aristas, de los diferentes tipos de ángulos o de diagonales) para una pirámide n-agonal, se pueden utilizar, adaptándolos a la nueva situación, los mismos procedimientos que para un prisma o un antiprisma n-agonal. Relativo al número de elementos de diferentes familias, cabe resaltar que si bien los prismas y antiprismas de caras regulares tienen infinitos ejemplos, al considerar las pirámides, esta subfamilia sólo tiene 3 elementos. La subfamilia de las pirámides de caras iguales también tiene dos tipos de ejemplos si los clasificamos según el número de medidas distintas que hay en los ángulos de sus caras y en esta familia uno de sus ejemplos es poliedro regular: el tetraedro.

Si consideramos las bipirámides es porque con esta familia se rompe completamente con la idea de base que proviene de las familias que hemos mencionado antes, y además hay que adaptar a esta familia las ideas que se tienen sobre algunos elementos de ella, o las propiedades de las familias estudiadas: en esta familia no tiene sentido hablar de caras laterales ni de ángulos diedros de dos tipos. Las diagonales de la base, en vez de ser diagonales de las caras como en las otras familias, pasan a ser diagonales del espacio.

2.1.2. LAS SUBFAMILIAS DE PRISMAS, ANTIPRISMAS, PIRÁMIDES Y BIPIRÁMIDES

Una vez organizado el mundo de los poliedros en familias, al centrar la atención en los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides, e intentar ampliar el objeto mental inicial[2] de ellas, para que éste incluya, además de su descripción, sus atributos críticos, podemos centrarnos en organizar sus ejemplos. En un principio los estudiantes pueden manifestar resistencia para incluir como ejemplos de la familia considerada algunas subfamilias de ella. Así, si se considera la familia de los prismas, puede ser que no se acepten como ejemplos el cubo y los prismas "muy chatitos". Pero a medida que los estudiantes progresan se pueden ir convenciendo de que es mejor incluirlos, aunque en el lenguaje cotidiano a nadie se le ocurriría llamar prisma a un cubo. La razón es que se va cambiando en lo que se considera como propiedad a destacar. El que los prismas sean altos o bajos, o que tengan caras o aristas diferentes, no se va a considerar como atributo crítico de ellos. Y aunque probablemente en el objeto mental inicial de prisma estos atributos se hubieran incluido, cuando se centra la atención en ello esto se puede superar.

Y una vez vislumbrado que dentro de una familia de sólidos también hay diferentes tipos de ejemplos, se puede hacer sentir la necesidad de organizar el mundo de estas familias a través de otros conceptos de los que también pueden ampliarse sus objetos mentales iniciales con la descripción y el razonamiento.

Los criterios que utilizamos para clasificar los precisamos en los apartados siguientes, y dado que la organización de las familias de sólidos con ellos no conlleva el mismo tipo de dificultad, la hemos propuesto en actividades de diferente nivel, y si un mismo criterio lo utilizamos para clasificar en diferentes niveles el significado que se le da a la clasificación es el indicado en el apartado 1.4.2 para cada nivel de razonamiento.

Puede llamar la atención que nos hayamos detenido tanto en la unidad de enseñanza diseñada estableciendo clasificaciones con diferentes criterios y especialmente aumentando el objeto mental inicial que se podría formar de las diferentes subfamilias de sólidos establecidas. Los subapartados que

---

[2] Cuando hablamos de objeto mental inicial de las familias de sólidos nos referimos al objeto mental que los estudiantes se pueden ir formando a partir de las primeras tareas propuestas para el nivel 1 para introducir las familias correspondientes. En este objeto mental no sólo está incorporado lo que proviene del aprendizaje a partir de estas actividades sino también, todo lo que ya estaba incluido como consecuencia de la experiencia que el estudiante ha podido tener con estas familias antes de abordar el estudio de la geometría de los sólidos y de colocar éstos en un contexto geométrico.

incluimos en este apartado explican las razones que hemos tenido para ello. Unas subfamilias las estudiamos por los tipos de clasificación que queremos considerar (clasificaciones-particiones o clasificaciones inclusivas), otras, porque la clasificación correspondiente permite tratar problemas diferentes en los niveles 1, 2 y 3 de Van Hiele. La razón para estudiar otras subfamilias yace en los problemas matemáticos que surgen, que no se han estudiado con las otras subfamilias, bien por el criterio, o criterios, que se utilizan para clasificar, o el universo que se somete a clasificación, bien por la descripción de las subfamilias establecidas, por la enumeración de los elementos de éstas, o por las relaciones de inclusión o exclusión que presentan con otras subfamilias ya establecidas.

Aunque en los comentarios que hacemos sobre las tareas que hemos diseñado para cada una de estas subfamilias indicamos los objetivos de éstas, a continuación para las diferentes clasificaciones que hemos establecido, comentamos lo más relevante de cada una de ellas[3]. También indicamos las abreviaturas que utilizamos, en los siguientes apartados, para referirnos a las diferentes subfamilias.

CLASIFICACIONES PARTICIONES ESTABLECIDAS CON CRITERIOS VISUALES

En la unidad de enseñanza comenzamos con clasificaciones dicotómicas (delimitamos pares de familias disjuntas) establecidas con criterios visuales. Una clasificación-partición que tratamos se basa en la observación de que hay sólidos "inclinados". Otra se basa en que hay sólidos "que tienen entrantes". Otra se basa en que hay sólidos "que tienen bases o base".

Consideramos también otras clasificaciones establecidas a partir de criterios que centran la atención en la base, que junto con las anteriores permite que los estudiantes determinen lo que caracteriza a este tipo de clasificación, observen que esta forma de clasificar siempre conduce a clases excluyentes y conozcan los modelos que usualmente se utilizan para representarlas.

El incluir en la unidad de enseñanza la clasificación de los prismas y otras familias de poliedros con los criterios mencionados, y establecer las subfamilias correspondientes, además de tener como objetivo que se aborde el problema de la clasificación-partición, tienen otros propósitos, que vamos a subrayar en lo que sigue.

---

[3] Para ampliar lo que incluimos en los apartados siguientes puede consultarse Guillén (1991, pp. 23-38).

La inclinación: prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides, rectos y oblicuos (PR, PO, AR, AO, PIR, PIO, BIR, BIO)

Una de las razones por las que hemos incluido en la unidad de enseñanza la clasificación de los prismas y otras familias con el criterio *ser recto* o *ser inclinado* es porque podemos abordar tareas relativas a esta clasificación en los niveles de razonamiento 1, 2 y 3.

La clasificación en el nivel 1. Como ser recto o inclinado tiene un gran componente visual, esta división se puede considerar cuando los estudiantes razonan de acuerdo a las características del nivel de razonamiento 1 de Van Hiele. La división de la familia de los prismas o de otras familias de sólidos en estas dos familias dicotómicas se hará según criterios visuales (ver el apartado 1.4.2 del capítulo 1). En este nivel se construye un cierto objeto mental de las subfamilias establecidas.

La clasificación en el nivel 2. Plantear la clasificación de los prismas y de otras familias con el criterio *ser recto* o *ser inclinado* como tarea para el nivel 2, por una parte, permite establecer particiones y traducir las propiedades visuales, expresadas con terminología visual, a propiedades geométricas de las familias establecidas. Por otra parte, permite mostrar, que los criterios de clasificación a veces sólo quedan claros cuando se considera un "trocito" del mundo como objeto de clasificación, pero que cuando el universo objeto de clasificación se amplía podemos encontrarnos con algunos problemas. Los estudiantes que razonan de acuerdo a las características del nivel de razonamiento 2 pueden observar que al clasificar los prismas, antiprismas o pirámides de base regular con este criterio, no se tienen dificultades en asignar los modelos a alguna de las familias establecidas, pero cuando estas familias se amplían con los ejemplos de bases irregulares la asignación ya no es tan inmediata; especialmente para los antiprismas y las pirámides, para los que hay que precisar en términos geométricos, y en muchos casos abstraerse de lo visual, lo que se entiende por *recto*. Los alumnos pueden comprender también que si el universo se amplía a todos los poliedros, aunque previo a la clasificación se decida a qué se llama sólidos *inclinados*, es difícil en algunos casos decir si un poliedro es de una clase o de la otra.

En el nivel 2 los estudiantes pueden llegar a concluir que dado que no es fácil precisar cuándo un sólido cualquiera es inclinado o no, cabe restringir el mundo de poliedros a los prismas, antiprismas y pirámides, para clasificarlos con este criterio. También pueden comprender que incluso en este mundo, la clasificación con este criterio conlleva el que se amplíe la primera idea ingenua de altura de un poliedro: la altura dibujada desde una base no se sale fuera del sólido; la altura va desde el centro de una base[4] al centro de la otra base; la longitud de la altura del prisma es la de la arista lateral. Y pueden observar que para otras familias concretas de sólidos (para los antiprismas, pirámides y bipirámides) *rectos* ya no se verifican todas estas propiedades.

En consecuencia, los objetos mentales de las subfamilias establecidas con esta clasificación, y el de otros conceptos geométricos correspondientes a elementos de los sólidos, se amplían considerablemente en este nivel; y también se amplía el objeto mental del propio proceso matemático de "clasificación", formado a partir de las tareas propuestas para el nivel 1.

La clasificación en el nivel 3. Los prismas rectos y oblicuos, considerados como familias disjuntas, también son adecuados para desarrollar el tercer nivel de razonamiento. La descripción de estas familias nos lleva a tareas que requieren de razonamientos asociados al nivel 3, cuando pedimos que se enuncien propiedades de una familia englobadas como propiedades de otra familia, o propiedades que relacionan unos términos con otros, o se pide expresar propiedades de los prismas oblicuos, a partir de las de los prismas rectos, negando los cuantificadores "todo" o "nunca" que aparecen en algunas propiedades de éstos (ver el anexo 2).

Los sólidos cóncavos y convexos

Esta clasificación establece familias cuya descripción permite abordar problemas análogos a los apuntados en el apartado anterior; además, proporciona un problema para mostrar que las propiedades de una subfamilia, establecida con un criterio de clasificación, se van restringiendo cuando se aumenta el universo objeto de clasificación. Si bien las propiedades se mantienen al aumentar esta familia con los antiprismas cóncavos, si la aumentamos con las pirámides cóncavas o con las bipirámides cóncavas ya deja de cumplirse alguna propiedad; en las pirámides cóncavas ya no se cumple que "hay por lo menos una diagonal de espacio que no queda completamente en el interior". En las bipirámides cóncavas ya no se cumple, por ejemplo, que "hay por lo menos un ángulo de la base que es mayor que 180°".

Así pues, el incluir en la unidad de enseñanza estas subfamilias permite que se amplíen considerablemete los objetos mentales que se

---

[4] Cuando aparezcan modelos que obliguen a precisar que nos referimos al centro de gravedad del polígono y a aceptar que éste puede quedar fuera de él, será interesante retomar estas propiedades para hacer ver que si partimos de que existe el centro de gravedad de un polígono cuando queda fuera de él, también cabe aceptar que los prismas con bases esos polígonos verifican estas propiedades.

pueden constituir de ellas con las tareas propuestas para los niveles 1 y 2. Por ejemplo, en el objeto mental de los prismas y antiprismas cóncavos se incorporan las propiedades que se mantienen y las que dejan de cumplirse, al ir ampliando el universo con otras subfamilias, o al considerar todos los poliedros. Se establecen relaciones entre las subfamilias cóncavas y entre sus propiedades, para lo que se requiere de razonamientos de tercer nivel ó superior.

Poliedros con base o bases

El criterio que está basado en la observación de que hay poliedros que *tienen base o bases* permite incidir en que es necesario precisar lo que entendemos por *tener base o bases,* (que es el criterio que utilizamos para clasificar). Al igual que al establecer los prismas rectos y oblicuos, en este caso ocurre que aunque el criterio puede estar claro para "un trocito" de mundo (las familias de los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides), no es un criterio que podamos utilizar para cualquier universo que se quiera elegir como objeto de clasificación. Más aún, incluso para este "trocito" de mundo se presentan también problemas que tienen que ver con que no se tiene una idea precisa del criterio que se usa para clasificar.

El intento de abordar esta clasificación cuestiona si es o no pertinente dividir los sólidos con este criterio, y nos introduce en un problema más importante: la reflexión sobre lo que puede considerarse, y si es adecuado tomarlo como criterio de clasificación.

CLASIFICACIONES-PARTICIONES ESTABLECIDAS CON CRITERIOS QUE TIENEN QUE VER CON UNO DE SUS ELEMENTOS: LA BASE

La clasificación de prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides que mostramos a continuación, realizada con criterios que centran la atención en la base, se puede plantear en diferentes niveles de razonamiento. Si la incluimos en la unidad de enseñanza propuesta es porque permite considerar clasificaciones establecidas con criterios geométricos que además pueden ser cuantitativos.

La clasificación en el nivel 2. En este nivel las familias se establecen a partir de criterios basados en la observación de atributos cualitativos. Dentro de las familias de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, al fijarnos en la regularidad o no regularidad de la base(s), se pueden establecer las familias dicotómicas correspondientes: los de base(s) regular(es) y los de base(s) irregular(es). Los estudiantes también pueden establecer las subfamilias de los prismas triangulares, prismas cuadrangulares, etc., basándose en la observación de que las bases de todos los ejemplos de una familia tienen el mismo número de lados.

Como hemos indicado en el apartado 1.4.1 del capítulo primero, bastan razonamientos asociados al nivel 2 para que los estudiantes puedan generalizar, contando por pisos, el número de caras, vértices y aristas de un prisma, antiprisma, etc., n-agonal. Y al aplicar estas expresiones para un n particular, pueden concluir que todos los que tienen por bases un polígono con el mismo número de lados, tienen las mismas características numéricas. Y que los prismas que tienen por bases cuadriláteros o triángulos, según la familia, además tienen otra propiedad común: todas sus caras, las bases y las caras laterales, son de una misma familia.

La clasificación en el nivel 3. Es necesario que los estudiantes razonen de acuerdo a las características del nivel 3, para que comprendan que es la invarianza en las características numéricas de estos poliedros la que permite clasificar cada una de estas familias (los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides) en triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc.. Cuando el universo de los poliedros se clasifica con el atributo "tener 2n vértices, 3n aristas y n+2 caras, siendo n un número natural" se separan dos subfamilias de los poliedros: los prismas y los poliedros que no son prismas. Si se clasifica conjuntamente con los tres criterios siguientes, "tener 2n vértices, 3n aristas y n+2 caras", "tener 2n vértices, 4n aristas y 2n+2 caras", "tener n+1 vértices, 2n aristas y n+1 caras", al intersectar las particiones, como no tienen elementos comunes, se tiene dividido el universo en 4 partes: los prismas, los antiprismas, las pirámides y los poliedros que no pertenecen a ninguna de las otras familias establecidas. En este nivel ya se puede comprender que las expresiones del número de caras, vértices y aristas caracterizan perfectamente a una de estas familias (prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides).

La clasificación en el nivel 4. Como actividad de este nivel se puede cuestionar si el número de caras, vértices y aristas sirve para caracterizar cualquier poliedro. Si el profesor lo considera pertinente puede conducir la clase para que se descubra y justifique la fórmula de Euler. Y ya nos introduciríamos en un problema de demostración. Además con las ideas de Lakatos podríamos trabajar las pruebas y refutaciones. Pero abordar este problema va más allá de nuestros objetivos.

FAMILIAS ESTABLECIDAS CON CRITERIOS QUE CENTRAN LA ATENCIÓN EN LA REGULARIDAD O IGUALDAD DE LAS CARAS

Hay varias razones para establecer familias a partir de criterios que centran la atención en la regularidad e igualdad de todas las caras, o de las caras laterales. A continuación vamos a explicar algunas.

Sobre clasificación; establecimiento de familias dicotómicas. Estas clasificaciones permiten mostrar que lo que se suele hacer a veces en matemáticas al clasificar es fijarse en una característica de un conjunto de objetos y después determinar todos los elementos que pertenecen a esa clase. Así, al considerar como universo de clasificación cada una de las familias tratadas, se pueden establecer las familias de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides de caras regulares (PCR, ACR, PiCR, BiCR), las de caras laterales regulares (P<u>CL</u>R, A<u>CL</u>R, Pi<u>CL</u>R, Bi<u>CL</u>R) y las de caras iguales (PCI, ACI, PiCI, BiCI).

Se puede hacer ver que en realidad se hacen clasificaciones dicotómicas pues aunque nos fijemos sólo en los objetos que cumplen la propiedad también se pueden considerar por otro lado los que no la cumplen.

Experiencias que hemos llevado a cabo han mostrado que cuando los estudiantes que razonan de acuerdo a las características del nivel 2 establecen familias dicotómicas utilizando como criterio de clasificación la igualdad o regularidad de todas las caras (o la regularidad o igualdad de las caras laterales) no tienen en cuenta toda la familia como universo de clasificación. Por ejemplo, en la familia de los prismas los estudiantes separan los prismas que tienen todas las caras regulares y los prismas que no tienen ninguna cara regular. Estos resultados nos han llevado a plantear en la unidad de enseñanza, como tareas para desarrollar las características del nivel 2, el establecimiento de ambas familias dicotómicas.

Descripción de familias dicotómicas. La razón fundamental para incluir estas subfamilias en la unidad de enseñanza tiene que ver con que su descripción y la de las familias complementarias (dicotómicas) conlleva gran actividad matemática y permite abordar problemas, que requieren de tercer nivel de razonamiento o superior, que no se han considerado con las otras subfamilias, y que las experimentaciones realizadas nos han revelado que hay que prestar atención a ello. Al describir las subfamilias delimitadas en los antiprismas, pirámides y bipirámides los estudiantes siguen razonando de la misma manera que en las familias correspondientes de los prismas, cometen los mismos errores y además aparecen otros nuevos. Cuando los estudiantes resuelven tareas de descripción, con frecuencia encontramos respuestas en las que:

- Se refleja que no se pueden expresar todas las listas de propiedades de una familia que pueden darse englobadas como las propiedades de las familias que la contienen; los estudiantes no pueden delimitar adecuadamente la relación de inclusión que existe entre determinadas familias en términos de ejemplos y no tienen clara la inclusión que hay entre ellas en términos de propiedades.

- Faltan por indicar varias propiedades específicas, especialmente si la descripción se refiere a subfamilias muy específicas y no se ha dedicado en clase la debida atención. También indican propiedades que no deberían estar en la lista, bien porque no son propiedades de la familia que se considera o porque ya se han indicado agrupadas como propiedades de una familia.

- Se aplican resultados obtenidos para familias de prismas a las familias correspondientes de los antiprismas, pirámides y bipirámides, sin verificar si estos son correctos.

- Se aplican ideas erróneas que se tienen sobre las propiedades que tienen los ejemplos de determinadas familias. Por ejemplo, para los antiprismas y pirámides de caras iguales (ACI y PiCI) se da por supuesto que sólo puede haber ejemplos que tengan por caras triángulos equiláteros. A pesar de que se han estudiado en clase prismas de caras iguales (PCI) que no tienen caras regulares (el romboedro genérico) no se plantea que puede haber (y de hecho los hay) ACI y PiCI cuyas caras sean triángulos isósceles. También se indica como propiedad de estas familias "que las aristas son iguales". Los alumnos no se cuestionan que puede haber (y de hecho los hay) ACI y PiCI con aristas de dos medidas diferentes.

- Se siguen enumerando propiedades para una de las familias dicotómicas a partir de las delimitadas para la otra y los estudiantes todavía enfrentan dificultades y cometen errores de diferentes tipos:

  - Para la familia complementaria siguen negando todas las propiedades de la familia corrrespondiente.

  - Por una parte, tienen dificultad para negar los cuantificadores que hay en las propiedades de una de las familias del par y, por otra, tienen dificultades para averiguar si la propiedad enunciada, negando la de su familia dicotómica, es o no propiedad de la familia considerada.

Lo comentado en los párrafos anteriores da cuenta de la necesidad de dedicar atención a la descripción de las subfamilias de los antiprismas, pirámides y bipirámides, y de ahí que hayamos planteado para ello, en la unidad de enseñanza, varias tareas para desarrollar las características asociadas a los niveles 2 y 3. Estas tareas permiten averiguar si los estudiantes siguen razonando de acuerdo con el nivel 2 al negar propiedades y al delimitar si son o no propiedades de una familia, o si ya se ha conseguido un cierto logro local de las características asociadas al nivel 3. Permiten averiguar también si sólo se han superado las dificultades localmente, y por tanto no pueden abstraerse de la familia general, o si ya se ha conseguido un cierto dominio general de las características asociadas al nivel 3.

El nombre de las subfamilias. Las tareas propuestas para el nivel 2 en las que se proponen las clasificaciones con los criterios mencionados, nos introducen en un problema ligado a la clasificación, si bien no es propio de ella: el problema de los nombres (arbitrarios) que damos a las subfamilias que establecemos. Con la denominación de estas familias podremos centrar la atención en que el nombre compuesto está formado por un sustantivo que hace referencia a la familia a la que pertenece y un adjetivo que corresponde a una característica de las caras que son regulares o iguales. Se puede subrayar que si bien hay varias familias que contienen en su denominación la palabra "regular", ésta se refiere a todas las caras o a parte de ellas (parte que queda reflejada explícitamente en el nombre que damos a las familias correspondientes):

- Para las familias de caras regulares, todas las caras (las laterales y las bases) son regulares.

- El nombre de la familias establecidas con criterios de regularidad de parte de las caras (las laterales o las bases) refleja la parte de las caras que cumple el atributo considerado. Los modelos en los que la(s) base(s) es(son) regular(es), pertenecen a la familia de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides de bases regulares (PBR, ABR, PiBR y BiBR). Si las caras laterales son regulares, los modelos pertenecen a la familia de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, de caras laterales regulares (PCLR, ACLR, PiCLR y BiCLR).

- Hay que aclarar también que cuando hablamos de prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides regulares nos referimos a los sólidos de la familia correspondiente que son además poliedros regulares.

Cabe señalar que la nomenclatura que introducimos para nombrar estas familias es un convenio que no coincide con el que se suele utilizar en la jerga habitual; por ejemplo, una pirámide recta de base regular se suele llamar pirámide regular, en vez de pirámide de base regular como la nombramos aquí.

Enumeración de ejemplos de las subfamilias. Otra razón para estudiar las subfamilias de sólidos consideradas tiene que ver con el número de elementos que tienen estas familias y con la determinación de éstos cuando son un número finito. Tareas que planteamos para los niveles 2 y 3 centran la atención en que hay un número infinito de elementos de unas subfamilias mientras que hay un número finito de ejemplos de otras (salvo semejanzas). En el nivel 2 las respuestas pueden venir de la construcción y la generalización de unos ejemplos y para el nivel 3 se pueden utilizar argumentos deductivos basados en la experimentación.

Estas tareas también son adecuadas, por un lado, para comprobar que el clasificar diferentes familias de sólidos con los mismos criterios puede llevar a que en algunas familias se obtengan subfamilias que ya se habían establecido, mientras que para otras se determinan subfamilias nuevas. Por ejemplo, las familias de las pirámides y bipirámides de caras laterales regulares coinciden con la correspondiente de caras regulares, pero no ocurre esto para las familias correspondientes de los prismas y antiprismas. Por otro lado, las mencionadas tareas ayudan a modificar la idea errónea, que con frecuencia tienen los estudiantes que razonan de acuerdo a las características del nivel 2: que los sólidos de caras iguales tienen que tener caras regulares.

CLASIFICACIONES EN LAS QUE LAS PARTICIONES INTERSECTAN. DIAGRAMAS TRILATERALES Y DIAGRAMAS DE ÁRBOL

En la unidad de enseñanza también creemos conveniente abordar clasificaciones en las que las particiones intersectan. Se puede remarcar que en este tipo de clasificación las subfamilias se determinan haciendo clasificaciones en el mismo universo de partida, considerando varios criterios conjuntamente (en nuestro caso 2 ó 3), de manera que las clases disjuntas que pueden obtenerse también se pueden representar mediante un diagrama; y que algunas subfamilias que hemos establecido con clasificaciones-particiones también pueden obtenerse a partir de clasificaciones de este tipo. Por ejemplo, para obtener las familias de caras regulares se puede considerar por turno la regularidad de las bases y la de las caras laterales.

Con otras subfamilias establecidas con clasificaciones de este tipo podemos subrayar que además de considerar como criterios los que hacen referencia a la regularidad o igualdad de las caras o los vértices, se pueden considerar otros pares, o ternas, de criterios y hacer clasificaciones considerando los criterios seleccionados; o lo que ya hemos apuntado en la clasificación-partición respecto a que en matemáticas a veces nos fijamos en una característica, o en varias, de un conjunto de objetos y después se determinan todos los elementos que pertenecen a esa clase. Por ejemplo, podemos fijarnos en los prismas rectos de bases regulares (PRBR) y buscar todos los ejemplos de esta familia (sólo nos fijamos en los primas que verifican que sean rectos y de bases regulares), o bien podemos cuestionarnos los criterios que llevan a delimitarla (ser recto o inclinado y ser de bases regulares o irregulares) e intentar establecer las familias disjuntas correspondientes.

Este tipo de clasificación permite subrayar que si bien las subfamilias resultantes son disjuntas, se pueden considerar las clases que corresponden a una clasificación considerando uno sólo de los criterios y entonces aparecen relaciones de inclusión entre las familias establecidas con dos criterios y con uno. Para representar las clasificaciones inclusivas más naturales, las que a las clases resultantes les damos el nombre genérico y uno o varios adjetivos o nombres, (por ejemplo, prismas rectos y convexos) se puede utilizar un árbol como modelo. Podemos enfatizar las relaciones de inclusión que existen entre algunas familias que lleva a que el diagrama de árbol que representa la clasificación no tenga bifurcaciones en todos los nudos. Por ejemplo, en las que clasificamos con el criterio que establece las familias de prismas cóncavos y convexos y luego clasificamos con un criterio que centra la atención en la regularidad de las bases, el nudo de los prismas cóncavos sólo tendrá una bifurcación, ya que no hay prismas de bases regulares que sean cóncavos.

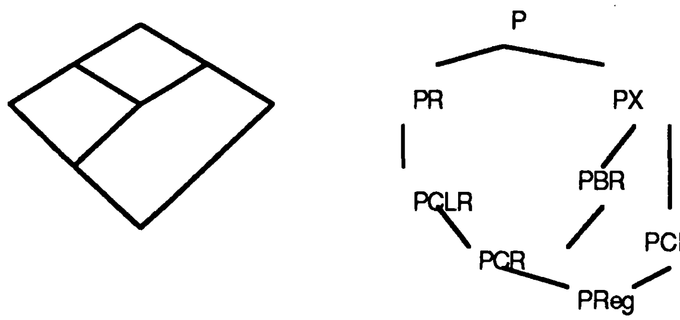
Se puede destacar que las subfamilias establecidas en particiones que intersectan, pueden surgir en otro contexto de clasificación, cuando en vez de clasificar un mismo universo utilizando varios criterios de clasificación y se establecen las familias posibles, los criterios se van considerando por turno y son las familias establecidas con un criterio las que progresivamente se van considerando como universos de clasificación para clasificar con otros criterios. Y de nuevo encontramos que algunas subfamilias no pueden considerarse como universos de clasificación para un criterio dado, porque todos los elementos del universo considerado están incluidos en una de las familias que se podrían establecer. Por ejemplo, si consideramos como universo de clasificación los prismas oblicuos y clasificamos centrándonos en la regularidad de las caras laterales, sólo se puede establecer la familia de los prismas oblicuos de caras laterales irregulares; la familia de los prismas oblicuos de caras laterales regulares no tiene ningún ejemplo.

CLASIFICACIONES INCLUSIVAS. DIAGRAMAS CON FORMA DE RED

Además de las razones ya expuestas que justifican el que incluyamos en la unidad de enseñanza las subfamilias que ya hemos comentado, hay otra razón para considerar este tipo de clasificación. Es muy importante que los estudiantes hagan clasificaciones inclusivas (en las que las inclusiones son el aspecto fundamental) y trabajen como modelo de representación los diagramas con forma de red[5] del tipo de los que mostramos en la figura 2.1(a).

---

[5] Si se trabaja con estudiantes que razonan en un nivel 4, se puede ver que este tipo de clasificación, donde las clases están incluídas unas en otras, proviene de las relaciones de orden. Estas relaciones establecen una jerarquía entre los elementos del conjunto. Cuando todo par de elementos son comparables, están relacionados en un sentido – a*R* b o b*R* a– entonces el orden es total, en caso contrario, cuando existe al menos una pareja de elementos que no lo son, entonces el orden es parcial.



(a) (b)

Figura 2.1

Dado que las subfamilias que ya hemos establecido con otras clasificaciones presentan relaciones de inclusión o exclusión entre ellas o simplemente se solapan, una actividad muy rica que se puede abordar a partir de ellas es la construcción de diagramas con forma de red, que nos permitan visualizar de golpe las relaciones de inclusión que existen entre las subfamilias implicadas en el diagrama; por ejemplo, la figura 2.1(b) muestra un diagrama que relaciona algunas subfamilias de prismas establecidas con las clasificaciones comentadas en las secciones anteriores.

UNA CLASIFICACIÓN INCLUSIVA DE LOS PRISMAS CUADRANGULARES

La clasificación de los prismas cuadrangulares convexos puede considerarse como una situación idónea para trabajar las clasificaciones inclusivas (las relaciones de inclusión, exclusión o intersección que pueden establecerse entre las familias implicadas; la construcción de diagramas, etc.) y para abordar la relación que puede establecerse entre algunos elementos del plano y del espacio. Por ejemplo, una forma de clasificar los prismas cuadrangulares o de establecer relaciones entre ellos es a partir de una clasificación previa de los cuadriláteros. Ello proporciona la ocasión de aplicar la analogía[6] entre elementos del plano y del espacio para extender la clasificación de los cuadriláteros a los prismas correspondientes; y hay que insistir en que previo a aplicar la analogía tenemos que verificar que los

---

Sin embargo, las clasificaciones-particiones se establecen a partir de relaciones de equivalencia. Se tiene una relación de equivalencia y las clases corresponden a las clases de equivalencia.

[6] Remitimos a Polya (1954, 1957, pp. 38, 39, 53 y 57) donde se aclara lo que se entiende por analogía.

objetos análogos del plano y espacio comparten relaciones que sí son pertinentes para el problema.

La descripción de las familias de prismas cuadrangulares establecidas: cubos (C), ortoedros (O), romboedros (R), paralelepípedos (L), prismas de bases trapecios isósceles (PBti), prismas de bases cometas (PBc), prismas de bases trapecios (PBt) y prismas cuadrangulares, es una tarea especialmente adecuada para trabajar que las descripciones de subfamilias no se basen en subfamilias incluidas en ellas, o en parte de los ejemplos (por ejemplo, en una cara en vez de en todas ellas).

Las experimentaciones realizadas han proporcionado evidencia de que esta descripción presenta bastantes dificultades para los estudiantes, aún después de haber estudiado este problema para otras subfamilias; hemos comprobado que hay que prestar una atención especial al problema de delimitar propiedades de una familia que contiene a otras. Resulta muy difícil conseguir que las respuestas no se basen en subfamilias. Si bien éstas pueden ser generales y conducen a enumerar propiedades que dejan fuera los ejemplos específicos, también pueden ser muy específicas, y en este caso, se indican como propiedades de una familia algunas que no lo son. También hemos observado que si bien los estudiantes pueden considerar los ejemplos adecuados para describir una subfamilia, pasado un tiempo, cuando de nuevo se les plantea el problema para otra subfamilia, vuelven a basar las respuestas en algunas subfamilias de ella. El describir las familias de prismas cuadrangulares, cuando éstas se consideran incluidas unas en otras, es una tarea muy adecuada para abordar de nuevo estas cuestiones.

2.1.3. LOS ELEMENTOS Y PROPIEDADES DE FAMILIAS DE SÓLIDOS

Este apartado incluye los elementos de los sólidos y las propiedades que vamos a considerar para ampliar los objetos mentales iniciales que podemos formar con las actividades del primer nivel.

LOS ELEMENTOS DE LOS SÓLIDOS

Para que el análisis de familias y subfamilias de sólidos sea suficientemente rico, además de los elementos de los sólidos (las caras, vértices y aristas) vamos a considerar los diferentes tipos de ángulos y de diagonales.

Podríamos introducir el concepto de plano de simetría y eje de rotación. No lo hemos hecho porque las propiedades métricas y afines que se pueden delimitar para las diferentes familias con los elementos mencionados en el párrafo anterior, bastan para nuestros propósitos. Con ellas tenemos suficientes tipos de propiedades para poder averiguar, por un lado, cómo evoluciona el nivel de razonamiento de los estudiantes y, por otro, los objetos mentales que se van construyendo de familias y subfamilias de sólidos a partir de tareas de distintos tipos. Como un trabajo posterior, en las diferentes tareas propuestas en la unidad de enseñanza que versan sobre propiedades de las familias y subfamilias, se pueden incluir también las relativas a estos elementos y averiguar si afecta o no al nivel de razonamiento que reflejan los estudiantes en el postest final. Pero esto no es objeto de estudio de la investigación que se reporta en esta memoria.

En la unidad de enseñanza no hablamos del *ángulo poliedro*. Dada la dificultad que se tiene para medir este ángulo, en vez de en él, nos hemos centrado en el llamado *ángulo de los vértices* (que corresponde a la suma de los ángulos de los polígonos que se juntan en el vértice). Los estudiantes que razonan de acuerdo a las características del nivel 2 pueden encontrar su medida, que en cierto modo permite comparar, con la relación mayor o igual, la medida de los ángulos poliedros correspondientes; con los ángulos de los vértices tenemos una medida para reflejar lo "abierto" o "cerrado" que está un vértice.

Tampoco hemos considerado los planos diagonales. *Las diagonales de las caras* y las *diagonales del espacio* proporcionan suficiente riqueza para nuestros propósitos; por ello hemos decidido no incluir más elementos de los sólidos a partir de los cuales se puede desarrollar actividad.

LAS PROPIEDADES

Las propiedades que vamos a enumerar para describir familias y subfamilias de sólidos van a ser métricas y afines y se refieren a las caras, vértices, aristas, diferentes tipos de ángulos (ángulos de las caras, αC, ángulos diedros, αd, y ángulos de los vértices, αV) y diferentes tipos de diagonales (diagonales de las caras, dC, y diagonales del espacio, dE).

En el apartado 2.1.2 hemos indicado que una de las razones para incluir en la unidad de enseñanza las subfamilias de sólidos que hemos señalado, era abordar la tarea de su descripción, centrando la atención en que la lista de propiedades de estas familias contuviese propiedades agrupadas como propiedades de otras familias de sólidos y propiedades específicas de la familia considerada, esto es, que no lo son de ninguna otra familia que la contiene. Las listas de propiedades para estas subfamilias, a las que nos referimos en la unidad de enseñanza propuesta, están recopiladas en el anexo 2. Estas listas contienen propiedades "agrupadas" y propiedades específicas, excepto la lista de propiedades de los sólidos que sólo contiene propiedades del segundo tipo. La lista de los poliedros, como propiedades del primer tipo sólo incluye las propiedades de los sólidos.

Es interesante subrayar que con las propiedades agrupadas como propiedades de familias que enumeramos para algunas familias en el anexo 2, repetimos a veces grupos de propiedades. Por ejemplo, se incluyen en la lista las propiedades de los poliedros y las de los prismas, y las primeras ya están incluidas en las segundas. Las hemos presentado de esta manera porque la mayoría de los estudiantes con los que hemos realizado nuestra experimentación razonan de acuerdo a las características del nivel 2; ellos pueden entender que si una familia está incluida en otra, cumple sus propiedades, de ahí que comparemos la subfamilia dada con cada una de las que tiene relación de inclusión. Pero tienen dificultades para moverse relacionando listas de propiedades; de ahí que, las propiedades que se han indicado agrupadas como propiedades de otras familias (ver el anexo 2) las aprovechamos para plantear tareas para el nivel 3, en las que se tienen que eliminar propiedades de una lista dada que se repiten porque forman parte del grupo de propiedades de varias familias cuyos grupos de propiedades se han incluido en la lista como propiedades agrupadas.

Finalmente queremos advertir que si nos fijamos en las subfamilias que se obtienen al negar un atributo (o varios) que sirve como criterio de clasificación (por ejemplo, los prismas que no tienen todas las caras iguales, P¬CI), en el anexo 2 sólo aparecen listas de propiedades para las subfamilias para las que hay que utilizar su lista de propiedades en otras tareas que incluimos en la unidad de enseñanza propuesta. Sólo lo hemos hecho para algunas familias de los sólidos oblicuos y de los sólidos cóncavos.

2.1.4. LAS DEFINICIONES

Las definiciones que recopilamos en el anexo 2 son las que hemos elegido para analizarlas con objeto de seleccionar parte de los diferentes fenómenos "naturales" que se organizan con el concepto considerado (los que quedan reflejados con las definiciones) y así presentarlos como ejemplos o no ejemplos, en las tareas que hemos diseñado para el nivel 1, para introducir los conceptos de las diferentes familias de sólidos o de sus elementos.

Como puede observarse hay varias definiciones para un mismo concepto; con ellas damos cuenta de los aspectos de éste que queremos que se vayan incluyendo en el objeto mental correspondiente. De estas definiciones también hemos extraído las "ideas ingenuas" que señalamos en las tareas de propuestas para el nivel 1, y que surgen del proceso de construcción. Ideas ingenuas que suelen expresar los estudiantes; basadas en ejemplos específicos del concepto dado y que luego se van precisando con las tareas planteadas para niveles superiores.

La mayoría de las definiciones corresponden a las que se presentan en una de las traducciones de los libros de Euclides (Vera, 1970), aunque también incorporamos otras que proceden de otras fuentes. Cabe mencionar las tres secuencias de definiciones clásicas para punto, línea, superficie y sólido extraídas del trabajo de Freudenthal (1983, pp. 261); el análisis que él hace sobre los objetos mentales sugeridos por ellas se refleja en los comentarios que hacemos para las tareas propuestas para el nivel 1 relativas a sólido o poliedro. El anexo 2 también contiene definiciones para prisma y pirámide, tomadas de Freudenthal (1983, p. 299), que recogen aspectos de estas familias que no se consideran en otras definiciones. En la unidad de enseñanza propuesta para el nivel 2, se comentan las ideas que surgen de la construcción que se formalizan con estas definiciones. Asimismo, para aclarar algunos comentarios que hacemos sobre algunas tareas diseñadas para el nivel 3, incluimos dos definiciones de poliedro arquimediano y las propiedades del concepto de dualidad de poliedros que se determinan a partir de los poliedros regulares convexos y las que dejan de cumplirse cuando para establecer la relación se amplía este universo con el de los poliedros arquimedianos. Por último, exponemos definiciones de poliedro regular y de poliedro, que ya hemos mencionado en el capítulo 1.

Es necesario aclarar que no hemos pretendido recopilar las definiciones que se han dado en la historia para las diferentes familias de sólidos, o de sus elementos, desde el punto de vista matemático, ni siquiera nos hemos preocupado de dar una de ellas para cada concepto de los que hemos abordado. Hemos seleccionado definiciones que dan cuenta de la idea que se tenía en la época de Euclides de los elementos de los sólidos y de las familias de sólidos tratadas en la unidad de enseñanza (que pueden sugerir otras, por ejemplo, la definición dada para los prismas sugiere la definición para los antiprismas) y las que hemos nombrado explícitamente en los comentarios hechos sobre las tareas que incluye la unidad de enseñanza.

2.2. MATERIALES PARA LA UNIDAD DE ENSEÑANZA

Freudenthal (1983) afirma que los poliedros con los que el niño entra en contacto a una edad muy temprana suelen presentarse en un contexto topográfico (bloques de casas, tejados, etc.) y que las cajas de juguetes de construcción proveen una oportunidad de separar estas formas de su contexto topográfico y colocarlas en un contexto geométrico.

Las cajas de juguetes con piezas que son sólidos permiten construir otras formas en tres dimensiones pegando, encajando, juntando o apilando los piezas unas sobre otras para conseguir edificios. Como se puede ver en las apartados que siguen, el generar sólidos por éste y otros procedimientos, así como describir y analizar las formas construidas, proporcionan una actividad muy interesante y provechosa, al igual que la construcción de las piezas de estos juegos, de otros sólidos o de sus desarrollos.

A continuación vamos a describir brevemente los diferentes procedimientos para generar sólidos que proponemos en la unidad de enseñanza (apartado 2.2.1) y damos cuenta también de los modelos físicos de sólidos de los que hay que proveerse antes de desarrollarla (apartado 2.2.2).

2.2.1. PROCEDIMIENTOS PARA CONSTRUIR O GENERAR SÓLIDOS

Hay varias maneras de generar sólidos; unas reflejan diferentes formas de ver los poliedros (formados por polígonos o constituidos sólo por su armazón de aristas), otras utilizan materiales de partida distintos y también lo son los procedimiento de construcción. Vamos a comentar algunos.

Construcción de modelos a partir de los materiales comercializados formados por polígonos. Uno de estos materiales, que llamamos *troquelados*, se compone de hojas de cartón con polígonos troquelados como las de la figura 2.2.

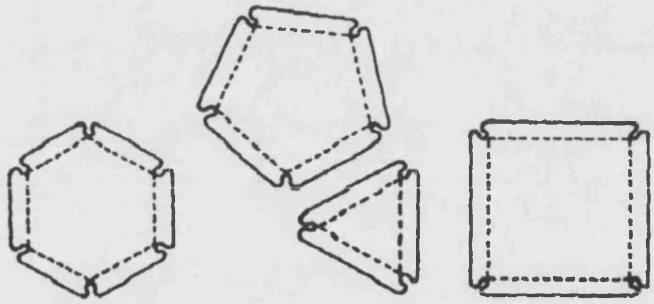


Figura 2.2

En esas hojas aparecen los polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 8, 10 y 12 lados – todos ellos con lados de la misma longitud, para que puedan unirse unos con otros – y dos polígonos que no son regulares: un triángulo isósceles de ángulos 36°, 72° y 72°, cuyo lado menor tiene la misma longitud que el lado de los polígonos regulares, y un rectángulo cuyos lados tienen las longitudes de los lados mayores del triángulo isósceles y de los polígonos regulares. Además, cada polígono está bordeado por unas pestañas, que permiten unir dos polígonos con sólo doblar una de cada uno, ponerlas juntas y sujetarlas con una goma elástica. De manera que el trabajo de construcción es sencillo y el material es versátil. Desde el punto de vista de las matemáticas, la mayor virtud de este material es que permite centrar la atención en dos elementos: las caras y las aristas que son básicos en el análisis de los poliedros y que conducen a una idea particular de poliedro.

Otro material comercializado es el que se llama *Polydron*, que consiste en polígonos de plástico de colores muy vivos, cuyos lados están provistos de un dispositivo, a modo de bisagra, que permite engarzarlos unos con otros. La construcción de los modelos requiere más habilidad manual que el anterior, sin embargo, tiene algunas ventajas gracias a que cada polígono aparece de varios colores.

Construcción de armazones a partir de materiales comercializados formados por varillas y mecanismos de engarce. Aunque la manera más natural de ver un poliedro sea como un ensamblaje de polígonos, también se puede considerar como si estuviera constituido por su armazón de aristas. A veces nos va a interesar examinar los poliedros con este punto de vista, por ejemplo, cuando queramos mirar lo que hay dentro, o incorporar esta representación física en el objeto mental de poliedro.

Para construir poliedros, vistos como armazones de aristas, también existen materiales comercializados. Estos materiales se componen de varillas y mecanismos de engarce de varios estilos, de los cuales algunos se muestran en la figura 2.3.

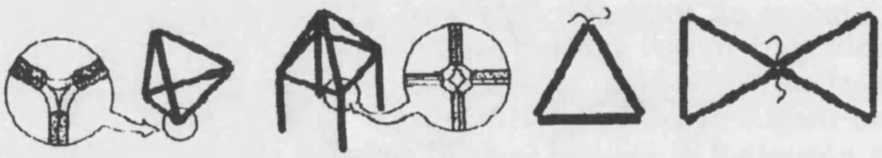


Figura 2.3

Hay materiales no construidos con el propósito de hacer poliedros que pueden usarse como sustitutos de las varillas comercializadas: pajitas de refresco, varillas de madera, alambre, etc. No es tan fácil, sin embargo, encontrar sustitutos eficientes para los mecanismos de engarce.

Generar sólidos a partir del experimento que muestra Castelnuovo (1979). Este experimento permite generar *prismas oblicuos* utilizando una "unidad base" formada por dos polígonos que se juntan con gomitas, como se ilustra la figura 2.4.

De manera análoga se pueden generar antiprismas y pirámides oblicuas, o diferentes tipos de prismas, antiprismas y pirámides de distintas alturas.

De este experimento uno puede imaginarse cómo se pueden transformar sólidos rectos de las familias consideradas en sólidos oblicuos de las familias correspondientes; visto de esta manera, en este procedimiento de generar sólidos los poliedros no se obtienen a partir de polígonos, sino a partir de otros poliedros que se han construido previamente; permite centrar la atención en las acciones permitidas y en lo que se mantiene y cambia cuando se realiza la transformación.

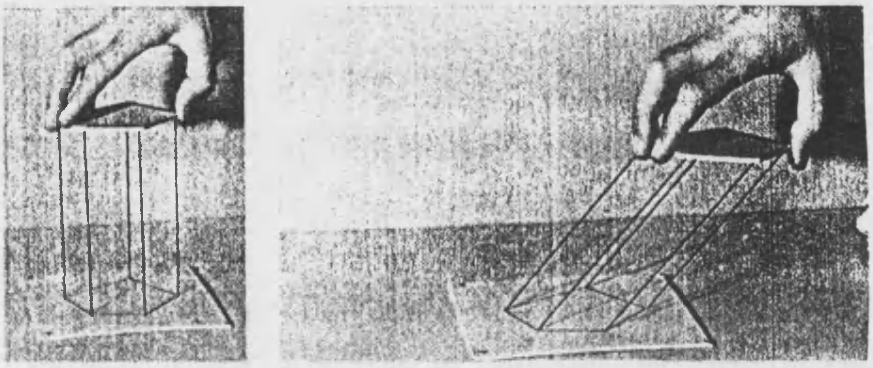


Figura 2.4

Generar formas apilando polígonos o modelos. El apilar polígonos iguales puede generar prismas rectos, e incluso oblicuos si toleramos una cierta "rugosidad" para las posibles caras laterales. Asimismo el apilar modelos puede proporcionar poliedros o no según los modelos que se apilen y la manera de hacerlo. Además, para que se obtengan poliedros en los casos que sí es posible, hay que eliminar las caras que se juntan al apilarse; y en unos casos obtenemos ejemplos de la misma familia pero no en otros. Por ejemplo, los prismas rectos que tienen las mismas bases al apilarse sí pueden producir ejemplos de esta familia, pero al juntar dos prismas oblicuos, aunque tengan la misma base, sólo producirá otro prisma oblicuo cuando los prismas que se juntan cumplan además otras condiciones.

Generar sólidos mediante puzzles. Este procedimiento, en el que como en los casos anteriores se obtienen poliedros nuevos a partir de poliedros ya construidos, también puede considerarse como un procedimiento de descomposición de un poliedro en otros, los cuales al juntarse reproducen el poliedro de partida. En la unidad de enseñanza consideramos los puzzles que se muestran en la figura de la página siguiente y que describimos a continuación.

La figura 2.5(a) corresponde a las 3 pirámides iguales en las que se puede descomponer un cubo. Tienen por base una cara del cubo y 2 de sus caras laterales corresponden a media cara del cubo. Las otras dos caras laterales son triángulos escalenos que tienen por lados, la arista, la diagonal de la cara y la diagonal del espacio del cubo.

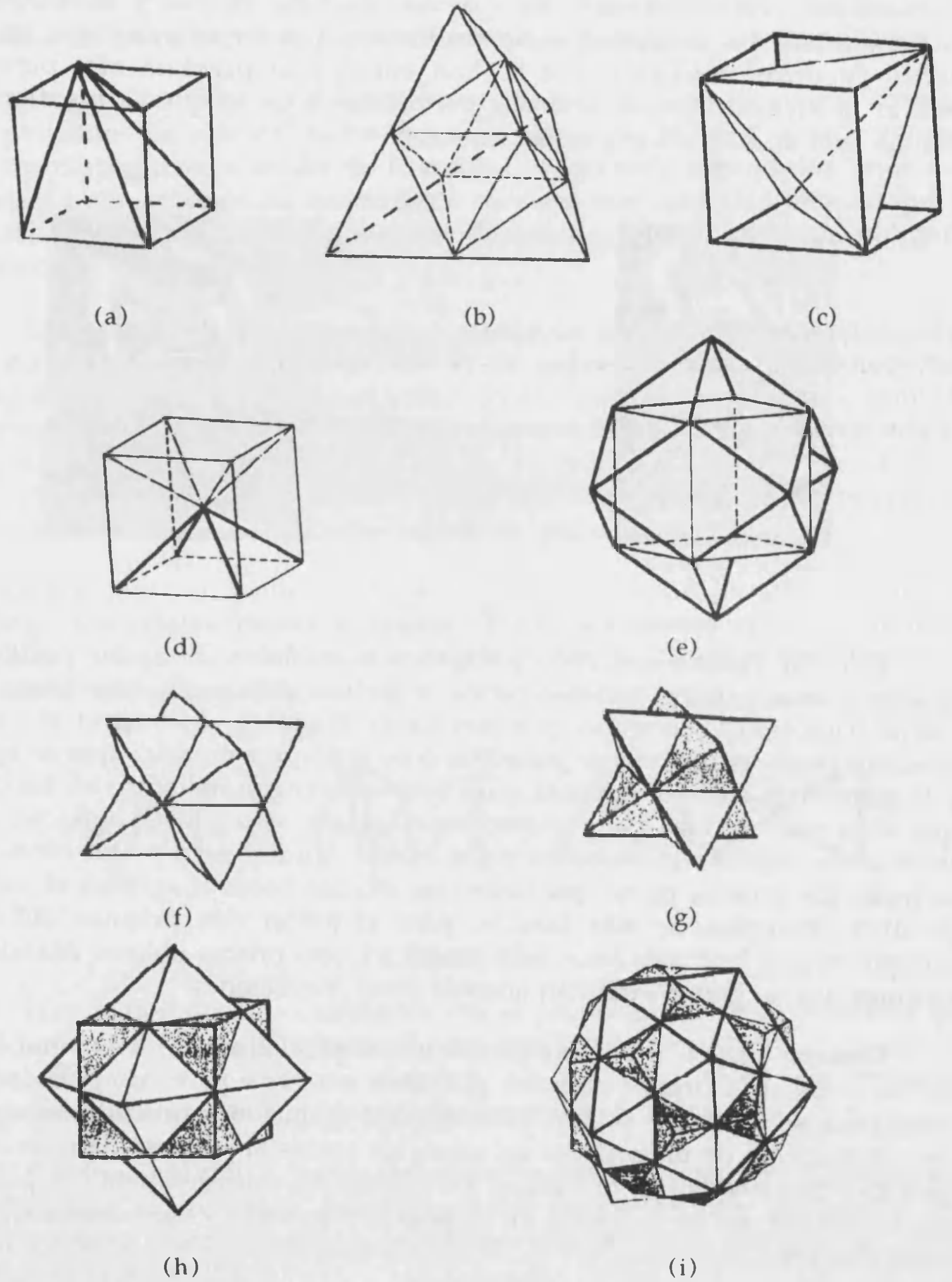


Figura 2.5

La figura 2.5(b) corresponde a un octaedro inscrito en un tetraedro. Esto es, en un tetraedro se han encajado un octaedro y 4 tetraedros iguales que tienen por arista la mitad de la del tetraedro de partida.

La figura 2.5(c) corresponde a un tetraedro inscrito en un cubo. Al tetraedro que tiene de arista la diagonal de la cara del cubo se le añaden 4 pirámides. Éstas tienen por base la cara del tetraedro y las aristas laterales miden la mitad que la arista del cubo.

La figura 2.5(d) corresponde a las 6 pirámides iguales en las que se puede descomponer un cubo. Tienen por base una cara del cubo y sus aristas laterales corresponden a media diagonal del espacio del cubo; se han colocado de manera que su ápice yace en el centro del cubo.

La figura 2.5(e) corresponde a las 6 pirámides iguales en las que se puede descomponer un cubo que se han colocado de manera que la base de cada una de ellas ajusta perfectamente en una cara del cubo y el ápice queda hacia afuera.

La figura 2.5(f) corresponde a un octaedro y 8 tetraedros, formados todos ellos por triángulos equiláteros iguales, de manera que al añadir estos tetraedros a cada una de las caras del octaedro forman la *estrella octangular*.

La figura 2.5(g) corresponde a un tetraedro y 4 tetraedros que tienen de arista la mitad de la del tetraedro de partida y se pegan a las caras de éste como se muestra en la figura, para formar la *estrella octangular*.

La figura 2.5(h) corresponde a un cubo y 6 pirámides cuadradas que tienen por caras laterales triángulos equiláteros. Al modelo resultante lo llamamos *compuesto del cubo y el octaedro*.

La figura 2.5(i) corresponde a un dodecaedro y 12 pirámides de base un pentágono regular que tienen por caras laterales triángulos equiláteros. Al modelo resultante lo llamamos *compuesto del dodecaedro e icosaedro*.

Generar sólidos por truncamiento. Otro procedimiento, en el que también se obtienen poliedros nuevos a partir de otros ya construidos consiste en cortar las esquinas de éstos. Los sólidos base pueden estar construidos de plastilina, de peryglas, etc.

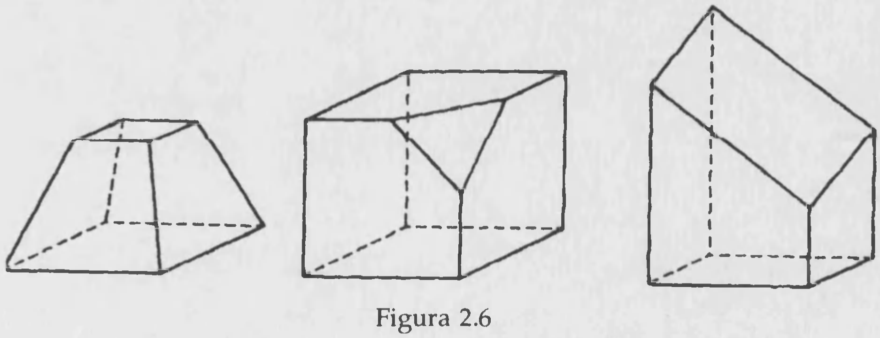


Figura 2.6

Los cortes pueden hacerse por planos que pasan por puntos que equidistan del vértice, o de otras maneras no tan regulares (ver la figura 2.6). Este procedimiento se conoce con el nombre de *truncamiento.*

Construcción de modelos a partir del desarrollo. El desarrollo de un poliedro es una representación plana del mismo. Lo caracteriza, lo representa y permite construir el modelo. Es una forma de representación que Freudenthal (1983, p. 244) llama *compository*, por estar formada por una combinación de partes, combinación que puede hacerse de varias maneras, y todas ellas dan como resultado desarrollos del poliedro correspondiente. Por ejemplo, un desarrollo de un prisma recto puede verse como varios rectángulos que forman un rectángulo y dos polígonos iguales que corresponden a las bases. Estos polígonos están unidos por un lado con el lado de uno de los rectángulos y colocados uno a cada parte del rectángulo: uno "arriba" y otro "abajo". Además, también se pueden disponer los rectángulos y los polígonos de otras formas y la figura resultante ser un desarrollo del prisma.

2.2.2. EL CONTEXTO DE LA UNIDAD DE ENSEÑANZA: LOS MODELOS Y ARMAZONES DE LOS SÓLIDOS

La construcción de modelos físicos, además de ser interesante porque genera actividad geométrica, también lo es porque los modelos que se obtienen como resultado, se pueden seguir utilizando como soporte material para hacer observaciones y sacar conclusiones. Al preparar la unidad de enseñanza tuvimos en cuenta que los conceptos geométricos que se estudiaran se basaran en la construcción y observación de modelos más que en las representaciones planas de los mismos. Trabajar con modelos en vez de con dibujos evita en la medida de lo posible el problema de visión espacial que puede afectar las respuestas de los estudiantes para la mayoría de las tareas relativas a los sólidos; de ahí que en las tareas propuestas se sugiere trabajar con una gran variedad de modelos, como los que mostramos en las páginas 123 a 128 (láminas I a VI), de ejemplos y no ejemplos de las familias o subfamilias que consideramos en cada momento. Resulta muy aconsejable proveerse de estos modelos antes de desarrollar la unidad de enseñanza que proponemos.

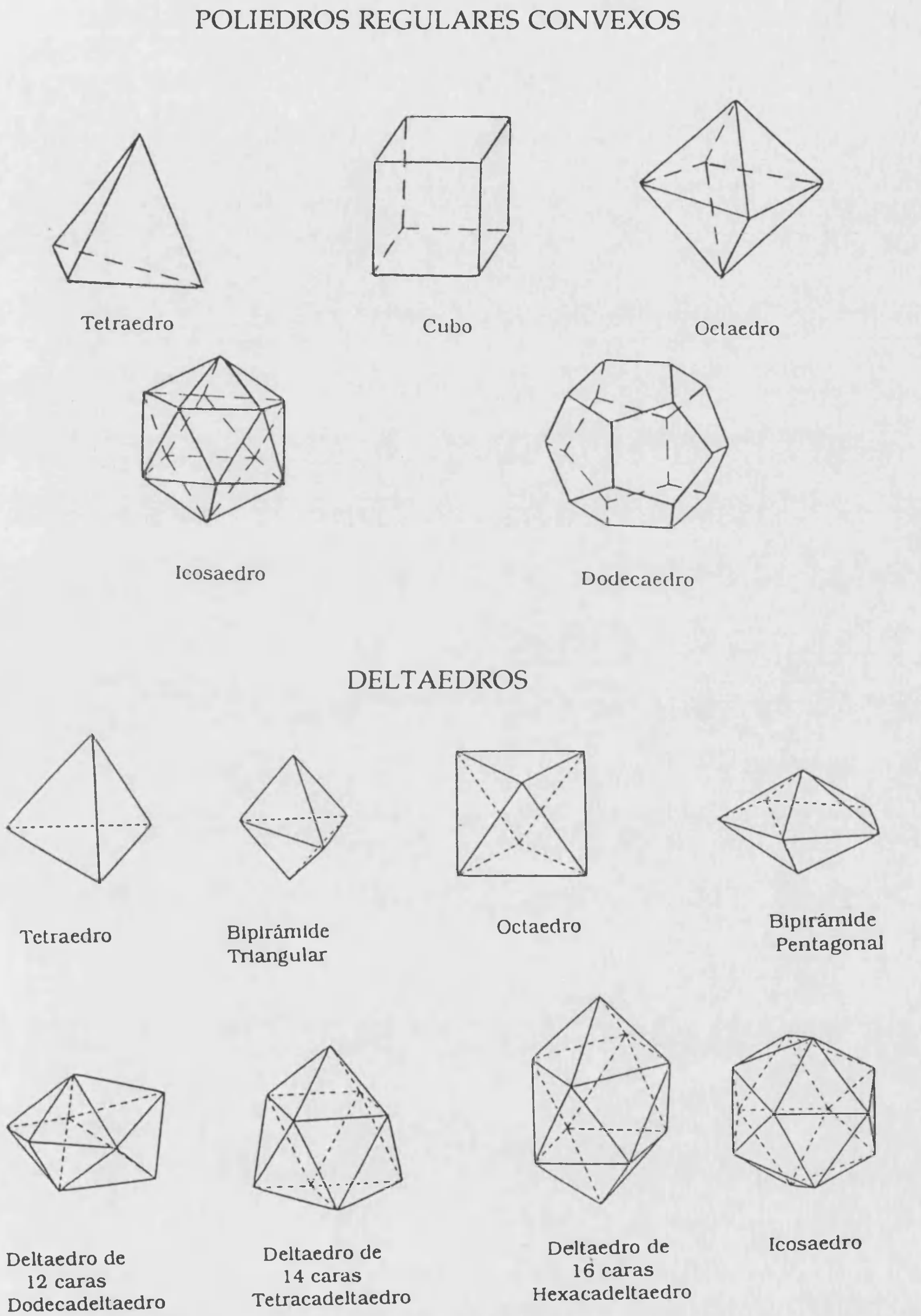


Lámina I: Poliedros regulares y deltaedros

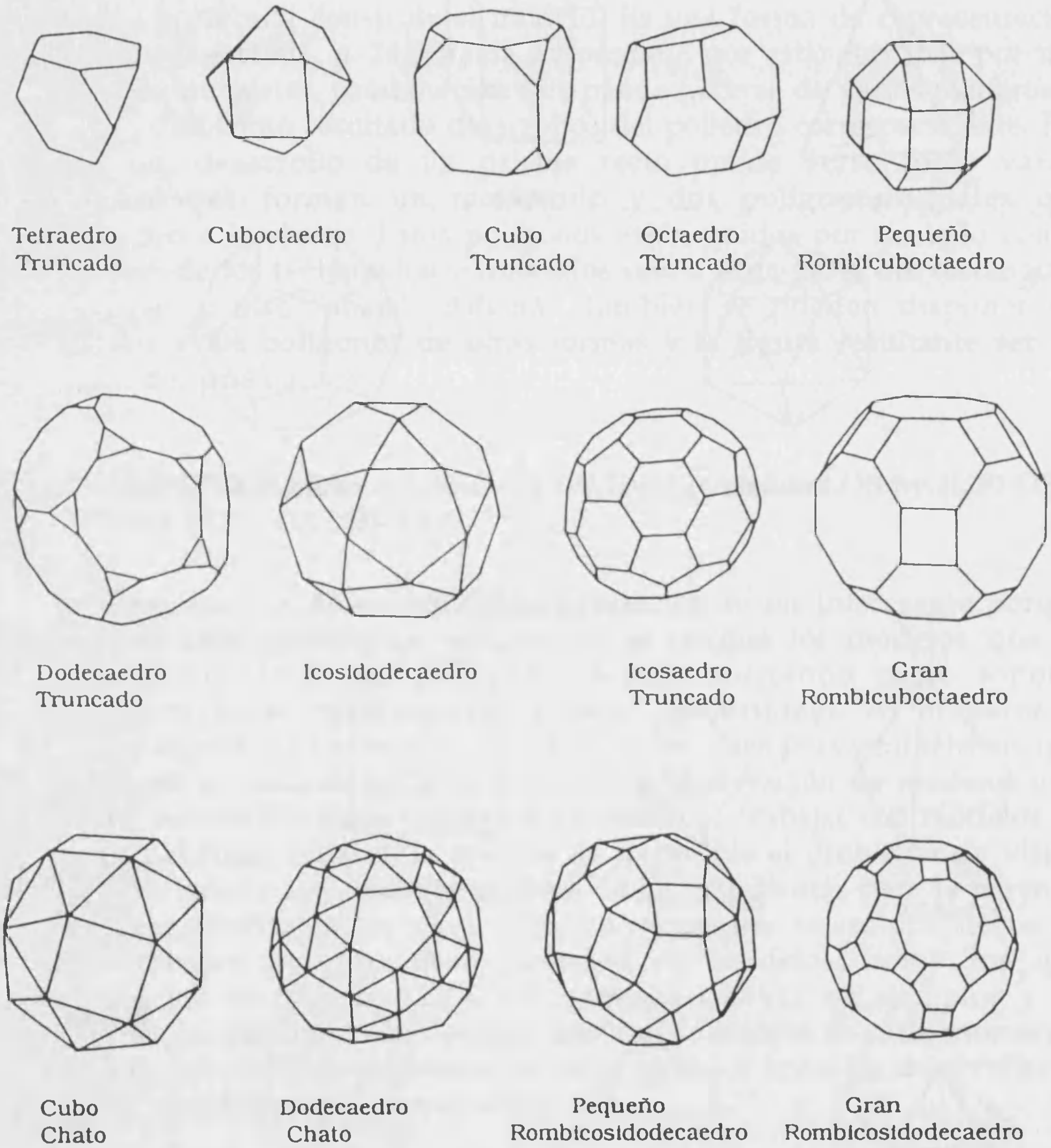
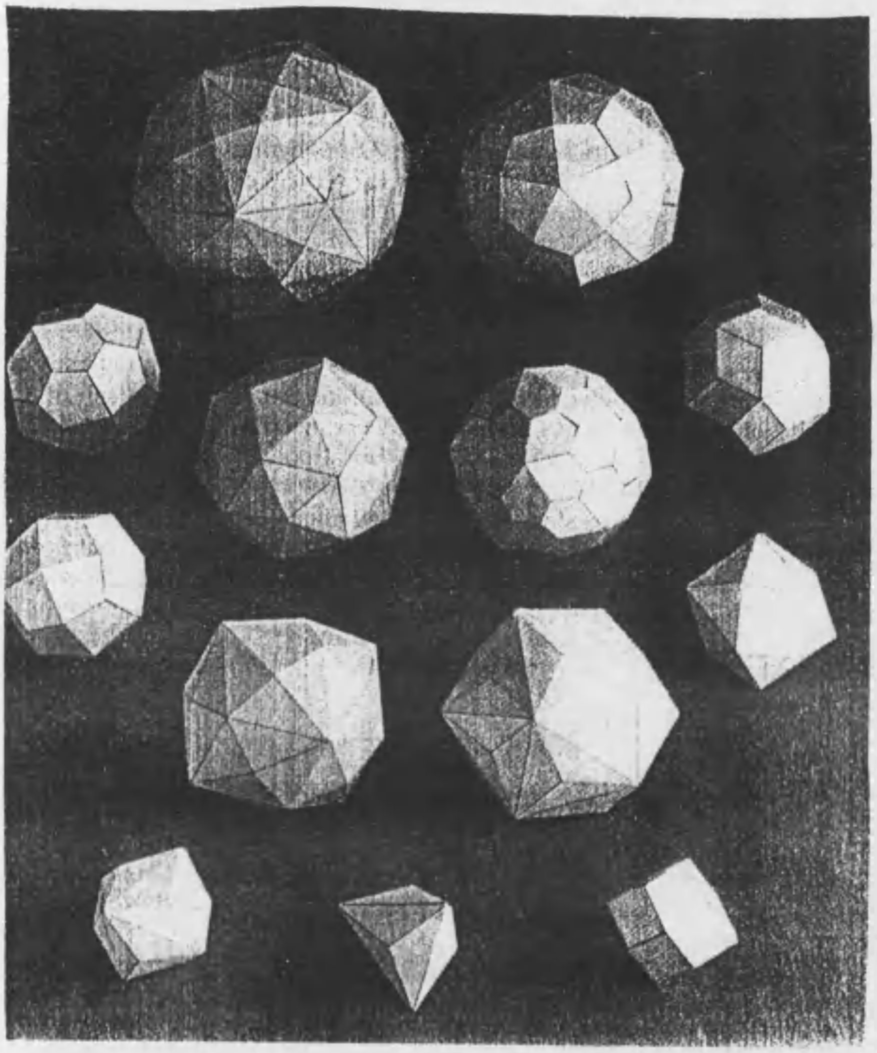
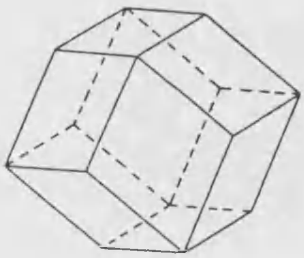


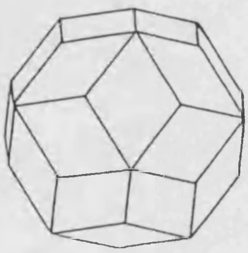
Lámina II: Poliedros arquimedianos



1. Dual del gran rombicosidodecaedro.
2. Dual del pequeño rombicosidodecaedro.
3. Dual del cubo chato.
4. Dual del icosaedro truncado.
5. Dual del dodecaedro chato.
6. Dual del icosidodecaedro: Triacontraedro rómbico.
7. Dual del pequeño rombicuboctaedro.
8. Dual del gran rombicuboctaedro.
9. Dual del dodecaedro truncado.
10. Dual del octaedro truncado.
11. Dual del cubo truncado.
12. Dual del tetraedro truncado.
13. Dual del cuboctaedro: Rombododecaedro.



Rombododecaedro
Dodecaedro rómbico



Triacontraedro rómbico

Lámina II: Poliedros de Catalan

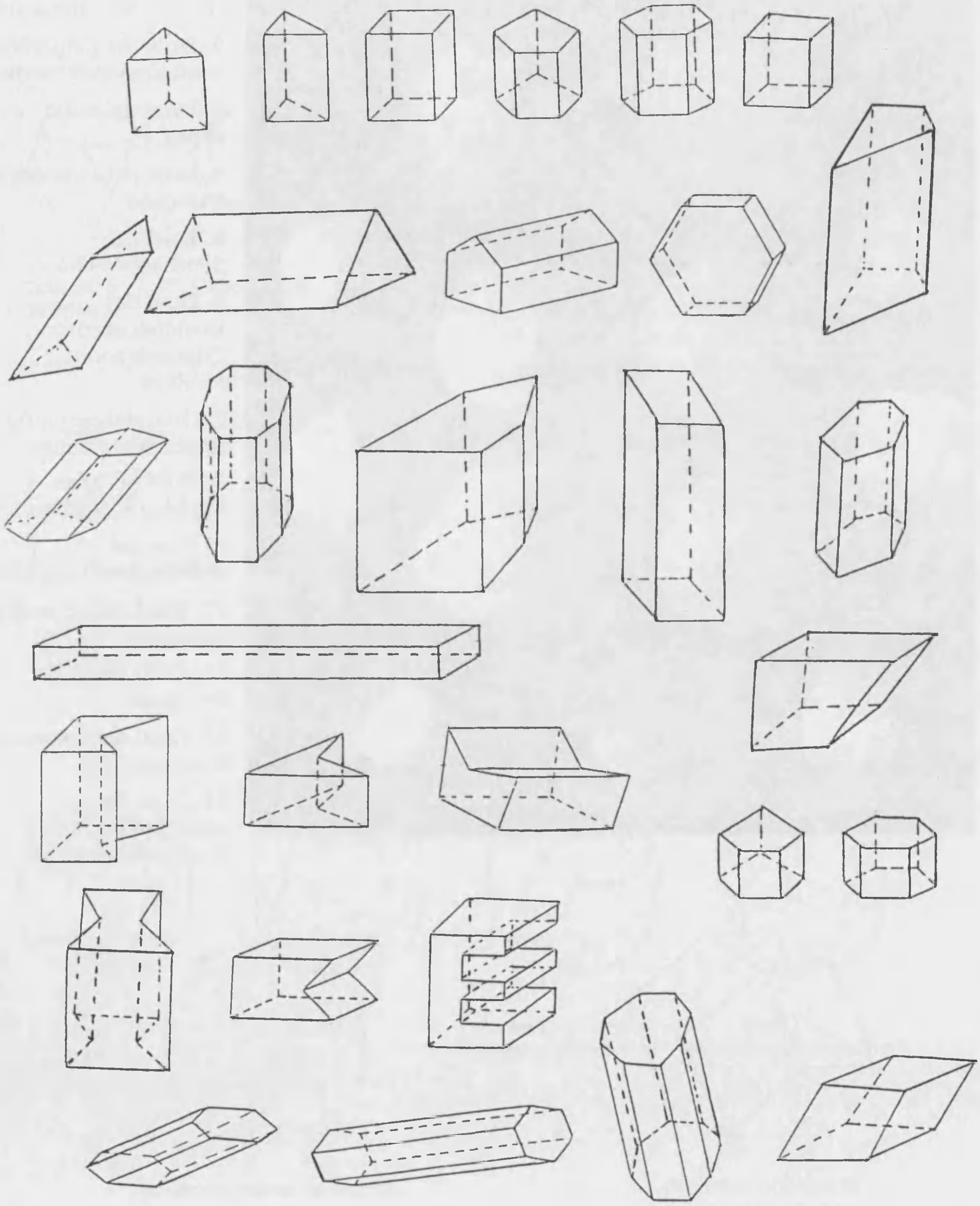


Lámina IV: Prismas

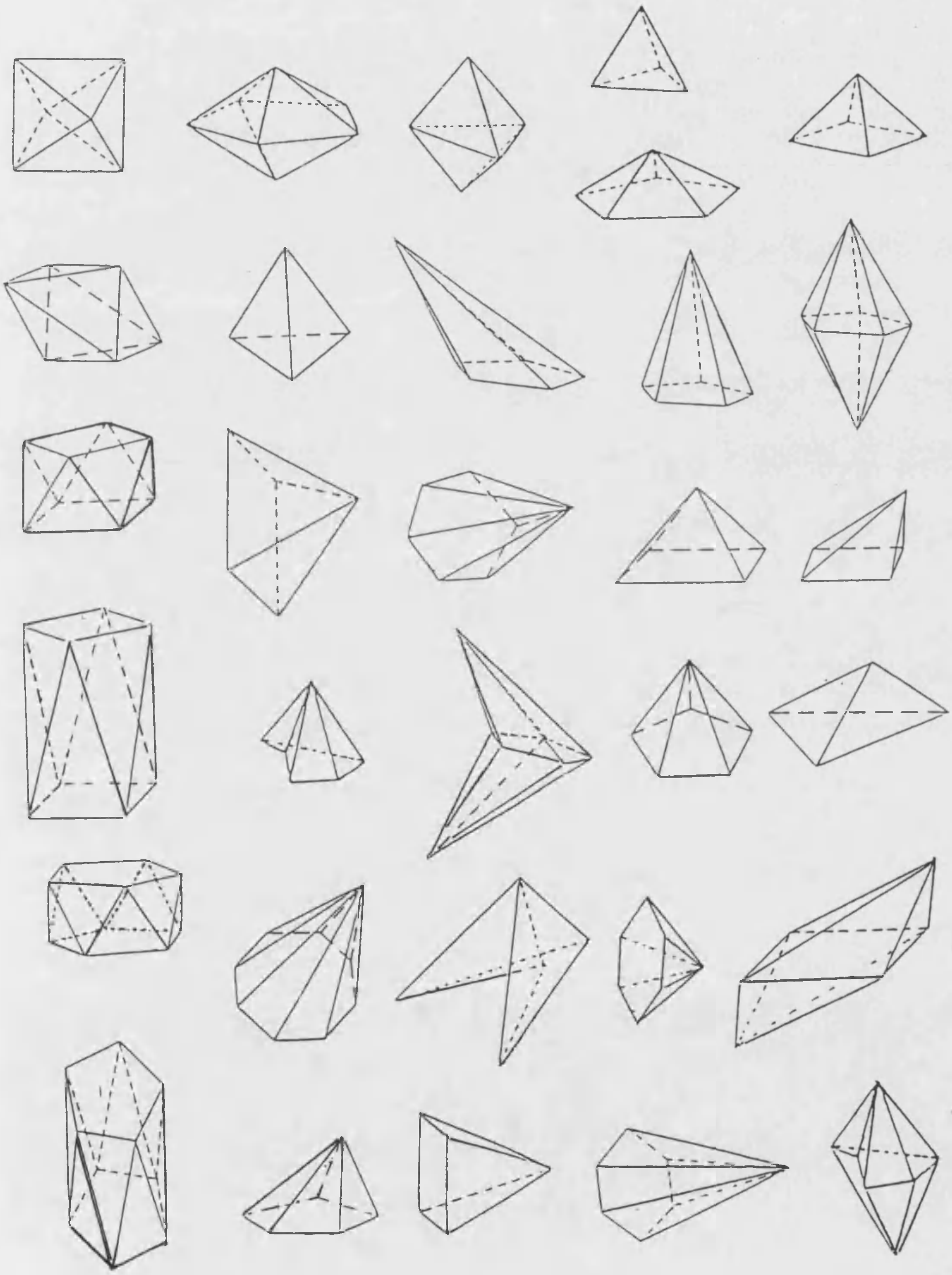


Lámina V: Antiprismas, pirámides y bipirámides

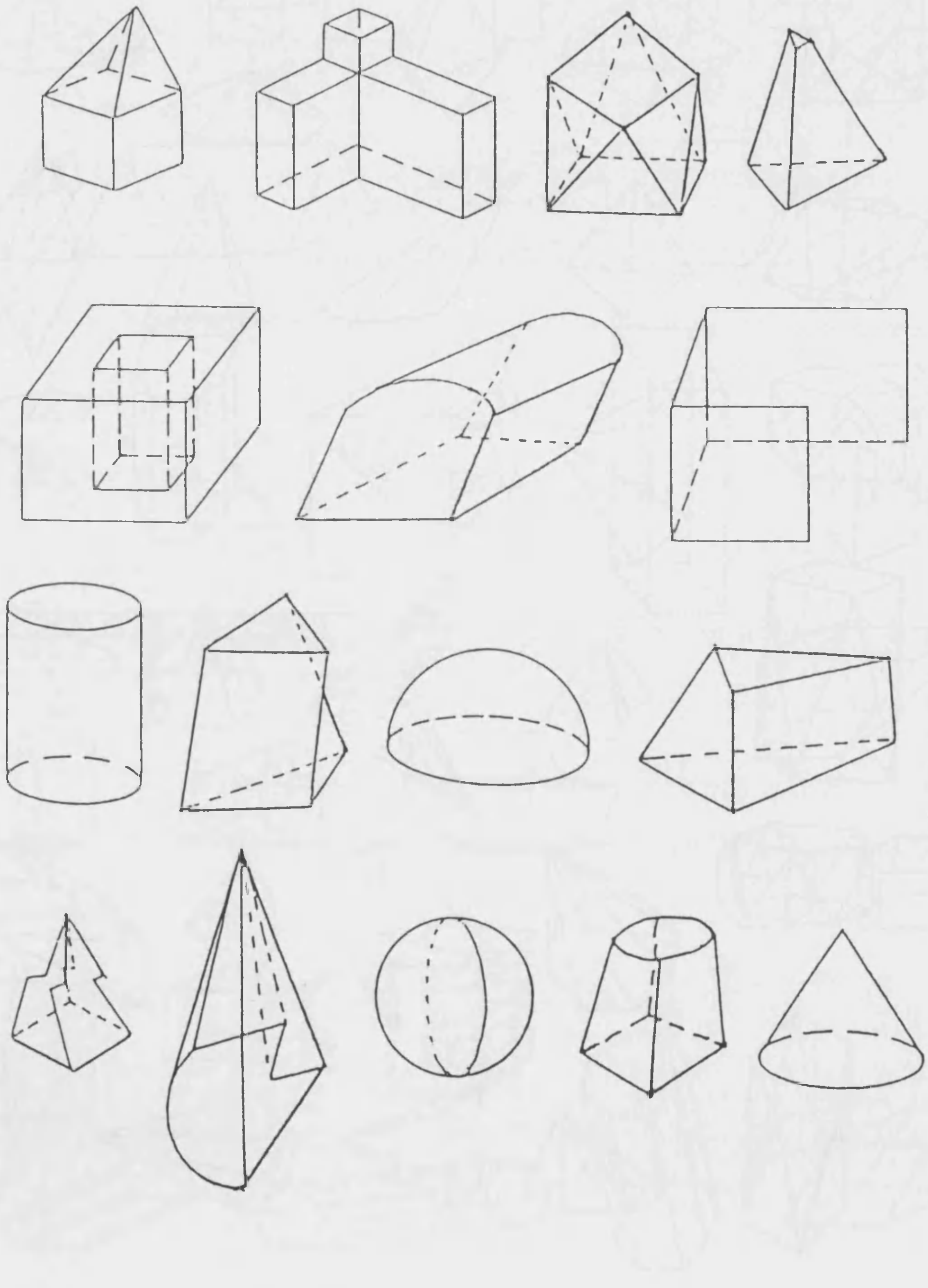


Lámina VI: Poliedros, sólidos y formas tridimensionales

Hay que llamar la atención sobre algunos modelos que incluimos en la unidad de enseñanza como soporte para actividades propuestas para el nivel 1 que sólo pueden construirse en un nivel más avanzado, ya que para determinar de manera precisa la relación que hay entre las aristas de los poliedros que forman cada par se requiere de razonamientos asociados al nivel 2 ó 3. Nos referimos a las formas que corresponden a objetos geométricos que organizan fenómenos que se pueden encontrar en el mundo del arte, y los modelos construidos proveen una oportunidad de separar estas formas de su contexto y de colocarlas en un contexto geométrico. Las figuras de la página 130 (lámina VII) presentan dichos modelos formados por pares de poliedros regulares duales inscritos uno en otro, de manera que los vértices del uno yacen en los centros de las caras del otro, y otros pares de poliedros regulares inscritos uno en otro, de manera que los vértices yacen sobre vértices.

También podemos incluir en este grupo modelos que se obtienen al juntar las piezas de los puzzles que hemos presentado. Nos referimos a los modelos compuestos de los pares de poliedros regulares convexos duales, junto con el sólido intersección y el envolvente, figuras que mostramos en la página 131 (lámina VIII) [7].

[7] Para construir estos modelos, pueden ayudar las sugerencias que se aportan en Guillén (1991), así como la descripción que hacemos de las piezas en el apartado 2.2.1 y las indicaciones que damos en las tareas propuestas en la unidad de enseñanza que tienen como referencia estos modelos.

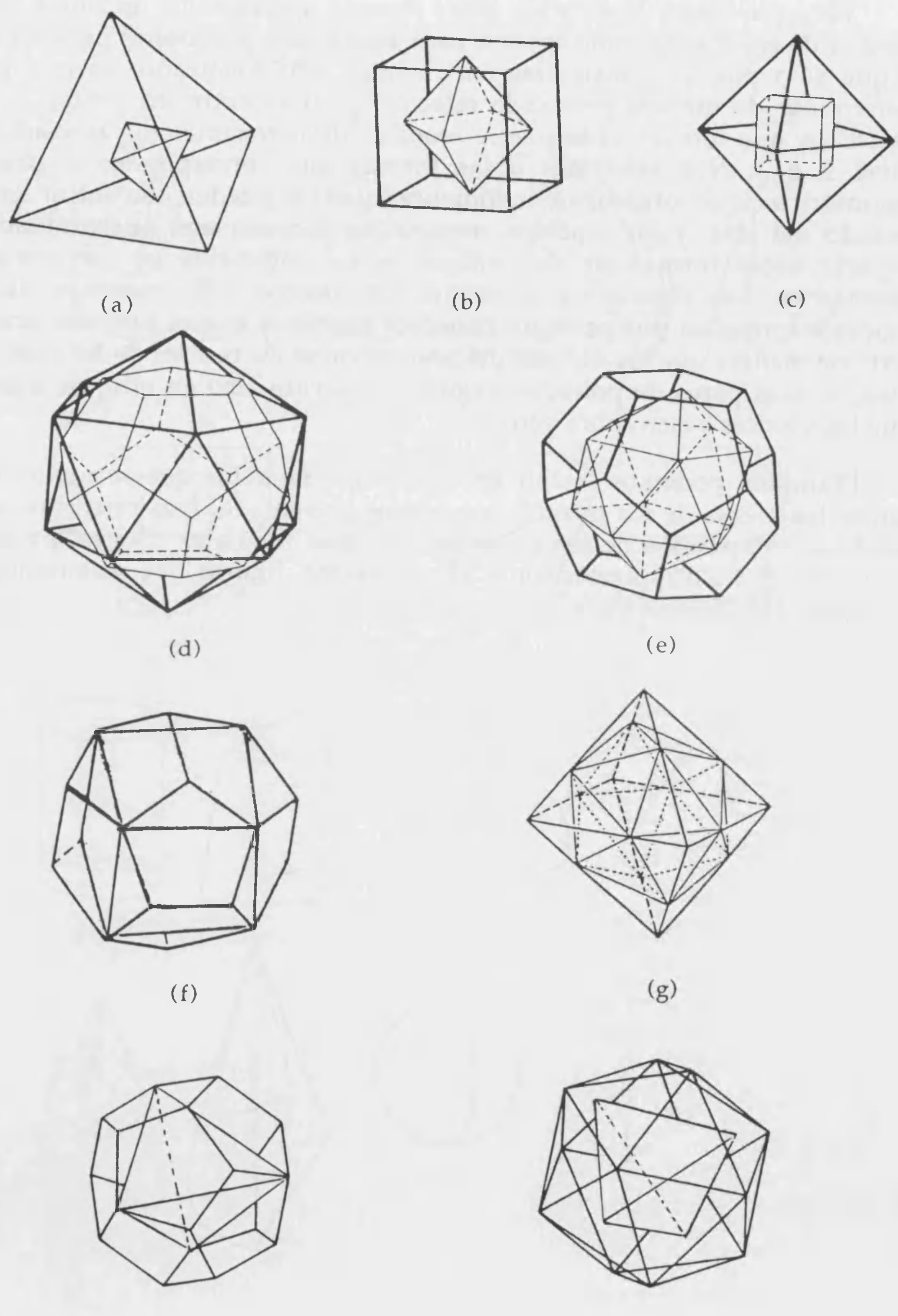


Lámina VII: Pares de poliedros regulares inscritos uno en otro

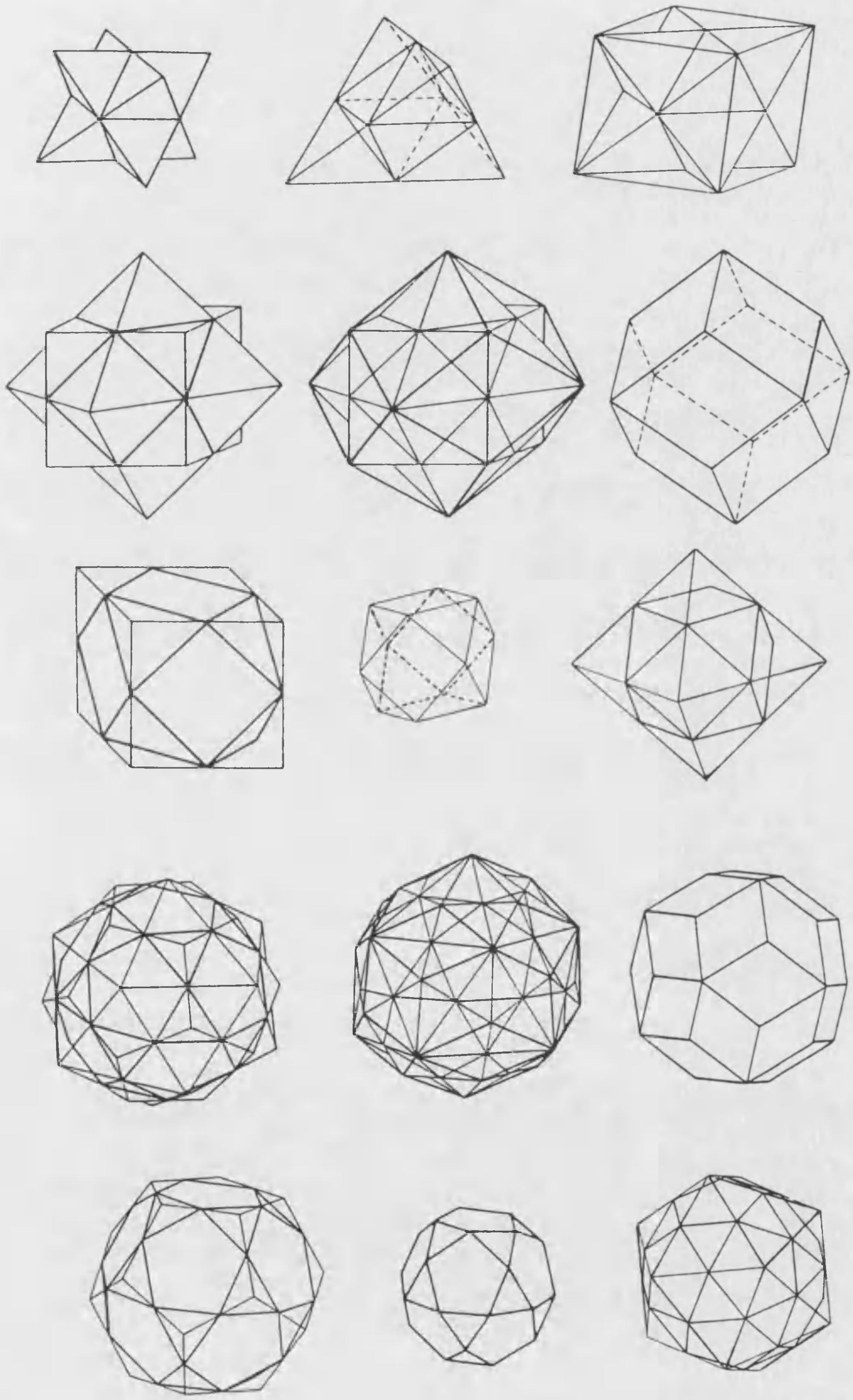


Lámina VIII: Modelos compuestos de los pares de poliedros platónicos duales; poliedro intersección y poliedro envolvente

Así pues, por todo lo comentado anteriormente, para desarrollar la unidad de enseñanza que proponemos es aconsejable disponer del conjunto de modelos y del material básico descrito y comentado en los apartados anteriores, o bien de otros de este tipo que se consideren adecuados. A continuación resumimos los modelos que recomendamos para producir un entorno de aprendizaje adecuado.

- Una gran variedad de modelos y estructuras de sólidos, que proceden de juegos de construcciones o que se han construido, o generado, previamente por los procedimientos descritos.

- Diferentes unidades base para realizar el experimento que muestra Castelnuovo, que permitan generar prismas, antiprismas y pirámides, oblicuos.

- Plastilina, goma dura, o cosas por el estilo para que los estudiantes puedan modelar sólidos o hacer cortes.

- Las piezas de los puzzles que hemos descrito, los modelos resultantes al pegar perfectamente las piezas, los modelos que muestran el modelo obtenido y las piezas que lo componen o que reflejan unos modelos u armazones de poliedros inscritos en otros.

- Los modelos de pares de poliedros regulares inscritos uno en otro (lámina VII).

- Los modelos compuestos que reflejan también el sólido intersección y el envolvente (lámina VIII).

- Los modelos y armazones de los sólidos que los estudiantes van construyendo.

Por último, vale la pena poner énfasis en que los estudiantes tienen que tener acceso a los modelos y armazones de los sólidos necesarios para las tareas propuestas en la unidad de enseñanza, aún cuando no lo recomendemos explícitamente en el enunciado o los comentarios que hacemos sobre ellas. Es decir, cuando el enunciado de alguna tarea hace referencia a familias, subfamilias o sólidos concretos, con dibujos o los nombres de ellos, al desarrollar la unidad de enseñanza los estudiantes que lo requieran tienen que tener acceso a los modelos o armazones correspondientes en los que poder apoyar o verificar sus observaciones.

2.3. SOBRE LA UNIDAD DE ENSEÑANZA PARA LA GEOMETRÍA DE LOS SÓLIDOS

Con lo expuesto hasta aquí hemos dado cuenta de los contenidos geométricos que se estudian en la unidad de enseñanza y de los materiales concretos que se necesitan como soporte para trabajar los procesos geométricos implicados en ella. En esta sección nos introducimos en la unidad de enseñanza; comenzamos expresando cuál es su objetivo para continuar aclarando a quién va enfocada y el estado en el que se encuentra para usarla en la instrucción (apartado 2.3.1).

En el apartado 2.3.2, una vez aclarado que hemos desglosado la unidad de enseñanza en tres unidades que corresponden a cada uno de los tres primeros niveles de razonamiento de Van Hiele, damos cuenta de su contenido. En ellas, además de enumerar las actividades y los objetivos que pretenden, también incluimos comentarios con la intención de facilitar la comprensión de lo que contienen las tareas propuestas, sus objetivos o el orden en que se presentan. Asimismo, se incluyen comentarios que muestran la necesidad de procesos de aprendizaje para cosas para las que no lo esperaríamos que se requirieran; esto lo mostramos con algunos ejemplos, extraídos de las experimentaciones realizadas.

En el apartado 2.3.3 exponemos las líneas generales que han determinado la organización de las tareas en las unidades propuestas para los niveles 1, 2 y 3; comentamos algunos ejemplos de tareas que incluimos en las tres unidades, para aclarar las respuestas que cabe esperar o cómo se pueden tratar según la unidad de enseñanza (correspondiente a un nivel de razonamiento) para la que se plantea.

2.3.1. LA UNIDAD DE ENSEÑANZA: PARA QUÉ Y PARA QUIÉN

En el capítulo 1 hemos indicado que la unidad de enseñanza propuesta tiene como objeto ir ampliando los objetos mentales de conceptos geométricos de los sólidos de los estudiantes y a su vez desarrollar su capacidad de razonamiento geométrico.

La secuencia de tareas que proponemos, si bien va dirigida a la instrucción de estudiantes de enseñanza primaria y de secundaria obligatoria, no corresponde a una secuencia de actividades para los distintos cursos. El carácter cíclico con que se trata el tema hace que se vuelvan a considerar como objetivos didácticos de un curso objetivos que ya se han tratado en cursos anteriores. Por otro lado, los objetivos que indicamos al comienzo de las unidades de enseñanza no corresponden a un periodo corto. Como indican Alsina et al. (1997, p. 28), "en un aprendizaje dinámico de la geometría, por sus relaciones con las otras materias y con las propias disciplinas matemáticas, es muy difícil marcar unos objetivos precisos para un periodo corto: los conceptos deben aparecer y reaparecer, traducirse en diversos lenguajes, tener representaciones plurales y sólo por esta vía cabe esperar una consolidación conceptual. Así pues, parece más adecuado plantearse objetivos correspondientes a los ciclos educativos" .

Para que se pueda entender y valorar la propuesta de unidad de enseñanza que presentamos en esta memoria queremos aclarar también que no se trata de una unidad totalmente preparada para llevar al aula. Por un lado, sería aconsejable que se plantearan enunciados de las actividades propuestas de manera que se situaran los fenómenos en los contextos donde se presentan antes de mostrar a los estudiantes los modelos que colocan las formas correspondientes en un contexto geométrico. Por ejemplo, la actividad T-1d propuesta para la fase 1 del nivel 1 en la que se propone se pida a los estudiantes que se busquen en el entorno ejemplos de las familias tratadas, se puede plantear con un enunciado en el que se va visitando la ciudad y se centra la atención sobre algunos sitios en concreto, como por ejemplo, la torre de la iglesia, los tejados de las casas o en otras formas, con la intención de seleccionar lo que pueda corresponder a ejemplos de las familias en cuestión. También podemos introducirnos con el relato en una tienda de juguetes, o podemos llevar a clase un álbum con fotografías de sitios interesantes de otras ciudades, etc.

Por otro lado, como puede observarse, las actividades las agrupamos en tareas, que incluyen actividades que desarrollan las mismas características de las asociadas a un nivel de razonamiento determinado. En algunas tareas no hemos enumerado explícitamente las familias de sólidos, las propiedades o las relaciones implicadas en ellas (pero sí que las sugerimos); enunciándolas de esta manera encapsulamos varias tareas, por lo que se pueden utilizar tantas como se juzgue necesario.

Los bloques de actividades que incluimos en cada tarea no tienen como objeto que todas ellas se desarrollen en clase. El profesor decidirá, teniendo en cuenta a los estudiantes con los que trabaja, las actividades que considera necesarias para alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos. También decidirá para cada tarea, qué actividades utilizará para abordar un problema, y las que dará a los estudiantes como material para que puedan continuar trabajando el problema si lo desean.

Hay que destacar que todos los estudiantes no necesitan de las mismas actividades que corresponden a una tarea dada para llegar a resolverlas sin dificultad; tampoco se debe interpretar que la realización de las tareas propuestas para un nivel dado, va a llevar a que todos los estudiantes logren el nivel de razonamiento correspondiente y construyan objetos mentales lo ricos que cabría esperar, para todos los conceptos geométricos estudiados.

En ningún momento queremos dar a entender que en esta o aquella edad, esta o aquella idea se adquiere de esta o aquella manera. Partimos del supuesto de que una cantidad de horas de enseñanza no asegura que va a haber un logro de todas las características asociadas a un nivel de razonamiento o que todos los estudiantes van a construir un cierto objeto mental para cada uno de los contenidos estudiados; también suponemos que la adquisición de un nivel de razonamiento y la constitución de objetos mentales no obedece a una madurez estrictamente biológica (Van Hiele, 1986, p. 173).

Tal como señalamos en el apartado 1.1.3 la opinión más generalizada es que los niveles de razonamiento de Van Hiele son locales. Sin embargo, hemos comprobado que el dominio de un nivel de razonamiento para una familia de sólidos influye en la rapidez con que se van dominando las características asociadas a ese nivel de razonamiento en otras familias. Así, una persona que razone en el tercer nivel, por ejemplo, en los prismas, es muy probable que logre deprisa las características asociadas a los niveles 1 y 2 en los antiprismas, pirámides y bipirámides, o al considerar cualquier otra familia de sólidos. Esto es más claro cuanto más alto es el nivel de razonamiento del estudiante. También se pueden sacar conclusiones análogas para los objetos mentales correspondientes.

Con lo anterior queremos subrayar que, generalmente, para los niveles 2, 3 y 4, una secuencia de unas pocas actividades o sesiones de clase no bastarán para que los estudiantes pasen de un nivel de razonamiento al siguiente, o construyan un cierto objeto mental de una familia de sólidos, si los estudiantes no razonan de acuerdo a este nivel, o construido el objeto mental, en otras familias de sólidos. Y también queremos dejar claro que una vez logrado un nivel dado en una familia, o construido cierto objeto mental no será necesario realizar de nuevo todas las actividades diseñadas para las otras familias de sólidos seleccionadas.

2.3.2. LA UNIDAD DE ENSEÑANZA: LAS PARTES QUE LA COMPONEN

La unidad de enseñanza que presentamos para el estudio de los sólidos está organizada teniendo en cuenta los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje de Van Hiele. Por los motivos que hemos señalado al describir los niveles de razonamiento en los apartados 1.1.1 y 1.4, al diseñar actividades hemos centrado la atención en los 3 primeros niveles, especialmente en el 2. Esto se traduce en que la unidad de enseñanza que proponemos la hemos desglosado en 3 unidades, las correspondientes a los niveles de razonamiento 1, 2 y 3 respectivamente, e incluye algunas actividades que también pueden resolverse en el nivel 4.

Al describir cada una de estas unidades, hemos dado una caracterización operativa del correspondiente nivel de Van Hiele para la geometría de los sólidos, acompañada de comentarios que la explican, la cual se concreta posteriormente en actividades de la unidad de enseñanza, propuestas para que se logren las características asociadas al nivel de razonamiento correspondiente, y para que se amplíen los objetos mentales de los conceptos geométricos considerados.

El haber tenido como referencia las fases de aprendizaje de Van Hiele para organizar cada una de estas unidades ha llevado a dividir las unidades de enseñanza que corresponden a un nivel de razonamiento dado en bloques de tareas (que corresponden a diferentes fases de aprendizaje), y el número de bloques que hemos desarrollado para cada nivel se explica desde la interpretación que hacemos de las fases de aprendizaje, de la que ya hemos damos cuenta de ella en el apartado 1.1.2. En cada fase y nivel indicamos bloques de actividades que también incluyen los enunciados de los objetivos de la enseñanza de la fase de aprendizaje del nivel de razonamiento considerado, a los que le siguen las tareas propuestas para esa fase y nivel.

Cada bloque de tareas (que corresponde a una fase de aprendizaje de un nivel dado) también incluye comentarios que tienen varios propósitos. Con ellos pretendemos explicar lo que nos ha servido de referencia para organizar y diseñar algunas tareas con las diferentes actividades que las forman, o dan cuenta de las ideas y problemas que permiten trabajar cada una de las tareas o actividades incluidas. En estos comentarios incluimos respuestas de estudiantes y algunas transcripciones de sus conversaciones que informan de *algunas* cosas que los estudiantes *deben* aprender, de *qué aprenden* o de *cómo* lo aprenden. De estas "lecciones para observar" (utilizamos terminología de Freudenthal) también aprendemos que no hay forma de indagar cómo aprenden *todas* las cosas los estudiantes, ni todo lo que deberían aprender. En estos comentarios apuntamos sugerencias sobre qué se puede observar o a qué se puede dedicar atención especial cuando se desarrolle la unidad de enseñanza en clase, y, en algunos casos, sugerimos también por dónde se podría continuar si la actividad de los estudiantes lo dirige hacia ese lado.

Lo comentado en el párrafo anterior no quiere decir que todas las tareas que componen la unidad de enseñanza lleven comentarios de todos los tipos que hemos señalado. Para cada tarea sólo mostramos los aspectos que consideramos más relevantes.

2.3.3. UNIDADES DE ENSEÑANZA PROPUESTAS PARA LOS NIVELES 1, 2 Y 3 DE VAN HIELE: ORGANIZACIÓN

El considerar conjuntamente los resultados obtenidos al realizar diferentes tipos de análisis ha sido la base para seleccionar y organizar las tareas que componen las tres unidades de enseñanza propuestas para la geometría de los sólidos. Éstas tienen como objeto que se logren las características asociadas a los tres primeros niveles de razonamiento de Van Hiele y que los estudiantes vayan construyendo objetos mentales para los conceptos geométricos implicados, que incluyan un tipo de ejemplos, representaciones, atributos, relaciones, acciones, propiedades de las acciones, etc. que dependen de las tareas que se han trabajado hasta entonces y que vayan ampliando estos objetos mentales a medida que se van desarrollando las tareas propuestas para los diferentes niveles de razonamiento. Vamos a precisar un poco más los resultados a los que nos referimos y en qué sentido los hemos tenido en cuenta.

- Lo que explicamos en el apartado 1.4.3 sobre la introducción de conceptos y sobre la evolución de sus objetos mentales se refleja en la unidad de enseñanza diseñada para el nivel 1 y se puede vislumbrar también al considerar de manera continua las tres unidades de enseñanza propuestas.

- Las diferentes maneras de construir y generar poliedros que recopilamos en la sección 2.2 permiten organizar parte de las tareas que incluimos en las tres unidades de enseñanza. Para el nivel 1 se ve especialmente claro, ya que una característica de este nivel es que el razonamiento se basa en la consideración global de las figuras, siendo éste fundamentalmente visual, lo que se traduce en que todas las propiedades que se pongan de relieve al identificar, describir, etc. familias de sólidos, deberán ser obtenidas por procedimientos manipulativos y estar basadas en percepciones visuales. Pero también para el nivel 2, hay una gran variedad de actividades que tienen que estar inmersas en procedimientos de construir o generar sólidos, especialmente cuando los estudiantes tienen un dominio bajo de las características asociadas a este nivel. También se pueden plantear tareas de este tipo para el nivel 3; a continuación mostramos algunos ejemplos. Además queremos destacar que incluso si este nivel es alcanzado y los estudiantes para algunas tareas ya no requieren de modelos o de procedimientos de generar sólidos, puede ser muy conveniente que a cada paso se recuerden y reconsideren los viejos modelos, así como los procedimientos a partir de los que se construyeron o generaron.

- Los descriptores propuestos para los diferentes niveles de razonamiento de Van Hiele en la sección 1.4 sirven de referencia para seleccionar las tareas que hay que incluir en la unidad de enseñanza correspondiente.

- El análisis de los contenidos matemáticos que indicamos en la sección 2.1 da cuenta de un tipo de tareas que incluimos en la unidad de enseñanza: permiten trabajar determinados problemas que requieren un nivel de razonamiento dado.

- La interpretación en distintos niveles de razonamiento de algunos términos que corresponden a procesos matemáticos, que presentamos en el apartado 1.4.2, se refleja en las tareas propuestas; en las unidades diseñadas incluimos tareas en las que están implicados los procesos a los que nos referimos en este apartado; tareas que hemos analizado con objeto de determinar cómo podrían resolverse al plantearlas para diferentes niveles de razonamiento.

- Los análisis de la literatura consultada que incluimos en la sección 1.2 se reflejan también en las tareas propuestas, bien por los enunciados de las tareas que incluyen, bien porque estos trabajos han subrayado distractores, dificultades y errores de los estudiantes o porque dan sugerencias para la instrucción.

Como resultado hemos obtenido las unidades de enseñanza que describimos en las secciones que siguen.

Antes de acabar este apartado conviene poner algunos ejemplos que, por una parte, aclaran que cuando una tarea la planteamos en diferentes niveles de razonamiento en ellos se trabaja de diferente forma y se utiliza diferente lenguaje y, por otra, explican por qué algunas tareas que podrían considerarse más adecuadas para los niveles de razonamiento 2 ó 3 están también incluidas para los niveles 1 ó 2.

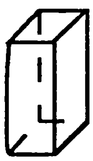
Vamos a utilizar como ejemplo las tareas que se refieren a la elaboración de "ideas" de familias de sólidos a partir de la construcción de modelos o armazones; a la determinación del número de caras, vértices y aristas de determinados sólidos y familias de sólidos; a la búsqueda de relaciones entre sólidos o entre figuras planas y sólidos, o a la construcción de los modelos correspondientes; y las actividades planteadas sobre cubrimientos.

A) Respecto a las primeras hay que destacar que si bien se pueden construir modelos y armazones de sólidos sencillos si se razona de acuerdo a las características asociadas a los niveles 1 ó 2, la construcción en el primer nivel se hace por imitación de los modelos que se tiene presentes y no se contacta con el modelo o armazón hasta que no se tiene la estructura total; sin embargo, en el segundo nivel ya se comprende y se hace explícita la importancia que tiene el análisis de los objetos en la construcción o dibujo de los mismos; los modelos y armazones pueden verse como agregados de componentes que guardan unas relaciones entre ellos.

Las "ideas" de familias de sólidos (o de sólido) que se plasman en las tareas que proponemos para el nivel 1 las introduce el profesor, bien verbalmente o mostrando los "trozos" y cómo se juntan éstos para construir ejemplos de una familia dada. Aunque estas "ideas" incluyen parte de las figuras, los estudiantes que razonan de acuerdo con este nivel pueden repetirlas (cuando el profesor las ha introducido verbalmente), e incluso pueden expresarlas ellos mismos si el profesor lo muestra convenientemente con material. Pero en este nivel no pretendemos que sean los estudiantes sin ayuda del profesor los que muestren los "trozos" de los ejemplos que al juntarlos conducen a la idea ingenua considerada; actividad que sí que pueden realizar los estudiantes que razonan de acuerdo con el nivel 2. Las tareas propuestas para el nivel 1 no pretenden que los estudiantes comprendan que al juntar los "trozos" señalados siempre se van a obtener ejemplos de una familia dada; los estudiantes que razonan de acuerdo con las características del nivel 2 sí que pueden descubrir las propiedades de una familia teniendo ejemplos como soporte, ya que las pueden generalizar a todos los ejemplos de ella. Cuando se razona de acuerdo a las características del nivel 1, sólo se puede comprobar si algo es cierto en los modelos con los que se tiene familiaridad. Respuestas a las que asociamos el nivel 1 son, por ejemplo, "en éste sí se cumple"; cuando mostramos otro modelo, o sugerimos que se busque otro ejemplo, se responde que "en éste también"; y cuando se cuestiona si ocurre en otros ejemplos de la familia considerada, es usual encontrar respuestas en las que se expresa, "¡y yo que sé si no los tengo aquí!".

Explicaciones del mismo tipo cabe hacer respecto a las tareas que proponemos para el nivel 1 en las que cuestionamos si un ejemplo de una familia dada puede tener un número determinado de un tipo de polígonos (ver por ejemplo, la actividad T-5e del apartado 2.4.2). Si los estudiantes razonan de acuerdo a las características del nivel 1, las respuestas a este tipo de actividades están basadas en un modelo que buscan los estudiantes y en el que verifican si se cumple la propiedad o no. Algunas respuestas de los estudiantes son, por ejemplo, la que indica que "en éste hay, a ver... 2, 3, 4, 5... rectángulos"; si les cuestionamos si tienen caras de otro tipo y cuántos, responden que "hay pentágonos, uno, dos"; y cuando preguntamos por la familia a la que pertenece el modelo que han seleccionado, les mostramos otro modelo, o les sugerimos que busquen otro ejemplo para ver si cumple la propiedad o no, responden con el mismo tipo de respuesta, pero para el otro ejemplo considerado. Para que los estudiantes que razonan de acuerdo con el nivel 1 puedan responder a cuestiones como las que planteamos en la actividad T-5e de la fase 2 del nivel 1 (ver el apartado 2.4.2) el profesor tiene que conducir la actividad, seleccionando los polígonos y mostrando cómo se podría construir el sólido elegido.

B) Las actividades que planteamos para el nivel 1 relativas al número de caras, vértices y aristas de un sólido tienen siempre como soporte el modelo o armazón que los estudiantes pueden desmontar si lo consideran necesario. Para resolver tareas de este tipo (ver por ejemplo, la actividad T-1d del apartado 2.4.2) no es necesario que el estudiante razone de acuerdo a las características del nivel 2, ya que no se requiere que el estudiante actúe teniendo en cuenta explícitamente las partes que componen la figura. El estudiante que razona de acuerdo con el nivel 1 sí puede comprender que al desmontar los modelos o armazones se obtienen las piezas que se han utilizado para construirlos, y pueden contarlas así como determinar la forma de las piezas obtenidas en el caso de que las piezas sean polígonos; también pueden entender que se pueden desmontar los modelos dejando varias piezas juntas para así obtener desarrollos de los sólidos o varios "trozos" de ellos según las piezas que se dejen juntas. Además, estas actividades propuestas en el nivel 1 pueden servir para que el profesor introduzca a partir de los objetos el contar los elementos de manera estructurada. Por ejemplo, para el prisma cuadrado se puede desmontar el armazón de manera que se refleje que se pueden contar las aristas como sigue.



4 varillas arriba

4 que juntan vértices de arriba y abajo

4 varillas abajo

Las tareas propuestas para el nivel 2 son las que tienen como objeto que los estudiantes apliquen esta manera estructurada de contar los elementos por niveles en modelos cuya base tiene cualquier número de lados y que esta manera estructurada de contar les permita generalizar los resultados a un ejemplo n-agonal, generalizando previamente el número de elementos de cada piso; si bien para la elaboración de las fórmulas correspondientes se requiere de la ayuda del profesor. Este tipo de actividad, planteada para el nivel 3, podrían resolverla los estudiantes sin ayuda del profesor a no ser que se trate de hallar el número de diagonales de las caras y del espacio, actividades que conllevan más dificultad que la de determinar el resto de los elementos. En la unidad de enseñanza, para el nivel 2 sólo hemos planteado hallar la cantidad de estos elementos para prismas cuya base tiene un número concreto de lados (ver T-7 y T-8 del apartado 2.5.2). Es en las tareas propuestas para el nivel 3 donde pedimos que se elaboren las fórmulas para estos elementos (ver T-18 del apartado 2.6.2) y, como puede observarse hemos incluido en el enunciado de las actividades pistas o ayudas para poder resolver la actividad, que no serían necesarias si se razonase de acuerdo con las características del nivel 4.

C) También cabe hacer referencia a cómo se pueden ver las diagonales de las caras de poliedros concretos, en particular las del cubo y del dodecaedro, que difiere según el nivel de razonamiento. Cuando se razona de acuerdo a las características del nivel 1 no se toma conciencia de este tipo de elementos, lo que no quiere decir que no se hayan apreciado remarcados en ninguno de los modelos. En el primer nivel estos elementos aparecen en modelos que se muestran para que se identifiquen los poliedros considerados o las relaciones entre ellos, bien cuando ambos corresponden a modelos o para aquellos poliedros inscritos para los cuales sólo se muestra su armazón (ver las tareas T-9 y T-10 del apartado 2.4.3). Es importante destacar también que en este nivel los modelos están completamente construidos, o es el profesor el que lo hace introduciendo varillas en otros modelos terminados, y posteriormente él plantea cuestiones sobre los poliedros que ha obtenido.

Queremos llamar la atención sobre que las relaciones entre los poliedros implicados en un modelo o entre poliedros y elementos de la geometría plana a las que nos referimos en este nivel (ver las tarea T-4, T-5, T-7, T-8, T-9 y T-10 del apartado 2.4.3) son relaciones visuales y el lenguaje que se tiene que utilizar para cuestionarlas tiene que ser informal. Es conveniente que el profesor utilice expresiones que se apoyen en modelos concretos, en los que se señalen algunos elementos o algunas secciones, y en modelos colocados de una determinada manera. Por ejemplo, para la actividad que proponemos en T-4a, además de las cuestiones que indicamos en el enunciado se pueden plantear otras como las siguientes: ¿Con cuántas de estas pirámides se puede llenar el cubo? ¿Cómo se colocan las pirámides?, ¿Dónde queda el ápice? Señálalo en el modelo ¿Dónde queda la base? ¿Cómo son de altas estas pirámides? ¿Cómo son de largas las aristas? Señala los elementos en este cubo al que le hemos quitado una cara.

Cuando se razona de acuerdo a las características del nivel 2, ya pueden observarse y descubrirse las relaciones entre los elementos de los poliedros inmersos en un modelo (por ejemplo, se puede ver que las aristas del tetraedro inscrito en un cubo coinciden con diagonales de las caras del cubo, que las diagonales se juntan de tres en tres en los 4 vértices del cubo y que ningún par de los vértices del cubo seleccionado son vértices opuestos) y se pueden construir algunos modelos de manera precisa, ya que con ayuda del profesor se pueden hallar las relaciones entre las aristas (ver la tarea T-9 del apartado 2.5.2).

Pero es si se razona de acuerdo a las características del nivel 3 cuando se puede comprender que en el cubo y en el dodecaedro el conjunto de diagonales de las caras está estructurado, de manera que al salir 3 por cada vértice del cubo se producen dos tetraedros inscritos en él y al salir 3 por cada vértice del dodecaedro se producen 5 cubos inscritos en él. Por otro lado, las relaciones que se pretenden poner de manifiesto en algunas tareas diseñadas para este nivel (T-11 y T-12 del apartado 2.6.2) son relaciones entre los poliedros regulares convexos que se reflejan en los modelos formados por los pares de poliedros platónicos duales.

D) Otro tipo de tarea que vamos a comentar es la relativa a cubrimientos. Para el nivel 1 se pueden plantear cuestiones sobre si algunos poliedros rellenan o no el espacio (ver la tarea T-3 del apartado 2.4.3), para las que en algunos casos cabe esperar respuestas erróneas por estar basadas en la construcción de una malla dada: cuando a varios modelos les falte muy poco para completar un espacio (por ejemplo, si juntamos 5 tetraedros alrededor de una arista), los modelos reales construidos con cartulina y el pegamento empleado para juntarlos pueden llevar a pensar que sí es posible hacerlo.

Cuando la tarea sobre cubrimientos se plantea para el nivel 2 permite que se empleen varias propiedades que se han estudiado hasta el momento. Por ejemplo, para resolver la actividad T-13e del apartado 2.5.3 se tiene que tener en consideración que: a) al apilar prismas rectos de la misma base se obtienen prismas de la misma base, y altura la suma de las alturas de los prismas que se han apilado, b) los prismas de bases hexágonos regulares se pueden descomponer en 6 prismas de bases triángulos equiláteros de la misma altura que el prisma de partida y la misma longitud de lado para las bases, c) al juntar 6 prismas de bases triángulos equiláteros alrededor de una de las aristas laterales se forma un prisma de base hexágono regular y la misma altura que los prismas de partida, d) para que los prismas rectos rellenen el espacio al juntarlos alrededor de una arista tienen que acoplar perfectamente; esto es, la suma de los ángulos diedros que se juntan en la arista tiene que ser 360°, e) los ángulos diedros de las caras laterales de los prismas rectos de bases triángulos equiláteros o hexágonos regulares miden 60° ó 120° respectivamente, porque al ser los prismas rectos, coinciden con el correspondiente de la base, f) los prismas rectos de bases triángulos equiláteros o hexágonos regulares rellenan el espacio porque sus ángulos diedros de las caras laterales, miden 60° ó 120° respectivamente, que son divisores de 360°.

Esta actividad también se puede plantear para el nivel 3 (ver T-11e del apartado 2.6.3), y como respuesta se puede dar una prueba de este nivel; pero lo que nos parece más importante para destacarlo es que la construcción de cubrimientos (mallas o retículas) se puede plantear con otras familias y con diferente grado de dificultad, abstracción y formalismo. Extendiendo la actividad propuesta en T-11e para los poliedros regulares, en este nivel se puede probar que la analogía entre elementos del plano y del espacio no funciona para resolver este problema porque las relaciones que comparten el triángulo y el tetraedro no son pertinentes para este problema. Los estudiantes que razonan en este nivel pueden delimitar las condiciones necesarias para que los poliedros se agrupen formando retículas que rellenen el espacio: para la formación de una retícula los poliedros al juntarse en una arista, la suma de los ángulos diedros tiene que valer 360°. Se puede reconsiderar T-11e y verificar que sí funciona la analogía entre la conjetura en el plano (para la formación de una retícula los polígonos al juntarse en un punto, la suma de los ángulos tiene que valer 360°") y la correspondiente del espacio (con los prismas rectos correspondientes), dado que sólo se ha de modificar vértice por arista, elementos que podemos considerar análogos al cambiar de dimensión. También se puede establecer que los únicos poliedros que ellos solos rellenan el espacio, si sólo tienen una medida para el ángulo diedro, son los que tienen un ángulo diedro divisor de 360°.

Y el problema del rellenado del espacio podría continuar en el nivel 4 y el nivel 5, pero el tratarlos aquí está fuera de nuestros propósitos. Como indica Guillén (1991) "este problema es complicado; no se ha resuelto todavía completamente. Darse & Pitou (1984, p. 61) señalan que el trabajo del cristalógrafo ruso E. S. Fedorov ha permitido enumerar 230 grupos de rellenado del espacio. Estos apilamientos se encuentran en las estructuras cristalinas y en problemas, no resueltos todavía, de apilamiento de esferas".

2.4. PROPUESTA DE ENSEÑANZA DE LOS SÓLIDOS PARA EL NIVEL 1 (VISUALIZACIÓN)

Para seleccionar y organizar el contenido de la unidad de enseñanza propuesta para el nivel 1 hemos examinado conjuntamente:

- Lo apuntado en el apartado 1.4.3 sobre la introducción de los conceptos geométricos implicados en los sólidos. Como consecuencia de ello hemos reparado en los diferentes contextos en los que se presentan los fenómenos que se organizan con las familias de sólidos elegidas como objeto de enseñanza e hicimos también un análisis para determinar de qué maneras podíamos traer a un contexto geométrico dichos fenómenos.

- Los diferentes procedimientos de construir o generar sólidos (o formas con sólidos) que hemos señalado en el apartado 2.2.

- Lo establecido en el apartado 1.4 respecto a las características del nivel 1. Esto se traduce en que las tareas que se plantean para este nivel son tareas de identificar, construir, describir, comparar, separar, agrupar, transformar o relacionar familias de sólidos, entendiendo el describir, clasificar, etc. con los significados que hemos precisado en el apartado 1.4.2.

Como resultado proponemos la unidad de enseñanza que describimos en los apartados siguientes.

OBJETIVOS

Las tareas que planteamos para este nivel pretenden que los estudiantes construyan un cierto objeto mental inicial para algunas familias de sólidos y de sus elementos (caras, vértices y aristas), que amplíen este objeto mental y vayan logrando las características asociadas al primer nivel de razonamiento, que hemos señalado en la sección 1.4.1. Para ello proporcionamos a los estudiantes oportunidades para manipular, construir, juntar y truncar objetos geométricos. Al mirar estas características desde la metodología podemos asociarles los objetivos que vamos a matizar a continuación y a desglosar después en las diferentes fases de aprendizaje.

1.– Identificar un sólido como ejemplo o no ejemplo de determinadas familias de sólidos.

2.– Nombrar objetos físicos o modelos de sólidos concretos. Asociar el nombre con el modelo del sólido correspondiente. Reconocer y nombrar, con lenguaje apropiado, estándar y no estándar, los elementos que componen los sólidos: las caras, los vértices y las aristas.

3.– Construir con material (polydron y troquelados, varillas y mecanismos de engarce) o modelar con plastilina, teniendo el modelo delante, modelos o armazones de sólidos sencillos. Construir desarrollos de sólidos sencillos deshaciendo alguno de sus modelos.

4.– Describir un sólido. Percibir características visuales y funcionales de los sólidos.

5.– Diferenciar, comparar, agrupar y separar los sólidos según diferencias o semejanzas físicas globales o atributos visuales. Identificar y nombrar modelos del entorno del estudiante como ejemplos o no ejemplos de las familias establecidas.

6.– Generar o transformar sólidos a partir de modelos de sólidos concretos, truncando éstos, agrupándolos o descomponiéndolos, e identificar los sólidos obtenidos.

7.– Resolver problemas empleando los sólidos conocidos y procedimientos de corte, pegado o selección.

COMENTARIOS

El objetivo 1 hace referencia explícita a la identificación de sólidos, y también, aunque de manera implícita, a la formación de cierto objeto mental de las familias estudiadas, ya que éste tiene que haberse construido de alguna manera para que los estudiantes puedan identificar los ejemplos de ellas.

Hay varios factores que influyen en la identificación de los sólidos como ejemplos o no ejemplos de una familia dada: la familiaridad con ellos, la posición, la esbeltez o achatamiento y los materiales que se han utilizado para construir los modelos. De ahí que en el trabajo inicial del nivel 1, al introducir las familias de sólidos, se debe prestar mucha atención a estos problemas. Se tienen que seleccionar los modelos que se quieren mostrar como ejemplos y no ejemplos de una familia dada, ya que deben ser objetos que podrán ser más familiares al estudiante para esa familia; hay que preocuparse del tipo de modelos que van a representar los ejemplos (modelos huecos construidos con diferentes materiales, macizos, armazones, etc.), del tipo de ejemplos que se quiere estudiar (por ejemplo, podemos seleccionar modelos en que las aristas laterales sean más largas que las de las bases, que ocurra lo inverso o que ambas aristas tengan la misma medida) y nos hemos de ocupar de mostrarlos en diferentes posiciones y tamaños.

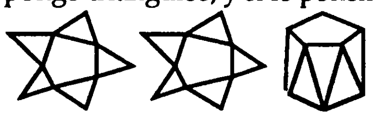
El objetivo 2 incide en que cada nivel de razonamiento posee un lenguaje específico. Ello incluye en este caso el aprendizaje de términos nuevos y la unificación de los significados atribuidos por el profesor y los alumnos en torno a los sólidos. El profesor en este nivel va a introducir una gran cantidad de nombres para las familias de sólidos, y para los elementos que los componen, y vocabulario para poder expresar las propiedades visuales que se vayan descubriendo. En este caso, el profesor deberá adaptar su vocabulario al de sus estudiantes. Puede ser que para precisar algunas propiedades visuales con los niños más pequeños, sea más adecuado emplear vocablos distintos, con el mismo significado, más familiares para los niños. Asimismo, los estudiantes modificarán o ampliarán algunas de las acepciones atribuidas a una palabra o expresión.

Los objetivos 3, 6 y 7. Al trabajar con los sólidos la mayoría de los estudiantes requieren de modelos de sólidos o de materiales que les permitan obtener los modelos o armazones por ellos mismos. Dado que la información se tiene que derivar de las acciones que se realicen sobre los objetos, se puede motivar a los estudiantes trabajando con modelos que ellos mismos han construido en vez de hacerlo sólo con modelos ya construidos por otros. Además, construir y generar sólidos por varios procedimientos es un buen medio para ampliar los objetos mentales iniciales de las familias de sólidos o de sus elementos.

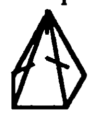
La construcción de modelos y armazones, el modelar los sólidos con plastilina, el juntar o transformar unos sólidos para obtener otros (u otras formas tridimensionales), por un lado, permiten introducir una gran variedad de ejemplos de las familias; por otro, llegar a precisar y comprender algunas propiedades que tienen que ver con las bases o con las caras laterales (con las caras, con las aristas o los vértices) y que pueden ser percibidas por los estudiantes como similares a las de otras familias. Dichas construcciones constituyen también la base para la formación de las primeras "ideas" de las familias que introducimos. Por ejemplo, en la siguiente conversación[8] se muestran algunas ideas para los antiprismas, pirámides y bipirámides que indicaron niños de 12 años que participaron en nuestras experimentaciones. Cabe aclarar que en sesiones anteriores habíamos dado ideas para los prismas a partir de la construcción de ejemplos.

P: Construir un antiprisma. ¿Cómo lo haceis?

E1: El antiprisma está formado por una tira de triángulos unida en vez de con rectángulos. A este [se refiere a un polígono] le pongo triángulos y a éste, que es igual, también le pongo triángulos, y si lo ponemos junto así... ya tenemos de otra manera un antiprisma.

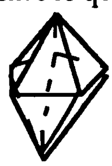


En las pirámides sólo necesito una estrella de éstas, porque los triángulos los junto así.



O también... o sea que con un antiprisma tengo dos pirámides.

E2: Y mira, también, con lo de un antiprisma tengo una bipirámide también pero ahora en vez de encajar así... las dos estrellas lo que hago es que lo pego por aquí..., por el centro de la estrella y recojo los picos.



E1: Pero la base la tengo que quitar...

E3: Pero eso no puede ser porque la base si cierras ya me vas a decir cómo la quitas...

E1: Pues eso, dices que la quitas y ya está quitada. Imagina que no está...

[8] En las transcripciones que aparecen en esta memoria P hace referencia a la profesora y los estudiantes los hemos nombrado con E1, E2, E3 y E4.

E3: Eso. Muy bien... Seguro que yo noto que está, porque no lo vas a pegar tan bien que yo no lo note...
E1: Pues aunque lo notes... Piensa que no está... ¡Y vale! Lo que decías tú....[Se refiere a la profesora] Eso de...no mirar mucho el material. Mirarlo sí, pero...
P: ¿Cómo construirías tú una bipirámide?
E3: Pues con triángulos y basta... No necesito ... esos... [Se refiere a los pentágonos que corresponderían a las bases de las pirámides que se juntan para formar la bipirámide].
E1: Sí, vale... Pero de la otra manera también puedes...
E2: Era eso de juntar las dos pirámides y quitar la base de dentro. No hace falta que lo hagas. Lo imaginas... Por eso puedes quitar la base...
E3: Vale... Vale... Pero sólo con triángulos sale, y no tengo que quitar nada. Por qué ponerlo si no está. Luego lo tienes que quitar.

Por otra parte, el intento de describir las formas obtenidas puede ser un incentivo para desarrollar medios lingüísticos y, además, puede ser la base para determinar algunas relaciones entre familias de sólidos, entre determinados sólidos, o entre elementos del plano y del espacio: unos sólidos pueden verse como agregados de otros; unos polígonos encajan perfectamente en un sólido, etc.

Los objetivos 4 y 5. El objetivo 4 hace referencia a la descripción de un sólido con el significado que tiene en este nivel; dado que las características obtenidas a partir de ejemplos prototipo tomados del entorno físico del estudiante constituyen en muchos casos la base de juicio en este nivel, hay que seleccionar convenientemente los sólidos que se proponen para que se describan. Asimismo, este objetivo pone de manifiesto nuestra intención de tratar de aprovechar las primeras experiencias que tiene el niño con objetos del espacio para desarrollar actividad y nuestra pretensión de conectar el estudio de la geometría con el entorno físico del estudiante.

Para lograr los objetivos 4 y 5 es necesario explotar el componente fuertemente visual de algunas propiedades. Este componente visual facilita, por un lado, que se llegue a comprender el significado de lo que se puede considerar como propiedad (en este caso propiedad visual) de un sólido, o de una familia de sólidos, y se llegue a enunciarla. Por otro lado, favorece el hecho de que se lleguen a utilizar propiedades visuales como "criterio" para separar unos sólidos de otros. El entendimiento de los que se considera propiedad provoca un avance general que tiende hacia la adquisición del segundo nivel de razonamiento; para ello es necesario que los estudiantes empiecen a ser capaces de enumerar propiedades geométricas, y que utilicen éstas como criterio de clasificación, lo cual podrán hacer una vez que hayan comprendido suficientemente el significado de las propiedades visuales o funcionales de los sólidos, o de familias de sólidos.

2.4.1. NIVEL 1. FASE 1

Con las tareas propuestas en esta fase se pretende que el profesor obtenga información acerca del grado de conocimiento que de los sólidos y polígonos poseen los estudiantes, y del lenguaje que éstos utilizan. Así como, que el profesor informe a los estudiantes sobre el campo de estudio en el que van a trabajar, los conceptos que van a manejar, los tipos de problemas interesantes que podrán resolver, los materiales que van a utilizar, el método de trabajo. Con las tareas de esta primera fase del nivel 1 se pretende también que se rompa el hielo entre el profesor y los estudiantes para introducirles en el objeto de estudio.

OBJETIVOS

1.– Presentar algunos sólidos concretos de las familias de sólidos que estemos considerando.

2.– Familiarizar con los materiales de ayuda: con materiales comercializados (troquelados, polydron, varillas y mecanismos de engarce), con plastilina, con modelos de estyropor y con objetos físicos de su entorno familiar.

3.– Iniciar en los métodos de trabajo: observar, tocar, construir, modelar, truncar, apilar, estampar.

4.– Introducir vocabulario específico para la unificación de significados y términos entre el profesor y los estudiantes: utilización de los mismos términos para los verbos de actuación, para los materiales y para algunos sólidos concretos.

5.– Informar sobre los conocimientos previos elementales que tienen los estudiantes sobre los sólidos.

6.– Informar sobre los conocimientos previos elementales que tienen los estudiantes sobre las figuras planas (los polígonos y el círculo).

TAREAS

T-1 Se dispone de una gran variedad de objetos del entorno del estudiante (pelotas, cajas de cerillas, cubos de pintura, botes de conserva, cajas de refrescos, lápices, cucuruchos, tambores, etc.).

a) Se pide que se nombre cada uno de esos objetos.

b) Se centra la atención sobre una familia de sólidos y se pide que se separen todos los objetos que tengan la forma de la familia considerada.

c) Se centra la atención sobre los objetos que no corresponden a determinadas familias de sólidos. Después se pide que si son ejemplos de otra familia conocida, se nombre la familia de la que son ejemplos.

d) Centrar la atención en edificios y objetos del entorno del estudiante y pedir que se busquen entre ellos los que pueden ser ejemplos de las familias de sólidos tratadas en las actividades anteriores.

T-2 a) Presentar pares de ejemplos de una familia de sólidos dada (puede ser el cubo, la pirámide, la esfera, el cilindro, el cono, el ortoedro, el romboedro u otro prisma) y después pares de modelos formados por un ejemplo y un no ejemplo. Pedir que se comente lo que tienen de parecido y lo que los diferencia.

b) Presentar ejemplos y no ejemplos de una familia de sólidos de las indicadas en la actividad T-2a. En primer lugar se muestran pares de modelos. Después se muestran más de dos modelos. Pedir a los estudiantes que nos cuenten cuándo un modelo es un ejemplo de la familia considerada.

T-3 a) Los estudiantes disponen de troquelados, de polydron, de plastilina y de varillas. Mostrar cómo utilizar los materiales para construir modelos o armazones de sólidos. Pedir a los estudiantes que utilicen estos materiales para hacer construcciones o modelos de sólidos.

b) Cuestionar el tipo de polígonos que se tienen que seleccionar para construir un modelo dado (ejemplo de alguna de las familias de sólidos de las indicadas en la actividad T-2a) y cuántos se han necesitado de cada tipo.

c) Después de haber construido varios modelos o armazones de varios ejemplos de una familia de sólidos dada, pedir a los estudiantes que expresen una "idea" de esta familia.

d) Se dispone de varios cubos multilink. Pedir que se construyan formas sólidas utilizando ese material. Luego pedir que se construyan modelos de ortoedros concretos de los que los estudiantes disponen del modelo para observarlo.

e) Pedir que utilizando plastilina se modele un tubo (un cilindro) y que se explique cómo se tienen que hacer cortes en él para obtener un prisma.

f) Se dispone de cubos de estyropor. El profesor hace un corte en uno de ellos, utiliza témperas para pintar la cara del sólido que se obtiene con el corte, y hace estampaciones en papel con la cara que ha pintado (la que ha obtenido con el corte). Luego cuestiona: ¿Qué forma tiene la cara del cubo que he pintado? ¿Qué forma se obtiene al estampar la cara en papel?

   Pedir que se intente repetir la actividad: hacer cortes en el modelo, pintura de la cara obtenida, estampaciones en el papel, descubrir el nombre de la figura plana que se obtiene.

COMENTARIOS

Descripción general de las tareas

La actividad T-1a puede servir para romper el hielo entre el profesor y los estudiantes e introducirles al objeto de estudio: los sólidos. Los objetos reales son el punto de partida, al igual que lo son para la introducción de los conceptos elegidos como objeto de estudio y para determinar el grado de conocimiento que los estudiantes poseen de los sólidos y de los polígonos. El resto de las actividades incluidas en las tareas T-1 y T-2 pretenden dar respuesta a las siguientes cuestiones: ¿qué familias de sólidos conocen los estudiantes? Al señalar los parecidos y las diferencias de los objetos físicos, ¿centran la atención en los elementos de los sólidos? En estas tareas se hará necesario que forcemos a los estudiantes a expresar sus opiniones. Puede que no sean necesarias todas las actividades enumeradas para averiguar lo que se pretende, o puede que algunas actividades los estudiantes no puedan resolverlas porque no tienen los conocimientos necesarios. Será el profesor el que, basándose en las respuestas a las tareas anteriores, decida si planteará o no actividades que aquí hemos enumerado como de la fase 1, o si las dejará para actividades de la fase 2.

También puede ocurrir que los estudiantes hayan logrado las características asociadas al nivel de razonamiento 1 para una familia de sólidos dada pero no para otras. En este caso, para cada familia, el profesor puede seleccionar actividades de las sucesivas fases de un nivel, o de los sucesivos niveles de razonamiento, y tratar de verificar dónde comienzan los estudiantes a tener dificultades porque las respuestas matemáticamente correctas requieren un nivel de razonamiento superior.

Las actividades que incluimos en la tarea T-3 pretenden introducir las técnicas informales que se utilizarán en el trabajo posterior. Son técnicas de construcción, descomposición, modelado, apilamiento y truncamiento. También tienen como objeto averiguar los conocimientos previos de los estudiantes respecto a los polígonos. Cuando se pide que se identifique la forma de los polígonos de las caras, sólo se trabaja con el triángulo, cuadrilátero y pentágono, por ser los polígonos que el estudiante suele conocer primero. Si se determina que los niños ya conocen otros polígonos y no tienen dificultad en contar los elementos del modelo (sin destruirlo), cabría plantear la actividad para otros sólidos de más caras. Si los niños no están familiarizados con esas formas, o no conocen los tipos de polígonos que forman los modelos, o tienen dificultad en contar los elementos sin destruir el modelo, estas actividades podrían corresponder a actividades para la fase 2 y se plantearían en esta fase.

Aportaciones de las experimentaciones

En lo que sigue vamos a destacar resultados de diferentes tipos que hemos obtenido con las experimentaciones realizadas.

A) La percepción influye en la construcción de una interpretación para los modelos físicos o de sus elementos, si no se tienen conocimientos geométricos consolidados que permiten ir más allá de la primera lectura perceptiva. En este nivel, si bien se es capaz de identificar un sólido o los elementos que lo componen, prescindiendo de los detalles no esenciales (materia, color, materialización de los vértices con bolitas, o de las aristas con lengüetas o gomas, etc.), una vez que se ha advertido que estos detalles no se tomaran en consideración, todavía hay que prestar atención a éstos en algunos casos, sobre todo si la construcción no tiene una mínima calidad.

Cuando trabajábamos con polydron, fue usual encontrar estudiantes que no identificaban adecuadamente las caras en los poliedros que construían, si éstas estaban formadas por varias piezas; especialmente si las piezas tenían diferente color. En esta situación, se identificaba cada una de las piezas que lo formaban con una cara del sólido. La división que aparecía en el polígono obtenido por las piezas que estaban en el mismo plano pesaba más en el objeto mental que los estudiantes se habían formado de cara de un sólido que la idea de que "todo lo que queda en el mismo plano pertenece a la misma cara".

De la misma manera, los armazones que se construyeron juntando varillas con bolitas en puntos que no correspondían a vértices del sólido (porque querían obtener modelos de mayor tamaño) provocaron una rica discusión. También en este caso, "el que visualmente se resalte un punto de unión entre las varillas" pesaba más en el objeto mental que algunos estudiantes se habían formado de vértice que la idea de vértice de un poliedro "como punto donde se juntan más de 2 aristas que ya no continúan". Por otra parte, la idea de que "cada varilla tiene que corresponder a una arista" tenía más peso que la idea de arista como "todo lo que queda en la misma recta".

En la actividad T-3a se pueden proporcionar modelos, o armazones, de los comentados, que el profesor puede seleccionar para la actividad T-3b. Si se cree conveniente, en esta actividad, o en las actividades de construcción que también planteamos para la fase 2 de este nivel, se puede afinar la idea de cara, vértice y arista de un sólido dando una idea visual de ellos. Una de ellas puede ser la que señalamos para la actividad T-4a de la fase 2.

B) Hemos verificado que si presentamos los armazones de los sólidos resulta más difícil identificar a qué familia pertenece el sólido correspondiente que si presentamos un modelo del mismo. De ahí que una parte del trabajo inicial, especialmente si se trabaja con niños pequeños, debe mostrar las diferentes representaciones materiales de los sólidos (modelos macizos, modelos huecos y armazones) y aprovechar cada una de ellas para trabajar el tipo de propiedades de los sólidos que remarcan. Pero el comienzo del estudio tiene que estar basado en modelos, bien sean macizos (de madera o de plastilina) o huecos (construidos con cartulina a partir de uno de sus desarrollos o con los materiales comercializados formados por polígonos). Cuando el profesor presente los armazones como representaciones materiales de los ejemplos de las familias de sólidos, deberá estar preparado para afrontar que el llegar a aceptar como atributo de los poliedros que las caras encierran perfectamente un espacio entra en conflicto con la materialización del poliedro a través de su armazón. Cuando a un grupo de niños de 12 años le cuestionamos si el rombododecaedro era poliedro o no, mostrándoles su armazón, se entabló entre los niños una rica discusión, parte de la cual reproducimos a continuación.

P: [Muestra el armazón del rombododecaedro] ¿Es un poliedro o no?

E1: Sí. Pero aquí arriba yo creo que puedo poner... un romboide. Sí que se puede poner. Eso sí que es.

E2: No, porque se puede poner ahí [señala una cara] una punta o algo. Mira ahí se puede poner ... Una pirámide.

E3: Pero así se supone que esto va a ser algo ...

E1: [Interrumpe] Pero no está tapado.

E3: Que ahí se va a poner una cartulina y lo va a tapar.

E2: Pero como no está tapado no es. Si estuviera tapado pues sí.

E4: Yo creo que sí.

P: ¿Por qué?

E4: Pues porque sí; porque tiene forma de poliedro.

E1: Pero es que aquí puedes poner otra figura.

E2: Pero ese [señala los dos rectángulos unidos de la figura  . Antes se había rechazado como poliedro porque no encerraba perfectamente un espacio] no tiene todos los bordes y éste sí.

E3: ¿Pero qué figura le puedes pegar ahí si esto está recto? [Muestra que la cara es plana].

E2: Sí, algo que salga ahí [y señala una cara a la que le añade una pirámide acoplada a esa cara] de punta. Sí que se puede poner.
E4: Es un poliedro.
E2: No. No es.
P: Si quieres hacer este modelo con polígonos ¿Sabes los polígonos que tienes que elegir?
Todos: Sí. Rombos.
E4: Es poliedro. Los bordes ya están. Es como ese que tiene papel que tú puedes ver lo de dentro... [Se refiere a modelos que vieron en una de las sesiones en las que había poliedros inscritos en otros y el modelo circunscrito tenía las caras de acetato para poder ver el sólido inscrito en él] Aunque no tiene el plástico ese tampoco... Pero da igual.... Si aquí pegáramos las caras de cartulina, simplemente pegarlas..., ya está. Y no hace falta.
E2: Si no tuviera ese bordes....[Se refiere a caras materializadas].
E3: Eso. Aquí está todo [Se refiere al armazón]. Es como si lo hubieras hecho con las pajitas y lo sueldas. Pero aquí [Se refiere al modelo abierto] si lo has empezado así... ¿Por qué se dejan un poco? Si lo empiezas así... tienes que terminarlo con estos...[Señala el material de troquelados con el que estaba construido el modelo abierto, formado por varios polígonos que no encerraban completamente un espacio, el cual se había presentado anteriormente para cuestionar la idea de poliedro]. Y si lo empiezas con pajitas, pues sigues así.... Pero todo...

Cuando se razona de acuerdo a las características del nivel 1 se está muy pegado a la materialización de los ejemplos de las familias de sólidos. Para que los estudiantes puedan integrar en el objeto mental que van construyendo todos los significados que provienen de los diferentes contextos en los que pueden aparecer los sólidos, es necesario que los estudiantes puedan ver los sólidos materializados de diferentes maneras, que les lleven a ideas diferentes (macizos, huecos pero con la superficie cubierta o sólo el armazón); así, si los estudiantes han incluido en su objeto mental de una familia de sólidos atributos que provienen de las diferentes materializaciones, pronto pueden llegar a prescindir de ellos. De ahí la conveniencia de trabajar con todos los materiales que hemos introducido para la tarea T-3.

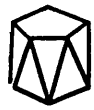
C) Hemos constatado en múltiples ocasiones, tanto con niños como con estudiantes de Magisterio, lo difícil que resulta romper la idea que los estudiantes tienen de base de estas familias de sólidos como cara en la que se apoyan los objetos. La conversación siguiente da cuenta de cómo los niños recuerdan que en otras ocasiones se les ha aclarado ya que un modelo que en una posición es ejemplo de una familia de sólidos, lo es también cuando se muestra en otra posición.

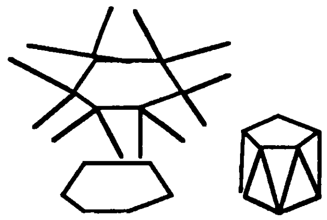
P: [Muestra una pirámide oblicua cuadrada en posición estándar] ¿A qué familia pertenece este modelo?
Todos: A las pirámides.
P: [La apoya en una arista] ¿Es pirámide?
E1: No.
E2: No y no hay base.
E1: Eso no.
P: ¿Seguro que no lo es? ¿Qué hemos dicho en repetidas ocasiones?

E2: Sí, sea lo que sea al darle vueltas... Ja...Ja... La caja de cerillas es caja de cerillas caída, tumbada...
E3: Eso es pirámide porque si esto se coloca de una manera pues tiene que ser de esa manera depende de como lo mires pues es.
P: ¿Y cuál será la base de esa pirámide?
Todos: [Señalaron el cuadrado].

A este problema (la identificación de modelos como ejemplos o no ejemplos de una familia dada cuando se muestran en posición no habitual, o al problema de seleccionar las caras que se consideran bases del modelo que se presenta) el profesor debe prestarle atención especial. Y no sólo en las actividades diseñadas para las diferentes fases del nivel 1; para algunos estudiantes también surgirá de nuevo este problema en algunas actividades propuestas para el nivel 2.

D) Hemos corroborado en repetidas ocasiones, y la conversación siguiente es una muestra, que las tareas de construcción de modelos o armazones de los sólidos (tarea T-3), la introducción de una secuencia de ejemplos y no ejemplos (tarea T-1) y la búsqueda o identificación de objetos del entorno del estudiante (tarea T-1) son actividades muy adecuadas para que los estudiantes se formen "ideas" de las familias de sólidos que le permiten identificar los modelos familiares (que se han visto con anterioridad como de la familia correspondiente) como ejemplos o no ejemplos de una familia dada. La conversación siguiente, que tuvo lugar entre niños de 12 años, es una muestra de la evidencia que se tiene sobre este hecho:

P: [Muestra un antiprisma pentagonal de base regular ] ¿A qué familia pertenece?
E1: Es un antiprisma. Porque las caras éstas [las señala] laterales son triángulos. Y lo hacemos así... La cinta de triángulos  que la cierro. Y además también... Que de cada base salen los mismos triángulos que de la otra. Se puede hacer de esa manera también.
E2: No se... Es que ella ya ha dicho las dos que eran . Otra yo no sé.
P: Si te fijaras en los vértices, ¿podrías decir algo?
E2: No sé, pero en éste [tiene el modelo del antiprisma hexagonal] se juntan 4 caras; tres de aquí [señala las laterales] y la base.
P: Y eso, ¿pasa en todos los antiprismas?
E2: No sé.
E1: ¡Ah! ¡Ya! Así también se podía hacer pero era un lío. Yo al principio no me aclaraba con las varillas esas [Se refiere a la construcción, que habíamos hecho en otra sesión, del armazón de un antiprisma añadiendo 2 varillas a cada vértice de una de las bases y luego juntando de nuevo las varillas de dos en dos en los vértices de la otra base].



Las ideas que los estudiantes precisan para una familia de sólidos, muy a menudo están basadas en las estrategias que se han usado al construir los modelos de los ejemplos de ella. El protocolo que hemos indicado al comentar los descriptores del nivel 1 también es otra muestra de esa situación.

Llegar a precisar ideas sobre familias de sólidos exige que se dedique atención a la construcción de varios ejemplos de una familia dada. El trabajo de construcción no se acaba en esta fase. De ahí que en la fase 2 también hayamos incluido este tipo de tareas, cuyo objetivo, entre otros, siga siendo el que acabamos de señalar.

Acabamos este apartado destacando que no se puede concluir que los estudiantes no tienen ningún objeto mental para determinados conceptos del hecho de que no puedan expresar ideas de ellos; son tareas independientes, y hay que separarlas, especialmente cuando el objeto mental inicial se está formando; se puede tener un objeto mental que incluya determinados ejemplos y que permita identificar con más o menos dificultad, otros y, sin embargo, no poder expresar una idea verbal del concepto.

2.4.2. NIVEL 1. FASE 2

OBJETIVOS

Las tareas que hemos diseñado para esta fase tienen como propósito que los estudiantes se formen objetos mentales de diversas familias de sólidos que incluyan características, analogías, diferencias y relaciones entre ellas, (con componente fuertemente visual) que previamente se han descubierto, "ideas ingenuas" que se pueden llegar a expresar verbalmente y clasificaciones basadas en atributos visuales o centrando la atención en el polígono de las bases. Asimismo pretenden que se vayan logrando las características que hemos indicado en la sección 1.4.1 para el nivel de razonamiento 1 y que vamos a matizar a continuación.

1.- Identificar y nombrar un sólido como ejemplo o no ejemplo de determinadas familias de sólidos cuando se presenta como modelo, como armazón o como objeto del entorno del estudiante (la casa, la clase y otros lugares).

2.– Reconocer y nombrar, con lenguaje apropiado, estándar y no estándar, los elementos que componen los sólidos: las caras, los vértices (esquinas) y las aristas.

3.– Construir con material (Polydron y troquelados, varillas y mecanismos de engarce) o modelar con plastilina, teniendo el modelo delante, modelos o armazones de sólidos sencillos. Construir desarrollos de sólidos sencillos deshaciendo alguno de sus modelos.

4.– Describir un sólido, familias de sólidos o de sus elementos, visualmente, a partir de ejemplos prototipo tomados de su entorno físico. Percibir características visuales y funcionales de los sólidos e identificar la forma de los polígonos de las caras.

5.– Determinar el número de caras, aristas y de vértices de sólidos sencillos deshaciendo los modelos o armazones de ellos.

6.– Diferenciar y comparar los sólidos según semejanzas o diferencias físicas globales entre ellos o en atributos visuales.

Separar los sólidos basándose en atributos visuales.

Separar los sólidos sencillos según el número de caras, aristas o de vértices.

7.– Generar o transformar sólidos a partir de modelos de sólidos concretos, truncando éstos, o por otros procedimientos, e identificar los sólidos obtenidos. Encontrar relaciones que pueden establecerse visualmente entre los sólidos de partida y los generados por los procedimientos mencionados.

TAREAS

T-1 a) Presentar ejemplos y no ejemplos para introducir la familia de sólidos considerada (cubo, ortoedro, romboedro o pirámide).

b) Pedir que se busquen objetos en el entorno que sean ejemplos de la familia introducida.

c) Pedir que se construyan varios ejemplos de la familia introducida utilizando diferentes materiales (troquelados, polydron, varillas, plastilina).

d) Pedir que se determine la forma de las caras de ejemplos de la familia introducida y que se cuente el número de caras, vértices y aristas. Apuntar que, para hallar estos números, se pueden deshacer los modelos o armazones de los sólidos considerados.

Pedir que se rellene la tabla siguiente y que se expliquen los nombres que hemos dado a las pirámides en ella.

	Forma base	Nº de caras	Nº de Vértices	Nº de aristas
Pirámide triangular				
Pirámide triangular				
. . .				

e) Pedir que se determinen analogías y diferencias entre varios modelos construidos con diferentes materiales que corresponden a un mismo ejemplo de una familia de sólidos.

f) Pedir que se determinen las analogías y diferencias de ejemplos de la familia introducida con ejemplos de familias estudiadas previamente. Dirigir la actividad con cuestiones como las siguientes:
¿Qué te llama la atención del un modelo y no del otro? ¿Qué polígonos tienes que seleccionar para construirlos? ¿Cuántos en cada caso? ¿Cuántas varillas necesitas para construir el armazón en cada caso? ¿Y cuántas bolitas? ¿Puedes construirlos con cubos multilink? ¿Qué tienen en común los sólidos seleccionados? ¿En qué se diferencian?

Para las pirámides pedir también que se enumeren analogías y diferencias entre pares de ejemplos de pirámides.

g) Se introduce el concepto de desarrollo (la red) de un sólido y se pide que se construyan varios desarrollos de ejemplos de las familias de sólidos tratadas, deshaciendo los modelos correspondientes.

Repartir un cubo en el que se han señalado los puntos sólo en algunas caras y varios desarrollos de él. Pedir que se complete la numeración del cubo y la numeración en su desarrollo. Apuntar que se pueden doblar los desarrollos para responder a esta actividad.

T-2 a) Pedir que se clasifiquen una gran variedad de modelos de sólidos, entre los cuales hay varios ejemplos de cada una de las siguientes familias: poliedros, cilindros, conos y esferas.

Pedir que se clasifique una colección de sólidos por el número de vértices y cuestionar en qué familia de las establecidas hay que incluir el cubo, el ortoedro, las pirámides, el cilindro, el cono y la esfera. Apuntar que para responder se pueden desmontar los modelos y los armazones de los sólidos.

Pedir que se clasifiquen también los sólidos por el número de aristas.

b) Pedir que se recojan los resultados de la actividad T-2a en la tabla siguiente.

	Sólido	Varias aristas	Varios vértices	Dos aristas	Una arista	Un vértice	Sin aristas	Ningún vértice
Cubo								
Ortoedro								
Pirámide								
Cilindro								
Cono								
Esfera								

c) Al igual que en la tarea T-1, para las familias del cilindro, el cono y la esfera, plantear actividades de búsqueda de ejemplos en el entorno; de identificación de ejemplos y no ejemplos de algunos modelos con caras planas y curvas y de modelado de algunos ejemplos.

T-3 a) Para pares de ejemplos de las diferentes familias de sólidos curvos, pedir que se enumeren analogías y diferencias funcionales o basadas en su percepción global, en atributos visuales o en los tipos de caras que los forman. Dirigir la actividad con cuestiones como las siguientes.

Explica las ventajas e inconvenientes que tienen el cucurucho y el vasito como moldes para presentar los helados. Trata de dar una explicación al hecho de que las canicas tengan forma de esfera en vez de tener forma de cilindro o cono, y al hecho de que los botes de leche pueden tener forma de los bricks y de cilindro pero no tienen forma de esfera. Explica si sería una buena idea que los rodillos de cocina tuvieran forma de esfera, o de cono, en vez de cilindro.

Explica cómo puedes cortar un cilindro para obtener dos, cuatro, o más cilindros. ¿Cuántos conos obtienes si en uno de ellos haces lo mismo que en el cilindro? ¿Qué ocurre si haces lo mismo con la esfera?

b) Transformar sólidos con caras curvas en poliedros. Dirigir la actividad con cuestiones como las siguientes:
Pedir que se modelen cilindros y esferas con plastilina, que se remodelen los bordes, o que se hagan los cortes necesarios para conseguir ejemplos de las familias consideradas en la tarea T-1.
Cuestionar cómo han de quedar las caras de estos ejemplos y si en el proceso tienen que aparecer vértices o aristas nuevos o desaparecer alguno(a) de los(as) que tenía el sólido de partida.

c) Pedir que se indiquen analogías y diferencias de los sólidos redondos con ejemplos de las familias tratadas en la tarea T-1. Dirigir la actividad con cuestiones como las siguientes.

Trata de explicar por qué un cilindro o un cono ruedan mejor que un cubo o una pirámide y por qué una esfera rueda mejor que un cilindro o un cono.

Para ejemplos de pares de las familias tratadas discutir si éstos serían buenos como ladrillos para hacer una pared y si con ellos se podría rellenar completamente una caja (sin dejar ningún hueco).

Centrar la atención en que con troquelados y polydron se pueden construir ortoedros y pirámides, pero no se dispone de piezas adecuadas para construir esferas, cilindros o conos. Pedir que se establezcan diferencias entre pares de sólidos, relativas al tipo de caras (planas o curvas, que son polígonos o no) o de aristas (rectas o curvas).

d) Establecer las familias de sólidos con caras o aristas curvas y los poliedros. Al igual que en la tarea T-1, para los sólidos que tienen superficies planas y los que tienen alguna cara curva, así como para los que tienen aristas rectas y los que tienen alguna arista curva, plantear actividades de búsqueda de ejemplos del entorno y de identificación de ejemplos y no ejemplos.

T-4 a) Presentar ejemplos y no ejemplos de "sólido" y pedir que se precise una idea de sólido y de sus elementos. Plantear también la actividad para "poliedro". Apuntar que se pueden apoyar en la construcción y pueden hacer dibujos para expresar las ideas.

b) Dar una idea de sólido y de los elementos que lo componen y pedir que se compare esta idea con la que han indicado en T-1a.

Plantear también la actividad para "poliedro".

c) Pedir que se recopile en una tabla (en la que se dan los encabezamientos) el tipo de caras (si son planas o curvas y si son círculos o no) y el número de caras, vértices y aristas del cilindro, cono y esfera.

T-5 a) Mostrar ejemplos y contraejemplos de prismas (antiprismas) en la posición estándar y en otras posiciones y pedir que se busquen objetos en el entorno que sean ejemplos de la familia introducida. Pedir también que se identifiquen el cubo, el ortoedro y el romboedro (el octaedro y otras bipirámides de caras iguales) como ejemplo o no ejemplo de prisma (antiprisma).

b) Pedir que de entre una gran variedad de modelos de sólidos (de prismas, antiprismas, pirámides, bipirámides...) se seleccionen los modelos de la familia introducida y dentro de éstos los ejemplos que se pueden construir utilizando material comercializado formado por polígonos.

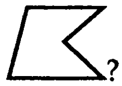
c) Para alguno de los modelos que se han seleccionado en T-5b como ejemplo de la familia introducida que se pueden construir con material comercializado, pedir que se construyan y que se indiquen los polígonos que se tienen que seleccionar para ello.

d) Presentar el procedimiento que describe Castelnuovo (1979) para obtener *prismas oblicuos* a partir de prismas rectos y que describimos en el apartado 2.2.1 de este capítulo.

Presentar también un experimento análogo para introducir los antiprismas oblicuos y las pirámides oblicuas.

e) Mostrar polígonos y cuestionar si pueden ser caras de un prisma (antiprisma, pirámide o bipirámide) y cuántos como mucho se tendrían que elegir como ellos para construir el modelo. Plantear también cuestiones como las siguientes.

Un prisma (antiprisma, pirámide o bipirámide) ¿puede tener sólo 1 cara triangular (cuadrada, rectangular)? ¿Y puede tener sólo 2 caras triangulares (cuadradas, rectangulares)? ¿Y más de dos?

Un prisma (antiprisma, pirámide o bipirámide) ¿puede tener sólo 1 cara como la de la figura ? ¿Y puede tener dos caras como ésta? ¿Y más de dos caras?

Para las bipirámides remarcar que sus caras son todas ellas triángulos.

T-6 a) Pedir que se precise una idea de prisma (antiprisma, pirámide o bipirámide) basada en la construcción de modelos con material comercializado y que se amplíe esta idea de manera que incluya otros ejemplos que se podrían construir si pudiéramos comprar todo tipo de polígonos de troquelados.

Para las bipirámides, una vez introducidos algunos ejemplos quitando las bases de dos pirámides y juntando sus caras laterales (o juntando dos "picos" formados por triángulos, que corresponden a las caras laterales de dos pirámides) remarcar que la base de las pirámides es la base de las bipirámides, pero que no es cara de ella y pedir que se precise otra idea de bipirámide.

b) Dar ideas de prisma (antiprisma) basadas en la construcción y pedir que se comparen estas ideas con las que han indicado en la actividad anterior.

Introducir el concepto de caras laterales y de bases de un prisma (antiprisma) a partir de la construcción.

c) Presentar la manera de generar prismas por superposición de polígonos y por un desplazamiento del polígono para generar un volumen. Remarcar que el desplazamiento podemos hacerlo en cualquier dirección, pero teniendo cuidado con la posición del polígono (para que se mantenga el paralelismo de las bases). Para ello dos polígonos unidos con gomas, al igual que para generar prismas oblicuos a partir de los prismas rectos, puede ser un buen material.

Pedir que se precise otra idea de prisma, de caras laterales y de bases, basadas en esta manera de generar los prismas.

d) En prismas rectos y oblicuos, construidos con plastilina o espuma dura, hacer cortes por planos paralelos a las bases y otros cortes en los que esto no ocurra. Pedir que se identifique la familia de los sólidos obtenidos. Cuestionar cómo tienen que hacerse los cortes en un prisma para obtener dos prismas. Pedir también que se indique en qué se parecen y se diferencian los prismas obtenidos.

Para la pirámide cuestionar cómo hay que truncarla para que con un solo corte se obtenga otra pirámide de menor altura. Pedir también que se señale lo que llama la atención del polígono que se obtiene con el corte.

e) Apilar varios prismas rectos que tienen las mismas bases y formar con ellos una columna cada vez más alta. Pedir que se identifique la familia de los sólidos que se van obteniendo en el proceso.

Repetir la actividad para prismas oblicuos que tienen las mismas bases y la misma inclinación y se colocan, por un lado, para obtener un prisma oblicuo y, por otro lado, para obtener un modelo en zigzag. Cuestionar si los modelos resultantes son prismas.

Cuestionar si al juntar prismas rectos y oblicuos, o al juntar prismas oblicuos con diferente inclinación, que tengan las mismas bases, se pueden obtener prismas.

Para las pirámides pedir que se indique cuántas se pueden juntar como mucho, cómo se tendrían que juntar, y cómo sería la forma resultante.

T-7 a) Pedir que se determine la forma de sus caras y el número de caras vértices y aristas de ejemplos de prismas (antiprismas, pirámides o bipirámides) concretos (de base un triángulo dado, un cuadrilátero dado, etc.). Apuntar que se puède deshacer el modelo o el armazón del ejemplo considerado si se considera necesario.

Pedir que se rellene una tabla en la que los encabezamientos por filas contienen los nombres de los prismas (antiprismas, pirámides o bipirámides) concretos (prisma triangular, prisma cuadrangular, ...) y las columnas están encabezadas por "forma de la base", "número de caras", "número de vértices", "número de aristas".

Pedir que se expliquen los nombres que hemos dado a los modelos en la tabla.

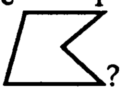
b) Pedir que se desmonten los modelos de ejemplos de prismas (antiprismas, pirámides o bipirámides) rectos concretos para obtener desarrollos de ellos.

Para los prismas (antiprismas) pedir además que para cada uno se construya un desarrollo formado por una tira de rectángulos (triángulos) y un polígono a cada lado.

c) Pedir que se desmonten los modelos de ejemplos de prismas oblicuos concretos para obtener desarrollos de ellos. Cuestionar si para cada uno de ellos se puede construir un desarrollo formado por un gran rectángulo y un polígono a cada lado.

d) Pedir que se enumeren analogías y diferencias entre pares de ejemplos de prismas (antiprismas, pirámides o bipirámides).

e) Para pares de sólidos que son ejemplos de las familias estudiadas, pedir que se indiquen analogías y diferencias establecidas a partir de la construcción de los ejemplos con polígonos. Para ello plantear cuestiones como la siguiente.

¿Una pirámide puede tener sólo una cara que tenga esta forma ? ¿Y un prisma?

f) Centrar la atención en la mayor o menor rigidez de los armazones del tetraedro, del octaedro y del cubo. Mostrar un prisma, un antiprisma, una pirámide y una bipirámide que tengan todos ellos la misma base (cuadrada por ejemplo). Cuestionar sobre el modelo que va a tener un armazón que se deforme más. Una vez verificada la respuesta, pedir que intenten dar una explicación a lo ocurrido.

g) Para pares de sólidos que son ejemplos de las familias estudiadas, pedir que se indiquen analogías y diferencias establecidas por truncamientos o al apilar modelos. Para ello dirigir la actividad planteando cuestiones análogas a las de las actividades T-6d y T-6e.

T-8 a) Establecer las familias de solidos con "entrantes" y "sin entrantes". Pedir que se identifiquen los modelos presentados (de la familia de los prismas, de los antiprismas, de las pirámides y de bipirámides) como ejemplo de una de las dos familias establecidas. Pedir también que se explique por qué se incluyen en uno u otro grupo.

b) Pedir que se dividan en grupos una gran variedad de modelos de prismas (antiprismas, pirámides o bipirámides). Mostrar otros ejemplos de la familia considerada, cuestionar acerca del grupo en el que se deben incluir y pedir que se explique la respuesta.

c) Para la familia de los prismas (antiprismas, pirámides o bipirámides) establecer grupos según el número de lados del polígono de las bases. Dar nombre a las familias obtenidas. Pedir que algunos modelos se incluyan en la familia adecuada y que se explique la respuesta.

d) Para la familia de los prismas (antiprismas, pirámides o bipirámides) pedir que se rellene una tabla que recoja las características numéricas (número de caras, vértices y aristas) de algunas subfamilias de las establecidas en la actividad T-8c. Apuntar que para responder pueden desmontar modelos y armazones de ejemplos de estas subfamilias.

COMENTARIOS

Descripción general de las tareas

La tarea T-1 se plantea para las familias de poliedros siguientes: cubo, ortoedro, romboedro y pirámide. No pretendemos que todas las actividades incluidas en esta tarea se propongan para cada una de estas familias. El profesor puede seleccionar algunas actividades para una familia y otras actividades para otra.

Las familias se introducen con ejemplos y no ejemplos y luego pedimos que se encuentren en el entorno otros ejemplos de estas familias, que se construyan ejemplos con varios materiales, que se cuenten las caras o aristas de algunos modelos, etc. El considerar la familia de las pirámides en esta tarea ya permite remarcar que una familia de sólidos puede tener diferentes ejemplos (con diferente número de caras, vértices y aristas) al variar el polígono de las bases. Permite entrenar a los estudiantes a contar los elementos (caras, vértices y aristas) de manera estructurada (construyendo o desmontando los modelos), y facilita el que lleguen a comprender que estos números van a depender del número de lados del polígono de las bases.

Con las actividades T-1b y T-2b utilizamos tablas para recopilar resultados numéricos. Estas actividades, relativas al adiestramiento en un tipo de destrezas, que también tienen que ver con el modo de hacer, pueden facilitar que en el nivel 2 se hagan generalizaciones para un ejemplo n-gonal de una familia dada, a partir de los datos numéricos; pero también hay que remarcar, y no perder de vista, que en la tabla sólo se anotan características numéricas de sólidos; sólo se reflejan números o el tipo de caras. No se muestran las condiciones para que se obtengan sólidos de la familia considerada y tampoco se refleja cómo tienen que estar dispuestos los elementos en el espacio.

Con las tareas T-2 a T-4 introducimos algunos sólidos no poliédricos: el cilindro, el cono y la esfera. Fijamos la atención sobre características visuales y funcionales de estas familias, los parecidos y diferencias entre ellas e intentamos que se descubran las diferencias de ellas con las familias de poliedros ya estudiadas a través de la tarea T-1. Apuntamos una idea de sólido y de sus elementos y clasificamos éstos en los sólidos con alguna cara curva y los poliedros. Respecto a estas tareas también cabe destacar las actividades que centran la atención en que la funcionalidad determina en algunos casos la forma de los objetos o utilizamos los conocimientos que tiene el estudiante de su entorno para llamar la atención sobre las características de los elementos (caras, vértices o aristas) que componen los objetos (ver T-3a y T-3c).

Con las tareas T-5 a T-8 estudiamos las familias de los prismas, antiprismas y bipirámides y subfamilias establecidas en ellas. Con estas tareas, además de plantear el mismo tipo de actividades que para las pirámides (tarea T-1) centramos la atención en lo inmenso que es el mundo de estas familias. Subrayamos que muchos ejemplos no pueden construirse con material comercializado y proponemos otros procedimientos para generar este tipo de ejemplos.

Es el profesor el que demarca estas familias de sólidos (estableciendo la clasificación correspondiente que centra la atención en cada una de estas familias); y en ellas establece clasificaciones-particiones que dividen las familias en subfamilias dicotómicas con fuertes características visuales (actividad T-8a) y, si no lo hacen los estudiantes al proponerles la actividad T-8b, delimita también otras subfamilias dicotómicas de estas características (los rectos y los oblicuos) y una clasificación–partición establecida basándose en el polígono de las bases (actividad T-8c).

Sobre las tareas propuestas. Aportaciones de las investigaciones y de las experimentaciones

Las tareas para la construcción de ciertos objetos mentales de familias de sólidos. Vamos a centrarnos en las tareas que pretenden introducir familias de sólidos o que piden que se identifiquen ejemplos de ellas.

A) Cuándo se pueden plantear estas tareas. Según Freudenthal (1983, p. 246) la actividad de clasificar según la forma y el tamaño es una actividad que los niños realizan espontáneamente desde muy pequeños, aunque sea de forma fragmentaria y de manera inconsciente o no deliberada:

> El hombre - niño, adolescente, adulto - reconoce lugares, cosas, personas, e identifica clases que clasifica, mediante un número pequeño de criterios que rara vez llegan a ser conscientes. Con respecto a objetos geométricos, el desarrollo mental puede conducir a que se hagan conscientes los criterios de reconocimiento y clasificación.

> Al menos eso es lo que parece. Sin expresarlo verbalmente uno puede hacerse consciente y a hacerlo a los demás de lo que es un triángulo, un círculo, lo que son líneas que se cortan, lo que es la estructura de un cubo. Pero es mucho menos claro por qué asignamos a un dado de marfil con aristas redondeadas y vértices la forma de un cubo, o dicho de manera más precisa, la misma forma que a un dado de madera con aristas afiladas y vértices. ¿Cuáles son los criterios? [...] ¿Cómo podemos estar de acuerdo acerca de lo mal que podemos dibujar un rectángulo para que se acepte como tal? ¿Dónde termina la tolerancia y dónde se precisa de requisitos más definidos?

Y en la p. 296, especifica determinados tipos de abstracción que los niños son capaces de realizar a una edad muy temprana:

> ¿Cuántas cosas deben abstraerse para hacer de una cosa una figura? Tests sobre clasificaciones dan testimonio de que a la edad de 6 años se es capaz de abstraer el color, el material, el peso, el tacto, el olor, las irregularidades, la rugosidad, la colocación del objeto, la colocación del que lo percibe, lo que determina su apariencia, uso y relaciones emotivas. ¿Qué queda finalmente? Grafo y tamaño. [...] Se entienden instrucciones explícitas para clasificar según la forma y el tamaño (y también según otros criterios) y se entienden las palabras forma y tamaño. Sólo si se les pregunta por nuevas clasificaciones puede ocurrir que la posición de los objetos se introduzca como un nuevo aspecto de clasificación, pero incluso éste se aparta fácilmente.

B) Las tareas que conectan el estudio de la geometría con el entorno del estudiante. En las tareas que proponemos para introducir las familias de sólidos elegidas, éstas se introducen con ejemplos y no ejemplos, y luego pedimos que se encuentren en el entorno otros ejemplos de ellas.

Los ejemplos y no ejemplos a los que nos referimos como que los presenta el profesor para introducir las familias de sólidos, en algunos casos corresponden a objetos del entorno o a "parte" de los edificios conocidos por los estudiantes. Y hacemos nuestras las sugerencias que da Freudenthal (1983, p. 229), para relativizar el fenómeno de la base: mostrar bloques que se balancean en aristas y vértices, examinar tejados como prismas tumbados y que queden apoyados en caras laterales.

Algunos ejemplos que mostraron los estudiantes como cilindros, *las botellas, los vasos, los botes,* etc., los utilizamos para destacar las transformaciones permitidas y prohibidas para que la forma considerada siguiera teniendo el mismo nombre que se le daba en el contexto cotidiano y en el geométrico. Llamamos la atención sobre las transformaciones que se tendrían que hacer, por ejemplo, en los vasos o las botellas, para que los que tienen forma que "se parece a la del cilindro", llegasen a tener su forma. Y planteamos como objeto de discusión las preguntas que Freudenthal apunta en la cita que hemos reseñado antes.

¿Cómo podemos estar de acuerdo acerca de lo mal que podemos construir un cilindro para que se acepte como tal?

En este primer nivel, al desmontar los modelos los estudiantes ya pudieron descubrir características de los ejemplos, que llevaron a que se tuvieran criterios para decidir. El criterio que elaboraron los niños de 12 años con los que realizamos las experimentaciones para establecer cuando un modelo correspondía a un ejemplo de cilindro se basaba en el desarrollo del mismo: "hay que estirar el cilindro en plano y entonces los que son círculos tienen que ser iguales". Discutimos también cuándo se podían aceptar dos figuras como círculos y cómo se evaluaba a primera vista si dos caras eran iguales o no; en estos casos los criterios de decisión que precisaron fueron visuales, como muestran las siguientes respuestas: "Si se ve muy redondo es círculo; si está un poco chato ya no es; tiene que ser como una rueda, perfectamente redondo"; "se pueden juntar y ya se ve que van a coincidir".

C) La selección de ejemplos y no ejemplos. Para seleccionar los ejemplos y no ejemplos, como ya hemos indicado en el apartado 1.2.1, tuvimos en cuenta la teoría de Vinner y sus colaboradores. Así, en la actividad T-5e para que se construya un objeto mental inicial de poliedro, como no ejemplos cabe presentar los modelos siguientes, que no cumplen alguna de las propiedades de los poliedros de las delimitadas a partir de la definición elegida como idea de partida: a) modelos que no son cerrados, b) el cilindro, c) modelos que tienen caras planas y curvas y además tienen aristas rectas y curvas, y d) modelos que tienen caras no planas y todas sus aristas son rectas.

Como ejemplos de poliedro cabe presentar aquellos que son ejemplos de familias de sólidos que resultan familiares para el estudiante y otros que no son ejemplos de estas familias. Es interesante estudiar estos últimos porque en las experimentaciones comprobamos que algunos estudiantes no los incluyen como ejemplos. Algunas razones que expresaron son: "cómo van a ser poliedro; si no son de esas familias, ¿de qué familias van a ser?".

Para la familia de los prismas, en la actividad T-5a como no ejemplos es conveniente presentar los siguientes:

- Un antiprisma.
- Modelos que tienen alguna cara curva pero que tienen dos bases iguales y paralelas con un lado curvo y el resto rectos.
- Modelos que tienen caras no planas y todas sus aristas son rectas. Por ejemplo, uno con dos bases polígonos iguales y paralelos, uno girado con respecto al otro y que tienen sus caras laterales curvas.
- Modelos que tienen todas las caras cuadriláteros. Por ejemplo, un cubo truncado por un plano no paralelo a dos caras, o bien una pirámide truncada apoyada en posición no estándar.

- Modelos que sean poliedros, que tengan dos caras iguales y paralelas pero que no estén unidas por un cinta de polígonos; por ejemplo, el dodecaedro.

Los no ejemplos que tienen todas las caras cuadriláteros los sugerimos porque en las experimentaciones realizadas comprobamos que algunos estudiantes los incluían como ejemplos. Unos, los adjuntaban porque en la definición que aplicaban de prisma, consideraban "que las caras laterales tienen que ser cuadriláteros" (en vez de paralelogramos). Otros indicaban que "esos modelos corresponden a prismas porque son prismas truncados". El que en el nombre figure la palabra prisma con frecuencia conduce a que esta familia de los truncados se la considere incluida en la familia general (de los prismas) y por tanto los elementos se juzgan también como ejemplos de esta familia.

Como ejemplos, cabe considerar modelos como los siguientes.

- Prismas que puedan resultar familiares a los estudiantes porque son los modelos que usualmente se presentan como prismas en los libros de primaria. Se enseñan en posición estándar y no estándar. Por ejemplo, un prisma recto pentagonal de base regular, un prisma triangular apoyado sobre una cara rectangular (que parece una tienda de campaña) y/o apoyado sobre una cara triangular.
- Prismas que cabe esperar que no sean familiares a los estudiantes porque no se han tratado antes como prismas. Pueden ser cóncavos o convexos, rectos u oblicuos, de base regular o de base irregular.
- Prismas en los que las aristas laterales sean de la misma longitud o más cortas que las de la base. Pueden ser cóncavos o convexos, rectos u oblicuos, de base regular o de base irregular.
- Prismas de familias muy específicas. Por ejemplo: el cubo, o el romboedro (que es prisma de caras iguales y paralelepípedo), o el ortoedro (que es paralelepípedo y además prisma), o un paralelepípedo, o cualquier prisma de caras regulares.
- Prismas de bases trapecios o prismas con base un cuadrilátero general (que no sea paralelogramo), apoyados sobre una de sus caras laterales (es decir, no se presentan en su posición estándar).

Los ejemplos en los que se varía la relación que hay entre la longitud de las aristas laterales y de las bases pretenden contribuir a corregir la idea que tienen algunos estudiantes sobre que las aristas laterales son mayores que las de las bases. Es conveniente estudiar los prismas de bases trapecios debido a que en experiencias previas se ha evidenciado que la mayoría de los estudiantes no los incluyen como ejemplos; unos apuntan que son pirámides truncadas y otros aplican la definición de prisma, pero no seleccionan como bases las dos únicas caras que podrían serlo: las que no son paralelogramos. Si en otros casos la posición de un objeto influye considerablemente en su identificación, en estos casos influye aún más. Para responder adecuadamente se tiene que tener muy clara la definición de prisma y además, poder aplicarla. Pero, aunque la actividad la propongamos para el nivel 1, y si se responde a nivel visual es muy probable que no se conteste adecuadamente, cabe poner énfasis en el hecho: algunos modelos con caras cuadriláteros son prismas y otros no lo son.

Para las actividades T-1a y T-5a, los ejemplos y no ejemplos de pirámides y antiprismas los delimitamos de la misma manera. Respecto a los antiprismas vamos a explicar por qué en la actividad T-5a se cuestiona si el octaedro y otras bipirámides cuadradas de caras iguales son ejemplos o no ejemplos de antiprisma. La razón de nuevo proviene de las experimentaciones realizadas. En todas ellas, la mayoría de los estudiantes (tanto los niños de 6º de EGB como los estudiantes de Magisterio) identifican el octaedro y otras bipirámides cuadrangulares como bipirámides, pero no las consideran ejemplo de antiprisma.

Las experimentaciones también han proporcionado evidencias de lo poco familiarizados que están los estudiantes con los no ejemplos de una familia de sólidos. La enseñanza de la geometría que han recibido sólo ha centrado la atención en los ejemplos y además sólo de familias muy específicas. Así, para los prismas lo usual es que sólo se muestren prismas rectos de base regular, lo que lleva a limitar considerablemente el mundo de los prismas. Por otra parte, la importancia de los no ejemplos que sólo dejan de cumplir alguna de las características de la familia considerada es muy aprovechable para delimitar las características (en este nivel son visuales o funcionales) de ella.

Las actividades inmersas en procesos de construir o generar sólidos. Cabe hacer notar que la construcción, o el generar poliedros por otros procedimientos (juntando modelos, truncando sólidos, etc.) además de desarrollar en los estudiantes destrezas manuales que facilitan la tarea de construcción, y de dar la oportunidad a los estudiantes de proporcionarse a sí mismos modelos que son ejemplos de las familias de sólidos estudiadas (pueden asociarse al logro del objetivo 3 de esta sección) tiene otros objetivos más importantes. Proporciona la situación que puede ayudar a que los estudiantes lleguen a asimilar, para los ejemplos sencillos de las familias de sólidos elegidas, las características visuales y las relativas al tipo de caras, su número, así como el de aristas y vértices, y su disposición en el espacio. Facilita que los estudiantes lleguen a comprender y a especificar parecidos y diferencias entre los ejemplos de una familia y las relaciones (siempre establecidas visualmente) que hay entre unas familias y otras. De la construcción de modelos por diferentes procedimientos también pueden emerger diferentes ideas de las familias de sólidos consideradas.

Por otro lado, al poner de manifiesto las limitaciones del material comercializado disponible, e introducir otros procedimientos de generar sólidos (descritos en la sección 2.2.1), centramos la atención sobre los ejemplos (de las familias de sólidos consideradas) que no son familiares a los estudiantes. Los diferentes procedimientos utilizados ayudan a comprender a nivel visual relaciones entre familias de sólidos, o entre los elementos de una familia dada, y a establecer familias cuyas características se pueden señalar con una fuerte componente visual. De lo dicho anteriormente se desprende que la construcción, o el generar sólidos por otros procedimientos facilita el logro de la mayoría de las características que hemos mencionado al principio de este apartado.

Vamos a detenernos con cada uno de los procedimientos de construir o generar sólidos para dar cuenta del tipo de actividad concreta que se puede desarrollar con ese tipo de procesos de construcción.

A) La construcción o modelado de modelos u armazones de sólidos lleva a un análisis primario de los sólidos a nivel local; centramos la atención en sus elementos: cara, vértice y arista. Freudenthal (1983, p. 299) indica que "el reconocer estos elementos y nombrarlos como tales no conlleva mucha dificultad, incluso a una edad joven; hay pocas razones para nombrarlos por otros términos que se cree que son más adecuados al lenguaje del niño. Además las relaciones entre vértices caras y aristas (que descansan en, que pasan a través de) son accesibles a una edad temprana".

La construcción de modelos con polígonos. Las actividades que hemos propuesto para este nivel acerca de la forma de las caras, el número de caras de cada tipo y la disposición de éstas en el espacio para los ejemplos de una familia determinada se explican desde la propia construcción y desde el dominio de este nivel para los polígonos: los estudiantes pueden reconocer los polígonos a nivel global y su construcción con materiales comercializados permite pasar sin dificultad del modelo físico a las caras, y de las caras al modelo, para sólidos sencillos (como hemos indicado en el apartado 2.3.3, la construcción en este nivel se hace por imitación).

Si los niños no han superado este nivel de razonamiento para polígonos, tenemos que plantear actividades para desarrollarlo. Las actividades serán del mismo tipo que las que sugerimos para los sólidos: introducir los polígonos mediante ejemplos y no ejemplos, pedir que se busquen objetos en el entorno que tengan la forma de los polígonos considerados, que se construyan con varillas, en un geoplano, etc.

Respecto a este tipo de construcción de sólidos también cabe destacar que las diferentes estrategias que se pueden utilizar permiten que los estudiantes que razonan de acuerdo a las características del nivel 1 lleguen a comprender diferentes ideas de las familias elegidas, de parte de sus caras o de sus elementos. En las actividades T-4a y T-6a pedimos que se precisen ideas de los sólidos, los poliedros, los prismas y los antiprismas respectivamente, e ideas de los elementos de los sólidos y de los poliedros, y en T-4b y T-6b indicamos que se den ideas para ellos. Por ejemplo:

Sólido es un modelo que encierra completamente un espacio. Las caras unidas son las que forman la superficie del sólido que es la que encierra completamente el espacio. Los vértices se parecen a las esquinas, a los picos. Se forma un espacio con volumen. Las aristas se forman al juntar dos caras.

Poliedro es un modelo cerrado, formado por polígonos y los polígonos se juntan de dos en dos. Para los poliedros llamamos *caras* a los polígonos que forman el poliedro, *aristas*. a cualquier lado común a dos caras y *vértices* a los puntos donde se juntan más de dos caras.

Para los prismas y antiprismas se pueden señalar las siguientes: *los prismas* pueden verse como una banda de rectángulos, paralelogramos, rombos o cuadrados unida, cerrada por los dos lados con el mismo polígono. O como dos polígonos que se juntan con rectángulos, paralelogramos, rombos o cuadrados para encerrar un espacio.

Los sólidos que llamamos *antiprismas* también tienen 2 bases, que están unidas por triángulos para encerrar un espacio. Los *antiprismas* también pueden verse como dos casquetes iguales, formados por un polígono bordeado de triángulos, que encajan entre sí.

Como indicamos en el apartado 2.3.3 para este tipo de actividades, en este nivel, el profesor mostrará convenientemente estrategias de construcción para que los estudiantes puedan llegar a expresar las ideas que indicamos.

La mayoría de los estudiantes con los que realizamos las experimentaciones tenían una idea visual de cara, vértice y arista basada exclusivamente en el mundo de los poliedros. Fue necesario introducir algún ejemplo de sólido (el cono es muy adecuado) y formular preguntas sobre su número de elementos para que los estudiantes llegaran a notar que para ellos no se puede aplicar la idea que se basa en poliedros. La conversación que transcribimos a continuación, la cual corresponde a parte de una sesión con niños de 12 años, puede servir de ejemplo. Ésta también da cuenta de que los niños no tienen en cuenta la base cuando se habla de cara de un objeto, si no se pregunta directamente sobre ello; esta situación se manifestó en repetidas ocasiones al tratar con ejemplos de otras familias de poliedros.

P: Los conos, ¿son poliedros?
E1: Yo creo que no es un poliedro.
P: ¿Y por qué crees que no es un poliedro?

E1: Porque no tiene polígonos.
E2: [Interrumpe] Porque no tienen lados
P: Caras, aristas,... ¿Qué otra cosa pueden tener los poliedros?
E3: Vértices.
P: [Pregunta a E3] ¿Y los conos tienen vértices?
E3: El de arriba.
P: Los conos ¿tienen caras o no tienen caras?
E4: No.
P: ¿No tienen caras?
E4: La de abajo.
P: Las caras no son polígonos, pero, ¿tiene caras? El cono sólo tiene la de abajo, ¿o tiene alguna otra cara?
E1: La superficie lateral.
P: ¿El cono tiene aristas?
Todos: No.
P: ¿El cono no tiene ninguna arista?
4: Creo que no, pero para tener algún vértice tiene que tener alguna arista.
Todos: No.
P: Los conos no tienen ninguna arista recta, ¿tienen alguna arista?
E2: Sí, si es curva sí.
P: [Muestra un cono] ¿Tiene alguna arista? ¿Qué es una arista? [Pregunta a E4] ¿Qué es una arista para ti?
E4: Pues... la línea, la de....[da golpecitos en la mesa].
E2: La línea que une dos caras...
E1: O varias caras.
P: Vale. Vamos a ver...La línea que une varias caras... [Muestra la bipirámide pentagonal y pide a E3] Señálame una arista
E3: La señala.
P: Eso es una arista. Muy bien. ¿Pueden juntarse varias caras en una arista?
E1: No...
E2: Yo creo que sí, ésta y ésta (y las señala) se juntan en la misma arista.
E1: Pero sólo dos.
P: ¿Se pueden juntar en una arista más de dos caras?
E4: Yo pienso que no... En cualquiera....
E2: Sí.
P: ¿Cómo lo haríais? Vamos a ver... Tomar material [y distribuye triángulos de troquelados y gomitas. Les deja hacer].
P: [E1 ha juntado 3 triángulos por un lado] Ahora continúa para formar un poliedro. ¿Así es un poliedro?
Todos: No. No. Así no es nada.
P: Continúa para que sea poliedro. Cuando formas el poliedro, ¿qué te ha pasado con el que habías puesto por dentro?
E1: Pues que no cabe.
E2: No se pueden juntar 3 caras en una arista.
P: O sea que vamos a quedar en que una arista es donde se juntan dos caras. ¿Y un vértice?
E1: Donde se juntan varias caras...
E2: ¿Cuántas caras pueden juntarse en un vértice?
E1: Miles...
P: ¿Se pueden juntar sólo dos caras? [Se dirige a E4] ¿Crees que en un vértice se pueden juntar sólo dos caras?
E4: No. Tendría que quitar una [Responde apoyándose en uno que tiene construido].
P: Pues quítala. A ver... ¿Se forma vértice?
E4: No, así no hay nada,...

P: Para que se forme una esquina, como mínimo, ¿qué pasa?
E4: Que se necesitan por lo menos 3 caras.
O sea, en los vértices por lo menos tres caras, y en las aristas se juntan dos caras.
P: Bien, ya nos hemos puesto de acuerdo en lo que es una arista. Vamos a volver otra vez con el cono. ¿El cono tiene aristas?
E2: Es que tiene sólo una cara... Todo lo que bordea es sólo una cara.
P: ¿Y esto? [señala la base] ¿Es cara?
E2: Eso es la base.
P: Y, ¿la base es cara?
Respuesta de cada uno de ellos: Yo creo que sí.
P: O sea que ¿cuántas caras tiene el cono?
Todos: Dos. La base y la otra.
P: [Pregunta a E2] ¿Dónde se junta la cara lateral [señala la cara lateral] con la base?
E3: [Señala un poco de la circunferencia y luego marca toda la circunferencia].
P: El cono, ¿tiene aristas? ¿Qué sería la arista del cono?
E4: Toma el modelo del cono y la señala.
P: ¿Es una arista igual que las de las otras formas que hemos visto? ¿Qué ha pasado ahí?
E4: Que ésta es redonda y es ... Es curva.
P: O sea, que el cono tiene una arista pero es curva. ¿Y el cono tiene vértices?
E2: Es que tiene sólo una cara... Todo lo que bordea es sólo una cara.
E4: Eso ya lo has dicho antes.
E2: Pero es que no hay tres...
P: O sea que en los sólidos sí que pueden haber vértices formados sólo por una cara. ¿Cómo tienen que ser las caras para que pueda pasar eso? ¿Si las caras son polígonos puede pasar?
E4: No, hay que doblarla.
E2: Tiene que ser curva.
P: Vale. Sólo en los modelos que se forman con polígonos se puede decir que los vértices tienen que tener 3 caras o más. Con caras curvas, una sola cara ya puede formar un vértice.

De la transcripción anterior se puede apreciar la importancia de indicar en la actividad T-4b que se dé la descripción verbal de algunas ideas sobre los sólidos y sobre los elementos que los forman y en T-4c consideramos el cilindro, cono y esfera para verificar si la idea que se ha plasmado sobre los elementos de los sólidos se puede aplicar a estas familias concretas. Pretendemos que se amplíe el objeto mental de estos conceptos para que se incluyan como ejemplos de ellos las caras curvas, las aristas curvas o los vértices formados por una única cara. En T-6b, además de para los prismas y antiprismas, pedimos que se den ideas acerca de *caras laterales* y *bases*, basadas también en los ejemplos que los estudiantes han construido con polígonos. Se pueden dar las siguientes: los dos polígonos iguales que están unidos por rectángulos, paralelogramos, rombos o cuadrados (triángulos) son las *bases del prisma* (antiprisma) y las caras que juntan estas bases son las *caras laterales* del prisma (antiprisma).

La construcción del armazón lleva a una idea de sólido como estructura formada por vértices y aristas; facilita que los estudiantes puedan determinar el número de vértices y aristas de ejemplos concretos de una familia dada y lleguen a comprender su disposición en el espacio. Los modelos y armazones de ejemplos sencillos de una familia de sólidos dada se pueden utilizar para enseñar a contar los elementos de manera estructurada.

Freudenthal (1983, p. 300) señala que estas actividades pueden utilizarse, por sus importantes características didácticas, para aprender a estructurar:

> Para contar los vértices aristas y caras, por ejemplo de un cubo, los conjuntos están estructurados :
>
> cuatro vértices abajo cuatro arriba,
> o cuatro vértices de frente y cuatro detrás,
> o cuatro vértices a la derecha y 4 a la izquierda,
> cuatro aristas abajo, cuatro arriba y cuatro verticales.
> o cuatro aristas a lo largo, cuatro a lo ancho y cuatro a lo alto,
> una cara en la base, una en lo alto y cuatro alrededor,
> o dos caras, frente y detrás, dos a la derecha e izquierda, dos arriba y abajo
>
> Así, el cubo, (también cualquier prisma cuadrangular: caja) puede considerarse como una estructura con 6 caras, 8 vértices y 12 aristas, dispuestos de una forma fija. Disposición que se puede mirar de una manera estructurada.

Si los estudiantes no responden a la actividad T-7f, el profesor planteará el problema en el plano. Pedirá que construyan polígonos con varillas y preguntará por el que queda más rígido. Una vez que se haya establecido que el triángulo es "indeformable" pero los demás polígonos no, se volverá al espacio y se planteará de nuevo esta actividad.

El modelado de sólidos con plastilina permite considerar al sólido como modelo macizo y centra la atención sobre si las caras son planas o curvas, si tienen aristas o no, si éstas son rectas o curvas. Cabe comentar que cuando en la actividad T-2c se pide que se modelen sólidos con plastilina, o en la actividad T-3b se pide que se transformen sólidos en poliedros dados, más que a la perfección de la construcción, el profesor atenderá a si el estudiante trata de plasmar las características esenciales que permiten distinguir los ejemplos de la familia considerada, o las características que diferencian la familia de partida del ejemplo de otra familia que se tiene que obtener a partir de él (diferencias entre el cono y la pirámide, el cilindro y el ortoedro, etc.). También se incidirá en las relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre sus elementos, pues, como indica Freudenthal (1983, p. 235) para el paralelismo, que se puede extender a la perpendicularidad, los modelos físicos proporcionan un contexto muy rico para estudiar estas relaciones:

> El paralelismo como objeto mental comienza a edad temprana. El paralelismo se percibe en el contexto de las formas rígidas, y la primera y mejor manera de hacerlo es exactamente en este contexto. A un sujeto se le muestran las aristas paralelas de una regla, de una hoja de papel, de una caja, y se le pregunta qué les ocurre si se mueve el objeto. No se si alguien ha realizado este

experimento, pero cualquiera que haya estudiado el comportamiento de los niños no tendrá la más ligera duda de que la conservación del paralelismo se constituye pronto.

B) La construcción de sólidos mediante el desarrollo. Al llevar a cabo la actividad T-1g resulta conveniente reflejar que si bien es posible desmontar el cubo para obtener un desarrollo que corresponde a una cinta de cuadrados (un rectángulo formado por 4 cuadrados) con un cuadrado a cada lado, y también es posible obtener un desarrollo del ortoedro formado por una cinta de rectángulos (rectángulo formado por 4 rectángulos) y un rectángulo a cada lado (que puede ser cuadrado), al desmontar el romboedro de esta manera, podemos dejar los dos rombos uno a cada lado, pero con los otros 4 rombos no se obtiene un rectángulo, ni un paralelogramo. Asimismo, al plantear esta misma actividad para otras familias (actividades T-7b y T-7c) podremos destacar de nuevo, deshaciendo los modelos construidos con cartulina, que sólo para los prismas rectos podremos asegurar que alguno de sus desarrollos son tiras (rectángulos) y un polígono a cada lado.

C) Procedimientos de generar sólidos. El generar sólidos por los procedimientos que describimos en T-5d y T-6c amplía el mundo de los ejemplos de los prismas, antiprismas o pirámides que proporciona el material comercializado que consta de polígonos.

En estas actividades centramos la atención en las limitaciones que tiene el material para construir ejemplos de las familias estudiadas e introducimos los sólidos oblicuos de estas familias. Y si bien ya hemos mostrado varios modelos de prismas (antiprismas, pirámides o bipirámides) oblicuos con la actividad en la que mostramos ejemplos y no ejemplos de la familia correspondiente, y es necesario que los ejemplos se hayan visto como modelos antes que como armazón, (como hemos indicado en los comentarios de las tareas de la fase 1), son estos procedimientos los que proporcionan un recurso accesible para poder visualizar un modelo oblicuo concreto del que no tengamos construido su modelo.

La construcción de un modelo oblicuo con cartulina no es tarea fácil. Construir los polígonos bases y juntarlos con gomas para tener la pieza clave que permita visualizar una variedad de prismas tiene muchas menos dificultades. Con esta pieza podremos generar armazones de prismas con las mismas bases y la misma altura en los que la base la hemos materializado, de manera que lo que cambia en ellos es su inclinación. También podemos obtener prismas, más o menos "altos" (como los de la figura 2.7) con la intención de romper con la imagen visual, muy común entre los estudiantes, de que los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides no pueden ser "muy bajitos".

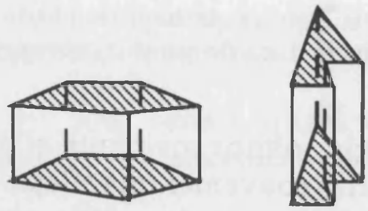


Figura 2.7

Dado que el construir dos polígonos iguales que sean cóncavos no tiene demasiadas dificultades, podemos elegir este tipo de polígonos como bases de la unidad con la que realizamos nuestro experimento y facilitaremos así que se incluyan los sólidos cóncavos (de los que también habremos presentado modelos en las actividades de introducción de las familias a partir de ejemplos y no ejemplos) en el objeto mental de la familia correspondiente. En consecuencia, con estos procedimientos de generar sólidos, al igual que con las actividades de mostrar ejemplos y no ejemplos pretendemos que los estudiantes construyan un objeto mental de la familia de sólidos correspondiente que incluya los sólidos rectos y oblicuos, los cóncavos y los convexos.

También hay otras actividades que centran la atención en este aspecto, además de pretender que se lleguen a establecer algunas características visuales de las familias de sólidos estudiadas. Las actividades T-5e, T-7e pueden ayudan a centrar la atención en que los prismas y los antiprismas pueden tener dos caras cóncavas, siempre que sean iguales y se junten con paralelogramos, o triángulos, según la familia; pero no pueden tener más de dos caras cóncavas, pues en ese caso no sería prisma, o no sería antiprisma. Además se pone énfasis en que estas familias tienen dos caras iguales, que pueden ser cualquier polígono, y las otras son o paralelogramos (que pueden ser paralelogramos, rectángulos, rombos o cuadrados) o triángulos respectivamente. Para las pirámides se resalta que tienen una cara que puede ser cualquier polígono y las otras son triángulos. Pero es necesario señalar de nuevo lo que ya hemos apuntado en el apartado 2.3.3: para que se lleguen a descubrir estas características para estas familias en este nivel, puede ser que el profesor tenga que dirigir la actividad, apoyándose en la construcción de varios ejemplos.

Las actividades T-6d y T-7g centran la atención en que los cortes paralelos a las bases en los prismas y cilindros produce nuevos ejemplos de la familia y en las pirámides y los conos se obtiene un ejemplo más pequeño y otro sólido que no lo es, y que tampoco es prisma ni cilindro. Estas actividades también proporcionan experiencias para llegar a comprender propiedades de estas familias; por ejemplo, que las secciones paralelas a la base, en todas estas familias tienen la misma forma que la base pero en los prismas y cilindros son todas ellas iguales y en las pirámides y los conos se van haciendo más pequeñas a medida que nos acercamos al ápice. Freudenthal (1983, pp. 299-300) justifica claramente la utilidad de este tipo de actividades:

> Tomemos el caso de un prisma - no necesariamente triangular. A los niños de 12 años, e incluso a los mayores, no les falta el vocabulario sino más bien la habilidad matemática para describir esta clase de superficies. El suministrar al niño una descripción da testimonio de una falta de entendimiento didáctico, pero la huida en el desarrollo no es más justificable. Uno debería explotar más el hecho de que hay estructuras de superficies de los sólidos, y se hace más eficiente construyendo los sólidos de plastilina o patatas. Esto es entonces el camino hacia un análisis conceptual del prisma como una clase de superficies. Comienza con el modelado con plastilina, o cortando una patata, un disco, que puede ser bordeado irregularmente en sus caras. Para conseguir un prisma, uno remodela los bordes: corta piezas, perpendicularmente al disco, para conseguir un prisma recto. La construcción indica una descripción conceptual: base y cara de arriba congruentes y polígonos conectados con muros rectangulares. El paralelismo de las aristas - en el enfoque usual el elemento primero - es ahora una consecuencia. El apilar prismas de la misma clase o el serrar paralelas a la base y la cara de arriba produce nuevos prismas.
>
> Estas secciones son polígonos congruentes, relacionadas por traslaciones rectas u oblicuas - una relación que conduce a una nueva definición de prisma: un polígono movido en el espacio produce un prisma - uno recto si se mueve perpendicularmente a su propio plano. En un nivel posterior este análisis conceptual conduce a la definición del prisma sólido como el producto cartesiano de un polígono plano y un segmento línea, o incluso una línea infinita.
>
> Similarmente uno puede analizar y definir pirámides y pirámides truncadas. Las secciones paralelas a la base están colocadas homotéticamente. Así una pirámide surge por un desplazamiento homotético de polígonos planos hacia un punto, el punto cúspide. Esto conduce a una descripción unificada de prismas y pirámides, finitas e infinitas.

Estos procedimientos de generar sólidos también permiten que se lleguen a comprender y a precisar otras ideas sobre los prismas, sobre los prismas rectos y sobre los oblicuos, sobre las caras laterales y sobre las bases. Con las actividades T-6c y T-6e intentamos que los estudiantes expresen algunas ideas de estas familias, basadas en las maneras diferentes para construir los ejemplos. En T-6c la estrategia de construcción, para la que se utilizan varios polígonos iguales (que corresponden a las bases) puede conducir a una idea de prisma que lo ve como un espacio macizo formado por varios polígonos. En T-6e se generan "prismas más altos" al apilar determinados prismas. El prisma puede verse como un polígono que se traslada en el espacio. El prisma recto se produce si el polígono se traslada perpendicularmente a su propio plano. El polígono que utilizamos para la traslación es el polígono de las bases del prisma. Los polígonos que se forman en la traslación a partir de los lados del polígono son las caras laterales del prisma.

Las actividad T-7g está diseñada entre otras cosas para poner énfasis en que la idea de prisma dada en el párrafo anterior sólo puede surgir para los prismas. En estas actividades resaltamos que mientras que los prismas (entre ellos los ortoedros) y los antiprismas se pueden apilar unos sobre otros, las pirámides y bipirámides no. Y que algunos prismas cuando se apilan producen nuevos prismas pero los antiprismas no producen otros antiprismas. Por otra parte, las actividades T-6d y T-7g también facilitan la construcción de la idea de prisma mencionada en el párrafo anterior y la de pirámide y de cono, "como polígono o círculo que se desplaza en una dirección y que en este desplazamiento va disminuyendo de tamaño".

D) Las diferentes técnicas de construcción de modelos y armazones de sólidos. Elementos y relaciones sobre los que inciden. La construcción de los modelos o armazones de los sólidos con material comercializado incide en la apreciación de los elementos de los sólidos y prepara para hacer un análisis de ellos de primer orden; las otras técnicas descritas promueven la identificación de relaciones (de paralelismo y perpendicularidad) entre sus elementos; favorecen que se lleguen a comprender las relaciones de paralelismo que hay, por ejemplo, entre las bases o entre las caras laterales y las bases. Si bien en este nivel de razonamiento (el nivel 1) no se explicitan estas relaciones, los estudiantes ya pueden hacerse una idea de ellas; se está preparando para un análisis local de la estructura de los poliedros. Por ejemplo, en este nivel aunque no se sea capaz de enunciar las propiedades de los prismas y antiprismas, "que las bases son iguales y paralelas", o la propiedad de los prismas rectos, "que las caras, o las aristas, laterales son perpendiculares a las bases", sí que se puede señalar cómo hay que desplazar un polígono respecto a otro y cómo no hay que hacerlo, si queremos obtener un prisma (un antiprisma). También se percibe que en unos casos las aristas quedan *inclinadas* respecto a las bases y en otros prismas quedan *rectas*. Con la actividad T-8b se pretende que los estudiantes basen sus juicios en las características visuales que se han percibido sobre las familias de los prismas rectos y oblicuos a partir de todas las actividades en las que estas familias se han considerado.

A través de las experimentaciones se ha puesto de manifiesto, por un lado, que los estudiantes sólo asocian la igualdad de aristas laterales a los prismas rectos. Cuando se centra la atención sobre las varillas que hay que seleccionar para construir armazones, si bien se percibe la igualdad para las varillas de las aristas laterales cuando el prisma es recto, no es así para los oblicuos. Los factores perceptivos de los modelos entorpecen en este caso la lectura geométrica. Se suele indicar que en los prismas oblicuos las varillas no son iguales. Y esta idea errónea está muy arraigada en los estudiantes. Perdura, o aparece en algunos momentos, cuando los estudiantes ya han logrado las características asociadas al nivel 1 y en sus razonamientos reflejan bastante dominio de las características asignadas al nivel 2.

Por otra parte, las investigaciones también han mostrado que en la identificación del paralelismo de las aristas hay distractores de los que Vinner & Hershkowitz (1983) llaman *distractores de orientación* (ver el apartado 1.2.1) y Laborde (1996) llama *dominio de interpretación*. Cuando los prismas se presentan apoyados sobre las bases, por una parte, por razones perceptuales, la mayoría de los estudiantes perciben que las aristas laterales están *rectas* respecto la base en los prismas rectos e *inclinadas o torcidas* en los prismas oblicuos, pero, cuando los modelos se apoyan sobre un vértice o sobre una arista, la identificación, aunque sea a nivel visual, del paralelismo o perpendicularidad de elementos representa una dificultad. De ahí que sea conveniente el mostrar los modelos en diferentes posiciones, además de en la estándar, para que se llegue a comprender la conservación de la igualdad y paralelismo de caras o aristas y la perpendicularidad entre caras laterales y bases. La actividad T-8b tiene como propósito que se preste atención a ello.

E) La idea de bases y de caras laterales. Queremos hacer hincapié en el hecho de que a partir de los procedimientos de construcción descritos, las ideas que surgen para bases de una familia, no se sustentan en la posición de la figura y remarcan la diferencia entre las caras laterales y las bases.

El que la posición de los objetos influye considerablemente en su identificación ha sido subrayado por varios investigadores (Vinner & Hershkowitz, 1983; Laborde, 1996). Freudenthal también comenta este problema en varias ocasiones; a algunas ya nos hemos referido antes. Incluso se aventura a pronosticar que esto es una consecuencia de la enseñanza recibida, que tiende a mostrar los objetos con dibujos, en una posición dada; señala que esta posición no aparece cuando los objetos se muestran en un contexto topográfico, y que uno se puede desprender de ella cuando se está ya en el contexto geométrico de las formas rígidas reproducibles por congruencia o semejanza.

Nuestras experimentaciones también nos mostrado lo arraigada que está en los estudiantes la idea de que las bases de los ejemplos de una familia son la cara en la que se apoya la figura y la opuesta, y que las ideas son muy persistentes. Hay que señalar en varios contextos y en diferentes tiempos que las bases de una familia no son necesariamente las caras en las que apoyamos el ejemplo, sino las que cumplen las propiedades que hemos mencionado (que corresponden a las diferentes ideas de la familia que han surgido de los procedimientos de construcción).

Para las bipirámides, el problema se complica porque hay que romper además con la idea de que la base de un sólido tiene que ser cara de él. En el apartado 2.1.1 ya hemos señalado que ésta era una de las razones para tratar esta familia en la unidad de enseñanza. Hay que prestar mucha atención a que, aunque los ejemplos de esta familia no se pueden apoyar en la base y ésta no está materializada en la parte del interior de los modelos físicos que podemos hacer de ellas, está perfectamente delimitada por los lados que forman ese polígono.

Hay que tener cuidado al introducir esta familia. En la actividad T-6a lo hacemos a partir de las caras laterales de dos pirámides, mientras que en otras unidades de enseñanza que habíamos diseñado las introducíamos a partir de dos pirámides. Indicábamos que las bipirámides se obtenían al juntar dos pirámides que ajustan completamente las bases y eliminando después ésta para que quedase un espacio en el interior. Al tratar esta manera de introducir las bipirámides con niños de 6º de EGB (12 años) generó una rica discusión, parte de la ella la hemos reflejado en un protocolo que ya hemos indicado al comentar los objetivos generales del nivel 1. En este nivel no se suele aceptar algo que no se puede realizar mediante la construcción. Dado que no es posible eliminar materialmente la base de dos pirámides que se han pegado de manera que ajusten perfectamente las bases (para obtener una bipirámide), hay que tener mucho cuidado al introducir las bipirámides, especialmente con niños pequeños. De ahí que en T-6a las bipirámides las introduzcamos como los sólidos que se obtienen juntando dos pirámides después de haberles quitado las bases o como dos "picos" formados por triángulos. Será después, y para ello hemos pedido que se dé otra idea de los ejemplos de esta familia, cuando podemos llegar a precisar, basándonos en la observación de varios ejemplos, la idea que señaló uno de los niños de 12 años que participó en nuestra experimentación: "es como si dos pirámides se juntaran de manera que ajusten perfectamente las bases y después se eliminasen éstas, que ya sabemos que esto no puede ser".

F) El nombre de parte de las caras. Aparte de que el nombre de *bases* de las familias de sólidos que hemos tratado, interese especialmente porque es un término con un significado en el lenguaje corriente que se tiene que cambiar, también hay que dedicarle atención por otra razón.

Mientras que el nombre de *caras laterales* es una expresión compuesta que incluye el término *caras*, el de *bases* es un nombre simple que no incluye este término. Ante la palabra *caras* de un prisma (o de otra familia de sólidos) los estudiantes sólo se refieren a las caras laterales, como si las bases no fuesen caras (que sólo es cierto en las bipirámides). Por otra parte, los estudiantes utilizan el término *caras* para nombrar las *caras laterales*. Así, las actividades que hemos incluido en esta fase también tienen como objetivo que los estudiantes vayan enriqueciendo su vocabulario geométrico y que vayan precisando su utilización. Al comentar las actividades acerca de las ideas de las caras laterales y bases de los ejemplos de una familia dada, haremos referencia de nuevo a la idea que se precisó en T-4a y T-4b sobre cara de un poliedro, para centrar la atención en que tanto las caras laterales como las bases son caras del ejemplo. El profesor puede remitir al significado de caras de un poliedro siempre que lo considere pertinente.

2.4.3. NIVEL 1. FASE 4

Las tareas diseñadas para esta fase, tienen que ver con las mismas familias usadas en la fase 2 (el cubo, ortoedro, romboedro, cilindro, cono, esfera, prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides) y están inmersas en los procedimientos de generar sólidos que se han introducido con las actividades de esta fase. En ellas también se identifican, construyen o generan ejemplos de familias de sólidos; se buscan características visuales o funcionales de ellos y se relaciona a nivel visual familias de sólidos.

Además de parecidos también hay diferencias entre las tareas propuestas aquí y en la fase 2. En los comentarios que vamos a hacer sobre las tareas propuestas para esta fase señalamos algunas. Ahora sólo vamos a destacar que mientras que en las tareas de la fase 2 la mayoría de los sólidos que se tienen que identificar, relacionar, etc. se presentan como objetos del entorno o se muestran modelos o armazones de ellos, en las tareas de identificación de formas que planteamos para esta fase, los sólidos se exhiben inmersos en formas que pueden corresponder a poliedros inscritos unos en otros o intersectados entre sí (formas que traen a un contexto geométrico fenómenos que provienen del mundo del arte o del juego); para identificar los modelos implicados en estas formas se aplica lo aprendido con las tareas de la fase 2.

Pero no sólo las actividades de identificación de formas sino todas las actividades propuestas para esta fase tienen como propósito que los estudiantes, con pocas pistas o ayudas por parte del profesor, descubran características visuales o apliquen por sí mismos las características o relaciones que han descubierto anteriormente, con las actividades de esta fase o con las de la fase 2.

Cabe aclarar que, si bien en el apartado 1.1.2 apuntamos que las actividades de esta fase tienen que ser cuestiones abiertas, que pueden abordarse por distintos procedimientos y que alguna de ellas admita diferentes soluciones, al mirar las actividades que contienen las tareas propuestas puede parecer que no lo sean. Si bien la mayoría de las tareas incluyen actividades que hemos planteado un poco dirigidas para que se obtengan unas formas dadas, las investigaciones realizadas han mostrado que, cuando a los estudiantes que razonan de acuerdo a las características del nivel 1 se les plantean estas actividades, realizan varios intentos para resolverlas, lo que proporciona una gran riqueza a los conocimientos que generan las actividades propuestas.

Si esto no es así, porque los estudiantes ya van directamente a la solución, sugerimos que o bien se proponga que se encuentren otras soluciones posibles, o que se resuelvan de nuevo cuando los modelos de partida se colocan en una posición no estándar. También podemos proponer, dependiendo del tipo de actividad planteado, que se obtengan otras formas diferentes a la que han elaborado con las piezas de partida, que se identifiquen otros elementos, que se hagan otras descomposiciones del modelo dado, etc.

OBJETIVOS

1.– Utilizar las características visuales y los procedimientos de construir o generar sólidos que hemos puesto de manifiesto en la fase 2 en otras situaciones en las que los estudiantes deban emplear, aunque sea implícitamente, algunas propiedades o algunas relaciones de las familias de los sólidos consideradas, que se enunciarán en el nivel 2.

2.– Resolver problemas sobre identificación, construcción y descripción visual y funcional de sólidos que se obtienen juntando, cortando, descomponiendo, seleccionando o deshaciendo los sólidos con los que se trabaja. Obtención de relaciones visuales entre los sólidos implicados en los modelos obtenidos.

TAREAS

T-1 a) Pedir que se identifique la forma de las piezas de un juego de construcciones y que con las piezas se hagan construcciones. Pedir que se construyan, identifiquen las piezas de las construcciones que ha hecho el profesor y que se describan estas construcciones.

b) Mostrar una construcción hecha con prismas, pirámides, bipirámides, antiprismas y poliedros regulares. Pedir que se identifiquen todos los modelos de la construcción que pertenezcan a una familia dada, que se reproduzca la construcción y se intente describirla.

T-2 a) Pedir que con cubitos multilink se hagan cubos más grandes y cuestionar sobre el número de cubitos necesario.

b) Pedir que con un número dado de cubitos multilink, que se va variando, se construyan ortoedros. Preguntar si con un número dado de cubitos se puede construir más de un ortoedro. Plantear que con los cubitos dados se intente construir un ortoedro y que se utilicen de nuevo los cubitos para construir un ortoedro distinto del que se ha construido.

c) Dar las dimensiones (en términos de cubitos) de un ortoedro y pedir el número de cubitos que se necesitan para construirlo.

d) Cuestionar si con cubitos multilink además de ortoedros se pueden construir otros prismas. Preguntar si se pueden construir antiprismas, pirámides y bipirámides.

T-3 Poner a disposición de los estudiantes varios prismas de las familias que se muestran en la figura 2.8.

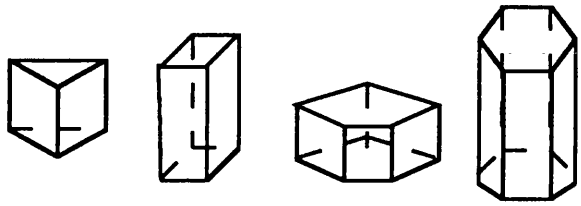


Figura 2.8

a) Separar en grupos los prismas que hay sobre la mesa y colocar juntos todos los prismas iguales. Pedir que se experimente con cada grupo de prismas para averiguar con qué prismas se puede cubrir el espacio sin dejar huecos y con cuáles no.

b) Pedir que traten de explicar por qué el ortoedro cubre el espacio y el prisma pentagonal no.

Pedir que se nombren los prismas que cubren el espacio ellos solos y que expliquen qué hace que algunos prismas dejen huecos.

c) Plantear el problema para algunos antiprismas y para algunas pirámides (el octaedro, el tetraedro u otros antiprismas o pirámides de caras regulares).

T-4 a) Repartir a los estudiantes un cubo abierto en el que se han encajado las tres pirámides iguales en las que el cubo puede descomponerse (ver apartado 2.2.1; figura 2.5a).

Pedir que se desmonte el modelo y que se identifique la familia a la que pertenecen las piezas que estaban encajadas en él.

Pedir que se coloquen de nuevo las 3 pirámides para que con ellas se rellene el cubo y que se señale en el cubo dónde queda la base y el ápice de cada una de las pirámides que se han encajado en él para rellenarlo.

Pedir que se exprese la relación que existe entre los sólidos (y los elementos de éstos) implicados en el modelo. Para ello pedir que se rellenen los puntos suspensivos de las frases siguientes: ... pirámides rellenan un cubo. El ápice de estas pirámides está en ....

Una cara de estas pirámides está en .... Estas pirámides son tan altas como... Esta arista de las pirámides es.... larga que las del cubo.

b) Plantear una actividad análoga a la anterior partiendo de un cubo en el que se han encajado 6 pirámides iguales en las que el cubo puede descomponerse (ver apartado 2.2.1; figura 2.5d).

c) Plantear una actividad análoga a la T-4a partiendo de un cubo en el que se han encajado un tetraedro y 4 pirámides triangulares iguales, de manera que se obtiene un tetraedro inscrito en un cubo (modelo descrito en el apartado 2.2.1; figura 2.5c).

d) Plantear una actividad análoga a la T-4a partiendo de un tetraedro en el que se han encajado un octaedro y 4 tetraedros iguales, de manera que se obtiene un octaedro inscrito en un tetraedro (modelo descrito en el apartado 2.2.1; figura 2.5b).

T-5 a) Repartir el modelo de un cubo y el de las 6 pirámides en que se puede descomponer el cubo dado. Pedir a los estudiantes que peguen las 6 pirámides en las 6 caras del cubo de manera que la base de cada una de las pirámides ajuste perfectamente en la cara del cubo correspondiente y el ápice quede hacia afuera (ver apartado 2.2.1; figura 2.5e).

Indicar que al sólido que se obtiene de esa manera se llama *Rombododecaedro* o dodecaedro rómbico.

Pedir que se indique el nombre del polígono de sus caras y que se explique el nombre que tiene.

Pedir que se exprese la relación que existe entre las familias implicadas en el modelo. Para ello pedir que se rellenen los puntos suspensivos de las frases siguientes: 6 pirámides iguales colocadas hacia adentro pueden formar un ... Y si colocamos esas pirámides hacia afuera forman un ...

b) Repartir un octaedro y 8 tetraedros formados todos ellos por triángulos equiláteros iguales. Pedir a los estudiantes que peguen los 8 tetraedros en las 8 caras del octaedro de manera que la cara del tetraedro ajuste perfectamente en la cara del octaedro (ver apartado 2.2.1; figura 2.5f).

Indicar que al sólido que se obtiene de esa manera se le llama *estrella octangular*.

Pedir que se exprese la relación que existe entre las familias implicadas en el modelo. Para ello plantear una actividad análoga a la indicada en T-5a.

c) Repartir un tetraedro y otros 4 tetraedros (iguales) cuya arista es la mitad que la del anterior. Pedir a los estudiantes que peguen los 4 tetraedros pequeños en las caras del tetraedro grande para obtener una *estrella octangular* (ver apartado 2.2.1; figura 2.5g).

Pedir que se exprese la relación que existe entre las familias implicadas en el modelo. Para ello plantear una actividad análoga a la indicada en T-5a.

T-6 a) Dar un modelo de un sólido de las familias estudiadas (construido con material comercializado) en el que se ha marcado uno de sus vértices. Dar también uno de los desarrollos del sólido (construido con material). Pedir que se indique qué vértices quedarán marcados en el desarrollo al desmontar el modelo para obtener el desarrollo que se ha dado.

b) Plantear la actividad anterior cuando se han marcado varios vértices del desarrollo. Ahora pedir que se indique qué vértices quedarán marcados en el sólido si se construyera a partir del desarrollo que se ha dado.

T-7 Se dispone de varios modelos de estyropor, espuma dura o de plastilina, de ejemplos de las familias de sólidos estudiadas en la fase 2.

a) Truncar modelos para obtener dos sólidos. Elegir los modelos y los cortes de manera que no se hayan utilizado en la actividad T-6d planteada para la fase 2. Preguntar por la forma del polígono que se ha obtenido como sección y si los dos sólidos obtenidos son de la familia del sólido de partida.

b) Para los modelos de prismas pedir que se busquen otros cortes que también dividan al sólido en dos prismas. Preguntar por la forma de las bases y si éstas y la altura de los prismas obtenidos son iguales a las del prisma de partida.

c) Truncar modelos para producir semiesferas, trozos de esferas (casquetes), gajos de esfera (huso esférico) y otras formas sólidas. Pedir que se reproduzcan los cortes que producen estos sólidos concretos o se explique cómo hay que hacerlos en cada caso.

d) Truncar las esquinas del cubo y del tetraedro para producir las piezas de los puzzles que hemos indicado en T-4c y T-4d. Pedir que se nombren los sólidos que se obtienen y que se reproduzcan los cortes o se explique cómo hay que hacerlos.

Pedir que se expresen las relaciones que existen entre los sólidos implicados.

e) Repetir la actividad anterior cuando se truncan las esquinas del cubo, del octaedro y del tetraedro para dividir el poliedro dado en dos partes iguales. En este caso, en vez de pedir el nombre de los sólidos obtenidos, preguntar si son iguales.

T-8 Se dispone de cubos de estyropor, espuma dura o plastilina y de cilindros, conos y esferas de plastilina.

a) Pedir que se hagan cortes en modelos y se identifique la forma de los polígonos que se obtienen como sección.

b) Hacer los cortes siguientes: a) en el cilindro producir una sección rectangular y circular, b) en el cono una sección triangular y circular y c) en la esfera una sección circular. Para cada corte pedir que se identifique la forma de la sección.

c) Cortar en una esquina del cubo para producir un triángulo equilátero. Luego continuar cortando mediante planos paralelos al primer corte. Preguntar por la forma de las secciones obtenidas.

d) Pedir que en un cubo construido con polydron o troquelados, se señalen cortes que proporcionan triángulos como sección. Después hacer las siguientes preguntas:
¿Qué triángulos obtienes como sección de corte? ¿Cómo haces el corte para obtenerlos? ¿Es posible obtener triángulos como los de un cartabón?

e) En un modelo sin tapa, construido con polydron o troquelados, introducir polígonos que corresponden a secciones del modelo correspondiente. En un modelo como ese pero con tapa pedir que se indique cómo hay que hacer los cortes en él para obtener esas secciones.

f) En un modelo de un sólido señalar con tiza, o con bolígrafo, secciones que tendrán forma de triángulo, cuadrado, rectángulo, hexágono irregular, hexágono regular, o pentágono. Preguntar por la forma que tendría en cada caso la sección que obtendríamos si realizáramos ese corte.

T-9 Proveerse de los modelos que reflejan pares de poliedros regulares inscritos uno en otro, que se muestran en las láminas VII y VIII de las páginas 130 y 131 (apartado 2.2.2).

a) Repartir los siguientes modelos: un tetraedro inscrito en un tetraedro, un octaedro inscrito en un cubo y un cubo inscrito en un octaedro.

Para cada modelo pedir que se identifiquen los sólidos que lo forman y que se expresen las relaciones que existen entre los sólidos implicados.

b) Repetir la actividad anterior para los modelos siguientes: un cubo inscrito en un dodecaedro, un octaedro inscrito en un icosaedro, un tetraedro inscrito en un dodecaedro, un tetraedro inscrito en un icosaedro. En este caso, pedir que se identifiquen sólo los sólidos que les resulten familiares.

c) Repetir la actividad T-9a para la estrella octangular y para el compuesto del cubo y el octaedro.

T-10 a) El profesor junta con varillas un vértice del cubo con cada uno de los vértices no vecinos a él para descomponer el cubo en las 3 pirámides iguales que describimos en el apartado 2.2.1 (figura 2.5a).

Pedir que se identifiquen los sólidos en los que se ha descompuesto el cubo. Pedir que se expresen las relaciones que existen entre los sólidos implicados.

b) Plantear la actividad anterior para un cubo descompuesto en 6 pirámides iguales (ver apartado 2.2.1; figura 2.5d).

c) El profesor introduce una diagonal en cada cara del cubo, de manera que se juntan de tres en tres. Obtiene así un modelo del tetraedro inscrito en el cubo (ver apartado 2.2.1; figura 2.5c). Plantear la actividad T-10a para este modelo.

d) En el modelo de un cubo (octaedro) con las caras de plástico transparente el profesor introduce varillas que unen centros de caras vecinas, para obtener un octaedro (cubo) inscrito en un cubo (octaedro) (ver apartado 2.2.2; lámina VII;). Plantear la actividad T-10a para estos modelos.

e) El profesor presenta el armazón de una estrella octangular y del modelo compuesto del cubo y octaedro (ver apartado 2.2.2; lámina VIII). Plantear la actividad T-10a para cada uno de estos modelos.

COMENTARIOS

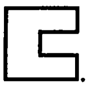
Descripción general de las tareas

En las tareas que hemos diseñado para esta fase, al igual que en las tareas de la fase 2, se identifican formas, (tareas T-1, T-9 y T-10); se generan o construyen sólidos por los procedimientos indicados (tareas T-2 a T-10, excepto la T-6); se buscan características visuales o funcionales de algunas familias de sólidos (tareas T-2 a T-10, excepto la T-6); se relacionen a nivel visual familias de sólidos (tareas T-2 a T-10 excepto la T-3, la T-6 y la T-8) o del plano y del espacio (la tarea T-6 conexiona el modelo de un sólido con alguno de sus desarrollos y la tarea T-8 relaciona sólidos con polígonos).

Para que los estudiantes lleguen a establecer las relaciones que hay entre determinadas familias de sólidos o entre elementos del plano y del espacio, y puedan delimitar las características de estos sólidos, las actividades las planteamos inmersas en procedimientos de generar sólidos. Se juntan cubitos (tarea 1), se juntan figuras iguales de alguna de las familias estudiadas (tareas T-2 y T-3), se construyen puzzles (tarea T-4), se juntan piezas (tarea T-5), se truncan sólidos (tarea T-7), se descomponen sólidos encajando en ellos polígonos (tarea T-9) y se descomponen sólidos con varillas (tarea T-10). En la tarea T-8 se truncan sólidos, o se encajan polígonos en ellos. Y en la tarea T-6 se desmontan modelos para trasladar la información dada en el modelo de un sólido a uno de sus desarrollos y a la inversa.

La mayoría de las tareas que hemos diseñado para esta fase contienen alguna actividad que tiene que ver con la identificación de formas como ejemplos de una familia que se tiene que delimitar. Tienen como objetivo que los estudiantes basen sus juicios en las características que se han incorporado en los objetos mentales construidos para las familias de sólidos (o sólidos) y de los polígonos a partir de las actividades de la fase 2, y que se amplíen éstos incorporando en ellos otros modelos que también pueden corresponder a fenómenos que se organizan con los conceptos estudiados. Pero antes de pasar a esclarecer este tipo de tareas vamos a detenernos brevemente con otras (tareas T-2 y T-3) que también tienen como objetivo el perfeccionamiento del conocimiento que se tiene sobre las familias de sólidos consideradas en las actividades de la fase 2.

Sobre las tareas propuestas. Aportaciones de las investigaciones y de las experimentaciones.

Las tareas T-2 y T-3 contienen actividades en las que se rellena un espacio. La tarea T-2 permite introducir una primera idea de volumen y, para los sólidos sencillos (el ortoedro o el cubo) introducimos un procedimiento para hallarlo. Para hallar el volumen de una caja se introducen cubos y después se cuentan. Se puede centrar la atención en la relación que hay entre las dimensiones del sólido y el volumen de éste (actividad T-2c), que aunque no se haga explícito en este nivel, sienta las bases para que pueda hacerse en el nivel 2. También se pueden remarcar propiedades de la unidad de volumen estándar (por ejemplo, que cubre el espacio completamente, sin dejar huecos) y destacar propiedades relativas al volumen de formas tridimensionales. Por ejemplo, la actividad T-2b destaca que ortoedros diferentes pueden tener el mismo volumen. La actividad T-2d pretende subrayar que los prismas que pueden cubrirse o construirse con cubos son los ortoedros (en particular el cubo) y los prismas cóncavos que pueden obtenerse juntando ortoedros[9]; por ejemplo los prismas que tienen por bases este polígono: .

En la tarea T-3 extendemos a los prismas rectos de bases regulares y a otras familias el papel que desempeñan los cubos en la tarea T-2. Pretendemos que a partir de la experimentación los estudiantes comprueben que algunos prismas rellenan el espacio y los antiprismas las pirámides y bipirámides, en general dejan huecos.

Planteamos la actividad para prismas rectos de la misma base pero con diferentes alturas (de manera que todos los prismas de una retícula tengan la misma altura) para llegar a establecer que una forma inmediata de rellenar el espacio y por lo tanto de formar retículas espaciales, consiste en construir las retículas planas correspondientes. Convertimos el problema en un problema del plano: para ver si los prismas rectos rellenan el espacio comprobamos (experimentalmente) si el polígono de las bases rellena el plano o no. Si el profesor lo considera oportuno, porque pretende desarrollar la creatividad de sus estudiantes, puede plantear la actividad para prismas rectos de la misma base, para los cuales varía la altura de los que forman una misma retícula. Puede así explorar diferentes diseños de retículas de prismas, tomando como base la retícula poligonal dada.

En la actividad T-3c es necesario utilizar pegamento para poder juntar los tetraedros y así construir parte de la retícula. La mayoría de los estudiantes que participaron en nuestras experimentaciones y realizaron la actividad de forma experimental, agrupando y pegando tetraedros, llegaron a situaciones en las que pegaban 5 tetraedros por cada arista y según expresaban "cabían perfectamente". Concluyeron que el tetraedro rellenaba el espacio. Después de que sugerimos que no utilizasen el material de los

[9] Dado que en estas actividades los modelos se obtienen juntando cubitos no discutimos el problema que podría surgir cuando las longitudes de las aristas del prisma obligaran a cortar los cubitos para cubrir completamente el espacio.

troquelados sino el de plástico duro (polydron o creator) y que ajustasen muy bien las caras de los tetraedros que se juntaban, fueron los propios estudiantes los que observaron que al agrupar tetraedros para formar tetraedros más grandes quedaban huecos interiores que no eran tetraedros; respondieron que "cinco tetraedros en una arista casi ajustaban pero les faltaba un poco" "tendrían que estar un poco menos abiertas las caras para que ajustaran perfectamente".

Las tareas sobre identificación de formas. En estas tareas los estudiantes tienen que identificar y nombrar sólidos o polígonos de las familias con las que ya se tiene una cierta familiaridad pero que se presentan implicados en modelos o formas tridimensionales que dificultan su identificación. Vamos a comentar por separado cada manera de exhibir los sólidos porque la identificación de los poliedros o polígonos implicados conlleva diferente dificultad.

A) En la tarea T-1 los sólidos se presentan inmersos en una estructura. Si los estudiantes no pueden identificar las piezas, el profesor puede sugerir que se desmonte la estructura, se observen e identifiquen las piezas, se construya de nuevo, y se responda a la actividad planteada.

En esta tarea, además de la identificación de formas, pedimos a los estudiantes que describan las construcciones realizadas, que den datos sobre ellas a un compañero/a (o a varios) para que sin verlas pueda reproducirlas; la descripción de las estructuras construidas es un buen incentivo para crear medios lingüísticos.

B) Las actividades de las tareas T-4 a T-8, excepto la T-6, son actividades de *puzzles y truncamientos* que perfeccionan la identificación de sólidos o polígonos como ejemplos de una familia dada.

En las actividades incluidas en T-4 si bien las piezas se presentan inicialmente encajadas en un modelo, se pide que se desmonten para encajarlas de nuevo. Las piezas que hay que identificar corresponden a modelos de sólidos; para señalar dónde están colocados algunos elementos de estas piezas también se puede recurrir, si es necesario, a desmontar de nuevo el puzzle y construirlo de nuevo observando lo que nos interesa.

Para reconocer las formas que se obtienen en T-7 y T-8, al truncar sólidos, se pueden observar separadas de otras formas. Pero vale la pena advertir que este procedimiento de obtención de sólidos deforma bastante las características esenciales de los sólidos obtenidos. Hay que abstraer las imperfecciones que se producen en las caras al cortar y tener mucho cuidado para hacerlo. Si se trabaja con niños es aconsejable que sea el profesor el que realice con cuidado los cortes señalados e insistir en que hay que tener mucho cuidado para hacerlo.

La tarea T-8 incluye actividades en las que se encajan polígonos en modelos abiertos. Con estas actividades se evita el problema de la imprecisión de las secciones que se obtienen al cortar y centran la atención en la forma de la sección que se produce, pero también tienen inconvenientes. Los niños pequeños tienen problemas para encajar adecuadamente el polígono en la sección indicada para ello. Además, si nos fijamos en las actividades T-8d y T-8f que, como las otras actividades incluidas en esta tarea, se refieren a la identificación de la forma de las secciones que producen determinados cortes en un sólido dado, la dificultad aún es mayor. En ellas se tiene que imaginar la forma de hacer el corte, o la forma de la sección, a partir del "borde" dibujado en el modelo de un sólido. Las actividades que hemos planteado anteriormente en las que se encajan polígonos nos parecen completamente necesarias para que los estudiantes puedan imaginar la forma de la sección producida. Y aún así, como hemos comprobado en nuestras experimentaciones, será muy probable que alguno de los estudiantes que tienen la visión espacial poco desarrollada, tenga que apoyarse en los polígonos y el sólido, para verificar sus predicciones sobre la forma de la sección.

Las actividades incluidas en estas tareas de *puzzles y truncamientos* no sólo mejoran la identificación de sólidos o polígonos como ejemplos de una familia dada (como ya hemos indicado) sino que además muestran los milagros del "encaje" en el estudio de los sólidos. Pretenden que se conexione el plano con el espacio y los poliedros entre sí; que se relacionen visualmente los sólidos entre ellos o con figuras planas (las que se obtienen como sección) y que se expresen estas relaciones.

Varios prismas forman un prisma. Tres pirámides forman un cubo de manera que la base de éstas está sobre las caras del cubo y el ápice está al otro lado. Seis pirámides rellenan un cubo y hacia afuera forman un rombododecaedro. Un tetraedro se puede inscribir en un cubo con los vértices del tetraedro en vértices del cubo. Un cubo puede descomponerse en un tetraedro y 4 pirámides. Cuatro pirámides y un octaedro forman un tetraedro; si el octaedro está apoyado en una de las caras, estas pirámides se añaden a la cara del octaedro que queda arriba y a las 3 de la cinta que quedan boca abajo. Un cubo se puede incribir en un octaedro con los vértices del cubo en el centro de las caras del octaedro y un octaedro se puede incribir en un cubo con los vértices del octaedro en el centro de las caras del cubo.

Si los niños en estas actividades no centran la atención sobre las relaciones que se han introducido en las actividades anteriores, que suele ocurrir muy a menudo cuando a los estudiantes, especialmente a los niños pequeños, se les da un modelo nuevo y se les deja hacer, el profesor dirigirá de nuevo la actividad, utilizando los modelos necesarios, para descubrir otra vez estas relaciones. Si bien en las actividades de esta fase, la tarea del profesor es diferente que para las actividades de la fase 2, su intervención también es imprescindible. Y aunque en algún momento se puede dejar que la imaginación de los estudiantes aflore para la construcción de nuevas formas sólidas, no se puede olvidar que uno de los objetivos de estas actividades es que permitan la búsqueda de relaciones. Pues aunque estas relaciones en el nivel 1 se expresen a nivel visual, como hemos indicado ya, también propician el uso de relaciones y propiedades matemáticas por parte de los estudiantes que hayan iniciado la adquisición del nivel 2, o sientan las bases para que posteriormente puedan hacerlo los estudiantes que aún no han iniciado el dominio de este nivel.

C) En las tareas T-9 y T-10 se tienen que reconocer sólidos sencillos (el cubo, el tetraedro o el octaedro) cuando éstos se presentan en modelos que contienen sólidos inscritos o intersectados unos en otros.

La actividad T-9a relaciona pares de modelos conocidos cuando se presentan inscrito uno en otro de manera que los vértices del inscrito yacen en los centros de las caras del circunscrito. Los modelos tienen que estar construidos de manera que se vea el poliedro que queda en el interior. Si los estudiantes tienen problemas para identificar los sólidos implicados en esta actividad, podemos aprovechar el recurso del color (pues facilita la tarea). Podemos construir un modelo del poliedro inscrito de un color que resalte bastante; el armazón del poliedro circunscrito de otro color, y podemos pegar las caras a este armazón, construidas de plástico transparente para que se pueda ver el poliedro inscrito. La actividad T-9b presenta pares de modelos como los de T-9a, pero en T-9b sólo uno de los sólidos del par (que forman el modelo que se presenta) pertenece a las familias que ya se han estudiado.

Las actividades T-10a, T-10b y T-10c incluyen modelos en los que para los poliedros que recubren uno dado o para el poliedro inscrito en otro, se dan los armazones. Resulta muy difícil para los estudiantes visualizar que al introducir varillas en un cubo, juntando los vértices opuestos, o uniendo un vértice con todos los demás, se descompone al cubo en 3 o 6 pirámides respectivamente.

En los comentarios de las tareas de la fase 1 del nivel 1 ya hemos indicado que resulta más difícil identificar un sólido cuando se da el armazón que cuando se da el modelo. Este problema se agudiza cuando en modelos de pares de poliedros se da el armazón del poliedro inscrito en vez de presentar un modelo del mismo. Con el armazón es difícil delimitar las caras de los poliedros, y más aún si éstos están incluidos en otros. Aunque los modelos de los poliedros circunscritos tengan las caras transparentes, los elementos de estos poliedros interfieren en la identificación de los modelos inscritos en ellos. El problema de la visualización tiene implicaciones serias en la identificación de estas formas. Hay que prestarles la debida atención.

Es muy probable que al abordar la tarea T-10, sea necesario volver de nuevo a actividades que ya se han realizado. Para poder resolver la tarea T-10 muchos estudiantes tienen que resolver de nuevo las tareas de puzzles (tarea T-4) o actividades en las que se encajan polígonos en modelos abiertos para inscribir un modelo en otro, o se presentan modelos de sólidos inscritos en vez de armazones de ellos (tarea T-9).

Las actividades T-9c y T-10e incluyen un trabajo con modelos, o armazones, formados por pares de modelos intersectados. Éstos también se pueden ver como un agregado de varios sólidos. Con estas actividades remarcamos cómo un modelo puede mostrar relaciones entre diferentes sólidos. Por ejemplo, la estrella octangular puede verse como la intersección de dos tetraedros iguales, o como el agregado de un octaedro y 8 tetraedros, de manera que todos los sólidos que forman la estrella se forman con los mismos triángulos; las aristas de todos ellos tienen la misma longitud.

Cuando estas actividades las hemos llevado a cabo con los estudiantes, lo usual es que los modelos intersectados los vean como agregados de sólidos. Y también hay algunos estudiantes que reconocen el modelo como sólidos intersectados, aunque no se haga explícito. En las experimentaciones realizadas con niños de 12 años, cuando preguntamos a dos de ellos si la estrella octangular y el compuesto del cubo y octaedro correspondían cada uno de ellos a modelos de un poliedro o de varios, y les pedimos también que si los veían como varios poliedros, dijeran cuántos, obtuvimos las siguientes respuestas. La transcripción es textual, tal y como ellos la habían escrito en el papel.

E1: La estrella octangular sí [se refiere a que sí que es poliedro], porque el espacio está delimitado por polígonos. Podría verse como 2 pirámides juntas que no las podemos sacar u 8 pirámides.

E2: La estrella esa sí, porque es como una bipirámide pero con más pirámides. Son varios poliedros juntos. Son 8 pirámides equiláteros.

Respecto al compuesto del cubo y el octaedro respondieron:

E1: Varios: 1.) Un cubo y una bipirámide cuadrangular o 2.) 14 pirámides 8 triangulares y 6 cuadrangulares. Y como un cubo y un octaedro.

E2: Varios. 7 poliedros 6 pirámides ~~cuadradas~~ de base cuadrada y un cubo.

Cabe comentar la influencia que tienen las estrategias y los procedimientos utilizados para obtener o generar modelos de sólidos en las ideas que se forman de ellos. La idea que se deduce de los puzzles y de otras formas dinámicas de construir los modelos que presentamos en T-9c y T-10e es que estos modelos están compuestos de diferentes espacios encerrados (se les llama *celdillas*.). Estas celdillas son las que se añaden a las caras de un poliedro para obtener otro. Para algunos estudiantes esta idea entra en contradicción con otra idea de poliedro, en la que se ha insistido especialmente con las bipirámides: en los poliedros sólo hay un espacio interior. La siguiente conversación, entre estudiantes de Magisterio de la asignatura optativa de geometría, muestra que este problema lo enfrentan los estudiantes y cómo tratan de explicarlo. La idea de poliedro que prevalece es la que proviene de las familias de sólidos que se han estudiado; la que ve un poliedro como una superficie que encierra perfectamente un único espacio.

E1: El modelo son ocho tetraedros iguales juntos [se refiere a la estrella octangular].
E2: Te has dejado el octaedro, al que le pegas los tetraedros.
E3: No. Ese no se ve.
E2: Sí.. pero... Recuerda las actividades de los puzzles. Pegando a caras del de ocho triángulos sale éste [Se refiere a la estrella octangular] con picos.
E1: Pero tenemos que quitar las caras; como en las bipirámides.... Para que sea sólo un hueco, no dos o más. En las bipirámides la base no es cara. Pues aquí esos triángulos del sólido soporte, tampoco son caras de éste [Se refiere a la estrella octangular].
E2: Pues es como con las bipirámides, las caras se quitan pero si tienes que decir cómo lo haces pues tienes que decir el de ocho caras triángulos. Así es más fácil.
E1: Ponemos, o imaginamos que lo ponemos, pero mejor ponerlo y está ahí y luego imaginas que lo quitas para que sólo quede un hueco.
E2: Pero yo sigo pensando en que hay que decir el sólido de ocho triángulos también. En las bipirámides dices que son dos pirámides y que la base no es cara. Pues aquí hay que decir que son ocho tetraedros que se añaden a las caras del ¿octaedro? y hay que decir también que las caras no son, que sólo tiene que quedar un hueco.
E1: Sí, así queda más claro cómo van a estar los picos. Porque también podría ponerlos de otra manera.

Estos modelos de poliedros intersectados que presentamos en las actividades T-9c y T-10e también pueden verse en relación con los que hemos incluido en las actividades T-9a y T-10d. Las experimentaciones que hemos realizado con estudiantes de Magisterio nos han mostrado que sólo los estudiantes que tienen una visión espacial desarrollada pueden observar esta transformación con relativa facilidad. Hay estudiantes que hacen observaciones sobre los dos tipos de modelos y el paso de uno a otro, sin haberlo sugerido nosotros aún, como muestra la siguiente observación de uno de ellos: "Mira ese crece y atraviesa y sale y tienes ese... Es como si atraviesa y se para al llegar a tocarse en las varillas". Hay otros estudiantes que necesitan de otro modelo intermedio para poder visualizar que a partir del modelo en el que los vértices de un poliedro yacen en los centros de las caras del otro se puede pasar al modelo en el que las aristas de ambos poliedros que forman el par se cortan perpendicularmente. El profesor prestará atención especial a estos estudiantes cuando se hagan en clase las actividades T-9c y T-10e.

Las respuestas a estas actividades pueden informarnos también qué estudiantes reflejan ya indicios de un cierto dominio del nivel 2. Estos estudiantes utilizan propiedades de los sólidos implicados en los modelos correspondientes para explicar a otros compañeros, o al profesor, sus respuestas a las actividades propuestas.

Sobre el lenguaje

No queremos finalizar este apartado sin referirnos al lenguaje, bien al que esperamos que utilicen los estudiantes en sus respuestas a las actividades planteadas, bien al que utilizamos nosotros para hacer las cuestiones necesarias para dirigir la actividad.

Ya hemos adelantado en el apartado 2.3.3 que para las actividades propuestas en esta fase, los estudiantes se apoyarán en modelos concretos para dar las respuestas. Vamos a remarcarlo aquí de nuevo, utilizando otros ejemplos que aclaren lo que hemos esbozado en este apartado. Lo primero que queremos dejar claro es que las actividades planteadas para esta fase no pretenden que los estudiantes utilicen en sus respuestas propiedades geométricas de los sólidos implicados, o de los polígonos, ni relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre elementos; si bien puede suceder que alguna de estas relaciones se exprese visualmente o con gestos. Por ejemplo, en las actividades incluidas en las tareas T-7 y T-8, en la que se truncan sólidos, o se encajan polígonos, cuando pedimos que se explique cómo hay que hacer los cortes, o encajar los polígonos, para obtener sólidos dados, o para obtener algunos polígonos como sección, entre los estudiantes que razonan de acuerdo a las características del nivel 1 son usuales respuestas como la siguiente: "Hay que cortar por aquí , por esta esquina [Y señala por dónde en el modelo], así...[Y se muestra con la mano la inclinación del corte], pero no recto...Hay que hacerlo torcido, así...".

De lo anterior se desprende la necesidad de utilizar modelos en los que los estudiantes puedan apoyar sus respuestas. En el primer nivel de razonamiento es casi imposible imaginar la forma de las secciones que producen los cortes, los sólidos descompuestos, compuestos, desplegados, etc. sin tener el modelo soporte para visualizarlo; se requiere de gran visualización espacial para ello. En cierto modo es necesario imaginar los sólidos por dentro, descompuestos, etc. El profesor tendrá que prestar atención especial a estas actividades y no debe sorprenderse si algunos estudiantes, visualmente muy pobres, no pueden responder adecuadamente hasta que puedan razonar de acuerdo con el nivel 2 y apoyarse en características geométricas de los sólidos para dar una respuesta.

El profesor puede utilizar las respuestas de los estudiantes, basadas en modelos concretos, en las que se utiliza terminología informal o se indican propiedades visuales, para introducir la terminología geométrica o las propiedades geométricas correspondientes, que permitirán que los estudiantes que ya hayan iniciado el dominio de algunas características asociadas al nivel 2 puedan hacer uso de ellas. Cabe comentar que cuando los estudiantes que razonan de acuerdo a las características del nivel 1 usan terminología geométrica, es muy usual el cambiar términos del plano por términos del espacio y a la inversa. El profesor tiene que prestar atención especial a este problema y, si bien no puede estar corrigiendo a los estudiantes continuamente, sí puede aprovechar estos errores para remarcar, utilizando modelos, el nombre de las caras (puede desmontar un modelo para reforzarlo) y el nombre del sólido completo, una vez que ya se ha construido completamente, se ha encerrado un espacio, o queda claramente reflejado que lo que se quería construir es un armazón del mismo.

En el apartado 2.3.3 ya hemos apuntado también que el lenguaje que utilizamos para hacer las preguntas de las actividades es bastante informal. Al igual que los estudiantes, muy a menudo utilizamos expresiones que se apoyan en modelos concretos, en los que hay que señalar algunos elementos o algunas secciones, y en modelos colocados de una determinada manera. Esto se refleja, por ejemplo, en los enunciados de las actividades T-4a y T-5a que planteamos para hacer notar las relaciones que existen entre los sólidos implicados en un modelo; en las frases con puntos suspensivos que hemos indicado utilizamos terminología bastante informal y las relaciones que expresamos verbalmente siempre las mostramos con los modelos correspondientes. Para las otras actividades de estas tareas, en las que se señala que se planteen actividades análogas a éstas, adecuando las frases a los sólidos implicados en cada actividad, también se darán las relaciones prácticamente enunciadas, junto con los modelos que las corroboran. Para T-5b y T-5c éstas pueden ser:

"Si a las caras del octaedro le pegamos ... tetraedros iguales se obtiene un ... Y si en vez de pegar .... tetraedros pegamos ... tetraedros se forma ..." Y si a un tetraedro le pegamos... tetraedros ... se puede formar...."

2.4.4. NIVEL 1. FASE 5

El trabajo que se realiza en esta fase por lo general se trata de un resumen de lo aprendido en este nivel. Las tareas que proponemos se refieren a recopilación en tablas de resultados ya obtenidos en otras fases y a asociar propiedades visuales, que se han descubierto antes, para determinadas familias de sólidos. También proponemos tareas en las que se tiene que relatar cómo se contaría a un amigo lo que se entiende por un sólido determinado y tareas-adivinanza. Éstas tienen como propósito que se organice lo que ya se ha aprendido con las actividades realizadas en las otras fases del nivel 1.

OBJETIVOS

1.- Adquirir una visión general de los contenidos y métodos que el estudiante tiene a su disposición.

2.- Organizar los contenidos que el estudiante tiene a su disposición.

3.- Relacionar los nuevos conocimientos adquiridos en las otras fases de este nivel con otros campos que el estudiante haya estudiado anteriormente.

TAREAS

T-1 a) Para cada una de las formas de las piezas de un juego de construcciones pedir que se indique en qué columna o columnas de la tabla siguiente podrían incluirse.

Poliedro	No poliedro	Ortoedro	Pirámide	Antiprisma

b) Pedir que se nombren ejemplos de los siguientes conjuntos: {cuerpos limitados por polígonos} y {cuerpos que no son poliedros}

c) Para varios modelos de poliedros y de no poliedros pedir que se indique en qué columna o columnas de la tabla siguiente podrían incluirse.

Todas las aristas son rectas	Tiene alguna arista curva	Tiene dos aristas	Sólo tiene una arista	No tiene aristas

Pedir que estos mismos sólidos se clasifiquen por el número de vértices (tienen varios vértices, un vértice o ningún vértice) y por el número de caras (tienen una cara, dos caras, tres caras o más de 3 caras).

d) Para los prismas, (antiprismas, pirámides, bipirámides, cilindro, cono, esfera) preguntar si son o no poliedros y pedir que se explique la respuesta.

e) Apuntar que las caras constituyen el borde del poliedro; las aristas son los bordes de las caras, y los vértices son los bordes de las aristas. Pedir que se elijan ejemplos de poliedros, se observen y se responda a las siguientes preguntas:

¿Hay poliedros que tienen caras (aristas) curvas? ¿Todas las caras (aristas) de los poliedros son polígonos (rectas)?

T-2 a) Mostrar el modelo del objeto que corresponde a cada columna de la tabla, pedir que se respondan a las siguientes preguntas. ¿Qué polígonos seleccionas para construirlo? ¿Cómo se llaman?

Pedir que se indique el número de caras, de vértices y de aristas que tiene cada modelo y que se complete la tabla. Indicar que si lo necesitan pueden utilizar polígonos para construir sus modelos y varillas para construir sus armazones.

Poliedro	Prisma Triang.	Prisma Pentag.	Antiprisma Triang.	Antiprisma Cuadrado	Pirámide Triang.	Bipirámide Triang.
Vértices						
Caras						
Aristas						

Cuestionar si puede haber poliedros con menos de 4 caras, menos de 4 vértices, o menos de 6 aristas, y pedir que se explique la respuesta.

b) Mostrar los siguientes prismas: prisma triangular, cuadrangular, pentagonal y hexagonal. Nombrarlos y pedir que se expliquen los nombres que tienen.

c) Para el cubo (el ortoedro, los prismas, antiprismas, pirámides, bipirámides) pedir que se seleccionen varios ejemplos y que se indique la forma de las caras de los ejemplos de la familia considerada.

d) Para los prismas (el cubo, ortoedro, antiprismas, pirámides, bipirámides), preguntar si pueden tener una cara que sea pentágono, o dos caras que sean pentágonos, o más de dos caras que sean rectángulos o más de dos caras que sean triángulos.

T-3 Indicar que se consideran las siguientes familias de sólidos: Pol. (Poliedro) Ci. (Cilindro), Co. (Cono) y E. (Esfera). Pedir que para cada una de las propiedades que se indican en la tabla siguiente en la columna de al lado se indiquen las familias de sólidos que las cumplen.

PROPIEDAD	FAMILIAS DE SÓLIDOS
1.– No tiene caras curvas	
2.– Tiene dos caras planas que no son polígonos	
3.– Tiene una sola cara y es curva	
4.– Tiene tres caras que no son polígonos	
5.– Tiene varios vértices	
6.– Sólo tiene un vértice	
7.– No tiene vértices ni aristas	
8.– Tiene dos aristas que no son rectas	
9.– Sólo tiene una arista	
10.– Tiene varias aristas y todas ellas son rectas	
11.– No tiene vértices	
12.– Tiene más de cinco aristas	
13.– Tiene más de tres vértices	

T-4 Pedir que se repita la tarea T-3 para las siguientes familias de sólidos: O. (Ortoedros), P. (Prismas), A. (Antiprismas), Pi. (Pirámides), Bi. (Bipirámides) y las propiedades que se indican en la tabla siguiente.

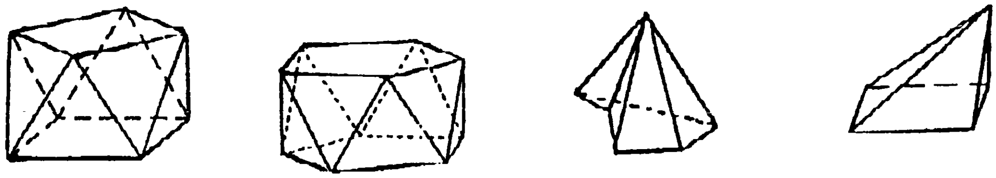
PROPIEDAD	FAMILIAS DE SÓLIDOS
1.– Tienen más de dos caras rectángulos y pueden tener dos caras de otra clase	
2.– Todas sus caras son cuadriláteros	
3.– Tienen más de dos caras triangulares y pueden tener dos caras de otra clase	
4.– Algunos ejemplos de la familia rellenan el espacio y otros no	
5.– Tienen más de dos caras triangulares y pueden tener una cara de otra clase	
6.– Rellenan el espacio	
7.– Todas sus caras son triangulares	
8.– Su armazón es rígido	
9.– Tiene algunas caras que no son rectángulos y si se apilan varios modelos en algunos casos se pueden obtener ejemplos de la misma familia	
10.– Parece un tambor	
11.– Se puede rellenar con cubos perfectamente	
12.– Se puede descomponer en 3 pirámides iguales	
13.– El cubo se puede descomponer en 6 de estos sólidos, que son todos iguales	

T-5 a) Indicar cómo podríamos contar a un amigo (que no conoce los prismas) lo que es un prisma triangular de caras regulares.

Luego pedir a los estudiantes que expliquen cómo le contarían a un amigo/a lo que para ellos es un modelo concreto (por ejemplo, del tetraedro). Apuntar que pueden utilizar ejemplos del entorno para ayudarse en su respuesta; que pueden esbozar el dibujo del sólido o de partes de él; que tienen que indicar al amigo/a todas las características del sólido que conozcan así como las relaciones con otros sólidos (por ejemplo, con el cubo).

Repetir la actividad con otros modelos.

b) Pedir que se explique que los modelos que muestra la figura 2.9 corresponden a poliedros.



(a) (b) (c) (d)

Figura 2.9

T-6 Para cada apartado de los que siguen, pedir que se descubran el(los) sólido(s) que verifica(n) las pistas que se indican en el apartado correspondiente.

a) Miguel señala un cuerpo redondo que no tiene ningún vértice.

b) Ana ha construido un cuerpo geométrico. Está totalmente formado por triángulos.

c) Estoy pensando en un sólido. Las caras son triángulos. El junto con 4 pirámides forman un cubo.

d) Estoy pensando en un sólido. Tiene varios vértices. Su armazón es rígido. Parece un tambor y también una bipirámide.

e) Pedir que se continúe jugando a las actividades-adivinanza. Indicar que se formen dos equipos, que uno de ellos piense las pistas que luego dirá de una en una para que el otro equipo descubra de qué sólido se trata y que luego se cambien los papeles. Remarcar que se pueden dar varias pistas (de una en una), tantas como sea necesario para que el otro equipo averigüe el sólido.

COMENTARIOS

Descripción general

En un tipo de tareas adecuadas para esta fase se proporcionan tablas para que se recopilen las características de determinados sólidos o para que se incluyan sólidos en determinadas familias. Las tareas T-1 y T-2 son de este tipo. En otras tareas que planteamos (tareas T-3 y T-4) enunciamos varias características y nombramos diferentes familias de sólidos y se pide que se relacionen las características visuales con las clases de sólidos que las tienen.

Tareas que proponemos que también cumplen con el objetivo de recopilar las características de familias de sólidos y sus relaciones con otros sólidos son de dos tipos: a) se propone a los estudiantes que indiquen a un amigo/a lo que para ellos es un sólido dado (tarea T-5) y b) son actividades-adivinanza, en las que se tiene que descubrir un sólido cuando se dan características de él (tarea T-6).

En esta fase también se pueden incluir actividades que relacionen lo trabajado en el nivel con otros conocimientos de los alumnos. Pero estos conocimientos dependen de la instrucción recibida en otros temas. Como la instrucción nosotros sólo la vamos a realizar con los sólidos y los polígonos, no planteamos tareas para relacionar estos contenidos con otros de otras materias.

Sobre las tareas propuestas. Aportaciones de las experimentaciones

Las tareas T-1 y T-2. Para las tareas en las que se dan tablas sugerimos que se trabaje con piezas de construcciones, cuidando que el juego correspondiente tenga piezas que tengan la forma de las familias incluidas en las diferentes tablas y que haya varios ejemplos de cada una.

Los estudiantes que razonan de acuerdo a las características del nivel 1, y especialmente los niños pequeños tienden a pensar que una vez que un modelo se ha incluido en una columna ya no hay que incluirlo en otra. En la actividad T-1a hay que remarcar que los objetos que corresponden a poliedros podemos incluirlos también en otras columnas de la tabla (que en esta actividad corresponden al ortoedro, la pirámide y el antiprisma, pero si el profesor lo considera oportuno puede cambiar o incluir también otras familias de sólidos) y todos los ejemplos de las columnas del ortoedro, pirámide y antiprisma hay que incluirlos además en la columna de los poliedros. La actividad T-1c pretende remarcar que todos los ejemplos que incluyamos en la columna de "tiene una arista" o "tiene dos aristas" también hay que incluirlos en la columna de "tiene alguna arista curva", que todos los sólidos que incluyamos en la columna "tiene todas las aristas rectas" no lo incluiremos en ninguna otra columna y que la esfera sólo hay que incluirla en la columna de "no tiene aristas". También proponemos una clasificación análoga en función del número de vértices o del número y tipo de caras (planas o curvas). La actividad T-1d intenta reforzar que los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides los incluimos como ejemplos del mundo de los poliedros y centramos la atención en las características de los poliedros relativas al tipo de caras y aristas: no pueden tener ni caras ni aristas curvas.

Las tareas T-3 y T-4. Respecto a las tareas en las que se asocian propiedades visuales a familias de sólidos, en las experimentaciones realizadas con niños de 12 años hemos obtenido evidencia de que si bien dada una familia ellos pueden delimitar si cumple una propiedad visual, o relativa al tipo de caras, les resulta bastante difícil averiguar las familias que cumplen una propiedad dada. Si los estudiantes razonan de acuerdo a las características del nivel 1, las respuestas a las tareas T-3 y T-4 están basadas en un modelo que seleccionan previamente como ejemplo de la familia, y es en éste en el que basan la respuesta sobre si una familia cumple una determinada propiedad o no.

Con estas actividades se sienta las bases para que los estudiantes se familiaricen con un tipo de actividad que se va ampliar en el nivel 2; pero es muy probable que el profesor tenga que dirigir a los estudiantes para que por turno consideren ejemplos de cada una de las familias implicadas y comprueben si verifican o no cada una de las características propuestas.

La tarea T-5. Para las tareas en las que se propone a los estudiantes que indiquen a un amigo lo que para ellos es un sólido dado, en las descripciones de los sólidos el profesor fomentará que se utilicen ejemplos tomados del entorno físico y que se utilicen expresiones del tipo "... se parece a ..." "... tiene la forma de ..." "... es como ...", etc. Además, tratará de que los estudiantes indiquen la forma de las caras del sólido y el número de sus elementos (caras vértices y aristas); que especifiquen características visuales del sólido del tipo: tiene o no esquinas, rueda perfectamente o no, tiene o no caras planas (curvas), se puede o no apilar, se puede o no cubrir el espacio con ellos, ofrece una posición más o menos estable al apoyarlo en sus caras, el armazón es rígido o no. También centrará la atención en las relaciones con otros sólidos que ya se han descubierto en las actividades que se han realizado en otras fases.

Si los estudiantes no han hecho ninguna actividad de este tipo, aconsejamos que la primera actividad la realice el profesor para un sólido dado, y que cuando la plantee a los estudiantes dé algunas pistas o ayudas. Hay que apuntarles que pueden utilizar ejemplos del entorno como referencia; que pueden esbozar un dibujo del sólido; que tienen que indicar al amigo todas las características del sólido que conozcan así como las relaciones con otros sólidos.

La tarea T-6. En las experimentaciones que hemos realizado con niños de 12 años se ha puesto de manifiesto que las actividades-adivinanza resultan muy motivantes para ellos.

Hemos verificado que los estudiantes identifican fácilmente la esfera, el cilindro y el cono, ya que como cada una de estas familias sólo tiene un tipo de ejemplos, los estudiantes pueden seleccionar uno de los modelos para comprobar si cumple o no las características dadas. Para identificar los ejemplos de los prismas y de las otras familias, el problema se hace más largo; encontrar el ejemplo adecuado, que verifique las características señaladas, por lo general requiere de bastantes intentos.

Cuando se da el polígono de la base como pista, si éste es un polígono de pocos lados (triángulo, cuadrado o pentágono) y se conoce la familia a la que pertenece, los estudiantes que razonan de acuerdo a las características del nivel 1 pueden hallar el número de caras, de vértices y de aristas; en muchas ocasiones se busca el modelo y se apoyan en él para calcular o verificar su hipótesis. Si como pistas indicamos el número de caras, de vértices o de aristas, los estudiantes que razonan en este nivel no pueden delimitar qué sólidos pueden ser solución, a no ser que topen con ellos porque los buscan a partir de otras propiedades. Una vez que han seleccionado un modelo sí pueden comprobar si tiene el número de caras, vértices o aristas dado, o no es así.

En la tarea T-6 también se indica que se continúe con este tipo de actividades, para lo que se sugiere que se formen dos equipos, de manera que uno de ellos, dirigidos por el profesor, se encargue de recopilar las características e relaciones con otros sólidos que se van a ir indicando progresivamente, y el otro equipo se encargue de averiguar el sólido (o familia de sólidos) que cumple la característica mencionada y las anteriores. En las diferentes actividades de este tipo se cambia el papel de los equipos.

Cuando son los estudiantes los que seleccionan el modelo y las pistas que se van a enumerar una a una, si razonan de acuerdo a las características del nivel 1, siempre se apoyan en un modelo concreto para establecer las propiedades. Cuando se trabaja en equipos lo primero que hacen los estudiantes es buscar un modelo, o varios, y ponerse de acuerdo sobre el que van a seleccionar. Lo usual es que seleccionen aquellos que les resultan más raros, pues piensan que será más difícil descubrirlos.

Las primeras propiedades que enumeran los estudiantes son relativas al número de caras, vértices y aristas, pero al no señalar también la disposición en el espacio de estos elementos, resulta difícil el hacerse una idea del sólido considerado. Suelen indicar también el tipo de caras que forman el modelo, pero tampoco indican cómo están dispuestas en el espacio. Esto no quiere decir que no se descubran los sólidos que se han seleccionado; como los estudiantes trabajan con los modelos que ya han visto previamente, los estudiantes que tienen que descubrir el sólido también recurren a los modelos extraños para hacer sus verificaciones; por lo que este tipo de actividades resultan muy atractivas.

Si se deja libres a los estudiantes para que digan las propiedades que quieren, ellos experimentan que a veces con 2 propiedades ya se descubre el sólido y otras veces hay que decir bastantes y aún así no pueden adivinarlo. El profesor puede aprovecharlo para centrar la atención en que el que se descubra de qué sólido se trata más o menos rápido no depende sólo del modelo elegido sino que depende además de las propiedades que se enumeran y del orden en que se dicen. Podemos mostrar con un ejemplo que podemos decir una, dos, o muchas pistas antes de que poder saber de qué modelo estamos hablando. Por ejemplo, si seleccionamos un ortoedro podemos señalar todas las características que hemos encontrado para los sólidos, para los poliedros, para los prismas, y todas las encontradas para los ortoedros.

Así, estas tareas, además de facilitar la memorización de las características tratadas de las familias de sólidos consideradas, permiten que los estudiantes experimenten que no hace falta enumerar todas ellas, pues alguna no aporta información nueva. Por ejemplo, comprobarán que si se dice una característica de poliedro ya no hace falta decir otra característica de esta familia si ya no nos dice nada nuevo. Comprobarán que hay varias propiedades que nos dicen algo sobre una misma familia de sólidos. Sienta las bases para que se empiece a razonar de acuerdo a las características del nivel 2.

2.5. PROPUESTA DE ENSEÑANZA DE LOS SÓLIDOS PARA EL NIVEL 2 (ANÁLISIS)

Para seleccionar y organizar la unidad de enseñanza propuesta para el nivel 2 hemos examinado conjuntamente:

- Lo apuntado en el apartado 1.4.3 sobre cómo se van ampliando los objetos mentales de los conceptos geométricos implicados en los sólidos.

- Los diferentes procedimientos de construir o generar sólidos (o formas con sólidos) que hemos señalado en la sección 2.2, ya que parte de la actividad matemática que puede desarrollarse en este nivel puede venir inmersa en estos procedimientos.

- Lo establecido en la sección 1.4 respecto a las características del nivel 2. Del apartado 1.4.1 se desprende que la característica básica de este nivel es que los estudiantes pueden descubrir y utilizar explícitamente propiedades matemáticas de los sólidos, de las familias de sólidos y de sus elementos, como base de los juicios que desarrollan. En la unidad de enseñanza propuesta para este nivel, esto se ha traducido en que planteamos tareas de identificación, descripción, clasificación y de elaboración y comprobación de fórmulas, entendiendo el describir, clasificar, etc. con los significados que hemos precisado en el apartado 1.4.2. También proponemos tareas relativas a desarrollos de los sólidos, relaciones de familias, asociación de propiedades a familias de sólidos o a selección de familias de sólidos que cumplen unas propiedades dadas. Vale la pena señalar que las matizaciones que apuntamos en el apartado 1.4.1 sobre lo que corresponde a este nivel o a nivel 3 están reflejadas en las propiedades que examinamos en este nivel o sobre cómo se tratan aquí las relaciones de familias.

Como resultado proponemos la unidad de enseñanza que relatamos en los apartados siguientes, que tiene los objetivos que enumeramos con detalle a continuación.

OBJETIVOS

Las tareas que planteamos para este nivel tienen el propósito de ampliar los objetos mentales que los estudiantes se han construido con las tareas propuestas para el primer nivel y de desarrollar su nivel de razonamiento. Para ello proporcionamos técnicas que permitan desarrollar las características generales que hemos señalado en la sección 1.4 para este nivel. Al mirar estas características desde la metodología podemos asociarles los objetivos que vamos a matizar a continuación y a desglosar después en las diferentes fases de aprendizaje.

1.- Aplicar las definiciones que se tienen (que son una lista de propiedades) para identificar un sólido como ejemplo o no ejemplo de una familia de sólidos.

2.- Utilizar observaciones, medida, dibujos y construcción de modelos para delimitar propiedades geométricas de un sólido, o una familia de sólidos.

3.- Aplicar el análisis estructurado de los modelos por niveles o casquetes, o las observaciones que se hacen sobre las caras que bordean a una cara dada, o las que se juntan en un vértice para encontrar desarrollos de los sólidos.

4.- Utilizar propiedades para aplicar la información dada en un modelo sólido a uno de los desarrollos y a la inversa.

5.- Abordar problemas sobre clasificaciones-particiones y sobre clasificaciones inclusivas, relativos a relaciones de familias.

6.– Asociar propiedades a determinadas familias de poliedros e identificar familias de sólidos a partir de una(varias) propiedad(es) dada(s).

7.– Justificar que determinadas relaciones entre familias son verdaderas o falsas (utilizando ejemplos de ellas o verificando definiciones) y aplicar este resultado para establecer propiedades de una familia cuando la inclusión entre familias tiene un gran componente visual o es una inclusión que en términos de ejemplos es usual considerarla.

8.– Delimitar las fórmulas que dan el número de caras, vértices, aristas o un determinado tipo de ángulos, para una familia de sólidos dada y aplicar para un n particular las fórmulas encontradas. Justificar una fórmula, o bien generalizando para n los resultados obtenidos a partir de ejemplos concretos, o contando los elementos de una manera estructurada y haciendo una generalización para los elementos de cada nivel.

9.– Comprobar para familias muy específicas fórmulas que dan el número de determinados elementos o la medida de ellos.

COMENTARIOS

Los objetivos 1, 3 y 4 ambicionan que en tareas de identificación y de construcción, los estudiantes puedan basar sus juicios en las propiedades de los sólidos o de familias de sólidos y en las relaciones entre familias que se han demarcado. El objetivo 1 intenta que las propiedades, o las relaciones establecidas entre sólidos o familias de sólidos, ya descubiertas se pueden utilizar como base para explicar que un modelo o armazón es ejemplo o no ejemplo de una familia dada. Los objetivos 3 y 4 pretenden que los estudiantes puedan aplicar las propiedades de los sólidos para construir modelos o desarrollos de ellos (característica 3) o para explicar cómo se ha trasladado una información dada en un modelo a su desarrollo (o a la inversa) o la información que transmiten algunos modelos de sólidos (característica 4).

Propiedades a las que se refiere el objetivo 3 son, por ejemplo, propiedades relativas a las caras que bordean a una cara dada, o a las caras que se juntan en un vértice, o se descompone el modelo en varios pisos y se indica el tipo de caras de cada piso. Tiene que ver con que los estudiantes apliquen el análisis realizado para descubrir desarrollos de sólidos. El objetivo 4 tiene varios propósitos. Uno de ellos es que se lleguen a identificar adecuadamente los sólidos o los elementos incluidos en un modelo: los diferentes elementos de los sólidos o los diferentes tipos de ángulos o de diagonales; la forma de determinadas secciones que se han marcado sobre un modelo; los modelos inscritos en otros, o intersectados entre sí. También acomete que se apliquen relaciones entre sólidos, o entre elementos del plano y del espacio, ya descubiertas; que se utilicen propiedades de uno de los sólidos, o de las figuras planas contenidas en el modelo, y que se delimiten relaciones de igualdad, paralelismo o perpendicularidad entre los elementos implicados en el modelo correspondiente.

Los objetivos 2, 5, 6 y 7 pretenden que para los modelos que se analizan experimentalmente, los estudiantes reconozcan sus elementos, hallen su número y establecezcan relaciones entre ellos; que se enuncien propiedades de los sólidos centrando la atención en una parte de él, utilizando vocabulario apropiado para componentes y relaciones; que los estudiantes descubran y verifiquen propiedades para una familia de sólidos o para un caso general (por ejemplo, un prisma n-agonal) a partir de la experimentación, generalizándolas de unos ejemplos.

Los elementos de los sólidos que examinamos y las propiedades que enumeramos al describir familias y subfamilias de sólidos (objetivo 2 y parte del objetivo 5) las sugerimos en el apartado 2.1.3 y las precisamos en el anexo 2. Cabe aclarar que tal como indicamos en el apartado 1.4.1 las propiedades que contienen las expresiones del tipo, "al menos", "como máximo", " tantas medidas diferentes como", etc. no son objeto de estudio en este nivel. También orientamos ahí sobre lo que deseamos en este nivel relativo a otro tipo de propiedades, a las que hacemos mención en el objetivo 7, en las que se indican familias de sólidos que contienen a la familia que se describe y las propiedades que están enunciadas como propiedades de otras familias.

El objetivo 5 apunta hacia las clasificaciones particiones basándose en propiedades geométricas cuando los criterios tienen componente fuertemente visual, o centran la atención en la regularidad o el número de lados del polígono de las bases; también tiene que ver con nombrar las subfamilias establecidas, identificar modelos de sólidos como ejemplos o no ejemplos de ellas y con determinar una variedad de propiedades matemáticas de estas subfamilias.

Al igual que el objetivo 7, se ocupa de relaciones de familias (el objetivo 7 alude además a demostración). Remitimos de nuevo al apartado 1.4.1 para conocer el tipo de actividad y las relaciones a las que se refieren estos objetivos (las que corresponden al nivel 2).

Conocidas las propiedades de varias familias de sólidos otra característica del nivel 2 de razonamiento (objetivo 6) es desarrollar la capacidad de los estudiantes, para identificar propiedades como atributos críticos o no críticos de una determinada familia de sólidos, para delimitar familias para las que determinadas propiedades son atributos críticos y para asociar propiedades a las familias de sólidos que las verifican. Se pretende desarrollar también la capacidad para descubrir un sólido, o familia de sólidos, según las propiedades que se enumeran.

Los objetivos 8 y 9. Una característica básica del nivel 2 que ya hemos mencionado es que el razonamiento se sigue basando en la percepción física pero los resultados obtenidos en varios ejemplos permiten a los estudiantes que razonan en este nivel generalizar los resultados y enunciar de forma abstracta la propiedad subyacente. Análogamente, la generalización de resultados experimentales permite a los estudiantes hacer generalizaciones en términos de n y simbolizar las relaciones encontradas. El objetivo 8 hace referencia a esta característica del nivel 2.

Respecto a las fórmulas también cabe apuntar lo que abarca el objetivo 9: que un tipo de actividad adecuado para el nivel 2 de razonamiento es la de aplicar fórmulas, para un n dado, para hallar el número de un determinado elemento o la de comprobar que se verifica una expresión para una medida dada para algunos elementos de los sólidos.

Sobre el lenguaje. Queremos recordar, dada su importancia, lo que ya hemos subrayado en el apartado 1.4.2: la adquisición del segundo nivel de Van Hiele se basa, en gran medida, en el uso por los estudiantes del vocabulario geométrico para enunciar propiedades, para expresar sus respuestas o para comunicarse con el profesor y el resto de los compañeros. Por este motivo, debemos prestar atención a la forma de expresión de los estudiantes durante todas las actividades de las sucesivas fases de este nivel, procurando que se vaya precisando el lenguaje informal propio del nivel 1, si bien intentando evitar que el nuevo vocabulario cree dificultades adicionales a los estudiantes.

2.5.1. NIVEL 2. FASE 1

Tal y como hemos relatado en los apartados 1.1.2 y 2.4.1 las actividades propuestas para la fase 1 tienen que ser propicias para conseguir o dar información de diferentes tipos. Las que se pueden proponer para la fase 1 del nivel 2 dependen de cómo se ha abordado el trabajo con los sólidos. Si el estudio comienza con las tareas diseñadas para el nivel 2 no puede ser lo mismo que si esta unidad la desarrollamos con estudiantes que han llegado a nivel 2 como consecuencia del trabajo previo con la unidad de enseñanza diseñada para el nivel 1. Estamos de acuerdo con Jaime (1992, p. 64) cuando indica:

> La necesidad de que existan actividades expresamente diseñadas para la fase 1, solamente resulta evidente cuando comienza el trabajo en ese tema en el aula, pues en ese momento es cuando el profesor debe adquirir información sobre los conocimientos de los alumnos y cuándo éstos se deben poner en contacto con el

tema en el que van a trabajar, sea cual sea el nivel en el que están en ese momento los alumnos.

Si se lleva a cabo una instrucción de manera continua sobre un mismo tema, parte de los aspectos que se trabajan en un nivel intervienen implícitamente en el anterior y, por lo tanto, no hace falta proponer actividades específicas con lo que será el objetivo del nuevo nivel. Mi opinión es que se puede abordar directamente el trabajo de la fase 2 del nuevo nivel, limitando la primera fase a la obtención de información sobre conocimientos auxiliares requeridos para el desarrollo adecuado del nivel en el que se va a trabajar, con el fin de proporcionar unidades de instrucción complementarias si ello fuera necesario. Ocasionalmente, puede aparecer en un nivel algo totalmente nuevo, que requiera una toma de contacto por parte de los alumnos, en cuyo caso sí que existirían actividades específicas para ello en la fase de información.

En caso de que se lleve a cabo la instrucción comenzando por las actividades diseñadas para el desarrollo del nivel 2, que es la situación que tuvo lugar en nuestras experimentaciones con niños de 12 años, que ya habían tenido una instrucción anterior en geometría plana y en la geometría de los sólidos, sí que es necesario realizar una fase inicial para determinar el conocimiento de los estudiantes sobre los sólidos, o los polígonos, el lenguaje que utilizan y cuál es su nivel de razonamiento. Es esta situación la que hemos tomado como base al diseñar las tareas que proponemos a continuación para la fase inicial del nivel 2. Las tareas corresponden a las incluidas para diferentes fases del nivel 1 (si bien ahora, hay que entender estas actividades con un propósito diferente), de manera que alguna de ellas también puede responderse en los niveles 2 y 3. Hay actividades de construcción, de identificación de ejemplos y no ejemplos y tareas en las que se pide descripción de determinadas familias o ideas sobre ellas, sobre sus elementos o sobre relaciones entre ellos. Las técnicas informales que se utilizarán en el trabajo propuesto para el nivel 2 son las de construcción, descomposición, modelado, apilamiento y truncamiento; por lo que éstas son las técnicas que introducimos en las tareas propuestas aquí. De esta manera, el profesor puede conocer el nivel de razonamiento de sus estudiantes, conseguir información sobre los objetos mentales que tienen de determinados conceptos relacionados con los sólidos, o con sus elementos, construido con su experiencia anterior con los sólidos. Al mismo tiempo introduce a los estudiantes en el tema objeto de estudio y en los procedimientos que utilizamos para tratar los conceptos a partir de las tareas propuestas para el nivel 2.

En caso de que los estudiantes hayan trabajado las actividades que proponemos para el desarrollo del nivel 1, que es la situación que ha tenido lugar en la mayoría de nuestras experimentaciones con estudiantes de Magisterio, es innecesario realizar todas las tareas que hemos indicado para la fase inicial del nivel 2, para determinar el conocimiento de los estudiantes sobre los sólidos, los polígonos o sobre sus elementos.

En nuestras experimentaciones con estudiantes de Magisterio la fase 1 la limitamos a la obtención de información sobre paralelismo y perpendicularidad en el plano y en el espacio y sobre ángulos y diagonales de los polígonos. En los sólidos éstos son los conocimientos auxiliares requeridos para el desarrollo adecuado de las características asignadas al nivel 2, en el que íbamos a trabajar. Se requería pues una toma de contacto de los estudiantes con estos conceptos, por lo que, para esta fase inicial, planteamos las actividades que incluyen las tareas T-2 y T-7 y cuando fue necesario proporcionamos unidades de instrucción complementarias. Luego pasamos a estudiar directamente el estudio de los sólidos en la fase de orientación dirigida.

OBJETIVOS

1.- Informar sobre los conocimientos previos elementales que tienen los estudiantes sobre los sólidos y los polígonos. En particular, sobre identificación de ejemplos de determinadas familias de sólidos (cubo, ortoedro, romboedro, paralelepípedo, prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides), o de polígonos, sus propiedades y sobre la construcción de modelos o armazones.

2.- Informar sobre los conocimientos previos elementales que tienen los estudiantes sobre paralelismo y perpendicularidad en el plano y en el espacio.

3.- Informar sobre los conocimientos previos elementales que tienen los estudiantes sobre ángulos y diagonales en el plano y en el espacio.

4.- Proporcionar una unidad de enseñanza complementaria sobre rectas (o caras) paralelas o perpendiculares, en el plano y en el espacio, si fuera necesario.

5.- Proporcionar una unidad de enseñanza complementaria sobre ángulos, tipos de ángulos y medida de algunos ángulos de los polígonos y de los diferentes tipos de ángulos de los sólidos, si fuera necesario.

6.- Proporcionar una unidad de enseñanza complementaria sobre diagonales de los polígonos y de diferentes tipos de diagonales de los sólidos, si fuera necesario.

TAREAS

T-1 Dar a los estudiantes materiales comercializados (polydron o creator, troquelados y varillas). Pedir que con ellos hagan construcciones. Seleccionar ejemplos del prismas (antiprismas, pirámides o bipirámides) y para ellos plantear cuestiones como las que siguen:

a) ¿Qué polígonos tenemos que elegir para construir este modelo?

b) Fíjate en una cara ¿Qué caras la bordean? Elige otra cara de este modelo ¿Qué caras la bordean?

c) ¿Cuántas caras se juntan en un vértice de este modelo? ¿Qué polígonos se juntan en él? Elige otro vértice ¿Se juntan en él los mismos polígonos que en el otro?

d) Plantear la actividad anterior para una arista.

T-2 a) Para un prisma recto colocado en la posición estándar (apoyado sobre la cara base) pedir que se señalen dos caras (aristas) paralelas. Pedir que se seleccione otra cara (arista) y se muestren todas las caras (aristas) que sean paralelas a ella.

b) Repetir la actividad T-2a cuando el prisma recto se coloca en posiciones no-estándar y para prismas oblicuos que se colocan en diferentes posiciones.

c) Repetir la actividad T-2a y T-2b preguntando sobre la perpendicularidad de las caras (aristas).

T-3 Poner a disposición de los estudiantes una variedad de modelos de poliedros y de no poliedros.

a) Mostrar un ejemplo de una familia de sólidos (los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides) y pedir que se seleccionen otros ejemplos de la misma familia. Pedir también que se explique que los modelos pertenecen a la familia en cuestión.

b) Mostrar modelos de familias muy específicas (que pertenecen además a otras familias incluidas en la familia considerada), colocados en la posición estándar y en otras posiciones. Para cada modelo cuestionar si pertenece o no a una familia dada y pedir también que se explique la respuesta. Por ejemplo, el cubo (o un prisma de caras regulares) se cuestiona si es o no ejemplo de prisma

Para el cono, el cilindro, la esfera y para poliedros que no sean familiares a los niños, que tengan por caras polígonos irregulares, preguntar si son poliedros.

c) Mostrar modelos de las siguientes familias: prisma oblicuo, prisma de caras regulares, cubo, antiprisma, octaedro, romboedro. Colocarlos en la posición estándar y en otras posiciones y pedir que se identifiquen en cada caso las familias a la que pertenece el modelo y que se explique la respuesta. Apuntar que el modelo puede pertenecer a varias familias y que si esto ocurre se indiquen todas las familias a las que pertenece.

d) Pedir que se enumere todas las familias de poliedros que se conozcan.

T-4 Dar una hoja con figuras de varios ejemplos de poliedros y no poliedros, de manera que cada dibujo tenga asociado un número y debajo de él haya un recuadro en el que el estudiante puede escribir. Indicar también las abreviaturas que se asocian a cada una de las familias de sólidos que se tienen que considerar.

a) Pedir que en el recuadro que corresponde a cada dibujo se pongan las abreviaturas de las familias de las que son ejemplos. Indicar que en el recuadro se pueden escribir varias letras, porque la figura puede corresponder a ejemplos de varias familias, y que si las figuras son ejemplos de prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, se marque(n) la(s) cara(s) que corresponde(n) a la(s) base(s).

b) Pedir que se escriban los números de las figuras que corresponden a una familia de sólidos dada y que se explique su respuesta.

c) Seleccionar algunos dibujos de las láminas y cuestionar, por turno, si corresponden a ejemplos de una familia de sólidos dada.

T-5 a) Pedir que se indiquen familias de sólidos que tienen todas las caras planas y familias de sólidos que tienen alguna cara curva.

b) Pedir que se indiquen familias de sólidos que tienen todas sus aristas rectas, familias de sólidos que tienen alguna arista curva y sólidos que no tienen aristas.

c) Plantear las siguientes preguntas:
¿Qué sólidos tienen vértices en los que se juntan varias caras? ¿Qué sólidos tienen un vértice en el que concurre sólo una cara? ¿Qué sólidos no tienen vértices?

d) Pedir que se enumeren propiedades que tienen que tener todos los poliedros.

e) Pedir que se enumeren propiedades de los conos, de los cilindros y de la esfera.

f) Pedir que se intente expresar lo que es una cara, una arista y un vértice de un poliedro.

T-6 a) Seleccionar una familia de sólidos dada, por ejemplo, la familia de los prismas, y para ella plantear cuestiones como las que siguen: Para construir un prisma, ¿se pueden utilizar hexágonos (cuadrados, rectángulos, rombos, paralelogramos)? ¿Cuántos? ¿Qué polígonos se pueden utilizar? ¿Cómo hay que juntarlos para que se obtenga un prisma?

b) Seleccionar una familia de sólidos. Pedir a los estudiantes que nos indiquen las instrucciones que le darían a un amigo para que éste pueda construir diferentes ejemplos de la familia señalada. Hacer notar que el amigo no conoce la familia que estamos considerando pero tiene material comercializado y sabe cómo utilizarlo. Apuntar también que para dar las instrucciones que envían al amigo pueden apoyarse en los modelos que son ejemplos de la familia señalada.

c) Cuestionar cómo hay que hacer los cortes en un modelo de cilindro, del que se muestra el modelo, para conseguir un prisma recto (oblicuo o cóncavo) a partir de él.

Preguntar por la forma del polígono obtenido como sección, y la forma de los sólidos que obtenemos, al truncar prismas con cortes paralelos a las bases.

Cuestionar cómo hay que hacer los cortes en los prismas para obtener otros prismas que tengan las mismas bases pero que su altura sea menor.

d) Repartir varios polígonos congruentes y pedir que con ellos se construyan prismas rectos con la misma base y diferente altura. Idem para los prismas oblicuos.

Seleccionar varios prismas que tienen la misma base pero que son rectos u oblicuos o tienen diferente altura. Pedir que peguen unos con otros de manera que las bases ajusten completamente. Preguntar si en todos los casos se obtienen nuevos prismas. Pedir que se señalen qué casos llevan a modelos resultantes que sí son ejemplos de prisma y cuál es la altura de ellos.

e) Pedir que se explique cómo le contarían a un amigo lo que es un prisma. Y lo mismo para otras familias de sólidos (por ejemplo, un antiprisma, una pirámide o para una bipirámide).

T-7 Dar una hoja con figuras de varios ejemplos de polígonos de manera que cada dibujo tenga asociado un número.

a) Pedir que señalen los ángulos de las figuras de la hoja.

Pedir que se dibujen las diagonales de las figuras.

b) Seleccionar algunos polígonos de la lámina cuyos ángulos midan 60°, 90° o un múltiplo de éstos. Para ellos pedir la medida de sus ángulos.

c) Pedir que se indique la idea que se tiene sobre ángulo de un polígono y sobre diagonal de un polígono.

d) Dar como idea de ángulo de un polígono la que los ve como "el espacio comprendido entre dos lados que forman un vértice". Apuntar también que usualmente consideramos como ángulo de un polígono el que queda sobre él y al que queda fuera de él se le llama ángulo exterior del polígono. Y dar como idea de diagonal de un polígono la que la ve como "segmento que une vértices que no son vecinos".

Pedir que respondan de nuevo a las actividades T-7a y T-7b

e) Indicar que en los poliedros, como están formados por polígonos, tenemos los ángulos de estos polígonos, que usualmente se llaman *ángulos de las caras.* Utilizar material comercializado para introducir los *ángulos diedros* y los *ángulos de los vértices.* Pedir que bien utilizando modelos del entorno (por ejemplo, la puerta y la pared, la esquina de la clase), o material comercializado, se muestren diferentes ángulos diedros y diferentes ángulos de los vértices.

Pedir que se den ideas sobre los diferentes tipos de ángulos de los sólidos.

f) Apuntar que los sólidos, además de *diagonales de las caras,* tienen otro tipo de diagonales, que llamamos *diagonales del espacio.* Pedir que en un modelo abierto de un sólido se introduzcan las varillas que según ellos representan las diagonales del espacio.

Si es necesario poner un ejemplo y un no ejemplo de diagonal del espacio del modelo considerado. Pedir que se indique una idea sobre diagonal del espacio.

g) Pedir que se de una idea sobre caras iguales y sobre vértices iguales. Apuntar que pueden utilizar material comercializado o dibujos y apoyarse en ellos al explicar las respuestas.

Cuestionar si son iguales o no diferentes tipos de rectángulos (triángulos).

Para cada uno de los modelos siguientes, cuestionar si sus vértices son iguales o no: el cubo, un prisma de caras regulares, el romboedro y un prisma cóncavo.

COMENTARIOS

Descripción general

La tarea T-1 incluye actividades que tienen como base la construcción de modelos con materiales comercializados o se usan éstos para hacer un análisis de ellos.

Las actividades de la tarea T-1 incluyen un trabajo con los modelos o armazones de algunos sólidos que se han construido que permite revisar si los estudiantes pueden hacer un análisis primario de los sólidos a nivel local. Centran la atención en los elementos de los sólidos, en las caras que bordean a una dada (una posible forma de empezar a construir sólidos), en las caras que se juntan en un vértice (otra posible forma de empezar a construir sólidos), o en las caras que se juntan en una arista. El profesor puede introducir el concepto de orden de un vértice (orden de un vértice es el número de caras que se juntan en él).

La tarea T-2 permite revisar las ideas que tienen los estudiantes de los conceptos de perpendicularidad y paralelismo; determinamos si para ellos el paralelismo y perpendicularidad entre caras (y aristas) se mantiene cuando se mueve la figura o cuando la relación es entre más de dos elementos.

La tarea T-3 incluye actividades de identificación de ejemplos y no ejemplos de poliedros y de algunas familias de sólidos (cilindros, conos, esferas, prisma, antiprisma, pirámide y bipirámide) cuando se presentan modelos o armazones de ellos en diferentes posiciones. Vale la pena señalar que no sólo proporcionan información sobre cómo identifican los estudiantes los modelos o armazones presentados; además aportan información sobre los siguientes aspectos:

- El nivel de razonamiento de los estudiantes. Permiten averiguar si los estudiantes basan las respuestas en la percepción global de la forma (nivel 1 de Van Hiele), en atributos físicos con fuerte poder visual o en propiedades (nivel 2).
- La influencia que tienen los atributos no críticos dominantes en la identificación de poliedros como pertenecientes a determinadas clases de poliedros.
- Los factores con fuerte poder visual que actúan como distractores en tareas de identificación de ejemplos y no ejemplos (por ejemplo, se

puede averiguar si la posición, o la esbeltez o no esbeltez, influyen en la identificación).

- Los atributos críticos de determinadas familias de poliedro, que no se tienen en cuenta, o que no están todavía en los objetos mentales correspondientes (que puede llevar a que se identifiquen como ejemplos de una familia poliedros no pertenecientes a ella).

- Las ideas que los estudiantes tienen de las familias de poliedros consideradas o sobre sus elementos.

- El vocabulario geométrico que utilizan los estudiantes espontáneamente para expresar las ideas que tienen sobre los conceptos que se tratan y la fluidez que tienen para describirlos.

Con la actividad T-3d se pueden averiguar las familias de poliedros que los estudiantes evocan espontáneamente y si al nombrar las familias se procede al azar o se establecen clasificaciones en el mundo de los sólidos; esto es, si separan los poliedros de sólidos que no lo son, y si se nombran subfamilias establecidas en cada una de estas familias.

La tarea 4. Un problema íntimamente relacionado con el estudio de los sólidos es el problema de la visualización espacial. En esta primera fase también tenemos que determinar si los estudiantes reconocen los objetos cuando se presenta un dibujo de ellos. Ese es el objetivo de la tarea T-4 que incluye actividades de identificación de algunos sólidos y familias de sólidos a partir de dibujos.

La tarea T-5 centra la atención sobre una clasificación en el mundo de los sólidos: la que separa los sólidos que son poliedros de los que no lo son. Con las actividades que incluye pretendemos evaluar si los estudiantes disponen ya de un cierto objeto mental de los cuerpos redondos que permite discriminarlos de los poliedros. Permiten averiguar los atributos críticos del concepto de poliedro (por ejemplo, que las caras tienen que ser planas, las caras tienen que ser polígonos, las aristas tienen que ser rectas), de cilindro, de cono o de la esfera que se enuncian de manera precisa y los atributos críticos del concepto de cada una de estas familias que no están todavía en el objeto mental que los estudiantes se han formado de la familia correspondiente. También informan sobre si los estudiantes asocian características de familias de sólidos a las familias de sólidos que se establecen en ellos (los poliedros, el cilindro el cono y la esfera) y las ideas que tienen sobre los conceptos de cara, vértice y arista.

La tarea T-6 pretende que se averigüen las ideas que los estudiantes tienen de poliedro y de determinadas familias de poliedros. Así, las actividades T-6a y T-6b conducen a que se plasmen ideas basadas en la construcción de los modelos y T-6c a T-6e intentan determinar las ideas que los estudiantes tienen de poliedro y de determinadas familias de poliedros basadas en el modelado, serrado, apilamiento, etc. de los modelos.

La tarea T-7. Esta tarea se refiere a conceptos relacionados: los ángulos y diagonales de los polígonos y de los sólidos. También intenta determinar las ideas que tienen los estudiantes sobre caras iguales (congruentes) y sobre vértices iguales (actividad T-7g).

Las actividades T-7a a T-7d intentan determinar las ideas que aplican los estudiantes sobre ángulo y diagonal de un polígono o cómo aplican las ideas que damos de estos conceptos en tareas de identificación y medida. Pretenden averiguar si se emplean atributos de más, que se asocian al concepto dado; esto es, si en el objeto mental de diagonal de un polígono se incluye el que la diagonal queda dentro del polígono, atributo que no se menciona en la idea que damos de este concepto.

Si los ángulos en el plano no se han introducido y estudiado anteriormente para abordarlos tendremos en cuenta las indicaciones que da Freudenthal (1973) sobre cómo se trataron éstos en la clase de Dina Van Hiele.

Para aquellos estudiantes que desconozcan el concepto de diagonal de un polígono, o no lo tengan suficientemente afianzado, aconsejamos que se introduzca a partir de ejemplos y no ejemplos, que se señalen segmentos que corresponden a diagonales exteriores y a diagonales interiores y que se pida que se exprese una idea de diagonal de un polígono.

En las actividades T-7e y T-7f sugerimos que se utilice material, para visualizar las explicaciones que damos al introducir estos conceptos y para construir algunos ejemplos. Ideas que pueden surgir pueden ser las que ven los *ángulos de las caras*, αC, como los ángulos que tienen los polígonos de sus caras, los *ángulos diedros*, αd, como los ángulos que forman dos caras al juntarse (que pueden estar más o menos "abiertas") y los *ángulos poliedros*, αp, como el ángulo que forman las diversas caras que tienen común un vértice del poliedro.

Podemos señalar, si lo creemos conveniente, que el determinar la medida del ángulo poliedro es difícil porque hay que medir "un trozo" de espacio, y es por esto por lo que no vamos a seguir trabajando con ellos. Pero que vamos a fijarnos en el ángulo de su superficie, en el ángulo suma de los ángulos de los polígonos que se juntan en un vértice, ángulo que vamos a llamar, *ángulo de los vértices*, αV.

Cuestiones como las siguientes son recomendables para averiguar qué objeto mental se han formado los estudiantes sobre estos conceptos: ¿Cuánto miden los ángulos de las caras de un cubo? ¿Y los ángulos diedros? ¿Y los ángulos de los vértices? ¿Cuánto miden los ángulos de las caras de un tetraedro? ¿Y los ángulos de los vértices?

Cuando se tratan conceptos relacionados hay que prestar atención al hecho de que les damos un nombre compuesto, a diferencia de los nombres simples que tienen los elementos de los sólidos. Hay que aclarar que es necesario nombrar estos elementos con nombres de la forma "... de...." pues por una parte hay que saber si se habla de ángulos o de diagonales, y por otra hay que dejar claro que estos conceptos están referidos a un polígono o a un sólido. En el espacio, dado que hay varios tipos de ángulos y de diagonales, se complica más la cosa. Al tratar estos conceptos hay que insistir en que además de reflejar que se refieren a un sólido, a un poliedro, o a una familia de poliedros dada, hay que precisar con el nombre el tipo de ángulos o de diagonales del que se está hablando: si de los ángulos de las caras, de los ángulos diedros o de los ángulos de los vértices; si de las diagonales de las caras o de las diagonales del espacio.

Sobre las tareas propuestas. Aportaciones de las experimentaciones

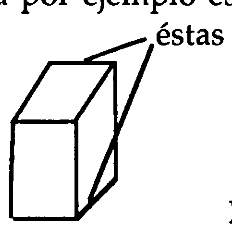
La tarea T-1. Construcción de modelos físicos. Hemos comprobado que los estudiantes disfrutan construyendo el modelo de los sólidos con materiales (polydron, troquelados, varillas y plastilina). Así, la construcción de sólidos con los materiales (tarea T-1) sirve para romper el hielo, crear un buen clima entre el profesor y los estudiantes e introducir a éstos en el objeto de estudio (los sólidos). En la primera actividad es conveniente que dejemos a los estudiantes que manipulen libremente los materiales, para que hagan construcciones sin ningún objetivo determinado. Mientras los estudiantes construyen modelos u otras formas tridimensionales el profesor puede observar qué tipos de pautas o patrones son los que los estudiantes utilizan en la construcción: si construyen al azar; si utilizan estrategias de construcción que pueden conducir a una idea de determinada de la familia de la que se han construido los ejemplos; si tienen en cuenta cuestiones de simetría aunque sea de manera inconsciente; si construyen solamente modelos ya conocidos, fáciles de construir o complicados...

La tarea T-2. Paralelismo y perpendicularidad en el plano y en el espacio. Las experimentaciones realizadas han proporcionado interesantes e ilustrativos resultados al respecto; algunos vamos a consignarlos a continuación.

A) Hemos comprobado que los estudiantes tienen un objeto mental de paralelismo y perpendicularidad que permite identificar la relación de paralelismo y perpendicularidad entre más de dos elementos, siempre que éstos estén colocados en la posición estándar (perpendiculares y paralelos al plano del suelo). Pero tienen dificultad en identificar el paralelismo de dos elementos si uno está desplazado respecto al otro; es decir, si los segmentos que unen los vértices que se corresponden no son perpendiculares a estos elementos considerados (caras o aristas). También tienen dificultad en identificar todos los elementos (caras o aristas) que están relacionados por paralelismo cuando los elementos están inclinados (respecto al plano horizontal o vertical). Mientras que la mayoría de los estudiantes reconocen que en los prismas rectos las bases son paralelas y que todas las aristas laterales son paralelas, muy pocos atribuyen estas propiedades a los prismas oblicuos. Hemos verificado que la idea de que estas propiedades sólo se cumplen en los prismas rectos es muy difícil de corregir. Aconsejamos que se dedique atención especial a este problema y, si es necesario, se aborde de nuevo cuando en las actividades de las fases 2 y 4 se trata el problema de enumerar propiedades de familias de sólidos o el de asociar propiedades a las familias de sólidos que las cumplen.

B) Respecto al paralelismo en el espacio se acepta de manera inmediata que en los prismas rectos las aristas de las bases que se corresponden son paralelas, y los estudiantes no ofrecen demasiada resistencia a aceptar (aunque el error se puede repetir al cabo de un tiempo) que también se cumple en los prismas oblicuos. La dificultad mayor se presenta cuando se pregunta si todos los lados del polígono de una base son paralelos a los lados de la otra base. Si se responde a nivel visual se indica que no son paralelas. La respuesta tiene una explicación, pues no se corresponden con el objeto mental de rectas paralelas que proviene del plano, como railes de un tren, o como los filos de una regla. Pero si se aplica la idea que se tiene, que también proviene del plano, de que dos rectas en el plano son paralelas si al prolongarlas nunca se encuentran, se responde que sí que son paralelas.

Cuando se plantea este problema a los estudiantes se establece una rica discusión: los que defienden que en las bases de los primas sólo son paralelas las aristas que se corresponden entre ellas se resisten a aceptar lo que defienden otros: que al considerar una arista de una base de un prisma todas las aristas de la otra base son paralelas a ella porque si se prolongan nunca se encuentran. La respuesta de uno de los niños con los que realizamos nuestras experimentaciones es ilustrativa: "Si... Porque tú lo digas... Yo pienso que no lo son. Mira por ejemplo esta caja. ¿Quieres decirme que esta arista es paralela a ésta?



En todo caso será perpendicular, porque mira. Lo es. 90°".

Estas discusiones podemos utilizarlas para remarcar la diferencia que existe entre el plano y el espacio. Las ideas que dieron algunos estudiantes de

3º de Magisterio, para paralelismo de rectas en el plano y en el espacio, y para rectas que se cruzan, fueron: "En el plano son paralelas si al prolongarlas nunca se encuentran y *en el espacio, dos rectas son paralelas* si al desplazar una de ellas paralelamente a ella, podemos hacer coincidir ambas. Cuando *en el espacio* las rectas al prolongarlas no se cortan y no son paralelas, *las rectas se cruzan*". Nosotros aprovechamos la situación para construir el diagrama de la figura 2.10 que aclaraba el problema.

C) También se han planteado problemas con el reconocimiento de la perpendicularidad entre determinados elementos. Algunos estudiantes tienen dificultad para identificar como perpendiculares a una recta dada algunas rectas contenidas en el plano perpendicular y que la cortan. En los prismas rectos, el que la base no sea un rectángulo (el que el ángulo correspondiente de la base no sea recto) dificulta la identificación de la perpendicularidad entre la arista lateral y las aristas de las bases que comparten un vértice del prisma.

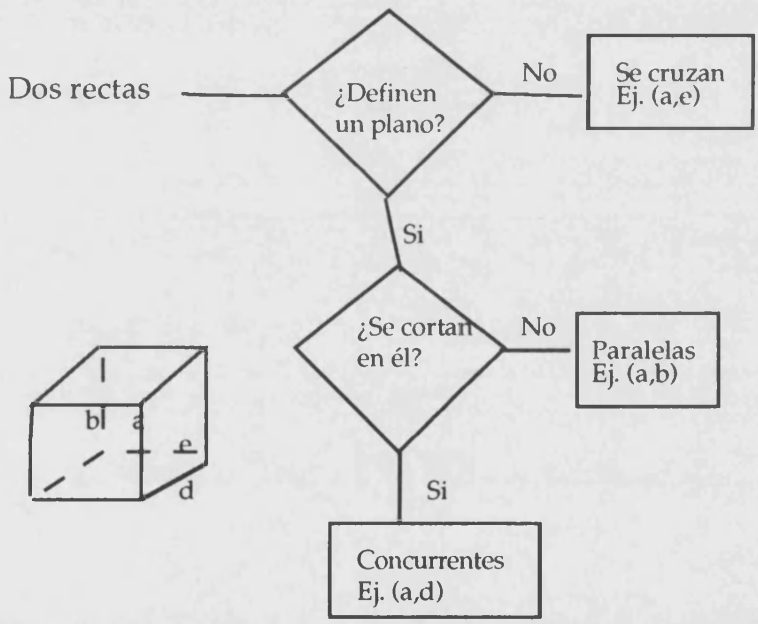
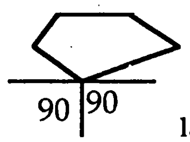
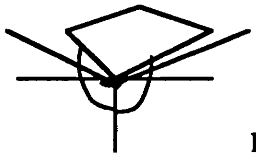


Figura 2.10

Algunos estudiantes que participaron en nuestras experimentaciones, si bien no tuvieron dificultades para determinar las aristas perpendiculares a una dada en el cubo y ortoedro, cuando presentamos un prisma recto de base pentagonal ya se presentaron problemas. Como uno de los estudiantes indicó, "si una de las rectas es vertical y la otra es horizontal lo veo claro, pero sino... Es que aquí este lado [se refiere al lado del pentágono] está inclinado". Y la dificultad aumenta cuando en vez de con modelos se trabaja con dibujos. La conversación siguiente, de dos estudiantes de 3ºC de Magisterio, muestra cómo en un prisma recto pentagonal uno de los estudiantes no reconoce la perpendicularidad entre una arista lateral y una de la base y el otro estudiante le hace ver dónde radica su idea errónea y cómo se puede evitar el problema trabajando con modelos en vez de con dibujos:

E1: Pero esa recta no es perpendicular a la arista. Porque mira, 

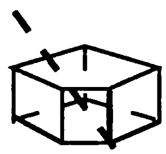
las aristas de la base y las laterales son ángulos distintos de 90°. Los que son de 90° son éstos [los ha señalado en la figura].

E2: Pero no te tienes que fijar en esos. Bueno sí... pero no. Es en estos...  hay el mismo que si coges los lados de la base. Y esté lo girada que esté, si no lo inclinas para abajo o para arriba, éstos ángulos son de 90° siempre.

E1: Yo no lo veo. Son más grandes que 90° .

E2: Pero es que es por el dibujo, que lo haces así... no recto aunque sea... Mira coge el modelo y lo verás. Mira, las caras [se refiere a las caras laterales] son rectángulos. Ves,... [señala las aristas de la base y lateral], el ángulo es de 90° . No te fijes en la base, que ese ángulo no es de 90° , y tampoco de 180° . Pero es que si no lo inclinas y coges otra recta, si abres más la base, también es el mismo ángulo, ¿no? [lo muestra en un modelo. Luego pregunta a la profesora si es verdad].

Una vez aceptado que en los prismas rectos las aristas laterales eran perpendiculares a las de las bases, algunos estudiantes todavía no identificaron como perpendiculares la arista lateral y una diagonal de la base que compartían un vértice del prisma. Fue necesario colocar varillas que representaban los elementos del prisma o centrar la atención en la sección correspondiente para que se aceptara la perpendicularidad de estos elementos. Cabe mencionar la respuesta de un estudiante (un niño de 12 años) a otro que le estaba mostrando con varillas que esto era así:



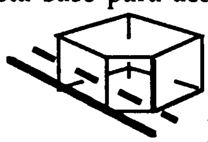
E1: Eso no tienes que hacerlo si no quieres [se refiere a seguir desplazando las varillas en la misma dirección para que el extremo de la varilla coincida con el vértice]. Pues ya se ve que son perpendiculares. Mira. Las rectas también pueden estar así: $\top$ y así $\perp$. No hace falta que esté $\llcorner$.

Esta respuesta corrobora la importancia que tiene la presentación de un mundo de ejemplos suficientemente rico al introducir los conceptos para que con el objeto mental que se construya se pueda dar cuenta de una gran variedad de situaciones en las que está implicado el concepto.

Respecto a la perpendicularidad también comprobamos que un atributo crítico que tiene mucho peso en el objeto mental de perpendicularidad de segmentos es que ambos tienen que tener un punto común. Cuando en las experimentaciones realizadas un estudiante planteó la cuestión de si las aristas laterales de un prisma recto eran perpendiculares a las aristas de la base con las que no compartían vértice (una vez que ya se había discutido que sí que lo eran con las otras) de nuevo surgió una discusión que proporcionó gran riqueza a los conocimientos que generan las actividades propuestas: la mayoría de estudiantes se mostraron muy reacios a admitir como segmentos perpendiculares a uno dado los segmentos contenidos en un plano perpendicular al segmento elegido que no cortaran al segmento, pero algunos estudiantes intentaron extender la idea de perpendicularidad para que se incluyera estas situaciones como ejemplos posibles. Respuestas de estudiantes que defendían ambas posturas fueron:

E1: Puede ser como en las diagonales, que ponemos más atributos de los que toca, porque los ejemplos que hemos visto son así.

E2: Aquí no es como con las diagonales. Aquí sí que se dice, sí que es atributo crítico que para que sean perpendiculares ambos tienen que estar unidos, tienen que formar un vértice. Tiene que haber 90° y en los ángulos que forman dos segmentos tiene que haber un vértice.

E1: Pero es que también puedes hacer como para medir el ángulo que forman dos caras. Mira... [Coge un modelo de un prisma, elige una arista lateral y otra de la base y, como se muestra en la figura, sobre la arista de la base coloca una varilla que desplaza paralelamente sobre esta base para acercarla al vértice de la base del que salía la arista lateral elegida, ]. Lo que tienes que hacer cuando no se cortan para comprobar si dos son perpendiculares es elegir otros segmentos, pero tienen que ser paralelos a los dados.

E2: [Se dirige a la profesora] ¿Eso puede ser? ¿Es así? Yo creo que no, porque para que haya un ángulo tiene que haber un vértice y no lo hay. Yo siempre lo he visto con vértice, o con 180° también, sí, así, $\perp$; pero ahí también hay vértice.

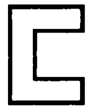
P: Todo va a depender de la idea que demos para segmentos perpendiculares. El diagrama que hemos visto antes para averiguar si dos rectas en el espacio eran paralelas, se cruzaban o eran concurrentes, se podría continuar; a partir de que las rectas son concurrentes se podría distinguir si son perpendiculares o no. Con la idea que se desprende, se incluye como atributo crítico de la perpendicularidad de rectas que éstas tienen que cortarse; por lo que las aristas elegidas no se podrían comparar con esta relación. Si queremos extender la idea de perpendicularidad de segmentos para que incluya a estos segmentos como ejemplos de la manera como lo ha indicado E1, tendremos que modificar la idea que surgiría a partir del diagrama: eliminaremos el atributo crítico "que las rectas tienen que ser concurrentes" e incorporaremos las condiciones que ha señalado E1 sobre qué segmentos hay que considerar (el paralelo a uno de ellos que corte al otro). Este problema lo vamos a tratar otras veces con otros conceptos.

La tarea T-3. Identificación de poliedros y de familias de poliedros. En las respuestas de los estudiantes a las actividades que incluye esta tarea, como ejemplos de familias de sólidos han nombrado familias que están contenidas en familias más generales que también han apuntado, han olvidado alguna familia de poliedros que ya habían tratado en un contacto anterior con los sólidos y han introducido como ejemplos de familias de poliedros sólidos que no lo son. Por ejemplo, han incluido el cono como ejemplo de poliedro. Cuando se plantee esta actividad, si esto ocurre, las respuestas se pueden aprovechar para centrar la atención en las propiedades de las familias implicadas o en si las familias que se han nombrado son ejemplos de otra(s) que también está(n) en la lista. Se pueden presentar ejemplos de las familias que no se han nombrado y cuestionar la familia a la que pertenecen. Si no se reconoce la familia de la que son ejemplos, para introducirla se tendrán que plantear las actividades necesarias de las que hemos indicado para el nivel 1.

La tarea T-7. Los ángulos y diagonales de los polígonos y de los sólidos. Vamos a transmitir aquí lo ocurrido en muchas de nuestras experimentaciones, cuando tratábamos estos conceptos referidos a polígonos o a sólidos. Para que la exposición sea más clara lo hemos dividido en varios apartados, según si se refieren a ángulos o a diagonales y distinguiendo también lo que ocurrió al tratar estos conceptos como elementos de los polígonos o de los sólidos.

A) Los ángulos de los polígonos. Cabe comentar que en las actividades T-7a y T-7b hemos incluido polígonos cóncavos y convexos para poner de manifiesto si las ideas de estos conceptos que aplican los estudiantes están basadas exclusivamente en polígonos convexos.

Las experimentaciones realizadas han reflejado que cuando los ángulos de un polígono miden más de 180°, los estudiantes consideran el ángulo exterior del polígono y cuando miden menos de 180° consideran el ángulo interior. Y esto ocurre con más frecuencia cuando el polígono que se presenta tiene ángulos interiores y exteriores que miden 90°. Son muy comunes respuestas para T-7b en las que se indica que todos los ángulos de



miden 90°. Por ejemplo, en una de las experimentaciones con niños de 12 años, cuando intentábamos precisar en términos geométricos la idea visual de los sólidos cóncavos, "si la base tiene un ángulo hacia adentro", tuvo lugar la siguiente conversación:

P: ¿Cómo se podría decir de otra manera? Los ángulos tienen una medida...
E1: Cuando hay un obtuso pero metido para adentro.
E2: No mira éste [En el prisma que es una E, señala un ángulo entrante pero considera el exterior].

E1: Pero tú lo estás midiendo así [lo señala por fuera] y yo lo estoy midiendo así [lo señala por dentro].
P: ¿Cómo lo consideráis recto u obtuso? ¿Cómo lo medirías?
E3: Yo así [y lo señala por fuera]. Así también [lo señala exterior].
E1: Yo al revés [Lo señala interior].
P: Construye un cuadrilátero con varillas, lo va transformando y pregunta que cómo miden sus ángulos. Mientras los polígonos son convexos, todos ellos consideran los ángulos interiores. Luego lo transforma en cóncavo y pregunta que qué ángulo medirían para el ángulo cóncavo.
E1: [Transforma el polígono convexo en cóncavo y les dice a los otros niños] ¿Y por qué ahora tenemos que medirlo así [e indica el ángulo exterior] en vez de así [e indica el interior]?
E3: [Señala un ángulo cóncavo por fuera y dice]: Este es recto.
E1: No, si lo medimos por dentro es: [y lo señala].
E3: Se ríe y dice: Yo lo mido por fuera y los otros por dentro.
Todos: Se ríen.
P: O sea, que unos los mides por fuera y otros por dentro. ¿Y qué pasa si los mides todos por dentro?
E3: Pues que esto [señala un ángulo de 270°] no es recto.

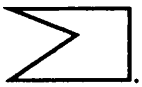
La explicación de lo que acabamos de señalar podemos encontrarla en que en la experiencia anterior de estos estudiantes con el estudio de la geometría, a los ángulos rectos se les ha prestado más atención que al resto de los ángulos y a los polígonos convexos más que a los cóncavos. Recomendamos pues que al desarrollar estas tareas se centre la atención sobre las condiciones que hay explícitamente en las ideas que expresamos de estos elementos o en los convenios que hacemos. Así, con respecto a los ángulos, si es necesario se puede subrayar que es muy usual referirnos a los ángulos interiores, por lo que, al hablar de ángulo de un polígono, si no se aclara más, cabe pensar en el interior. También puede ser interesante remarcar que con lo que hay que tener especial cuidado es con no seleccionar unos y otros indistintamente; que cuando en las tareas haya que considerar ángulos de un polígono, se tiene que tener cuidado con seleccionar todos del mismo tipo, o siempre los interiores o siempre los exteriores.

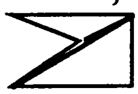
B) Las diagonales de los polígonos. Con respecto a las diagonales también ocurre con frecuencia que los estudiantes tengan una idea de este concepto formada exclusivamente a partir de los polígonos convexos, lo que lleva a asociar como atributo de este concepto el que éstas tienen que quedar completamente incluidas en el interior del polígono. Incluso los estudiantes que de entrada, siguiendo la sistematización de la que ya han sido entrenados al contar, en un principio incluyen las diagonales que caen fuera del polígono, cuando se les cuestiona si son o no diagonales, cambian a menudo de opinión. Es necesario discutir con ellos directamente este problema, y aún así, a menudo vuelven a aplicar que las diagonales tienen que quedar dentro del polígono, o dentro del sólido (si nos referimos a las diagonales del espacio) al resolver alguna actividad sobre ellas en otro contexto y en otro tiempo. La siguiente conversación que tuvo lugar en una de las experimentaciones que hemos realizado con niños de 12 años muestra lo que hemos apuntado:

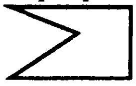
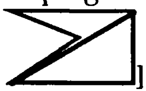
E1: Las diagonales son esto ¿no? [y señala una recta inclinada]?
P: ¿Qué es para ti la diagonal de un polígono?.
E2: Pues cuando se juntan dos vértices así [señala una recta inclinada].
P: Vale pues señálame ahí diagonales [le da un prisma de base pentágono cóncavo].
E2: Este con este y este con este.
P: ¿Ya no hay más?
E2: No. Y ahora éste con éste y éste con éste [Se ha pasado a otro vértice] [Y sigue con los demás considerándolos por turno. Señala también las que quedan fuera del polígono].
E3: Salta y dice en plan irónico, Claro... mira, esta también es...
E1: Sí mira [y pone la varilla que une dos vértices]. Se sale del plano.
P: Cuando se sale del plano, ¿Es o no es diagonal del polígono?
E1: Sí que es.
E3: No. No es.
E2: Esto sí que es diagonal, lo que pasa es que aquí está un trozo de plano que no está.
P: Las diagonales son las que unen dos vértices, ¿pero dos vértices cualesquiera?
E1: Dos vértices que no sean... que estén... así...
E2: Dos vértices que se unan por una diagonal pero que haya plano.
E3: Esta no es [y señala una de fuera].
E2: Y yo qué he dicho...
E1: Que unen vértices que no son vecinos.
E3: Que no estén unidos por una arista.
E2: Oblicuos.
E1: Sí pero si lo ponemos así... [y gira el polígono].
E3: Pero que estén en el plano.
E2: Sí pero que estén en el plano, porque si hay un agujero, al plano le quito un agujero, entonces éste ya no se une con ése.
P: ¿O sea qué decís que las diagonales tienen que estar dentro del polígono? ¿Fuera del plano no pueden estar?
E1: No.
P: ¿Antes no habíais dicho que sí?
E2: [Se mete con ella]. Era por llevar la contra.
E1: Vale pues ahora ya digo que no [y tira el modelo del prisma].
P: ¿Esto es o no es diagonal?
E1: Pues ahora digo que sí.
P: Y a vosotros os suena que se os haya puesto la condición de que las diagonales tenían que estar dentro del polígono?
E1: Claro, porque es diagonal de un polígono. Como es diagonal del polígono tiene que estar dentro del polígono. Si no fuera del polígono esto [y señala la que está fuera del polígono] también sería diagonal. Esto es si hablamos de diagonal de un polígono, pero si no es de un polígono, no.
P: Es que siempre hablamos de diagonales de un polígono o de un sólido. Ahora estamos hablando de diagonales del polígono. Diagonal de una cara es cuando se unen dos vértices que no son vecinos y ya no se ponen más condiciones.
E1: Ah! Pues tienen que estar fuera.
E3: Sí.
E2: Pues sí. Entonces ya lo había dicho antes. El que se unían así lo había dicho yo ya, así que...
E3: Pero luego has cambiado de idea.

La conversación sugiere que al estudiar las actividades para las fases 2 y 4 del nivel 2, en las que se señalan propiedades relativas a un tipo de diagonales, hagamos de nuevo hincapié en que en la idea que se da de diagonal de un polígono no se incluye como condición el que quede dentro del polígono. Ésta será una propiedad que asociaremos a la familia de los sólidos convexos.

C) La introducción de diferentes tipos de ángulos y de diagonales de los sólidos. Problemas de lenguaje. Las experimentaciones han puesto de manifiesto la dificultad que presenta el llegar a ser preciso en la utilización de estos nombres. Como ya hemos indicado en los comentarios sobre las características del nivel 2, la adquisición del segundo nivel de razonamiento se basa, en buena parte, en el uso que los estudiantes hacen del vocabulario geométrico, pero esta utilización del vocabulario adecuado al nivel 2, que incluye que se utilicen los términos de manera correcta, se adquiere de manera gradual.

D) Las diagonales de los sólidos. Una vez que se acepta que las diagonales de los polígonos pueden quedar fuera, al discutir las diagonales de los sólidos puede surgir este problema de nuevo, pero ya no se opone resistencia para aceptar que las diagonales de las caras pueden quedar fuera de la superficie y las del espacio puede que no queden completamente en el interior. En nuestras experimentaciones con niños de 12 años, al tratar este problema, el conflicto lo provocó el modelo de un prisma cuya base era un polígono con 3 vértices en la misma recta .

Dado que el problema se planteaba también para las diagonales de los polígonos, fue ahí dónde desviamos la atención. Si bien se aceptó que un "trozo" de la diagonal podía coincidir con un lado del polígono (o con una arista del prisma), los niños se mostraron muy reacios para aceptar que el número de diagonales no variaba. Como las diagonales del polígono las materializaban, bien con varillas, o con una recta en un dibujo, el hecho que no pudieran visualizarse dos diagonales diferentes  les llevaba a rechazar una de ellas (la más corta). La conversación siguiente muestra que si bien dos de los niños al contar las diagonales sistemáticamente consideraban como dos diagonales del polígono las que unían 3 vértices en línea, no admitían que correspondían a dos diagonales en vez de a una.

E1: Mira una diagonal que pasa por una arista [La base del prisma que ha seleccionado es un polígono como  que tiene 3 vértices en la misma recta. Señala la diagonal ].

P: ¿Esto sería una diagonal?

E1: Esto sí. Sí, pero pasa por una arista. Entonces con una diagonal ya tendríamos hechas 2 diagonales: con esta diagonal [señala la grande] ya tendríamos hecha esta diagonal [señala la pequeña]. Entonces tendríamos las dos diagonales con trazar una línea.

P: ¿Pero cuántas diagonales tenemos 1 o 2? Esta [pasa el dedo de vértice a vértice más lejanos] y ésta [pasa el dedo de vértice a vértice más cercano] o sólo ésta [la larga]?

E2: Una.

E3: Yo creo que dos porque ese también es vértice y se une de ese vértice a ese vértice.

E2: Pero sale una recta. Fíjate. Fíjate [con una varilla avanza por la diagonal grande]. Tendría que tener, mira... [acerca mucho una a otra las dos varillas que representan las dos diagonales] esto no puede ser. Tu lo haces así, como lo cojas para mirar a esto, no lo tienes que calcular para que sean dos. [Lo que quiere decir es que no puede ser que las diagonales estén muy juntas sin superponerse y entonces serían dos].

E3: Pero si se une con dos vértices... Yo pienso que son dos porque se unen con dos vértices.

E1: No sé. No sé por cual inclinarme.

P: Diagonal qué es: cualquier segmento que une... tengo este segmento y éste.

E1: Pero hemos dicho que sólo vamos a trazar una línea.

E2: Porque así da una. ¿Ves? [superpone la varilla en lo que sería la diagonal grande] coges así y haces así [y desliza la varilla a través de la diagonal].

E3: Pero una es éste con éste; entonces ya son dos.

P: Fijaos en que cuando os he dicho que me señalaseis todas las diagonales, tú me has dicho; una [señala la grande] y luego cuando has llegado a este vértice me has dicho: una. Me has señalado 2 diagonales, no me has señalado una.

E2: Pero es que tú me has puesto un problema y en el problema yo digo que son dos y ahora una.

P: Señálame las diagonales que salen de ese vértice [uno de los 3 que están en línea]. Y señálame las diagonales que salen de este vértice [otro de los vértices que están en línea]

E2: Da igual que se una ese vértice con ese. Si quieres conseguir éste con éste no sé cómo lo vas a conseguir pues tendrá que pasar así y entonces en una línea... de diagonal consigue éste y éste. Además mira. Esto no es diagonal porque no se juntan. Empezaríamos de éste por aquí [la varilla la pone como si fuera la diagonal grande] o como se hiciera, porque éste [señala el lado del polígono que es un trozo de la diagonal grande] con éste no son vecinos, entonces esto no es ninguna diagonal, entonces aunque pasemos por encima se junta con éste por lo tanto es una.
Entonces hay 3 porque éste se junta con éste; éste con éste y éste con éste [además de las dos diagonales señala el lado] por tanto son 3.

P: ¿Esto sería una diagonal?

E2: No. Esta no sirve porque es un lado. Entonces si no vale para una cosa tampoco vale para la otra.

E1: Oye, una cosa. Yo no me quedo con nada porque no digo nada [y se ríe].
Claro, une dos vértices... Pero son dos vértices asíii...

P: ¿Son vecinos? ¿Cuándo dos vértices son vecinos?

E1: No, pero es que estos vértices son muy raros, muy... yo que sé.

E3: Eso es un vértice y esto es otro vértice, y... siempre que unes un vértice con otro es diagonal.

E1: Pues entonces sí que es una diagonal. Vale es diagonal. Aunque esté así... recta... [quiere decir que coja un trozo de lado o de arista].

Otra idea que los estudiantes también tienen incluida en el objeto mental de diagonal de un polígono o de diagonal del espacio es de que éstas tienen que ser inclinadas. De nuevo tenemos una conversación de los niños de 12 años que lo muestra:

E1: En un crucigrama las diagonales siempre son así y así y así [en la mesa con el dedo dibuja rayas como si tuviera el crucigrama]. Las diagonales siempre son así [y señala las rectas inclinadas] nunca son rectas.
Las diagonales son éstas [señala las diagonales del cuadrado]Y éstas y éstas y éstas [en la mesa con el dedo raya las paralelas a las diagonales del cuadrado: Lo que se entiende por diagonal en un crucigrama] Busca en diagonal... en diagonal...Tiene un montón de diagonales.

P: Porque considera los cuadrados de las diferentes medidas (formados por 4 casillas, 9 casillas...) y en ellos las diagonales.

E1: Pero a veces no hay casillas. A veces sólo hay...letras. A veces no hay casilla y entonces [habla muy despacio y no se entiende].

P: Si giras el crucigrama ya consigues alguna diagonal recta. Pasa lo mismo que en el cuadrado. Mira, si lo colocas apoyado en un vértice, ¿Cómo son las diagonales?

E1: ¡Vale! Pero pasa pocas veces y nadie lo hace.

El formarse una imagen de diagonal del espacio que permite distinguir lo que es de lo que no, no ofrece dificultad pero sí el llegar a expresarla en términos geométricos. En las experimentaciones que hemos realizado con niños de 12 años, como muestra la conversación siguiente, se dan ideas visuales.

P: ¿Cómo quedarían las diagonales en el espacio? porque hasta ahora sólo hemos hablado de diagonales de las caras.

E1: ¡Ah¡ Pues yo no tengo ni idea de eso.

P: [En un modelo de prisma recto hexagonal regular señala una diagonal de una cara]. ¿Esto será una diagonal en el espacio?

Todos: No.

E2: Es de ... Es de una cara.

P: Si lo uno con éste, [Señala una arista], ¿será diagonal del espacio?

Todos: No.

E1: Es una arista.

E3: [Interrumpe]. Sería ésta... mira... [y une vértices que no pertenecen a la misma cara].

E1: [Interrumpe]. ¿Esto sería una diagonal? Una pregunta...Si cogemos esto y lo atravesamos así: Pummm [y señala una diagonal del espacio].

P: ¿Eso sería una diagonal del espacio?

E1: Y yo que sé.

E2: Si lo atravesamos sí.

P: Bueno, en el espacio una diagonal es cuando une dos vértices pero...

E1: Opuestos, nooo...

E2: [Coge el modelo]. Con éste sí [señala otros vértice de la base que no son vecinos al elegido]. Con éste sí que será diagonal y con éste también.

E3: Del espacio... [lo dice en tono irónico]. Estamos hablando del espacio.

E2: ¡Ah¡ no. Del espacio no.

E3: Del espaciooooo... Una diagonal del espacio une vértices... pues que los atraviesen.

P: ¿De qué otra forma se podría decir? ¿Por qué piensas tú que ésta [junta vértices vecinos] no es diagonal del espacio?

E3: Porque está unido con una arista... Y éste tampoco es [señala un vértice del rectángulo pero que no es vecino] porque lo puedo unir por aquí también [y señala la diagonal de la cara]. Éste sí que es [y señala una diagonal del espacio] porque si nos metemos por dentro habrá que llegar ahí, porque por aquí [señala la superficie] es muy difícil el ir así [y señala un camino que une los vértices parando por las caras] .

E1: [Interrumpe]. Las diagonales se tienen que meter por dentro [y hace gestos con las manos señalando rectas inclinadas]

E2: Yo creo que las diagonales del espacio cuando un vértice se une con otro y... o sea que no se unen en el mismo plano, como por ejemplo éste y éste [y señala dos vértices de una cara] sino que se unen con los de la otra parte.

P: Cada plano ¿cómo se llamaría aquí?

E2: Cara. Que no estén en la misma cara.

P: Bueno, este vértice está en esta cara, en esta cara y en esta cara. ¿Con qué vértices no se puede unir?

E3: Ni con éste, ni con éste... Con esta cara [señala la base] no se puede; ni con éstas dos tampoco [señala las dos caras laterales que concurren en el vértice]. Pero con ésta sí, porque con ésta haces... Entonces ya puedo hacer fuuuuu [Y hace el gesto de atravesarlo].

E2: Le coge el modelo. Pero con éste no [señala uno de la base] porque se une [y señala la diagonal de la cara] y es de la cara esta.

E1: Tienen que atravesar esto [señala el modelo que tiene en las manos]. El poliedro. Tiene que atravesar el cuerpo, el volumen...

P: ¿Y cómo se podría decir? Porque hay muchas rectas que pueden atravesarlo eh... Mira esta recta también lo atraviesa... [y sugiere una recta que no pasa por los vértices].

E1: Pero tienen que unir dos vértices... Que une dos vértices y tiene que ir por dentro del poliedro.
[Coge un modelo]. De este vértice por ejemplo, pues menos éste, éste, éste [y va señalando por turno todos los vértices de cada una de las tres caras que concurren en el vértice que ha elegido]. Bueno éste ya lo he dicho [se refiere a los vértices de las caras laterales que también son de la base]. Bueno todos esos.

P: Selecciona un prisma cóncavo pentagonal. Luego pide a los niños que en el modelo señalen una diagonal del espacio.

E1: Ah no, que no se mete por dentro. Pero aquí no lo atraviesa.

E3: Pues que se puede atravesar por fuera porque por fuera también puede ser.

E1: Vale pues, por fuera o por dentro; da igual. No tiene que ir rozaaando la cara. No tiene que ir por la cara. Tiene que volar.

E3: Mira puede venir así, y así, y así [señala un camino de varios segmentos que une los vértices pasando por las caras que forman el entrante].

E1: No puede ir por la cara. Tiene que volar.

E3: O no mira, sí que se puede meter por dentro. Si sigues recto [baja por una cara lateral a la base] y aquí, mira aquí [cuando llega a la arista de la base que queda abajo] sigues recto al final aparece una diagonal.

P: O sea que la diagonal, en vez de ir directamente de un vértice a otro puede ser dos segmentos [los señala en el modelo].

E3: Una diagonal.. Nooo...

E1: No una diagonal tiene que ir así...[en la mesa hace una recta inclinada con la mano]. De un vértice a otro [Lo muestra en un modelo]. Puede quedar dentro o fuera pero tiene que quedar volando.

E2: Y no puede ser más de un segmento.

P: También lo podemos decir así: una diagonal del espacio es un segmento que une dos vértices que no están en la misma cara.

Todos: Si.
P: ¿Y qué prismas puede haber con alguna diagonal fuera?
E2: Los cóncavos.

Cabe subrayar cómo se las ingenian los niños para señalar que la diagonal del espacio no queda sobre la superficie del sólido; señalan que "tiene que ir volando". De la conversación también puede comprobarse que los niños, una vez que se ha discutido que las diagonales de los polígonos pueden salirse de ellos, ya aceptan que las diagonales del espacio pueden quedar fuera del sólido y que, si bien surge la posibilidad de que una diagonal esté formada por dos segmentos (en un intento de que no quede fuera del sólido) esta idea se rechaza de inmediato. En la idea que dan los niños del concepto de diagonal del espacio cabe hacer notar cómo se preocupan de reflejar todas las condiciones delimitadas, como muestra la siguiente respuesta de uno de ellos: "La diagonal del sólido une dos vértices que puede ir por dentro o por fuera pero tiene que quedar volando y que no puede ser más de un segmento".

E) Sobre "caras iguales" y "caras del mismo tipo", "vértices iguales" y "vértices del mismo orden". Una vez introducidos las familias de poliedros y sus elementos para poder progresar en el análisis de los mismos se hace necesario introducir las relaciones de igualdad que pueden establecerse entre ellos. La actividad T-7g intenta averiguar las ideas que tienen los estudiantes sobre caras iguales y sobre vértices iguales o introducirlas si fuera necesario. También pretende averiguar si los objetos mentales que han construido los estudiantes para estos conceptos permiten distinguir "caras iguales" y "caras del mismo tipo", "vértices iguales" y "vértices del mismo orden".

Si es necesario, introduciremos estos conceptos como ya hemos señalado para los diferentes tipos de ángulos y de diagonales: apoyándonos en material comercializado. Como sugiere la actividad T-7g, los estudiantes también pueden utilizarlo para construir posibles ejemplos o no ejemplos del concepto correspondiente.

Si al plantear esta actividad, como ha ocurrido en muchas de nuestras experimentaciones, los estudiantes responden que los rectángulos (o los triángulos) son iguales "porque son rectángulos (o triángulos)", o que los vértices del romboedro son iguales, centraremos la atención en la diferencia entre los conceptos que hemos indicado antes. Apuntaremos que las caras son iguales si al superponerlas coinciden y que las caras son del mismo tipo si pertenecen a una misma familia. Remarcaremos que si los polígonos son iguales serán de la misma familia (del mismo tipo) pero si son del mismo tipo pueden ser iguales o no. Respecto a los vértices, apuntaremos que los vértices son del mismo orden cuando en ellos se juntan el mismo número de polígonos, o de aristas, (que pueden ser 2, 3, 4,...) pero que esto no significa que los vértices sean iguales.

Si es necesario, presentaremos varios sólidos con vértices del mismo orden, no iguales, bien porque en ellos los polígonos que concurren en los vértices no son los mismos (por ejemplo, se les muestra un prisma y un tetraedro truncado, o un antiprisma y un cuboctaedro) o porque aunque concurren los mismos polígonos no concurren con los mismos ángulos (por ejemplo, se presenta el romboedro o una pirámide triangular que no sea regular). Estos ejemplos permitirán establecer que si dos vértices son iguales serán del mismo orden, pero que porque sean del mismo orden no quiere decir que vayan a ser iguales. Si bien no se plantea explícitamente el problema de la demostración de estas implicaciones ni se centra la atención en que tenemos dos implicaciones recíprocas. Estos problemas requieren de razonamientos de nivel 3.

Una idea que se forman a menudo algunos estudiantes sobre el concepto de "vértices iguales" es que los polígonos que forman cada uno de los vértices tienen que ser de la misma familia. Es por esto por lo que los vértices del romboedro, que son diferentes, se consideran iguales y los vértices de los prismas de caras regulares, que son iguales, se consideran distintos (porque los forman polígonos de 2 clases: cuadrados y otro polígono regular). Si al responder la actividad T-7g ocurre esto, aclararemos que esta condición no es imprescindible. Hay que destacar que no se comparan entre ellos los polígonos que forman un vértice sino que se comparan, y se observa si son iguales o no, los polígonos que hay en un vértice con los correspondientes que hay en el otro.

2.5.2. NIVEL 2. FASE 2

OBJETIVOS

Con las tareas que hemos diseñado para la fase 2 del nivel 2 los estudiantes pueden ampliar los objetos mentales construidos para familias y subfamilias de sólidos con las tareas del nivel 1; pueden incluir propiedades geométricas que previamente se han descubierto, clasificaciones que se han establecido, relaciones entre familias de sólidos y definiciones, con el significado que les hemos asignado para este nivel en el apartado 1.4.2. Las tareas propuestas para esta fase del nivel 2 también tienen como objetivo que se vayan logrando las características que hemos indicado en la sección 1.4.1 para el nivel de razonamiento 2 y que vamos a matizar a continuación.

1.- Descubrir las propiedades de familias de sólidos (de los prismas, los antiprismas, las pirámides y las bipirámides) con la ayuda de observaciones, medida, dibujos y construcción de modelos, generalizando las obtenidas a partir de varios ejemplos.

2.- Descubrir y utilizar las propiedades de familias de sólidos o las propias definiciones para identificar un sólido como ejemplo o no ejemplo de una familia de sólidos.

3.- Descubrir y utilizar las propiedades de familias de sólidos para construir, con diferentes materiales comercializados, ejemplos de una familia de sólidos dada y diferentes desarrollos de algunos sólidos.

4.- Descubrir la información dada en un modelo sólido y utilizar las propiedades de familias de sólidos para aplicar esta información en uno de los desarrollos.

5.- Establecer clasificaciones-particiones de los sólidos.

Establecer familias dicotómicas de los sólidos, o varias familias disjuntas que cubren todo el universo objeto de clasificación; dentro de estas familias establecer otras, y así sucesivamente.

Seleccionar propiedades que pueden usarse para establecer diferentes familias de sólidos y el universo que hay que clasificar en cada caso.

Descubrir, generalizando las propiedades obtenidas a partir de varios ejemplos, las propiedades de las subfamilias de sólidos que se establecen al clasificar dentro de determinadas familias de sólidos (de los prismas, los antiprismas, las pirámides y las bipirámides).

Descubrir y utilizar relaciones de familias para establecer propiedades de una familia, englobadas como propiedades de otra, siempre que la inclusión entre familias tenga un gran componente visual o sea una inclusión que en términos de ejemplos sea usual considerarla.

Descubrir e identificar ejemplos de subfamilias de sólidos que se establecen al clasificar.

6.- Evaluar y plasmar verbal y visualmente relaciones de familias de sólidos.

Descubrir y utilizar ejemplos de familias de sólidos, o verificar definiciones de ellas, para justificar relaciones de familias.

7.- Utilizar la generalización para descubrir y demostrar las fórmulas que dan el número de caras, vértices, aristas o un determinado tipo de ángulos (ángulos de las caras, ángulos diedros y ángulos de los vértices), para una familia de sólidos dada (prismas, antiprismas, pirámides y bipiramides). Aplicar para un n particular las fórmulas encontradas.

8.- Utilizar el vocabulario básico asociado a las familias de sólidos, a sus elementos y a las relaciones entre ellos.

TAREAS

T-1 a) Utilizar modelos y armazones de sólidos para centrar la atención sobre las aristas y los vértices. Preguntar que cuántos polígonos los forman, si los vértices de los poliedros pueden formarse con 3, 4, 5 o más polígonos y si una arista la forman siempre dos caras.

b) Remarcar que para formar el modelo de un poliedro se necesitan por lo menos 4 caras y que para formar el armazón se necesitan por lo menos 6 aristas y 4 mecanismos de engarce. Para ello preguntar si se puede formar un vértice con 2, (3) polígonos, si se puede formar un poliedro con 3 (4) polígonos y si se puede formar el armazón de un poliedro con 3 varillas. Cuestionar también cuántas varillas se necesitan para construir el armazón de un sólido que tiene 4 caras que son triángulos y cuántos vértices tiene ese sólido.

c) Pedir que se haga una lista lo más larga posible con propiedades de los poliedros.

d) Dar una lista de propiedades de los poliedros (por ejemplo, la que incluimos en el anexo 2 para esta familia) y pedir que se compare con la lista que se ha elaborado en T-1c.

e) Pedir que en la lista de propiedades que se ha dado en T-1d se señalen las que además de ser propiedades de los poliedros también lo son de todos los sólidos.

f) Cuestionar si en los sólidos que tienen caras curvas puede haber vértices en los que se juntan menos de 3 caras y si es esto posible en los poliedros.

T-2 a) Introducir la idea de caras vecinas como las que se unen mediante una arista. Dar un modelo de prisma (antiprisma, pirámide, bipirámide) y preguntar por las caras que bordean a la(s) base(s) y por las caras que bordean a una de sus caras laterales.

Preguntar también que cuántas caras vecinas tienen.

b) Seleccionar varios modelos de prismas. Para cada modelo, colocado en diferentes posiciones, señalar las *bases*. Preguntar por el tipo de caras que las bordean y resaltar que las bases de cualquier prisma siempre están bordeadas por paralelogramos (cuadrados, rectángulos, rombos o paralelogramos). Señalar que a estas caras las llamamos *caras laterales* del prisma.

Repetir la actividad para los antiprismas, pirámides y bipirámides.

c) Pedir que se comparen los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides y se establezcan analogías y diferencias respecto al tipo de caras laterales que tienen.

d) Repetir la actividad anterior pero ahora centrando la atención en las bases. Señalar que el vértice de las pirámides donde se juntan todas las caras laterales, suele llamarse *ápice* (o cúspide).

Remarcar que las bipirámides tienen una base que está perfectamente delimitada por los lados que forman el polígono, pero que no es cara de ella y no está materializada en el interior (para que el modelo resultante sea poliedro).

Remarcar además que en las bipirámides todas las caras son triángulos y que como la base no es cara de ellas, no cabe hablar de caras laterales, pues éstas corresponden a las caras.

e) Seleccionar varios modelos de prismas y pedir que se señalen propiedades que cumplen todos ellos relativas a sus bases. Preguntar si la propiedad(es) señalada(s) se verifica(n) en los otros modelos de prisma.

Pedir que se compruebe si la propiedad también la cumplen los antiprismas y que se intente enunciar la propiedad de las bases que diferencia un prisma de un antiprisma.

f) Para los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides, introducir el concepto de *aristas de la(s) base(s)* como las aristas de este(os) polígono(s) y *las aristas laterales* como las aristas que juntan las bases, o que salen de la base para juntarse todas ellas en un punto.

Seleccionar varios modelos de prismas rectos y pedir que se muestren propiedades de ellos relativas a las aristas laterales. Cuestionar si también la cumplen otros prismas rectos y los prismas oblicuos.

Pedir que se compruebe si la propiedad, o parte de ella, también la cumplen los antiprismas, las pirámides y las bipirámides.

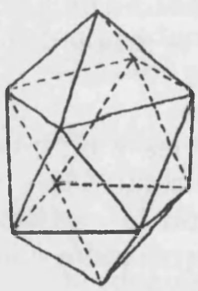
g) Recordar la idea de *orden de un vértice* que se ha indicado con las actividades de la fase 1 del nivel 2. Cuestionar si los prismas (antiprismas, pirámides, bipirámides) tienen todos los vértices del mismo orden y si en todos ellos se juntan los mismos tipos de caras o de aristas. Aclarar con un ejemplo que *por un mismo tipo de caras* se entiende que las caras pertenecen a la misma familia.

T-3 a) Poner a disposición materiales comercializados (polydron o creator, troquelados y varillas). Pedir que con ellos se construyan varios prismas hexagonales (o con otro polígono en la base). Con uno de los modelos mostrar que los desarrollos del sólido pueden obtenerse desenganchando las bisagras (o quitando las gomitas) que unen las caras por el suficiente número de aristas para que quede completamente extendido en el plano y en una sola pieza.

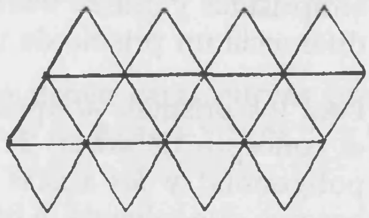
Pedir que se desmonten otros modelos para tener desarrollos de ellos.

b) Señalando en los modelos las franjas y abriendo un modelo de manera adecuada, mostrar que el ver los prismas rectos como una franja de rectángulos (que forman un rectángulo) y las bases que se juntan con todos los rectángulos, permite encontrar algunos desarrollos de ellos sin necesidad de desmontar los modelos.

Con el deltaedro de 16 caras que se muestra en la figura 2.11(a) mostrar que este procedimiento se puede aplicar para encontrar desarrollos de otros poliedros. Uno de ellos puede ser el de la figura 2.11(b)



(a)



(b)

Figura 2.11

Pedir que se utilice este procedimiento para encontrar desarrollos de algunos antiprismas y del icosaedro. Al principio dejar que los estudiantes doblen el desarrollo para ver si es correcto o no.

c) Utilizar el octaedro para mostrar diferentes procedimientos, basados en el análisis del modelo, que se pueden usar para encontrar desarrollos de poliedros: se descomponen en "trozos", se halla el desarrollo de uno de ellos y se le añaden los polígonos de los otros; o se hallan los desarrollos de todas las partes y se juntan los desarrollos.

Pedir que se utilice este procedimiento para encontrar desarrollos de las bipirámides de caras regulares, del dodecaedro y del icosaedro.

d) Repartir varios rombos de material comercializado polydron o creator y pedir que se construyan varios romboedros y varios desarrollos diferentes del romboedro. Cuestionar si alguno de los desarrollos puede verse como una cinta de rombos que corresponda a un paralelogramo y dos rombos, uno a cada lado.

Para varios prismas oblicuos cuestionar lo que para el romboedro.

e) Dar desarrollos a diferentes escalas de modelos de diferentes familias de sólidos y preguntar que a qué sólidos corresponden y cuánto miden las aristas en realidad. Pedir que se dibujen los desarrollos y se construyan los modelos correspondientes.

T-4 a) A partir de modelos, dar ideas visuales sobre caras opuestas, vértices opuestos y aristas opuestas.

Para varios modelos pedir que se señale la cara (arista, vértice) opuesta a una cara (arista, vértice) dada.

b) Repartir un dado cúbico, varios cubitos y varios desarrollos diferentes del cubo. En los dados marcar los puntos que corresponden a 3 caras no opuestas del cubo y en los desarrollos dibujar estos puntos en las caras correspondientes. Pedir que se complete la numeración del cubo y de sus desarrollos y que se explique la respuesta.

c) Repartir varios hexaminós con la numeración completa de un dado. Apuntar que hay dibujos que no lo son porque la numeración no es correcta o porque no lo es la posición de los cuadrados. Pedir que se separen los desarrollos correctos del dado de los que no lo son y que se explique la respuesta. Al principio permitir plegar los desarrollos para comprobar la respuesta.

d) Se repiten las dos actividades anteriores para dados octaédricos, dodecaédricos e icosaédricos.

T-5 Presentar modelos de prismas (antiprismas, pirámides, bipirámides).

a) Cuestionar el número de caras, de vértices y de aristas. Pedir que se señale la estrategia que se ha utilizado para hallar estos números y mostrar con un ejemplo que una buena manera de contar es separando el modelo en pisos y contar los elementos de cada piso.

Para los antiprismas, pedir que vuelvan a hallar estos números utilizando una manera de contar basada en otra estrategia de construcción.

b) Indicar el número de lados del polígono de la(s) base(s) y la familia a la que pertenece (se tienen modelos de alguno de ellos pero no de otros), y cuestionar el número de elementos (caras, vértices y aristas) que tiene el modelo correspondiente. Pedir también que se explique cómo se ha llegado al resultado.

c) Pedir que se determine el número de caras, vértices y aristas de un prisma, un antiprisma, una pirámide y una bipirámide, n-agonal. Pedir también que se explique cómo se ha contado para llegar al resultado y que se simbolice la relación encontrada.

T-6 a) Mostrar un prisma hexagonal y pedir que se halle el número de ángulos de las caras que tiene, el número de ángulos diedros y el número de ángulos de los vértices.

b) Pedir que se complete la tabla siguiente para prismas triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc.

Nº de lados del polígono de las bases	Nº de aristas del prisma	Nº de vértices del Prisma	Nº de Ángulos diedros del Prisma	Nº Ángulos de los vértices del Prisma
3				
4				
5				
. .				

c) Pedir que se comparen los números que hay en las diferentes columnas de la tabla y que se establezcan y formulen relaciones entre ellos.

d) Pedir que se utilicen varios antiprismas, pirámides y bipirámides para verificar si la relación encontrada para los prismas entre el número de ángulos diedros y el número de aristas, y entre el número de ángulos de los vértices y el número de vértices, se verifica también en estas familias de poliedros.

e) Pedir que se rellene la siguiente tabla y que se enuncien y simbolicen las relaciones que hay entre el número de ángulos diedros, o el número de ángulos de los vértices, y el número de lados del polígono de las bases de la familia correspondiente.

Familia de sólidos	Nº de aristas	Nº de vértices	Nº de ángulos diedros	Nº de ángulos de los vértices
Prisma n-agonal				
Antiprisma n-agonal				
Pirámide n-agonal				
Bipirámide n-agonal				

T-7 a) Pedir que se complete la tabla siguiente. Apuntar que para hallar el número de ángulos de las caras de los diferentes ejemplos de estas familias se descomponga el ejemplo en pisos o en "trozos" y que se cuente los ángulos de las caras por trozos o por pisos.

b) Preguntar de qué depende el número de ángulos de las caras de un prisma (antiprisma, pirámide, bipirámide) y pedir que expresen y simbolicen las relaciones correspondientes. Apuntar que para hallar el número de ángulos de las caras de un prisma n-agonal cuenten los ángulos de las caras por trozos o por pisos y que luego generalicen los elementos de cada nivel.

Nº de lados del polígono de la(s) base(s)	Nº de ángulos de las caras del prisma	Nº de ángulos de las caras de un antiprisma	Nº de ángulos de las caras de una pirámide	Nº de ángulos de las caras de una bipirámide
3				
4				
5				
. . 20				

c) Pedir que se utilicen otros procedimientos para determinar el número de ángulos de las caras de un prisma (antiprisma, pirámide, bipirámide) n-agonal. Mostrar con un ejemplo que nos podemos fijar en los vértices y en los ángulos de las caras que se juntan en cada uno de ellos, podemos separar los vértices por pisos y así contar los ángulos de las caras de cada piso.

T-8 a) Pedir que se dibujen todas las diagonales de los polígonos de las bases de dos prismas hexagonales, uno cóncavo y otro convexo. Luego pedir que se dibujen las diagonales de las caras laterales.

Para cada prisma pedir que se cuenten todas las diagonales de las caras que tiene.

b) Pedir que se rellene la tabla siguiente:

Nº de lados del polígono de la(s) base(s)	Nº de diagonales de las caras del prisma	Nº de diagonales de las caras de un antiprisma	Nº de diagonales de las caras de una pirámide	Nº de diagonales de las caras de una bipirámide
3				
4				
5				
. . 20				

c) En un modelo abierto de un cubo (ortoedro, romboedro) pedir que se introduzcan las varillas que pueden representar las diagonales del espacio de ese modelo. Cuestionar cuántas diagonales del espacio salen de cada uno de los vértices y cuántas diagonales del espacio tiene el cubo (ortoedro, romboedro). Preguntar también si las diagonales del espacio del sólido correspondiente son iguales o no y cuántas medidas diferentes encontramos para ellas.

d) Pedir que en modelos abiertos se introduzcan todas las varillas que pueden representar las diagonales del espacio de los modelos considerados y que se rellene la tabla siguiente:

Nº de lados del polígono de la(s) base(s)	Nº de diagonales del espacio del prisma	Nº de diagonales del espacio de un antiprisma	Nº de diagonales del espacio de una pirámide	Nº de diagonales del espacio de una bipirámide
3				
4				
5				
. . 20				

e) Pedir que en modelos abiertos de ejemplos de prismas (antiprismas) se ajusten varillas que representen las diagonales del espacio del sólido correspondiente, que se midan y se compare su tamaño con la de la diagonal de la base con la que se corresponde (se forma un triángulo con ambas diagonales y una arista lateral del sólido).

T-9 a) Intentar convertir en rígido el armazón del cubo introduciendo varillas que juntan un vértice con todos los que no son vecinos a él (no están unidos con él por una arista) y que representan diagonales del sólido y de la superficie.

Para los sólidos en los que se ha descompuesto el cubo pedir que se indique la forma de las caras, la familia a la que pertenecen, cuál es su base, su altura y a qué elementos del cubo corresponden las diferentes aristas.

Pedir que se construyan estas pirámides.

b) Intentar convertir el armazón del cubo en rígido introduciendo varillas que juntan pares de vértices opuestos del cubo y que representan las diagonales del espacio del cubo. Plantear la actividad anterior para los sólidos que se obtienen con esta descomposición del cubo.

c) Intentar convertir el armazón del cubo en rígido introduciendo una varilla por cada cara del cubo, que representa una diagonal de la cara, de manera que las varillas (o las diagonales que representan) se junten de 3 en 3 en cada uno de los 4 vértices del cubo seleccionados. Pedir que se identifique el sólido que ha quedado inscrito en el cubo y que se indiquen los elementos del cubo con el que se corresponden los vértices, las caras y las aristas del sólido inscrito en él.

Pedir que se determine la longitud de la arista del sólido inscrito a partir de la del cubo y que se construya el modelo de ambos poliedros.

d) Intentar convertir en rígido el dodecaedro introduciendo una varilla por cada cara del dodecaedro, que representa una diagonal de la cara, de manera que las diagonales se junten de 3 en 3 en cada uno de los 8 vértices del dodecaedro seleccionados. Plantear la actividad anterior para el modelo formado por estos dos poliedros.

T-10 Indicar que se va a hacer una partición en el mundo de los prismas. Que se va a incluir en un grupo los modelos que son *rectos* y en otro grupo los que son *oblicuos*.

a) Pedir que se precise lo que se entiende por prisma *recto* y por prisma *oblicuo* en términos de propiedades visuales y de propiedades geométricas.

Pedir que se explique también si todos los prismas se pueden incluir en una de las familias establecidas y si hay prismas que pueden incluirse en ambas.

b) Centrar la atención sobre las características de este tipo de clasificación (llamada dicotomía) y sobre los modelos que pueden representarla.

Pedir que se clasifique la familia de los antiprismas con este criterio de clasificación; que se establezca y se nombre las familias obtenidas; que se represente la clasificación en un diagrama y se precise una idea de antiprisma *recto* y de antiprisma *oblicuo*.

c) Pedir que se repita la actividad T-10b para las pirámides y para las bipirámides.

d) Pedir que se repita la actividad T-10b cuando se considera como universo de clasificación el formado por los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides. Y cuando se considera como universo de clasificación la familia de los poliedros.

Utilizar algunos modelos para centrar la atención sobre los problemas que se pueden tener para precisar lo que se entiende por *sólido recto* y *sólido oblicuo,* y de ahí para determinar la subfamilia a la que se tienen que asignar.

Pedir que con material comercializado se construyan otros modelos que presenten problemas para incluirlos como rectos u oblicuos.

e) Pedir que se intente expresar cómo se halla la altura de dos prismas, uno recto y otro oblicuo y de pirámides rectas y oblicuas.

f) Pedir que se compare lo que ocurre en los prismas (antiprismas, pirámides, bipirámides) *rectos* y *oblicuos* respecto a la altura, cuando se dibuja desde el centro de una base (o desde el ápice) y que se enuncien propiedades, relativas a este elemento, para estas familias.

g) Pedir que en algunos prismas rectos y oblicuos dados se compare la longitud de la altura con la de las aristas laterales y que se enuncien propiedades de los prismas rectos y oblicuos en términos de la longitud de la altura y de la arista lateral.

Cuestionar si la propiedad enunciada para los prismas rectos, o para los prismas oblicuos, se puede extender a la familia correspondiente de los antiprismas, (pirámides, bipirámides).

h) Pedir que se precise una idea de *prisma, antiprisma, pirámide y bipirámide, recta* y *oblicua,* en términos de la altura.

T-11 a) Pedir que se señale la relación que hay entre las caras laterales (las aristas laterales) y las bases de un prisma recto dado. Cuestionar si esta relación ocurre en todos los prismas rectos, y si también la cumplen los prismas oblicuos.

Cuestionar también si la relación encontrada en los prismas rectos puede extenderse a los antiprismas (pirámides, bipirámides) *rectos.*

b) Plantear actividades análogas a la anterior para las siguientes propiedades: las caras laterales son rectángulos (que pueden ser cuadrados); los ángulos de las caras laterales son rectos. Pedir también que se indique si un prisma oblicuo puede tener alguna cara que sea rectángulo o cuadrado y que se explique la respuesta.

c) Introducir el concepto de ángulo diedro con material comercializado. Apuntar que los ángulos diedros podemos hallarlos porque coinciden con los que forman dos segmentos. Dirigir la actividad para que se llegue a delimitar que los segmentos que hay que seleccionar para hallar un ángulo diedro son uno de cada cara (de las dos que forman un ángulo diedro), se juntan en un punto de la arista y son perpendiculares a ella.

d) Plantear una actividad análoga a T-11a para las siguientes propiedades: los ángulos diedros que forman las caras laterales con la base son de 90°; los ángulos diedros que forman las caras laterales entre ellas coinciden con los ángulos correspondientes del polígono de la base.

e) Presentar dos prismas, uno de ellos está formado por dos rombos que no son cuadrados y 4 cuadrados y el otro está formado por dos paralelogramos iguales que no son rectángulos y 4 rectángulos. Cuestionar si estos modelos son rectos u oblicuos y que se explique la respuesta.

T-12 Indicar que se va a hacer otra partición en el mundo de los prismas a partir de otro criterio que tiene también características visuales. Separar en un grupo los prismas *cóncavos* y en otro los prismas *convexos*.

a) Para la clasificación establecida con este criterio, plantear actividades análogas a T-10a a T-10d.

b) Presentar varios modelos de prismas cóncavos y de prismas convexos y pedir que para cada una de estas familias se especifiquen propiedades relativas a los diferentes tipos de ángulos: los ángulos de las caras, los ángulos diedros y los ángulos de los vértices.

Pedir que se compruebe si las propiedades señaladas para los prismas convexos también las verifican los antiprismas (pirámides, bipirámides) convexos.

c) Pedir que se repita la actividad anterior para propiedades relativas a los diferentes tipos de diagonales: diagonales de las caras y diagonales del espacio.

d) Pedir que se utilicen modelos de prismas cóncavos y de prismas convexos para determinar algunas propiedades de estas familias que reflejen lo que ocurre cuando se intenta apoyar los modelos en cualquiera de sus caras.

e) Pedir que se repita la actividad anterior pero la propiedad tiene que reflejar lo que ocurre con los ejemplos de la familia considerada cuando se prolonga cualquiera de sus caras.

f) Pedir que se explique si la lista de propiedades de los prismas convexos contendrá todas las propiedades de los prismas. Apuntar que si la respuesta es afirmativa, éstas se pueden indicar de golpe, sin decirlas explícitamente, indicando sólo "propiedades de los prismas".

T-13 Recopilar las características que tienen las clasificaciones-particiones.

a) Pedir que se delimiten otros criterios de clasificación e indicar como posibles el criterio que centra la atención sobre si los ejemplos tienen bases o no, o criterios que centran la atención en la base (en el número de lados, la igualdad de los lados o de los ángulos, o en la regularidad de este polígono).

b) Para cada uno de los criterios que se delimiten, pedir que se establezcan clasificaciones que sean particiones, que se nombren las familias obtenidas y se incluyan los ejemplos del universo que se clasifica en las subfamilias a las que pertenecen.

c) Pedir que se represente en un modelo la clasificación fijada, que se especifique cuál es el universo que se clasifica y si el criterio que se considera sólo tiene sentido para un "trocito" de mundo de los poliedros o se puede extender al universo de los poliedros en general.

T-14 Indicar que vamos a fijarnos en la regularidad, o en la igualdad, de todas las caras y que de esa manera establecemos las familias de los prismas, antiprismas, pirámides, bipirámides, *de caras regulares* (PCR, ACR, PiCR y BiCR) y las familias de los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides, *de caras iguales* (PCI, ACI, PiCI y BiCI).

a) Para cada subfamilia de caras regulares de las separadas, pedir que, con material comercializado, se construyan ejemplos de ella y cuestionar cuántos ejemplos pueden construir.

b) Centrar la atención en que el nombre de estas subfamilias es un nombre compuesto (arbitrario) formado por un sustantivo que hace referencia a la familia a la que pertenece (prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides) y un adjetivo que hace referencia a que en los ejemplos de estas familias todas sus caras son regulares.

Apuntar también que los modelos que no son ejemplos de ellas porque sólo la(s) base(s) es(son) regular(es), al igual que los ejemplos de ellas, pertenecen a las subfamilia de los *prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides de base(s) regular(es)* (PBR, ABR, PiBR y BiBR); y que si no pertenecen a ellas porque sólo las caras laterales son regulares, al igual que los ejemplos de ellas, pertenecen a las subfamilias de los *prismas, antiprismas o pirámides de caras laterales regulares* (PCLR, ACLR, PiCLR).

Para cada subfamilia mencionada en el párrafo anterior, pedir que con material comercializado se construyan algunos ejemplos.

c) Plantear T-14a para los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides de caras iguales (PCI, ACI, PiCI y BiCI). Preguntar que si han construido ejemplos en los que las caras son regulares y ejemplos en los que no lo son.

T-15 a) Pedir que con material comercializado se construyan varios ejemplos diferentes de las familias de los prismas de bases regulares (PBR) y de los prismas de bases irregulares (PBIr).

b) Pedir que se haga una lista con propiedades de los prismas de bases regulares (PBR).

Indicar que pueden fijarse en si los prismas de bases regulares están incluidos en alguna otra familia de los prismas, por lo que verificarán sus propiedades; y que como consecuencia las propiedades de la familia que contiene a los PBR se pueden indicar de golpe como propiedades de ésta.

Apuntar que la igualdad de lados del polígono de las bases no conlleva siempre a que las caras laterales lo sean.

Sugerir también que una vez que se ha indicado una propiedad, se fijen en si ya está incluida englobada como propiedad de alguna familias que contiene a los PBR; que si es así, no es necesario incluirla de nuevo explícitamente y por tanto pueden tacharla.

c) Pedir que se repita la actividad T-15b para los antiprismas, pirámides y bipirámides de base(s) regular(es).

T-16 Indicar las características de las clasificaciones particiones que se hacen en el mismo universo de partida considerando varios criterios conjuntamente (1, 2, etc.) y los modelos que pueden representarlas. Para ello, como ejemplo, establecer la clasificación considerando como universo de clasificación el mundo de los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides y como criterios de clasificación el de la regularidad de las caras (X), la igualdad de las caras (Y) y la igualdad de los vértices (Z).

a) Pedir que clasifiquen los poliedros considerando conjuntamente los dos criterios siguientes, el de regularidad de caras y el de igualdad de caras, que se nombren las 4 subfamilias disjuntas que se establecen y que se enumeren ejemplos de ellas, tomados del mundo de los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides.

b) Pedir que se fijen en otros dos criterios (apuntar algunos pares como posibles, como por ejemplo, regularidad de caras e igualdad de orden de los vértices, o igualdad de caras y de vértices), y que se responda a las cuestiones planteadas en la actividad T-16a.

c) Pedir que delimiten los criterios que llevan a establecer los prismas rectos de bases regulares (PRBR) y las restantes familias disjuntas con ella.

d) Plantear la actividad T-16a para una clasificación en la que haya que considerar conjuntamente tres criterios, por lo que se establecen 8 subfamilias disjuntas.

e) Pedir que se repita la actividad anterior considerando otros tres criterios para clasificar.

T-17 a) Pedir que se muestren varios ejemplos diferentes de la familia de los prismas rectos de bases regulares (PRBR).

b) Pedir que se haga una lista con propiedades de los prismas rectos de bases regulares (PRBR).

c) Pedir que se repitan las actividades T-17a y T-17b para los antiprismas, pirámides y bipirámides rectos de bases regulares.

d) Pedir que se repitan las actividades T-17a y T-17b para los prismas de caras laterales regulares (PCLR) y para las correspondientes familias de los antiprismas, pirámides y bipirámides.

e) Pedir que se repitan las actividades T-17a y T-17b para los prismas de caras regulares (PCR) y para los antiprismas, pirámides y bipirámides de caras regulares. Cuestionar la subfamilia en la que se incluiría un prisma que tiene 2 rombos iguales y opuestos que no son cuadrados y cuatro cuadrados; preguntar si es ejemplo de los PCR o de su familia dicotómica (P¬CR).

f) Pedir que se repita la actividadT-17e para los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides de caras iguales.

T-18 Centrar la atención en que en las clasificaciones donde se superponen las particiones las clases resultantes son disjuntas, pero también se pueden considerar las clases que corresponden a uno sólo de los criterios y entonces aparecen relaciones de inclusión entre unas y otras.

Mostrar con un ejemplo que al considerar 3 criterios conjuntamente, las 8 familias disjuntas que se establecen podemos representarlas mediante un diagrama de árbol como el de la figura 2.12; subrayar también que este diagrama refleja las relaciones de inclusión que existen entre las diferentes familias que hay en los tramos de cada rama.

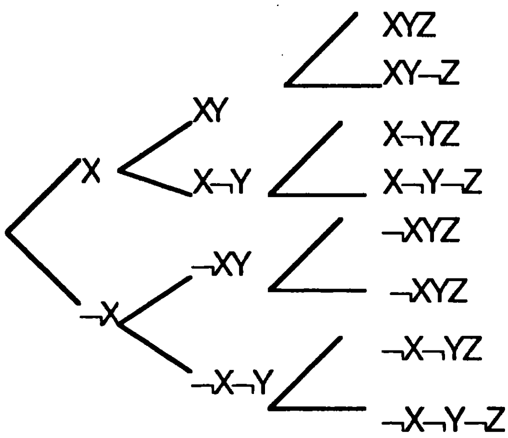


Figura 2.12

a) Pedir que se consideren los criterios de clasificación en otro orden, se dibuje el árbol correspondiente y se establezcan todas las inclusiones que se pueda de los prismas de caras regulares e iguales con vértices iguales en otras familias.

b) Pedir que se consideren los criterios de ser prisma (X), ser recto (Y) y tener las bases regulares (Z), y que se dibuje el árbol que permite delimitar las 8 familias disjuntas.

   Pedir que se establezcan todas las inclusiones que hay de los prismas rectos de bases regulares en otras familias.

c) Pedir que se repita la actividad T-18b considerando los criterios de ser prisma (X), ser convexo (Y) y tener las bases regulares (Z). Cuestionar además si todas las familias que se pueden establecer tienen algún ejemplo y centrar la atención sobre la familia X¬YZ.

d) Pedir que se repita la actividad T-18c considerado los criterios de ser prisma (X), ser recto (Y) y tener las caras laterales regulares (Z),

e) Explicar que el diagrama de árbol muestra que las clasificaciones en las que se solapan las particiones también pueden verse de la siguiente manera: como un proceso en el que los criterios de clasificación se van considerando por turno y las familias establecidas con un criterio son las que se consideran como universos de clasificación para establecer las clasificaciones con el otro criterio. Y así sucesivamente.

Cuestionar si todas las subfamilias se pueden considerar como nuevos universos de clasificación con cualquiera de los criterios delimitados. Después reparar en los prismas cóncavos y el criterio que centra la atención en la regularidad de la base, y en los prismas oblicuos con el criterio relativo a la regularidad de las caras laterales.

T-19 Indicar las características de las clasificaciones inclusivas y los modelos (diagramas con forma de red como los de la figura 2.13) que pueden representarlas.

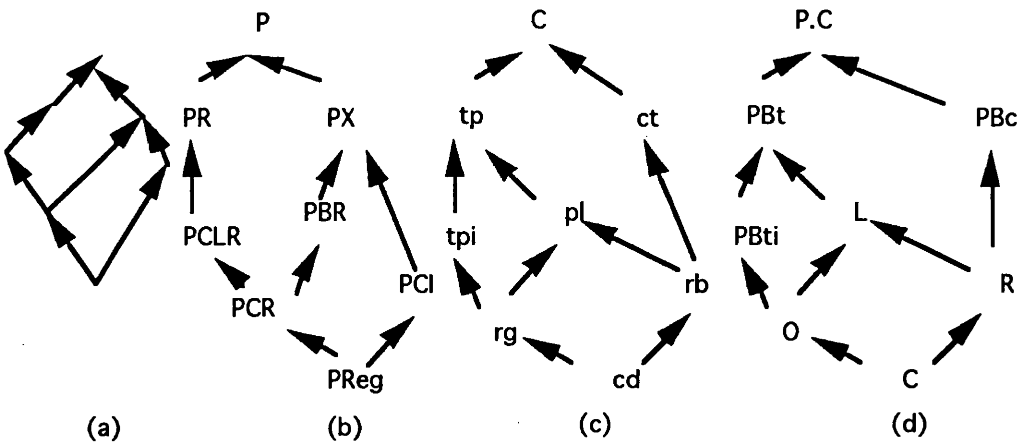


Figura 2.13

El diagrama de la figura 2.13(b) se puede utilizar como ejemplo para aclarar que en los diagramas que representan estas clasificaciones sólo se incluyen las familias que verifican alguna, varias o todas las propiedades que utilizamos como criterios de clasificación; que no se reflejan en ellos las familias complementarias.

a) Pedir que se expliquen las razones por las que algunas familias de las que hay en el diagrama de la figura 2.13(b) están conectadas mientras que otras no lo están.

b) Para el diagrama de la figura 2.13 (b), cuestionar la relación que existe entre los pares de familias que están conectadas con una flecha; preguntar también sobre qué familia tiene el origen y qué familia tiene el extremo.

c) Para el diagrama de la figura 2.13(b), centrar la atención sobre que en el primer nivel está la familia de los prismas; en el segundo nivel las familias establecidas con criterios visuales; en el tercer nivel las familias establecidas con criterios que centran la atención en la regularidad de parte de las caras; en el cuarto nivel...

Pedir que se continúen indicando las familias que corresponden al 4º y 5º nivel.

d) Apuntar que si dos familias tienen relación de inclusión, en el diagrama que representa la clasificación inclusiva, éstas están conectadas con una flecha que va desde la familia contenida (ahí está el origen) hasta la familia que la contiene (ahí está el extremo). Pedir que revisen las respuestas a T-19a y a T-19b.

Cuestionar si en el diagrama de la figura 2.13(b) hay que introducir más flechas porque hay relación de inclusión entre familias que no están conectadas con ellas. Para los pares de familias que podrían seleccionarse remarcar que están conectadas por un camino que tiene el origen en la familia contenida en todas las demás del camino, sigue este esquema →→→→ y el extremo está en la familia que contiene a todas las implicadas en el camino.

e) Recopilar las instrucciones que se han dado en T-19c y T-19d para construir un diagrama con forma de red y pedir que se construya razonadamente el diagrama de la figura 2.13(b).

f) Pedir que se repita la actividad T-19e para otras familias de prismas.

g) Pedir que se repita la actividad T-19e para familias de antiprismas, para familias de pirámides y para familias de bipirámides.

T-20 a) Señalar que el universo de clasificación que vamos a considerar son los prismas cuadrangulares y que al fijarnos en las bases vamos a abordar una clasificación de los cuadriláteros. En esta familia separar el cuadrado, cd, el rectángulo, rg, el rombo, rb, el paralelogramo, pl, el trapecio isósceles, tpi, la cometa, ct, y el trapecio, tp. Resaltar que estos cuadriláteros tienen relación de inclusión entre ellos, por lo que un diagrama con forma de red puede representar una clasificación de ellos.

Utilizar como ejemplo pares de cuadriláteros de los que en el diagrama de la figura 2.13(c) de la tarea T-19 están conectados con una flecha para mostrar cómo se puede interpretar la información que refleja un diagrama y cómo se formulan las relaciones entre las familias implicadas.

Utilizar varillas (que tienen agujeros distribuidos a la misma distancia) para representar las diagonales de los cuadriláteros (o los lados) y chinchetas (que se utilizan como mecanismos de unión) para explicar, mediante la construcción, que los cuadriláteros seleccionados tienen relación de inclusión (el cuadrilátero contenido surge como un caso particular de la construcción del cuadrilátero que lo contiene) y para establecer las propiedades de ellos relativas a las diagonales.

Pedir que se intenten explicar las relaciones de inclusión que refleja el diagrama de la figura 2.13(c) de la tarea T-19 entre algunos tipos de cuadriláteros.

b) Considerando como universo los prismas cuadrangulares separar las siguientes familias: cubo, C, ortoedro, O, romboedro, R, paralelepípedo, L, prisma de bases cometas, PBc, prisma de bases trapecios isósceles, PBti, prisma de bases trapecios, PBt.

Indicar lo que Polya (1957, p. 58) señala con respecto a por qué un rectángulo es análogo a un ortoedro (paralelepípedo recto rectangular):

> De hecho, las relaciones entre los lados del rectángulo son semejantes a las que existen entre las caras del ortoedro. Cada lado del rectángulo es paralelo a uno solo de los otros lados y perpendicular a los lados restantes. Cada cara del ortoedro es paralelo a una sola de las otras caras y perpendicular a las caras restantes. Si se considera como "elemento límite" el lado del rectángulo y la cara del paralelepípedo respectivamente, se pueden reducir las dos consideraciones anteriores a una sola que se aplique a ambas figuras: cada elemento límite es paralelo a uno solo y perpendicular a los restantes elementos límites.

Pedir que se especifiquen las relaciones que comparten los diferentes tipos de cuadriláteros que hemos separado en T-20a con los prismas rectos correspondientes (los que tienen por bases esos cuadriláteros).

c) Cuestionar si se rompen algunas relaciones de las que existen entre un cuadrilátero y su prisma recto análogo al considerar los prismas con bases el cuadrilátero.

Pedir que establezcan analogías entre los cuadriláteros que hemos separado en la actividad T-20a y los prismas que hemos separado en la actividad T-20b.

d) Pedir que se averigüe si entre el ortoedro y el cubo, el ortoedro y el romboedro, el paralelepípedo y el prisma de base cometa, hay relación de inclusión, exclusión, o tienen elementos comunes pero no están incluidos en ningún sentido. Indicar que para responder se pueden apoyar en las relaciones que existen entre los elementos del plano análogos a éstos.

e) Pedir que se construya razonadamente el diagrama de la figura 2.13(d) de la tarea T-19.

T-21 a) Cuestionar si pueden haber paralelepípedos en los que alguna cara sea cuadrado pero no todas ellas, y paralelepípedos en los que todas sus caras sean cuadrados.

Plantear la misma actividad considerando el rectángulo o el rombo en vez del cuadrado.

Cuestionar también si pueden haber paralelepípedos cuyas caras sean rombos y paralelogramos (o rombos y rectángulos) y paralelepípedos formados por rombos, rectángulos y paralelogramos.

Pedir que se delimiten diferentes tipos de paralelepípedos (según el tipo de polígonos de sus caras).

b) Pedir que se repita la actividad anterior para otras familias de prismas cuadrangulares de las que consideramos en la tarea T-20.

c) Pedir que se pongan ejemplos de paralelepípedos que no sean cubos ni ortoedros.

Cuestionar por turno si en las caras de los paralelepípedos que cumplen estas condiciones (no son cubos ni ortoedros) puede haber cuadrados, rectángulos, rombos, paralelogramos, trapecios, cometas. Después cuestionar si todas sus caras pueden ser de cada uno de los cuadriláteros señalados.

Cuestionar si los paralelepípedos que cumplen las condiciones impuestas (no son cubos ni ortoedros) pueden ser romboedros (ortoedros) y si todos ellos lo son.

d) Pedir que se repita la actividad anterior para los ejemplos de prismas de base cometa que no son romboedros.

e) Pedir que se repita la actividad T-21a para los ortoedros que no son romboedros y para los prismas de bases trapecios que no son prismas de bases cometas.

f) Pedir que se pongan ejemplos de paralelepípedos que sean además ortoedros. Plantear cuestiones como en T-21c.

g) Pedir que se repita la actividad anterior para los ejemplos de prisma de base cometa que son romboedros y cubos, y para los prismas de bases trapecios que son además prismas de bases cometas.

T-22 a) Explicar que cuando se describe un prisma cuadrangular se puede tener en cuenta que las propiedades de los cuadriláteros de las bases relativas a paralelismo de pares de lados se convierten en los prismas en paralelismo de pares de caras laterales. Explicar que en los paralelepípedos la propiedad se convierte en paralelismo de pares de caras.

Cuestionar si las propiedades de los cuadriláteros de las bases relativas a perpendicularidad de lados (igualdad de lados) se convierten en los prismas en perpendicularidad de caras laterales (igualdad de caras laterales). Pedir que se indiquen las familias de prismas cuadrangulares para los que ocurre esto, las que verifican que las caras están bordeadas de caras perpendiculares a ella, las que verifican que las caras son iguales dos a dos y las que cumplen que las caras son iguales.

b) Centrar la atención en que cuando se describe un prisma cuadrangular, las propiedades del cuadrilátero de las bases relativas a medidas distintas para los ángulos o las diagonales, o respecto a cómo se cortan éstas, se pueden enunciar como propiedades *de las bases* del prisma correspondiente, pero *no* como propiedades *de las caras*. Pedir que se señalen las familias de prismas cuadrangulares para las que no hay que preocuparse con ello.

Para el ortoedro, pedir que se delimiten las propiedades del rectángulo que se pueden extender como propiedades de elementos de las caras.

c) Pedir que para cada una de las familias de prismas cuadrangulares se haga una lista que incluya todas las propiedades de la familia correspondiente. Dar como sugerencia que para delimitar las familias de prismas cuadrangulares que contienen a la que se considera, y así indicar de golpe un bloque de propiedades de la familia, se pueden apoyar en el diagrama de la tarea T-20.

COMENTARIOS

Sobre la tarea T-1. La descripción de sólido y poliedro.

En la tarea T-1 nos fijamos en las caras que se juntan en una arista o en las que se juntan alrededor de un vértice con objeto de que sean los estudiantes los que descubran las propiedades de poliedro que indicamos en el anexo 2.

En las experimentaciones hemos verificado que estas propiedades pueden obtenerlas los estudiantes si el profesor plantea las cuestiones adecuadas. En algunos casos resulta conveniente mostrar ejemplos y no ejemplos de poliedro, indicando que lo son. El ejemplo puede servir para que se rechace alguna propiedad que se haya señalado como propiedad de poliedro y no lo sea y el no ejemplo puede llevar a que se incorpore alguna propiedad que no se haya precisado todavía.

Las actividades T-1e y T-1f centran la atención en que en la lista de propiedades de los poliedros hay propiedades que verifican todos los sólidos y otras que sólo verifican aquellos.

Vale la pena explicar por qué entre las propiedades de los poliedros que sugerimos para que se traten en este nivel algunas contienen *como mínimo* o *por lo menos* (los poliedros tienen por lo menos 4 caras, 4 vértices y 6 aristas). Como la justificación puede ser visual, apoyada en la experimentación, enunciar estas propiedades con ayuda del profesor no requiere de un nivel de razonamiento superior al 2.

La descripción de los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides.

Las tareas T-2 a T-8, excepto la T-3 y T-4, informan sobre las ideas que se forman los estudiantes sobre los conceptos implicados y sobre la medida de ellos, y tienen que ver con la descripción de los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides. Uno de los objetivos de estas tareas es elaborar la lista de propiedades de estas familias de sólidos. Además de que se descubran relaciones de igualdad, paralelismo y perpendicularidad entre sus elementos, pretenden que se desarrolle el objetivo 7 indicado al comienzo de esta sección.

Estas tareas permiten que se centre la atención en lo que se puede extender de la familia de los prismas a las otras familias de sólidos (antiprismas, pirámides y bipirámides), en lo que los estudiantes extienden y en cómo lo hacen. En particular, aconsejamos que al abordar estas tareas en clase se preste atención a la propiedad de los prismas, las aristas laterales son iguales, y observar si algunos estudiantes la asocian (como ha ocurrido en nuestras experimentaciones) a los antiprismas, pirámides y bipirámides.

Por otra parte, estas tareas pueden utilizarse para evaluar cómo adaptan los estudiantes los procedimientos utilizados en los prismas para conjeturar y demostrar las fórmulas que dan el número de elementos de un determinado tipo (C, V, A, αC, αd, αV, dC y dE) para resolver estos mismos problemas en la familia dada.

La tarea T-2. Análisis local. Con las actividades que incluye esta tarea nos fijamos en las caras que bordean a una cara dada, en las caras o aristas que se juntan en un vértice, y en las relaciones de paralelismo y perpendicularidad que existen entre los elementos de un determinado tipo (caras, vértices y aristas), o entre parte de éstos (caras laterales y bases, o aristas laterales y aristas de las bases). Introducimos ideas sobre caras vecinas (actividad T-2a) y sobre orden de un vértice (actividad T-2g) y tratamos de que los estudiantes descubran propiedades de las familias de sólidos consideradas (prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides) relativas a estos conceptos. La actividad T-2g pretende que se llegue a expresar que en los prismas (antiprismas) todos los vértices son de orden 3 (de orden 4) mientras que en las pirámides (bipirámides) tenemos vértices de dos tipos; los vértices de la base son de orden 3 (de orden 4) y el ápice (los ápices) son de orden n (su orden coincide con el número de lados del polígono de las bases).

La introducción de caras vecinas nos centra en las caras que bordean a una cara dada, lo que lleva a la introducción de bases y caras laterales de las familia tratadas. Si bien ya se han introducido estos conceptos en las actividades que hemos diseñado para la fase 2 del nivel 1, ahí lo hemos hecho a partir de técnicas de construcción. Ahora las introducimos de nuevo (ver la actividad T-2b) en términos de propiedades: bases de un prisma son las caras que están enteramente bordeadas de paralelogramos (cuadrados, rectángulos, rombos y paralelogramos). Las caras laterales son las caras que bordean a las bases.

Remitimos a los comentarios que hemos hecho para las actividades de la fase 2 del nivel 1 donde hemos señalado la necesidad de que las ideas de bases y caras laterales se revisen en varios contextos y en diferentes tiempos para que los estudiantes puedan corregir las ideas erróneas, con fuerte componente visual, que tienen de ellas. Las actividades T-2b, T-2c y T-2d tienen este objetivo, entre otros. En el mismo enunciado de la actividad T-2d hacemos referencia a que la base de las bipirámides no es cara de ellas, y damos varias explicaciones sobre la base. También centramos la atención sobre lo nuevo que presentan las bipirámides, respecto a las caras laterales, que las diferencia de las otras familias consideradas: en esta familia no tiene mucho sentido hablar de caras laterales pues todas las caras lo son.

La actividad T-2e pretende que se descubra la propiedad de los prismas y antiprismas "las bases son iguales y paralelas" y que se remarque que estas familias presentan diferencias respecto a las bases: en los antiprismas una base está girada respecto a la otra.

En la actividad T-2f introducimos las *aristas de las bases,* o de la base, y *las aristas laterales.* Los comentarios de las actividades de la fase 2 del nivel 1 explican que de nuevo hayamos propuesto en esta actividad que se consideren prismas rectos y oblicuos para centrar la atención en si los estudiantes extienden o no a los prismas oblicuos la propiedad que de inmediato descubren para los prismas rectos; a saber, "las aristas laterales son iguales y paralelas". Si es necesario, volveremos a centrar la atención en que el paralelismo de rectas no lleva asociada una posición horizontal y recordaremos las ideas que ya indicamos en las actividades de la fase 1 de este nivel, para paralelismo de rectas *en el espacio* y para *rectas que se cruzan.*

También tenemos que enfatizar (actividad T-2f) que la propiedad de igualdad de aristas laterales no puede extenderse ni a los antiprismas, ni a las pirámides ni a las bipirámides. En las experimentaciones que hemos realizado bastantes estudiantes incluyeron esta propiedad como atributo crítico de estas familias. La explicación podemos encontrarla en que, por una parte, en la unidad de enseñanza que desarrollamos remarcamos especialmente que esta propiedad la cumplen todos los prismas (no sólo los prismas rectos). Por otra parte, las subfamilias que más peso tienen en los objetos mentales de las familias correspondientes (los antiprismas, pirámides o bipirámides, rectos de bases o base regular) también la verifican.

La tarea T-5. Sobre el número de caras, vértices y aristas. Las actividades que incluye esta tarea se refieren al número de caras, vértices y aristas de un prisma, antiprisma, pirámide o bipirámide concreta, y de un caso general.

La actividad T-5a, que ya se ha abordado como tarea del nivel 1, tiene como propósito, por un lado, recordar la conveniencia de contar de manera estructurada y, por otro, remarcar que las diferentes estrategias de construcción nos llevan a utilizar diferentes procedimientos para contar. Utilizamos la familia de los antiprismas para ello. En T-5a se pretende que los antiprismas se descompongan en una cinta de triángulos y dos polígonos, o en dos casquetes que se acoplan, formados por un polígono bordeado de triángulos.

En la actividad T-5b, para dirigir la actividad podemos plantear las cuestiones siguientes: ¿Cuántas caras tiene un prisma cuya base tiene 20 lados? ¿Cuántos vértices? ¿Cuántas aristas? Puede ser que, para algunos estudiantes (especialmente los niños), en los modelos para los que determinar estos números conlleva más dificultad (especialmente para hallar el número de caras o de aristas de un antiprisma, o para modelos en los que el polígono de las bases tiene muchos lados) se tengan que introducir otras preguntas que dirijan el razonamiento y que lleven al resultado. Por ejemplo, si al preguntar por el número de aristas de una pirámide cuyo polígono de la base tiene 20 lados, los niños no llegan al resultado, se puede continuar de la siguiente manera: ¿Cuántas aristas tiene en la base? Vamos a ver... (se muestra el modelo de una pirámide cuadrada) si el polígono de la base tiene 4 lados, ¿cuántas aristas tienes en la base? ¿Cuántas laterales? ¿Y en total?. Si el polígono de la base tiene 6 lados (se muestra un modelo de una pirámide hexagonal), ¿cuántas tiene en la base? ¿Cuántas laterales? ¿Y en total? Si el polígono de la base tiene 20 lados, ¿cuántas tienes en la base? ¿Cuántas laterales? ¿Cuántas en total?

Con la actividad T-5c los estudiantes abordan un tipo de generalización: reemplazan una constante por una variable. Se pasa de un elemento cuyo polígono de la base tiene un número concreto de lados a otro, cuyo polígono de la base tiene n lados. Además, tienen que simbolizar el resultado, o expresarlo verbalmente, y para diferentes familias. Por ejemplo, para un antiprisma n-agonal, el número de caras se obtiene multiplicando n por dos y sumando 2 y se simboliza así: 2n+2. Se formula de la siguiente manera: "Se duplica el número de lados y se añade 2".

Fielker (1979, pp. 127-128) respecto a este tipo de generalización apunta:

> El hacer hipótesis en geometría a veces se ve en términos numéricos. Es posible que los niños a veces revelen hipótesis incorrectas, pero es importante que tengan confianza para hacerlas y para reconocer que son incorrectas y puedan hacer algo para corregirlas, aunque necesiten para ello alguna ayuda del maestro.

Si algún estudiante no está preparado para dar las respuestas en términos de n, o para emitir enunciados simbólicos de esta naturaleza, hay que volver a los ejemplos concretos y a las preguntas como las que hemos indicado antes, que cuestionan resultados parciales, por pisos, o por casquetes, como pasos previos para cuestionarlo para n. De lo que se trata también es de que los estudiantes tengan la oportunidad de dar expresiones verbales en torno a la expresión simbólica correspondiente.

Como indicamos en Guillén et al. (1992, pp. 113-114) en las experimentaciones que hemos realizado hemos verificado que cuando planteamos cuestiones para determinar el número de caras, de vértices y de aristas, de un sólido, a partir del número de lados del polígono de la base, determinar el número de caras y de aristas de un antiprisma conlleva más dificultad para los estudiantes que determinar estos números, o el número de vértices, para las restantes familias. También se observan diferencias individuales respecto a la capacidad para simbolizar y para operar con n dependiendo del grado de dominio que se tiene de las características asociadas al nivel 2. Una vez que ya se ha trabajado la manera de establecer las fórmulas para las caras, los vértices y aristas de estas familias, mientras que algunos estudiantes no presentan dificultad para contar los elementos de todas las familias de manera estructurada, pueden generalizar sin necesidad de considerar previamente casos particulares y no tienen ninguna dificultad en operar con *n*, hay estudiantes que razonan de acuerdo con algunas características de las asociadas al nivel 2 y que no manifiestan tanto dominio de la generalización. Estos estudiantes también cuentan de manera estructurada para todas las familias y operan perfectamente con *n*; aunque sus respuestas no son tan rápidas como las de los anteriores y necesitan de ejemplos concretos en los que *n* es pequeño para poder responder para un *n* mayor, o en general. Para determinar el número de caras y de aristas de los antiprismas suelen tener dificultades, que las superan una vez que consideran casos concretos.

También hay estudiantes que hallan perfectamente los números para ejemplos concretos de estas familias, como muestran las respuestas de uno de ellos que indicamos a continuación, pero tienen dificultad para operar con *n*. No distinguen si con las *n* se ha de realizar suma o producto, pero sí son capaces de determinar las *n* que están implicadas en la operación. También cabe comentar que cuando en la operación hay términos que tienen diferente papel al no poder dotar a la n de significado, les asignan a ambos el mismo papel; por ejemplo, en las respuestas que indicamos a continuación de una niña de 12 años, al sumar 2 + n lo simboliza como nn; nx2+2 lo simboliza como nn, n + 1 como 1n; n + 2 como 3nnn.

E1: Yo cuando el polígono de la base tiene n lados, lo hago así. Espera que lo escribo.

<u>6</u>

Prisma = polígono de la base = n lados y pregunto por número de vértices, caras y aristas.

ver= 6x2=12 caras = $\begin{array}{r} 6 \\ +2 \\ \hline 8 \end{array}$ aris= $\begin{array}{r} 6 \\ \times 2 \\ \hline 12 \\ +6 \\ \hline 18 \end{array}$

vértices = n x 2 = nn; caras = n + 2 = nn; aristas = n x 2 = nn + 6 = nn + 6

<u>5 y 25</u>

Antiprisma = polígono de la base = n lados y pregunto por número de vértices, caras y aristas.

Caras tiene $\begin{array}{r} n \\ \times 2 \\ \hline +2 \\ \hline nn \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 25 \\ \times 2 \\ \hline 50 \\ +2 \\ \hline 52 \end{array}$ ver= $\begin{array}{r} 5 \\ \times 2 \\ \hline 10 \end{array}$ $\begin{array}{r} n \\ \times 2 \\ \hline nn \end{array}$

Aristas $\begin{array}{r} 5 \\ +5 \\ \hline 10 \end{array}$ $\begin{array}{r} 5 \\ \times 2 \\ \hline 10 \end{array}$ $\begin{array}{r} 10 \\ +10 \\ \hline 20 \end{array}$ $\begin{array}{r} n \\ +n \\ \hline nn \end{array}$ $\begin{array}{r} n \\ \times 2 \\ \hline \cancel{nn\ 2x2} \\ nn \end{array}$ $\begin{array}{r} nn \\ +nn \\ \hline nnnn \end{array}$ $\begin{array}{r} 25 \\ +25 \\ \hline 50 \end{array}$ $\begin{array}{r} 25 \\ \times 2 \\ \hline 50 \end{array}$ $\begin{array}{r} 50 \\ 50 \\ \hline 100 \end{array}$

<u>Pirámides</u>
1) Nº de vértices = 5+1 =6. El polígono de la base 5 lados; Nº de vértices = 25+1 =26. El polígono de la base 25 lados; Nº de vértices = n+1 =1. El polígono de la base n lados;
2) Nº de aristas = 5+5 =10. El polígono de la base 5 lados; Nº de aristas = 25+25 =50. polígono base 25 lados; Nº de aristas = n+n=2n; polígono base= n;
3) Polígono base = n; Nº de caras= n+1 = 1n.
<u>Bipirámides</u>
1) Vértices. Polig. base = 5 lados, n lados; 5+ 2 = 7; n + 2 = 3nnn.
2) Aristas = Polig. Base = 5 lados, n lados. 5 x 3 = 15; n x 3 = 3n.
3) Caras. Polig base = 5 lados, n lados. 5 x 2 = 10; n x 2 = 2n.

Cabe comentar que esta niña comprendía las expresiones a nivel verbal aunque no pudiera simbolizarlas correctamente en términos de n. Cuando le preguntamos por cada operación que hacía para hallar los números para el antiprisma concreto y que cómo se podría hallar ese número si el antiprisma tuviera como base un polígono de n lados, respondió:

> Para las aristas hay que sumar 4 veces el número de lados del polígono de la base, por eso la he puesto 4 veces. Yo lo he hecho primero 2 de las bases y luego las de arriba que salen así  de los vértices, pero es ponerlas 2 veces también; por eso es 4 veces.
> Los vértices, hay que multiplicar por 2 por los de arriba y los de abajo.
> Las caras al final hay que sumar 2 que son las bases.
> Hay triángulos boca arriba y cara abajo así... salen de una base y de la otra por eso están por 2.

Estos estudiantes pueden llegar a comprender, cuando se dirige la atención a ello, que los números se pueden obtener en dos pasos: primero se cuenta el número de elementos que cambia cuando cambia el número de lados del polígono de las bases (por ejemplo, para hallar el número de caras se halla el número de caras laterales ya que este número depende del número de lados del polígono de la base), número que vendrá dado en términos de n porque depende del ejemplo. Después se ha de añadir el número que hace referencia a las caras o vértices que no se han contado aún; número que se puede hallar fácilmente (por ejemplo, para hallar el número de caras, este número se refiere a que hay 2 bases), que no cambia en los diferentes ejemplos, y que por tanto no hay que indicarlo en términos de n.

También cabe comentar las respuestas de otros estudiantes, de los que tienen dificultades para razonar de acuerdo con varias características de las asociadas al nivel 2; éstos no pueden resolver esta actividad en términos de *n* a ningún nivel. Para responder para un elemento concreto de estas familias del que no disponen del modelo, necesitan más ayuda que los otros niños. No pueden generalizar ni expresar en términos de *n* el número de aristas de los elementos de ninguna de estas familias y además no encuentran sentido a que se plantee este problema para n. Cuando preguntamos a uno de estos estudiantes por el número de aristas de la base de una pirámide si en ésta tenía un polígono de *n* lados, respondió: "¿Y cuánto es n?". Consideramos varios casos particulares en los que *n* aumentaba progresivamente. Para cada caso le pedíamos que contara los elementos de la base, luego los laterales y después le preguntábamos por el total. Cuando después cuestionamos el número de aristas que tenía una pirámide en la base y el número de aristas laterales, si el polígono de la base tenía *n* lados, en ambos casos respondió que *n*, pero al pedirle el número total, no supo operar con las *n* y respondió que *n*.

Los comentarios del párrafo anterior llevan de nuevo a que tiene que ser el profesor el que decida las sugerencias que tiene que apuntar a los diferentes estudiantes para dirigir la actividad.

Las tareas T-6 a T-8. Sobre el número de los diferentes tipos de ángulos y de diagonales de los sólidos. Estas tareas abordan el problema de responder a la pregunta ¿cuántos? para diferentes elementos (diagonales, ángulos), para representantes generales de diferentes familias (prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides, n-agonales) y nos movemos en el plano y en el espacio. Así pues, con estas actividades trabajamos diferentes tipos de generalización. Como indica Fielker (1979, p. 113), "la idea de generalización que está implicada en estas actividades, trabaja de distintas maneras según lo que uno varíe". Aquí, en unas actividades variamos el número de lados del polígono de la(s) base(s) y generalizamos para un polígono de n lados; en otras variamos la familia a la que pertenecen los sólidos; pueden ser prismas, antiprismas, pirámides, bipirámides. En otras variamos la dimensión del espacio en el que operamos. Por ejemplo, unas veces planteamos el determinar las diagonales de las caras y otras las diagonales del sólido.

Con todas las preguntas sobre ¿cuántos? que planteamos, pretendemos que se llegue a concluir que el número que nos piden, depende del número de lados o de vértices del polígono de las bases (independientemente de la forma de éste) y de la familia del sólido correspondiente. Intentamos que, para cada familia, los estudiantes puedan establecer una correspondencia entre el número de vértices de este polígono y el número que se nos pide en la pregunta en cuestión.

En la fase 1 de este nivel ya se han introducido los diferentes tipos de ángulos y de diagonales. Con estas actividades resulta conveniente enfatizar de nuevo que como en los sólidos hay ángulos y diagonales de varios tipos, cuando se habla de ángulos o de diagonales referidos a un sólido, o de propiedades de éste relativas a ángulos o a diagonales, hay que especificar a qué ángulos o diagonales nos referimos. Ya hemos indicado en el apartado 1.4.2, y en los comentarios de las actividades de la fase 1 de este nivel, los problemas de lenguaje que conlleva la utilización de nombres compuestos.

Las tareas T-6 y T-7. Sobre los procedimientos para determinar el número de los diferentes tipos de ángulos. Relaciones entre el número de determinados tipos de ángulos de los sólidos y el número de otros elementos de ellos. Con las actividades que incluimos en estas tareas aspiramos a que se descubra que el número de ángulos de las caras guarda relación con el número de caras (para un prisma n-agonal la relación es: Número de ángulos de las caras = Número de caras lateralesx4 + Número de basesxn), que el número de ángulos diedros coincide con el número de aristas del sólido y que el número de ángulos de los vértices coincide con el número de vértices.

Ambicionan también que se utilicen varios procedimientos para determinar el número de ángulos de las caras. Algunas maneras de contar estos elementos para un prisma n-agonal de las que se sugieren en las actividades de la tarea T-7 son:

- Se considera el modelo descompuesto en pisos o niveles y se cuentan los ángulos de las caras de cada piso: n de una base (la de arriba), $2n$ de los ángulos de las caras laterales de arriba, $2n$ de los ángulos de las caras laterales de abajo y n de una base (la de abajo). En total $6n$.
- Una vez descompuesto en caras laterales (CL) y bases, se hallan los ángulos de las CL y de las bases de la siguiente manera: los ángulos de las CL son $4n$ (4 por cada una de ellas), y los ángulos de las bases son $2n$ (n de cada una de ellas). Total $6n$.
- Se aplica el número de ángulos de las caras que concurren en cada vértice de un prisma y el número de vértices que tiene en cada piso. Se razona como sigue: En un prisma n-agonal hay 3 ángulos por cada vértice, luego tenemos $3n$ ángulos de las caras arriba y $3n$ ángulos de las caras abajo. En total $6n$.

También se puede hallar el número de ángulos de las caras de un prisma n-agonal aplicando el número de ángulos de las caras que concurren en cada vértice y el número de vértices que tiene. Se razona como sigue: Hay $2n$ vértices y cada uno tiene 3 ángulos de las caras. En total $3 \text{x} 2n = 6n$. Pero pensamos que esta manera de razonar ya requiere de razonamientos asociados al nivel 3, por lo que sólo los estudiantes que hayan comenzado el dominio de este nivel podrán utilizar este procedimiento.

También vale la pena destacar que, al igual que se ha hecho para determinar el número de caras, de vértices o de aristas de estas familias, todas las generalizaciones se hacen a partir de casos concretos. La actividad T-6a, que sirve para poner en contacto con la problemática de determinar el número de diferentes tipos de ángulos, plantea este problema para un prisma hexagonal y la actividad T-6b, pretende que se encuentren, a partir de casos concretos, las relaciones que ligan el número de ángulos diedros y el número de aristas y el número de ángulos de los vértices y el número de vértices.

Una vez que ya se han encontrado estas relaciones se puede mostrar a los estudiantes que éstas tienen sentido: siempre que hay un ángulo diedro tiene que haber dos caras, que son las que lo forman, y estas dos caras forman también una arista al juntarse. El vértice del ángulo en el plano puede considerarse análogo a la arista del ángulo diedro en el espacio. Ambos comparten análogas relaciones: los segmentos que forman el ángulo en el plano se juntan en el vértice y las caras que forman el ángulo diedro en el espacio se juntan en una arista. En el plano no hay ángulo sin vértice y no hay vértice sin ángulo (y de hecho hay dos, el interior y el exterior). En el espacio no hay ángulo diedro sin arista y no hay arista sin ángulo diedro (y de hecho también hay dos, el interior y el exterior). Con respecto a los ángulos de los vértices, una vez que se llega a comprender que el ángulo de los vértices no se refiere a los ángulos de los diferentes polígonos que forman los vértices (lo que lleva a una idea de que hay varios ángulos por cada vértice del sólido) sino a su suma (que es un único ángulo), se acepta de inmediato la relación encontrada: el número de ángulos de los vértices es el número de vértices.

Las tareas T-6 a T-8. Aportaciones de las experimentaciones. Los comentarios que hacemos en las actividades de la fase 1 de este nivel, sobre el concepto de vértices iguales y sobre las diagonales de los polígonos y de los sólidos, explican que al tratar las actividades de las tareas T-6 y T-7 relativas al concepto de vértices iguales nos preocupemos de averiguar si todavía quedan estudiantes que aplican una idea equivocada de él; y que al tratar las actividades de T-8 de nuevo verifiquemos si los estudiantes asocian a las diagonales del plano o del espacio atributos de más, muy visuales, porque basan su idea en las diagonales de los polígonos o sólidos convexos. Si es necesario de nuevo aclararemos que el atributo que se incluye en la idea de diagonal de un polígono es que une dos vértices que no son vecinos, y en la de diagonal del espacio, que une vértices que no pertenecen a la misma cara. Subrayaremos que el que quede dentro o fuera no es una propiedad del concepto de diagonal, lo que pasa es que sí que la verifican algunos ejemplos, pero otros pueden no verificarla.

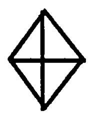
Las experimentaciones realizadas también nos advirtieron de que hay que fijarse en si los estudiantes consideran todos los ángulos o diagonales del tipo que se está considerando o sólo una parte. En las actividades que incluyen las tareas T-6 y T-7 hemos sugerido en repetidas ocasiones que se tengan en cuenta todos los de un determinado tipo. Si bien este tipo de dificultades se suelen superar a medida que avanza la instrucción, si se les presta la debida atención, al principio es usual que con respecto a los ángulos de las caras, se consideren sólo los de las caras laterales, o los de una de ellas;

y para los ángulos diedros, o bien se tienen en cuenta los ángulos que forman las caras laterales entre ellas (CL-CL), o los que forman las caras laterales con las bases (CL-B). Muy pocos estudiantes de los que razonaban de acuerdo a las características del nivel 2 tenían en cuenta desde el principio todos los ángulos de las caras y los dos tipos de ángulos diedros: CL-CL y CL-B. Al abordar este problema tuvimos que subrayar la peculiaridad que presentan las bipirámides (sólo tienen αdCL-CL) y que ya hemos comentado con actividades de la fase 1 de este nivel. Pero para esta familia también tuvimos que hacer notar en repetidas ocasiones que sólo se había considerado un tipo de ángulos diedros: los ángulos diedros que forman las caras de cada una de las pirámides entre ellas o los ángulos diedros que forman las caras de la una pirámide con las de la otra.

Respecto a las diagonales de las caras, también queremos llamar la atención sobre que en la actividad T-8a pedimos que se determinen las diagonales de las caras laterales y las diagonales de las bases y luego el número de diagonales de las caras. Al igual que ocurre con los ángulos de las caras, cuando se piden las diagonales de las caras, los estudiantes muy a menudo sólo tienen en cuenta las caras laterales, o una sola cara, como muestran las respuestas de niños de 12 años que indicamos a continuación.

E1: DIAGONALES

Prisma de base cuadrada
Diagonales del espacio = 2. Diagonales de las caras: 4x2=8.
8+2=10.
Prisma de base pentágono
Diagonales del espacio = 5. Diagonales de las caras: 5x2 = 10
10+5 = 15.

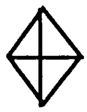
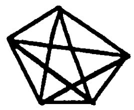
E2: Medidas distintas diag. caras. El prisma de base rombo son dos las medidas 

Pero si cuando se tratan los diferentes tipos de ángulos ya se ha trabajado en especial el que se tengan en cuenta todas las caras, incluidas las bases, los resultados se dejarán notar también al considerar las diagonales de las caras. Si bien ocurre que este tipo de errores se vuelven a repetir en algunas tareas que implican este concepto, cada vez ocurre con menos frecuencia.

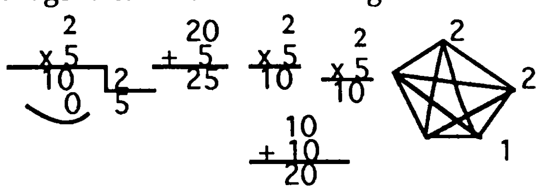
La tarea T-8. Sobre el número y relaciones de los diferentes tipos de diagonales de un sólido. Los sólidos que tienen el mismo número de diagonales. Las actividades T-8b y T-8d tienen como objetivo que se encuentre el número de diagonales de las caras (dC) y del espacio (dE) de modelos físicos. Estas actividades recopilan en una tabla las diagonales de las caras y del espacio de algunos ejemplos de prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides, de los que previamente se han dibujado en el modelo las diagonales de las caras laterales y las diagonales de las bases, o introducido las diagonales del espacio en el modelo abierto considerado.

Si los estudiantes todavía no han mecanizado el contar de manera estructurada, después de haber hallado el resto de los elementos, con estas tareas se puede dirigir de nuevo para que las diagonales de las caras se cuenten de esta manera. Como puede observarse en las respuestas que indicamos a continuación (de niños de 12 años), los niños pueden determinar el número de diagonales de las caras de esta manera, si bien aún no pueden simbolizar las relaciones correspondientes.

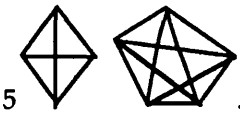
E1: Yo lo he hecho así [le da la hoja al profesor en la que ha calculado el número de diagonales de las caras y del espacio para un prisma de base cuadrada y para un prisma pentagonal]

Prisma de base rombo  2x2 = 4 + 4 = 8 + 2 = 11
Diagonales de las caras laterales, 2 por cara son el 8
" " " bases = a dos por base es el 4
Diagonales del espacio son = 2.
<u>Prisma de base pentágono</u>
Diagonales de las caras laterales, 2 por cara. 5 x 2 = 10.
" " " bases = 5 por base es 5 x 2 = 10 
Diagonales del espacio = 5 Hay 10 + 10 + 5 = 25.

E2: Yo lo he hecho de otra manera porque en el de base rombo hago 6 en vez de 4 porque las bases también son 2. Mira [Entrega la hoja en la que ha resuelto el problema a la profesora] y no me salen 11. Tengo 12.
DIAGONALES
Prisma de base cuadrada
Diagonales del sólido = 2. Diagonales de las caras: 6x2=12.
12+2=14.
Prisma de base pentágono
Diagonales del sólido = 5. Diagonales de las caras: 20



En estas respuestas se puede notar también que es usual que los estudiantes que razonan de acuerdo a las características del nivel 2 tengan dificultades para hallar el número de diagonales del espacio, incluso para ejemplos concretos de prismas; muy a menudo para hallar el número de diagonales del espacio se indica el número de diagonales del polígono de la base. Cuando pedimos a los estudiantes que explicaran por qué habían señalado que el número de diagonales del espacio para los prismas de bases cuadrados y pentágonos eran 2 y 5 respectivamente, tuvo lugar la siguiente conversación:

E1: Es que mira son 2 y 5  .

P: Pero es que lo que estás señalando es el número de diagonales del espacio. ¿Esas son diagonales del espacio?

E2: [Interrumpe] Sí, bueno, no... Pero es que mira con varillas que se ve mejor... Yo lo hago con la base de abajo sólo que la otra punta de la varilla está arriba...

P: [Presenta el modelo de un romboedro sin una de las caras]. Introduce varillas que representen diagonales del espacio del romboedro y fíjate de nuevo en cuántas hay.

E1: Sólo una. Porque éstas [se refiere a las diagonales de las caras que salen del vértice elegido] no son.

E2: No. Son diagonales de caras. Pero es que también puedes hacer ésta [ha elegido otro vértice], y ésta... Son 4.

P: Y en el prisma de base pentágono, ¿cuántas os salen ahora? [Reparte modelos de este prisma y los estudiantes quitan una base para introducir en ellos las varillas que representen diagonales del espacio].

E1: A mi, dos, ¿sólo 2, verdad?

E2: Sí, pero faltan los demás, que siempre se nos olvidan los otros.

E1: Sí, si. Pero de éstos solo dos, y dos, y otros dos ... Son ... a ver ...

E2: Yo creo que son 10, porque es como antes 2x5 =10. ¡Ah¡ Que hay que dividir por dos...

P: Introduce las varillas que correspondan a las diagonales de las caras. ¿Cuántas hay?

E1: Es que no tengo tantas. A ver... Yo creo que son 10 porque de aquí pondría 2, aquí 2, aquí 2... Espera que me lo señale dónde he empezado que sino me lío [hace una marca en el vértice por el que empieza]. Me salen 10.

E2: No. Son 10. No hay que dividir por dos. ¡Pues qué lío!

E1: Es que yo ... ahora pienso que sí que puedo hacerlo con el polígono. Porque ... Mira lo que he pensado; que a lo mejor es como en lo de que en vez de prismas poníamos polígonos porque era lo mismo. ¿No te acuerdas?

E2: Sí, era eso de que estuvieran juntos, pegados, sin agujeros.

La sesión continuó explicando de nuevo por qué hay que dividir por dos en la expresión que da el número de diagonales de un polígono y haciendo ver que al hallar las diagonales del espacio, al considerar sólo las diagonales que salían de los vértices de una de las bases del prisma, las varillas (que representaban a las diagonales del espacio) sólo las poníamos una vez, por lo que no había que dividir por 2 el resultado obtenido. Que si queríamos utilizar lo hecho en los polígonos, teníamos que tener en cuenta que al "hacer gordo" el polígono y considerar que el vértice obtenido a partir de uno dado era el que se juntaba con todos los de la base de abajo con los que se podía, cada diagonal sólo se contaba una vez. Llamamos de nuevo la atención sobre que antes de aplicar las fórmulas hay que fijarse en si son las que nos dan lo que nos piden o si son las que hemos encontrado para hallar otros elementos.

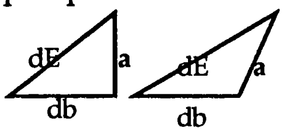
Respecto a estas actividades, nos interesa remarcar que, a diferencia de lo que hemos hecho al considerar los otros elementos de los sólidos, para las diagonales de las caras o para las diagonales del espacio, no hemos pedido directamente que se estableciese una fórmula generalizada. Los estudiantes que razonan de acuerdo con el nivel 2 no pueden todavía realizar pruebas deductivas, aunque éstas estén basadas en la experimentación y tengan un soporte visual. Es por esto por lo que en las actividades de este nivel no incluimos pruebas de estas fórmulas que vayan más allá de la comprobación con varios ejemplos.

Vale la pena mencionar que sí que hemos pedido que se halle el número de diagonales de uno y otro tipo, que tiene un ejemplo de las diferentes familias de sólidos tratadas, cuya base tiene 20 lados. Para poder responder para este n concreto no es necesario que se obtenga una fórmula generalizada para n, pero sí que se tiene que averiguar qué operaciones tenemos que hacer con el 20 para obtener el número de diagonales de las caras o del espacio en este caso.

Los estudiantes pueden observar de los casos concretos de prismas, que las diagonales de las caras siguen la regla de formación, 3x2, 4x3, 5x4,... , y las diagonales del espacio esta otra: 3x0, 4x1, 5x2,... Pueden llegar a conjeturar que un prisma cuyo polígono de la base tiene 20 lados tendrá 20x19 diagonales de las caras y 20x17 diagonales del espacio. En este caso, lo que pediremos será que se hallen el número de diagonales de las caras de un ejemplo dado de una de las familias y que se compruebe con n pequeño si el número obtenido verifica el patrón descubierto para el número de diagonales de las caras, o de las diagonales del espacio, de la familia correspondiente. Luego pediremos que se halle este número para un ejemplo que tenga en la(s) base(s) un polígono con gran número de lados.

Las actividades incluidas en esta tarea no sólo tienen como propósito que se determinen los números de diagonales del plano o del espacio de modelos físicos. Al proponer en T-8c que se introduzcan, se cuenten y se midan las diagonales del espacio del romboedro, del ortoedro y del cubo, pretendemos remarcar que todos los poliedros implicados en la actividad tienen el mismo número de diagonales de ambos tipos y que mientras que en el cubo y el ortoedro son iguales, en el romboedro no. Si el profesor lo considera conveniente, se puede ampliar esta actividad cuestionando los prismas que tienen el mismo número de diagonales del espacio que estos poliedros. Se pueden seguir delimitando las familias cuyos ejemplos tienen el mismo número de diagonales del espacio, y descubriendo que el número de diagonales del espacio depende exclusivamente del número de lados del polígono de la base y no de la forma de éste.

Por otro lado, la actividad T-8e tiene como objetivo destacar que las diagonales del espacio de un prisma (dE) son mayores que las diagonales correspondientes de la base (db), además de porque las primeras "están inclinadas y cogen un volumen", como indicó uno de los estudiantes, porque se forma un triángulo con la dE, la db y la arista lateral (a)



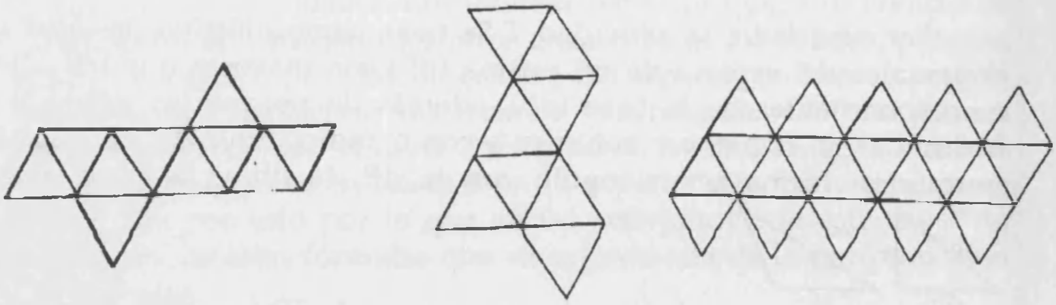
. Aplicando el teorema de Pitágoras o el teorema del coseno se puede explicar esta relación. Queremos hacer notar que sólo tiene sentido plantear esta actividad para los prismas y antiprismas, pues las pirámides o bipirámides sólo tienen un tipo de diagonales.

Las tareas relativas a desarrollos de los sólidos.

La tarea T-3. El análisis de los poliedros para encontrar desarrollos de ellos. Esta tarea incluye actividades que conexionan el modelo de un sólido con algunos de sus desarrollos, porque a partir de uno de ellos puede obtenerse el otro. Dado que el propósito de estas actividades no es la construcción en sí misma, la mayoría de ellas se refieren a la construcción de desarrollos de los modelos a partir de éstos, más que a la construcción de sólidos a partir de desarrollos.

Cabe señalar que la actividad T-3a, en la que se introduce el concepto de desarrollo de un sólido desmontando uno de sus modelos, no es necesaria si los estudiantes han resuelto las actividades del nivel 1 o razonan ya de acuerdo con las características del nivel 2 o superior. En ese caso pasaríamos a las actividades T-3b y T-3c en las que se procede a la inversa: en vez de deshacer modelos para obtener desarrollos, se pide que se construyan sólidos a partir de su desarrollo. Estas actividades pretenden que se aplique el análisis realizado de la familia correspondiente para obtener desarrollos de ejemplos de ella. Algunas observaciones que conducen a los desarrollos de los sólidos que se piden son:

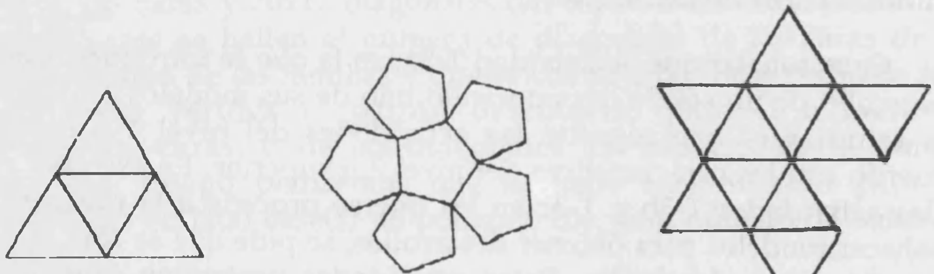
- Un desarrollo del octaedro (antiprisma triangular) está formado por una cinta de 6 triángulos y un triángulo a cada lado. Un desarrollo del icosaedro está formado por una cinta de 10 triángulos, cerrada por 5 triángulos en la parte superior e inferior, de manera que cada uno de estos triángulos está unido a cada uno de los de la cinta. Las figuras 2.13(a) y 2.13(c) muestran estos desarrollos.



(a) (b) (c)

Figura 2.14

– El octaedro puede verse como formado por dos pirámides cuadradas; luego basta construir los desarrollos para estas pirámides y juntarlos (figura 2.14(b)). También puede verse como dos casquetes iguales que se juntan, formados por un triángulo bordeado de triángulos (figura 2.15(a)). Y lo mismo el dodecaedro y el icosaedro: el casquete del primero consta de un pentágono bordeado de pentágonos; el del segundo puede construirse con 5 triángulos que forman una esquina y bordeando este "pico" con triángulos (figuras 2.15(b) y 2.15(c)).



(a) b) (c)

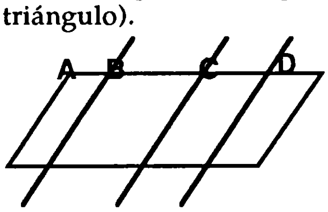
Figura 2.15

Cuando se determina un desarrollo de los poliedros por este método de análisis y síntesis, la dificultad técnica en la mayoría de los casos está en la unión de estos desarrollos. A priori no se tiene seguridad de si se han juntado correctamente. A medida que se va desarrollando la visión espacial, o se hace uno más experto en ello, se aprende a seleccionar la descomposición que facilita la tarea, e incluso, en algunos casos, se cambia la estrategia.

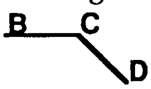
Queremos hacer notar cómo en las mismas actividades hemos sugerido que los estudiantes pueden doblar para verificar sus respuestas. El objetivo de estas actividades no es tanto que se desarrolle la visión espacial de los estudiantes como que se aplique el análisis que se hace sobre las familias de poliedros para estas tareas concretas.

Con la actividad T-3d volvemos a resaltar lo que ya se vio en las actividades de la fase 2 del nivel 1: que el desarrollo de los prismas oblicuos no está formado por una cinta de paralelogramos que forma un paralelogramo más grande y dos polígonos iguales, uno a cada lado de la cinta. Después de haber buscado desarrollos para los prismas rectos, algunos estudiantes suponen que un desarrollo de un prisma oblicuo puede ser como el que acabamos de mencionar. En este caso, la verificación experimental les convence de inmediato de que no es así, e incluso cuando ya se tienen dominadas las características del nivel 2 y se razona de acuerdo con el nivel 3 para el proceso de demostrar, la verificación experimental puede llevarles a explicar, como en la respuesta que indicamos a continuación (respuesta de un estudiante de Magisterio del grupo de 3ºC) por qué figuras como éstas no pueden ser desarrollos de prismas oblicuos, a no ser que el prisma sea triangular.

E1: No es desarrollo. Al intentar construir el modelo tenemos que doblar por las aristas. Al doblar por una el plano de la base ya está pues tenemos los puntos ABC (un triángulo).



Cuando doble por la otra arista el vértice D no cae en el mismo plano; va más arriba. Por eso en el desarrollo los paralelogramos tienen que formar una figura en el que si los vértices están horizontales el D tiene que estar más abajo



así. Si es triangular sí que se puede. Los vértices ABC forman el triángulo de la base.

La dificultad que presenta el obtener un desarrollo de los modelos de los sólidos oblicuos y las limitaciones que tiene el material comercializado que hay en el mercado, que lleva a que en muchos casos los modelos se tengan que construir a partir de su desarrollo, puede justificar el que propongamos de nuevo en esta fase una actividad de este tipo. No nos vamos a detener ahora delimitando cómo se halla un desarrollo de los prismas oblicuos ni de ejemplos de las subfamilias de los antiprismas, pirámides o las bipirámides, en los que determinar un desarrollo de un ejemplo de ellas se dificulta (por ejemplo, cuando la base de una pirámide o de un antiprisma no es regular o cuando el antiprisma o pirámide es oblicuo). Estas tareas las planteamos para la fase 4 de este nivel.

También cabe mencionar otro tipo de destrezas técnicas y manuales (además de visión espacial) que requiere la obtención de un desarrollo de un poliedro y la construcción de éste a partir de aquél. Para dibujar perfectamente el desarrollo se necesita destreza en dibujo lineal y la construcción del modelo a partir del desarrollo requiere habilidad manual. Además, en la práctica, bien para que los modelos obtenidos sean más consistentes, o para que resulte más cómoda la tarea, antes de construir el modelo a partir del desarrollo se deben resolver ciertos problemas de intendencia o escala, como por ejemplo, qué materiales utilizar o qué tamaño elegir para los polígonos de los desarrollos. Prácticamente hemos obviado las actividades que tienen que ver con destrezas técnicas o con problemas prácticos. Planteamos la actividad T-3e donde se da la escala y un desarrollo de un modelo y se pide las dimensiones de la arista del sólido y que se construya el modelo. El objetivo de esta actividad no es tampoco el de desarrollar destrezas técnicas. Con esta cuestión se muestra cómo hallar la medida de la arista del modelo a partir de la medida de la del desarrollo y la escala.

Es interesante comentar algunos modelos que han construido por este procedimiento los estudiantes que han participado en nuestras experimentaciones. No se han limitado a la construcción sino que, para hacer los modelos más atractivos, han dibujado figuritas en las caras. Si esto ocurre cuando se desarrolle la unidad de enseñanza propuesta, los modelos se pueden aprovechar para llamar la atención sobre que esos dibujos accesorios pueden desviar la atención hacia detalles irrelevantes, en vez de hacia donde nos interesa dirigir; que incluso pueden contribuir a que se incluyan en los objetos mentales propiedades visuales de las que luego uno se tiene que desprender; para terminar aclarando que si bien esos modelos pueden ser más atractivos en el mundo del arte, no pertenecen a un contexto geométrico.

La tarea T-4. Con la actividad T-4a introducimos, de manera informal, los conceptos de *caras opuestas, vértices opuestos y aristas opuestas.* Las ideas de estos conceptos con las que podemos comenzar pueden basarse en la colocación del modelo. El concepto de caras opuestas lo reforzamos centrando la atención en las reglas sobre suma de puntuaciones que se presentan en caras opuestas de diferentes dados. Para resolver las actividades T-4b y T-c, una vez descubierta la regla de las puntuaciones de los dados, se tienen que reconocer las caras opuestas, bien en un modelo, bien en un desarrollo. Para estas actividades es conveniente disponer de varios cubos, octaedros, dodecaedros e icosaedros desmontables: a) con las caras numeradas como un dado y b) con varias caras no opuestas numeradas. También es conveniente disponer de varios desarrollos diferentes, dibujados en papel, de cada uno de estos sólidos y usar papel adhesivo para escribir encima de los modelos o de los desarrollos.

Sobre la tarea 9: Descripción de modelos en los que hay implicados varios poliedros. Búsqueda de relaciones y construcción.

La búsqueda de relaciones entre poliedros y entre sus elementos. En las actividades de la tarea T-9 el intento de obtener modelos *rígidos* va a proporcionar actividad geométrica. Hacemos notar que algunos modelos no son rígidos. Para convertirlos en rígidos unimos los vértices del sólido con varillas que representan las diagonales de las caras, o del espacio, del sólido y proponemos algunos problemas de relación, descripción o construcción de los sólidos obtenidos en términos de los elementos de los poliedros implicados. En el nivel 1 ya hemos planteado tareas de identificación y de relación. Pero ahora, como ya hemos esbozado en el apartado 2.3.3, las relaciones entre los modelos implicados, o entre sus elementos, ya se expresan de manera precisa en términos de propiedades geométricas, en vez de con propiedades visuales, y además determinamos también la relación que existe entre las longitudes de las aristas de los poliedros implicados.

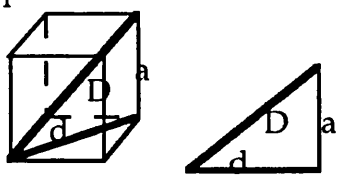
Si los estudiantes no han resuelto las actividades que hemos diseñado para el nivel 1, el profesor puede ayudarse de modelos de estos poliedros, pues como ya hemos indicado ahí, el reconocer los poliedros que forman estos modelos a partir del armazón exige de una gran visión espacial. En este caso, aconsejamos que el profesor plantee las actividades sobre puzzles y descomposiciones que hemos propuesto para primer nivel, para que los estudiantes puedan llegar a descubrir y enunciar la gran variedad de relaciones geométricas que se pueden establecer a partir de los modelos que se construyen en la tarea T-9.

Las actividades T-9a y T-9b remarcan que el cubo puede descomponerse en 3 ó 6 pirámides iguales (ver apartado 2.2.1; figuras 2.5a y 2.5d). Las actividades T-9c y T-9d centran la atención en que un tetraedro puede inscribirse en un cubo y un cubo en un dodecaedro (ver apartado 2.2.2; lámina VII) de manera que los vértices y las caras opuestas a éstos del tetraedro yacen o se corresponden con vértices opuestos del cubo y los vértices del cubo se corresponden con vértices opuestos del dodecaedro; las aristas del tetraedro o del cubo yacen sobre diagonales de las caras del cubo o del dodecaedro respectivamente y las caras opuestas del cubo se corresponden con aristas opuestas del dodecaedro.

Con estas actividades se puede llamar la atención sobre que el conjunto de las diagonales de las caras del cubo o del dodecaedro está estructurado; que si introducimos todas las diagonales de las caras de un cubo, y todas las de un dodecaedro, al considerar una por cada cara, grupos de 6 diagonales de las caras del cubo forman un tetraedro, y grupos de 12 diagonales de las caras del dodecaedro forman un cubo; se puede hacer ver que tenemos 2 tetraedros en un cubo y 5 cubos en un dodecaedro, aunque para ello puede que se tengan que visualizar cada tetraedro, o cada cubo, por separado; incluso se puede mostrar que cada uno de ellos surge completo al elegir como punto de partida una cara del cubo, o del dodecaedro, y en ella cada una de las diagonales de esta cara; porque ya elegida ésta, el resto de las diagonales de las caras del modelo considerado queda fijado.

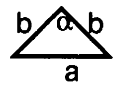
La construcción de los modelos: Relación entre la medida de las aristas. En las actividades que incluye la tarea T-9 también se pide a los estudiantes que construyan los modelos, para lo que se tiene que hallar la relación entre la medida de las aristas de los poliedros implicados.

Los estudiantes que hayan logrado algunas características del nivel 2 pero no otras puede que resuelvan esta actividad construyendo el modelo, o armazón, del poliedro circunscrito y estimando con varillas el tamaño de la arista del modelo inscrito. Los estudiantes que ya razonen de acuerdo a las características del nivel 2 pueden determinar la medida de la arista del poliedro inscrito, a partir de la arista del poliedro circunscrito aplicando el teorema de Pitágoras o, para la actividad T-9d, el teorema del coseno. En este caso el profesor tendrá que dirigir la tarea y añadir más cuestiones o pistas para que, por una parte, los estudiantes lleguen a delimitar los elementos que forman el triángulo adecuado en cada caso, y por otra, determinen la medida de los elementos del triángulo seleccionado que son necesarios para hallar el elemento buscado.

Por ejemplo, para hallar la diagonal del espacio del cubo, conviene seleccionar el triángulo rectángulo formado por una arista del cubo, la diagonal de una cara y la diagonal del espacio. 

. Para hallar las aristas del cubo inscrito en el dodecaedro (que corresponde a la diagonal de un pentágono regular) hay que seleccionar el triángulo formado por la diagonal de un pentágono regular y dos de sus lados.

Las experimentaciones que hemos realizado nos han mostrado que si bien la mayoría de los estudiantes de Magisterio que razonan de acuerdo a las características del nivel 2, pueden aplicar el teorema de Pitágoras, muy pocos pueden aplicar el teorema del coseno.

Cuando se aborde esta tarea en clase, además de apuntar la fórmula del teorema del coseno para triángulos isósceles, habrá que explicar detenidamente que la relación entre las aristas del dodecaedro y del cubo inscrito pueden hallarse aplicando este teorema: Dado 

se cumple que $a^2 = 2b^2 (1- \cos\alpha)$.

Habrá que precisar que el triángulo que forman 2 aristas del dodecaedro y una arista del cubo inscrito es isósceles, y que al ser el pentágono de las caras del dodecaedro un pentágono regular, se conoce la medida de su ángulo (mide 108°).

Las tareas sobre clasificación. Descripción general. Aportaciones de las experimentaciones.

Las tareas T-10 a T-22 se refieren a la clasificación. Ya hemos indicado en el apartado 2.1.2 de este capítulo la gran actividad matemática, adecuada para los niveles 2 y 3, que conlleva el abordar en clase este proceso matemático. Los objetivos más importantes de estas tareas se desprenden de los comentarios que hemos indicado en este apartado. Vamos ahora a resaltar algunos aspectos sobre las tareas propuestas.

Las tareas T-10 a T-12: Los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides, rectos y oblicuos, cóncavos y convexos. Las actividades que incluimos en T-10 y T-11 se refieren a los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides, *rectos* y *oblicuos* y la tarea T-12 a los *cóncavos* y *convexos*.

A) El establecimiento de la clasificación. Si los estudiantes ya han resuelto las tareas que proponemos para el nivel 1, la parte de las actividades T-10a a T-10c y T-12a en la que se pide que se precise lo que se entiende por cada una de estas subfamilias puede que no sea necesaria. En este caso, estas actividades se propondrán para remarcar que este tipo de clasificación es una partición llamada *dicotomía*, y que los diagramas de la figura 2.16 pueden representarla.

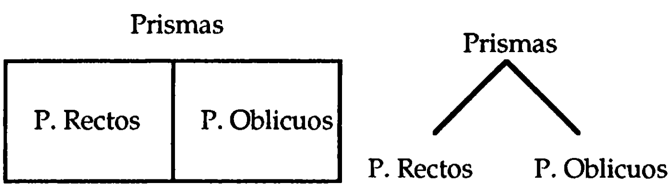


Figura 2.16

Se puede comprobar que las clasificaciones establecidas en estas tareas verifican las condiciones impuestas a una clasificación-partición:

- Una vez determinado el universo y el criterio de clasificación, cada ejemplo del universo debe pertenecer a una y sólo a una clase. Las subfamilias establecidas deben ser disjuntas.

- Las distintas subfamilias establecidas en el universo objeto de clasificación deben de dar cuenta de la totalidad del mismo.

También podemos centrar la atención en el nombre y adjetivo que tienen los nombres compuestos de las subfamilias establecidas, y destacar que el nombre hace referencia a la familia a la que pertenecen (prisma, antiprisma, pirámide, bipirámide, poliedro) y el adjetivo puede hacer referencia o no a la característica visual de cada subfamilia. El ser recto o inclinado sí que se refleja en el nombre de las subfamilias establecidas, pero la característica visual, tener o no tener entrantes, no se refleja en el nombre de cóncavos o convexos.

La actividad T-10d pone de manifiesto lo señalado en el apartado 2.1.2 como una de las razones para incluir este tipo de clasificación en la unidad de enseñanza: cuando se considera como universo de clasificación la familia de los poliedros, el criterio de clasificación ser recto u oblicuo no queda claro.

Aportaciones de las experimentaciones. En la experimentación que realizamos con niños de 12 años tuvo lugar la siguiente conversación, que informa sobre lo que puede ocurrir en clase al ampliar el universo objeto de clasificación cuando se clasifica con el criterio *ser recto u oblicuo.* Cuando preguntamos a los niños sobre si rombododecaedro y el cubo chato (poliedro arquimediano) eran rectos u oblicuos respondieron:

E1: Pero si ese [Se refiere al rombododecaedro] no es nada. A ver... ¿qué es?
P: Es un elemento de una familia que no hemos estudiado, pero, ¿es recto u oblicuo?
E2: Pero tú lo has dicho, no lo hemos estudiado, ¿cómo vamos a saberlo?
P: Pero qué pensáis que es recto u oblicuo.
E2: Coge el modelo y lo mueve. Luego dice: Recto.
E3: Es que si lo pones así... [lo apoya en una cara]
E1: Y ese ¿dónde va? Yo creo que como está un poco torcido...
E2: Pero así [lo coloca como apoyado sobre un vértice] es recto... este vértice esta ahí, como éste.
E1: Pero así [lo apoya sobre una cara]... Vale. Mejor recto.
P: ¿Y por qué creéis que es recto?
E3: Si no está torcida la figura.
E2: Si no se han desviado los vértices así ...
E1: Si no se han desviado las bases así...
E2: Porque son paralelos [se refiere a los rombos de las bases].
P: ¿Y en los oblicuos no son paralelas?
E2: Coge un modelo y dice: Sí. Pero ésta [se refiere a una cara] se tendría que haber ido hacia aquí.
E3: Como si se fuera a caer...
E2: Eso, a poco que lo empujes...Entonces claro...como está inclinado, se cae.

Con respecto al cubo chato respondieron:

E3: Pero es que mira... se entra por aquí...

E1: Pero aquí hay una cara y aquí otra paralela que no está desviada [se refiere a dos caras cuadradas opuestas].
E2: Pero mira... este cuadrado y éste están ... no están igual.
E1: Sí, están girados, pero en éstos también, en los antiprismas.
E3: Pero está como chafado, mira como se mete para adentro...
E2: Ese es de esos que se meten para adentro.
E3: ¿Los cóncavos?
E1: Pero no se mete tanto. No hay un vértice así... [hace un gesto con la mano como que se mete para adentro]. Aquí se mete todo...
P: ¿Qué pensáis? ¿Es recto u oblicuo?
E1: Pues yo, ya no lo sé.
E3: Yo tampoco.
E2: Yo tampoco, pero creo que es recto.
P: Lo que quiero que notéis es que cuando no consideramos prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, no se tiene tan claro dónde incluir algunos sólidos, si en los rectos o en los oblicuos.

Así pues, con la actividad T-10d se puede remarcar que, o bien nos quedamos en un "trocito" de mundo (el de los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides) para clasificar con el criterio ser recto o inclinado o tenemos que precisar la idea de sólido recto y oblicuo para poder asignar cualquier modelo en una de las familias establecidas. Se puede hacer notar que en tareas de clasificación resulta necesario nombrar siempre el universo que se somete a clasificación, al igual que el criterio que conduce a establecer las familias y las familias que se establecen.

B) Sobre el objeto mental de altura de un sólido. Las actividades T-10e a T-10h centran la atención en otro elemento fundamental de los de prismas (antiprismas, pirámides y bipirámides) que aún no hemos comentado: la altura. Permiten averiguar si los estudiantes tienen incluido en el objeto mental de este concepto el atributo de que tiene que quedar dentro del sólido, o en la superficie; o de que la altura de un sólido tiene que unir centros de bases (nos referimos a los centros de gravedad), o ápices y centros de bases. En las experimentaciones realizadas hemos constatado que bastantes estudiantes tienen un objeto mental de altura de un prisma basada exclusivamente en los prismas rectos. En los prismas oblicuos también identifican la longitud de la altura y la de la arista lateral. Otros estudiantes, aunque no identifican ambas longitudes, no pueden indicar cuál es la altura del prisma oblicuo; expresan que "como está torcido... ".

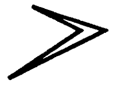
Cuando cuestionamos qué altura había que poner a un estante para que el prisma oblicuo cupiese cuando estaba apoyado en una de sus bases, hubo estudiantes que respondieron, que la longitud de las aristas laterales. Otros estudiantes la señalaron correctamente aunque no pudieron expresar una idea de ella en términos geométricos: "Pues de aquí abajo a aquí" [Señaló perfectamente la altura: un dedo lo puso en un vértice de la base de arriba y el otro en la mesa siguiendo la "vertical"].

En todas nuestras experimentaciones hemos comprobado que los estudiantes no son reacios a admitir, una vez señalado por el profesor, que la altura de un prisma oblicuo dibujada desde un punto de la base (de un prisma o de un antiprisma) o desde el ápice (en una pirámide o una bipirámide) puede caer fuera del prisma o antiprisma (pirámide o bipirámide). Podemos encontrar la explicación en el hecho de que en los libros de texto usuales de primaria se presenta dibujada la altura de un prisma y de una pirámide oblicuos que reflejan esta característica visual. De hecho, algunos estudiantes expresaron que tenían en cuenta estos dibujos:

E1: Yo ahora pienso que a lo mejor sería desde el centro del prisma para abajo esa altura, porque cuando lo tienes recto [y busca un modelo en el que apoyarse. Coge un prisma de bases irregulares] éste vamos a suponer, si esto fuera el centro [y lo señala] se mediría de ahí abajo, entonces ahí igual.
P: ¿Y esta línea no es recta? [Con la mano señala una recta inclinada].
E2: Esa línea es inclinada.
E1: Pero es recta. [Se ríe]. O sea, horizontal, o sea, es que no sé...
E3: Perpendicular a la base esa. Y si se sale como aquí [señala un prisma oblicuo] pues entonces perpendicular a la mesa.
E1: Sí, como en el dibujo de los libros.

En las experimentaciones también hemos verificado que muy pocos estudiantes enumeran propiedades de las familias tratadas, relativas a su altura, a menos que el profesor lo indique explícitamente. Con las actividades T-10f a T-10h se procura que los estudiantes descubran las propiedades de los prismas (y de las otras familias), rectos y oblicuos relativas a la altura que indicamos en el anexo 2 y que lleguen a caracterizar estas subfamilias en términos de altura de la siguiente manera: un prisma o antiprisma (pirámide o bipirámide) es *recto* cuando al dibujar la altura desde el centro de una base (desde el ápice) cae en el centro de la otra base (cae en el centro de la base o pasa por ella y cae en el otro ápice). En los prismas y antiprismas cuando no ocurre esto, e incluso la altura puede caer fuera de la base del sólido, entonces los sólidos son *oblicuos o inclinados*.

Estas actividades permiten también remarcar que mientras que en los prismas y antiprismas rectos, la altura dibujada desde un punto de la base no va a caer fuera de la otra base, en las pirámides y bipirámides, rectas, la altura dibujada desde el ápice puede caer fuera del polígono de la base. Las pirámides rectas presentan un caso interesante respecto a los prismas y antiprismas. Se tienen ejemplos de pirámides rectas, de aspecto francamente raro, donde el ápice se corresponde con un punto que no pertenece al polígono; esto ocurre cuando la base es un polígono cóncavo que tiene el centro fuera de él. Por ejemplo, cuando la base es el polígono de la figura.



Estos polígonos también pueden utilizarse como bases de los prismas, pero ahora lo que se puede discutir es si al considerar los prismas que tienen estas bases se siguen manteniendo en esta familia todas las propiedades relativas a la altura que se habían enumerado sin haber pensado en estos modelos como ejemplos. Se puede aclarar que consideramos como centro del polígono el centro de gravedad y que suponemos que existe aunque quede fuera del polígono.

C) Las propiedades relativas a tipos de ángulos. Cómo medir los ángulos diedros. Las actividades de la tarea T-11 pretenden que los estudiantes descubran las propiedades de los prismas rectos que indicamos en el anexo 2 y que se centre la atención sobre las propiedades, relativas a los diferentes tipos de ángulos, que las experimentaciones nos han mostrado que presentan dificultades, bien porque se aplican ideas erróneas o porque presentan problemas de lenguaje. Todavía al realizar estas actividades es usual encontrar estudiantes que para la propiedad de los ángulos de las caras laterales sólo nombran caras. Para los ángulos diedros sólo consideran los ángulos diedros que forman las caras laterales entre ellas (αCL-CL) o los que forman las caras laterales con la base (αCL-B).

Una de las propiedades de los prismas rectos a la que nos referimos en la tarea T-11 es la siguiente: los ángulos diedros que forman las caras laterales entre ellas coinciden con los ángulos correspondientes del polígono de la base. No pretendemos que los estudiantes la descubran ellos mismos sin ayuda del profesor. Como ya hemos apuntado en el apartado 1.4.1, el descubrir esta propiedad requiere de razonamientos asociados al nivel 3 o de una buena visualización con un modelo y varillas o con el instrumento de medida de ángulos; por lo que, al desarrollar la tarea T-11 se puede prestar la atención en si se verifica o no en ejemplos concretos de prismas rectos y oblicuos; podemos fijarnos también en la medida del ángulo diedro de dos caras laterales y a continuación en la medida del ángulo correspondiente de la base.

Las experimentaciones realizadas han mostrado que esta propiedad se asocia a todos los prismas porque los estudiantes no miden adecuadamente los ángulos diedros de los prismas oblicuos. Los estudiantes que han logrado moverse adecuadamente sólo con algunas de las características asociadas al nivel 2, por un lado, tienen dificultades para seleccionar de manera adecuada los segmentos que reflejan la medida del ángulo diedro correspondiente (los perpendiculares a la arista que forman las caras) y se muestran reacios a abandonar la idea de que hay que elegir los segmentos paralelos a los lados de la base. La larga discusión que tuvo lugar en las experimentaciones que realizamos con niños de 12 años, y que relatamos en Guillén et al. (1992), es una muestra de ello. Los segmentos que suelen elegir los estudiantes de Magisterio también son los paralelos a los lados correspondientes de las bases, pero no muestran resistencia a aceptar lo que pretende remarcar la actividad T-10c: que los segmentos que hay que seleccionar para medir un ángulo diedro son, uno de cada cara que forman el ángulo, perpendiculares a la arista y que se juntan en un vértice.

En nuestras experimentaciones, para llegar a establecer cómo había que medir un ángulo diedro utilizamos dos pentágonos de polydron o de troquelados unidos, que representaban un ángulo diedro, en los que habíamos dibujado en rojo un segmento en cada pentágono, perpendicular a la arista que formaban los pentágonos unidos, y que concurrían en el mismo punto de la arista. Los estudiantes observaron que los segmentos que mejor representan la abertura de los pentágonos eran los que había dibujados. Tampoco tardaron en descubrir que estos segmentos eran perpendiculares a los lados de los pentágonos, o a la arista que formaban. Es por esto por lo que en la tarea T-11 sugerimos que estos ángulos se introduzcan a partir de material comercializado.

Lo que cuesta bastante también es que se llegue a aceptar que en los prismas oblicuos, los ángulos diedros de las caras laterales no coinciden siempre con el ángulo correspondiente del polígono de la base. En las experimentaciones realizadas con niños de 12 años, disponíamos de varillas, que los niños podían utilizar como representantes de los segmentos que había que elegir, y de un dispositivo comercializado para medir ángulos diedros. Los niños disponían de un modelo de prisma oblicuo, colocaban las dos varillas juntas perpendicularmente a la arista lateral y las desplazaban paralelamente hacia la base. Pero, en este caso, el trabajar con varillas creó nuevos problemas. Al llegar al vértice del prisma, giraban el ángulo formado por las varillas hasta hacerlo coincidir con el ángulo de las bases. Así, no aceptaban que el ángulo diedro de las caras laterales no coincidía con el correspondiente de la base. Las siguientes respuestas dan prueba de ello.

E1: Mira ponemos esto [las varillas] paralelo a esto... más o menos; paralelo no, perpendicular [las coloca perfectamente. Se preocupa de que las varillas no se abran más ni menos y las lleva al vértice del prisma] Y no. No, no... ¿No daaa?. No, pero sí que da. [Vuelve a hacerlo].

E2: Haces así, lo pones así, sigo subiendo y aquí [en el vértice] éste se para [la varilla que está sobre un lado del polígono de la base] y éste sigue subiendo. Y llega un momento en que coincide...,

E1: Aquí, si lo subes todo paralela [las dos varillas], no. Pero si subes éste [una varilla] más, sí que es. ¿No? Pero los ángulos son iguales, aquí y aquí, y aquí....[las dos varillas con una abertura fija las coloca en diferentes sitios giradas sobre la mesa]. Mira si un ángulo lo pones aquí y es de 90° o lo pones aquí da lo mismo porque sigue siendo de 90° [lo muestra desplazando el ángulo que ha construido con las varillas]. Y si lo pongo de pié también.
Mira yo no la cambio [se refiere a la abertura] y sí que da. Nadie lo puede negar. Dejo la misma abertura. No me entendéis. Sólo hago así [hace gesto de girar] pero dejo la misma abertura...

Cuando indicamos que al mover la varilla dejaba de ser perpendicular a la arista, se aceptó que efectivamente dejaba de serlo, pero su resistencia a cambiar de idea le llevó a no tenerlo en cuenta, y a justificarlo de nuevo basándose en el hecho de que los ángulos no cambian porque cambie su posición.

E1: A ver, una pregunta: si tenemos dos lados así , mide 90° ¿no? Y si los tenemos así también, ¿no? Pues ya está... [Toma dos varillas unidas]. O sea que si lo pongo así y así [mueve el ángulo que ha construido para colocarlo en diferente posición] es que ya no está lo mismo...

Sin embargo, cuando dibujamos en los prismas varios segmentos paralelos a los elegidos, sobre varios puntos de la arista, de manera que nos íbamos acercando hacia la base, e introdujimos el instrumento de medida para medir ángulos diedros, (permite dejar fija una abertura, cosa que no ocurre con las varillas), que lo colocábamos sobre estos segmentos y sobre los lados de la base, se aceptó de inmediato que los prismas oblicuos no verifican la propiedad. Es decir, que en los prismas oblicuos algunos ángulos diedros de las caras laterales no coinciden con el ángulo correspondiente del polígono de la base.

P: Bueno vale, vamos a medir los ángulos con este instrumento que no cambia la abertura. [Elige un prisma muy oblicuo y en él selecciona un ángulo diedro que remarca mucho que no coincide con el ángulo correspondiente de la base. Muestra en un modelo cómo medir el ángulo que forman dos caras.
Todos los niños quieren medir ángulos diedros con este instrumento de medida].

E1: A ver. Lo pongo perpendicular...Ya está. Lo llevo a la base... Y no coincide. Bueno.. pero... Algunos, no todos.

P: Hazlo con cuidado, para que realmente lo pongas perpendicularmente a la arista y no cambies la abertura al sacarlo, y mira a ver si coinciden o no en los demás.

E1: Mide el ángulo diedro con el instrumento y dice: por muy poco...

E2: Claro. Pero no coincide.

E3: Eso... no coincide.

D) Sobre los prismas que se identifican como prismas rectos y como prismas oblicuos. La tarea T-11 permite también precisar propiedades que se señalan como de los prismas oblicuos porque los estudiantes traducen como propiedades de ellos la negación de las propiedades de los prismas rectos y no niegan de manera matemáticamente correcta el cuantificador *todo* que aparece en ellas. Nos referimos a que si bien puede haber prismas oblicuos con alguna cara lateral que sea rectángulo o cuadrado, siempre que todas ellas no lo sean, (siempre que haya también algún rombo que no es cuadrado o paralelogramo que no es rectángulo ni rombo), y los estudiantes admiten estos modelos como ejemplos de prismas oblicuos, como explicamos a continuación, las propiedades que expresan verbalmente para los prismas oblicuos (sus caras laterales no son rectángulos, no tiene rectángulos en sus caras laterales, etc.) dejan fuera estos ejemplos.

Así pues, ejemplos que conviene considerar para que se identifiquen como de una u otra familia son los modelos que indicamos en la actividad T-11e: los paralelepípedos rectos (con caras laterales cuadrados o rectángulos genéricos) de bases rombos o paralelogramos genéricos (que no son rombos ni rectángulos). Estos modelos, que la mayoría de los estudiantes los identifica como prismas oblicuos, proporcionan una gran riqueza al aprendizaje a partir de las actividades propuestas. Por un lado, con ellos se puede subrayar que puede haber prismas oblicuos que tengan alguna de sus caras laterales rectángulos. Por otro, llamar la atención sobre que también pueden considerarse prismas rectos (de bases rombos o paralelogramos respectivamente) puede llevar a precisar la idea de prisma recto y oblicuo para que las familias de los prismas rectos y oblicuos sean excluyentes o disjuntas.

El hecho de que en estos modelos todo par de caras pueden ser bases y que con las ideas que tenemos de estas familias los modelos pueden ser tanto rectos como oblicuos, según los pares de caras que elijamos como bases, lleva a que o bien no aceptemos lo que ya habíamos señalado, que las familias son disjuntas, o a revisar las ideas que tenemos de estas familias. Así, con la actividad T-11e se puede llamar la atención sobre el hecho de que dejaría de cumplirse una característica del tipo de clasificación que hemos trabajado: las familias establecidas dejarían de ser disjuntas, pues tendrían ejemplos comunes. Para mantener que las subfamilias sean excluyentes se puede hacer sentir la necesidad de precisar la idea de estas subfamilias para que podamos decir con seguridad a qué familia (de los rectos o de los oblicuos) tenemos que asignar estos modelos.

La mayoría de los estudiantes que participaron en nuestras experimentaciones cuando hicimos ver que estos modelos también se pueden considerar rectos de base un rombo o un paralelogramo, o bien expresaron que eran de ambas familias o los siguieron incluyendo en la familia de los prismas oblicuos. Las razones que dieron para ello fueron parecidas a la que dio uno de ellos: "No, sí, Mira. Si la mayoría... Si al ponerlo de distintas formas la mayoría son oblicuos, pues entonces yo digo que es oblicuo, y si la mayoría son rectos pues entonces yo digo que es recto".

En la discusión se expresaron ideas de prisma recto y oblicuo como la siguiente: "Un prisma es recto si podemos encontrar dos caras que se juntan con rectángulos y en otro caso el prisma es oblicuo", que llevan a que se incluya estos modelos como ejemplos de la primera familia. Esta es la idea que dejamos para estas familias, pero pasado un tiempo, en repetidas ocasiones nos encontramos con que al cuestionar la familia a la que pertenecían estos modelos, bastantes estudiantes los incluían de nuevo en los prismas oblicuos. De ahí que en los diferentes contextos en los que aparecieron fue necesario recordar que, al abstraernos de factores visuales y aplicar las ideas que nosotros habíamos ya precisado para prismas rectos y oblicuos, los modelos había que asociarlos a los prismas rectos; pues se podía encontrar un par de caras que se juntaran con rectángulos. También subrayamos que tendríamos que elaborar una idea nueva para estas familias, si quisiéramos incluirlos como ejemplos de los prismas oblicuos.

E) Las propiedades de los prismas rectos que pueden extenderse a otras familias de sólidos rectos. Finalmente, con respecto a las actividades de las tareas T-10 y T-11 también queremos comentar las que remarcan que no todas las propiedades de los prismas rectos, o de los prismas oblicuos, pueden extenderse o adaptarse a las familias de rectos u oblicuos establecidas en los antiprismas, pirámides o bipirámides. Al abordar estas actividades en clase se puede destacar que la única propiedad, además de las de la familia correspondiente, que verifican los antiprismas, pirámides o bipirámides, *rectas* es: la altura dibujada desde el centro de una base, o desde el ápice, cae exactamente en el centro de la otra base.

En las experimentaciones realizadas una gran variedad de estudiantes que razonaban de acuerdo a las características del nivel 2, aplicaban a las familias de los antiprismas, pirámides y bipirámides, *rectas*, las propiedades que previamente se habían delimitado para los prismas rectos. Y el error resultó difícil de corregir. Se repitió en varias actividades que se realizaron en tiempos diferentes. Si esto ocurre es pues necesario que volvamos a los modelos de los ejemplos concretos para que los estudiantes puedan verificar que la propiedad indicada no la cumple la familia señalada.

F) La actividades T-12b a T-12e. Pretenden que se lleguen a descubrir las propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides convexos relativas a los diferentes tipos de ángulos y de diagonales, que indicamos en el anexo 2 como propiedades de estas subfamilias.

La tarea T-13. Sobre las clasificaciones establecidas con criterios relativos a las bases. En esta tarea pedimos que se recopilen las características de las clasificaciones particiones, que se considere como posible criterio de clasificación el que está basado en la observación de que hay poliedros que *tienen base o bases,* y que, para establecer otras clasificaciones, se utilicen otros criterios que centren la atención en las bases.

A) Los poliedros que tienen base o bases y los poliedros para los que no está tan claro. Regresemos a el apartado 2.1.2 donde explicamos por qué abordar la clasificación con este criterio. Al desarrollar la unidad de enseñanza se pueden elegir poliedros que tengan todas las caras iguales, o que tengan caras de dos clases de polígonos regulares, o poliedros que no pertenezcan a las familias tratadas hasta entonces.

Para estos modelos se puede cuestionar qué caras cabe seleccionar como bases, si tienen o no tienen bases y qué idea de bases de un poliedro aplicamos para incluir cualquier modelo de poliedro en una de las familias establecidas. Una vez que hayamos hecho sentir la dificultad de precisar una idea de bases que sirva para cualquier poliedro, se puede reflexionar sobre si es o no pertinente dividir los poliedros con este criterio, y sobre lo que puede considerarse, o es adecuado hacerlo, como criterio de clasificación.

Incluso al resolver esta actividad podemos ir más allá cuestionándonos la conveniencia o no de introducir el nombre de caras laterales y el de bases en las familias de sólidos que hemos tratado (prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides). Se puede subrayar las ventajas que nos proporciona el hacerlo y los problemas de lenguaje con los que nos encontramos, por el nombre que se les da a estos tipos de caras.

B) Las subfamilias de prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides, triangulares, cuadrangulares, etc. Sobre las tareas de identificación de ejemplos. En la actividad T-13a también sugerimos que se utilicen para clasificar criterios que centran la atención en la base. De nuevo en el apartado 2.1.2 encontramos las razones fundamentales para proponer en la unidad de enseñanza las clasificaciones que o bien llevan a establecer las subfamilias de los prismas triangulares, prismas cuadrangulares, ..., basándose en la observación de que las bases de todos los ejemplos de una familia tienen el mismo número de lados, o a delimitar las familias de los de bases regulares y los de bases irregulares.

Respecto a la primera clasificación, podemos centrar la atención en que en los ejemplos de cada una de las subfamilias establecidas se mantiene el número de cualquiera de sus elementos. Para las clasificaciones de los antiprismas con este criterio, nos fijaremos en el nombre que reciben estas subfamilias y plantearemos tareas de identificación de ejemplos, especialmente de la subfamilia de los antiprismas triangulares, ya que algunos estudiantes tienen dificultad en identificar estos ejemplos. La siguiente conversación entre los niños de 12 años da muestra de ello.

P: Y esto [Un antiprisma triangular: bipirámide cuadrangular de madera] ¿Es antiprisma o no?
Todos: No.
P: ¿A qué familia pertenece?
E1: A las bipirámides
P: [Muestra el octaedro apoyado en una cara triangular] ¿Esto, que es?
E2: Es una bipirámide.
P: ¿Puede ser de otra familia que no sea la bipirámide?
E1: No.
E3: Sí. Antiprisma.
E4: ¡Anda ya ...! Es bipirámide....[Lo coge y lo coloca apoyado en un vértice].
E3: Déjalo caer. Hay una banda de... triángulos [Los señala].
P: Darle nombres a este modelo. Es bipirámide ...
E3: Cuadrangular. También es antiprisma.
P: ¿Y qué antiprisma es?

E1: Rectangular.
P: [Muestra un antiprisma hexagonal] ¿Qué nombre tiene este antiprisma? ¿Qué antiprisma es?
E2: Hexagonal.
P: ¿Y por qué se llama hexagonal?
E2: Porque sus bases tienen 6 picos.
P: Vale. Pues éste [señala el octaedro que está en la mesa apoyado en una cara], ¿cómo se llamará?
Todos: Triangular.
P: Vale. Antiprisma triangular porque ...
E1: La base ... tiene 3 lados y 3 picos.

Ya hemos señalado al introducir los antiprismas que hay que resaltar en repetidas ocasiones que el octaedro y otras bipirámides cuadrangulares, además de bipirámides son antiprismas. Y esta actividad es una buena ocasión para hacerlo de nuevo. Se puede remarcar que mientras que al considerarlas bipirámides son bipirámides cuadrangulares, al considerarlos antiprismas, son antiprismas triangulares. Hay que romper además con la idea de los estudiantes, que proviene de las que las clasificaciones con las que se ha encontrado son dicotómicas y del hecho de que las familias de los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides apenas compartan ejemplos comunes (sólo los que estamos considerando), de que si un modelo es de alguna de estas familias podemos asegurar que no es de ninguna otra.

C) La clasificación que centra la atención en la regularidad del polígono de las bases. Sobre las tareas de identificación de ejemplos. Además de lo ya expuesto en el apartado 2.1.2, cabe señalar que proporciona un problema para incidir de nuevo en las ideas que ya hemos trabajado para las bases de las familias de sólidos tratadas, dado que el incluir un modelo en una u otra de las subfamilias establecidas va a depender de la(s) cara(s) que se seleccione(n) como base(s).

Por otra parte, las tareas de identificación de ejemplos de las subfamilias establecidas permiten que los estudiantes plasmen y afinen la idea que tienen sobre regularidad de polígonos y que se provoquen discusiones que tienen un gran valor didáctico, pues si bien pueden crear conflicto si no se dirigen adecuadamente, pueden mostrarnos cómo se pueden ir afinando o precisando los conceptos.

Las experimentaciones realizadas pusieron de manifiesto que cuando el grado de dominio del nivel 2 es bajo, al considerar la regularidad de polígonos los estudiantes sólo tienen en cuenta una condición, muy a menudo olvidan la otra. Al abordar esta clasificación podemos enfocar la atención sobre esto. Mostraremos modelos cuyas bases tengan lados (ángulos) iguales pero ángulos (lados) distintos y cuestionaremos la subfamilia de las que hemos establecido que contendría a estos modelos como ejemplos.

Para abordar el segundo problema los modelos que se pueden presentar (para que se identifiquen) serán los que verifican que todo par de caras, o toda cara, pueden ser bases, o base. Por ejemplo, los modelos de la figura 2.17: el prisma formado por dos rombos que no son cuadrados y 4 cuadrados y la pirámide formada por un triángulo equilátero y 3 triángulos isósceles que no son equiláteros.

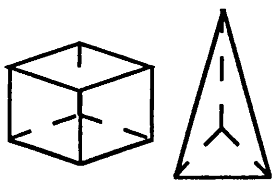


Figura 2.17

Estos modelos se pueden incluir en las dos familias establecidas (las de base(s) regular(es) y las de base(s) irregulares, dependiendo de los pares de caras, o de la cara, que se elija(n) como base(s).

Si intentamos evitar este problema de la misma manera que cuando se planteó un problema análogo al identificar modelos (uno de ellos era el prisma de la figura) como prismas rectos u oblicuos (ver los comentarios de la actividad T-11e), surgen nuevos problemas. Ideas que surgen para los prismas de bases regulares y para los prismas de bases irregulares (PBR y PBIr), análogas a las que dimos para los prismas rectos y oblicuos, son: un prisma (u otra familia de las tratadas) es de bases regulares si podemos encontrar dos caras (o una) regulares que pueden ser bases de esa familia. En caso contrario es de base irregular.

Con estas ideas no rompemos con la idea totalmente aceptada por los estudiantes de que la pirámide formada por un triángulo equilátero y 3 triángulos isósceles es de base regular, pero al considerar el prisma formado por dos rombos genéricos y 4 cuadrados se presentan problemas. Este modelo, con la idea dada de PBR y PBIr es de base regular; sus bases son los cuadrados pues cumplen las propiedades de las bases de los prismas: son iguales y paralelas y se juntan con paralelogramos (2 cuadrados y 2 rombos genéricos en este caso). Pero una vez aceptado que las bases son los cuadrados, habría que concluir que el prisma es oblicuo. Sin embargo; con la idea que precisamos en la actividad T-11e el modelo es recto: podemos encontrar dos caras que se juntan con rectángulos (en este caso cuadrados).

Llegados a este punto podemos optar, o bien por revisar de nuevo las ideas que hemos dado para las familias de sólidos rectos y oblicuos, de bases, o de base, regular e irregular, o bien aceptamos que las clasificaciones que establecemos no son disjuntas (los modelos pueden incluirse en las dos familias). A continuación vamos a dar cuenta de cómo continuamos nosotros en una de nuestras experimentaciones con estudiantes de Magisterio (del grupo 3ºC).

E1: Yo propongo que para los modelos para los que se pueden elegir varios pares de caras como bases, elijamos un par u otro según si cumple o no la propiedad que nos interesa resaltar. Por ejemplo, entre rectos y oblicuos, nos fijamos en *ser recto,* y las bases que consideramos son las que llevan a ello (los rombos). Y lo mismo para los prismas de base regular e irregular; las bases que consideramos son las que llevan a que sea de base regular (los cuadrados).

[...]

E2: ¿Que ocurre cuándo clasificamos con los dos criterios ser recto u oblicuo y ser de base regular o irregular? ¿Cómo consideramos este modelo, recto de base irregular u oblicuo de base regular? ¿O lo consideramos también de la familia que cumple ambas propiedades que nos interesan, los prismas rectos de bases regulares (PRBR).

E3: Pero es que si los consideramos rectos de base regular los pares de bases que hay que elegir en cada caso no son los mismos. Para verlo como recto se coge la base el rombo y para verlo de base regular, el cuadrado. ¿Eso puede ser?

En las experimentaciones que hemos realizado, en la mayoría de ellas se llega a la siguiente opción como la más aceptada: dado que todo par de caras pueden ser bases podemos elegir cualquier par de caras y ser coherente con ello. Así, el modelo se va a incluir en recto de base irregular u oblicuo de base regular según las preferencias de los estudiantes. Se resalta también la necesidad de que se indiquen las caras que se han elegido como bases y que también se podría elegir otra opción, con lo que los resultados serían diferentes.

Y aún podemos seguir planteando nuevos problemas: ¿Con estos dos criterios se pueden establecer clasificaciones donde las particiones se solapan? ¿Las 4 familias que se establecen son disjuntas? ¿Podemos estar seguros de la subfamilia en la que tenemos que asignar estos modelos? Resulta aclarador tener en cuenta que ya antes nos habíamos cuestionado si la observación de *los poliedros tienen bases o base* era un buen criterio de clasificación. Podemos recordar que el no haber podido precisar lo que se entiende por base o bases de los poliedros nos había llevado a restringir el universo, para clasificarlo con este criterio, a un "trocito" del mundo de los poliedros (el formado por los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides). Una buena decisión también podría ser la de eliminar también del "trocito de mundo" objeto de clasificación con este criterio, el de las subfamilias que tienen todas sus caras de la misma familia, para las que todo par de caras, o toda cara, pueden ser bases o base. En las experimentaciones realizadas con estudiantes de Magisterio esta opción fue muy bien aceptada. La respuesta siguiente de uno de los estudiantes muestra lo razonable que encuentran esta solución: "Claro, si todas las caras pueden ser bases, para qué hablar de base regular, tendrían que serlo todas también porque sino, ¿cuál de todas cogemos para mirar si es regular o no? Si pueden ser todas ellas bases.... Según la que coja me sale una cosa u otra... Mejor quitar esa familia también".

Sobre la tarea T-14. La clasificación con criterios que centran la atención en la regularidad e igualdad de todas las caras, o de las caras laterales. En el apartado 2.1.2 explicamos las razones que tenemos para abordar estas clasificaciones. Aquí sólo vamos a llamar la atención sobre que en las actividades T-14a y T-14c pedimos que con material comercializado se construyan ejemplos de las diferentes subfamilias establecidas para que se incorporen en los objetos mentales correspondientes y puedan ser la base para explicar en este nivel la respuesta a las otras preguntas que también planteamos en esta tarea: ¿Cuántos ejemplos diferentes encuentras?

Es muy probable que el profesor tenga que dirigir y dar bastantes pistas para que se lleguen a considerar varios ejemplos, o por lo menos de dos tipos, de las familias implicadas. Puede ser que haya que sugerir que se planteen si es posible construir antiprismas y pirámides de caras iguales utilizando triángulos isósceles (de troquelados) porque los estudiantes a la condición de igualdad de caras le añaden regularidad de las mismas. En la mayoría de nuestras experimentaciones hemos tenido estudiantes que han aplicado esta idea, por lo que, una vez que ya habían encontrado el ejemplo de la familia correspondiente que tiene caras iguales y regulares (el que es además poliedro regular), ya no se cuestionaban que podía haber otros.

Las tareas T-16 a T-18. Clasificaciones en las que las particiones se solapan. Lo que hay que enfatizar con esta tarea ya lo hemos indicado en el apartado 2.1.2. En la figura 2.18 mostramos los diagramas que representan las 2 familias disjuntas que se establecen con un criterio, las 4 familias disjuntas que se delimitan con 2 criterios y el diagrama trilateral[10] que representa en un cuadro las 8 posibles clases que se pueden establecer al considerar 3 criterios de clasificación. También presentamos otros modelos para representar estas subfamilias que puede generalizarse para representar las 16 familias que pueden delimitarse cuando se clasifica con 4 criterios. Estos criterios los hemos representado en los diagramas con X, Y, Z, K hacen referencia a cada uno de estos 4 criterios y ¬X, ¬Y, ¬Z y ¬K hacen referencia a que no se verifica el criterio correspondiente.

Para averiguar si los estudiantes han comprendido las explicaciones que hemos dado sobre esta clasificación, planteamos las actividades T-16b y T-16e. De nuevo nos centramos en la enumeración de ejemplos de familias, actividad clave para el nivel 2. Pero ahora no se pide explícitamente que se construyan. Si los estudiantes no pueden enumerarlos sin ayuda del profesor, se puede sugerir que se construyan ejemplos de estas familias que verifiquen las condiciones impuestas por los criterios considerados para

[10] Nombre que le da Lewis Carroll en el libro "el juego de la lógica" y que le permite representar proposiciones de existencia y de relación cuando se han seleccionado 3 atributos.

clasificar. Así, si buscamos ejemplos de la familia que tiene las caras regulares e iguales y los vértices distintos, el profesor puede dirigir la discusión, siempre apoyándose en la construcción, para que se llegue a concluir que tenemos que irnos al mundo de las bipirámides, porque en los prismas, antiprismas y pirámides, si las caras son regulares e iguales los modelos que podemos construir sólo son el cubo, octaedro y tetraedro respectivamente; y todos ellos tienen los vértices iguales. En el mundo de las bipirámides que tienen las caras regulares (sólo podemos construir 3 de ellas: la triangular, la cuadrada y la pentagonal) tenemos dos de ellas que son ejemplos de la familia que se nos pide.

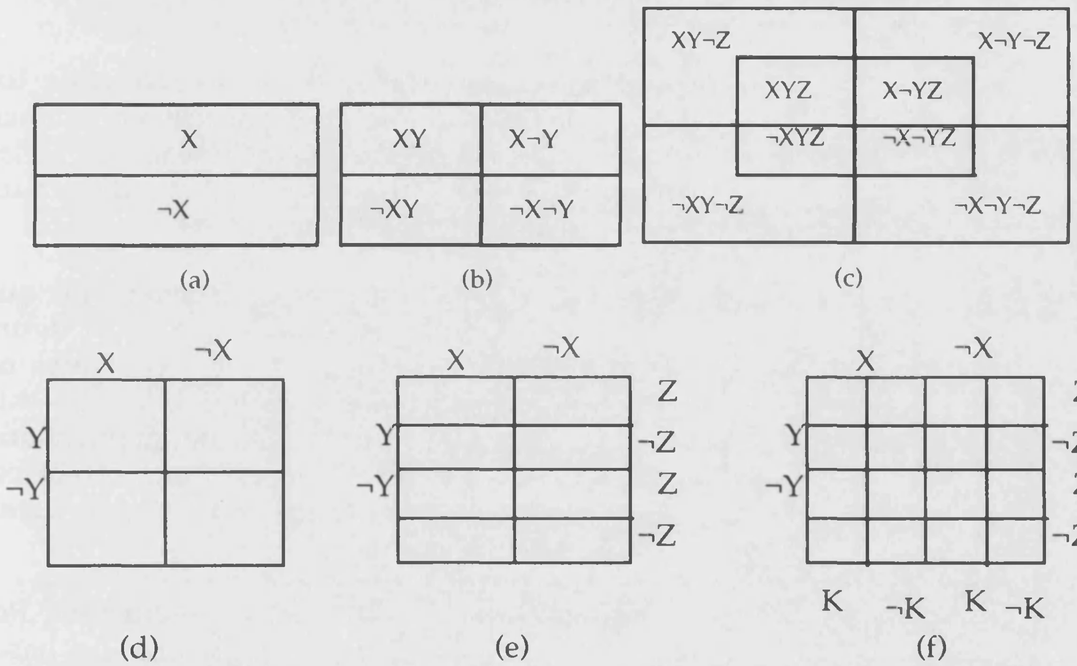


Figura 2.18

En la actividad T-16c se tiene que averiguar que los criterios implicados para establecer la clasificación que lleva a establecer los PRBR (prismas rectos de bases regulares) como una de las subfamilias son: ser recto u oblicuo y tener bases regulares o irregulares, y que las 4 familias establecidas son: PRBR, POBR, PRBIr, POBIr.

Sobre las tareas T-19 y T-20. Las clasificaciones inclusivas. Remitimos de nuevo a lo que indicamos en el apartado 2.1.2 para este tipo de clasificación. Ahora vamos a centrarnos, por un lado, en lo que sugiere la tarea T-19: que hemos de dedicar atención especial a la construcción de diagramas con forma de red, pues esta actividad presenta bastantes dificultades para los estudiantes. Y por otro, en que todos los problemas relativos a las clasificaciones inclusivas que se pueden subrayar con la tarea

T-19 los tratamos de nuevo con la tarea T-20, al establecer una clasificación posible de los prismas cuyas bases son cuadriláteros. La explicación yace en las dificultades que presentan estos problemas y en que esta clasificación además presenta características propias.

A) Sobre la tarea T-19. La construcción de diagramas con forma de red. Las experimentaciones realizadas nos han puesto de manifiesto que hay que dedicar tiempo y atención para que los estudiantes puedan salvar las dificultades que se les presentan cuando intentan construir diagramas que relacionan familias. Los que mostramos en la figura 2.19, realizados por estudiantes de Magisterio que participaron en nuestras experimentaciones (del grupo de 3ºEE), reflejan que:

- Algunos estudiantes no pueden comprender la construcción de los diagramas con forma de red. De los diagramas que construyen también parece desprenderse que no dan a las flechas el significado que se les asigna por convenio. El diagrama de la figura 2.19(a) puede ser un ejemplo.

- En el diagrama que construyen algunos estudiantes hay familias que no están colocadas en el nivel adecuado. En el diagrama de la figura 2.19(a) encontramos varios ejemplos. En este caso, los estudiantes no pueden delimitar aún lo específica que es la familia que no está colocada adecuadamente; es decir, los estudiantes no pueden aún comprender el número de criterios que se consideran para establecer las familias o a lo fuertes que son los criterios que se consideran (afectan a todos los elementos o sólo a una parte).

- Se relacionan familias que no tienen relación de inclusión. Por ejemplo, en el diagrama de la figura 2.19(c) los prismas de bases regulares se consideran incluidos en los prismas rectos y con el diagrama de la figura 2.19(b) se refleja que los prismas oblicuos están incluidos en los de bases regulares (en este diagrama esta familia también se relaciona con los prismas rectos pero no señala el sentido de la inclusión que se considera). En el diagrama de la figura 2.19(a) también encontramos varios ejemplos.

- Se relacionan familias en sentido contrario a la relación de inclusión que presentan: el origen de la flecha está en la familia que debería estar el extremo. Merece atención el diagrama de la figura 2.19(b) en el que para las familias de paralelepípedos se considera la inclusión adecuada y para el resto se muestra la inclusión inversa.

- No se relacionan familias que sí que presentan relación de inclusión en un sentido (faltan por poner flechas que conectan determinadas familias). Por ejemplo, en el diagrama de la figura 2.19(c) no se muestra la relación de inclusión de los prismas de bases regulares en los prismas convexos.

- Se conectan directamente familias para las que ya queda reflejada su relación de inclusión a través de un camino, que relaciona las familias implicadas con otras. Por ejemplo, en el diagrama de la figura 2.19(b) se ha conectado con una flecha el cubo y el paralelepípedo.

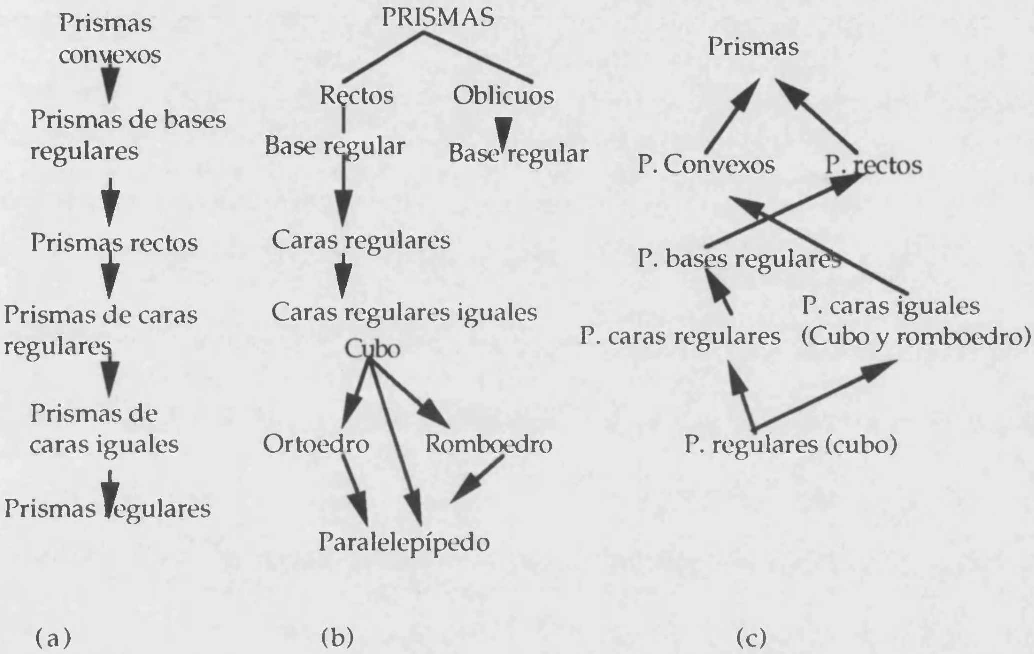


Figura 2.19

Las diferentes actividades que incluye la tarea T-19 centran la atención sobre estos problemas. Requieren de un dominio alto del nivel 2. Planteadas para este nivel es necesaria la intervención del profesor para que los estudiantes puedan resolverlas. Dado que los estudiantes que razonan de acuerdo a las características de este nivel sólo pueden relacionar las familias a partir de ejemplos o verificando que una familia que les resulta familiar verifica todas las propiedades de otra familia, el establecer si entre dos familias de sólidos dadas hay relación de inclusión, de exclusión, o tienen intersección pero no están incluidas una en otra, presenta dificultad.

En las experimentaciones realizadas ha ocurrido a menudo que en un diagrama no se interpreta adecuadamente el significado de dos familias que están o que no están interconectadas con una flecha. Muchos estudiantes han expresado que cuando dos familias están conectadas con una flecha tienen dificultad para distinguir en qué sentido es la relación. Por ejemplo, ellos indican que saben que entre los ortoedros (o los romboedros) y paralelepípedos hay flecha pero que no saben "si tengo que decir que los ortoedros (o los romboedros) son paralelepípedos o al revés; me lo tengo que aprender de memoria, con el diagrama hacia arriba o hacia abajo porque si no me lío". También es muy común que se interprete que dos familias que no están conectadas con una flecha como que no tienen ejemplos comunes.

Al abordar la tarea en clase, el profesor, con ayuda de ejemplos de las familias consideradas o con frases de este tipo tomadas del entorno del estudiante, puede centrar la atención sobre si entre dos familias se ha interpretado, o enunciado, la relación que corresponde. Por ejemplo, el profesor puede utilizar los pájaros y los animales para mostrar que no es lo mismo enunciar una relación de inclusión que la inversa: mientras que sí que es correcto decir que todos los pájaros son animales, no es correcto decir que todos los animales son pájaros. O se puede comparar, por ejemplo, los mamíferos y los animales para mostrar que no hay relación de inclusión entre ellos, pero sí tienen ejemplos comunes.

También es muy probable que se tenga que dirigir los razonamientos, bien para explicar que pares de familias realmente tienen las relaciones de inclusión o exclusión que se han señalado, o para justificar con un contraejemplo que determinados pares de familias no presentan relación de inclusión ni son excluyentes.

Las pruebas que presentará el profesor en este nivel, para explicar que dos familias tienen relación de inclusión, estarán basadas en ejemplos, o si las subfamilias consideradas son muy familiares, se verificará que una familia, o un elemento general de ella, verifica todas las propiedades (o la definición) de la otra familia. Por ejemplo, para justificar que los prismas de bases regulares son convexos, dirigirá demostraciones como la siguiente: se ponen varios ejemplos de prismas de bases regulares y se indica que todos ellos son convexos (no tienen entrantes, tienen todos los ángulos de las caras menores que 180°,...); y que para los otros prismas de bases regulares pasa lo mismo. Todos los polígonos regulares tienen lados y ángulos iguales; son convexos. Para demostrar que dos familias son excluyentes caben explicaciones como la siguiente: se pone varios ejemplos de una de las familias y se indica que ninguno de estos ejemplos verifica las propiedades de la otra familia; y se muestra propiedades que no cumplen.

Para encontrar el ejemplo que justifica que algunas familias no tienen relación de inclusión, si es necesario, se pueden dar sugerencias como las siguientes: hay que construir diferentes ejemplos de la primera familia implicada (no basta con construir los primeros que se nos ocurran) y después cuestionar si entre los ejemplos construidos puede haber ejemplos de la segunda familia y ejemplos de la familia complementaria. Como ejemplo que muestre la manera de razonar, podemos utilizar la justificación de que los prismas de caras laterales regulares (P<u>CL</u>R) no son siempre prismas convexos. Una manera de hacerlo puede ser la que se desprende de la figura 2.20.

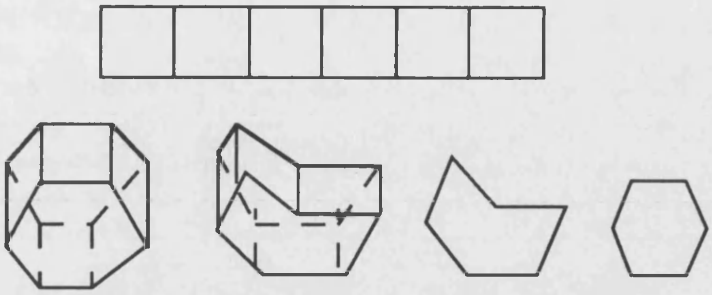


Figura 2.20

Se remarca que para construir los diferentes ejemplos de PCLR se puede construir una cinta de cuadrados (que se obtiene juntando cuadrados) que la unimos para formar una especie de anillo, y que, dado que la cinta la podemos hacer más o menos larga, se obtiene un ejemplo con un polígono de la base con un número de lados u otro. La observación de que la cinta unida se puede deformar se puede utilizar para mostrar que como polígono de las bases podemos obtener diferentes polígonos de lados iguales, y que entre ellos hay cóncavos y convexos.

Aconsejamos que se subraye que cuando se da un contraejemplo hay que poner mucho cuidado en que éste sea realmente un ejemplo de la primera familia. Para que se vea más claro podemos poner un ejemplo del entorno del estudiante. Podemos señalar, por ejemplo, que para explicar que todos los de la clase no han ido a la cena que celebraron a final de trimestre, se señala un estudiante de la clase que no fue; pero que, para razonar la respuesta, a nadie se le ocurriría indicar un estudiante de la clase de al lado.

B) La tarea T-19. Los enunciados de las relaciones. Cuando trabajamos estas actividades también podemos llamar la atención sobre que las relaciones que existen entre las familias podemos enunciarlas de varias maneras que son equivalentes. Podemos utilizar para ello las relaciones que ya hemos justificado en esta tarea. Por ejemplo, podemos señalar que "no todos los PCLR son convexos", "todos PCLR no son convexos", "los PCLR pueden ser cóncavos" son formulaciones de un mismo problema: son todas ellas relaciones entre pares de familias que reflejan que no hay inclusión entre ellas y éstas tampoco son excluyentes. También podemos recopilar reformulaciones que correspondan a relaciones que reflejen relaciones de inclusión: todos ... son ..., los ... son siempre ...; o relaciones de exclusión: los ... nunca son ..., no hay ningún ... que sea....

C) La tarea T-20. Sobre una clasificación inclusiva de los cuadriláteros. La actividad T-20a permite revisar si los estudiantes han visto anteriormente una clasificación inclusiva de los cuadriláteros. Los estudiantes requieren que el profesor dirija la actividad, con objeto de que, utilizando el material comercializado que se propone en esta tarea (varillas y chinchetas), a partir de la construcción de estos cuadriláteros se lleguen a establecer relaciones entre ellos. En el enunciado de esta actividad señalamos que se muestre con un ejemplo la manera de razonar la relación de inclusión que muestra el diagrama entre el cuadrado y el rombo (a partir de la construcción de los cuadriláteros con varillas), pero es muy probable que sólo un ejemplo no baste para que los estudiantes puedan establecer las relaciones siguientes:

- De todos los rombos que podemos construir, juntando los extremos de 2 varillas iguales, que se cortan en el punto medio de ambas perpendicularmente, el cuadrado es uno de ellos: cuando las varillas de partida son iguales. Por tanto, el cuadrado es un rombo particular.

- De todos los rectángulos que podemos construir, juntando los extremos de 2 varillas iguales, que se cortan en el punto medio, el cuadrado es uno de ellos: cuando las varillas de partida se juntan perpendicularmente. Por tanto, el cuadrado es un rectángulo particular.

  Así, *el cuadrado es un rombo y un rectángulo* particular

- De todos los paralelogramos que podemos construir, juntando los extremos de dos varillas unidas por el punto medio, el rombo es uno de ellos: cuando las varillas de partida se juntan perpendicularmente. Por tanto, el rombo es un paralelogramo particular.

- De todos los paralelogramos que podemos construir, juntando los extremos de dos varillas unidas por el punto medio, el rectángulo es uno de ellos: cuando las varillas de partida son iguales.

- De todas las cometas que podemos construir, juntando los extremos de dos varillas, unidas perpendicularmente, de manera que una de ellas corta a la otra por el punto medio de ella, el rombo es una de ellas: cuando las varillas de partida se cortan en el punto medio de ambas. Por tanto, el rombo es una cometa particular.

  Así, *el rombo es un paralelogramo y una cometa* particular.

- De todos los trapecios isósceles que podemos construir juntando los extremos de dos varillas iguales, cuyo punto de corte en ambas varillas dista lo mismo de los vértices, el rectángulo es uno de ellos: cuando las varillas de partida se cortan en el punto medio de ambas. Por tanto, el rectángulo es un trapecio isósceles particular.

Así, *el rectángulo es un paralelogramo y un trapecio isósceles* particular.

- Los trapecios los construimos con 4 varillas de manera que al menos dos son paralelas. Uno de ellos es un paralelogramo. Otro es un trapecio isósceles.

  El paralelogramo y el trapecio isósceles son trapecios particulares.

Es necesario que los estudiantes hayan logrado gran parte de las características asociadas al nivel 2 para realizar esta actividad y aún así, la intervención del profesor es necesaria. Proponemos que sea el profesor el que utilizando varillas y chinchetas (él las junta y coloca tal y como va señalando) plantee las preguntas adecuadas y dirija la actividad para que sean los estudiantes los que formulen las relaciones de los cuadriláteros que hemos señalado. Por ejemplo, para llegar a establecer que el rombo es una cometa particular se puede proceder como sigue:

- Después de elegir dos varillas de una caja se puede apuntar que si bien nos han salido dos varillas diferentes, también podrían habernos salido iguales. Se subrayará que las condiciones son que se junten perpendicularmente a la misma distancia de los dos extremos de una de las varillas, por lo menos; por lo que las posibilidades que se muestran en la figura 2.21 son todas ellas posibles.

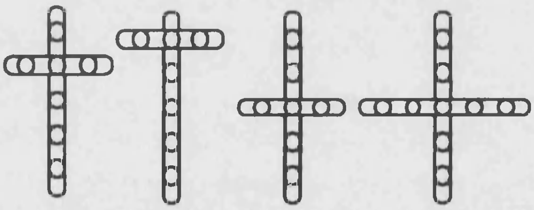


Figura 2.21

- Para cada posibilidad mencionada, se cuestionará el cuadrilátero que se obtiene al juntar con varillas los extremos de las que ya se han unido. En este ejemplo se llamará la atención sobre que siempre se obtienen cometas y en algunos casos se obtienen cometas especiales que son rombos, o rombos - cuadrados, pero hay muchas cometas que no son rombos (si unimos las varillas por los agujeritos 2, ...).

- Y se trabajará también el paso de estas observaciones a las expresiones verbales correspondientes: todos los rombos (cuadrados) son cometas pero no se puede decir que todas las cometas son rombos.

D) La tarea T-20. La *analogía* entre la geometría plana y la sólida para establecer una clasificación inclusiva de los prismas con bases cuadriláteros. La actividad T-20b permite que los estudiantes aprendan a aplicar la analogía y que descubran que en las actividades que planteamos en la tarea T-20 los objetos análogos del plano y espacio comparten relaciones que sí son pertinentes para el problema.

Con la actividad T-20b pretendemos que los estudiantes descubran que al considerar los prismas de bases cuadriláteros, en los prismas de bases cometas, trapecios isósceles o trapecios se rompen las relaciones de igualdad y perpendicularidad entre los elementos límites (lado y cara lateral respectivamente). En los prismas oblicuos una igualdad de lados del polígono de las bases no implica que las caras laterales correspondientes sean iguales, ya que los ángulos de estas caras pueden cambiar. Y de nuevo, será necesaria la intervención del profesor para que muchos estudiantes puedan descubrirlo, a pesar de que ya se ha llamado la atención sobre ello en otro contexto (en la tarea T-15).

Una vez que se haya puesto de manifiesto que esto ocurre, subrayaremos que aunque seamos conscientes de que se rompen algunas relaciones entre los elementos análogos que aparecen en los diagramas correspondientes de elementos del plano y del espacio, dado que estas relaciones sí que se mantienen en algunas familias (por ejemplo la de igualdad se mantiene en los romboedros y en paralelepípedos) y para todas las familias de prismas cuadrangulares se siguen verificando las relaciones de paralelismo entre los elementos límites, consideramos que los elementos del plano y espacio comparten relaciones que sí son pertinentes para el problema planteado.

La actividad T-20d permite mostrar cómo se puede aplicar la analogía para explicar las relaciones de inclusión o no inclusión que hay entre pares de familias de prismas cuadrangulares. Al abordar la tarea en clase haremos ver que el hecho de que se pueda pasar el problema al plano y justificar ahí la respuesta, lleva a que ya tengamos resuelto el problema, salvo hacer las traducciones correspondientes de los elementos análogos: se plantea realmente el problema de hallar relaciones entre el cuadrado y el rectángulo, el rombo y el rectángulo, el paralelogramo y la cometa, porque luego vamos a extenderlas a los elementos análogos en el espacio; y este problema ya se ha resuelto en la actividad T-20a.

E) Sobre la tarea T-20. Otro procedimiento para justificar las relaciones de inclusión o no inclusión que hay entre pares de familias de prismas cuadrangulares. La actividad T-20e también permite subrayar que se puede justificar en el espacio, al igual que se hizo en el plano, las relaciones que existen entre pares de familias de prismas cuadrangulares. Se puede explicar de esta manera, por ejemplo, que todos los cubos son ortoedros:

- Para construir ortoedros se tienen que elegir 6 rectángulos que pueden ser todos ellos rectángulos no cuadrados, o rectángulos no cuadrados y rectángulos-cuadrado o sólo rectángulos-cuadrado. Como una de las posibilidades lleva al cubo, podemos concluir que el cubo es un ejemplo de los posibles ortoedros, por lo que todos los cubos son ortoedros.

- La observación de que también tenemos ortoedros que no son cubos, y se pueden seleccionar ejemplos de ellos, puede llevar a que se formule y explique que *hay ortoedros que no son cubos.*

Si es necesario se puede explicar de esta manera, por ejemplo, que los paralelepípedos y los prismas de base cometa tienen ejemplos comunes pero no tienen relación de inclusión:

- Los ejemplos de paralelepípedos pueden estar formados por todos los tipos de paralelogramos: paralelogramos genéricos, paralelogramos-rombo, paralelogramos-rectángulo, paralelogramos-cuadrado. Se construyen varios ejemplos de manera que sean todos del mismo tipo o mezclados.

- De la misma manera, los ejemplos de prismas de bases cometas tienen por bases cualquiera de los tipos de cometas: cometas genéricas, cometas-rombo, cometas-cuadrado. Las caras laterales pueden ser cualquiera de los paralelogramos: paralelogramos genéricos, paralelogramos-rombo, paralelogramos-rectángulo, paralelogramos-cuadrado. Se construyen varios ejemplos de prismas de bases cometas, según el tipo de cometa que tenga en la base y variando también los paralelogramos de las caras laterales.

- Se puede verificar que el cubo y el romboedro genérico están en las dos familias.

E) La tarea T-20. Sobre la construcción de diagramas. El problema de lenguaje. La actividad T-20e se refiere también a la construcción de diagramas con forma de red que representan clasificaciones inclusivas (una clasificación de los prismas cuadrangulares). Ya hemos sugerido una forma posible de abordar este problema: se dibuja previamente el diagrama que representa una clasificación de los cuadriláteros, y luego se extiende el diagrama a los prismas correspondientes. No obstante, para que la tarea no se reduzca a un aprendizaje de memoria del diagrama que representa estas clasificaciones (de los cuadriláteros y de los prismas cuadrangulares), que es lo que suele ocurrir con algunos estudiantes, aconsejamos que cuando se realicen estas actividades se pida también que se indiquen y descifren de nuevo los convenios que se utilizan para construir diagramas de red y que se formulen relaciones de familias de sólidos que quedan reflejadas en el diagrama construido.

Advertimos de la conveniencia de observar la terminología geométrica que se utiliza. Cuando se tiene un dominio alto del nivel 2, si bien, como ya hemos destacado en otras ocasiones, es usual que se utilice terminología del plano para la del espacio y a la inversa, en estas tareas ocurre especialmente. Es usual encontrar diagramas de los estudiantes que no pueden considerarse ni representaciones de clasificaciones del plano ni del espacio porque en ellos hay nombres de sólidos y de polígonos. Es fundamental prestar atención especial a este problema cuando se resuelven estas actividades.

Sobre descripción de subfamilias de sólidos.

Las tareas T-11, T-12, T-15, T-17 y T-22 se refieren a descripciones de las subfamilias establecidas en los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides, con los diferentes criterios de clasificación que hemos considerado. Ya hemos hecho algunos comentarios sobre la descripción de subfamilias al considerar las tareas T-11 y T-12, y también en el apartado 2.1.2 de este capítulo. Pero todavía queremos llamar la atención sobre otros aspectos, que también se trabajan con las tareas mencionadas.

A) La construcción de ejemplos. Queremos aclarar por qué antes de pedir la lista de propiedades de una familia pedimos que se construyan ejemplos de ella con material comercializado y además damos unas sugerencias para que se tengan en cuenta. Como estas actividades las planteamos para el nivel 2, los estudiantes que tienen un dominio bajo de este nivel todavía basan las propiedades de familias de sólidos en ejemplos de las subfamilias que tienen más peso en el objeto mental correspondiente. La consecuencia es que o bien indican propiedades que no son propiedades de la subfamilia dada sino de una más específica, o señalan como propiedades de una subfamilia algunas que dejan fuera ejemplos de ella. Por ejemplo, en nuestras experimentaciones, cuando pedimos propiedades de los prismas de bases regulares (PBR) algunos estudiantes indicaron como propiedad que "las caras laterales son iguales y Las aristas tienen dos medidas: la de las aristas laterales y la de las bases". Como propiedades de los prismas rectos indicaron algunas que dejan fuera a los prismas de caras regulares, o a los ortoedros: "Los PR tienen aristas de dos medidas distintas". "Los PR tienen por caras rectángulos y otros que no son rectángulos, las dos bases".

Al plantear una actividad previa en la que pedimos que se construyan diferentes ejemplos de la subfamilia para la que luego vamos a pedir una lista de sus propiedades, si en esta actividad sólo se construyen ejemplos de un tipo, podemos destacar que la subfamilia correspondiente también tiene ejemplos de otro tipo. Y en caso necesario, si los estudiantes señalan propiedades que no deberían estar en la lista por alguna de las razones mencionadas, el profesor puede recurrir a estas subfamilias para que los estudiantes comprueben que las propiedades que han señalado sólo las verifican algunas subfamilias de la considerada, pero no todas ellas.

B) Sobre las sugerencias que incluyen los enunciados de las tareas. Las sugerencias que damos en las tareas de descripción de subfamilias pretenden evitar errores que cometen los estudiantes al describir subfamilias de sólidos o que se amplíe la lista de propiedades que se enumeran para ellas. Dado que apuntamos sugerencias de diferente tipo, vamos a explicarlas por separado a continuación:

– Algunas pretenden que se indiquen propiedades agrupadas como propiedades de familias. Cabe señalar que los estudiantes no siempre son capaces de reconocer si las propiedades que se han señalado explícitamente también están incluidas en el grupo de propiedades de una familia; de ahí que aún dando la sugerencia de que se tachen estas propiedades, cabe esperar que en las respuestas de los estudiantes que razonan de acuerdo a las características asociadas a este nivel se incluyan propiedades repetidas y que no se indiquen los grupos de propiedades de todas las familias de sólidos que contienen a la subfamilia considerada.

– Los estudiantes suelen extender el paralelismo y la igualdad de los lados del polígono de la base a paralelismo e igualdad de las caras laterales correspondientes. Respuestas comunes en los estudiantes son: "Los PBti tienen 2 CL paralelas e iguales" "Los PBc tienen 2 CL iguales (son vecinas) y otras dos iguales (vecinas también)". Esto no siempre ocurre en los prismas oblicuos correspondientes. De ahí que una de las sugerencias que damos en las actividades de estas tareas es que lados iguales no conduce a caras laterales iguales en las familias consideradas. En la tarea T-22 cuestionamos además qué familias de prismas cuadrangulares lo verifican.

– La descripción de las familias de prismas cuadrangulares es la que presenta mayores dificultades. De ahí que, por una parte, hayamos planteado la tarea T-21 que centra la atención en las diferentes subfamilias y los diferentes ejemplos de paralelepípedos (por ejemplo, en los paralelepípedos que son ortoedros o que no lo son) y en los tipos de caras que pueden tener y, por otra, hemos incluido más sugerencias que para la descripción de otras subfamilias, y otras cuestiones que intentan corregir los errores usuales de los estudiantes:

- La actividad T-22a explica que la propiedad del paralelogramo de tener lados paralelos dos a dos, se adapta al paralelepípedo como que tienen pares de caras paralelas, y pretende que se llegue a establecer que las propiedades de los cuadriláteros de las bases relativas a igualdad de lados sólo se convierten en igualdad de caras laterales para los prismas rectos, para el romboedro y para los paralelepípedos. La perpendicularidad de lados de la base sólo se convierten en perpendicularidad de caras laterales para los prismas rectos. En los paralelepípedos dos medidas diferentes para los lados del cuadrilátero de la base, se transforma en tres medidas como mucho para las caras (2 medidas para las caras laterales y una para las bases) y para las aristas.

- Entre los estudiantes que razonan de acuerdo a las características del nivel 2, cuando describen alguna familia de prismas cuadrangulares, especialmente en las familias de paralelepípedos, hay otro error muy común. Es muy usual basar la respuesta sólo en una cara para enunciar propiedades relativas a elementos que centran la atención en todas ellas (las diagonales de las caras, o a los ángulos de las caras). Para el ortoedro y para el paralelepípedo es usual que se enuncien propiedades como las siguientes: "En los ortoedros las diagonales de las caras son iguales" o que "en los paralelepípedos, las aristas, los ángulos de las caras y las diagonales de las caras como mucho tienen 2 medidas". Así, la actividad T-22b pretende que se llegue a establecer que en los paralelepípedos algunas propiedades de las bases se pueden indicar como propiedades de las caras, porque todas ellas son paralelogramos, pero también tiene como objeto que se resalte que todo lo relacionado a número o medidas de ángulos de las caras o de diagonales de las caras no puede extenderse. En la base sólo tenemos 4 ángulos de las caras, como mucho de dos medidas, y dos diagonales de las caras, como mucho de dos medidas; pero si hablamos de ángulos de las caras, en el paralelepípedo tenemos 24, como mucho de 6 medidas diferentes (2 por cara y hay tres posibles medidas para las caras) y 12 diagonales de las caras, como mucho de 6 medidas diferentes (2 por cara y hay tres posibles medidas para las caras).

  Con respecto al ortoedro, se puede hacer hincapié en que al ser recto, las relaciones de perpendicularidad entre los lados de la base se mantiene entre las caras laterales y la igualdad de ángulos de la base también se puede extender como igualdad de los ángulos de las caras (todos ellos son rectos por ser prisma recto de base rectángulo). Pero tenemos que remarcar que la igualdad de diagonales de la base no se extiende a las diagonales de las caras; puede haber tres medidas diferentes para éstas, una por cada medida posible de las caras.

C) Sobre las propiedades que se enumeran. Tal como hemos relatado antes, en este nivel no cabe esperar que en las respuestas a tareas de descripción de subfamilias se incluyan todas las familias que contienen a la dada y, sin embargo, sí que puede ser bastante usual que se indiquen propiedades que dejan fuera ejemplos de la familia considerada. Ya nos encontramos con estos problemas cuando se describen familias que contienen otras subfamilias en ellas; si es interesante retomarlos de nuevo es porque para las familias de prismas cuadrangulares el problema se agrava considerablemente y además se introducen problemas nuevos. A continuación vamos a señalar algunas propiedades que dieron algunos de los estudiantes de Magisterio que participaron en nuestras experimentaciones:

- Entre las propiedades que los estudiantes enumeraron para el romboedro figuraban las siguientes, con las que se deja fuera al cubo como ejemplo de romboedro: "Los ángulos de las caras tienen dos medidas". "Las propiedades de los prismas oblicuos". "Las diagonales del espacio se cortan en el centro, no son iguales, no se cortan perpendicularmente, se cortan en el punto medio de ambas" . Como propiedades del ortoedro los estudiantes señalaron algunas que reflejaban que sólo se incluía como ortoedro al cubo o a los ortoedros que no son cubos: "Las diagonales de las caras son iguales". "Tienen 8 aristas iguales más largas y 4 más cortas".

- Las experimentaciones realizadas también pusieron de manifiesto que alguna de estas familias de prismas cuadrangulares (en particular, una familia de paralelepípedos) puede tener un gran peso en los objetos mentales de otras familias de prismas, y que esto implica que se extiendan a éstas algunas propiedades específicas de aquella. Por ejemplo, era bastante usual que los estudiantes plasmasen la idea de que si la base es regular las diagonales van a tener el mismo tamaño (la respuesta se basa en el cuadrado) y que si la familia es de caras regulares, las diagonales del espacio son iguales (la respuesta se basa en el cubo). Respuestas que dieron diferentes estudiantes son: "Para los PCR las diagonales de la base son iguales y las DE son iguales". "Tanto las dC (entre ellas) como las DE (entre ellas) tienen la misma longitud. (en tamaño)". "En los prismas irregulares la longitud de sus diagonales variará de tamaño y en los regulares las diagonales de las caras laterales serán iguales con esas caras, las del espacio también serán iguales, y las de la base iguales a las de la otra base (todo en longitud)".

Así pues, las tareas de descripción de familias de prismas cuadrangulares podemos aprovecharlas, por un lado, para centrar la atención sobre las propiedades que dejan fuera ejemplos de la familia considerada. Por otro, para centrar la atención en las propiedades relativas a las medidas diferentes de las diagonales de las caras, de los ángulos de las caras, y de las diagonales del espacio. Pero es necesario aclarar que si los dos tipos de propiedades mencionadas se consideran para este nivel es sólo para destacar si dejan fuera ejemplos o no, o si son incorrectas; y que son las tareas propuestas para nivel 3 las que tienen como propósito que los estudiantes verbalicen las propiedades a las que nos hemos referido, utilizando términos del tipo *como máximo* o *como mínimo*.

2.5.3. NIVEL 2. FASE 4

Las tareas diseñadas para esta fase, al igual que las de la fase 2 del nivel 2, se refieren a desarrollos de los sólidos, a relaciones entre familias de sólidos, a asociación de propiedades a familias de sólidos y familias de sólidos a propiedades y a aplicación de propiedades relativas al número de determinados elementos, o a la medida de ellos, para comprobar expresiones. Tienen como propósito que los estudiantes, con pocas pistas o ayudas por parte del profesor, afiancen lo tratado con las tareas propuestas para la fase 2 de este nivel.

OBJETIVOS

1.– Aplicar propiedades para descubrir varios desarrollos de un sólido, para encontrar desarrollos de algunos sólidos oblicuos y para pasar información del modelo de sólidos a alguno de sus desarrollos.

2.– Evaluar y plasmar verbal y visualmente relaciones de familias de sólidos.

3.– Descubrir y utilizar ejemplos de familias de sólidos, o verificar definiciones de ellas, para justificar relaciones de familias.

4.– Utilizar propiedades para asociarlas como atributos crítico o no críticos de una familia de sólidos dada o para identificar las familias de sólidos que las verifican (o que la verifican).

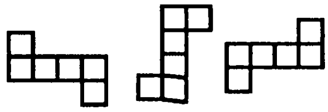
5.– Descubrir y utilizar ejemplos o no ejemplos para evaluar y demostrar que determinadas familias, una de las cuales se introduce con una definición, no están relacionadas con la relación de inclusión.

6.– Descubrir y utilizar propiedades de determinadas familias de sólidos para comprobar fórmulas que dan el número de determinados elementos o la medida de ellos.

7.– Utilizar de manera precisa el vocabulario de los sólidos.

TAREAS

T-1 Dar a los estudiantes material comercializado. Pedir que construyan desarrollos diferentes del cubo. Aclarar que dos desarrollos que al superponerlos coinciden o que uno es la imagen que devuelve el espejo del otro los consideramos iguales. Indicar como ejemplo, que los desarrollos siguientes son iguales.



a) Cuestionar cuántas formas diferentes se encuentran de colocar juntos 6 cuadrados unidos lado a lado y cuántas de esas construcciones son desarrollos de un cubo.

b) Pedir que se repita la actividad anterior para el tetraedro y para un prisma pentagonal de caras regulares.

c) Dar la dimensión de la arista de un romboedro y pedir que se dibuje el desarrollo y se construya el modelo plegando.

d) Pedir que se construya un prisma oblicuo y una pirámide oblicua.

e) Pedir que se construyan un antiprisma que no tenga las bases regulares y una pirámide que no tenga la base regular.

T-2 Seleccionar pares de subfamilias de los prismas de las que se han establecido con las actividades de la fase 2 de este nivel. Intentar que se contemplen las siguientes situaciones.

A) Las subfamilias que se seleccionan son excluyentes (dicotómicas), establecidas con criterios visuales. Por ejemplo, se eligen los prismas rectos y los prismas oblicuos.

B) Las subfamilias que se seleccionan son inclusivas. Por ejemplo, se eligen los prismas de caras iguales y los prismas convexos.

C) Las subfamilias que se seleccionan no son excluyentes ni inclusivas. Cabe distinguir también entre ellas varios tipos.

- Las subfamilias que se seleccionan están establecidas con un sólo criterio que además puede ser visual. Por ejemplo, se eligen los prismas rectos y los prismas convexos.
- Las subfamilias que se seleccionan están establecidas con criterios que centran la atención en la regularidad o igualdad de todas las caras. Por ejemplo, se eligen los prismas de caras iguales y los prismas de caras regulares.
- Las subfamilias que se seleccionan están establecidas con criterios de igualdad o regularidad y centran la atención en parte de las caras. Por ejemplo, se eligen los prismas de bases regulares y los prismas de caras laterales regulares.

- Las subfamilias que se seleccionan están establecidas con criterios de igualdad de aristas o de ángulos. Por ejemplo, se eligen el romboedro y el ortoedro.
- Una de las subfamilias que se selecciona se establece con un sólo criterio que puede ser visual y la otra clase se establece con criterios de igualdad o regularidad que centran la atención en parte de las caras. Por ejemplo, se eligen los prismas rectos y los prismas de bases regulares.

Tener en cuenta que las relaciones del tipo A) se pueden formular como: todos ... son ..., los ... son .... y los ... son siempre .... Las relaciones del tipo B) como: los ... nunca son ... y no hay ningún ... que sea .... Y las del tipo C) como: no todos los ... son ..., todos ... no son ..., ni todos ... son ... ni todos ... son ..., los ... pueden ser ... y los ... son a veces ....

Para cada par de subfamilias elegidas formular una relación entre ellas procurando que las del tipo A y B sean falsas y las del tipo C verdaderas, a no ser que se relacionen subfamilias que resulten familiares a los estudiantes y que sea usual considerar una de ellas incluida en la otra en términos de ejemplos.

Para cada afirmación pedir que se explique si es correcta o no y que si en algunas afirmaciones hay dos relaciones se explique también si una de las relaciones es cierta y la otra falsa.

Ejemplos de relaciones que se pueden proponer son las siguientes.

a) Todos los prismas de caras iguales son prismas convexos, pero todos los prismas convexos no son de caras iguales.

b) No hay prismas de bases regulares que sean prismas oblicuos y todos los prismas rectos no son de bases regulares.

c) Ni todos los prismas de caras iguales son de caras regulares ni todos los prismas de caras regulares son de caras iguales.

d) Los prismas de bases regulares no son siempre de caras laterales regulares y no todos los prismas de caras laterales iguales son prismas de bases regulares.

e) No hay ningún prisma que sea a la vez de caras laterales regulares y cóncavo.

T-3 Plantear una tarea análoga a la T-2 considerando como pares de subfamilias las establecidas en los prismas cuadrangulares, intentando también que las relaciones contemplen todas las situaciones sugeridas en la tarea T-2.

T-4 Seleccionar pares de subfamilias de prismas (incluidas las establecidas en los prismas cuadrangulares) intentando contemplar todas las posibilidades sugeridas en la tarea T-2. Para cada par formular enunciados como el que indicamos a continuación para los prismas convexos y los prismas de caras iguales:

Los prismas convexos son SIEMPRE, A VECES, O NUNCA prismas de caras iguales.

Pedir que se seleccione la palabra SIEMPRE, A VECES, o NUNCA que muestra la relación que existe entre las familias de sólidos que se consideran y que se explique con detalle la respuesta.

T-5 Seleccionar pares de subfamilias de prismas (incluidas las establecidas en los prismas cuadrangulares) intentando contemplar todas las posibilidades que indicamos en la tarea T-2.

Para cada par de subfamilias, pedir que se expresen las relaciones que existen entre ellas y que se explique la respuesta. Indicar que para ello pueden utilizar enunciados del tipo: Los ... son a veces ..., no todos ... son ..., todos ... no son ..., todos ... son ..., los ... siempre son ..., los ... nunca son ..., ningún ... es ... y no hay ... que sea ....

T-6 Dar las siguientes definiciones.

Un POLIEDRO A es un poliedro que tiene todas las caras regulares de más de una clase y todos los vértices iguales.

Un POLIEDRO D es un poliedro cuyas caras son triángulos equiláteros.

Un POLIEDRO C es un poliedro que tiene todas las caras iguales que no son regulares.

Un POLIEDRO R es un poliedro que tiene todas las caras regulares e iguales y todos los vértices iguales.

Pedir que de acuerdo con las definiciones que hemos dado se responda a las siguientes cuestiones y que se explique detenidamente la respuesta.

a) Los prismas son SIEMPRE, A VECES, O NUNCA poliedros A.

b) Las pirámides son SIEMPRE, A VECES, O NUNCA deltaedros.

c) Los prismas son SIEMPRE, A VECES, O NUNCA poliedros C.

d) Los antiprismas de caras regulares son SIEMPRE, A VECES, O NUNCA poliedros A.

e) Las bipirámides de caras regulares son SIEMPRE, A VECES, O NUNCA poliedros D.

T-7 Seleccionar una subfamilia de las establecidas en las tareas de la fase 2 de este nivel. Por ejemplo, los prismas de caras regulares (PCR).

Hacer una lista de propiedades, cuidando de introducir en ella:

A) Propiedades específicas de sólido o de poliedro. Al hablar de propiedades específicas de una familia nos referimos a que lo son de esa familia y no lo son de ninguna familia que la contiene.

B) Propiedades específicas de la familia a la que pertenece la subfamilia elegida; en este caso propiedades específicas de los prismas.

C) Propiedades específicas de las subfamilias establecidas con un criterio fuertemente visual. Por ejemplo, propiedades de los prismas rectos y de los prismas convexos.

D) Propiedades que también lo son de una familia muy específica pero más general que la que se ha seleccionado. En este caso, propiedades específicas de los prismas de bases regulares (PBR), de los prismas rectos de bases regulares (PRBR) y de los prismas de caras laterales regulares (PCLR).

E) Propiedades específicas de la familia seleccionada. Para los PCR vamos a separarlas en dos grupos:

- Propiedades que también lo son de otra familia que ni es más general ni está incluida en ella. Por ejemplo, todas las aristas tienen la misma longitud.
- Propiedades específicas de esta familia. Por ejemplo, todas las caras son regulares.

F) Propiedades que no son atributos críticos de la familia escogida; se pueden separar en varios grupos:

- Son atributos críticos de una subfamilia contenida en la seleccionada. Para los PCR ejemplos de estas propiedades son: tiene ángulos de las caras de dos medidas y toda cara tiene otra cara igual y paralela a ella.

- No son atributos críticos de la familia escogida porque sólo la verifican una parte de cada uno de los ejemplos: las caras (aristas) laterales, las bases, o una de las caras. Para los PCR un ejemplo puede ser la que ya hemos indicado también como del grupo anterior: tiene caras iguales.

- No la verifica ningún ejemplo. Para los PCR un ejemplo de este tipo lo encontramos en algunas propiedades de los antiprismas.

G) Propiedades que incluyen fórmulas generalizadas para n, que pueden ser propiedades de la familia considerada o no serlo. Para los PCR, ejemplos de estas propiedades pueden ser: tienen 6n ángulos de las caras.

Para cada propiedad de la lista, pedir que se explique si es atributo crítico o no de la familia propuesta (la que hemos utilizado como ejemplo es la de los prismas de caras regulares).

T-8 Pedir que se repita la tarea T-7 para cualquier otra familia de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides.

T-9 Pedir que se repita la tarea T-7 para los paralelepípedos y considerando una lista de propiedades que incluya propiedades de los tipos que hemos delimitado en la tarea T-7, adaptándolas a esta familia. Por ejemplo:

Como propiedades del tipo C pueden ser, todas las diagonales del espacio quedan en el interior del sólido.

Como propiedades del tipo D en este caso tendremos las propiedades específicas de los prismas cuadrangulares o las de los prismas de bases trapecios.

Como propiedades del tipo E pueden ser: toda cara tiene otra cara, su opuesta, que es paralela a ella; todas las caras son paralelogramos; las diagonales de las caras se cortan en el centro de las caras y en el punto medio de ambas.

Como propiedades del tipo F tendremos las propiedades de los prismas rectos, las específicas del ortoedro, romboedro o del cubo, las que consideran las familias de paralelepípedos excluyentes en vez de inclusivas, etc. Por ejemplo, las aristas tienen la misma longitud, todas sus caras son regulares, está formado por una cinta de rombos unida y cerrada por ambos lados con dos polígonos, hay 3 medias diferentes para las caras, hay aristas más largas y más cortas y los ángulos de las caras tienen dos medidas diferentes.

T-10 Pedir que se repita la tarea T-9 considerando, en vez de los paralelepípedos como familia de partida, cualquier otra familia de los prismas cuadrangulares siguientes: el cubo, ortoedro, romboedro, prismas de base cometa, prismas de base trapecio isósceles, un prisma trapezoidal o un prisma cuadrangular cualquiera.

T-11 Pedir que para cada una de las propiedades que señalamos a continuación, se indiquen qué familias de prismas las cumplen. Pedir también que se explique las respuestas para todas las familias, tanto si verifican la propiedad como si no. Apuntar que en las respuestas se tengan en cuenta solamente las familias de prismas para las que indicamos abreviaturas para el nombre: P: prismas. PR: prismas rectos. PX: prismas convexos. PBR: prismas de bases regulares. PRBR: prismas rectos de bases regulares. PCR: prismas de caras regulares. PCI: prismas de caras iguales. P. Reg.: prismas regulares.

a) Las aristas laterales tienen la misma longitud.

b) Tienen n(n-1) diagonales de las caras.

c) Las diagonales del sólido caen dentro del sólido.

d) La longitud de la altura coincide con la de las aristas laterales.

e) Las caras laterales son iguales.

f) Sus aristas son iguales

g) Sus caras son paralelas dos a dos.

h) Sus ángulos diedros son iguales.

i) Sus vértices son de orden 4.

T-12 a) Pedir que se repita la actividad T-11 para cada una de las propiedades que se han enumerado en T-7.

b) Pedir que se repita la actividad T-11 para cada una de las propiedades que se han indicado en T-9 y considerando las familias de prismas cuadrangulares que hemos señalado en la tarea T-10.

T-13 a) Presentar un prisma de caras regulares y preguntar: ¿Qué podéis decir sobre los ángulos de las caras de este sólido? ¿Cuánto suman los ángulos de cada una de las caras? ¿Cuál es la suma de los ángulos de las caras?

b) Pedir que se repita la actividad T-13a para un antiprisma recto pentagonal de base regular.

c) Pedir que se verifique que en un prisma recto hexagonal de base regular la suma de los ángulos de los vértices viene dada por la expresión 12(180°+120°).

d) Pedir que se verifique que en un prisma recto hexagonal de base regular la suma de los ángulos diedros es 1.800°

e) Poner a disposición de los estudiantes prismas hexagonales y triangulares construidos con troquelados (sus caras laterales son cuadrados o rectángulos).

Pedir que se explique por qué es posible hacer cubrimientos utilizando sólo los prismas hexagonales que se han construido y por qué también es posible hacerlo al juntarlos con los prismas de bases triángulos equiláteros.

Pedir que se indiquen todas las propiedades de las familias implicadas que pueden surgir al resolver esta actividad.

COMENTARIOS

La tarea T-1. Desarrollos de los sólidos

Con la tarea T-1, dedicada a los desarrollos de los sólidos, vamos a trabajar dos posibles tipos de actividades que ya hemos tratado con anterioridad (en la fase 2) y que vamos a explicar en lo que sigue.

Diferentes desarrollos de un poliedro. Las actividades T-1a y T-1b dirigen la actividad a que se encuentren todos los desarrollos posibles de algunos sólidos sencillos, mientras que con la tarea T-3 del nivel 2 pretendíamos que se observara que los modelos tienen diferentes desarrollos. También para las actividades de esta fase se sigue utilizando material comercializado y modelos de sólidos, para que los estudiantes experimenten, bien deshaciendo los modelos de distintas maneras para obtener diferentes desarrollos, bien doblando los desarrollos para verificar si realmente lo son. Aunque los estudiantes en este nivel ya se desprenden a menudo del material y dibujan los diferentes desarrollos en papel en vez de construirlos, todavía tienen inseguridad sobre si los más extraños realmente lo son y sobre si todos los desarrollos que se dejan como solución son diferentes. Como reconocer como iguales los desarrollos que están colocados en diferente posición requiere de visión espacial, después de que se haya conjeturado si un desarrollo es igual o diferente a los que ya se tienen, permitiremos que se construya el desarrollo (para que se pueda girar o darle la vuelta) y que se gire la hoja del papel en el que se tienen dibujados.

La construcción de los modelos. Aportaciones de las experimentaciones. La construcción de prismas, antiprismas y pirámides oblicuos, o de ejemplos de estas dos últimas familias que tienen bases o base irregular, conlleva bastante dificultad. Esto ya lo hemos hecho ver con la actividad T-3d de la fase 2, pero es aquí, con las actividades T-1c a T-1e, cuando proponemos que se construyan estos modelos y donde vamos a comentar lo que ocurrió cuando tratamos estos problemas con los estudiantes de Magisterio que participaron en nuestras experimentaciones.

A) La construcción del romboedro. Con la actividad T-1c se trabaja cómo dibujar un rombo cuando se conoce la medida del lado. Se comprueba además que para cualquier rombo, con una longitud del lado dada, no se puede construir un romboedro; como indicó uno de los estudiantes, "para algunas medidas de sus ángulos al intentar construirlo los rombos intersectan unos con otros y quedan agujeros".

B) La construcción de otros prismas oblicuos. Para construir los primas oblicuos, una vez seleccionadas las bases de éstos y la longitud de la arista lateral (o de la altura) hay que construir varios paralelogramos, de los que se conocen los lados (dos de ellos coinciden con el lado correspondiente de la base del prisma y el otro lado coincide con la arista lateral) pero no conocemos los ángulos. Y el construir estos paralelogramos, de manera que no se solapen unos con otros, y que se puedan juntar para formar el prisma, es un problema abierto, que puede ser adecuado para plantearlo en esta fase.

En las experimentaciones realizadas, para averiguar los paralelogramos necesarios los estudiantes trabajaron por pares. Construyeron una unidad como la que se sugirió en las actividades del nivel 1, formadas por dos polígonos y gomitas que juntan los vértices que se corresponden, que utilizaron para construir prismas oblicuos. Mientras uno de los estudiantes lo mantenía construido, el otro esbozaba calcándolo en un folio las caras laterales que tendría ese prisma. Cuando estaban construyendo el esbozo y los ajustes en el papel, con frecuencia escuchábamos indicaciones de un estudiante al otro como las siguientes:

E1: Ten mucho cuidado de que las caras bases sean paralelas y que los vértices se correspondan, que no estén giradas las bases.
Marca sobre todo los ángulos, que es lo que nos falta.

E2: [Van a hacer los ajustes del esbozo]. Mira yo hago estos paralelogramos y tú éstos.

E1: Vale. Pero tenemos que tener en cuenta que las aristas laterales tienen que ser iguales, así que los lados de todos paralelogramos, en los míos y en los tuyos, tienen que ser iguales.

E2: Y tienen que ser paralelos dos a dos.

E1: Ya. Y los lados de la base de los paralelogramos son los lados del polígono de las bases, a ver... a mí me tocan éstos [los señalan en los polígonos que previamente ya han construido como que son las bases del prisma] y a ti éstos.

Una vez determinados los paralelogramos, pasaban a determinar el desarrollo correspondiente de los prismas oblicuos. Cabe señalar que los estudiantes que razonan de acuerdo a las características del nivel de razonamiento 2 obtienen modelos bastante precisos de estos sólidos oblicuos por este procedimiento.

C) La construcción de pirámides. De la misma manera, el construir pirámides rectas con base irregular no siempre es tarea sencilla; especialmente para las que no se conoce cómo hallar el centro del polígono. Si por ejemplo la base es un rombo, aunque los triángulos no tienen por qué ser isósceles se pueden construir los triángulos de las caras laterales de manera precisa para que la pirámide sea recta. Pero si consideramos una base con lados y ángulos distintos, además del problema de construir los triángulos de las caras laterales una vez que ya sabemos el ápice con qué se corresponde, tenemos el problema de determinar dónde está el centro del polígono y además hay que especificar a qué centro nos referimos. Así, una vez que los estudiantes hayan vislumbrado los problemas que conlleva esta tarea, se puede indicar que como centro de un polígono se considera el *baricentro,* ya que este centro lo tienen todos los polígonos, es el centro físico, donde el polígono tiene condensado todo su peso. Para algunos polígonos se puede explicar cómo se obtiene ese centro experimentalmente, ya que el determinarlo no es tan inmediato como en los polígonos regulares.

La mayoría de los estudiantes con los que realizamos las experimentaciones, una vez que conocían con qué punto de la base se tenía que corresponder el ápice de la pirámide, podían construirla. Para estimar las longitudes de las aristas laterales, al igual que en los prismas oblicuos, construyeron una unidad como la que se sugirió en las actividades del nivel 1 (formada por un polígono y gomitas que representan las aristas laterales). Cuando ya se tenían las gomas que representan todas las aristas laterales y que se juntaban en el ápice, se superponía éste con el centro de la base y con mucho cuidado intentaban levantar el ápice perpendicularmente a la base. Y cuando uno de los estudiantes lo tenía colocado así, otro estudiante medía la longitud de las aristas laterales que tenía esa pirámide. Una vez estimadas éstas, dibujaban los triángulos (de los que ya conocían los 3 lados) y construían el desarrollo. Todos los estudiantes a las que les propusimos esta tarea pudieron realizarla.

D) La construcción de antiprismas. En nuestras experimentaciones los estudiantes también construyeron los antiprismas de base irregular de la misma manera. Cuando planteamos esta actividad, cuestionamos si se podían construir antiprismas con polígonos cualesquiera como bases y si era posible construir varios modelos diferentes que tuvieran las bases iguales y paralelas, giradas una respecto a la otra, y los vértices de una se juntasen con los vértices de los lados de la otra.

Como en la idea que dimos de antiprisma no habíamos especificado cuánto teníamos que girar las bases si éstas no eran regulares, las preguntas que surgieron de inmediato plantearon esta cuestión. La respuesta que una de las bases había que girarla respecto a la otra lo suficiente para que cada vértice de ésta se pudiera unir con dos vértices consecutivos del polígono de la otra base, de tal manera que no se entrecruzasen las aristas y el modelo resultante fuese poliedro, provocó una discusión muy interesante.

Uno de los estudiantes, al día siguiente de proponer el problema, apareció con dos modelos de antiprismas, con las mismas bases y que cumplían las condiciones impuestas; lo que los diferenciaba era que los vértices de una base se hacían corresponder con los vértices de uno de los lados de la otra base o con los vértices del lado vecino.

Estos modelos los utilizamos, por una parte, para precisar la condición que hasta entonces habíamos impuesto a los antiprismas. Ésta quedó así: cada vértice del polígono de una base se junta con los dos vértices del lado de la otra base con el que se corresponde. Esto es, si desplazamos las bases según el vector que une los centros de las bases hasta que las bases se solapan, los dos lados que se juntan en cada vértice de una base cortan al lado de la otra base con el que se corresponde. Por otra parte pudimos remarcar cómo se van afinando y precisando las ideas de los conceptos: aparecen modelos (con los que nos topamos o descubrimos, o que los introduce el profesor) que nos cuestionan la idea del concepto que teníamos hasta entonces y que nos obligan a ir afinando y precisando ésta.

Relaciones entre familias de sólidos

Las tareas T-2 a T-6 están dedicadas a trabajar que se expresen o evalúen relaciones de familias. En las tareas T-2 y T-3 se pide que se juzguen relaciones; en la tarea T-4 se pide que entre *siempre, a veces* y *nunca* se seleccione la partícula que muestra la relación que existe entre dos familias dadas; en la tarea T-5 hay que formular relaciones entre familias y en la tarea T-6 se trata el problema de cómo se pueden aplicar las definiciones de determinadas familias de sólidos en tareas en las que éstas se relacionan.

Las tareas T-2 a T-5. Enunciar o evaluar relaciones de familias. Justificar que dos familias se solapan pero no están incluidas una en otra sólo exige de razonamientos asociados al nivel 2, si bien el justificar una relación de inclusión o de exclusión entre familias, en algunos casos requiere de razonamientos asignados al nivel 3 y en otros una respuesta de acuerdo con las características del nivel 2 puede ser ya matemáticamente correcta. Esto explica por qué hemos puesto condiciones para las relaciones que se tenían que incluir en estas tareas (ver apartado 1.4.1). Pretenden limitar las posibles relaciones entre familias de sólidos que pueden formularse a las que su justificación sólo requiere de razonamientos de nivel 2.

Las actividades que presentamos en esta propuesta son muy similares a las utilizadas en las experimentaciones con estudiantes de Magisterio, aunque con algunas modificaciones, ampliaciones o reducciones. En las primeras experimentaciones incluimos dentro de la misma tarea todas las actividades que ahora presentamos desglosadas en actividades para esta fase y para la fase 2 del nivel 3. Los resultados que obtuvimos en la mayoría de ellas, nos llevaron a la división que hemos propuesto. Esto no quiere decir que las actividades no puedan incluirse todas ellas para esta propuesta, pues las relaciones que hemos incluido para el nivel 3 se pueden trabajar también con la metodología propia del nivel 2. En este caso las demostraciones se harían a partir de ejemplos concretos generalizando el resultado.

Respecto a cómo hemos enunciado las tareas T-2 y T-3 también queremos aclarar que al haber dos relaciones en cada actividad y, por lo tanto basta con que una de ellas sea falsa para que toda ella lo sea, en el enunciado de las tareas se indica que se responda también si una de las relaciones es cierta y la otra falsa. Lo que pretendemos con ello es que se trabajen todas las relaciones. Es en las actividades que planteamos para el nivel 3 donde proponemos que se discuta que si una de las dos relaciones que hay en cada actividad es falsa ya no es necesario comprobar cómo es la otra y que se remarque que el enunciado completo es falso al serlo una de sus partes.

La tarea T-6. Búsqueda de relaciones entre familias una de ellas introducida con definición. Cuando una de las familias que se compara (o ambas) se introduce con una definición, la dificultad de las tareas de relacionar familias aumenta. Por un lado, como en las actividades de las tareas anteriores, se tienen que relacionar familias, pero, en este caso, la idea que tienen que hacerse los estudiantes de una de las dos familias que se relacionan (o de ambas) y los ejemplos de ella que se tienen que seleccionar se tienen que imaginar a partir de una definición.

A) Sobre las familias que introducimos con una definición. Son familias que hemos establecido en las actividades de la fase 2 del nivel 2, al clasificar el mundo de los poliedros con tres criterios conjuntamente (igualdad de caras, regularidad de caras e igualdad de vértices), familias que incluyen a las anteriores porque se establecen al considerar sólo dos de estos criterios (los poliedros C) y familias en las que particularizamos alguna de estas condiciones (los poliedros D). En esta tarea no damos nombres a estas familias, simplemente indicamos las condiciones que las caracterizan. Desde luego se podrían diseñar tareas análogas a ésta al considerar otras familias; por ejemplo, la familia A la familia de sólidos que tiene caras iguales, no regulares; la familia B la que tiene vértices del mismo orden y las caras iguales no regulares y la familia C la que sus caras son rombos iguales.

B) Sobre las familias que se comparan y el orden en que se hace. En las relaciones que podemos proponer pueden aparecer familias que se introducen a partir de una definición y familias ya tratadas anteriormente, por lo que se pueden distinguir diferentes relaciones dependiendo de si las dos familias que se comparan se han introducido mediante una definición o sólo una de ellas. En este segundo caso también podemos distinguir si la familia que se introduce con definición está a la derecha o a la izquierda.

Las familias introducidas con una definición aparecen a la derecha de la relación porque en las experimentaciones realizadas con estudiantes de Magisterio hemos comprobado que conllevan menos dificultad que cuando estas familias están a la izquierda. Esto se explica por el hecho de que en el primer caso se supone que los estudiantes conocen los ejemplos de la familia que aparece a la izquierda, y, por tanto, pueden seleccionarlos para verificar si cumplen o no la definición de otra familia (la que hay a la derecha). Como es la familia de la izquierda en la que hay que verificar si todos los ejemplos, alguno o ninguno, cumplen las condiciones de la definición impuesta a la otra familia, y en algunos casos hay que buscar contraejemplos, si por lo menos tenemos los ejemplos en el objeto mental, se facilita la tarea.

Para las relaciones en las que hay familias introducidas con definición en los dos lados de la relación la dificultad depende de las definiciones que se dan para las familias que se consideran. Si para las familias A y B se nombran explícitamente propiedades excluyentes, los estudiantes que razonan de acuerdo a las características del nivel 2 ya pueden explicar que no puede haber en ellas ejemplos comunes. Si todo el grupo de propiedades de la una familia está incluido en la otra y en ambas familias están señaladas las propiedades explícitamente, comprobar que un ejemplo de una familia verifica las propiedades de la otra, tampoco requiere un nivel de razonamiento superior a 2. Pero si el término que hay que seleccionar entre ellas es el de *a veces*, o las condiciones de la definición de ambas familias no están expresadas y separadas explícitamente, comprobar que algunas condiciones incluyen otras, o separar las diferentes condiciones que se deducen de una dada, o buscar el contraejemplo adecuado, requiere de razonamientos de nivel 3 o superior.

C) Las relaciones de inclusión, exclusión o solapamiento entre familias de sólidos. Para la elaboración de las relaciones que presentamos en la tarea T-6, también hemos tenido en cuenta los bloques que hemos establecido al comentar las tareas anteriores, relativos al tipo de relación de inclusión, exclusión, o con intersección que hay entre las familias que se relacionan. Las diferentes variantes de enunciar las relaciones no las hemos considerado para diseñar esta actividad. Para ello hemos escogido el modelo de la tarea T-4, en la que hay que seleccionar el término que muestra la relación adecuada y se tiene que justificar la respuesta. Por lo que, si las familias que se relacionan son disjuntas, el término adecuado que hay que seleccionar es el de *nunca;* si las familias están incluidas una en otra y se compara la clase contenida con la clase que la contiene, el término adecuado es el de *siempre,* pero si se compara la clase que la contiene con la clase contenida, el término adecuado es el de *a veces,* al igual que si las familias intersectan.

En tarea T-6 sólo hemos incluido relaciones en las que la familia introducida con la definición está a la derecha de la relación y además son de los tipos, señalados en el párrafo anterior, en los que hay que seleccionar el término *a veces* (las familias consideradas intersectan y si están incluidas una en otra se compara la familia que contiene con la familia contenida) y hemos dejado para el nivel 3 las otras (ver apartado 1.4.1). Cuando se selecciona el término *a veces,* al igual que cuando se selecciona el término *siempre,* se tienen que tener en cuenta todas las condiciones de la definición dada en el enunciado para una familia, pero sólo para verificar que algunos modelos que se dan como ejemplos de ella realmente lo son. Por otro lado, al igual que cuando se selecciona el término *nunca,* hay que distinguir si los ejemplos de una familia lo son o no de la otra. Pero no es necesario considerar todos los ejemplos de la familia correspondiente (para las relaciones propuestas en esta tarea la familia es la de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides), basta con que se seleccionen dos ejemplos de ella de manera que uno de ellos sea ejemplo de la familia introducida con definición y el otro sea no ejemplo.

Asociar propiedades a una familia de sólidos. Sobre las propiedades sugeridas para las tareas

En las tareas T-7 a T-10 pedimos que se asocien atributos críticos y no críticos a una familia de sólidos dada. En la tarea T-7 sugerimos que se incluyan todos los tipos de propiedades que las experimentaciones realizadas nos han mostrado que se pueden explicar con razonamientos asociados al nivel 2. Es en las actividades de este tipo que proponemos para la fase 4 del nivel 3 donde nos preocupamos de introducir otras propiedades de las que ya hacemos ahí los comentamos pertinentes.

Respecto a estas propiedades también cabe comentar que si las propiedades las miramos desde el punto de vista del tipo de razonamiento que puede darse para explicar la respuesta de manera matemáticamente completa, también podemos hacer una división: para las propiedades que los estudiantes consideran que son atributos críticos de la familia considerada, para explicar la respuesta hay que dar demostraciones que pueden ser descripciones. Para las propiedades que se considera que no lo son, hay que dar contraejemplos, o dar la subfamilia de la familia correspondiente cuyos elementos son los únicos que la cumplen, en caso de que haya alguno. En las tareas T-7 a T-10, al plantear propiedades de ambos tipos podremos abordar todas las formas posibles de explicar la respuesta.

Asignar familias de sólidos a propiedades. Aportaciones de las experimentaciones

Las tareas de la fase 4 continúan con las dedicadas a trabajar el que se asocien determinadas propiedades a varias subfamilias que las verifican, de las tratadas hasta entonces (tareas T-11 y T-12). Con algunas tareas anteriores a éstas ya se ha trabajado el problema de delimitar o asociar propiedades a las subfamilias, pero en todas ellas se considera una familia y varias propiedades mientras que en las tareas T-11 y T-12 hay que considerar varias subfamilias y sólo una propiedad para cada actividad.

Tareas para la fase 4. Las actividades que incluyen estas tareas son muy adecuadas para esta fase. Con ellas los estudiantes pueden perfeccionar los conocimientos de las familias y subfamilias de sólidos, relativos a propiedades, que se han establecido con las tareas de la fase 2 (objetivo de la fase de orientación libre), como vamos a precisar a continuación.

A) Las experimentaciones realizadas nos han puesto de manifiesto que hay que dedicar tiempo y atención para que los estudiantes que razonan de acuerdo al nivel 2 puedan salvar las dificultades que se les presentan cuando intentan resolver este tipo de tareas, especialmente cuando las propiedades que se consideran no pertenecen a familias generales (los prismas, antiprismas, etc.) o tienen fuerte componente visual. En todas las experimentaciones constatamos que el que las aristas laterales tienen la misma longitud muy a menudo se asociaba sólo a los prismas rectos (a pesar de que ya habíamos repetido en varias ocasiones que era una propiedad de los prismas); el incluir en la actividad la familia de los prismas rectos de base regular y propiedades específicas de esta familia llevaba a que a esta familia no se le asignaban propiedades que cumplía. Con frecuencia, la propiedad de "tener vértices iguales" se asociaba a las familias de los prismas de bases regulares y a los de caras iguales; y la propiedad de tener caras paralelas dos a dos se asociaba a todas las familias que tenían bases regulares y también a todos los prismas. Cabe mencionar también, que en algunas ocasiones las propiedades de los prismas rectos se asociaban a los prismas convexos y a la inversa. Las respuestas que mostramos a continuación, dadas por estudiantes de Magisterio, muestran lo que acabamos de comentar.

E1: Propiedades:
1) Sus aristas laterales tienen la misma longitud. De las familias que dices yo creo que la cumplen los que he puesto una cruz, porque es una propiedad de los prismas rectos.
2) Los ángulos de las caras son menores de 180° es propiedad de los que son convexos.

3) Sus vértices son iguales. Sólo los que he marcado. Los PCI porque las caras son iguales y el PCR porque por ser los polígonos regulares los ángulos son iguales.
4) Sus caras son paralelas dos a dos. Son los de bases regulares. También PCI aunque sus caras no son regulares.

Prop.	Prisma	P. Rect.	P. conv.	PBR	PRBR	PCR	PCI	P. reg.
1)		X				X	X	X
2)			X			X	X	X
3)				X	X	X	X	X
4)				X	X	X	X	X

E2: Yo he respondido de otra manera:

1) Es de todos los prismas. De los oblicuos también.
2) Yo he puesto que es de los prismas rectos. Y de los prismas también, porque hay rectos. De los de bases regulares he puesto que no, porque ahí hay oblicuos. Espera... creo que me he equivocado. No es de PBR ni de P que sí que lo he puesto.
3) De los 3 últimos que tienen caras iguales (y sus vértices por tanto) y los de caras regulares también: sus ángulos son iguales aunque sean distintos los de la base y los de las laterales todos juntos son iguales en los vértices.
4) Lo cumplen todos los prismas. Sus caras son paralelas y sus bases también.

Prop.	Prisma	P. Rect.	P. conv.	PBR	PRBR	PCR	PCI	P. reg.
1)	X	X	X	X	X	X	X	X
2)	X	X	X	~~X~~No vale	X	X	X	X
3)				~~X~~No vale	~~X~~No vale	X	X	X
4)	X	X	X	X	X	X	X	X

De estas respuestas también se desprende que los estudiantes si explican la respuesta se refiere a las familias que han seleccionado como las que verifican la propiedad, pero no lo hacen para las que según ellos no la cumplen. Es necesario pues que el profesor dirija a los estudiantes al realizar estas tareas por primera vez; el que las tareas se propongan para la fase 4 de un nivel no puede confundirse con que el profesor no tiene que orientar o informar sobre la actividad que se plantea; así, resulta conveniente que se muestre una posible manera de razonar para explicar la respuesta y se insista, además de en que se pueden utilizar otros procedimientos para explicarla, en que se explique la propiedad para cada subfamilia, tanto si se considera que cumple la propiedad como si no es así.

B) Otra razón por la que consideramos apropiadas estas tareas casi para concluir la fase 4 del nivel 2 es porque los estudiantes que ya han empezado a dominar las características asignadas al nivel 3, en un intento de acortar la tarea, pueden también explicar las respuestas con razonamientos asociados al nivel 3; esto es lo que ocurrió en nuestras experimentaciones. Algunos estudiantes resolvieron esta tarea de la siguiente manera: determinaban la familia más general que cumplía la propiedad considerada; determinaban todas las subfamilias de las dadas incluidas en ella y todas las que la contenían. Explicaban la respuesta para estas familias señalando que si una familia verifica una propiedad, también la van a verificar todas las subfamilias contenidas en ella y que si una familia no verifica una propiedad tampoco la verifican las familias que la contienen. De este modo, acortaron la resolución de las tareas T-11 y T-12 considerablemente.

Sobre las subfamilias y propiedades propuestas. Aportaciones de las experimentaciones. Las subfamilias que consideramos para diseñar estas tareas corresponden a las establecidas con las tareas de la fase 2. Para delimitar las propiedades tuvimos en cuenta las sugerencias que damos en la tarea T-7. La tarea T-11 incluye propiedades específicas de familias más o menos generales: propiedades de los prismas (la que usualmente se asocia sólo a los prismas rectos y otra propiedad de esta familia), de los prismas rectos, de los prismas convexos, de los prismas rectos de bases regulares, de los prismas de caras regulares o de los primas de caras iguales, de los paralelepípedos, de los ortoedros. También contiene una propiedad de los antiprismas que no verifica ninguna de las familias seleccionadas. Y como también pretendemos que se trabajen todo tipo de propiedades, las que incluimos en la tarea T-12 son las elaboradas para otras tareas que ya se han estudiado.

Las experimentaciones realizadas nos han mostrado que para las propiedades específicas de sólido o de poliedro, las de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides y las propiedades específicas de una subfamilia establecidas con un criterio de clasificación visual, no conlleva demasiada dificultad el identificar la familia más general que verifica la propiedad, a no ser que ésta tenga componente fuertemente visual; si bien como hemos indicado antes (y que lo refleja una de las respuestas que hemos indicado) en algunas ocasiones los estudiantes confunden el grupo de propiedades de los prismas rectos y de los prismas convexos.

Pero lo que queremos subrayar aquí es que es para las propiedades de las subfamilias establecidas con criterios visuales para las que ya empiezan a aparecer problemas para delimitar todas las familias que están contenidas en ellas. Y el problema se agrava para las propiedades específicas de las subfamilias establecidas con dos criterios de clasificación, uno de ellos visual y el otro que centre la atención en la igualdad de los lados o ángulos del polígono de la base. Para estas subfamilias, aunque la actividad no se resuelva aplicando relaciones entre familias (que en muchos casos requiere de razonamientos de tercer nivel) como ya hemos resaltado refiriéndonos a los prismas rectos de bases regulares, aparece el problema de que la propiedad no se considera como propiedad específica de estas familias. Esto ocurre muy a menudo cuando se consideran propiedades específicas de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, rectos, cuya base tiene lados iguales (o ángulos iguales, o es regular), o de los prismas convexos cuadrangulares, o de los paralelepípedos (prismas convexos de base un paralelogramo), etc.

Y lo mismo ocurre con las propiedades específicas de las subfamilias establecidas con criterios de clasificación que centran la atención en la regularidad o igualdad de todas las caras o de alguno de sus elementos. Por ejemplo, propiedades específicas de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, de caras iguales o de caras regulares, o de los ortoedros. Propiedades de este tipo podrían ser: todas las aristas tienen la misma longitud, todas las caras son regulares, todas las caras son iguales, todos los ángulos de las caras (o los ángulos diedros) son iguales.

También incluimos en este grupo las propiedades que imponen condiciones de paralelismo o igualdad a parte de los lados del polígono de las bases. Por ejemplo, la que ya hemos comentado antes: toda cara tiene otra cara paralela a ella. Esta propiedad permite rechazar varias familias; sólo el octaedro y algunas subfamilias de prismas pueden ser solución. Una vez situada en los prismas hay que seleccionar los de caras iguales y también los que tengan como base polígonos que tengan lados paralelos dos a dos; y una vez ahí, obliga a pasar la propiedad de los prismas al polígono de la base.

Sin embargo, como hemos indicado ya, los estudiantes suelen asociar esta propiedad a la familia de los prismas, a la familia de los prismas de bases regulares, o a las familias de los prismas y de los antiprismas. Las entrevistas realizadas nos aclararon que unos estudiantes asociaban esta propiedad a los prismas y antiprismas porque no interpretan el enunciado de la propiedad adecuadamente. Expresaron que era una propiedad de esas familias "porque en ellas las bases siempre son iguales y paralelas". Otros estudiantes (por ejemplo, el estudiante E2, del que hemos indicado su respuesta sobre este tipo de actividad) explicaron que la habían asociado a los prismas "porque en ellos las caras laterales son paralelas y las bases también". La propiedad de las aristas laterales se extendía a las caras laterales. Nótese que visualmente se puede llegar a esta idea si uno no prolonga mentalmente las caras laterales. Otros estudiantes señalaron que esta propiedad "la cumplen los prismas de bases regulares" (por ejemplo, el estudiante E1, del que también hemos señalado su respuesta antes). En el objeto mental de estos estudiantes tenían más peso los ejemplos en los que el polígono de la base es regular y tiene un número par de lados.

La tarea T-13. Aplicación de la medida de diferentes tipos de ángulos de los sólidos

Para finalizar proponemos la tarea T-13 que pretende trabajar que se apliquen propiedades de determinadas familias de sólidos, relativas al número de determinados elementos o la medida de ellos, para comprobar, para familias muy específicas, expresiones dadas. Así, las actividades T-13a y T-13b se refieren a la suma de los ángulos de las caras de un antiprisma y de un prisma rectos de bases regulares, la actividad T-3c a la suma de los ángulos de los vértices de un prisma concreto y la actividad T-3d a la suma de los diedros, también de un prisma concreto.

La actividad T-3e es muy apropiada para concluir la fase 4 ya que en ellas los estudiantes pueden experimentar por sí mismos (objetivo de la fase de orientación libre) en el contexto de los cubrimientos y deben emplear varias propiedades que se han estudiado hasta el momento, que no vamos a listar aquí porque ya las hemos señalado en el apartado 2.3.3.

2.5.4. NIVEL 2. FASE 5

Las tareas que proponemos para la fase 5 del nivel 2 pretenden conseguir una recopilación de las propiedades de las subfamilias de sólidos que ya se han descubierto con las tareas diseñadas para las otras fases. También se tratan de nuevo los diagramas que reflejan las relaciones entre subfamilias que se han tratado con esas tareas y se utilizan tablas para recopilar las subfamilias que cumplen determinadas propiedades y las que no las cumplen. Además proponemos tareas-adivinanza, que, como hemos indicado al comentar las actividades propuestas para esta fase para el nivel 1, son muy apropiadas para esta fase; los estudiantes tienen que asociar de nuevo determinadas propiedades a las familias de poliedros que la cumplen, o tienen que averiguar si familias dadas (las que se han delimitado al considerar las propiedades anteriores) verifican o no una propiedad (la que se considera en cada momento). Por otro lado, si se pide a los estudiantes que diseñen esta tarea, se consideran de nuevo las subfamilias de sólidos establecidas en las otras fases y las relaciones de inclusión que se presentan entre ellas; también tiene que ver con la enumeración de propiedades de subfamilias.

OBJETIVOS

1.- Adquirir una visión general de los contenidos y métodos que se tiene a disposición.

2.- Organizar los contenidos que tiene a disposición.

3.- Relacionar los nuevos conocimientos y procedimientos adquiridos en las otras fases de este nivel con otros campos que se hayan estudiado anteriormente.

TAREAS

T-1 a) Mostrar con los prismas cómo se puede proceder de manera sistemática para enumerar las propiedades de esta familia relativas a tipos de caras, orden de los vértices y relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre sus elementos.

Apuntar que para descubrir las propiedades de los antiprismas, pirámides y bipirámides se fijen en si las propiedades de las familias ya analizadas se siguen verificando en la familia que se está describiendo y si no es así que se observe si se pueden modificar para que lo sean.

Pedir que se observe también si la familia que se está analizando tiene propiedades que no lo sean de las familias descritas antes.

b) Pedir que se cuente el número de caras, vértices y aristas de un prisma n-agonal por pisos y que se aplique el mismo procedimiento para determinar estos elementos en los antiprismas, en las pirámides y en las bipirámides.

c) Apuntar que para hallar el número de ángulos de las caras de un prisma n-agonal se pueden hallar por separado los de las bases y los de las caras laterales y luego sumarlos. Pedir que se halle la fórmula que da el número de ángulos de las caras de un prisma n-agonal y cuestionar qué modificaciones hay que hacer en este procedimiento si queremos determinar la fórmula para los antiprismas (las pirámides, las bipirámides).

d) Pedir que se halle el número de ángulos diedros y de los vértices de cada una de las familias tratadas. Apuntar que para ello se tengan en cuenta las relaciones que existen entre estos números y el número de aristas y de vértices.

e) Pedir que se recopilen las propiedades que se han descubierto en las actividades de las fases 2 y 4 para los prismas y que se haga una lista lo más larga posible con las propiedades de esta familia.

f) Pedir que se repita la actividad T-1e para los antiprismas, las pirámides y las bipirámides.

g) Dar las listas de propiedades que indicamos en el anexo 2 como propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides. Pedir que se comparen estas listas con las listas que se han elaborado para las familias correspondiente.

T-2 a) Pedir que se utilicen varios modelos de prismas rectos y que se apoyen en ellos para recopilar en una lista las propiedades que se han descubierto para esta subfamilia en las actividades de la fase 2.

Pedir que se explique si la lista de propiedades de los prismas rectos contendrá todas las propiedades de los prismas.

b) Pedir que se repita la actividad anterior para las familias de antiprismas, pirámides y bipirámides, *rectos.*

c) Pedir que se repita la actividad T-2a para las familias de los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides, *convexos.*

d) Pedir que se repita la actividad T-2a para varias subfamilias de los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides, de las establecidas al hacer clasificaciones en las tareas de la fase 2. Para estas subfamilias pedir además que se explique si, además de indicar de golpe las propiedades de los prismas, se pueden señalar de golpe otros grupos de propiedades.

T-3 a) Pedir que se construya un diagrama con forma de red que muestre las relaciones que existen entre las siguientes familias de prismas: prismas convexos, PX; prismas rectos, PR; prismas de bases regulares, PBR; prismas rectos de bases regulares, PRBR; prismas de caras laterales regulares, P<u>CL</u>R; prismas de caras regulares, PCR; prismas de caras iguales PCI; prismas regulares, P.Reg.; prismas de bases trapecios, PBt; prismas de bases trapecios isósceles, PBti; prismas de bases cometas, PBc; paralelepípedos, L; romboedros, R; cubo, C.

Apuntar que si algunas familias de las que hemos considerado son las mismas, sólo que las hemos nombrado con varios nombres de los que tienen, que lo indiquen y seleccionen para ellas el nombre que deseen.

b) Pedir que se intente construir un diagrama con forma de red con las familias de prismas que hemos indicado en la actividad anterior y el ortoedro y que indiquen qué es lo que ocurre.

c) Para varios pares de familias, pedir que se expliquen las razones por las que están o no están conectadas con una flecha en el diagrama que se ha construido en la actividad T-3a. En caso de que sí lo estén, pedir también que se explique el sentido que tienen las flechas.

d) Para las familias que hay en un camino dado del diagrama que se ha construido en la actividad T-3a, pedir que se expresen las relaciones que existen entre ellas cuando se va en sentido ascendente y cuando se va en sentido descendente. Pedir también que se explique la respuesta

e) Pedir que, para las familias que hay más o menos un mismo nivel del diagrama que se ha construido en la actividad T-3a, se repita la actividad anterior.

T-4 a) Indicar que las propiedades que en la tabla hemos nombrado como 1, 2, 3,... son: 1) tiene caras paralelas dos a dos, 2) los vértices son iguales, 3) las aristas son iguales, 4) los ángulos diedros de las caras laterales son iguales al correspondiente de la base y 5) los ángulos diedros son menores de 180°.

Informar también de que las familias que indicamos en el encabezamiento de la tabla corresponden a las de las abreviaturas de la tarea T-3.

Pedir que si una familia verifica una propiedad se ponga una cruz en la casilla correspondiente y que se explique la respuesta para cada propiedad y cada subfamilia, tanto si la propiedad se ha asociado a ésta como sí no se ha hecho.

Prop.	PR	PX	PBR	PRBR	PCLR	PCR	PCI	L	O
1									
2									
3									
4									
5									

b) Pedir que se consideren otras propiedades de familias de sólidos y que se repita la actividad T-4a para ellas.

c) Pedir que se consideren otras subfamilias de sólidos de las que se han establecido en las actividades de las fases anteriores y que se repita la actividad T-4a para ellas.

T-5 Pedir que para cada propiedad de la lista que se presenta se respondan a las cuestiones que se plantean para ella.

Informar de que las propiedades se consideran por turno y que cuando se fija la atención en una propiedad hay que descubrir las familias de sólidos que verifican la propiedad y todas las anteriores, o las familias que verificando todas las propiedades anteriores no verifican esa.

a) Sus caras son polígonos ¿Elimináis algún sólido de los que hemos tratado? ¿A qué sólidos nos podemos referir?

b) Tiene varios vértices y aristas ¿Añade información? ¿A qué sólidos nos podemos referir?

c) Es un modelo cerrado. ¿Añade información? ¿A qué sólidos nos podemos referir?

d) Tiene dos caras iguales. ¿En qué sólidos podemos estar pensando?

e) Tiene dos caras paralelas. ¿Descartamos o no descartamos alguno que no hayamos descartado ya?

f) Tiene todos sus vértices de orden 3. ¿Añade información? ¿Descartamos o no descartamos alguno que no hayamos descartado ya? ¿En qué sólidos podemos estar pensando?

g) Tiene todas las aristas laterales de la misma longitud. ¿Nos añade información? ¿En qué familias o familia podemos estar pensando?

h) Tiene las aristas laterales paralelas. ¿Añade información?

i) Tiene las aristas laterales perpendiculares a la base. ¿Nos añade información? ¿En qué familias o familia podemos estar pensando?

j) Las caras laterales son rectángulos. ¿Añade información?

k) La altura dibujada desde un punto de la base cae en el interior del sólido. ¿Añade información?

l) La altura tiene la misma longitud que las aristas laterales. ¿Añade información?

m) Los ángulos diedros de las caras laterales coinciden con el correspondiente ángulo del polígono de la base. ¿Añade información?

n) Los ángulos que forman las caras son menores que 180°. ¿Añade información?

o) Las diagonales del espacio quedan completamente en el interior del sólido. ¿Añade información? ¿En qué familias o familia específicas podemos estar pensando?

p) Tiene todos los vértices iguales. ¿Añade información? ¿En qué familias o familia específicas podemos estar pensando?

q) Tiene todas las caras laterales iguales. ¿Añade información? ¿En qué familias o familia específicas podemos estar pensando?

r) Tiene todas sus caras regulares. ¿Añade información? ¿En qué familias o familia específicas podemos estar pensando?

s) Todas sus aristas tienen la misma longitud. ¿Añade información? ¿En qué familias o familia específicas podemos estar pensando?

t) Tiene 24 aristas. ¿Añade información? ¿En qué familias o familia específicas podemos estar pensando?

u) Tiene 16 vértices. ¿Añade información? ¿En qué familias o familia específicas podemos estar pensando?

v) Tiene 10 caras. ¿Añade información? ¿En qué familias o familia específicas podemos estar pensando?

T- 6 a) Pedir que se diseñe una tarea como la anterior. Indicar que para ello se elabore una lista de propiedades que son las que luego se han de considerar por orden. Dar las siguientes normas:

Pensar en la familia de sólidos a la que queréis que se llegue como solución.

Delimitar todas las familias de sólidos en las que la familia considerada está incluida y ordenarlas según lo generales que sean: sólido, poliedro, ...

Enumerar varias propiedades de las familias que contienen a la elegida.

Elaborar la lista con las propiedades de las familias que contienen a la elegida, de manera que si una familia es más general que otra, sus propiedades van primero.

b) Pedir que con la lista de propiedades que se ha elaborado en la actividad T-6a se plantee la tarea T-5a a un compañero/a y resuelvan juntos la actividad.

c) Pedir que se repitan las actividades T-6a y T-6b para varios modelos de prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides.

COMENTARIOS

Las tareas T-1 y T-2. Recopilación de propiedades

La propuesta que hacemos aquí para actividades de la fase 5 comienza con las tareas T-1 y T-2 que pretenden conseguir una recopilación de las propiedades de las familias de los sólidos que ya se han descubierto en las actividades de las otras fases. Cabe resaltar que no son tareas rutinarias de resumen de propiedades sino que están dedicadas a trabajar la descripción de familias centrando especialmente la atención en la manera de hacerlo.

Con estas tareas se puede hacer notar que para que no se nos olviden propiedades, cuando intentamos dar una lista lo más larga posible para un sólido o una familia de sólidos, una vez que se ha indicado todas las familias de sólidos a las que pertenece, conviene ir por orden considerando los diferentes elementos: las caras, las aristas, los vértices, los diferentes tipos de ángulos (αC, αd y αV) y los diferentes tipos de diagonales (dC y dE). Señalaremos que para estos elementos hay que delimitar si hay relaciones de igualdad, paralelismo, o perpendicularidad; el número de elementos de cada tipo; si se puede decir algo sobre la medida de ellos, o sobre alguno de ellos; si se pueden establecer relaciones entre los elementos de un tipo y los de otro, etc. Podemos apuntar que para las caras hay que especificar el tipo de polígonos que son, además de si son planas o curvas, que se puede indicar diciendo que es poliedro. Para las aristas hay que señalar si son rectas o curvas, que también se informa de ello cuando se indica que es poliedro. Para las caras o las aristas se puede centrar la atención sólo sobre parte de ellas y decir propiedades relativas a igualdad, paralelismo o perpendicularidad.

La tarea T-1 también permitirá observar si los estudiantes son sistemáticos o no al recopilar las propiedades de las otras familias (antiprismas, pirámides y bipirámides).

Por otro lado, cabe señalar que la descripción de las familias no se hace independientemente unas de otras sino que se comparan las propiedades que tiene la familia considerada con las otras y se observan parecidos y diferencias entre ellas. Enfatizamos cómo podemos aprovechar los recursos que se tienen para resolver actividades que ya se han planteado para otras familias. Las sugerencias que señalamos en el enunciado de la tarea T-1 dirigen los razonamientos para que se establezcan fórmulas que dan el número de elementos de un determinado tipo para los prismas; además fijan la atención en si se puede extender estos procedimientos para hallar el número de elementos de los diferentes tipos para las otras familias y en las modificaciones que hay que hacer para adaptarlos.

Las actividades de la tarea T-2 pretenden que se recopilen las propiedades de las subfamilias establecidas en las tareas de la fase 2. También centran la atención en la utilización de relaciones de familias para indicar propiedades de una familia englobadas como propiedades de otra. El establecer relaciones de familias en términos de propiedades en muchos casos ya requiere de razonamientos de nivel 3, por lo que cuando se plantee en clase esta tarea puede ocurrir que los estudiantes no señalen todas las propiedades posibles englobadas como propiedades de otra familia y que incluyan alguna que no sea adecuada.

En las experimentaciones realizadas con estudiantes de Magisterio, cuando pedimos las propiedades de los prismas de caras laterales regulares, muchos estudiantes que razonaban de acuerdo al nivel 2 indicaron "que esta familia cumple las propiedades de los prismas, las propiedades de los prismas rectos y las de los prismas convexos". Cuando pedimos las propiedades de los romboedros, indicaron "que esta familia cumple las propiedades de los prismas, las propiedades de los prismas convexos y las de los paralelepípedos".

Fallos como el primero se pueden aprovechar para centrar la atención de nuevo en los ejemplos diferentes que podemos encontrar en la familia considerada. Para los P<u>CL</u>R se puede llamar la atención en que como ya hemos discutido con otras actividades de este nivel, puede haber primas cóncavos; sus bases tienen lados iguales y sus caras laterales son cuadrados. La segunda respuesta dirige hacia los diagramas que relacionan familias de prismas para establecer todas las familias que contienen a la familia dada.

Si se observa que los estudiantes ya han logrado las características asignadas al nivel de razonamiento 2 y pueden razonar de acuerdo con el nivel 3, podemos explicar también, y como nos ha ocurrido a nosotros puede ser que algún estudiante lo haga notar, que de las propiedades de las familias que no hemos apuntado en el último ejemplo de respuesta sólo es necesario incluir el grupo de propiedades de los prismas de base cometa, pues las propiedades de los prismas de bases trapecios y las de los prismas cuadrangulares están incluidas en el grupo de propiedades de los paralelepípedos. Pero estos razonamientos ya requieren razonamientos de los asociados al nivel 3 y lo proponemos al discutir las actividades que planteamos para este nivel.

La tarea T-3. Sobre diagramas

Esta tarea trata de organizar las subfamilias que se han delimitado en todas las clasificaciones que hemos establecido en las actividades de las diferentes fases de este nivel. El diagrama que se pide en la actividad T-3a representará visualmente la relación de inclusión que existe entre algunas subfamilias de prismas estudiadas y que otros pares de familias comparten ejemplos comunes; esto es, no tienen relación de inclusión ni son disjuntas. La actividad T-3b pretende resaltar que no siempre es posible construir diagramas de red con familias cualesquiera sin que se entrecruce alguna flecha. Por ejemplo, cuando en el diagrama que se ha construido en la actividad T-3a se quiere introducir el ortoedro, no es posible reflejar, sin que una flecha corte o otra, que los ortoedros son prismas rectos y que son paralelepípedos.

Para que la tarea no se limite a una superposición de los dos diagramas que se han construido en actividades de al fase 2, (a menudo los estudiantes se los aprenden de memoria) y se recopile el tipo de actividades que están relacionadas, que hemos resuelto en otras fases de este nivel, en las otras actividades de esta tarea pedimos también que se interpreten los convenios que hemos establecido para construir los diagramas con forma de red y que se expresen y expliquen relaciones entre pares de familias.

La tarea T-4. El uso de tablas para recopilar familias de sólidos que verifican propiedades

Esta tarea pretende que se recojan en tablas las familias que cumplen determinadas propiedades y las que no las cumplen. En la actividad T-4a se proponen las actividades y las familias que se tienen que considerar; en la actividad T-4b se proponen las familias y se pide que se elijan las propiedades que se tienen que asociar como propiedades o no de las familias dadas y en la actividad T-4c se proponen las propiedades y se pide que se elijan las familias que tendrán que comprobar si verifican o no las propiedades. En esta tarea también se pide que se explique la respuesta para cada propiedad y cada familia que se considera; con ello la tarea no es mera rutina de marcar cruces; se recuerdan los procedimientos que se pueden utilizar para explicar si varias familias verifican o no una propiedad (en los comentarios de las tareas de la fase 4 indicamos algunos). Por otro lado, las respuestas a esta tarea pueden informarnos sobre si los estudiantes aún tienen dificultades para resolver este tipo de actividad para algunas familias y para algunas propiedades, y si utilizan relaciones de familias para explicar las respuestas.

Las tareas T-5 y T-6. Actividades-adivinanza. Aportaciones de las experimentaciones

Con estas tareas se trabaja el delimitar las familias de sólidos que verifican varias propiedades. No se trata solamente de descubrir la familia de sólidos que verifica todas las condiciones que se presentan. Si con las cuestiones que planteamos al lado de cada propiedad, los estudiantes aún no entienden lo que se cuestiona, como nos ha ocurrido a nosotros con algunos estudiantes, se puede precisar así el enunciado: al considerar la primera propiedad se tienen que enumerar las familias de sólidos que la cumplen; después, al considerar la segunda, hay que indicar las familias que cumplen la segunda y la primera; después, las que cumplen la tercera, la segunda y la primera; y así sucesivamente, se tienen que indicar las familias que cumplen la propiedad considerada y todas las anteriores. Finalmente hay que descubrir el sólido, o familia de sólidos que cumple todas las condiciones que se dan en la actividad.

Sobre el proceso de elaboración. Las tareas que presentamos en esta propuesta son muy similares a las que utilizamos en la mayoría de las experimentaciones aunque con algunas modificaciones respecto a la forma de plantearlas, respecto a las propiedades introducidas y al orden en el que las presentamos.

A) En las sesiones llevadas a cabo con niños de 12 años antes de resolver la actividad apuntamos que cuando una propiedad sólo nos confirmaba la familia que ya habíamos encontrado, simplemente se indicase que no aportaba información nueva y que en otro caso, se indicase la familia a la que hacía referencia la propiedad. Respuestas de niños de 12 años a actividades de este tipo, en las que el profesor no enunciaba una propiedad hasta que no se hubiera dado por escrito respuesta a la anterior, son las que indicamos a continuación.

P: 1.– Tiene sus caras polígonos.
E1: Es un poliedro.
E2: Es poliedro.
P: 2.– Tiene varios vértices y aristas.
E1: No añade nada.
E2: No añade nada.
P: 3.– Es un modelo cerrado que encierra perfectamente un espacio.
E1: No añade nada.
E2: Es convexo.
P: 4.– Tiene por lo menos dos caras iguales.
E1: Prisma, antiprisma, bipirámide, pirámide.
E2: 2 caras iguales.
P: 5.– Tiene por lo menos dos caras paralelas.

E1: Prisma, antiprisma.
E2: 2 caras paralelas.
P: 6.– Tiene todos los vértices de orden 3.
E1: Prisma.
E2: Es prisma oblicuo o prisma recto.
P: 7.– Tiene todas las aristas laterales de la misma longitud.
E1: No aporta nada.
E2: Prisma recto.
P: 8.– Tiene las aristas laterales paralelas.
E1: No aporta nada.
E2: Aristas laterales paralelas entre ellas.
P: 9.– Tiene las aristas laterales perpendiculares a las bases.
E1: No aporta nada.
E2: Aristas laterales perpendiculares a las bases.
P: 10.– Las caras laterales son rectángulos.
E1: No aporta nada.
E2: No añade nada.
P: 11.– La altura cae en el interior del sólido.
E1: No aporta nada.
E2: No añade nada.
P: 12.– La longitud de la altura coincide con la de las aristas laterales.
E1: No aporta nada.
E2: No añade nada.
P: 13.– Los ángulos que forman las caras coinciden con el correspondiente del polígono de la base.
E1: No aporta nada.
E2: No añade nada.
P: 14.– Los ángulos que forman las caras (ángulos diedros) son menores que 180°.
E1: No es cóncavo, es convexo.
E2: No añade nada porque las caras son rectángulos.
P: 15.– Las diagonales caen en el interior del sólido.
E1: No aporta nada porque ya sabíamos que es convexo.
E2: No añade nada porque es prisma recto y convexo.
P: 16.– Tiene todos los vértices iguales.
E1: Sus bases son regulares.
E2: No aporta nada los rectángulos sus ángulos son rectos.
P: 17.– Tiene todas las caras laterales iguales.
E1: No aporta nada porque sus bases son regulares.
E2: No añade nada porque son rectángulos.
P: 18.– Tiene todas sus caras regulares.
E1: Sus caras laterales son cuadrados.
E2: Todas sus caras regulares.
P: 19.– Todas sus aristas tienen la misma longitud.
E1: No aporta nada.
E2: Todas las aristas la misma longitud.
P: 20.– Tiene 24 aristas.
E1: Por base tiene un polígono de 8 lados.
Es un prisma, que es recto, con 8 lados en su base, no es oblicuo, tiene todas sus caras regulares.
E2: 24 aristas. Su base tiene 8 aristas. Es un prisma de Base un polígono de 8 lados. Las caras regulares. Es recto. Es convexo. 2 caras de base y 8 caras laterales.

Estas respuestas, transcritas textualmente de las respuestas dadas por los niños en el papel, muestran que los niños siguieron las instrucciones para la mayoría de las propiedades, aunque para algunas, según aclararon posteriormente, las habían respondido sin tenerlas en cuenta. Cuando podían delimitar la familia a la que se refería la propiedad, la indicaban, y cuando la propiedad sí aportaba información pero no podían delimitar la familia correspondiente, se preocupaban de escribir la propiedad completa que luego tenían en cuenta para responder a las otras (ver las respuestas del estudiante E2 las propiedades 10, 14, 16 y 17, así como a las propiedades 18 y 20). Pero es necesario aclarar que cuando las propiedades no aportaban información nueva, en algunos casos también se escribía la propiedad completa. Las aclaraciones que nos dieron verbalmente los niños, para aclararnos sus respuestas dadas por escrito nos indicaron que "cuando no aportaba nada también la pongo entera a veces porque así no se me olvida que también está. Como el prisma es recto esas [se refiere a las propiedades 8, 9 y 10] no aportan nada. Se cumplen). Una de las conclusiones que sacamos de estas respuestas fue que para que no se olvidasen las instrucciones para ninguna propiedad había que recordarlas para cada una de ellas. Al final de este apartado haremos referencia a estas respuestas de nuevo al comentar la información que pueden aportarnos este tipo de actividades.

Con los estudiantes de Magisterio comenzamos planteando estas tareas sin dar indicaciones sobre que se explicara la respuesta al considerar cada propiedad de las que se indicaban por turno. Cuando los estudiantes las resolvieron en grupo, o individualmente, antes de discutirlas en clase, la mayoría tuvieron como único objetivo descubrir el sólido final; no daban explicaciones sobre las posibles respuestas intermedias.

Lo comentado en los párrafos anteriores explica las preguntas que hemos incorporado al lado de cada propiedad.

B) En las actividades que planteamos a grupos de Magisterio incluíamos propiedades de los tipos que sugerimos en la tarea T-7 de la fase 4 de este nivel y las que incluimos en este tipo de tareas para la fase 4 del nivel 3. La conveniencia de esta separación viene avalada por las experimentaciones realizadas. Los estudiantes que razonaban de acuerdo con las características asignadas al nivel 2, dieron una interpretación a algunas propiedades (ver apartado 1.4.1) que no era matemáticamente correcta. Esta interpretación en muchos casos condicionaba las posibles familias que se obtenían como soluciones y repercutía también al considerar el resto de propiedades de la lista. Por ejemplo, si la propiedad "tiene como mucho dos tipos de caras" se interpretaba como que tenía un tipo de caras exactamente, se eliminaban todas las bipirámides como posibles soluciones y se simplificaba la tarea considerablemente para las propiedades que seguían.

Lo mencionado en el párrafo anterior explica que en la lista que presentamos aquí en la tarea T-5 no haya propiedades de las que requieran de nivel 3 para su interpretación, o que su interpretación pueda afectar en la selección de las familias.

C) El hecho de que al considerar una propiedad dada se tenga que tener en cuenta la información de partida, no sólo afecta en las posibles soluciones que encuentra el estudiante. El nivel de razonamiento que tenga el estudiante influirá en cómo tiene en cuenta esta información, a medida que avanza la resolución de la actividad correspondiente. Es muy usual entre los estudiantes que razonan de acuerdo con el nivel 2, que cuando una propiedad presenta dificultades, o se piensa que entra en contradicción con alguna que ya se ha considerado, en vez de concluir que no habría solución posible, se prescinde de la información obtenida y se razona como si ésta no se conociera.

Respecto al orden en que las propiedades aparecen en la lista también hemos hecho modificaciones respecto a las primeras que presentamos en nuestras experimentaciones. También han sido los resultados obtenidos en éstas los que nos han llevado a que en las tareas T-5 y T-6 se presente o se proponga una ordenación de las propiedades que van de las de las familias más generales a las de las más específicas y es en las tareas que presentamos para el nivel 3 donde además las presentamos en otro orden.

Sugerencias para la instrucción. Para la tarea T-5 puede ser necesario que nos detengamos mostrando a los estudiantes cómo razonar para delimitar las familias de poliedros que cumplen las sucesivas propiedades. Si es necesario, al enunciar cada propiedad, a las cuestiones que se plantean en la tarea añadiremos otras como las que siguen: En los prismas, ¿qué subfamilias la cumplen? ¿Y en los antiprismas? ¿Y en las pirámides? ¿Y en las bipirámides? ¿Qué subfamilias de los prismas no la cumplen? ¿Y de los antiprismas? ¿Y de las pirámides? ¿Y de las bipirámides?

Para la tarea T-6 se puede remarcar que hay que seleccionar las propiedades que se dicen (no decirlas sólo porque nos vienen a la cabeza) y hay que enumerarlas en un orden determinado porque si no, o bien se descubre muy pronto, y puede que eso no sea lo que se desee, o no se dan propiedades suficientes para que se pueda determinar exactamente. Conviene apuntar que para que no se averigüe rápido primero se enuncian propiedades de la familia más general, para así delimitar las clases generales a las que pertenece el objeto. Luego se van añadiendo propiedades que cumplen las clases más específicas (que tienen más propiedades). Es como si fuéramos, en un diagrama de inclusión de clases, diciendo propiedades de las clases generales, que también son de las específicas, y fuéramos bajando en el diagrama, diciendo propiedades de estas familias.

Si es necesario, con un ejemplo explicaremos, indicando todos los pasos, cómo hemos procedido para ordenar las propiedades que les hemos indicado en la tarea T-5 o en otra tarea que podríamos diseñar en el momento. Por ejemplo, podemos indicar que si pensásemos en un prisma octogonal de caras regulares como la solución a la que queremos que se llegue, para diseñar la lista de propiedades procederíamos como sigue.

- Se puede hacer notar que la clase más general a la que pertenece es la de los poliedros por lo que hay que informar de ello apuntando una o varias propiedades de los poliedros, según que queramos decir propiedades que no aporten más información o decir sólo una, con la que ya se podría deducir que es un poliedro. También llamaremos la atención sobre que con algunas propiedades sólo informaríamos de que el modelo es un sólido.

- Para continuar se puede explicar que si lo que queremos decir es que es un prisma o un antiprisma, seleccionaremos las propiedades que cumplen ambas familias.

- De la misma manera, apuntaríamos que si queremos dar a conocer que es recto, o que es convexo, las propiedades que podemos enumerar podemos tomarlas de la lista de propiedades de la subfamilia correspondiente.

- Se puede explicar que si queremos aclarar que la base es regular, las propiedades que podemos enumerar podemos tomarlas de la lista de propiedades de esta familia. Y como además ya hemos dicho que es recto, las propiedades que podemos enumerar podemos tomarlas de la lista de propiedades de los PRBR.

- Y también habría que hacer notar que todavía tendríamos que comunicar de alguna manera que no nos referimos a cualquier prisma de base regular sino a los que tienen todas las caras regulares y que la base es un polígono concreto. Y se centraría la atención en las propiedades que podemos enumerar para transmitir esa información.

En las sesiones llevadas a cabo con niños de 12 años, después de haber resulto varias actividades en las que era la profesora la que seleccionaba las propiedades, fueron los niños los que propusieron que se cambiaran los papeles. En primer lugar, los niños formando dos equipos resolvieron varias tareas de este tipo; comprobaron que el orden en el que se indicaban las propiedades podía facilitar o dificultar la tarea, y que unas veces habían seleccionado muchas propiedades si bien con unas pocas se había descubierto el sólido, mientras que otras veces, las apuntadas no bastaron para ello. Aprovechamos estas observaciones y fuimos diseñando una tarea a la vez que íbamos mencionando las sugerencias dadas en los párrafos anteriores. Propuestas que dieron los niños a continuación fueron las siguientes:

E1: Prisma oblicuo, triangular de base regular, sus caras laterales no son regulares.
Quiero decirle que es poliedro.
- Tiene aristas.
- Tiene vértices.
- Caras.
- Tiene polígonos.
Quiero decirle que no es bipirámide.
- No está formado por dos pirámides.
Quiero decirle que no es antiprisma.
- El orden de los vértices no es 4.
- No tiene una cenefa de triángulos como caras laterales.
Quiero decirle que no es pirámide.
- No tiene sólo una base.
Quiero decirle que es prisma.
- En cada vértice concurren 3 polígonos.
- Tiene dos bases.
Quiero decirle que es oblicuo.
- La altura no cae dentro del prisma.
- Sus caras no son perpendiculares a las bases.
- Sus aristas tampoco lo son.
Quiero decirle que tiene base triangular.
- Tiene 6 vértices.
- Tiene 9 aristas.
- Tiene 5 caras.
YO CREO QUE YA ESTÁ CLARO
Es oblicuo.
Su base es un triángulo equilátero.

E2: Prisma recto de base hexagonal y regular. Todas sus caras laterales son iguales y son rectángulos.
1) Quiero decirle que es poliedro.
Tiene vértices y aristas.
No tiene caras curvas.
2) Quiero decirle que es un prisma.
Sus bases se unen mediante rectángulos.
Sus bases son un hexágono regular.
3) Quiero decirle que es un prisma recto.
Las aristas laterales son perpendiculares a las bases.
Tiene por lo menos dos caras, están opuestas.
4) Quiero decirle algo sobre las diagonales.
Que todas las diagonales que pasan por el centro tienen la misma longitud.
Las diagonales del espacio caen dentro del sólido.
5) Quiero decirle que es convexo.
No tiene entrantes.

Estas propuestas muestran que los niños intentaron seguir las instrucciones que les habíamos dado con mayor o menor éxito. La propuesta de E1 la aprovechamos para remarcar que si bien los otros dos niños ya habían descubierto que se refería al prisma de base un triángulo equilátero cuando ella había indicado que pensaba que ya estaba claro, nosotros pensábamos que ese prisma también podía tener por base un triángulo escaleno, o un triángulo isósceles. Entonces respondió: "¡Ah! pues entonces digo las que había puesto para que sólo se confirmara y ya sabes que es la base ese triángulo". Cabe destacar cómo el que los estudiantes seleccionaran el prisma de base regular cuando aún no se tenían datos para ello, o que se pensase que ya quedaba claro el prisma al que se referían, resalta una vez más que los prismas de bases regulares tienen más peso en el objeto mental de una familia de sólidos que los de bases irregulares. También cuestionamos si ya quedaba claro que el prisma era convexo y entonces E1 respondió: "Si es triángulo, es que no puede ser. No puede ser cóncavo". Le preguntamos si había pensado en ello y que por eso no nos había dicho de ninguna manera que era convexo y respondió: "Pues no... Es que está tan claro que es convexo que no he pensado en decirlo, si hubiera sido cóncavo pues claro que no se me habría olvidado". Esta respuesta apunta hacia la hipótesis de que los estudiantes no sienten necesidad de decir que los sólidos pertenecen a la subfamilia (de las dos dicotómicas que pueden establecerse con un criterio dado) que más peso tiene en su objeto mental, y sin embargo no olvidan señalar las propiedades que conducen a las subfamilias dicotómicas con menos peso (por ejemplo, que es prisma oblicuo, o que es prisma cóncavo, o que tiene las bases con lados distintos, etc.).

Una de las conclusiones que podemos sacar de estas respuestas es que los estudiantes que tienen poco dominio de la mayoría de las características asociadas al nivel 2, cuando se les plantea esta actividad, a pesar de intentar seguir las instrucciones dadas, lo que hacen tiene que ver con la descripción del modelo concreto. Como puede observarse en la propuesta de E2, de inmediato se hace referencia a la forma del polígono de las bases, y se incluye en la lista, asignada a una subfamilia (la de los prismas rectos) una propiedad que cumplía el modelo elegido y que también verifican todos los prismas: tiene por lo menos dos caras que están opuestas. Al final de este apartado haremos referencia a estas propuestas de nuevo al comentar la información que pueden aportarnos este tipo de actividades.

Las actividades para la fase 5. Los estudiantes con los que realizamos nuestras experimentaciones se plantearon y resolvieron varias actividades-adivinanza, bien porque ellos seleccionaban las listas de propiedades para que otros compañeros descubriesen el sólido, bien porque nos pedían a nosotros otras listas para que ellos averiguasen el sólido. Estas actividades, junto con las otras que hemos propuesto aquí, para la fase 5 del nivel 2, resultan especialmente apropiadas para esta fase de integración; las familias y subfamilias de sólidos y sus propiedades se presentan juntas. Permiten repasar repetidamente la gran variedad de propiedades de familias y subfamilias de sólidos y todas las relaciones que hay entre las familias y subfamilias. El aprenderlas sin más para poder utilizarlas en otras cuestiones, exige de gran cantidad de memoria.

Además estas tareas pueden informarnos del logro conseguido para varias características asociadas al nivel 2 y de si todavía se presentan dificultades y errores de diferentes tipos; con ellas podremos averiguar si las propiedades que tienen un fuerte componente visual se identifican correctamente o no; si aún se tiene en cuenta parte de una figura en vez de toda ella; cómo se aplican las ideas que se tienen sobre algunos conceptos en los que hay implicados otros conceptos; si se distingue los diferentes tipos de ángulos y de diagonales; las subfamilias que tienen más peso en el objeto mental correspondiente y las subfamilias para las que su objeto mental es menos rico.

Para aclarar lo que acabamos de decir vamos a apoyarnos en las respuestas de los estudiantes que hemos indicado en los apartados anteriores bien para descubrir el sólido, bien para diseñar las propiedades que hay que enumerar.

Las respuestas del estudiante E2 (niño de 12 años) que indicamos en el primer protocolo sobre actividades-adivinanza ponen de manifiesto que este estudiante:

- Todavía asignaba propiedades de una familia sólo a una subfamilia de ella; asoció a los prismas convexos una propiedad que cumplen los sólidos (la propiedad 3). El estudiante nos aclaró posteriormente que "sólo los convexos son así... no tienen metido así... para adentro". La palabra perfectamente que aparecía en la propiedad (es un modelo cerrado que encierra perfectamente un espacio) es la que había dificultado su identificación como propiedad de los sólidos. Asimismo, identificó las propiedades 7 y 8 (tiene las aristas laterales iguales y paralelas) como propiedad de los prismas rectos.

- Aún no tenía un dominio completo del vocabulario geométrico (consideró un tipo de ángulos en vez de otros) y para algunas propiedades tenía en cuenta sólo parte de la figura en vez de toda ella Por ejemplo, en la propiedad 14 (los ángulos que forman las caras son menores que 180°) consideró los ángulos de las caras laterales en vez de los ángulos diedros y además sólo se fijó en los ángulos de las caras laterales.

- Cuando en un concepto están implicados otros elementos tenía dificultad para considerar todos ellos. Por ejemplo, en la propiedad 16 (tiene todos los vértices iguales) sólo consideró los ángulos de las caras laterales. Sus comentarios posteriores nos aclararon que aunque no lo había hecho explícito en el papel, había tenido como referencia sólo la familia de los prismas rectos de base regular (la familia que más peso tenía en su objeto mental correspondiente) y que en vez de responder a una tarea de delimitar familias que cumplen una propiedad dada, lo que respondía era a una tarea de descripción de un modelo que tenía en la mente como la solución.

Cuando el otro niño le hizo ver que "la base también está en el vértice", respondió: "Sí, pero en todos es igual, ¿no? [mostró un prisma recto de base regular]".

- Todavía tenía una idea muy común entre los estudiantes: que el que las caras sean de una familia quiere decir que son iguales. La respuesta a la propiedad 17 (tiene todas las caras laterales iguales) lo refleja.

- Tenía un objeto mental bastante pobre para las familias específicas (ver las respuestas de E2 a 18 y 19).

Por otro lado, las respuestas del estudiante E1 (niño de 12 años) a estas actividades proporcionan evidencia de que algunos estudiantes que se mueven con dominio en este tipo de tareas todavía no pueden delimitar o rechazar las subfamilias específicas de las pirámides y bipirámides que verifican propiedades relativas a igualdad o paralelismo de pares de caras. Como puede verse en las respuestas de E1 a las propiedades 4 y 5, se dejaba o eliminaba toda la familia según si la subfamilia que tenía más peso en el objeto mental de la familia correspondiente la cumplía o no. También cabe comentar cómo en algunas de sus respuestas (ver la respuesta de E1 a la propiedad 4) se refleja la idea de que sólo podían verificar las propiedades las familias de sólidos estudiadas.

En las experimentaciones también observamos, y los dos protocolos que presentamos lo muestran, que los estudiantes no tienen dificultad para hallar el número de caras, vértices y aristas de los modelos, ni para hallar el número de lados del polígono de las bases de un prisma cuando se conoce el número de aristas o de vértices, y que este tipo de propiedades tienen un gran peso en el objeto mental correspondiente. Cuando los niños diseñaban las propiedades que se iban a enumerar para que otros compañeros descubriesen el sólido, en la lista estas propiedades siempre aparecían en los primeros lugares. Y a pesar de que indicamos que antes de dar a conocer la forma del polígono de las bases se enumerasen propiedades que aportasen información sobre que el modelo pertenecía a otras subfamilias (rectos u oblicuos, cóncavos o convexos, de bases regulares o irregulares, etc.), algunos estudiantes apenas tuvieron en cuenta esta observación. La propuesta de E2, en las que ya se da en segundo lugar la información del polígono de la base, es una muestra. La explicación que podemos dar se encuentra en la preferencia que sienten los estudiantes por moverse en el terreno donde se sienten más seguros. Una vez que se conoce la forma del polígono de la base ya se puede estar describiendo un ejemplo concreto; tarea en la que los estudiantes se mueven con bastante soltura.

2.6. PROPUESTA DE ENSEÑANZA DE LOS SÓLIDOS PARA EL NIVEL 3 (CLASIFICACIÓN)

Para seleccionar y organizar la unidad de enseñanza propuesta para el nivel 3, tal como hemos aclarado en el apartado 2.3.3, que ahora vamos a precisar para este nivel, hemos examinado conjuntamente:

- Lo apuntado en el apartado 1.4.3 sobre cómo se van ampliando los objetos mentales de los conceptos geométricos implicados en los sólidos.

- Lo establecido en la sección 1.4 relativo al tercer nivel. En la unidad de enseñanza se ha traducido en que planteamos tareas que se refieren a los componentes básicos del razonamiento del tercer nivel de Van Hiele: la capacidad de hacer clasificaciones lógicas de figuras y de relacionar familias en términos de propiedades; la capacidad de definir familias de sólidos y de demostrar, apoyándose en la experimentación, y de manera lógico-deductiva, propiedades de familias de sólidos nuevas o ya conocidas. Otras tareas, al igual que las propuestas para el nivel 2, tienen que ver con descubrir y enunciar propiedades de familias de sólidos, o se refieren a relaciones entre conceptos; en particular, a la igualdad de vértices, la igualdad de poliedros y la relación de los poliedros por dualidad. Las matizaciones que apuntamos en el apartado 1.4.1 sobre lo que corresponde a este nivel o al nivel 2 están reflejadas en las propiedades que examinamos y en cómo se tratan las relaciones de familias y las demostraciones.

Como resultado proponemos la unidad de enseñanza que relatamos en los apartados siguientes.

OBJETIVOS

Las tareas que planteamos para este nivel tienen el propósito de ampliar los objetos mentales que los estudiantes se han formado con las tareas propuestas para el primer y segundo nivel y de aumentar su capacidad de razonamiento geométrico. Para ello proporcionamos técnicas que permiten desarrollar las características generales que hemos señalado en el apartado 1.4.1 para este nivel. Al mirar estas características desde la metodología podemos asociarles los objetivos que vamos a matizar a continuación y a desglosar después en las diferentes fases de aprendizaje.

1.– Trabajar con clasificaciones-particiones establecidas con criterios que centran la atención en la regularidad o igualdad de todas las caras.

2.– Utilizar varios criterios de clasificación para establecer familias de sólidos cada vez más específicas y establecer clasificaciones inclusivas. Aplicar las inclusiones que hay entre los grupos de propiedades de determinadas familias de sólidos para establecer relaciones entre ellas.

3.– Trabajar que la organización de las familias no es única y que del tipo de clasificación que se haga (particiones o clasificaciones inclusivas) van a depender, los modelos que la representan, el diagrama que relaciona las familias y las propiedades o definiciones que se dan para las familias establecidas.

4.– Interpretar, utilizar y negar cuantificadores y expresiones del tipo *como mucho, como mínimo, tantas medidas diferentes como, las mismas medidas diferentes que,* para enumerar o aplicar propiedades de familias de sólidos. Evaluar si la negación de una propiedad de una familia es propiedad de la familia dicotómica.

5.– Descubrir propiedades de varias familias y propiedades de una familia de sólidos que no cumplan otras. Aplicar relaciones de inclusión entre familias para simplificar una determinada tarea.

6.– Establecer relaciones entre conceptos. Descubrir las características de éstos a partir de ejemplos y precisar la idea que uno se forma de ellos al ampliar el mundo de posibles ejemplos. Establecer relaciones métricas en modelos de pares de poliedros duales.

7.– Obtener y justificar el nombre-definición (arbitrario) que podemos utilizar para denominar familias de sólidos muy específicas. Formular, utilizar, analizar y elaborar definiciones formales de familias de sólidos. Aceptar formas equivalentes de una definición. Modificar definiciones para una clase de sólidos.

8.– Establecer relaciones entre las propiedades de una familia de sólidos dada. Deducir unas propiedades de otras (implicaciones de un solo paso).

9.– Demostrar con métodos ligados a la experimentación, con razonamientos deductivos informales (usando implícitamente reglas lógicas), propiedades o relaciones de las familias de sólidos, descubiertas en este nivel o en los anteriores.

10.– Realizar demostraciones de pocos pasos relacionadas con los sólidos. Distinguir los resultados obtenidos en una familia para los que también puede deducirse un resultado análogo en la familia dicotómica de los que no conducen a resultados análogos en esta familia.

11.- Explicar los pasos que se han dado en una demostración formal relacionada con los sólidos (realizada por el profesor) o relativa a la equivalencia de varias definiciones.

COMENTARIOS

Los objetivos que se refieren a la clasificación. Los tres primeros objetivos que hemos señalado para el tercer nivel de razonamiento se refieren a la clasificación de poliedros.

El objetivo 1 plantea la necesidad de trabajar las clasificaciones particiones. Este era también un objetivo del nivel 2; ahora centramos la atención en las familias dicotómicas establecidas con los criterios que centran la atención en la regularidad o igualdad de todas las caras, mientras que en el nivel 2 centrábamos la atención en las familias dicotómicas establecidas con criterios visuales o con criterios que centraban la atención en la regularidad de las bases.

La pertinencia de trabajar estas clasificaciones en este nivel viene avalada por las experimentaciones realizadas con los estudiantes de Magisterio. Cuando se les pedía que, por ejemplo, se estableciese la familia dicotómica de los prismas de caras regulares (PCR) con frecuencia se nombraba la "de los prismas que no tienen ninguna cara regular". Sin embargo, cuando pedíamos que se incluyera un prisma de base regular genérico (modelo que tiene dos medidas para las aristas) en una de las familias establecidas, se incluía como ejemplo de la familia nombrada, por lo que era la expresión verbal de la propiedad lo que teníamos que revisar. El objetivo 1 hace referencia a la necesidad que hay de trabajar con los estudiantes que con la propiedad señalada para caracterizar la familia dicotómica con la de PCR, (con los prismas de caras iguales, PCI, ocurre lo mismo), los ejemplos presentados (que tienen alguna cara regular, o algunas caras iguales, pero no todas ellas), no podrían incluirse en ninguna de las familias establecidas. Hay que trabajar pues cómo se niega las expresiones del tipo: "tener todas las caras regulares" o "tener todas las caras iguales".

También dirige la atención sobre que hay que tratar cómo se niega la regularidad de polígonos, al establecer los prismas de base regular e irregular. Muchos estudiantes señalan "que los prismas de bases irregulares tienen lados y ángulos diferentes". Hay que presentar modelos con bases que tengan sólo los ángulos o los lados iguales y plantear en qué familia se incluyen para llamar la atención sobre cómo negar la condición de regularidad de la base.

Los objetivos 2 y 3 se refieren a las diferentes clasificaciones que hemos establecido en el nivel 2, sólo que ahora la relación de familias vamos a establecerla en términos de propiedades. Dado que la inclusión que existe entre los grupos de propiedades es la inversa que la que existe entre las familias en términos de ejemplos, a este problema hay que dedicar atención especial ya que presenta grandes dificultades para los estudiantes.

El objetivo 3 relaciona el problema de la clasificación con el de la representación, la descripción y la definición. Pretende que mostremos a los estudiantes que entre familias dadas (por ejemplo, el cubo, ortoedro, romboedro y paralelepípedo), al margen de lo que hayamos hecho en las actividades del nivel 2 (que las hemos considerado como clasificaciones inclusivas), se pueden establecer clasificaciones que son particiones o clasificaciones inclusivas. Se trata de hacer ver de qué manera condiciona la clasificación al diagrama que se hace para representarla, a las propiedades que se indican de las familias y a las definiciones que se dan de ellas. Este objetivo también centra la atención sobre que se trabaje lo inverso: cómo las definiciones que se dan de determinadas familias, o las propiedades que se indican de ellas, reflejan el tipo de clasificación que se está considerando. Se tiene que llegar a comprender que uno no se tiene que aprender las propiedades o las definiciones de las familias de memoria, y que éstas reflejan el tipo de clasificación que se establece.

Los objetivos 4 y 5. Descubrir y enunciar propiedades de familias de sólidos. Estos objetivos, al igual que los del nivel 2, tienen que ver con descubrir y expresar propiedades de familias de sólidos, pero en este nivel los objetivos se refieren a trabajar los términos del tipo, como mucho, como mínimo, etc. y a descubrir propiedades de varias familias o propiedades de una familia que no son propiedades de otras. Remitimos a los comentarios que hacemos en el apartado 1.4.1 de los que se desprenden otros aspectos sobre los que centran la atención estos objetivos.

El objetivo 6. Las relaciones entre conceptos. En particular este objetivo se refiere a la igualdad de vértices, la igualdad de poliedros y la relación de los poliedros por dualidad (concepto que tenemos que introducir previamente). Ya en las actividades de los niveles 1 y 2 hemos remarcado las relaciones que existen entre determinados poliedros e incluso hemos construido varios modelos que relacionan pares de poliedros. En este nivel retomamos alguno de ellos con varios propósitos:

- Descubrir las características de otros poliedros que forman el modelo o que se pueden obtener a partir de él. Descubrir relaciones entre todos los poliedros implicados en un modelo dado.

- Construir modelos que impliquen varios poliedros, hallando previamente las relaciones métricas entre las aristas de los poliedros implicados.

- Introducir el concepto de la dualidad de poliedros a partir de modelos formados por pares de poliedros. Descubrir las características de este concepto (de dualidad de poliedros).

- Revisar la idea que nos hemos formado del concepto de dualidad de poliedros al aparecer un modelo de pares de poliedros duales que no verifica alguna de las características mencionadas para este concepto. Reflexionar sobre cómo se van formando las ideas de los conceptos.

Este objetivo centra la atención sobre cómo se aprovecha el concepto de dualidad de poliedros para que el estudiante que razona en este nivel pueda, por ejemplo, establecer las propiedades que explican que dos sólidos son duales (están relacionados por dualidad), o para establecer relaciones métricas entre pares de poliedros duales que están colocados de una determinada manera. Pero lo fundamental que pretende remarcar, como muestra también la otra relación entre conceptos que consideramos (la relación de igualdad para vértices y para poliedros), no tiene que ver con la enumeración de características que caracterizan a un concepto, sino con la construcción del objeto mental del concepto. La igualdad entre vértices y entre poliedros y el concepto de dualidad de poliedros los utilizamos como base para remarcar que los objetos mentales de los conceptos se van ampliando y sus ideas se van precisando a medida que se van encontrando otros posibles ejemplos que nos obligan a ello.

Los objetivos 7 a 11. Sobre la definición y demostración. Estos objetivos se refieren a la capacidad de definir familias de sólidos y de realizar demostraciones de las que hemos señalado en el apartado 1.4.2 para este nivel.

Los diferentes objetivos que hemos precisado muestran de una manera más minuciosa el proceso de iniciación y desarrollo que proponemos para abordar estos procesos matemáticos. Se debe empezar con situaciones accesibles a los estudiantes para que lleguen a tener la experiencia necesaria para progresar en su adquisición del razonamiento del tercer nivel. Así por ejemplo, para el proceso de definir, el objetivo 7 sugiere que primero se proponga que se elaboren los nombres de algunas familias de sólidos, cuyo nombre-frase contenga todas las propiedades que las caracterizan, se continúe identificando conjuntos diferentes de propiedades que caracterizan a una clase de sólidos y se compruebe que son necesarias y suficientes, y se finalice el trabajo formalizando diferentes definiciones para una misma familia de sólidos. El objetivo 8 hace referencia a la deducción de implicaciones de un solo paso: deducción de unas propiedades a partir de otras. Y este problema está relacionado con la definición y la demostración. Los objetivos 9 a 11 dan una visión más puntual del proceso de iniciación y desarrollo que sugerimos para la demostración y que detallamos en las actividades que proponemos para las fases 2 y 4 de este nivel.

2.6.1. NIVEL 3. FASE 1

En todas las experimentaciones realizadas hemos comenzado a desarrollar el estudio de los sólidos con las actividades que proponemos para los niveles anteriores a éste, por lo que ha sido innecesario realizar actividades específicas que tengan como propósito averiguar el conocimiento que tienen los estudiantes sobre los sólidos o para dar información sobre lo que va a ser objeto de estudio. Es por esto por lo que la tarea que vamos a presentar a continuación para esta fase, para cuyo diseño hemos considerado esta situación, no incluye actividades que tengan estos propósitos; sólo contiene una tarea que pretende mostrar *una manera de hacer* que ya se ha introducido con las tareas de los niveles anteriores.

Si se empieza a trabajar en este momento con los sólidos, el profesor sí que debe comprobar qué conocimientos tienen sus estudiantes y cuál es su nivel de razonamiento, por lo que el bloque de actividades de esta fase debe incluir, además de la que proponemos, otras actividades de las diferentes fases de los niveles anteriores (del nivel 1 y del nivel 2) y algunas de este nivel. Así, el profesor puede conocer el nivel de razonamiento de los estudiantes a la vez que éstos toman contacto con el material objeto de estudio y con la manera de trabajar. Si los estudiantes tienen conocimientos del tema pero tienen alguna carencia concreta, por ejemplo, con respecto a los polígonos o a las relaciones entre familias de sólidos, hay que darles una instrucción adecuada antes de empezar a trabajar con las actividades que proponemos para este tercer nivel. Para facilitar la selección de tareas que habría que proponer en este caso para esta fase, hemos considerado esta situación a la hora de describir sus objetivos.

OBJETIVOS

1.- Informar sobre los conocimientos previos que tienen los estudiantes sobre las familias y subfamilias de los sólidos que hemos establecido en los niveles anteriores; es particular sobre sus propiedades y sobre las relaciones entre ellas.

2.- Informar sobre los conocimientos que tienen los estudiantes sobre la igualdad de vértices y sobre la manera de razonar para ir precisando las ideas que se tienen sobre algunos conceptos (en particular la igualdad de vértices).

3.- Proporcionar una unidad de enseñanza complementaria sobre descripción de familias y subfamilias de sólidos o sobre relaciones de familias de sólidos (en términos de ejemplos), si fuera necesario.

TAREAS

T-1 a) Pedir que se precise lo que se entiende por vértices iguales. Indicar que se puede utilizar material comercializado o dibujos y apoyarse en ellos al explicar las respuestas.

b) Preguntar qué se entiende cuando se indica que dos caras son iguales y cuando se señala que dos caras son del mismo tipo. Mostrar dos polígonos iguales y dos polígonos de la misma familia y para cada par preguntar si son iguales o no y si son o no del mismo tipo.

Plantear cuestiones análogas para *vértices iguales* y *vértices del mismo orden.*

c) Mostrar vértices de algunos poliedros regulares y pedir que se compare la idea de vértices iguales que se ha indicado en T-1a con la que se desprende de los ejemplos que presentamos.

d) Construir pares de vértices con material comercializado y cuestionar: ¿Pueden construirse pares de vértices iguales utilizando para ello más de un tipo de polígonos? Juntando los mismos polígonos, ¿se pueden obtener vértices diferentes?

Pedir que se construyan vértices utilizando 4 polígonos regulares (por ejemplo, 2 cuadrados y 2 triángulos equiláteros). Preguntar si es posible obtener vértices distintos juntando los mismos polígonos en cada vértice.

e) Indicar que cuando en dos vértices coinciden los mismos polígonos, con los mismos ángulos y están dispuestos de la misma manera, los vértices son iguales. Luego pedir que se busquen ejemplos de vértices iguales de manera que los polígonos que se junten en los vértices no sean regulares.

Si se presentan ejemplos de vértices iguales que no verifican la idea dada para este concepto, pedir que se precise ésta para que incluya los posibles ejemplos que se han quedado fuera.

COMENTARIOS

La relación de igualdad entre vértices. El modo de hacer. Aportaciones de las experimentaciones. La tarea T-1 tiene como objetivo fundamental mostrar a los estudiantes cómo se van precisando las ideas de los conceptos cuando éstos se introducen a partir de ejemplos. De ahí que esta tarea sea muy adecuada para esta fase, pues como ya hemos señalado, uno de los objetivos de ella es introducir las nuevas maneras de hacer.

También queremos advertir, que aún proponiendo actividad para que se desarrollen las características asociadas al nivel 3, recurrimos al material comercializado para construir posibles ejemplos o no ejemplos de vértices iguales; modo de trabajar que también sugerimos para algunas tareas de las otras fases de este nivel, con objeto de que los estudiantes puedan apoyarse en los ejemplos construidos para conjeturar o comprobar las predicciones que hagan.

Antes de comenzar con el problema de afinar el concepto de vértices iguales, que es el objetivo de las actividades T-1c a T-1e, en la actividad T-1a pedimos una idea de este concepto y en la actividad T-1b planteamos algunas cuestiones que centran la atención en la diferencia entre pares de conceptos: caras iguales y caras del mismo tipo; vértices iguales y vértices del mismo orden.

Ya hemos comentado al finalizar el apartado anterior que las experimentaciones realizadas han informado de que algunos estudiantes aplican la misma idea para ambos conceptos del par. La actividad pretende que se trate de nuevo que si los polígonos son iguales serán de la misma familia (del mismo tipo) pero si son del mismo tipo pueden ser iguales o no. Y que si dos vértices son iguales serán del mismo orden, pero que porque sean del mismo orden no quiere decir que vayan a ser iguales.

Si la idea de vértices iguales con la que se comienza es la que puede surgir de los ejemplos que indicamos en la actividad T-9c, dos vértices son iguales si se juntan polígonos regulares iguales y en ambos vértices los polígonos son del mismo tipo, el profesor tiene que estar preparado para responder a las posibles cuestiones que pueden plantear los estudiantes, sobre si son ejemplos o no, algunos modelos que pueden construir. Las actividades T-9c a T-9e pretenden que, por un lado, surjan como objeto de discusión ideas erróneas que algunos estudiantes tienen sobre este concepto cuando se introduce de esta manera (a partir de ejemplos muy específicos) y, por otro, los modelos que en otras experimentaciones realizadas han provocado actividad.

El introducir este concepto a partir de los poliedros regulares lleva a menudo a una idea de vértices iguales en la que se incluye como condición que los polígonos que forman cada uno de los vértices tienen que ser de la misma familia. En este caso, hay que aclarar que no se comparan entre ellos los polígonos que forman un vértice sino que se comparan, y se observa si son iguales o no, los ángulos de los polígonos que hay en un vértice con los corrrespondientes que hay en el otro.

Modelos que provocan una gran actividad para esta tarea, bien porque no se incluyen como ejemplos en el objeto mental, aunque sí verifican la idea precisada hasta el momento, bien porque se incluyen como ejemplos, sin verificar la idea expresada, son los que se discuten en la conversación siguiente, que tuvo lugar cuando planteamos estas actividades a estudiantes de 3ºC de Magisterio. Si al abordar las actividades T-9d y T-9e en clase no los introducen los estudiantes, aconsejamos que sea el profesor el que lo haga y la conversación transcrita puede servirle de guía para dirigir la actividad.

Se acaba de plantear la actividad T-1d. El estudiante E1 responde a la primera cuestión y el estudiante E2 a la segunda:

E1: [Muestra un prisma recto de base regular]. Ya lo tengo. Tiene vértices iguales y en ellos se juntan polígonos de diferentes familias: rectángulos y la base. No es necesario que en un vértice los polígonos sean todos iguales para poder hablar de que es igual a otro. Lo que yo digo es que los polígonos de un vértice tienen que ser iguales a los de otro vértice.

E2: [Muestra el romboedro]. Verifica la primera idea, que se juntan los mismos polígonos pero los vértices no son iguales. Hay que decir más cosas. Si los ángulos no son iguales no vale.

P: Vamos a continuar ahora a partir de la idea siguiente: dos vértices son iguales si los polígonos de un vértice son iguales a los de otro vértice. ¿Basta con esta condición o pensáis que hay que añadir alguna?

E2: [Muestra un prisma recto de base con ángulos distintos]. No basta. Mira... Cumple la idea, pero no tiene los vértices iguales. Hay que añadir además de que lo formen los mismos polígonos, que se junten con los mismos ángulos, porque si son distintos, el vértice del sólido resultante por cada vértice del polígono, no es el mismo aunque siempre se junten con dos rectángulos. Espera que lo digo bien... Según con qué ángulo concurra el vértice de la base, sale un vértice u otro en este prisma recto (aunque siempre hay dos rectángulos en las caras laterales).

Después de haber leído la tercera cuestión de T-1d otro estudiantes que continuaba con el problema de precisar la idea de vértices iguales señaló:

E3: Oye... Mira... Lo de antes aún no está bien. Dos vértices formados con 2 cuadrados y dos triángulos equiláteros que responden a los modelos Así... seguidos los iguales y uno sí otro, uno, otro. [se refiere a que responden al esquema CTCT y CTTC, esto es, los de la misma familia van seguidos o están alternados] cumple todo lo que has dicho tú también pero no son iguales. Tampoco esa vale. Hay que añadir que estén colocados con la misma regla, si por ejemplo es TCTC, siempre es alternativo.

P: Vale pues por ahora la idea de vértices iguales puede quedar como: dos vértices son iguales si se juntan los mismos polígonos, con los mismos ángulos y dispuestos exactamente de la misma manera.

En alguna de nuestras experimentaciones todavía continuamos afinando nuestra idea de igualdad de vértices ya que algunos estudiantes propusieron los modelos siguientes como objeto de discusión:

E4: [En un prisma recto con forma de E señaló varios vértices iguales (y también diferentes) en los que los rectángulos que los formaban no eran iguales. El estudiante lo mostró intentando que jugase el mismo papel que los que ya se habían discutido antes]. Mira, ya me he encontrado otro que no vale. Aquí no se cumple que tenga polígonos iguales en los dos vértices porque este rectángulo es más grande que éste. Y los vértices son iguales, ya que en ellos se juntan 3 ángulos rectos.

E5: [Mostró un vértice formado con 4 rombos, con los ángulos de 60°, y otro vértice en el que se juntaban 4 triángulos equiláteros]. Son vértices iguales pero tampoco están formados por los mismos polígonos. Tampoco responde a la idea que tenemos. Parece que los vértices iguales van a cumplir lo de antes, pero hay muchos más que no lo cumplen. Esa idea no coge todos los ejemplos.

Estos modelos los comparamos con los que ya habían introducido antes y los utilizamos para remarcar el diferente papel que jugaban unos modelos y otros. Mientras que algunos correspondían a no ejemplos de vértices iguales que sí que verificaban la idea dada, otros respondían a ejemplos del concepto que no verificaban la idea dada para él. Mientras que en el primer caso podíamos continuar añadiendo condiciones a la idea que se tenía para que se excluyeran los casos que no eran ejemplos; en el segundo caso, teníamos dos opciones: o nos quedábamos con que la idea que teníamos para vértices iguales no proporcionaba todos los ejemplos posibles (sólo facilitaba un "trocito" de su mundo de ejemplos) o abordábamos entonces la tarea de elaborar una idea nueva sobre vértices iguales que incluyera todos los ejemplos encontrados hasta entonces.

La que intentaron expresar los estudiantes era muy farragosa y con muchas condiciones, fuimos nosotros los que sugerimos cómo dar una idea de igualdad de vértices con una única condición: para que dos vértices sean iguales, los polígonos verticiales han de ser iguales; por lo que tuvimos que dar también una idea de polígono verticial.

Si al abordar estas actividades en clase se quiere continuar con esta actividad una idea de polígono verticial que se puede dar puede ser la que lo ve como un polígono que se obtiene como sección al truncar el vértice del poliedro por planos perpendiculares al eje de rotación que pasa por ese vértice. Y si se quieren incluir poliedros que no sean invariantes por giros, se puede considerar la sección obtenida por una esfera centrada en el vértice que tiene un radio suficientemente pequeño.

Si queremos ganar confianza con la idea de vértices iguales a la que hemos llegado, podemos ir más lejos e introducir los poliedros estrellados. Para estos poliedros también nos sirve la última idea dada sobre vértices iguales, a pesar de que en ellos las caras pueden intersectarse. Una vez aclarado lo que se entiende por caras, vértices y aristas de estos poliedros, haremos ver que, dado que las caras de los poliedros estrellados pueden intersectarse en los vértices, este polígono en estos poliedros también refleja si los vértices son iguales o no; pues refleja, además del número de caras que concurren en el vértice, cómo están dispuestas las caras alrededor de él, si se intersectan o no.

2.6.2. NIVEL 3. FASE 2

Las tareas propuestas para la fase 2 del nivel 3, al igual que las propuestas para el nivel 2, se refieren a descripciones de subfamilias de sólidos; a relaciones de inclusión, exclusión o solapamiento que hay entre ellas y a otras relaciones que hay entre poliedros. En el apartado 1.4.1, así como en los comentarios que hacemos sobre las tareas propuestas en este apartado, explicamos lo que diferencia las actividades propuestas para uno y otro nivel. Para esta fase también proponemos otras tareas relativas a propiedades, bien porque hay que enumerarlas teniendo en cuenta varias subfamilias de sólidos, porque hay que seleccionar un conjunto "más o menos" mínimo, o porque hay que hacer demostraciones. Estas tareas se refieren a descripción, definición y demostración con el significado que asignamos para este nivel a estos términos en el apartado 1.4.2.

OBJETIVOS

Las tareas propuestas para esta fase tienen como propósito que los estudiantes amplíen sus objetos mentales de las subfamilias de sólidos que ya se han tratado con las tareas propuestas para las fases de los niveles anteriores, incorporando propiedades enunciadas de manera matemáticamente correcta; otras relaciones entre familias de sólidos, entre sólidos concretos o entre propiedades; conceptos generados por el proceso de definir, etc. Asimismo pretenden que se vayan logrando las características que hemos indicado en el apartado 1.4.1 para el nivel de razonamiento 3 y que vamos a matizar a continuación.

1.– Establecer clasificaciones-particiones, considerando propiedades geométricas y con varios criterios de clasificación.

2.– Aplicar que la inclusión que hay entre familias de sólidos es la inversa que la inclusión que hay entre sus grupos de propiedades para establecer relaciones de familias en términos de propiedades.

3.– Comprender que los diagramas que relacionan familias y las propiedades o definiciones para ellas reflejan el tipo de clasificación (inclusiva-exclusiva) que se establece y a la inversa. Delimitar el tipo de clasificación (inclusiva-exclusiva) que se hace entre determinadas familias de sólidos cuando se dan propiedades o definiciones de ellas o el diagrama que representa las relaciones entre ellas. Enumerar propiedades y definiciones de familias de sólidos para que respondan a un tipo de clasificación dada.

4.– Utilizar y negar cuantificadores y términos del tipo *como mucho, como mínimo, tantas medidas diferentes como, las mismas medidas* *diferentes que,* para enumerar propiedades de familias de sólidos. Decidir si la negación de una propiedad de una familia es propiedad de la familia dicotómica.

5.- Descubrir propiedades comunes a pares de familias y propiedades de una familia que otra no las verifique. Aplicar relaciones de inclusión entre familias para simplificar una determinada tarea.

6.- Establecer cuando dos poliedros son duales a partir de los poliedros regulares. Precisar la imagen de este concepto al ampliar el mundo de posibles ejemplos.

7.- Obtener y justificar el nombre-definición (arbitrario) que podemos dar para familias de sólidos muy específicas. Justificar si determinados conjuntos de condiciones son suficientes para determinar una familia de sólidos dada.

8.- Establecer relaciones entre las propiedades de una familia de sólidos dada. Deducir unas propiedades de otras cuando corresponden a implicaciones de un solo paso. Comprender que si en una familia de sólidos se hace una deducción que conduce a un resultado, no supone que en la familia dicotómica con la dada se podrá deducir un resultado análogo.

9.- Demostrar informalmente con razonamiento deductivo y métodos ligados a la experimentación, demostraciones de pocos pasos relacionadas con los sólidos.

10.- Demostrar informalmente usando implícitamente reglas lógicas (por ejemplo, si $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow r$ entonces $p \rightarrow r$) y dirigidos por el profesor, propiedades o relaciones de las familias de sólidos, descubiertas en este nivel o en los anteriores.

TAREAS

T-1 a) Pedir que se haga una lista lo más corta posible que incluya las propiedades de los prismas rectos. Indicar explícitamente que se descubran propiedades que relacionen las diferentes medidas de un tipo de ángulos o de diagonales con las de otro tipo.

b) Pedir que se repita la actividad T-1a para los prismas oblicuos. Apuntar que si se determinan las propiedades de los prismas oblicuos a partir de las de los prismas rectos se centre la atención en cómo se niegan las propiedades de los prismas rectos y en si la negación de una propiedad de esta familia es propiedad de los prismas oblicuos o no.

c) Dar una lista de las propiedades de los prismas convexos (por ejemplo, la que indicamos en el anexo 2) y pedir que se elabore otra lista con las propiedades de los prismas cóncavos. Apuntar lo indicado en T-1b adaptado a estas subfamilias.

d) Pedir que de las propiedades que hemos indicado para los prismas convexos se seleccionen las que verifican los antiprismas convexos y que se explique la respuesta. Pedir que de la lista obtenida se elijan las propiedades que verifican las pirámides convexas, las bipirámides convexas y, por ultimo, las de los poliedros convexos.

e) Pedir que de las propiedades que se han enunciado para los prismas cóncavos se seleccionen las que verifican los antiprismas cóncavos y que se explique la respuesta.

Plantear de nuevo la actividad para las pirámides, las bipirámides y para los poliedros cóncavos, partiendo de las propiedades de los prismas cóncavos. Apuntar que para las propiedades que se señalan como que dejan de cumplirse al cambiar el universo objeto de clasificación se busque un contraejemplo que lo demuestre.

T-2 a) Pedir que se haga una lista lo más corta posible que incluya las propiedades de los prismas de bases regulares (PBR). Dar como sugerencia que si se considera necesario, se utilice el término *como mucho* para enunciar algunas propiedades de esta familia.

b) Dar una lista para las propiedades de los prismas de bases regulares (por ejemplo, la que indicamos en el anexo 2) y pedir que se compare con la que se ha elaborado en T-2a. Para las propiedades que no se hayan señalado pedir que se explique si son o no propiedades de esta familia.

c) Plantear la actividad T-2a para los prismas de bases irregulares. Apuntar que si se determinan las propiedades de esta familia a partir de las de los prismas de bases regulares se centre la atención en cómo se niega la regularidad de polígonos.

d) Plantear las actividades T-2a y T-2c para los antiprismas, pirámides y bipirámides de bases regulares e irregulares.

e) Plantear las actividades T-2a y T-2b para los prismas rectos de bases regulares (PRBR).

f) Plantear la actividad T-2a para los antiprismas, pirámides y bipirámides rectos de bases regulares y para los prismas de caras laterales regulares (PCLR).

T-3 a) Plantear las actividades T-2a y T-2b para los prismas de caras regulares (PCR).

b) Plantear la actividad T-2a para los antiprismas, pirámides y bipirámides de caras regulares y para la familia de los prismas de caras iguales (PCI).

c) Dar una hoja en la que se han escrito las propiedades que indicamos en las dos columnas siguientes.

Propiedades de los prismas de caras iguales	**Negación de las propiedades de los prismas de caras iguales**
1) Todas las caras son iguales.	¬1) Hay por lo menos dos caras distintas.
2) Todas las aristas son iguales.	¬2) Hay por lo menos dos aristas distintas.
3) Como mucho hay dos medidas para los ángulos de las caras.	¬3) Hay más de dos medidas distintas para los ángulos de las caras.
4) Las diagonales de las caras se cortan perpendicularmente.	¬4) En una cara por lo menos las diagonales no se cortan perpendicularmente.
5) Las diagonales de las caras como mucho tienen dos medidas diferentes.	¬5) Hay más de dos medidas distintas para las diagonales de las caras.

Para cada propiedad de la columna de la derecha pedir que se indique si es o no propiedad de la familia de los prismas que no tienen todas las caras iguales (P¬CI) y que si la respuesta es negativa se de un contraejemplo que lo demuestre.

e) Plantear la actividad T-2a para los antiprismas, pirámides y bipirámides, de caras iguales.

f) Cuestionar si los elementos de la familia de los prismas de caras iguales tienen las caras regulares y si tienen los ángulos de los vértices iguales.

g) Cuestionar si los elementos de la familia de los prismas de caras iguales tienen todas las propiedades que cumplen los prismas de caras regulares.

T-4 a) Cuestionar si de todos los rombos que se pueden construir con 4 varillas iguales, el cuadrado es uno de ellos. Luego preguntar: ¿Qué es lo que varía en estos rombos? ¿Qué propiedades cumplen los rombos? ¿Qué propiedades cumple el cuadrado que no cumplen los restantes rombos? ¿Qué propiedades cumple el cuadrado?

b) Plantear cuestiones análogas a la T-4a para los rectángulos y el cuadrado.

c) Cuestionar si de todos los paralelogramos que se pueden construir, juntando los extremos de dos varillas unidas por el punto medio, el rombo, el rectángulo y el cuadrado son alguno de ellos. Luego preguntar: ¿Qué es lo que varía en los paralelogramos que se pueden construir? ¿Qué propiedades cumplen los paralelogramos? ¿Qué propiedades cumple el rombo que no cumplen los restantes paralelogramos? ¿Qué propiedades cumple el rombo? ¿Qué propiedades cumple el rectángulo que no cumplen los restantes paralelogramos? ¿Qué propiedades cumplen los rectángulos? ¿Qué propiedades cumple el cuadrado que no cumplen los restantes paralelogramos? ¿Qué propiedades cumplen los cuadrados?

d) Cuestionar si de todos los paralelogramos que se pueden construir con 4 varillas, iguales dos a dos, el rectángulo, el rombo y el cuadrado son alguno de ellos. Luego plantear preguntas análogas a las de T-4c.

e) Cuestionar si, de todas las cometas que se pueden construir, juntando los extremos de dos varillas, unidas perpendicularmente, de manera que una de ellas corta a la otra por el punto medio, el cuadrado y el rombo son alguna de ellas. Luego plantear para la cometa, el rombo y el cuadrado cuestiones análogas a las de T-4c

f) Pedir que se construya un trapecio isósceles y que en él se introduzcan sus diagonales. Preguntar cómo puede construirse el trapecio isósceles a partir de sus diagonales y las propiedades que tiene el trapecio isósceles.

Pedir que se explique si es correcta la afirmación siguiente: De todos los trapecios isósceles que podemos construir juntando los extremos de dos varillas iguales que se cortan de una determinada manera, el rectángulo es uno de ellos. Pedir que se enumeren las propiedades que cumple el rectángulo que no verifican todos los trapecios isósceles.

T-5 a) Recordar que se pueden establecer analogías entre los elementos del plano y del espacio. Luego plantear las siguientes cuestiones y pedir que se explique la respuesta: ¿Cómo se traducen algunas propiedades de las bases a los prismas correspondientes? ¿Qué propiedades de las bases no se pueden extender a los prismas correspondientes?

Pedir que se traduzcan las propiedades enumeradas para los diferentes cuadriláteros a los prismas rectos que tienen por bases el cuadrilátero correspondiente.

b) Pedir que se establezcan las relaciones de inclusión que existen entre las familias de prismas cuadrangulares tratadas con las actividades del nivel 2. Para cada una de estas familias pedir que se haga una lista lo más corta posible que incluya todas las propiedades de la familia correspondiente.

Indicar como sugerencia que una vez señalada una propiedad se verifique de nuevo si tal y como se ha enunciado deja fuera algunos ejemplos de la familia (de los más generales o los más específicos).

c) Pedir que indiquen propiedades del ortoedro que también lo sean de los prismas de bases trapecios isósceles y las propiedades del ortoedro que no lo sean de esta familia.

d) Plantear la actividad anterior para otros pares de familias de prismas cuadrangulares que tengan relación de inclusión. Para la segunda cuestión, como primera familia en unas actividades indicar la familia contenida y en otras la que la contiene.

T-6 a) Seleccionar pares de familias de prismas cuadrangulares que tengan relación de inclusión. Utilizando estos pares, formular afirmaciones del tipo: todos los A son B y todos los B no son A. Cuidar que unas sean correctas y otras falsas (porque es A el que está incluido en B o es B el que está incluido en A). Por ejemplo:

Todos los paralelepípedos son prismas trapezoidales pero todos los prismas trapezoidales no son paralelepípedos.
Todos los prismas rectos son prismas de caras regulares, pero todos los prismas de caras regulares no son rectos.

Pedir que, para cada afirmación, si es correcta se demuestre, y si es falsa, además de dar el contraejemplo, se arregle para que sea correcta, modificando los cuantificadores que intervienen o la manera de formular la relación.

b) Plantear la actividad T-6a para afirmaciones del tipo: no hay A que no sean B. Cuidar que algunas sean correctas (A está incluida en B) y otras sean falsas (se utilizan pares de familias que intersectan pero que no tienen relación de inclusión). Por ejemplo:

No hay prismas de caras laterales regulares que no sean rectos.
No hay prismas de caras laterales regulares que no sean convexos.

c) Plantear la actividad T-6a para afirmaciones de los tipos: no hay ningún A que sea a la vez B y C; no hay ningún A, excepto D, que sea a la vez B y C. Por ejemplo:

No hay ningún prisma que sea a la vez de caras laterales regulares y oblicuo.
No hay ningún prisma que sea a la vez paralelepípedo y prisma de base trapecio isósceles.
No hay ningún paralelepípedo, excepto el cubo, que sea a la vez ortoedro y prismas de bases cometas.

T-7 a) Seleccionar pares de subfamilias, de las establecidas en las actividades del nivel 2, que tengan relación de inclusión o que sean excluyentes. Enunciar afirmaciones como las siguientes:

Los prismas de caras laterales regulares son SIEMPRE, A VECES, O NUNCA prismas rectos.
Los prismas de bases regulares son SIEMPRE, A VECES, O NUNCA prismas cóncavos.

Pedir que se seleccione la palabra SIEMPRE, A VECES, o NUNCA que muestra la relación que existe entre las familias de sólidos que se consideran en la afirmación correspondiente y que se justifique la respuesta.

b) Plantear la actividad T-7b para afirmaciones como las siguientes:

Los paralelepípedos que no son romboedros son SIEMPRE, A VECES, O NUNCA prismas de bases cometas.
Los prismas de base cometa que no son romboedros son SIEMPRE, A VECES, O NUNCA prismas de bases trapecios.

T-8 a) Considerar los pares de familias dicotómicas establecidas con criterios visuales. Pedir que se haga una lista con las propiedades que cumplen ambas familias del par.

b) Plantear la actividad T-8a para pares de familias que se solapan, establecidas con diferentes criterios visuales. Por ejemplo, para los prismas convexos y los prismas rectos.

c) Plantear la actividad T-8a para pares de familias disjuntas, o incluidas una en otra, una de ellas establecida con criterios visuales y la otra con criterios que centran la atención en la regularidad o igualdad de todas sus caras, o de parte de ellas. Por ejemplo, para los prismas cóncavos y los prismas de caras iguales o para los prismas rectos y los prismas de caras regulares.

d) Plantear la actividad T-8a para pares de familias de prismas cuadrangulares que tengan relación de inclusión entre ellas. Por ejemplo, para el cubo y el ortoedro.

e) Plantear la actividad T-8a para pares de familias de prismas que intersecten pero no tengan relación de inclusión entre ellas. Por ejemplo, para los prismas de caras iguales y los prismas de caras regulares o para los paralelepípedos y los prismas de bases trapecios isósceles.

T-9 Para cada uno de los pares de familias que hemos delimitado en la tarea T-8 pedir que se haga una lista con todas las propiedades de la primera familia que no sean propiedades de la segunda.

T-10 Plantear las tareas T-8 y T-9 considerando subfamilias de los antiprismas, (pirámides, bipirámides).

T-11 a) Presentar modelos del tetraedro inscrito en el tetraedro, el cubo inscrito en el octaedro, el octaedro en el cubo, el dodecaedro en el icosaedro y el icosaedro en el dodecaedro (modelos que se muestran en la lámina VII del apartado 2.2.2). Para cada uno, pedir que se describan los poliedros implicados y que se señalen las relaciones que hay entre los elementos de estos poliedros.

b) Utilizar los modelos mencionados en T-11a para introducir el concepto de poliedros duales: los poliedros que están relacionados de esta manera se les llama *duales o recíprocos*[11] . Pedir que se indique cuál es el dual del tetraedro, del cubo, del octaedro, del dodecaedro y del icosaedro y que se explique la respuesta.

---

[11] La idea de dualidad se introduce sólo con ejemplos, sin dar ninguna definición. La imagen del concepto de *dualidad* que puede formarse a partir de estos ejemplos contendrá, con toda seguridad, junto con los atributos críticos, otros atributos no críticos, es decir, propiedades que cumplen los poliedros duales que se han usado como ejemplos —los platónicos—, pero que no se cumplen en general. En la lista de propiedades que se pueden enumerar como respuesta a esta actividad se incluirán atributos críticos y no críticos; cuando hablemos de dualidad en un mundo de poliedros más amplio que el de los platónicos (actividades T-12e y T-12f), será necesario seleccionar los atributos críticos.

c) Mostrar los modelos compuestos formados por pares de poliedros duales de manera que sus aristas se cortan perpendicularmente en el punto medio (ver apartado 2.2.1; figura 2.5) y para ellos plantear una actividad análoga a T-11a.

d) Utilizar la estrella octangular para mostrar cómo se pueden deducir las características del sólido intersección de los dos tetraedros (el octaedro) y las del sólido que contiene a la estrella octangular, que llamamos envolvente (el cubo).

Mostrar cómo puede obtenerse el sólido intersección a partir de uno de los tetraedros y remarcar que el sólido intersección y el sólido envolvente son poliedros duales y están colocados de manera que los vértices del sólido intersección yacen en los centros de las caras del sólido envolvente (ver apartado 2.2.2; lámina VIII).

Poner a disposición de los estudiantes los modelos que se muestran en la lámina VIII. Pedir que para los otros modelos compuestos de la figura (formados por el cubo y el octaedro el dodecaedro e icosaedro) se apliquen razonamientos análogos a los que hemos hecho para el modelo de la estrella octangular, para determinar las características del poliedro intersección y del envolvente y la relación que hay entre ellos.

T-12 a) Apuntar que el sólido intersección del modelo compuesto del cubo y octaedro se llama *cuboctaedro* y del modelo compuesto formado por el dodecaedro e icosaedro se llama *icosidodecaedro*. Informar también de que los sólidos envolventes de estos modelos compuestos son el *rombododecaedro* y el *triacontraedro rómbico*, respectivamente. Pedir que se de una explicación al nombre que se ha dado a estos poliedros.

b) Pedir que se compruebe si el sólido intersección y el sólido envolvente de los modelos compuestos que hemos considerado verifican las características que hemos delimitado en T-11b para los poliedros duales.

c) Pedir que se tengan en cuenta las características que hemos indicado para la dualidad de poliedros y se deduzcan de ellas las propiedades que van a tener los poliedros duales de los poliedros con caras regulares de más de una clase y vértices iguales (poliedros arquimedianos).

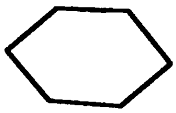
d) Utilizar modelos de las formas que se muestran en la lámina VIII. Construirlos de manera que el sólido intersección sea de un color y las pirámides que se le añaden para obtener el modelo compuesto sean de otros dos colores diferentes; en el modelo compuesto introducir el armazón del sólido envolvente. Mostrar que el cuboctaedro puede inscribirse en el rombododecaedro y el icosidodecaedro en el triacontraedro rómbico. Pedir que se justifique si es posible inscribir el sólido que en el modelo es el envolvente en el sólido que en el modelo es el sólido intersección con todos los vértices del poliedro inscrito en centros de caras del poliedro circunscrito.

e) Utilizar el modelo formado por el compuesto del cubo y octaedro y el envolvente para sugerir lo que ocurre cuando el modelo intersección (el cuboctaedro) va aumentando de tamaño hasta que sus aristas se cortan con las del rombododecaedro.

Cuestionar si al pasar de los poliedros regulares a los arquimedianos se sigue cumpliendo que se puede construir un modelo con los pares de poliedros duales de manera que las aristas de ambos poliedros duales se cortan en los puntos medios.

f) Pedir que se recopilen las propiedades que se delimitan para el concepto de poliedros duales al considerar los poliedros regulares y que se indiquen las propiedades de este concepto que dejan de cumplirse al considerar los poliedros arquimedianos.

T-13 a) Cuestionar si es necesario dar nombre a las familias de sólidos que se establecen al clasificar, si las familias de sólidos pueden tener varios nombres o sólo uno y si los nombres de ellas tienen que ser nombres propios.

b) Pedir que se busque un nombre-definición para un modelo de prisma que tiene por caras laterales cuadrados y por base el polígono de la figura. 

Apuntar que se tenga cuidado de que el nombre incluya todas las familias necesarias para caracterizar completamente a este prisma y no incluya familias de más.

c) Pedir que se busque un nombre-definición para varios modelos de prisma con los que se ha trabajado. Indicar que para cada uno de ellos se dibuje la forma de la base y de las caras laterales y se asocien con el nombre que se le ha dado al prisma correspondiente.

d) Plantear la actividad T-13c para modelos de antiprismas, pirámides y bipirámides.

e) Plantear la actividad T-13c para el modelo que cumple las siguientes características: es prisma, convexo, recto, de bases regulares, de caras laterales regulares, su base tiene 7 lados iguales y tiene una sola medida para los ángulos de las bases.

Apuntar que se tenga cuidado de que el nombre incluya todas las familias necesarias para caracterizar completamente a este prisma y no incluya familias de más.

f) Pedir que se describan varios modelos de prismas con los que se ha trabajado y que después se elabore un nombre-definición.

g) Pedir que se repita la actividad T-13f para modelos de antiprismas, pirámides y bipirámides.

T-14 a) Dar una lista con propiedades de los prismas y pedir que se justifique si ese conjunto de propiedades caracteriza completamente a la familia.

b) Pedir que se elimine de la lista de la actividad T-14a todas las propiedades que se consideren innecesarias para definir un prisma. Indicar también que si se considera que las propiedades que quedan no bastan para definirlo, se añadan las propiedades que sean imprescindibles para ello.

c) Pedir que se haga otra lista lo más corta posible, de manera que las condiciones que se elijan basten para caracterizar un prisma y no haya propiedades de más.

T-15 a) Indicar que en un libro hemos leido la siguiente definición de ortoedro: ortoedro es un prisma que tiene por caras rectángulos y más de una medida para las aristas.

Cuestionar si de esta definición se puede deducir el tipo de clasificación, partición o inclusión, que los autores del libro han establecido para delimitar el cubo y el romboedro y la definición que tendrían que haber dado los autores para el ortoedro, si la clasificación que se estableciese, que llevara a delimitar el cubo y el ortoedro entre otras familias, fuese una clasificación inclusiva.

b) Plantear una cuestión análoga a T-15a, cambiando clasificación inclusiva por partición, para la definición de paralelepípedo, "es un prisma que tiene 6 caras paralelas dos a dos".

T-16 a) Pedir que se verifique que en un prisma pentagonal la suma de los ángulos de los vértices viene dada por la expresión 10(180° +108°).

Si es necesario pedir que se completen los siguientes enunciados y que se resuelvan las actividades que se plantean:

– Al hallar la suma de los ángulos de los vértices, en la suma total aparecerán la suma de los ángulos de las caras de los siguientes polígonos, que son los que forman las caras del prisma:

Polígono 1:
Polígono 2:
....

– Un polígono de 5 lados, al dibujar diagonales en él desde un vértice, se puede descomponer en..................... triángulos. Justifica tu respuesta.

– Utilizando la respuesta a la pregunta anterior, y que la suma de los ángulos de un triángulo es de 180°, calcula la suma de los ángulos de un pentágono. Demuestra tu respuesta.

– Utilizando las respuestas a las preguntas anteriores, y teniendo en cuenta cuántas bases tiene un prisma y cuántas caras laterales tiene, calcula por una parte la suma de los ángulos de los polígonos que tienen las bases del prisma y, por otra, la suma de los ángulos de los polígonos de las caras laterales. Demuestra tu respuesta.

– Utilizando las respuestas a las preguntas anteriores, responde ahora a la pregunta planteada al principio: trata de demostrar que la suma de los ángulos de los vértices de un prisma pentagonal viene dado por la expresión 10(108° + 180°).

b) Pedir que se demuestre que la suma de los ángulos diedros de un prisma recto viene dado por la expresión (n - 1)360°, donde n corresponde al número de lados del polígono de las bases. Cuestionar si se cumplirá la expresión en los prismas oblicuos.

Si es necesario pedir que se resuelvan las actividades que se plantean:

– Utiliza las sugerencias que te hemos dado en la actividad anterior para determinar cuánto mide la suma de los ángulos de un polígono de n- lados.

– Aplica la propiedad de los prismas rectos que relaciona la medida de los ángulos diedros de las caras laterales con el ángulo correspondiente de la base.

– Para un prisma n-agonal recto, halla la suma de los ángulos diedros de las caras laterales y la suma de los ángulos diedros de las caras laterales y las bases.

– Responde de nuevo a la cuestión T-16b

T-17 Poner a disposición de los estudiantes material comercializado. Pedir que se resuelvan las siguientes cuestiones y que se justifique detalladamente la respuesta.

a) ¿Cuántos prismas de caras regulares podemos construir? ¿Cuántos prismas de caras regulares hay?

b) ¿Cuántos antiprismas de caras regulares podemos construir? ¿Cuántos antiprismas de caras regulares hay?

c) ¿Cuántas pirámides de caras regulares podemos construir? ¿Qué ocurre cuando la base de las pirámides es un hexágono regular y las caras laterales son triángulos equiláteros? ¿Y si la base de estas pirámides es un octógono regular? ¿Cuántas pirámides de caras regulares hay?

d) ¿Cuántas bipirámides de caras regulares podemos construir? ¿Cuántas bipirámides de caras regulares hay?

e) ¿Cuántos prismas rectos hay que tienen caras iguales? ¿Cuántos prismas oblicuos hay de esta familia?

Pedir que se enumeren todos los prismas que tienen caras iguales y que se justifique que ya no puede haber más que los que se han señalado.

T-18 a) Pedir que se halle el número de diagonales de las caras que tiene un ortoedro, un prisma octogonal y un prisma cuyo polígono de las bases tiene n lados y que se justifique las respuestas.

Si es necesario pedir que se resuelvan las siguientes actividades:

– Traza todas las diagonales de los polígonos de las bases de los siguientes prismas: dos prismas hexagonales, uno cóncavo y otro convexo.
¿Cuál de los dos polígonos tiene más diagonales?
¿De qué depende el número de diagonales de un polígono? Fíjate en un vértice, si lo que se quiere es formar una diagonal del polígono al juntar este vértice con otro, ¿con qué vértices del polígono no forma diagonal? ¿Cuántas diagonales salen de un

vértice? ¿Cuántos vértices tenemos? Por cada diagonal, ¿cuántos vértices del polígono consideramos?
Completa la tabla siguiente.

Nº de lados	Nombre del polígono	Nº de diagonales
3		
4		
5		
.		
.		
n		

– En un prisma cualquiera ¿Cuántas diagonales tienen cada una de las caras laterales? ¿Cuántas diagonales tienen todas las caras laterales? ¿Cuántas diagonales tiene una de sus bases? ¿Cuántas diagonales tienen sus dos bases? ¿Cuántas diagonales de las caras tiene este prisma?

b) Pedir que se repita la actividad T-18a para un antiprisma, una pirámide y una bipirámide n-agonal.

Centrar la atención sobre lo que ya se puede utilizar de lo resuelto en la actividad anterior y en si las caras laterales tienen diagonales.

c) Pedir que se halle el número de diagonales del espacio que tiene un ortoedro, un prisma octogonal y un prisma cuyo polígono de las bases tiene n lados y que se justifique las respuestas.

Si es necesario pedir que completen los siguientes enunciados y que respondan a las cuestiones que se plantean.

– En un prisma cuya base es un polígono de 4 lados, la cantidad de diagonales del sólido que se pueden trazar desde cada vértice del prisma es....................... Si la base del polígono tiene 8 lados, la cantidad de diagonales del sólido que se pueden trazar desde cada vértice del prisma es....................... Justifica tu respuesta.

En un prisma cuya base es un polígono de n lados la cantidad de diagonales del sólido que se pueden trazar desde cada vértice del prisma es....................... Justifica tu respuesta.

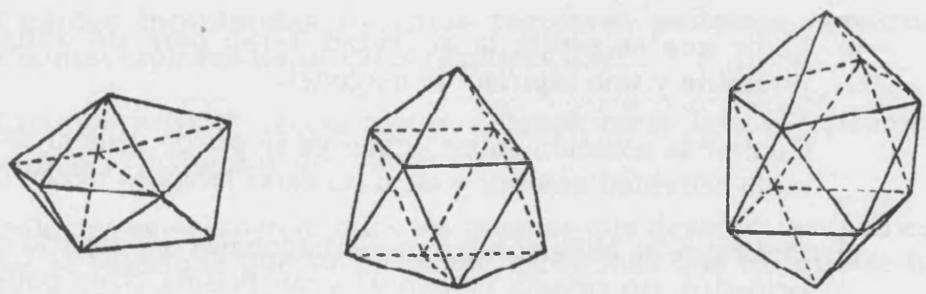
– Para hallar el número de diagonales del espacio, fíjate en uno de los vértices y en los vértices con los que no los puedes unir para obtener diagonales del espacio (porque al juntar el vértice seleccionado con estos vértices se obtienen aristas o diagonales de las caras). ¿Cuántas diagonales del espacio puedes dibujar que salgan de un vértice dado? ¿Cuántos vértices tiene el prisma? Cada diagonal del espacio, ¿cuántos vértices junta? ¿Cuántas diagonales del espacio tiene un prisma n-agonal?

– Utilizando la respuesta a las preguntas anteriores, calcula la cantidad de diagonales del sólido que tiene un prisma de base un polígono de n lados. Demuestra tu respuesta.

d) Plantear la actividad T-18c para un antiprisma, una pirámide y una bipirámide n-agonal.

e) Pedir que se aplique el procedimiento utilizado en las actividades T-18a y T-18c para hallar y justificar el número de diagonales de las caras y de diagonales del espacio que tiene el dodecaedro. Apuntar que se puede utilizar el modelo del dodecaedro si se considera necesario.

f) Plantear la actividad T-18e para los deltaedros de la figura 2.22.



(a) (b) (c)

Figura 2.22

T-19 a) Pedir que se demuestre que las diagonales del espacio de un ortoedro tienen la misma longitud y se cortan en el centro del ortoedro.

Si es necesario pedir que se resuelvan las siguientes actividades.

– Considera la sección del ortoedro que pasa por aristas opuestas. ¿Qué forma tiene? ¿A qué elementos de este polígono corresponden las diagonales del espacio del ortoedro? ¿Qué propiedades tiene este polígono respecto a sus diagonales?

b) Pedir que se justifique que las diagonales del espacio de un paralelepípedo se cortan en el centro. Cuestionar si son iguales o no y pedir que se justifique la respuesta.

Si es necesario apuntar que tengan en cuenta las sugerencias que ya se han aplicado para resolver la actividad anterior.

c) Demostrar que en un cubo no es posible obtener como sección un pentágono regular.

Si es necesario apuntar como sugerencia que se tenga en cuenta el número de caras a las que le tiene que afectar el corte y las propiedades del cubo relativas a pares de caras opuestas.

T-20 Pedir que se razone detenidamente si son o no son ciertas las implicaciones siguientes y que si la implicación no es correcta, después de justificar la respuesta, se añada la condición necesaria para que lo sea.

a) Si la base de una pirámide es regular, sus caras laterales son iguales.

b) Si un prisma es convexo, sus bases son polígonos convexos.

c) Si las caras laterales de un prisma son iguales, su base es regular.

d) Si las caras de una bipirámide son convexas, la bipirámide es convexa.

e) Si un sólido tiene todos los ángulos de los vértices menores de 360°, es convexo.

T-21 Dar la definición de prisma recto siguiente: un prisma recto es un prisma que tiene los ángulos de las caras laterales rectos. Luego pedir que se demuestren las siguientes propiedades o que se demuestre que esa definición es equivalente a otra que se propone.

a) En un prisma recto la longitud de la altura coincide con la de las aristas laterales.

b) En un prisma recto los ángulos diedros de las caras laterales coinciden con los ángulos correspondientes del polígono de las bases.

c) En un prisma recto las caras laterales son perpendiculares a las bases.

d) Un prisma es recto si y sólo si es prisma y la longitud de la altura coincide con la de las aristas laterales.

e) Demuestra que un prisma es recto si y sólo si es prisma y los ángulos diedros de las caras laterales coinciden con los ángulos correspondientes del polígono de las bases.

f) Demuestra que un prisma es recto si y sólo es prisma y las caras laterales son perpendiculares a las bases.

COMENTARIOS

Las tareas T-1 a T-5. Descripción de subfamilias

Las cinco primeras tareas que incluimos para la fase 2 del nivel 3 se refieren a propiedades de subfamilias de sólidos. Estas descripciones ya las hemos planteado también para el nivel 2, pero mientras que en este nivel centrábamos la atención sólo en una de las subfamilias establecidas con clasificaciones dicotómicas, en las actividades que incluimos para el nivel 3 consideramos estas familias junto con las familias complementarias. Remitimos al apartado 2.1.2 donde relatamos las razones que hemos tenido para ello.

Otra diferencia a destacar entre las actividades propuestas para ambos niveles es que mientras que las actividades de descripción de familias propuestas para el nivel 2 van precedidas de otra actividad en la que se pide que se muestren varios ejemplos diferentes de la familia dada (tareas T-17 y T-21 de la fase 2 del nivel 2), no ocurre esto en las propuestas aquí. La descripción de familias en las tareas propuestas para el nivel 3 la utilizamos como base para trabajar las inclusiones de familias en términos de listas de propiedades mientras que en las tareas propuestas para el nivel 2 las relacionábamos en términos de ejemplos.

La inclusión de los grupos de propiedades. Las tareas T-1 a T-5 pretenden que se trabaje con detenimiento las inclusiones de los grupos de propiedades de familias que tienen entre ellas relaciones de inclusión. En caso de que sea necesario (porque los estudiantes tienen un dominio muy bajo de las características asignadas al nivel 3), el profesor puede trabajar las inclusiones de familias en términos de ejemplos y aplicar para cada inclusión que si una familia está incluida en otra, verificará sus propiedades (como sugerimos para las actividades propuestas para el nivel 2). Pero esto sólo tiene que ser un paso intermedio para que al final los estudiantes lleguen a aplicar de manera inmediata que entre los grupos de propiedades de las familias hay una relación de inclusión que es la contraria a la que existe entre ellas en términos de ejemplos.

Otro objetivo de estas tareas se refiere a que en este nivel ya podemos trabajar también delimitar todos los grupos de propiedades que están completamente incluidos en otros; esto es, las propiedades de todas las familias que contienen a la dada. Y no sólo esto; cuando ya se haya comprobado que los estudiantes pueden delimitar todas las familias que contienen a la dada y establecer relaciones de inclusión entre sus grupos de propiedades, se puede pasar a trabajar el problema de cuántos grupos de propiedades de los que se han indicado se pueden eliminar porque ya están incluidos en el grupo de propiedades de otra familia que también se ha señalado.

A) Aportaciones de las experimentaciones. Las experimentaciones realizadas han hecho ver que hay que prestar atención especial a este problema. Algunos estudiantes que con otras tareas razonaban de acuerdo a las características del nivel 3, al describir subfamilias dieron respuestas como las siguientes.

- No señalaban propiedades agrupadas como propiedades de familias pero sí indicaban que la familia considerada era ejemplo de otras familias, de las que tampoco enumeraban explícitamente sus propiedades. Con estas respuestas parece que no se toma conciencia de que dar la relación de inclusión entre familias no es lo mismo que dar la inclusión entre sus grupos de propiedades.

- Aunque, para algunos pares de familias, por ejemplo, para el cubo y el romboedro se indicaban propiedades agrupadas como propiedades de determinadas familias, también se enumeraban éstas explícitamente. Parece ser que el estudiante repetía un modo de responder a la tarea trabajado en clase para otras familias, pero aún no comprendía que las propiedades se podían indicar de esta manera. No confiaba todavía en que las propiedades se habían indicado a no ser que éstas se enunciaran explícitamente.

- Algunos grupos de propiedades que se indicaban no eran correctos porque no se relacionaban adecuadamente las familias implicadas y sus grupos de propiedades.

  Algunos estudiantes plasmaban la idea de que si las familias pueden tener ejemplos de otras familias, entonces tendrán también las propiedades de ellas. La relación de inclusión que aparece entre parte de una familia en otra (puede que ni siquiera haya una relación de inclusión entre las familias en términos de ejemplos) se aplicaba en el mismo sentido (en vez de en el inverso) al grupo de propiedades de ellas. Por ejemplo, se respondía que "los romboedros cumplen las propiedades de los prismas oblicuos porque uno de su ejemplos (el genérico) es oblicuo" y cumple las propiedades de los prismas rectos, porque otro ejemplos (el cubo es romboedro) es un prisma recto".

Otras respuestas apuntaban que lo que tenían en cuenta era que hubiera ejemplos comunes: "Las propiedades de PBct (los prismas de base cometa) son las propiedades de los paralelepípedos porque el romboedro es ejemplo de ambas".

Otros estudiantes aplicaban al grupo de propiedades la inclusión que existe entre las familias en términos de ejemplos: "Las propiedades de los prismas de bases cometas son las de los romboedros porque los romboedros son ejemplos de cometas (las varillas de las diagonales se cortan en el punto medio de las dos)".

- Algunos estudiantes eran capaces de indicar como propiedades de una familia propiedades agrupadas como propiedades de otras familias, pero no señalaban las familias más específicas que contuviesen a la dada. Por ejemplo, como propiedades del cubo sólo indicaban agrupadas las propiedades de los prismas, las de los prismas rectos y las de los prismas convexos.

B) Sugerencias para la instrucción. Al abordar estas tareas en clase, en el primer paso apuntaremos familias que contienen a la dada. Por ejemplo al enumerar las propiedades de los prismas de bases regulares, podemos seleccionar los prismas, los prismas cuadrangulares y los prismas convexos. Luego nos detendremos aclarando que esto lleva a que el grupo de propiedades de estas familias está contenido en el grupo de propiedades de los PBR, por lo que esta familia cumple las propiedades de aquellas. Y si queremos continuar, también podemos señalar los prismas de bases con lados iguales, los prismas de bases con ángulos iguales.

Cuando los estudiantes hayan conseguido un cierto dominio de estas tareas, si el profesor lo considera oportuno, puede continuar delimitando los grupos de propiedades que se repiten. Por ejemplo, si para los PBR se han indicado las propiedades que hemos dicho antes, haremos ver que las propiedades de los prismas ya están incluidas en el grupo de propiedades de las otras familias de prismas señaladas. Para el romboedro, podemos señalar que si se indica que cumple las propiedades de los prismas, las de los prismas cuadrangulares, las de los prismas convexos, las de los prismas de base cometa, y las de los paralelepípedos, las propiedades de las dos familias primeras (los PC y PX) están incluidas en las de las dos últimas. Podemos remarcar que para el romboedro, como propiedades englobadas, bastaría con indicar las de los prismas de base cometa y las de los paralelepípedos, y aún así, las propiedades de los PC y las de los PX estarían listadas dos veces.

Al resolver estas actividades, cuando se considera una familia que contiene a la dada se puede centrar la atención en si su grupo de propiedades introduce alguna propiedad que no se haya apuntado ya con las propiedades de las otras familias indicadas y en el subgrupo de propiedades que introduce.

Sobre las tareas propuestas. Las cuestiones, propiedades y ayudas que incluimos en los enunciados de las tareas las han sugerido las respuestas que hemos obtenido de determinados estudiantes a las tareas de descripción de familias. A continuación señalamos varias.

"Para PO, (prismas oblicuos) las aristas de las CL no son perpendiculares a las bases" "Las CL de los PO. no son rectos. No tiene ángulos rectos".
"En O (P. oblicuos) ninguna AL forma 90° con la base".
"Los ángulos diedros serán iguales en los PBR y desiguales en los PBIr (debido a la diferencia de los ángulos de las bases)".
"En PBIr habrán ángulos del polígono de la base que serán mayores o menores que los demás ángulos de la base (por tanto los ángulos de los vértices no serán iguales)".
"En los PCR todas las caras son iguales tanto las laterales como las bases. En irregulares, al menos dos desiguales. Las bases irregulares pero iguales. Aristas, al menos dos desiguales. Los αd todos desiguales. αV todos desiguales".
"En los PCLR la base tiene que tener lados iguales. Para los PCLI (prismas de caras laterales irregulares) los lados de la base no son iguales".
"En ABR la B tiene l y α iguales. ABI desiguales".
"En PiCLR la base tendrá lados iguales (al ser regulares las CL obliga a que la base tenga lados iguales). En PiCLI la base no tendrá lados iguales".
"En las BiCLI (bipirámides de caras laterales irregulares) las AL no son iguales".
"Hay más de dos medidas distintas para las diagonales de las caras sí que es propiedad de los P$\neg$CI. Como mínimo hay una medida en una cara y dos medidas en la otra cara diferente".
"Hay por lo menos dos aristas distintas sí que es propiedad de P$\neg$CI. Sino las caras serían iguales. En cuanto que haya caras distintas ya hay dos medidas por lo menos (una por cada cara)".
"Las pirámides y bipirámides cóncavas cumplen todas las propiedades de los prismas cóncavos: tienen por lo menos un ángulo diedro mayor de 180°, ..."

Esto no quiere decir que estos estudiantes no pudieran expresar algunas propiedades en términos de *al menos una..., por lo menos...* Lo que ocurría era que en sus listas de propiedades para las familias de sólidos mencionadas incluían estas propiedades.

A continuación vamos a comentar las sugerencias que damos para las tareas de este nivel, los diferentes tipos de propiedades hacia los que dirigimos la atención y otras cuestiones que planteamos con las tareas diseñadas.

A) Sobre las sugerencias. Mientras que las sugerencias indicadas para el nivel 2 centran la atención sobre las propiedades que presentan problemas de lenguaje o requieren de un nivel de razonamiento superior para comprenderlas perfectamente, las que proponemos aquí centran la atención, por un lado, en la utilización de términos del tipo *como mucho* o *como mínimo*, para que al expresar propiedades de una subfamilia utilizando estos términos no se dejen fuera ejemplos de ella y, por otro, en cómo se niegan los cuantificadores todo o nunca y la regularidad de polígonos.

Respecto a la negación de la regularidad de polígonos, queremos explicar que si bien con las actividades propuestas para el nivel 2, al cuestionar si polígonos semirregulares son regulares o no, ya trabajamos en cierto modo que basta que una de las condiciones de la regularidad no se cumpla para que el polígono no sea regular (y por tanto es irregular), es con las actividades que proponemos aquí con las que abordamos directamente cómo se niega un concepto que lleva implícito dos (o varias) condiciones.

Al tratar este problema haremos hincapié en que para negar un concepto que lleva implícitas las condiciones A, B, C,... basta con que deje de cumplirse una de ellas, y que también puede darse que no se cumpla ninguna de ellas. Así, remarcaremos que si nos dicen que un polígono no es regular, lo que podemos afirmar es que tenemos 3 posibilidades para él: tiene lados iguales y ángulos distintos (por lo menos 2 ángulos distintos), o tiene ángulos iguales y lados distintos (por lo menos 2 lados distintos), o tiene lados y ángulos distintos (tiene por lo menos 2 lados diferentes y dos ángulos distintos).

B) Sobre las propiedades que relacionan unos elementos con otros. Estas propiedades merecen atención en este nivel. Por ejemplo, al describir los prismas rectos cabe fijarse en las propiedades siguientes: los ángulos diedros de las caras laterales coinciden con los ángulos correspondientes del polígono de sus bases; los ángulos de los vértices miden $180^\circ + \alpha$, donde α es el ángulo correspondiente de la base; el número de medidas distintas para las diagonales del espacio coincide con el de medidas distintas para las diagonales de la base.

C) Sobre si la negación de una propiedad de una familia es propiedad de la familia dicotómica. Las experimentaciones han confirmado que los estudiantes que sólo han logrado algunas características del nivel 3 requieren de ayuda del profesor para llegar a seleccionar todos los contraejemplos que muestran que la mayoría de las propiedades que indicamos en T-3c no son propiedades de los prismas que no tienen todas las caras iguales (P¬CI). El ortoedro es contraejemplo para la propiedad "hay más de dos medidas distintas para los ángulos de las caras". El ortoedro que es además prisma cuadrado es contraejemplo para la propiedad "hay más de dos medidas distintas para las diagonales de las caras". Los PCR también son contraejemplos de la propiedad "hay por lo menos dos medidas distintas para las aristas". Un prisma de caras laterales regulares y bases rombos es contraejemplo de la propiedad "las diagonales de las caras no se cortan perpendicularmente". Para que los estudiantes que razonan de acuerdo a las características del nivel 3 lleguen a esos contraejemplos el profesor tiene que dirigir la actividad; tiene que centrar la atención sobre los polígonos que cumplen las condiciones propuestas y sobre cómo se pueden formar prismas con ellos. Por ejemplo, para sugerir el contraejemplo para "hay por lo menos dos medidas distintas para las aristas", se pueden plantear las siguientes cuestiones: si un prisma tiene las aristas iguales, ¿las caras laterales (CL) pueden ser rectángulos? ¿Y cuadrados? Si las CL son cuadrados, ¿la base puede ser otro polígono diferente?. Busca ahora un ejemplo de P¬CI que no cumpla que por lo menos tiene dos aristas distintas.

D) El cambio de universo de partida. Finalmente, respecto a la tarea T-1 queremos llamar la atención sobre lo apropiada que es para trabajar cómo las propiedades que verifica una familia establecida con un criterio de clasificación pueden no verificarlas otras familias establecidas con el mismo criterio de clasificación cuando se considera otro universo de partida. Como hemos indicado en el apartado 2.1.2 este es el objetivo fundamental para incluir esta clasificación en la unidad de enseñanza que proponemos. Si bien en la tarea T-12 de la fase 2 del nivel 2, ya hemos abordado la descripción de los prismas cóncavos y convexos y hemos centrado la atención en que las propiedades de los prismas convexos se pueden extender a las otras familias consideradas, no hemos propuesto el problema para las familias correspondientes de sólidos cóncavas.

Así, la actividad T-1e nos introduce en el problema fundamental, relativo a esta clasificación: el justificar qué propiedades de las delimitadas para el concepto de concavidad a partir de las familias de los prismas o antiprismas se mantienen al considerar todos los poliedros, y qué propiedades dejan de cumplirse, y nos centra también en el tipo de demostración que vamos a trabajar con estas actividades: búsqueda de contraejemplos. Esta actividad pretende que se lleguen a establecer los enunciados que indicamos a continuación y a encontrar los ejemplos que los demuestran.

- Puede haber bipirámides cóncavas con todos los ángulos de las caras menores que 180°, o sea que no tienen algún ángulo de las caras mayor de 180°. Por ejemplo, bipirámides formadas por dos pirámides convexas oblicuas.

- Las bipirámides no tienen diagonales de las caras, luego no hay bipirámides cóncavas que verifiquen que tienen alguna diagonal de las caras que no queda completamente en la superficie del sólido.

- Las pirámides no tienen diagonales del espacio, luego no hay pirámides cóncavas que verifiquen que tienen alguna diagonal del espacio que no queda completamente en el interior del sólido.

Cuando los estudiantes razonan de acuerdo a las características del nivel 3 con frecuencia se encuentran respuestas en las que se extiendan a los sólidos cóncavos algunas propiedades señaladas para las familias cóncavas y que éstos no verifican. Pero si los estudiantes disponen de material para hacer o verificar predicciones, también es usual que los estudiantes encuentran los contraejemplos a determinadas propiedades, utilizando razonamientos de un sólo paso, dirigidos por el profesor.

Por ejemplo, para la propiedad relativa a los ángulos de los vértices, si se trabaja con material, los poliedros cóncavos que no tienen ningún ángulo de los vértices mayor que 360° surge en el contexto de la experimentación. Una respuesta de uno de los estudiantes fue la siguiente: "Pongo 5 triángulos equiláteros para que se forme una esquina cóncava (el ángulo diedro de dos de las caras que se juntan en el vértice es mayor de 180°). Completo para cerrar con 3 triángulos equiláteros y ya tengo el contraejemplo. Es cóncavo, todas las caras son triángulos equiláteros y los vértices son de orden 3, 4 y 5. Todos miden menos de 360°".

En nuestras experimentaciones los estudiantes también encontraron contraejemplos que justificaban que un sólido puede ser cóncavo y no tener ninguna diagonal de la cara fuera de la superficie, al dar con la idea adecuada que les permitía obtenerlos con razonamientos que se puedan verificar con material. Una respuesta dada por un estudiante, dirigido por el profesor fue:

E1: Para encontrar sólidos cóncavos en los que no haya diagonales de las caras que se salgan fuera puedo pensar en los que no tengan ninguna diagonal de las caras (es decir que sus caras sean triángulos) y así seguro que se cumple.

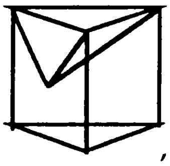
P: ¿Puede haber sólidos cóncavos en los que las caras no tengan diagonales?

E1: Sí, si sus caras son todas ellas triángulos. SÍ, cuando construimos con triángulos equiláteros, los deltaedros, salieron varios que eran cóncavos (no sé dibujarlos pero salieron muchos, por ejemplo, al poner pirámides a las caras de los convexos). Todos esos nos sirven. Incluso una bipirámide formada por dos pirámides oblicuas, que las vimos como que sólo las bipirámides podían ser cóncavas al ser las pirámides que las formaban convexas, ya vale.

Algunos estudiantes, también dirigidos por el profesor, pudieron razonar adecuadamente para delimitar sólidos que no tienen ninguna diagonal del espacio que se salga del interior, como muestra la siguiente respuesta:

E1: Si es cóncavo tiene que tener entrantes que se podrían ocultar con el polígono correspondiente. Si junto los vértices no vecinos de ese polígono, que no está, tendré diagonales del espacio que se saldrán fuera. No hay contraejemplo.

P: Piénsalo otra vez. ¿Seguro que es cierto lo que acabas de decir? ¿Seguro que todos los polígonos que cierran el entrante tendrán diagonales?

E1: Lo primero, sí es cierto. Pero si es triángulo no habrá. Ya tengo un contraejemplo. Por ejemplo, , que resulta de sustituir las bases de un prisma triangular por pirámides triangulares colocadas hacia adentro.

Las tareas T-6 y T-7. Relaciones de inclusión, exclusión y solapamiento, entre familias de sólidos

Sobre las relaciones que proponemos. En los comentarios que hemos hecho sobre las actividades T-2 a T-4 de la fase 4 del nivel 2 ya hemos informado de que sólo las relaciones que reflejan inclusión o exclusión entre familias pueden requerir de nivel 3 de razonamiento y que es necesario razonar de acuerdo a las características del nivel 3 para interpretar las relaciones de la forma *no puede haber... que no sean....* Esto explica las relaciones que proponemos en las tareas T-6 y T-7.

Lo que permiten subrayar. Estas tareas permiten insistir en aspectos que no se han considerado con las tareas del nivel 2, que vamos a comentar a continuación.

A) Tratamos con detalle que las relaciones que son ciertas pueden demostrarse con el mismo tipo de razonamientos que otras que son falsas porque cuando una relación es falsa (o cierta), se puede transformar en otra equivalentes a ella (enunciada con otros términos lógicos) de manera que sea verdadera (falsa). Los estudiantes que razonan de acuerdo a las características del nivel 3 pueden comprender que si las relaciones son equivalentes, la manera de justificarlas será equivalente también. Por ejemplo, la relación del tipo: los ... son...., si es falsa, se puede enunciar de manera que sea cierta de la siguiente manera: no todos los... son.... Asimismo, esta relación se puede enunciar de manera que sea incorrecta y correspondería a la implicación anterior. La relación *no puede haber ... que no sean ...,* si es falsa, al enunciarla de manera que sea correcta, queda de la siguiente manera: *los ... a veces no son ...* La relación *los .... son siempre ...,* si es falsa, se puede enunciar de manera que sea cierta de la siguiente manera, *no todos los ... son ...*

Permiten subrayar que una prueba que podemos dar para las relaciones de la forma, *no hay ningún elemento de A que sea de B,* puede ser la que demuestra que *todos A son de la familia complementaria de B.* Para justificar las relaciones planteadas para A y B con los términos siempre, a veces o nunca, en las que se selecciona el término nunca, podemos considerar A y la familia complementaria de B y seleccionar el término siempre. Por ejemplo, para demostrar que los prismas de bases regulares nunca son prismas cóncavos, podemos demostrar que los prismas de bases regulares son siempre prismas convexos.

B) Estas actividades pueden servir también de soporte para mostrar cómo se puede utilizar lo que ya se ha demostrado previamente. En nuestras experimentaciones fue usual que los estudiantes no aplicasen cuando era posible, las demostraciones ya realizadas, ni intentaron reformular las relaciones propuestas con objeto de averiguar si ya se habían demostrado formuladas de otra manera. En varias ocasiones tuvimos que recordar que a veces, expresar una relación de otras maneras equivalentes facilita la tarea, bien porque éstas ya las tengamos demostradas o porque lo aconsejable es abordar el problema con el enunciado que resulte más sencillo.

C) Respecto a cómo hemos enunciado estas tareas también queremos llamar la atención sobre que si bien hay dos relaciones en cada actividad y, por lo tanto basta con que una de ellas sea falsa para que toda ella lo sea, el enunciado de las tareas obliga a que se consideren las dos relaciones implicadas y permiten que se aborden los siguientes problemas: que se discuta que los enunciados sólo son correctos cuando las dos relaciones que figuran en ellas son correctas; que si una de las dos relaciones que hay en cada actividad es falsa, todo el enunciado completo es falso al serlo una de sus partes. Hay que trabajar la búsqueda de contraejemplos que muestren que la implicación es falsa, la formulación correcta de relaciones de familias y el demostrar relaciones de inclusión o exclusión entre familias.

Las tareas T-8 a T-10. Descripción de familias cuando hay dos familias implicadas

Estas tareas están dirigidas a cubrir el objetivo 5 de esta fase. En ellas se tienen que enumerar propiedades, como en las tareas T-1 a T-5, pero mientras que en éstas sólo hay que considerar una familia, en las tareas que vamos a comentar ahora hay dos familias implicadas: se piden propiedades comunes a ellas o propiedades de una que no verifique otra.

Sobre los pares de familias de sólidos que sugerimos. La relación de inclusión o no inclusión que hay entre los pares de familias implicadas puede influir en la respuesta. Esto explica las sugerencias que hemos dado para seleccionar los pares de familias para los que plantear las actividades correspondientes. Vamos a explicar de qué manera ocurre esto.

- Si se seleccionan pares de familias en las que una está incluida en la otra y se pregunta por las propiedades comunes, se tienen que indicar propiedades de la familia más general en la que la otra está incluida. Si se pregunta por las propiedades de una familia que no lo sean de la otra, se tienen dos posibilidades: que lo sean de la familia incluida pero que no lo sean de la general, o a la inversa. En la primera posibilidad se tienen que indicar propiedades específicas de la familia dada y la última posibilidad lleva a que no haya propiedades que la cumplan; si una familia X está contenida en otra Y, la familia X cumple todas las propiedades de Y. Por ejemplo, si se piden propiedades comunes al cubo y el ortoedro se tienen que indicar las propiedades del ortoedro. Si se piden propiedades del cubo que no lo sean del ortoedro se tienen que indicar propiedades específicas (que no sean atributos críticos de los ortoedros) del cubo; pero si por el contrario se piden propiedades del ortoedro que no lo sean del cubo, hay que responder que no hay ninguna.

- Si las familias que se seleccionan no tienen relación de inclusión y se pide que se enumeren propiedades comunes, se tienen que indicar propiedades de una familia general en las que ambas familias están incluidas. Si se pide que se enumeren propiedades que sean de una familia pero no de la otra, se tienen que indicar propiedades específicas de la familia dada; es decir propiedades de la familia que no lo sean de la familia general. Por ejemplo, las propiedades de los prismas rectos y oblicuos son las de los prismas. Las propiedades de los prismas rectos que no lo sean de los prismas oblicuos son las propiedades específicas de los prismas rectos (que no son atributos críticos de los prismas). Las propiedades del ortoedro y del romboedro son las de los paralelepípedos. Las propiedades del ortoedro que no lo sean del romboedro son las propiedades específicas del ortoedro (propiedades que no son atributos críticos de los paralelepípedos).

En la dificultad de la actividad correspondiente también influye el hecho de que haya varias familias que contienen a una de ellas o a ambas. Por lo que aconsejamos que en estas tareas se contemplen las siguientes posibilidades.

- Se piden propiedades comunes a dos familias que tienen relación de inclusión entre ellas o que están incluidas en otra familia y no tienen ninguna otra propiedad en común. Para la respuesta a estas actividades no se precisa que se enumere ninguna propiedad explícitamente. Por ejemplo, las propiedades comunes al cubo y el ortoedro son las del ortoedro. Las propiedades comunes a los ortoedros y romboedros, son las de los paralelepípedos. Las propiedades comunes a los prismas cóncavos y los de caras iguales son las propiedades de los prismas.

- Se piden propiedades de una familia que no las cumpla otra y las familias consideradas están incluidas en otra familia y no tienen ninguna otra propiedad común. En una respuesta de este tipo no se engloba ninguna propiedad como propiedad de una familia de sólidos (las propiedades que hay que eliminar de la lista son las de la familia en la que ambas están incluidas); sólo se indica la lista de propiedades específicas. Por ejemplo, las propiedades de los prismas rectos que no lo son de los prismas oblicuos, son las propiedades específicas de los prismas rectos (propiedades que no son atributos críticos de los prismas). Las propiedades de los romboedros que no cumplen los ortoedros son las propiedades específicas del romboedro (propiedades que no son atributos críticos de los paralelepípedos).

- Se piden propiedades de A que no sean de B, de manera que A está contenido en B, y no hay otra familia en la que A esté contenida y no lo esté B. En una respuesta de este tipo la lista de propiedades tampoco contiene propiedades agrupadas como propiedades de familias. Por ejemplo, si se piden las propiedades de los PCLR que no lo sean de los prismas rectos, el grupo de propiedades de A contiene las propiedades de B y otras propiedades específicas de A. En la lista de propiedades correspondientes sólo quedan las propiedades específicas.

- Se piden propiedades de A que no sean de B, de manera que A está contenido en B, y hay otra/s familias en la que A está contenida y no lo está B. En una respuesta de este tipo la lista de propiedades contiene propiedades agrupadas y propiedades enunciadas explícitamente. Por ejemplo, propiedades de los prismas de caras regulares que no lo son de los prismas rectos son: las de los prismas convexos, las de los prismas de base regular, las de los prismas rectos de base regular que no sean de los prismas rectos (por ejemplo, caras laterales iguales, ángulos de las caras de dos medidas como mucho, ángulos diedros de dos medidas como mucho, ángulos de los vértices iguales) y además las siguientes: tienen caras regulares, aristas iguales, etc.

Sobre lo que pretenden. Aportaciones de las experimentaciones. Con estas tareas se incide en los problemas ya mencionados sobre enumeración de propiedades de familias y además éstos se complican considerablemente. Para enumerar propiedades agrupadas como propiedades comunes a varias familias hay que seleccionar familias que contienen a las implicadas en la actividad. Para enumerar propiedades específicas hay que tener en cuenta para ello varias familias. Para indicar propiedades de una familia que no cumpla otra, además de delimitar las familias que contienen a la primera y establecer relaciones entre los grupos de propiedades de ésta y aquellas, hay que saber si hay que eliminar todas las propiedades de un bloque o sólo parte. Por ejemplo, para las propiedades de los prismas de caras regulares (PCR) que no las cumplan los prismas rectos, hay que saber que de las propiedades de los prismas rectos de bases regulares (PRBR) sólo se eliminan las de los prismas rectos.

La pertinencia de estas tareas para trabajar de nuevo cómo se pueden aplicar relaciones de familias para obtener otros resultados, también viene avalada por las experimentaciones realizadas. Hemos verificado que estudiantes que ya se mueven con una cierta soltura enumerando este tipo de propiedades al describir una familia, cuando tienen que tener en cuenta varias vuelven a tener los mismos errores, que parecía que se habían superado. Así, cuando los estudiantes enumeran propiedades comunes a varias familias, en la lista que elaboran, con frecuencia faltan por indicar varias propiedades que deberían estar en ella o se indican propiedades que no deberían estar. Respuestas de los estudiantes que lo corroboran son:

- Cuando se piden propiedades comunes a los prismas cóncavos y convexos se indica: "Como ambos pueden ser rectos y oblicuos tendrán en común las propiedades de éstos". Y se da la lista de las propiedades de cada una de estas familias. O se indica: "También tendrán en común las propiedades de los PBI y las de los P<u>CL</u>R (CL cuadrados y bases con lados iguales)". La idea de la que se parte es que hay prismas de bases irregulares (PBI) que son cóncavos y otros que son convexos. O que hay prismas de caras laterales (PCLR) que son cóncavos (CL cuadrados y bases con lados iguales) y otros que son convexos.

- Cuando se piden las propiedades comunes a los prismas de caras iguales y a los prismas de caras regulares (PCI y PCR) sólo se indican las propiedades de los prismas y las de los prismas convexos (PX), pero no se indican otras propiedades específicas, como que las aristas tienen la misma longitud.

  En otras respuestas se señala: "Son las propiedades del cubo, porque es el único PCI y a la vez de PCR". En esta respuesta se aplica al grupo de propiedades la inclusión que existe entre las familias en términos de ejemplos.

- Cuando se piden propiedades de los prismas rectos que no cumplan los prismas oblicuos se indica: "Los prismas rectos pueden tener los PCR. Los oblicuos no (ningún prisma regular es oblicuo)". Cuando se piden propiedades de los PCR que no cumplan los PCI se responde: "Ninguna porque el cubo es PCR, pero a la vez de CI". En estas respuestas también se aplica al grupo de propiedades la inclusión que existe entre las familias en términos de ejemplos.

- Cuando se piden propiedades de los romboedros que no cumplan los ortoedros se apunta: "Las propiedades de los PCI. (dC perpendiculares, αC máximo 2, CI)". Esto es, se razona en términos de grupos de propiedades de familias y no se tiene en cuenta que alguna propiedad de ellas debería eliminarse porque también la verifica la otra familia.

Las tareas T-11 y T-12. El concepto de dualidad de poliedros. Modelos de pares de poliedros duales

Estas tareas están dirigidas a cubrir el objetivo 6 esta fase. Retomamos algunos modelos que ya se trataron con actividades propuestas para los niveles 1 y 2, con la intención de abordar relaciones entre poliedros que aún no hemos tratado hasta ahora. Introducimos el concepto de dualidad de poliedros con ejemplos, a partir de los poliedros platónicos y consideramos varios modelos formados por los pares de poliedros platónicos duales[12]. A partir de estos modelos introducimos el rombododecaedro y el triacontraedro rómbico por un lado (como sólidos envolventes de modelos compuestos), y el cuboctaedro e icosidodecaedro por otro (como sólidos intersección de modelos compuestos); determinamos las características de estos poliedros y los relacionamos entre sí y con pares de poliedros platónicos duales. Y son estos pares de poliedros los que van a llevar a precisar la idea del concepto de dualidad de poliedros que habíamos formado a partir de los poliedros platónicos.

Queremos llamar la atención sobre la necesidad de disponer de los modelos correspondientes para que las actividades puedan comprenderlas los estudiantes que razonan de acuerdo a las características de este nivel. La búsqueda de relaciones entre los sólidos implicados en los modelos, o el descubrir características de los sólidos implicados, requiere mucha imaginación espacial. Son necesarios los modelos en los que apoyarse para hacer predicciones, verificar conjeturas o para comprobar lo que indica el profesor.

La tarea T-11. Se refiere a los poliedros regulares pero ya centra la atención en poliedros de otra familia que permitirán en la tarea T-12 afinar la idea de dualidad de poliedros introducida a partir de los poliedros regulares.

---

[12] Las tareas T-11 y T-12 de esta fase y las tareas T-13 y T14 de la fase 4, junto con los comentarios correspondientes, pueden encontrarse desarrollados con más detalle en Guillén (1991, pp. 89-109 y pp.135-139), de dónde está tomado lo que indicamos aquí.

A) Introducción del concepto de dualidad de poliedros. La actividad T-11a pretende que se llegue a descubrir que:

- Por cada vértice del poliedro inscrito aparece una cara del poliedro circunscrito (poliedro que queda en el exterior), perpendicular al eje que pasa por ese vértice y su opuesto.

- Cada vértice del poliedro circunscrito se corresponde con una cara del poliedro inicial, perpendicular al eje que pasa por ese vértice y su opuesto.

- Por cada arista del poliedro inscrito aparece una arista en el sólido circunscrito. Éstas se cruzan perpendicularmente y el eje que pasa por los puntos medios de aristas opuestas del poliedro inscrito pasa a su vez por los puntos medios de las aristas opuestas del circunscrito.

- El número de lados de las caras de un sólido coincide con el orden de los vértices del otro sólido.

La actividad T-11b recopila estas características como características del concepto de dualidad de poliedros (ver el anexo 2), y lleva a que los poliedros regulares convexos se agrupen como sigue: el cubo y el octaedro son duales; el dodecaedro y el icosaedro son duales. El tetraedro es el dual de sí mismo.

B) Modelos de pares de poliedros regulares duales. La actividad T-11c centra la atención sobre otro modelo de los pares de poliedros duales. Al tratar esta actividad se puede hacer ver lo que se mantiene o cambia, cuando se pasa de un modelo a otro al aumentar el tamaño de uno de los sólidos que forma el modelo con respecto al del otro. Podemos señalar que si en el modelo de un poliedro inscrito en su dual se va aumentando el tamaño del poliedro inscrito, las aristas de éste se convierten en aristas paralelas que se van acercando a las aristas del poliedro circunscrito. Llegará un momento en que las aristas se cortarán.

Una vez colocados en los modelos que llamamos *formas compuestas* podemos destacar esta colocación de los poliedros duales y considerarla no sólo por las características que presentan los modelos sino por la actividad matemática que se puede desarrollar a partir de ellos y que se comprobará con las actividades que siguen. Así, la actividad T-11c resalta que en los modelos compuestos las aristas de los poliedros se cortan perpendicularmente en el punto medio; las aristas que bisecan a las de una cara se cortan en un vértice del poliedro dual, y las que bisecan a las que concurren en un vértice forman una cara del dual.

Las actividades T-11a a T-11c también pretenden que se llame la atención sobre el hecho de que si bien el tamaño relativo de los pares de poliedros duales, proporciona modelos estéticamente diferentes que mantienen la posición de un poliedro con respecto a su dual, el concepto de dualidad de poliedros no lleva asociado una medida concreta para los poliedros implicados. En las experimentaciones realizadas varios estudiantes se formaron la idea de que el cubo y el octaedro (o el dodecaedro e icosaedro) sólo eran duales cuando el tamaño de uno con respecto al del otro era el que corresponde a los modelos presentados en estas actividades.

Éstas tienen pues como objeto revisar la idea que tienen los estudiantes al respecto y que se llegue a delimitar como característica de los poliedros duales que hemos considerado hasta ahora las siguientes (ver el anexo 2):

- Con ellos se pueden obtener modelos de uno de ellos inscrito en el otro, y viceversa, de manera que los vértices del inscrito yacen en los centros de las caras del circunscrito.

- Con ellos puede hacerse otro modelo de manera que las aristas de ambos poliedros se cortan perpendicularmente en el punto medio.

C) Los poliedros intersección y envolventes. La actividad T-11d centra la atención sobre que el sólido intersección de las formas compuestas de pares de poliedros regulares duales y el sólido que los contiene están muy relacionados. En esta actividad sugerimos que se utilice la estrella octangular para mostrar, por un lado, que el sólido intersección se obtiene uniendo los puntos medios de las aristas que concurren en los vértices del tetraedro y, por otro, que el sólido intersección y el sólido envolvente son poliedros duales y están colocados de manera que los vértices del sólido intersección yacen en los centros de las caras del sólido envolvente.

Para que los estudiantes que razonan en este nivel puedan aplicar el mismo tipo de razonamientos en las formas compuestas del cubo y octaedro, y del dodecaedro e icosaedro, hay que detenerse mostrando con detalle cómo se puede deducir que la forma del sólido intersección de los dos tetraedros es el octaedro y que el sólido que contiene a la estrella octangular (el sólido envolvente) es el cubo. En Guillén (1991, pp. 104-107) se pueden encontrar formas posibles de explicarlo y se procede de la misma manera que en la estrella octangular para determinar las características del cuboctaedro y del icosidodecaedro (los poliedros intersección) y del rombododecaedro y del triacontraedro rómbico (los poliedros envolventes).

La tarea T-12. Sobre la idea de dualidad de poliedros. Las propiedades que sólo cumplen los poliedros regulares duales. En lo que vamos a centrar la atención en primer lugar va a ser en la relación de dualidad que hay entre el poliedro intersección y envolvente de cada forma compuesta. Una vez observado esto se puede subrayar cómo las ideas que formamos a partir de algunos ejemplos, si son muy específicos, llevan incluidos más atributos del concepto de los que son propios de él. Destacaremos lo que cumplen los poliedros duales vistos y lo que es exclusivo de los poliedros regulares duales. Es una tarea que permite atisbar que el proceso en el que las ideas de los conceptos se van formando, afinando, precisando, no tiene fin, pues aunque se vayan formando cada vez ideas más precisas de un concepto, a medida que seamos más expertos en el tema, podemos conocer nuevos poliedros, que al ampliar el mundo con ellos pueden cuestionar nuestra idea del concepto.

Vamos a distinguir en dos grupos las propiedades que el concepto de dualidad de poliedros deja de cumplir cuando al mundo de poliedros regulares se le añaden poliedros de las familias de los poliedros intersección y envolvente de los modelos de pares de poliedros regulares duales. Para cada grupo vamos a señalar la información aportada por las experimentaciones realizadas.

A) Los modelos de los poliedros regulares duales, el sólido intersección y el envolvente. Propiedades del concepto de dualidad de las enumeradas a partir de los poliedros regulares que dejan de cumplirse. Con la actividad T-12a nos introducimos en los modelos que van a provocar discusión y con la actividad T-12b ya se advierte que el sólido intersección y el envolvente son duales. Las actividades T-12c a T-12e nos sitúan en propiedades que sólo cumplen los poliedros regulares. Con la actividad T-12c se pretende que los estudiantes lleguen a comprender y a deducir que bastan estos dos ejemplos (los duales del cuboctaedro y del icosidodecaedro son el rombododecaedro y el triacontraedro rómbico) para ver que, a diferencia de lo que sucede con los poliedros regulares, el poliedro dual de un poliedro arquimediano (tienen caras regulares de más de una clase y vértices iguales) no es un poliedro de esta misma familia.

Las experimentaciones realizadas han confirmado que los estudiantes que en otras cuestiones razonaban de acuerdo a las características del nivel 3, con ayuda del profesor podían establecer, por una parte, que como la dualidad intercambia vértices y caras, de manera que el orden de cada vértice es igual al número de lados de la cara correspondiente, como un poliedro arquimediano tiene caras de distinto número de lados, su dual tendría vértices de distintos órdenes, con lo que no puede ser arquimediano. Y por otro lado, que, como todos los vértices de un poliedro arquimediano tienen el mismo orden, las caras de su dual serán todas iguales, pero que no serán regulares porque no lo son los polígonos verticiales del arquimediano. Podían averiguar que el dual de un poliedro arquimediano tiene todas las caras iguales, pero no regulares y vértices de varios órdenes, pero todos regulares; propiedades que son duales de las que caracterizan a la familia de los poliedros arquimedianos.

B) Los modelos que se pueden construir con los poliedros arquimedianos y sus duales. Propiedades del concepto de dualidad de las enumeradas a partir de los poliedros regulares que dejan de cumplirse. Las actividades T-12d y T-12e pretenden centrar la atención de los estudiantes en que al pasar de los poliedros regulares a los arquimedianos, si bien se sigue manteniendo que la dualidad intercambia el número de caras y de vértices, y el orden de los vértices con el número de lados del polígono de las caras, mientras que mantiene el número de aristas, dejan de cumplirse las siguientes propiedades:

- Se puede construir un modelo con los pares de poliedros duales de manera que los vértices del poliedro inscrito estén sobre centros de caras del poliedro circunscrito. Si bien sí se puede construir un modelo con los pares de poliedros duales con el poliedro arquimediano inscrito en su dual de esta manera, no se da la situación inversa; no es posible inscribir el poliedro de Catalan (los duales de los poliedros arquimedianos son de esta familia) en su dual arquimediano.

- Se puede construir un modelo con los pares de poliedros duales de manera que las aristas de ambos poliedros duales se corten en los puntos medios. Si bien sí se puede construir un modelo con los pares de poliedros duales de manera que las aristas se cortan perpendicularmente en el punto medio de las aristas del poliedro arquimediano, no se cortan en el punto medio de las aristas de su dual.

Los dos ejemplos que proponemos en la tarea T-12 (los duales del cuboctaedro y del icosidodecaedro son el rombododecaedro y el triacontraedro rómbico) permiten verificar estos resultados. De los propios modelos se puede observar que si el tamaño del sólido intersección (que está inscrito en el envolvente, que es su dual) se va aumentando, las aristas de éste se convierten en aristas paralelas que se van acercando a las aristas del poliedro circunscrito (el envolvente). Llegará un momento en que las aristas se cortarán en el punto medio de las aristas del sólido intersección; pero no en el punto medio de las aristas del sólido envolvente. Y si el tamaño del sólido intersección todavía se sigue aumentando, las aristas de éste se convierten en aristas paralelas que se van alejando de las aristas del poliedro envolvente. Llegará un momento en que algunos vértices del poliedro envolvente yacerán en centros de las caras del dual y otros atravesarán la cara. Y si continuamos aumentando el tamaño del sólido intersección, ahora serán los otros vértices los que estén sobre centros de caras del intersección, pero los primeros no llegarán.

Esta tarea, que exige de una gran visión espacial si se trabaja sólo con figuras planas de los modelos, no conlleva demasiada dificultad cuando se trabaja con modelos. Esto no quiere decir que no nos encontraremos con estudiantes que razonan de acuerdo a las características del nivel 3 analíticamente, pero que por tener poca visión espacial, requieren que se muestre con detalle en los modelos cuáles son las características del sólido intersección y cómo va quedando éste cuando se aumenta el tamaño. En nuestras experimentaciones hemos comprobado que cuando a los estudiantes se les dedica la debida atención, llegan a visualizar el proceso.

No queremos acabar este apartado sin comentar el interesante problema que en repetidas ocasiones surgió en las experimentaciones cuando desarrollábamos estas tareas: hay estudiantes que tienen dificultades para distinguir las propiedades que son propias del concepto de dualidad de poliedros de las que son propias de las familias de sólidos implicados, para las que se establece la relación de dualidad entre sus ejemplos.

Cuando planteábamos la actividad T-12f que proponemos aquí, varios estudiantes enumeraron las características de los poliedros arquimedianos y las características de los poliedros de Catalan, como muestra la siguiente respuesta: "Los poliedros regulares tienen caras iguales, regulares y vértices iguales. Los poliedros arquimedianos tienen caras regulares de más de una clase y vértices iguales. En los poliedros duales arquimedianos son los de Catalan, que tienen caras no regulares pero iguales y todos los vértices no son del mismo orden porque los poliedros arquimedianos tienen caras de dos tipos (o de tres) y vértices iguales. Los vértices son de orden 3, 4, 5, 6, 8 ó 10 porque en los poliedros arquimedianos las caras tienen 3, 4, 5, 6, 8 ó 10 lados. Dentro de cada poliedro de Catalan hay dos o 3 tipos de vértices. Las caras de los de Catalan son triángulos, cuadriláteros o pentágonos (irregulares pero todas iguales) porque en el arquimediano los vértices son de orden 3, o de orden 4 o de orden 5 ".

Esto nos llevó a reflexionar sobre la dificultad que tienen los conceptos de relaciones, y mucho más el concepto de dualidad de poliedros con el que no se tiene familiaridad; hay que dedicar mucha atención para que se comprenda en este nivel la diferencia entre las propiedades del concepto de dualidad de poliedros y las propiedades de las familias de poliedros a partir de las que se ha extraído la idea del concepto. Hay que destacar que para delimitar las características que tiene el concepto de dualidad de poliedros nos tenemos que abstraer de las propiedades de los elementos que se relacionan.

Las tareas T-13 a T-15. Sobre definición

Estas tareas están dirigidas a cubrir el objetivo 7 de esta fase. Remitimos a los comentarios sobre los objetivos de este nivel (que indicamos al comienzo de la sección 2.6) que completan los que vamos a indicar a continuación.

Descripción general. Lo que pretenden. Con la primera tarea que planteamos para tratar este proceso matemático nos preocupamos de buscar nombres-definición para familias de sólidos muy específicas. Este problema ya lo hemos considerado con las actividades de la fase 2 del nivel 2, pero nuestras experimentaciones han mostrado que al tratar este problema, de nuevo sigue habiendo estudiantes que piensan que lo que aparece como más importante en la clasificación es el nombre que se da a las diferentes clases. De ahí que uno de los propósitos de la actividad T-13a es el de aclarar que el dar nombre a las familias es un problema que, si bien está ligado a la clasificación, no es propio de ella; que cuando se hacen clasificaciones, podemos nombrar las clases o no; a una familia podemos darle uno, varios nombres (porque pertenecen a diferentes familias), o ninguno, depende de lo que se quiera; que aunque se puede pensar que una cosa es más importante porque tiene un nombre específico que lo caracteriza, la importancia de los objetos no depende sólo de si tiene nombre o no; depende de su historia cultural, de lo conocidos que son, etc. Podremos remarcar también que cuando no se profundiza en el estudio de una familia de sólidos, un nombre genérico, por ejemplo poliedro, sólido, puede servir para nombrar cualquier poliedro o clase. Pero cuando uno se introduce en este mundo siente la necesidad de especificarlos individualmente, por clases, o por clases más generales; de ahí que se les den nombres propios, o nombres-definición que en realidad son descripciones precisas de los mismos.

Las otras actividades de la tarea T-13 se refieren al proceso de elaboración de los nombres-definición de familias muy específicas de sólidos. Por ejemplo, la actividad planteada en T-13b pretende resaltar que para hacer referencia a un modelo que es prisma, con las caras laterales cuadrados y que tiene por bases el hexágono de la figura 2.23(a), podemos dar una descripción precisa de él: prisma hexagonal, convexo, equilátero, con dos ángulos distintos en las bases, de caras laterales regulares.

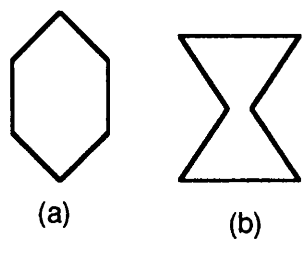


Figura 2.23

En este nivel puede que haya que aclarar, como ha ocurrido en nuestras experimentaciones, que no es necesario que digamos en el nombre-definición que pertenece a la familia de los rectos, porque se deduce de que las caras laterales son regulares. Pero sí es necesario, por ejemplo, que incluyamos la condición de convexo, puesto que hay hexágonos equiláteros cóncavos con dos ángulos diferentes, como el de la figura 2.23(b). Para las otras actividades planteadas en esta tarea también puede que haya que aclarar que cuando un sólido pertenece a varias familias porque una está incluida en otra, la familia general no figura en el nombre, pues ya queda sobreentendida al decir la específica.

Con la tarea T-14 pretendemos que los estudiantes se familiaricen con los requisitos de una definición correcta y lleguen a formalizar algunas que no conlleven mucha dificultad. También tienen como objetivo que los estudiantes lleguen a aceptar diferentes definiciones para una familia de sólidos y que ellos mismos lleguen a elaborarlas.

La tarea T-15 se refiere a la clasificación y la definición. Las actividades que proponemos en ella están dirigidas a cubrir el objetivo 3. Son tareas análogas a las de la tarea T-14 sólo que partimos de una lista de propiedades o de otra, dependiendo de si entre determinadas familias consideramos clasificaciones-particiones o clasificaciones inclusivas (que corresponden a ordenaciones parciales).

También incluye actividades que tienen menos dificultad que las anteriores. Son las actividades en las que se dan definiciones y se pide el tipo de clasificación que se establece entre las familias. Para resolverlas sólo se tiene que verificar si las familias que estarían contenidas en la dada con una clasificación inclusiva verifican o no la definición dada para la familia. Por ejemplo, en la actividad T-15a para determinar el tipo de clasificación que se ha establecido, basta considerar el cubo; y dado que éste no verifica la definición que se da para el ortoedro (no tiene dos medidas para las aristas) podemos concluir que el autor del libro ha establecido el ortoedro y el cubo como familias disjuntas; ha establecido una clasificación partición.

Sugerencias para la instrucción. Las actividades en las que hay que seleccionar conjuntos "más o menos" mínimos de propiedades presentan grandes dificultades para los estudiantes que razonan de acuerdo a las características del nivel 3, por lo que, para que los estudiantes puedan seleccionar las propiedades adecuadas, es necesario, por un lado, que el profesor resuelva una actividad que muestre la forma de razonar y pueda servir como modelo a los estudiantes y, por otro, que conduzca la actividad de los estudiantes en las primeras actividades de este tipo. Y aún así, como ha ocurrido en todas las experimentaciones que hemos realizado con estudiantes de 3ºC de Magisterio, con frecuencia, en las listas de propiedades que dejan los estudiantes hay propiedades de más o no son suficientes. Son una muestra las respuestas que dieron tres estudiantes que en otras tareas utilizaban razonamientos asociados al nivel 3, cuando salieron a la pizarra para resolver las actividades que previamente habían resuelto ellos sin ayuda del profesor.

En el apartado a) de la tarea pedíamos que de una lista de propiedades, se seleccionasen las que cumplía el prisma octogonal de caras regulares y que con ellas se hiciera otra lista. En el b) pedíamos que se utilizase la lista del apartado a) para seleccionar las propiedades que se consideraban como necesarias para definir el prisma dado; en el apartado c) pedíamos que de la lista que se había seleccionado en a) se seleccionase una lista distinta de la que se había dado en b), de manera que fuera lo más corta posible y las propiedades seleccionadas fueran suficientes para definir el prisma octogonal de caras regulares.

E1: Las propiedades necesarias para caracterizar al prisma de caras regulares octogonal, que es del que estamos hablando, yo he puesto que son de las que hay en la lista las siguientes: 1 (toda cara tiene su opuesta que es paralela a ella), 2 (las aristas tienen la misma longitud), 4 (todas sus caras son regulares), 8 (todos los ángulos de los vértices son iguales), 12 (el número de ángulos de las caras es 48) y 13 (todos los ángulos de los vértices son menores de 360°).
Aunque yo creo que con las condiciones 4 (todas sus caras son regulares) y 6 (está formado por una cinta de cuadrados unida y cerrada por ambos lados con dos polígonos). Con estas dos condiciones puede entenderse de qué figura hablamos.

4) Todas las caras son regulares
6) Nos dice la disposición de las caras.

E2: Yo he puesto como que son necesarias para definir ese prisma: 2) (las aristas tienen la misma longitud), 3) (El orden de sus vértices es 3), 6) (está formado por una cinta de cuadrados unida y cerrada por ambos lados con dos polígonos), 12 (el número de ángulos de las caras es 48) y 13 (todos los ángulos de los vértices son menores de 360°).
Y creo que el conjunto mínimo son 6), 2) y 12). He elegido éstas porque la 6) te dice que es un prisma, la 2), como todas las aristas son iguales es un prisma de caras regulares y con la 12 puedes sacar el número de lados del polígono de las bases.

E3: Pues yo aún he puesto más como necesarias: Cumpliría 8 (todos los ángulos de los vértices son iguales) pues es recto de bases regulares. 10) (Todas las diagonales quedan en el interior o en la superficie del sólido) pues es convexo, ~~1 (toda cara tiene su opuesta que es paralela a ella) y~~ 3) (El orden de sus vértices es 3) por ser prisma. 12) (el número de ángulos de las caras es 48) por ser octogonal y 4) (todas sus caras son regulares) por ser de caras regulares.
Cumpliría la 4) y la 1 2). Con estas dos ya podría averiguar de qué prisma se trata.

De la respuesta de E1 a c) no queda determinado el número de lados del polígono de la base. De la respuesta de E2 a c) se desprende que el prisma es octogonal de caras laterales regulares, pero no se puede saber si es convexo, y por tanto, prisma de caras regulares; además, la condición 2) no le añade información a la 6) que ya ha indicado. De la respuesta de E3 a c) no queda determinada la familia a la que pertenece. Por ejemplo, tanto el deltaedro de 16 caras como el prisma octogonal de caras regulares verifican esas propiedades.

Respecto a las respuestas para el apartado b) cabe destacar, por un lado, que dos de estos estudiantes asociaron la propiedad 1) a los prismas de caras regulares ya que aunque E3 la eliminó, según indicó después, lo había hecho porque "ya había dicho otra propiedad de los prismas". Ya hemos mencionado en otras ocasiones que es muy difícil que algunos estudiantes lleguen a desprenderse de este atributo como atributo crítico de los prismas, y especialmente si las familias son de caras regulares. Por otra parte, vale la pena comentar que de las respuestas que dieron estos estudiantes cuando les preguntamos sobre lo que pensaban que tenían que responder en el apartado b), pudimos averiguar que el término necesarias se interpretó como que con las propiedades enumeradas se tenía que remitir a todas las subfamilias a las que pertenecía el modelo y que si con una propiedad ya se había remitido a una familia concreta (por ejemplo, a los prismas convexos) ya no hacía falta poner otra que también remitiese a la misma familia; éstas eran pues las propiedades que se podían eliminar de la lista del apartado a). La explicación a que esto ocurriera podemos encontrarla en que en las tareas-adivinanza habíamos insistido en ello para remarcar que cuando queríamos remitir a una subfamilia concreta podíamos indicar una propiedad específica de esa familia o varias, pero que todas las que añadiésemos ya no aportarían información nueva. Es por esto por lo que aconsejamos que cuando se resuelvan en clase estas tareas nos preocupemos de aclarar que, si la tarea se resuelve de esta manera, una vez que ya se han eliminado de la lista las propiedades específicas que remiten a subfamilias que ya se han precisado con otras, todavía hay que seguir intentando averiguar si todas las que se han indicado son necesarias.

Pensamos pues, que si bien estas actividades pueden ser adecuadas para el nivel 3, es necesario que se acompañen de pistas como las que sugerimos en nuestras experimentaciones, y que fueron las siguientes:

- Se puede comenzar seleccionando una propiedad como la que forma parte de la definición y seleccionar a partir de ella todas las posibles familias de sólidos que cumplen esa propiedad.

- Se seleccionan otras propiedades que dejen fuera las familias delimitadas a partir de las propiedades anteriores y que sí que verifiquen la familia para la que se busca la definición. Se centra la atención sobre cómo se van restringiendo las posibles soluciones a medida que se van apuntando propiedades.

- Una vez que se ha seleccionado una lista de propiedades que conducen exclusivamente a la familia para la que se busca la definición, hay que averiguar si éstas son suficientes o falta alguna para caracterizar la familia. Si no son suficientes se añaden las propiedades que aún son necesarias.

- Se averigua si alguna propiedad, o parte de ella, de las que se indica en la lista se deduce de otras que también se han indicado. En este caso, la propiedad que se deduce de otras se elimina de la lista. Si es parte de la propiedad lo que ya se ha dicho en otras, se reformula de nuevo ésta o las otras propiedades que aportan información común.

Las tareas T-16 a T-21. Sobre demostración

Estas tareas están dirigidas a cubrir los objetivos 8, 9 y 10 de esta fase. En las que se han resuelto antes ya hemos hecho demostraciones de propiedades, o de relaciones entre subfamilias de sólidos, que han surgido al tratar problemas de descripción, de clasificación, de búsqueda de relaciones entre conceptos, o de definición de familias. Al comentar ahora las tareas T-16 a T-21 sólo nos queda explicar con más detalle las actividades sobre demostración que hemos asignado para esta fase y dar algunas sugerencias para la instrucción.

La tarea T-16. Sobre las actividades propuestas. Con las actividades que incluye esta tarea trabajamos las expresiones que dan la suma de los ángulos de un determinado tipo para una familia más o menos general (un prisma hexagonal o un prisma recto). Las actividades centran la atención en diferentes tipos de ángulos, pero no son independientes. Si bien no nos podemos llevar todos los resultados obtenidos en T-16a para T-16b, sí nos podemos llevar una parte. Vamos a explicarlo.

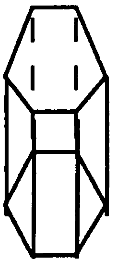
T-16a centra la atención en todos los ángulos de las caras del prisma hexagonal, por lo que requiere que se demuestre cuánto mide la suma de los ángulos de un hexágono, además de separar el prisma en cada una de sus caras, o por lo menos en las caras laterales y las bases.

T-16b centra la atención en los ángulos diedros de un prisma recto. Si se separan los dos tipos de ángulos diedros que tiene un prisma (los de las caras laterales y los de las caras laterales y las bases) y se aplican las propiedades de los prismas rectos relativas a sus ángulos diedros, el problema de T-6b se transforma en parte del problema ya resuelto con T-6a. Una vez transformado el problema de hallar la suma de los ángulos diedros de las caras laterales en el problema de hallar la suma de los ángulos del polígono de las bases, el procedimiento usado en T-16a para hallar la suma de los ángulos del hexágono puede sernos de gran ayuda.

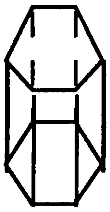
También hay que subrayar que en la actividad T-16b, hay que hacer operaciones en las que está implicada n (que no ocurre con la actividad anterior), por lo que es posible que, además de las sugerencias que hemos apuntado en el enunciado, tengamos que dirigir todavía más la demostración.

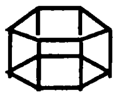
La tarea T-17. Aportaciones de las experimentaciones. En las actividades que proponemos en esta tarea se tienen que enumerar todos los elementos de una familia dada y justificar que no pueden haber más. Las experimentaciones realizadas han proporcionado respuestas como la que sigue.

"Para los prismas y antiprismas rectos de bases regulares se puede ajustar la altura para que las caras laterales sean cuadrados y triángulos equiláteros respectivamente. Obtenemos así los prismas y antiprismas de caras regulares. Hay pues infinitos.



Con los demás prismas igual. Sólo cambio el polígono de las bases.

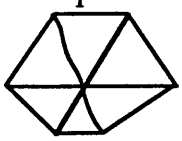




Con los antiprismas tengo triángulos en las CL, también puedo conseguir triáng. equil . según la altura.

Los prismas y antiprismas de caras laterales regulares también tenemos tantos como queramos, pues pueden obtenerse como una cinta de cuadrados o de triángulos equiláteros respectivamente unida y cerrada con dos polígonos iguales (pueden incluso ser cóncavos). Si la cinta la cerramos por los dos lados con polígonos regulares tenemos los prismas o antiprismas de caras regulares.

Para las pirámides y bipirámides, en el hexágono ya no se forma pirámide



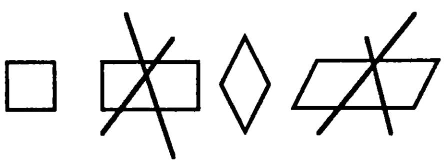
Son triáng. equilát.

Los triángulos de las CL se pegan con la base.

Si tienen más de 6 lados, los triángulos equiláteros que se añaden a los lados de la base no pueden juntarse; la distancia entre el vértice y el centro del polígono es mayor que la longitud del lado (en el hexágono es igual)".

Pruebas que también hemos obtenido de los estudiantes para la actividad T-17e, que no requieren de un nivel superior al 3 son las siguientes:

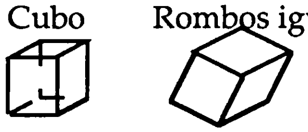
"Son prismas, luego sus CL son:



He tachado éstos porque nunca podrían tener las CL iguales. La base tiene que tener lados iguales para ello. Luego sólo es posible que todas las caras sean cuadrados (cubo) o rombos (romboedro)".

"Para que las caras sean iguales las bases tienen que ser paralelogramos; para que las laterales de un prisma sean iguales los lados de la base tienen que ser iguales; los paralelogramos de lados iguales son el cuadrado y el rombo.

Cubo Rombos iguales



Hay pues dos PCI, el que tiene por caras cuadrados iguales (el cubo) y el que tiene por caras rombos que no son cuadrados".

La tarea T-18. El número de diagonales de familias de sólidos y de sólidos concretos. Esta tarea incluye actividades para demostrar fórmulas, que indicamos a continuación, que dan el número de diagonales de las caras o del espacio para determinadas familias de sólidos. Si n es el número de lados del polígono de la base o de las bases:

En los prismas dC = n(n-1) y dE = n(n-3)
En los antiprismas dC = n(n-3) y dE = n(n-2)
En las pirámides dC = n(n-3)/2 y no tiene dE.
En las bipirámides no hay dC; dE = 1 + n(n-3)/2

También plantea el problema de hallar estas diagonales para modelos concretos que requieren de procedimientos para encontrar estos números. Vamos a comentar por grupos las actividades que proponemos.

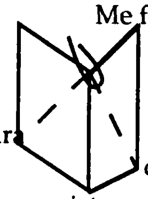
A) Las fórmulas para los prismas. Sobre las sugerencias que se incluyen. Las sugerencias que damos en el enunciado de la actividad T-18a pretenden que, una vez que se ha separado un prisma general en las caras laterales y las bases, se ha observado que hay 2 diagonales por cada cara lateral y que hay *n* caras laterales, se ha demostrado la fórmula que da el número de diagonales de un polígono n-gonal, y se aplica que un prisma tiene 2 bases, se pueda establecer que el número de diagonales de las caras de un prisma n-agonal viene dado por la expresión:

dC (de un prisma n-agonal) = n(n-3) (las diagonales de las dos bases) + 2n (las diagonales de las CL). Y después de hacer los cálculos pertinentes se puede llegar a que: dC (de un prisma n-agonal) = n(n-1)

Las pistas que sugerimos en la actividad T-18c para justificar la fórmula que da el número de diagonales del espacio de los prismas, también tienen un soporte visual. Están encaminadas a que se concluyan resultados, que dirigidos por el profesor, o por las pistas que sugerimos en la actividad, pueden llevar a pruebas deductivas como la que dio uno de nuestros estudiantes:

"Cada vértice de una de sus bases se puede unir con n-3 vértices, siendo n el número de lados del polígono de las bases, pues se puede unir con todos los de la otra base menos con el correspondiente (que se obtiene una arista) y los dos vecinos a éste (que se obtienen diagonales de caras).

No se puede unir con los otros vértices de la base porque se obtienen diagonales de caras.



Si consideramos todos los vértices de la base, el número de diagonales del espacio es n(n-3). No es necesario considerar los vértices de la otra base pues todas las diagonales ya que se han obtenido porque una diagonal une dos vértices. Si los consideráramos, que nos proporcionarían otras tantas diagonales, las diagonales las contaríamos dos veces con lo que tendríamos que dividir por dos y obtendríamos el mismo resultado".

B) Las fórmulas para los antiprismas, bipirámides y pirámides. Las actividades T-18b y T-18d plantean para estas familias los problemas resueltos para los prismas. Las experimentaciones realizadas con los estudiantes de Magisterio han confirmado la necesidad de la intervención del profesor para que los estudiantes lleguen a adaptar el procedimiento utilizado en los prismas para elaborar y justificar las fórmulas para las dos primeras familias. Sin embargo, pocos estudiantes requieren de la intervención del profesor para la elaboración de las fórmulas para las diagonales de las caras, o para las diagonales del espacio de las pirámides. Los estudiantes no tienen dificultades para concluir, si bien con cierta sorpresa e inseguridad, que esta familia no tiene diagonales del espacio.

C) El número de diagonales de poliedros que no pertenecen a las familias tratadas. Aportaciones de las experimentaciones. Las actividades T-18e y T-18f plantean los mismos problemas para poliedros dados. El problema de hallar el número de diagonales de las caras de estos modelos no conlleva dificultad. Para hallar el número de diagonales del espacio es completamente necesario que se disponga de un modelo del poliedro correspondiente. Con él como soporte se pueden contar los vértices que no se pueden unir con el elegido, porque o bien forman arista o diagonal de cara, y así descubrir la fórmula que da el número de diagonales de ese modelo.

Cabe destacar que si bien hay que hacer muy pequeñas adaptaciones del procedimiento utilizado para demostrar las fórmulas en los prismas, para demostrarlas para el dodecaedro y los deltaedros, la mayoría de los estudiantes que participaron en nuestras experimentaciones, a pesar de haber realizado ya todas las actividades anteriores, requirieron de ayuda del profesor para resolver estas actividades. Si bien ya conocían los modelos propuestos y anotamos su número de caras, vértices y orden de éstos, al considerar el dodecaedro se presentaron problemas por varias razones:

Por un lado, el hecho de que aquí la *n* (número de vértices) no tiene el mismo significado que la n de las familias propuestas (la n correspondía al número de lados del polígono de las bases) les llevó a confusión. Por otro lado, el hecho de que a la familia de los prismas les dedicásemos más atención que al resto de las familias, llevó a que algunos estudiantes aplicaran la fórmula descubierta para esta familia para hallar las diagonales del espacio del dodecaedro. Para ello o bien particularizaban para n=5, ya que suponían que la base del dodecaedro era el pentágono, o bien para n=12, ya que suponían que n era el número de caras.

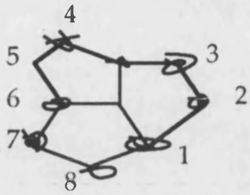
Otros estudiantes intentaron aplicar el procedimiento de los prismas, pero no pudieron delimitar adecuadamente el número de vértices que no podían unirse con el considerado. En nuestras experimentaciones siempre encontramos estudiantes que cuando la disposición espacial de los vértices es la del dodecaedro, tenían dificultad para determinar los vértices que al juntarlos formaban diagonales del espacio; ésta se presentaba al intentar determinar los vértices que se unían con el elegido con una arista o una diagonal de la cara. Las respuestas de varios estudiantes que salieron a la pizarra para mostrar las actividades que previamente habían resuelto sin ayuda del profesor, que presentamos a continuación, aclaran lo que acabamos de explicar.

E1: Yo lo he hecho así: el dodecaedro tiene caras regulares e iguales. Su número de caras es 12; n=12. Por ser un prisma (sabemos que tiene dos bases iguales y paralelas, pentágonos y vértices de orden 3), entonces, las diagonales del espacio, corresponde con n(n-3); 12(12-3)= 12x9=108 diagonales en el espacio.

E2: Yo he hecho lo mismo, pero he puesto que n=5, porque la base es el pentágono no el número total de caras. En los prismas no se ponía para n el número de caras sino el número de lados del polígono de las bases, que ahora es 5.

E3: Pero si el dodecaedro no es un prisma. No están unidas sus caras por paralelogramos. Yo lo he hecho como en los prismas, pero ahora me he fijado en los que hay alrededor de un vértice. Son 9. Luego tengo que restar 10 (con él mismo tampoco forma diagonal) y sale: 20(20-10)/2 = 100. Divido por dos porque cada diagonal se cuenta 2 veces al ir y al volver de cada vértice.

E4: Yo lo he hecho como tú, pero me salen 9 en vez de 10. Mira [Va a buscar el modelo del dodecaedro]. Me fijo en un vértice. Lo apoyo en él y cuento con cuales no lo puedo unir porque salen diagonales de caras. A ver... 1, 2, ... 8. Es que hay que tener mucho cuidado porque sino se te mueve el poliedro y ya no lo cuentas bien. Voy a hacerlo ahora con un dibujo.



Tengo que restar pues 9, porque el elegido tampoco forma diagonal con él, pero son 9 no 10 como tú.

Para el deltaedro, algunos estudiantes no consideraban que tiene vértices de dos tipos. Cuando lo hicimos notar, incluso después de haber sugerido que podían utilizar el mismo procedimiento que en las otras familias o modelos para cada tipo de vértices, algunos estudiantes no pudieron aplicarlo. Intentaron utilizar otras estrategias, que les llevaron a no hallar adecuadamente lo que señalaban, a no contar todas las diagonales o a contar algunas varias veces. Por ejemplo, una respuesta que lo corrobora fue la siguiente:

"Lo apoyo en una arista (se refiere al deltaedro de 14 caras) y lo veo como 2 triángulos, 8 triángulos (antiprisma sin base) y 4 triángulos formando una pirámide. Tengo que el ápice puedo unirlo con los 4 triángulos de abajo y forman diagonales del espacio. Con los otros son aristas. Luego tengo otras 4 de lo que podríamos llamar el antiprisma: cada uno de arriba con el opuesto de abajo. Total 4 y 4, que son 8".

Como puede observarse, en esta respuesta no se han hallado, como se indica las diagonales de un antiprisma cuadrado, que tendría 8 diagonales del espacio (en este caso cada vértice de una base se puede unir con dos vértices de la otra base), sino que se ha considerado como si fuera un prisma (en el que cada vértice de una base sólo se puede unir con un vértice de la otra base). Además no se ha tenido en cuenta que al juntar los vértices del cuadrilátero de la base de la pirámide se obtienen otras dos diagonales del espacio y al juntar los vértices de la base de abajo del antiprisma se obtiene otra diagonal del espacio (dos de los vértices ya están unidos con una arista).

Vale la pena señalar que algunos estudiantes, después de haber apuntado las pistas que hemos indicado, sí que pudieron adaptar el procedimiento utilizado para otras familias para hallar las diagonales del espacio del dodecaedro o de algunos deltaedros. Las respuestas de E3 y E4 que hemos indicado antes y la que dio otro estudiante para el deltaedro de 14 caras (que tenía a su disposición el modelo correspondiente), que indicamos a continuación, lo muestran:

"Este modelo tiene 3 vértices de orden 4 y 6 vértices de orden 5. Los vértices de orden 4 los puedo unir con todos los del deltaedro (9) menos con los vecinos (4) (Claro, es de orden 4 y aquí no hay diagonales de caras que en el dodecaedro liaba el contar) y él mismo. Y con todos los del mismo orden ocurre lo mismo.

Los vértices de orden 5 tienen 5 vecinos. En total, como cada diagonal la contamos dos veces, el número de diagonales de este deltaedro es: 3(9-5)/2 + 6(9-6)/2 = 15".

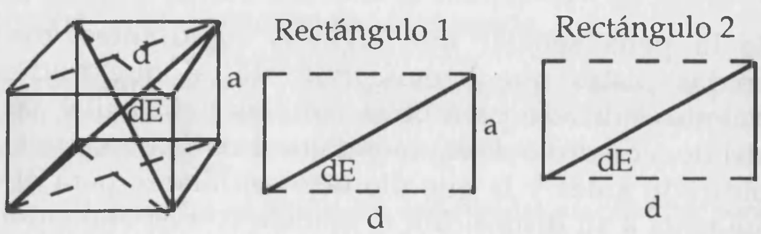
Con lo anterior queremos explicar que si bien estas actividades las proponemos para este nivel, es necesaria una clara intervención del profesor para que los estudiantes puedan resolverlas en la fase 2 de este nivel.

La tarea T-19. Demostración de propiedades con fuertes características visuales. Lo que vamos a comentar respecto a esta tarea se refiere a las diferentes actividades que incluye.

A) Sobre las actividades T-19a y T-19b. Demostraciones de los estudiantes. Para la actividad T-19a un procedimiento que pueden utilizar los estudiantes es visual, basado en secciones, que en la mayoría de los casos son planos diagonales del sólido considerado, y en la identificación de los elementos implicados en el apartado correspondiente como elementos de este polígono obtenido como sección. Las sugerencias que tiene el enunciado de estas actividades conducen a que se dé una prueba de este tipo.

Si los estudiantes que razonan de acuerdo a las características del nivel 3 a nivel analítico tienen problemas de visión espacial, se les puede ayudar en esta actividad con modelos abiertos (se les ha quitado alguna cara), con objeto de que puedan visualizar los elementos correspondientes y puedan llegar a dar una prueba como la que nos dio uno de los estudiantes cuando le planteamos la actividad T-19a:

"Las diagonales del espacio de un ortoedro sí tienen la misma longitud y se cortan en el centro del ortoedro.



Los planos diagonales del ortoedro son rectángulos iguales (ver figura) porque dos de sus lados coinciden con las aristas laterales (lo suponemos apoyado en una cara), luego son iguales, y los otros dos lados en ambos rectángulos son las diagonales de las caras que podemos suponer que hacen de base. Como ésta es rectángulo, son iguales. Las diagonales del espacio del ortoedro son las diagonales de estos rectángulos, luego son iguales.

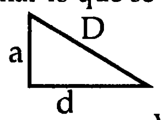
Los dos planos diagonales intersectan en el segmento que une los dos centros de caras opuestas, luego las diagonales de ambos planos diagonales se cortan en el centro de este segmento, que es el centro del ortoedro".

No quiere esto decir que los estudiantes a los que planteemos la actividad tienen que dar una prueba de este tipo. Como nos ocurrió a nosotros, entre los estudiantes que razonan de acuerdo a las características del nivel 3 con frecuencia se encuentran diferentes pruebas en las que se usan las sugerencias que se dan en el enunciado. En algunas se aplica el teorema de Pitágoras para calcular estas diagonales a partir de las aristas del ortoedro y de las diagonales de las caras y se muestra que tienen la misma medida. Los estudiantes que razonaban de acuerdo con el nivel 3 y dieron esta prueba, nos cuestionaron si podían hacerlo por Pitágoras, y al responderles que podía ser una manera, contestaron que "no tenemos tampoco las diagonales de las caras". Les apuntamos que se pensaran si también podían determinarlas a partir de las aristas del ortoedro y ya entonces observaron que no era necesario: "Sí, podría, pero no me hacen falta. En todas, en las cuatro diagonales sale el mismo triángulo rectángulo: los catetos son la arista, que las 4 son iguales y el otro cateto son las diagonales de las caras, que también son iguales, pues son rectángulos. No tengo que hallarlas. No hace falta. Siempre se cumple $dE^2 = a^2 + d^2$".

Queremos también llamar la atención sobre la prueba que dio uno de los estudiantes: "En los prismas rectos el número de medidas diferentes para las diagonales del espacio es igual al de medidas distintas para las diagonales de la base. Luego como la base es un rectángulo (las dos diagonales son iguales) ya está demostrado". Si la comentamos aquí, como prueba en la que se utilizan razonamientos asignados al nivel 3 es por el proceso de elaboración. Ésta surgió a partir de las pistas que dio el profesor cuando este estudiante intentaba explicar la tarea propuesta con un tipo de prueba como la que acabamos de comentar.

E: Con las secciones del enunciado salen rectángulos, por Pitágoras... Tengo un triángulo rectángulo [Lo señala en el modelo del ortoedro].

P: ¿Qué elementos necesitas para hallar lo que se te pide en la actividad?



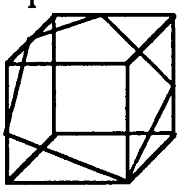
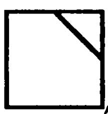
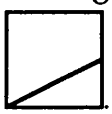
E: Sí, mira la diagonal de la base y la arista y esto es la diagonal del espacio.
Pero es que esto es lo mismo que como lo vimos en la propiedad de los prismas rectos: la diagonal del espacio se calcula con la de la base ¿no?

P: Mira a ver si puedes aplicar esta propiedad de los prismas rectos para esta actividad.

E: Sí claro. El ortoedro es recto. Entonces es muy fácil, pues el número de medidas diferentes para las diagonales del espacio es igual al de medidas distintas para las diagonales de la base. Y ya está demostrado porque como la base es un rectángulo (las dos diagonales son iguales) ya está demostrado.

La actividad T-19b es análoga a la T-19a pero al cambiar el problema de partida y considerar un paralelepípedo (puede ser oblicuo), permite evaluar si el estudiante aplica el procedimiento utilizado en la actividad anterior para resolver ésta, y si en el procedimiento utilizado introduce las modificaciones necesarias. Por ejemplo, el procedimiento utilizado para el ortoedro en el que se aplica el teorema de Pitágoras para demostrar que las diagonales del espacio, o las diagonales de una cara, son iguales, puede adaptarse a los paralelepípedos, para demostrar que las diagonales del espacio, o las diagonales de una cara pueden no ser iguales si los ángulos de las caras no son iguales. Pero en este caso hay que aplicar el teorema del coseno. La otra prueba que hemos indicado en la que se aplica una propiedad de los prismas rectos no se puede extender para esta familia.

B) La actividad T-19c. Pruebas de que algo no puede ser. Esta actividad introduce en otro tipo de prueba que se da en la enseñanza de las matemáticas. Hay que demostrar que algo no puede ser. Las sugerencias que indicamos en el enunciado pueden llevar a una demostración visual basada en la experimentación como la que dio uno de nuestros estudiantes que para otras tareas razonaba de acuerdo a las características del nivel 3:

"No puede ser porque en un cubo si queremos que la sección toque a 5 caras (para que tenga 5 lados), a una de ellas no la puede tocar. Para que a una de ellas no la toque la sección y al resto sí los lados de este polígono no pueden ser iguales  Los tres lados de arriba , sí pueden ser iguales (que todos vayan de punto medio del lado al otro punto medio). Y los dos de abajo también. Pero no se puede conseguir que todos los lados sean iguales; los de abajo tienen que ir: . Y aunque no vayan exactamente desde el punto medio no se puede mantener que sean iguales manteniendo entre ellos un ángulo de 108° (el del pentágono regular)".

La tarea T-20. Las implicaciones directas e inversas. Las actividades que incluimos en esta tarea ya las hemos resuelto en las actividades del nivel 2 o en las anteriores de esta fase. De nuevo han sido las experimentaciones que hemos realizado las que nos han llevado a que las retomemos de nuevo para trabajar el significado de una implicación y cómo se justifican las que son ciertas y las que no lo son. Esta tarea permite subrayar la diferencia que supone en cuanto a tipo de razonamientos la demostración de que algo es cierto o de que algo es falso. Permite también centrar la atención en el uso implícito que se hace de reglas lógicas.

Cuando hemos planteado estas actividades a los estudiantes siempre hemos tenido que centrar la atención sobre una implicación dada y su inversa, pues los estudiantes muy a menudo interpretan o justifican la implicación inversa de la que se propone. A esta tarea hay que dedicarle atención especial pues requiere de un nivel 4 de razonamiento para comprender la diferencia de ellas y distinguirlas perfectamente. Por lo que, al trabajar las implicaciones en este nivel hay que hacer hincapié en lo que se conoce, o de lo que se parte, (primera parte de la implicación) y en lo que se tiene que concluir necesariamente de ello para que la implicación sea cierta. Pondremos el énfasis en que la primera parte de la implicación hay que tenerla muy en cuenta, pues sólo cuando se cumple ella es cuando se tiene que verificar si se cumple la segunda parte o no. Y en este nivel, puede ser aconsejable el poner ejemplos del entorno del estudiante para explicar todo lo relativo a las implicaciones y cómo se demuestran si son ciertas o falsas. Estas actividades nos introducen también en el problema de incluir condiciones para que una implicación sea cierta.

La tarea T-21. Problemas de demostración y de definición. Con las actividades que incluimos en esta tarea centramos la atención sobre una de las características que tienen que tener las definiciones de las familias de sólidos: de las condiciones de una definición de una familia de sólidos se deduce el resto de las propiedades de ella. En esta tarea, para una familia con fuertes características visuales y en cuya definición basta una propiedad específica para caracterizar la familia completamente (se considera la familia de los prismas rectos), se trabaja cómo las propiedades de esta familia se deducen de las propiedades que la caracterizan (su definición). También incluimos actividades que tratan problemas de equivalencia de definiciones.

Las sugerencias que hemos dado para la tarea T-20 son también aplicables para esta tarea.

2.6.3. NIVEL 3. FASE 4

La mayoría de las tareas diseñadas para esta fase se refieren a propiedades, bien porque hay que asociarlas o no a una familia de sólidos dada o hay que determinar las familias de sólidos que las cumplen, porque hay que establecerlas teniendo en cuenta varias subfamilias (tres subfamilias de sólidos), porque hay que seleccionar un conjunto "más o menos" mínimo, o porque hay que hacer demostraciones. Otras tareas tienen que ver con las relaciones de inclusión o exclusión que hay entre pares de familias de sólidos (de las cuales una por lo menos se introduce con definición) y con la construcción de modelos que representan estas relaciones así como si pares de familias comparten ejemplos pero no tienen relación de inclusión.

Parte de estas tareas ya las hemos estudiado en la fase 2 del nivel 3; las diseñadas para la fase 4 pretenden que los estudiantes afiancen lo tratado con las tareas propuestas para la fase 2.

OBJETIVOS

1.– Aplicar los conocimientos adquiridos en la fase dos en tareas de clasificación, para descubrir el tipo de clasificación (inclusiva-exclusiva) que se ha establecido entre determinadas familias cuando se dan propiedades o definiciones de ellas o para descubrir propiedades y definiciones de familias que respondan a un tipo de clasificación dada.

2.– Aplicar los conocimientos adquiridos en la fase dos para interpretar, utilizar y negar cuantificadores y expresiones del tipo *como mucho, como mínimo, tantas medidas diferentes como, las mismas medidas diferentes que,* en tareas en las que se tienen que asociar propiedades como propiedades de una familia de sólidos dada, o delimitar todas las familias de sólidos de las tratadas que cumplen propiedades dadas.

3.– Aplicar los conocimientos adquiridos en la fase dos para descubrir propiedades comunes a ternas de familias, propiedades que cumplan dos familias que una tercera familia no las verifique y propiedades de una familia que otras dos no las verifiquen. Aplicar relaciones de inclusión entre familias para simplificar una determinada tarea.

4.– Elaborar definiciones formales de familias de sólidos. Modificar definiciones para una clase de sólidos para obtener otras definiciones de estas familias.

5.– Explicar el desarrollo de algunas demostraciones formales sencillas que se han realizado anteriormente para una familia de sólidos, o para un sólido dado. Demostrar algunas propiedades ya conocidas. Demostrar que determinadas familias de las tratadas no verifican una propiedad dada. Demostrar que varias familias verifican una propiedad dada y que no hay más familias de sólidos de las tratadas que la verifican.

Establecer relaciones métricas en modelos de pares de poliedros duales.

6.- Explicar la concatenación de los pasos de una demostración que se ha realizado anteriormente para una familia de sólidos, o para un sólido dado, y adaptar el procedimiento utilizado en estas demostraciones a otras situaciones cuando las modificaciones que tienen que hacerse en el procedimiento son pequeñas.

7.- Completar demostraciones formales presentadas por el profesor. Realizar implicaciones de un solo paso que no aparecen explícitamente. En particular, completar las demostraciones que hace el profesor sobre la equivalencia de varias definiciones de una familia de sólidos y otras pruebas formales relativas a los sólidos.

8.- Descubrir las características del concepto de igualdad de poliedros a partir de ejemplos. Precisar la idea de estos conceptos al ampliar el mundo de posibles ejemplos. Elaborar definiciones de poliedros iguales.

TAREAS

T-1 Seleccionar propiedades que contengan términos sobre cuadriláteros y relativas a medidas diferentes de los diferentes elementos de los sólidos, que contengan también términos del tipo *como mucho, como mínimo*, etc. Un bloque de propiedades para plantear en una tarea pueden ser las que indicamos a continuación.

a) Está formado por una cinta de rombos unida y cerrada por ambos lados con dos polígonos.

b) Las aristas tienen como máximo dos medidas diferentes.

c) Los ángulos de los vértices tienen tantas medidas diferentes como ángulos diferentes tenga el polígono de las bases.

d) Los ángulos diedros tienen tantas medidas diferentes como ángulos diferentes tenga el polígono de las bases, más uno.

e) Las diagonales de las caras tienen como máximo 2 medidas diferentes.

f) Para las diagonales del espacio hay como mucho las mismas medidas diferentes que para las diagonales de las caras.

Seleccionar también una subfamilia de las establecidas con las actividades de la fase 2 del nivel 2. Por ejemplo, la de los prismas de caras regulares.

Pedir que de las propiedades que se indican se seleccionen las que cumple la familia elegida (PCR) y que se explique la respuesta para cada propiedad, tanto si la familia (los PCR) la verifica como si no.

Pedir que se repita la actividad para cualquier otra subfamilia de los prismas, o cualquier subfamilia de los antiprismas, pirámides o bipirámides.

T-2 Pedir que se repita la tarea anterior para los paralelepípedos y para cualquier otra familia de los prismas cuadrangulares siguientes: el cubo, ortoedro, romboedro, prismas de base cometa, prismas de base trapecio isósceles, un prisma trapezoidal o un prisma cuadrangular cualquiera y considerando las propiedades siguientes.

a) Todas sus caras son del mismo tipo.

b) Toda cara tiene más de 3 caras que son perpendiculares a ella.

c) Como máximo hay 3 medias diferentes para las caras.

d) Tienen aristas de dos medidas diferentes.

e) Como máximo hay tres medidas diferentes para las aristas.

f) Está formado por una cinta de rombos unida y cerrada por ambos lados con dos polígonos.

g) Los ángulos de las caras tienen como máximo dos medidas diferentes.

h) Los ángulos de las caras como mínimo tienen dos medidas diferentes.

i) Los ángulos de los vértices como mínimo tienen dos medidas diferentes.

j) Está formado por una cinta de cuadriláteros unida y cerrada por ambos lados con dos polígonos.

k) Los ángulos de los vértices como máximo tienen 8 medidas diferentes.

l) Todas las diagonales del espacio se cortan en el centro del sólido y tienen como máximo 6 longitudes diferentes.

T-3 Para cada una de las propiedades que enumeramos en T-1 y en T-2 pedir que se indiquen todas las familias y subfamilias de los prismas que la verifican.

Luego enumerar propiedades numéricas relativas a número de elementos de un determinado tipo, propiedades numéricas que incluyan condiciones con gran componente visual o que contengan también otras condiciones geométricas y propiedades relativas a número de medidas diferentes para un tipo de ángulos o de diagonales. Por ejemplo, seleccionar la lista de propiedades que indicamos a continuación.

a) Tiene 13 vértices.

b) Tienen 35 diagonales del espacio.

c) Tiene exactamente 10 aristas más cortas y 5 aristas más largas.

d) Tiene 36 aristas iguales.

e) Tiene 14 vértices iguales.

f) Tiene 7 aristas más cortas iguales y 14 aristas más largas iguales.

g) Tiene ángulos de las caras de 3 medidas diferentes.

h) Tiene 24 ángulos diedros de 2 medidas diferentes.

Para cada propiedad pedir que se indiquen las subfamilias de los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides que la verifican. Apuntar que si sólo algunos polígonos de un número de lados dado pueden ser bases de las subfamilias seleccionadas, se dibujen todos los polígonos que pueden serlo.

T-4 Pedir que se descubra el sólido que verifica las propiedades siguientes. Apuntar que además se dé respuesta a cada una de las preguntas que se plantean al lado de cada propiedad y que se tenga en cuenta que el sólido tiene que cumplir la propiedad que se indica y todas las anteriores.

a) Es un sólido que no tiene caras ni aristas curvas. ¿Añade información? ¿A qué sólidos nos podemos referir?

b) Tiene al menos dos caras paralelas. ¿Descartamos o no descartamos alguno que no hayamos descartado ya? Si sólo descartamos algunas subfamilias de una familia, indica la/s subfamilia/s que aún pueden ser soluciones.

c) Todos los vértices tienen el mismo orden ¿Añade información?

d) Tiene más de 2 caras triangulares. ¿Añade información?

e) Todas las diagonales del sólido quedan en el interior de él. ¿Añade información? ¿En qué familia específica estamos pensando?

f) Como mucho tiene dos medidas diferentes para las aristas. ¿En qué familias específicas estamos pensando?

g) Los ángulos de las caras tienen como mucho dos medidas diferentes. ¿Nos añade información? ¿En qué familias específicas estamos pensando?

h) Tiene 3 diagonales del espacio ¿Cuántos lados tiene el polígono de la base? ¿En qué familias específicas podemos estar pensando?

i) Todas las caras no son regulares. ¿Eliminas algún sólido? ¿En qué familias específicas podemos estar pensando?

j) No tiene ninguna cara que sea regular. ¿Eliminas algún sólido? ¿En qué familia específica estamos pensando?

Pedir que se nombre la familia de sólidos que ha sido solución de la actividad anterior. Dirigir la atención sobre si lo que se ha indicado en el nombre del sólido solución es suficiente para caracterizarlo (no le falta nada más) y si todo lo que se ha señalado es necesario (no le sobra nada).

T-5 Pedir que se repita la tarea T-4 considerando las propiedades de la lista siguiente.

a) Tiene como mucho dos tipos distintos de caras.

b) Tiene al menos dos caras iguales.

c) Tiene exactamente 3 ángulos de las caras de diferente tamaño.

d) Tiene exactamente 8 aristas iguales más cortas y 16 aristas iguales más largas.

e) Tiene las caras laterales iguales.

f) Toda cara tiene otra cara paralela o ella.

g) Todas los ángulos de las caras son menores que 180°.

T-6 Seleccionar ternas de subfamilias de prismas de manera que se contemplen posibilidades donde las tres familias implicadas, o sólo pares de ellas, tengan relación de inclusión o exclusión y que intersecten. Por ejemplo, se seleccionan las ternas siguientes.

a) Prismas convexos, prismas de caras iguales y prismas de caras regulares.

b) Prismas convexos, prismas rectos y prismas rectos de bases regulares.

c) Cubo, romboedro y prismas convexos.

Para cada terna pedir que se haga una lista con todas las propiedades comunes a las tres subfamilias implicadas.

Pedir que se repita la tarea considerando otras ternas de subfamilias de antiprismas, pirámides o bipirámides.

T-7 Para cada una de las ternas de subfamilias que se han seleccionado en T-6 pedir que se haga una lista con todas las propiedades de la primera familia que no sean propiedades comunes a la segunda y la tercera.

T-8 a) Pedir que se haga una lista con las propiedades de los antiprismas, que se eliminen todas las popiedades que se piensa que no son necesarias para definirlos y que si se considera que con las propiedades que quedan no hay suficientes para ello, se añadan las propiedades imprescindibles.

Pedir que se hagan otras listas de propiedades de manera que las condiciones que se seleccionen basten para caracterizar el antiprisma y no sobre ninguna.

b) Pedir que se repita la actividad T-8a para las pirámides y las bipirámides

c) Pedir que se repita la actividad T-8a para los prismas rectos, para los prismas oblicuos; para los prismas convexos y para los prismas cóncavos.

d) Pedir que se elaboren varias definiciones para cada una de las siguientes familias de prismas: el cubo, el ortoedro, el romboedro y el paralelepípedo. Pedir también que se modifiquen estas definiciones para obtener otras nuevas de la misma familia.

e) Pedir que se busquen definiciones de las familias de prismas cuadrangulares y se delimite el tipo de clasificación, inclusiva o exclusiva, que conllevan asociadas.

T-9 Seleccionar cuatro subfamilias de las establecidas en la fase 2 del nivel 2 al considerar la clasificación con dos o tres criterios conjuntamente y dar definiciones para ellas. Por ejemplo, indicar las siguientes definiciones:

Un POLIEDRO A es un poliedro que tiene todas las caras regulares de más de una clase y todos los vértices iguales.

Un POLIEDRO D es un poliedro cuyas caras son triángulos equiláteros.

Un POLIEDRO C es un poliedro que tiene todas las caras iguales que no son regulares.

Un POLIEDRO R es un poliedro que tiene todas las caras regulares e iguales y todos los vértices iguales.

Seleccionar pares de subfamilias intentando contemplar las situaciones siguientes.

- Las que las dos familias que se comparan se han introducido mediante una definición.
- Sólo una de estas familias se introduce con definición y la otra corresponde a subfamilias de las establecidas en las actividades del nivel 2. La familia que se introduce con definición aparece a la izquierda. Si aparece a la derecha para que la selección sea matemáticamente correcta hay que seleccionar el término nunca o siempre.

Para cada par expresar enunciados como los que indicamos a continuación.

a) Las pirámides son SIEMPRE, A VECES, O NUNCA poliedros A.

b) Los poliedros R son SIEMPRE, A VECES, O NUNCA bipirámides de caras regulares.

c) Los Poliedros D son SIEMPRE, A VECES, O NUNCA poliedros A.

Pedir que, para cada relación que se indica, se seleccione la palabra SIEMPRE, A VECES, o NUNCA que muestra la relación que existe entre las familias de sólidos implicadas en ella.

T-10 a) Pedir que se demuestre que la suma de los ángulos de los vértices de un prisma n-agonal viene dado por la expresión (n–1)720°, donde n corresponde al número de lados del polígono de las bases. Dar como sugerencia que se intenten aprovechar los resultados obtenidos en otras actividades que ya se han resuelto en la fase 2.

b) Pedir que se demuestre que la suma de los ángulos de los vértices de un prisma recto n-agonal es el doble que la suma de sus ángulos diedros. Cuestionar si se cumple en los prismas oblicuos. Dar la sugerencia indicada en T-10a.

T-11 Para las actividades de esta tarea dar como sugerencia que se intenten aplicar, haciendo las modificaciones correspondientes, los procedimientos utilizados en las actividades de la fase 2 en las que se tienen que enumerar todas las posibilidades.

a) Cuestionar cuántos antiprismas hay que tienen caras iguales y pedir que se justifique que ya no puede haber más que los que se han señalado.

b) Plantear la actividad anterior para las pirámides de caras iguales.

c) Plantear la actividad anterior para las bipirámides de caras iguales. Cuestionar si puede haber bipirámides de esta familia con caras triángulos escalenos.

d) Plantear la actividad T-11a para los poliedros regulares.

e) Plantear la actividad T-11a para los prismas rectos de base regular que rellenan el espacio.

T-12 Para las actividades de esta tarea dar como sugerencia que se intenten aprovechar los resultados obtenidos, o los procedimientos visuales utilizados, en otras actividades que ya se han resuelto en la fase 2. Para la actividad T-12c apuntar también que el apoyar el modelo en una arista sugiere la sección que hay que elegir para poder calcular cuánto mide el diámetro de la esfera media del tetraedro; y que para hallar los radios de las otras esferas apoyen el modelo en un vértice y en una cara porque sugieren los triángulos que se pueden elegir para hallar estos radios a partir del radio de la esfera media.

a) Cuestionar si un romboedro tiene esfera inscrita y si tiene esfera circunscrita. Pedir que se demuestre la respuesta.

b) Plantear la actividad T-12a para un paralelepípedo.

c) Cuestionar si un tetraedro tiene esfera media (que pasa por los puntos medios de las aristas), si tiene esfera circunscrita y si tiene esfera inscrita. Pedir que se halle la medida de los radios de estas esferas a partir de la arista del poliedro.

d) Plantear la actividad anterior para el octaedro.

e) Pedir que se demuestre que todas las alturas de un tetraedro se cortan en el mismo punto, que se determine a qué distancia de los vértices y del centro de las caras está el punto de corte y que se compare esa distancia con la altura del tetraedro.

T-13 a) Pedir que se hallen los ángulos diedros de los poliedros regulares. Para dirigir la actividad, como sugerencias, centrar la atención sobre las secciones que se pueden considerar en cada caso, sobre los elementos que se pueden hallar a partir de ellas, y sobre cómo se pueden aprovechar estos elementos para hallar los ángulos diedros buscados.

b) Pedir que se construya un modelo de los pares de poliedros regulares duales inscritos uno en otro de manera que los vértices del poliedro inscrito estén sobre los centros de las caras del circunscrito. Para dirigir la actividad, como sugerencias, centrar la atención sobre los triángulos que se pueden considerar en cada caso, sobre los elementos que hay que determinar previamente para hallar los que se buscan, sobre los elementos que se pueden determinar a partir de la arista del poliedro circunscrito y sobre el teorema que relaciona unos elementos con otros.

T-14 a) Pedir que se construyan los modelos compuestos formados por los pares de poliedros regulares duales: dos tetraedros, el cubo y el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro (ver apartado 2.2.1; figura 2.5).

Para dirigir la actividad, como sugerencias, centrar la atención sobre el poliedro que puede convenir tomar como base para añadir en él las pirámides y sobre cómo se pueden hallar las caras de éstas a partir de la arista del poliedro de partida.

b) Para cada modelo compuesto (ver apartado 2.2.2; lámina VIII) pedir que se deduzca cómo encontrar la relación entre la longitud de las aristas del sólido intersección, la de los poliedros que forman el sólido compuesto y la del sólido envolvente.

c) Pedir que se explique cómo se puede construir los modelos compuestos a partir del poliedro intersección correspondiente y a la inversa.

d) Pedir que se construya el modelo compuesto formado por el cuboctaedro y el rombododecaedro (el icosidodecaedro y el triacontraedro rómbico). Sugerir que para construir la cara del rombododecaedro se utilice la estrategia que se apunta en Holden (1971, p. 51) para hallar la cara del dual de un arquimediano:

Primero, encontrar la forma del polígono que forma la sección obtenida truncando una esquina del arquimediano por los puntos medios de las aristas que se junta en ella. Entonces incribir este polígono en un círculo y dibujar tangentes al círculo en los vértices del polígono. La figura 2.24 sugiere el procedimiento para hallar el dual del tetraedro truncado.

Apuntar también que se construyan tantos polígonos de esos como vértices tiene el poliedro arquimediano correspondiente (cuboctaedro o icosidodecaedro), que se recorten en ellos el polígono inscrito y se coloque esa unidad sobre los segmentos que unen los puntos medios de las aristas que concurren en un vértice del poliedro arquimediano.

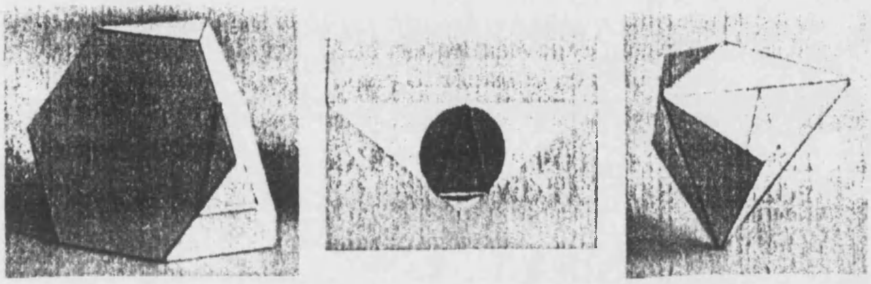


Figura 2.24

e) Pedir que se construya el dual del cuboctaedro y del icosidodecaedro (el rombododecaedro y el triacontraedro rómbico) utilizando la estrategia que se indica en T-14d.

T-15 Dar los modelos que indicamos a continuación y pedir que se halle el número de diagonales de las caras y de diagonales del espacio que tienen.

a) Un poliedro arquimediano. Por ejemplo el cuboctaedro o el cubo truncado.

b) Un poliedro de Catalan. Por ejemplo, el rombododecaedro o el triacontraedro rómbico.

c) Un antiprisma octogonal al que sustituimos la base por las caras laterales de una pirámide que tiene exactamente esa base.

Apuntar que se intenten aplicar, haciendo las modificaciones correspondientes, los procedimientos utilizados en otras actividades que ya se han resuelto.

T-16 Pedir que se razone detenidamente si son o no son ciertas las implicaciones siguientes y que si la implicación no es correcta, después de justificar la respuesta, se añada la condición necesaria para que lo sea.

a) Si los ángulos del polígono de la base de una pirámide recta (o de una bipirámide recta) son iguales, entonces las caras laterales son iguales.

b) Si un prisma tiene las caras laterales regulares, entonces la base tiene lados iguales.

c) Si una pirámide es recta y su base tiene lados iguales, entonces las caras laterales son iguales.

d) Si una pirámide o bipirámide es recta y tiene las aristas laterales iguales, entonces el polígono de la base tiene circunferencia circunscrita.

e) Si el polígono de la base tiene circunferencia circunscrita, entonces la pirámide o bipirámide recta tiene las aristas laterales iguales

f) Si un sólido no tiene diagonales del espacio que se salgan del interior del sólido, entonces es convexo.

T-17 Dar la definición de prisma convexo siguiente: un sólido convexo es un sólido que tiene todos los ángulos diedros menores de 180°. Pedir que se demuestren las siguientes propiedades.

a) En un sólido convexo todos los ángulos de las caras son menores de 180°.

b) En un sólido convexo todos los ángulos de los vértices son menores de 360°.

c) En un sólido convexo todas las diagonales de las caras caen dentro de la superficie del prisma.

Cuestionar si la condición que indicamos en a) caracteriza a un sólido convexo, si es una condición necesaria y si es suficiente. Plantear las mismas cuestiones para la condición que indicamos en b).

T-18 Pedir que se delimiten las condiciones que caracterizan el concepto de igualdad de poliedros. Sugerir que se descubran las características de este concepto a partir de ejemplos de ellos; que se precise la idea de este concepto al ampliar el mundo de posibles ejemplos y que se elaboren definiciones de poliedros iguales.

COMENTARIOS

Las tareas T-1 a T-3. Asociar propiedades a familias de sólidos o familias de sólidos a propiedades. Aportaciones de las experimentaciones

Estas tareas están relacionadas con el objetivo 2 de esta fase. En ellas incluimos propiedades que requieren del nivel 3 de razonamiento, bien para interpretar algunos términos, o para explicar la respuesta de manera matemáticamente correcta. Las propiedades que contienen expresiones del tipo *como mucho, como mínimo o tantas medidas diferentes como* ya se han abordado con las actividades de descripción de la fase 2. También han sido las experimentaciones realizadas las que han puesto de manifiesto que estos términos hay que tratarlos en tiempos diferentes para que los estudiantes lleguen a interpretarlos de manera matemáticamente correcta, que es lo que se espera conseguir con las actividades que planteamos aquí. Cuando hemos planteado estas actividades a nuestros estudiantes, todavía hemos tenido alguno que ha interpretado los primeros términos como exactamente, y la última expresión, como que tiene que haber medidas diferentes.

Las tareas T-1 y T-2. Sobre las propiedades propuestas. En las actividades que incluimos en estas tareas hay que asociar o no propiedades a una familia de sólidos dada. Vamos a comentar por separado las propiedades que se presentan enunciadas de manera más general a la que corresponde como propiedad específica de la familia considerada, las que centran la atención en el término *diferentes* y aquellas para las que hay que hacer deducciones para averiguar si la familia dada las verifica o no.

A) Las propiedades de T-1a y T-2j. Para responder a estas propiedades hay que aplicar relaciones de polígonos (de los cuadriláteros o de los polígonos regulares y los polígonos) y delimitar si nos cuestionamos una dirección u otra de la relación es lo que presenta dificultad. La propiedad que se indica en T-1a, que sí que verifican los prismas de caras regulares, algunos estudiantes la responden así: "La propiedad no se cumple porque todos los rombos no son cuadrados. Los prismas de caras regulares no pueden tener por caras laterales cualquier rombo sino que tiene que ser cuadrado". Otros apuntan que "no se cumple la segunda parte de la propiedad, porque el polígono que cierra la cinta no puede ser cualquiera sino que tiene que ser regular". En ambos casos no se aplica correctamente lo que se conoce (que son las características específicas de los prismas de caras regulares) y lo que se tiene que verificar (que es la propiedad que se plantea). El mismo tipo de respuesta hemos encontrado para T-2j.

Al proponer este tipo de propiedades pretendemos que los estudiantes puedan dar respuestas correctas que correspondan al tercer nivel.

B) Las actividades T-1b y T-2l. En las experimentaciones realizadas también hemos tenido que dedicar atención a las propiedades enunciadas de manera más general a la que corresponde como propiedad específica de la familia dada y contienen el término *como mucho*. En un principio no se aceptaban como propiedad de una familia las que contenían el término como mucho cuando podían expresarse de manera más precisa. Por ejemplo, respuestas usuales dadas por los estudiantes para la propiedad que proponemos en T-1b eran: "Los PCR no la cumplen. Las aristas tienen sólo una medida". Y cuando cuestionábamos si los prismas de bases regulares (PBR) la cumplían o no, y si los PCR eran PBR, respondían: "Sí. Los PCR son PBR y los PBR verifican la propiedad; pero en los PCR no son de dos medidas, son de una". Así, el proponer estas propiedades tiene como objetivo remarcar que las propiedades de una familia de sólidos las verifican todas las subfamilias contenidas en ella (en este caso los prismas de caras regulares), aunque para las familias contenidas puedan enunciarse de una manera más precisa; esto es, con esta actividad se hará ver que los prismas de caras regulares (PCR) verifican que sus aristas tienen como mucho dos medidas diferentes (propiedad propuesta en T-1b) aunque para esta subfamilia, esta propiedad se puede enunciar de manera más precisa como "las aristas son iguales".

La propiedad que proponemos en T-2l tiene el mismo propósito. Se puede enunciar indicando que tiene como mucho 4 medidas diferentes, y podemos remarcar que esta propiedad al imponer ese tope la van a verificar todos los prismas cuadrangulares. Si se considera oportuno, se puede cuestionar cuántas medidas diferentes tienen como mucho las diagonales del espacio de algunas familias concretas, como la de los ortoedros o la de los romboedros.

C) Las actividades T-1c y T-1d pretenden que se centre la atención al término *diferentes* que hay en el enunciado de las propiedades que se presentan. Para algunos estudiantes este término entra en contradicción con el hecho de que los prismas de caras regulares sólo tienen una medida para los ángulos de los vértices y otra para los ángulos diedros de las caras laterales. Las propiedades de estas actividades las responden como "los PCR no cumplen estas propiedades porque sólo tienen una medida para los ángulos de las caras y dos para los ángulos diedros, y una es del más uno". Respecto a la propiedad de T-1d vale la pena mencionar que los estudiantes tienen dificultades para entender el enunciado. En muchas ocasiones hemos tenido que aclarar que lo que dice la propiedad es que si miramos cuantas medidas tienen los ángulos diedros y por otro lado las medidas diferentes que tienen los ángulos del polígono de las bases, en el primer caso hay una medida diferente más; esto es, si los ángulos diedros tienen 3 medidas diferentes, los ángulos de las bases tienen dos medidas distintas.

D) En la actividad T-1f no se habla de diagonales de las bases sino de las caras. Para explicar que la verifican los prismas de caras regulares se tienen que hacer deducciones y aplicar el significado del término como mucho. No creemos necesario explicar que estas propiedades también requieren atención especial.

La tarea T-3. Establecer las familias de sólidos que verifican propiedades dadas. Sobre las familias y propiedades propuestas. Tareas de este tipo ya las hemos trabajado con las tareas T-11 y T-12 de la fase 4 del nivel 2. Remitimos a los comentarios que hacemos ahí. Ahora sólo queremos recordar la conveniencia de trabajar en diferentes situaciones el procedimiento basado en las relaciones de familias, para determinar todas las familias que cumplen una propiedad. Es por eso por lo que en esta tarea, al igual que en las propuestas para el nivel 2, consideramos las subfamilias de los prismas que hemos tratado con anterioridad y todo tipo de propiedades específicas de subfamilias más o menos generales, de manera que en las propuestas aquí algunas contienen términos del tipo *como máximo, como mínimo,* etc. que no habíamos incluido en las de nivel 2.

En esta tarea hemos indicado que se enumeren las propiedades listadas en T-1 y T-2 y luego se consideran otras propiedades numéricas de manera que algunas incluyen otras condiciones visuales y geométricas. Lo que vamos a explicar a continuación tiene que ver con la dificultad que presenta la tarea para algunos tipos de propiedades de los que proponemos y da cuenta de la variedad de objetivos que tienen las propiedades propuestas.

A) La propiedad de T-2a merece un comentario. En la unidad de enseñanza consideramos que dos caras son del mismo tipo cuando pertenecen a la misma familia porque tienen el mismo número de lados, independientemente de que sean más o menos regulares. En las experimentaciones realizadas, el tener caras de dos clases con frecuencia se identificaba con tener caras desiguales, lo que llevaba a que se no se incluyeran los ortoedros ni los paralelepípedos como familias que verificaban la propiedad propuesta en T-2a.

B) Las propiedades de T-3a y T-3b son numéricas que delimitan exclusivamente el número de lados de la base (o bases) del sólido solución. El averiguar qué sólido de una familia dada responde a unas características numéricas, en especial al número de aristas de los dos tipos (laterales y de la base o bases), a un número dado de un tipo de ángulos o de un tipo de diagonales, conlleva más dificultad que determinarlo a partir del número de caras o de vértices.

C) La propiedad de T-3c es numérica con indicaciones con fuerte componente visual que influye en la identificación de las subfamilias que la verifican. Así, al considerar si la solución puede corresponder a una bipirámide, un factor que afecta a la identificación de la bipirámide pentagonal como solución es que para identificarla se tiene que romper con la idea, con fuerte componente visual, de que las aristas laterales de las bipirámides son más largas que las de la base. Se tiene que identificar las 10, que son las aristas más cortas a las aristas laterales y las 5, que son las más largas, a las de la base.

Por otro lado, si cambiamos los números a las aristas de las que se habla en esa propiedad, al considerar si la solución puede corresponder a un prisma, se tiene una dificultad añadida para identificar el prisma pentagonal. De hecho eso es lo que hicimos nosotros en algunas experimentaciones realizadas. En este caso, se tiene que romper con la idea con fuerte componente visual de que las aristas laterales de los prismas son más largas que las de la base. Se tiene que identificar las 5, que son las más cortas a las aristas laterales, y las 10, que son las más largas a las de las bases.

D) Las propiedades de T-3d y T-3e son numéricas que incluyen además condiciones geométricas sobre sus elementos, por lo que remiten a familias específicas. Y ya hemos señalado que en este caso es más difícil para los estudiantes el averiguar la familia más general que verifica la propiedad.

E) La propiedad de T-3f es numérica que incluye además condiciones con gran componente visual y otras condiciones geométricas. El hecho de que en ambos tipos de aristas figure el término igual influye para la identificación del sólido. La condición de igualdad impuesta a los lados del polígono de las bases y a las aristas laterales nos remite a familias específicas: para los prismas esta propiedad nos dirige a los prismas de base equilátera (con lados iguales). Y para los antiprismas, pirámides o bipirámides nos sitúa en las rectas de base regular.

En nuestras experimentaciones los estudiantes apenas tuvieron en cuenta la condición de igualdad impuesta a las aristas: si bien todos los estudiantes intentaron precisar la subfamilia que se establece según el número de lados del polígono de sus bases (o su base), por lo menos para la familia de los prismas, muy pocos precisaron además las condiciones que se exigen sobre la igualdad de los lados del polígono de las bases (o de la base) o sobre que los ejemplos de la subfamilia correspondiente tienen que ser rectos. Algunas respuestas posteriores dadas por los estudiantes nos revelaron las razones por las que esto ocurrió con tanta frecuencia: para algunos estudiantes los prismas que pesan más en su objeto mental de esta familia eran los prismas rectos de bases regulares, que sí que cumplen estas condiciones. Otros extendieron a las familias de antiprismas, pirámides y bipirámides la propiedad que se verifica en los prismas (las aristas laterales son iguales).

Así pues, esta propiedad pretende que se centre la atención sobre que este tipo de propiedades, además de delimitarnos el número de lados de la base (o bases) del sólido solución, con indicaciones que tienen un gran componente visual, nos da otras características del polígono de la base (o bases) y de las aristas laterales que conducen a familias más específicas que también se tienen que delimitar.

F) Para la propiedad T-3g, relativa a número de medidas diferentes para un tipo de ángulos, el identificar las subfamilias de sólidos que la verifican presenta bastante dificultad. Es una propiedad que rechaza posibles soluciones o nos remite a subfamilias establecidas con varios criterios de clasificación (uno visual y otro que centra la atención en las bases). Vamos a comentar por separado las dificultades que se presentan para establecer diferentes subfamilias que la cumplen.

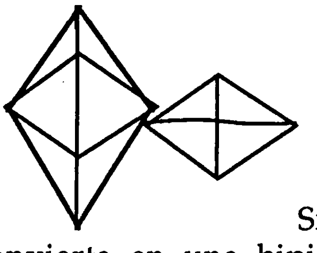
– En nuestras experimentaciones, al presentar la propiedad de T-3g los estudiantes rechazaron como posibles soluciones las subfamilias de las bipirámides.

- Descartaron las bipirámides de caras iguales; apuntaron que, "tanto las bipirámides de caras iguales que también son antiprismas de caras iguales como las bipirámides rectas de base regular tienen 2 medidas para los ángulos de las caras (están formadas por triángulos isósceles iguales)".

- Señalaron también que es muy difícil conseguir bipirámides con tres medidas de ángulos, "porque en las oblicuas la cosa se complica; seguro que hay más de tres medidas". Algunos estudiantes sugirieron que extendiésemos nuestra idea de bipirámide para incluir las formadas por pirámides en las que ajustan las bases pero no tienen iguales sus caras laterales. Y de inmediato otro estudiante hizo notar que "estas bipirámides no tienen 3 medidas de ángulos para las caras sino 4, porque al variar el ángulo del pico de los triángulos isósceles, para que la suma sea 180° los otros ángulos también tienen que variar".

Las discusiones nos llevaron muy a menudo a pedir que se encontrasen bipirámides que verificasen estas condiciones, y una vez restringido el mundo de las bipirámides a las bipirámides rectas, pasamos el problema al polígono de la base: este polígono al juntar los vértices con el centro se descompone en triángulos que tienen 3 medidas de ángulos. La bipirámide recta de base rombo surgió como ejemplo, como muestra la respuesta siguiente que dio uno de los estudiantes.

"Tenemos el rombo descompuesto en 4 triángulos iguales con tres medidas para sus ángulos, que se juntan todos ellos en el centro del rombo.



Si imaginamos que estiramos este centro para que se convierta en una bipirámide recta, estos triángulos ya son las caras laterales de la bipirámide que cumple las condiciones (3 medidas para los ángulos de las caras)".

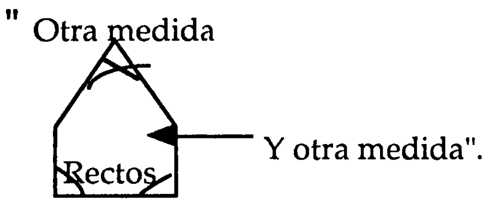
La propiedad de T-3g también se puede aprovechar para hacer ver que hay bipirámides con caras iguales que no son triángulos isósceles. Estas bipirámides se pueden incorporar en el objeto mental de esta subfamilia (las BiCI) que inicialmente algunos estudiantes las rechazan completamente.

– El considerar las familias de los prismas como posibles familias que verifican la propiedad de T-3g también conlleva dificultad. Para identificar el sólido correctamente se tienen que rechazar los ejemplos de prisma que tienen más peso en el objeto mental de esta familia. Dado que la propiedad señala que hay tres medidas para los ángulos de las caras, se tiene que delimitar la familia que lo cumple, que dos medidas de ángulos corresponden a la caras laterales y una medida a la base, o a la inversa, y que también puede ocurrir que una medida para los ángulos de las bases coincida con una medida de ángulo de las caras laterales.

En todas nuestras experimentaciones este problema provocó una gran actividad. Para los estudiantes, la propiedad remitía a prisma recto u oblicuo y luego tenían en cuenta el número de ángulos diferentes que tenía que tener la base. Ángulos distintos para las caras laterales remitía a prisma oblicuo inmediatamente (idea con gran componente visual) y un tipo de ángulos para la base, remitía a polígono regular. El hecho de que en un prisma oblicuo (aunque sea de base regular) hay más de 3 ángulos (de las caras o diedros) diferentes tenía muy poco peso en el objeto mental de prisma oblicuo de los estudiantes si lo comparamos con el hecho de que los prismas oblicuos tienen ángulos de las caras (o diedros) diferentes. Para la propiedad de T-3g la mayoría de los estudiantes seleccionaron los prismas oblicuos de base regular como familia que verificaba la propiedad.

Además de lo indicado respecto a las medidas diferentes para los tipos de ángulos y los prismas oblicuos, el que respecto a la base los ejemplos prototipo de prisma de los estudiantes suelen ser los de base regular puede explicar que haya ocurrido lo que señalamos en el párrafo anterior. A partir de esta propiedad se tienen que rechazar estos prismas y escoger otros cuyas bases tienen 2 tipos de ángulos, polígonos con los que los estudiantes están muy poco familiarizados. En las entrevistas que realizamos con algunos estudiantes éstos explicaron que "el prisma tiene que ser oblicuo porque tiene ángulos diferentes y, por tanto, el otro ángulo es de la base, luego es de base regular" o "que el prisma tiene que ser de base regular (una medida) y por lo tanto oblicuo (para que tenga otras dos)".

– Con respecto a esta propiedad también hay que señalar que en nuestras experimentaciones una vez que habíamos apuntado que las familias de prisma que verificaban la propiedad considerada eran los rectos con dos medidas de ángulos para la base, o con tres medidas para los ángulos de la base si una de ellas mide 90°, muy pocos estudiantes consideraron esta última posibilidad. Si bien la mayoría de ellos dibujaron algunos polígonos como bases de estos prismas, por ejemplo, los de base rombo genérico, o los del hexágono achatado, muy pocos estudiantes dieron como soluciones polígonos con 3 medidas para los ángulos, con una de ellas de 90°. Muy pocos señalaron soluciones como la de uno de ellos:



Así, la propiedad de T-3g la aprovechamos para buscar polígonos de un número dado de lados que pudieran ser bases de las familias delimitadas. Añadimos también la condición de que tuviesen lados iguales.

Los estudiantes encontraron varias soluciones posibles pero en sucesivas ocasiones tuvimos que dar indicaciones que les llevasen a convencerse o a intuir que no podían construirse polígonos que respondiesen a algún modelo que ellos previamente habían pensado, que cumplieran las condiciones impuestas (tuviesen un número de lados dado, lados iguales y dos tipos de ángulos, o tres si uno de ellos era recto). También tuvimos que dar algunas pistas, cuando estaban atascados y no sabían cómo continuar, sobre qué estrategias podían utilizar para obtener polígonos a partir de los que ya se tenían, que cumplieran las condiciones impuestas. Las pistas que apuntamos eran del tipo: traza paralelas a los lados, para que se mantengan los ángulos; dobla trozos del polígono hacia adentro, en vez de que queden hacia afuera; empieza con un ángulo recto y mira a ver si puedes continuar. El único objetivo de la actividad fue que los estudiantes se familiarizasen con una gran variedad polígonos, que no son regulares, que también cumplen ciertas condiciones, y sobre cómo se pueden generar unos a partir de otros. Pero no dimos pruebas que justificasen que los habíamos encontrado todos.

G) La propiedad propuesta en T-3h también corroboró que muy pocos estudiantes se plantean el problema de determinar todos los polígonos que tienen el número de lados correspondiente según la familia que se considera y que cumplen las condiciones impuestas (relativas a las medidas diferentes que tienen los ángulos diedros). Así, para los prismas, si bien determinaron que los prismas octogonales de base regular verificaban la propiedad (tienen 24 ángulos diedros de 2 medidas diferentes), prácticamente ningún estudiante se planteó el encontrar todos los octógonos con ángulos de dos medidas, de manera que una fuera de 90°, ni el demostrar que no hay ninguno que verifica esta propiedad. Tuvimos que sugerir el problema para que los estudiantes intentaran abordarlo. Tampoco en este caso dimos pruebas rigurosas.

Las tareas T-4 y T-5. Actividades Adivinanza

Estas tareas abordan el problema de averiguar familias de sólidos que verifican una lista de propiedades y el de dar nombre-definición al sólido solución.

Las actividades-adivinanza ya las hemos tratado para la fase 5 de los niveles 1 y 2. Si la retomamos de nuevo es porque la dificultad se puede variar al cambiar el tipo de propiedades que se enumeran y el orden de éstas dentro de la lista, que indica el orden en que hay que tomarlas en consideración.

A) Sobre las propiedades propuestas. La lista de propiedades que proponemos contienen propiedades de las que hemos comentado para T-3, sólo que ahora se tiene que tener en cuenta, además de la propiedad considerada, las anteriores a ella. El que se parta de una información previa lleva a que en estas tareas podamos distinguir tipos de respuesta que conllevan más o menos dificultad.

- Para alguna propiedad la manera adecuada de dar la respuesta es delimitando todas las familias de sólidos que la verifican (o que no verifican). En este caso, la dificultad de la respuesta es análoga a la de la tarea T-3.

- Para otras propiedades, en vez de delimitar posibles soluciones, la manera adecuada de dar la respuesta es verificando si las familias o los modelos ya previstos como solución (que provienen de las propiedades anteriores) verifican o no la propiedad dada; según el resultado, la familia o el modelo correspondiente se aceptará o se rechazará como posible solución. Son propiedades que o no restringen las posibles soluciones que ya se han demarcado al considerar las propiedades anteriores o sí que lo hacen, bien eliminando familias completas, o subfamilias de las familias establecidas, o modelos, de los que se han delimitado.

B) Sobre el lugar que ocupa la propiedad en la lista. La dificultad de una actividad puede cambiar según cuándo haya que considerarlas debido a que las propiedades que hemos enumerado anteriormente nos restringen más o menos el número de familias que pueden ser posibles soluciones y nos sitúan ya en familias más o menos específicas.

Una posible ordenación es la que hemos propuesto aquí en T-4 y para las actividades del nivel 2: las propiedades que siguen a la considerada corresponden a familias más específicas, o simplemente corroboran que el sólido pertenece a una familia que ya se ha delimitado, o tienen relación con el número de elementos (de caras, vértices, aristas, ángulos de los diferentes tipos, o diagonales de los diferentes tipos) del sólido solución. En ordenaciones de este tipo, cuanto antes está enunciada la propiedad, más general es la familia que la cumple.

La ordenación de la tarea T-5, en la que no se sigue el orden de las propiedades de las familias más generales a las más específicas conllevan más dificultad. Al considerar propiedades cuando todavía no se conoce a qué familia pertenece el sólido que las verifica, hay que reparar en las diferentes familias que se han tratado. Así por ejemplo, al fijarse en la propiedad T-5c (tiene exactamente 3 ángulos de las caras de diferente tamaño), como con las anteriores a ella no se pueden excluir como posible solución ni los prismas, ni los antiprismas, ni las pirámides, ni las bipirámides (aunque la propiedad T-5b lleve a rechazar algunas subfamilias de las pirámides), para cada familia hay que averiguar qué subfamilias pueden tener algún ejemplo con las características numéricas que se nos indican. Estas ordenaciones muy a menudo llevan a que en las respuestas no se vean reflejadas todas las soluciones posibles porque no se examina todas las familias que se debería.

En nuestras experimentaciones, cuando planteamos esta tarea, entre los estudiantes que no habían rechazado las bipirámides a partir de la propiedad T-5a, porque interpretaron correctamente el término como mucho, fue muy usual que al considerar la propiedad T-5c no se tuviera en cuenta la bipirámide, ni para encontrar en esta familia subfamilias que pudieran ser solución, ni para explicar que no podían serlo. Las entrevistas nos reflejaron que algunos estudiantes tienen la idea de que hay que buscar una solución y como en muchos casos ya se había obtenido el prisma octogonal, el problema se consideraba resuelto. Otros estudiantes reflejaron que para esta subfamilia no podían delimitar subfamilias que verificasen estas características numéricas ni podían explicar que había que rechazarlas porque no las cumplían.

El nombre-definición. Finalmente queremos enfatizar que con estas tareas también se aborda el problema que tiene que ver con la clasificación y la definición. Pretenden que se elaboren nombres-definición de familias de sólidos muy específicas, que en realidad son definiciones de los mismos. En algunas experimentaciones tratamos este problema con estas tareas mientras que en otras lo hicimos al abordar problemas sobre definición. No hemos podido obtener conclusiones que nos inclinen sobre dónde es más adecuado incluirlas. Por lo que, aunque en la propuesta que presentamos corresponden a actividades de T-4 y T-5, también pueden incluirse en su lugar como actividades de la tarea T-8.

Las tareas T-6 y T-7. Tres familias de sólidos implicadas. Enumeración de propiedades. Aportaciones de las experimentaciones

Estas tareas están dirigidas a cubrir el objetivo 3 de esta fase. Al igual que en las tareas T-8 a T-10 de la fase 2 de este nivel están implicadas varias familias, pero mientras que ahí sólo hay que tener en cuenta dos familias en las tareas que proponemos aquí hay que considerar 3; esto lleva a que se refuerce lo ya trabajado y a que se aborden problemas nuevos que no se habían introducido con las actividades planteadas para la fase 2. Vamos a comentar por separado los problemas diferentes que permiten trabajar las tareas propuestas aquí.

La enumeración de propiedades. La pertinencia de estas tareas para trabajarlas de nuevo con 3 familias también viene avalada por las experimentaciones realizadas. Las siguientes respuestas dan cuenta de que al plantear de nuevo el problema de enumeración de propiedades todavía hay estudiantes que tienen los mismos tipos de respuesta que ya hemos señalado en las actividades de la fase 2.

- Cuando pedimos propiedades de los prismas rectos (PR) que no las cumplan los prismas de caras iguales (PCI) ni tampoco los prismas convexos (PX) se indicó que "los prismas rectos pueden ser cóncavos, condición que no pueden cumplir los de CI ni los convexos. Por tanto, sus bases pueden tener entrantes". Y se continuó enumerando lo que se señalaban como propiedades de los prismas cóncavos.

- Cuando pedimos propiedades comunes a los prismas convexos, prismas de caras iguales y prismas de caras regulares (PX, PCI y PCR), o a (PX, PR y PCI) se indicó que "las propiedades del cubo".

- Cuando pedimos propiedades de los PCR que no las cumpliesen los PCI ni tampoco los PX, se indicó que "ninguna porque el cubo es PCR, pero también de CI, y además convexo".

- Cuando pedimos propiedades de los PR que no las cumpliesen los PCI ni tampoco los PX, se indicó que "ninguna porque el cubo es PR, y también de CI. Cualquier propiedad de prisma recto la cumple el cubo y éste es de caras iguales".

- Algunos estudiantes, cuando tenían que tener en cuenta tres familias, o bien sólo consideraban dos, y en este caso asociaban a sus grupos de propiedades la inclusión que existía entre ellas en términos de ejemplos, o si consideraban la tercera familia, se relacionaba con otra con la que no presentaba relación de inclusión. Por ejemplo, cuando pedimos propiedades comunes a los paralelepípedos, prismas de bases cometas y de bases trapecios (L, PBc y PBt) se indicó que "las propiedades del romboedro".

La utilización de recursos. Estas tareas son muy adecuadas también para aplicar relaciones de familias para obtener otros resultados. Por ejemplo, cuando se plantean propiedades comunes a varias familias, de manera que al considerar dos (o tres) de ellas una está incluida en la otra, si se aplica esta inclusión, la respuesta corresponde a las propiedades de la familia más general. El problema como mucho lo reducimos al de descubrir las propiedades comunes de dos familias y puede que ya podamos utilizar los resultados de las actividades que hemos resuelto en la fase 2. Cuando se piden propiedades de una familia A que no las cumplan la familia B ni la familia C, de manera que B está incluida en C (o a la inversa), si se aplica esta inclusión se llega a establecer que no es necesario que consideremos la familia C (o la B), ya que la respuesta corresponde a las propiedades de la familia A que no las verifique la familia B (o la C). El problema lo convertimos en el planteado en las actividades de la fase 2, y puede que ya podamos utilizar sus respuestas.

En las experimentaciones realizadas hemos comprobado que pocos estudiantes aplican estas inclusiones y también que muy pocos recurren a las actividades resueltas. Así, con estas tareas podremos trabajar cómo se pueden utilizar algunos resultados que ya se tienen: por un lado podremos dirigir hacia la utilización de relaciones entre las familias para simplificar una tarea y, por otro, podremos mostrar cómo se puede recurrir a las actividades ya resueltas para utilizar sus explicaciones.

Sobre el enunciado de las tareas. Fueron las experimentaciones realizadas las que nos descubrieron otro tipo de trabajo que se puede abordar con estas tareas cuando están implicadas 3 familias: la interpretación de la negación de una unión o disyunción de grupos de propiedades. Cuando uno de los estudiantes estaba resolviendo en la pizarra una actividad en la que se pedía que se enumerasen las propiedades de los prismas de caras regulares que no cumplieran los prismas rectos ni tampoco los primas de base regular, otro estudiante señaló:

"De la lista de propiedades de PCR, yo en vez de eliminar las propiedades de los PR y las de los PBR por turno como ha hecho Ana [Se refiere a la estudiante que había resuelto la actividad en la pizarra] yo he buscado primero las propiedades comunes a los PR y los PBR, y éstas son las que he eliminado. ¿Por qué no puedo hacer esto? ¿Cómo puedo saber lo que tengo que hacer?".

Tuvimos que dedicar atención a este problema. Entre los estudiantes que para otras cuestiones razonaban de acuerdo a las características del nivel 3, algunos no distinguían uno y otro problema y eliminaban las propiedades comunes a B y C o las que al menos son propiedades de una de estas familias, sin tener en cuenta si se les pedía una u otra cosa. Para que los estudiantes reconocieran que ya se sentían más seguros con lo que tenían que hacer según el enunciado propuesto fue necesario enunciar varias actividades de este tipo; al resolverlas centramos la atención en que seleccionar las propiedades de una familia A que no sean propiedades comunes a otras dos (B y C) supone que se eliminen de la lista de las propiedades de A las propiedades comunes a B y C, por lo que la lista final puede contener propiedades de una de ellas (de B o de C) siempre que no lo sean de ambas. Pero que seleccionar las propiedades de una familia A que no sean propiedades de B y que tampoco sean propiedades de C, supone que se eliminen de la lista de las propiedades de A tanto las propiedades de B como las de C, por lo que la lista final no puede contener propiedades de B ni propiedades de C.

La tarea T-8. Sobre la definición

Esta tarea está relacionada con los objetivos 1 y 4 de esta fase. Al igual que con las tareas T-13 a T-15 de la fase 2, con esta tarea abordamos el problema de la definición.

Proceso de elaboración de definiciones. Sugerencias para la instrucción. Para los estudiantes que para otras actividades razonan de acuerdo a las características del nivel 3 esta tarea presenta gran dificultad. Si con las sugerencias dadas en la fase 2 algunos estudiantes todavía no pueden elaborar las definiciones de las familias que proponemos aquí, que es lo que ha ocurrido en nuestras experimentaciones, sugerimos que se aborde el problema como lo hicimos nosotros.

- Se propone que se trabaje en grupos y que se hagan 2 equipos en cada grupo. Que cada grupo diseñe tareas como la T-4 o la T-5 y que el otro grupo las resuelva. Al diseñar las tareas se centra la atención en que se pueden decir muchas más propiedades en la lista y que las seguiría cumpliendo el sólido solución, pero que lo único que hacen es corroborar que el sólido es el que ya se ha separado. También hay que fijarse en las propiedades que se eligen. Se destaca que hay propiedades que descartan de golpe muchos poliedros mientras que otras no aportan más información de la que ya se tenía, y hay otras que por sí solas delimitan el objeto o clase de poliedros. Por ejemplo, la propiedad "el sólido se obtiene con una banda de triángulos cerrada con un polígono por cada lado" remite ya a los antiprismas, y la propiedad "se obtiene con una banda de triángulos cerrada con una pirámide pentagonal por cada lado" remite al icosaedro.

- Al resolver la actividad se pide que se seleccionen las propiedades que permiten que se rechace algún sólido. Se centra la atención en que tampoco es necesario enumerar todas ellas. Se subraya que si se diseña la tarea de manera que las propiedades de las familias más generales van primero en la lista, si bien en algunos casos todas las propiedades pueden parecer imprescindibles, todavía podemos tener más de las necesarias para que se pueda descubrir el sólido. Los protocolos que indicamos en los comentarios de las tareas de la fase 2 lo muestran. También se pueden poner otros ejemplos; nosotros remarcamos que al decir que la solución tiene las caras regulares, ya se puede deducir también que es recto y convexo, y por tanto, las propiedades que hayamos indicado para que se seleccionen esas familias no son necesarias.

  También hay que llamar la atención sobre el gran cuidado que hay que poner al descartar propiedades. Los protocolos a los que nos hemos referido en el párrafo anterior podemos utilizarlos para mostrar que las propiedades indicadas no bastan para caracterizar el sólido. Por ejemplo, podemos subrayar que de indicar que el sólido solución tiene las aristas iguales, no se deduce que es convexo, ni que es recto, ni que es de caras laterales regulares, ni que es de caras regulares; como tampoco se deduciría de ella que el sólido es de caras iguales. Lo que sí que podemos asegurar es que si ya conocemos que es prisma, antiprisma, pirámide o bipirámide, el modelo pertenece a una de las tres últimas subfamilias, pues son las únicas subfamilias que verifican esta propiedad.

- Se hace notar que el equipo contrario en algunos casos puede que no descubra el sólido concreto porque no hayamos dado suficientes propiedades para ello. Como ejemplos para mostrar que aunque en algunos casos se averigüe el sólido, no se habían enumerado aún propiedades suficientes, podemos tomar los primeros protocolos que hemos señalado para las actividades sobre definición propuestas para la fase 2. Con estos u otros ejemplos centraremos de nuevo la atención en cómo se puede remitir a las diferentes clases de prismas y en cómo se puede "nombrar" un prisma concreto. Nosotros llamamos la atención sobre que cualquier modelo de prisma recto hexagonal podía servirnos como ejemplo. Pero si habíamos pensado en un prisma hexagonal concreto, para que el otro equipo pudiera descubrirlo habría que dar más propiedades que llevaran a delimitar si era cóncavo o convexo, si tenía base regular o no, si tenía caras regulares o no, si era equilátero, cuántas medidas tenía para sus ángulos, etc.

- Después de todas estas explicaciones se plantea una discusión común (de los dos equipos) para que se seleccionen las propiedades que son imprescindibles y suficientes para una definición de las familias propuestas.

Las definiciones de las subfamilias establecidas con criterios visuales. En la actividad T-8c se proponen definiciones para estas familias que permiten que se remarque que aunque en algunas una propiedad específica y el indicar que pertenece a la familia general basta para caracterizar la familia correspondiente, esto no es cierto para cualquier familia. Para las primeras resulta relativamente sencillo buscar definiciones para ellas. Para las segundas, surge el problema de delimitar grupos de propiedades que caracterizan a la familia correspondiente. Surge el problema de buscar definiciones para ellas, para el que ya hemos dado sugerencias en los párrafos anteriores.

La tarea T-9. Relaciones de inclusión o exclusión entre familias de sólidos. Familias que tienen intersección

Esta tarea, al igual que tarea T-6 de la fase 4 del nivel 2, pretende que se apliquen definiciones de determinadas familias de sólidos en tareas de relación de clases.

Sobre las relaciones propuestas. Las relaciones que incluimos en la tarea T-9 se explican porque son las relaciones para las que el tipo de respuestas puede corresponder también al tercer nivel. Así, por ejemplo, en unas relaciones la familia que se introduce con definición está a la derecha y se consideran familias de sólidos para las que lo correcto es seleccionar el término nunca o siempre. Cuando se selecciona uno de estos términos, también hay diferencias según el termino que se elija: al seleccionar *siempre* hay que demostrar que *todos los elementos* de una de las familias que se relacionan *verifican todas las condiciones* de la definición de la otra familia; al seleccionar *nunca* se ha de demostrar que *no hay ningún elemento* de una de las familias que verifica *todas las condiciones* de la definición de la otra. En lo que sigue vamos a explicar con más detalle lo que supone el elegir uno u otro término.

A) Cuando se selecciona el término siempre, para una respuesta correcta y completa, más que trabajar con ejemplos (en cuyo caso se ha de considerar un ejemplo general que represente a todos los ejemplos, y para él verificar todas las condiciones de la definición de la otra familia) hay que delimitar las propiedades que caracterizan a la primera familia (que para las relaciones propuestas es subfamilia de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides) y observar que contienen todas las condiciones de la otra. Para una respuesta completa, todas las condiciones que aparecen en la definición de la familia que se da en el enunciado de la actividad, se tienen que considerar en la respuesta.

B) Cuando se selecciona el término "nunca", para una respuesta correcta y completa, como en el caso anterior, necesariamente se ha de considerar todos los ejemplos de una de las familias que se relacionan. Pero en relaciones de este tipo en muchos casos hay que distinguir unos ejemplos de otros porque dejan de verificar diferentes condiciones de la definición de partida. Por ejemplo, para explicar la relación "no hay ninguna pirámide que sea poliedro arquimediano", por un lado, hay que distinguir el tetraedro del resto de las pirámides de caras regulares (la cuadrada y la pentagonal). Si bien ninguna de estas tres pirámides verifica las tres condiciones de poliedro arquimediano (caras regulares de más de una clase y vértices iguales) y todas las de caras regulares cumplen 2 condiciones de esta familia, no dejan de cumplir la misma. El tetraedro deja de cumplir que tenga caras de por lo menos dos tipos (tiene caras iguales) mientras que las otras pirámides de caras regulares dejan de cumplir que tengan vértices iguales. Además, hay que distinguir esta familia de pirámides del resto, que sólo verifican una condición: tienen caras de dos tipos.

Por otra parte, para una respuesta completa no es necesario se tengan en cuenta todas las condiciones de la familia que se introduce con definición. En el ejemplo anterior no es necesario considerar las 3 condiciones de poliedro arquimediano. Si se parte de una condición y se delimita la única subfamilia de las pirámides que la verifica, y se sigue verificando las otras dos condiciones, en cuanto se considera una que ya no se cumple, la respuesta es completa. Así, en este tipo de respuesta, para una respuesta completa, basta con que se consideren dos condiciones de poliedro arquimediano, la que permite delimitar la única subfamilia que la cumple y la que deja de cumplirse en esta subfamilia.

Un caso particular que podemos examinar es cuando se comparan dos familias dicotómicas en las que pueden venir caracterizadas por una única propiedad. En estos casos es más inmediato verificar que ningún ejemplo de una de las familias verifica las propiedades de la otra, dado que para ellas se puede considerar un ejemplo genérico para explicarlo. Se puede explicar a partir de él que no puede verificar las propiedades que caracterizan a la otra familia, y para ello no se utilizan las propiedades específicas del ejemplo; por lo que la explicación puede servir para cualquier ejemplo.

El seleccionar las propiedades que caracterizan a una familia puede conllevar dificultad o no ser así. Por ejemplo, al comparar los prismas rectos y los oblicuos, todas las propiedades de la primera familia pueden servirnos. No ocurre lo mismo al comparar los sólidos cóncavos y convexos. Para ellos hay que seleccionar las propiedades que caracterizan a la subfamilia correspondiente de los cóncavos. Pero esto son problemas sobre elaboración de definiciones de estas familias que ya hemos tratado con las tarea T-8; de nuevo fijaremos la atención sobre la conveniencia de aprovechar los problemas ya resueltos siempre que sea posible. Sólo si es necesario subrayaremos que dado que todas las propiedades de los sólidos convexos no caracterizan a esta familia, si tomásemos la primera que se nos ocurriese, posiblemente no bastase con considerar una única propiedad. Por ejemplo, si consideramos la propiedad de los sólidos convexos todas las caras son convexas, no podríamos justificar que ningún sólido cóncavo verifica la propiedad, ya que hay sólidos cóncavos que la cumplen (por ejemplo, el prisma triangular en el que se han sustituido las bases por tetraedros hacia adentro). En este caso habría que seguir considerando propiedades de los sólidos convexos e ir delimitando las subfamilias de ésta que la cumplen, hasta que llegásemos a que no quedaba ningún elemento de la familia inicial que verificase las propiedades de los sólidos convexos consideradas hasta entonces. Sin embargo, si hubiéramos partido de la propiedad de los sólidos convexos, todos sus ángulos diedros son menores de 180°, ya no hubiéramos podido encontrar ninguna subfamilia de los poliedros cóncavos que verificase la propiedad. No sería necesario seguir considerando otras propiedades de los sólidos convexos.

Las tareas T-9 a T-17. Sobre demostración

Las actividades que se proponen en la tarea T-9, junto con las tareas T-10 a T-17 que proponemos aquí, y las tareas T-16 a T-21 de la fase 2, pretenden desarrollar la capacidad de los estudiantes para demostrar. Están relacionadas con los objetivos 5, 6 y 7 de esta fase. Permiten también estudiar el papel de los contraejemplos como demostración de la falsedad de una propiedad, de una relación o de una implicación. En este nivel, las demostraciones tendrán que ser guiadas por el profesor, para lograr que los estudiantes afiancen su convencimiento de la necesidad de las demostraciones deductivas y vayan más allá de la simple comprobación de ejemplos. Para responder a las cuestiones que planteamos los estudiantes tienen que tener a su disposición diferentes materiales y modelos para que puedan experimentar y medir en ellos, o utilizarlos para verificar sus respuestas.

Las actividades que proponemos aquí son problemas abiertos que pueden resolverse con las pistas que sugerimos en los enunciados, la mayoría de las cuales hacen mención a procedimientos que ya se han aplicado, o a resultados que se han demostrado. Por un lado son actividades muy adecuadas para la fase 4 (los estudiantes pueden perfeccionar el dominio de la demostración, que ya han adquirido con las actividades de la fase 2) y por otro, permiten averiguar en qué medida las pistas apuntadas y los problemas ya resueltos son suficientes para que el estudiante pueda resolver por él mismo los problemas propuestos aquí.

Posiblemente tengamos que volver de nuevo a las demostraciones de las actividades de la fase 2, como ha ocurrido en nuestras experimentaciones, para que algunos estudiantes puedan hacer pequeñas adaptaciones en los procedimientos utilizados en ellas. Otros estudiantes no necesitarán de las sugerencias que se dan en los enunciados. Cabe hacer notar que las actividades corresponden a la fase 4, por lo que tendremos estudiantes que, para algunas actividades propuestas, podrán razonar de acuerdo con algunas características asociadas al nivel 4.

Lo anterior explica que en nuestras experimentaciones al plantear estas tareas a los estudiantes al principio no les dimos ninguna pista o ayuda. Las respuestas de los estudiantes nos informaron sobre si podían razonar en el nivel 4 para dar pruebas matemáticas para los problemas propuestos o no era así. Después que los estudiantes lo intentaron, a los que lo necesitaron, fuimos dando las sugerencias que indicamos en los enunciados de las tareas; y orientamos cada vez más la demostración hasta que el estudiante pudo funcionar él sólo.

La tarea T-10, al igual que la tarea T-16 de la fase 2, incluye expresiones que dan la suma de los ángulos de un determinado tipo. Como puede observarse, las actividades que hemos planteado en la fase 4 o bien corresponden a problemas que hemos resuelto en la fase 2 para familias menos generales o se pueden aplicar los resultados obtenidos en éstas para resolver las de aquí. Por ejemplo, en la actividad T-16a de la fase 2 y en la T-10a de aquí planteamos un problema análogo para un prisma hexagonal y un prisma n-agonal. La actividad T-10b puede resolverse aplicando los resultados de las actividades T-16b de la fase 2 y la T-10a de aquí.

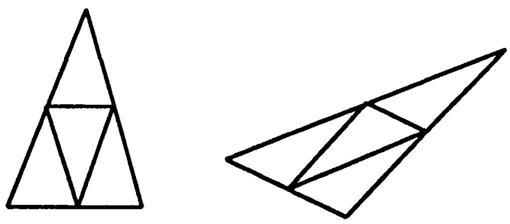
La tarea T-11. Aportaciones de las experimentaciones. Al igual que en la tarea T-17 de la fase 2, en esta tarea se tienen que enumerar todos los elementos de una familia dada y justificar que no pueden haber más. Las primeras actividades de esta tarea permiten mostrar que mientras que todas las bipirámides rectas con base regular son ejemplos de poliedros de caras iguales y aún hay otros ejemplos de esta familia con caras triángulos escalenos, en las otras familias el número de ejemplos es finito. También pretenden corregir la idea que tienen algunos estudiantes; a saber, que los sólidos de caras iguales tienen que tener las caras regulares. Hay antiprismas y pirámides de caras iguales, además del octaedro y tetraedro respectivamente, que tienen por caras triángulos isósceles. Y hay bipirámides de caras iguales que tienen por caras triángulos isósceles y triángulos escalenos. En lo que sigue vamos a comentar cada actividad por separado de las que incluimos en esta tarea.

A) La actividad T-11a. En nuestras experimentaciones, al plantear esta actividad, la sugerencia de que "se pensase en la característica que tienen los antiprismas triangulares que no tienen el resto de los antiprismas" llevó a los estudiantes a los antiprismas que también son bipirámides cuadrangulares y no tuvieron dificultades en encontrar antiprismas de caras iguales y caras triángulos isósceles.

B) La actividad T-11b. El dar una prueba matemáticamente correcta conlleva más dificultad que para las actividades de la tarea T-17 de la fase 2 o para la actividad T-11a. El procedimiento de prueba no surge de inmediato a partir de la construcción de modelos. Hay que hacer deducciones (si bien las conclusiones se pueden verificar con la experimentación).

La demostración de que no hay pirámides de caras iguales que tengan por caras triángulos escalenos requiere de razonamientos de los asociados al nivel 3 o a un nivel superior. Al no haber ninguna pirámide de estas características, no puede construirse; pero los estudiantes sí que pueden apoyarse en la construcción, para dar pruebas de que esto no puede ocurrir, como muestran las que nos trajeron dos estudiantes, que las habían desarrollado en casa al resolver esta actividad:

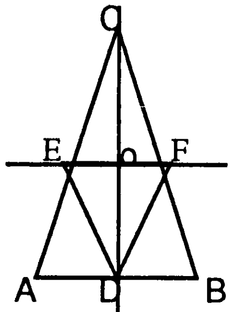
"Si pongo un desarrollo de una pirámide que tiene triángulos isósceles me sale otro triángulo isósceles de lados el doble que cada uno. Con 4 triángulos escalenos al ponerlos para que salga desarrollo de una pirámide, también me sale un triángulo escaleno de lados el doble que el del triángulo. (Ver la figura)



Pero cuando levanto los triángulos para formar la pirámide, aunque los lados que deberían juntarse tienen la misma longitud, se tienen que doblar las caras para poder unirlos. Para que puedan juntarse y formar una pirámide el triángulo tiene que ser isósceles".

Cuando preguntamos a este estudiante por qué el desarrollo correspondía al triángulo indicado, respondió que "porque en cada vértice del triángulo base se juntan los tres ángulos del triángulo, que en total suman 180°. Así los lados quedan en recto; el lado del triángulo grande del desarrollo es los lados de los dos triángulos; es el doble del de partida".

La prueba que dio el otro estudiante también se basaba en la construcción y en ella intentó explicar saltos que se habían dado en la demostración que acabamos de mostrar: "Para que la pirámide pueda formarse por lo menos una de las alturas del triángulo (en el triángulo isósceles la que va desde el vértice de ángulo distinto al lado diferente) tiene que ser eje de simetría del triángulo base y del triángulo del desarrollo y el lado del triángulo base tiene que ser también eje de simetría.



Eje de simetría para que C coincida con D y por tanto con el vértice común O (que es AyB juntos).

Eje de simetría para que A coincida con B. Para que los dos extremos del lado AB correspondiente puedan superponerse para formar un vértice de la pirámide, al estar ambos en la perpendicular a ésta y distar lo mismo del eje.

El vértice O (donde se juntan A, B y C), está en la circunferencia que describe C al girar sobre EF (tiene radio OC, que es también OD). Si el triángulo de partida no es isósceles todo lo indicado no es cierto, luego con el triángulo obtenido con los 4 triángulos no se puede construir la pirámide".

C) La actividad T-11c. Si los estudiantes lo requieren podemos indicar como sugerencia que intenten trasladar el problema al plano, al polígono de la base, que demuestren ahí el problema y que luego traten de demostrarlo para el espacio. Para esta actividad resulta muy adecuado el considerar un polígono como el elemento límite de la bipirámide. El problema de encontrar bipirámides con caras iguales que son triángulos escalenos se formula para los polígonos como: encontrar polígonos que se puedan descomponer en triángulos iguales que sean escalenos al juntar los vértices con el centro.

En nuestras experimentaciones, una vez que reformulamos el problema, los estudiantes que razonaban de acuerdo a las características del nivel 3 en éstas y otras tareas no tuvieron problemas para encontrar la bipirámide recta de base rombo y otras bipirámides de caras iguales. Pero no sintieron la necesidad de demostrar que cuando un polígono se puede descomponer en triángulos iguales y escalenos, uniendo sus vértices con el centro, las bipirámides rectas que tienen esa base son bipirámides de las buscadas. No comprendían todavía la necesidad de explicar de manera no visual algo tan obvio. Esta actividad nos sirvió de soporte para discutir que cuando se resuelven los problemas utilizando un caso límite, no sólo hay que reformular el problema para este caso, encontrar las posibles soluciones en el caso límite y extenderlas al problema propuesto, sino que también hay que demostrar que este último paso puede hacerse, aunque nos limitemos a verificarlo a nivel visual.

D) Sobre la actividad T-11d. Una vez realizadas varios tipos de demostraciones basadas en la construcción de modelos, cabe esperar que los estudiantes ya puedan dar una demostración para esta actividad sin más ayuda del profesor. Por otro lado, si se han logrado pocas características de las asignadas al nivel 3 relativas al proceso de demostración, puede ser que el estudiante aún requiera que el profesor siga conduciendo parte de su prueba, o necesite de alguna otra pista para poder realizarla por él mismo.

En nuestras experimentaciones algunos estudiantes requirieron sugerencias que se referían o bien a las posibilidades que se tenían para los polígonos de las caras (para construir poliedros regulares), o bien sobre las posibilidades que se tenían para formar diferentes vértices con ellos y así construir diferentes poliedros regulares. También planteamos preguntas como las siguientes: ¿Sólo con triángulos equiláteros, podemos construir poliedros regulares? ¿Cuántos? ¿Y sólo con cuadrados? ¿Y sólo con pentágonos regulares? ¿Sólo con hexágonos regulares se pueden construir poliedros regulares? ¿Y sólo con polígonos regulares de 7 lados? ¿Podremos construir poliedros regulares con polígonos regulares iguales que tengan más de 5 lados? Para todas estas cuestiones se tuvo que demostrar, bien que no había más que los que se indicaron y que los que se mostraron lo eran, o bien que no podían construirse poliedros regulares que tuviesen por caras polígonos determinados.

E) La actividad T-11e. El problema que hemos planteado en esta actividad ya lo hemos propuesto también en las actividades de la fase 4 del nivel 2, y en el apartado 2.3.3 hemos explicado por qué. Plantea también una prueba por enumeración de todas las posibilidades que puede estar basadas en la construcción (en este caso en construcciones en el plano). Con ella podremos observar si los estudiantes aún requieren pistas porque no han tenido suficientes con las dadas en las actividades ya resueltas o no es así. Lo que ocurra nos reflejará en cierto modo el grado de dominio que tiene el estudiante de las características asociadas al nivel 3. Lo que pretende especialmente es mostrar cómo la analogía entre el plano y el espacio nos puede proporcionar procedimientos útiles para resolver un problema en el espacio, siempre que la analogía que se establezca entre los elementos del plano y del espacio compartan relaciones pertinentes para el problema.

Al igual que la actividad T-11c, esta actividad nos sirve como modelo de tipo de problemas que muestran que los problemas del espacio se pueden abordar en el plano haciendo las modificaciones correspondientes y que después podemos llevarnos el resultado al espacio, o parte de él (que en este caso es todo él), haciendo de nuevo las traducciones correspondientes. Permite observar si los estudiantes, antes de que lo sugiera el profesor, observan que en realidad se trata de un problema del plano (determinar los polígonos regulares que cubren el plano) porque el polígono que cubre el plano es *análogo* al prisma recto que cubre el espacio. También aporta información sobre si los estudiantes sienten la necesidad de precisar y demostrar todos estos pasos o si por el contrario no se hace mención a alguno de ellos. Por ejemplo, podemos averiguar si previo a pasar el problema al plano, los estudiantes establecen que el polígono que cubre el plano es *análogo* al prisma recto que cubre el espacio y si se preocupan de examinar si comparten relaciones pertinentes para el problema.

La tarea T-12. La demostración de propiedades con fuertes características visuales. Al igual que la tarea T-19 de la fase 2, esta tarea incluye actividades que se pueden demostrar con un procedimiento visual, basado en secciones y en la identificación de los elementos implicados en el apartado correspondiente como elementos de este polígono obtenido como sección.

A) Esta tarea pretende, por una parte, que se utilicen los resultados obtenidos en las actividades de la fase 2 y, por otra, que se apliquen los mismos procedimientos que para estas actividades para justificar los otros problemas que sólo planteamos aquí. Las adaptaciones que hay que hacer para aplicarlos, una vez que el problema de las esferas inscritas y media se han reformulado en términos de que los vértices o centros de caras equidisten del centro, se refieren a que si bien para obtener los radios de las esferas circunscritas hay que considerar planos diagonales del poliedro (como en las actividades de la fase 2), para obtener los radios de las esferas inscritas hay que considerar otros polígonos que se obtienen como sección en el poliedro correspondiente.

B) Sobre las sugerencias que indicamos. Para la actividad T-12c se dan sugerencias que pueden dirigir a que en el tetraedro se seleccione la sección triangular de la figura 2.25 , dos de cuyos lados son la altura de las caras del tetraedro y el tercer lado es la arista del tetraedro. La altura de este triángulo coincide con el diámetro de la esfera media (Rm) del tetraedro.

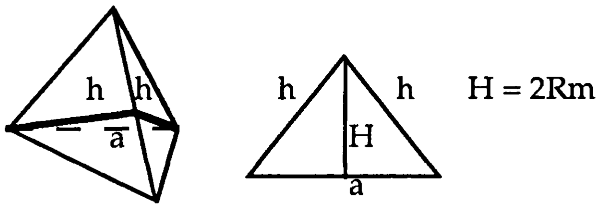


Figura 2.25

Por otro lado, se dan sugerencias que pueden dirigir a los triángulos rectángulos de la figura 2.26 , uno de los cuales tiene por catetos el radio de la esfera inscrita (Ri) y la apotema del triángulo (ap) y de hipotenusa el radio de la esfera media (que permite calcular el radio de la esfera inscrita a partir del de la esfera media), y el otro tiene por catetos el radio de la esfera media y la mitad de la arista y de hipotenusa el radio de la esfera circunscrita (Rc).

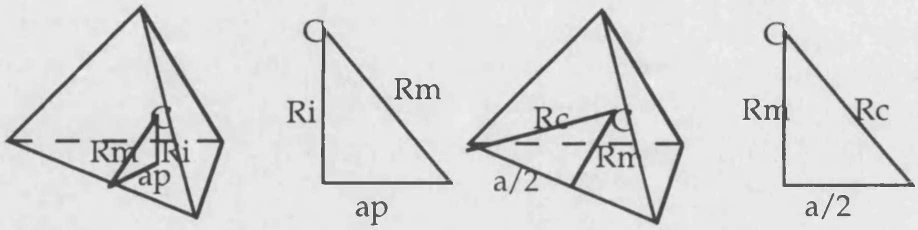


Figura 2.26

C) La actividad T-12e. La utilización de recursos. Esta actividad conlleva bastante dificultad si previamente no se ha resuelto la actividad T-12c; sin embargo, resulta bastante sencilla después de haberla resuelto. Si bien visualmente se puede explicar que 2 de las alturas de un tetraedro se cortan en un punto (para ellos se considera la sección triangular que es plano de simetría, formada por una arista y dos alturas de las caras), y que tres triángulos de éstos intersectan en la altura del tetraedro, no es tan inmediato, mostrar visualmente que las 4 alturas se cortan en un mismo punto. Por otra parte, el determinar a qué distancia de los vértices y del centro de las caras está el punto de corte exige una selección de varios triángulos para realizar los cálculos adecuados.

En las experimentaciones realizadas, los estudiantes observaron que las alturas del tetraedro corresponden a la suma de los radios de las esferas inscrita y circunscrita (figura 2.27) y que éstas se cortan en un punto (el centro del tetraedro) que equidista de los vértices y de los centros de las caras los radios de las esferas circunscrita e inscrita respectivamente.

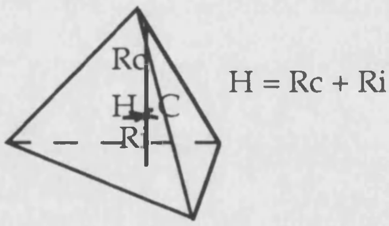


Figura 2.28

Las tareas T-13 y T-14. La construcción de modelos de pares de poliedros duales. Sugerencias para la instrucción

En estas tareas establecemos relaciones entre la medida de las aristas de los poliedros que forman algunos modelos posibles de pares de poliedros duales de los que hemos considerado en las tareas T-11 y T-12 de la fase 2.

La tarea T-13. La construcción de modelos de pares de poliedros regulares duales inscritos uno en otro. Esta tarea pretende que se lleguen a construir, hallando previamente la relación entre las longitudes de las aristas de los poliedros implicados, los modelos de los pares de poliedros regulares duales en los que los vértices de uno yacen en los centros de las caras del otro. Dado que para ello es necesario conocer la medida de los ángulos diedros, hemos planteado como problema previo determinar la medida de estos ángulos para los poliedros regulares.

Así, la tarea T-13a pretende que los estudiantes lleguen a determinar que los ángulos diedros de los poliedros regulares son: el del tetraedro ß= 70° 32', el del cubo: 90°, el del octaedro 109° 28', el del dodecaedro 116° 34', el del icosaedro 138° 11'. Y la actividad T-13b ya centra la atención sobre la relación que existe entre las longitudes de las aristas de los pares de poliedros que uno está inscrito en el otro de manera que los vértices del inscrito yacen en los centros de las caras del circunscrito.

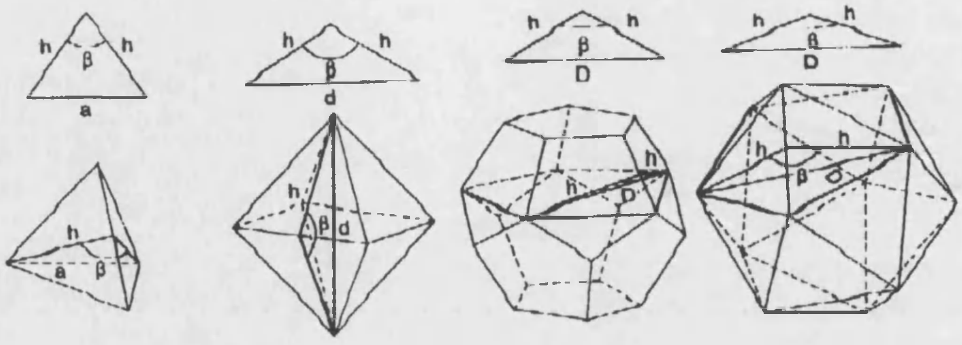
En el enunciado de esta tarea indicamos que se den sugerencias a los estudiantes que pueden ser adecuadas para las dos actividades que incluye. Nos referimos a que, por un lado, se apunte en caso necesario que el teorema del coseno permite conocer los ángulos de un triángulo cuando se conocen los tres lados, y cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos se puede determinar el tercer lado. Apuntaremos, si se cree conveniente, que la relación que liga estos elementos es: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos ß$, donde a, b, c, representan la medida de los lados del triángulo y ß es el ángulo comprendido entre b y c.

A) Sobre la actividad T-13a. Cuando se plantee esta actividad es muy probable que a los estudiantes se les tenga que dirigir para que se llegue a descubrir que:

- El ángulo diedro de cualquier poliedro de los implicados en esta actividad coincide con el ángulo formado por dos alturas de caras vecinas, una de cada cara que forma la arista, que se juntan en el mismo punto de la arista (figura 2.28).

- Las alturas de las caras de estos poliedros se pueden calcular a partir del lado y el ángulo del polígono de sus caras, aplicando el teorema de Pitágoras, o como en el caso del dodecaedro, el teorema del coseno (para determinar la diagonal de la cara) y el teorema de Pitágoras (para determinar la altura a partir de la diagonal de la cara y de la longitud del lado).

- Para el tetraedro se puede seleccionar el triángulo formado por las dos alturas de las caras y como tercer lado la arista del tetraedro (figura 2.28 (a)). Así, se puede hallar la altura de las caras y después, aplicando el teorema del coseno, se halla el ángulo diedro del tetraedro (que coincide con el ángulo que forman las dos alturas en este triángulo).



(a) (b) (c) (d)

Figura 2.28

– Para el dodecaedro, se puede considerar la sección que se obtiene al cortar por un plano que pasa por 5 vértices del sólido y es paralelo a la cara sobre la que se apoya (se obtiene un pentágono regular cuyos lados son las diagonales de las caras del dodecaedro) (figura 2.28(c)). La longitud del lado de este pentágono se puede calcular, aplicando el teorema del coseno, a partir de la arista del dodecaedro, pues el ángulo de las caras mide 108° (por ser pentágonos regulares).

La diagonal, D, del pentágono que se ha obtenido con el corte es precisamente uno de los lados del triángulo elegido en la figura para determinar el ángulo diedro. Los otros dos lados de este triángulo son la altura del pentágono de las caras del dodecaedro (figura 2.28(c)). La diagonal, D, del pentágono que se ha obtenido con el corte se puede calcular, aplicando el teorema del coseno, a partir de la diagonal de las caras del dodecaedro, que corresponde al lado de esta sección, pues el ángulo de esta sección también mide 108° (por ser pentágonos regulares).

Se puede determinar previamente los lados de este triángulo y aplicando el teorema del coseno se halla el ángulo diedro del dodecaedro.

– Para el icosaedro, se puede colocar apoyado en uno de sus vértices para que, al observarlo como antiprisma pentagonal al que se le han añadido pirámides a cada una de sus bases, se llegue a descubrir que el tercer lado del triángulo formado por las dos alturas de caras vecinas y el ángulo diedro del icosaedro es la diagonal de un pentágono cuyo lado es la arista del icosaedro (figura 2.28(d)).

Se puede determinar previamente los lados del triángulo y aplicando el teorema del coseno se halla el ángulo diedro del icosaedro.

En las experimentaciones realizadas en todas ellas fue necesario dirigir la actividad para que se descubrieran y aplicaran los resultados que acabamos de relatar. Muchos estudiantes no fueron capaces de hallar el ángulo diedro del dodecaedro ni del icosaedro, incluso después de que en clase abordáramos el problema para el ángulo diedro de los otros poliedros regulares, prestando mucha atención en lo que se mantenía y cambiaba al pasar el problema de un poliedro a otro, y centrando la atención en las secciones de los poliedros que podrían interesarnos para poder hallar la medida de los lados del triángulo elegido; algunos estudiantes no pudieron resolver estos problemas hasta que no les prestamos una atención individualizada.

Estas experimentaciones explican que aconsejemos que al desarrollar la actividad T-13a en clase se plantee primero el problema para el tetraedro, y para este poliedro sea el profesor el que resuelva el problema remarcando las sugerencias que se pueden aprovechar para los otros poliedros. Después se puede plantear el problema para el octaedro y aprovechar el procedimiento del tetraedro para mostrar que seguimos utilizando el mismo procedimiento sólo que en este caso, el tercer lado del triángulo seleccionado es la diagonal de un cuadrado en vez de la arista del poliedro. Continuaremos con el ángulo diedro del icosaedro de la misma manera y lo que remarcaremos ahora será que el tercer lado es la diagonal de un pentágono. Subrayaremos que el problema que introduce este poliedro es el de hallar la diagonal de un pentágono. A continuación plantearemos el problema para el dodecaedro, con las sugerencias que indicamos antes para este poliedro. Y para los estudiantes que tengan problemas habrá que prestarles más atención.

Al abordar estos problemas también podemos llamar la atención sobre que los triángulos que se pueden seleccionar para hallar los ángulos diedros no son únicos. Por ejemplo, en Guillén (1991) se presentan algunos que conducen a los ángulos diedros una vez que se calculan los datos necesarios y se aplica el teorema del coseno. Y es satisfactorio señalar que en nuestras experimentaciones hemos tenido estudiantes que también han hallado los ángulos diedros de cada uno de los poliedros regulares utilizando por lo menos dos triángulos diferentes.

A) Sobre la actividad T-13b. Una vez que se han hallado los ángulos diedros, el resolver esta actividad no suele presentar problema para los estudiantes una vez que se apuntan sugerencias como las siguientes.

- Para cada poliedro seleccionar el siguiente triángulo: dos lados de cada uno de estos triángulos son la distancia del centro de las caras del poliedro correspondiente al punto medio del lado (apotema de las caras) y uno de sus ángulos coincide con el ángulo diedro del poliedro correspondiente (figura 2.29)

- La apotema de las caras se puede calcular a partir del lado del polígono y de la medida de su ángulo, utilizando fórmulas trigonométricas, que relacionan el cateto de un triángulo rectángulo con el otro cateto y uno de sus ángulos.

- Una vez hallados las apotemas de las caras de los poliedros circunscritos y sus ángulos diedros, aplicando el teorema del coseno se puede determinar la longitud de la arista del poliedro inscrito que tiene los vértices en los centros de las caras del poliedro circunscrito.

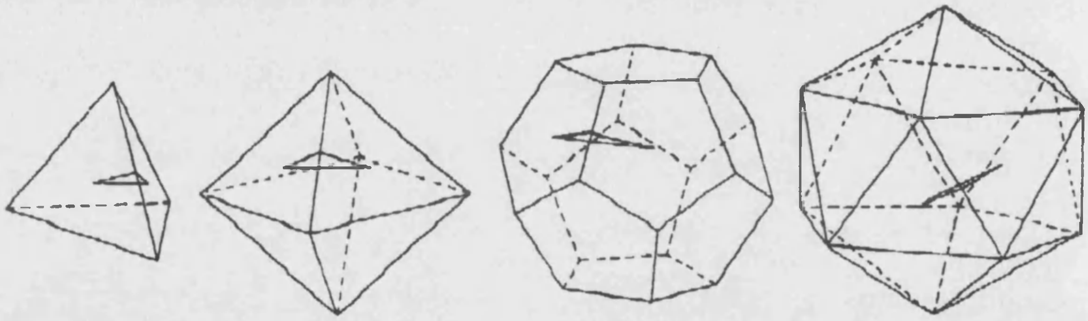


Figura 2.29

Vale la pena informar de que algunos estudiantes extendieron a otros polígonos el resultado que conocían para el triángulo equilátero o basaron sus respuestas en juicios visuales. A pesar de que sugerimos cómo se podía hallar la apotema de un polígono regular (aplicando relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo del que se conoce un cateto, que mide la mitad del lado, y sus ángulos, uno de ellos es la mitad del ángulo del polígono regular correspondiente), estos estudiantes no tuvieron en cuenta esta sugerencia y concluyeron que la apotema de un pentágono era un tercio de la altura, o que era la mitad. Nos preguntaron si esto era cierto o no y si bastaba con que lo hicieran así. Cuando les respondimos que lo explicaran de manera que convenciera un poco más que con un dibujo, y precisamos las sugerencias que ya habíamos apuntado en general, respondieron: "Uf, me parece que no va a ser cierto; ya a ojo, si miras bien... no se cumple".

Cabe señalar también que la altura del pentágono ya se halló en la actividad T-13a para determinar el ángulo diedro del dodecaedro; pero de nuevo comprobamos en varias ocasiones que algunos estudiantes no recurrían a los problemas resueltos en un intento de aprovechar alguno de sus resultados. Y también verificamos que el hecho de que no sea inmediato hallarla, llevó a que muchos estudiantes requirieran de nuevo de pistas para determinarla.

La tarea T-14. Los modelos compuestos. Esta tarea pretende que se construyan otros modelos de poliedros duales (los que hemos llamado modelos compuestos en los que las aristas de ambos poliedros se cortan perpendicularmente en el punto medio) y que se halle la relación entre las aristas de los 4 poliedros implicados: el intersección, los dos modelos que forman la forma compuesta (que pueden ser iguales como en la estrella octangular) y el sólido envolvente.

Las experimentaciones han mostrado que los estudiantes tienen bastante interés en construir los modelos, pero tienen dificultades para hallar la relación de las aristas aunque se trabaje con los modelos. Para T-14a se pueden apuntar las sugerencias que indica Holden (1971, p. 9):

> La estrategia más fácil es construir primero los tres sólidos negros [se refiere al tetraedro, cubo y dodecaedro] y luego añadir las pirámides blancas a sus caras. Dado que las caras de los sólidos blancos [se refiere al tetraedro, octaedro e icosaedro] son triángulos equiláteros, las caras laterales de las pirámides son también triángulos equiláteros.

Se puede mostrar que a partir del octaedro o del icosaedro también se puede obtener la forma compuesta; que se añaden pirámides triangulares a sus caras, pero ahora los triángulos de las caras laterales no son equiláteros; uno de sus lados mide la mitad de la arista del octaedro o del icosaedro, y el otro la mitad de la arista del cubo o del dodecaedro.

Se puede sugerir también que una vez seleccionado el modelo base al que añadir pirámides, se halle la relación entre las longitudes de las aristas de las pirámides que se añaden y la arista del modelo elegido como base. Si es necesario apuntar además que esta relación se deduce de que a = 2m, siendo *a* la arista del modelo que se obtiene (la del octaedro, o del icosaedro si se sigue la estrategia que sugiere Holden) y *m* la distancia entre los puntos medios de los lados consecutivos de las caras del modelo base (del cubo, o del dodecaedro) (ver la figura 2.30).

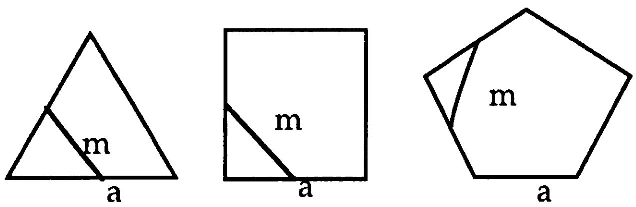


Figura 2.30

Para T-14e, si es necesario, sugerir que una vez que tenemos la cara del sólido dual, para determinar cómo están distribuidos los vértices de los diferentes órdenes en el poliedro dual se observe cómo están colocadas las caras en el poliedro arquimediano correspondiente. Centrar la atención en el ángulo con que concurren los polígonos en los vértices y después pedir que se esboce un desarrollo del poliedro dual.

La tarea T-15. Sobre los modelos que proponemos para que se halle el número de diagonales que tienen. Al igual que la tarea T-18 de la fase 2, incluye actividades para las que hay que determinar el número de diagonales de las caras o del espacio para determinadas familias o modelos. Han sido las experimentaciones realizadas las que nos han sugerido el proponer para esta fase actividades de este tipo. Hemos indicado en los comentarios a las tareas propuestas para la fase 2 que los estudiantes tienen más dificultad para determinar el número de diagonales del sólido en los modelos que tienen vértices de varios tipos y entre éstos presentan más dificultad los modelos que tienen por caras polígonos que no son triángulos. Para estos modelos, al tener diagonales de las caras resulta más difícil determinar los vértices con los que no se puede unir el vértice seleccionado. Si tienen todos los vértices del mismo tipo, los que más dificultad presentan son los que tienen caras de varios tipos. De ahí que en las actividades de la fase 2 y en las de la fase 4 hayamos considerado modelos de ambas clases y que sea en las de la fase 4 donde proponemos los modelos que conllevan más dificultad.

Las tareas T-16 y T-17. Sobre las implicaciones. Aportaciones de las experimentaciones. Estas tareas, al igual que las tareas T-20 y T-21 de la fase 2, ya las hemos resuelto en las actividades planteadas para el nivel 2 o en las anteriores a ésta propuestas para el nivel 3. Si las retomamos de nuevo también en la fase 4 es porque hay que dedicar atención especial para que los estudiantes lleguen a comprender la diferencia entre una implicación y la inversa; para que puedan distinguirlas y justificarlas de manera matemáticamente correcta se requiere del nivel 4 de razonamiento y para que los estudiantes no necesiten de la ayuda del profesor es necesario que se haya abordado en diferentes situaciones utilizando razonamientos de los asociados al nivel 3 en un trabajo dirigido por éste. Las actividades planteadas para esta fase 4 nos darán la oportunidad de conocer si los estudiantes tienen un dominio de las características del nivel 4 o si aún requieren del profesor para que les conduzca este tipo de trabajo.

Por otro lado, también cabe comentar que, al igual que para las que incluimos en otras tareas de esta fase, éstas están diseñadas para que se pueda evaluar con ellas la utilización que hacen los estudiantes de los procedimientos utilizados en otras actividades, la aplicación que hacen de los resultados obtenidos y la capacidad que tienen para reformular el problema de manera que se convierta en otro problema ya resuelto, o que su procedimiento se pueda utilizar en parte en el problema propuesto, o que el problema reformulado sea un caso singular para el que demostrar lo que se plantea no conlleva dificultad. Así, por ejemplo, para las actividades T-16c a T-16e resulta muy adecuado considerar un polígono descompuesto en triángulos (al juntar los vértices con el centro) como el elemento límite de una pirámide o una bipirámide y demostrar para él si la implicación es cierta o falsa. En este segundo caso, el contraejemplo surge de manera inmediata de los polígonos.

A) La tarea T-16. En las investigaciones realizadas, cuando dimos las sugerencias que indicamos en el enunciado de la tarea, los estudiantes no tuvieron problemas para encontrar la pirámide recta de base rombo (o de cualquier polígono con lados iguales y ángulos distintos) como ejemplo que muestra que T-16c es falsa. Tampoco tuvieron dificultades para justificar que T-16d y T-16e son correctas en el caso límite, pues observaron sin dificultad que las aristas laterales de las pirámides y las bipirámides, en el elemento límite se convierten en la distancia del centro del polígono a los vértices. Para algunos estudiantes que razonaban de acuerdo a las características del nivel 3 en otras tareas tuvimos que apuntar que la implicación propuesta aún no quedaba demostrada hasta que se demuéstrase para las pirámides o las bipirámides. Tuvimos que formular las implicaciones que quedaban por demostrar: la pirámide o bipirámide recta tiene las aristas laterales iguales si y sólo si la distancia del centro del polígono de la base a sus vértices es la misma. Pero una vez formuladas éstas, los estudiantes no tuvieron problemas en demostrarlas: observaron que las aristas laterales se podían determinar a partir de la altura de la pirámide y del elemento considerado en el caso singular, (distancia del centro del polígono a sus vértices) aplicando Pitágoras.

Pero lo que vale la pena comentar especialmente es la experimentación de la actividad T-16f. Mientras que al realizar las actividades de esta tarea los estudiantes ya comprendían que para demostrar que una implicación es falsa se busca un contraejemplo y que si se demuestra que no se puede encontrar un contraejemplo, entonces la implicación es correcta, no lo podían aplicar aún en las implicaciones en las que la primera parte se verifica para todos los ejemplos posibles o no se verifica para ningún ejemplo.

Cuando planteamos a estudiantes de 3ºC de Magisterio esta actividad, uno de ellos propuso como contraejemplo las pirámides. De inmediato surgieron otros que señalaron que ese contraejemplo no era válido porque no había ninguna pirámide que tuviese diagonales del espacio. Cuando cuestionamos si podían tener diagonales del espacio fuera del sólido, ellos indicaron que "ni dentro ni fuera; que por eso no servían como contraejemplo de esa implicación". Y se pusieron a buscar otros posibles contraejemplos de ella. Cuando los encontraron, que no tardaron demasiado porque recordaron que ya los habíamos descubierto al abordar las propiedades de los sólidos cóncavos, (propusieron un prisma triangular en el que se sustituyen las bases por pirámides colocadas hacia adentro) apuntaron: "Este sí es un contraejemplo, tiene diagonales del espacio, no queda ninguna fuera, ni siquiera un trozo, y no es convexo". Todos los estudiantes estaban de acuerdo en que el modelo presentado sí justificaba que la implicación de la actividad T-16f era falsa.

Cuestionar de nuevo si las pirámides cóncavas podían servir como contraejemplo permitió aclarar que una implicación es falsa si se puede encontrar un ejemplo que no verifique la segunda parte de la implicación y que sí que verifique la primera parte. Y que en caso contrario la implicación es correcta.

Cuando pensamos que ya se había aceptado las pirámides como contraejemplo, un estudiante que había logrado varias características asociadas al nivel 3 respondió: "Entonces, ¿estas implicaciones, son falsas? Si las diagonales del espacio de una pirámide no caen fuera, entonces es cóncava. Si las diagonales del espacio de una pirámide no caen fuera, entonces es convexa. Podemos encontrar pirámides que son convexas o cóncavas (no verifican la segunda parte en una o en otra implicación) y las diagonales del espacio no caen fuera (verifican la primera parte)".

Centramos la atención en el tipo de implicación que habíamos considerado para hacer ver que las dos implicaciones eran falsas. La primera parte de la implicación correspondía a una propiedad que verificaban todos los ejemplos de una familia (en este caso las pirámides), mientras que en la segunda parte la propiedad sólo se refería a parte de estos ejemplos (en este caso, las pirámides cóncavas o las convexas). Hicimos notar que siempre se podría encontrar ejemplos que no verificasen la segunda parte y sí la primera.

Y entonces se plantearon las siguientes cuestiones: "¿Y para estas dos qué ocurre? Si las diagonales del espacio de una pirámide caen en el interior, entonces es cóncava. Si todas las diagonales del espacio de una pirámide caen en el interior, entonces es convexa. Ahora no hay ningún ejemplo de pirámide que verifique la primera parte".

Aprovechamos estas implicaciones para remarcar que cuando no hay ejemplo que verifique la primera parte de la implicación, independientemente de lo que se concluya en la segunda parte, la implicación es correcta ya que nunca podremos encontrar ejemplos que verifiquen la primera parte.

De los párrafos anteriores se desprende que al abordar la actividad T-16f, si no se tienen estudiantes que plantean los problemas que hemos apuntado, como nos ha ocurrido en algunas experimentaciones, puede ser interesante que el profesor los introduzca, por la riqueza que proporcionan a los conocimientos que generan las actividades propuestas.

B) La tarea T-17 está diseñada para abordar problemas análogos a los que hemos indicado en párrafos anteriores. De nuevo podemos insistir en que propiedades que caracterizan a una subfamilia establecida con un criterio de clasificación dado, por ejemplo la de los prismas convexos, cuando se amplia el universo que se clasifica no caracteriza a la subfamilia, en este caso la de los sólidos convexos. También permiten trabajar las implicaciones y sus recíprocas.

Por otra parte, esta tarea, y la tarea T-21 de la fase 2, pretenden que para las familias establecidas con criterios fuertemente visuales se deduzcan sus propiedades a partir de las propiedades que caracterizan a la familia correspondiente. Para que los estudiantes puedan comprender completamente estos problemas es necesario que aunque se hayan introducido en la fase 2 se sigan trabajando en esta fase. Y de hecho, la comprensión de manera rigurosa, se realizará en el nivel superior, al comprender el papel de axiomas, definiciones y teoremas, de la estructura lógica de una demostración y del análisis de las relaciones lógicas entre conceptos y enunciados.

La tarea T-18. Sobre el concepto de poliedros iguales. Esta tarea se refiere al objetivo 8 de esta fase. En fase 1 del nivel 2 utilizamos el concepto de vértices iguales para mostrar la manera de razonar en la elaboración de ideas de conceptos. En fase 2 del nivel 3 presentamos el concepto de dualidad de poliedros con el mismo objetivo. Ahora, para finalizar esta fase proponemos el mismo tipo de trabajo, utilizando para ello el concepto de poliedros iguales. La tarea que proponemos aquí si bien tiene el mismo propósito que las mencionadas, presenta variantes que vamos a comentar. Como ya se ha tratado el problema de elaborar definiciones formales, y ya se comprenden los requisitos que tienen que cumplir las definiciones de un concepto, el ir precisando las ideas ingenuas que se van teniendo, que es lo que hicimos con las actividades de la tareas propuestas para el nivel 2, o de la fase 2 de este nivel, se convierte ahora en el de ir precisando definiciones de un concepto.

No hemos dado sugerencias concretas para la tarea que proponemos aquí, pero a continuación apuntamos algunas. Podemos partir de una idea ingenua, las de que dos poliedros son iguales si los polígonos que los forman son los mismos. Pero si pedimos a dos personas que con polígonos dados (los mismos para ambas) construyan un modelo, es muy probable que no construyen el mismo. Si se reparte material para que los estudiantes construyan dos polidros distintos que tengan las mismas caras, es también muy probable que den con los modelos adecuados. Por ejemplo, una pirámide con triángulos isósceles y otra con triángulos equiláteros colocada hacia dentro o hacia afuera (añadida para que sea bipirámide).

Podemos restringir nuestro estudio a los sólidos convexos y plantear el problema para ellos. Trabajando con material también es probable que algún estudiante construya dos poliedros que verifiquen la idea dada para que sean iguales pero que no lo sean. Por ejemplo, un prisma con un casquete y los polígonos de éste puestos de diferente manera, en diferente orden.

Y se pueden llegar a varias ideas de poliedros iguales, que pueden conducir a problemas diferentes.

1) Las caras tienen que ser iguales y dispuestas de la misma manera alrededor de los vértices. Y puede que se encuentren contraejemplos o que no sea así. Podemos acabar el problema remarcando la idea de que si bien por ahora la idea de poliedros con la que vamos a trabajar es la indicada, cabe la posibilidad de que algún día venga alguien con un modelo que nos obligue a revisar la idea que tenemos sobre este concepto.

De hecho, el estudio del pequeño rombicuboctaedro y el seudo rombicuboctaedro (o sólido de Sommerville) que se podrían introducir como contraejemplo a la idea indicada, nos llevaría a incluir también una condición en términos de simetrías de los poliedros. Ambos poliedros (ver figura 2.31) están formados por dos casquetes que cierran una cinta de 8 cuadrados unida. Los casquetes están formados por un cuadrado bordeado de 4 cuadrados y 4 y triángulos colocados alternativamente, de manera que los cuadrados bordean al cuadrado y los triángulos se corresponden con los vértices. La diferencia entre ambos poliedros es que en el segundo, uno de los casquetes se ha girado con respecto al otro. Los cuadrados de la cinta que se unen con cuadrados de uno de los casquetes se unen con triángulos del otro casquete.

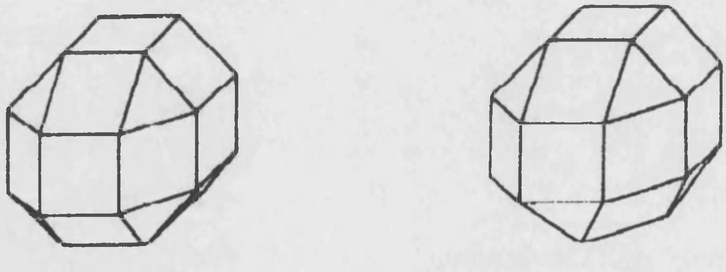


Figura 2.31

2) La clase puede que se derive vía la imposición de condiciones a los números de elementos. Por ejemplo, se puede llegar a imponer las condiciones de que tienen que tener el mismo número de caras, vértices y aristas. Y puede que se encuentren contraejemplos o que no sea así.

En ambos casos, podemos dirigir la atención hacia la elaboración de la fórmula de Euler y su posible demostración. Si se decide ir por este camino la lectura del libro de Lakatos (1976) es imprescindible. Y el estudio de los poliedros estrellados nos incluiría dentro del objeto mental de poliedro modelos que podríamos utilizar como contraejemplos de varias ideas elaboradas para este concepto. Por ejemplo, la idea de que dos poliedros son iguales si tienen el mismo número de caras y aristas y la misma medida para los ángulos diedros, necesita precisarse al considerar el dodecaedro y el pequeño dodecaedro estrellado; el que tengan el mismo número de caras, vértices y aristas, las caras tienen el mismo número de lados y en los vértices se juntan el mismo número de polígonos, necesita precisarse al tener en cuenta el pequeño dodecaedro estrellado y el gran dodecaedro.

CAPÍTULO 3º

EVALUACIÓN DEL NIVEL DE RAZONAMIENTO DE LOS ESTUDIANTES

En el marco del modelo de Van Hiele el objetivo principal de la enseñanza es desarrollar la capacidad de razonamiento geométrico de los estudiantes. Este ha sido uno de nuestros objetivos al desarrollar la unidad de enseñanza que describimos en el capítulo 2. En este capítulo vamos a dar cuenta del desarrollo del nivel de razonamiento que lograron los estudiantes con los que llevamos a cabo el curso descrito.

En la sección 3.1 indicamos por qué es interesante nuestra investigación y apuntamos las cuestiones que han sido nuestro objeto de estudio. A continuación, en la sección 3.2 hacemos un resumen del procedimiento de evaluación que hemos utilizado para asignar a cada estudiante un nivel de razonamiento de Van Hiele (lo expresamos en términos de un grado de adquisición de ese nivel). En las últimas secciones de este capítulo describimos el estudio realizado con los estudiantes de 3ºC de Magisterio y con los estudiantes de Magisterio de la asignatura optativa de geometría del espacio. Una vez señalado que para poder asignar nivel de razonamiento a los estudiantes es necesario proponer una serie de tareas que los estudiantes deben contestar o resolver, describimos los tests elaborados (los ítems que contienen, el rango de niveles de razonamiento de Van Hiele que asignamos a cada ítem, los ítems que pueden responderse en un nivel de razonamiento dado, etc.) y, utilizando los procedimientos de evaluación descritos en la sección 3.2, evaluamos las respuestas de los estudiantes y les asociamos a cada uno un grado de adquisición de cada nivel de razonamiento. Por último subrayamos la información que aportan los resultados obtenidos en la evaluación del nivel de razonamiento de los estudiantes encuestados y las consecuencias.

3.1. INTERÉS Y MOTIVOS DE LA INVESTIGACIÓN. CUESTIONES OBJETO DE ESTA INVESTIGACIÓN

Uno de los objetivos de la investigación que se presenta en esta memoria es evaluar el desarrollo del nivel de razonamiento en la geometría de los sólidos de los estudiantes de algunos grupos de Magisterio. Esto incluye una identificación en diferentes momentos de la forma de razonar de los estudiantes. En términos del Modelo de Van Hiele, eso se traduce en la asignación, en diferentes momentos, de un nivel de razonamiento.

Hemos recurrido a la metodología del pretest y postest, para comparar resultados y obtener conclusiones al respecto. Para llevar a cabo la evaluación adecuada, como señala Jaime (1993, p. C3-2), hemos tenido que resolver los siguientes problemas:

"¿Qué tipo de test emplear (escrito u oral, con ítems de respuesta múltiple o de respuesta libre,...)?
¿Cómo evaluar las respuestas al test?".

En la investigación realizada sobre el modelo de Van Hiele se han utilizado tres tipos de tests: tests escritos de elección múltiple, tests escritos de respuesta libre y entrevistas clínicas.

Los tests escritos de elección múltiple, han sido utilizados por algunos investigadores (Usiskin, 1982; Gutiérrez y Jaime, 1987), pero han sido desestimados por otros (Corberán et al., 1991; Jaime, 1993) porque no se consideran idóneos para determinar el nivel de razonamiento de los estudiantes; estos investigadores subrayan que diversos estudiantes pueden elegir una misma respuesta por motivos diferentes llevando implícitos diferentes niveles de razonamiento.

El test escrito de respuesta libre también se ha utilizado por varios investigadores (por ejemplo, Jaime, 1993) con muy buenos resultados. Como señalan Corberán et al. (1991, p. 93), "un ítem de respuesta libre evita el inconveniente de los ítems de elección múltiple, pues en él se pide a los estudiantes que expliquen con detalle su forma de trabajo y sus motivos para responder como lo hacen, y también evita el inconveniente de la entrevista clínica pues puede ser administrado de forma simultánea a todos los alumnos de cada clase".

La entrevista clínica es el método de determinación de los niveles de razonamiento más fiable. Ha sido utilizada por varios investigadores (Burger & Shaughnessy, 1986, entre otros) y presenta ventajas frente al ítem de respuesta libre. Corberán et al. (1991, p. 93) señalan que "un ítem de respuesta libre tiene frente a la entrevista el inconveniente de que a los estudiantes siempre les cuesta más expresarse por escrito que verbalmente, por lo que tienden a dar respuestas escuetas; también tiene el inconveniente que no es posible alterar las preguntas en función de las respuestas previas, como se puede hacer en las entrevistas".

Para nuestro trabajo hemos optado por utilizar ítems escritos de respuesta libre. Las entrevistas como método de evaluación las hemos desestimado por razones prácticas.

En el terreno de la geometría tridimensional, son muy pocas las investigaciones que hayan utilizado ítems de respuesta libre para evaluar el nivel de razonamiento de los estudiantes. Si bien en Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991) se presentan algunos ejemplos, que han sido la base para el test que diseñamos, es necesario todavía continuar la investigación sobre las herramientas que se pueden poner a disposición de los investigadores para evaluar los niveles de razonamiento de Van Hiele en el campo de la geometría tridimensional. Esto hace que la aportación al diseño del test escrito, que presentamos en este capítulo, que supone una aproximación a la cantidad de información obtenida en las entrevistas, constituye un avance interesante en este sentido.

Para dar respuesta a la segunda pregunta que hemos planteado, hemos utilizado el método de evaluación de los grados de adquisición de los niveles de razonamiento de Van Hiele que se describe en Jaime (1993) y que también se ha divulgado en otros proyectos de investigación y artículos que dicha autora ha realizado con otros investigadores (Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991; Corberán et al., 1991, entre otros). Como indica Jaime (1993) no se basa en un tipo específico de test o prueba respecto al formato (escrito u oral), pero es utilizable solamente con ítems de respuesta libre. Además se basa en una interpretación concreta sobre la forma como se produce el paso desde un nivel de razonamiento de Van Hiele al siguiente: asume una idea de continuidad, que se traduce en un proceso gradual de adquisición de los niveles de razonamiento por los estudiantes, frente a la idea de discretitud, que supone un salto brusco. Jaime (1993) aplica el método para hacer un estudio longitudinal de estudiantes españoles de los cursos de 6º de EGB al Curso de Orientación Universitaria (COU) (con edades de entre 11 y 18 años) y sugiere que se podría utilizar para hacer otros estudios sobre el nivel de razonamiento que poseen otros colectivos de estudiantes.

En nuestro trabajo lo utilizamos para evaluar el nivel de razonamiento de los estudiantes de algunos grupos de Magisterio (futuros profesores de primaria), en la geometría de los sólidos. Esto supone que una vez aceptada la descripción del proceso de adquisición de los niveles de razonamiento de Van Hiele y el método de interpretación de las respuestas de los estudiantes que propone el método de evaluación que hemos comentado, y del que hacemos un breve resumen en la sección 3.2, hay que aplicarlo al caso concreto de nuestro trabajo. Por lo que otra contribución nuestra, para resolver problemas relativos a la evaluación del nivel de razonamiento de los estudiantes en la geometría de los sólidos, es el haber delimitado diferentes respuestas para los diferentes ítems de los tests diseñados, y el haberlas evaluado (les hemos asignado nivel de razonamiento y tipo). Las aclaraciones que hacemos en este capítulo (ver el apartado 3.3.3) y la gran variedad de respuestas a los ítems que presentamos evaluadas en el anexo 4, por un lado, proporcionan ejemplos de los diferentes tipos de respuestas que describe el modelo general; por otro lado, informan sobre cómo hemos asignado a nuestros estudiantes niveles de razonamiento parciales, que luego van a dar cuenta del grado de adquisición que asociamos al estudiante para ese nivel. El haber delimitado y evaluado estas respuestas constituye un avance interesante para otros trabajos de evaluación del nivel de razonamiento de los estudiantes en la geometría de los sólidos.

3.2. MÉTODO DE EVALUACIÓN DE LOS GRADOS DE ADQUISICIÓN DE LOS NIVELES DE VAN HIELE

En los ítems de respuesta libre el evaluador debe interpretar las respuestas de los estudiantes en términos de nivel de razonamiento, por lo que puede asignar a una respuesta uno u otro nivel y graduar también la calidad de la respuesta. La asignación a cada estudiante de una medida de su nivel de razonamiento matemático, que refleje nivel y el mayor o menor dominio que se tiene de él, es un proceso de varias etapas que vamos a tratar en esta sección. Los fundamentos del método se encuentran en Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991) y en otros trabajos de estos autores se describe el método de evaluación de manera detallada (Corberán et al., 1991; Jaime, 1993). Por consiguiente, en los apartados que siguen sólo vamos a hacer un resumen.

3.2.1. GRADOS DE ADQUISICIÓN DE NIVEL DE RAZONAMIENTO

El método de evaluación de los grados de adquisición de los niveles de razonamiento empleado en nuestro trabajo supone la adquisición progresiva de un nivel de razonamiento. Jaime (1993, p. C3-9) apunta que "si pensamos en la adquisición progresiva de un nivel de razonamiento podemos hablar, en términos cualitativos, de un proceso de dominio del nivel cada vez mayor, que va desde el dominio nulo (al comienzo del proceso) hasta el completo (al final del proceso), con una serie de situaciones intermedias con características propias". Los grados de adquisición que hemos considerado y las características de cada uno de ellos se detallan en Jaime (1993, pp. C3-9, 10):

Adquisición Nula: No se emplean las características de este nivel de razonamiento.

Adquisición baja: Empieza la consciencia de las características, métodos y exigencias propias del nivel, pero es muy pobre la utilización que se hace de ellos.

Adquisición Intermedia: El empleo de los métodos de este nivel es más frecuente y preciso. No obstante, todavía no se domina, por lo que, ante situaciones que resultan complicadas, se produce un retroceso de nivel, con un intento posterior de retorno al nivel superior. Hay, por tanto, saltos frecuentes entre dos niveles consecutivos de razonamiento.

Adquisición Alta: El nivel habitual de trabajo es éste y se produce con muy poca frecuencia el retroceso de nivel, aunque sucede alguna vez. Asimismo, en ocasiones se hace un uso inadecuado de las herramientas propias de este nivel de razonamiento.

Adquisición completa: Hay un dominio total de las herramientas y métodos de trabajo propios de este nivel de razonamiento.

La asignación que damos a los diferentes grados de adquisición en términos de porcentajes son también los que se señalan en Jaime (1993, p. C3-10), y que presentamos a continuación en la tabla 3.1:

0		
	Adquisición nula:	$0\% \leq Gr(n) \leq 15\%15\%$
15		
	Adquisición baja:	$< Gr(n) < 40\%40\% \leq$
40		
	Adquisición intermedia:	$Gr(n) \leq 60\%60\% <$
60		
	Adquisición alta:	$Gr(n) < 85\%85\% \leq$
85		
	Adquisición completa:	$Gr(n) \leq 100\%$
100		

Tabla3.1: Escalas cuantitativa y cualitativa de los grados de adquisición de un nivel de Van Hiele.

La cantidad de divisiones y los valores porcentuales asignados para los límites son subjetivos, y han sido delimitados "a partir de experimentaciones en diferentes contextos matemáticos y con estudiantes de diferentes cursos y países" (Jaime, 1993, p. C3-10). Nosotros consideramos estos porcentajes y divisiones razonables teniendo en cuenta el significado de cada división.

3.2.2. CODIFICACIÓN DE LAS RESPUESTAS A UN TEST DESDE UNA DOBLE PERSPECTIVA: DEFINICIÓN DE LOS TIPOS DE RESPUESTAS

Las ideas centrales del procedimiento que vamos a utilizar para evaluar a los estudiantes, de manera que se pueda apreciar su progreso en la adquisición de un nivel de razonamiento, son las que se indican en Corberán et al. (1991, pp. 100-101):

> 1) En concordancia con la idea [...] de que los niveles de razonamiento de Van Hiele son de carácter continuo, no es razonable asignar a los estudiantes sólo un número correspondiente a un nivel de Van Hiele. Más bien es necesario tratar de determinar cómo de perfecta es la adquisición por los estudiantes de cada nivel de razonamiento, con el fin de describir la transición entre dos niveles, situación en la que se encuentran la mayoría de los estudiantes.
>
> 2) Planteado un ítem a un estudiante, la forma como éste responde en conjunto a las diferentes cuestiones del ítem permite determinar el nivel de razonamiento empleado en ese ítem.
>
> 3) La calidad matemática de las respuestas es un indicador de la seguridad con que el estudiante ha respondido a ese ítem y, en consecuencia, un indicador de la seguridad con que ha utilizado las habilidades propias del nivel de razonamiento empleado.

El método construido basándose en estas ideas evalúa cada ítem desde una doble perspectiva:

a) Se determina el nivel de razonamiento de Van Hiele al que corresponde la respuesta.

b) Se determina un tipo de respuesta en función de la calidad matemática de la misma y de la claridad con que aparece reflejado el nivel de razonamiento correspondiente.

Este doble análisis de las respuestas (de nivel de razonamiento y de corrección matemática) ha llevado a que los autores del método hayan elaborado unos tipos de respuestas generales que describimos a continuación (Jaime, 1993, pp. C3-11, 12).

> Tipo 1: Ítems sin respuesta, con respuestas no codificables o con respuestas que indican que el estudiante no está en un determinado nivel de razonamiento pero que no proporcionan ninguna información sobre su forma de utilizar los niveles de razonamiento inferiores.
>
> Tipo 2: Respuestas matemáticamente incorrectas y muy incompletas, pero en las que se reconocen indicios de utilización de cierto nivel de razonamiento. Se

trata, por lo general, de respuestas muy breves y pobres que, además, contienen errores matemáticos o que no contestan directamente a la pregunta planteada.

Tipo 3: Respuestas matemáticamente correctas pero muy incompletas, en las que se reconocen indicios de utilización de cierto nivel de razonamiento. Se trata, por lo general, de respuestas muy breves y pobres, aunque no contienen errores matemáticos.

Tipo 4: Respuestas que reflejan claramente características de dos niveles de razonamiento consecutivos. Esta es la situación más típica de los alumnos en transición entre niveles, pues entremezclan dos niveles de razonamiento consecutivos en sus respuestas a un ítem (generalmente en función de la dificultad de las preguntas). Las respuestas pueden ser matemáticamente correctas o incorrectas, pero deben ser bastante completas.

Tipo 5: Respuestas bastante completas pero matemáticamente incorrectas, que reflejan claramente la utilización predominante de un nivel de razonamiento determinado. La incorrección de las respuestas puede deberse a errores matemáticos o a que siguen una línea de trabajo que no lleva a la solución del problema planteado, pero cuyos procesos de razonamiento son válidos.

Tipo 6: Respuestas bastante completas y matemáticamente correctas que reflejan claramente la utilización predominante de un nivel de razonamiento determinado. Se trata de respuestas claras y correctas, pero que no están completas porque no llegan a resolver el problema totalmente, porque hay "saltos" en el razonamiento deductivo seguido, porque tienen pequeños errores, etc.

Tipo 7: Respuestas matemáticamente correctas y completas que reflejan claramente la utilización de un nivel de razonamiento determinado.

La tabla 3.2 resume el esquema que representa la relación entre la corrección matemática, la consolidación del nivel de razonamiento y los distintos tipos de respuestas.

		Corrección Matemática	
		Incorrecta	Correcta
Nivel de V. H	Alto	5	6, 7
	Medio	4	
	Bajo	2	3

Tabla 3.2. Características de los tipos de respuestas.

Estos son los tipos de respuestas que hemos tomado como referencia para asignar nivel de razonamiento y tipo a las respuestas dadas por los estudiantes. En el apartado 3.3.3 y en el anexo 4, incluimos ejemplos de respuestas de diferentes niveles de razonamiento y de diferentes tipos.

3.2.3. ASIGNACIÓN DE LOS GRADOS DE ADQUISICIÓN DE LOS NIVELES DE VAN HIELE A LOS ESTUDIANTES

Para determinar para cada estudiante sus grados de adquisición de los diferentes niveles de razonamiento de Van Hiele hemos seguido varios pasos:

A) La codificación de las respuestas de los estudiantes. Esto es, la asignación de nivel de razonamiento y tipo a cada respuesta del estudiante.

B) La ponderación de cada tipo de respuesta. Una vez asignado a una respuesta un tipo determinado, al hacer la ponderación lo expresamos en términos cuantitativos. La tabla 3.3 muestra los valores porcentuales asociados a los diferentes tipos de respuesta, para cuantificar la adquisición del nivel de razonamiento correspondiente.

Tipo	1	2	3	4	5	6	7
Ponderación (%)	0	20	25	50	75	80	100

Tabla 3.3. Ponderación de los diferentes tipos de respuestas.

C) La asignación de rango de niveles de razonamiento de Van Hiele a las respuestas de cada ítem del test. En aplicación de la organización jerárquica de los niveles de razonamiento de Van Hiele, consideramos que si un ítem puede ser contestado en un rango de niveles N_1 a N_2 y es contestado en el nivel N ($N_1 \leq N \leq N_2$), este ítem tendrá una ponderación de:

100% en los niveles de ese rango que son inferiores al N.
0% en los niveles de ese rango que son superiores a N
El valor correspondiente al tipo de respuesta en el nivel N.

Por ejemplo, una vez determinado que un ítem se puede contestar en los niveles 1, 2 y 3, si a una respuesta se le ha asignado el nivel 2 y tipo 6, la ponderación correspondiente a esta respuesta será: nivel 1 $\rightarrow$ 100%, nivel 2 $\rightarrow$ 80%, nivel 3 $\rightarrow$ 0%.

D) La identificación de los ítems que pueden contestarse en cada nivel de razonamiento. El grado de adquisición de ese nivel por los estudiantes se obtiene como media aritmética de las ponderaciones de todos los ítems que pueden responderse en ese nivel.

Por ejemplo, si hay 4 ítems que pueden responderse en el nivel 2 y las ponderaciones de esos ítems en dicho nivel son 20%, 0%, 75% y 80%, el grado de adquisición del nivel 2 por el estudiante es: $Gr\ (2) = \frac{20 + 0 + 75 + 80}{4}$ = 43'75%, que responde a una adquisición intermedia de este nivel.

Para todos los niveles de razonamiento hay que hacer este cálculo, con lo que el resultado final de la evaluación de un estudiante es un conjunto de cuatro valores, que corresponden a los grados de adquisición de los niveles 1, 2, 3 y 4 de Van Hiele.

Por ejemplo, un estudiante puede mostrar en un test grados de adquisición del 100% (completa), 82% (alta), 30% (baja) y 5% (nula) de los niveles 1 a 4 respectivamente. Estos valores reflejan que el estudiante está completando la adquisición del segundo nivel de razonamiento, que es el nivel en el que se mueve habitualmente en su trabajo, aunque al mismo tiempo está empezando la adquisición del tercer nivel; esto es, sabe utilizar razonamientos de este nivel en problemas sencillos. En el apartado 3.3.6 de este capítulo, tomando como base los resultados obtenidos en nuestra experimentación, explicamos la información o conclusiones que se pueden extraer de este grupo de cuatro valores.

3.3. EVALUACIÓN DEL NIVEL DE RAZONAMIENTO DE ESTUDIANTES DE GRUPOS DE MAGISTERIO

En esta sección presentamos un ejemplo de utilización del método descrito en la sección 3.2 para identificar el grado de adquisición de los estudiantes en la geometría de los sólidos. Para ello hemos empleado un pretest y un postest, que hemos elaborado teniendo en cuenta las ideas que hemos señalado en la sección 3.1 y que comentamos en el próximo apartado 3.3.2.

Los resultados obtenidos por la administración de estos tests los analizamos centrando la atención en la evolución del nivel de razonamiento de los estudiantes desde que se realizó el pretest hasta el postest. La comparación de los resultados obtenidos, por un lado, puede darnos una idea del efecto de la unidad de enseñanza en el desarrollo del nivel de razonamiento de los estudiantes y, por otro, nos aportará información sobre las dificultades que éstos poseen para dominar un determinado nivel de razonamiento.

Examinamos la variación experimentada en el nivel de razonamiento de dos grupos de estudiantes de Magisterio (los de 3º de la especialidad de Ciencias y los estudiantes que habían seleccionado la asignatura optativa de geometría del espacio) que presentan características diferentes (que hemos apuntado en el apartado 1.5.2 del capítulo 1). Dado el carácter exploratorio de esta investigación, no es necesario explicar la conveniencia de analizar los resultados obtenidos en los dos grupos.

Lo que sí que queremos remarcar es que no pretendemos que las conclusiones extraídas a partir de los grupos encuestados se consideren como generalizables o significativas para otros grupos de estudiantes. Las muestras no son representativas.

3.3.1. EL CONTEXTO DE LA EXPERIMENTACIÓN

En la sección 1.5 del capítulo 1 hemos señalado que en el curso académico 1994-95 administramos dos tests a dos grupos de Magisterio; al grupo de 3ºC de la especialidad de Ciencias (plan antiguo) y al de la asignatura optativa de geometría del espacio (plan nuevo). La tabla 3.4 recopila las características de estos grupos y las fechas en las que administramos los diferentes tests.

Grupo	Número de estud.	Realización Pretest	Realización Postest
3º Ciencias	63	9 y 10 de nov. de 1994	4 y 6 de Marzo de 1995
Opt. de geometría del espacio	11	19 y 21 de oct. de 1994	26 y 27 de enero de 1995

Tabla 3.4. Características de los estudiantes encuestados. Fechas de realización de los tests.

El número de estudiantes que figura en la tabla para cada grupo es superior al número total de estudiantes en las clases. Hay que tener en cuenta que en Magisterio es frecuente la no asistencia a clase de algunos estudiantes. Estos números tampoco coinciden con el número de estudiantes de los grupos, según las listas correspondientes; también es frecuente que algunos estudiantes abandonen la asignatura ya desde el principio o a lo largo del curso; así, los números hacen referencia a los estudiantes del grupo correspondiente que no faltaron a ninguna de las 4 sesiones en las que se administraron los tests.

Para ambos grupos de estudiantes el pretest se planteó cuando comenzaba a impartirse la asignatura de geometría en la que íbamos a incluir las clases experimentales. En repetidas ocasiones habíamos constatado que los estudiantes de Magisterio habían tenido muy poca experiencia anterior con la geometría de los sólidos. Su conocimiento solía corresponder al cilindro, cono, esfera, cubo, ortoedro, pirámides y prismas; también tuvimos algunos estudiantes que conocían el nombre de otras familias, como la familia de los paralelepípedos y/o la de los romboedros, pero su conocimiento era muy pobre. Los estudiantes no tenían los conocimientos matemáticos necesarios para realizar un test que midiese los niveles de razonamiento, porque los conocimientos que algún día adquirieron, si es que lo hicieron, los tenían bastante olvidados. Por lo que antes de realizar el pretest tuvimos una sesión con los estudiantes en la que introdujimos varios modelos, ejemplos y contraejemplos de prismas, pirámides y romboedros (familias a las que se refieren los ítems del pretest). Con ella pretendíamos proporcionar unos conocimientos imprescindibles para que los estudiantes pudieran contestar al pretest y evaluar su nivel de razonamiento.

Respecto al postest, consideramos conveniente distanciar su administración de la finalización de la instrucción (unidad de enseñanza), dada la gran cantidad de conceptos y propiedades implicadas en las actividades de la unidad de enseñanza, y la gran variedad de tareas que se proponían para que evolucionase el nivel de razonamiento de los estudiantes. Así, éste se administró dos días después del examen que realizamos para calificar la asignatura correspondiente. El objeto era que los estudiantes tuviesen frescos los conocimientos necesarios sobre las familias de sólidos que les permitieran reflejar su nivel de razonamiento. Es necesario señalar que si bien en ambos grupos la unidad de enseñanza constó de 22 sesiones de 1 hora cada una, dado que fueron los estudiantes los que eligieron las fechas para realizar el examen, y por tanto para administrar el postest, el periodo comprendido entre la finalización de las clases y el postest fue diferente en los dos grupos encuestados.

La administración de los dos tests (el pretest y postest) se hizo en dos partes. Fue la autora de la tesis (que también era la profesora de la asignatura correspondiente) la encargada de administrarlos. El tiempo estimado para realizar el pretest (sugerido por los pretests piloto realizados) era de cerca de 90 minutos, por lo que éste se realizó en dos sesiones, de duración una hora y media respectivamente, que correspondían a horas de clase. El tiempo estimado para realizar el postest (sugerido por los postest piloto realizados) era de cerca de 4 horas. Por ello, para realizarlo, la profesora convocó a los estudiantes a dos sesiones, de 3 y 2 horas de duración respectivamente.

A cada grupo experimental se les administró el pretest y postest que incluimos en el anexo 3. Los estudiantes disponían de papel suficiente para que utilizaran el que consideraran necesario. Antes de empezar a contestar los tests, la profesora dio algunas instrucciones generales explicando la estructura física del test y cómo debían contestar. Se insistió especialmente en que se escribiera todo lo que se pensaba para responder a cada uno de los apartados de los ítems y que entregaran todo lo que habían escrito. Se apuntó que si una vez escrito algo se pensaba que no era adecuado para ese ítem, bastaba con que se tachara, pero que se incorporara con la respuesta a él. Posteriormente, mientras los estudiantes contestaban a los ítems, la profesora sólo contestaba a las preguntas que no implicaban ninguna información de carácter matemático relacionada con las respuestas.

Para evitar problemas, en la medida de lo posible, que tuvieran que ver con la visión espacial, tanto en el pretest como en el postest, los estudiantes podían observar (pero no tocar) modelos de sólidos de las familias implicadas en los tests. En la sala donde se administraron los tests había modelos de romboedros, cubos, ortoedros, paralelepípedos y otros prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides, de diferentes subfamilias, y en diferentes posiciones, colocados en mesas entre los estudiantes, que podían ser vistos por todos ellos.

3.3.2. DESCRIPCIÓN DE LOS TESTS DISEÑADOS

En este apartado vamos a describir los tests que hemos utilizado en la evaluación del nivel de razonamiento de los estudiantes en la geometría de los sólidos.

La elaboración de los ítems que componen los tests que presentamos en el anexo 3 como pretest y postest, ha sido una tarea larga. Diseñamos un test inicial y en él progresivamente hicimos las modificaciones pertinentes, sobre la base de las experimentaciones piloto realizadas en los cursos 1992-93 y 1993-94, hasta elaborar los tests incluidos en esta memoria. En los apartados siguientes vamos a dar cuenta de este proceso de elaboración y del rango de niveles de razonamiento que asignamos a las respuestas de los ítems y subítems incluidos en los tests.

ELABORACIÓN DE LOS TESTS

Para diseñar el test inicial tomamos decisiones de diferentes tipos, relativas a los contenidos geométricos en los que se basarían los ítems, el tipo de estudiantes a los que se les administraría el test, sus niveles de razonamiento probables, y el tipo y cantidad de ítems que formarían el test (Corberán et al., 1.991, pp. 93-94).

En concordancia con las ideas expresadas en el primer capítulo sobre que el nivel de Van Hiele no es de carácter global, el contenido de los ítems del test diseñado debería coincidir con el de las unidades de enseñanza que se experimentaran; por lo que los ítems de los tests que proponemos plantean cuestiones relativas a los sólidos, y en particular, a las familias de los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides; estas son las familias de sólidos que tratamos en la unidad de enseñanza. Para el pretest sólo se incluyen los prismas y pirámides y subfamilias de éstas; según las experimentaciones piloto éstas eran las familias de sólidos sobre las que los estudiantes tenían algunos conocimientos previos.

Por otro lado, cuando un test se va a utilizar con un tipo concreto de estudiantes, para optimizar los ítems debe hacerse más incidencia en los niveles en que más probablemente estarán los estudiantes. Experiencias anteriores realizadas con estudiantes de 2º y de 3º de Magisterio (equivalentes a los que iban a participar en la experimentación) nos informaron de que la mayoría de ellos estarían en los niveles de razonamiento 1 y 2. Por lo tanto, los ítems del test diseñado los orientamos a evaluar los niveles de razonamiento 1, 2 y 3. No olvidamos totalmente el nivel 4, para dar la oportunidad de evaluar a los estudiantes que al estudiar el proceso de demostración se movieran adecuadamente en este nivel.

Otros principios básicos que también tuvimos en cuenta al diseñar los tests, que se desprenden de las ideas apuntadas en los capítulos 1 y 2, se refieren a que hay actividades del mismo tipo (por ejemplo, de relacionar familias de sólidos, o de asociar propiedades a familias de sólidos) que pueden evaluar diferentes niveles de razonamiento (dependiendo del tipo de relación o de propiedad que se plantee) y a que la determinación del nivel de razonamiento de un estudiante no debe deducirse de qué cuestiones conteste sino de cómo las conteste.

Estos principios nos llevaron a diseñar ítems (tareas) de los tests que no son una pregunta o un problema simple (como lo son generalmente los ítems de los tests) sino que incluyen un conjunto de preguntas, que llamamos apartados o subítems, que corresponden a la misma actividad. Otros autores también consideran ítems que no son preguntas simples. Por ejemplo, Collis, Romberg & Jurdak (1986) denominan "superítem" al ítem que incluye un conjunto de preguntas centradas en los mismos conceptos. El motivo de diseñar estos ítems es permitir que los estudiantes de diferentes niveles puedan contestar al mismo tipo de cuestiones. También nos llevaron a incluir en un mismo ítem subítems que pueden resolverse en diferente nivel de razonamiento. Las experimentaciones piloto realizadas permitieron prever qué niveles de razonamiento de Van Hiele se podrían obtener en las respuestas de cada subítem, lo cual permitió asignar un rango de nivel de razonamiento a las respuestas posibles, que analizamos en el apartado siguiente.

Según el método de evaluación descrito en la sección 3.2, el grado de adquisición de un nivel se obtiene a partir de la media de las ponderaciones de todos los ítems (o subítems) que se pueden contestar en ese nivel. Por tanto, cuantos más niveles de respuesta admita cada ítem (o subítem), más oportunidades habrá de evaluar cada nivel de razonamiento; y cuantos más ítems (o subítems) incluyan en su rango de posibles respuestas un nivel de razonamiento dado, más fiable será la evaluación correspondiente a ese nivel. Estas ideas se reflejan en que optamos por tests con bastantes ítems con varios apartados (subítems), que requieren bastante tiempo para su resolución y corrección.

Las ideas expresadas en los párrafos anteriores condujeron a un pretest y un postest inicial que incluían bastantes subítems que podían ser respondidos en el nivel esperado más probable (el nivel 2) y menos subítems orientados a evaluar los niveles más improbables (los niveles 1 y 3). El postest incluía todos los ítems del pretest y otros subítems que contribuían en la evaluación de los niveles 2 y 3. En ambos tests sólo uno de los ítems pretendía evaluar el nivel 4. La gran extensión de los tests y el rango esperado de niveles de razonamiento de los estudiantes implicados nos inclinaron a evaluar las características asociadas al nivel 2 (que indicamos en el apartado 1.4.1 del capítulo primero), en detrimento de una evaluación completa de las asociadas a los otros niveles.

Dada la gran variedad de subítems que se pueden diseñar relativos a cada característica de las recopiladas en el apartado 1.4.1, con objeto de conocer posibles respuestas de los estudiantes a una gran variedad de ellos, una vez elaborados los tests iniciales diseñamos diferentes postest. En todos ellos planteamos ítems relativos a las mismas características de las señaladas para los diferentes niveles y mantuvimos también fijo el número de subítems que incluía cada uno de ellos. Además las respuestas de los subítems correspondientes de los diferentes postests tenían asignados los mismos rangos de niveles de razonamiento. Sólo los diferenciaba las familias de sólidos, las propiedades o el tipo de relación que estaban implicadas en el subítem. Por supuesto que en el diseño también tuvimos en cuenta los comentarios que hemos hecho en el capítulo 2 sobre las dificultades que conllevan los diferentes subítems (que hemos llamado actividades) que se pueden diseñar relativos a una característica dada. Una vez seleccionado un subítem para uno de los tests, para los otros tests incluíamos subítems a los que inicialmente les asociábamos la misma dificultad.

Uno de estos postests lo ensayamos con los estudiantes de Magisterio de 3º de Ciencias el curso 1993-94. Otras dos versiones las experimentamos con dos grupos de estudiantes también de Magisterio, de 3º de Educación Especial. Esta diversidad de estudiantes permitió determinar una gran variedad de respuestas en diferentes niveles de razonamiento para gran variedad de subítems.

Una vez analizadas las respuestas de los postests hicimos variaciones de diferentes tipos. Por un lado tuvimos que modificar algunos enunciados para que resultaran más comprensibles, reflejaran de manera más precisa qué se tenía que explicar en la respuesta o la actividad que se planteaba (por ejemplo, para el ítem 8).

Otras modificaciones que hicimos en los postests se referían a las propiedades que se incluían en los ítems (o subítems) y al orden en que se situaban en ellos (por ejemplo, en el ítem 7). Algunos ítems de los postests iniciales los separamos en dos, para no realizar dentro de un mismo ítem el mismo tipo de actividad para familias diferentes o para propiedades diferentes. Así, para algunos ítems del postest, las dos partes de las que constaban (la que coincidía con el ítem correspondiente del pretest y la formada por los subítems que se añadían para obtener el ítem del postest) las hicimos corresponder a ítems distintos. Por ejemplo, los ítems 3 y 4 del postest definitivo corresponden al ítem 3 del postest inicial.

En el proceso de elaboración de los tests también hicimos cambios en los niveles de razonamiento esperados para las respuestas. Aunque nuestra experiencia previa y los resultados de las pruebas piloto permitieron predecir con mucha exactitud qué niveles de razonamiento de Van Hiele se detectarían en las respuestas, en algunos ítems hubo que modificar esta previsión, ya que no aparecieron respuestas de algún nivel de los esperados. Por ejemplo, cuando en el ítem 7 se enumera la propiedad 7.4a esperábamos respuestas de acuerdo a las características del nivel 3 porque se precisase y explicase el término *al menos*. Pero ninguna respuesta de los estudiantes encuestados en las sucesivas experimentaciones hizo mención a este término. De ahí que no hemos incluido para esta propiedad el nivel 3 en el rango asignado al nivel de razonamiento de sus respuestas.

Resultado del proceso señalado en los párrafos anteriores es la versión de los tests que presentamos en esta memoria, cuyos textos están incluidos en el anexo 3. A cada ítem y subítem les asignamos los niveles de razonamiento que indicamos en el apartado siguiente y que aparecen también en los tests entre paréntesis, a la derecha del texto, antes de cada ítem.

CONTENIDO DE LOS ÍTEMS Y SUBÍTEMS DE LOS TESTS. NIVELES DE RAZONAMIENTO ASIGNADOS A LAS RESPUESTAS

La tabla 3.5 resume el contenido geométrico de los ítems de los tests (del pretest y del postest) y los niveles posibles (*) de las respuestas a cada ítem. Los ítems que hemos marcado con (†), además de ser subítems del postest, lo son del pretest, o por lo menos una parte de ellos.

Ítem	Niveles 1 2 3 4	Contenido Geométrico
1†	* * *	Descripción de sólidos concretos: el romboedro.
2†	* *	Relacionar clases de sólidos y usar partículas lógicas.
3†	*	Asociar propiedades a determinadas familias.
4	* *	Asociar propiedades a determinadas familias.
5†	*	Averiguar si determinadas propiedades son o no atributos críticos de una familia dada.
6	* *	Averiguar si determinadas propiedades son o no atributos críticos de una familia dada.
7	* *	Delimitar sólidos a partir de una lista de propiedades.
8†	* *	Indicar propiedades comunes a familias de prismas o propiedades de una familia que no lo sean de otras.
9†	* *	Aplicar definiciones para juzgar relaciones.
10A† y 10B†	* * *	Demostrar la fórmula que da la medida de un determinado tipo de elementos.
11†	* *	Clasificar familias de sólidos.
12†	* *	Identificar ejemplos de familias de sólidos.

Tabla 3.5. Contenido geométrico y niveles de los ítems de los tests.

Como puede verse en la tabla, los tests reflejan lo que ya hemos comentado en los párrafos anteriores: están orientados especialmente a la evaluación del nivel de razonamiento 2, dedican también bastante atención a la evaluación de los niveles de razonamiento 1 y 3 y muy poca a la del nivel 4.

Es necesario señalar los problemas con los que nos encontramos cuando, una vez asignados a los ítems los niveles de razonamiento esperados, intentamos codificar las respuestas de los estudiantes. El hecho de que los ítems incluyan varios subítems que se pueden responder con razonamientos de diferente nivel, y aún si corresponden al mismo nivel puede que no correspondan al mismo tipo, dificulta el evaluar los ítems de manera global.

Así pues decidimos codificar cada subítem. A las respuestas de cada uno le asignamos un nivel de razonamiento y tipo. Para los apartados del ítem 2, que constan de dos relaciones (que vamos a llamar 2fa, 2fb y 2ga, 2gb), les asignamos dos niveles y dos tipos a cada uno de ellos. Para los ítems 11 y 12, en los que no distinguimos apartados, evaluamos por separado las clases establecidas con los diferentes criterios de clasificación. Las respuestas para las diferentes familias se pueden dar utilizando diferentes niveles de razonamiento o diferentes tipos. Unas tienen un componente fuertemente visual, que pueden conducir a respuestas de acuerdo a las características del nivel 1. Otras requieren que se tengan en cuenta todas las caras del modelo. O se tiene que identificar la cara en la que hay que centrarse, o hay que basarse en varios atributos para responder adecuadamente, o sólo en uno. Para las familias del ítem 11, asignamos nivel y tipo a la identificación de los ejemplos como rectos u oblicuos (subítem que vamos a nombrar como 11RyO), a la identificación de los ejemplos como cóncavos y convexos (11CyX), a la identificación de los de base regular o irregular (11QeI), otro a los de caras regulares (11CR) y otro a los de caras iguales (11CI). Para las familias del ítem 12, asignamos nivel de razonamiento y tipo para la identificación de los prismas (subítem que vamos a nombrar como 12P), para la identificación de los romboedros (12R), para los paralelepípedos (12L) y para los que no son poliedros (12Pol).

Al igual que hicimos para los ítems de manera global, y que mostramos en la tabla 3.5, delimitamos para cada subítem el rango de niveles de razonamiento en los que cabe esperar sus respuestas. La tabla 3.6 recopila los niveles de razonamiento que asignamos a cada uno de los subítems de los tests (del postest y del pretest) a los que les asignamos nivel de razonamiento y tipo. Los subítems que hemos marcado con (†), además de ser subítems del postest, lo son del pretest. Por ejemplo, el rango del nivel de razonamiento para el subítem 2c incluye los niveles segundo y tercero, dado que el subítem 2c está incluido en las columnas correspondientes a estos niveles. Como en la tabla lo hemos representado como $2c^{\dagger}$, significa que este subítem forma parte del pretest y del postest.

ÍTEM	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
1†	1†	1†	1†	
2		2a†, 2b†, 2c†, 2d†, 2e 2fa, 2fb, 2ga, 2gb	2c†, 2fa†	
3		3.1†, 3.2†, 3.3†, 3.5†, 3.6†, 3.7†		
4		4.1, 4.2, 4.3, 4.4	4.1, 4.3	
5		5.1†, 5.2†, 5.3†, 5.4†, 5.5†, 5.6†, 5.7†		
6		6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7, 6.8, 6.9, 6.10, 6.11, 6.12, 6.13.	6.4, 6.5, 6.7, 6.11, 6.13.	
7		7.1a, 7.2a, 7.3a, 7.4a, 7.5a, 7.6a, 7.7a, 7.8a, 7.9a, 7.4b, 7.5b, 7.6b, 7.7b, 7.8b, 7.9b.	7.2a, 7.3a, 7.4a, 7.6a, 7.9a, 7.4b, 7.5b, 7.9b.	
8		8a†, 8b†, 8c†, 8d†, 8e, 8f.	8a†, 8b†, 8c†, 8d†, 8e, 8f.	
9		9a†, 9b†, 9c†, 9d†, 9e, 9f	9c†, 9e	
10		10†	10†	10†
11	11RyO†, 11CyX†, 11QeI†, 11CR, 11CI	11RyO†, 11CyX†, 11QeI†, 11CR, 11CI		
12	12R†, 12L†, 12P†, 12Pol.	12R†, 12L†, 12P†, 12Pol.		

Tabla 3.6. Niveles de razonamiento y subítems de los tests.

A las respuestas de diferentes subítems les asignamos en algunos casos rangos diferentes, porque para algunos lo usual es que se respondan en un nivel, aunque se pudiera tener desarrollado un nivel de razonamiento superior.

Sobre el rango de niveles de razonamiento para las respuestas de los subítems

Como se desprende de la tabla, todos los subítems incluyen el nivel 2 en su rango para el nivel de razonamiento de sus respuestas, pero no ocurre lo mismo con los otros niveles. Regresemos de nuevo al apartado 1.4.1 del capítulo primero; ahí aclaramos en qué niveles de razonamiento se pueden resolver los subítems de los tests, y de qué manera. Por otro lado, este rango también se explica a partir de los comentarios que hacemos en el capítulo 2 sobre las tareas de las unidades de enseñanza (análogas a las de los ítems de los tests) diseñadas para los diferentes niveles de razonamiento de Van Hiele. Por lo que, en lo que sigue sólo vamos a hacer un resumen explicando el rango de niveles de razonamiento que hemos asignado a las respuestas de los ítems.

El ítem 1. El rango de niveles de razonamiento que asociamos a las respuestas del ítem 1 (en el que se pide que se describa el romboedro) incluye los niveles 1, 2 y 3. Para asignar nivel a las respuestas se tiene en cuenta si sólo se enuncian propiedades visuales (en cuyo caso asignamos el nivel 1), si sólo se expresan propiedades geométricas que no precisan de la utilización de expresiones del tipo, *como mucho, como mínimo, tantas medidas diferentes como* (en cuyo caso asignamos el nivel 2), o si también se señalan correctamente propiedades en las que se usan estos términos (en cuyo caso asignamos el nivel 3). Para asociar el nivel 2 ó 3 hay que fijarse también en si se enuncian propiedades que dejan fuera subfamilias y en si se indican propiedades englobadas como propiedades de familias.

Los ítems 2 y 9. En el ítem 2 se tiene que evaluar si son correctas o no determinadas relaciones entre familias y en el ítem 9 se tiene que seleccionar la relación adecuada entre dos familias dadas, una de las cuales se introduce con definición. En ambos ítems se tiene que explicar las respuestas, y la manera adecuada de hacerlo es bien con una demostración o con ejemplos y contraejemplos.

En el rango de niveles de razonamiento asignado a las respuestas de estos subítems incluimos el nivel 2 para todos ellos y el nivel 3 para los subítems 2c y 2fa, 9c y 9e. Vamos a explicarlo a continuación:

- Para el subítem 2c, donde la relación se presenta enunciada en términos de *no puede haber... que no sean...* se pueden dar explicaciones de acuerdo con las características del nivel 2 (aunque no sean matemáticamente correctas). Incluimos también el nivel 3 en su rango ya que la interpretación de estos términos y delimitar que lo que hay que demostrar es que los ortoedros son prismas rectos exige de razonamientos de este nivel.

- Para el subítem 2fa, para el que hay que demostrar que los prismas de caras regulares son convexos, se pueden dar explicaciones de acuerdo con las características del nivel 2, y también con las del nivel 3 cuando se da una demostración que no se basa en ejemplos concretos.

- Para los subítems 2a y 2e asignamos sólo nivel 2. Una respuesta matemáticamente correcta para 2a sólo exige que se verifique que el cubo es ejemplo de los prismas; es decir, que cumple sus propiedades. El que las familias se vean como ejemplos específicos de las familias más generales no es característica del nivel 3; no significa que se es capaz de relacionar clases en términos de propiedades. Lo único que se exige es verificar una definición, que corresponde a un tipo de razonamiento que hemos asociado al nivel 2. Para el apartado 2e, en la respuesta basta con dar un ejemplo de prisma recto que no sea oblicuo, que en este caso puede servir cualquiera si se ven las familias como clases excluyentes.

- Para los apartados 9c y 9e incluimos los niveles 2 y 3 en el rango de niveles de razonamiento. Se pueden dar respuestas de acuerdo a las características del nivel 2 (en términos de ejemplos) y otras que requieren de nivel de razonamiento 3. Dado que en este ítem, una de las familias que intervienen en las relaciones se introduce con una definición, el justificar que una de las familias verifica las condiciones de la definición, o que no hay ningún elemento de la familia que verifica las condiciones de la definición, exige que ambas familias se consideren en términos de propiedades.

- Para las relaciones para las que hay que buscar ejemplos y contraejemplos para dar una respuesta adecuada sólo incluimos el nivel 2. Una respuesta matemáticamente correcta y completa es dar un ejemplo y un contraejemplo de una determinada familia y que se compruebe que realmente lo son. Y este tipo de respuesta sólo requiere de nivel de razonamiento 2, a no ser que para delimitar los ejemplos o contraejemplos se hagan deducciones (para lo que se requeriría de nivel de razonamiento 3). Los ejemplos o contraejemplos se podrían seleccionar de esta manera, pero dado que en la unidad de enseñanza se han tratado diferentes familias, que son las que van a servir de ejemplos y contraejemplos para las respuestas, lo usual es que el estudiante recurra al mundo de poliedros que conoce y seleccione las subfamilias dentro de la familia de partida, que considera adecuados para la respuesta.

Los ítems 3 y 4. Las propiedades que proponemos en el ítem 3 son propiedades específicas de diferentes familias de sólidos. Las propiedades 3.2 y 3.7 lo son de los prismas; las propiedades 3.1 y 3.6 lo son de los ortoedros y las 3.3 y 3.5 de las pirámides. De la misma manera, las propiedades que presentamos en el ítem 4 son propiedades específicas de los prismas (la 4.2) o de determinadas familias de prismas (la 4.1 es propiedad de los prismas rectos de base regular y la 4.3 de los prismas convexos). También incluimos una propiedad (la 4.4) que no lo es de ninguna de las familias que consideramos; es propiedad de los antiprismas.

En el rango de niveles de razonamiento asignado a las respuestas de estos subítems incluimos el nivel 2 para todos ellos y el nivel 3 para los subítems 4.1 y 4.3. Vamos a explicarlo a continuación:

- Para las propiedades del ítem 3 y para la propiedad 4.2, aunque en las respuestas se utilicen relaciones que existen entre las diferentes familias que se plantean en el ítem, les asociamos el nivel 2. El indicar explícitamente la relación de inclusión o exclusión que existe entre el cubo, ortoedro, romboedro, paralelepípedo y prisma (familias que se consideran en el ítem 3), o entre los prismas y las subfamilias que se consideran en el ítem 4 (para las que el nombre incluye la palabra prisma) no requiere de razonamientos que hemos asignado al nivel 3; en la unidad de enseñanza estas familias se han visto como ejemplos de las familias más generales y el indicar que las familias, por ser ejemplos de otra, cumplen sus propiedades sólo requiere de razonamientos del nivel 2.

- A la propiedad 3.7 sólo le asociamos el nivel 2. Si bien se presenta el número de elementos de los prismas generalizado para un prisma n-agonal, la manera de explicar la respuesta en la unidad de enseñanza fue indicando los elementos por pisos o niveles (con objeto de que se consideraran de manera estructurada), y el describir los vértices y aristas de esta manera sólo requiere de razonamientos del nivel 2. Tampoco se requiere este nivel de razonamiento para delimitar adecuadamente las familias que son prismas de las que se presentan en el ítem correspondiente.

- A la propiedad 4.4 sólo le asignamos el nivel 2, aún en el caso de que si se demuestra que la expresión que da el número de diagonales del espacio de los prismas es n(n-3), se pueden utilizar razonamientos del nivel 3. Dado que en la unidad de enseñanza se ha demostrado esta expresión y se ha indicado como una propiedad de los prismas, y que los estudiantes pueden utilizar los conocimientos que se tienen relativos a propiedades, una respuesta que consideramos ya matemáticamente correcta y completa es la que señala que esa expresión da el número de diagonales del espacio de los antiprismas, pero que para los prismas la expresión es n(n-3).

- Las propiedades 4.1 y 4.3 incluyen en su rango los niveles de razonamiento 2 y 3. En sus respuestas sí se tienen que utilizar los resultados vistos en la unidad de enseñanza para hacer deducciones, y así explicar por qué se asocia la propiedad dada a la familia correspondiente, o por qué las familias delimitadas están incluidas en la familia seleccionada (para lo que se requiere de razonamientos asociados al nivel 3). También se pueden dar respuestas de acuerdo a las características del nivel 2, comprobando qué ejemplos de las familias verifican las propiedades dadas.

Los ítems 5, 6 y 7. En los ítems 5 y 6 tenemos que asociar propiedades a diferentes familias. Las respuestas se pueden explicar utilizando el mismo tipo de razonamientos. En ambos ítems, para las propiedades que los estudiantes consideren respectivamente de los prismas o de los prismas de caras regulares, la manera adecuada de explicar la respuesta es dando demostraciones o descripciones, mientras que para las que consideran que no lo son, para justificar la respuesta hay que dar contraejemplos, o indicar la subfamilia de la familia correspondiente cuyos elementos son los únicos que la cumplen, en caso de que haya alguno. En el ítem 7 se tienen que delimitar familias de sólidos, a partir de unas propiedades dadas que se van considerando sucesivamente. También para este ítem el tipo de razonamientos de las respuestas de los diferentes apartados depende especialmente de la propiedad que se considera en ellos.

En el rango de niveles de razonamiento asignado a las respuestas de estos subítems incluimos el nivel 2 para todos ellos y el nivel 3 para los subítems 6.4, 6.5, 6.7, 6.11 y 6.13, 7.2a, 7.3a, 7.6a, 7.9a, 7.4b, 7.5b y 7.9b. Vamos a explicarlo a continuación:

- Para las propiedades de los ítems 5 y 6 que no cumple la familia considerada, hay que dar un contraejemplo y justificar que lo es; por lo que en su rango sólo incluimos el nivel 2, a excepción de la propiedad 6.7, que como contiene el término *como mínimo*, también le asignamos el nivel 3.

- Para las propiedades que contienen términos del tipo *como máximo, como mínimo* (6.4, 6.7, 6.13, 7.2a, 7.3a), o expresiones comparativas del tipo *tantas medidas diferentes como, las mismas medidas diferentes que* (6.11, 6.13 y 7.6b), incluimos en su rango los niveles 2 y 3. Remitimos al apartado 1.4.1 del capítulo 1 donde apuntamos las interpretaciones que corresponden a estos términos para los niveles de razonamiento 2 y 3.

  Es necesario explicar por qué no hemos incluido el nivel 3 en el rango de la propiedad 7.4a si también contiene el término *al menos*. Las experimentaciones realizadas han mostrado que los estudiantes, en sus respuestas no hacen referencia a *al menos dos* que aparece en este subítem, y tampoco utilizan otros razonamientos de los que hemos asignado al nivel de razonamiento 3. Dado que no podemos averiguar si se razona o no en nivel 3, para no penalizar este nivel, a este subítem sólo le asociamos el nivel 2.

Para el ítem 7.3a, si bien las experimentaciones realizadas también han mostrado que los estudiantes no hacen referencia al término *al menos*, el hecho de que una respuesta sea matemáticamente correcta al considerar las propiedades anteriores obliga a que al considerar ésta se tengan que delimitar, entre otras, las subfamilias de las bipirámides que verifican esta propiedad. La explicación de la respuesta puede requerir de razonamientos asociados al nivel de razonamiento 3.

- En coherencia con lo que hemos indicado en el capítulo 2, sobre las propiedades que contienen términos relativos a cuadriláteros y que se presentan enunciadas de manera más general a la que les correspondería como propiedad específica de la familia considerada, para la propiedad 6.5, incluimos en el rango de niveles de razonamiento asignados a sus respuestas los niveles 2 y 3. Se pueden dar respuestas de acuerdo a las características del nivel 2 en las que no se aplica correctamente la relación que hay que justificar. El aplicar correctamente las características específicas de los prismas de caras regulares (PCR) a lo que se tiene que verificar, que es la propiedad que se plantea, lo hemos considerado como razonamiento de nivel 3.

- Para los subítems 7.6a, 7.9a, 7.4b y 7.5b, que contienen el término exactamente, y conducen a un problema de demostración, porque se tienen que enumerar todas las posibles soluciones que cumplen la propiedad, incluimos en el rango de niveles de razonamiento asociados a sus respuestas los niveles 2 y 3. Las propiedades de estos subítems obligan a que se delimite, a partir de datos numéricos (para las aristas o las medidas diferentes de los ángulos de las caras) subfamilias que sean posibles soluciones, y a que se explique que otras subfamilias no pueden serlo. Se pueden dar respuestas de acuerdo a las características del nivel 2 (se muestran ejemplos que son soluciones) pero dar una respuesta a estas propiedades que sea matemáticamente correcta y completa conlleva razonamientos de los que hemos asignado al nivel 3. En el capítulo 2, encontramos también la explicación.

El ítem 8. Las respuestas a los subítems de este ítem, al igual que en el ítem 1, corresponden a listas de propiedades, pero para determinarlas hay que tener en cuenta varias familias de sólidos (se tienen que enumerar propiedades comunes a pares de familias o propiedades de una familia que otra familia no las verifique).

Para todos los subítems del ítem 8 hemos incluido en su rango de niveles de razonamiento los niveles 2 y 3. Para asignarles un nivel de razonamiento hay que tener en cuenta el tipo de propiedades geométricas que se señalan (si se enuncian propiedades que precisan de la utilización de términos del tipo *como mucho, como mínimo,* etc.).

Dado que es un ítem en el que se enumeran propiedades vale la pena explicar por qué no hemos incluido el nivel 1 en su rango. En las diferentes experimentaciones realizadas hemos verificado que las respuestas que incluyen propiedades visuales (suelen ser del pretest) son muy pobres y en el postest no encontramos este tipo de propiedades; de ahí que si para esta respuesta sólo se indican propiedades visuales asociemos el tipo 1.

El ítem 10. Para el ítem 10, asignamos a sus respuestas los niveles 2, 3 ó 4, según lo general que es la familia de prismas para la que se justifica la expresión dada y de cómo se mueve el estudiante haciendo deducciones en las respuestas a los ítems 10A y 10B.

Los ítems 11 y 12. En estos ítems se consideran diferentes familias de sólidos, establecidas al clasificar éstos con diferentes criterios, y se tienen que identificar algunos modelos como ejemplos o contraejemplos de las familias correspondientes. Para las familias del ítem 11, unas familias están establecidas con un criterio fuertemente visual, que conduce a dos clases excluyentes (los prismas rectos y los oblicuos, los cóncavos y los convexos). Otras están determinadas por un criterio que centra la atención en la regularidad de la base, y también conduce a clases excluyentes (prismas de base regular y de base irregular). Finalmente, las clases de prismas de caras regulares y los prismas de caras iguales (familias que sólo consideramos para el postest) centran la atención en la regularidad o igualdad de todas las caras, y de las dos clases que se establecen en cada caso sólo nos interesa una de ellas: la que cumple el atributo que estamos considerando. En el ítem 12, se consideran diferentes familias de prismas, las que a su vez son paralelepípedos, los prismas y la familia de los poliedros. Todas estas familias están incluidas unas en otras.

Para los subítems de estos ítems el rango de niveles de razonamiento asignados a sus respuestas incluyen los niveles 1 y 2. Dado que éstos se plantean en el pretest, considerando los estudiantes con los que realizamos la investigación, cabe esperar respuestas en las que se indiquen propiedades visuales, o que reflejen que sólo se han clasificado las figuras más familiares que se reconocen, o que se basen las respuestas en ejemplos demasiado específicos, etc.; de ahí que hayamos incluido el nivel 1 en su rango. En otras respuestas se pueden indicar propiedades geométricas, por lo que corresponden al nivel 2. También se puede señalar en ellas que familias específicas (cubos, ortoedros, romboedros) son ejemplos de paralelepípedos o de prismas; estas respuestas las asociamos al nivel 2, pues no significa que se es capaz de relacionar clases en términos de propiedades. Para explicar adecuadamente las respuestas para estos ítems es razonable que el estudiante utilice las relaciones que conoce y que no las explique, para lo que sólo se requiere de razonamientos que hemos asociado al nivel 2. Esto explica por qué para las respuestas a estos subítems no incluimos el nivel 3 en el rango.

3.3.3. ASIGNACIÓN DE NIVEL Y TIPO A LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES. MODELOS DE RESPUESTA PARA LOS ÍTEMS DEL PRETEST Y POSTEST

Para completar la descripción del proceso de evaluación de los estudiantes, a continuación vamos a comentar sobre la base de qué asignamos nivel de razonamiento de Van Hiele y tipo a cada respuesta de los estudiantes (para los diferentes subítems de los tests administrados). Para ello tuvimos en cuenta:

- Los descriptores generales de los niveles de razonamiento de Van Hiele, que hemos indicado en el apartado 1.1.1 del capítulo 1, y los particulares para la geometría de los sólidos, que indicamos en el apartado 1.4.1 de ese mismo capítulo.

- Los descriptores particulares de los niveles de razonamiento en los diferentes ítems empleados. Estos descriptores son particularizaciones de los descriptores anteriores. Corresponden a modelos de respuestas para los ítems de los tests.

El anexo 4 incluye estos modelos de respuestas. Para cada uno, además del descriptor, presentamos ejemplos que ayudan a clarificar el modelo de respuesta al que nos referimos y el nivel de razonamiento y tipo que le hemos asociado.

Los modelos de respuesta los elaboramos a partir de las diferentes experimentaciones realizadas. El que la autora del proyecto desarrollara en varios cursos sucesivos una asignatura (anual o semestral) con los estudiantes que formaban parte de las experimentaciones, le permitió, por un lado, la elaboración exhaustiva de diferentes modelos de respuesta para un subítem dado y, por otro, el tener una información sobre los estudiantes que le facilitó la asignación de nivel y tipo a las respuestas.

Una vez que la autora de esta memoria hubo elaborado los descriptores para los ítems de los tests y diferentes ejemplos de respuestas, a los que les había asignado nivel y tipo, el director de esta tesis, conocedor del Modelo de Van Hiele, validó la lista de descriptores y la asignación de nivel y tipo que la autora había asignado a los ejemplos presentados. Posteriormente ambos investigadores discutieron los casos de discrepancia, con el objetivo de llegar a un acuerdo para producir una única asignación de nivel y tipo a los modelos de respuesta propuestos.

La gran variedad de respuestas que teníamos codificadas para cada ítem de los tests (anexo 4) ayudó a que el proceso de evaluación para sucesivos tests fuese homogéneo. Naturalmente, estos ejemplos no cubrieron todas las respuestas dadas por los estudiantes en el pretest o el postest, pero sí la mayoría, y sirvieron de guía para evaluar también esas otras respuestas. Queremos señalar también que con el fin de hacer una corrección homogénea de los tests, utilizamos los mismos descriptores de los niveles y modelos de respuestas para el pretest y el postest.

SOBRE LA ASIGNACIÓN DE TIPO A LAS RESPUESTAS

Para finalizar este apartado, vamos a explicar brevemente el tipo (que da cuenta de lo correctas y completas que consideramos las respuestas) que hemos asignado a algunos modelos de respuesta. La discusión detallada puede consultarse en el anexo 4. Desde las características generales que señalamos en el apartado 3.2.2 de este capítulo pueden explicarse la mayoría de los tipos asignados a los modelos de respuestas que incluimos en ese anexo. En lo que sigue, para algunos subítems sólo vamos a comentar los tipos asociados a respuestas particulares y, para otros, sólo enumeramos las variables que hemos tenido en cuenta para evaluar lo completas o correctas que se consideran las respuestas.

Es necesario aclarar que si bien evaluamos cada subítem independientemente, para considerar más o menos completa la respuesta para él, en cierto modo hay que tener en cuenta las respuestas dadas a otros subítems. Esto es, para la respuesta a un subítem hay que averiguar si en el resto de los subítems se han explicado ya los resultados que se utilizan en ella. Así, cuando en los modelos de respuesta del anexo 4 indicamos que no se dan otras explicaciones, queremos decir que no se explica esa respuesta ni en la respuesta a ese subítem ni en la de ningún otro.

Entre los modelos de respuesta que delimitamos están los que hemos llamado generales, porque pueden ser modelo de respuesta de varios ítems, y los que pueden corresponder a los subítems específicos de ítems. Para los primeros, el tipo asignado se explica desde las características generales básicas que hemos señalado en el apartado 3.2.2. Vamos a comentar brevemente los otros.

Los ítems 1 y 8. Los tipos asignados a las respuestas de estos subítems dependen de las propiedades que se señalen en las respuestas, por lo que también pueden explicarse desde las características generales básicas descritas en el apartado 3.2.2. Las respuestas en las que no se enumeren todas las propiedades de la familia o familias implicadas (de las que se trataron en la unidad de enseñanza) y no se indique ninguna propiedad incorrecta (para el nivel en el que se da la respuesta), las consideramos correctas pero incompletas (pobre o muy pobre dependiendo de las propiedades que se indiquen). Les asociamos los tipos 3/6 dependiendo de lo completas que sean. Si se indican prácticamente todas las propiedades de las familias implicadas (de las que se trataron en la unidad de enseñanza) y no se incluye ninguna incorrecta, a la respuesta le asociamos tipo 7. Si se señalan propiedades incorrectas, les asignamos los tipos 2/5, dependiendo de lo completas que sean.

Los ítems 2 y 9. Las respuestas de los subítems de los ítems 2 y 9 para las que hay que explicar que la relación que se presenta es correcta, el tipo se explica desde las características generales básicas: asignamos los tipos 3/6 si la respuesta es correcta para el nivel en el que se da, pero incompleta; asociamos el tipo 7 si la respuesta es completa y correcta para el nivel en el que se da; asignamos los tipos 2/5 si la respuesta es incorrecta para el nivel en el que se da.

Las respuestas para las que vale la pena explicar el tipo que les hemos asignado son aquellas en las que para una respuesta matemáticamente completa hay que dar contraejemplos, o ejemplos y contraejemplos. Para estas respuestas el nivel 2, tipos 3/6 lo asociamos cuando se dan los contraejemplos (nombres de familias, o dibujos de alguno de sus ejemplos), o ejemplos y contraejemplos, sin más explicaciones, y la respuesta es matemáticamente correcta. Sólo con los nombres o dibujos de los contraejemplos (o de los ejemplos y contraejemplos) no podemos saber si se ha verificado que realmente lo son. Pero para seleccionar los contraejemplos (o los ejemplos y contraejemplos) y hacer un dibujo de ellos, o para dar el nombre de las familias, se necesita tener una idea de ellos en términos de propiedades geométricas; la respuesta es pobre pero algo implícito hay relativo a propiedades. El tipo 3/6, dependerá de si de los contraejemplos, o de los ejemplos y contraejemplos, que se den se desprende que se han tenido en cuenta todas las condiciones imprescindibles o sólo alguna. Por ejemplo, si para el subítem 9a se indica como ejemplo de poliedro arquimediano el prisma pentagonal de caras regulares y como contraejemplo el cubo, aunque no se diga explícitamente, la respuesta refleja que se han tenido en cuenta dos condiciones de poliedro arquimediano (caras regulares de más de una clase). Pero no se puede saber si se ha verificado o no que el ejemplo que se propone tiene los vértices iguales. A esta respuesta le asociamos el nivel 2, tipo 3. Si para 9b se indica como ejemplo el tetraedro y como contraejemplo una pirámide cualquiera que no sea el tetraedro, aunque no se diga explícitamente, la respuesta refleja que se ha tenido en cuenta la condición impuesta a los deltaedros (caras triángulos equiláteros) que puede considerarse desglosada en dos: caras triángulos que además son equiláteros. A esta respuesta le asociamos el nivel 2, tipo 6.

Para los subítems del ítem 9 en los que se selecciona el término *a veces*, si sólo se da el ejemplo o el contraejemplo, asociamos tipo 1. La respuesta refleja que no se reconoce la necesidad de buscar las dos condiciones (el ejemplo y el contraejemplo).

Los ítems 3 a 6. Respecto a los tipos asignados a las respuestas de estos subítems sólo queremos apuntar que para que una respuesta la consideremos completa, en cuyo caso asignamos el tipo 7, no basta con explicar la respuesta para las familias de sólidos que cumplen la propiedad considerada. Hay que explicar también por qué las restantes familias no la cumplen.

Para los subítems de los ítems 5 y 6 respuestas para las que vale la pena aclarar el tipo que les hemos asignado son las que la familia propuesta en el ítem correspondiente no verifica la propiedad dada en el subítem. Si se da un contraejemplo (ejemplo concreto, o una familia) sin otras explicaciones, asociamos los tipos 1/6, dependiendo de si de éste se deduce o no que el estudiante ha verificado que el ejemplo propuesto no verifica la propiedad dada. Por ejemplo, si para el subítem 6.2 se indica como contraejemplo el prisma pentagonal de caras regulares, aunque no se diga explícitamente, el modelo refleja la propiedad (que todas las caras laterales no tienen una igual y paralela a ella) y que se toma un ejemplo de la familia implicada en el ítem (la de los prismas de caras regulares). A esta respuesta le asociamos el nivel 2, tipo 6. Si para la propiedad 6.7 se indica como contraejemplo el cubo, la respuesta además de reflejar que se tiene en cuenta la propiedad, refleja que se interpreta adecuadamente el término *como mínimo*. A esta respuesta le asociamos el nivel 3, tipo 6. Si para la propiedad 6.10 se indica como contraejemplo un ejemplo de prisma, se dice que no la cumple y no se dan más explicaciones, asociamos el tipo 1. Ningún prisma verifica la propiedad, cualquier prisma sirve como contraejemplo. Pero en este caso, del dibujo de un prisma concreto no se deduce que las expresiones que dan el número de diagonales de las caras y del espacio para un prisma n-agonal no son las indicadas en la actividad.

El ítem 7. La codificación de las respuestas de estos subítems plantea graves problemas debido a que el estudiante tiene que utilizar información que va obteniendo progresivamente. La dificultad de los diferentes subítems dependerá de las respuestas dadas a los anteriores. Por ejemplo, como caso extremo, si para el segundo subítem ya sólo se indica un sólido como posible solución y se es coherente utilizando los resultados obtenidos, la respuesta para el resto de subítems no exigirá nivel de razonamiento superior al nivel 2. Simplemente se tendrá que verificar si el sólido delimitado verifica o no la propiedad que se plantea en el subítem correspondiente. Por otro lado, si bien al partir de información incompleta se puede disminuir considerablemente la dificultad de la actividad para las propiedad correspondiente (y para las que le siguen), también hay que considerar que el que esta información sea incompleta se reflejará en la evaluación de todos los subítems para los que consideremos que la información de partida es incompleta.

Teniendo en cuenta estos problemas, para la evaluación de cada subítem del ítem 7, no consideramos sólo lo completa que es la respuesta para él. También incluimos como variable a tener en cuenta, lo completa, adecuada y correcta que es la información de la que se parte. Así, una respuesta de un estudiante con información de partida incompleta que repercuta para el tipo de respuesta que se puede dar, la evaluamos de diferente manera a la de un estudiante que parte de toda la información. Pero es necesario aclarar cuándo consideramos una respuesta incompleta en los diferentes niveles de razonamiento en los que se razone, ya que una información incompleta de partida de acuerdo a las características del nivel 3 puede que no la consideremos incompleta para el nivel 2. Por ejemplo, dentro del modo de razonar del nivel 2, no consideramos incompleto una información que provenga de una propiedad en la que los términos del tipo *máximo 2, como mínimo 2* se consideran equivalentes a *exactamente 2*, a pesar de que una respuesta correspondiente a esta interpretación de los términos, lleva a excluir como posibles soluciones determinadas familias, que no se excluirían con la interpretación de los términos de acuerdo a las características del nivel 3.

El que como información de partida para algunos subítems (propiedades), no se indiquen determinadas familias como posibles soluciones, refleja que propiedades anteriores no se han asociado a estas familias (lo que refleja poco conocimiento de familias bastante generales) o no se ha interpretado adecuadamente términos, o no se han hecho pruebas correctas ó completas. En estos dos últimos casos, el partir de una información más pobre que la adecuada refleja en cierto modo que el estudiante no se mueve adecuadamente utilizando razonamientos asociados al nivel 3. Es pues para las respuestas que reflejan este nivel para las que consideramos que se parte de una información incompleta. Y para valorar cómo de completa es la respuesta en este caso, además de esta variable, consideramos cómo se explica la respuesta a partir de la información de partida.

Para las respuestas que reflejan el nivel 2, si lo pobre que resulta la información de partida, proviene exclusivamente de que en las propiedades anteriores el estudiante no se ha movido adecuadamente dentro del modo de razonar de acuerdo a las características del nivel 3, el que la respuesta sea más o menos completa sólo va a depender de cómo se explica ésta.

Si bien para evaluar lo completas que consideramos las respuestas consideramos como variable a tener en cuenta si la información de partida es completa o no (aunque como acabamos de explicar sólo en caso de que se razone en el nivel 3 se considera esta variable), no es así cuando evaluamos si son correctas o no. Para ello no hemos tenido en cuenta la información de partida; sólo nos fijamos en si, a partir de la información de la que se parte para cada propiedad, las respuestas las consideramos correctas o incorrectas. Las consideramos correctas cuando, utilizando la información de partida, se precisa lo suficiente la familia o familias que se consideran posibles soluciones o que se tienen que rechazar, los razonamientos que se utilizan en las explicaciones son correctos y las soluciones que se delimitan o se rechazan también son correctas. Consideramos incorrecto que se delimite como solución familias más generales que las que verifican la propiedad considerada, o que no se tenga en cuenta las respuestas dadas a los apartados anteriores. Así, si para alguna propiedad se delimitan (como familias que la cumplen) familias que ya se han descartado al considerar alguna propiedad anterior, asociamos el nivel 2, tipos 2/5, dependiendo de lo completa que consideremos la respuesta.

Para las propiedades que contienen términos del tipo *como máximo o como mínimo,* al igual que en los ítems anteriores, la interpretación de éstos la consideramos correcta o incorrecta dependiendo del modo de razonar en la respuesta. Una respuesta de acuerdo a las características del nivel 2, en la que, por ejemplo, a los términos del tipo *como máximo* o *como mínimo* se les ha dado la interpretación de *exactamente,* y no se tienen errores de otro tipo, la consideramos correcta. Pero consideramos la respuesta como que refleja características de dos niveles diferentes, si las explicaciones que se dan, reflejan un modo de razonar de acuerdo a las características del nivel 3, pero a estos términos se les ha dado esa interpretación (que corresponde al nivel 2). Por lo que a estas respuestas, si son bastante completas les asignamos el tipo 4.

Los ítems 11 y 12. Para asignar tipo a las respuestas de estos subítems hemos tenido en cuenta especialmente, si las caras que se han elegido como bases de los modelos son las adecuadas, si los atributos que se utilizan para explicar la respuesta son correctos y si los modelos se han identificado adecuadamente como ejemplos de las familias correspondientes. Estas variables corresponden a modelos de respuesta generales, pero dado que éstas se dan especialmente para estos subítems, vamos a hacer algunos comentarios sobre ellas.

Las caras que se seleccionan como bases. En el ítem 11, para identificar los sólidos como de base regular e irregular, o en el ítem 12, para identificar los prismas, dependiendo de la cara que se seleccione como base, la respuesta puede ser una u otra. Para estas familias, hemos considerado que para evaluar lo completa y correcta que es la respuesta hay que averiguar si como bases del modelo se han elegido las caras adecuadas y si la respuesta se razona adecuadamente con la base que se ha elegido.

- Si la respuesta es bastante completa, razonada en términos de propiedades geométricas, pero para varios modelos no se ha elegido adecuadamente la base (se ha elegido como base la cara en la que se apoya la figura), o se ha indicado que la base depende de la posición, aunque sea para modelos para los que cualquier par de caras pueden ser bases del modelo (por ejemplo, los ortoedros), asociamos el nivel 2, tipo 4. Si bien la explicación de la respuesta refleja el nivel 2, la elección de la base refleja el nivel 1.

- Si la respuesta es pobre, pero se indican propiedades visuales y geométricas, le asociamos el nivel 2, tipo 2.

- Hemos considerado que si sólo se seleccionan mal las bases en un modelo no hay que tenerlo en cuenta.

- Si la respuesta es bastante completa en términos de propiedades geométricas, pero se seleccionan mal las bases en más de un modelo, asociamos el nivel 2, tipo 5.

- Para 11QeI, si respecto a los modelos 6 y 7 no se ha discutido que la base puede ser regular o irregular, porque en estos modelos todo par de caras opuestas pueden considerarse bases del modelo (son iguales y paralelas unidas por paralelogramos), la respuesta la consideramos incompleta. Para que la respuesta la consideremos completa, también se tiene que comentar que el modelo 6 se puede incluir como prisma oblicuo de base regular (POBR) o como prisma de caras laterales regulares (PCLR), y que el ortoedro de la figura 7 también se puede considerar como prisma de base regular (si se eligen los cuadrados como bases) o de base irregular (si los dos cuadrados se consideran caras laterales). A una respuesta en la que, en estos modelos, para las bases sólo se considera una posibilidad, le asociamos el nivel 2, tipo 6.

Los atributos que se utilizan para explicar la respuesta. Como en cada subítem se plantean diferentes modelos para su identificación, puede ser que para explicar la respuesta de los ejemplos se utilice siempre los mismos atributos de la familia o que no sea así. Para una respuesta correcta, no es necesario que para todos los modelos se indiquen los mismos atributos de la familia considerada pero los que se señalan para cada modelo tienen que ser suficientes para caracterizar a la familia. Para los modelos que se seleccionan como No poliedros, para que la respuesta sea correcta, para cada modelo seleccionado se tiene que indicar el atributo de poliedro que el modelo correspondiente no verifica.

Si para algunos modelos el/los atributo/s que se indica/n no es/son suficiente/s para explicar la respuesta de manera matemáticamente correcta, o no adecuado para la familia considerada, o tal y como está expresado no es propiedad de la familia, a la respuesta le asociamos los tipos 2/5. En particular, para 12R y 12L, si sólo se indica un atributo para explicar la respuesta, en algunos casos éste será insuficiente (y por tanto la respuesta será incorrecta) por el hecho de no haber identificado también el modelo correspondiente como de una familia más general. Por ejemplo, si para explicar la respuesta para el romboedro, sólo se indica que las caras son rombos, y el modelo no se ha identificado como prisma, este atributo no es suficiente.

Los modelos que se identifican como ejemplos. Consideramos pobre una respuesta, si sólo se identifican adecuadamente los modelos más familiares, o si, para familias dicotómicas, sólo se identifican los ejemplos de una de ellas (que suelen tener más peso en el objeto mental de la familia correspondiente) pero no los ejemplos de la otra.

Si los modelos que se dejan por identificar como ejemplos de una familia no se identifican como ejemplos de la familia complementaria, y no se incluyen modelos que no son ejemplos, la respuesta la consideramos incompleta pero correcta. En particular, para 12R y 12L (donde se pide que se identifiquen los romboedros y los paralelepípedos respectivamente), si una familia de paralelepípedos dada no se incluye como ejemplo de las familias que la contienen, consideramos la respuesta incompleta, dado que en la unidad de enseñanza las familias específicas de paralelepípedos se han visto como ejemplos de las más generales.

Otros comentarios que cabe hacer respecto a determinadas respuestas que vamos a considerar más o menos correctas son:

A) Dado que la evaluación del nivel de razonamiento y tipo para las respuestas, la hacemos para cada una de las clasificaciones establecidas con cada criterio de los considerados, en esta evaluación no vamos a tener en cuenta explícitamente el número de clasificaciones que se hacen para cada figura. Sin embargo, esto queda reflejado al considerar lo adecuadamente que se han identificado los ejemplos para cada una de las clasificaciones propuestas y después considerar las evaluaciones obtenidas para todas ellas.

B) La representación bidimensional de objetos tridimensionales implica la distorsión de algunas de las propiedades del objeto en el paso del espacio al plano. La comprensión de las representaciones requiere de visión espacial y del conocimiento de convenciones que hay que utilizar en el paso de la representación al modelo y viceversa.

Al administrar el test, aunque intentamos paliar el problema de la visualización espacial mostrando los modelos correspondientes a estos ítems, como también mostramos figuras de ellos (para que los estudiantes recordaran mejor los modelos que habíamos presentado en los ítems 11 y 12), algunos estudiantes tuvieron dificultades para interpretarlas; no pudieron visualizar correctamente un tipo determinado de paralelogramo, o si un polígono era o no regular, cuando los modelos se presentaron a distancia y se tenía como apoyo el dibujo en papel. Las caras se visualizaron como correspondientes a una familia más general, o más específica, de lo que era. Por ejemplo, los cuadrados se visualizaron como rombos no cuadrados; los polígonos regulares, como que tenían ángulos distintos, o lados y ángulos distintos; los rombos se visualizaron como cuadrados; los polígonos con ángulos diferentes se interpretaron como con ángulos iguales.

Para 11RyO, 11QeI u 11CR decidimos considerar correctas las respuestas siempre que la explicación que se diera fuera coherente con el tipo de caras que se visualizaba de la figura como correspondientes al modelo tridimensional. Así pues:

- Consideramos correcta una respuesta en la que para el modelo 4 del subítem 11QeI se observa que la base es el pentágono, se indica que tiene los lados y los ángulos diferentes, y de ahí se concluye que la base es irregular.

- Si sólo se indica que la base es irregular porque tiene lados y ángulos diferentes, dado que es posible que se haya seleccionado un polígono inadecuado como base, la respuesta la consideramos incompleta e incorrecta, o como que refleja dos niveles de razonamiento. El tipo lo decidirá la explicación que se dé para los otros modelos. Si se identifican modelos que no se deberían identificar como ejemplos si se visualizara correctamente el modelo y no se explica la respuesta, asociamos el tipo 1.

- Si se identifica el modelo 13 como NO poliedro y el modelo 4 como poliedro, asociamos el nivel 2, tipo 6. Puede ser que del dibujo no se observe que las caras no son planas sino curvas.

- Sin embargo, si el modelo 4 se interpreta como prisma, consideramos errónea la respuesta (por lo que le asociamos tipos 2/5). Si se razona en términos de propiedades (nivel 2), de la figura puede observarse que las bases están giradas una respecto a la otra.

3.3.4. EL CÁLCULO DE LOS GRADOS DE ADQUISICIÓN DE LOS NIVELES DE VAN HIELE

Una vez llegado a un acuerdo entre la autora y director de la tesis sobre los descriptores a utilizar, ésta procedió a la evaluación de los tests.

En lo que respecta al cálculo de los grados de adquisición de los niveles de razonamiento de Van Hiele, aplicamos el procedimiento descrito en la sección 3.2. Como paso previo, evaluamos el grado de dominio de los componentes matemáticos implicados en los ítems de los tests que corresponden a los que en el apartado 1.4.1 del capítulo 1 hemos asociado a los diferentes niveles de razonamiento. Esto es, aunque hemos evaluado los subítems individualmente, hemos considerado los ítems de los tests, en vez de los subítems, como los que determinan el grado de adquisición de cada nivel. A continuación pasamos a explicar nuestra decisión:

Los subítems que se evalúan pueden llevar a una evaluación más o menos precisa del grado de dominio de una característica asociada a un nivel de razonamiento dado, y por ello evaluamos diferente número de subítems para cada característica considerada como objeto de evaluación. En el capítulo 2 relatamos las actividades que componen las diferentes tareas que pretenden desarrollar los componentes matemáticos implicados en los ítems de los tests; cuantos más subítems (actividades) de los delimitados incluyamos en un ítem (tarea) más precisa será la evaluación del grado de dominio de la característica asociada. Pero si todas las características asociadas a un nivel de razonamiento dado las consideramos igual de importantes, tienen que tener el mismo peso en la evaluación; de ahí que sea entre los grados de dominio de las características asociadas a un mismo nivel de razonamiento entre las que hallemos la media que proporciona el grado de adquisición de ese nivel de razonamiento.

La tabla 3.5 permite identificar qué ítems han determinado el grado de adquisición de cada nivel, ya que hemos marcado en cada columna con (*) los que admiten respuestas de este nivel.

Por ejemplo, el grado de adquisición del nivel de razonamiento 1 lo hemos obtenido hallando la media de las ponderaciones que hemos asignado a este nivel a partir de los ítems 1, 11 y 12 (que son los que según la tabla 3.2 admiten respuestas en ese nivel) tal y como describimos en el apartado 3.2.3.

Como ya hemos señalado antes, hemos codificado las respuestas de los subítems y es de éstas de las que hemos hecho las ponderaciones correspondientes en cada nivel de razonamiento (según la tabla 3.3). Las ponderaciones de cada ítem para un nivel dado lo hallamos como media de las ponderaciones obtenidas para los subítems a los que les hemos asignado ese nivel. La tabla 3.6 permite identificar qué subítems han determinado la ponderación que asociamos a cada ítem en cada nivel de razonamiento, ya que hemos marcado en cada columna los subítems que admiten respuestas del nivel correspondiente. Vamos a aclararlo con un ejemplo.

La tabla 3.7 muestra los niveles de razonamiento y tipos de respuesta que hemos asignado a las respuestas de un estudiante para los diferentes subítems del postest.

SUBÍT.	N v	Tp	SUBÍT.	N v	Tp	SUBÍT.	N v	Tp	SUBÍT.	N v	Tp
1	3	4	5.1	2	3	7.1a	2	7	8f		1
2a	2	7	5.2	2	5	7.2a	3	3	9a	2	6
2b	2	7	5.3	2	7	7.3a	2	2	9b	2	5
2c	2	6	5.4	2	6	7.4a	2	6	9c	2	5
2d	2	6	5.5	2	7	7.5a	2	2	9d	2	6
2e	2	7	5.6	2	7	7.6a	3	2	9e	3	7
2fa	2	7	5.7	2	3	7.7a	2	6	9f	2	5
2fb	2	6	6.1	2	7	7.8a	2	6	10	2	7
2ga	2	6	6.2	2	7	7.9a	3	4	11RyO	2	7
2gb	2	6	6.3	2	7	7.4b	3	2	11CyX	2	7
3.1	2	5	6.4	3	7	7.5b	3	3	11QeI	2	5
3.2	2	3	6.5	3	7	7.6b		1	11CR	2	7
3.3	2	6	6.6	2	7	7.7b		1	11CI	2	7
3.5	2	6	6.7	3	7	7.8b	2	6	12R	2	7
3.6		1	6.8	2	3	7.9b	2	6	12L	2	7
3.7	2	3	6.9	2	7	8a	3	3	12P	2	5
4.1	2	5	6.10	2	3	8b	2	2	12Pl	2	6
4.2	2	3	6.11	3	7	8c	3	3			
4.3	2	2	6.12	2	6	8d	3	2			
4.4	2	3	6.13	3	3	8e		1			

Tabla 3.7. Niveles de razonamiento y tipos de respuesta asignadas a las respuestas de un estudiante a los subítems del postest.

Por lo tanto, a sus respuestas le corresponden las ponderaciones en cada nivel de razonamiento (de acuerdo con la tabla 3.3) que indicamos en la tabla 3.8. Nótese que para cada subítem sólo tiene ponderación la columna que corresponde a los niveles que hemos asignado al rango de niveles de razonamiento de las respuestas.

SUBÍT.	N. 1	Niv. 2	Niv. 3	N. 4	SUBÍT.	N. 1	Niv. 2	Niv. 3	N. 4
1	100	100	50	-	**7.1a**	-	100	-	-
2a	-	100	-	-	**7.2a**	-	100	25	-
2b	-	100	-	-	**7.3a**	-	20	0	-
2c	-	80	0	-	**7.4a**	-	80	-	-
2d	-	80	-	-	**7.5a**	-	20	-	-
2e	-	100	-	-	**7.6a**	-	100	20	-
2fa	-	100	0	-	**7.7a**	-	80	-	-
2fb	-	80	-	-	**7.8a**	-	80	-	-
2ga	-	60	-	-	**7.9a**	-	100	50	-
2gb	-	80	-	-	**7.4b**	-	100	20	-
3.1	-	75	-	-	**7.5b**	-	100	25	-
3.2	-	25	-	-	**7.6b**	-	0	-	-
3.3	-	80	-	-	**7.7b**	-	0	-	-
3.5	-	80	-	-	**7.8b**	-	80	-	-
3.6	-	0	-	-	**7.9b**	-	80	0	-
3.7	-	25	-	-	**8a**	-	100	25	-
4.1	-	75	0	-	**8b**	-	20	0	-
4.2	-	25	-	-	**8c**	-	100	25	-
4.3	-	20	0	-	**8d**	-	100	20	-
4.4	-	25	-	-	**8e**	-	0	0	-
5.1	-	25	-	-	**8f**	-	0	0	-
5.2	-	75	-	-	**9a**	-	80	-	-
5.3	-	100	-	-	**9b**	-	75	-	-
5.4	-	80	-	-	**9c**	-	75	0	-
5.5	-	100	-	-	**9d**	-	80	-	-
5.6	-	100	-	-	**9e**	-	100	100	-
5.7	-	25	-	-	**9f**	-	75	-	-
6.1	-	100	-	-	**10**	-	100	0	0
6.2	-	100	-	-	**11RyO**	100	100	-	-
6.3	-	100	-	-	**11CyX**	100	100	-	-
6.4	-	100	100	-	**11QeI**	100	75	-	-
6.5	-	100	100	-	**11CR**	100	100	-	-
6.6	-	100	-	-	**11CI**	100	100	-	-
6.7		100	100	-	**12R**	100	100	-	-
6.8	-	25	-	-	**12L**	100	100	-	-
6.9	-	100	-	-	**12P**	100	75	-	-
6.10	-	25	-	-	**12Pl**	100	80	-	-
6.11	-	100	100	-					
6.12	-	80	-	-					
6.13	-	100	25	-					

Tabla 3.8. Ponderaciones en cada nivel de razonamiento de las respuestas de un estudiante a los subítems del postest.

En la tabla 3.9 recopilamos las ponderaciones, en cada nivel de razonamiento, de las respuestas del estudiante para los diferentes ítems del postest. Para mostrar cómo las hemos hallado veamos un ejemplo. Para hallar la ponderación que corresponde al nivel de razonamiento 3 para el ítem 6 (cI6), hallamos la media aritmética de las ponderaciones para este nivel de los subítems 6.4, 6.5, 6.7, 6.11 y 6.13, que son los subítems del ítem 6 al que hemos asignado el nivel de razonamiento 3 en su rango de niveles de razonamiento para sus respuestas:

$$cI6 = \frac{c6.4 + c6.5 + c6.7 + c6.11 + c6.13}{5}\text{; por lo que:}$$

$$cI6 = \frac{100 + 100 + 100 + 100 + 25}{5} = 85.$$

En la última fila de la tabla indicamos los grados de adquisición de los niveles de razonamiento de Van Hiele del estudiante considerado. Como describimos en el apartado 3.3.3, los hallamos como medias de las ponderaciones que hemos obtenido para los ítems de los tests que tienen asignado el nivel correspondiente en el rango de valores de su nivel de razonamiento y de acuerdo con la tabla 3.1.

ÍTEM	Niv. 1	Niv. 2	Niv. 3	N. 4	ÍTEM	N. 1	Niv. 2	N. 3	N. 4
Ítem 1	100	100	50	-	**Ítem 7**	-	69'3	20	-
Ítem 2	-	88'8	0	-	**Ítem 8**	-	53'33	11'67	-
Ítem 3	-	47'5	-	-	**Ítem 9**	-	80'83	50	-
Ítem 4	-	36'25	0	-	**Ítem 10**	-	100	0	0
Ítem 5	-	72'14	-	-	**Ítem 11**	100	95	-	-
Ítem 6	-	86'92	85	-	**Ítem 12**	100	88'75	-	-
Gr(n)	100 Compl.	76'58 Alta	27'08 Baja	0 Nula					

Tabla 3.9. Ponderaciones en cada nivel de razonamiento de las respuestas de un estudiante a los ítems del postest. Grados de adquisición de los niveles de razonamiento de Van Hiele.

Como resultado obtenemos que este estudiante tiene una adquisición completa del primer nivel de razonamiento de Van Hiele, alta del segundo, baja del tercero y nula del cuarto.

3.3.5. VALIDACIÓN DE LOS ÍTEMS Y LOS TESTS

La validación global de un test es importante ya que puede suceder que un ítem sea válido por sí mismo y que el conjunto de ítems que forma el test no sea equilibrado. La validación global puede hacerse analizando el proceso de creación de los ítems o analizando la coherencia interna de cada test.

A veces, como criterio de fiabilidad de tests se comparan las correcciones hechas, de forma independiente, por varios expertos. El test o el procedimiento de evaluación utilizado será más o menos fiable según las discrepancias que haya. En nuestro caso no ha sido posible, como hubiéramos deseado, que otros investigadores también evaluaran los tests. Cabe señalar lo que ya hemos comentado anteriormente: que los descriptores que utilizamos para codificar las respuestas de los estudiantes a los tests sí que fueron revisados por parte de otro investigador experto en el modelo de Van Hiele y que los descriptores diseñados permitieron identificar prácticamente todas las respuestas de los estudiantes. Esto, en cierto modo, garantiza una cierta homogeneidad entre las evaluaciones que pudieran llevar a cabo diferentes investigadores, si bien no podemos desestimar la componente subjetiva del evaluador.

Un parámetro para medir la coherencia interna de un test que también han utilizado otros investigadores (Hart, 1980; Mayberry, 1983; Jaime, 1993) es el Coeficiente de Escalabilidad de Guttman. Este parámetro refleja si los estudiantes que responden correctamente los ítems asociados a un nivel de razonamiento también lo hacen así para los ítems asociados a un nivel inferior.

Para calcular el coeficiente de Guttman, se consideran los vectores formados por los grados de adquisición de los 4 niveles de razonamiento de cada estudiante (G_1, G_2, G_3, G_4). La situación deseable es que $G_1 \geq G_2 \geq G_3 \geq G_4$, por lo que se considera que hay un "error" cuando $G_i < G_j$ para al menos un $j > i$. Por ejemplo, los vectores (95, $\underline{20}$, 75, 0) y (95, $\underline{20}$, 75, 25) tienen un error; los vectores ($\underline{60}$, $\underline{20}$, 80, 30) y (95, $\underline{20}$, $\underline{75}$, 80) tienen dos "errores" y el vector ($\underline{20}$, $\underline{50}$, $\underline{30}$, 80) tiene 3 "errores". Es decir, el número de "errores" de un vector (G_1, G_2, G_3, G_4) es igual al número de valores G_i que hay que incrementar para que el vector verifique la relación: $G_1 \geq G_2 \geq G_3 \geq G_4$. En los ejemplos que hemos apuntado, los valores subrayados son los que tenemos que incrementar.

El coeficiente de Escalabilidad de Guttman viene dado por la fórmula:

$$G = 1 - \frac{\text{nº total de "errores"}}{\text{nº total de respuestas}} = 1 - \frac{\text{nº total de "errores"}}{4 \times \text{nº de estudiantes}}$$

Puesto que asumimos la estructura jerárquica de los niveles de razonamiento de Van Hiele (no se puede adquirir un nivel de razonamiento sin haber adquirido antes el anterior), el coeficiente de Guttman indicará si es correcta la relación entre los ítems que hemos asociado a los diferentes niveles. Por ejemplo, si los ítems del nivel 2 no se han diseñado adecuadamente se puede reflejar en unos grados de adquisición de este nivel superiores o inferiores a los que se debería tener, por lo que pueden aparecer "errores" porque se tiene un grado de dominio del nivel de razonamiento 2 más alto que del nivel de razonamiento 1 o porque es inferior que el grado de dominio del nivel de razonamiento 3 o del nivel de razonamiento 4; en ambos casos se traduce en "errores" que harán que el coeficiente de Guttman disminuya.

Cabe señalar que en nuestro caso, la pobreza del test para evaluar el nivel de razonamiento 4 (sólo hemos incluido un ítem para evaluar este nivel) ya nos permite avanzar que el considerar este nivel puede repercutir en la validación que estamos haciendo de los ítems del test. Por un mal diseño del ítem propuesto para evaluar este nivel puede suceder que encontremos estudiantes con un grado de dominio del nivel de razonamiento 4 superior al de los niveles inferiores. Por lo que será interesante observar qué ocurre con el coeficiente de Guttman cuando se elimina éste ítem, si bien en este caso al no poder comparar el grado de dominio del nivel de razonamiento 3 con el de un nivel superior, no tendremos reflejado de ninguna manera si el grado de dominio del nivel de razonamiento 3 ha resultado menor de lo que cabría esperar; esto es, la eliminación del ítem que se podría responder de acuerdo a las características del cuarto nivel de razonamiento repercute también en la validación que se hace de los ítems que se podrían responder de acuerdo a las características del tercer nivel de razonamiento.

El Coeficiente de Guttman se puede utilizar también para analizar los ítems de los tests. Ahora se consideran los vectores formados por las ponderaciones de las respuestas de cada estudiante a los diferentes ítems asociados a cada nivel de razonamiento y lo que se compara es el peso de cada ítem de un nivel con los pesos de todos los ítems de niveles superiores (no se compara con los pesos de los otros ítems del mismo nivel). Para que no haya errores, la ponderación de un ítem en un nivel dado debe ser mayor o igual que la ponderación de cualquier otro ítem en los niveles superiores.

En nuestro caso ese vector para el postest tiene 24 componentes, tantas como (*) tiene la tabla 3.5. Para el pretest el vector tiene 18 componentes (24 - 6, ya que los ítems 4, 6 y 7 que también incluimos en el postest no forman parte del pretest y cada uno de ellos los asociamos a los niveles 2 y 3). El Coeficiente de Guttman para el postest en este caso viene dado por la fórmula:

$$G = 1 - \frac{\text{nº total de "errores"}}{\text{nº total de respuestas}} = 1 - \frac{\text{nº total de "errores"}}{24 \times \text{nº de estudiantes}}$$

Para el pretest, el denominador de la fracción es 18 x nº de estudiantes.

La tabla 3.10 recopila los coeficientes de Guttman para los diferentes tests (el pretest y el postest) y los dos grupos de estudiantes evaluados.

		Coef. de Guttman			
	Grupo	**Entre niveles**	**Entre niveles sin nivel 4**	**Entre ítems**	**Entre ítems sin ítem 10**
Pretest	**3ºC**	1	1	0'90	0'92
	Opt.	1	1	0'89	0'89
Postest	**3ºC**	0'96	0'99	0'75	0'82
	Opt.	1	1	0'84	0'83

Tabla 3.10. Valores del coeficiente de escalabilidad de Guttman.

En investigaciones realizadas en Didáctica de las Matemáticas, que han utilizado este coeficiente, el límite inferior para aceptar la jerarquización de los niveles de razonamiento se ha establecido en el valor G = 0'90 (Mayberry, 1983; Hart, 1980) o en 0'93 (Hart, 1981).

Si nos fijamos en los resultados obtenidos en los dos grupos testados se observa que los valores del coeficiente de Guttman entre niveles son muy altos, lo cual confirma la fiabilidad de los tests. En los casos en los que se obtiene G = 1, significa que no hay ningún error al considerar todos los elementos del grupo. Para el postest del grupo de 3ºC, donde G = 0'96, cabe comentar:

1) Los "errores" proceden de pocos estudiantes. Sólo siete de los 63 estudiantes del grupo presentaron errores. Seis estudiantes tuvieron un error y uno tuvo 3 errores.

2) La mayoría de los "errores" los provocó el ítem 10 que corresponde a los niveles de razonamiento 2, 3 y 4: cinco "errores" provienen de 5 estudiantes que tienen un grado de adquisición del tercer nivel de razonamiento menor que del cuarto. Uno de estos estudiantes presentó además otros dos "errores" porque su grado de adquisición del primero y del segundo nivel de razonamiento también eran inferiores al del cuarto.

Ya hemos comentado el problema que suponía el haber incluido en los tests sólo un ítem para evaluar el nivel de razonamiento 4 (no tenemos información suficiente sobre el grado de adquisición de los estudiantes de este nivel de razonamiento). También explicamos las razones que tuvimos para ello: hay muy pocos que se muevan adecuadamente razonando en este nivel. De hecho, de los 63 estudiantes del grupo, sólo a 4 de ellos (que son los que han provocado 6 "errores" de los que hemos comentado) les hemos asociado una adquisición alta del nivel de razonamiento 4, a otro estudiante una adquisición intermedia y a otros 4 una adquisición baja de este nivel (tabla 3.14.1).

Si dejamos de considerar el cuarto nivel, por lo que en ese caso sólo tendremos en cuenta los tres primeros niveles, sólo se habrían producido 2 errores, por lo que el coeficiente de Guttman se aproxima a 1 (G = 0'99). Estos 2 errores, que provienen del grado de adquisición del nivel de razonamiento 1, corresponden a dos estudiantes que si bien realizaron el pretest y el postest, no asistieron a la unidad de enseñanza (la asistencia a las clases no era obligatoria), y, por lo tanto, no tenían los conocimientos geométricos necesarios para realizar el postest. Al realizarlo reflejaron una adquisición baja o nula del primer nivel y una adquisición baja del segundo nivel.

En la tabla 3.10 se observa también que los valores del coeficiente de Guttman entre ítems son inferiores a los del coeficiente de Guttman entre niveles. Esto es lo que suele ocurrir ya que cuando se comparan las ponderaciones de las respuestas a los ítems, los valores obtenidos son lógicamente inferiores. En nuestra investigación destacan en particular los de los postests, cuyos valores son inferiores a los que se ha considerado como límite inferior para aceptar la jerarquización de los niveles de razonamiento; los ítems que incluyen los tests han causado más "errores" que los que son aceptables en la investigación.

Dado que, como ya hemos indicado antes, aceptamos la jerarquización de los niveles de razonamiento de Van Hiele en los sólidos, la explicación de que esto haya ocurrido habrá que buscarla en el test propuesto o en otras variables que no hemos podido controlar. No obstante, como señalan Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991), estos resultados no son sorprendentes. Es usual encontrar estudiantes, como ha sucedido en otras investigaciones previas, que responden a los ítems en los niveles más altos mejor que en los niveles más bajos (Gutiérrez y Jaime, 1987; Mayberry, 1983; Usiskin, 1982). Las razones pueden encontrarse en el método de enseñanza utilizado, en la dificultad de los ítems, etc. En nuestro caso, un análisis detenido de las respuestas de los estudiantes nos informa de que:

1) Los "errores" afectan a la mayoría de los estudiantes. El número de "errores" oscila desde cero (hay 3 estudiantes que no presentan "errores") hasta 18 (que los tienen dos estudiantes). La tabla 3.11 muestra el número de estudiantes que tienen de 0 a 18 "errores" para el postest.

	Nº de errores																		
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
3ºC	3	8	8	8	5	4	3	3	3	2	5	3	1	1	2	1	1	0	2
Opt	1	2	3	1	1	1	2												

Tabla 3.11. Estudiantes que presentan de 0 a 18 "errores" en las respuestas al postest.

Reagrupando podemos concluir que el 57'15% de estudiantes de 3ºC tiene menos de 6 "errores"; el 31'74 % tiene de 6 a 12 "errores" (ambos inclusivas) y hay 7 estudiantes (el 11'11%) que tienen más de 12 "errores".

Los estudiantes que han presentado más de 12 "errores" corresponden a los que ya hemos considerado al tratar el coeficiente de Guttman entre ítems. Cuatro de ellos son estudiantes a los que les hemos asignado un grado de adquisición para el cuarto nivel de razonamiento superior al del nivel 3. Los otros 3 estudiantes también son casos especiales, y ya los hemos comentado anteriormente: corresponden a estudiantes con la misma adquisición para el tercer y cuarto nivel (2 de ellos tienen una adquisición baja y el otro una adquisición intermedia). El coeficiente de Guttman entre ítems que obtenemos si dejamos de tener en cuenta estos 7 estudiantes es de G = 0'80.

Un resultado que puede observarse es que el mayor número de "errores" lo proporcionan los estudiantes que además de tener dominio de los dos primeros niveles de razonamiento, también tienen cierto dominio sobre los dos últimos niveles o, por lo menos, sobre el tercero; los estudiantes que tienen más de 12 "errores" corroboran este resultado; por otro lado, de los 4 estudiantes que tienen 11 ó 12 "errores" (únicamente uno con 12 "errores") sólo uno de ellos tiene una adquisición nula en los niveles tercero y cuarto, los otros tres tienen una adquisición completa para el primer nivel, alta para el segundo, baja para el tercero y nula para el cuarto. Este resultado no puede sorprendernos ya que cuanto mayor sea el nivel de razonamiento de un estudiante más probable es que aparezcan errores; como caso extremo cabe señalar que quien tiene una adquisición nula de todos los niveles no puede tener errores.

Si nos fijamos en los resultados obtenidos para el grupo de la asignatura optativa, también en este caso los "errores" están repartidos entre todos los estudiantes, si bien cabe destacar que en este grupo no ha habido un número de "errores" superior a 7. El porcentaje de estudiantes que tiene menos de 6 "errores", en este caso es de 72'73%, de ahí que el coeficiente de Guttman haya salido superior que para el grupo de 3ºC, si bien también es inferior al límite propuesto por los investigadores mencionados.

2) El mayor número de "errores" lo obtenemos si nos fijamos en los ítems que en la tabla 3.5 hemos asociado al nivel de razonamiento 2 porque las ponderaciones asignadas a este nivel para estos ítems son más bajas que las del nivel de razonamiento 3 o del nivel 4 que presentan los ítems asignados a estos niveles. Vale la pena aclarar que aunque en lo que sigue vamos a hablar de los errores que aparecen al considerar los ítems asociados al nivel de razonamiento 2, no estamos considerando que estos ítems sean los "culpables" de que éstos se den. Puede ser también que los ítems para los que hemos incluido en su rango el nivel de razonamiento 3 ó 4 hayan reflejado un dominio de estos niveles más alto del que tienen los estudiantes.

La tabla 3.12 recopila los "errores" que obtenemos para los dos grupos testados cuando una vez seleccionados los ítems para los que tenemos ponderaciones para un nivel de razonamiento dado (que mostramos en la tabla 3.5) consideramos juntos todos los errores que proceden de las ponderaciones de estos ítems.

	Errores	Ítems N.1	Ítems N. 2	Ítems N.3
Grupo	3ºC	16 4,3%	314 84,41%	42 11,29%
	Opt.	0 0%	43 100%	0 0%

Tabla 3.12. Número y porcentaje de "errores" de los ítems de los diferentes niveles de razonamiento.

Cabe señalar que en el grupo de 3ºC, aunque pocos, también los ítems asociados a los niveles de razonamiento 1 y 3 han reflejado un grado de dominio de estos niveles inferior al que reflejan ítems asignados a un nivel de razonamiento superior sobre el dominio de estos niveles; en el grupo de la asignatura optativa los estudiantes muestran claramente que no pueden moverse en el nivel de razonamiento 4, de ahí que no haya habido ningún estudiante que haya dado una respuesta de acuerdo con las características del nivel de razonamiento 4 con una ponderación mayor que la respuesta dada a otro ítem utilizando razonamientos asociados al tercer nivel.

El hecho de que la mayoría de los "errores" provengan de que ponderaciones para el nivel de razonamiento 2 sean menores que para nivel 3 ó 4 no sólo se explica desde un mal diseño de los ítems que asignamos a los diferentes niveles. Como todos los ítems de los tests los hemos asociado al nivel segundo de razonamiento y no ha sido así para los otros niveles, es lógico que estos ítems permitan reflejar más "errores". Por otro lado, una interpretación diferente puede darse si tenemos en cuenta que los razonamientos usuales de los estudiantes testados son de nivel 2, si bien ya están comenzando el dominio del nivel de razonamiento 3. Esto se traduce en que los estudiantes pueden tener un dominio alto de alguna de las características asociadas al nivel de razonamiento 3, que se reflejará en la evaluación del ítem correspondiente, pero un dominio bajo de otra característica asociada al mismo nivel (que se puede reflejar en una adquisición baja del nivel 3). Si además también tenemos en cuenta que la situación descrita no significa que los estudiantes dominan completamente todas las características que hemos asignado al nivel de razonamiento 2, una situación que puede ocurrir con frecuencia, que provocaría "errores" de los que hemos señalado es la siguiente: los ítems que corresponden a las características asociadas al nivel de razonamiento 2 para las que los estudiantes tienen menos dominio provocan errores al compararlos con los ítems relativos a las características asignadas al nivel de razonamiento 3 que acabamos de mencionar.

En un intento de conseguir alguna información sobre si el diseño de algunos ítems podría ser la causa de los errores que aparecían, observamos desde otra perspectiva los errores que presentaban los estudiantes. Al comparar ponderaciones asignadas a ítems para un determinado nivel no nos fijamos sólo en si había "error" o no (o sea, en si la una era mayor o menor que la otra), tuvimos en cuenta si la ponderación asignada a un ítem para un nivel distaba mucho de las ponderaciones asignadas a los ítems para los niveles superiores o si aunque se presentase error las ponderaciones eran bastante homogéneas. Por ejemplo, si se obtiene una ponderación de 20 para el nivel 1 en un ítem, y en otros ítems se tienen las ponderaciones de 75, 70, 75, para los niveles 2, 3 y 4 respectivamente, si además para otros ítems que pueden responderse de acuerdo a las características del nivel de razonamiento 1 se obtienen ponderaciones de 90, 100, como la ponderación 20 para el nivel 1 en ese ítem es claramente discrepante, se podría sospechar que el error proviene del ítem (esto es, que la respuesta a ese ítem había reflejado un grado de dominio del nivel de razonamiento 1 del estudiante inferior al que tenía); en este caso cabría continuar la investigación averiguando si para varios estudiantes este ítem presentaba el mismo problema o no era así.

Cuando observamos las ponderaciones para los niveles 1, 2 y 3 para los diferentes ítems que asignamos a cada nivel, al fijamos en los casos claramente discrepantes y observar lo que ocurría con el resto de los estudiantes del grupo, no pudimos sacar ninguna conclusión que permitiera rechazar algún ítem de los tests.

Decidimos también considerar por separado cada ítem con objeto de observar el porcentaje de "errores" que había producido en los dos grupos testados. Éstos se indican en la tabla 3.13. Para cada ítem hemos señalado los "errores" que pueden observarse independientemente del nivel de razonamiento en el que se ha dado su respuesta (de los que hemos incluido en su rango). La tabla 3.13 muestra también los "errores" de los estudiantes del grupo de 3ºC que se establecen de las respuestas a los ítems dadas en nivel de razonamiento 2. Los 314 "errores" que se han detectado en el grupo de 3ºC, por las ponderaciones obtenidas para el nivel 2 en los diferentes ítems, se han distribuido según los ítems como muestra la segunda fila de la tabla 3.13.

Ítem	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3ºC	16 4%	33 8'25 %	35 8'75%	74 18'5%	18 4'5%	30 7'5%	44 11%	42 10´5%	47 11'75%	2 0'5%	30 7'5%	29 7'25 %
3ºC N.2	10 3'18 %	26 8'28 %	35 11'14 %	42 13'37 %	18 5'73 %	24 7,64 %	35 11'14 %	35 11'14 %	41 16'06 %	2 0'64 %	23 7'32 %	23 7'32 %
Opt.	4 9'30 %	3 6'98 %	9 20'93 %	6 13'95 %	0	3 6'98 %	4 9'30 %	5 11'63 %	5 11'63 %	3 6'98 %	0	1 2'33 %

Tabla 3.13. Nº y porcentaje de "errores" de los ítems del postest total y asociados al nivel 2.

De los resultados obtenidos en ambos grupos y de la comparación de los resultados no podemos extraer ninguna conclusión generalizable a otros grupos. Puede observarse que en el grupo de 3ºC los "errores" están repartidos entre todos los ítems y en el grupo de la asignatura optativa sólo hay dos ítems que no han producido "errores" (el 5 y el 11). De estos resultados no se pueden seleccionar algunos ítems porque se desprenda claramente que pueden ser los causantes de los "errores" que aparecen en ambos grupos.

El que los "errores" estén bastante distribuidos entre los diferentes ítems nos ha llevado a pensar que éstos no provienen exclusivamente de ellos sino de otras posibles fuentes, como por ejemplo, de la falta de tiempo para responder al test completo, o del método de enseñanza empleado. Si bien fue la autora de la tesis la que desarrolló la unidad de enseñanza en ambos grupos, las condiciones particulares de cada uno de ellos (que describimos en el apartado 1.5.2 del capítulo 1) pudo repercutir en los resultados obtenidos.

Para finalizar este apartado queremos resaltar que consideramos los tests globalmente fiables. Nuestros resultados corroboran que un estudiante puede desarrollar dos niveles consecutivos al mismo tiempo y constatamos que si bien lo usual es que la adquisición del nivel más bajo es más completa que la del nivel más alto, ocurre a veces, como muestran los resultados presentados, que los estudiantes se mueven en algunos ítems con más dominio en el nivel más alto que en otros ítems en un nivel inferior (especialmente con los niveles 2 y 3). Como señalan Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991, p. 250): "Esto no implica un rechazo de la estructura jerárquica de los niveles sino que sugiere más bien que deberíamos adaptar mejor la teoría de Van Hiele a la complejidad del proceso de razonamiento humano; las personas no se comportan de una manera simple, lineal, que podría esperarse de la asignación de un nivel único". Pero con los resultados obtenidos se hace necesario realizar otra investigación posterior, para determinar las diversas fuentes posibles de estos "errores" (defecto de los ítems, falta de tiempo para responder al test completo, falta de conocimientos geométricos necesarios, método de enseñanza empleado, etc.) y así determinar los cambios necesarios que mejorarían los tests.

3.3.6. RESULTADOS DE LA ADMINISTRACIÓN DE LOS TESTS. ANÁLISIS Y CONCLUSIONES

En este apartado vamos a hacer algunos análisis de la información que hemos obtenido sobre el nivel de razonamiento de los estudiantes antes y después de haber tenido una determinada instrucción. Pero antes de comenzar con este análisis queremos aclarar de nuevo que no pretendemos que los datos y resultados que presentamos en esta memoria sean generalizables a otros grupos de estudiantes.

Al comienzo de la sección 3.3 hemos indicado que el análisis de los resultados obtenidos por los tests lo centramos en averiguar el progreso desde que se realiza el pretest hasta que se realiza el postest de los niveles de razonamiento de Van Hiele de los estudiantes evaluados.

Las tablas 3.14.1 y 3.14.2 de las páginas siguientes recopilan, para cada nivel de razonamiento de Van Hiele, el número de estudiantes (y el porcentaje), de cada uno de los dos grupos testados, que han obtenido los diferentes grados de adquisición de dicho nivel, para el pretest y para el postest. Estas tablas muestran el perfil medio de los estudiantes de los dos grupos testados, cuando realizaron el pretest y el postest.

Si comparamos los resultados del pretest con los obtenidos en el postest cabe destacar que los estudiantes de ambos grupos han incrementado su grado de adquisición de los niveles 1, 2 y 3. La unidad de enseñanza desarrollada ha conseguido que los estudiantes que, por término medio, habían iniciado el dominio del nivel de razonamiento 2 y se movían con una cierta soltura en el nivel de razonamiento 1, han llegado a dominar este nivel, han incrementado considerablemente el grado de adquisición del nivel de razonamiento 2 y se han introducido en el razonamiento de nivel de razonamiento 3. Como ocurrió en las experimentaciones piloto realizadas, en las respuestas al postest siguen sin apreciarse de manera significativa razonamientos de cuarto nivel (sólo algunos estudiantes del grupo de 3ºC han utilizado razonamientos de este nivel).

		Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Adq. Completa	Pretest	22 (34'92)	0	0	0
	Postest	58 (92'06)	12 (19'05)	0	0
Adq. Alta	Pretest	37 (58'73)	1 (1'59)	0	0
	Postest	3 (4'76)	37 (58'73)	2 (3'17)	4 (6'35)
Adq. Intermedia	Pretest	4 (6'35)	0	0	0
	Postest	0	9 (14'29)	11 (17'46)	1 (1'59)
Adq. Baja	Pretest	0	44 (69'84)	1 (1'59)	0
	Postest	1 (1'59)	5 (7'94)	31 (49'21)	4 (6'35)
Adq. Nula	Pretest	0	18 (28'57)	62 (98'41)	63 (100)
	Postest	1 (1'59)	0	19 (30'16)	54 (85'71)
Media	Pretest	79'42 Alta	21 Baja	1'59 Nula	0 Nula
	Postest	94'92 Completa	71'09 Alta	25'74 Baja	7'06 Nula
Desv. Típica	Pretest	11'01	10'14	3'86	0
	Postest	16'01	15'08	16'2	19'79

Tabla 3.14.1. Resultados de la administración de los tests en el grupo de 3ºC.

		Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Adq. Completa	Pretest	1 (9,09)	0	0	0
	Postest	11 (100)	0	0	0
Adq. Alta	Pretest	3 (27'27)	0	0	0
	Postest	0	8 (72'72)	0	0
Adq. Intermedia	Pretest	4 (36'36)	0	0	0
	Postest	0	1 (9'09)	0	0
Adq. Baja	Pretest	3 (27'27)	5 (45'45)	0	0
	Postest	1 (1'59)	2 (18'18)	5 (45'45)	0
Adq. Nula	Pretest	0	0	11 (100)	11 (100)
	Postest	1 (1'59)	0	6 (54'54)	11 (100)
Media	Pretest	54'44 Intermed.	16'5 Baja	0 Nula	0 Nula
	Postest	99'24 Completa	60'12 Alta	16'69 Baja	0 Nula
Desv. Típica	Pretest	17'7	8'02	0	0
	Postest	2'39	13'08	9'96	0

Tabla 3.14.2. Resultados de la administración de los tests en el grupo de la optativa.

De nuestra investigación podemos concluir que para la geometría de los sólidos es rápido que los estudiantes lleguen a dominar el primer nivel de razonamiento de Van Hiele, sin embargo, se requiere de bastante tiempo y atención para que los estudiantes lleguen a dominar el segundo nivel. Nuestra hipótesis sobre el dominio de los dos últimos niveles es que, para que los estudiantes se muevan con un cierto dominio en los niveles de razonamiento 3 y 4, es necesario mucho tiempo, puede ser que incluso años, y algunos estudiantes no podrán dominarlos. Estas conclusiones también se han establecido en Jaime (1993) en el contexto de las isometrías. No obstante, dado que en nuestras investigaciones ha habido un porcentaje muy pequeño de estudiantes que tuviesen un dominio alto del tercer nivel de razonamiento, o que razonasen en el cuarto nivel de razonamiento, nuestra hipótesis necesita verificarse con otras investigaciones en las que la mayoría de los estudiantes razonen de acuerdo a las características de los niveles de razonamiento 3 y 4.

De los resultados del pretest y del postest también puede observarse que el perfil medio de los estudiantes refleja un razonamiento un poco inferior en los estudiantes del grupo de la asignatura optativa. Si tenemos en cuenta las condiciones iniciales de los estudiantes de los dos grupos testados (que indicamos en el apartado 1.5.2 del capítulo 1) parece que los resultados apuntan hacia la hipótesis de que el nivel inicial de conocimientos matemáticos de los estudiantes influye positivamente en la rapidez con que se domina completamente el segundo nivel y se consigue un dominio en los niveles de razonamiento tercero y cuarto. La explicación podemos encontrarla en el hecho de que el haber trabajado en algunas áreas de las matemáticas razonamientos de un determinado nivel facilita la utilización de este nivel de razonamiento en otras áreas de las matemáticas (en nuestro caso, en la geometría de los sólidos). Esta conclusión no es contradictoria con la que expresan Gutiérrez y Jaime (1987, pp. 136-137) sobre la localidad de los niveles 1, 2, 3 y la globalidad de los niveles 4 y 5: "Una persona situada en los tres primeros niveles tiene una visión local y fragmentada de las matemáticas que dificulta la transferencia de conocimientos de unas áreas a otras, mientras que aquellos estudiantes que han alcanzado el cuarto o quinto nivel son capaces de tener una visión global de las matemáticas que facilita dicha transferencia". Nuestra investigación no ha pretendido confirmar o rechazar si hay o no una transferencia inmediata de conocimientos desde otras áreas de las matemáticas a los sólidos. Los estudiantes de 3ºC, por término medio, no han conseguido una adquisición intermedia del tercer nivel, pero no podemos concluir que la transferencia de razonamientos de otras áreas de las matemáticas no sea inmediata y que necesite de instrucción. Como no era nuestro objetivo el confirmar o refutar esta hipótesis, no nos hemos preocupado de averiguar si en otras áreas de las matemáticas pueden utilizar razonamientos de los niveles de razonamiento de Van Hiele tercero y cuarto.

Por otro lado, vale la pena advertir que nuestra hipótesis es sólo una conjetura que necesita ser confirmada o rechazada por otras investigaciones. Dado el porcentaje de estudiantes que en el grupo de 3ºC (de 63 estudiantes) han conseguido adquisición intermedia o alta del nivel de razonamiento 3, o algún dominio del nivel de razonamiento 4 (tabla 3.14.1), no puede extrañar que en un grupo de 11 estudiantes, que son los que tiene el grupo de la asignatura optativa de geometría del espacio, todos los estudiantes hayan tenido un dominio inferior de estos niveles. Como tampoco nos hemos preocupado de averiguar la diferencia que había inicialmente en los conocimientos matemáticos de los estudiantes de los grupos testados y si la diferencia en el grado de adquisición del nivel de razonamiento 2 (en media) en los dos grupos es o no significativa, esta hipótesis sólo puede considerarse como punto de partida para futuras investigaciones.

Si nos fijamos en el primer nivel, a primera vista puede llamar la atención que los estudiantes del grupo de la asignatura optativa de geometría tengan en media un grado de adquisición de este nivel (99'24) un poco superior que el del grupo de 3ºC (94'92). Sin embargo, pensamos que hay varias razones que explican estos resultados. Una de ellas procede de que, como subrayaron algunos estudiantes que participaron en nuestras investigaciones, los razonamientos que se han trabajado en la experiencia anterior con las matemáticas corresponden a los niveles 2, 3 ó 4 (aplicados a áreas de las matemáticas diferentes de la geometría de los sólidos); no se han practicado los razonamientos del primer nivel. Algunos estudiantes expresaron, refiriéndose a razonamientos de este nivel de razonamiento de Van Hiele, que "el explicarlo así en matemáticas no sirve". Esta idea pudo llevarles a que cuando no podían explicar la respuesta en un nivel superior al 1, no daban tampoco razones de este nivel, aunque pudieran darlas.

Otra razón, que ya hemos mencionado antes, proviene de las condiciones en las que se desarrolló la unidad de enseñanza. Como la asistencia de los estudiantes a clase no era obligatoria, tuvimos estudiantes que no asistieron prácticamente a ninguna de las sesiones que desarrollamos, lo que explica lo poco que evolucionó su nivel de razonamiento.

Una tercera razón la encontramos en el propio test y el método de asignación de grados de adquisición de niveles que utilizamos. Dado que el test contiene muchos más subítems para evaluar el nivel de razonamiento 2 que el nivel de razonamiento 1 y el grado de adquisición lo hallamos como una media aritmética de los grados de adquisición del nivel en los subítems e ítems correspondientes, un fallo en uno de los subítems del test, asignado a los niveles 1 y 2, no afecta de la misma manera en el grado de adquisición del nivel de razonamiento 1 y del nivel de razonamiento 2. El desconocimiento de algunas familias de sólidos (y no es extraño, dada la variedad de familias implicadas en los tests), influye en las respuestas dadas a los subítems de los ítems 11 y 12 (asignados a ambos niveles), por lo que tiene más repercusión en el grado de adquisición del primer nivel.

Hasta ahora sólo hemos reparado en el perfil medio de los estudiantes de un grupo (recopilados en las tablas 3.14.1 y 3.14.2) y sólo hemos considerado los resultados de algún estudiante particular para interpretar los perfiles medios obtenidos o para explicar los "errores" que se habían producido. En un intento de obtener información sobre la diversidad de formas de razonamiento que hay presentes en cada grupo, a partir de los vectores con los grados de adquisición que determinamos para las respuestas de los estudiantes evaluados, para el pretest y para el postest (tablas que presentamos en el anexo 5) identificamos los diferentes perfiles de éstos (según sus grados de adquisición de los niveles de razonamiento). Las tablas de las páginas siguientes (tablas 3.15 y 3.16) muestran de manera más sintética el número de estudiantes de cada grupo (y el porcentaje redondeado) que tienen cada uno de los perfiles delimitados para las respuestas al pretest y postest.

Con respecto al pretest, las tablas 3.15 y 3.16 reflejan que los estudiantes que responden al perfil con mejor razonamiento son estudiantes del grupo de 3ºC, si bien el razonamiento de todos ellos es muy pobre (sólo un estudiante de 3ºC tiene una adquisición completa y alta para los niveles 1 y 2). Los perfiles de los estudiantes al realizar el pretest muestran un cierto dominio del nivel de razonamiento 1 y como mucho una adquisición baja del segundo nivel de razonamiento.

Respecto a los resultados del postest sólo algunos estudiantes del grupo de 3ºC se incluyen en los perfiles que corresponden al razonamiento de mayor nivel. El análisis de los resultados individuales de los estudiantes también conduce a lo que hemos enunciado y explicado cuando los resultados los tratamos por término medio:

Hemos constatado que para la geometría de los sólidos es rápido que los estudiantes lleguen a dominar el primer nivel de razonamiento de Van Hiele, sin embargo, se requiere de bastante tiempo y atención para que los estudiantes lleguen a dominar el segundo nivel.

Los datos apuntan hacia la hipótesis de que para que los estudiantes se muevan con un cierto dominio en los niveles 3 y 4, es necesario mucho tiempo, puede ser que incluso años, y algunos estudiantes no podrán dominarlos; así como hacia la hipótesis de que el nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes influye positivamente en la rapidez con que se domina completamente el segundo nivel y se consigue un dominio de los niveles de razonamiento tercero y cuarto.

El entrevistar a los estudiantes que obtuvieron adquisiciones AA, AI, BB y BN para los dos primeros niveles, nos proporcionó las razones que ya hemos mencionado antes, y que condujeron a los resultados que habían obtenido respecto a los dos primeros niveles. Todos los estudiantes destacaron la necesidad de una asistencia a clase para poder realizar correctamente el postest. Por lo que, respecto al nivel de razonamiento 1 nos atrevemos a conjeturar que los conocimientos matemáticos de los estudiantes no influyen negativamente en el dominio de este nivel.

Perfil nº	Niveles 1 2 3 4	Pretest 3ºC	Pretest Optativa	Postest 3ºC	Postest Optativa	Total Pretest	Total Postest
1º	C C A A	0	0	1 (1'59)	0	0	1 (1'35)
2º	C C A N	0	0	1 (1'59)	0	0	1 (1'35)
3º	C C I B	0	0	1 (1'59)	0	0	1 (1'35)
4º	C C I N	0	0	4 (6'35)	0	0	4 (5'41)
5º	C C B N	0	0	3 (4'76)	0	0	3 (4'05)
6º	C C N N	0	0	1 (1'59)	0	0	1 (1'35)
7º	C A I A	0	0	2 (3'17)	0	0	2 (2'70)
8º	C A I I	0	0	1 (1'59)	0	0	1 (1'35)
9º	C A I N	0	0	3 (4'76)	0	0	3 (4'05)
10º	C A B B	0	0	2 (3'17)	0	0	2 (2'70)
11º	C A B N	0	0	25 (39'68)	5 (45'45)	0	30 (40'54)
12º	C A NN	1 (1'59)	0	4 (6'35)	3 (27'27)	1 (1'39)	7 (9'46)
13º	C I N N	0	0	6 (9'52)	1 (9'09)	0	7 (9'46)
14º	C B N N	18 (28'57)	1 (9´09)	3 (4'76)	2 (18'18)	20 (27'78)	5 (6'76)
15º	C NNN	3 (4'76)	0	0	0	3 (4'17)	0
16º	A I N N	0	0	2 (3'17)	0	0	2 (2'70)
17º	A B B N	1 (1'59)	0	0	0	1 (1'39)	0
18º	ABNN	23 (36'51)	2 (18´18)	0	0	23 (31'94)	0
19º	ANNN	13 (20'63)	1 (9´09)	0	0	14 (19'44)	0
20º	I B NN	2 (3'17)	1 (9´09)	0	0	3 (4'17)	0
21º	I N NN	2 (3'17)	3 (27´27)	0	0	4 (5'56)	0
22º	B B NN	0	1 (9´09)	1 (1'59)	0	1 (1'39)	1 (1'35)
23º	B N NN	0	2 (18´18)	0	0	2 (2'78)	0
Otros	C I N B, A ABN, NB NN	0	0	3 (4'76)	0	0	3 (4'05)
	TOTAL	63 (100)	11 (100)	63 (100)	11 (100)	72 (100)	74 (100)

Tabla 3.15. Cantidades absolutas (y porcentuales) de estudiantes de los dos grupos evaluados, para el pretest y postest, en cada uno de los perfiles definidos.
C = Adquisición completa; A = Adquisición alta; I = Adquisición intermedia; B = Adquisición baja; N= Adquisición nula.

Gr(1), Gr(2)	Pretest 3ºC	Postest 3ºC	Pretest Opt.	Postest Opt.
CC	0	11 (17'46)	0	0
CA	1 (1'59)	37 (58'73)		8 (72'72)
CI	0	7 (11'11)	0	1 (9'09)
CB	18 (28'57)	3 (4'76)	2 (18'18)	2 (18'18)
CN	3 (4'76)	0	0	0
AA y AI	0	1 + 2 (4'76)	0	0
AB	24 (38'18)	0	2 (18'18)	0
AN	13 (20'63)	0	0	0
IB e IN	2 + 2 (6'34)	0	1 + 3 (36'36)	0
BB y BN	0	1 + 0 (1'59)	1 + 2 (27'27)	0
NB	0	1 (1'59)	0	0
Totales	63 (100)	63 (100)	11 (100)	11 (100)

Gr(3) y Gr(4)	Postest 3ºC	Postest Optativa
AA, BA y AN	1 + 1 +1 (4'76)	0
IA, II, IB y IN	2 + 1 +1 + 7 (17'46)	0
BB Y NB	2 + 1 (4'76)	0
BN	28 (44'44)	5 (45´45)
NN	18 (28'57)	6 (54'54)
Totales	63 (100)	11 (100)

Tabla 3.16. Cantidades absolutas (y porcentuales) de estudiantes de los dos grupos evaluados, para el pretest o postest, con una adquisición definida para pares de niveles de razonamiento.

CAPÍTULO 4

RESUMEN FINAL Y CONCLUSIONES

El trabajo que presentamos en esta memoria, que explora procesos de enseñanza/aprendizaje en el ámbito de cursos dirigidos a futuros profesores de primaria, y en sesiones de laboratorio con niños de 12 años, nos ha permitido:

- Obtener caracterizaciones teóricas para los niveles de Van Hiele para la geometría de los sólidos.
- Diseñar una unidad de enseñanza para la enseñanza de los sólidos, organizada según los niveles de razonamiento de Van Hiele y teniendo en cuenta las fases de aprendizaje.
- Elaborar tests y modelos de respuestas para los ítems de los tests.
- Determinar el nivel de razonamiento de Van Hiele de los estudiantes de dos grupos de estudiantes de Magisterio para la geometría de los sólidos, y obtener información sobre cómo evoluciona éste cuando se desarrollan las tareas propuestas en la unidad de enseñanza diseñada
- Obtener información sobre cómo los estudiantes van construyendo ciertos objetos mentales de una gran variedad de conceptos geométricos relacionados con los sólidos y sobre cómo van ampliando éstos cuando inmersos en un proceso de enseñanza/aprendizaje se desarrollan las tareas propuestas en la unidad de enseñanza diseñada.

Así pues, los resultados de nuestro trabajo representan aportaciones al desarrollo de la investigación sobre el modelo de Van Hiele y a la aplicación del modelo de Van Hiele a la enseñanza de la geometría de los sólidos y una contribución a la mejora del proceso de enseñanza/aprendizaje de los sólidos.

A continuación exponemos a modo de conclusiones los resultados que hemos considerado más relevantes y que proceden de los diferentes estudios realizados.

Sobre el desarrollo de la investigación sobre el modelo de Van Hiele

– Proponemos una relación de descriptores que caracterizan los niveles de razonamiento 1, 2 y 3, que no la presentamos aquí por haberlo hecho ya en la sección 1.4 del capítulo 1. Estos descriptores se han manifestado de gran utilidad tanto para el diseño de la unidad de enseñanza, como para interpretar las respuestas dadas por los estudiantes a las tareas propuestas en ella. Es importante señalar que las conclusiones relativas a procesos de aprendizaje que vamos a señalar en lo que sigue han sido determinantes para la elaboración de estos descriptores.

– El pretest y el postest que elaboramos para la evaluación del nivel de razonamiento de los estudiantes en la geometría de los sólidos, que presentamos en el anexo 3, se han mostrado muy adecuados para lo que pretendíamos, pues a partir de ellos se puede conseguir una gran información sobre la manera de razonar de los estudiantes en una gran variedad de tareas; especialmente si los estudiantes razonan de acuerdo a las características delimitadas para los niveles de razonamiento 2 ó 3. Si bien, dada la gran extensión del postest, sugerimos que en una investigación posterior se eliminen algunos subítems para los que sólo hemos incluido el nivel de razonamiento 2 en su rango y el ítem correspondiente incluye también otros subítems de estas características.

– Los modelos de respuestas que delimitamos y codificamos para los diferentes ítems de los tests, y que presentamos en el anexo 4, además de que dan cuenta de cómo responden una gran variedad de estudiantes a algunas tareas que se les plantean, facilitan el que pueda hacerse una corrección homogénea para varios grupos.

– El análisis de las respuestas dadas por los alumnos a los tests nos ha permitido, por un lado, constatar que para la geometría de los sólidos, es relativamente rápido el que los estudiantes lleguen a dominar el primer nivel de razonamiento de Van Hiele, sin embargo, se requiere de bastante tiempo y atención para que los estudiantes lleguen a dominar el segundo nivel. Por otro, formular las siguientes hipótesis: el nivel inicial de conocimientos matemáticos de los estudiantes parece influir positivamente en la rapidez con que se llega a dominar los diferentes niveles de razonamiento de Van Hiele, especialmente influye para lograr el dominio del segundo nivel, o para que se consiga un dominio de los niveles de razonamiento tercero y cuarto. Para que los estudiantes se muevan con cierto dominio en los niveles 3 y 4 podría necesitarse mucho tiempo y algunos estudiantes no podrán dominarlos.

Sobre la aplicación del modelo de Van Hiele a la enseñanza de la geometría de los sólidos.

– Hemos diseñado una unidad de enseñanza para los niveles 1, 2 y 3, organizada según las fases de aprendizaje, para la enseñanza de la geometría de los sólidos.

– Una vez admitidos como componentes de cada nivel de razonamiento los que indicamos en el apartado 1.4.1, hemos constatado tras la experimentación de parte de la unidad de enseñanza que las tareas que la integran son adecuadas para que evolucione el nivel de razonamiento de los estudiantes.

– Las tareas propuestas para la unidad de enseñanza del nivel 1 llevan a que se constituyan objetos mentales de determinadas familias de sólidos en los que las propiedades que tienen más peso son las relativas al número de caras, vértices y aristas, y las que se refieren al tipo de caras que forman el modelo. Para modelos concretos (ejemplos de las familias tratadas cuya base tenga un número de lados pequeño) los estudiantes pueden hallar estos números de manera sistemática y para otros puede que se tengan que destruir los modelos para ello; pero a partir del número de caras, de vértices o de aristas, los estudiantes no pueden delimitar qué sólidos pueden ser solución, a no ser que topen con ellos.

– En concordancia con los resultados que indica Hershkowitz (1990) nuestros resultados confirman que al realizar las tareas propuestas en la unidad de enseñanza, en un principio los juicios se basan en los ejemplos prototipo y en juicios prototípicos y los estudiantes aplican las ideas y propiedades erróneas que incorporan en sus objetos mentales. Cabe destacar este resultado para las subfamilias establecidas con criterios que centran la atención en la regularidad e igualdad de todas las caras, o de las caras laterales; los estudiantes no incorporan en los objetos mentales algunas propiedades y ejemplos de las subfamilias; el que en un principio se formen ejemplos prototipo para ellas lleva a que en sucesivas ocasiones algunos estudiantes basen sus juicios en subfamilias de ellas en vez de en todas ellas.

– Cuando se plantean las tareas que hemos propuesto para los niveles de razonamiento 2 y 3, relativas a descripción de familias, es muy usual que en las listas elaboradas por los estudiantes antes de estudiarlas en clase figuren propiedades que no deberían estar en ellas y que falten propiedades. Sin embargo, si el profesor plantea las cuestiones adecuadas, los estudiantes pueden descubrir las propiedades que en el apartado 1.4.1 hemos asociado al nivel de razonamiento correspondiente, de las que indicamos en el anexo 2 para diferentes familias y subfamilias de sólidos.

– A partir de las tareas propuestas para el nivel 2, los estudiantes pueden utilizar un procedimiento sistemático para enumerar las propiedades de las familias de sólidos; comparar las propiedades que tiene una familia con las que tienen otras y llegar a observar parecidos y diferencias entre ellas; y utilizar algunas relaciones de familias para indicar propiedades de una familia englobadas como propiedades de otra, aunque es probable que no se señalen todas las posibles y se incluya alguna que no sea adecuada.

– Los razonamientos utilizados por los estudiantes que participaron en nuestras experimentaciones, en su mayor parte, se basaban en ejemplos concretos, que en muchos casos eran modelos físicos; ello les llevó a desarrollar una gran actividad matemática y también a plasmar algunos resultados erróneos, al aplicar resultados visuales sin contrastarlos con propiedades geométricas. Cabe señalar que se requirió de bastante tiempo y atención para que los estudiantes utilizaran, cuando era posible, resultados obtenidos, y aún así, en bastantes situaciones, no logramos que la mayoría de los estudiantes aprovecharan estos recursos. También queremos hacer referencia a lo difícil que resulta que los estudiantes lleguen a utilizar correctamente el vocabulario geométrico para enunciar propiedades o relaciones, especialmente cuando hay implicados conceptos relacionados.

Resultados que hacen referencia a las dificultades que presentan los distintos tipos de tareas planteadas.

En tareas de descripción

– Los estudiantes no tienen dificultad para hallar el número de caras, vértices y aristas de los modelos, ni para hallar el número de lados del polígono de las bases de un prisma cuando se conoce el número de aristas o de vértices.

– Las tareas en las que se tiene que hallar el número de caras, vértices y aristas para un caso general (por ejemplo, un prisma n-agonal) tienen bastante dificultad. Determinar el número de caras y de aristas de un antiprisma a partir del número de lados del polígono de la base conlleva más dificultad para los estudiantes que el determinar estos números, o el número de vértices, para las restantes familias.

Se observan bastantes diferencias individuales respecto a la capacidad para simbolizar y para operar con n .

– Los estudiantes pueden llegar a comprender y utilizar diferentes procedimientos para hallar el número de ángulos de las caras de un ejemplo general generalizando los resultados parciales encontrados para cada piso o casquete. Sin embargo, se necesita un tiempo y de mayor atención para que los estudiantes puedan comprender la fórmula que se obtiene aplicando el número de ángulos de las caras que concurren en cada vértice y el número de vértices que tiene.

– Determinar las relaciones que ligan el número de ángulos diedros y el número de aristas y el número de ángulos de los vértices y el número de vértices no conlleva dificultad e incluso, cuando se cuestiona explícitamente, algunos estudiantes pueden explicar que las relaciones encontradas tienen sentido.

– Hallar el número de diagonales de las caras de un ejemplo concreto conlleva dificultad si la base tiene más de 4 lados. Si bien con las primeras tareas que hemos propuesto para ello los estudiantes pueden llegar a descubrir patrones a partir de resultados concretos, la mayoría no puede aún simbolizar y demostrar las relaciones correspondientes.

– Cuando en la unidad de enseñanza planteamos el problema de hallar el número de diagonales del espacio, éste conlleva dificultad incluso para ejemplos concretos de prismas; muy a menudo para número de diagonales del espacio se indica el número de diagonales del polígono de la base.

– Llegar a visualizar que el conjunto de diagonales de las caras del cubo y del dodecaedro está estructurado no conlleva dificultad con el modelo como soporte, pero sí que resulta difícil llegar a visualizar y a justificar que tenemos 2 tetraedros en un cubo y 5 cubos en un dodecaedro; en muchos casos se tiene que visualizar cada tetraedro, o cada cubo, por separado.

– En las listas de propiedades que elaboran los estudiantes para las subfamilias de sólidos incluyen algunas que no deberían estar en ellas; sin embargo, dirigidos por el profesor éstos pueden verificar si las propiedades que han señalado dejan fuera ejemplos de la familia considerada o se basan en parte de las caras en vez de en todas ellas. Pueden verificar si son correctos o no los grupos de propiedades que se indican como propiedades de la familia y las propiedades relativas a las medidas diferentes de las diagonales de las caras, de los ángulos de las caras, y de las diagonales del espacio.

En tareas en las que hay implicadas familias y propiedades

– Las tareas en las que se tiene que explicar si determinadas subfamilias verifican o no propiedades dadas o determinar las subfamilias que verifican determinadas propiedades tienen gran dificultad para los estudiantes cuando las planteamos por primera vez en la unidad de enseñanza propuesta; especialmente cuando las propiedades que se consideran no pertenecen a familias generales (los prismas, antiprismas, etc.) o tienen fuerte componente visual, o las subfamilias implicadas no son generales. En este tipo de tareas al principio se producen bastantes errores porque los estudiantes aplican las ideas erróneas que han incorporado en sus objetos mentales y que vamos a destacar en lo que sigue al referirnos a las conclusiones sobre los objetos mentales construidos.

Resultados que aclaran las caracterizaciones propuestas para los diferentes niveles de razonamiento de Van Hiele para la geometría de los sólidos, y que aportan información sobre el progreso de los estudiantes desde el dominio del primer nivel de razonamiento hasta el dominio del tercer nivel.

– Para las subfamilias establecidas con criterios visuales o con dos criterios de clasificación, aparecen problemas para delimitar todas las familias que están contenidas en ellas.

– Para las propiedades numéricas que incluyen además condiciones geométricas sobre sus elementos, o condiciones con gran componente visual y otras condiciones geométricas, a los estudiantes les resulta difícil averiguar las familias más generales que las verifican.

– Para las propiedades relativas a número de medidas diferentes para un tipo de ángulos, identificar las subfamilias de sólidos que las verifican presenta bastante dificultad. Muy pocos estudiantes se plantean el problema de determinar todos los polígonos que tienen el número de lados correspondiente según la familia que se considera y que cumplen las condiciones impuestas (por ejemplo, relativas a las medidas diferentes que tienen los ángulos diedros).

– La ordenación de las tareas–adivinanza en la que no se sigue el orden de las propiedades de las familias más generales a las más específicas conlleva bastante dificultad; muy a menudo, en las respuestas de los estudiantes no se ven reflejadas todas las soluciones posibles porque no se examinan todas las familias que se debería.

– Las tareas en las que se tienen que enumerar propiedades comunes a varias familias, o propiedades de una familia que no lo sean de otra, conllevan bastante dificultad para los estudiantes. Aun cuando ya se hayan realizado diversas tareas de descripción de familias, es muy usual que en las listas elaboradas por los estudiantes antes de estudiar las tareas en clase figuren propiedades que no deberían estar en ellas y que falten propiedades. También cabe destacar que muy pocos estudiantes aplican las inclusiones que existen entre las familias implicadas para simplificar una tarea y tampoco recurren a las otras tareas ya resueltas para utilizar sus explicaciones o sus resultados.

Además, la mayoría de los estudiantes no distinguen el problema de hallar propiedades de A que no lo sean de B ni tampoco de C del problema de hallar propiedades de A que no sean propiedades comunes a B y C.

En tareas relativas a relaciones de familias

– Tareas que conllevan bastante dificultad para los estudiantes, aunque las relaciones entre familias se consideren en términos de ejemplos son las siguientes: la construcción de diagramas con forma de red; establecer relaciones entre los cuadriláteros a partir de la construcción de éstos con varillas y chinchetas; verificar que se puede aplicar la analogía para resolver la clasificación de los prismas cuadrangulares en el plano si luego se hacen las traducciones correspondientes; justificar en el espacio las relaciones que existen entre familias de prismas cuadrangulares.

– Aplicar correctamente relaciones de familias en términos de propiedades también conlleva dificultad especial. En un principio, además de que sus respuestas presentan errores de diferentes tipos, algunos estudiantes no toman conciencia de que dar la relación de inclusión entre familias no es lo mismo que dar la inclusión entre sus grupos de propiedades.

Cuando ya se pueden indicar propiedades agrupadas no se señalan las de las familias más específicas que contienen a la dada.

Cuando se dominan estos problemas, todavía se tienen dificultades para eliminar las propiedades que son comunes a varias familias de las que sus grupos de propiedades no tienen relación de inclusión.

En tareas en las que se introducen y precisan conceptos relacionados y se construyen modelos que sirven como soporte

– Los estudiantes, con ayuda del profesor, pueden establecer que el dual de un poliedro arquimediano no puede ser arquimediano; que tiene todas las caras iguales, pero no regulares y vértices de varios órdenes, pero todos regulares. Sin embargo, tienen serias dificultades para determinar las propiedades que dejan de cumplirse cuando se incluyen los pares de poliedros formados por el sólido intersección y los envolventes de los tres modelos compuestos formados por pares de poliedros regulares duales. Tienen también dificultades para distinguir las propiedades que son propias del concepto de dualidad de poliedros de las que son propias de las familias de sólidos implicados, para las que se establece la relación de dualidad entre sus ejemplos.

– Los estudiantes pueden construir modelos de poliedros inscritos o intersectados, estimando el tamaño de la arista del modelo inscrito. Para que lleguen a determinar la relación entre las aristas de los poliedros implicados, en la mayoría de los modelos hay que dirigir la tarea y añadir más cuestiones o pistas para que, por una parte, los estudiantes lleguen a delimitar los elementos que forman el triángulo adecuado en cada caso, y por otra, determinen la medida de los elementos del triángulo seleccionado que son necesarios para hallar el elemento buscado.

– Para que los estudiantes puedan encontrar relaciones entre las aristas de los poliedros que forman los modelos de pares de poliedros regulares duales inscrito uno o en otro o intersectados entre sí, o para que puedan hallar la medida de los ángulos diedros de los poliedros regulares, la intervención del profesor es imprescindible. La mayoría de los estudiantes no son capaces de hallar el ángulo diedro del dodecaedro ni del icosaedro, incluso después de que se determine el ángulo diedro de los otros poliedros regulares prestando mucha atención en lo que se mantiene y cambia al pasar el problema de un poliedro a otro.

– Una vez que se han hallado los ángulos diedros, si bien hallar la arista del poliedro inscrito a partir del la del circunscrito no suele presentar problema para los estudiantes, si se dan las sugerencias que indicamos en los comentarios de las tareas propuestas para la fase 4 del nivel 3 (apartado 2.6.3), encontrar relaciones entre las aristas de los poliedros que forman los modelos compuestos, en muchos casos requiere de ayuda individualizada por un problema de visión espacial.

Resultados relativos a los procesos de definir y de demostrar

– Los estudiantes tienen dificultades para seleccionar conjuntos "más o menos" mínimos de propiedades. Con frecuencia, en las listas de propiedades que dejan hay propiedades de más o no son suficientes.

– Pueden enumerar todos los elementos de determinadas subfamilias de prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides y justificar que no pueden haber más. Sin embargo, necesitan de sugerencias para demostrar que hay antiprismas y pirámides de caras iguales, además del octaedro y tetraedro respectivamente, que tienen por caras triángulos isósceles, y que hay bipirámides de caras iguales que tienen por caras triángulos escalenos. O para demostrar que sólo hay 5 poliedros regulares convexos.

– Es necesaria la intervención del profesor, o dar pistas en los enunciados de las tareas propuestas, para que los estudiantes puedan dar pruebas deductivas que tengan un soporte visual, para justificar las fórmulas que dan el número de diagonales del espacio de determinadas familias de sólidos, o para hallar el número de diagonales de algunos poliedros concretos. Y aún así, algunos estudiantes cometen errores de diferentes tipos.

– Dar pruebas visuales o de otro tipo, o adaptar las que ya se tienen, para demostrar propiedades de determinadas familias de sólidos relativas a esferas inscrita, circunscrita y media, o a punto de corte o medida de alguno de sus elementos (diagonales del espacio y altura) conlleva bastante dificultad para los estudiantes.

– Para que algunos estudiantes puedan dar pruebas visuales basadas en la experimentación, para demostrar que algo no puede ser, es necesario que se den pistas o ayudas. Al no haber ningún ejemplo de estas características no pueden obtenerse en la construcción, pero para los problemas propuestos en la unidad de enseñanza algunos estudiantes pueden apoyarse en ésta para demostrar que no pueden haber ejemplos que cumplan las características indicadas.

– Cuando los estudiantes ya pueden establecer relaciones entre familias, pueden comprender que si las relaciones son equivalentes, la manera de justificarlas será equivalente también. Pueden comprender también que una prueba que podemos dar para las relaciones de la forma, *no hay ningún elemento de A que sea de B,* puede ser la que demuestra que *todos A son de la familia complementaria de B.*

– Es usual encontrar respuestas en las que se extiendan a los sólidos cóncavos algunas propiedades señaladas para las familias cóncavas y que éstos no verifican. Cuando ya se han trabajado las demostraciones mediante contraejemplos, aunque los estudiantes dispongan de material para hacer o verificar predicciones, sin ayuda del profesor sólo encuentran los contraejemplos para algunas propiedades de éstas (utilizando razonamientos de un sólo paso) pero no para otras.

– Los estudiantes dirigidos por el profesor no tienen problemas para encontrar los contraejemplos que muestran que algunas implicaciones son falsas. Tampoco tienen dificultades para justificar que otras implicaciones relativas a pirámides y bipirámides son correctas en el caso límite.

– Algunos estudiantes que comprenden que para demostrar que una implicación es falsa se busca un contraejemplo y que si se demuestra que no se puede encontrar un contraejemplo, entonces la implicación es correcta, no lo pueden aplicar aún en las implicaciones en las que la primera parte se verifica para todos los ejemplos posibles o no se verifica para ningún ejemplo; tienen especial dificultad para interpretar y juzgar implicaciones en las que la primera parte no puede ocurrir.

– Algunos estudiantes que pueden enunciar implicaciones de manera correcta incluyendo condiciones en otra que es falsa, cuando las implicaciones tienen referencia a familias de sólidos, aún tienen dificultades para distinguir una implicación y su recíproca y para demostrar que de una definición de una familia de sólidos se deducen el resto de las propiedades de ella.

Sobre la constitución de los objetos mentales

Tras la experimentación hemos comprobado la relevancia de la unidad de enseñanza y de los distractores para la constitución de los objetos mentales, por su clara influencia.

– Las familias y subfamilias de sólidos, las propiedades y los elementos de los sólidos que hemos considerado como soporte para desarrollar la unidad de enseñanza propuesta, y de los que damos cuenta en la sección 2.1, proporciona un buen contexto para los objetivos propuestos en este trabajo.

– La gran variedad de propiedades, ideas y procedimientos con los que los estudiantes que han participado en nuestras experimentaciones se han familiarizado, y la gran actividad matemática que han provocado sus intervenciones al desarrollar algunas tareas, corroboran que las tareas propuestas, junto con las sugerencias que indicamos en los comentarios correspondientes para cuando se lleve a cabo la instrucción, pueden contribuir a la mejora del proceso de enseñanza/aprendizaje de los sólidos.

– En las tareas presentadas en el capítulo 2 utilizamos las representaciones físicas de los sólidos (los modelos y los armazones) con tres papeles diferentes: se utilizan como soporte para comprender; para lo que Alsina et al. (1997, p. 27) consideran como "segundo estadio importante, sin el cual la comprensión quizás dejaría de tener sentido, que es el de poder *recordar* y por ende *comunicar los conceptos*"; o para originar ideas a partir del propio procedimiento de construir o generar los modelos. Queremos llamar la atención sobre el importante papel que tienen las diferentes representaciones físicas utilizadas, con los diferentes papeles que acabamos de señalar, en la constitución de los objetos mentales.

– Las tareas incluidas en la unidad de enseñanza en las que se conecta el estudio de la geometría con el entorno físico del estudiante han resultado interesantes, bien para aprovechar las primeras experiencias que tiene el niño con objetos del espacio para desarrollar actividad, bien para provocar discusiones entre los estudiantes que tienen gran contenido didáctico; como por ejemplo, sobre las transformaciones permitidas y prohibidas en los objetos en el entorno cotidiano y en el contexto geométrico, o sobre lo que es pertinente o no para los modelos en un contexto geométrico.

– Los diferentes procedimientos utilizados para construir o generar sólidos se han mostrado apropiados para que los estudiantes incorporaran en los objetos mentales construidos con las tareas propuestas para el primer nivel una gran variedad de ejemplos de las familias de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides; las características visuales y las relativas al tipo de caras, su número, así como el de aristas y vértices, y su disposición en el espacio; ideas de las bases y de las caras laterales que rompen con las ideas de estos conceptos que provienen del entorno; parecidos y diferencias entre los ejemplos de una familia o entre varias familias; criterios que permiten establecer familias con fuertes características visuales; algunas relaciones entre determinadas familias de sólidos, entre los elementos de sus ejemplos y entre los sólidos y las figuras planas que se pueden obtener como sección; las primeras ideas ingenuas de las familias de sólidos y de sus elementos y una gran variedad de términos geométricos.

– Las tareas de descripción de familias, asociación de propiedades a familias de sólidos, selección de familias que cumplen unas propiedades dadas, tareas de descubrir sólidos cuando se van dando propiedades progresivamente y tareas en las que se aplica el análisis de las familias para encontrar desarrollos de alguno de sus ejemplos son convenientes para que se lleguen a incorporar los atributos críticos de las familias de sólidos estudiadas.

– Para ampliar los objetos mentales es necesario tratar diferentes tipos de clasificación (ver sección 2.1), abordar el problema de lo que puede considerarse o no como criterio de clasificación para un universo dado, determinar los criterios que hay implicados en subfamilias que ya se han establecido y tratar otros problemas que están ligados a la clasificación

– Las tareas que introducen las primeras ideas para familias de sólidos o de sus elementos están inmersas en procedimientos de construir o generar sólidos; las primeras ideas que damos sobre algunos conceptos relacionados se basan en un mundo de ejemplos; éstas se van precisando como consecuencia de ejemplos que van surgiendo en el contexto de la actividad. Estas tareas se han mostrado muy adecuadas para que los estudiantes puedan experimentar, reflexionar y comprender que las ideas de los conceptos se van precisando a medida que se van encontrando otros posibles ejemplos que nos obligan a ello; que los ejemplos que aparecen, incluso pueden crear conflicto con la idea que se tenía hasta entonces para otro contenido matemático; y que los sólidos que provocan actividad en el proceso de precisión de ideas de determinados conceptos pueden jugar diferente papel: algunos corresponden a no ejemplos del concepto que sí que verifican la idea dada para él; otros responden a modelos que en el objeto mental construido se incluyen como ejemplos del concepto y, sin embargo, no verifican la idea dada para él. Las tareas también han permitido que se discutiese las posibles maneras de continuar la actividad matemática en cada caso.

– De la misma manera, el resto de tareas propuestas en la unidad de enseñanza se mostraron muy adecuadas para que los estudiantes pudieran tratar los problemas matemáticos que indicamos en el capítulo 2 en los comentarios correspondientes. Éstas también permitieron que los estudiantes que participaron en nuestras experimentaciones adquirieran objetos mentales suficientemente ricos en ejemplos, atributos, relaciones, ideas, clasificaciones para una gran variedad de contenidos geométricos. Algunos estudiantes también comprendieron y elaboraron algunas definiciones y demostraciones.

– Hemos comprobado que la gran tendencia de los alumnos a dejarse llevar por su percepción visual, especialmente en los primeros niveles de razonamiento, genera en ellos gran número de ideas erróneas; éstas se plasman a través de ejemplos, atributos y relaciones, que si bien no siempre son incorrectos, no permiten a los estudiantes aplicar sus conocimientos adecuadamente. Las causas que motivan estas ideas las denominamos distractores visuales.

– El origen diferente de las causas que motivan en los alumnos las ideas erróneas comentadas anteriormente nos ha permitido clasificar los distractores según proceden: de las diferentes representaciones físicas de los sólidos (modelos físicos con los que se trabaja), de los ejemplos seleccionados para introducir los conceptos o de cómo se muestran éstos (consecuencia de la enseñanza recibida) y de la dificultad para que se haga una lectura geométrica.

– Las propias representaciones físicas de los sólidos ocasionan a los alumnos una serie de dificultades y les conducen a cometer errores. Ello se debe a que la percepción influye en la construcción de una interpretación de los modelos de los sólidos o de sus elementos, si no se tienen los suficientes conocimientos teóricos geométricos para ir más allá de la primera lectura perceptiva.

- Los aspectos perceptivos de los modelos físicos de los sólidos entorpecen o favorecen la lectura geométrica de algunos estudiantes, al atraer la atención sobre elementos del modelo no pertinentes para esa lectura. Este resultado también se presenta en Laborde (1996, p. 69) al interpretar los dibujos geométricos en vez de las representaciones físicas de los sólidos.
- Hay estudiantes que tienen dificultades para abstraerse de las imperfecciones que pueden venir del propio material o de la construcción y para separar las formas que "se parecen bastante" a una forma dada de las que "tienen la misma forma" que ella.
- Cuando se presentan los armazones como representaciones físicas de los ejemplos de las familias de sólidos, para algunos estudiantes aceptar como atributo de los poliedros que las caras encierran perfectamente un espacio entra en conflicto con la materialización del poliedro a través de su armazón. Es necesario advertir que no hay que tomar en

consideración el que el interior o las caras estén materializadas, siempre que con la representación que se trabaje quede perfectamente delimitada la forma del sólido.

– Los distractores que hemos delimitado, que son consecuencia de la enseñanza recibida son: la familiaridad que se tenga con los objetos presentados como ejemplos de una familia de sólidos, la esbeltez o achatamiento y la posición.

- Hemos comprobado que con los modelos de los sólidos se forman con el tiempo prototipos de objetos geométricos como resultado de influencias a la vez perceptivas y culturales. El modelo prototipo de un paralelepípedo es el que tiene por caras paralelogramos prototipo: con lados y ángulos de dos medidas. Este problema también se ha puesto de manifiesto en las investigaciones sobre polígonos de Hershkowitz (1990) (ella lo llama *fenómeno prototipo y* juicios prototípicos), que hemos comentado en la sección 1.2, y también con los dibujos de objetos geométricos (ver Laborde, 1996).
- La posición de los objetos influye considerablemente en su identificación. Hecho que ya ha sido subrayado por otros investigadores. En la sección 1.2 ya hemos hablado de lo que Vinner & Hershkowitz (1983) llaman *distractores de orientación*. Freudenthal también comenta este problema en varias ocasiones y pronostica que esto es una consecuencia de la enseñanza recibida, que tiende a presentar los objetos con dibujos, en una posición dada.

– Hemos constatado que hay factores perceptivos intrínsecos a los modelos que también entorpecen la lectura geométrica. Concretamente hemos observado que en la identificación de la igualdad y paralelismo de las aristas hay distractores de los que Vinner & Hershkowitz (1983) llaman *distractores de orientación* (ver apartado 1.2.1).

– Los ejemplos, propiedades, relaciones e ideas que los estudiantes que participaron en nuestras experimentaciones incluyeron en sus objetos mentales para las familias de sólidos estudiadas se basaban especialmente en representaciones materiales de los sólidos y en las estrategias que se usaron al construir o generar los ejemplos. También incorporaron las diferentes representaciones materiales con las que se presentaron los ejemplos y las acciones, y propiedades de las acciones, que se realizaron bien para construir o generar los ejemplos, para descubrir las propiedades y las relaciones, para llegar a precisar ideas sobre las familias de sólidos o sobre sus elementos, para establecer clasificaciones, etc.

– Los ejemplos y no ejemplos dependen de la enseñanza recibida. Hemos constatado que previo al desarrollo de la unidad de enseñanza los estudiantes estaban muy poco familiarizados con los no ejemplos y con el papel que pueden jugar para delimitar los atributos críticos de la familia correspondiente, y tenían un mundo muy limitado de ejemplos y de atributos de las familias de sólidos. Ello es consecuencia de la falta o inapropiada instrucción que habían recibido; deficiencias que nos parece que fueron subsanadas con el desarrollo de nuestra unidad de enseñanza.

– Hay un orden jerárquico en el logro de ejemplos de conceptos; hecho ya constatado por Hershkowitz (1990). Para las familias de prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides, y para las subfamilias que establecemos en ellas, los ejemplos que más peso tienen en el objeto mental correspondiente son generalmente los que tienen la lista de atributos "más grande":

- Para las familias de prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides, los ejemplos en los que se piensa primero para basar las respuestas son los rectos de base(s) regular(es) que tienen dos medidas para las aristas. Sin embargo, cuando se introduce también como ejemplos los de las subfamilias con características visuales más fuertes (por ejemplo, los prismas cóncavos y los oblicuos) y se les presta la misma atención que a sus familias dicotómicas, éstos se incorporan rápidamente en el objeto mental que se construye a partir las tareas propuestas para el nivel 1, y llegan a tener gran peso, ya que tienen atributos visuales que resultan muy llamativos.
- Como consecuencia de la instrucción, de las dos familias dicotómicas que se establecen al clasificar, los ejemplos que vuelven a tener más peso son los de la subfamilia que tiene más atributos geométricos: los rectos, los convexos, etc.
- Las familias correspondientes de caras regulares en un principio apenas se tienen en consideración, pero a medida que avanza la instrucción éstos se llegan a tener en cuenta.
- En las familias muy específicas también tienen más peso las subfamilias con más atributos, siempre que éstas no tengan asociado otro nombre y correspondan a subfamilias a las que se les ha prestado mucha atención. En este caso, se incorporan atributos irrelevantes para las familias que excluyen a estas familias específicas como ejemplos.

– Algunos ejemplos y no ejemplos se incluyen de manera incorrecta en los objetos mentales constituidos para algunas familias de sólidos.

- El no prestar suficiente atención a la clasificación que establece algunas familias lleva a que se incluyan como ejemplos de ellas subfamilias que no lo son, o a que se excluyan otras que sí lo son; por ejemplo, se incluye el cilindro como ejemplo de poliedro y no se incluye los prismas de bases cóncavas y caras laterales cuadrados como ejemplos de prismas de caras laterales regulares.

- Incluso después de la instrucción, es muy usual que los modelos formados por caras de la misma clase (triángulos, cuadriláteros, etc.) no se identifiquen correctamente como ejemplos de prismas o de antiprismas.

– Al igual que señala Hershkowitz (1990), nuestros resultados confirman que hay evidencia de que en el objeto mental construido se incluyen atributos irrelevantes que generalmente tienen fuertes características visuales, son los que se incorporan en primer lugar y actúan como distractores. También hemos encontrado otros atributos, relaciones e ideas erróneas que son comunes a una cantidad de estudiantes lo suficientemente amplia como para prestarles atención.

– Además de las ideas erróneas que pueden ser causadas por los distractores señalados, hemos delimitado otras, que hemos agrupado según estén ocasionadas:

- Por problemas de lenguaje, en el sentido de que algún término funciona como distractor: cuando se aplica el significado que tiene el término en el contexto cotidiano y que además se puede haber fomentado con la instrucción, o bien se tiene en cuenta que el nombre dado sólo hace referencia a parte de las caras o no hace referencia a ellas.
- Por basar los juicios en subfamilias; por lo que se dejan fuera ejemplos de ella.
- Por basar los juicios en parte de la figura en vez de tener en cuenta toda ella.
- Por el mismo proceso de enseñanza/aprendizaje, bien por la introducción de conceptos a partir de familias específicas, bien por los modelos físicos empleados, o por las sugerencias dadas.
- Por la extensión de una propiedad que se cumple en un polígono o en una familia de sólidos a otro polígono u otra familia que no la verifica; o por la extensión de resultados del plano a los elementos análogos en el espacio; alguna de estas propiedades también se puede interpretar como que sólo se basa en una subfamilia o en juicios visuales.
- Por una incomprensión de las expresiones "como mucho", "como mínimo", "tantas medidas diferentes como", plasmada en un incorrecta interpretación o negación de éstas.
- Por la aplicación de ideas erróneas al establecer relaciones de inclusión o exclusión entre familias.
- Por los conceptos implicados que se refieren a varios elementos.

– Respecto a los atributos que se incluyen en los objetos mentales construidos para algunos contenidos matemáticos, cabe señalar también que algunos que inicialmente, a nivel visual, tienen un gran peso en el objeto mental constituido (por ejemplo, el de las clasificaciones que son dicotomías) a medida que se avanza en la instrucción pueden dejar de ser relevantes (por no insistir en ellos) hasta llegar al extremo de que pueden no tenerse en cuenta cuando entran en conflicto con una parte del objeto mental constituido relativo al mundo de ejemplos que se incluyen en algunas subfamilias.

FUTURAS INVESTIGACIONES

En el capítulo 1 hemos señalado que del fascinante trabajo de Freudenthal sólo íbamos a hacer referencia al que fundamentaba teóricamente nuestras tomas de postura ante diferentes concepciones que se presentan sobre la naturaleza de la geometría o su enseñanza y al que ha dado respuesta a una gran variedad de cuestiones que nos han surgido al diseñar y comentar la unidad de enseñanza propuesta en el capítulo 2, con las reflexiones y consecuencias didácticas que indica para algunos conceptos situados en contextos geométricos. Cabe señalar que sólo hemos hecho referencia al minucioso análisis fenomenológico que realiza (Freudenthal, 1983) de determinados contenidos matemáticos en cuanto a que parte de la terminología que introduce la hemos incorporado en este trabajo. Queremos llamar la atención ahora sobre el análisis fenomenológico realizado, pues aunque en algunos casos no corresponde a conceptos geométricos, sirve como ejemplo para comprender lo que Freudenthal entiende por este tipo de análisis. De nuevo remitimos al trabajo de Puig (1997, pp. 48-51) donde se da respuesta clara a las siguientes cuestiones: ¿Qué entiende Freudenthal por *hacer fenomenología?* ¿Qué diferencias existen entre la *fenomenología, fenomenología didáctica, fenomenología genética, fenomenología histórica?* ¿En qué orden hay que realizar los diferentes tipos de análisis fenomenológicos para organizar la enseñanza?

En el trabajo que presentamos en esta memoria, no se contempla en ninguna sección los análisis fenomenológicos realizados sobre algunos contenidos geométricos implicados en la unidad de enseñanza propuesta; la lectura de este trabajo sí que permite entrever que hemos realizado un esbozo de análisis fenomenológico, histórico o didáctico para algunos contenidos. Una revisión del contenido de los apartados 1.2.1 y 1.4.3 del capítulo 1, así como de otras secciones del capítulo 2 (la sección 2.1 y las páginas introductorias a las unidades de enseñanza propuestas para los diferentes niveles de razonamiento), o alguna de las notas y comentarios señalados, así como las conclusiones expuestas en este capítulo, dan muestras de ello. Por otro lado, las investigaciones que hemos comentado en la sección 1.2 dan cuenta de que también ha habido un intento de realizar un análisis genético para algunos conceptos. Sin embargo, estos intentos no han sido lo completos que sería deseable. Si tenemos en cuenta que del trabajo de Freudenthal se desprende que los constituyentes del buen objeto mental podrían determinarse gracias al análisis fenomenológico del concepto correspondiente, sería aconsejable realizar análisis de fenomenología pura para tantos contenidos matemáticos como se creyera conveniente, o por lo menos esbozos del mismo, antes de diseñar una secuencia de enseñanza.

"Freudenthal dice que al escribir una fenomenología didáctica uno puede pensar que debería estar basada en una fenomenología genética, pero que esta idea es errónea. El orden en que hay que desplegar los distintos tipos de análisis fenomenológico comienza por la pura fenomenología (para lo que basta conocer las matemáticas y sus aplicaciones), se completa con una fenomenología histórica, sigue por una fenomenología didáctica (para lo que hay que conocer el proceso de enseñanza/aprendizaje) y termina, en todo caso, con una fenomenología genética. Ningún análisis fenomenológico puede resultar efectivo cuando se organice posteriormente la enseñanza a partir de él si no se sustenta en un sólido análisis de pura fenomenología" (Puig, 1997, p. 51).

Una manera muy interesante de continuar la investigación que presentamos en esta memoria podría ser realizando, para diferentes conceptos relacionados con los sólidos, diferentes esbozos de análisis fenomenológico de los diferentes tipos, relacionados o no con la adquisición de conceptos. Estos análisis se podrían tener en cuenta para que en un trabajo posterior se organizara la enseñanza de los sólidos. El trabajo es desbordante, no es necesario entrar en detalles; pero uno puede comenzar realizando análisis de fenomenología pura para algunos contenidos geométricos que previamente se han seleccionado.

En los comentarios a las tareas propuestas ya recopilamos una gran variedad de datos relativos a los análisis de los conceptos y los procesos matemáticos que tratamos, a los análisis de las tareas que proponemos para ello, sobre procesos de aprendizaje de los estudiantes y sobre sugerencias que pueden darse en la instrucción. Pero dado que los datos obtenidos de los diferentes tipos de análisis realizados los hemos interpretado desde el marco teórico que hemos indicado en el primer capítulo (el modelo de Van Hiele, parte del trabajo de Freudenthal y la teoría de Vinner y sus colaboradores) el trabajo que se presenta aquí también podemos continuarlo tomando como marco teórico la fenomenología para integrar en los diferentes tipos de análisis fenomenológicos todos los datos obtenidos.

En los diferentes capítulos ya hemos señalado otras carencias o defectos de las propuestas que hemos presentado en esta memoria y también hemos sugerido en diversas ocasiones la conveniencia de continuar con otras investigaciones. A continuación recopilamos otras propuestas para trabajos futuros que consideramos interesantes:

- Diseñar actividades concretas para la enseñanza de los sólidos a partir de los modelos de actividades que presentamos en esta memoria, para que puedan aplicarse directamente en las aulas de primaria y de secundaria obligatoria, o con estudiantes de otros niveles educativos.

- Usar los tests elaborados para diseñar otros que puedan convertirse en instrumentos de evaluación para estudiantes de Educación primaria y de secundaria obligatoria, o con estudiantes de otros niveles educativos.

- Experimentar las actividades concretas que se pueden diseñar a partir de la unidad de enseñanza que proponemos en esta memoria con estudiantes de diferentes niveles educativos.

- Los comentarios dados para las tareas propuestas explican con detalle los problemas matemáticos que permiten abordar. Una nueva organización de las tareas puede surgir considerando los contenidos matemáticos y todas las tareas con las que podemos abordarlos. Así, podemos organizar la enseñanza de la geometría de los sólidos en torno a los procesos matemáticos; nos podemos fijar en las tareas con las que se trabaja la introducción y precisión de ideas de los conceptos; etc.

- Una vez precisadas las características de los niveles 1, 2 y 3 de razonamiento de Van Hiele, que es el rango de nivel de razonamiento correspondiente a los estudiantes que han participado en nuestra investigación, sería interesante realizar investigaciones con grupos de estudiantes la mayoría de los cuales estén en los niveles 3 y 4, para delimitar los descriptores para el nivel 4.

- Usar los tests que hemos diseñado con otros grupos de estudiantes, para determinar las fuentes (defecto de los ítems, falta de tiempo para responder al test completo, falta de conocimientos geométricos necesarios, método de enseñanza empleado, etc.) de los "errores" que se han presentado en nuestros resultados y así, en caso de que éstos provengan de los propios ítems, determinar los cambios necesarios que mejorarían los tests.

- Usar los tests elaborados y los modelos de respuestas que proponemos en esta investigación para hacer estudios sobre la evolución del nivel de razonamiento de diversos colectivos de estudiantes en la geometría de los sólidos, con objeto de hacer comparaciones entre diferentes colectivos o de observar el progreso de los mismos individuos en un cierto periodo de tiempo (un cuatrimestre, un curso o durante varios años consecutivos). Los resultados de estas investigaciones reforzarían o refutarían las hipótesis que nosotros hemos hecho basadas en los resultados que hemos obtenido. Como ya hemos señalado, dado que en nuestras investigaciones ha habido un porcentaje muy pequeño de estudiantes que tuviesen un dominio alto del tercer nivel o que razonasen en nivel 4, nuestras hipótesis necesitan verificarse especialmente con otras investigaciones que se realicen con grupos de estudiantes en los cuales haya bastantes estudiantes que estén en los niveles 3 y 4.

- Desarrollar una unidad de enseñanza para estudiar los sólidos organizadas según los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele tomando como soporte para las actividades de todos los niveles de Van Hiele, entre otras, las familias del cilindro, cono y esfera.

- Diseñar unidades de enseñanza sobre otras áreas de la geometría (en particular sobre medida de superficies y de volúmenes de sólidos) organizadas según los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele.

REFERENCIAS

Alsina, C.; Burgués, C. y Fortuny, J. M. (1988): *Materiales para construir la geometría.* (Síntesis: Madrid).

Alsina, C.; Fortuny, J. M. y Pérez, R. (1997): *¿Por qué geometría?. Propuestas didácticas para la ESO.* (Síntesis: Madrid).

Baena, J.; Coriat, M.; Marín, A. y Martínez, P. S. (1996): *La esfera.* (Síntesis: Madrid).

Bell, A. W. (1976): A study of pupil's proof-explanations in mathematical situations, *Educational Studies in Mathematics,* vol. 7, 1, pp. 23-40.

Bell, A. W. (1979): The learning of process aspects of mathematics, *Educational Studies in Mathematics,* vol. 10, 3, pp. 361-387.

Blake, R. N. (1985): The spider and the fly: A geometric encounter in three dimensions, *The Mathematics Teacher,* vol. 78, 2, pp. 98-104.

Bobango, J. C. (1987): *Van Hiele levels of geometric thought and student achievement in standard content and proof writing: The effect of phased-based instruction.* (Univ. Microfilms: Ann Arbor, EE.UU.).

Burger, W. F. & Shaughnessy, J. M. (1986): Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry, *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 17, 1, pp. 31-48.

Burger, W. F. & Shaughnessy, J. M. (1990): *Assessing children's intellectual growth in geometry* (final report). (Oregon State University: Corvallis, EE.UU.).

Carroll, W. M. (1988): Cross sections of clay solids, *Arithmetic Teacher,* vol. 35, 7, pp. 6-11.

Castelnuovo, E. (1979): *La Matematica. La geometria.* [Trad. catalana: *La matematica. La geometria.* (Ketres: Barcelona), 1981].

Clements, D. H. (1992): Elaboraciones sobre los niveles de pensamiento geométrico, en Gutiérrez, A., ed. (1992): *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría.* (CINVESTAV-PNFAPM: México), pp. 16-43.

Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992): Geometry and spatial reasoning, in Grouws, D. A. (1992): *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* (Macmillan: N. York), pp. 420-464.

Cooper, M. (1992): Three-Dimensional Symmetry, *Educational Studies in Mathematics,* vol. 23, pp. 179-202.

Cooper, M. & Sweller, J. (1989): Secondary school students' representations of solids, *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 20, 2, pp. 202-212.

Corberán, R.; Huerta, P.; Margarit, J. B.; Peñas, A. y Ruiz, E. (1989): *Didáctica de la geometria: Modelo de Van Hiele.* (Universitat de València: Valencia).

Corberán, R.; Gutiérrez, A.; Huerta, P.; Jaime, A.; Margarit, J. B.; Peñas, A. y Ruiz, E. (1991): *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometria en Enseñanza Media basada en el Modelo de razonamiento de Van Hiele.* (Memoria final del Proyecto de Investigación). (CIDE: Madrid).

Corberán, R.; Gutiérrez, A.; Huerta, P.; Jaime, A.; Margarit, J. B.; Peñas, A. y Ruiz, E. (1994): *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometria en Enseñanza Secundaria basada en el Modelo de razonamiento de Van Hiele.* (Ministerio de Educación y Ciencia: Madrid).

Coxeter, H. S. M. (1974): *Regular Complex Polytopes.* (Cambridge University Press: Cambridge).

Crowley, M. L. (1987): The Van Hiele Model of the development of geometric thought, in NCTM (1987): *Learning and teaching geometry, K-12,* 1987 Yearbook. (NCTM: Reston, EE.UU.), pp. 1-16.

Cundy, H. M. & Rollett, A. P. (1961): *Mathematical Models.* (Oxford U. P.: Londres). [Trad. francesa: *Modèles Mathématiques.* (CEDIC: París), 1978].

Chang, K. Y. (1992): *Spatial and geometric reasoning abilities of college students (spatial reasoning, CAI).* (Boston University). (Univ. Microfilms: Ann Arbor, EE.UU.).

Davey, G. & Holliday, J. (1992): Van Hiele Guidelines for Geometry,*The Australian Mathematics Teacher*, vol. 48, 2, pp. 26-29.

Darche, M. et Pitou, F. (1984): *Polyedres dans L'Espace.* Col. Les dossiers du plot. (Régionale d'Orleans-Tours de L' A.P.M.E.P: Orleans)

Del Grande, J. (1990): Spatial sense,*Arithmetic Teacher*, vol. 37, 6, pp. 14-20.

Denis, L. P. (1987): *Relationships between stage of cognitive development and Van Hiele level of geometric thought among Puerto Rican adolescents.* (Univ. Microfilms: Ann Arbor, EE.UU.).

Dickson, L.; Brown, M. & Gibson, O. (1984): *Children Learning Mathematics: A Teacher's Guide to Recent Research.* (Holt, Rinehart and Winston: Oxford). [Trad. castellana: *El aprendizaje de las matemáticas.* (Ministerio de Educación y Ciencia: Madrid), 1991].

Fielker, D. S. (1979): Strategies for Teaching Geometry to Younger Children, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 10, 1, pp. 85-133.

Fielker, D. S. (1981-1983): Removing the Shackles of Euclid, *Mathematics Teaching* . Nos. 95-104. [Trad. castellana: *Rompiendo las cadenas de Euclides.* (Ministerio de Educación y Ciencia: Madrid), 1987].

Fortuny, J. M. (1988): *Avaluació de la jerarquia de les habilitats de percepció espacial estructural.* (CIRIT: Barcelona).

Freudenthal, H. (1970): Un cours de géometrie, in UNESCO (1970): *New trends in mathematics teaching*, vol. III. (UNESCO: París), pp. 309-314.

Freudenthal, H. (1971): Geometry Between the Devil and the Deep Sea, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 3, 2/4, pp. 413-435.

Freudenthal, H. (1973): *Mathematics as an educational task.* (D. Reidel: Dordrecht).

Freudenthal, H. (1978): ¿Enseñanza de las matemáticas modernas o enseñanza moderna de las matemáticas?, en Piaget, J. et al. (1978): *La enseñanza de las matemáticas modernas.* (Alianza: Madrid), pp. 159-173.

Freudenthal, H. (1983): *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* (D. Reidel: Dordrecht).

Freudenthal, H. (1984): En todos los niveles: ¡Geometría!,*III Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las matemáticas, (1984)*, (ICE de la U. de Zaragoza: Zaragoza), pp. 15-34.

Fuys, D.; Geddes, D. & Tischler, R. (1984): *English translations of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele.* (School of Education, Brooklyn College: N. York).

Fuys, D.; Geddes, D. & Tischler, R. (1988): *The Van Hiele Model of thinking in geometry among adolescents* (Journal for Research in Mathematics Education Monograph nº 3). (NCTM: Reston, EE.UU.).

Gaulin, C. (1985): The need for emphasizing various graphical representations of 3-Dimensional shapes and relations, in Streefland, L., ed. (1985): *Proceedings of the 9th international conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (State Univ. of Utrech: Holanda), pp. 53-71.

Guillén, G. (1991): *El mundo de los poliedros.* (Síntesis: Madrid).

Guillén, G. (1996): Identification of Van Hiele levels of reasoning in three-dimensional geometry, en Puig, L. y Gutiérrez, A., eds. (1996): *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (Universitat de València: Valencia), pp. 43-50.

Guillén, G.; Jaime, A.; Cáceres, M. y Gutiérrez, A. (1992): *La enseñanza de la geometría de sólidos en EGB.* (Memoria final del Proyecto de Investigación). (Institución Valenciana de Estudios e Investigación "Alfonso el Magnánimo". Valencia).

Gutiérrez, A. (1992a): Exploring the links between Van Hiele levels and 3-dimensional Geometry, *Structural Topology,* vol. 18, pp. 31-48.

Gutiérrez, A. (1992b): Procesos y habilidades en visualización espacial, en Gutiérrez, A. (1992): *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. Geometría.* (CINVESTAV-PNFAPM: México), pp. 44-59.

Gutiérrez, A. (1996): Visualization in 3-Dimensional Geometry: In search of a framework, en Puig, L. y Gutiérrez, A., eds. (1996): *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.*, 4 vols. (Universitat de València: Valencia), pp. 3-19, vol. 1.

Gutiérrez, A.; Fortuny, J. M. & Jaime, A. (1988): *Van Hiele levels and visualization in three dimensions,* texto de la ponencia presentada en el Topic Group "Visualization" del 6º ICME, manuscrito.

Gutiérrez, A. y Jaime, A (1987): Estudio de las características de los niveles de Van Hiele, in Bergeron, J. C., Herscovics, N. & Kieran, C., eds. (1987): *Proceedings of the 11th International Conference for the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Montreal: Canada), pp. 131-137.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1989): Bibliografía sobre el Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, *Enseñanza de las Ciencias,* vol. 7, 1, pp. 89-95.

Gutiérrez, A.; Jaime, A. y Fortuny, J. M. (1991): An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels, *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 21, 3, pp. 237-251.

Harris, M. (1987): Math in work-another look at rectangles, in Hershkowitz, R. & Vinner, S., eds. (1987): *Geometry working group report from the 10th Conference and some subsequent reactions* (pp. 9-10). Report presented at the *11th* International Conference for the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Hartz, V. (1981): Making solid geometry solid, *Mathematics Teaching,* nº. 96, pp. 14-16.

Hershkowitz, R. (1987): The adquisition of concepts and misconceptions in basic geometry-or when "a little learning is a dangerous thing", in Novak, J. D. ed. (1987): *Proceedings of the Second International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics.* (Cornell University: Ithaca, NY), pp. 238-251.

Hershkowitz, R. (1990): Psychological aspects of learning geometry, in Nesher, P. & Kilpatrick, J. (1990): *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (Cambridge U.P.: Cambridge, G.B.), pp. 70-95.

Hershkowitz, R. & Vinner, S. (1982): Basic geometric conceps - Definitions and images, in Vermandel, A., ed. (1982): *Proceedings of the 6th International Conference of the the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (Antwerp: Holanda), pp. 18-23.

Hershkowitz, R. & Vinner, S. (1984): Children's concept in elementary geometry-A reflection of teacher's concepts, in Southwell et al., eds. (1984): *Proceedings of the 8th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (Sydney: Australia), pp. 63-69.

Hershkowitz, R. & Vinner, S., eds. (1987): *Geometry working group report from the 10th conference and some subsequent reactions.* Report presented at the 11th International Conference for the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (Montréal: Canada).

Hershkowitz, R.; Bruckheimer, M. & Vinner, S. (1987): Activities with teachers based on cognitive Research, in NCTM (1987): *Learning and teaching geometry, K-12.*, 1987 yearbook. (NCTM: Reston-VA), pp. 222-235.

Hoffer, A. (1977): *Mathematics Resource Project: Geometry and visualization.* (Creative Publications: Palo Alto, USA).

Hoffer, A. (1981): Geometry is more than proof, *The Mathematics Teacher,* vol. 74, 1, pp. 11-18.

Hoffer, A. (1983): Van Hiele-based research, in Lesh, R. & Landau, M. (1983): *Acquisition of mathematics concepts and processes.* (Academic Press: N. York), pp. 205-227.

Hoffer, A. (1993): Implementing the "Professional Standards for Teaching Mathematics": The Excitement of Learning with Our Students--An Escalator of Mathematical Knowledge, *The Mathematics Teacher,* vol. 86, 4, pp. 315-319.

Holden, A. (1971): *Shapes, space, and symmetry.* (Columbia University Press: New York).

Hopley, R. B. (1994): Nested platonic solids: A class project in solid geometry, *The Mathematics Teacher,* vol. 87, 5, pp. 312-317.

Huerta, P. M. (1997): *Los niveles de Van Hiele en relación con la taxonomía Solo y los mapas conceptuales,* (Tesis doctoral). (Universitat de València: Valencia).

Jaime, A. (1992): La organización de una secuencia de enseñanza en geometría según el Modelo de Van Hiele, en Gutiérrez, A., ed. (1992): *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometria.* (CINVESTAV-PNFAPM: México), pp. 60-75.

Jaime, A. (1993): *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento,* (Tesis doctoral). (Universitat de València: Valencia).

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1989): *Diseño de un programa de enseñanza progresiva de las isometrias del plano en EGB* (Memoria final del Proyecto de Investigación). (Conselleria de Cultura, Ed. i C.: Valencia).

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990): Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El Modelo de Van Hiele, en Llinares, S. y Sánchez, M. V., eds. (1990): *Teoria y práctica en educación matemática.* (Alfar: Sevilla), pp. 295-384.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1996): *El grupo de las isometrías del plano.* (Síntesis: Madrid).

Laborde, C. (1996): Cabri-Geómetra o una nueva relación con la Geometría, en Puig, L. y Calderón, J., eds. (1996): *Investigación y didáctica de las matemáticas.* (CIDE: Madrid), pp. 67-85.

Lakatos, I. (1976): *Proofs and Refutations.* (Oxford University Press: London). [Trad. castellana: *Pruebas y refutaciones.* (Alianza Ed.: Madrid), 1978].

Lakatos, I. (1978): *Mathematics, science and epistemology.* (Cambridge University Press: Cambridge). [Trad. castellana: *Matemáticas, ciencia y epistemología.* (Alianza: Madrid), 1981].

Lichtenberg, D. (1988): Pyramids, prisms, antiprisms, and deltahedra, *The Mathematics Teacher,* vol. 81, 4, pp. 261-265.

Ludwig, S.C. (1986): *Indicators of growth within a logo/motion geometry curriculum environment,* (Tesis doctoral). (Univ. of Alberta: Canadá).

Lunkenbein, D. (1983a): Observations concerning the child's concept of space and its consequences for the teaching of Geometry to younger children, in*Proceedings of the 4th International Congress on Mathematical Education.* (Birkhauser, Boston, USA), pp. 172-174.

Lunkenbein, D. (1983b): Mental structural images characterizing Van Hiele levels of thinking, in Bergeron, J. C. & Herscovics, N., eds. (1983):*Proceedings of the 5th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (Montreal: Canada), pp. 255-262.

Lunkenbein, D. (1984): Interior structuring of geometric objects: An example of infralogical groupings, in Moser, J. M., ed. (1984): *Proceedings of the 6th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (Univ. of Wisconsin: Madison, USA), pp. 107-112.

Mayberry, J. (1981): *An investigation of the Van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers.* (Univ. Microfilms: Ann Arbor, EE.UU.).

McGee, M. G. (1979): Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences, *Psychological Bulletin*, vol. 86, 5, pp. 889-918.

O'Daffer, P. G. & Clemens, S. R. (1977): *Geometry: An investigative approach.* (Addison Wesley: Menlo Park, CA, USA).

Oehl, W.; Palzkill, L. et al. (1975-1978): *El mundo del número, EGB 1-8.* (Didascalia-Schroedel: Madrid).

Pegg, J. & Davey, G. (1.991): Levels of geometric understanding, *The Australian Mathematics Teacher*, vol. 47, 2, pp. 10-13.

Polya, G. (1954): *Mathematics and Plausible Reasoning.* 2 vols. (Princeton University Press: Princeton, NJ). [Trad. castellana: *Matemáticas y razonamiento plausible.* (Tecnos: Madrid), 1966].

Polya, G. (1957): *How to solve it.* 2nd edition. (Princeton University Press: Princeton, NJ). [Trad. castellana: *Cómo plantear y resolver problemas.* (Trillas: México), 1965].

Potari, D. & Spiliotopoulou, V. (1992): Children's Representations of the Development of Solids, *For-the-Learning-of-Mathematics*, vol. 12, 1, pp. 38-46.

Puig, L. (1991): *Corrientes actuales en Educación Matemática.* Curso desarrollado durante abril y mayo de 1991.

Puig, L. (1996a): La didáctica de las matemáticas como tarea investigadora, en Puig, L. y Calderón, J., eds. (1996): *Investigación y didáctica de las matemáticas.* (CIDE: Madrid), pp. 103-117.

Puig, L. (1996b): *Elementos de resolución de problemas.* (Comares: Granada).

Puig, L. (1997): Análisis fenomenológico, en Rico, L., ed. (1997): *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* (Horsori: Granada), en prensa.

Puig, L. y Guillén, G. (1983): *Necesidad de experimentación de un nuevo modelo para el estudio de la geometría en EGB y Escuelas de Magisterio.* (Memoria final del Proyecto de Investigación). (Consellería de Cultura Educación y Ciencia. Valencia).

Reesink, C. J. (1982): Geomegy or Geolotry: What happens when geology visits geometry class?, *The Mathematics Teacher*, vol. 75, 6, pp. 454-461.

Senechal, M. (1988): Introduction to Polyhedron Theory, in Senechal, M. & Fleck, G., eds. (1988): *Shaping Space. A Polyhedral Approach.* (BirKhäuser: Boston; Basel), pp. 191-197.

S. M. P. (1983-1984): *S. M. P. 11-16.* (Cambridge University Press: Cambridge).

Usiskin, Z. (1982): *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry.* (ERIC: Columbus, EE.UU.).

Treffers, A. (1987): *Three dimensions (a model of goal and theory description in mathematics instruction - the Wiskobas Project).* (D. Reidel: Dordrecht).

Van Hiele, P.M. (1986): *Structure and insight. A theory of mathematics education.* (Academic Press: Londres).

Vega, L. (1990): *La trama de la demostración (Los griegos y la razón tejedora de pruebas).* (Alianza: Madrid).

Vera, F., ed. (1970): *Científicos griegos*, 2 vols. (Aguilar: Madrid).

Vinner, S. (1976): The naive concept of definition in mathemetics, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 7, 4, pp. 413-429.

Vinner, S. (1983): Concept definition, concept image and the notion of function, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 14, pp. 293-305.

Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1980): Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts, in Karplus, ed. (1980): *Proceedings of the 4th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (Berkeley: California), pp. 177-184.

Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1983): On concept formation in geometry, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, vol. 83, 1, pp. 20-25.

Wain, G. T. & Woodrow, D., eds. (1980): *Mathematics teacher education project.* (Blackie: Londres).

Wallace, W. (1992): The bug on the box, *The Mathematics Teacher*, vol. 85, 6, pp. 474- 475.

Wenninger, M. J. (1971): *Polyhedron Models for the Classroom*. (NCTM: Reston, VA, USA).

Wirszup, I. (1976): Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry, in Martin, J. L. & Bradbard, D. A. (1976): *Space and geometry*. (ERIC: Columbus, EE.UU.), pp. 75-97.

Woodwars, E.; Brown, R. (1994): Polydrons and three-dimensional geometry, *The Arithmetic Teacher*, vol. 41, 8, pp. 451- 458.

Zykova, V. I. (1969): Operating with concepts when solving geometry problems, in Kilpatrick, J. & Wirszup, I., eds. (1969): *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics: Vol. 1. The learning of mathematical concepts*. (School Mathematics Study Group.: Stanford, CA), pp. 93-148.

UNIVERSIDAD DE VALENCIA FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Reunido el Tribunal que suscribe, en el día de la fecha, acordó otorgar, por unanimidad, a esta Tesis doctoral de D. Gregorio Guillén Soler

la calificación de Apto cum laude

Valencia, a 26 de septiembre de 1997

El Secretario,

El Presidente