ESTIMADORES LINEALES
MINIMO SESGO-MINIMA VARIANZA
(BLIMBE's)
Una Aproximación Libre
de Coordenadas

TESIS DOCTORAL

DE

J. AGUILELLA

CERTIFICADO

SEGUNDO GUTIERREZ CABRIA, Catedrático de Cálculo de Probabilidades y Estadística Matemática, y Director del Departamento de Estadística de la Universidad de Valencia,

CERTIFICA:

Que la presente memoria "Estimadores Lineales Mínimo Sesgo-Mínima Varianza (BLIMBE's). Una aproximación libre de coordenadas" ha sido realizada bajo mi dirección, en el Departamento de Estadística de la Universidad de Valencia, por el Sr. D. Joaquin Aguilella Almer, y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, presento ante la Facultad de Ciencias de la Universidad de Valencia, a 21 de Junio de 1976.

EL CATEDRATICO

Segundo Gutierrez Cabria

Quiero expresar mi gratitud al Prof. Dr. D. Segundo Gutierrez Cabria, Director del Departamento de Estadística de la Facultad de Ciencias de Valencia, por su apoyo y estímulo durante estos años.

Debo asimismo agradecimiento a la sta. Amparo Giménez Puig, por su colaboración en la labor de mecanografiado.

Joaquín Aguilella Almer

A Mari i a Jogim

CONTENIDO

CAPITULO 0

PRELIMINARES

Hemos considerado oportuno incluir al iniciar esta memoria una serie de resultados sobre la teoría de espacios vectoriales de dimensión finita. Presentamos también una exposición del vector aleatorio y del modelo lineal desde la aproximación libre de coordenadas. Esto nos permitirá aligerar la exposición de los temas posteriores, en los que se tratarán definiciones y conceptos más específicos.

Para un análisis más sistemático y completo de la teoría de espacios vectoriales de dimensión finita ver Halmos |21|.

Un tratamiento más completo del vector aleatorio y del modelo lineal desde la aproximación libre de coordenadas se puede ver en Kruskal |25|, Drygas |14| y Eaton |17|.

0.1 ESPACIOS VECTORIALES DE DIMENSION FINITA

En todo este apartado H y K serán dos espacios vectoriales reales de dimensión finita con la ley + representando la suma de vectores. La composición externa de un número real λ con un vector x la representaremos por λx.

El espacio vectorial de las aplicaciones lineales de H en K lo denotaremos por $L(H,K)$.

Si A$\in L(H,K)$, representaremos por Ker A y R(A) respectivamente el núcleo y el espacio imagen de A.

Si U y V son dos subespacios de H, representaremos por $U\oplus V$ su suma directa.

Es bien sabido que si U y V son subespacios de H cuya suma directa es H, cualquier vector x$\in H$ se descompone de forma única en suma de un vector de U y otro de V que son las componentes de x en U y V respectivamente.

En consecuencia podemos dar la siguiente definición:

Definición 0.1.1

Si U y V son subespacios de H y $U \oplus V=H$, la aplicación A de H en H que a cada vector x le asigne su componente en U se llama la proyección sobre U según V. Además $A\varepsilon L(H,H)$.

La demostración puede verse en Halmos |21|.

La siguiente proposición, cuya demostración puede verse en la referencia anterior caracteriza una proyección:

Proposición 0.1.1

$A\varepsilon L(H,H)$ es la proyección sobre R(A) según Ker A si y solo si $A^2=A$.

En lo sucesivo supondremos que H y K son euclídeos con productos interiores respectivos $(\ ,\ )_H$ y $(\ ,\ )_K$. La norma de un vector x se representará por $\|x\|$.

Si U es un subconjunto de un espacio vectorial real euclídeo y representamos por $U^{\perp}$ el conjunto de vectores ortogonales a U, es bien conocido que $U^{\perp}$ es un subespacio vectorial. Además $(U^{\perp})^{\perp}$ es el subespacio vectorial engendrado por U. Lo representaremos por $U^{\perp\perp}$. Es sobradamente conocido que el espacio vectorial es la suma directa de $U^{\perp}$ y U. Si U_1 y U_2 son subespacios vectoriales, entonces se verifica:

$(U_1+U_2)^{\perp}=U_1^{\perp}\cap U_2^{\perp}$ y $(U_1\cap U_2)^{\perp}=U_1^{\perp}+U_2^{\perp}$.

Definición 0.1.2

Una aplicación $A\varepsilon L(H,H)$ se dice que es la proyección ortogonal sobre un subespacio U si A es la proyección sobre U según $U^{\perp}$.

El siguiente resultado, conocido como teorema de Riesz, nos asegura que no hay distinción entre un espacio vectorial euclídeo finito-dimensional y su dual

Proposición 0.1.2

La aplicación Φ entre $L(H,\mathrm{R})$ y H definida por $\Phi(\psi_y)=y$ siendo $\psi_y(x)=(y,x)_H$ $\forall\, x\varepsilon H$ es un isomorfismo entre espacios vectoriales.

La demostración puede verse en Halmos |21|.

Vamos ahora a dar la definición de aplicación adjunta

Definición 0.1.3

Sea $A\varepsilon L(H,K)$. La aplicación A' de K en H definida por $(Ax,y)_H=(x,A'y)_H$ $\forall x\varepsilon H$, $\forall\, y\varepsilon K$ se llama adjunta de la aplicación A.

Notemos que $A'\varepsilon L(K,H)$. Claramente A' depende de $(\ ,\ )_H$ y de $(\ ,\ )_K$. En particular si $H=K$ y $A'=A$ se dice que A es simétrica.

La siguiente proposición caracteriza una proyección ortogonal. Su demostración puede verse en Halmos |21|.

Proposición 0.1.3

Una aplicación $A\varepsilon L(H,H)$ es la proyección ortogonal sobre R(A) si y solo si se verifica alguna de las siguientes condiciones:

a) $A^2=A=A'$

b) $\| y-Ay\| = \underset{x\varepsilon R(A)}{\text{mínimo}} \| y-x\|$ $\forall y\varepsilon H$.

Definición 0.1.4

Una aplicación $A\varepsilon L(H,H)$ se dice positiva definida si

$(x,Ax)_H>0$ $\forall x\in H$ $x\neq 0$. Si $(x,Ax)_H\geq 0$ $\forall x\in H$ entonces se dice que A es positiva semi-definida. Si A es positiva semi-definida y $\exists x\neq 0$ / $(x,Ax)_H=0$ se dirá que A es positiva semi-definida estricta.

El siguiente resultado conocido como el teorema de Farkas será continuamente utilizado en posteriores capítulos. Su demostración puede verse en Drygas |14|.

Proposición 0.1.4

Sea U un sub-espacio de H. Si $A\varepsilon L(H,K)$, se verifica:

a) $(A^{-1}(U))^{\perp}=A'(U^{\perp})$

b) $(A'(U))^{\perp}=A^{-1}(U^{\perp})$

Vamos a introducir en la siguiente definición el concepto de semi-producto interior básico en nuestra memoria.

Definición 0.1.5

Una forma bilineal, simétrica y semi-definida positiva $\psi(x,y)$ sobre $H\times H$ se llama semi-producto interior en H.

Notemos que si $\psi(x,x)>0$ $\forall x\varepsilon H$ $x\neq 0$ entonces el semi-producto interior es un producto interior en H.

La siguiente proposición cuya demostración puede verse en Drygas |14| clarifica la definición 0.1.5

Proposición 0.1.5

Si $\psi(x,y)$ es un semi-producto interior en H, se verifica:

a) el conjunto $N=\{x\varepsilon H\ /\ \psi(x,x)=0\}$ es un subespacio de H.

b) si V es un subespacio complementario de N, ψ definido de $V\times V$ en R es un producto interior en V.

Notemos que, si el producto semi-interior ψ es un producto interior en H, entonces $N=\{0\}$.

La siguiente proposición nos muestra como todos los semi-productos interiores en H pueden representarse por medio de aplicaciones lineales de H en H simétricas, positivas semi-definidas y del producto interior $(\ ,\ )_H$.

Proposición 0.1.6

Una aplicación ψ de $H\times H$ en R es un semi-producto interior en H si y solo si existe una única $V\varepsilon L(H,H)$ simétrica, semi-definida positiva, que verifique:
$\psi(x,y)=(Vx,y)_H=(x,Vy)_H\ \forall x,y\varepsilon H$.
Si ψ es un producto interior en H, entonces V es positiva definida.

Como consecuencia de la proposición anterior cuya demostración puede verse en Drygas |14|, en adelante, los semi-productos interiores en H los representaremos por $V(\ ,\ )_H$. A la raiz cuadrada positiva de $(x,Vx)_H$, que llamaremos norma de x según $V(\ ,\ )_H$ la representaremos por $\|x\|_V$.

Proposición 0.1.7

Sea $V(\ ,\ )_H$ un semi-producto interior en H. Si $V=R(V)$ y $N=\{x\varepsilon H\ /\ \|x\|_V=0\}$, se verifica:

a) Ker $V=N$

b) $V=N^{\perp}$

La demostración puede verse en Drygas |14|.

Como consecuencia de las proposiciones 0.1.6 y 0.1.7 podemos enunciar:

Proposición 0.1.8

Si $V(\ ,\ )_H$ es un semi-producto interior en H, la condición necesaria y suficiente para que sea un producto interior en H es que V sea regular.

Si $V(\ ,\ )_H$ es un producto interior en H representaremos por $\mathcal{U}^{\perp V}$ el conjunto $\{x\varepsilon\mathcal{H} \;/\; (Vx,y)_{\mathcal{H}}=0 \;\forall\, y\varepsilon\mathcal{U}\}$.

Proposición 0.1.9

Si $V(\;,\;)_{\mathcal{H}}$ es un producto interior en $\mathcal{H}$, se verifica:

a) $\forall\,\mathcal{U}\subset\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{U}^{\perp V}=V^{-1}(\mathcal{U}^{\perp})$

b) $V^{-1}(\;,\;)_{\mathcal{H}}$ es un producto interior en $\mathcal{H}$.

La demostración es inmediata.

Como corolario de la proposición 0.1.9, podemos enunciar:

Corolario 0.1.9.1

Si $V(\;,\;)_{\mathcal{H}}$ es un semi-producto interior en $\mathcal{H}$, si V_1 es la aplicación V definida de R(V) en R(V), se verifica que $V_1^{-1}(\;,\;)_{\mathcal{H}}$ es un producto interior en R(V).

El siguiente resultado, cuya demostración puede verse en Drygas |14|, será muy utilizado a lo largo del trabajo.

Proposición 0.1.10

Si $\mathcal{U}$ es un subespacio de $\mathcal{H}$ y $V(\;,\;)_{\mathcal{H}}$ es un semi-producto interior en $\mathcal{H}$, se verifica: $(\mathcal{U}\cap R(V))^{\perp V_1^{-1}}=V(\mathcal{U}^{\perp})$.

En consecuencia $\mathcal{U}\oplus V(\mathcal{U}^{\perp})=\mathcal{U}+R(V)$.

La siguiente proposición relaciona A' con la adjunta de A respecto de otros productos interiores:

Proposición 0.1.11

Sean $V(\;,\;)_{\mathcal{H}}$ y $W(\;,\;)_{\mathcal{K}}$ productos interiores en $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ respectivamente. Si notamos por A* la adjunta de A respecto de estos productos interiores, se verifica que $A^*=V^{-1}A'W$.

La demostración puede verse en Drygas |14|.

Previamente al teorema de la proyección generalizada fundamental en el trabajo, damos la siguiente definición:

Definición 0.1.6

Sea U un subespacio de H. Sea $x \in H$. El conjunto $x+U$ se llama subespacio trasladado, por el vector x, de U.

Es inmediato que $x+U=y+U$ si y solo si $x-y \in U$.

Proposición 0.1.12 (teorema de la proyección generalizada)

Sea $V(\ ,\ )_H$ un semi-producto interior en H. Si $E=x+U$ es un subespacio trasladado en H, entonces se verifica:

a) $\{m \in E \ / \ (Vm,m)_H = \min_{x \in E} (Vx,x)_H\} \neq \phi$

b) $\{m \in E \ / \ (Vm,m)_H = \min_{x \in E} (Vx,x)_H\} = \{y \in H \ / \ (Vy,z)_H = 0 \ \forall z \in U\}$

c) Si $(Vx,x)_H > 0 \ \forall x \in E$, es el conjunto $\{m \in E \ / \ (vm,m)_H = \min_{x \in E} (Vx,x)_H\}$ es unitario.

0.2 DISTRIBUCION DE UN VECTOR ALEATORIO. APROXIMACION LIBRE DE COORDENADAS

En este apartado H representará, como en el anterior, un espacio vectorial real de dimensión finita con el producto interior $(\ ,\ )_H$.

Representaremos por O_H la familia de abiertos de la topología métrica definida en H por $(\ ,\ )_H$. Como todas las topologias definidas por productos interiores en H son equivalentes O_H no depende de $(\ ,\ )_H$. Sea B_H la σ-álgebra engendrada por O_H.

Sea (A,B,P) un espacio probabilizado.

Definición 0.2.1

Una aplicación Y de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{H}$ se dice que es un vector aleatorio en $\mathcal{H}$ si es $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}_{\mathcal{H}}$ medible.

En particular, si $\mathcal{H}$=R y se considera la topologia usual en R, la definición 0.2.1 coincide con la de variable aleatoria.

Proposición 0.2.1

La función Q de $\mathcal{B}_{\mathcal{H}}$ en $[0,1]$ definida por $Q(B)=P(Y^{-1}(B))$ $\forall B\varepsilon\mathcal{B}_{\mathcal{H}}$ es una medida de probabilidad en $(\mathcal{H},\mathcal{B}_{\mathcal{H}})$.

La demostración puede verse en Halmos |22|.

En adelante, puesto que no habrá lugar a confusión, a la medida de probabilidad Q inducida por P en $(\mathcal{H},\mathcal{B}_{\mathcal{H}})$ la representaremos por P.

Desde ahora, $\mathcal{K}$ representará un espacio vectorial euclí deo real de dimensión finita con un producto interior $(\ ,\ )_{\mathcal{K}}$.

Si denotamos por $\mathcal{B}_{\mathcal{K}}$ la σ-álgebra engendrada por la familia de abiertos de la topologia métrica en $\mathcal{K}$, se verifica el siguiente resultado:

Proposición 0.2.2

Si Y es un vector aleatorio en $\mathcal{H}$, y si f es una aplicación de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{K}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{H}}$-$\mathcal{B}_{\mathcal{K}}$ medible entonces $f\circ Y$ es un vector aleatorio en $\mathcal{K}$.

La demostración puede verse en Halmos |22|.

Una consecuencia inmediata de la proposición 0.2.2 es el siguiente corolario:

Corolario 0.2.2.1

Si Y es un vector aleatorio en $\mathcal{H}$. Se verifica:

a) $f(Y)=(x,Y)_{\mathcal{H}}$ es una variable aleatoria siendo x un un vector de H.

b) $f(y)=\|y\|$ es una variable aleatoria.

c) $f(y)=Ay+w$ es un vector aleatorio en K, siendo w un vector de K y A una aplicación lineal de H en K.

Vamos a dar la definición de esperanza del vector aleatorio Y desde la aproximación libre de coordenadas.

Definición 0.2.2

Supongamos que el valor esperado de $(x,Y)_H$ al que representaremos por $E(x,Y)_H$ existe $\forall x\varepsilon H$. Debido a la linealidad de $(\, , \,)_H$ y a resultados elementales del operador esperanza E, la función $E(x,Y)_H$ es una forma lineal sobre H con argumento x. Aplicando el teorema de Riesz existe un único vector $\mu\varepsilon H$ verificando $E(x,Y)_H=(x,\mu)_H \; \forall x\varepsilon H$.

Al vector μ se le llama esperanza del vector aleatorio Y. Lo representaremos por EY.

Esta aproximación al vector esperanza μ es consistente con la definición usual coordenada a coordenada y no depende de $(\, , \,)_H$. Ver Kruskal |25|, Drygas |14| o Eaton |17|.

Proposición 0.2.3

Sea Y un vector aleatorio en H. Si $EY=\mu$, $w\varepsilon K$ y $A\varepsilon L(H,K)$ se verifica que $E(AY+w)=A\mu+w$.

La demostración puede verse en cualquiera de las referencias citadas en la definición anterior.

De forma análoga a como hemos introducido la esperanza del vector aleatorio Y, vamos a dar una aproximación libre de coordenadas a su covarianza.

Definición 0.2.3

Sea Y un vector aleatorio en H. Sea $EY=\mu$. Supongamos que $Cov((x,Y)_H,(z,Y)_H)=E((x,Y-\mu)_H.(z,Y-\mu)_H)$ existe $\forall x,z\varepsilon H$.

Es inmediato que $\mathrm{Cov}((x,Y)_H,(z,Y)_H)$ como función de x y z es un semi-producto interior en H. Según la proposición 0.1.6 existe una única $\Sigma\varepsilon L(H,H)$ simétrica y positiva semi--definida que verifica $\mathrm{Cov}((x,Y)_H,(z,Y)_H)=\Sigma(x,z)_H=(\Sigma x,z)_H$ $\forall x,z\varepsilon H$.

La aplicación Σ se llama operador covarianza del vector aleatorio Y. Lo representaremos por $\Sigma=\mathrm{Cov}\ Y$.

Contrariamente a EY, Cov Y depende del producto interior $(\ ,\ )_H$. La siguiente proposición, cuya demostración puede verse en Drygas |14|, especifica en que términos.

<u>Proposición 0.2.4</u>

Si $V(\ ,\ )_H$ es un producto interior en H y denotamos por Σ y $\ddagger$ respectivamente el operador covarianza de Y según $(\ ,\ )_H$ y $V(\ ,\ )_H$, entonces se verifica que $\ddagger=\Sigma V$.

Conviene notar que, en adelante, cuando nos refiramos a Cov Y la supondremos respecto de $(\ ,\ )_H$.

Puesto que la aproximación clásica a la covarianza de un vector aleatorio es através de la "matriz de covarianzas" damos la siguiente proposición:

<u>Proposición 0.2.5</u>

Si (Σ) es la matriz de Σ respecto de la base $x_1,x_2,\ldots$ $\ldots x_n$ de H y $Y_1,Y_2,\ldots Y_n$ son las coordenadas del vector aleatorio Y respecto de esta base, entonces $(\Sigma)=(C).(H)$ siendo (C) la matriz nxn con elemento (i,j) igual a $\mathrm{Cov}(Y_i,Y_j)$ y (H) una matriz con elemento (i,j) igual a $(x_i,x_j)_H$.

La demostración puede verse en Kruskal |25|.

Notemos que, en particular si la base $x_1,x_2,\ldots x_n$ es ortonormal el resultado coincide con la clásica aproximación a la covarianza de Y por la "matriz de covarianzas".

La siguiente proposición es inmediata.

Proposición 0.2.6

Si Cov $Y=\Sigma$, entonces se verifica:

a) $\mathrm{Cov}(Y+z)=\Sigma \quad \forall z \in H$.

b) Cov $BY=B\Sigma B' \quad \forall B \in L(H,K)$.

El siguiente resultado proporciona condiciones para la existencia de EY y Cov Y.

Proposición 0.2.7

Sea Y un vector aleatorio en H. Entonces se verifica:

a) La existencia de $E\|Y\|^2$ es suficiente para la existencia de EY.

b) Cov Y existe si y solo si existe $E\|Y\|^2$.

La demostración puede verse en Kruskal|25|.

En la siguiente definición analizaremos la singularidad del vector aleatorio Y.

Definición 0.2.4

Sea Y un vector aleatorio en H con operador covarianza Σ. Si Σ es singular se dice que el vector Y tiene una distribución singular. Si Σ es regular, la distribución de Y se dice no singular.

La definición 0.2.4 es claramente equivalente a la siguiente:

Definición 0.2.5

La distribución de Y es singular o no singular según que Σ sea positiva semi-definida estricta o positiva definida.

Es inmediato, como consecuencia de la proposición 0.2.4, que la singularidad o no singularidad de Y no depende del producto interior $(\ ,\ )_H$.

Notemos que el conjunto $N=\text{Ker }\Sigma=\{x\varepsilon H\ /\ \Sigma(x,x)_H\}=\{x\varepsilon H\ /\ /\ \text{Var}(x,Y)_H=0\}$.

El análisis de la singularidad del vector aleatorio Y es importante, ya que proporciona información sobre la localización de Y.

Proposición 0.2.8

Sea Y un vector aleatorio en H. Si Cov $Y=\Sigma$ y $EY=\mu$, entonces se verifica que $Y\varepsilon\mu+R(\Sigma)$ con probabilidad 1.

La demostración puede verse en Kruskal|25|.

Consideremos el espacio vectorial HxK. Es inmediato que HxK es euclídeo con el producto interior $(\ ,\ )_{HxK}$ definido por:

$$((y_1,z_1),(y_2,z_2))_{HxK}=(y_1,y_2)_H+(z_1,z_2)_K\quad \forall(y_1,z_1)\varepsilon HxK\quad \forall(y_2,z_2)\varepsilon HxK.$$

Si Y es un vector aleatorio en H y Z es un vector aleatorio en K, entonces es evidente que $W=\begin{bmatrix}Y\\Z\end{bmatrix}$ es un vector aleatorio en HxK, considerando la σ-álgebra B_{HxK} engendrada por la topología métrica inducida por $(\ ,\ )_{HxK}$.

Supongamos que $\text{Cov}((y,Y)_H,(z,Z)_K)$ existe $\forall y\varepsilon H$, $\forall z\varepsilon K$. Por ser una forma bilineal sobre HxK, existe una única aplicación lineal $\Sigma_{12}\varepsilon L(K,H)\ /\ \text{Cov}((y,Y)_H,(z,Z)_K)=(y,\Sigma_{12}z)_H$ $\forall y\varepsilon H$, $\forall z\varepsilon K$.

La siguiente proposición nos relaciona la esperanza y varianza de W con las respectivas de Y y Z.

Proposición 0.2.9

Si $W=\begin{bmatrix}Y\\Z\end{bmatrix}$ es un vector aleatorio en HxK, entonces se verifica:

a) $E\begin{bmatrix}Y\\Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}EY\\EZ\end{bmatrix}$

b) Si Cov $W=\Sigma$, Cov $Y=\Sigma_{11}$ y Cov $Z=\Sigma_{22}$, entonces

$$\Sigma=\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12}' & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

La demostración puede verse en Eaton |17|.

0.3 DEFINICION DEL MODELO LINEAL

Representaremos por H un espacio vectorial real de dimensión finita con el producto interior $(\ ,\ )_H$. Consideremos el espacio medible (A,B). Sea P una familia de medidas de probabilidad sobre (A,B). Sea Y un vector aleatorio en H definido sobre (A,B,P) $\forall P\varepsilon P$.

Sea $\Omega=\{\theta\ /\ \theta\varepsilon\Omega\}$ un conjunto de parámetros que serán de interés para el estadístico.

Vamos a definir los modelos lineales que utilizaremos en el trabajo.

<u>Definición 0.3.1</u>

Supongamos que para cada $\theta\varepsilon\Omega$ existe una $P\varepsilon P$ / $E_P Y=\mu_\theta$, y para cada $P\varepsilon P$ existe un $\theta\varepsilon\Omega$ / $E_P Y=\mu_\theta$. Sea $F=\{\mu_\theta\ /\ \theta\varepsilon\Omega\}$. Diremos entonces que el vector aleatorio Y sigue el modelo lineal $M(F)$.

<u>Definición 0.3.2</u>

Si el vector aleatorio Y sigue el modelo lineal $M(F)$ y representamos por V la familia $\{\sigma^2\Sigma\}_{\sigma^2>0}$, siendo Σ una transformación en H, simétrica y positiva semi-definida, diremos que el vector aleatorio Y sigue el modelo lineal $M(F,\{\sigma^2\Sigma\}_{\sigma^2>0})$ si para cada $\theta\varepsilon\Omega$ existe una $P\varepsilon P$ / $\mathrm{Cov}_P Y\varepsilon V$ y para cada $P\varepsilon P$ existe un $\theta\varepsilon\Omega$ / $\mathrm{Cov}_P Y\varepsilon V$.

CAPITULO 1

INTRODUCCION-SUMARIO

1.1 INTRODUCCION

En el modelo lineal de regresión $EY=X\beta$, $\beta\varepsilon R^p$ si X no es inyectiva, existen formas lineales $\lambda'\beta$ para las que no existen estimadores insesgados en la familia $\{b'Y,\ b\varepsilon R^n\}$. Asimismo β no admite estimadores insesgados de la familia $\{GY;\ G\varepsilon L(R^n,R^p)\}$. Esta falta de identificabilidad no es específica del modelo sin restricciones, como veremos en la proposición 3.1.2, en el modelo $EY=X\beta$; $\beta\varepsilon\{\beta\varepsilon R^p\ /\ S\beta=w\}$ se plantea este mismo problema si $\mathrm{Ker}\ X\cap\mathrm{Ker}\ S\neq\{0\}$.

Penrose |33| en 1956 propuso un método que proporciona estimadores de β en el modelo $EY=X\beta;\beta\varepsilon R^p$ cuando no hay identificabilidad. Estos estimadores tienen la propiedad de minimizar unsesgo definido en función de una matriz V simétrica y definida positiva. En 1964, Chipman en un excelente artículo| 9 | volvió sobre estos estimadores, demostrando que son condicionalmente insesgados. Generaliza el método al modelo lineal de regresión con restricciones. De estos estimadores de β, conocidos como LIMBE's de β, cuando Cov $Y=\sigma^2\Sigma$, $\sigma^2>0$, buscan los de minima varianza (BLIMBE's de β) y los caracterizan. Lewis y Odell |26| en 1966 obtienen un estimador de β condicionalmente insesgado y con minima varianza en el modelo $EY=X\beta$; $\beta\varepsilon R^p$, Cov $Y=\sigma^2\Sigma$, $\sigma^2>0$, que resulta ser un BLIMBE de β en el sentido de Penrose y Chipman con $V\ /\ R(VX')=R(X')$. Posteriormente, en esta linea de insesgadez condicionada a priori y posterior minimización de la varianza, Ahlers y Lewis (1971) y Hallum, Lewis y Boullion (1973) obtienen un estimador de β condicionalmente insesgado y minima varianza en los modelos $EY=X\beta$; $\beta\varepsilon R^p$, Cov $Y=\sigma^2\Sigma$, $\sigma^2>0$ y $EY=X\beta$; $\beta\varepsilon\{\beta\varepsilon R^p \ / \ S\beta=w\}$, Cov $Y=\sigma^2\Sigma$, $\sigma^2>0$, respectivamente. Aunque no lo señalen -al igual que Lewis y Odell- son BLIMBE's de β en el sentido de Penrose con V / $R(VX')=R(X')$ y $R((I-S^+S)X')=$ $=R((I-S^+S)V(I-S^+S)X')$ respectivamente, como demuestra la caracterización que damos en la proposición 3.2.3. Estos estimadores tienen la deseable propiedad de que son insesgados y tienen minima varianza si $\beta\varepsilon R(X')$ ó $\beta\varepsilon S^+w+R((I-S^+S)X')$ respectivamente. En caso contrario son de error cuadrático medio mínimo. Por esta razón les llaman "los mejores".

En 1971 Schonfeld |44| trata los BLIMBE's de β por el método de Penrose con excelentes resultados. Estudia los BLIMBE's de β en el modelo $EY=X\beta$, $\beta\varepsilon R^p$, Cov $Y=\sigma^2\Sigma$, $\sigma^2>0$ con V no singulares y los BLIMBE's de β en el modelo $EY=X\beta$, $\beta\varepsilon\{\beta\varepsilon R^p \ / \ S\beta=w\}$, Cov $Y=\sigma^2\Sigma$, $\sigma^2>0$ con $V=I$. En ambos modelos obtiene soluciones a LIMBE's y BLIMBE's de β. Pone de manifiesto que los LIMBE's no son más que estimadores condicionalmente insesgados.

Con posterioridad al trabajo de Schonfeld y en ese año, Rao |36| aplicando los resultados obtenidos conjuntamente con Mitra sobre la g-inversa y las soluciones minima norma-minimo cuadrado, investiga el problema de la no estimabilidad de las formas lineales $\lambda'\beta$ en el modelo $EY=X\beta$, $\beta\varepsilon R^p$, Cov $Y=\sigma^2\Sigma$, $\sigma^2>0$. Define un sesgo ponderado según una matriz V simétrica y semi-definida positiva y llama LIMBE's de $\lambda'\beta$ a los estimadores de la familia $\{b'Y, \ b\varepsilon R^n\}$ que lo minimizen. Una transformación del vector Y de la familia $\{GY, \ G\varepsilon L(R^n,R^p)$ es LIMBE de θ si $\lambda'(GY)$ lo es de $\lambda'\beta$ $\forall\lambda\varepsilon R^p$. Los BLIMBE's los define como los de minima varianza. Este enfoque del problema contiene como casos particulares los resultados ya conocidos. Caracteriza las soluciones utilizando g-inversas y la teoria de las soluciones minima norma-minimo cuadrado. Sin embargo su tratamiento no es completo, ya que no estudia el modelo con restricciones.

Aunque hay alguna alusión al problema de unicidad de BLIMBE's de β (ver |42| y |44|), no son sino notas sin ningún rigor científico.

Schonfeld indica que los BLIMBE's de β, generalizan los BLUE's de β cuando existan, sin embargo tambien es ésta una cuestión que no esta concretada.

Así como el problema de coincidencias de BLUE's de $\lambda'\beta$ y de BLUE's de β en modelos lineales con covarianzas respectivas $\sigma^2\Sigma$ y $\sigma^2\ddagger$, $\sigma^2>0$ ha sido tratado exhaustivamente, esta cuestión no se ha comentado nunca sobre BLIMBE's.

En el modelo partido de regresión $EY=X_1\beta_1+X_2\beta_2$, Cov $Y=\sigma^2\Sigma$, $\sigma^2>0$, $\beta_1\varepsilon R^p$, $\beta_2\varepsilon R^q$, que se presenta en el análisis de covarianza y en el diseño de bloques, el objetivo que se persigue es proporcionar estimadores insesgados de $\lambda'\beta_1$ en la familia $\{b'Y,\ b\varepsilon R^n\}$, estimadores insesgados de β_1 en la familia $\{GY,\ G\varepsilon L(R^n,R^p)\}$, estimadores insesgados de $\lambda'(X_1\beta_1)$ en la familia $\{b'Y,\ b\varepsilon R^n\}$ y estimadores insesgados de $X_1\beta_1$ en $\{GY,\ G\varepsilon L(R^n,R^n)\}$. Se minimiza la varianza, y éstos son BLUE's respectivos. El modelo que verifica $R(X_1)\cap R(X_2)=\{0\}$ (modelo de varianza) ha sido extensamente estudiado (ver Scheffe |**43**|y Kruskal|**25**|). Si $R(X_1)\cap R(X_2)\neq\{0\}$ el modelo es más dificil de tratar y los únicos resultados conocidos son los de Seely y Zyskind |**48**| quienes utilizando una aplicación T / $R(T)=R(X_2)^{\perp}$ obtienen condiciones para la estimabilidad de $\lambda'\beta_1$. En su tesis doctoral Basulto J. ha generalizado desde la aproximación libre de coordenadas los resultados de Seely y Zyskind al modelo lineal $EY=X_1\beta_1+X_2\beta_2$, $\beta_1\varepsilon\{\beta_1\varepsilon R^p\ /\ S_1\beta_1=w_1\}$, $\beta_2\varepsilon\{\beta_2\varepsilon R^q\ /\ S_2\beta_2=w_2\}$, Cov $Y=\sigma^2\Sigma$, $\sigma^2>0$. Ha investigado también la estimabilidad de $X_1\beta_1$ en la familia $\{c+GY;\ c\varepsilon R^n,\ G\varepsilon L(R^n,R^n)\}$ y la estimación insesgada de $\lambda'(X_1\beta_1)$ en la familia $\{a+b'Y;\ a\varepsilon R,\ b\varepsilon R^n\}$. Caracteriza los BLUE's de las formas lineales $\lambda'(X_1\beta_1)$ estimables y los BLUE's de $X_1\beta_1$ en el modelo de covarianza.

1.2 SUMARIO

Utilizaremos la aproximación libre de coordenadas de Kruskal |**23**|para el tratamiento del modelo lineal.

El contenido de la tesis por capítulos es el siguiente:

En el capítulo 2 se ha llevado a cabo un estudio de la g-inversa de una aplicación lineal A y de las soluciones mínima norma-mínimo cuadrado desde una perspectiva diferente a la de Rao y Mitra |42|. Las ideas nos han sido sugeridas por la lectura de |11|, y se ha notado que en particular, la pseudoinversa de Dempster no es más que una g-inversa reflexiva. El resultado más interesante en este capítulo lo constituye el teorema 2.4.1 que proporciona una caracterización de las soluciones W-mínimo cuadrado-mínima V-norma de la ecuación Ax=y más potente que la dada por Rao y Mitra.

En el capítulo 3, en el modelo lineal con la representación $\mu_\theta=\mu_{\theta_0}+K(\theta-\theta_0)$ se analiza en primer lugar la $\mathcal{B}_1$-estimabilidad de θ, extendiendo los resultados de Drygas |12| a un modelo lineal con restricciones sobre el vector paramétrico θ. En segundo término, se desarrolla la teoría de LIMBE's de $(\lambda,\theta)_K$ y de LIMBE's de θ desde la aproximación de Rao |36|. Nuestra aportación en este punto a consistido en presentar una teoría unificada de LIMBE's en el modelo con restricciones sobre θ, que contempla como casos particulares los resultados de Chipman | 8 |, Schonfeld |44| y Rao |36|. Se demuestra que operativamente los LIMBE's con restricciones no presentan más problemas que en un modelo sin restricciones. Por último se concretan las condiciones bajo las cuales los LIMBE's de $(\lambda,\theta)_K$ y LIMBE's de θ generalizan los $\mathcal{A}_1$-estimadores de $(\lambda,\theta)_K$ y $\mathcal{B}_1$-estimadores de θ respectivamente cuando éstos existan, lo cual nos permite presentar una regla de decisión para la elección de los semi-productos interiores $V(\ ,\ )_K$ utilizados en la ponderación del sesgo. Los resultados más importantes se aplican al modelo lineal de regresión en el ejemplo 3.2.1.

En el capítulo 4 seguimos las mismas directrices que en el capítulo anterior: en primer término se extiende la teoría de $\mathcal{B}_1$-BLUE's de θ al modelo con restricciones, observando en el corolario 4.1.2.2 que los $\mathcal{B}_1$-BLUE's de θ están muy relacionados con las soluciones mínima norma-mínimo cuadrado vistas en el capítulo 2. En segundo lugar, se presenta una teoría unificada de BLIMBE's de las formas lineales $(\lambda,\theta)_K$ y de BLIMBE's de θ en el modelo más general; es decir en un modelo con posiblemente restricciones sobre los parámetros, de forma que los resultados de Rao|36|, Schonfeld|44|, Chipman| 8 |, y Lewis y Odell|26|, aparecen como casos particulares. En tercer lugar se investigan las condiciones bajo las cuales los BLIMBE's de $(\lambda,\theta)_K$ y BLIMBE's de θ coinciden con los A_1-BLUE's de $(\lambda,\theta)_K$ y los B_1-BLUE's de θ respectivamente cuando estos existen. En cuarto lugar se demuestra que cuando la distribución del vector aleatorio Y es no singular, el BLIMBE de θ es único, y cuando la distribución de Y es singular, si $\rho(PVPK')=\rho(PK')$, el BLIMBE de θ es único con probabilidad 1. En el ejemplo 4.2.1 se aplican los resultados más interesantes al modelo lineal de regresión. Por último se lleva a cabo un estudio sobre el problema de coincidencias de BLIMBE's de $(\lambda,\theta)_K$ y de BLIMBE's de θ que generalizan los resultados ya clásicos de coincidencias de A_1-BLUE's y B_1-BLUE's de $(\lambda,\theta)_K$ y de θ respectivamente.

El capítulo 5 -totalmente original al igual que el capítulo siguiente- consta de dos partes claramente diferenciadas: en la primera parte, en el modelo lineal $M(F_1+F_2)$ en el que $EY=\mu_{\theta_1}+\mu_{\theta_2}$ con $\mu_{\theta_1}\varepsilon F_1=\mu_{\theta_{10}}+U_1$ y $\mu_{\theta_2}\varepsilon F_2=\mu_{\theta_{20}}+U_2$, siendo U_1 y U_2 subespacios de H, cuando $U_1\cap U_2\neq\{0\}$ y por lo tanto existen formas lineales $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ que no son A_1-estimables y μ_{θ_1} no es A_3-estimable, se introducen unos estimadores de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$, $\lambda\varepsilon H$ y de μ_{θ_1} a los que hemos llamado, por su semejanza con los del capítulo 3, LIMBE's respectivamente de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ y de μ_{θ_1}. Se demuestra que estos estimadores son condicionalemnte insesgados. Se ha investigado bajo que condiciones coinciden con los A_1-estimadores de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ y los A_3-estimadores de μ_{θ_1} cuando estos existan. Por último en la proposición 5.2.8 y en el corolario 5.2.8.1 se presentan caracterizaciones operativas de los LIMBE's de μ_{θ_1} y de los A_3-BLUE's de μ_{θ_1} respectivamente.

En la segunda parte, en el modelo lineal con la representación $EY=A_1\theta_{10}+A_2\theta_{20}+K_1(\theta_1-\theta_{10})+K_2(\theta_2-\theta_{20})$, en primer lugar se introduce el concepto de B_1-estimabilidad de θ_1, se caracterizan estos estimadores y se dan condiciones para su existencia, observandose que estos estimadores existen si y solo si todas las formas lineales $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ son A_1-estimables. En segundo lugar, bajo condiciones de no estimabilidad introducimos unos estimadores de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ y de θ_1 a los que, por su parecido con los del capítulo 3, hemos llamado LIMBE's de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ y LIMBE's de θ_1 respectivamente. Se demuestra que estos estimadores son condicionalmente insesgados, y se investigan las condiciones bajo las cuales coinciden con los A_1 y B_1-estimadores cuando existan. En la proposición 5.4.8 y en el corolario 5.4.8.1 se dán soluciones a LIMBE's de θ_1 y B_1-BLUE's de θ_1 respectivamente. Por último, en el ejemplo 5.1 se aplican los resultados obtenidos en el capítulo al modelo lineal de regresión partido $EY=X_1\beta_1+X_2\beta_2$, $\beta_1\varepsilon\{\beta_1\varepsilon R^p\ /\ S_1\beta_1=w_1\}$ y $\beta_2\varepsilon\{\beta_2\varepsilon R^q\ /\ S_2\beta_2=w_2\}$.

En el capítulo 6, al igual que en el capítulo anterior hay dos partes claramente diferenciadas: En la primera parte, en el modelo lineal $M(F_1+F_2,V)$, donde $V=\{\sigma^2\Sigma\}\sigma^2>0$, se introducen unos estimadores a los que llamamos BLIMBE's de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ y BLIMBE's de μ_{θ_1}. Se caracterizan y se investiga la unicidad de los BLIMBE's de μ_{θ_1}, demostrandose que si Σ es no singular, el BLIMBE de μ_{θ_1} es único, y si Σ es singular el BLIMBE de μ_{θ_1} es único con probabilidad 1. Se investigan las condiciones bajo las cuales los BLIMBE's de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ y de μ_{θ_1} coinciden con A_1-BLUE's y B_1-BLUE's correspondientes. Se obtienen fórmulas que proporcionan BLIMBE's de μ_{θ_1} (y por lo tanto B_1-BLUE's de μ_{θ_1} si existen) y se resuelven las cuestiones más relevantes sobre coincidencias de BLIMBE's de formas lineales $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ y de BLIMBE's del vector μ_{θ_1}.

En la segunda parte, en primer lugar se introducen los B_1-BLUE's de θ_1 y se caracterizan. En segundo término se definen unos estimadores de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ y de θ_1 a los que llamamos BLIMBE's de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ y de θ_1 respectivamente. Se estudian las condiciones bajo las cuales coinciden con los respectivos A_1--BLUE's y B_1-BLUE's. Se demuestra que si Σ es no singular, el BLIMBE de θ_1 es único y si Σ es singular, con ciertas condiciones adicionales, el BLIMBE de θ_1 es único con probabilidad 1. Se dán fórmulas para el cálculo de BLIMBE's de θ_1 y en particular para el cálculo de B_1-BLUE's de θ_1. Se investiga el problema de coincidencias de BLIMBE's de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ y de BLIMBE's de θ_1. Por último en el ejemplo 6.1 aplicamos al modelo de regresión partido los resultados más interesantes del capítulo.

En el capítulo 7, bajo el subtítulo de conclusiones, comentamos los resultados más interesantes de esta Tesis.

CAPITULO 2

g-INVERSA DE UNA APLICACION LINEAL

La inversa generalizada (g-inversa) de una matriz A introducida en la literatura estadística por Rao |35| ha sido tratada exahustivamente por Rao y Mitra en |43|. Su enfoque es a nuestro juicio excesivamente mecanicista no profundizando en el aspecto vectorial de la g-inversa.

Dempster A. en |11| define una pseudoinversa de una aplicación lineal A introduciendo unos particulares subespacios vectoriales. Esta pseudoinversa si bien es muy conceptual, no es tan general como la g-inversa de Rao.

El tratamiento de la g-inversa de una aplicación lineal que introducimos en este capítulo seguirá las líneas de la pseudoinversa de Dempster; veremos su equivalencia con la definición dada por Rao y daremos las propiedades de g-inversas que utilizaremos en esta memoria.

Por último trataremos la teoría de las soluciones mínima norma-minimo cuadrado de la ecuación $Ax=\underset{\sim}{y}$ tomando como bases nuestra definición de g-inversa y el teorema de la proyección generalizada.

La aportación más interesante es una nueva caracterización de las soluciones minima norma-minimo cuadrado que nos permitirá tratar la teoría de los estimadores lineales minimo sesgo y minima varianza como una generalización inmediata de los estimadores Gauss-Markov.

2.1 g-INVERSA. DEFINICIONES Y PROPIEDADES BASICAS.

En todo este apartado H y K representarán dos espacios vectoriales sobre el cuerpo de los números reales de dimensiones n y m respectivamente.

Sea $A\varepsilon L(H,K)$. Representaremos por $\rho(A)$ la dimensión de $R(A)$. Si U es un subespacio de H tal que $U\oplus \mathrm{Ker}\ A=H$, la aplicación A definida de U en $R(A)$ es biyectiva. Sea A_U^{-1} su inversa.

Definición 2.1.1

$A^-\varepsilon L(K,H)$ es una g-inversa de la aplicación lineal A si $\exists U$ subespacio de H / $U\oplus\mathrm{Ker}\ A=H$ y A^- definida de $R(A)$ en U coincide con A_U^{-1}.

Definición 2.1.2

$A^-\varepsilon L(K,H)$ es una g-inversa de la aplicación lineal A si $\exists U$ subespacio de H / $U\oplus\mathrm{Ker}\ A=H$ y $\exists V!$ subespacio de K / $V\oplus R(A)=K$ de forma que A^- definida de $R(A)$ en U coincide con A_U^{-1} y $A^-(V)\subset\mathrm{Ker}\ A$.

La siguiente proposición establece la equivalencia entre ambas definiciones:

Proposición 2.1.1

La definición 2.1.1 y de la definición 2.1.2 de g-inversas de una aplicación lineal A son equivalentes.

Demostración:

Es obvio que si A^- es g-inversa de A según la definición

2.1.2, también lo es según la definición 2.1.1.

Inversamente, si A^- es g-inversa de A según la definición 2.1.1, veamos que $\mathcal{V}=\{y\varepsilon\mathcal{K}$ / $A^-y\varepsilon\text{Ker }A\}=\{y\varepsilon\mathcal{K}$ / $AA^-y=0\}=\text{Ker }AA^-$ es el único subespacio $\mathcal{V}$ que verifica las condiciones de la definición 2.1.2. En efecto: si $y\varepsilon R(A)\cap\text{Ker }AA^- \rightarrow A^-y\varepsilon\mathcal{U}\cap\text{Ker }A=$ $=\{0\} \rightarrow A^-y=0 \rightarrow y=0$, ya que A^- sobre R(A) es biyectiva. Luego $\mathcal{V}\cap R(A)=\{0\}$. Si $y\varepsilon R(A)\rightarrow AA^-y=y\rightarrow y\varepsilon R(AA^-)$, luego $R(A)=R(AA^-)$, por lo que $\rho(\text{Ker }AA^-)=m-\rho(AA^-)=m-\rho(A)$, por lo tanto $\mathcal{V}\oplus R(A)=\mathcal{K}$.

El subespacio $\mathcal{V}$ es claramente único por su misma definición.

Estas dos definiciones de g-inversas de A no aparecen tratadas, al menos explicitamente, en la literatura estadística. Sin embargo las consideramos interesantes porque muestran como cada A^- tiene asociados un par de subespacios $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ complementarios respectivos de Ker A y R(A). Es evidente que el par $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ no definen una sola g-inversa, sin embargo los subespacios asociados a una g-inversa A^- son únicos y son $\mathcal{U}=R(A^-A)$ y $\mathcal{V}=$ $=\text{Ker }AA^-$.

Veamos ahora una serie de propiedades básicas de las g-inversas de A con demostraciones más sencillas que las dadas por Rao y Mitra.

Si E y F son dos subespacios de $\mathcal{H}(\mathcal{K})$ / $E\oplus F=\mathcal{H}$ $(E\oplus F=\mathcal{K})$, representaremos por $\mathcal{I}(E,F)$ la proyección sobre F según E.

<u>Proposición 2.1.2</u>

Si A^- es una g-inversa de A, entonces $\rho(A^-)\geq\rho(A)$.

<u>Demostración</u>:

Consecuencia inmediata de la definición 2.1.2.

<u>Proposición 2.1.3</u>

Si A^- es una g-inversa de A y $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ el par de subespacios asociados, entonces se verifica:

a) $A^-A=\mathcal{I}(\text{Ker }A,\mathcal{U})$.

b) $AA^{-}=I(V,R(A))$

Demostración:

Dado $x\varepsilon H$, sean x_1 y x_2 las componentes de x sobre Ker A y U respectivamente. Entonces: $A^{-}Ax=A^{-}A(x_1+x_2)=A^{-}Ax_1+A^{-}Ax_2=$ $=A^{-}Ax_2=x_2$, ya que $U=R(A^{-}A)$. Por lo que a) es cierto.

Pasemos a demostrar b). Dado $y\varepsilon K$, sean y_1 e y_2 las componentes de y sobre V y $R(A)=R(A^{-}A)$ respectivamente. Entonces $AA^{-}y=AA^{-}(y_1+y_2)=AA^{-}y_1+AA^{-}y_2=AA^{-}y_2=y_2$ pues $V=\text{Ker } AA^{-}$.

Las siguientes tres proposiciones caracterizan una g-inversa de A. Son precisamente las que Rao y Mitra dan como definiciones.

Proposición 2.1.4

A^{-} es una g-inversa de A si y solo si se verifica alguna de las siguientes condiciones:

a) $A^{-}A$ es una proyección y $\rho(A^{-}A)=\rho(A)$.

b) AA^{-} es una proyección y $\rho(AA^{-})=\rho(A)$.

Demostración:

Si A^{-} es una g-inversa de A, según la proposición 2.1.3 se verifican las condiciones.

Inversamente, si se verifica la condición a) es inmediato que A^{-} es una g-inversa de A según la definición 2.1.1 tomando $U=R(AA^{-})$. Si se verifica la condición b) entonces AA^{-} es una proyección sobre R(A). Sea $U=R(A^{-}A)$. Si $x\varepsilon U\cap \text{Ker } A \rightarrow \exists z\varepsilon H$ / $x=A^{-}Az \wedge Ax=AA^{-}Az=Az=0 \rightarrow x=0$, luego $U\cap \text{Ker } A=\{0\}$. Si $x\varepsilon H \wedge$ $x\varepsilon \text{ Ker } A^{-}A \rightarrow A^{-}Ax=0 \rightarrow (AA^{-})Ax=Ax=0 \rightarrow x\varepsilon \text{ Ker } A$. Luego $\text{Ker } A^{-}A=$ $=\text{Ker } A$, por lo que $U\oplus\text{Ker } A=H$. Solo nos falta ver que A^{-} definida de R(A) en U coincide con A_U^{-1}, pero esto es evidente, pues si $y\varepsilon R(A) \rightarrow A(A^{-}y)=(AA^{-})y=y$. Según la definición 2.1.1 A^{-} es una g-inversa de A.

Proposición 2.1.5

A^- es una g-inversa de A si y solo si $AA^-A=A$.

Demostración:

Si A^- es una g-inversa de A, según la definición 2.1.2, es evidente que $AA^-A=A$.

Inversamente, si $AA^-A=A \rightarrow AA^-AA^-=AA^-$. Luego AA^- es una proyección y además es obvio que $\rho(AA^-)=\rho(A)$.

Proposición 2.1.6

A^- es una g-inversa de A si y solo si $\forall y \varepsilon R(A) \rightarrow A^-y$ es solución de la ecuación $Ax=y$.

Demostración: Consecuencia inmediata de la anterior proposición.

Proposición 2.1.7

La solución general de la ecuación $Ax=y$ / $y\varepsilon R(A)$ es $x=A^-y+z$ $\forall z\varepsilon \text{Ker } A$ siendo A^- una g-inversa de A.

Demostración: Consecuencia inmediata de la proposición anterior.

Sea T un espacio vectorial real finito dimensional euclídeo. Un resultado que utilizaremos con frecuencia en posteriores capítulos viene dado por la siguiente proposición cuya demostración puede verse en Rao y Mitra |**43**|.

Proposición 2.1.8'

Sea $B\in L(H,T)$. Una condición necesaria y suficiente para que $BA^{-}A=B$ $\forall A^{-}$ g-inversa de A es que Ker $B\supset$ Ker A; es decir $R(B')\subset R(A')$.

La siguiente proposición proporciona la representación general de cualquier g-inversa de A.

Proposición 2.1.9

Si A^{-} es una g-inversa de A, entonces cualquier otra g-inversa de A es de la forma $A^{-}+U-A^{-}AUAA^{-}$, donde $U\in L(K,H)$.

La demostración puede verse en Rao y Mitra |43|.

La definición que damos de g-inversa reflexiva corresponde a la definición de pseudoinversa de Dempster.

Definición 2.1.3

A_r^{-} es una g-inversa reflexiva de A si A_r^{-} es una g-inversa de A y si (U,V) son los subespacios asociados se verifica que $A_r^{-}(V)=\{0\}$.

Es inmediato que la definición 2.1.3 equivale a la siguiente:

Definición 2.1.4

A_r^{-} es una g-inversa reflexiva de A si A_r^{-} es una g-inversa de A y $\rho(A)=\rho(A_r^{-})$.

Notemos que en una g-inversa reflexiva A_r^{-} de A se tiene que $V=\text{Ker } A_r^{-}$.

Proposición 2.1.10

A_r^- es g-inversa reflexiva de A si y solo si A_r^- es g-inversa de A, y A es g-inversa de A_r^-.

Demostración:

Es inmediata puesto que al ser $V=\mathrm{Ker}\, A_r^-$ hay una total simetría entre A_r^- y A.

En adelante, H y K se considerarán euclídeos con productos interiores respectivos $(\ , \ )_H$ y $(\ , \ )_K$.

2.2 SOLUCIONES MINIMA V-NORMA DE LA ECUACION Ax=y (Consistente)

Sea $V(\ , \ )_H$ un semiproducto interior en H.

Definición 2.2.1

$G\varepsilon L(K,H)$ es una solución mínima V-norma de la ecuación $Ax=y$ $\forall y\varepsilon R(A)$ si Gy es solución de la ecuación $Ax=y$ $\forall y\varepsilon R(A)$ y $\min_{x/Ax=y} \|x\|_V = \|Gy\|_V$ $\forall y\varepsilon R(A)$.

La siguiente proposición no aparece como tal en la literatura, puesto que Rao y Mitra |43| le exigen que sea g-inversa. Caracteriza las soluciones minima V-norma.

Proposición 2.2.1

G es una solución minima V-norma de la ecuación $Ax=y$ $\forall y\varepsilon R(A)$ si y solo si G es una g-inversa de A y $V(R(GA)) \subset \subset (\mathrm{Ker}\, A)^{\perp}$.

Demostración:

G es solución mínima V-norma de la ecuación $Ax=y$ $\forall y\varepsilon R(A)$

si y solo si G es g-inversa de A (según la proposición 2.1.6) y $\|Gy\|_V = \underset{x\varepsilon F_y}{\text{mínimo}} \|x\|_V$ $\forall y \varepsilon R(A)$, siendo F_y un subespacio trasladado de Ker A $\leftrightarrow$ G es una g-inversa de A y $V(Gy,z)_H=0$ $\forall y\varepsilon R(A)$ $\forall z\varepsilon$Ker A $\leftrightarrow$ G es una g-inversa de A y $(VGAx,z)_H=0$ $\forall x\varepsilon H$ $\forall z\varepsilon$Ker A $\leftrightarrow$ G es una g-inversa de A y $V(R(GA))\subset(\text{Ker } A)^{\perp}$.

Corolario 2.2.1.1

G es una solución minima V-norma de la ecuación Ax=y $\forall y\varepsilon R(A)$ si y solo si AGA=A y (GA)'V=VGA.

Demostración:

$(VGAx,z)_H=0$ $\forall x\varepsilon H$, $\forall z\varepsilon$Ker A y G una g-inversa de A $\leftrightarrow$ $\leftrightarrow$ $(VGAx,(I-GA)z)_H=0$ $\forall x\varepsilon H$, $\forall z\varepsilon H$ y AGA=A $\leftrightarrow$ (I-GA)'VGA=0 y AGA=A $\leftrightarrow$ AGA=A y (GA)'V=VGA.

Corolario 2.2.1.2

G es una solución mínima V-norma de la ecuación Ax=y $\forall y\varepsilon R(A)$ si y solo si G es una g-inversa de A y si (U,V) son los subespacios asociados, entonces $U=(\text{Ker } A)^{\perp} V$, siendo V simétrica y definida positiva.

Demostración:

Es inmediata puesto que la condición $V(GAx,z)_H=0$ $\forall x\varepsilon H$, $\forall z\varepsilon$Ker A equivale a $R(GA)=(\text{Ker } A)^{\perp}V$, pero $R(GA)=U$.

Rao y Mitra en |43| dan la ecuación general de las soluciones mínima V-norma cuando $V(\ ,\ )_H$ es un producto interior en H.

2.3 SOLUCIONES W-MINIMO CUADRADO DE LA ECUACION $Ax=y$ $\forall y\varepsilon K$

Sea $W(\ ,\ )_K$ un semi-producto interior en K.

Definición 2.3.1

$G\varepsilon L(K,H)$ es una solución W-minimo cuadrado de la ecuación $Ax=y$ $\forall y\varepsilon K$ si $\|AGy-y\|_W = \underset{x\varepsilon H}{\text{mínimo}} \|Ax-y\|_W$.

La siguiente proposición caracteriza las soluciones W- mínimo cuadrado:

Proposición 2.3.1

$G\varepsilon L(K,H)$ es solución W-mínimo cuadrado de la ecuación $Ax=y$ $\forall y\varepsilon K$ si y solo si se verifica alguna de las condiciones siguientes:

a) $G'A'$ es la identidad en $R(WA)$

b) $A'WAG=A'W$

c) $WAGA=WA$ y $(AG)'W=WAG$

Demostración:

La equivalencia entre las condiciones a) y b) es inmediata, basta trasponer en b).

Veamos la equivalencia entre b) y c). Si $A'W(AG-I)=0$, como $R(AG)\subset R(A)\rightarrow(AG)'A'^{-}A'=(AG)'$ $\forall A'^{-}$ g-inversa de A'. Luego $(AG)'A'^{-}A'W=(AG)'A'^{-}A'W(AG)\rightarrow(AG)'W=(AG)'WAG\rightarrow(AG)'W=WAG$. Además como $A'W=A'WAG\rightarrow WA=(AG)'WA=WAGA$.

Inversamente, si $(AG)'W=WAG$ y $WA=WAGA\rightarrow A'W=A'(WAG)'= =A'(AG)'W=A'WAG$.

Solo falta ver que G es solución W-mínimo cuadrado de $Ax=y$ $\forall y\varepsilon K$ equivale a que $G'A'$ es la identidad sobre $R(WA)$. En efecto: G es solución W-mínimo cuadrado de $Ax=y$ $\forall y\varepsilon K \leftrightarrow$
$\|AGy-y\|_W = \underset{x\varepsilon H}{\text{mínimo}} \|Ax-y\|_W \leftrightarrow W((AG-I)z,Ax)_K=0$ $\forall z\varepsilon K, \forall x\varepsilon H \leftrightarrow$

$\leftrightarrow$ $(AG-I)'WA=0$ $\leftrightarrow$ $G'A'WA=WA$

Rao y Mitra |43| apuntan que las soluciones no tienen por que ser g-inversas de A, sin embargo demuestran que siempre hay soluciones que lo son y dan una representación general de ellas que es la siguiente:

$(A'WA)^{-}A'W(I-(A'WA)^{-}(A'WA))U$, siendo U una aplicación cualquiera y $(A'WA)^{-}$ una g-inversa fija de A'WA.

Proposición 2.3.2

Si $W(\ ,\ )_K$ es un producto interior en K, las siguientes condiciones son equivalentes:

a) G es solución W-mínimo cuadrado de $Ax=y$ $\forall y\varepsilon K$

b) $AGA=A$ y $(AG)'W=WAG$

c) G es g-inversa de A, y si (U,V) son los subespacios asociados, se tiene $V=(R(A))^{\perp W}$.

Demostración;

La equivalencia entre a) y b) es una consecuencia inmediata de la proposición 2.3.1. Veamos la equivalencia entre a) y c). En efecto, G es solución W-mínimo cuadrado de $Ax=y$ $\forall y\varepsilon K$ $\leftrightarrow$ $W((AG-I)z,Ax)_K=0$ $\forall z\varepsilon K$, $\forall x\varepsilon H$ y G es una g-inversa de A $\leftrightarrow$ G es g-inversa de A y $I-AG=Y(V,R(A))$, siendo $V=(R(A))^{\perp W}$.

2.4 SOLUCIONES W-MINIMO CUADRADO-MINIMA V-NORMA

Sean $V(\ ,\ )_H$ y $W(\ ,\ )_K$ dos semi-productos interiores en H y K respectivamente.

Definición 2.4.1

$G\varepsilon L(K,H)$ es solución W-mínimo cuadrado-mínima V-norma de la ecuación $Ax=y$ $\forall y\varepsilon K$ si G es solución W-mínimo cuadrado de $Ax=y$ $\forall y\varepsilon K$ y $\|Gy\|_V \leq \|G^*y\|_V$ $\forall y\varepsilon K$, $\forall G^*$ solución W-mínimo cuadrado de $Ax=y$ $\forall y\varepsilon K$.

El siguiente teorema caracteriza las soluciones W-mínimo cuadrado-mínima V-norma.

Teorema 2.4.1

G es solución W-mínimo cuadrado-mínima V-norma de $Ax=y$ $\forall y\varepsilon K$ si y solo si $G'A'$ es la identidad en $R(WA)$ y $G'Vt=0$ $\forall t\varepsilon \text{Ker } A'WA$.

Demostración:

G es solución W-mínimo cuadrado-mínima V-norma de $Ax=y$ $\forall y\varepsilon K \leftrightarrow \|Gy\|_V \leq \|G^*y\|_V \forall G^*/ W(AG^*y-y,Ax)_K=0 \quad x\varepsilon H,\ y\varepsilon K \leftrightarrow$ $\leftrightarrow$ $G'A'$ es la identidad en $R(WA)$ y $\|Gy\|_V \leq \|G^*y\|_V \quad \forall G^*$ / $A'WAG^*y=A'Wy$ $\forall y\varepsilon K \leftrightarrow G'A'$ es la identidad en $R(WA)$ y para cada y de K se verifica $\|Gy\|_V \leq \|G^*y\|_V \quad \forall G^*$ / $G^*y\varepsilon w+\text{Ker } A'WA$ siendo w / $A'WAw=A'Wy \leftrightarrow$ (aplicando el teorema de la proyección generalizada) $G'A'$ es la identidad en $R(WA)$ y $\forall y\varepsilon K$, $VGy\varepsilon(\text{Ker } A'WA)^{\perp} \leftrightarrow G'A'$ es la identidad en $R(WA)$ y $VG(K)\subset$ $\subset(\text{Ker } A'WA)^{\perp} \leftrightarrow G'A'$ es la identidad en $R(WA)$ y $G'Vt=0$ $\forall t\varepsilon \text{Ker } A'WA$.

La caracterización dada por el teorema 2.4.1 de las soluciones W-mínimo cuadrado-mínima V-norma no aparece en la literatura estadística. Rao y Mitra |43| enuncian sin demostrar la siguiente:

Proposición 2.4.1

G es solución W-mínimo cuadrado-mínima V-norma de la ecuación $Ax=y$ $\forall y\varepsilon K$ si y solo si $WAGA=WA \quad VGAG=VG \quad (AG)'W=$ $=WAG \quad (GA)'V=VGA$.

Demostración:

G es solución W-minimo cuadrado-minima V-norma de $Ax=y$ $\forall y \varepsilon K \leftrightarrow G'A'$ es la identidad en $R(WA)$ y $VG(K) \subset (\text{Ker } A'WA)$. Pero $G'A'$ es la identidad en $R(WA) \leftrightarrow A'WAGy=A'Wy$ $\forall y \varepsilon K$, luego $A'WAGAx=A'WAx$ $\forall x \varepsilon H$, por lo que $(I-GA)(H)=\text{Ker } A'WA$.

Por lo tanto G es solución W-minimo cuadrado-minima V-norma de $Ax=y$ $\forall y \varepsilon K \leftrightarrow G'A'$ es la identidad en $R(WA)$ y $V(Gx,(I-GA)z)_H=0$ $\forall x \varepsilon K, \forall z \varepsilon H \leftrightarrow WAGA=WA$ $(AG)'W=WAG$ y $G'V(I-GA)=0 \leftrightarrow WAGA=WA$ $(AG)'W=WAG$ $VGAG=VG$ $(GA)'V=VGA$.

Notemos que si $W(\ ,\ )_K$ es un producto interior, entonces como consecuencia de la proposición 2.3.2, la solución será siempre g-inversa de A.

Vamos ahora a introducir la g-inversa Moore-Penrose de A relacionandola con las soluciones W-minimo cuadrado-minima V-norma.

Supongamos que $V(\ ,\ )_H$ y $W(\ ,\ )_K$ son ambos productos interiores. Consideremos la familia A^* de g-inversas de A con par de subespacios asociados (U,V) / $U=(\text{Ker } A)^{\perp V}$ y $V=(R(A))^{\perp W}$. Es evidente que solo hay una g-inversa reflexiva en A^*. Podemos por lo tanto definir:

Definición 2.4.2

A^+_{WV} es la g-inversa Moore-Penrose de A si $A^+_{WV} \varepsilon A^*$ y A^+_{WV} es reflexiva.

Si $W=V=I$, se usará la notación A^+ en lugar de A^+_{II}.

Esta introducción de la g-inversa Moore-Penrose es más sencilla que la dada por Rao y Mitra.

Proposición 2.4.2

G es la g-inversa A^+_{WV} si y solo si $AGA=A$ $GAG=G$ $(AG)'W=WAG$ $(GA)'V=VGA$.

Demostración:

Consecuencia inmediata del corolario 2.2.1.2 y de la proposición 2.3.2.

Proposición 2.4.3

$G\varepsilon L(K,H)$ es solución W-mínimo cuadrado-mínima V-norma de Ax=y $\forall y\varepsilon K$ si y solo si $G=A^{+}_{WV}$.

Demostración:

Es una consecuencia inmediata de la proposición 2.4.2 y de la proposición 2.4.1

CAPITULO 3

LIMBE's

El primer tratamiento sistematizado de los estimadores lineales mínimo sesgo de los parámetros de regresión en un modelo lineal se debe a Chipman | 9 |. En su excelente trabajo realiza un estudio completo cuando la matriz de sesgo es regular. Estos estimadores conocidos en la literatura estadística como LIMBE's (linear minimum bias estimators) han sido generalizados por Rao |36| para un sesgo no necesariamente regular en el modelo lineal de regresión sin restricciones. Desde nuestro punto de vista, el tratamiento dado por Schonfeld |44| a estos estimadores es el más completo. Sin embargo se limita al modelo lineal de regresión sin restricciones con un sesgo no singular y al modelo lineal de regresión con restricciones pero con un sesgo igual a la identidad.

Nuestro objetivo en este capítulo es desarrollar los LIMBE's desde la aproximación libre de coordenadas en un modelo lineal con posiblemente restricciones sobre los parámetros y con un sesgo cualquiera. Veremos también en que sentido los LIMBE's son generalizaciones de los correspondientes estimadores insesgados cuando éstos existan.

3.1 REPRESENTACION DEL MODELO LINEAL $M(F)$. CONDICIONES DE ESTIMABILIDAD

En todo este capítulo H y K representarán dos espacios vectoriales reales finito-dimensionales con productos interiores respectivos $(\ ,\ )_H$ y $(\ ,\ )_K$.

Sea Y un vector aleatorio distribuido en H que sigue el modelo lineal $M(F)$, siendo $F=\{\mu_\theta \ / \ \theta\varepsilon\Omega\}$. Supondremos $\Omega\subset K$. El conjunto F es un subespacio trasladado de la forma $F=\mu_{\theta_0}+U$, siendo $U=\{\mu_\theta-\mu_{\theta_0} \ / \ \theta\varepsilon\Omega\}$ un subespacio de H.

Supondremos que $M(F)$ admite una representación en K de la siguiente forma: $\exists A\varepsilon L(K,H)$ y $\exists K\varepsilon L(K,H)$ / $\mu_{\theta_0}=A\theta_0 \wedge \mu_\theta-\mu_{\theta_0}=$ $=K(\theta-\theta_0)$ $\forall\theta\varepsilon\Omega$, siendo $U_K=\{\theta-\theta_0 \ / \ \theta\varepsilon\Omega\}$ un subespacio de K.

Consideremos la familia $A_1=\{a+(b,Y)_H \ / \ a\varepsilon R \wedge b\varepsilon H\}$.

<u>Definición 3.1.1</u>

$(\lambda,\theta)_K$ es A_1-estimable si $\exists$ $a+(b,Y)_H\varepsilon A_1$ / $E(a+(b,Y)_H)=$ $=(\lambda,\theta)_K$ $\forall\theta\varepsilon\Omega$. Entonces se dice que $a+(b,Y)_H$ es un A_1-estimador de $(\lambda,\theta)_K$.

El estudio detallado de la A_1-estimabilidad de las formas lineales $(\lambda,\theta)_K$ ha sido desarrollado por Basulto J. | 7 |. Recogemos de esta última cita el siguiente resultado:

<u>Proposición 3.1.1</u>

La forma lineal $(\lambda,\theta)_K$ es A_1-estimable si y solo si $\lambda\varepsilon R(K')+U_K^{\perp}$.

En consecuencia podemos enunciar el siguiente corolario:

<u>Corolario 3.1.1.1</u>

Todas las formas lineales $(\lambda,\theta)_K$ son A_1-estimables si y solo si $\mathrm{Ker}\ K\cap U_K=\{0\}$.

Demostración:

$(\lambda,\theta)_K$ $\forall\lambda\varepsilon K$ es A_1-estimable $\leftrightarrow$ $R(K')+\mathcal{U}_K^{\perp}=K$ $\leftrightarrow$ $(\text{Ker } K)^{\perp}+$ $+\mathcal{U}_K^{\perp}=K$ $\leftrightarrow$ $\text{Ker } K\cap\mathcal{U}_K=\{0\}$.

En definitiva, la condición necesaria y suficiente para que todas las formas lineales $(\lambda,\theta)_K$ sean A_1-estimables es que K sea inyectiva sobre $\mathcal{U}_K$.

En ocasiones interesa estimar directamente θ buscando los estimadores de una adecuada familia. Vamos a estudiar este problema extrayendo los estimadores de la familia $B_1=$ $=\{c+GY \ / \ c\varepsilon K \wedge G\varepsilon L(H,K)\}$. Daremos condiciones de existencia.

Definición 3.1.2

θ es B_1-estimable si $\exists c+GY\varepsilon B_1$ / $E(c+GY)=\theta$ $\forall\theta\varepsilon\Omega$. Entonces diremos que c+GY es un B_1-estimador de θ.

Como consecuencia de la definición de esperanza de un vector aleatorio, la definición 3.1.2 es equivalente a la siguiente:

Definición 3.1.3

θ es B_1-estimable si $E(\lambda,c+GY)_K=(\lambda,\theta)_K$ $\forall\theta\varepsilon\Omega$.

La siguiente proposición proporciona condiciones necesarias y suficientes para la B_1-estimabilidad de θ.

Proposición 3.1.2

θ es B_1-estimable si y solo si $\text{Ker } K\cap\mathcal{U}_K=\{0\}$.

Demostración:

θ es B_1-estimable $\leftrightarrow$ $\exists c+GY\varepsilon B_1$ / $E(\lambda, c+GY)_K=(\lambda,\theta)_K$ $\forall\lambda\varepsilon K,\forall\theta\varepsilon\Omega$ $\leftrightarrow$ $(\lambda,c+G(A\theta_0+K(\theta-\theta_0)))_K=(\lambda,\theta)_K$ $\forall\lambda\varepsilon K,\forall\theta\varepsilon\Omega$ $\leftrightarrow$ $\leftrightarrow$ $(\lambda,c+GA\theta_0-\theta_0)_K=0$ y $((K'G'-I)\lambda,\theta-\theta_0)_K=0$ $\forall\lambda\varepsilon K,\forall\theta\varepsilon\Omega$ $\leftrightarrow$

$\leftrightarrow$ $c=(I-GA)\theta_0$ y $(K'G'-I)(K)\subset \mathcal{U}_K^{\perp} \leftrightarrow$ (aplicando el teorema de Farkas) $c=(I-GA)\theta_0$ y GK es la identidad sobre $\mathcal{U}_K$. Pero es inmediato que una G verificando las dos últimas condiciones existe si y solo si $\mathcal{U}_K \cap \mathrm{Ker}\ K=\{0\}$.

Como consecuencia inmediata de la demostración de la proposición 3.1.2 el siguiente corolario es evidente:

Corolario 3.1.2.1

Si θ es $\mathcal{B}_1$-estimable, entonces $c+GY$ es un $\mathcal{B}_1$-estimador de θ si y solo si $c=(I-GA)\theta_0$ y $GKz=z$ $\forall z\varepsilon\mathcal{U}_K$.

Como consecuencia de las proposiciones 3.1.1 y 3.1.2 podemos enunciar el siguiente corolario:

Corolario 3.1.2.2

θ es $\mathcal{B}_1$-estimable si y solo si $(\lambda,\theta)_K$ es $\mathcal{A}_1$-estimable $\forall\lambda\varepsilon K$.

3.2 ESTIMADORES LINEALES MINIMO SESGO (LIMBE) DE $(\lambda,\theta)_K$ Y DE θ.

Hemos visto en el apartado 3.1 que no siempre existen $\mathcal{A}_1$-estimadores de $(\lambda,\theta)_K$ $\forall\lambda\varepsilon K$, por lo tanto no siempre existen $\mathcal{B}_1$-estimadores de θ, por lo que vamos a analizar unos estimadores de $(\lambda,\theta)_K$ y de θ que los generalicen en un cierto sentido.

Sea $(\lambda,\theta)_K$ una forma lineal con $\lambda\varepsilon K$. Consideremos un $c+(a,Y)_H\varepsilon\mathcal{A}_1$ como estimador de $(\lambda,\theta)_K$. El sesgo de esta estimación será:

$E(c+(a,Y)_H)-(\lambda,\theta)_K=c+(a,A\theta_0+K(\theta-\theta_0))_H-(\lambda,\theta)_K=c+(a,A\theta_0)_H-$
$-(\lambda,\theta_0)_K+(K'a-\lambda,\theta-\theta_0)_K=c+(a,A\theta_0)_H-(\lambda,\theta_0)_K+(P(K'a-\lambda),\theta-\theta_0)_K$,
siendo P la proyección ortogonal sobre $\mathcal{U}_K$.

Sea $V(\ ,\ )_K$ un semi-producto interior en K. La lógica que preside el estimador LIMBE de $(\lambda,\theta)_K$ consiste en definir un sesgo ponderado según $V(\ ,\ )_K$ de $c+(a,Y)_H \varepsilon A_1$ y buscar los estimadores que lo minimicen. En principio esta técnica puede parecer arbitraria, sin embargo veremos que eligiendo V adecuadamente generalizaremos el concepto de A_1-estimabilidad.

Definición 3.2.1

El sesgo ponderado según $V(\ ,\ )_K$ de $c+(a,Y)_H$ es la expresión $c+(a,A\theta_0)_H-(\lambda,\theta_0)_K+V(P(K'a-\lambda),\theta-\theta_0)_K$.

Definición 3.2.2

$c+(a,Y)_H \varepsilon A_1$ es un LIMBE de $(\lambda,\theta)_K$ si minimiza el sesgo ponderado según $V(\ ,\ )_K$ $\forall\theta\varepsilon\Omega$ en A_1.

La siguiente proposición caracteriza estos LIMBE:

Proposición 3.2.1

$c+(a,Y)_H$ es LIMBE de $(\lambda,\theta)_K$ si y solo si $KVPV\lambda=KPVPK'a$ y $c=(\lambda,\theta_0)_K-(a,A\theta_0)_H$.

Demostración:

$c+(a,Y)_H$ es LIMBE de $(\lambda,\theta)_K \leftrightarrow c+(a,A\theta_0)_H-(\lambda,\theta_0)_K=0$ y a minimiza $V(P(K'a-\lambda),\theta-\theta_0)_K$ $\forall\theta\varepsilon\Omega \leftrightarrow c+(a,A\theta_0)_H-(\lambda,\theta_0)_K=0$ y a minimiza $\|P(K'a-\lambda)\|_V \leftrightarrow$ (por el teorema de la proyección generalizada) $c+(a,A\theta_0)_H-(\lambda,\theta_0)_K=0$ y $(V(P\lambda-PK'a),z)_K=0$ $\forall z\varepsilon R(PK') \leftrightarrow c+(a,A\theta_0)_H-(\lambda,\theta_0)_K=0$ y $KPVP\lambda=KPVPK'a$.

La existencia de LIMBE's de $(\lambda,\theta)_K$ está asegurada por el teorema de la proyección generalizada $\forall\lambda\varepsilon K$.

La siguiente proposición caracteriza los LIMBE's de $(\lambda,\theta)_K$ en función de su insesgadez sobre un subconjunto de Ω.

Proposición 3.2.2

$c+(a,Y)_H$ es un LIMBE de $(\lambda,\theta)_K$ si y solo si $E(c+(a,Y)_H)=$ $=(\lambda,\theta)_K$ $\forall\theta\varepsilon\theta_0+R(PVPK')$.

Demostración:

$E(c+(a,Y)_H)-(\lambda,\theta)_K=c+(a,A\theta_0)_H+(K'a-\lambda,\theta-\theta_0)_K=0$ $\theta\varepsilon\theta_0+$ $+R(PVPK')$ $\leftrightarrow$ $c=(\lambda,\theta_0)_K-(a,A\theta_0)_H$ y $K'a-\lambda\varepsilon(R(PVPK'))^{\perp}$ $\leftrightarrow$ $c=$ $=(\lambda,\theta_0)_K-(a,A\theta_0)_H$ y $K'a-\lambda\varepsilon Ker\ KPVP$ $\leftrightarrow$ $c+(a,Y)_H$ es un LIMBE de $(\lambda,\theta)_K$.

La proposición 3.2.2 no aparece en la literatura estadística y sin embargo es interesante, pues nos permite observar que nos interesa ponderar según V que alcancen $\rho(PVPK')$ máximo, lo cual como luego veremos se consigue con V / $\rho(PVPK')=\rho(PK')$.

Pasamos ya a definir los LIMBE's del vector paramétrico θ de la siguiente forma:

Definición 3.2.3

$c+GY\varepsilon\mathcal{B}_1$ es un LIMBE de θ si $(\lambda,c+GY)_K$ es un LIMBE de $(\lambda,\theta)_K$ $\forall\lambda\varepsilon K$.

Daremos un estudio detallado de los LIMBE's de θ, porque nos proporcionan, como indica la definición 3.2.3 LIMBE's de todas las formas lineales de θ.

El siguiente teorema caracteriza los LIMBE's de θ:

Teorema 3.2.1

$c+GY$ es un LIMBE de θ si y solo si $c=(I-GA)\theta_0$ y GK es la identidad sobre $R(PVPK')$.

Demostración:

c+GY es un LIMBE de $\theta \leftrightarrow (\lambda,c+GY)_K$ es un LIMBE de $(\lambda,\theta)_K$ $\forall\lambda\varepsilon K \leftrightarrow (\lambda,c)_K-(A'G'\lambda,\theta_0)_K$ y $KPVP\lambda=KPVPK'G'\lambda$ $\forall\lambda\varepsilon K \leftrightarrow c=(I-GA)\theta_0$ y $KPVP=KPVPK'G' \leftrightarrow c=(I-GA)\theta_0$ y GK es la identidad sobre R(PVPK').

El siguiente corolario es consecuencia inmediata del teorema 3.2.1 y de la proposición 2.3.1:

Corolario 3.2.1.1

$c+GY\varepsilon\mathcal{B}_1$ es un LIMBE de θ si y solo si $c=(I-GA)\theta_0$ y G' es una solución PVP-mínimo cuadrado de K'.

Este corolario es un generalización de la caracterización de LIMBE's dada por Rao |**36**|, |**37**|, |**39**| y coincide con su resultado si $\mathcal{U}_K$ coincide con K y $\theta_0=0$.

Tras este corolario es evidente que la existencia de LIMBE's de θ y por lo tanto de $(\lambda,\theta)_K$ $\forall\lambda\varepsilon K$ está asegurada.

Daremos ahora una nueva caracterización de LIMBE's de θ que generaliza las proposiciones 3.1 y 4.1 dadas por Schonfeld |**44**|.

Teorema 3.2.2

$c+GY\varepsilon\mathcal{B}_1$ es un LIMBE de θ si y solo si $c=(I-GA)\theta_0$ y $GKPU=PU(KPU)^+(KPU)$; siendo $U\varepsilon L(K,K)$ / $V=UU'$.

Demostración:

Basta con ver que $GKPUU'PK'=PUU'PK'$ equivale a $GKPU=PU(KPU)^+(KPU)$. En efecto:

si $GKPUU'PK'=PUU'PK' \rightarrow GKPUU'PK'(U'PK')^+=PU(U'PK')(U'PK')^+ \rightarrow$
$\rightarrow GKPU((KPU)^+(KPU))'=PU((KPU)^+(KPU))' \rightarrow GKPU=PU(KPU)^+(KPU)$.
Inversamente, si $GKPU=PU(KPU)^+(KPU) \rightarrow GKPU(KPU)'=$
$=PU(KPU)^+(KPU)(KPU)' \rightarrow GKPUU'PK'=PUU'PK'$.

Notemos que si P=I y $\theta_0=0$ obtenemos la proposición 3.1 de Schonfeld. Si V=U=I entonces obtenemos la proposición 4.1.

La siguiente proposición caracteriza los LIMBE's de θ en función de su insesgadez sobre un subconjunto de Ω. Generaliza las proposiciones 3.2 y 4.2 de Schonfeld |44|.

Proposición 3.2.3

$c+GY\varepsilon\mathcal{B}_1$ es un LIMBE de θ si y solo si $E(c+GY)=\theta$ $\forall\theta\varepsilon\theta_0+$ $+R(PVPK')$.

Demostración:

$E(c+GY)-\theta=c+GA\theta_0+GK(\theta-\theta_0)-\theta=c-(I-GA)\theta_0+(GK-I)(\theta-\theta_0)=0$ $\theta\varepsilon\theta_0+R(PVPK')$ si y solo si $c=(I-GA)\theta_0$ y GK es la identidad sobre $R(PVPK')$ $\leftrightarrow$ $c+GY$ es un LIMBE de θ.

Somos conscientes de que la lógica que preside la estimación LIMBE es ciertamente confusa. De hecho en la literatura estadística no se dá ninguna normativa para la elección de V. No obstante si lo que se intenta es generalizar respectivamente los $\mathcal{A}_1$-estimadores de $(\lambda,\theta)_K$ y los $\mathcal{B}_1$-estimadores de θ, a nuestro juicio, y como consecuencia de las proposiciones 3.2.2 y 3.2.3 deben utilizarse V / $\rho(PVPK')$ sea máximo, es decir $\rho(PVPK')=\rho(PK')$. Una particular subfamilia de V que verifica esta condición son aquellas V que $R(PVPK')=R(PK')$.

La siguiente proposición cuya demostración es inmediata nos aclara en que sentido los LIMBE's generalizan los estimadores insesgados:

Proposición 3.2.4

Si $\mathrm{Ker}\,K\cap\mathcal{U}_K=\{0\}$ y $\rho(PVPK')=\rho(PK')$, entonces se verifica:

a) $c+(a,Y)_H$ es un LIMBE de $(\lambda,\theta)_K$ si y solo si es un $\mathcal{A}_1$-estimador de (λ,θ) .

b) $c+GY$ es un LIMBE de θ si y solo si es un $\mathcal{B}_1$-estimador de θ.

Ya hemos comentado que Rao no analiza los LIMBE's con restricciones en el modelo lineal de regresión, es decir se limita a estudiar el caso en que $\Omega=K$. La justificación teórica que argumenta en |36| es que cualquier modelo lineal con restricciones sobre los parámetros de regresión se puede reescribir como un modelo lineal sin restricciones mediante un adecuado cambio de parámetros. A nuestro juicio este método además de no ser operativo pierde incidencia sobre los parámetros de interés.

Schonfeld ha atacado el problema con V=I y restricciones sobre los parámetros de la forma $S\beta=z\neq 0$ en el modelo lineal de regresión $EY=X\beta$, donde $\beta\varepsilon R^p$, S es una matriz qxp y $z\varepsilon R^q$. Dá soluciones para LIMBE's de β, construye el modelo $E\begin{bmatrix}Y\\Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X\\S\end{bmatrix}\beta$; $\beta\varepsilon R^p$ y demuestra que los LIMBE's de β en ambos modelos coinciden. De esta forma el estudio de LIMBE's con restricciones lo reduce al estudio de LIMBE's sin restricciones. De cualquier manera, el problema con un semi-producto interior $V(\ ,\ )_K$ cualquiera no estaba resuelto. Esto se ha conseguido con nuestra aproximación libre de coordenadas a los LIMBE's. Por otra parte, el interés en evitar los LIMBE's con restricciones nos parece irrelevante, ya que, como demuestra la proposición siguiente, la diferencia entre un LIMBE con restricciones y un LIMBE sin restricciones estriba tan solo en la ponderación del sesgo más un término adicional.

<u>Proposición 3.2.5</u>

Consideremos el modelo lineal $M(F)$, siendo $F=\{\mu_\theta=A\theta_0+K(\theta-\theta_0)\ /\ \theta\varepsilon\Omega\}$ y el modelo lineal $M(F^*)$, con $F^*=\mu_\theta=K\theta;\theta\varepsilon K\}$. Entonces se verifica:

a) $c+(a,Y)_H$ es un LIMBE de $(\lambda,\theta)_K$ en $M(F)$ respecto de $V(\ ,\ )_K$ si y solo si $c=(\lambda,\theta_0)_K-(a,A\theta_0)_H$ y $(a,Y)_H$ es un LIMBE de $(\lambda,\theta)_K$ en el modelo $M(F^*)$ respecto de $PVP(\ ,\ )_K$.

b) $c+GY$ es un LIMBE de θ en $M(F)$ respecto de $V(\ ,\ )_K$ si y solo si $c=(I-GA)\theta_0$ y GY es un LIMBE de θ en el modelo $M(F^*)$ respecto de $PVP(\ ,\ )_K$.

Demostración:

Consecuencia inmediata de la proposición 3.2.1 y del teorema 3.2.1 respectivamente.

Ejemplo 3.2.1

Vamos a aplicar los resultados de este capítulo al modelo lineal de regresión en el que $H=R^n$, $K=R^p$, $K=X$ (matríz nxp), $\Omega=\{\beta\varepsilon R^p\ /\ T\beta=w\}$, siendo w un vector fijo de R^q y T una matríz qxp. Sea $\beta_0=T^-w$, siendo T^- cualquier g-inversa de T.

Entonces la representación del modelo es $EY=X\beta_0+$ $+X(\beta-\beta_0)$; es decir A=X. Obviamente $P=I-T^+T$.

El corolario 3.2.1.1, el teorema 3.2.2 y la proposición 3.2.3 quedarán respectivamente:

a) c+GY es un LIMBE de β si y solo si $c=(I-GX)T^-w$ y G' es una solución $(I-T^+T)V(I-T^+T)$-mínimo cuadrado de X'.

b) c+GY es un LIMBE de β si y solo si $c=(I-GX)T^-w$ y $GX(I-T^+T)U=(I-T^+T)U(X(I-T^+T)U)^+(X(I-T^+T)U)$, siendo U una matríz pxp tal que V=UU'.

c) c+GY es un LIMBE de β si y solo si $E(c+GY)=\beta \quad \beta\varepsilon T^-w+$ $+R((I-T^+T)V(I-T^+T)X')$.

En particular si no hay restricciones (w=0 y T=0) a) dá la caracterización presentada por Rao.

Si en b) tomamos V=I=U obtenemos la proposición 4.1 de Schonfeld con $\beta_0=T^+w$. Análogamente, si no hay restricciones b) nos dá su proposición 3.1.

Si en c) tomamos V=I=U, con $\beta_0=T^+w$, obtenemos la proposición 4.2 de Schonfeld. Si no hay restricciones obtenemos su proposición 3.2.

CAPITULO 4

BLIMBE's

En el capítulo 3, hemos desarrollado los LIMBE's de formas lineales $(\lambda,\theta)_K$ y del vector θ. En general estos estimadores no son únicos, por lo que, cuando la covarianza de Y es de la forma $\sigma^2\Sigma$, donde Σ es conocido, se elige de entre ellos "el mejor", en donde por el mejor entendemos el de mínima varianza. Estos estimadores lineales con mínimo sesgo y mínima varianza se conocen en la literatura estadística con el calificativo de BLIMBE's (best linear minimum bias estimators). Han sido estudiados por Chipman |**9**|, Rao |**36**|, |**37**|, |**39**| y Schonfeld |**44**| en el modelo lineal de regresión.

Nuestro objetivo en este capítulo es dar una aproximación a los BLIMBE's con independencia del sistema de coordenadas y con total generalidad respecto del semi-producto interior $V(\ ,\ )_K$, de la covarianza $\sigma^2\Sigma$ y de las restricciones sobre el parámetro θ. Veremos en que sentido cabe considerar los BLIMBE's como una generalización de los estimadores Gauss-Markov o BLUE's (best linear unbiased estimators). Estudiaremos también el problema de coincidencias de BLIMBE's de θ.

4.1 REPRESENTACION DEL MODELO $M(F,V)$. B_1-BLUE's DE θ.

Supondremos que el vector aleatorio Y sigue el modelo lineal $M(F,V)$ siendo $F=\{\mu_\theta=A\theta_0+K(\theta-\theta_0)\ /\ \theta\varepsilon\Omega\}$ y $V=\{\sigma^2\Sigma\}_{\sigma^2>0}$, siendo Σ conocido.

Definición 4.1.1

Sea $(\lambda,\theta)_K$ una forma lineal de θ A_1-estimable. $c+(a,Y)_H$ de A_1 es un A_1-BLUE de $(\lambda,\theta)_K$ si $c+(a,Y)_H$ es un A_1-estimador de $(\lambda,\theta)_K$ y $Var(c+(a,Y)_H)\leqslant Var(c^*+(a^*,Y)_H)$ $\forall c^*+(a^*,Y)_H$ A_1-estimador de $(\lambda,\theta)_K$ y $\forall\sigma^2\Sigma\varepsilon V$.

La siguiente proposición caracteriza los A_1-BLUE's de $(\lambda,\theta)_K$:

Proposición 4.1.1

Sea $(\lambda,\theta)_K$ una forma lineal A_1-estimable. Entonces $c+(a,Y)_H$ es un A_1-BLUE de $(\lambda,\theta)_K$ si y solo si $c=(\lambda,\theta_0)_K-$ $-(a,A\theta_0)_H$, $PK'a=P\lambda$ y $\Sigma a\varepsilon R(KP)$.

Demostración:

$c+(a,Y)_H$ es un A_1- estimador de $(\lambda,\theta)_K \leftrightarrow E(c+(a,Y)_H)=$ $=(\lambda,\theta)_K\forall\theta\varepsilon\Omega \leftrightarrow c=(\lambda,\theta_0)_K-(a,A\theta_0)_H$ y $PK'a=P\lambda$. Como a pertenece a un subespacio trasladado de Ker PK', por el teorema de la proyección generalizada $c+(a,Y)_H$ tiene mínima varianza entre los A_1-estimadores de $(\lambda,\theta)_K$ si y solo si $\sigma^2\Sigma(a,a)_H$ es mínimo $\forall\sigma^2\Sigma\varepsilon V$; es decir si y solo si $\Sigma a\varepsilon(\text{Ker } PK')^{\perp}=R(KP)$.

Si Ker $K\cap U_K=\{0\}$ entonces θ es B_1-estimable. Definimos los BLUE's de θ de la siguiente forma:

Definición 4.1.2

$c+GY$ B_1-estimador de θ es B_1-BLUE de θ si $Var(\lambda,c+GY)_K\leqslant$ $\leqslant Var(\lambda,c^*+G^*Y)_K$ $\forall\lambda\varepsilon K,\forall\sigma^2\Sigma\varepsilon V$ y $\forall c^*+G^*Y$ B_1-estimador de θ.

La siguiente proposición caracteriza los B_1-BLUE's de θ.

Proposición 4.1.2

$c+GY$ es un B_1-BLUE de θ si y solo si $c=(I-GA)\theta_0$, GK es es la identidad sobre $\mathcal{U}_K$ y $G\Sigma t=0$ $\forall t\varepsilon \mathrm{Ker}\ PK'$.

Demostración:

$c+GY$ es $\mathcal{B}_1$-BLUE de $\theta \leftrightarrow c=(I-GA)\theta_0$, $GKP=P$ y $(\lambda,c+GY)_K$ es $\mathcal{A}_1$-BLUE de $(\lambda,\theta)_K$ $\forall\lambda\varepsilon K \leftrightarrow c=(I-GA)\theta_0$, $GKP=P$ y $\Sigma G'\lambda\varepsilon R(KP)$ $\forall\lambda\varepsilon K \leftrightarrow c=(I-GA)\theta_0$, $GKP=P$ y $G\Sigma t=0$ $\forall t\varepsilon(R(KP))^{\perp}=\mathrm{Ker}\ PK'$.

Puesto que si $\mathcal{U}_K\cap\mathrm{Ker}\ K=\{0\}$, entonces $R(PK')=R(P)=\mathcal{U}_K$, podemos enunciar los siguientes corolarios:

Corolario 4.1.2.1

Si $\mathcal{U}_K\cap\mathrm{Ker}\ K=\{0\}$, entonces $c+GY$ es $\mathcal{B}_1$-BLUE de θ si y solo si $c=(I-GA)\theta_0$, GK es la identidad sobre $R(PK')$ y $G\Sigma t=0$ $\forall t\varepsilon\mathrm{Ker}\ KPK'$.

Demostración:

Consecuencia inmediata de la proposición 4.1.2.

Corolario 4.1.2.2

Si $\mathcal{U}_K\cap\mathrm{Ker}\ K=\{0\}$, entonces $c+GY$ es $\mathcal{B}_1$-BLUE de θ si y solo si $c=(I-GA)\theta_0$ y G' es solución Σ-mínima norma-P-mínimo cuadrado de K'.

Demostración:

Consecuencia inmediata del corolario 4.1.2.1 y del teorema 2.4.1.

Notemos que el resultado del corolario 4.1.2.2 nos permite calcular $\mathcal{B}_1$-BLUE's de θ directamente sin distinguir entre que haya restricciones sobre θ ó no. Este resultado que no aparece en la literatura estadística es sin embargo de gran operatividad en el cálculo de $\mathcal{B}_1$-BLUE's de θ y no precisa extender el modelo a un ampliado.

4.2 ESTIMADORES LINEALES MINIMO SESGO Y MINIMA VARIANZA (BLIMBE's) DE $(\lambda,\theta)_K$ Y DE θ.

Si Ker $K\cap\mathcal{U}_K\neq\{0\}$, no todas las formas lineales $(\lambda,\theta)_K$ son $\mathcal{A}_1$-estimables, por lo que definimos:

<u>Definición 4.2.1</u>

$c+(a,Y)_H$ LIMBE de $(\lambda,\theta)_K$ es BLIMBE de $(\lambda,\theta)_K$ si $\mathrm{Var}(c+(a,Y)_H)\leqslant \mathrm{Var}(c^*+(a^*,Y)_H)$ $\forall c^*+(a^*,Y)_H$LIMBE de $(\lambda,\theta)_K$.

La siguiente proposición los caracteriza.

<u>Proposición 4.2.1</u>

$c+(a,Y)_H$ es BLIMBE de $(\lambda,\theta)_K$ si y solo si $c=(\lambda,\theta_0)_K-(a,A\theta_0)_H$, $KPVP\lambda=KPVPK'a$ y $\Sigma a\varepsilon R(KPVPK')$.

<u>Demostración</u>:

$c+(a,Y)_H\varepsilon\mathcal{A}_1$ es BLIMBE de $(\lambda,\theta)_K$ $\leftrightarrow$ $c+(a,Y)_H$ es LIMBE de $(\lambda,\theta)_K$ y $\mathrm{Var}(c+(a,Y)_H)\leqslant\mathrm{Var}(c^*+(a^*,Y)_H)$ $\forall c^*+(a^*,Y)_H$LIMBE de $(\lambda,\theta)_K$ $\leftrightarrow$ $c=(\lambda,\theta_0)_K-(a,A\theta_0)_H$, $KPVP\lambda=KPVPK'a$ y $\mathrm{Var}(c+(a,Y)_H)\leqslant\mathrm{Var}(c^*+(a^*,Y)_H)$ $\forall c^*+(a^*,Y)_H$LIMBE de $(\lambda,\theta)_K$. Pero como $a\varepsilon(KPVPK')\bar{r}^1$ siendo $r=KPVP\lambda$ que es un subespacio trasladado de Ker KPVPK', entonces según el teorema de la proyección generalizada, las anteriores condiciones equivalen a $c=(\lambda,\theta_0)_K-(a,A\theta_0)_H$, $KPVP\lambda=KPVPK'a$ y $\Sigma a\varepsilon R(KPVPK')$.

Como consecuencia de las proposiciones 3.2.4 y 4.2.1, podemos enunciar el siguiente corolario cuya demostración es obvia:

Corolario 4.2.1.1

Si Ker $K\cap\mathcal{U}_K=\{0\}$ y $\rho(PVPK')=\rho(PK')$, entonces $c+(a,Y)_H$ es un $\mathcal{A}_1$-BLUE de $(\lambda,\theta)_K$ si y solo si $c+(a,Y)_H$ es un BLIMBE de $(\lambda,\theta)_K$.

Vamos a definir los BLIMBE's de θ.

Definición 4.2.2

$c+GY$ LIMBE de θ es BLIMBE de θ si $Var(\lambda,c+GY)_K \leq Var(\lambda,c^*+G^*Y)_K$ $\forall\lambda\varepsilon\mathcal{K}, \forall c^*+G^*Y$ LIMBE de θ.

La siguiente proposición los caracteriza:

Proposición 4.2.2

$c+GY\varepsilon\mathcal{B}_1$ es BLIMBE de θ si y solo si $c=(I-GA)\theta_0$, GK es la identidad sobre $R(PVPK')$ y $G\Sigma t=0$ $\forall t\varepsilon(R(KPVPK'))^{\perp}=Ker\ KPVPK'$.

Demostración:

$c+GY\varepsilon\mathcal{B}_1$ es BLIMBE de θ $\leftrightarrow$ $c+GY$ es LIMBE de θ y $\Sigma G'\lambda\varepsilon$ $\varepsilon R(KPVPK')$ $\forall\lambda\varepsilon\mathcal{K}$ $\leftrightarrow$ $c=(I-GA)\theta_0$, GK es la identidad sobre $R(PVPK')$ y $G\Sigma t=0$ $\forall t\varepsilon Ker\ KPVPK'$.

El siguiente corolario consecuencia inmediata de la proposición 4.2.2, es una generalización de la caracterización de BLIMBE's dada por Rao|36|.

Corolario 4.2.2.1

$c+GY\varepsilon\mathcal{B}_1$ es BLIMBE de θ si y solo si $c=(I-GA)\theta_0$ y G' es solución Σ-minima norma-PVP-mínimo cuadrado de K'.

La siguiente proposición, consecuencia inmediata de las proposiciones 3.2.4, 4.1.2 y 4.2.2, nos indica en que sentido, los BLIMBE's de θ generalizan los BLUE's de θ:

Proposición 4.2.3

Si Ker $K\cap U_K=\{0\}$ y $\rho(PVPK')=\rho(PK')$, entonces c+GY es BLIMBE de θ si y solo si c+GY es $\mathcal{B}_1$-BLUE de θ.

La siguiente proposición generaliza las notas apuntadas por Schonfeld sobre la unicidad de BLIMBE's de θ:

Proposición 4.2.4

Si Σ es regular, es decir la distribución de Y es no singular, el BLIMBE de θ es único. Si Σ es singular y $\rho(PVPK')=$ $=\rho(PK')$, el BLIMBE de θ es único con probabilidad 1.

Demostración:

c+GY es BLIMBE de θ $\leftrightarrow$ $c=(I-GA)\theta_0$, GK es la identidad sobre R(PVPK') y $G\Sigma t=0$ $\forall t\varepsilon(R(KPVPK'))^{\perp}$. Sea S=R(KPVPK'), si Σ es regular, $S+\Sigma(S^{\perp})=H$, luego G es única $\rightarrow$ c es única $\rightarrow$ c+GY es único.

Si Σ es singular, como $Y-A\theta_0\varepsilon S+\Sigma(S^{\perp})$ con probabilidad 1, entonces G no es única, pero $c+GY=\theta_0+G(I-A\theta_0)$ tiene un único valor con probabilidad 1, ya que $S=R(KP)=K(U_K)$.

La siguiente proposición, consecuencia inmediata de la 3.2.5, relaciona los BLIMBE's de $(\lambda,\theta)_K$ y θ en un modelo con restricciones sobre θ con los BLIMBE's de $(\lambda,\theta)_K$ y θ en un modelo sin restricciones.

Proposición 4.2.5

Consideremos el modelo lineal M(F) y el modelo lineal

$M(F^*)$, siendo F y F^* los de la proposición 3.2.5. Entonces de verifica:

a) $c+(a,Y)_H$ es un BLIMBE de $(\lambda,\theta)_K$ en $M(F)$ respecto de $V(\cdot,\ )_K$ si y solo si $c=(\lambda,\theta_0)_K-(a,A\theta_0)_H$ y $(a,Y)_H$ es un BLIMBE de $(\lambda,\theta)_K$ en el modelo $M(F^*)$ respecto de $PVP(\ ,\ )_K$.

b) $c+GY$ es un BLIMBE de θ en $M(F)$ respecto de $V(\ ,\ )_K$ si y solo si $c=(I-GA)\theta_0$ y GY es un BLIMBE de θ en el modelo $M(F^*)$ respecto de $PVP(\ ,\ )_K$.

Ejemplo 4.2.1

En el modelo lineal de regresión, con la representación e hipótesis del ejemplo 3.2.1, el corolario 4.1.2.2 y el corolario 4.2.2.1 quedarán respectivamente:

a) Si $\operatorname{Ker} X \cap \operatorname{Ker} T=\{0\}$, $c+GY$ es un B_1-BLUE de β si y solo si $c=(I-GX)T^-w$ y G' es solución Σ-mínima norma-$(I-T^+T)$-mínimo cuadrado de X'.

b) $c+GY$ es BLIMBE de β si y solo si $c=(I-GX)T^-w$ y G' es solución Σ-mínima norma-$(I-T^+T)V(I-T^+T)$-mínimo cuadrado de X'.

Notemos que si en b) no hay restricciones, es decir $w=0$ y $T=0$ obtenemos la caracterización dada por Rao.

4.3 COINCIDENCIAS DE BLIMBE's DE $(\lambda,\theta)_K$ Y DE BLIMBE's DE θ.

Consideremos el modelo $M(F,V)$ siendo $F=\{\mu_\theta=A\theta_0+K(\theta-\theta_0)\ /\ \theta\in\Omega\}$ y $V=\{\sigma^2\Sigma\}_{\sigma^2>0}$, y el modelo $M(F,W)$ con $W=\{\sigma^2\ddagger\}_{\sigma^2>0}$.

El problema de coincidencias de A_1-BLUE's de $(\lambda,\theta)_K$ y de B_1-BLUE's de θ en ambos modelos ha sido tratado exahustivamente en la literatura estadística (Anderson |3|, |4|, Zyskind |52|, Thomas |49|, Seely |48|, Mitra y Moore |29|...); sin embargo nunca se han planteado estas cuestiones con los BLIMBE's de $(\lambda,\theta)_K$ y θ. Las siguientes proposiciones resuelven las cuestiones más relevantes al respecto.

Proposición 4.3.1

Todos los BLIMBE's de $(\lambda,\theta)_K$ en el modelo $M(F,V)$ son BLIMBE's de $(\lambda,\theta)_K$ en el modelo $M(F,W)$ $\forall\lambda\varepsilon K$ si y solo si $\ddagger(\mathrm{Ker\ KPVPK'})\subset\Sigma(\mathrm{Ker\ KPVPK'})$.

Demostración:

Consecuencia inmediata de la proposición 4.2.1, ya que la condición $\Sigma^{-1}(R(\mathrm{KPVPK'}))\subset\ddagger^{-1}(R(\mathrm{KPVPK'}))$ por el teorema de Farkas, equivale a la del enunciado.

Proposición 4.3.2

La condición necesaria y suficiente para que exista un BLIMBE de θ en $M(F,V)$ y $M(F,W)$ es que $(\Sigma(\mathrm{Ker\ KPVPK'})+\ddagger(\mathrm{Ker\ KPVPK'}))\cap R(\mathrm{KPVPK'})=\{0\}$.

Demostración:

Consecuencia inmediata de las proposiciones 4.2.2 y 0. 1.10.

Proposición 4.3.3

$c+GY$ BLIMBE de θ en $M(F,V)$ es BLIMBE de θ en $M(F,W)$ si y solo si $Gt=0$ $\forall t\varepsilon\ddagger(\mathrm{Ker\ KPVPK'})$.

Demostración:

Consecuencia inmediata de la proposición 4.2.2

Proposición 4.3.4

La condición necesaria y suficiente para que todo BLIM-

BE de θ en $M(F,V)$ sea BLIMBE de θ en $M(F,W)$ es que $\ddagger(\mathrm{Ker}\ KPVPK')\subset\Sigma(\mathrm{Ker}\ KPVPK')$.

Demostración:

Consecuencia inmediata de la proposición 4.2.2.

Si llamamos S a $R(KPVPK')$, un enunciado equivalente al de la proposición 4.3.4, es el siguiente:

Proposición 4.3.5

La condición necesaria y suficiente para que todo BLIMBE de θ en $M(F,V)$ sea BLIMBE de θ en $M(F,W)$ es que $\ddagger S^{\perp}\subset\Sigma S^{\perp}$.

En particular, si $\Sigma=I$; es decir, comparamos BLIMBE's "mínimo cuadrado" con BLIMBE's con covarianza Σ, obtenemos como consecuencia directa de la proposición 4.3.5 el siguiente corolario:

Corolario 4.3.5.1

La condición necesaria y suficiente para que todo BLIMBE de θ en $M(F,\sigma^2 I),\sigma^2>0$ sea BLIMBE de θ en $M(F,W)$ es que $\ddagger S^{\perp}\subset S^{\perp}$ lo cual claramente equivale a que $\ddagger$ tenga un conjunto de vectores propios ortogonales que engendren $S^{\perp}$, lo cual equivale también a que $\ddagger$ tenga un conjunto de vectores propios ortogonales que engendren S .

Estos resultados caracterizan el problema de coincidencias de BLIMBE's de θ y de sus formas lineales. Generalizan las caracterizaciones de coincidencias de A_1-BLUE's de $(\lambda,\theta)_K$ y B_1-BLUE's de θ , ya que si $U_K\cap\mathrm{Ker}\ K=\{0\}$ y $V(\ ,\ )_K$ verifica la condicion $\rho(PVPK')=\rho(PK')$, entonces los resultados obtenidos pueden enunciarse con A_1-BLUE's y B_1-BLUE's.

CAPITULO 5

LIMBE's EN EL MODELO PARTIDO

El modelo lineal de regresión con $EY=X_1\beta_1+X_2\beta_2$, $\beta_1\varepsilon R^p$, $\beta_2\varepsilon R^q$, se estudia en el diseño en bloques y en el análisis de covarianza. El interés del estadístico en este modelo se centra en estimar $X_1\beta_1$, β_1 y formas lineales de estos vectores. Exceptuando los resultados de Seely |47|, el tratamiento hasta el momento se ha restringido al modelo de covarianza (Scheffe |43| y Kruskal |25|); es decir, cuando $R(X_1)\cap R(X_2)=\{0\}$. Basulto J. | 7 |, desde la aproximación libre de coordenadas ha analizado en el modelo más general, la estimabilidad de $X_1\beta_1$, β_1, y sus formas lineales. Ha dado también condiciones para la existencia de estos estimadores.

En este capítulo, y desde la aproximación libre de coordenadas, estudiaremos bajo condiciones de estimabilidad los B_1-estimadores de β_1. Cuando no se den las condiciones de estimabilidad introduciremos un tipo especial de estimadores de $X_1\beta_1$, β_1 y de sus formas lineales, a los que, por su semejanza con los del capítulo 3, llamaremos LIMBE's y que generalizarán, en cierto sentido, los correspondientes estimadores insesgados cuando éstos existan.

5.1 MODELO LINEAL $M(F_1+F_2)$. CONDICIONES DE ESTIMABILIDAD.

En todo este capítulo el espacio paramétrico Ω será de la forma $\Omega=\Omega_1 x\Omega_2$. El vector aleatorio Y distribuído en el espacio vectorial finito-dimensional H con el producto interior $(\, , \,)_H$ sigue el modelo lineal $M(F_1+F_2)$, siendo $\mu_\theta=\mu_{\theta_1}+\mu_{\theta_2}$ $\forall\theta=\theta_1 x\theta_2\varepsilon\Omega$, donde $\mu_{\theta_1}\varepsilon F_1$ y $\mu_{\theta_2}\varepsilon F_2$. Sea $\theta_{10}\varepsilon\Omega_1$ y $\theta_{20}\varepsilon\Omega_2$ / $F_1=$ $=\mu_{\theta_{10}}+U_1$ y $F_2=\mu_{\theta_{20}}+U_2$, siendo $U_1=\{\mu_{\theta_1}-\mu_{\theta_{10}} \ / \ \theta_1\varepsilon\Omega_1\}$ y $U_2=$ $=\{\mu_{\theta_2}-\mu_{\theta_{20}} \ / \ \theta_2\varepsilon\Omega_2\}$ subespacios de H.

Definición 5.1.1

El modelo lineal $M(F_1+F_2)$ se dice de covarianza si $U_1 \cap U_2=\{0\}$.

Consideremos las familias $A_1=\{a+(b,Y)_H, a\varepsilon R, b\varepsilon H\}$ y $A_3=$ $=\{c+GY;\ c\varepsilon H,\ G\varepsilon L(H,H)\}$. Basulto J. | 7 | ha estudiado la A_1-estimabilidad de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$, $\lambda\varepsilon H$ y la A_3-estimabilidad de μ_{θ_1}. Recogemos de esta referencia las siguientes definiciones 5.1.2 y 5.1.3, así como las proposiciones 5.1.1, 5.1.2 y 5.1.3.

Definición 5.1.2

$a+(b,Y)_H\varepsilon A_1$ es un A_1-estimador de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ si $E(a+(b,Y)_H)=$ $=(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ $\forall\theta=\theta_1 x\theta_2\varepsilon\Omega$. Entonces se dice que $a+(b,Y)_H A_1$-estima $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$.

Proposición 5.1.1

$(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ es A_1-estimable si y solo si $\lambda\varepsilon(U_1\cap U_2)^{\perp}$. En consecuencia, la condición necesaria y suficiente para que todas las formas lineales $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ sean A_1-estimables, es que $U_1\cap U_2=\{0\}$.

Proposición 5.1.2

Sea $\lambda\varepsilon(U_1\cap U_2)^{\perp}$. Entonces $a+(b,Y)_H$ A_1-estima $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ si y solo si $b\varepsilon U_2^{\perp}$, $b-\lambda\varepsilon U_1^{\perp}$ y $a=(\lambda,\mu_{\theta_{10}})_H-(b,\mu_{\theta_{10}}+\mu_{\theta_{20}})_H$.

Definición 5.1.3

$c+GY\varepsilon A_3$ es un A_3-estimador de μ_{θ_1} si $E(c+GY)=\mu_{\theta_1}$ $\forall\mu_{\theta_1}\varepsilon F_1$. Entonces decimos que $c+GY A_3$-estima μ_{θ_1}.

La siguiente proposición los caracteriza:

Proposición 5.1.3

$c+GY$ es un A_3-estimador de μ_{θ_1} si y solo si $c=(I-G)\mu_{\theta_{10}}-$ $-G\mu_{\theta_{20}}$, $Gz=z$ $\forall z\varepsilon U_1$ y $Gt=0$ $\forall t\varepsilon U_2$.

En consecuencia μ_{θ_1} es A_3-estimable si y solo si el modelo es de covarianza.

5.2 LIMBE's DE $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ Y DE μ_{θ_1}.

Hemos visto en el apartado 5.1 que no siempre existen A_1-estimadores de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ $\forall\lambda\varepsilon H$ y no siempre existen A_3-estimadores de μ_{θ_1}, por lo que introduciremos, sin precedentes en la literatura estadística, unos estimadores que los generalicen en cierto sentido.

Sea (λ,μ_{θ_1}) una forma lineal con $\lambda\varepsilon H$. Consideremos $a+(b,Y)_H$ perteneciente a A_1 un posible estimador de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$. El sesgo de esta estimación será:

$$E(a+(b,Y)_H)-(\lambda,\mu_{\theta_1})_H=a+(b,\mu_{\theta_{10}}+\mu_{\theta_{20}})_H+(b,\mu_{\theta_1}-\mu_{\theta_{10}})_H+$$
$$+(b,\mu_{\theta_2}-\mu_{\theta_{20}})_H-(\lambda,\mu_{\theta_{10}})_H-(\lambda,\mu_{\theta_1}-\mu_{\theta_{10}})_H.$$

Si imponemos la condición de que el sesgo no dependa de $\theta_2\varepsilon\Omega$, entonces $b\varepsilon U_2^{\perp}$, con lo que el sesgo quedará:

$$a+(b,\mu_{\theta_{10}}+\mu_{\theta_{20}})_H-(\lambda,\mu_{\theta_1})_H+(b-\lambda,\mu_{\theta_1}-\mu_{\theta_{10}})_H.$$

Sea $V(\ ,\ )_H$ un semi-producto interior en H. La lógica que adoptaremos será la seguida en el càpítulo 3. Entonces definimos:

Definición 5.2.1

El sesgo ponderado según $V(\ ,\ )_H$ de $a+(b,Y)_H$, $b\varepsilon U_2^{\perp}$ es la expresión $a+(b,\mu_{\theta_{10}}+\mu_{\theta_{20}})_H-(\lambda,\mu_{\theta_{10}})_H+V(P_1(b-\lambda),\ \mu_{\theta_1}-\mu_{\theta_{10}})_H$ siendo P_1 la proyección ortogonal sobre $\mathcal{U}_1$.

Definición 5.2.2

$a+(b,Y)_H\varepsilon A_1$ es un LIMBE de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ si minimiza el sesgo ponderado según $V(\ ,\ )_H$ en A_1 $\forall\theta\varepsilon\Omega$.

La siguiente proposición los caracteriza:

Proposición 5.2.1

$a+(b,Y)_H$ es un LIMBE de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ si y solo si $P_1VP_1(b-\lambda)\varepsilon\varepsilon\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2$, $b\varepsilon\mathcal{U}_2^{\perp}$ y $a+(b,\mu_{\theta_{10}}+\mu_{\theta_{20}})_H-(\lambda,\mu_{\theta_{10}})_H=0$.

Demostración:

La condición $a+(b,\mu_{\theta_{10}}+\mu_{\theta_{20}})_H-(\lambda,\mu_{\theta_{10}})_H=0$ es inmediata, basta tomar $\theta_1=\theta_{10}$. La condición sobre b se obtiene porque hay que minimizar $\|P_1(b-\lambda)\|_V$ sujeto a $b\varepsilon\mathcal{U}_2^{\perp}$, que,por el teorema de la proyección generalizada equivale a $(V(P_1b-P_1\lambda),x)_H=$ $=0$ $\forall x\varepsilon P_1(\mathcal{U}_2^{\perp})$ y $b\varepsilon\mathcal{U}_2^{\perp}$ $\leftrightarrow$ $(V(P_1b-P_1\lambda),P_1y)_H=0$ $\forall y\varepsilon\mathcal{U}_2^{\perp}$ y $b\varepsilon\mathcal{U}_2^{\perp}$ $\leftrightarrow$ $\leftrightarrow$ $P_1VP_1(b-\lambda)\varepsilon\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2$ y $b\varepsilon\mathcal{U}_2^{\perp}$.

La siguiente proposición caracteriza los LIMBE's en función de la insesgadez sobre un subconjunto de Ω.

Proposición 5.2.2

$a+(b,Y)_H$ es LIMBE de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ si y solo si $E(a+(b,Y)_H)=$ $=(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ $\forall\mu_{\theta_1}\varepsilon\mu_{\theta_{10}}+R(P_1VP_1(\mathcal{U}_2^{\perp}))$.

Demostración:

$E(a+(b,Y)_H)-(\lambda,\mu_{\theta_1})_H=a+(b,\mu_{\theta_{10}}+\mu_{\theta_{20}})_H+(b-\lambda,\mu_{\theta_1}-\mu_{\theta_{10}})_H-$

$-(\lambda,\mu_{\theta_{10}})_{\mathcal{H}}+(b,\mu_{\theta_2}-\mu_{\theta_{20}})_{\mathcal{H}}=0\ \forall\mu_{\theta_1}\varepsilon\mu_{\theta_{10}}+R(P_1VP_1(\mathcal{U}_1\ \ \mathcal{U}_2))$ si y so-lo si $b\varepsilon\mathcal{U}_2^{\perp}$, $a+(b,\mu_{\theta_{10}})_{\mathcal{H}}-(\lambda,\mu_{\theta_{10}})_{\mathcal{H}}+(b,\mu_{\theta_{20}})_{\mathcal{H}}$ y $b-\lambda\varepsilon P_1VP_1^{-1}(\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2)$ $\leftrightarrow$ $a+(b,Y)_{\mathcal{H}}$ es un LIMBE de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_{\mathcal{H}}$.

La siguiente proposición nos indica en que sentido los LIMBE's generalizan los $\mathcal{A}_1$-estimadores:

Proposición 5.2.3

Si $\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2=\{0\}$ y $\rho(P_1VP_1(\mathcal{U}_2^{\perp}))=\rho(P_1(\mathcal{U}_2^{\perp}))$, entonces $a+(b,Y)_{\mathcal{H}}$ es un LIMBE de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_{\mathcal{H}}$ si y solo si $a+(b,Y)_{\mathcal{H}}$ es un $\mathcal{A}_1$-estimador de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_{\mathcal{H}}$.

Demostración:

Consecuencia inmediata de la definición 5.1.2 y de la proposición 5.2.2.

Vamos ya a definir los LIMBE's de μ_{θ_1}.

Definición 5.2.3

$c+GY\varepsilon\mathcal{A}_3$ es un LIMBE de μ_{θ_1} si $(\lambda,c+GY)_{\mathcal{H}}$ es un LIMBE de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_{\mathcal{H}}$ $\forall\lambda\varepsilon\mathcal{H}$.

La siguiente proposición los caracteriza:

Proposición 5.2.4

$c+GY$ es un LIMBE de μ_{θ_1} si y solo si $c=(I-G)\mu_{\theta_{10}}-G\mu_{\theta_{20}}$, $Gt=0$ $\forall t\varepsilon\mathcal{U}_2$ y $Gz=z$ $\forall z\varepsilon R(P_1VP_1(\mathcal{U}_2^{\perp}))$.

Demostración:

$c+GY$ es LIMBE de μ_{θ_1} $\leftrightarrow$ $(\lambda,c+GY)_{\mathcal{H}}$ es LIMBE de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_{\mathcal{H}}$ $\forall\lambda\varepsilon\mathcal{H}$ $\leftrightarrow$ $(\lambda,c)_{\mathcal{H}}+(G'\lambda,Y)_{\mathcal{H}}$ es LIMBE de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_{\mathcal{H}}\forall\lambda\varepsilon\mathcal{H}$ $\leftrightarrow$ $(\lambda,c)_{\mathcal{H}}+$

$+(G'\lambda,\mu_{\theta_{10}}+\mu_{\theta_{20}})_H-(\lambda,\mu_{\theta_{10}})_H=0$, $G'\lambda\varepsilon\mathcal{U}_2^{\perp}$ y $P_1VP_1(G'\lambda-\lambda)\varepsilon\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2$ $\forall\lambda\varepsilon H \leftrightarrow c=(I-G)\mu_{\theta_{10}}-G\mu_{\theta_{20}}$, $Gt=0$ $\forall t\varepsilon\mathcal{U}_2$ y G es la identidad sobre $R(P_1VP_1(\mathcal{U}_2^{\perp}))$.

La siguiente proposición los caracteriza en función de su insesgadez sobre un subconjunto de F_1.

Proposición 5.2.5

$c+GY\varepsilon A_3$ es un LIMBE de μ_{θ_1} si y solo si $E(c+GY)=\mu_{\theta_1}$ $\mu_{\theta_1}\varepsilon\mu_{\theta_{10}}+R(P_1VP_1(\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2)^{\perp})$.

Demostración:

Es análoga a la de la proposición 5.2.2.

Proposición 5.2.6

Si $\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2=\{0\}$ y $\rho(P_1VP_1(\mathcal{U}_2^{\perp}))=\rho(P_1(\mathcal{U}_2^{\perp}))$, entonces c+GY es un LIMBE de μ_{θ_1} si y solo si c+GY es A_3-estimador de μ_{θ_1}.

Demostración:

Consecuencia inmediata de la definición 5.1.3 y de la proposición 5.2.6.

Señalemos que la existencia de LIMBE's de μ_{θ_1} y por lo tanto de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ $\forall\lambda\varepsilon H$ está asegurada en virtud de que $R(P_1VP_1(\mathcal{U}_2^{\perp}))\cap\mathcal{U}_2=\{0\}$.

Sea Q_2 la proyección ortogonal sobre $\mathcal{U}_2^{\perp}$. Es evidente que la familia $\{GQ_2 \;/\; G\varepsilon L(H,H)\}$ coincide con la familia $\{G\varepsilon L(H,H) \;/$ $/ \; Gt=0 \;\forall t\varepsilon\mathcal{U}_2\}$, por lo que con objeto de dar una caracterización operativa de los LIMBE's de μ_{θ_1} damos la proposición siguiente que claramente equivale a la 5.2.4:

Proposición 5.2.7

c+GY es un LIMBE de μ_{θ_1} si y solo si $\exists G^*\varepsilon L(H,H)$ / $G=G^*Q_2$, $c=(I-G^*Q_2)\mu_{\theta_{10}}-G^*Q_2\mu_{\theta_{20}}$ y G^*Q_2 es la identidad sobre $R(P_1VP_1Q_2)$.

En definitiva, para buscar LIMBE's de μ_{θ_1} basta con caracterizar las aplicaciones G* de la proposición 5.2.7, cuestión que resuelve la siguiente proposición:

Proposición 5.2.8

$c+G^*Q_2Y$ es un LIMBE de μ_{θ_1} si y solo si $c=(I-G^*Q_2)\mu_{\theta_{10}}-$ $-G^*Q_2\mu_{\theta_{20}}$ y $(G^*)'$ es una solución P_1VP_1-mínimo cuadrado de Q_2.

Demostración:

Consecuencia inmediata de la proposición 5.2.7 y de la proposición 2.3.1.

Como corolario obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 5.2.8.1

Si $U_1\cap U_2=\{0\}$, entonces $c+G^*Q_2Y$ es un A_3-estimador de μ_{θ_1} si y solo si $c=(I-G^*Q_2)\mu_{\theta_{10}}-G^*Q_2\mu_{\theta_{20}}$ y $(G^*)'$ es una solución P_1-minimo cuadrado de Q_2.

Demostración:

Consecuencia inmediata de las proposiciones 5.2.6 y 5.2.8.

5.3. REPRESENTACION DEL MODELO. B_1-ESTIMABILIDAD.

En adelante supondremos que $\Omega_1\subset K_1$ y $\Omega_2\subset K_2$, siendo K_1 y

K_2 espacios vectoriales reales finito-dimensionales con productos interiores respectivos $(\ ,\ )_{K_1}$ y $(\ ,\ )_{K_2}$. Supondremos que para $i\varepsilon\{1,2\}$, cada F_i admite una representación en K_i de la siguiente forma: $\exists A_i \varepsilon L(K_i,H)$ y $\exists K_i \varepsilon L(K_i,H)$ / $\mu_{\theta_{i0}}=A_i\theta_{i0}$ y $\mu_{\theta_i}-\mu_{\theta_{i0}}=K_i(\theta_i-\theta_{i0})$ $\forall\theta_i\varepsilon\Omega_i$, donde $U_{K_i}=\{\theta_i-\theta_{i0}\ /\ \theta_i\varepsilon\Omega_i\}$ es un subespacio de K_i.

En esta situación, estamos interesados en la estimabilidad de θ_1 y de las formas lineales $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$. Basulto J.| 7 |, ha estudiado la A_1-estimabilidad de formas lineales $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$. Las proposiciones 5.3.1 y 5.3.2 pueden verse demostradas en esta referencia.

Definición 5.3.1

$(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ es A_1-estimable si $a+(b,Y)_H \varepsilon A_1$ / $E(a+(b,Y)_H)=$ $=(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ $\forall\theta=\theta_1 x\theta_2\varepsilon\Omega$. Entonces diremos que $a+(b,Y)_H$ A_1-estima $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$.

La siguiente proposición dá condiciones para la existencia de estos estimadores:

Proposición 5.3.1

$(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ es A_1-estimable si y solo si $\lambda\varepsilon K_1'(K_2'^{-1}(U_{K_2}^{\perp}))+$ $+U_{K_1}^{\perp}=K_1'(U_2^{\perp})+U_{K_1}^{\perp}$.

La siguiente proposición caracteriza éstos A_1-estimadores:

Proposición 5.3.2

Sea $\lambda\varepsilon K_1'(U_2^{\perp})+U_{K_1}^{\perp}$. Entonces $a+(b,Y)_H$ es un A_1-estimador de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ si y solo si $a=(\lambda,\theta_{10})_{K_1}-(b,A_1\theta_{10}+A_2\theta_{20})_H$, $K_2'b\varepsilon U_{K_2}^{\perp}$ y $\lambda-K_1'b\varepsilon U_{K_1}^{\perp}$.

Con objeto de estimar directamente θ_1, introduciremos la familia de estimadores $\mathcal{B}_1=\{c+GY \mid c\varepsilon K_1,\ G\varepsilon L(H,K_1)\}$.

Definición 5.3.2

$c+GY\varepsilon\mathcal{B}_1$ es un $\mathcal{B}_1$-estimador de θ_1 si $E(c+GY)=\theta_1$ $\forall\theta=\theta_1 x\theta_2$

La siguiente proposición caracteriza los $\mathcal{B}_1$-estimadores de θ_1:

Proposición 5.3.3

$c+GY$ es un $\mathcal{B}_1$-estimador de θ_1 si y solo si $c=(I-GA_1)\theta_{10}-GA_2\theta_{20}$, $Gt=0$ $\forall t\varepsilon\mathcal{U}_2$ y $GK_1z=z$ $\forall z\varepsilon\mathcal{U}_{K_1}$.

Demostración:

$E(c+GY)=\theta_1$ $\forall\theta=\theta_1 x\theta_2\varepsilon\Omega \leftrightarrow E(\lambda,c+GY)_{K_1}=(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ $\forall\theta\varepsilon\Omega,\forall\lambda\varepsilon K_1$ $\leftrightarrow (\lambda,c)_{K_1}=(\lambda,\theta_{10})_{K_1}-(\lambda,GA_1\theta_{10}+GA_2\theta_{20})_{K_1}$, $K_2^*G'\lambda\varepsilon\mathcal{U}_{K_2}^{\perp}$, y $\lambda-K_1^*G'\lambda\varepsilon\mathcal{U}_{K_1}^{\perp}$ $\forall\lambda\varepsilon K_1 \leftrightarrow c=(I-GA_1)\theta_{10}-GA_2\theta_{20}, GK_2t=0$ $\forall t\varepsilon\mathcal{U}_{K_2}$ y GK_1 es la identidad sobre $\mathcal{U}_{K_1}$.

En consecuencia podemos enunciar la siguiente proposición cuya demostración es consecuencia inmediata de las proposiciones 5.3.3 y 5.3.1.

Proposición 5.3.4

θ_1 es $\mathcal{B}_1$-estimable si y solo si $\mathrm{Ker}\ K_1\cap\mathcal{U}_{K_1}=\{0\}$ y $\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2=\{0\}$. Además θ_1 es $\mathcal{B}_1$-estimable si y solo si $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ es A_1-estimable $\forall\lambda\varepsilon K_1$.

5.4 LIMBE's DE $(\lambda,\theta_1)_{\mathcal{K}_1}$ Y DE θ_1.

Hemos visto que no siempre existen $\mathcal{A}_1$-estimadores de $(\lambda,\theta_1)_{\mathcal{K}_1}$ $\forall\lambda\varepsilon\mathcal{K}_1$, ni $\mathcal{B}_1$-estimadores de θ_1. Notemos que esta falta de estimabilidad puede ser debida, bien a la falta de inyectividad de K_1 sobre $\mathcal{U}_{K_1}$, bien a la existencia de vectores diferentes del nulo en $\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2$; por este motivo, incluso en el modelo de covarianza pueden haber formas lineales no estimables. En este apartado, siguiendo la lógica de los LIMBE's del capítulo 3, introduciremos, sin precedentes en la literatura estadística, unos estimadores que en algún sentido generalicen los insesgados.

Sea $(\lambda,\theta_1)_{\mathcal{K}_1}$ una forma lineal de θ_1. Consideremos un $a+(b,Y)_{\mathcal{H}}\varepsilon\mathcal{A}_1$ como un posible estimador de $(\lambda,\theta_1)_{\mathcal{K}_1}$. El sesgo de esta estimación será:

$E(a+(b,Y)_{\mathcal{H}})-(\lambda,\theta_1)_{\mathcal{K}_1}=a+(b,A_1\theta_{10}+A_2\theta_{20})_{\mathcal{H}}-(\lambda,\theta_{10})_{\mathcal{K}_1}+$ $+(K_2'b,\theta_2-\theta_{20})_{\mathcal{K}_2}+(K_1'b,\theta_1-\theta_{10})_{\mathcal{K}_1}$.

Si imponemos la condición de que este sesgo no dependa de $\theta_2\varepsilon\Omega$, necesariamente $K_2'b\varepsilon\mathcal{U}^{\perp}_{K_2}$, con lo que el sesgo quedará:

$a+(b,A_1\theta_{10}+A_2\theta_{20})_{\mathcal{H}}-(\lambda,\theta_{10})_{\mathcal{K}_1}+(K_1'b,\theta_1-\theta_{10})_{\mathcal{K}_1}$.

Sea $V(\ ,\ )_{\mathcal{K}_1}$ un semi-producto interior en $\mathcal{K}_1$. Entonces, definimos:

<u>Definición 5.4.1</u>

El sesgo ponderado según $V(\ ,\ )_{\mathcal{K}_1}$ de $a+(b,Y)_{\mathcal{H}}$, siendo $K_2'b\varepsilon\mathcal{U}^{\perp}_{K_2}$ es la expresión:

$a+(b,A_1\theta_{10}+A_2\theta_{20})_{\mathcal{H}}-(\lambda,\theta_{10})_{\mathcal{K}_1}+V(S(K_1'b,\theta_1-\theta_{10})_{\mathcal{K}_1}$, donde S representa la proyección ortogonal sobre $\mathcal{U}_{K_1}$.

<u>Definición 5.4.2</u>

$a+(b,Y)_{\mathcal{H}}\varepsilon\mathcal{A}_1$ es un LIMBE de $(\lambda,\theta_1)_{\mathcal{K}_1}$ si minimiza el sesgo ponderado según $V(\ ,\ )_{\mathcal{K}_1}$ $\forall\theta=\theta_1 x\theta_2\varepsilon\Omega$ en $\mathcal{A}_1$.

La siguiente proposición los caracteriza:

Proposición 5.4.1

$a+(b,Y)_H \varepsilon A_1$ es un LIMBE de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ si y solo si $b\varepsilon U_2^{\perp}$, $a=(\lambda,\theta_{10})_{K_1}-(b,A_1\theta_{10}+A_2\theta_{20})_H$ y $K_1'b-\lambda\varepsilon(R(SVSK_1'(U_2^{\perp}))^{\perp}$.

Demostración:

$a+(b,Y)_H \varepsilon A_1$ es LIMBE de $(\lambda,\theta_1)_{K_1} \leftrightarrow a+(b,Y)_H$ minimiza el sesgo ponderado según $V(\ ,\ )_{K_1}$ $\forall\theta\varepsilon\Omega$ en A_1 y $b\varepsilon K_2'^{-1}(U_{K_2}^{\perp})=$ $=U_2^{\perp}$. Este sesgo se minimiza para θ_{10} cuando $a=(\lambda,\theta_{10})_{K_1}-$ $-(b,A_1\theta_{10}+A_2\theta_{20})_H$. La condición que falta se obtiene minimizando $\| S(K_1'b-\lambda)\|_V$; donde $b\varepsilon U_2^{\perp}$, pero por el teorema de la proyección generalizada esta condición equivale a $K_1'b-\lambda\varepsilon R(SVSK_1'(U_2^{\perp}))^{\perp}$

La siguiente proposición caracteriza los LIMBE's de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ en función de su insesgadez sobre un subconjunto de Ω:

Proposición 5.4.2

$a+(b,Y)_H \varepsilon A_1$ es un LIMBE de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ si y solo si $E(a+(b,Y)_H)=(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ $\forall\theta=\theta_1 x\theta_2$ / $\theta_1\varepsilon\theta_{10}+R(SVSK_1'(U_2^{\perp}))$.

Demostración:

Análoga a la de la proposición 5.2.4.

La siguiente proposición nos muestra en que sentido cabe considerar los LIMBE's como una generalización de los estimadores insesgados:

Proposición 5.4.3

Si $U_1 \cap U_2=\{0\}$, Ker $K_1 \cap U_{K_1}=\{0\}$ y $\rho(SVSK_1'(U_2^{\perp}))=\rho(SK_1'(U_2^{\perp}))$, entonces $a+(b,Y)_H$ es un LIMBE de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ si y solo si $a+(b,Y)_H$ es un A_1-estimador de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$.

Demostración:

Consecuencia inmediata de la proposición 5.4.2, de la definición 5.3.1, y de que $K_1'(\mathcal{U}_2^{\perp})=(K_1^{-1}(\mathcal{U}_2))^{\perp}$.

Pasemos ya a definir los LIMBE's de θ_1:

Definición 5.4.2

$c+GY\varepsilon\mathcal{B}_1$ es un LIMBE de θ_1 si $(\lambda,c+GY)_{K_1}$ es un LIMBE de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ $\forall\lambda\varepsilon K_1$.

La siguiente proposición los caracteriza:

Proposición 5.4.4

$c+GY\varepsilon\mathcal{B}_1$ es LIMBE de θ_1 si y solo si $c=(I-GA_1)\theta_{10}-GA_2\theta_{20}$, $Gt=0$ $\forall t\varepsilon\mathcal{U}_2$ y $GK_1z=z$ $\forall z\varepsilon R(SVSK_1'(\mathcal{U}_2^{\perp}))$.

Demostración:

$c+GY\varepsilon\mathcal{B}_1$ es LIMBE de θ_1 $\leftrightarrow$ $(\lambda,c+GY)_{K_1}$ es LIMBE de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ $\forall\lambda\varepsilon K_1$ $\leftrightarrow$ $(\lambda,c)_{K_1}=(\lambda,\theta_{10})_{K_1}-(G'\lambda,A_1\theta_{10}+A_2\theta_{20})_{H}$, $G'\lambda\varepsilon\mathcal{U}_2^{\perp}$ y $K_1'G'\lambda-\lambda\varepsilon(R(SVSK_1'(\mathcal{U}_2^{\perp}))^{\perp}$ $\forall\lambda\varepsilon K_1$ $\leftrightarrow$ $c=(I-GA_1)\theta_{10}-GA_2\theta_{20}$, $Gt=0$ $\forall t\varepsilon\mathcal{U}_2$, y GK_1 es la identidad sobre $R(SVSK_1'(\mathcal{U}_2^{\perp}))$.

Otra caracterización de los LIMBE's de θ_1 en función de su insesgadez sobre un subconjunto de Ω la proporciona la siguiente proposición:

Proposición 5.4.5

$c+GY\varepsilon\mathcal{B}_1$ es LIMBE de θ_1 si y solo si $E(c+GY)=\theta_1$ $\forall\theta=\theta_1x\theta_2$ / $\theta_1\varepsilon\theta_{10}+R(SVSK_1'(\mathcal{U}_2^{\perp}))$.

Demostración:

Consecuencia inmediata de la proposición 5.4.4 y de la definición 5.4.2.

La siguiente proposición nos indica en que sentido los LIMBE's generalizan los $\mathcal{B}_1$-estimadores:

Proposición 5.4.6

Si $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2=\{0\}$, Ker $K_1 \cap \mathcal{U}_{K_1}=\{0\}$ y $\rho(SVSK_1^*(\mathcal{U}_2^{\perp}))=\rho(SK_1^*(\mathcal{U}_2^{\perp}))$, entonces c+GY es LIMBE de θ_1 si y solo si c+GY es $\mathcal{B}_1$-estimador de θ_1.

Demostración:

Consecuencia inmediata de la definición 5.3.2, la proposición 5.4.3 y la proposición 5.4.5.

Puesto que $\mathcal{U}_2 \cap R(K_1SVSK_1^*(\mathcal{U}_2^{\perp}))=\{0\}$, siempre existen LIMBE's de θ_1. Las siguientes notas van destinadas a encontrar las soluciones:

Como la familia $\{G\varepsilon\mathcal{L}(\mathcal{H},K_1)$ / $Gt=0$ $\forall t\varepsilon\mathcal{U}_2\}$ coincide con la familia $\{GQ_2$ / $G\varepsilon\mathcal{L}(\mathcal{H},K_1)$ y Q_2 es la proyección ortogonal sobre $\mathcal{U}_2\}$, entonces podemos buscar los LIMBE's de θ_1 en esta última familia de forma que la siguiente proposición es obviamente equivalente a la 5.4.4:

Proposición 5.4.7

$c+GY\varepsilon\mathcal{B}_1$ es LIMBE de θ_1 si y solo si $\exists G^*\varepsilon\mathcal{L}(\mathcal{H},K_1)$ / $G=G^*Q_2$, $c=(I-G^*Q_2A_1)\theta_{10}-G^*Q_2A_2\theta_{20}$ y $G^*Q_2K_1$ es la identidad sobre $R(SVSK_1^*Q_2)$.

Por lo tanto podemos enunciar:

Proposición 5.4.8

$c+G^*Q_2Y$ es LIMBE de θ_1 si y solo si $c=(I-G^*Q_2A_1)\theta_{10}-$ $-G^*Q_2A_2\theta_{20}$ y $(G^*)'$ es solución SVS-minimo cuadrado de $K|Q_2$.

Demostración:

Consecuencia inmediata de la proposición 5.4.7.

El siguiente corolario, consecuencia directa de las proposiciones 5.4.6 y 5.4.8 nos indica como encontrar B_1-estimadores cuando existan:

Corolario 5.4.8.1

Si $U_1 \cap U_2=\{0\}$ y Ker $K_1 \cap U_{K_1}=\{0\}$, entonces $c+G^*Q_2Y$ es B_1-estimador de θ_1 si y solo si $c=(I-G^*Q_2A_1)\theta_{10}-G^*Q_2A_2\theta_{20}$ y $(G^*)'$ es solución S-minimo cuadrado de $K|Q_2$.

Ejemplo 5.1

Consideremos el modelo lineal de regresión partido $EY=$ $=X_1\beta_1+X_2\beta_2$, donde X_1 es una matriz nxp y X_2 una matriz nxq. Consideremos el caso más general, es decir, cuando hay restricciones sobre β_1 y β_2 de la forma $S_1\beta_1=w_1$ y $S_2\beta_2=w_2$, donde $w_1 \varepsilon R^s$ y $w_2 \varepsilon R^t$. En estas condiciones $H=R^n$, $K_1=R^p$, $K_2=R^q$, $\Omega_1=$ $=\{\beta_1 \varepsilon R^p \ / \ S_1\beta_1=w_1\}$, $\Omega_2=\{\beta_2 \varepsilon R^q \ / \ S_2\beta_2=w_2\}$. Si S_1^- y S_2^- son g-inversas cualesquiera de S_1 y S_2 respectivamente, entonces $\beta_{10}=$ $=S_1^-w_1$, $\beta_{20}=S_2^-w_2$, $U_{K_1}=\text{Ker } S_1$ y $U_{K_2}=\text{Ker } S_2$. Si S_1^+ y S_2^+ son las g-inversas Moore-Penrose respectivas de S_1 y S_2, es inmediato que la proyección ortogonal sobre U_{K_1} toma la expresión $S=$ $=(I-S_1^+S_1)$, la proyección ortogonal sobre U_1 es $P_1=MM^+$, donde $M=X_1(I-S_1^+S_1)$ y la proyección ortogonal sobre $U_2^{\perp}$ es $Q_2=(I-NN^+)$, siendo $N=X_2(I-S_2^+S_2)$.

En consecuencia las proposiciones 5.2.8 y 5.4.8, y los corolarios 5.2.8.1 y 5.4.8.1 quedarán respectivamente:

a) $c+G^*(I-NN^+)Y$ es LIMBE de $X_1\beta_1$ si y solo si $c=(I-G^*(I-NN^+))X_1S_1^-w_1-G^*(I-NN^+)X_2S_2^-w_2$ y $(G^*)'$ es solución $(MM^+)V(MM^+)$-minimo cuadrado de $(I-NN^+)$.

b) $c+G^*(I-NN^+)Y$ es LIMBE de β_1 si y solo si $c=$ $=(I-G^*(I-NN^+)X_1)S_1^-w_1-G^*(I-NN^+)X_2S_2^-w_2$ y $(G^*)'$ es solución $(I-S_1^+S_1)V(I-S_1^+S_1)$-minimo cuadrado de $X_1'(I-NN^+)$.

c) Si $R(X_1(I-S_1^+S_1))\cap R(X_2(I-S_2^+S_2))=\{0\}$, entonces $c+$ $+G^*(I-NN^+)Y$ es un $\mathcal{A}_3$-estimador de $X_1\beta_1$ si y solo si $c=(I-G^*(I-NN^+))X_1S_1^-w_1-G^*(I-NN^+)X_2S_2^-w_2$ y $(G^*)'$ es solución (MM^+)-minimo cuadrado de $(I-NN^+)$.

d) Si $R(X_1(I-S_1^+S_1))\cap R(X_2(I-S_2^+S_2))=\{0\}$ y $\operatorname{Ker} X_1\cap R(I-S_1^+S_1)=$ $=\{0\}$, entonces $c+G^*(I-NN^+)Y$ es un $\mathcal{B}_1$-estimador de si y solo si $c=(I-G^*(I-NN^+)X_1)S_1^-w_1-G^*(I-NN^+)X_2S_2^-w_2$ y $(G^*)'$ es solución $(I-S_1^+S_1)$-minimo cuadrado de $X_1'(I-NN^+)$.

CAPITULO 6

BLIMBE's EN EL MODELO PARTIDO

En el capítulo 5, hemos estudiado los LIMBE's de μ_{θ_1} y de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$, los LIMBE's de θ_1 y $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ y los B_1-estimadores de θ_1 en el modelo lineal $M(F_1+F_2)$. En general, estos estimadores no son únicos, por lo que, siguiendo las líneas del capítulo 4, si Cov $Y=\sigma^2\Sigma$; $\sigma^2>0$ elegiremos el mejor en el sentido de minima varianza. A estos estimadores les llamaremos respectivamente BLIMBE's de μ_{θ_1}, $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$, θ_1 y $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ y B_1-BLUE's de θ_1.

Analizaremos estos estimadores desde la aproximación libre de coordenadas y veremos en que sentido se pueden considerar los BLIMBE's generalizaciones de los correspondientes estimadores BLUE's. Por último trataremos el problema de coincidencias de BLIMBE's.

6.1 MODELO LINEAL $M(F_1+F_2,V)$. BLIMBE's DE $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ Y DE μ_{θ_1}.

Supondremos que el vector aleatorio Y distribuído en H sigue el modelo lineal $M(F_1+F_2,V)$, siendo F_1 y F_2 los definidos en el apartado 5.1 y $V=\{\sigma^2\Sigma\}_{\sigma^2>0}$, donde Σ es conocida. Basulto J. |7| ha estudiado los A_1-BLUE's de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$; $\lambda\epsilon(U_1\cap U_2)^{\perp}$ y los A_3-BLUE's de μ_{θ_1} en el modelo de covarianza. Recogemos de esta referencia las definiciones 6.1.1 y 6.1.2 y las proposiciones 6.1.1 y 6.1.2 cuyas demostraciones pueden verse en esta referencia.

Definición 6.1.1

$a+(b,Y)_H \varepsilon A_1$ es un A_1-BLUE de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$; $\lambda\varepsilon(U_1\cap U_2)^{\perp}$ si $E(a+(b,Y)_H)=(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ $\forall\theta\varepsilon\Omega$ y $Var(a+(b,Y)_H)\leqslant Var(a^*+(b^*,Y)_H)$ $\forall\sigma^2\Sigma\varepsilon V$, $\forall a^*+(b^*,Y)_H$ A_1-estimador de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$.

La siguiente proposición los caracteriza:

Proposición 6.1.1

$a+(b,Y)_H$ A_1-estimador de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$; $\lambda\varepsilon(U_1\cap U_2)^{\perp}$ es A_1-BLUE de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ si y solo si $\Sigma b\varepsilon(U_1+U_2)$.

Cuando $U_1\cap U_2=\{0\}$ se define:

Definición 6.1.2

$c+GY\varepsilon A_3$ es un A_3-BLUE de μ_{θ_1} si y solo si $E(c+GY)=\mu_{\theta_1}$ $\forall\theta\varepsilon\Omega$ y $Var(\lambda,c+GY)_H\leqslant Var(\lambda,c^*+G^*Y)_H$ $\lambda\varepsilon H$, $\forall\sigma^2\Sigma\varepsilon V$, $\forall c^*+G^*Y$ A_3-estimador de μ_{θ_1}.

La proposición siguiente caracteriza los A_3-BLUE's de μ_{θ_1}:

Proposición 6.1.2

$c+GY\varepsilon A_3$ es un A_3-BLUE de μ_{θ_1} si y solo si $c=(I-G)\mu_{\theta_{10}}-$ $-G\mu_{\theta_{20}}$, $Gz=z$ $\forall z\varepsilon U_1$, $Gt=0$ $\forall t\varepsilon U_2$ y $G\Sigma x=0$ $\forall x\varepsilon(U_1+U_2)^{\perp}$.

Ya sabemos que no siempre existen A_1-estimadores de todas las formas lineales $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$, ni A_3-estimadores de μ_{θ_1}, por lo que ya en el capítulo 5 introducimos los LIMBE's de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ y de μ_{θ_1}. A partir de ellos definiremos los BLIMBE's.

Definición 6.1.3

$a+(b,Y)_H \varepsilon A_1$ es un BLIMBE de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H, \lambda\varepsilon H$ si $a+(b,Y)_H$ es un BLIMBE de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ y $Var(a+(b,Y)_H) \leqslant Var(a^*+(b^*,Y)_H)$ $\forall\sigma^2\Sigma\varepsilon V, \forall a^*+(b^*,Y)_H$ LIMBE de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$.

La siguiente proposición los caracteriza:

Proposición 6.1.3

$a+(b,Y)_H$ LIMBE de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H, \lambda\varepsilon H$ es BLIMBE de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ si y solo si $\Sigma b\varepsilon R(P_1VP_1(U_2))^{\perp}+U_2$, siendo P_1 la proyección ortogonal sobre U_1.

Demostración:

$a+(b,Y)_H$ LIMBE de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ es BLIMBE de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H \leftrightarrow$ $\leftrightarrow \sigma^2\Sigma(b,b)_H$ es mínimo, donde b pertenece a un subespacio trasladado de $(P_1VP_1)^{-1}(U_2)\cap U_2^{\perp} \leftrightarrow \Sigma b\varepsilon R(P_1VP_1(U_2^{\perp}))+U_2$.

La siguiente proposición nos muestra en que sentido los BLIMBE's de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ generalizan los A_1-BLUE's de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$:

Proposición 6.1.4

Si $U_1\cap U_2=\{0\}$ y $\rho(P_1VP_1(U_2^{\perp}))=\rho(P_1(U_2^{\perp}))$, entonces $a+(b,Y)_H$ es un BLIMBE de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ si y solo si $a+(b,Y)_H$ es un A_1-BLUE de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$.

Demostración:

Consecuencia inmediata de las proposiciones 6.1.1 y 6.1.3.

Vamos ahora a definir los BLIMBE's de μ_{θ_1}.

Definición 6.1.4

$c+GY\varepsilon\mathcal{A}_3$ es un BLIMBE de μ_{θ_1} si $(\lambda,c+GY)_{\mathcal{H}}$ es BLIMBE de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_{\mathcal{H}}$ $\forall\lambda\varepsilon\mathcal{H}$.

La siguiente proposición los caracteriza:

Proposición 6.1.5

$c+GY\varepsilon\mathcal{A}_3$ es un BLIMBE de μ_{θ_1} si y solo si $c=(I-G)\mu_{\theta_{10}}-$ $-G\mu_{\theta_{20}}$, $Gz=z$ $\forall z\varepsilon R(P_1VP_1(\mathcal{U}_2^{\perp}))$, $Gt=0$ $\forall t\varepsilon\mathcal{U}_2$ y $G\Sigma x=0$ $\forall x\varepsilon$ $\varepsilon(R(P_1VP_1(\mathcal{U}_2^{\perp}))+\mathcal{U}_2)^{\perp}$.

Demostración:

$c+GY$ es BLIMBE de μ_{θ_1} $\leftrightarrow$ $c+GY$ es LIMBE de μ_{θ_1} y $\Sigma G'\lambda\varepsilon$ $\varepsilon R(P_1VP_1(\mathcal{U}_2^{\perp}))+\mathcal{U}_2$ $\forall\lambda\varepsilon\mathcal{H}$ $\leftrightarrow$ $c=(I-G)\mu_{\theta_{10}}-G\mu_{\theta_{20}}$, $Gz=z$ $\forall z\varepsilon R(P_1VP_1(\mathcal{U}_2^{\perp}))$, $Gt=0$ $\forall t\varepsilon\mathcal{U}_2$ y $G\Sigma x=0$ $\forall x\varepsilon(R(P_1VP_1(\mathcal{U}_2^{\perp}))+\mathcal{U}_2)^{\perp}$.

La siguiente proposición nos indica en que sentido los BLIMBE's de μ_{θ_1} generalizan los $\mathcal{A}_3$-BLUE's de μ_{θ_1}.

Proposición 6.1.6

Si $\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2=\{0\}$ y $\rho(P_1VP_1(\mathcal{U}_2^{\perp}))=\rho(P_1(\mathcal{U}_2^{\perp}))$, entonces $c+GY$ es BLIMBE de μ_{θ_1} si y solo si $c+GY$ es un $\mathcal{A}_3$-BLUE de μ_{θ_1}.

Demostración:

Consecuencia inmediata de las proposiciones 6.1.2 y 6.1.5.

Notemos que siempre existen BLIMBE's de μ_{θ_1} ya que siempre se puede encontrar una aplicación lineal G que verifique las condiciones de la proposición 6.1.5.

La unicidad de los BLIMBE's de μ_{θ_1} la investiga la siguiente proposición:

Proposición 6.1.7

Si Σ es regular, el BLIMBE de μ_{θ_1} es único. Si Σ es singular y $\rho(P_1VP_1(U_2^{\perp}))=\rho(P_1(U_2^{\perp}))$, entonces el BLIMBE de μ_{θ_1} es único con probabilidad 1.

Demostración:

Análoga a la de la proposición 4.2.4.

Nuestro objetivo ahora es proporcionar soluciones a BLIMBE's de μ_{θ_1}. Previamente recogemos el siguiente lema cuya demostración puede verse en |7| y que es una generalización de Drygas |14| pag. 77.

Lema 6.1.1

Sea S un subespacio de H con $S=\mathrm{Ker}\ A$, donde $A\in L(H,K)$. Sea $\Sigma(\ ,\ )_H$ un semi-producto interior en H. Entonces la aplicación lineal $G=(I-\Sigma A'(A\Sigma A')^-)$ verifica que $Gt=t$ $\forall t\in S$ y $G\Sigma x=0$ $\forall x\in S^{\perp}$.

Proposición 6.1.8

Sea T un espacio vectorial real finito-dimensional con un producto interior $(\ ,\ )_T$. Sea $T\in L(T,H)$ / $R(T)=R(P_1VP_1(U_2^{\perp}))+ +U_2$. Entonces la aplicación $G=(I-\Sigma(I-TT^+)((I-TT^+)\Sigma(I-TT^+))^-)$ se anula sobre $\Sigma(R(T)^{\perp})$ y es la identidad sobre $R(T)$.

Demostración:

Consecuencia inmediata del lema 6.1.1 tomando $A=I-TT^+$.

En consecuencia, la siguiente proposición nos proporciona BLIMBE's de μ_{θ_1}:

Proposición 6.1.9

Si C_1 verifica las condiciones de la proposición 6.1.8, $(G_2^{!})$ es solución P_1VP_1-mínimo cuadrado de Q_2 y $c=(I-G_2Q_2G_1)\mu_{\theta_{1_0}}-$ $-G_2Q_2G_1\mu_{\theta_{1_0}}$, entonces $c+G_2Q_2G_1y$es BLIMBE de μ_{θ_1}.

Demostración:

Consecuencia inmediata de las proposiciones 5.2.8, 6.1.5 y 6.1.8.

Notemos que esta misma técnica es válida para calcular $\mathcal{A}_3$-BLUE's de μ_{θ_1}.

El problema de coincidencias de BLIMBE's -y como caso particular- de $\mathcal{A}_3$-BLUE's de μ_{θ_1} en los modelos $M(\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2,\mathcal{V})$ y $M(\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2,\mathcal{W})$, donde $\mathcal{W}=\{\sigma^2\ddagger\}_{\sigma^2>0}$ lo condensamos en la siguiente proposición cuya demostración es una consecuencia inmediata de la proposición 6.1.5:

Proposición 6.1.10

a) Todos los BLIMBE's de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ en el modelo $M(\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2,\mathcal{V})$ son BLIMBE's de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ en el modelo $M(\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2,\mathcal{W})$ si y solo si $\ddagger(R(P_1VP_1(\mathcal{U}_2^{\perp}))+\mathcal{U}_2)^{\perp}\subset\Sigma(R(P_1VP_1(\mathcal{U}_2^{\perp}))+\mathcal{U}_2)^{\perp}$.

b) La condición necesaria y suficiente para que exista un BLIMBE de μ_{θ_1} en ambos modelos es que: $(\ddagger(R(P_1VP_1(\mathcal{U}_2^{\perp}))+\mathcal{U}_2)^{\perp}+\Sigma(R(P_1VP_1(\mathcal{U}_2^{\perp}))+\mathcal{U}_2)^{\perp})\cap R(P_1VP_1(\mathcal{U}_2^{\perp}))=\{0\}$

c) $c+GY$ BLIMBE de μ_{θ_1} en $M(\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2,\mathcal{V})$ es BLIMBE de μ_{θ_1} en $M(\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2,\mathcal{W})$ si y solo si $Gt=0$ $\forall t\in\ddagger(R(P_1VP_1(\mathcal{U}_2^{\perp}))+\mathcal{U}_2)^{\perp}$.

d) La condición necesaria y suficiente para que todo BLIMBE de μ_{θ_1} en $M(\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2,\mathcal{V})$ sea BLIMBE de μ_{θ_1} en $M(\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2,\mathcal{W})$ es que $\ddagger(R(P_1VP_1(\mathcal{U}_2^{\perp}))+\mathcal{U}_2)^{\perp}\subset\Sigma(R(P_1VP_1(\mathcal{U}_2^{\perp}))+\mathcal{U}_2)^{\perp}$.

e) Sea $\mathcal{C}=R(P_1VP_1(\mathcal{U}_2^{\perp}))+\mathcal{U}_2$. Entonces la condición necesaria y suficiente para que todo BLIMBE de μ_{θ_1} en $M(\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2,\sigma^2I)$ sea BLIMBE de μ_{θ_1} en $M(\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2,\mathcal{W})$ es que $\ddagger\mathcal{C}^{\perp}\subset\mathcal{C}^{\perp}$; es decir $\ddagger$ tenga un conjunto de vectores propios ortogonales que engendren $C^{\perp}$, lo cual equivale a que $\ddagger$ tenga un conjunto de vectores propios ortogonales que engendren C.

6.2 REPRESENTACION DEL MODELO. B_1-BLUE's DE θ_1.

Consideremos la representación del modelo $M(F_1+F_2,V)$ adoptada en el apartado 5.3.

Definición 6.2.1

$a+(b,Y)_H \varepsilon A_1$ es un A_1-BLUE de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$, $\lambda\varepsilon(U_1\cap U_2)^{\perp}$ si $E(a+(b,Y)_H)=(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ $\forall\theta=\theta_1 x\theta_2\varepsilon\Omega$ y $Var(a+(b,Y)_H)\leqslant Var(a^*+(b^*,Y)_H)$ $\forall\sigma^2\Sigma\varepsilon\Omega,\forall a^*+(b^*,Y)_H$ A_1-estimador de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$.

Basulto J. |7| ha estudiado los A_1-BLUE's de las formas lineales $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$. El siguiente resultado puede verse demostrado en esta referencia.

Proposición 6.2.1

$a+(b,Y)_H \varepsilon A_1$ es A_1-BLUE de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$, $\lambda\varepsilon(U_1\cap U_2)^{\perp}$ si y solo si $a+(b,Y)_H$ es A_1-estimador de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ y $\Sigma b\varepsilon U_1+U_2$.

Si $U_1\cap U_2=\{0\}$ existen B_1-estimadores de θ_1, por lo que en estas condiciones definimos:

Definición 6.2.2

$c+GY\varepsilon B_1$ es un B_1-BLUE de θ_1 si $E(c+GY)=\theta_1$ $\forall\theta=\theta_1 x\theta_2\varepsilon\Omega$ y $Var(\lambda,c+GY)_{K_1}\leqslant Var(\lambda,c^*+G^*Y)_{K_1}$ $\forall\sigma^2\Sigma\varepsilon\Omega,\forall c^*+G^*Y$: B_1-estimador de $\theta_1,\forall\lambda\varepsilon K_1$

La siguiente proposición los caracteriza:

Proposición 6.2.2

$c+GY\varepsilon\mathcal{B}_1$ es $\mathcal{B}_1$-BLUE de θ_1 si y solo si $c=(I-GA_1)\theta_{10}-$ $-GA_2\theta_{20}$, $Gt=0$ $\forall t\varepsilon\mathcal{U}_2$, $GK_1z=z$ $\forall z\varepsilon\mathcal{U}_{K_1}$ y $G\Sigma x=0$ $\forall x\varepsilon(\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2)^{\perp}$.

Demostración:

$c+GY$ es $\mathcal{B}_1$-BLUE de θ_1 si $(\lambda,c+GY)_{K_1}$ es $\mathcal{B}_1$-BLUE de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ $\leftrightarrow$ $c=(I-GA_1)\theta_{10}-GA_2\theta_{20}$, $Gt=0$ $\forall t\varepsilon\mathcal{U}_2$, $GK_1z=z$ $\forall z\varepsilon\mathcal{U}_{K_1}$ y $\Sigma G'\lambda\varepsilon\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2$ $\forall\lambda\varepsilon K_1$ $\leftrightarrow$ $c=(I-GA_1)\theta_{10}-GA_2\theta_{20}$, $Gt=0$ $\forall t\varepsilon\mathcal{U}_2$, $GK_1z=z$ $\forall z\varepsilon\mathcal{U}_{K_1}$ y $G\Sigma x=0$ $\forall x\varepsilon(\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2)^{\perp}$.

6.3 BLIMBE's DE $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ Y DE θ_1.

Cuando no existen $\mathcal{A}_1$-estimadores de todas las formas lineales $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ y por lo tanto no existen $\mathcal{B}_1$-estimadores de θ_1 hemos introducido los LIMBE's, sin embargo éstos no son únicos por lo que elegiremos de entre ellos los de menor varianza a los que llamaremos BLIMBE's.

Definición 6.3.1

$a+(b,Y)_H$ LIMBE de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ es BLIMBE de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ si $\mathrm{Var}\,(a+(b,Y)_H)\leqslant\mathrm{Var}(a^*+(b^*,Y)_H)$ $\forall\sigma^2\Sigma\varepsilon\mathcal{V}$, $\forall a^*+(b^*,Y)_H$ LIMBE de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$.

La siguiente proposición los caracteriza:

Proposición 6.3.1

$a+(b,Y)_H\varepsilon\mathcal{A}_1$ es BLIMBE de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ si y solo si $a+(b,Y)_H$ es LIMBE de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ y $\Sigma b\varepsilon R(K_1SVSK_1'(\mathcal{U}_2^{\perp}))+\mathcal{U}_2$.

Demostración:

$a+(b,Y)_H \varepsilon \mathcal{A}_1$ es BLIMBE de $(\lambda,\theta_1)_{K_1} \leftrightarrow a+(b,Y)_H$ es LIMBE de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ y $\sigma^2\Sigma(b,b)_H$ es minimo, donde b pertenece a un sub espacio trasladado de $K_1'^{-1}(R(SVSK_1'(\mathcal{U}_2^{\perp}))^{\perp})\cap\mathcal{U}_2^{\perp}=(R(K_1SVSK_1'(\mathcal{U}_2^{\perp}))^{\perp})\cap\mathcal{U}_2^{\perp}$; pero por el teorema de la proyección generalizada, este minimo se obtiene cuando $\Sigma b\varepsilon R(K_1SVSK_1'(\mathcal{U}_2^{\perp}))+\mathcal{U}_2$.

La siguiente proposición, consecuencia inmediata de las proposiciones 5.4.3 y 6.3.1, nos muestra en que sentido estos BLIMBE's generalizan los $\mathcal{A}_1$-BLUE's:

Proposición 6.3.2

Si $\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2=\{0\}$, Ker $K_1\cap\mathcal{U}_{K_1}=\{0\}$ y $\rho(SVSK_1'(\mathcal{U}_2^{\perp}))=\rho(SK_1'(\mathcal{U}_2^{\perp}))$, entonces $a+(b,Y)_H$ es un BLIMBE de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ si y solo si $a+(b,Y)_H$ es un $\mathcal{A}_1$-BLUE de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$.

Vamos ahora a definir los BLIMBE's de θ_1:

Definición 6.3.2

$c+GY\varepsilon\mathcal{B}_1$ es BLIMBE de θ_1 si $c+GY$ es LIMBE de θ_1 y $Var(\lambda,c+GY)_{K_1}\leqslant Var(\lambda,c^*+G^*Y)_{K_1}$ $\forall\lambda\varepsilon K_1, \forall\sigma^2\Sigma\varepsilon\mathcal{V}, \forall c^*+G^*Y$ LIMBE de θ_1.

La siguiente proposición los caracteriza:

Proposición 6.3.3

$c+GY\varepsilon\mathcal{B}_1$ es BLIMBE de θ_1 si y solo si $c=(I-GA_1)\theta_{10}-GA_2\theta_{20}$, $Gt=0$ $\forall t\varepsilon\mathcal{U}_2$, $GK_1z=z$ $\forall z\varepsilon R(SVSK_1'(\mathcal{U}_2^{\perp}))$ y $G\Sigma x=0$ $\forall x\varepsilon(R(K_1SVSK_1'(\mathcal{U}_2^{\perp}))+\mathcal{U}_2)^{\perp}$.

Demostración:

$c+GY\varepsilon\mathcal{B}_1$ es BLIMBE de $\theta_1 \leftrightarrow (\lambda,c+GY)_{K_1}$ es BLIMBE de

$(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ $\forall\lambda\varepsilon K_1 \leftrightarrow$ c+GY es LIMBE de θ_1 y $\Sigma G'(K_1)\varepsilon R(K_1SVSK_1'(\mathcal{U}_2^{\perp}))+$ $+\mathcal{U}_2 \leftrightarrow$ c+GY es LIMBE de θ_1 y $G\Sigma x=0$ $\forall x\varepsilon(R(K_1SVSK_1'(\mathcal{U}_2^{\perp}))+\mathcal{U}_2)^{\perp}$.

Notemos que siempre existen BLIMBE's de θ_1 como consecuencia de la proposición 6.3.3.

La siguiente proposición, consecuencia inmediata de las proposiciones 6.2.2 y 6.3.3 nos indica en que sentido los BLIMBE's de θ_1 generalizan los $\mathcal{B}_1$-BLUE's de θ_1:

<u>Proposición 6.3.4</u>

Si $\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2=\{0\}$, Ker $K_1\cap\mathcal{U}_{K_1}=\{0\}$ y $\rho(SVSK_1'(\mathcal{U}_2^{\perp}))=\rho(SK_1'(\mathcal{U}_2^{\perp}))$, entonces c+GY es un BLIMBE de θ_1 si y solo si c+GY es un $\mathcal{B}_1$-BLUE de θ_1.

La siguiente proposición consecuencia inmediata de la proposición 6.3.3 clarifica la cuestión de unicidad de BLIMBE's de θ_1:

<u>Proposición 6.3.5</u>

Si Σ es regular el BLIMBE de θ_1 es único. Si Σ es singular y $\rho(SVSK_1'(\mathcal{U}_2^{\perp}))=\rho(SK_1'(\mathcal{U}_2^{\perp}))$, entonces el BLIMBE de θ_1 es único con probabilidad 1.

Las siguientes dos proposiciones tienen como objetivo proporcionar soluciones a BLIMBE's de θ_1:

<u>Proposición 6.3.6</u>

Sea $\mathcal{T}$ un espacio vectorial real finito-dimensional con un producto interior $(\ ,\ )_{\mathcal{T}}$. Sea T una aplicación lineal de $\mathcal{T}$ en $\mathcal{H}$ tal que $R(T)=R(K_1SVSK_1'(\mathcal{U}_2^{\perp}))+\mathcal{U}_2$. Entonces la aplicación $G=(I-\Sigma(I-TT^+)((I-TT^+)\Sigma(I-TT^+))^-)$ se anula sobre $\Sigma(R(T))$ y es la identidad sobre $R(T)$.

Demostración:

Consecuencia inmediata del lema 6.1.1 tomando $A=I-TT^{+}$.

Proposición 6.3.7

Si G_1 verifica las condiciones de la proposición 6.3.6, G_2' es solución SVS-minimo cuadrado de $K_1'Q_2$ y $c=(I-G_2Q_2G_1A_1)\theta_{10}-$ $-G_2Q_2G_1A_2\theta_{20}$, entonces $c+G_2Q_2G_1Y$ es BLIMBE de θ_1.

Demostración:

Consecuencia inmediata de las proposiciones 5.4.8, 6.3.3, y 6.3.6.

Notemos, al igual que hicimos con BLIMBE's de μ_{θ_1}, que esta técnica es válida para calcular $\mathcal{B}_1$-BLUE's de θ_1 cuando existan.

El problema de coincidencias de BLIMBE's de θ_1 -y como caso particular- de $\mathcal{B}_1$-BLUE's de θ_1 en los modelos $M(F_1+F_2,V)$ y $M(F_1+F_2,W)$ lo resumimos en la siguiente proposición cuya demostración es consecuencia inmediata de la proposición 6.3.3.

Proposición 6.3.8

a) Todos los BLIMBE's de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ en el modelo $M(F_1+F_2,V)$ son BLIMBE's de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ en el modelo $M(F_1+F_2,W)$ si y solo si:
$\ddagger(R(K_1SVSK_1'(U_2^{\perp}))+U_2)^{\perp}\subset\Sigma(R(K_1SVSK_1'(U_2^{\perp}))+U_2)^{\perp}$

b) La condición necesaria y suficiente para que exista un BLIMBE de θ_1 en $M(F_1+F_2,V)$ y $M(F_1+F_2,W)$ es que:
$(\ddagger(R(K_1SVSK_1'(U_2^{\perp}))+U_2)^{\perp}+(\Sigma(R(K_1SVSK_1'(U_2^{\perp}))+U_2)^{\perp})\cap$
$R(K_1SVSK_1'(U_2^{\perp}))=\{0\}$

c) $c+GY$ BLIMBE de θ_1 en $M(F_1+F_2,V)$ es BLIMBE de θ_1 en $M(F_1+F_2,W)$ si y solo si $Gt=0$ $\forall t\in\ddagger(R(K_1SVSK_1'(U_2^{\perp}))+U_2)^{\perp}$

d) La condición necesaria y suficiente para que todo BLIMBE de θ_1 en $M(\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2,\mathcal{V})$ sea BLIMBE de θ_1 en $M(\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2,\mathcal{W})$ es que:
$\ddagger(R(K_1SVSK_1'(\mathcal{U}_2^{\perp}))+\mathcal{U}_2)^{\perp}\,\Sigma(R(K_1SVSK_1'(\mathcal{U}_2^{\perp}))+\mathcal{U}_2)^{\perp}$

e) Sea $\mathcal{D}=R(K_1SVSK_1'(\mathcal{U}_2^{\perp}))+\mathcal{U}_2$. Entonces la condición necesaria y suficiente para que todo BLIMBE de θ_1 en $M(\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2,\sigma^2 I)$; $\sigma^2>0$ sea BLIMBE de θ_1 en $M(\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2,\mathcal{W})$ es que $\ddagger\mathcal{D}^{\perp}\subset\mathcal{D}^{\perp}$; es decir $\ddagger$ tenga un conjunto de vectores propios ortogonales que engendren $\mathcal{D}$, lo cual equivale a que $\ddagger$ tenga un conjunto de vectores propios ortogonales que engendren $\mathcal{D}$.

<u>Ejemplo 6.1</u>

En el modelo de regresión partido con la representación dada en el ejemplo 5.1, es evidente que las aplicaciones:
$T_1=((MM^+)V(MM^+)Q_2:X_2(I-S_2^+S_2))$ $\quad T_2=(X_1(I-S_1^+S_1):X_2(I-S_2^+S_2))$
$T_3=(X_1(I-S_1^+S_1)V(I-S_1^+S_1)X_1'Q_2:X_2(I-S_2^+S_2))$, donde $(A:B)$ representa la matriz cuyas columnas son las de A y las de B, verifican:
$R(T_1)=R(P_1VP_1(\mathcal{U}_2^{\perp}))+\mathcal{U}_2$; $\quad R(T_2)=\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2 \quad R(T_3)=R(K_1SVSK_1'(\mathcal{U}_2^{\perp}))+\mathcal{U}_2$.
En consecuencia las proposiciones 6.1.9 y 6.3.7 quedarán respectivamente:

a) Sea $G_1=(I-\Sigma(I-T_1T_1^+)((I-T_1T_1^+)\Sigma(I-T_1T_1^+))^-)$, G_2' una solución $(MM^+)V(MM^+)$-minimo cuadrado de $(I-NN^+)$, y $c=(I-G_2(I-NN^+)G_1)X_1S_1^-w_1-G_2(I-NN^+)G_1X_2S_2^-w_2$, entonces $c+G_2(I-NN^+)G_1Y$ es BLIMBE de $X_1\beta_1$.

b) Sea $G_1=(I-\Sigma(I-T_3T_3^+)((I-T_3T_3^+)\Sigma(I-T_3T_3^+))^-)$, G_2' una solución $(I-S_1^+S_1)V(I-S_1^+S_1)$-minimo cuadrado de $X_1'(I-NN^+)$ y $c=(I-G_2(I-NN^+)G_1X_1)S_1^-w_1-G_2(I-NN^+)G_1X_2S_2^-w_2$, entonces $c+G_2(I-NN^+)G_1Y$ es BLIMBE de β_1.

En particular si $\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2=\{0\}$, se tendrá:

c) Si $R(X_1(I-S_1^+S_1))\cap R(X_2(I-S_2^+S_2))=\{0\}$, sea $G_1=$ $=(I-\Sigma(I-T_2T_2^+)((I-T_2T_2^+)\Sigma(I-T_2T_2^+))^-)$, G_2' una solución (MM^+)-minimo cuadrado de $(I-NN^+)$ y $c=(I-G_2(I-NN^+)G_1)$ $X_1S_1^-w_1-G_2(I-NN^+)G_1X_2S_2^-w_2$, entonces $c+G_2(I-NN^+)G_1Y$ es un $\mathcal{A}_3$-BLUE de $X_1\beta_1$.

Si $\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2=\{0\}$ y Ker $X_1\cap R(I-S_1^+S_1)=\{0\}$, se tendrá:

d) Si $R(X_1(I-S_1^+S_1))\cap R(X_2(I-S_2^+S_2))=\{0\}$ y Ker $X_1\cap R(I-S_1^+S_1)=\{0\}$, si $G_1=(I-\Sigma(I-T_2T_2^+)((I-T_2T_2^+)\Sigma(I-T_2T_2^+))^-)$, G_2' una solución $(I-S_1^+S_1)$-minimo cuadrado de $X_1'(I-NN^+)$ y $c=(I-G_2(I-NN^+)G_1X_1)S_1^-w_1-$ $-G_2(I-NN^+)G_1X_2S_2^-w_2$, entonces $c+G_2(I-NN^+)G_1Y$ es $\mathcal{B}_1$-BLUE de β_1.

CAPITULO 7

CONCLUSIONES

En este último capítulo vamos a puntualizar una serie de resultados de esta memoria que consideramos interesantes:

En cuanto a la cuestión de metodología de los modelos lineales, señalemos los siguientes puntos:

1) El tratamiento libre de coordenadas del modelo lineal es a nuestro juicio el más adecuado, ya que proporciona caracterizaciones muy generales de los estimadores estudiados, y no precisa más instrumento matemático que el álgebra de espacios vectoriales reales de dimensión finita.
2) La g-inversa de una aplicación lineal A es absolutamente necesaria en el estudio de los modelos lineales, puesto que hay que invertir matrices singulares. En particular, las g-inversas soluciones W-minimo cuadrado, minima V-norma y W-minimo cuadrado-minima V-norma de A(Ax=y) son imprescindibles.

En lo referente al tratamiento de LIMBE's y BLIMBE's adoptado en los capítulos 3 y 4 respectivamente, notemos los siguientes puntos:

3) La no B_1-estimabilidad del vector paramétrico θ es debida únicamente a la no inyectividad de K en U_K.
4) Los LIMBE's y BLIMBE's de θ en el modelo lineal con restricciones sobre el vector paramétrico θ, no presentan más problemas que los LIMBE's y BLIMBE's de θ en un modelo lineal sin restricciones sobre θ, como demuestran los corolarios 3.2.1.1 y 4.2.2.1. Es más, los LIMBE's y BLIMBE's con restricciones no son sino LIMBE's y BLIMBE's sin res-

tricciones, más un término adicional de fácil cálculo, como demuestran las proposiciones 3.2.5 y 4.2.5. Por esta razón nos parece inadecuada la sugerencia apuntada por Schonfeld de extender el modelo para evitar el cálculo de LIMBE's y BLIMBE's con restricciones.

5) Las proposiciones 3.2.2 y 3.2.3 caracterizan los LIMBE's de $(\lambda,\theta)_K$ y θ respectivamente en función de su insesgadez sobre un subconjunto de Ω. Es decir, un LIMBE no es más que un estimador insesgado en un modelo con restricciones adicionales sobre θ. En consecuencia estas proposiciones podrían darse como definiciones de los correspondientes LIMBE's. En principio parece que deban utilizarse solo los semi-productos interiores $V(\ ,\ )_K$ / $\rho(PVPK')=\rho(PK')$, pues entonces se alcanza un subespacio de insesgadez de rango máximo. Las proposiciones 3.2.4 y 4.2.3 y el corolario 4.2.1.1 refuerzan más esta decisión, pues si Ker $K\cap\mathcal{U}_K=\{0\}$, los LIMBE's y BLIMBE's generalizan los estimadores insesgados y los BLUE's respectivos. Sin embargo, utilizando V / $R(PVPK')=R(PK')$ obtendremos BLIMBE's que si Σ es no singular coincidirán con los obtenidos por Ahlers y Lewis| 1 | y Hallum, Lewis y Boullion|20|, y si Σ es singular serán iguales a ellos con probabilidad 1. Por este motivo conviene utilizar V tales que además de la condición $\rho(PVPK')=\rho(PK')$ verifiquen la adicional $R(PVPK')=R(PK')$.

6) Las caracterizaciones de BLIMBE's y $\mathcal{B}_1$-BLUE's de θ proporcionadas por las proposiciones 4.2.2 y 4.1.2 respectivamente, son tan potentes que los problemas de coincidencias y de unicidad analizados en el apartado 4.3 y proposición 4.2.4 respectivamente, son una consecuencia inmediata de ellas. Obviamente, las soluciones a BLIMBE's de θ y a $\mathcal{B}_1$-BLUE's de θ obtenidas en los corolarios 4.2.2.1 y 4.1.2.2 son inmediatas.

Con respecto al análisis del modelo partido realizado en los capítulos 5 y 6, conviene notar:

7) La no $\mathcal{A}_3$-estimabilidad de μ_{θ_1} solo se presenta si el modelo no es de covarianza; sin embargo la no $\mathcal{B}_1$-estimabilidad de θ_1 puede ser además debida a que K_1 no sea inyectiva sobre $\mathcal{U}_{K_1}$.

8) Las proposiciones 5.2.3 y 5.2.6 caracterizan respectivamente

los LIMBE's de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ y μ_{θ_1} en función de su insesgadez sobre un subconjunto de Ω. Análogamente, las proposiciones 5.4.3 y 5.4.6 caracterizan respectivamente los LIMBE's de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ y θ_1 en función de su insesgadez sobre un subconjunto de Ω. En consecuencia, razonando igual que en 5), en el cálculo de LIMBE's de $(\lambda,\mu_{\theta_1})_H$ y μ_{θ_1} utilizaremos V / $\rho(P_1Q_2)=$ $=\rho(P_1VP_1Q_2)$, y en el cálculo de LIMBE's de $(\lambda,\theta_1)_{K_1}$ y θ_1 utilizaremos V / $\rho(SVSK_1^{\prime}Q_2)=\rho(SK_1^{\prime}Q_2)$. Nuevamente esta decisión se refuerza con las proposiciones 6.1.4, 6.1.6, 6.3.2 y 6.3.4. En este punto tenemos que hacer constar nuestra convicción de que posiblemente se puedan encontrar BLIMBE's de μ_{θ_1} y θ_1 con las apetecibles propiedades que verifican los obtenidos en |1| y |20|, con lo que la "mejor" decisión sería utilizar V tal que $R(P_1VP_1Q_2)=R(P_1Q_2)$ y $R(SVSK_1^{\prime}Q_2)=R(SK_1^{\prime}Q_2)$ respectivamente.

9) Las caracterizaciones de BLIMBE's de μ_{θ_1} y θ_1 obtenidas respectivamente en las proposiciones 6.1.5 y 6.3.3 son tan potentes, que las notas sobre unicidad y coincidencias tratadas posteriormente son una consecuencia inmediata de ellas.

10) Conviene notar que, aunque las fórmulas que proporcionan LIMBE's de μ_{θ_1} y θ_1 obtenidas en las proposiciones 5.2.8 y 5.4.8, y las fórmulas que proporcionan BLIMBE's de μ_{θ_1} y θ_1 dadas en las proposiciones 6.1.9 y 6.3.7 son muy complejas, sin embargo son válidas para cualquier modelo partido, y en particular utilizando V adecuadas, proporcionan $\mathcal{A}_3$-estimadores de μ_{θ_1}, $\mathcal{B}_1$-estimadores de θ_1, $\mathcal{A}_3$-BLUE's de μ_{θ_1} y $\mathcal{B}_1$-BLUE's de θ_1 respectivamente cuando existan.

11) Señalemos por último que, aunque en lo referente al modelo partido no podamos contrastar nuestros resultados con los de otros autores por ser éste un modelo poco estudiado, se obtienen resultados paralelos a los conseguidos en los capítulos 3 y 4 que contemplan como casos particulares los resultados ya conocidos.

REFERENCIAS

|1| AHLERS, C.W. and LEWIS, T.O. (1971). Linear estimation with a positive semidefinite covariance matrix. The Journal of the Industrial Mathematics Society, 21, 23-27.

|2| ALBERT, A. (1972). Regression and the Moore-Penrose pseudoinverse. Acad. Press.

|3| ANDERSON, T.W. (1948). On the theory of testing serial correlation. Skand. Aktuarietids, 31, 88-116.

|4| ANDERSON, T.W. (1972). Efficient estimation of regression coefficients in Time Series. Procedings of the sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics ans Probability. California.

|5| BJERHAMMAR, A. (1958). A generalized matrix algebra. Kungliga Tekniska Hogskolans Handlingar, 124, 1-32.

|6| BASULTO, J. (1975). Caracterización de los BLIMBE de β en el modelo I. (Y=Xβ+e, Cov Y=V) desde la aproximación libre de coordenadas. Aceptado por Trabajos de Estadística e Investigación Operativa.

|7| BASULTO, J. (1976). Estimadores Gauss-Markov en el modelo lineal: Una aproximación libre de coordenadas. Universidad de Valencia. Tesis Doctoral.

|8| CHIPMAN, J.S. and RAO, M.M. (1964). The treatment of linear restrictions in regression analysis. Econometrica 32, 198--209.

|9| CHIPMAN, J.S. (1964). On least squares with insufficient observations. J. A. S. A. 53, 1078-1111.

|10| CLEVELAND, W.S. (1971). Projection with the wrong inner product and its application to regression with correlated errors and linear filtering of time series. Ann. Math. Statist. 42, 616-624.

|11| DEMPSTER, A. (1969). Elements of continuous multivariate analysis. Addison-Wesley.

|12| DRYGAS, H. (1969). On the theory of Gauss-Markov estimators. CORE-Discussion Paper 6932. The Catholic University of Louvain.

|13| DRYGAS, H. (1969). Gauss-Markov estimation and best linear minimum bias estimation. Report Nr. 91 of Studiengruppe fur Systemforschung. Heidelberg.

|14| DRYGAS, H. (1970). The coordinate-free approach to Gauss--Markov estimation. Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems, No. 40. Springer-Verlag.

|15| DRYGAS, H. (1972). A note on Gauss-Markov estimation in multivariate linear models. Colloquia Mathematica societatis Janos Bolyai 9. European meeting of statisticians, Budapest.

|16| EATON, M.L. (1970). Gauss-Markov estimation for multivariate linear models: A coordinate free approach. Ann. Math. Statist. 41, 528-538.

|17| EATON, M.L. (1972). Multivariate Statistical Analysis. Institute of Mathematical Statistics. University of Copenhagen.

|18| GOLDMAN, A.J. and ZELEN, M. (1964). Weak generalized inverses and minimum variance linear unbiased estimation. J. Res. Nat. Bur. Standards. Sec. B. 68, 151-172.

|19| HABERMAN, S. (1975). How much do Gauss-Markov and least square estimates differ?. A coordinate-free approach. The Annals of Statistics. 3, 982-990.

|20| HALLUM, C.R., LEWIS, T.O. and BOULLION, T.L. (1973). Estimation in the restricted general linear model with a positive semidefinite covariance matrix. Commun. Statist. 1, 157-166.

|21| HALMOS, P.R. (1965). Espacios vectoriales finito-dimensionales. Primera edición. C.E.C.S.A. México.

|22| HALMOS, P.R. (1969). Measure Theory. 12th. Impression. D. Van Nostrand.

|23| KRUSKAL, W. (1961). The coordinate-free approach to Gauss--Markov estimation and its application to missing and extra observations. Fourth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. 1, 435-451.

|24| KRUSKAL, W.(1968). When are Gauss-Markov and least squares estimators identical?. A coordinate-free aproach. Ann. Math. Statist. 39, 70-75.

|25| KRUSKAL, W. (1969). Notas de clase.

|26| LEWIS, T.O. and ODELL, P.L. (1966). A generalization of the Gauss-Markov theorem. J.A.S.A. 61, 1063-1066.

|27| MAGNES, T.A. and McGUIRE, J.B. (1962). Comparison of least squares and minimum variance estimates of regression para-

meters. Ann. Math. Statist. 33, 462-470.

|28| MITRA, S.K. and RAO, C.R. (1969). Conditions for optimality and validity of least-squares theory. Ann.Math. Statist. 40, 1617-1624.

|29| MITRA, S.K. and MOORE, B.J. (1973). Gauss-Markov estimation with a incorrect dispersion matrix. Sankhya, series A, 139-152.

|30| MITRA, S.K. (1973). Unified least squares to linear estimation in a general Gauss-Markov model. SIAM. J. Appl. Math. 25, 671-680.

|31| MOORE, E.H. (1920). On the reciproca of the general algebraic matrix (abstract). Bull. Amer. Math. Soc. 26, 394--395.

|32| PENROSE, R. (1955). A generalized inverse for matrices. Procedings of the Cambridge Philosophical Society, 51, 406-413.

|33| PENROSE, R. (1956). On best aproximate solutions of linear matrix equations, procedings of the Cambridge Philosophical Society, 52, 17-19.

|34| PLACKETT, R.L. (1949). A historical note on the method of least squares. Biometrika, 36, 458-460.

|35| RAO, C.R. (1955), Statistical report incorporado a la publicación nº 461 de la National Academy of Sciences USA

|36| RAO, C.R. (1971). Unified theory of linear estimation. Sankhya A, 33, 371-394.

|37| RAO, C.R. (1972). Some recent results in linear estimation. Sankhya B, 34, 369-378.

|38| RAO, C.R. (1973). Unified theory of least squares. Comm. in statist. 1, 1-8.

|39| RAO, C.R. (1973). Linear statistical inference and its applications. Wiley. 2nd. edition.

|40| RAO, C.R. (1973). Representation of best linear unbiased estimators in the Gauss-Markoff model with a singular dispersion matrix. J. Mult. Analysis 3, 276-292.

|41| RAO, C.R. (1975). Theory of estimation of parameters in the Gauss-Markoff model. J. N. Srivastava, ed; A survey of statistical design and linear models. North-Holland publishing Company. 475-487.

|42| RAO, C.R. and MITRA, S.K. (1971). Generalized inverse of matrices and its applications. Wiley.

|43| SCHEFFE, H. (1959). The analysis of variance. Wiley.

|44| SCHONFELD, P. (1971). Best linear minimum bias estimation in linear regression. Econometrica 39, 531-544.

|45| SEAL, H.L. (1967). Studies in the history of probability and statistics. XV. The historical development of the Gauss linear model. Biometrika 54, 1-24.

|46| SEELY, J. (1970). Linear spaces and unbiased estimation. Ann. Math. Statist. 41, 1725-1734.

|47| SEELY, J. (1970). Linear spaces and unbiased estimation. Application to the mixed linear model. Ann. Math. Statist. 41, 1734-1748.

|48| SEELY, J. and ZYSKIND, G. (1971). Linear spaces and minimum variance unbiased estimation. Ann. Math. Statist. 42, 691-703.

|49| THOMAS, D.H. (1968). When do minimum variance estimators coincide? (abstract) Ann. Math. Statist. 39, 1365.

|50| WATSON, G.S. (1967). Linear least squares regression. Ann. Math. Statist. 38, 1679-1699.

|51| ZYSKIND, G. (1967). On canonical forms, non-negative covariance matrices and best and least squares linear estimators in linear models. Ann. Math. Statist. 38, 1092--1109.

|52| ZYSKIND, G. (1969). Parametric augmentations and error structures under wich certain simple least square and analysis of variance procedures are also best. J.A.S.A. 64, 1353-1368.

UNIVERSIDAD DE VALENCIA　　　Facultad de Ciencias

Reunido el Tribunal que suscribe, en el día de la fecha, acordó otorgar, por unanimidad, a esta Tesis doctoral de D.______________________________ la calificación de ______________________________

Valencia, a____de________________de 197__

El Secretario,

El Presidente