PERIODICIDAD EN GRUPOS DE DIMENSION COHOMOLOGICA VIRTUAL FINITA

POR

M. ISABEL SEGURA GARCIA

Memoria presentada para
optar al grado de Doctor en
Ciencias Matemáticas.

Director: Dr. D. Manuel Castellet Solanas

I N D I C E

INTRODUCCION

Hacia los años 50, en un trabajo no publicado, y para aplicación en Teoría de Galois y de cuerpos de clases, J. Tate modificó los grupos de homología y cohomología $H_0(G,A)$ y $H^0(G,A)$ de un grupo finito G con coeficientes en un G-módulo A, mediante el homomorfismo $N^*: H_0(G,A) \longrightarrow H^0(G,A)$ inducido por el homomorfismo norma

$$Na = \sum_{i=1}^{|G|} x_i a \qquad a\in A \quad x_i\in G$$

resultando así la denominada sucesión derivada completa de G:

$$\hat{H}^n(G,A) = H^n(G,A) \qquad n>0$$
$$\hat{H}^{-n}(G,A) = H_{n-1}(G,A) \qquad n>1$$
$$\hat{H}^0(G,A) = \operatorname{coker} N^*$$
$$\hat{H}_0(G,A) = \ker N^*$$

Los grupos asi obtenidos presentan esencialmente dos ventajas desde el punto de vista algebraico; en primer lugar el hecho de que toda la sucesión derivada completa de G puede calcularse a partir de una resolución de G-módulos libres finitamente generados W_q, $q\in\mathbb{Z}$, tomando cocientes en el complejo transformado mediante el funtor $\operatorname{Hom}_G(-,A)$. En segundo lugar, el hecho de que queda relacionado el nuevo grupo $\hat{H}^0(G,\mathbb{Z})$ con el orden de G, a diferencia de lo que ocurre para la cohomología usual donde $H^0(G,\mathbb{Z})$ es independiente del grupo G.

Es también de especial interés, y primer motivo para el contenido de la presente memoria, el que la sucesión derivada completa de un grupo finito G permite introducir el concepto de periodicidad de los grupos de cohomología de Tate de un grupo finito G. El concepto de periodicidad es debido a Artin y Tate y es desarrollado por Cartan y Eilenberg en el capítulo XII de [1], generalizándolo al caso relativo de p-periodicidad (periodicidad para las componentes p-primarias) por el que resulta que un grupo es periódico si y sólo si es p-periódico para todo primo p. Se obtienen además caracterizaciones algebraicas del tipo siguiente:

"Dado un grupo finito G y p un divisor primo de $|G|$:

1) n_p es un p-período de G si y sólo si la componente p-primaria de $\hat{H}^{n_p}(G,\mathbb{Z})$ es un grupo cíclico de orden p-$|G|$.
2) G es p-periódico si y sólo si todo p-subgrupo de Sylow de G es cíclico o cuaterniónico generalizado."

Como aplicación topológica de estos conceptos, Cartan y Eilenberg demuestran también el siguiente resultado: "Si G es un grupo finito que opera sin puntos fijos sobre una esfera S^n con n impar, necesariamente G es periódico de período un divisor de n+1".

Castellet, en [2] estudia la aplicación topológica del concepto de p-periodicidad obteniendo entre otros el resultado siguiente: "Si G es un grupo finito que opera sin puntos fijos sobre una variedad compacta con la misma homología que S^n con coeficientes en $\mathbb{Z}_p$, y n es impar, entonces necesariamente G es p-periódico de p-período un divisor de n+1".

La Tesis que presento, bajo el título "Periodicidad en grupos de dimensión cohomológica virtual finita", se divide esencialmente en dos partes ambas de contenido algebraico. La primera abarca los dos primeros capítulos y en ellos se introduce el concepto de grupo finito semiperiódico como generalización del concepto de periodicidad para grupos finitos que desarrollaron Cartan y Eilenberg en [1]. En un apéndice al final de la Tesis se demuestra, haciendo uso de un trabajo de G. Lewis, [10], que todo grupo finito que opera sin puntos fijos conservando la orientación sobre un producto de esferas $S^n x S^n$, con n impar es necesariamente semiperiódico. Esto justifica por un lado el estudio de la semiperiodicidad, y por otro nos permite utilizar los resultados obtenidos para determinar algunas condiciones bajo las que un grupo finito no puede actuar sin puntos fijos conservando la orientación sobre productos de esferas $S^n x S^n$, generalizando así el resultado topológico de Cartan y Eilenberg.

En 1977 Farrell, en [6], extiende la cohomología de Tate a grupos de dimensión cohomológica virtual finita, grupos que son una generalización de los grupos finitos. En la segunda parte de la Tesis introduzco los conceptos de periodicidad y p-periodicidad de la cohomología de Farrell de un grupo de dimensión cohomológica virtual finita, como generalización de los conceptos estudiados por Cartan y Eilenberg. El estudio de la periodicidad y p-periodicidad de estos grupos lo justifica el hecho de que los grupos de dimensión cohomológica virtual finita y cohomología de Farrell p-periódica son los únicos que pueden operar sin puntos fijos sobre determinados CW-complejos no finitos, que se pueden interpretar como generalizaciones del concepto de esferas homológicas módulo p. Los resultados obtenidos en esta segunda parte se utilizan en los dos últimos capítulos para estudiar la periodicidad y p-periodicidad de los grupos de matrices $SL(n,\mathbb{Z})$ para $n \geq 2$.

En el capítulo 1 se recopilan los resultados esenciales sobre la cohomología de Tate de un grupo finito, todos ellos contenidos en el capítulo XII de [1]. Se explicita la cohomología de los grupos abelianos finitos asi como la de los grupos nilpotentes finitos en relación con la cohomología de sus p-subgrupos de Sylow.

En el segundo capítulo se introduce el concepto de semiperíodo de un grupo finito G, definiendo un semiperíodo como un número natural n tal que el cociente $\hat{H}^n G/\hat{H}^{n-1} G$ es suma de dos cíclicos y su orden es $|G|$. A un grupo finito G lo denominaremos de tipo MSP si admite algún semiperíodo n de manera que todos los múltiplos de n son también semiperíodos de G.

Se caracterizan los grupos abelianos finitos de tipo MSP obteniendo que son exactamente aquellos que pueden expresarse como suma de dos cíclicos, resultado que pasa a ser una generalización de la caracterización dada por Cartan y Eilenberg en virtud de la cual un grupo abeliano finito es periódico si y sólo si es cíclico.

Se demuestra también en este capítulo que un grupo nilpotente finito es de tipo MSP si y sólo si lo es cada uno de sus p-subgrupos de Sylow. Y respecto a los grupos que son extensión escindible de un cíclico por otro cíclico, se demuestra que son de tipo MSP y se caracterizan los semiperíodos.

El capítulo 3 es un capítulo auxiliar conteniendo todo lo que posteriormente se necesita sobre dimensión cohomológica y dimensión cohomológica virtual de un grupo sobre un anillo unitario y conmutativo. La mayoría de los resultados de este capítulo pueden encontrarse en [8] para el anillo $\mathbb{Z}$ y en [3] para un anillo unitario y conmutativo cualquiera R.

En el capítulo cuarto he reformulado el trabajo de Farrell sobre la cohomología de un grupo de dimensión cohomológica virtual finita respecto de un D.I.P.. En particular se demuestra la existencia y unicidad de resoluciones completas de Farrell sobre un dominio de ideales principales R, se da un análogo del Lema de Shapiro para la cohomología de Farrell, y se estudia por último el que denomino "Teorema de coincidencia con la cohomología usual" en el que se demuestra que si la dimensión cohomológica virtual de un grupo G es s (finita), entonces:

1) $H^n(G,A) = \hat{H}^n(G,A)$ $\forall n>s$ y todo G-módulo A.
2) Existe un epimorfismo $H^s(G,A) \longrightarrow \hat{H}^s(G,A)$ para todo G-módulo A.

En el capítulo 5 se definen conceptos paralelos a los desarrollados por Cartan y Eilenberg sobre periodicidad y p-periodicidad de la cohomología de Farrell; conceptos que generalizan los anteriores y que, también como ellos, son heredados por subgrupos.

Hay que destacar en este capítulo la obtención de dos teoremas, el (5.3.5) y el (5.3.6), que resultan fundamentales para el estudio, en los dos capítulos siguientes, de la periodicidad y p-periodicidad de los grupos de matrices $SL(n,\mathbb{Z})$. En ambos teoremas se relaciona la periodicidad, o en su caso la p-periodicidad de un grupo de dimensión cohomológica virtual finita con la de su cociente por un subgrupo normal de índice finito y libre de torsión. Para la obtención de ambos teoremas ha resultado de especial utilidad el trabajo de Swan "Periodic resolutions for finite groups" [22] que justifica la existencia de ciertas resoluciones periódicas.

El estudio de la periodicidad y p-periodicidad de los grupos de matrices $SL(n,\mathbb{Z})$ lo he separado en los capítulos 6 y 7 en base a la estructura especial de $SL(2,\mathbb{Z})$ como producto amalgamado de dos grupos cíclicos de ordenes 4 y 6 a través de otro de orden 2. En el capítulo sexto se estudia pues en primer lugar la estructura de $SL(2,\mathbb{Z})$; se demuestra que el subgrupo derivado es libre de índice finito y que el cociente de $SL(2,\mathbb{Z})$ por su derivado es cíclico de orden 12. Con todo ello puede aplicarse el teorema fundamental sobre periodicidad dado en el capítulo anterior, obteniendo que $SL(2,\mathbb{Z})$ es periódico de período 2 y calculando su cohomología de Farrell con coeficientes en $\mathbb{Z}$, que resulta ser:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{H}^{2q}(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{12} \\ \hat{H}^{2q+1}(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) = 0\end{array}\right. \qquad \forall q \in \mathbb{Z}$$

Por último el capítulo 7 está dedicado al estudio de la p-periodicidad de los grupos $SL(n,\mathbb{Z})$ para $n>2$, obteniendo que para todo primo p, cumpliendo $\frac{n}{2}+1<p\leqq n-2$, $SL(n,\mathbb{Z})$ es p-periódico de p-período $2(p-1)$. Este resultado se obtiene como conjunción de los dos razonamientos siguientes:

1) Se comprueba que es aplicable a $SL(n,\mathbb{Z})$ el teorema fundamental de p-periodicidad obtenido en el capítulo 5 por el que se demuestra haciendo uso de un trabajo de Swan ([21]), que $SL(n,\mathbb{Z})$ es p-periódico de p-período un divisor de $2(p-1)$ para $p>\frac{n}{2}+1$.

2) Se demuestra que $SL(n,\mathbb{Z})$ contiene al grupo alternado A_n como subgrupo y que éste es p-periódico de p-período $2(p-1)$ para $\frac{n}{2}+1<p\leqq n-2$.

Al final de la Tesis incluyo un apéndice en el que se justifica el interés del estudio de los grupos semiperiódicos y de tipo MSP en base a un resultado de G. Lewis en [10] por el que todo grupo finito que opera sin puntos fijos, conservando la orientación, sobre un producto de esferas $S^n x S^n$, con n impar, es semiperiódico y n+1 es un semiperíodo. Como consecuencia de las propiedades obtenidas en el capítulo 2, se demuestran algunos resultados conocidos en el campo de la Topología como son que el grupo $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ no puede operar sin puntos fijos conservando la orientación sobre ningún producto de esferas $S^n x S^n$; o condiciones bajo las que una extensión escindible de un grupo cíclico por otro cíclico no puede operar sobre un producto de esferas $S^n x S^n$ sin puntos fijos y conservando la orientación.

Finalmente quiero mostrar mi agradecimiento a todos aquellos que me han ayudado en la realización de este trabajo y muy especialmente al Dr. M. Castellet de la Universitat Autònoma de Barcelona por la dirección de esta memoria.

Valencia, Marzo de 1981

C A P I T U L O - 1

COHOMOLOGIA DE TATE DE GRUPOS FINITOS

En este capítulo se recopilan los resultados esenciales sobre la cohomología de Tate de un grupo finito, todos ellos contenidos en el capítulo XII de [1]. En los dos últimos apartados explicitaremos la cohomología de los grupos abelianos finitos así como la de los grupos nilpotentes finitos en relación con la cohomología de sus p-subgrupos de Sylow.

A lo largo de este capítulo G designará siempre un grupo finito y S_pG representará un p-subgrupo de Sylow de G.

(1.1) COHOMOLOGIA DE TATE

(1.1.1) Dado el grupo finito G, una resolución completa de G es un complejo acíclico

$$\cdots \longrightarrow X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_0 \xrightarrow{d_0} X_{-1} \longrightarrow \cdots$$

de G-módulos libres finitamente generados, donde d_0 se descompone a través del G-módulo trivial $\mathbb{Z}$ como

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, two heads, "\varepsilon"'] & & X_{-1} \\ & \mathbb{Z} \arrow[ur, hook, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

(1.1.2) En [1] (Cap. XII - Apt. 1, 2 y 3) se demuestra que todo grupo finito G admite una resolución completa y que ésta es única salvo homotopía, lo que permite definir la cohomología de Tate de G sobre un G-módulo cualquiera A como

$$\hat{H}^n(G,A) = H^n(\mathrm{Hom}_G(X,A)) \qquad \forall n\in\mathbb{Z}$$

(1.1.3) En relación con la homología y cohomología usual del grupo G se demuestra

$$\begin{aligned} \hat{H}^n(G,A) &= H^n(G,A) && n>0 \\ \hat{H}^{-n}(G,A) &= H_{n-1}(G,A) && n>1 \\ \hat{H}^0(G,A) &= \operatorname{coker} N^* \\ \hat{H}^{-1}(G,A) &= \ker N^* \end{aligned}$$

donde $N^*: H_0(G,A) \longrightarrow H^0(G,A)$ es el homomorfismo inducido a partir del homomorfismo norma $N: A \longrightarrow A$ definido por

$$Na = \sum_{i=1}^{|G|} x_i a \qquad x_i\in G$$

(1.1.4) Si $|G|=m$, entonces $m\hat{H}(G,A)=0$, es decir, todo elemento de $\hat{H}(G,A)$ es de orden un divisor de $|G|$. En particular si G es abeliano finito y e es su exponente $e\hat{H}(G,A)=0$, [14] (Cap. 10 - pgs. 292-293).

(1.1.5) Si A es un G-módulo finitamente generado, entonces $\hat{H}(G,A)$ es finito, [26] (Cap. III - Prop. 3.1.9 - pg. 89).

(1.1.6) Representaremos por $\hat{H}^iG$ a los grupos $\hat{H}^i(G,\mathbb{Z})$ considerando $\mathbb{Z}$ como G-módulo trivial, que según (1.1.5) son abelianos finitos.

(1.1.7) *Proposición*. $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\hat{H}^n G = \hat{H}^{-n} G$

Demostración. Según el Teorema de Dualidad [1] (Cap. XII - Tma. 6.6 - pg. 250) $\forall n \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$\hat{H}^n G \simeq \mathrm{Hom}(\hat{H}^{-n} G, \mathbb{Z}_{|G|})$$

Los teoremas de estructura de grupos abelianos finitos nos permiten descomponer $\hat{H}^{-n} G$ como suma de cíclicos cada uno de los cuales es de orden un divisor de $|G|$ según (1.1.4). Puesto que $\mathrm{Hom}(-,\mathbb{Z}_{|G|})$ conserva sumas finitas y $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_r,\mathbb{Z}_s) \simeq$ $\simeq \mathbb{Z}_{(r,s)}$ tenemos que $\mathrm{Hom}(\hat{H}^{-n} G,\mathbb{Z}_{|G|}) \simeq \hat{H}^{-n} G$ y por lo tanto $\forall n \in \mathbb{Z}$ se tiene $\hat{H}^n G \simeq \hat{H}^{-n} G$.

(1.1.8) *Proposición*. 1) $\hat{H}^0 G = \mathbb{Z}_{|G|}$

2) $\hat{H}^{\pm 1} G = 0$

3) $\hat{H}^{\pm 2} G = G_{ab}$

Demostración. Haciendo uso de (1.1.7) y puesto que $H^0(G,\mathbb{Z}) =$ $= \mathbb{Z} = H_0(G,\mathbb{Z})$ y $H_1(G,\mathbb{Z}) = G_{ab}$, [9] (Cap. VI - Apt. 3 y 4) tenemos:

1) $\hat{H}^0 G = \mathrm{coker}\, N^* = \dfrac{H^0(G,\mathbb{Z})}{|G| H_0(G,\mathbb{Z})} = \dfrac{\mathbb{Z}}{|G|\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_{|G|}$

2) $\hat{H}^1 G = \hat{H}^{-1} G = \ker N^* = 0$.

3) $\hat{H}^2 G = \hat{H}^{-2} G = H_1(G,\mathbb{Z}) = G_{ab}$

(1.1.9) *Proposición*. La cohomología de Tate del producto de dos grupos finitos a coeficientes en $\mathbb{Z}$ viene dada por:

$$\hat{H}^{\varepsilon n}(G_1 x G_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_{|G_1 x G_2|} & n=0 \\ \hat{H}^n G_1 \oplus \hat{H}^n G_2 \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-2} (\hat{H}^{k+1} G_1 \otimes \hat{H}^{n-k} G_2) \oplus & \\ \oplus \bigoplus_{k=2}^{n-2} (\hat{H}^k G_1 \otimes \hat{H}^{n-k} G_2) & n>0 \end{cases}$$

$\varepsilon = \pm 1$

Demostración. Los casos n=0, n=1 y n=2 son aplicación directa de (1.1.8) ya que $(G_1 x G_2)_{ab} \approx (G_1)_{ab} \oplus (G_2)_{ab}$. Para n>2 aplicaremos el Teorema de Künneth para la cohomología de un producto [9] (Cap. VI - Tma. 15.2 - pg. 223) que nos da la siguiente sucesión exacta escindible

$$\bigoplus_{p+q=n-1} (H_p G_1 \otimes H_q G_2) \rightarrowtail H_{n-1}(G_1 x G_2) \twoheadrightarrow \bigoplus_{p+q=n-2} \mathrm{Tor}(H_p G_1, H_q G_2)$$

Haciendo uso de (1.1.3) y (1.1.7) y puesto que $H_0(G_i, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ y $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}, -) = 0 = \mathrm{Tor}(-, \mathbb{Z})$ tenemos que $\forall n>2$ y $\varepsilon = \pm 1$:

$$\hat{H}^{\varepsilon n}(G_1 x G_2) = \hat{H}^{-n}(G_1 x G_2) = H_{n-1}(G_1 x G_2) \approx$$

$$\approx \bigoplus_{p+q=n-1} (H_p G_1 \otimes H_q G_2) \oplus \bigoplus_{p+q=n-2} \mathrm{Tor}(H_p G_1, H_q G_2) =$$

$$= (H_{n-1} G_1 \otimes H_0 G_2) \oplus (H_0 G_1 \otimes H_{n-1} G_2) \oplus$$

$$\oplus \bigoplus_{k=1}^{n-2} (H_k G_1 \otimes H_{n-1-k} G_2) \oplus \mathrm{Tor}(H_{n-2} G_1, H_0 G_2) \oplus$$

$$\oplus \mathrm{Tor}(H_0 G_1, H_{n-2} G_2) \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-3} \mathrm{Tor}(H_k G_1, H_{n-2-k} G_2) =$$

$$= \hat{H}^{-n}G_1 \oplus \hat{H}^{-n}G_2 \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-2}(\hat{H}^{-(k+1)}G_1 \otimes \hat{H}^{-(n-k)}G_2) \oplus$$

$$\oplus \bigoplus_{k=1}^{n-3}\mathrm{Tor}(\hat{H}^{-(k+1)}G_1,\hat{H}^{-(n-k-1)}G_2) =$$

$$= \hat{H}^{n}G_1 \oplus \hat{H}^{n}G_2 \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-2}(\hat{H}^{k+1}G_1 \otimes \hat{H}^{n-k}G_2) \oplus$$

$$\oplus \bigoplus_{k=2}^{n-2}\mathrm{Tor}(\hat{H}^{k}G_1,\hat{H}^{n-k}G_2)$$

Por otro lado, puesto que según (1.1.5) los $\hat{H}^{i}G_j$ son abelianos finitos tenemos según [1] (Cap. VII - Prob. 1 - pg. 139) el isomorfismo siguiente que finaliza la demostración

$$\bigoplus_{k=2}^{n-2}\mathrm{Tor}(\hat{H}^{k}G_1,\hat{H}^{n-k}G_2) \simeq \bigoplus_{k=2}^{n-2}(\hat{H}^{k}G_1 \otimes \hat{H}^{n-k}G_2)$$

(1.1.10) Según [1] (Cap. XII - Apt. 7) la cohomología de un grupo cíclico finito G a coeficientes en el G-módulo trivial $\mathbb{Z}$ viene dada por:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{H}^{2n}G = \mathbb{Z}_{|G|} \\ \hat{H}^{2n+1}G = 0 \end{array}\right\} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

(1.1.11) Según [1] (Cap. XII - Apt. 7) la cohomología de un grupo cuaterniónico generalizado G de orden 4t con $t \geq 1$ viene dada por:

$$\forall n\in\mathbb{Z}\quad \begin{cases} \hat{H}^{4n}G = \mathbb{Z}_{4t} \\ \hat{H}^{4n+1}G = 0 \\ \hat{H}^{4n+2}G = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & t \text{ par} \\ \mathbb{Z}_4 & t \text{ impar} \end{cases} \\ \hat{H}^{4n+3}G = 0 \end{cases}$$

(1,2) RELACION DE LA COHOMOLOGIA DE TATE DE UN GRUPO CON LA DE SUS SUBGRUPOS

(1.2.1) Sea G un grupo y U un subgrupo de G. Puesto que todo G-módulo es un U-módulo y toda resolución completa de G lo es también para U, si A es un G-módulo y (X,d) es una resolución completa de G (1.1.1), podemos considerar:

1) La inclusión $i\colon \mathrm{Hom}_G(X,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_U(X,A)$

2) El homomorfismo transfer $t\colon \mathrm{Hom}_U(X,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(X,A)$ de manera que $\forall f\in \mathrm{Hom}_U(X,A)$

$$\begin{aligned} tf\colon X &\longrightarrow A \\ c &\longmapsto \sum_{i=1}^{s} y_i f(y_i^{-1}c) \end{aligned}$$

donde $\{y_i\}_{i=1}^{s}$ es un sistema de representantes de las clases laterales de G/U.

(1.2.2) La inclusión i y el transfer t inducen sobre la cohomología de G y de U los homomorfismos restricción y correstricción respectivamente

$$res_{(G,U)} : \hat{H}(G,A) \longrightarrow \hat{H}(U,A)$$

$$cor_{(G,U)} : \hat{H}(U,A) \longrightarrow \hat{H}(G,A)$$

Entre las propiedades que verifican estos homomorfismos cabe destacar que el producto $cor_{(G,U)} res_{(G,U)}$ es la multiplicación por $[G:U]$ según [26] (Cap. 2 - Cor. 2.4.9 - pg. 76)

(1.2.3) *Proposición*. Sea p un divisor primo de $|G|$, se tiene:

1) $res : p\text{-}\hat{H}G \hookrightarrow \hat{H}G \xrightarrow{res_{(G,S_pG)}} \hat{H}S_pG$
   es un monomorfismo.

2) $cor : \hat{H}S_pG \xrightarrow{cor_{(G,S_pG)}} \hat{H}G \twoheadrightarrow p\text{-}\hat{H}G$
   es un epimorfismo.

3) $\hat{H}S_pG = \text{Im } res \oplus \ker cor$

Demostración. $|G| = p^\alpha s$ con $(p,s)=1$ y por tanto $|S_pG| = p^\alpha$ y $\exists t,q\in\mathbb{Z} \;/\; tp^\alpha + qs = 1$

1) Si $res\, x = res\, y$ con $x,y\in p\text{-}\hat{H}G$ y $x\neq y$, según (1.2.2) tenemos $[G:S_pG]x = [G:S_pG]y$, lo que supone que el orden de $x-y$ divide a s en contra de $0 \neq x-y \in p\text{-}\hat{H}G$.

2) Si $x\in p\text{-}\hat{H}G$, necesariamente $p^\alpha x = 0$ ya que según (1.1.4) $|G|\hat{H}G = 0$. Por otro lado

$$(cor \circ res)(qx) = [G:S_pG]qx = sqx =$$
$$= (1-tp^\alpha)x = x$$

por lo que $res\, qx \in p\text{-}\hat{H}G$ es antiimagen para x.

3) Si $x \in \operatorname{Im} \operatorname{res} \cap \ker \operatorname{cor}$, tenemos $\operatorname{cor} x = 0$ y $x = \operatorname{res} y$ con $y \in p\text{-}\hat{H}G$, además como $(\operatorname{cor}\circ\operatorname{res})y = [G:S_pG]y =$ $= \operatorname{cor} x = 0$, necesariamente $y = 0$ y por tanto $x = 0$.

Si $x \in \hat{H}S_pG$ se tiene,

$\operatorname{cor}(x - (\operatorname{res}\circ\operatorname{cor})qx) = \operatorname{cor} x - [G:S_pG]\operatorname{cor} qx =$

$$= (1 - [G:S_pG]q)\operatorname{cor} x = (1 - sq)\operatorname{cor} x = tp^{\alpha}\operatorname{cor} x = 0$$

con lo que $x = (\operatorname{res}\circ\operatorname{cor})qx + (x - (\operatorname{res}\circ\operatorname{cor})qx)$ donde $x - (\operatorname{res}\circ\operatorname{cor})qx \in \ker \operatorname{cor}$.

(1.3) GRUPOS CON COHOMOLOGIA DE TATE PERIODICA

(1.3.1) *Definición*. Sea $n \in \mathbb{N}$ y G un grupo finito, diremos que n es un período de G si

$$\hat{H}^{n+i}(G,A) \simeq \hat{H}^{i}(G,A) \qquad \forall i \in \mathbb{Z} \qquad \forall G\text{-módulo } A$$

Obviamente si n es un período para G todo múltiplo de n también lo es. Llamaremos período de G al menor de los períodos.

(1.3.2) *Proposición*. Si $n \in \mathbb{N}$ son equivalentes:

1) n es un período de G
2) $\hat{H}^nG \simeq \mathbb{Z}_{|G|}$

Demostración. La implicación 1) $\Longrightarrow$ 2) es consecuencia inmediata de (1.1.8) particularizando la definición de n como período de G para el caso $A = \mathbb{Z}$ e $i=0$.

La implicación 2) $\Longrightarrow$ 1) es consecuencia de que, según [1] (Cap. XII - Prop. 11.1 - pg. 260) la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \hat{H}^{i}(G,A) & \longrightarrow & \hat{H}^{n+i}(G,A) \\ a & \longrightarrow & ag \end{array}$$

es un isomorfismo $\forall i \in \mathbb{Z}$ y para todo G-módulo A, siendo g un generador del grupo cíclico $\hat{H}^n G$.

(1.3.3) *Proposición*. Si n es un período de un grupo G, necesariamente n es par.

Demostración. Sea n un período de G y g un generador del grupo cíclico $\hat{H}^n G$; si suponemos n impar se tiene que 2g=0 según [1] (Cap. XII - Apt. 11) con lo que $|G|=2$, pero según (1.1.10) $\mathbb{Z}_2$ sólo tiene períodos pares.

(1.3.4) *Proposición*. Si n es un período de un grupo G y U es un subgrupo de G, n es también un período de U.

Demostración. Sea g un generador de $\hat{H}^n G$. Según (1.2.2) se tiene $(cor_{(G,U)} \circ res_{(G,U)})g = [G:U]g$ por lo que el elemento $(cor_{(G,U)} \circ res_{(G,U)})g$ de $\hat{H}^n G$ tiene orden $|U|$ y por lo tanto $res_{(G,U)}g$ tiene orden mayor o igual que $|U|$. Como según (1.1.4) los elementos de $\hat{H}^n U$ tienen de orden un divisor de $|U|$, necesariamente $res_{(G,U)}g$ es de orden $|U|$ lo que equivale según [1] (Cap. XII - Prop. 11.1 - pg. 260) a $\hat{H}^n U \simeq \mathbb{Z}_{|U|}$ y por (1.3.2) n es así un período de U.

(1.3.5) *Proposición*. Un grupo abeliano finito G es periódico si y sólo si es cíclico.

Demostración. Si G es cíclico, (1.1.10) demuestra que G es periódico.

Si G es abeliano no cíclico contiene un subgrupo de la forma $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ con p primo y si suponemos G periódico, según (1.3.4)

$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ también será periódico. Bastará pues con probar que el grupo $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ no puede ser periódico.

Si $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ es periódico, por (1.3.2) tendríamos que $\hat{H}^n(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p) \approx \mathbb{Z}_{p^2}$ para algún $n>0$. Según (1.1.9) $\hat{H}^n(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p)$ contiene como sumando directo a $\hat{H}^n\mathbb{Z}_p \oplus \hat{H}^n\mathbb{Z}_p$. Como según (1.3.3) n es par, resulta de (1.1.10) que $\hat{H}^n(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p)$ contiene a $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ como sumando directo lo que se contradice con el isomorfismo $\hat{H}^n(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p) \approx \mathbb{Z}_{p^2}$.

(1.3.6) <u>*Proposición*</u>. El grupo G es periódico si y sólo si todo p-subgrupo de Sylow es cíclico o cuaterniónico generalizado.

Demostración. Supongamos G periódico y U un p-subgrupo de Sylow de G. Por ser U p-grupo su centro es no trivial y contiene un subgrupo cíclico U' de orden p. Además U' es el único subgrupo de orden p en U ya que si hubiera otro U" tendríamos $U' \cap U'' = 1$ y como U' está en el centro de U, necesariamente U contendría a U'xU" que por (1.3.4) sería periódico y entraríamos en contradicción con (1.3.5).

Como U contiene un único subgrupo de orden p, según [27] (Cap. IV - Tma. 15 - pg. 148) U es cíclico o cuaterniónico generalizado.

Recíprocamente supongamos que todo p-subgrupo de Sylow de G es cíclico o cuaterniónico generalizado. Como consecuencia de (1.1.10) y (1.1.11) todo p-subgrupo de Sylow de G es periódico de período 2 o 4, y según (1.3.2), si $p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ es la descomposición en factores primos de $|G|$, entonces para cada i, el grupo $\hat{H}^{q_i} S_{p_i} G$ es cíclico de orden $p_i^{\alpha_i}$, generado por g_i y siendo q_i el período de $S_{p_i} G$ ($q_i=2$ o $q_i=4$).

Sea r el mínimo común múltiplo de los ordenes de los grupos de las unidades de cada uno de los anillos $(\mathbb{Z}_{p_i^{\alpha_i}},+,\cdot)$. Obviamente para cada p_i, si k es un entero primo con p_i, puesto que $\overline{k}$ es inversible se tiene:

$$k^{4r/q_i} \equiv 1 \ (p_i^{\alpha_i})$$

y según [1] (Cap. XII - Prop. 11.4 - pg. 261) cor g_i^{4r/q_i} es un elemento de $p_i\text{-}\hat{H}^{4r}G$ de orden $p_i^{\alpha_i}$. La suma de todos ellos $(1\leq i\leq s)$ es un elemento de $\hat{H}^{4r}G$ de orden $|G|$ y en virtud de [1] (Cap. XII - Prop. 11.1 - pg. 260) se tiene $\hat{H}^{4r}G \simeq \mathbb{Z}_{|G|}$ de donde, según (1.3.2), concluimos que 4r es un período de G.

(1.3.7) *Proposición*. Si G es periódico, $\hat{H}^iG = 0 \ \forall i$ impar.

Demostración. Si G es periódico la proposición anterior nos indica que todo p-subgrupo de Sylow de G es cíclico o cuaterniónico generalizado y según (1.1.10) y (1.1.11) $\hat{H}^iS_pG = 0$ para todo i impar.

Puesto que cor: $\hat{H}S_pG \longrightarrow p\text{-}\hat{H}G$ es un epimorfismo según (1.2.3), $p\text{-}\hat{H}^iG = 0$ para todo i impar y todo primo p divisor de $|G|$, por lo tanto $\hat{H}^iG = 0 \ \forall i$ impar.

(1.4) COHOMOLOGIA DE TATE DE UN GRUPO ABELIANO FINITO

(1.4.1) *Proposición*. Sea G un grupo abeliano finito. Consideremos la descomposición en cíclicos de G de la forma:

$$G = \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_r} \qquad \text{con} \quad \begin{cases} r\geq 1 \\ m_r > 1 \\ m_i \mid m_{i-1} \quad 2\leq i\leq r \end{cases}$$

La cohomología de Tate de G viene dada por:

$$\hat{H}^{\varepsilon(2n+1)}G = \bigoplus_{j=2}^{r}(G_{j,n-1} \oplus \overline{G}_{j,n}) \qquad \forall n \geqq 0 \qquad \varepsilon=\pm 1$$

$$\hat{H}^{\varepsilon 2n}G = G \oplus \bigoplus_{j=2}^{r}(G_{j,n-1} \oplus \overline{G}_{j,n-1}) \qquad \forall n > 0 \qquad \varepsilon=\pm 1$$

siendo: $G_i = \mathbb{Z}_{m_i} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_r} \qquad 1 \leqq i \leqq r$

$$G_{j,n} = \bigoplus_{i=1}^{n} \hat{H}^{2i+1}G_j \qquad 2 \leqq j \leqq r$$

$$\overline{G}_{j,n} = \bigoplus_{i=1}^{n} \hat{H}^{2i}G_j \qquad 2 \leqq j \leqq r$$

Demostración. Lo demostraremos por inducción sobre r.

Para r=1 los sumatorios de las dos expresiones a demostrar carecen de sentido por lo que $\hat{H}^{\varepsilon(2n+1)}G = 0$ y $\hat{H}^{\varepsilon 2n}G = G$ que coincide con lo visto en (1.1.10) para la cohomología de Tate de un grupo cíclico.

Para r=2, $G = \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2}$ y la proposición (1.1.9) nos da las siguientes expresiones para la cohomología de G:

$\forall n \geqq 0$, $\varepsilon=\pm 1$:

$$\hat{H}^{\varepsilon(2n+1)}G = \hat{H}^{2n+1}\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \hat{H}^{2n+1}\mathbb{Z}_{m_2} \oplus \bigoplus_{k=1}^{2n-1}(\hat{H}^{k+1}\mathbb{Z}_{m_1} \otimes \hat{H}^{2n+1-k}\mathbb{Z}_{m_2}) \oplus$$

$$\oplus \bigoplus_{k=2}^{2n-1}(\hat{H}^{k}\mathbb{Z}_{m_1} \otimes \hat{H}^{2n+1-k}\mathbb{Z}_{m_2}) = \hat{H}^{2n+1}\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \hat{H}^{2n+1}\mathbb{Z}_{m_2} \oplus$$

$$\oplus \bigoplus_{i=1}^{n}(\hat{H}^{2i}\mathbb{Z}_{m_1} \otimes \hat{H}^{2(n+1-i)}\mathbb{Z}_{m_2}) \oplus \bigoplus_{i=2}^{n}(\hat{H}^{2i-1}\mathbb{Z}_{m_1} \otimes$$

$$\otimes\ \hat{H}^{2(n+1-i)+1}\mathbb{Z}_{m_2}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1}(\hat{H}^{2i}\mathbb{Z}_{m_1} \otimes \hat{H}^{2(n-i)+1}\mathbb{Z}_{m_2}) \oplus$$

$$\oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1}(\hat{H}^{2(n-i)}\mathbb{Z}_{m_1} \otimes \hat{H}^{2i+1}\mathbb{Z}_{m_2})$$

$\forall n>0$, $\varepsilon=\pm 1$:

$$\hat{H}^{\varepsilon 2n}G = \hat{H}^{2n}\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \hat{H}^{2n}\mathbb{Z}_{m_2} \oplus \bigoplus_{k=1}^{2n-2}(\hat{H}^{k+1}\mathbb{Z}_{m_1} \otimes \hat{H}^{2n-k}\mathbb{Z}_{m_2}) \oplus$$

$$\oplus \bigoplus_{k=2}^{2n-2}(\hat{H}^{k}\mathbb{Z}_{m_1} \otimes \hat{H}^{2n-k}\mathbb{Z}_{m_2}) = \hat{H}^{2n}\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \hat{H}^{2n}\mathbb{Z}_{m_2} \oplus$$

$$\oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1}(\hat{H}^{2i}\mathbb{Z}_{m_1} \otimes \hat{H}^{2(n-i)+1}\mathbb{Z}_{m_2}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1}(\hat{H}^{2i+1}\mathbb{Z}_{m_1} \otimes$$

$$\otimes\ \hat{H}^{2(n-i)}\mathbb{Z}_{m_2}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1}(\hat{H}^{2i}\mathbb{Z}_{m_1} \otimes \hat{H}^{2(n-i)}\mathbb{Z}_{m_2}) \oplus$$

$$\oplus \bigoplus_{i=1}^{n-2}(\hat{H}^{2i+1}\mathbb{Z}_{m_1} \otimes \hat{H}^{2(n-i)-1}\mathbb{Z}_{m_2})$$

Teniendo en cuenta (1.1.10) estas expresiones quedan:

$\forall n\geq 0$, $\varepsilon=\pm 1$:

$$\hat{H}^{\varepsilon(2n+1)}G = \bigoplus_{i=1}^{n}(\mathbb{Z}_{m_1} \otimes \mathbb{Z}_{m_2}) = n\mathbb{Z}_{(m_1,m_2)} = n\mathbb{Z}_{m_2}$$

$\forall n>0$, $\varepsilon=\pm 1$:

$$\hat{H}^{\varepsilon 2n}G = \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1}(\mathbb{Z}_{m_1} \otimes \mathbb{Z}_{m_2}) = \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus (n-1)\mathbb{Z}_{(m_1,m_2)} =$$

$$= G \oplus (n-1)\mathbb{Z}_{m_2}$$

Por otro lado, para r=2 y teniendo en cuenta (1.1.10) tenemos:

$$\forall n\geq 0 \ , \ \varepsilon=\pm 1: \quad \bigoplus_{j=2}^{r}(G_{j,n-1}\oplus \overline{G}_{j,n}) = G_{2,n-1}\oplus \overline{G}_{2,n} =$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{n-1}\hat{H}^{2i+1}\mathbb{Z}_{m_2}\oplus \bigoplus_{i=1}^{n}\hat{H}^{2i}\mathbb{Z}_{m_2} = n\mathbb{Z}_{m_2}$$

$$\forall n>0 \ , \ \varepsilon=\pm 1: \quad G\oplus \bigoplus_{j=2}^{r}(G_{j,n-1}\oplus \overline{G}_{j,n-1}) = G\oplus G_{2,n-1}\oplus \overline{G}_{2,n-1} =$$

$$= G\oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1}\hat{H}^{2i+1}\mathbb{Z}_{m_2}\oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1}\hat{H}^{2i}\mathbb{Z}_{m_2} = G\oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1}\mathbb{Z}_{m_2} =$$

$$= G\oplus (n-1)\mathbb{Z}_{m_2}$$

Quedan así comprobadas las expresiones buscadas para el caso r=2.

Supongamos ahora,

$$G = \mathbb{Z}_{m_1}\oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_r}\oplus \mathbb{Z}_{m_{r+1}} \qquad \text{con} \begin{cases} r\geq 2 \\ m_{r+1}>1 \\ m_i \mid m_{i-1} \qquad 2\leq i\leq r+1 \end{cases}$$

y sea $G' = \mathbb{Z}_{m_2}\oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_{r+1}}$ para quien supondremos por hipótesis de inducción que la proposición es válida y por lo tanto tenemos:

$$G'_i = G_{i+1} \qquad 1\leq i\leq r$$

$$G'_{j,n} = \bigoplus_{i=1}^{n}\hat{H}^{2i+1}G'_j = \bigoplus_{i=1}^{n}\hat{H}^{2i+1}G_{j+1} = G_{j+1,n} \qquad 2\leq j\leq r$$

$$\overline{G}'_{j,n} = \bigoplus_{i=1}^{n}\hat{H}^{2i}G'_j = \bigoplus_{i=1}^{n}\hat{H}^{2i}G_{j+1} = \overline{G}_{j+1,n} \qquad 2\leq j\leq r$$

$\forall n \geq 0$, $\varepsilon = \pm 1$: $\hat{H}^{\varepsilon(2n+1)} G' = \bigoplus_{j=2}^{r} (G'_{j,n-1} \oplus \overline{G'}_{j,n}) =$

$$= \bigoplus_{j=2}^{r} (G_{j+1,n-1} \oplus \overline{G}_{j+1,n})$$

$\forall n > 0$, $\varepsilon = \pm 1$: $\hat{H}^{\varepsilon 2n} G' = G' \oplus \bigoplus_{j=2}^{r} (G'_{j,n-1} \oplus \overline{G'}_{j,n-1}) =$

$$= G_2 \oplus \bigoplus_{j=2}^{r} (G_{j+1,n-1} \oplus \overline{G}_{j+1,n-1})$$

Según (1.1.9) tenemos $\forall n \geq 0$ y $\varepsilon = \pm 1$:

$$\hat{H}^{\varepsilon(2n+1)} G = \hat{H}^{(2n+1)} (\mathbb{Z}_{m_1} \oplus G') = \hat{H}^{2n+1} \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \hat{H}^{2n+1} G' \oplus$$

$$\oplus \bigoplus_{k=1}^{2n-1} (\hat{H}^{k+1} \mathbb{Z}_{m_1} \otimes \hat{H}^{2n+1-k} G') \oplus \bigoplus_{k=2}^{2n-1} (\hat{H}^{k} \mathbb{Z}_{m_1} \otimes \hat{H}^{2n+1-k} G') =$$

$$= \hat{H}^{2n+1} \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \hat{H}^{2n+1} G' \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} (\hat{H}^{2(n+1-i)} \mathbb{Z}_{m_1} \otimes \hat{H}^{2i} G') \oplus$$

$$\oplus \bigoplus_{i=2}^{n} (\hat{H}^{2(n+1-i)+1} \mathbb{Z}_{m_1} \otimes \hat{H}^{2i-1} G') \oplus$$

$$\oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1} (\hat{H}^{2(n-i)+1} \mathbb{Z}_{m_1} \otimes \hat{H}^{2i} G') \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1} (\hat{H}^{2(n-i)} \mathbb{Z}_{m_1} \otimes \hat{H}^{2i+1} G')$$

Teniendo en cuenta cual es la cohomología de un grupo cíclico queda:

$$\hat{H}^{\varepsilon(2n+1)} G = \hat{H}^{2n+1} G' \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} (\mathbb{Z}_{m_1} \otimes \hat{H}^{2i} G') \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1} (\mathbb{Z}_{m_1} \otimes \hat{H}^{2i+1} G')$$

Al ser m_2 el exponente de G' tenemos que $m_2\hat{H}G' = 0$ según (1.1.4). Como $\hat{H}G'$ es abeliano finito y $m_2 | m_1$, tenemos $\mathbb{Z}_{m_1} \otimes \hat{H}G' = \hat{H}G'$ por distributividad del producto tensorial. Con todo esto y aplicando la hipótesis de inducción a G' tenemos:

$$\hat{H}^{\varepsilon(2n+1)}G = \hat{H}^{2n+1}G' \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \hat{H}^{2i}G' \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1} \hat{H}^{2i+1}G' = \bigoplus_{j=2}^{r} (G_{j+1,n-1} \oplus \overline{G}_{j+1,n}) \oplus$$

$$\oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \hat{H}^{2i}G_2 \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1} \hat{H}^{2i+1}G_2 = \bigoplus_{j=2}^{r} (G_{j+1,n-1} \oplus \overline{G}_{j+1,n}) \oplus$$

$$\oplus \overline{G}_{2,n} \oplus G_{2,n-1} = \bigoplus_{j=1}^{r} (G_{j+1,n-1} \oplus \overline{G}_{j+1,n}) =$$

$$= \bigoplus_{j=2}^{r+1} (G_{j,n-1} \oplus \overline{G}_{j,n})$$

lo que nos da la expresión buscada de $\hat{H}^{\varepsilon(2n+1)}G$.

Razonando de modo análogo tenemos $\forall n>0$ y $\varepsilon=\pm 1$:

$$\hat{H}^{\varepsilon 2n}G = \hat{H}^{\varepsilon 2n}(\mathbb{Z}_{m_1} \oplus G') = \hat{H}^{2n}\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \hat{H}^{2n}G' \oplus \bigoplus_{k=1}^{2n-2} (\hat{H}^{k+1}\mathbb{Z}_{m_1} \otimes \hat{H}^{2n-k}G') \oplus$$

$$\oplus \bigoplus_{k=2}^{2n-2} (\hat{H}^{k}\mathbb{Z}_{m_1} \otimes \hat{H}^{2n-k}G') = \hat{H}^{2n}\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \hat{H}^{2n}G' \oplus$$

$$\oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1} (\hat{H}^{2(n-i)+1}\mathbb{Z}_{m_1} \otimes \hat{H}^{2i}G') \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1} (\hat{H}^{2(n-i)}\mathbb{Z}_{m_1} \otimes \hat{H}^{2i+1}G') \oplus$$

$$\oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1} (\hat{H}^{2(n-i)}\mathbb{Z}_{m_1} \otimes \hat{H}^{2i}G') \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-2} (\hat{H}^{2(n-i)-1}\mathbb{Z}_{m_1} \otimes \hat{H}^{2i+1}G') =$$

$$= \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \hat{H}^{2n}G' \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1} (\mathbb{Z}_{m_1} \otimes \hat{H}^{2i+1}G') \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1} (\mathbb{Z}_{m_1} \otimes \hat{H}^{2i}G') =$$

$$= \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \hat{H}^{2n}G' \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1} \hat{H}^{2i+1}G' \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1} \hat{H}^{2i}G' = \mathbb{Z}_{m_1} \oplus G_2 \oplus$$

$$\oplus \bigoplus_{j=2}^{r} (G_{j+1,n-1} \oplus \overline{G}_{j+1,n-1}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1} \hat{H}^{2i+1}G_2 \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1} \hat{H}^{2i}G_2 =$$

$$= G \oplus \bigoplus_{j=2}^{r} (G_{j+1,n-1} \oplus \overline{G}_{j+1,n-1}) \oplus G_{2,n-1} \oplus \overline{G}_{2,n-1} =$$

$$= G \oplus \bigoplus_{j=2}^{r+1} (G_{j,n-1} \oplus \overline{G}_{j,n-1}) .$$

que nos da la expresión buscada para $\hat{H}^{\varepsilon 2n}G$.

(1.4.2) *Corolario.* En las condiciones de (1.4.1) se tiene que $m_2\hat{H}^{\varepsilon(2n+1)}G = 0 \quad \forall n \geq 0$ y $\varepsilon = \pm 1$.

Demostración. Es consecuencia inmediata de (1.4.1) y (1.1.4).

(1.4.3) *Corolario.* En las condiciones de (1.4.1) se tiene que:

$$\hat{H}^{\varepsilon 2n}G = G \oplus \hat{H}^{\varepsilon(2n-1)}G \oplus \bigoplus_{j=2}^{r} \hat{H}^{2n-1}G_j \qquad \forall n>0 \text{ , } \varepsilon = \pm 1$$

Demostración.

$$G_{j,n} = \bigoplus_{i=1}^{n} \hat{H}^{2i+1}G_j = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \hat{H}^{2i+1}G_j \oplus \hat{H}^{2n+1}G_j = G_{j,n-1} \oplus \hat{H}^{2n+1}G_j$$

$$\overline{G}_{j,n} = \bigoplus_{i=1}^{n} \hat{H}^{2i}G_j = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \hat{H}^{2i}G_j \oplus \hat{H}^{2n}G_j = \overline{G}_{j,n-1} \oplus \hat{H}^{2n}G_j$$

Según (1.4.1) se tiene $\forall n>0$ y $\varepsilon=\pm 1$:

$$\hat{H}^{\varepsilon 2n}G = G \oplus \bigoplus_{j=2}^{r}(G_{j,n-1} \oplus \overline{G}_{j,n-1}) = G \oplus \bigoplus_{j=2}^{r}(G_{j,n-2} \oplus \hat{H}^{2(n-1)+1}G_j \oplus$$

$$\oplus \overline{G}_{j,n-1}) = G \oplus \bigoplus_{j=2}^{r}(G_{j,n-2} \oplus \overline{G}_{j,n-1}) \oplus \bigoplus_{j=2}^{r}\hat{H}^{2n-1}G_j =$$

$$= G \oplus \hat{H}^{\varepsilon(2n-1)}G \oplus \bigoplus_{j=2}^{r}\hat{H}^{2n-1}G_j$$

(1.5) <u>COHOMOLOGIA DE TATE DEL PRODUCTO DE r GRUPOS DE ORDENES PRIMOS DOS A DOS</u>. <u>CASO DE LOS GRUPOS NILPOTENTES FINITOS</u>

(1.5.1) <u>*Proposición*</u>. Sea $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_r$ de manera que $(|G_i|,|G_j|)=1$ para $i\neq j$, entonces

$$\hat{H}^{\varepsilon n}G = \bigoplus_{i=1}^{r} \hat{H}^n G_i \qquad \forall n\geq 0 \;,\; \varepsilon=\pm 1$$

Demostración. Para n=0 es consecuencia inmediata de (1.1.8) y de que los G_i son de ordenes primos dos a dos.

Para n>0 lo demostraremos por inducción sobre el número de factores. Obviamente para r=1 es cierto. Para r=2 (1.1.9) nos da:

$$\hat{H}^{\varepsilon n}(G_1 \times G_2) = \hat{H}^n G_1 \oplus \hat{H}^n G_2 \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-2}(\hat{H}^{k+1}G_1 \otimes \hat{H}^{n-k}G_2) \oplus$$

$$\oplus \bigoplus_{k=2}^{n-2}(\hat{H}^k G_1 \otimes \hat{H}^{n-k}G_2)$$

Por otro lado los teoremas de estructura de grupos abelianos finitos y (1.1.6) nos permiten descomponer $\hat{H}^i G_j$ como suma de cíclicos cada uno de los cuales es de orden un divisor de $|G_j|$ según (1.1.4). De la aditividad del producto tensorial y de $(|G_1|,|G_2|)=1$ se deduce que $\hat{H}^i G_1 \otimes \hat{H}^{i'} G_2 = 0$ y por tanto,

$$\hat{H}^{\varepsilon n}(G_1 x G_2) = \hat{H}^n G_1 \oplus \hat{H}^n G_2$$

lo que demuestra la proposición para el producto de dos grupos de ordenes primos entre sí.

Consideremos ahora $G = G' \times G_{r+1}$ donde $G' = G_1 x \cdots x G_r$. Puesto que $(|G'|,|G_{r+1}|)=1$ tenemos

$$\hat{H}^{\varepsilon n}(G' \times G_{r+1}) = \hat{H}^n G' \oplus \hat{H}^n G_{r+1}$$

Por hipótesis de inducción tenemos que $\hat{H}^{\varepsilon n} G' = \bigoplus_{i=1}^{r} \hat{H}^n G_i$ y por lo tanto

$$\hat{H}^{\varepsilon n}(G' \times G_{r+1}) = \bigoplus_{i=1}^{r} \hat{H}^n G_i \oplus \hat{H}^n G_{r+1} = \bigoplus_{i=1}^{r+1} \hat{H}^n G_i$$

(1.5.2) *Corolario*. Si G es nilpotente finito,

$$\hat{H}^{\varepsilon n} G = \bigoplus_{i=1}^{r} \hat{H}^n S_{p_i} G \qquad \forall n \geq 0 \ , \ \varepsilon = \pm 1$$

donde $p_1, p_2, \ldots, p_r$ son todos los divisores primos de $|G|$.

Demostración. Es consecuencia inmediata de (1.5.1) ya que si G es nilpotente finito es producto de sus p-subgrupos de Sylow.

C A P I T U L O - 2

GRUPOS SEMIPERIODICOS Y GRUPOS DE TIPO MSP

En este capítulo se introducen los conceptos de semiperíodo de un grupo finito y de grupo de tipo MSP como generalización de los grupos periódicos estudiados en [1] por Cartan y Eilenberg. Se caracterizan los grupos abelianos finitos de tipo MSP y se estudian condiciones de semiperiodicidad para grupos nilpotentes finitos y para extensiones escindibles de cíclicos por cíclicos.

En todo el capítulo G designará un grupo finito y S_pG un p-subgrupo de Sylow de G.

(2.1) DEFINICIONES

(2.1.1) Sea $n\in N$, diremos que n es un semiperíodo para el grupo G si

$$\frac{\hat{H}^{\varepsilon n}G}{\hat{H}^{\varepsilon(n-1)}G} \simeq \mathbb{Z}_{a(n)} \oplus \mathbb{Z}_{b(n)}$$

con $\varepsilon=\pm1$ y $a(n)b(n)=|G|$.

(2.1.2) Un grupo G diremos que es de tipo MSP si existe $n>0$ de manera que $\forall k>0$, kn es semiperíodo para G, es decir que existe un semiperíodo n para el que todos sus múltiplos (M) son de nuevo semiperíodos (SP).

(2.2) RELACION ENTRE PERIODICIDAD, SEMIPERIODICIDAD Y GRUPOS DE TIPO MSP

(2.2.1) *Proposición.* Para n>0 las siguientes propiedades son equivalentes:

a) n es un período para G

b) $\dfrac{\hat{H}^n G}{\hat{H}^{n-1} G} \simeq \mathbb{Z}_{|G|}$

Demostración. Si n es un período de G, de (1.1.8) y (1.3.2) se deduce

$$\hat{H}^n G \simeq \mathbb{Z}_{|G|} \quad \text{y} \quad \hat{H}^{n-1} G = 0$$

lo que demuestra una implicación.

Recíprocamente, si suponemos b) cierto, en $\hat{H}^n G$ habrá al menos un elemento de orden $|G|$ y como según (1.1.4) $|G|\hat{H}^n G = 0$, necesariamente $\hat{H}^n G$ es de exponente $|G|$.

Por otro lado, según [24] (Tma. 4.1 - pg. 165) tenemos,

$$\exp(\hat{H}^{n-1} G)\ \exp(\hat{H}^n G) \;\Big|\; |G|$$

de donde $\hat{H}^{n-1} G$ es de exponente 1 y por tanto $\hat{H}^{n-1} G = 0$ y $\hat{H}^n G \simeq \mathbb{Z}_{|G|}$ lo que demuestra según (1.3.2) que n es un período de G.

(2.2.2) *Corolario.* Todo grupo periódico es de tipo MSP.

Demostración. Si n>0 es un período de G, kn también lo es ∀k>0. Haciendo uso de (1.1.7) la propiedad anterior nos demuestra:

$$\frac{\hat{H}^{\varepsilon kn}G}{\hat{H}^{\varepsilon(kn-1)}G} \simeq \mathbb{Z}_{|G|} \qquad \forall k>0 \quad y \quad \varepsilon=\pm 1$$

por lo que tomando $a(kn)=|G|$ y $b(kn)=1$ tenemos que kn es un semiperíodo de G $\forall k>0$ y por lo tanto G es de tipo MSP.

(2.2.3) *Proposición.* El producto de dos grupos periódicos es de tipo MSP.

Demostración. Supongamos n_1 un período de G_1 y n_2 un período de G_2, siendo G_1 y G_2 dos grupos finitos. Por (1.3.3) sabemos que el mínimo común múltiplo de n_1 y n_2 es un número par mayor o igual que 2.

Por (1.1.9) tenemos $\forall k>0$, $\varepsilon=\pm 1$ y $n=[n_1,n_2]$:

$$\hat{H}^{\varepsilon kn}(G_1 x G_2) = \hat{H}^{kn}G_1 \oplus \hat{H}^{kn}G_2 \oplus \bigoplus_{i=1}^{kn-2}(\hat{H}^{i+1}G_1 \otimes \hat{H}^{kn-i}G_2) \oplus$$

$$\oplus \bigoplus_{i=2}^{kn-2}(\hat{H}^{i}G_1 \otimes \hat{H}^{kn-i}G_2)$$

$$\hat{H}^{\varepsilon(kn-1)}(G_1 x G_2) = \hat{H}^{kn-1}G_1 \oplus \hat{H}^{kn-1}G_2 \oplus \bigoplus_{i=1}^{kn-3}(\hat{H}^{i+1}G_1 \otimes \hat{H}^{kn-1-i}G_2) \oplus$$

$$\oplus \bigoplus_{i=2}^{kn-3}(\hat{H}^{i}G_1 \otimes \hat{H}^{kn-1-i}G_2)$$

Según (1.3.7) se tiene:

$$\bigoplus_{i=1}^{kn-2}(\hat{H}^{i+1}G_1 \otimes \hat{H}^{kn-i}G_2) = 0 \quad y \quad \bigoplus_{i=2}^{kn-3}(\hat{H}^{i}G_1 \otimes \hat{H}^{kn-1-i}G_2) = 0$$

ya que en todos los sumandos hay algún factor de la forma $\hat{H}^i G_j$ con i impar.

Además según (1.1.8) ya que kn es período para G_1 y G_2 tenemos

$$\hat{H}^{kn} G_j = \hat{H}^0 G_j = \mathbb{Z}_{|G_j|}$$

$$\hat{H}^{kn-1} G_j = \hat{H}^{-1} G_j = 0$$

Con todo esto,

$$\frac{\hat{H}^{\varepsilon kn}(G_1 x G_2)}{\hat{H}^{\varepsilon(kn-1)}(G_1 x G_2)} \simeq \mathbb{Z}_{|G_1|} \oplus \mathbb{Z}_{|G_2|} \qquad \forall k>0 \;, \; \varepsilon=\pm 1$$

de donde deducimos que kn es un semiperíodo de $G_1 x G_2$ $\forall k>0$ y por lo tanto $G_1 x G_2$ es de tipo MSP.

(2.3) SEMIPERIODICIDAD Y TIPO MSP EN GRUPOS ABELIANOS FINITOS

(2.3.1) *Proposición*. Si G es un grupo abeliano finito y $n>0$ es un semiperíodo de G, necesariamente n es par.

Demostración. Por ser n un semiperíodo de G, existe un monomorfismo de $\hat{H}^{n-1}G$ en $\hat{H}^n G$ de manera que

$$\frac{\hat{H}^n G}{\hat{H}^{n-1} G} \simeq \mathbb{Z}_{a(n)} \oplus \mathbb{Z}_{b(n)} \qquad \text{con } a(n)b(n)=|G|$$

Supongamos n impar y por tanto $n=2m+1$ con $m>0$ ya que para $m=0$ $\hat{H}^0 G = \mathbb{Z}_{|G|}$ y $\hat{H}^1 G = 0$ según (1.1.8).

Por ser G abeliano finito admite una descomposición como suma de cíclicos de la forma:

$$G = \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_r} \qquad \text{con} \begin{cases} r > 1 \\ m_r > 1 \\ m_i \mid m_{i-1} & 2 \leq i \leq r \end{cases}$$

y (1.4.1) nos da su cohomología.

Si $m_1 > m_2$ no existe ningún monomorfismo de $\hat{H}^{n-1}G = \hat{H}^{2m}G$ en $\hat{H}^n G = \hat{H}^{2m+1}G$ ya que $\mathbb{Z}_{m_1}$ es sumando directo de $\hat{H}^{2m}G$ y según (1.4.2) $m_2\hat{H}^{2m+1}G = 0$. Por lo tanto $m_1 = m_2$.

De (1.4.2) se deduce también que a(n) y b(n) son divisores de $m_1 = m_2$ y como $a(n)b(n) = m_1 m_2 \cdots m_r$, necesariamente $a(n) = b(n) = m_1$ y $m_3 = \cdots = m_r = 1$ y por lo tanto $G = \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_1}$. Pero según (1.4.1) $\hat{H}^n G = m\mathbb{Z}_{m_1}$ y $\hat{H}^{n-1}G = (m+1)\mathbb{Z}_{m_1}$ lo que se contradice con que n es un semiperíodo de G.

(2.3.2) *Proposición.* Si G es un grupo abeliano finito, las siguientes propiedades son equivalentes:

1) G es de tipo MSP

2) G es semiperiódico

3) $G \simeq \mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b$ con $a, b \geq 1$

4) 2k es semiperíodo de G $\forall k > 0$

Demostración.

1) $\Longrightarrow$ 2): Obvio por definición.

2) $\Longrightarrow$ 3): Supongamos $G = \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_r}$ con $r \geq 1$, $m_r > 1$ y $m_i \mid m_{i-1}$ para $2 \leq i \leq r$.

Si $n > 0$ es un semiperíodo de G, según (2.3.1) $n = 2m$ para algún $m > 0$. Según (1.4.3) tenemos

$$\frac{\hat{H}^{2m}G}{\hat{H}^{2m-1}G} \simeq G \oplus \bigoplus_{j=2}^{r} \hat{H}^{2m-1}G_j \simeq \mathbb{Z}_{a(2m)} \oplus \mathbb{Z}_{b(2m)}$$

con lo que $G = \mathbb{Z}_{m_1}$ o bien $G = \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2}$, además en ambos casos

$$\bigoplus_{j=2}^{r} \hat{H}^{2m-1}G_j = 0$$

3) $\Longrightarrow$ 4): Si G es cíclico, $\hat{H}^{\varepsilon(2k+1)}G = 0 \ \forall k \geq 0$ y $\hat{H}^{\varepsilon 2k}G = G \ \forall k>0$ y $\varepsilon=\pm 1$ con lo que

$$\frac{\hat{H}^{\varepsilon 2k}G}{\hat{H}^{\varepsilon(2k-1)}G} \simeq G \qquad \forall k>0 \ , \ \varepsilon=\pm 1$$

y por lo tanto 2k es un semiperíodo de G $\forall k>0$.

Si $G = \mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b$ con $a,b>1$ entonces $G = \mathbb{Z}_{[a,b]} \oplus \mathbb{Z}_{(a,b)}$ y (1.4.1) nos da su cohomología,

$$\hat{H}^{\varepsilon(2k+1)}G = k\mathbb{Z}_{(a,b)} \qquad \forall k \geq 0 \ , \ \varepsilon=\pm 1$$

$$\hat{H}^{\varepsilon 2k}G = G \oplus (k-1)\mathbb{Z}_{(a,b)} \qquad \forall k>0 \ , \ \varepsilon=\pm 1$$

con lo que $\forall k>0$ y $\varepsilon=\pm 1$ tenemos

$$\frac{\hat{H}^{\varepsilon 2k}G}{\hat{H}^{\varepsilon(2k-1)}G} \simeq G = \mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b$$

y por lo tanto 2k es semiperíodo de G $\forall k>0$.

4) $\Longrightarrow$ 1): Es obvio por definición.

(2.4) SEMIPERIODICIDAD Y TIPO MSP EN GRUPOS NILPOTENTES FINITOS

(2.4.1) *Proposición*. Sea $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_r$ con $(|G_i|,|G_j|)=1$ para $i\neq j$ y sea $n>0$, entonces n es semiperíodo de G si y sólo si lo es de cada G_i, $1\leq i\leq r$.

Demostración. Si n es un semiperíodo de G, existe un monomorfismo de $\hat{H}^{\varepsilon(n-1)}G$ en $\hat{H}^{\varepsilon n}G$ para $\varepsilon=\pm 1$ de manera que:

$$\frac{\hat{H}^{\varepsilon n}G}{\hat{H}^{\varepsilon(n-1)}G} \simeq \mathbb{Z}_{a(n)} \oplus \mathbb{Z}_{b(n)} \qquad \text{con } a(n)b(n)=|G|$$

Al ser los G_i de ordenes primos dos a dos (1.5.1) nos da la cohomología de G,

$$\hat{H}^{\varepsilon n}G = \bigoplus_{i=1}^{r} \hat{H}^{\varepsilon n}G_i \qquad y \qquad \hat{H}^{\varepsilon(n-1)}G = \bigoplus_{i=1}^{r} \hat{H}^{\varepsilon(n-1)}G_i$$

y puesto que $|G_i|\hat{H}G_i = 0$ (1.1.4), necesariamente $\hat{H}^{\varepsilon(n-1)}G_i$ se sumerge en $\hat{H}^{\varepsilon n}G_i$ y

$$\frac{\hat{H}^{\varepsilon n}G}{\hat{H}^{\varepsilon(n-1)}G} \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \frac{\hat{H}^{\varepsilon n}G_i}{\hat{H}^{\varepsilon(n-1)}G_i}$$

Por otro lado como $\hat{H}G_i$ es abeliano finito (1.1.6) y $|G_i|\hat{H}G_i = 0$, los teoremas de estructura nos dan para cada i,

$$\frac{\hat{H}^{\varepsilon n}G_i}{\hat{H}^{\varepsilon(n-1)}G_i} \simeq \mathbb{Z}_{\alpha_{i,1}} \oplus\cdots\oplus \mathbb{Z}_{\alpha_{i,t_i}} \qquad \text{con} \begin{cases} \alpha_{i,k} \mid \alpha_{i,k-1} & 2\leq k\leq t_i \\ \alpha_{i,k} \mid |G_i| & 1\leq k\leq t_i \end{cases}$$

de donde

$$\mathbb{Z}_{a(n)} \oplus \mathbb{Z}_{b(n)} \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} (\mathbb{Z}_{\alpha_{i,1}} \oplus\cdots\oplus \mathbb{Z}_{\alpha_{i,t_i}})$$

pero como $\alpha_{i,-}$ divide a $|G_i|$ y por lo tanto $(\alpha_{i,-},\alpha_{j,-})=1$ para $i\neq j$ esto solamente es posible si $t_i \leq 2$ $\forall i$ en cuyo caso:

$$\frac{\hat{H}^{\varepsilon n}G_i}{\hat{H}^{\varepsilon(n-1)}G_i} \simeq \mathbb{Z}_{\alpha_{i,1}} \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_{i,2}} \qquad \text{con} \quad \begin{cases} \alpha_{i,2} \mid \alpha_{i,1} \\ \alpha_{i,k} \mid |G_i| \quad k=1,2 \end{cases}$$

Por otro lado,

$$|G| = a(n)b(n) = \prod_{i=1}^{r} \alpha_{i,1}\cdot\alpha_{i,2} = \prod_{i=1}^{r} |G_i|$$

de donde se deduce que $\alpha_{i,1}\cdot\alpha_{i,2} = |G_i|$ $\forall i$ y con ello concluimos que n es un semiperíodo de G_i para todo i.

Supongamos ahora que n es un semiperíodo para G_i $\forall i$ lo que implica la existencia de los cocientes

$$\frac{\hat{H}^{\varepsilon n}G_i}{\hat{H}^{\varepsilon(n-1)}G_i} \simeq \mathbb{Z}_{a_i(n)} \oplus \mathbb{Z}_{b_i(n)} \qquad \text{con } \varepsilon=\pm 1,\ a_i(n)b_i(n)=|G_i| \ \forall i$$

Por (1.5.1),

$$\hat{H}^{\varepsilon n}G = \bigoplus_{i=1}^{r} \hat{H}^{\varepsilon n}G_i \qquad \text{y} \qquad \hat{H}^{\varepsilon(n-1)}G = \bigoplus_{i=1}^{r} \hat{H}^{\varepsilon(n-1)}G_i$$

y por lo tanto existe un monomorfismo de $\hat{H}^{\varepsilon(n-1)}G$ en $\hat{H}^{\varepsilon n}G$ de manera que

$$\frac{\hat{H}^{\varepsilon n}G}{\hat{H}^{\varepsilon(n-1)}G} \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \frac{\hat{H}^{\varepsilon n}G_i}{\hat{H}^{\varepsilon(n-1)}G_i} \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} (\mathbb{Z}_{a_i(n)} \oplus \mathbb{Z}_{b_i(n)}) \simeq$$

$$\simeq (\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}_{a_i(n)}) \oplus (\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}_{b_i(n)})$$

Por otro lado, como $a_i(n)$ y $b_i(n)$ dividen a $|G_i|$ $\forall i$, tenemos $(a_i(n),a_j(n))=1$ y $(b_i(n),b_j(n))=1$ para $i\neq j$ y por tanto

$$\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}_{a_i(n)} = \mathbb{Z}_{a(n)} \qquad \text{donde} \quad a(n) = \prod_{i=1}^{r} a_i(n)$$

$$\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}_{b_i(n)} = \mathbb{Z}_{b(n)} \qquad \text{donde} \quad b(n) = \prod_{i=1}^{r} b_i(n)$$

además $a(n)b(n) = \prod_{i=1}^{r} a_i(n) \cdot \prod_{i=1}^{r} b_i(n) = \prod_{i=1}^{r} |G_i| = |G|$

Tenemos pues

$$\frac{\hat{H}^{\varepsilon n}G}{\hat{H}^{\varepsilon(n-1)}G} \simeq \mathbb{Z}_{a(n)} \oplus \mathbb{Z}_{b(n)} \qquad \text{con } \varepsilon=\pm 1 \text{ y } a(n)b(n)=|G|$$

lo que demuestra que n es un semiperíodo de G.

(2.4.2) La condición $(|G_i|,|G_j|)=1$ para $i\neq j$ en (2.4.1) es necesaria ya que el grupo $\mathbb{Z}_p x \mathbb{Z}_p x \mathbb{Z}_p$ no admite ningún semiperíodo según (2.3.2) y sin embargo como $\mathbb{Z}_p$ es periódico de período 2, según (2.2.2) $\mathbb{Z}_p$ es semiperiódico.

(2.4.3) *Corolario*. Si G es un grupo nilpotente finito con algún p-subgrupo de Sylow abeliano y n es un semiperíodo de G, necesariamente n es par.

Demostración. Es consecuencia inmediata de (2.3.1) y (2.4.2).

(2.4.4) *Proposición*. Si $G = G_1 x G_2 x \cdots x G_r$ con $(|G_i|,|G_j|)=1$ para $i\neq j$, entonces G es de tipo MSP si y sólo si lo es cada G_i.

Demostración. Si G es de tipo MSP existe n>0 de manera que kn es semiperíodo de G $\forall k>0$ y como consecuencia de (2.4.1) kn es también semiperíodo de G_i $\forall k>0$ y $1\leq i\leq r$ y por lo tanto cada G_i es de tipo MSP.

Recíprocamente, supongamos que existen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ de manera que $\forall k>0$ kn_i es semiperíodo de G_i. Si n es el mínimo común múltiplo de los n_i, kn será semiperíodo de G_i $\forall k>0$ y $1\leq i\leq r$ por lo que según (2.4.1) kn es semiperíodo de G $\forall k>0$ y por lo tanto G es de tipo MSP.

(2.4.5) *Corolario*. Un grupo nilpotente finito es de tipo MSP si y sólo si lo es cada uno de sus p-subgrupos de Sylow.

Demostración. Es consecuencia inmediata de (2.4.4) aplicada a la descomposición de G como producto de sus p-subgrupos de Sylow.

(2.4.6) *Caso particular*. Sea G un grupo nilpotente finito cuyos p-subgrupos de Sylow son producto de dos cíclicos, de un cíclico y un cuaterniónico generalizado o de dos cuaterniónicos generalizados; como consecuencia G admite una descomposición de la forma:

$$G = S_2G \times S_{p_1}G \times \cdots \times S_{p_r}G =$$

$$= S_2G \times (\mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_1^{\beta_1}}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}_{p_r^{\alpha_r}} \times \mathbb{Z}_{p_r^{\beta_r}}) =$$

$$= S_2G \times \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}} \times \mathbb{Z}_{p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}} = S_2G \times \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_t$$

donde: $q = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ $\quad (2,q)=1$

$t = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$ $\quad (2,t)=1$

$$S_2G = \begin{cases} \mathbb{Z}_{2^\alpha} \times \mathbb{Z}_{2^\beta} \\ \mathbb{Z}_{2^\alpha} \times Q_{2^\beta} \\ Q_{2^\alpha} \times Q_{2^\beta} \end{cases}$$

$|G| = 2^{\alpha+\beta}qt$

Puesto que $(|S_2G|,|\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_t|)=1$ es aplicable (2.4.1) y si n es un semiperíodo de S_2G y de $\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_t$, lo será también de G, cumpliéndose además:

$$\frac{\hat{H}^{\varepsilon n}G}{\hat{H}^{\varepsilon(n-1)}G} \simeq \frac{\hat{H}^n S_2G}{\hat{H}^{n-1}S_2G} \oplus \frac{\hat{H}^n(\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_t)}{\hat{H}^{n-1}(\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_t)} \quad , \varepsilon=\pm 1$$

Según (1.1.10), (1.1.11) y (1.3.2) todo grupo cíclico es de período 2 y todo cuaterniónico generalizado es de período 4. Aplicando (2.2.3) tenemos:

1) 2k es semiperíodo de $\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_t$ $\forall k>0$ y :

$$\frac{\hat{H}^{2k}(\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_t)}{\hat{H}^{2k-1}(\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_t)} \simeq \mathbb{Z}_q \oplus \mathbb{Z}_t$$

2) 2k es semiperíodo de $\mathbb{Z}_{2^\alpha} \times \mathbb{Z}_{2^\beta}$ $\forall k>0$ y :

$$\frac{\hat{H}^{2k}(\mathbb{Z}_{2^\alpha} \times \mathbb{Z}_{2^\beta})}{\hat{H}^{2k-1}(\mathbb{Z}_{2^\alpha} \times \mathbb{Z}_{2^\beta})} \simeq \mathbb{Z}_{2^\alpha} \oplus \mathbb{Z}_{2^\beta}$$

3) 4k es semiperíodo de $\mathbb{Z}_{2^\alpha} \times Q_{2^\beta}$ $\forall k>0$ y :

$$\frac{\hat{H}^{4k}(\mathbb{Z}_{2^\alpha} \times Q_{2^\beta})}{\hat{H}^{4k-1}(\mathbb{Z}_{2^\alpha} \times Q_{2^\beta})} \simeq \mathbb{Z}_{2^\alpha} \oplus \mathbb{Z}_{2^\beta}$$

4) 4k es semiperíodo de $Q_{2^\alpha} \times Q_{2^\beta}$ $\forall k>0$ y :

$$\frac{\hat{H}^{4k}(Q_{2^\alpha} \times Q_{2^\beta})}{\hat{H}^{4k-1}(Q_{2^\alpha} \times Q_{2^\beta})} \simeq \mathbb{Z}_{2^\alpha} \oplus \mathbb{Z}_{2^\beta}$$

Por lo tanto G es de tipo MSP y además:

- En el caso abeliano, $2k$ es semiperíodo de G $\forall k>0$ y

$$\frac{\hat{H}^{\varepsilon 2k}G}{\hat{H}^{\varepsilon(2k-1)}G} \simeq \mathbb{Z}_{2^\alpha} \oplus \mathbb{Z}_{2^\beta} \oplus \mathbb{Z}_q \oplus \mathbb{Z}_t \simeq \mathbb{Z}_{2^\alpha q} \oplus \mathbb{Z}_{2^\beta t}$$

- En el caso no abeliano, $4k$ es semiperíodo de G $\forall k>0$ y

$$\frac{\hat{H}^{\varepsilon 4k}G}{\hat{H}^{\varepsilon(4k-1)}G} \simeq \mathbb{Z}_{2^\alpha} \oplus \mathbb{Z}_{2^\beta} \oplus \mathbb{Z}_q \oplus \mathbb{Z}_t \simeq \mathbb{Z}_{2^\alpha q} \oplus \mathbb{Z}_{2^\beta t}$$

(2.5) <u>SEMIPERIODICIDAD Y TIPO MSP EN EXTENSIONES ESCINDIBLES DE CICLICOS POR CICLICOS</u>

(2.5.1) *<u>Proposición</u>.* Si G es una extensión escindible de cíclico por cíclico, entonces:

1) G no admite semiperíodos impares.

2) G es de tipo MSP.

Demostración. Supongamos G una extensión escindible de $\mathbb{Z}_r$ por $\mathbb{Z}_s$, es decir, dado G por generadores y relaciones,

$$G = \langle x,y \mid x^r=y^s=1 \ , \ y^{-1}xy=x^t\rangle \qquad (t^s\equiv 1(r))$$

Wall en [25] (pg. 254) nos da la cohomología de G:

$$\hat{H}^{\varepsilon 2n}G = \mathbb{Z}_s \oplus \mathbb{Z}_{f_n} \oplus \Big(\bigoplus_{1\leqq i<n} \mathbb{Z}_{q_i} \Big) \qquad n\geqq 1 \ , \ \varepsilon=\pm 1$$

$$\hat{H}^{\varepsilon(2n-1)}G = \bigoplus_{1\leqq i<n} \mathbb{Z}_{q_i} \qquad n\geqq 1 \ , \ \varepsilon=\pm 1$$

donde: $f_i = (t^i-1,r) \quad i\geqq 1$

$$k_i = \Big(\sum_{j=0}^{s-1} t^{ij},r\Big) \quad i\geqq 1$$

$$q_i = \frac{f_i k_i}{r} \qquad i \geq 1$$

1) Supongamos que G admite un semiperíodo impar 2n+1. Esto supone la existencia de un monomorfismo de $\hat{H}^{2n}G$ en $\hat{H}^{2n+1}G$ de manera que:

$$\frac{\hat{H}^{2n+1}G}{\hat{H}^{2n}G} \simeq \mathbb{Z}_{a(2n+1)} \oplus \mathbb{Z}_{b(2n+1)}$$

con $a(2n+1)b(2n+1)=|G|=rs$ y por lo tanto $|\hat{H}^{2n+1}G|=|\hat{H}^{2n}G|rs$.

Según las fórmulas anteriores tenemos:

$$|\hat{H}^{2n+1}G| = \prod_{1\leq i<n+1} q_i \quad y \quad |\hat{H}^{2n}G| = sf_n(\prod_{1\leq i<n} q_i)$$

de donde

$$\prod_{1\leq i<n+1} q_i = sf_n(\prod_{1\leq i<n} q_i)rs$$

y por tanto $q_n=f_nrs^2$ y $k_n=r^2s^2$ lo que supone r=1=s según la definición de k_n.

2) Según las fórmulas anteriores $\forall n\geq 1$ y $\varepsilon=\pm 1$ tenemos:

$$\frac{\hat{H}^{\varepsilon 2n}G}{\hat{H}^{\varepsilon(2n-1)}G} \simeq \mathbb{Z}_s \oplus \mathbb{Z}_{f_n}$$

y por lo tanto 2n será semiperíodo de G si y sólo si $f_n=r$, lo que equivale según la definición de f_n a $t^n\equiv 1(r)$.

Por otro lado, sencillos cálculos aritméticos demuestran que si e es el menor entero positivo cumpliendo la condición $t^e\equiv 1(r)$ se tiene que $t^n\equiv 1(r)$ si y sólo si n es múltiplo de e. Tenemos pues que 2n es semiperíodo de G si y sólo si $n=\dot{e}$ y por lo tanto 2ke es semiperíodo de G $\forall k>0$ y queda así demostrado que G es de tipo MSP.

(2.5.2) *Caso particular*. Los grupos denominados diédricos o diedrales $D_r = \langle x,y \mid x^r=y^2=1 \ , \ y^{-1}xy=x^{r-1} \rangle$ son extensiones escindibles de $\mathbb{Z}_r$ por $\mathbb{Z}_2$. Como consecuencia $\forall r>2$, $4k$ es semiperíodo de D_r $\forall k>0$ y $2k$ es semiperíodo de D_2 $\forall k>0$.

C A P I T U L O - 3

DIMENSION COHOMOLOGICA Y PROPIEDADES VIRTUALES

Este es un capítulo auxiliar sobre dimensión cohomológica y dimensión cohomológica virtual de un grupo. La mayoría de los resultados aquí contenidos pueden encontrarse en [8] para el anillo $\mathbb{Z}$ y en [3] para un anillo unitario y conmutativo cualquiera R.

(3.1) DIMENSION COHOMOLOGICA DE UN GRUPO

(3.1.1) *Definición*. Un grupo G diremos que tiene dimensión cohomológica k respecto del anillo R, siendo k un entero no negativo, si $H^q(G,A)=0$ $\forall q>k$ y todo RG-módulo A y existe algún RG-módulo A de manera que $H^k(G,A)\neq 0$.

La dimensión cohomológica de G respecto del anillo R la representaremos por "$cd_R G$" y en el caso $R=\mathbb{Z}$ omitiremos el subíndice y escribiremos "cd G".

(3.1.2) *Proposición*. Dado el grupo G y $k\geqq 0$, las siguientes propiedades son equivalentes:

1) $cd_R G \leqq k$

2) $H^{k+1}(G,A) = 0$ para todo RG-módulo A

3) Si $k=0$, R es un RG-módulo proyectivo.

Si $k>0$ y $\cdots P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} R \longrightarrow 0$

es una resolución RG-proyectiva del RG-módulo trivial R, entoces Im d_k es también RG-proyectivo.

4) R admite una resolución RG-proyectiva

$$\cdots P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} R \longrightarrow 0$$

de manera que $P_q=0$ $\forall q>k$.

Demostración. Las implicaciones 1) $\Longrightarrow$ 2) y 4) $\Longrightarrow$ 1) son consecuencia inmediata de la definición de dimensión cohomológica y de la obtención de la cohomología usual de un grupo.

3) $\Longrightarrow$ 4): Si $k=0$, $0 \longrightarrow R \xrightarrow{1} R \longrightarrow 0$ es una resolución RG-proyectiva de R del tipo buscado.

Si $k>0$ y $\cdots P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} R \longrightarrow 0$ es una resolución RG-proyectiva de R, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow \ker d_{k-1} \longrightarrow P_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} R \longrightarrow 0$$

es exacta por construcción. Además por hipótesis $\ker d_{k-1}=$ $=\mathrm{Im}\, d_k$ es RG-proyectivo y tenemos así una resolución RG-proyectiva de R del tipo buscado.

2) $\Longrightarrow$ 3): Si $k=0$ y $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ es una sucesión exacta de RG-módulos, podemos asociarle la sucesión exacta larga de cohomología siguiente

$$0 \longrightarrow H^0(G,A) \longrightarrow H^0(G,B) \longrightarrow H^0(G,C) \longrightarrow H^1(G,A) \longrightarrow \cdots$$

Puesto que $H^0(G,X) = \mathrm{Hom}_{RG}(R,X)$ para todo RG-módulo X y por hipótesis $H^1(G,A)=0$, tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{RG}(R,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{RG}(R,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{RG}(R,C) \longrightarrow 0$$

En particular $\mathrm{Hom}_{RG}(R,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{RG}(R,C)$ es suprayectiva y por lo tanto R es un RG-módulo proyectivo.

Supongamos ahora $k>0$ y consideremos la siguiente resolución RG-proyectiva de R,

$$\cdots P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} R \longrightarrow 0$$

Sea $M = \mathrm{Im}\, d_k = \ker d_{k-1}$, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

es exacta por construcción y nos induce la siguiente sucesión exacta para cualquier RG-módulo X

$$\mathrm{Hom}_{RG}(P_{k-1},X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{RG}(M,X) \longrightarrow H^k(G,X) \longrightarrow 0$$

Por otra parte, de toda sucesión exacta de RG-módulos $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ se obtiene el diagrama conmutativo con filas exactas siguiente,

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Hom}_{RG}(P_{k-1},B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{RG}(M,B) & \longrightarrow & H^k(G,B) & \longrightarrow & 0 \\
\alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow & & \\
\mathrm{Hom}_{RG}(P_{k-1},C) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{RG}(M,C) & \longrightarrow & H^k(G,C) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Puesto que P_{k-1} es RG-proyectivo, α es epimorfismo. El homomorfismo γ es también suprayectivo por ser parte de la sucesión exacta larga de cohomología

$$\cdots \longrightarrow H^k(G,B) \longrightarrow H^k(G,C) \longrightarrow H^{k+1}(G,A) \longrightarrow \cdots$$

ya que por hipótesis $H^{k+1}(G,A) = 0$.

Estamos por lo tanto en la siguiente situación, con cuadrados conmutativos y filas exactas,

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rr, "\mu"] \arrow[d, two heads, "\alpha"'] \arrow[dr, dashed, two heads, "f"] & & \bullet \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\beta"] & \bullet \arrow[d, two heads, "\gamma"] \\
\bullet \arrow[r, two heads, "\lambda^{ck}"'] & \bullet \arrow[r, tail, "\lambda^{kc}"'] & \bullet \arrow[r, two heads] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Por la exactitud de la fila inferior obtenemos el RG-homomorfismo f cumpliendo la condición $\lambda^{kc}f = \beta\mu$ y puesto que $\lambda\alpha = \beta\mu$ tenemos $\lambda^{ck}\alpha = f$ con lo que f es suprayectiva. Aplicando el lema ker-coker concluimos la suprayectividad de β y por lo tanto M es RG-proyectivo.

(3.1.3) *Proposición.* Si H es un subgrupo de G entonces $cd_R H \leqq cd_R G$.

Demostración. Es consecuencia inmediata del Lema de Shapiro [3] (Sección 1 - Lema 1.3 - pg. 5) que nos da el siguiente isomorfismo para todo RH-módulo A y todo $n \geqq 0$

$$H^n(H,A) \simeq H^n(G,\mathrm{Hom}_{RH}(RG,A))$$

(3.1.4) *Proposición.* Si G es un grupo finito no trivial, su dimensión cohomológica sobre $\mathbb{Z}$ es infinita.

Demostración. Es consecuencia inmediata de (3.1.3) ya que si G es finito no trivial, G contiene un subgrupo cíclico finito cuya dimensión cohomológica es infinita según (1.1.10).

(3.1.5) *Proposición.* La dimensión cohomológica de un grupo G respecto del anillo $\mathbb{Z}$ es cero si y sólo si G=1.

Demostración. Si $G=1$, $\mathbb{Z}=\mathbb{Z}G$ es G-proyectivo y por lo tanto $\mathrm{cd}\,G=0$ según (3.1.2).

Si $G\neq 1$, G contiene un subgrupo cíclico H. Si H es de orden finito, $\mathrm{cd}\,H=\infty$ según (1.1.10). Si $H\simeq\mathbb{Z}$, $\mathrm{cd}\,\mathbb{Z}=1$ ya que al ser $\mathbb{Z}$ un grupo libre, $H^n(\mathbb{Z},A)=0$ $\forall n\geq 2$ [9] (Cap. VI - Corol. 5.6 - pg. 197) y $H^1(\mathbb{Z},\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$ [9] (Cap. VI - Apt. 4 - pgs. 192-193). En ambos casos $\mathrm{cd}\,G\neq 0$ según (3.1.3).

(3.1.6) *Proposición.* Todo grupo de dimensión cohomológica finita es libre de torsión.

Demostración. Si G admitiera algún elemento de orden finito su dimensión cohomológica sobre $\mathbb{Z}$ sería infinita según (3.1.3) y (3.1.4).

(3.1.7) *Proposición.* Si H es un subgrupo de G de índice finito y $\mathrm{cd}_R G$ es finita, entonces $\mathrm{cd}_R G = \mathrm{cd}_R H$.

Demostración. Según (3.1.3) $\mathrm{cd}_R H \leq \mathrm{cd}_R G$; para comprobar la igualdad bastará encontrar un RH-módulo N de manera que $H^n(H,N)\neq 0$ siendo $n=\mathrm{cd}_R G$.

Puesto que $\mathrm{cd}_R G=n<\infty$, para todo RG-módulo A se tiene $H^{n+1}(G,A)=0$ y la sucesión exacta larga de cohomología demuestra que el funtor $H^n(G,-)$ es exacto derecha. Además existe un RG-módulo M de manera que $H^n(G,M)\neq 0$.

Por el Lema de Shapiro tenemos el isomorfismo

$$H^n(H,M) \simeq H^n(G,\mathrm{Hom}_{RH}(RG,M))$$

Si encontramos un RG-epimorfismo de $\mathrm{Hom}_{RH}(RG,M)$ sobre M, por la exactitud derecha del funtor $H^n(G,-)$ tendremos el epimorfismo $H^n(G,\mathrm{Hom}_{RH}(RG,M)) \longrightarrow H^n(G,M)$ y como consecuencia $H^n(H,M)\neq 0$.

Puesto que $[G:H] = r < \infty$, sea $\{x_i\}_{i=1}^{r}$ un sistema de representantes de las clases laterales que define H en G. La aplicación

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{RH}(RG,M) &\longrightarrow M \\ f &\longrightarrow \sum_{i=1}^{r} x_i f(x_i^{-1}) \end{aligned}$$

resulta ser un RG-epimorfismo, [23] (Lema 9.2 - pg. 606).

(3.1.8) *Teorema de Serre*. Si G es un grupo libre de R-torsión y H es un subgrupo de G de índice finito, entonces $cd_R G = cd_R H$.

(Un grupo se dice libre de R-torsión si el orden de todo subgrupo finito es una unidad en R)

Demostración. Si $cd_R H = \infty$ por (3.1.3) $cd_R G = \infty$ y se tiene la igualdad.

Si $cd_R H < \infty$ según (3.1.2) R admite una resolución $\mathbb{P}$ RH-proyectiva de longitud finita.

Si $[G:H] = r < \infty$, Serre demuestra [23] (Tma. 9.2 - pg. 607) que $\mathbb{P}' = \otimes_R^r \mathbb{P}$, es decir,

$$P'_k = \sum_{i_1 + \cdots + i_r = k} P_{i_1} \otimes_R \cdots \otimes_R P_{i_r}$$

constituye una resolución RG-proyectiva de R de longitud finita y según (3.1.2) G es de dimensión cohomológica finita sobre $\mathbb{Z}$.

La igualdad $cd_R G = cd_R H$ es ahora consecuencia inmediata de (3.1.7).

(3.1.9) *Teorema de Serre - Stallings - Swan.* Las propiedades siguientes son equivalentes:

a) $cd\, G \leq 1$

b) G es libre de torsión y tiene un subgrupo libre de índice finito.

c) G es libre

Demostración. La implicación c) $\Longrightarrow$ b) es obvia y según [9] (Cap. VI - Corol. 5.6 - pg. 197) la implicación b) $\Longrightarrow$ a) es consecuencia inmediata del teorema de Serre (3.1.8). El punto central de estas equivalencias está pues en la implicación a) $\Longrightarrow$ c) que ha seguido el siguiente proceso de demostración:

- En 1965 fue conjeturado por Serre [15] que todo grupo libre de torsión con un subgrupo libre de índice finito era libre. Demostró que necesariamente tenía dimensión cohomológica sobre $\mathbb{Z}$ menor o igual a 1 y así su conjetura quedó abierta en los siguientes términos:

$$cd\ G \leq 1 \Longrightarrow G \text{ libre}$$

- En 1968 Stallings en [19] demostró que todo grupo finitamente generado y de dimensión cohomológica 1 es libre. Su demostración es una combinación de ideas algebraicas y topológicas que no parecen poder generalizarse al caso de grupos de generación no finita.

- En 1969 Swan [23], haciendo uso de los resultados de Stallings logra finalmente demostrar la conjetura de Serre.

(En 1979 Dunwoody en [4] ha caracterizado los grupos con $cd_R G \leq 1$)

(3.1.10) *Proposición.* Para todo grupo G, $cd_R G \leq cd\, G$.

Demostración. El resultado es obvio si $cd\, G = \infty$. Si $cd\, G < \infty$ es consecuencia de (3.1.2) ya que si

$$\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

es una resolución G-proyectiva de $\mathbb{Z}$, entonces

$$\cdots \longrightarrow P_1 \otimes R \longrightarrow P_0 \otimes R \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

es una resolución RG-proyectiva de R según [8] (Cap. 2 - Apt. 2.3 - pg. 25).

(3.2) GRUPOS VIRTUALMENTE LIBRES DE TORSION Y DIMENSION COHOMOLOGICA VIRTUAL

(3.2.1) *Definición.* Un grupo se dice virtualmente libre de R-torsión si posee un subgrupo de índice finito libre de R-torsión.

(3.2.2) *Proposición.* Un grupo G es virtualmente libre de R-torsión si y sólo si admite un subgrupo normal de índice finito libre de R-torsión.

Demostración. Una implicación es obvia por definición.

Si G es virtualmente libre de R-torsión, existe un subgrupo H libre de R-torsión y de índice finito. Sea N el mayor subgrupo normal de G contenido en H. Obviamente N sigue siendo libre de R-torsión. Además si consideramos la acción natural $\Theta\colon G \longrightarrow \Sigma_{[G:H]}$ tenemos $N = \ker \Theta$ de donde $[G:N]$ es divisor de $[G:H]!$ y por lo tanto N es también de índice finito.

(3.2.3) *Proposición.* Sean H y K dos subgrupos de un grupo G ambos libres de R-torsión y de índice finito en G, entonces $cd_R H = cd_R K$.

Demostración. Puesto que la intersección de dos subgrupos de índice finito es de nuevo de índice finito se tiene:

$$[H:H\cap K][G:H] = [G:H\cap K] \Longrightarrow [H:H\cap K] < \infty$$

$$[K:H\cap K][G:K] = [G:H\cap K] \Longrightarrow [K:H\cap K] < \infty$$

Aplicando el Teorema de Serre (3.1.8) se tiene,

$$cd_R H = cd_R H\cap K = cd_R K$$

(3.2.4) *Definición.* Dado un grupo G virtualmente libre de R-torsión, definimos la dimensión cohomológica virtual de G sobre el anillo R, y la representaremos por "$vcd_R G$", como la dimensión cohomológica sobre R de cualquier subgrupo de G libre de R-torsión y de índice finito (que existe por ser G virtualmente libre de R-torsión y es independiente del subgrupo elegido por (3.2.3)). En el caso del anillo $\mathbb{Z}$ escribiremos simplemente "vcd G".

(3.2.5) *Proposición.* Un grupo G es finito si y sólo si es virtualmente libre de torsión y $vcd\, G = 0$.

Demostración. Si G es finito, H=1 es libre de torsión de índice finito en G y por lo tanto G es virtualmente libre de torsión y $vcd\, G = cd\, H = 0$ según (3.1.5).

Si G es virtualmente libre de torsión, existe un subgrupo H libre de torsión de índice finito y $vcd\, G = cd\, H$. Si $vcd\, G = 0$, $cd\, H = 0$ y por (3.1.5) $H = 1$ y como H es de índice finito en G, G necesariamente es finito.

(3.2.6) Según la proposición anterior podemos considerar que los grupos de dimensión cohomológica virtual finita son una generalización de los grupos finitos.

(3.2.7) *Proposición.* Si G es virtualmente libre de R-torsión y H es un subgrupo de G, H es también virtualmente libre de R-torsión y $vcd_R H \leq vcd_R G$.

Demostración. Si G es virtualmente libre de R-torsión, según (3.2.2) existe $N \lhd G$, libre de R-torsión de índice finito en G. Si H es un subgrupo de G, $H \cap N$ es un subgrupo normal de H libre de R-torsión, además puesto que:

$$\frac{H}{H \cap N} \simeq \frac{HN}{N} \leq \frac{G}{N}$$

$H \cap N$ es de índice finito en H y por lo tanto H es virtualmente libre de R-torsión. Por otro lado según (3.1.3) se tiene:

$$vcd_R H = cd_R H \cap N \leq cd_R N = vcd_R G$$

(3.2.8) *Proposición.* Si G es virtualmente libre de torsión, es virtualmente libre de R-torsión y $vcd_R G \leq vcd\, G$.

Demostración. Si G es virtualmente libre de torsión, existe un subgrupo N libre de torsión de índice finito en G; obviamente N es libre de R-torsión y por tanto G es virtualmente libre de R-torsión.

Por otro lado según (3.1.10) tenemos

$$vcd_R G = cd_R N \leq cd\, N = vcd\, G$$

C A P I T U L O - 4

COHOMOLOGIA DE FARRELL DE GRUPOS DE DIMENSION COHOMOLOGICA VIRTUAL FINITA

En este capítulo se reformula el trabajo de Farrell [6] para la cohomología de un grupo de dimensión cohomológica virtual finita, respecto de un dominio de ideales principales R. Se incluye también un análogo del Lema de Shapiro para la cohomología de Farrell y un teorema relacionando la cohomología de Farrell con la cohomología usual.

La necesidad de utilizar cohomología de Farrell sobre un D.I.P. en lugar de sobre el anillo $\mathbb{Z}$ se verá justificada en el capítulo siguiente, donde haremos uso de ella sobre el anillo localizado $\mathbb{Z}_{(p)}$.

A lo largo de todo el capítulo R designará un dominio de ideales principales, G representará un grupo virtualmente libre de R-torsión de dimensión cohomológica virtual finita sobre R, S será un subgrupo normal de G libre de R-torsión de índice finito y Γ representará el cociente G/S.

(4.1) R-RESOLUCION DE FARRELL. EXISTENCIA Y UNICIDAD

(4.1.1) *Definición*. Una R-resolución completa de Farrell para el grupo G es un par (X,C) donde:

1) $\cdots \longrightarrow X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \longrightarrow \cdots$ $\quad n\in\mathbb{Z}$ es un complejo acíclico de RG-módulos proyectivos.

2) $\cdots \longrightarrow C_n \xrightarrow{k_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0 \longrightarrow R \longrightarrow 0$ es una resolución RG-proyectiva del RG-módulo trivial R.

3) $\exists\, n_0 \geq 0 \ / \ X_n = C_n$ y $d_{n+1} = k_{n+1}$ $\forall n \geq n_0$. A n_0 se le denomina índice de coincidencia.

(4.1.2) Si G es un grupo finito (por (3.2.5) y (3.2.8) sabemos que es virtualmente libre de R-torsión y $vcd_R G=0$) toda R-resolución completa de Tate para G pasa a ser una R-resolución completa de Farrell con índice de coincidencia 0.

(4.1.3) *Lema.* Para todo RS-módulo M existe un RG-isomorfismo $RG \otimes_{RS} M \simeq Hom_{RS}(RG,M)$

Demostración. Los grupos abelianos $RG \otimes_{RS} M$ y $Hom_{RS}(RG,M)$ se estructuran como RG-módulos mediante las acciones siguientes:

$$\begin{aligned} \alpha f: RG &\longrightarrow M \\ x &\longrightarrow f(x\alpha) \end{aligned} \qquad f\in Hom_{RS}(RG,M)\ ,\ \alpha\in RG$$

$$\alpha(a\otimes b) = \alpha a \otimes b \qquad a\in RG\ ,\ b\in M\ ,\ \alpha\in RG$$

En [23] (Lema 9.2 - pg. 606) Swan demuestra que si $\{x_i\}_{i=1}^r$ es un sistema de representantes de las clases laterales que define S en G, la aplicación

$$\begin{aligned} Hom_{RS}(RG,M) &\longrightarrow RG \otimes_{RS} M \\ f &\longrightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i \otimes f(x_i^{-1})) \end{aligned}$$

es un RG-isomorfismo.

(4.1.4) *Lema*. Si A es un RG-módulo RS-proyectivo y B es un RG-módulo RG-proyectivo, entonces $\mathrm{Ext}^n_{RG}(A,B) = 0 \quad \forall n>0$.

Demostración. Sea M un RS-módulo. Puesto que RG es RS-libre se tiene

$$\mathrm{Ext}^n_{RS}(RG,M) = 0 \qquad \forall n>0$$

y según [1] (Cap. VI - Prop. 4.1.4 - pg. 118) tenemos el siguiente isomorfismo

$$\mathrm{Ext}^n_{RG}(A,\mathrm{Hom}_{RS}(RG,M)) \simeq \mathrm{Ext}^n_{RS}(A,M).$$

Como A es RS-proyectivo, $\mathrm{Ext}^n_{RS}(A,M)=0$ $\forall n>0$ y en definitiva el funtor $\mathrm{Ext}^n_{RG}(A,-)$ se anula $\forall n>0$ sobre RG-módulos de la forma $\mathrm{Hom}_{RS}(RG,M)$ siendo M un RS-módulo.

Según (4.1.3) $\mathrm{Ext}^n_{RG}(A,-)$ se anula $\forall n>0$ sobre todo RG-módulo de la forma $RG \otimes_{RS} M$ y en particular se anulará sobre RG (para M=RS).

Puesto que B es por hipótesis RG-proyectivo, es sumando directo de un RG-libre y por la aditividad de $\mathrm{Ext}^n_{RG}(A,-)$ tenemos finalmente $\mathrm{Ext}^n_{RG}(A,B) = 0$ $\forall n>0$.

(4.1.5) *Lema*. Sea M un RG-módulo; estructurando $R\Gamma \otimes_R M$ como RG-módulo por acción diagonal, es RG-isomorfo a $RG \otimes_{RS} M$.

Demostración. Obviamente $R\Gamma$ tiene estructura de RG-módulo vía la proyección de G sobre Γ. Puesto que RG es una R-álgebra, $R\Gamma \otimes_R M$ puede estructurarse como RG-módulo por acción diagonal [9] (Cap. VI - Apt. 11 - pg. 212).

Considerando la sucesión exacta $S \rightarrowtail G \twoheadrightarrow \Gamma$ tenemos el isomorfismo de RG-módulos $R \otimes_{RS} RG \simeq R\Gamma$.

Como consecuencia tenemos los siguientes RG-isomorfismos:

$$R\Gamma \otimes_R M \simeq (R \otimes_{RS} RG) \otimes_R M \simeq (RG \otimes_{RS} R) \otimes_R M \simeq$$

$$\simeq RG \otimes_{RS} (R \otimes_R M) \simeq RG \otimes_{RS} M$$

(4.1.6) *Lema*. Sea M un RG-módulo RS-proyectivo y A un $R\Gamma$-módulo $R\Gamma$-proyectivo, entonces $A \otimes_R M$ estructurado como RG-módulo por acción diagonal es RG-proyectivo.

Demostración. Por el mismo razonamiento utilizado en (4.1.5) $A \otimes_R M$ puede estructurarse como RG-módulo por acción diagonal.

Por ser A $R\Gamma$-proyectivo, es sumando directo de un $R\Gamma$-módulo libre, es decir, existe un $R\Gamma$-módulo B de manera que $A \oplus B = \oplus R\Gamma$ y tenemos

$$(A \otimes_R M) \oplus (B \otimes_R M) \simeq (A \oplus B) \otimes_R M \simeq (\oplus R\Gamma) \otimes_R M \simeq$$

$$\simeq \oplus(R\Gamma \otimes_R M) \simeq \oplus(RG \otimes_{RS} M)$$

Por otro lado como M es RS-proyectivo, M es sumando directo de un RS-módulo libre, es decir, existe un RS-módulo N de manera que $M \oplus N \simeq \oplus RS$ y tenemos

$$(RG \otimes_{RS} M) \oplus (RG \otimes_{RS} N) \simeq RG \otimes_{RS} (M \oplus N) \simeq$$

$$\simeq RG \otimes_{RS} (\oplus RS) \simeq \oplus(RG \otimes_{RS} RS) \simeq \oplus RG$$

y por lo tanto $A \otimes_R M$ es sumando directo de un RG-módulo libre y como consecuencia es RG-proyectivo.

(4.1.7) *Lema*. Si $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es un complejo acíclico de RG-módulos proyectivos, entonces $\forall n\in\mathbb{Z}$ $K_n = \mathrm{Im}\, d_n$ es RS-proyectivo.

Demostración. $\forall n\in\mathbb{Z}$ X_n es RG-proyectivo y como consecuencia R-proyectivo. Puesto que R es un D.I.P. y K_n es R-submódulo de X_{n-1}, K_n es también R-proyectivo $\forall n\in\mathbb{Z}$.

Puesto que $cd_R S = s < \infty$, según (3.1.2) se tiene la siguiente resolución RS-proyectiva de R:

$$0 \longrightarrow P_s \longrightarrow P_{s-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

Como K_n es R-proyectivo, al tensorializar por K_n sobre el anillo R se mantiene la exactitud y se tiene:

$$0 \longrightarrow P_s \otimes_R K_n \longrightarrow P_{s-1} \otimes_R K_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \otimes_R K_n \longrightarrow K_n \longrightarrow 0$$

Por un proceso paralelo al seguido en (4.1.6) $P_j \otimes_R K_n$, para $0 \leq j \leq s$, se estructura como RS-módulo por acción diagonal y se comprueba que es RS-proyectivo. Con esto la sucesión anterior pasa a ser una resolución RS-proyectiva de K_n.

Por otro lado, la siguiente sucesión es exacta por construcción:

$$0 \longrightarrow K_{n+s} \longrightarrow X_{n+s-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_n \longrightarrow K_n \longrightarrow 0$$

con X_j RG-módulos proyectivos y por tanto RS-proyectivos. Según [11] (Cap. VII - Tma. 1.1 - pg. 200) K_{n+s} es RS-proyectivo. Como esto es cierto $\forall n\in\mathbb{Z}$, tenemos que todo K_n es RS-proyectivo.

(4.1.8) *Teorema de existencia de R-resoluciones completas de Farrell*. Todo grupo G virtualmente libre de R-torsión con $vcd_R G$ finita admite una R-resolución completa de Farrell.

Demostración. Consideremos el siguiente complejo de $R\Gamma$-módulos proyectivos, cuya existencia está garantizada puesto que Γ es finito.

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Y_n \arrow[r, "d'_n"] & Y_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Y_0 \arrow[rr, "d'_0"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & Y_{-1} \arrow[r] & \cdots \\
& & & & & R \arrow[ur, "\mu"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Sea $\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{k'_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \xrightarrow{k'_0} R \longrightarrow 0$ una resolución RG-proyectiva de R. Puesto que $cd_R S = s < \infty$ y los P_i son en particular RS-proyectivos, aplicando (3.1.2) a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} k'_s \longrightarrow P_{s-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

se tiene que $K = \operatorname{Im} k'_s$ es también RS-proyectivo.

Según (4.1.6) $X_n = Y_{n-s} \otimes_R K$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ es un RG-módulo proyectivo y $d_n = d'_{n-s} \otimes 1$ es un RG-homomorfismo. Además como K es RS-proyectivo, es en particular R-proyectivo y al tensorializar por K sobre R en el complejo acíclico $(Y_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ se mantiene la exactitud, por lo que $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es un complejo acíclico de RG-módulos RG-proyectivos.

Consideremos ahora:

$$\cdots \longrightarrow X_{s+1} \xrightarrow{k_{s+1}} X_s \xrightarrow{k_s} P_{s-1} \xrightarrow{k_{s-1}} P_{s-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \xrightarrow{k_0} R \longrightarrow 0$$

donde $k_i = \begin{cases} d_i & i \geq s+1 \\ k'_i & 0 \leq i < s \end{cases}$ y k_s se obtiene aplicando la definición de $X_s = Y_0 \otimes_R K$ a partir de la aplicación R-equilibrada:

$$
\begin{aligned}
f\colon Y_0 \times K &\longrightarrow P_{s-1} \\
(a,t) &\longrightarrow \varepsilon(a)t
\end{aligned}
$$

Además k_s es RG-homomorfismo ya que $\forall\alpha\in RG$, $\forall a\in Y_0$ y $\forall t\in K$ se tiene:

$$k_s(\alpha(a\otimes t)) = k_s(\alpha\cdot a\otimes \alpha t) = \varepsilon(\alpha\cdot a)(\alpha t) =$$

$$= (\alpha\varepsilon(a))(\alpha t) = \varepsilon(a)(\alpha t)$$

$$\alpha k_s(a\otimes t) = \alpha(\varepsilon(a)t) = (\alpha\varepsilon(a))t = (\varepsilon(a)\alpha)t = \varepsilon(a)(\alpha t)$$

Comprobemos que la cadena de RG-módulos proyectivos y RG-homomorfismos

$$\cdots\longrightarrow X_{s+1}\xrightarrow{k_{s+1}} X_s\xrightarrow{k_s} P_{s-1}\xrightarrow{k_{s-1}} P_{s-2}\longrightarrow\cdots\longrightarrow P_0\xrightarrow{k_0} R\longrightarrow 0$$

es exacta. Solamente necesitamos comprobar la exactitud en X_s y en P_{s-1} puesto que en el resto de los puntos lo es por construcción.

- Exactitud en P_{s-1}:

  $\operatorname{Im} k_s = K$ puesto que ε es suprayectiva.

  $\ker k_{s-1} = \ker k'_{s-1} = \operatorname{Im} k'_s = K$ por la exactitud de $(P_n,k'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$

- Exactitud en X_s: Si consideramos la sucesión exacta

$$\operatorname{Im} d'_1 \rightarrowtail Y_0 \twoheadrightarrow R$$

como K es RS-proyectivo y en particular R-proyectivo, al tensorializar por K sobre R se mantiene la exactitud, con lo que

$$\operatorname{Im} d'_1\otimes_R K \rightarrowtail Y_0\otimes_R K \twoheadrightarrow K$$

Y por tanto en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Y_1\otimes_R K \arrow[rr, "d_{s+1}"] \arrow[dr, two heads] & & Y_0\otimes_R K \arrow[rr, "k_s"] \arrow[dr, two heads] & & P_{s-1} \arrow[r] & \cdots \\
& & \operatorname{Im} d_1'\otimes_R k \arrow[ur, tail] & & K \arrow[ur, tail] & &
\end{tikzcd}$$

se tiene $d^{kc}_{s+1} = k^k_s$ que nos da la exactitud en X_s.

Hemos obtenido una R-resolución completa de Farrell para G con índice do coincidencia $s = cd_R S = vcd_R G$.

(4.1.9) *Teorema de unicidad de R-resoluciones completas de Farrell.* Sean (X,C) y (X',C') dos R-resoluciones completas de Farrell para el grupo G con índices de coincidencia n_0 y n_0' respectivamente. Existen RG-homomorfismos de cadena $f\colon X \longrightarrow X'$ y $g\colon C \longrightarrow C'$ de manera que $g_{-1}\colon R \longrightarrow R$ es la identidad y $\forall m \geqq m_0 = mx.(n_o, n_0')$ $f_m = g_m$. Además f y g son únicos salvo homotopía.

Demostración. Puesto que C y C' constituyen resoluciones RG-proyectivas de R, la existencia de g cumpliendo $g_{-1} = 1_R$ está garantizada según [11] (Cap. III - Tma. 6.1 - pg. 87).

Puesto que $\forall m \geqq m_0$ las ramas de los complejos X y C así como las de X' y C' coinciden, definimos $f_m = g_m$ $\forall m \geqq m_0$. Definamos las demás f_i por inducción. Supongamos definida hasta f_i y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[d, "f_{i+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X_i \arrow[r, two heads, "d_i^{ck}"] \arrow[d, "f_i"] & K_i \arrow[r, tail, "d_i^{kc}"] & X_{i-1} \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X'_{i+1} \arrow[r, "d'_{i+1}"] & X'_i \arrow[r, two heads, "d'^{ck}_i"] & K'_i \arrow[r, tail, "d'^{kc}_i"] & X'_{i-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Por la exactitud de (X,d) tenemos que d_i^{ck} es conúcleo de d_{i+1} y por otro lado:

$$d_i'^{kc}\, d_i'^{ck}\, f_i\, d_{i+1} = d_i'\, f_i\, d_{i+1} = d_i'\, d_{i+1}'\, f_{i+1} = 0$$

con lo que $d_i'^{ck}\, d_{i+1}'\, f_{i+1} = 0$ y como consecuencia existe el RG-homomorfismo

$$\psi_i : K_i \longrightarrow K_i' \quad / \quad \psi_i\, d_i^{ck} = d_i'^{ck}\, f_i$$

Por otro lado la sucesión $K_i \rightarrowtail X_{i-1} \twoheadrightarrow K_{i-1}$ es exacta por construcción y podemos asociarle la sucesión exacta larga Hom-Ext siguiente

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{RG}(K_{i-1},X_{i-1}') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{RG}(X_{i-1},X_{i-1}') \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathrm{Hom}_{RG}(K_i,X_{i-1}') \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{RG}(K_{i-1},X_{i-1}') \longrightarrow \cdots$$

por (4.1.7) K_{i-1} es RS-proyectivo y como consecuencia de (4.1.4) $\mathrm{Ext}^1_{RG}(K_{i-1},X_{i-1}') = 0$ y por lo tanto en la sucesión exacta anterior tenemos que

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{RG}(X_{i-1},X_{i-1}') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{RG}(K_i,X_{i-1}') \\ h & \longrightarrow & h\, d_i^{kc} \end{array}$$

es un epimorfismo y puesto que $d_i'^{kc}\, \psi_i$ es un RG-homomorfismo de K_i en X_{i-1}' tenemos que:

$$\exists\ f_{i-1} \in \mathrm{Hom}_{RG}(X_{i-1},X_{i-1}') \quad / \quad f_{i-1}\, d_i^{kc} = d_i'^{kc}\, \psi_i$$

Como consecuencia de todo lo anterior se tiene:

$$f_{i-1}\, d_i = f_{i-1}\, d_i^{kc}\, d_i^{ck} = d_i'^{kc}\, \psi_i\, d_i^{ck} = d_i'^{kc}\, d_i'^{ck}\, f_i = d_i'\, f_i$$

Comprobemos ahora que la pareja de RG-homomorfismos de complejos (f,g) es única salvo homotopía. Supongamos otra pareja $(\overline{f},\overline{g})$. Según [11] (Cap. III - Tma. 6.1 - pg. 87) g y $\overline{g}$ son homotópicas, es decir que existe una familia de RG-homomorfismos $\{\sigma_i\}_{i\geqq 0}$, $\sigma_i\colon C_i \longrightarrow C'_{i+1}$ de manera que:

$$\begin{cases} \overline{g}_i - g_i = \sigma_{i-1} k_i + k'_{i+1}\sigma_i & i>0 \\ \overline{g}_0 - g_0 = k'_1 \sigma_0 \end{cases}$$

Para todo $m \geqq m_0$ podemos definir $\Sigma_m = \sigma_m$ que cumplirá,

$$\overline{f}_{m+1} - f_{m+1} = \Sigma_m d_{m+1} + d'_{m+2}\Sigma_{m+1}$$

Definamos las demás Σ_i por inducción y para ello supongamos definida hasta Σ_i y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_{i+2} \arrow[r] & X_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[dl, "\Sigma_{i+1}"'] \arrow[d, shift right, "\overline{f}_{i+1}"'] \arrow[d, shift left, "f_{i+1}"] & X_i \arrow[r, two heads, "d_i^{ck}"] \arrow[dl, "\Sigma_i"'] \arrow[d, shift right, "\overline{f}_i"'] \arrow[d, shift left, "f_i"] & K_i \arrow[r, tail, "d_i^{kc}"] & X_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\overline{f}_{i-1}"'] \arrow[d, shift left, "f_{i-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X'_{i+2} \arrow[r, "d'_{i+2}"'] & X'_{i+1} \arrow[r, "d'_{i+1}"'] & X'_i \arrow[r, two heads, "d'^{ck}_i"'] & K'_i \arrow[r, tail, "d'^{kc}_i"'] & X'_{i-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Por exactitud de (X,d) tenemos $d^c_{i+1} = d^{ck}_i$ y por otro lado:

$$(\overline{f}_i - f_i - d'_{i+1}\Sigma_i)d_{i+1} = \overline{f}_i d_{i+1} - f_i d_{i+1} - d'_{i+1}\Sigma_i d_{i+1} =$$

$$= \overline{f}_i d_{i+1} - f_i d_{i+1} - d'_{i+1}(\overline{f}_{i+1} - f_{i+1} - d'_{i+2}\Sigma_{i+1}) =$$

$$= \overline{f}_i d_{i+1} - f_i d_{i+1} - d'_{i+1}\overline{f}_{i+1} - d'_{i+1} f_{i+1} - d'_{i+1} d'_{i+2}\Sigma_{i+1} = 0$$

puesto que $d'_{i+1}d'_{i+2} = 0$, $\overline{f}_i d_{i+1} = d'_{i+1}\overline{f}_{i+1}$ y $f_i d_{i+1} = d'_{i+1} f_i$.
Como consecuencia

$$\exists\ \psi_i \in \mathrm{Hom}_{RG}(K_i, X'_i) \ /\ \psi_i d_i^{ck} = \overline{f}_i - f_i - d'_{i+1}\Sigma_i$$

Consideremos la sucesión exacta larga Hom-Ext asociada a la sucesión exacta $K_i \rightarrowtail X_i \twoheadrightarrow K_{i-1}$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{RG}(K_{i-1}, X'_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{RG}(X_{i-1}, X'_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{RG}(K_i, X'_i) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{RG}(K_{i-1}, X'_i) \longrightarrow \cdots$$

Por el mismo razonamiento hecho anteriormente, $\mathrm{Ext}^1_{RG}(K_{i-1}, X'_i) =$ $= 0$ y

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{RG}(X_{i-1}, X'_i) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{RG}(K_{i-1}, X'_i) \\ h & \longrightarrow & h\, d_i^{kc} \end{array}$$

es un epimorfismo, por lo que

$$\exists\ \Sigma_{i-1} \in \mathrm{Hom}_{RG}(X_{i-1}, X'_i) \ /\ \Sigma_{i-1} d_i^{kc} = \psi_i$$

y como consecuencia de todo lo anterior se tiene:

$$\Sigma_{i-1} d_i = \Sigma_{i-1} d_i^{kc} d_i^{ck} = \psi_i d_i^{ck} = \overline{f}_i - f_i - d'_{i+1}\Sigma_i$$

y por lo tanto $\overline{f}_i - f_i = \Sigma_{i-1} d_i + d'_{i+1}\Sigma_i$

(4.2) R-COHOMOLOGIA DE FARRELL

(4.2.1) *Definición.* Puesto que todo grupo G con $vcd_R G$ finita admite una R-resolución completa de Farrell y ésta es única salvo homotopía, $\forall n\in\mathbb{Z}$ definimos el n-ésimo grupo de R-cohomología de Farrell de G con coeficientes en el RG-módulo M como el n-ésimo grupo de cohomología del complejo de cadena $\mathrm{Hom}_{RG}(X,M)$ donde (X,C) es una R-resolución completa de Farrell para G, es decir:

$$\hat{H}^n_R(G,M) = H^n(\mathrm{Hom}_{RG}(X,M)) \qquad n\in\mathbb{Z}$$

En el caso $R=\mathbb{Z}$ omitiremos el subíndice R y hablaremos de cohomología de Farrell en lugar de $\mathbb{Z}$-cohomología de Farrell.

(4.2.2) En función de (4.1.2), si G es un grupo finito su R-cohomología de Farrell y de Tate coinciden.

(4.3) ALGUNAS PROPIEDADES DE LA COHOMOLOGIA DE FARRELL

(4.3.1) *Teorema de coincidencia con la cohomología usual.* Sea $s = vcd\, G < \infty$, entonces:

1) $\forall n>s$ y todo G-módulo A, $H^n(G,A) = \hat{H}^n(G,A)$

2) Existe un epimorfismo $H^s(G,A) \twoheadrightarrow \hat{H}^s(G,A)$ para todo G-módulo A.

Demostración. En función del teorema de existencia (4.1.8) consideremos una resolución completa de Farrell para G (X,C) con índice de coincidencia s:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & X_{s-1} \arrow[r] & X_{s-2} \cdots X_0 \arrow[r] & X_{-1} \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X_{s+1} \arrow[r, "d_{s+1}"] & X_s \arrow[r, two heads, "d_s^{ck}"] \arrow[urr, "d_s"] \arrow[drr, "k_s"'] & K_s \arrow[ur, tail, "d_s^{kc}"] \arrow[dr, tail, "k_s^{kc}"'] & & & \\
 & & & & C_{s-1} \arrow[r] & C_{s-2} \cdots C_0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La cohomología de Farrell de G se obtiene a partir del complejo que sigue por la rama superior y la cohomología usual para $n>0$ se obtiene a partir de la resolución que sigue por la rama inferior. Obviamente $\forall n>s$ y todo G-módulo A, $H^n(G,A) = \hat{H}^n(G,A)$ lo que demuestra el apartado primero.

Para demostrar el segundo apartado estudiemos por separado el caso $s>0$ y el caso $s=0$.

<u>Caso $s>0$</u>: Dado el G-módulo A, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_G(-,A)$ a la resolución (X,C) se tiene:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(X_{s-2},A) \arrow[r, "d^*_{s-1}"] & \mathrm{Hom}_G(X_{s-1},A) \arrow[dr, "d^*_s"] & & & \\
 & & & \mathrm{Hom}_G(X_s,A) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(X_{s+1},A) \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(C_{s-2},A) \arrow[r, "k^*_{s-1}"] & \mathrm{Hom}_G(C_{s-1},A) \arrow[ur, "k^*_s"'] & & &
\end{tikzcd}$$

$$H^s(G,A) = \frac{\ker d^*_{s+1}}{\mathrm{Im}\, k^*_s} = \frac{\ker(\mathrm{Hom}_G(d_{s+1},A))}{\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_G(k_s,A))}$$

$$\hat{H}^s(G,A) = \frac{\ker d^*_{s+1}}{\mathrm{Im}\, d^*_s} = \frac{\ker(\mathrm{Hom}_G(d_{s+1},A))}{\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_G(d_s,A))}$$

Si comprobamos la inclusión $\operatorname{Im} k_s^* \subset \operatorname{Im} d_s^*$ tendremos definido un epimorfismo de $H^s(G,A)$ sobre $\hat{H}^s(G,A)$.

Sea $f \in \operatorname{Im} k_s^* \subset \operatorname{Hom}_G(X_s,A)$, existe por lo tanto $g \in \operatorname{Hom}_G(C_{s-1},A)$ cumpliendo $g\, k_s = f$. Pretendemos encontrar un G-homomorfismo $h \in \operatorname{Hom}_G(X_{s-1},A)$ tal que $h\, d_s = f$.

Tenemos pues el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & X_{s-1} & \\
X_s \arrow[r, two heads, "d_s^{ck}"] \arrow[rrr, bend right=70, "f"'] & K_s \arrow[ur, tail, "d_s^{kc}"] \arrow[dr, tail, "k_s^{kc}"'] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & & A \\
 & {} & C_{s-1} \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Consideremos la sucesión Hom-Ext asociada a la sucesión exacta $K_s \rightarrowtail X_{s-1} \twoheadrightarrow K_{s-1}$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_G(K_{s-1},C_{s-1}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_G(X_{s-1},C_{s-1}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_G(K_s,C_{s-1}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \operatorname{Ext}_G^1(K_{s-1},C_{s-1}) \longrightarrow \cdots$$

Puesto que según (4.1.7) K_{s-1} es S-proyectivo, y C_{s-1} es G-proyectivo, aplicando (4.1.4) se tiene $\operatorname{Ext}_G^1(K_{s-1},C_{s-1}) = 0$ y

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Hom}_G(X_{s-1},C_{s-1}) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_G(K_s,C_{s-1}) \\
t & \longrightarrow & t\, d_s^{kc}
\end{array}$$

es un epimorfismo, por lo que existe $\psi \in \mathrm{Hom}_G(X_{s-1}, C_{s-1})$ de manera que $\psi d_s^{kc} = k_s^{kc}$.

Considerando $h = g\psi \in \mathrm{Hom}_G(X_{s-1}, A)$ tenemos:

$$hd_s = g\psi d_s = g\psi d_s^{kc} d_s^{ck} = gk_s^{kc} d_s^{ck} = gk_s$$

y por tanto es cierta la inclusión $\mathrm{Im}\ k_s^* \subset \mathrm{Im}\ d_s^*$ y tenemos definido el epimorfismo canónico de $H^s(G,A)$ en $\hat{H}^s(G,A)$.

<u>Caso s=0</u>: En este caso G es finito según (3.2.5) y como la cohomología de Farrell y de Tate coinciden se tiene:

$$\hat{H}^0(G,A) = \frac{A^G}{NA} \qquad \text{[1] (Cap. XII - Apt. 2 - pg. 236)}$$

Por otro lado $H^0(G,A) = A^G$ [9] (Cap. VI - Prop. 3.1 - pg. 191) y tenemos de $H^0(G,A)$ sobre $\hat{H}^0(G,A)$ la proyección canónica.

(4.3.2) Asi como para grupos finitos ($\mathrm{vcd}\, G = 0$) los grupos de cohomología $\hat{H}^i(G,A)$ para $i<0$ pueden interpretarse como los grupos de homología de G, en general para un grupo de dimensión cohomológica virtual finita s no nula, $\hat{H}^i(G,A)$ no admite esta interpretación para $i<s$. Sin embargo para grupos de dualidad virtual ([5]) se tiene el siguiente isomorfismo para $i<0$ y todo G-módulo A:

$$\hat{H}^i(G,A) \simeq H_{s-i-1}(G, C \otimes A)$$

siendo C el G-módulo dualizante de cualquier subgrupo de G libre de torsión y de índice finito, situación que concuerda con lo que ocurre para grupos finitos ya que en ese caso s=0 y $C=\mathbb{Z}$. Para $0\leq i<s$, los $\hat{H}^i(G,A)$ están también relacionados con los grupos de homología y cohomología usual mediante una sucesión exacta que "mide" la desviación de la dualidad del módulo dualizante C.

(4.3.3) *Lema de Shapiro para la cohomología de Farrell.* Si H es un subgrupo de G, para todo H-módulo B y todo entero n se tiene el siguiente isomorfismo

$$\hat{H}^n(H,B) \simeq \hat{H}^n(G,\mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}G,B))$$

Demostración. En primer lugar notemos que según (3.2.7) H es virtualmente libre de torsión y $\mathrm{vcd}\,H \leq \mathrm{vcd}\,G$ y por lo tanto tiene sentido hablar de la cohomología de Farrell de H.

Sea (X,C) una resolución completa de Farrell para G. Puesto que todo G-módulo proyectivo es en particular H-módulo proyectivo, (X,C) pasa a ser una resolución completa de Farrell para H.

Si B es un H-módulo, $\mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}G,B)$ es un G-módulo vía el homomorfismo de anillos $\mathbb{Z}H \longrightarrow \mathbb{Z}G$. Por otro lado según [1] (Cap. II - Prop. 5.2 - pg. 28) tenemos el siguiente isomorfismo natural en X,

$$\mathrm{Hom}_H(X,B) \simeq \mathrm{Hom}_G(X,\mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}G,B))$$

Obteniendo la cohomología de Farrell de H y de G a partir de la resolución completa (X,C) se tiene:

$$\hat{H}^n(H,B) = H^n(\mathrm{Hom}_H(X,B)) \simeq H^n(\mathrm{Hom}_G(X,\mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}G,B))) =$$

$$= \hat{H}^n(G,\mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}G,B))$$

(4.3.4) *Proposición.* Para todo G-módulo A y todo entero n, $\hat{H}^n(G,A)$ es un grupo de torsión.

Demostración. Sea S un subgrupo de G libre de torsión y de índice finito. Repitiendo el proceso del teorema de existencia de resoluciones completas de Farrell (4.1.8) para la sucesión exacta de grupos $S \rightarrowtail S \twoheadrightarrow 1$ se obtiene que necesariamente $\hat{H}^n(S,B) = 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ y todo S-módulo B.

Según el trabajo de Farrell [6] podemos definir los homomorfismo Restricción y Correstricción:

$$\begin{array}{ll} \text{Res: } \hat{H}^n(G,-) \longrightarrow \hat{H}^n(L,-) & \\ & L \leqq G \quad , \quad [G:L] < \infty \\ \text{Cor: } \hat{H}^n(L,-) \longrightarrow \hat{H}^n(G,-) & \end{array}$$

cumpliéndose que $\text{Cor}\circ\text{Res}$ es la multiplicación por $[G:L]$.

En nuestro caso el producto $\text{Cor}\circ\text{Res}$ pasa por $\hat{H}^n(S,A) = 0$ y necesariamente $[G:S]\hat{H}^n(G,A) = 0$ para todo entero n y todo G-módulo A y por lo tanto $\hat{H}^n(G,A)$ es de torsión.

C A P I T U L O - 5

PERIODICIDAD Y p-PERIODICIDAD PARA LA COHOMOLOGIA DE FARRELL

En este capítulo se definen conceptos paralelos a los desarrollados por Cartan y Eilenberg sobre periodicidad y p-periodicidad de la cohomología de Farrell.

Hay que destacar la obtención de los teoremas (5.3.5) y (5.3.6) que resultarán fundamentales para el estudio, en los capítulos posteriores, de la periodicidad y p-periodicidad de los grupos de matrices $SL(n,\mathbb{Z})$.

G designará siempre un grupo virtualmente libre de torsión de dimensión cohomológica virtual finita.

(5.1) DEFINICIONES

(5.1.1) *Definición.* Dado un primo p, diremos que el grupo G es p-periódico si la componente p-primaria de los grupos de cohomología de Farrell de G es periódica para cualquier G-módulo A, es decir,

$$\exists n_p \geq 1 \quad / \quad p\text{-}\hat{H}^{i+n_p}(G,A) \simeq p\text{-}\hat{H}^{i}(G,A)$$

$\forall i \in \mathbb{Z}$ y todo G-módulo A.

Al menor n_p cumpliendo la condición anterior lo llamaremos el p-período del grupo G.

(5.1.2) *Definición*. Un grupo G diremos que es periódico si es p-periódico para todo primo p.

El período es el mínimo común múltiplo de los p-períodos, que está definido puesto que hay solamente un número finito de p-períodos distintos de 1 ya que según (4.3.4) $[G:S]\hat{H}(G,A)=0$, siendo S un subgrupo libre de torsión de G de índice finito.

(5.2) PERIODICIDAD Y P-PERIODICIDAD RESPECTO A SUBGRUPOS

(5.2.1) *Proposición*. Si G es un grupo p-periódico de p-período n_p y H es un subgrupo de G, H es también p-periódico de p-período un divisor de n_p.

Demostración. Sea B un H-módulo y sea $i\in\mathbb{Z}$; teniendo en cuenta el Lema de Shapiro (4.3.3) y que n_p es p-período de G se tiene:

$$p\text{-}\hat{H}^{i+n_p}(H,B) \simeq p\text{-}\hat{H}^{i+n_p}(G,\mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}G,B)) \simeq$$

$$\simeq p\text{-}\hat{H}^{i}(G,\mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}G,B)) \simeq p\text{-}\hat{H}^{i}(H,B)$$

por lo que n_p es un p-período de H y por lo tanto el p-período de H es un divisor de n_p.

(5.2.2) *Proposición*. Si G es periódico de período n y H es un subgrupo de G, H es también periódico de período un divisor de n.

Demostración. Totalmente análoga a la anterior.

(5.3) TEOREMAS FUNDAMENTALES SOBRE PERIODICIDAD Y P-PERIODICIDAD

(5.3.1) *Lema*. Dado el primo p, el localizado de $\mathbb{Z}$ en p

$\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{a}{b} \in Q \ / \ (b,p)=1\}$ verifica:

1) $\mathbb{Z}_{(p)}$ es un D.I.P. libre de torsión.

2) $Q/\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(p^{\infty})$ siendo $\mathbb{Z}(p^{\infty})$ el grupo cuasicíclico:

$$\{[\tfrac{a}{b}] \in Q/\mathbb{Z} \ / \ a,b\in\mathbb{Z} \ , \ b=p^{i} \ , \ i\geq 0\}$$

Demostración.

1) $\mathbb{Z}_{(p)}$ es obviamente libre de torsión.

Si I es un ideal del anillo unitario y conmutativo $\mathbb{Z}_{(p)}$ y $c\in\mathbb{Z}$ genera el ideal principarl $i^{-1}(I)$, siendo

$$\begin{aligned} i: \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}_{(p)} \\ x &\longmapsto \frac{x}{1} \end{aligned}$$

la inyección canónica, es fácil comprobar la igualdad $I=i(c)\mathbb{Z}_{(p)}$, de donde se deduce que $\mathbb{Z}_{(p)}$ es un D.I.P..

2) Supongamos $[\frac{x}{y}] \in \mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z}(p^{\infty})$

$$[\tfrac{x}{y}] = \begin{cases} [\frac{a}{b}] & (b,p)=1 \\ \\ [\frac{c}{d}] & d=p^{\alpha} \end{cases}$$

$$[\frac{a}{b}] = [\frac{c}{d}] \Longrightarrow \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \frac{ad - bc}{bd} = r \in \mathbb{Z} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (a-rb)p^{\alpha} = bc \xrightarrow[(b,p)=1]{} p^{\alpha} \mid c \Longrightarrow \frac{c}{d} \in \mathbb{Z}$$

Con todo esto, $\mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z}(p^{\infty}) = \mathbb{Z}$.

Por otro lado $\forall [\frac{x}{y}] \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ se tiene $y = p^{\gamma} r$ con $(p,r)=1$ y por lo tanto,

$$\exists\, \alpha,\beta \in \mathbb{Z} \quad / \quad \alpha p^{\gamma} + \beta r = 1$$

de donde,

$$[\frac{x}{y}] = [\frac{x(\alpha p^{\gamma}+\beta r)}{y}] = [\frac{x\alpha p^{\gamma}}{p^{\gamma} r}] + [\frac{x\beta r}{p^{\gamma} r}] = [\frac{x\alpha}{r}] + [\frac{x\beta}{p^{\gamma}}]$$

con lo que $[\frac{x}{y}] \in \mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}(p^{\infty})$.

(5.3.2) *Lema*. Sea p un primo y K un grupo abeliano de torsión, entonces $p\text{-}K \simeq K \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$.

Demostración. Consideremos la sucesión exacta de grupos,

$$\mathbb{Z} \rightarrowtail \mathbb{Z}_{(p)} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}$$

Tensorializando sobre $\mathbb{Z}$ por el $\mathbb{Z}$-módulo p-K se obtiene la siguiente sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Tor}(p\text{-}K, \mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}) \longrightarrow p\text{-}K \otimes \mathbb{Z} \longrightarrow p\text{-}K \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow p\text{-}K \otimes \mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Por la aditividad del funtor Tor(p-K,—) y puesto que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(p^{\infty})$ se tiene:

$$\mathrm{Tor}(p\text{-}K,\mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Tor}(p\text{-}K,\mathbb{Z}(p^\infty)) \simeq \mathrm{Tor}(p\text{-}K,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

y según [7] (Vol. I - Cap. X - Apt. 62 - pg. 267) se tiene,

$$\mathrm{Tor}(p\text{-}K,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = p\text{-}K \qquad y \qquad \mathrm{Tor}(p\text{-}K,\mathbb{Z}(p^\infty)) = p\text{-}K$$

de donde necesariamente $\mathrm{Tor}(p\text{-}K,\mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}) = 0$.

Por otro lado, puesto que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es divisible como $\mathbb{Z}$-módulo [9] (Cap. I - Apt. 7 - pg. 31) y p-K es un grupo de torsión, según [7] (Vol. I - Cap. X - Apt. 59 - pg. 255) $p\text{-}K \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$. Además, por la aditividad del funtor $p\text{-}K \otimes —$ se tiene que $p\text{-}K \otimes \mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}$ es sumando directo de $p\text{-}K \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$ de donde necesariamente $p\text{-}K \otimes \mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z} = 0$.

Con todo esto la sucesión exacta larga anterior nos da el isomorfismo $p\text{-}K \simeq p\text{-}K \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$.

Pretendemos ahora comprobar que $p\text{-}K \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ y $K \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ son isomorfos. Puesto que $\mathbb{Z}_{(p)}$ es libre de torsión, el funtor $— \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ conserva inyecciones y la inclusión canónica $i{:}p\text{-}K \longrightarrow K$ se transforma en un monomorfismo $i^*{:}p\text{-}K \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \longrightarrow K \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. Para comprobar que i^* es isomorfismo veamos que todo generador $x \otimes \alpha$ de $K \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ tiene antiimagen. Puesto que K es un grupo de torsión, todo elemento de K es de orden finito,

$$o(x) = n = p^\beta m \qquad \text{con} \qquad (m,p)=1$$

como consecuencia $mx \in p\text{-}K$, $\frac{\alpha}{m} \in \mathbb{Z}_{(p)}$ y

$$i^*(mx \otimes \tfrac{\alpha}{m}) = mx \otimes \tfrac{\alpha}{m} = x \otimes \alpha$$

Por lo tanto $K \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ es isomorfo a $p\text{-}K \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ y junto con el isomorfismo obtenido anteriormente $p\text{-}K \simeq p\text{-}K \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, tenemos finalmente $p\text{-}K \simeq K \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$.

(5.3.3) *Lema*. Si X es un G-módulo proyectivo finitamente generado, entonces para todo G-módulo B se tiene el siguiente isomorfismo, natural en X,

$$\mathrm{Hom}_G(X, B\otimes \mathbb{Z}_{(p)}) \simeq \mathrm{Hom}_G(X,B)\otimes \mathbb{Z}_{(p)}$$

Demostración. Según [11] (Cap. V - Prop. 4.2 - pg. 147) aplicado al anillo $\mathbb{Z}G$, al G-módulo proyectivo finitamente generado X y al G-módulo B, se tiene el siguiente isomorfismo natural en X,

$$\mathrm{Hom}_G(X,B) \simeq \mathrm{Hom}_G(X,\mathbb{Z}G)\otimes_G B$$

Puesto que $\mathbb{Z}_{(p)}$ es libre de torsión al tensorializar por $\mathbb{Z}_{(p)}$ sobre el anillo $\mathbb{Z}$ en el isomorfismo anterior, se mantiene el isomorfismo y la naturalidad, con lo que se tiene:

$$\mathrm{Hom}_G(X,B)\otimes \mathbb{Z}_{(p)} \simeq (\mathrm{Hom}_G(X,\mathbb{Z}G)\otimes_G B)\otimes \mathbb{Z}_{(p)}$$

Por la asociatividad del producto tensorial y aplicando de nuevo [11] (Cap. V - Prop. 4.2 - pg. 147) para el anillo $\mathbb{Z}G$, el G-módulo proyectivo finitamente generado X y el G-módulo $B\otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, se tiene:

$$\mathrm{Hom}_G(X,B)\otimes \mathbb{Z}_{(p)} \simeq (\mathrm{Hom}_G(X,\mathbb{Z}G)\otimes_G B)\otimes \mathbb{Z}_{(p)} \simeq$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_G(X,\mathbb{Z}G)\otimes_G (B\otimes \mathbb{Z}_{(p)}) \simeq \mathrm{Hom}_G(X,B\otimes \mathbb{Z}_{(p)})$$

además este isomorfismo es natural en X.

(5.3.4) *Lema*. Para todo $\mathbb{Z}_{(p)}$G-módulo A se tiene:

$$\hat{H}^i_{\mathbb{Z}_{(p)}}(G,A) \simeq \hat{H}^i(G,A) \qquad \forall i\in\mathbb{Z}$$

Demostración. Sea (X,C) una resolución completa de Farrell para el grupo G.

Puesto que $\mathbb{Z}_{(p)}$ es libre de torsión, los complejos $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes X$ y $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes C$ siguen manteniendo la exactitud. Además según [8] (Cap. 2 - Apt. 2.3 - pg. 25) la G-proyectividad pasa a ser $\mathbb{Z}_{(p)}$G-proyectividad con lo que $(\mathbb{Z}_{(p)} \otimes X, \mathbb{Z}_{(p)} \otimes C)$ es una $\mathbb{Z}_{(p)}$-resolución completa de Farrell para el grupo G.

Por otro lado, por ser el funtor $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes -$ adjunto a la izquierda del funtor cambio de anillo $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}_{(p)}} \longrightarrow \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}$ se tiene el isomorfismo natural,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_{(p)}}(\mathbb{Z}_{(p)} \otimes -, A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, A)$$

y puesto que este isomorfismo mantiene los elementos G-invariantes se tiene el siguiente isomorfismo natural:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_{(p)}G}(\mathbb{Z}_{(p)} \otimes -, A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(-, A)$$

Hallando la cohomología de Farrell de G a partir de la resolución completa (X,C) y la $\mathbb{Z}_{(p)}$-cohomología a partir de la $\mathbb{Z}_{(p)}$-resolución completa $(\mathbb{Z}_{(p)} \otimes X, \mathbb{Z}_{(p)} \otimes C)$ tenemos el isomorfismo buscado.

(5.3.5) *Teorema*. Sea G un grupo virtualmente libre de torsión de dimensión cohomológica virtual finita. Sea S un subgrupo normal de G, libre de torsión y de índice finito en G. Supongamos que G admite una resolución completa de Farrell (X,C) con cada X_i G-módulo finitamente generado. Entonces si $\Gamma = G/S$ es p-periódico de p-período n_p, G también es p-periódico de p-período un divisor de n_p.

Demostración. Puesto que $\Gamma=G/S$ es un grupo finito, si es p-periódico de p-período n_p, según [22] (Tma. 4.1 - pg. 274) podemos construir un complejo acíclico de $\mathbb{Z}_{(p)}\Gamma$-módulos proyectivos con un período n_p, es decir:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots \longrightarrow & Y_{n_p+1} & \xrightarrow{d'_{n_p+1}} & Y_{n_p} & \xrightarrow{d'_{n_p}} & Y_{n_p-1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & Y_0 & \xrightarrow{d'_0} & Y_{-1} & \longrightarrow \cdots \\
& \| & & \| & & \| & & \| & & \| & \\
\cdots \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_0 & \longrightarrow & W_{n_p-1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & W_0 & \longrightarrow & W_{n_p-1} & \longrightarrow \cdots \\
& & & & \searrow \;\; \nearrow & & & & \searrow \;\; \nearrow & & \\
& & & & \mathbb{Z}_{(p)} & & & & \mathbb{Z}_{(p)} & &
\end{array}$$

Consideremos la siguiente $\mathbb{Z}_{(p)}G$-resolución proyectiva de $\mathbb{Z}_{(p)}$

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{k'_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \xrightarrow{k'_0} \mathbb{Z}_{(p)} \longrightarrow 0$$

Por otro lado, puesto que G es virtualmente libre de torsión de dimensión cohomológica virtual finita, según (3.2.8) G es también virtualmente libre de $\mathbb{Z}_{(p)}$-torsión y $\mathrm{vcd}_{\mathbb{Z}_{(p)}} G = r \leq$ $\leq \mathrm{vcd}\, G$.

Según el teorema de existencia de R-resoluciones completas de Farrell (4.1.8), la $\mathbb{Z}_{(p)}$-cohomología de Farrell de G puede obtenerse a partir del complejo acíclico $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ donde:

$$\forall n\in\mathbb{Z} \qquad \begin{cases} X_n = Y_{n-r} \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} K & \text{siendo } K = \mathrm{Im}\, k'_r \\ d_n = d'_{n-r} \otimes 1 \end{cases}$$

Puesto que

$$Y_i = Y_{n_p+i} \quad y \quad d'_i = d'_{n_p+i} \qquad \forall i \in \mathbb{Z}$$

tenemos que,

$$X_i = X_{n_p+i} \quad y \quad d_i = d_{n_p+i} \qquad \forall i \in \mathbb{Z}$$

con lo que el complejo $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ se repite periódicamente con un período n_p. Como consecuencia la $\mathbb{Z}_{(p)}$-cohomología de Farrell de G verifica

$$\hat{H}^i_{\mathbb{Z}_{(p)}}(G,A) \simeq \hat{H}^{n_p+i}_{\mathbb{Z}_{(p)}}(G,A)$$

para todo entero i y todo $\mathbb{Z}_{(p)}$G-módulo A y por lo tanto la $\mathbb{Z}_{(p)}$-cohomología de Farrell de G es periódica de período un divisor de n_p.

Pretendemos comprobar que para todo G-módulo B y $\forall i \in \mathbb{Z}$ se tiene el isomorfismo siguiente

$$p\text{-}\hat{H}^i(G,B) \simeq \hat{H}^i_{\mathbb{Z}_{(p)}}(G,B \otimes \mathbb{Z}_{(p)})$$

con ello, puesto que la $\mathbb{Z}_{(p)}$-cohomología de Farrell de G es periódica de período un divisor de n_p, tendremos que su cohomología de Farrell será p-periódica de p-período un divisor de n_p.

Supongamos que (X,C) es una resolución completa de Farrell para G con los G-módulos X_i finitamente generados. Para todo entero i, aplicando (5.3.2) a $\hat{H}^i(G,B)$, que según (4.3.4) es un grupo abeliano de torsión, se tiene

$$p\text{-}\hat{H}^i(G,B) \simeq \hat{H}^i(G,B) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$$

según la definición de cohomología de Farrell (4.2.1) tenemos también

$$\hat{H}^i(G,B) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \simeq \hat{H}^i(\mathrm{Hom}_G(X,B)) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$$

Por otro lado, puesto que $\mathbb{Z}_{(p)}$ es libre de torsión el funtor $-\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$ es covariante exacto y según [14] (Cap. 6. - Ej. 6.4 - pg. 170) aplicado al complejo de $\mathbb{Z}$-módulos $\mathrm{Hom}_G(X,B)$ se tiene el isomorfismo siguiente:

$$H^i(\mathrm{Hom}_G(X,B)) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \simeq H^i(\mathrm{Hom}_G(X,B) \otimes \mathbb{Z}_{(p)})$$

Puesto que (X,d) constituye un complejo de G-módulos proyectivos finitamente generados, (5.3.3) nos da el isomorfismo siguiente

$$H^i(\mathrm{Hom}_G(X,B) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}) \simeq H^i(\mathrm{Hom}_G(X,B \otimes \mathbb{Z}_{(p)}))$$

Finalmente, teniendo en cuenta la definición de cohomología de Farrell de G y (5.3.4) para el $\mathbb{Z}_{(p)}G$-módulo $B \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ tenemos:

$$H^i(\mathrm{Hom}_G(X,B \otimes \mathbb{Z}_{(p)})) \simeq \hat{H}^i(G,B \otimes \mathbb{Z}_{(p)}) \simeq \hat{H}^i_{\mathbb{Z}_{(p)}}(G,B \otimes \mathbb{Z}_{(p)})$$

Con todo esto tenemos el isomorfismo buscado:

$$p - \hat{H}^i(G,B) \simeq \hat{H}^i_{\mathbb{Z}_{(p)}}(G,B \otimes \mathbb{Z}_{(p)})$$

para todo entero i y todo G-módulo B.

(5.3.6) *Teorema.* Sea G un grupo virtualmente libre de torsión de dimensión cohomológica virtual finita. Sea S un subgrupo normal de G, libre de torsión y de índice finito en G. Si $\Gamma=G/S$ es periódico de período t, entonces G también es periódico de período divisor de t.

Demostración. Notemos en primer lugar que, aunque no es ahora necesario, si G admitiera una resolución completa de Farrell por G-módulos finitamente generados este teorema sería consecuencia directa del anterior.

Puesto que $\Gamma=G/S$ es un grupo finito, si es periódico de período t, según [22] (Tma. 4.1 - pg. 274) podemos construir un complejo acíclico de Γ-módulos proyectivos con un período t;es decir:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Y_t \arrow[r, "d'_t"] \arrow[d, equal] & & Y_{t-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & Y_0 \arrow[r, "d'_0"] \arrow[d, equal] & & Y_{-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & W_0 \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & W_{t-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & W_0 \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & W_{t-1} \arrow[r] & \cdots \\
& & \mathbb{Z} \arrow[ur, hook] & & & & \mathbb{Z} \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

Consideremos la siguiente G-resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{k'_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{k'_1} P_0 \xrightarrow{k'_0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Según el teorema de existencia de R-resoluciones completas de Farrell (4.1.8) la cohomología de Farrell de G puede obtenerse a partir del complejo acíclico $(X_n,d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ donde:

$$\forall n\in\mathbb{Z} \begin{cases} X_n = Y_{n-s} \otimes K \\ d_n = d'_{n-s} \otimes 1 \end{cases} \qquad \text{siendo } K = \operatorname{Im} k'_s \text{ y } s = \operatorname{cd} S$$

Puesto que $Y_i = Y_{t+i}$ y $d'_i = d'_{t+i}$ $\forall i \in \mathbb{Z}$ tenemos que $X_i = X_{t+i}$ y $d_i = d_{t+i}$ $\forall i \in \mathbb{Z}$ con lo que el complejo $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ se repite periódicamente con un período t y por lo tanto la cohomología de Farrell de G es periódica de período un divisor de t.

CAPITULO - 6

PERIODICIDAD Y COHOMOLOGIA DEL GRUPO SL(2,$\mathbb{Z}$)

En este capítulo se hace en primer lugar un estudio exhaustivo de la estructura del grupo de matrices SL(2,$\mathbb{Z}$) para poder aplicar ciertos teoremas desarrollados en capítulos anteriores y obtener finalmente que el grupo SL(2,$\mathbb{Z}$) es periódico en el sentido introducido en el capítulo 5 y calcular su cohomología de Farrell.

(6.1) ESTRUCTURA DEL GRUPO SL(2,$\mathbb{Z}$)

(6.1.1) *Definición*. Representaremos por SL(2,$\mathbb{Z}$) al grupo multiplicativo de las matrices 2x2 con términos en $\mathbb{Z}$ y determinante 1.

(6.1.2) *Lema*. El siguiente subconjunto de SL(2,$\mathbb{Z}$) es multiplicativamente cerrado:

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) - \{I\} \ / \ a,b,c,d \geqq 0 \ , \ ad \geqq 1 \right\}$$

Demostración. Sean A y A' dos elementos de M, con lo que

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad a,b,c,d \geqq 0 \quad , \quad ad \geqq 1 \quad , \quad A \neq I$$

$$A' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \qquad a',b',c',d' \geqq 0 \quad , \quad a'd' \geqq 1 \quad , \quad A' \neq I$$

$$AA' = \begin{bmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{bmatrix}$$

Todos los términos de AA' son enteros no negativos, además,

$$(aa' + bc')(cb' + dd') = aa'cb' + aa'dd' + bc'cb' + bc'dd' \geqq 1$$

puesto que todos los sumando son positivos y $aa'dd' \geqq 1$.

Por otro lado, si suponemos $AA' = I$ tenemos $A' = A^{-1}$ de donde

$$\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

y por lo tanto $b' = -b \geqq 0$ y $c' = -c \geqq 0$ con lo que necesariamente $b = 0 = c$. Además $|A| = ad = 1$ y como a y d son positivos tenemos $a = 1 = d$ con lo que $A = I$ en contra de que A es un elemento de $\mathcal{M}$.

(6.1.3) *Lema*. Sea $\mathcal{H}$ el subgrupo de $SL(2,\mathbb{Z})$ generado por $-I$. Si $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ entonces para toda matriz M del conjunto $\mathcal{M}$ definido en (6.1.2) se tiene que $Y^{\beta}MX^{\alpha}$ no está en $\mathcal{H}$ para $0 \leqq \alpha \leqq 1$ y $0 \leqq \beta \leqq 2$.

Demostración. En primer lugar notemos que $\mathcal{H} = \{I, -I\}$.

Sea $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}$; estudiemos la matriz $Y^{\beta}MX^{\alpha}$ según los valores de α y β:

$\beta = 0$, $\alpha = 0$: $Y^{\beta}MX^{\alpha} = M \notin \mathcal{H}$ ya que $\mathcal{H} \cap \mathcal{M} = \emptyset$

$\beta=0$, $\alpha=1$: $Y^\beta M X^\alpha = \begin{bmatrix} -b & a \\ -d & c \end{bmatrix} \notin H$ ya que $a \neq 0$.

$\beta=1$, $\alpha=0$: $Y^\beta M X^\alpha = \begin{bmatrix} -c & -d \\ a+c & b+d \end{bmatrix} \notin H$ ya que $d \neq 0$.

$\beta=1$, $\alpha=1$: $Y^\beta M X^\alpha = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b-d & a+c \end{bmatrix} \notin H$ ya que si $d=\pm 1$ y $-b-d=0$ entonces $b=-1$ o $d=-1$.

$\beta=2$, $\alpha=0$: $Y^\beta M X^\alpha = \begin{bmatrix} -a-c & -b-d \\ a & b \end{bmatrix} \notin H$ ya que $a \neq 0$.

$\beta=2$, $\alpha=1$: $Y^\beta M X^\alpha = \begin{bmatrix} b+d & -a-c \\ -b & a \end{bmatrix} \notin H$ ya que si $a=\pm 1$ y $-a-c=0$ entonces $a=-1$ o $c=-1$.

(6.1.4) *Lema*. Sean $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; entonces todo elemento de $SL(2,\mathbb{Z})$ puede expresarse en la forma:

$$X^\alpha\, Y^{\beta_1}\, X\, Y^{\beta_2}\, X \cdots X\, Y^{\beta_n}$$

donde: $0 \leq \alpha \leq 3$; $n>0$; $1 \leq \beta_i \leq 2$ para $1 \leq i < n$ y $0 \leq \beta_n \leq 2$.

Demostración. Puesto que $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \quad y \quad \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$$

$SL(2,\mathbb{Z})$ está generado por las trasvecciones $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ según [13] (Cap. 8 - Tma. 8.12 - pg. 159).

Por otro lado,

$$XY = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad y \qquad XY^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

con lo que las matrices X e Y generan $SL(2,\mathbb{Z})$ y todo elemento de $SL(2,\mathbb{Z})$ será de la forma:

$$X^{\alpha_1}Y^{\beta_1}X^{\alpha_2}Y^{\beta_2}\dots X^{\alpha_n}Y^{\beta_n} \quad \text{donde} \begin{cases} n>0 \\ \alpha_1,\beta_n \in \mathbb{Z} \\ \alpha_2,\dots,\alpha_n \in \mathbb{Z}-\{0\} \\ \beta_1,\dots,\beta_{n-1} \in \mathbb{Z}-\{0\} \end{cases}$$

Por otro lado $X^4 = I$, $Y^6 = I$ y $X^2 = Y^3 = -I$ y además $-I$ está en el centro de $SL(2,\mathbb{Z})$. Con todo esto cada elemento de $SL(2,\mathbb{Z})$ puede expresarse en la forma buscada.

(6.1.5) *Lema*. $H = \langle -I\rangle$ es un subgrupo normal de $SL(2,\mathbb{Z})$ verificando:

$$\frac{SL(2,\mathbb{Z})}{H} \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$$

Demostración. Que H es un subgrupo normal de $SL(2,\mathbb{Z})$ es obvio.

Supongamos $\langle a\rangle \simeq \mathbb{Z}_2$ y $\langle b\rangle \simeq \mathbb{Z}_3$. Aplicando la definición de producto libre en el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} \langle a\rangle \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & \langle a\rangle * \langle b\rangle & \langle b\rangle \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "g"] \\ & \frac{SL(2,\mathbb{Z})}{H} & \end{tikzcd}$$

$$f(a) = XH \quad , \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g(b) = YH \quad , \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

se obtiene un único homomorfismo $\psi\colon \langle a\rangle * \langle b\rangle \longrightarrow \frac{SL(2,\mathbb{Z})}{H}$ de manera que $\psi(a)=XH$ y $\psi(b)=YH$.

Puesto que $X^2 \in H$, teniendo en cuenta (6.1.4), todo elemento de $SL(2,\mathbb{Z})/H$ puede expresarse en la forma:

$$X^{\lambda}Y^{\beta_1}XY^{\beta_2}\dots XY^{\beta_n}H \qquad \text{con} \begin{cases} n>0 \\ 0\leq\lambda\leq 1 \\ 1\leq\beta_i\leq 2 & \text{para} \quad 1\leq i<n \\ 0\leq\beta_n\leq 2 \end{cases}$$

por lo que ψ es obviamente epimorfismo. Para comprobar que ψ es un isomorfismo supongamos

$$a^{\alpha}b^{\beta_1}a \dots ab^{\beta_n}\in\ker\psi \qquad \text{con} \begin{cases} n>0 \\ 0\leq\alpha\leq 1 \\ 1\leq\beta_i\leq 2 & \text{para} \quad 1\leq i<n \\ 0\leq\beta_n\leq 2 \end{cases}$$

con lo que $X^{\alpha}Y^{\beta_1}X \dots XY^{\beta_n}\in H$. Además $H = \langle X\rangle \cap \langle Y\rangle$ y por lo tanto:

<u>Caso n=1</u>: $X^{\alpha}Y^{\beta_1}\in H$ con $0\leq\alpha\leq 1$ y $0\leq\beta_1\leq 2$.

Si $\alpha=1$, $XY^{\beta_1}\in H$ con lo que,

$$XY^{\beta_1} = I \Longrightarrow Y^{\beta_1} = X^3 \in \langle X\rangle \cap \langle Y\rangle = H$$

$$XY^{\beta_1} = -I = X^2 \Longrightarrow Y^{\beta_1} = X \in \langle X\rangle \cap \langle Y\rangle = H$$

en contra de que ni X ni X^3 están en H.

Si $\alpha=0$, $Y^{\beta_1}\in H$ y como $0\leq\beta_1\leq 2$ necesariamente $\beta_1=0$.

<u>Caso n>1</u>: Puesto que las matrices $XY = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $XY^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ están en el conjunto M definido en (6.1.2) y M es multiplicativamente cerrado, atendiendo a los posibles valores de α y de β_n tenemos el cuadro siguiente:

α	β_n	$X^\alpha Y^{\beta_1} X \ldots XY^{\beta_n}$	
0	0	$Y^{\beta_1} X$	$n=2$
0	0	$Y^{\beta_1} X \ldots XY^{\beta_{n-1}} X \in Y^{\beta_1} MX$	$n>2$
0	1	$Y^{\beta_1} X \ldots Y^{\beta_{n-1}} XY \in Y^{\beta_1} M$	
0	2	$Y^{\beta_1} X \ldots Y^{\beta_{n-1}} XY^2 \in Y^{\beta_1} M$	
1	0	$XY^{\beta_1} X \ldots XY^{\beta_{n-1}} X \in MX$	
1	1	$XY^{\beta_1} X \ldots Y^{\beta_{n-1}} XY \in M$	
1	2	$XY^{\beta_1} X \ldots Y^{\beta_{n-1}} XY^2 \in M$	

Si $Y^{\beta_1} X \in H$ tenemos,

$$Y^{\beta_1} X = I \Longrightarrow Y^{\beta_1} = X^3 \in \langle X\rangle \cap \langle Y\rangle = H$$

$$Y^{\beta_1} X = -I = X^2 \Longrightarrow Y^{\beta_1} = X \in \langle X\rangle \cap \langle Y\rangle = H$$

en contra de que ni X ni X^3 están en H. Además según (6.1.3) en ninguno de los otros casos puede ser un elemento de H.

Por lo tanto ψ es un isomorfismo.

(6.1.6) *Corolario*. La expresión obtenida en (6.1.4) para los elementos de $SL(2,\mathbb{Z})$ es única.

Demostración. Supongamos dos expresiones de un mismo elemento de $SL(2,\mathbb{Z})$, es decir:

$$X^\alpha Y^{\beta_1} XY^{\beta_2} \ldots XY^{\beta_n} = X^{\alpha'} Y^{\beta'_1} XY^{\beta'_2} \ldots XY^{\beta'_m}$$

donde: $n,m \geq 0$

$0 \leq \alpha, \alpha' \leq 3$

$1 \leq \beta_i, \beta'_j \leq 2$ para $1 \leq i < n$, $1 \leq j < m$

$0 \leq \beta_n, \beta'_m \leq 2$

Pasando al cociente $SL(2,\mathbb{Z}) / H$ se tiene:

$$X^{\alpha}Y^{\beta_1} \dots XY^{\beta_n}H = X^{\lambda}Y^{\beta_1} \dots XY^{\beta_n}H = \psi(a^{\lambda}b^{\beta_1} \dots ab^{\beta_n})$$

$$X^{\alpha'}Y^{\beta'_1} \dots XY^{\beta'}H = X^{\lambda'}Y^{\beta'_1} \dots XY^{\beta'_m}H = \psi(a^{\lambda'}b^{\beta'_1} \dots ab^{\beta'_m})$$

donde: $\lambda \equiv \alpha(2)$, $0 \leq \lambda \leq 1$ y $\lambda' \equiv \alpha'(2)$, $0 \leq \lambda' \leq 1$.

Puesto que ψ es inyectiva tenemos:

$$a^{\lambda}b^{\beta_1} \dots ab^{\beta_n} = a^{\lambda'}b^{\beta'_1} \dots ab^{\beta'_m}$$

lo que en el producto libre $\langle a \rangle * \langle b \rangle$ implica $\lambda = \lambda'$, $\beta_i = \beta'_i$ y $n=m$, por lo que simplificando en la igualdad inicial obtenemos $X^{\alpha} = X^{\alpha'}$ y puesto que X es una matriz de orden 4 y $0 \leq \alpha, \alpha' \leq 3$ necesariamente $\alpha = \alpha'$. En definitiva tenemos

$$n=m \quad ; \quad \alpha = \alpha' \quad , \quad \beta_i = \beta'_i \quad \text{para } 1 \leq i \leq n$$

(6.1.7) *Teorema*. $SL(2,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6$

Demostración. Consideremos en $SL(2,\mathbb{Z})$ las matrices $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, entonces:

$$\langle X \rangle \simeq \mathbb{Z}_4$$

$$\langle Y \rangle \simeq \mathbb{Z}_6$$

$$\langle X \rangle \cap \langle Y \rangle = H \simeq \mathbb{Z}_2$$

Para comprobar que $SL(2,\mathbb{Z})$ es el producto amalgamado de dos grupos cíclicos de ordenes 4 y 6 a través de otro de orden 2, basta comprobar que el siguiente cuadrado, formado por las inclusiones canónicas, es un push-out.

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \langle X \rangle \arrow[d, hook] \\
\langle Y \rangle \arrow[r, hook] & SL(2,\mathbb{Z})
\end{tikzcd}
$$

Supongamos un grupo G cualquiera y dos homomorfismos $f\colon \langle X\rangle \longrightarrow G$ y $g\colon \langle Y\rangle \longrightarrow G$ de manera que sus restricciones a H coinciden. Según (6.1.6) todo elemento de $SL(2,\mathbb{Z})$ se puede expresar de forma única como

$$X^{\alpha}Y^{\beta_1}X \ldots X\,Y^{\beta_n} \quad \text{con} \quad \begin{cases} n>0 \\ 0\leq\alpha\leq 3 \\ 1\leq\beta_i\leq 2 & \text{para } 1\leq i<n \\ 0\leq\beta_n\leq 2 \end{cases}$$

esto nos permite definir la aplicación $h\colon SL(2,\mathbb{Z}) \longrightarrow G$ como:

$$f(X^{\alpha}Y^{\beta_1}X\ldots XY^{\beta_n}) = f(X)^{\alpha}g(Y)^{\beta_1}\ldots f(X)g(Y)^{\beta_n}$$

que es fácil comprobar que se trata del único homomorfismo de $SL(2,\mathbb{Z})$ en G verificando $h(X)=f(X)$ y $h(Y)=g(Y)$.

(6.1.8) *Teorema*. $SL(2,\mathbb{Z})_{ab} \simeq \mathbb{Z}_{12}$

Demostración. Según vimos en la demostración de (6.1.4) las transvecciones

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

generan todo $SL(2,\mathbb{Z})$ y por lo tanto todo elemento de $SL(2,\mathbb{Z})_{ab}$ es de la forma:

$$T_1^{\alpha_1} T_2^{\beta_1} T_1^{\alpha_2} T_2^{\beta_2} \cdots T_1^{\alpha_n} T_2^{\beta_n}\, SL(2,\mathbb{Z})' \quad \text{con} \begin{cases} n>0 \\ \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Por otro lado se tiene:

$$T_1\, T_2 = [X,Y] \in SL(2,\mathbb{Z})' \quad \text{siendo} \begin{cases} X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \\ Y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

y por lo tanto $T_1 = [X,Y]T_2^{-1}$ de donde se deduce que todo elemento de $SL(2,\mathbb{Z})_{ab}$ es una potencia de $T_2 SL(2,\mathbb{Z})'$ y por tanto $SL(2,\mathbb{Z})_{ab}$ es cíclico.

Consideremos ahora el funtor S de la categoría de grupos en la categoría de grupos abelianos que a cada grupo le asocia su abelianizado. Puesto que S es adjunto a la izquierda del funtor inclusión [20] (Cap. 1 - Ej. e - pg. 36) S conserva push-outs, y como consecuencia el transformado de

$$SL(2,\mathbb{Z}) \simeq \langle X \rangle *_H \langle Y \rangle \simeq \mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6$$

es un push-out en la categoría de grupos abelianos.

$$\begin{array}{ccccccc} H & \longrightarrow & \langle X \rangle & & H = H_{ab} & \longrightarrow & \langle X \rangle_{ab} = \langle X \rangle \\ \downarrow & & \downarrow & \xrightarrow{S} & \downarrow & & \downarrow \\ \langle Y \rangle & \longrightarrow & SL(2,\mathbb{Z}) & & \langle Y \rangle = \langle Y \rangle_{ab} & \longrightarrow & SL(2,\mathbb{Z})_{ab} \end{array}$$

Según [13] (Cap. 11 - Tma. 11.33 - pg. 270) se tiene:

$$SL(2,\mathbb{Z})_{ab} \simeq \frac{\langle X\rangle \times \langle Y\rangle}{N}$$

donde N es el subgrupo de $\langle X\rangle \times \langle Y\rangle$ generado por (X^2,Y^3) por lo que N es de orden 2 y

$$|SL(2,\mathbb{Z})_{ab}| = \frac{|\langle X\rangle \times \langle Y\rangle|}{|N|} = 12$$

(6.1.9) *Teorema*. $SL(2,\mathbb{Z})'$ es libre.

Demostración. Según (6.1.5) $SL(2,\mathbb{Z})/H \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ siendo $H=\{I,-I\}$, por lo tanto,

$$\left(\frac{SL(2,\mathbb{Z})}{H}\right)' \simeq (\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3)'$$

Por un lado, según [17] (Cap. 1 - Prop. 4 - pg. 14) tenemos que $(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3)'$ es libre. Por otro lado,

$$\left(\frac{SL(2,\mathbb{Z})}{H}\right)' \simeq \frac{SL(2,\mathbb{Z})'}{H \cap SL(2,\mathbb{Z})'}$$

Si comprobamos que $H \cap SL(2,\mathbb{Z})' = 1$ tendremos que $SL(2,\mathbb{Z})'$ es libre.

Si suponemos $H \cap SL(2,\mathbb{Z})' \neq 1$ tenemos $H \cap SL(2,\mathbb{Z})' = H$ y,

$$\left(\frac{SL(2,\mathbb{Z})}{H}\right)_{ab} \simeq \frac{SL(2,\mathbb{Z})/H}{(SL(2,\mathbb{Z})/H)'} \simeq \frac{SL(2,\mathbb{Z})/H}{SL(2,\mathbb{Z})'/H} \simeq \frac{SL(2,\mathbb{Z})}{SL(2,\mathbb{Z})'}$$

con lo que $\left(\frac{SL(2,\mathbb{Z})}{H}\right)_{ab}$ sería de orden 12.

Por otro lado, según [13] (Cap. 11 - Prop. 11.33 - - pg. 270) tenemos,

$$\left(\frac{SL(2,\mathbb{Z})}{H}\right)_{ab} \simeq (\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3)_{ab} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$$

con lo que $\left(\frac{SL(2,\mathbb{Z})}{H}\right)_{ab}$ es de orden 6.

Por lo tanto $H \cap SL(2,\mathbb{Z})' = 1$ y $SL(2,\mathbb{Z})'$ es libre.

(6.1.10) *Corolario.* $SL(2,\mathbb{Z})$ es virtualmente libre de torsión y vcd $SL(2,\mathbb{Z}) = 1$.

Demostración. Según (6.1.8) $SL(2,\mathbb{Z})'$ es un subrupo normal de $SL(2,\mathbb{Z})$ de índice 12, además $SL(2,\mathbb{Z})'$ es libre de torsión como consecuencia de (6.1.9) y por lo tanto $SL(2,\mathbb{Z})$ es virtualmente libre de torsión.

Por otro lado (3.1.9) nos demuestra que cd $SL(2,\mathbb{Z})' \leq 1$ ya que $SL(2,\mathbb{Z})'$ es libre. Además si cd $SL(2,\mathbb{Z})'$ fuera cero, por (3.1.5) tendríamos $SL(2,\mathbb{Z})'=1$ con lo que $SL(2,\mathbb{Z})$ sería isomorfo a su abelianizado y como consecuencia de (6.1.8) sería finito. Por lo tanto,

$$\text{vcd } SL(2,\mathbb{Z}) = \text{cd } SL(2,\mathbb{Z})' = 1$$

Como consecuencia de esto tiene sentido considerar la cohomología de Farrell de $SL(2,\mathbb{Z})$.

(6.2) PERIODICIDAD DE SL(2,$\mathbb{Z}$)

(6.2.1) *Teorema*. SL(2,$\mathbb{Z}$) es periódico de período 2.

Demostración. Puesto que según (1.1.10) todo grupo cíclico finito es periódico de período 2, en particular según (6.1.8) $SL(2,\mathbb{Z})_{ab}$ es periódico de período 2 y en virtud de (6.1.10) es aplicable al grupo SL(2,$\mathbb{Z}$) el teorema fundamental de periodicidad (5.3.6) por el que concluimos que SL(2,$\mathbb{Z}$) es periódico de período un divisor de 2.

Puesto que $SL(2,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6$, según (6.1.7), es utilizable para SL(2,$\mathbb{Z}$) la sucesión exacta de Mayer-Vietoris [23] (Tma. 2.3 - pgs. 592-593), que particularizada a $\mathbb{Z}$ como SL(2,$\mathbb{Z}$)-módulo trivial nos da $\forall n \geq 0$ la siguiente sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow H^n(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \longrightarrow H^n(\mathbb{Z}_4,\mathbb{Z}) \oplus H^n(\mathbb{Z}_6,\mathbb{Z}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^n(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{n+1}(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots$$

Teniendo en cuenta (1.1.10) y (4.3.1), para un q suficientemente grande tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \hat{H}^{2q}(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\gamma} \hat{H}^{2q+1}(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

Como consecuencia de la exactitud tenemos:

$$|\hat{H}^{2q}(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})| = |\mathrm{Im}\,\alpha| = |\ker\beta| =$$

$$= \frac{|\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6|}{[\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6 : \ker\beta]} = \frac{24}{|\mathrm{Im}\,\beta|} = \frac{24}{|\ker\gamma|}$$

Puesto que γ es suprayectiva, $\hat{H}^{2q+1}(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ es de orden 1 o 2 y en cada uno de estos casos tenemos:

$$|\hat{H}^{2q+1}(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})| = 1 \Longrightarrow |\ker\gamma| = 2 \Longrightarrow |\hat{H}^{2q}(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})| = 12$$

$$|\hat{H}^{2q+1}(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})| = 2 \Longrightarrow |\ker\gamma| = 1 \Longrightarrow |\hat{H}^{2q}(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})| = 24$$

Como consecuencia $\hat{H}^{2q}(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ y $\hat{H}^{2q+1}(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ no pueden tener el mismo orden y por lo tanto el período de $SL(2,\mathbb{Z})$ no puede ser uno.

(6.3) <u>COHOMOLOGIA DE FARRELL DE SL(2,ℤ) CON COEFICIENTES EN ℤ</u>

(6.3.1) <u>*Teorema*</u>. Para todo entero q se tiene:

$$\hat{H}^{2q}(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_{12}$$

$$\hat{H}^{2q+1}(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) = 0$$

Demostración. Según [9] (Cap. VI - Apt. 4 - pgs. 192-193) tenemos:

$$H^1(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}(H_1(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}(SL(2,\mathbb{Z})_{ab},\mathbb{Z})$$

y puesto que $SL(2,\mathbb{Z})_{ab} \simeq \mathbb{Z}_{12}$ según (6.1.8) se tiene:

$$H^1(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{12},\mathbb{Z}) = 0$$

Puesto que según (6.1.10) vcd $SL(2,\mathbb{Z}) = 1$, aplicando (4.3.1) obtenemos un epimorfismo de $H^1(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ sobre $\hat{H}^1(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ con lo que $\hat{H}^1(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) = 0$ y puesto que $SL(2,\mathbb{Z})$ es periódico de período 2 tenemos:

$$\hat{H}^{2q+1}(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) = 0 \qquad \forall q \in \mathbb{Z}$$

Según hemos visto en la demostración de (6.2.1), como $\hat{H}^{2q+1}(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ es de orden 1, necesariamente

$$|\hat{H}^{2q+1}(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})| = 12$$

Por otro lado, haciendo uso de (6.1.10) y de (4.3.1) tenemos:

$$\hat{H}^{2}(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) = H^{2}(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$$

y teniendo en cuenta [9] (Cap. VI - Tma. 15.1 - pg. 222) tenemos:

$$\hat{H}^{2}(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Ext}(H_1(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Hom}(H_2(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \simeq$$

$$\simeq \mathrm{Ext}(SL(2,\mathbb{Z})_{ab},\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Hom}(H_2(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$$

además puesto que $SL(2,\mathbb{Z})_{ab} \simeq \mathbb{Z}_{12}$ se tiene:

$$\hat{H}^{2}(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_{12},\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Hom}(H_2(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \simeq$$

$$\simeq \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathrm{Hom}(H_2(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$$

y como el orden de $\hat{H}^{2}(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ ha de ser 12 tenemos finalmente:

$$\hat{H}^{2}(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_{12}$$

y por periodicidad de $SL(2,\mathbb{Z})$ tenemos:

$$\hat{H}^{2q}(SL(2,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_{12} \qquad \forall q \in \mathbb{Z}$$

CAPITULO - 7

p - PERIODICIDAD DE LOS GRUPOS SL(n,$\mathbb{Z}$)

Este capítulo está dedicado al estudio de la p-periodicidad de los grupos de matrices SL(n,$\mathbb{Z}$) para n>2.

(7.1) p-PERIODICIDAD DE LOS GRUPOS SL(n,$\mathbb{Z}$)

(7.1.1) *Definición*. Representaremos por SL(n,$\mathbb{Z}$) al grupo multiplicativo de las matrices nxn (n>1) con términos en $\mathbb{Z}$ y determinante 1.

(7.1.2) *Definición*. Dado t>1, representaremos por SL(n,t) al grupo multiplicativo de las matrices nxn (n>1) con términos en el anillo $\mathbb{Z}_t$ y de determinante $\overline{1}$.

(7.1.3) *Lema*. El grupo SL(n,$\mathbb{Z}$) es virtualmente libre de torsión de dimensión cohomológica virtual finita. Además SL(n,$\mathbb{Z}$) admite una resolución completa de Farrell (X,C) donde los X_i son SL(n,$\mathbb{Z}$)-módulos finitamente generados.

Demostración. Aplicando [16] (Cap. 2 - Tma. 4 - pg. 124) al caso K=Q, L=SL(n,Q) y Γ=SL(n,$\mathbb{Z}$) $\leq$ SL(n,Q) se obtiene que SL(n,$\mathbb{Z}$) tiene un subgrupo normal T de índice finito y libre de torsión para el que existe una resolución finita de $\mathbb{Z}$ por T-módulos libres finitamente generados. Además como consecuencia de [16] (Cap. 1 - Apt. 8 - pg. 101), $\mathbb{Z}$ admite una resolución:

$$\cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{k_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

con los P_i $SL(n,\mathbb{Z})$-módulos libres finitamente generados.

Por todo esto, $SL(n,\mathbb{Z})$ es virtualmente libre de torsión y puesto que $\mathbb{Z}$ admite una resolución finita de T-módulos libres, según (3.1.2) T es de dimensión cohomológica finita y por consiguiente vcd $SL(n,\mathbb{Z})$ es finita y tiene sentido hablar de la cohomología de Farrell de $SL(n,\mathbb{Z})$.

Puesto que $SL(n,\mathbb{Z})/T$ es un grupo finito, admite una resolución completa por $SL(n,\mathbb{Z})/T$-módulos libres finitamente generados,

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & Y_i \arrow[r, "d'_i"] & Y_{i-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Y_0 \arrow[rr, "d'_0"] \arrow[dr] & & Y_{-1} \arrow[r] & \cdots \\ & & & & & \mathbb{Z} \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Según el teorema de existencia de resoluciones completas de Farrell (4.1.8), se obtiene una resolución completa (X,C) para $SL(n,\mathbb{Z})$ en la que

$$X_i = Y_{i-t} \otimes \operatorname{Im} k_t$$

siendo t la dimensión cohomológica de T. Además como Y_{i-t} es $SL(n,\mathbb{Z})/T$-módulo de tipo finito e Im k_t es $SL(n,\mathbb{Z})$-módulo finitamente generado por ser imagen epimorfa de un $SL(n,\mathbb{Z})$-módulo finitamente generado, X_i resulta ser $SL(n,\mathbb{Z})$-módulo por acción diagonal también de tipo finito.

(7.1.4) *Lema*. Dado un primo q, el conjunto $G(n,q)$ de las matrices de $SL(n,\mathbb{Z})$ congruentes módulo q con la matriz unidad es un subgrupo normal de $SL(n,\mathbb{Z})$ que verifica:

1) $SL(n,q)$ contiene a $\dfrac{SL(n,\mathbb{Z})}{G(n,q)}$ como subgrupo.

2) Si $q\neq 2$ $G(n,q)$ el libre de torsión de dimensión cohomológica finita.

Demostración.

$$G(n,q) = \{A \in SL(n,\mathbb{Z}) \ / \ A \equiv I\,(q)\} =$$

$$= \{[a_{ij}] \in SL(n,\mathbb{Z}) \ / \ a_{ij}\equiv 0\,(q) \ \ \forall i\neq j \ , \ a_{ii}\equiv 1\,(q)\}$$

1) Teniendo en cuenta la definición de determinante de una matriz cuadrada, si $\det[a_{ij}] = 1$ entonces $\det[\overline{a_{ij}}] = \overline{\det[a_{ij}]} = \overline{1}$ donde $\overline{a}$ representa la clase del entero a en $\mathbb{Z}_q$. Como consecuencia podemos definir la siguiente aplicación:

$$\psi : SL(n,\mathbb{Z}) \longrightarrow SL(n,q)$$
$$[a_{ij}] \longmapsto [\overline{a_{ij}}]$$

ψ es homomorfismo:

$$\psi([a_{ij}]\times[b_{ij}]) = \psi([\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}]) = [\overline{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}}] =$$

$$= [\sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ik}b_{kj}}] = [\overline{a_{ij}}][\overline{b_{ij}}] = \Psi([a_{ij}])\times\Psi([b_{ij}])$$

$$\ker\Psi = \{[a_{ij}] \in SL(n,\mathbb{Z}) \ / \ [\overline{a_{ij}}] = I\} =$$

$$= \{[a_{ij}] \in SL(n,\mathbb{Z}) \ / \ \overline{a_{ij}}=\overline{0} \ \ \forall i\neq j \ , \ \overline{a_{ii}}=\overline{1}\} =$$

$$= \{[a_{ij}] \in SL(n,\mathbb{Z}) \ / \ a_{ij}\equiv 0\,(q) \ \ \forall i\neq j \ , \ a_{ii}\equiv 1\,(q)\} =$$

$$= \ G(n,q)$$

Por consiguiente G(n,q) es un subgrupo normal de SL(n,$\mathbb{Z}$) y SL(n,$\mathbb{Z}$) / G(n,q) es isomorfo a un subgrupo de SL(n,q).

2) Si $q\neq 2$, según [12] (Cap. 7), G(n,q) es libre de torsión. Además G(n,q) es de índice finito en SL(n,$\mathbb{Z}$) como consecuencia del apartado anterior y puesto que según (7.1.3) SL(n,$\mathbb{Z}$) es virtualmente libre de torsión de dimensión cohomológica virtual finita, por (3.2.3) se obtiene que G(n,q) tiene dimensión cohomológica finita.

(7.1.5) *Lema*. Sea p un primo, $p\neq 2$, entonces existen infinitos primos q de manera que $q^{p-1}\equiv 1(p)$, $q^{p-1}\not\equiv 1(p^2)$ y $q^i\not\equiv 1(p)$ para $1\leq i<p-1$.

Demostración. Puesto que p es primo impar, $(\mathbb{Z}_p^*,\cdot)$ es un grupo cíclico de orden $p-1>1$. Si $\bar{a}$ es un generador de $\mathbb{Z}_p^*$ entonces:

$$a^{p-1}\equiv 1\ (p) \quad y \quad a^i\not\equiv 1\ (p) \quad 1\leq i<p-1$$

Por otro lado,

$$(a+p)^{p-1} = a^{p-1} + \binom{p-1}{1}a^{p-2}p + \underbrace{\sum_{i=2}^{p-1}\binom{p-1}{i}a^{p-1-i}p^i}_{\beta p^2} =$$

$$= a^{p-1} + (p-1)a^{p-2}p + \beta p^2 = a^{p-1} - a^{p-2}p +$$

$$+ (a^{p-2} + \beta)p^2.$$

Si $a^{p-1}\equiv 1\,(p^2)$ entonces $\exists\ \alpha \in \mathbb{Z}$ / $a^{p-1} = 1 + \alpha p^2$ y por lo tanto,

$$(a + p)^{p-1} = 1 - a^{p-2}p + (\alpha + a^{p-2} + \beta)p^2$$

de donde $(a + p)^{p-1} \equiv 1 - a^{p-2}p\ (p^2)$.

Por otro lado, puesto que $\overline{a}$ es generador de $\mathbb{Z}_p^*$, se tiene $(a^{p-2},p)=1$ y por lo tanto $a^{p-2}p$ no es múltiplo de p^2 de donde

$$(a+p)^{p-1} \not\equiv 1\,(p^2)$$

Además $\overline{a+p}=\overline{a}$ y por lo tanto $\overline{a+p}$ sigue siendo generador de $\mathbb{Z}_p^*$.

En síntesis siempre existe un generador $\overline{g}$ de $\mathbb{Z}_p^*$ cumpliendo:

$$\begin{cases} g^{p-1} \equiv 1\,(p) \\ g^{p-1} \not\equiv 1\,(p^2) \\ g^i \not\equiv 1\,(p) \quad \text{para } 1 \leqq i < p-1 \end{cases}$$

Consideremos ahora la progresión aritmética $g+p^2\mathbb{Z}$. Puesto que $(g,p^2)=1$, ya que $\overline{g}$ es generador de $\mathbb{Z}_p^*$, es aplicable el Teorema de Dirichlet [18] (Cap. 8 - Apt. 8.2 - pg. 117) del que se deduce que en la progresión $g+p^2\mathbb{Z}$ hay infinitos números primos cualquiera de los cuales será de la forma $q=g+\alpha p^2$ con $\alpha\in\mathbb{Z}$ y por lo tanto $\overline{q}$ sigue siendo generador de $\mathbb{Z}_p^*$, con lo que:

$$q^{p-1} \equiv 1\,(p) \quad \text{y} \quad q^i \not\equiv 1\,(p) \quad 1 \leqq i < p-1$$

además si $q^{p-1} \equiv 1\,(p^2)$ se tendría:

$$q^{p-1} \equiv 1\,(p^2) \Longrightarrow g^{p-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p-1}{i} g^{p-1-i}(\alpha p^2)^i \equiv 1\,(p^2) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow g^{p-1} \equiv 1\,(p^2)$$

en contra de la elección de g.

(7.1.6) *Lema.* Sea p un primo y $t>1$, si p^2 no divide a $|SL(n,t)|$ entonces $SL(n,t)$ es p-periódico de p-período un divisor de $2(p-1)$.

Demostración. Notemos en primer lugar que puesto que $SL(n,t)$ es finito, tiene sentido hablar de su cohomología de Farrell que coincide con la de Tate. Además según (1.1.4) para todo entero r se tiene $|SL(n,t)|\hat{H}^r SL(n,t) = 0$ y por lo tanto, si p no divide a $|SL(n,t)|$ tenemos:

$$p - \hat{H}^r SL(n,t) = 0 \qquad \forall r \in \mathbb{Z}$$

y por lo tanto $SL(n,t)$ es p-periódico de p-período 1.

Por otro lado, si p divide a $|SL(n,t)|$, como por hipótesis p^2 no divide al orden de $SL(n,t)$, todo p-subgrupo de Sylow de $SL(n,t)$ tiene orden p y por tanto es cíclico. Como consecuencia de [1] (Cap. XII - Prob. 11 - pg. 265) $SL(n,t)$ es p-periódico.

Según [21] (Tma. 2 - pg. 341) el p-período de $SL(n,t)$ es $2|\phi_p|$ donde ϕ_p es el grupo de los automorfismos de un p-subgrupo de Sylow P de $SL(n,t)$ que son inducidos por los automorfismos internos de $SL(n,t)$. Puesto que ϕ_p es subgrupo de $Aut(P)$ y $|Aut(P)|=p-1$ entonces $|\phi_p|$ divide a $p-1$ y por consiguiente el p-período de $SL(n,t)$ es un divisor de $2(p-1)$.

(7.1.7) *Teorema.* $SL(n,\mathbb{Z})$ es p-periódico de p-período un divisor de $2(p-1)$ para todo primo $p>\frac{n}{2}+1$.

Demostración. Sea p un primo, $p>\frac{n}{2}+1$. Puesto que $p\neq 2$, según (7.1.5) encontramos un primo $2\neq q\neq p$ de manera que:

$$q^{p-1} \equiv 1\ (p) \quad , \quad q^{p-1} \not\equiv 1\ (p^2) \quad y \quad q^i \not\equiv 1\ (p),\ 1 \leq i < p-1$$

Además según [13] (Cap. 8 - Tmas. 8.8-8.15 - pgs. 156-160),

$$|SL(n,q)| = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=2}^{n} (q^k - 1)$$

y como por la elección de q se tiene:

$$p \mid q^k-1 \iff p-1 \mid k$$

al ser p distinto de q, en la descomposición dada de $|SL(n,q)|$ p solamente puede dividir a los factores de la forma $q^{\alpha(p-1)}$. Además como $p\neq 2$, $p-1\geq 2$ y como por hipótesis $p>\frac{n}{2}+1$, tenemos $n<2(p-1)$ de donde p solamente divide al factor $q^{p-1}-1$ de la descomposición de $|SL(n,q)|$. Por otro lado, por la elección de q se tiene que p^2 no es un divisor de $q^{p-1}-1$ con lo que p^2 no divide a $|SL(n,q)|$ y es aplicable (7.1.6). Como consecuencia SL(n,q) es p-periódico de p-período un divisor de 2(p-1).

Por otro lado según (7.1.4), G(n,q) es libre de torsión de dimensión cohomológica finita y $SL(n,\mathbb{Z})$ / G(n,q) es isomorfo a un subgrupo de SL(n,q) por lo que aplicando (5.2.1), el cociente $SL(n,\mathbb{Z})$ / G(n,q) resulta ser p-periódico de p-período un divisor de 2(p-1). Además, teniendo en cuenta (7.1.3) es aplicable el teorema fundamental de p-periodicidad (5.3.5) de donde $SL(n,\mathbb{Z})$ resulta ser p-periódico de p-período un divisor de 2(p-1).

(7.1.8) *Lema.* $SL(n,\mathbb{Z})$ contiene al grupo alternado A_n como subgrupo.

Demostración. Consideremos la base canónica de $\mathbb{R}^n$ $\{e_1,e_2,\dots e_n\}$. Para toda permutación σ de A_n existe una única aplicación lineal f_σ tal que $f_\sigma(e_i)=e_{\sigma(i)}$ $1\leq i\leq n$. Sea M_σ la matriz asociada a f_σ. Puesto que $\sigma\in A_n$ y $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, el determinante de M_σ obviamente vale 1 por lo que $M_\sigma\in SL(n,\mathbb{Z})$. Como consecuencia podemos definir la aplicación

$$\begin{aligned} \psi : A_n &\longrightarrow SL(n,\mathbb{Z}) \\ \sigma &\longrightarrow M_\sigma \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que ψ es un monomorfismo de grupos por lo que A_n puede considerarse como subgrupo de $SL(n,\mathbb{Z})$.

(7.1.9) *Lema.* El grupo alternado A_n es p-periódico de p-período 2(p-1) para cualquier primo p tal que $\frac{n}{2}+1 < p \leq n-2$.

Demostración. Puesto que $p > \frac{n}{2}+1$, $SL(n,\mathbb{Z})$ es p-periódico de p-período un divisor de 2(p-1) según (7.1.7). Además, como A_n es subgrupo de $SL(n,\mathbb{Z})$, aplicando (5.2.1) A_n es también p-periódico de p-período un divisor de 2(p-1).

Puesto que $2 \neq p \leq n-2$ tenemos que p divide a $n!/2$ y como $p > \frac{n}{2}+1 > \frac{n}{2}$ se tiene $2p > n$ y por lo tanto p^2 no divide a $n!/2$. Como consecuencia todo p-subgrupo de Sylow de A_n es cíclico de orden p generado por un ciclo de longitud p.

Según [21] (Tma. 2 - pg. 341) el p-período de A_n es $2|\phi_p|$ siendo ϕ_p el grupo de los automorfismos de un p-subgrupo de Sylow P de A_n que son inducidos por automorfismos internos de A_n. Si $\sigma=(a_1,a_2,\dots,a_p)$ es un generador de P, todo automorfismo de P viene determinado por la imagen σ^r $1\leq r\leq p-1$ del generador σ. Pero σ y σ^r son permutaciones del mismo tipo y por lo tanto son conjugadas en Σ_n, veamos que también lo son en A_n.

$$\exists \tau_r \in \Sigma_n \quad / \quad \sigma^r = \tau_r \sigma \tau_r^{-1}$$

- si $\tau_r \in A_n$ entonces σ y σ^r son conjugadas en A_n.
- si $\tau_r \notin A_n$ entonces, como $p \leq n-2$, existen a_{p+1} y a_{p+2} distintos de manera que σ y (a_{p+1},a_{p+2}) son ciclos disjuntos, además $\tau_r(a_{p+1},a_{p+2}) \in A_n$ y

$$\tau_r(a_{p+1},a_{p+2})\,\sigma\,(a_{p+1},a_{p+2})^{-1}\tau_r^{-1} = \tau_r \sigma \tau_r^{-1} = \sigma^r$$

y como consecuencia σ y σ^r son conjugadas en A_n.

Por lo tanto todo automorfismo de P es inducido por un automorfismo interno de A_n y como consecuencia $\phi_p = \mathrm{Aut}(P)$ y el p-período de A_n es exactamente $2|\phi_p| = 2|\mathrm{Aut}(P)| = 2(p-1)$.

(7.1.10) *Teorema*. $SL(n,\mathbb{Z})$ es p-periódico de p-período $2(p-1)$ para cualquier primo p tal que $\frac{n}{2} + 1 < p \leqq n-2$.

Demostración. Puesto que $p > \frac{n}{2} + 1$, según (7.1.7) $SL(n,\mathbb{Z})$ es p-periódico de p-período n_p divisor de $2(p-1)$.

Por otro lado, como A_n es subgrupo de $SL(n,\mathbb{Z})$, según (5.2.1) el p-período de A_n es divisor de n_p, pero por (7.1.9) el p-período de A_n es $2(p-1)$. Como consecuencia el p-período de $SL(n,\mathbb{Z})$ es exactamente $2(p-1)$.

A P E N D I C E

ACCION DE UN GRUPO SOBRE UN PRODUCTO DE ESFERAS

Los grupos finitos con cohomología periódica adquirieron especial importancia a finales de la década de los 50 después de que Cartan y Eilenberg en [1] (Cap. XVI - Apt. 9 - pg. 356) demostraran, haciendo uso de la sucesión espectral asociada a un recubrimiento, que todo grupo finito que opera sin puntos fijos sobre una esfera de dimensión impar n es periódico de período un divisor de n+1. (Para n par los únicos grupos que pueden actuar sin puntos fijos sobre una esfera son G=1 y $G=\mathbb{Z}_2$).

Las definiciones introducidas y los resultados obtenidos en el capítulo 2, permiten generalizar (utilizando un teorema de G. Lewis [10]) el resultado de Cartan y Eilenberg a grupos que operan sobre un producto de esferas de la misma dimensión. En cierto modo el estudio de los grupos semiperiódicos y de tipo MSP surgió a partir de esta aplicación topológica.

Definición 1. Un grupo finito G diremos que opera sobre un espacio topológico X si existe un homomorfismo de G en el grupo Homeo(X) de los homeomorfismos de X.

Cada elemento de G puede entonces interpretarse como un homeomorfismo de X de manera que para todo $x \in X$ y todo par de elementos $g_1, g_2 \in G$ se cumple:

$$1x = x \qquad g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$$

Si para cualquier elemento $g \in G$, $g \neq 1$, se verifica que $gx \neq x$ $\forall x \in X$, diremos que G opera sobre X sin puntos fijos.

Si G opera sobre X, G opera también sobre los grupos de cohomología de X; así pues $H^n X$ es un G-módulo para todo $n \geq 0$. Resulta inmediato que $H^0 X$ es siempre G-módulo trivial.

Definición 2. Dada una variedad compacta X de dimensión 2n, $n > 0$, diremos que el grupo finito G opera sobre X conservando la orientación si G opera sobre X en el sentido de la definición anterior y la estructura de G-módulo del grupo abeliano $H^{2n} X$ es la trivial.

Es fácil comprobar que si el grupo finito G opera conservando la orientación sobre un producto de esferas de la misma dimensión $S^n x S^n$, el G-módulo $H^n X = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ es trivial.

En [10] (Prop. 2.12 - pg. 538) G. Lewis demuestra que los únicos grupos que pueden operar conservando la orientación sobre el producto de dos esferas $S^n x S^n$ con n par son 1 y $\mathbb{Z}_2$, por lo que el estudio de la acción de un grupo finito sobre el producto de dos esferas de la misma dimensión $S^n x S^n$, conservando la orientación, lo podemos reducir al caso en que n es impar.

Teorema. Si un grupo finito G opera sin puntos fijos, conservando la orientación, sobre un producto de esferas $S^n x S^n$ (o sobre una variedad compacta cohomológicamente equivalente a $S^n x S^n$) con n impar, necesariamente G es semiperiódico y n+1 es un semiperíodo de G.

Demostración. En [10] (Cor. 2.7 - pg. 535) G. Lewis demuestra que bajo las condiciones exigidas, se tiene la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \hat{H}^n G \xrightarrow{\alpha} \hat{H}^{n+1} G \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_{|G|} \oplus \mathbb{Z}_{|G|} \xrightarrow{\gamma} \hat{H}^{n+1} G \xrightarrow{\delta} \hat{H}^n G \longrightarrow 0$$

Puesto que α es monomorfismo, la exactitud de la sucesión implica que:

$$\frac{\hat{H}^{n+1} G}{\hat{H}^n G} \simeq \frac{\hat{H}^{n+1} G}{\operatorname{Im}\alpha} \simeq \frac{\hat{H}^{n+1} G}{\ker\beta} \simeq \operatorname{Im}\beta \simeq \ker\gamma \simeq \mathbb{Z}_{|G|} \oplus \mathbb{Z}_{|G|}$$

con lo que $\hat{H}^{n+1} G / \hat{H}^n G$ es suma de dos grupos cíclicos y además $|\hat{H}^{n+1} G| = |\hat{H}^n G|\,|\ker\gamma|$.

Por ser δ epimorfismo se tiene:

$$\hat{H}^n G \simeq \frac{\hat{H}^{n+1} G}{\ker\delta} \simeq \frac{\hat{H}^{n+1} G}{\operatorname{Im}\gamma}$$

de donde $|\hat{H}^{n+1} G| = |\hat{H}^n G|\,|\operatorname{Im}\gamma|$, que junto con la igualdad anterior nos da $|\ker\gamma| = |\operatorname{Im}\gamma|$.

Por otro lado,

$$\frac{\mathbb{Z}_{|G|} \oplus \mathbb{Z}_{|G|}}{\ker\gamma} \simeq \operatorname{Im}\gamma$$

de donde $|G|^2 = |\ker\gamma|\,|\operatorname{Im}\gamma| = |\ker\gamma|^2$ y por lo tanto $|G| = |\ker\gamma|$.

Con todo esto se concluye que:

$$\frac{\hat{H}^{n+1} G}{\hat{H}^n G} \simeq \mathbb{Z}_{a(n+1)} \oplus \mathbb{Z}_{b(n+1)}$$

con $a(n+1)b(n+1)=|G|$, por lo que en virtud de la definición (2.1.1), n+1 es un semiperíodo de G.

<u>*Corolario 1*</u>. Los grupos $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ con p primo, no operan sin puntos fijos conservando la orientación, sobre un producto de esferas $S^n x S^n$ para ningún n.

Demostración. Es consecuencia inmediata de [10] (Prop. 2.12 - - pg. 538) y de la caracterización dada en (2.3.2) de los grupos abelianos semiperiódicos, ya que si n es impar, según el teorema anterior, n+1 sería un semiperíodo de $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$.

<u>*Corolario 2*</u>. Si un grupo finito G opera sin puntos fijos y conservando la orientación sobre un producto de esferas $S^n x S^n$, todo subgrupo abeliano de G es cíclico o suma directa de dos cíclicos.

Demostración. Puesto que si un grupo finito G opera sin puntos fijos, conservando la orientación, sobre un espacio topológico X, también lo hacen sus subgrupos, este corolario es consecuencia de [10] (Prop. 2.12 - pg. 538), del teorema anterior y de la caracterización dada en (2.3.2) para grupos abelianos semiperiódicos.

<u>*Corolario 3*</u>. Sea G una extensión escindible de un grupo cíclico de orden r por otro cíclico de orden s, es decir:

$$G = \langle x,y \mid x^r = y^s = 1 \ , \ y^{-1}xy = x^t \rangle$$

donde $t^s \equiv 1 \, (r)$. Si G opera sin puntos fijos, conservando la orientación, sobre un producto de esferas $S^n x S^n$, necesariamente $n = 2ke - 1$ para algún $k>0$, siendo e el menor entero positivo tal que $t^e \equiv 1 \, (r)$.

Demostración. Según [10] (Prop. 2.12 - pg. 538) n es necesariamente impar y como consecuencia del teorema anterior n+1=2m es un semiperíodo de G. El corolario es ahora consecuencia inmediata del resultado obtenido en (2.5.1).

Si X es una variedad compacta verificando:

$$H^i(X,\mathbb{Z}_p) = H^i(S^n x S^n,\mathbb{Z}_p)$$

para todo primo p, es decir, cohomológicamente equivalente a un producto de esferas módulo p para todo p, se puede aplicar la sucesión espectral de Swan de manera análoga a como se hace en [2] para demostrar la existencia de una sucesión exacta análoga a la obtenida por G. Lewis en [10] (Cor. 2.7 - pg. 535) pero en la que cada grupo queda sustituido por su componente p-primaria. Se puede hablar entonces de los grupos p-semiperiódicos y de tipo p-MSP y obtener para ellos resultados análogos a los del capítulo 2.

B I B L I O G R A F I A

1.- CARTAN, H. - EILENBERG, S.
Homological Algebra. Princeton University Press (1973)

2.- CASTELLET, M.
Grupos con cohomología periódica y espacios que admiten recubrimientos esfericos. Publicaciones de la Universidad de Barcelona (1973)

3.- COHEN, D.
Groups of cohomological dimension one. Lecture Notes in Mathematics 245 (1972)

4.- DUNWOODY, M.
Accesibility and groups of cohomological dimension one. Proc. London Math. Soc (3) 38 (193-215) (1979)

5.- ECKMANN, B.
Some recent developements in the homology theory of groups. Preprint (1979)

6.- FARRELL, T.
An extension of Tate cohomology to a class of infinite groups. Journal of Pure and Applied Algebra 10 (153-161) (1977)

7.- FUCHS, L.
Infinite abelian groups. Academic Press (1970)

8.- GRUENBERG, K.
Cohomological topics in group theory. Lecture Notes in Mathematics 143 (1970)

9.- HILTON, P. - STAMMBACH, U.
A course in homological algebra. Springer Verlag (1970)

10.- LEWIS, G.
Free actions on $S^n x S^n$. Trans. Amer. Math. Soc. 132 (531-540) (1968)

11.- MACLANE, S.
Homology. Springer Verlag (1975)

12.- NEWMAN, N.
Integral matrices. Academic Press (1972)

13.- ROTMAN, J.
The theory of groups. Allyn and Bacon (1973)

14.- ROTMAN, J.
An introduction to homological algebra. Academic Press (1979)

15.- SERRE, J.P.
Sur la dimension cohomologique des groupes profinis. Topology 3 (413-420) (1965)

16.- SERRE, J.P.
Cohomologie des groupes discretes. Ann. of Math. Studies 70 (77-169) (1971)

17.- SERRE, J.P.
Arbres, amalgames et SL_2. Société Mathématique de France. Asterisque 46 (1977)

18.- SHOCKLEY, J.
Introduction to number theory. Holt-Rinehart and Winston (1967)

19.- STALLINGS, J.
On torsion free groups with infinitely many ends. Ann. of Math. 88 (312-334) (1968)

20.- STROOKER, J.R.
Introduction to categories, homological algebra and sheaf cohomology. Cambridge Univ. Press (1978)

21.- SWAN, R.
The p-period of a finite group. Illinois Journal of Math. 4 (341-346) (1960)

22.- SWAN, R.
Periodic resolutions for finite groups. Annals of Math. Vol 72 N.2 (267-291) (1960)

23.- SWAN, R.
Groups of cohomological dimension one. Journal of Algebra 12 (585-601) (1969)

24.- TZEE - NAN KUO
On the exponent of $H^n(G,\mathbb{Z})$. Journal of Algebra 7 (160--167) (1967)

25.- WALL, C.
Resolutions for extensions of groups. Cambridge Philos. 57,2 (251-255) (1960)

26.- WEISS, E.
Cohomology of groups. Academic Press (1969)

27.- ZASSENHAUS, H.J.
The theory of groups. Chelsea (1958)

A D D E N D U M

Una vez finalizada la redacción de esta memoria y nombrado ya el tribunal que debe juzgar la misma, algunos miembros del tribunal me han hecho las siguientes observaciones:

- Los teoremas de p-periodicidad del capítulo 7 aparecen también en la tesis doctoral de B. Burgisser "Gruppen virtuell endlicher Dimension und Periodizitat der Cohomologie" (1979) y son citados por primera vez en "Some recent developments in the homology theory of groups" de B. Eckmann, Journal of Pure and Applied Algebra 19 (1980), 61-75, donde cita también, sin demostración, un análogo a nuestro teorema (5.3.5). De este trabajo se cita en la bibliografía de la tesis un Preprint (5) en el que no se mencionan los aspectos anteriormente reseñados.

- El resultado del teorema (6.2.1) aparece mencionado, sin demostración, en "Groups of finite quasi-projective dimension" de J. Howie y H.R. Schneebeli, Comment Math. Helv. 54 (1979) 615-628. Hay que entender también que los resultados sobre la estructura de SL(2,Z) explicitados en la tesis lo son a título de completitud y autosuficiencia.

- En el trabajo de K. Brown "Groups of virtually finite dimension", Lecture Note Series 36 de la London Math. Soc. (1979), se incluye una exposición general de la teoría de cohomología de Farrell que abarca algunos aspectos analizados en el capítulo cuarto de la tesis, así como, una versión mas débil de nuestro teorema (5.3.5), aunque indicando un método de demostración distinto.

El autor, evidentemente, no tenía conocimiento de estos hechos antes de la redacción de esta memoria.

Manuel Castellet Solanas, Profesor Agregado de la Facultad de Ciencias, Sección de Matemáticas, de la Universidad Autónoma de Barcelona,

CERTIFICA: Que la Memoria que se adjunta con el título "Periodicidad en grupos de dimensión cohomológica virtual finita" ha sido realizada bajo mi dirección por M. Isabel Segura García, profesora del Dpto. de Algebra y Fundamentos de la Facultad de Matemáticas de Valencia, y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Matemáticas.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente, la presento ante la Facultad de Matemáticas de Valencia a veinticuatro de Marzo de 1981.

M. Castellet

Fdo.: Manuel Castellet Solanas