

INFERENCIA EN MODELOS BOOLEANOS

por
GUILLERMO AYALA GALLEGO

Tesis
presentada para optar al grado de
Doctor en Matemáticas
por la
Universitat de Valencia

Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universitat de Valencia
Mayo 1988



UMI Number: U607794

All rights reserved

INFORMATION TO ALL USERS

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted.

In the unlikely event that the author did not send a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if material had to be removed, a note will indicate the deletion.



UMI U607794

Published by ProQuest LLC 2014. Copyright in the Dissertation held by the Author.
Microform Edition © ProQuest LLC.

All rights reserved. This work is protected against
unauthorized copying under Title 17, United States Code.



ProQuest LLC
789 East Eisenhower Parkway
P.O. Box 1346
Ann Arbor, MI 48106-1346

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
FACULTAT DE CIÈNCIES MATEMÀTIQUES
BIBLIOTECA
Núm. Registre <u>4302</u>
SIGNATURA T.O/103
C. D. U. ^{519.2:} 512.563(043.2)

i18955.046
51676 5801

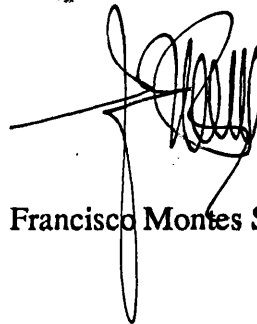
CERTIFICADO

D. FRANCISCO MONTES SUAY, profesor titular de Estadística e Investigación Operativa de la Universitat de Valencia.

CERTIFICA: que la presente memoria *Inferencia en Modelos Booleanos* ha sido realizada bajo mi dirección, en el Departamento de Estadística e Investigación Operativa por D. Guillermo Ayala Gallego, y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Matemáticas.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, presento ante la Facultad de Matemáticas de la Universitat de Valencia, a 30 de Mayo de 1988.

EL DIRECTOR

A handwritten signature in black ink, consisting of a series of loops and a long vertical stroke at the bottom.

Francisco Montes Suay

A mis padres, a Lucía.

INDICE

INTRODUCCION	1
CAPITULO 1. Conjuntos aleatorios cerrados	3
1.1. Conjuntos aleatorios según Matheron	4
1.2. Transformaciones de conjunto: dilatación y erosión	6
1.3. Estacionariedad, isotropía e independencia	8
1.4. Modelo booleano o mosaico aleatorio	9
1.5. RACS a.s. convexos y compactos. Conjunto esperado	16
1.6. Función de distribución de contacto	20
1.7. Problemas estadísticos en RACS booleanos	21
CAPITULO 2. Grano primario y conjunto esperado	25
2.1. Aproximación de RACS a.s. convexos y compactos	26
2.2. Muestreo disperso. Esperanza del grano primario	30
2.3. Estimación del grano primario esperado	34
CAPITULO 3. Funciones de discrepancia	40
3.1. Metodología de Diggle	41
3.2. Función de discrepancia	42
3.3. Estimación de la función de discrepancia	51
3.4. Varios puntos de muestreo	56
3.5. Ejemplos	58
CAPITULO 4. Estimación y modelo booleano	62
4.1. Momentos de D y estimación de θ y ψ	62
4.2. Estimadores Bayes y máximo verosímiles para la intensidad y perímetro nominal.	66
4.3. Dilataciones sucesivas	75
4.4. Una aplicación a modelos de bolas	77
4.5. Granos aislados	79
BIBLIOGRAFIA	86

INTRODUCCION

La necesidad de modelos probabilísticos adecuados que explicaran fenómenos como la dispersión de los animales en un bosque o los emplazamientos de las ciudades en una determinada región motivó el desarrollo de la teoría de procesos puntuales. Se trataba de modelizar imágenes relativamente simples formadas por un número finito de puntos dispersos sobre una región acotada. Sin embargo, imágenes como las líneas de fractura que se aprecian sobre una sección de un mineral, la imagen binaria que en la sección forman el mineral y su complementario o la producida, en la zona afectada, por un bombardeo, son notablemente más complicadas. Fenómenos más complejos exigen modelos más generales. Problemas como los indicados fueron el origen de las distintas formalizaciones del concepto de conjunto aleatorio.

La Estadística no es sólo una ciencia teórica. Las técnicas multivariantes se desarrollaron realmente cuando las posibilidades informáticas de manejo de grandes cantidades de información permitieron que los procedimientos teóricos tuvieran una aplicación práctica. En el contexto de los conjuntos aleatorios el proceso ha sido el mismo. Conocer una realización de un proceso puntual en una zona acotada exige conocer solamente las localizaciones de un número finito, normalmente pequeño, de puntos. Sin embargo, una imagen binaria en una región acotada exige conocer, en principio, si cada uno de los puntos de la región pertenece a una u otra fase de la imagen. En el momento en que, mediante el ordenador, ha sido posible el manejo rápido y sencillo de imágenes digitalizadas (o lo que es lo mismo de matrices con una gran cantidad de filas y columnas) se ha planteado la posibilidad y necesidad de tratar imágenes con técnicas estadísticas.

¿Cuál es la problemática estadística en la teoría de conjuntos aleatorios?. Las posibles respuestas a esta pregunta podrían agruparse en tres grandes situaciones:

a) **Problemas de ajuste:** contrastar si una imagen dada puede considerarse una realización de determinado tipo de conjunto aleatorio.

b) **Estimación de parámetros:** los conjuntos aleatorios vienen caracterizados por unos parámetros. Asumido que la imagen es una realización de un tipo de conjunto aleatorio, se plantea el problema de determinar los valores de los parámetros que fijan el modelo.



c) **Ergodicidad:** habitualmente las realizaciones son conocidas en una región limitada del plano y los estimadores se basan en esta información. En el supuesto teórico de que nuestra región de observación creciera hasta ser todo el plano. ¿Convergen o no nuestros estimadores a los verdaderos valores de los parámetros?

La complejidad de los distintos tipos de conjuntos aleatorios ha motivado un desfase considerable entre su desarrollo teórico y las técnicas estadísticas correspondientes en las que los métodos de simulación, métodos de Monte Carlo, y no paramétricos ocupan un papel preponderante frente a los métodos paramétricos, debido a las dificultades para obtener expresiones explícitas de las distribuciones de probabilidad asociadas a los distintos estimadores.

De los tres grupos citados anteriormente, nuestro trabajo trata fundamentalmente de estimación de parámetros y marginalmente la problemática del ajuste en modelos booleanos (Matheron, 1975, Serra, 1982). La metodología utiliza indistintamente métodos clásicos y bayesianos según su adecuación a la situación concreta estudiada.

El trabajo se ha organizado en cuatro capítulos de cuyo contenido hacemos a continuación una somera descripción.

El **primer capítulo** está dedicado a recordar los conceptos y resultados de la teoría de conjuntos aleatorios que se utilizarán en los restantes. En el último apartado se hace una exposición más detallada de la problemática estadística de los conjuntos aleatorios y en particular de los modelos booleanos.

En el **segundo** comenzamos la exposición de nuestro trabajo. Estudiamos algunas propiedades de los conjuntos aleatorios a.s. convexos y compactos. Estos conjuntos nos servirán para la construcción de modelos booleanos cuyos granos primarios sean de este tipo.

En el **tercer capítulo** proponemos una adaptación del método bayesiano clásico al tipo de información de que se dispone en este contexto. Tanto en este capítulo como en el anterior los problemas considerados no son exclusivos del modelo booleano.

El **cuarto** se centra en el modelo booleano y se proponen una serie de técnicas de estimación de los parámetros del conjunto aleatorio.

Este trabajo ha sido realizado en el Departamento de Estadística e Investigación Operativa. Todos y cada uno de sus miembros han sido un ejemplo de compañerismo y convivencia. Agradezco también a Juan Ferrándiz sus sugerencias y comentarios. Estas páginas son el resultado de la colaboración con Paco Montes, una persona que para mi es, por encima de todo, un buen amigo.

CAPITULO 1

CONJUNTOS ALEATORIOS CERRADOS

La necesidad de modelos matemáticos para objetos de forma y tamaño variables, en el plano o en el espacio, motivó a finales de los sesenta y principios de los setenta la aparición de dos formalizaciones del concepto de objeto o conjunto aleatorios: una debida a Kendall (1974) y la otra a Matheron (1969, 1975).

Ambas formalizaciones responden a una misma idea central: dado un conjunto B conocido nos preguntamos por el suceso de si el conjunto aleatorio toca o no a B . Se hace variar B en una determinada familia de conjuntos que para Kendall son las trampas y en Matheron normalmente será la familia de los compactos o la de los abiertos del espacio.

Arrancando de esta idea Kendall realiza una caracterización del conjunto aleatorio A en términos de una función aleatoria que para cada trampa vale 0 ó 1 según que el conjunto toque o no a dicha trampa. La construcción de Matheron es matemáticamente más simple y prácticamente más útil apoyándose en la teoría de las capacidades de Choquet y se resume en el primer apartado.

La teoría de conjuntos aleatorios, aunque reciente, es muy amplia por la enorme cantidad de problemas y posibles tratamientos de los mismos. El estudio de los conjuntos aleatorios forma parte de lo que se conoce como Geometría Estocástica. Exposiciones generales de Geometría Estocástica son: Stoyan, Kendall y Mecke (1987), Harding y Kendall (1974), Miles y Serra (1978), Baddeley (1982,1984) y Serra (1982). En este sentido el capítulo uno tiene, junto a la intención de recordar los resultados fundamentales que luego se utilizan, el propósito de explicar cual es nuestro planteamiento de los problemas estadísticos en conjuntos aleatorios. En cada apartado se indican las referencias de interés a consultar y el apartado mismo no intenta en ningún sentido sustituirlas. La notación utilizada sigue en lo posible la de las referencias indicadas en cada momento.

En el primer apartado se resume la definición de conjunto aleatorio cerrado de Matheron con la cual trabajaremos. Introducimos en el segundo las dos transformaciones conjuntistas que se utilizan en nuestro trabajo. En el tercero se define estacionariedad, isotropía e independencia de conjuntos aleatorios. El cuarto apartado se dedica a dar la definición y propiedades más importantes, en función de los demás capítulos, del modelo booleano. El apartado quinto trata de los conjuntos aleatorios que

con probabilidad uno son convexos y compactos haciendo especial hincapié en la definición de conjunto esperado. Por ser un concepto importante en nuestro trabajo y de uso no común hemos realizado una explicación más detallada. Definimos función de distribución de contacto en el apartado sexto. Por fin dedicamos el último apartado a hacer un resumen de los problemas estadísticos propios de los conjuntos aleatorios en general y del modelo booleano en particular.

1.1. CONJUNTOS ALEATORIOS CERRADOS SEGUN MATHERON

Denotaremos por E un espacio topológico Hausdorff, localmente compacto y con una base numerable. $\mathcal{F}(E)$, $\mathcal{G}(E)$, $\mathcal{C}(E)$ las clases de los subconjuntos cerrados, abiertos, compactos en E . Así mismo \mathcal{C}' , \mathcal{C}'_0 y $\text{Con}(\mathcal{C}'_0)$ serán las clases de los compactos no vacíos, compactos no vacíos conteniendo al origen y compactos, convexos no vacíos conteniendo el origen. Por $\mathcal{P}(E)$ denotaremos la clase de todos los subconjuntos de E . Si sobreentendemos el espacio topológico E denotaremos simplemente \mathcal{F} , \mathcal{G} , \mathcal{C} y \mathcal{P} . Sean también los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{F}_B = \{F / F \in \mathcal{F}, F \cap B \neq \emptyset\} \quad \text{con } B \in \mathcal{P}$$

$$\mathcal{F}^B = \{F / F \in \mathcal{F}, F \cap B = \emptyset\} \quad \text{con } B \in \mathcal{P}$$

Definición 1.1.1

Sobre el espacio \mathcal{F} de los conjuntos cerrados vamos a considerar la topología \mathcal{T}_f generada por las familias de conjuntos:

$$\{\mathcal{F}^K \text{ con } K \in \mathcal{C}\} \text{ y } \{\mathcal{F}_G \text{ con } G \in \mathcal{G}\}$$

Una base de la topología está formada por los conjuntos

$$\mathcal{F}_{G_1, \dots, G_n}^K = \mathcal{F}_{G_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{G_n} \cap \mathcal{F}^K$$

donde $K \in \mathcal{C}$, n es un entero positivo y $G_1, \dots, G_n \in \mathcal{G}$.

Definición 1.1.2

A la σ -álgebra de Borel asociada a la topología \mathcal{T}_f la denotaremos por σ_f . Fácilmente se comprueba que σ_f está generada por $\{\mathcal{F}^K \text{ con } K \in \mathcal{C}\}$ o por $\{\mathcal{F}_G \text{ con } G \in \mathcal{G}\}$ aisladamente, es decir:

$$\sigma_f = \sigma \left(\left\{ \mathcal{F}^K / K \in C \right\} \right)$$

$$\sigma_f = \sigma \left(\left\{ \mathcal{F}_G / G \in \mathcal{G} \right\} \right)$$

Estamos ya en condiciones de definir el concepto de conjunto aleatorio cerrado según Matheron.

Definición 1.1.3

Un conjunto aleatorio cerrado (abreviadamente RACS), A , es una función medible definida de un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{C}, P) en el espacio medible (\mathcal{F}, σ_f) . En particular, si consideramos $A(F) = F$ para cualquier F de \mathcal{F} podemos también definir un RACS como $(\mathcal{F}, \sigma_f, P)$ donde la medida P equivaldría a la probabilidad inducida, $P(V) = P(A^{-1}(V))$, con $V \in \sigma_f$ en la formulación anterior.

El problema fundamental que se plantea es la caracterización del RACS, o lo que es lo mismo de la medida P , en términos de una función simple que desempeñe un papel análogo al de la función de distribución en variables aleatorias. Esta función será:

$$T(B) = P(\mathcal{F}_B) = P(A \cap B \neq \emptyset) \quad [1.1.1]$$

para unos determinados conjuntos B . El resultado es el siguiente.

Teorema 1.1.1 (Choquet-Matheron)

Sea E un espacio topológico Hausdorff, localmente compacto y con una base numerable y T una función definida sobre $C(E)$ (respectivamente sobre $\mathcal{G}(E)$). Entonces existe una única medida de probabilidad P sobre σ_f verificando $P(\mathcal{F}_K) = T(K)$ para $K \in C(E)$ (respectivamente $P(\mathcal{F}_G) = T(G)$ para $G \in \mathcal{G}$) si y sólo si T es una capacidad alternante de orden infinito tal que $0 \leq T \leq 1$ y $T(\emptyset) = 0$.

Definición 1.1.4

a) $T: \mathcal{P} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ se dice que es una capacidad (Meyer, 1966) si verifica las siguientes condiciones:

$$1) B, B' \in \mathcal{P} / B \subseteq B' \Rightarrow T(B) \leq T(B')$$

$$2) \{B_n\}_{n=1}^{+\infty}, B_n \in \mathcal{P} / B_n \subseteq B_{n+1}, \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = B \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} T(B_n) = T(B)$$

$$3) \{K_n\}_{n=1}^{+\infty}, K_n \in C / K_{n+1} \subseteq K_n, \bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n = K \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} T(K_n) = T(K)$$

b) Supongamos T definida sobre C (análogo para T definida sobre \mathcal{G}) y sean

$K, K_1, \dots, K_n, \dots \in C$. Definimos:

$$S_1(K; K_1) = T(K \cup K_1) - T(K)$$

.....

$$S_n(K; K_1, \dots, K_n) = S_{n-1}(K; K_1, \dots, K_{n-1}) - S_{n-1}(K \cup K_n; K_1, \dots, K_{n-1})$$

Entonces diremos que T es una capacidad alternante de orden infinito si es una capacidad verificando que $S_n \geq 0$ para cualquier n y $K, K_1, \dots, K_n \in C$.

En lo que sigue utilizaremos más frecuentemente la funcional Q definida a partir de T como:

$$Q(K) = 1 - T(K) \quad \forall K \in C \quad [1.1.2]$$

D. Ross (1986) presenta una generalización de las formulaciones de conjunto aleatorio de Kendall y Matheron debilitando las condiciones del espacio en que trabajamos. En la introducción hemos presentado la teoría de conjuntos aleatorios como una generalización de la de procesos puntuales. La prueba de esta afirmación puede encontrarse en M. Baudin (1984).

1.2. TRANSFORMACIONES DE CONJUNTO: DILATACION Y EROSION.

Suponemos ahora que $E = \mathbb{R}^d$. En este apartado vamos a definir una serie de operaciones entre conjuntos que serán fundamentales en nuestro trabajo.

Definición 1.2.1

Si $A, B \in \mathcal{P}$ definimos su suma de Minkowski, o simplemente su suma, como:

$$A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$$

\mathcal{P} dotado de esta operación es un semigrupo abeliano con elemento neutro, que sería $\{0\}$, pero no es grupo. Notemos que $A+\emptyset = \emptyset$ por definición.

Si $h \in \mathbb{R}^d$ entonces $A+\{h\}$ es el trasladado de A siendo h el vector de traslación. Denotaremos $A_h = A+\{h\}$.

Dado $B \in \mathcal{P}$ tenemos $B^* = \{-b \mid b \in B\}$, es decir, su simétrico respecto del origen.

Definición 1.2.2

$A, B \in \mathcal{P}$ llamaremos dilatación de A mediante B al conjunto $A+B^*$. Fácilmente se

comprueba que

$$A + \overset{*}{B} = \{z \in \mathbb{R}^d / A \cap B_z \neq \emptyset\}$$

Si $A \cap B \neq \emptyset$ lo denotamos por $A \uparrow B$ entonces,

$$A + \overset{*}{B} = \{z \in \mathbb{R}^d / B_z \uparrow A\}$$

Definición 1.2.3

Si $A, B \in \mathcal{P}$ definimos la sustracción de Minkowski como:

$$A \ominus B = (A^c + B)^c$$

donde A^c denota el complementario de A . Esta nueva operación nos permite definir:

Definición 1.2.4

$A, B \in \mathcal{P}$ llamaremos erosión de A mediante B al conjunto $A \ominus \overset{*}{B}$. La interpretación de este transformado de A es la siguiente:

$$A \ominus \overset{*}{B} = \{z \in \mathbb{R}^d / B_z \subseteq A\}$$

J.Serra (1982) ha desarrollado una metodología para el análisis de imágenes, la Morfología Matemática, que toma como modelos para las mismas los RACS. En esencia, el método propuesto consiste en obtener a partir de la imagen original que se quiere analizar nuevas imágenes mediante transformaciones morfológicas (transformaciones que han de verificar cuatro condiciones que corresponden a limitaciones de tipo práctico). Sobre las imágenes transformadas se realizan una serie de medidas. Las transformaciones morfológicas básicas son precisamente la dilatación y la erosión. Para una exposición detallada de la Morfología Matemática consultar la referencia indicada. Ejemplos de aplicación de la metodología son: F.Montes (1983) y F.Montes y J.Hidalgo (1984).

Para un estudio detallado de las propiedades de la dilatación y erosión además de la referencia de Serra es conveniente consultar Matheron (1975).

1.3. ESTACIONARIEDAD, ISOTROPIA E INDEPENDENCIA

Definición 1.3.1

Un RACS en \mathbb{R}^d se dice estacionario si A y A_h tienen la misma distribución de probabilidad para cualquier $h \in \mathbb{R}^d$.

Una realización de un RACS bidimensional, en el mejor de los casos, será conocida en la parte correspondiente a una ventana de muestreo, W . Es claro que, para que el conocimiento de $A \cap W$, sea representativo de toda la realización y podamos obtener estimadores de características del RACS que no dependan de la localización de W hemos de exigir la estacionariedad del RACS.

Definición 1.3.2

Un RACS en \mathbb{R}^d se dice isotrópico si A y su rotado $v(A)$ tienen la misma distribución para cualquier rotación v .

A isotrópico equivale a:

$$T(K) = T(v(K)) \text{ o a } Q(K) = Q(v(K)) \quad \forall K \in \mathcal{C} \text{ y cualquier rotación } v.$$

En ocasiones será conveniente asumir que el RACS es isotrópico, sin embargo, hay multitud de situaciones donde las realizaciones son claramente anisotrópicas.

Definición 1.3.3

Definimos el par (A_1, A_2) como el RACS asociado a una medida P en la σ -álgebra producto $\sigma_f \otimes \sigma_f$. Diremos que A_1 y A_2 son independientes si:

$$P(V \times V') = P(V \times \mathcal{F})P(\mathcal{F} \times V') \quad \forall V, V' \in \sigma_f$$

Es inmediato que A_1 y A_2 son independientes si y sólo si para todo $K, K' \in \mathcal{C}$.

$$P(\mathcal{F}_K \times \mathcal{F}_{K'}) = T_1(K)T_2(K')$$

donde

$$T_1(K) = P(\mathcal{F}_K \times \mathcal{F}) \text{ y } T_2(K') = P(\mathcal{F} \times \mathcal{F}_{K'})$$

1.4. MODELO BOOLEANO O MOSAICO ALEATORIO

Un tipo particular de RACS es el modelo booleano, sin duda, el tipo de RACS con un mayor número de aplicaciones. Para la exposición del modelo, hemos preferido seguir a Matheron (1975) donde aparecen definidos y caracterizados de un modo completamente general. Exposiciones más simples, como las de Serra (1980) y Stoyan, Kendall y Mecke (1987) precisan asumir hipótesis suplementarias.

Suponemos que el espacio E en el que trabajamos es un espacio euclídeo.

Definición 1.4.1

El RACS A se dice que es infinitamente divisible para la unión (IDRACS) si, para cualquier entero $n > 0$, A se distribuye como la unión $\bigcup_{i=1}^n A_i'$ de n RACS independientes A_i' , $i=1, \dots, n$, e idénticamente distribuidos.

Definición 1.4.2

Sea $x \in E$ y A un RACS. Diremos que x es un punto fijo de A si $P(x \in A) = 1$, o lo que es lo mismo que $Q(\{x\}) = 0$.

Existe una relación entre IDRACS sin puntos fijos y los procesos de Poisson localmente finitos en $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \sim \{\emptyset\}$. Entendiendo por localmente finitos que para cada $K \in \mathcal{C}$, \mathcal{F}_K a.s. incluye un número finito de elementos del proceso. Es la siguiente:

Proposición 1.4.1

A un RACS. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

- A es un IDRACS sin puntos fijos.
- Existe γ , una medida σ -finita y positiva sobre \mathcal{F}' y única tal que:

$$\gamma(\mathcal{F}_K) = -\log Q(K) \quad \forall K \in \mathcal{C}$$

- A es equivalente a la unión de un proceso de Poisson localmente finito en \mathcal{F}' .

Proposición 1.4.2

Sea γ una medida σ -finita sobre \mathcal{F}' y $u: \mathcal{F}' \rightarrow (\Omega, \sigma)$ una función medible de \mathcal{F}' en el espacio medible (Ω, σ) .

Supongamos que existe una sucesión $\{H_n\}$ de elementos de σ tal que $H_n \uparrow \Omega$ y

$$0 < \gamma(u^{-1}(H_n)) < +\infty \quad \forall n > 0$$

Entonces existe una medida σ -finita $\mu \geq 0$ sobre (Ω, σ) y para casi todo $\omega \in \Omega$, respecto de μ , una medida de probabilidad $P_u(\cdot; \omega)$ sobre σ_f tal que:

$$\gamma(V \cap u^{-1}(H)) = \int_H P_u(V; \omega) \mu(d\omega) \quad \forall H \in \sigma, \forall V \in \sigma_f$$

Como corolario inmediato de este resultado se tiene:

Corolario 1.4.1

a) $\forall V \in \sigma_f \quad \gamma(V) = 0 \Rightarrow P_u(V; \omega) = 0$ para casi todo $\omega \in \Omega$, respecto μ

b) Sea $A_u(\omega)$ el RACS definido por la medida de probabilidad $P_u(\cdot; \omega)$. Para casi todo $\omega \in \Omega$ respecto de μ se verifica:

$$u(A_u(\omega)) = \omega \quad (P_u(\cdot, \omega) \text{-a.s.})$$

c) Supongamos que $\varphi: \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}'$ es una función medible y que γ es φ -invariante. Sea $f: \Omega \rightarrow \Omega$ función biyectiva tal que f y f^{-1} son medibles y verificando

$u \circ \varphi = f \circ u$ para casi todo $F \in \mathcal{F}'$, respecto de γ . Entonces, para casi todo $\omega \in \Omega$ respecto de μ se verifica:

$$P_u(V; \omega) = P_u(\varphi^{-1}(V); f^{-1}(\omega))$$

Estamos ya en condiciones de definir y caracterizar los RACS booleanos. Supongamos que la medida γ positiva definida sobre \mathcal{F}' está concentrada sobre $C' = C \setminus \{\emptyset\}$. Entonces es inmediato a partir de la proposición 1.4.1 que tenemos \mathcal{C} , un proceso puntual de Poisson, sobre C' asociado con γ .

Definición 1.4.3

$A = \cup \{K / K \in \mathcal{C}\}$ es un modelo booleano.

La estacionariedad de A está ligada al hecho de que γ sea invariante bajo traslaciones. Supongamos γ invariante bajo traslaciones y consideremos:

$$u: \mathcal{F}' \rightarrow E \text{ como } u(K) = \begin{cases} \text{centro de la bola que circunscribe a } K & \text{si } K \in C' \\ 0 \in E & \text{si } K \notin C' \end{cases}$$

u es medible.

Sea B un cubo semiabierto y acotado en E . Asociado a B existirá una sucesión $\{y_k\}$ de elementos de E tales que los $B_k = B + \{y_k\}$ y los $B'_k = B + \{-y_k\}$ constituyen dos particiones del espacio euclideo E .

$$\begin{aligned} \infty > \gamma(\mathcal{F}_B) &= \sum_k \gamma(u^{-1}(B_k) \cap \mathcal{F}_B) = \sum_k \gamma(u^{-1}(B) \cap \mathcal{F}_{B_k}) \geq \\ &\geq \gamma(u^{-1}(B) \cap \left(\bigcup_k \mathcal{F}_{B_k}\right)) = \gamma(u^{-1}(B)) \end{aligned}$$

Es inmediato que $\gamma(u^{-1}(B)) < \infty \quad \forall K \in C'$. La proposición 1.4.2 nos asegura la existencia de una medida positiva σ -finita μ sobre E y para casi todo $x \in E$, respecto de μ , una medida de probabilidad $P_u(-;x)$ sobre σ_f tal que :

$$\gamma(V \cap u^{-1}(H)) = \int_H P_u(V; \omega) \mu(d\omega)$$

Además el apartado a de corolario 1.4.1 nos asegura que $P_u(-;x)$ está concentrada los compactos no vacíos, C' . Dado $h \in E$, sea:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathcal{F}' &\rightarrow \mathcal{F}' \\ F &\rightarrow F+h \end{aligned}$$

γ es pues φ -invariante:

$$\begin{aligned} u(K+h) &= u(K)+h \text{ para todo } K \in C'. \\ f: E &\rightarrow E \\ x &\rightarrow x+h \end{aligned}$$

En consecuencia: $u \circ \varphi = f \circ u$ para casi todo $F \in \mathcal{F}'$, respecto de γ . Por el apartado c de corolario 1.4.1 μ es invariante bajo traslaciones y por tanto, proporcional a la medida de Lebesgue dx sobre E .

$\mu(dx) = a dx$ siendo a una constante positiva. Además:

$$P_u(V; x) = P_u(V + \{-x\}; 0) \text{ donde } V \in \sigma_f, V_{-x} = \{F / F+x \in V \cap \mathcal{F}'\}$$

En definitiva el RACS $X(x)$, con probabilidad asociada $P_u(-;x)$, es equivalente al trasladado $X(0) + \{x\}$, donde $X(0)$ es el RACS a.s. compacto asociado con la probabilidad $P_u(-;0)$. $X(0)$ es lo que llamaremos **grano primario** del modelo booleano estacionario.

Dado \mathcal{U} proceso puntual de Poisson en C' entonces $u(\mathcal{U}) = \{u(K) / K \in \mathcal{U}\}$ constituye un proceso puntual de Poisson en E .

$$A = \bigcup \{K / K \in \mathcal{U}\}$$

tiene por funcional asociada la siguiente:

$$-\log Q(K) = \gamma(\mathcal{F}_K) = a \int_E P_u(\mathcal{F}_K; x) dx = a \int_E P_u(\mathcal{F}_{K+\{x\}}; 0) dx$$

Pero

$$\begin{aligned} a \int_E P_u(\mathcal{F}_{K+\{-x\}}; 0) dx &= a \int_E P(\{X(0) \cap (K+\{-x\}) \neq \emptyset\}) dx = \\ &= a E(V(X(0)+K^*)) \end{aligned}$$

donde V indica volumen utilizando el conocido resultado de Robbins (1944,1945).

En consecuencia:

$$Q(K) = \exp\{-a E(V(X(0)+K^*))\} \quad \text{con } K \in C' \quad [1.4.1]$$

De hecho, suponiendo $E=R^d$ podemos enunciar el siguiente resultado.

Proposición 1.4.3

Sea A un RACS y $\psi(K) = -\log Q(K) = -\log P(A \cap K = \emptyset)$. Las siguientes condiciones equivalen:

a) El RACS es un modelo booleano con granos compactos.

b) Existe una clase $\{A(x) / x \in R^d\}$ de RACS a.s. compactos y medibles respecto x , lo que significa que

$$\forall K \in C \quad x \rightarrow T_x(K) = P(A(x) \in \mathcal{F}_K)$$

es medible, y un proceso puntual de Poisson Π sobre R^d asociado con una medida σ -finita μ tal que

$$\int T_x(K) \mu(dx) < \infty \quad \forall K \in C$$

y A es equivalente a $\bigcup_{x \in \Pi} A(x)$.

$$c) \forall K \in C, \psi(K) < \infty \text{ y } \psi(K) = \int T_x(K) \mu(dx)$$

para una medida σ -finita positiva μ sobre R^d y una clase μ -medible $T_x, x \in R^d$, de capacidades de Choquet asociadas con RACS a.s. compactos.

Vistas estas caracterizaciones es claro que el modelo booleano asociado a una medida γ estacionaria puede ser considerado un proceso puntual marcado cuyo espacio de marcas son los conjuntos compactos no vacíos (C'). Notemos también que la constante a que aparece en [1.4.1] es la intensidad del proceso puntual de Poisson $u(Q)$ o Π . A estos puntos en lo sucesivo los denominaremos gérmenes del modelo. Es evidente que un modelo booleano estacionario viene caracterizado por la intensidad del proceso Π y por $X(0)$, grano primario. En el resto del trabajo utilizaremos la siguiente definición.

Definición 1.4.4

Sea $\Pi = \{x_1, x_2, \dots\}$ un proceso puntual de Poisson estacionario con intensidad θ . Sean X_1, X_2, \dots una sucesión de RACS a.s. compactos, independientes e idénticamente distribuidos que son independientes de Π y tales que $E\lambda_d(X+K) < \infty \quad \forall K \in \mathcal{C}$. Entonces:

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} X_n + x_n$$

es un modelo booleano con grano primario X e intensidad θ . Lo denotaremos $A = (X, \theta)$.

A continuación indicamos algunas aplicaciones y propiedades del modelo booleano. Para todo cuanto sigue son de interés las siguientes referencias: Berman (1977), Cressie y Laslett (1987), Diggle (1981), Dupac (1980), P. Hall (1985), Hanisch (1981), A.M.Kellerer (1983, 1985, 1986), H.G.Kellerer (1984), B.Matern (1960), Matheron (1975), J.Ohser (1980), Pitts (1981), Schwandtke, Ohser y Stoyan (1987), Serra (1980, 1982), Stoyan (1979), D.Stoyan y H.Stoyan (1980), W.Weil y J.A.Wieacker (1983) y Yadin y Zacks (1985).

Aplicaciones del modelo booleano

En Serra (1982) y Stoyan, Kendall y Mecke (1987) se puede encontrar una completa relación de referencias sobre modelización de situaciones reales utilizando RACS booleanos. Una idea de la diversidad de las mismas la tenemos observando que:

- Diggle (1981) modelizó la distribución del brezo en un bosque mediante un modelo booleano de bolas aleatorias cuya distribución de probabilidad del radio supuso que se distribuía según una Weibull.

- A.M.Kellerer (1983) estudió el número de impactos recibidos sobre un dosímetro así como la mayor o menor potencia media de los mismos suponiendo que la imagen producida seguía un modelo booleano de bolas aleatorias.

- Matern (1960) lo utiliza para la modelización de bosques.

Nos parece de interés hacer algún comentario sobre las posibilidades y limitaciones que presentan los RACS booleanos en su utilización para modelizar imágenes o formas tridimensionales.

La hipótesis más restrictiva de su definición es la de independencia entre los distintos granos primarios. En una imagen formada por impactos producidos sobre una placa fotográfica, donde los granos podrían asimilarse a los impactos, la hipótesis de independencia parece razonable. Sin embargo, estos casos son excepcionales. En el ejemplo de Diggle (1981) es muy poco asumible que el crecimiento mayor o menor de

una planta no afecte el de las plantas cercanas. En general en todos los ejemplos biológicos esta situación se dará. Con carácter generico, en el libro antes citado, Stoyan hace las siguientes consideraciones críticas:

i) Supongamos un sistema de partículas en el espacio muy dispersas (o lo que en términos del modelo significaría una intensidad pequeña del proceso de gérmenes en relación al tamaño de los granos). Dicho sistema estará formado en su mayor parte por partículas aisladas sin contactos entre si. Si a partir de los datos empíricos obtenemos un buen ajuste de algún modelo booleano, este nos da una idea razonable sobre la propia formación del sistema. La hipótesis de independencia no supone un gran inconveniente en la medida en que apenas hay contactos.

ii) Conforme aumenta la intensidad del proceso de gérmenes en relación al tamaño del grano primario los modelos booleanos resultantes dan lugar a sistemas más y más complejos. Supongamos que el modelo real que pretendemos modelizar es muy irregular. Un buen ajuste de un determinado RACS booleano al modelo real no ha de interpretarse como una explicación de ninguna realidad física, en particular de la génesis del modelo real.

En RACS y con carácter general, podemos adoptar el criterio de que un buen ajuste de una situación real a un modelo teórico nos permite una estimación más exacta de características del sistema sin que esto suponga una identidad de la formación del sistema real con la construcción del modelo ajustado. En este sentido Serra (1980, 1982) observa cómo en la modelización de ciertos yacimientos minerales lo que mejor se ajusta a un modelo booleano no es el mineral sino su complementario, los intersticios que quedan entre la materia sólida.

En los últimos años se ha realizado una generalización del modelo booleano clásico a funciones de gris, esto es funciones definidas de \mathbb{R}^d en \mathbb{R} , conocidas como funciones aleatorias booleanas. El objeto de la generalización es la obtener modelos con propiedades análogas a las de los conjuntos booleanos que nos permitan el estudio de imágenes a niveles de gris. Los trabajos en esta dirección son escasos y los de mayor interés son: Serra (1985), D. Jeulin y P.Jeulin (1981) y F.Preteux y M.Schmitt (1986, 1987).

Propiedades

$A=(X,\theta)$ un modelo booleano en \mathbb{R}^d .

a) A es estacionario.

b) Es estable para dilataciones. Si $K \in \mathcal{C}$ entonces $A+K^*$ es un modelo booleano con la misma intensidad y cuyo grano primario es $X+K^*$.

c) Las secciones de A siguen siendo modelos booleanos. Incluso si consideramos una sección gruesa limitada por dos planos paralelos de normal u y proyectamos esta sección sobre un plano ortogonal a u seguimos teniendo un modelo booleano. No insistimos en las propiedades estereológicas del modelo booleano en tanto que nuestro trabajo está dedicado a modelos bidimensionales.

d) Es infinitamente divisible.

e) El número de granos primarios que tocan a $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ sigue una distribución de Poisson de parámetro $\theta E\lambda_d(X+B)$.

Definición 1.4.5

Definimos la fracción de volumen p como la fracción media de volumen ocupada por A en una región de volumen unidad. Si suponemos que A es estacionario entonces $p = P(0 \in A)$.

f) $p = 1 - \exp\{-\theta E\lambda_d(X)\} = 1 - \exp\{-\theta a\}$ donde a es el volumen medio del grano primario.

Definición 1.4.6

Definimos la covarianza en $h \in \mathbb{R}^d$ como $C(h) = P(0, h \in A)$.

Es evidente que la covarianza es la fracción de volumen de $A \cap (A-h)$. En modelos booleanos se tiene la siguiente expresión.

g) $C(h) = 2p - 1 + (1-p)^2 \exp\{\theta V_X(h)\}$ donde $V_X(h) = E\lambda_d(X \cap (X-h))$.

Si el RACS A además de ser estacionario es isotrópico entonces C y V_X solamente depende del módulo de h .

Definición 1.4.7

a) Sean $M, K, K' \in \mathcal{C}$. Decimos que K y K' están separados por M si para cualquier $x \in K$ y $x' \in K'$ el segmento $[x, x'] = \{(1-\lambda)x + \lambda x', 0 \leq \lambda \leq 1\}$ toca a M , es decir, $[x, x'] \uparrow M$.

b) Si A es un RACS y $Q(K) = P(\mathcal{F}^K) \forall K \in \mathcal{C}$ entonces se dice que A es semi-markoviano si

$$Q(K \cup K' \cup M)Q(M) = Q(K \cup M)Q(K' \cup M) \quad [1.4.2]$$

para cualesquiera $M, K, K' \in \mathcal{C}$ tales que K y K' están separados por M .

Notemos que si M es tal que $Q(M) = 0$ la igualdad [1.4.2] siempre se verifica. Si

$Q(M)$ es no nulo entonces [1.4.2] se verifica si y sólo si $A \cap K$ y $A \cap K'$ son independientes bajo la hipótesis de que \mathfrak{F}^M se verifica.

h) $A=(X,\theta)$ tal que X es a.s. convexo y compacto. Entonces A es semi-markoviano.

El problema de la unicidad del grano primario en modelos booleanos equivalentes ha sido completamente resuelto en Preteux y Schmitt (1987).

1.5. RACS CONVEXOS Y COMPACTOS. CONJUNTO ESPERADO.

El estudio de los RACS que, con probabilidad uno, son convexos y compactos tiene interés en sí mismo. Algunos problemas que se presentan son la caracterización de envolturas convexas de muestras de vectores aleatorios, leyes de grandes números y teoremas centrales del límite, etc. Algunas referencias son: Arstein (1983), Arstein y Vitale (1982), Eddy (1980, 1981, 1983), Eddy y Gale (1981), Eddy y Trader (1981, 1982), Lyashenko (1982, 1983), Matheron (1975), Puri y Ralescu (1983), Vitale (1977, 1979, 1981, 1983, 1987), W. Weil (1982).

Nuestro interés particular en este tipo de RACS se justifica en tanto nos sirven como granos primarios para la construcción de modelos booleanos. En lo que sigue hacemos una breve exposición de los resultados que vamos a utilizar en el resto de los capítulos.

Proposición 1.5.1

$E=R^2$. Si X es un RACS isotrópico y a.s. convexo entonces para todo $K \in \text{Con}(C')$ (convexos, compactos no vacíos).

$$E\lambda_2(X+K) = E\lambda_2(X) + \frac{1}{2\pi}U(K)EU(X) + \lambda_2(K)$$

donde $U(K)$ denota el perímetro de K . En particular si $A=(X,\theta)$ es un modelo booleano en R^2 cuyo grano primario X es a.s. convexo y compacto, se seguirá que:

$$Q(K) = P(A \cap K = \emptyset) = \exp\left\{-\theta E\lambda_2\left(X + \overset{*}{K}\right)\right\} = \exp\left\{-\theta \left[E\lambda_2(X) + \frac{1}{2\pi}U(K)EU(X) + \lambda_2(K)\right]\right\}$$

$$\forall K \in \text{Con}(C')$$

Es decir, Q sobre $\text{Con}(C')$ viene determinada por θ , $a = E\lambda_2(X)$ y $s = EU(X)$.

Proposición 1.5.2

$E = \mathbb{R}^d$. Para $h \in \mathbb{R}^d$ y $K \in \text{Con}(C^1)$ denotamos $V(h) = \lambda_d(K \cap K_h)$ donde $K_h = K + \{h\}$.

En concreto:

$$V(h) = \int_E 1_K(x) 1_K(x+h) dx$$

donde 1_K es la función indicatriz del conjunto K . Se verifican los siguientes resultados:

1) $V(0) = \lambda_d(K)$.

2) $0 \leq V(h) \leq V(0)$ con $h \in E$.

3) $\int_E V(h) dh = \left(\lambda_d(K) \right)^2$

4) Sea $u \in S_0$ (esfera unidad). Para cualquier $r \geq 0$ denotaremos:

$$V(r, u) = \lambda_d(K \cap K_{ru})$$

y

$$\gamma(r, u) = \lambda_{d-1}(\Pi_{u^\perp}(K \cap K_{ru}))$$

donde $\Pi_{u^\perp} K$ es la proyección de K sobre el hiperplano ortogonal a u . Entonces se tiene:

a) La función $r \rightarrow V(r, u)$ es no creciente, continua en cualquier $r \geq 0$ y admite derivada continua igual a $-\gamma(r, u)$ sobre el intervalo abierto definido por $r > 0$ y $V(r, u) > 0$.

b) La función $r \rightarrow \gamma(r, u)$ es continua por la izquierda en cualquier $r > 0$ y por la derecha en cualquier $r \geq 0$ tal que $V(r, u) > 0$. Además si K tiene interior no vacío, $r \rightarrow V(r, u)$ admite en $r=0$ derivada por la derecha igual a $-\gamma(0, u)$, y en cualquier $r > 0$ derivada por la izquierda igual a $-\gamma(r, u)$.

Funciones soporte sobre la esfera unidad y RACS a.s. convexos y compactos.

Una importante idea, que se remonta a Minkowski, es que un compacto convexo K puede ser identificado con su función soporte definida como:

Definición 1.5.1

$$r_K(u) = \max \{ \langle u, x \rangle / x \in K \} \quad u \in S_0$$

r_K es una función continua sobre S_0 . La identificación entre conjunto convexo compacto y función soporte se justifica en base a:

Proposición 1.5.2

$E = \mathbb{R}^d$. Para $h \in \mathbb{R}^d$ y $K \in \text{Con}(C')$ denotamos $V(h) = \lambda_d(K \cap K_h)$ donde $K_h = K + \{h\}$.
En concreto:

$$V(h) = \int_E 1_K(x) 1_K(x+h) dx$$

donde 1_K es la función indicatriz del conjunto K . Se verifican los siguientes resultados:

1) $V(0) = \lambda_d(K)$.

2) $0 \leq V(h) \leq V(0)$ con $h \in E$.

3) $\int_E V(h) dh = \left(\lambda_d(K) \right)^2$

4) Sea $u \in S_0$ (esfera unidad). Para cualquier $r \geq 0$ denotaremos:

$$V(r, u) = \lambda_d(K \cap K_{ru})$$

y

$$\gamma(r, u) = \lambda_{d-1}(\Pi_{u^\perp}(K \cap K_{ru}))$$

donde $\Pi_{u^\perp} K$ es la proyección de K sobre el hiperplano ortogonal a u . Entonces se tiene:

a) La función $r \rightarrow V(r, u)$ es no creciente, continua en cualquier $r \geq 0$ y admite derivada continua igual a $-\gamma(r, u)$ sobre el intervalo abierto definido por $r > 0$ y $V(r, u) > 0$.

b) La función $r \rightarrow \gamma(r, u)$ es continua por la izquierda en cualquier $r > 0$ y por la derecha en cualquier $r \geq 0$ tal que $V(r, u) > 0$. Además si K tiene interior no vacío, $r \rightarrow V(r, u)$ admite en $r=0$ derivada por la derecha igual a $-\gamma(0, u)$, y en cualquier $r > 0$ derivada por la izquierda igual a $-\gamma(r, u)$.

Funciones soporte sobre la esfera unidad y RACS a.s. convexos y compactos.

Una importante idea, que se remonta a Minkowski, es que un compacto convexo K puede ser identificado con su función soporte definida como:

Definición 1.5.1

$$r_K(u) = \max \{ \langle u, x \rangle / x \in K \} \quad u \in S_0$$

r_K es una función continua sobre S_0 . La identificación entre conjunto convexo compacto y función soporte se justifica en base a:

Proposición 1.5.3

- 1) $r_K = r_{K'} \Leftrightarrow K = K'$
- 2) $K \subseteq K' \Leftrightarrow r_K \leq r_{K'}$
- 3) $r_{K+K'} = r_K + r_{K'}$
- 4) $r_{\alpha K} = \alpha r_K \quad \forall \alpha \geq 0$

Como consecuencia de estas propiedades la función

$$\gamma: \text{Con}(C') \rightarrow \mathbb{R} \text{ (funciones soporte sobre la esfera unidad)}$$

$$K \rightarrow r_K$$

es un isomorfismo que conserva el orden.

Si $K, K' \in \text{Con}(C')$ definimos su distancia de Hausdorff como:

$$\rho(K, K') = \inf \{ \varepsilon > 0 / K \subseteq K' + \varepsilon B, K' \subseteq K + \varepsilon B \}$$

donde B es la bola unidad cerrada. En particular se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.5.4

$$\rho(K, K') = \max_{u \in S_0} \left\{ \left| r_K(u) - r_{K'}(u) \right| \right\} \quad [1.5.1]$$

Por lo tanto γ es una isometría si consideramos sobre $\text{Con}(C')$ la métrica de Hausdorff y sobre \mathbb{R} la indicada en el segundo miembro de [1.5.1].

Si X es un RACS a.s. convexo y compacto, asociado a él tendremos una función soporte aleatoria definida sobre la esfera unidad. Trabajar con uno u otro será por, lo comentado, equivalente.

Conjunto esperado

Un procedimiento habitual en Geometría Estocástica es promediar funcionales escalares, tales como el área o el perímetro, sobre distintas realizaciones de una figura aleatoria. En 1975, Arstein y Vitale plantearon otro posible modo de obtener información sobre "valores medios" de dichas figuras o conjuntos aleatorios. Estos "valores medios" ya no son cantidades numéricas sino conjuntos. Es lo que se conoce como conjunto esperado y está basado en la integral de funciones a valores conjuntistas debida a Aumann (1965).

Para motivar la definición de conjunto esperado de un RACS a.s. convexo y compacto vamos a dar un ejemplo debido a Vitale (1987):

Sean K y K' convexos y compactos fijos. Definimos el conjunto aleatorio X que

con probabilidad $1/2$ es igual a K y con probabilidad $1/2$ es igual a K' . Podemos suponer que X toma un valor u otro de acuerdo con el lanzamiento de una moneda. Es bastante razonable considerar que un conjunto medio podría ser $(1/2)K+(1/2)K'$. Este conjunto está formado por los puntos de la forma $(1/2)x+(1/2)x'$ donde $x \in K$ y $x' \in K'$. Consideremos todos los vectores aleatorios que toman uno u otro valor de acuerdo con el lanzamiento de la moneda y que además son compatibles con X según el siguiente criterio: cuando $X=K$ el vector toma un valor $x \in X=K$ y análogamente cuando $X=K'$, el vector coincide con algún $x' \in X=K'$. El valor esperado del vector sería $(1/2)x+(1/2)x'$. Si consideramos el conjunto unión de todos estos valores esperados obtendríamos $(1/2)K+(1/2)K'$.

Definición 1.5.2

Sea X un RACS a.s. convexo y compacto. Decimos que z es una selección si:

- a) z es un vector aleatorio.
- b) $z(\omega) \in X(\omega)$ (a.s.).

Se define la esperanza de X o conjunto esperado de X como:

$$EX = \{ Ez / z \text{ es una selección de } X \text{ y } E|z| < \infty \}$$

donde $|z|$ es la norma euclídea del vector. Denotamos por $||K|| = \rho(\{0\}, K)$, entonces si $E||X|| < \infty$ tenemos asegurada la existencia de $EX \in \text{Con}(C')$. Además se prueba el siguiente resultado:

Lema 1.5.1

X RACS a.s. convexo y compacto, entonces,

$$r_{EX}(u) = E[r_X(u)] \quad \forall u \in S_0$$

1.6. FUNCION DE DISTRIBUCION DE CONTACTO

La complejidad de los conjuntos aleatorios cerrados obliga a que su estudio estadístico se realice observando características concretas del mismo. En la introducción al capítulo tres se hace un extenso comentario sobre esta cuestión. Entre las características asociadas a un RACS estacionario, y en particular a los booleanos, ha tenido una atención especial la función de distribución de contacto (Serra, 1982; Stoyan, Kendall, Mecke, 1987 y Berman, 1977):

La función de distribución de contacto depende de la elección de un conjunto $B \in \mathcal{C}$ tal que contenga el origen. Dado este B se define:

Definición 1.6.1

A RACS estacionario y $B \in \mathcal{C}_0$ (compactos que contienen al origen). Se define la función de distribución de contacto asociada a B como:

$$H_B(x) = 1 - P(0 \in A + xB^* / 0 \in A) = 1 - \frac{P(0 \in A + xB^*)}{P(0 \in A)} \quad \forall x \geq 0$$

Si B es un segmento unidad hablaremos de la función de distribución de contacto lineal que en RACS no isotrópicos será distinta según la dirección. Si B es la bola unidad entonces H_B es la función de distribución de contacto esférica. Son las dos situaciones de mayor interés práctico. La interpretación física de ambas distribuciones es simple:

-Tomamos un punto cualquiera de los poros de A ($=A^c$). En particular $0 \in A^c$. Consideramos la semirecta con origen en 0 y una dirección prefijada por nosotros. Sea L la variable aleatoria que nos da la longitud del segmento determinado por 0 y el primer punto de A . La función de distribución de L es la función de distribución de contacto lineal.

-Análogamente tomamos $0 \in A^c$. Desde 0 medimos D la menor distancia euclídea al RACS. Esta cantidad aleatoria tiene por función de distribución la de contacto esférica.

Variables D y L en modelos booleanos

Sea $A = (X, \theta)$ un modelo booleano bidimensional isotrópico y con el grano primario a.s. convexo y compacto. En este caso las distribuciones de D y L tienen una expresión simple. En concreto tenemos:

$$F_D(x) = 1 - \exp\left\{-\theta \left[EU(X)x + \pi x^2\right]\right\} = 1 - \exp\left\{-\theta \left[sx + \pi x^2\right]\right\} \quad \text{si } x \geq 0 \quad [1.6.1]$$

$$F_L(x) = 1 - \exp\left\{-\theta \frac{s}{\pi} x\right\} \quad \text{si } x \geq 0 \quad [1.6.2]$$

donde s denota el perímetro medio del grano primario.

1.7. PROBLEMAS ESTADÍSTICOS EN RACS BOOLEANOS

Nuestro trabajo se centra en modelos booleanos bidimensionales. En consecuencia en todo el apartado suponemos que trabajamos en \mathbb{R}^2 .

Información muestral

En estadística de conjuntos aleatorios se dispone habitualmente de uno de los dos tipos siguientes de información:

a) Una o varias realizaciones conocidas a través de una ventana de muestreo W . Cada una de estas realizaciones se supone digitalizada. Asumiremos que los errores introducidos por la digitalización son despreciables.

b) Información obtenida mediante un muestreo disperso. Suponemos unos puntos $\{x_i\}_{i=1, \dots, n}$ alejados entre sí y a partir de cada uno de ellos observaremos alguna característica del RACS. Si suponemos unos puntos suficientemente alejados las medidas obtenidas a partir de cada uno de ellos son aproximadamente independientes. En el capítulo 2 justificaremos esta afirmación.

Problemas

Una exposición simple y completa de los problemas estadísticos en modelos booleanos y RACS cualesquiera, puede encontrarse en Stoyan, Kendall y Mecke (1987).

En un primer nivel se plantea la estimación de las características básicas de un RACS cualquiera: fracción de volumen (p), covarianza ($C(h)$ con $h \in \mathbb{R}^2$) y función de distribución de contacto (H_B) asociada a distintos B . Observemos que la estimación de las tres cantidades se reduce a la estimación de la fracción de volumen de conjuntos aleatorios que se obtienen mediante transformaciones del RACS original. De hecho, $C(h)$ sería la fracción de volumen de $A \cap (A-h)$ y $H_B(x)$ la fracción de volumen de $A+x\overset{*}{B}$.

Los métodos propuestos para la estimación de p son tres fundamentalmente:

1) Conteo puntual.

Tenemos x_1, \dots, x_n puntos de muestreo y para cada uno observamos si el punto está o no en el conjunto. El estimador de p sería:

$$\hat{p}_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_A(x_i)$$

\hat{p} es un estimador insesgado. Algunas referencias sobre este método de estimación son Matern (1960), Peter Hall (1985) y Diggle y Ter Braak (1982). Notemos que utilizamos información obtenida mediante un muestreo más o menos disperso.

2) Método lineal.

Supongamos N segmentos lineales paralelos de longitud l sobre una realización del RACS. El estimador de p será:

$$\hat{p}_b = \frac{L}{Nl}$$

siendo L la longitud total de la parte de los segmentos cubierta por el RACS A . Información acerca de este método puede encontrarse en Stoyan (1979).

3) Medida de áreas.

Suponemos que conocemos $A \cap W$ de A . El estimador de p sería

$$\hat{p}_c = \frac{\lambda_2(A \cap W)}{\lambda_2(W)} \quad [1.7.1]$$

Supongamos que queremos estimar $C(h) = P(0, h \in A^c) = Q(\{0, h\})$, el estimador natural basado en medida de áreas sería:

$$Q(\{0, h\}) = \frac{\lambda_2(\{x / x, x+h \in A \cap W\})}{\lambda_2(\{x / x, x+h \in W\})} = \frac{\lambda_2((A \cap W) \ominus \{0, -h\})}{\lambda_2(W \ominus \{0, -h\})}$$

En general dado cualquier K el estimador natural, que es insesgado, de $Q(K)$ será (Ripley, 1986; Serra, 1982)

$$Q(K) = \frac{\lambda_2((A \cap W) \ominus K^*)}{\lambda_2(W \ominus K^*)} \quad [1.7.2]$$

De donde el estimador de la función de distribución de contacto será:

$$\hat{H}_B(x) = \hat{P}(0 \in A + xB^*) = \frac{\lambda_2\{(A + xB^*) \cap (W \ominus xB^*)\}}{\lambda_2(W \ominus xB^*)} \quad [1.7.3]$$

que también es insesgado. Mase (1982) estudia propiedades asintóticas de los estimadores de la fracción de volumen.

En un segundo nivel tenemos los problemas específicos del modelo booleano que

podemos dividir en dos grupos:

1) Contrastar si una imagen dada puede ser razonablemente bien modelizada mediante un modelo booleano.

2) Estimación de valores asociados al modelo como θ , intensidad, s y a , perímetro y área medios del grano primario.

Para el primer problema el método, prácticamente único, que se utiliza es el siguiente: si suponemos que el modelo booleano es isotrópico entonces

$$-\log(1-H_B(x)) = \theta s x + \theta \pi x^2 \quad \forall x \geq 0 \quad [1.7.4]$$

Tomamos distintos conjuntos B y para cada uno de ellos estimamos la función de distribución de contacto empírica \hat{H}_B . Si $-\log(1-H_B(x))$ puede ser bien aproximado por un polinomio cuadrático entonces podemos considerar que el modelo booleano se ajusta bien a la imagen. Este método fue propuesto por Serra (1982). Información acerca del mismo puede encontrarse en Ripley (1986) y Cressie y Laslett (1987).

Si nos planteamos la hipótesis más restrictiva de que la imagen siga un modelo booleano concreto entonces Diggle (1981) propuso un test basado en los métodos de Monte Carlo que explicamos con detalle en el capítulo 3.

En relación al segundo problema, los métodos de mayor interés para la estimación de los parámetros del modelo son, en nuestra opinión, los tres siguientes:

a) Mediante la estimación de la función de distribución de contacto.

En el método descrito para el primer grupo obtendríamos unas estimaciones de los coeficientes de x y x^2 en [1.7.4] que nos permitirían estimar θ y s .

b) Si α denota el área de $A \cap W$, β el perímetro de $A \cap W$ sin incluir la parte correspondiente a las aristas de la ventana y χ la constante de Euler-Poincaré de $A \cap W$ (es decir, el número de componentes conexas menos el número de agujeros (Matheron, 1975, capítulo 4)) entonces (A.M. Kellerer, 1983, 1985; H.G. Kellerer, 1984)

$$E\alpha = \lambda_2(W) (1 - \exp\{-\theta a\})$$

$$E\beta = \theta s \lambda_2(W) \exp\{-\theta a\}$$

$$E\chi = \exp\{-\theta a\} \left(\theta \lambda_2(W) + \theta s \frac{U(W)}{2\pi} - \theta^2 \frac{\lambda_2(W) s^2}{4\pi} - 1 \right) + 1$$

sustituyendo $E\alpha$, $E\beta$ y $E\chi$ por los valores de las variables obtenidos de una realización (si tenemos varias por sus promedios) podemos estimar θ , a y s . Ver también W. Weil (1987) y A.M. Kellerer (1986). A.M. Kellerer (1985) realiza un estudio empírico de las varianzas de los estimadores. A. Schwandtke, J. Ohser y D. Stoyan (1987) presentan también un método similar.

c) Dupac (1980) consideró modelos de bolas aleatorias cuyas radios se distribuían

normales. Utilizando los radios de las bolas no deformadas (frontera no cubierta) por el resto de los granos primarios y estudiando la relación con la distribución original del radio estimó la intensidad y los parámetros de la distribución del radio original. En capítulo 4 se explica el método y se generaliza a otras distribuciones no normales.

Señalemos, por último, que hipótesis adicionales sobre la forma del grano primario, por ejemplo que se trata de bolas aleatorias, proporcionan, a través de la estimación de a y s , mayor información sobre la distribución del modelo.

CAPITULO 2

GRANO PRIMARIO Y CONJUNTO ESPERADO

En la definición de un RACS booleano aparecen dos elementos diferenciados e independientes entre si: un proceso puntual de Poisson, que son los gérmenes (Π), y un RACS que habitualmente supondremos a.s. convexo, compacto e isotrópico que es el grano primario (X). Esta misma definición sugiere el interés que puede tener el estudio aislado del grano primario. Un ejemplo: si aproximamos el grano primario aleatorio X por un grano más simple, como puede ser un conjunto fijo, y consideramos el modelo booleano con la misma intensidad pero en lugar del grano original el conjunto fijo. ¿ En qué sentido están próximos ambos RACS?

En el capítulo 1 se ha comentado que uno de los problemas estadísticos del modelo booleano más trabajado es la estimación de valores medios del grano primario tales como el área y el perímetro. Intentamos "conocer" un conjunto aleatorio mediante cantidades numéricas. Sin embargo, como vimos en el apartado 5 del tema 1 es más razonable intentar conocer valores medios que a su vez sean conjuntos. En lo que nosotros sabemos la estimación del conjunto esperado del grano primario en RACS booleanos es un problema prácticamente sin plantear.

Entre otras posibles, las cuestiones anteriores justifican el estudio del grano primario al margen del modelo que pueda generar. Sin embargo, siempre pensaremos en las implicaciones que una propiedad del grano pueda tener en el modelo total.

En el apartado primero se plantea la cuestión de la aproximación de RACS a.s. convexos y compactos por conjuntos fijos así como una generalización de la desigualdad de Tchebychev.

El segundo apartado está dedicado al problema de obtener condiciones para el muestreo disperso en modelos booleanos utilizando una propiedad del conjunto esperado.

El tercer y último apartado se dedica al problema antes comentado de la estimación del grano primario esperado.



2.1. APROXIMACION DE RACS A.S. CONVEXOS Y COMPACTOS.

El conocimiento de la esperanza de una variable aleatoria no nos determina su distribución. Sin embargo, conocer la esperanza de la variable nos da un valor medio de los valores que tiende a tomar y alrededor del cual se concentra. El objeto de este apartado es mostrar que el conjunto esperado mantiene propiedades análogas a la esperanza de una variable aleatoria motivando la necesidad de su estimación como un modo razonable de estudiar el RACS.

Sea τ una métrica definida sobre $\text{Con}(C')$ y X un RACS a.s. convexo y compacto. Dado $K \in \text{Con}(C')$ entonces $E[\tau(X,K)]$ y $E[\tau^2(X,K)]$ son medidas naturales del error medio que cometemos estimando X por K . En este apartado nos planteamos el problema de determinar el conjunto $K \in \text{Con}(C')$ tal que

$$E[\tau(X,L)] = \min_{K \in \text{Con}(C')} E[\tau(X,K)]$$

o

$$E[\tau^2(X,L)] = \min_{K \in \text{Con}(C')} E[\tau^2(X,K)]$$

En particular vamos a considerar las siguientes métricas donde $K, K' \in C'$

$$\rho(K, K') = \inf\{\varepsilon > 0 / K \subseteq K' + \varepsilon B, K' \subseteq K + \varepsilon B\} = \sup_{u \in S_0} |r_K(u) - r_{K'}(u)| \quad [2.1.1]$$

sin duda la de mayor uso en la teoría de RACS a.s. compactos.

$$H_1(K, K') = \int_{S_0} |r_K(u) - r_{K'}(u)| du \quad [2.1.2]$$

$$H_2(K, K') = \left\{ \int_{S_0} |r_K(u) - r_{K'}(u)|^2 du \right\}^{\frac{1}{2}} \quad [2.1.3]$$

Definición 2.1.1

Si X es un RACS a.s. convexo y compacto entonces definimos la varianza de X como

$$\text{var}(X) = E[\tau^2(X, EX)]$$

Definición 2.1.2

X RACS a.s. convexo y compacto. Sea $r_X(u)$ con $u \in S_0$ su función soporte asociada. Definimos el conjunto mediana M como aquel que tiene por función soporte $r_M(u)$, mediana de $r_X(u)$.

Nota 2.1.1

En la definición anterior se asume la existencia de, al menos, un conjunto mediana. Por ejemplo, si exigimos:

- a) Unicidad de la mediana de $r_X(u)$ para todo $u \in S_0$.
- b) Si $m(Z)$ es la mediana de Z entonces $m(r_X(u)+r_X(v)) \leq m(r_X(u))+m(r_X(v))$ para $u, v \in S_0$.

Entonces la función r_M definida en [2.1.3] es una función soporte (Rockafellar, página 114).

Ejemplo 2.1.1

Sea $X = \varphi K$ donde φ es una variable aleatoria con mediana única y $K \in \text{Con}(C')$ entonces:

$$r_M(u) = m(\varphi)r_K(u) \quad \forall u \in S_0$$

Proposición 2.1.1

X RACS a.s. convexo y compacto. Se tiene:

1) EX minimiza sobre $\text{Con}(C')$ las siguientes expresiones:

$$1.a) \sup_{u \in S_0} \int_{\Omega} |r_X(u) - r_K(u)|^2 P(d\omega)$$

$$1.b) E[H_2^2(X, K)] = \iint_{\Omega \times S_0} |r_X(u) - r_K(u)|^2 du P(d\omega)$$

2) M minimiza sobre $\text{Con}(C')$ las siguientes expresiones:

$$2.a) \sup_{u \in S_0} \int_{\Omega} |r_X(u) - r_K(u)| P(d\omega)$$

$$2.b) \iint_{\Omega \times S_0} |r_X(u) - r_K(u)| du P(d\omega)$$

Demostración

1) Sea $u \in S_0$ fija. Entonces:

$$\int_{\Omega} |r_X(u) - r_K(u)|^2 P(d\omega)$$

es mínima si $r_K(u) = E r_X(u)$. En consecuencia si K es tal que para casi todo u se da la igualdad anterior entonces K minimizará

$$\sup_{u \in S_0} \int_{\Omega} |r_X(u) - r_K(u)|^2 P(d\omega)$$

Por la misma razón y aplicando el teorema de Fubini EX minimiza 1.b.

2) Análoga basándonos en que

$$\int_{\Omega} |r_X(u) - r_K(u)| P(d\omega)$$

es minimizada si $r_K(u) = m(r_X(u))$.

Nota 2.1.2

¿Es cierto el resultado para la métrica de Hausdorff? Una respuesta afirmativa supondría que en la ecuación 1.a de proposición 2.1.1 podemos intercambiar el supremo y la integral, lo cual en general no es cierto. Sin embargo, el resultado si es cierto para bolas aleatorias.

Lema 2.1.1

$X = \varphi B$ siendo φ una variable aleatoria positiva y B la bola unidad cerrada centrada en el origen. Entonces

$$E[\rho^2(X, K)] \geq E[\rho^2(X, EX)] = \text{var}(X) \quad \forall K \in \text{Con}(C')$$

Demostración

a) Supongamos que $K = cB$ con $c \geq 0$ entonces es trivial ya que:

$$E[\rho^2(X, cB)] = E\rho^2(\varphi B, cB) = E(\varphi - c)^2 \geq E(\varphi - E\varphi)^2 = E\rho^2(X, EX)$$

ya que $EX = (E\varphi)B$.

b) Si $K \in \{cB / c \geq 0\}$ sea φ_0 una constante elegida de modo que:

$$\rho(K, \varphi_0 B) = \inf_{\varphi \geq 0} \rho(K, \varphi B)$$

Se verifica

$$\rho(K, \varphi B) - \rho(K, \varphi_0 B) = |\varphi - \varphi_0| = \rho(\varphi_0 B, \varphi B)$$

Veámoslo. Supongamos que $\varphi > \varphi_0$ entonces

$$\rho(K, \varphi B) = \inf \{ \alpha > 0 / K \subseteq \varphi B + \alpha B, \varphi B \subseteq K + \alpha B \} \quad [2.1.4]$$

Si $\varepsilon_0 = \rho(K, \varphi_0 B)$ sabemos que

$$K \subseteq \varphi_0 B + \varepsilon_0 B \subseteq \varphi B + \varepsilon_0 B \subseteq \varphi B + \alpha B \quad \forall \alpha \geq \varepsilon_0$$

Por lo tanto de las dos inclusiones en [2.1.4] la que no va a verificarse es la segunda.

$$\varphi_0 B \subseteq K + \varepsilon_0 B$$

Consideramos las funciones soporte de los dos conjuntos

$$r_{\varphi_0 B}(u) = \varphi_0 \quad \forall u \in S, \quad r_{K + \varepsilon_0 B}(u) = r_K(u) + \varepsilon_0$$

$$\varphi_0 \leq r_K(u) + \varepsilon_0 \Leftrightarrow \varphi_0 + (\varphi - \varphi_0) \leq r_K(u) + \varepsilon_0 + (\varphi - \varphi_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r_{\varphi B} \leq r_{K + (\varepsilon_0 + (\varphi - \varphi_0)) B} \Leftrightarrow \varphi B \subseteq K + (\varepsilon_0 + (\varphi - \varphi_0)) B$$

La prueba sería análoga si $\varphi < \varphi_0$.

Por tanto se sigue que:

$$\rho(K, \varphi B) = \rho(K, \varphi_0 B) + (\varphi - \varphi_0) = \rho(K, \varphi_0 B) + \rho(\varphi_0 B, \varphi B)$$

$$E[\rho^2(K, \varphi B)] \geq E[\rho^2(\varphi_0 B, \varphi B)] \geq E\rho^2(E\varphi B, \varphi B) = \text{var}(X)$$

Una vez comprobado que EX es un buen estimador de X parece natural estudiar cotas de la distancia entre EX fijo y X aleatorio. En definitiva cotas del tipo dado por la desigualdad de Tchebychev para variables aleatorias. Sea $\text{var}_1(X) = EH_2^2(X, EX)$. Se tienen los siguientes resultados.

Lema 2.1.2

$$\int_{S_0} P\left(\left|r_X(u) - r_{EX}(u)\right| > \varepsilon\right) du \leq \frac{\text{var}_1(X)}{\varepsilon^2}$$

Demostración

$$\frac{\text{var}_1(X)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\Omega S_0} \left|r_X(u) - r_{EX}(u)\right|^2 du P(d\omega) \geq \int_{S_0} P\left(\left|r_X(u) - r_{EX}(u)\right| > \varepsilon\right) du$$

Proposición 2.1.2

X RACS a.s. compacto y convexo.

$$P(X + \varepsilon B \subseteq EX) + P(EX + \varepsilon B \subseteq X) \leq \frac{\text{var}_1(X)}{\varepsilon^2 \text{mes}(S_0)} \quad \forall \varepsilon > 0$$

siendo B la bola unidad y

$$\text{mes}(S_0) = \int_{S_0} du$$

Demostración

$$\begin{aligned} \frac{\text{var}_1(X)}{\varepsilon^2} &\geq \int_{S_0} P\left(\left|r_X(u) - r_{EX}(u)\right| > \varepsilon\right) du \geq \text{mes}(S_0) \inf_{u \in S_0} P\left(\left|r_X(u) - r_{EX}(u)\right| > \varepsilon\right) \geq \\ &\geq \text{mes}(S_0) P\left(\inf_{u \in S_0} \left|r_X(u) - r_{EX}(u)\right| > \varepsilon\right) \\ \inf_{u \in S_0} \left|r_X(u) - r_{EX}(u)\right| > \varepsilon &\Leftrightarrow \forall u \in S_0 \left|r_X(u) - r_{EX}(u)\right| > \varepsilon \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left\{ \forall u \in S_0 r_X(u) - r_{EX}(u) > \varepsilon \right\} \text{ o } \left\{ \forall u \in S_0 r_{EX}(u) - r_X(u) > \varepsilon \right\} \end{aligned}$$

La última equivalencia es una consecuencia de la continuidad de $r_X(u) - r_{EX}(u)$.

$$\begin{aligned} \forall u \in S_0 r_X(u) - r_{EX}(u) \geq \varepsilon &\Leftrightarrow r_X(u) \geq r_{EX}(u) + \varepsilon = r_{EX}(u) + r_B(u) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow EX + \varepsilon B \subseteq X \end{aligned}$$

$$\forall u \in S_0 r_{EX}(u) - r_X(u) \geq \varepsilon \Leftrightarrow X + \varepsilon B \subseteq EX$$

$$\begin{aligned} P\left(\inf_{u \in S_0} \left|r_X(u) - r_{EX}(u)\right| > \varepsilon\right) &= P(EX + \varepsilon B \subseteq X \text{ ó } X + \varepsilon B \subseteq EX) = \\ &= P(EX + \varepsilon B \subseteq X) + P(X + \varepsilon B \subseteq EX) \end{aligned}$$

2.2. MUESTREO DISPERSO. ESPERANZA DEL GRANO PRIMARIO

Es un procedimiento usual en estadística espacial (fundamentalmente de procesos puntuales) tomar una serie de puntos suficientemente alejados entre si y a partir de estos realizar una serie de medidas. Por ejemplo, distancia desde estos puntos al vecino más próximo del proceso, o al segundo vecino más próximo, etc asumiendo que los valores obtenidos constituyen aproximadamente una muestra aleatoria. En este apartado nos planteamos, para el modelo booleano, en qué medida un procedimiento de este tipo da lugar a muestras aleatorias (por ejemplo, de la función de distribución de contacto). El resultado en que nos apoyamos es una generalización de la desigualdad de Brunn-Minkowski para RACS a.s. convexos y compactos debida a Vitale (1987).

Teorema 2.2.1

Sea A un modelo booleano en \mathbb{R}^d con grano primario a.s. convexo y compacto tal que existe EX . Sea $K \in \mathcal{C}'$ tal que $K = \bigcup_{i=1}^p K_i$ donde $K_i \in \text{Con}(\mathcal{C}')$ verificando:

$$\lambda_d \left(\left(EX + \overset{*}{K}_i \right) \cap \left(EX + \overset{*}{K}_j \right) \right) = 0 \quad \forall i \neq j \text{ con } i, j \in \{1, \dots, p\} \quad [2.2.1]$$

entonces

$$Q(K) = \prod_{i=1}^p Q(K_i)$$

Demostración

$$Q(K) = \exp \left(-\theta E \lambda_d \left(X + \overset{*}{K} \right) \right) = \exp \left\{ -\theta E \lambda_d \left(\bigcup_{i=1}^p X + \overset{*}{K}_i \right) \right\}$$

Pero

$$\begin{aligned} E \lambda_d \left(\bigcup_{i=1}^p X + \overset{*}{K}_i \right) &= E \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_d \left(X + \overset{*}{K}_i \right) - \sum_{i_1 < i_2} \lambda_d \left(\left(X + \overset{*}{K}_{i_1} \right) \cap \left(X + \overset{*}{K}_{i_2} \right) \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + (-1)^{p+1} \lambda_d \left(\left(X + \overset{*}{K}_1 \right) \cap \dots \cap \left(X + \overset{*}{K}_p \right) \right) \right\} \end{aligned}$$

Vitale (1987) demuestra que

$$\lambda_d^{\frac{1}{d}}(EX) \geq E \lambda_d^{\frac{1}{d}}(X)$$

Por tanto

$$\lambda_d(EX) = 0 \Rightarrow E \lambda_d^{\frac{1}{d}}(X) = 0 \Rightarrow \lambda_d^{\frac{1}{d}}(X) = 0 \text{ (a.s.)} \Rightarrow \lambda_d(X) = 0 \text{ (a.s.)} \Rightarrow E \lambda_d(X) = 0$$

Bajo la hipótesis [2.2.1] del enunciado tendríamos que:

$$\lambda_d \left(\left(EX + \overset{*}{K}_i \right) \cap \left(EX + \overset{*}{K}_j \right) \right) = 0$$

Pero es fácil ver que:

$$\begin{aligned} E \left(\left(X + \overset{*}{K}_i \right) \cap \left(X + \overset{*}{K}_j \right) \right) &\subseteq \left(EX + \overset{*}{K}_i \right) \cap \left(EX + \overset{*}{K}_j \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda_d \left\{ E \left(X + \overset{*}{K}_i \right) \cap E \left(X + \overset{*}{K}_j \right) \right\} &= 0 \Rightarrow E \lambda_d \left[\left(X + \overset{*}{K}_i \right) \cap \left(X + \overset{*}{K}_j \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

En general se deduce inmediatamente que:

$$\mathbb{E} \lambda_d \left\{ \left(X + K_{i_1}^* \right) \cap \dots \cap \left(X + K_{i_m}^* \right) \right\} = 0 \text{ para } m=2, \dots, p$$

En consecuencia: $Q(K) = \prod_{i=1}^p Q(K_i)$

Corolario 2.2.1

$A=(X, \theta)$ tal que existe EX. Sea $K \in C'$ tal que $K = \bigcup_{i=1}^{+\infty} K_i$ con $K_i \in \text{Con}(C')$ y verificando:

$$\lambda_d \left(\left(EX + K_i^* \right) \cap \left(EX + K_j^* \right) \right) = 0 \quad \forall i \neq j$$

Entonces

$$Q(K) = \prod_{i=1}^{+\infty} Q(K_i)$$

Demostración

Definimos $L_p = \bigcup_{i=1}^p K_i$. Entonces $L \uparrow K$. Q es semicontinua inferiormente (Matheron, 1975) y por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} Q(L_p) &= Q(K) \\ Q(L_p) &= Q\left(\bigcup_{i=1}^p K_i\right) = \prod_{i=1}^p Q(K_i) \\ \lim_{p \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^p Q(K_i) &= \prod_{i=1}^{+\infty} Q(K_i) = Q(K) \end{aligned}$$

Muestras aleatorias de la función de distribución de contacto en modelos booleanos

Sean K y K' compactos no vacíos fijos. Denotemos por $F_1(x)$ y $F_2(y)$ las funciones de distribución de contacto asociadas a K y K' respectivamente.

$$\begin{aligned} 1 - F_1(x) &= \frac{Q(xK)}{q} \\ 1 - F_2(y) &= \frac{Q(yK')}{q} \end{aligned}$$

donde $q=1-p$ denota la porosidad del RACS. Sobre una misma realización del RACS observamos la variable D_1 con distribución $F_1(x)$ y la variable D_2 con distribución

$F_2(y)$. La conjunta claramente será:

$$P(D_1 > x, D_2 > y) = \frac{Q(xK \cup yK')}{P(\{u(K), u(K')\} \subseteq A^c)}$$

donde $u(K)$ y $u(K')$ denotan los centros de las bolas que circunscriben a K y K' respectivamente y que asumimos son los puntos a partir de los cuales observamos D_1 y D_2 . Supongamos que:

$$\lambda_d \{ (EX + u(K)) \cap (EX + u(K')) \} = 0$$

$$\lambda_d \{ (EX + xK) \cap (EX + yK') \} = 0$$

entonces como consecuencia del teorema 2.2.1 se seguirá que

$$P(D_1 > x, D_2 > y) = \frac{Q(xK)Q(yK')}{q^2} = P(D_1 > x) P(D_2 > y) = (1 - F_1(x)) (1 - F_2(y))$$

¿Cómo conseguir "aproximadamente" muestras aleatorias de una determinada función de distribución de contacto asociada a un K determinado?

Para ello hacemos $K' = K + h$ en lo anterior. Observemos la variable aleatoria D_1 en el origen y en h . Denotemos los valores obtenidos por $D_{1,0}$ y por $D_{1,h}$. Entonces

$$P(D_{1,0} > x, D_{1,h} > y) = \frac{Q(xK \cup (yK + h))}{Q(\{0, h\})}$$

Asumiendo que

$$\lambda_d (EX \cap (EX + h)) = 0$$

$$\lambda_d ((EX + xK) \cap (EX + yK + h)) = 0$$

entonces

$$P(D_{1,0} > x, D_{1,h} > y) = \frac{Q(xK)}{q^2} \frac{Q(yK)}{q} = (1 - F_{1,0}(x)) (1 - F_{1,h}(y)) \quad [2.2.2]$$

Estrictamente hablando $D_{1,0}$ y $D_{1,h}$ no van a ser variables independientes. Para poder hablar con propiedad de independencia debemos hablar de las correspondientes variables truncadas. Por ejemplo: sea $\bar{h} = \sup \{ \alpha / \lambda_d ((EX + \alpha K) \cap (EX + \alpha K + h)) = 0 \}$ y \bar{D}_1 la variable D_1 truncada al intervalo $[0, \bar{h}]$. La función de distribución de \bar{D}_1 es pues:

$$\bar{F}_1(x) = \begin{cases} \frac{F_1(x)}{F_1(\bar{h})} & \text{si } 0 \leq x \leq \bar{h} \\ 1 & \text{si } x \geq \bar{h} \end{cases}$$

A partir de [2.2.2] es inmediato que $\bar{D}_{1,0}$ y $\bar{D}_{1,h}$ constituyen una muestra aleatoria de tamaño dos de \bar{D}_1 . Un h suficientemente alejado da lugar a \bar{h} mayores y por lo tanto a que la distribución de \bar{D}_1 y D_1 sean prácticamente la misma.

2.3. ESTIMACION DEL GRANO PRIMARIO ESPERADO

Lema 2.3.1

$g: \text{Con}(C') \rightarrow \mathbb{R}$ verificando:

$$a) g(\lambda K + (1-\lambda)K') = \lambda g(K) + (1-\lambda)g(K') \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

b) g continua.

Si X es un RACS a.s.convexo y compacto se verifica que $g(EX) = Eg(X)$.

Demostración

Sean X_1, \dots, X_n realizaciones independientes de X . Por la ley fuerte de los grandes números (Vitale y Arstein, 1975) se tiene que:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow EX \text{ (a.s.)}$$

g continua, por lo tanto:

$$g\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \rightarrow g(EX)$$

Por a tenemos que

$$g\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i)$$

Pero

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) \rightarrow E(g(X)) \text{ (a.s.)}$$

y se tiene probado el resultado.

Corolario 2.3.1

Suponemos las mismas condiciones de lema 2.3.1 sustituyendo la condición a por:

$$a') g(\lambda K + (1-\lambda)K') \leq \lambda g(K) + (1-\lambda)g(K') \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Entonces: $g(EX) \leq Eg(X)$.

Ejemplo 2.3.1

1) El conocido resultado que dice $E(U(X)) = U(EX)$ siendo $U(-)$ el perímetro en R^2 . En general la $(n-1)$ -funcional de Minkowski en R^n (Matheron, 1975) verifica

$$E[W_{n-1}^n(X)] = W_{n-1}^n(EX)$$

$$2) s(K) = \sup_{u \in S_0} \{r_K(u)\}$$

$$\begin{aligned} s(\lambda K + (1-\lambda)K') &= \sup_{u \in S_0} \{r_{\lambda K + (1-\lambda)K'}(u)\} = \sup_{u \in S_0} \{\lambda r_K(u) + (1-\lambda)r_{K'}(u)\} \leq \\ &\leq \lambda \sup_{u \in S_0} r_K(u) + (1-\lambda) \sup_{u \in S_0} r_{K'}(u) = \lambda s(K) + (1-\lambda)s(K') \end{aligned}$$

Por tanto $s(EX) \leq E(s(X))$.

3) $i(K) = \inf_{u \in S} r_K(u)$. De un modo análogo al apartado anterior tendríamos que $i(EX) \geq Ei(X)$.

4) En R siendo $\lambda_1(K)$ la longitud de K se tiene

$$\lambda_1(\lambda K + (1-\lambda)K') = \lambda \lambda_1(K) + (1-\lambda)\lambda_1(K')$$

donde K y K' son intervalos cerrados. Por tanto $\lambda_1(EX) = E\lambda_1(X)$.

Lema 2.3.2

X RACS a.s. convexo y compacto y $h: \text{Con}(C') \rightarrow \text{Con}(C')$ verificando:

$$a) h(\lambda K + (1-\lambda)K') = \lambda h(K) + (1-\lambda)h(K') \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

b) h continua.

Entonces: $h(EX) = Eh(X)$

La prueba es análoga a la del lema 2.3.1 aplicando la ley fuerte de los grandes números de Vitale y Arstein (1975).

Corolario 2.3.2

Las mismas condiciones de lema 2.3.2 sustituyendo a por

$$a') h(\lambda K + (1-\lambda)K') \leq \lambda h(K) + (1-\lambda)h(K') \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Entonces: $h(EX) \leq E(h(X))$.

Ejemplo 2.3.1

1) Sea $u \in S_0$ la esfera unidad. Consideremos la proyección sobre el hiperplano ortogonal a u .

$$\begin{aligned} \Pi_{u^\perp} : \text{Con}(C'(\mathbb{R}^2)) &\rightarrow \text{Con}(C'(\mathbb{R})) \\ K &\rightarrow \Pi_{u^\perp} K \end{aligned}$$

$$a) \Pi_{u^\perp} (\lambda K + (1-\lambda)K') = \lambda \Pi_{u^\perp} K + (1-\lambda) \Pi_{u^\perp} K'$$

b) Π_{u^\perp} es continua (Matheron, 1975, página 69).

En consecuencia

$$E[\Pi_{u^\perp} X] = \Pi_{u^\perp} EX$$

2) Sean $\{v_1, \dots, v_m\}$ elementos de S_0 un conjunto de direcciones fijo y $K \in \text{Con}(C')$. El estimador Lyashenko de K viene dado por

$$L(K / v_1, \dots, v_m) = \bigcap_{i=1}^m \{z \in \mathbb{R}^2 / z'v_i \leq r_K(v_i)\}$$

Consideramos

$$\begin{aligned} L : \text{Con}(C') &\rightarrow \text{Con}(C') \\ K &\rightarrow L(K / v_1, \dots, v_m) \end{aligned}$$

Se comprueba que L es continua. Además se verifica que

$$\begin{aligned} 1) L(\alpha K / v_1, \dots, v_m) &= \{z / z'v_i \leq \alpha r_K(v_i) \quad i=1, \dots, m\} = \\ &= \alpha \{y / y'v_i \leq r_K(v_i)\} = \alpha L(K / v_1, \dots, v_m) \end{aligned}$$

$$2) L(K+K' / v_1, \dots, v_m) = L(K / v_1, \dots, v_m) + L(K' / v_1, \dots, v_m)$$

Proveamos los resultados. Sea E_K el conjunto de puntos extremos de $L(K / v_1, \dots, v_m)$. Análogamente se definen $E_{K'}$ y $E_{K+K'}$. Se tiene que

$$\begin{aligned} L(K / v_1, \dots, v_m) &= \text{conv}(E_K) \\ L(K' / v_1, \dots, v_m) &= \text{conv}(E_{K'}) \\ L(K+K' / v_1, \dots, v_m) &= \text{conv}(E_{K+K'}) \end{aligned}$$

Probar las igualdades 1 y 2 es equivalente a ver que $E_{K+K'} = E_K + E_{K'}$. Supongamos que los v_i están ordenados (por ejemplo en el sentido de las agujas del reloj). Existe un único $x_i \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{aligned} x_i'v_i &= r_K(v_i) \\ x_i'v_{i+1} &= r_K(v_{i+1}) \end{aligned}$$

Existe un único $y_i \in \mathbb{R}^2$ tal que:

$$y_i' v_i = r_{K'}(v_i)$$

$$y_i' v_{i+1} = r_{K'}(v_{i+1})$$

Sea $z_i \in E_{K+K'}$ el punto extremo tal que

$$z_i' v_i = r_{K+K'}(v_i) = r_K(v_i) + r_{K'}(v_i)$$

$$z_i' v_{i+1} = r_{K+K'}(v_{i+1}) = r_K(v_{i+1}) + r_{K'}(v_{i+1})$$

z_i es único pero $x_i + y_i$ también es solución del sistema anterior por lo tanto $z_i = x_i + y_i$

En definitiva hemos probado que $E_{K+K'} = E_K + E_{K'}$ y se sigue la igualdad. Podemos pues afirmar que $EL(X / v_1, \dots, v_m) = L(EX / v_1, \dots, v_m)$.

Corolario 2.3.3

$A = (X, \theta)$ modelo booleano en \mathbb{R} con X a.s. convexo y compacto tal que existe EX . Sea $A' = (EX, \theta)$. Entonces $Q(K) = Q'(K)$ para todo $K \in \text{Con}(C')$.

Demostración

$$Q(K) = \exp\{-\theta E \lambda_1(X + \dot{K})\} = \exp\{-\theta \lambda_1(EX + \dot{K})\} = Q'(K)$$

Corolario 2.3.4

$A = (X, \theta)$ con X a.s. convexo y compacto tal que existe EX y sea $A' = (EX, \theta)$, entonces:

1) Si X es isotrópico, la función de distribución de contacto asociada a cualquier $K \in \text{Con}(C')$ de A y A' coinciden.

2) Para cualquier X , isotrópico o no, si $H_{n-1}(u)$ denota un hiperplano cuya dirección $u \in S_0$ y consideramos $A(u) = A \cap H_{n-1}(u)$, $A'(u) = A' \cap H_{n-1}(u)$ entonces los modelos booleanos $A(u)$ y $A'(u)$ tienen la misma intensidad para cualquier u que tomemos.

Demostración

La del apartado uno es trivial. En cuanto al segundo, Matheron (1975) probó que

$$\theta(u) = \theta E \lambda_1(\Pi_{u^\perp} X)$$

$$\theta(u) = \theta E \lambda_1(\Pi_{u^\perp} X) = \theta \lambda_1(E(\Pi_{u^\perp} X)) = \theta \lambda_1(\Pi_{u^\perp} EX) = \theta'(u)$$

Estimador Lyashenko de EX

El problema de la estimación de EX se puede plantear entre otras de dos formas:

1) Asumir que conocemos X_1, \dots, X_n realizaciones independientes de X y construir estimadores basándonos en los X_i .

2) Suponer que conocemos $X_1 \cup \dots \cup X_n$ intersectado con una ventana de muestreo y con esta información tratar de estimar el conjunto esperado EX.

La segunda situación es la que se plantea cuando suponemos un modelo booleano conocido a través de una ventana de observación.

Asumiendo pues que estamos en la segunda situación en lo que sigue se dan algunas soluciones parciales. En nuestra opinión es un problema de un enorme interés y completamente sin resolver.

Caso a: X isotrópico

X isotrópico implica que EX es una bola ya que X y $v(X)$ se distribuyen igual para cualquier rotación n y en consecuencia

$$EX = E[v(X)] \Rightarrow r_{EX}(v) = r_{E[v(X)]}(v) \quad \forall v \in S_0$$

$$r_{E[v(X)]}(v) = E[r_{v(X)}(v)] = E[r_X(v^{-1}(v))]$$

Se sigue que

$$r_{EX}(v) = r_{EX}(v^{-1}(v))$$

y haciendo variar v en el conjunto de posibles rotaciones obtenemos que $r_{EX}(v)$ es una función constante.

EX es una bola con perímetro $U(EX) = EU(X)$ y por consiguiente si estimamos $EU(X)$ tenemos resuelto el problema. En el capítulo 4 veremos distintos procedimientos de estimación de $s = EU(X)$ además de los comentados en capítulo 1.

Caso b: EX simétrico respecto del origen

Si $V(\lambda u) = E\lambda_2(X \cap X_{\lambda u})$ con $u \in S$ y $\lambda \geq 0$. Hemos comentado en capítulo 1 el resultado de Matheron (1975) que dice

$$\left. \frac{d}{d\lambda} V(\lambda u) \right|_{\lambda=0} = -E\lambda_1(\Pi_{u^\perp} X)$$

En capítulo 4 se estudiará algún método de estimación de $V(\lambda u)$.

$$E\lambda_1(\Pi_{u^\perp} X) = \lambda_1(\Pi_{u^\perp} EX)$$

$$U(EX) = \pi \int_{S_0} \frac{dV(\lambda u)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} \frac{1}{\text{mes}(S)} du = EU(X) \quad [2.3.1]$$

Por tanto $U(EX)$ es estimable bien utilizando [2.3.1], bien utilizando la relación con $EU(X)$. Notemos que en este caso no se exige la isotropía. Observemos que [2.3.1] es un resultado muy conocido pero en cualquier caso el procedimiento de prueba en lo que nosotros sabemos sí que lo es.

Notemos que

$$\lambda_1(\Pi_{u^\perp} EX) = r_{EX}(u^\perp) + r_{EX}(-u^\perp)$$

Asumiendo que EX es simétrico respecto del origen se tienen las igualdades

$$r_{EX}(u^\perp) = r_{EX}(-u^\perp) \quad \forall u \in S_0$$

y por tanto

$$\lambda_1(\Pi_{u^\perp} EX) = 2r_{EX}(u^\perp) \quad \forall u \in S_0$$

En definitiva

$$r_{EX}(u^\perp) = \frac{1}{2} \frac{dV(\lambda u)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} \quad \forall u \in S_0$$

Por tanto, $r_{EX}(v)$ para las direcciones que elijamos son cantidades estimables. En general tendremos estimaciones de $\{r_{EX}(v_i)\}_{i=1}^m$. Lyashenko con esta información sobre un conjunto convexo y compacto desconocido propone como estimador conjuntista el siguiente:

$$L(EX / v_1, \dots, v_m) = \bigcap_{i=1}^m \{z \in \mathbb{R}^2 / z'v_i \leq r_{EX}(v_i)\}$$

Si denotamos por $\hat{r}_{EX}(v_i)$ con $i=1, \dots, m$. La estimación de EX que consideramos será:

$$\begin{aligned} L(EX / v_1, \dots, v_m, -v_1, \dots, -v_m) &= \bigcap_{i=1}^m \{z \in \mathbb{R}^2 / z'v_i \leq \hat{r}_{EX}(v_i)\} \cap \\ &\cap \bigcap_{i=1}^m \{z \in \mathbb{R}^2 / z'(-v_i) \leq \hat{r}_{EX}(-v_i)\} = \bigcap_{i=1}^m \{z \in \mathbb{R}^2 / -\hat{r}_{EX}(v_i) \leq z'v_i \leq \hat{r}_{EX}(v_i)\} \end{aligned}$$

CAPITULO 3

FUNCIONES DE DISCREPANCIA

En modelos estocásticos complejos, tales como los procesos puntuales y en general los conjuntos aleatorios cerrados, los problemas de estimación de los parámetros y contraste del propio modelo son tratados habitualmente observando una característica concreta de los mismos. Ejemplos son: en procesos puntuales, la distancia desde un punto cualquiera al punto del proceso más próximo, o desde un punto cualquiera del proceso al vecino más próximo; en conjuntos aleatorios, la distribución de contacto. En todos ellos se reduce el estudio del modelo estocástico a la característica elegida, usualmente por tener una distribución de probabilidad conocida y manejable y ser fácilmente observable. Vamos a representar dicha característica por F , su función de distribución asociada. Esta función F podemos suponerla estimable en todos los puntos x que nosotros elijamos.

Si efectivamente el modelo real que estudiamos se corresponde con el teórico que asumimos, se tendría que F está en una determinada familia paramétrica de distribuciones, $\{F_\omega/\omega \in \Omega\}$. La complejidad de los problemas reales hacen que considerar esta situación sea, en nuestra opinión, poco práctico. Nos parece más razonable considerar que la función F desconocida puede ser aproximada por un elemento de $\{F_\omega/\omega \in \Omega\}$. Este será el enfoque que utilizaremos a lo largo de todo este capítulo y nuestro problema fundamental, la determinación de un ω razonable.

El método que se utiliza es una combinación del bayesiano y del sugerido por Diggle (1979) para procesos puntuales y la justificación de su uso procede de las limitaciones que tenemos para estimar $F(x)$ comentadas en capítulo uno. De las dos situaciones muestrales comentadas en apartado 7 de dicho capítulo asumimos que disponemos de realizaciones conocidas a través de una ventana de muestreo.

Las referencias fundamentales para entender la justificación de este capítulo son la ya citada de Diggle (1979), Mase (1982), Barnard (1963) y Baddeley (1980).

3.1 METODOLOGIA DE DIGGLE

Supongamos que, para describir un patrón puntual, elegimos la distancia observada desde n puntos del patrón en una región acotada, W ; a su vecino más próximo. Estas medidas son dependientes. Esto no es obstáculo para, a partir de estos n valores, estimar una función de distribución empírica, \hat{F} . Suponiendo que el patrón puntual de que disponemos es una realización de un tipo concreto de proceso la característica observada tendrá una función de distribución en la familia paramétrica $\{F_\omega/\omega \in \Omega\}$. Sea $d(\cdot)$ una medida de discrepancia entre dos funciones, $t(\omega) = d(\hat{F}, F_\omega)$.

Por ejemplo:

$$d(\hat{F}, F_\omega) = \sup |\hat{F}(x) - F_\omega(x)| \quad \text{o} \quad d(\hat{F}, F_\omega) = \int |\hat{F}(x) - F_\omega(x)| dx$$

donde el supremo o la integral se toman sobre un rango adecuado de valores de x .

Diggle propone estimar el valor desconocido de ω mediante el valor ω^* que minimiza $t(\omega)$. En el caso en que F_ω no tenga una expresión analítica conocida puede ser estimada tomando

$$F_\omega = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} \hat{F}_i$$

donde \hat{F}_i están estimadas del mismo modo que \hat{F} a partir de $m-1$ simulaciones del proceso asumiendo que el valor del parámetro es ω .

También propone Diggle un procedimiento de bondad de ajuste de la hipótesis de que nuestra realización lo es de un proceso dado con un valor determinado de ω . El procedimiento está basado en Barnard (1963) y es el siguiente: generamos, con el valor dado de ω , $m-1$ realizaciones y estimamos \hat{F}_i para $i=2, \dots, m$. Suponemos que $\hat{F}_1 = \hat{F}$. Si F_ω tiene una expresión analítica conocida sea

$$t_i = d(\hat{F}_i, F_\omega)$$

En el caso en que no conozcamos F_ω tomamos

$$\bar{F}_i = \frac{1}{m-1} \sum_{j \neq i} \hat{F}_j \quad \text{y} \quad t_i = d(\hat{F}_i, \bar{F}_i)$$

En cualquiera de las dos situaciones si asumimos la hipótesis que deseamos contrastar cualquier ordenación de los t_j es igualmente probable. En particular si $t_{(i)}$ denota el i -ésimo t_j ordenado y suponemos que la igualdad de dos t_j no puede ocurrir

entonces:

$$P\{t_1=t_{(i)}\}=\frac{1}{m} \quad \text{con } i=1,\dots,m$$

El rango de t_1 nos da el nivel de significación del test de Monte Carlo de la hipótesis nula. Con objeto de obtener estimaciones robustas sugiere el uso de varias características del patrón. Este es, en esencia, el procedimiento propuesto por Diggle. En ese mismo trabajo aplica y comprueba su bondad a una serie de patrones puntuales simulados. Una aplicación concreta al estudio del modelo booleano puede encontrarse en Diggle (1981).

3.2 FUNCION DE DISCREPANCIA

En el resto del capítulo trabajaremos con funciones de densidad. Todos los resultados y definiciones pueden igualmente ser enunciados para funciones de cuantía.

Definición 3.2.1

Supongamos que sobre $\omega \in \Omega$ tenemos especificada una cierta distribución con densidad ξ_0 . Sea F la función de distribución de la característica en estudio y $\{F_\omega/\omega \in \Omega\}$ la familia paramétrica de funciones de distribución mediante la cual queremos aproximar F . Sea $d(\cdot)$ una distancia en \mathbb{R} . Definimos función de discrepancia, t , asociada a d como:

$$t(\omega, x) = d(F_\omega(x), F(x)) \quad \omega \in \Omega, x \in \mathbb{R} \quad [3.2.1]$$

Nota 3.2.1

a) $t(\omega, x)$ es una medida del error cometido en x cuando en lugar de tomar F tomamos F_ω .

b) $t(\omega, x)$ es una función desconocida ya que, aunque $F_\omega(x)$ es una cantidad perfectamente conocida, $F(x)$ no lo es. $F(x)$ normalmente será estimable prácticamente para todo x y por tanto $t(\omega, x)$ también lo será. En el siguiente apartado consideraremos el problema de la estimación de $t(\omega, x)$ y las limitaciones que esto nos impone en relación a la estimación de ω .

c) Normalmente supondremos que $t(\omega, x)$ es una función acotada. Esto no supone ninguna restricción seria en tanto que $1 \geq F_\omega(x), F(x) \geq 0$ para cualquier x de \mathbb{R} . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que la cota es la unidad.

¿Cómo mejorar nuestro conocimiento sobre ω partiendo de un conocimiento previo expresado en ξ_0 ? En estadística de variables o vectores aleatorios la información habitual es una muestra aleatoria $x=(x_1, \dots, x_n)$. En este contexto, el método bayesiano mejora la información sobre el parámetro pasando de una inicial ξ_0 a una final $\xi(\omega/x)$ tal que

$$\xi(\omega/x) \propto \xi_0(\omega) f_n(x/\omega)$$

siendo $f_n(x/\omega)$ la verosimilitud de la muestra. Es decir, una mayor verosimilitud para un ω dado significa un mayor valor de la densidad a posteriori en ese punto, siempre en términos relativos.

Supongamos que nuestra información consiste en el conocimiento exacto de la función $t(\omega, x)$. ¿Cómo incorporar a ξ_0 el conocimiento de $t(\omega, x)$? Por analogía con el proceder bayesiano parece natural definir:

Definición 3.2.2

Dado ξ_0 función de densidad de probabilidad y $t(\omega, x)$ una función de discrepancia, definimos distribución t-posteriori como:

$$\xi(\omega/x) \propto \frac{\xi_0(\omega)}{t(\omega, x)} \quad [3.2.2]$$

Nota 3.2.2

Es claro que a una mayor discrepancia corresponde una menor densidad t-posteriori.

A continuación enunciamos y probamos algunas propiedades de $\xi(\omega/t)$ que indican lo razonable de la misma en cuanto a su utilización para la estimación de ω .

Propiedad 3.2.1

$$E[t(\omega, x)/t] = \frac{1}{\int_{\Omega} \frac{\xi_0(\omega)}{t(\omega, x)} d\omega}$$

donde el primer miembro denota el valor esperado de $t(\omega, x)$ respecto de $\xi(\omega/t)$.

Demostración

$$E[t(\omega, x)/t] = \int_{\Omega} t(\omega, x) \xi(\omega/t) d\omega =$$

$$= \int_{\Omega} t(\omega, x) \frac{\xi_0(\omega)}{t(\omega, x)} \frac{1}{\int_{\Omega} \frac{\xi_0(\omega)}{t(\omega, x)} d\omega} d\omega = \frac{1}{\int_{\Omega} \frac{\xi_0(\omega)}{t(\omega, x)} d\omega}$$

que era lo que queríamos probar.

$t(\omega, x)$ es una medida de error. $E[t(\omega, x)/t]$ es un error medio cuando sobre la distribución inicial del parámetro hemos incorporado la información $t(\omega, x)$. Puede ser considerado como un error medio residual.

Propiedad 3.2.2

$$E[t(\omega, x)/t] \leq E_0[t(\omega, x)]$$

siendo $E_0[t(\omega, x)]$ el valor esperado de $t(\omega, x)$ respecto ξ_0 . Además la igualdad se da si y solamente si $t(\omega, x)$ es a.s. constante respecto ξ_0 considerada como función de ω .

Demostración

$$\begin{aligned} E_0[t(\omega, x)] - E[t(\omega, x)/t] &= \int_{\Omega} t(\omega, x) \xi_0(\omega) d\omega - \frac{1}{\int_{\Omega} \frac{\xi_0(\omega)}{t(\omega, x)} d\omega} = \\ &= \frac{\int_{\Omega} t(\omega, x) \xi_0(\omega) d\omega \int_{\Omega} \frac{\xi_0(\omega)}{t(\omega, x)} d\omega - 1}{\int_{\Omega} \frac{\xi_0(\omega)}{t(\omega, x)} d\omega} \end{aligned}$$

Pero por la desigualdad de Cauchy-Schwartz sabemos que

$$E_0[t(\omega, x)] E_0\left[\frac{1}{t(\omega, x)}\right] \geq \{E_0[1]\}^2 = 1$$

lo que equivale a:

$$\int_{\Omega} t(\omega, x) \xi_0(\omega) d\omega \int_{\Omega} \frac{\xi_0(\omega)}{t(\omega, x)} d\omega \geq 1$$

La igualdad se da si y sólo si existen constantes α y β tales que

$$P_0\left(\alpha\sqrt{t(\omega, x)} + \beta\frac{1}{\sqrt{t(\omega, x)}} = 0\right) = 1 \Leftrightarrow P_0\left(t(\omega, x) = \frac{-\beta}{\alpha}\right) = 1$$

Una medida de la información proporcionada por $t(\omega, x)$ sería:

Propiedad 3.2.3

$$E_0[t(\omega, x)] - E[t(\omega, x)/t] = \frac{\text{var} [t^2(\omega, x)/t]}{E[t(\omega, x)/t]}$$

lo que además equivale a:

$$E_0[t(\omega, x)] = \frac{E[t^2(\omega, x)/t]}{E[t(\omega, x)/t]}$$

Demostración

$$\text{var} [t(\omega, x)/t] = E[t^2(\omega, x)/t] - E^2[t(\omega, x)/t] =$$

$$= \frac{\int_{\Omega} t(\omega, x) \xi_0(\omega) d\omega}{\int_{\Omega} \frac{\xi_0(\omega)}{t(\omega, x)} d\omega} - \frac{1}{\left[\int_{\Omega} \frac{\xi_0(\omega)}{t(\omega, x)} d\omega \right]^2} =$$

$$= \frac{1}{\int_{\Omega} \frac{\xi_0(\omega)}{t(\omega, x)} d\omega} \left[\int_{\Omega} t(\omega, x) \xi_0(\omega) d\omega - \frac{1}{\left[\int_{\Omega} \frac{\xi_0(\omega)}{t(\omega, x)} d\omega \right]} \right] =$$

$$= E[t(\omega, x)/t] \{ E_0[t(\omega, x)] - E[t(\omega, x)/t] \}$$

Fácilmente se ve que lo anterior equivale a:

$$E_0[t(\omega, x)] E[t(\omega, x)/t] = E[t^2(\omega, x)/t]$$

que era lo que queríamos probar.

Lo razonable es que P_t (cuya densidad es $\xi_t(\omega/t)$) de una mayor probabilidad a los ω con discrepancias asociadas pequeñas que P_0 (con densidad $\xi_0(\omega)$). Formalicemos esta idea.

Definición 3.2.4

Asumimos que $0 \leq t(\omega, x) \leq 1$ y sea $0 \leq \alpha \leq 1$. Definimos:

$$\Omega_x^\alpha = \{ \omega \in \Omega / t(\omega, x) \leq \alpha \}$$

Nota 3.2.3

$$\Omega_x^{\alpha_1} \subseteq \Omega_x^{\alpha_2} \text{ si } \alpha_1 \leq \alpha_2$$

Propiedad 3.2.4

$$P_t(\Omega_x^\alpha) = \frac{P_0(\Omega_x^\alpha)}{\alpha \int_{\Omega} \frac{\xi_0(\omega)}{t(\omega, x)} d\omega}$$

En consecuencia:

$$\forall k > 0 \exists \alpha_k \in [0, 1] \text{ tal que } \forall \alpha \leq \alpha_k \quad P_t(\Omega_x^\alpha) \geq k P_0(\Omega_x^\alpha)$$

Demostración

$$\begin{aligned} P_t(\Omega_x^\alpha) &= \frac{\int_{\Omega_x^\alpha} \frac{\xi_0(\omega)}{t(\omega, x)} d\omega}{\alpha \int_{\Omega} \frac{\xi_0(\omega)}{t(\omega, x)} d\omega} \geq \\ &\geq \frac{\int_{\Omega_x^\alpha} \xi_0(\omega) d\omega}{\alpha \int_{\Omega} \frac{\xi_0(\omega)}{t(\omega, x)} d\omega} = \frac{P_0(\Omega_x^\alpha)}{\alpha \int_{\Omega} \frac{\xi_0(\omega)}{t(\omega, x)} d\omega} \end{aligned}$$

La segunda afirmación del enunciado es consecuencia de:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha \int_{\Omega} \frac{\xi_0(\omega)}{t(\omega, x)} d\omega} = +\infty$$

Supongamos que $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y creciente y sea $t'(\omega, x) = h(t(\omega, x))$. Es de suponer que t y t' han de tener comportamientos semejantes. De hecho tenemos el siguiente resultado:

Propiedad 3.2.5

Sea $h :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ función continua y creciente. Consideremos la distribución de probabilidad con densidad:

$$\pi(\omega) \propto \frac{\xi_0(\omega)}{h(t(\omega, x))}$$

entonces

$$P_{\pi}(\Omega_x^{h(\alpha)}(h(t))) = P_{\pi}(\Omega_x^{\alpha}(t)) \geq \frac{P_0(\Omega_x^{h(\alpha)}(h(t)))}{h(\alpha) \int_{\Omega} \frac{\xi_0(\omega)}{h(t(\omega, x))} d\omega} = \frac{P_0(\Omega_x^{\alpha}(t))}{h(\alpha) \int_{\Omega} \frac{\xi_0(\omega)}{h(t(\omega, x))} d\omega}$$

La prueba es análoga a la propiedad anterior teniendo en cuenta que:

$$\Omega_x^{\alpha}(t) = \{\omega \in \Omega / t(\omega, x) \leq \alpha\} = \{\omega \in \Omega / h(t(\omega, x)) \leq h(\alpha)\} = \Omega_x^{h(\alpha)}(h(t))$$

De hecho en lo que sigue consideraremos como función de discrepancia las definidas en [3.2.1] y las transformaciones continuas y crecientes de las mismas. Será de particular interés: $t'(\omega, x) = h(t(\omega, x))$ donde $h(x) = 1/(1-x)$.

Ponderación de discrepancias

Las cantidades $1/t(\omega, x)$ o $1-t(\omega, x)$ pueden ser consideradas como medidas de precisión del modelo, F_{ω} , en el punto x . Parece natural ponderar estas medidas de precisión por la mayor o menor "probabilidad" de x respecto de la distribución dada por F_{ω} . Es decir, considerar:

$$\xi^*(\omega/t) \propto \xi_0(\omega) \frac{1}{t(\omega, x)} f(x/\omega) \quad [3.2.3]$$

o

$$\xi^*(\omega/t') \propto \xi_0(\omega) (1-t(\omega, x)) f(x/\omega) \quad [3.2.4]$$

que en cierto sentido recuerdan a una distribución a posteriori clásica ponderada por una medida de precisión del modelo.

Definición 3.2.5

Denominaremos a $\frac{1}{t(\omega, x)} f(x/\omega)$ y a $(1-t(\omega, x)) f(x/\omega)$ medidas de precisión ponderadas.

¿En qué sentido "mejoran" las precisiones ponderadas a las precisiones sin ponderar?

Parece razonable que a una mayor "probabilidad" del punto de muestreo x le corresponda una mayor precisión (bajo la hipótesis de que F_{ω} se aproxima mucho a F)

y viceversa. Esto se traduciría en que el valor esperado de $1-t(\omega, x)$, respecto $F_\omega(x)$, sea menor que el valor esperado de $(1-t(\omega, x))f(x/\omega)$ respecto de la misma distribución. Sin embargo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t(\omega, x)} f(x/\omega) dx$$

y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t(\omega, x)} f(x/\omega) f(x/\omega) dx$$

no son comparables entre si. Para hacerlas comparables lo natural es dividir estos valores por las precisiones totales, es decir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t(\omega, x)} dx$$

y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t(\omega, x)} f(x/\omega) dx$$

respectivamente. En concreto se verifica el siguiente resultado:

Propiedad 3.2.6

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t(\omega, x)} f^2(x/\omega) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t(\omega, x)} f(x/\omega) dx} \geq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t(\omega, x)} f(x/\omega) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t(\omega, x)} dx} \quad [3.2.5]$$

Además si $P_\omega(t(\omega, x) > 0) = 1$ donde P_ω es la medida de probabilidad con densidad asociada dada por $f(x/\omega)$ entonces la igualdad en la desigualdad [3.2.5] se da si y sólo si $f(x/\omega)$ es constante para casi todo x respecto P_ω .

Demostración

Es una aplicación de la desigualdad de Cauchy-Schwartz, ya que [3.2.5] equivale a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t(\omega, x)} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t(\omega, x)} f^2(x/\omega) dx > \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t(\omega, x)} f(x/\omega) dx \right\}^2$$

tomando

$$X = \frac{1}{\sqrt{t(\omega, x)f(x/\omega)}} \quad \text{e} \quad Y = \sqrt{\frac{f(x/\omega)}{t(\omega, x)}}$$

tenemos

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t(\omega, x)} dx$$

$$EY^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t(\omega, x)} f^2(x/\omega) dx$$

y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz se seguiría el resultado. La igualdad se daría si y sólo si existen $\alpha, \beta \neq 0$ constantes tales que:

$$P_{\omega} \{ \alpha X + \beta Y = 0 \} = 1$$

$$\alpha^2 \frac{1}{t(\omega, x)f(x/\omega)} = \beta^2 \frac{f^2(x/\omega)}{t(\omega, x)} \quad [3.2.6]$$

Bajo la hipótesis de que a.s. $t(\omega, x) > 0$ tendremos que [3.2.6] equivale a la igualdad:

$$f^2(x/\omega) = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \Leftrightarrow f(x/\omega) = \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|$$

Hemos visto que en un determinado sentido $(1/t(\omega, x))f(x/\omega)$ mejora a $1/t(\omega, x)$. Por una prueba análoga tendríamos que $(1/t(\omega, x))f^2(x/\omega)$ mejoraría a $(1/t(\omega, x))f(x/\omega)$ y así sucesivamente. Vamos a ver una propiedad que resuelve la aparente necesidad de utilizar $\lim_{n \rightarrow \infty} [1-t(\omega, x)]f^n(x/\omega)$ como función de discrepancia.

Definición 3.2.6

Sea

$$g_0(x/\omega) = f(x/\omega), \quad g_1(x/\omega) = \alpha \frac{f(x/\omega)}{t(\omega, x)}, \dots, \dots, \quad g_n(x/\omega) = \alpha^n \frac{f^n(x/\omega)}{t(\omega, x)}$$

y

$$E[t(\omega, x)/n] = \int_{-\infty}^{+\infty} t(\omega, x) g_n(x/\omega) dx$$

Considerar las densidades $g_n(x/\omega)$ significa, para un ω dado, ir dando sucesivamente más importancia a los puntos x con una mayor densidad y simultáneamente ponderar por la precisión dada por $1/t(\omega, x)$. En la medida en que ω sea un valor razonable para el parámetro es natural que :

$$E[t(\omega, x)/0] \geq E[t(\omega, x)/n]$$

Se tiene, sin embargo, que:

Lema 3.2.1

$$a) E[t(\omega, x)/0] \geq E[t(\omega, x)/1]$$

dándose la igualdad si y sólo si $t(\omega, x)$ es a.s. (respecto P_ω) una función constante.

b) $E[t(\omega, x)/0]$ no es necesariamente mayor que $E[t(\omega, x)/n]$.

La prueba de a es la misma que la de la propiedad 3.2.2. En cuanto a b se tiene

$$E[t(\omega, x)/0] \geq E[t(\omega, x)/n] \Leftrightarrow \text{cov}\left(t(\omega, x), \frac{f^{n1}(x/\omega)}{t(\omega, x)} / 0\right) \geq 0$$

lo cual no necesariamente ha de ocurrir.

Nos parece de interés hacer un comentario crítico sobre la propiedad 3.2.6 y el lema 3.2.1. El punto x que que nos va a determinar la función de discrepancia es un valor elegido por nosotros. No es un valor aleatorio. Nos parece que la información que sobre ω nos proporciona será menor en la medida en que menor sea la probabilidad de x si ω es cierto. Un modo de hacer intervenir este hecho en la función de discrepancia es considerando la densidad $f(x/\omega)$. La propiedad 3.2.6 responde a un intento de formalización de esta idea. Sin embargo, tomando $f^2(x/\omega)$ en lugar de $f(x/\omega)$ lograríamos el mismo efecto pero aumentando las diferencias relativas según los distintos ω , y así sucesivamente. Iríamos valorando más y más el hecho de que es a partir de x de donde obtenemos la información, $t(\omega, x)$, en detrimento del peso que damos a dicha información. El lema 3.2.1 intenta dar una respuesta a este problema justificando la ponderación mediante $f(x/\omega)$ pero no con $f^n(x/\omega)$ con $n > 1$.

Corolario 3.2.1

Sean

$$\xi_0(\omega/t) \propto \xi_0(\omega) \quad \text{y} \quad \xi_n(\omega/t) \propto \frac{\xi_0^n(\omega)}{t(\omega, x)} \quad \text{con } n > 1$$

Entonces:

$$a) \int_{\Omega} t(\omega, x) \xi_0(\omega) d\omega \geq \int_{\Omega} t(\omega, x) \xi_1(\omega) d\omega$$

con igualdad si y sólo si $t(\omega, x)$ es a.s. constante respecto P_0 sobre Ω .

$$b) \int_{\Omega} t(\omega, x) \xi_d(\omega) d\omega \text{ no es necesariamente mayor que } \int_{\Omega} t(\omega, x) \xi_d(\omega) d\omega$$

3.3. ESTIMACION DE LA FUNCION DE DISCREPANCIA

Durante todo el apartado anterior hemos trabajado asumiendo que $t(\omega, x)$ era una función conocida. Sin embargo, esto no es así ya que $F(x)$ no es conocido y $t(\omega, x) = d(F_{\omega}(x), F(x))$. En la práctica dispondremos de una estimación de la discrepancia,

$$\hat{t}(\omega, x) = d(F_{\omega}(x), \hat{F}(x)) \quad [3.3.1]$$

Para la estimación de $F(x)$ tenemos las dos limitaciones usuales en estadística de RACS:

- 1) Un número finito de realizaciones del RACS.
- 2) Cada una de las realizaciones conocida solamente en la parte correspondiente a la ventana de muestreo, W .

Trabajaremos con unas distribuciones t-posterioris estimadas que denotamos:

$$\hat{\xi}(\omega/t) \propto \frac{\xi_d(\omega)}{\hat{t}(\omega, x)}$$

El conocimiento que sobre ω nos proporciona $t(\omega, x)$ era incorporado al inicial (ξ_0) pasando a una distribución t-posteriori ($\xi(. / t)$). En este apartado intentamos responder a la siguiente pregunta:

¿Qué limitaciones nos impone el hecho de conocer $\hat{\xi}(\omega/t)$ en lugar de $\xi(\omega/t)$ en cuanto a la estimación de un valor razonable para ω ?

Es claro que las propiedades de $\hat{\xi}(\omega/t)$ se han de deducir de las propiedades de $\hat{F}(x)$. Vamos a considerar las dos situaciones de muestreo que con mayor frecuencia se presentan en las aplicaciones.

Situación 1

Tenemos una ventana fija de muestreo W y n realizaciones independientes del RACS.

Definición 3.3.1

$$\hat{t}_n(\omega, x) = d(F_\omega(x), \tilde{F}_n(x))$$

siendo

$$\tilde{F}_n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\hat{F}_i(x)}{n}$$

y $\hat{F}_i(x)$ el estimador de $F(x)$ obtenido de la i -ésima realización.

Teorema 3.3.1

Si

$$a) E[\hat{F}_i(x)] = F(x) \quad \forall i=1, \dots, n$$

b) $d(\alpha, \beta)$ función acotada y continua para $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$.

Entonces:

$$1) \hat{t}_n(\omega, x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} t(\omega, x) \quad (\text{a.s.}) \text{ para cada } \omega \text{ y } x.$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} E[\hat{t}_n(\omega, x)] = t(\omega, x)$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\omega \in \Omega} |\hat{t}_n(\omega, x) - t(\omega, x)| = 0$$

Demostración

1) Claramente

$$E[\tilde{F}_n(x)] = F(x)$$

y por la ley fuerte de los grandes números tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{F}_n(x) = F(x) \quad (\text{a.s.})$$

d es continua y por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(F_\omega(x), \tilde{F}_n(x)) = d(F_\omega(x), F(x)) \quad (\text{a.s.}) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{t}_n(\omega, x) = t(\omega, x) \quad (\text{a.s.})$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} E[\hat{t}_n(\omega, x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \hat{t}_n(\omega, x) dP$$

Por el teorema de la convergencia acotada tendremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \hat{t}_n(\omega, x) dP = \int \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{t}_n(\omega, x) dP = \int t(\omega, x) dP = t(\omega, x)$$

Nota 3.3.1

Si $p_i(\omega, x)$ es el valor de $\hat{t}_i(\omega, x)$ obtenido a partir de la i -ésima realización y tomamos como estimador de $t(\omega, x)$

$$\bar{p}_n(\omega, x) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i(\omega, x)}{n}$$

tenemos

$$\bar{p}_n(\omega, x) \xrightarrow{\text{a.s.}} E[p_i(\omega, x)] = t(\omega, x)$$

Situación 2

En este caso suponemos una sola realización conocida a través de una ventana que crece en el modo que más adelante se indica.

Definición 3.3.2

Por $\hat{F}_W(x)$ denotaremos la estimación de $F(x)$ obtenida a partir de la ventana W y

$$\hat{t}_W(\omega, x) = d(F_\omega(x), \hat{F}_W(x))$$

Definición 3.3.3

$W_n \uparrow R^2$ si $\{W_n\}$ es una sucesión creciente de compactos convexos en R^2 tales que, $d(W_n)$, supremo de los radios de los discos incluidos en W_n , tiende a $+\infty$.

Teorema 3.3.2

Si

$$a) E[\hat{F}_W(x)] = F(x)$$

b) $F(x)$ puede ser expresada como función continua de las fracciones de volumen de RACS transformados del RACS original.

c) $d(x, y)$ función acotada y continua en $0 \leq x, y \leq 1$.

Entonces:

$$1) \hat{t}_{W_n}(\omega, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t(\omega, x) \text{ (a.s.)}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} E[\hat{t}_{W_n}(\omega, x)] = t(\omega, x)$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\omega \in \Omega} |\hat{t}_{W_n}(\omega, x) - t(\omega, x)| = 0$$

La prueba es análoga a la del teorema 3.3.1 considerando el resultado de Mase(1982).

Nota 3.3.2

La hipótesis b del teorema anterior puede resultar un tanto extraña. Veamos que no es así. Sea, por ejemplo, la función de distribución de contacto asociada a K, F . Se tiene que:

$$F(x) = P\left(0 \in (A + xK^*)\right)$$

y como sabemos si A es un RACS entonces $A + xK^*$ también es un RACS.

Corolario 3.3.1

$$a) \hat{\xi}(\omega / \hat{t}_n) \xrightarrow{w} \xi(\omega/t) \text{ (a.s.)}$$

$$b) \hat{\xi}(\omega / \hat{t}_{W_n}) \xrightarrow{w, \mathbb{R}^2} \xi(\omega/t) \text{ (a.s.)}$$

$$c) G_n \xrightarrow{w} G$$

es decir, G_n converge débilmente a G donde G_n y G son las funciones de distribución cuyas densidades asociadas son respectivamente $\hat{\xi}(\omega / \hat{t}_{W_n})$ y $\xi(\omega/t)$.

$$d) G_{\dots} \xrightarrow{w} G \text{ siendo } G_{\dots} \text{ la función de distribución con densidad } \hat{\xi}(\omega / \hat{t}_{\dots})$$

$$d) G_{W_n} \xrightarrow{w} G \text{ siendo } G_{W_n} \text{ la función de distribución con densidad } \hat{\xi}(\omega / \hat{t}_{W_n})$$

Ahora estamos en condiciones de dar una respuesta a la pregunta central del apartado. Podemos conocer de $\xi(\omega/t)$ aquellas características que se mantengan por paso al límite sabiendo que tenemos una convergencia débil.

Ejemplo 3.3.1

a) Supongamos que pretendemos estimar ω utilizando una función de pérdida cuadrática. Entonces el estimador Bayes será la esperanza de la distribución. Si

$$E_n \omega = \int_{\Omega} \omega \hat{\xi}(\omega / \hat{t}_n) d\omega$$

y

$$E\omega = \int_{\Omega} \omega \xi(\omega/t) d\omega$$

es sabido que la convergencia débil no implica la convergencia de momentos. Por tanto, no tenemos asegurada la convergencia $E_n \omega \rightarrow E\omega$. No parece pues aconsejable utilizar $E_n \omega$ como estimación del parámetro.

b) Si en lugar de la cuadrática utilizamos una función de pérdida error absoluto entonces el estimador Bayes sería la mediana de la distribución y claramente las

medianas de $\hat{\xi}(\omega/\hat{t}_n)$ o $\hat{\xi}(\omega/\hat{t}_{W_n})$ convergen a la mediana de $\xi(\omega/t)$.

c) Sea \hat{P}_n la medida de probabilidad asociada a $\hat{\xi}(\omega/\hat{t}_n)$ y P_t la asociada a $\xi(\omega/t)$.

Denotaremos

$$\Omega_x^\alpha(n) = \{\omega \in \Omega / \hat{t}_n(\omega, x) \leq \alpha\} \text{ con } n \geq 1 \text{ y } 0 \leq \alpha \leq 1$$

Si suponemos que

$$P_t(\{\omega \in \Omega / t(\omega, x) = \alpha\}) = 0$$

entonces se verifica:

$$i) \Omega_x^\alpha(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \{\omega \in \Omega / t(\omega, x) < \alpha\}$$

$$ii) \hat{P}_n(\Omega_x^\alpha(n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_t(\Omega_x^\alpha)$$

Demostración

$$i) \omega \in \Omega / t(\omega, x) < \alpha \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{t}_n(\omega, x) = t(\omega, x) \text{ (a.s.)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 \hat{t}_n(\omega, x) < \alpha \text{ (a.s.)}$$

Sea $\{n_k\}_{k=1}^{+\infty}$ y $\omega_{n_k} \in \Omega_x^\alpha(n_k)$. Si $\omega_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \omega$ ¿ $\omega \in \Omega_x^\alpha$?

$$\omega_{n_k} \in \Omega_x^\alpha(n_k) \Leftrightarrow \hat{t}_{n_k}(\omega_{n_k}, x) \leq \alpha$$

Supongamos que $t(\omega, x) > \alpha$. Sabemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\omega \in \Omega} |\hat{t}_n(\omega, x) - t(\omega, x)| = 0$$

Dado $\alpha - t(\omega, x) > 0 \exists n_0 / n \geq n_0 \sup_{\omega \in \Omega} |\hat{t}_n(\omega, x) - t(\omega, x)| < t(\omega, x) - \alpha$

En particular si $k_0 = \min\{k/n_k > n_0\}$ tendremos:

$$|\hat{t}_{n_k}(\omega_{n_k}, x) - t(\omega_{n_k}, x)| < t(\omega, x) - \alpha$$

$t(\omega, x)$ es una función continua. Además tenemos que:

$$\hat{t}_{n_k}(\omega_{n_k}, x) \leq \alpha \text{ y } t(\omega, x) > \alpha$$

por tanto

$$\exists k_1 / \forall k \geq k_1 \quad t(\omega_{n_k}, x) > \hat{t}_{n_k}(\omega_{n_k}, x)$$

En consecuencia, para todo $k \geq k_1$

$$t(\omega_{n_k}, x) - \hat{t}_{n_k}(\omega_{n_k}, x) < t(\omega, x) - \alpha$$

Tomando límites en k tendremos:

$$t(\omega, x) - \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{t}_{n_k}(\omega_{n_k}, x) < t(\omega, x) - \alpha$$

Pero

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{t}_{n_k}(\omega_{n_k}, x) \leq \alpha$$

que es un absurdo, en consecuencia tenemos probado el resultado.

ii) En el corolario 3.3.1 hemos visto que

$$\hat{P}_n \xrightarrow{w} P_t$$

Teniendo en cuenta esto y el primer apartado se sigue el resultado.

3.4. VARIOS PUNTOS DE MUESTREO

Hasta ahora hemos supuesto que la característica de interés del modelo estocástico, F , era estimada en un único punto de muestreo, x . La práctica corriente será que estimemos, a partir incluso de una misma realización, la función F en un número finito de puntos $\{x_1, \dots, x_m\}$. Se ha de generalizar el procedimiento para incorporar la información proporcionada por las nuevas estimaciones. Hemos considerado como razonables los dos siguientes procedimientos.

Método 1

Denotamos por cuestiones de claridad

$$\xi(\omega/t) = \xi(\omega/t, x_1)$$

Por analogía con el método bayesiano clásico se justificaría tomar como distribución sobre el parámetro ω la siguiente distribución:

$$\xi(\omega/t, x_1, \dots, x_m) \propto \xi_0(\omega) \prod_{i=1}^m [1-t(\omega, x_i)] \prod_{i=1}^m f(x_i/\omega) \quad [3.4.1]$$

Definición 3.4.1

Sea

$$\Omega_{x_1, \dots, x_n}^\alpha = \{\omega \in \Omega / t(\omega, x_1) \leq \alpha, \dots, t(\omega, x_n) \leq \alpha\} = \Omega_{x_1}^\alpha \cap \dots \cap \Omega_{x_n}^\alpha$$

Es claro que conforme aumentemos el número de puntos de muestreo x_i iremos construyendo una sucesión decreciente de conjuntos. En particular tenemos el siguiente resultado.

Lema 3.4.1

Sea

$$\xi_n(\omega/t, x_1, \dots, x_m) \propto \frac{\xi_0(\omega)}{\prod_{i=1}^m t(\omega, x_i)}$$

es decir, una t-posteriori sin ponderar. Entonces:

$$P_n(\Omega_{x_1, \dots, x_n}^\alpha) \geq \frac{1}{\alpha^n} c_1 \dots c_n P_0(\Omega_{x_1, \dots, x_n}^\alpha)$$

donde

$$c_k = \frac{\int_{\Omega} \frac{\xi_0(\omega)}{\prod_{i=1}^{k-1} t(\omega, x_i)} d\omega}{\int_{\Omega} \frac{\xi_0(\omega)}{\prod_{i=1}^k t(\omega, x_i)} d\omega} \leq 1 \quad \forall k=1, \dots, m$$

Método 2

Una segunda posibilidad es utilizar los x_i para estimar alguna función $t(\omega)$ que no dependa de los puntos de muestreo y que sea una medida de disimilitud entre F_ω y F . Por ejemplo:

$$t(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} t(\omega, x) f(x/\omega) dx$$

$$t(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} t(\omega, x) dx$$

$$t(\omega) = \sup_x t(\omega, x)$$

Considerando

$$\xi^*(\omega/t) \propto \frac{\xi_0(\omega)}{t(\omega)}$$

Nota 3.4.1

Todas las propiedades que en 3.2 hemos enunciado para $\xi(\omega/t)$ tienen sus análogas para $\xi^*(\omega/t)$. Una cuestión peculiar aparece ahora. Dada una colección de $t(\omega, x)$ con x variando lo lógico es tratar de encontrar una función $t(\omega)$ que esté razonablemente cerca de todas las $t(\omega, x)$. En este sentido tendríamos el siguiente resultado:

La función

$$t(\omega) = E_{\omega}[t(\omega, x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} t(\omega, x) f(x/\omega) dx$$

minimiza:

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} [t(\omega, x) - t(\omega)]^2 f(x/\omega) dx \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$2) \sup_{\omega \in \Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} [t(\omega, x) - t(\omega)]^2 f(x/\omega) dx$$

Parece pues aconsejable el uso de esta $t(\omega)$.

3.5.EJEMPLOS

En los apartados anteriores hemos intentado proponer y justificar un método de estimación de los parámetros. A continuación se indican algunas aplicaciones concretas. Somos conscientes de las dificultades prácticas de aplicación de la metodología y es una cuestión pendiente a desarrollar.

Ejemplo 3.5.1

Sea $A=(X,\theta)$ un RACS booleano isotrópico. Supongamos que utilizamos como característica observable para estimar el perímetro nominal, ψ , la función de distribución de contacto lineal.

$$F_{\psi}(x)=1-\exp\left\{-\frac{\psi}{\pi}x\right\} \text{ si } x \geq 0$$

Elegimos como punto de muestreo x y sea $\hat{F}(x)$ la estimación dada en capítulo 1.

Supongamos que d es la distancia euclídea.

$$\begin{aligned} \hat{t}(\psi, x) &= d(F_{\psi}(x), \hat{F}(x)) = \left| 1 - \exp\left\{-\frac{\psi}{\pi}x\right\} - \hat{F}(x) \right| = \\ &= \begin{cases} 1 - \exp\left\{-\frac{\psi}{\pi}x\right\} - \hat{F}(x) & \text{si } \psi \geq -\frac{\pi}{x} \log(1 - \hat{F}(x)) = c \\ \hat{F}(x) - 1 + \exp\left\{-\frac{\psi}{\pi}x\right\} & \text{si } \psi < -\frac{\pi}{x} \log(1 - \hat{F}(x)) \end{cases} \end{aligned}$$

$$f(x/\psi) = \begin{cases} \frac{\psi}{\pi} \exp\left\{-\frac{\psi}{\pi}x\right\} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Supongamos que la distribución a priori sobre ψ es una $G(\alpha_0, \beta_0)$.

$$\xi_0(\psi) = \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} \psi^{\alpha_0-1} e^{-\beta_0 \psi}$$

$$\hat{\xi}(\psi / \hat{t}) \propto \xi_0(\psi) [1 - \hat{t}(\psi, x)] f(x/\psi)$$

La constante de proporcionalidad será:

$$\int_0^c \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} \psi^{\alpha_0-1} e^{-\beta_0 \psi} \left[\hat{F}(x) - 1 + e^{-\frac{\psi}{\pi}x} \right] \frac{\psi}{\pi} e^{-\frac{\psi}{\pi}x} d\psi +$$

$$+ \int_c^{+\infty} \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} \psi^{\alpha_0-1} e^{-\beta_0 \psi} \left[1 - e^{-\frac{\psi}{\pi}x} - \hat{F}(x) \right] \frac{\psi}{\pi} e^{-\frac{\psi}{\pi}x} d\psi$$

Para que las integrales sean fácilmente calculables basta exigir que α_0 sea un entero positivo. Imaginemos que queremos estimar ψ utilizando una función de pérdida error absoluto. El estimador $\hat{\psi}$ será el valor que verifique la ecuación:

$$\int_0^{\hat{\psi}} \xi(\psi/t) d\psi = \frac{1}{2}$$

que con la exigencia anterior sobre α_0 es una ecuación en $\hat{\psi}$ de fácil solución.

Ejemplo 3.5.2.

Consideramos nuevamente la función de distribución de contacto lineal como característica observable. Suponemos que $\{x_1, \dots, x_n\}$ son los valores reales que hemos elegido como puntos de muestreo y $\{\hat{F}(x_i)\}_{i=1}^n$ las estimaciones de F en los puntos x_i obtenidas utilizando [1.7.3]. Para ilustrar el segundo método antes comentado vamos a obtener $t(\psi)$ y $t'(\psi)$ dos posibles medidas de discrepancia no dependientes del punto x.

Dados $\left\{ -\log(1 - \hat{F}(x_i)) \right\}_{i=1, \dots, n}$ ajustamos una función lineal sin término constante

utilizando, por ejemplo, mínimos cuadrados. Tendremos:

$$-\log(1 - \hat{F}(x)) \cong zx \Leftrightarrow \hat{F}(x) \cong 1 - e^{-zx} \text{ para } x \geq 0$$

Sean

$$t(\psi) = \int_0^1 \left[\hat{F}^{-1}(F_\omega(x)) - x \right]^2 dx = \int_0^1 \left[(1-y) - (1-y)^{\frac{z\pi}{\psi}} \right]^2 dy$$

Se tiene

$$t(\psi) = \frac{1}{3} + \frac{\psi}{2z\pi + \psi} - \frac{2\psi}{z\pi + 2\psi} \text{ para } \psi > 0$$

o bien

$$t'(\psi) = \int_0^1 \left| \hat{F}^{-1}(F_\omega(x)) - x \right| dx = \int_0^1 \left| 1-y - (1-y)^{\frac{z\pi}{\psi}} \right| dy =$$

$$= \begin{cases} \frac{z\pi - \psi}{2(z\pi + \psi)} & \text{si } \psi < z\pi \\ 0 & \text{si } \psi = z\pi \\ \frac{\psi - z\pi}{2(z\pi + \psi)} & \text{si } \psi > z\pi \end{cases}$$

Notemos que:

a) $0 \leq t(\psi) \leq \frac{1}{3}$

b) $t(z\pi) = 0$.

c) t es decreciente en $[0, z\pi]$ y creciente en $(z\pi, +\infty)$.

Propiedades análogas presenta t' siendo su cota superior $1/2$. Consideremos

$$s(\psi) = \frac{1}{\frac{1}{3} - t(\psi)} \quad \text{y} \quad s'(\psi) = \frac{1}{\frac{1}{2} - t'(\psi)}$$

Entonces

$$\xi^*(\psi/s) \propto \frac{\xi_0(\psi)}{s(\psi)} = \xi_0(\psi) \left(\frac{1}{3} - t(\psi) \right)$$

$$\xi^*(\psi/s') \propto \frac{\xi_0(\psi)}{s'(\psi)} = \xi_0(\psi) \left(\frac{1}{2} - t'(\psi) \right)$$

Si suponemos que la inicial sobre ψ es una uniforme en $[a, b]$ entonces:

$$\xi^*(\psi/s) = c \frac{1}{b-a} \left[\frac{2\psi}{z\pi + 2\psi} - \frac{\psi}{2z\pi + \psi} \right] \quad \text{si } a \leq \psi \leq b$$

donde

$$c = \frac{z\pi}{b-a} \left[2 \log \left\{ \frac{2z\pi + b}{2z\pi + a} \right\} - \frac{1}{2} \log \left\{ \frac{z\pi + 2b}{z\pi - 2a} \right\} \right]$$

En consecuencia tenemos completamente especificada $\xi^*(\psi/s)$ y podemos fácilmente conocer su esperanza, mediana, intervalos que contengan con una determinada probabilidad al parámetro, ... Todo lo indicado para $\xi^*(\psi/s)$ es análogo con $\xi^*(\psi/s')$ tomando la misma inicial.

CAPITULO 4

ESTIMACION Y MODELO BOOLEANO

En los dos temas anteriores se han tratado una serie de problemas que, aunque giraban o tenían aplicaciones a los RACS booleanos, no se centraban exclusivamente en ellos. Este capítulo tiene como elemento unificador tratar los problemas clásicos de dichos modelos. En particular, contraste y estimación de los parámetros como se comentó en el primer capítulo. Los distintos apartados no tienen más relación entre sí que esta problemática común. El tipo de información muestral con la que se trabaja se indica en cada uno de los apartados y nos ceñimos a las dos situaciones asumidas en el capítulo primero como razonables. Los resultados que se indican son de tipo estadístico y sólo en alguna ocasión se da algún resultado teórico muy relacionado con la técnica estadística comentada. En función de esto la exposición prescinde en lo posible de un excesivo formalismo.

4.1. MOMENTOS DE D Y ESTIMACION DE θ y ψ

La intensidad, θ y el perímetro nominal, ψ , no son cantidades directamente estimables. Vamos a ver cómo la estimación de estos parámetros es equivalente a la estimación de los momentos primer y segundo orden de variables de primer contacto. Estas variables son observables y en consecuencia sus momentos directamente estimables.

Siendo D la variable con distribución dada por la función de distribución de contacto asociada a K, vimos en el primer capítulo que:

$$P(D \geq x) = \frac{Q(xK)}{q} = \exp \left\{ -\theta \left(x \frac{sU(K)}{2\pi} + x^2 \lambda_2(K) \right) \right\}$$

siendo q la porosidad.

Proposición 4.1.1

$$2\theta \left(\frac{sU(K)}{2\pi} D + \lambda_2(K) D^2 \right) \approx \chi^2(2)$$

[4.1.1]

Demostración

Sea F_{-D} la función de distribución de $-D$

$$F_{-D}(-x) = 1 - F_D(x) = \exp\left\{\theta\left(x\frac{sU(K)}{2\pi} + x^2\lambda_2(K)\right)\right\}$$

Por tanto:

$$F_{-D}(-D) = \exp\left\{\theta\left(D\frac{sU(K)}{2\pi} + D^2\lambda_2(K)\right)\right\} = U(0,1)$$

$$-2\log F_{-D}(-D) = 2\theta\left(D\frac{sU(K)}{2\pi} + D^2\lambda_2(K)\right) = \chi^2(2)$$

que era lo que queríamos probar

Definición 4.1.1

Sea $K \in \text{Con}(C_0)$ fijo y tomemos $z \in (A + \phi K)^c$ cualquiera. Definimos la v.a. D_ϕ como

$$D_\phi = \inf\{y > 0 / (yK)_z \uparrow A + \phi K\}$$

Tenemos que

$$P(D_\phi > x) = P(D > \phi + x / D > \phi) = \exp\left\{\theta\left(x\frac{U(K)}{2\pi}(s + \phi U(K)) + x^2\lambda_2(K)\right)\right\}$$

De un modo análogo a la proposición 4.1.1 se seguiría que

$$2\theta\left(D_\phi\frac{U(K)}{2\pi}(s + \phi U(K)) + D_\phi^2\lambda_2(K)\right) = \chi^2(2) \quad [4.1.2]$$

Nota 4.1.1

En lo que sigue vamos a utilizar los momentos de D y D_ϕ . Es fácil ver que existen todos los momentos de D y D_ϕ ya que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{P(D > \alpha t)}{P(D > t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \exp\left\{\theta\left[(\alpha-1)t\frac{U(K)}{2\pi}(s + \phi U(K)) + (\alpha^2-1)t^2\lambda_2(K)\right]\right\} = 0$$

Relación entre los momentos de D , D_ϕ y los parámetros θ y ψ .

a) Tomando esperanzas en [4.1.1] y [4.1.2] obtenemos el siguiente sistema:

$$\theta\left(ED\frac{sU(K)}{2\pi} + ED^2\lambda_2(K)\right) = 1$$

$$\theta\left(ED_\phi\frac{U(K)}{2\pi}(s + \phi U(K)) + ED_\phi^2\lambda_2(K)\right) = 1$$

Que en términos de los parámetros nos quedaría:

$$\psi\left(\frac{U(K)ED}{2\pi}\right) + \theta(\lambda_2(K)ED^2) = 1$$

[4.1.3]

$$\psi\left(\frac{U(K)ED_\varphi}{2\pi}\right) + \theta\left(\frac{\varphi U(K)^2}{2\pi} ED_\varphi + \lambda_2(K)ED_\varphi^2\right) = 1$$

b) Sean $K, K' \in \text{Con}(C_0')$ distintos. Asociada a K tenemos la v.a. D y a K' tenemos asociada D' . Consideremos el siguiente sistema:

$$\psi\left(\frac{U(K)ED}{2\pi}\right) + \theta(\lambda_2(K)ED^2) = 1$$

[4.1.4]

$$\psi\left(\frac{U(K')ED'}{2\pi}\right) + \theta(\lambda_2(K')ED'^2) = 1$$

Como caso particular si $\lambda_2(K') = 0$ entonces:

$$\psi\left(\frac{U(K)ED}{2\pi}\right) + \theta(\lambda_2(K)ED^2) = 1$$

[4.1.5]

$$\psi\left(\frac{U(K')ED'}{2\pi}\right) = 1$$

En consecuencia estimando los primeros momentos de D y D_φ o D y D' podemos, utilizando cualquiera de los sistemas anteriores, estimar θ y ψ .

Lema 4.1.1

Supongamos $K=B$, entonces:

$$ED_\varphi = ED - \varphi + \theta s \frac{\varphi^2}{2} + o(\varphi^3)$$

$$\text{var}(D_\varphi) = \text{var}(D) + \psi\varphi^2 ED + o(\varphi^3)$$

Demostración

$$ED_\varphi = \int_{\varphi}^{+\infty} (x - \varphi) f_D(x) dx = ED - \varphi + \int_0^{\varphi} (\varphi - x) f_D(x) dx$$

donde f_D es la función de densidad de la variable aleatoria D .

$$\int_0^{\varphi} (\varphi - x) \theta(s + 2\pi x) \exp\{-\theta[sx + \pi x^2]\} dx = \theta s \frac{\varphi^2}{2} + o(\varphi^3)$$

despreciando términos cúbicos.

$$ED_{\varphi}^2 = \int_{\varphi}^{+\infty} (x-\varphi)^2 f_D(x) dx = E(D - \varphi)^2 - \int_0^{\varphi} (x-\varphi)^2 f_D(x) dx = E(D - \varphi)^2 + o(\varphi^3)$$

En consecuencia:

$$\text{var}(D_{\varphi}) = \text{var}(D) + \psi\varphi^2 ED + o(\varphi^3)$$

y el resultado está probado.

Momentos de H y D y los parámetros θ y ψ

Definición 4.1.2

Sean $K \in \text{Con}(C'_0)$ fijo. Asociada a este conjunto podemos definir la v.a. H. Sea $z \in (A+cB)^c$ entonces

$$H = \inf\{\varphi > 0 / (cB + \varphi K)_z \uparrow A\}$$

siendo c una constante prefijada y B la bola unidad cerrada.

La distribución de H es la siguiente:

$$P(H \geq t) = \frac{Q(cB+tK)}{Q(cB)} = \frac{\exp\{-\theta E \lambda_2(X+cB+tK)\}}{\exp\{-\theta E \lambda_2(X+cB)\}}$$

Observemos que si X es isotrópico entonces $X + cB$ sigue siendo isotrópico, por tanto podemos seguir aplicando la generalización de la fórmula de Steiner debida a Matheron (1975). La expresión final resultante es:

$$P(H > t) = \exp\{-\theta[t(\frac{s}{2\pi} + c)U(K) + t^2 \lambda_2(K)]\}$$

Corolario 4.1.1

$$2\theta \left[\left(\frac{s}{2\pi} + c \right) U(K)H + \lambda_2(K)H^2 \right] \approx \chi^2(2)$$

$$\theta \left[\left(\frac{s}{2\pi} + c \right) U(K)EH + \lambda_2(K)EH^2 \right] = 1$$

Esta ecuación junto con cualquiera de las dadas en los sistemas 4.1.3, 4.1.4 ó 4.1.5 nos proporciona otros sistemas que igualmente nos permiten estimar θ y s. Como un caso particular de interés consideremos la siguiente situación:

Tomamos K tal que $\lambda_2(K)$ sea cero, es decir, K un segmento. Asociado a este segmento consideramos las variables D y H. Tenemos el siguiente sistema:

$$\psi\left(\frac{U(K)}{2\pi}EH\right) + \theta(cU(K)EH) = 1$$

$$\psi\frac{U(K)ED}{2\pi} = 1$$

que presenta la ventaja adicional de que solamente necesitamos estimar momentos de primer orden de H y D.

4.2. ESTIMADORES BAYES Y MAXIMO VEROSIMILES PARA LA INTENSIDAD Y PERIMETRO NOMINAL

Utilizando muestras aleatorias de la función de distribución de contacto lineal al conjunto original y al dilatado mediante una bola obtenemos estimadores Bayes de la intensidad y el perímetro nominal. También se pueden conseguir estimadores Bayes análogos si trabajamos con una muestra de la función de distribución de contacto asociada a un K convexo, compacto, no vacío y con área estrictamente positiva.

Definición 4.2.1

Sea L' la distancia en una dirección fija desde un punto cualquiera de los poros de $A+\phi B$ al conjunto, siendo $\phi>0$ fijo y B la bola unidad cerrada. Por $S(\alpha,t)$ denotamos el segmento con un extremo en origen, dirección α y longitud t .

$$P(L'>t) = \frac{\exp\{-\theta E\lambda_2(X+\phi B+S(\alpha,t))\}}{\exp\{-\theta E\lambda_2(X+\phi B)\}} = (\text{aplicando fórmula de Steiner}) =$$

$$\frac{\exp\left\{-\theta\left[E[A(X+\phi B)] + \frac{E[S(X+\phi B) 2t]}{2\pi}\right]\right\}}{\exp\{-\theta E[A(X+\phi B)]\}} =$$

$$= \exp\left\{\frac{\theta}{\pi}(s+2\pi\phi)t\right\}$$

Dilatar el modelo booleano es equivalente a dilatar cada grano primario. El valor esperado del perímetro del grano primario en el nuevo RACS es el valor esperado del perímetro en el grano original más el perímetro de ϕB . A partir de 4.2.1 es inmediato que:

$$L' \approx G\left(1, \frac{\psi + 2\pi\phi\theta}{\pi}\right)$$

En lo que sigue trabajaremos con muestras aleatorias de L y L' de tamaños n y m respectivamente.

Estimadores Bayes para θ y ψ

Especificación de la distribución a priori

θ es un parámetro positivo, en consecuencia parece natural asumir para dicho parámetro una distribución a priori gamma. Tomamos pues:

$$\theta \approx G(\alpha_0, \beta_0)$$

El grano primario se supone casi seguramente convexo y compacto. Por exigencias del muestreo disperso es razonable exigir que exista una constante M tal que $0 \leq s \leq M$ a.s. Podemos por lo tanto asumir que :

$$\frac{s}{M} \approx \text{Be}(\alpha_1, \beta_1) \text{ donde } \beta_1 \in \mathbb{Z}^+$$

Por la definición del modelo booleano sabemos que el proceso puntual y el grano primario, como RACS, son independientes. En este sentido podemos, como una posibilidad, suponer que nuestro conocimiento sobre el modelo es tal que las distribuciones sobre θ y s son independientes.

Si $\xi(\theta, s)$ denota la distribución a priori sobre (θ, s) entonces:

$$\xi(\theta, s) = \xi_1(\theta)\xi_2(s)$$

donde ξ_1 y ξ_2 son las correspondientes marginales. Haciendo el cambio de variables:

$$\begin{aligned} \psi &= \theta s \\ \delta &= \theta(s + 2\pi\phi) \end{aligned}$$

con jacobiano:

$$J = \frac{-1}{\delta - \psi}$$

Tenemos, considerando las anteriores hipótesis, que:

$$\begin{aligned} f(\psi, \delta) &= \xi\left(\frac{\delta - \psi}{2\pi\phi}, \frac{2\pi\phi\psi}{\delta - \psi}\right) \frac{1}{\delta - \psi} = \xi_1\left(\frac{\delta - \psi}{2\pi\phi}\right) \xi_2\left(\frac{2\pi\phi\psi}{\delta - \psi}\right) \frac{1}{\delta - \psi} \alpha \\ &\propto (\delta - \psi)^{\alpha_0 - (\alpha_1 + \beta_1)} \psi^{\alpha_1 - 1} (M\delta - (M + 2\pi\phi)\psi)^{\beta_1 - 1} \exp\left\{-\beta_0\left(\frac{\delta - \psi}{2\pi\phi}\right)\right\} \end{aligned}$$

Nota 4.2.1

En la obtención de la distribución a priori ha sido fundamental la hipótesis de independencia de θ y s . Otro experimentador podría tomar otra a priori donde este requisito no se cumpla y ser perfectamente razonable. La hipótesis venía sugerida por la propia construcción del modelo. Un procedimiento como el que estudiamos parece natural aplicarlo al estudio de modelos que no tenemos recogidos en una imagen, por ejemplo, al estudio de bosques. Supongamos, sin embargo, que lo aplicamos a una situación donde disponemos de imágenes y que por consiguiente nuestro conocimiento a priori ha sido obtenido de imágenes observadas con anterioridad.

Colocados en esta situación consideramos que el principal inconveniente que podría plantearse a la hipótesis de independencia sería el siguiente: una imagen dada es observada con un determinado aumento que no tiene porqué ser el mismo para todas ellas. Esto supone que observamos imágenes deformadas (homotéticas de la imagen real) con distintos índices de deformación. ¿En qué medida hipótesis hechas con una determinada homotecia se mantienen para otras? En definitiva, si en lugar de observar A observamos λA , asumir que θ y s para A son independientes, ¿implica que θ' y s' son independientes para λA ?

$$A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} X + a_i$$

siendo los $\{a_i\}$ un proceso puntual de Poisson cuya intensidad es θ .

$$\lambda A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \lambda A + \lambda a_i$$

a) Observemos que $\{\lambda a_i\}$ es un proceso puntual de Poisson con intensidad θ/λ^2 .

Sea B un conjunto de Borel en \mathbb{R}^2 , $N(B)$ el número de puntos de $\{a_i\}$ en B y $N'(B)$ el número de puntos de $\{\lambda a_i\}$ en B .

$$P(N(B) = k) = e^{-\theta \lambda_2(B)} \frac{[\theta \lambda_2(B)]^k}{k!} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots$$

pero:

$$\lambda a_i \in B \Leftrightarrow a_i \in \frac{B}{\lambda}$$

Por tanto tendremos que

$$\begin{aligned}
 P(N'(B) = k) &= P\left(N\left(\frac{B}{\lambda}\right) = k\right) = \exp\left\{-\theta\lambda_2\left(\frac{B}{\lambda}\right)\right\} \frac{\left[\theta\lambda_2\left(\frac{B}{\lambda}\right)\right]^k}{k!} = \\
 &= \exp\left\{\frac{\theta\lambda_2(B)}{\lambda^2}\right\} \frac{\left[\frac{\theta\lambda_2(B)}{\lambda^2}\right]^k}{k!} \quad \text{con } k=0,1,2,\dots
 \end{aligned}$$

$B \cap B' = \emptyset \Rightarrow N(B)$ y $N(B')$ son independientes

$B \cap B' = \emptyset \Leftrightarrow \lambda B \cap \lambda B' = \emptyset \quad \forall \lambda > 0$

$N'(B) = N\left(\frac{B}{\lambda}\right)$ y $N'(B') = N\left(\frac{B'}{\lambda}\right)$

por tanto $N'(B)$ y $N'(B')$ son independientes.

b) Sea $\xi(\theta, s/\lambda)$ una distribución a priori sobre (θ, s) especificada suponiendo que nuestra información previa ha sido obtenida observando imágenes deformadas por una constante λ . Se tiene la siguiente relación:

$$\xi(\theta, s/\lambda) = \lambda \xi(\lambda^2 \theta, \frac{s}{\lambda} / 1) = \lambda \xi_1(\lambda^2 \theta / 1) \xi_2\left(\frac{s}{\lambda} / 1\right) = \xi_1(\theta/\lambda) \xi_2(s/\lambda)$$

Por tanto, asumir independencia para un determinado λ supone asumirla para cualquier λ .

c) Aunque se sale del problema que estamos comentando merece la pena destacar el siguiente hecho: la fracción de volumen de un RACS booleano y de su homotético son iguales para cualquier λ positivo

$$P(x \in \lambda A) = \exp\left\{-\frac{\theta}{\lambda^2} E\lambda_2(\lambda X)\right\} = \exp\left\{-\frac{\theta}{\lambda^2} \lambda^2 E\lambda_2(X)\right\} = \exp\{-\theta E\lambda_2(X)\} = P(x \in A)$$

Distribución a posteriori para (ψ, δ) y (θ, ψ)

Sean (l_1, \dots, l_n) y (l'_1, \dots, l'_m) muestras aleatorias independientes de tamaños n y m de L y L' respectivamente. Sus verosimilitudes serán:

$$g_n(L/\psi, \delta) = g_n(L/\psi)$$

$$g_m(L'/\psi, \delta) = g_m(L'/\delta)$$

La distribución a posteriori sobre (ψ, δ) será:

$$f(\psi, \delta/L, L') \propto (\delta - \psi)^{\alpha_0 - (\alpha_1 + \beta_1)} \psi^{\alpha_1 + n - 1} [M\delta - \psi(M + 2\pi\varphi)]^{\beta_1 - 1} \delta^m \\ \exp\left\{-\left[\frac{\beta_0}{2\pi\varphi} + \sum_{j=1}^m \frac{l'_j}{\pi}\right]\delta\right\} \exp\left\{\left[\frac{\beta_0}{2\pi\varphi} - \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{\pi}\right]\psi\right\}$$

siendo el factor de proporcionalidad conocido.

Hacemos el cambio:

$$\theta = \frac{\delta - \psi}{2\pi\varphi}$$

$$\psi = \psi$$

que nos proporciona la siguiente distribución a posteriori para (ψ, δ) :

$$f(\theta, \psi/L, L') \propto$$

$$\theta^{\alpha_0 - (\alpha_1 + \beta_1)} [\theta M - \psi]^{\beta_1 - 1} \psi^{\alpha_1 + n - 1} \exp\left\{-\left[\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{\pi} + \sum_{j=1}^m \frac{l'_j}{\pi}\right]\psi\right\} \\ (\psi + 2\pi\varphi\theta)^m \exp\left\{-2\pi\varphi\left[\frac{\beta_0}{2\pi\varphi} + \sum_{j=1}^m \frac{l'_j}{\pi}\right]\theta\right\}$$

Denotaremos

$$z_1 = \frac{1}{\pi} \left[\sum_{i=1}^n l_i + \sum_{j=1}^m l'_j \right] \\ z_2 = 2\pi\varphi \left[\frac{\beta_0}{2\pi\varphi} + \sum_{j=1}^m \frac{l'_j}{\pi} \right]$$

entonces

$$f(\theta, \psi/L, L') \propto \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^{\beta_1 - 1} \binom{m}{k} \binom{\beta_1 - 1}{j} M^j (2\pi\varphi)^{m-k} (-1)^{\beta_1 - j - 1} \theta^{m-k+j+\alpha_0 - (\alpha_1 + \beta_1)} \\ \psi^{k+\beta_1 - j - 1 + \alpha_1 + n - 1} \exp\{-z_1\psi\} \exp\{-z_2\theta\} = \\ = \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^{\beta_1 - 1} c_1(k, j) \theta^{c_2(k, j)} \exp\{-z_2\theta\} \psi^{c_3(k, j)} \exp\{-z_1\psi\}$$

La distribución marginal de ψ es

$$f_1(\psi/L, L') = c \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^{\beta_1-1} c_1(k, j) \frac{\Gamma(c_2(k, j)+1)}{(z_2)^{c_2(k, j)+1}} \psi^{c_3(k, j)} \exp\{-z_1 \psi\}$$

y el estimador Bayes para ψ , considerando una función de pérdida cuadrática es

$$\psi_B = E[\psi/L, L'] = c \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^{\beta_1-1} c_1(k, j) \frac{\Gamma(c_2(k, j)+1)}{(z_2)^{c_2(k, j)+1}} \frac{\Gamma(c_3(k, j)+2)}{(z_1)^{c_3(k, j)+2}}$$

La distribución marginal de θ es

$$f_2(\theta/L, L') = c \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^{\beta_1-1} c_1(k, j) \frac{\Gamma(c_3(k, j)+1)}{(z_1)^{c_3(k, j)+1}} \theta^{c_2(k, j)} \exp\{-z_2 \theta\}$$

y el correspondiente estimador Bayes será,

$$\theta_B = E[\theta/L, L'] = c \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^{\beta_1-1} c_1(k, j) \frac{\Gamma(c_3(k, j)+1)}{(z_1)^{c_3(k, j)+1}} \frac{\Gamma(c_2(k, j)+2)}{(z_2)^{c_2(k, j)+2}}$$

El momento de orden p de ψ es:

$$E[\psi^p/L, L'] = c \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^{\beta_1-1} c_1(k, j) \frac{\Gamma(c_2(k, j)+1)}{(z_2)^{c_2(k, j)+1}} \frac{\Gamma(c_3(k, j)+p+1)}{(z_1)^{c_3(k, j)+p+1}}$$

y podemos obtener una expresión explícita del M.S.E. asociado con el estimador Bayes.

También tenemos

$$E[\theta^p/L, L'] = c \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^{\beta_1-1} c_1(k, j) \frac{\Gamma(c_3(k, j)+1)}{(z_1)^{c_3(k, j)+1}} \frac{\Gamma(c_2(k, j)+p+1)}{(z_2)^{c_2(k, j)+p+1}}$$

y en consecuencia fácilmente se calcula una expresión explícita del M.S.E. para θ .

Nota 4.2.2

Como casos particulares si $m=0$, es decir, disponemos de información sobre L únicamente tendremos estimadores Bayes de θ solamente. En cambio, si $n=0$ seguiríamos teniendo estimadores Bayes tanto de θ como de ψ .

Estimadores Bayes utilizando la distribución de contacto esférica

Suponemos sobre el vector de parámetros (θ, ψ) la distribución a priori indicada anteriormente, es decir,

$$f(\theta, \psi) \propto \sum_{j=0}^{\beta_1-1} c_j \theta^{\alpha_0 - (\alpha_1 - \beta_1) + j} \psi^{\beta_1 - 1 - j} e^{-\beta_0 \theta}$$

donde

$$c_j = (-1)^{\beta_1 - 1 - j} \binom{\beta_1 - 1}{j} M^j$$

Suponiendo que disponemos de una muestra aleatoria de tamaño n de la variable D , $\{x_i\}_{i=1, \dots, n}$, la distribución a posteriori será,

$$f(\theta, \psi/D) = f(\theta, \psi) \prod_{i=1}^n (\psi + 2\pi\theta x_i) \exp\{-(\psi x_i + \pi\theta x_i^2)\}$$

pero

$$\prod_{i=1}^n (\psi + 2\pi\theta x_i) = \sum_{k=0}^n \sum_{i_1, \dots, i_k} \psi^{n-k} (2\pi\theta)^k \left\{ \prod_{j=1}^k x_{i_j} \right\} = \sum_{k=0}^n \sum_{i_1, \dots, i_k} (2\pi)^k \left\{ \prod_{j=1}^k x_{i_j} \right\} \theta^k \psi^{n-k}.$$

por consiguiente

$$f(\theta, \psi/D) \propto \sum_{j=0}^{\beta_1-1} \sum_{k=0}^n \sum_{i_1, \dots, i_k} c_{j,k,i_1, \dots, i_k}^0 \theta^{c_{j,k}^1} \exp\{-z_1 \theta\} \psi^{c_{j,k}^2} \exp\{-z_2 \psi\}$$

donde

$$c_{j,k,i_1, \dots, i_k}^0 = c_j (2\pi)^k \left\{ \prod_{h=1}^k x_{i_h} \right\}$$

$$c_{j,k}^1 = \alpha_0 - (\alpha_1 + \beta_1) + j + k$$

$$c_{j,k}^2 = \beta_1 - 1 - j + n - k$$

$$z_1 = \beta_0 + \pi \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$z_2 = \sum_{i=1}^n x_i$$

y la constante de proporcionalidad es conocida. Utilizando un procedimiento análogo al usado con muestras de L y L' podemos obtener las marginales de θ y ψ y todos sus momentos. En particular, tendremos estimadores Bayes de estos parámetros y conoceremos sus M.S.E.

Nota 4.2.3

Lo que acabamos de hacer para una bola, podríamos haberlo hecho suponiendo que tenemos una muestra aleatoria de la función de distribución de contacto asociada a cualquier $K \in \text{Con}(C_0)$ tal que $\lambda_2(K) > 0$.

Estimadores máximo verosímiles para θ y ψ

La verosimilitud para dos muestras aleatorias independientes de tamaños n y m de las variables L y L' respectivamente es

$$g(L, L' / \theta, \psi) = \left(\frac{\Psi}{\pi}\right)^n \exp\left\{-\frac{\Psi}{\pi} \sum_{i=1}^n l_i\right\} (\psi + 2\pi\phi\theta)^m \exp\left\{-\frac{(\psi + 2\pi\phi\theta)}{\pi} \sum_{j=1}^m l'_j\right\}$$

Denotando

$$l = \sum_{i=1}^n l_i \quad \text{and} \quad l' = \sum_{j=1}^m l'_j$$

las ecuaciones normales nos dan las siguientes expresiones para los M.L.E. de θ y ψ :

$$\psi^* = \frac{\pi n}{l}$$

$$\theta^* = \frac{1}{2\pi\phi} \left[\frac{m\pi}{l'} - \frac{n\pi}{l} \right]$$

Nota 4.2.4

θ^* es un estimador "natural" de θ ya que

$$(2\pi\phi)\theta^* = \left[\frac{m\pi}{l'} - \frac{n\pi}{l} \right]$$

pero $\psi^*_d = m\pi/l'$ es el M.L.E. del perímetro nominal en el RACS $X + \phi B$ y esta última expresión lo que está diciendo es que la diferencia entre los perímetros nominales de los dos RACS, el original y el dilatado mediante ϕB , es justamente $(2\pi\phi)\theta^*$, que es justamente el M.L.E. del número de granos primarios por unidad de área multiplicado por el incremento del perímetro de cada grano.

Distribuciones de θ^* y ψ^*

$$l = \sum_{i=1}^n l_i \rightarrow G\left(n, \frac{\Psi}{\pi}\right)$$

Por lo tanto $1/l$ es una gamma invertida, es decir,

$$\frac{1}{I} \rightarrow G^{-1}\left(n, \frac{\Psi}{\pi}\right)$$

y en consecuencia

$$\frac{\Psi^*}{\pi n} \rightarrow G^{-1}\left(n, \frac{\Psi}{\pi}\right)$$

El momento de orden p es

$$E[(\Psi^*)^p] = \frac{\Psi^p n^p \Gamma(n-p)}{\Gamma(n)}$$

En particular

$$E[\Psi^*] = \frac{n}{n-1} \Psi$$

$$\text{var}(\Psi^*) = \Psi^2 \frac{n^2}{\Gamma(n)} \left[\Gamma(n-2) - \frac{\Gamma(n-1)^2}{\Gamma(n)} \right]$$

Como $1/I$ y $1/I'$ son v.a. independientes, el momento de orden p de θ^* vendrá dado por

$$E[(\theta^*)^p] = \frac{1}{(2\pi\phi)^p} \left[\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \pi^p m^k n^{p-k} (-1)^{p-k} (\psi + 2\phi\pi\theta)^k \right. \\ \left. \frac{\Gamma(m-k)}{\Gamma(n)} \Psi^{p-k} \frac{\Gamma(n-p+k)}{\Gamma(n)} \right]$$

En particular

$$E[\theta^*] = \frac{1}{2\pi\phi} \left\{ (\psi + 2\phi\pi\theta) \frac{m}{m-1} - \Psi \frac{n}{n-1} \right\}$$

$$\text{var}(\theta^*) = \frac{1}{(2\pi\phi)^2} \left[(\psi + 2\phi\pi\theta)^2 \frac{m^2}{(m-2)(m-1)^2} + \Psi^2 \frac{n^2}{(n-2)(n-1)^2} \right]$$

Nota 4.2.5

$\text{var}(\theta^*)$ es considerada como función de ϕ es decreciente y su valor límite es:

$$\lim_{\phi \rightarrow +\infty} \text{var}(\theta^*) = \frac{\theta^2 m^2}{(m-2)(m-1)^2}$$

Por consiguiente, en el límite, $\text{var}(\theta^*)$ no depende del grano primario que tengamos.

4.3. DILATAIONES SUCESIVAS

En este apartado, como en los dos anteriores, suponemos que el modelo booleano $A=(X,\theta)$ es isotrópico y existe el conjunto esperado, EX, que por consiguiente es una bola. Se propone un método de estimación de θ ,s y a rápido de llevar a cabo y poco costoso, con la ventaja adicional de que la distribución de la muestra aleatoria es muy simple.

Sea T_1 un segmento con una dirección cualquiera, un extremo en el origen y longitud t prefijada y $T_2 \in \text{Con}(C_0)$ al que exigimos que tenga área estrictamente positiva y además T_1 y T_2 sean tales que

$$A+\overset{*}{T}_1 \subset A+\overset{*}{T}_2$$

Sea W la región en la cual conocemos el modelo, es decir, la ventana de muestreo. Suponemos que tenemos $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$ puntos en W suficientemente alejados, es decir, puntos que verifican las siguientes hipótesis:

$$a) \lambda_2((EX)_{x_i} \cap (EX)_{x_j}) = 0 \quad \forall i \neq j$$

$$b) \lambda_2((EX+\overset{*}{T}_1)_{x_i} \cap (EX+\overset{*}{T}_1)_{x_j}) = 0 \quad \forall i \neq j$$

$$c) \lambda_2((EX+\overset{*}{T}_2)_{x_i} \cap (EX+\overset{*}{T}_2)_{x_j}) = 0 \quad \forall i \neq j$$

Definición 4.3.1

Sean: Y_0 el número de puntos x_i en A^c , Y_1 el número de puntos en $(A+\overset{*}{T}_1)^c$ e Y_2 el número de puntos x_i en $(A+\overset{*}{T}_2)^c$.

Proposición 4.3.1

$$a) Y_0 \approx B(n, p_0) \text{ siendo } p_0 = \exp\{-\gamma\} = \exp\{-\theta E\lambda_2(X)\}$$

$$b) Y_1 \approx B(n, p_1) \text{ siendo } p_1 = \exp\left\{-\left(\gamma + \psi \frac{U(T_1)}{2\pi}\right)\right\} = \exp\left\{-\left(\gamma + \frac{\psi t}{\pi}\right)\right\}$$

$$c) Y_2 \approx B(n, p_2) \text{ siendo } p_2 = \exp\left\{-\left(\gamma + \frac{\psi U(T_2)}{2\pi} + \theta \lambda_2(T_2)\right)\right\}$$

d) La distribución condicionada de Y_1 a Y_0 es

$$Y_1/Y_0=y_0 \approx B(y_0, p'_1)$$

siendo $p'_1 = P(x \notin A+\overset{*}{T}_1 \mid x \notin A) = \exp\left\{-\psi \frac{t}{\pi}\right\}$

e) La distribución condicionada de Y_2 a Y_0 e Y_1 es :



$$Y_2 / Y_0=y_0, Y_1=y_1 \approx B(y_1, p_2')$$

$$p_2' = P(x \notin A + \hat{T}_2 / x \notin A + \hat{T}_1) = \frac{P(x \notin A + \hat{T}_2)}{P(x \notin A + \hat{T}_1)} = \exp \left\{ -\frac{\Psi}{2\pi} (U(T_2) - U(T_1)) - \lambda_2(T_2)\theta \right\}$$

f) La distribución conjunta de (Y_0, Y_1, Y_2) es:

$$P(Y_0=y_0, Y_1=y_1, Y_2=y_2) = \binom{n}{y_0} p_0^{y_0} (1-p_0)^{n-y_0} \binom{y_0}{y_1} p_1^{y_1} (1-p_1)^{y_0-y_1} \binom{y_1}{y_2} p_2^{y_2} (1-p_2)^{y_1-y_2}$$

si $0 \leq y_2 \leq y_1 \leq y_0 \leq n$ y cero en el resto

Corolario 4.3.1

a) Los estimadores máximo verosímiles de p_0 , p_1' y p_2' son:

$$p_0^* = \frac{Y_0}{n}, p_1^* = \frac{Y_1}{Y_0}, p_2^* = \frac{Y_2}{Y_1} \text{ si } Y_0 > 0 \text{ y } Y_1 > 0$$

$$p_1^* = 0 \text{ y } p_2^* = 0 \text{ si } Y_0 = 0$$

$$p_2^* = 0 \text{ si } Y_1 = 0$$

b) Los estimadores máximo verosímiles de γ , ψ y θ serán:

$$\gamma^* = -\log \frac{Y_0}{n} \frac{2\pi}{U(T_1)}$$

$$\psi^* = \log \left(\frac{Y_0}{Y_1} \right)$$

$$\theta^* = \log \left\{ \frac{Y_1}{Y_2} \left(\frac{Y_1}{Y_0} \right)^{\frac{1}{\lambda_2(T_2)}} \frac{U(T_2) - U(T_1)}{U(T_1)} \right\}$$

y a partir de estas expresiones obtenemos fácilmente los estimadores máximo verosímiles de θ , s y a .

Nota 4.3.1

Se tienen los siguientes resultados sobre $p_1'^*$ y $p_2'^*$.

$$a) E p_1'^* = p_1' \left[1 - (1-p_0)^n \right]$$

$$\text{var}(p_1'^*) = (p_1')^2 \left[1 - (1-p_0)^n \right] (1-p_0) +$$

$$+ p_1' (1-p_1') \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{p_0^k (n+k) \dots (n+1)} \left[1 - \sum_{j=0}^k \binom{n+k}{j} p_0^j (1-p_0)^{n+k-j} \right]$$

$$b) \text{Ep}_2^* = p_2 \left[1 - (1-p_0)^n \right] + (1-p_0)^n - (1-p_0 p_1)^n$$

4.4. UNA APLICACION A MODELOS DE BOLAS

Definición 4.4.1

Sean $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^2$. Definimos las cantidades:

$$V(x_1, \dots, x_n) = E\lambda_2(X_{x_1} \cap \dots \cap X_{x_n})$$

siendo X un RACS que podemos suponer convexo y compacto con probabilidad uno.

De hecho en la aplicación al modelo booleano X será el grano primario.

Lema 4.4.1

$$\begin{aligned} E\lambda_2(X_{x_1} \cup \dots \cup X_{x_n}) = & nV(x_1) - \sum_{i_1 < i_2} V(x_{i_1}, x_{i_2}) + \sum_{i_1 < i_2 < i_3} V(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) + \dots \\ & \dots + (-1)^n V(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

La prueba es una consecuencia inmediata de la igualdad

$$\lambda_2(K_1 \cup \dots \cup K_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_2(K_i) - \sum_{i_1 < i_2} \lambda_2(K_{i_1} \cap K_{i_2}) + \dots + (-1)^n \lambda_2(K_1 \cap \dots \cap K_n)$$

donde K_1, \dots, K_n son conjuntos medibles en \mathbb{R}^2 de área finita. Dados $\{x_i\}_{i=1, \dots, n}$ puntos de \mathbb{R}^2 vamos a utilizar los siguientes parámetros:

Definición 4.4.2

$$p^{j_1, \dots, j_p} = P(\{x_{j_1}, \dots, x_{j_p}\} \subseteq A^c)$$

para A un RACS booleano.

La relación entre estos parámetros y los $V(x_1, \dots, x_k)$ es la siguiente:

Proposición 4.4.1

$$\begin{aligned} p^{j_1, \dots, j_p} &= \exp\{-\theta[pV(X_{j_1}) - \sum_{i_1, i_2 \in \{j_1, \dots, j_p\}; i_1 < i_2} V(x_{i_1}, x_{i_2}) + \dots + (-1)^p V(x_{j_1}, \dots, x_{j_p})]\} = \\ &= \exp\{-\theta[- \sum_{i_1, i_2 \in \{j_1, \dots, j_p\}; i_1 < i_2} V(x_{i_1}, x_{i_2}) + \dots + (-1)^p V(x_{j_1}, \dots, x_{j_p})]\} q^p \end{aligned} \quad [4.4.1]$$

La relación anterior es fundamental para poder estimar los $V(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$.

Estimación de $V(x_1, \dots, x_k)$

Dado un conjunto de puntos $\{x_1, \dots, x_k\}$ de R^2 , ¿cómo podemos estimar $V(x_1, \dots, x_k)$? Vamos a considerar un posible procedimiento basado en los estimadores [1.7.2] de los parámetros p^{j_1, \dots, j_p} . Hemos de hacer la hipótesis inicial de que, o bien θ o bien $V(x_i)$ ($=a$) son conocidos o han sido estimados previamente. Notemos que:

$$\begin{aligned} p^i &= \exp\{-\theta V(x_1)\} \\ p^{12} &= \exp\{-2\theta V(x_1, x_2)\} \end{aligned} \quad [4.4.2]$$

Del sistema [4.4.3] estimaríamos $V(x_1)$ y $V(x_1, x_2)$, asumiendo, por ejemplo, que θ es conocido.

$$\begin{aligned} p^{13} &= \exp\{-2\theta V(x_1) + \theta V(x_1, x_3)\} \\ p^{23} &= \exp\{-2\theta V(x_1) + \theta V(x_2, x_3)\} \end{aligned} \quad [4.4.3]$$

[4.4.3] junto con [4.4.4] nos proporcionarían estimaciones de $V(x_1)$, $V(x_1, x_2)$, $V(x_1, x_3)$ y $V(x_2, x_3)$

$$p^{123} = \exp\{-3\theta V(x_1) + \theta V(x_1, x_2) + \theta V(x_1, x_3) + \theta V(x_2, x_3) - \theta V(x_1, x_2, x_3)\} \quad [4.4.4]$$

[4.4.4] junto con las anteriores nos permite la estimación de $V(x_1, x_2, x_3)$. Y en general por un procedimiento análogo podríamos estimar $V(x_1, \dots, x_k)$.

Modelos booleanos de bolas con radio fijo. Ajuste del modelo.

Tomamos $A = (\varphi_0 B, \theta)$ modelo booleano cuyo grano primario es una bola de radio fijo φ_0 . Planteamos el siguiente problema de contraste:

H_0 : A es un modelo booleano tal que $X = \varphi_0 B$

H_1 : No H_0 .

Bajo la hipótesis nula $a = \pi \varphi_0^2$ es conocido. Estamos en condiciones de estimar $V(0, x_1, \dots, x_k)$. Además podemos elegir x_1, \dots, x_k aleatoriamente de modo que $(\varphi_0 B)_{x_1}, \dots, (\varphi_0 B)_{x_k}$ sean compactos convexos, uniformes, isotrópicos (estamos trabajando con bolas) e independientes tocando a $\varphi_0 B$ (Miles, 1981). Tendremos:

$$E_{\{x_1, \dots, x_k\}} [V(0, x_1, \dots, x_k)] = \frac{\pi \varphi_0^2}{k+2k!} \quad [4.4.5]$$

Para cada $k \geq 1$ el miembro de la izquierda en [4.4.5] es estimable y por lo tanto comparable con el de la derecha. Así mismo podemos ir variando el número de puntos aleatorios k .

4.5. GRANOS AISLADOS

Dada una realización de un RACS booleano llamaremos granos aislados a aquellos granos primarios cuya frontera no esté cubierta (y por tanto deformada) por el resto de la realización. Estos granos serán los reconocibles en la imagen (siempre y cuando asumamos que la forma del grano primario es conocida). Por ejemplo que el grano primario sea circular, u homotético a un cuadrado. Dada la imagen, utilizando algún indicador de forma (en círculos podría ser el clásico que considera el cociente entre el cuadrado del perímetro y el área), podremos decidir qué componentes conexas son granos aislados. En todo este apartado vamos a trabajar asumiendo formas circulares. Sería análogo tomando otras posibles formas.

Se habrá observado que, en todo lo anterior, no se ha utilizado información relativa a granos primarios (tales como áreas, perímetros, etc.). Sin embargo, en la caracterización del modelo booleano obteníamos la independencia, como RACS, de dichos granos. Por lo tanto si conociéramos el área de n granos primarios tendríamos una muestra aleatoria de dicha variable.

¿Cuál es la razón para no asumir información de este tipo?

Para intensidades y granos no muy grandes la probabilidad de encontrar bastantes granos aislados es pequeña. En consecuencia, habitualmente dispondremos de pocos granos aislados con los que trabajar. En este apartado asumiremos que la intensidad es pequeña en relación al tamaño de los granos.

Sea $A=(YB,\theta)$ un RACS booleano con Y v.a. positiva. Denotaremos por f la función de densidad de probabilidad de Y . Dupac (1980) probó que, si f^* denota la densidad del radio aleatorio de los granos aislados, se verifica:

$$f^*(y) \propto p(y)f(y)$$

donde

$$p(y) = \exp\{-\theta\pi[4y \int_0^y rf(r)dr + \int_y^{+\infty} (y+r)^2 f(r)dr]\} \quad [4.5.1]$$

En lo que sigue $\{y_1, \dots, y_n\}$ denotará la muestra aleatoria con densidad f^* obtenida a partir de una realización del RACS.

Hipótesis 4.5.1

Suponemos que f pertenece a una familia paramétrica especificada

$$f \in \left\{ f_\omega / \omega \in \Omega \right\}$$

Lema 4.5.1

$$f^*(y) = a(\theta, \omega)q(y)f(y)$$

donde

$$a(\theta, \omega) = \left[\int_0^{+\infty} q(y)f(y)dy \right]^{-1}$$

y

$$q(y) = \exp \left\{ -\theta \pi \left[y^2 + 2yEY - \int_0^y (y-r)^2 f(r)dr \right] \right\}$$

verificándose:

- 1) $a(\theta, \omega) > 1$
- 2) $q(0) = 1$
- 3) $q(y)$ es una función estrictamente decreciente si suponemos que Y es no degenerada en 0.

La prueba es una consecuencia de la siguiente igualdad:

$$4y \int_0^y r f(r)dr + \int_y^{+\infty} (y+r)^2 f(r)dr = y^2 + EY^2 + 2yEY - \int_0^y (y-r)^2 f(r)dr$$

En la introducción comentamos que para disponer de un tamaño muestral razonable era necesario exigir un grano primario pequeño. Se justifica pues la

Hipótesis 4.5.2

$P(Y \in [0, \lambda]) = 1 - \varepsilon$ donde λ es un valor razonablemente pequeño.

Simplificando $q(y)$

La hipótesis 4.5.2 nos permite sustituir $q(y)$ por su desarrollo alrededor de 0.

$$q(y) = 1 - (2\theta\pi EY)y + (4\pi^2\theta^2[EY]^2 - 2\theta\pi)y^2 + o(y^2) \quad [4.5.2]$$

MLE para θ y ψ

La verosimilitud de $\{y_1, \dots, y_n\}$ es:

$$\prod_{i=1}^n f^*(y_i) = [a(\theta, \omega)]^n \prod_{i=1}^n q(y_i) \prod_{i=1}^n f(y_i) \quad [4.5.3]$$

Denotamos por $L^*(\theta, \omega)$ el logaritmo de la verosimilitud de las y_i consideradas

como muestra aleatoria de f^* y $L(\omega)$ será el logaritmo de la verosimilitud cuando los mismos y_i son considerados como una muestra de f . A partir de [4.5.3] tenemos:

$$L^*(\theta, \omega) = n \log a(\theta, \omega) + \sum_{i=1}^n \log q(y_i) + L(\omega)$$

$$L^*(\theta, \omega) = -n \log [1 - 2\theta\pi(EY)^2 + (4\pi^2\theta^2(EY)^2 - 2\theta\pi)EY^2]$$

$$- \theta\pi \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\theta\pi EY \sum_{i=1}^n y_i + \theta\pi \sum_{i=1}^n \int_0^{y_i} (y_i - r)^2 f(r) dr + L(\omega) \quad [4.5.4]$$

Para familias de distribuciones bastante generales tendremos que el segundo miembro es una función conocida de θ y ω . En consecuencia los MLE de θ y ω los obtendremos maximizando [4.5.4].

Ejemplo 4.5.1

Supongamos que f es la densidad de una uniforme en $[a, b]$ con $a \geq 0$, entonces:

$$L^*(\theta, a, b) = -n \log \left[1 - 2\theta\pi \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \left(4\pi^2\theta^2 \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 - 2\theta\pi \right) \frac{1}{3} \left(\frac{b^3 - a^3}{b-a} \right) \right]$$

$$- \theta\pi \sum_{i=1}^n y_i^2 - \theta\pi(a+b) \sum_{i=1}^n y_i + \frac{\theta\pi}{3(b-a)} \sum_{i=1}^n y_i^3 - n \log(b-a)$$

Dados unos valores concretos de y_1, \dots, y_n obtendríamos el máximo de $L^*(\theta, a, b)$.

Momentos del grano aislado y momentos del grano original

E^*Y^k va a denotar el momento k -ésimo de la v.a. que nos da el radio de las bolas aisladas. A partir de [4.5.2] y de la expresión de $a(\theta, \omega)$ que se deduce tendremos:

$$E^*Y^k = \frac{EY^k - (2\theta\pi EY)EY^{k+1} + (4\pi^2\theta^2(EY)^2 - 2\theta\pi)EY^{k+2}}{1 - 2\theta\pi[EY]^2 + [4\pi^2\theta^2(EY)^2 - 2\theta\pi]EY^2} \quad [4.5.5]$$

Estimación de f utilizando la divergencia de Kullback

A partir de [4.5.1] se desprende que la forma funcional exacta de f^* usualmente es muy complicada. Un modo de superar esta dificultad que tiene en cuenta la hipótesis 4.5.2 es considerar, en lugar de f^* , una aproximación, es decir:

$$f^*(y) \cong c_0 + c_1y + c_2y^2 + c_3y^3$$

A partir de la muestra aleatoria (y_1, \dots, y_n) podemos estimar los coeficientes c_i mediante el procedimiento que queramos. Tendremos perfectamente especificada una cierta f^*_0 . El problema que nos planteamos es determinar los valores $(\theta^*, \omega^*) \in R^+ \times \Omega$

que minimicen alguna medida de divergencia entre f^*_{θ} y $f^*_{\theta,\omega}$. Vamos a considerar la debida a Kullback (1968).

Definición 4.5.1

Sean f y g densidades con el mismo soporte, entonces:

$$I(f,g) = \int f(x) \log \frac{f(x)}{g(x)} dx$$

que puede interpretarse como la información media por observación respecto f para la discriminación en favor de f contra g .

En nuestro problema tendremos

$$I(f^*_{\theta}, f^*_{\theta,\omega}) = \int_0^{\lambda} f^*_{\theta}(y) \log \frac{f^*_{\theta}(y)}{f^*_{\theta,\omega}(y)} dy = E_0 \left[\log \frac{f^*_{\theta}(y)}{f^*_{\theta,\omega}(y)} \right]$$

Pero

$$f^*_{\theta,\omega}(y) = a(\theta,\omega) q(y)f(y) \Rightarrow a(\theta,\omega) = \frac{f^*_{\theta}(0)}{f(0)}$$

suponiendo f tal que $f(0)$ sea distinto de cero.

$$\begin{aligned} I(f^*_{\theta}, f^*_{\theta,\omega}) &= \log \frac{f(0)}{f^*_{\theta,\omega}(0)} + E_0 \left[\log \frac{1}{q(y)} \right] + E_0 \left[\log \frac{f^*_{\theta}(y)}{f(y)} \right] = \\ &= \log \frac{f(0)}{f^*_{\theta,\omega}(0)} + \theta \pi [E_0 Y^2 + 2EY E_0 Y - E_0 \{ \int_0^y (y-r)^2 f(r) dr \}] + E_0 \left[\log \frac{f^*_{\theta}(y)}{f(y)} \right] \quad [4.5.6] \end{aligned}$$

$I(f^*_{\theta}, f^*_{\theta,\omega})$ como vemos en [4.5.6] es conocida excepto el valor $f^*_{\theta,\omega}(0)$. Buscamos una $f^*_{\theta,\omega}$ lo más parecida a f^*_{θ} , se justifica pues:

Hipótesis 4.5.6

$$f^*_{\theta,\omega}(0) = f^*_{\theta}(0) = c_0$$

Bajo esta hipótesis se tendrá:

$$\begin{aligned} I(f^*_{\theta}, f^*_{\theta,\omega}) &= \log \frac{f(0)}{f^*_{\theta}(0)} + \theta \pi [E_0 Y^2 + 2EY E_0 Y - E_0 \{ \int_0^y (y-r)^2 f(r) dr \}] \\ &\quad + E_0 \left[\log \frac{f^*_{\theta}(y)}{f(y)} \right] \quad [4.5.7] \end{aligned}$$

Que podemos considerar una función perfectamente conocida de θ y ω . Los valores (θ^*, ω^*) que tomaremos como estimadores serán aquellos que minimicen [4.5.7]. En el siguiente ejemplo indicamos solamente como quedaría planteado el

problema en una situación concreta.

Ejemplo 4.5.2

Supongamos que f es un polinomio de segundo grado.

$$f(y) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 \quad \text{con } 0 \leq y \leq \lambda \text{ y } \omega = (\lambda, b_0, b_1, b_2)$$

Considerando la aproximación:

$$E_0 \left[\log \sum_{i=0}^3 c_i y^i \right] \approx \int_0^\lambda \sum_{j=0}^3 c_j^1 y^j \sum_{i=0}^3 c_i y^i dy = \sum_{j=0}^3 \sum_{i=0}^3 \frac{c_j^1 c_i \lambda^{i+j+1}}{i+j+1}$$

donde

$$c_0^1 = \frac{c_1}{c_0}, \quad c_1^1 = \frac{2c_2 c_0 - c_1^2}{c_0^2}, \quad c_2^1 = \frac{6[c_3 c_0^2 - c_2 c_1 c_0] + 2c_1^3}{c_0^3}$$

Además:

$$E_0 \left[\log \sum_{k=0}^2 b_k y^k \right] \approx \sum_{k=0}^2 \sum_{i=0}^3 \frac{b_k^1 c_i}{k+i+1} \lambda^{k+i+1}$$

donde los b_k^1 están definidos del mismo modo que los c_k^1 .

$$\begin{aligned} I(f^*_{\theta, \omega}, f^*_{\theta, \omega}) = & \log \frac{b_0}{c_0} + \theta \pi \left[\sum_{i=0}^3 c_i \frac{\lambda^{i+3}}{i+3} + \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^2 2c_i b_j \frac{\lambda^{2(i+2)}}{(i+2)^2} \right. \\ & \left. - \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^3 c_i d_j \frac{\lambda^{i+j+4}}{i+j+4} \right] + \sum_{j=0}^3 \sum_{i=0}^3 \frac{c_j^1 c_i \lambda^{i+j+1}}{i+j+1} - \sum_{j=0}^2 \sum_{i=0}^3 \frac{b_j^1 c_i}{i+j+1} \lambda^{i+j+1} \end{aligned} \quad [4.5.8]$$

Estimaríamos θ y los b_i minimizando [4.5.8] bajo las restricciones:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^2 b_j \frac{\lambda^{j+1}}{j+1} &= 1 \\ \sum_{j=0}^2 b_j y^j &\geq 0 \quad y \in [0, \lambda] \end{aligned}$$

Distancia de un grano aislado al resto del RACS

Una de las características tradicionalmente utilizadas en procesos puntuales para contrastar la hipótesis de aleatoriedad espacial (es decir, si el proceso puntual es de Poisson) es la distancia desde un punto cualquiera del proceso a su vecino más próximo. Consultar, por ejemplo, P.J.Diggle (1975, 1983) o Upton y Fingleton (1985). Sin entrar en mayores profundidades hemos de tener en cuenta que la determinación de la distribución de dicha distancia implica la consideración de la distribución de Palm de un proceso puntual de Poisson (Stoyan, Kendall, Mecke, 1987). Si llamamos M a esta característica, es conocido que en R^d

$$F_M(r) = 1 - \exp\{-\theta b_d r^d\}$$

siendo θ la intensidad del proceso de Poisson, b_d el volumen de la bola unidad en R^d y F_M la función de distribución de M .

Un proceso puntual de Poisson es el modelo booleano más simple. Consideremos un modelo booleano de bolas aleatorias y denotemos a la v.a. análoga a M por N . Parece de interés estudiar la distribución de N . Dicha distribución dependerá del radio aleatorio del grano primario. ¿En qué modo?.

Definición 4.5.2

Supongamos que tenemos un grano aislado "típico" y definamos N como la v.a. que nos da la distancia desde ese grano al resto del RACS.

Teorema 4.5.1

Si h es la función de densidad de probabilidad de N tenemos:

$$h(x) = 2\theta\pi \exp\{-\theta\pi(x^2 + 2xEY)\} E^*[(x+EY+y) \exp\{-2\theta\pi xy\}] \quad [4.5.9]$$

donde E^* denota esperanza respecto de la distribución f^* .

Demostración

Denotemos por Y^* el radio aislado aleatorio con densidad f^* y sea:

$$C_a^b = \{(x,y) / a \leq x^2 + y^2 \leq b\}$$

entonces

$$P(N \geq x / Y^* = y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P(A^c \supset C_y^{y+x} / A^c \supset C_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{P(A^c \supset C_{y-\varepsilon}^{y+x})}{P(A^c \supset C_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon})} = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\exp\left\{-\theta\pi\left[\int_0^{+\infty}(y+x+r)^2 f(r)dr - \int_0^{y-\varepsilon}(y-\varepsilon-r)^2 f(r)dr\right]\right\}}{\exp\left\{-\theta\pi\left[\int_0^{+\infty}(y+\varepsilon+r)^2 f(r)dr - \int_0^{y-\varepsilon}(y-\varepsilon-r)^2 f(r)dr\right]\right\}} \\
&= \exp\{-\theta\pi[x^2 + 2x(y+EY)]\}
\end{aligned}$$

y de esta igualdad se sigue el resultado.

Es comprobación trivial ver que si el radio aleatorio es degenerado en 0 tenemos como un caso particular la densidad de la v.a. M.

BIBLIOGRAFIA

- ARTSTEIN, Z. (1983) Distributions of random sets and random selections. *Israel Journal of Mathematics* 46, 313-324.
- ARTSTEIN, Z. y R.A.VITALE (1982) A strong law of large numbers for random compact sets. *Ann. Prob.* 5, 879-882.
- AUMANN, R.J. (1965) Integrals of set-valued functions. *J. Math. Anal. Appl.* 12, 1-12.
- BADDELEY, A. (1980) A limit theorem for statistics of spatial data. *AAP* 12, 447-412.
- BADDELEY, A. (1982) Stochastic geometry: An introduction and reading-list. *Int. Stat. Review* 50, 179-193.
- BADDELEY, A. (1984) Stochastic geometry and image analysis. *CWI Newsletter* (Centrum for Wiskunde en Informatica, Amsterdam) Septiembre 1984, 2-20.
- BARNARD, G.A. (1963) Discussion of Professor Bartlett's paper. *JRSS B*25, p.294.
- BARNETT, W.A. (1979) Random sets and confidence procedures. *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 9, 453-461.
- BAUDIN, M. (1984) Multidimensional point processes and random closed sets. *JAP* 21,173-178.
- BERMAN, M. (1977) Distance distributions associated with Poisson processes of geometric figures. *JAP* 14,195-199.
- BESAG, J. y P.J. DIGGLE (1977) Simple Monte Carlo tests for spatial pattern. *Appl. Statist.*26, 327-333.
- CRESSIE, N. y G.M.LASLETT (1987) Random set theory and problems of modelling. *SIAM Review.*29, 557-574.
- DIGGLE, P.J. (1975) Robust density estimation using distance methods. *Biometrika* 62,39-48.
- DIGGLE, P.J. (1977) A note on robust density estimation for spatial point patterns. *Biometrika* 64, 91-95.
- DIGGLE, P.J. (1979) On parameter estimation and goodness-of-fit testing for spatial point patterns. *Biometrics* 35, 87-101.
- DIGGLE, P.J. (1981) Binary mosaics and the spatial pattern of heather. *Biometrics* 37, 531-539.
- DIGGLE, P.J. (1983) *Statistical Analysis of Point Processes*. Academic Press, London.

- DIGGLE, P.J. y C.J.F. TER BRAAK (1982) Point sampling of binary mosaics in ecology. En: B. RANNEY (ed) (1982), 107-122.
- DIGGLE, P.J. y R.J. GRATTON (1984) Monte Carlo methods of inference for implicit statistical models (con discusión). *JRSS B46*, 193-227.
- DUPAC, V. (1980) Parameter estimation in the Poisson field of discs. *Biometrics* 67, 187-190.
- EDDY, W.F. (1980) The distribution of the convex hull of a gaussian sample. *JAP* 17, 686-695.
- EDDY, W.F. (1981) Laws of large numbers for intersection and union of random closed sets. Tech. Rep. No. 227. Dept. Stat. Carnegie-Mellon University.
- EDDY, W.F. y J.D. GALE (1981) The convex hull of a spherically symmetric sample. *APP* 13, 751-763.
- EDDY, W.F. y D.A. TRADER (1981) A central limit theorem for Minkowski sums of random sets. Tech. Rep. No. 228. Dept. Stat. Carnegie-Mellon University.
- EDDY, W.F. y D.A. TRADER (1982) Probability functionals for random sets. Tech. Rep. No. 252. Dept. Stat. Carnegie-Mellon University.
- GERLACH, W. y D. STOYAN (1986) Determination of the covariance of random sets from thin sections. *BJ* 28, 427-432.
- HALL, P. (1985) Counting methods for inference in binary mosaics. *Biometrics* 41, 1049-1052.
- HANISCH, K.-H. (1981) On classes of random sets and point processes. *Serdica* 7, 160-166.
- HARDING, E.F. y D.G. KENDALL (eds) (1974) *Stochastic Geometry*, Wiley and Sons, Chichester.
- JEULIN, D. y P. JEULIN (1981) Synthesis of rough surfaces by random morphological models. *Projet de communication au 3ème Symposium de Stéréologie*.
- KARR, A.F. (1985) *Point Processes and Their Statistical Inference*. Dekker, New York / Zurich.
- KELLERER, A.M. (1983) On the number of clumps resulting from the overlap of randomly placed figures in a plane. *JAP* 20, 126-135.
- KELLERER, A.M. (1985) Counting figures in planar random configurations. *JAP* 22, 68-81.
- KELLERER, A.M. (1986) The variance of a Poisson process of domains. *JAP* 23, 307-321.
- KELLERER, H.G. (1984) Minkowski functional of Poisson processes. *ZW* 67, 63-84.
- KENDALL, D.G. (1974) Foundations of a theory of random sets. En: HARDING y KENDALL (eds.) (1974), 322-376.

- KENDALL, D.G. (1974). An introduction to Stochastic Geometry. En: HARDING y KENDALL (eds.) (1974), 3-9.
- KONIG, D. y V.SCHMIDT (1983) The Palm-type grain size distribution in stationary grain models. *JAP* 20, 574-584.
- KONIG, D. y V.SCHMIDT (1983) Grain size distribution in stationary grain models. *Acta Stereol* 2/1, 47-53.
- LANTUEJOUL, C. (1985) Changing the size of a quadrat. *Acta Stereol*.6/1, 103-106.
- LYASHENKO, N.N. (1982) Limit theorems for sums of independent, compact, random subsets of Euclidean space. *J.Soviet.Math.*20, 2187-2196.
- LYASHENKO, N.N. (1983) Statistics of random compacts in Euclidean space. *J.Soviet.Math.*21, 76-92.
- MASE, S. (1982) Asymptotic properties of stereological estimators of volume fraction for stationary random sets. *JAP* 19, 111-126.
- MATERN, B. (1960). *Spatial Variation*. Meddelanden fran Statens Skogsforskningsinstitut 49, 5, 1-144.
- MATERN, B (1984) *Four lectures on forest biometry*. Swedish University of Agricultural Sciences, Section of Forest Biometry, S-901 83 Umea, Sweden, Report 23.
- MATHERON, G. (1969) Théorie des ensembles aléatoires. *Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau*.
- MATHERON, G. (1972) Ensembles fermés aléatoires, ensembles semi-markoviens et polyèdres poissoniens. *AAP* 4, 508-541.
- MATHERON, G. (1972) Random sets theory and its applications to stereology. *JM* 95, 15- 23.
- MATHERON, G. (1975) La convergence en loi des fermés aleatoires. *Pub. Int. Ecole Nat.Sup.des Mines de Paris* N/409/75.
- MATHERON, G. (1975) *Random Sets and Integral Geometry*. J.Wiley&Sons, New York / London.
- MATHERON, G. (1986) Le covariogramme geometrique des compacts convexes de R^2 . *Pub. Int. Ecole Nat.Sup.des Mines de Paris* N/2/86/G.
- MEYER, P.A. (1966) *Probabilités et Potentiel*. Hermann, Paris.
- MILES, R.E. (1980/81) A survey of geometrical probability in the plane, with emphasis on stochastic image modelling. En *Image Modelling*. Ed. Academic Press, Inc.
- MILES, R.E. y J.SERRA (eds) (1978) *Geometrical Probability and Biological Structures: Buffon's 200th Anniversary*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg.
- MONTES, F. (1983) Aplicación de la Morfología Matemática al estudio de variables administrativas: los resultados electorales en la provincia de Valencia (España). *Pub. Int. Ecole Nat.Sup.des Mines de Paris* N/864/83.

- MONTES, F. y J. HIDALGO (1984) Three approaches to the study of elections results. *Rassegna di Metodi Statistici ed Applicazioni*. 87-109.
- NORBERG, T. (1984) Convergence and existence of random set functions. *Ann. Prob.* **12**, 726-732.
- OHSER, J. (1980) On statistical analysis of the Boolean model. *EIK* **16**, 651-653.
- PITTS, E. (1981) The overlap of random particles and similar problems: expressions for variance of coverage and its analogue. *SIAM J. Appl. Math.* **41**, 493-498.
- PRETEUX, F. y M. SCHMITT (1986) Fonctions booléennes et modélisation du spongieux vertébral. Presentado en *Semaine Internationale de l'image électronique*.
- PRETEUX, F. y M. SCHMITT (1987) Analyse et Synthèse de textures booléennes: Théorèmes de caractérisation et démonstrations. *Internal Rapport CMM*, May.
- PURI, M. L. y D. A. RALESCU (1983) Strong law of large numbers for Banach space valued random sets. *Ann. Prob.* **11**, 222-224.
- ROSS, D. (1986) Random sets without separability. *Ann. Prob.* **14**, 1064-1069.
- RYPLEY, B. D. (1977) Modelling spatial patterns (con discusión). *JRSS B* **39**, 172-212.
- RYPLEY, B. D. (1981) *Spatial Statistics*. J. Wiley & Sons, New York / Chichester.
- RYPLEY, B. D. (1986) *Statistical simulation*. J. Wiley & Sons, Chichester.
- ROBBINS, H. E. (1944, 1945) On the measure of a random set I, II. *AMS* **15**, 70-74; **16**, 342-347.
- ROCKAFELLAR, R. (1970) *Convex Analysis*. Princeton.
- SALINETTI, G. y R. J. B. WETS (1981) On the convergence of closed-valued measurable multifunctions. *Transactions of the American Mathematical Society*. **266**, 275-289.
- SALINETTI, G. y R. J. B. WETS (1986) On the convergence in distribution of measurable multifunctions (random sets), normal integrands, stochastic processes and stochastic infima. *Mathematics of Operations Research*. **11**, 385-422.
- SCHWANDTKE, A., J. OHSER y D. STOYAN (1987) Improved estimation in planar sampling. *Acta Stereol.* **6**.
- SERRA, J. P. (1980) The Boolean model and random sets. *Computer Graphics and Image Processing* **12**, 99-126.
- SERRA, J. P. (1982) *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London.
- SERRA, J. (1985) Fonctions aleatoires booléennes. *Internal Rapport CMM*, N/961/May.
- STOYAN, D. (1979) On some qualitative properties of the boolean models of Stochastic Geometry. *ZAMM* **59**, 447-454.
- STOYAN, D. (1979) On the accuracy of lineal analysis. *BJ.* **21**, 439-449.

- STOYAN, D., W.S.KENDALL y J.MECKE (1987) *Stochastic Geometry and its applications*. J.Wiley & Sons, Chichester.
- STOYAN, D. y H.STOYAN (1980) On some partial orderings of random closed sets. *MOSO* 11, 145-154.
- UPTON, G. y B.FINGLETON (1985) *Spatial data analysis: by example*, vol.1. J.Wiley&Sons, Chichester.
- VITALE, R.A. (1977) Asymptotic area and perimeter of sums of random plane convex sets. *Tech.Rep.No 1770*, Math. Res. Ctr., University of Wisconsin.
- VITALE, R.A. (1981) A central limit theorem for random convex sets. *Tech.Rep.* Claremont Graduate School.
- VITALE, R.A. (1983) Some developpments in the theory of random sets. *Bull.Int.Statist.Inst.* 50, 863-871.
- VITALE, R.A. (1987) An alternate formulation of mean value for geometric figures. Conferencia invitada en *Fourth international conference on Stereology and Stochastic Geometry*.Berna.
- WAKSMAN, P. (1986) Hypothesis testing in Integral Geometry. *Transactions of the American Mathematical Society.* 256, 507-520.
- WATSON, G.S. (1978) Characteristic statistical problems of Stochastic Geometry. En: *Geometrical Probability and Biological Structures: Buffon's 200th Anniversary*. (eds R.E.MILES y J.SERRA), 215-234.
- WEIL, W. (1982) An application of the central limit theorem for Banach-space-valued random variables to the theory of random sets. *ZW* 60, 203-208.
- WEIL, W. (1987) Expectation formulas and isoperimetric properties for non-isotropic Boolean models. Conferencia invitada en *Fourth international conference on Stereology and Stochastic Geometry*.Berna.
- WEIL, W. y J.A.WIEACKER (1983) Densities for stationary random sets and point processes. *AAP* 16, 324-346.
- YADIN, M. y S.ZACKS (1985) The visibility of stationary and moving targets in the plane subject to a Poisson field of shadowing elements. *JAP* 22, 776-786.

Reunido el Tribunal que suscribe, en el día de la fecha, acordó otorgar, por unanimidad, a esta Tesis doctoral de

calificación de Apto Cum laude

Valencia, a 12 de Julio de 1988

El Secretario,

El Presidente

