ESPACIOS SEMI-ESCALONADOS CON VALORES VECTORIALES

Memoria presentada para optar al grado
de Doctor en Ciencias Matemáticas, por

RAFAEL CRESPO GARCIA

D. MANUEL VALDIVIA UREÑA, Catedrático de Análisis Matemático y Director del Departamento de Teoría de Funciones y Ecuaciones Funcionales de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Valencia

CERTIFICO : Que la presente memoria " ESPACIOS SEMI-ESCALONADOS CON VALORES VECTORIALES" , ha sido realizada bajo mi dirección por D. Rafael Crespo García y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que así conste en cumplimiento de la legislación vigente, presento y apadrino ante la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Valencia, la referida tesis, firmando el presente certificado

Valencia 15 de Septiembre de 1980

Manuel Valdivia

Fdo: Manuel Valdivia Ureña.

Quiero hacer constar mi agradecimiento al Prof. Dr. D. Manuel Valdivia , que me ha hecho el honor de dirigir esta memoria y en quien he hallado además consejo útil y ejemplo fructífero a seguir.

A Salud

INTRODUCCION

En esta memoria estudiamos, a indicación del Profesor M. Valdivia, los espacios semi-escalonados con valores en un espacio localmente convexo y separado E_{τ}. El origen de tal pregunta radica en el estudio hecho por él de dichos espacios en [41] y [42] (*), para la denomirada topología semi-normal, utilizando en algunos casos técnicas originales usadas en estudios anteriores de los espacios escalonados (ver [38], [39], [40]).

A la hora de establecer los antecedentes de toda memoria o estudio sobre espacios de sucesiones hay que remontarse necesariamente a los trabajos que dieron origen a tales conceptos. Son éstos los de Köthe y Toeplitz (ver por ejemplo [26]), aunque sistematizados despues por el primer autor en [23] y sobre todo en su fundamental monografía [24] en la que utiliza métodos profundamente elegantes y directos basados en las propiedades del espacio l^1. No por muy conocida debe soslayarse esta mención. Trás esas fechas vino el desarrollo de una rica teoría que donó al análisis funcional de numerosos ejemplos y contraejemplos para ilustrar sus conceptos y las diferencias entre los mismos. También acontecieron buen número de generalizaciones entre las que se cuentan aquellas que llevan a tomar las sucesiones en un espacio localmente convexo y separado E_{τ}.

Existen, entre otros, dos métodos para hacer esta generalización: el primero es sustituir el cuerpo de escalares por un espacio E que forma parte de un par dual $\langle E,F\rangle$, tomando la forma bilineal en lugar del producto numérico usual. Los escalones son en este caso

(*) Los números entre corchetes remiten a la bibliografía situada al final de la memoria.

vectoriales. El segundo es una combinación de un espacio de sucesiones escalar y el espacio E utilizando para ello las semi-normas que definen la topología del espacio. En nuestro estudio dedicaremos espacio a cada uno de estos tipos. En el primero de ellos podemos citar los trabajos de Gribanov [15] , Phuong-Các [29] , Gregory [13] [14] y Gupta, Katman y Rao [17], [18] . En el segundo debemos citar a Pietsch [31] , que utiliza sólo la topología débil del espacio, De Gande-De Kimpe [1], [2] , Rosier [33] utilizando cualquier topología, Galusinski [12] , que utiliza técnicas de bornología, y Leonard [27] , en el contexto de los espacios de Banach. Los escalones en este caso son escalares.

Las aplicaciones directas de estos resultados no se hicieron esperar, basta ver [3],[4],[5],[6],[7],[8],[19] y [30] . Tambien aparecen ultimamente recopilaciones diversas en algunas memorias como por ejemplo [25] y [44] .

Como ya hemos indicado existen otros métodos de estudio de estos espacios pero los expuestos son los más usuales.

Algunos espacios de sucesiones escalares, como el espacio s de las sucesiones de decrecimiento rápido y c_0 ,el espacio de las sucesiones convergentes a cero, son utilizados por el Profesor Valdivia para representar espacios de funciones (ver por ejemplo [37]).Recientemente en [43]da una representación de $\mathcal{B}_0(\Omega)$,en notación de [20] ,utilizando espacios semi-escalonados; esto demuestra que el estudio de estos espacios no es en modo alguno superfluo, máxime cuando los propios espacios s y c_0 se pueden considerar como semi-escalonados.

Nuestro trabajo está dividido en cuatro capítulos.

En el primero de ellos, en cierto modo preliminar, nos planteamos definir en un espacio semi-escalonado escalar una familia de topologías a partir de conjuntos débilmente acotados del α-dual del correspondiente espacio escalonado, de forma similar a como se realiza en [31] . Como caso particular la menos fina de tales topologías es la semi-normal definida por Valdivia. Todas estas topologías tienen los mismos acotados y sirven igual para el espacio escalonado de orden infinito definido por Dubinsky [10]. Ambos espacios son completos y si no coinciden el primero es un subespacio cerrado del segundo que no es complementado. Damos tambien un teorema del tipo Eberlein para los conjuntos compactos y estudiamos el caso en que las secciones de un elemento converjan a él, viendo que el conjunto de tales coincide en ambos espacios y forma un subespacio cerrado. Caracterizamos las topologías para las que un espacio semi-escalonado coincide con el subespacio mencionado. Finalmente estudiamos la separabilidad y dualidad para dichos subespacios ya que la convergencia de las secciones es esencial en los métodos que usamos.

En el capítulo segundo se hace la primera generalización con valores en un espacio E que forma parte de un par dual $\langle E,F\rangle$ separado,con forma bilineal $\langle . \ , \ . \rangle$ que hará las funciones de producto, con respecto del primer capítulo. Definimos unas topologías a partir de conjuntos débilmente acotados del α-dual del correspondiente espacio perfecto vectorial. Si bien en el campo escalar los resultados fluyen con relativa facilidad, es necesario aquí introducir hipótesis más restrictivas sobre el par dual para obtener resultados similares. Así para que todas las topologías tengan los mismos acotados es necesario imponer que F sea $\sigma(F,E)$-sucesionalmente completo, como comprobamos con un ejemplo. Las nociones de completitud se trasladan del espacio E al de sucesiones sin dificultad. En cuanto a la compacidad es necesario utilizar pares duales reflexivos y suponer que E es submetrizable respecto del par dual. Otra vez se pone de manifiesto la importancia de los subespacios formados por los elementos cuyas secciones convergen a ellos. Se obtienen condiciones de densidad sucesional y dualidad que son generalizaciones de los obtenidaos en el capítulo anterior.

En el tercer capítulo combinamos un espacio semi-escalonado λ_0 del tipo definido en el primer capítulo con un espacio localmente convexo E_τ ,exigiendo que una sucesión de $E^{\mathbb{N}}$ sea del espacio $\lambda_0\{E_\tau\}$ si para cada semi-norma que define la topología $\mathcal{T}$ al aplicarla a la sucesión nos proporciona un elemento de λ_0. Dicho espacio viene dotado de forma natural de una topología que deriva de las de λ_0 y E_τ. Esta generalización ,como probamos con ejemplos, es sustancialmente distinta de la realizada en el capítulo anterior y parece más útil ya que además no necesita de tantas hipótesis adicionales para obtener resultados manejables. Así en general coinciden los acotados de todas las topologías, relacionamos estos acotados con los del espacio de sucesiones y obtenemos teoremas del tipo Eberlein para los subconjuntos compactos. Se estudian igualmente propiedades hereditarias como isomorfía, subespacios ,productos, densidad,separabilidad y completitud, teniendo gran utilidad, una vez más, el subespacio de los elementos que son el límite de sus secciones. Para dichos subespacios se da una representación de tipo tensorial. Estudiamos el caso particular en que la topología del espacio es la débil. Para dar una condición de respetabilidad de cocientes estudiamos las aplicaciones lineales continuas de estos espacios a partir de las de los espacios localmente convexos. Finalizamos el capítulo demostrando que todo espacio semi-escalonado escalar tiene la propiedad de aproximación de Grothendieck, y que si el espacio E_τ la posee, igual ocurre con $\lambda_0\{E_\tau\}$. Durante todo el capítulo se supone $\lambda_0\{E_\tau\}$ como subespacio cerrado de $\lambda_\infty\{E_\tau\}$ definido de forma análoga a partir del espacio escalonado de orden infinito y del espacio E_τ.

El capítulo cuarto es una continuación de las ideas introducidas en el tercero. Estudiamos el dual topológico del subespacio $[\lambda_0\{E_z\}]$ de los elementos de $\lambda_0\{E_z\}$ que son el $\mathfrak{M}_0$-límite de sus secciones. Damos una caracterización de dicho dual y de sus equicontinuos, viendo que es un espacio de sucesiones con valores en E'. Buscamos seguidamente qué espacios tienen como dual a $\lambda_0^{\times}\{E'_{\beta}\}$,definiendo los espacios λ_0-fundamentalmente acotados ,generalizando a nuestros espacios una definición de Rosier para espacios perfectos. Damos una amplia clase que cumple tal propiedad y que contiene, por ejemplo, a espacios tan usuales como los metrizables. Finalmente estudiamos la heredación de las propiedades de tonelación de E_z a $\lambda_0\{E_z\}$ con la topología semi-normal utilizando técnicas debidas a los Profesores Marquina y Sanz Serna [28] para el espacio $c_0\{E_z\}$ y la definición anterior de conjuntos λ_0-fundamentalmente acotados. Se da tambien una aplicación a la conmutación de los límites inductivos con el operador λ_0 .

NOTACIONES Y TERMINOLOGIA GENERAL

Como es usual $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, denotarán los conjuntos de números naturales,racionales,reales y complejos respectivamente. $\mathbb{K}$ indicará indistintamente el cuerpo de los reales o el de los complejos. Dados dos conjuntos A y B , $A \setminus B$ será la diferencia conjuntista usual. Una función entre dos conjuntos se escribirá a menudo como $f: A \longrightarrow B$.

Los espacios vectoriales los supondremos definidos sobre $\mathbb{K}$.

Por $E_{\mathcal{T}}$ o $E[\mathcal{T}]$ entenderemos un espacio vectorial dotado de una topología localmente convexa y separada compatible con la estructura algebraica; a tal ente le denominaremos espacio localmente convexo o simplemente espacio. Su dual topológico se denotará por E'. Los conjuntos $E^{\mathbb{N}}$ y $E^{(\mathbb{N})}$ representarán el producto topológico y la suma directa de una cardinalidad de copias de E numerable,ambos dotados de las topologías usuales. Si F es un subespacio vectorial de E, lo supondremos con la topología inducida por la de E y la denotaremos de identica forma. Si F es $\mathcal{T}$-cerrado y consideramos el cociente,consideraremos sobre éste la topología cociente. Denotamos por $\tilde{E}$,$\hat{E}$,$\tilde{E}^s$ la completación, casi-completación y la completación sucesional del espacio E . Si A es un subconjunto de E , su envoltura lineal se representará por Lin(A).

Si $\langle E,F\rangle$ es un par dual separado denotaremos por $\sigma(E,F)$, $\mu(E,F)$ y $\beta(E,F)$ respectivamente las topologías débil, de Mackey y fuerte asociadas al par dual y por $\beta^*(E,F)$ la topología en E de la convergencia uniforme en los conjuntos $\beta(F,E)$-acotados de F.

Si $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son dos topologías en E diremos que $\mathcal{T}_1$ es más fina que $\mathcal{T}_2$ si $\mathcal{T}_1 > \mathcal{T}_2$.

Dados E y F espacios vectoriales $E \otimes F$ denotará su producto tensorial . Si E y F son localmente convexos, al producto tensorial lo podemos dotar con las topologías ε y π , llamando entonces $E \otimes_{\varepsilon} F$ y $E \otimes_{\pi} F$ a los espacios resultantes.

Cuando hablemos de un espacio de sucesiones λ ,supondremos un subespacio vectorial de ω (espacio de todas las sucesiones en $\mathbb{K}$) y que contiene a φ (espacio de las sucesiones en $\mathbb{K}$ con a lo más un número finito de coordenadas no nulas). Un elemento de tal espacio se denotará por (x_n). Una sucesión en λ se representará como (x_{mn}) o (x_n^m), entendiendo que el primer índice o el superíndice determinan la sucesión en λ .Igual haremos si el espacio de sucesiones toma sus valores en E.

Dados dos conjuntos de sucesiones A y B denotamos por

$$A.B = \{ (x_n) \ : x_n = y_n . z_n \ \text{con} \ (y_n) \in A \ , \ (z_n) \in B \}$$

Dadas dos sucesiones (a_n) y (b_n) por $(a_n b_n^{-1})$ entenderemos $a_n \cdot b_n^{-1}$ si b_n es distinto de cero y cero en otro caso.

Un subconjunto A de un espacio de sucesiones diremos que es normal si cuando contenga a una sucesión (x_n) contiene a todas las que resultan de multiplicar cada x_n por escalares de módulo menor o igual a la unidad. A es normal si $A \subset 1^{\infty}.A$. Para un B cualquiera n(B) será su envoltura normal, es decir el mínimo conjunto normal que lo contiene o la intersección de los conjuntos normales que lo contengan.

Dado un espacio de sucesiones denotamos por $\lambda^{\times}$ su α-dual,

$$\lambda^{\times} = \{ (y_n) \in \omega \ : (x_n y_n) \in 1^1 \ \ \text{si} \ (x_n) \in \lambda \}$$

Evidentemente para todo λ , $\lambda \subset \lambda^{\times\times}$ y si se cumple la igualdad el espacio se dirá perfecto. Todo espacio perfecto es normal aunque el recíproco no es cierto en general.

Por c_0 , 1^1 ,1^{∞} denotaremos los espacios de sucesiones convergentes a cero, absolutamente sumables y acotadas respectivamente.

El resto de definiciones se darán sobre la marcha, si bien básicamente seguiremos las monografías [20] y [24] - [25] en lo referente a espacios localmente convexos, [32] para espacios nucleares y [35] para productos tensoriales. Para espacios de sucesiones utilizaremos básicamente [24] .

C A P I T U L O I

TOPOLOGIAS EN ESPACIOS SEMI-ESCALONADOS ESCALARES.

1. ESPACIOS SEMI-ESCALONADOS.

Partiremos de un SISTEMA DE ESCALONES A en el sentido de Pietsch [32] p.97 , es decir de un conjunto de sucesiones reales cumpliendo:

(i) $a_n \geq 0$, $n=1,2,3,\ldots\ldots$ siempre que $(a_n) \in A$

(ii) Si $n_0 \in \mathbb{N}$ entonces existe un elemento (a_n) en A tal que $a_{n_0} > 0$

(iii) Si (a_n^1) , (a_n^2) ......(a_n^k) son elementos de A , existe un (a_n) en A tal que

$$a_n \geq \max \{a_n^1 \; a_n^2 \ldots\ldots a_n^k\} \qquad n=1,2,3\ldots\ldots$$

Siguiendo a Latimer y Ruckle [22] diremos que un subconjunto B de A es COFINAL si para cada $(a_n) \in A$ existe un elemento (b_n) en B tal que $a_n \leq \alpha \, b_n$ para algún $\alpha > 0$.

Diremos también que A es 1-SEPARABLE si admite un subconjunto cofinal numerable.

A partir de un sistema de escalones A se define el correspondiente espacio escalonado

$$\lambda = \{(x_n) \in \omega : (a_n x_n) \in l^1 \text{ para todo } (a_n) \in A\}$$

y en él la topología NORMAL $\mathcal{N}$ definida por la familia de seminormas :

$$p_a((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n |x_n| \qquad (a_n) \in A$$

de tal forma que $\lambda_{\mathcal{N}}$ es un espacio localmente convexo completo ya que es perfecto ([24] p.413) . En el caso en que A es 1-separable el espacio es además metrizable y por lo tanto un (F)-espacio. Un sistema de escalones A diremos que es NUCLEAR si

$$A \subset l^1 . A$$

Así con esta notación el criterio de nuclearidad de Grothendieck-Pietsch (ver [16] y [32]) se puede enunciar;

<u>Proposición 1.1</u> El espacio $\lambda_{\mathcal{N}}$ es nuclear si, y sólo si, su sistema de escalones definidor A es nuclear.

También es sobradamente conocido que $\lambda_{\mathcal{N}}$ es nuclear si, y sólo si $\mathcal{N}$ se puede definir por la familia de seminormas

$$q_a((x_n)) = \sup_n \{ a_n |x_n| \} \quad , (a_n) \in A$$

A partir de esta idea M. VALDIVIA define en [41] y [42] el espacio SEMI-ESCALONADO asociado al sistema de escalones A como

$$\lambda_0 = \{ (x_n) \in \omega : \quad (a_n x_n) \in c_0 \text{ para todo } (a_n) \in A \}$$

y en él la topología SEMI-NORMAL definida por las seminormas q_a, $\mathcal{N}_0$. $\lambda_{0\mathcal{N}_0}$ es así un espacio localmente convexo completo.

Utilizaremos también el espacio ESCALONADO DE ORDEN ∞ (definidos para el caso 1-separable por Dubinsky [10])como

$$\lambda_\infty = \{ (x_n) \in \omega : \quad (a_n x_n) \in l^\infty \text{ para todo } (a_n) \in A \}$$

que es el bidual del espacio $\lambda_{0\mathcal{N}_0}$ (ver [41]) en el caso 1-separable.

<u>Proposición 1.2</u> Si el sistema de escalones A es nuclear entonces $\lambda = \lambda_0 = \lambda_\infty$.

demostración: Es evidente la inclusión $\lambda \subset \lambda_0 \subset \lambda_\infty$

Inversamente si $(x_n) \in \lambda_\infty$, sea $(a_n) \in A$; al ser nuclear existe un $(b_n) \in A$ tal que $(a_n b_n^{-1}) \in l^1$, entonces $(a_n x_n) \in l^1$ ya que se puede expresar como $(a_n b_n^{-1} b_n x_n)$, siendo $(a_n b_n^{-1}) \in l^1$ y por otro lado $(b_n x_n) \in l^\infty$. ∎

Recíprocamente obtenemos:

Proposición 1.3 Si el sistema de escalones A es l-separable y $\lambda = \lambda_o = \lambda_\infty$,entonces A es nuclear.

demostración: Podemos suponer A numerable , es decir

$$A = \{ (b_{kn}) \quad : k = 1,2,3....... \}$$

Si A no fuera nuclear existiría un k_o tal que

$$(b_{k_o n} b_{kn}^{-1}) \notin l^1 \qquad k=1,2,3......$$

Por la condición (iii) de definición de A podemos suponer la sucesión (b_{kn}) creciente.

Determinamos una sucesión de enteros no negativos

$$n_o < n_1 < n_2 < .... < n_k < ....$$

con $n_o=0$ y cumpliendo

$$\sum_{n=1}^{n_1} b_{k_o n} b_{1n}^{-1} > 1 \; ; \qquad \sum_{n=n_1+1}^{n_2} b_{k_o n} b_{2n}^{-1} > 1 \; ;............$$

$$....... \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} b_{k_o n} b_{kn}^{-1} > 1 \quad ....$$

Tomemos ahora el elemento $(c_n) \in \omega$ tal que si $n_{k-1}+1 \leq n \leq n_k$

$$c_n = b_{kn}^{-1} \qquad \text{si } b_{kn} \neq 0$$

$$c_n = 0 \qquad \text{si } b_{kn} = 0$$

Entonces $\sup_n b_{kn} c_n \leq \sup (\sup_{n \leq n_k} b_{kn} c_n \; , \; 1) < +\infty$, $k=1,2,....$

luego $(c_n) \in \lambda_\infty$, mientras que $(c_n) \notin \lambda$ ya que $(b_{k_o n} c_n) \notin l^1$ lo cual va en contra de la hipótesis. ∎

Corolario 1.4 Si el sistema de escalones A es nuclear , los espacios $\lambda_{\mathcal{N}^p}$ y $\lambda_o \mathcal{N}_o^p$ son isomorfos.

demostración: Los espacios vectoriales coinciden según 1.2 y el hecho de que las topologías coincidan viene dado por la condición de nuclearidad de A. (ver tambien [32]) . ∎

2. TOPOLOGIAS $\mathfrak{M}_0$.

En los espacios λ_0 y λ_∞ vamos a definir unas topologías localmente convexas de forma análoga a como se definen para los espacios perfectos (ver por ejemplo [31]). Como caso particular la menos fina de dichas topologías será la topología seminormal.

Sea A un sistema de escalones en el sentido de 1. Construimos los espacios λ , $\lambda^\times$, λ_0 , λ_∞ . (El espacio λ_0 lo podemos obtener usando como sistema de escalones los elementos positivos de $\lambda^\times$). Llamaremos SISTEMA TOPOLOGIZADOR a una familia $\mathfrak{M}$ de conjuntos $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$-acotados de $\lambda^\times$ cumpliendo:

(i) $\bigcup \{ M : M \in \mathfrak{M} \} = \lambda^\times$

(ii) $\rho M \in \mathfrak{M}$ siempre que $M \in \mathfrak{M}$ y $\rho > 0$

(iii) Si M_1 y M_2 son dos elementos de $\mathfrak{M}$ existe un M_3 en $\mathfrak{M}$ tal que $M_1 \cup M_2 \subset M_3$

Diremos que $\mathfrak{M}$ es NORMAL si siempre que contenga a M contiene a su envoltura normal.

Dado un elemento de λ_∞ , (x_n) definimos

$$q_M((x_n)) = \sup \left\{ \sup_n |a_n x_n| \ : (a_n) \in M \right\}$$

para un $M \in \mathfrak{M}$.

<u>Proposición 2.1</u> Sea $\mathfrak{M}$ un sistema topologizador. La familia $\{ q_M : M \in \mathfrak{M} \}$ es una familia de seminormas en λ_∞ (y a fortiori en λ_0) que definen una topología localmente convexa separada.

demostración: Es evidente que si $M \in \mathfrak{M}$ entonces

$$q_M((x_n)) \geqslant 0$$

$$q_M(\alpha(x_n)) = |\alpha| . q_M((x_n))$$

$$q_M((x_n)+(y_n)) \leq q_M((x_n)) + q_M((y_n))$$

para (x_n) , (y_n) en λ_∞ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

q_M toma valores finitos en λ_∞ para $M \in \mathcal{M}$. En efecto: Si no fuese así existirían (a_{kn}) M tales que

$$\sup_n |a_{kn} x_n| > k^3 \qquad \text{para un cierto } (x_n) \in \lambda_\infty .$$

Construimos $(b_n) \in \omega$ con

$$b_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_{kn}|}{k^2} \qquad n=1,2,3.....$$

Al ser M $\sigma(\lambda^x, \lambda)$-acotado, lo es coordenada a coordenada y por tanto existen reales positivos ρ_n de tal forma que

$$|a_{kn}| \leq \rho_n \qquad n=1,2,3,.......$$

por lo que b_n está bien definido. Por otro lado si $(y_n) \in \lambda$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n y_n| \leq \rho \qquad \text{para} \quad (a_n) \in M$$

y por tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n y_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_{kn}| \cdot |y_n|}{k^2} \leq \rho \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$$

es decir $(b_n) \in \lambda^x$.

Sin embargo tenemos que $(x_n) \notin \lambda_\infty$ ya que

$$\sup_n |b_n x_n| = \sup \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_{kn} x_n|}{k^2} \right) = \frac{\sup_n |a_{kn} x_n|}{k^2} > k$$

$$\text{para} \qquad k=1,2,3...........$$

en contra de la hipótesis.

Veamos ahora que la familia $\{ q_M : M \in \mathcal{M} \}$ separa puntos. Sea $(x_n) \in \lambda_\infty$ no nulo; entonces existe un natural n_0 con $x_{n_0} \neq 0$ Escojamos un $(a_n) \in A \subset \lambda^x$ tal que $a_{n_0} > 0$ (se puede hacer por la condición (ii) de A) ; por la condición (i) de definición de $\mathcal{M}$ existe un $M \in \mathcal{M}$ tal que $(a_n) \in M$, entonces

$$q_M((x_n)) \geq \sup_n |a_n x_n| \geq a_{n_0} x_{n_0} > 0$$

Por todo lo visto anteriormente la familia $\{ q_M : M \in \mathcal{M} \}$ es una familia saturada de seminormas en λ_∞ que define una topología localmente convexa separada ([20] y [24]). ∎

Nota. La demostración anterior se puede simplificar en cuanto a la finitud de las funciones q_M si el sistema de escalones es numerable ya que entonces cada $\sigma(\lambda^x, \lambda)$-acotado está contenido en la envoltura normal de un homotético de algún $(a_n) \in A$. (ver [24]).

A la topología determinada en la proposición anterior la denotaremos por $\mathcal{M}_o$ y a los espacios λ_o y λ_∞ dotados de dicha topología los denotaremos por $\lambda_o \mathcal{M}_o$ y $\lambda_\infty \mathcal{M}_o$. La menos fina de estas topologías es la determinada por la familia $\mathcal{N}$ de los elementos positivos de λ^x que es la topología semi-normal $\mathcal{N}_o$. En [41] y [42] se estudia con amplitud las propiedades del espacio $\lambda_o \mathcal{N}_o$ como dualidad, semirreflexividad, Montel, nuclearidad, Schwartz etc. reestructurando los métodos para espacios perfectos desarrollados en [38] , [39], [40]

La más fina de todas es evidentemente la topología $\mathcal{B}_o$ determinada por la familia de todos los conjuntos $\sigma(\lambda^x, \lambda)$-acotados.

Consideraremos también la topología $\mathcal{K}_o$ determinada por la familia $\mathcal{K}$ de todos los conjuntos $\sigma(\lambda^x, \lambda)$-relativamente compactos de λ^x.

Es evidente además que en el espacio λ la restricción de la topología $\mathcal{M}_o$ es menos fina que la $\mathcal{M}$-topología definida por Pietsch.

3. LOS ESPACIOS $\lambda_0\mathfrak{M}_0$ Y $\lambda_\infty\mathfrak{M}_0$.

En este apartado consideraremos el espacio $\lambda_\infty\mathfrak{M}_0$ y λ_0 como subespacio del mismo. Es evidente que ambos son normales y contienen a φ.

<u>Proposición 3.1</u> λ_0 es $\mathfrak{M}_0$-cerrado en λ_∞.

demostración: Sea (x_n) un elemento de la $\mathfrak{M}_0$-adherencia de λ_0 en λ_∞ y sea $\varepsilon>0$, entonces para $M\in\mathfrak{M}$ existe un (y_n) en λ_0 tal que

$$q_M((x_n)-(y_n)) < \varepsilon$$

Sea $(a_n)\in\lambda^\times$, existe un $M\in\mathfrak{M}$ con $(a_n)\in M$ y entonces

$$|a_n x_n| \leq |a_n(x_n-y_n)|+|a_n y_n| \qquad n = 1,2,3\ldots\ldots$$

luego

$$|a_n x_n|\leq|a_n y_n|+q_M((x_n)-(y_n))<|a_n y_n|+\varepsilon$$

y por tanto $(a_n x_n)\in c_0$, es decir $(x_n)\in\lambda_0$. ∎

Para estudiar la complementación de λ_0 en λ_∞ vamos a seguir una técnica debida a Whitley (ver [21]) para c_0.

<u>Lema 3.2</u> ([21]) Para cada número real α, podemos encontrar un subconjunto N_α de $\mathbb{N}$ de tal manera que sea infinito y que para dos reales distintos α y β, $N_\alpha\cap N_\beta$ sea finito.

demostración: Tomemos el conjunto de los números racionales que sabemos que es numerable como una sucesión. Sea

$$E_\alpha=\{r_n\in\mathbb{Q}:\ r_n\neq r_m \text{ si } n\neq m \text{ y } (r_n)\rightarrow\alpha\}$$

basta ahora tomar $N_\alpha=\{n\in\mathbb{N}:\ r_n\in E_\alpha\}$. ∎

<u>Proposición 3.3</u> Si el espacio λ_0 no coincide con λ_∞ entonces λ_0 no se puede escribir como intersección numerable de núcleos de elementos del dual de $\lambda_\infty\mathfrak{M}_0$.

demostración: Sea (b_n) un elemento de λ_∞ que no está en λ_0 y tomemos $x_\alpha=(x_{\alpha n})$ con $\alpha\in\mathbb{R}$ tales que

$x_{\alpha n} = 0$ si $n \notin N_\alpha$, $x_{\alpha n} = b_n$ si $n \in N_\alpha$

siendo N_α los conjuntos obtenidos en el Lema anterior.

Entonces $(x_{\alpha n}) \in \lambda_\infty \setminus \lambda_o$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

Supongamos que existen funcionales $f_1\ f_2 \ldots\ldots f_n \ldots$ en $\lambda'_{\infty\mathcal{M}_0}$ tales que

$$\lambda_o = \bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ker} f_n$$

Para cualquier elemento f de $\lambda'_{\infty\mathcal{M}_0}$ tal que $f((x_n)) = 0$ si (x_n) pertenece a λ_o ,sea

$$Q(f) = \{\alpha \in \mathbb{R} : f(x_\alpha) \neq 0\}$$

Si $A_n = \{\alpha \in \mathbb{R} : f(x_\alpha) \geq \frac{1}{n}\}$ $n = 1,2,3\ldots\ldots$

entonces

$$Q(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

El cardinal de A_n es finito: sean $\alpha_1 \ldots\ldots\ldots \alpha_k$ elementos de A_n ; consideremos

$$\beta_i = \frac{|f(x_{\alpha_i})|}{f(x_{\alpha_i})} \qquad 1 \leq i \leq k$$

Si $x = \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_{\alpha_i}$ entonces

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} |f(x_{\alpha_i})| \geq \frac{k}{n}$$

Definamos ahora (y_n) de la siguiente manera:

Si existe un único i tal que $n \in N_{\alpha_i}$ $1 \leq i \leq k$ entonces $y_n = \beta_i b_n$ siendo cero en cualquier otro caso.

Salvo para cuando $n \in N_{\alpha_p} \cap N_{\alpha_q}$ (que es finito $1 \leq p,q \leq k$) se tiene que $y_n = x_n$ y por lo tanto si $y = (y_n)$

$$y - x \in \lambda_o \text{ por lo que } f(x) = f(y).$$

Sea ahora $\delta = q_M((b_n))$ para un $M \in \mathcal{M}$ (se puede elegir de forma que sea distinto de cero) , sea

$$B = \{ z \in \lambda_\infty : q_M(z) \leq \delta \} \text{ y tomemos}$$

$$q_{B^o}(f) = \sup_{z \in B} |f(z)|$$

entonces $f(x) = f(y) \leq q_{B^o}(f)$ pues x e y estan en B, y por lo tanto $k \leq n \cdot q_{B^o}(f)$

Como $q_{B^0}(f)$ es finito entonces la desigualdad anterior nos asegura que A_n es finito. A partir de aquí podemos deducir que $Q(f)$ es numerable por lo que al ser $\mathbb{R}$ no numerable existe un α real que no está en $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q(f_n)$ y por tanto

$$x_\alpha \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ker} f_n \qquad \text{pero} \qquad x_\alpha \notin \lambda_0 . \blacksquare$$

<u>Proposición 3.4</u> Si el espacio λ_0 no coincide con λ_∞ entonces λ_0 es un subespacio cerrado no complementado en $\lambda_\infty \mathcal{M}_0$.

demostración: Por la proposición 3.1 λ_0 es cerrado en $\lambda_\infty \mathcal{M}_0$

Si fuera complementado existiría un subespacio H de λ_∞ tal que

$$\lambda_\infty = \lambda_0 \oplus H \qquad \text{(top)}$$

Sea T el operador de λ_∞ en λ_∞ tal que si $z \in \lambda_\infty$, $z = z_0 + z_1$ con $z_0 \in \lambda_0$, $z_1 \in H$ entonces $T(z) = z_1$. T es lineal y continuo.

Para cada natural n sea g_n el elemento de $\lambda_\infty \mathcal{M}_0'$ tal que

$$g_n(z) = z_n \quad , \; z \in \lambda_\infty \qquad n = 1,2,3\ldots\ldots$$

Si $g_n(z) = 0$ entonces $z_n = 0$ y por tanto

$$\lambda_0 = \operatorname{Ker} T = \bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ker} (g_n \circ T)$$

lo cual es imposible por la proposición anterior. $\blacksquare$

<u>Corolario 3.5</u> Sea A un sistema de escalones 1-separable y $\mathcal{N}_0$ la topología semi-normal en λ_∞. Entonces λ_0 es complementado en $\lambda_\infty \mathcal{N}_0$ si, y sólo si, no es semirreflexivo.

demostración: En [41] M. Valdivia demuestra que con las hipótesis del corolario el bidual de λ_0 con la topología semi-normal es λ_∞. Basta entonces combinar este resultado con la proposición anterior. $\blacksquare$

Vamos a estudiar ahora las propiedades de completación de las topologías $\mathcal{M}_0$. Los espacios $\lambda_0 \mathcal{N}_0$ y $\lambda_\infty \mathcal{N}_0$ son en particular completos (ver [41] y [42]).

<u>Proposición 3.6</u> El espacio $\lambda_\infty \mathfrak{M}_0$ es completo.

demostración: Sea $\{(y_n^\delta) : \delta \in D\}$ una red de Cauchy para la topología $\mathfrak{M}_0$ en λ_∞, es decir dados $\varepsilon > 0$, $M \in \mathfrak{M}$ existe un $\delta_0 \in D$ tal que

$$q_M((y_n^\delta) - (y_n^{\delta'})) < \varepsilon \qquad \delta, \delta' \geq \delta_0 \qquad (1)$$

Para un natural p fijo tenemos que

$$y_p^\delta - y_p^{\delta'} < \varepsilon / a_p \qquad a_p \in M$$

por lo que la red $\{y_p^\delta : \delta \in D\}$ es una red de Cauchy en $\mathbb{K}$ y por lo tanto convergente a un cierto y_p en $\mathbb{K}$.

Formemos la sucesión (y_n) en ω

Sea $(a_n) \in \lambda^\times$, entonces

$$\sup_n |a_n y_n| \leq \sup_n |a_n y_n^\delta| + \sup_n |a_n (y_n^\delta - y_n)|$$

tomando límites en (1) para $\delta' \in D$ y M tal que $(a_n) \in M$

$$\sup_n |a_n y_n| \leq \sup |a_n y_n^\delta| + \varepsilon$$

y por lo tanto $(y_n) \in \lambda_\infty$. Por otro lado si $M \in \mathfrak{M}$

$$q_M((y_n^\delta) - (y_n)) < \varepsilon$$

lo que quiere decir que la red $\{(y_n^\delta) : \delta \in D\}$ converge a (y_n) en la topología $\mathfrak{M}_0$. ∎

<u>Corolario 3.7</u> El espacio $\lambda_0 \mathfrak{M}_0$ es completo.

demostración: Es consecuencia directa de las proposiciones 3.1 y 3.6 . ∎

<u>Corolario 3.8</u> Si el sistema de escalones A es 1-separable entonces tanto $\lambda_\infty \mathcal{N}_0$ como $\lambda_0 \mathcal{N}_0$ son (F)-espacios.

demostración: Basta tener en cuenta 3.6 , 3.7 , y el hecho de que la 1-separabilidad de A implica la metrizabilidad de la topología semi-normal. ∎

4. CONJUNTOS $\mathfrak{M}_o$- ACOTADOS .

Vamos a comprobar que el concepto de acotación en cualquier topología del tipo $\mathfrak{M}_0$ es el mismo.

Un subconjunto B de λ_∞ (respectivamente de λ_o) diremos que está ACOTADO si para cada $(a_n)\in\lambda^\times$, existe un $\rho>0$ tal que

$$\sup_n |a_n x_n| \leq \rho \qquad \text{para } (x_n)\in B.$$

Este concepto coincide evidentemente con el de $\mathcal{N}_o$- acotación.

Por la propia definición es evidente la siguiente

<u>Proposición 4.1</u> Un subconjunto B de λ_∞ está acotado si , y sólo si, su envoltura normal está acotado.

La relación entre los acotados de las topologías $\mathfrak{M}_o$ y en particular el concepto anterior es:

<u>Proposición 4.2</u> Si $\mathfrak{M}$ es un sistema topologizador cualquiera entonces un subconjunto B de λ_∞ es acotado si , y sólo si es acotado para la topología $\mathfrak{M}_o$.

demostración: Si B es $\mathfrak{M}_o$- acotado al ser la topología $\mathfrak{M}_o$ más fina que la topología $\mathcal{N}_o$ es evidente que es acotado.

Recíprocamente si B es acotado, sea $\mathfrak{M}$ un sistema topologizador. Si B no fuese $\mathfrak{M}_o$ - acotado podríamos encontrar para cada natural k sendos $(x_{kn})\in B$ y $(a_{kn})\in M$ para un cierto $M\in\mathfrak{M}$ cumpliendo

$$\sup_n |a_{kn}\, x_{kn}| > k.2^k \qquad k = 1,2,3....$$

Al ser M $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$ - acotado , lo es coordenada a coordenada y por lo tanto existen reales positivos ρ_n n = 1,2,3..... de forma que para todo $(a_n)\in M$ se cumpla

$$|a_n| \leq \rho_n \qquad n=1,2,3,.....$$

Sea

$$b_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{kn}}{2^k} \qquad \text{para } n = 1,2,3......$$

Por lo dicho anteriormente b_n está perfectamente definido y $|b_n| \leq \rho_n$. Además $(b_n) \in \lambda^{\times}$; en efecto, si $(y_n) \in \lambda$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \ y_n| \leq \rho \quad \text{para } (a_n) \in M \quad \text{y un cierto } \rho > 0.$$

luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n \ y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_{kn} \ y_n|}{2^k} \right) \leq \rho$$

Al ser B acotado existe un real positivo ρ_0 tal que

$$\sup_n |b_n \ x_n| \leq \rho_0 \qquad (x_n) \in B \qquad (1)$$

sin embargo

$$\sup_n |b_n \ x_{kn}| = \sup_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_{kn} \ x_{kn}|}{2^k} \right) >$$

$$> \sup_n \frac{1}{2^k} |a_{kn} \ x_{kn}| > k$$

$$\text{para } k = 1,2,3 \ldots\ldots$$

lo cual contradice evidentemente (1). ∎

La proposición anterior nos permite hablar del concepto de acotación si especificar la topología en la que estamos siempre que ésta sea del tipo $\mathcal{M}_0$.

5. CONJUNTOS $\mathfrak{M}_0$- COMPACTOS.

Trabajaremos en este apartado esencialmente con el espacio $\lambda_0 \mathfrak{M}_0$. Obtenemos primeramente un teorema del tipo Eberlein.

Proposición 5.1 Si B es un subconjunto acotado en λ_0 son equivalentes las siguientes condiciones

(a) B es $\mathfrak{M}_0$- relativamente compacto.

(b) B es $\mathfrak{M}_0$- relativamente numerablemente compacto.

(c) B es $\mathfrak{M}_0$- relativamente sucesionalmente compacto.

(d) Si (x_{kn}) $k = 1,2,3.....$ es una sucesión en B que converge coordenada a coordenada a un cierto $(x_n) \in \lambda_0$ entonces $\mathfrak{M}_0$- converge a (x_n) en λ_0.

demostración: (a) $\Longrightarrow$ (b) evidentemente.

(b) $\Longrightarrow$ (d) : sea $(x_{kn}) \in B$ $k = 1,2,3,......$ una sucesión de tal forma que para cada natural n

$$\lim_{k} x_{kn} = x_n$$

Si (y_n) es un punto adherente de la sucesión necesariamente

$$x_n = y_n \qquad n = 1,2,3,......$$

Si (x_{kn}) no convergiese a (x_n) en la topología $\mathfrak{M}_0$ podríamos obtener una subsucesión convergente a $(z_n) \neq (x_n)$ lo cual no es posible al ser (x_n) el único punto adherente posible.

(d) $\Longrightarrow$ (c) : Si (x_{kn}) $k = 1,2,3,....$ es una sucesión en B , al ser éste acotado lo es coordenada a coordenada. Entonces aplicando un proceso diagonal de forma tradicional hallamos una subsucesión convergente coordenada a coordenada en λ_0. Por hipótesis dicha subsucesión $\mathfrak{M}_0$- converge y por tanto B es $\mathfrak{M}_0$- relativamente sucesionalmente compacto.

(c) $\Longrightarrow$ (a) : Consideremos un filtro $\mathfrak{F} = \{F_\alpha\}$ en B. Vamos a demostrar que existe un punto $\mathfrak{M}_0$- adherente a $\mathfrak{F}$ en λ_0.

(el método a seguir es el standar en este tipo de casos)

Dado (x_n) B definimos su sección n-finita

$$(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) \in \mathbb{K}^n \ , \ n = 1,2,3\ldots\ldots$$

Considerando estas n-secciones para cada elemento de B obtenemos los filtros $\mathfrak{F}_n = \{F_{\alpha n}\}$.

Consideremos el conjunto G_n de puntos de $\mathbb{K}^n$ adherentes a $\mathfrak{F}_n$.

Para cada n el conjunto G_n es acotado.

Consideremos $y^{(n)} \in B$ de tal manera que

$$(y_1^{(n)} , y_2^{(n)} , \ldots\ldots y_n^{(n)}) \in G_n \qquad n = 1,2,3,\ldots\ldots$$

Por hipótesis la sucesión $y^{(n)}$ admite una subsucesión convergente que por comodidad, para no enmascarar la notación, escribiremos de la misma forma, es decir

$$\mathfrak{M}_0 - \lim_n y^{(n)} = y \qquad y \in \lambda_0$$

Sea $z^{(n)}$ un elemento de F_α tal que

$$| z_i^{(n)} - y_i^{(n)} | \leq \frac{1}{n} \qquad i = 1,2,3\ldots\ldots$$

entonces $\mathfrak{M}_0 - \lim_n z^{(n)} = y$

y por lo tanto y es $\mathfrak{M}_0$ - adherente a $\mathfrak{F}'$. ∎

Daremos ahora una condición para que la envoltura normal de un acotado en λ_0 sea relativamente compacto en la topología $\mathfrak{M}_0$ según las propiedades de las "colas" de sus elementos.

<u>Proposición 5.2</u> Sea B un acotado en λ_0.

Su envoltura normal n(B) es $\mathfrak{M}_0$- relativamente compacto si, y sólo si para cada $M \in \mathfrak{M}$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{n > n_0} |a_n \, x_n| \leq 1$$

para cualquier $(a_n) \in M$ y $(x_n) \in B$.

demostración: necesidad; si no fuera cierta la condición para B siendo n(B) $\mathfrak{M}_0$ -relativamente compacto , existirían para cada i natural $(a_{in}) \in M$ $(x_{in}) \in B$ tales que

$$\sup_{n > i} | a_{in} \, x_{in}| > 1 \qquad i = 1,2,3\ldots\ldots$$

Sean ε_{in} elementos de $\mathbb{K}$ tales que

$$\varepsilon_{in} = 0 \qquad n \leq i$$

$$\varepsilon_{in}\, a_{in}\, x_{in} = |a_{in}\, x_{in}| \qquad n > i$$

entonces $\sup_n |a_{in}\, x_{in}| > 1$ (1)

La sucesión $(\varepsilon_{in} x_{in})$ $i = 1,2,3\ldots\ldots$ converge coordenada a coordenada a cero y está en $n(B)$, aplicando la proposición 5.1 (coimplicación (a)$\Leftrightarrow$(d)) tenemos

$$\mathfrak{M}_0 - \lim_i \varepsilon_{in} x_{in} = (0)$$

luego dado $M \in \mathfrak{M}$

$$\sup \left\{ \left(\sup_n |a_n\, \varepsilon_{in}\, x_{in}| \right) \ : \ (a_n) \in M \right\} < 1 \qquad (2)$$

para $i \geqslant i_0$.

Tomando ahora $i > i_0$, para $(a_{in}) \in M$ las expresiones (1) y (2) son contradictorias.

Suficiencia: sea (y_{jn}) $j = 1,2,3,\ldots\ldots$ una sucesión en $n(B)$ que es acotado; la sucesión puede ser elegida de forma que sea convergente coordenada a coordenada, es decir

$$\lim_j y_{jn} = y_n \qquad n=1,2,3,\ldots\ldots$$

Podemos encontrar una sucesión (x_{jn}) $j = 1,2,3,\ldots\ldots$ en B con

$$|y_{jn}| \leq |x_{jn}| \qquad j,n = 1,2,3,\ldots\ldots$$

Dado $M \in \mathfrak{M}$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{n \geqslant n_0} |a_n\, x_n| \leq 1 \qquad (a_n) \in M \ , \ (x_n) \in B$$

y por tanto $\sup_{n > n_0} |a_n\, y_{jn}| \leq 1$ $\qquad (a_n) \in M$, $j = 1,2,3,\ldots\ldots$

y por la condición de límite $\sup_{n > n_0} |a_n\, y_n| \leq 1$

Si tomamos ahora $(a_n) \in M$, existen ρ_n reales positivos tales que

$$|a_n| \leq \rho_n \qquad n = 1,2,3,\ldots\ldots$$

Existe entonces un natural j_0 tal que si $j \geqslant j_0$

$$|y_{jn} - y_n| < \frac{1}{n_0 \rho_n} \qquad n = 1,2,3\ldots\ldots n_0$$

y por lo tanto

$\sup_{1\leq n\leq n_0} |a_n(y_{jn} - y_n)| \leq 1$; por otro lado

$\sup_{n>n_0} |a_n(y_{jn} - y_n)| \leq \sup_{n>n_0} |a_n y_{jn}| + \sup_{n>n_0} |a_n y_n|$

siempre que $(a_n) \in M$ y $j \geq j_0$

y por lo tanto

$$\sup_n |a_n(y_{jn} - y_n)| \leq 2 \qquad (a_n) \in M , \quad j \geq j_0$$

Además evidentemente $(y_n) \in \lambda_0$ ya que si $(a_n) \in \lambda^x$ entonces $(a_n y_{jn}) \in c_0$, y por tanto $(a_n y_n) \in c_0$.
En definitiva (y_n) es el $\mathfrak{M}_0$-límite de la sucesión (y_{jn}) $j=1,2,..$ lo que nos indica que $n(B)$ es $\mathfrak{M}_0$- relativamente sucesionalmente compacto , luego por 5.1 es $\mathfrak{M}_0$- relativamente compacto. ∎

<u>Observación 5.3</u> Como es obvio la proposición anterior se puede enunciar de forma que la acotación 1 sea sustituida por un número real positivo ε prefijado.

<u>Observación 5.4</u> El resultado 5.1 es válido para los espacios $\lambda_\infty \mathfrak{M}_0$ como se advierte al inspeccionar la demostración , no ocurriendo igual con el resultado 5.2 ni siquiera para espacios de Banach (El ejemplo inmediato es la envoltura normal en l^∞ del vector e cuyas componentes son todas la unidad)

La condición (d) de 5.1 se puede expresar a su vez utilizando redes en vez de sucesiones.

Recordemos que $\mathcal{K}$ representa la familia de todos los conjuntos $\sigma(\lambda^x, \lambda)$ - relativamente compactos de λ^x.

<u>Proposición 5.5</u> Supongamos que $\mathfrak{M} \subset \mathcal{K}$. Sea (x_n) un elemento de λ_0 . Si $B = n((x_n))$, B es $\mathfrak{M}_0$- compacto.
demostración: Las proyecciones

$$\pi_k : \lambda_0 \mathfrak{M}_0 \dashrightarrow \mathbb{K} \qquad \pi_k((x_n)) = x_k$$
$$k = 1,2,3,......$$

son continuas

Si $\{(x_{\delta n}) : \delta \in D\}$ es una red en B que converge a (y_n) , como $|x_{\delta n}| \leq |x_n|$, entonces $|y_n| \leq |x_n|$ luego $(y_n) \in n(B) = B$

Por otro lado si B no fuese $\mathcal{M}_0$- compacto entonces para todo k natural existirá un (a_{kn}) en un cierto $M \in \mathcal{M}$ tal que

$$\sup_{n>k} |a_{kn} x_n| > 1$$

La débil clausura de n(M) en $\lambda^{\times}$ es $\sigma(\lambda^{\times}, \lambda)$ - compacto ([24] §30.6.(2)) , luego podemos tomar una subsucesión $(a_{n_k n})$ k=1,2,.... convergente en la clausura de n(M) a un cierto (a_n).

Sea $j > k$ para k natural fijo

$$\sup_{n>n_k} |a_{n_j n} x_n| > 1 \qquad \text{, por lo que}$$

$$\sup_{n>n_k} |a_n x_n| \geq 1 \qquad \text{para todo } n_k$$

lo cual no es posible ya que $(a_n) \in \lambda^{\times}$ y $(x_n) \in \lambda_0$ y por tanto $(a_n x_n)$ es un elemento de c_0 . ∎

<u>Corolario 5.6</u> En las condiciones de la proposición anterior la envoltura normal de cualquier conjunto finito de λ_0 es $\mathcal{M}_0$ -compacto.

<u>Observación 5.7</u> Al igual que hemos visto en la Observación 5.4 los resultados 5.5 y 5.6 no son válidos para los espacios λ_∞ ni siquiera cuando se toma la topología seminormal. En el apartado siguiente veremos que la razón de que esto ocurra está intimamente ligada con el hecho de que un conjunto o bien todo el espacio contenga o no a aquellas sucesiones que son límite en la topología $\mathcal{M}_0$ de sus secciones. Tal situación es análoga a la que se plantea para los espacios perfectos (ver por ejemplo [31]).

6. LOS SUBESPACIOS $[\lambda_\infty \mathfrak{M}_0]$ Y $[\lambda_0 \mathfrak{M}_0]$.

Dado un elemento de λ_∞ (respectivamente de λ_0) (x_n) definimos sus secciones como las sucesiones

$$(x_n^k) = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots 0 \ldots) \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

Se deduce inmediatamente del apartado anterior que las secciones de un elemento no tienen porqué converger a él en una topología $\mathfrak{M}_0$.

Así pues introducimos los conjuntos

$$[\lambda_\infty \mathfrak{M}_0] = \{ (x_n) \in \lambda_\infty : \quad \mathfrak{M}_0 - \lim_k (x_n^k) = (x_n) \}$$

e igualmente se define $[\lambda_0 \mathfrak{M}_0]$. Es inmediato probar que ambos son subespacios vectoriales normales de λ_∞ y λ_0 respectivamente.

Salvo que se indique lo contrario $\mathfrak{M}$ se supondrá normal.

Proposición 6.1 $[\lambda_0 \mathfrak{M}_0]$ es el conjunto de aquellos $(x_n) \in \lambda_0$ tal que $n((x_n))$ es $\mathfrak{M}_0$- compacto.

demostración: Es inmediata a partir del resultado 5.2 ya que además $n((x_n))$ es siempre $\mathfrak{M}_0$- cerrado (la prueba se ha hecho en 5.5 para $\mathfrak{M} \subset \mathcal{K}$ pero sirve para cualquier $\mathfrak{M}$). ∎

Cuando consideremos los subespacios $[\lambda_\infty \mathfrak{M}_0]$ y $[\lambda_0 \mathfrak{M}_0]$ los supondremos siempre dotados de la topología inducida por $\mathfrak{M}_0$.

Proposición 6.2 $[\lambda_0 \mathfrak{M}_0] = \lambda_0$ si, y sólo si, $\mathfrak{M} \subset \mathcal{K}$.

demostración: la suficiencia es inmediata aplicando 5.5

Necesidad: supongamos que $[\lambda_0 \mathfrak{M}_0] = \lambda_0$ y sea $M \in \mathfrak{M}$; si no fuese $\sigma(\lambda^x, \lambda)$ - relativamente compacto podríamos encontrar $(a_{kn}) \in M$ $k = 1,2,3,\ldots$ de tal forma que

$$\sum_{n>k} |a_{kn} x_n| > 1$$

para un $(x_n) \in \lambda$.

Tomemos (b_n) tal que $\quad b_n = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{|a_{kn}|}{2^k} \qquad n = 1,2,3,\ldots$

$(b_n) \in \lambda^x$ (ver por ejemplo 4.2)

$$\sup_{n>k} |b_n x_n| = \sup_{n>k} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|a_{jn} x_n|}{2^j} > 1$$

Como $(x_n) \in \lambda \subset \lambda_0$ la condición anterior indica que $(x_n) \notin [\lambda_0 \mathfrak{M}_0]$, lo cual va en contra de lo supuesto. ∎

<u>Proposición 6.3</u> $[\lambda_\infty \mathfrak{M}_0]$ es $\mathfrak{M}_0$ - cerrado en λ_∞

demostración: sea (x_n) un punto $\mathfrak{M}_0$ - adherente a $[\lambda_\infty \mathfrak{M}_0]$ en λ_∞

Para $M \in \mathfrak{M}$, $\varepsilon > 0$ existe un $(y_n) \in [\lambda_\infty \mathfrak{M}_0]$ tal que

$$q_M((x_n) - (y_n)) < \varepsilon/2$$

Como $(y_n) \in [\lambda_\infty \mathfrak{M}_0]$ entonces existe un n_0 natural tal que

$$\sup_{n>n_0} |a_n y_n| < \varepsilon/2 \qquad (a_n) \in M$$

luego

$$\sup_{n>n_0} |a_n x_n| \leq \sup_{n>n_0} |a_n (x_n - y_n)| + \sup_{n>n_0} |a_n y_n| <$$

$$< q_M((x_n) - (y_n)) + \sup_{n>n_0} |a_n y_n| < \varepsilon$$

y por tanto $(x_n) \in [\lambda_\infty \mathfrak{M}_0]$. ∎

<u>Proposición 6.4</u> $[\lambda_0 \mathfrak{M}_0]$ es $\mathfrak{M}_0$ - cerrado en λ_0

demostración: es exactamente la misma que la de la proposición anterior. ∎

<u>Corolario 6.5</u> $[\lambda_\infty \mathfrak{M}_0]$ es completo

demostración: basta combinar 3.2 y 6,3 . ∎

<u>Corolario 6.6</u> $[\lambda_0 \mathfrak{M}_0]$ es completo

demostración: basta combinar 3.3 y 6.4 . ∎

<u>Corolario 6.7</u> Para toda topología $\mathfrak{M}_0$ se tiene que

$$[\lambda_\infty \mathfrak{M}_0] = [\lambda_0 \mathfrak{M}_0]$$

demostración: está implícita en la demostración de 6.3 . ∎

<u>Corolario 6.8</u> Si $\mathfrak{M} \subset \mathcal{K}$ entonces, y sólo entonces, $[\lambda_\infty \mathfrak{M}_0] = \lambda_0$.

demostración: resulta a partir de 6.2 y 6.7 . ∎

Vamos ahora a resolver la cuestión planteada en la obsevación 5.7 acerca del porqué de las restricciones en las hipótesis de los resultados 5.5 y 5.6 , probando que los subconjuntos $\mathfrak{M}_0$ - relativamente compactos están localizados en el subespacio $[\lambda_0 \mathfrak{M}_0]$.

Proposición 6.9 Si B es un subconjunto normal $\mathfrak{M}_0$- relativamente compacto de λ_∞ (respectivamente de λ_0) , entonces

$$B \subset [\lambda_0 \mathfrak{M}_0]$$

demostración: si (x_n) es un elemento de B , entonces $n((x_n))$ es $\mathfrak{M}_0$ - cerrado y al estar en B , $\mathfrak{M}_0$ - relativamente compacto , luego $(x_n) \in [\lambda_0 \mathfrak{M}_0]$. ∎

Proposición 6.10 Para cualquier $\mathfrak{M}$ se tiene

$$c_0 \cdot \lambda_0 \subset [\lambda_0 \mathfrak{M}_0] \quad , \quad c_0 \cdot \lambda_\infty \subset [\lambda_\infty \mathfrak{M}_0]$$

demostración: sea $(x_n) \in \lambda_0$, $(z_n) \in c_0$ .Tomemos $M \in \mathfrak{M}$, si k es un natural arbitrario

$$\sup_{n>k} |a_n x_n z_n| \leq \sup_{n>k} |z_n| \cdot q_M((x_n)) \qquad \text{para } (a_n) \in M$$

El segundo miembro de la desigualdad anterior tiende a cero al hacerse k arbitrariamente grande , luego las secciones del elemento $(z_n x_n)$ $\mathfrak{M}_0$-convergen a él. El razonamiento para λ_∞ es totalmente análogo. ∎

Proposición 6.11 Sea B un acotado normal en λ_∞ , y sea (z_n) un elemento de c_0 fijo. El conjunto $(z_n).B = B_{0z}$ es $\mathfrak{M}_0$- relativamente compacto.

demostración: B_{0z} es un acotado normal y además $B_{0z} \subset [\lambda_0 \mathfrak{M}_0] \subset \lambda_0$

Sea $M \in \mathfrak{M}$, si $(y_n) \in B_{0z}$ para cada n $y_n = x_n z_n$ siendo $(x_n) \in B$ y $(z_n) \in c_0$.

Por otro lado si $k \in \mathbb{N}$

$$\sup_{n>k} |a_n y_n| \qquad \text{tiende a cero si k se hace grande.}$$

Basta ahora aplicar la Proposición 5.2 . ∎

7. SUBESPACIOS $\mathcal{M}_0$ - SEPARABLES.

Utilizando el método de [24] 30.5.(11) y [31] Satz 1.32 demostramos la siguiente

Proposición 7.1 $[\lambda_0 \mathcal{M}_0]$ es un subespacio $\mathcal{M}_0$- sucesionalmente separable.

demostración: sea $(x_n) \in [\lambda_0 \mathcal{M}_0]$ y sea para cada $n \in \mathbb{N}$, $\rho_{kn} \in \mathbb{K}$ racional en el caso en que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o bien de componentes racionales si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tal que

$$|x_n - \rho_{kn}| \leq \frac{|x_n|}{k} \qquad n = 1,2,\ldots\ldots,k$$

$$\rho_{kn} = 0 \qquad n = k+1, k+2, \ldots\ldots$$

Sea $(x_{kn}) = (\rho_{k1}, \rho_{k2}, \ldots\ldots, \rho_{kk}, 0, \ldots\ldots, 0, \ldots\ldots)$

Tomemos $M \in \mathcal{M}$, existe un $\rho > 0$ tal que

$$\sup_n |a_n x_n| < \rho \qquad \text{para todo } (a_n) \in M$$

Entonces tenemos que

$$\sup_{1 \leq n \leq k} |a_n (x_n - \rho_{kn})| \leq \frac{1}{k} \sup_{1 \leq n \leq k} |a_n x_n| \leq \frac{\rho}{k}$$

Escojamos k_1 de tal forma que si $k_1 \leq k$, $\rho/k < \varepsilon$, para un $\varepsilon > 0$, Al ser $(x_n) \in [\lambda_0 \mathcal{M}_0]$ sus secciones $\mathcal{M}_0$- convergen a él luego existe un natural k_2 de tal forma que si $k_2 \leq k$

$$\sup_{n > k} |a_n x_n| < \varepsilon \quad , \qquad (a_n) \in M$$

Tomando $k \geq k_0 = \max(k_1 \, k_2)$ se tiene

$$\sup_n |a_n (x_n - x_{kn})| < \varepsilon \quad , \qquad (a_n) \in M$$

es decir (x_n) es el $\mathcal{M}_0$-límite de la sucesión (x_{kn}).

Hemos demostrado pues que el conjunto de los elementos de $[\lambda_0 \mathcal{M}_0]$ con coordenadas racionales es sucesionalmente denso y su cardinal es evidentemente numerable. ∎

Análogamente a [24] 30.7.1 se puede obtener para los espacios semiescalonados y sus topologías la siguiente

Proposición 7.2   Para un espacio semi-escalonado λ_0 son equivalentes las siguientes condiciones:

(a) $\mathcal{B}_0 = \mathcal{K}_0$

(b) Una sucesión (x_{kn}) $k = 1,2,\ldots.$ en λ_0 es $\mathcal{K}_0$-convergente si, y sólo si es $\mathcal{B}_0$- convergente.

(c) Todo $\mathcal{K}_0$-compacto en λ_0 es $\mathcal{B}_0$- compacto.

(d) $[\lambda_0 \mathcal{B}_0] = \lambda_0$

(e) $\lambda_{0\mathcal{B}_0}$ es sucesionalmente separable.

demostración: directamente aplicando la Proposición 5.1 se tiene
(a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c)

(c) $\Longrightarrow$ (d): sea $(x_n) \in \lambda_0$ y sea (x_n^k) $k = 1,2,3,\ldots.$ la sucesión de las secciones de (x_n). Como $[\lambda_0 \mathcal{K}_0] = \lambda_0$ (ver 6.2) el conjunto

$$\{(x_n),\ (x_n^k)\quad k = 1,2,3,\ldots.\}$$

es $\mathcal{K}_0$ - compacto en λ_0 y por hipótesis $\mathcal{B}_0$- compacto, luego

$$\mathcal{B}_0\text{-}\lim_k (x_n^k) = (x_n)$$

es decir $(x_n) \in [\lambda_0 \mathcal{B}_0]$.

(d) $\Longrightarrow$ (e): Es inmediato a partir de la proposición 7.1

(e) $\Longrightarrow$ (a): sea (x_{jn}) $j = 1,2,3,\ldots..$ una sucesión en λ_0 tal que todo elemento de λ_0 es el límite en la topología $\mathcal{B}_0$ de una subsucesión de (x_{jn}).

Si $(y_n) \in \lambda$, espacio escalonado correspondiente, $(y_n) \in \lambda_0$ luego

$$\mathcal{B}_0\text{-}\lim_k (x_{j_k n}) = (y_n) \qquad \text{y por tanto}$$

$$\mathcal{B}\text{-}\lim_k (x_{j_k n}/2^k) = (y_n) \quad \text{es decir el espacio}$$

$\lambda_{\mathcal{B}}$ es sucesionalmente separable. Aplicando ahora [24] 30.7.(1) $\mathcal{K} = \mathcal{B}$ y de ahí $\mathcal{K}_0 = \mathcal{B}_0$. ∎

8. EL DUAL TOPOLOGICO DE $[\lambda_0 \mathfrak{M}_0]$.

En [41] M. Valdivia demuestra que si A es un sistema de escalones 1-separable (y por tanto el correspondiente espacio semi-escalonado con la topología semi-normal es un (F)-espacio) , el dual topológico de $\lambda_{0\mathcal{N}_0}$ coincide con el α-dual de λ_0 , que es a su vez el α-dual de λ_∞. Desgraciadamente no parece fácil caracterizar el dual en el caso general o incluso cuando la topología no sea la semi-normal. Vamos a dar en este apartado ciertas propiedades del dual del espacio $[\lambda_0 \mathfrak{M}_0]$, caracterizándolo en algunos casos y obteniendo como caso particular el resultado de Valdivia.

<u>Proposición 8.1</u> Si f es una forma lineal continua sobre $[\lambda_0 \mathfrak{M}_0]$ existe un elemento $(y_n) \in \lambda_0^\times$ tal que si $(x_n) \in [\lambda_0 \mathfrak{M}_0]$

$$f((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n$$

siendo tal representación única.

demostración: denotemos por e_n n = 1,2,.... el elemento de ω que tiene todas sus componentes cero salvo la n-sima que vale la unidad. Sea para cada n natural $y_n = f(e_n)$

Si (x_n) es un elemento de $[\lambda_0 \mathfrak{M}_0]$ y (x_n^k) son sus secciones , como f es continua $f((x_n)) = \mathfrak{M}_0 - \lim_k f((x_n^k))$

y por lo tanto

$$f((x_n)) = \lim_k \sum_{n=1}^{k} y_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n$$

Por otro lado si $(z_n) \in \lambda_0$ sea $(\alpha_n) \in c_0$ cualquiera y ε_n tal que

$$|\alpha_n y_n z_n| = \varepsilon_n \alpha_n y_n z_n$$

Por la Proposición 6.10 la sucesión $(\varepsilon_n \alpha_n z_n) \in [\lambda_0 \mathfrak{M}_0]$ luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| |y_n z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \alpha_n y_n z_n = f((\varepsilon_n \alpha_n z_n))$$

que es finito y por tanto $(y_n) \in \lambda_0^\times$. Además la representación es evidentemente única. ∎

Según el resultado anterior podemos identificar el dual del espacio $[\lambda_0 \mathfrak{M}_0]$ a un subespacio vectorial de $\lambda_0^\times$ y es por tanto un espacio de sucesiones.

Dado un elemento $(a_n) \in \lambda^\times$, con coordenadas positivas se define el espacio

$$\lambda_{0a} = \{ (x_n) \in \omega \quad : (a_n x_n) \in c_0 \}$$

Proposición 8.2

$$\bigcup \{ \lambda_{0a}^\times : \quad (a_n) \in \lambda^\times , \; a_n \geq 0 \; n = 1,2,\dots \} \subset [\lambda_0 \mathfrak{M}_0]'$$

demostración: si $(u_n) \in \lambda_{0a}^\times$, entonces $(u_n a_n^{-1}) \in l^1$.

Sea $M \in \mathfrak{M}$ tal que $(a_n) \in M$, y tomemos la forma lineal φ en λ_0 tal que

$$\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n x_n$$

entonces

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} u_n x_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n a_n^{-1}| . |a_n x_n| \leq \quad K . \sup_n |a_n \cdot x_n| \leq$$

$$\leq K . \sup_n \{ |a_n x_n| : \quad (a_n) \in M \} = K . \; q_M((x_n))$$

es decir φ es $\mathfrak{M}_0$- continua. ∎

Proposición 8.3 Si $\lambda_0^\times = \bigcup \{ \lambda_{0a}^\times : (a_n) \in \lambda^\times , \; a_n \geq 0 \; n=1,2,\dots \}$ entonces $[\lambda_0 \mathfrak{M}_0]' = \lambda_0^\times$

Si además $[\lambda_0 \mathfrak{M}_0] = \lambda_0$, entonces se tiene que $\lambda_0 \mathfrak{M}_0' = \lambda_0^\times$.

demostración: basta combinar las Proposiciones 8.1 y 8.2 que nos dicen que $\bigcup \lambda_{0a}^\times \subset [\lambda_0 \mathfrak{M}_0]' \subset \lambda_0^\times$. ∎

Como ejemplo importante de un tipo de espacios que cumplen la Proposición anterior tenemos los espacios semi-escalonados con sistema de escalones 1-separable (ver [41]).

CAPITULO II

ESPACIOS SEMI-ESCALONADOS CON VALORES Y ESCALONES VECTORIALES.

1. ESPACIOS Λ_0 Y Λ_∞.

Nuestra pretensión en este capítulo es dar una primera generalización de los espacios semi-escalonados escalares tal y como han sido estudiados en el capítulo anterior.

Al ser el dual topológico de $\mathbb{K}$ él mismo cabe pasar del producto usual de escalares a la forma bilineal que liga a un espacio localmente convexo E separado con su dual topológico E'.

Consideremos , de forma lo más general posible , un par dual separado $\langle E , F\rangle$ con forma bilineal $\langle . , .\rangle$. Llamaremos ESPACIO DE SUCESIONES VECTORIALES a un subespacio lineal Λ de $E^{\mathbb{N}}$ que sea normal y contenga a $E^{(\mathbb{N})}$.

Podemos considerar el espacio de sucesiones en F

$$\Lambda^{\times} = \{(y_n) \in F^{\mathbb{N}} : (\langle x_n, y_n\rangle) \in l^1 \quad \text{para todo } (x_n) \in \Lambda\}$$

que denominaremos α- dual de Λ . Es evidente que es normal y que contiene a $F^{(\mathbb{N})}$, cumpliendo en general que $\Lambda \subset \Lambda^{\times\times}$. En el caso en que se verifique la igualdad diremos que Λ es PERFECTO. La teoría de los espacios perfectos vectoriales ha sido estudiada para diferentes propiedades por Gregory ([13],[14]) , Phuong-Các

([29],[30]) , Gupta , Katman , Rao ([17],[18],[19]) y Gribanov ([15]), obteniéndose en algunos casos resultados que son en gran parte generalizaciones de los correspondientes a espacios perfectos escalares.

Sea pues Λ un espacio pefecto de sucesiones con valores en E ; definimos los espacios

$$\Lambda_0 = \{ (x_n) \in E^{\mathbb{N}} \quad : \quad (\langle x_n , y_n \rangle) \in c_0 \quad \text{para todo} \quad (y_n) \in \Lambda^{\times} \}$$

$$\Lambda_\infty = \{ (x_n) \in E^{\mathbb{N}} \quad : \quad (\langle x_n , y_n \rangle) \in l^{\infty} \quad \text{para todo} \quad (y_n) \in \Lambda^{\times} \}$$

ambos son normales y contienen a $E^{(\mathbb{N})}$ y los denominaremos respectivamente ESPACIO SEMI-ESCALONADO VECTORIAL y ESPACIO ESCALONADO VECTORIAL DE ORDEN INFINITO asociados al espacio Λ .

Es inmediato que en general $\Lambda \subset \Lambda_0 \subset \Lambda_\infty$. En el capítulo anterior vimos ejemplos , incluso en el caso escalar en que la inclusión es estricta y en los que ambos espacios coinciden con Λ .

Para cada natural j se definen de forma natural las aplicaciones

$$\pi_j : \Lambda_\infty \longrightarrow E \quad \text{tal que} \quad \pi_j((x_n)) = x_j$$
$$\text{para todo } (x_n) \in \Lambda_\infty$$

$$I_j : E \longrightarrow \Lambda_\infty \quad \text{tal que} \quad I_j(x) = (x_n)$$

donde (x_n) es el elemento de Λ_∞ que tiene todas sus componentes nulas salvo la j-ésima que vale x , para todo x en E.

Estas aplicaciones se pueden considerar sustituyendo el espacio Λ_∞ por el subespacio Λ_0 . Es inmediato que para todo j la composición $\pi_j \circ I_j$ es la aplicación identidad en el espacio vectorial E , mientras que la composición $I_j \circ \pi_j$ es una proyección en el subespacio $I_j(E)$.

2. TOPOLOGIAS $\mathfrak{M}_0$.

Análogamente a I.2 vamos a definir una familia de topologías en Λ_0 y Λ_∞ a partir de familias de subconjuntos de $\Lambda^\times$, débilmente acotados siendo Λ unespacio perfecto de sucesiones con valores en un espacio E . Los espacios Λ y $\Lambda^\times$ forman un par dual separado con la forma bilineal

$$\langle (x_n) , (y_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n , y_n \rangle$$

para $(x_n) \in \Lambda$ e $(y_n) \in \Lambda^\times$.

Sea $\mathfrak{M}$ una familia de conjuntos $\sigma(\Lambda^\times , \Lambda)$-acotados de $\Lambda^\times$ cumpliendo las condiciones:

(i) $\bigcup \{ M : M \in \mathfrak{M} \} = \Lambda^\times$

(ii) $\rho M \in \mathfrak{M}$, siempre que $M \in \mathfrak{M}$ y $\rho > 0$

(iii) Si M_1 y M_2 son dos elementos de $\mathfrak{M}$ existe entonces un $M_3 \in \mathfrak{M}$ tal que $M_1 \cup M_2 \subset M_3$

A una familia $\mathfrak{M}$ cumpliendo las condiciones anteriores la denominaremos SISTEMA TOPOLOGIZADOR , diciendo que es NORMAL cuando contenga a las envolturas normales de sus elementos.

Dado M $\sigma(\Lambda^\times , \Lambda)$-acotado definimos para cada (x_n) en Λ_∞

$$Q_M((x_n)) = \sup \left\{ \sup_n |\langle x_n , y_n \rangle| : (y_n) \in M \right\}$$

Entonces tenemos:

<u>Proposición 2.1</u> La familia $\{ Q_M : M \in \mathfrak{M} \}$ es una familia de seminormas en Λ_∞ (y a fortiori en Λ_0) que definen una topología localmente convexa y separada.

demostración: Es análoga a la de la proposición I.2.1 con las modificaciones necesarias para la forma bilineal . Veamos unicamente que la topología es separada :

Si (x_n) es un elemento de Λ_∞ distinto del neutro de la suma podemos encontrar un natural n_0 tal que x_{n_0} sea distinto del neutro de E. Al ser el par dual $\langle E,F\rangle$ separado , podemos encontrar un elemento y de F de tal manera que $\langle x_{n_0}, y\rangle$ sea distinto de cero. Basta ahora tomar el elemento de $\mathcal{M}$, M que contenga a la sucesión cuyas coordenadas son todas nulas salvo la n_0 que toma el valor y . Es entonces inmediato que

$$Q_M((x_n)) > 0 \quad . \blacksquare$$

A la topología definida por la proposición anterior la denotaremos por $\mathcal{M}_0$ y a los espacios respectivos por $\Lambda_{0\mathcal{M}_0}$ y $\Lambda_{\infty\mathcal{M}_0}$.

La menos fina de estas topologías se denominará SEMI-NORMAL y se denotará por $\mathcal{N}_0$. Ella induce en el espacio perfecto Λ una topología menos fina que la normal $n(\Lambda, \Lambda^{\times})$ definida por las seminormas

$$P_y((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, y_n\rangle| \quad , (y_n) \in \Lambda^{\times}$$

Podemos considerar también las familias $\mathcal{K}$ y $\mathcal{B}$ de los subconjuntos débil relativamente compactos y de todos los debilmente acotados , respectivamente, de $\Lambda^{\times}$ que determinan sendas topologías $\mathcal{K}_0$ y $\mathcal{B}_0$, cumpliéndose en general

$$\mathcal{N}_0 < \mathcal{K}_0 < \mathcal{B}_0$$

ya que es fácil de probar que la topología de Mackey $\mu(\Lambda, \Lambda^{\times})$ es más fina que $n(\Lambda, \Lambda^{\times})$ (Para todas las nociones y resultados relativos a los espacios Λ perfectos consultar [29]).

Con las notaciones de 1. tenemos:

<u>Proposición 2.2</u> Sea $E_{\mathcal{T}}$ espacio localmente convexo y E′ su dual. Sea Λ un espacio perfecto de sucesiones con valores en E. Entonces se tiene: (a) Π_j es $\mathcal{N}_0 - \mathcal{T}$ abierta como aplicación de Λ_∞ en E.

(b) I_j es $\mathcal{T} - \mathcal{N}_0$ continua como aplicación de E en Λ_∞.

(c) Si π_j es contínua entonces I_j es cerrada.

(d) π_j es $\mathcal{N}_0-\sigma(E,E')$ contínua.

Los resultados anteriores sirven para Λ_0 en lugar de Λ_∞.

demostración: (a) Para un elemento $(a_n)\in\Lambda^\times$ y un real positivo ε sea $U = \{(x_n)\in\Lambda_\infty : \sup|\langle x_n,a_n\rangle| < \varepsilon\}$

Tomemos a_j. Existe una seminorma contínua en E de tal forma que para todo x de E se tiene

$$|\langle x , a_j\rangle|\leq p(x)$$

Sea ahora $V = \{x\in E : p(x)<\varepsilon\}$ y tomemos x en V. Construimos el elemento de Λ_∞, (x_n) cuyas componentes son todas nulas salvo la j-ésima que vale x. Se tiene entonces

$$\sup|\langle x_n,a_n\rangle| = |\langle x_j,a_j\rangle|< p(x) < \varepsilon$$

es decir $(x_n)\in U$ y por lo tanto x está en $\pi_j(U)$, por lo que

$$V\subset\pi_j(U)$$

por lo que $\pi_j(U)$ es entorno de cero en E.

(b) Tomando U con la notación de (a) construimos V como allí y obtenemos que $V\subset I_j^{-1}(U)$

(c) Es inmediata teniendo en cuenta que si π_j es contínua $I_j(E)$ tiene suplemento topológico y es el núcleo de una proyección contínua luego cerrado.

(d) Sea $V = \{x\in E : |\langle x,a\rangle|<\varepsilon\}$ para un $a\in E'$.

$\pi_j^{-1}(V) = \{(x_n)\in\Lambda_\infty :$ existe un $x\in V$ con $x_j= x\}$

Tomemos ahora $U = \{(x_n) : \sup|\langle x_n,a_n\rangle|<\varepsilon\}$ donde (a_n) es el elemento de $\Lambda^\times$ cuya coordenada j-ésima vale a y el resto cero; se tiene que

$$U\subset\pi_j^{-1}(V) .\ ▪$$

3. CONJUNTOS $\mathcal{M}_o$- ACOTADOS

Sabemos que el concepto de acotación en los espacios semi-escalonados escalares no depende de la topología $\mathcal{M}_o$ que se considere (Proposición I.4.2) . Esta propiedad se cumple incluso en los espacios semi-escalonados vectoriales ,como veremos a continuación, para casos bastante generales.

Un subconjunto B de Λ_∞ (respectivamente de Λ_o) diremos que está ACOTADO si para cada (y_n) de Λ^x existe un real positivo ρ tal que

$$\sup_n \{ |\langle x_n, y_n \rangle| \} < \rho \qquad \text{para cada} \quad (x_n) \in B.$$

Es evidente que

<u>Proposición 3.1</u> B es acotado si, y sólo si, su envoltura normal es acotado.

<u>Proposición 3.2</u> Sea $\langle E,F \rangle$ un par dual separado de tal forma que F sea $\sigma(F,E)$-sucesionalmente completo. Sea Λ_o (respectivamente Λ_∞)un espacio semi-escalonado vectorial sobre E (espacio escalonado vectorial de orden infinito).
Un subconjunto B de Λ_o (resp. Λ_∞) es acotado si, y sólo si , es acotado para cualquier topología $\mathcal{M}_o$.
demostración: Evidentemente si B es $\mathcal{M}_o$-acotado es acotado al ser $\mathcal{M}_o$ más fina que $\mathcal{N}_o$. Inversamente si B fuese acotado y para un cierto sistema topologizador $\mathcal{M}$ no fuese $\mathcal{M}_o$-acotado , podríamos encontrar para cada natural k elementos (x_{kn}) en B y (a_{kn}) en M para un cierto $M \in \mathcal{M}$, de tal forma que

$$\sup_n |\langle x_{kn}, a_{kn} \rangle| > k.2^k$$

Al ser M $\sigma(\Lambda^x, \Lambda)$-acotado dado p natural , el conjunto

$$M_p = \{ y \in F \ : \ \text{existe } (a_n) \in M \ \text{con} \ a_p = y \}$$

es $\sigma(F,E)$-acotado , luego para todo x en E podemos encontrar un ρ_{xp} real positivo tal que

$\sup\{|\langle x , y\rangle| : y\in M_p \} \leq \rho_{xp}$

Tomemos la sucesión

$$z_{pn} = \sum_{k=1}^{p} \frac{a_{kn}}{2^k}$$

Esta sucesión es $\sigma(F,E)$-Cauchy en F y por hipótesis $\sigma(F,E)$-convergente a un elemento z_n de F. Se cumple entonces que

$$\sup_p |\langle x , z_{pn}\rangle| \leq \rho_{xn}$$

Si además tomamos $(y_n)\in \Lambda$ entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle y_n ,a_n\rangle|\leq \rho$$ para un cierto $\rho>0$ y cada $(a_n)\in M$, luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle y_n ,z_n\rangle| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\langle y_n , a_{kn}\rangle|}{2^k} \right) \leq \rho$$

lo cual indica que $(z_n)\in \Lambda^x$.

Al ser B acotado existe un ρ_0 real ,positivo tal que

$$\sup_n|\langle x_n, z_n\rangle|\leq \rho_0 \qquad \text{para cada} \quad (x_n)\in B$$

pero sin embargo

$$\operatorname{Sup}_n |\langle x_n , z_n\rangle| > k \qquad , \quad k = 1,2,3,\ldots\ldots$$

(análogamente a como hicimos en I.4.2) lo cual contradice las hipótesis sobre la acotación de B. ∎

En las condiciones de las hipótesis de la proposición anterior vemos que es indistinto el concepto de acotación para todas las topologías definidas por el método de 2.

La condición de ser F $\sigma(F,E)$-sucesionalmente completo no se puede omitir ni mejorar como muestra el ejemplo que vamos a dar a continuación.

Cosideremos $E = F = \varphi$, el conjunto de las sucesiones en $\mathbb{K}$ con sólo un número finito de coordenadas no nulas con la forma bilineal usual

$$\langle (x_n) , (y_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\cdot y_n \qquad (x_n)\in\varphi ,(y_n)\in\varphi$$

Sea $\Lambda = E^{\mathbb{N}}$, entonces es fácil de comprobar que $\Lambda^{\times} = F^{(\mathbb{N})}$. Además como $\Lambda \subset \Lambda_0$ y $\Lambda_0 \subset E^{\mathbb{N}}$ tenemos que $\Lambda_0 = E^{\mathbb{N}}$.

Tomemos ahora en E el siguiente conjunto

$$M = \{ (x_n) \in E \ : \ |x_n| \leq 1 \quad n = 1,2,3,\ldots\ldots \}$$

es conocido que tal conjunto es $\sigma(E,F)$-acotado pero no $\beta(E,F)$-acotado (ver [24] pag.254)

Sean ahora B escogidos de tal manera que para cada natural mayor que 1 , $B_n = 0$ y $B_1 = M$. Sea

$$B = \prod_{n=1}^{\infty} B_n$$

Para $(y_n) \in \Lambda^{\times}$ se tiene que

$$\sup_n |\langle x_n, y_n \rangle| \leq \rho \qquad \text{para todo } (x_n) \in B$$

siendo

$$\rho = \sup |\langle x , y_1 \rangle| \qquad \text{para todo } x \in M$$

por lo que B es $\mathcal{N}_0$-acotado.

Por otro lado en nuestro caso $\mathcal{B}_0 = \beta(\Lambda , \Lambda^{\times})$ ya que los acotados de $F^{(\mathbb{N})}$ son finito dimensionales. Si B fuese $\mathcal{B}_0$-acotado debería ser producto de conjuntos $\beta(E,F)$-acotados ,lo cual no se cumple al no serlo B_1 .

Proposición 3.3 Sea B un subconjunto de Λ_∞ (respectivamente Λ_0) Si B es $\mathcal{M}_0$-acotado entonces para cada natural j se tiene que $\pi_j(B)$ es $\sigma(E,F)$-acotado.

demostración: Es inmediata ya que por 2.2.(d) para cada natural j la aplicación π_j es $\mathcal{N}_0$-$\sigma(E,F)$-contínua y por lo tanto $\mathcal{M}_0$-$\sigma(E,F)$-contínua y transforma acotados en acotados de una topología en otra. ∎

4. COMPLETITUD

Vamos a estudiar en este apartado las propiedades de completitud de los espacios $\Lambda_\infty\mathfrak{M}_0$ y $\Lambda_0\mathfrak{M}_0$ relacionándolas con las propiedades del espacio E , en particular con las propiedades de completitud de la topología $\sigma(E,F)$. Mientras no haya confusión posible denotaremos por E_σ al espacio E con la topología débil que se deriva del par dual $\langle E,F\rangle$.

Proposición 4.1 Para toda $\mathfrak{M}$-topología el espacio E_σ es isomorfo a un subespacio $\mathfrak{M}_0$-cerrado de Λ_∞ .

demostración: Por 2.2(d) y por 2.2(c) sabemos que I_1 es $\sigma(E,F)$-$\mathcal{N}_0$ cerrada luego $I_1(E_\sigma)$ es $\mathcal{N}_0$-cerrado en Λ_∞ y a fortiori $\mathfrak{M}_0$-cerrado Además es inmediato que E_σ es isomorfo a $I_1(E_\sigma)$. ∎

Proposición 4.2 Λ_0 es $\mathfrak{M}_0$ -cerrado en Λ_∞ para toda $\mathfrak{M}_0$ -topología.

demostración: Sea (x_n) un elemento $\mathfrak{M}_0$-adherente a Λ_0 en Λ_∞ y sea ε un real positivo ; entonces para un $M\in\mathfrak{M}$ podemos encontrar un (x_n') en Λ_0 tal que

$$Q_M((x_n)-(x_n'))<\varepsilon$$

Sea $(y_n)\in\Lambda^x$, sabemos que existe un $M\in\mathfrak{M}$ tal que $(y_n)\in M$

$$|\langle x_n,y_n\rangle|\leq|\langle x_n-x_n',y_n\rangle|+|\langle x_n',y_n\rangle| \qquad n=1,2,3....$$

luego

$$|\langle x_n,y_n\rangle|\leq|\langle x_n',y_n\rangle|+Q_M((x_n)-(x_n'))<|\langle x_n',y_n\rangle|+\varepsilon$$

por lo que la sucesión $(\langle x_n,y_n\rangle)$ tiende a cero , es decir (x_n) pertenece a Λ_0 al ser (y_n) arbitrario. ∎

Proposición 4.3 El espacio $\Lambda_\infty\mathfrak{M}_0$ es completo si , y sólo si , E es $\sigma(E,F)$-completo.

demostración: Tomemos una red de Cauchy en $\Lambda_\infty\mathfrak{M}_0$

$$\{(x_{\delta n}) : \delta\in D\}$$

Para un real positivo ε y para un $M\in\mathcal{M}$ existe un δ_0 en el conjunto dirigido D de tal manera que

$$Q_M((x_{\delta n}) - (x_{\delta' n}))<\varepsilon \qquad \text{si} \quad \delta,\delta' \geq \delta_0 \qquad (1)$$

es decir, la red $\{x_{\delta n}: \delta\in D\}$ para n fijo , es una red de Cauchy para la topología $\sigma(E,F)$. Por hipótesis existe un elemento en E que denotaremos por x_n tal que la red $\sigma(E,F)$-converge a él en E. Tomemos en $E^{\mathbb{N}}$ la sucesión (x_n). Si $(y_n)\in \Lambda^{\times}$

$$\sup_n|\langle x_n,y_n\rangle| \leq \sup_n|\langle x_{\delta n},y_n\rangle| + \sup_n|\langle x_{\delta n}-x_n,y_n\rangle|$$

buscamos $M\in\mathcal{M}$ tal que $(y_n)\in M$ y tomando límites en (1) para δ'

$$\sup_n|\langle x_n,y_n\rangle| \leq \sup|\langle x_{\delta n},y_n\rangle| + \varepsilon$$

por lo tanto $(x_n)\in \Lambda_\infty$ y es el $\mathcal{M}_0$-límite de la red inicial. ∎

<u>Proposición 4.4</u> El espacio $\Lambda_\infty\mathcal{M}_0$ es sucesionalmente completo si, y sólo si , E es $\sigma(E,F)$-sucesionalmente completo.

demostración: es la misma que la proposición anterior usando sucesiones en lugar de redes. ∎

<u>Proposición 4.5</u> El espacio $\Lambda_\infty\mathcal{M}_0$ es casi-completo si, y sólo si, E es $\sigma(E,F)$-casi-completo.

demostración: Análoga a 4.3 usando redes acotadas. ∎

A partir de las tres proposiciones anteriores y del resultado 4.2 podemos enunciar:

<u>Corolario 4.6</u> El espacio $\Lambda_0\mathcal{M}_0$ es completo si, y sólo si, E es $\sigma(E,F)$-completo.

<u>Corolario 4.7</u> El espacio $\Lambda_0\mathcal{M}_0$ es sucesionalmente completo si, y sólo si,E es $\sigma(E,F)$-sucesionalmente completo.

<u>Corolario 4.8</u> El espacio $\Lambda_0\mathcal{M}_0$ es casi-completo si, y sólo si , E es $\sigma(E,F)$-casi-completo.

5. CONJUNTOS $\mathfrak{M}_o$ - COMPACTOS.

El objetivo de este apartado es obtener resultados análogos a I.5.1 en el contexto de los espacios $\Lambda_{\mathfrak{M}_o}$. Desgraciadamente, y como ya viene siendo normal cuando se pasa del campo escalar al vectorial, necesitaremos imponer condiciones más restrictivas al par dual $\langle E , F\rangle$ para poder cumplir nuestros propósitos.

Un par dual $\langle E, F\rangle$ diremos que es REFLEXIVO si se cumple que

$$E\,[\beta(E,F)]' = F \qquad y \qquad F\,[\beta(F,E)]' = E$$

Una condición necesaria y suficiente para que el par dual sea reflexivo es que tanto E como F sean débilmente casi-completos (ver [24]§23.6). Según la proposición 4.5 y el corolario 4.8 entonces los espacios $\Lambda_{\mathfrak{M}_o}$ y $\Lambda_{\mathfrak{M}_o}$ son casi-completos. Como además el correspondiente espacio perfecto Λ es casi-completo para la topología normal $n(\Lambda , \Lambda^x)$, en Λ^x coinciden las familias de los conjuntos $\sigma(\Lambda^x, \Lambda)$-acotados y de los conjuntos $\beta(\Lambda^x, \Lambda)$-acotados, que denotaremos respectivamente por $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}^*$ (ver [29] proposición 5 y corolario 1) , y por lo tanto coinciden las topologías $\mathcal{B}_o$ y $\mathcal{B}_o^*$ en Λ_o .

Un espacio localmente convexo $E_{\mathfrak{F}}$ diremos que es SUBMETRIZABLE si admite una topología menos fina que $\mathfrak{F}$ que es metrizable. Dado un par dual $\langle E , F\rangle$ diremos que E es SUBMETRIZABLE CON RESPECTO AL PAR DUAL si admite un topología metrizable menos fina que una topología compatible del par dual.

Como generalización de I.5.1 obtenemos:

<u>Proposición 5.1</u> Sea $\langle E , F\rangle$ un par dual reflexivo con E submetrizable respecto de él. Sea $\mathfrak{M}_o$ una topología comprendida entre $\mathcal{N}_o$ y $\mathcal{B}_o$. Entonces para un subconjunto de Λ_o , B , son equivalentes:

(a) B es $\mathfrak{M}_o$-relativamente compacto.

(b) B es $\mathfrak{M}_o$-relativamente numerablemente compacto.

(c) B es $\mathfrak{M}_0$-relativamente sucesionalmente compacto.

(d) B es acotado y si $\{(x_{kn}) : k = 1,2,3,\ldots\}$ es una sucesión en B que para cada n es convergente a un x_n para la topología $\sigma(E,F)$,entonces (x_n) es el límite de la sucesión en la topología $\mathfrak{M}_0$.

demostración: Según hemos visto (4.8) $\Lambda_0\mathfrak{M}_0$ es casi-completo; sea Λ_0' su dual topológico. Como la topología $\mu(\Lambda_0, \Lambda_0')$ admite una base de entornos $\mathfrak{M}_0$-cerrados $\Lambda_0[\mu(\Lambda_0, \Lambda_0')]$ es casi-completo ([24] pag. 210), luego aplicando el teorema de Eberlein ([24] pag. 313) a $\Lambda_0\mathfrak{M}_0$ obtenemos (a) $\Longleftrightarrow$ (b) . Además evidentemente (c) $\Longrightarrow$ (b).

(b) $\Longrightarrow$ (c): Si B es relativamente numerablemente compacto para la topología $\mathfrak{M}_0$, sea $\{(x_{kn}) : k = 1,2,3,\ldots\}$ una sucesión en B. Al ser B acotado para un n fijo la sucesión $\{x_{kn} : k = 1,2,3,\ldots\}$ $\sigma(E,F)$-acotada. Al ser $\langle E , F\rangle$ reflexivo todo acotado de E es relativamente numerablemente $\sigma(E,F)$-compacto. Por el teorema de Smulian ([24] pag. 311) toda sucesión acotada de E contiene una sucesión parcial convergente. Se puede entonces aplicando un método diagonal ,típico en este tipo de casos, obtener una subsucesión de $\{(x_{kn}) : k = 1,2,3,\ldots\}$ que seguiremos denotando de identica manera, tal que para cada n, exista un x_n en E de forma que

$$\sigma(E,F)\text{-}\lim_{k} x_{kn} = x_n$$

Por hipótesis dicha sucesión admite un punto $(y_n) \in \Lambda_0$ que es $\mathfrak{M}_0$-adherente. Para cada n el punto y_n es adherente a $\{x_{kn} : k=1,2,.\}$ luego $x_n = y_n$ para cada n. Como entonces deducimos que la sucesión $\{(x_{kn}) : k = 1,2,3,\ldots\}$ admite un solo punto adherente, éste debe ser su límite, luego B es $\mathfrak{M}_0$-relativamente sucesionalmente compacto.

(c) $\Longrightarrow$ (d):Supongamos que de cada sucesión en B se puede extraer una subsucesión convergente. Evidentemente la hipótesis implica la acotación de B. Sea ahora una sucesión (x_{kn}) para $k \in \mathbb{N}$, en B de forma que para cada n exista un x_n en E que sea el $\sigma(E,F)$-límite de la sucesión $\{x_{kn} : k = 1,2,3,\ldots\}$. (x_n) es el $\mathcal{M}_0$-límite de la sucesión inicial. En efecto si no fuese así existiría una subsucesión $\{(x_{k_j n}) : j = 1,2,3,\ldots\}$ que convergería a un (y_n) distinto de (x_n) . Podemos entonces encontrar un natural n_0 de tal manera que $y_{n_0} \neq x_{n_0}$. Entonces la sucesión $\{x_{k_j n_0} : j = 1,2,3,\ldots\}$ tendría dos límites distintos lo cual es absurdo.

(d) $\Rightarrow$ (c) : sea $\{(x_{kn}) : k = 1,2,3,\ldots\}$ una sucesión arbitraria en B . Como por hipótesis B está acotado ,para cada n la sucesión $\{x_{kn} : k = 1,2,3,\ldots\}$ está acotada y podemos entonces extraer una subsucesión,que denotaremos de la misma manera, tal que

$$\sigma(E,F)\text{-}\lim_k x_{kn} = x_n \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

Aplicando la condición (d) (x_n) es el $\mathcal{M}_0$-límite de la subsucesión escogida,en Λ_0 , por lo tanto de cada sucesión en B encontramos una subsucesión convergente y B es así $\mathcal{M}_0$ -relativamente sucesionalmente compacto. ∎

<u>Corolario 5.2</u> Sea E_τ un espacio de Frechet-Montel y $\Lambda_0 \mathcal{M}_0$ un espacio semi-escalonado con valores en E. Entonces para un subconjunto B de Λ_0 las condiciones de la proposición anterior son equivalentes.

demostración: se reduce trivialmente a la proposición anterior teniendo en cuenta que si E_τ es un (FM)-espacio y E' su dual topológico el par dual $\langle E , E' \rangle$ es reflexivo, y además E_τ es metrizable. ∎

6. LOS SUBESPACIOS $[\Lambda_0 \mathfrak{M}_0]$ Y $[\Lambda_\infty \mathfrak{M}_0]$.

Vamos a estudiar en este apartado unos subespacios particulares de $\Lambda_0\mathfrak{M}_0$ y $\Lambda_\infty\mathfrak{M}_0$, que serán en este tipo de espacios lo que eran los subespacios definidos en I.6 . Definimos las secciones de un elemento de la misma manera que en dicho apartado. Así pues denotaremos por $[\Lambda_0\mathfrak{M}_0]$ el conjunto de los elementos de Λ_0 cuyas secciones $\mathfrak{M}_0$-convergen a él. De la misma manera se define $[\Lambda_\infty\mathfrak{M}_0]$.

Proposición 6.1 Para toda topología $\mathfrak{M}_0$ se tiene que $[\Lambda_0\mathfrak{M}_0]=[\Lambda_\infty\mathfrak{M}_0]$ y son cerrados en $\Lambda_0\mathfrak{M}_0$, y por lo tanto cerrados en $\Lambda_\infty\mathfrak{M}_0$.

demostración: es suficiente repetir la demostración de I.6.3 con la simple modificación del cambio del producto de escalares por la forma bilineal. ∎

Proposición 6.2 El espacio $[\Lambda_0\mathfrak{M}_0]$ es completo, casi-completo o sucesionalmente completo si, y sólo si, el espacio $E[\sigma(E,F)]$ es completo, casi-completo o sucesionalmente completo.

demostración: basta usar 1. y 4.3 , 4.4 , 4.5 . ∎

Proposición 6.3 Para toda topología $\mathfrak{M}_0$ se cumple

$$c_0 \cdot \Lambda_0 \subset [\Lambda_0\mathfrak{M}_0] \quad \text{y} \quad c_0 \cdot \Lambda_\infty \subset [\Lambda_\infty\mathfrak{M}_0]$$

demostración: se usa la misma prueba que I.6.10 con las obvias modificaciones del caso. ∎

Denotaremos por $\mathfrak{F}_j$ la topología en E inducida por $\Lambda_0\mathfrak{M}_0$ o $\Lambda_\infty\mathfrak{M}_0$ cuando consideramos sólo la coordenada j .

Proposición 6.4 Sea $\mathfrak{M}$ un sistema topologizador normal.

$\mathfrak{M} \subset \mathcal{K}$ si, y sólo si, $[\Lambda_0\mathfrak{M}_0]=\Lambda_0$ y $\mathfrak{F}_j \prec \mu(E,F)$ para todo j.

demostración: Si $\mathfrak{M}\subset\mathcal{K}$, para un j cualquiera la restricción de un $M \in \mathfrak{M}$ en su coordenada j es relativamente compacto para la topología débil en F , luego $\mathfrak{F}_j \prec \mu(E,F)$. Supongamos ahora que existiera un (x_n) en

Λ_0 de forma que no fuese el $\mathcal{M}_0$-límite de sus secciones. Podríamos entonces encontrar un ε_0 positivo y un $M \in \mathcal{M}$ de forma que

$$\sup_n \{ \langle x_{n_k}, a_{n_k} \rangle : (a_n) \in M \} > \varepsilon_0$$

para una sucesión estrictamente creciente de naturales $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ entonces tendríamos que

$$\sup \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \langle \frac{x_{n_k}}{2^{n_k}} , a_{n_k} \rangle : (a_n) \in M \Big\} \geq \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n_k}} > 0$$

y como $(2^{-n} x_n) \in \Lambda$, eso indica que M no es $\sigma(\Lambda^x, \Lambda)$-relativamente compacto.

Inversamente para probar la condición suficiente sea $M \in \mathcal{M}$ si no fuese $\sigma(\Lambda^x, \Lambda)$-relativamente compacto, existirían (a_{kn}) en M tal que $\sup_{n \geq k} |\langle y_n, a_{kn} \rangle| > \varepsilon_0$

para un $(y_n) \in \Lambda$, y un ε_0 positivo.

Sea $b_{np} = \sum_{k=1}^{p} \frac{a_{kn}}{2^k}$, es una sucesión en la restricción n a F, y como $\mathcal{T}_n < \mu(E,F)$ admite un punto adherente b_n en F. Es evidente que $(b_n) \in \Lambda^x$, y además

$$\sup_{n \geq k} |\langle y_n, b_n \rangle| \geq \varepsilon_0$$

lo cual indica que las secciones de (y_n) no $\mathcal{M}_0$-convergen a él en contra de la hipótesis. ∎

Como consecuencia directa obtenemos relaciones entre $\mathcal{K}_0$, $\mathcal{B}_0^*$ y $\mathcal{B}_0$

<u>Proposición 6.5</u> $\mathcal{K} = \mathcal{B}^*$ si, y sólo si, $E[\mu(E,F)]$ es casi-tonelado y $[\Lambda_0 \mathcal{B}_0^*] = \Lambda_0$.

demostración: Basta tener en cuenta la proposición anterior y el hecho de que $\mathcal{B}_0^*$ induce $\mathcal{T}_j = \beta^*(E,F)$. ∎

<u>Proposición 6.6</u> $\mathcal{K} = \mathcal{B}$ si, y sólo si, $E[\mu(E,F)]$ es tonelado y $[\Lambda_0 \mathcal{B}_0] = \Lambda_0$.

demostración: Basta tener en cuenta la proposición 4 y el hecho de que $\mathcal{B}_0$ induce $\mathcal{T}_j = \beta(E,F)$. ∎

7. DENSIDAD Y DUALIDAD.

Intentaremos dar en este apartado los resultados correspondientes a I.7 y I.8 para los espacios Λ_0.

Supongamos que $\langle E,F\rangle$ es un par dual separado y Λ_0 un espacio semi-escalonado con valores en E. Si G es un subespacio de E denotamos por $\Lambda_0 G$ el subespacio de Λ_0 cuyos elementos tienen sólo componentes en G. En todo el apartado supondremos $\mathfrak{M}\subset\mathcal{K}$.

<u>Proposición 7.1</u> Si G es $\sigma(E,F)$-sucesionalmente denso en E ,entonces $\Lambda_0 G$ es $\mathfrak{M}_0$-sucesionalmente denso en Λ_0 .

demostración: sea $(x_n)\in\Lambda_0$ y sea $M\in\mathfrak{M}$.

Podemos encontrar un ρ positivo de forma que si $(a_n)\in M$

$$\sup_n |\langle x_n,a_n\rangle| \leq \rho$$

Tomemos un $(a_n)\in M$ fijo. Si k es un natural se tiene que por hipótesis existe un x'_{kn} en G de forma que

$$|\langle x_n - x'_{kn},\ a_n\rangle| \leq \frac{1}{k}|\langle x_n,a_n\rangle| \qquad n = 1,2,\dots,k$$

$$y \quad x'_{kn}= 0 \qquad\qquad \text{para} \quad n > k$$

Denotemos por $(x_{kn}) = (\ x'_{k1},x'_{k2},\dots,x'_{kk},0,0,\dots\ )$

Como las secciones de (x_n) $\mathfrak{M}_0$-convergen a él, dado un ε existe un k_1 tal que si $k\geq k_1$

$$\sup_{n>k}|\langle x_n,\ a_n\rangle| < \varepsilon \qquad \text{si } (a_n)\in M$$

Al ser M $\sigma(\Lambda^x,\Lambda)$-compacto los x'_{kn} se pueden elegir uniformemente para todo $(a_n)\in M$ y como

$$\sup_{1\leq n\leq k}|\langle x - x'_{kn},\ a_n\rangle| \leq \frac{1}{k}\sup_{1\leq n\leq k}|\langle x_n,\ a_n\rangle| \leq \rho/k$$

basta tomar k_2 tal que si $k\geq k_2$ $\rho/k<\varepsilon$. Entonces si $k_0=\max(k_1,k_2)$ para $k\geq k_0$

$$\sup_n|\langle x_n - x_{kn},a_n\rangle| < \varepsilon \qquad \text{si } (a_n)\in M.$$

luego $\Lambda_0 G$ es sucesionalmente denso en $\Lambda_0\mathfrak{M}_0$. ∎

<u>Corolario 7.2</u> Si E es $\sigma(E,F)$-sucesionalmente separable, Λ_0 es $\mathfrak{M}_0$-sucesionalmente separable.

demostración: Por hipótesis E tiene un subespacio engendrado por una sucesión linealmente independiente

$$y_1 , y_2 , y_3 \ldots\ldots\ldots y_n \ldots\ldots$$

que es débil sucesionalmente denso. Sea Σ_r el subespacio de Λ_0 con coordenadas en dicho subespacio, de forma que existen a lo más un número finito no nulas. Por 1. dicho subespacio es sucesionalmente denso en $\Lambda_0 \mathfrak{M}_0$ y está generado por la familia de vectores de Σ_r linealmente independientes cuyas coordenadas son todas nulas salvo una que vale uno de los y_n . ∎

Con los mismos métodos de los resultados anteriores se puede demostrar:

<u>Proposición 7.3</u> Para un $\mathfrak{M}$ cualquiera si G es $\sigma(E,F)$-sucesionalmente denso, entonces $[\Lambda_G \mathfrak{M}_0]$ es $\mathfrak{M}_0$ -sucesionalmente denso en $[\Lambda_0 \mathfrak{M}_0]$.

<u>Corolario 7.4</u> Si E es $\sigma(E,F)$-sucesionalmente separable, $[\Lambda_0 \mathfrak{M}_0]$ es sucesionalmente separable.

En cuanto al dual topológico de $\Lambda_0 \mathfrak{M}_0$,al igual que en I.8 nos restringiremos al subespacio $[\Lambda_0 \mathfrak{M}_0]$.

<u>Proposición 7.5</u> Si φ es una forma lineal continua sobre $[\Lambda_0 \mathfrak{M}_0]$ existe un elemento (y_n) de $\Lambda_0^\times$ de tal forma que si $(x_n) \in [\Lambda_0 \mathfrak{M}_0]$

$$\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y_n \rangle$$

demostración: Es análoga a I.8.1 con las variaciones convenientes para la forma bilineal y tomando y_n como el elemento de F de forma que si x es un elemento de E y e_n es el vector unitario de orden n cumple $\langle x , y_n \rangle = \varphi((e_n x))$. ∎

Así pues podemos identificar el dual de $[\Lambda_0 \mathfrak{M}_0]$ con un subespacio de $\Lambda_0^\times$ y es entonces un espacio de sucesiones en F.

Dado un elemento $(a_n) \in \Lambda^\times$, se puede definir el espacio

$\Lambda_{oa} = \{(x_n) \in E^{\mathbb{N}} : (\langle x_n, a_n \rangle) \in c_0 \}$

<u>Proposición 7.6</u> $\Lambda_{oa}^\times$ es el conjunto de las sucesiones (u_n) con valores en F de tal manera que $u_n = \alpha_n . a_n$ para todo n ,siendo $(\alpha_n) \in l^1$.

demostración: inmediata a partir de la definición.

Con la misma demostración de I.8.2 adaptada a Λ_0 obtenemos

<u>Proposición 7.7</u>

$$\bigcup \{\Lambda_{oa}^\times : (a_n) \in \Lambda^\times \} \subset [\Lambda_0 m_0]'$$

<u>Corolario 7.8</u> Si $\Lambda_0^\times = \bigcup \{\Lambda_{oa}^\times : (a_n) \in \Lambda^\times \}$ entonces

$$[\Lambda_0 m_0]' = \Lambda_0^\times$$

Este último resultado es el equivalente a I.8.3 para los espacios $[\Lambda_0 m_0]$.

C A P I T U L O III

ESPACIOS SEMI-ESCALONADOS CON VALORES VECTORIALES Y ESCALONES ESCALARES.

1. DEFINICION DE LOS ESPACIOS $\lambda_0\{E_\xi\}$ Y $\lambda_\infty\{E_\xi\}$.

Vamos a dar en este capítulo otra clase de espacios semi-escalonados vectoriales, generalizando los resultados del capítulo I, si bien a diferencia del capítulo anterior en el que tomábamos escalones vectoriales, en éste combinaremos un espacio semi-escalonado escalar λ_0 con un espacio localmente convexo E_ξ para obtener un espacio de sucesiones en E. Este método ha sido seguido para espacios perfectos de sucesiones por diversos autores como por ejemplo Pietsch [31], Rosier [33] y De Grande-De Kimpe [1] entre otros.

Las propiedades de los espacios Λ_0 y Λ_∞ en el capítulo anterior se obtenían a partir de propiedades de la topología débil o del par dual, mientras que ahora las propiedades dependeran por un lado de la topología del espacio y por lo tanto de las seminormas que la definen, y por otro de la topología del espacio semi-escalonado a considerar que será del tipo de las estudiadas en I.2 .

Sea E_ξ un espacio localmente convexo separado cuya topología viene definida por una familia de seminormas $\{p_i : i\in I\}$ y sea A un sistema de escalones cumpliendo las condiciones de I.1 .

Definimos entonces los espacios:

$$\lambda_0\{E_{\mathcal{E}}\} = \{ (x_n)\in E^{\mathbb{N}} : (a_n\, p_i(x_n))\in c_0 \ , (a_n)\in A \ , i\in I \}$$

$$\lambda_\infty\{E_{\mathcal{E}}\} = \{ (x_n)\in E^{\mathbb{N}} ; (a_n\, p_i(x_n))\in l^\infty \ , (a_n)\in A \ , i\in I \}$$

que denominaremos respectivamente ESPACIO SEMI-ESCALONADO y ESPACIO ESCALONADO DE ORDEN INFINITO asociados al sistema A y con valores en E respecto de la topología $\mathcal{E}$. Cuando no haya dudas acerca de la topología del espacio omitiremos su notación.

Estos espacios son diferentes a los estudiados en el capítulo anterior no sólo por las consideraciones hechas anteriormente ,sino porque además existen espacios del tipo Λ_0 que no se pueden representar de la forma $\lambda_0\{E\}$ como ilustra el ejemplo que detallamos a continuación:

Sea E un (F)-espacio sin normas continuas (El ejemplo más inmediato nos lo proporciona el espacio ω), y sean

$$p_1 \leqslant p_2 \leqslant p_3 \leqslant \cdots\cdots p_n \leqslant \cdots\cdots\cdots\cdots$$

una familia creciente de seminormas que definen su topología; como ninguna de ellas es una norma podemos encontrar para cada natural n un elemento x_n de E de tal forma que $p_n(x_n) = 0$.

Tomemos $\Lambda = \{ (x_n)\in E^{\mathbb{N}} : x_n \neq 0$ para un número finito de n $\}$ Formamos el correspondiente Λ_0 que evidentemente coincide con Λ. Si $\Lambda_0 = \lambda_0\{E\}$ para algún espacio semiescalonado λ_0 entonces como al menos $\varphi\subset\lambda_0$,se tendría que el espacio

$$\varphi\{E\} = \{ (x_n)\in E^{\mathbb{N}} : (p_i(x_n)) \in \varphi \ , i\in \mathbb{N} \}$$

estaría incluido en Λ_0. Sin embargo si tomamos la sucesión (x_n) de los elementos construidos más arriba tenemos que si $i\in\mathbb{N}$

$$p_i(x_n) = 0 \quad \text{para} \quad n \geqslant i$$

luego (x_n) es un elemento de $\varphi\{E\}$ que no está en Λ_0.

Veamos ahora otro ejemplo en donde el espacio Λ_0 resultante según la construcción del capítulo II no coincide con el espacio construido según la idea de este apartado:

Sea $E_{\mathcal{E}}$ un espacio de tal forma que podamos encontrar una sucesión que converja débilmente a cero pero que no converja a cero en la topología $\mathscr{E}$. Consideremos

$$\Lambda = \{ (x_n) \ : \ (p_i(x_n)) \in l^1 \ , \ i \in I \} = l^1\{E_{\mathscr{E}}\}$$

Evidentemente $\Lambda^{\times}$ es el espacio de las sucesiones débilmente acotadas en E' y el correspondiente espacio Λ_0 será el de las sucesiones en E débilmente convergentes a cero. Este espacio es evidentemente distinto de $c_0\{E_{\mathscr{E}}\}$, aunque es igual a $c_0\{E_\sigma\}$.

Volviendo al punto de partida de nuestras definiciones es trivial que siempre se cumple la relación

$$\lambda_0\{E_{\mathscr{E}}\} \subset \lambda_\infty\{E_{\mathscr{E}}\}$$

y que ambos contienen al espacio

$$\lambda\{E_{\mathscr{E}}\} = \{ (x_n) \in E^{\mathbb{N}} \ : \ (a_n p_i(x_n)) \in l^1 \ , \ (a_n) \in A \ , \ i \in I \}$$

definido por Rosier [33] y De Grande-De Kimpe [1] para cualquier topología y por Pietsch [31] para la topología débil.

Como consecuencias inmediatas de los resultados I.1.2 y I.1.3 tenemos:

<u>Proposición 1.1</u> Si el sistema de escalones A es nuclear , entonces se tiene $\lambda\{E_{\mathscr{E}}\} = \lambda_0\{E_{\mathscr{E}}\} = \lambda_\infty\{E_{\mathscr{E}}\}$.

<u>Proposición 1.2</u> Si el sistema de escalones A es 1-separable y $\lambda\{E_{\mathscr{E}}\} = \lambda_0\{E_{\mathscr{E}}\} = \lambda_\infty\{E_{\mathscr{E}}\}$, entonces A es nuclear.

Al igual que en los espacios semi-escalonados escalares , éstos se pueden obtener utilizando como sistema de escalones los elementos positivos de $\lambda^{\times}$, α-dual del correspondiente espacio escalonado.

2. TOPOLOGIAS $\mathfrak{M}_o$ EN $\lambda_o\{E_{\mathfrak{F}}\}$ Y $\lambda_\infty\{E_{\mathfrak{F}}\}$.

Sea $\mathfrak{M}$ un sistema topologizador en el sentido de I.2 y sea $\mathfrak{F}$ una topología localmente convexa en E, definida por la familia de seminormas $\{p_i : i \in I\}$.

Definimos las funciones

$$P_{Mi}((x_n)) = \sup\{\sup_n p_i(a_n x_n) : (a_n) \in M\} \quad , M \in \mathfrak{M}$$

para cada elemento $(x_n) \in \lambda_\infty\{E_{\mathfrak{F}}\}$.

Proposición 2.1 La familia $\{P_{Mi} : M \in \mathfrak{M}, i \in I\}$ es una familia de seminormas en $\lambda_\infty\{E_{\mathfrak{F}}\}$ (y a fortiori en $\lambda_o\{E_{\mathfrak{F}}\}$) que definen una topología localmente convexa y separada.

demostración : Es análoga a la de las proposiciones I.2.1 y II.2.1 con las consiguientes modificaciones al usar las seminormas en vez del producto de escalares o la forma bilineal. ∎

Como en los dos capítulos anteriores a dicha topología la denotaremos por $\mathfrak{M}_o$ (siempre que no nos induzca a confusión con la correspondiente topología del espacio escalar correspondiente y con la derivada de otra topología en el espacio) . A los espacios resultantes los denotaremos por $\lambda_\infty\{E_{\mathfrak{F}}\}_{\mathfrak{M}_o}$ y $\lambda_o\{E_{\mathfrak{F}}\}_{\mathfrak{M}_o}$, o bien sin escribir la topología de E si se sobreentiende.

Dicha topología es evidentemente más fina que la inducida por la topología producto en $E^{\mathbb{N}}$ e induce en $E^{(\mathbb{N})}$ una topología menos fina que la de la suma directa. También $\mathfrak{M}_o$ induce en el espacio $\lambda\{E_{\mathfrak{F}}\}$ una topología menos fina que la definida por las seminormas

$$R_{Mi}((x_n)) = \sup\left\{\left[\sum_{n=1}^{\infty} p_i(a_n x_n)\right] : (a_n) \in M\right\}.$$

para cada $i \in I$ y $M \in \mathfrak{M}$, definidas en los trabajos antes citados por Rosier y De Grande- De Kimpe ,generalizando el primitivo trabajo de Pietsch , donde únicamente se hace referencia a la topología débil del espacio E.

Proposición 2.2 (a) Las aplicaciones $\pi_k : \lambda_\infty\{E_\xi\}_{\mathfrak{M}_0} \longrightarrow E_\xi$ definidas por $\pi_k((x_n)) = x_k$, para k = 1,2,3,...... son lineales , contínuas y suprayectivas.

(b) Las aplicaciones $\rho_i : \lambda_\infty\{E_\xi\}_{\mathfrak{M}_0} \longrightarrow \lambda_\infty\mathfrak{M}_0$, definidas por

$\rho_i((x_n)) = (p_i(x_n))$, para $i \in I$

son uniformemente contínuas.

(c) $\mathfrak{M}_0$ es la topología en $\lambda_\infty\{E_\xi\}$, menos fina entre aquellas que hacen contínuas las aplicaciones $\{\rho_i : i \in I\}$.

(d) La sucesión de aplicaciones $\sigma_k : \lambda_\infty\{E_\xi\}_{\mathfrak{M}_0} \longrightarrow \lambda_\infty\{E_\xi\}_{\mathfrak{M}_0}$ definidas como $\sigma_k((x_n)) = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ es equicontínua.

Las cuatro condiciones anteriores siguen teniendo validez si se cambia el espacio $\lambda_\infty\{E_\xi\}$ por $\lambda_0\{E_\xi\}$.

demostración: La haremos para $\lambda_\infty\{E_\xi\}$ y es evidente que la misma prueba sirve para $\lambda_0\{E_\xi\}$.

(a) La linealidad y sobreyectividad son evidentes. Sea k un natural fijo, y tomemos $i \in I$. Sabemos que existe un elemento (a_n) en $\lambda^\times$ tal que $a_k > 0$; sea M el elemento de $\mathfrak{M}$ que contiene a (a_n) Si $(x_n) \in \lambda_\infty\{E_\xi\}$ se tiene

$$p_i(x_k) \leq \frac{1}{a_k} P_{Mi}((x_n))$$

lo que nos indica la continuidad de π_k .

(b) Sea $i \in I$ fijo, y tomemos (x_n) , (y_n) dos elementos de $\lambda_\infty\{E_\xi\}$. Se tiene entonces que

$$\sup\Big(|a_n(p_i(x_n) - p_i(y_n))| \ : (a_n) \in M\Big) = \sup\Big(|a_n \ ((p_i(x_n)) - (p_i(y_n)) \ : (a_n) \in M\Big) \leq \sup\Big(|a_n| \, p_i(x_n - y_n) \ : (a_n) \in M\Big) = P_{Mi}((x_n - y_n))$$

para cada $M \in \mathfrak{M}$, lo cual indica que ρ_i es uniformemente contínua.

(c) Es inmediato a partir de las definiciones.

(d) Si $i \in I$, $M \in \mathfrak{M}$ entonces para todo natural k se tiene

$$P_{Mi}((x_n^k)) \leq P_{Mi}((x_n))$$

siendo $(x_n^k) = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k, 0, 0, \ldots\ldots, 0, \ldots\ldots)$, por lo que la familia $\{\sigma_k : k \in \mathbb{N}\}$ es equicontínua. ∎

Entre todas las topologías $\mathcal{M}_0$,que se pueden definir de este modo, existe una que es la menos fina y que al igual que en los casos anteriores es de particular importancia. A dicha topología la denominaremos SEMI-NORMAL asociada a la tòpología $\mathcal{E}$ y la denotaremos por $\mathcal{N}_0$.

Análogamente a II.4.1 tenemos:

Proposición 2.3 El espacio $E_{\mathcal{E}}$ es isomorfo a un subespacio cerrado de $\lambda_0\{E_{\mathcal{E}}\}_{\mathcal{M}_0}$.

demostración: Consideremos la inclusión

$$j : E_{\mathcal{E}} \longrightarrow \lambda_0\{E_{\mathcal{E}}\}_{\mathcal{M}_0}$$

que a cada elemento x de E le hace corresponder la sucesión

$$(x, 0, 0, \ldots\ldots, 0, \ldots\ldots)$$

Es un isomorfismo algebraico sobre la imagen; además

$$P_{Mi}(j(x)) = \sup\left(a_n\, p_i(j(x)) \quad : (a_n) \in M\right) \leq \rho_1\, p_i(x)$$

siendo $\rho_1 = \sup\left(|a_1| \,:\, (a_n) \in M\right)$ que existe y es finito al ser M acotado , luego acotado coordenada a coordenada. Entonces j es contínua.

La restricción de j^{-1} a j(E) es π_1 restringido a j(E) ,luego j^{-1} es contínua restringida a j(E). Falta probar que j(E) es cerrado, lo cual es inmediato ya que

$$j(E) = \bigcap_{k=2}^{\infty} \pi_k^{-1}(0) \text{ . ∎}$$

Proposición 2.4 $\lambda_0\{E_{\mathcal{E}}\}$ es $\mathcal{M}_0$-cerrado en $\lambda_\infty\{E_{\mathcal{E}}\}$

demostración: Sea (x_n) un elemento perteneciente a la $\mathcal{M}_0$-adherencia de $\lambda_0\{E_{\mathcal{E}}\}$ en $\lambda_\infty\{E_{\mathcal{E}}\}$.

Para todo ε real y positivo, $M \in \mathcal{M}$ y un $i \in I$,existe un (y_n) en $\lambda_0\{E_{\mathcal{E}}\}$ de tal forma que

$$P_{Mi}((x_n) - (y_n)) < \varepsilon$$

Sea $(a_n) \in \lambda^\times$, existe un $M \in \mathcal{M}$ tal que $(a_n) \in M$.

Para todo natural n tenemos

$$a_n p_i(x_n) \leq P_{Mi}((x_n) - (y_n)) + a_n p_i(y_n)$$

es decir

$$a_n p_i(x_n) < \varepsilon + a_n p_i(y_n)$$

Como $(a_n p_i(y_n)) \in c_0$ deducimos que $(a_n p_i(x_n)) \in c_0$, lo que indica que $(x_n) \in \lambda_0\{E_\tau\}$, y por lo tanto $\lambda_0\{E_\tau\}$ es $\mathcal{M}_0$- cerrado. ∎

<u>Corolario 2.5</u> El espacio E_τ es isomorfo a un subespacio cerrado de $\lambda_\infty\{E_\tau\}$.

demostración: Evidente a partir de 2.3 y 2.4 . ∎

3. CONJUNTOS $\mathfrak{M}_0$-ACOTADOS.

Vamos a estudiar en este apartado el concepto de acotación en los espacios $\lambda_\infty\{E_\tau\}$ y $\lambda_0\{E_\tau\}$ de forma análoga a II.3 pero utilizando los resultados obtenidos en I.4 .

Un subconjunto B de $\lambda_\infty\{E_\tau\}$ (respectivamente $\lambda_0\{E_\tau\}$) , diremos que está ACOTADO si para todo $(a_n)\in\lambda^\times$ y para todo $i\in I$, existe una constante positiva ρ tal que

$$\sup_n |a_n|\, p_i(x_n)\leq\rho \quad , \text{ para todo } (x_n)\in B.$$

Los espacios $\lambda_0\{E_\tau\}$ y $\lambda_\infty\{E_\tau\}$ son normales ; además es evidente la siguiente

Proposición 3.1 Un subconjunto B de $\lambda_\infty\{E_\tau\}$ está acotado si, y sólo si,lo está su envoltura normal.

Proposición 3.2 Un subconjunto B de $\lambda_\infty\{E_\tau\}_{\mathfrak{M}_0}$ está acotado si, y sólo si, $\rho_i(B)$ es acotado en $\lambda_{\infty\mathfrak{M}_0}$ para todo $i\in I$.

demostración: es consecuencia directa de las definiciones de acotación en $\lambda_\infty\{E_\tau\}$ y λ_∞ , y de la continuidad de las ρ_i . ∎

Proposición 3.3 Un subconjunto B de $\lambda_\infty\{E_\tau\}$ está acotado si, y sólo si, es $\mathfrak{M}_0$-acotado para todo sistema $\mathfrak{M}$.

demostración: B está acotado si, y sólo si, $\rho_i(B)$ está acotado en λ_∞ pero eso ocurre según I.4.2 si, y sólo si $\rho_i(B)$ es $\mathfrak{M}_0$-acotado es decir si, y sólo si B es $\mathfrak{M}_0$-acotado , según la proposición anterior. ∎

Estos resultados son válidos a su vez para $\lambda_0\{E_\tau\}$.

En el resto del apartado supondremos $\lambda_0\{E\}$ con la topología semi-normal asociada a una topología $\mathcal{T}$ en E.

Sea H un acotado en E ; denotaremos por

$$H^* = \{(x_n)\in\lambda_0\{E\} : \ a_n x_n\in H \ , \ n = 1,2,3,\ldots\ldots \quad (a_n)\in\lambda^\times\}$$

Con esta notación tenemos:

Proposición 3.4 El conjunto H^* es un acotado de $\lambda_0\{E_\zeta\}$, y es absolutamente convexo si H lo es.

demostración: sea $(a_n)\in\lambda^x$, $i\in I$. Dado $(x_n)\in H^*$ se tiene

$$\sup_n |a_n| p_i(x_n) = \sup_n p_i(a_n x_n) \leq \rho$$

siendo $\rho = \sup\{p_i(x) \ : x\in H\}$. ∎

Proposición 3.5 Si B es un acotado de $\lambda_0\{E_\zeta\}$ entonces existe un acotado H de E_ζ tal que $B\subset H^*$.

demostración: consideremos las proyecciones π_k (ver Proposición 2.2 como son contínuas los conjuntos $B_k = \pi_k(B)$ son acotados en E_ζ.

Para cada natural k sea

$$\widehat{B_k} = \bigcap\{a_k B_k \quad : (a_n)\in\lambda^x,\ a_k \neq 0\}$$

y tomemos $H = \bigcup_{k=1}^{\infty} \widehat{B_k}$

H es acotado en E pues si $i\in I$ y $(a_n)\in\lambda^x$, fijo , tenemos que para $x\in H$ existe un n_0 de tal forma que $x\in\widehat{B_{n_0}}$, luego existe un (x_n) en B tal que $a_{n_0} x_{n_0} = x$, luego

$$p_i(x) \leq \sup_n p_i(a_n x_n) = \rho$$

$B\subset H^*$. En efecto si $(x_n)\in B$, para cada natural n , $x_n\in B_n$, luego si $(a_n)\in\lambda^x$, $a_n x_n \in a_n B_n$, n = 1,2,3,..... es decir $a_n x_n\in\widehat{B_n}$ y por lo tanto $a_n x_n\in H$, de donde $(x_n)\in H^*$. ∎

Corolario 3.6 E_ζ tiene un sistema fundamental de acotados si, y sólo si, lo tiene $\lambda_0\{E_\zeta\}$.

demostración: Si $\lambda_0\{E_\zeta\}$ tiene un sistema fundamental de acotados , lo tiene también E_ζ trivialmente. Recíprocamente si E_ζ tiene un sistema $\{B_n : n = 1,2,3,....\}$ de acotados que es fundamental, el sistema $\{B_n^* : n = 1,2,3,.....\}$ es un sistema fundamental en $\lambda_0\{E_\zeta\}$ en virtud de la proposición anterior. ∎

4. CONJUNTOS $\mathcal{M}_0$-COMPACTOS .

Estudiaremos en este apartado las relaciones entre las compacidades en el espacio $\lambda_0\{E_\zeta\}_{\mathcal{M}_0}$ y las correspondientes en E_ζ y $\lambda_{0\mathcal{M}_0}$.

Proposición 4.1 Sea B un subconjunto de $\lambda_0\{E_\zeta\}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) B es $\mathcal{M}_0$-relativamente compacto.

(b) $\pi_k(B)$ es relativamente compacto en E_ζ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\rho_i(B)$ es relativamente compacto en $\lambda_{0\mathcal{M}_0}$ para todo $i \in I$.

(c) Para cada red $\{(x_{\delta n}) : \delta \in D\}$ de elementos de B , que es convergente coordenada a coordenada a una sucesión (x_n) , se tiene que $(x_n) \in \lambda_0\{E_\zeta\}$ y la red $\mathcal{M}_0$-converge a él , siendo $\pi_k(B)$ relativamente compactos en E ,para todo k .

demostración: (a) $\Longrightarrow$ (b) evidentemente ya que las aplicaciones π_k y ρ_i son contínuas (ver 2.2.(a) y(b))

(b) $\Longrightarrow$ (c): sea $\{(x_{\delta n}) : \delta \in D\}$ una red en B tal que para todo natural n se tiene

$$\lim_\delta x_{\delta n} = x_n$$

Sea $i \in I$; la red $\{p_i(x_{\delta n}) : \delta \in D\}$ es un red en $\rho_i(B)$,que es $\mathcal{M}_0$ -relativamente compacto en λ_0 y converge coordenada a coordenada a la sucesión $(p_i(x_n))$, por lo que aplicando I.5.1 y el final de la Observación I.5.4 tenemos que $(p_i(x_n)) \in \lambda_0$ y

$$\mathcal{M}_0 - \lim_\delta (p_i(x_{\delta n})) = (p_i(x_n)) \quad \text{en } \lambda_0$$

y por lo tanto

$$\mathcal{M}_0 - \lim_\delta (x_{\delta n}) = (x_n) \quad \text{en } \lambda_0\{E_\zeta\}.$$

(c) $\Longrightarrow$ (a): Si $\mathfrak{F}$ es un ultrafiltro en B , consideremos $\mathfrak{F}_k = \pi_k(\mathfrak{F})$ $\mathfrak{F}_k$ es así un ultrafiltro en el conjunto $\pi_k(B)$ que es relativamente compacto en E_ζ para todo natural k . Existirá entonces un elemento x_k en la clausura de $\pi_k(B)$ al cual convergerá. Si tomamos la red asociada a tal filtro, denotándola por $(x_{\delta n})$, cumple las condiciones de (c) , y por tanto la sucesión $(x_n) \in \lambda_0\{E_\tau\}$ y

$$\mathcal{M}_0\text{-}\lim_{\delta} (x_{\delta n}) = (x_n)$$

por lo que (x_n) es adherente a $\mathcal{F}$ y entonces $\mathcal{F}$ converge a él. ∎

Un espacio localmente convexo y separado diremos que es SEMI-MONTEL (ver por ejemplo [20]pag.231) si todo acotado en él es relativamente compacto. Como una consecuencia inmediata de la proposición anterior obtenemos:

<u>Corolario 4.2</u> Si $\lambda_0\mathcal{M}_0$ y E_τ son espacios semi-Montel , entonces también lo es el espacio $\lambda_0\{E_\tau\}\mathcal{M}_0$.

Con la misma demostración que la proposición 4.1 pero con las variaciones pertinentes al cambiar redes por sucesiones, tenemos la siguiente

<u>Proposición 4.3</u> Si B es un subconjunto de $\lambda_0\{E_\tau\}$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(a) B es $\mathcal{M}_0$-relativamente sucesionalmente compacto.

(b) $\pi_k(B)$ es relativamente sucesionalmente compacto en E_τ para todo k, y $\rho_i(B)$ es relativamente sucesionalmente compacto en $\lambda_0\mathcal{M}_0$ para todo $i \in I$.

(c) $\pi_k(B)$ es relativamente sucesionalmente compacto en E_τ , para todo k, y para cada sucesión $\{(x_{jn}) : j = 1,2,3,....\}$ de elementos de B que converja coordenada a coordenada a (x_n) , se cumple que $(x_n) \in \lambda_0\{E_\tau\}$ y

$$\mathcal{M}_0\text{-}\lim_{j\to\infty} (x_{jn}) = (x_n) \ .$$

<u>Proposición 4.4</u> Si B es un subconjunto de $\lambda_0\{E_\tau\}$, son equivalentes las afirmaciones:

(a) B es $\mathcal{M}_0$-relativamente numerablemente compacto.

(b) $\pi_k(B)$ es relativamente numerablemente compacto en E_τ y $\rho_i(B)$ es relativamente numerablemente compacto en $\lambda_0\mathcal{M}_0$ para todo k natural y para todo $i \in I$.

demostración: (a) $\Longrightarrow$ (b) : evidente al ser π_k y ρ_i contínuas (ver 2.2(a) y (b)).

(b) $\Longrightarrow$(a): sea $\{(x_{mn}) : m = 1,2,3,\ldots\}$ una sucesión en B . Consideremos $\pi_k((x_{mn})) = x_{km}$

$\{x_{km} : m=1,2,3,\ldots\}$ es una sucesión en $\pi_k(B)$ que por hipótesis tiene un punto adherente x_k en $E_\mathcal{T}$. Tomemos la sucesión (x_n) en $E_\mathcal{T}$. Si $(a_n) \in \lambda^x$, y para un $i \in I$ sabemos que $(a_n p_i(x_{kn})) \in c_0$; ahora bien como $\rho_i(B)$ es relativamente numerablemente compacto en $\lambda_{\mathcal{M}_0}$ y ρ_i es contínua se tiene que si α_{im} es adherente a la sucesión $p_i(x_{km})$ m=1,2,3,.. , entonces $p_i(x_n) = \alpha_{in}$

y además $(a_n p_i(x_n)) \in c_0$, lo que nos indica que $(x_n) \in \lambda_0\{E_\mathcal{T}\}$ y es $\mathcal{M}_0$-adherente a la sucesión original . ∎

Finalmente obtenemos un resultado del tipo Eberlein:

<u>Proposición 4.5</u> Sea $E_\mathcal{T}$ un espacio $\mu(E,E')$-casi completo y B un subconjunto de $\lambda_0\{E_\mathcal{T}\}$. Entonces B es $\mathcal{M}_0$-relativamente numerablemente compacto si, y sólo si, es $\mathcal{M}_0$-relativamente compacto.

demostración: B es $\mathcal{M}_0$-relativamente numerablemente compacto si, y sólo si, para todo natural k y todo $i \in I$, los conjuntos $\pi_k(E)$ y $\rho_i(B)$ son relativamente numerablemente compactos en $E_\mathcal{T}$ y $\lambda_{\mathcal{M}_0}$ respectivamente. Aplicando ahora a $\pi_k(B)$ el teorema de Eberlein ([24] pag.313) y a $\rho_i(B)$ el resultado I.5.1 obtenemos que ambos son relativamente compactos en $E_\mathcal{T}$ y $\lambda_{\mathcal{M}_0}$ respectivamente. Basta ahora aplicar la Proposición 4.1 para asegurar que B es en ese caso, y sólo en ese, $\mathcal{M}_0$-relativamente compacto. ∎

Siguiendo el ejemplo del resultado anterior y en virtud de las equivalencias de I.5.1, observamos que imponiendo condiciones sobre el espacio $E_\mathcal{T}$,las equivalencias entre las compacidades en él se trasladan de forma canónica a $\lambda_0\{E_\mathcal{T}\}$ (como el teorema de Šmulian y otros (ver [24]§ 24.1)).

5. ISOMORFIA , SUBESPACIOS Y PRODUCTOS.

Iniciamos en este apartado el estudio de las propiedades hereditarias de los espacios $\lambda_0\{E_{\mathcal{T}}\}_{\mathfrak{M}_0}$ y $\lambda_\infty\{E_{\mathcal{T}}\}_{\mathfrak{M}_0}$ con relación a las propiedades del espacio $E_{\mathcal{T}}$. Para los resultados de esta sección seguiremos los métodos usados por M. Valdivia para el estudio del espacio $s\{E_{\mathcal{T}}\}$ de las sucesiones de decrecimiento rápido en E para la topología $\mathcal{T}$, con la topología semi-normal que en este caso coincide con la normal.(ver [37] y [41])

<u>Proposición 5.1</u> Sean $E_{\mathcal{T}}$ y $F_{\mathcal{T}'}$ espacios localmente convexos isomorfos topologicamente. Entonces también lo son los espacios $\lambda_0\{E_{\mathcal{T}}\}_{\mathfrak{M}_0}$ y $\lambda_0\{F_{\mathcal{T}'}\}_{\mathfrak{M}_0}$ para todo espacio semi-escalonado y toda topología $\mathfrak{M}_0$ definida sobre ellos.

demostración: Sean $\{p_i : i\in I\}$ y $\{q_j : j\in J\}$ familias de seminormas en E y F respectivamente que determinan las topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$. Denotaremos por $\{P_{Mi} ; i\in I , M\in\mathfrak{M}\}$ y $\{Q_{Mj} : j\in J , M\in\mathfrak{M}\}$ las seminormas que definen la topología $\mathfrak{M}_0$ en $\lambda_0\{E_{\mathcal{T}}\}$ y $\lambda_0\{F_{\mathcal{T}'}\}$

Por hipótesis sabemos que existe un isomorfismo topológico , que llamaremos f entre $E_{\mathcal{T}}$ y $F_{\mathcal{T}'}$. Se cumple entonces que dado $j\in J$ existen $H>0$, $i\in I$ tal que para todo x de E

$$q_j(fx) \leq H\ p_i(x)$$

y por otro lado dado $i\in I$, existen $H'>0$, $j\in J$ tal que para todo fx en F se tiene

$$p_i(x) \leq H'\ q_j(fx) \quad .$$

Se define entonces la aplicación de $\lambda_0\{E_{\mathcal{T}}\}$ en $\lambda_0\{F_{\mathcal{T}'}\}$ como

$$\hat{f}((x_n)) = (y_n)$$

donde para cada n natural $y_n = f(x_n)$.

$\hat{f}$ está bien definido pues para cualquier $(a_n)\in\lambda^\times$ y cualquier n

$$0 \leq a_n q_j(y_n) \leq H\ a_n\, p_i(x_n) \qquad (1)$$

y entonces si $(x_n)\in\lambda_0\{E_{\mathcal{T}}\}$ el término de la derecha tiende a cero al tender n a infinito , y por lo tanto lo mismo pasa con el término de la izquierda, luego $(y_n) \in \lambda_0\{F_{\mathfrak{T}'}\}$. Además $\hat{f}$ es un isomorfismo algebraico.

Veamos ahora que tanto $\hat{f}$ como $\hat{f}^{-1}$ son contínuas:

Si $j \in J$ escogemos el $i \in I$ correspondiente al ser f contínua y para todo $(x_n) \in \lambda_0\{E_{\mathfrak{T}}\}$ se tiene que

$$Q_{Mj}(fx_n) \leq H\, P_{Mi}(x_n) \qquad \text{para un } M \in \mathfrak{M}$$

y por otro lado si $i \in I$, sea $j \in J$ correspondiente a la continuidad de f^{-1}, se tiene que para un $M \in \mathfrak{M}$ y todo $(fx_n) \in \lambda_0\{F_{\mathfrak{T}'}\}$

$$P_{Mi}(x_n) \leq H'\, Q_{Mj}(fx_n)$$

luego el isomorfismo $\hat{f}$ es topológico. ∎

<u>Proposición 5.2</u> Sean $E_{\mathfrak{T}}$ y $F_{\mathfrak{T}'}$ espacios localmente convexos topológicamente isomorfos. Entonces también lo son los espacios $\lambda_\infty\{E_{\mathfrak{T}}\}_{\mathfrak{M}_0}$ y $\lambda_\infty\{F_{\mathfrak{T}'}\}_{\mathfrak{M}_0}$ para todo espacio escalonado de orden infinito y toda topología $\mathfrak{M}_0$ definida en ellos.

demostración: Es idéntica a la de la proposición anterior salvo que al llegar a la desigualdad (1) el término de la derecha está acotado para todo n, y por lo tanto también lo está el de la izquierda resultando que si $(x_n) \in \lambda_\infty\{E_{\mathfrak{T}}\}$ entonces $(y_n) \in \lambda_\infty\{F_{\mathfrak{T}'}\}$, y así $\hat{f}$ está bien definida entre los dos espacios. ∎

<u>Proposición 5.3</u> Si F es un subespacio lineal de $E_{\mathfrak{T}}$ entonces $\lambda_0\{F_{\mathfrak{T}}\}$ es un subespacio lineal de $\lambda_0\{E_{\mathfrak{T}}\}$, siendo $\mathfrak{M}_0$-cerrado si aquél lo es.

demostración: La condición de subespacio lineal es evidente . Supongamos que F es cerrado en $E_{\mathfrak{T}}$, y sea (x_n) un punto $\mathfrak{M}_0$-adherente a $\lambda_0\{F_{\mathfrak{T}}\}$ en $\lambda_0\{E_{\mathfrak{T}}\}$.

Para un real positivo ε , $i \in I$ y $M \in \mathfrak{M}$, existe un $(y_n) \in \lambda_0\{F_{\mathfrak{T}}\}$ tal que

$$P_{Mi}((x_n) - (y_n)) < \varepsilon$$

lo que indica que fijando un natural n , x_n es adherente a F y por hipótesis $x_n \in F$, y como para todo $(a_n) \in \lambda^\times$, $(a_n p_i(x_n)) \in c_0$ entonces $(x_n) \in \lambda_0\{F_\varepsilon\}$. ∎

Proposición 5.4 Si F es un subespacio lineal de E_ε , entonces $\lambda_\infty\{F_\varepsilon\}$ es un subespacio lineal de $\lambda_\infty\{E_\varepsilon\}$, siendo $\mathcal{M}_0$-cerrado si aquél lo es.

demostración: Es exactamente igual a la de la proposición anterior con los cambios obvios para λ_∞ . ∎

Proposición 5.5 Sea $\{ E_\alpha : \alpha \in \mathcal{R}\}$ una familia de espacios localmente convexos; entonces los espacios $\lambda_0\{\prod_{\alpha\in\mathcal{R}} E_\alpha\}_{\mathcal{M}_0}$ y $\prod_{\alpha\in\mathcal{R}} \lambda_0\{E_\alpha\}_{\mathcal{M}_0}$ (considerando en los productos la topología producto) son topologicamente isomorfos.

demostración: Definimos la aplicación T de $\prod_{\alpha\in\mathcal{R}} \lambda_0\{E_\alpha\}$ en $\lambda_0\{\prod_{\alpha\in\mathcal{R}} E_\alpha\}$ como

$$T((x_n^\alpha)_{n=1}^\infty)_{\alpha\in\mathcal{R}} = ((x_n^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{R}})_{n=1}^\infty$$

T está bien definida ya que una sucesión en el producto converge a cero si, y sólo si, cada coordenada converge a cero , por lo que si $((x_n^\alpha)_{n=1}^\infty)_{\alpha\in\mathcal{R}} \in \prod \lambda_0\{E_\alpha\}$ y $(a_n) \in \lambda^\times$

$$(a_n x_n^\alpha) \xrightarrow{E_\alpha,\ \forall\alpha} 0 \iff ((a_n x_n^\alpha))_{\alpha\in\mathcal{R}} \xrightarrow{\prod E_\alpha} 0 \qquad (1)$$

lo cual además indica que T es sobreyectiva. Evidentemente T es lineal y Ker $\{T\}$ = (0) por lo que es isomorfismo algebraico.

El isomorfismo es topológico:

Sea $\{ p_\beta^\alpha : \beta \in B_\alpha\}$ la familia de seminormas que definen la topología de E_α . Las seminormas de la topología producto vienen definidas (ver[ ] 18.3.(5)) por

$$\widehat{p}_{\beta_0}^{\alpha_0}((x^\alpha)) = p_{\beta_0}^{\alpha_0}(x^{\alpha_0})$$

la conclusión es ya evidente si tenemos en cuenta que si $M \in \mathcal{M}$

$$\sup_{a\in M}\Big[\sup_n |a_n|\ p_\beta^\alpha(x_n^\alpha)\Big] = \sup_{a\in M}\Big[\sup_n |a_n| \widehat{p}_\beta^\alpha(x_n^\alpha)\Big]$$

y

$$\sup_{a\in M}\Big[\sup_n |a_n^\alpha|\ p_\beta^\alpha(x_n^\alpha)\Big] = \sup_{a\in M}\Big[\sup_n \widehat{|a_n^\alpha| p_\beta^\alpha}(x_n^\alpha)\Big]$$

para todo α y para todo β . ∎

Proposición 5.6 Sea $\{E_\alpha : \alpha\in\mathcal{R}\}$ una familia de espacios localmente convexos; entonces los espacios $\lambda_0\{\prod_{\alpha\in\mathcal{R}} E_\alpha\}_{m_0}$ y $\prod_{\alpha\in\mathcal{R}} \lambda_0\{E_\alpha\}_{m_0}$ (considerando en los productos la topología producto) son topológicamente isomorfos.

demostración: Análoga a la de la proposición anterior con la salvedad de que (1) debe cambiarse por:

$(a_n x_n^\alpha)$ está acotada en E_α , para todo α si, y sólo si $((a_n x_n^\alpha))_{\alpha\in\mathcal{R}}$ está acotada en $\prod_{\alpha\in\mathcal{R}} E_\alpha$, lo cual es inmediato por la definición de topología producto. ∎

Un sistema de escalones A diremos que es G- DEBILMENTE ESTABLE si para todo $(a_n)\in A$, existe un $(b_n)\in A$ de forma que

$$(a_{n+1} b_n^{-1}) \in l^\infty .$$

Ejemplo importante de sistemas de escalones G-débilmente estables nos lo proporcionan aquellos que determinan espacios con escalones potenciales débilmente estables o simplemente aquellos que son estables (un estudio reciente sobre ellos se encuentra en [11]).

En la siguiente proposición supondremos que el conjunto de los elementos positivos de $\lambda^\times$ es G-débilmente estable y consideraremos en los espacios semi-escalonados la topología semi-normal asociada. Con estas condiciones podemos enunciar:

Proposición 5.7 Para todo espacio localmente convexo E_ξ se tiene que los espacios $\lambda_0\{E_\xi\}$ y $\lambda_0\{E_\xi\}\times E_\xi$ son topológicamente isomorfos.

demostración: definimos la aplicación T de $\lambda_0\{E_\xi\}$ en $\lambda_0\{E_\xi\}\times E_\xi$ como $T((x_n)) = ((z_n), x_1)$, donde $z_n = x_{n+1}$ $n=1,2,3,\ldots$.

T está bien definido: en efecto si $(a_n)\in\lambda^\times$ (se puede elegir de forma que $a_n \leq a_{n+1}$, sin perdida de generalidad) ,se tiene

$$a_n p_i(z_n) = a_n p_i(x_{n+1}) \leq a_{n+1} p_i(x_{n+1})$$

y como la sucesión de la derecha pertenece a c_0 , tambien pertenece la de la izquierda; por lo tanto $(z_n)\in\lambda_0\{E_\xi\}$

La topología producto en $\lambda_0\{E_z\}\times E_z$ viene definida por las seminormas

$$R_{aij}((z_n),\ y) = P_{ai}((z_n)) + p_j(y)$$

para todo $(z_n)\in \lambda_0\{E_z\}$ y todo $y\in E$

T y T^{-1} son contínuas:

$$P_{ai}((x_n)) = \sup_n a_n\, p_i(x_n) \leq a_1\, p_i(x_1) + \sup_n a_{n+1} p\,(z_n) \leq$$

$$\leq a_1\, p_i(x_1) + \sup_n (a_{n+1} b_n^{-1})\cdot \sup b_n\, p_i(z_n) \leq$$

$$\leq H\ \left(p_i(x_1) - P_{ai}((z_n))\right) = H\ R_{aii}((z_n),\ x_1)$$

siendo $H = \max\ (\ a_1\ ,\ \sup_n (a_{n+1} b_n^{-1}))$, y (b_n) el elemento de $\lambda^{\times}$ que corresponde a (a_n) en la definición de G-estabilidad débil. Por otro lado

$$R_{aij}((z_n)\ ,\ x_1) = P_{ai}((z_n)) + p_j(x_1) \leq$$

$$\leq P_{ai}(x_n) - a_1^{-1} P_{aj}(x_n)$$

donde podemos suponer que $a_1^{-1} > 0$, si no pasaríamos a un elemento mayor con dicha propiedad. Como T es evidentemente isomorfismo algebraico entonces lo es topológico. ∎

<u>Proposición 5.8</u> Con las mismas condiciones que la proposición anterior obtenemos que los espacios $\lambda_\infty\{E_z\}$ y $\lambda_\infty\{E_z\}\times E_z$ son topológicamente isomorfos.

demostración: La misma que la de la proposición anterior pero cambiando lo dicho con respecto a c_0 por l^∞ . ∎

Haciendo en las dos proposiciones anteriores $E = \mathbb{K}$, obtenemos en las mismas condiciones:

<u>Corolario 5.9</u> El espacio λ_0 es isomorfo topológicamente a $\lambda_0\times\mathbb{K}$ cuando consideramos la topología sémi-normal.

<u>Corolario 5.10</u> El espacio λ_∞ es isomorfo topológicamente a $\lambda_\infty\times\mathbb{K}$ cuando consideramos la topología semi-normal.

El mismo método con las modificaciones necesarias serviría para demostrar idénticos resultados para los espacios escalonados y su topología natural (por I.1.2 es inmediato si A es nuclear)

6. LOS SUBESPACIOS $[\lambda_0\{E_\varepsilon\}\mathfrak{m}_0]$ Y $[\lambda_\infty\{E_\varepsilon\}\mathfrak{m}_0]$.

En lo sucesivo será necesario contar con una hipótesis adicional en los espacios objeto de nuestro estudio, y ésta será que las secciones finitas de cada elemento (x_n), que denotaremos por

$$(x_n^k) = (x_1,x_2,\ldots\ldots,x_k,0\ ,\ldots\ldots 0,\ldots\ldots) \qquad k=1,2,3,\ldots\ldots$$

converjan en la topología al elemento en cuestión. Sabemos por lo visto en el apartado I.6 que ni siquiera en el caso escalar dicho aserto es cierto aunque pudimos en aquel caso caracterizar aquellas topologías del tipo $\mathfrak{m}_0$ para las que sí era válido. El mismo objetivo es el que trataremos de conseguir en este apartado.

Dado E_ε localmente convexo y si λ_0 y λ_∞ son respectivamente un espacio semi-escalonado y su correspondiente espacio escalonado de orden infinito, se define $[\lambda_0\{E_\varepsilon\}\mathfrak{m}_0]$ como el subespacio de $\lambda_0\{E_\varepsilon\}_{\mathfrak{m}_0}$ tal que cada elemento es el $\mathfrak{m}_0$-límite de sus secciones finitas. Análogamente se define el subespacio $[\lambda_\infty\{E_\varepsilon\}\mathfrak{m}_0]$. Es inmediato que ambos son subespacios lineales normales y que contienen al espacio vectorial $E^{(\mathbb{N})}$.

El siguiente resultado nos relaciona estos espacios y los definidos en I.6 .

Proposición 6.1 Una sucesión (x_n) de elementos de $E^{\mathbb{N}}$ pertenece a $[\lambda_\infty\{E_\varepsilon\}\mathfrak{m}_0]$ (respectivamente $[\lambda_0\{E_\varepsilon\}\mathfrak{m}_0]$) si, y sólo si , para toda seminorma p_i que defina la topología ε se cumple que $(p_i(x_n))$ pertenece a $[\lambda_\infty\mathfrak{m}_0]$ (respectivamente $[\lambda_0\mathfrak{m}_0]$).

demostración: es consecuencia inmediata de las definiciones y del hecho de que las proyecciones ϱ_i sean uniformemente continuas (ver 2.2(b)). ∎

También como consecuencia del resultado anterior y de la caracterización de aquellos espacios que cumplen que $[\lambda_0\mathfrak{m}_0]=\lambda_0$ dada en I.6.2, obtenemos la siguiente caracterización:

Proposición 6.2 Para todo espacio E_τ y todo espacio semi-escalonado $\lambda_{o\mathfrak{M}_o}$ se tiene que $[\lambda_o\{E_\tau\}\mathfrak{m}_o] = \lambda_o\{E_\tau\}$ si, y sólo si $\mathfrak{M} \subset \mathcal{H}$.

Proposición 6.3 Para cualquier topología $\mathfrak{M}_o$ los subespacios $[\lambda_o\{E_\tau\}\mathfrak{m}_o]$ y $[\lambda_\infty\{E_\tau\}\mathfrak{m}_o]$ coinciden y ambos son $\mathfrak{M}_o$ - cerrados en $\lambda_o\{E_\tau\}$ y $\lambda_\infty\{E_\tau\}$.

demostración: la coincidencia de ambos subespacios es consecuencia inmediata de la proposición 1 y del corolario I.6.7; por otro lado el que sean $\mathfrak{M}_o$-cerrados es consecuencia de repetir las demostraciones de I.6.3 y I.6.4 . Si recordamos tales demostraciones dependían de los resultados I.5.2 y I.5.5 ; pasemos a demostrarlos:
Sea B la envoltura normal de un punto (x_n) , es evidentemente $\mathfrak{M}_o$-cerrado y es compacto ya que lo son $\pi_k(B)$ que es en realidad la envoltura normal en $\mathbb{K}$,es decir el intervalo $[-x_k, x_k]$ y por otro lado tambien lo es $\rho_i(B)$ que es la envoltura normal de $(p_i(x_n))$.
Basta ahora aplicar el resultado 4.1 . ∎

Proposición 6.4 Para cualquier topología se cumple

$$c_o \cdot \lambda_o\{E_\tau\} \subset [\lambda_o\{E_\tau\}\mathfrak{m}_o] , \qquad c_o \cdot \lambda_\infty\{E_\tau\} \subset [\lambda_\infty\{E_\tau\}\mathfrak{m}_o]$$

demostración: consecuencia inmediata de I.6.10 y la proposición 1. ∎

7. DENSIDAD , SEPARABILIDAD Y COMPLETITUD.

Continuamos en este apartado el estudio iniciado en 5. acerca de las propiedades hereditarias de los espacios $\lambda_0\{E_z\}_{\mathcal{M}_0}$ y $\lambda_\infty\{E_z\}_{\mathcal{M}_0}$ aunque como veremos la mayoría de ellas sólo sirven para el primero, no cumpliéndose para el segundo.

Proposición 7.1 Supongamos que $\mathcal{M} \subset_c \mathcal{K}$. Si F es un subespacio denso en E_z , entonces $\lambda_0\{F_z\}$ es denso en $\lambda_0\{E_z\}_{\mathcal{M}_0}$.

demostración: sea (x_n) un elemento de $\lambda_0\{E_z\}$. Como $\mathcal{M} \subset_c \mathcal{K}$ por 6.2 para todo $M \in \mathcal{M}$ y para todo $i \in I$ existe un k_0 de tal manera que si $k \geq k_0$

$$P_{Mi}((x_n^k) - (x_n)) < \varepsilon/2 \qquad (1)$$

Sea $k \geq k_0$ fijo. Como M está $\sigma(\lambda^x, \lambda)$-acotado , lo está coordenada a coordenada; podemos entonces encontrar sendos reales positivos (se pueden escoger estríctamente positivos)

$$\rho_1, \rho_2, \ldots\ldots\ldots, \rho_k$$

de forma que $|a_n| \leq \rho_n$ para n = 1,2,3,...,k

Para cada uno de estos n sea y_n en F tal que

$$p_i(x_n - y_n) < \varepsilon/2\rho_n$$

Tomemos ahora el elemento de $F^{\mathbb{N}}$ $(y_1, y_2, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0\ldots)$ evidentemente está en $\lambda_0\{F_z\}$ y además cumple

$$P_{Mi}((x_n^k) - (y_n)) < \varepsilon/2 \qquad (2)$$

Basta ahora combinar (1) y (2) para obtener que

$$P_{Mi}((x_n) - (y_n)) < \varepsilon \qquad . \blacksquare$$

De forma totalmente análoga se puede demostrar:

Proposición 7.2 Supongamos que $\mathcal{M} \subset_c \mathcal{K}$. Si F es un subespacio sucesionalmente denso en E_z , entonces $\lambda_0\{F_z\}$ es sucesionalmente denso en $\lambda_0\{E_z\}_{\mathcal{M}_0}$.

Las proposiciones anteriores no son ciertas para el espacio

$\lambda_\infty\{E_\varepsilon\}_{\mathcal{M}_0}$ en general , pues ni siquiera lo son para el espacio $\ell^\infty\{E_\varepsilon\}$ (ver [34]). Según vemos la condición de que las secciones de un elemento converjan a él es una hipótesis de capital importancia como ya ocurre en los espacios escalonados con valores vectoriales.

Proposición 7.3 Supongamos que $\mathcal{M}\subset\mathcal{K}$. Si el espacio E_ε es separable (respectivamente sucesionalmente separable), entonces el espacio $\lambda_0\{E_\varepsilon\}$ es separable (respectivamente sucesionalmente separable).

demostración: haremos la prueba para la separabilidad, siendo la otra análoga. Si E_ε es separable , podemos encontrar un subespacio F de E engendrado por una sucesión $e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n, \ldots$ de vectores linealmente independientes. Tomemos ahora $\widehat{F}$ el conjunto de los elementos de $\lambda_0\{F_\varepsilon\}$ cuyas componentes son nulas salvo a lo más un número finito. Aplicando la misma técnica que en 1. obtenemos que $\widehat{F}$ es denso en $\lambda_0\{E_\varepsilon\}$; si ahora denotamos por e^{ij} el elemento de $\lambda_0\{F_\varepsilon\}$ que tiene al vector e_i en el lugar j y el resto de componentes nulas, se tiene que $\widehat{F}$ es la envoltura lineal de los e^{ij} con lo que se termina la prueba. ∎

Con respecto a $\lambda_\infty\{E_\varepsilon\}_{\mathcal{M}_0}$ obtenemos el siguiente resultado en sentido negativo.

Proposición 7.4 Sea E_ε espacio localmente convexo y sea $\lambda_0 \neq \lambda_\infty$ Para cualquier topología $\mathcal{M}$ el espacio $\lambda_\infty\{E_\varepsilon\}$ no es separable.

demostración: sea (α_n) un elemento de λ_∞ que no está en λ_0 . Entonces podemos encontrar un $(b_n)\in\lambda^\times$ tal que $(b_n\alpha_n)\in l^\infty\setminus c_0$, luego se pueden encontrar un α real estrictamente positivo y una sucesión infinita de naturales $n_1, n_2, \ldots\ldots, n_k, \ldots\ldots$ de tal manera que

$$b_{n_k}\alpha_{n_k} > 0 \quad , \quad k = 1,2,3,\ldots\ldots$$

Sea ahora $M\in\mathcal{M}$ tal que $(b_n)\in M$. Escojamos $i\in I$ y un x en E de tal forma que $p_i(x) = 1$. Con todo esto construimos el conjunto de las sucesiones de elementos de E ,(x_n) de forma que para un natural n

$x_n = 0$ o bien $x_n = \alpha_n \cdot x$ en el caso en que $n = n_k$ para algún k

Denotémoslo por $\mathcal{H}$. $\mathcal{H} \subset \lambda_\infty\{E_z\}$.

Si $(x_n) \in \mathcal{H}$ formamos ahora el conjunto

$V_{(x_n)} = \{(z_n) \in \lambda_\infty\{E_z\} : P_{Mi}((z_n - x_n)) < \alpha/2\}$

Dados (x_n) e (y_n) en $\mathcal{H}$, si $(z_n) \in V_{(x_n)} \cap V_{(y_n)}$ tenemos

$$P_{Mi}((x_n) - (y_n)) \leq P_{Mi}((x_n) - (z_n)) + P_{Mi}((z_n) - (y_n)) < \alpha$$

y por otro lado existe un n_o tal que $x_{n_o} \neq y_{n_o}$

$$P_{Mi}((x_n) - (y_n)) \geq \sup_{a \in M} a_{n_o}\alpha_{n_o} > b_{n_o}\alpha_{n_o} > \alpha$$

ya que si $x_{n_o} = 0$ $y_{n_o} = \alpha_{n_o} \cdot x$, y si $y_{n_o} = 0$ $x_{n_o} = \alpha_{n_o} \cdot x$

En definitiva la familia $\{V_{(x_n)} : (x_n) \in \mathcal{H}\}$ es una familia no numerable de $\mathcal{M}_o$-abiertos de $\lambda_\infty\{E_z\}$ disjuntos dos a dos ,por lo que $\lambda_\infty\{E_z\}_{\mathcal{M}_o}$ no es separable. ∎

Corolario 7.5 Para cualquier topología $\mathcal{M}_o$ el espacio λ_∞ no es $\mathcal{M}_o$-separable.

Utilizando el mismo método de demostración de 3.podemos entonces enunciar:

Corolario 7.6 Para cualquier topología $\mathcal{M}$ se tiene que si E_z es separable también lo es $[\lambda_o\{E_z\}_{\mathcal{M}_o}]$.

El resultado anterior generaliza el ya obtenido para valores escalares en I.7.1 .

Vamos a estudiar ahora las propiedades de complétitud , sin imponer ningun tipo de condiciones a la topología .

Proposición 7.7 Los espacios $\lambda_o\{E_z\}_{\mathcal{M}_o}$ y $\lambda_\infty\{E_z\}_{\mathcal{M}_o}$ son completos si, y sólo si , E_z es completo.

demostración: Como por 2.4 $\lambda_o\{E_z\}$ es cerrado en $\lambda_\infty\{E_z\}_{\mathcal{M}_o}$ y por lo tanto basta hacer la prueba para éste.

Si $\lambda_\infty\{E_z\}_{\mathcal{M}_o}$ es completo por 2.5 E_z es completo. Inversamente si E_z es completo sea $\{(x_{\delta n}) : \delta \in D\}$ una red de Cauchy en $\lambda_\infty\{E_z\}_{\mathcal{M}_o}$. Por 2.2(a) las proyecciones π_k son contínuas, luego para cada n podemos encontrar un x_n en E tal que

$$\mathcal{T}-\lim_{\delta} x_{\delta n} = x_n$$

Al ser ρ_i uniformemente contínua para todo $i\in I$ (ver 2.2(b)) $\{\rho_i(x_{\delta n}) : \delta\in D\}$ es una red de Cauchy en $\lambda_\infty \mathcal{M}_0$, completo, y por tanto convergente a un (y_n^i). Por la convergencia coordenada a coordenada $y_n^i = \rho_i(x_n)$

y por lo tanto $(x_n)\in \lambda_\infty\{E_\mathcal{T}\}$.

Sea ahora ε un real positivo arbitrario. Sabemos que existe un $\delta_0 \in D$ tal que si $\delta,\delta' \geq \delta_0$

$$P_{Mi}((x_{\delta n})-(x_{\delta' n})) < \varepsilon$$ y tomando límites

para $\delta'\in D$, se obtiene que para $\delta \geq \delta_0$

$$P_{Mi}((x_{\delta n})-(x_n)) < \varepsilon$$

es decir la red inicial $\mathcal{M}_0$-converge a (x_n). ∎

<u>Proposición 7.8</u> Los espacios $\lambda_0\{E_\mathcal{T}\}_{\mathcal{M}_0}$ y $\lambda_\infty\{E_\mathcal{T}\}_{\mathcal{M}_0}$ son sucesionalmente completos (respectivamente casi-completos) si, y sólo si, el espacio $E_\mathcal{T}$ es sucesionalmente completo (respectivamente casi- completo).

demostración: Es la misma que la de la proposición anterior usando sucesiones en el primer caso y utilizando redes acotadas en el segundo. ∎

<u>Proposición 7.9</u> Los espacios $[\lambda_0\{E_\mathcal{T}\}_{\mathcal{M}_0}]$ y $[\lambda_\infty\{E_\mathcal{T}\}_{\mathcal{M}_0}]$ son completos casi-completos o sucesionalmente completos si, y sólo si, E es completo, casi-completo o sucesionalmente completo respectivamente.

demostración: consecuencia inmediata de los resultados 7, 8 y el hecho de ser $[\lambda_0\{E_\mathcal{T}\}_{\mathcal{M}_0}]$ y $[\lambda_\infty\{E_\mathcal{T}\}_{\mathcal{M}_0}]$ iguales y cerrados en $\lambda_0\{E_\mathcal{T}\}$ para toda $\mathcal{M}_0$ (ver 6.3). ∎

Para un espacio localmente convexo $X_\mathcal{T}$ denotaremos por $\widetilde{X}_\mathcal{T}$, $\widehat{X}_\mathcal{T}$ y $\widetilde{X}^s_\mathcal{T}$ respectivamente la completación, la casi-completación y la completación sucesional del espacio $X_\mathcal{T}$.

Proposición 7.10 Los espacios $\widetilde{\lambda_0\{E_\varepsilon\}_{\mathcal{M}_0}}$ y $\lambda_0\{\widetilde{E}_\varepsilon\}_{\mathcal{M}_0}$ son topológicamente isomorfos para todo espacio E_ε si $\mathcal{M}\subset\mathcal{K}$.

demostración: Por 1. $\lambda_0\{E_\varepsilon\}$ es $\mathcal{M}_0$-denso en $\lambda_0\{\widetilde{E}_\varepsilon\}$ y por 7. el espacio $\lambda_0\{\widetilde{E}_\varepsilon\}_{\mathcal{M}_0}$ es completo, de donde se obtiene fácilmente la conclusión. ∎

Proposición 7.11 Los espacios $\widetilde{\lambda_0\{E_\varepsilon\}_{\mathcal{M}_0}}^s$ y $\lambda_0\{\widetilde{E}_\varepsilon^s\}_{\mathcal{M}_0}$ son topológicamente isomorfos para todo espacio E_ε si $\mathcal{M}\subset\mathcal{K}$.

demostración: basta usar 2. y 8. ∎

Proposición 7.12 Los espacios $\widehat{\lambda_0\{E_\varepsilon\}_{\mathcal{M}_0}}$ y $\lambda_0\{\widehat{E}_\varepsilon\}_{\mathcal{M}_0}$ son topológicamente isomorfos para todo espacio E_ε si $\mathcal{M}\subset\mathcal{K}$.

demostración: basta usar 1. y 7. ∎

Corolario 7.13 Si $\mathcal{M}\subset\mathcal{K}$ y tanto $\lambda_0\mathcal{M}_0$ (respectivamente $\lambda_\infty\mathcal{M}_0$) como E_ε son (B)-espacios o (F)-espacios entonces lo mismo ocurre con $\lambda_0\{E_\varepsilon\}_{\mathcal{M}_0}$ (respectivamente $\lambda_\infty\{E_\varepsilon\}_{\mathcal{M}_0}$).

Con respecto a la complección local enunciamos:

Proposición 7.14 Los espacios $\lambda_0\{E_\varepsilon\}_{\mathcal{M}_0}$ y $\lambda_\infty\{E_\varepsilon\}_{\mathcal{M}_0}$ son localmente completos si, y sólo si E_ε es localmente completo.

demostración : sea (x_{mn}) m = 1,2,3,... una sucesión localmente de Cauchy en $\lambda_0\{E_\varepsilon\}_{\mathcal{M}_0}$; como en 1. la sucesión (x_{mn}) m=1,2,3..... para un n fijo es una sucesión de Cauchy localmente en E_ε luego convergente a un x_n de E . Como la convergencia local implica la del espacio ,un razonamiento como en 1. indica que $(x_n)\in\lambda_0\{E_\varepsilon\}$ .Además la sucesión inicial converge a (x_n). Por lo tanto si E_ε es localmente completo lo es a su vez $\lambda_0\{E_\varepsilon\}_{\mathcal{M}_0}$. Una prueba análoga sirve para $\lambda_\infty\{E_\varepsilon\}_{\mathcal{M}_0}$. El recíproco es inmediato por 2.3 y 2.5 . ∎

8. REPRESENTACION DE $[\lambda_0\{E_\varepsilon\}m_0]$ COMO PRODUCTO TENSORIAL.

Vamos a efectuar una representación del espacio $[\lambda_0\{E_\varepsilon\}m_0]$ usando el método iniciado por Pietsch ([31] y [32]).

Proposición 8.1 El espacio $[\lambda_0 m_0]\otimes_\varepsilon E_\varepsilon$ se puede identificar con un subespacio denso de $[\lambda_0\{E_\varepsilon\}m_0]$.

demostración: sea z un elemento de $[\lambda_0 m_0]\otimes_\varepsilon E$, admite una representación como

$$z = \sum_{j=1}^{k} (\alpha_n^j)\otimes x^j \qquad \text{con } (\alpha_n^j)\in[\lambda_0 m_0],\ x^j\in E$$

Definimos la aplicación φ de $[\lambda_0 m_0]\otimes_\varepsilon E$ en $[\lambda_0\{E_\varepsilon\}m_0]$ como

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^{k} (\alpha_n^j).x^j$$

φ es lineal evidentemente. Es inyectiva : sea z un elemento del núcleo de φ y sea $\{z_\alpha : \alpha\in\mathcal{R}\}$ una base de Hamel en E ; para cada j

$$x^j = \sum_{\alpha\in\mathcal{R}} \gamma_{\alpha j}\, z_\alpha$$ (el sumatorio tiene sólo un número finito de términos no nulos)

Entonces $\sum_{j=1}^{k} \gamma_{\alpha j}\,\alpha_n^j = 0$, $n = 1,2,3,\ldots$ por lo tanto

$$z = \sum_{j=1}^{k} (\alpha_n^j)\otimes x^j = \sum_{\alpha\in\mathcal{R}}\Big(\sum_{j=1}^{k}\gamma_{\alpha j}(\alpha_n^j)\otimes z_\alpha\Big) = 0$$

$\varphi([\lambda_0 m_0]\otimes_\varepsilon E)$ es denso en $[\lambda_0\{E_\varepsilon\}m_0]$:

Si $(x_n)\in[\lambda_0\{E_\varepsilon\}m_0]$, sea (x_n^k) sus secciones finitas (ver 6.) y sea e_k el elemento de ω cuyas componentes son todas nulas salvo la k-ésima que vale 1.

$$(x_n) = m_0\text{-}\lim_k (x_n^k) = m_0\text{-}\lim_k \sum_{n=1}^{k} e_n x_n = m_0\text{-}\lim \varphi\Big(\sum_{n=1}^{k} e_n\otimes x_n\Big)$$

Veamos ahora que las topologías que inducen $[\lambda_0\{E_\varepsilon\}m_0]$ y $[\lambda_0 m_0]\otimes_\varepsilon E_\varepsilon$ en $\varphi([\lambda_0 m_0]\otimes_\varepsilon E_\varepsilon)$ coinciden. Identificaremos en lo sucesivo z con su imagen $\sum_{j=1}^{k}(\alpha_n^j)\,x^j$

$[\lambda_0\{E_\varepsilon\}m_0]$ induce la topología determinada por las seminormas

$$\eta_{Mi}(z) = P_{Mi}(\varphi(z)) = \sup\left\{ \sup_n |a_n|\, p_i\Big(\sum_{j=1}^{k} \alpha_n^j x^j\Big) \;:\; (a_n)\in M\right\}$$

y $[\lambda_0 m_0]\otimes_\varepsilon E$ la inducida por

$$\varepsilon_{Mi}(z) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{k} \sup\ \big(\sup_n |a_n||\alpha_n^j|\big)\, p_i(x^j) \;:\; (a_n)\in M\right\}$$

donde el infimo se toma para todas las representaciones posibles de z. Así tenemos:

$$\eta_{Mi}(z) = \sup\left\{\Big(\sup_n \sum_{j=1}^{k} |a_n|\, p_i(\alpha_n^j x^j)\Big) \;:\; (a_n)\in M\right\} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} \sup\left\{\Big(\sup_n |a_n|\, p_i(\alpha_n^j x^j)\Big) \;:\; (a_n)\in M\right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sup\left\{\Big(\sup_n |a_n||\alpha_n^j|\, p_i(x^j)\Big) \;:\; (a_n)\in M\right\}$$

Tomando ahora ínfimos para todas las representaciones de z tenemos que para todo $M\in\mathfrak{M}$ y todo $i\in I$

$$\eta_{Mi}(z) \leq \varepsilon_{Mi}(z)$$

Consideremos ahora una representación cualquiera de

$$z = \sum_{j=1}^{k} (\alpha_n^j)\otimes x^j$$

Sabemos que para $j = 1,2,\ldots,k$ y $(a_n)\in\lambda^\times$ $\quad (a_n p_i(\alpha_n^j x^j))\in c_0$.
Tomemos $M\in\mathfrak{M}$ tal que $(a_n)\in M$. Dado un real positivo ε podemos encontrar un n_0 de tal forma que si $n \geq n_0$

$$a_n\, p_i(\alpha_n^j x^j) < \varepsilon/k \qquad j = 1,2,\ldots,k$$

$$\varepsilon_{Mi}(z - z^{n_0}) \leq \sum_{j=1}^{k} \sup_{n\geq n_0} |a_n||\alpha_n^j|\, p_i(x^j) < \varepsilon$$

$$\varepsilon_{Mi}(z^{n_0}) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{k} \Big(\sup_{n\geq n_0} |a_n||\alpha_n^j|\, p_i(x^j)\Big)\right\} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} |a_{n_1}||\alpha_{n_1}^j|\cdot p_i(x^j) \leq \eta_{Mi}(z)$$

para todo n_1 tal que $1 \leq n_1 \leq n_0$

luego $\quad \varepsilon_{Mi}(z) \leq \varepsilon_{Mi}(z - z^{n_0}) + \varepsilon_{Mi}(z^{n_0}) < \varepsilon + \eta_{Mi}(z)$

al ser ε arbitrario

$\mathcal{E}_{Mi}(z) \leq \eta_{Mi}(z)$, lo que completa la prueba . ∎

Proposición 8.2 Si el espacio $E_{\mathcal{E}}$ es completo entonces los espacios $[\lambda_0\{E_{\mathcal{E}}\}_{m_0}]$ y $[\lambda_0 m_0] \tilde{\otimes}_{\mathcal{E}} E_{\mathcal{E}}$ son topológicamente isomorfos.

demostración: Si $E_{\mathcal{E}}$ es completo , lo es a su vez $[\lambda_0\{E\}_{m_0}]$(7.9) , el resultado es ahora evidente sin más que aplicar la proposición anterior. ∎

Corolario 8.3 Si el espacio $E_{\mathcal{E}}$ es completo y $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$ entonces los espacios $\lambda_0\{E_{\mathcal{E}}\}_{m_0}$ y $\lambda_0 m_0 \tilde{\otimes}_{\mathcal{E}} E_{\mathcal{E}}$ son topológicamente isomorfos.

demostración: consecuencia directa de 2 y 6.2 . ∎.

Corolario 8.4 Si $E_{\mathcal{E}}$ es completo y o bien $E_{\mathcal{E}}$ o bien $[\lambda_0 m_0]$ son nucleares se tiene que los espacios $[\lambda_0\{E_{\mathcal{E}}\}_{m_0}]$ y $[\lambda_0 m_0] \tilde{\otimes}_{\varepsilon\iota} E_{\mathcal{E}}$ son topológicamente isomorfos.

demostración: directa a partir de 2 y la caracterización de nuclearidad. ∎

Observación 8.5 De la misma manera que se han probado los resultados anteriores, se puede sustituir la densidad y la completación por los conceptos análogos sucesionales o por la casi-completitud obteniéndose resultados totalmente análogos.

9. LOS ESPACIOS $\lambda_0(E)$ Y $\lambda_\infty(E)$.

Como caso particular de los espacios $\lambda_0\{E_\tau\}$ y $\lambda_\infty\{E_\tau\}$ vamos a considerar aquél en que la topología $\mathcal{E}$ es exactamente la débil correspondiente al par dual $\langle E , E'\rangle$. Denotaremos a tales espacios por $\lambda_0(E)$ y $\lambda_\infty(E)$ respectivamente. Vamos a ver su relación con los mismos espacios definidos a partir de otra topología.

Proposición 9.1 Sea $E_\mathcal{E}$ localmente convexo. Para cualquier topología compatible con el par dual $\langle E , E'\rangle$ se tiene que los conjuntos $\lambda_\infty\{E_\tau\}$ y $\lambda_\infty(E)$ coinciden.

demostración: es evidente si tenemos en cuenta que una sucesión es $\mathcal{M}_0$-acotada si, y sólo si ,es $\sigma(E,E')$-acotada. ∎

Las topologías definidas sobre $\lambda_\infty(E)$ no serán en general las mismas aunque sí el espacio subyacente. Por otro lado es trivial observar que los espacios $\lambda_0\{E_\tau\}$ y $\lambda_0(E)$ no tienen porqué coincidir en general. Así tenemos:

Proposición 9.2 Sea $E_\mathcal{E}$ localmente convexo. Se tiene que $\lambda_0\{E_\mathcal{E}\}$ está incluido en $\lambda_0(E)$ y la inclusión es contínua para las topologías $\mathcal{M}_0$ correspondientes.

demostración: sea (x_n) un elemento de $\lambda_0\{E_\mathcal{E}\}$, entonces para cada seminorma contínua que define la topología $\mathcal{E}$ y para todo $(a_n)\in\lambda^\times$

$$(a_n\, p_i(x_n))\in c_0$$

Sea ahora u un elemento de E' ; existe un $i\in I$ de tal forma que para todo x de E $\quad |\langle x , u\rangle| \leq K\, p_i(x)$ $\quad$ con $K>0$

entonces $(a_n\langle x_n, u\rangle)\in c_0$ y por lo tanto $(x_n)\in\lambda_0(E)$.

La segunda parte es inmediata teniendo en cuenta que si $M\in\mathcal{M}$ e $i\in I$ se tiene

$$\sup\left\{\sup_n |a_n\langle x_n, u\rangle| \;:\; (a_n)\in M\right\}\leq \sup\left\{\sup |a_n|.p_i(x_n) \;:\; (a_n)\in M\right\}$$

es decir $$P_{Mu}((x_n)) \leq P_{Mi}((x_n))$$

para todo $(x_n)\in\lambda_0\{E_\mathcal{E}\}$. ∎

Proposición 9.3 Sea A un sistema de escalones nuclear, entonces para todo espacio localmente convexo $E_{\mathfrak{T}}$ se cumple que

$$\lambda_0\{E_{\mathfrak{T}}\} = \lambda_0(E)$$

demostración: Por I.1.2 si A es nuclear $\lambda_0 = \lambda_\infty$, y basta entonces aplicar la proposición 1. ∎

De la misma manera se puede demostrar:

Proposición 9.4 Sea A un sistema de escalones nuclear, entonces para todo espacio localmente convexo $E_{\mathfrak{T}}$ se cumple que

$$\lambda\{E_{\mathfrak{T}}\} = \lambda(E) = \lambda_0\{E_{\mathfrak{T}}\} = \lambda_0(E) = \lambda_\infty\{E_{\mathfrak{T}}\} = \lambda_\infty(E) .$$

Proposición 9.5 Sea A un sistema de escalones nuclear y $\langle E, E'\rangle$ un par dual. El espacio $\lambda_0\{E_{\mathfrak{T}}\}$ es independiente de la topología $\mathfrak{T}$ que se elija para su definición siempre que sea compatible con el par dual.

demostración: evidente por la proposición anterior. Además se puede sustituir en el enunciado λ_0 por λ_∞ o por λ . ∎

10. APLICACIONES LINEALES CONTINUAS ENTRE LOS ESPACIOS $\lambda_0\{E_\mathcal{E}\}\mathfrak{M}_0$.

Sean $E_\mathcal{E}$ y $F_{\mathcal{E}'}$ sendos espacios localmente convexos y sea $\lambda_0\mathfrak{M}_0$ un espacio semi-escalonado.

Si f es una aplicación lineal y continua de $E_\mathcal{E}$ en $F_{\mathcal{E}'}$, induce de forma natural la aplicación $\hat{f}$ de $\lambda_0\{E_\mathcal{E}\}$ en $\lambda_0\{F_{\mathcal{E}'}\}$ definida por

$$\hat{f}((x_n)) = (f(x_n))$$

para todo $(x_n) \in \lambda_0\{E_\mathcal{E}\}$. A la aplicación $\hat{f}$ la denominaremos λ_0-ASOCIADA a la aplicación f.

Proposición 10.1 La aplicación $\hat{f}$ es lineal y continua , siendo un isomorfismo topológico si f lo es.

demostración: Ha sido ya hecha en 5.1 . ∎

Vamos a estudiar el núcleo y la imagen de $\hat{f}$ y su relación con el núcleo y la imagen de f.

Proposición 10.2 Para toda f se tiene Ker $\hat{f}$ = $\lambda_0\{\text{Ker } f\}$

demostración: sea (x_n) un elemento de Ker $\hat{f}$ (que será un elemento de $\lambda_0\{E_\mathcal{E}\}$); por definición de $\hat{f}$ tenemos que para cada n , x_n es un elemento de Ker f , por lo que $(x_n) \in \lambda_0\{\text{Ker } f\}$.

Inversamente si $(x_n) \in \lambda_0\{\text{Ker } f\}$, entonces para cada n , $x_n \in$ Ker f y por lo tanto $f(x_n) = 0$ para todo n, luego tenemos la otra inclusión.

Con respecto a la imagen no podemos asegurar que se cumpla la igualdad. En efecto si consideramos $E_\mathcal{E}$ con $\mathcal{E}$ estríctamente más fina que $\sigma(E,E')$ y $F = E_\sigma$ y consideramos como λ_0 el espacio c_0 ; tomamos (x_n) una sucesión que converja débilmente a cero pero que no converja a cero en la topología $\mathcal{E}$. Entonces $(x_n) \in c_0\{\text{Im } I_E\}$ mientras que (x_n) no pertenece a Im $\hat{I}_E$, siendo I_E la aplicación identidad en E .

Sin embargo siempre se cumple:

<u>Proposición 10.3</u> Para toda f se tiene $\operatorname{Im} \hat{f} \subset \lambda_0\{\operatorname{Im} f\}$

demostración: si (y_n) es un elemento de $\operatorname{Im} \hat{f}$, para todo natural n existe un x_n en E tal que $y_n = f(x_n)$ y además $(x_n) \in \lambda_0\{E_\varepsilon\}$ entonces $(y_n) = (f(x_n)) = \hat{f}((x_n))$, luego (y_n) es un elemento de $\lambda_0\{\operatorname{Im} f\}$. ∎

En cuanto a la igualdad tenemos el siguiente resultado que es el correspondiente al obtenido en [2] para espacios perfectos.

<u>Proposición 10.4</u> Sean $\lambda_0 \mathfrak{M}_0$, E_ε, $F_{\varepsilon'}$ espacios de Frechet, con $\mathfrak{M} \subset \mathcal{K}$ de forma que bien λ_0, o bien E_ε y F_ε sean nucleares. Entonces toda f epimorfismo topológico, cumple que $\hat{f}$ es a su vez epimorfismo topológico.

demostración: Según 8.3 en nuestro caso

$$\lambda_0\{E_\varepsilon\}_{\mathfrak{M}_0} \simeq \lambda_0\mathfrak{M}_0 \tilde{\otimes}_\varepsilon E_\varepsilon \qquad \text{y} \qquad \lambda_0\{F_{\varepsilon'}\}_{\mathfrak{M}_0} \simeq \lambda_0\mathfrak{M}_0 \tilde{\otimes}_\varepsilon F_\varepsilon$$

Si I_{λ_0} es la aplicación identidad de λ_0 en sí mismo, por [35] proposición 43.6, la aplicación

$$I_{\lambda_0} \otimes f : \lambda_0 \otimes_\varepsilon E_\varepsilon \longrightarrow \lambda_0 \otimes_\varepsilon F_{\varepsilon'}$$

es contínua, entonces es evidente que podemos identificar $\hat{f}$ con la extensión contínua $I_{\lambda_0} \tilde{\otimes} f$ de $I_{\lambda_0} \otimes f$

Para acabar la demostración basta aplicar la proposición 43.9 de [35]. ∎

En el apartado 5. al estudiar las propiedades hereditarias para los espacios semi-escalonados vectoriales no hablamos en absoluto de los cocientes. Como aplicación del resultado anterior podemos deducir sin embargo

<u>Proposición 10.5</u> Sean $\lambda_0 \mathfrak{M}_0$, E_ε espacios de Frechet con $\mathfrak{M} \subset \mathcal{K}$ y de forma que uno de los dos sea nuclear. Si F es un subespacio cerrado de E se tiene

$$\lambda_0\{E_\varepsilon\}_{\mathfrak{M}_0} / \lambda_0\{F\} \simeq \lambda_0\{E/F\}$$

demostración: $\lambda_0\{F\}$ es $\mathfrak{M}_0$-cerrado en $\lambda_0\{E_\varepsilon\}$ (5.4). Entonces el epimorfismo canónico induce $\hat{\varphi}$, un epimorfismo topológico. Como por 2, $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \hat{\varphi}$, el resultado es inmediato. ∎

11. LA PROPIEDAD DE APROXIMACION EN LOS ESPACIOS SEMI-ESCALONADOS $\lambda_0\{E_\varepsilon\}_{\mathfrak{M}_0}$.

En su famosa e importante memoria ([16]), da Grothendieck la que denomina condición de APROXIMACION en los espacios localmente convexos ,como el hecho de que en cada compacto del espacio la aplicación identidad pueda aproximarse por aplicaciones lineales continuas de rango finito ([16] pag. 165). Estudiaremos la existencia de dicha propiedad en los espacios objeto de nuestro estudio. Sabemos que todo espacio perfecto de sucesiones escalares posee esta propiedad ([2]); para los semi-escalonados establecemos la misma propiedad.

Proposición 11.1 Para toda topología $\mathfrak{M}_0$, el espacio $\lambda_0\mathfrak{M}_0$ tiene la propiedad de aproximación para $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{K}$.

demostración: Las aplicaciones σ_k que a cada elemento le hacen corresponder sus secciones de orden k , es una sucesión que converge puntualmente a la identidad en λ_0, y además es equicontinua (por 2.2.(d)), por lo tanto converge a ella uniformemente en cada compacto de $\lambda_0\mathfrak{M}_0$. ∎

En [2] se demuestra que si E_ε tiene la propiedad de aproximación , para todo espacio λ perfecto el espacio $\lambda\{E_\varepsilon\}$ tiene la propiedad de aproximación. Análogamente establecemos:

Proposición 11.2 Si el espacio E_ε tiene la propiedad de aproximación de Grothendieck, la tiene a su vez el espacio $\lambda_0\{E_\varepsilon\}_{\mathfrak{M}_0}$ para todo espacio semi-escalonado con $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{K}$.

demostración: sea K un $\mathfrak{M}_0$-compacto en $\lambda_0\{E_\varepsilon\}$, y denotemos por σ la identidad en dicho espacio. Por 6.2 la sucesión de aplicaciones $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge a σ , y es equicontinua (2.2.(d))

Sea ε un real positivo, $M\in\mathfrak{M}$ y sea $i\in I$ (conjunto de índices relativo a las seminormas que definen la topología).

Vamos a construir una aplicación de rango finito $\mathcal{Z}$, continua tal que en K

$$P_{Mi}(\sigma((x_n)) - \mathcal{Z}((x_n))) < \varepsilon \quad .$$

Para los factores establecidos existe un natural k_o de forma que si $k \geqslant k_o$

$$P_{Mi}((x_n) - (x_n^k)) < \varepsilon/2 \qquad \text{o lo que es igual}$$

$$P_{Mi}(\sigma((x_n)) - \sigma_k((x_n))) < \varepsilon/2$$

Tomemos el conjunto $C = \bigcup_{k=1}^{k_o} \Pi_k(K)$ siendo Π_k las proyecciones definidas en 2.2 y que son continuas, lo cual nos asegura la compacidad de C.

Por hipótesis la identidad I en E se puede aproximar en C por aplicaciones continuas de rango finito, esto es para el i inicial y para todo δ, existe una aplicación continua de rango finito f tal que si x es un elemento de C

$$p_i(I(x) - f(x)) < \delta$$

Si $\rho = \sup\{|a_n| : (a_n) \in M,\ n=1,2,\dots,k_o\}$, por la acotación de M es finito, tomamos $\delta = \varepsilon/2\rho$.

Con la notación de 10. definimos la aplicación $\mathcal{T}$ como $\hat{f} \circ \sigma_{k_o}$ es decir $\mathcal{T}((x_n)) = (f(x_1), f(x_2), \dots\dots, f(x_{k_o}), 0, 0 \dots\dots)$

Así se tiene

$$P_{Mi}(\sigma_{k_o}((x_n)) - \mathcal{T}((x\ ))) = \sup\{\sup_{1 \leq n \leq k_o} |a_n| p(x_n - f(x_n)) : \\ : (a_n) \in M\} < \rho \cdot \frac{\varepsilon}{2\rho} = \varepsilon/2$$

Entonces por lo tanto si $(x_n) \in K$

$$P_{Mi}(\sigma((x_n)) - \mathcal{T}((x_n))) \leqslant P_{Mi}(\sigma((x_n)) - \sigma_{k_o}((x\ ))) + \\ + P_{Mi}(\sigma_{k_o}((x_n)) - \mathcal{T}((x_n))) < \varepsilon \quad . \blacksquare$$

C A P I T U L O   IV

DUALIDAD Y TONELACION EN LOS ESPACIOS SEMI-ESCALONADOS.

1. EL DUAL TOPOLOGICO DE $[\lambda_0\{E_\varepsilon\}\mathcal{M}_0]$.

Como un primer objetivo vamos a ver en qué condiciones podemos dar una caracterización del dual topológico del espacio semi-escalonado $\lambda_0\{E_\varepsilon\}$ para una topología del tipo estudiado en el capítulo anterior. Para ello seguiremos un método general ya seguido para los espacios escalonados vectoriales en [1], [31] y [33]. Particularmente la adaptación de las técnicas de este último nos parace la más adecuada a los espacios $\lambda_0\{E_\varepsilon\}$. Como es evidente al observar las demostraciones, éstas dependen fuertemente de la condición de convergencia de las secciones de cada elemento en la topología $\mathcal{M}_0$. Si bien esto restringe el estudio al caso en que $\mathcal{M}\subset\mathcal{H}$, vamos a dar en general el estudio del dual del subespacio $[\lambda_0\{E_\varepsilon\}]$ que en el caso antes mencionado coincide con el espacio total. Como ya veremos también es necesario exigirle condiciones al espacio de sucesiones éscalares $\lambda_0^\times$, como era lógico de pensar a raiz de los resultados obtenidos en I.8.

En lo sucesivo denotaremos por E'_β el dual topológico del espacio E dotado de la topología $\beta(E',E)$. Para el espacio $\lambda_0\{E_\varepsilon\}$ sea

$$\lambda_0\{E_\varepsilon\}^\times = \{(u_n)\in E'^{\mathbb{N}} : (\langle x_n, u_n\rangle)\in l^1 \text{ , si } (x_n)\in \lambda_0\{E_\varepsilon\}\}$$

Por otro lado el espacio $\lambda_0^\times$ es perfecto, luego podemos tomar el espacio

$$\lambda_0^{\times}\{E'_{\beta}\} = \{(y_n)\in E'^{\mathbb{N}} : (q_{B^o}(y_n))\in \lambda_0^{\times} \quad , B\in \mathcal{B}\}$$

siendo $\mathcal{B}$ la familia de los conjuntos $\sigma(E,E')$-acotados absolutamente convexos de E' y q_{B^o} la correspondiente seminorma para B^o.

Proposición 1.1 Para todo espacio E_{τ} y todo λ_0 se tiene

$$\lambda_0\{E_{\tau}\}^{\times} \subset \lambda_0^{\times}\{E'_{\beta}\}$$

demostración: sea $(y_n)\in \lambda_0\{E_{\tau}\}^{\times}$ y sea B un conjunto $\sigma(E,E')$-acotado absolutamente convexo en E , deberemos probar que si

$$q_{B^o}(y_n) = \sup \{|\langle x,y\rangle| \; : x\in B\}$$

entonces $(q_{B^o}(y_n))\in \lambda_0^{\times}$.

En efecto : sea $(b_n)\in \lambda_0$. Entonces por definición si $(a_n)\in \lambda^{\times}$

$$(a_n b_n)\in c_0$$

Para cada natural n sea x_n un elemento de B de tal forma que

$$q_{B^o}(y_n) \leq |\langle x_n, y_n\rangle| + 1/2^n.|b_n| \qquad \text{si } |b_n|\neq 0$$

y $$q_{B^o}(y_n) \leq |\langle x_n, y_n\rangle| + 1/2^n \qquad \text{si } |b_n| = 0$$

Entonces para todo n

$$|b_n|\cdot q_{B^o}(y_n) \leq |\langle b_n x_n, y_n\rangle| + 1/2^n$$

Al ser B acotado , para toda seminorma p_i en E con $i\in I$,existe un M_i positivo de forma que $p_i(x_n)\leq M_i \qquad n = 1,2,3,\ldots.$

y por lo tanto

$$|a_n b_n| p_i(x_n) \leq M_i|a_n b_n|$$

que nos indica que la sucesión $(a_n b_n p_i(x_n))\in c_0$, y por lo tanto

$$(b_n x_n)\in \lambda_0\{E_{\tau}\}$$

y así

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\cdot q_{B^o}(y_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle b_n x_n, y_n\rangle| + \sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$$

Como las series que definen el segundo miembro son ambas convergentes, lo es la del primero es decir

$$(q_{B^o}(y_n))\in \lambda_0^{\times}$$

como queríamos probar. ∎

Proposición 1.2 Si φ es una forma lineal continua sobre $[\lambda_0\{E_z\}_{\mathcal{M}_0}]$ entonces admite una única representación de la forma

$$\langle \varphi , (x_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle b_n , x_n \rangle$$

para todo $(x_n) \in [\lambda_0\{E_z\}_{\mathcal{M}_0}]$, siendo (b_n) un elemento de $\lambda_0\{E_z\}^{\times}$.

demostración: denotaremos por e_k la sucesión de escalares cuyos términos son todos nulos salvo el k-ésimo cuyo valor es la unidad.

Sea x un elemento de E no nulo. Para cada n sea b_n aquel elemento de E′ de forma que

$$\langle b_n , x \rangle = \langle \varphi , e_n x \rangle \quad \text{para todo x de E.}$$

Al ser φ contínua existe un $i \in I$, y un $M \in \mathcal{M}$ de forma que si (x_n) es un elemento de $[\lambda_0\{E_z\}_{\mathcal{M}_0}]$

$$|\langle \varphi , (x_n) \rangle| \leq P_{Mi}((x_n))$$

El conjunto M es $\sigma(\lambda^{\times}, \lambda)$-acotado, luego acotado coordenada a coordenada. Sea ρ_n la cota de la coordenada n-ésima. Así

$$|\langle b_n , x \rangle| \leq P_{Mi}(e_n x) = \sup\{|a_n| p_i(e_n x) : (a_n) \in M\} \leq \rho_n \cdot p_i(x)$$

luego efectivamente $(b_n) \in E'^{\mathbb{N}}$.

Sea ahora $(x_n) \in [\lambda_0\{E_z\}_{\mathcal{M}_0}]$, como φ es contínua y las secciones (x_n^k) de (x_n) $\mathcal{M}_0$-convergen a él

$$\langle \varphi , (x_n) \rangle = \mathcal{M}_0\text{-lim} \langle \varphi , (x_n^k) \rangle = \mathcal{M}_0\text{-lim} \langle \varphi , \sum_{n=1}^{k} e_n x_n \rangle$$

$$= \mathcal{M}_0\text{-}\lim_k \sum_{n=1}^{k} \langle b_n , x_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle b_n , x_n \rangle$$

Sean ε_n escalares de módulo unidad de forma que

$$|\langle b_n , x_n \rangle| = \varepsilon_n \langle b_n , x_n \rangle$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle b_n , x_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \langle b_n , x_n \rangle = \langle \varphi , (\varepsilon_n x_n) \rangle < +\infty$$

y por lo tanto $(b_n) \in \lambda_0\{E_z\}^{\times}$. ∎

Reuniendo pues los resultados obtenidos en las dos proposiciones anteriores , para toda topología $\mathfrak{M}_0$ tenemos

$$[\lambda_0\{E_\xi\}_{\mathfrak{M}_0}]' \subset \lambda_0\{E_\xi\}^\times \subset \lambda_0^\times\{E'_\beta\}$$

y como caso particular si $\mathfrak{M} \subset \mathcal{K}$,

$$\lambda_0\{E_\xi\}'_{\mathfrak{M}_0} \subset \lambda_0\{E_\xi\}^\times \subset \lambda_0^\times\{E'_\beta\}$$

En lo que resta de capítulo y salvo mención expresa de lo contrario supondremos que se cumple la igualdad

$$\lambda_0^\times = \bigcup \{\lambda_{0a}^\times : (a_n) \in \lambda^\times , \ a_n \geqslant 0 \quad n = 1,2,3,\ldots\}$$

según la notación de I.8 , lo cual significa que el dual de $[\lambda_{\mathfrak{M}_0}]$ se puede identificar con $\lambda_0^\times$ (I.8.3) . Daremos ya pues la caracterización del dual de $[\lambda_0\{E_\xi\}_{\mathfrak{M}_0}]$.

<u>Proposición 1.3</u> El dual de $[\lambda_0\{E_\xi\}_{\mathfrak{M}_0}]$ es el conjunto de las sucesiones (u_n) con valores en E′ tales que para todo n

$$u_n = \alpha_n y_n$$

siendo (α_n) una sucesión en $\lambda_0^\times$ e (y_n) una sucesión equicontinua en E′.

demostración: sea (u_n) una sucesión como se describe en las hipótesis. Tomemos un $(x_n) \in [\lambda_0\{E_\xi\}_{\mathfrak{M}_0}]$,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n, x_n \rangle \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \cdot |\langle y_n, x_n \rangle|$$

Para todo x en E , y para todo natural n, existe un $i \in I$ tal que

$$|\langle y_n , x \rangle| \leq p_i(x)$$

Sea $(a_n) \in \lambda^\times$, tal que $(\alpha_n) \in \lambda_{0a}^\times$, es decir $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n|}{a_n} < +\infty$

(donde el cociente se supone cero si a_n es cero). Sea M el elemento de $\mathfrak{M}$ que cumple que $(a_n) \in M$,entonces

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n, x_n \rangle \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n|}{a^n} \cdot \sup_n |a_n| \, p_i(x_n) \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n|}{a_n} \right) \cdot P_{Mi}((x_n))$$

luego $(u_n) \in [\lambda_0\{E_\xi\}_{\mathfrak{M}_0}]'$.

Inversamente sea (u_n) en $[\lambda_0\{E_\xi\}_{\mathfrak{M}_0}]'$,denotando por φ la forma lineal que determina.

Al ser (u_n) contínua, si $(x_n) \in [\lambda_0\{E_\varepsilon\}m_0]$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n, x_n \rangle \right| \leq P_{Mi}((x_n)) \quad \text{, para un } M \in \mathcal{M},\ i \in I$$

Sea $V = \{ x \in E : p_i(x) < 1 \}$ y $q_{V^o}(u) = \sup\{ |\langle u, x\rangle| : x \in V \}$

Aplicando la desigualdad anterior al elemento cuyas coordenadas son todas nulas salvo la n-ésima que vale x , tenemos

$$|\langle u_n , x \rangle| \leq \rho_n\, p_i(x) \qquad x \in E$$

siendo ρ_n las cotas de las coordenadas n de M. Así $q_{V^o}(u_n) \leq \rho_n$

Escribamos ahora para cada n

$$y_n = \frac{u_n}{q_{V^o}(u_n)} \quad \text{si } q_{V^o}(u_n) \neq 0 \text{ , siendo cero en otro}$$

caso.

(y_n) es evidentemente una sucesión equicontinua en E'.
Probemos finalmente que $(q_{V^o}(u_n)) \in \lambda_0^\times$. Sea $(\beta_n) \in \lambda_0$, dado n, se puede encontrar un x_n en V de forma que

$$q_{V^o}(\beta_n u_n) \leq |\langle \beta_n u_n , x_n \rangle| + \frac{1}{2^n}$$

Tomemos $\rho = \sup\{ \sup_n |\beta_n a_n| : (a_n) \in M \}$

Si denotamos por $(z_n^k) = (\beta_1 x_1, \beta_2 x_2, \ldots\ldots, \beta_k x_k, 0, \ldots\ldots)$

$$\sum_{n=1}^{k} \langle \beta_n u_n, x_n \rangle = \varphi((z_n^k)) \leq P_{Mi}((z_n^k)) =$$

$$= \sup \left[\sup_{1 \leq n \leq k} |a_n| \cdot p_i(\beta_n x_n) \quad : (a_n) \in M \right] \leq$$

$$\leq \sup \left[\sup_n |a_n| \cdot |\beta_n| \quad : \quad (a_n) \in M \right] \leq \rho .$$

y esto para k = 1,2,3,..... por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \beta_n u_n, x_n \rangle| < +\infty \quad \text{, y entonces}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| q_{V^o}(u_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \beta_n u_n, x_n \rangle| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

y por lo tanto $(q_{V^o}(u_n)) \in \lambda_0^\times$, como queríamos probar. ∎

Corolario 1.4 Un subconjunto de $[\lambda_0\{E_\mathcal{Z}\}\mathcal{M}_0]'$ es equicontinuo si, y sólo si, es de la forma

$$\{(\alpha_n y_n) \ : (\alpha_n) \in \lambda_0^\times \ , (y_n) \hookrightarrow V^\circ\}$$

siendo V un $\mathcal{Z}$ -entorno de cero en E.

demostración: Basta hacer uso del resultado anterior. ∎

En general para toda topología $\mathcal{M}_0$, el dual topológico de $[\lambda_0\{E_\mathcal{Z}\}\mathcal{M}_0]$ es algebraicamente isomorfo a un subespacio sucesionalmente denso de $\lambda_0^\times\{E'_\beta\}$ donde en este último espacio consideramos la topología que se deriva de la normal de $\lambda_0^\times$ (que es perfecto) y de la fuerte en E'; en verdad, contiene al conjunto $\varphi\{E'_\beta\}$ que es sucesionalmente denso para dicha topología.

2. ESPACIOS FUNDAMENTALMENTE λ_0-ACOTADOS.

Vamos a buscar en este apartado una clase de espacios de forma que cumplan la igualdad

$$[\lambda_0\{E_\tau\}_{m_0}]' = \lambda_0^\times\{E'_\beta\}$$

Veamos previamente con un ejemplo que existen espacios E_τ de forma que para todo espacio semiescalonado λ_0, incluso dotado de su topología semi-normal, los espacios anteriores son distintos.

Sea $E[\sigma(E,E')]$ de forma que no sea casi-tonelado; existe entonces un fuertemente acotado en E' que no es finito dimensional. Por 1.3 $\lambda_0\{E_\sigma\}'$, donde en λ_0 suponemos su topología semi-normal, está formado por las sucesiones (u_n) de E' de tal manera que para cada n $u_n = \alpha_n \cdot y_n$ siendo $(\alpha_n) \in \lambda_0^\times$ e (y_n) finito dimensional en E'. Tomemos ahora (α_n) cualquiera en $\lambda_0^\times$, y (x_n) una sucesión de elementos de E' fuertemente acotada pero infinito dimensional, lo cual es factible por hipótesis. Entonces $(\alpha_n x_n)$ es un elemento de $\lambda_0^\times\{E'_\beta\}$ que no está en $\lambda_0\{E_\sigma\}'$.

Entre aquellos que sí cumplen la igualdad y a modo de ejemplo demostraremos por su sencillez

<u>Proposición 2.1</u> Si el espacio E_τ es normado se tiene

$$[\lambda_0\{E_\tau\}_{m_0}]' = \lambda_0^\times\{E'_\beta\}$$

demostración: sea $\|\cdot\|$ la norma que determina la topología de E'_β. Bastará con demostrar que $\lambda_0^\times\{E'_\beta\} \subset [\lambda_0\{E_\tau\}_{m_0}]'$.

Sea (u_n) $E'^{\mathbb{N}}$ tal que $(\|u_n\|) \in \lambda_0^\times$; definimos $y_n = u_n \cdot \|u_n\|^{-1}$ si $u_n \neq 0$, $y_n = 0$ en otro caso.

(y_n) es equicontinua y $(\|u_n\|) \in \lambda_0^\times$, cumpliéndose que

$$u_n = \|u_n\| \cdot y_n$$

Por 1.3 (u_n) define una forma lineal continua en $[\lambda_0\{E_\tau\}_{m_0}]$. ∎

Como consecuencia de la proposición anterior y completando lo visto en III.10 obtenemos:

Proposición 2.2 Sean $\lambda_{\mathfrak{M}_0}$, $E_{\mathfrak{T}}$ y $F_{\mathfrak{T}'}$ espacios de Banach. Sea f una función lineal continua de $E_{\mathfrak{T}}$ en $F_{\mathfrak{T}'}$, y sea ${}^t f$ su traspuesta. Entonces se tiene que ${}^t\hat{f} = \widehat{{}^t f}$ como aplicaciones de $\lambda_0^{\times}\{F'_\beta\}$ en $\lambda_0^{\times}\{E'_\beta\}$ y además $\| \hat{f} \| = \| f \|$.

demostración: Para la primera condición no es necesario que $\lambda_{\mathfrak{M}_0}$ sea normado. Sabemos que $\lambda_0^{\times}\{E'_\beta\} = \lambda_0\{E\}'_{\mathfrak{M}_0}$ y $\lambda_0^{\times}\{F'_\beta\} = \lambda_0\{F\}'_{\mathfrak{M}_0}$, luego ${}^t\hat{f}$ está bien definida entre ellos. Por otro lado si $(x_n) \in \lambda_0\{E_{\mathfrak{T}}\}$, $(y_n) \in \lambda_0^{\times}\{F'_\beta\}$ se tiene

$$\langle (x_n), {}^t\hat{f}((y_n)) \rangle = \langle \hat{f}((x_n)), (y_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f(x_n), y_n \rangle =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, {}^t f(y_n) \rangle = \langle (x_n), ({}^t f(y_n)) \rangle$$

de donde ${}^t\hat{f} = \widehat{{}^t f}$.

Supongamos ahora que $\lambda_{\mathfrak{M}_0}$ es (B)-espacio. para todo x de E

$$\| f(x) \| \leq \| f \| \cdot \| x \|$$

luego $\| \hat{f}((x_n)) \|_{\lambda_0\{F\}} = \| (\| f(x_n) \|) \|_{\lambda_0} \leq \| f \| \ . \ \| (\| x_n \|) \|_{\lambda_0} =$

$$= \| f \| \ . \ \| (x_n) \|_{\lambda_0\{E\}}$$

y por tanto $\| \hat{f} \| \leq \| f \|$

Por otro lado podemos considerar E como subespacio de $\lambda_0\{E_{\mathfrak{T}}\}$, y como f es la restricción de $\hat{f}$ a E tenemos $\| f \| \leq \| \hat{f} \|$. ∎

La siguiente definición se debe a Rosier [33] y la extenderemos aquí para los espacios λ_0 (Rosier la dá sólo para λ perfectos).

Sea $E_{\mathfrak{T}}$ un espacio localmente convexo y sea λ_0 un espacio semi-escalonado (respectivamente λ un espacio perfecto). Sea A un acotado normal en λ_0 (respectivamente λ) y B un acotado, cerrado, absolutamente convexo en $E_{\mathfrak{T}}$. Definimos el conjunto

$$[A , B] = \{ (x_n) \in \lambda_0\{E_{\mathfrak{T}}\} : x_n \in E_B \ , \ (p_B(x_n)) \in A \}$$

(resp. $[A , B] = \{ (x_n) \in \lambda\{E_{\mathfrak{T}}\} : x_n \in E_B \ , \ (p_B(x_n)) \in A \}$)

Directamente de la definición se deduce

Proposición 2.3 Con las condiciones anteriores

(a) $[A , B]$ es un acotado de $\lambda_0\{E_{\mathfrak{T}}\}$ (resp. $\lambda\{E_{\mathfrak{T}}\}$)

(b) Si $A \subsetneq A'$ y $B \subset B'$ entonces $[A, B] \subset [A', B']$

demostración: evidente.

Diremos que E es FUNDAMENTALMENTE λ_0-ACOTADO (res λ-ACOTADO) si la colección $[A, B]$ es un sistema fundamental de acotados de $\lambda_0\{E_\tau\}$ (resp. $\lambda\{E_\tau\}$), cuando A y B pertenezcan a sendos sistemas fundamentales de acotados en λ_0 (resp. λ) y E . Un espacio fundamentalmente ℓ^1 acotado es un espacio con la propiedad (B) de Pietsch (ver [32]). Utilizaremos entonces la misma formulación para ambos conceptos ya que creemos que no induce a confusión; así si decimos que E_τ es fundamentalmente μ-acotado nos referiremos a la definición de Rosier si μ es un espacio perfecto y a la nuestra si μ es un espacio semi-escalonado.

<u>Proposición 2.4</u> Sea λ_0 semi-escalonado. Si E es fundamentalmente λ_0-acotado entonces

$$\lambda_0\{E_\tau\}^\times = \lambda_0^\times\{E'_\beta\}$$

demostración: Por 1.1 será suficiente probar que $\lambda_0^\times\{E'_\beta\} \subset \lambda_0\{E_\tau\}^\times$

En efecto: sea $(u_n) \in \lambda_0^\times\{E'_\beta\}$ y sea $(x_n) \in \lambda_0\{E_\tau\}$

sabemos que existen A , B tales que $(x_n) \in [A, B]$ y por tanto $(p_B(x_n)) \in \lambda_0$, como además $(q_{B^0}(u_n)) \in \lambda_0^\times$, se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle u_n, x_n\rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty} p_B(x_n)\, q_{B^0}(u_n) < +\infty \qquad . \blacksquare$$

Recordemos que un espacio localmente convexo E_τ se dice que es σ-CASI TONELADO si toda sucesión fuertemente acotada de E'es equicontínua. Claramente la clase de todos los espacios σ-casi tonelados contiene a la de los espacios casi tonelados. Para estos espacios se tiene:

<u>Proposición 2.5</u> Sea E_τ σ-casi tonelado y λ_0 espacio semi-escalonado. Si E'_β es fundamentalmente $\lambda_0^\times$-acotado entonces

$$[\lambda_0\{E\}m_0]' = \lambda_0^\times\{E'_\beta\}$$

demostración: sea (u_n) una sucesión de $E'^{\mathbb{N}}$ que esté en $\lambda_0^\times\{E'_\beta\}$.

Si D es un acotado en E' , sabemos que $(q_D(u_n)) \in \lambda_0^\times$

Para cada n definimos

$$y_n = \frac{u_n}{q_D(u_n)} \qquad \text{si} \quad q_D(u_n) \neq 0$$

valiendo cero en otro caso. $y_n \in D$, $n = 1,2,3,\ldots.$

Al ser E σ-casi tonelado $\{ y_n : n = 1,2,3,\ldots \}$ es equicontinua. Entonces podemos escribir

$$u_n = y_n \cdot q_D(u_n)$$

bastas ahora aplicar 1.3 y se deduce que $(u_n) \in [\lambda_0\{E_\varepsilon\}_{\mathcal{M}_0}]$. Con esta inclusión y la obtenida trás 1.2 se obtiene la conclusión deseada.∎

Corolario 2.6 Sea E σ-casi tonelado, $\lambda_{o\mathcal{M}_0}$ espacio semi-escalonado con $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$. Si E'_β es fundamentalmente $\lambda_0^\times$-acotado se tiene que

$$\lambda_0\{E_\varepsilon\}'_{\mathcal{M}_0} = \lambda_0^\times\{E'_\beta\}$$

En [33] ,Rosier demuestra:

Proposición 2.7 Sea λ un espacio perfecto y $\lambda^\times$ su α-dual. Supongamos que $\lambda^\times$ tenga un sistema fundamental numerable de acotados

$$N_1 \subset N_2 \subset \ldots\ldots N_k \subset \ldots\ldots\ldots \qquad \text{entonces}$$

(a) Todo espacio localmente convexo metrizable es fundamentalmente λ-acotado.

(b) Todo (DF)-espacio es fundamentalmente $\lambda^\times$-acotado

Vamos a ver que una propiedad totalmente similar se cumple para los espacios semi-escalonados.

Proposición 2.8 Todo espacio localmente convexo metrizable es fundamentalmente c_0-acotado.

demostración: sean p_1 p_2 .... p_k.... las seminormas que definen la topología . Sea C un acotado de $c_0\{E_\varepsilon\}$, existen positivos ρ_k tal que

$$\sup_n p_k(x_n) \leq \rho_k \qquad (x_n) \in C$$

Tomemos el conjunto

$$B = \{ x \in E \quad : \sup_k \rho_k^{-1} p_k(x) \leq 1 \}$$

B es un acotado en E_z . Además si $(x_n) \in C$, para todo n

$$x_n \in E_B$$

Para cada $x \in E_B$ $\quad p_B(x) = \sup_k \alpha_k^{-1} p_k(x)$

Si U es la bola unidad de c_0 se tiene entonces que $(p_B(x_n)) \in U$ luego $\quad C \subset [U , B]$. ∎

Proposición 2.9 Sea λ un espacio perfecto de forma que $\lambda^\times$ tenga una sucesión fundamental de acotados

$$N_1 \subset N_2 \subset \ldots\ldots\ldots \subset N_i \subset \ldots.$$

Sea λ_0 el correspondiente espacio semi-escalonado. Entonces

(a) Todo espacio localmente convexo metrizable es fundamentalmente λ_0-acotado.

(b) Todo (DF)-espacio es fundamentalmente $\lambda_0^\times$-acotado.

demostración: (a) Sea C un acotado en $\lambda_0\{E_z\}$, dados i,k naturales existen constantes ρ_{ik} tal que

$$p_{N_i k}((x_n)) \leq \rho_{ik}$$

Tomemos $C_i = \{ (\alpha_n \cdot x_n) : (\alpha_n) \in N_i , (x_n) \in C \}$, es un acotado en $c_0\{E_z\}$ luego por 8. existe un B_i acotado en E_z , de forma que si U es la bola unidad de c_0 , se tiene

$$C_i \subset [U , B_i] \quad \text{es decir}$$

si $(x_n) \in C$ y $(\alpha_n) \in N_i$

$$\sup_n |\alpha_n| \cdot p_{B_i}(x_n) = \sup_n p_{B_i}(\alpha_n x_n) = \| (p_{B_i}(\alpha_n x_n)) \|_{c_0} \leq 1$$

Dados los acotados B_i en E y por ser metrizable , existen escalares positivos λ_i de forma que

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} \lambda_i B_i$$

es acotado en E_z ([24] 29.1.(5)).

Como $B_i \subset \lambda_i^{-1} B$ tenemos que para todo x en E_{B_i}

$$p_B(x) \leq \lambda_i^{-1} p_{B_i}(x)$$

luego para todo i y para todo $(x_n) \in C$ se tiene

$$\sup \{ \sup_n |\alpha_n| p_B(x_n) : (\alpha_n) \in N_i \} \leq \sup \{ \sup_n |\alpha_n| \lambda_i^{-1} p_{B_i}(x_n) : (\alpha_n) \in N_i \} \leq \frac{1}{\lambda_i}$$

luego el conjunto

$$\{p_B(x_n) \ : \ (x_n) \in C\}$$

es acotado en λ_0 y por lo tanto contenido en un acotado normal A y por lo tanto $C \subset [A\ ,\ B]$

lo que indica que $E_{\mathcal{T}}$ es fundamentalmente λ_0-acotado.

(b) Como $\lambda^{\times}$ tiene una sucesión fundamental de acotados, tambien la tiene $\lambda_0^{\times}$, el resultado se sigue de 7.(b).

El hecho de que todo (DF)-espacio es fundamentalmente λ-acotado, así como que todo espacio metrizable es fundamentalmente $\lambda^{\times}$-acotado es en general falso, como muestra el ejemplo de Rosier para $\lambda = \omega$ y $\lambda^{\times} = \varphi$. Los correspondientes λ_0 y $\lambda_0^{\times}$ son precisamente los mismos, luego nos sirven de contraejemplo para la misma situación.

3. TONELACION EN $\lambda_0\{E_z\}$.

Para estudiar la heredación de las propiedades de tonelación en los espacios $\lambda_0\{E_z\}$, seguiremos el método utilizado con éxito por A. Marquina y J.M. Sanz Serna ([28]) con respecto al espacio $c_0\{E_z\}$. Si bien allí es fundamental la noción de la propiedad (B) de Pietsch (es decir los espacios fundamentalmente l^1-acotados) en nuestro caso, y como cabía esperar, usaremos la noción de espacio fundamentalmente $\lambda_0^\times$-acotado. Si E_z es un espacio localmente convexo y λ_0 un espacio semi-escalonado, el espacio $\lambda_0\{E_z\}$ se supondrá dotado de la topología semi-normal $\mathcal{N}_0$.

<u>Proposición 3.1</u> Sea B un acotado, absolutamente convexo en E_z y sean $(a_n)\in\lambda^\times$, $(u_n)\in\lambda_0\{E_z\}'$.

Si $\alpha = \sup\{|\langle(x_n), (u_n)\rangle| : (x_n)\in\lambda_0\{E_z\}, (a_nx_n)\hookrightarrow B\}$

y $\beta=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\sup\{|\langle x, u\rangle| : x\in B\}$

entonces $\alpha=\beta$.

demostración: Sea $(x_n)\in\lambda_0\{E_z\}$ y $(u_n)\in\lambda_0\{E_z\}'$

$$|\langle(x_n), (u_n)\rangle| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\langle x_n, u_n\rangle\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|\langle x_n, u_n\rangle| \leq$$

como $(a_n)\in\lambda^\times$ y $a_nx_n\in B$

$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\sup\{|\langle x, u_n\rangle| : x\in B\}$$

tomando ahora supremos para $(x_n)\in\lambda_0\{E_z\}$ con $a_nx_n\in B$, tenemos

$$\alpha\leq\beta$$

Inversamente, sea $\varepsilon>0$, y k un número natural.

$$\sup\{|\langle x, u_i\rangle| : x\in B\}\leq\langle a_ix_i, u_i\rangle + \frac{\varepsilon a_i}{k}$$

con $a_ix_i\in B$ y $1\leq i\leq k$, es decir

$$\frac{1}{a_i}\sup\{|\langle x, u_i\rangle| : x\in B\}\leq\langle x_i, u_i\rangle + \frac{\varepsilon}{k}$$

sumando se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} \sup\{|\langle x , u_i\rangle| : x\in B\} \leq \sum_{i=1}^{k} \langle x_i, u_i\rangle + \varepsilon$$

Escojamos el elemento de $\lambda_0\{E_\tau\}$

$$(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_k,0,0,\ldots\ldots) \qquad a_i x_i \in B,\ 1\leq i\leq k$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} \sup\{|\langle x , u_i\rangle| : x\in B\} \leq \alpha+\varepsilon \qquad k = 1,2,3,\ldots.$$

haciendo tender k a infinito $\beta \leq \alpha+\varepsilon$, para todo ε , luego

$$\beta\leq\alpha \text{ . } \blacksquare$$

<u>Proposición 3.2</u> La topología normal de $\lambda_0^\times\{E'_\beta\}$ induce en $\lambda_0\{E\}'$ la topología $\beta(\lambda_0\{E_\tau\}', \lambda_0\{E_\tau\})$.

demostración: sea B un cerrado ,acotado,absolutamente convexo en E , y sea $(a_n)\in\lambda^\times$. Si $q_{B^\circ}(u_n) = \sup\{ |\langle x , u_n\rangle|: x\in B \}$ se tiene

$$\sup\{|\langle(x_n) , (u_n)\rangle|: (x_n)\in\lambda_0\{E_\tau\},\ a_n x_n\in B\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} q_{B^\circ}(u_n)$$

Sea $\widehat{B} = \{(x_n)\in\lambda_0\{E_\tau\} : a_n x_n\in B , n = 1,2,3,\ldots\}$

B es absolútamente convexo y $\sigma(\lambda_0\{E_\tau\}, \lambda_0\{E_\tau\}')$-acotado ya que si $(x_n)\in\widehat{B}$, $(u_n)\in\lambda_0\{E_\tau\}'\subset\lambda_0^\times\{E'_\beta\}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, u_n\rangle| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}|\langle a_n x_n, u_n\rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} q_{B^\circ}(u_n) = \rho$$

y por lo tanto la igualdad inicial es entre las seminormas que definen la topología $\beta(\lambda_0\{E_\tau\}', \lambda_0\{E_\tau\})$ y la normal de $\lambda_0^\times\{E'_\beta\}$ respectivamente. Tengamos en cuenta además que los conjuntos $\widehat{B}$ forman un sistema fundamental de acotados en $\lambda_0\{E_\tau\}$. (ver tambien III.3). $\blacksquare$

Vamos a dar ya la primera de las condiciones para que $\lambda_0\{E_\tau\}$ tenga una propiedad dectonelación.

Proposición 3.3 Sea E_τ localmente convexo. El espacio $\lambda_0\{E_\tau\}$ es casi tonelado si, y sólo si, E_τ es casi tonelado y su dual fuerte E'_β es fundamentalmente $\lambda_0^\times$-acotado.

demostración: Si E_τ es casi tonelado, en particular es σ-casi tonelado y como E'_β es fundamentalmente $\lambda_0^\times$-acotado, por 2.5

$$\lambda_0\{E_\tau\}' = \lambda_0^\times\{E'_\beta\}$$

Sea H un acotado para la topología $\beta(\lambda_0\{E_\tau\}', \lambda_0\{E\})$ en $\lambda_0\{E_\tau\}'$ por la proposición anterior es acotado en la topología normal de $\lambda_0^\times\{E'_\tau\}$. Por ser E'_β fundamentalmente $\lambda_0^\times$-acotado, existe un M $\beta(E',E)$-acotado absolutamente convexo y $\sigma(E',E)$- cerrado, tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} q_M(u_n) \leq 1$$

al ser E_τ casi tonelado, M es equicontínuo, luego H es equicontínuo por 1.4

Inversamente, supongamos que $\lambda_0\{E_\tau\}$ es casi tonelado. La aplicación π_1 de $\lambda_0\{E_\tau\}$ en E es lineal, continua y sobre (III.2.2(a)) además es fácil ver que es abierta luego es cociente y por lo tanto E_τ es casi tonelado. El espacio $\lambda_0\{E_\tau\}'$ es $\beta(\lambda_0\{E_\tau\}', \lambda_0\{E_\tau\})$-casi completo, sucesionalmente denso en $\lambda_0^\times\{E'_\beta\}$, luego aplicando 2.

$$\lambda_0\{E_\tau\}' = \lambda_0^\times\{E'_\beta\}$$

Sea H un acotado de $\lambda_0^\times\{E'_\beta\}$, al ser $\lambda_0\{E_\tau\}$ casi tonelado, H es equicontínuo, luego existe un equicontínuo U en E'tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} q(u_n) \leq 1 \qquad \text{si } (u_n) \in H.$$

Por el teorema de Banach-Mackey ([24]pag. 254) U es $\beta(E',E)$-acotado, luego E'_β es fundamentalmente $\lambda_0^\times$-acotado. ∎

Corolario 3.4 Si E_τ es un espacio (DF)-casi tonelado, entonces también lo es $\lambda_0\{E_\tau\}$.

demostración: Basta usar el resultado anterior y el hecho de que E'_β es metrizable, lo cual permite aplicar 7.(a). ∎

Corolario 3.5 Sea E_τ localmente convexo localmente completo. $\lambda_o\{E_\tau\}$ es tonelado si, y sólo si E_τ es tonelado y su dual fuerte E'_β es fundamentalmente $\lambda_o^\times$-acotado.

demostración: consecuencia directa de 3. y III.7.14 . ∎

Al igual que en [28] vamos a dar una aplicación de este último resultado a la conmutación del límite inductivo cuando aplicamos un espacio semi-escalonado. Es conocido que la conmutación es en general negativa si tomamos el espacio c_o . Con el siguiente ejemplo (sugerido por el Prof. Valdivia para c_o y extendido por nosotros a cualquier λ_o) veremos que para cualquier espacio semi-escalonado distinto de φ , existe un límite inductivo (que será siempre el mismo) de forma que no se cumple la conmutatividad.

Sea λ_0 un espacio semi-escalonado distinto de φ. Podremos entonces encontrar en él una sucesión (b_n) y una sucesión creciente de enteros positivos $n_1 \leq n_2 \leq \ldots\ldots\ldots\; n_k \leq \ldots$ de forma que para todo k $b_{n_k} > 0$.

Tomemos como E el espacio de Hilbert l^2 con la norma usual que denotaremos por p_2 . Si consideramos los vectores unitarios en l^2 $e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n, \ldots$ existe un conjunto infinito B de tal manera que unido a los e_n formen una base de Hamel en E.

Sea $B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n, \ldots$ una partición numerable de B; para todo n sea

$$E_n = \text{Lin}\ \{ B_1 \cup B_2 \cup \ldots B_n \cup \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \}$$

Los E_n son subespacios densos en E tonelado. Como $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ aplicando un resultado de Valdivia ([36]) tenemos que

$$E = \varinjlim E_n \quad \text{(estricto)}$$

Veamos que sin embargo $\lambda_o\{E_\tau\} \neq \varinjlim \lambda_o\{E_{\tau_n}\}$ donde en los espacios semi-escalonados consideramos la topología semi-normal. Tomemos para cada n un $x_n \in E_{n+1} \setminus E_n$

Al ser l^2 metrizable existen reales positivos α_n de forma que la sucesión $\alpha_n x_n$ converge a cero en la norma p_z.

Sea $y_n = \alpha_n b_n x_n \quad n = 1,2,3,\ldots\ldots$. Si $(a_n) \in \lambda^\times$

$$(a_n b_n \, p_z(\alpha_n x_n)) \in c_0$$

ya que $(a_n b_n) \in c_0$ y $(p_z(\alpha_n x_n)) \in c_0$

Por lo tanto $(y_n) \in \lambda_0\{E_z\}$, mientras que como $x_n \notin E_n$, $(y_n) \notin \lambda_0\{E_n\}$

luego $$\lambda_0\{E_z\} \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_0\{E_n\} \quad .$$

Sin embargo podemos enunciar:

<u>Proposición 3.6</u> Sea E_ξ espacio localmente convexo localmente completo. Sea $\{E_n : n = 1,2,3,\ldots\}$ una sucesión creciente de subespacios localmente completos de E , cuya unión es E.

Si para λ_0 , $\lambda_0\{E_z\}$ es tonelado, entonces $\lambda_0\{E_z\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_0\{E_z\}$

y $\varinjlim \lambda_0\{E_n\} = \lambda_0\{E\}$.

demostración: sea $(x_n) \in \lambda_0\{E_z\}$ y sea $(a_n) \in \lambda^\times$. La sucesión $a_n x_n$ converge a cero en la topología ξ . Al ser E localmente completo, B su envoltura cerrada y absolutamente convexa es compacta , así pues E_B es Banach. Los E_n son localmente completos luego

$$E_B \cap E_n \quad \text{es cerrado en } E_B \text{ para todo } n$$

y por lo tanto $E_B = \bigcup (E_B \cap E_n)$. Podemos entonces encontrar aplicando el teorema de Baire un n_0 de forma que $E_B \subset E_n \cap E_B$ es decir $B \subset E_{n_0}$ y por lo tanto $(a_n x_n)$ converge a cero en la topología ξ_{n_0}, y $(x_n) \in \lambda_0\{E_{n_0}\}$. La segunda parte de la tésis es inmediata usando el resultado de Valdivia ([36] cor. 1.5). ∎

B I B L I O G R A F I A

[1] DE GRANDE-DE KIMPE, N.:" Gegeneralizeerde Rijenruimten (Generalized Sequence spaces)". Thesis , Utrecht (1970).

[2] ____________________.:"Continuous linear mappings between generalized sequence spaces". Pro. Kon.Ned.Acad. v. Wet. A 74 (4) (1971), 301-319.

[3] ____________________.:" Λ-mappings between locally convex spaces". Pro. Kon. Acad. v. Wet. A 74 (4) (1971), 261-274.

[4] ____________________.:" Operator Theory for bornological spaces". Bull. Soc. Math. Belg. XXVI (1974),3-23.

[5] ____________________.:" Equicontinuous Schauder bases and compatible locally convex topologies". Pro. Kon. Ned. Acad. v. Wet. A 77 (3) (1974), 276-283.

[6] ____________________.:"On the dual of L(E,F)". J. reine angw. Math. Band 276 (1975), 170-176.

[7] ____________________.:"On Λ-bases". J. of Math. Anal. and Applications . vol53 no.3 (1976),508-520.

[8] ______________________.:"Locally convex spaces for which $\lambda(E)= \lambda[E]$ and the Dvoretsky-Rogers theorem". Comp. Math. 35 Fasc.2 (1977), 139-145.

[9] ______________________.:"Criteria for nuclearity in terms of generalized sequence spaces". Archiv. der Math. XXVIII Fasc.6 (1977),644-651.

[10] DUBINSKY, E.: " Echelon spaces of order ∞ ". Pro. Am. Math. Soc. 16 (4),(1965),1178-1183.

[11] ____________.:" The structure of nuclear Fréchet Spaces". Lecture Notes in Math.(Springer-Verlag) 720.(1979).

[12] GALUSINSKI, G.:" Sur les espaces de suites à valeurs vectorielles". Publ. Dep. Math.(Lyon) 10 Fasc.2 (1973), 101-153.

[13] GREGORY,D.A.: "Some basic properties of vector sequence spaces". J. reine angew. Math. Band 237 (1969),26-38.

[14] ____________.:"Hereditary properties of vector sequence spaces", J. reine angew. Math. Band 243(1970) , 66-69.

[15] GRIBANOV,J.I.:"Abstract spaces of sequences". (Ruso) Izv. Vyss. Uceb. Zavd. Math. 45 (1965),58-68 (M.R.32 , 1541).

[16] GROTHENDIECK,A.:"Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires ".Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[17] GUPTA,M. KAMTHAN,P.K., RAO,K.L.N.:"The generalized sequence spaces c, c_0, l^1, l^∞ and their Köthe duals". Tamkang Math. J.7 (1976),175-178.

[18] ________________;"Duality in certain generalized Köthe sequence spaces". Bull.Inst. Math. Acad. Sinica vol.5 no.2 (1977),285-298.

[19] ________________:"Generalized Köthe sequence spaces and descompositions". Ann. Mat. Pura Appl. Dec. issue 113 (4) (1977),287-301.

[20] HORVATH,J. :"Topological Vector Spaces and Distributions" VolI Addison-Wesley (1966).

[21] JAMESON,G. J. O. :"Topology and Normed Spaces" Chapman and Hall Londres (1974).

[22] LATIMER,A.B.,RUCKLE,W.H.;"Nuclear FK-sum spaces". Math. Ann. 208 (1974) 213-220.

[23] KOTHE, G.:"Neue Begründung der Theorie der vollkommenen Räume". Math. Nachr. 4, (1951) 70-80.

[24] ________.:"Topological Vector Spaces I ".Springer-Verlag (1969).

[25] ________.:"Topological Vector Spaces II ". Springer - Verlag (1979).

[26] KOTHE,G.,TOEPLTZ,O.:"Lineare Räume mit unendlich vielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen". J. reine angew Math. 171 (1934)193-226.

[27] LEONARD, J.E.: "Banach Sequence Spaces". J. of Math. Anal. and Appl. 54 (1976), 245-265.

[28] MARQUINA, A. , SANZ SERNA J.M.: "Barrelledness conditions on $c_0(E)$" Archiv der Math. 31 Fasc.6 (1978), 548-596.

[29] PHUONG-CÁC, N. : "Sur les espaces de suites parfaits généralisés". Math. Annalen 171 (1967), 131-143.

[30] ____________.: "On some spaces of vector valued sequences". Math. Z. 95 (1967), 242-250.

[31] PIETSCH, A.: "Verallgemeinerte vollkommene Folgenräume". Schr. Forschunggsinst. Math. Heft 12, Berlin(1962).

[32] __________.: "Nuclear locally convex spaces" . Springer-Verlag (1972).

[33] ROSIER, R. C.: "Dual spaces of certain vector sequence spaces ". Pacific J. Math. vol 46 (2) (1973), 487-501.

[34] SANZ SERNA, J. M.: "Espacios de sucesiones vectoriales acotadas ". Tésis Doctoral. Valladolid(1977). (C.S.I.C memo. XVII).

[35] TREVES , F.: "Topological vector spaces, distributions and kernels" Academic Press. (1967).

[36] VALDIVIA, M.: "Absolutely convex sets in barrelled spaces". Ann. Inst. Fourier vol. 21 (1971), 3-13.

[37] ____________.:"Representaciones de los espacios $\mathcal{D}(\Omega)$ y $\mathcal{D}'(\Omega)$". Rev. Real Acad. Ciencias LXXII,3,(1978),385-414.

[38] ____________.:"A characterization of echelon Köthe-Schwartz spaces". Approx. Theory and Funct. Analysis (North Holland.1979),409-419.

[39] ____________.:"Cocientes de espacios escalonados". Rev. Real Acad. Ciencias LXXIII,2,(1979),169-183.

[40] ____________.:"Algunas propiedades de los espacios escalonados". Rev. Real Acad. Ciencias LXXIII,3,(1979),389-400.

[41] ____________.:"Espacios de sucesiones". Ayudas Manuel Aguilar. Madrid.(1980).

[42] ____________.:"Espacios semi-escalonados". Rev. Real Acad. Ciencias (Pendiente de publicación).

[43] ____________.:"Sobre el espacio $\mathcal{B}_0(\Omega)$". Rev. Real Acad. Ciencias (Pendiente de publicación).

[44] YAU-CHUEN WONG.:"Schwatrz spaces, nuclear spaces and tensor products". Lecture Notes in Math.(Springer- Verlag) 726.(1979).

C O N T E N I D O

[illegible] VALENCIA [illegible]

Reunido el Tribunal [illegible] fecha, acordó [illegible] al de

D. RAFAEL CRESPO GARCÍA

la calificación de SOBRESALIENTE CUM LAUDE.

Valencia, a 31 de OCTUBRE de 1980

El Secretario,

El Presidente

[illegible] VALENCIA– [illegible] CIENCIAS MATEMATICAS