UNIVERSIDAD DE VALENCIA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

HOLOMORFIA Y DESARROLLOS ASINTOTICOS EN DIMENSION INFINITA

Memoria presentada para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas, por

DOMINGO GARCIA RODRIGUEZ

MANUEL VALDIVIA UREÑA, Catedrático de Análisis Matemático II y III de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Valencia,

CERTIFICA:

Que la presente memoria "Holomorfía y desarrollos asintóticos en dimensión infinita", ha sido realizada bajo su dirección en el Departamento de Teoría de Funciones de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Valencia por D. Domingo García Rodríguez, y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que conste en cumplimiento de la legislación vigente, presenta y apadrina ante la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Valencia la referida tesis, firmando el presente certificado.

Valencia, 20 de Octubre de 1983

Fdo. Manuel Valdivia Ureña.

Mi sincero agradecimiento al Prof. Dr. D. Manuel Valdivia Ureña por su constante orientación y estímulo en la elaboración de esta Memoria.

A mis padres

I N D I C E

Siendo F un espacio de Fréchet, dotamos de una topología $\mathcal{T}$ localmente convexa al espacio de las funciones holomorfas con desarrollo asintótico en el origen, consiguiendo así un espacio completo, pero no metrizable. Se demuestra que no existe ninguna topología sobre este espacio, que le dote de estructura de espacio de Fréchet y que implique la convergencia puntual.

La completitud es conseguida introduciendo desarrollos asintóticos a través de sucesiones de compactos, y estructurando al espacio $\mathcal{A}(\Omega,F)$ como límite proyectivo de espacios de Fréchet. Si el espacio F es de Fréchet-Montel conseguimos que $\mathcal{A}(\Omega,F)$ se pueda estructurar como límite proyectivo de espacios de Fréchet--Montel.

Un estudio paralelo se hace en el capítulo segundo con los espacios de funciones holomorfas cuyas diferenciales se extienden por continuidad en el origen, $\mathcal{B}(\Omega,F)$. Estos espacios, probamos que están contenidos en los espacios $\mathcal{A}(\Omega,F)$.

Dotamos de una topología $\mathcal{T}'$ al espacio $\mathcal{B}(\Omega,F)$, y se prueba que $\mathcal{T}'$ es más fina que la inducida por $\mathcal{T}$ sobre $\mathcal{B}(\Omega,F)$.

Al igual que en el caso de $\mathcal{A}(\Omega,F)$, sobre $\mathcal{B}(\Omega,F)$ no existe ninguna topología que le dote de estructura de espacio de Fréchet y que implique la convergencia puntual. También, $\mathcal{T}'$ es completa y no metrizable, si F es espacio de Fréchet.

Introducimos los espacios de funciones holomorfas cuyas diferenciales se extienden en el origen a través de una sucesión de compactos y mediante ellos, se estructura, si F es un espacio de Fréchet-Montel, $\mathcal{B}(\Omega,F)[\mathcal{T}']$ como el límite proyéctivo de una familia de espacios de Fréchet-Montel.

Los espacios de funciones holomorfas con desarrollo asintótico y aquellos cuyas diferenciales se extienden por continuidad en el origen, a través de una sucesión de compactos, son también comparados.

Recogiendo de WILANSKY [A] la definición de FH-espacio, el capítulo tercero es dedicado a definir ciertos subespacios $\mathcal{A}_r(\Omega,F)$ de $\mathcal{A}(\Omega,F)$ y $\mathcal{B}_r(\Omega,F)$ de $\mathcal{B}(\Omega,F)$, dotados de nuevas topologias $\mathcal{T}_r$ y $\mathcal{T}'_r$, que resultan ser FH-espacios, tomando H como $\mathcal{A}(\Omega,F)$ y $\mathcal{B}(\Omega,F)$, respectivamente.

Se hace un estudio comparativo de los espacios $\mathcal{A}_r(\Omega,F)$ y $\mathcal{B}_r(\Omega,F)$, así como de sus topologías τ_r y τ_r'.

Si F es un espacio de Fréchet, Ω un subconjunto abierto convexo de un espacio de Silva E, y (z_n) una sucesión densa en la frontera de Ω , $\partial\Omega$, se consideran los espacios de funciones holomorfas con desarrollo asintótico en z_n , a través de una sucesión de compactos y los espacios correspondientes de funciones holomorfas cuyas diferenciales se extienden en z_n a través de una sucesión de compactos. Se estudian los núcleos localmente convexos de estos espacios y se comparan. Esto constituye el cuarto capítulo.

El contenido de estos primeros capítulos es una extensión de las investigaciones que fueron realizadas para funciones de una o varias variables complejas por HERRERO [1] , MIRA [1] y FERNANDEZ [1] .

Entre los años 1979 y 1980, ISIDRO[1] y [2] y ANSEMIL-PONTE [1] , hacen una descripción y estudio del dual topológico del espacio de las funciones holomorfas de tipo acotado, definidas en un abierto equilibrado Ω de un espacio normado E con valores en un espacio de Banach F, dotado de su topología natural. Nosotros, consideramos E el dual topológico de un espacio de Fréchet G, dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos compactos de G, Ω un subconjunto de E abierto, equilibrado y holomorficamente convexo, y F un espacio de Fréchet. Se dota a $\mathcal{H}(\Omega,F)$, espacio de las funciones holomorfas de Ω en F, de la topología compacta τ_0 . Un estudio de la dualidad topológica de $(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)$ es llevado a cabo en el quinto capítulo, obteniendo un isomorfismo entre el espacio $(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)'$ y un cierto espacio de sucesiones.

El problema de Watson para el circulo de $\mathbb{C}$ de centro el punto uno y de radio uno fue resuelto por CARLEMAN [1] . Este problema es extendido a ciertas clases de espacios localmente convexos, entre los que estan los espacios que son dual fuerte de un espacio de Fréchet-Montel. Se resuelve el problema haciendo intervenir la función T(r) de Ostrowski.

Por último, siguiendo a VALDIVIA [2], se dan ciertos teoremas de interpolación en holomorfía infinita, cuando se considera el espacio de llegada un producto arbitrario de espacios de Fréchet.

Para finalizar esta introducción, quiero expresar mi gratitud a mi amigo el profesor José Bonet por sus constantes muestras de ánimo y estímulo.

CAPITULO I

§I. ESPACIOS DE FUNCIONES HOLOMORFAS CON DESARROLLO ASINTOTICO EN DIMENSION INFINITA.

DEFINICION 1.1

Un espacio localmente convexo $E[\mathcal{T}]$ es un espacio de Silva cuando existe una sucesión creciente de espacios de Banach que cubre a E, tal que la aplicación inclusión de cada espacio de Banach en el siguiente es compacta, siendo la topología de E la topología límite inductivo correspondiente a esa descomposición.

Recordamos que un espacio de Silva es el dual fuerte de un espacio de Fréchet-Schwartz y que, existe una sucesión (B_n), con $B_n \subset B_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, fundamental de subconjuntos absolutamente convexos acotados de E tal que, si E_{B_n} denota la envoltura lineal B_n, normado con el funcional de Minkowski de B_n, denotado por $\|\cdot\|_{B_n}$, E_{B_n} es un espacio de Banach y B_n es compacto en el es pacio de Banach $E_{B_{n+1}}$. Si E es un espacio de Silva y F es un espacio localmente convexo, denotamos por L(E,F) el espacio vectorial de las aplicaciones lineales y continuas de E en F y, si $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$, denotamos por $L_{q,s}(E^q, F)$ el espacio vectorial de las aplicaciones q-lineales, simétricas y continuas de E^q en F. Si $u \in L_{q,s}(E^q,F)$ y $x \in E$ escribimos $u(x^q)$ para $u(x,x,\ldots,x)$. Estos espacios se consideran dotados con la topología compacta abierta, denotada por τ_o. Todos los espacios localmente convexos E y F considerados aquí son complejos. Si Ω es un subconjunto abierto de E, decimos que una aplicación $f : \Omega \longrightarrow F$ es holomorfa si, y sólo si, es G-analítica y continua; denotamos por $\mathcal{H}(\Omega,F)$ el espacio vectorial de las aplicaciones holomorfas de Ω en F.

DEFINICION 1.2

Sea Ω un subconjunto abierto convexo de E, siendo E un espacio de Silva. Sea F un espacio localmente convexo. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega,F)$, $0 \in \partial\Omega$, diremos que f tiene desarrollo asintótico en $0 \in \partial\Omega$, si, y sólo si, existen $u_o \in F$, $u_1 \in L(E,F)$, $u_q \in L_{q,s}(E^q,F)$ $q \geq 2$, tal que:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{q} u_m(x^m) + \|x\|_{B_n}^{q} \, \varepsilon_{n,q}(x) \quad , \quad x \in \Omega \cap E_{B_n}$$

donde $\varepsilon_{n,q}(x) \longrightarrow 0$ en F, cuando $x \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$ mientras que

x esté en cualquier $K_{n,p}$, $p \in \mathbb{N}$, siendo

$$K_{n,p} = \left\{ x \in \Omega \cap E_{B_n} \; : \; |\varphi(x)| \geq \frac{1}{p} \|x\|_{B_n} \right\}$$

de manera que φ es aquélla forma lineal y continua que por el teorema de Hahn-Banach, y al ser Ω convexo, podemos encontrar, cumpliendo $\mathrm{Re}\, \varphi(\Omega) > 0$, y así $|\varphi(\Omega)| > 0$.

Siempre que $x \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$, mientras que x esté en cualquier $K_{n,p}$, se tiene que $f(x) \rightarrow u_0$ en F. Se considera, así, f definida en cero como $f(0) = u_0$.

<u>NOTA</u>.-

Aunque los resultados que obtendremos son válidos para un punto $\xi \in \partial\Omega$, por comodidad trabajaremos con desarrollos asintóticos en $0 \in \partial\Omega$, definidos arriba, y no con desarrollos asintóticos en $\xi \in \partial\Omega$, cuya definición fácilmente puede desprenderse de la anterior.

<u>PROPOSICION 1.1</u>

La función f determina unívocamente las aplicaciones u_p .

<u>Demostración</u>.- Supongamos que existen a_p , p=0,1,2,... verificando lo mismo que u_p .

Podemos escribir:

$$f(x) = u_0 + \varepsilon_{n,0}(x) \quad , \quad x \in \Omega \cap E_{B_n}$$

$f(x) = a_0 + \beta_{n,0}(x)$, $x \in \Omega \cap E_{B_m}$

donde $\varepsilon_{n,0}(x) \longrightarrow 0$ en F, cuando $x \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$, siempre que x esté en $K_{n,p}$. Lo mismo para $\beta_{n,0}(x)$. Pero $u_0, a_0 \in F$, luego existe el límite de f(x) en F, cuando $x \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$ siempre que x esté en $K_{n,p}$. Este límite vale, respectivamente, u_0 y a_0 . y, por tanto, $u_0 = a_0$.

Procederemos por inducción y supondremos $u_0 = a_0$, $u_1 = a_1$,...., $u_{r-1} = a_{r-1}$, y veamos que $u_r = a_r$.

Sea $\alpha \in$ s.c.(F) y se tiene que

$$\frac{\alpha(u_r(x^r) - a_r(x^r))}{\|x\|^r_{B_n}} = \alpha(\varepsilon_{n,r}(x) - \beta_{n,r}(x)), \quad x \in \Omega \cap E_{B_n}$$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $\|x\|_{B_n} \leq \delta$, $x \in K_{n,p}$, entonces

$$\alpha(u_r(x^r) - a_r(x^r)) \leq \varepsilon \|x\|^r_{B_n}$$

pues $\varepsilon_{n,r}(x) - \beta_{n,r}(x) \longrightarrow 0$ cuando $x \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$, $x \in K_{n,p}$.

Sea $x \in \Omega \cap E_{B_n}$. Como $0 \in \partial\Omega$ y Ω es convexo, resulta que $(0,x] = \{\lambda x : 0 < \lambda \leq 1\} \subset \Omega \cap E_{B_n}$. Así $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+$ tal que $x = \lambda x_1$ con $x_1 \in \Omega \cap E_{B_n}$ y $\|x_1\|_{B_n} \leq \delta$; y si $x \in K_{n,p}$, también $x_1 \in K_{n,p}$.

Luego $\alpha(u_r(x_1^r) - a_r(x_1^r)) \leq \varepsilon \|x_1\|^r_{B_n}$.

Pero evaluando ahora en $x = \lambda x_1$, $\alpha(u_r(x^r) - a_r(x^r)) =$

$= \alpha(\lambda^r(u_r(x_1^r) - a_r(x_1^r))) = \lambda^r \alpha(u_r(x_1^r) - a_r(x_1^r)) \leq \lambda^r \varepsilon \|x_1\|^r_{B_n} =$

$= \varepsilon \|\lambda x_1\|^r_{B_n} = \varepsilon \|x\|^r_{B_n}$

siendo esto válido para todo $\varepsilon > 0$, de donde obtenemos que

$$\alpha\,(u_r(x^r) - a_r(x^r)) = 0 \ ,\forall x \in \Omega \cap E_{B_n},\ \forall \alpha \in sc(F).$$

Haciendo esto $\forall x \in \Omega$, $\forall \alpha \in SC(F)$, se tiene que $u_r(\Omega^r) = a_r(\Omega^r)$. Como Ω es abierto y u_r y a_r son funciones enteras, resulta que $u_r \equiv a_r$.

C. Q.D.

DEFINICION 1.3

Llamamos $\mathcal{A}(\Omega,F)$ al conjunto de funciones de $\mathcal{H}(\Omega,F)$, tal que poseen desarrollo asintótico en el origen.

PROPOSICION 1.2

$\mathcal{A}(\Omega,F)$ es un subespacio vectorial propio de $\mathcal{H}(\Omega,F)$. Si Ω es de Runge y F es completo y tiene la propiedad de aproximación, entonces $\mathcal{A}(\Omega,F)$ es denso en $\mathcal{H}(\Omega,F)$.

Demostración.- Veamos primeramente que $\mathcal{A}(\Omega,F)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{H}(\Omega,F)$. Si f y g son elementos de $\mathcal{A}(\Omega,F)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $f(x) = \sum_{i=0}^{q} u_i(x^i) + \|x\|_{B_n}^q \varepsilon_{n,q}(x)$
$g(x) = \sum_{i=0}^{q} v_i(x^i) + \|x\|_{B_n}^q \eta_{n,q}(x)$, $x \in \Omega \cap E_{B_n}, n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}\cup\{0\}$,
donde $u_0, v_0 \in F$, $u_1, v_1 \in L(E,F)$, $u_i, v_i \in L_{i,s}(^iE,F)$, para $i \geq 2$; $\varepsilon_{n,q}(x) \to 0$ y $\eta_{n,q}(x) \to 0$ en F cuando $x \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$ siempre que x esté en cualquier $K_{n,p}$.

$$(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda \left[\sum_{i=0}^{q} u_i(x^i) + \|x\|_{B_n}^q \varepsilon_{n,q}(x)\right] +$$

$$+\mu\left[\sum_{i=0}^{q} v_i(x^i) + \|x\|_{B_n}^q \eta_{n,q}(x)\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{q} (\lambda u_i + \mu v_i)(x^i) + \|x\|_{B_n}^q (\lambda \varepsilon_{n,q}(x) + \mu \eta_{n,q}(x))$$

donde $\lambda \varepsilon_{n,q}(x) + \mu \eta_{n,q}(x) \to 0$ cuando $x \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$ con x en $K_{n,p}$. Esto nos indica que $\lambda f + \mu g \in \mathcal{A}(\Omega, F)$.

Veamos seguidamente que $\mathcal{A}(\Omega,F)$ es un subconjunto propio de $\mathcal{H}(\Omega, F)$. Sabemos que $\varphi(\Omega)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{C}$, siendo φ la forma lineal definitoria de los conjuntos $K_{n,p}$, pues φ es abierta. Definimos $\beta \in \mathcal{H}(\varphi(\Omega),\mathbb{C})$, $\beta(z) = \frac{1}{z}$. Ahora bien, $\alpha \in \mathcal{H}(\Omega,\mathbb{C})$, si definimos $\alpha(x) = \beta(\varphi(x)) = \frac{1}{\varphi(x)}$. Dado $a \in F$, construimos $f \in \mathcal{H}(\Omega, F)$, de forma que $f(x) = a \cdot \alpha(x)$ $\forall x \in \Omega$. Esta función f es una función holomorfa, que no tiene desarrollo asintótico en cero. Si tuviera desarrollo asintótico en el origen, existiría $u_0 \in F$, de manera que $f(x) = u_0 + \varepsilon_{n,0}(x)$, $x \in \Omega \cap E_{B_n}$, tal que $\varepsilon_{n,0}(x) \to 0$ cuando $x \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$ y x está en un $K_{n,p}$. De esto resulta que $f(x) \to u_0$, cuando $x \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$ y x está en un $K_{n,p}$. Sea $x_0 \in \Omega \cap E_{B_n}$ fijo, así x_0 pertenece a K_{n,p_0}, con $p_0 \in \mathbb{N}$ y sea $0 < \theta_m < 1$ para m = 1, 2, ... tal que $\theta_m \to 0$. Así $x_m = \theta_m x_0 \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$ y $x_m \in K_{n,p_0}$, m = 1. 2, ..., pero

$$f(x_m) = a \cdot \alpha(x_m) = a \cdot \frac{1}{\varphi(x_m)} = a \cdot \frac{1}{\theta_m \varphi(x_0)}$$

que no converge en F. Luego F no tiene desarrollo asintótico en el origen.

Si F es completo y tiene la propiedad de aproximación, se cumple $(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0) = (\mathcal{H}(\Omega),\tau_0)\,\varepsilon\, F = (\mathcal{H}(\Omega),\tau_0)\tilde{\otimes}_\varepsilon F$, DINEEN [5] (Cor. 6.35). Así $\mathcal{H}(\Omega)\otimes F$ es denso en $(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)$. Pero los polinomios continuos sobre E, $\Pi(E)$, son densos en $(\mathcal{H}(\Omega),\tau_0)$, por ser Ω de Runge. De este modo $\Pi(E)\otimes F$ es denso en $(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)$, con lo cual $\mathcal{A}(\Omega,F)$ es denso en $(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)$.

C.Q.D.

Vamos a dotar, ahora, a $\mathcal{A}(\Omega,F)$ de una topología $\mathcal{T}$. En lo que resta de capítulo, F será un espacio de Fréchet. Sea K un compacto de $\Omega\cup\{0\}$, tal que $0\in K$, estrellado respecto al origen. Entonces $\exists n_K\in\mathbb{N}$, de modo que $K\subset E_{B_n}$ y K es compacto en E_{B_n}, $\forall n\geq n_K$. Sea $p_m\in sc(F)$, Definimos $V(K,m,n)=\{f\in\mathcal{A}(\Omega,F):\ \sup_{x\in K\cap k_{n,n}} p_m(f(x))\leq 1\}$,

$$V'(n,r,m)=\{f\in\mathcal{A}(\Omega,F):\ \forall q\in\mathbb{N},\ 0\leq q\leq r,$$
$$(1)\ p_m(a_q(f)(B_n)^q)\leq 1$$
$$(2)\ \sup_{x\in K\cap B_n\cap k_{n,n}} p_m(\varepsilon_{n,q,f}(x))\leq 1\},$$

donde, dada f en $\mathcal{A}(\Omega,F)$, existen $a_0(f)\in F$, $a_1(f)\in L(E,F)$, $a_q(f)\in L_{q,s}(E^q,F)$, $q\geq 2$, tal que

$$f(x)=\sum_{i=0}^{q} a_i(f)(x^i) + \|x\|_{B_n}^q\,\varepsilon_{n,q,f}(x),\quad x\in\Omega\cap E_{B_n}$$

tal que $\varepsilon_{n,q,f}(x)\to 0$ cuando $x\xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$ si $x\in k_{n,p}$, $p\in\mathbb{N}$ $n\in\mathbb{N}$, Denotamos por $a_q(f)(B_n)^q$ a los elementos de la forma $a_q(f)(x^q)$, $\forall x\in B_n$.

Dotamos a $\mathcal{A}(\Omega,F)$ de la topología τ localmente convexa que admite como base de entornos de cero los conjuntos $V(K,m,n) \cap V'(n,r,m)$, cuando K, m, n, r, varían como hemos indicado, esto es, K compacto de $\Omega \cup \{0\}$, estrellado respecto al origen y conteniendo a éste; $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_K$, de modo que $K \subset E_{B_n}$ y K es compacto en E_{B_n}; $m \in \mathbb{N}$; r = 0, 1, 2, ...

No existe una sucesión fundamental de compactos con las propiedades que tienen que cumplir los compactos que aparecen en la definición de la base de entornos de cero dada, pues si así fuera, tendríamos definida una topología que nos daría un espacio de Fréchet y que a su vez implicaría la convergencia puntual. Esto no es posible gracias a:

TEOREMA 1.1

Sobre el espacio $\mathcal{A}(\Omega,F)$ no existe ninguna topología que le dote de estructura de espacio de Fréchet y que implique la convergencia puntual.

Demostración.- Supongamos que exista una tal topología T en $\mathcal{A}(\Omega,F)$. Podemos pues considerarla definida por una sucesión creciente de seminormas $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \ldots \leq \|\cdot\|_m \leq \ldots$

Por ser Ω abierto convexo, resulta que $\varphi(\Omega)$ es también abierto convexo, siendo φ como siempre la forma lineal introducida en los conjuntos $K_{n,p}$,y $Re(\varphi(\Omega))>0$, luego $0\in\partial\varphi(\Omega)$. De esta manera, sea (z_n) una sucesión de puntos de $\partial\varphi(\Omega)$ tal que $z_n\longrightarrow 0$.

Consideramos las funciones $b_n(x)=\dfrac{a}{\varphi(x)-z_n}$ para n = 1, 2, ..., y $a\in F$ fijado. Estas funciones $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son de $\mathcal{A}(\Omega,F)$. Formamos la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2^n(1+\|b_n\|_n)}$.

Esta serie es convergente, ya que cualquiera que sea $r\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{n\geq r}\frac{\|b_n\|_r}{2^n(1+\|b_n\|_n)}\leq\sum_{n\geq r}\frac{1}{2^n}$$

luego, debido a que la convergencia en $\mathcal{A}(\Omega,F)$ nos implica la convergencia puntual, llamamos g(x) a esta suma puntual.La función g, sin embargo, no tiene desarrollo asintótico en el origen. Sea $\omega\in F'$, tal que $\omega(a)=1$, y sea $\bar{g}=\omega\circ g$.

Veamos que $\bar{g}$ no está acotada en ningún entorno del origen. Sea U un entorno del origen, así $\varphi(U)$ es un entorno del origen y a partir de un índice $k\in\mathbb{N}$, $(z_n)_{n\geq k}\subset\varphi(U)$. Sea z_n fijo, $z_n\in\varphi(U)$, y sea una bola $B=B(z_n,\delta)\subset\varphi(U)$, tal que en B no haya ningún z_m , $m\neq n$ y tal que $|z-z_m|>\delta$, $\forall m\neq n$, $\forall z\in B$.

Veamos que en $U\cap\varphi^{-1}(B\cap\varphi(\Omega))$, $\bar{g}$ no está acotada:

$$\bar{g}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\dfrac{1}{\varphi(x)-z_m}}{2^m(1+\|b_m\|_m)} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\varphi(x)-z_n}}{2^n(1+\|b_n\|_n)} + \sum_{m\neq n} \frac{\dfrac{1}{\varphi(x)-z_m}}{2^m(1+\|b_m\|_m)}$$

Tomando módulos :

$$|\bar{g}(x)| \leq \frac{\dfrac{1}{|\varphi(x)-z_n|}}{2^n(1+\|b_n\|_n)} + \sum_{m\neq n} \frac{\dfrac{1}{|\varphi(x)-z_m|}}{2^m(1+\|b_m\|_m)} \leq$$

$$\leq \frac{\dfrac{1}{|\varphi(x)-z_n|}}{2^n(1+\|b_n\|_n)} + \frac{1}{\delta} \sum_{m\neq n} \frac{1}{2^m}$$

Así, la parte $\sum_{m\neq n} \frac{\frac{1}{|\varphi(x)-z_m|}}{2^m(1+\|b_m\|_m)}$ está acotada, en cambio $\frac{\frac{1}{|\varphi(x)-z_n|}}{2^n(1+\|b_n\|_n)}$ no está acotada cuando

$x \in U \cap \varphi^{-1}[B \cap \varphi(\Omega)]$.

C.Q.D.

Seguidamente, probaremos que el espacio $\mathcal{A}(\Omega,F)$ dotado de la topología $\mathcal{T}$ es un espacio completo; para ello, veremos que $\mathcal{A}(\Omega,F)[\mathcal{T}]$ es el límite proyectivo de una familia de espacios de Fréchet.

§ 2. DESARROLLOS ASINTOTICOS EN DIMENSION INFINITA A TRAVES DE SUCESIONES DE COMPACTOS. LOS ESPACIOS $\mathcal{A}_\alpha(\Omega,F)[\mathcal{T}_\alpha]$.

DEFINICION 2.1

Dada una sucesión fundamental de compactos de Ω , $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \ldots \subset \Delta_n \subset \ldots$, que siempre podemos encontrar por MUJICA [1] (Teor. 7.4), llamamos $\{K_{\alpha p}\}_{p=1}^{\infty}$ a una sucesión de compactos de $\Omega \cup \{0\}$, estrellados respecto al origen, cumpliendo las siguientes condiciones:

(1) $0 \in K_{\alpha p}$, p = 1, 2, ...

(2) $\Delta_p \subset K_{\alpha p}$, p = 1, 2, ...

(3) $K_{\alpha p} \subset K_{\alpha p+1}$, p = 1, 2, ...

con α recorriendo un conjunto de índices Γ , infinito no numerable.

DEFINICION 2.2

Diremos que $f \in \mathcal{H}(\Omega, F)$ tiene desarrollo asintótico en el origen a través de la sucesión de compactos $\{K_{\alpha p}\}_{p=1}^{\infty}$ si, y sólo si, existen $u_0^{\alpha}(f) \in F$, $u_1^{\alpha}(f) \in L(E,F)$, $u_q^{\alpha}(f) \in L_{q,s}(E^q, F)$, $q \geq 2$, tal que

$f(x) = \sum_{m=0}^{q} u_m^{\alpha}(f)(x^m) + \|x\|_{B_n}^q \; \varepsilon_{n,q,f}^{\alpha}(x)$, $x \in \Omega \cap E_{B_n}$, donde $\varepsilon_{n,q,f}^{\alpha}(x) \to 0$ en F, cuando $x \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$ con $x \in K_{n,p} \cap K_{\alpha \ell}$, $n, p, \ell \in \mathbb{N}$, q = 0, 1, 2, ...

Llamamos $\mathcal{A}_{\alpha}(\Omega, F)$ al espacio vectorial complejo de las funciones de $\mathcal{H}(\Omega, F)$ que tengan desarrollo asintótico en el origen a través de la sucesión de compactos $\{K_{\alpha p}\}_{p=1}^{\infty}$, y τ_{α} a la topología sobre $\mathcal{A}_{\alpha}(\Omega, F)$ que admite por base de entornos de cero a los conjuntos $V(K_{\alpha \ell}, m, n) \cap V'(n, r, m)$ donde

$$V(K_{\alpha\ell}, m, n) = \{ f \in \mathcal{A}_\alpha(\Omega, F) : \sup_{x \in K_{\alpha\ell} \cap K_{n,n}} p_m(f(x)) \leq 1 \}$$

$$V'(n, r, m) = \{ f \in \mathcal{A}_\alpha(\Omega, F) : \forall q \in \mathbb{N} \quad 0 \leq q \leq r$$

$$(1) \quad p_m(u^\alpha_q(f)(B_n)^q) \leq 1$$

$$(2) \quad \sup_{x \in K_{\alpha\ell} \cap B_n \cap K_{n,n}} p_m(E^\alpha_{n,q,f}(x)) \leq 1 \}$$

y $p_m \in sc(F)$, $K_{\alpha\ell} \subset E_{B_n}$ y $K_{\alpha\ell}$ es compacto en E_{B_n} , $n \geq n_{\alpha\ell}$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, $m \in \mathbb{N}$.

PROPOSICION 2.1

$\mathcal{A}_\alpha(\Omega, F)[\tau_\alpha]$ es un espacio de Fré chet.

Demostración.- El espacio $\mathcal{A}_\alpha(\Omega, F)[\tau_\alpha]$ es un espacio metrizable, puesto que la base de entornos de cero es numerable. Sólo queda ver que $\mathcal{A}_\alpha(\Omega, F)[\tau_\alpha]$ es completo.

Sea $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{A}_\alpha(\Omega, F)[\tau_\alpha]$. Esta es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}(\Omega, F)$, cuando en este espacio tenemos la topología compacta abierta τ_0, puesto que $\Delta_\ell \subset K_{\alpha\ell} \cap K_{n,n}$, para algún $n \in \mathbb{N}$, que depende de ℓ. Debido a que $\mathcal{H}(\Omega, F)$ con la topología compacta abierta es un espacio de Fréchet, existe una función f en $\mathcal{H}(\Omega, F)$, tal que $f_j \to f$ en $(\mathcal{H}(\Omega, F), \tau_0)$. Para cada q fijado, la sucesión $(u^\alpha_q(f_j))_{j \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L_{q,s}(E^q, F)$, considerando aquí la topología compacta abierta, luego ésta converge a un elemento de este espacio que denotamos por $u^{\alpha}_{q}(f)$; y para cada $x \in K_{\alpha\ell} \cap K_{n,n} \cap B_n$, la sucesión $(\varepsilon^{\alpha}_{n,q,f_j}(x))_{j=1}^{\infty}$ es de Cauchy en F, luego converge a un elemento de F, denotado por $\varepsilon^{\alpha}_{n,q,f}(x)$; puesto que la sucesión $(\varepsilon^{\alpha}_{n,q,f_j}(x))_{j\in\mathbb{N}}$ es uniformemente convergente para $x \in K_{\alpha\ell} \cap K_{n,n} \cap B_n$ resulta que $\varepsilon^{\alpha}_{n,q,f}(x) \longrightarrow 0$ en F cuando $x \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$ y x queda en $K_{\alpha\ell} \cap K_{n,n}$. Esto sería válido para cualquier $K_{n,p}$, debido a que $K_{n,p} \subset K_{n+1,p} \subset K_{n+1,p+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

Tenemos $f_j(x) = \sum_{i=0}^{q} u^{\alpha}_{i}(f_j)(x^i) + \|x\|^q_{B_n} \varepsilon^{\alpha}_{n,q,f_j}(x)$ si $x \in \Omega \cap E_{B_n}$ y $\varepsilon^{\alpha}_{n,q,f_j}(x) \longrightarrow 0$ cuando $x \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$ en cada $K_{\alpha\ell} \cap K_{n,p}$. Tomando límites ahora para $j \longrightarrow \infty$ queda $f(x) = \sum_{i=0}^{q} u^{\alpha}_{i}(f)(x^i) + \|x\|^q_{B_n} \varepsilon^{\alpha}_{n,q,f}(x)$ si $x \in \Omega \cap E_{B_n}$ y $\varepsilon^{\alpha}_{n,q,f}(x) \longrightarrow 0$ cuando $x \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$ en cada $K_{\alpha\ell} \cap K_{n,p}$. Así f está $\mathcal{A}_{\alpha}(\Omega, F)$, y $\mathcal{A}_{\alpha}(\Omega,F)[\tau_{\alpha}]$ es un espacio de Fréchet.

C.Q.D.

PROPOSICION 2.2

Si F es un espacio de Fréchet-Montel, entonces $\mathcal{A}_{\alpha}(\Omega,F)[\tau_{\alpha}]$ es también un espacio de Fréchet-Montel.

Demostración.- Primeramente, probaremos que $\mathcal{H}(\Omega, F)$ con la topología compacta abierta es un espacio de Fréchet--Montel. Debido a que Ω es un abierto de un espacio de Silva, este es un k-espacio. Luego $(\mathcal{H}(\Omega, F), \tau_0) \cong$ $\cong (\mathcal{H}(\Omega), \tau_0) \varepsilon F$, donde τ_0 es la topología compacta abierta, DINEEN[5](Cor. 6.35). Ahora bien, $(\mathcal{H}(\Omega), \tau_0)$ es un espacio Fréchet-Montel, pues todo espacio de Silva es un (DFM)-espacio, DINEEN [3] (Prop. 8). También el ε -producto de dos espacios de Fréchet-Montel es un espacio de Fréchet-Montel, KÖTHE [2] (§ 45, 3 (7)), y con todo esto $(\mathcal{H}(\Omega, F), \tau_0)$ es un espacio de Fréchet-Montel.

Sabemos que $(\mathcal{P}(^m E, F), \tau_0)$ es un subespacio cerrado complementado de $(\mathcal{H}(\Omega, F), \tau_0)$, $\forall m \in \mathbb{N}$, DINEEN[5] (Prop. 2.40), así $(\mathcal{P}(^m E, F), \tau_0)$ es, también, un espacio de Fréchet-Montel.

Debido a que $\mathcal{A}_\alpha(\Omega, F)[\tau_\alpha]$ es un espacio de Fréchet, para ver que se trata de un (FM)-espacio, sólo nos resta probar que si $\{f_j\}$ es una sucesión de funciones de $\mathcal{A}_\alpha(\Omega, F)$, τ_α -acotada, se puede extraer una subsucesión convergente a un elemento f de $\mathcal{A}_\alpha(\Omega, F)$.

Tenemos

$$f_j(x) = \sum_{i=0}^{q} u_i^\alpha(f_j)(x^i) + \|x\|_{B_n}^q \, \varepsilon_{n,q,f_j}^q(x)$$

si $x \in \Omega \cap E_{B_n}$ y $\varepsilon^{\alpha}_{n,q,f_j}(x) \to 0$ cuando $x \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$ en cada $K_{\alpha\ell} \cap K_{n,p}$.

Por la definición de τ_α y teniendo en cuenta que $\Delta_\ell \subset K_{\alpha\ell} \cap K_{n,n}$, $\ell \in \mathbb{N}$, para algún $n \in \mathbb{N}$ que depende de ℓ , tenemos que $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones de $\mathcal{H}(\Omega, F)$ acotada para la topología τ_0 en $\mathcal{H}(\Omega, F)$. Usando el hecho de que este espacio es de Montel, podemos extraer una subsucesión de $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$, que seguimos llamando de la misma manera, tal que converge uniformemente sobre los compactos Δ_ℓ y, al ser F un espacio de Montel, simplemente en cero. Entendemos por valor en cero de una de las funciones de $\mathcal{A}_\alpha(\Omega, F)$, el límite cuando $\xi \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$ con $\xi \in K_{n,p} \cap K_{\alpha q}$, $n, p, q \in \mathbb{N}$, que es el mismo para cualquiera $n, p, q \in \mathbb{N}$. Por otra parte, para cada $q \in \mathbb{N}$ fijado, la sucesión $(u^\alpha_q(f_j))_{j\in\mathbb{N}}$ es acotada en $(\mathcal{P}({}^qE, F), \tau_0)$, el cual es un espacio de Fréchet-Montel, así, empleando un proceso diagonal podemos extraer una subsucesión de $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$, que igualmente llamamos $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$, tal que $(u^\alpha_q(f_j))_{j\in\mathbb{N}}$ converge para todo $q \in \mathbb{N}$.

Vamos a probar a continuación que $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es τ_α-Cauchy, con lo cual tendremos demostrada esta pro posición.

Sea $\varepsilon\left(V(K_{\alpha\ell},m,n)\cap V'(n,r,m)\right)$, $\varepsilon>0$, un τ_α-entorno del origen, donde $p_m\in sc(F)$, $m\in\mathbb{N}$, $K_{\alpha\ell}\subset E_{B_n}$ y $K_{\alpha\ell}$ es compacto en E_{B_n} , $n\geq n_{\alpha\ell}$, siendo $K_{\alpha\ell}$ uno de los compactos de $\{k_{\alpha p}\}_{p=1}^{\infty}$, $n\in\mathbb{N}$ y $r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Por ser $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ τ_α-acotada, existe $M>0$ tal que $p_m(\varepsilon^{\alpha}_{n,r,f_j}(\xi))<M$, $\forall\xi\in(K_{\alpha\ell}\cap k_{n,m}\cap B_n)\cup\{0\}$, $\forall j\in\mathbb{N}$, habiendo añadido el punto cero, teniendo en cuenta que damos a $\varepsilon^{\alpha}_{n,r,f_j}(0)$ el valor cero. Puesto que $(u^{\alpha}_i(f_j))_{j\in\mathbb{N}}$ es τ_0-Cauchy para i = 0, 1, ..., r, dada $p_m\in sc(F)$, $n\in\mathbb{N}$, $\varepsilon>0$, existe $j_1\in\mathbb{N}$ tal que para todo $j,j'\geq j_1$ se tiene $p_m(u^{\alpha}_i(f_j)(\xi^i)-u^{\alpha}_i(f_{j'})(\xi^i))<\dfrac{\varepsilon}{2(r+1)}$, $\forall\xi\in B_n$, para todo i = 0, 1, ..., r. Ahora, con el $\varepsilon>0$ dado, tomamos $\delta=\left(\dfrac{\varepsilon}{4M}\right)^{1/r}$ y queda, que si $\|\xi\|_{B_n}<\delta$, $\xi\in\Omega\cap E_{B_n}$, entonces $\|\xi\|^{r}_{B_n}\,p_m(\varepsilon^{\alpha}_{n,r,f_j}(\xi)-\varepsilon^{\alpha}_{n,r,f_{j'}}(\xi))\leq\|\xi\|^{r}_{B_n}\cdot 2M<$ $<\varepsilon/2$.

Así tenemos $\forall\xi\in(K_{\alpha\ell}\cap K_{n,m}\cap B_n)\cup\{0\}$, tal que $\|\xi\|_{B_n}<\delta$ y $j,j'\geq j_1$:

$$p_m(f_j(\xi)-f_{j'}(\xi))\leq p_m\Big(\sum_{i=0}^{r}u^{\alpha}_i(f_j)(\xi^i)-\sum_{i=0}^{r}u^{\alpha}_i(f_{j'})(\xi^i)\Big)+\|\xi\|^{r}_{B_n}\,p_m(\varepsilon^{\alpha}_{n,r,f_j}(\xi)-\varepsilon^{\alpha}_{n,r,f_{j'}}(\xi))<\sum_{i=0}^{r}\frac{\varepsilon}{2(r+1)}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Además $(K_{\alpha\ell}\cap K_{n,m}\cap B_n)\cup\{0\}$ es un compacto de $\Omega\cup\{0\}$, pues $(K_{\alpha\ell}\cap K_{n,m}\cap B_n)\cup\{0\}=K_{\alpha\ell}\cap\{x\in E_{B_n}:|\varphi(x)|\geq\frac{1}{m}\|x\|_{B_n}\}\cap B_n$ y como $\{x\in E_{B_n}:|\varphi(x)|\geq\frac{1}{m}\|x\|_{B_n}\}\cap B_n$ es un $\|\cdot\|_{B_n}$-cerrado,

$K_{\alpha\ell} \cap \{x \in E_{B_n} : |\varphi(x)| \geq \frac{1}{m} \|x\|_{B_n}\} \cap B_n$ es un $\|\cdot\|_{B_n}$-compacto, luego compacto de E, contenido en $\Omega \cup \{0\}$. Hasta el momento tenemos probado que (f_j) es uniformemente Cauchy sobre $[(K_{\alpha\ell} \cap K_{n,n} \cap B_n) \cup \{0\}] \cap \{\xi \in E_{B_n} : \|\xi\|_{B_n} < \delta\}$, pero como $[(K_{\alpha\ell} \cap K_{n,n} \cap B_n) \cup \{0\}] \sim \{x \in E_{B_n} : \|x\|_{B_n} < \delta\}$ es un $\|\cdot\|_{B_n}$-compacto, y por tanto compacto en E, que no contiene a cero, se trata de un compacto de Ω y ahí la sucesión (f_j) es uniformemente Cauchy. Luego (f_j) es uniformemente Cauchy en $(K_{\alpha\ell} \cap K_{n,n} \cap B_n) \cup \{0\}$.

Probaremos ahora que (f_j) es uniformemente Cauchy en $K_{\alpha\ell} \cap K_{n,n}$. Sabemos que en $[(K_{\alpha\ell} \cap K_{n,n}) \cup \{0\}] \cap \{x \in E_{B_n} : \|x\|_{B_n} < 1\}$, (f_j) es uniformemente Cauchy. Además $[(K_{\alpha\ell} \cap K_{n,n}) \cup \{0\}] \sim \{x \in E_{B_n} : \|x\|_{B_n} < 1\}$ es un compacto de Ω, y ahí (f_j) es uniformemente Cauchy. Luego en $(K_{\alpha\ell} \cap K_{n,n}) \cup \{0\} = K_{\alpha\ell} \cap \{x \in E_{B_n} : |\varphi(x)| \geq \frac{1}{m} \|x\|_{B_n}\}$ tenemos que (f_j) es uniformemente Cauchy.

Por último nos resta probar que

$$p_m (\mathcal{E}^{\alpha}_{n,q,f_j}(\xi) - \mathcal{E}^{\alpha}_{n,q,f_{j'}}(\xi)) < \varepsilon \ , \ \forall \xi \in K_{\alpha\ell} \cap K_{n,n} \cap B_n,$$

$\forall q = 0,1,\ldots,r$, a partir de un $j_0 \in \mathbb{N}$. Sabemos que

$$\mathcal{E}^{\alpha}_{n,q,f_j}(\xi) - \mathcal{E}^{\alpha}_{n,q,f_{j'}}(\xi) = \|\xi\|_{B_n} (\mathcal{E}^{\alpha}_{n,q+1,f_j}(\xi) - \mathcal{E}^{\alpha}_{n,q+1,f_{j'}}(\xi)) +$$
$$+ \frac{1}{\|\xi\|^q_{B_n}} (u^{\alpha}_{q+1}(f_j)(\xi^{q+1}) - u^{\alpha}_{q+1}(f_{j'})(\xi^{q+1})) .$$

Debido a que existe $N>0$ tal que $p_m(u^{\alpha}_{q+1}(f_j)(\xi^{q+1}) - u^{\alpha}_{q+1}(f_{j'})(\xi^{q+1})) \leq$ $\leq N \cdot \|\xi\|^{q+1}_{B_n}$ y existe $H>0$ tal que

$$p_m (\mathcal{E}^{\alpha}_{n,q+1,f_j}(\xi) - \mathcal{E}^{\alpha}_{n,q+1,f_{j'}}(\xi)) \leq H \ , \ \forall \xi \in (K_{\alpha\ell} \cap K_{n,n} \cap B_n) \cup \{0\},$$

$\forall j, j' \in \mathbb{N}$,

y para q = 0, 1, ..., r, es por lo que existe $\delta > 0$ tal que

$\|\xi\|_{B_n} < \delta$, $\xi \in (K_{\alpha\ell} \cap K_{n,n} \cap B_n) \cup \{0\}$, implica que

$p_m(\mathcal{E}^{\alpha}_{n,q,f_j}(\xi) - \mathcal{E}^{\alpha}_{n,q,f_{j'}}(\xi)) < \varepsilon$ para $j, j' \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, al ser τ_0-Cauchy $(u^{\alpha}_q(f_j))_{j\in\mathbb{N}}$, $q \in \mathbb{N}$,

y por ser uniformemente Cauchy (f_j) sobre $(K_{\alpha\ell} \cap K_{n,n}) \cup \{0\}$, tenemos que sobre $[(K_{\alpha\ell} \cap K_{n,n} \cap B_n) \cup \{0\}] \cap \{\xi \in E_{B_n} : \|\xi\|_{B_n} \geq \delta\}$,

resulta que $p_m(\mathcal{E}^{\alpha}_{n,q,f_j}(\xi) - \mathcal{E}^{\alpha}_{n,q,f_{j'}}(\xi)) < \varepsilon$

para $j, j' \geq j_0$, para un $j_0 \in \mathbb{N}$, ya que

$$p_m(\mathcal{E}^{\alpha}_{n,q,f_j}(\xi) - \mathcal{E}^{\alpha}_{n,q,f_{j'}}(\xi)) \leq \frac{1}{\delta^q} p_m\Big(f_j(x) - \sum_{i=0}^{q} u^{\alpha}_i(f_j)(x^i) -$$
$$- f_{j'}(x) + \sum_{i=0}^{q} u^{\alpha}_i(f_{j'})(x^i)\Big).$$

Tomando $j, j' \geq \max(j_0, j_1)$, obtenemos que $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es τ_α-Cauchy.

C.Q.D.

COROLARIO

$\mathcal{A}_\alpha(\Omega, F)[\tau_\alpha]$ es separable.

Demostración.- Obvia, por ser un espacio de Fréchet-Montel.

C.Q.D.

§ 3. $\mathcal{A}(\Omega,F)[\tau]$ COMO LIMITE PROYECTIVO DE LOS ESPACIOS $\mathcal{A}_\alpha(\Omega,F)[\tau_\alpha]$.

PROPOSICION 3.1

$\mathcal{A}(\Omega, F)$ es la intersección de todos los $\mathcal{A}_\alpha(\Omega, F)$.

Demostración.- Obviamente $\mathcal{A}(\Omega, F) \subset \mathcal{A}_\alpha(\Omega, F)$, $\forall \alpha \in \Gamma$, con lo cual $\mathcal{A}(\Omega,F) \subset \bigcap_{\alpha\in\Gamma} \mathcal{A}_\alpha(\Omega,F)$. Por otra parte, sea $f\in \mathcal{A}_\alpha(\Omega,F)$, para todo $\alpha\in\Gamma$. Veamos que $f\in\mathcal{A}(\Omega,F)$.

Sea $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de $K_{n,p}$, $n,p\in\mathbb{N}$, que converge a cero en E_{B_n}. Entonces $\{x_r, r\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$ es un compacto en E_{B_n} , luego compacto en $\Omega\cup\{0\}$ para la topología del espacio de Silva E. Así, existe $\alpha\in\Gamma$, y $m\in\mathbb{N}$, tal que $\{x_r, r\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}\subset K_{\alpha m}$. Esto es posible, pues $\{tx \ : t\in[0,1], \ x\in\{x_r, r\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}\}$ es compacto estrellado respecto al origen y contenido en $\Omega\cup\{0\}$. Al estar suponiendo $f\in\mathcal{A}_\alpha(\Omega,F)$, resulta

$$f(x) = u_0^\alpha(f) + u_1^\alpha(f)(x) + \dots + u_q^\alpha(f)(x^q) + \|x\|^q_{B_n}\varepsilon^\alpha_{n,q,f}(x), \quad x\in\Omega\cap E_{B_n}$$

y tal que $\varepsilon^\alpha_{n,q,f}(x)\to 0$ en F cuando $x\to 0$ en E_{B_n} con $x\in K_{\alpha m}\cap K_{n,p}$, y de esta manera $f(x_r)\xrightarrow{r\to\infty} u_0^\alpha$ en F. Pero entonces $u_0^\alpha = u_0^\beta$ para otro $\beta\in\Gamma$, puesto que si tomamos otra sucesión $\{x'_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ que también converja a cero en E_{B_n} tal que $\{x'_r\}_{r\in\mathbb{N}}\subset K_{\beta s}\cap K_{n,\ell}$, se verificará que $f(x'_r)\xrightarrow[r\to\infty]{} u_0^\beta$. Ahora bien, la sucesión $x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots, x_r, x'_r, \dots$ también tiende a cero en E_{B_n} , y por tanto existe un $K_{\gamma t}$ que la contiene, y está contenida en $K_{n,i}$ donde i = máx (p,ℓ), con lo que $u_0^\alpha = u_0^\beta = u_0^\gamma$.

Supongamos ahora que $u_0^\alpha = u_0^\beta$, ..., $u_{q-1}^\alpha = u_{q-1}^\beta$, $\alpha,\beta\in\Gamma$, y veamos que $u_q^\alpha = u_q^\beta$.

Sean $K_{\alpha r}$ y $K_{\beta r}$. Así, para $x \in K_{\alpha r} \cap K_{\beta r} \cap K_{n,p}$, tenemos:

$$\frac{\lambda(u_q^\alpha(f)(x^q) - u_q^\beta(f)(x^q))}{\|x\|_{B_n}^q} = \frac{\lambda(f(x) - \sum_{i=0}^q u_i^\alpha(f)(x^i) - f(x) + \sum_{i=0}^q u_i^\beta(f)(x^i))}{\|x\|_{B_n}^q} \leq$$

$$\leq \frac{\lambda(f(x) - \sum_{i=0}^q u_i^\alpha(f)(x^i))}{\|x\|_{B_n}^q} + \frac{\lambda(f(x) - \sum_{i=0}^q u_i^\beta(f)(x^i))}{\|x\|_{B_n}^q} =$$

$$= \lambda(\varepsilon_{n,q,f}^\alpha(x)) + \lambda(\varepsilon_{n,q,f}^\beta(x)), \quad \forall \lambda \in sc(F).$$

Luego $\displaystyle \lim_{\substack{x \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0 \\ x \in K_{\alpha r} \cap K_{\beta r} \cap K_{n,p}}} \frac{\lambda(u_q^\alpha(x^q) - u_q^\beta(x^q))}{\|x\|_{B_n}^q} = 0$.

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $x \in K_{\alpha r} \cap K_{\beta r} \cap K_{n,p}$ con $\|x\|_{B_n} < \delta$, entonces
$\lambda(u_q^\alpha(x^q) - u_q^\beta(x^q)) \leq \varepsilon \|x\|_{B_n}^q$.

Debido a que $K_{\alpha r}$ y $K_{\beta r}$ son estrellados respecto a cero, y puesto que dado $x \in K_{n,p}$, se tiene que $tx \in K_{n,p}$, para todo t tal que $0 < t \leq 1$, resulta que: $\lambda(u_q^\alpha(x^q) - u_q^\beta(x^q)) \leq \varepsilon \|x\|_{B_n}^q$ (I)

$\forall x \in K_{\alpha r} \cap K_{\beta r} \cap K_{n,p}$. Esto lo hacemos para todo p y n números naturales, y obtenemos que

$$\lambda(u_q^\alpha(x^q) - u_q^\beta(x^q)) = 0 \qquad \forall \lambda \in sc(F),$$

ya que la desigualdad (1) es válida para todo $\varepsilon > 0$, luego

$$u_q^\alpha(x^q) = u_q^\beta(x^q) \qquad , \forall x \in K_{\alpha r} \cap K_{\beta r} \qquad ,$$

y por tanto $u_q^\alpha(x^q) = u_q^\beta(x^q)$, $\forall x \in \Delta_r$, y variando r en los números naturales resulta $u_q^\alpha(x^q) = u_q^\beta(x^q)$, $\forall x \in \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \Delta_r = \Omega$, y teniendo en cuenta que Ω es un conjunto abierto distinto del vacío, concluimos que $u_q^\alpha = u_q^\beta$.

De otro lado,

$$\varepsilon^\alpha_{n,q,f}(x) = \frac{f(x) - u_0^\alpha(f) - u_1^\alpha(f)(x) - \dots - u_q^\alpha(f)(x^q)}{\|x\|^q_{B_n}} =$$

$$= \frac{f(x) - u_0^\beta(f) - u_1^\beta(f)(x) - \dots - u_q^\beta(f)(x^q)}{\|x\|^q_{B_n}} = \varepsilon^\beta_{n,q,f}(x) ,$$

$\forall x \in \Omega \cap E_{B_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall q \in \mathbb{N}$.
Con todo esto, queda:

$$f(x) = u_0(f) + u_1(f)(x) + \dots + u_q(f)(x^q) + \|x\|^q_{B_n} \varepsilon_{n,q,f}(x)$$

donde $u_0(f) = u_0^\alpha(f), u_1(f) = u_1^\alpha(f)$, ..., $u_q(f) = u_q^\alpha(f)$, $\varepsilon_{n,q,f}(x) = \varepsilon^\alpha_{n,q,f}(x)$, para todo $x \in \Omega \cap E_{B_n}$, para todo $\alpha \in \Gamma$. Y si $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset K_{n,p}$ converge a cero en E_{B_n}, $\{x_m, m\in\mathbb{N}\} \cup \{0\}$ es un compacto de E_{B_n} , luego compacto en E y por tanto existe K_{α_j} tal que $\{x_m, m\in\mathbb{N}\} \cup \{0\} \subset K_{\alpha_j}$ y así $\{x_m, m\in\mathbb{N}\} \subset K_{\alpha_j} \cap K_{n,p}$, luego $\varepsilon_{n,q,f}(x_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ en F, y de esta forma $\varepsilon_{n,q,f}(x) \longrightarrow 0$ en F cuando $x \longrightarrow 0$ en E_{B_n} con $x \in K_{n,p}$.

C.Q.D.

Sea ahora $I_\alpha : \mathcal{A}(\Omega,F) \longrightarrow \mathcal{A}_\alpha(\Omega,F)$ la inyección canónica de $\mathcal{A}(\Omega,F)$ en $\mathcal{A}_\alpha(\Omega,F)$.

PROPOSICION 3.2

Cada I_α es continua.

Demostración.- Sea

$$V = V(K_{\alpha\ell}, m, n) = \left\{ f \in \mathcal{A}(\Omega,F) : \sup_{x \in K_{\alpha\ell} \cap K_{n,n}} p_m(f(x)) \le 1 \right\}$$

$$V' = V'(n,r,m) = \Big\{ f \in \mathcal{A}(\Omega,F) : \forall q \in \mathbb{N},\ 0 \leq q \leq r \quad (1)\ p_m\left(u_q^{\alpha}(f)(B_n)^q\right) \leq 1 \quad (2) \sup_{x \in K_{\alpha\ell} \cap B_n \cap K_{n,n}} p_m\left(\varepsilon^{\alpha}_{n,q,f}(x)\right) \leq 1 \Big\}$$

siendo $p_m \in sc(F)$, $K_{\alpha\ell} \subset E_{B_n}$ y $K_{\alpha\ell}$ es compacto en E_{B_n} , $n \geq n_{\alpha\ell}$, $r \in \mathbb{N}$; y consideramos $V \cap V'$. Si tomamos $K \subset \Omega \cup \{0\}$ compacto estrellado de $E_{B_{n_{\alpha\ell}}}$, $K \supset K_{\alpha\ell}$ y $U = \{ f \in \mathcal{A}(\Omega,F) : \sup_{x \in K \cap K_{n,n}} p_m(f(x)) \leq 1 \}$

$$U' = \Big\{ f \in \mathcal{A}(\Omega,F) : \forall q \in \mathbb{N},\ 0 \leq q \leq r \quad (1)\ p_m\left(u_q(f)(B_n)^q\right) \leq 1 \quad (2) \sup_{x \in K \cap B_n \cap K_{n,n}} p_m\left(\varepsilon_{n,q,f}(x)\right) \leq 1 \Big\}$$

se tiene $U \cap U' \subset V \cap V'$. Por tanto, sobre $\mathcal{A}(\Omega,F)$, $\tau_\alpha \subset \tau$ y cada I_α es continua.

C.Q.D.

Vamos a dotar al conjunto de índices Γ de una ordenación filtrante.

Dados $\alpha, \beta \in \Gamma$, consideramos las familias de compactos estrellados respecto al origen $\{K_{\alpha m}\}_{m=1}^{\infty}$, $\{K_{\beta m}\}_{m=1}^{\infty}$. Recordemos que $K_{\alpha m}$ y $K_{\beta m}$ son para todo $m \in \mathbb{N}$, compactos estrellados respecto al origen, tales que

$$K_{\alpha m} \subset \Omega \cup \{0\},\quad 0 \in K_{\alpha m},\quad \Delta_m \subset K_{\alpha m},\quad K_{\alpha m} \subset K_{\alpha m+1}.$$

$K_{\beta m} \subset \Omega \cup \{0\}$, $0 \in K_{\beta m}$, $\Delta_m \subset K_{\beta m}$, $K_{\beta m} \subset K_{\beta m+1}$.

Entonces, para cada m natural, tomamos el compacto $K_{\gamma m} = K_{\alpha m} \cup K_{\beta m}$, y será un compacto de $\Omega \cup \{0\}$, estrellado respecto al origen, tal que $0 \in K_{\gamma m}$, $\Delta_m \subset K_{\gamma m}$ y $K_{\gamma m} \subset K_{\gamma m+1}$. Consideraríamos así la familia de compactos $\{K_{\gamma m}\}_{m=1}^{\infty}$. De esta forma se verifica que $\mathcal{A}_{\gamma}(\Omega,F) \subset \mathcal{A}_{\alpha}(\Omega,F) \cap \mathcal{A}_{\beta}(\Omega,F)$.

Esto permite dotar al conjunto de índices Γ de un orden parcial, de la siguiente manera

$$\alpha \leq \beta \iff \forall p \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} : K_{\alpha p} \subset K_{\beta m}$$

Esta ordenación es filtrante, pues dados $\alpha, \beta \in \Gamma$, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\alpha \leq \gamma$, $\beta \leq \gamma$. Además $\alpha \leq \beta \Longrightarrow \mathcal{A}_{\beta}(\Omega,F) \subset \mathcal{A}_{\alpha}(\Omega,F)$.

Debido a esta ordenación, podemos considerar la aplicación $I_{\alpha\beta} : \mathcal{A}_{\beta}(\Omega,F) \longrightarrow \mathcal{A}_{\alpha}(\Omega,F)$ cuando $\alpha \leq \beta$, donde $I_{\alpha\beta}$ es la inyección de $\mathcal{A}_{\beta}(\Omega,F)$ en $\mathcal{A}_{\alpha}(\Omega,F)$. $I_{\alpha\beta}$ es claramente continua, ya que si $\alpha \leq \beta$, la topología τ_{β} es más fina que la topología τ_{α}.

Además, si $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, $I_{\alpha\beta} \cdot I_{\beta\gamma} = I_{\alpha\gamma}$

y $I_\alpha = I_{\alpha\beta} \circ I_\beta$.

Así pues, el sistema $(\mathcal{A}_\alpha(\Omega,F), I_{\alpha\beta})$

es un sistema proyectivo.

TEOREMA 3.1

$\mathcal{A}(\Omega,F)[\tau]$ es el límite proyectivo de los espacios $\mathcal{A}_\alpha(\Omega,F)[\tau_\alpha]$ bajo las aplicaciones $I_{\alpha\beta}$.

Demostración.- El límite proyectivo de los $\mathcal{A}_\alpha(\Omega,F)[\tau_\alpha]$ es el subespacio del producto $\prod_{\alpha\in\Gamma} \mathcal{A}_\alpha(\Omega,F)[\tau_\alpha]$ formado por aquellos elementos $\Phi = (\Phi_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ tales que si $\alpha \leq \beta$, $\Phi_\alpha = I_{\alpha\beta}(\Phi_\beta)$.

Podemos identificar cada $f \in \mathcal{A}(\Omega,F)$ con el elemento $(f_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} \in \prod_{\alpha\in\Gamma} \mathcal{A}_\alpha(\Omega,F)$ tal que para todo $\alpha\in\Gamma$, $f = f_\alpha$.

Claramente $\mathcal{A}(\Omega,F) \subset \varprojlim I_{\alpha\beta}(\mathcal{A}_\beta(\Omega,F))$

Recíprocamente, como las $I_{\alpha\beta}$ son las identidades, $f_\alpha = f_\beta$ para todo α menor o igual que β , y, por tanto,

$$\varprojlim I_{\alpha\beta}(\mathcal{A}_\beta(\Omega,F)) \subset \mathcal{A}(\Omega,F) .$$

Falta ver que τ es la mínima topología para la cual todas las aplicaciones $I_\alpha : \mathcal{A}(\Omega,F)[\tau] \to \mathcal{A}_\alpha(\Omega,F)[\tau_\alpha]$ son continuas. En efecto:

Sea $K \subset \Omega \cup \{0\}$ un compacto que contenga al cero, estrellado respecto al origen. Existe $K_{\beta\ell} \supset K$. Sea $U = \{f \in \mathcal{A}(\Omega,F) : \sup_{x \in K \cap K_{n,n}} p_m(f(x)) \leq 1\}$

$$U' = \{ f \in \mathcal{A}(\Omega,F) : \forall q \in \mathbb{N}, \ 0 \leq q \leq r$$
$$(1) \quad p_m(u_q(f)(B_n)^q) \leq 1$$
$$(2) \quad \sup_{x \in K \cap B_n \cap K_{n,n}} p_m(\varepsilon_{n,q,f}(x)) \leq 1 \}$$

siendo $p_m \in SC(F)$, $K_{\beta\ell} \subset E_{B_n}$, $n \geqslant n_{\beta\ell}$ y $K_{\beta\ell}$ compacto en E_{B_n}, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Sea $U_{\beta\ell} = \{ f \in \mathcal{A}_\beta(\Omega,F) : \sup_{x \in K_{\beta\ell} \cap K_{n,n}} p_m(f(x)) \leq 1\}$

$$U'_{\beta\ell} = \{ f \in \mathcal{A}_\beta(\Omega,F) : \forall q \in \mathbb{N}, \ 0 \leq q \leq r$$
$$(1) \quad p_m(u^\beta_q(f)(B_n)^q) \leq 1$$
$$(2) \quad \sup_{x \in K_{\beta\ell} \cap B_n \cap K_{n,n}} p_m(\varepsilon^\beta_{n,q,f}(x)) \leq 1 \}$$

Si τ_1 es una topología sobre $\mathcal{A}(\Omega,F)$ que hace continuas todas las aplicaciones I_α, $\alpha \in \Gamma$, obtenemos $I_\beta^{-1}(U_{\beta\ell} \cap U'_{\beta\ell}) = \{f \in \mathcal{A}(\Omega,F) : \sup_{x \in K_{\beta\ell} \cap K_{n,n}} p_m(f(x)) \leq 1\} \cap$

$$\cap \{ f \in \mathcal{A}(\Omega,F) : \forall q \in \mathbb{N}, \ 0 \leq q \leq r$$
$$(1) \quad p_m(u^\beta_q(f)(B_n)^q) \leq 1$$
$$(2) \quad \sup_{x \in K_{\beta\ell} \cap B_m \cap K_{n,n}} p_m(\varepsilon^\beta_{n,q,f}(x)) \leq 1 \}$$

que es un $\mathcal{T}_\lambda$-entorno de cero en $\mathcal{A}(\Omega,F)$, pero $I_\beta^{-1}(U_{\beta\ell} \cap U'_{\beta\ell}) \subset U \cap U'$, por tanto $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_\lambda$, pues lo hecho con los entornos básicos, se puede hacer con cualquier entorno de cero.

C.Q.D.

COROLARIO 1.

$\mathcal{A}(\Omega,F)[\mathcal{T}]$ es semirreflexivo, cuando F es un espacio de Fréchet-Montel.

Demostración.- Cada $\mathcal{A}_\alpha(\Omega,F)[\mathcal{T}_\alpha]$ es semirreflexivo por ser de Montel, por tanto $\mathcal{A}(\Omega,F)[\mathcal{T}] = \varinjlim \mathcal{A}_\alpha(\Omega,F)[\mathcal{T}_\alpha]$ es también semirreflexivo.

C.Q.D.

COROLARIO 2.

$\mathcal{A}(\Omega,F)[\mathcal{T}]$ es completo.

Demostración.- $\mathcal{A}(\Omega,F)[\mathcal{T}] = \varinjlim \mathcal{A}_\alpha(\Omega,F)[\mathcal{T}_\alpha]$ es un subespacio cerrado de $\prod_{\alpha\in\Gamma} \mathcal{A}_\alpha(\Omega,F)[\mathcal{T}_\alpha]$, KÖTHE [1] (§ 19, 10 (3)), y $\prod_{\alpha\in\Gamma} \mathcal{A}_\alpha(\Omega,F)[\mathcal{T}_\alpha]$ es completo por serlo cada uno de los $\mathcal{A}_\alpha(\Omega,F)[\mathcal{T}_\alpha]$.

C.Q.D.

PROPOSICION 3.3

Los subconjuntos compactos de $\mathcal{A}(\Omega,F)[\mathcal{T}]$ son metrizables.

Demostración.- Sobre los compactos de $\mathcal{A}(\Omega, F)[\tau]$, las topologías τ y τ_α coinciden, ya que τ_α es de Hausdorff y $\tau_\alpha \subset \tau$.

Como τ_α es metrizable cualquiera que sea $\alpha \in \Gamma$, queda demostrado.

C.Q.D.

C A P I T U L O   II

ϕ 1. ESPACIOS DE FUNCIONES HOLOMORFAS CUYAS DIFERENCIALES SE EXTIENDEN POR CONTINUIDAD EN EL ORIGEN.

Sea Ω un subconjunto abierto convexo de un espacio de Silva complejo E, tal que $0 \in \partial\Omega$. Sea F un espacio localmente convexo y completo cuya topología viene definida por un sistema filtrante de seminormas $\{p_j\}_{j \in J}$. Sea φ y $K_{n,p}$, $n,p \in \mathbb{N}$, como en el capítulo anterior.

Recordamos que una aplicación $f : \Omega \longrightarrow F$ es holomorfa en Ω cuando para cada $\xi \in \Omega$ existe una sucesión $a_k(f)[\xi] \in L_{k,s}({}^kE,F)$, k = 0, 1, 2, ..., tal que para cada $j \in J$ existe un entorno V de ξ contenido en Ω para el cual

$$\lim_{m \to \infty} p_j\left(f(x) - \sum_{k=0}^{m} a_k(f)[\xi]\ (x-\xi)^k \right) = 0$$

uniformemente para $x \in V$.

OBSERVACION.

A los elementos de $\mathcal{P}({}^kE,F)$ y de $L_{k,s}({}^kE,F)$, a menudo, los llamamos de la misma manera. Esto es así, cuando no exista peligro de confusión.

Consideramos los siguientes subespacios vectoriales del espacio vectorial $\mathcal{H}(\Omega,F)$:

$\mathcal{A}(\Omega,F) = \{ f \in \mathcal{H}(\Omega,F) :$ f posee desarrollo asintótico en el origen $0 \in \partial\Omega \}$.

$\mathcal{B}(\Omega,F) = \{ f \in \mathcal{H}(\Omega,F) :$ existe $\lim a_k(f)[\xi]$ en $(\mathcal{P}({}^kE,F), \tau_0)$ para k = 0, 1, 2, ..., cuando $\xi \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$ con $\xi \in K_{n,p}$, $n, p \in \mathbb{N} \}$.

Llamaremos $a_k(f)$ al límite de $a_k(f)[\xi]$ en $(\mathcal{P}({}^kE,F), \tau_0)$, k = 0, 1, 2, ..., cuando $\xi \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$ con $\xi \in K_{n,p}$, $n,p \in \mathbb{N}$, que es el mismo límite para todo $n, p \in \mathbb{N}$.

Denotamos $\mathcal{A}(\Omega)$ y $\mathcal{B}(\Omega)$ a los espacios anteriores cuando F sea el cuerpo de los complejos $\mathbb{C}$.

Sabemos que $a_k(f)[\xi] = \frac{1}{k!} d^k f(\xi)$, k = 0, 1, 2, ..., así, para $\omega \in F'$, se tiene $\omega \circ f \in \mathcal{H}(\Omega)$

y $a_k(w\circ f)[\xi] = \frac{1}{k!}\, d^k (w\circ f)(\xi) = w\circ \frac{1}{k!}\, d^k f(\xi) =$

BARROSO [2] (Prop. 2.9) . $\qquad = w\circ a_k(f)[\xi]$,

TEOREMA I.1

$$f \in \mathcal{B}(\Omega,F) \Longleftrightarrow w\circ f \in \mathcal{B}(\Omega) \ , \forall w \in F' .$$

Además si $a_k(f) = \lim a_k(f)[\xi]$ en $(\mathcal{P}({}^kE,F),\tau_0)$ cuando $\xi \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$ con $\xi \in K_{n,p}$, resulta que $w\circ a_k(f) = \lim a_k(w\circ f)[\xi]$ en $(\mathcal{P}({}^kE),\tau_0)$ cuando $\xi \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$ con $\xi \in K_{n,p}$, $n,p \in \mathbb{N}$, k = 0, 1, 2, ...

Demostración.- Obviamente si $f : \Omega \longrightarrow F$ es holomorfa, se tiene que $w\circ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y además debido a que $a_k(w\circ f)[\xi] = w\circ a_k(f)[\xi]$, k = 0, 1, 2, ..., $\forall w \in F'$, resulta que:

$$\tau_0 - \lim_{\substack{\xi \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0 \\ \xi \in K_{n,p}}} a_k(w\circ f)[\xi] = \tau_0 - \lim_{\substack{\xi \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0 \\ \xi \in K_{n,p}}} w\circ a_k(f)[\xi] =$$

$$= w\circ \Big(\tau_0 - \lim_{\substack{\xi \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0 \\ \xi \in K_{n,p}}} a_k(f)[\xi]\Big) = w\circ a_k(f) \ , \ k = 0,1,2,\dots$$

Contrariamente, sea $w\circ f$ holomorfa para todo $w \in F'$. Puesto que E es un espacio de Silva y, por tanto, un (DFM)-espacio, se sabe que los subconjuntos de $(\mathcal{H}(U),\tau_0)$ acotados son localmente acotados para cualquier subconjunto abierto U de E , luego se obtiene que $\mathcal{H}(U,F) = \mathcal{H}(U, F(\sigma(F,F')))$, DINEEN [5] (Cor. 2.45), para U abierto de E, en particular se cumple para Ω y así $f \in \mathcal{H}(\Omega,F)$. Veamos ahora, que $f \in \mathcal{B}(\Omega,F)$. Para ello, hemos de ver que existe el límite de $a_k(f)[\xi]$ en $(\mathcal{P}({}^kE,F),\tau_0)$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$, cuando $\xi \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$ con $\xi \in K_{n,p}$, $n,p \in \mathbb{N}$. Para una sucesión $(\xi_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset K_{n,p}$ tal que $\|\xi_\ell\|_{B_n} \longrightarrow 0$ cuando $\ell \longrightarrow \infty$, probaremos que $(a_k(f)[\xi_\ell])_{\ell\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(\mathcal{P}({}^kE,F),\tau_0)$ y, por tanto, convergente.

Sabemos que existe $\lim\limits_{\substack{\xi \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0 \\ \xi\in K_{n,p}}} a_{k+1}(\omega\circ f)[\xi]$ en $(\mathcal{P}({}^{k+1}E),\tau_0)$ para $\omega\in F'$, luego dada una seminorma P_{B_r}, $r\geq n$, sobre $(\mathcal{P}({}^{k+1}E),\tau_0)$ y $\omega\in F'$ existe un $\delta>0$, tal que $\forall\, \xi \in K_{n,p} \cap \{\xi\in E_{B_n} : \|\xi\|_{B_n} < \delta\}$ se tiene $P_{B_r}(a_{k+1}(\omega\circ f)[\xi]) \leq M_\omega$ donde $M_\omega\in\mathbb{R}$. Sea $y \in K_{n,p}\cap\{\xi\in E_{B_n} : \|\xi\|_{B_n} < \delta\}$. Sabemos que $\lambda y \in K_{n,p}\cap\{\xi\in E_{B_n} : \|\xi\|_{B_n}<\delta\}$, para $0<\lambda\leq 1$. Sea λ fijo de manera que $0<\lambda\leq 1$. La serie de Taylor de $d^k(\omega\circ f)$ en λy es $\sum\limits_{m=0}^{\infty} d^k(a_{k+m}(\omega\circ f)[\lambda y])(\eta-\lambda y)^m$.

Por tanto,

$$\sup_{z\in B_r} \left| d^k(\omega\circ f)\eta z^k - \sum_{m=0}^{\ell} d^k\left(a_{k+m}(\omega\circ f)[\lambda y]\right)(\eta-\lambda y)^m z^k\right| \longrightarrow 0$$

cuando $\ell\longrightarrow\infty$ uniformemente en algún entorno abierto de λy, V. Sea h suficientemente pequeño tal que $(\lambda+h)y\in V$. Así,

$$\sup_{z\in B_r} \left| d^k(\omega\circ f)(\lambda+h)y\, z^k - \sum_{m=0}^{\ell} h^m\, d^k\left(a_{k+m}(\omega\circ f)[\lambda y]\right) y^m z^k\right| \longrightarrow 0$$

cuando $\ell\longrightarrow\infty$ uniformemente en el abierto $W = \{h\in\mathbb{C} : (\lambda+h)y\in V\}$.

Dado $z\in B_r$ fijo, la función $\phi(\alpha) = d^k(\omega\circ f)(\alpha y)z^k$ definida de $\lambda + W$ en $\mathbb{C}$

tiene como serie de Taylor en λ a $\sum_{m=0}^{\infty} h^m d^k (a_{k+m}(\omega\circ f)[\lambda y]) y^m z^k$

y así $\quad \phi^{m)}(\lambda) = d^k (a_{k+m}(\omega\circ f)[\lambda y]) y^m z^k$.

Sabemos que $\quad |\phi(1) - \phi(0)| \leq \sup_{\lambda\in]0,1[} |\phi'(\lambda)|$

y de esta menera $\quad |a_k(\omega\circ f)[y] z^k - a_k(\omega\circ f) z^k| =$

$= \frac{1}{k!} |d^k(\omega\circ f)[y] z^k - d^k(\omega\circ f) z^k| \leq$

$\leq \frac{1}{k!} \sup_{\lambda\in]0,1[} |d^k(a_{k+1}(\omega\circ f)[\lambda y])(y) z^k|$.

Hacemos esto para todo z de Br . Pero

$|a_k(\omega\circ f)[y] z^k - a_k(\omega\circ f) z^k| \leq$

$\leq \binom{k+1}{k} \sup_{\lambda\in]0,1[} |a_{k+1}(\omega\circ f)[\lambda y](y)(z^k)|$

ya que, por BARROSO [2] (Obs. 1.8), sabemos que $\frac{1}{m!} d^m P(\xi) =$

$= \binom{k}{m} A \xi^{k-m}$, siendo $P = \hat{A}$, $A \in L_{k,s}({}^k E)$, y

de esta manera $\quad |a_k(\omega\circ f)[y] z^k - a_k(\omega\circ f) z^k| \leq$

$\leq (k+1) M_\omega \|y\|_{B_n}$.

Como la sucesión $\quad (\xi_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset K_{n,p} \quad$ es

tal que $\quad \|\xi_\ell\|_{B_n} \longrightarrow 0$, podemos encontrar un $N_0 \in \mathbb{N}$ de

manera que $(\xi_\ell)_{\ell\geq N_0} \subset \{\xi\in E_{B_n} : \|\xi\|_{B_n} < \delta\}$. De este modo,

para $p,q \geq N_0$, $\quad |a_k(\omega\circ f)[\xi_p] z^k - a_k(\omega\circ f)[\xi_q] z^k| \leq$

$\leq |a_k(\omega\circ f)[\xi_p] z^k - a_k(\omega\circ f) z^k| +$

$+ |a_k(\omega\circ f) z^k - a_k(\omega\circ f)[\xi_q] z^k| \leq$

$\leq (k+1) M_\omega (\|\xi_p\|_{B_n} + \|\xi_q\|_{B_n})$.

Luego $\quad |\omega(a_k(f)[\xi_p] z^k) - \omega(a_k(f)[\xi_q] z^k)| \leq$

$\leq (k+1) M_\omega (\|\xi_p\|_{B_n} + \|\xi_q\|_{B_n})$,

y por tanto $\left| \omega\left(\frac{a_k(f)[\xi_p] z^k - a_k(f)[\xi_q] z^k}{\|\xi_p\|_{B_n} + \|\xi_q\|_{B_n}} \right)\right| \leq (k+1) M_\omega$,

$\forall\, p,q \geq N_0$.

Podemos encontrar un $N_\omega \in \mathbb{R}$, tal que

$$\left| \omega \left(\frac{a_k(f)[\xi_p] z^k - a_k(f)[\xi_q] z^k}{\|\xi_p\|_{B_n} + \|\xi_q\|_{B_n}} \right) \right| \leq N_\omega , \ \forall p,q \in \mathbb{N},$$

puesto que para p, q = 1, 2, ..., N_o, se tiene

$$\left| \omega \left(\frac{a_k(f)[\xi_p] z^k - a_k(f)[\xi_q] z^k}{\|\xi_p\|_{B_n} + \|\xi_q\|_{B_n}} \right) \right| \leq \frac{1}{\|\xi_p\|_{B_n} + \|\xi_q\|_{B_n}} \cdot$$

$$\cdot \left(\|a_k(f)[\xi_p]\|_{P_\omega, B_r} + \|a_k(f)[\xi_q]\|_{P_\omega, B_r} \right) \leq \frac{2 \cdot M_{N_o}}{\|\xi_p\|_{B_n} + \|\xi_q\|_{B_n}} \leq N_\omega ,$$

donde $M_{N_o} = \max\limits_{p=1,\dots,N_o} \|a_k(f)[\xi_p]\|_{P_\omega, B_r}$ y $P_\omega \in sc(F)$ tal que $|\omega| \leq P_\omega$. Luego $\left\{ \frac{a_k(f)[\xi_p] z^k - a_k(f)[\xi_q] z^k}{\|\xi_p\|_{B_n} + \|\xi_q\|_{B_n}} \right\}_{\substack{p,q \in \mathbb{N} \\ z \in B_r}}$ es débilmente acotado, y, por tanto, acotado en F. De esta manera, dada $P_j \in sc(F)$, se tiene que

$$\sup_{z \in B_r} P_j \left(a_k(f)[\xi_p] z^k - a_k(f)[\xi_q] z^k \right) \leq$$

$$\leq C_j \left(\|\xi_p\|_{B_n} + \|\xi_q\|_{B_n} \right),$$

esto es,

$$\|a_k(f)[\xi_p] - a_k(f)[\xi_q]\|_{P_j, B_r} \leq$$

$$\leq C_j \left(\|\xi_p\|_{B_n} + \|\xi_q\|_{B_n} \right), \quad r \geq n .$$

Tenemos probado que $(a_k(f)[\xi_\ell])_{\ell \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(\mathcal{P}(^kE,F), \tau_o)$, luego converge, ya que al ser F completo, también lo es $(\mathcal{P}(^kE,F), \tau_o)$. Este límite es el mismo para toda sucesión $(\xi_\ell) \subset K_{n,p}$, tal que $\|\xi_\ell\|_{B_n} \longrightarrow 0$ cuando $\ell \longrightarrow 0$. Luego existe el límite de $a_k(f)[\xi]$ cuando $\xi \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$, con $\xi \in K_{n,p}$, $n, p \in \mathbb{N}$.

Trivialmente, la segunda parte del teorema también se cumple.

PROPOSICION 1.1

$\mathcal{B}(\Omega, F)$ es un subconjunto de $\mathcal{A}(\Omega, F)$.

Demostración.- Sea $f \in \mathcal{B}(\Omega, F)$. Sean $n, p \in \mathbb{N}$, $\xi \in k_{n,p}$. Sabemos que $\{\lambda \xi : 0 < \lambda \leq 1\} =]0, \xi] \subset k_{n,p}$. Definimos $\phi : [0,1] \longrightarrow F$ de la manera siguiente $\phi(\lambda) = f(\lambda\xi)$ para todo λ tal que $0<\lambda\leq 1$ y $\phi(0) = a_0(f)$. Esta función ϕ es continua, pues es continua en todos los puntos λ tal que $0<\lambda\leq 1$ por la propia definición y en cero, pues

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \phi(\lambda) = \lim_{\lambda \to 0^+} f(\lambda\xi) = \lim_{\lambda \to 0^+} a_0(f)[\lambda\xi] = a_0(f) .$$

Sea λ tal que $0<\lambda\leq 1$ fijo. Sea $p_j \in s.c.(F)$, entonces existe un entorno abierto V de $\lambda\xi$ tal que $p_j\left(f(\eta) - \sum_{m=0}^{\ell} a_m(f)[\lambda\xi](\eta - \lambda\xi)^m\right) \xrightarrow[\ell \to \infty]{} 0$ uniformemente en V . Sea $W = \{h \in \mathbb{C} : (\lambda+h)\xi \in V\}$, que es un entorno abierto de cero. Llamando Ψ a la función definida de $\{z \in \mathbb{C} : z\xi \in \Omega\}$ en F por $\Psi(z) = f(z\xi)$, tenemos que $p_j\left(\Psi(h+\lambda) - \sum_{m=0}^{\ell} h^m a_m(f)[\lambda\xi]\xi^m\right) \xrightarrow[\ell \to \infty]{} 0$ uniformemente en W . Así, por la unicidad del desarrollo de Taylor $\frac{\Psi^{m)}(\lambda)}{m!} = a_m(f)[\lambda\xi]\xi^m$, $0<\lambda\leq 1$. Pero en $]0,1]$ las funciones Ψ y ϕ coinciden, luego

$$\frac{\phi^{m)}(\lambda)}{m!} = a_m(f)[\lambda\xi]\xi^m \text{ , } 0<\lambda\leq 1 \text{ y } m = 0, 1, 2,\ldots$$

Haciendo tender λ a cero por la derecha, resulta

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\phi^{m)}(\lambda)}{m!} = \lim_{\lambda \to 0^+} a_m(f)[\lambda\xi]\xi^m = a_m(f)\xi^m ,$$

y con todo esto llamamos $\phi^{m)}(0) = m!\, a_m(f)\, \xi^m$.

Teniendo en cuenta BONET [1] (Prop. I.4.1):

$$\phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \frac{\phi''(0)}{2!} + \dots + \frac{\phi^{k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} \phi^{k+1)}(t)\, dt$$

$k = 0, 1, 2, \dots$, y así, dada $p_j \in s.c.(F)$, es claro que

$$p_j\left(\phi(1) - \phi(0) - \dots - \frac{\phi^{k)}(0)}{k!}\right) \leq \sup_{\lambda \in [0,1]} \frac{p_j(\phi^{k+1)}(\lambda))}{k!}$$

Por tanto,

$$p_j(f(\xi) - a_0(f) - a_1(f)\xi - a_2(f)\xi^2 - \dots - a_k(f)\xi^k) \leq$$

$$\leq (k+1) \sup_{\lambda \in [0,1]} p_j(a_{k+1}(f)[\lambda\xi]\,\xi^{k+1}) \leq$$

$$\leq (k+1) \sup_{\lambda \in [0,1]} \| a_{k+1}(f)[\lambda\xi] \|_{p_j, B_n} \|\xi\|_{B_n}^{k+1} .$$

Debido a que $a_{k+1}(f)[\eta]$ en $(\mathcal{P}(^{k+1}E,F), \tau_0)$ tiene límite cuando $\eta \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$ con $\eta \in K_{n,p}$, existe un entorno de cero en E_{B_n}, V_n y $M>0$, que depende de n, p, k + 1 y j, tal que $\| a_{k+1}(f)[\eta] \|_{p_j, B_n} \leq M$ para todo $\eta \in K_{n,p} \cap V_n$,

luego $p_j(f(\xi) - a_0(f) - a_1(f)\xi - \dots - a_k(f)\xi^k) \leq (k+1) M \|\xi\|_{B_n}^{k+1}$ (1),

y llamando $\varepsilon_{n,k,f}(\xi) = \dfrac{f(\xi) - a_0(f) - a_1(f)\xi - \dots - a_k(f)\xi^k}{\|\xi\|_{B_n}^k}$

para $\xi \in \Omega \cap E_{B_n}$, k = 0, 1, 2, ..., resulta que $\varepsilon_{n,k,f}(\xi) \longrightarrow 0$ en F cuando $\xi \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$ y ξ queda en $K_{n,p}$. Pero una desigualdad tipo (1), se obtiene también si tomamos ξ en otros $K_{n,p}$, p variando en $\mathbb{N}$, que nos indica que $\varepsilon_{n,k,f}(\xi) \longrightarrow 0$ en F cuando $\xi \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$ con $\xi \in K_{n,p}$, $p \in \mathbb{N}$. Así tenemos que $f \in \mathcal{A}(\Omega, F)$.

C.Q.D.

<u>NOTA</u>.- $\mathcal{B}(\Omega, F)$, en general, es distinto de $\mathcal{A}(\Omega, F)$, como se prueba para el caso $E = F = \mathbb{C}$, en HERRERO [1] (Teor. I-A.1.1).

DEFINICION I.1

Vamos a dotar de una topología τ' al espacio $\mathcal{B}(\Omega,F)$. Sea $K \subset \Omega \cup \{0\}$, $0 \in K$, compacto estrellado respecto al origen. Dado este K, existe un $n_K \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset E_{B_n}$ y K es compacto en E_{B_n}, para todo $n \geq n_K$. Dada $f \in \mathcal{B}(\Omega,F)$, $\xi \in \Omega \cap E_{B_n}$, sean $a_m(f)[\xi] \in L_{m,s}({}^mE,F)$, m = 0, 1,2, ..., los coeficientes de Taylor de f en ξ. Con esto formamos:

$$V(K,n,r,q) = \left\{ f \in \mathcal{B}(\Omega,F) : \sup_{\substack{\xi \in K \cap K_{n,n} \\ 0 \leq m \leq r}} q(a_m(f)[\xi](B_n)^m) \leq 1 \right\}$$

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_K$, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $q \in$ s.c.(F).

Tomamos τ' aquella topología que tiene como base de entornos de cero a los conjuntos $V(K,n,r,q)$.

PROPOSICION 1.2

La topología τ' sobre $\mathcal{B}(\Omega,F)$ es más fina que la inducida por $(\mathcal{A}(\Omega,F), \tau)$.

Demostración.- Sea $V = \left\{ f \in \mathcal{B}(\Omega,F) : \sup_{\xi \in K \cap K_{n,n}} q(f(\xi)) \leq 1 \right\} \cap$

$$\cap \left\{ f \in \mathcal{B}(\Omega,F) : \forall m \in \mathbb{N},\ 0 \leq m \leq r \quad \begin{array}{l} (1) \quad q(a_m(f)(B_n)^m) \leq 1 \\ (2) \quad \sup_{\xi \in K \cap B_m \cap K_{n,n}} q(\varepsilon_{n,m,f}(\xi)) \leq 1 \end{array} \right\}$$

la intersección de un entorno de cero básico de τ con $\mathcal{B}(\Omega,F)$. Construimos

$$W = \left\{ f \in \mathcal{B}(\Omega,F) : \sup_{\substack{\xi \in K \cap K_{n,n} \\ 0 \leq m \leq r+1}} q(a_m(f)[\xi](B_n)^m) \leq 1 \right\}.$$

Veamos que $W \subset V$.

Sea $f \in W$, entonces $\sup\limits_{\xi \in K \cap K_{m,n}} q(f(\xi)) =$
$= \sup\limits_{\xi \in K \cap K_{n,n}} q(a_0(f)[\xi]) \leq 1$, y esto es debido a que $f(\xi) = a_0(f)[\xi]$.

También se cumple que $\sup\limits_{\substack{0 \leq m \leq r \\ \xi \in K \cap K_{n,n}}} q(a_m(f)[\xi](B_n)^m) \leq 1$,
y de esta forma, dado $\xi \in K \cap K_{n,n}$, tenemos que
$\{\lambda \xi,\ 0 < \lambda \leq 1\} \subset K \cap K_{n,n}$, con lo cual
$\sup\limits_{\substack{0 \leq m \leq r \\ 0 < \lambda \leq 1}} q(a_m(f)[\lambda \xi](B_n)^m) \leq 1$, y haciendo tender λ a cero, resulta que $\sup\limits_{0 \leq m \leq r} q(a_m(f)(B_n)^m) \leq 1$.

Por último, con $\xi \in K \cap B_n \cap K_{n,n}$,

$$q(\varepsilon_{n,m,f}(\xi)) = q\left(\frac{f(\xi) - \sum_{i=0}^{m} a_i(f)\xi^i}{\|\xi\|_{B_n}^m}\right) \leq$$

$$\leq \sup_{\lambda \in [0,1]} \| a_{m+1}(f)[\lambda \xi] \|_{q,B_n} \|\xi\|_{B_n},$$

como se tenía en proposición anterior. Así,

$$\sup_{\xi \in K \cap B_n \cap K_{n,n}} q(\varepsilon_{n,m,f}(\xi)) \leq \sup_{\substack{\lambda \in [0,1] \\ \xi \in K \cap B_n \cap K_{n,n}}} \| a_{m+1}(f)[\lambda \xi] \|_{q,B_n} \|\xi\|_{B_n} \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{\lambda \in [0,1] \\ \xi \in K \cap K_{n,n}}} \| a_{m+1}(f)[\lambda \xi] \|_{q,B_n} = \sup_{\xi \in K \cap K_{n,n}} \| a_{m+1}(f)[\xi] \|_{q,B_n} =$$

$$= \sup_{\xi \in K \cap K_{n,n}} q(a_{m+1}(f)[\xi](B_n)^{m+1}) \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{0 \leq \ell \leq r+1 \\ \xi \in K \cap K_{n,n}}} q(a_\ell(f)[\xi](B_n)^\ell) \leq 1 .$$

C.Q.D.

<u>TEOREMA 1.2</u>

Sobre el espacio $\mathcal{B}(\Omega, F)$ no existe ninguna topología que le dote de estructura de espacio de Fréchet y que implique la convergencia puntual.

Demostración.- Supongamos que existe una topología tal sobre $\mathcal{B}(\Omega,F)$, que llamamos T. Podemos considerarla definida por una sucesión creciente de seminormas $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \ldots \leq \|\cdot\|_n \leq \ldots$

Ω es un abierto convexo, así $\varphi(\Omega)$ es también un abierto convexo, y puesto que $Re(\varphi(\Omega))>0$, también se da que $0 \in \partial\Omega$. De esta manera, sea (z_n) una sucesión de puntos de $\partial\varphi(\Omega)$ tal que $z_n \longrightarrow 0$.

Consideramos las funciones $b_n(x) = \dfrac{a}{\varphi(x)-z_n}$, $n\in\mathbb{N}$, $x\in\Omega$, $a\in F$. Veamos que son funciones de $\mathcal{B}(\Omega,F)$. Debido a que $\varphi(x)\neq z_n$, $\forall x\in\Omega$, tenemos que $b_n \in \mathcal{H}(\Omega,F)$. Sea $\xi\in\Omega$, podemos escribir: $b_n(x) = \dfrac{a}{\varphi(x)-\varphi(\xi)+\varphi(\xi)-z_n} =$

$$= \frac{a}{\varphi(x-\xi)+\varphi(\xi)-z_n} = \frac{a}{\varphi(x-\xi)-(z_n-\varphi(\xi))} =$$

$$= -\frac{a}{1-\frac{\varphi(x-\xi)}{z_n-\varphi(\xi)}} = -a\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varphi^m(x-\xi)}{(z_n-\varphi(\xi))^m}$$

siendo esto válido en el abierto $V(\xi)=\{x\in\Omega : |\varphi(x-\xi)|<\frac{1}{2}|z_n-\varphi(\xi)|\}$.

Además, debido a que para todo $x\in V(\xi)$ se da que $\left|\dfrac{\varphi(x-\xi)}{z_n-\varphi(\xi)}\right|<\dfrac{1}{2}$, la convergencia es uniforme en $V(\xi)$, para $q\in sc(F)$. Por unicidad del desarrollo de Taylor, el desarrollo anteriormente escrito es el desarrollo de Taylor de la función b_n alrededor del punto ξ, y así los polinomios de Taylor de b_n son $a_k(b_n)[\xi] = -a\left(\frac{1}{z_n-\varphi(\xi)}\cdot\varphi\right)^k$.

De esta manera, existen los límites de $a_k(b_n)[\xi]$ cuando $\xi \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$

con $\xi \in K_{n,p}$, en $(\mathcal{P}(^kE,F), \tau_0)$, pues $\lim\limits_{\substack{\xi \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0 \\ \xi \in K_{n,p}}} a_k(b_n)[\xi] = -a\left(\frac{1}{2n}\varphi\right)^k(x)$,

$\forall x \in E$, y además si $K \subset E$ es compacto, y $x \in K$, $q \in sc(F)$

$$q\left(-a\left(\frac{1}{2n-\varphi(\xi)}\varphi\right)^k(x) + a\left(\frac{1}{2n}\varphi\right)^k(x)\right) =$$

$$= q\left[a\left(\left(\frac{1}{2n}\right)^k - \left(\frac{1}{2n-\varphi(\xi)}\right)^k\right)\varphi^k(x)\right].$$

Así, puesto que $\sup\limits_{x \in K} q\,(a\,\varphi^k(x)) = M$, $M \in \mathbb{R}$, se tiene

$$q\left(a\left(-\left(\frac{1}{2n-\varphi(\xi)}\varphi\right)^k(x) + \left(\frac{1}{2n}\varphi\right)^k(x)\right)\right) \leq M\left|\left(\frac{1}{2n}\right)^k - \left(\frac{1}{2n-\varphi(\xi)}\right)^k\right|$$

y la convergencia es uniforme sobre los compactos, luego $b_n \in \mathcal{B}(\Omega,F)$, n = 1, 2, ...

Formamos la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n(1+\|b_n\|_n)}$.

Esta es convergente, ya que cualquiera que sea r número natural, $\sum\limits_{n \geq r} \frac{\|b_n\|_r}{2^n(1+\|b_n\|_n)} \leq \sum\limits_{n \geq r} \frac{1}{2^n}$, luego empleando el hecho de que la convergencia en la topología T implica la convergencia puntual, llamando g(x) a la suma de la serie anterior, tenemos que $g \in \mathcal{B}(\Omega,F)$. Pero esto es absurdo, ya que g no puede pertenecer a $\mathcal{B}(\Omega,F)$, porque no tiene desarrollo asintótico en el origen, como ya probamos en Teorema 1.1 del capítulo anterior.

C.Q.D.

§ 2. EXTENSION DE DIFERENCIALES EN EL ORIGEN A TRAVES DE SUCESIONES DE COMPACTOS. LOS ESPACIOS $\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)[\tau'_\alpha]$.

Dada una sucesión fundamental de compactos de Ω , $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \dots \subset \Delta_p \subset \dots$, llamamos $\{K_{\alpha p}\}_{p=1}^{\infty}$ a una suce sión de compactos de $\Omega \cup \{0\}$, estrellados respecto al origen, cumpliendo las siguientes condiciones:

$$(1) \quad 0 \in K_{\alpha p} \quad , \; p = 1, 2, \dots$$

$$(2) \quad \Delta_p \subset K_{\alpha p} \quad , \; p = 1, 2, \dots$$

$$(3) \quad K_{\alpha p} \subset K_{\alpha p+1} \quad , \; p = 1, 2, \dots$$

con α recorriendo un conjunto de índices Γ , infinito no numerable.

<u>DEFINICION 2.1</u>

Llamamos $\mathcal{B}_\alpha(\Omega, F)$ al conjunto de las funcio nes holomorfas de Ω en F, tales que existe el $\lim\limits_{\substack{\xi \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0 \\ \xi \in K_{\alpha p} \cap K_{n,q}}} a_k(f)[\xi]$ en $(\mathcal{P}({}^kE, F), \tau_0)$, para todo k = 0, 1, 2, ..., para todo n, p, q = 1, 2, ...

<u>DEFINICION 2.2</u>

Consideramos F un espacio de Fréchet. Llama mos τ'_α a la topología sobre $\mathcal{B}_\alpha(\Omega, F)$ definida por la base de entornos de cero siguiente:

$$V(K_{\alpha p}, n, r, m) = \left\{ f \in \mathcal{B}_\alpha(\Omega, F) : \sup_{\substack{\xi \in K_{\alpha p} \cap K_{n,n} \\ 0 \le \ell \le r}} P_m \left(a_\ell(f)[\xi] (B_n)^\ell \right) \le 1 \right\}$$

donde p, n y m son números naturales, r = 0, 1, 2, ..., y n es tal que $n \geq n_{\alpha p}$ siendo $K_{\alpha p} \subset E_{B_n}$ y compacto en E_{B_n}.

PROPOSICION 2.1

$\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)[\tau'_\alpha]$ es un espacio de Fréchet.

Demostración.- El espacio $\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)[\tau'_\alpha]$ es metrizable por tener una base de entornos del origen numerable. Sólo resta ver la completitud. Para ello, sea $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión τ'_α-Cauchy de elementos de $\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)$. Esta es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}(\Omega,F)$, cuando en este espacio tenemos la topología compacta abierta τ_0, puesto que $\Delta_\ell \subset K_{\alpha\ell} \cap K_{n,n}$, para algún $n\in\mathbb{N}$, que depende de ℓ. Debido a que $(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)$ es un espacio de Fréchet, existe una función f en $\mathcal{H}(\Omega,F)$, tal que $f_j \longrightarrow f$ en $(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)$.

Por DINEEN[5](Prop. 2.5), la aplicación $\frac{\hat{d}^\ell}{\ell!}:(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)\longrightarrow(\mathcal{P}(^\ell E,F),\tau_0)$ definida por $\frac{\hat{d}^\ell}{\ell!}(f)=\frac{\hat{d}^\ell f(\xi)}{\ell!}$, para un $\xi\in\Omega$ fijo, es continua. Luego $\frac{\hat{d}^\ell f_j(\xi)}{\ell!}\xrightarrow[j\to\infty]{}\frac{\hat{d}^\ell f(\xi)}{\ell!}$ en $(\mathcal{P}(^\ell E,F),\tau_0)$ para $\xi\in\Omega$ fijo, y así $a_\ell(f_j)[\xi]\xrightarrow[j\to\infty]{} a_\ell(f)[\xi]$ en $(\mathcal{P}(^\ell E,F),\tau_0)$ para $\xi\in\Omega$.

Vamos a probar seguidamente que $f_j\longrightarrow f$ en $\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)[\tau'_\alpha]$. Sea un entorno básico del origen:

$$V(K_{\alpha p},n,r,m)=\Big\{f\in\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F):\sup_{\substack{\xi\in K_{\alpha p}\cap K_{n,n}\\ 0\le\ell\le r}} P_m\big(a_\ell(f)[\xi](B_n)^\ell\big)\le 1\Big\}$$

$p,m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, y $n\geq n_{\alpha p}$ tal que $K_{\alpha p}\subset E_{B_n}$ y es compacto en E_{B_n}. Como $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es τ'_α-Cauchy, existe $j_0\in\mathbb{N}$ tal que si $j,j'\geq j_0$, $f_j-f_{j'}\in V(K_{\alpha p},n,r,m)$, esto es, $\sup_{\substack{\xi\in K_{\alpha p}\cap K_{n,n}\\ 0\le \ell\le r}} p_m\left(a_\ell(f_j)[\xi](B_n)^\ell - a_\ell(f_{j'})[\xi](B_n)^\ell\right)\le 1$

Haciendo tender j' a ∞ , resulta que

$$\sup_{\substack{\xi\in K_{\alpha p}\cap K_{n,n}\\ 0\le \ell\le r}} p_m\left(a_\ell(f_j)[\xi](B_n)^\ell - a_\ell(f)[\xi](B_n)^\ell\right)\le 1$$

Por tanto $f_j \xrightarrow[j\to\infty]{\tau'_\alpha} f$.

Finalmente $f\in \mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)$, pues la convergencia uniforme de $a_\ell(f_j)[\xi]$ a $a_\ell(f)[\xi]$ en $K_{\alpha p}\cap K_{n,n}$, demuestra que existe $\tau_0-\lim_{\substack{\xi \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0\\ \xi\in K_{\alpha p}\cap K_{n,n}}} a_\ell(f)[\xi]$, $\ell = 0, 1, 2, \ldots,$ $p,n\in\mathbb{N}$, al existir $\tau_0-\lim_{\substack{\xi \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0\\ \xi\in K_{\alpha p}\cap K_{n,n}}} a_\ell(f_j)[\xi]$ para todo $j\in\mathbb{N}$.

C.Q.D.

PROPOSICION 2.2

Si F es un espacio de Fréchet-Montel, $\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)[\tau'_\alpha]$ es también un espacio de Fréchet-Montel.

Demostración.- Debido a que $\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)[\tau'_\alpha]$ es un espacio de Fréchet, sólo nos faltaría probar que dado una sucesión $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)$, τ'_α-acotada, se puede extraer una subsucesión convergente en $(\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F),\ \tau'_\alpha)$.

Teniendo en cuenta que $\Delta_\ell\subset K_{\alpha\ell}\cap K_{n,n}$, para algún $n\in\mathbb{N}$ que depende de ℓ , $\ell\in\mathbb{N}$, podemos decir que $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es acotada en $(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)$, y por ser este espacio de Montel, ver proposición 2.2 del capítulo anterior, existe una subsucesión $f_{11}, f_{12},\ldots$, tal que converge uniformemente sobre los compactos de Ω y, por ser F de Montel, converge simplemente en el origen. Ahora bien, los espa cios $(\mathcal{H}(\Omega,(\mathcal{P}(^qE,F),\tau_0)),\tau_0)$ son de Montel, por serlo $(\mathcal{P}(^qE,F),\tau_0)$ para $q\in\mathbb{N}$. Así, podemos extraer de $\{f_{11},f_{12},\dots\}$ una subsucesión $\{f_{21},f_{22},\dots\}$ tal que élla y la sucesión $a_1(f_{21})[\cdot]$, $a_1(f_{22})[\cdot]$, ... convergen uniformemente sobre los compactos de Ω y simplemente en el origen.

Por un procedimiento diagonal, obtenemos una subsucesión $\{g_1,g_2,\dots\}$ de $\{f_1,f_2,\dots\}$ tal que élla y $(a_q(g_j)[\cdot])_{j\in\mathbb{N}}$ convergen uniformemente sobre los compactos de Ω y simplemente en el origen, para todo $q\in\mathbb{N}$. Veamos que $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F),\tau'_\alpha)$.

Sea $V=\{f\in\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F):$
$\sup\limits_{\substack{\xi\in K_{\alpha p}\cap K_{n,n}\\0\le q\le r}} p_m(a_q(f)[\xi](B_n)^q)\le\varepsilon\}$
un τ_α-entorno de cero. Llamamos $a_q^\alpha(g_j)=\tau_0\text{-}\lim\limits_{\substack{\xi\to 0\\\xi\in K_{\alpha p}\cap K_{n,n}}} a_q(g_j)[\xi]$.
Puesto que $(a_q(g_j)[\cdot])_{j\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente en el origen, tenemos que existe $\lim\limits_{j\to\infty} a_q^\alpha(g_j)$ en $(\mathcal{P}(^qE,F),\tau_0)$, luego es τ_0-Cauchy, y así existe $j_0\in\mathbb{N}$ tal que para todo $j,j'\geq j_0$, $p_m(a_q^\alpha(g_j)(B_n)^q-a_q^\alpha(g_{j'})(B_n)^q)<\varepsilon/3$ para q que cumpla ser un número natural comprendido en $0\le q\le r$.

Sea $\xi\in K_{\alpha p}\cap K_{n,n}$. Sabemos que $\lambda\xi\in K_{\alpha p}\cap K_{n,n}$ para $0<\lambda\le 1$. Sea λ fijo tal que $0<\lambda\le 1$. La serie de Taylor de $d^q g_j$ en $\lambda\xi$ es
$\sum\limits_{\ell=0}^{\infty} d^q(a_{q+\ell}(g_j)[\lambda\xi])(\eta-\lambda\xi)^\ell$. De esta manera

$$\sup_{z\in B_n} P_m\left(d^q g_j(\eta) z^q - \sum_{\ell=0}^{s} d^q (a_{q+\ell}(g_j)[\lambda\xi])(\eta-\lambda\xi)^\ell z^q\right) \to 0$$

cuando $s \to \infty$, uniformemente en algún entorno abierto de $\lambda\xi$, U . Sea $W = \{h \in \mathbb{C} : (h+\lambda)\xi \in U\}$. Así:

$$\sup_{z\in B_n} P_m\left(d^q g_j((h+\lambda)\xi) z^q - \sum_{\ell=0}^{s} h^\ell d^q (a_{q+\ell}(g_j)[\lambda\xi])\xi^\ell z^q\right) \to 0$$

cuando $s \to \infty$ uniformemente en W . Dado $z \in B_n$ fijo, formamos la función $\psi(\alpha) = d^q g_j(\alpha\xi) z^q$ definida de $\lambda + W$ en F. Esta tiene como serie de potencias de Taylor en λ a $\sum_{\ell=0}^{\infty} h^\ell d^q (a_{q+\ell}(g_j)[\lambda\xi]) \xi^\ell z^q$

y con esto $\dfrac{\psi^{(\ell)}(\lambda)}{\ell!} = d^q (a_{q+\ell}(g_j)[\lambda\xi]) \xi^\ell z^q$

$\ell = 0, 1, 2, \ldots$

Teniendo en cuenta a BONET [1] (Prop. I.4.1), y definiendo $\phi : [0,1] \to F$ como $\phi(\lambda) = \psi(\lambda)$, tenemos que

$$\phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \frac{\phi''(0)}{2!} + \ldots + \frac{\phi^{(\ell)}(0)}{\ell!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^\ell}{\ell!} \phi^{(\ell+1)}(t)\,dt$$

con lo cual, dada $P_m \in sc(F)$, queda $P_m(\phi(1) - \phi(0)) \leq \sup_{\lambda\in[0,1]} P_m(\phi'(\lambda))$

Por tanto, y como $\phi^{(\ell)}(\lambda) = \psi^{(\ell)}(\lambda)$,

$$q!\, P_m\left(a_q(g_j)[\xi] z^q - a_q^\alpha(g_j) z^q\right) \leq$$

$$\leq \sup_{\lambda\in[0,1]} P_m\left(d^q(a_{q+1}(g_j)[\lambda\xi])\xi z^q\right) .$$

Haciendo esto para todo $z \in B_n$, tenemos

(1) $P_m\left(a_q(g_j)[\xi] z^q - a_q^\alpha(g_j) z^q\right) \leq$

$$\leq \binom{q+1}{q} \sup_{\lambda\in[0,1]} P_m\left(a_{q+1}(g_j)[\lambda\xi]\,\xi z^q\right) \leq (q+1) M \|\xi\|_{B_n},$$

siendo $M>0$ tal que $\sup_{\substack{y\in K_{\alpha p}\cap K_{n,n}\\ 0\leq q\leq r+1}} P_m(a_q(g_j)[y](B_n)^q) \leq M$

para todo $j \in \mathbb{N}$, esto es, $\sup_{\substack{y\in K_{\alpha p}\cap K_{n,n}\\ 0\leq q\leq r+1}} \|a_q(g_j)[y]\|_{P_m,B_n} \leq M$

para todo $j \in \mathbb{N}$, ya que $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es τ_α'-acotada.

Tomando en (1) supremos en B_n, queda:

$\| a_q(g_j)[\xi] - a^\alpha_q(g_j) \|_{p_m, B_n} \leq$

$\leq (q+1)\, M \, \|\xi\|_{B_n} \leq (r+1)\, M \, \|\xi\|_{B_n}$.

Luego dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, basta con tomar $\delta < \frac{\varepsilon}{3(r+1)M}$,

tal que si $\|\xi\|_{B_n} < \delta$, $\xi \in K_{\alpha p} \cap K_{n,n}$,

$$\sup_{0 \leq q \leq r} \| a_q(g_j)[\xi] - a^\alpha_q(g_j) \|_{p_m, B_n} < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Obtenemos que para $0 \leq q \leq r$, $\|\xi\|_{B_n} < \delta$, $\xi \in K_{\alpha p} \cap K_{n,n}$,

$p_m(a_q(g_j)[\xi](B_n)^q - a_q(g_{j'})[\xi](B_n)^q) \leq$

$\leq p_m(a_q(g_j)[\xi](B_n)^q - a^\alpha_q(g_j)(B_n)^q) +$

$+ p_m(a^\alpha_q(g_j)(B_n)^q - a^\alpha_q(g_{j'})(B_n)^q) +$

$+ p_m(a^\alpha_q(g_{j'})(B_n)^q - a_q(g_{j'})[\xi](B_n)^q) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

para $j, j' \geq j_0$. Además como $(K_{\alpha p} \cap K_{n,n}) \sim \{\xi \in E_{B_n} : \|\xi\|_{B_n} < \delta\} =$

$= K_{\alpha p} \cap \{x \in E_{B_n} : |\varphi(x)| \geq \frac{1}{m} \|x\|_{B_n}\} \cap \{\xi \in E_{B_n} : \|\xi\|_{B_n} \geq \delta\}$

es un $\|\cdot\|_{B_n}$-cerrado, luego $\|\cdot\|_{B_n}$-compacto en E_{B_n} y así compacto en Ω, podemos concluir que $(g_j)_{j \in \mathbb{N}}$ es τ'_α-Cauchy.

C.Q.D.

§ 3. $(\mathcal{B}(\Omega,F), \tau')$ COMO LIMITE PROYECTIVO DE LOS ESPACIOS $(\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F), \tau'_\alpha)$.

PROPOSICION 3.1

$\mathcal{B}(\Omega, F)$ es la intersección de todos los $\mathcal{B}_\alpha(\Omega, F)$.

Demostración.- Claramente $\mathcal{B}(\Omega,F) \subset \mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)$, para todo $\alpha \in \Gamma$, es decir $\mathcal{B}(\Omega,F) \subset \bigcap_{\alpha\in\Gamma} \mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)$.

Recíprocamente, si $f \in \mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)$, para todo $\alpha \in \Gamma$, veamos que $f \in \mathcal{B}(\Omega,F)$. Sea $\{\xi_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de $K_{n,p}$ tal que $\|\xi_r\|_{B_n} \longrightarrow 0$. Entonces $\{\xi_r, r=1,2,\dots\} \cup \{0\}$ es un subconjunto compacto de E_{B_n}, luego compacto de $\Omega \cup \{0\}$. Entonces, existe $K_{\alpha m}$ tal que $\{\xi_r\}_{r\in\mathbb{N}} \subset K_{\alpha m}$. Luego como $f \in \mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)$ se tiene que existe el límite de $a_k(f)[\xi]$ en $(\mathcal{P}(^kE,F),\tau_0)$ cuando $\xi \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$ con $\xi \in K_{\alpha m} \cap K_{n,p}$, así existe el límite de $a_k(f)[\xi_r]$ en $(\mathcal{P}(^kE,F),\tau_0)$ cuando $r \to \infty$ y es igual al anterior, para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Si $\{\xi'_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ es otra sucesión en $K_{n,p}$ tal que $\|\xi'_r\|_{B_n} \longrightarrow 0$, está claro que $\lim_{r\to\infty} a_k(f)[\xi_r] = \lim_{r\to\infty} a_k(f)[\xi'_r]$ para todo k = 0, 1, 2, ..., puesto que la sucesión $\xi_1, \xi'_1, \xi_2, \xi'_2, \dots, \xi_r, \xi'_r, \dots$, es también una sucesión de $K_{n,p}$ que tiende en $\|\cdot\|_{B_n}$ a cero y está, por tanto, contenida en algún $K_{\alpha m}$. Luego $a_k(f)[\xi]$ tiene límite en $(\mathcal{P}(^kE,F),\tau_0)$ según todas las sucesiones de $K_{n,p}$ que $\|\cdot\|_{B_n}$-convergen a cero, y de este modo existe $\lim_{\substack{\|\xi\|_{B_n}\to 0\\ \xi\in K_{n,p}}} a_k(f)[\xi]$ en $(\mathcal{P}(^kE,F),\tau_0)$ para k = 0, 1, 2, ..., es decir, $f \in \mathcal{B}(\Omega,F)$.

C.Q.D.

Consideramos $I_\alpha : \mathcal{B}(\Omega,F) \longrightarrow \mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)$ la inyección canónica. Esta es continua, puesto que fácilmente podemos probar que sobre $\mathcal{B}(\Omega,F)$, $\tau'_\alpha \subset \tau'$. Dotamos seguidamente a Γ de una ordenación filtrante.

Dados $\alpha,\beta \in \Gamma$, consideramos las familias de compactos $\{K_{\alpha m}\}_{m=1}^{\infty}$, $\{K_{\beta m}\}_{m=1}^{\infty}$. Sabemos que $K_{\alpha m}$, $K_{\beta m}$, m = 1, 2, ..., cumplen que son compactos de $\Omega\cup\{0\}$, estrellados respecto al origen y tales que:

$$0 \in K_{\alpha m} \quad , \quad \Delta_m \subset K_{\alpha m} \quad , \quad K_{\alpha m} \subset K_{\alpha m+1} \; ,$$

$$0 \in K_{\beta m} \quad , \quad \Delta_m \subset K_{\beta m} \; , \quad K_{\beta m} \subset K_{\beta m+1} \; .$$

Entonces, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe un compacto $K_{\gamma m}$, tal que $K_{\gamma m} \supset K_{\alpha m} \cup K_{\beta m}$ y tal que la familia $\{K_{\gamma m}\}_{m=1}^{\infty}$ cumple las mismas condiciones anteriores. De este modo, se verifica que $\mathcal{B}_\gamma(\Omega,F) \subset \mathcal{B}_\alpha(\Omega,F) \cap \mathcal{B}_\beta(\Omega,F)$.

Esto permite dotar al conjunto de índices Γ de una ordenación parcial de la siguiente manera:

Diremos que $\alpha \leq \beta$ si, y sólo si, para todo $p \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $K_{\alpha p} \subset K_{\beta m}$. Esta ordenación es filtrante, pues $\forall \alpha,\beta \in \Gamma$, existe $\gamma \in \Gamma$, tal que $\alpha \leq \gamma$, $\beta \leq \gamma$. Además, $\alpha \leq \beta$ implica que $\mathcal{B}_\beta(\Omega,F) \subset \mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)$.

Debido a esta ordenación, podemos considerar las aplicaciones $I_{\alpha\beta} : \mathcal{B}_\beta(\Omega,F) \longrightarrow \mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)$ cuando $\alpha \leq \beta$, donde $I_{\alpha\beta}$ es la inyección de $\mathcal{B}_\beta(\Omega,F)$ en $\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)$. Estas aplicaciones son claramente continuas, ya que si $\alpha \leq \beta$, la topología $\mathcal{T}'_\beta$ es más fina que $\mathcal{T}'_\alpha$.

Además, si $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, se verifica que $I_{\alpha\beta} \circ I_{\beta\gamma} = I_{\alpha\gamma}$ y $I_\alpha = I_{\alpha\beta} \circ I_\beta$.

Así pues, el sistema $(\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F), I_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Gamma}$ es un sistema proyectivo, y se verifica el siguiente teorema:

TEOREMA 3.1

$\mathcal{B}(\Omega,F)[\mathcal{T}']$ es el límite proyectivo topológico de los espacios $\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)[\mathcal{T}'_\alpha]$, bajo las aplicaciones $I_{\alpha\beta}$.

Demostración.- El límite proyectivo de los $\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)[\mathcal{T}'_\alpha]$ es el subespacio del producto $\prod_{\alpha\in\Gamma} \mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)[\mathcal{T}'_\alpha]$ formado por aquellos elementos $\phi = (\phi_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ tales que si $\alpha \leq \beta$, entonces $\phi_\alpha = I_{\alpha\beta}(\phi_\beta)$.

Podemos identificar cada $f \in \mathcal{B}(\Omega,F)$ con el elemento $(f_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} \in \prod_{\alpha\in\Gamma} \mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)$ tal que para todo $\alpha \in \Gamma$, $f = f_\alpha$. Claramente $\mathcal{B}(\Omega,F) \subset \varprojlim I_{\alpha\beta}(\mathcal{B}_\beta(\Omega,F))$.

Recíprocamente, como las $I_{\alpha\beta}$ son las identidades, $f_\alpha = f_\beta$, para todo $\alpha \leq \beta$, y por tanto, $\varprojlim I_{\alpha\beta}(\mathcal{B}_\beta(\Omega,F)) \subset \mathcal{B}(\Omega,F)$.

Falta ver que $\mathcal{T}'$ es la mínima topología sobre $\mathcal{B}(\Omega,F)$ para la cual todas las aplicaciones

$I_\alpha : \mathcal{B}(\Omega,F)[\tau'] \longrightarrow \mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)[\tau'_\alpha]$ son continuas. Sea

$K\subset \Omega\cup\{0\}$ un compacto tal que $0\in K$, estrellado respecto

al origen. Existe un subconjunto $K_{\alpha_0 m_0}$ de $\Omega\cup\{0\}$ compacto,

tal que $K\subset K_{\alpha_0 m_0}$. Sea

$$U = \left\{ f\in \mathcal{B}(\Omega,F) \ : \ \sup_{\substack{\xi\in K\cap K_{n,n} \\ 0\le q\le r}} p_m\left(a_q(f)[\xi](B_n)^q\right)\le 1\right\}$$

y sea $U_{\alpha_0 m_0} = \left\{ f\in \mathcal{B}_{\alpha_0}(\Omega,F) : \sup\limits_{\substack{\xi\in K_{\alpha_0 m_0}\cap K_{n,n} \\ 0\le q\le r}} p_m\left(a_q(f)[\xi](B_n)^q\right)\le 1\right\}$

Si τ_1 es una topología sobre $\mathcal{B}(\Omega,F)$ que hace continuas todas

las aplicaciones I_α , resulta que

$$I_\alpha^{-1}(U_{\alpha_0 m_0}) = \left\{ f\in \mathcal{B}(\Omega,F) \ : \ \sup_{\substack{\xi\in K_{\alpha_0 m_0}\cap K_{n,n} \\ 0\le q\le r}} p_m\left(a_q(f)[\xi](B_n)^q\right)\le 1\right\}$$

es un τ_1-entorno de cero en $\mathcal{B}(\Omega,F)$, pero $I_\alpha^{-1}(U_{\alpha_0 m_0})\subset U$,

y así $\tau'\subset\tau_1$.

C.Q.D.

<u>COROLARIO 1</u>.

$\mathcal{B}(\Omega,F)[\tau']$ es semirreflexivo.

<u>COROLARIO 2</u>.

$\mathcal{B}(\Omega,F)[\tau']$ es completo.

<u>COROLARIO 3</u>.

$\mathcal{B}(\Omega,F)[\tau']$ es semi-Montel.

<u>PROPOSICION 3.2</u>

Los subconjuntos compactos de $\mathcal{B}(\Omega,F)[\tau']$

son metrizables.

Demostración.- Sobre los compactos de $\mathcal{B}(\Omega,F)[\tau]$ las topologías τ' y τ'_α coinciden, puesto que τ'_α es de Hausdorff y $\tau'_\alpha \subset \tau'$. Como τ'_α es metrizable, queda probado lo que queríamos.

C.Q.D.

NOTA.-

En general, sobre $\mathcal{B}(\Omega,F)$, las topologías τ y τ' son distintas. Basta tomar E = F = $\mathbb{C}$, ya que al ser Ω convexo es simplemente conexo, HERRERO [1] (Cor. de Prop. I-B.3.1)

§ 4. COMPARACION DE $\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)[\tau'_\alpha]$ Y $\mathcal{A}_\alpha(\Omega,F)[\tau_\alpha]$.

Sea $\{K_{\alpha p}\}_{p\in\mathbb{N}}$ una sucesión de compactos de $\Omega\cup\{0\}$, con $\alpha\in\Gamma$. Tenemos definidos los espacios:

$$\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F) = \Big\{ f\in\mathcal{H}(\Omega,F) \;:\; \exists \lim_{\|\xi\|_{B_n}\to 0,\ \xi\in K_{n,p}\cap K_{\alpha m}} a_k(f)[\xi] \text{ en } (\mathcal{P}(^kE,F),\tau_0) \quad \forall n,p,m,k\in\mathbb{N} \Big\}$$

$\mathcal{A}_\alpha(\Omega,F) = \{ f\in\mathcal{H}(\Omega,F)$, tal que f tiene desarrollo asintótico en $0\in\partial\Omega$ a través de los compactos $\{K_{\alpha p}\}_{p=1}^{\infty}\}$.

Vamos a comparar $\mathcal{A}_\alpha(\Omega,F)$ y $\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)$, $\alpha\in\Gamma$.

PROPOSICION 4.1

$\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)$ es un subconjunto de $\mathcal{A}_\alpha(\Omega,F)$, para todo $\alpha \in \Gamma$, siendo F un espacio localmente convexo.

Demostración.- Sea $f \in \mathcal{B}_\alpha(\Omega, F)$, $\alpha \in \Gamma$. Sean $p, n, \ell \in \mathbb{N}$,

$\xi \in K_{\alpha p} \cap K_{n,\ell}$. Sabemos que $\{\lambda \xi,\ 0 < \lambda \leq 1\} \subset K_{\alpha p} \cap K_{n,\ell}$.

Definimos la función $\phi : [0,1] \longrightarrow F$ de la manera siguiente

$\phi(\lambda) = f(\lambda \xi)$ para λ tal que $0 < \lambda \leq 1$ y

$$\phi(0) = \lim_{\lambda \to 0^+} \phi(\lambda) = \lim_{\lambda \to 0^+} f(\lambda \xi) = \lim_{\substack{\|\eta\|_{B_n} \to 0 \\ \eta \in K_{\alpha p} \cap K_{n,\ell}}} f(\eta) =$$

$$= \lim_{\substack{\|\ \|_{B_n} \to 0 \\ \eta \in K_{\alpha p} \cap K_{n,\ell}}} a_0(f)[\eta] = a_0^\alpha(f) .$$

Esta función ϕ ,así definida, es continua en $[0,1]$.

Sea λ , tal que $0 < \lambda \leq 1$ fijo y $P_j \in s.c.(F)$, entonces existe un entorno abierto V de $\lambda\xi$ tal que:

$$P_j\left(f(\eta) - \sum_{m=0}^{s} a_m(f)[\lambda\xi](\eta - \lambda\xi)^m\right) \longrightarrow 0$$

cuando $s \longrightarrow \infty$ uniformemente en V . Sea $W = \{h \in \mathbb{C} :$ $(h+\lambda)\xi \in V\}$, que es un entorno abierto de cero. Llamando Ψ a la función definida de $\{z \in \mathbb{C} : z\xi \in \Omega\}$ en F por $\Psi(z) = f(z\xi)$, tenemos que Ψ es holomorfa y

$$P_j\left(\Psi(h+\lambda) - \sum_{m=0}^{s} h^m a_m(f)[\lambda\xi]\xi^m\right) \longrightarrow 0 \text{ cuando } s \longrightarrow \infty$$

uniformemente en W . De este modo, por la unicidad del desarrollo de Taylor, resulta que $\dfrac{\Psi^{m)}(\lambda)}{m!} = a_m(f)[\lambda\xi]\xi^m$, $0 < \lambda \leq 1$. Pero en $]0,1]$ las funciones ϕ y Ψ coinciden, luego $\dfrac{\phi^{m)}(\lambda)}{m!} = a_m(f)[\lambda\xi]\xi^m$, $0 < \lambda \leq 1$ y $m = 0, 1, 2, \ldots$

Haciendo tender λ a cero por la derecha queda: $\displaystyle\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\phi^{m)}(\lambda)}{m!} = \lim_{\lambda \to 0^+} a_m(f)[\lambda\xi]\xi^m = a_m^\alpha(f)\xi^m$, y llamamos $\phi^{m)}(0) = m!\, a_m^{\alpha}(f)\, \xi^m$. Teniendo en cuenta ahora a BONET [1] (Prop. I.4.1), resulta

$$\phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \dots + \frac{\phi^{k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!}\, \phi^{k+1)}(t)\, dt$$

$k = 0, I, 2, \dots$, y así dada $p_j \in sc(F)$ se tiene

$$p_j\left(\phi(1) - \phi(0) - \frac{\phi''(0)}{2!} - \dots - \frac{\phi^{k)}(0)}{k!}\right) \leq \frac{1}{k!} \sup_{\lambda \in [0,1]} p_j\left(\phi^{k+1)}(\lambda)\right).$$

Por tanto,

$$p_j\left(f(\xi) - a_0^{\alpha}(f) - a_1^{\alpha}(f)\,\xi - \dots a_k^{\alpha}(f)\,\xi^k\right) \leq$$

$$\leq (k+1) \sup_{\lambda \in [0,1]} p_j\left(a_{k+1}(f)[\lambda\xi]\,\xi^{k+1}\right) \leq (k+1) \sup_{\lambda \in [0,1]} \| a_{k+1}(f)[\lambda\xi] \|_{p_j, B_n} \|\xi\|_{B_n}^{k+1}.$$

Debido a que $a_{k+1}(f)[\eta]$ es continua de Ω en $(\mathcal{P}(^{k+1}E, F), \tau_0)$, y tiene límite cuando $\eta \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$ con $\eta \in K_{\alpha p} \cap K_{n,\ell}$, es por lo que existe un $M > 0$, que depende de j, p, n, ℓ , k+I y α , tal que $\| a_{k+1}(f)[\eta] \|_{p_j, B_n} \leq M$ para todo $\eta \in K_{\alpha p} \cap K_{n,\ell}$, luego

$$p_j\left(f(\xi) - a_0^{\alpha}(f) - a_1^{\alpha} f(\xi) - \dots - a_k(f)\,\xi^k\right) \leq (k+1)\, M\, \|\xi\|_{B_n}^{k+1} \quad (1)$$

y llamando $\varepsilon_{n,k,f}^{\alpha}(\xi) = \dfrac{f(\xi) - a_0^{\alpha}(f) - a_1^{\alpha}(f)\,\xi - \dots - a_k^{\alpha}(f)\,\xi^k}{\|\xi\|_{B_n}^k}$

para $\xi \in \Omega \cap E_{B_n}$, k = 0, 1, 2, ..., resulta que $\varepsilon_{n,k,f}^{\alpha}(\xi) \longrightarrow 0$ en F cuando $\|\xi\|_{B_n} \longrightarrow 0$ con ξ en $K_{\alpha p} \cap K_{n,\ell}$. Haciendo variar $p, \ell \in \mathbb{N}$, llegamos tras el mismo proceso a una desigualdad tipo (1), que nos indica que $\varepsilon_{n,k,f}^{\alpha}(\xi) \longrightarrow 0$ en F cuando $\|\xi\|_{B_n} \longrightarrow 0$ con $\xi \in K_{\alpha p} \cap K_{n,\ell}$ para todo $p, \ell \in \mathbb{N}$, luego $f \in \mathcal{A}_{\alpha}(\Omega, F)$.

C.Q.D.

PROPOSICION 4.2

En general, $\mathcal{A}_{\alpha}(\Omega, F)$ y $\mathcal{B}_{\alpha}(\Omega, F)$ son distintos.

Demostración.- Tómese el caso de que $E = F = \mathbb{C}$, HERRERO[1] (Prop. II-A. 2.2).

PROPOSICION 4.3

La topología τ'_α sobre $\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)$ es más fina que la inducida por $\mathcal{A}_\alpha(\Omega,F)\ [\tau_\alpha]$.

Demostración.- Sea $V = \{ f \in \mathcal{B}_\alpha(\Omega,F) : \sup_{\xi\in K_{\alpha p}\cap K_{n,n}} q(f(\xi)) \leq 1\} \cap$

$$\cap \{ f\in \mathcal{B}_\alpha(\Omega,F) : \forall m,\ 0\leq m\leq r \quad (1)\ q(a_m^\alpha(f)(B_n)^m) \leq 1 \quad (2) \sup_{\xi\in K_{\alpha p}\cap B_n\cap K_{n,n}} q(E^\alpha_{n,m,f}(\xi)) \leq 1 \}$$

la intersección de un entorno de cero básico de τ_α con $\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)$. Construimos $W = \{ f \in \mathcal{B}_\alpha(\Omega,F) : \sup_{\substack{\xi\in K_{\alpha p}\cap K_{n,n}\\ 0\leq m\leq r+1}} q(a_m(f)[\xi](B_n)^m) \leq 1\}$. Veamos que $W \subset V$.

Sea $f\in W$, entonces $\sup_{\xi\in K_{\alpha p}\cap K_{n,n}} q(f(\xi)) = \sup_{\xi\in K_{\alpha p}\cap K_{n,n}} q(a_0(f)[\xi]) \leq 1$, y esto es debido a que $f(\xi) = a_0(f)[\xi]$.
También se cumple que $\sup_{\substack{0\leq m\leq r\\ \xi\in K_{\alpha p}\cap K_{n,n}}} q(a_m(f)[\xi](B_n)^m) \leq 1$,
y, de esta forma, dado $\xi \in K_{\alpha p}\cap K_{n,n}$ tenemos que $\{\lambda\xi : 0<\lambda\leq 1\} \subset K_{\alpha p}\cap K_{n,n}$, con lo cual,

$$\sup_{\substack{0\leq m\leq r\\ 0<\lambda\leq 1}} q(a_m(f)[\lambda\xi](B_n)^m) \leq 1$$

y haciendo tender λ a cero, resulta que :

$$\sup_{0\leq m\leq r} q(a_m^\alpha(f)(B_n)^m) \leq 1 .$$

Por último, con $\xi \in K_{\alpha p}\cap B_n\cap K_{n,n}$

$$q(E^\alpha_{n,m,f}(\xi)) = q\left(\frac{f(\xi) - \sum_{i=0}^m a_i^\alpha(f)\,\xi^i}{\|\xi\|^m_{B_n}}\right) \leq$$

$$\leq \sup_{\lambda\in[0,1]} \| a_{m+1}(f)[\lambda\xi] \|_{q,B_n} \|\xi\|_{B_n}$$

como se tenía en proposición 4.1 de este mismo capítulo.

Así
$$\sup_{\xi \in K_{\alpha p} \cap B_n \cap K_{n,n}} q\,(\mathcal{E}^{\alpha}_{n,m,f}(\xi)) \leq \sup_{\substack{\lambda \in [0,1] \\ \xi \in K_{\alpha p} \cap B_n \cap K_{n,n}}} \|a_{m+1}(f)[\lambda\xi]\|_{q,B_n} \|\xi\|_{B_n} \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{\lambda \in [0,1] \\ \xi \in K_{\alpha p} \cap K_{n,n}}} \|a_{m+1}(f)[\lambda\xi]\|_{q,B_n} = \sup_{\xi \in K_{\alpha p} \cap K_{n,n}} \|a_{m+1}(f)[\xi]\|_{q,B_n} =$$

$$= \sup_{\xi \in K_{\alpha p} \cap K_{n,n}} q\,(a_{m+1}(f)[\xi]\,(B_n)^{m+1}) \leq \sup_{\substack{\xi \in K_{\alpha p} \cap K_{n,n} \\ 0 \leq \ell \leq r+1}} q\,(a_\ell(f)[\xi]\,(B_n)^{\ell}) \leq 1 .$$

C.Q.D.

NOTA.-

Si F es un espacio de Fréchet y si $\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)$ fuese igual a $\mathcal{A}_\alpha(\Omega,F)$, entonces las topologías $\mathcal{T}_\alpha$ y $\mathcal{T}'_\alpha$ serían las misma por el teorema del homomorfismo entre espacios de Fréchet.

CAPITULO III

ϕ I. LOS ESPACIOS $\mathcal{A}_r(\Omega,F)[\tau_r]$; $r=(r_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Sea Ω un subconjunto abierto convexo de un espacio de Silva complejo E, tal que $0\in\partial\Omega$. Sea F un espacio de Fréchet, cuya topología viene definida por la sucesión creciente de seminormas $\{p_m\}_{m\in\mathbb{N}}$. Sea φ y $K_{n,p}$ como en el capítulo I. Llamamos $\Delta_1\subset\Delta_2\subset\ldots\subset\Delta_\ell\subset\ldots$ a una sucesión fundamental de compactos de Ω.

DEFINICION I.1

Sea $r=(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números naturales. Llamamos $\mathcal{A}_r(\Omega,F)=\{f\in\mathcal{A}(\Omega,F)$, tal que para todo $q\in\mathbb{N}$, el conjunto $\{\varepsilon_{n,q,f}(x)\}_{x\in\frac{1}{r_n}B_n\cap K_{n,n}}$ es acotado en F $\}$.

OBSERVACION.-

$\mathcal{A}_r(\Omega,F)$, $r\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, son subespacios vectoriales de $\mathcal{A}(\Omega,F)$.

DEFINICION 1.2

Dotamos a $\mathcal{A}_r(\Omega, F)$, $r \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ de la topología $\mathcal{T}_r$, que definimos como aquella topología teniendo como base de entornos del origen a: $V_r(\ell, m) \cap V'_r(n, s, m)$ donde $V_r(\ell, m) = \{ f \in \mathcal{A}_r(\Omega, F) : \sup_{x \in \Delta_\ell} p_m(f(x)) \leq 1 \}$

$$V'_r(n,s,m) = \left\{ f \in \mathcal{A}_r(\Omega, F) : \forall q, \; 0 \leq q \leq s \;\; \begin{array}{l} (1) \;\; p_m(u_q(f)(B_n)^q) \leq 1 \\ (2) \;\; \sup\limits_{x \in \frac{1}{r_n} B_n \cap K_{n,n}} p_m(\varepsilon_{n,q,f}(x)) \leq 1 \end{array} \right\}$$

con $n, \ell, m \in \mathbb{N}$, s = 0, 1, 2, ...

PROPOSICION 1.1

$\mathcal{A}_r(\Omega, F)[\mathcal{T}_r]$ es un espacio de Fréchet.

Demostración.- Es metrizable por tener una base de entornos del origen numerable. Veamos que es completo.

Si $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una sucesión $\mathcal{T}_r$-Cauchy en $\mathcal{A}_r(\Omega, F)$, esta es una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{H}(\Omega, F), \tau_0)$, y como este espacio es de Fréchet, entonces existe f en $\mathcal{H}(\Omega, F)$ tal que $f_j \longrightarrow f$ para la topología τ_0 de $\mathcal{H}(\Omega, F)$. También, para cada q = 0, 1, 2, ..., la sucesión $(u_q(f_j))_{j \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(L_{q,s}({}^qE, F), \tau_0)$, luego esta converge a un elemento de $L_{q,s}({}^qE, F)$ denotado por $u_q(f)$. Para cada q, n y cada x en $\frac{1}{r_n} B_n \cap K_{n,n}$ la sucesión $(\varepsilon_{n,q,f_j}(x))_{j \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en F, luego la sucesión $(\varepsilon_{n,q,f_j}(x))_{j \in \mathbb{N}}$ es convergente a un elemento de F, que denotamos $\mathcal{E}_{n,q,f}(x)$, para $x \in \frac{1}{r_m} B_n \cap K_{n,n}$, pero por ser uniformemente Cauchy en $\frac{1}{r_m} B_n \cap K_{n,n}$, es uniformemente convergente y resulta que $\mathcal{E}_{n,q,f}(x) \longrightarrow 0$ en F, cuando $x \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$ y x queda en $K_{n,n}$.

Puesto que podemos escribir:

$$f_j(x) = \sum_{i=0}^{q} u_i(f_j)(x^i) + \|x\|_{B_n}^{q} \, \mathcal{E}_{n,q,f_j}(x), \quad x \in \Omega \cap E_{B_n},$$

haciendo tender $j \to \infty$ en la igualdad anterior, queda

$$f(x) = \sum_{i=0}^{q} u_i(f)(x^i) + \|x\|_{B_n}^{q} \, \mathcal{E}_{n,q,f}(x)$$

si $x \in \Omega \cap E_{B_n}$ y además $\{\mathcal{E}_{n,q,f}(x)\}_{x \in \frac{1}{r_n} B_n \cap K_{n,n}}$ está acotado para cada n, q. Así, podemos decir, que $f \in \mathcal{A}_r(\Omega, F)$ y que $f_j \longrightarrow f$ en $\mathcal{A}_r(\Omega,F)[\tau_r]$, luego $\mathcal{A}_r(\Omega,F)[\tau_r]$ es un espacio de Fréchet.

C.Q.D.

ϕ 2. $\mathcal{A}_r(\Omega,F)[\tau_r]$ COMO FH-ESPACIOS. $\mathcal{A}(\Omega,F)$ COMO UNION DE LOS $\mathcal{A}_r(\Omega,F)$.

DEFINICION 2.1

Sea H un espacio vectorial que posee una topología de Hausdorff, para la cual no es necesariamente un espacio vectorial topológico. Sea X un subespacio vectorial de H. Se dice que X es un FH-espacio, si a X se le dota de una topología que lo hace Fréchet y que es más fina que la topología relativa de H.

PROPOSICION 2.I

$\mathcal{A}_r(\Omega,F)[\mathcal{T}_r]$, $r\in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ son FH-espacios, siendo $H = \mathcal{A}(\Omega,F)[\mathcal{T}]$.

Demostración.- Sabemos por la proposición 1.1 de este capítulo que $\mathcal{A}_r(\Omega,F)[\mathcal{T}_r]$ son espacios de Fréchet. Veamos que $\mathcal{T}_r$ es más fina que la topología inducida por $\mathcal{T}$ sobre $\mathcal{A}_r(\Omega,F)$. Para ello, basta ver que si V es un $\mathcal{T}$-entorno básico de cero en $\mathcal{A}(\Omega,F)$, existe W, $\mathcal{T}_r$-entorno de cero en $\mathcal{A}_r(\Omega,F)$, tal que $W\subset V\cap \mathcal{A}_r(\Omega,F)$.

Sea $V = \{ f\in \mathcal{A}(\Omega,F) : \sup\limits_{x\in K\cap K_{n,n}} p_m(f(x))\leq 1$

y tal que para cada q natural con $0\leq q\leq S$ se tiene:

(1) $p_m(u_q(f)(B_n)^q)\leq 1$

(2) $\sup\limits_{x\in K\cap B_n\cap K_{n,n}} p_m(\varepsilon_{n,q,f}(x))\leq 1 \}$,

con $K\subset \Omega\cup\{0\}$ compacto estrellado respecto al origen tal que $0\in K$, y $n\geq n_K$ tal que $K\subset E_{B_n}$ y K es compacto en E_{B_n}. Construimos:

$W = \{ f\in \mathcal{A}_r(\Omega,F) : \sup\limits_{x\in \Delta_\ell} p_m(f(x))\leq \delta$ y tal que para cada q natural con $0\leq q\leq s$ se tiene:

(1) $p_m(u_q(f)(B_n)^q)\leq \delta$

(2) $\sup\limits_{x\in \frac{1}{r_n}B_n\cap K_{n,n}} p_m(\varepsilon_{n,q,f}(x))\leq \delta \}$,

donde Δ_ℓ es un compacto de la sucesión fundamental que tenemos de manera que $\Delta_\ell \supset K \sim \{x \in E_{B_n} : \|x\|_{B_n} < \frac{1}{r_n}\}$, y $\delta = \min \left(1, \frac{r_n^s}{(s+1)r_n^s + 1}, \frac{1}{s+2}\right)$.

Sea $f \in W$. Sea $x \in K \cap K_{n,n}$. Si $\|x\|_{B_n} \geq \frac{1}{r_n}$, se tiene que $x \in \Delta_\ell$, entonces $p_m(f(x)) \leq \delta \leq 1$ y si $x \in \frac{1}{r_n} B_n$, se tiene $f(x) = u_0 + \dots + u_s(x^s) + \|x\|_{B_n}^s \varepsilon_{n,s,f}(x)$, y de esta forma

$$p_m(f(x)) \leq p_m(u_0) + \dots + p_m(u_s(x^s)) + \|x\|_{B_n}^s p_m(\varepsilon_{n,s,f}(x)) \leq$$

$$\leq \delta + \overset{s+1)}{\dots} + \delta + \frac{1}{r_n^s}\delta \leq (s+1)\delta + \frac{1}{r_n^s}\delta = \frac{(s+1)r_n^s + 1}{r_n^s}\delta \leq 1,$$

por lo que $\sup\limits_{x \in K \cap K_{n,n}} p_m(f(x)) \leq 1$.

Veamos que $\sup\limits_{x \in K \cap B_n \cap K_{n,n}} p_m(\varepsilon_{n,q,f}(x)) \leq 1$.

Sea $x \in K \cap B_n \cap K_{n,n}$. Si $\|x\|_{B_n} \leq \frac{1}{r_n}$, entonces $x \in \frac{1}{r_n} B_n \cap K_{n,n}$ y se tiene por pertenecer f a W que $p_m(\varepsilon_{n,q,f}(x)) \leq 1$. Supongamos $\|x\|_{B_n} > \frac{1}{r_n}$, entonces debido a que $\varepsilon_{n,q,f}(x) = \dfrac{f(x) - \sum_{i=0}^{q} u_i(x^i)}{\|x\|_{B_n}^q}$,

se tiene :

$$p_m(\varepsilon_{n,q,f}(x)) \leq \frac{p_m(f(x)) + \sum_{i=0}^{q} p_m(u_i(x^i))}{\|x\|_{B_n}^q} \leq \frac{1}{r_n^q}(\delta + \overset{q+2)}{\dots} + \delta) \leq$$

$$\leq (q+2)\delta \leq (s+2)\delta \leq 1 .$$

Por todo esto $f \in V$, y así $W \subset$

$\subset V \cap \mathcal{A}_r(\Omega, F)$.

C.Q.D.

El hecho de que los espacios $\mathcal{A}_r(\Omega,F)[\tau_r]$

sean FH-espacios, nos proporciona los tres siguientes resultados. (Véase WILANSKY [1] (Cor. 5.5.8 y Prob. 104)).

COROLARIO 1.

La topología $\mathcal{T}_r$ es la única topología que se puede definir sobre $\mathcal{A}_r(\Omega,F)$, tal que $\mathcal{A}_r(\Omega,F)[\mathcal{T}_r]$ sea espacio de Fréchet y que la inmersión $i_r: \mathcal{A}_r(\Omega,F)[\mathcal{T}_r] \to \mathcal{A}(\Omega,F)[\mathcal{T}]$ sea continua.

Diremos que $r \leq r'$ si, y sólo si, $r_n \leq r'_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

COROLARIO 2.

Sobre el espacio $\mathcal{A}_r(\Omega,F)$ la topología $\mathcal{T}_r$ es más fina que la inducida por $\mathcal{T}_{r'}$ para $r \leq r'$, siendo $\mathcal{T}_{r'}$ la topología de $\mathcal{A}_{r'}(\Omega,F)$.

COROLARIO 3.

$\mathcal{A}_r(\Omega,F)$ es de primera categoría en $\mathcal{A}_{r'}(\Omega,F)$, $r < r'$, $r, r' \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

PROPOSICION 2.2

$\mathcal{A}(\Omega,F)$ es la unión de todos los $\mathcal{A}_r(\Omega,F)$, $r \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, si F es un espacio de Banach.

Demostración.- Evidentemente $\mathcal{A}(\Omega,F) \supset \bigcup_{r\in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \mathcal{A}_r(\Omega,F)$.

Sea ahora $f \in \mathcal{A}(\Omega,F)$. Sabemos que $\lim_{\substack{\|x\|_{B_n}\to 0 \\ x\in K_{n,n}}} f(x) = u_0(f)$, así dado $1>0$, existe $\rho_n>0$ tal que si $\|x\|_{B_n}<\rho_n$, con $x\in K_{n,n}$, entonces $\|f(x)\|\leq \|u_0(f)\|+1$, donde con $\|\cdot\|$ denotamos la norma de F. Pero dado $\rho_n>0$, existe $r_n\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{r_n}<\rho_n$. Luego f es acotada en $\frac{1}{r_n} B_n\cap K_{n,n}$.

Veamos que $f\in\mathcal{A}_r(\Omega,F)$, donde $r=(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sea $$\varepsilon_{n,q,f}(x) = \frac{f(x) - \sum_{i=0}^{q} u_i(f)(x^i)}{\|x\|^q_{B_n}}$$

con $x\in\Omega\cap E_{B_n}$. Debido a que $\varepsilon_{n,q,f}(x)\to 0$ cuando $\|x\|_{B_n}\to 0$ con $x\in K_{n,n}$, se tiene que existe $\delta_n>0$ tal que si $\|x\|_{B_n}<\delta_n$, $x\in K_{n,n}$, entonces

$\|\varepsilon_{n,q,f}(x)\| < 1$.

Sea $x\in \frac{1}{r_n} B_n\cap K_{n,n}$. Si $\|x\|_{B_n}<\delta_n$, se tiene que $\|\varepsilon_{n,q,f}(x)\|<1$, y si siendo $x\in\frac{1}{r_n}B_n\cap K_{n,n}$ se tuviera $\|x\|_{B_n}\geq\delta_n$, tendríamos

$$\|\varepsilon_{n,q,f}(x)\| \leq \frac{1}{\delta_n^q}\left(\|f(x)\| + \sum_{i=0}^{q}\|u_i(f)(x^i)\|\right)\leq$$
$$\leq \frac{1}{\delta_n^q}\left(\|u_0(f)\|+1+\|u_0(f)\| + \sum_{i=1}^{q}\|u_i(f)\|_{B_n}\|x\|^i_{B_n}\right)\leq$$
$$\leq \frac{1}{\delta_n^q}\left(\|u_0(f)\|+1+\|u_0(f)\| + \sum_{i=1}^{q}\|u_i(f)\|_{B_n}\frac{1}{r_n^i}\right) = M_{n,q}$$

De aquí obtenemos que $\mathcal{A}(\Omega,F) = \bigcup_{r\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}\mathcal{A}_r(\Omega,F)$.

C.Q.D.

NOTA.—

$\mathcal{A}(\Omega,F)$ se puede estructurar como el límite inductivo de los espacios $\mathcal{A}_r(\Omega,F)$, cuando F es un espacio de Banach.

$\oint$ 3. LOS ESPACIOS $\mathcal{B}_r(\Omega,F)[\tau_r']$, $r=(r_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

DEFINICION 3.1

Llamamos $\mathcal{B}_r(\Omega,F) = \Big\{ f\in \mathcal{B}(\Omega,F)$ tal que el conjunto $\{ a_m(f)[\xi] \}_{\xi\in \frac{1}{r_n}B_n\cap K_{n,n}}$ está acotado en $(\mathcal{P}({}^mE,F),\tau_0)$ para m = 0, 1, 2, ..., y n = 1, 2, ... $\Big\}$, donde $r=(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $r_n\in\mathbb{N}$ para n = 1, 2, ...

Evidentemente $\mathcal{B}_r(\Omega,F)$, $r\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, es un subespacio vectorial de $\mathcal{B}(\Omega,F)$. Si $\Delta_1\subset\ldots\subset\Delta_n\subset\ldots$ es una sucesión fundamental de compactos de Ω , dotamos a $\mathcal{B}_r(\Omega,F)$ de la topología τ_r' dada por la base de entornos del origen siguiente: $W_r(i,m)\cap W_r'(n,s,m,\ell)$,

donde $W_r(i,m) = \Big\{ f\in \mathcal{B}_r(\Omega,F) : \sup_{x\in\Delta_i} p_m(f(x))\leq 1 \Big\}$

$$W_r'(n,s,m,\ell) = \Big\{ f\in\mathcal{B}_r(\Omega,F) : \forall q,\ 0\leq q\leq s \quad \sup_{\xi\in\frac{1}{r_n}B_n\cap K_{n,n}} p_m(a_q(f)[\xi](B_\ell)^q)\leq 1\Big\}$$

con $i,m,n,\ell\in\mathbb{N}$, s = 0, 1, 2, ...

PROPOSICION 3.1

$\mathcal{B}_r(\Omega,F)\,[\tau_r']$ es un espacio de Fréchet.

Demostración.- Es metrizable por tener una base de entornos del origen numerable. Demostremos seguidamente la completitud.

Sea $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una τ_r'-sucesión de Cauchy. Esta es una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)$, y como éste es un espacio de Fréchet, entonces existe f en $\mathcal{H}(\Omega,F)$ tal que $f_j \to f$ para la topología τ_0 de $\mathcal{H}(\Omega,F)$.

Puesto que $(\mathcal{P}({}^qE,F),\tau_0)$ es completo, resulta que para $\xi \in \frac{1}{r_n} B_n \cap K_{n,n}$ fijado, existe $\lim\limits_{j\to\infty} a_q(f_j)[\xi]$ en $(\mathcal{P}({}^qE,F),\tau_0)$ para q=0,1,..., s, que llamamos $a_q[\xi]$. Sabemos, por DINEEN[5](Prop. 2.5), que

$$\frac{\hat{d}^m}{m!} : (\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0) \longrightarrow (\mathcal{P}({}^mE,F),\tau_0)$$
$$f \longmapsto \frac{\hat{d}^m f(\xi)}{m!}$$

es continua, fijado $\xi\in\Omega$. Debido a que $\lim\limits_{j\to\infty} f_j = f$ en $(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)$, tenemos también que $a_q(f_j)[\xi] \xrightarrow[j\to\infty]{\tau_0} a_q(f)[\xi]$ para $\xi\in\Omega$. Luego para todo $\xi \in \frac{1}{r_n} B_n \cap K_{n,n}$, se tiene $a_q[\xi] = a_q(f)[\xi]$. Ahora, para demostrar la convergencia en τ_r', tenemos que por ser $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$, τ_r'-Cauchy, dado $W_r(i,m)\cap W_r'(n,s,m,\ell)$, existe $j_0\in\mathbb{N}$ tal que para todo $j,j'\geq j_0$, $f_j - f_{j'} \in W_r(i,m)\cap W_r'(n,s,m,\ell)$. Luego

$$\sup_{\substack{\xi \in \frac{1}{r_n} B_n \cap K_{n,n} \\ 0 \le q \le s}} p_m \left(a_q(f_j)[\xi](B_\ell)^q - a_q(f_{j'})[\xi](B_\ell)^q \right) \le \lambda$$

y haciendo j' tender a ∞ , resulta :

$$\sup_{\substack{\xi \in \frac{1}{r_n} B_n \cap K_{n,n} \\ 0 \le q \le s}} p_m \left(a_q(f_j)[\xi](B_\ell)^q - a_q(f)[\xi](B_\ell)^q \right) \le \lambda$$

Así $f_j - f \in W'_r(n,s,m,\ell)$. Lo mismo para $W_r(i,m)$.

Es fácil probar que $f \in \mathcal{B}_r(\Omega,F)$, con lo que se concluye la demostración.

C.Q.D.

§ 4. $\mathcal{B}_r(\Omega,F)$ $[\tau'_r]$ COMO FH-ESPACIOS.

PROPOSICION 4.1

Si $H = \mathcal{B}(\Omega,F)[\tau']$, entonces $\mathcal{B}_r(\Omega,F)[\tau'_r]$ es un FH-espacio para $r \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $r = (r_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Demostración.- Sólo es necesario ver que la topología inducida por τ' sobre $\mathcal{B}_r(\Omega,F)$ es menos fina que τ'_r .

Sea U τ'-entorno de cero y veamos que existe V τ'_r-entorno de cero tal que $V \subset U \cap \mathcal{B}_r(\Omega,F)$.

Sea $U = \left\{ f \in \mathcal{B}_r(\Omega,F) : \sup_{\substack{\xi \in K \cap K_{n,n} \\ 0 \le q \le s}} p_m(a_q(f)[\xi](B_n)^q) \le 1 \right\}$, donde $K \subset \Omega \cup \{0\}$ es compacto con $0 \in K$, estrellado respecto al origen, $n \geq n_K$, tal que $K \subset E_{B_n}$ y es compacto ahí y $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tomamos $V = \left\{ f \in \mathcal{B}_r(\Omega,F) : \sup_{x \in \Delta_i} p_m(f(x)) \le \delta \right.$

y $\quad \sup_{\substack{\xi \in \frac{1}{r_n} B_n \cap K_{n,n} \\ 0 \leq q \leq s}} p_m (a_q(f)[\xi](B_n)^q) \leq \delta \;\}$,

siendo Δ_i un compacto de la sucesión fundamental que tenemos, tal que si $\quad K \sim \{x \in E_{B_n} : \|x\|_{B_n} < \frac{1}{r_n}\} = K_1$

entonces $\quad K_1 + \rho B_n \subset \Delta_i \quad$, para un $\rho > 0$. Esto es así, puesto que si $\varepsilon = d_{E_{B_n}}(K_1, \partial(\Omega \cap E_{B_n}))$, donde por $d_{E_{B_n}}$ denotamos la distancia deducida de la norma de E_{B_n}, tomamos $\rho = \frac{\varepsilon}{3}$ y tenemos $\quad K_1 + \rho B_n \subset \Omega \cap E_{B_n} \subset \Omega$.

Y siendo $\quad \delta = \min(1, \frac{1}{\max_{i=0,\dots,s} \frac{1}{\rho^i}})$.

Sea $f \in V$, $\xi \in K \cap K_{n,n}$; si $\|\xi\|_{B_n} \leq \frac{1}{r_n}$, se tiene $p_m(a_q(f)[\xi](B_n)^q) \leq 1$ para q = 0, 1, ..., s, por ser f un elemento de V. Pero si $\|\xi\|_{B_n} > \frac{1}{r_n}$, entonces:

$$\sup_{x \in B_n} p_m\left(\frac{1}{q!} \hat{d}^q f(\xi)(x^q)\right) \leq \frac{1}{\rho^q} \sup_{x \in \xi + \rho B_n} p_m(f(x)) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\rho^q} \sup_{x \in K_1 + \rho B_n} p_m(f(x)) \leq \frac{1}{\rho^q} \sup_{x \in \Delta_i} p_m(f(x)) .$$

Luego $\quad p_m(a_q(f)[\xi](B_n)^q) \leq \frac{1}{\rho^q} \sup_{x \in \Delta_i} p_m(f(x)) \leq \max(1, \frac{1}{\rho}, \dots, \frac{1}{\rho^s}) \sup_{x \in \Delta_i} p_m(f(x)) \leq$
≤ 1

para q = 0, 1, ...,s. (Ver DINEEN [5] (Prop. 2.5)). Con esto tenemos probado que $f \in U \cap B_r(\Omega, F)$.

C.Q.D.

El hecho de que los $(B_r(\Omega,F), \mathcal{T}_r')$ sean FH-espacios nos proporciona los siguientes resultados. (Véase WILANSKY [1] (Cor. 5.5.8 y Prob. 104)).

COROLARIO 1.

La topología $\mathcal{T}'_r$ es la única que se puede definir sobre $\mathcal{B}_r(\Omega,F)$, de modo que $(\mathcal{B}_r(\Omega,F),\mathcal{T}'_r)$ sea espacio de Fréchet y la inmersión $i_r : \mathcal{B}_r(\Omega,F)[\mathcal{T}_r] \longrightarrow \mathcal{B}(\Omega,F)[\mathcal{T}']$ sea continua.

COROLARIO 2.

Para todo $r<r'$, $r, r' \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, se tiene que la topología $\mathcal{T}'_r$ sobre $\mathcal{B}_r(\Omega,F)$ es más fina que la inducida por $\mathcal{T}'_{r'}$.

COROLARIO 3.

$\mathcal{B}_r(\Omega,F)$ es de primera categoría en $\mathcal{B}_{r'}(\Omega,F)$, para $r<r'$ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

§ 5. COMPARACION DE LOS ESPACIOS $(\mathcal{A}_r(\Omega,F),\mathcal{T}_r)$ y $(\mathcal{B}_r(\Omega,F),\mathcal{T}'_r)$.

PROPOSICION 5.1

Cada $\mathcal{B}_r(\Omega,F)$ es un subconjunto propio de $\mathcal{A}_r(\Omega,F)$, $r \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Demostración.- Es conocido que $\mathcal{B}_r(\Omega,F) \subset \mathcal{B}(\Omega,F) \subset \mathcal{A}(\Omega,F)$. Luego dada $f \in \mathcal{B}_r(\Omega,F)$, se tiene que f posee desarrollo asintótico en el origen y

$f(x) = a_0(f) + a_1(f)(x) + \dots + a_q(f)(x^q) + \|x\|^q_{B_n} \varepsilon_{n,q,f}(x)$ con $x \in \Omega \cap E_{B_n}$, donde $a_i(f) = \tau_0\text{-}\lim a_i(f)[\xi]$ en $\mathcal{P}(^iE,F)$ cuando $\xi \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$ con $\xi \in K_{n,p}$, $p \in \mathbb{N}$, siendo $\varepsilon_{n,q,f}(x) \longrightarrow 0$ en F cuando $x \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} 0$ con x en $K_{n,p}$, $p \in \mathbb{N}$.

Dado $\lambda > 0$ y dada $p_m \in sc(F)$, existe $\delta_{m,n} > 0$ tal que si $\|x\|_{B_n} < \delta_{m,n}$, $x \in K_{n,n}$, entonces $p_m(\varepsilon_{n,q,f}(x)) < \lambda$. Si $x \in \frac{1}{r_n} B_n \cap K_{n,n}$, tenemos dos casos:

(i) $\|x\|_{B_n} < \delta_{m,n}$, con lo cual $p_m(\varepsilon_{n,q,f}(x)) < \lambda$.

(ii) $\|x\|_{B_n} \geq \delta_{m,n}$; en este caso

$$p_m(\varepsilon_{n,q,f}(x)) \leq \frac{1}{\delta^q_{m,n}} \left[p_m(f(x)) + \sum_{i=0}^{q} p_m(a_i(f)(x^i)) \right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{\delta^q_{m,n}} \left[p_m(a_0(f)[x]) + \sum_{i=0}^{q} p_m(a_i(f)(x^i)) \right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{\delta^q_{m,n}} \left[M_0^{m,n} + \sum_{i=0}^{q} M^i_{m,n} \right],$$

donde $M_0^{m,n} \geq \sup_{x \in \frac{1}{r_n} B_n \cap K_{n,n}} p_m(a_0(f)[x])$ por ser $f \in \mathcal{B}_r(\Omega, F)$ y $M^i_{m,n} \geq \sup_{x \in B_n} p_m(a_i(f)(x^i))$, pues debido a que $\sup_{\xi \in \frac{1}{r_n} B_n \cap K_{n,n}} p_m(a_i(f)[\xi](B_n)^i)$ es finito, tomando límites cuando $\|\xi\|_{B_n} \longrightarrow 0$ con $\xi \in K_{n,n}$, como los ξ puedo considerarlos en $\frac{1}{r_n} B_n \cap K_{n,n}$, resulta que $p_m(a_i(f)(B_n)^i) \leq M^i_{m,n}$.

Con todo esto demostramos que $f \in \mathcal{A}_r(\Omega, F)$. Para probar que el subconjunto $\mathcal{B}_r(\Omega, F)$ de $\mathcal{A}_r(\Omega, F)$ es propio, véase FERNANDEZ [1] (Prop. III-B. 3.5).

C.Q.D.

PROPOSICION 5.2

Sobre $\mathcal{B}_r(\Omega, F)$ la topología τ'_r es más fina que la inducida por τ_r.

Demostración.- Tenemos que probar que dado V τ_r-entorno de cero, existe W τ'_r-entorno del origen tal que

$W \subset V \cap \mathcal{B}_r(\Omega, F)$.

Sea $V = \{ f \in \mathcal{B}_r(\Omega, F) : \sup_{x \in \Delta i} p_m(f(x)) \leq 1$ y para cada q = 0, 1, 2, ..., s, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} (1)\quad p_m\,(a_q(f)\,(B_n)^q) \leq 1 \\ (2)\quad \sup\limits_{x \in \frac{1}{r_n} B_n \cap K_{n,m}} p_m\,(\varepsilon_{n,q,f}(x)) \leq 1 \end{array}\right\} .$$

Tomamos $W = \{ f \in \mathcal{B}_r(\Omega, F) : \sup_{x \in \Delta i} p_m(f(x)) \leq \delta$ y para cada q = 0, 1, 2, ..., s + 1, se tiene

$$\sup_{\xi \in \frac{1}{r_n} B_n \cap K_{n,m}} p_m\,(a_q(f)\,[\xi]\,(B_n)^q) \leq \delta \quad \} ,$$

donde $\delta = \min\,(1, \frac{r_n}{s+1})$.

Sea $f \in W$, entonces trivialmemte $\sup_{x \in \Delta i} p_m(f(x)) \leq 1$ y también $p_m\,(a_q(f)\,(B_n)^q) \leq 1$, q = 0, 1, 2, ..., s, tomando τ_0-límites en la segunda desigualdad definitoria de W.

Por otra parte, cuando $x \in \frac{1}{r_n} B_n \cap K_{n,n}$,

$$P_m(E_{n,q,f}(x)) = P_m\left(\frac{f(x) - a_0(f) - a_1(f)(x) - \ldots - a_q(f)(x^q)}{\|x\|^q_{B_n}}\right) \leq$$

$$\leq (q+1) \sup_{\lambda \in [0,1]} P_m(a_{q+1}(f)[\lambda x](B_n)^{q+1}) \|x\|_{B_n} \leq$$

$$\leq (q+1) \frac{1}{r_n} \delta \leq \frac{(s+1)}{r_n} \delta \leq 1.$$

De este modo, $f \in V \cap \mathcal{B}_r(\Omega, F)$.

C. Q. D.

CAPITULO IV

ϕ I. DESARROLLOS ASINTOTICOS EN UN SUBCONJUNTO DENSO DE PUNTOS DE LA FRONTERA. EL ESPACIO $F_\alpha(\Omega,F)[T_\alpha]$.

Sea Ω un subconjunto abierto convexo de un espacio de Silva complejo E. De esta forma, la frontera $\partial\Omega$ es separable, pues cualquier subconjunto cerrado de un hemicompacto es hemicompacto, y como todo compacto de E es metrizable y separable, el cerrado es separable. MUJICA [1] (Teor. 7.4).

Sea F un espacio de Fréchet-Montel. Sea $(z_n)_{n\in N}$ un subconjunto denso de puntos de $\partial\Omega$. Si $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \ldots \subset \Delta_p \subset \ldots$ es un sucesión fundamental de compactos de Ω, para cada z_n consideramos una sucesión de compactos de $(K^n_{\alpha p})^{\infty}_{p=1}$, $\Omega \cup \{z_n\}$, estrellados respecto a z_n, que cumple:

(1) $z_n \in K^n_{\alpha p}$, p = I, 2, ...

(2) $\Delta_p \subset K^n_{\alpha p}$, p = 1, 2, ...

(3) $K^n_{\alpha p} \subset K^n_{\alpha p+1}$, p = 1, 2, ...,

con α recorriendo un conjunto de índices Γ, infinito no numerable.

Asociados a estas familias de compactos tenemos los espacios:

$\mathcal{A}_\alpha^n(\Omega,F) = \{ f \in \mathcal{H}(\Omega,F)$, tal que f tiene desarrollo asintótico en z_n , a través de los compactos $(K_{\alpha p}^n)_{p=1}^{\infty}\}$.

En $\mathcal{A}_\alpha^n(\Omega,F)$, consideramos la topología τ_α^n que se define de manera análoga a τ_α en $\mathcal{A}_\alpha(\Omega,F)$ (CAP. I. § 2).

Sabemos que el espacio $(\mathcal{A}_\alpha^n(\Omega,F),\tau_\alpha^n)$ es un espacio de Fréchet-Montel, al serlo también F.

DEFINICION 1.1

Llamamos $H_\alpha^n(\Omega,F) = \mathcal{A}_\alpha^1(\Omega,F)\times\ldots\times\mathcal{A}_\alpha^n(\Omega,F)$.

En $H_\alpha^n(\Omega,F)$ tomamos la topología producto Π_α^n , y así $H_\alpha^n(\Omega,F)[\Pi_\alpha^n]$ es un espacio de Fréchet-Montel.

Si $m \leq n$, se consideran las aplicaciones $\phi_{m,n} : A_\alpha^n(\Omega,F) \longrightarrow A_\alpha^m(\Omega,F)$, definidas por

$$\phi_{m,n}(f_1,\ldots,f_m,\ldots,f_n) = (f_1,\ldots,f_m) .$$

PROPOSICION I.1

El sistema $\left(A_\alpha^n(\Omega,F), \phi_{m,n}\right)_{m,n\in\mathbb{N}}$ es un sistema proyectivo.

Demostración.- Basta ver que si $m \leq n \leq p$, se tiene que $\phi_{m,n} \circ \phi_{n,p} = \phi_{m,p}$, pero esto es trivial.

C.Q.D.

Consideramos de esta forma, el límite proyectivo $\varprojlim \phi_{m,n}\left(A_\alpha^n(\Omega,F)\right) = \tilde{A}^\alpha(\Omega,F)$.

PROPOSICION 1.2

$\tilde{A}^\alpha(\Omega,F)\,[\tilde{T}^\alpha]$, donde $\tilde{T}^\alpha$ es la topología límite proyectivo, es un espacio de Fréchet-Montel.

Demostración.- La prueba es obvia, debido a que $A_\alpha^n(\Omega,F)\,[\pi_\alpha^n]$ son espacios de Fréchet-Montel para $n \in \mathbb{N}$.

C.Q.D.

$\tilde{A}^\alpha(\Omega,F)$, por ser límite proyectivo, es un subespacio del producto $\prod_{n=1}^{\infty} A_\alpha^n(\Omega,F)$, cuyos elementos verifican la condición siguiente:

Si $\tilde{x} \in \tilde{A}^{\alpha}(\Omega, F)$, entonces $\tilde{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que si $m \leq n$, se tiene $x_m = \phi_{m,n}(x_n)$, es decir, $\tilde{x} = [(f_1), (f_1, f_2), \ldots]$, donde cada f_i es un elemento de $\mathcal{A}_{\alpha}^{i}(\Omega, F)$.

DEFINICION 1.2

Llamamos $F_{\alpha}(\Omega, F) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_{\alpha}^{n}(\Omega, F)$.

Considerando las identidades $I_n : F_{\alpha}(\Omega, F) \longrightarrow \mathcal{A}_{\alpha}^{n}(\Omega, F)$, $F_{\alpha}(\Omega, F)$ es el núcleo localmente convexo $\underset{n}{K}\ I_n^{-1}(\mathcal{A}_{\alpha}^{n}(\Omega, F))$.

PROPOSICION 1.3

$F_{\alpha}(\Omega, F)$ se puede identificar con un subespacio cerrado de $\tilde{A}^{\alpha}(\Omega, F)$.

Demostración.- Establecemos la aplicación:

$$\begin{aligned} \psi : F_{\alpha}(\Omega, F) &\longrightarrow \tilde{A}^{\alpha}(\Omega, F) \\ f &\longmapsto [(f), (f, f), (f, f, f), \ldots] \end{aligned}$$

la cual, es lineal e inyectiva.

En $F_{\alpha}(\Omega, F)$ tomamos la topología T_{α} , para la cual, una base de entornos de cero viene dada por las intersecciones finitas de los entornos de cero en los espacios $\mathcal{A}^n_\alpha(\Omega,F)$, es decir, podemos tomar V, entorno básico de cero en $F_\alpha(\Omega,F)$, si, y sólo si, $V = V_1 \cap \ldots \cap V_n$, donde V_i es un entorno de cero en $\mathcal{A}^i_\alpha(\Omega,F)$.

Veamos la continuidad de Ψ . Sea W un entorno de cero en $\tilde{A}^\alpha(\Omega,F)[\tilde{T}^\alpha]$. Así

$W = [W_1 \times \ldots \times W_n \times A^{n+1}_\alpha(\Omega,F) \times A^{n+2}_\alpha(\Omega,F) \times \ldots] \cap \tilde{A}^\alpha(\Omega,F)$,

donde W_1 es un Π^1_α -entorno de cero en $A^1_\alpha(\Omega,F)$ ..., W_n es un Π^n_α -entorno de cero en $A^n_\alpha(\Omega,F)$, es decir, $W_1 = U^1_1$, U^1_1 es τ^1_α -entorno de cero en $\mathcal{A}^1_\alpha(\Omega,F)$, ..., $W_n = U^n_1 \times \ldots \times U^n_n$, donde U^n_i es un τ^i_α -entorno de cero en $\mathcal{A}^i_\alpha(\Omega,F)$. Por tanto

$\Psi^{-1}(W) = V = U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n$,

donde $U_1 = U^1_1 \cap \ldots \cap U^n_1$, ..., $U_n = U^n_n$. De esta forma, como V es un T_α -entorno de cero en $F_\alpha(\Omega,F)$, al ser intersección finita de entornos de cero en los espacios $\mathcal{A}^n_\alpha(\Omega,F)$, se tiene que Ψ es continua.

También Ψ es abierta. Sea $V = U_1 \cap \ldots \cap U_n$ un T_α -entorno de cero en $F_\alpha(\Omega,F)$, así

$\Psi(V) = [U_1 \times (U_1 \times U_2) \times \ldots \times (U_1 \times \ldots \times U_n) \times A^{n+1}_\alpha(\Omega,F) \times \ldots] \cap \Psi(F_\alpha(\Omega,F))$.

Esto ocurre de esta manera, pues si $\tilde{f} \in \Psi(V)$, entonces $\tilde{f} = \{(f), (f,f), (f,f,f), \ldots\}$, $f \in V$, por lo que se tiene $f \in U_1$, $f \in U_2$, ...,

$f \in U_n$, y como $f \in F_\alpha(\Omega,F)$, también $f \in A_\alpha^{n+1}(\Omega,F)\ldots$, es decir, $\tilde{f} \in \{U_1 \times \ldots \times (U_1 \times U_2 \times \ldots U_n) \times A_\alpha^{n+1}(\Omega,F) \times \ldots\} \cap$ $\cap\ \Psi\ (F_\alpha(\Omega,F))$.

Recíprocamente, sea $\tilde{f}$ un elemento de $U_1 \times \ldots \times (U_1 \times \ldots \times U_n) \times A_\alpha^{n+1}(\Omega,F) \cap \Psi(F_\alpha(\Omega,F))$. Luego $\tilde{f} = [(f),(f,f),(f,f,f),\ldots]$, donde $f \in U_1$, $f \in U_2$, ..., $f \in U_n$, $f \in F_\alpha(\Omega,F)$, y por tanto, $f \in V$, esto es, $\tilde{f} \in \Psi(V)$.

De este modo $\Psi(V)$ es un abierto de $(\Psi(F_\alpha(\Omega,F)),\hat{\tilde{T}}_\alpha)$. Luego $F_\alpha(\Omega,F)$ se puede identificar con $\tilde{F}^\alpha(\Omega,F) = \Psi(F_\alpha(\Omega,F))$.

Veamos, por último, que $\tilde{F}^\alpha(\Omega,F)$ es cerrado de $\tilde{A}^\alpha(\Omega,F)$. Sea una sucesión convergente de elementos de $\tilde{F}^\alpha(\Omega,F)$. Esta será de la forma $\{(f_n),(f_n,f_n),\ldots\}$. El límite de esta sucesión en $\tilde{A}^\alpha(\Omega,F)$ será $\{(f_1),(f_1,f_2),(f_1,f_2,f_3),\ldots\}$, donde $f_1 = \tau_\alpha^1 - \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, $f_2 = \tau_\alpha^2 - \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, ..., $f_r = \tau_\alpha^r - \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, ... Todas estas convergencias, en particular, implican la convergencia puntual. Así, si $i \neq j$, las funciones f_i y f_j coinciden en Δ_p , $\Delta_p \subset \mathring{K}^i_{\alpha_p} \cap \mathring{K}^j_{\alpha_p}$, y por tanto, en todo Ω . De esta forma $f_i = f_j$. Además $f_i \in \mathcal{A}_\alpha^i(\Omega,F)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, por ser $\mathcal{A}_\alpha^i(\Omega,F)\,[\tau_\alpha^i]$ completo. Llamando f a todas las funciones f_i, $i \in \mathbb{N}$, queda $f \in \mathcal{A}^i_\alpha(\Omega,F)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, y el límite de la sucesión tiene la forma $\tilde{f} = \{(f), (f,f), \ldots \}$, $f \in F_\alpha(\Omega,F)$, es decir, $\tilde{f} \in \tilde{F}^\alpha(\Omega,F)$.

C.Q.D.

COROLARIO.

$F_\alpha(\Omega,F)\,[T_\alpha]$ es un espacio de Fréchet-Montel.

Demostración.- Obvia, por ser topológicamente isomorfo a un subespacio cerrado de $\tilde{A}^\alpha(\Omega,F)[\tilde{T}^\alpha]$, que es un espacio de Fréchet-Montel.

C.Q.D.

OBSERVACION.

Existen funciones de $F_\alpha(\Omega,F)$ que no tienen desarrollo asintótico en todos los puntos de la frontera de Ω, FERNANDEZ [A] (pág. 11).

§ 2. EXTENSION DE DIFERENCIALES EN UN SUBCONJUNTO DENSO DE PUNTOS DE LA FRONTERA. EL ESPACIO $G_\alpha(\Omega,F)[T^1_\alpha]$.

Considerando una familia de compactos $\{K^n_{\alpha p}\}_{p=1}^{\infty}$ del apartado anterior, también tenemos definidos los espacios:

$$\mathcal{B}^n_\alpha(\Omega,F) = \{ f \in \mathcal{H}(\Omega,F) : \quad a_k(f)\,[\xi]$$

tiene límite en $(\mathcal{P}({}^kE, F), \tau_0)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, cuando $\xi \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_n}} z_n$ a través de los compactos $\{\{K^n_{\alpha p}\}_{p=1}^{\infty}\}$. Este "a través de los compactos $\{K^n_{\alpha p}\}_{p=1}^{\infty}$" tiene un sentido análogo al de la definición 2.1 del capítulo II, en que se consideraba el origen en vez de un punto z_n.

Sabemos que cada $(\mathcal{B}^n_\alpha(\Omega,F), \tau'^n_\alpha)$ son espacios de Fréchet-Montel y que $\mathcal{B}^n_\alpha(\Omega,F)\subset_c \mathcal{A}^n_\alpha(\Omega,F)$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

DEFINICION 2.1

Llamamos $\mathbb{B}^n_\alpha(\Omega,F)$, $n\in\mathbb{N}$, a

$$\mathcal{B}^1_\alpha(\Omega,F)\times\ldots\times\mathcal{B}^n_\alpha(\Omega,F) .$$

En $\mathbb{B}^n_\alpha(\Omega,F)$ tenemos la topología producto Π'^n_α que le dota de estructura de espacio de Frechet--Montel.

Si $m\leq n$, consideramos las aplicaciones $\Psi_{m,n}:\mathbb{B}^n_\alpha(\Omega,F)\longrightarrow\mathbb{B}^m_\alpha(\Omega,F)$, donde $\Psi_{m,n}$ son las proyecciones, esto es, $\Psi_{m,n}(f_1,\ldots,f_m,\ldots,f_n)=(f_1,\ldots f_m)$.

PROPOSICION 2.1

El sistema $(\mathbb{B}^n_\alpha(\Omega,F), \Psi_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}}$ es un sistema proyectivo.

Demostración.- Obvia, puesto que $\Psi_{m,n} \circ \Psi_{n,p} = \Psi_{m,p}$, si $m \leq n \leq p$.

C.Q.D.

Consideramos el límite proyectivo $\varprojlim \Psi_{m,n} \left(\mathbb{B}^m_\alpha (\Omega,F) \right) = \widetilde{\mathbb{B}}^\alpha(\Omega,F)$. Debido a que todas las aplicaciones $\Psi_{m,n}$ son continuas, podemos considerar la topología $\widetilde{T}'^\alpha$ límite proyectivo en $\widetilde{\mathbb{B}}^\alpha(\Omega,F)$.

PROPOSICION 2.2

$\widetilde{\mathbb{B}}^\alpha(\Omega,F) [\widetilde{T}'^\alpha]$ es un espacio de Fréchet-Montel.

Demostración.- Es un espacio de Fréchet-Montel, puesto que es un subespacio cerrado del producto topológico $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{B}^n{}_\alpha(\Omega,F) [\pi'^n_\alpha]$.

C.Q.D.

Los elementos de $\widetilde{\mathbb{B}}^\alpha(\Omega,F)$, $\widetilde{x}$, son de la forma $\widetilde{x} = (x_n)_{n \in N}$ tal que si $m \leq n$, entonces $x_m = \Psi_{m,n}(x_n)$, es decir, $\widetilde{x} = \{ (f_1), (f_1,f_2), \dots \}$ donde cada $f_i \in \mathcal{B}^i_\alpha(\Omega,F)$.

DEFINICION 2.2

Llamamos $G_\alpha(\Omega,F) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_\alpha^n(\Omega,F)$.

Considerando las identidades $I_n : G_\alpha(\Omega,F) \to \mathcal{B}_\alpha^n(\Omega,F)$ $G_\alpha(\Omega,F)$ es el núcleo localmente convexo $\bigwedge_n I_n^{-1}(\mathcal{B}_\alpha^n(\Omega,F))$.

PROPOSICION 2.3

$G_\alpha(\Omega,F)$ se puede identificar a un subespacio cerrado de $\tilde{\mathbb{B}}^\alpha(\Omega,F)[\tilde{T}'^\alpha]$.

Demostración.- Establecemos la aplicación $\Psi : G_\alpha(\Omega,F) \to \tilde{\mathbb{B}}^\alpha(\Omega,F)$ tal que $\Psi(f) = \{(f), (f,f), \dots\}$. Ψ es, claramente, una aplicación lineal e inyectiva. Además, si dotamos a $G_\alpha(\Omega,F)$ de la topología T'_α para la cual una base de entornos de cero está dada por las intersecciones finitas de entornos de cero en los espacios $\mathcal{B}_\alpha^n(\Omega,F)[\tau'^n_\alpha]$, tenemos que Ψ es un homomorfismo topológico.

Por tanto, $G_\alpha(\Omega,F)$ se puede identificar con $\Psi(G_\alpha(\Omega,F)) = \tilde{G}^\alpha(\Omega,F)$. Análogamente con el apartado anterior, se prueba que $\Psi(G_\alpha(\Omega,F))$ es un subespacio cerrado de $\tilde{\mathbb{B}}^\alpha(\Omega,F)[\tilde{T}'^\alpha]$.

C.Q.D.

COROLARIO.

$G_\alpha(\Omega,F)$ $[T'_\alpha]$ es un espacio de Fréchet--Montel.

$\oint$ 3. COMPARACION DE LOS ESPACIOS $F_\alpha(\Omega,F)[T_\alpha]$ Y $G_\alpha(\Omega,F)[T'_\alpha]$.

Sea una sucesión de compactos $\{K_{\alpha p}\}_{p=1}^{\infty}$ de $\Omega\cup\{z_n\}$, estrellados respecto de z_n, que cumplen lo de $\oint$ 1. del presente capítulo.

Asociados a estas familias de compactos, tenemos los espacios $\mathcal{A}^n_\alpha(\Omega,F)$ y $\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)$, $\alpha\in\Gamma$.

Sabemos que cada $\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)$ está contenido en $\mathcal{A}^n_\alpha(\Omega,F)$, y que sobre $\mathcal{B}_\alpha(\Omega,F)$ la topología τ'^n_α es más fina que la inducida por τ^n_α.

PROPOSICION 3.1

$G_\alpha(\Omega,F)\subset F_\alpha(\Omega,F)$, y sobre $G_\alpha(\Omega,F)$, la topología T'_α es más fina que la inducida por T_α.

Demostración.- Tenemos $G_\alpha(\Omega,F)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{B}^n_\alpha(\Omega,F)\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}^n_\alpha(\Omega,F)=F_\alpha(\Omega,F)$

Por otra parte, sea $(V_1\cap\ldots\cap V_n)\cap G_\alpha(\Omega,F)$ un T_α-entorno de cero en $G_\alpha(\Omega,F)$, donde cada V_i es un τ^i_α-entorno de cero de $\mathcal{A}^i_\alpha(\Omega,F)$.

$V_i \cap \mathcal{B}^i_\alpha(\Omega, F)$ es un $\mathcal{T}^i_\alpha$-entorno de cero de $\mathcal{B}^i_\alpha(\Omega,F)$, y sobre $\mathcal{B}^i_\alpha(\Omega,F)$ la topología $\mathcal{T}'^i_\alpha$ es más fina que la inducida por $\mathcal{T}^i_\alpha$. Luego existe un U_i, siendo U_i un $\mathcal{T}'^i_\alpha$ -entorno de cero en $\mathcal{B}^i_\alpha(\Omega,F)$, tal que $U_i \subset V_i \cap \mathcal{B}^i_\alpha(\Omega,F)$. Así, $U_1 \cap \ldots \cap U_n$ es un T'_α -entorno de cero en $G_\alpha(\Omega,F)$ y se tiene que $U_1 \cap \ldots \cap U_n$ está contenido en $(V_1 \cap \ldots \cap V_n) \cap G_\alpha(\Omega, F)$. Luego $T_\alpha \subset T'_\alpha$ sobre $G_\alpha(\Omega,F)$.

C.Q.D.

OBSERVACION.

En general, $G_\alpha(\Omega,F) \subsetneqq F_\alpha(\Omega,F)$. FERNANDEZ [1] (Prop. I-C. 1.8).

C A P I T U L O   V

§ 1. DUALIDAD DEL ESPACIO $(\mathcal{H}(\Omega,F), \tau_0)$.

Sea E el dual topológico de un espacio de Fréchet H, dotado de la topología $\lambda(H', H)$, que es la topología sobre E de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos compactos de H.

Sea $\Omega \subset E$, un conjunto abierto, equilibrado y holomórficamente convexo.

Es conocido, VALDIVIA [2] (Prop. 9), que Ω con la topología inducida por E es un hemicompacto $K_{\mathbb{R}}$-espacio. Así, encontramos en Ω una sucesión fundamental creciente de subconjuntos compactos (K_n) , que podemos tomar equilibrados por serlo Ω .

Siendo F un espacio de Fréchet, formamos $\mathcal{H}(\Omega, F)$, el espacio de las funciones holomorfas defini das sobre Ω y con valores en F. A este espacio podemos dotarle de estructura de espacio de Fréchet, considerando definida sobre él, la topología τ_0 generada por el sistema de seminormas $\{\|\cdot\|_{n,K_m}\}_{n,m=1}^{\infty}$, donde

$$\|g\|_{n,K_m} = \sup \{ p_n(g(x)) : x \in K_m \}$$

para todo $g \in \mathcal{H}(\Omega, F)$, y donde $\{p_n, n=1,2,\ldots\}$ es el sistema de seminormas que define la topología del espacio de Fréchet F.

DEFINICION 1.1

Sea K un subconjunto compacto de E. Para cada $j \in \mathbb{N}$, definimos las seminormas

$$\|P\|_{n,K} = \sup_{x \in K} p_n(P(x))$$

Estas seminormas $\|\cdot\|_{n,K}$ generan la topología compacta en $\mathcal{P}(^jE, F)$.

Dado $\mu \in (\mathcal{P}(^jE,F))'$, denotamos por $\|\mu\|_{m,K} = \sup_{\|f\|_{m,K} \le 1} |\langle f, \mu\rangle|$; supremo que puede ser finito o infinito. Cuando se habla del dual topológico de $\mathcal{P}(^jE,F)$, se ha considerado en $\mathcal{P}(^jE,F)$, para hallar el dual, la topología compacta.

Cuando el supremo anterior sea finito, y $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, se cumple:

$$\| P \|_{n,\alpha K} = |\alpha|^j \, \| P \|_{m,K} \quad , \quad \forall \; P \in \mathcal{P}({}^jE,F)$$

$$\| \mu \|_{n,\alpha K} = \frac{1}{|\alpha|^j} \, \| \mu \|_{m,K} \quad , \quad \forall \mu \in (\mathcal{P}({}^jE,F))'$$

<u>LEMA I.I</u>

Sea E un espacio localmente convexo. Sea Ω un subconjunto de E, abierto y equilibrado. Sea $K \subset \Omega$ un subconjunto compacto. Entonces existe un número real $\alpha > 1$, tal que $\alpha K \subset \Omega$.

<u>Demostración</u>.- Basta probar que existe un número real $0 < \beta < 1$, tal que $K \subset \beta \Omega$.

Veamos que $\Omega = \bigcup_{0<r<1} r\Omega$.

Debido a que Ω es equilibrado, se tiene que $r\Omega \subset \Omega$, para todo $r \in \mathbb{R}$ tal que $0<r<1$. Contrariamente, sea $x \in \Omega$, $x \neq 0$, entonces existe V entorno de cero, absolutamente convexo, tal que $x + V \subset \Omega$, ya que Ω es entorno de x .

Puesto que V es absorbente, podemos encontrar un número real $\lambda_0 > 0$, tal que $\lambda_0 x \in V$, y así $x + \lambda_0 x \in V$. Por tanto $(1+\lambda_0)x \in \Omega$, y resulta que $x \in r_0 \Omega$, siendo $r_0 = \dfrac{1}{1+\lambda_0}$. De esta manera, hemos probado que Ω es la unión de los conjuntos $r\Omega$ con $r \in \mathbb{R}$, tal que $0<r<1$.

Con todo esto, $K \subset \bigcup_{0<r<1} r\Omega$, y $\{r\Omega : 0<r<1\}$ es un recubrimiento abierto del conjunto K, con lo que existen $r_1, \ldots, r_n$, tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} r_i \Omega$. Llamando ahora $\beta = \max(r_1, \ldots, r_n)$, queda $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} r_i \Omega \subset$ $\subset \beta \Omega$.

C.Q.D.

DEFINICION 1.2

Para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega, F)$, definimos $\rho_{n,K}(f)$ de la siguiente manera:

$$\rho_{n,K}(f) = \frac{1}{\limsup_{j \in \mathbb{N}} \| P_j \|_{n,K}^{1/j}}$$

donde $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(x)$ es la serie de Taylor de f en el origen, $n \in \mathbb{N}$ y $K \subset \Omega$ es compacto.

PROPOSICION 1.1

Para $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(x)$ son equivalentes:

(1) $\sum_{j=0}^{\infty} P_j(x)$ define un elemento $f \in \mathcal{H}(\Omega, F)$.

(2) Para todo $K \subset \Omega$ compacto y para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos $\rho_{n,K}(f) > 1$.

Demostración.- (1) $\Longrightarrow$ (2). Suponemos que $f \in \mathcal{H}(\Omega,F)$, y sea $n \in \mathbb{N}$, $K \subset \Omega$ un subconjunto compacto. Sea $(A_m f)(x) = \sum_{j=0}^{m} P_j(x)$, $m \in \mathbb{N}$, el m-ésimo polinomio de Taylor de f en el origen. Tomamos $\alpha > 1$ tal que $\alpha K \subset \Omega$, que existe por lema anterior. Por BARROSO [2] (Prop. 1.14), para cada compacto D y cada seminorma continua β de F,

$$\lim_{m\to\infty} \beta\left(f(x) - (A_m f)(x)\right) = 0$$

uniformemente para $x \in D$, luego existe $m_1 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq m_1$, se tiene $\sup_{x \in \alpha K} p_n(f(x) - (A_m f)(x)) \leq 1$.

$$\text{Así, } \|P_m\|_{n,K} = \frac{1}{\alpha^m} \|A_m f - A_{m-1} f\|_{n,\alpha K} \leq \frac{2}{\alpha^m}$$

para $m > m_1$. Luego $\limsup_{m \in \mathbb{N}} \|P_m\|_{n,K}^{1/m} \leq \frac{1}{\alpha}$ y $\rho_{n,K}(f) \geq \alpha > 1$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Fijamos n, K; $n \in \mathbb{N}$, $K \subset \Omega$ compacto. Puesto que $\rho_{n,K}(f) > 1$, tomamos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, tal que $\rho_{n,K}(f) - \varepsilon > 1$. Por definición de límite superior, existe un $M_{n,K} \geq 0$, tal que

$$\|P_j\|_{n,K} \leq M_{n,K} \frac{1}{(\rho_{n,K}(f) - \varepsilon)^j}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Para $x \in K$, tenemos:

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_n(P_j(x)) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|P_j\|_{n,K} \leq M_{n,K} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(\rho_{n,K}(f)-\varepsilon)^j} < \infty,$$

con lo cual $\sum_{j=0}^{\infty} P_j(x)$ converge uniformemente sobre K. Esto es cierto para todo $K \subset \Omega$ compacto. Luego $\sum_{j=0}^{\infty} P_j(x)$ define una función $f \in \mathcal{H}(\Omega,F)$.

C.Q.D.

PROPOSICION 1.2

Sea A un subconjunto de $(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)$ acotado y $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos tal que:

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \sup |\alpha_n|^{1/n} \leq \lambda ,$$

entonces $\left\{ \frac{\alpha_n}{n!} \hat{d}^n f(0) : f\in A , n\in\mathbb{N} \right\}$ es un subconjunto acotado de $(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)$.

Demostración.- Sea $K\subset\Omega$ un subconjunto compacto y equilibrado, y sea $\delta>\lambda$ tal que $\delta K\subset\Omega$. Entonces, por BARROSO [2] (Prop. 2.12):

$$\frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0) x = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\delta} \frac{f(\lambda x)}{\lambda^{j+1}} d\lambda , \quad j\in\mathbb{N} .$$

Así, si $n\in\mathbb{N}$,

$$\left\| \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0) \right\|_{m,K} \leq \frac{1}{\delta^j} \sup_{\substack{|\lambda|=\delta \\ x\in K}} p_n(f(\lambda x)) \leq \frac{1}{\delta^j} \| f\|_{n,\delta K} .$$

Pero, por otra parte,

$$\sup_{f\in A} \| f\|_{n,\delta K} = M(n,\delta K, A) < +\infty .$$

Y de $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup |\alpha_n|^{1/n} \leq \lambda < \delta$, se tiene $|\alpha_n|\leq C\,\delta^n$, para todo $n\in\mathbb{N}$, con $C>0$.

Luego:

$$\sup_{\substack{f\in A \\ j\in\mathbb{N}}} \left\| \frac{\alpha_j}{j!} \hat{d}^j f(0) \right\|_{n,K} \leq \frac{|\alpha_j|}{\delta^j} M(n,\delta K, A) \leq$$

$$\leq C \cdot M(n,\delta K, A) < +\infty .$$

Con esto, concluimos la prueba de la presente proposición, pues tomar el compacto K equilibrado, no supone restricción alguna, ya que para ver la τ_0 -acotación bastaría tomar los compactos de una sucesión fundamental (K_m).

C.Q.D.

Sabemos que, para cada $j \in \mathbb{N}$, la topología inducida sobre $\mathcal{P}({}^jE, F)$ por $(\mathcal{H}(\Omega, F), \tau_0)$ es la topología compacta. Luego, para cada elemento μ de $(\mathcal{H}(\Omega, F), \tau_0)'$, la restricción μ_j a $\mathcal{P}({}^jE, F)$, satisface $\mu_j \in (\mathcal{P}({}^jE, F))'$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

PROPOSICION 1.3

Sean $\Omega \subset E$ y F en las hipótesis de este capítulo. Para cada sucesión $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de funcionales $\mu_j \in (\mathcal{P}({}^jE, F))'$, son equivalentes:

(1) Para cada subconjunto $A \subset (\mathcal{H}(\Omega, F), \tau_0)$ τ_0 -acotado, la serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} \langle \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0), \mu_j \rangle$$

es absoluta y uniformemente convergente cuando f recorre A.

(2) Para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega, F)$, la serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} \langle \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0), \mu_j \rangle$$

es absolutamente convergente.

(3) Para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega,F)$, la serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} < \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0) , \mu_j >$$

es convergente.

(4) La aplicación

$$\mu : f \longmapsto < f, \mu > = \sum_{j=0}^{\infty} < \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0), \mu_j >$$

con $f \in \mathcal{H}(\Omega,F)$, define un elemento $\mu \in (\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)'$.

Demostración.- Las implicaciones (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) son triviales. Vamos a probar (3) $\Rightarrow$ (4).

Debido a (3), la serie $\sum_{j=0}^{\infty} < \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0), \mu_j >$ es convergente para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega,F)$, luego la aplicación que aparece en (4) está bien definida. Se trata, así, de un funcional lineal en $\mathcal{H}(\Omega,F)$. Acudiendo a BARROSO [2] (Prop. 4.12), dado $K \subset E$ compacto, que sin pérdida de generalidad podemos suponerlo equilibrado, existe un número real $\rho > 0$, tal que $\rho K \subset \Omega$, pues Ω es entorno de cero y K es acotado, por ser compacto, tenemos

$$\left\| \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0) \right\|_{m,K} \leq \frac{1}{\rho^j} \sup_{x \in \rho K} p_n(f(x)) =$$

$$= \frac{1}{\rho^j} \|f\|_{n,\rho K} .$$

Y de este modo, la aplicación $f \longmapsto \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0)$ es continua, tomando en $\mathcal{H}(\Omega,F)$ la topología τ_0 y en $\mathcal{P}(^jE,F)$ la topología compacta. De este modo, con $\mu_j \in (\mathcal{P}(^jE,F))'$, resulta que:

$$f \longmapsto < \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0), \mu_j >$$

es un elemento de $(\mathcal{H}(\Omega,F), \tau_0)'$. Pero $(\mathcal{H}(\Omega,F), \tau_0)$ siendo Fréchet, es tonelado y su dual $(\mathcal{H}(\Omega,F), \tau_0)'$ es débilmente sucesionalmente completo, por lo que

$$\mu : f \longmapsto < f, \mu > = \lim_{j\to\infty} \sum_{h=0}^{j} < \frac{1}{h!} \hat{d}^h f(0), \mu_h >$$

con $f \in \mathcal{H}(\Omega,F)$, es τ_0-continua.

Probaremos ahora (4) $\Rightarrow$ (1). Como la aplicación definida en (4) es un elemento de $(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)'$, la aplicación:

$$P_\mu : f \longmapsto P_\mu(f) = |< f, \mu >| \quad , \quad f \in \mathcal{H}(\Omega,F),$$

define una seminorma τ_0-continua sobre $\mathcal{H}(\Omega,F)$.

Sea A un subconjunto acotado de $(\mathcal{H}(\Omega,F), \tau_0)'$. Por proposición 1.2 de este capítulo, el conjunto

$$\left\{ \frac{j^2}{j!} \hat{d}^j f(0) \ : \ f \in A, \ j \in \mathbb{N} \right\}$$

es acotado en $(\mathcal{H}(\Omega,F), \tau_0)$, así existe una constante $M(A,\mu) > 0$, tal que:

$$P_\mu \left(\frac{j^2}{j!} \hat{d}^j f(0) \right) = \left| < \frac{j^2}{j!} \hat{d}^j f(0), \mu_j > \right| \le M(A,\mu)$$

para todo f elemento de A y para todo j número natural.

Por tanto,

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \left| < \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0), \mu_j > \right| \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} p_\mu \left(\frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0) \right) \leq$$

$$\leq M(A,\mu) \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{j^2} .$$

C.Q.D.

Con esta proposición, tenemos establecido un isomorfismo algebraico entre el espacio $(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)'$ y el espacio vectorial de las sucesiones $\mu=(\mu_n) \in \prod_{n=0}^{\infty} (\mathcal{P}(^nE,F))'$ tal que $< f,\mu > = \sum_{n=0}^{\infty} < \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(0), \mu_n >$ es convergente para $f \in \mathcal{H}(\Omega,F)$. Esta aplicación es, claramente, lineal e inyectiva; es, también, sobreyectiva, por la equivalencia (3) $\Longleftrightarrow$ (4).

PROPOSICION I.4

El dual topológico $(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)'$ de $(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)$ es isomorfo algrebraicamente al espacio vectorial de las sucesiones $\mu=(\mu_j) \in \prod_{j=0}^{\infty} (\mathcal{P}(^jE,F))'$ tal que $\limsup_{j\in\mathbb{N}} \| \mu_j \|_{n,K}^{1/j} < 1$, para algún $K\subset\Omega$ compacto equilibrado y algún $n\in\mathbb{N}$.

Demostración.- Sea $\mu=(\mu_j) \in (\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)'$. Por proposición anterior, sabemos que

$$f \longmapsto |\langle f, \mu \rangle| = \left| \sum_{j=0}^{\infty} \langle \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0), \mu_j \rangle \right|$$

es una seminorma τ_o-continua. Luego existe $C \geq 0$, $K_m \subset \Omega$ compacto equilibrado de la sucesión fundamental que tenemos, y $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$|\langle f, \mu \rangle| = \left| \sum_{j=0}^{\infty} \langle \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0), \mu_j \rangle \right| \leq C \|f\|_{n,K_m}$$

para $f \in \mathcal{H}(\Omega, F)$. Fijamos $j \in \mathbb{N}$ y aplicamos la anterior desigualdad a los polinomios $P \in \mathcal{P}(^jE, F)$.

De esta forma, se cumple:

$$\|\mu_j\|_{n,K_m} \leq C$$

Tomamos $\alpha > 1$, tal que $\alpha K_m \subset \Omega$. Así

$$\|\mu_j\|_{n,\alpha K_m} \leq \frac{C}{\alpha^j}$$

Por tanto,

$$\lim_{j \in \mathbb{N}} \sup \|\mu_j\|_{n,\alpha K_m}^{1/j} \leq \frac{1}{\alpha} < 1 .$$

Contrariamente, sea $\mu = (\mu_j) \in \prod_{j=0}^{\infty} (\mathcal{P}(^jE, F))'$, tal que $\lim_{j \in \mathbb{N}} \sup \|\mu_j\|_{n,K}^{1/j} = r < 1$, para algún $n \in \mathbb{N}$ y algún $K \subset \Omega$ compacto equilibrado.

Tomamos σ número real tal que $r < \sigma < 1$, y tenemos $\lim_{j \in \mathbb{N}} \sup \|\mu_j\|_{n,\sigma K}^{1/j} = \frac{r}{\sigma} < 1$. Luego, para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \geq 0$, de manera que

$$\|\mu_j\|_{n,\sigma K} \leq N \left(\frac{r}{\sigma} + \varepsilon \right)^j , \quad \forall j \in \mathbb{N} .$$

Por otra parte, fijando $f \in \mathcal{H}(\Omega, F)$,

existe $M \geqslant 0$, tal que:

$$\left\| \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(0) \right\|_{n,\sigma K} \leq M \frac{1}{(\rho_{n,\sigma K}(f) - \varepsilon)^j}, \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

teniendo en cuenta la definición I.2 del presente capítulo.

Además, por proposición 1.1 de este capítulo, tenemos $\rho_{n,\sigma K}(f) > 1$, y podemos suponer ε suficientemente pequeño cumpliendo

$$\frac{r}{\sigma} + \varepsilon < \rho_{n,\sigma K}(f) - \varepsilon .$$

Entonces:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left| < \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(0), \mu_m > \right| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(0) \right\|_{n,\sigma K} \| \mu_m \|_{n,\sigma K} \leq$$

$$\leq M.N. \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r/\sigma + \varepsilon}{\rho_{n,\sigma K}(f) - \varepsilon} \right)^m < +\infty .$$

C.Q.D.

NOTA.

Tomando las seminormas p_n, n = 1, 2, ..., en F crecientes, no sólo sería válido

$$\limsup_{j \in \mathbb{N}} \| \mu_j \|_{n,K}^{1/j} < 1$$

con $\mu = (\mu_j) \in \prod_{j=0}^{\infty} (\mathcal{P}({}^j E, F))'$

para algún $n \in \mathbb{N}$ y algún $K \subset \Omega$ compacto equilibrado, sino que también sería válido

$$\limsup_{j \in \mathbb{N}} \| \mu_j \|_{m,K'}^{1/j} < 1 ,$$

para todo $m \geq n$, $m \in \mathbb{N}$ y para todo K' compacto equilibrado, tal que $\Omega \supset K' \supset K$.

Entonces, con $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de seminormas que genere la topología de F y $(K_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ una sucesión fundamental de subconjuntos compactos equilibrados en Ω :

DEFINICION 1.3

Para cada $n\in\mathbb{N}$, $\ell\in\mathbb{N}$ y $r\in\mathbb{R}$, $0<r<1$, definimos $S_r(n,\ell,F)$ como el espacio vectorial de las sucesiones $\mu = (\mu_j) \in \prod_{j=0}^{\infty} (\mathcal{P}(^jE,F))'$ tal que existe $N_\mu \geq 0$, de modo que

$$\|\mu_j\|_{n,K_\ell} \leq N_\mu \cdot r^j \qquad \forall j \in \mathbb{N} .$$

Fácilmente, atendiendo a la proposición 1.4, de este capítulo, se tiene:

$$(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_o)' = \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ \ell\in\mathbb{N}\\ 0<r<1}} S_r(n,\ell,F) .$$

§ 2. LA TOPOLOGIA FUERTE SOBRE EL ESPACIO DUAL DE $(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_o)$.

DEFINICION 2.1

En cada $S_r(n,\ell,F)$, $n\in\mathbb{N}$, $\ell\in\mathbb{N}$ y $r\in\mathbb{R}$ con $0<r<1$, definimos la siguiente aplicación $\|\cdot\|_{n,K_\ell,r}$ de la manera que a continuación expresamos:

$$\|\mu\|_{n,K_\ell,r} = \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{\|\mu_j\|_{n,K_\ell}}{r^j},$$

con $\mu=(\mu_j)\in S_r(n,\ell,F)$.

Esta aplicación es, en principio, una seminorma. Veremos que define una topología separada y, por tanto, será una norma.

PROPOSICION 2.1

$\|\cdot\|_{n,k_\ell,r}$, $n,\ell\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{R}$ tal que $0<r<1$ es una norma en $S_r(n,\ell,F)$.

Demostración.- Denotamos σ a la topología débil sobre $(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)'$, relativa al par dual $\langle(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)',(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)\rangle$, y veremos que la aplicación identidad

$$I : (S_r(n,\ell,F),\|\cdot\|_{n,k_\ell,r}) \longrightarrow [(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)',\sigma]$$

es continua.

Sea U un σ-entorno de cero en $(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)'$

Suponemos que sea

$$U = \{ \mu \in (\mathcal{H}(\Omega, F), \tau_0)' \ : \ \sup_{i=1,2,\dots,m} |< f_i, \mu >| \leq \varepsilon \}$$

donde $f_i \in \mathcal{H}(\Omega, F)$ para $i = 1, 2, \dots, m$, y $\varepsilon > 0$.

Entonces, construimos

$$V = \{ \mu = (\mu_j) \in S_r(n, \ell, F) \ : \ \sup_{j \in \mathbb{N}} \frac{\|\mu_j\|_{n,K_\ell}}{r^j} \leq \varepsilon \},$$

y veremos que un múltiplo de éste, está contenido, mediante la aplicación identidad, en U.

Tomamos $\alpha > 1$, tal que $\alpha K_\ell \subset \Omega$. Por la fórmula de Cauchy:

$$\frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = \alpha} \frac{f(\lambda x)}{\lambda^{j+1}} \, d\lambda$$

para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega, F)$, $\forall j \in \mathbb{N}$, $\forall x \in K_\ell$.

Haciendo esto para f_i, i = 1, 2, ..., m, se tiene:

$$\sup_{i=1,2,\dots,m} \| \frac{1}{j!} \hat{d}^j f_i(0) \|_{n,K_\ell} \leq \frac{1}{\alpha^j} \sup_{i=1,\dots,m} \| f_i \|_{n,\alpha K_\ell} = \frac{M_{\alpha,\ell}}{\alpha^j},$$

donde $M_{\alpha,\ell} = \sup_{i=1,2,\dots,m} \| f_i \|_{n,\alpha K_\ell}$.

Además

$$\sup_{\mu \in V} \| \mu_j \|_{n,K_\ell} \leq \varepsilon \cdot r^j \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Por tanto,

$$\sup_{\substack{\mu \in V \\ i=1,2,\dots,m}} \sum_{j=0}^{\infty} | < \frac{1}{j!} \hat{d}^j f_i(0), \mu_j > | \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{\mu\in V \\ i=1,2,\dots,m}} \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{j!} \hat{d}^{j} f_i(0) \right\|_{n,k_\ell} \|\mu_j\|_{n,k_\ell} \leq$$

$$\leq \varepsilon \cdot M_{\alpha,\ell} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{r}{\alpha}\right)^{j} = \varepsilon \cdot M_{\alpha,\ell} \frac{\alpha}{\alpha - r} \quad .$$

Luego $I\left(\frac{\alpha - r}{\alpha \cdot M_{\alpha,\ell}} V\right) \subset U$.

C.Q.D.

PROPOSICION 2.2

El espacio $S_r(n,\ell,F)$, $n\in \mathbb{N}$, $\ell\in\mathbb{N}$, $0<r<1$ es un espacio normado completo, dotado de la norma $\|\cdot\|_{n,k_\ell,r}$.

Demostración.- Sea $(\mu^q)_{q\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(S_r(n,\ell,F), \|\cdot\|_{n,k_\ell,r})$.

De este modo, dado $\varepsilon>0$, existe $q_0\in\mathbb{N}$, de manera que para cada $q,t\geq q_0$ se verifica

$$\|\mu^q - \mu^t\|_{n,k_\ell,r} < \varepsilon \qquad (0).$$

Tenemos:

$$\|\mu^q - \mu^t\|_{n,k_\ell,r} = \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{\|\mu^q_j - \mu^t_j\|_{n,k_\ell}}{r^j} < \varepsilon \quad (1)$$

con lo que, fijado j número natural, se cumple que:

$$\|\mu^q_j - \mu^t_j\|_{n,k_\ell} \leq \frac{\|\mu^q_j - \mu^t_j\|_{n,k_\ell}}{r^j} < \varepsilon \qquad (2)$$

y así

$$|< f, \mu^q_j - \mu^t_j >| = |< f, \mu^q_j > - < f, \mu^t_j >| < \varepsilon \quad (3)$$

para cada $f \in \mathcal{P}(^jE, F)$, tal que $\|f\|_{n,K_\ell} \leq 1$.

Como $\mathcal{P}(^jE, F)$ dotado de la topología compacta es un espacio de Fréchet, es, por tanto, tonelado y se tiene que $(\mathcal{P}(^jE, F))'$ es débilmente sucesionalmente completo.

Debido a que (3) se cumple para los elementos de $B = \{ f \in \mathcal{P}(^jE, F) : \|f\|_{n,K_\ell} \leq 1 \}$ y puesto que este conjunto es absorbente, (3) también se cumple para todos los elementos de $\mathcal{P}(^jE, F)$, bastando sólo tomar $\frac{\varepsilon}{M}$ en (0), si para un $f \in \mathcal{P}(^jE, F)$, resulta que $f \in M.B$, con q_0 adecuado.

Tenemos, por tanto, $\{\mu^q\}_{q \in \mathbb{N}}$ una sucesión $\sigma((\mathcal{P}(^jE, F))', \mathcal{P}(^jE, F))$ -Cauchy.

Así, $(< f, \mu^q_j >)_{q \in \mathbb{N}}$ converge a $< f, \bar{\mu}_j >$ para cada $f \in \mathcal{P}(^jE, F)$, tal que $\|f\|_{n,K_\ell} \leq 1$, y $\bar{\mu}_j \in (\mathcal{P}(^jE, F))'$.

Haciendo tender t a ∞ en (2), resulta que $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_j) \in S_r(n, \ell, F)$, y en (1), tene mos que $(\mu^q)_{q\in \mathbb{N}}$ $\|\cdot\|_{n,k_\ell,r}$ -converge a $\bar{\mu}$.

C.Q.D.

DEFINICION 2.2

Llamamos γ a la topología límite inductivo asociada a $(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)'$ con el sistema $S_r(n,\ell,F)$, donde en $S_r(n,\ell,F)$, tenemos la topología que determina la norma $\|\cdot\|_{n,k_\ell,r}$.

Por β denotamos la topología fuerte sobre $(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)'$, relativa al par dual $\langle(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)' , (\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)\rangle$, y tenemos:

PROPOSICION 2.3

$$\gamma \supset \beta \quad .$$

Demostración.- Por definición de γ , basta probar que para cada $n\in\mathbb{N}$, $\ell\in\mathbb{N}$, $0<r<1$, la aplicación identidad:

$$I : [S_r(n,\ell,F) , \|\cdot\|_{n,k_\ell,r}] \longrightarrow [(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)', \beta]$$

es continua.

Sea U un β -entorno de cero en $(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)'$. Suponemos que sea

$$U = \left\{ \mu \in (\mathcal{H}(\Omega,F), \tau_0)' : \sup_{f \in A} |\langle f, \mu \rangle| \leq \varepsilon \right\}$$

para algún subconjunto acotado A de $(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)$ y algún $\varepsilon > 0$. Entonces, tomamos

$$V = \left\{ \mu = (\mu_j) \in S_r(n,\ell,F) : \sup_{j \in \mathbb{N}} \frac{\|\mu_j\|_{n,K_\ell}}{r^j} \leq \varepsilon \right\},$$

que es un entorno del origen en $S_r(n,\ell,F)$.

Sea $\alpha > 1$, tal que $\alpha K_\ell \subset \Omega$. Por la fórmula de Cauchy

$$\frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = \alpha} \frac{f(\lambda x)}{\lambda^{j+1}} \, d\lambda$$

para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega,F)$, para cada $j \in \mathbb{N}$ y para cada $x \in K_\ell$. Puesto que A es acotado en $(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)$, queda:

$$\sup_{f \in A} \left\| \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0) \right\|_{n,K_\ell} \leq \frac{1}{\alpha^j} \sup_{f \in A} \|f\|_{n,\alpha K_\ell} = \frac{M_{\alpha,\ell}}{\alpha^j}$$

donde $M_{\alpha,\ell} = \sup_{f \in A} \|f\|_{n,\alpha K_\ell}$.

Además

$$\sup_{\mu \in V} \|\mu_j\|_{n,K_\ell} \leq \varepsilon \cdot r^j \qquad \forall j \in \mathbb{N} .$$

Por tanto:

$$\sup_{\substack{f \in A \\ \mu \in V}} \sum_{j=0}^{\infty} \left| \left\langle \frac{1}{j!} \hat{d}^j f(0) , \mu_j \right\rangle \right| \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{f\in A\\ \mu\in V}} \sum_{j=0}^{\infty} \| \frac{1}{j!} \hat{d}^{j} f(0) \|_{n,K_\ell} \; \| \mu_j \|_{n,K_\ell} \leq$$

$$\leq \varepsilon \cdot M_{\alpha,\ell} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{r}{\alpha}\right)^{j} = \varepsilon \cdot M_{\alpha,\ell} \frac{\alpha}{\alpha - r} .$$

Luego $I\left(\left(\frac{\alpha - r}{\alpha M_{\alpha,\ell}} \right) V \right) \subset U$.

C.Q.D.

PROPOSICION 2.4

Las topologías $\mathcal{T}$ y β tienen los mismos subconjuntos acotados en $(\mathcal{H}(\Omega,F), \tau_0)'$.

Demostración.- Por la proposición anterior, basta probar que cada subconjunto A β -acotado de $(\mathcal{H}(\Omega,F), \tau_0)'$ es $\mathcal{T}$ -acotado.

Puesto que $(\mathcal{H}(\Omega,F), \tau_0)$ es un espacio de Fréchet, es tonelado y, por tanto, si A es β -acotado, es equicontinuo; por lo tanto, existe un entorno del origen U en $(\mathcal{H}(\Omega,F), \tau_0)$,

$$U = \{ f \in \mathcal{H}(\Omega,F) \; : \; \| f \|_{m,K} \leq \varepsilon \} ,$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y K es un subconjunto compacto equilibrado de Ω, tal que $A \subset U^{0}$, esto es $\sup_{\mu\in A,\, f\in U} |\langle f, \mu\rangle| \leq 1$.

Por U^{0} hemos denotado el polar de U.

Aplicando esto último a polinomios

$P \in \mathcal{P}({}^jE, F)$, $j \in \mathbb{N}$, tenemos:

$\| \mu_j \|_{n,k} \leq \frac{1}{\varepsilon}$, $\forall \mu = (\mu_j) \in A$.

Tomando ahora $r \in \mathbb{R}$ con $0<r<1$, tal que

$\frac{1}{r} K \subset \Omega$, queda:

$$\sup_{\mu \in A} \| \mu_j \|_{n, \frac{1}{r}K} \leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot r^j \quad , \forall j \in \mathbb{N} .$$

Pero como $\frac{1}{r} K$ es un compacto equilibrado de Ω , existe un K_ℓ de la sucesión fundamental, tal que $\frac{1}{r} K \subset K_\ell$ y, así, es válido también que:

$$\sup_{\mu \in A} \| \mu_j \|_{n,K_\ell} \leq \frac{1}{\varepsilon} r^j \quad , \forall j \in \mathbb{N} .$$

Esto demuestra que A está contenido y es acotado en $(S_r(n,\ell,F) , \| \cdot \|_{n,K_\ell,r})$, luego también en $[(\mathcal{H}(\Omega,F), \tau_0)', \gamma]$.

C.Q.D.

COROLARIO 1.

Cualquier β -acotado de $(\mathcal{H}(\Omega,F), \tau_0)'$ está contenido y es acotado en algún $(S_r(n,\ell,F), \| \cdot \|_{n,K_\ell,r})$ con $n, \ell \in \mathbb{N}$ y $0<r<1$.

COROLARIO 2.

γ es la topología bornológica asociada a la topología β sobre $(\mathcal{H}(\Omega,F), \tau_0)'$. Así, se tiene

$\gamma = \beta$ si, y sólo si, el espacio $[(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)', \beta]$ es bornológico.

COROLARIO 3.

Sobre el espacio $(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)'$, las topologías γ y la fuerte, relativa al par dual $\langle(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)', (\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)''\rangle$, coinciden.

Demostración.- Sabemos, por KÖTHE [1] (§ 29.5(2)), que si $E[\tau]$ es un espacio localmente convexo metrizable, entonces la topología $\beta(E', E'')$ es la topología bornológica asociada a $\beta(E', E)$ sobre E', por tanto, por corolario anterior resulta lo que queremos demostrar.

C.Q.D.

TEOREMA 2.1

Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(a) El espacio $(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)$ es distinguido.

(b) El espacio $[(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)', \beta]$ es bornológico.

(c) El espacio $[(\mathcal{H}(\Omega,F),\tau_0)', \beta]$ es tonelado o casi-tonelado.

(d) Las topologías β y γ sobre

$(\mathcal{H}(\Omega, F), \tau_0)'$ coinciden.

Demostración.- Las equivalencias entre (a), (b) y (c) son conocidas, KÖTHE [1] (§ 29.5 (3)), pues el espacio $(\mathcal{H}(\Omega, F), \tau_0)$ es un espacio de Fréchet.

Por otra parte, (b) es equivalente a (d), aplicando el corolario 2. anterior.

C.Q.D.

C A P I T U L O VI

PROBLEMA DE WATSON EN DIMENSION INFINITA.

Para el caso de una variable y el caso de un círculo el problema de Watson puede enunciarse de la siguiente manera:

Sea C el círculo de $\mathbb{C}$ donde el centro es el punto uno y el radio es igual a uno. ¿Qué condiciones sería preciso imponer a la sucesión $\{M_n\} \subset \mathbb{R}^+$, donde $\mathbb{R}^+$ son los números reales positivos, para que del hecho que una función f(z), holomorfa en el interior de C, verifique las desigualdades

(i) $|f(z)| \leq M_n |z|^n$ con $|z-1| < 1$,

n = 1, 2, ..., resulte que f(z) sea idénticamente nula?

Un teorema de Carleman responde a este problema, probando que:

"Designamos por T(r) la función definida, para todos los números positivos r (incluido el $+\infty$), por la expresión $T(r) = \sup\limits_{n \geq 1} \frac{r^n}{M_n}$. La condición necesaria y suficiente para que del conjunto de desigualda des (i) resulte que la función f(z) sea idénticamente nula, es que la integral

(ii) $$\int_1^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^2}\, dr$$

sea divergente".

La función T(r) fue introducida en este teorema por Ostrowski. En la integral (ii), Carleman, hizo intervenir la función $A(r) = \sum_{n\in \mathbb{N}} \frac{r^n}{M_n}$. Pero, puede verse en MANDELBROJT [1] (pág. 75) que, las integrales (ii) y $\int_1^{+\infty} \frac{\log A(r)}{r^2}\, dr$ convergen o divergen simultáneamente.

En el presente capítulo, vamos a trasladar el problema de Watson a dimensión infinita.

Sea E un espacio localmente convexo con las siguientes propiedades:

(1) Para cada sucesión $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de entornos de cero en E existe una sucesión $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de escalares estrictamente positivos tal que $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j V_j$ es también un entorno de cero en E.

(2) E es hereditario Lindelöf, es decir,

cualquier subconjunto de E es un espacio topológico Linde-löf con la topología inducida.

Sea V un entorno de cero absolutamente convexo en E. Si q es el funcional de Minkowski de V, q define una norma sobre $(E,q)/q^{-1}(0)$, que denotamos $\|\cdot\|_V$. Para cada $\dot{x} \in (E,q)/q^{-1}(0)$ se toma $\|\dot{x}\|_V$ el valor común de q(x) para $x \in \dot{x}$. Llamaremos indistintamente $\|\cdot\|_V$ para la norma de $(E,q)/q^{-1}(0)$ o para el funcional de Minkowski de V. Llamamos E_V al espacio normado anterior.

Por $s: E \longrightarrow E_V$ denotamos a la sobreyección canónica.

Sea B un subconjunto acotado y absolutamente convexo de un espacio localmente convexo F. Entonces por F_B denotamos al subespacio engendrado por B, $\mathrm{LIN}\, B = \bigcup_{m=1}^{\infty} mB$, dotado de la topología que genera el funcional de Minkowski de B. Así F_B es un espacio normado, y será un espacio de Banach cuando el conjunto acotado B sea completo. Por $i: F_B \longrightarrow F$ denotamos a la inyección canónica.

Seguidamente enunciaremos un teorema, que más adelante usaremos, del que obtenemos algunas consecuencias:

TEOREMA 1. (HILLE [1] (Teor. 8.1.8))

Sea D un subconjunto abierto conexo de $\mathbb{C}$, F un espacio de Banach, f y g elementos de $\mathcal{H}(D,F)$ tal que $f(s_n)=g(s_n)$, n = 1, 2, ..., para uns sucesión, $(s_n)\subset D$, de puntos distintos, con punto adherente en D. Entonces f y g son idénticas.

COROLARIO 1.

Sea D un subconjunto abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $f\in\mathcal{H}(D,F)$, F un espacio de Banach, tal que f no es constante en D. Entonces, dado $a\in D$ y $b\in F$, existe $r(a)>0$ tal que $f(z)\neq b$ siempre que $0<|z-a|<r(a)$, $z\in D$.

Demostración.- Supongamos que la afirmación es falsa. Entonces existen puntos a_n, $a\in D$, $n\geq 1$, $b\in F$, tales que:

$$(1)\quad a_n\neq a,\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$(2)\quad a_n\longrightarrow a$$

$$(3)\quad f(a_n)=b$$

Pero entonces por el teorema anterior $f(z)=b$, para todo

$z \in D$, lo cual es absurdo.

C.Q.D.

COROLARIO 2.

Sea D un subconjunto abierto conexo de $\mathbb{C}$, F un espacio de Banach y $f \in \mathcal{H}(D,F)$, tal que f no es constante en D. Sea A un subconjunto compacto en D. Entonces para $b \in F$, $\{z \in A \ : \ f(z) = b\}$ es finito.

Demostración.- Sea $r(a)$ como en corolario anterior. Puesto que A es compacto, existe un conjunto finito $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tal que $A \subset \bigcup_{j=1}^{n} D(a_j, r(a_j))$, donde

$D(a_j, r(a_j)) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-a_j| < r(a_j)\}$

j = 1, ...,n. Si $z \in A$ tal que $f(z) = b$, entonces z pertenece al conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

C.Q.D.

Otro resultado que usaremos es:

LEMA 1. (COLOMBEAU - MUJICA[2](Lema 3.5))

Sea E un espacio localmente convexo que satisface las propiedades (1) y (2) que hemos enunciado anteriormente. Entonces para cada subconjunto abierto Ω de E existe un entorno de cero V absolutamente convexo en E tal que $s(\Omega)$ es abierto en E_V y $s(\partial\Omega) \subset \partial s(\Omega)$, donde s, como ya hemos indicado, es la sobreyección canónica $E \longrightarrow E_V$, y con el símbolo " ∂ " significamos la frontera de un conjunto.

A continuación ofreceremos el teorema fundamental de este capítulo.

TEOREMA 2.

Sea E un espacio localmente convexo que satisface las propiedades (1) y (2) anteriormente enunciadas y F un espacio de Fréchet. Sea $\ell \in E'$, $\ell \neq 0$. Sea $D(1,1) = \{ z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1 \}$ y $\Omega = \ell^{-1}(D(1,1))$.
Sea $\{M_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos y sea T(r) la función definida, para todos los números reales positivos r (incluido el $+\infty$), por la expresión

$T(r) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{r^n}{M_n}$. la condición necesaria y suficiente para que exista una función $f \in \mathcal{H}(\Omega, F)$, no idénticamente nula, V entorno de cero en E absolutamente convexo, B subconjunto absolutamamte convexo y acotado de F con

$$f(\Omega) \subset F_B \quad \text{y cumpliendo}$$

$$\| f(z) \|_B \leq M_m \, \| z \|_V^m \quad , \quad m \in \mathbb{N} \quad , \quad z \in \Omega$$

es que la integral $\int_1^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^2} \, dr$ sea convergente.

Antes de ofrecer la prueba de este teorema, demostraremos el siguiente lema:

LEMA 2.

Sea E un espacio normado, F un espacio de Banach, $\ell \in E'$, $\ell \neq 0$, con $\|\ell\| \leq 1$, $\Omega = \ell^{-1}(D(1,1))$, siendo $D(1,1)$ el mismo que en teorema anterior, $\{M_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos y T(r) la misma función de la que aparece en teorema anterior. La condición necesaria y suficiente para que exista una función φ, no idénticamente nula, $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega, F)$ que cumpla

$$\|\varphi(z)\| \leq M_m \|z\|^m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad z \in \Omega,$$

donde con $\|\cdot\|$ denotamos tanto la norma de E como la de F, es que la integral $\int_1^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^2}\, dr$ sea convergente.

Demostración.- Primeramente veamos la condición necesaria.

Siempre podemos tomar un elemento $a \in E$ tal que $\|a\|<1$ y que cumpla que $\ell(a) \in \mathbb{R}$ con $0 < \ell(a) < 1$.

Veamos esto:

Sea $b \in E$ tal que $\ell(b) \in \mathbb{R}$ con $0<\ell(b)<1$.

Si $\|b\| > 1$, tomamos $c = \frac{b}{\|b\|}$ y así tenemos $c \in E$ tal que $\|c\| = 1$ y que cumple $0 < \ell(c) = \frac{\ell(b)}{\|b\|} < \ell(b) < 1$.

Así, tenemos sólo que estudiar qué pasa si $\|b\|=1$. En este caso, considerando un $\varepsilon>0$, tomamos $c=\dfrac{b}{1+\varepsilon}$ y se cumple que $\|c\| = \dfrac{\|b\|}{1+\varepsilon} = \dfrac{1}{1+\varepsilon} < 1$ y

$0 < \ell(c) = \dfrac{\ell(b)}{1+\varepsilon} < \ell(b) < 1$.

De este modo, hemos podido encontrar $a \in E$, con $\|a\|<1$ y $0<\ell(a)<1$.

Sea $r>0$ tal que $\|a\|<r<1$. Así, $r-\|a\|>0$, y sea $p>0$ tal que $p<r-\|a\|$ y tal que $B=\{h \in E : \|a-h\|<p\} \subset \Omega$. Esto es posible por ser Ω un conjunto abierto y a un elemento de Ω.

Sea φ como nos indica el lema, $\varphi : \Omega \longrightarrow F$, holomorfa y no idénticamente nula.

Seguidamente vamos a probar que es posible encontrar un elemento h en B tal que $\varphi(h)\neq 0$ y de manera que $0<\ell(h)<\ell(a)$.

Si $\varphi(h)=0$ para todo $h \in B$ tal que $0<\ell(h)<\ell(a)$, llegaríamos a una contradicción, pues si tomamos $k \in B$ tal que $0<\ell(k)<\ell(a)$, y con $x \in \operatorname{Ker} \ell$, definimos la función:

$$g(\alpha) = \varphi((1-\alpha)x + \alpha k)$$

en el conjunto abierto $W = \{\alpha \in \mathbb{C} : (1-\alpha)x + \alpha k \in B\}$.

Es posible dar una sucesión $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $0 < \alpha_n < 1$ con $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 1$ y $g(\alpha_n) = 0$, pues $(1-\alpha_n)x + \alpha_n k$ converge a $k \in B$ en E, y a partir de un índice se tiene que $(1-\alpha_n)x + \alpha_n k$ estaría en B, al ser B un conjunto abierto (consideramos que la sucesión $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es tal que todos los elementos $(1-\alpha_n)x + \alpha_n k$ están en B), y además $0 < \ell((1-\alpha_n)x + \alpha_n k) = \alpha_n \ell(k) < \ell(a)$. Por el teorema 1 del presente capítulo tenemos que g es idénticamente nula, ya que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W$ y $g(s_n) = 0$ n = 1, 2, ...

Esto podemos hacerlo con $k \in B$ fijado, para todo $x \in \operatorname{Ker} \ell$.

Ahora, dado $y \in B$, existe un z en $\operatorname{Ker} \ell$ tal que $y = z + \beta k$, $\beta \in \mathbb{C}$. Si $\beta \neq 1$, podemos poner $y = (1-\beta)\frac{1}{1-\beta} z + \beta k$, con $\frac{1}{1-\beta} z \in \operatorname{Ker} \ell$, $\beta \in \mathbb{C}$. De esta manera, el elemento y está en algún abierto W de los que hemos usado anteriormente, luego $\varphi(y) = 0$. Y si $\beta = 1$, tenemos

$y = z + k$. Formamos $y_n = z + (1 - \frac{1}{m})k$, que converge a y cuando $n \to \infty$, pero debido a que $y \in B$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(y_n)_{n \geq n_0} \subset B$. Como en los puntos de B de la forma $z + \beta k$ con $z \in \ker \ell$ y $\beta \neq 1$, tenemos que φ se anula, resulta que $\varphi(y_n) = 0$ para $n = n_0$, n_0+1 , ... Por la continuidad de φ , también se tiene que $\varphi(y) = 0$.

Concluimos, así, que φ es idénticamente nula en B y por BARROSO [2] (Prop. 1.18) y debido a que Ω es conexo, φ sería idénticamente nula en Ω , con lo que llegamos a la contradicción buscada.

Tenemos probada la existencia de un elemento $h \in E$ tal que $\|h\| < 1$, $0 < \ell(h) < 1$ y $\varphi(h) \neq 0$.

Sea la función $\psi : D(1,1) \longrightarrow E$, definida por $\psi(\alpha) = \alpha h$, $\alpha \in D(1,1)$. Veamos que $\psi(D(1,1))$ está contenido en Ω . Para ello habría que probar que $|1 - \ell(\alpha h)| < 1$, para todo $\alpha \in D(1,1)$. Pero esto es inmediato, pues:

$$|1 - \ell(\alpha h)| = |1 - \ell(h) + \ell(h) - \ell(\alpha h)| \leq$$

$$\leq |1-\ell(h)| + |\ell(h) - \ell(\alpha h)| =$$
$$= (1-\ell(h)) + \ell(h)\,|1-\alpha| <$$
$$< 1 - \ell(h) + \ell(h) = 1,$$
puesto que $|1-\alpha| < 1$, para todo $\alpha \in D(1,1)$.

Puesto que $\varphi(h) \neq 0$, existe una forma lineal y continua sobre F, $v \in F'$, de norma menor o igual que uno, tal que $v(\varphi(h)) \neq 0$.

Consideramos la siguiente composición de aplicaciones:

$$D(1,1) \xrightarrow{\psi} \Omega \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{v} \mathbb{C}$$

y llamamos $g = v \circ \varphi \circ \psi$. Así, resulta que

$$g(\alpha) = (v \circ \varphi \circ \psi)(\alpha) = (v \circ \varphi)(\alpha h) = v(\varphi(\alpha h)),$$

para todo $\alpha \in D(1,1)$. De este modo, se cumple que g no es idénticamente nula, puesto que $g(1) = v(\varphi(h)) \neq 0$.

También se cumple que, con $\alpha \in D(1,1)$

$$|g(\alpha)| = |v(\varphi(\alpha h))| \leq \|v\|\,\|\varphi(\alpha h)\| \leq \|\varphi(\alpha h)\| .$$

Pero como $\alpha h \in \Omega$, para $\alpha \in D(1,1)$, por hipótesis tenemos:

$$\|\varphi(\alpha h)\| \leq M_n \|\alpha h\|^n = M_n \|h\|^n |\alpha|^n \leq M_n |\alpha|^n$$

Así, $|g(\alpha)| \leq M_n |\alpha|^n$, para todo $\alpha \in D(1,1)$.

Además, por BARROSO [2] (Proposiciones 2.9 y 3.9) g es una función holomorfa de $D(1,1)$ en $\mathbb{C}$, por ser

$$g = v \circ \varphi \circ \psi .$$

Con todo esto, hemos encontrado una función $g \in \mathcal{H}(D(1,1), \mathbb{C})$ tal que no es idénticamente nula y cumple las desigualdades siguientes:

$$|g(z)| \leq M_n |z|^n , \quad \forall z \in D(1,1) , \quad n = 1, 2, \ldots$$

Aplicando ahora, el teorema de Carleman, que hemos enunciado al principio del presente capítulo, y que responde al problema de Watson para el caso de una variable compleja, resulta que la integral $\int_1^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^2} dr$ es convergente.

Contrariamente, para concluir la prueba de este lema, suponemos que $\int_1^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^2} dr$ es convergente, y veamos que existe una función $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega, F)$ no idénticamente nula, que cumple las desigualdades:

$\| \varphi(z) \| \leq M_m \| z \|^m$, $m \in \mathbb{N}$, para todo $z \in \Omega$.

Por el teorema para el caso escalar (teorema de Carleman), sabemos que por converger la integral $\int_1^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^2} dr$, se tiene que existe una función $g \in \mathcal{H}(D(1,1), \mathbb{C})$ tal que g no es idénticamente nula, y que satisface las desigualdades $|g(\alpha)| \leq M_n |\alpha|^n$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in D(1,1)$.

Tomamos un elemento $b \in F$, tal que $\|b\| = 1$, y construimos la función $\varphi : \Omega \longrightarrow F$, definida de la siguiente manera:

$$\varphi(z) = b \cdot g(\ell(z)) , \quad z \in \Omega = \ell^{-1}(D(1,1)) .$$

Esta función es, por BARROSO [2] (Prop. 3.9), una función holomorfa. Es, también, no idénticamente nula, ya que g es no idénticamente nula y $b \neq 0$.

Además, se cumple que:

$$\| \varphi(z) \| = \| b \cdot g(\ell(z)) \| = \|b\| \, | g(\ell(z)) | =$$

$$= | g(\ell(z)) | \leq M_n | \ell(z) |^n , \quad n = 1, 2, \ldots , z \in \Omega .$$

Pero $|\ell(z)| \leq \|\ell\| \|z\| \leq \|z\|$, pues $\|\ell\| \leq 1$ y, así, resulta que

$$\|\varphi(z)\| \leq M_m \|z\|^n \quad , \quad n = 1, 2, \ldots , \quad z \in \Omega .$$

C.Q.D.

Demostración del Teorema 2.- Dada $\ell \in E'$, $\ell \neq 0$, podemos elegir V entorno de cero absolutamente convexo en E tal que si $\dot{\ell}$ es la aplicación cociente obtenida de ℓ, $\dot{\ell} \in (E_V)'$, se tenga $\|\dot{\ell}\| \leq 1$.

Además el V se puede tomar, reduciéndolo si fuese necesario, tal que $s(\Omega)$ sea abierto en E_V (Lema I del presente capítulo).

Por hipótesis, tenemos $f \in \mathcal{H}(\Omega, F)$, tal que f es no idénticamente nula. Sea $\varphi \in F' \subset (F_B)'$, con $\|\varphi\|_* \leq 1$, donde por $\|\cdot\|_*$ denotamos la norma de $(F_B)'$, y tal que $\varphi \circ f$ es no idénticamente nula. Se sabe que $\varphi \circ f \in \mathcal{H}(\Omega, \mathbb{C})$ y, de este modo, dado $\xi \in \Omega$, existen P_m, m = 0, 1, ..., siendo $P_m \in \mathcal{P}({}^mE, \mathbb{C})$, tal que $(\varphi \circ f)(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-\xi)$ converge uniformemente en un entorno abierto W de ξ contenido en Ω.

Reducimos V tal que $s(W)$ sea abierto en E_V (lema I anterior).

Por COLOMBEAU - MUJICA [2] (Lema 3.4), existe un entorno de cero, absolutamente convexo, que podemos tomar V, reduciéndolo si fuera preciso, y un conjunto A acotado y absolutamente convexo en $\mathbb{C}$, tal que son conmutativos los diagramas:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "P_j"] \arrow[d, "s"'] & \mathbb{C} \\ E_V \arrow[r, "P_j^*"] & \mathbb{C}_A \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

con $P_j^* \in \mathcal{P}({}^jE_V, \mathbb{C}_A) = \mathcal{P}({}^jE_V, \mathbb{C})$, pues $\mathbb{C}_A = \mathbb{C}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$

Formamos $g(\dot{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m^* (\dot{x} - \dot{\xi})$,

para $x \in W$, donde con $\dot{z}$, $z \in E$, denotamos también la imagen mediante la aplicación s del elemento z. Sabemos que $\varphi \circ f$ es no idénticamente nula en W, pues si $\varphi \circ f \equiv 0$ en W, entonces $\varphi \circ f$ sería idénticamente nula en Ω. De este modo, g es no idénticamente nula en W, ya que existe $x \in W$ tal que $(\varphi \circ f)(x) \neq 0$ y $(\varphi \circ f)(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m (x - \xi) =$
$= \sum_{m=0}^{\infty} P_m^* (\dot{x} - \dot{\xi}) = g(\dot{x})$.

Debido a que la serie definitoria de g converge uniformemente en $s(W)$, converge uniformemente sobre los compactos de $s(W)$, luego $g \in \mathcal{H}(s(W), \mathbb{C})$.

Veamos que g cumple las desigualdades del enunciado del presente teorema.

Estamos suponiendo que $f(\Omega)$ está contenido en F_B y tenemos para todo $x \in W$ que:

$$|g(\dot{x})| = \left|\sum_{m=0}^{\infty} P_m^*(\dot{x} - \dot{\xi})\right| = \left|\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-\xi)\right| =$$

$$= |(\varphi_\circ f)(x)| \leq \|\varphi\|_* \, \|f(x)\|_B \leq \|f(x)\|_B$$

y por hipótesis $\|f(x)\|_B \leq M_n \|x\|_V^n$, pero $\|x\|_V = \|\dot{x}\|_V$, luego $|g(\dot{x})| \leq M_m \|\dot{x}\|_V^n$, $x \in W$.

Así, por el lema 2 del presente capítulo, se tiene que $\int_1^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^2} \, dr$ es convergente.

Probemos ahora la condición suficiente. Suponemos que $\int_1^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^2} \, dr$ es convergente y demostraremos que existe f no idénticamente nula, $f \in \mathcal{H}(\Omega, F)$, V entorno de cero absolutamente convexo en E, B subconjunto acotado y absolutamente convexo de F tal que $f(\Omega) \subset F_B$

y $\|f(z)\|_B \leq M_n \|z\|_V^n$, para todo $z \in \Omega$ y $n = 1, 2, \ldots$

Elegimos V tal que si $\dot{\ell} \in (E_V)'$ es la aplicación cociente de ℓ , se tenga $\|\dot{\ell}\| \leq 1$.

También, se toma V tal que $s(\Omega)$ sea abierto en E_V .

Evidentemente, si $\dot{\Omega} = \dot{\ell}^{-1}(D(1,1))$, se tiene $s(\Omega) \subset \dot{\Omega}$.

Aplicando el lema 2 del presente capítulo a $\dot{\Omega}$, E_V y $\mathbb{C}$, resulta que es posible encontrar una aplicación $g \in \mathcal{H}(\dot{\Omega}, \mathbb{C})$ tal que no es idénticamente nula y cumple para $m \in \mathbb{N}$, $|g(x)| \leq M_m \|x\|_V^m$, $x \in \dot{\Omega}$.

Sea ahora un subconjunto $B \subset F$, absolutamente convexo y acotado de F, y sea $b \in F_B$ tal que $\|b\|_B = 1$. Tomamos la función $\dot{f} = b \cdot g$ que será una función holomorfa de $\dot{\Omega}$ en F_B y no idénticamente nula, cunpliendo:

$$\|\dot{f}(x)\|_B = \|b\|_B \, |g(x)| \leq M_m \|x\|_V^m \quad , x \in \dot{\Omega} .$$

Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} E \supset \Omega \arrow[d, "s"] \arrow[rr] & & F \\ E_V \supset \dot{\Omega} \arrow[rr, "\dot{f}"] & & F_B \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Si tomamos $f = i \circ \dot{f} \circ s$,

tenemos que $f \in \mathcal{H}(\Omega, F)$ tal que f no es idénticamente nula, pues si lo fuese, se tendría $\dot{f}(z) = 0$, $\forall z \in s(\Omega)$, con lo cual $\dot{f}$ sería idénticamente nula en $\dot{\Omega}$, al ser $s(\Omega)$ abierto.

Además:

$$\| f(z) \|_B = \| (i \circ \dot{f} \circ s)(z) \|_B =$$
$$= \| (i \circ \dot{f})(\dot{z}) \|_B = \| \dot{f}(\dot{z}) \|_B \leq M_n \| \dot{z} \|_V^n =$$
$$= M_n \| z \|_V^n \ , \ \forall z \in \Omega \ .$$

C.Q.D.

OBSERVACION.

El dual fuerte de un espacio de Fréchet-Montel y cualquier límite inductivo numerable de espacios de Banach separables son ejemplos de espacios satisfaciendo

las condiciones (1) y (2) del principio del presente capítulo.
(Ver COLOMBEAU - MUJICA [1] (Ejemplo 3.1)).

C A P I T U L O   VII

§ 1. INTERPOLACION EN ESPACIOS DE FUNCIONES.

Sea Ω un conjunto cualquiera, tal que es unión de una sucesión creciente de subconjuntos $(A_n)_{n=1}^{\infty}$.

Sea M una subálgebra vectorial de $\mathbb{K}^{\Omega}$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), que satisface las siguientes condiciones:

(1) $\sup\limits_{x \in A_n} |f(x)| < \infty$, $f \in M$, n = 1, 2,...

(2) M, con la topología $\mathcal{T}$ de la convergencia uniforme sobre cada A_n , n = 1, 2, ..., es un espacio de Fréchet.

Sea $B_n = \{ z \in \Omega : |f(z)| \leq \sup\limits_{x \in A_n} |f(x)| , \forall f \in M \}$ para n = 1, 2, ... Suponemos M dotado de la topología $\mathcal{T}$.

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de Ω tal que $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \cap B_m$ es finito para todo $m \in \mathbb{N}$. Y si n_1 y n_2 son dos enteros $n_1 \neq n_2$, entonces existe un elemento f de M tal que $f(x_{m_1}) = 1$ y $f(x_{m_2}) = 0$.

Con estas hipótesis sobre M y con la sucesión elegida (x_n) en Ω, VALDIVIA [2] demuestra el siguiente teorema de interpolación:

TEOREMA 1.I (VALDIVIA [2])

Si $(\alpha_m)_{n \in \mathbb{N}}$ es cualquier sucesión en $\mathbb{K}$, entonces existe un f en M tal que $f(x_n) = \alpha_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una familia cualquiera de espacios de Fréchet. Sea $F = \prod_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$.

Sea $\{ p_n^\lambda \ , n = 1, 2, \dots \}$ un sistema fundamental de seminormas que definen la topología del espacio de Fréchet F_λ, $\lambda \in \Lambda$.

Supongamos Z_λ, $\lambda \in \Lambda$, un subespacio vectorial de F_λ^Ω que satisface las siguientes condiciones:

(1) Si g pertenece a Z_λ entonces

$$P_{\lambda n m}(g) = \sup \{ p_n^\lambda (g(x)) \ : x \in A_m \}$$

es finito para todo n, m = 1, 2, ...

(2) Z_λ es completo con respecto a la topología $\mathcal{T}_\lambda$ definida por el sistema de seminormas:

$\{ p_{\lambda n m} \ : \ n, m = 1, 2, \dots \}$

(3) Si $f \in M$, $u \in F_\lambda$, entonces la función $fu : x \longmapsto f(x).u$, definida de Ω en F_λ, es un elemento de Z_λ.

. . . .

Tenemos así una familia de espacios de Fréchet $(Z_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Estos espacios son espacios de funciones de Ω en F_λ.

Sea Z un subespacio vectorial de F^Ω que satisface las siguientes condiciones:

(1) Si g pertenece a Z entonces:

$$p_{\beta m} = \sup \{ \beta(g(x)) \ : \ x \in A_m \}$$

es finito para todo m = 1, 2, ..., y para toda $\beta \in s.c.(F)$, donde con $s.c.(F)$ denotamos el conjunto de las seminormas continuas de F.

(2) Z es completo con respecto a la topología $\mathcal{T}$ definida por el sistema de seminormas:

$$\{ p_{\beta m} \ , \ m = 1, 2, \dots \ , \ \beta \in s.c.(F) \}$$

(3) Si $f \in M$ y $u \in F$ entonces la función $fu : x \longmapsto f(x).u$, $x \in \Omega$, pertenece a Z.

(4) Si $f : \Omega \to F$ está dada por sus componentes $f_\lambda : \Omega \longrightarrow F_\lambda$, esto es, $f_\lambda = \pi_\lambda \circ f$, donde π_λ

es la proyección canónica de F en F_λ , se tiene que f es un elemento de Z si, y sólo si, f_λ es un elemento de Z_λ , para todo $\lambda \in \Lambda$.

Dado un $\lambda \in \Lambda$, y con las hipótesis hechas sobre Z_λ , VALDIVIA [2] demuestra el siguiente teorema:

<u>TEOREMA I.2</u> (VALDIVIA [2])

Si (u_n^λ) es una sucesión de vectores de F_λ , entonces existe un elemento f_λ en Z_λ tal que $f_\lambda(x_n) = u_n^\lambda$, n = 1, 2, ...

Nosotros, sobre Z y F probamos el siguiente teorema:

<u>TEOREMA 1.3</u>

Si $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ es una sucesión cualquiera de elementos de F, entonces existe un elemento f en Z tal que $f(x_n) = u_n$, n = 1, 2, ...

<u>Demostración</u>.- Sea $(u_n^\lambda)_{n\in \mathbb{N}}$ la sucesión imagen en F_λ de $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ por medio de la proyección $\pi_\lambda : F \longrightarrow F_\lambda$, $\lambda\in\Lambda$. Entonces, por teorema I.2 anterior se tiene la existencia de una función f_λ en Z_λ tal que $f_\lambda(x_n) = u_n^\lambda$,

$n = 1, 2, \ldots$

Ahora definimos $f : \Omega \longrightarrow F$, la función que tiene por componentes a las funciones $f_\lambda : \Omega \longrightarrow F_\lambda$ encontradas.

Tenemos que $f \in Z$, debido a que $f_\lambda = \pi_\lambda \circ f \in Z_\lambda$ y Z cumple la propiedad (4) anterior. Además: $f(x_n) = (f_\lambda(x_n))_{\lambda \in \Lambda} = (u_n^\lambda)_{\lambda \in \Lambda} = u_n$ para todo $n = 1, 2, \ldots$

ϕ 2. INTERPOLACION EN HOLOMORFIA INFINITA.

Consideramos un subconjunto no vacío, abierto y conexo Ω de un espacio localmente convexo E, $E \neq \{0\}$, sobre el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$. Sea F el producto de una familia cualquiera de espacios de Fréchet distintos de $\{0\}$, sobre el cuerpo $\mathbb{C}$.

Si E es metrizable y d es una función distancia definiendo la topología sobre E, decimos que un subconjunto no vacío A de E es Ω-acotado si A está contenido en Ω, es acotado como un subconjunto de E y $d(A, \partial\Omega)$, la distancia de A a la frontera de Ω, es positiva.

$\mathcal{H}_b(\Omega, F)$ es el subespacio vectorial de $\mathcal{H}(\Omega, F)$ consistiendo en aquellas funciones que aplican subconjuntos Ω-acotados sobre subconjuntos acotados de F. Escribimos $\mathcal{H}_b(\Omega, \mathbb{C}) = \mathcal{H}_b(\Omega)$. Si A es un subconjunto Ω-acotado de E entonces el conjunto

$$\left\{ z \in \Omega \ : \ |f(z)| \leq \sup_{x \in A} |f(x)| \quad \forall f \in \mathcal{H}_b(\Omega) \right\}$$

es llamado la $\mathcal{H}_b$-envoltura de A. Ω es llamado $\mathcal{H}_b$-holomórficamente convexo si la $\mathcal{H}_b$-envoltura de cualquier subconjunto Ω-acotado de Ω es también Ω-acotado.

<u>TEOREMA 2.1</u>

Sea E un espacio normado y Ω un conjunto $\mathcal{H}_b$-holomórficamente convexo. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos distintos de Ω tal que:

$$\lim_{n\to\infty} d(\{x_n\}, \partial\Omega) = 0 \ ,$$

denotando por d la función distancia, inducida por la norma $\|\cdot\|$ de E, y (u_n) es una sucesión de vectores en F, entonces existe un elemento f en $\mathcal{H}_b(\Omega, F)$ tal que $f(x_n) = u_n$, n = 1, 2, ...

<u>Demostración</u>.- Elegimos una sucesión creciente de subconjuntos de E, Ω-acotados tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathring{A}_n = \Omega$, donde $\mathring{A}_n$ denota el interior de A_n.

El álgebra vectorial $\mathcal{H}_b(\Omega)$ satisface las condicones requeridas de M y si B_m es la $\mathcal{H}_b$-envoltura de A_m, queda que $\{x_1, \dots, x_n, \dots\} \cap B_m$ es finito para todo m = 1, 2, ...

También si n_1 y n_2 son enteros positivos distintos, entonces existe una forma lineal continua f sobre E, y así un elemento de $\mathcal{H}_b(\Omega)$, tal que $f(x_{m_1}) = 1$ y $f(x_{m_2}) = 0$.

Finalmente $\mathcal{H}_b(\Omega, F_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, satis face las condiciones para Z_λ, y por teorema 1.2 del presen te capítulo, es posible encontrar un elemento f_λ en $\mathcal{H}_b(\Omega, F_\lambda)$ tal que $f_\lambda(x_n) = u_n^\lambda$, n = 1, 2, ..., donde con $(u_n^\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ indicamos la sucesión proyección mediante π_λ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ahora, formamos la función $f = (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, la cual pertenece a $\mathcal{H}_b(\Omega, F)$, pues cada f_λ es un elemen to de $\mathcal{H}_b(\Omega, F_\lambda)$ y se cumple para $\mathcal{H}_b(\Omega, F)$ la propie dades requeridas para Z. Además

$$f(x_n) = (f_\lambda(x_m))_{\lambda\in\Lambda} = (u_n^\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = u_n$$

para todo n = 1, 2, ...

C.Q.D.

TEOREMA 2.2

Si $\Omega = E$, siendo E un espacio normado, y $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$ es unasucesión de puntos distintos de E tal que $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \infty$ y $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ es una sucesión de vectores de F, entonces existe un $f \in \mathcal{H}_b(E,F)$ tal que $f(x_n) = u_n$, n = 1, 2, ...

Demostración.- Tomamos $A_m = B_m = \{x \in E : \|x\| \leq m\}$ m = 1, 2, ..., en la demostración del teorema anterior, y resulta lo que pretendemos.

C.Q.D.

TEOREMA 2.3

Sea E un espacio normado separable y F tal que la familia de espacios de Fréchet $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ sean separables. Entonces existe una $f \in \mathcal{H}_b(\Omega, F)$, siendo Ω un conjunto $\mathcal{H}_b$-holomórficamente convexo, tal que $f(\Omega)$ es denso en F y Ω es un dominio de existencia para f.

Demostración.- Si $\Omega = E$, entonces tomando $\{u_1^\lambda, u_2^\lambda, \ldots, u_n^\lambda, \ldots\}$ un subconjunto denso de F_λ , $\lambda \in \Lambda$, por VALDIVIA [2](Teor. 4) resulta que existe una función f_λ en $\mathcal{H}_b(E, F_\lambda)$ tal que $f_\lambda(\Omega)$ es denso en F_λ y Ω es un dominio de existencia para la función f_λ .

Sea la función $f : E \longrightarrow F$, cuyas componentes sean las funciones f_λ, $\lambda \in \Delta$. Esta función f es un elemento de $\mathcal{H}_b(E, F)$,y demuestra el resultado que queremos probar.

Si $\Omega \neq E$, por VALDIVIA [2](Teor. 5) existe una función $f_\lambda \in \mathcal{H}_b(\Omega, F_\lambda)$, tal que $f_\lambda(\Omega)$ es denso en F_λ y Ω es un dominio de existencia para la función f_λ, $\lambda \in \Lambda$. De nuevo, tomando f la función definida de Ω en F por las componentes f_λ , $\lambda \in \Lambda$, obtenemos que $f(\Omega)$ es denso en F y además Ω es un dominio de existencia para la función f.

C.Q.D.

Teniendo en cuenta a VALDIVIA [2] (Teor. 6) fácilmente se puede probar el siguiente resultado:

TEOREMA 2.4

Sea Ω un subconjunto convexo de un espacio localmente convexo E, tal que cada subconjunto equicontinuo de $E'[\sigma(E', E)]$ es metrizable. Sea F tal que la familia de espacios de Fréchet F_λ , $\lambda \in \Lambda$, sean separables. Entonces existe una función f en $\mathcal{H}(\Omega, F)$ tal que $f(\Omega)$ es denso en F y Ω es un dominio de existencia para f.

COROLARIO 1.

Sea E un espacio localmente convexo separable, Ω y F como en el teorema anterior. Entonces existe una función f en $\mathcal{H}(\Omega,F)$ tal que $f(\Omega)$ es denso en F y Ω es un dominio de existencia para f.

Sea ahora E el dual topológico de un espacio de Fréchet H, dotado de la topología $\lambda(H',H)$ de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos compactos de H.

TEOREMA 2.5

Sea Ω un subconjunto de E que sea holomórficamente convexo. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos distintos en Ω que no contiene ningún punto de acumulación en Ω y sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de F. Entonces existe un f en $\mathcal{H}(\Omega,F)$ tal que $f(x_n)=u_n$, $n = 1, 2, \ldots$

Demostración.- Sabemos de VALDIVIA [2](Prop. 9) que Ω, con la topología inducida por E, es un hemicompacto $K_{\mathbb{R}}$-espacio. De esta forma, podemos obtener una sucesión fundamental creciente de subconjuntos compactos, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de Ω.

Aplicamos ahora el teorema 1.3 del presente capítulo con $M = \mathcal{H}(\Omega)$ y $Z = \mathcal{H}(\Omega, F)$, y completamos la prueba.

C.Q.D.

Los siguientes resultados, pueden ser obtenidos de manera análoga a VALDIVIA [2].

TEOREMA 2.6

Si F es tal que los espacios $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ son separables, Ω un subconjunto holomórficamente convexo de E, entonces existe f en $\mathcal{H}(\Omega, F)$ tal que $f(\Omega)$ es denso en F y Ω es un domino de existencia para f.

TEOREMA 2.7

Sea E un espacio localmente convexo cuya topología viene definida por una familia de normas, F un producto topológico de una familia de espacios de Fréchet $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, Ω un dominio de holomorfía en E y (x_n) una sucesión de puntos distintos en Ω. Si (u_n) es una sucesión en F y existe una función f en $\mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\lim_{n \to \infty} |f(x_n)| = \infty$, entonces existe g en $\mathcal{H}(\Omega, F)$ tal que $g(x_n) = u_n$, n = 1,2,...

Siendo E un espacio localmente convexo

y $F=\prod_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ con $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ espacios de Fréchet, sea Ω un espacio topológico de Hausdorff y Ψ un homomorfismo local de Ω en E, esto es, si $x\in\Omega$ entonces existe un entorno abierto U_x de x en Ω y un entorno abierto V_x de $\Psi(x)$ en E tal que la restricción Ψ_x de Ψ a U_x es un homeomorfismo de U_x sobre V_x. Se define $\mathcal{H}(\Omega)$ como el espacio de las funciones de Ω en $\mathbb{C}$ tal que $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ si, y sólo si, para cada $x\in\Omega$, $f\circ\Psi_x^{-1}$ es una función holomorfa de V_x en $\mathbb{C}$. De modo análogo se define $\mathcal{H}(\Omega,F)$. Así tenemos:

TEOREMA 2.8

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en F y existe una función f en $\mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(x_n)$ es inyectiva, siendo (x_n) una sucesión de puntos distintos en Ω , y $\lim_{n\to\infty}|f(x_n)|=\infty$. Entonces existe una función g en $\mathcal{H}(\Omega,F)$ tal que $g(x_n)=u_n$, n = 1, 2, ...

R E F E R E N C I A S   B I B L I O G R A F I C A S

ANSEMIL, J. M. and PONTE, S. : [1] An example of a quasi-normable Fréchet function space wich is not a Schwartz space. Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory. Ed. S. Machado, Springer-Verlag. Lecture Notes in Math. 843 (1981), 1-8.

BARROSO, J. A. : [1] Introducción a la holomorfía entre espacios normados. Publicaciones de la Universidad de Santiago de Compostela. Serie Cursos y Congresos, nº 7, 1976.

[2] Introducción a la holomorfía en espacios localmente convexos. Publicaciones de la Universidad de Valencia, 1980.

BOLAND, P. J. : [1] Holomorphic functions on nuclear spaces. Publicaciones de la Universidad de Santiago de Compostela. Serie B, nº 16,1977.

BOLAND, P. J. and DINEEN, S. : [1] Holomorphic functions on fully nuclear spaces. Bull. Soc. Math. France. 106 (1978), 311-336.

BONET, J. : [1] Representaciones de espacios de funciones con valores vectoriales. Tesis Doctoral. Valencia. 1980.

CARLEMAN, T. : [1] Les fonctions quasi-analytiques. Collection de monographies sur la théorie des fonctions. Paris, Gauthier-Villars. 1926.

COLOMBEAU, J. F. : [1] Infinite dimensional C^∞ mappings with a given sequence of derivatives at a given point. J. Math. Anal. Appl. 71 (1979), 95-104.

[2] A result of existence of holomorphic maps which admit a given asymptotic expansion. Advances in Holomorphy. Ed. J. A. Barroso. North Holland Math. Studies. 34 (1979), 221-232.

[3] Holomorphic maps with a given asympto-tic expansion at a boundary point. J. Math. Anal. Appl. 72 (1979), 274-282.

[4] Differential calculus and holomorphy. North Holland Math. Studies. 64, 1982.

COLOMBEAU, J. F. and MUJICA, J. : [1] The Levi problem in nuclear Silva spaces. Arkiv for Math. 18, 1 (1980), 117-123.

[2] Existence of holomorphic mappings with prescribed asymptotic expansions at a given set of points in infinite dimensions. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. Vol. 5, 2 (1981), 149-156.

DINEEN, S. : [1] Holomorphic functions on locally convex topological vector spaces, I. Locally convex topologies on H(U). Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 23 (1973), 19-54.

[2] Holomorphic functions on locally convex topological vector spaces, II. Pseudo-convex domains. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 23 (1973), 155-185.

[3] Holomorphic functions on strong duals of Fréchet-Montel spaces. Infinite Dimensional Ho-

lomorphy and Applications. Ed. M. C. Matos. North Holland Math. Studies. 12 (1977), 144-166.

[4] Tres problemas en holomorfía infinitodimensional. Publicaciones de la Universidad de Santiago de Compostela. nº 6, 1979.

[5] Complex analysis in locally convex spaces. North Holland Math. Studies. 57, 1981.

FERNANDEZ, M. : [1] Algunos resultados sobre desarrollos asintóticos en una y varias variables complejas. Tesis Doctoral. Valencia. 1980.

GROTHENDIECK, A. : [1] Sur certains espaces de fonctions holomorphes I. J. Reine Angew Math. 192(1953), 35-64.

[2] Sur certains espaces de fonctions holomorphes II. J. Reine Angew Math. 192 (1953), 77-95.

HERRERO, C. : [1] Espacios de funciones holomorfas cuyas derivadas se extienden por continuidad en un punto de la frontera del dominio y su relación con los espacios de funciones holomorfas con desarrollo asintótico. Tesis Doctoral. 1979.

HILLE, E. : [1] Methods in classical and functional analysis. Addison-Wesley Publishing Company. Massachusetts. 1972.

HOLLSTEIN, R. : [1] (DCF)-Räume und lokalkonvexe tensorprodukte. Arch. Math. 29 (1977), 524-531.

HORVATH, J. : [1] Topological vector spaces and distributions I. Addison-Wesley. Massachusetts.1966.

ISIDRO, J. M. : [1] Topological duality on the functional space $(H_b(U;F), \tau_b)$. Proc. Roy. Irish Acad. 79A (1979), 115-130.

[2] On the distinguished character of the function spaces of holomorphic mappings of bounded type. J. Fnal. Anal. 38, 2 (1980), 139-145.

ISIDRO, J. M. and MENDEZ, J. P. : [1] Topological duality on the function space $(H(U,F), \tau_\delta)$. J. Math. Anal. Appl. 67, 1 (1979), 239-248.

KÖTHE, G. : [1] Topological vector spaces I. Springer-Verlag. 1969.

[2] Topological vector spaces II. Springer-

Verlag. 1979.

LOPEZ PELLICER, M. : [1] Desarrollos asintóticos y familias compactas de funciones holomorfas con valores vectoriales. Rev. Real Acad. Ciencias Exactas. Madrid. LXV, 1 (1971).

MANDELBROJT, S. : [1] Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions. Collection de monographies sur la théorie des fonctions. Paris, Gauthier-Villars. 1935.

MUJICA, J. : [1] Domains of holomorphy in DFC-spaces. Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory. Ed. S. Machado. Springer-Verlag Lecture Notes in Math. 843 (1981), 500-533.

NACHBIN, L. : [1] Topology on spaces of holomorphic mappings. Erg. der Math. Springer-Verlag. 47, 1969.

NOVERRAZ, P. : [1] Pseudo-convexité. Convexité polynomial et domaines d'holomorphie en dimension infinie. North Holland Math. Studies. 3, 1973.

[2] El problema de Levi-Oka en dimensión infinita. Publicaciones de la Universidad de Santiago de Compostela. nº 5, 1979.

RUDIN, W. : [1] Real and complex analysis. Mc Graw Hill. London. 1970.

VALDIVIA, M. : [1] Desarrollos asintóticos y familias compactas de funciones holomorfas. Rev. Real Acad. Ciencias Exactas. Madrid. LIX, 3 (1965), 339-378.

[2] Interpolation on certain function spaces. Proc. Roy. Irish Acad. 80A (1980), 178-189.

[3] Representación de espacios de distribuciones y funciones continuas. Universidad de Valencia. I.C.E. 1980.

[4] Topics in locally convex spaces. North Holland Math. Studies. 67, 1982.

WILANSKY, A. : [1] Modern methods in topological vector spaces. Mc Graw Hill. New York. 1978.

WILLARD, S. : [1] General Topology. Addison-Wesley. Series in Math. 1968.

[illegible] DE VALENCIA — FA[illegible]CIAS

Reunido el Tribunal que suscribe [illegible], acordó otorgar, por unanimidad, a [illegible] de

D. DOMINGO GARCÍA RODRÍGUEZ

la calificación de SOBRESALIENTE CUM LAUDE

Valencia, a 14 de ENERO de 1984

El Secretario,

El Presidente

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS