Universitat de València
Facultat de Matemàtiques

Departament de Didàctica de la Matemàtica

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Los niveles de van Hiele en relación con la Taxonomía SOLO y los Mapas Conceptuales

Tesis doctoral que presenta
Manuel Pedro Huerta Palau

bajo la dirección del
Dr. Angel Gutiérrez Rodríguez

Curso Académico 1996-1997

→ Matemáticas.

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
ESCOLA UNIVERSITARIA DE
MAGISTERI "AUSIÀS MARCH"

Departament de Didàctica de la Matemàtica

Alcalde Reig, 8; Aptdo. 22045
46071-Valencia (Spain)

Dr. D. ÁNGEL GUTIÉRREZ RODRÍGUEZ, Catedrático de E.U. de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València

HAGO CONSTAR:

1) Que la presente memoria titulada *Los niveles de van Hiele en relación con la Taxonomía SOLO y los Mapas Conceptuales* ha sido realizada bajo mi dirección por D. MANUEL PEDRO HUERTA PALAU, en el Departament de Didàctica de la Matemàtica de la Universitat de València, y constituye su tesis para optar al Grado de Doctor en Matemáticas.

2) Que esta memoria cumple los requisitos exigidos por la legislación vigente, por lo que autorizo su presentación en la Universitat de València.

Y para que así conste, firmo el presente documento.

En Valencia, a 9 de mayo de 1997.

Fdo.: Ángel Gutiérrez R.

Al meu pare, qui sempre van confiar en mi.

A Rita, Simón, Sandro i..., ells són la meua raó.

AGRAÏMENTS

Si he aconseguit que aquest treball haja arribat al seu punt final, ha estat gràcies al suport i col.laboració de moltes persones a les què m'agradaria expressar el més sincer dels reconeiximents pel seu ajut.

És justament per això que no relacionaré aquestes persones per tal de no cometre la injustícia d'oblidar-me'n de cap.

Sí he de mencionar als estudiants que m'han soportat, tant en la docència como en la investigació. Gràcies a la seua paciència i col.laboració he pogut portar a terme aquest treball.

Gràcies.

VOLUMEN I

ÍNDICE

Página

Página

Página

Índice de figuras, tablas y gráficos

Figuras **Página**

Figuras Página

Figuras **Página**

Figuras **Página**

Tablas   Página

Tablas **Página**

Tablas **Página**

Tablas <u>Página</u>

Gráficos <u>Página</u>

Gráficos **Página**

INTRODUCCIÓN GENERAL

Introducción general

En la terminología de origen anglosajón existen dos términos, *assessment* y *evaluation*[1], para designar lo que en castellano se designa mediante un único término, evaluación. Por *assessment* se entiende, o se convenia que se entienda, la evaluación que tiene que ver con los estudiantes, ya sea como individuos o en grupos, incluidos en la comunidad escolar y tomados en cualquier nivel educativo. Por *evaluation* se entiende, o se convenia que se entienda, la evaluación que tiene que ver con los sistemas educativos o de enseñanza, ya sea en su totalidad o en partes, en los que la enseñanza de las matemáticas está o pueda estar implicada.

Si el convenio relativo a *evaluation* se extiende a la evaluación de las teorías propias de la Educación Matemática, el trabajo de investigación que aquí presentamos, y del que esta memoria pretende ser reflejo, podría encasillarse como un trabajo sobre *evaluation*. Pero, evaluar teorías que interpretan el aprendizaje de las matemáticas, en las que los estudiantes son los protagonistas, implica realizar un *assessment* de los estudiantes a la luz de esas teorías e interpretarlo desde un punto de vista externo a la teoría que se pretende evaluar. En consecuencia, nuestro trabajo tendría, también, un lugar entre aquellos que tratan sobre *assessment*.

Afortunadamente, en castellano, sólo disponemos del término evaluación y no se nos presenta la disyuntiva anglosajona. Por lo tanto, es mucho más fácil ubicar nuestro trabajo de investigación entre aquéllos que usualmente se establecen como campos de investigación en Educación Matemática: usando nuestra terminología, se trata de una trabajo sobre evaluación.

Nuestra investigación contempla la evaluación desde una doble vertiente: (1) formativa y sumativa, a la vez, en tanto que analiza a los estudiantes mientras están en pleno proceso de aprendizaje (estudiantes del último curso de la Enseñanza Primaria y del último curso de la Enseñanza Secundaria Obligatoria) y una vez acabado (estudiantes de COU y de la Facultad de Matemáticas) y (2) específica, en tanto que sólo tiene en cuenta una parte de las matemáticas escolares, la geometría y más concretamente los cuadriláteros.

[1] En Niss, 1993, pág. 3

Por otra parte, es habitual considerar dos paradigmas en la evaluación: 1) El paradigma cuantitativo, en tanto que se centra fundamentalmente en habilidades, hechos y algoritmos, para grandes muestras de estudiantes y con instrumentos de evaluación más o menos estandarizados, proporcionando datos de carácter sumativo al final de un proceso de enseñanza y 2) el paradigma cualitativo, en tanto que se interesa por identificar e interpretar la comprensión y el razonamiento de los estudiantes, proporcionando información de características no numéricas que pueden conectarse directamente con el tema específico que ha sido o está siendo enseñado y se ha aprendido o se está aprendiendo.

Nuestro trabajo ha optado por el paradigma cualitativo. Trata pues de identificar e interpretar la comprensión y el razonamiento de los estudiantes en relación con un tema específico de las matemáticas escolares, los cuadriláteros. Por otra parte, en tanto que *evaluation*, se trata de ver, en primer lugar, qué relación existe entre el razonamiento y la comprensión cuando se usan teorías distintas para su análisis e interpretación: El Modelo de van Hiele y la Taxonomía SOLO, respectivamente. Esta relación posible puede darnos una manera de interpretar y relacionar aspectos relativos a estas dos teorías, inicialmente independientes pero probablemente relacionadas. En segundo lugar, se trata de ver si existe relación entre el razonamiento y la manera en la que los estudiantes estructuran en la mente un conocimiento aprendido. Esta relación posible puede darnos una manera de interpretar el razonamiento y el conocimiento estructurado por medio de su representación física en forma de Mapas Conceptuales.

En los últimos años el Modelo de van Hiele se ha convertido en un modelo posible para la enseñanza de la geometría. Es, pues, una herramienta útil para los profesores y diseñadores del curriculum. Ampliamente investigado en su estructura, parece haber un amplio consenso en qué versión, de las posibles, pueden usarse para interpretar el aprendizaje y diseñar una instrucción basada en cómo y en cuál es el producto de dicho aprendizaje. Como más a delante explicaremos, el objetivo prioritario de una enseñanza basada en el Modelo de van Hiele es el razonamiento deductivo. El éxito de esta enseñanza consiste en lograr que los estudiantes transiten ordenada y secuencialmente por los diferentes niveles de razonamiento, hasta alcanzar el máximo nivel de razonamiento. Desde la perspectiva del profesor que está interesado en otros aspectos del aprendizaje, además de aquéllos relativos al nivel de razonamiento de sus estudiantes, el Modelo de razonamiento de van Hiele no ofrece demasiada información. La interpretación de un nivel de razonamiento se basa exclusivamente en describir habilidades de razonamiento, adscritas a ese nivel, demostradas por un estudiante implicado en resolver tareas de contenido geométrico. Es pues necesario buscar otras interpretaciones fuera del modelo propuesto, de tal suerte que el significado que ya tiene asignar un nivel de razonamiento a un estudiante pueda extenderse a aquéllos que proporcionen las fuentes ajenas tenidas en consideración. En la medida en la que estos significados puedan extenderse como fruto de nuestra investigación, creemos en la utilidad de la misma para ayudar a profesores y alumnos a desarrollar sus respectivas tareas.

Los métodos que vamos a desarrollar para realizar la *evaluation* de los niveles de van Hiele van a proporcionarnos nuevos métodos para realizar un *assessment* de los estudiantes, al ser éstos evaluados desde una perspectiva tridimensional como se indica en la figura siguiente.

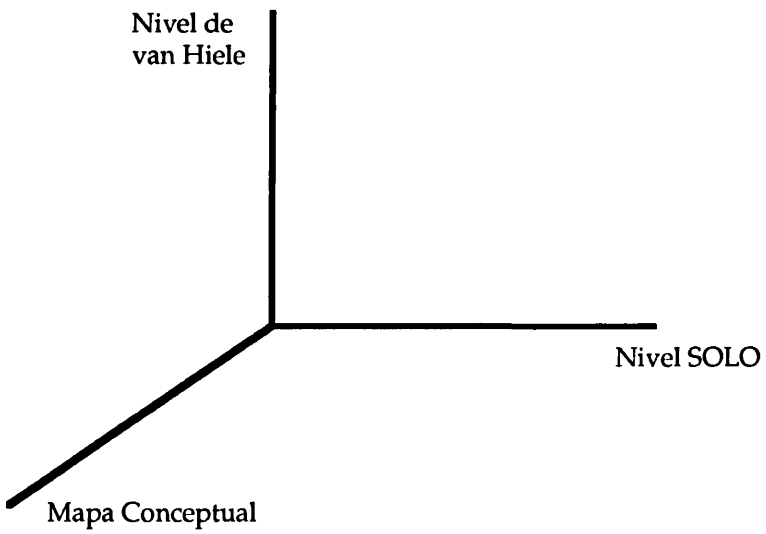


Figura 0.1. Modelo de evaluación tridimensional.

Cada uno de los ejes del diagrama (figura 0. 1) mide aspectos distintos del aprendizaje que probablemente están relacionados: nivel de razonamiento (eje Y), calidad del aprendizaje (eje X) y estructuración del contenido aprendido (eje Z). Las posibles relaciones en el plano XY y en el plano YZ van a ser el objeto de nuestra investigación. Las posibles relaciones en el plano XZ pueden ser objeto de investigación en un futuro próximo.

La memoria, que describe y da cuenta de nuestra investigación, la hemos organizado en seis partes y doce capítulos. La 2ª y la 3ª Parte (Capítulos III al XI) son las que tratan la evaluación. El resto de las partes que constituyen esta memoria, centran el problema y los objetivos de la investigación (1ª Parte), establecen las conclusiones generales y las posibles implicaciones (4ª Parte) así como las referencias bibliográficas que hemos utilizado en el estudio que hemos realizado (5ª Parte).

En la 2ª Parte de la memoria se describe el trabajo de investigación en el plano XY. Después de fundamentar los marcos teóricos que se han considerado (Capítulos III y IV), se describe la metodología de investigación (Capítulo V) que nos ha permitido evaluar a los estudiantes desde dos puntos de vista diferentes y, a la vez, complementarios: El Modelo de van Hiele y la Taxonomía SOLO. Los resultados de esta evaluación se recogen en el Capítulo VI dónde, además, hemos distinguido los resultados de la evaluación de los estudiantes en cada uno de los marcos teóricos y la evaluación conjunta que nos ha permitido establecer relaciones entre ambos. El Capítulo VII recoge aquellas conclusiones que hemos considerado más relevantes en relación con nuestros objetivos de investigación (Capítulo I).

La 3ª Parte de la memoria describe el trabajo de investigación en el plano YZ. Los Mapas Conceptuales (Capítulo VIII) es un instrumento posible de evaluación que no ha sido muy usado en Educación Matemática, aunque no ha sido así en otras ciencias. Además de investigar las posibles relaciones en el plano YZ, investigamos también la validez de los Mapas Conceptuales como instrumento de evaluación (Capítulo X). La metodología que describe cómo se ha realizado la investigación, con este marco teórico, se detalla en el Capítulo IX y los resultados de la misma en el Capítulo X. En el Capítulo XI se da cuenta de aquellas conclusiones más relevantes que tienen que ver con el uso de los Mapas Conceptuales como herramienta de evaluación y de las relaciones posibles en el plano YZ.

Esta memoria se cierra con un capítulo (Capítulo XII) dedicado a resumir las conclusiones que, a nuestro juicio, consideramos más relevantes a las que hemos llegado en cada una de las dos partes principales en las que hemos divido nuestro trabajo. Además, cerrando el capítulo, incluimos las implicaciones posibles que han surgido de nuestras conclusiones, tanto didácticas como para futuras investigaciones.

1ª PARTE

DE LOS ANTECEDENTES Y DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Introducción.

En esta primera parte de la memoria vamos a exponer cuáles son los antecedentes de nuestra investigación, desde las motivaciones personales que nos han llevado a estudiar a fondo un problema de didáctica, hasta el planteamiento específico de la problemática que nos condujo a su investigación, pasando por la explicación de los objetivos generales y específicos de nuestro trabajo, del cual la presente memoria pretende ser testigo.

En el primer capítulo, haremos un rápido recorrido por la trayectoria profesional de este investigador, que se inicia y se desarrolla, por un buen número de años, en la enseñanza de las matemáticas de la casi extinta Formación Profesional, de la actual Enseñanza Secundaria Obligatoria y el Bachillerato, en sus diferentes opciones. El trabajo activo en Seminarios Permanentes, pertenecientes tanto al antiguo ICE de la Universitat de València, a distintos CEPs de Profesores (Valencia y Torrent) y al Servei de Formació Permanent de la Universitat de València, y la actual pertenencia a un Departamento de Didáctica de la Matemática, posiblemente expliquen el interés por realizar una investigación en didáctica de las matemáticas que tenga que ver con el aprendizaje de las mismas en un entorno escolar.

En el segundo capítulo expondremos los objetivos de nuestro trabajo que, esencialmente, consiste en evaluar a un grupo de alumnos desde perspectivas que incluyen marcos teóricos y metodologías diferentes (de los que más adelante hablaremos), aunque probablemente complementarios, tratando de obtener conclusiones acerca de sus propuestas y sus posibles relaciones.

Finalmente, para concluir la descripción de esta primera parte del trabajo de investigación, en la que pretendemos situar la problemática en el marco previo a su desarrollo, citaremos, brevemente y de un modo temático, los trabajos e investigaciones previos que hemos consultado y que nos han parecido más relevantes para nuestra investigación. Estos trabajos e investigaciones consultadas tienen que ver con la estructura de la Teoría de los niveles de van Hiele (o el Modelo de van Hiele), con la estructura de la Taxonomía SOLO, y los intentos de relacionar ésta con la Teoría de niveles, y los trabajos e investigaciones que tienen que ver con los Mapas

Conceptuales, en su componente de evaluación, todos ellos en el campo de la Educación Matemática[1].

[1] A lo largo de esta memoria aparecerán indistintamente los términos Educación Matemática y Didáctica de las Matemáticas. En cualquier caso, nos estamos refiriendo a lo mismo.

CAPÍTULO I

Planteamiento de la investigación y objetivos

I. 1 Antecedentes personales

En este apartado nos proponemos hacer un breve recorrido por aquellos condicionamientos personales que nos han conducido a la realización de esta investigación en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, desde la docencia en un centro de Formación Profesional, pasando por los movimientos de renovación pedagógica de principios de la década de los 80, inmerso en grupos de trabajo y de experimentación del futuro (entonces, actual, ahora) Sistema Educativo, siguiendo con algún trabajo sobre desarrollo curricular y de investigación en Didáctica de las Matemáticas, hasta la nueva experiencia que ahora pretendemos desarrollar en las páginas siguientes.

I. 1. 1 *Los primeros síntomas*

Como hemos venido diciendo, gran parte de la labor como profesor de Matemáticas la hemos desarrollado en un centro de Formación Profesional. No es el momento de describir las características, motivaciones, contexto socio - cultural, etc... en el que se enmarcaban los estudiantes de este nivel educativo, pero todos somos conscientes de, al menos, aquello que trascendía desde los ámbitos profesionales alejados de él, de las dificultades que entrañaba enseñar matemáticas a estudiantes ya de por sí alejados de ellas, ya en niveles educativos anteriores ya en el mismo nivel educativo en el que se encontraban. Añadiríamos, además, que no sólo podrían encontrase *dificultades* en "enseñar matemáticas", sino también (y quizás muchas más) en "aprender matemáticas". Y, en relación con esto, "qué enseñar de matemáticas" y "cómo se aprenden las matemáticas", con lo que la problemática implicaba a los profesores, materiales curriculares y alumnos, vértices de un triángulo que ejemplifica la atención de la Educación Matemática.

Así que pronto nos dimos cuenta de que "enseñar matemáticas" debería tener por objeto que éstas se aprendieran y sin esto último, lo primero carecería de sentido. Pero, ¿cómo se aprenden las matemáticas? Y, en relación con esta pregunta, ¿cómo se enseñan las matemáticas?

El problema se acentuaba si el contenido escolar del que se trataba era la geometría. De una parte, la escasa experiencia anterior de nuestros estudiantes (en la antigua EGB de la Ley General de Educación de 1970) con esta parte del currículo escolar, algunos de los cuáles sólo recordaban el nombre de alguna figura plana, más o menos estándar, algunas fórmulas para el cálculo de áreas, casi siempre inexactas y, de otra, las dificultades de comunicación que teníamos con nuestros estudiantes en relación con el contenido geométrico de su currículo, nos presentaron las primeras evidencias de que el fracaso en el aprendizaje de la geometría y en el de su enseñanza deberían tener orígenes que habría que explorar.

I. 1. 2 *El grupo de trabajo: un enfoque diferente de la enseñanza de las matemáticas*

En los momentos de reformas, tanto del sistema educativo como de los planteamientos curriculares asociados a él, que se vivían en aquellos momentos, la recuperación de la enseñanza de la geometría era considerada una necesidad. Otros ya habían opinado con anterioridad, sobre esta recuperación necesaria (p. ej. Burger, 1985, Corberán, Huerta y otros, 1989) o sobre las dificultades de su enseñanza y aprendizaje (p. ej., Trafton y Le Blanc, 1973; Fielker, 1983). Pero, entre todos ellos, a nuestro modo de ver las cosas, H. Freudenthal. En el libro Mathematics as an Educational Task, Freudenthal (1973) introdujo un capítulo que hablaba sobre la geometría escolar. Lo tituló "El caso de la Geometría" (p. 401 y sig.) y lo hizo de esta manera porque consideró que, en aquel momento, la geometría estaba siendo sometida a juicio, acusada por algunos de no ser un sistema axiomático con una estructura deductiva perfecta y que, por esta causa, debería abandonarse su enseñanza. Hablamos claro está de la geometría de Euclides, de la geometría tradicional, que durante los años y siglos anteriores había sido la "prima donna" de los programas escolares. La geometría tradicional que, según Freudenthal, estaba siendo sometida a una especie de juicio sumarísimo en el que no hubo demasiados defensores y sí una sentencia culpatoria casi predeterminada.

Ciertamente surgieron alternativas a la Geometría de Euclides, los sistemas axiomáticos de Pasch y Hilbert, seguramente mucho más perfectos desde el punto de vista deductivo pero, como decía Freudenthal, lo único que se podía hacer con ellos era investigar en sus fundamentos, pero ni se podía hacer geometría *dentro* de ellos y ni se podía enseñar la geometría *con* ellos (p. 402).

Así pues, ¿el problema era la propia Geometría, sus fundamentos, o había otros problemas latentes, derivados de ellos y que dificultaban su enseñanza? Freudenthal no creyó que el problema estuviese en que la geometría no fuera lo suficientemente deductiva y que, por eso, fracasase su enseñanza, sino que el problema estaba en que la deductividad no era enseñada como reinvención, al modo socrático y en que desde luego, para él, la geometría era algo más que deductividad (Huerta, 1996a).

Si el problema no estaba en los fundamentos, los cuáles ya se veían imperfectos, ¿en qué geometría estaba pensando Freudenthal? "En el nivel más alto de enseñanza, dice, la geometría es algo organizado axiomáticamente. En el nivel más bajo, la geometría es comprender el espacio: espacio vivencial del niño, en el que vive, crece y se mueve; el espacio que el niño debe aprender a conocer, explorar, conquistar, para vivir, crecer y moverse mejor en él" (p. 403). Esta visión de la geometría escolar entroncaba con su idea de que las matemáticas, y en este caso la geometría, debería estar atada a la realidad cuando de lo que se trata es de aprenderlas.

Más adelante (p. 409), Freudenthal expone el experimento de enseñanza seguido por Dina van Hiele para su tesis doctoral (una traducción al inglés de este trabajo puede hallarse en Fuys, Geddes y Tischler, 1984), que le condujo, junto con el trabajo de su marido Pierre Marie van Hiele, a establecer lo que se conoce como Teoría de los Niveles o Modelo de van Hiele. Su exposición se centra en la importancia que para la instrucción tiene el uso de materiales concretos, sobre todo en los niveles iniciales de enseñanza.

Este primer contacto con el modelo de van Hiele condujo a un grupo de profesores, entre los que se encontraba el autor de este trabajo, agrupados en un Seminario Permanente, a considerar la posibilidad de enfocar la enseñanza de la geometría desde una perspectiva diferente de aquella al uso entonces (Corberán, Huerta y otros, 1988).

Nuevas fuentes aparecieron (Hoffer, 1981; Burger, 1985; Burger y Shaughnessy, 1986; Crowley, 1987) y fueron configurando una concepción sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría que dieron lugar a pequeños trabajos de investigación, principalmente en desarrollo curricular (Corberán, Huerta y otros, 1988; 1989). Esta concepción sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría se iba formando a la luz de una teoría "novedosa" en aquellos momentos, la Teoría o Modelo del razonamiento geométrico de van Hiele.

I. 2 Hacia el problema de investigación

Como más adelante veremos, al describir los marcos teóricos de nuestra investigación, el Modelo del razonamiento geométrico de van Hiele (por comodidad, en adelante la denominaremos Modelo de van Hiele) tiene dos componentes fundamentales: una, con carácter descriptivo, los niveles de razonamiento, y otra, con carácter prescriptivo, las fases del aprendizaje. La primera, con cierta vocación de convertirse en una teoría general sobre el aprendizaje de la geometría. La segunda, como metodología de enseñanza para favorecer el aprendizaje de la geometría. Era pues, el marco que respondía a aquellas cuestiones iniciales.

El aprendizaje se interpretaba como un proceso inductivo que buscaba como fin último el *insight* [2] (van Hiele, 1957) de los escolares en el aprendizaje de la geometría. Este insight suponía capacidad de razonamiento próximo al razonamiento deductivo o incluso el mismo razonamiento deductivo.

El intento de llevar el Modelo de van Hiele a la práctica docente (Corberán, Huerta y otros, 1989 y 1994) nos condujo a una aproximación inicial del problema de investigación (Huerta, 1991) cuyo origen venía dado por el significado que un profesor, en un entorno escolar, podía extraer de lo que significaban los niveles de razonamiento de van Hiele. Si bien las preguntas ¿en qué nivel de van Hiele está razonando un estudiante cuando realiza ciertas tareas de contenido geométrico? y, en consecuencia, ¿que quiere decir que un estudiante razona en un determinado nivel de razonamiento? iban teniendo respuestas en métodos de asignación de niveles de razonamiento (más adelante hablaremos de estos métodos con más detalle) y en descriptores de las habilidades de razonamiento demostradas por los estudiantes (puede verse como ejemplo Fuys, Geddes y Tischler, 1988; el Capítulo III o el Anexo II de esta memoria), no podían ser suficientes

[2] La palabra inglesa *insight* , puede traducirse al castellano por *comprensión*. Pero, desde nuestro punto de vista, en la forma en la que usaba van Hiele este término, significaba algo más. El insight suponía el nivel máximo en el que un estudiante podía razonar de manera autónoma y en contextos alejados de los propios de la enseñanza, en relación con un concepto o una estructura conceptual. Es decir, un estudiante puede razonar con ejemplos de un concepto. Esto supone un cierto grado de comprensión de dicho concepto pero no supone que el estudiante demuestre insight sobre ese concepto.

cuando, al margen de las habilidades de razonamiento, el interés de un profesor también se centra en otro tipo de capacidades y comprensiones que no recogen los descriptores de un determinado nivel de razonamiento.

I. 3 Objetivos del trabajo

Así pues, el problema a investigar estaba servido: ¿Es posible analizar los niveles de van Hiele desde puntos de vista externos a la propia teoría? Es decir, si las respuestas de un estudiante frente a tareas de geometría escolar son analizadas desde perspectivas distintas a las propuestas por el Modelo de van Hiele, ¿conducirá este análisis a interpretar mejor los niveles de van Hiele?

Esta pregunta, que engloba el objetivo fundamental de nuestro trabajo, lleva asociada otra pregunta que debe ser resuelta: Si buscamos el análisis desde otros puntos de vista, ¿cuáles pueden ser éstos?

El problema esencialmente consiste en evaluar a los estudiantes desde puntos de vista diferentes. En este marco, en el que se sitúa el problema de investigación, la bibliografía al uso (que luego citaremos) nos proporciona fuentes de información que nos deben permitir escoger aquellos marcos teóricos y métodos de investigación desde los que analizar las respuestas de los estudiantes a preguntas propuestas por el investigador y, como consecuencia de este análisis, analizar los niveles de van Hiele. Dos de estos marcos posibles son la Taxonomía SOLO y los Mapas Conceptuales (ambos se describen con mayor profundidad, respectivamente, en los capítulos 4º y 6º de esta memoria). Así que el objetivo fundamental, a modo de pregunta, que nos habíamos planteado al principio, ahora se concentran en preguntas más concretas: ¿es posible usar la Taxonomía SOLO para analizar los niveles de razonamiento?, ¿es posible usar Mapas Conceptuales para analizar los niveles de razonamiento?

Si las anteriores preguntas tienen respuestas, entonces generan, a su vez, nuevas preguntas que deben ser investigadas: ¿existe un nivel de respuesta SOLO característico de los estudiantes que razonan en un nivel n dado de van Hiele? Si hay respuesta afirmativa a esta pregunta, ¿cuál es ese nivel característico? Si no hay una respuesta afirmativa, ¿qué se puede decir de las posibles relaciones entre los niveles de razonamiento y los niveles de respuesta, o ciclos de aprendizaje, descritos en la Taxonomía SOLO? Por otra parte, si los Mapas Conceptuales intentan representar gráficamente la manera en la que se estructura el contenido geométrico en la mente de los estudiantes, parece razonable pensar que un estudiante razonará de manera más sofisticada cuanto más y mejor estructurado tenga el contenido matemático sobre el que está razonando. Pero si tomamos esta afirmación al revés, ¿cómo estructura el contenido geométrico un estudiante que se supone que está razonando en un nivel de van Hiele, visto mediante los Mapas Conceptuales? ¿Existe un Mapa Conceptual estándar de aquellos estudiantes que razonan en el mismo nivel de van Hiele? ¿Es posible distinguir mapas conceptuales de estudiantes que razonan en diferentes niveles de razonamiento?

Estas preguntas plantean nuevas preguntas que deben ser investigadas en relación, esta vez, con los instrumentos de evaluación que deben usarse: ¿es posible construir un instrumento de evaluación, en forma de test escrito, de manera que se pueda evaluar, simultáneamente, el nivel de razonamiento de van Hiele y el nivel de respuesta SOLO de un estudiante? ¿es posible construir un instrumento de evaluación, en forma de test escrito, a partir del cuál se pueda construir un mapa conceptual de un estudiante de un concepto geométrico?

El siguiente esquema organiza los objetivos iniciales previstos en nuestro trabajo de investigación.

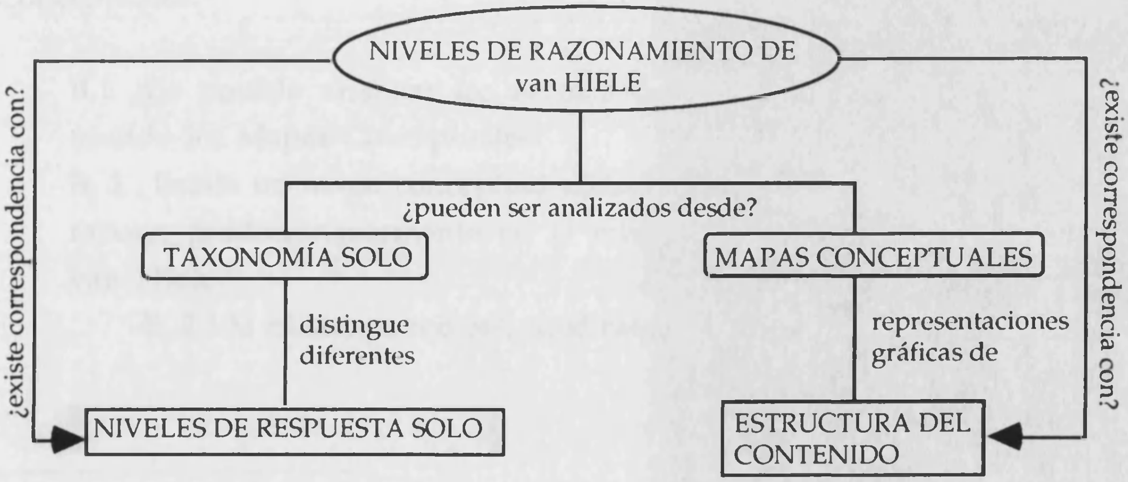


Figura I. 1 Mapa que representa los objetivos generales de investigación.

Para el tipo de investigación[3] que nos proponemos, los métodos de análisis han de ser, necesariamente, cualitativos[4]. Se trata pues de una investigación que se enmarca dentro de aquéllas que usan este tipo de métodos de análisis. En consecuencia, los análisis e interpretaciones que se puedan realizar de dichos análisis tendrán carácter descriptivo, en la medida en que los marcos teóricos utilizados lo son.

Así pues, a modo de resumen, los objetivos específicos que han guiado nuestra investigación, en formato de preguntas, a los que hemos intentado dar respuesta, son los siguientes:

A) Sobre las posibles relaciones entre el Modelo de van Hiele y la Taxonomía SOLO.

A.1 ¿Es posible analizar los niveles de razonamiento de van Hiele usando la Taxonomía SOLO.

A.2 ¿Existe un nivel SOLO característico de los estudiantes que razonan predominantemente en un nivel n de van Hiele?

A. 2.1 Si existe, ¿cuál es?

A. 2.2 Si no existe, ¿que relación existe entre un nivel de razonamiento predominante y el nivel SOLO?

B) Sobre las posibles relaciones entre el Modelo de van Hiele y los Mapas Conceptuales.

B.1 ¿Es posible analizar los niveles de razonamiento de van Hiele usando los Mapas Conceptuales?

B. 2 ¿Existe un mapa conceptual estándar de aquellos estudiantes que razona predominantemente en el mismo nivel de razonamiento de van Hiele?

B. 2.1 Si existe, ¿cómo es?, ¿qué características posee?

[3] Tal vez enmarcada dentro de un campo de investigación en Educación Matemática con un interés creciente, como lo demuestran publicaciones como Lesh y Lamon, 1992 y Niss, 1993, que tiene que ver con la evaluación de los estudiantes como resultado de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

[4] El análisis de resultados sujetos a interpretaciones derivadas de un excelente análisis estadístico pueden conducir a pobres conclusiones didácticas. Sin embargo, "un resultado puede tener un gran contenido didáctico pero pobres cualidades estadísticas" (Webb, 1993, pág. 260).

B. 2.2 ¿Es posible distinguir mapas conceptuales de estudiantes que razonan predominantemente en diferentes niveles de razonamiento de van Hiele.

C) Sobre los instrumentos de evaluación posibles para estudiar las relaciones que se indican en los apartados A y B.

C. 1 ¿Es posible construir un instrumento de evaluación, en forma de test escrito, de manera que se puedan evaluar simultáneamente el nivel de razonamiento de van Hiele y el nivel de respuesta SOLO?
C. 2 ¿Es posible construir un instrumento de evaluación, en forma de test escrito, a partir del cuál se pueda construir un mapa conceptual que represente la manera en la que un estudiante estructura un concepto o una estructura conceptual de contenido geométrico?

CAPÍTULO II

Estudios previos

II. 1 Introducción

Pocos intentos hay, al menos que estén referidos en la literatura al uso, que se hayan planteado una investigación cuyos objetivos tengan que ver con los que hemos expuesto en el capítulo anterior. Queremos decir que no hay intentos de usar a la vez los tres marcos teóricos —modelo de van Hiele, Taxonomía SOLO y Mapas Conceptuales— ni que existan referencias de ello en la literatura habitual en Educación Matemática. Cierto es que de manera aislada e independiente, los marcos teóricos que se mencionan han sido objeto de estudio. En unos casos, como con el Modelo de van Hiele, las investigaciones realizadas han tratado de validar sus planteamientos, en otros casos, como con la Taxonomía SOLO, las investigaciones realizadas han dado lugar a un marco teórico que se considera útil para la evaluación de los estudiantes, y en otros, caso de los Mapas Conceptuales, las investigaciones dirigidas han tenido como objetivo prioritario lograr una mejora en la enseñanza de las ciencias experimentales y, en menor medida, como instrumento para la evaluación de los estudiantes.

Lo que pretendemos en este capítulo es referir aquellos estudios previos que, independientemente de que no hayan sido el origen de nuestra investigación, nos han servido como marcos de referencia imprescindibles para tomar decisiones acerca de, por ejemplo, qué versión del modelo de van Hiele o de la Taxonomía SOLO vamos a considerar, qué metodología de investigación vamos a seguir con los Mapas Conceptuales, etc. Sólo haremos referencia a la bibliografía que tiene que ver con ellos, sin desarrollar resultados ni metodologías de investigación, pues esto se hará al describir los marcos teóricos en los capítulos correspondientes.

II. 2 Estudios previos sobre el Modelo de van Hiele

El modelo de van Hiele aparece a mediados de los años 50 como resultado de sendas tesis doctorales de los esposos Pierre M. y Dina van Hiele-Geldof (van Hiele, 1957; van Hiele-Geldof, 1957), bajo la dirección de Hans Freudenthal.

Si bien, inicialmente, el modelo pasa desapercibido para la comunidad internacional, a pesar de haber sido referido en la literatura en alguna ocasión (van Hiele, 1959; Freudenthal, 1973), mientras que no se introduce en el mundo de los didactas anglosajones, fundamentalmente en USA

(Wirszup, 1976), no es objeto de investigación. Pronto surgen proyectos de investigación (Usiskin, 1982; Burger y Shaughnessy, 1986; Fuys, Geddes y Tischler, 1988) que tratan de validar las propuestas del modelo, incluyendo los métodos e instrumentos para medir y describir los distintos niveles de razonamiento demostrados o asignados a los estudiantes, y tesis doctorales (citemos, como más relevantes, p. ej. Senk, 1983; Mayberry, 1983) con miras más concretas, tanto en los objetivos como en las muestras de estudiantes analizados.

De esta manera, la validación, en algunos casos, la modificación en otros, y una mejor interpretación de las propuestas iniciales del Modelo de van Hiele, van haciendo que éste sea considerado como marco teórico útil tanto para la interpretación del aprendizaje en términos macroscópicos, como en Treffers[5] (1987), como para otros trabajos e investigaciones de las que hacer referencia aquí sería poco práctico por su extensión.

No podemos dejar de mencionar el interés que, para algunos investigadores de este país, ha tenido el modelo de van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1987; Jaime y Gutiérrez, 1990; Corberán, Huerta y otros, 1989, 1994; Jaime, 1993) algunos de cuyos resultados y propuestas (Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991; Jaime, 1993; Jaime y Gutiérrez, 1994) han sido importantes y de los que nos hemos servido, de algún modo, en nuestra investigación.

II. 3 Estudios que tienen que ver con la Taxonomía SOLO

Originalmente, la Taxonomía SOLO (Biggs y Collis, 1982) se da a conocer a principios de la década de los años 80, tal vez como alternativa a la Taxonomía de Bloom (Bloom, 1979)[6], al uso durante largo tiempo, como taxonomía para evaluar el aprendizaje de los estudiantes. Basada en principios neopiagetianos, por tanto con una visión constructivista del

[5] En Treffers (1987) se tiene en cuenta una visión del Modelo de van Hiele que algunos llaman heterodoxa, pues tiene en cuenta solamente tres niveles de los cuatro o cinco que se consideran habitualmente.

[6] Con un claro origen en la evaluación por objetivos de enseñanza y en los principios de la psicología educativa de la época, Benjamin Bloom organiza los objetivos en una taxonomía que intentaba contentar a todos: a los maestros, a la organización escolar, a la psicología educativa en boga e incluso a sí misma (lógica y consistente, neutral y comprensiva). Los objetivos se organizaron por "dominios": cognitivos, afectivos y psicomotores, con mayor atención para el primero, y relacionados con los "comportamientos educativos" y dispuestos en orden creciente desde el más simple al más complejo: (a) Conocimiento, (b) Comprensión, (c) Aplicación, (d) Análisis, (e) Síntesis, y (f) Evaluación (Kilpatrick, 1993).

aprendizaje, frente a la visión conductista de la Taxonomía de Bloom, la propuesta de Biggs y Collis (1982) tiene como intención proporcionar una herramienta para la evaluación de los estudiantes que pueda ser útil tanto a los profesores como a los investigadores.

Aunque la Taxonomía SOLO no está pensada de manera exclusiva para la evaluación de los estudiantes de matemáticas, hay algunos ejemplos que nos muestran su aplicabilidad en este campo, desarrollando instrumentos para medir los niveles de respuesta SOLO y la validez de los mismos en relación con las propuestas teóricas de la Taxonomía (Romberg, Collis y otros, 1982; Collis y Romberg, 1989) o tratando de interpretar el aprendizaje de los estudiantes en algunos temas de matemáticas (p. ej. Davey y Pegg, 1990; Campbell, Watson y Collis, 1992; Watson y Collis, 1994; Watson, Collis y Campbell, 1995)

Algunas investigaciones tratan de comparar los niveles de van Hiele con los niveles de respuesta SOLO (Jurdak, 1989; Pegg y Davey, 1989; Olive, 1983 y 1991), desde diferentes puntos de vista (teóricos, como Jurdak, 1989; con instrumentos de medida, Pegg y Davey, 1989) y entornos (en un entorno Logo, Olive, 1983 y 1991).

La década de los 90 ha significado un cambio en la formulación inicial (Biggs y Collis, 1982) de la Taxonomía SOLO. Este cambio en la visión de la Taxonomía no afecta a los niveles en sí, sino a la interpretación de los mismos (Biggs y Collis, 1991; Collis y Biggs, 1991) en relación con la actuación de los estudiantes en sus razonamientos multimodales y en relación con los ciclos de aprendizaje intramodales (Campbell, Watson y Collis, 1992; Watson, Campbell y Collis, 1993; Watson, Collis y Campbell, 1995).

II. 4 Estudios que tienen que ver con los Mapas Conceptuales

La técnica conocida como Mapa Conceptual (Novak y Gowin, 1988) se introduce en el ambiente de la comunidad de didactas de las ciencias experimentales con el objeto de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de dichas ciencias (Novak, Gowin y Johansen, 1983, por ejemplo). Con bases claramente ausubelianas (Ausubel, 1976), los mapas conceptuales fueron utilizados ampliamente en investigaciones que desarrollaban programas de enseñanza basados en o usando los mapas conceptuales. La cantidad de referencias que se disponen de estos estudios (Al-Kunifed y Wandersee, 1990), por otra parte alejados de nuestras intenciones, hace que no sea ni útil ni viable mencionarlos.

Pocos estudios tienen que ver con el uso de los Mapas Conceptuales como instrumento de evaluación, ya sea en el campo de las ciencias experimentales como en el campo de las matemáticas (Mansfield y Happs, 1989; Hasemann, 1989; Huerta, 1995b). Tal vez, por las dificultades inherentes a la metodología que haga uso de ellos: La construcción de mapas conceptuales de los estudiantes, y a los métodos de análisis (Hasemann y Mansfield, 1995).

Es pues este un campo novedoso en la investigación en didáctica de las matemáticas, del que se cuenta con muy pocas referencias y en el que está todo o casi todo por hacer, por lo que la investigación que se va a describir en páginas siguientes tiene como pretensión añadida aportar un grano de arena en el mundo de la investigación en Educación Matemática.

2ª PARTE

DE LAS RELACIONES ENTRE LOS NIVELES DE van HIELE Y LA TAXONOMÍA SOLO

CAPÍTULO III

El modelo de van Hiele y la investigación en geometría

III. 1 Introducción

Durante los años 60 y 70 el foco de atención principal, para muchas de las investigaciones sobre la comprensión espacial y los conceptos geométricos de los estudiantes, fue el trabajo de J. Piaget. Pero, a finales de los años 70 y principios de los 80, otra forma de caracterizar el desarrollo del razonamiento geométrico llegó a conocimiento de algunos investigadores, fundamentalmente en los Estados Unidos, y luego se extendió a lo largo de toda la comunidad de investigadores convirtiéndose, en esa década, en objeto de numerosas investigaciones.

En este capítulo mostraremos, de un modo resumido, aquellos aspectos de la investigación basada en el modelo de van Hiele llevada a cabo hasta la fecha que han sido relevantes para la investigación que aquí se presenta. Concretamente sobre la validez del modelo, sus propiedades y sobre los instrumentos usados, en las diferentes investigaciones, para asignar niveles de razonamiento a los estudiantes.

III. 2 Investigaciones relativas a la validez del modelo.

El modelo de razonamiento de van Hiele data, en su formulación inicial, del año 1957. Surgido de sendas tesis doctorales de los esposos Pierre y Dina van Hiele, no es lo suficientemente conocido hasta que no se presentó a la comunidad de didactas anglosajones en el año 1976 por Izaak Wirsup (1976). Éste lo pone en conocimiento de los investigadores de su país, Estados Unidos, a través de un trabajo en el que mostraba cómo los investigadores de la antigua Unión Soviética habían modificado su currículo de geometría como consecuencia del estudio y validación de una teoría sobre el desarrollo del razonamiento geométrico que aquéllos habían obtenido de un artículo, del propio Pierre van Hiele, escrito en francés en el año 1959. No obstante, a principios de los años 70, ya se tenía una primera referencia del modelo en la obra de Freudenthal (1973), en la que se describe el método de enseñanza que siguió Dina van Hiele como alternativa al método deductivo al uso en la enseñanza de la geometría.

Pronto aparecieron citas y referencias sobre la necesidad de estudiar el modelo recién descubierto, pero las investigaciones cuya intención era validar la propuesta hecha por los van Hiele de la existencia de los diferentes niveles de razonamiento, se llevaron a cabo en plena década de a cabo en plena década de los 80. Estas investigaciones, en forma de tres grandes proyectos, fueron: El proyecto de la Universidad de Chicago, el proyecto de la Universidad de Oregón y el proyecto de la Universidad de Brooklyn. Cada uno de ellos, utilizó diferentes metodologías de investigación y les condujo a distintos resultados que describiremos brevemente a continuación.

El proyecto de la Universidad de Chicago.

Bajo la dirección de Zalman Usiskin (1982), la Universidad de Chicago emprendió una investigación a gran escala (una muestra de 2699 estudiantes de muy distintos rangos socioeconómicos) para tratar de validar "la capacidad de la teoría de los niveles de van Hiele para predecir la actuación de los estudiantes en la geometría de la enseñanza secundaria" (Usiskin, 1982, p. 8). Usando baterías de tests de elección múltiple, midieron el nivel de van Hiele de los estudiantes y su comprensión de los conceptos geométricos, al principio y al final de un curso tradicional de geometría en la enseñanza secundaria de los Estados Unidos.

El proyecto del Brooklyn College.

Tres investigadores del Brooklyn College, D. Fuys, D. Geddes y R. Tischler, abordaron el proyecto seguramente más ambicioso en relación con la validación y uso de las propuestas del modelo van Hiele (Fuys, Geddes y Tischler, 1988).

De una parte, usaron como metodología de investigación las entrevistas clínicas en su variante instructiva. El entrevistador enseña conceptos, procedimientos y habilidades de razonamiento, negociando con el entrevistado los objetos de enseñanza. Trataron de identificar el comportamiento de los estudiantes, en distintas tareas de geometría y para cada uno de los tres primeros niveles de van Hiele; dando lugar a un conjunto de descriptores de nivel que por primera vez podía ser de utilidad para otros investigadores a la hora de determinar el razonamiento de los estudiantes o a la hora de diseñar tareas relacionadas con la instrucción en geometría. Introducen por primera vez la idea o concepto de "nivel potencial" de razonamiento, para distinguirlo del nivel de razonamiento actual que puede demostrar un estudiante en un momento y en un contexto determinado.

De otra parte, diseñaron, implementaron y evaluaron materiales de enseñanza, basados en las recomendaciones del propio modelo, para cada uno de los niveles de razonamiento que, como ya hemos dicho, usaron en su proyecto de investigación.

Con el modelo como marco teórico de referencia, el proyecto de Brooklyn abordó también el análisis de tres colecciones de libros de texto, comunes en la enseñanza de la geometría en los Estados Unidos y que abarcaban todos los niveles de enseñanza.

Finalmente, tradujeron al inglés parte de los trabajos de los esposos van Hiele (Fuys, Geddes y Tischler, 1984) lo que facilitó la disponibilidad de las fuentes primarias del modelo.

El proyecto de la Universidad de Oregón.

Los investigadores W. Burger, M. Shaughnessy y A. Hoffer[1], dirigieron una investigación en las que se incluían como cuestiones a investigar, las siguientes (Burger y Shaughnessy, 1987, p. 32):

1.- ¿Son útiles los niveles de van Hiele para describir los procesos de razonamiento de un estudiante en tareas de geometría?
2.- ¿Pueden caracterizarse los niveles de manera operativa en términos de comportamientos de los estudiantes?
3.- ¿Puede desarrollarse una metodología por entrevistas clínicas de tal modo que haga aflorar los niveles de razonamiento predominantes en tareas específicas? .

Burger y Shaughnessy usaron un muestra reducida de estudiantes, 45, que resolvieron diferentes tareas sobre triángulos y cuadriláteros, 14 de los cuáles fueron investigados con mayor profundidad.

Estos tres proyectos, dieron lugar a otros trabajos de investigación que completaron o verificaron los resultados obtenidos (Ver figura III. 1). Algunos de estos resultados, de un modo resumido, así como las referencias en las que pueden ser localizados, se presentan a continuación.

[1] El proyecto final fue elaborado por los profesores W. Burger y M. Shaughnessy.

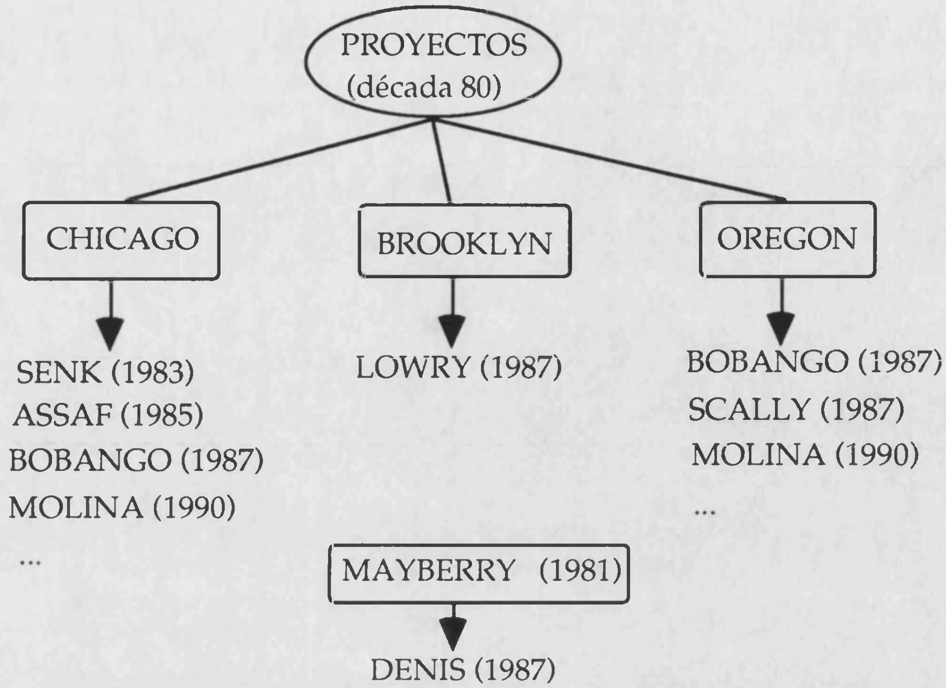


Figura III. 1 Proyectos de investigación y algunas investigaciones sobre el modelo van Hiele derivadas de ellos, en la década de los 80

III. 3 Validación del modelo

En líneas generales, las investigaciones que trataron la validez de los planteamientos iniciales del modelo se centraron en determinar si los niveles de razonamiento existían realmente, en tratar de describirlos en términos reales de comportamiento de los estudiantes y en valorar si eran útiles para predecir un éxito futuro en el aprendizaje de la geometría deductiva (Burger y Shaughnessy, 1986; Fuys et al., 1988; Maybarry, 1981; Usiskin, 1982, entre otras). Estas investigaciones confirmaron la existencia de los niveles y su jerarquía, y que además era posible caracterizarlos en términos de descriptores de comportamiento.

Una análisis rápido de estos resultados nos conduce a observar cómo la validez del modelo, en su formulación inicial, era constatable ya que "el comportamiento (de los estudiantes) sobre esas tareas (triángulos y cuadriláteros) era consistente con la formulación y descripción general inicial de los niveles de van Hiele" (Burger y Shaughnessy, 1986). Además de constatar la existencia de los niveles, era posible dar una serie de descriptores de comportamiento en al menos los cuatro primeros niveles, ya que el quinto "en la forma dada por los van Hiele, o bien no existe o bien no es determinable" (Usiskin, 1982). Esta incertidumbre sobre el nivel 5, se arrastra desde entonces en todas las investigaciones de tal manera que, la mayoría de las que se dirigieron con posterioridad, contemplaron sólo los niveles del 1 al 4. Otras investigaciones cuestionaron de manera puntual algunas de las propiedades de los niveles 3 y 4, como las demostraciones de un sólo paso o la clasificación inclusiva (De Villiers, 1987) que puede darse independiente del razonamiento deductivo y por tanto no necesariamente una ha de ser requisito para la otras, como sugerían los van Hiele (Bobango, 1987, p. 48-49).

Digamos pues que, en términos generales, la investigación al respecto ha confirmado la existencia de los niveles de razonamiento (si exceptuamos el nivel 5) y que éstos esencialmente describen las distintas habilidades de razonamiento de los estudiantes que son características en cada uno de ellos.

III. 4 Las propiedades del modelo

Las investigaciones llevadas a cabo sobre el modelo de van Hiele, también trataron las propiedades asociadas a él. Citaremos algunas de ellas, las que hemos tenido en cuenta en esta investigación.

a) Los niveles son jerárquicos, conclusión a la que llegó Mayberry, (1981), sin considerar el quinto nivel de razonamiento, apoyada por otras (Burger y Shaughnessy, 1986; Fuys et al., 1988; Denis, 1987).

b) El progreso entre niveles es secuencial. Estudiado por el grupo de Brooklyn (Fuys et al., 1988), como consecuencia de su metodología de investigación, dio lugar a resultados contradictorios. Mientras este grupo encontró evidencias de que estudiantes que trabajaban con éxito en un nivel n, también tenían éxito en su trabajo en niveles inferiores, y que "el nivel de razonamiento más alto que un estudiante alcanzaba para un determinado concepto, también lo alcanzaba para otro concepto" (Fuys et al. 1988), otras investigaciones obtuvieron evidencias de que había estudiantes que razonaban en niveles diferentes en función de los temas o conceptos de que se trataban (Mayberry 1981; Burger y Shaughnessy, 1986). Estos resultados contradecían la afirmación de los van Hiele quienes suponían que si un estudiante alcanzaba un nivel de razonamiento n en una unidad de enseñanza cualquiera, podría comenzarse la instrucción de otra unidad nueva en el nivel n. Mayberry (1981) concluyó que esto no era así, que un estudiante podría razonar en diferentes niveles, dependiendo del concepto/s de que se tratase.

c) La polémica entre la continuidad - discontinuidad de los niveles de razonamiento. En sus planteamientos iniciales, los van Hiele enunciaron que los niveles eran discretos y que el aprendizaje se llevaba a cabo a modo de saltos de un nivel a otro. Burger y Shaughnessy (1986) encuentran que los niveles "son más bien dinámicos que estáticos y de una naturaleza más continua que sus descripciones discretas podría hacerle a uno pensar" (p. 45), apoyados en la observación de algunos estudiantes en tránsito entre dos niveles de razonamiento consecutivos, que actuaban en una especie de sube y baja entre niveles, dependiendo de la tarea que habían de resolver.

III. 5 Los instrumentos para la evaluación de los niveles de razonamiento

En orden cronológico, el grupo dirigido por Usiskin usó un test de elección múltiple para determinar el nivel de razonamiento de los estudiantes (Usiskin, 1982). Basándose en las notas que el equipo de Usiskin disponía sobre los descriptores de la tesis de Dina van Hiele, construyeron un test de elección múltiple, constituido por 25 ítems, dividido en cinco secciones de cinco ítems cada uno, que pretendía evaluar los cinco niveles de razonamiento. Con los criterios que se establecieron para la evaluación (60% ó 80% de aciertos), a un estudiante se le asignaba un nivel n si demostraba dominio en los niveles 1, 2,..., n.

A pesar de que el test de Usiskin ha sido ampliamente usado en otras investigaciones (ver figura III. 2), la determinación de niveles de razonamiento mediante tests de elección múltiple ha sido ampliamente criticado por algunos investigadores (ver p.ej. Crowley, 1990; Wilson, 1990). En efecto, se puede argumentar, desde un punto de vista metodológico, que un test de elección múltiple usado para evaluar niveles de razonamiento no es apropiado porque los niveles de razonamiento supuestamente estarían en los ítems que formasen parte del test y no en la respuesta que diese el estudiante. Además, la elección de una respuesta no garantizaría un razonamiento y, si lo hubiese, éste no estaría presente en la respuesta.

Este inconveniente lo trató de minimizar Mayberry (1981), combinando el test de elección múltiple con la entrevista clínica, en la que cada estudiante (en este caso estudiantes para maestro) debía dar una explicación de la elección de una respuesta. Ya apuntó entonces Mayberry que únicamente el test de elección múltiple sería un instrumento de difícil uso y de difícil análisis en la asignación de niveles de razonamiento.

El grupo de Brooklyn trató de simular un ambiente de enseñanza, mediante entrevistas clínicas, de tres módulos diferentes de enseñanza con diferentes temas de geometría. La asignación de los niveles de razonamiento a los estudiantes se hacia antes de comenzar con la instrucción y después de ésta.

El grupo de Brooklyn usó quizás la manera de determinar niveles de razonamiento más adecuada. Pero, desde el punto de vista de la investigación, irrepetible por los recursos necesarios.

Burger y Shaughnessy (1986) usaron la entrevista clínica como medio para evaluar niveles de razonamiento. La asignación de niveles se hacía en función de la tarea y de la respuesta. Contemplaba capacidades de razonamiento sobre identificación y clasificación de formas geométricas (niveles 1 al 3, en función de las respuestas) y tareas de equivalencia de propiedades con el fin de obtener información sobre los niveles 3 y 4. El análisis de protocolos sobre las actividades desarrolladas, daba lugar a un perfil del estudiante, en forma de vector, del nivel de razonamiento predominante para esas actividades.

El siguiente esquema da cuenta de algunas de las investigaciones que usaron alguno de los métodos de evaluación derivados de los tres proyectos descritos.

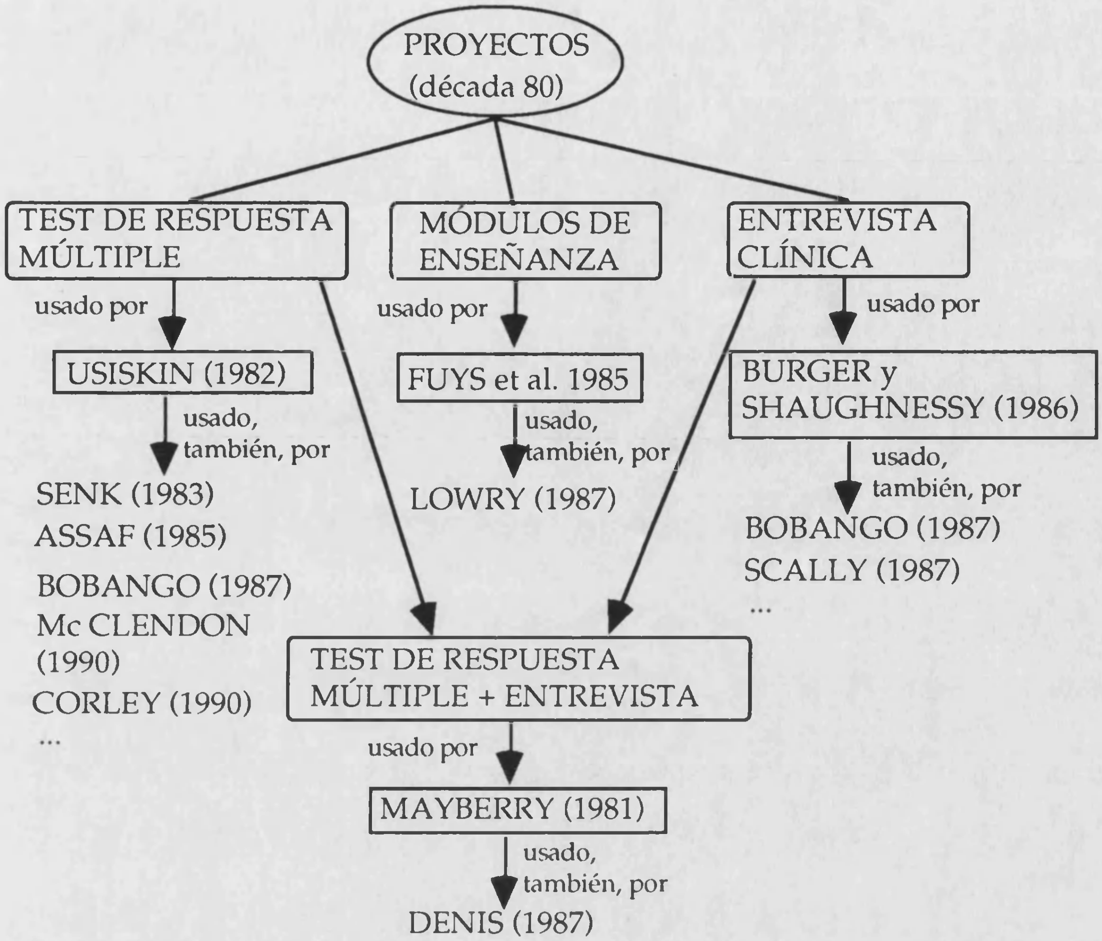


Figura III. 2 Metodologías de evaluación de niveles de razonamiento en los principales proyectos de investigación y en trabajos derivados

El modelo del razonamiento geométrico de van Hiele también ha sido investigado en España. El énfasis de las investigaciones llevadas a cabo se centró, de una parte, en ofrecer una forma de asignación de niveles de razonamiento a los estudiantes alternativa a las conocidas hasta este momento, (Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991) y, de otra, en la enseñanza de la geometría basada en el modelo (Corberán, Huerta y otros, 1989 y 1994).

Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991) pensaron que si los niveles de razonamiento son de carácter continuo y no discreto, no parece razonable la asignación de un número para expresar que un estudiante está razonando en un nivel determinado, ya que podríamos encontrarnos estudiantes que razonando en un nivel n dado, demuestren diferentes "grados" de razonamiento. Esto les condujo a definir el concepto de *grado de adquisición de un nivel de razonamiento*, con el objetivo de determinar, de alguna manera, el tránsito entre dos niveles de razonamiento consecutivos, situación en la que posiblemente se encuentren la mayoría de los estudiantes. Por otra parte: 1) Admitiendo que a partir de la respuesta que un estudiante dé a un ítem, formado por un conjunto de cuestiones, es posible determinar el nivel de razonamiento empleado, y 2) que la calidad matemática de las respuestas es un indicador de la seguridad con la que un estudiante ha contestado a ese ítem y, en consecuencia, un indicador de la seguridad con que ha utilizado las destrezas de razonamiento, estos investigadores introducen la noción de tipo de respuesta como indicador de la calidad matemática de la misma.

Así pues, la idea que proponen los autores es que la asignación de niveles de razonamiento a los estudiantes debe tener presente la continuidad de los mismos, demostrada en anteriores investigaciones, así como la posibilidad de transición entre niveles consecutivos. Para ello han de tenerse en cuenta dos aspectos a la hora de asignar el nivel de razonamiento a un estudiante:

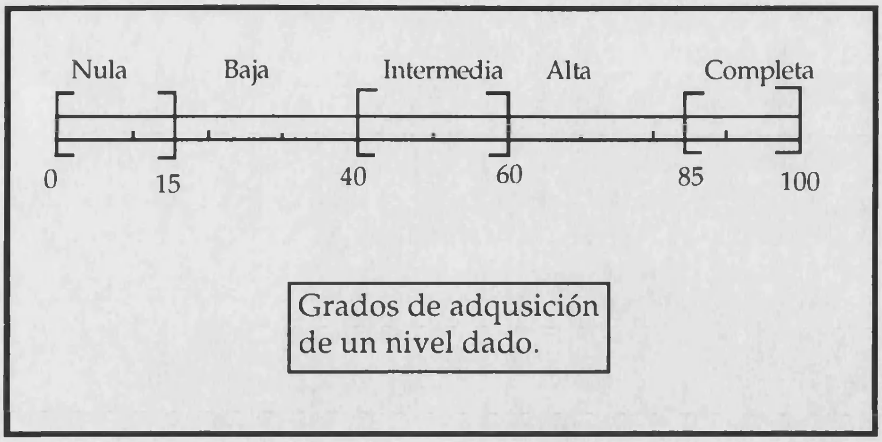
a) La capacidad de usar el nivel de razonamiento en lugar de asignar un nivel, y

b) el grado de adquisición de un nivel de razonamiento, en relación con la continuidad del mismo.

Por esta razón, introducen como ya hemos dicho, dos nociones:

a) *Grado de adquisición* de un nivel dado: Cada uno de los periodos en que uno puede medir el tránsito continuo desde que comienza a razonar en un nivel dado (adquisición nula o baja), hasta que adquiere las estrategias propias del razonamiento de ese nivel (adquisición alta o completa).

Si el segmento continuo se divide en 5 intervalos que representen distintos grados de adquisición, podríamos obtener una escala como esta:



en la que el segmento representa la adquisición completa de un nivel dado y cada intervalo, el grado de adquisición de dicho nivel.

b) *El Tipo de respuesta.*

¿Cómo evaluar el grado de adquisición de un nivel?

El razonamiento que emplea un estudiante está, obviamente, relacionado con la seguridad que puede mostrar al utilizar los conocimientos matemáticos que posee. En este sentido, pueden distinguirse diferentes tipos de respuesta a ítems de geometría en relación con la calidad y claridad matemática con la que aparece reflejado el razonamiento matemático que usa el estudiante. Estos tipos de respuesta son (tomados de Corberán, Huerta y otros, 1994):

Tipo 0: Sin respuesta a un ítem o respuesta no codificable.

Tipo 1: Respuestas que indican que el estudiante no está en un determinado nivel de razonamiento pero que no proporcionan ninguna información sobre los niveles inferiores.

Tipo 2: Respuestas incorrectas e incompletas en las que se pueden reconocer indicios de un cierto nivel de razonamiento. Se trata, por lo general, de respuestas muy breves y pobres que, además, contienen errores matemáticos o que no contestan directamente a la pregunta planteada.

Tipo 3: Respuestas correctas pero incompletas en las que se pueden reconocer indicios de un cierto nivel de razonamiento. Se trata, por lo general, de respuestas muy breves y pobres, aunque no contienen errores matemáticos.

Tipo 4: Respuestas que reflejan claramente características de dos niveles de razonamiento diferentes. Esta es la situación más típica de los alumnos en transición entre niveles, pues entremezclan dos niveles de razonamiento consecutivos en sus respuestas a un ítem (generalmente en función de la dificultad de las preguntas). Las respuestas pueden ser correctas o incorrectas, pero deben ser bastantes completas.

Tipo 5: Respuestas bastantes completas pero incorrectas que reflejan claramente un nivel de razonamiento determinado. La incorrección de las respuestas puede deberse a errores matemáticos o a que siguen líneas que no llevan a la solución del problema planteado.

Tipo 6: Respuestas bastante completas y correctas que reflejan claramente un nivel de razonamiento determinado. Se trata de respuestas claras y correctas pero que no están completas porque no llegan a resolver el problema por completo, porque hay "saltos" en el razonamiento deductivo seguido, porque tienen pequeños errores, etc.

Tipo 7: Respuestas matemáticamente correctas y completas que reflejan un nivel de razonamiento.

Una vez se asignan a un estudiante un nivel y tipo de respuesta, esta asignación se puede cuantificar mediante una ponderación de la escala que determinan. La tabla siguiente muestra un ejemplo de ponderación de los tipos de respuesta. Otras podrían considerarse.

Tipo	0	1	2	3	4	5	6	7
Ponderación (%)	0	0	20	25	50	75	80	100

La media aritmética de las ponderaciones de todas las respuestas de un estudiante que corresponden a ítems de un nivel dado nos dará el grado de adquisición de ese nivel por parte del estudiante.

Una discusión más detallada sobre la definición de los grados de adquisición de un nivel de razonamiento y el método de asignación, puede verse en Jaime (1993), de la que entresacamos las siguientes características de los grados de adquisición:

Adquisición Nula: No se emplean las características de este nivel de razonamiento.
Adquisición Baja: Empieza la consciencia de las características, métodos y exigencias propios del nivel, pero es muy pobre la utilización que se hace de ellos. Es frecuente el abandono del trabajo en este nivel para recurrir al razonamiento de nivel inferior.
Adquisición Intermedia: El empleo de los métodos de este nivel es más frecuente y preciso. No obstante, todavía no se domina, por lo que, ante situaciones que resultan complicadas, se produce un retroceso de nivel, con un intento de retorno al nivel superior. Hay, por tanto, saltos frecuentes entre dos niveles consecutivos de razonamiento.
Adquisición Alta: El nivel habitual de trabajo es éste y se produce con muy poca frecuencia el retroceso de nivel, aunque sucede alguna vez. Asimismo, en ocasiones, se hace uso inadecuado de las herramientas propias de este nivel de razonamiento.
Adquisición completa: Hay un dominio total de las herramientas y métodos de trabajo propios de este nivel de razonamiento, (Jaime, 1993).

III. 6 El modelo de van Hiele: El marco de referencia

Después de lo dicho y para centrar el marco de referencia de nuestra investigación, es conveniente formular el modelo de van Hiele que vamos a utilizar. La disyuntiva está en el número de niveles de razonamiento que vamos a utilizar, 4 ó 5, en los descriptores de razonamiento que caractericen dichos niveles y en las propiedades del modelo que vamos a tener en cuenta.

III. 6. 1 *Los niveles de razonamiento*

Después de más de una década de investigación sobre las características de los niveles de razonamiento de van Hiele y a partir de los escritos de Burger y Shaughnessy (1986); Crowley (1987); Fuys et al. (1988); Jaime y Gutiérrez (1990), van Hiele (1957, 1986); van Hiele Geldof (1957) y de Corberán, Huerta y otros (1994), de donde se extrae la presente formulación, consideraremos los siguientes niveles de razonamiento y sus descriptores:

Nivel 1 (Reconocimiento): El razonamiento geométrico de este nivel se caracteriza porque los estudiantes:

- Usan propiedades imprecisas de las figuras geométricas para compararlas, ordenarlas, describirlas o identificarlas.
- Hacen referencia a prototipos visuales para caracterizar figuras.
- Perciben las figuras geométricas en su totalidad, de manera global, como unidades. Los estudiantes se limitan a describir el aspecto físico de las figuras.
- Al identificar o describir figuras, incluyen atributos irrelevantes, normalmente de tipo físico o visual (por ej., la orientación en el papel o el tamaño).
- Perciben las figuras como objetos individuales, es decir que los estudiantes no son capaces de generalizar las características que reconocen en una figura a otras de su misma clase.
- Comparan y clasifican figuras geométricas basándose en su apariencia global. Por ejemplo, suelen utilizar expresiones como "*se parece a*", "*tiene la forma de*", "*es como*", etc.
- No reconocen explícitamente como tales las propiedades matemáticas de las figuras: Aunque los estudiantes de este nivel pueden reconocer algunas propiedades o elementos de una figura, ésta no juega un papel apreciable en el reconocimiento de dicha figura.
- Identifican partes de una figura, pero:
  a) No analizan una figura en términos de sus componentes.
  b) No piensan en las propiedades como características de una clase de figuras.
  c) No hacen generalizaciones sobre formas ni usan un lenguaje apropiado.

Nivel 2 (Análisis): El razonamiento geométrico de este nivel se caracteriza porque los estudiantes:

- Son conscientes de que las figuras geométricas están formadas por partes y de que están dotadas de propiedades matemáticas. Pueden describir sus partes y enunciar sus propiedades, siempre de manera informal, utilizando vocabulario apropiado para componentes y relaciones (por ejemplo, "lados opuestos", "los ángulos correspondientes son iguales", "las diagonales se cortan en el punto medio", etc.).

- Cuando se les pide que definan una figura, recitan una lista de propiedades necesarias para identificar la figura, en vez de determinar propiedades necesarias y suficientes. No comprenden la necesidad ni la misión de las definiciones matemáticas. Rechazan las definiciones dadas por el libro (o el profesor) en favor de las definiciones propias.
- Comparan figuras mediante el uso explícito de propiedades de sus componentes.
- Reconocen las propiedades matemáticas mediante la observación de las figuras y sus elementos. También pueden deducir propiedades generalizándolas a partir de la experimentación.
- Al comprobar la validez de una afirmación, tratan la Geometría como si fuera una ciencia experimental: Observan una variedad de ejemplos y sacan conclusiones generales sobre ellos.
- Después de utilizar varias veces un tipo de ejemplos con unas figuras, pueden hacer generalizaciones a la clase de figuras en cuestión.
- No son capaces de relacionar unas propiedades con otras, por lo que no pueden hacer clasificaciones lógicas de figuras basándose en sus elementos o propiedades.
- No son capaces de deducir unas propiedades de otras, porque perciben cada una de forma aislada y sin relación lógica con las demás.
- Muestran una ausencia explícita de comprensión de qué es una demostración matemática.

Nivel 3 (Clasificación): El razonamiento geométrico de este nivel se caracteriza porque los estudiantes:

- Comienzan a desarrollar su capacidad de razonamiento formal: Son capaces de reconocer que unas propiedades se deducen de otras y deducir esas implicaciones (de un solo paso). Sin embargo, no comprenden el significado de la deducción como un todo ni el papel de los axiomas, etc...
- Comprenden los sucesivos pasos individuales de un razonamiento lógico formal, pero no entienden la estructura de una demostración. Pueden entender una demostración explicada por el profesor o el libro de texto, pero no son capaces de construirla por sí mismos. Tampoco ven cómo construir una demostración a partir de premisas diferentes de las que han visto.

- Saben razonar de acuerdo con un sistema lógico deductivo, pero esto no es equivalente a razonar con la fuerza de la lógica formal. En particular, no distinguen con claridad una implicación (p —> q) de su recíproca (q —> p).
- Son capaces de realizar razonamiento deductivos informales, usando implícitamente reglas lógicas, por ej. la regla de la cadena (si p —> q y q —> r entonces p —> r).
- Pueden comprender demostraciones formales cuando se las explica el profesor o el libro de texto.
- Utilizan las representaciones físicas de las figuras más como una forma de verificar sus deducciones que como un medio para realizarlas.
- Pueden clasificar lógicamente diferentes familias de figuras a partir de propiedades suyas, ya conocidas, formuladas con precisión matemática. No obstante, sus razonamientos lógicos se siguen apoyando en la manipulación y sus demostraciones son de tipo informal.
- Comprenden el significado de "al menos un", "todo", etc.
- Comprenden el papel de las definiciones y pueden dar definiciones matemáticas correctas.
- Son capaces de :
  a) Identificar conjuntos diferentes de propiedades que caracterizan a una clase de figuras y comprobar su suficiencia.
  b) Identificar conjuntos mínimos de propiedades que pueden caracterizar a una figura.
  c) Formular y utilizar una definición para una clase de figuras.
- Pueden modificar definiciones y usar inmediatamente definiciones de conceptos nuevos.
- En sus demostraciones, hacen referencias explícitas a las definiciones.
- Son capaces de aceptar formas equivalentes de una definición.

Nivel 4 (Deducción formal): El razonamiento geométrico de este nivel se caracteriza porque los estudiantes:

- Pueden entender y realizar razonamientos lógicos formales. Las demostraciones (de varios pasos) ya tienen sentido para ellos y aceptan su necesidad como único medio para verificar la veracidad de una afirmación.
- Realizan con frecuencia conjeturas e intentos de verificar las conjeturas deductivamente.

- Pueden construir, no sólo memorizar, demostraciones y ven la posibilidad de desarrollar una demostración de distintas maneras. Pueden comparar y contrastar demostraciones diferentes de un mismo teorema.
- Comprenden las interacciones entre las condiciones necesarias y las suficientes y distinguen entre una implicación (p —> q) y su recíproca (q —> p).
- Aceptan la existencia de definiciones equivalentes del mismo concepto y son capaces de demostrar su equivalencia.
- Pueden comprender la estructura axiomática de las Matemáticas, es decir el sentido y la utilidad de términos no definidos, axiomas, teoremas.
- Pueden pensar en las mismas cuestiones que en el nivel anterior pero razonando o justificando las afirmaciones de manera rigurosa.
- Dan argumentos deductivos formales, pero no investigan los sistemas axiomáticos en sí mismos ni comparan sistemas axiomáticos diferentes.

III. 6. 2 *Principales características de los niveles de van Hiele.*

Descritos los niveles de razonamiento en términos de los comportamientos de los estudiantes cuando razonan sobre tareas de geometría, es necesario delimitar aquellas propiedades de los niveles que caracterizan el aprendizaje de la geometría y que han sido relevantes para la investigación que aquí se presenta.

1.- Asumimos que los 4 niveles tienen una organización <u>jerárquica</u>. Esto significa que un estudiante razona prioritariamente en un nivel n cuando muestra un grado de adquisición alto o completo de las habilidades de razonamiento de los niveles 1, 2... n.

2.- El aprendizaje de las habilidades de razonamiento, el paso de un nivel al siguiente, se produce de una forma <u>continua</u> y no cabe hablar de saltos entre niveles.

3.- La comunicación entre dos o más sistemas, profesor, materiales, textos o cuestiones, se produce si existe sintonía en el lenguaje usado, ya que cada nivel de razonamiento lleva asociados significados y métodos distintos a los términos habituales en las matemáticas. Algunos llaman a esta diferencia de significados en los términos, <u>lenguaje específico</u> de cada nivel. Así, en las descripciones generales de los niveles hecha en páginas anteriores puede verse cómo se entiende y, en consecuencia, se actúa frente a determinados términos propios de las matemáticas, y en particular de la geometría, como definición, clasificación o demostración, por ejemplo.

CAPÍTULO IV

La Taxonomía SOLO y la investigación en geometría

IV. 1 Introducción

El término taxonomía está definido en el diccionario de la Real Academia de la Lengua (1994) como "ciencia que trata de los principios, métodos y fines de la clasificación" y, por extensión, "clasificación". Por tanto, si se entiende por taxonomía esta última definición, cuando alguien está usando una taxonomía en relación con un proyecto de investigación, lo que está haciendo es una clasificación de los individuos tomados como muestra en la investigación.

En términos matemáticos, una taxonomía puede considerarse como una medida, esto es, una aplicación de un conjunto formado por los individuos de una muestra a un conjunto de valores, que puede ser numérico o no. Aplicación que se define a partir de ciertos descriptores obtenidos de las respuestas de los estudiantes a tareas de contenido diverso (particularmente en geometría) y que permiten la aplicación de los elementos del conjunto inicial (alumnos) en los elementos del conjunto final (cuyo rango de valores dependerá de la taxonomía considerada).

La Taxonomía SOLO fue diseñada en 1982 (Biggs y Collis, 1982) como consecuencia de ciertas críticas que habían surgido sobre la teoría de las etapas de Piaget. Fundamentalmente, los piagetianos de la época, consideraban que el desarrollo cognitivo evolucionaba a través de etapas discretas, cada una de ellas definida en términos de una estructura lógica propia que gobernaba todas las actuaciones de los individuos. Los ejemplos de actuaciones oscilantes entre diferentes etapas, referidas como *décalages*, se veían como aberrantes y raros (Biggs y Collis, 1991).

Los distintos posicionamientos ante el problema del décalage distinguió a los neopiagetianos entre sí, principalmente en cuanto a la frecuencia relativa con la que el décalage aparecía en los estudiantes. Para unos, las evidencias eran apreciables a lo largo de tareas diferentes. Para otros, las evidencias no lo eran tanto. Lo que sí resultó evidente, al menos para Biggs y Collis (1982), fue que, en el contexto escolar, la aparición del décalage era muy común: un estudiante podía ser "pre-formal" en matemáticas mientras que en historia podría ser "pre-concreto" o, incluso, "formal" en matemáticas un día y "concreto" el siguiente (Biggs y Collis, 1991). Estas observaciones, dicen, no pueden indicar cambios en el desarrollo cognitivo, sino más bien, cambios en constructos más próximos como el aprendizaje, la actuación o la motivación de los estudiantes.

IV. 2 Descripción de la Taxonomía SOLO

De esta manera, Biggs y Collis (1982) trataron el problema de proporcionar a los profesores un instrumento que les permitiera determinar el nivel de desarrollo cognitivo de sus estudiantes a partir de sus interacciones con los alumnos en las situaciones de clase. Pronto se dieron cuenta de que, al analizar las respuestas de los estudiantes, estaban tratando con dos fenómenos. El primero de ellos era lo que llamaron la *Estructura cognitiva hipotética* y el segundo, la *Estructura del resultado del aprendizaje observado (SOLO)*[1].

El primer fenómeno estaba relacionado con la noción existente de las etapas piagetianas del desarrollo cognitivo, en la que cada etapa tenía su propio modo idiosincrásico de funcionar y, allá donde el desarrollo intelectual estuviese implicado, aparecía su propio conjunto de tareas evolutivas. El segundo, por otro lado, tenía que ver con describir la estructura de cualquier respuesta como un fenómeno en sí mismo, esto es, sin que la respuesta representase necesariamente un etapa particular en el desarrollo intelectual.

IV. 2. 1 *Los modos de funcionar.*

Lo que Biggs y Collis llaman *modos de funcionar*, son "niveles de abstracción que van progresando desde las acciones concretas a los principios y conceptos abstractos, lo que forma la base de las etapas evolutivas" (Biggs y Collis 1991, p. 62). A partir de esto, Biggs y Collis toman en consideración las etapas piagetianas y las adaptan para sus propósitos, de tal modo que distinguen una quinto modo de funcionar adicional, el postformal, en la etapa adulta de los individuos (> 20 años ó >18 años, según versiones, por ej. Campbell, Watson y Collis, 1992, p.280). Además, y oponiéndose a Piaget, consideran que cuando una persona alcanza un modo de funcionar más elevado, el nuevo modo alcanzado no elimina al anterior, como sugería Piaget que consideraba las etapas evolutivas discretas, sino que coexiste con él.

[1] En el texto original, Biggs y Collis (1982), "Structure of the Observed Learning Outcome" cuyas iniciales dan lugar a las siglas SOLO.

Brevemente, estos modos de funcionar y las edades en las que normalmente emergen son[2]:

(i) Sensoriomotor (desde el nacimiento): El niño sólo puede interaccionar con el mundo en la manera más concreta: dando una respuesta motriz a un estímulo sensorial.
(ii) Icónico (desde los 18 meses): Si una acción se vuelve más abstracta debe ser representada de alguna forma. La forma más simple de interiorizar una acción es imaginarla, formando lo que Bruner llama imagen interna o "icono".
(iii) Simbólico concreto (desde los 6 años): Se inicia un cambio significativo de la abstracción desde la simbolización directa del mundo a través del lenguaje oral al escrito, sistemas de símbolos que se aplican al mundo de las experiencias.
(iv) Formal (desde los 16 años): El razonamiento formal se produce en un sistema abstracto supraordinado en el que pueden generarse formas alternativas de ordenar el mundo.
(v) Postformal (desde los 18 años): El pensamiento postformal supone el preguntarse por las fronteras convencionales de la teoría y de la práctica. Es ajeno a cualquier nivel educativo y puede aparecer en el campo de la investigación (adaptado de Biggs y Collis, 1991).

IV. 2. 2 *Ciclos del aprendizaje: La Taxonomía SOLO*

En la formulación inicial que conduce al establecimiento de los niveles de respuesta SOLO, Biggs y Collis observaron que "en la progresión desde la incompetencia hasta la maestría, los estudiantes muestran una secuencia consistente, o ciclo de aprendizaje, que es generalizable a una gran variedad de tareas y en particular a las tareas escolares" (Biggs y Collis, 1982). Esta secuencia, se refiere a un progreso jerárquico en la complejidad estructural de sus respuestas, cualquiera que sea el modo de funcionar en el que se exprese el aprendizaje. Esta jerarquía, dicen, puede darnos información de hasta dónde ha llegado el aprendizaje en relación con la maestría, con referencia a un modo particular de funcionar, y que además puede usarse para clasificar los resultados del aprendizaje dentro de un modo dado (Biggs y Collis, 1991).

Este sistema jerárquico es lo que constituye la Taxonomía SOLO y, según los autores, puede usarse tanto para evaluar la calidad del aprendizaje como para establecer los objetivos del currículo.

Se considera que estructuralmente las complejidades en cada modo de funcionar son las mismas, es decir, el ciclo de aprendizaje se repite en cada

[2] Puesto que no es particularmente relevante para nuestra investigación la consideración de estos modos de funcionar, no haremos una descripción detallada de ellos que, por otra parte, puede hallarse , p.ej., en Biggs y Collis 1991, págs. 63-64.

uno de ellos. Cada ciclo de aprendizaje está formado por cinco niveles básicos de respuesta que, en orden de complejidad creciente, son[3]:

a) Nivel *Preestructural*: Representa el uso, en la respuesta, de aspectos no relevantes del modo de funcionar; es decir, que aquellos elementos necesarios para poder identificar un modo de funcionar no son usados.

b) Nivel *Uniestructural*: Respuestas en las que se usa sólo un aspecto relevante del modo de funcionar.

c) Nivel *Multiestructural*: Respuestas en las que se procesan diferentes aspectos disjuntos del modo de funcionar, normalmente en una secuencia.

d) Nivel *Relacional*: Respuestas en las que se manifiesta una comprensión integrada de las relaciones entre los diferentes aspectos usados del modo de funcionar.

e) Nivel de *Abstracción Extendida*: Respuestas que hacen uso de principios, hechos, procesos, etc. más abstractos que aquellos que describen el modo de funcionar actual.

Interpretación del aprendizaje

En los párrafos anteriores, hemos anunciado reiteradamente una formulación inicial de la Taxonomía SOLO (Biggs y Collis, 1982) y una reformulación posterior (Biggs y Collis, 1991; Collis y Biggs, 1991). Esencialmente, las modificaciones se producen en la interpretación del aprendizaje a la luz de la Taxonomía y no en los modos y niveles en sí mismos.

La consideración de la actuación intramodal y multimodal de los estudiantes y la interpretación de los ciclos de aprendizaje, conducen a una determinada visión del aprendizaje. Actualmente, son de especial interés los tres niveles intermedios: uniestructural, multiestructural y relacional, dentro de un modo determinado de funcionar, mientras que los otros dos, preestructural y abstracción extendida, se refieren a respuestas que se salen

[3] En el texto original, los niveles de respuesta SOLO se denominan: pre-structural, unistructural, multistructural, relational y extended abstract (Biggs y Collis, 1982). Aquí usamos una traducción libre hecha por el autor de la presente memoria.

del modo en cuestión. Así, por ejemplo, la respuesta (si la hay) de nivel preestructural no consigue mostrar elementos de razonamiento del modo en cuestión, pudiéndose interpretar entonces como una respuesta perteneciente a un modo de funcionar anterior. En la respuesta de nivel de abstracción extendida pueden identificarse elementos de razonamiento de naturaleza más abstracta que las que indica el modo de funcionar en cuestión, interpretándose entonces como una respuesta de nivel uniestructural del modo de funcionar siguiente. La figura IV. 1 resume gráficamente la manera en la que se interpreta el aprendizaje. En ella, no se han incluido los niveles preestructural y abstracción extendida por no aumentar la complejidad del diagrama.

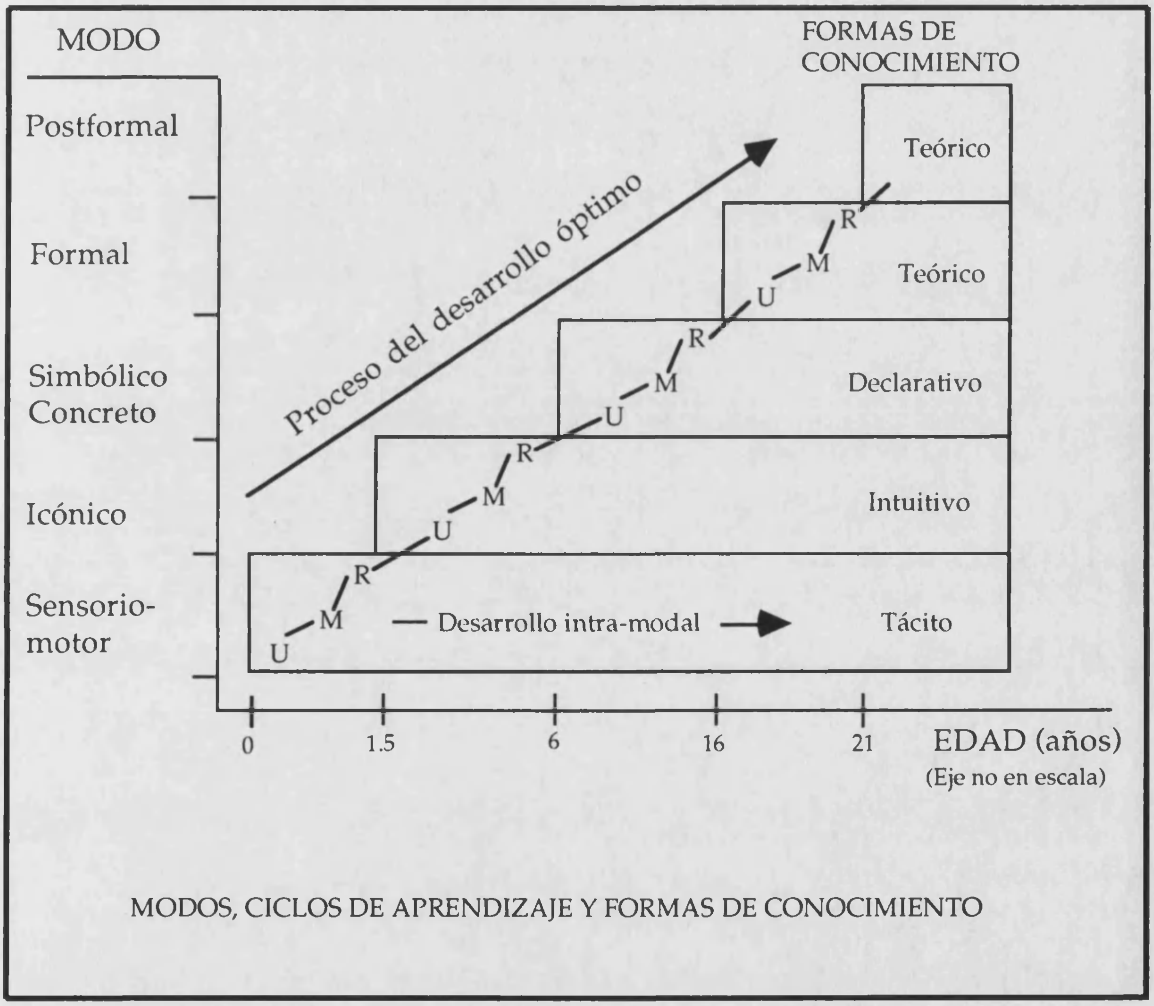


Figura IV. 1 Visión macroscópica del aprendizaje y de los ciclos de aprendizaje (Adaptado de Biggs y Collis, 1991).

Recientes investigaciones (p.ej., Campbell, Watson y Collis, 1992) han puesto de manifiesto que es posible identificar en los estudiantes más de un ciclo de aprendizaje (U-M-R) dentro de un determinado modo de funcionar. Concretamente, en la investigación que hemos referido (también en Watson, Collis y Campbell, 1995, aunque sobre un concepto diferente), partiendo de la hipótesis de que una visión macroscópica de los ciclos de aprendizaje es insuficiente para interpretar el aprendizaje de los estudiantes, analizaron un ciclo de aprendizaje completo, sobre el concepto de medida del volumen de prismas, a lo largo del modo simbólico concreto. Este estudio dio lugar a la identificación de dos ciclos de aprendizaje U-M-R, dentro de dicho modo de funcionar. Esto, teóricamente, supone que, dentro de un modo de funcionar dado, pueden existir más de un nivel SOLO uniestructural, multiestructural y relacional. De esta manera, a un ciclo de aprendizaje básico U_1 - M_1 - R_1 le puede seguir otro ciclo de aprendizaje U_2 - M_2 - R_2, siendo $R_1 = U_2$, y así sucesivamente (figura IV. 2). Estos autores sospechan que, "en función del tamaño del microscopio que se use para examinar una secuencia de aprendizaje, de los métodos específicos de investigación empleados y de la amplitud del estudio, se podrá determinar el número de ciclos de aprendizaje U-M-R hallados". Esto es, las secuencias evolutivas del desarrollo son básicamente jerárquicas y pueden ser analizadas o bien globalmente (visión macroscópica, como en un principio) o bien como una secuencia de habilidades más pequeñas (visión microscópica, como se tiende a analizar ahora). El diagrama siguiente pretende ser un modelo de desarrollo intramodal. Se describe en él cómo es posible identificar más de un ciclo de aprendizaje en un modo dado y las posibles conexiones de éstos con el modo previo y el modo siguiente.

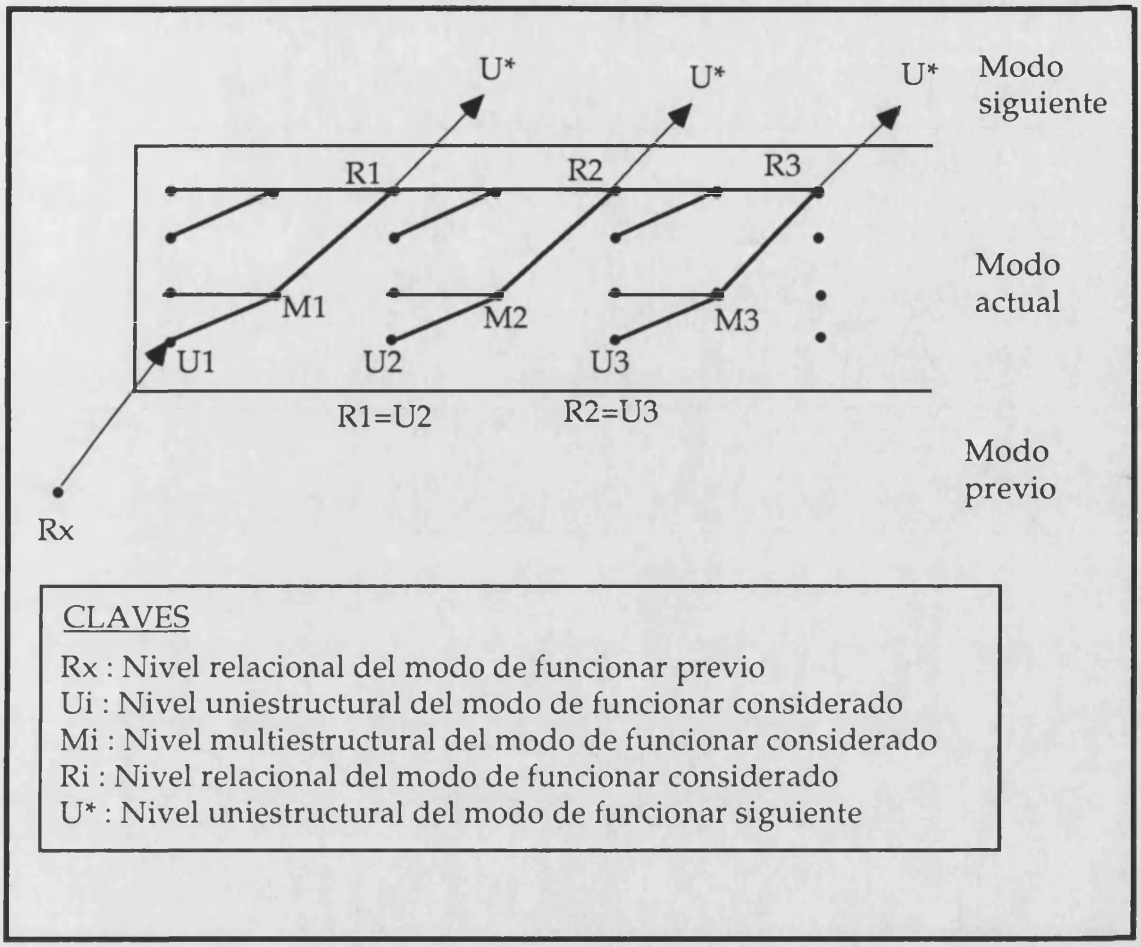


Figura IV. 2. Un modelo para el desarrollo intra-modal (Adaptado de Campbell, Watson y Collis, 1992). Visión microscópica del aprendizaje y de los ciclos del aprendizaje.

IV. 3 La Taxonomía SOLO y la investigación en geometría

La idea de usar juntos la Taxonomía SOLO y el modelo de van Hiele para interpretar el aprendizaje de la geometría es relativamente novedosa (Huerta, 1991) y cuenta con pocas referencias en la literatura especializada. No obstante, parece haber un interés creciente en considerar ambas teorías como puntos de referencia para la construcción de un nuevo marco que conduzca a una evaluación integrada en geometría (Pegg, Gutiérrez y Huerta, 1997, en prensa).

Los trabajos de investigación que conocemos, y que han usado la Taxonomía SOLO para la evaluación en geometría, los podemos agrupar en dos clases: 1) Aquéllos que han tenido en cuenta, además, el modelo de van Hiele y que han tratado principalmente de interpretar respuestas de los estudiantes a la luz de ambas teorías, con el objetivo de comparar qué teoría interpreta mejor las respuestas de los estudiantes, y 2) aquéllos que no han tenido en cuenta el modelo de van Hiele y que se centran en la Taxonomía SOLO como marco de referencia para interpretar el aprendizaje de la geometría.

Así, adelantándonos un poco a los acontecimientos, podemos mencionar ahora cómo algunas de las conclusiones a las que llegan los investigadores versan sobre si la Taxonomía SOLO identifica mejor cierto tipo de respuestas (las de carácter uniestructural, por ejemplo) que lo hace el modelo de van Hiele, o que un nivel SOLO puede ser dividido en más subniveles de los que inicialmente se formularon en la Taxonomía SOLO, o que cierto nivel de razonamiento de van Hiele es comparable con cierto nivel SOLO. Pero lo que no se considera, y por tanto falta, es una metodología de investigación que integre ambos marcos teórico para la evaluación de los estudiantes en aspectos relacionados con el aprendizaje de la geometría, lo que posiblemente pueda dar significado a preguntas como esta: ¿qué significado tiene decir que una respuesta de un estudiante sobre un contenido geométrico particular es característica, por ejemplo, del nivel relacional del modo concreto - simbólico, en relación con un nivel de van Hiele demostrado?

IV. 3. 1 *Asociaciones van Hiele vs SOLO*

Olive y Paalz (1987) investigaron la relación entre los dos modelos en un entorno de aprendizaje LOGO. Encontraron que "hay una probable conexión entre las fases del aprendizaje descritas por los van Hiele, en un periodo de aprendizaje (un nivel de razonamiento) dado, y los niveles de repuesta SOLO a actividades de aprendizaje desarrolladas por los estudiantes. La tabla siguiente recoge dicha conexión a la que se refieren Olive y Paalz (1987):

Fases en van Hiele	Taxonomía SOLO
INFORMACIóN Los estudiantes adquieren consciencia del contexto del campo de estudio.	*Respuesta PREESTRUCTURAL* que indica la necesidad de más INFORMACIóN.
ORIENTACIÓN DIRIGIDA Los estudiantes son guiados en contacto con los elementos de la red de relaciones que ha de formarse.	*Respuesta UNIESTRUCTURAL O MULTIESTRUCTURAL* que, eventualmente, conduce a un nivel *Relacional*.
EXPLICITACIÓN Se discuten las relaciones que han sido formadas.	Ayudará a los estudiantes a interrelacionar elementos de un problema y, de esta manera, responder en un nivel *Relacional* en la fase siguiente.
ORIENTACIÓN LIBRE Los estudiantes exploran la red de relaciones.	Puede ser engranado en un nivel *Uniestructural, Multiestructural* o en un nivel *Relacional*.
INTEGRACIÓN Los estudiantes reflexionan sobre sus acciones; construyen una visión global de todo lo que han aprendido. El progreso a un nivel superior es, ahora, posible.	Es necesario alcanzar una respuesta de *ABSTRACCIÓN EXTENDIDA*.

Tabla IV. 1 Asociación fases del aprendizaje niveles de respuesta SOLO (adaptado de Olive y Paalz, 1987)

De esta manera, dicen estos autores, "examinando las respuestas por medio de la Taxonomía SOLO puede ser posible prescribir actividades de aprendizaje apropiadas en las fases del aprendizaje de van Hiele que encajen con las necesidades de los estudiantes".

Algo tenemos que decir al respecto del trabajo de Olive y Paalz. La probable conexión, a la que se refieren estos autores, entre las fases del aprendizaje y los niveles de respuesta SOLO, no tienen demasiado sentido si lo que se está mirando es cómo aprenden los estudiantes. Formalmente, las dos componentes consideradas de ambas teorías no son comparables. Las fases del aprendizaje, descritas por el modelo de van Hiele, constituyen la componente instructiva del mismo y tienen por objeto facilitar el progreso de los estudiantes de un nivel de razonamiento al siguiente. Los niveles SOLO, por otra parte, tratan de medir el resultado de un aprendizaje. Por otra parte, lo que podríamos interpretar de esta asociación es que cuando un estudiante inicia el estudio de un tema en un nivel de razonamiento dado, sus respuestas a preguntas relativas a ese tema, analizadas desde la Taxonomía SOLO, serán preestructurales y a medida que el estudiante progrese en el dominio de las habilidades de razonamiento del nivel correspondiente, sus respuestas mejorarán también desde la perspectiva de la Taxonomía SOLO. Esto probablemente sea así, pero lo que no nos parece muy acertado es decir que tal fase de aprendizaje se puede asociar con tal nivel de respuesta SOLO.

Peeg y Davey (1989), por su parte, trataron de comparar ambas teorías, no ya desde un punto de vista teórico (como por ejemplo Jurdak, 1989), sino con alumnos reales cuyas respuestas, sobre formas planas conocidas, fueron analizadas a la luz de ellas. Para ello, consideraron la teoría de los niveles de van Hiele en su formulación clásica: cinco niveles de razonamiento, numerados del 1 al 5, introduciendo un nivel 0 adicional para recoger a aquellos estudiantes que fracasaban al identificar o reconocer una figura por su apariencia física (y, por tanto, no catalogables como de nivel 1).

Por otra parte, consideran que la Taxonomía SOLO describe comportamientos de los estudiantes cuando responden a ítems en diferentes áreas de la geometría. Identifican, por tanto, dos fenómenos cuando se analizan dichas respuestas:

a) El modo de actuar o de funcionar (una adaptación de los estadios piagetianos y que no difiere a los que aporta la Taxonomía):

Sensorimotor	(S.M.)	<2 años
Icónico	(I)	2<>6 años
Simbólico Concreto	(SC)	7<>15 años
Operaciones formales	F1	>16 años
Operaciones formales	F2	?

b) Y, asociado a cada modo, cuatro niveles de respuesta en función de la calidad de la misma, desde un punto de vista estructural, en los que pueden distinguirse distintos comportamientos[4]:

Uniestructural
Multiestructural
Relacional
Abstracción extendida

Así pues, se puede observar cómo, sino tener en cuenta el nivel S.M., una respuesta a cualquier ítem de geometría admitiría una categoría (modo + nivel) entre 16 posibles.

Los niveles se consideran cíclicos, es decir, un modo cualquiera se cierra con el nivel de abstracción extendida, el cual, a su vez, se convierte en el nivel uniestructural del modo inmediato siguiente.

Esta descripción de ambos modelos permite una comparación teórica inicial, que Pegg y Davey dividen en: a) una relación directa surgida de la descripción teórica de los niveles van Hiele y SOLO, y b) una relación indirecta que compara, hipotéticamente, ambas teorías. Así, encontramos en Pegg y Davey (1989) las siguientes asociaciones (Tablas IV. 2 y IV. 3):

4 Estos niveles, en términos de descriptores del comportamiento de los estudiantes, son:
Uniestructural: Ser capaz de generalizar en base a un único aspecto del modo. No sentir necesidad para la consistencia (coherencia). Concluir la respuesta demasiado rápido.
Multiestructural: Ser capaz de generalizar sólo en términos de unos pocos aspectos del modo, limitados e independientes. Pueden llegar a ser inconsistentes porque concluyen su respuesta demasiado pronto.
Relacional: Ser capaz de generalizar dentro de un contenido dado o experimentado, usando aspectos del modo relacionados. En un sistema dado, no hay incoherencias. Las incoherencias aparecen cuando una persona se sale del sistema.
Abstracción Extendida: Ser capaz de generalizar a situaciones no experimentadas. Las incoherencias están resueltas. No se siente la necesidad de dar por concluida una decisión (las conclusiones se mantienen abiertas o son cualificadas para poder permitir posibles alternativas lógicas.

Nivel de van Hiele	Nivel SOLO	Modo
0	Relacional	Icónico (I)
1	Uniestructural	Simbólico-concreto (SC)
2	Multiestructural	SC
3	Relacional	SC
4	Uniestructural	Operaciones formales (F1)
5	Multiestructural	F1

Tabla IV. 2. Relación directa entre los niveles de razonamiento de van Hiele y las categorías SOLO (nivel + modo) (adaptado de Pegg y Davey, 1989)

Por otra parte, la tabla siguiente proporciona una comparación hipotética entre los niveles de van Hiele y los niveles SOLO, proporcionando una relación indirecta.

Nivel de van Hiele	Nivel SOLO	Modo
0	< Relacional	Icónico (I)
1	Relacional	(I)
-	Uniestructural	SC
2	Multiestructural	SC
3	Relacional	SC
4	-	F1
5	-	F2

Tabla IV. 3. Relación indirecta entre los niveles de razonamiento de van Hiele y las categorías SOLO (nivel + modo) (adaptado de Pegg y Davey, 1989)

En su investigación, Pegg y Davey (1989) tratan pues de comprobar las relaciones establecidas entre ambas teorías, tanto en el modo directo como indirecto, centrándose en los niveles de razonamiento de van Hiele 2 o anteriores y en los modos de funcionar icónico y simbólico-concreto, en sus distintos niveles de respuesta asociados. Así, en primer lugar, aseguran que la 2ª tabla describe mejor las repuestas de los estudiantes a las cuestiones que se proponen, asociando (I, Relacional) con Nivel 1 de van Hiele; (SC, Uniestructural) con No hay nivel de van Hiele equivalente; (SC, Multiestructural) con Nivel 2 de van Hiele y (SC, Relacional) con el Nivel 3 de van Hiele. En este trabajo concluyen, además, que:

a) La Taxonomía SOLO identifica la concentración sobre "un aspecto" como uniestructural, mientras que la teoría de van Hiele no lo hace.

b) Identifican y describen tres subniveles dentro del nivel uniestructural (del modo SC): 1) comenzar a centrarse en una propiedad, 2) intentar (pero sin éxito) clarificar la propiedad y 3) ser capaz de clarificar la propiedad.

c) El nivel 1 de van Hiele es equivalente (en términos de descriptores, es decir los descriptores que sirven para asignar una respuesta al nivel 1 de van Hiele) al nivel relacional del modo icónico.

d) Encuentran estudiantes que manifestaban actuaciones con carácter multimodal, es decir, en dos modos de funcionar consecutivos.

Pegg (1992) hace una revisión de las investigaciones llevadas a cabo sobre la comprensión de la geometría por los estudiantes. En su artículo, Pegg describe cómo la Taxonomía SOLO ayuda a clarificar y extender las ideas que aporta la teoría de los niveles de van Hiele.

Según Pegg (1992), en la literatura hay reflejados tres intentos de considerar la Taxonomía SOLO y el modelo van Hiele a la vez. Olive (1983, 1991) elige integrar las dos teorías considerándolas en relación al modelo de comprensión matemática de Skemp, teniendo como objeto de estudio la geometría en un entorno LOGO y con estudiantes de 15 años.

Los otros dos estudios fueron de Jurdak (1989) y Pegg y Davey (1989). Pegg y Davey describieron un estudio en el que compararon las dos teorías, comparación que se centró en los niveles 1 a 3 de van Hiele. Sus hallazgos fueron distintos de los de Jurdak. Éste tomó una muestra de la investigación realizada por Burger y Shaughnessy (1986) que implicaba la identificación de cuadriláteros, de tal manera que las respuestas de los estudiantes, clasificadas en niveles de van Hiele, fueron revisadas desde la perspectiva de la Taxonomía SOLO. Su conclusión fue, para niveles de razonamiento de van Hiele inferiores al nivel 4, que podrían considerarse las asociaciones siguientes:

Nivel 1 de van Hiele, equivalente al nivel Uniestructural en SOLO;
Nivel 2 de van Hiele, equivalente al nivel Multiestructural en SOLO, y
Nivel 3 de van Hiele, equivalente al nivel Relacional en SOLO.

Jurdak únicamente consideró el modo simbólico-concreto y sus niveles de respuesta asociados para realizar tal comparación.

Por el contrario, Pegg y Davey enfocaron el problema de manera diferente. Testaron y entrevistaron a 270 estudiantes, aproximadamente, de 3º a 7º grado, en relación con su comprensión de 4 formas geométricas básicas planas.

A partir de las respuestas obtenidas, Pegg y Davey encontraron que hay un substancial diferencia entre ellas para considerarlas únicamente en el modo simbólico-concreto. Así, les pareció apropiado categorizar aquellas respuestas que utilizaban criterios visuales globales como que pertenecían al modo Icónico. De esta manera, aquellas respuestas que utilizaban una única propiedad para describir una forma geométrica, fueron consideras en el modo simbólico-concreto de nivel uniestructural. Si utilizaban más de una propiedad, entonces fueros calificadas como multiestructural en el modo simbólico-concreto.

Algunos de los resultados más relevantes obtenidos por estos investigadores fueron los siguientes:

1) Es valioso considerar las descripciones de los estudiantes más jóvenes sobre formas planas en el marco que ofrecen dos de los modos de funcionar de la Taxonomía SOLO: el modo icónico y el modo simbólico-concreto.

2) El nivel 1 de van Hiele puede ser asociado a diferentes niveles SOLO dentro del modo icónico, llegándose a poder clasificar las mejores respuestas, que se centraron con éxito en alguna forma global, como de nivel relacional.

3) No hay una equivalencia directa del nivel uniestructural (modo simbólico-concreto) de la Taxonomía SOLO en la teoría de van Hiele. Es posible sospechar, dicen, que van Hiele pudo haberlo considerado como perteneciente al nivel 2 de razonamiento.

4) Parecía que existía una equivalencia directa entre los niveles 2 y 3 de van Hiele y los niveles multiestructural y relacional en el modo simbólico-concreto de la Taxonomía SOLO.

En posteriores estudios, Davey y Pegg (1990) intentaron profundizar su estudio, asumiendo las asociaciones de trabajos anteriores y ampliando el campo de estudio hacia la comprensión de los estudiantes sobre líneas paralelas y ángulos. Sus hallazgos se encaminaron a una mejor interpretación de la Taxonomía SOLO.

IV. 3. 2 *Investigaciones que usaron la Taxonomía SOLO*

En un posterior trabajo, Davey y Pegg (1990) estudian los descriptores de comportamiento de los estudiante a preguntas relacionadas con el paralelismo. Así, catalogan las descripciones de los alumnos sobre líneas paralelas en 5 categorías:

Grupo A: Respuestas en las que el alumno es incapaz de verbalizar o dar una simple descripción refiriéndose a algún prototipo visual.
Grupo B: Respuestas referidas a líneas en una manera razonablemente general, sin ningún intento de clarificar sus respuestas excepto por una referencia a la orientación.
Grupo C: (A veces hay un solapamiento de las respuestas del grupo B con estas del grupo C). Respuestas que parecen mostrar la necesidad de clarificar la descripción en una manera adicional, incluyendo, por ejemplo, que las líneas corren una al lado de la otra o corren juntas.
Grupo D: Respuestas que podrían verse como que tienen éxito al clarificar sus afirmaciones sobre el paralelismo, añadiendo la condición de no juntarse (encontrarse o cortarse).
Grupo E: Respuestas que contienen una propiedad adicional: el hecho de que las líneas fuesen equidistantes. Distinguiéndose dos subgrupos: aquellas que espontáneamente se referían a la propiedad del ángulo para comprobar que dos líneas cortadas por una transversal eran paralelas y las que se mantenían en la propiedad de la equidistancia.

Estas categorías de respuestas permiten a Davey y Peeg realizar las siguientes asociaciones:

Grupo A con el modo Icónico en dos niveles diferentes.
Grupos B, C y D con el modo Simbólico- Concreto, nivel uniestructural[5].

[5] En las descripciones posteriores hay una diferenciación de orden creciente en el nivel uniestructural desde el grupo B hasta el D. Así, hay un nivel uniestructural <u>inicial</u> para los grupos B y C, y un nivel uniestructural <u>final</u> para el grupo D. Todo depende del uso consciente y claro que se haga de la propiedad.

Grupo E con el modo Simbólico-concreto, nivel multiestructural[6].

Estos resultados, obtenidos por Davey y Peeg, serán revisados al analizar, en la primera parte de nuestro trabajo, los resultados correspondientes al superítem 2 que forma parte del instrumento de evaluación usado.

Hemos visto que algunos trabajos, referidos en las páginas anteriores, tienen entre sus objetivos el de comparar el modelo de van Hiele y la Taxonomía SOLO. Esta comparación les permite, en algunos casos, identificar un nivel de razonamiento de van Hiele con una categoría SOLO (modo + nivel). En otros, asegurar que una categoría SOLO interpreta mejor una respuesta que lo hace un nivel de van Hiele. Así, por ejemplo, mientras que para van Hiele razonar con una o varias propiedades es una característica de razonamiento de nivel 1, para la Taxonomía SOLO la respuesta a una cuestión usando una propiedad o varias da lugar a una interpretación distinta o más fina del aprendizaje, asignando una categoría SOLO a la respuesta [SC (modo de razonar)+ uniestructural, multiestructural... (nivel de respuesta)]. Por lo tanto, es razonable pensar que la Taxonomía SOLO interpreta mejor una respuesta que lo hace van Hiele, ya que la primera distingue nivel de razonamiento (modo de funcionar) más calidad de la respuesta (nivel de respuesta) y el segundo, se interesa, solamente, por las habilidades de razonamiento.

En Huerta (1996b) se presenta una alternativa al análisis de respuestas de los estudiantes a cuestiones de geometría, integrando los dos marcos teóricos en uno sólo. Esta integración, que es uno de los puntos claves de nuestro trabajo de investigación, permite considerar los modos de funcionar van hielianos y no piagetianos (a la manera de la Taxonomía). Por otra parte, tomando la descripción y propiedades de los niveles de respuesta SOLO y de los ciclos de aprendizaje, en la versión que se ha descrito en páginas anteriores, posiblemente nos ayuden a interpretar mejor el modelo de van Hiele y el aprendizaje de los estudiantes. Por eso, a modo de ejemplo, mostraremos a continuación cómo es posible analizar respuestas de los estudiantes[7] desde este nuevo punto de vista.

[6] También aquí hace la distinción de un nivel multiestructural <u>inicial</u> y otro <u>final</u>, en correspondencia con la distinción entre los dos subgrupos dentro del grupo E.

[7] Todas las respuestas que mostraremos son reales, corresponden a estudiantes reales.

La manera en la que preguntamos a los estudiantes está relacionada con la idea de superítem (ver Capítulo V). En cada respuesta correcta, a cada una de las cuatro cuestiones que constituyen un superítem, se supone una estructura de respuesta que refleja, como mínimo, un nivel SOLO. A medida que se progresa en las cuestiones, las respuestas correctas reflejan una estructura cada vez más compleja y por tanto un nivel SOLO cada vez más complejo.

El estudiante dispone, como información para responder a las cuestiones que se le van a plantear, de las propiedades de los ángulos que se forman al cortar con una transversal un par de rectas paralelas (ver figura IV. 3):

> Cuando dos rectas paralelas se cortan por una línea transversal (ver figura 1), se forman 8 ángulos que tienen las siguientes propiedades:
>
> - Los ángulos alternos-internos son iguales: B=F, G=C.
> - Los ángulos alternos-externos son iguales: A=E, D=H.
> - Los ángulos opuestos por el vértice son iguales: A=G, B=H, C=E y F=D.
> - Los ángulos correspondientes son iguales: F=H, C=A, E=G y D=B.

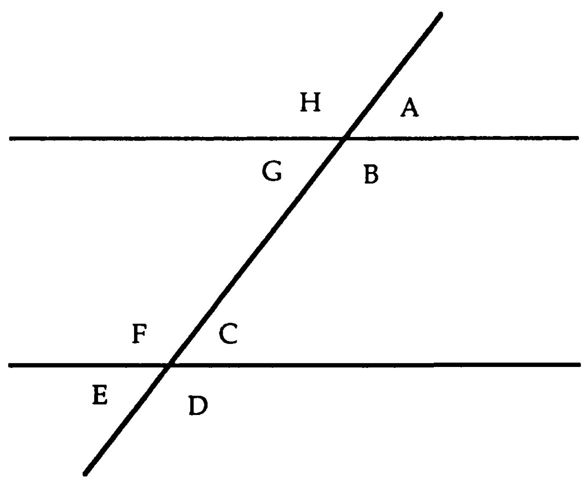


Figura IV. 3 Figura 1: Ángulos producidos por un par de rectas paralelas cortadas por una transversal

Las respuestas de nivel preestructural indican un rechazo o incapacidad por parte del estudiante de verse atraído por la resolución del problema o la cuestión que se le plantea. Las respuestas típicas suelen ser respuestas tales como: "no entiendo la pregunta", "no lo he hecho con anterioridad" o, en general, respuestas en las que no se puede identificar un modo de razonar.

Así, también, una respuesta incorrecta a la primera cuestión de un superítem será considerada como preestructural.

Las respuestas de nivel uniestructural son respuestas que tiene en cuenta sólo una relación o hecho directo. Por ejemplo, cuando al estudiante se le pregunta por el valor del ángulo G en la figura siguiente, puede responder "G= 45° porque son ángulos opuestos por el vértice".

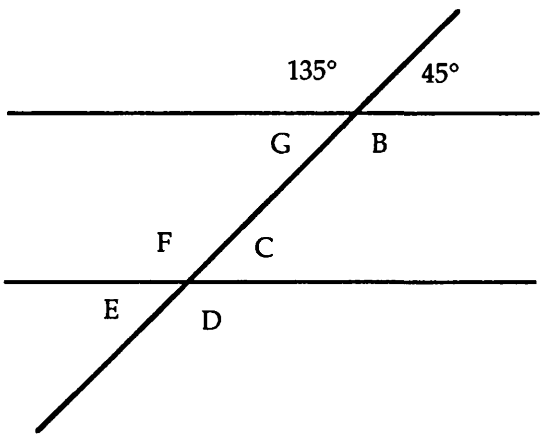


Figura IV. 4 Figura 2: Ángulos producidos por un par de rectas paralelas cortadas por una transversal, según un ángulo dado.

Esta respuesta implica, de una parte, el uso consciente de la propiedad de que «los ángulos opuestos por el vértice son iguales», lo que determina como modo de funcionar el nivel 2 de van Hiele y, de otra, usar un aspecto aislado, la propiedad, para responder, lo que determina una repuesta uniestructural.

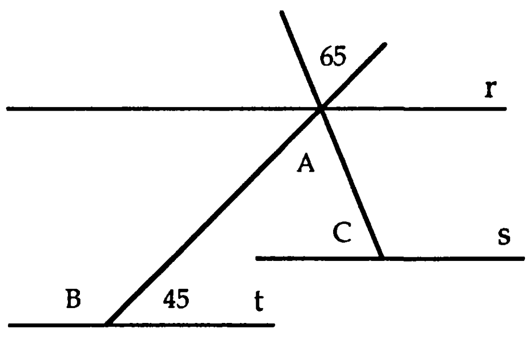
Otro estudiante, ante la misma pregunta, puede responder "G=45° porque G está al lado de A y entonces mide 45° como A". Ahora el estudiante no usa explícitamente la propiedad para responder, sino que usa aspectos visuales en su razonamiento, lo que supone un modo de funcionar de nivel 1 de van Hiele, pero responde correctamente a la cuestión usando como información la componente visual de la figura 1 que le permite identificar los ángulos A y G como iguales, independientemente del resto de la información que puede disponer, lo que determina igualmente una respuesta uniestructural en un modo de funcionar o nivel de razonamiento distinto al del estudiante anterior.

Las respuestas de nivel multiestructural indican que el estudiante es capaz de manejar, en secuencia, aspectos del modo en el que razona, aunque por otra parte inconexos, para apoyar un juicio particular sobre una cuestión también particular. Un ejemplo de este nivel de respuesta SOLO puede verse en la respuesta correcta de los estudiantes a cuestiones como: ¿Cuál es el valor de los ángulos D y C de la figura 2?

La respuesta: "D=135°, porque los ángulos exteriores son iguales y C=45° porque los ángulos correspondientes son iguales", es una respuesta considerada multiestructural en el nivel 2 de van Hiele. En cambio, esta otra, "C=45° porque es el mismo ángulo que el ángulo de arriba y D=135° porque también es igual al ángulo de arriba a la izquierda", es una respuesta multiestructural en el nivel 1 de van Hiele. En cambio, la siguiente respuesta: "90° porque en la transversal indica al lado derecho 45° y juntando las dos letras tenemos un total de 90°", muestra un modo de funcionar de nivel 1 de van Hiele y una respuesta no multiestructural porque el estudiante no es capaz de manejar los das propiedades necesarias para elaborar la respuesta correcta.

Las respuestas de nivel relacional obligan al estudiante a relacionar elementos dentro de un sistema concreto, inmediatamente disponible, y formar su respuesta sobre esta base. Así, para alcanzar este nivel de respuesta SOLO, los estudiantes han de responder correctamente a ítems tales como:

> En la siguiente figura, calcula el valor de los ángulos A, B y C, sabiendo que la recta **r** es paralela a la recta **s** y que la recta **s** es paralela a la recta **t**.



La respuesta correcta a esta cuestión puede implicar muchos trayectos diferentes desde los datos hasta la solución, así como aquellos elementos externos a la información que se posee que son necesarios para resolver el problema. Así,

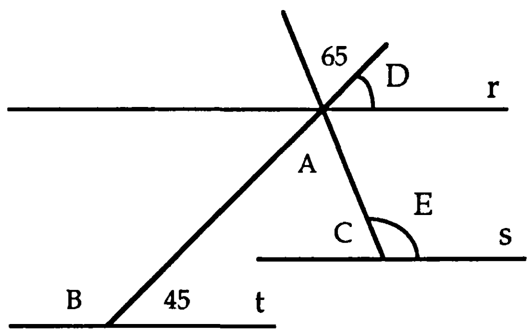
a) Deben aportarse conceptos y relaciones angulares como:

Ángulo llano (180°), ángulos adyacentes, suma y resta de ángulos.

b) Generalizar las propiedades que se establecen con los ángulos entre paralelas cuando hay más de dos rectas paralelas cortadas por más de una línea transversal. Para ello, deben aportar al problema las siguientes relaciones, procedimientos... :

- Si r//s y s//t, entonces r//t (Propiedad transitiva de la relación "ser paralelo a"). Relación que en la mayoría de los casos es implícita en el proceso de resolución y que en casos aislados se hace explícita.
- Reconocer y aplicar propiedades del paralelismo de rectas en contextos diferentes al que se usa para presentar las propiedades en el tronco del superítem, concretamente para los pares de rectas paralelas r—s, r—t, s—t, que pueden reconocerse en el dibujo del problema.

En este sentido, una respuesta como la siguiente, en la que el estudiante, introduce ángulos auxiliares, indica un modo de funcionar del nivel 3 de van Hiele y una respuesta de nivel relacional:



"A=65° porque los ángulos opuestos por el vértice son iguales.
B=135° porque un ángulos llano mide 180° —› B=180°- 45°= 135°.

D=45° porque los ángulos correspondientes son iguales (aquí aplica las relaciones al par de rectas paralelas r—t) —› 65+D=E=65+45=110. (Ahora la propiedad se usa, sin enunciar, para el par de rectas paralelas r—s)
C=180-E —› C=70"

En cambio, una respuesta como la siguiente: "A=65° porque son ángulos opuestos por el vértice. B=75° porque al ángulo llano le restamos 45° y obtenemos B=75°. C=110° porque es el mismo que el ángulo suma de 65° y 45°", en la que el estudiante muestra un modo de funcionar del nivel 2 de van Hiele, no consigue construir una respuesta relacional porque al responder sobre el ángulo C no tiene en cuenta que es posible seguir aplicando las propiedades de los ángulos entre paralelas al cortarlas por una transversal distinta de la que se le proporciona en la muestra.

Las respuestas de abstracción extendida implican un uso comprensivo de los datos dados junto con constructos hipotéticos relacionados y principios abstractos. Responder en este nivel es necesario para aquellos estudiantes que desean obtener una respuesta correcta a la siguiente cuestión:

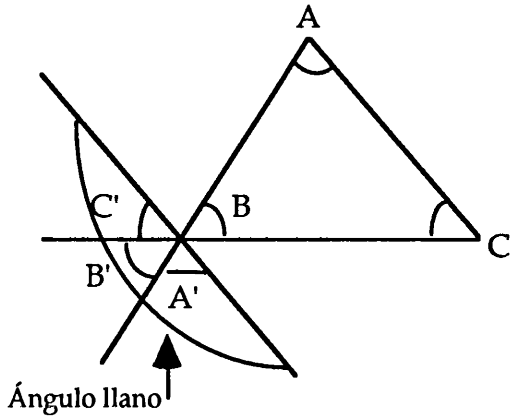
Demostrar que la suma de los ángulos de un triángulo es 180°.

Para ello, el estudiante deberá aportar los siguientes principios generales:

a) No importa el triángulo que se considere, lo que se diga y se haga con un ejemplo genérico de ellos será válido para la generalidad de los triángulos. (Generalizar la propiedad a todos los triángulos).

b) Ha de partir de las propiedades de los ángulos entre paralelas como hipótesis válidas para realizar su demostración,

así como otros conceptos y relaciones angulares que necesita o que ya ha usado. Veamos esto en el siguiente ejemplo de respuesta:



A+B+C=180°

El estudiante traza una paralela al lado AC, por el vértice B. Prolonga los lados BC y AB, en el vértice B. Identifica, en dicho vértice, tres ángulos que resultan ser adyacentes: A', B' y C', y que por tanto forman un ángulo llano:
"Ángulo llano =180° —› C'+B'+A'=180°.
C'= C porque son ángulos correspondientes.
A'=A porque son ángulos correspondientes". (Fijémonos como para cada caso considera distintas transversales para el mismo par de rectas paralelas).
"B=B' porque son ángulos opuestos por el vértice".
(Todo lo anterior implica que)
"A+B+C=180°".

Este tipo de respuestas, que suponen un modo de funcionamiento dado por al menos el nivel 3 de van Hiele, son respuestas consideradas de un nivel de abstracción extendida.

En muchos otros casos, el estudiante no usa la información que dispone ni la posible información que se pudiera derivar de la resolución de otras cuestiones para construir una respuesta correcta a esta última cuestión. Nos referimos a la actuación de los estudiantes del nivel 2 de van Hiele cuyas respuestas son, habitualmente, la consideración de casos particulares. La siguiente respuesta: "Es cierto porque los ángulos miden 60°, 60° y 60° y 60°+60°+60°=180°", no constituye una respuesta de abstracción extendida en el sentido en el que se da aquí a este tipo de respuestas, aunque sí determinan claramente un modo de razonar del nivel 2 de van Hiele.

CAPÍTULO V

Metodología de Investigación

V. 1 Introducción

Para alcanzar los objetivos previstos en esta primera parte de la investigación, analizar respuestas de estudiantes a la luz de dos teorías, el modelo de van Hiele y la Taxonomía SOLO, hemos tenido que resolver algunos problemas relacionados con la metodología de investigación y de los que daremos cuenta en este capítulo.

El primer problema que hemos tenido que resolver es el de la construcción de los ítems que han de permitir a los estudiantes demostrar tanto sus habilidades de razonamiento como la calidad de sus respuestas. Para ello, hemos usado las ideas que Collis, Romberg y Jurdak (1986) presentan con la noción de superítem y relacionadas con la evaluación a la luz de la Taxonomía SOLO, combinadas con aquéllas que presentan Jaime y Gutiérrez (1994) para la construcción de instrumentos de evaluación del nivel de razonamiento de van Hiele.

El segundo problema a resolver es el de la asignación de niveles a los estudiantes. Por un lado, asignaremos niveles de razonamiento basándonos en la técnica desarrollada por Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991) y de la que hemos hablado con anterioridad. Por otro lado, asignaremos niveles SOLO siguiendo a Collis, Romberg y Jurdak (1986) y Collis y Watson (1991), que describiremos con más detalle en las páginas siguientes.

V. 2 Superítems

V. 2. 1 *Fundamentos*

Collis, Romberg y Jurdak (1986) sugieren la posibilidad de diseñar ítems para determinar la capacidad de respuesta de los estudiantes en la resolución de problemas de matemáticas escolares, planteando series de cuestiones sobre un problema de manera que cada respuesta correcta requiriese un manejo cada vez más sofisticado de la información dada que su predecesora. Este incremento en la sofisticación, sugieren, iría paralelo al incremento en la complejidad de la estructura señalada en las categorías SOLO[1].

[1] Entendemos por categoría SOLO, modo de funcionar + nivel de respuesta.

El término "superítem", acuñado por Cureton (Collis, Romberg y Jurdak, 1986), describe un conjunto de cuestiones que se plantean sobre una situación-problema particular. La situación-problema se describe, usualmente, en lo que se llama "tronco" del superítem. Los ítems o cuestiones consisten en una serie de preguntas, referidas al tranco, que pueden ser respondidas a partir de la información contenida en él.

V. 2. 2 *Construcción de ítems con una estructura de superítem.*

Las ideas que vamos a utilizar para construir nuestro instrumento de evaluación, van a ser las descritas por el modelo de van Hiele, la Taxonomía SOLO y por las que acabamos de mencionar de la noción de superítem. Así, vamos a construir ítems, referidos a un tronco que contendrá información para el estudiante, de tal manera que una respuesta correcta a un ítem indique una capacidad de respuesta del estudiante en por lo menos el nivel SOLO que refleje la estructura de esa cuestión. Además, dar una respuesta, ya sea correcta o incorrecta, a un ítem implica una manera de razonar, lo que probablemente nos permitirá asignar niveles de razonamiento a los estudiantes.

Así pues, será conveniente describir con claridad los criterios que hemos usado para construir las cuestiones de los superítems. Estos criterios han sido los siguientes:

a) Niveles SOLO considerados.

Las cuestiones de los superítems se han construido pensando en que los estudiantes consigan elaborar respuestas que permitan asignarles el máximo nivel de respuesta SOLO posible. Así, las cuestiones que constituyen cada superítem pretenden evaluar la capacidad de los estudiantes de responder en cada uno de los cuatro niveles SOLO considerados. Para ello, estas cuestiones se han construido siguiendo los siguientes criterios:

• Cuestión 1: Nivel *Uniestructural* (U): Uso de un *elemento obvio* de la información obtenido directamente del tronco.
• Cuestión 2: Nivel *Multiestructural* (M): Uso de dos o más elementos directamente relacionadas con *partes separadas* de la información contenida en el tronco.

• Cuestión 3: Nivel *Relacional* (R): Uso de dos o más clausuras directamente relacionadas con una comprensión *integrada* de la información contenida en el tronco.
• Cuestión 4: Nivel *Abstracción extendida* (A): Uso de un *principio abstracto y general* o una hipótesis derivada o sugerida por la información contenida en el tronco.

b) Asignación de niveles SOLO

De esta forma, pensamos que para cada superítem, el éxito de un estudiante con la primera cuestión indicará una capacidad de responder al problema en, al menos, el nivel uniestructural. Igualmente, el éxito en la segunda cuestión se corresponderá con la capacidad del estudiante de responder, al menos, en el nivel multiestructural, etc.

La validez de la evaluación desde la perspectiva de la Taxonomía SOLO usando instrumentos de evaluación con estructura de superítem puede verse en Romberg, Jurdak, Collis y Buchanan (1982), donde los autores analizan la validez de constructo de un conjunto de superítems de matemáticas para la evaluación de una muestra amplia de estudiantes, lo que razonablemente puede dar lugar a una gran variedad de modos de funcionar y de niveles de respuesta.

Puesto que, en nuestra investigación, la evaluación de los estudiantes debe contemplar tanto la forma de razonar (nivel de van Hiele) como la estructura de sus respuestas (nivel SOLO), el instrumento que los mide debe contemplar ambas componentes.

c) Modos de funcionar (niveles de razonamiento)

Gutiérrez y Jaime (1994) sugieren que para la construcción de tests escritos con los que evaluar el nivel de razonamiento de los estudiantes deberían incluirse cuestiones en las que los estudiantes demostrasen sus habilidades de razonamiento, fundamentalmente en aquellos procesos de razonamiento propios de las matemáticas y que son habituales en geometría: reconocimiento, definición (leer y establecer), clasificación y demostración. Esta sugerencia se ha tenido en cuenta en esta investigación, como podrá comprobarse en el análisis que se hace de los superítems en páginas siguientes.

V. 2. 3 *Diseño de los superítems*

Con todos los condicionantes anteriores, se diseñaron un conjunto de ocho superítems que fueron administrados a estudiantes de diferentes niveles educativos: primaria, secundaria, BUP y COU, con el fin de determinar si los ítems propuestos recogían las expectativas que se habían supuesto.

En la construcción de este conjunto de superítems se tuvieron en cuenta diferentes aspectos que es necesario detallar: a) El contenido geométrico, b) los estudiantes a los que van dirigidos y c) la estructura del superítem y la cantidad de superítems en relación con los estudiantes a los que se les iba a administrar el test.

a) Es sabido que la determinación de un nivel de razonamiento de van Hiele de un estudiante no tiene un carácter global dentro de las Matemáticas, ni siquiera dentro de la Geometría (Corberán, Huerta y otros, 1994). Por eso, optamos por considerar el contenido geométrico, en el que se iban a basar los superítems, conocido por la mayoría de estudiantes por ser habitual en la geometría escolar: paralelismo, perpendicularidad, triángulos, cuadriláteros, etc. De esta forma, la esperanza de que los estudiantes elaboraran respuestas a las diferentes cuestiones que pudieran ser analizadas tanto desde la teoría de los niveles de van Hiele como de la Taxonomía SOLO sería mayor, si el contenido geométrico de las mismas fuera conocido en la mayoría de los casos.

b) Los estudiantes que debían responder a los superítems en las pruebas piloto se correspondían con diferentes niveles educativos. Así, se suministraron superítems en enseñanza Primaria (6º, 7º y 8º), Secundaria Obligatoria (4º), Formación Profesional (estudiantes de Acceso, equivalentes a 1º de F.P II) y BUP (3º), con la esperanza de obtener respuestas de niveles 1 al 3 (no era de esperar respuestas de nivel 4) y de diferentes niveles SOLO. Ello determinó que las cuestiones deberían orientarse mayoritariamente a la consecución de estos tres niveles, pero sin olvidar la posibilidad de poder evaluar el nivel 4.

c) Por otra parte, las respuestas que mayoritariamente se asociaban con un nivel SOLO se correspondían con los niveles Uniestructural y Multiestructural, y muy pocas con el nivel de Abstracción Extendida. Ello nos hizo pensar que, tal vez, para ciertos niveles educativos, los superítems no deberían contener cuestiones que tratasen de hacer aflorar este tipo de respuestas. Pero si lo hubiéramos hecho así, no habríamos permitido a algunos estudiantes la posibilidad de construirlas, ya porque el superítem les hubiese dado suficiente información como para elaborar o hacer aflorar principios abstractos, ya porque su nivel de razonamiento potencial sí les permitiera elaborar dichas respuestas. Por eso, decidimos finalmente que todos los superítems deberían estar constituidos por cuatro cuestiones que hiciesen referencia a la información contenida en el tronco del superítem, en al menos los niveles educativos iguales o superiores a la enseñanza secundaria. Por otra parte, en la versión que finalmente se pasó a los estudiantes de enseñanza Primaria, se eliminaron, por consejo de los maestros que revisaron los superítems, aquellos ítems que tenían que ver con la demostración.

Antes de elaborar la versión final de los superítems que iban a constituir el instrumento de evaluación, se probaron el conjunto de los ocho superítems inicialmente diseñados. Se comprobó la comprensión de la redacción de la información que contenía el tronco del superítem y de las cuestiones por parte de los estudiantes, el nivel de razonamiento mostrado por los estudiantes en las diferentes cuestiones en relación con el nivel de razonamiento esperado, la estructura de las cuestiones acorde a los niveles SOLO y el tiempo que les llevaba resolver un superítem. Estas comprobaciones dieron lugar a las modificaciones necesarias que debieron realizarse para dar lugar a la elaboración definitiva de los cinco superítems que constituyeron el instrumento final de evaluación (En el Anexo I, puede verse la versión definitiva).

V. 2. 4 *Contenido de los superítems.*

Incluimos a continuación, de manera resumida, el contenido geométrico y los niveles de razonamiento de van Hiele esperados en los diferentes superítems.

SUPERÍTEM 1

Concepto principal: Rectas paralelas. Ángulo. Ángulos entre rectas paralelas cortadas por una línea transversal.

Conceptos secundarios:

Ángulos alternos-internos.
Ángulos alternos-externos.
Ángulos opuestos por el vértice.
Ángulos correspondientes.
Ángulos suplementarios.
Paralelismo.
Triángulo.

Propiedades de los conceptos secundarios, relaciones:

Igualdad de ángulos.
Suma y resta de ángulos.
Suma de los ángulos interiores de un triángulo.
180°.

Cuestión/Procesos de razonamiento	Niveles esperados
1. Identificación (formas y/o prop.)	1-2
2. Identificación (formas y/o prop.)	1-2
3. Identificación y cálculo	2-3
4. Demostración *	2-4

* No aparece en la versión para enseñanza primaria

SUPERÍTEM 2

Concepto principal: Paralelismo.

Conceptos secundarios:

Rectas paralelas.
Rectas secantes.
Lado.
Segmento.
Cuadrilátero.
Rectángulo.
Ángulo entre rectas.
Ángulo de un polígono.

Propiedades de los conceptos secundarios, relaciones:

Lados paralelos.
Lados paralelos dos a dos.
Ángulo recto.

Cuestión/Procesos de razonamiento	Niveles esperados
1. Identificación (formas y/o prop.)	1-2
2. Identificación (formas, prop., rel.)	1-3
3. Identificación (formas, prop., rel.)	1-3
4. Demostración*	2-4

* No aparece en la versión para enseñanza primaria

SUPERÍTEM 3

Concepto principal: Exacto, Almenos.

Conceptos secundarios:

Cuadrilátero.
Trapecio.
Paralelogramo.
Lado.

Propiedades de los conceptos secundarios, relaciones:

Lados paralelos.
Relaciones de inclusión de clases de cuadriláteros.
Uso de cuantificadores: exactamente y al menos.

Cuestión/Procesos de razonamiento	Niveles esperados
1. Identificación (formas, prop.)	1-2
2. Identificación. (formas, prop.)	1-2
3. Clasificación	2-3
4. Clasificación, demostración*	2-4

* No aparece en la versión para enseñanza primaria

SUPERÍTEM 4

Concepto principal: Rectángulo.

Conceptos secundarios:

Cuadrilátero.
Lado.
Ángulo de un polígono.
Diagonal.
Simetría.

<u>Propiedades de los conceptos secundarios, relaciones</u>:

Lados iguales dos a dos.
Lados paralelos dos a dos.
Ángulo recto.
Diagonal interior.
Diagonales que se bisecan.
Eje de simetría.
Cuantificador "por lo menos"

Cuestión/Procesos de razonamiento	Niveles esperados
1. Identificación (formas, prop.).	1-2
2. Identi. (formas, prop.).	2-3
3. Identi. (Condiciones suficientes).	2-3
4. Definición.	2-3

SUPERÍTEM 5

<u>Conceptos principales</u>: Cuadrilátero, Cuadrado, Rectángulo, Rombo, Romboide.

<u>Conceptos secundarios</u>:

Lado.
Ángulo de un polígono.

<u>Propiedades de los conceptos secundarios, relaciones</u>:

Lados iguales.
Lados iguales dos a dos.
Ángulos iguales.
Ángulos iguales dos a dos.
Clasificación (exclusiva o inclusiva) de paralelogramos y sus relaciones.

Cuestión/Procesos de razonamiento	Niveles esperados
1. Identificar (formas). Leer y usar definiciones.	1-2
2. Identificar (formas, prop. y/o rel.). Leer y usar definiciones.	1-3
3. Leer y usar definiciones. Clasificar.	1-3
4. Clasificar.	2-3

V. 2. 5 *Análisis de los superítems.*

V. 2. 5. 1 Análisis de los superítems en términos de van Hiele[2]

SUPERÍTEM 1

El Tronco

La comprensión, en términos de van Hiele, de la información contenida en el tronco del superítem, comporta dos niveles de razonamiento diferenciados. Si el estudiante atiende a la primera parte, la que describe las relaciones entre los ángulos entre paralelas cortadas por una transversal, en términos de igualdades, exige un nivel de razonamiento 2 ó superior. Si sólo atiende a la figura, y las relaciones son vistas en términos de ángulos que "parecen" iguales, entonces el nivel de razonamiento exigido sería 1.

Las cuestiones.

Cuestión 1

La pregunta puede responderse en el nivel 1 de razonamiento, si el estudiante atiende a la figura y observa que los ángulos A y G son iguales; o en un nivel 2, si en su respuesta usa la propiedad "ángulos opuestos por el vértice son iguales" para explicarla.

Ejemplos[3]:

Respuestas de nivel 1:

- Porque es igual que al ángulo A (en la muestra) que mide 45°
- Porque el ángulo que tiene arriba que marca 45° es igual que el G

[2] En el Anexo I de nuestra memoria de investigación puede encontrarse la versión final de los 5 superítems que constituyen el instrumento usado para la evaluación de los estudiantes, en la primera parte de nuestra investigación: relaciones entre los niveles de razonamiento de van Hiele y los niveles SOLO. A lo largo de todo este apartado remitimos al lector a dicho anexo.
[3] Todas las respuestas que incluimos son reales.

Respuestas de nivel 2:

- *Porque los ángulos opuestos por el vértice son iguales y su opuesto por el vértice vale 45°.*
- *Ángulos opuestos por el vértice son iguales en rectas paralelas cortadas por una transversal, A=E=G=C, A=45°.*

Cuestión 2

Desde el punto de vista del modelo de van Hiele, las observaciones hechas en la cuestión anterior siguen siendo válidas para esta cuestión. El modelo de van Hiele no distingue el tipo de razonamiento cuando el estudiante razona con más de una propiedad.

Por ejemplo:

Respuestas de nivel 1:

- *E=45 y F=135, porque tienen la misma medida en los ángulos de arriba*
- *E=45 y F=135, porque me lo han indicado en el ejercicio*

Respuesta de nivel 2 :

- *E=45 porque los ángulos alternos son iguales y E es alterno al de 45. F=135 porque los ángulos correspondientes son iguales y F y el ángulo de 135 son correspondientes*

Cuestión 3

Para responder a esta cuestión, es necesario razonar en el nivel 2 como mínimo. La figura de referencia ahora no resuelve por sí misma la cuestión. La respuesta correcta implica reconocer que se trata de un problema en el que está implícita la información del tronco y por tanto el uso explícito y consciente de las propiedades dadas en él.

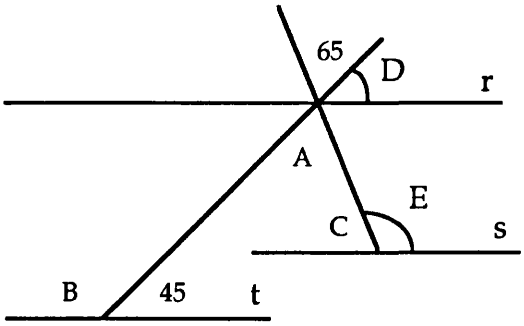
Una respuesta de nivel 3 tendrá en cuenta las relaciones entre los ángulos formados al cortar las rectas paralelas r y s por sendas transversales y aplicar las propiedades enunciadas en el tronco del superítem para resolver los ángulos que se piden.

Por ejemplo:

Respuesta de nivel 2:

- A=65°, porque es el opuesto por el vértice de 65°. B=75° porque el ángulo plano de 120° [4] *se le resta el trozo de 45° y sale B=75°. C=111° porque es igual al ángulo resultado de la suma del ángulo de 65° y el de 45°.*

Respuesta de nivel 3:



A=65 porque los ángulos opuestos por el vértice son iguales.
B=135 porque un ángulos llano mide 180° —› B=180°- 45°= 135°.
D=45 porque los ángulos correspondientes son iguales (aquí aplica las relaciones al par de rectas paralelas r—t) —› *65+D=E=65+45=110.* (Ahora la propiedad se usa, sin enunciar, para el par de rectas paralelas r—s)
C=180-E —› C=70

Cuestión 4

Si el enunciado se plantea en términos de "demostrar que...", es posible, según el modelo de van Hiele, obtener respuestas de los estudiantes que abarcan niveles de razonamiento desde el 2 al 4, en función de los elementos de razonamiento usados.

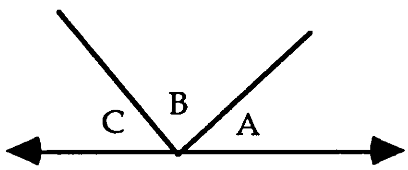
[4] El error de usar 120° en lugar de 180° no conlleva un cambio de nivel de razonamiento, aunque sí de calidad de respuesta dentro de este nivel de razonamiento.

Una respuesta correcta de nivel 2 vendrá dada por una demostración a través de la comprobación de casos (uno, o más de uno). Por ejemplo, un estudiante se acoge al ejemplo de la cuestión 3 y dice:

- Pues los he sumado, A=65, 45 y C=70 y me da 180.

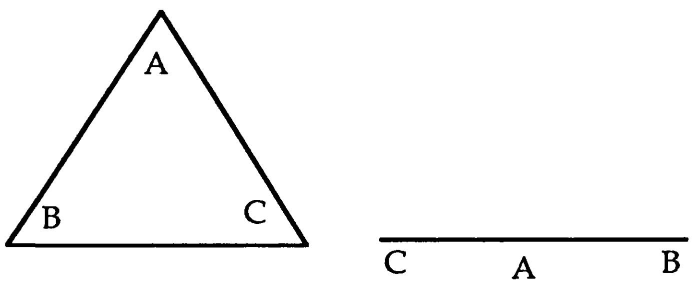
Una respuesta de nivel 3 usará un elemento de razonamiento informal para justificar que los ángulos suman 180°. Por ejemplo, un estudiante dice:

- Si pongo los tres ángulos juntos en el plano sumarán 180°



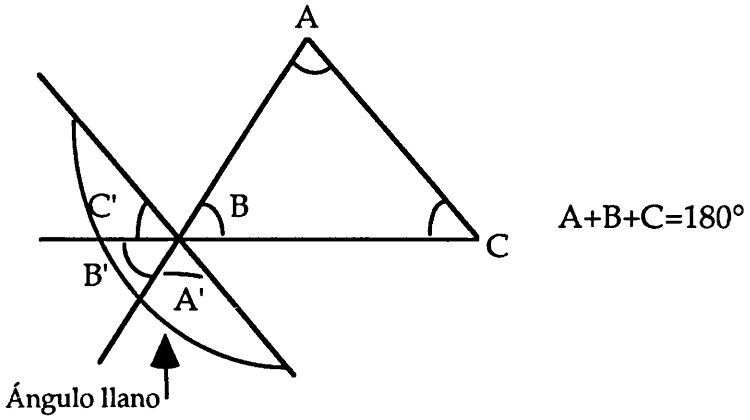
(dibuja)
A+B+C=180°.

- Los ángulos interiores de un triángulo si los ponemos estirados dan 180° (incluye el siguiente dibujo):



A+B+C=180°

Una respuesta de nivel 4, usará los argumentos de la deducción formal para establecer la demostración. Quizás se apoye en elementos informales, el dibujo anterior, pero su argumentación seguirá las estructuras deductivas: cada vez que diga que un ángulo es igual a otro, justificará esta igualdad basándose en la propiedad que se lo garantiza, concluyendo la tesis de su demostración en base a las justificaciones parciales anteriores. Por ejemplo, una respuesta de nivel 4 es la siguiente:



El estudiante traza una paralela al lado AC, por el vértice B. Prolonga los lados BC y AB, en el vértice B. Identifica, en dicho vértice, tres ángulos que resultan ser adyacentes: A', B' y C', y que por tanto forman un ángulo llano:

- *Ángulo llano =180° —› C'+B'+A'=180.*
C'= C porque son ángulos correspondientes.
A'=A porque son ángulos correspondientes. (Fijémonos como para cada caso considera distintas transversales para el mismo par de rectas paralelas).
B=B' porque son ángulos opuestos por el vértice.
(Todo lo anterior implica que)
A+B+C=180°

SUPERÍTEM 2

El tronco

La información contenida en el tronco, mediante el formato de ejemplos y no-ejemplos del concepto (paralelismo), puede ser comprendida cuando un estudiante está razonando en el nivel 1. Las propiedades o características del paralelismo no están explícitamente establecidas en el tronco, sino que el estudiante las debería extraer de los ejemplos mostrados. Esto exigiría razonar en niveles iguales o superiores al 2.

Las cuestiones.

Cuestión 1

Una respuesta correcta de nivel 1 se dará cuando el estudiante identifique los pares correctos de rectas paralelas atendiendo, al explicar la respuesta, a características visuales de los ejemplos mostrados en el tronco (cortarse o no cortarse, juntarse o no juntarse).

Será de nivel 2 si, al identificar correctamente los pares de rectas, explica su elección mediante características del paralelismo: la equidistancia o la conservación de los ángulos al cortarlas por una transversal.

Por ejemplo:

Respuesta de nivel 1:

- a y b, e y f son paralelas porque no se tuercen, van una al lado de la otra.

Respuesta de nivel 2:

- a, b y e, f son paralelas debido a que en ambos extremos de las dos existe una misma distancia; c, d y g, h no lo son porque en estos extremos no hay una misma distancia.

Cuestión 2

En esta cuestión, el contexto en el que identificar el paralelismo no se corresponde con el que se presenta en el tronco del superítem. El paralelismo de las rectas puede identificarse recurriendo a elementos visuales (nivel 1), justificando la respuesta basándose en ellos y no en propiedades, o a instrumentos de dibujo (nivel 2), en el que las propiedades del paralelismo están presentes en el mismo uso de ellos, o en propiedades de equidistancia o conservación de ángulos (nivel 2) o en ambas cosas (nivel 3).

Por ejemplo:

Respuesta de nivel 3:

El estudiante usa la proposición: "Dos restas son paralelas si y sólo si una perpendicular a la primera es perpendicular a la segunda", de manera más o menos explícita para justificar si las rectas dadas son o no son paralelas, respondiendo:

- *No son paralelas porque al trazar una perpendicular a ellas no todos los ángulos son de 90°.*

Cuestión 3

Puede pensarse que esta cuestión nos da niveles de razonamiento 2-3. La razón parece evidente. La respuesta correcta se puede obtener a partir de la equidistancia entre rectas paralelas, apoyada en el concepto de distancia entre rectas. En cualquier caso, el razonamiento sobre las propiedades daría la respuesta correcta a la cuestión. Los diferentes matices, al explicar la respuesta dada, podrían decantar el razonamiento hacia el nivel 2 o hacia el nivel 3.

Podría darse el caso de que la respuesta se diese a "ojo". Es decir, obtener la respuesta correcta al comparar visualmente los segmentos implicados. Sería una respuesta de nivel 1, pero entonces, al explicarla, el estudiante debería dar estos argumentos como justificación de su respuesta.

Si se utiliza un instrumento de medida (no solamente una regla graduada) y responde que, por ejemplo

- *AE mide 2 cm. porque lo he medido,*

entonces la respuesta sería calificada de nivel 1 ya que en su respuesta no hace referencia al paralelismo. Pero si responde que:

- *AE mide 2 cm., porque lo he medido y además AD es paralelo a BC,*

entonces la calificaremos de nivel 2, pues el estudiante está relacionando con el paralelismo un propiedad suya: las rectas paralelas son equidistantes.

Finalmente, no usar instrumentos de medida y apoyarse en relacionar conceptos y propiedades para dar la respuesta a esta cuestión, nos conduciría a una respuesta de nivel 3.

Cuestión 4

Hemos dicho anteriormente que un enunciado de una cuestión en términos de "Demuestra que....", puede dar lugar a respuestas de los estudiantes de niveles 2 al 4, en función de la metodología de demostración (Ver, por ejemplo, descriptores generales de los niveles de razonamiento, Capítulo III, págs 35-38): unos pocos ejemplos, nivel 2; argumentos informales (a partir de un caso genérico, generalizar las afirmaciones por medio de proposiciones que, encadenadas y justificadas en el ejemplo genérico le llevan a la tesis de lo que ha de demostrar), nivel 3; o argumentos formales, nivel 4.

SUPERÍTEM 3

El tronco

La información que contiene el tronco de este superítem está dada a) en términos de definiciones: dos definiciones de dos clases de cuadriláteros, de tal forma que una de las definiciones es más restrictiva que la otra, lo que hace que una de las clases de los cuadriláteros definidos esté contenida en la otra clase, y b) por ejemplos de cada una de las clases de cuadriláteros que se definen.

Como sabemos, en términos del modelo de van Hiele, la definición, en sentido matemático (comprensión y uso), tiene sentido para estudiantes con un nivel de razonamiento igual o superior al nivel 3. Para que este superítem fuese abordable por estudiantes que razonasen en niveles inferiores al 3, incluimos como información adicional una muestra de ejemplos de las dos clases de cuadriláteros definidos.

Las cuestiones.

Cuestión 1

Ver un dibujo hecho por un estudiante no permite deducir la presencia de un nivel de razonamiento claro, a menos que el que dibuja exprese cómo o

en qué se fija para realizar el dibujo. Por tanto, para conseguir esto, incluimos en la cuestión un apartado en el que el estudiante indique cómo lo hace, o por qué lo dibujado es lo que se le ha pedido.
La respuesta a esta cuestión nos indicará si el estudiante usa o no propiedades para dibujar y para justificar que lo dibujado es la figura que se le ha pedido; o lo que hace es asociar cierto tipo de formas planas, alguno de los ejemplos que dispone en el tronco del superítem, al nombre de la clase de cuadriláteros del que se le pide que dibuje un ejemplo. En el primero de los casos, la respuesta sería de nivel 2. En el segundo, de nivel 1. Por ejemplo:

Respuesta de nivel 1:

- El estudiante dibuja un cuadrado (tiene un ejemplo en la muestra) y dice que es exacto *porque tiene los lados iguales.*

Respuesta de nivel 2:

- El estudiante dibuja un cuadrilátero exacto, igual o diferente a los de la muestra y se justifica diciendo que para dibujarlo se fija *en que tenga solamente dos lados paralelos* y por tanto es un exacto ya que *solamente tiene dos lados paralelos.*

Cuestión 2

Una respuesta correcta de nivel 1 se correspondería con dibujar un paralelogramo de los de la muestra de los cuadriláteros Almenos en el tronco y decir que no es exacto porque de esta clase no tiene en la muestra de los cuadriláteros Exactos contenida en el tronco.

En cambio, la respuesta sería de nivel 2 si al tratar de justificar su dibujo, el estudiante utilizase propiedades, ya sean obtenidas de las definiciones dadas para cada caso, ya sean del ejemplo que haya dibujado.

Cuestión 3

Esta cuestión trata de estudiar, para las clases de cuadriláteros definidas, si se admite o no las clasificaciones inclusivas, es decir, si los estudiantes admiten que la clase de cuadriláteros llamados Exactos está contenida en la clase de cuadriláteros llamadas Almenos.

Una respuesta afirmativa en la que el razonamiento implique un contraste de las definiciones de ambas clases de cuadriláteros y, por tanto, manejar y comprender los cuantificadores que usan dichas definiciones, será una respuesta de nivel 3:

- *Sí. Supongamos que A es un exacto. Entonces tiene sólo un par de lados paralelos, entonces tiene al menos un par de lados paralelos, entonces A es almenos.*

Las respuestas negativas indicarán niveles de razonamiento menores o iguales que 2, ya que los estudiantes, en estos casos, no son capaces de manejar y entender el papel de los cuantificadores:

- *No, porque un exacto sólo tiene que tener 2 lados paralelos, mientras que el almenos puede tener 2 y 2.*

- *No porque los almenos tienen un nombre y los exactos otro.*

Cuestión 4

Esta cuestión trata de explorar la clasificación para clases de cuadriláteros conocidas por los estudiantes: paralelogramos y trapecios. Las condiciones en las que se presentan las clasificaciones vienen expresadas en términos de proposiciones sobre las que los estudiantes deben juzgar si son verdaderas o falsas. Este juicio, de manera similar a la cuestión anterior, nos proporcionará respuestas de niveles 2 o 3, en función de si las juzgan falsas o verdaderas.

Por otra parte, puede proporcionarnos respuestas de nivel 4 si el estudiante considera la opción de demostrar las relaciones propuestas como verdaderas:

- *Ambas proposiciones son verdaderas: A) Sea B* (dibuja un paralelogramo con cuatro ángulos rectos). *B es un trapecio porque tiene un par de lados paralelos y paralelogramo porque tiene dos pares de lados paralelos. B) Sea C* *un paralelogramo, entonces C tiene 2 pares de lados paralelos, entonces C tiene un par de lados paralelos, entonces C es un trapecio.*

SUPERÍTEM 4

El tronco

En términos de van Hiele, la comprensión de la información contenida en el tronco de este superítem supone que el estudiante admite que un concepto geométrico, rectángulo, es algo más que una forma geométrica representada por una figura, la cual es identificada por su forma y no por las propiedades que posee. Para que esto se dé, el razonamiento requerido ha de ser, por lo menos, de nivel 2.

Las cuestiones.

Cuestión 1

El razonamiento requerido para esta primera cuestión no es superior al nivel 2 de van Hiele.

Una respuesta será considerada de nivel 1 si el estudiante identifica correctamente las figuras llamadas rectángulos y para explicar su respuesta no utiliza (de modo explícito) las propiedades que se dan en el tronco del superítem, incluyendo quizás propiedades irrelevantes.

Por otra parte, la repuesta será de nivel 2 si el estudiante utiliza las propiedades enunciadas en el tronco del superítem (la cantidad de ellas que necesite) para explicar su elección.

Cuestión 2

Inicialmente, la idea de esta cuestión es que los estudiantes reconozcan rectángulos entre otras clases de cuadriláteros. De esta manera, la elección posibilitará razonamientos iguales o inferiores al nivel 3.

Así, si el estudiante identifica correctamente los rectángulos, puede ocurrir que:

a) Lo haga basándose únicamente en la forma. Entonces implicará un razonamiento de nivel 1.

b) Lo haga atendiendo a las propiedades pero no admitiendo a los cuadrados como clase de rectángulos (clasificación exclusiva vs inclusiva). Entonces, razonamiento de nivel 2.

c) El estudiante identifique correctamente los rectángulos no cuadrados y a los cuadrados como rectángulos, entonces sería una respuesta de nivel 3 porque admitiría la clasificación inclusiva de los segundos en la clase más amplia llamada rectángulo.

En este último caso, no siempre una inclusión de los cuadrados en los rectángulos implicará un razonamiento de nivel 3. Otras investigaciones han referido este caso (Corberán, Huerta y otros, 1994), por lo que habrá que estar seguros de que realmente se implica un razonamiento de nivel 3.

Cuestión 3

Una respuesta a esta cuestión puede darnos razonamientos que impliquen niveles desde el nivel 2 al nivel 3, ya que en esta cuestión el estudiantes debe usar de manera consciente las propiedades de los rectángulos y, por tanto, el razonamiento implicado debe ser, como mínimo, de nivel 2.

Si rectángulo está asociado a la lista completa y el estudiante no puede quitar ninguna, de manera que la nueva lista siga caracterizando a los rectángulo, el razonamiento implicado será de nivel 2.

Si, por el contrario, el estudiante admite que hay alguna/s que se pueda/n eliminar, porque las relaciona entre sí (aunque no las justifique) y queda caracterizado el rectángulo por una lista más corta de propiedades, el razonamiento implicado será de nivel 3.

Cuestión 4

Definir (rectángulo) está ya lo suficientemente documentado como aceptar que pueden darse niveles de respuesta de 1 a 4 (Ver, por ejemplo, descriptores generales de los niveles de razonamiento, Capítulo III, págs. 35-38). La relación con el ítem anterior es evidente, ya que ante la posibilidad de que el estudiante reduzca o no el número de propiedades que caracterizan a un rectángulo a partir del listado que se le ha proporcionado en el tronco del superítem, la definición que pueda establecer se acercará a la definición en términos de condiciones necesarias y suficientes, aunque en esta cuestión podría haber respuestas que implicasen un razonamiento de nivel 1 (en términos físicos y no de propiedades) que en la cuestión anterior no. Por ejemplo, un respuesta que implica un razonamiento de nivel 1 sería esta:

- *Un rectángulo es como un cuadrado pero alargado.*

SUPERÍTEM 5

El tronco

La información se presenta en el formato de definiciones de diferentes cuadriláteros. Leer definiciones implica razonar en el nivel 2, por lo menos. Por lo tanto, comprender la información del tronco exigirá, en los términos en los que se establece, un razonamiento por lo menos de este nivel.

Las cuestiones.

Cuestión 1

Como ya hemos argumentado en el superítem 3, ver un dibujo no permite deducir la presencia de un nivel de razonamiento claro, a menos que se indique cómo se ha hecho. Por tanto, para conseguir esto, incluimos en la cuestión también un apartado en el que el estudiante indique cómo lo hace, o por qué, lo dibujado, es lo que se le ha pedido.

La respuesta a esta cuestión nos indicará si el estudiante usa o no propiedades para dibujar y para justificar que lo dibujado es lo pedido, o lo hace por asociación de cierto tipo de formas planas a nombres conocidos por el estudiante. En el primero de los casos, la respuesta emplearía un razonamiento de nivel 2. En el segundo, el razonamiento implicado sería de nivel 1.

Cuestión 2

El nivel de razonamiento esperado en esta cuestión puede oscilar desde el nivel 1 hasta el nivel 3. La identificación correcta de rombos y rectángulos puede depender de la forma (nivel 1), de las propiedades (nivel 2) y de las relaciones entre las propiedades/definiciones de rombos y rectángulos (nivel 3) que hace que se identifique algún ejemplo como perteneciente a más de una clase.

Esta cuestión se plantea en términos similares a las cuestiones planteadas con los rectángulo y el cuadrado, por lo que su análisis deberá mantener coherencia con él.

Cuestión 3

El rango de respuestas de esta cuestión puede dar razonamientos de niveles 1 al 3. Una respuesta negativa, indicaría un nivel de razonamiento inferior al nivel 2, pues consideraría las clases disjuntas e imposibilidad de transitar de una de ellas a la otra. En función de si el estudiante contrasta o no propiedades las respuestas implicarán un razonamiento de nivel 2 ó de nivel 1:

- *Hacer que todos los lados sean iguales. Hacer que todos los ángulos sean iguales.* Respuesta de nivel 2.

- *Acortar los lados largos a más pequeños. Cambiarlo de posición.* Respuesta de nivel 1.

Una respuesta basada en un razonamiento de nivel 3, implicaría establecer relaciones entre las propiedades deducibles de las definiciones (lados iguales dos a dos, p.ej., al caso particular de lados iguales), lo que significaría que el estudiante es capaz de manejar y comprender el significado de las definiciones.

Cuestión 4

Se trata de una tarea de clasificar. Está suficientemente documentado tal proceso de razonamiento. Si la clasificación a que da lugar la respuesta del estudiante, y su justificación, es exclusiva, entonces el razonamiento implicado es de nivel 2. Si, en cambio, de su respuesta se puede deducir que admite la clasificación inclusiva, entonces el razonamiento implicado sería de nivel 3 (Ver descriptores generales de los niveles de razonamiento, Capítulo III, págs. 35-38).

V. 2. 5. 2 Análisis de los superítems en términos SOLO

La construcción de los superítems que constituyen el instrumento de evaluación en este trabajo de investigación, tiene dos aspectos que han de tenerse en cuenta para cualquier análisis: La noción de superítem y la noción de niveles de respuesta SOLO. Ambos conceptos están muy relacionados en este trabajo por lo que, al realizar un análisis de los superítems en términos de SOLO, hay que tener ambos presentes.

La idea de superítem implica que en su estructura se consideren dos partes: Una, lo que hemos venido en llamar "tronco del superítem" o "fuente de información", la constituye una situación particular. En los cinco superítems que consta nuestro instrumento de evaluación pueden distinguirse las siguientes situaciones: dos sobre el concepto de paralelismo (superítems 1 y 2) y tres sobre cuadriláteros (superítems 3, 4 y 5). A partir de la información contenida en cada uno de los troncos del superítem se plantean cuatro cuestiones, con niveles de dificultad creciente, diseñadas para explorar de un lado el modo de funcionar (nivel de van Hiele de razonamiento), cuyo análisis está hecho en páginas anteriores y, de otro, el nivel de respuesta acorde a la taxonomía SOLO. Así, la propia estructura del superítem organiza las cuestiones de una manera más y más compleja, de tal forma que una respuesta correcta a las cuestiones llevará implícito un nivel de respuesta SOLO, en relación con un modo de funcionar o nivel de razonamiento empleado para contestar a la cuestión, y que jerárquicamente indicará una capacidad de respuesta cada vez más compleja, desde el nivel uniestructural (para la cuestión 1) hasta el nivel de abstracción extendida (en la cuestión 4).

Superítem 1

Cuando dos rectas paralelas se cortan por una línea transversal (ver figura 1), se forman 8 ángulos que tienen las siguientes propiedades:
- Los ángulos alternos-internos son iguales: B=F, G=C.
- Los ángulos alternos-externos son iguales: A=E, D=H.
- Los ángulos opuestos por el vértice son iguales: A=G, B=H, C=E y F=D.
- Los ángulos correspondientes son iguales: F=H, C=A, E=G y D=B.

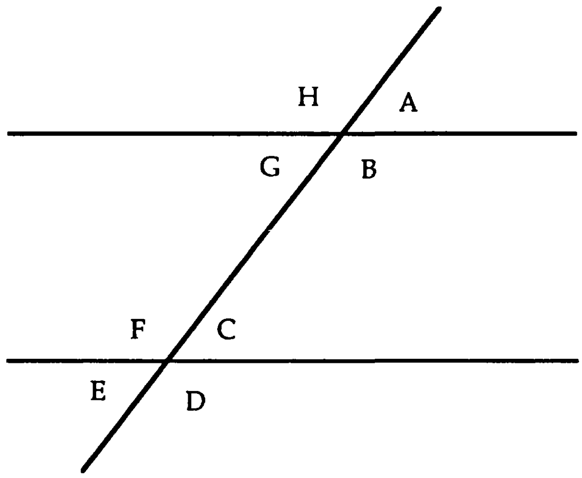


Figura 1

Cuestión 1. ¿Cuánto vale el ángulo G en la figura 2?

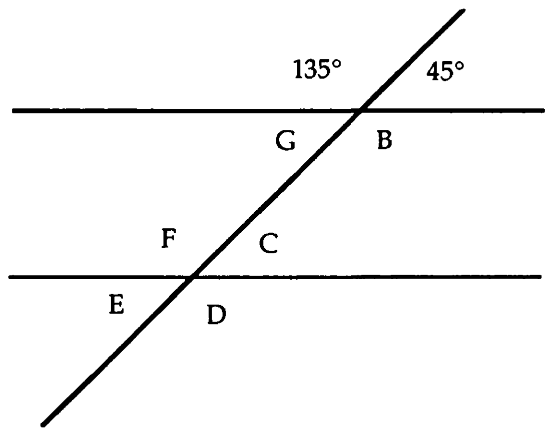


Figura 2

Respuesta:..................

Explica por qué:

....

Hemos asumido que una respuesta correcta a la primera cuestión supone una capacidad de respuesta por lo menos en el nivel Uniestructural del modo de funcionar o nivel de razonamiento que demuestre el estudiante en su respuesta. Para responder a esta cuestión únicamente se requiere manejar (en el sentido de reconocer, comprender y usar) un aspecto aislado (en relación con el modo de razonar) de la información que se dispone en el tronco, pues no es necesario comprender que la propiedad "ángulos opuestos por el vértice son iguales" se presenta aquí en relación con el paralelismo de rectas, sino que puede tratarse de manera independiente en cada una de las rectas que han sido cortadas por la transversal y que produce ángulos opuestos por el vértice. Por tanto se considerarán respuestas uniestructurales todas aquellas que respondan G=45° y en su justificación hagan uso de la propiedad enunciada en el tronco o de la forma de los ángulos, lo que supone manejar un aspecto aislado del modo de razonar usado en la repuesta.

Cuestión 2.- ¿Cuál es el valor de los ángulos D y C en la figura 2?

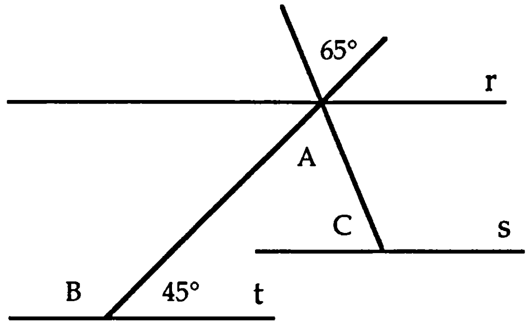
Respuesta:..................

Explica por qué:

....

Para responder a esta cuestión, el estudiante ha de manejar al menos dos propiedades de las que se presentan en el tronco del superítem, relacionadas con el paralelismo de rectas. Un itinerario de respuesta posible es contestar que D=135° porque los ángulos alternos-externos son iguales y C=45° porque los ángulos correspondientes son iguales, lo que supone manejar dos propiedades. Puede que el estudiante relacione o no ambas propiedades con el paralelismo de las rectas, pero la tarea no le requiere comprender esta relación ya que las figuras en las que puede basarse son las mismas y por tanto no tiene más que reconocer las propiedades que le resuelven la cuestión en la figura 1 y aplicarlas a la figura 2. Por lo tanto, respuestas correctas a esta cuestión, D=135° y C=45°, serán respuestas de nivel Multiestructural en modos de razonar diferentes, en función de qué tipo de información maneje.

Cuestión 3.- En la siguiente figura, calcula el valor de los ángulos A, B y C, sabiendo que la recta **r** es paralela a la recta **s** y que la recta **s** es paralela a la recta **t**.



Respuesta:

A=..................
B=..................
C=..................

Explica por qué:
....

Las respuestas de nivel Relacional suponen una comprensión global de la información contenida en el tronco del superítem. Esta comprensión supone, a su vez, que el estudiante establece relaciones entre las diferentes partes que constituyen el tronco, convirtiéndose ahora la información en un todo integrado: «dos rectas paralelas cortada por una transversal determinan ángulos iguales dos a dos en cada una de ellas y entre ellas».

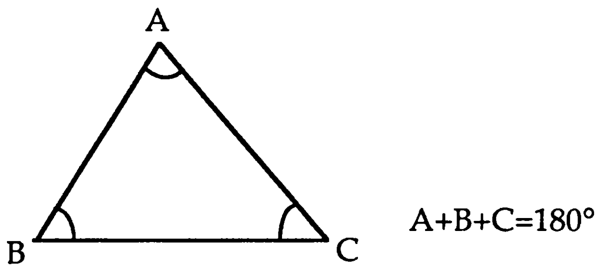
Por otra parte, la respuesta correcta a esta cuestión puede implicar muchos trayectos diferentes desde los datos que se poseen en el problema y los que proporciona el tronco del superítem, hasta la solución. Uno de ellos puede ser el que relatamos a continuación, que constituiría una respuesta de nivel relacional. En primer lugar, el estudiante ha de reconocer que las propiedades de los ángulos producidos al cortar dos rectas paralelas con una línea transversal son generalizables en contextos diferentes a los del tronco del superítem y, en concreto, en el contexto en el que se presenta esta cuestión. Para ello debe aportar al problema relaciones como:

a) Si r//s y s//t entonces r//t (Propiedad transitiva de la relación de equivalencia "ser paralela a").
b) Descomponer el problema en tres partes, tantas como ángulos han de hallarse, una para cada par de rectas paralelas r-s, r-t y s-t, y para la línea transversal correspondiente, reconocer la propiedad que resuelve el ángulo en cuestión.

Finalmente, conceptos y relaciones angulares como ángulo llano, ángulos adyacentes, suma y resta de ángulos, llevan a la solución de la cuestión.

Una respuesta correcta a esta cuestión, A=65°, B=135° y C=70°, dará lugar a una respuesta de nivel relacional.

Cuestión 4.- Demuestra la siguiente propiedad de todos los triángulos: "La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°".



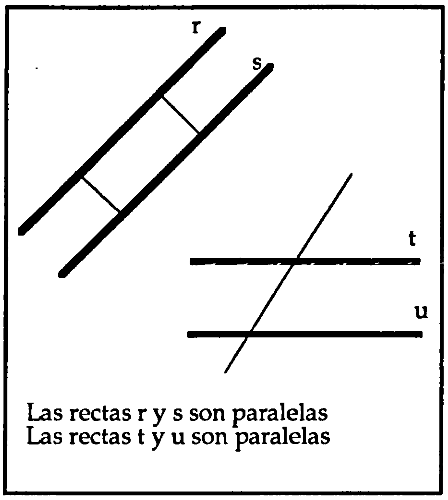
Respuesta:

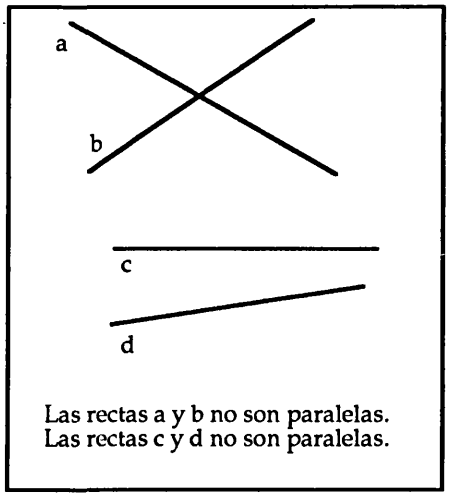
....

Una respuesta se considera de Abstracción Extendida si el estudiante pone en juego principios abstractos, externos a la información contenida en el tronco del superítem, para responder.

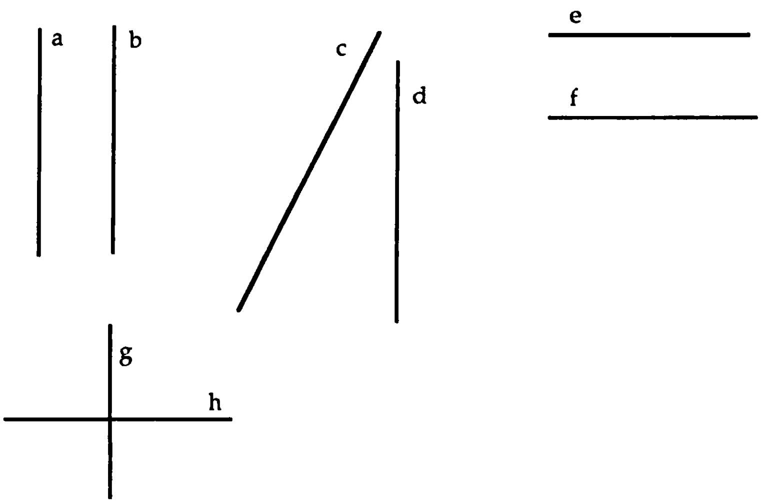
La respuesta correcta a esta cuestión, calificada como de Abstracción Extendida, supone que: 1) El estudiante generaliza la propiedad que ha de demostrar a todos los triángulos: no importa el ejemplo de triángulo que se considere, lo que se diga y se haga con un ejemplo genérico, será válido para la generalidad de los triángulos; 2) Considera algún procedimiento de demostración: trazar, por ejemplo, una paralela a uno de los lados por uno de los vértices del triángulo y prolongar los otros dos, de tal manera que dispone de dos rectas paralelas (un lado y la línea auxiliar trazada) cortadas por dos transversales (los otros dos lados) que producen ángulos que cumplen las propiedades enunciadas en el tronco del superítem; y 3) Las propiedades enunciadas en el tronco del superítem se convierten en proposiciones válidas que usa dentro de una cadena deductiva para llegar a demostrar la propiedad propuesta en esta cuestión.

Superítem 2





Cuestión 1.- ¿Cuáles de los siguientes pares de rectas son paralelas y cuáles no?



Respuesta:

Son paralelas:

....

No son paralelas:

....

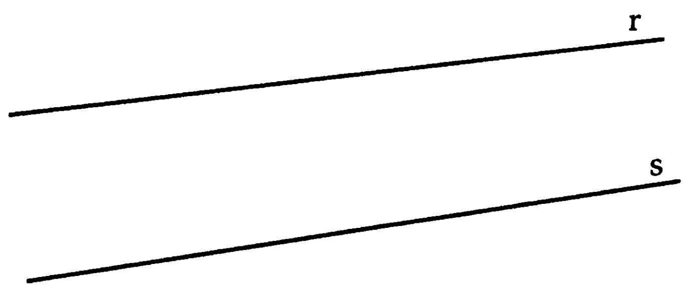
Explica por qué:

....

La identificación correcta de los pares de rectas paralelas y no paralelas dará lugar a una respuesta de nivel SOLO Uniestructural. Para ello el estudiante puede fijarse en aspectos aislados de la información contenida en el tronco como: los modelos que sirven para presentar la información sobre rectas paralelas y rectas no paralelas; "rectas que se cortan" o "rectas que no se cortan" asociadas a los conceptos «rectas no paralelas» y «rectas paralelas»; la equidistancia y/o la conservación de ángulos, etc. En todos los casos, el estudiante, al responder, sólo necesita la información que le es más próxima, produciendo así una respuesta de nivel uniestructural.

La estructura del superítem establece, por otra parte, que un estudiante al responder a una determinada cuestión demuestra capacidad de respuesta en al menos el nivel SOLO para el que dicha cuestión está planteada. Esto supone que sea posible que un estudiante al responder correctamente a esta cuestión use más de uno de los aspectos mencionados con anterioridad, por lo que la respuesta tendría carácter multiestructural o incluso que relacionase diferentes aspectos aislados, a modo de implicaciones, en relación con el paralelismo o no de las rectas (por ejemplo, diciendo que las rectas no son paralelas porque se cortan y son paralelas porque no se cortan, añadiendo que, en el primer caso al cortar con una línea transversal los ángulos que se forman no serán iguales, mientras que en el segundo se mantendrán constantes), con lo que la respuesta tendría cierta tendencia al nivel relacional. Pero, realmente la tarea en esta cuestión no lo requiere, por lo que en estos casos optaremos por calificar la respuesta como uniestructural con la esperanza de que, en las cuestiones siguientes, el estudiante demuestre su capacidad de respuesta en niveles SOLO más sofisticados.

Cuestión 2.- Aquí tienes dos rectas, **r** y **s**. ¿Cómo puedes saber si son paralelas o no lo son?

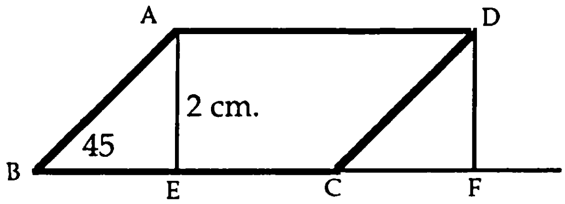


Respuesta:
....
Explica por qué:
....

Para que en esta cuestión una respuesta pueda ser considerada como Multiestructural, el estudiante ha de manejar más de un aspecto de la información que está contenida en el tronco del superítem. Decir que prolongando y viendo si se cortan o no, no producirá una respuesta multiestructural sino uniestructural, por lo que la calificaremos como no multiestructural. Entonces, para que sea considerada como tal, el estudiante deberá incluir, además, por lo menos una de las propiedades geométricas que caracterizan el paralelismo de rectas: la equidistancia y/o la conservación de los ángulos producidos al trazar una línea transversal.

Igual que antes, la tarea puede conducir a respuestas con cierta tendencia a nivel relacional pero, en aras a mantener la coherencia, actuaremos de manera similar a la cuestión anterior.

Cuestión 3.- Fíjate en la figura siguiente, el lado AD es paralelo al lado BC, el ángulo en el vértice B mide 45° y la altura AE mide 2 cm.



¿Qué segmento mide también 2 cm. y qué ángulo mide también 45°?

Respuesta:
.... mide .... 2 cm.
.... mide .... 45°.

Explica por qué:
....

Las respuestas de carácter relacional suponen una comprensión global de la información que se dispone en el tronco del superítem. Esto supone que el paralelismo de rectas está caracterizado por dos condiciones, cada una de ellas necesaria y suficiente, que son la equidistancia de las rectas y la conservación de los ángulos producidos al cortarlas por una línea transversal. En esta cuestión, el paralelismo de rectas se presenta en un contexto diferente al que se usa en el tronco del superítem, concretamente en un paralelogramo romboide, dónde se refieren los datos del problema. La respuesta correcta de nivel Relacional deberá referir la solución al paralelismo de los lados y, tomados dos a dos como rectas paralelas, a la equidistancia y a la conservación de los ángulos. La primera le dará la solución al segmento que mide igual, la segunda al ángulo/s que mide/n igual.

Las respuestas cuya solución no se refiera a estas dos propiedades no serán consideradas como relacionales ya que aunque puede que hallen el segmento y el ángulo que miden igual, de su respuesta se puede inferir que no relacionan el paralelismo de los lados del romboide con la equidistancia y la conservación de ángulos.

Cuestión 4.- Demuestra la siguiente afirmación: "Si un cuadrilátero tiene los lados paralelos dos a dos y uno de sus ángulos recto, entonces el cuadrilátero es un rectángulo".
(Puedes ayudarte de un dibujo si lo necesitas)

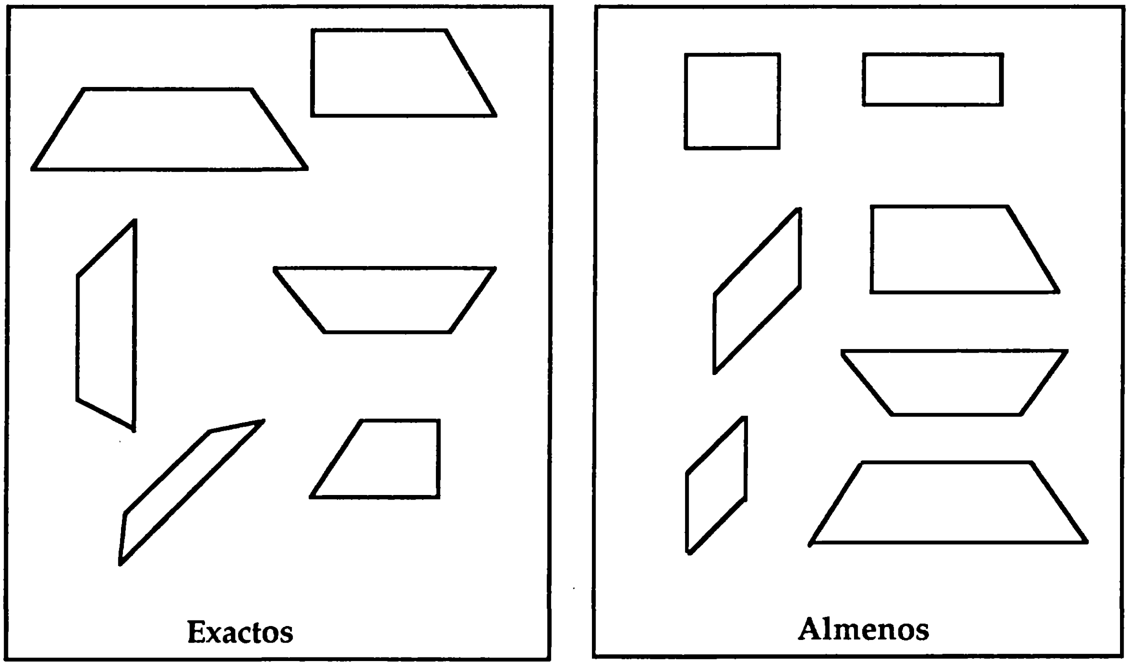
Respuesta:

....

Para dar una respuesta correcta a esta cuestión, por lo tanto considerada como repuesta de nivel de Abstracción Extendida, el estudiante ha de partir de las hipótesis del enunciado (paralelogramo con un ángulo recto) y, mediante procesos lógicos (implicaciones de carácter lógico) demostrar la tesis. Para ello: 1) Ha de considerar un ejemplo genérico de paralelogramo, no necesariamente rectángulo, en el que va a pensar; 2) Ha de diseñar un método de demostración: por ejemplo, prolongar los lados en dos vértices opuestos. Reconocer entonces que las prolongaciones actúan como líneas transversales para pares de rectas paralelas y que por tanto hay ángulos que se conservan debido al paralelismo de los lados y relaciones que se cumplen con los ángulos que comparten el mismo vértice; 3) La aplicación de la hipótesis de ser uno de los ángulos del paralelogramo recto, produce que los demás también lo sean. La tesis se deduce directamente.

Superítem 3

Definición A: Un cuadrilátero con exactamente un par de lados paralelos se llama **exacto**.
Definición B: Un cuadrilátero con al menos un par de lados paralelos se llama **almenos**.



Cuestión 1.- Dibuja un cuadrilátero **exacto**.

DIBUJO

¿En qué te fijas para dibujar el exacto?
....
Explica por qué la figura que has dibujado es un exacto:
....

En este superítem se presentan un concepto familiar a la mayoría de los estudiantes, los trapecios, mediante dos conceptos no familiares: exactos y almenos. Ambos encierran dos definiciones de la misma clase de cuadriláteros, una exclusiva y otra inclusiva, respectivamente, mediante el uso de cuantificadores. Estos conceptos se presentan también mediante el formato de ejemplos positivos de ambos.

Una respuesta correcta a esta cuestión, consistente en dibujar un cuadrilátero exacto, determinará una respuesta de nivel Uniestructural. La respuesta correcta a esta cuestión es posible manejando un único aspecto de los disponibles en la información que contiene el tronco del superítem: la definición, una propiedad derivada de la definición o un ejemplo de los que dispone en la muestra de los cuadriláteros llamados exactos. Y, si bien pueden darse respuestas con tendencia multiestructural, al usar más de un aspecto, las seguiremos calificando como respuestas de nivel Uniestructural, puesto que la tarea sólo requiere manejar un aspecto: la definición o el ejemplo.

Puede ser que el estudiante únicamente dibuje el cuadrilátero pedido y no de más explicaciones, en cuyo caso, como bien sabemos, no es posible asignar un nivel de razonamiento o un modo de funcionar a dicha respuesta, pero sí le asignaremos un nivel de respuesta SOLO Uniestructural.

Cuestión 2.- Dibuja un cuadrilátero **almenos** que no sea **exacto**.

DIBUJO

Explica por qué el cuadrilátero **almenos** que has dibujado no es **exacto**:
....

Ahora, para dibujar el cuadrilátero pedido, el estudiante ha de ser capaz de manejar dos aspectos de la información de que dispone: las dos definiciones, o las propiedades que se derivan de ellas, y/o las dos familias de ejemplos que representan las dos clases de cuadriláteros, los exactos y los almenos. Esto no supone necesariamente que el estudiante establezca relaciones entre las definiciones, aunque pudiera darse el caso, con lo que la respuesta podría considerarse relacional, o entre los ejemplos que se muestran: basta con observar qué ejemplo hay en el conjunto de los ejemplos de los almenos que no esté en los exactos, para obtener la solución; o determinar que propiedad hace que un cuadrilátero sea exacto, para que se pueda descartar del grupo de los almenos y dibujar así el cuadrilátero pedido. Es decir, una respuesta será considerada Multiestructural si el estudiante dibuja el cuadrilátero pedido y en su justificación demuestra capacidad de manejar ambos conceptos aunque no necesariamente relacionados.

Cuestión 3.- Si un amigo te dice que "todos los cuadriláteros llamados **exactos** son también cuadriláteros **almenos**", ¿crees que dice la verdad?

Respuesta:

....

Explica por qué:

....

La respuesta afirmativa a esta cuestión supone la admisión de una relación de inclusión total de la clase de cuadriláteros llamada exactos en la clase de cuadriláteros llamada almenos. En términos de ejemplos, si A es la clase de cuadriláteros almenos y E es la clase de cuadrilátero exactos, E "está contenida" en A, por lo tanto, todo ejemplo de E es un ejemplo de A y, además, hay ejemplos de A que no son ejemplos de E. En términos de definiciones, la definición de la clase A es menos restrictiva que la definición de la clase E, por lo que la primera incluye a la segunda y así, si tengo un ejemplo de cuadrilátero de la clase E, éste cumple con su definición y con la de la clase A que es menos restrictiva, por lo que también es un ejemplo de la clase A. Así que la clase E está incluida en la clase A.

Una respuesta afirmativa a esta cuestión que maneje, dentro de diferentes modos de razonar, estas relaciones, la consideraremos de un nivel SOLO Relacional.

Cuestión 4.- Recuerda que un trapecio es un cuadrilátero con por lo menos un par de lados paralelos y que un paralelogramo es un cuadrilátero con dos pares de lados paralelos.
Di si son verdaderas o falsas las proposiciones siguiente:

Proposición A: "Los trapecios pueden ser paralelogramos".
Proposición B: " Los paralelogramos son trapecios".

Respuesta:

La proposición A es:..

La proposición B es:..

Explica por qué (puedes dibujar si lo necesitas):

....

Esta cuestión retorna a clases de cuadriláteros que son ampliamente conocidas por los estudiantes y que tradicionalmente se presentan como clases disjuntas. Las definiciones que se dan permiten una clasificación inclusiva de la clase de los paralelogramos en la clase de los trapecios. Esta clasificación se presenta en términos de proposiciones, con los nexos "pueden ser" o "son", que relacionan las dos clases de cuadriláteros, de las que el estudiante ha de juzgar si son verdaderas o falsas y justificar el por qué de ello.

Una respuesta correcta a esta cuestión, diciendo que ambas proposiciones son verdaderas, la consideremos de un nivel SOLO de Abstracción Extendida porque el estudiantes es capaz de admitir la clasificación inclusiva de ambas clases de cuadriláteros y que ésta puede expresarse en términos de proposiciones. Esto supone además interpretar los nexos "pueden ser" o "son" en la misma manera que las matemáticas lo hacen.

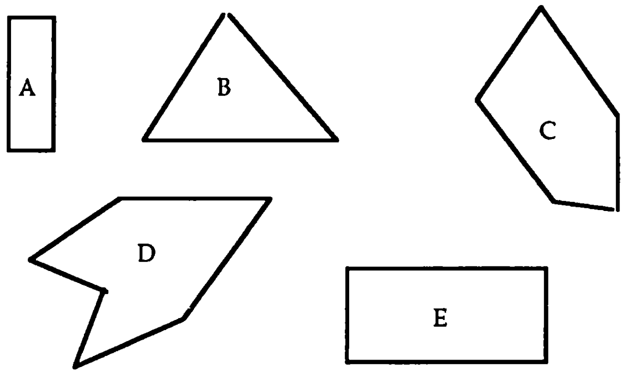
Podríamos distinguir respuestas con tendencia al nivel de Abstracción Extendida, en aquéllas en las que se reconozca como verdadera alguna de las dos proposiciones y en su justificación se pueda apreciar como el estudiante se basa en las definiciones para justificar su respuesta, mostrando en la otra un significado diferente del nexo usado por la proposición al que muestra las matemáticas. De todas formas, estas respuestas no serán consideras de abstracción extendida.

Superítem 4

Un rectángulo es un figura que tiene varias propiedades. Aquí tienes algunas:

1. Tiene cuatro lados.
2. Los lados son iguales dos a dos.
3. Los lados son paralelos dos a dos.
4. Tiene cuatro ángulos rectos.
5. Tiene dos diagonales interiores.
6. Las diagonales se cortan en el punto medio de cada una de ellas.
7. Tiene por lo menos dos ejes de simetría.

Cuestión 1.- ¿Cuál o cuáles de las figuras siguientes son rectángulos?

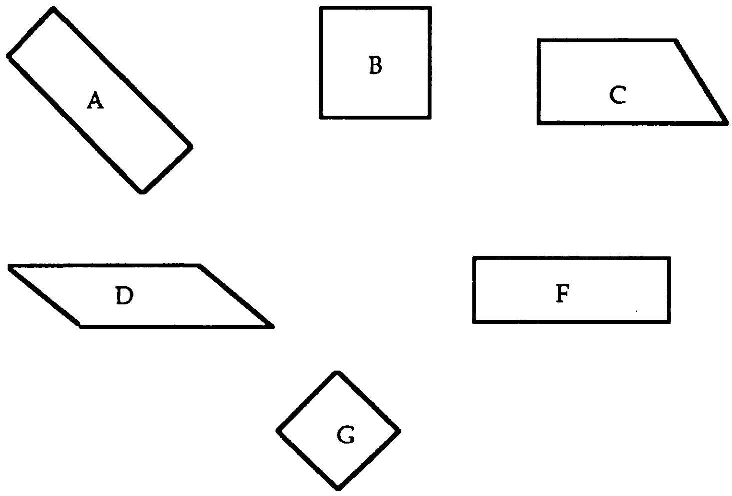


Respuesta:..................

Explica por qué:
....

Cualquier respuesta que identifique las figuras A y E como rectángulos será considerada como Uniestructural. La distinción entre diferentes respuestas uniestructurales estará en el razonamiento que el estudiante implique al justificar porqué las figuras elegidas son rectángulos. Así, es de esperar respuestas uniestructurales en las que los estudiantes solamente se fijen en la forma de las figuras para asociarlas con la palabra rectángulo; respuestas uniestructurales en las que los estudiantes se fijen en algunas propiedades aisladas (4 lados, p.ej.) para justificar la elección; o respuestas uniestructurales en las que el listado completo de propiedades sirva para discriminar los rectángulos de los demás polígonos.

Cuestión 2.- Fíjate en la lista de propiedades del rectángulo y di cuál o cuáles de las figuras siguientes es/son rectángulos:



Respuesta:..................

Explica por qué:
....

Como ya hemos explicado en el análisis de los superítems desde la perspectiva del modelo van Hiele, la inclusión o no de ejemplos de una clase de cuadriláteros como ejemplos de otra clase y el reconocimiento o no de un ejemplo de una clase de cuadriláteros por su forma u orientación, determinan razonamientos que oscilan desde el nivel 1 hasta el nivel 3. Pero desde la Taxonomía SOLO, la elección correcta de los rectángulos, tanto si incluyen o no a los cuadrados en dicha elección, determinarán respuestas Multiestructurales ya que los estudiantes deben manejar más de un aspecto de los que determine su razonamiento para realizar la elección. En la cuestión anterior, la forma o el número de lados del polígono, etc. era suficiente para obtener una respuesta correcta, y por tanto Uniestructural. Ahora, la forma ha de ser contrastada con otras que "parecen" rectángulos y hay propiedades que cumplen unos cuadriláteros y otros no, y no es suficiente con una única propiedad para discriminar una forma de las demás. La distinción entre unas y otras respuestas multiestructurales estarán basadas en qué figuras escogen los estudiantes como rectángulos y qué fuente de información usan para justificar la elección.

Cuestión 3. - Imagínate que debes escoger, de entre las 7 propiedades del enunciado, el menor número posible de ellas de manera que si una figura cumple las propiedades que has escogido, entonces es un rectángulo. ¿Cuáles escogerías?

Respuesta:..................

Explica por qué:

....

Una respuesta a esta cuestión se considerará Relacional si el estudiante admite que el listado de propiedades que dispone en el tronco del superítem puede ser más corto, de tal manera que el nuevo listado sigue caracterizando a la clase de cuadriláteros llamada rectángulo. De esta manera, el estudiante demuestra una comprensión más o menos integrada, en relación con su modo de razonar o nivel de razonamiento, del papel que tienen las propiedades al caracterizar una determinada clase de figuras y no solamente como propiedades aisladas unas de otras que cumple cierta clase de cuadriláteros llamados rectángulos.

Cuestión 4.- Basándote en la cuestión anterior, trata de dar una definición del rectángulo.

Respuesta:..

Una respuesta se considerará de Abstracción Extendida si el estudiante define el rectángulo como un conjunto de condiciones necesarias y suficientes. La cantidad de propiedades que incluya en el conjunto de condiciones no será relevante para determinar si la respuesta es o no es de Abstracción Extendida, aunque sí pueda darnos diferentes niveles de abstracción extendida. En cambio sí lo será que el estudiante incluya en su definición aquellas propiedades que realmente definan a la clase de cuadriláteros llamada rectángulo en coherencia con su respuesta anterior donde escogió un menor número de propiedades que caracterizaban a los rectángulos.

Superítem 5

Aquí tienes definiciones de algunas figuras:

<u>Cuadrilátero</u>: Figura plana limitada por 4 lados.
<u>Cuadrado</u>: Cuadrilátero con los 4 lados iguales y los 4 ángulos iguales.
<u>Rectángulo</u>: Cuadrilátero con los 4 ángulos iguales y los lados iguales dos a dos.
<u>Rombo</u>: Cuadrilátero con los 4 lados iguales y los ángulos iguales dos a dos.
<u>Romboide</u>: Cuadrilátero con los lados iguales dos a dos y los ángulos iguales dos a dos.

Cuestión 1.- Dibuja un Cuadrilátero.

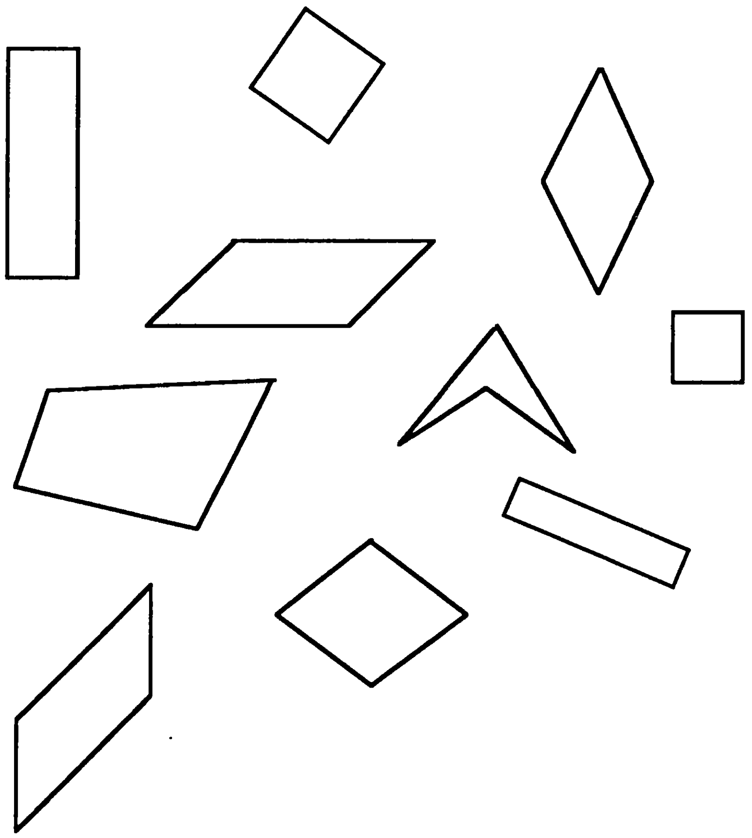
DIBUJO

¿En qué te fijas para dibujar un cuadrilátero?
....

Explica por qué la figura que has dibujado es un cuadrilátero:
....

Una respuesta correcta a esta cuestión, consistente en dibujar un cuadrilátero, producirá una respuesta de nivel Uniestructural ya que el estudiante únicamente requiere manejar un aspecto aislado de los que caracterizan su razonamiento para responder correctamente a la cuestión. Este aspecto del que hablamos puede variar desde la palabra cuadrilátero, a un ejemplo concreto de cuadrilátero, a la definición de cuadrilátero. Cada caso requiere niveles de razonamiento distintos, pero las diferentes respuestas son siempre uniestructurales.

Cuestión 2- En los siguientes cuadriláteros pon una **R** en los que creas que son rombos y una **T**, en los que creas que son rectángulos.



Explica por qué la/s figura/s que has seleccionado son rombos o rectángulos:
....

Responder correctamente a esta cuestión exige del estudiante el manejo de dos aspectos aislados de los que usa en su razonamiento y, por consiguiente, la respuesta es Multiestructural. Sólo debe fijarse en dos conceptos: rombo y rectángulo. Así que, escogerlos correctamente, requiere reconocerlos en alguna de estas situaciones: por la forma, por las definiciones aportadas por el tronco del superítem, o por algunas propiedades aisladas derivadas de las definiciones o asociadas a las formas. Nuevamente, la inclusión de los cuadrados en una o ambas clases de cuadriláteros no supone un nivel de respuesta distinto del multiestructural, aunque el razonamiento implicado sea superior al que se utiliza si la elección se realiza en clases disjuntas.

Cuestión 3.- Indica qué tendrías que hacer para convertir un romboide en rombo y, después, el rombo en cuadrado. (Si quieres o lo necesitas, puedes hacer dibujos)

Respuesta:

Para pasar de romboide a rombo:

....

Después, para pasar de rombo a cuadrado:

....

Una respuesta correcta a esta cuestión en la que el estudiante maneja toda la información contenida en el tronco del superítem, la analiza y ve que es posible partir de la definición de una clase de cuadriláteros y, modificando unas condiciones, manteniendo constantes otras, es posible obtener la definición de otra clase de cuadriláteros, será considerada como Relacional. Así, por ejemplo, para pasar de romboide a rombo, el estudiante tendrá que partir de la definición de romboide y, al contrastarla con la de rombo, ver que lo que les diferencia es la igualdad de los lados (dos a dos, menos restrictiva, y todos iguales, más restrictiva). Así que lo que habría que hacer para transformar un romboide en un rombo es hacer todos los lados del romboide iguales. Al tener los ángulos iguales dos a dos, el romboide se convertiría en rombo. De manera análoga se obtendría una repuesta relacional al comparar los conceptos de rombo y cuadrado.

Cuestión 4.- Aquí tienes algunas relaciones posibles entre los cuadriláteros que hemos definido en el enunciado:

a) Todos los cuadrados son romboides especiales.
b) Algunos rombos son cuadrados.
c) Los cuadrados no son rectángulos especiales.
d) Hay romboides que pueden ser cuadrados, rectángulos o rombos.

Para cada relación, di si la consideras verdadera o falsa y **explica por qué**. (Recuerda las definiciones que hemos dado y que puedes dibujar si lo necesitas)

Respuesta:

a) Es ...., porque ....
b) Es ...., porque ....
c) Es ...., porque ....
d) Es ...., porque ....

El principio abstracto inducido por el desarrollo del test que determina que una respuesta sea considerada como de Abstracción Extendida o no, es la aceptación o no por los estudiantes de las distintas clasificaciones inclusivas que se proponen en esta cuestión.

La propuesta de clasificación está formulada en términos de proposiciones del estilo "**Todos** los A **son** B", inclusión total de la clase de cuadriláteros A en la clase de cuadriláteros B; "**Algunos** A **son** B", inclusión parcial de la clase A en la clase B, o en términos de ejemplos, hay ejemplos de la clase de cuadriláteros A, pero no todos, que son ejemplos de la clase B, de tal manera que la respuesta correcta a esta cuestión supondrá, ademas, comprender el lenguaje usado en dichas proposiciones. No será suficiente con que el estudiante responda con unos escuetos verdadero o falso, la consideración de la respuesta como de abstracción extendida exigirá, además, el uso de las definiciones dadas en el tronco del superítem para explicar por qué las relaciones las juzga verdaderas o falsas.

V. 3 Administración del test

V. 3. 1 *Organización de la administración del test.*

A cada grupo de estudiantes, de la muestra finalmente escogida, se le administró, por parte del investigador y con la ayuda de los profesores correspondientes, un cuadernillo con los cinco superítems que debía responder. Disponían de las herramientas de dibujo (regla, escuadra, compás y transportador) para utilizarlos cuando creyeran necesario. El orden de resolución de los superítems se correspondía con la numeración de los mismos, numeración que, a su vez, respondía al interés del investigador en la obtención de respuestas mitigando en lo posible el cansancio del estudiante tras la resolución de los primeros superítems. Antes de comenzar a contestar al test, se dieron algunas instrucciones sobre la estructura del superítem y lo que éstos requerían del estudiante. Finalmente, los estudiantes dispusieron de una hora para resolver el test, dentro de su horario normal de clases, aunque la disponibilidad de profesores, alumnos y centros permitió, en algunos casos, que este margen de tiempo se ampliase con algunos minutos más.

La intervención que el investigador y el profesor colaborador de cada grupo tuvieron a la hora de administrar el test, se limitó a explicar la estructura del mismo y a resolver dudas que en ningún caso tenían que ver con el contenido geométrico del test.

V. 3. 2 *Los estudiantes*

Inicialmente, la muestra de estudiantes a los que se pensó administrar el test cubría diferentes niveles educativos: Enseñanza Primaria, Secundaria Obligatoria y BUP. La disponibilidad hizo que, además de estos niveles educativos, el test se pasase a estudiantes de 3º de Matemáticas, de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Valencia, lo que proporcionó una riqueza mayor de respuestas, fundamentalmente en los niveles de van Hiele y SOLO más altos.

La tabla siguiente resume la información sobre la muestra de estudiantes, así como el número de tests analizados y los centros en los que se administraron los instrumentos de evaluación.

Centro	Nivel	Curso	Edad aprox.	Tests analizados
Rosa Llàcer	Primaria	6º	11-12 años	20
IFP Quart	Secundaria	4º	15-16 años	19
IB Baleares	Bachillerato	C.O.U.	17-18 años	23
Fac. Matemá.	2º Ciclo Univ.	3º	20-22 años	12
TOTAL				74

Tabla V.1 Número de estudiantes y niveles educativos implicados en la investigación

Estos estudiantes no siguieron ningún curso específico sobre geometría plana, ni fueron avisados con anterioridad de que iban a completar un test cuyo contenido íntegro pertenecía a esta disciplina, por lo que no se prepararon para ello. Sencillamente, resolvieron el test a partir de los conocimientos que disponían de las lecciones que sobre geometría plana habían cursado con anterioridad.

V. 3. 3 *Codificación y determinación de los niveles de razonamiento de van Hiele de los estudiantes.*

Al establecer el marco teórico de referencia en relación con el modelo de van Hiele, dejamos también establecido el marco de referencia para la evaluación de las respuestas al test y la asignación de niveles de razonamiento a los estudiantes. Este marco contempla dos nociones principales, el tipo de respuesta a una cuestión dada y el grado de adquisición de un nivel de razonamiento (Capítulo III, págs. 31-35). El tipo de respuesta tiene que ver con la calidad matemática de la misma, medida ésta en el contexto en el que se desenvuelve el razonamiento del estudiante. De esta manera, por ejemplo, si la demostración en el segundo nivel de razonamiento de van Hiele, se describe por el establecimiento de ejemplos que tratan de verificar lo que se tiene que demostrar, el tipo más alto (tipo 7) se asignará si el estudiante construye varios ejemplos, con características diferentes, en los que verifica que lo que quiere demostrar es cierto. En cambio, en el nivel 4 de razonamiento, el tipo más alto se asignará cuando el estudiante use argumentos deductivos, lógico-formales, que le conduzcan, sin error, a la conclusión pedida (Corberán, Huerta y otros, 1994).

De esta forma, el proceso de evaluación del nivel de razonamiento[5] de un estudiante comienza por asignar el nivel de razonamiento y el tipo de respuesta a cada una de las respuestas que da a las 20 cuestiones que componen el test escrito. Esto proporciona una tabla de datos como la siguiente (Tabla V.2) en la que puede verse la asignación de nivel y tipo a cada una de las respuestas dadas por un estudiante usado en este caso como ejemplo.

[5] Una información más detallada de este proceso puede hallarse en Jaime (1993)

Ítem	Nivel	Tipo
1.1	2	6
1.2	2	4
1.3	2	4
1.4		0
2.1	2	6
2.2	2	6
2.3	2	5
2.4		0
3.1	2	7
3.2	2	4
3.3	3	2
3.4	2	5
4.1	2	7
4.2	3	4
4.3	3	4
4.4	3	3
5.1	2	3
5.2	2	4
5.3		0
5.4		0

Tabla V.2. Ejemplo de tabla de datos con la asignación de niveles de razonamiento y tipos de respuesta.

Una vez asignado el nivel y el tipo, se continua el proceso observando en conjunto las respuestas a los diferentes ítems que pueden ser contestados en un determinado nivel y ponderando cada respuesta en función de su tipo, según los valores de la Tabla V.3.

Tipo	0	1	2	3	4	5	6	7
Ponderación	0	0	20	25	50	75	80	100

Tabla V.3. Ponderaciones de los diferentes Tipos de respuesta. Un ejemplo.

Puesto que para cada cuestión se establece un rango de niveles de razonamiento potencial en el que dicha cuestión puede ser contestada, para determinar el grado de adquisición por el estudiante de un nivel de razonamiento n (con n=1, 2, 3, y 4), habrá que considerar todos aquellos niveles de razonamiento y tipos de las respuestas dadas a las cuestiones que pueden ser contestadas en el nivel n.

Así, Tabla V.4, como las cuestiones 1.1, 1.2, 2.1, 2.2, 2.3, 3.1, 3.2, 4.1, 5.1, 5.2 y 5.3 miden por lo menos el nivel 1, para determinar el grado de adquisición de dicho nivel habrá que considerar el nivel y tipo de respuesta dadas a todas esas cuestiones; para el nivel 2, las respuestas a la totalidad de las 20 cuestiones que constituyen el test; para el nivel 3, las respuestas a las cuestiones 1.3, 1.4, 2.2, 2.3, 2.4, 3.3, 2.4, 4.2, 4.3, 4.4, 5.2, 5.3 y 5.4 y finalmente, para el nivel 4, las respuestas a las cuestiones 1.4, 2.4 y 3.4[6].

Nivel (n) de van Hiele	Cuestiones núm.
$1 \leq n \leq 2$	1.1, 1.2, 2.1, 2.2, 2.3, 3.1, 3.2, 4.1, 5.1, 5.2 y 5.3
$n=2$	Todas
$n \leq 3$	1.3, 1.4, 2.2, 2.3, 2.4, 3.3, 2.4, 4.2, 4.3, 4.4, 5.2, 5.3 y 5.4
$2 \leq n \leq 4$	1.4, 2.4 y 3.4

Tabla V.4. Rango de niveles de razonamiento y las cuestiones que los miden.

Finalmente, la media aritmética de los pesos de las diferentes cuestiones asociadas con un nivel dado nos da el Grado de adquisición de ese nivel de razonamiento. Se tratará de valores comprendidos entre 0 y 100, dándonos una idea del momento en el que se encuentra el estudiante en el proceso de adquisición de ese nivel de razonamiento de van Hiele. Veámoslo con el ejemplo antes citado. La tabla V.2 recoge la asignación de niveles y tipos. Para realizar la ponderación, es necesario asumir algunos criterios. Así, si una cuestión, como la cuestión 2.3 por ejemplo, es posible responderla en

[6] Dado que a los estudiantes de enseñanza primaria no se les evaluó en el nivel 4, estas cuestiones no se tuvieron en cuenta en su evaluación, pero sí las que tienen que ver con los niveles inferiores.

niveles 1 al 3 y a la respuesta del estudiante se le asigna un nivel 2 y un tipo 5, asumimos, de acuerdo con la secuencialidad de los niveles de van Hiele, que hay una adquisición completa del nivel 1, por lo que ponderamos con 100 en ese apartado, mientras que ponderamos con 0 la adquisición del nivel 3 porque el estudiante no contesta a la cuestión usando habilidades de razonamiento de este nivel. La tabla siguiente (Tabla V. 5) recoge la ponderación de los niveles y tipos del ejemplo que estamos usando.

Ítem	Nivel	Tipo	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
1.1	2	6	100	80	----	----
1.2	2	4	100	50	----	----
1.3	2	4	----	50	0	----
1.4		0	----	0	0	0
2.1	2	6	100	80	----	----
2.2	2	6	100	80	0	----
2.3	2	5	100	75	0	----
2.4		0	----	0	0	0
3.1	2	7	100	100	----	----
3.2	2	4	100	50	----	----
3.3	3	2	----	100	20	----
3.4	2	5	----	75	0	0
4.1	2	7	100	100	----	----
4.2	3	4	----	100	50	----
4.3	3	4	----	100	50	----
4.4	3	3	----	100	25	----
5.1	2	3	100	25	----	----
5.2	2	4	100	50	0	----
5.3		0	0	0	0	----
5.4		0	----	0	0	----
GRAD.			90.91	60.75	11.15	0

Tabla V.5. Asignación del grado de adquisición de los niveles de razonamiento. Un ejemplo.

La tabla anterior proporciona un vector de cuatro componentes (90.91, 60.75, 11.15, 0) cuya interpretación cualitativa, basada en la subdivisión del segmento representado en la fiura siguiente (figura V. 1)

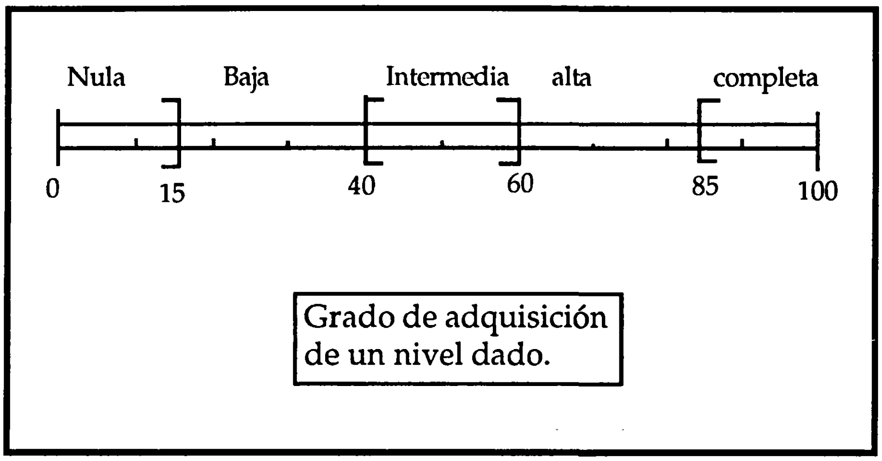


Figura V. 1 Ejemplo de subdivisión del segmento que representa el grado de adquisición de un nivel de razonamiento de van Hiele dado.

nos hace ver que este estudiante tiene una adquisición completa (C) de las habilidades de razonamiento del nivel 1, una adquisición alta (A) del nivel 2 y nula (N) de los niveles 3 y 4. Esto nos proporciona un nuevo vector de cuatro componentes, cualitativas y ordenadas, que recoge el grado de adquisición de cada nivel de razonamiento por el estudiante del ejemplo (C,A,N,N).

La descripción metodológica que hemos presentado sirve no sólo en el contexto de esta investigación sino en cualquier contexto dónde se usen los niveles de van Hiele. Otras investigaciones lo han usado en este sentido, como Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991) y Guillén (1997)[7] en geometría espacial; Jaime (1993), en isometrías del plano y Corberán, Huerta y otros (1994) en polígonos y pueden consultarse para mayor detalle.

V. 3. 4 *Codificación y asignación de niveles SOLO a los estudiantes.*

La construcción de las cuestiones de los superítems, siguiendo los criterios anotados en la sección V.2.2 de este capítulo, proporciona una primera aproximación a la manera en la que hemos asignado niveles de respuesta SOLO a los estudiantes. Así, en cada superítem, una respuesta correcta a la primera cuestión supondrá que el estudiante es capaz de responder en, al menos, el nivel Uniestructural (U) del modo de funcionar que esté usando. Una respuesta correcta a la segunda cuestión supondrá que el estudiante es capaz de responder en, al menos, el nivel Multiestructural (M) del modo de

[7] Tesis doctoral en preparación.

funcionar que en ese momento está usando. Del mismo modo, supondremos niveles de respuesta Relacional (R) y de Abstracción extendida (A), cuando el estudiante responda correctamente a las cuestiones 3ª y 4ª, respectivamente.

Como es de esperar, los diferentes niveles SOLO de respuesta están relacionados con el modo de funcionar del estudiante. Es decir, puede darse respuesta Uniestructural en diferentes modos de funcionar, para estudiantes diferentes. Veamos el siguiente ejemplo:

Cuando a un estudiante se le pregunta por el valor del ángulo G en la figura siguiente (superítem 1, cuestión 1):

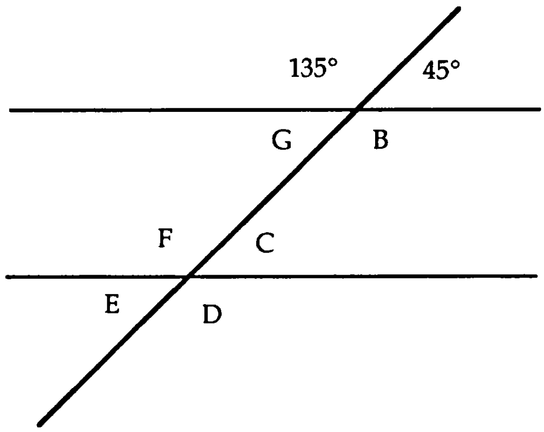


Figura 2

puede responder: "G= 45° porque son ángulos opuestos por el vértice", o puede responder; "G=45° porque G está al lado de A y entonces mide 45° como A".

Ambas respuestas son Uniestructurales ya que los estudiantes responden correctamente a la cuestión que se les propone. Pero usan distintos modos de funcionar, razonamientos, para justificar su respuesta. Por tanto, a la hora de asignar un nivel SOLO a los estudiantes en esta cuestión, ha sido necesario diferenciar unas respuestas uniestructurales de otras en razón del razonamiento usado por ellos para justificar sus respuestas. Esta distinción la hemos codificado con subíndices para la variable U, que indica, por otra parte, respuesta uniestructural. De esta manera hemos distinguido respuestas U_i con i= 0, 1, 2..., para las diferentes cuestiones cuyas respuestas son uniestructurales y que indican diferentes razonamientos que conducen a dichas respuestas. De igual forma se ha hecho con las respuestas multiestructurales, M_i con i= 0, 1, 2...; relacionales, R_i con i= 0, 1, 2... y de abstracción extendida, A_i con i= 0, 1, 2... Si un estudiante, por otra parte, no responde correctamente a la cuestión n, con n= 1, 2, 3, 4, se le asigna el nivel SOLO que corresponda a la cuestión n-1. Si n=1, el nivel asignado es el nivel Prestructural (P).

De esta manera a cada estudiante se le asocia, para cada superítem, un vector de 4 componentes cualitativas y ordenadas, constituyendo su evaluación SOLO en dicho superítem. Así, por ejemplo, para el estudiante C8, la evaluación correspondiente al superítem 2 está constituida por el vector (U_0,M_0,R_2,nA) que indica que este estudiante ha respondido hasta el nivel relacional, justificándose en los dos primeros con las características dadas por el subíndice 0 y, en el relacional, por las características dadas por el subíndice 2, no consiguiendo, no obstante, una respuesta de nivel de abstracción extendida.

Puestos estos vectores juntos, uno por cada superítem, a cada estudiante le corresponde una matriz 5x4 que recoge su evaluación a lo largo de todo el test. Así, por ejemplo, el estudiante C8 tiene asociada la matriz que proporciona la tabla siguiente:

ALUMNO C8	cuestión 1	cuestión 2	cuestión 3	cuestión 4
Superítem 1	U_2	M_2	R_2	nA
Superítem 2	U_0	M_0	R_2	nA
Superítem 3	U_0	M_0	R_0	nA A_{10}
Superítem 4	U_0	M_1	R_3	A_3
Superítem 5	U_0	M_1	R_0	nA

Tabla V.6 Ejemplo del resultado de la evaluación SOLO de un estudiante.

Dispuestos todos los resultados de un estudiante en una tabla, como la Tabla V.6, se procede a asignar a cada estudiante un único nivel SOLO que indique su capacidad de respuesta a lo largo de todo el test. Con este fin, hemos de decidir qué criterios vamos a seguir para poder asignar a un estudiante un nivel SOLO (S). Nos decidimos por dos criterios cuyos niveles de exigencia permiten a los estudiantes cometer a lo sumo dos fallos y, por lo tanto, responder en al menos 3 (≥ 60% de las cuestiones) de las cinco cuestiones que evalúan tanto el nivel S como los niveles anteriores. Así, se consideran los criterios siguientes:

1) Criterio 1. A un estudiante se le asignará un nivel SOLO S, siendo S el nivel Uniestructural, Multiestructural, Relacional o Abstracción extendida, si responde correctamente a todas las cuestiones que miden los niveles SOLO anteriores a S y en éste el número máximo de respuestas que no corresponden a este nivel es una.

Así, al estudiante C8 (Tabla V. 6) se le asignará el nivel Relacional (REL) pues cumple el criterio en este nivel y en los anteriores y, en cambio, en el de abstracción extendida (ABS), el número de respuestas que no han sido calificadas como tal es de 3.

2) Criterio 2. A un estudiante se le asignará un nivel SOLO S, siendo S el nivel Uniestructural, Multiestructural, Relacional o Abstracción extendida, si responde correctamente a todas las cuestiones que miden los niveles SOLO anteriores a S y en éste el número máximo de respuestas que no corresponden a este nivel es dos.

Así, mientras el estudiante C8 mantiene la misma asignación de nivel SOLO con ambos criterios, al estudiante C6 (Tabla V. 7) le asignamos el nivel Multiestructural (MUT) con el primer criterio, pues en respuestas de nivel relacional hay más de una que no corresponde a ese nivel y el nivel Relacional (REL), con el segundo criterio, como puede verse en la siguiente tabla que corresponde a su evaluación SOLO:

ALUMNO C6	cuestión 1	cuestión 2	cuestión 3	cuestión 4
Superítem 1	U_1	M_1	R_3	nA
Superítem 2	U_1	M_1	nR	nA
Superítem 3	U_0	M_0	R_0	nA A_{10}
Superítem 4	U_0	M_2	nR	nA
Superítem 5	U_0	M_1	R_1	nA

Tabla V.7 Resultado de la evaluación SOLO del estudiante C6

Finalmente hay que decir que la asignación de los niveles SOLO y, concretamente los subíndices a dichos niveles, dependen de la respuesta de los estudiantes. En aras a la homogeneidad en la corrección de los superítems, se ha construido un listado, ver Anexo II de descriptores de respuesta, particular en el contexto en el que se desarrolla esta investigación, que determina el criterio que hemos usado a la hora de asignar los distintos subíndices a los niveles de respuesta SOLO, correspondientes a las diferentes respuestas de los estudiantes.

V. 3. 5 *Evaluación conjunta y análisis de resultados.*

La evaluación final de un estudiante consistirá en un vector de dos componentes (P, S), siendo P= El grado de adquisición de un nivel de razonamiento o su perfil de razonamiento y S= el nivel de respuesta SOLO. El primero, indicará cuales son las habilidades de razonamiento que ha mostrado el estudiante a lo largo de todo el test y el segundo, el nivel de respuesta SOLO que dicho estudiante ha logrado y que determinará la calidad de su aprendizaje desde el punto de vista de la Taxonomía SOLO.

El conjunto de datos que nos proporciona el instrumento de evaluación y los puntos de vista desde los cuales se elaboran, nos permitirán realizar tres tipos de análisis:

A) Perfiles de razonamiento identificados.

La evaluación de los estudiantes desde el punto de vista del modelo de van Hiele y la subsiguiente asignación de niveles de razonamiento y tipos de respuestas, nos conducirá a la determinación de los diferentes grados de adquisición de los niveles de razonamiento y a los diferentes perfiles de razonamiento identificados.

Una análisis cualitativo de los datos que describen los diferentes perfiles de razonamiento, nos conducirá a una estratificación de la muestra de estudiantes por perfiles de razonamiento.

B) Niveles SOLO identificados.

La evaluación de los estudiantes desde el punto de vista de la Taxonomía SOLO y la consiguiente asignación de los niveles SOLO, nos llevará a un primer análisis cualitativo de los datos que describirá los resultados del comportamiento de los estudiantes en cada uno de los superítems. Este análisis se podrá realizar desde dos perspectivas, teniendo en cuenta o no el perfil de razonamiento de los estudiantes.

C) Análisis comparado perfil de razonamiento vs nivel SOLO.

El conjunto de vectores de dos componentes (P, S), descrito anteriormente, permitirá establecer si existe algún tipo de relación entre los resultados que describen la componente P y la componente S de la evaluación de los estudiantes. Esta relación, si existe, permitirá explicar cualitativamente una componente, perteneciente a un marco teórico de los dos que manejamos en esta parte de la investigación, en función de la otra, perteneciente al otro marco teórico considerado. En consecuencia, si todo ello es posible, podremos interpretar mejor algunos aspectos que caracterizan a ambos marcos teóricos y que ya señalamos en los objetivos que perseguimos con nuestra investigación.

CAPÍTULO VI

Resultados de las relaciones van Hiele - SOLO

VI. 1 Introducción

En este capítulo pretenderemos mostrar los resultados obtenidos tras la evaluación de los estudiantes usando tanto los criterios van Hiele como la Taxonomía SOLO descritos en capítulos anteriores.

Los resultados los presentaremos divididos en cuatro partes. La primera, se corresponderá con los resultados derivados de la evaluación van Hiele, determinando los perfiles y subperfiles de razonamiento de los estudiantes evaluados. La segunda parte, tendrá que ver con los resultados obtenidos de la evaluación de los estudiantes según la Taxonomía SOLO, por superítems y por perfiles de razonamiento. La tercera parte, mostrará los resultados derivados de la asignación de niveles SOLO y la cuarta y última parte, presentará y discutirá los resultados de las relaciones obtenidas entre los niveles de van Hiele y los niveles SOLO asignados. Cerraremos esta presentación de los resultados, mostrando los índices que pretenden validar los ítems que constituyen el instrumento de evaluación.

VI. 2 Resultados de la evaluación de los niveles de razonamiento: Perfiles de razonamiento de van Hiele identificados

En las tablas RH_i, con i= 1, 2, 3 y 4, del Anexo III de esta memoria puede verse la asignación de los grados de adquisición de los niveles de razonamiento de cada uno de los estudiantes evaluados. Inicialmente, a partir de los resultados obtenidos, pueden identificarse cinco grandes perfiles de razonamiento de van Hiele, en función de si el grado de adquisición de un nivel de razonamiento es completo o no lo es. Las tablas siguientes, muestran la distribución de los estudiantes evaluados en estos cinco perfiles:

Grado de adquisición	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Completa	51	18	1	0
Alta	20	20	9	1
Intermedia	3	16	8	0
Baja	0	17	18	4
Nula	0	3	38	69
Totales	74	74	74	74

Tabla VI. 1 Grado de adquisición de niveles de razonamiento por los estudiantes: Frecuencias.

Grado de adquisición	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Completa	68.9	24.3	1.4	0
Alta	27.0	27.0	12.2	1.4
Intermedia	4.1	21.6	10.8	0
Baja	0	23.0	24.3	5.4
Nula	0	4.1	51.4	93.2
Totales	100	100	100	100

Tabla VI. 2 Grado de adquisición de niveles de razonamiento por los estudiantes: Porcentajes.

Los resultados anteriores muestran que la mayoría de estudiantes evaluados tenían una adquisición alta o completa de las habilidades de razonamiento del nivel 1, mientras que una porcentaje similar de ellos carecían de las habilidades de razonamiento correspondientes del nivel 4. Esto significa que hemos manejado una muestra de estudiantes cuyo razonamiento puede englobarse mayoritariamente en los niveles 1 y 2 (95.9% de estudiantes con un grado de adquisición completo o alto del nivel 1 y 51.3% de estudiantes con un grado de adquisición completo o alto del nivel 2) con algunos indicios de razonamiento del nivel 3 (24.4% de estudiantes con un grado de adquisición al menos intermedio de nivel 3). Es destacable, por otro lado, el alto porcentaje de estudiantes con una nula adquisición de las habilidades de razonamiento del nivel 3 (el 51.4%) y del nivel 4 (el 93.2%).

Esta primera distribución de los estudiantes evaluados la hemos organizado en tres grandes perfiles:

- **Perfil 1**: Estudiantes con un grado de adquisición completo de niveles 1 y 2 de van Hiele.

- **Perfil 2**: Estudiantes con un grado de adquisición completo del nivel 1 de van Hiele, pero no del nivel 2.

- **Perfil 3**: Estudiantes con un grado de adquisición no completo del nivel 1 de van Hiele.

La tabla siguiente resume las características de los perfiles y los datos relativos a estos perfiles.

PERFILES	DESCRIPTOR DEL PERFIL	FRECUENCIAS (F)	PORCENTAJES (%)
PERFIL 1	CC##	18	24.3
PERFIL 2	C###	33	44.6
PERFIL 3	####	23	31.1
	TOTALES	74	100

C= Adquisición completa de un nivel de razonamiento
#= Adquisición no completa de un nivel de razonamiento

Tabla VI. 3 Perfiles de razonamiento identificados.

Por otra parte, como ya hemos discutido en capítulos anteriores, la consideración de la continuidad de los niveles de van Hiele obliga a que la distribución de los estudiantes considerando sólo las habilidades de razonamiento de un único nivel no sea razonable. Es necesario pues hacer una distribución de los estudiantes en perfiles de razonamiento más fina que la anterior, ya que es posible que nos encontremos con estudiantes que, teniendo una adquisición completa de las habilidades de razonamiento de un nivel n, muestren, por ejemplo, una adquisición alta o nula del nivel n+1. Por tanto, esta distinción es necesaria ya que no es razonable considerar como comportamientos análogos ambos casos.

La tablas y gráficos siguientes resumen la distribución de los estudiantes atendiendo al vector de cuatro componentes que determina sus grados de adquisición de los diferentes niveles de razonamiento de van Hiele. Hemos distribuido los 74 estudiantes que componen la muestra en 3 grupos principales que demuestran habilidades de razonamiento diferentes caracterizados por los perfiles 1, 2 y 3 (33.3%, 50% y 16.7%, respectivamente) y, a su vez, éstos han sido distribuidos en 14 subperfiles, atendiendo a lo que hemos comentado en el párrafo anterior. Los porcentajes de estudiantes que corresponden a cada perfil y subperfil, pueden verse en las tablas siguientes.

ESTUDIANTES CON EL PERFIL 1.

Descriptor general del perfil: **Adquisición Completa de los niveles 1 y 2 de van Hiele.**

PERFILES: Grado de adquisición de los niveles 3 y 4	FRECUENCIAS	% SOBRE PERFIL 1	% SOBRE TOTAL
1.1 CCCA[1]	1	5.5	1.4
1.2 CCAB	3	16.7	4.05
1.3 CCAN	6	33.3	8.1
1.4 CCI# (#= Baja (1) o Nula)	5	27.8	6.8
1.5 CCBN	3	16.7	4.05
TOTAL	18	100	24.3

C= Adquisición completa de un nivel de razonamiento
A= Adquisición alta de un nivel de razonamiento
I= Adquisición intermedia de un nivel de razonamiento
B= Adquisición baja de un nivel de razonamiento
N= Adquisición nula de un nivel de razonamiento

Tabla VI. 4. Subperfiles razonamiento identificados en el perfil 1.

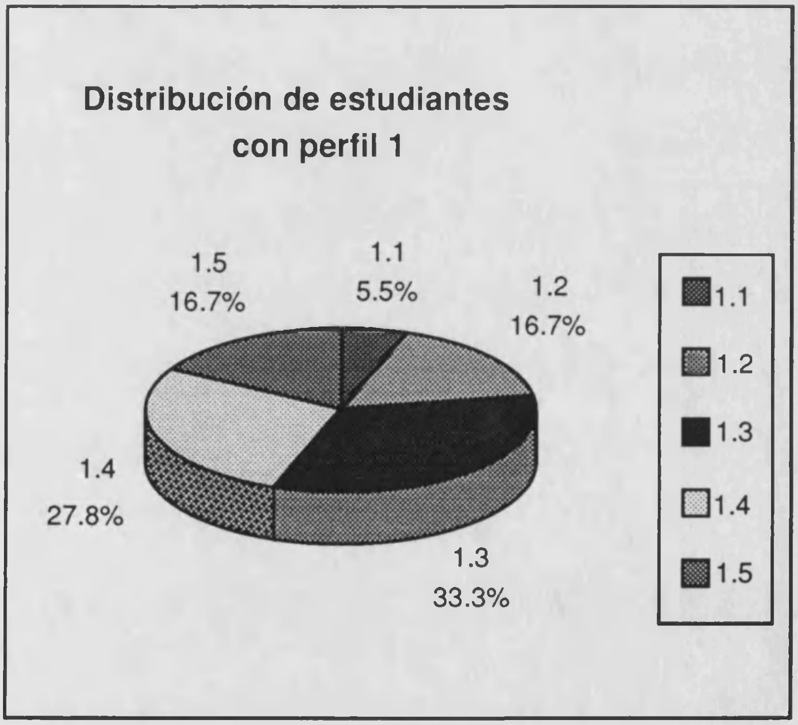


Gráfico VI. 1 Gráfico en el que se muestran los cinco subperfiles de razonamiento identificados en los estudiantes con el perfil 1.

[1] En nuestro análisis, este estudiante formará parte, junto a los estudiantes del subperfil 2, en un único subperfil de razonamiento, el 1.1. Por tanto, el número de subperfiles que se van a considerar serán 4, como puede verse en la tabla R1 del Anexo III de esta memoria.

ESTUDIANTES CON EL PERFIL 2.

Descriptor general del perfil: **Adquisición Completa del Nivel 1 de van Hiele.**

PERFILES: Grado de adquisición de los niveles 2, 3 y 4	**FRECUEN CIAS**	**% SOBRE PERFIL 2**	**% SOBRE TOTAL**
2.1 CAIN.	3	9.1	4.1
2.2 CABN	11	33.3	14.9
2.3 CANN	5	15.2	6.8
2.4 CI#N (#=Baja (1) o Nula)	9	27.3	12.2
2.5 CBNN	5	15.2	6.8
TOTAL	33	100	44.6

C= Adquisición completa de un nivel de razonamiento
A= Adquisición alta de un nivel de razonamiento
I= Adquisición intermedia de un nivel de razonamiento
B= Adquisición baja de un nivel de razonamiento
N= Adquisición nula de un nivel de razonamiento

Tabla VI. 5: Subperfiles razonamiento identificados en el perfil 2.

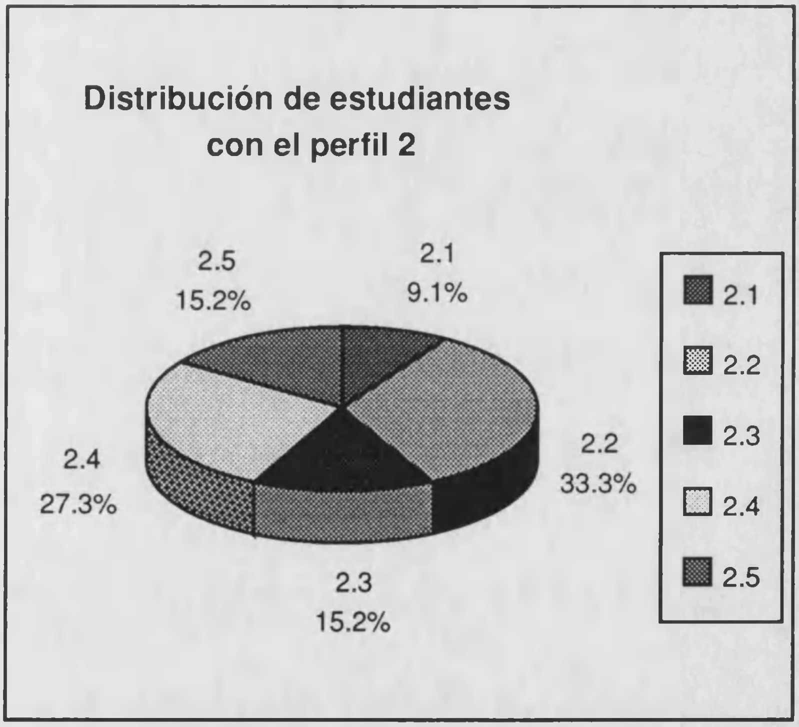


Gráfico VI. 2 Gráfico en el que se muestran los cinco subperfiles de razonamiento identificados en los estudiantes con el perfil 2

ESTUDIANTES DEL PERFIL 3.

Descriptor general del perfil: **Adquisición No Completa del Nivel 1 de van Hiele.**

PERFILES: Grado de adquisición de los niveles 1, 2, 3 y 4	**FRECUENCIAS**	**% SOBRE PERFIL 3**	**% SOBRE PERFIL 3**
3.1 AABN	1	4.3	1.4
3.2 AI#N (#= Baja (1) o Nula)	7	30.4	9.5
3.3 ABNN	12	52.2	16.2
3.4 IBNN	3	13.0	4.1
TOTAL	23	100	31.1

A= Adquisición alta de un nivel de razonamiento
I= Adquisición intermedia de un nivel de razonamiento
B= Adquisición baja de un nivel de razonamiento
N= Adquisición nula de un nivel de razonamiento

Tabla VI. 6. Subperfiles razonamiento identificados en el perfil 3.

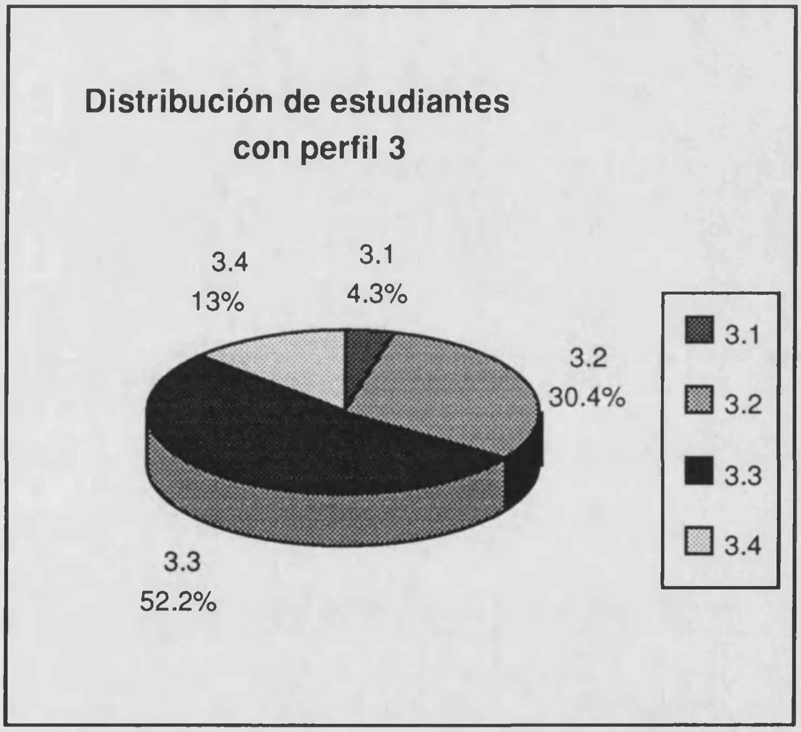


Gráfico VI. 3 Gráfico en el que se muestran los cuatro subperfiles de razonamiento identificados en los estudiantes con el perfil 3

VI. 3 Resultados de la evaluación SOLO

VI. 3. 1 *Comportamiento de los estudiantes por perfiles van Hiele y por superítems*

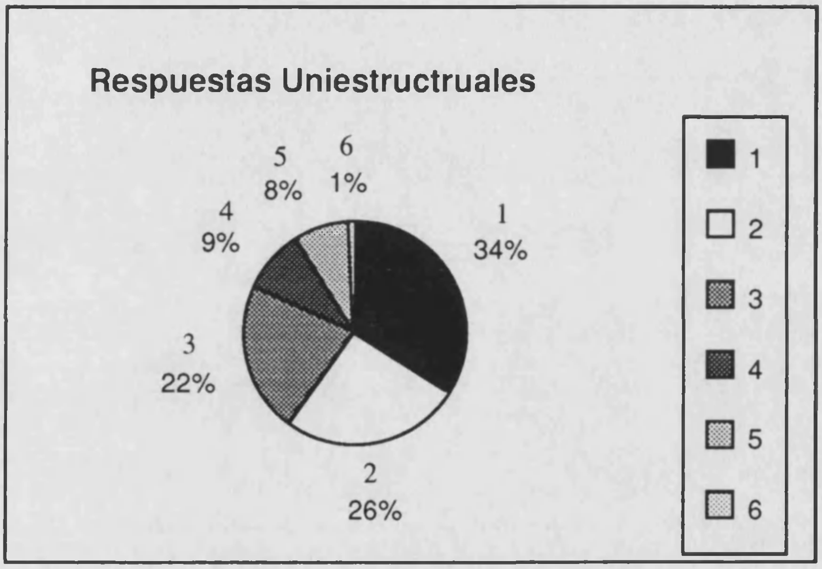
En este apartado pretendemos analizar los niveles SOLO de respuestas de los estudiantes a lo largo del test, en relación con los diferentes perfiles y subperfiles van Hiele identificados.

Como ya sabemos, por las diferentes descripciones que del modelo de van Hiele hemos hecho o pueden encontrarse en la literatura, la asignación de un nivel de razonamiento a un estudiante implica que dicho estudiante usa ciertas habilidades de razonamiento (distintas según el nivel del que se trata) para responder a las cuestiones de carácter matemático, geométrico en nuestro caso, que se le están proponiendo. El uso consciente de dichas habilidades de razonamiento determina el nivel de razonamiento en el que se encuentra dicho estudiante. Ahora bien, usar un razonamiento determinado o poseer las habilidades de razonamiento de un nivel determinado no siempre conduce a la respuesta correcta a una cuestión planteada o es garantía para obtenerla. Así que, lo que pretendemos aquí es analizar la estructura de las respuestas de los estudiantes, a los que les hemos asignado unos grados de adquisición de los niveles de razonamiento, resolviendo cuestiones de geometría: procesando la información que disponen en el tronco del superítem y su uso en las respuestas a las cuestiones propuestas.

VI. 3. 1. 1 *Resultados del superítem 1*

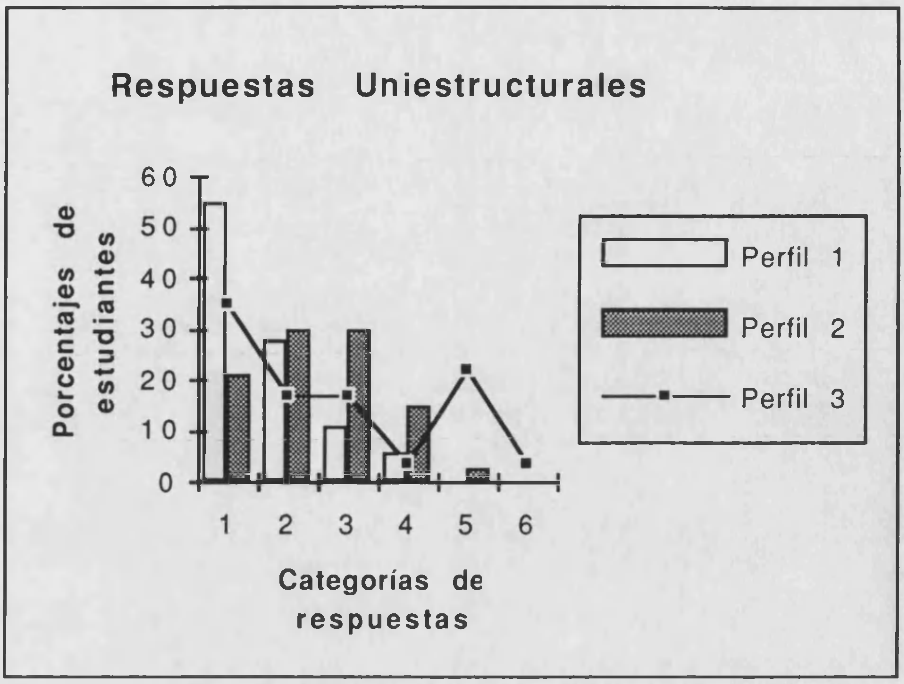
En el primer superítem, la información se presenta en términos de propiedades: Expresadas formalmente (por ejemplo: "Ángulos opuestos por el vértice son iguales"), mediante igualdades de los nombres de los ángulos (como por ejemplo: "A = G, B = H..") y en términos visuales mediante la figura 1, que muestra los ángulos que se forman al cortar un par de rectas paralelas por un transversal y las propiedades de dichos ángulos.

Como puede verse en los descriptores de los niveles SOLO de respuesta (Anexo II de esta memoria), se han identificado, en la primera cuestión, cuatro subniveles de respuesta uniestructurales U_i con i= 0, 1, 2 y 3, en función de cómo usa el estudiante la información de que dispone para justificar la repuesta a la cuestión planteada (que ha de ser correcta, ya que en caso contrario se la ha calificado como no uniestructural, nU). La primera cuestión únicamente requiere fijarse en un aspecto, propiedad o forma, para responderse correctamente, cosa que hacen el 90.5% de los estudiantes evaluados (sólo 6 estudiantes del total de la muestra no responden correctamente a la cuestión. Las respuestas que proporcionan estos estudiantes o dan un valor de G que no es 45° o usan medidas lineales para dar su respuesta).



Categorías de respuesta:
j= Respuestas U_i, con i= 0,1, 2, 3; para j= 1, 2, 3 y 4
5= Respuestas nU
6= Sin respuesta

Gráfico VI. 4 Detalle del porcentaje de respuestas Uniestructurales en la cuestión 1 del superítem 1. Los % son aproximados



Categorías de respuesta:
j= Respuestas U_i, con i= 0,1, 2, 3; para j= 1, 2, 3 y 4
5= Respuestas nU
6= Sin respuesta

Gráfico VI. 5 Detalle del porcentaje de respuestas Uniestructurales en el superítem 1, por perfiles de razonamiento

Más de la mitad de los estudiantes del perfil 1 dan una respuesta del tipo U_0, es decir, prefieren usar la propiedad en la forma "porque los ángulos opuestos por el vértice son iguales", por un porcentaje menor que dan respuestas del tipo U_i, con i= 1 y 2, en las que parece que los estudiantes necesiten, además, las igualdades, o usarlas exclusivamente, como base de su razonamiento. Es significativa, en esta cuestión, la distinción por subperfiles van Hiele de los estudiantes del perfil 1, pues se muestran comportamientos diferentes en aquéllos que han sido agrupados en subperfiles de razonamiento con características distintas. Basta observar en la tabla siguiente en la que los resultados, por ejemplo, de los estudiantes pertenecientes al subperfil 1.1 y 1.2 son mejores que los de los estudiantes del subperfil 1.3 y 1.4.

Subperfil	U_0	U_1 ó U_2	U_3	nU	SR
1.1 y 1.2	38.9	11.1	5.5	0	0
1.3 y 1.4	16.7	27.8	0	0	0
Total	55.6	38.9	5.5	0	0

Tabla VI. 7. Porcentaje de respuestas Uniestructurales en la cuestión 1 del superítem 1. Estudiantes con el perfil 1.

El comportamiento mostrado por los estudiantes del perfil 1 es diferente al de los estudiantes del perfil 2 (Tabla VI. 8). Mayoritariamente, los estudiantes con este perfil de razonamiento, responden haciendo uso de la propiedad pero apoyándose en las igualdades que la ejemplifican (respuestas U_i, con i= 1 y 2) y, de éstos, la mitad usando únicamente las igualdades. Esto es coherente con la descripción del perfil de razonamiento de los estudiantes de este grupo que mayoritariamente tiene un grado de adquisición intermedio o alto del nivel 2 de van Hiele, por lo que usan propiedades en su razonamiento pero con tendencia de carácter visual. Parece como si los estudiantes con este perfil de razonamiento quisieran asegurar la propiedad "ángulos opuestos por el vértice son iguales" con las igualdades de los ángulos que la ejemplifican: G = A, o incluso usar las igualdades como ejemplo en el que se cumple la propiedad. Esto mismo ocurre con algunos estudiantes del perfil 3 (Tabla VI. 9), que aun no teniendo una adquisición completa del nivel 1, los indicios de razonamiento del nivel 2 les permite responder a la cuestión usando la propiedad, en alguna de sus variantes. A medida que profundizamos en el análisis de los resultados de los estudiantes con el perfil 3, vemos cómo este comportamiento no es generalizable ya que el número de respuestas no uniestructurales aumenta para el subperfil 3.4 (dos de los tres estudiantes no responden correctamente y el tercero da una respuesta basada en la observación visual, U_3), lo cual es coherente con el descriptor de este subperfil: adquisición intermedia del nivel 1 y nula del nivel 2.

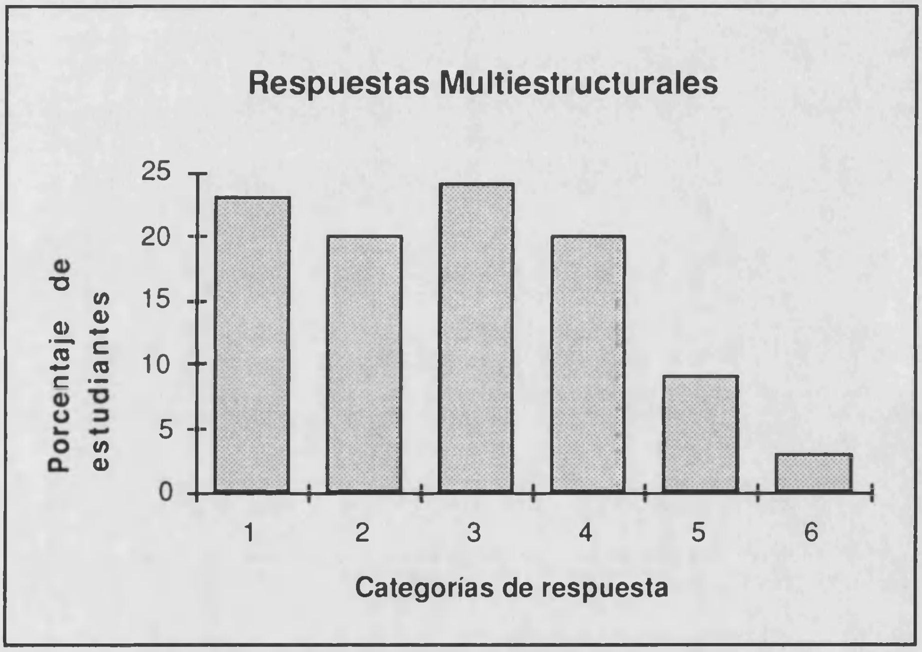
Subperfil	U_0	U_1 ó U_2	U_3	nU	SR
2.1, 2.1 y 2.3	15.2	36.4	6.1	0	0
2.4 y 2.5	6.1	24.2	9.1	3.0	0
Total	21.3	60.6	15.2	3.0	0

Tabla VI. 8. Porcentaje de respuestas Uniestructurales en la cuestión 1 del superítem 1. Estudiantes con el perfil 2.

Subperfil	U_0	U_1 ó U_2	U_3	nU	SR
3.1, 3.2 y 3.3	34.8	34.8	0	13.0	4.3
3.4	0	0	4.3	8.7	0
Total	34.8	34.8	4.3	21.7	4.3

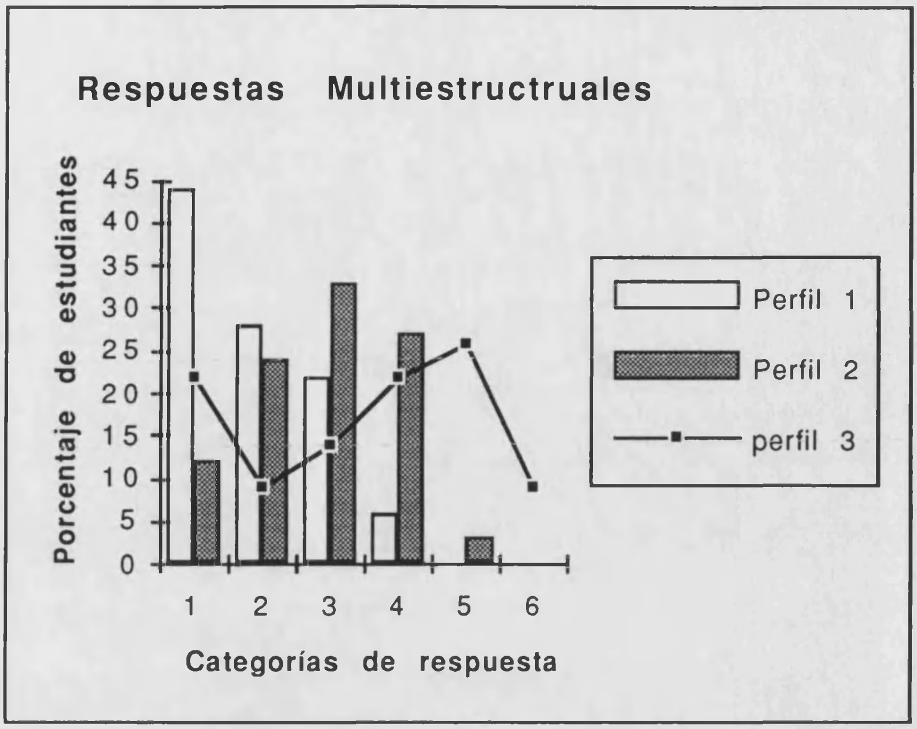
Tabla VI. 9. Porcentaje de respuestas Uniestructurales en la cuestión 1 del superítem 1. Estudiantes con el perfil 3.

La segunda cuestión requiere manejar dos propiedades para ser resuelta correctamente, lo que nos proporcionará respuestas de nivel SOLO Multiestructural. De manera similar a como se hizo en la primera cuestión, se han distinguido cuatro subniveles de respuesta SOLO M_i, con i= 0, 1, 2 y 3, en función de cómo usa el estudiante la información para responder correctamente a la cuestión. El 87.8% de los estudiantes elabora una respuesta de carácter multiestructural, por lo que parece razonable pensar que tener al menos un grado de adquisición alto del nivel 1 e indicios del nivel 2, permite a los estudiantes responder correctamente a este tipo de cuestiones.



Categorías de respuesta:
j= Respuestas M_i, con i= 0,1, 2, 3; para j= 1, 2, 3 y 4
5= Respuestas nM
6= Sin respuesta

Gráfico VI. 6 Detalle del porcentaje de respuestas Multiestructurales en la cuestión 2 del superítem 1



Categorías de respuesta:
j= Respuestas M_i, con i= 0,1, 2, 3; para j= 1, 2, 3 y 4
5= Respuestas nM
6= Sin respuesta

Gráfico VI. 7 Detalle del porcentaje de respuestas Multiestructurales en la cuestión 2 del superítem 1, por perfiles de razonamiento

Pero la diferencia con la cuestión anterior está en el uso que hacen de las propiedades, en el caso de que las usen, para justificar sus respuestas. De los estudiantes del perfil 1 (Tabla VI. 10), el 44.4% prefiere la formulación formal de las propiedades (respuesta M_0) para justificar la respuesta, y de éstos, el 33.3% tienen un grado de adquisición alto o completo del nivel 3 (subperfiles 1.1 y 1.2), frente al 7.41% que tiene un grado de adquisición intermedio o bajo del nivel 3 (subperfiles 1.3 y 1.4). La mitad de los estudiantes de este perfil prefiere, por otro lado, apoyarse en las igualdades para justificar su respuesta (respuestas M_i con i= 1 y 2), tendencia que con una única propiedad (cuestión 1) era contraria (55.56% y 38.89%, respectivamente).

Subperfil	M_0	M_1 ó M_2	M_3	nM	SR
1.1 y 1.2	33.3	16.7	5.6	0	0
1.3 y 1.4	11.1	33.3	0	0	0
Total	44.4	50	5.6	0	0

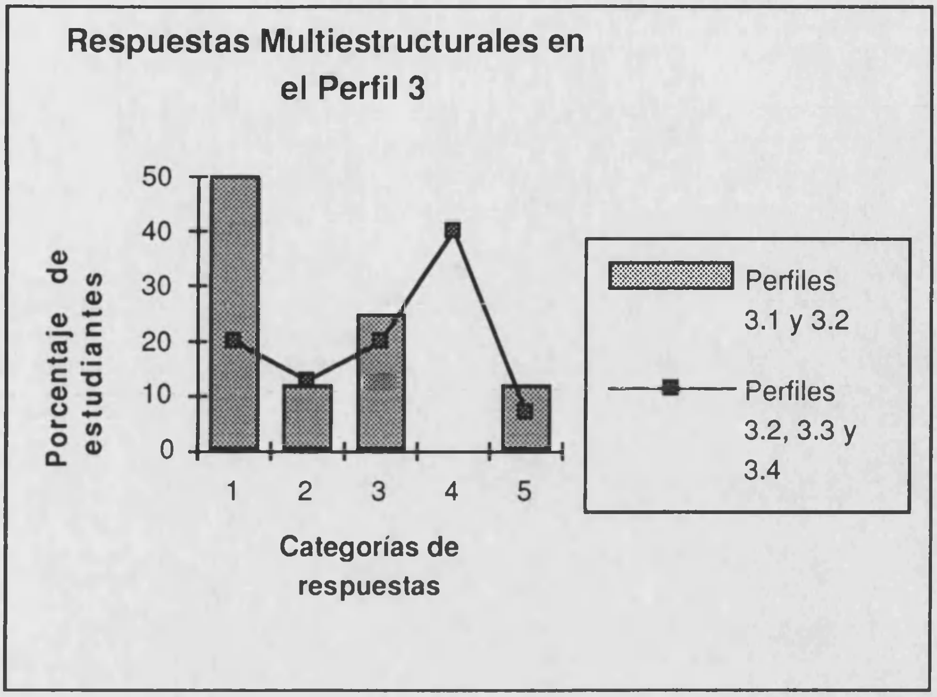
Tabla VI. 10. Porcentaje de respuestas Multiestructurales en la cuestión 2 del superítem 1. Estudiantes con el perfil 1.

Este desplazamiento hacia la seguridad del razonamiento apoyándose en las igualdades que ejemplifican las propiedades o incluso en usar la figura casi exclusivamente, se ve acentuado en los estudiantes del perfil 2 (Tabla VI. 11). Pocos estudiantes con este perfil de razonamiento dan una respuesta del tipo M_0, mientras que la mayoría se apoyan, de alguna manera, en las igualdades, destacando aquéllos que sólo usan la igualdades (Respuesta M_2, el 33.3% de los estudiantes) o sólo la figura (Respuesta M_3, el 27.27%). Esta tendencia de respuestas M_i con i= 2 y 3 se manifiesta mayoritaria en los subperfiles 2.3, 2.4 y 2.5, con un 70% de las respuestas, frente al 42.85% en los subperfiles 2.1 y 2.2, lo que nos hace pensar que la seguridad del razonamiento en el uso de más de una propiedad, ya sea en sus formulaciones formales o apoyadas con las igualdades que las ejemplifican, está en el grado de adquisición del nivel 3 del que el estudiante debe mostrar algunos indicios (intermedio o bajo).

Subperfil	M_0	M_1 ó M_2	M_3	nM	SR
2.1 y 2.2	9.1	21.2	9.1	3.0	0
2.3, 2.4 y 2.5	3.0	36.4	18.2	0	0
Total	12.1	57.6	27.3	3.0	0

Tabla VI. 11. Porcentaje de respuestas Multiestructurales en la cuestión 2 del superítem 1. Estudiantes con el perfil 2.

Los subperfiles 3.3 y 3.4 se caracterizan por su baja o nula adquisición del nivel 2 de van Hiele. Los resultados del gráfico siguiente muestran que el 46.7% de los estudiantes del perfil 3 no consiguen elaborar una respuesta multiestructural y de aquéllos que sí consiguen responder correctamente a esta cuestión, el 37.5% dan una respuesta del tipo M_0 y el 62.5% responden en alguno de los tipos M_2 o M_3, por lo que sus razonamientos están fuertemente influenciados por las figuras del superítem. Nuevamente, este hecho es coherente con la descripción de los estudiantes de este perfil.



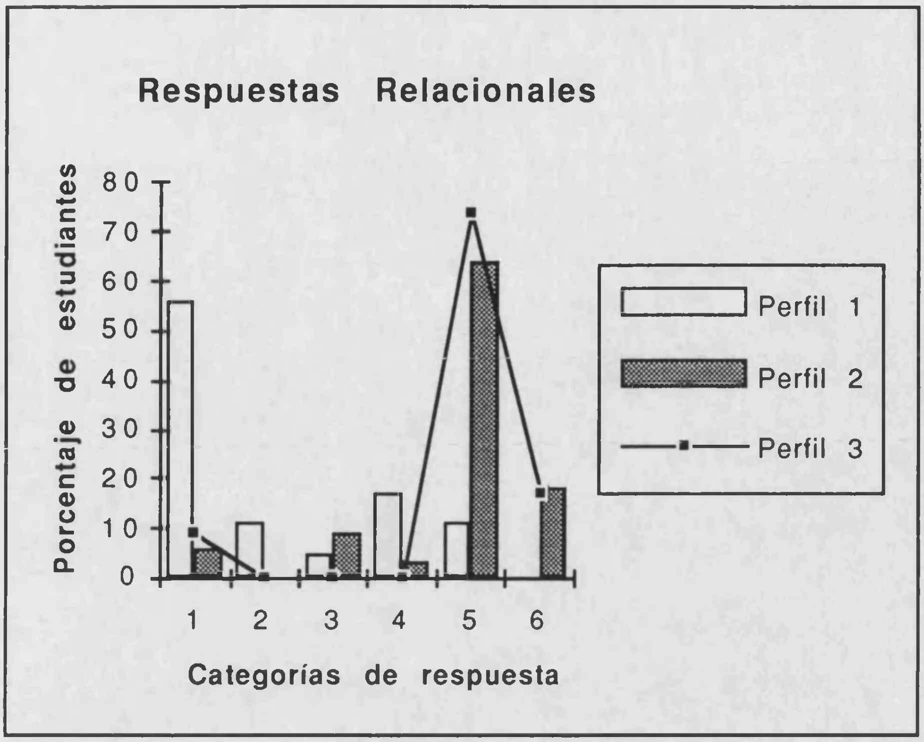
Categorías de respuesta:

1= Respuestas M_0 y M_1
2= Respuestas M_2
3= Respuestas M_3
4= Respuestas nM
5= Sin respuesta

Gráfico VI. 8. Detalle del porcentaje de respuestas Multiestructurales en la cuestión 2 del superítem 1. Estudiantes con el perfil 3

La tercera cuestión requiere la comprensión global de la información del tronco del superítem para poder responderla. Esto supone, además, la extensión de la propiedades de los ángulos entre paralelas cortadas por una transversal a contextos diferentes al que se muestra en el tronco del superítem. Las respuestas correctas a esta cuestión, respuestas de nivel relacional, han dado lugar a la distinción de cuatro subniveles R_i con i= 0, 2, 3 y 4, calificándose como nR las respuestas incorrectas.

Ahora, el porcentaje de respuestas relacionales es sensiblemente menor que los que se dieron en niveles SOLO inferiores, como puede verse en el gráfico siguiente. Únicamente el 45.95% de los estudiantes dieron algún tipo de respuesta relacional, frente al 90.54% y el 87.84%, respectivamente de los niveles SOLO anteriores. De éstos, el 58.3% corresponden a los estudiantes del perfil 1, sólo el 25% corresponden a estudiantes del perfil 2 y únicamente el 8.3% corresponden a los estudiantes del perfil 3.



Categorías de respuestas:
j= Respuestas R_i, con i= 0, 2, 3 y 4; para j= 1, 2, 3 y 4
5= Respuestas nR
6= Sin respuesta

Gráfico VI. 9 Detalle del porcentaje de respuestas Relacionales en la cuestión 3 del superítem 1, por perfiles de razonamiento

Casi todos los estudiantes del perfil 1 dieron algún tipo de respuesta relacional, siendo mayoritarias las respuestas del tipo R_0 (Tabla VI. 12). Esto supone una comprensión completa de las propiedades de los ángulos entre paralelas al cortarlas por una transversal. Esta comprensión se manifiesta en el uso de las propiedades contenidas en el tronco del superítem para justificar la respuesta (Respuesta R_0), siendo mayoritaria en los estudiantes con los subperfiles 1.1, 1.2 y 1.3, frente los estudiantes de los subperfiles 1.4 y 1.5 que demuestran la comprensión, resolviendo correctamente la cuestión, pero sin hacer mención explícita de las propiedades (Respuestas R_3 ó R_4). Ahora, el corte está, nuevamente, en el grado de adquisición del nivel 3 que, en el caso de los tres primeros subperfiles es completo o alto.

Subperfil	R_0	R_1 ó R_2	R_3 ó R_4	nR	SR
1.1 y 1.2	44.4	5.5	0	5.5	0
1.3 y 1.4	11.1	5.5	22.2	5.5	0
Total	55.5	11.1	22.2	11.1	0

Tabla VI. 12. Porcentaje de respuestas Multiestructurales en la cuestión 2 del superítem 1. Estudiantes con el perfil 2.

Por el contrario, lo destacable de los estudiantes de los perfiles 2 y 3 (Tabla VI. 13) son sus respuestas no relacionales: sólo el 18.18% de los estudiantes del perfil 2 consigue algún tipo de respuesta relacional y escasamente el 8.7% de los estudiantes del perfil 3 consigue una respuesta relacional. Esto supone que, siendo el nivel 2 de van Hiele el nivel de razonamiento potencial más bajo necesario para resolver la cuestión que habíamos supuesto, las evidencias nos confirman la supuesta potencialidad, ya que la mayoría de los estudiantes que consiguieron dar respuestas relacionales a esta cuestión están agrupados en el perfil 1, con un adquisición completa de los niveles 1 y 2, pero con indicios de razonamientos en el nivel 3. En cambio, especialmente difícil se mostró esta cuestión para los estudiantes con una adquisición no completa del nivel 2 de van Hiele y prácticamente imposible para aquéllos que no tenían adquirido el nivel 1, aunque mostraran signos de razonamiento del nivel 2 de van Hiele. Hay que destacar que, de los estudiantes con este último perfil, el perfil 3, aquél que consiguió una respuesta relacional tiene una adquisición alta del nivel 2, aunque no completa del nivel 3.

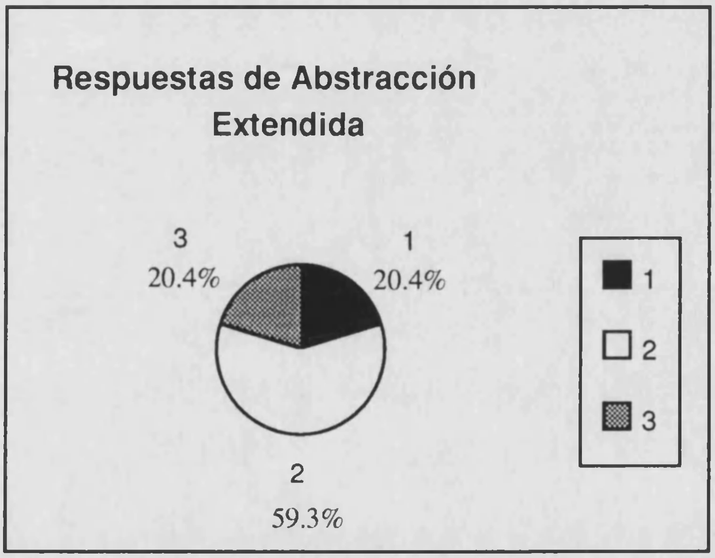
Perfil	R_0	R_1 ó R_2	R_3 ó R_4	nR	SR
Perfil 2	6.1	0	12.1	63.6	18.2
Perfil 3	8.7	0	0	73.9	17.4

Tabla VI. 13. Porcentaje de respuestas Relacionales en la cuestión 3 del superítem 1. Estudiantes con los perfiles 2 y 3.

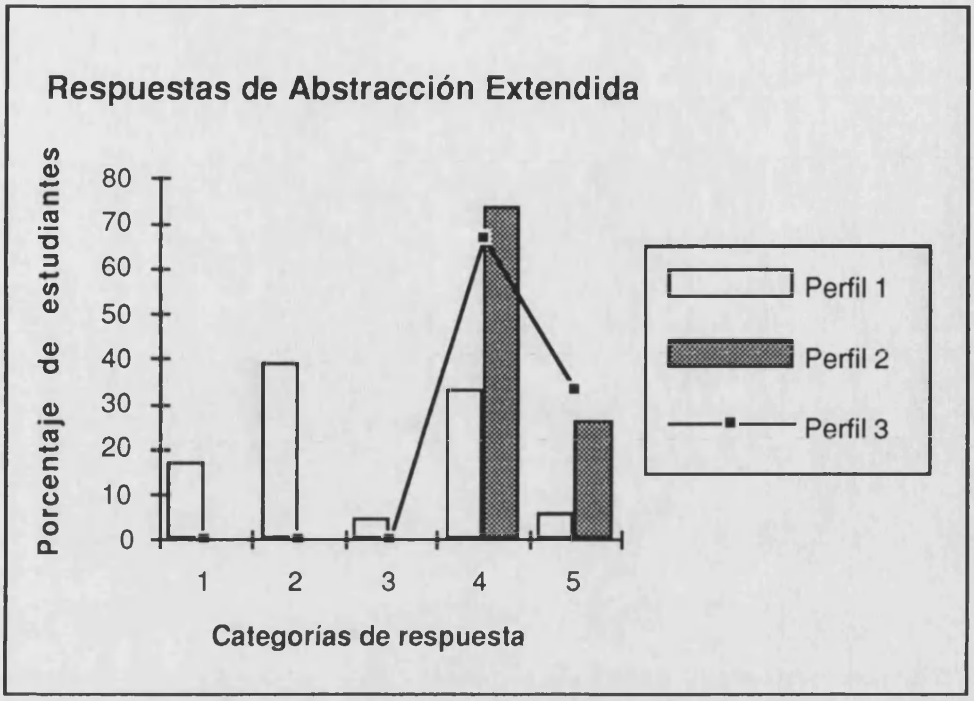
La solución de la cuarta cuestión requiere procesos de abstracción. Estos procesos están relacionados con el significado que para los estudiantes tiene la palabra o término demostrar y, a su vez, con las habilidades de razonamiento que son capaces de demostrar en relación con dicho término.

Como nuestro interés es evaluar las capacidades que pueden mostrar los estudiantes, a partir de la información que disponen en el tronco del superítem y en relación con las cuestiones que han de resolver, en este caso la comprensión global de la información y la incorporación de procesos o principio abstractos, se han distinguido hasta tres subniveles de respuesta correcta (en el sentido más amplio de la palabra demostrar en las Matemáticas), o de abstracción extendida: A_i, con i= 0, 1 y 2.

Con las consideraciones anteriores, es preciso señalar que el 20.4% de los estudiantes no responde a la cuestión (Gráfico VI. 10). Esto puede suponer que estos estudiantes o no están familiarizados con el término demostrar o no entienden su significado. El 59.3% de los estudiantes sí responden, de alguna manera, a esta cuestión, pero la calidad de sus respuestas no nos ha permitido considerarlas de abstracción extendida. Está suficientemente documentado cuál es el comportamiento de muchos estudiantes cuando se les pide que demuestren cierta propiedad. Algunos de estos comportamientos están relacionados con: comprobación de casos, en el caso más favorable, o confirmación o negación, sin más, de la propiedad o proposición que han de demostrar. Estas respuestas, que implican ciertas habilidades de razonamiento desde el punto de vista del modelo de van Hiele, las hemos codificado como nA (no abstracción extendida) desde el punto de vista de la Taxonomía SOLO.



1= Respuestas de Abstracción Extendida
2= Respuestas que no son de Abstracción Extendida
3= Sin respuesta
Gráfico VI. 10. Detalle del porcentaje de respuestas de Abstracción Extendida en la cuestión 4 del superítem 1



Categorías de respuesta:
j= respuestas A_i, con i= 0,1 y 2; para j= 1, 2 y 3
4= respuestas nA
5= Sin respuesta

Gráfico VI. 11. Detalle del porcentaje de respuestas de Abstracción Extendida en la cuestión 4 del superítem 1, por perfiles de razonamiento

Todas las respuestas que se han calificado como abstracción extendida pertenecen a estudiantes del perfil 1 (Gráfico VI. 11). De ellas (Tabla VI. 14), el 16.7% son del tipo A_0, es decir, la demostración formal, y el 38.9% son el tipo A_1, es decir, estudiantes que diseñan correctamente un procedimiento útil para la demostración (trazar una paralela por un vértice al lado opuesto), pero que concluyen rápidamente la demostración sin mediar los pasos correspondientes en una justificación con estructura lógico - deductiva.

Subperfil	A_0	A_1	A_2	nA	SR
1.1 y 1.2	11.1	38.9	5.5	0	0
1.3 y 1.4	5.5	0	0	33.3	5.5
Total	16.7	38.9	5.5	33.3	5.5

Tabla VI. 14. Porcentaje de respuestas de Abstracción Extendida en la cuestión 4 del superítem 1. Estudiantes con el perfil 1.

Este tipo de estudiantes, casi todos ubicados en el subperfil 1.2, tienen asignada una adquisición completa de los niveles 1 y 2, alta del nivel 3 y nula del nivel 4, lo que es coherente con la descripción de aquellos estudiantes que razonan de manera confortable en el nivel 3 de van Hiele, pero que no están habituados a los razonamientos deductivos del nivel 4 de van Hiele, por lo que no parecen mostrar una necesidad, al menos consciente, por usarlos. Es de destacar, por otra parte, que casi ninguno de los estudiantes ubicados en los subperfiles 1.3 y 1.4 consigue dar una respuesta abstracto extendida a la cuestión planteada, siendo la adquisición del nivel 3 de van Hiele de estos estudiantes intermedia o baja. Así pues, parece razonable pensar que el grado de adquisición del nivel requerido en el que cabe esperar que los estudiantes aporten principios abstractos para elaborar una demostración (en el sentido matemático del término) exige una adquisición alta o completa del nivel 3, con indicios o no de razonamiento del nivel 4, mostrándose improbable en aquéllos con una adquisición menor del nivel 3. Por otra parte, de los que consiguen establecer una demostración formal, es decir, elaborar una respuesta del tipo A_0, nada puede decirse pues pertenecen a perfiles diferentes y no parecen ser demasiado representativos, si exceptuamos a aquél que, perteneciendo al subperfil 1.1, la descripción de su perfil de razonamiento, en términos de van Hiele, le exigiría una respuesta de este tipo.

VI. 3. 1. 2 *Resultados del superítem 2*

La información se presenta, en el tronco del superítem, en base a ejemplos positivos y negativos del concepto de paralelismo. Esto hace que el modo de funcionar o nivel de razonamiento mínimo requerido por el superítem sea el nivel 1 de van Hiele. En consecuencia, las cuestiones del superítem pueden responderse, inicialmente, en relación con el procesamiento de la información que haga el estudiante.

A la primera cuestión, reconocimiento de rectas paralelas, responden correctamente, por tanto elaboran una respuesta de carácter uniestructural, el total de los estudiantes evaluados. En la justificación del reconocimiento de rectas paralelas hemos distinguido hasta 5 subniveles de respuesta SOLO U_i, con i= 0, 1, 2, 3 y 4.

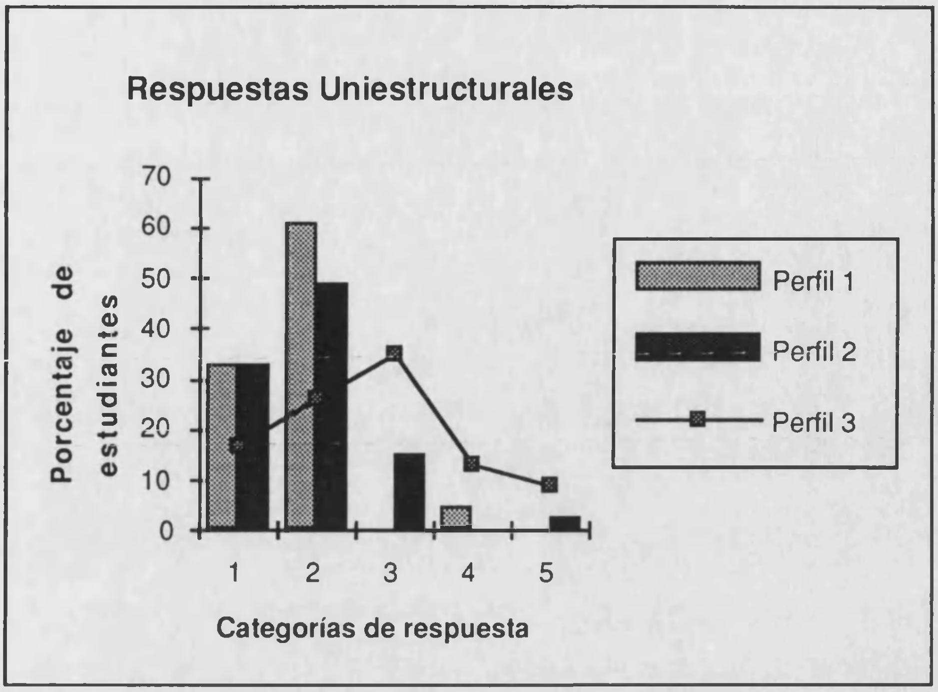
De todas las respuestas, la más usual, prácticamente el 46% de todas ellas, discrimina rectas paralelas de rectas no paralelas en base a "prolongar ambas rectas y ver si se cortan en algún punto" (respuesta del tipo U_1), en contraste con las respuestas que parecen centrarse más sobre la equidistancia y/o conservación de ángulos al cortarlas por una transversal (respuestas del tipo U_0), ya sea a modo de completar la respuesta anterior o como única justificación para el paralelismo de rectas, con un 27% de las respuestas aproximadamente.

Mayberry (1981) asigna el nivel 1 de van Hiele a los estudiantes que responden como U_1, mientras que, a aquéllos que responden como U_0, les asigna el nivel 2 de van Hiele. Por otra parte, Davey y Pegg (1990) identificaron en los estudiantes cinco categorías de respuesta al analizar sus descripciones sobre líneas paralelas: A) descripciones referidas a algún prototipo visual; B) descripciones referidas a las líneas en sí mismas, sin ningún intento de clarificalas si exceptuamos la referencia a la orientación de las mismas; C) descripciones en las que los estudiantes parecen sentir la necesidad de clarificar de algún modo sus respuestas, añadiendo que las líneas van una al lado de la otra o van juntas; D) descripciones en las que se añade la condición de que las líneas no se encuentran (se cortan) y E) descripciones en las que se añade las propiedades de la equidistancia o la conservación de los ángulos al cortarlas por una transversal, distinguiendo aquí dos subgrupos, en función de usar una u otra propiedad de manera más o menos espontánea. Davey y Peeg (1990) asociaron estas respuestas a diferentes modos de funcionar y niveles SOLO. Así, la primera la asocian al modo Icónico, aunque no asignan claramente un nivel SOLO. Las categorías B, C y D las asocian al modo Concreto Simbólico y nivel uniestructural, mientras que la categoría E la asocian al nivel multiestructural del modo Concreto Simbólico.

El análisis de las respuestas de nuestros estudiantes también dio lugar a cinco categorías de respuesta, codificadas como U_i con i= 0, 1, 2, 3 y 4 (ver descriptores SOLO), que pueden ser comparadas con algunas de las que obtuvieron Davey y Peeg. Así, la categoría E puede ser comparada con U_0; D con U_1; C con U_2, aunque aquí hemos incluido a aquellos estudiantes que intentaron clarificar su respuesta incluyendo la condición adicional "cortarse o no cortarse", cosa que Davey y Peeg la incluyen en la categoría D, reservando nosotros la categoría U_1 para aquéllos que sólo usan esta condición para describir las rectas paralelas. Finalmente, la categoría B se puede comparar con algunas respuestas del tipo U_2 en las que no se incluían la condición adicional de cortarse o no cortarse. Por último, aunque pocas ciertamente, la categoría A puede compararse con U_4.

Cada uno de los niveles descritos U_i con i= 0, 1, 2, 3 y 4, llevan emparejados distintos modos de funcionar o niveles de razonamiento. En los descriptores de niveles de razonamiento puede verse cómo hemos asociado diferentes niveles, y sobre todo tipos, a las respuestas que dieron los estudiantes, de tal suerte que, de una manera resumida, las respuestas de niveles SOLO Ui, con i= 2, 3 y 4, se relacionan con el nivel 1 de van Hiele, con diferentes tipos, que muestran una progresión, dentro del nivel 1 de van Hiele, desde el más bajo para U_4, al más alto, para U_2. Esto, estaría de acuerdo con la asignación de Mayberry (1981), aunque clarificándola. Por otro lado, las respuestas de niveles SOLO U_i, con i= 0 y 1, se relacionan con el nivel 2 de van Hiele, también con tipos de respuesta diferente. Así, los tipos más altos se relacionan con las respuestas codificadas como U_0, mientras que los más bajos con las respuestas codificadas como U_1. Esto concuerda, en parte, con la asignación de Mayberry, ya que ella sólo asigna el nivel 2 de van Hiele a aquéllos que responden como U_0, considerando la respuestas U_1 como de nivel 1 de van Hiele. La distinción por tipos permite que la asignación de niveles de van Hiele sea más afinada, contemplando el caso de aquellos estudiantes que están en transición entre dos niveles de razonamiento consecutivos, como parece desprenderse de las respuestas del tipo U_1.

Estos hechos parecen confirmarse si miramos el gráfico siguiente. Las respuestas propias de un nivel 2 de van Hiele, las respuestas que en SOLO hemos codificado como U_0 y U_1, las encontramos en el 94.44% de los estudiantes del perfil 1, en el 81.81% de los estudiantes del perfil 2 y en el 43.48% de los estudiantes del perfil 3. Este decrecimiento en el porcentaje de estudiante parece estar de acuerdo con el decrecimiento en el grado de adquisición del nivel 2 de van Hiele de los estudiantes.

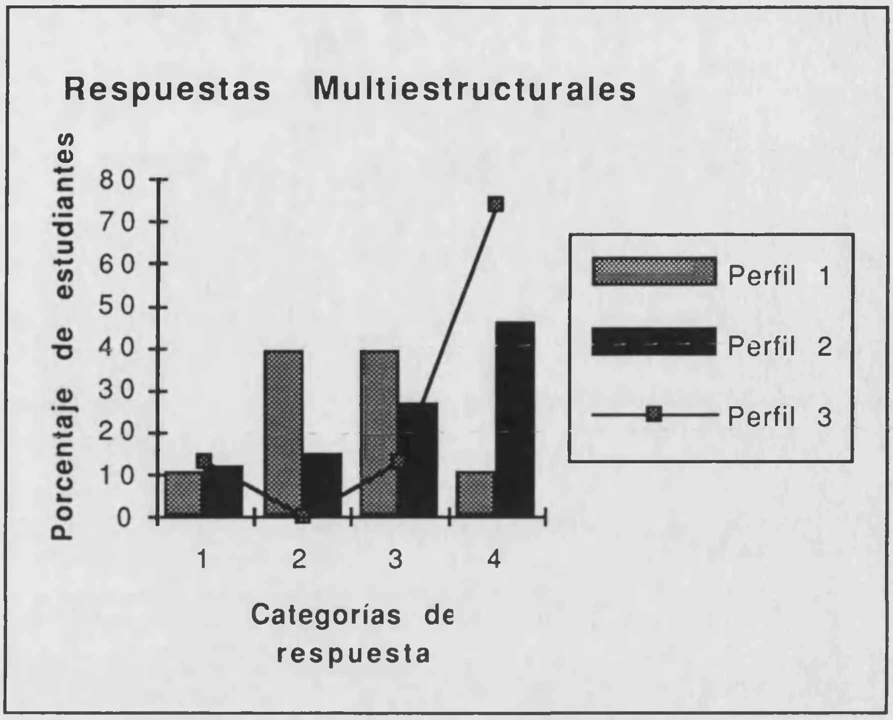


Categorías de respuesta:
j= Respuestas U_i, con i= 0,1, 2, 3 y 4; para j= 1, 2, 3, 4 y 5

Gráfico VI. 12. Detalle del porcentaje de respuestas Uniestructurales en la cuestión 1 del superítem 2, por perfiles de razonamiento

La segunda cuestión introduce elementos nuevos de análisis pues, en este caso, los estudiantes han de introducir criterios para determinar si dos rectas son o no son paralelas. Una respuesta será considerada como multiestructural si el estudiante se centra en más de un aspecto del paralelismo para determinar si las rectas son o no son paralelas. Así, hemos distinguido tres subniveles SOLO de respuesta Mi, con i= 0, 1 y 2, cuyas descripciones pueden encontrarse en el Anexo II de esta memoria.

Las tablas R221 y R222 (Anexo III) son bastante explícitas en los resultados que muestran y que pueden verse representados en el gráfico siguiente. De los estudiantes del perfil 1, el 88.9% proporciona respuestas del nivel multiestructural; así como el 54.5% de los estudiantes del perfil 2 y el 26.1% de los estudiantes del perfil 3. Resultados que parecen ser coherentes con el grado de adquisición del nivel 2 de van Hiele con el que se ha asociado el modo de funcionar de los estudiantes para elaborar este tipo de respuestas de nivel SOLO multiestructural.



Categorías de respuesta:
j= respuestas M_i, con i= 0,1 y 2; para j= 1, 2 y 3
4= respuestas nM

Gráfico VI. 13. Detalle del porcentaje de respuestas Multiestructurales en la cuestión 2 del superítem 2, por perfiles de razonamiento

El comportamiento de los estudiantes con el perfil 1 al resolver esta cuestión, atendiendo a los distintos subperfiles, no establece grandes diferencias. No obstante se muestran dos comportamientos diferentes en cuanto al uso de las propiedades del paralelismo. Como vemos en la tabla siguiente (Tabla VI. 15), la mitad de los estudiantes usa alguna propiedad, equidistancia o conservación de ángulos, para justificar si dos rectas son paralelas o no, mientras que un porcentaje menor prefiere condiciones particulares aplicadas al caso que han de resolver.

Subperfil	M_0 ó M_1	M_2	nM	SR
1.1 y 1.2	27.8	27.8	0	0
1.3 y 1.4	22.2	11.1	11.1	0
Total	50	38.9	11.1	0

Tabla VI. 15. Porcentaje de respuestas Multiestructurales en la cuestión 2 del superítem 2. Estudiantes con el perfil 1.

Este comportamiento parece extenderse hasta los estudiantes con un subperfil de razonamiento en el que la adquisición del nivel 2 de van Hiele es inferior al intermedio (subperfiles 2.4 y posteriores, Tablas VI. 16 y 17), aunque referidos a aquellos estudiantes que resuelven la cuestión, ya que comienzan a ser destacables las respuestas no multiestructurales que demuestran incapacidad de justificar, de alguna manera, por qué dos rectas son paralelas.

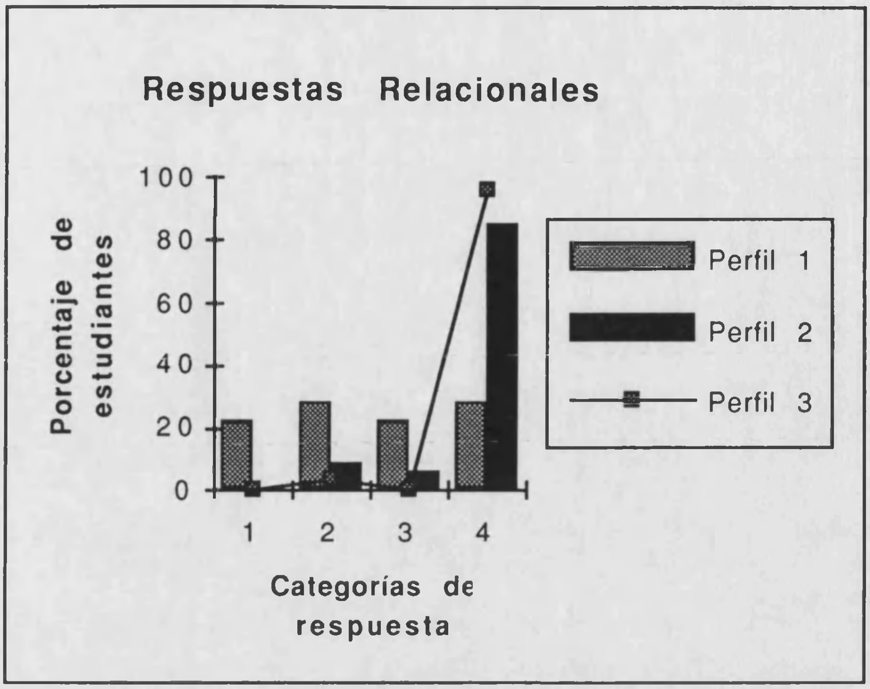
Subperfil	M_0 ó M_1	M_2	nM	SR
2.1, 2.2 y 2.3	24.2	15.1	18.2	0
2.4 y 2.5	3.0	12.1	27.3	0
Total	27.3	27.3	45.5	0

Tabla VI. 16. Porcentaje de respuestas Multiestructurales en la cuestión 2 del superítem 2. Estudiantes con el perfil 2.

Subperfil	M_0 ó M_1	M_2	nM	SR
3.1 y 3.2	8.7	8.7	17.4	0
3.3 y 3.4	4.3	4.3	56.5	0
Total	13.0	13.0	73.9	0

Tabla VI. 17. Porcentaje de respuestas Multiestructurales en la cuestión 2 del superítem 2. Estudiantes con el perfil 3.

Usar las propiedades de la equidistancia y de la conservación de ángulos es el requerimiento para asignar un nivel SOLO relacional a la respuesta de un estudiante a la tercera cuestión. Como era de esperar, este nivel de respuesta es prácticamente imposible encontrarlo en los estudiantes con el perfil 3, confirmándose esta sospecha con los resultados obtenidos, ya que al 95.7% de los estudiantes con este perfil se les calificó sus respuestas como no relacionales (nR) (gráfico VI. 14). En cambio, el 72.2% de los estudiantes con el perfil 1 sí consiguen respuestas relacionales y sólo el 15.15% de los estudiantes con el perfil 2. Así pues, ha resultado que para que un estudiante consiga usar de manera más o menos consciente ambas propiedades del paralelismo, éste debe tener un grado de adquisición completo de los niveles 1 y 2 de van Hiele, junto con indicios de razonamiento del nivel 3.



Categorías de respuesta:
j= respuestas R_i, con i= 0,1 y 2; para j= 1, 2 y 3
4= respuestas nR

Gráfico VI. 14. Detalle del porcentaje de respuestas Relacionales en la cuestión 3 del superítem 2, por perfiles de razonamiento

El análisis detallado por subperfiles de razonamiento nos aclara mejor el comportamiento de los estudiantes al resolver esta cuestión. Aplicar la equidistancia y la conservación de ángulos para resolver y justificar esta cuestión es un comportamiento que no se establece diferencias significativas entre los subperfiles considerados (Tabla VI. 18), por lo que el éxito en usar ambas propiedades se corresponde más con el grado de adquisición completo del segundo nivel de van Hiele que con el del tercer nivel.

Subperfil	R_0 ó R_1	R_2	nR	SR
1.1 y 1.2	27.8	11.1	16.7	0
1.3 y 1.4	22.2	11.1	11.1	0
Total	50	22.2	27.8	0

Tabla VI. 18 Porcentaje de respuestas Relacionales en la cuestión 3 del superítem 2. Estudiantes con el perfil 1.

Esto mismo puede confirmarse en la tabla siguiente (Tabla VI. 19) en la que los estudiantes no tienen una adquisición completa del segundo nivel de van Hiele.

Subperfil	R_0 ó R_1	R_2	nR	SR
2.1, 2.2 y 2.3	9.1	3.0	45.4	0
2.4 y 2.5	0	3.0	39.4	0
Total	9.1	6.1	84.8	0

Tabla VI. 19. Porcentaje de respuestas Relacionales en la cuestión 3 del superítem 2. Estudiantes con el perfil 2.

Muy pocos estudiantes demostraron la proposición contenida en la cuestión 4 de este segundo superítem. Muchos, ni siquiera la contestaron y, como era de esperar, los que pertenecen a los perfiles 2 y 3: El 77.78% de los estudiantes del perfil 3 y el 18.52% de los estudiantes del perfil 2 (Tabla R242, en el Anexo III de esta memoria).

Demostrar la proposición que contenía esta cuestión, usando argumentos formales (respuesta A_0), no estuvo al alcance de los estudiantes evaluados, ni tampoco de los estudiantes incluidos en el perfil 1 (Tabla VI. 20). Es de resaltar, no obstante, que la gran mayoría de los estudiantes con este perfil que elaboraron una respuesta considerada de abstracción extendida, ésta fue calificada como A_1, lo que significa que no construyeron la demostración formal de la proposición, pero sí aportaron suficientes elementos abstractos como para que fueran calificadas como de abstracción extendida. Conseguir esto, supone tener al menos una adquisición alta del nivel 3 (subperfiles 1.1 y 1.2), lo cual es coherente con los desciptores generales de razonamiento de este nivel.

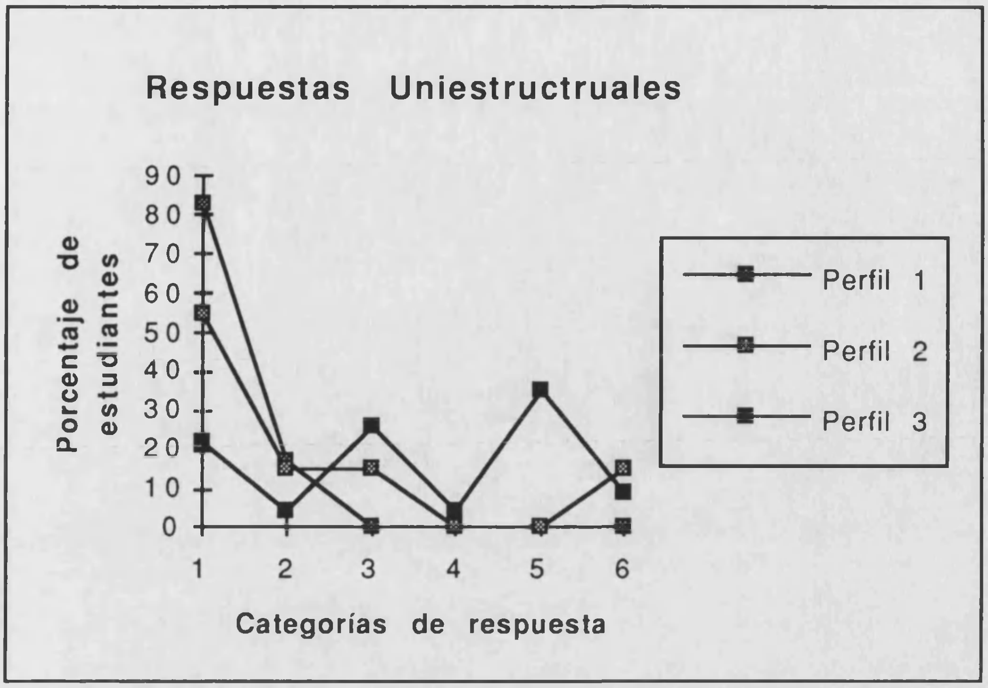
Subperfil	A_0	A_1	nA	SR
1.1 y 1.2	5.5	27.8	22.2	0
1.3 y 1.4	0	5.5	38.9	0
Total	5.5	33.3	61.1	0

Tabla VI. 20. Porcentaje de respuestas de Abstracción Extendida en la cuestión 4 del superítem 2. Estudiantes con el perfil 1.

VI. 3. 1. 3 *Resultados del superítem 3*

La información que dispone el estudiante para responder al superítem, tiene dos presentaciones diferentes: vía ejemplos de los conceptos introducidos y vía sus definiciones.

La primera cuestión supone el reconocimiento de un ejemplo de la clase de cuadriláteros presentada (los cuadriláteros que hemos llamado Exactos). Una respuesta correcta a esta cuestión supondrá una respuesta de nivel SOLO uniestructural. Al analizar las respuestas, hemos distinguido entre aquéllas que dicen que justifican el reconocimiento por la definición de la clase de los Exactos, codificada con U_0; de aquéllas que justifican el ejemplo escogido mediante la propiedad de tener lados paralelos (sin hacer mención al cuantificador "exactamente"), codificada como U_1; de aquéllas cuya justificación está basada en los ejemplos contenidos en el tronco del superítem o en la incapacidad de dar una justificación coherente con el ejemplo construido, codificadas con U_i con i= 2, 3 y 4. Al analizar los resultados obtenidos, por perfiles de razonamiento, vemos cómo la capacidad de justificar la elección de ejemplos de una clase de cuadriláteros dada, usando ya sea la definición de la clase o una condición necesaria derivada de la definición, decrece con el grado de adquisición de los diferentes niveles de razonamiento. El gráfico siguiente muestra los resultados comparados por perfiles de razonamiento de las respuestas uniestructurales obtenidas.



Categorías de respuesta:
j= Respuestas U_i, con i= 0,1, 2,3 y 4; para j= 1, 2, 3, 4 y 5
6= Respuestas nU

Gráfico VI. 15 Detalle del porcentaje de respuestas Uniestructurales en la cuestión 1 del superítem 3, por perfiles de razonamiento

El análisis de los datos correspondientes a las respuestas de los estudiantes, atendiendo a los diferentes subperfiles de razonamiento, parecen confirmar la afirmación anterior. La tabla siguiente muestra los resultados detallados de los estudiantes con el perfil 1.

Subperfil	U_0	U_1	U_i	nU	SR
1.1 y 1.2	50	5.5	0	0	0
1.3 y 1.4	33.3	11.1	0	0	0
Total	83.3	16.7	0	0	0

Tabla VI. 21. Porcentaje de respuestas de Uniestructurales en la cuestión 1 del superítem 3. Estudiantes con el perfil 1.

Así pues, justificar un ejemplo con la definición asociada a la clase a la que pertenece es el comportamiento mayoritario de los estudiantes que tienen una adquisición completa de los niveles 1 y 2 de van Hiele e indicios de razonamiento del nivel 3. A medida que la adquisición del nivel 3 es mayor, el porcentaje de estudiantes que muestra este comportamiento también es mayor (Tabla VI. 21)

Los estudiantes con los subperfiles 2.i, para i=1, 2 y 3 tienen una adquisición alta del nivel 2 de van Hiele, frente a los estudiantes que tiene una adquisición intermedia o baja. Fijémonos, en la tabla siguiente, cómo el comportamiento descrito para los estudiantes del perfil 1 no es tan mayoritario si la adquisición del nivel 2 de van Hiele no es, almenos, alta, decantándose este comportamiento por el uso de propiedades aisladas (respuesta U_1) o por la vía de los ejemplos (respuestas U_i).

Subperfil	U_0	U_1	U_i	nU	SR
2.1,2.2 y 2.3	45.4	3.0	0	0	0
2.4 y 2.5	9.1	12.1	15.1	15.1	0
Total	54.5	15.1	15.1	15.1	0

Tabla VI. 22. Porcentaje de respuestas de Uniestructurales en la cuestión 1 del superítem 3. Estudiantes con el perfil 2.

Estos resultados suponen que, o bien los estudiantes no reparan en el papel que las definiciones cumplen en las matemáticas o bien que la información contenida en la definición se comprende parcialmente (fundamentalmente el cuantificador que en ella se incluye) y se usa parcialmente. Esta capacidad decrece, como hemos visto, con la adquisición del nivel 2 de van Hiele.

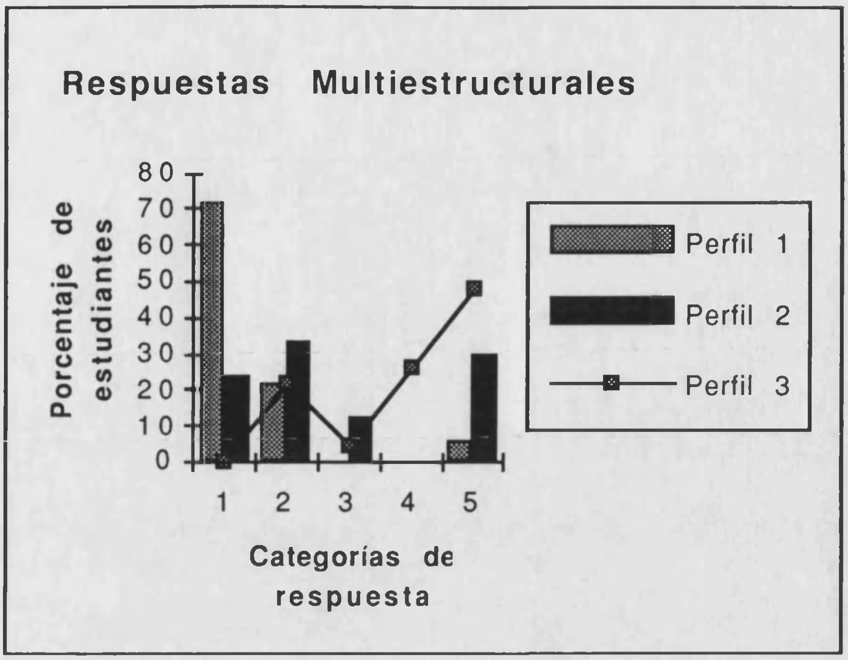
Los estudiantes con el perfil 3, demuestran, a lo sumo, una adquisición alta del nivel 1 de van Hiele, distinguiendo un primer grupo con una adquisición intermedia o alta de segundo nivel (subperfiles 3.1 y 3.2) en el que hay indicios de comportamientos como en los perfiles 1 y 2, de un segundo, con una adquisición baja del nivel 2, cuyo comportamiento confirma las tendencias iniciadas en los subperfiles 2.4 y 2.5 (Tablas VI. 22 y VI. 23), apareciendo incluso estudiantes que no reconocen el ejemplo a pesar de la información contenida en el tronco del superítem.

Subperfil	U_0	U_1	U_i	nU	SR
3.1 y 3.2	13.0	4.3	17.4	0	0
3.3 y 3.4	8.7	0	47.8	8.7	0
Total	21.7	4.3	65.2	8.7	0

Tabla VI. 23 Porcentaje de respuestas de Uniestructurales en la cuestión 1 del superítem 3. Estudiantes con el perfil 1.

La segunda cuestión trata de explorar si los estudiantes manejan dos aspectos de los que disponen en el tronco del superítem: propiedad (pares de lados paralelos) y cuantificador. Una respuesta correcta a esta cuestión, construir un cuadrilátero que cumpla las exigencias de pertenecer a la clase de los cuadriláteros llamada *Almenos* y no ser de la clase de cuadriláteros llamada *Exactos,* proporciona una respuesta cuya evaluación SOLO es multiestructural. Esto supone que los estudiantes son capaces de manejar más de un aspecto de la información que disponen en el tronco del superítem.

Así, como puede verse en el gráfico VI. 16, la práctica totalidad de los estudiantes con el perfil 1 de razonamiento produce un ejemplo correcto de cuadrilátero almenos que no es cuadrilátero exacto. Este porcentaje va decreciendo rápidamente a medida que el perfil de razonamiento decrece en los niveles de van Hiele. Los estudiantes del perfil 1, suelen justificar el ejemplo construido contrastando los cuantificadores que se incluyen en las respectivas definiciones: almenos y exactamente (lo que proporciona una respuesta M_0), mientras que este comportamiento disminuye para los estudiantes con el perfil 2, para ser nulo el porcentaje de los que lo hacen con el perfil 3. En cambio, un porcentaje mayor de estudiantes con el perfil 2 prefieren interpretar el cuantificador en un único sentido, justificando que el ejemplo construido pertenece a la clase pedida (cuadrilátero Almenos) y que por el hecho de cumplir la condición más restrictiva (tener dos pares de lados paralelos en lugar de uno sólo) ya excluye la posibilidad de pertenecer a la otra clase de cuadriláteros (los Exactos), relación que se da implícita en la respuesta (respuesta M_1) y no de manera explícita (respuesta M_0). Este mismo hecho se produce con los estudiantes del perfil 3. El gráfico siguiente muestra la oscilación en la calidad de las respuestas multiestructurales en relación con el perfil de razonamiento mostrado por los estudiantes.



Categorías de respuesta:
j= Respuestas M_i, con i= 0,1, 2 y 3; para j= 1, 2, 3 y 4
5= Respuestas nM

Gráfico VI. 16 Detalle del porcentaje de respuestas Multiestructurales en la cuestión 2 del superítem 3, por perfiles de razonamiento

El desglose de los resultados por subperfiles de razonamiento parecen confirmar la mejora en la calidad de la justificación en relación con la adquisición de los diferente niveles de razonamiento: contrastar de manera bidireccional ambos cuantificadores (respuesta M_0) o de manera unidireccional (respuesta M_1), frente a otros comportamientos (respuestas M_i) o a la incapacidad de responder correctamente a esta cuestión (respuesta nM).

Subperfil	M_0	M_1	M_i	nM	SR
1.1 y 1.2	44.4	11.1	0	0	0
1.3 y 1.4	27.8	11.1	0	5.5	0
Total	72.2	22.2	0	5.5	0

Tabla VI. 24 Porcentaje de respuestas de Multiestructurales en la cuestión 2 del superítem 3. Estudiantes con el perfil 1.

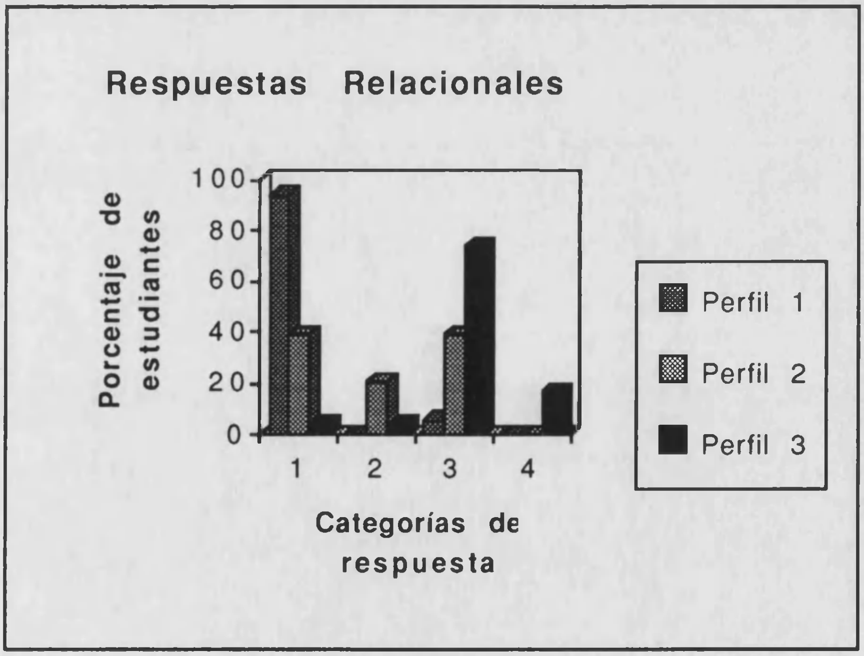
Subperfil	M_0	M_1	M_i	nM	SR
2.1, 2.2 y 2.3	24.2	27.3	0	11.1	0
2.4 y 2.5	0	6.1	12.1	24.2	0
Total	24.2	33.3	12.1	35.3	0

Tabla VI. 25. Porcentaje de respuestas de Multiestructurales en la cuestión 2 del superítem 3. Estudiantes con el perfil 2.

Subperfil	M_0	M_1	M_i	nM	SR
3.1 y 3.2	0	17.4	4.3	13.0	0
3.3 y 3.4	0	4.3	26.1	34.8	0
Total	0	21.7	34.4	47.8	0

Tabla VI. 26. Porcentaje de respuestas de Multiestructurales en la cuestión 2 del superítem 3. Estudiantes con el perfil 3.

La tercera cuestión de este superítem no tiene intención de proponer relaciones de inclusión entre clases de cuadriláteros. Parece consensuado por la investigación que las relaciones de exclusión entre clases de figuras geométricas son más fácilmente reconocibles que las relaciones de inclusión; y que justificar que un ejemplo de una cierta clase de formas geométricas pertenece o no a otra clase de formas geométricas tiene menos exigencias cognoscitivas que establecer una relación de inclusión entre clases de formas geométricas. Este hecho se constata en la cuestión 3 de este superítem. Los estudiantes deben decidir si la clase de los cuadriláteros llamados Exactos son también cuadriláteros llamados Almenos. Es decir, se les propone que juzguen si es verdadera o falsa la relación de inclusión "Los cuadriláteros exactos son cuadriláteros almenos" y digan por qué la creen verdadera o falsa. El gráfico siguiente muestra los resultados de esta cuestión por perfiles de razonamiento.



Categorías de respuesta:
j= Respuestas R_{ji}, con i= 0 y 1; para j= 1 y 2
3= Respuestas nR
4= Sin respuesta

Gráfico VI 17 Detalle del porcentaje de respuestas Relacionales en la cuestión 3 del superítem 3, por perfiles de razonamiento

Los resultados muestran que el 94.4% de los estudiantes con el perfil 1 dan una respuesta afirmativa a la pregunta solicitada, justificándose con el manejo de los cuantificadores (respuesta relacional R_0), mientras que este porcentaje decrece para los perfiles siguientes, 39.39% de los estudiantes con el perfil 2 y el 4.35% de los estudiantes con el perfil 3. Este hecho es coherente con las descripciones, desde la perspectiva del modelo van Hiele, de los estudiantes con el perfil que se le ha asignado, aunque a la luz de los resultados que mostramos aquí podríamos matizarla un poco. Puede decirse que la práctica totalidad de los estudiantes con el perfil 1 admiten la posibilidad de la clasificación inclusiva (en el contexto en el que se plantea y para las clases de cuadriláteros para los que se estudia) que, según los descriptores generales de los niveles de van Hiele del razonamiento, esta capacidad es demostrada cuando uno razona en el nivel 3. Para niveles de razonamiento más bajos, esta posibilidad no es admitida y las clases se suelen ver como clases disjuntas.

Los estudiantes con el perfil 1, son estudiantes cuyo grado de adquisición de las habilidades de razonamiento del nivel 3 varían desde una adquisición baja, a una adquisición completa, con un grado de adquisición completo de los niveles 1 y 2. Si tomamos los estudiantes que tienen al menos algún indicio de razonamiento de nivel 3 (perfil 1 y subperfiles 2.1 y 2.2 del perfil 2, es decir, una muestra parcial de 32 estudiantes que supone el 43% de la muestra total), prácticamente todos clasifican de manera inclusiva los exactos en los almenos y de ellos, utilizando de algún modo las definiciones para justificar la relación de inclusión (Tabla VI. 27). Esto es coherente con los descriptores generales de razonamiento del nivel 3 de van Hiele, aunque el nivel de exigencia del grado de adquisición de este nivel no es muy alto, lo que puede hacernos suponer que la capacidad de razonamiento para elaborar una respuesta de tipo R_0 es la adquisición completa de los dos primeros niveles de van Hiele.

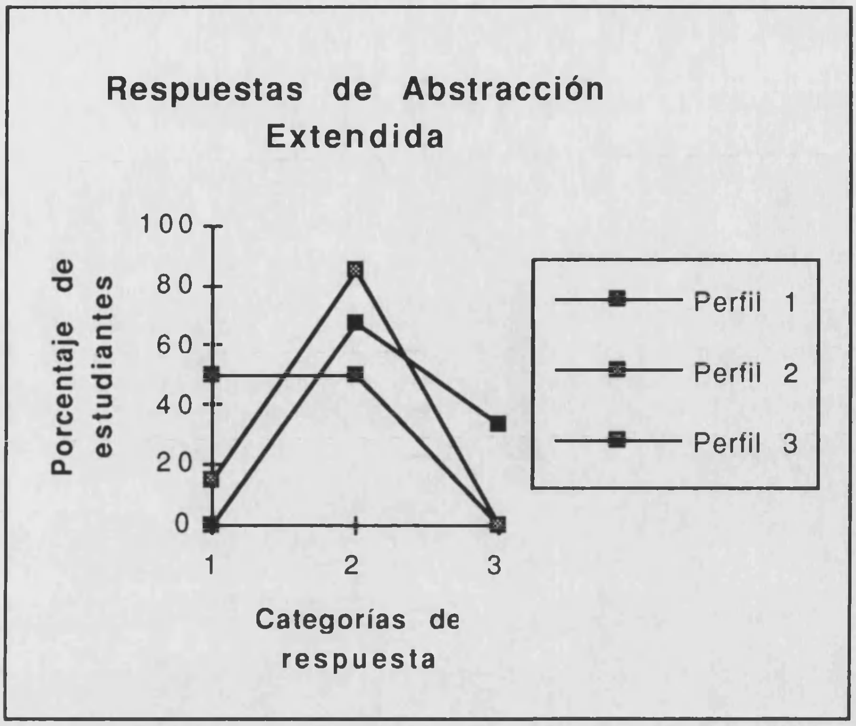
Subperfil	R_0	R_1	nR	SR
Perfil 1, 2.1 y 2.2	36.5	2.7	4.0	0
1.3 y 1.4	5.4	8.1	37.8	5.4
Total	41.9	10.8	41.8	5.4

Tabla VI .27. Porcentaje de respuestas de Relacionales en la cuestión 3 del superítem 3. Estudiantes con adquisición no nula de nivel 3 de van Hiele.

La importancia del contexto en el que se presenta la clasificación inclusiva puede verse reflejada en la cuarta cuestión de este superítem. Las cuestiones previas a ésta en el superítem podrían verse como estadios previos para dar como verdaderas las dos proposiciones enunciadas. Las clases de cuadriláteros trapecio y paralelogramo se presentan bajo el formato de su definición, y las relaciones de inclusión, usando los nexos "pueden ser" y "son". La primera da lugar a considerar la clase de cuadriláteros trapecio como clase más inclusiva que contiene a la clase de cuadriláteros paralelogramo. La segunda, hace patente la inclusión total de la clase paralelogramo en la clase trapecio.

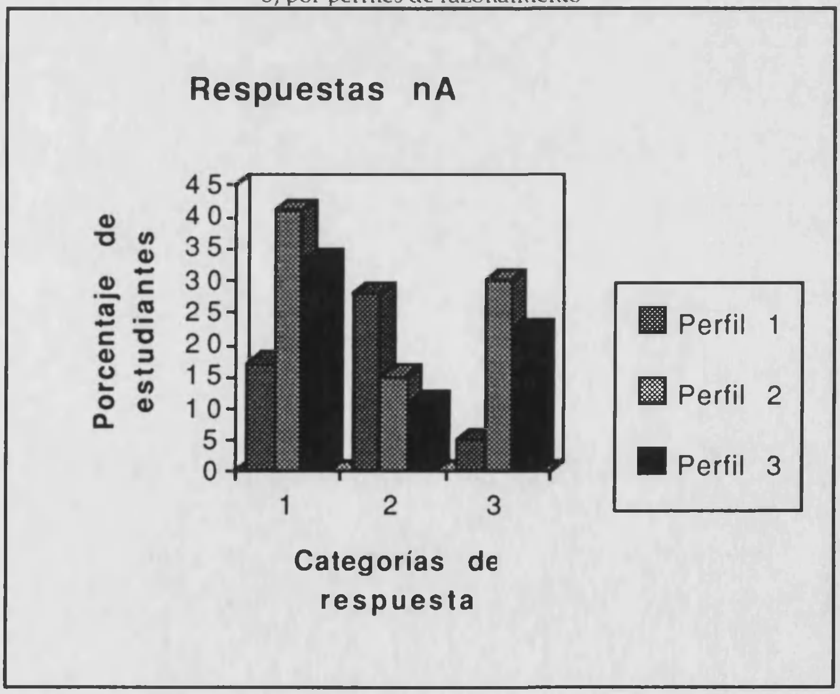
Si consideramos que una respuesta es de Abstracción Extendida en el caso en el que los estudiantes reconozcan ambas relaciones como verdaderas (respuesta A_0), la práctica totalidad de estudiantes con el perfil 1 reconoce al menos una de ellas como verdadera (respuestas A_{10} y A_{01}, donde 0= falsa, 1= verdadera), aunque sólo la mitad admite como verdaderas ambas. Este comportamiento decrece con los estudiantes con el perfil 2, haciéndose más acusado este decrecimiento en los estudiantes con el perfil 3 de razonamiento.

El gráfico siguiente muestra los resultados obtenidos, distinguiendo entre las respuestas calificadas como de Abstracción Extendida de aquéllas que no los son, particularizando las respuestas que admiten la inclusión de clases en un sentido y no en el otro (respuestas A_{10} y A_{01}), teniendo en cuenta los perfiles de razonamiento.



Categorías de respuesta:
1= Respuestas A_0
3= Respuestas nA
4= Sin respuesta

Gráfico VI. 18 Detalle del porcentaje de respuestas de Abstracción Extendida en la cuestión 4 del superítem 3, por perfiles de razonamiento



Categorías de respuesta:
1= Respuestas A_{10}
2= Respuestas A_{01}
3= Respuestas A_{00}

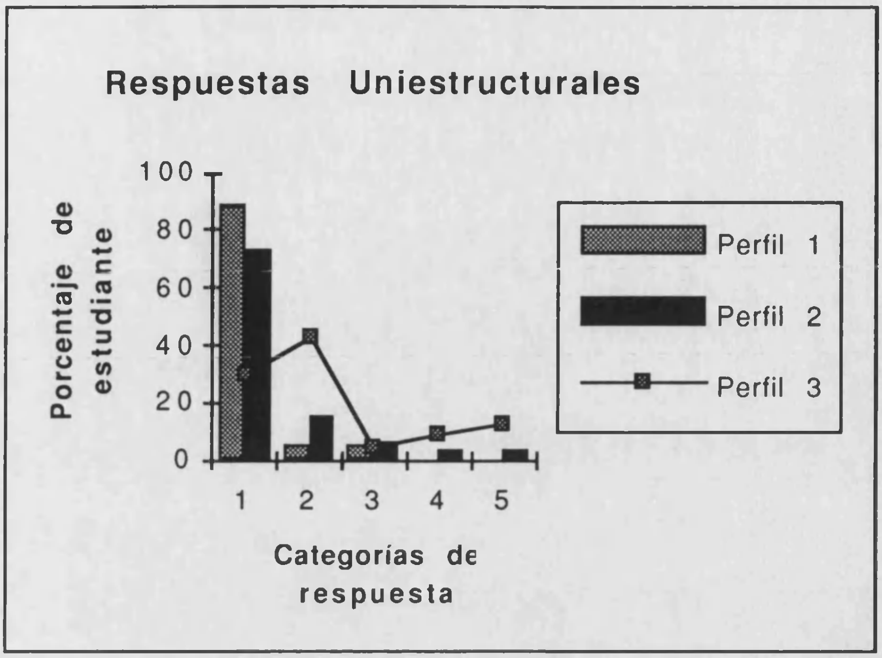
Gráfico VI. 19 Detalle del porcentaje de respuestas nA (no son calificadas como Abstracción Extendida) en la cuestión 4 del superítem 3, por perfiles de razonamiento

VI. 3. 1. 4 *Resultados del superítem 4*

Los estudiantes disponen en este superítem de un conjunto de condiciones necesarias (y abundantes) para el concepto de rectángulo. Si todas las condiciones, presentadas a modo de propiedades que han de cumplir los cuadriláteros llamados rectángulos, se tienen en cuenta, la visión que aquí se presenta de dicho concepto es inclusiva puesto que el hecho de considerar la propiedad nº 7, "tener por lo menos dos ejes de simetría", admite la posibilidad de considerar los cuadrados como una clase especial de rectángulos.

La primera cuestión es de reconocimiento de ejemplos de rectángulos entre un conjunto de formas geométricas. La elección correcta produce una respuesta de nivel SOLO Uniestructural. La práctica totalidad de los estudiantes evaluados distingue los rectángulos de las otras formas o figuras geométricas, justificando la respuesta, en la mayoría de los casos, con que cumplen la figura escogida cumple todas las propiedades enunciadas, tanto en los estudiantes con el perfil 1 como en los estudiantes del perfil 2. Es decir, la asociación lista de propiedades - rectángulo, está asumida para los estudiantes con los perfiles mencionados. Esta necesidad de asociar la lista de propiedades con el concepto, no se produce para los estudiantes con el perfil 3, que prefieren dar una respuesta U_1, es decir, usar unas pocas propiedades de las enunciadas, generalmente las más conocidas, para discriminar las clases llamadas rectángulos de las que no los son.

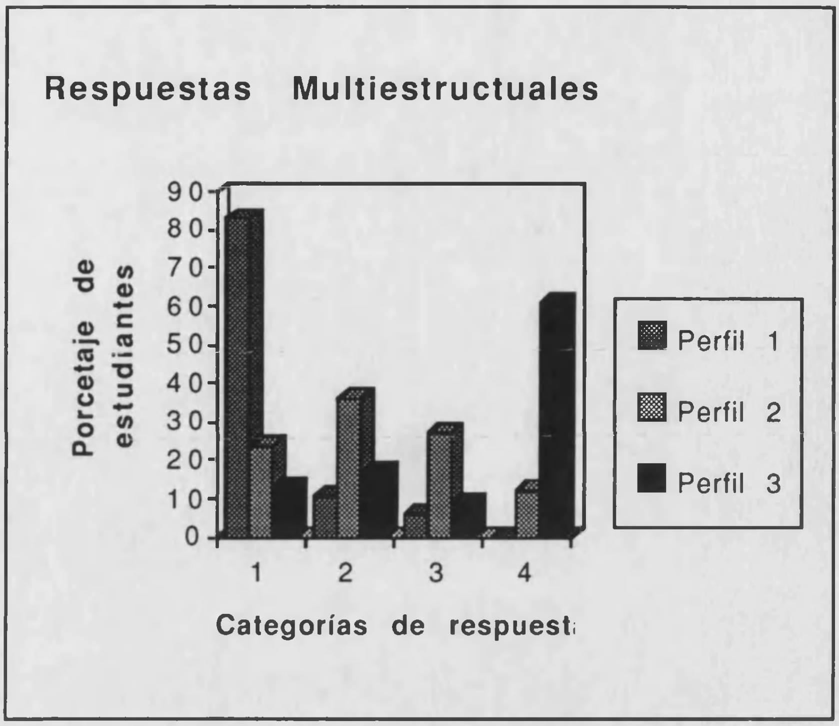
El gráfico siguiente muestra las diferentes categorías de respuestas uniestructurales por perfiles de razonamiento y sus porcentajes.



Categorías de respuesta:
j= Respuestas U_i, con i= 0, 1, 2, 3; para j= 1, 2, 3 y 4
5= Respuestas nU

Gráfico VI. 20 Detalle del porcentaje de respuestas Uniestructurales en la cuestión 1 del superítem 4, por perfiles de razonamiento

La segunda cuestión pretende ver si los estudiantes realmente usan la lista de propiedades para hacer el reconocimiento de los rectángulos, es decir, si incluyen a los cuadrados (formas B y G) como posibles formas rectangulares porque también cumplen con las propiedades listadas. Los resultados pueden verse en el gráfico siguiente.



Categorías de respuesta:
j= Respuestas M_i, con i= 0, 1 y 2; para j= 1, 2 y 3
4= Respuestas nM

Gráfico VI. 21 Detalle del porcentaje de respuestas Multiestructurales en la cuestión 2 del superítem 4, por perfiles de razonamiento

La elección correcta de todas las formas rectangulares proporciona una respuesta de nivel multiestructural M_0, si el estudiante asocia a los cuadriláteros escogidos la lista completa de propiedades. Esta respuesta, mayoritaria en los estudiantes del perfil 1, no se presenta del mismo modo en los estudiantes con el perfil 2, pues el reconocimiento de los rectángulos no incluye a los cuadrados, lo que puede significar, entre otras cosas, que: o bien la propiedad 2 actúa como obstáculo para la posibilidad de la igualdad de lados, o bien la lectura y comprensión de la lista de propiedades ha sido parcial, dado que hay propiedades, 6 y 7 fundamentalmente, que no son usadas ni para justificar ni para admitir las formas cuadradas como rectangulares. Deberíamos hacer constar a aquellos estudiantes que no reconocen las formas cuadradas como rectangulares y que sin embargo asocian el listado completo como justificación de su elección (respuesta M_2). Estos estudiantes, en su mayoría con el perfil 2, parecen actuar más en base a modelos mentales de formas rectangulares que a la propia lista de propiedades, a su lectura y comprensión. La elección correcta de las formas rectangulares, en la que posiblemente incluyan el rectángulo cuadrado B pero no el rectángulo G, cambiado de orientación respecto del B, que está en posición estándar, puede deberse quizás a que los estudiantes no lleguen a entender el papel que las propiedades tiene para caracterizar a los rectángulos o a otras formas geométricas. Es posible que con su modelo de rectángulo juzguen si una figura es o no rectangular, asociando a continuación la lista completa de propiedades que les proporciona el tronco del superítem. Este hecho lo constata la tabla VI. 28, ya que los estudiantes de los subperfiles 2.4 y 2.5, con una adquisición intermedia o baja del nivel 2, escogen esta forma de justificación (respuesta M_2).

Subperfil	M_0	M_1	M_2	nM	SR
2.1, 2.2 y 2.3	21.1	24.2	9.1	3.0	0
2.4 y 2.5	3.0	12.1	18.2	9.1	0
Total	24.2	36.3	27.3	12.1	0

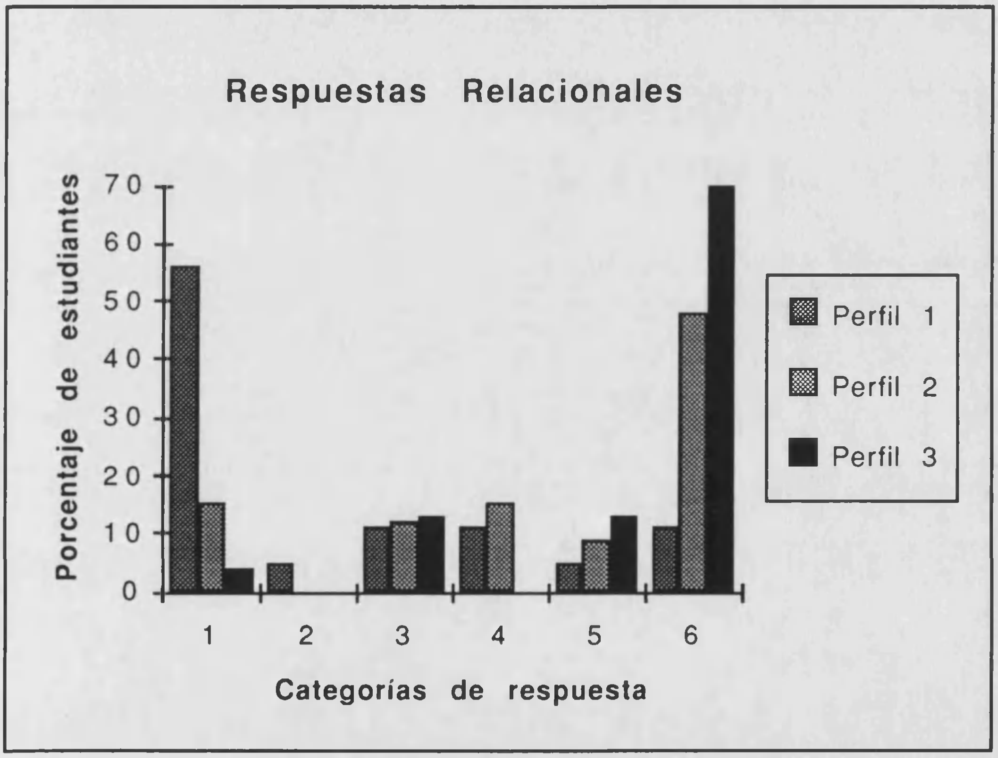
Tabla VI. 28. Porcentaje de respuestas de Multiestructurales en la cuestión 2 del superítem 4. Estudiantes con el perfil 2.

Finalmente, es de destacar que un alto porcentaje de estudiantes con el perfil 3, o no reconocen los rectángulos entre las formas presentadas, porque incluyen otras que no lo son, o se justifican con propiedades que no están en la lista propuesta por el superítem, lo que ha dado lugar a respuestas que han sido calificadas como no multiestructurales (nM). Estos estudiantes, que en su mayoría son capaces de distinguir rectángulos de otros polígonos de más de cuatro lados, no son capaces de hacerlo entre aquéllos que tienen cuatro lados, lo que demuestra que son incapaces de pensar con más de una propiedad (distinta al número de lados y/o ángulos) de las que poseen en el listado. Esta incapacidad de reconocer rectángulos entre otros cuadriláteros se acentúa en los estudiantes con un grado de adquisición bajo del segundo nivel de van Hiele y con una adquisición, a lo sumo, alta del primer nivel (Tabla VI. 29).

Subperfil	M_0	M_1	M_2	nM	SR
3.1 y 3.2	4.3	8.7	4.3	17.4	0
3.3 y 3.4	8.7	8.7	4.3	43.5	0
Total	13.0	17.4	8.6	60.9	0

Tabla VI. 29. Porcentaje de respuestas de Multiestructurales en la cuestión 2 del superítem 4. Estudiantes con el perfil 3.

La tercera cuestión profundiza en la observación y análisis del manejo de propiedades por parte de los estudiantes. Se les pide que reduzcan el número de propiedades de manera que la lista resultante siga caracterizando, inequivocamente, a los rectángulos. Es evidente que el análisis de la respuesta pasa por la aceptación por parte del estudiante de que el listado se pueda hacer más corto, lo que teóricamente supondría la aceptación de que unas propiedades pueden deducirse de las otras (respuesta relacional R_0), o la no aceptación de que el listado pueda hacerse más corto o incluso, en el que caso de que sí se haga más corto, lo haga en función de propiedades más o menos conocidas, más o menos fáciles, más o menos importantes, etc. (respuesta no relacional, nR). El detalle de las categorías de respuestas relacionales en relación con los perfiles de razonamiento, se muestran en el gráfico siguiente.



Categorías de respuesta:
j= Respuestas R_i, con i= 0, 1, 2, 3 y 4; para j= 1, 2, 3, 4 y 5
6= Respuestas nR

Gráfico VI. 22 Detalle del porcentaje de respuestas Relacionales en la cuestión 3 del superítem 4, por perfiles de razonamiento

Las tablas VI. 30, 31 y 32 son suficientemente explícitas. El reconocimiento de la existencia de posibles relaciones entre propiedades y por tanto el reconocimiento de la existencia de propiedades redundantes, se produce básicamente en las respuestas dadas por los estudiantes con el perfil 1, coincidiendo con casi todos los estudiantes que tienen un grado de adquisición alto o completo del nivel 3 (subperfiles 1.1 y 1.2). A partir de este nivel, los estudiantes muestran claramente o bien incapacidad de elaborar una respuesta de carácter relacional o bien, en el caso de construirla, demostrar que existe una relación de implicación entre las propiedades, aunque sí muestren una relación de consecuencia entre ellas (ver descriptores de respuesta SOLO, respuestas tipos R_2 y R_3).

Subperfil	R_0	R_1	R_2 ó R_3	R_4	nR
1.1 y 1.2	50	5.5	0	0	0
1.3 y 1.4	5.5	0	22.2	5.5	11.1
Total	55.5	5.5	22.2	5.5	11.1

Tabla VI. 30. Porcentaje de respuestas de Relacionales en la cuestión 3 del superítem 4. Estudiantes con el perfil 1.

Subperfil	R_0	R_1	R_2 ó R_3	R_4	nR
2.1, 2.2 y 2.3	15.1	0	21.2	6.1	15.1
2.4 y 2.5	0	0	6.1	3.0	33.3
Total	15.1	0	27.3	9.1	48.4

Tabla VI. 31. Porcentaje de respuestas de Relacionales en la cuestión 3 del superítem 4. Estudiantes con el perfil 2.

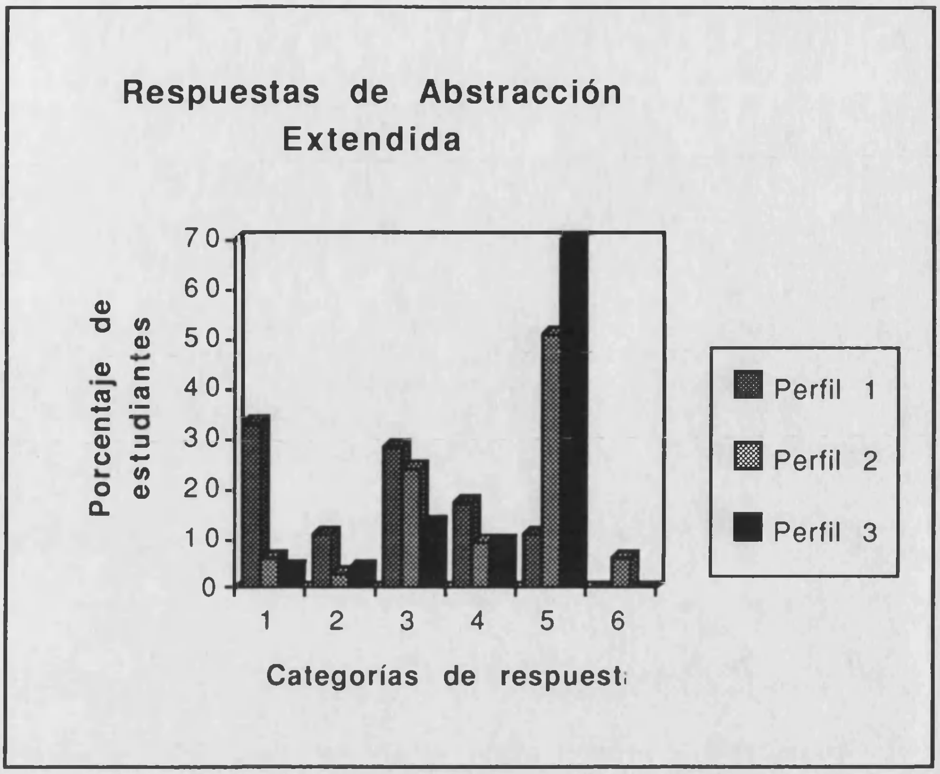
Subperfil	R_0	R_1	R_2 ó R_3	R_4	nR
3.1 y 3.2	4.3	0	13.0	8.7	8.7
3.3 y 3.4	0	0	0	4.3	60.9
Total	4.3	0	13.0	13.0	69.6

Tabla VI. 32. Porcentaje de respuestas de Relacionales en la cuestión 3 del superítem 4. Estudiantes con el perfil 3.

La cuarta cuestión de este superítem trata la definición, o mejor dicho, establecer la definición de un concepto geométrico: el rectángulo.

Desde el punto de vista del modelo de van Hiele, definir es un proceso o habilidad del razonamiento variable en función del grado de adquisición o dominio de las habilidades de razonamiento que un estudiante demuestra de un determinado nivel de razonamiento. Así, y descrito abundantemente en la bibliografía (ver, por ejemplo Capítulo III de esta memoria), la palabra definición comienza a adquirir significado matemático en aquellos estudiantes que tiene adquiridas las habilidades de razonamiento de nivel 3 de van Hiele. Antes, definir es equivalente a describir físicamente el concepto del que se solicita su definición (nivel 1 de van Hiele) o a asociar, al concepto que se ha de definir, una lista de propiedades que se dispone y lo describen. La relaciones entre propiedades que conducen a reducir la lista y hacerla más corta o lo más corta posible, de manera que también la nueva lista de propiedades caracterice al concepto en cuestión, es una habilidad de razonamiento que comienza a manifestarse con la adquisición de las habilidades de razonamiento del nivel 3 de van Hiele. El establecimiento de una definición como condición necesaria y suficiente, es una habilidad de razonamiento propia del nivel 3.

Desde el punto de vista de la Taxonomía SOLO, definir lo podemos considerar como un proceso de abstracción. Este proceso de abstracción dependerá del modo de razonar del que ha de establecer la definición. Así, consideraremos que una respuesta de es Abstracción Extendida (A_0) cuando el estudiante define rectángulo por las condiciones mínimas: propiedades 1 y 4 (4 lados y 4 ángulos rectos). Las tablas R441 y 442 del Anexo III de esta memoria, recogen los resultados de la evaluación SOLO de esta cuestión. Únicamente el 12.16% de los estudiantes evaluados consiguen establecer esta definición de rectángulo, de los cuáles, la mayoría corresponden a estudiantes con el perfil 1, decreciendo el porcentaje a medida que decrece la capacidad de razonamiento, como muestra el gráfico siguiente.



Categorías de respuesta:
j= Respuestas A_i, con i= 0, 2, 3 y 4; para j= 1, 2, 3 y 4
5= Respuestas nA
6= Sin respuesta

Gráfico VI. 23 Detalle del porcentaje de respuestas de Abstracción Extendida en la cuestión 4 del superítem 4, por perfiles de razonamiento

No obstante, e independientemente de las propiedades escogidas, pero sí del número de las mismas y la coherencia con la cuestión anterior, el 37.47% de los estudiantes evaluados consiguen establecer una definición del concepto rectángulo usando a lo sumo 4 propiedades de las 7 enunciadas en el tronco del superítem (respuestas de abstracción extendida A_i con i= 2, 3 y 4), siendo 3 el número de propiedades que con más frecuencia han usado los estudiantes para definir el rectángulo.

Establecer la definición matemática del concepto rectángulo (Respuesta A_0) sólo ha estado al alcance de los estudiantes que han mostrado, al menos, una adquisición alta del nivel 3 de van Hiele. Esta capacidad se ve disminuida con el grado de adquisición del nivel 3, optando entones los estudiantes por la inclusión, en la definición, de alguna propiedad redundante (Tabla VI. 33).

Subperfil	A0	A2	A3 ó A4	nA
1.1 y 1.2	33.3	5.5	16.7	0
1.3 y 1.4	0	5.5	27.8	11.1
Total	33.3	11.1	44.5	11.1

Tabla VI. 33. Porcentaje de respuestas de Abstracción Extendida en la cuestión 4 del superítem 4. Estudiantes con el perfil 1.

A medida que el grado de adquisición del nivel 2 decrece, decrece tanto la capacidad de establecer definiciones de rectángulo por medio de menos condiciones que las que disponen en la lista de propiedades, como la capacidad de dar una definición en cualquier de las formas que hemos considerado como de abstracción extendida. Este hecho puede comprobarse en las tablas siguientes.

Subperfil	A0	A2	A3 ó A4	nA	SR
2.1, 2.2 y 2.3	6.1	3.0	30.3	15.1	3.0
2.4 y 2.5	0	0	3.0	36.4	3.0
Total	6.1	3.0	33.3	51.5	6.1

Tabla VI. 34. Porcentaje de respuestas de Abstracción Extendida en la cuestión 4 del superítem 4. Estudiantes con el perfil 2.

Subperfil	A0	A2	A3 ó A4	nA	SR
3.1 y 3.2	0	4.3	17.4	13.0	0
3.3 y 3.4	4.3	0	4.3	56.5	0
Total	4.3	4.3	21.7	69.6	0

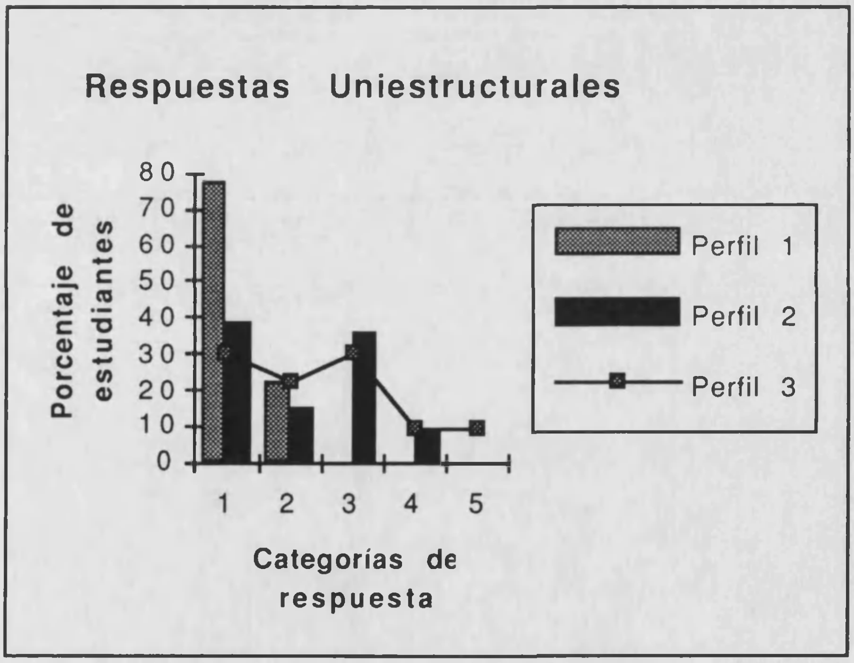
Tabla VI. 35. Porcentaje de respuestas de Abstracción Extendida en la cuestión 4 del superítem 4. Estudiantes con el perfil 3.

VI. 3. 1. 5 *Resultados del superítem 5*

El superítem 5 presenta la información mediante las definiciones escolares de cinco conceptos relacionados con los cuadriláteros: cuadrilátero, cuadrado, rectángulo, rombo y romboide. El análisis de diferentes colecciones de libros de texto de la enseñanza primaria, proporcionó las definiciones más usuales de las clases de cuadriláteros antes citadas como fuente de información para los estudiantes, en el tronco del superítem.

La primera cuestión trata de explorar si el estudiante usa la información que dispone en el tronco del superítem, cómo la usa, o si hace referencia a otra fuente de información diferente de la definición, para dibujar un cuadrilátero. Aproximadamente, el 46% de los estudiantes evaluados dibuja un cuadrilátero cualquiera (procurando salirse de los modelos de cuadriláteros conocidos), justificando que la figura dibujada es un cuadrilátero, o bien incluyendo la definición dada en el tronco del superítem o bien interpretando dicha definición, pero en cualquier caso, incluyendo en ella las dos propiedades: parte o región del plano y el número de lados (respuesta uniestructural U_0). Otros estudiantes, aproximadamente el 19%, no reparan en incluir en su justificación el hecho de que la figura sea una parte del plano y sólo incluyen propiedades como el número de lados de la figura (U_1), o propiedades específicas de una clase particular, tomada como ejemplo de cuadrilátero (U_2 y U_3), en el 32% aproximadamente de las respuestas. Las tablas R511 y 512 (Anexo III) muestran los resultados de la evaluación de la primera cuestión.

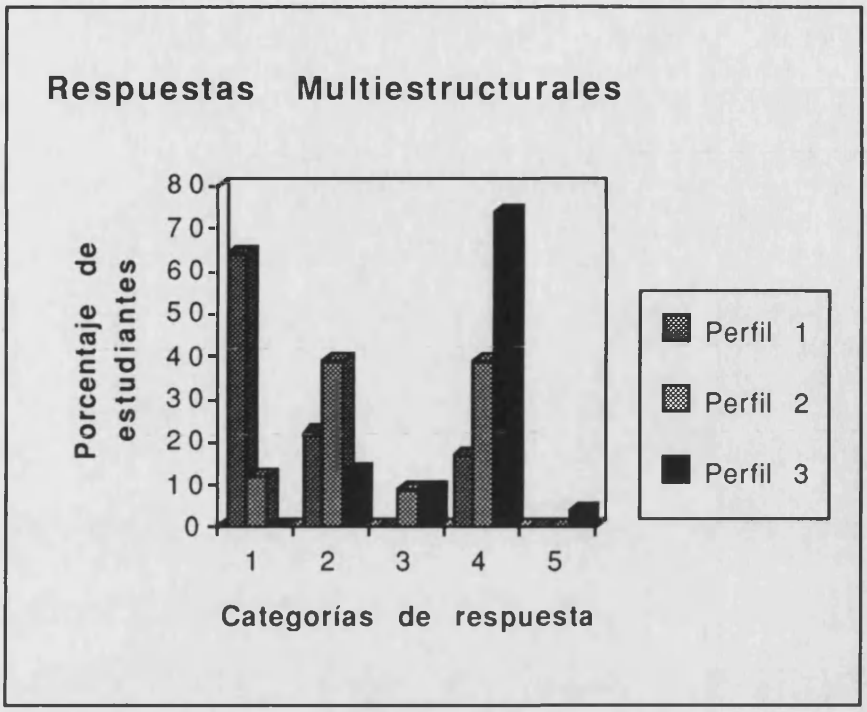
El gráfico siguiente muestra la evolución de las respuestas uniestructurales por perfiles de razonamiento.



Categorías de respuesta:
j= Respuestas U_i, con i= 0, 1, 2 y 3; para j= 1, 2, 3 y 4
5= Sin respuesta

Gráfico VI. 24 Detalle del porcentaje de respuestas Uniestructurales en la cuestión 1 del superítem 5, por perfiles de razonamiento

En la segunda cuestión, una respuesta se considerará multiestructural (M_0) si el estudiante escoge correctamente los cuadriláteros propuestos, incluyendo entre ellos al cuadrado ya sea como rectángulo, como rombo, o como ambas cosas a la vez, justificando su respuesta con las definiciones de los cuadriláteros implicados. Una respuesta como ésta se presenta aproximadamente en el 20% de los estudiantes evaluados, pero siendo en el 73.3% de los casos estudiantes con el perfil 1. No obstante, la respuesta mayoritaria, con un 27%, señala correctamente los rectángulos y los rombos, sin incluir a los cuadrados entre ellos, justificándose con las definiciones de ambos (respuesta M_1). Este tipo de respuestas es característico de los estudiantes con el perfil 2, pues del total de respuestas de este tipo, el 65% corresponden a los estudiantes con este perfil. Es destacable, por otra parte, que el 44.59% de los estudiantes no señala correctamente o bien a los rectángulos o bien a los rombos o a ninguno de los dos, en un conjunto de cuadriláteros (respuesta no multiestructural), siendo además mayoritaria en los estudiantes con el perfil 3 (74% aproximadamente de los estudiantes con este perfil) y destacable, por otras razones distintas a la anterior, para los estudiantes con los perfiles 1 (16.7% de ellos) y 2 (39.4% de ellos) (Tablas R521 y R522, Anexo III). Las tablas R51, 52 y 53 (Anexo III), muestran la distribución de las respuestas multiestructurales en los diferentes perfiles y subperfiles. El gráfico siguiente muestra la evolución de las respuestas multiestructurales en los distintos perfiles de razonamiento.



Categorías de respuesta:
j= Respuestas M_i, con i= 0, 1 y 2; para j= 1, 2 y 3
4= Respuestas no Multiestructurales (nM)
5= Sin respuesta

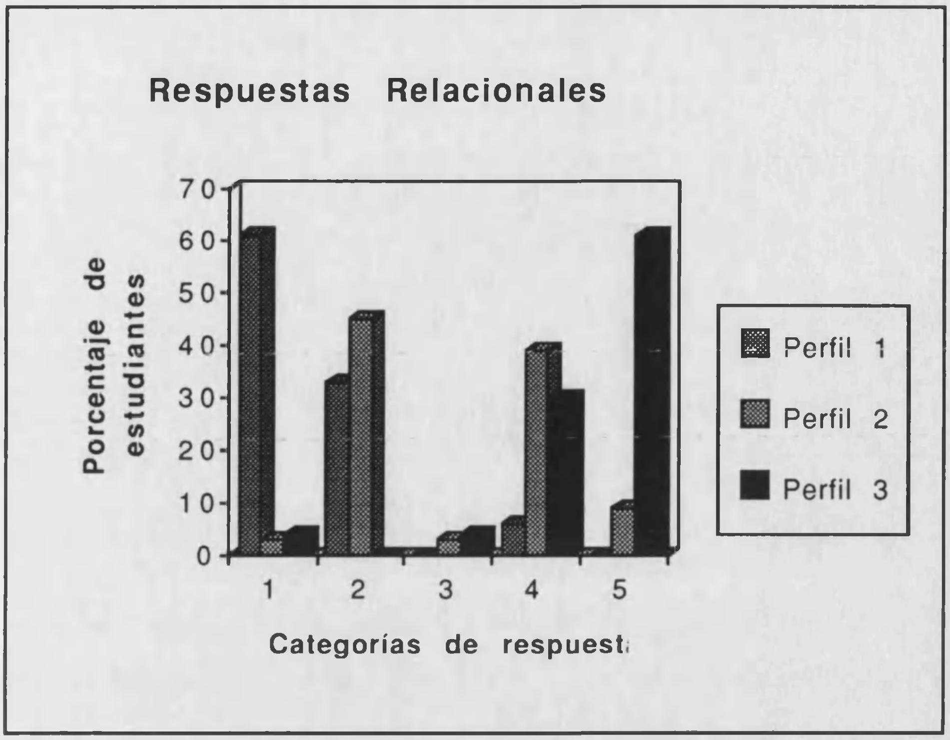
Gráfico VI. 25 Detalle del porcentaje de respuestas Multiestructurales en la cuestión 2 del superítem 5, por perfiles de razonamiento

La tercera cuestión trata de explorar cómo los estudiantes relacionan los conceptos cuando la información que disponen está dada a partir de las definiciones de dichos conceptos. Así, una respuesta correcta a esta cuestión, que hemos calificado como relacional R_0 o R_1, tiene en cuenta las definiciones de los cuadriláteros considerados y, en el primero de los casos, partiendo de la definición de la primera clase, indica qué ha de hacer para obtener la definición de la clase transformada, modificando para ello las condiciones iniciales de la definición de la primera. Este tipo de respuesta relacional, que se produce en el 17.57% de los casos, es mayoritaria en los estudiantes con el perfil 1, ya que de todas ellas, aproximadamente el 85% corresponden a los estudiantes con este perfil.

Por otra parte, algunos estudiantes no parece que sean conscientes de que resolver la cuestión consiste en construir la definición de la clase transformada a partir de la definición de la clase que se ha de transformar o ver que ligeros cambios en una definición producen definiciones de otras clases de cuadriláteros. Las respuestas del tipo R_1, en las que el estudiante anuncia la modificación de una propiedad, parece que contengan una actividad mental de contraste de propiedades antes que la de establecer definiciones. Es decir, si un romboide por ejemplo tiene los lados iguales dos a dos (representemos esta propiedad por x) y los ángulos iguales dos a dos (representémosla por y), el romboide está caracterizado por el par (x, y). Por otras parte, si el rombo tiene los lados iguales (z) y los ángulos iguales dos a dos (y), el par (z, y) caracteriza a los rombos. Entonces el romboide se convertirá en rombo en cuanto que el par (x, y) se transforme en el par (z, y), para lo cual la propiedad x se ha de convertir en z, pues y está en las dos definiciones. Es decir, restringir la propiedad general x (lados iguales dos a dos) en la propiedad particular y (lados iguales). Esta modificación parece que el estudiante la indica como *igualar los lados*. Este tipo de respuestas son mayoritarias en los estudiantes con el perfil 2, con un 45.45% de dichos estudiantes y un 71% aproximadamente de las respuestas relacionales de este tipo (tablas R531 y 532).

Por el contrario, los estudiantes con el perfil 3, no abordan mayoritariamente esta cuestión (el 61% aproximadamente). Por otra parte, los que sí responden, no elaboran respuestas que puedan ser catalogadas como relacionales pues están basadas en aspectos físicos relacionados con las figuras, antes que en propiedades o en las definiciones. De esta manera, no consiguen una respuesta correcta a esta cuestión, pues las modificaciones que proponen para transformar un ejemplo de la clase inicial de cuadriláteros en un ejemplo de la clase final, generalmente implica cambios en la posición u orientación de las figuras, sin que el estudiante repare en las propiedades que se han modificar. Así, pueden aparecer repuestas en las que el estudiante trata de obtener un cuadrado girando la posición del rombo, lo que evidentemente no le conduce a la solución correcta.

El gráfico siguiente muestra la evolución de las respuestas relacionales atendiendo a los perfiles de razonamiento de los estudiantes.



Categorías de respuesta:
j= Respuestas R_i, con i= 0, 1 y 2; para j= 1, 2 y 3
4= Respuestas no Relacionales (nR)
5= Sin respuesta

Gráfico VI. 26 Detalle del porcentaje de respuestas Relacionales en la cuestión 3 del superítem 5, por perfiles de razonamiento

La cuarta pregunta aborda la clasificación de los cuadriláteros considerados a lo largo de todo el superítem. En él, evaluamos relaciones de inclusión entre distintas clases de paralelogramos dadas por las proposiciones siguientes:

Todos los A son B (relación de inclusión total AcB)
Algunos A son B (relación de inclusión parcial de A en B)
Todos los A no son B (relación de exclusión)
Algunos A son B, C o D (relación de inclusión en más de una clase).

Los nexos usados en las proposiciones anteriores trataron de minimizar las dificultades de comprensión que las relaciones del tipo *son* o *pueden ser* pudieran tener. Así, creímos, como de Villiers (1987), que el significado de los nexos son o pueden ser, en sí mismos, tenían diferente significado para la mayoría de estudiantes que aquél que les da las matemáticas. Por eso, creímos conveniente expresar, por ejemplo, la relación "los cuadrados son romboides" por la relación "todos los cuadrados son romboides especiales" que estructuralmente vienen a decir lo mismo pero que semánticamente contienen grados de comprensión diferentes.

Una respuesta correcta a esta cuestión, calificada como Abstracción Extendida A_0, demostraba que el estudiante era capaz de admitir la clasificación inclusiva de las diferentes clases de cuadriláteros, justificándose con las definiciones de los mismos o sus equivalentes al modo y manera como se hizo en la cuestión anterior. Este tipo de respuestas se produjo en el 66.7% de los estudiantes con el perfil 1, no siendo significativas en los demás perfiles (Tablas R541 y 542, Anexo III), destacando, por otra parte, que el 59.46% de los estudiantes evaluados no elaboraron una respuesta de abstracción extendida al responder a esta cuestión. Este hecho se pone de manifiesto en las respuestas de los estudiantes con el perfil 2, ya que, para un porcentaje elevado de respuestas (el 91% aproximadamente), el 90% son calificadas como nA. Ningún estudiante con el perfil 3 consiguió elaborar una respuesta de abstracción extendida[2].

El detalle de las respuestas del tipo A_0, en los estudiantes con el perfil 1, puede verse en el gráfico siguiente.

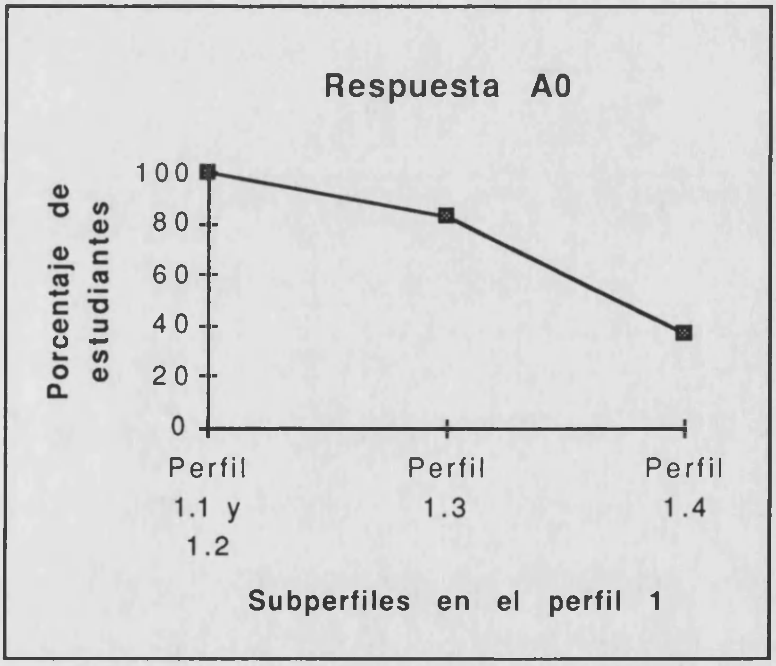


Gráfico VI. 27 Detalle del porcentaje de respuestas del tipo A_0 en la cuestión 4 del superítem 5, en el perfil 1, por subperfiles de razonamiento

[2] En la 5ª columna de las tablas R51, 52 y 53 puede verse el tipo de respuesta emitida por cada estudiante. Hemos codificado con A_{hijk} cualquier respuesta a esta cuestión, dónde h, i, j y k representan valores 0 y 1 (0= falso y 1= verdadero) para cada relación, respectivamente, excepto para la tercera, en la que, por ser negativa, la respuesta 1 será considerada como falsa y la respuesta 0 como verdadera, de tal manera que es más cómodo evaluar las respuestas al coincidir 1 con correcto y 0 con incorrecto, siempre en términos de clasificaciones inclusivas. La respuesta A_{1111} es la que se ha considerado de abstracción extendida A_0.

VI. 3. 2 *Identificación de niveles SOLO en los estudiantes*

En el Anexo III de nuestra memoria, pueden verse las tablas que recogen la evaluación SOLO por estudiante y por superítem (Tablas Rij, con i= 1, 2, 3 y 4; j= 1, 2 y 3.

En este apartado, mostraremos el resultado de la asignación de niveles SOLO a los estudiantes en función de los dos criterios discutidos en el Capítulo V.

VI. 3. 2. 1 *Criterio más exigente*

Como ya se ha dicho en capítulos anteriores, podemos asignar diferentes niveles SOLO a las respuestas dadas por los estudiantes. Estos niveles de respuesta, relativos a una situación concreta (cuestiones de un superítem) y para un estudiante concreto, Uniestructural (U), Multiestructural (M), Relacional (R) y Abstracción Extendida (A), los hemos utilizado para asignar un nivel SOLO a cada estudiante: Uniestructural (UNI), Multiestructural (MULT), Relacional (REL) y Abstracción Extendida (ABE), para un conjunto de respuestas del estudiante a un test compuesto por cinco superítems que contienen diferentes niveles de respuesta puntuales. El criterio "≤ 1" usado, permite asignar un nivel SOLO a un estudiante que ha contestado en los niveles anteriores a todas las cuestiones del test, permitiéndolo una única respuesta mala, es decir, a la que no es posible asignarle ese nivel. En caso de que un estudiante no sea capaz de cumplir este criterio para las respuestas de nivel uniestructural, entonces se le asigna el nivel Preestructrual (PRE)

La tabla siguiente recoge el número de estudiantes y los porcentajes correspondientes a esta asignación de niveles SOLO.

NIVEL SOLO	NÚMERO DE ESTUDIANTES	PORCENTAJES
PRESTRUCTURAL (PRE)	4	5.4
UNIESTRUCTURAL (UNI)	32	43.2
MULTIESTRUCTURAL (MULT)	18	24.3
RELACIONAL (REL)	13	17.6
ABSTRACCIÓN EXTENDIDA (ABE)	7	9.5
TOTALES	74	100

Tabla VI. 36 Niveles SOLO identificados. Número de estudiantes y porcentajes. Criterio ≤ 1

En ella puede verse cómo los niveles dominantes son los tres primeros, uniestructural, multiestructural y relacional, siendo el nivel uniestructural el que destaca de manera apreciable sobre los demás. Los niveles extremos, preestructural y abstracción extendida, contienen porcentajes de estudiantes mucho más pequeños que los centrales, lo que puede indicarnos que aquellos niveles interpretan mejor el aprendizaje de los estudiantes que éstos, dónde la ubicación de los estudiantes puede verse como rara.

VI. 3. 2. 2 *Criterio menos exigente*

Si ahora consideramos el criterio "≤2", en el que el número máximo de respuestas malas, es decir, aquéllas a las que no es posible asignar el nivel de respuesta que corresponde al nivel SOLO, es dos, los resultados que obtenemos son los siguientes:

NIVEL SOLO	NÚMERO DE ESTUDIANTES	PORCENTAJES
PREESTRUCUTRAL (**PRE**)	0	0
UNIESTRUCTURAL (**UNI**)	20	27.0
MULTIESTRUCTURAL (**MULT**)	22	29.7
RELACIONAL (**REL**)	21	28.4
ABSTRACCIÓN EXTENDIDA (**ABE**)	11	14.9
TOTALES	74	100

Tabla VI. 37 Niveles SOLO identificados. Número de estudiantes y porcentajes. Criterio ≤ 2

Podemos apreciar como, al usar este segundo criterio, se produce un ligero desplazamiento de los niveles asignados hacia los dominantes que siguen siendo el uniestructural, multiestructural y relacional, desapareciendo el nivel Prestructural y con algo de mayor presencia del nivel de abstracción extendida. Los estudiantes se concentran en esos tres niveles con porcentajes parecidos y sin que ninguno de ellos sobresalga a los demás. El gráfico siguiente muestra los resultados comparados de la asignación de niveles SOLO siguiendo ambos criterios.

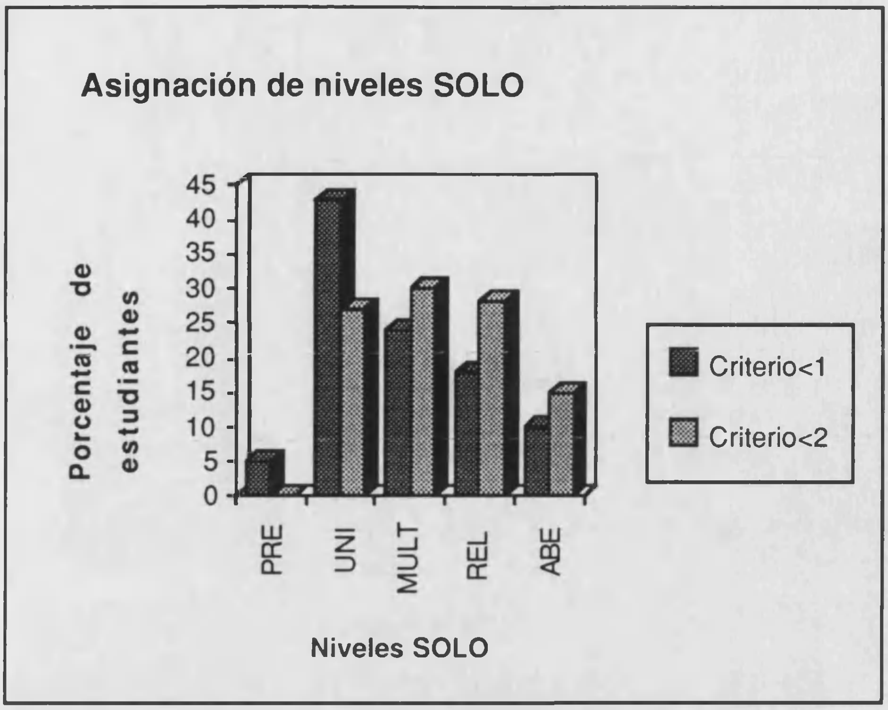


Gráfico VI. 28 Gráfico comparado de la asignación de niveles SOLO según los criterios considerados.

VI. 4 Resultados del análisis comparado de la evaluación de los niveles de van Hiele y el nivel SOLO de los estudiantes.

En general no es posible asignar un nivel SOLO característico de los estudiantes con un nivel de razonamiento de van Hiele dado. Entre otras razones, que luego veremos, porque no es coherente con la consideración de la continuidad de los niveles de van Hiele, considerar, a secas, que un estudiante "está" en un nivel n de van Hiele. La tabla C11 (Anexo III) confirma esta afirmación, para el criterio más fuerte de asignación de niveles SOLO, criterio ≤1. En modo alguno es característico un nivel SOLO para los estudiantes con el perfil 1, si exceptuamos a los estudiantes con los subperfiles 1.1 y 1.2, a los que, independientemente del criterio de asignación, les corresponde un nivel SOLO de Abstracción Extendida. Por lo que parece razonable pensar que, si un estudiante demuestra poseer indicios de razonamiento del nivel 4 y un grado de adquisición alto del nivel 3, se le asignase el nivel SOLO de Abstracción Extendida.

A los estudiantes que no muestran indicios de razonamiento del nivel 4 ni una adquisición alta del nivel 3, subperfil 1.3, es más difícil determinar qué nivel SOLO les es característico, al usar el criterio más exigente (Tabla C11, Anexo III). Se recorren niveles desde el nivel Multiestructural hasta el de Abstracción Extendida, predominando, en todo caso, el nivel Relacional (50%). En cambio, con el criterio menos exigente (Tabla C12, Anexo III), la asignación parece más fácil, pues podemos asignar el nivel de Abstracción Extendida, ya que el 83.3% de los estudiantes con este perfil, cumplen con este criterio. Así pues, si juntamos el análisis para los estudiantes con los perfiles 1.1, 1.2 y 1.3, con el criterio menos exigente, el nivel SOLO de Abstracción Extendida se podría asociar con aquellos estudiantes que demostrasen un modo de funcionar cuyo perfil estaría dado por el grado de adquisición completo de los niveles 1 y 2 y alto del nivel 3, con o sin indicios de razonamiento del nivel 4.

Los estudiantes de los subperfiles 1.4 y 1.5 tienen un perfil de razonamiento caracterizado porque el grado de adquisición del nivel 3 es intermedio o bajo. Para ellos, el criterio más exigente (Tabla C11, Anexo III) nos da el nivel SOLO Relacional para el primer perfil (80%) y sin un nivel SOLO característico para el segundo perfil. Mientras que, con el menos exigente (Tabla C12, Anexo III), obtenemos un nivel Relacional para el primer perfil (60%), con rasgos del nivel SOLO de Abstracción Extendida (40%), y el nivel SOLO Relacional para el segundo perfil (1.5). Así que la asociación del nivel SOLO Relacional con la adquisición completa de los niveles 1 y 2 de van Hiele e intermedia del nivel 3 parece razonable para ambos criterios, mientras que, con el criterio menos fuerte, la asignación razonable del nivel SOLO Relacional es con la adquisición completa de los niveles 1 y 2 de van Hiele y un grado de adquisición intermedio o bajo del nivel 3, tabla VI. 38.

	NIVEL SOLO	
ADQUISICIÓN DE NIVEL van HIELE	CRITERIO ≤1	CRITERIO ≤2
Completa 1 y 2; Alta nivel 3; Indicios nivel 4	ABSTRACCIÓN EXTENDIDA	ABSTRACCIÓN EXTENDIDA
Completa 1 y 2; Alta nivel 3; Nula nivel 4	NO NIVEL	ABSTRACCIÓN EXTENDIDA
Completa 1 y 2; Intermedia nivel 3	RELACIONAL	RELACIONAL ⟶ ABSTRACCIÓN EXT.
Completa 1 y 2; Baja nivel 3	NO NIVEL	RELACIONAL

Tabla VI. 38 Asociaciones van Hiele - SOLO identificadas en estudiantes con el perfil 1 de razonamiento

La característica común de los estudiantes con el perfil 2 es el grado de adquisición completo del nivel 1 de van Hiele. Al igual que ocurrió con los estudiantes con el perfil 1, este hecho no garantiza la asignación de un nivel SOLO a todos los estudiantes con este perfil general de razonamiento. Conviene hacer un estudio más detallado, mirando la adquisición de los otros niveles de van Hiele.

Distinguiremos los subperfiles 2.1 y 2.2, cuyo perfil de razonamiento nos da estudiantes con un grado de adquisición alto del nivel 2 e intermedio o bajo del nivel 3, de los subperfiles 2.3, estudiantes con una adquisición nula del nivel 3, y subperfiles 2.4 y 2.5, estudiantes con un grado de adquisición intermedio del nivel 2 y bajo o nulo del nivel 3.

Para el primero de los grupos, el criterio más exigente nos daría un nivel SOLO Multiestructural (64.3%) con alguna tendencia Relacional (28.6%), mientras que con el menos exigente, la tendencia de los niveles SOLO se invierte hacia el nivel Relacional (78.6%) (Tablas C21 y C22, Anexo III). Por otro lado, el subperfil 2.3, cuya diferencia con el anterior está en la nula adquisición del nivel 3, le corresponde el nivel SOLO Multiestructural tanto en el criterio más exigente como con el menos. Esto sugiere que la tendencia al nivel Relacional está en demostrar indicios de razonamiento del nivel 3, mientras que el nivel Multiestructural se correspondería con el perfil de estudiantes con un grado de adquisición completo del nivel 1 y alto del nivel 2.

El criterio más exigente (Tabla C21, Anexo III) parece uniformizar la asignación del nivel SOLO Uniestructural a los estudiantes con el perfil de razonamiento de los subperfiles 2.4 y 2.5 (78.6%), es decir, con estudiantes con un grado de adquisición intermedio o bajo del nivel 2, mientras que con el criterio menos exigente, la asignación sería posible con el nivel SOLO Multiestructural (57.1%), aunque el grado de adquisición bajo del nivel 2 siga asociándose con el nivel Uniestructural, independientemente del criterio escogido, Tabla VI. 39.

ADQUISICIÓN DE NIVEL van HIELE	NIVEL SOLO CRITERIO ≤1	CRITERIO ≤2
Completa nivel 1; Alta nivel 2; Indicios nivel 3	MULTIESTRUCTURAL → RELACIONAL	RELACIONAL
Completa nivel 1; Alta nivel 2; Nula nivel 3	MULTIESTRUCTURAL	MULTIESTRUCTURAL
Completa nivel 1; Intermedia nivel 2	UNIESTRUCTURAL	MULTIESTRUCTURAL
Completa nivel 1; Baja nivel 2	UNIESTRUCTURAL	UNIESTRUCTURAL

Tabla VI. 39 Asociaciones van Hiele - SOLO identificadas en el grupo de estudiantes con el perfil 2

Los estudiantes que razonan según el perfil 3, tiene la característica general de mostrar un grado de adquisición no completo del nivel 1. La adquisición alta del nivel 1 y 2, con indicios de razonamiento de nivel 3, nos clasifica, creemos que de manera coherente con lo expuesto en los casos anteriores, al estudiante del grupo 3.1 (Tablas C31 y C32, Anexo III) con el nivel Multiestructural para el criterio más exigente y el Relacional para el menos exigente. Esto sugiere que exista una mayor influencia de los niveles de razonamiento altos de van Hiele sobre el nivel SOLO asignado, que de los niveles de razonamiento bajos. Lo mismo podría decirse de los estudiantes con los subperfiles 3.2 y 3.3, cuya adquisición intermedia o baja del nivel 2 hace que, para el primer criterio, la asignación se corresponda con el nivel SOLO Uniestructural (71.4% y 83.3%, respectivamente) e igualmente con el criterio menos exigente (57.1% y 83.3%, respectivamente), aunque con tendencia al nivel SOLO Multiestructural en los estudiantes con el perfil 3.2 (42.8%).

Finalmente, a los estudiantes con el perfil 3.3, es decir, estudiantes con una adquisición intermedia del nivel 1 y baja o nula del nivel 2 parece razonable asignarles el nivel SOLO Uniestructural para los dos criterios de asignación, Tabla VI. 40.

ADQUISICIÓN DE NIVEL van HIELE	NIVEL SOLO CRITERIO ≤1	CRITERIO ≤2
Alta niveles 1 y 2; Indicios nivel 3	MULTIESTRUCTURAL	RELACIONAL
Alta nivel 1; Intermedia del nivel 2	UNIESTRUCTURAL	UNIESTRUCTURAL → MULTIESTRUCTURAL
Alta nivel 1; baja del nivel 2	UNIESTRUCTURAL	UNIESTRUCTURAL
Intermedia nivel 1; baja o nula nivel 2	UNIESTRUCTURAL	UNIESTRUCTURAL

Tabla VI. 40 Asociaciones van Hiele - SOLO identificadas en el grupo de estudiantes con el perfil 3

Si las asociaciones obtenidas para los diferentes perfiles y subperfiles de razonamiento de los estudiantes las ponemos juntas, obtendríamos una visión macroscópica de las relaciones entre ambas teorías, relaciones que se establecen entre el grado de adquisición de los niveles de razonamiento de van Hiele y la capacidad o nivel de respuesta SOLO de los estudiantes.

Las tablas siguientes muestran estas relaciones según el criterio de asignación del nivel de respuesta SOLO usado.

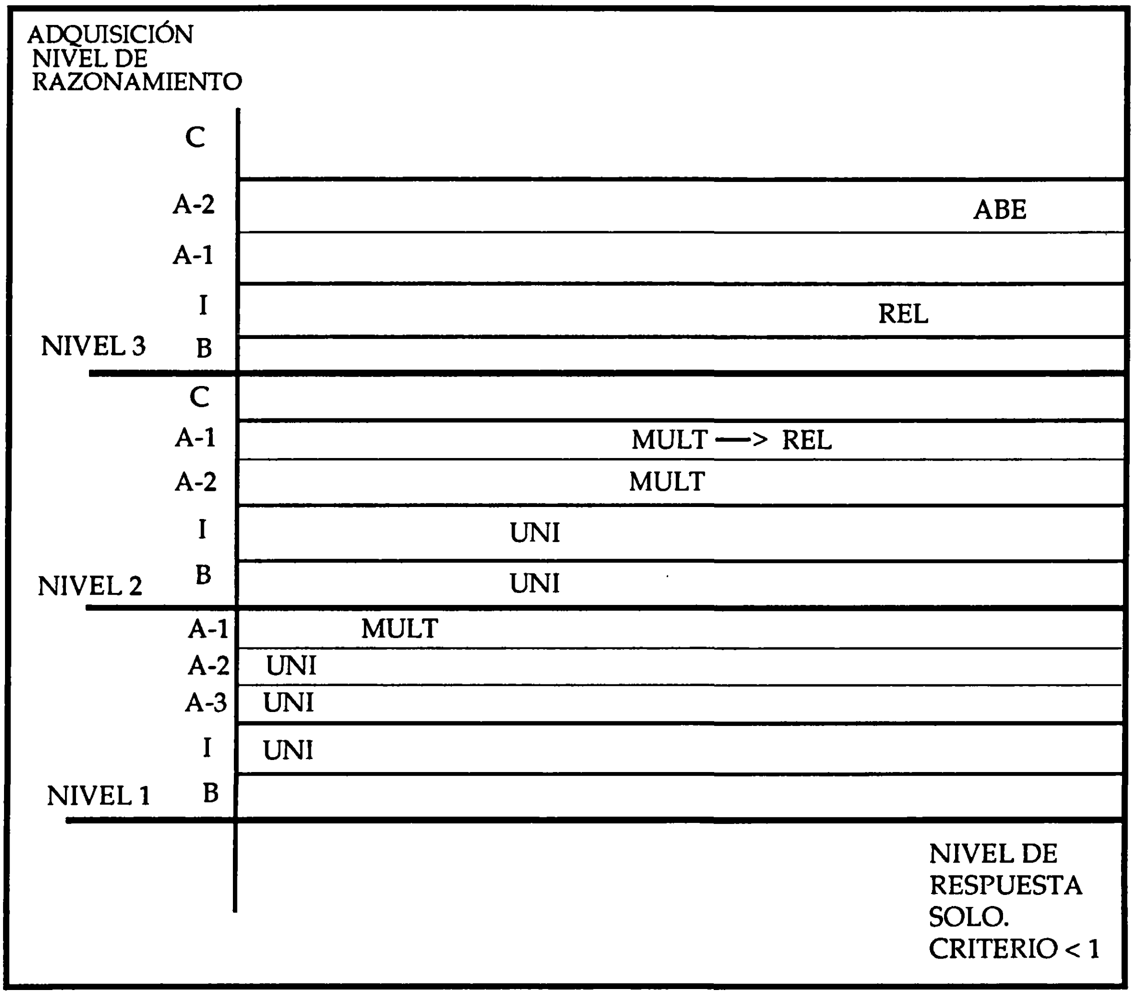
NIVEL DE RAZONAMIENTO van HIELE	ADQUISICIÓN DEL NIVEL DE RAZONAMIENTO	NIVEL DE RESPUESTA SOLO CRITERIO ≤ 1
	COMPLETA	
	ALTA	ABSTRACCIÓN EXTENDIDA
	ALTA	no nivel SOLO
	INTERMEDIA	RELACIONAL
NIVEL 3	BAJA	no nivel SOLO
	ALTA(Indicios N.3)	MULTIESTRUCTURAL —› RELACIONAL
	ALTA	MULTIESTRUCTURAL
	INTERMEDIA	UNIESTRUCTURAL
NIVEL 2	BAJA	UNIESTRUCTURAL
	ALTA(Indicios N.3)	MULTIESTRUCTURAL
	ALTA (Intermedia N.2)	UNIESTRUCTURAL
	ALTA (Baja o Nula N.2)	UNIESTRUCTURAL
NIVEL 1	INTERMEDIA	UNIESTRUCTURAL

Tabla VI. 41 Relaciones identificadas entre los niveles de van Hiele y niveles SOLO. Criterio ≤ 1

NIVEL DE RAZONAMIENTO van HIELE	ADQUISICIÓN DEL NIVEL DE RAZONAMIENTO	NIVEL DE RESPUESTA SOLO CRITERIO ≤ 2
	COMPLETA	
	ALTA	ABSTRACCIÓN EXTENDIDA
	ALTA	ABSTRACCIÓN EXTENDIDA
	INTERMEDIA	RELACIONAL —› ABSTRACCIÓN EXTENDIDA
NIVEL 3	BAJA	RELACIONAL
	ALTA(Indicios N.3)	RELACIONAL
	ALTA	MULTIESTRUCTURAL
	INTERMEDIA	MULTIESTRUCTURAL
NIVEL 2	BAJA	UNIESTRUCTURAL
	ALTA(Indicios N.3)	RELACIONAL
	ALTA (Intermedia N.2)	UNIESTRUCTURAL —› MULTIESTRUCTURAL
	ALTA (Baja o Nula N.2)	UNIESTRUCTURAL
NIVEL 1	INTERMEDIA	UNIESTRUCTURAL

Tabla VI. 42 Relaciones identificadas entre los niveles de van Hiele y niveles SOLO. Criterio ≤ 2

Es razonable pensar que los niveles SOLO Uniestructurales, Multiestructurales, Relacionales y de Abstracción Extendida, asignados a los estudiantes, están en relación con el nivel de razonamiento mostrados por los estudiantes. Por eso, admitimos, desde el punto de vista de la Taxonomía SOLO, que los estudiantes a los que les hemos asignado un determinado nivel SOLO, muestran mayor calidad en las respuestas a medida que mejora el perfil de razonamiento, no sólo desde el punto de vista de las habilidades de razonamiento, sino también desde el punto de vista del aprendizaje escolar. Este hecho lo reflejamos en el gráfico siguiente, en el que sobre el eje de abcisas se han representado los niveles SOLO asignados, según el criterio escogido, y sobre el eje de ordenadas el grado de adquisición de los diferentes niveles de van Hiele. Podemos encontrarnos con el mismo nivel SOLO en diferentes perfiles de razonamiento. Lo que queremos decir con ello es que podemos tener estudiantes que demuestren capacidades en términos SOLO del mismo nivel, pero con niveles de razonamiento diferentes. Por otra parte, dado que los niveles SOLO son jerárquicos, y así se ha demostrado en la validación del instrumento de evaluación que se ha usado (ver sección VI. 5. 1), un nivel SOLO asignado a un estudiante supone la asignación de los niveles SOLO anteriores, por lo que podemos encontrarnos con ciclos de aprendizaje, en el sentido dado por Biggs y Collis (1991), para un perfil completo o dentro de un subperfil determinado. Esta observación no parece muy clara en el gráfico siguiente, en el que se han asignado niveles SOLO con el criterio ≤ 1, por lo que haría falta profundizar, en el futuro, la investigación en este sentido.

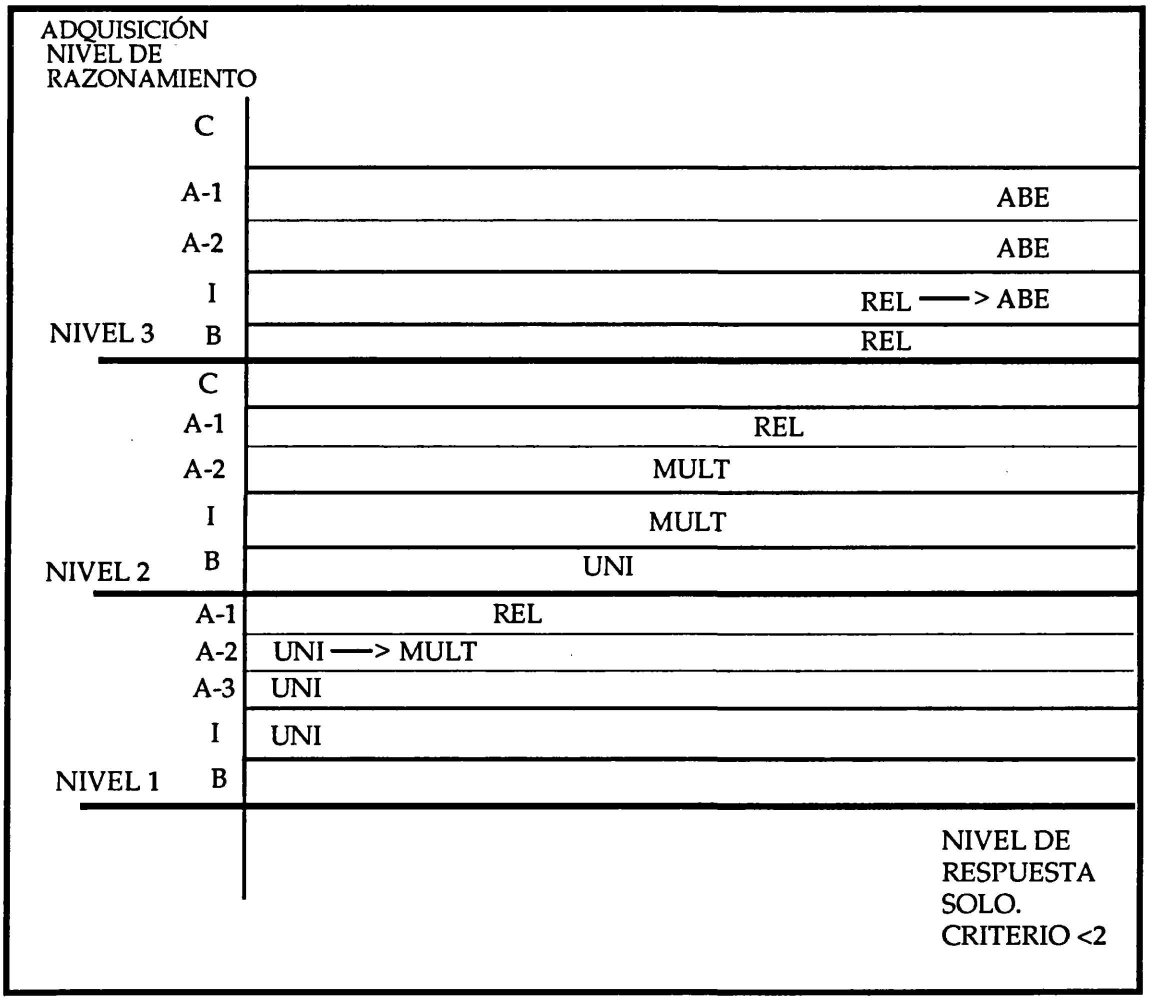


CLAVES:

B= Adquisición baja del nivel de razonamiento n
I= Adquisición intermedia del nivel de razonamiento n
A-i= Adqusición alta del nivel de razonamiento n, con indicios de razonamiento de niveles superiores
C= Adquisición completa del nivel de razonamiento n

Gráfico VI. 29 Ciclos de aprendizaje en perfiles y subperfiles de razonamiento. Criterio ≤1

Pero si observamos el gráfico siguiente, ahora con el criterio de asignación ≤ 2, se establecen de manera más clara ciclos de aprendizaje (Biggs y Collis, 1991) dentro de cada uno de los perfiles de razonamiento, dando evidencias por otra parte, que necesitarían una investigación posterior más profunda, de la posible existencia de ciclos de aprendizaje (posiblemente no completos, es decir, sin recorrer toda la secuencia U—›M—›R) dentro de algunos subperfiles de razonamiento.



CLAVES:

B= Adqusición baja del nivel de razonamiento n
I= Adquisición intermedia del nivel de razonamiento n
A-i= Adqusición alta del nivel de razonamiento n, con indicios de razonamiento de niveles superiores
C= Adquisición completa del nivel de razonamiento n

Gráfico VI. 30 Ciclos de aprendizaje en perfiles y subperfiles de razonamiento. Criterio ≤2

VI. 5 Resultados relativos al test.

La última sección de este capítulo, la dedicamos a analizar el test empleado para evaluar a los estudiantes. Puesto que la evaluación de los estudiantes es la componente fundamental de nuestro trabajo, es necesario asegurarse de que el instrumento de evaluación es, al menos, correcto. Para ello, hemos realizado dos mediciones de los resultados que nos permitirán verificar si el test es coherente con la estructura de los niveles de van Hiele y de los niveles SOLO.

Al elaborar un test para medir los niveles de razonamiento de van Hiele y los niveles SOLO, es fundamental asegurarse de que el test es coherente con sus estructuras jerárquicas. Esto implica que no es posible alcanzar un nivel determinado antes de haber superado el nivel precedente. Así pues, si un test produce con frecuencia resultados según los cuales esta jerarquía se rompe, es seguro que el test tiene algún defecto en su diseño.

En consecuencia, con el fin de evaluar la calidad del test que hemos construido, hemos recurrido a dos de los parámetros estadísticos que habitualmente se utilizan: El "Coeficiente de Escalabilidad de Guttman" y el "Índice de Facilidad".

VI. 5. 1 *Jerarquía de los niveles de van Hiele y SOLO: Índice de escalabilidad de Guttman. Análisis de los resultados.*

El coeficiente de escalabilidad de Guttman mide la estructura jerárquica de un test. Para utilizarlo, deben considerarse los ítems ordenados, de manera que en primer lugar se encuentren los ítems asociados al grado inferior de la escala (Nivel Uniestructural SOLO), a continuación los asociados al nivel inmediato superior (Nivel Multiestructural), y así sucesivamente. De esta manera, se obtiene un vector con los resultados de los diferentes ítems. Se dice que hay un "error" cuando el resultado de un ítem es menor que el resultado de otro ítem correspondiente a algún nivel superior, en otras palabras, se produce un error cuando un estudiante ha contestado peor a un ítem de un cierto grado en la escala que a uno o varios ítems de grados superiores. El coeficiente de escalabilidad de Guttman es:

$$\text{Rep} = 1 - \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de errores}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ total de respuestas}}$$

El coeficiente de escalabilidad varia entre 0 y 1, alcanzando el valor Rep =1 cuando no se ha producido ningún error. Al aplicar el coeficiente de Guttman pueden tomarse algunas opciones. Por ejemplo, para los test de Corberán, Huerta y otros (1994), los autores de la evaluación del nivel de razonamiento de van Hiele, tomaron dos alternativas: optar por los resultados finales (los grados de adquisición de los cuatro niveles de van Hiele) o sobre el conjunto de los ítems, considerando cada ítem una vez por cada uno de los niveles que mide.

En el primero de los casos, los niveles de razonamiento forman un vector con 4 componentes. Se produce un error cuando una componente del vector es menor que una o varias componentes posteriores. En este caso, la fórmula del coeficiente es:

$$\text{Rep} = 1 - \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de errores}}{4 \times \text{n}^{\text{o}} \text{ de estudiantes}}$$

Para aceptar la jerarquía de un test se suele imponer la condición de Rep > 0,900 (Mayberry, 1983) o la de Rep > 0,930 (Hart, 1981) o la menos exigente de Romberg, Jurdak, Collis y Buchanan (1982) quienes usan un coeficiente Rep > 0.85 cuando determinan parámetros para demostrar la validez de un conjunto de superítems en la evaluación de los niveles SOLO de los estudiantes.

La opción que tomamos para analizar la estructura jerárquica del test al medir los niveles SOLO de las respuestas de los estudiantes es la siguiente: Cada estudiante tiene asignado un vector de cuatro componentes que reflejan, en cada superítem, los niveles SOLO asignados. Dado que el test contiene 5 superítems, cada estudiante tiene asignada una matriz 5x4 en la que cada componente a_{ij} es el resultado de la evaluación de la cuestión i (i= 1,2,3 y 4) en el superítem j (j=1, 2, 3, 4, y 5). Diremos que se ha producido un error en un superítem, cuando a un estudiante se le ha asignado el nivel de respuesta SOLO correspondiente a la cuestión i, y no se le ha asignado un nivel de respuesta SOLO a la cuestión i-k, con $i \neq 1$, para k= 1, 2 y 3 del superítem. Por ejemplo, si a un estudiante se le asigna el vector U_1, M_1, nR, A_1, en un superítem j cualquiera, diremos que se ha producido un error porque el estudiante responde mejor la cuarta cuestión que la tercera. De esta forma, se considera el test formado por 20 cuestiones en el caso de los estudiantes de niveles superiores a la enseñanza primaria y 17 cuestiones para el caso de los estudiantes de enseñanza primaria, lo que da lugar a la fórmula del coeficiente de Guttman que ahora es :

$$\text{Rep} = 1 - \frac{\text{nº de errores}}{20 \times \text{nº de estudiantes} + 17 \times \text{nº de estudiantes}}$$

El número total de errores producidos es de 30, lo que nos da un coeficiente de 0.979, mayor que cualquiera de los usados por Mayberry (1983), Hart (1981) o Romberg, Jurdak, Collis y Buchanan (1982). Este coeficiente apoya la validez del instrumento que hemos construido para medir niveles SOLO de respuesta, con estructura jerárquica.

Con respecto al coeficiente de Guttman para los grados de adquisición de los niveles de van Hiele medidos por nuestro test, obtenemos un coeficiente Rep = 1, como se desprende de las tablas donde se recogen los resultados de la evaluación de los grados de adquisición de los niveles de van Hiele, dado que no hay ningún "error", ya que consideramos error el hecho de que un estudiante tenga un grado de adquisición mayor de un nivel n que de un nivel n-1, cosa que no se produce en ninguno de los casos. Estos hechos apoyan también la estructura jerárquica del instrumento de evaluación que hemos construido para determinar el nivel o grado de adquisición del nivel de van Hiele.

VI. 5. 2 *Índice de facilidad de los ítems y del test.*

El índice de Facilidad de un test mide, como su nombre indica, la facilidad en términos relativos de cada ítem del test. Para aplicar este coeficiente, hay que considerar las respuestas a los ítems como correctas o incorrectas y contar el número de respuestas correctas. En la literatura especializada se pueden encontrar varias fórmulas para calcular el índice de facilidad de un ítem (ver, por ejemplo, Scott, 1989). Usaremos la siguiente:

$$F = \frac{\text{nº de respuestas correctas al ítem}}{\text{nº total de respuestas al ítem}}$$

El coeficiente F varía entre 0 y 1, correspondiendo F=0 al caso de mínima facilidad, pues no hay ninguna respuesta correcta, y F=1 al caso de máxima facilidad, pues todas las respuestas han sido correctas.

En realidad el índice de facilidad de un ítem no mide la facilidad de un ítem en términos absolutos, sino de una manera relativa, al comparar cada ítem con los demás que han sido administrados a un estudiante.

Dado que el cálculo del índice de facilidad exige considerar las respuestas correctas o incorrectas, la opción que tomamos para el cálculo de este índice es considerar como respuesta correcta a aquélla a la que ha sido posible asignar un nivel de respuesta SOLO, independientemente de la tipología de la misma reflejada por el subíndice que le acompaña. Una respuesta será considerada, por otra parte, incorrecta si la asignación del nivel SOLO no ha sido posible y por tanto ha sido calificada como no uniestructural (nU), no Multiestructural (nM), etc.

La tabla siguiente refleja los índices de facilidad de cada ítem en cada superítem y en el conjunto del test.

	NIVEL SOLO			
SUPERÍTEM	U	M	R	A
1	0,918	0,903	0,375	0,256*
2	1	0,540	0,257	0,167*
3	0,905	0,703	0,557	0,255*
4	0,946	0,757	0,540	0,514
5	0,973	0,548	0,632	0,267
TEST	0,948	0,690	0,472	0,242

Tabla VI. 43. Índice de facilidad de las cuestiones de los superítems y del test para los estudiantes evaluados.

* Para estudiantes de niveles superiores a la enseñanza primaria

Un examen de los datos aportados por esta tabla revelan que prácticamente los cinco superítems siguen las direcciones predichas por la Taxonomía SOLO pues los índices de facilidad decrecen a medida que la tarea se vuelve más compleja para el estudiante. Solamente en el superítem 5 parece encontrarse la excepción a este comportamiento general. La tercera cuestión, que trata de evaluar respuestas de nivel relacional, resultó ligeramente más fácil que la segunda cuestión que medía el nivel SOLO anterior. Las causas que pudieran justificar este hecho habría que buscarlas en la propia construcción de la tercera cuestión de test, en relación con las anteriores, o de la segunda cuestión independientemente de la tercera. Este, digamos, desajuste entre la 2ª y 3ª cuestión del superítem 5 puede verse mejor en las tablas siguientes, que muestran con más detalle el índice de facilidad de las cuestiones del test, al desglosarlo en los distintos perfiles de van Hiele identificados.

PERFIL 1		NIVEL SOLO		
SUPERÍTEM	U	M	R	A
1	1	1	0.889	0.647
2	1	0.889	0.722	0.389
3	1	0.944	0.944	0.500
4	1	1	0.889	0.889
5	1	0.778	0.994	0.764
TEST	1	0.922	0.888	0.638

Tabla VI. 44. Índice de facilidad de las cuestiones de los superítems y del test, para los estudiantes con el perfil 1.

PERFIL 2		NIVEL SOLO		
SUPERÍTEM	U	M	R	A
1	0.970	0.970	0.222	0*
2	1	0.545	0.152	0*
3	0.848	0.697	0.606	0.148*
4	0.970	0.879	0.515	0.451
5	1	0.606	0.567	0.100
TEST	0.958	0.739	0.412	0.140

Tabla VI. 45. Índice de facilidad de las cuestiones de los superítems y del test para los estudiantes con el perfil 2.

* Para estudiantes de niveles superiores a la enseñanza primaria

PERFIL 3	NIVEL SOLO			
SUPERÍTEM	U	M	R	A
1	0.773	0.714	0.105	0*
2	1	0.261	0.043	0*
3	0.913	0.522	0.105	0*
4	0.870	0.391	0.304	0.304
5	0.913	0.227	0.222	0
TEST	0.894	0.423	0.156	0.061

Tabla VI. 46. Índice de facilidad de las cuestiones de los superítems y del test para los estudiantes con el perfil 3.

* Para estudiantes de niveles superiores a la enseñanza primaria

Si bien el conjunto del test es coherente con los postulados de la Taxonomía SOLO en los tres perfiles van Hiele identificados, el detalle de los superítems necesitaría algún comentario. Superítem por superítem, el test parece adecuado para medir niveles SOLO en estudiantes pertenecientes a los tres perfiles. Vemos en la tabla VI. 51 cómo el superítem 5 presentan alguna incongruencia con el par M - R, al ser mayor el índice de facilidad de la segunda que el de la primera. Globalmente, la cuestión 3 del superítem 5 resultó ser más fácil que la cuestión 2. Pero en realidad esta facilidad es solamente relativa pues únicamente se presenta en los estudiantes pertenecientes al perfil 1, mientras que, para los otros dos perfiles, este índice de facilidad no se da.

CAPÍTULO VII

Conclusiones acerca de las relaciones entre los niveles de van Hiele y la Taxonomía SOLO

Conclusiones acerca de las relaciones entre los niveles de van Hiele y la Taxonomía SOLO.

Como puede resultar evidente desde las primeras páginas de esta memoria, nuestro trabajo de investigación no ha seguido los patrones de aquellas investigaciones experimentales que plantean una hipótesis que ha de ser confirmada o refutada a partir de unos resultados empíricos obtenidos como consecuencia de una determinada metodología de investigación. Más bien, probablemente, nuestro trabajo, de corte exploratorio, proporcione hipótesis de investigación para futuras investigaciones.

Lo anterior pues condiciona el tipo y la dimensión de las conclusiones que sobre esta primera parte del trabajo podamos concentrar en unas pocas líneas. Conclusiones que, en primer lugar, por una natural coherencia, se han de referir a aquellas preguntas que nos hicimos en el apartado correspondiente a los objetivos del trabajo. En segundo lugar, se han de referir también a aquellos aspectos que han surgido del mismo trabajo de investigación y que no era posible, en su momento, predecir, pues han sido consecuencia inesperada del propio desarrollo de la investigación. Por último hay que decir también que la presente memoria, en su desarrollo, cuenta con conclusiones puntuales obtenidas a partir del análisis de los resultados y que se encuentran diseminada a lo largo de ella.

Los niveles de van Hiele y la Taxonomía SOLO interpretan las respuestas de los estudiantes desde puntos de vista diferentes. La primera, se interesa por los procesos de razonamiento que un estudiante pone en juego cuando resuelve tareas de contenido matemático (geométrico, en el contexto de nuestro trabajo). La segunda, se interesa por las respuestas en sí mismas, desde el punto de vista de su estructura, además del proceso de razonamiento que, obviamente, llevan emparejadas. Así que, las asociaciones que se puedan hacer entre ambas teorías deberán contemplar esta matización previa que consideramos importante.

Con lo dicho anteriormente, creemos que ciertamente los niveles de van Hiele puede ser analizados desde la perspectiva de la Taxonomía SOLO. Pero los resultados obtenidos, no han mostrado que:

- No es posible asociar un único nivel de respuesta SOLO que sea característico de los estudiantes que razonan en un nivel n de van Hiele. Es decir, no creemos en asociaciones generales del tipo, por ejemplo, Nivel 1 de van Hiele con nivel SOLO Uniestructural, o nivel 2 de van Hiele con nivel SOLO Multiestructural.

- Hay evidencias de la existencia de más de un nivel SOLO, para un nivel de van Hiele dado. La distinción entre asignar grados de adquisición de niveles de razonamiento a los estudiantes y la asignación directa de un nivel de van Hiele, ha permitido obtener estas evidencias. Así, para estudiantes con un grado de adquisición alto y no completo del primer nivel de van Hiele, con o sin indicios de razonamiento del siguiente nivel, se han distinguido niveles SOLO que recorren los niveles uniestructural y multiestructural, en el caso del criterio más exigente, o los niveles uniestructural, multiestructural y relacional, con el criterio menos exigente. Recorrido que se repite, para ambos criterios, en los estudiantes con un grado de adquisición completo del primer nivel y alto del segundo nivel de van Hiele, con o sin indicios de razonamiento del siguiente nivel, y que parece acortarse, recorriendo los niveles SOLO relacional y abstracción extendida, para aquellos estudiantes que mostraron un grado de adquisición completo de los dos primeros niveles de van Hiele y sucesivos grados de adquisición del tercer nivel de van Hiele, con o sin indicios de razonamiento del cuarto nivel.

- Las evidencias anteriores nos han conducido a nuevas evidencias. Éstas se refieren a los ciclos de aprendizaje: Dependiendo del criterio de asignación de los niveles SOLO utilizado, la evidencia de que es posible encontrar ciclos de aprendizaje formados por la secuencia Uniestructural —> Multiestructural —> Relacional, dentro de un perfil de razonamiento o, incluso, dentro de un subperfil de razonamiento, es más fuerte si el criterio usado es menos exigente.

- La estructura de superítem, en la variante que aquí hemos presentado, ha resultado útil tanto para poder asignar niveles de razonamiento como niveles de respuesta SOLO. Los resultados de los índices que determinan los coeficientes de facilidad y de escalabilidad muestran esta utilidad del instrumento usado para nuestra evaluación, al demostrar que los ítems construidos determinaron la estructura jerárquica de las respuestas de los estudiantes, tal y como se postula en los dos marcos teóricos usados.

Las conclusiones anteriores tienen cierta componente macroscópica al considerarlas relativas a un contenido geométrico relativamente amplio (conceptos relativos al paralelismo y a los cuadriláteros) y a una muestra de estudiantes también relativamente amplia. Otro tipo de conclusiones se podrían obtener del análisis microscópico de los resultados obtenidos superítem por superítem y perfil por perfil de razonamiento. Conclusiones que podrían obtenerse, de manera separada, para conceptos relativos al paralelismo, por un lado, y para conceptos relativos a los cuadriláteros, de otro, de tal manera que las conclusiones harían referencia a la interpretación del aprendizaje de dichos conceptos, desde la perspectiva de los dos marcos teóricos utilizados. Pero ciertamente, resumir 32 páginas de esta memoria en unos pocos apartados nos parece un poco arriesgado por las omisiones que podrían producirse. Así que preferimos que queden en el desarrollo de dichas páginas para una mejor interpretación de las mismas.

3ª PARTE

DE LAS RELACIONES ENTRE LOS NIVELES DE van HIELE Y LOS MAPAS CONCEPTUALES: EL CASO DE LOS CUADRILÁTEROS

CAPÍTULO VIII

Los Mapas Conceptuales: Fundamentos teóricos e investigación

VIII. 1 Introducción

La técnica de representación conocida como Mapas Conceptuales fue desarrollada hace ya algún tiempo convirtiéndose en "una herramienta de investigación y una técnica de enseñanza" para facilitar el aprendizaje significativo (Novak y otros, 1983), fundamentalmente en disciplinas como las ciencias sociales y las ciencias experimentales. Esta pujanza e incremento en el interés por el uso de los mapas conceptuales tiene su reflejo en Al-Kunifed y Wandersee (1990) quienes publicaron, hace ya algunos años, una lista de cien referencias relacionadas con los mapas conceptuales.

Este interés por el uso de los mapas conceptuales no ha pasado desapercibido tampoco en el área de la Educación Matemática (Mansfield y Happs, 1989; Hasemann, 1989; Hasemann y Mansfield, 1995, Huerta, 1995a; Huerta, 1995b) aunque la atención que se les ha prestado, hasta el momento, no es comparable con la que se le prestó y se le continua prestando en otras disciplinas.

VIII. 2 Los Mapas Conceptuales

Si hablamos de una manera no muy estricta, la idea que subyace en todo esto, cuando se hace referencia a los mapas conceptuales, es que algo que está "dentro" de la mente de las personas puede ser representado "fuera" de ella.

Una técnica conocida como *mapa conceptual* fue puesta en discusión, en el entorno de las ciencias experimentales, en los años setenta, por Novak (Novak y Gowin, 1988), esencialmente como un método para hacer que la enseñanza de las ciencias fuese más efectiva. Basado en la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, mapa conceptual[1] significa presentar al aprendiz el nuevo conocimiento en forma de redes estructurales, o animarles a que construyan tales redes por ellos mismos, con la esperanza de que la semejanza entre la representación externa (el mapa conceptual) e interna (estructura cognitiva) haga más fácil o más efectiva la adquisición del conocimiento (Hasemann y Mansfield, 1995). "Al principio, los mapas conceptuales fueron las construcciones del propio investigador de los

[1] En el sentido dado por Novak (Novak y otros, 1983).

conceptos y proposiciones[2]" (Novak y otros 1983, p.626), desarrollándose posteriormente estrategias que ayudaran a los propios alumnos a construir sus propios mapas. En esos mapas, las conexiones[3] entre los conceptos, consideradas como fundamentales en la representación de la estructura cognitiva de los estudiantes, tienen significados diferentes según los esquemas individuales existentes en cada persona. Esto dio lugar a distinguir entre *mapa conceptual*, como el mapa que representa una organización ideal de los conceptos y proposiciones relativos a algún tema específico (por lo tanto, validado por expertos en dicho tema), y el *mapa cognitivo*, entendido como un mapa que representa la organización de los conceptos y proposiciones, relativos a algún tema específico, en la mente de las personas y "obtenido mediante algún método de indagación individual en el que el investigador construye un mapa cognitivo, a partir del cual se obtienen representaciones de la estructura cognitiva" (Mahler, Hoz y otros, 1991, citado en Hasemann y Mansfield, 1995).

Hasemann (1989), Mansfield y Happs (1989) y Huerta (1995b) han usado los mapas conceptuales de manera parecida. Con algunas diferencias entre ellos en la manera de indagar, y que más adelante se analizan, estos autores construyen mapas conceptuales de sus estudiantes (veremos cómo, en páginas siguientes), sobre temas puntuales de matemáticas. Estos mapas, son mapas cognitivos pues corresponden a estudiantes y a su manera personal en la que suponemos que organizan el conocimiento en la mente. No obstante, se prefiere seguir llamando a estos mapas, mapas conceptuales, en un abuso quizás del lenguaje, aunque haciendo referencia, en todo caso, a quién pertenece: a los estudiantes.

En realidad, cualquier mapa conceptual construido sobre un contenido específico de matemáticas sería un mapa cognitivo de ese contenido, con el que podríamos estar de acuerdo o no, puesto que éste respondería a la organización del conocimiento en la mente del experto o del conjunto de expertos que lo validaran y, supuestamente, cada experto construiría su mapa cognitivo no necesariamente idéntico al de otro experto. Así que nos

---

[2] Entendiendo por concepto "como una regularidad percibida en sucesos u objetos designados con una etiqueta arbitraria" y por proposiciones "dos o más conceptos unidos semánticamente para ilustrar una regularidad específica" (Novak y otros, 1983, págs. 625 - 626).

[3] Entendiendo por conexiones a los nexos usados para conectar dos o más conceptos al formar una proposición. Así, por ejemplo, en la proposición: Los cuadrados **son** rectángulos, el nexo que conecta los conceptos cuadrado y rectángulo es la palabra *son*.

parece más razonable usar el término *mapa conceptual* en su significación más amplia, haciendo referencia tanto si es de un estudiante como de un experto en la materia.

Así pues, un mapa conceptual podemos decir que no es más que un recurso esquemático para representar un conjunto de significados conceptuales incluidos en una estructura de proposiciones (Novak y Gowin, 1988), de tal manera que su objeto es poner de manifiesto los conceptos y las proposiciones. Desde el punto de vista de la elaboración o construcción de los mapas conceptuales, se suelen seguir algunas pautas, aunque con bastante flexibilidad entre los investigadores. Uno de los aspectos que se tienen en cuenta es el de la jerarquía con la que se estructura el conocimiento y su reflejo en un mapa conceptual. En consecuencia, se considera que éstos deben ser jerárquicos: los conceptos más generales e inclusivos deben situarse en la parte superior del mapa y los conceptos progresivamente más específicos y menos inclusivos, en la parte inferior. Esta manera de organizar los mapas conceptuales puede dar la visión de los mismos como mapas con aspecto de "paraguas" (Moreiras, s.f.), dando la impresión de ser, en realidad, un cuadro sinóptico de conceptos. Este estilo de mapas, común en muchos casos, tienen el siguiente aspecto :

* En nuestra investigación usamos el término Concepto Principal para referirnos al concepto más inclusivo.

** En nuestra investigación usamos el término Concepto Secundario para referirnos al/ los conceptos subordinados al concepto principal y que le dotan de significado.

Figura VIII. 1 Una visión esquemática de un mapa conceptual como un cuadro sinóptico conceptual. (adaptado de Moreiras, s.f)

Quizás estemos próximos a Moreiras en sus críticas respecto al uso de este tipo de mapas, cuando de lo que hablemos es de su uso como instrumento para la enseñanza. Las razones parecen obvias. Si se acuerda que los mapas conceptuales han de ser una actividad realizada por profesores y alumnos en la que se llegue a pactar, discutir y negociar significados y relaciones (Novak y Gowin, 1988), un mapa tipo paraguas, en el que las únicas relaciones son las del tipo mostrado en la figura anterior, pierde mucha utilidad si no se es capaz de mostrar relaciones cruzadas entre los conceptos que están a un lado y otro del mapa.

Pero algunas investigaciones previas (Huerta, 1995b) han dado como resultado que los estudiantes organizan los conceptos de manera que sus mapas cognitivos tienen la apariencia de mapas tipo paraguas (ver Anexo IV, por ejemplo). Es por esto que tales mapas no deberían ser desdeñables cuando hablemos de evaluación de los estudiantes.

VIII. 3 Los Mapas Conceptuales y la investigación en Educación Matemática.

Las investigaciones que han usado de manera más habitual los mapas conceptuales, se ha desarrollado principalmente en el campo de las ciencias experimentales (con referencias ya citadas de algunas de ellas). En estos trabajos, se ha tratado de identificar vacíos de comprensión en los estudiantes en relación con diferentes temas específicos, o se han descrito procesos de desarrollo de la comprensión de diferentes temas, mientras hay un proceso de enseñanza implicado e, incluso, se han explorado el uso de diferentes programas de ordenador para la construcción de mapas conceptuales. Pero, ciertamente, estas investigaciones no han sido demasiado influyentes en nuestro proyecto de investigación, ya que el contexto en el que desarrolla no es comparable con los anteriores: no hay un programa de enseñanza, no queremos que los estudiantes construyan mapas conceptuales, etc.

No obstante, algunos resultados importantes han surgido de esos estudios y que sí han tenido cierta influencia en el desarrollo de nuestro trabajo, no tanto por sus aportaciones, que en la mayoría de los casos no hemos usado, sino por la decisiones que, como consecuencia de ellos, hemos tomado. Uno de estos tiene que ver con el problema de la puntuación de los mapas conceptuales. Novak y Gowin (1988) sugirieron un complejo método para puntuar los mapas conceptuales y cognitivos, basado en varios apartados: 1) En el número de relaciones válidas y significativas mostradas; 2) el número de niveles jerárquicos válidos; 3) el número de conexiones cruzadas significativas; y 4) el número de eventos u objetos que se incluyen como ejemplos. Novak sugirió también que podría construirse y puntuarse un mapa de referencia (el mapa conceptual), de tal manera que la puntuación del estudiante dividida por la puntuación de referencia diera lugar a un porcentaje de comparación. Pero usando esta técnica, algunos estudiantes podrían tener mejor puntuación que el mapa de referencia y obtener más de un 100%, lo que, en principio, no parecería ser muy razonable. Los investigadores no han usado los mapas de referencia como un marco para la comparación, ya que los mapas conceptuales son idiosincrásicos y dependientes de las experiencias previas de aprendizaje y las reflexiones sobre esas experiencias, de tal manera que no hay un mapa ideal o un único mapa correcto (Hasemann y Mansfield, 1995).

Mansfield y Happs (1989) (citado también en Hasemann y Mansfield, 1995) usaron los mapas conceptuales para explorar la comprensión de los estudiantes en geometría. Según ellos, los mapas conceptuales pueden usarse como herramienta de evaluación para determinar qué conceptos son familiares a los estudiantes y qué conexiones han construido entre los conceptos.

Integrado el estudio en los dominios del aprendizaje significativo, en el que un factor importante es conocer lo que el alumno sabe sobre el objeto en estudio, Mansfield y Happs justifican el uso de los mapas conceptuales como una herramienta de evaluación alternativa a las entrevistas clínicas, uno de los medios más apropiados para ello, para muestras grandes de estudiantes o para la labor diaria del profesor.

Los estudiantes escogidos por Mansfield y Happs en su investigación, resolvieron tres tipos de test sobre líneas paralelas en el marco de una investigación tipo: pre-test, programa de enseñanza, post-test. Los tests estaban divididos en tres partes: 1) Construcción de un mapa conceptual; 2) un conjunto de proposiciones, y 3) un conjunto de dibujos. De ellos, sólo nos interesa analizar el que tiene que ver con nuestra metodología de investigación.

En el test 1 se mostró a los estudiantes implicados en la investigación un mapa conceptual hecho por un estudiante del mismo nivel de enseñanza, sobre algunas ideas de fracciones, indicándoles qué debería resaltarse en un mapa conceptual: los conceptos y las conexiones entre conceptos, para a continuación pedirles que construyeran un mapa conceptual sobre líneas paralelas a partir de un listado que les proporcionó con algunos conceptos relacionados con la estructura conceptual de paralelismo. En él, debían mostrar las conexiones entre los conceptos, nombrarlas y añadir otras ideas o conceptos que se les ocurriese sobre líneas paralelas. Los estudiantes no recibieron instrucción específica sobre la elaboración de mapas conceptuales pero sí de su aspecto y de sus características más relevantes.

Sin tener en cuenta el método de puntuación propuesto por Novak y Gowin (1988), Mansfield y Happs se propusieron ver qué proposiciones eran capaces de construir los estudiantes sobre líneas paralelas antes y después de la instrucción, qué nombres de los conceptos les eran familiares y si tenían alguna concepción equivocada que no hubieran detectado en otra parte del test. Consiguientemente, estaban interesados en el número de proposiciones que los estudiantes construían y si éstas eran correctas o no. Una relación incorrecta sugeriría una concepción equivocada que pudiera poseer el estudiante. Las concepciones equivocadas pueden ser locales y específicas en un marco conceptual que, por otra parte, puede ser satisfactorio. De manera análoga, el mapa conceptual de un estudiante podría identificar omisiones en la comprensión, por el estudiante, de conceptos y relaciones. Como Mansfield y Happs les proporcionaban los conceptos secundarios[4] relativos al paralelismo (concepto principal) y que se pretenden relacionar, la omisión de alguno de ellos, en el mapa de un estudiante, podría sugerir o bien que el estudiante no entendía el concepto, o bien que no estaba familiarizado con la palabra que nombraba dicho concepto, o bien que no podía nombrar una relación entre el concepto principal y los conceptos secundarios que habían sido listados.

De los alumnos que pasaron el test, no todos completaron el mapa conceptual. Esto pudo haberse debido a la dificultad intrínseca que tiene la elaboración de un mapa conceptual o a que no entendían los conceptos dados o no encontraban la manera de organizar de una forma significativa los conceptos.

Otro de los aspectos en los que se fijaron Mansfield y Happs en su análisis de los mapas, fue en el de los nombres de los conceptos (secundarios) que los estudiantes omitían, concluyendo que, a pesar de que fueron objeto de estudio en el desarrollo del programa de instrucción, dichos conceptos constituían, para algunos estudiantes, ideas de un grado mayor de dificultad que otras.

Las conclusiones a las que llegaron Mansfield y Happs tenían que ver con el hecho de que construir un mapa conceptual era nuevo y difícil para los estudiantes, pero que no obstante ello, los mapas conceptuales de los estudiantes se mostraron "como un medio adicional muy importante para obtener *insight* en la estructura de los esquemas existentes y en su desarrollo" (Hasemann y Mansfield, 1995).

[4] Lo que en otra parte hemos llamado conceptos subordinados, o conceptos que pertenecen a la estructura conceptual de otro más complejo y que llamamos concepto principal.

Hasemann (1989) (citado también en Hasemann y Mansfield, 1995) usó los mapas conceptuales para explorar el tipo de comprensión que poseen los estudiantes en relación con las fracciones. Pretendía comprobar si los estudiantes poseían una comprensión relacional (en el sentido dado por Skemp) del concepto de fracción. Utilizó la técnica de los mapas conceptuales con una metodología diferente a la usada por Mansfield y Happs (1989).

Trabajando con estudiantes de 10-12 años, previamente seleccionados, Hasemann usó la entrevista clínica como metodología de investigación. Las sesiones de trabajo las dividió en dos partes: 1) Los estudiantes resolvían problemas de matemáticas habituales en su currículo, como suma de fracciones, por ejemplo; 2) distribuyó entre los estudiantes una hoja en blanco y 12 cartulinas con nombres y figuras que tenían que ver con los conceptos o que hacían referencia al contexto en el que habían resuelto los problemas. A continuación se pedía a los estudiantes que: a) distribuyan las cartulinas sobre el folio en blanco de tal manera que aquéllas que a juicio del estudiante estuviesen relacionadas, las situasen juntas y las que no, alejadas; y b) buscasen, una vez resuelto a), un término genérico para un grupo de conceptos o señalasen y nombrasen las relaciones entre los conceptos en la hoja en blanco. A partir de esto último, Hasemann disponía del mapa conceptual de cada estudiante.

El análisis posterior de los mapas lo realizó desde un punto de vista holístico, atendiendo a cuatro características: 1) En relación con el contexto en el que se presentan los conceptos, matemático o no; 2) en relación con el domino, matemático o no; 3) en relación a la estructura del propio mapa, significación o no de las relaciones entre los conceptos; y 4) en relación con las acciones, es decir, en relación con la posibilidad de que el estudiante incluya ideas sobre cosas que hay que hacer. Incluyó, finalmente, un sistema de puntuación de cada una de las características anteriores que oscilaba entre 1 (no era reconocible ninguna de esas características) hasta 5 (una de esas características estaba bien desarrollada).

Hasemann llega a asegurar que "los mapas de los estudiantes son representaciones de las imágenes mentales que los estudiantes tienen de las situaciones descritas en los problemas" (Hasemann, 1989). Y concluye en otra parte diciendo que "la técnica de los mapas conceptuales parece tener cierta efectividad en hacer aflorar el mundo conceptual del niño; además, los mapas conceptuales son una herramienta muy útil para volvernos conscientes del marco conceptual alternativo de los niños".

No obstante las afirmaciones anteriores, Hasemann muestra algunas dudas sobre la efectividad o fiabilidad de los mapas conceptuales en la evaluación de los estudiantes si éstos son estudiantes de niveles educativos bajos (con edades anteriores a los 10 años) "quizás porque los más jóvenes no poseen (aún) las habilidades metacognitivas necesarias para construir mapas conceptuales, especialmente es posible que aún no hayan aprendido a reflejar (en un mapa) la estructura de su propio conocimiento, o no son conscientes de sus propios procesos de razonamiento" (Hasemann, 1996, comunicación personal).

Una variante de lo métodos de investigación que hemos mostrado en los párrafos anteriores es la que presenta Huerta (1995b) y que se completa en la presente investigación.

Huerta (1995b) tiene como objetivo prioritario en su investigación ver si es posible diseñar un instrumento de evaluación, en versión de test escrito, de tal manera que, a partir de las respuestas de los estudiantes a dicho test escrito, fuera posible construir un mapa conceptual de cada estudiante que reflejase la manera en la que éste organiza en su mente los conceptos relativos a cuadriláteros. Si dicho instrumento diese resultado positivo, las dificultades propias de la elaboración de los mapas conceptuales por los propios estudiantes (con o sin instrucción previa sobre cómo construir un mapa conceptual) y la limitación del tamaño de las muestras de estudiantes para la realización de entrevistas clínicas, al menos se verían paliadas con el uso de esta metodología de investigación.

VIII. 4 Los Mapas Conceptuales en nuestra investigación

En los contextos particulares en los que se presentan las investigaciones mencionadas en la sección anterior, podría decirse que las metodologías de investigación usadas pueden ser las apropiadas para la evaluación de los estudiantes mediante mapas conceptuales, aunque obviamente presenten dificultades y restricciones. Las razones que uno argumentaría para ello son de diferente índole:

a) La entrevista clínica es posiblemente la mejor manera de averiguar lo que un estudiante sabe en relación con un tema concreto de matemáticas. Hasseman (1989) usa esta técnica, ya sea de manera exclusiva o como parte de su metodología de investigación. La muestra de estudiantes, en este caso, no puede ser muy grande pues está condicionada por la propia técnica de entrevista clínica.
b) La elaboración de un mapa conceptual por parte de los estudiantes requiere instrucción. De no ser así, caso de la investigación de Mansfield (1989), se ha de mostrar un ejemplo de lo que se entiende por mapa conceptual y, por tanto, lo que se quiere que los estudiantes hagan. Esto acarrea el riesgo, tal vez asumido, de que la propia construcción del mapa sea un obstáculo para hacer aflorar todos los conceptos que uno tiene organizados en la mente, en forma de proposiciones, que conecten, de manera significativa, dos o más conceptos. Podría ocurrir que uno estuviese más pendiente del aspecto físico que tiene el mapa que de los conceptos y nexos, y por tanto relaciones, que uno fuese capaz de representar.

En nuestro trabajo, la opción de la entrevista clínica no era posible. La muestra de estudiantes que pretendíamos manejar era lo suficientemente grande y variada como para hacernos abandonar esta idea. Por otra parte, y por la misma razón que antes, enseñar a elaborar mapas conceptuales a los estudiantes también carecía de sentido. En este sentimiento de dudar qué técnica emplearíamos para la elaboración de los mapas conceptuales, planteamos a Novak nuestras dudas. En comunicación personal (1992), Novak sugirió la técnica de los mapas esqueleto (ver Capítulo IX, pág. 227) que en otras ocasiones había sido usada, con éxito aparente, en las ciencias experimentales.

Considerar los mapas esqueleto, esto es, mapas conceptuales en los que sólo estaban representados (con pequeños rectángulos, por ejemplo) los lugares en los que habían de colocarse las etiquetas (nombres) para los conceptos y las conexiones (líneas) en las que había que situarse los nexos que uno considerase oportunos, de tal forma que se estableciera una proposición cierta (a juicio del que lo completa), suponía presentar una organización ya preestablecida de los conceptos y sus conexiones, de tal manera que ésta podría condicionar sobremanera la respuesta de los estudiantes.

Puesto que para nosotros lo que era relevante en nuestra investigación era analizar la capacidad que tenía un estudiante de organizar en su mente los conceptos relativos a un dominio concreto de la geometría e intentar realizar el análisis a partir de la representación de esa organización mediante mapas conceptuales, creímos que lo importante era hacer aflorar esa organización, de tal forma que, a partir de las respuestas de los estudiantes a ese test escrito pudiésemos elaborar un mapa conceptual con lo que posiblemente fuese la organización de los conceptos y relaciones en la mente del estudiante.

El problema lo consideramos al revés. Si un estudiante retiene y organiza en su mente ciertos conceptos, que hemos distinguido entre conceptos principales y conceptos secundarios, relativos a un área concreta de las matemáticas, lo que deberíamos permitir es que el estudiante fuese capaz de hacerlos aflorar, por ejemplo, mediante frases escritas en las que relacionase conceptos secundarios y sus propiedades en relación con el concepto principal del que se esté preguntando. Por ejemplo, supongamos el "paralelogramo" como concepto principal, "lado" como concepto secundario y "lados paralelos dos a dos", como propiedad del concepto secundario. La frase: « Los paralelogramos tienen lados paralelos dos a dos » establece una proposición válida sobre el concepto principal, que relaciona el concepto secundario "lado" y su propiedad, "paralelos dos a dos", mediante el nexo "tienen".

Establecer esta proposición supone cierto grado de comprensión de los conceptos, paralelogramo, lado y lados paralelos dos a dos y cierta relación entre ellos. Esta proposición, expresada por medio de la frase anterior, puede ser organizada, y así lo hacemos, en términos de mapas conceptuales, del modo siguiente:

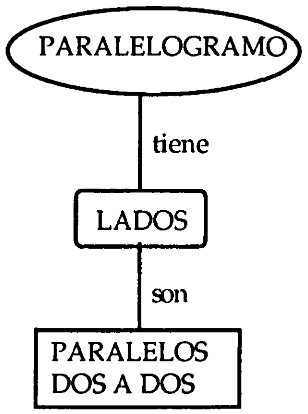


Figura VIII. 2 Representación por mapas conceptuales de la proposición: El paralelogramo tiene lados paralelos dos a dos.

La organización de los conceptos y sus propiedades de este modo, con estructura jerárquica (lo que obliga a una lectura del mapa de arriba a abajo) es evidente. El concepto más inclusivo, paralelogramo, en la parte más alta de mapa y el menos inclusivo, sus propiedades y los ejemplos, en la parte más baja del mapa.

En consecuencia, el test escrito debería contener ítems en los que las respuestas estuviesen condicionadas a cada uno de los conceptos secundarios que caracterizan al concepto principal. El nexo y el tipo de relación que el estudiante pudiese establecer corresponderían a su autonomía y capacidad para poderlo hacer. No responder a uno de esos ítems podría suponer, bien que no se conoce el concepto secundario, sus propiedades o la relación que el concepto secundario y su propiedad podrían tener en relación con el concepto principal en cuestión. De esto hablaremos con más profundidad en el capítulo IX, que trata la metodología de investigación.

VIII. 5 Mapas conceptuales y las relaciones entre cuadriláteros.

Esta forma de representar las relaciones entre conceptos principales, secundarios y sus propiedades también podría ser útil para representar las relaciones entre conceptos principales. Por ejemplo, consideremos los conceptos cuadrado y paralelogramo. Las relaciones que podemos establecer entre ellos, que sean significativas y válidas, en términos de proposiciones, pueden ser las siguientes:

El cuadrado *es* un paralelogramo,
El paralelogramo *puede ser* un cuadrado.

La primera determina una inclusión de la clase de los cuadrados en la clase de los paralelogramos. La segunda, puede ser considerada como la relación recíproca de la anterior en la relación de inclusión. En consecuencia, usando la idea de representación por mapas conceptuales, puede establecerse una jerarquía entre los conceptos paralelogramo y cuadrado como la que se ve en la figura siguiente:

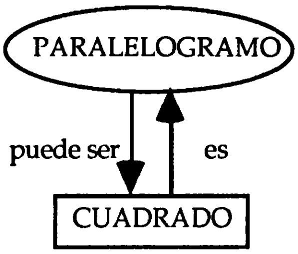


Figura VIII. 3 Relaciones entre los conceptos de paralelogramo y cuadrado, representadas en un mapa conceptual.

Justificaremos a continuación que esta manera de representar las relaciones de inclusión entre cuadriláteros es posible.

VIII. 5. 1 *El orden parcial en el conjunto de los cuadriláteros.*

Consideremos el conjunto finito Q formado por las siguientes clases de cuadriláteros:

Q = {Cuadrilátero Convexo (Qc), Cuadrilátero Cóncavo (Qv), Trapecio (T), Trapezoide (Tz), Trapecio Rectángulo (Tr), Trapecio Isósceles (Ti), Paralelogramo (P), Romboide (Rd), Rombo (Rb), Rectángulo (R) y Cuadrado (C)}.

En este conjunto Q, definimos una relación $\mathcal{R}$ de la siguiente manera:

Si A y B son de Q, decimos que A $\mathcal{R}$ B si A está contenido en B. O bien, diremos que A $\mathcal{R}$ B si, una de las dos:

a) Para todo q de A, q es de B.
b) Para todo q de A, q, que tiene una definición por pertenecer a A, verifica la definición de B.

Es evidente que $\mathcal{R}$ establece una relación binaria de orden en el conjunto Q. Como además no todos los elementos de Q son comparables (si es falso que A $\mathcal{R}$ B no implica necesariamente que sea cierto que B $\mathcal{R}$ A) la relación de orden $\mathcal{R}$ es una relación de orden parcial en Q.

Para el par (Q, $\mathcal{R}$) definimos un sistema de representación que está constituido por un diagrama en el que sus elementos están representados por círculos, de tal manera que dos elementos comparables de Q por $\mathcal{R}$ están relacionados en el diagrama por una línea que conecta esos elementos (figura VIII. 4)

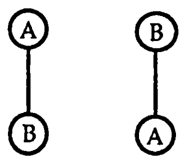


Figura VIII. 4 Elementos del sistema de representación de R

Decimos que A R B en Q, si A "está más bajo que" B en el diagrama.

"Estar más bajo que" es, evidentemente, una relación de orden para los elementos de este sistema de representación, y puesto que estar más arriba o más abajo no implica necesariamente que dos elementos del diagrama estén relacionados (por ejemplo D y C en el diagrama de la figura VIII. 5), esta relación de orden es, también, una relación de orden parcial.

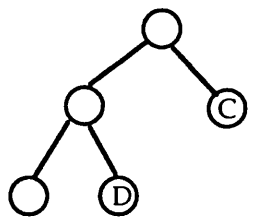


Figura VIII. 5 Sistema de representación de una relación de orden parcial

Si los elementos de Q y del diagrama son los mismos, las relaciones de orden parcial consideradas, R y "estar más bajo que", son equivalentes y por lo tanto el diagrama puede considerarse como una representación de la relación de orden parcial en Q.

Así pues, dado que el par (Q, R) puede representarse por medio de un diagrama, los objetos que sean comparables en Q estarán representados en el diagrama por la línea o sucesión de líneas que los une, determinado la existencia y el tipo de relación entre dichos objetos de Q su posición relativa en el diagrama. En consecuencia, se pueden reconocer diferentes niveles jerárquicos, entre los diferentes objetos comparables de Q, por la posición que ocupan en el diagrama debida a la relación "estar más abajo que"[5].

Como R depende de las definiciones de los objetos considerados en Q y dado que disponemos de dos clases de definiciones de estos objetos (definiciones exclusivas e inclusivas), podemos construir al menos dos diagramas que

[5] La transitividad de la relación de orden "estar más bajo que" da lugar a los diferentes niveles jerárquicos en el diagrama.

representen la relación R, lo que dará lugar a dos maneras de organizar los objetos de Q.

Por ejemplo, consideremos las siguientes definiciones, con carácter inclusivo, de los objetos de Q:

Q= Polígono de cuatro lados.
Qc = Q con todas las diagonales interiores.
Qv = Q con una diagonal exterior.
T= Q con almenos un par de lados paralelos.
Tz = Qc sin lados paralelos.
Tr = T con algún ángulo recto.
Ti = T con almenos un par de lados iguales.
P = Q con los lados paralelos dos a dos.
Rd = P con no todos los lados y/o ángulos iguales.
Rb = Q con los cuatro lados iguales.
R = Q con los cuatro ángulos rectos.
C = Q con los cuatro lados iguales y los cuatro ángulos rectos.

Estas definiciones nos proporcionan una relación de orden parcial en Q que puede representarse por el diagrama siguiente.

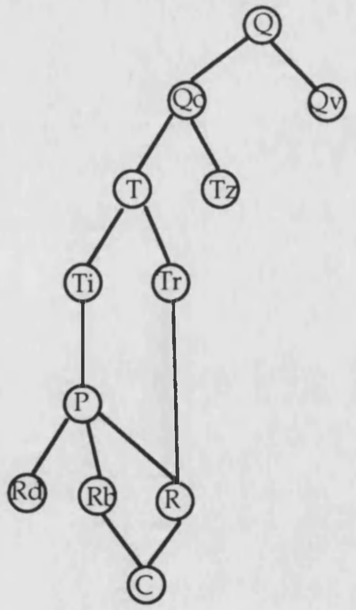


Figura VIII. 6 Diagrama de representación de una ordenación parcial de Q. Niveles jerárquicos originados por definiciones con carácter inclusivo.

Por tanto, en Q, para las definiciones consideradas, pueden establecerse 7 niveles jerárquicos desde Q, como concepto más inclusivo, hasta C como concepto menos inclusivo.

Considerando ahora las definiciones de los objetos de Q con carácter exclusivo, es decir, definiciones que conllevan más restricciones que las llamadas inclusivas (por ejemplo, eliminando los cuantificadores de allí), la relación de orden en Q puede representarse ahora por medio del diagrama siguiente.

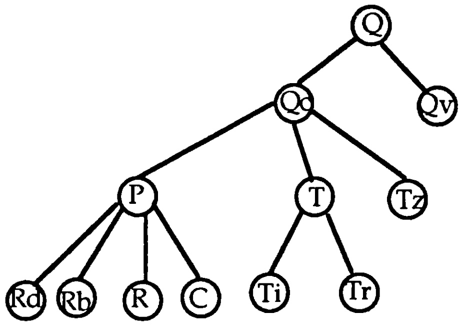


Figura VIII. 7 Diagrama de representación de una ordenación parcial de Q. Niveles jerárquicos originados por definiciones con carácter exclusivo.

En este caso, la relación R , ha dado lugar a 4 niveles jerárquicos en Q.

Es fácil, por tanto, a partir del modo en que representamos las relaciones de inclusión, preguntarse por los tipos de relaciones que pueden existir entre las clases de cuadriláteros contenidas en Q.

VIII. 5. 2 *Análisis de las relaciones entre cuadriláteros*

Como hemos visto en párrafos anteriores, los cuadriláteros se pueden organizar de una manera jerárquica. Ello supone que existen unos conceptos más inclusivos que otros, es decir, considerados como clases de objetos geométricos[6], hay clases de objetos, definidas por conceptos, que están incluidas en otras clases de objetos, definidas por otros conceptos. Consideremos este ejemplo: el concepto de cuadrilátero. Este concepto determina una clase de objetos geométricos. Consideremos, también, el concepto de cuadrilátero convexo. Nuevamente, este concepto determina

[6] Hablamos de clases en el sentido de clases de equivalencia generadas por la relación R, definida como sigue: sean p y q elementos de Q (familia de formas cuadriláteras); decimos que p R q si y sólo si p y q verifican la misma definición. Es evidente que R es una relación binaria de equivalencia que particiona el conjunto Q en clases de equivalencia, cada una de ellas definida por su definición.

una clase de objetos geométricos. Puesto que todos los ejemplos que uno puede considerar de la clase cuadrilátero convexo son ejemplos de la clase cuadrilátero, la clase cuadrilátero convexo está contenida en la clase de los cuadriláteros. Esta relación de inclusión de una clase de cuadriláteros en otra la podemos expresar mediante la proposición:

Cuadrilátero convexo es cuadrilátero.

Recíprocamente, hay ejemplos de la clase de los cuadriláteros, no todos, que son ejemplos de la clase de los cuadriláteros convexos. Esta relación la podemos expresar mediante la proposición:

Cuadrilátero puede ser cuadrilátero convexo.

También podemos considerar clases disjuntas de cuadriláteros en las que ningún ejemplo de una de las clases es ejemplo de la otra clase de cuadriláteros. Así, un ejemplo de ésta última relación, expresada en términos de proposiciones, es la siguiente:

Cuadrilátero convexo no es cuadrilátero cóncavo.

Es decir, las clases Q y Qc son comparables por la relación de orden R, mientras que Qc y Qv no lo son.

Vamos a considerar, en adelante, aquellas relaciones significativas, es decir, aquellas que determinan los objetos comparables en Q, para la representación mediante la técnica de los mapas conceptuales que estamos desarrollando. Estas relaciones deberán contener alguno de los nexos "es" o "puede ser". No consideraremos pues las relaciones con el nexo "no es" porque, en la representación hecha mediante diagramas, simplemente no colgarían del concepto más inclusivo y se dan por supuestas este tipo de relaciones al no ser comparables por la relación de orden en Q.

Busquemos todas las relaciones posibles que puedan establecerse entre los cuadriláteros considerados en Q y plateémonos la siguiente pregunta: ¿cuántas de esas relaciones son significativas? Es decir, ¿cuántas de esas relaciones son expresables en términos de proposiciones que contienen el nexo "es" o "puede ser".

Una línea de trabajo para responder a nuestras preguntas es comparar un concepto de Q con los restantes, en el sentido en el que se muestra en la figura siguiente.

	----------CUADRILÁTERO
	----------CUADRADO
	----------RECTÁNGULO
	----------ROMBO
	----------ROMBOIDE
TRAPECIO	----------PARALELOGRAMO
	----------CUADRILÁTERO CONVEXO
	----------CUADRILÁTERO CÓNCAVO
	----------TRAPECIO RECTÁNGULO
	----------TRAPECIO ISÓSCELES
	----------TRAPEZOIDE

Figura VIII. 8 Ejemplo en el que se muestra cómo establecer relaciones entre cuadriláteros en términos de proposiciones, usando nexos como: "es", "puede ser" o "no es".

De esta manera, al ir comparándolos, decidiremos si dos conceptos son o no comparables por la relación de orden. Si lo son, incluiremos, en la línea de puntos, el nexo que, a nuestro juicio, determine el tipo de relación que existe entre ellos, dando lugar a proposiciones del tipo "Trapecio puede ser A" o "Trapecio es A", siendo A cualquier otro cuadrilátero de Q. Si no lo son, entonces el único nexo que nos sirve para indicarlo es "no es", como en la proposición "Trapecio no es Trapezoide". Así pues, tendremos que decidir, teóricamente, sobre 11 relaciones posibles entre el concepto Trapecio y los once restantes con los que lo comparamos. Como tenemos 12 conceptos en Q, el resultado es que hay que decidir sobre 132 relaciones posibles del tipo "es", "no es" o "puede ser" para organizar todos los conceptos considerados en Q.

Independientemente de la manera en la que vamos a decidir si dos cuadriláteros están relacionados o no, incluyendo el nexo apropiado, el resultado de comparar todos los cuadriláteros entre sí da lugar a las relaciones entre cuadriláteros que se describen en la sección siguiente.

VIII. 5. 2. 1 *Las relaciones entre cuadriláteros*

Las proposiciones que describen esas relaciones las hemos dividido en dos grupos que hemos titulado, respectivamente, relaciones con carácter inclusivo y relaciones con carácter exclusivo, derivadas de considerar los dos tipos de definiciones que ya hemos mencionado.

Nuestro objetivo al incluir esta sección es mostrar la gran cantidad de relaciones que pueden establecerse entre los cuadriláteros, algunas de las cuales van a ser objeto de análisis en nuestra investigación, al ser propuestas al juicio de los estudiantes.

1.- Relaciones con carácter exclusivo.

a) Relaciones entre el concepto principal Cuadrilátero y los restantes conceptos principales.

1.- CUADRILÁTERO puede ser CUADRILÁTERO CONVEXO.
2.- CUADRILÁTERO puede ser CUADRIlÁTERO CÓNCAVO.
3.- CUADRILÁTERO puede ser PARALELOGRAMO.
4.- CUADRILÁTERO puede ser TRAPECIO.
5.- CUADRILÁTERO puede ser TRAPEZOIDE.
6.- CUADRILÁTERO puede ser ROMBO.
7.- CUADRILÁTERO puede ser ROMBOIDE.
8.- CUADRILÁTERO puede ser RECTÁNGULO.
9.- CUADRILÁTERO puede ser CUADRADO.
10.- CUADRILÁTERO puede ser TRAPECIO ISÓSCELES.
11.- CUADRILÁTERO puede ser TRAPECIO RECTÁNGULO.

12.- CUADRILÁTERO CONVEXO es CUADRILÁTERO.
13.- CUADRILÁTERO CÓNCAVO es CUADRILÁTERO.
14.- PARALELOGRAMO es CUADRILÁTERO.
15.- TRAPECIO es CUADRILÁTERO.
16.- TRAPEZOIDE es CUADRILÁTERO.
17.- ROMBO es CUADRILÁTERO.
18.- ROMBOIDE es CUADRILÁTERO.
19.- RECTÁNGULO es CUADRILÁTERO.
20.- CUADRADO es CUADRILÁTERO.
21.- TRAPECIO ISÓSCELES es CUADRILÁTERO.
22.- TRAPECIO RECTÁNGULO es CUADRILÁTERO.

b) Relaciones del concepto principal Cuadrilátero Convexo con los restantes conceptos principales.

23.- CUADRILÁTERO CONVEXO puede ser PARALELOGRAMO.
24.- CUADRILÁTERO CONVEXO puede ser TRAPECIO
25.- CUADRILÁTERO CONVEXO puede ser TRAPEZOIDE.
26.- CUADRILÁTERO CONVEXO puede ser ROMBO.

27.- CUADRILÁTERO CONVEXO puede ser ROMBOIDE.
28.- CUADRILÁTERO CONVEXO puede ser RECTÁNGULO.
29.- CUADRILÁTERO CONVEXO puede ser CUADRADO.
30.- CUADRILÁTERO CONVEXO puede ser TRAPECIO ISÓSCELES.
31.- CUADRILÁTERO CONVEXO puede ser TRAPECIO RECTÁNGULO.

32.- PARALELOGRAMO es CUADRILÁTERO CONVEXO.
33.- TRAPECIO es CUADRILÁTERO CONVEXO.
34.- TRAPEZOIDE es CUADRILÁTERO CONVEXO.
35.- ROMBO es CUADRILÁTERO CONVEXO.
36.- ROMBOIDE es CUADRILÁTERO CONVEXO.
37.- RECTÁNGULO es CUADRILÁTERO CONVEXO.
38.- CUADRADO es CUADRILÁTERO CONVEXO.
39.- TRAPECIO ISÓSCELES es CUADRILÁTERO CONVEXO.
40.- TRAPECIO RECTÁNGULO es CUADRILÁTERO CONVEXO.

c) Relaciones del concepto principal Paralelogramo con los restantes conceptos principales.

41.- PARALELOGRAMO puede ser ROMBO.
42.- PARALELOGRAMO puede ser ROMBOIDE.
43.- PARALELOGRAMO puede ser RECTÁNGULO.
44.- PARALELOGRAMO puede ser CUADRADO.

45.- ROMBO es PARALELOGRAMO.
46.- ROMBOIDE es PARALELOGRAMO.
47.- RECTÁNGULO es PARALELOGRAMO.
48.- CUADRADO es PARALELOGRAMO.

d) Relaciones del concepto principal Trapecio con los restantes conceptos principales.

49.- TRAPECIO puede ser TRAPECIO ISÓSCELES.
50.- TRAPECIO puede ser TRAPECIO RECTÁNGULO.

51.- TRAPECIO ISÓSCELES es TRAPECIO.
52.- TRAPECIO RECTÁNGULO es TRAPECIO.

Si las definiciones de partida son de carácter exclusivo, todas las proposiciones que describen las relaciones que se dan son del tipo "es" y "puede ser", de tal manera que a una relación del tipo A "puede ser" B le sigue otra del tipo B "es" A. Esto puede observarse en las 52 relaciones descritas en dónde las definiciones que permiten establecerlas son de carácter exclusivo. Estas relaciones pueden representarse mediante el diagrama de la figura VIII. 7. Si, además, nombramos el tipo de relación existente con la inclusión del los nexos apropiados, lo que obtenemos es lo que llamamos mapa conceptual de las relaciones entre cuadriláteros (figura VIII. 9).

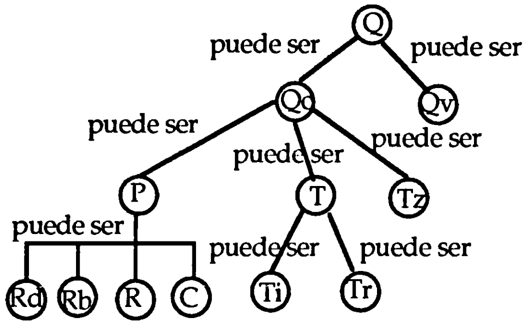


Figura VIII. 9 Mapa conceptual de las relaciones entre cuadriláteros. A todas y cada una de las relaciones "puede ser" (estar debajo de) se le opone la relación "es" (estar arriba de).

2.- Relaciones con carácter inclusivo.

Por otra parte, si las definiciones son de carácter inclusivo, las proposiciones que describen las relaciones que pueden establecerse entre los cuadriláteros, incluyen a las 52 descritas anteriormente más las siguientes:

e) Relaciones del concepto principal Trapecio con los restantes conceptos principales.

53.- TRAPECIO puede ser PARALELOGRAMO.
54.- TRAPECIO puede ser ROMBOIDE.
55.- TRAPECIO puede ser ROMBO.
56.- TRAPECIO puede ser RECTÁNGULO.
57.- TRAPECIO puede ser CUADRADO.

58.- ROMBOIDE es TRAPECIO .
59.- PARALELOGRAMO es TRAPECIO.
60.- ROMBO es TRAPECIO.
61.- RECTÁNGULO es TRAPECIO.
62.- CUADRADO es TRAPECIO.

f) Relaciones del concepto principal Romboide con los restantes conceptos principales.

63.- ROMBOIDE es TRAPECIO ISÓSCELES.

g) Relaciones del concepto principal Trapecio Rectángulo con los restantes conceptos principales.

64.- TRAPECIO RECTÁNGULO puede ser PARALELOGRAMO (*).
65.- TRAPECIO RECTÁNGULO puede ser ROMBO (*).
66.- TRAPECIO RECTÁNGULO puede ser RECTÁNGULO.
67.- TRAPECIO RECTÁNGULO puede ser CUADRADO.
68.- TRAPECIO RECTÁNGULO puede ser TRAPECIO ISÓSCELES (*).

69.- PARALELOGRAMO puede ser TRAPECIO RECTÁNGULO (*).
70.- ROMBO puede ser TRAPECIO RECTÁNGULO (*).
71.- RECTÁNGULO es TRAPECIO RECTÁNGULO.
72.- CUADRADO es TRAPECIO RECTÁNGULO. .
73.- TRAPECIO ISÓSCELES puede ser TRAPECIO RECTÁNGULO (*).

h) Relaciones del concepto principal Trapecio Isósceles con los restantes conceptos principales.

74.- TRAPECIO ISÓSCELES puede ser PARALELOGRAMO.
75.- TRAPECIO ISÓSCELES puede ser ROMBOIDE.
76.- TRAPECIO ISÓSCELES puede ser ROMBO.
77.- TRAPECIO ISÓSCELES puede ser RECTÁNGULO.
78.- TRAPECIO ISÓSCELES puede ser CUADRADO.

79.- PARALELOGRAMO es TRAPECIO ISÓSCELES.
80.- ROMBO es TRAPECIO ISÓSCELES.
81.- RECTÁNGULO es TRAPECIO ISÓSCELES.
82.- CUADRADO es TRAPECIO ISÓSCELES.

i) Relaciones del concepto principal Rombo con los restantes conceptos principales.

83.- ROMBO puede ser RECTÁNGULO (*).
84.- ROMBO puede ser CUADRADO.

85.- RECTÁNGULO puede ser ROMBO (*).
86.- CUADRADO es ROMBO.

j) Relaciones del concepto principal Rectángulo con los restantes conceptos principales.

87.- RECTÁNGULO puede ser CUADRADO.

88.- CUADRADO es RECTÁNGULO.

Deberíamos observar como las relaciones señaladas con un (*) marcan diferencias (en cuanto al uso y significado del nexo "puede ser") entre una visión inclusivista y una exclusivista de las relaciones entre cuadriláteros. Desde el punto de vista inclusivo, no toda relación del tipo "A puede ser B" tiene como relación recíproca "B es A", como puede comprobarse con las relaciones marcadas, mientras que con la concepción exclusiva esto sí que es cierto. Esto lo estudiamos en la sección siguiente.

VIII. 5. 2. 2 *Análisis de las relaciones del tipo "puede ser".*

Al escribir en términos de proposiciones las relaciones entre cuadriláteros, hemos distinguido algunas de ellas con un símbolo (*). Trataremos de explicar en esta sección el por qué de esta distinción.

En otro sitio ya hemos dicho que una clase de cuadriláteros de nombre A "puede ser" una clase de cuadriláteros de nombre B, si tenemos uno o más ejemplos de los cuadriláteros A que son, también, ejemplos de los cuadriláteros B. Así, por ejemplo, la clase de los Paralelogramos contiene ejemplos de cuadriláteros que son ejemplos de los Cuadrados, lo que nos permite establecer la relación: Los «Paralelogramos "pueden ser" Cuadrados». Si esta relación, entre las clases Paralelogramo y Cuadrado, tratamos de justificarla en términos de propiedades, deberemos actuar del modo siguiente: La clase Paralelogramo puede definirse por medio de una definición como esta: "cuadrilátero con lados paralelos dos a dos", de la que se derivan una serie de propiedades: diagonales que se bisecan, lados iguales dos a dos, ángulos iguales dos a dos, etc... Esas propiedades, que adquieren generalidad para toda la clase de los cuadriláteros llamados Paralelogramos, adquieren particularidad en las subclases de los llamados paralelogramos, recibiendo, entonces, dichas subclases, nombres diferentes. Así, para el cuadrado, las propiedades generales de los paralelogramos se particularizan del modo siguiente: lados iguales dos a dos se convierte en cuatro lados iguales, ángulos iguales dos a dos se convierte en cuatro ángulos iguales, diagonales que se bisecan se convierte en diagonales que se bisecan perpendicularmente, etc. permaneciendo como invariante la propiedad general lados paralelos dos a dos. Esta propiedad general compartida es la que hace que la clase menos inclusiva (aquella que tiene propiedades particulares de otras más generales), Cuadrado, sea una subclase de la más inclusiva Paralelogramo y que justifique que un paralelogramo "pueda ser" un cuadrado.

Consideremos otro ejemplo. La clase de cuadriláteros llamada Rectángulo "puede ser" la clase de cuadriláteros llamada Rombo. Para que una relación de este tipo adquiera sentido, debemos considerar las clases mencionadas en versión inclusiva. Así, en término de ejemplos, sólo sería válida en tanto que el cuadrado, como ejemplo de rectángulo, sea, a su vez, ejemplo de rombo lo cuál parece no presentar demasiada dificultad. El problema está en establecer qué propiedades hacen que esta relación pueda quedar justificada.

Deberemos restringirnos a la clase de rectángulos que me da el ejemplo válido para establecer la relación, es decir, aquel rectángulo que tiene los lados iguales, lo que me obliga a particularizar propiedades generales de los rectángulos, lados iguales dos a dos, por ejemplo, a la de su subclase, lados iguales, permaneciendo las demás intactas excepto aquella/s que se deriva de esa particularización. Si por rombo entendemos aquel cuadrilátero con lados iguales, la relación está establecida porque hay rectángulos que tienen lados iguales (propiedad restringida) y que por tanto son rombos (propiedad general que los caracteriza). En consecuencia, decimos que rectángulo "puede ser" rombo porque hay una propiedad restringida de los rectángulos, lados iguales, que junto a otra u otras generales, ángulos iguales o lados paralelos dos a dos, p.ej, se convierten en generales del rombo, lados iguales, y/o particulares del rombo, ángulos iguales, p.ej.

En el primero de los casos descritos, a la relación «A "puede ser" B», le sigue la relación «B "es" A», con lo que la justificación es más fácil porque la particularización de la propiedad es en una de las clases, la menos inclusiva, mientras que en el segundo ejemplo, a la relación «A "puede ser" B» le sigue la relación «B "puede ser" A», por lo que la particularización de las propiedades se produce en las dos clases de cuadriláteros que se quieren relacionar, simultáneamente.

Al responder a las preguntas que nos hacíamos en la sección anterior, usando la metodología de trabajo indicada allí, aparecen relaciones válidas que no recoge el diagrama de la figura VIII. 6. Son también relaciones del tipo "puede ser" con un significado distinto del que tiene el "puede ser" en la relación de orden.

Más formalmente. Sabemos que Rb y Tr no son comparables por la relación de orden R. Cualquier r de Rb no es de Tr. Por tanto, Tr "no puede ser" Rb y Rb "no es" Tr. En cambio, hay un r en Rb que es de Tr. En efecto, este ejemplo de Rb ha de ser tal que ha de cumplir la definición de Tr. Busquemos r en C ya que sabemos que todos los C son de Rb. Como todos los ejemplos de C son de T, r es ejemplo de T y como además r tiene ángulos rectos, r es un trapecio con ángulos rectos, r es de Tr. Por tanto, los Rb "pueden ser" Tr y al revés, los Tr "pueden ser" Rb.

Este tipo de relaciones, que hemos representado también con el nexo "puede ser", las podemos incorporar al diagrama de la figura VIII. 10 mediante la inclusión de una flecha bidireccional. El diagrama resultante no sólo representa la relación de orden parcial sino que, además, incluye las relaciones "puede ser" que acabamos de discutir. Llamaremos mapa conceptual de las relaciones entre cuadriláteros a este diagrama que puede verse en la figura siguiente.

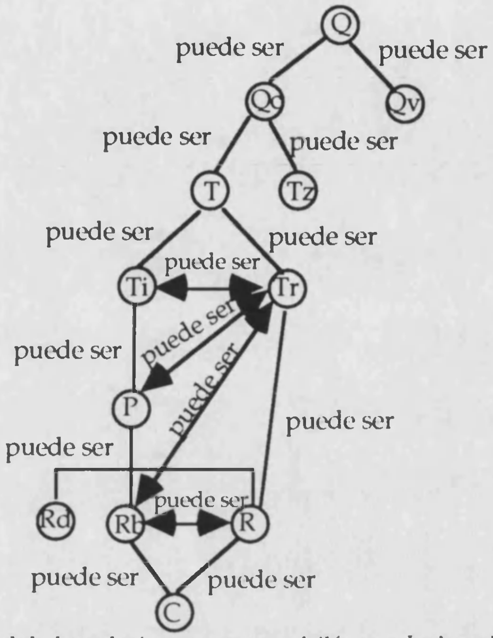


Figura VIII. 10 Mapa conceptual de las relaciones entre cuadriláteros. Incluye las relaciones derivadas de estar abajo de (puede ser) y estar arriba de (es) y las otras relaciones "puede ser".

VIII. 5. 3 *Relaciones entre cuadriláteros en la literatura escolar.*

En los casos más favorables, uno puede encontrar en la literatura escolar algunas relaciones entre cuadriláteros convexos (Qc): trapecio (T), paralelogramo (P), rectángulo (R), rombo (Rb) y cuadrado (C), representadas en un diagrama de Venn como el de la figura VIII. 11 (Adaptada de Castelnuovo, 1981).

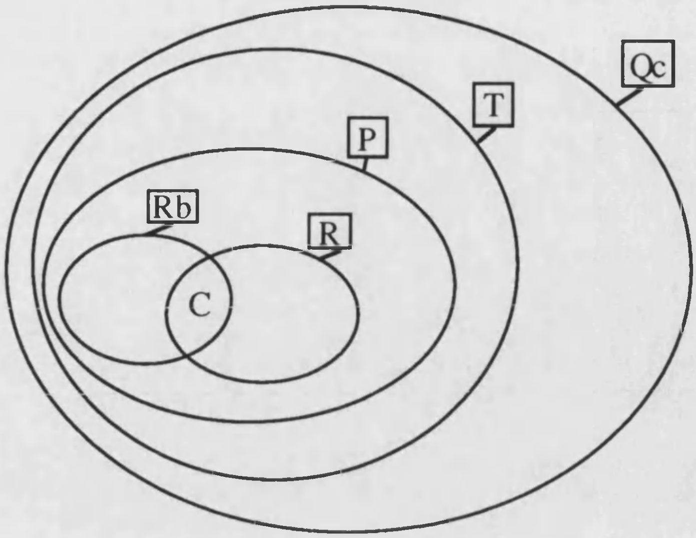


Figura VIII. 11 Relaciones entre algunos cuadriláteros convexos (Adaptado de Castelnuovo, 1981).

Un diagrama como este, que asume la inclusividad de los cuadriláteros considerados, sólo deja ver un tipo de relación y en un sentido, olvidándose por lo general de otras relaciones interesantes que pueden establecerse con la introducción de los cuadriláteros: romboide (Rd), trapecio rectángulo (Tr), trapecio isósceles (Ti) y trapezoide (Tz) como se muestra en la figura siguiente.

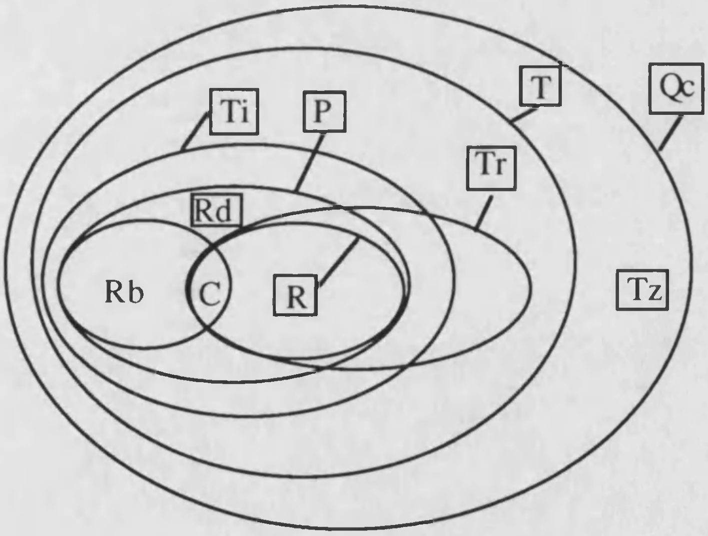


Figura VIII. 12 Relaciones entre algunos cuadriláteros convexos . Organización conjuntista.

En este caso, las relaciones, expresadas en términos de proposiciones, son mucho más difíciles de establecer por la propia limitación del diagrama conjuntista. Las conexiones entre los cuadriláteros, para establecer las proposiciones, son menos evidentes y si bien parece claro que si una clase de cuadriláteros A está incluida en otra B, siempre podremos establecer las relaciones: La clase A "es" de la clase B (por ejemplo, la clase Rombo "es" la clase Trapecio isósceles) porque la primera está incluida en la segunda, y la relación recíproca la clase B "puede ser" la clase A (Trapecio isósceles "puede ser" rombo), porque B es una clase más grande que incluye, entre otras, a la clase A. Otras relaciones, rectángulo con rombo, por ejemplo, con el cuadrado como clase común, plantean serias dificultades a la hora de establecer la relaciones correspondientes.

Una alternativa a esta forma de organizar las relaciones entre los cuadriláteros podría ser la que ofrecemos con los mapas conceptuales que mostrados, una muestra de los cuales pueden verse en el Anexo IV de esta memoria, para los cuadriláteros allí considerados.

La presentación de los cuadriláteros como clases de figuras geométricas que se incluyen unas dentro de otras comienza, por lo general, en 3º de Enseñanza Primaria, con ligeras diferencias, en función de la editorial considerada. Así, los cuadriláteros contienen una clase especial llamada paralelogramos que, a su vez, contiene a los cuadrados, rectángulos, rombos y romboides. Esta presentación de los primeros cuadriláteros se organiza, por tanto, del modo siguiente:

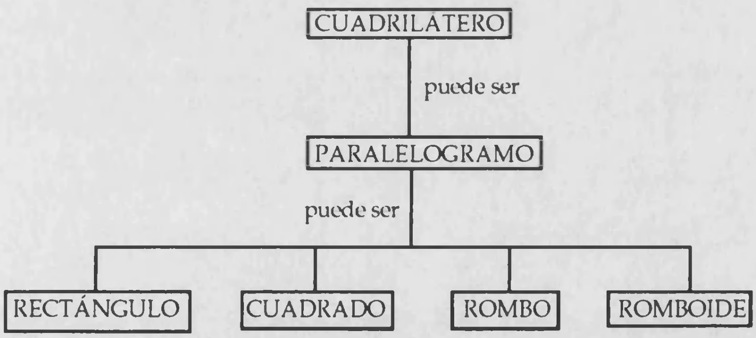


Figura VIII. 13 Primeras relaciones entre cuadriláteros convexos en enseñanza primaria.

en el que no aparecen relaciones entre conceptos que están en un mismo nivel jerárquico y, por lo tanto, no introduce nuevas jerarquías.

En el curso siguiente se introducen dos nuevas clases de cuadriláteros: los trapecios y los trapezoides, los cuales se integran en la organización anterior como clases disjuntas sin tener relación con los ya existentes (por ejemplo, tener dos pares de lados paralelos, un sólo par de lados paralelos o ningún par de lados paralelos):

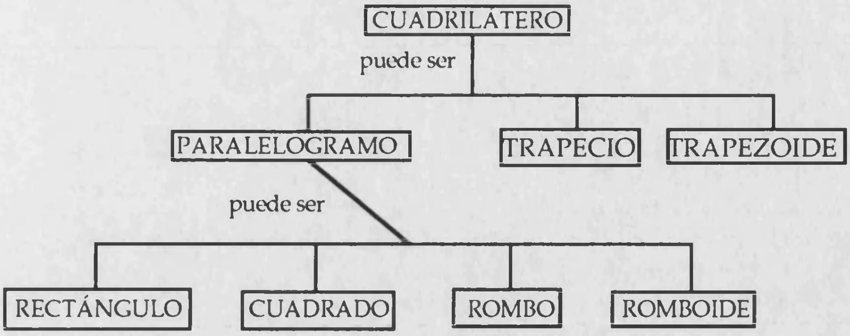


Figura VIII. 14 Primeras relaciones entre cuadriláteros convexos en enseñanza primaria, incluyendo ahora más clases de cuadriláteros.

La incorporación de dos nuevas subclases de cuadriláteros en el curso siguiente, el trapecio rectángulo y el trapecio isósceles, lo que provoca no es la construcción de nuevas relaciones con los cuadriláteros ya existentes sino incorporar a la clase de los trapecios las dos subclases mencionadas de una manera disjunta con los ya existentes:

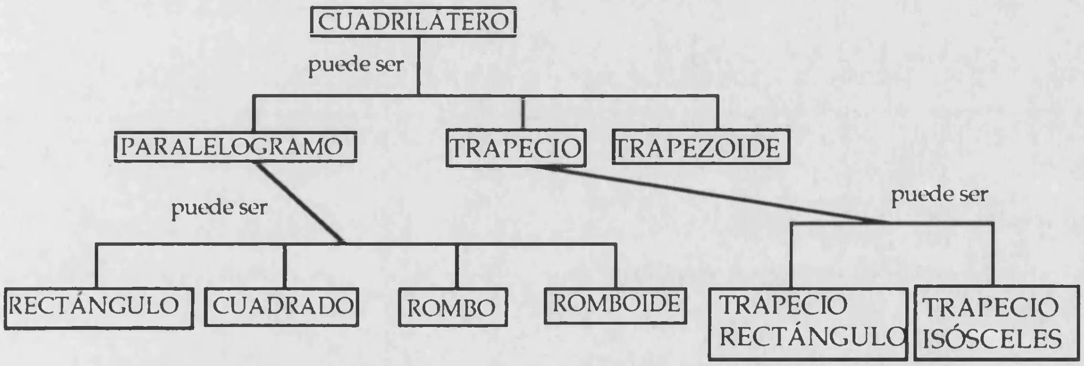


Figura VIII. 15 Relaciones entre cuadriláteros convexos al final de la enseñanza primaria.

Pocos intentos hay en los libros de texto de relacionar los conceptos que están en un mismo nivel jerárquico entre sí, lo que posibilitaría la construcción de una nueva estructura jerárquica más compleja que la anterior. No obstante, hay editoriales que definen el rectángulo como «paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos rectos», indicando a continuación que «si además tiene sus cuatro lados iguales, es un cuadrado», lo que modifica la organización de los cuadriláteros incluyendo un nivel jerárquico más:

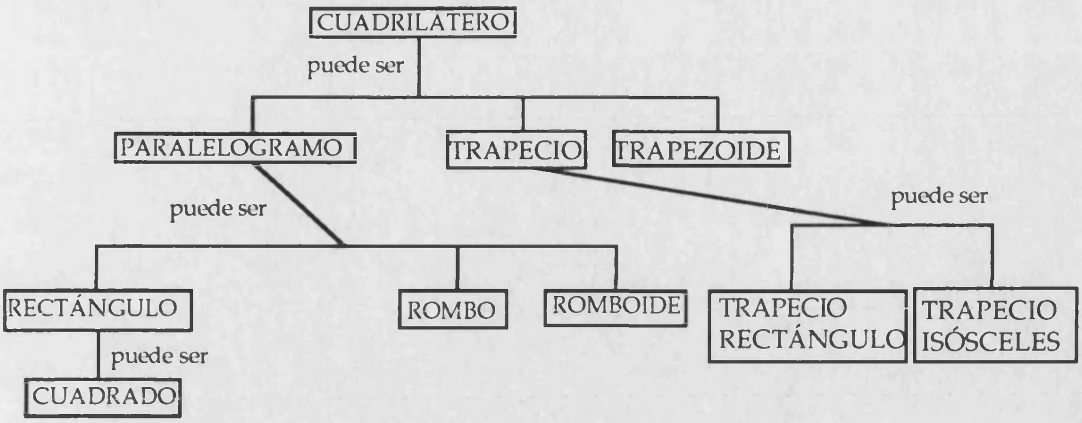


Figura VIII. 16 Relaciones entre cuadriláteros convexos al final de la enseñanza primaria. Intentos de organización inclusiva.

Situaciones como las anteriores dan por sentado las relaciones inversas (leyendo el mapa de abajo a arriba) en el que el tipo de nexo que une dos conceptos de cuadrilátero es, ahora, del tipo "es". Relaciones éstas que no se establecen de una manera explícita por parte de los libros de texto, sino que subyacen de una manera implícita al introducir los conceptos ya organizados jerárquicamente del modo o modos señalados.

Probablemente es un error presentar así las relaciones entre estos conceptos, puesto que el nivel de razonamiento exigido es más elevado que el que poseen los estudiantes en estos niveles educativos y, como consecuencia, las relaciones, tanto explícitas como implícitas antes mencionadas, que presentan los libros de texto puede que no proporcionen significado al estudiante, o aquellos significados que extraen los estudiantes no coincidan, necesariamente, con el que pretenden mostrar los libros de texto..

VIII. 5. 4 *Las relaciones entre cuadriláteros y los niveles de van Hiele.*

Hace algún tiempo ya, este problema fue investigado dentro de la corriente que durante los años 80 investigó la validez de la teoría de los niveles de van Hiele (de Villiers, 1987). Muchos de los instrumentos que se usaron para asignar niveles de razonamiento a los estudiantes contenían ítems en los que se proponía a los estudiantes que reconocieran algunas relaciones de inclusión o de partición (exclusión) entre diversas clases de cuadriláteros, generalmente entre los cuadrados, rombos y rectángulos. En función de cómo justificaba el estudiante la relación, mediante ejemplos o mediante relacionar propiedades derivadas de las definiciones consideradas, se le asignaba un nivel de razonamiento, niveles 2 ó 3, respectivamente (Corberán, Huerta y otros, 1994).

Parece consensuado por la mayoría de investigadores que la clasificación jerárquica adquiere significado para el estudiante cuando éste razona en el nivel 3. Pero este hecho tiene su punto contradictorio con lo que en su tiempo formuló el propio van Hiele (1986) y su esposa Dina van Hiele (Fuys et al., 1984). El primero argumentó que la clasificación inclusiva puede ocurrir en el nivel 2:

> "El desarrollo de una red de relaciones da como resultado que un rombo se convierta en un símbolo para un conjunto amplio de propiedades. Las relaciones del rombo con otras figuras se determinan ahora por esta colección de propiedades. Los estudiantes que han progresado a este nivel (nivel 2), responderán a la pregunta de qué es un rombo, diciendo: «un rombo es un cuadrilátero con los cuatro lados iguales, con los ángulos opuestos iguales y con diagonales perpendiculares que se bisecan y que bisecan los ángulos». Por este motivo, ahora un cuadrado se convierte en un rombo" (cita adaptada, De Villiers 1987, pág. 4) .

Este mismo punto es tratado por Dina van Hiele (en Fuys et al., 1984) cuando escribe:

> "... en el nivel 0 (nivel 1, actualmente) un cuadrado no se percibe como un rombo, en el nivel 1 (nivel 2, actualmente) es autoevidente que un cuadrado es un rombo" (pág. 222).

Sin embargo, Pierre Marie van Hiele (en Fuys et al., 1984) parece contradecirse a sí mismo y a su mujer cuando escribe con referencia al nivel 1 (nivel 2 actual):

> "Pero en este nivel... un cuadrado no necesariamente se identifica como un rectángulo" (pág. 245).

En consecuencia, a la luz de ello, la cuestión a investigar, referida por de Villiers (1987), se relaciona con estas contradicciones aparentes. La clasificación jerárquica, ¿ocurre en el nivel 3 ó en un nivel anterior al 3?

Con 14 niños escogidos al azar y mediante entrevistas clínicas se investiga la inclusión jerárquica de algunos cuadriláteros, en relación con un nivel de van Hiele asignado mediante tests como los de Burger y Shaughnessy (1986). Algunos de los hallazgos más importantes que refiere en su trabajo de Villiers, y que compartimos, tienen que ver con:

i) El lenguaje: uso de los conectores o nexos, como "es", por ejemplo, que adquiere un significado diferente para el alumno que lo usa: " equivalente a" o "es lo mismo que", mientras en el sentido en el que lo toma las matemáticas es de "está incluido en".

ii) Evidencias de razonamiento jerárquico en niveles <3.

iii) La pretensión teórica de que el razonamiento deductivo (informal) se desarrolla mano a mano con la clasificación jerárquica, parece dudosa. Aunque el razonamiento (deductivo) condicional con la clasificación inclusiva (todos los p son q) y las relaciones causales (p implica q) son lógicamente equivalentes (p.ej., ($A \subset B$; $B \subset C$; $A \subset C$) $\Leftrightarrow$ ($p \Rightarrow q$; $q \Rightarrow r$; $p \Rightarrow r$)), no quiere decir, necesariamente, que sean psicológicamente experienciados por el niño de igual manera.

iv) La deducción formal y la clasificación jerárquica se desarrollan de manera independiente, además de que no se desarrollan a la vez, uno es prerrequisito del otro.

En el trabajo que hemos mencionado ya varias veces (de Villiers, 1987), se diseña y se desarrolla un experimento de enseñanza basado en la hipótesis de que los estudiantes pueden realizar clasificaciones de carácter jerárquico antes de que razonen en el nivel 3, como teóricamente deberían hacerlo a la luz de las investigaciones recientes, y que dicha actividad depende sobremanera de la instrucción recibida por los estudiantes.

Los estudiantes escogidos para este experimento, eran estudiantes no contaminados por otra didáctica distinta de la que el experimento utiliza, de tal manera que no hay nada, aparentemente, que impida la posibilidad de realizar clasificaciones jerárquicas. La idea es que las propiedades de los cuadriláteros no deben obtenerse experimentalmente de manera aislada, sin que tengan que ver las propiedades de una clase con las otras. Son los cuadriláteros los que cumplen ciertas propiedades y por tanto los puedo ir organizando de esta manera, y no de la forma tradicional basada en van Hiele, primero obtener las propiedades de todas las clases de cuadriláteros y, a medida que el razonamiento deductivo se vaya desarrollando, realizar clasificaciones de carácter inclusivo pues ello supone entrar, de algún modo, en la cadena deductiva.

CAPÍTULO IX

Metodología de investigación

IX. 1 Introducción

En la literatura sobre este tema, de la cuál hemos dado cuenta en capítulos anteriores, el término *mapa conceptual*[1], como instrumento o herramienta, no es usado de la misma manera por todos los investigadores. Así, por ejemplo, mientras Novak (Novak y otros, 1983; Novak y Gowin, 1988) parece usar el término "mapa conceptual" como instrumento que tiene por intención mejorar la enseñanza de las ciencias experimentales, el uso que de este mismo término hacen, por ejemplo, Hasemann y Mansfield (1995) es el de instrumento o herramienta para evaluar la comprensión de los estudiantes de un tema de matemáticas, antes y después de la instrucción, y ver aquellos aspectos en los que los estudiantes centran su atención delante de una situación matemática concreta (Hasemann, 1996, comunicación personal).

Nosotros compartimos, también, la visión de los mapas conceptuales como un instrumento de evaluación, a partir del cual poder analizar la manera en que los estudiantes organizan un determinado conjunto de conceptos y relaciones conceptuales entre dichos conceptos (Huerta, 1995b).

Muy a menudo se objeta, en relación con el uso de los mapas conceptuales como instrumento para la evaluación de los estudiantes, lo siguiente:

1) Puede existir una dependencia entre la construcción de los mapas conceptuales y la manera en la que se pregunta a los estudiantes para obtenerlos.

2) Los mapas conceptuales podría no ser reproducibles.

3) Para la construcción de los mapas conceptuales se necesitan habilidades metacognitivas (por ejemplo, en el caso de los mapas "pobres" no podemos estar seguros si la causa es la falta de conocimientos matemáticos o su incapacidad para construir tales mapas).

4) No hay criterios objetivos a partir de los cuales analizar los mapas conceptuales de los estudiantes.

[1] Concept mapping en terminología anglosajona.

Objeciones con las que casi todos estaríamos de acuerdo y que deberían tomarse seriamente e incrementar la investigación en este sentido. No obstante, algunos resultados positivos se han dado, como los que se relatan en Mansfield y Hasemann (1995) y el que se mostró en el 19º Congreso anual del PME (Huerta, 1995b)

En este capítulo, mostraremos cómo hemos desarrollado nuestra metodología de investigación con los mapas conceptuales, tratando de minimizar algunas de las objeciones relatadas en los párrafos anteriores.

IX. 2 Métodos de obtención de mapas conceptuales: Algunos ejemplos.

Uno de los problemas más importantes que se presenta a la hora de evaluar a los estudiantes usando los mapas conceptuales es cómo obtener un mapa conceptual de un estudiante en relación con un tema específico de matemáticas.

Desde la perspectiva de Novak (en Novak y Gowin, 1988), en la que su intención principal es proporcionar medios para conseguir mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias experimentales, los estudiantes deberían recibir instrucción previa acerca de lo que se entiende por mapa conceptual y cómo éstos deberían ser construidos, sugiriendo estrategias de enseñanza para introducir los mapas conceptuales en diferentes niveles educativos (Novak y Gowin, 1988, p. 53-55). Además, se propone un método para puntuar los mapas conceptuales en relación con 4 aspectos: proposiciones, jerarquía, conexiones cruzadas y ejemplos (p. 56) y una manera de obtener una puntuación relativa, cuando se compara un mapa cognitivo con un mapa conceptual de referencia.

Usar los mapas conceptuales como instrumento de evaluación es otra de las propuestas de Novak en relación con los mapas conceptuales. Para ello sugiere como metodología de investigación la entrevista clínica, preparada a partir de un mapa conceptual de referencia, de tal manera que "a partir de la entrevista y sobre el patrón del mapa original se construye un mapa cognitivo que refleje los conceptos y proposiciones revelados por cada estudiante durante la entrevista" (Novak y Gowin, 1988).

Los métodos propuestos por Novak están relacionados con su intención a la hora de usar los mapas conceptuales. Son propuestas pensadas par un entorno escolar y mientras se desarrolla algún proceso de enseñanza y aprendizaje incluyendo, dentro de él, los mapas conceptuales. Por tanto, son los propios estudiantes quienes completan sus mapas conceptuales.

Hasemann y Mansfield, por el contrario, no enseñan a los estudiantes cómo construir mapas conceptuales, aunque siguen siendo los propios estudiantes los que construyen sus mapas. En el primero, el mapa conceptual del estudiante es el resultado de distribuir, con criterios preestablecidos, un número de cartulinas con nombres para algunos conceptos relativos a un tema concreto de matemáticas y conectar dichos conceptos mediante líneas y nexos que den lugar a proposiciones consideradas como válidas a juicio del estudiante. En el segundo, se muestra un mapa conceptual ya construido (seguramente se explica algo sobre él) y se pide que, a partir de un listado de palabras que se refieren a conceptos, se construya un mapa conceptual con los conceptos listados. En ambos casos, las entrevistas clínicas se usan para que los estudiantes den explicaciones sobre las razones que les impulsa a actuar de un modo determinado.

Por diferentes razones, objetivos de nuestra investigación, muestra de estudiantes utilizada, etc..., los métodos de obtención de mapas conceptuales de alumnos descritos, no eran aplicables en su totalidad. Por razones obvias, no podíamos enseñar a construir mapas conceptuales a los 74 estudiantes que constituía la muestra; por razones de infraestructura, no podíamos seguir la metodología descrita por Hasemann; por razones que Mansfield incluso reconoce, la construcción de un mapa conceptual por los estudiantes, a partir de lo que les pueda inspirar al ver un mapa conceptual de referencia, hecho por otro estudiante y sobre otro tema diferente, lleva emparejadas dificultades intrínsecas que hacen que, posiblemente, el estudiante esté más pendiente del aspecto del mapa que de los conceptos y relaciones que incluye en él.

Al exponer estas dudas al profesor Novak, éste sugirió, en comunicación personal, el uso de mapas esqueleto:

> "Una técnica que se puede usar con grandes muestras de estudiantes es la de proporcionar «skeleton maps[2]», mapas sin palabras ni para los conceptos y ni para las conexiones. Se podría pedir a los estudiantes que lo completaran usando las palabras apropiadas de una lista de palabras que se les proporcionase. También se les podría pedir que añadiesen al mapa conceptual términos o palabras adicionales en los lugares apropiados. Hemos encontrado que este tipo de modelos puede permitirnos demostrar la comprensión de los estudiantes incluso sin haber practicado la construcción de los mapas conceptuales" (Novak, 1992 comunicación personal).

La sugerencia de Novak podría habernos resuelto el problema del tamaño de la muestra. Pero, de haberla tenido en cuenta, el problema hubiera sido construir un tal mapa esqueleto y, en el caso en el que hubiese sido posible, dicho mapa representaría una organización de conceptos y relaciones entre los conceptos ya preestablecida, limitando de esta manera la autonomía del estudiante a la hora de reflexionar sobre qué conceptos son los que debe incluir y relacionar con otro u otros conceptos.

IX. 3 El instrumento de evaluación: El test escrito

Como consecuencia de los descrito en el apartado anterior, nuestra opción inicial fue contemplar la posibilidad de elaborar un test escrito que nos permitiese, a partir de las respuestas de los estudiantes, construir un mapa conceptual de cada estudiante susceptible de ser analizado. Si esto fuese posible, la investigación se podría extender a grandes muestras de estudiantes, se eliminaría la componente de enseñanza sobre la construcción de mapas y no se forzaría a los estudiantes a elaborar sus propios mapas.

Se escogió, como tema de matemáticas, los cuadriláteros. Las razones parecían evidentes. De una parte, por el contexto en el que se presentaba la investigación en su primera parte. De otra, debíamos escoger un tema de geometría que tuviese la suficiente riqueza de contenido y fuese lo suficientemente conocido por la mayoría de estudiantes que permitiese a los estudiantes contestar a lo que se les preguntase en el test y, al mismo tiempo, el contenido facilitase variedad de respuestas en función del grado de comprensión que mostrase cada estudiante.

[2] Mapas esqueleto.

Con estas premisas, se elaboró una versión piloto del test que iba a ser probada en diferentes niveles educativos. Constaba de dos partes diferenciadas, aunque obviamente relacionadas. En la primera parte del test, los estudiantes debían escribir frases que considerasen válidas, para cada uno de los conceptos principales, tomando el concepto secundario, la propiedad del concepto secundario y el nexo que considerasen apropiados de una lista de conceptos y nexos que tenían a su disposición. Se incluyó una hoja con ejemplos de cada una de las clases de cuadriláteros considerada para que los estudiantes incluyeran ejemplos del concepto principal por el que se le preguntaba y, finalmente, se le pedía una definición del concepto principal.

PARA EL CONCEPTO DE <u>ROMBO</u>, TRATA DE ESCRIBIR EL MAYOR NÚMERO POSIBLE DE FRASES QUE CONSIDERES VERDADERAS Y SIGNIFICATIVAS, TOMANDO EL CONCEPTO SECUNDARIO, LA PROPIEDAD Y EL NEXO QUE CONSIDERES APROPIADOS DE LAS LISTAS CORRESPONDIENTES.

1.---

2.---

3.---

4.---

5.---

6.---

7.---

8.---

9.---

10. Por ejemplo, las figuras nº---------------------------

----- son rombos.

Trata de dar una definición de ROMBO:-----------------

Figura IX. 1 Ejemplo de un ítem de la versión piloto del test, 1ª Parte

La segunda parte de la versión piloto del test, trataba de estudiar cómo relacionaba los estudiantes los conceptos principales entre sí usando los nexos "es", "no es" o puede ser". Para ello se pedía a los estudiantes que escribieran, en la línea de puntos, el nexo que considerasen apropiado, de manera que se estableciera, a su juicio, una proposición verdadera entre el concepto de la izquierda y cada uno de los conceptos de la derecha.

	----------CUADRILÁTERO
	----------CUADRADO
	----------RECTÁNGULO
	----------ROMBO
	----------ROMBOIDE
TRAPECIO	----------PARALELOGRAMO
	----------CUADRILÁTERO CONVEXO
	----------CUADRILÁTERO CÓNCAVO
	----------TRAPECIO RECTÁNGULO
	----------TRAPECIO ISÓSCELES
	----------TRAPEZOIDE

Figura IX. 2 Ejemplo de un ítem de la versión piloto del test, 2ª Parte

Finalmente, con la estructura descrita, se probó el test en diferentes niveles educativos. Solamente en niveles avanzados, dada la extensión del test, los estudiantes contestaron al test completo, mientras que en los niveles de enseñanza primaria y secundaria, el test se fragmentó en trozos de manera que cada estudiante resolvía un trozo de cada una de la partes del test, con lo cual pudimos conseguir respuestas al test completo en el nivel educativo que deseábamos. Algunos resultados de estas pruebas fueron expuestos en el 19º Congreso del PME, Huerta (1995b).

Estos resultados nos condujeron a la versión final del test, no sin antes haber observado algunas deficiencias que había que subsanar. De una parte, la extensión de la primera versión. No era posible preguntar en una sola sesión por la totalidad de los cuadriláteros considerados. De otra parte, se comprobó que los estudiantes estaban familiarizados más con unas clases de cuadriláteros que con otras, de las cuales apenas decían nada o simplemente no contestaban nada, caso, por ejemplo, de los cuadriláteros convexos, los cóncavos, los trapecios isósceles o rectángulos etc. Análogamente, se observó que si el estudiante debía completar frases sobre el concepto principal, implicando en ellas a los conceptos secundarios y a algunas de sus propiedades, la ausencia de tales frases se debía a una falta de comprensión de los conceptos secundarios en sí mismos, en relación con el concepto principal, o de las propiedades de los conceptos secundarios, o a un simple olvido. Se decidió, para los ítems de la primera parte del test, solicitar de los estudiantes que las frases hiciesen referencia a los conceptos secundarios indicados en el enunciado, de tal manera que se limitase el olvido y se redujese la lista de nombres que el estudiante iba a manejar. Sólo era necesaria la lista de propiedades y de nexos, y los dibujos de los ejemplos de las distintas clases de cuadriláteros (figura IX. 3).

Con respecto a la segunda parte, se observó que tal y como estaban planteados los ítems, existían serias dificultades de comprensión de los nexos "es", "no es" y "puede ser", en el sentido de las descritas por de Villiers (1987) y de las que hemos hablado con anterioridad, junto con la dificultad de la tarea en sí misma. En consecuencia, decidimos usar en su lugar los nexos: "Siempre es", "Algunas veces es" o "Nunca es", junto con un ejemplo, distinto del que debían completar, que tratase de aclarar a los estudiantes lo que debían hacer. Esto dio lugar a la versión definitiva de la segunda parte del test (figura IX. 4).

PARA EL CONCEPTO DE PARALELOGRAMO, TRATA DE ESCRIBIR EL MAYOR NÚMERO POSIBLE DE FRASES QUE CONSIDERES VERDADERAS, SOBRE CADA CONCEPTO SECUNDARIO, TOMANDO PARA ELLO LA PROPIEDAD Y EL NEXO QUE CONSIDERES APROPIADOS DE LAS LISTAS CORRESPONDIENTES.

SOBRE LOS LADOS.

1.--

2.--

3.--

4.--

SOBRE LOS ÁNGULOS.

5.--

6.--

7.--

8.--

SOBRE LAS DIAGONALES.

9.--

10.--

11.--

12.--

13.--

SOBRE SIMETRÍA y OTRAS COSAS (por ejemplo, relaciones entre frases escritas).

14.--

15.--

16.--

17.--

18.--

19.--

SOBRE LA FORMA: las figuras nº---son **PARALELOGRAMOS.**

SOBRE SU DEFINICIÓN: Un paralelogramo es ---------------------

----

Figura IX. 3 Ejemplo de un ítem de la primera parte del test (Versión final).

RELACIONA EL NOMBRE QUE APARECE A LA IZQUIERDA CON LOS QUE APARECEN A LA DERECHA PONIENDO SOBRE LA LÍNEA DE PUNTOS, "Siempre ES", "Algunas veces ES" o "Nunca ES", SEGÚN EL CASO.

(Fíjate en los ejemplos, escribiendo eso hemos querido decir que: el PENTÁGONO "Nunca Es" o "No Es" un CÍRCULO; el PENTÁGONO "Siempre ES" o "ES" un POLÍGONO y el PENTÁGONO "Algunas veces ES" o "Puede Ser" REGULAR)

	----------CÍRCULO
PENTÁGONO	----------POLÍGONO
	----------REGULAR

1.

	----------PARALELOGRAMO
CUADRILÁTERO	----------TRAPECIO
	----------TRAPEZOIDE

2.

	----------CUADRILÁTERO
	----------RECTÁNGULO
	----------ROMBO
CUADRADO	----------ROMBOIDE
	----------PARALELOGRAMO
	----------TRAPECIO
	----------TRAPEZOIDE

Figura IX. 4 Ejemplo de un ítem de la segunda parte del test (Versión final).

IX. 4 Análisis del contenido del test.

Un análisis del contenido de nuestro test, supone un análisis de las fuentes que nos han servido para su elaboración. Estas fuentes han sido, de una parte, los libros de texto que contienen la geometría escolar que va a ser evaluada y, de otra, la organización de los ítems que han de permitir la obtención de los mapas conceptuales de los estudiantes. De esto último hemos hablado, en parte, en secciones anteriores de este capítulo. De lo primero, hablaremos a continuación.

La versión final del test se elaboró considerando como conceptos principales a las siguientes clases de cuadriláteros: Paralelogramo, Cuadrado, Rectángulo, Rombo, Romboide, Trapecio y Trapezoide; y como conceptos secundarios, los conceptos siguientes: Lado, ángulo, diagonal, aunque se abrió la posibilidad de que el estudiante hablase sobre la simetría y otros aspectos que considerase oportuno.

Aparte de las razones ya expuestas, por las cuáles decidimos considerar las clases de cuadriláteros antes relacionadas, hicimos un análisis de los libros de texto de la enseñanza primaria que nos diese una visión de cuál es el tratamiento que las distintas editoriales hacían de las distintas clases de cuadriláteros. La tabla siguiente muestra un resultado de dicho análisis: nivel educativo en el que son tratados.

CONCEPTO PRINCIPAL	EDITORIAL A	EDITORIAL B	EDITORIAL C	EDITORIAL D
CUADRILATERO	3-4-5	3-4-5-6	3-4-5	3-4
PARALELOGR.	3-5	4-5-6	3-4-5	4
RECTANGULO	3-4-5	3-5-6	3-4-5	4
CUADRADO	3-4-5	3-5-6	3-4-5	4
ROMBO	3-4-5	5-6	5	4
ROMBOIDE	3-4-5	5-6	5	4
TRAPECIO	4-5	4-5-6	4-5	4
TRAPECIO RECTÁNGULO	5	No aparece	No aparece	No aparece
TRAPECIO ISÓSCELES	5	No aparece	No aparece	No aparece
TRAPECIO ESCALENO	5	No aparece	No aparece	No aparece
TRAPEZOIDE	4-5	4-5-6	4-5	4

Tabla IX. 1 Las clases de cuadriláteros en distintas editoriales de Enseñanza Primaria: Cursos en los que se estudian.

Los paralelogramos y sus clases son los conceptos que están más presentes en todas las editoriales, pero incluso en éstos hay diferencias. Podemos decir que las editoriales A y B hacen un tratamiento parecido, a lo largo de más de un curso, de los paralelogramos y sus clases, mientras que la editorial C divide el tratamiento en dos: de una parte, los conceptos de paralelogramo, cuadrado y rectángulo se tratan en tres cursos consecutivos; de otra, el rombo y el romboide sólo se tratan en 5º curso. Como se ve en la tabla IX. 1, la editorial D estudia todos los cuadriláteros en un único curso.
Con respecto a los conceptos secundarios, las propiedades y los nexos listados, también fue el análisis de libros de texto antes mencionado el que nos dio las pautas a seguir. Las páginas siguientes muestran el resultado de este análisis.

Concepto secundario: Lado.

La caracterización de los cuadriláteros por las propiedades de sus lados, es la práctica habitual en todas las editoriales. Las propiedades de los lados que se utilizan tienen que ver con la igualdad y el paralelismo, de tal manera que, en casi todas las editoriales, es la primera la que se introduce, reservándose la segunda propiedad para cursos posteriores. La razón de esto es que están sujetas a la introducción del concepto de paralelismo de rectas que se presenta por entonces.

Hay que destacar el vocabulario diferente usado para describir las propiedades de los lados. Así, suelen usarse los términos "paralelos dos a dos", "un par de lados paralelos" o "ningún par de lados paralelos" para indicar si el cuadrilátero en cuestión tiene lados paralelos o no y la cantidad, aunque alguna vez aparezca el término "lados opuestos paralelos" como sinónimo de lados paralelos dos a dos (editorial C). Por otra parte, "lados iguales" y "lados iguales dos a dos" aparecen en casi todas la editoriales, si bien la editorial B prefiere, para los paralelogramos por ejemplo, "lados opuestos iguales" en lugar de lados iguales dos a dos. En cambio, la "desigualdad" de los lados apenas si es usada. La tabla siguiente resume las propiedades de los lados y los cursos en las que se introducen, para cada editorial (Tabla IX. 2).

PROPIEDAD LADO	EDITORIAL A	EDITORIAL B	EDITORIAL C	EDITORIAL D
IGUALES	3-4-5	3-5-6	4-5	4
IGUALES DOS A DOS	3-4-5	No aparece	4-5	4
DESIGUALES	5	No aparece	No aparece	No aparece
PARALELOS DOS A DOS	3-4-5	4-6	4-5	4
UN PAR PARALELOS	4-5	4-5-6	4-5	4
NINGÚN PAR PARALELOS	4-5	4-5-6	4-5	4
OPUESTOS IGUALES	No aparece	5-6	3	No aparece
OPUESTOS PARALELOS	No aparece	5	3	No aparece

Tabla IX. 2 Las propiedades del concepto lado en las distintas editoriales: Cursos en las que aparecen.

Concepto secundario: ángulo.

Las propiedades que se consideran del concepto secundario "ángulo" son la igualdad de ángulos, la desigualdad de ángulos y medir 90° (considerando, a su vez, el número de ángulos rectos que tiene el cuadrilátero considerado).

Por regla general, se prefiere decir el número de ángulos rectos que tiene el cuadrilátero, a usar el término " ángulos iguales", y usar "ángulos iguales dos a dos" en lugar de "ángulos opuestos iguales". Hay que resaltar que ninguna editorial hace hincapié en los ángulos agudos y obtusos. La tabla siguiente resume estos aspectos mencionados.

PROPIEDAD ÁNGULO	EDITORIAL A	EDITORIAL B	EDITORIAL C	EDITORIAL D
IGUALES	No aparece	No aparece	5	4
IGUALES DOS A DOS	3-4-5	No aparece	5	4
DESIGUALES	5	No aparece	No aparece	No aparece
ÁNGULO RECTO (2 o 4)	3-4-5	3-5-6	4	No aparece
OPUESTOS IGUALES	No aparece	5-6	No aparece	No aparece

Tabla IX. 3 Las propiedades del concepto ángulo en las distintas editoriales: Cursos en las que aparecen.

Concepto secundario: diagonal.

Las dos tablas anteriores nos han mostrado cómo la caracterización de los cuadriláteros se suele hacer mediante las propiedades de los lados y de los ángulos. Siendo más precisos, mediante las propiedades de los lados y, después, mediante las de los ángulos.

Poco caso, o tal vez ninguno, se le hace al concepto diagonal y a sus propiedades. Lo habitual es que no se usen para caracterizar a los cuadriláteros ni se piense en una organización alternativa de los mismos, basada en las propiedades de las diagonales de un cuadrilátero. Por destacar una, destacaríamos la propiedad de la bisección de diagonales en los paralelogramos: Los paralelogramos se caracterizan porque sus diagonales se cortan en los puntos medios de cada una de ella. Esta propiedad de la bisección no aparece en ninguna de las editoriales como puede verse en la tabla siguiente.

PROPIEDAD DIAGONAL	EDITORIAL A	EDITORIAL B	EDITORIAL C	EDITORIAL D
IGUALES	5	6	No aparece	No aparece
DESIGUALES	5	6	No aparece	No aparece
PERPENDIC.	5	6	No aparece	No aparece
NO PERPEN.	5	5-6	No aparece	No aparece
OBLICUAS	No aparece	No aparece	No aparece	No aparece
BISECARSE	No aparece	No aparece	No aparece	No aparece

Tabla IX. 4 Las propiedades del concepto diagonal en las distintas editoriales: Cursos en las que aparecen.

Concepto secundario: simetría.

La tabla (Tabla IX. 5) siguiente recoge el tratamiento que hacen las distintas editoriales de la simetría y los cuadriláteros. Debe entenderse que, en los casos en los que se indica que las propiedades "ser simétrico", "no simétrico" y "nº de ejes de simetría" no aparecen, nos referimos siempre a que no aparecen en relación con los cuadriláteros, pero sí en otros contextos.

PROPIEDAD SIMETRÍA	EDITORIAL A	EDITORIAL B	EDITORIAL C	EDITORIAL D
SIMÉTRICO	No aparece	5	No aparece	No aparece
NO SIMÉTRICO	No aparece	5	No aparece	No aparece
Nº EJES	No aparece	5	No aparece	No aparece

Tabla IX. 5 Las propiedades del concepto simetría en las distintas editoriales: Cursos en las que aparece.

Es necesario decir que, cuando se utiliza, la simetría no es usada como medio para organizar las diferentes clases de cuadriláteros. Tampoco se estudian las características de los cuadriláteros en relación con la simetría y el número de ejes de simetría, limitándose a la aplicación del concepto de simetría recién introducido al caso de los cuadriláteros; concretamente al rectángulo, rombo y cuadrado. Es más, este análisis[3] se presenta por medio de una actividad y no está incorporado al texto en el que se presentan las otras características de los cuadriláteros.

Nexos.

Por nexo entendemos la palabra o conjunto de palabras que une semánticamente el concepto principal con el concepto secundario y su propiedad, o palabra o conjunto de palabras que se usa para establecer relaciones entre conceptos principales, estableciéndose una proposición válida sobre un concepto principal. Por ejemplo: "El paralelogramo <u>tiene</u> lados paralelos dos a dos". El nexo en esta proposición es la palabra «tiene». En, "El paralelogramo <u>puede ser</u> rectángulo", el nexo es el conjunto de palabras «puede ser».

La tabla siguiente recoge los nexos más usados por las editoriales analizadas para establecer proposiciones sobre los conceptos principales. Se han intentado unificar algunas de ellas con el fin de hacer el listado lo más corto posible, manteniendo, no obstante, la riqueza del mismo para no limitar los posibles significados.

[2] Este tipo de análisis basado en la simetría de los cuadriláteros ya fue objeto de atención en libros de texto de principio de siglo, como puede verse en la geometría intuitiva de Puig Adam y Rey Pastor (1928).

NEXO	EDITORIAL A	EDITORIAL B	EDITORIAL C	EDITORIAL D
TIENE, NO TIENE	3-4-5	3-4-5-6	3-4-5	3-4
PUEDEN TENER, ALGUNOS TIENEN	4	No aparece	No aparece	4
SON, SE LLAMAN	3-4	No aparece	3-4	4
PUEDEN SER[4]	3-5	No aparece	4	4
SE CLASIFICAN EN	No aparece	4-5-6	5	No aparece
ES, SON[5]	5	3-5-6	3-4-5	3-4
COMO, p.ej.	4-5	3-5-6	4	No aparece
SI, ..., entonces	No aparece	No aparece	3-4-5	No aparece

Tabla IX. 6 Los nexos en las distintas editoriales: Cursos en los que se usan.

Así pues, el análisis que hemos presentado de los libros de texto, junto con las pruebas piloto, nos condujeron a la versión final del test usado en esta investigación (En el Anexo I puede verse la versión final del test que ha servido para esta investigación).

Consta de dos partes diferenciadas. En la primera parte del test, se pide a los estudiantes que escriban frases sobre los siguientes conceptos de cuadrilátero: Paralelogramo, Cuadrado, Rectángulo, Rombo, Romboide, Trapecio y Trapezoide, que como podemos comprobar en la tabla IX. 1 , son los tipos de cuadriláteros más estudiados en los libros de texto antes analizados, por lo que, y así lo había confirmado las pruebas piloto, la esperanza de que los estudiantes contestasen más y mejor sobre estas clases de cuadriláteros era mayor. Tres fueron los conceptos secundarios que se incluyeron en cada ítem, de los cuáles los estudiantes tenían que decir cosas en relación con el concepto principal: Lados, ángulos y diagonales. La razón

4 Hemos querido incluir el nexo "pueden ser" como alternativa a "se clasifican en" porque algunas editoriales usan de manera explícita este segundo nexo y otras usan de manera implícita -no se menciona explícitamente en el texto, pero puede interpretarse así- "pueden ser" como nexo para expresar una organización posible de una clase de cuadriláteros en subclases.

5 Existe una diferencia fundamental en el significado del nexo "son" según su uso. El significado que aquí se le da implica una clasificación jerárquica entre los conceptos principales que relaciona. Por ejemplo, "los paralelogramos son cuadriláteros", establece la inclusión de la clase paralelogramo en la clase cuadriláteros. En el otro uso, el nexo viene a utilizarse como sinónimo de "se llaman": "los cuadriláteros que tienen 4 ángulos rectos son los rectángulos", podría decirse que es el nexo usado para una condición necesaria del concepto principal que aparece después de él.

por la que incluimos estas tres y dejásemos al estudiantes la posibilidad de escribir sobre un cuarto concepto secundario, simetría y ejes de simetría, puede verse en las tablas anteriores. No es práctica habitual en la enseñanza de la geometría usar diagonales y la simetría para describir propiedades de los cuadriláteros. Por lo tanto, no era de esperar demasiadas frases que hiciesen referencia a las diagonales y sus propiedades, ni mucho menos a la simetría. En este último bloque, se solicitaba al estudiante que, si podía, escribiese relaciones entre las frases escritas. Es decir, si un estudiante hubiese escrito, por ejemplo, "tiene 4 ángulos rectos" y "tiene lados paralelos dos a dos", al hablar de los ángulos y de los lados del concepto principal, nuestra esperanza era detectar qué estudiantes veían una relación, y qué tipo de relación, entre ambas frases escritas, escribiendo por ejemplo, que "tener 4 ángulos rectos implica tener lados paralelos dos a dos". Como más tarde se verá, esta situación se dio en muy pocos casos, ya porque el razonamiento necesario para establecer relaciones de implicación es teóricamente superior al que demostraron los estudiantes, ya por defecto del test, al no entender los estudiantes qué se les pide realmente que hagan.

Finalmente se decidió respetar, de la versión inicial, el apartado en el que los estudiantes debían señalar ejemplos del cuadrilátero que estaban tratando, a partir de la hoja que contenía ejemplos variados de ellos y de los demás cuadriláteros.

La razón por la que incluímos un apartado en el que pedíamos la definición del concepto principal, fue poder situarnos en la misma perspectiva que el estudiante cuando analizásemos las relaciones que iba a establecer con los otros conceptos principales, en la segunda parte del test. Es decir, si en la definición de alguna de las clase de cuadriláteros el estudiante incluía condiciones suficientes[6] mínimas o superabundantes, esto podría tener su reflejo en la manera en la que organizase jerárquicamente esa clase de cuadriláteros con respecto a las demás clases de cuadriláteros. Esta/s condición/nes suficiente/s se suele/n expresar con el nexo "tienen".

[6] Condición *suficiente mínima*. Con alguna frecuencia se habla en Matemáticas de la condición necesaria y suficiente A para que se verifique T, entendiendo por tal una condición necesaria y *suficiente mínima*. Precisando este último término, decimos que una condición suficiente B para que se verifique T es <u>superabundante</u> cuando existe otra condición A, también suficiente, contenida en B. Una condición A se llamará suficiente *mínima* cuando no sea superabundante es decir, cuando toda otra condición A' contenida en A ya no implique T. (Puig Adam, 1958, p. 40).

La segunda parte del test pretendía estudiar la manera en la que los estudiantes organizan las distintas clases de cuadriláteros. Se les pidió que juzgaran 52 relaciones entre cuadriláteros, divididas en 7 bloques de 7 relaciones posibles, una por cada clase de cuadriláteros, y 3 para la clases más inclusiva, cuadrilátero. Los estudiantes debían decidir si existía relación o no entre las distintas clases de cuadriláteros. Si juzgaban que entre dos clases de cuadriláteros no existía relación, debían incluir el nexo "Nunca es" para establecer que la proposición "clase A Nunca es la clase B". Si juzgaban que dos clases de cuadriláteros A y B están relacionadas, los estudiantes debían decidir qué tipo de relación existía entre ambas. Si la relación era de inclusión total, entonces establecían la proposición "la clase A Siempre es la clase B". Si la relación de inclusión se veía parcial, entonces se establecía la proposición "A puede ser B".

Los ítems de esta segunda parte del test estaban diseñados de tal manera que las relaciones entre los cuadriláteros A y B se analizasen de manera directa, A vs B y de manera recíproca, B vs A. El objetivo de hacerlo de esta manera era comprobar si el estudiante realmente establecía una jerarquía entre los conceptos A y B, en el caso en el que tal jerarquía existiese. Así, por ejemplo, a la relación de inclusión "A siempre es B", se le opone la relación de inclusión parcial "B puede ser A". Estas relaciones recíprocas tendrían luego su reflejo en el mapa conceptual de cada estudiante, pues está considerando al concepto B inclusivo con respecto al concepto A lo que, en función de la manera en la que usamos nosotros la idea de mapa conceptual, entre A y B se establece una jerarquía que la representamos mediante este mapa:

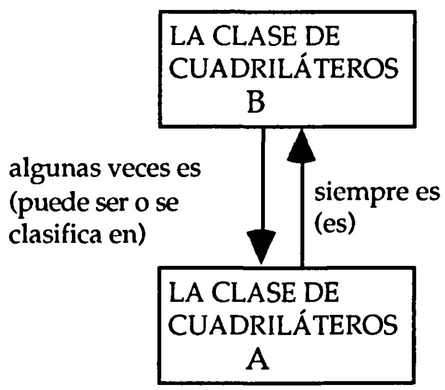


Figura IX. 5 Relación jerárquica entre dos clases de cuadriláteros.

Es necesario decir que no todas las relaciones entre cuadriláteros se comportan como las que hemos mostrado aquí como ejemplo. En el capítulo VIII hemos hecho un estudio de este tipo de relaciones en el que se puede observar la razón de este comentario.

IX. 5 Administración del test

IX. 5. 1 *Organización de la administración del test*

El test de cuadriláteros que nos iba a servir para la construcción de los mapas conceptuales de los estudiantes, constituyó la segunda parte de la evaluación de los estudiantes que participaron en esta investigación. De la administración de la primera parte de la evaluación, el test van Hiele - SOLO y de los resultados a los que nos condujo dicha evaluación, ya hemos dado cuenta en otro lugar de esta memoria. Fueron los mismos estudiantes a los que en la primera parte de la investigación se les evaluó, a los que ahora, un tiempo después, se les evaluaba con el test de cuadriláteros (ver tabla ***). Se trató, en la medida de lo posible, que las condiciones en las que se encontrasen los estudiantes fueran similares a las que se dieron en la primera parte del test: disponer de herramientas suficientes, del tiempo suficiente para poder completar el test, y de la ayuda necesaria, por parte del profesor y del investigador implicados, tanto para explicar la estructura del test como para resolver dudas que hiciesen referencia ésta y no al contenido geométrico del mismo.

De esta manera, cada estudiante disponía de un cuadernillo dividido en las dos partes en las que constaba el test, más una separata con los listados de las propiedades de los conceptos secundarios y los nexos que podían usar o no, según les conviniese, y una hoja con los ejemplos de las distintas clases de cuadriláteros, en la que podían incidir si lo necesitaban.

IX. 5. 2 *Los estudiantes*

Los estudiantes a los que necesariamente debíamos administrar el test de cuadriláteros, debían ser los mismos a los que habíamos administrado el test de van Hiele y SOLO. Así que inicialmente la muestra estaba formada por los 74 estudiantes que se habían analizado en la primera parte de nuestra investigación y que se distribuían como muestra la tabla siguiente.

Centro	Nivel	Curso	Edad promedio aprox.	Tests analizados
Rosa LLàcer	Primaria	6º	11 años	20
IFP Quart	Secundaria	4º	16 años	19
IB Baleares	Bachillerato	C.O.U.	18 años	23
Fac. Matemá.	2º Ciclo Univ.	3º	21 años	12
TOTAL				74

Tabla IX. 7 Estudiantes que participaron en la primera parte de la investigación

No se pudo conseguir que la totalidad de estos estudiantes completaran la segunda parte del test. Algunos estudiantes que estuvieron en la primera parte, no pudieron estar presentes en la segunda parte y algunos que completaron la segunda parte, no estuvieron cuando la primera. Esto hizo que la muestra inicial se redujera en un 36% aproximadamente, quedando la muestra de los estudiantes analizados en esta segunda parte de la investigación como se indica en la tabla siguiente.

Centro	Nivel	Curso	Edad promedio aprox.	Tests analizados
Rosa LLàcer	Primaria	6º	11 años	17
IFP Quart	Secundaria	4º	16 años	15
IB Baleares	Bachillerato	C.O.U.	18 años	15
Fac. Matemá.	2º Ciclo Univ.	3º	21 años	0
TOTAL				47

Tabla IX. 8 Estudiantes que participaron en la segunda parte de la investigación

IX. 5. 3 *Codificación y construcción de los mapas conceptuales de los estudiantes*

Una vez dispusimos de los cuestionarios completados por los estudiantes, éstos fueron codificados para un posterior análisis. Los estudiantes que nos interesaban eran los que habían participado en las dos partes de la investigación. Así que se agruparon según su perfil de razonamiento, es decir, según el vector de cuatro componentes (x, y, z, t) que determinaba el grado de adquisición de los 4 niveles de razonamiento de van Hiele considerados.

Una vez codificados y agrupados según el perfil de razonamiento, se procedió a la construcción de los mapas conceptuales de cada estudiante, uno por cada concepto principal (7 posibles mapas), como resultado de la primera parte del test, y un número de mapas más que responderían a los resultados de la segunda parte del test; cantidad que dependía de los niveles jerárquicos que crease el estudiante con las distintas clases de cuadriláteros. De esta manera, las respuestas de los estudiantes a todo el test completo se reflejarían en, por lo menos, 9 mapas conceptuales parciales, que posteriormente serían objeto de análisis y juntos constituirían el mapa conceptual de un estudiante sobre los cuadriláteros considerados.

La metodología que se siguió para construir los mapas conceptuales de los estudiantes podemos dividirla en dos apartados, en función de la parte del test que se trate y respondiendo a los criterios siguientes:

a) Para la primera parte del test

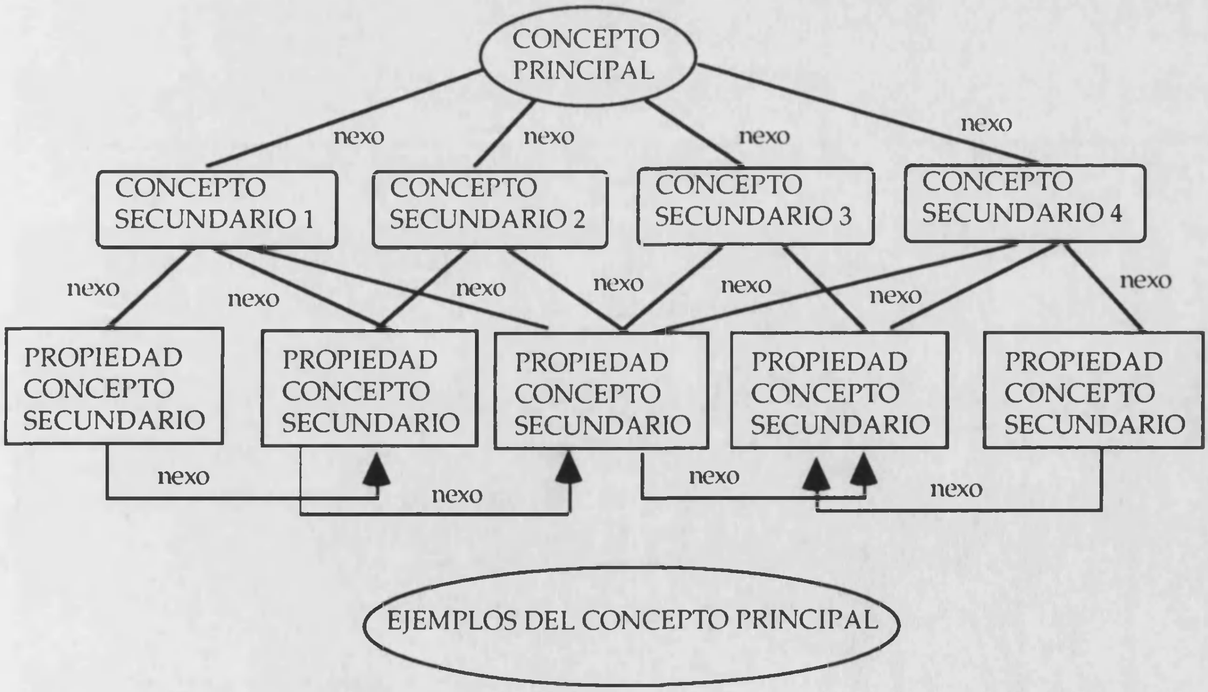


Figura IX. 6 Modelo para construir los mapas conceptuales de los estudiantes: Mapa conceptual de un concepto principal

La figura anterior[7] es bastante expresiva por si misma. Situamos el concepto principal en la parte alta del mapa. Colgando de él, los conceptos secundarios que usó el estudiante para decir cosas del concepto principal, representando el nexo utilizado para las proposiciones que, a su juicio, son verdaderas sobre el concepto principal. Del concepto secundario, cuelgan las propiedades que ha usado de éstos para establecer proposiciones válidas sobre el concepto principal. Se representan también las posibles conexiones cruzadas de una parte del mapa a otra y que, a juicio del estudiantes, son consecuencia una de la otra. Finalmente, se incluyen los ejemplos del concepto principal escogidos por el estudiante .

b) Para la segunda parte del test

Ya hemos dicho en páginas anteriores qué constituye para nosotros un nivel jerárquico entre las diferentes clases de cuadriláteros. Esto supone organizar los conceptos analizados en diferentes niveles jerárquicos, incluyendo el tipo de nexo que supuestamente crea la jerarquía.

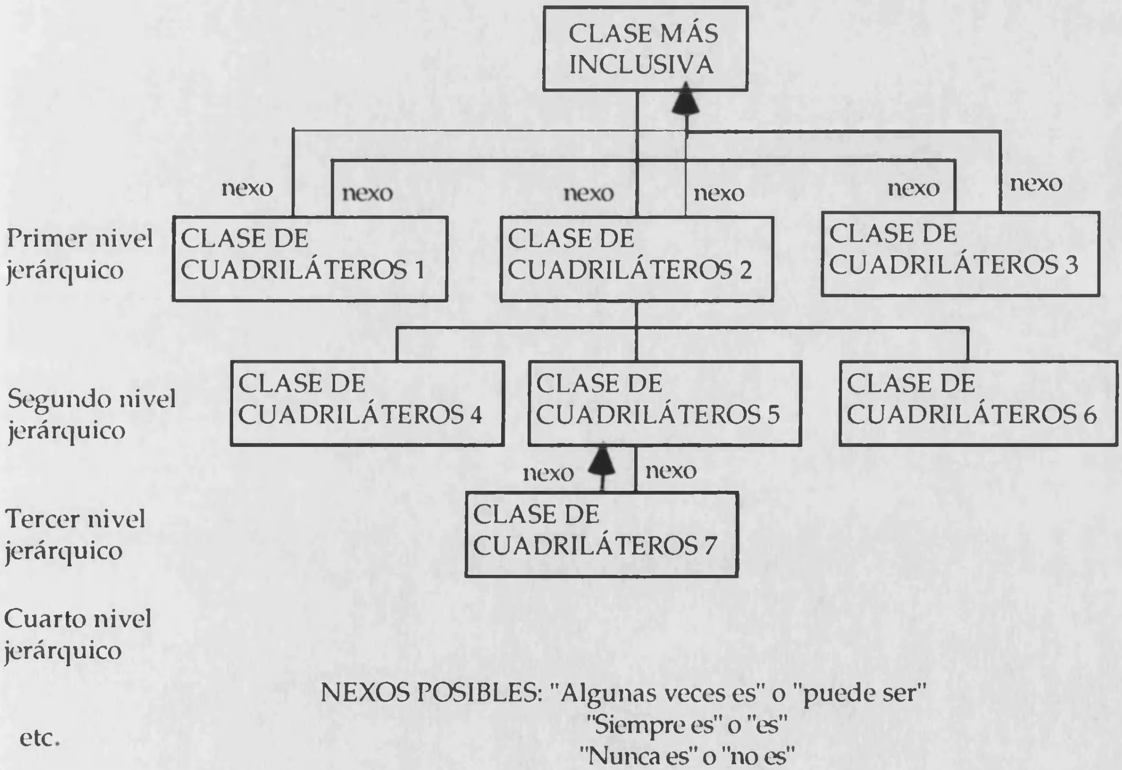


Figura IX. 7 Modelo para construir los mapas conceptuales de los estudiantes: Relaciones entre clases de cuadriláteros, en niveles jerárquicos consecutivos.

[7] Esta figura es ficticia, lo que quiere representar es una manera posible de construir mapas conceptuales de los estudiantes a partir de las respuestas al test escrito que hemos construido.

La figura anterior[8] muestra la manera en la que representaríamos un mapa conceptual de un estudiante, en el que se mostrarían las relaciones entre las distintas clases de cuadriláteros que hubiese establecido el estudiante. Este primer mapa, representaría las relaciones entre dos niveles jerárquicos consecutivos. Por motivos de diseño de los mapas conceptuales y del análisis de los mismos, las relaciones entre dos niveles jerárquicos no consecutivos se han representado en otros mapas conceptuales, lo que no quiere significa que sean mapas conceptuales distintos, sino que, el conjunto, debería verse como un único mapa conceptual.

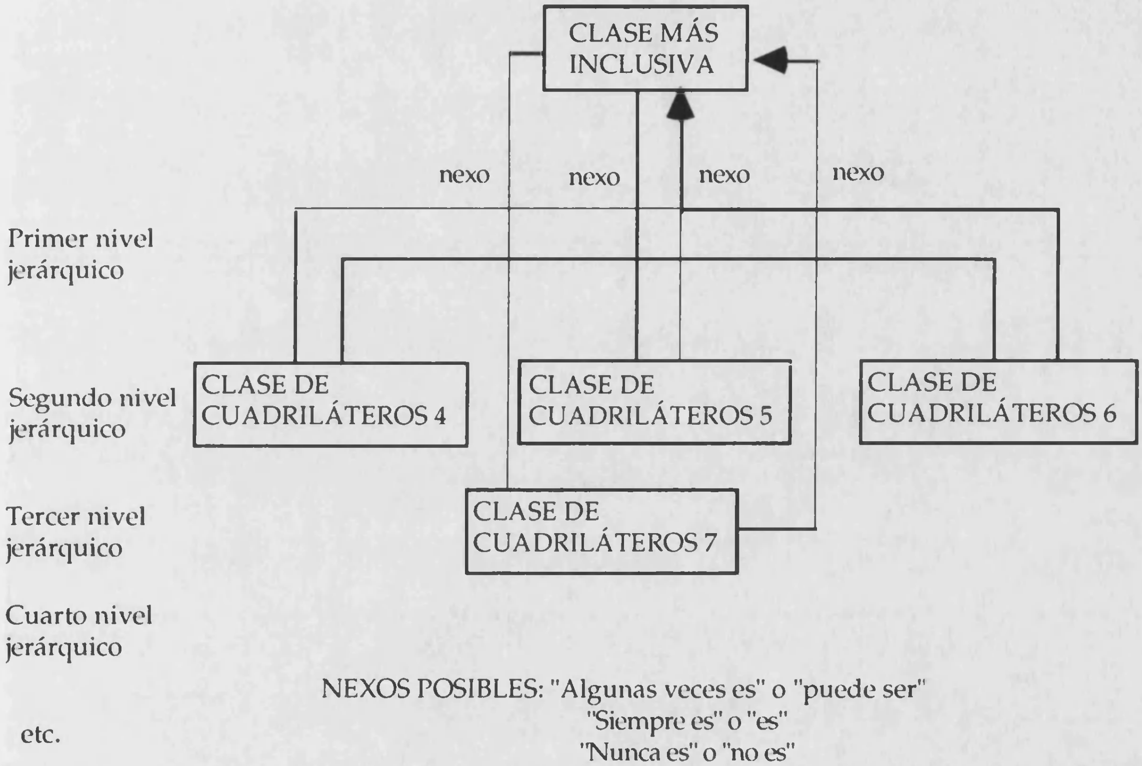


Figura IX. 8 Modelo para construir los mapas conceptuales de los estudiantes: Relaciones entre clases de cuadriláteros, en niveles jerárquicos no consecutivos.

[8] Esta figura es también ficticia en el sentido de que no responde a un estudiante concreto ni a una organización concreta. En base a las consideraciones previas, lo que quiere indicar es el método que usamos para representar, mediante mapas conceptuales, las relaciones entre los conceptos principales de cuadrilátero.

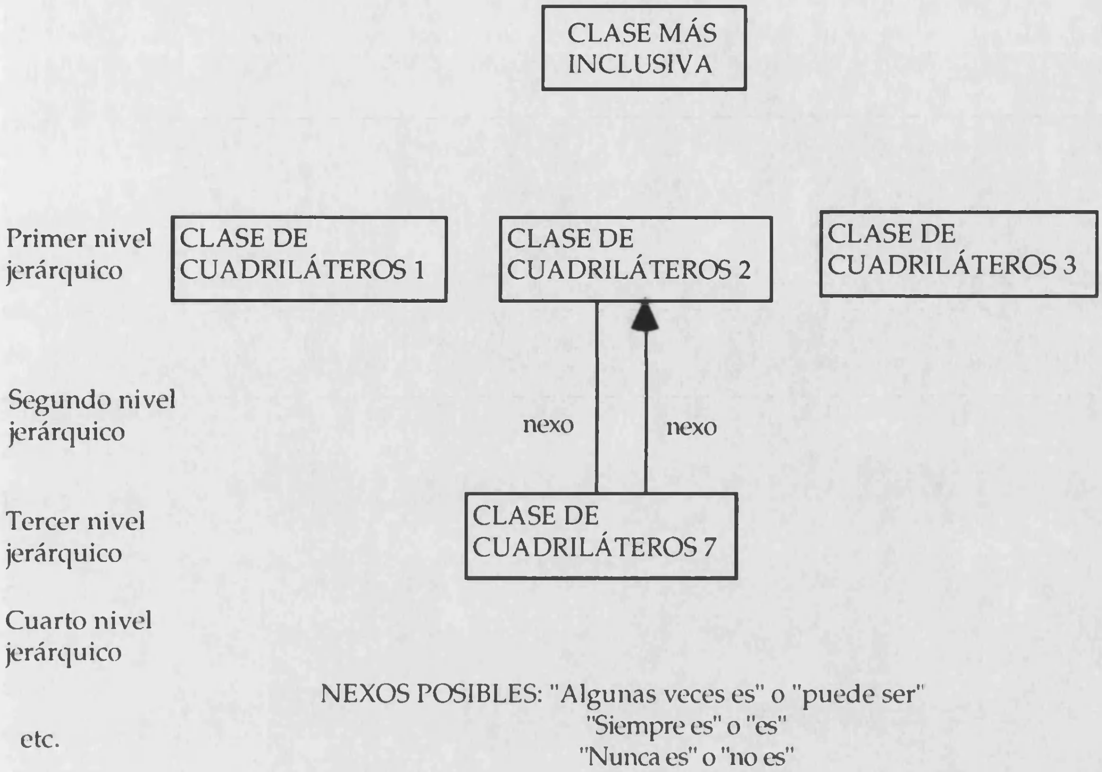


Figura IX. 9 Modelo para construir los mapas conceptuales de los estudiantes: Relaciones entre clases de cuadriláteros, en niveles jerárquicos no consecutivos.

IX. 7 Entrevistas clínicas: Objetivos y organización

Usar la entrevista clínica, como parte de nuestra metodología de investigación, no estaba previsto inicialmente en nuestro proyecto. En cambio, el desarrollo de la misma y la posibilidad de contar con estudiantes que voluntariamente participaron en ella, sin ningún criterio previo de selección, nos motivó para incluir en nuestro trabajo el efecto que tenía en los estudiantes la representación por mapas conceptuales de la organización de su conocimiento sobre cuadriláteros. Las limitaciones derivadas del escaso rigor seguido en la selección de los estudiantes creemos que no debe impedir exponer los resultados que podamos obtener de esta parte de nuestra investigación.

Así pues, conscientes de que el método de investigación que iniciábamos era novedoso, no propusimos confirmar la validez de los mapas conceptuales que habíamos construido. ¿Realmente dichos mapas representan una organización de los conceptos relativos a cuadriláteros, en la mente de los estudiantes? ¿Estaría de acuerdo un estudiante con su mapa conceptual?, es decir, ¿lo que reflejaba un mapa conceptual es lo que el estudiante había respondido en el test? ¿Qué modificaciones haría, si es que las haría, sobre su mapa conceptual, después de haberlo construido? Para responder a estas preguntas, nos propusimos la realización de entrevistas clínicas con estudiantes de los que disponíamos sus mapas conceptuales.

Las entrevistas las organizamos en dos partes, como correspondía a cada una de las partes del test. Para la primera parte, se le mostró a cada estudiante los siete mapas construidos, uno para cada concepto principal, explicándoles cómo los habíamos construido a partir de sus respuestas al test. Nuestra intención era comprobar si, por una parte, el estudiante acordaba con nosotros que los conceptos principales, secundarios, propiedades de los conceptos secundarios y ejemplos del concepto principal, podían organizarse de esta manera y además recogían sus intenciones al responder al test.

Mostrados tanto los mapas como la manera en la que se habían construido, el investigador y el estudiante los analizaban de manera que, si el estudiante lo consideraba oportuno, podía incidir en ellos para modificar conceptos, conexiones o ejemplos que habíamos incluido en su mapas o para añadirlos o eliminarlos, si este era el caso.

Una de los aspectos que queríamos analizar era las relaciones entre las propiedades de los conceptos secundarios. Queríamos saber si el hecho de que en el test no apareciesen relaciones de implicación entre las propiedades de los conceptos secundarios relativos a un concepto principal, por ejemplo, "diagonales que se bisecan implica lados paralelos dos a dos" para los paralelogramos, era debido a que el estudiante no las reconocía o que la estructura del test no permitía este tipo de respuestas. En este sentido, cuestionamos a los estudiantes y les hicimos reparar en ello. Trabajando en sus mapas, les propusimos que viesen la posibilidad de conectar las propiedades de los conceptos secundarios y que si dicha posibilidad se reconocía, entonces las conectasen y propusieran un nexo que las uniera. Este hecho, como es evidente, transformaría el aspecto del mapa conceptual inicial en otro que posiblemente tuviese una mayor riqueza de relaciones.

Con respecto a los mapas de la segunda parte del test, hicimos lo mismo. Explicamos la estructura del mapa y cómo se había construido a partir de las respuestas que habían dado a la segunda parte del test. Resaltamos que, en sus mapas, habíamos representado las relaciones entre los conceptos principales mediante los nexos "es" y "algunas veces es" y que algunas relaciones del tipo "no es" o "nunca es" no se habían representado porque se suponían al no estar conectados los conceptos principales en los mapas con este nexo.

Quisimos ver si los estudiantes estaban de acuerdo con la organización mostrada y que supuestamente era las suyas. Por este motivo, entrevistador y estudiante analizaron la estructura de cada mapa así como las conexiones que se habían representado.

En la parte final de la entrevista, nos propusimos estudiar cómo entendían los estudiantes los nexos, es decir, que significados parecían tener para ellos los nexos "es", "algunas veces es" o "nunca es" y las relaciones entre nexos: Si A "es" B y B "es" C, ¿A "es" C?, si A "algunas veces" es B, ¿B "es" A? o ¿B "algunas veces es" A?

Todas las entrevistas, de aproximadamente una hora de duración, fueron grabadas en cassette para una posterior transcripción y análisis.

CAPÍTULO X

Resultados de la construcción de los mapas conceptuales de los estudiantes

X.1 Resultados de la construcción de los mapas conceptuales de los estudiantes.

X.1.1 *Análisis de los mapas conceptuales del cuadrado y del paralelogramo. Algunos ejemplos.*

Para centrar el análisis de los mapas conceptuales de los estudiantes, hemos escogido dos conceptos principales: Cuadrado y Paralelogramo.

Una de las razones por la que hemos escogido estos dos conceptos se debe a su propia estructura conceptual. Representan, respectivamente, al concepto más inclusivo (el cuadrado puede considerarse como una clase particular de cualquier otra clase de cuadriláteros, excepto del trapezoide y, tal vez, del trapecio) y al menos inclusivo (el paralelogramo contiene a todas las clases de cuadriláteros consideradas, a excepción del trapezoide y, tal vez, del trapecio) de tal manera que podamos ver, a través de los distintos mapas conceptuales, cómo los estudiantes organizan aquella estructura conceptual usando las formas de las figuras y las propiedades de dichas clases de cuadriláteros en dos contextos de actuación diferentes: a) cuando los ejemplos que tienen a su disposición de un concepto son pocos y claramente determinados (cuadrados: figuras 6 y 12) y cuando los ejemplos de que disponen son variados y les exige una selección previa de qué ejemplos son los que se corresponden con el concepto del cual tienen que decir cosas (paralelogramos, las figuras 1, 2, 6, 8, 9, 10, 11 y 12. Anexo I).

La segunda razón tiene cierta componente escolar. El cuadrado es una clase de cuadriláteros de la que pronto disponen los estudiantes de ejemplos en los que reconocer formas y propiedades. Es de suponer, por tanto, que la estructura conceptual del cuadrado se adquiera antes que la de otras clases de cuadriláteros. El paralelogramo, en cambio, como clase de cuadriláteros con estructura conceptual propia rara vez se incluye como tal en el currículo escolar. Aparece, más bien, como una clase de cuadriláteros que contiene a otras y que, por tanto, además de compartir alguna propiedad, pueden cumplir otras como caso particular. Esto nos hace suponer que la adquisición de una estructura conceptual del paralelogramo sea más compleja que en el caso del cuadrado.

Por otra parte, el análisis que vamos a llevar a cabo está sujeto también a los estudiantes. Una de las características que hemos mencionado de los mapas conceptuales es que son idiosincrásicos, es decir, cada mapa conceptual construido, y que corresponde a un estudiante, es patrimonio de dicho estudiante y no de otro. De la misma manera que entendemos que cada persona organiza en su mente los conceptos y las relaciones entre los conceptos, entendemos que el mapa conceptual de un estudiante, que intenta representar dicha organización, debe ser asociado con dicho estudiante y no con ningún otro.

Para los objetivos previstos en esta parte de la investigación, la descripción de los resultados tendrá en cuenta los párrafos anteriores y la búsqueda y clarificación de comportamientos estándares, si es que existen, entre grupos de estudiantes que comparten un perfil de razonamiento demostrado en la primera parte de esta investigación. Esto no significa que los mapas conceptuales que pueden verse en el Anexo IV, codificados con Mi, con i= 1, 2,...., 14, sean mapas que se correspondan con estudiantes concretos, sino que son mapas asociados a un perfil de razonamiento, construidos a partir de las respuestas dadas al test correspondiente, por los estudiantes que fueron agrupados bajo ese perfil.

En la secciones siguientes, hablaremos de algunos ejemplos de mapas conceptuales de estudiantes con un perfil de razonamiento asociado que indica distintos grados de adquisición de los niveles de van Hiele. Con ello, trataremos de dar respuesta a las preguntas que nos planteamos en nuestra investigación y que describimos en los objetivos de nuestro trabajo.

X.1.1.1 *El concepto de cuadrado*

A) Estudiantes con adquisición no completa de los niveles 1 y 2 de van Hiele.

A1) Estudiantes con adquisición intermedia o baja de los dos primeros niveles de van Hiele.

Como puede verse en el mapa M1 (Anexo IV), que corresponde a estudiantes con un perfil de razonamiento que se caracteriza porque los grados de adquisición de los niveles 1 y 2 de van Hiele son intermedios o bajos, el concepto de cuadrado está sujeto a formas estándares. De una parte, la figura 6 es la que todos los estudiantes con este perfil reconocen como cuadrado. Pueden incluir, además, la figura 12 (2 de los 3 estudiantes) y el rectángulo 1 (también 2 de los 3 estudiantes), mientras que uno de ellos incluye bajo el nombre de cuadrado, las figuras 2, 10 y 11. De otra parte, las propiedades que se incluyen pueden hacer referencia a los conceptos secundarios lado, ángulo y diagonal, si bien sólo parece que tengan capacidad de expresar una única propiedad que, a juicio del estudiante, sea o pueda ser relevante para el concepto principal: la igualdad.

El mapa siguiente (figura X. 1), corresponde al estudiante RL9.

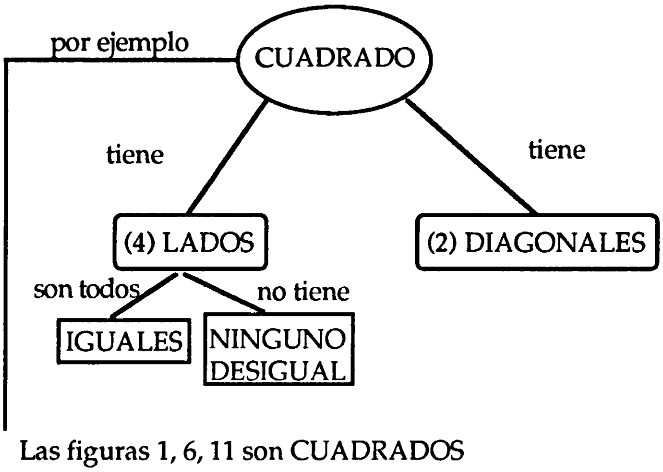


Figura X. 1 Mapa conceptual del cuadrado. Estudiante con adquisición intermedia o baja de primer y segundo nivel de van Hiele.

Vemos cómo los ejemplos de cuadrado que este estudiante reconoce se corresponden con figuras más o menos estándares de dos clases de cuadriláteros, cuadrado y rectángulo. Por otra parte, aun siendo capaz de establecer varias proposiciones válidas sobre el concepto principal cuadrado: "tiene 4 lados iguales", "No tiene ninguno desigual" y "tiene 2 diagonales", no tienen la suficiente relevancia para él como para discriminar a los ejemplos 1 y 11 (que corresponden a rectángulos) como ejemplos de cuadrado. Este estudiante, por otra parte, no hace referencia a los ángulos, uno de los pocos vínculos con los que se podría relacionar los ejemplos de cuadrado y rectángulo que él había escogido. Más adelante, este mismo estudiante dirá que "las figuras 1, 4, 6 y 11 son rectángulos", describiéndolos como "una figura cuyos lados son iguales pero más alargados". Así pues, creemos que en este estudiante se produce una asociación débil entre el concepto cuadrado y la propiedad «lados iguales», superada, en todo caso, por la apariencia de las formas que asocia al concepto.

Consideremos ahora el mapa conceptual siguiente (figura X. 2), que corresponde al estudiante E13, con el mismo perfil de razonamiento que el estudiante anterior.

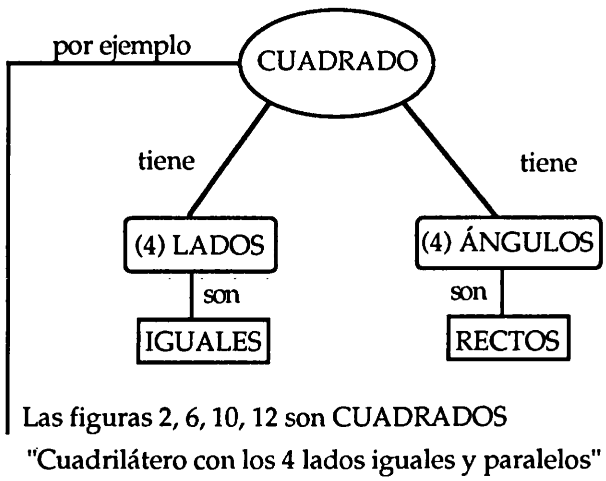


Figura X. 2 Mapa conceptual del cuadrado. Estudiante con adquisición intermedia o baja de primer y segundo nivel de van Hiele.

En relación con el mapa anterior, se podría decir que su aspecto, desde el punto de vista conceptual, ha mejorado. Este estudiante incluye como propiedades relevantes para el concepto de cuadrado no sólo la igualdad de los lados, como en caso anterior, sino que también incluye los ángulos rectos. Pero, a la luz de los ejemplos mostrados, el uso consciente que parece hacer de ellas es diferente al que nos hace pensar el propio mapa.

Es evidente que este estudiante asocia el cuadrado con una clase de cuadriláteros más amplia, la clase de los rombos. Los ejemplos escogidos se corresponden con esta clase de cuadriláteros y los vuelve a repetir cuando da respuesta, más adelante en el test, al concepto de rombo. Si para él hay algún elemento de distinción entre ambas clases, este se podría encontrar en los ángulos. Asocia correctamente ángulos rectos con el cuadrado, mientras que con el rombo, asocia ángulos agudos, llegando a definir el rombo "igual que un cuadrado, tiene los 4 lados iguales y sus ángulos son agudos". Parece pues que este estudiante usa de manera explícita, como única propiedad relevante, la igualdad de los lados, sin mostrar demasiada atención a las formas de las figuras ni a la propiedad de los ángulos. Es decir, se produce una asociación fuerte entre el concepto cuadrado y una propiedad, «lados iguales», que parece condicionar su razonamiento sobre el concepto de cuadrado.

A2) Estudiantes con adquisición alta del primer nivel y baja del segundo nivel de van Hiele.

El mapa M3 (Anexo IV) corresponde a estudiantes con un perfil de razonamiento que se caracteriza por la alta adquisición de las habilidades de razonamiento del nivel 1 de van Hiele y la baja adquisición de las del nivel 2. Más del 54% de los estudiantes con este perfil reconocen las figuras 6 y 12 como cuadrados, a los que hay que añadir un 18% más de estudiantes que, tal vez influidos por la orientación de la figura 12, sólo reconocen como cuadrado la figura 6. Es decir, un 72% aproximadamente de los estudiantes con este perfil, escogen correctamente ejemplos del concepto cuadrado, mientras que el 28% restante incluyen, además de o en lugar de los cuadrados, a los rectángulos (figuras 1 y 11) o a los rombos y romboides (figuras 2, 9 y 10).

Tal vez por lo anterior, el aspecto del mapa M3 es claramente diferente del primero (M1). La cantidad y calidad de las propiedades que en él se incluyen hacen pensar en un mejor grado de estructuración del concepto cuadrado. Así, por ejemplo, la inclusión de las propiedades relativas al paralelismo de los lados, expresadas de diferentes maneras, de las propiedades relativas a las diagonales y la aparición de la simetría, comienzan a tener cierta relevancia para estos estudiantes. No obstante, estos estudiantes aún no parecen mostrar cierta capacidad de manejar más de una propiedad de los conceptos secundarios que caracterizan al concepto principal. Así, si nos fijamos en la rama del mapa M3 que corresponde a las propiedades de los lados del cuadrado, no todos los estudiantes manejan las dos propiedades a la vez sino que el 54.5% incluye o la igualdad de lados o el paralelismo de los lados y sólo el 27.3% incluyen ambas como relevantes para el cuadrado. Un poco más grande es la diferencia con las propiedades de los ángulos que son relevantes para el cuadrado. Mientras que el 54.5% prefiere incluir la propiedad de la igualdad de los ángulos, el 36.6% prefiere incluir la medida, 90°, y sólo un estudiante (9.1%) incluye ambas, lo que podría posibilitarle la relación entre las dos propiedades, aunque no nos dé la impresión de que sea muy consciente de ella. El número de diagonales que se incluyen (1, 2 ó 4) puede hacernos pensar que este concepto secundario no está claramente diferenciado. Quizás porque no sea un concepto usado con frecuencia en las clases de geometría (ver capítulo VIII) para hacer un análisis de un concepto principal, quizás porque se ha de trazar para que pueda decir algo y no está trazado ya, como los lados o los ángulos o quizás porque el estudiante entienda por diagonal otro concepto diferente al que se entiende en geometría, el hecho es que generalmente las dos diagonales no se incluyen como propiedad del cuadrado. No obstante, aquéllos que sí reconocen que las diagonales están, incluyen la igualdad de las mismas como propiedad de las diagonales de un cuadrado en el 36.4% de los casos y ser interiores, en un porcentaje aún menor. Tres estudiantes incluyen la propiedad de las diagonales «cortarse en el punto medio». Parece que esta propiedad la incluyen con otro significado distinto al de «bisecarse». Atados como parece que están a la componente visual de su razonamiento, la propiedad de las diagonales "cortarse en el punto medio" parece usarse en relación con el punto medio de la figura. Así, parece que establecen la proposición "Las diagonales se cortan en el punto medio (de la figura)" en el mismo sentido que "Las diagonales se cortan en el centro (de la figura)". Veremos más adelante como en niveles más avanzados de razonamiento, esta característica se repite, incluso mencionando la figura.

Algunos estudiantes con este perfil (el 45,5%), incluyen la definición más usual de cuadrado: "Polígono (figura) con 4 lados iguales y sus ángulos iguales (rectos)". El resto de estudiantes, o bien no lo consiguen o recitan propiedades más o menos relevantes para el concepto cuadrado.

Los mapas siguientes corresponden a estudiantes con este perfil. En ellos puede verse qué propiedades incluyen, la cantidad y relevancia de dichas propiedades, a qué ejemplos corresponden y qué definición se establece.

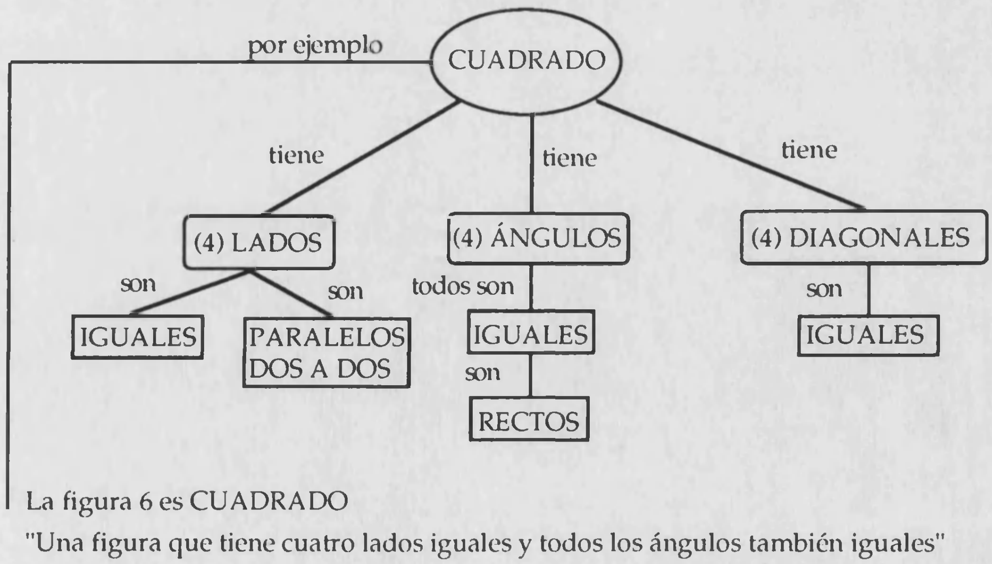


Figura X. 3 Mapa conceptual del cuadrado. Estudiante con adquisición alta del primer nivel y baja del segundo nivel de van Hiele.

Este mapa (figura X. 3), que corresponde al estudiante E6, es conceptualmente más complejo que aquéllos con el perfil de razonamiento anterior, aunque del análisis de las respuestas de este estudiante se desprende como propiedad relevante, la igualdad: "todos los lados, ángulos y diagonales son iguales". Parece que exista una asociación fuerte entre el concepto cuadrado y la propiedad de la igualdad en lados, ángulos y diagonales.

El mapa siguiente (figura X. 4), que corresponde al estudiante RL17, parece indicar una transición entre el mapa de los estudiantes con el perfil anterior y el que acabamos de mostrar. Las propiedades que se incluyen, pocas pero en todo caso relevantes, las asocia con los ejemplos de cuadrado escogidos, 6 y 12, lo que le permite definir esta clase de cuadriláteros, recitando esas mismas propiedades.

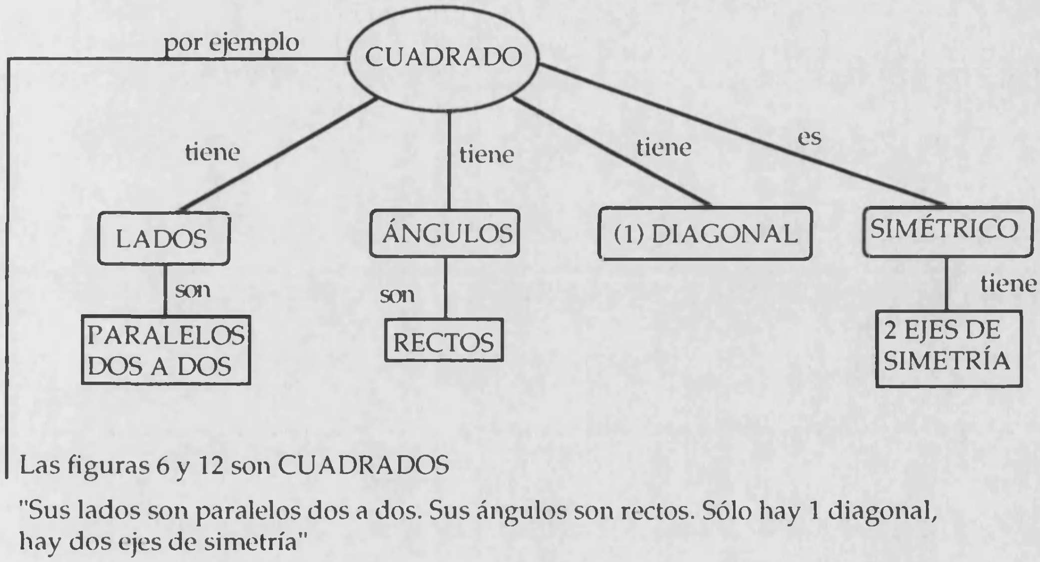


Figura X. 4 Mapa conceptual del cuadrado. Estudiante con adquisición alta del primer nivel y baja del segundo nivel de van Hiele.

Claramente, si no fuera por los ejemplos señalados, este mapa sería válido si en lugar del concepto principal cuadrado situásemos el concepto rectángulo. Las proposiciones establecidas siguen siendo válidas para éste último concepto y, desde el punto de vista estructural, responde mejor al rectángulo que al cuadrado. Pero, por el nivel de razonamiento demostrado por este estudiante, no parece razonable pensar que su intención sea la de considerar la clase de cuadrados como una clase particular de la de rectángulos. Esto se puede confirmar cuando se observan las respuestas dadas para el rectángulo. Reproduce las mismas propiedades que en el cuadrado, pero incluye la siguiente propiedad para los rectángulos: "... (los rectángulos) tienen dos lados iguales y dos desiguales". Esto nos hace pensar que el concepto cuadrado está fuertemente asociado a dos propiedades: "lados paralelos dos a dos" y "ángulos rectos".

> A3) Estudiantes con una adquisición alta o completa del primer nivel y no del segundo nivel, con indicios o no de razonamiento de tercer nivel.

El mapa conceptual M5 (Anexo IV) representa la organización de los conceptos por los estudiantes con un perfil de razonamiento caracterizado por la alta adquisición del nivel 1 de van Hiele, la adquisición intermedia del nivel 2 y escasos indicios de razonamiento del nivel 3. Resultó que todos los estudiantes con este perfil, reconocieron las dos figuras (la 6 y la 12) como ejemplos de cuadrado.

Si comparamos los mapas M3 y M5, aparentemente nada habría que decir salvo que son muy parecidos y que no muestran grandes diferencias. Ciertamente es así. Si exceptuamos los ejemplos y que algunas propiedades se expresan con mayor precisión, por ejemplo no se usa "paralelos" para expresar que los lados son «paralelos dos a dos» o que «hay lados paralelos», ambos mapas representan estructuras conceptuales parecidas. Pero si nos fijamos en la parte del mapa M5 que corresponde al concepto secundario simétrico o simetría, comienzan a establecerse de manera consciente posibles relaciones entre los conceptos secundarios, al menos entre la diagonal y la simetría, de tal manera que algunos de los ejes de simetría del cuadrado se refieren a las diagonales mediante la proposición: "... es simétrico (el cuadrado) sobre cada diagonal". Esto lo podemos encontrar en el mapa siguiente (figura X. 5), que corresponde al estudiante RL14, con el perfil de razonamiento antes descrito.

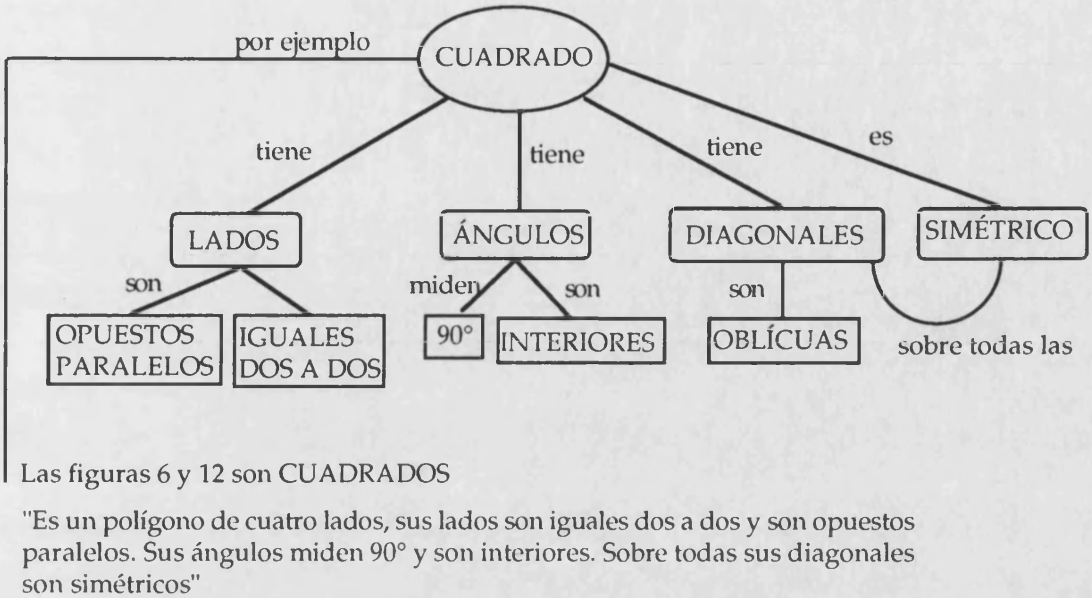


Figura X. 5 Mapa conceptual del cuadrado. Estudiante con adquisición alta del primer nivel e intermedia del segundo nivel de van Hiele, con indicios de razonamiento del nivel 3.

Por otra parte, los estudiantes con este perfil de razonamiento parecen ser capaces de gestionar más de una propiedad de cada uno de los conceptos secundarios que se consideran. Mientras que en los perfiles anteriores la tónica general de los estudiantes era incluir unas pocas propiedades de algún concepto secundario, generalmente lados y ángulos, que describiese al concepto principal, los estudiantes con este perfil tratan de incluir un número mayor de propiedades de todos y cada uno de los conceptos secundarios por los cuales se les pregunta, resultando mapas como el del estudiante RL14 que hemos descrito con anterioridad. Es decir, ahora, para los estudiantes con el perfil de razonamiento descrito, se produce una asociación más fuerte entre el concepto y una lista (más o menos larga) de propiedades de los conceptos secundarios y que son relevantes para el concepto principal cuadrado.

Los mapas siguientes: M7 y M9 (Anexo IV), no aportan demasiadas cosas nuevas a lo dicho en relación con el mapa M5. Da la impresión de que el concepto de cuadrado alcanza, para los estudiantes con un perfil de razonamiento caracterizado por la alta o completa adquisición del nivel 1 de van Hiele y una adquisición intermedia o baja del nivel 2, un grado de estructuración caracterizado por cualquiera de los mapas anteriores. Es decir, los lados del cuadrado se ven como iguales y paralelos («dos a dos» o formulaciones equivalentes); los ángulos, como iguales y/o rectos o de 90°; las diagonales iguales y que se cortan en el punto medio (tal vez refiriéndose al propio cuadrado) en la mayoría de los casos, perpendiculares en menor grado y que producen una división del cuadrado en parte iguales o en triángulos rectángulos, en otros pocos casos. La simetría axial del cuadrado generalmente es reconocida, en algunos casos relacionándola con el número de ejes de simetría y en otros, con las diagonales del cuadrado.

B) Estudiantes con una adquisición completa o alta del primer y segundo nivel de van Hiele.

Terminamos este análisis de la evolución del concepto de cuadrado a través de los mapas conceptuales y los perfiles de razonamiento, con el mapa M13 que corresponde a estudiantes con un perfil caracterizado por la adquisición completa o alta del primer y segundo niveles de razonamiento de van Hiele.

De la observación de este mapa vemos que algunas propiedades del cuadrado han quedado definitivamente incorporadas al concepto. Así, «(todos los... o 4) lados iguales» junto con «lados paralelos dos a dos» son las propiedades de los lados de un cuadrado que lo caracteriza. La incidencia de la perpendicularidad de los lados es menor que estas dos, pero surge ahora sin que lo hubiera hecho en los mapas anteriores. Dos también son las propiedades de los ángulos que quedan incorporadas: «ángulos iguales» junto con «ángulos rectos o de 90°», de tal manera que la suma de los ángulos es una relación que empieza a tenerse en cuenta. Las diagonales, por otra parte, reciben un tratamiento diferente. De hecho, excepto la propiedad de la igualdad de las diagonales, no da la impresión de que se maneje, de manera más o menos generalizada, otra propiedad adicional de la que podamos decir que ha quedado definitivamente incorporada al concepto, si exceptuamos el punto de corte de las mismas. Ahora bien, a nuestro modo de ver, dicho punto de corte recibe dos tratamiento diferentes: a) punto medio de las diagonales, b) un punto interior del cuadrado que está en el medio. En el primero de los casos, no produce ninguna consecuencia, salvo la observación de esta propiedad. En el segundo, puede dar lugar a la aparición de un "centro de simetría" y relacionar una propiedad de las diagonales con la simetría del cuadrado. La división del cuadrado en partes iguales, al trazar sus diagonales, también es una propiedad tenida en cuenta por un buen número de estudiantes. Por último, la simetría del cuadrado es otra propiedad que también queda definitivamente incorporada. En lo que ya no existe tanta unanimidad es en qué tipo de simetría y, en el caso de la más usual, la simetría axial, el número de ejes de simetría. Es habitual relacionar éstos con el número de diagonales, aunque podemos encontrarnos con estudiantes que relacionan el número de ejes de simetría con las partes en las que queda divido el cuadrado: "... los ejes de simetría lo dividen (al cuadrado) en 8 partes iguales. Las diagonales coinciden con los ejes de simetría y (otros dos) perpendiculares que dividen a los lados en dos partes iguales". Esto último queda reflejado en el mapa M13 (Anexo IV) como relaciones cruzadas entre una parte, la que corresponde a la simetría, con otra parte, la que se corresponde con las diagonales, no ocurriendo, en ninguno de los casos analizados, que se establezcan relaciones cruzadas entre otras partes del mapa: las propiedades de los lados con las propiedades de los ángulos, las propiedades de las diagonales con las propiedades de los lados, etc... Parece que se inicie un nuevo ciclo de asociaciones entre el concepto principal y la lista de propiedades de los conceptos secundarios que le son relevantes, pero esta vez con las relaciones entre dichas propiedades, de las cuales aquí se han mostrado unas pocas y que más adelante mostraremos unas pocas más cuando desarrollemos el resultado de las entrevistas clínicas realizadas.

Nos gustaría insistir en el hecho de que los mapas Mi (Anexo IV), son mapas de alumnos que demostraron una manera de razonar concreta en la primera parte de nuestra investigación. No queremos decir que todos los estudiantes a los que se les asignó un perfil de razonamiento concreto, estructuren el concepto de cuadrado como se indica en el mapa Mi correspondiente. Hemos visto ejemplos de ello para algunos perfiles y algunos mapas Mi. Pero sí podemos decir que un mapa de un estudiante concreto, para un perfil de razonamiento concreto, es parte de un mapa Mi, y que si estudiantes razonando en contextos parecidos posibilitan mapas como el Mi correspondiente, no vemos la razón por la cual esos mapas no puedan estar al alcance de todos los estudiantes del perfil correspondiente.

X.1.1.2 *El concepto de paralelogramo*

Hemos visto en el apartado anterior que, para niveles de razonamiento bajos, e incluso en niveles un poco superiores, aunque con menor incidencia, no todos los estudiantes reconocen a los mismos ejemplos como ejemplos del concepto cuadrado. Ejemplos de rectángulo, rombo y romboide (Mapas M1 y

M3, por ejemplo) forman parte en muchas ocasiones del conjunto de ejemplos de cuadrado que un estudiante escoge para describir qué entiende por cuadrado. Este hecho se produce con mayor incidencia para el concepto paralelogramo. Del análisis de los ejemplos en los mapas construidos (Mj, con j=2, 4, 6, 8, 10 y 12, Anexo IV) puede deducirse que los estudiantes ven los paralelogramos de maneras diferentes. Las siguientes asociaciones se han producido:

1) Paralelogramo incluye sólo a rombos y romboides (Mapa M6).

2) Paralelogramo incluye sólo a rectángulos y cuadrados (Mapa M12).

3) Paralelogramo incluye a los cuadriláteros con al menos un par de lados paralelos (Mapas M2, M10 y M12 bis).

4) Paralelogramo incluye cuadriláteros cóncavos y convexos (incluyendo o no a los trapezoides 5 y 13, Mapas M4, M6 bis y M8).

5) Paralelogramo incluye cuadrado, rectángulo, rombo y romboide (Mapa M14).

Hemos detectado pues, hasta cinco maneras distintas de identificar la clase de los paralelogramos. En general, se puede afirmar que hay dos maneras de identificar a los paralelogramos, en función del grado de implicación que la propiedad del paralelismo de los lados tenga sobre los estudiantes. Así, puede que no sea influyente (grupo 4) y se asocie al término paralelogramo cualquier cuadrilátero, o puede que sí lo sea (grupos 1, 2, 3 y 5) y se asocie entonces los cuadriláteros que tengan al menos un par de lados paralelos. En función de la cantidad de pares de lados paralelos (con más de un par, grupo 3; con exactamente dos pares, grupos 1, 2 y 5) son las propiedades particulares, por lo tanto excluyentes, las que determinan la asociación del término paralelogramo con otras clases de cuadriláteros (si no tienen ángulos rectos, entonces los paralelogramos son los rombos y romboides, grupo 3, y si tienen sólo ángulos rectos, los paralelogramos son los rectángulos y cuadrados, grupo 5). Si estas propiedades particulares son vistas como que pueden tenerlas o no, entonces la asociación con el término paralelogramo es la usual en los currícula escolares (grupo 6). Mostremos algunos ejemplos de esto.

A) Estudiantes con una adquisición no completa de los dos primeros niveles de van Hiele.

A1) Estudiantes con una adquisición intermedia o baja de los niveles 1 y 2 de van Hiele.

El mapa siguiente corresponde al estudiante E13 (figura X. 6). Su perfil de razonamiento está caracterizado por un grado de adquisición intermedio o bajo de los dos primeros niveles de razonamiento.

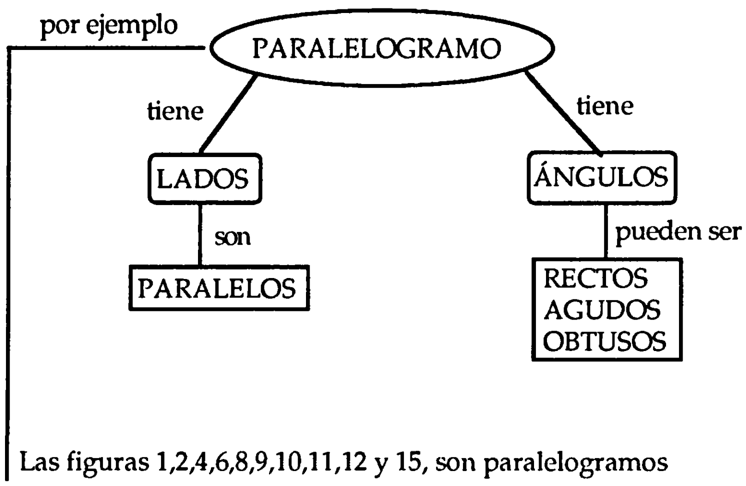


Figura X. 6 Mapa conceptual del paralelogramo. Estudiante con adquisición intermedia o baja de los niveles 1 y 2 de van Hiele.

Por los ejemplos que identifica como paralelogramos y porque un paralelogramos es, en su opinión, "cuando los lados son paralelos o sea puede ser un cuadrado, rombo, romboide, trapecio menos trapezoide", la propiedad ser "paralelos", referida a los lados de un paralelogramo, se puede interpretar como que, a la vista de este estudiante, los paralelogramos tienen «al menos un par de lados paralelos». En base a ella, escoge los ejemplos de paralelogramos y asocia la posibilidad de poseer ángulos rectos, agudos o obtusos, mediante la proposición "los ángulos (del paralelogramo) pueden ser rectos, agudos y obtusos". Es de destacar que otros ejemplos de cuadriláteros también tienen lados paralelos (7, 16 y 17) y podrían haber sido escogidos por este estudiante como ejemplos de paralelogramo, pero su no inclusión hace pensar, razonablemente, que otras influencias, además del paralelismo de lados, inciden sobre este estudiante para no escoger algunos trapecios como paralelogramos. Tal vez, la forma de las figuras o la mayor o menor familiaridad con ellas sea la razón más influyente, y no las propiedades de los conceptos secundarios, ya que más adelante citará a los ejemplos anteriores como trapezoides.

A2) Estudiantes con un grado de adquisición alto del nivel 1 de van Hiele e intermedia o baja de nivel 2.

Posiblemente, el éxito en el reconocimiento de los ejemplos de paralelogramo esté en el significado que la propiedad del paralelismo de los lados tenga para los estudiantes. La interpretación de "son paralelos" como «paralelos dos a dos» lleva al reconocimiento de los paralelogramos al estudiante E10, cuyo perfil de razonamiento es algo mejor que el estudiante anterior, pues muestra un grado de adquisición alto del primer nivel de van Hiele, y cuyo mapa conceptual difiere bien poco del mapa conceptual del estudiante E13 (figura X. 7): Difieren en los ejemplos y en el nexo con el que expresa cómo son los ángulos de los paralelogramos.

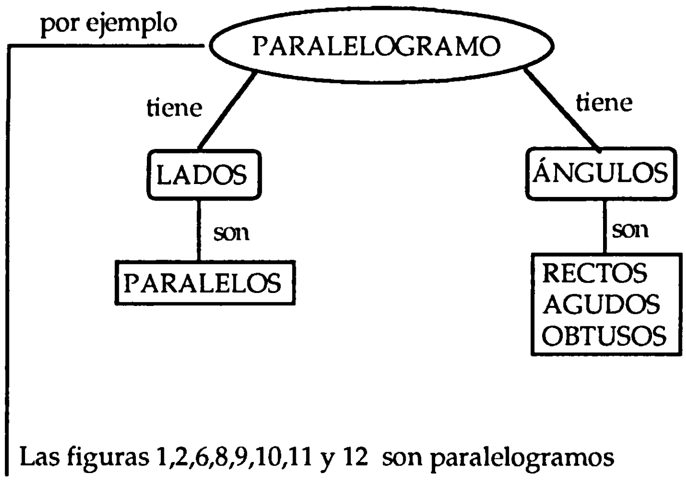


Figura X. 7 Mapa conceptual del paralelogramo. Estudiante con adquisición alta del nivel 1 de van Hiele.

Estos estudiantes, pues, están interesados en identificar los ejemplos de paralelogramos y su manera de caracterizarlos por medio del paralelismo de los lados. No hay más propiedades de los conceptos secundarios que sean relevantes para el concepto principal paralelogramo.

El estudiante C14, con un perfil de razonamiento caracterizado por el grado de adquisición alto del primer nivel de van Hiele e intermedio del segundo nivel de van Hiele, asocia los paralelogramos con rombo y romboide. Coherente con esta asociación, fija aquellas propiedades de los conceptos secundarios que son relevantes para el concepto paralelogramo, como vemos en su mapa conceptual (figura X. 8).

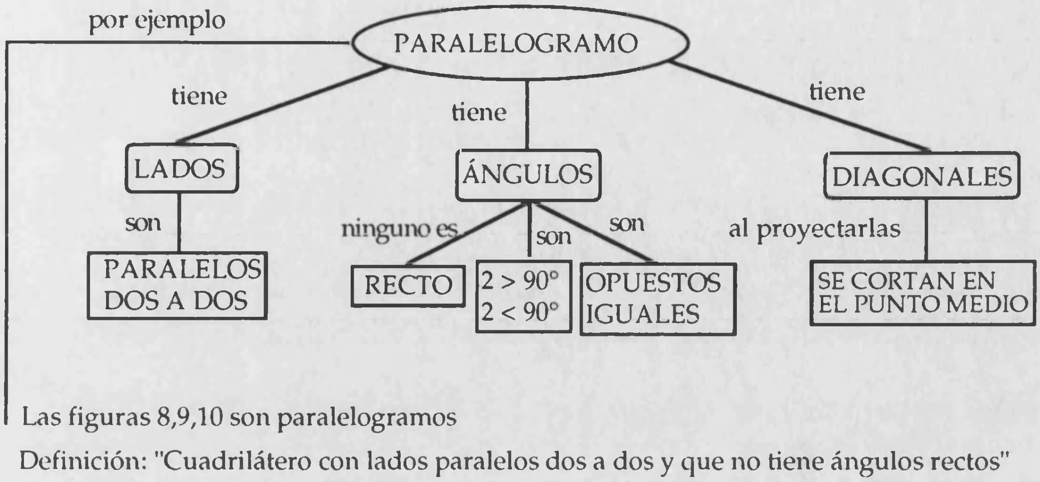


Figura X. 8 Mapa conceptual del paralelogramo. Estudiante con adquisición alta del nivel 1 de van Hiele e intermedio del segundo nivel

La propiedad de los lados "paralelos" se ha transformado en "paralelos dos a dos", lo que ampliaría el campo de los ejemplos que cumplen con ella, de tal manera que, para satisfacer las exigencias de los ejemplos escogidos y su visión de los paralelogramos, este estudiante incluye propiedades excluyentes de los ángulos de *sus* paralelogramos: "ninguno es recto", "dos son mayores de 90° y dos son menores de 90°", que limitan las posibilidades de la más incluyente "ángulos opuestos iguales".

B) Estudiantes con una adquisición completa o alta de los dos primeros niveles de van Hiele e indicios de razonamiento del tercer nivel.

Con los mismos ejemplos que muestra el estudiante E10 en su mapa (figura X.7), el estudiante C2, cuyo perfil de razonamiento es sensiblemente mejor que el estudiante anterior, pues demostró un grado de adquisición completo del primer nivel de van Hiele, alto del segundo nivel de van Hiele e indicios de razonamiento del tercer nivel de van Hiele, muestra una mejor estructura conceptual del concepto de paralelogramo (figura X. 9). Para él, hay propiedades relevantes, comunes a todos los ejemplos que dispone de paralelogramo, que se refieren al paralelismo de los lados y a la igualdad de los lados y de los ángulos. El caso particular (cuadrado) de paralelogramo le proporciona propiedades particulares de la clase de los paralelogramos, las cuales se establecen mediante expresiones en las que se introducen los nexos "pueden ser...", "pueden formar...", etc... (figura X. 9).

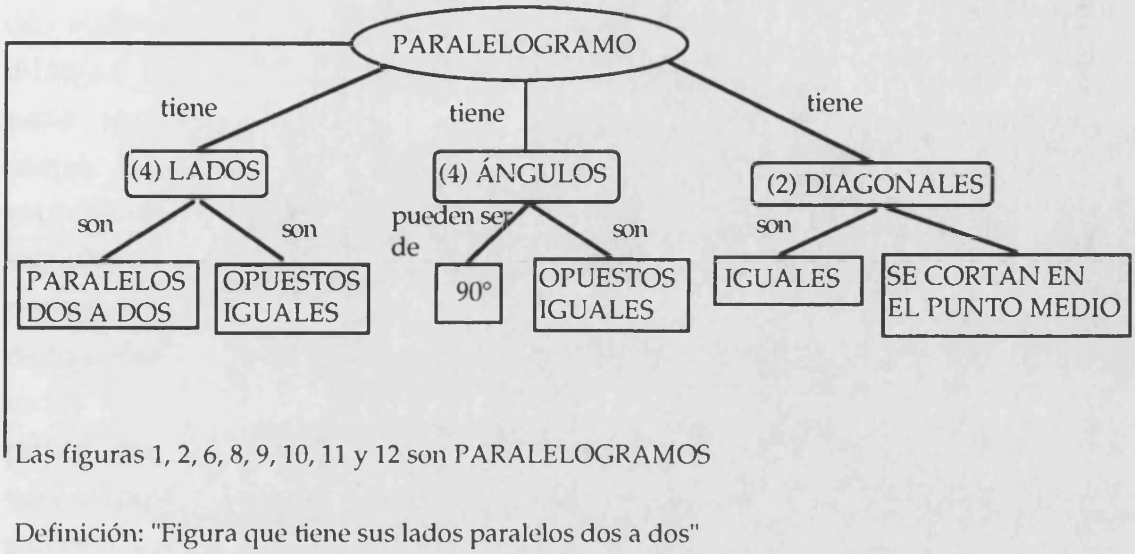


Figura X. 9 Mapa conceptual del paralelogramo. Estudiante con adquisición completa o alta de los niveles 1 y 2 de van Hiele, e indicios de razonamiento del nivel 3.

Una visión diferente de la anterior sobre el concepto paralelogramo la muestra el estudiante RL20, cuyo mapa puede verse en la figura siguiente.

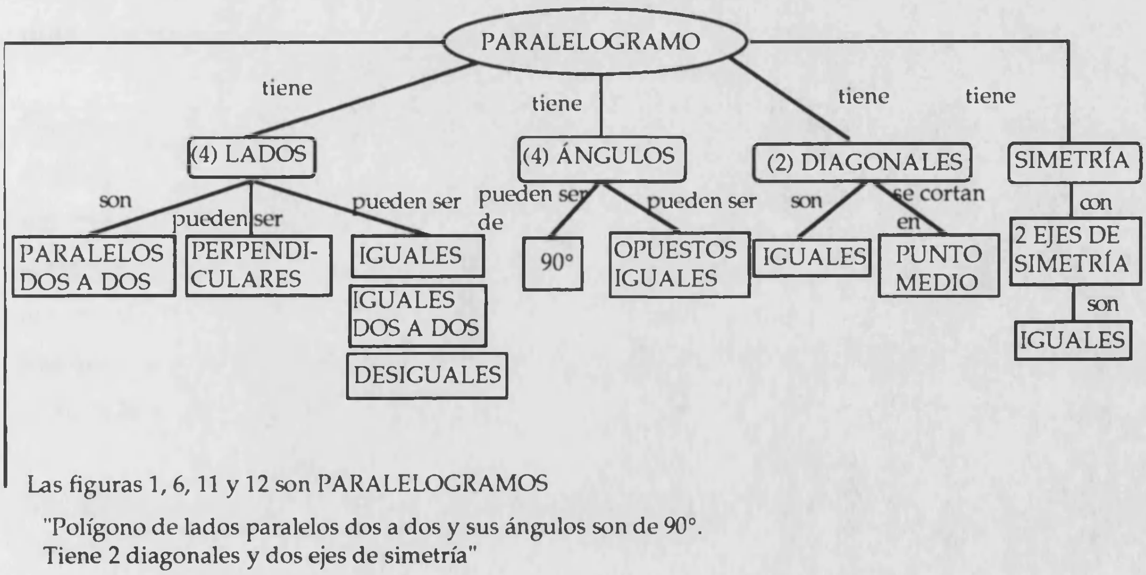


Figura X. 10 Mapa conceptual del paralelogramo. Estudiante con adquisición completa o alta de los niveles 1 y 2 de van Hiele, e indicios de razonamiento del nivel 3.

Este estudiante, que demostró un grado de adquisición completo o alto de los dos primeros niveles de van Hiele, identifica la clase paralelogramo formada por los rectángulos y los cuadrados. Como propiedades comunes a ambas clases de cuadriláteros, y por tanto del paralelogramo, incluye el paralelismo dos a dos de los lados, la igualdad de las diagonales y el punto de corte de las mismas. Esta inclusión se manifiesta, en términos de proposiciones con el nexo "son". La mayoría de las propiedades restantes, que se incluyen en su mapa, las hemos introducido con el nexo "pueden ser" puesto que este estudiante construye proposiciones con este tipo de nexos, aunque con significados diferentes cada vez, lo que demuestra ciertas incoherencias. Así, por ejemplo, las proposiciones: "los lados (del paralelogramo) pueden ser desiguales" o "los lados (del paralelogramo) pueden ser iguales dos a dos o todos iguales", el uso del nexo *pueden ser* es coherente con los ejemplos que posee del concepto paralelogramo, pero en las proposiciones: "los ángulos (del paralelogramo) pueden ser de 90°" o "los ángulos (del paralelogramo) pueden ser opuestos iguales", el uso del nexo *pueden ser* es incoherente con los ejemplos citados, en los que todos los ángulos son iguales.

X.1.2 *Análisis de las relaciones entre cuadriláteros. Algunos ejemplos.*

Hemos visto en páginas anteriores como los estudiantes no organizan de la misma manera los conceptos y relaciones que tienen que ver con conceptos más o menos estructurados como son los cuadriláteros.

En el capítulo VIII, hemos hecho un análisis de la estructura de relaciones existente entre las diferentes clases de cuadriláteros, del nexo (es, puede ser, no es) que se utiliza para establecer dichas relaciones y de su significado en términos matemáticos. Esta red de relaciones proporciona una organización jerárquica posible, en el sentido en el que allí se explica, que depende de la manera en la que el que establece dichas relaciones considera o define o entiende por las diferentes clases cuadriláteros.

En este apartado pretendemos mostrar algunos ejemplos de cómo los estudiantes son capaces de construir una red de relaciones entre las diferentes clases de cuadriláteros consideradas, red que depende de muchos factores y que se establecen de muchas maneras, con significados distintos, cuando usan los nexos *es* o *siempre es*, *puede ser* o *algunas veces es* , *nunca es* o *no es*. Estos ejemplos están organizados según la adquisición de los niveles de razonamiento que demostraron los estudiantes, de manera que podamos observar si hay relación entre los ejemplos y los perfiles de razonamiento asociados

A) Estudiantes con una adquisición no completa del primer y segundo nivel de van Hiele.

El estudiante E1, que demostró un perfil de razonamiento alto del primer nivel de van Hiele y bajo del segundo nivel, organiza los cuadriláteros en clases disjuntas (figuras X. 11). Incluyendo en sus respuestas un número escaso de propiedades, en aquéllas en las que en efecto lo hace, y pensando casi exclusivamente en las formas de las figuras que dispone en la hoja de cuadriláteros, reconoce las distintas clases de cuadriláteros de la siguiente manera: El cuadrado (figuras 6 y 12) "es un polígono que tiene sus 4 lados iguales, sus ángulos también iguales dos a dos"; el rectángulo (figuras 1 y 11) no tiene definición, pero incluye como propiedad relevante "tiene dos lados iguales y los otros también son iguales pero diferentes a los anteriores"; el rombo (figuras 2 y 10) "tiene cuatro lados desiguales dos a dos" y el romboide (figuras 8 y 9) como "un rombo abollado". Los cuadriláteros reconocidos como trapecios son los isósceles (figuras 4 y 15) e identificados como "cuadriláteros con 4 lados iguales dos a dos" y, finalmente, en referencia a trapezoide, solamente cita las figuras 5, 13, 17 y 16 de la hoja de cuadriláteros.

Su manera de ver las distintas clases de cuadriláteros le permite establecer relaciones entre ellas como puede verse en el mapa de relaciones que mostramos a continuación.

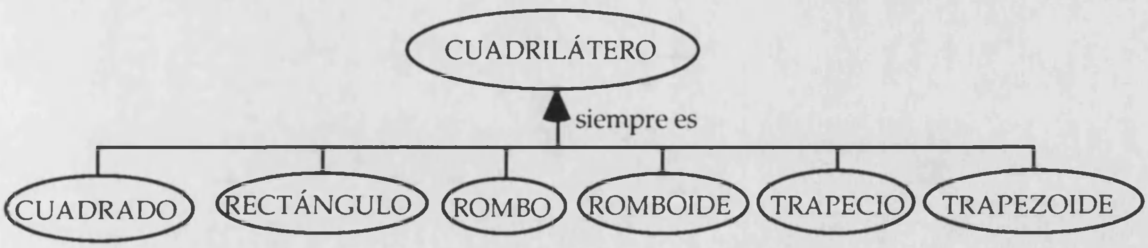


Figura X. 11 Mapa conceptual de las relaciones entre cuadriláteros. Estudiante con una adquisición intermedia o baja de los dos primeros niveles de van Hiele.

En él, puede verse como sólo tiene en cuenta dos tipos de nexos, "siempre es" y "nunca es" (este nexo no se representa en los mapas, pero ha de sobre entenderse que si no hay una conexión entre dos conceptos, o bien es porque el estudiante no considera la posibilidad de relacionarlos o bien porque la relación que establece es del tipo "no es" o "nunca es"), de tal manera que crea un único nivel jerárquico entre las clases de cuadriláteros considerada. Hay que señalar que este estudiante no contesta al ítem correspondiente al paralelogramo ni establece ninguna relación entre él y las distintas clases de cuadriláteros.

El estudiante E13 tiene otra forma de organizar los cuadriláteros (figura X. 12). Por paralelogramo entiende el "cuadrilátero con lados paralelos" (en el sentido de, por lo menos un par de lados paralelos), escogiendo como ejemplos todas las figuras de la hoja excepto los cuadriláteros cóncavos, los trapezoides y algunos trapecios (figuras 7, 16 y 17, únicas, por otra parte, que contradicen su visión del paralelogramo). El cuadrado lo interpreta como "un cuadrilátero con los cuatro lados iguales y paralelos", escogiendo como ejemplos a los rombos y cuadrados de la hoja de cuadriláteros, y el rombo, con los mismos ejemplos, "igual que un cuadrado, tiene los 4 lados iguales y sus ángulos son agudos". El rectángulo (figuras 1, 4, 9 y 11), "como un romboide con los lados iguales 2 a 2 y paralelos", incluyendo los ángulos rectos entre las propiedades de los ángulos del rectángulo, y el romboide (figuras 8 y 9) "como un rombo pero éste no tiene los 4 lados iguales o sea son iguales 2 a 2". El trapecio que reconoce (figuras 4 y 11) es el trapecio isósceles al que le asocia propiedades como "lados paralelos dos a dos" y "2 ángulos obtusos y 2 ángulos agudos". Finalmente, al trapezoide (restantes figuras de la hoja que dispone) le asocia propiedades como "lados desiguales en unos casos e iguales menos uno en otros" y "puede tener ángulos rectos, agudo y obtusos".

Esta manera de ver los cuadriláteros se traduce en una organización de los mismos que hemos representado en el mapa siguiente (figura X. 12).

Figura X. 12 Mapa conceptual de las relaciones entre cuadriláteros. Estudiante con una adquisición baja del segundo nivel de van Hiele.

Al analizar este mapa, podemos interpretar el modo como este estudiante organiza los cuadriláteros que se han usado en esta investigación. Divide los cuadriláteros en dos mundos, los paralelogramos y los trapezoides. Éstos parece que los considera como una clase de figuras extraña al establecer que "el cuadrilátero nunca es trapezoide", confirmada, de algún modo, al dejar en blanco la relación recíproca entre trapezoide y cuadrilátero; mientras que los paralelogramos, cuadrados y rombos parecen ser *sus* verdaderos y únicos cuadriláteros (respondiendo en blanco las relaciones entre romboide, rectángulo y trapecio con cuadrilátero).

Los paralelogramos, a su vez, los considera divididos en tres grupos: cuadrado - rombo, romboide - rectángulo y trapecio. Para el primero de los tres grupos, considera que tanto "el cuadrado siempre es rombo" como que el "rombo siempre es cuadrado", compartiendo ejemplos y algunas propiedades y distinguiéndose por las propiedades de los ángulos (rectos vs agudos). Otro grupo es el formado por la pareja romboide - rectángulo, que comparten la propiedad "lados iguales dos a dos" y que se distinguen por los ángulos, aunque esta vez no comparten más que un ejemplo, la figura 9, falsa, por otra parte, para la clase rectángulo, válida en cambio para la clase romboide. El tercer grupo está formado por los trapecios, a los que le asocia propiedades y ejemplos no compartidas por ninguna otra clase de cuadriláteros.

No podría decirse, en el sentido en el que hemos discutido en el capítulo VIII, que este estudiante establezca niveles jerárquicos entre las diferentes clases de cuadriláteros. Dicho de otro modo, no da la impresión de que, conscientemente, haya establecido relaciones de inclusión, ya sea parcial o total, entre las clases de cuadriláteros consideradas. Por otra parte, los ejemplos que presenta este estudiante de cada una de las clases de cuadriláteros, hacen pensar en todo lo contrario pues incluye, dentro de los paralelogramos, ejemplos de cuadrados, rectángulos, rombos, romboides y trapecios (isósceles, casi exclusivamente), inclusión que traduce, más adelante, con las relaciones del tipo: "paralelogramo *siempre es* la clase de cuadriláteros A", siendo A cualquiera de las clases de cuadriláteros anteriores, en lugar del "a veces es" o "puede ser". Las relaciones recíprocas "La clase A con paralelogramo", también las considera con el nexo *siempre es*, con mejor criterio que con el nexo anterior, pues ciertamente, y para la visión que tiene de los paralelogramos, cualquiera de las clases anteriores es un paralelogramo.

Lo mismo ocurre con los pares: cuadrado - rombo y rectángulo - romboide, que considera relacionados en los mismos términos que con el paralelogramo: "la case A *siempre es* la clase B" y su recíproca, "la clase B *siempre es* la clase A". Por otra parte, cuando considera que dos clases de cuadriláteros no tienen ninguna relación, porque seguramente no comparten ejemplos, usa el nexo nunca es: "Cuadrado *nunca es* rectángulo", "rombo *nunca es* rectángulo" o "paralelogramo *nunca es* trapezoide".

Este estudiante, demostró un razonamiento que se caracterizaba por su baja adquisición del nivel 2 de van Hiele.

Con un razonamiento parecido, aunque algo mejor en cuanto a las habilidades de razonamiento del primer nivel de van Hiele, el estudiante RL8 organiza los cuadriláteros de un modo diferente.

Para una visión de los paralelogramos como "un polígono con lados paralelos a los otros", sin especificar cuántos pero sobreentendiendo que se refiere a un par al menos, considera todas las figuras excepto la 3, 7, 14 y 16 como paralelogramos. Para una visión usual de las restantes clases de cuadriláteros, si exceptuamos a los trapecios, cuyos ejemplos 4 y 15 determinan que su visión de los mismos se corresponde con los trapecios isósceles, organiza los cuadriláteros del modo en el que se representa en el mapa siguiente (figura X. 13).

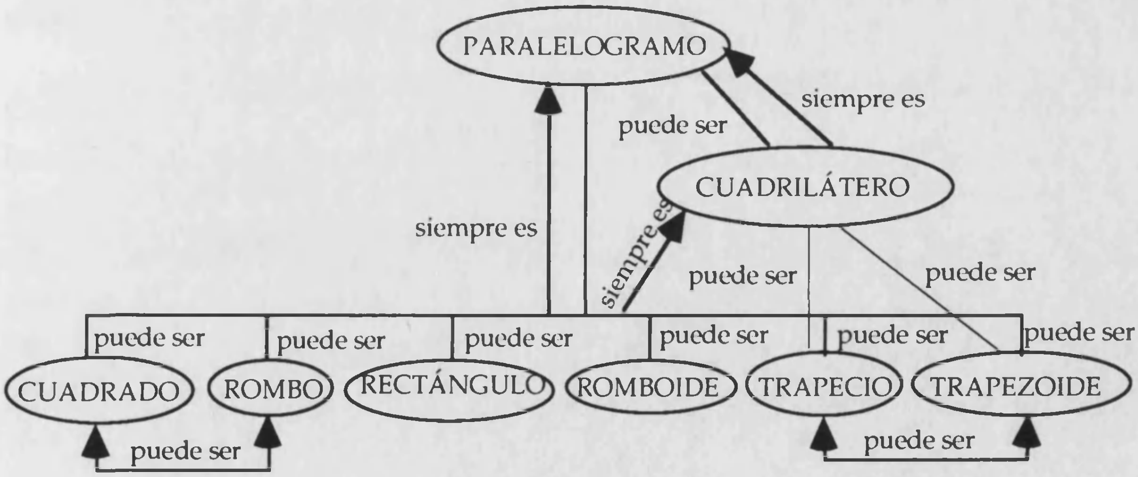


Figura X. 13 Mapa conceptual de las relaciones entre cuadriláteros. Estudiante con una adquisición baja del segundo nivel de van Hiele.

Al analizar este mapa, podemos interpretar el modo en el que este estudiante organiza los cuadriláteros. Así, por ejemplo, se aprecia como este estudiante considera la clase más inclusiva de los cuadriláteros, a los paralelogramos, de tal manera que el término «cuadrilátero» está considerado como una parte de los paralelogramos: "Paralelogramo *puede ser* cuadrilátero" y "cuadrilátero *siempre es* paralelogramo". Esta jerarquía también se produce entre la clase de paralelogramo y el resto de cuadriláteros considerados y se intuye entre cuadrilátero y los demás, que no sea paralelogramo. Así, por ejemplo, a la relación "paralelogramo *puede ser* cuadrado" se le opone, claramente, "cuadrado *siempre es* paralelogramo", relaciones de inclusión total que, incluso se producen entre el paralelogramo y trapecio y trapezoide.

Por otra parte, este estudiante intuye dos relaciones más, pero que no llegan a establecer un nuevo nivel jerárquico. Se trata de la relaciones cuadrado - rombo y trapecio - trapezoide. En ambos casos, el nexo que usa es el que se muestra en las siguientes proposiciones: "La clase A *puede ser* la clase B" y su recíproca, "la clase B *puede ser* la clase A", que parecen indicar que, por las razones que sean, ambas clases de cuadriláteros A y B tienen algo en común y no es razonable pensar que las interprete en el mismo sentido que el par de relaciones "paralelogramo *puede ser* cuadrado" y "cuadrado *siempre es* paralelogramo" que, juntas, indican una relación de inclusión de la clase de los cuadrados en la clase de los paralelogramos.

B) Estudiantes con una adquisición completa o alta de los dos primeros niveles de van Hiele.

Con un nivel de razonamiento demostrado en la primera parte de la investigación, que indica un grado de adquisición completo o alto de los dos primeros niveles de van Hiele, el estudiante RL5 establece más jerarquías que en el caso anterior (figura X. 14). Con un visión de los paralelogramos análoga a la del estudiante anterior, por lo menos un par de lados paralelos, una visión de los rombos inclusiva con los cuadrados y romboides (al menos, por los ejemplos mostrados) y la usual en rectángulos y trapecios (otra vez, sólo los trapecios isósceles), la organización que dispone de los cuadriláteros la podemos observar en el mapa siguiente.

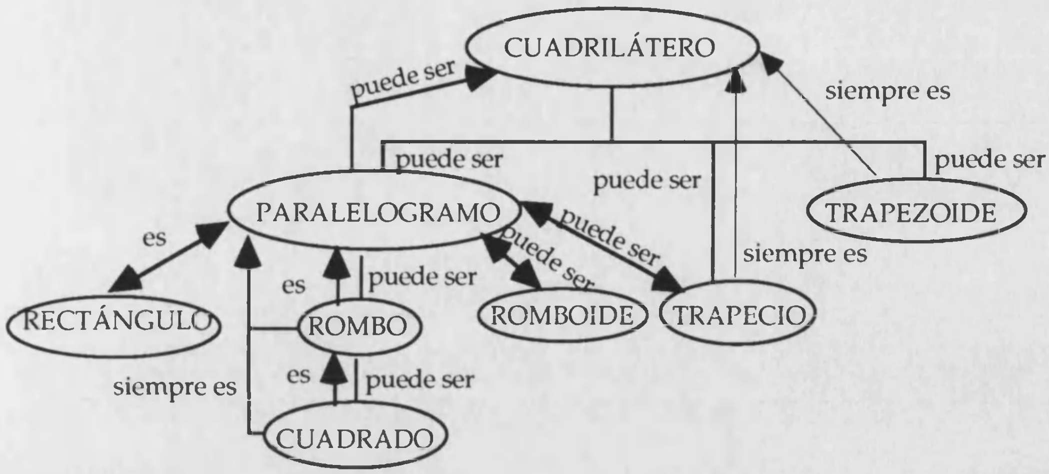


Figura X. 14 Mapa conceptual de las relaciones entre cuadriláteros. Estudiante con una adquisición completa o alta de los dos primeros niveles de van Hiele.

Podemos distinguir, en la manera en la que este estudiante organiza los cuadriláteros, 4 niveles jerárquicos bien definidos por la red de relaciones Cuadrilátero - Paralelogramo - Rombo - Cuadrado, si bien la proposición "paralelogramo *puede ser* cuadrilátero", rompe esta jerarquía pues el nexo "puede ser" debía ser "siempre es". Este uso inapropiado del nexo "puede ser" también aparece en las relaciones del paralelogramo con el romboide y del paralelogramo con el trapecio (ambas en los dos sentidos), por lo que no podemos estar seguros de que en uno signifique para el estudiante lo mismo que "incluye a" y en el otro signifique "está incluido en". Por otra parte, las relaciones del paralelogramo con el rectángulo están representadas por el nexo "es", "paralelogramo *es* rectángulo" y "rectángulo *es* paralelogramo". Por la misma razón, no podemos estar seguros, tampoco aquí, de que el nexo "es" lo interprete en el mismo sentido que antes interpretó el nexo "puede ser".

Cuando a una relación del tipo "puede ser" le sigue una relación recíproca del tipo "es", del estilo "paralelogramo *puede ser* cuadrado" y "cuadrado *siempre es* paralelogramo", la organización de los cuadriláteros en clases disjuntas que dan lugar a tres niveles jerárquicos, es como la del estudiante C2, con un perfil de razonamiento caracterizado por el alto grado de adquisición de los niveles 1 y 2, y el bajo grado de adquisición del nivel 3 que demostró en la primera parte de la investigación, y que representamos en el mapa siguiente (figura X. 15).

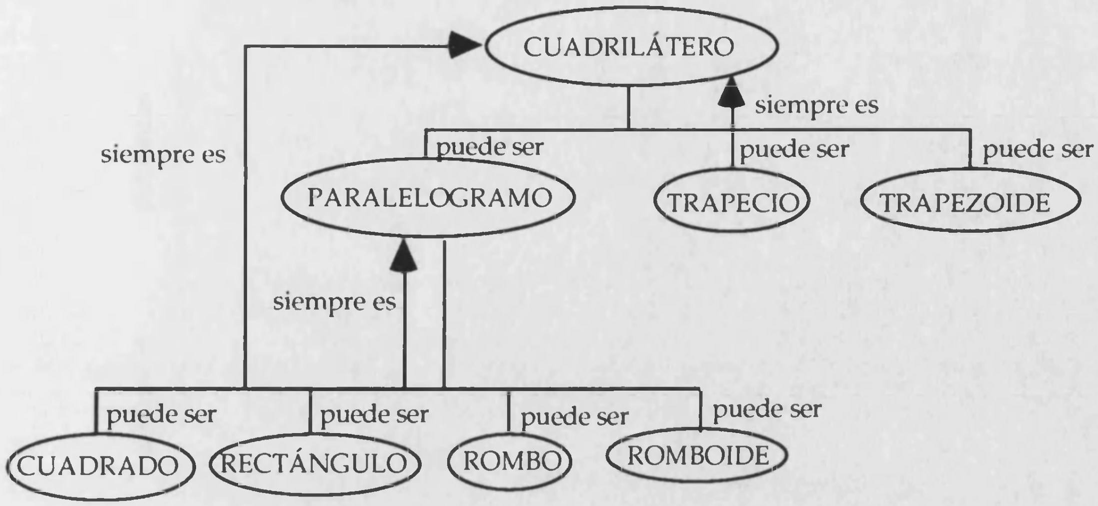


Figura X. 15 Mapa conceptual de las relaciones entre cuadriláteros. Estudiante con una adquisición completa o alta de los dos primeros niveles de van Hiele.

Esta manera de organizar los cuadriláteros, que coincide con la presentación clásica de los cuadriláteros en los niveles más bajos de la enseñanza obligatoria, no es una constante en los estudiantes analizados. Hemos visto cómo hay muchas maneras de organizar los cuadriláteros presentados en esta investigación y de expresar esta organización en términos de relaciones de inclusión (total o parcial) o de exclusión, usando los nexos "es", "puede ser" o "no es", con significados distintos de unos estudiantes a otros y de aquéllos que proporcionan las matemáticas.

Los estudiantes que nos han servido de ejemplo aquí, demostraron un razonamiento que oscilaba entre un grado de adquisición intermedio o bajo del primer nivel y segundo niveles de van Hiele a alto en el primer y segundo niveles de van Hiele. En ninguno de los casos, ha habido una organización de los cuadriláteros con marcado carácter inclusivo, lo que supondría una organización de los mismos con un estructura que podría representar el mapa de la figura siguiente.

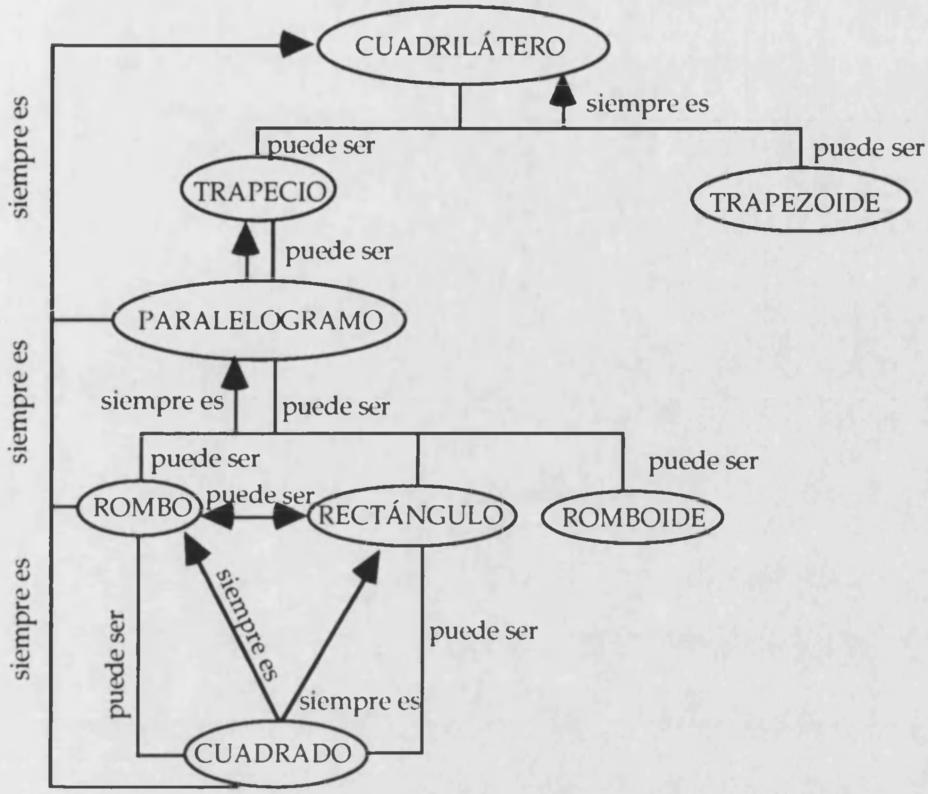


Figura X. 16 Mapa conceptual de las relaciones entre los cuadriláteros usados en nuestra investigación. Visión inclusivista

La causa o causas por la que esta manera de organizar los cuadriláteros no se produzca en los estudiantes, puede deberse tanto a la falta de un nivel de razonamiento suficiente para comprender las relaciones de inclusión entre las distintas clases de cuadriláteros, como a la falta de la suficiente experiencia escolar en la que esta organización, u otras con carácter inclusivo, sea posible.

Organizar los cuadriláteros de esta manera, exige, por parte del que organiza, pensar en términos diferentes a los que se requieren para organizar los cuadriláteros en función de los ejemplos que se dispone de cada uno de ellos o en función de compartir o no un número indeterminado de propiedades asociadas a cada una de las clases de cuadriláteros. Estas dos maneras de razonar sobre los cuadriláteros parece que tienen una fuerte relación con el nivel de razonamiento de van Hiele demostrado y hemos mostrado las evidencias de ello, con los ejemplos anteriores.

X.2 Resultados del análisis de las entrevistas clínicas. Estudio de dos casos.

En el Capítulo VIII dijimos que la componente de enseñanza, frente a la componente de evaluación, era la más común entre los investigadores que usaban los mapas conceptuales como herramienta de investigación. Desde nuestra perspectiva, como instrumento de evaluación de los estudiantes, los mapas conceptuales los hemos visto de manera diferente y con objetivos diferentes a los usuales en la mayoría de investigaciones realizadas, fundamentalmente, en las ciencias experimentales, lo que nos ha conducido a una metodología de investigación novedosa en el campo de la educación matemática. Para alcanzar nuestros objetivos, nos propusimos realizar entrevistas clínicas que nos dieran información sobre el grado de validez de la metodología usada, tanto en los instrumentos de evaluación, como en la construcción de los mapas conceptuales de los estudiantes, obtenidos a partir de las respuestas dadas por ellos a los ítems que constituyeron dicho instrumento de evaluación.

El guión que usamos en cada una de ellas, dependía de las respuestas que había dado el estudiante a los ítems que constituían el instrumento de evaluación y que, a su vez, nos permitieron la construcción de los mapas conceptuales de cada uno de ellos, sobre los siete conceptos presentados: paralelogramo, cuadrado, rectángulo, rombo, romboide, trapecio y trapezoide, y sobre las relaciones entre ellos.

De esta manera, las entrevistas grabadas en cinta magnetofónica, nos proporcionaron información sobre los siguientes aspectos:

a) Valoración de los mapas conceptuales
b) Sobre las propiedades de los conceptos secundarios en relación con el concepto principal
c) Sobre las relaciones entre las propiedades de los conceptos secundarios: para un mismo concepto secundario, entre conceptos secundarios
d) Sobre los nexos entre concepto y propiedades: significados y usos
e) Sobre las relaciones entre los conceptos principales: significados y usos de los nexos "es", "puede ser", "no es" o sus versiones equivalentes "siempre es", "algunas veces es" y "nunca es".

Lo que aquí vamos a presentar es el resultado del análisis de las entrevistas realizadas a dos estudiantes en relación con los aspectos mencionados anteriormente.

X.2.1 *El caso del estudiante A*

A es estudiante en la Escuela Universitaria de Magisterio de la Universitat de València. Estuvo implicado, voluntariamente, a lo largo de toda esta investigación, como un estudiante más al que íbamos a evaluar de la misma manera que a todos los estudiantes de la muestra que participaron con este fin.

El resultado de su evaluación de los grados de adquisición de los niveles de van Hiele, en la primera parte de la investigación, nos dio un perfil de razonamiento caracterizado por el vector (C, C, I, N). Según esto, el estudiante A demuestra tener adquiridas las habilidades de razonamiento en las que se implican tanto las figuras como las propiedades de las figuras y suponíamos que este hecho podría tener su reflejo en su mapa conceptual. Pero, por otro lado, puesto que el grado de adquisición de la habilidades de razonamiento del tercer nivel de van Hiele es intermedio, la no inclusión de relaciones entre propiedades de los conceptos secundarios también se verían reflejadas en los diferentes mapas conceptuales construidos a partir de sus respuestas al test de evaluación.

La serie de mapas conceptuales correspondientes al estudiante A, antes de realizar la entrevista, pueden verse en el Anexo IV codificados como A_{i1}, con i= 1, 2,...,9. La serie que corresponde al trabajo durante la entrevista, A_{i2}, con i= 1, 2,..., 9. Estas series constan de nueve mapas cada una, uno por cada concepto principal estudiado, siete, y uno para cada uno de los dos mapas conceptuales que representan la organización jerárquica que A tenía sobre dichos siete cuadriláteros.

Una visión rápida de los siete primeros mapas, nos permiten evaluar hasta qué punto A es capaz de estructurar las propiedades de los conceptos secundarios lado, ángulo, diagonal y simetría, en relación con el concepto principal sobre el que se refieren. Así, en general, expresa propiedades relevantes, para cada uno de los conceptos principales, de todos y cada uno de los conceptos secundarios. La relevancia de dichas propiedades se manifiesta en los mapas correspondientes mediante el nexo "son". Es decir, este estudiante parece que asocia al concepto principal aquellas propiedades de los conceptos secundarios que son comunes a todos los ejemplos que dispone del concepto principal y en ninguno de los casos, excepto en el trapecio (Mapa A_{61}, Anexo IV), cuando se refiere a las propiedades de los ángulos, hace referencia a propiedades particulares. De haberlo hecho así, entonces, probablemente, hubiera incluido el nexo "pueden ser" o "pueden tener" o "a veces es" para establecer las proposiciones sobre el concepto principal. Fijémonos en el siguiente protocolo, extraído de la entrevista con el estudiante A, en el que se muestra cómo y con qué significado se forma una proposición sobre el concepto paralelogramo en el que está presente el nexo "a veces es".

Previamente al inicio de la tarea, quisimos enseñar al estudiante A cómo habíamos construido sus mapas a partir de sus respuestas al test escrito. Al mismo tiempo que hacíamos esto, apreciábamos indirectamente qué valoración le daba el estudiante, tanto en relación con las propiedades de los conceptos secundarios que había introducido, como en relación con los significados con los que se habían introducido.

P. Aquí tienes tus mapas.
A. ¿Tenemos que deducir?

¿La geometría es siempre deducción? Apenas iniciamos la entrevista, el estudiante A piensa que su tarea será deductiva.

P. (Explicando al estudiante A cuál ha sido el objetivo y cómo se han construido los mapas que hemos llamado conceptuales). Estos mapas representan una manera de organización de los conceptos relativos a cuadriláteros, obtenidos a partir de tus respuestas a los ítems del test que resolviste hace unos días. A partir de ahora podrás incidir sobre él añadiendo o quitando lo que desees.
A. (Leyendo sus mapas) Aquí no es simétrico (refiriéndose al paralelogramo)
P. Una de las respuestas que me diste, no supe como representarla en el mapa y por eso me he esperado a este momento para representarla. Decías, en referencia al paralelogramo, que "por lo menos dos ejes", "convexo", "simétrico"
A. Es que no es simétrico, ¿no?
P. (tratando de interpretar las respuestas anteriores, construye el siguiente mapa conceptual parcial del paralelogramo):

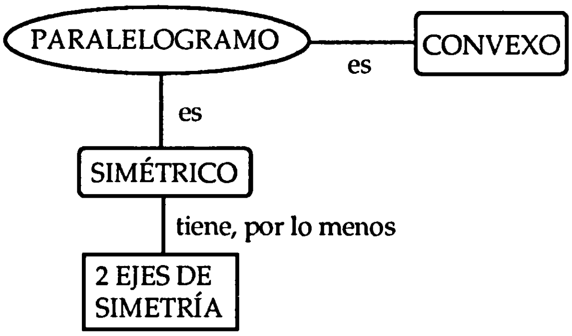


Figura X. 17 . Mapa conceptual del paralelogramo del estudiante A en el que incluye la simetría y sus propiedades.

¿es esto lo que me querías decir en tu respuesta?

A. Sí

P. Como tuve dudas y no estaba seguro de que fuese esto lo que me querías decir, anoté esta parte del mapa a lápiz... ¿Si quieres decir algo sobre la simetría del paralelogramo?

A. Es que el paralelogramo no tiene simetría.

P. Fíjate en los ejemplos que pusiste de paralelogramo...

A. ¡¿Todos estos?!

P. (Numerándolos) ¿Son todos paralelogramos?

A. (Parece que algo insegura) Bueno algunos. ¡Yo que sé! Bueno sí que son paralelogramos.

P. Estoy de acuerdo contigo, son paralelogramos.

A. Sí, sí que son paralelogramos pero... algunos sí tienen ejes de simetría y otros no. El "paralelogramo paralelogramo" no tiene ejes de simetría.

P. ¿Cuál es el "paralelogramo paralelogramo"?

A. Este (señalando la figura 8)

P. (Señalando a la figura 11). ¿Este no es "paralelogramo paralelogramo"?

A. No, pero a ese le llamamos rectángulo, o sea, es un paralelogramo pero le llamamos rectángulo.

P. ¿Cómo le llamarías a estos? (Señalando a las figuras 8 y 9).

A. Un paralelogramo romboide. Éste es el nombre propio (refiriéndose al romboide). O sea, el paralelogramo también es un nombre propio de este (refiriéndose al romboide) y a este (refiriéndose al rectángulo) ya le llamaríamos rectángulo (a secas)

P. ¿Quieres decir que puede haber algún paralelogramo que no sea alguna de estas familias representada por estos ejemplos?

A. No entiendo tu pregunta

P. Sí. Has dicho que (recorriendo los diferentes ejemplos) que este es un paralelogramo que tiene un nombre propio, este es otro paralelogramo que tiene otro nombre propio, ...

A. (Al entrar en los romboides) ... Es que yo a estos les llamo paralelogramos..

P. ¿O?

A. Romboides.

P. Así pues, todos son paralelogramos. Entonces, ¿qué querías decir de la simetría?

A. A veces.

P. El paralelogramo ¿qué? ¿Cómo conectarías estas dos cosas (Paralelogramo y Simetría)?

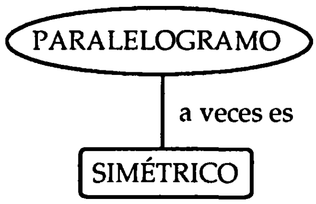
A. ¿Poniendo que es simétrico?

P. ¡No!, poniendo lo que tú creas que hay que poner.

A. Que no es simétrico. O que ¿puede no ser? (dudando cada vez de lo que dice) Es que si... ¿Tengo que mirar a todos (los ejemplos)?

P. ¡Claro!

A. Pues... ¡Yo que sé! A ver. (representando en el mapa) Que puede ser o a veces es (simétrico)



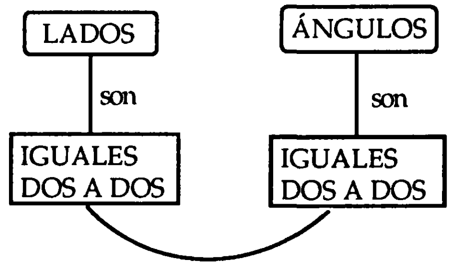
En este pasaje de la entrevista, vemos cuál es la ruta de razonamiento que sigue el estudiante A para relacionar dos conceptos: uno principal, paralelogramo, y otro secundario, la simetría, con la que establece una proposición válida sobre el concepto principal. Inicialmente, nuestro estudiante pensaba que los paralelogramos era simétricos y que tenían por lo menos dos ejes de simetría. Seguramente estaba pensando en algunos de los ejemplos de paralelogramos que había mostrado. Cuando esta cadena de proposiciones se le mostró organizada como se indica en el mapa de la figura X. 17, A interviene diciendo que "el paralelogramo no tiene simetría". Tal vez A quería decir con ello que la propiedad de ser simétrico no es generalizable a todos los paralelogramos "... algunos (de los ejemplos de paralelogramo) si tienen ejes de simetría y otros no" y en concreto, su representante más genuino de la clase paralelogramo, el "paralelogramo paralelogramo", es decir, el romboide, "no tiene ejes de simetría" y es por eso que su afirmación inicial de que los paralelogramos no son simétricos, se apoyaba en que su representante genuino no es simétrico. "A veces" es su visión de la relación entre paralelogramo y simetría, aunque con una cierta inseguridad: "... que no es simétrico (el paralelogramo). O que puede no ser... Es que si... ¿Tengo que mirar a todos (los ejemplos)?... Pues, ¡yo que sé!. A ver... (parece como si se hiciese la luz), que puede ser o a veces es (simétrico)".

Así pues, en este caso, la elección del nexo que conecta el concepto principal y el concepto secundario, dando lugar a una proposición válida para el concepto principal, ha exigido un razonamiento que va más allá de una propiedad observada en un concepto secundario, y que es posible asociar a un concepto principal, a partir de unos pocos ejemplos, tal vez sin considerarlos todos, porque en cualquiera de ellos se verifica.

En un principio A no había reparado en que las propiedades de los conceptos secundarios se pudieran relacionar. Tampoco lo había conseguido el ítem preparado con tal fin en el test, "es que no entendía lo que me preguntabas... Creí que se refería a la simetría y que era un lugar destinado a escribir cosas que no había dicho antes", así que le propusimos la posibilidad de establecer dichas relaciones a partir de su mapa de paralelogramo.

> P. Mira el mapa (del paralelogramo). ¿Conectarías las propiedades de este concepto secundario (lado) con las de este otro (ángulo), con las de este otro (diagonal), de alguna manera, presidido por el concepto principal, de forma que tenga significado para ti y para él?
>
> A. Puedo conectar... Haber... Los "lados son iguales dos a dos" como "los ángulos son iguales dos a dos" y...

No da la impresión de que resultase extraño a A que se pudiesen establecer relaciones entre las propiedades de los distintos conceptos secundarios. "Iguales dos a dos (en los lados) con iguales dos a dos (en los ángulos)". La manera en la que estas dos propiedades se conecten, es decir, la elección del nexo que relaciona ambas propiedades, puede darnos una idea de cómo ve el estudiante en cuestión la relación entre ambas.



> P. ¿Qué nexo pondrías a esa conexión?
>
> A. Bueno... No sé... ¿Qué nexo? No lo sé... (pensando). Bueno, yo lo que deduzco es que cuando tienen los lados iguales dos a dos, los ángulos también son iguales dos a dos. ¿Qué nexo pondría ahí? (se pregunta)

Resulta evidente que A esta intuyendo una implicación entre ambas propiedades, lo que le cuesta es establecerla de una manera formal: "...si los lados son iguales dos a dos, los ángulos también son iguales dos a dos" y ante la posibilidad de usar nexos equivalentes a "también", como "entonces", A escoge el nexo más fuerte, "entonces", para representarlo en el mapa.

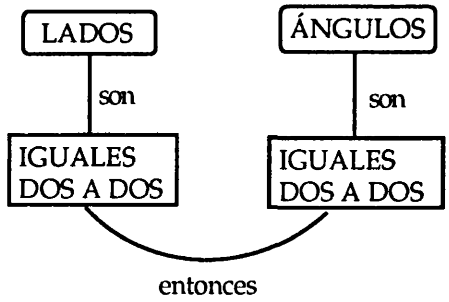
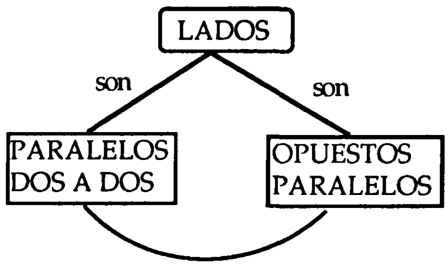
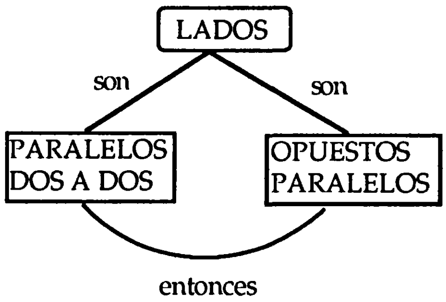


Figura X. 18 Mapa conceptual que muestra las conexiones, establecidas por el estudiante A, entre dos propiedades de dos conceptos secundarios.

Con esta primera relación entre propiedades de distintos conceptos secundarios (figura X. 18), se abre para A la posibilidad de preguntarse por propiedades de un mismo concepto secundario "... Es que estos dos (sendas propiedades de los lados) también (se relacionan). Se supone que si los lados son paralelos dos a dos, los opuestos son paralelos". El estudiante A identifica una relación posible.



Identificadas las propiedades del concepto secundario que posiblemente se relacionen, debe introducir el nexo que establece el tipo de relación que existe entre ambas propiedades, "¿Qué pongo?, ¿Lo mismo? (decide poner entonces)", tal vez influida por la relación anterior.



Dos nexos iguales (entonces) en relaciones distintas.

P....Por ejemplo, has puesto que "lados paralelos dos a dos <u>entonces</u> los opuestos son paralelos". Ahora me cuestiono el significado de este <u>entonces</u>. No sé si lo que me quieres decir es que estoy usando dos expresiones para decir lo mismo.
A. Sí.
P. Entonces, no es una implicación, sino que lo que estoy diciendo es realmente lo mismo. Si digo que los "lados son iguales dos a dos", los ángulos ¿son iguales dos a dos? Lo que conecte ambas cosas, tendrá significado de implicación, porque una cosa (propiedad) es consecuencia de la otra (propiedad). Ahora bien, ¿estás seguro de que eso es una implicación?
A. (pensando) Yo creo que sí, ¿no?
P. ¿Por qué?
A. Porque si los lados son iguales dos a dos, los ángulos también son iguales dos a dos. Los ángulos dependen de los lados.
P. Ó sea, que más bien es una consecuencia una de la otra. ¿En qué sentido la anotarías? ¿Este implica este o este implica este? (refiriéndonos a las propiedades de los lados)
A. Los dos se implican mutuamente.

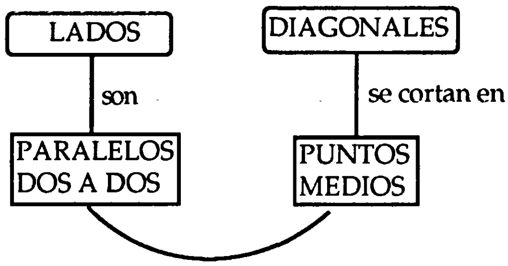
Así que, para A, dependiendo de la relación establecida, el nexo "entonces" podría sustituirse por "implica", ya que hay dependencia entre los conceptos secundarios, "... los ángulos dependen de los lados".

En otros casos, el nexo "entonces" podría sustituirse por "es decir", ya que la misma propiedad se están expresando por medio de dos formas equivalentes:

P. ... Revisemos esta otra. Lados paralelos dos a dos, entonces opuestos paralelos.
A. Lo que tú has dicho antes, las dos dicen lo mismo.

P. Por tanto, este "entonces" y este otro "entonces" los has usado de distinta manera, ¿verdad?

Otras relaciones se intuyen: " ... (las diagonales se cortan en) los puntos medios... No sé como conectarla (relacionarla)... También con los lados paralelos dos a dos"



P. ¿En qué sentido?

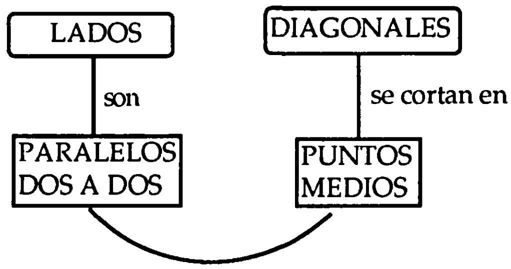
A. Pues,... Si los lados opuestos son paralelos....

P. Aquí tienes ejemplos donde confirmar tus hipótesis.

A. En todos los ejemplos, todas las diagonales se cortan en el punto medio. En todos, los lados son paralelos dos a dos.

P. ¿Por tanto? ¿Qué tienes primero y qué has visto después? Teníamos primero las figuras con los lados paralelos dos a dos y ¿qué has comprobado?

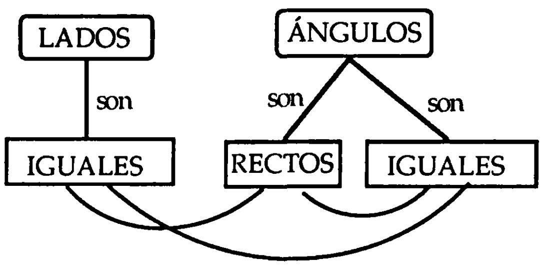
A. Que si tienen los lados paralelos, siempre se cortan las diagonales en los puntos medios (trazando la conexión, se decide por poner el nexo "siempre"



En este caso, el nexo que relaciona la propiedad del paralelismo de los lados y el punto de corte de las diagonales se ve como "siempre", ya que la relación observada se cumple en todos los casos (ejemplos) de paralelogramo. Posiblemente tenga rasgos de implicación, a la manera del "entonces" anterior, pero en este caso no parece tan claro este significado para el estudiante.

La experiencia que el estudiante A había adquirido al trabajar en el mapa conceptual de paralelogramo, se traslada ahora al mapa conceptual del cuadrado.

A. A ver..., el cuadrado. Esta implicaría ésta,..., también a ésta. O sea, aquí hay más. Hay muchas. El nexo... (A está trazando conexiones entre propiedades de algunos conceptos secundarios)



P. Si quieres poner alguno...

A. (pensando)

P. Tu lo has dicho al principio: una cosa implicaba la otra. Si usas el nexo "implicar", como por ejemplo, que los "lados iguales implica que los ángulos son iguales", si quieres decir eso, lo dejas como está, lo sobreentenderemos.

A. Pongo flechitas. ¿Algo así?

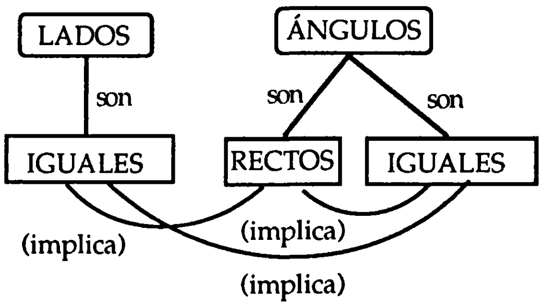
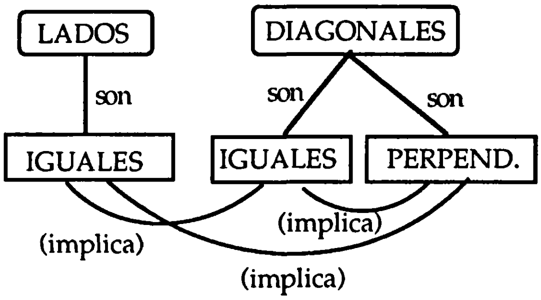


Figura X. 19 Mapa conceptual que muestra las conexiones, establecidas por el estudiante A, entre dos propiedades de dos conceptos secundarios y sus significados.

P. Por lo menos, con ello conectas propiedades que tú crees que están relacionadas.

A. Diagonales iguales... Si los "lados son iguales, las diagonales son iguales y perpendiculares"...



Es que esto (lados iguales) se conecta (se relaciona) con todas (las otras propiedades de los restantes conceptos secundarios)... ¿no? A ver... (pensando y trazando líneas, intentando conectar unas propiedades con otras). ¡Pues ya está!

Algunas de las relaciones que A había establecido no eran válidas nada más que en el cuadrado. Con el fin de explorar esta relación, se le propuso analizar la relación: "lados iguales implican ángulos iguales", mostrando como contraejemplo el rectángulo. Esto condujo a la discusión sobre el significado de las propiedades "Lados iguales" y "lados iguales dos a dos", del concepto secundario lado. Los significados que un estudiante pueda dar a estas dos propiedades tiene su implicación en la consideración de la clase de los cuadrados como un clase de los rectángulos[1] y la generalización de las relaciones de implicación entre las propiedades los lados iguales (a iguales dos a dos) y los ángulos iguales (a iguales dos a dos) de cualquier paralelogramo.

P. Vamos a analizar esta conexión: lados iguales con ángulos iguales. Si los lados son iguales entonces los ángulos son iguales. Miremos en el rectángulo...

A. A ver... (revisando el mapa conceptual del rectángulo) Estas dos propiedades significan lo mismo, más o menos: opuestos iguales e iguales dos a dos...

[1] La consideración de si el cuadrado es o no rectángulo es una situación tradicional en cualquier contexto en el que ambas clases de cuadriláteros tomen partido. Problemas de optimización de áreas de rectángulos, dan lugar a un cuadrado como solución general, o situaciones como las descritas en Puig (1996, p. 107-108) donde se duda de la consideración del caso particular del cuadrado como rectángulo. Este mismo autor relaciona esta situación con el "significado que «rectángulo» ha recibido en la tradición escolar o al sentido que le dan los alumnos como consecuencia de su experiencia con los objetos a los que se nombra habitualmente como rectángulos. En las ocasiones en que hemos substituido en el enunciado del problema «rectángulo» por «acera», este problema no ha aparecido" (p. 102) , aunque es apreciable, en el protocolo de las páginas citadas, que el origen puede encontrarse en el significado que las propiedades de los lados, lados iguales y lados iguales dos a dos, tengan para los estudiantes.

La experiencia que le proporcionó una situación similar con el mapa conceptual del paralelogramo, permite al estudiante A identificar expresiones equivalentes de la misma propiedad que en un principio se daban como diferentes (Mapas A_{31} y A_{32}, Anexo IV)

P. Entonces esto (iguales dos a dos e iguales (los lados)) es realmente una sola propiedad.

A. Entonces pondríamos...

P. ¿Estás diciendo cosas diferentes aquí?, ¿(lados) iguales con (ángulos) iguales; (lados) iguales dos a dos con (ángulos) iguales?

A. Aquí no sería... (dudando). Aquí también serían los ángulos iguales dos a dos. Son rectos..., pero también son iguales dos a dos.

... (entrando en la dialéctica "iguales" con "iguales dos a dos")

El estudiante A está tratando de establecer una relación entre la propiedad de los lados, "iguales dos a dos" con la de los ángulos, "iguales", en el rectángulo, de la misma manera que lo hizo para el cuadrado.

A. Si son iguales los cuatro (lados), pues los ángulos... ¡Jo!, ¡yo que sé!, me estoy liando... (pensando). Sólo sirve para el cuadrado, para el rectángulo no vale (El estudiante A trata de ver la implicación de las propiedades del cuadrado: lados iguales entonces ángulos iguales)... (pensando). El tener ángulos rectos habría que decirlo cuando se dicen las propiedades para que no se confunda con otro cuadrilátero. Aquí no hace falta, con decir "tiene cuatro lados iguales" ya se supone que tienen "ángulos rectos". Si dices que tiene los lados iguales dos a dos no se supone que tiene los ángulos rectos. Hay que decirlo.

P. ¿Qué más conexiones harías?

A. Aquí ya no lo sé... (pensando). Pondría ángulos iguales dos a dos y entonces se uniría esto con esto. (se refiere a lados iguales dos a dos con ángulos iguales dos a dos)

P. Entonces, para ti, ¿iguales no significa que sean iguales dos a dos también?

A. Sí, pero como aquí (mapa del rectángulo) pone iguales (en los ángulos) e iguales dos a dos (en los lados) y aquí (mapa del cuadrado) no...

P. Todo depende de cómo interpretes la igualdad, ¿lados iguales dos a dos implica diferentes dos a dos? ¿Siempre o hay algunos casos?

A. No, iguales dos a dos significa que son p. ej. (señalando los lados del rectángulo) este y este iguales, y...

P. En el ejemplo del cuadrado, (señalando los lados) ¿iguales dos a dos, este no es igual a este?

A. Sí, y aquí también (pausa)... Es que si aquí dices iguales, te refieres a que son los cuatro iguales, no te refieres a que son iguales dos a dos, porque si son iguales dos a dos, podrían ser dos agudos y dos obtusos y ser iguales dos a dos, no todos iguales.

En este momento, el estudiante A no repara en que tiene la prueba para decir que si los lados (de un cuadrilátero) son iguales dos a dos, los ángulos (de ese cuadrilátero) no necesariamente son iguales, es decir, no necesariamente son rectos. Tampoco se da cuenta de que la propiedad de los lados o de los ángulos *iguales*, es un caso particular de la propiedad más general *iguales dos a dos* y que si para ésta, lo que se puede decir es que si *los lados (ángulos) son iguales dos a dos entonces los ángulos (lados) son iguales dos a dos,* como bien reconoce el estudiante A, el hecho de que los lados sean iguales no implica que los ángulos sean iguales o viceversa, como cree el estudiante A.

Algo más claras son las relaciones que establece este estudiante con las propiedades de las diagonales. Las relaciones son de implicación o de consecuencia, como se observa en el siguiente diálogo, en el que, por otra parte, da por finalizado su análisis de las relaciones entre las propiedades de los conceptos secundarios del cuadrado.

> P. ¿Más conexiones?
> A. Diagonales iguales... (pausa, pensando). Que tengan ángulos rectos se supone que tienen las diagonales iguales, y que sean paralelos dos a dos o que tengan los ángulos rectos o iguales implica que se corten las diagonales en los puntos medios.
> P. ¿Hay alguna diferencia entre estas dos propiedades (ángulos rectos o ángulos iguales)?
> A. No.., y ya está.

Las relaciones establecidas por este estudiantes parecen ser obtenidas empíricamente. Los ejemplos son la fuente tanto de las propiedades como de las relaciones. Demostrarlas supondría la vuelta a las figuras.

> P. Otro asunto sería probar estas cosas. Si tuvieras que demostrarme a mi que eso que dices es verdad, ¿cómo lo harías?
> A. Pues... (casi sin dudar, reflexionando), haciendo los dibujos.

Los mapas A_{81} y A_{82} (Anexo IV) representan la organización jerárquica que el estudiante A muestra de los ocho conceptos principales considerados en nuestra investigación.

Las relaciones de inclusión que establece el estudiante A pueden verse reflejadas en el significado que le da a los nexos "algunas veces es" (por *pueden ser*) y "siempre es" (por *es*).

P. ¿Qué significado tiene para ti los nexos "algunas veces es" y "es"?

A. "Es" es que siempre es. El paralelogramo "es" un cuadrilátero porque tiene cuatro lados. En cambio los cuadriláteros pueden ser, éstos, éstos o éstos (señalando paralelogramo, trapecio y trapezoide). Entonces, si es de aquí ya no es de aquí.

P. ¿Entonces tu crees que a una relación del tipo "a veces es" se le opone siempre o casi siempre una relación del tipo "es"?

A. Sí.

P. Porque si un cuadrilátero a veces es un paralelogramos, entonces un paralelogramo es un cuadrilátero ¿no?

A. Sí.

No obstante, el estudiante A incluía relaciones entre clases de cuadriláteros del tipo "a veces es", que merecían ser exploradas con el fin de interpretar qué significado le daba a dicho nexo. Así, por ejemplo, incluía una relación entre las clases Paralelogramo y Trapecio mediante dicho nexo, que no podría esperarse a la luz de los ejemplos que se mostraban en cada uno de los mapas conceptuales construidos.

P. Me gustaría que me explicaras algunas de las relaciones que has escrito. Por ejemplo: paralelogramo a veces es trapecio y trapecio a veces es paralelogramo.

A. (Reafirmándose) Sí.

P. ¿En qué sentido usas este nexo? ¿Cuándo alguna vez un paralelogramo es un trapecio y cuándo alguna vez un trapecio es un paralelogramo? Puedes recurrir a tus mapas o a tus ejemplos si lo deseas.

A. (pensando)... Porque si los lados de este (trapecio), los no paralelos, fuesen paralelos, entonces sería un paralelogramo.

P. ¿Sería un paralelogramo? ¿Es un paralelogramo? o...

A. Algunas veces. Cuando coincide que los lados son todos paralelos, los dos pares de lados paralelos.

P. Entonces, en este sentido, el "algunas veces" es que hay ejemplos de trapecios que son paralelogramos cuando tienen los dos pares de lados paralelos. Ahora al revés, los paralelogramos algunas veces son trapecios.

A. Pues... Cuando uno de los pares de lados paralelos deje de ser paralelo.

P. ¿Es posible eso en los paralelogramos, que deje de ser un par paralelo?

A. No, entonces no sería paralelogramo.

P. Entonces, ¿cómo ves esta conexión?

A. Pues que la relación trapecio con paralelogramo sí es posible, pero la relación paralelogramo con trapecio no.

P. ¿Quieres decir que la flecha esta debería quitarla?

A. Sí.

La visión que tiene de los trapecios se ha vuelto inclusiva. Puede considerar trapecios con más de un par de lados paralelos. Pero al considerar la relación al revés, su visión de los trapecios se vuelve exclusiva, al forzar a los paralelogramos a perder uno de los pares de lados paralelos para poder considerarlo trapecio. Es decir, no tiene formada una posible jerarquía entre los conceptos de Trapecio y de Paralelogramo, lo que le hubiera permitido organizar estos cuadriláteros de esta manera:

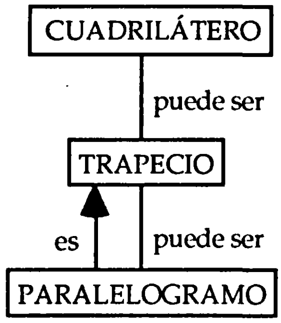


Figura X. 20 Mapa conceptual que muestra una relación inclusiva, establecida por el estudiante A, entre dos conceptos principales y sus significados.

La discusión sobre el nexo "algunas veces es" sigue con los conceptos de Trapecio y Trapezoide.

P. Trapecio y trapezoide.

A. Éstos sí, algunas veces es.

P. ¿Quién es algunas veces quién? ¿El trapecio algunas veces es trapezoide o el trapezoide algunas veces es trapecio?

A. Los dos (muy segura). El trapezoide tiene los cuatro lados desiguales. Cuando dos coinciden, o sea, cuando dos sean paralelos... O sea, no tiene ningún par paralelo, cuando tenga un par paralelo, será trapecio.

P. ¿Puede tener el trapezoide un par de lados paralelos?

A. No, cuando los tenga se llamará trapecio y no trapezoide.

P. Fíjate en la definición que diste de trapezoide.

A. (leyendo la definición). ¿Eso lo he puesto yo?

P. (confirmando su respuesta en el test)

A. Es verdad, es eso (repitiendo la definición)

P. Mira (en el mapa) los ejemplos de trapezoide, ¿por qué no pusiste ejemplos de trapecios?

A. Porque el 5 y el 13 son trapecios pero que no tienen ningún par de lados paralelos. O sea que... (en un mar de dudas). Vale, lo quitamos (pero sin estar muy segura)

P. No, yo no quiero que quites nada, Sólo quiero que me explique lo que significa para ti. Entonces, ¿es verdad que tu crees que un trapezoide es un trapecio en el momento en el que el trapecio no tenga un par de lados paralelos?

A. Sí

P. Entonces, si el trapecio pierde el paralelismo se convierte en un trapezoide y por eso has dicho que los trapecios algunas veces son trapezoides y que el trapezoide, en el momento en el que tenga dos lados paralelos, se convierte en un trapecio. ¿Estoy interpretando correctamente lo que quieres decir?

A. (muy segura) Sí.

P. ¿Esto significa que alguno está contenido en el otro o que tienen ejemplos en común?

A. No (también muy segura)

P. ¿Cómo lo ves ahora?

A. ¿Quitamos entonces esta relación?

P. ¿Por qué?

A. (reflexionando) Espera el trapecio... Vale, pues nada lo quitamos (deshaciéndose de los razonamientos anteriores). Es que no es, porque lo que caracteriza al trapecio es tener dos lados paralelos y al otro (trapezoide) ninguno, así que no tiene que ver una cosa con la otra.

P. ¿Entonces esta relación?

A. Se tacha (ya convencido)

P. ¿Cómo afecta esto ahora a tu definición de trapecio?

A. Cambiaría trapecio por cuadrilátero.

Razonando con y en los mapas conceptuales respectivos, este estudiante convirtió las clases de Trapecio y Trapezoide en clases disjuntas, cuando inicialmente pensaba que eran clases no disjuntas.

La discusión sobre el resto de relaciones en las que intervenía el nexo "algunas veces es" la llevó a cabo teniendo en cuenta las experiencias anteriores.

A. (después de la experiencia anterior decide eliminar todos los algunas veces es que están en cursiva en su mapa original)

P. ¿Quieres decir que el romboide algunas veces no es rombo?

A. No. Veamos, el romboide si que puede ser rectángulo y puede ser rombo y puede ser cuadrado.

P. Mirémoslas al revés.

A. ¿Si el rombo puede ser romboide?

P. Sí. Tienes otras opciones.

A. No es.

P. ¿Por qué escoges esta?

A. Por que el rombo tiene cuatro lados iguales, que son iguales dos a dos y el romboide tiene iguales dos a dos Entonces esto sería al revés, que el romboide a veces es rombo.

P. Correcto, esto ya lo teníamos.

A. Pero el rombo con el romboide... Bueno, que el rombo tiene los cuatro lados iguales y el romboide no los tiene iguales. Entonces no puede tenerlos desiguales el rombo para ser romboide, aunque tenga los ángulos iguales dos a dos, igual.

P. Entonces, ¿mantienes que no es?

A. Sí.

P. ¿Y las que nos quedan?

A. Cambiamos a "no es"

P. ¿Y este grupo (formado por el rectángulo, rombo y romboide) con trapecio y trapezoide?

A. También a no es.

P. ¿En qué sentido pusiste "a veces es" en los dos sentidos?

A. Porque supuse que si el romboide algunas veces es rectángulo, el rectángulo algunas veces sería romboide.

La serie de mapas conceptuales asociados al estudiante A, parece que sí representaban la manera en la que este estudiante había organizado sus conocimientos sobre cuadriláteros. Además, el hecho de que éstos estuvieran representados, le facilitó la tarea de pensar sobre ellos. Así, por ejemplo, ha resultado significativo el cambio en el tipo de relación existente entre paralelogramo y simetría, al cambiar el significado de la proposición inicial "el paralelogramo es simétrico" por "el paralelogramo puede ser simétrico". Encontrar el nexo adecuado que estableciera la proposición verdadera, no resultó evidente que iniciaba su razonamiento en el nivel 3 de van Hiele.

Un estudiante, con este nivel de razonamiento, no estableció conexiones entre propiedades de conceptos secundarios de manera explícita y consciente, aunque luego se ha comprobado que parte de ello es debido a un defecto en el ítem del test que pretendía esto mismo de los estudiantes. En la entrevista clínica resultó que a indicación del entrevistador, el estudiante establece dichas conexiones. Es decir, el estudiante pudo reconocer que existía algún tipo de relación, pero le costó, por no ser evidente, establecer, de un modo preciso, el tipo de relación y el nexo que daba significado a esa relación. Ocurrió, también, que nexos expresables con la misma palabra, tenía significados diferentes para el estudiante, dependiente de la relación establecida.

Resultó, también, que, para estudiantes con una adquisición no completa del nivel 3 de razonamiento, aunque sí de los dos primeros, hay dificultades de comprensión de las propiedades particulares derivadas de otras más generales. Decir de algún concepto secundario que tiene la propiedad de la igualdad, no significa que se comprenda como un caso particular de la propiedad más general igualdad dos a dos.

Por otra parte, resultó que, para este estudiante, las relaciones: "... a veces es ..." y "... es... ", son comprendidas en niveles jerárquicos consecutivos. Esto es, es capaz de clasificar de manera inclusiva algunos cuadriláteros de los que hemos usados en nuestra investigación.

X.2.2 *El caso del estudiante L*

La descripción del estudiante L es similar a la del estudiante A, si nos referimos a su situación académica. Difieren en sus grados de adquisición de los diferentes niveles de razonamiento, ya que L demostró, en la primera parte del test, un razonamiento descrito por el vector (C,A,I,N). Según esto, L no tenía del todo adquiridas las habilidades de razonamiento del 2º nivel de van Hiele, aunque demostrase, puntualmente, razonamiento del tercer nivel.

La serie de mapas conceptuales correspondientes al estudiante L, antes de realizar la entrevista, pueden verse en el Anexo IV codificados como L_{i1} con i= 1, 2, ..., 9. Los que corresponden al trabajo durante la entrevista, L_{i2}, con i= 1, 2, ..., 9. Estas series constan de nueve mapas cada uno, uno por cada concepto principal estudiado, siete, y uno para cada uno de los dos mapas conceptuales que representan la organización jerárquica que L tenía sobre dichos siete cuadriláteros.

Comparando los mapas conceptuales de ambos estudiantes, pueden apreciarse las capacidades de ambos a la hora de considerar una o más de una de las posibles propiedades de cada uno de los conceptos secundarios y los nexos utilizados para dar significado a las propiedades del concepto principal. Esto supuso que la entrevista llevada a cabo con el estudiante L, tomase otra dirección distinta a la que se tuvo con el estudiante A: clarificar significados en las propiedades de los conceptos secundarios y en los nexos usados para esas propiedades.

Después de introducir el objetivo y organización de los mapas, propusimos a L revisar algunas de las propiedades que había incluido en sus respuestas al test escrito y que habíamos organizado mediante mapas conceptuales.

P. (Presenta el mapa al estudiante L, lo comenta y le indica cómo leerlo y lo que puede hacer en él). Por ejemplo, por empezar por algún sitio. Dices que el paralelogramo tiene dos diagonales que son interiores y que se cortan en el punto medio (algunos). ¿Qué significa para ti este algunos? ¿Con este algunos a qué te estás refiriendo?
L. Pues que no en todos los paralelogramos sus diagonales se cortan en el punto medio.
P. En estos ejemplos de aquí (se le muestra los ejemplos de paralelogramo), ¿en cuáles se cortaría sus diagonales en el punto medio y en cuáles no?
L. Por ejemplo, en el rectángulo sí que se cortarían.
P. Sí, ¿los señalo? Venga.
L. En el rombo también... en el cuadrado también... (pensando), en el trapecio también...
P. ¿Cuáles son los trapecios?
L. Estos (seguro de sí mismo)
P. (señalando los romboides 8 y 9). El 8 y el 9, ¿no?
L. Sí... (pausa, pensando)
P. Aquí tienes un lápiz. Sobre estos mapas, recuerda que puedes intervenir como quieras y cuanto quieras.
L. ... (como si no tuviese claro qué está pasando). Es que es en todos en los que se cortan (las diagonales) en el punto medio.
P. Entonces, puedes eliminar del mapa lo que no te interese.
L. Pues lo de "algunos".

Este primer contacto con los mapas conceptuales permitió al estudiante L aclarar el significado de algunas propiedades que introdujo, como la simetría.

P. Veamos esta parte del mapa que me interesaría que lo aclarases.
L. ¿Lo de la simetría?
P. Sí.
L. ¿Leo?
P. Sí.
L. Si se traza un eje de simetría las dos figuras son simétricas, tanto en sus ángulos como en sus lados.
P. Esto no he sabido cómo interpretarlo. No he podido averiguar si el paralelogramo es simétrico o no lo es. (intenta trabajar en el mapa). Realmente lo que se trataría es de ver si puedes conectar el concepto secundario simetría con el concepto principal paralelogramo, que dé lugar a una frase (proposición) que tu consideres válida.

L. Pero es que hay algunos que si que son simétricos. Si se les traza un eje de simetría...

P. ¿Por ejemplo?

L. El cuadrado, rectángulo.. Figuras 1, 2, 6, 11, 12 y... ya está.

P. Entonces, ¿qué dirías de la simetría del paralelogramo?

L. Pues que hay figuras que si se les traza un eje de simetría, son simétricas; algunas, no todas.

P. Entonces, si tienes que conectar ambos conceptos, ¿qué nexo pondrías aquí?

L. Pues que "algunos son" simétricos (trazando en el mapa)

Este estudiante asociaba paralelogramo con lados paralelos. El resto de propiedades de los conceptos secundarios, son propiedades asociadas a partir de los ejemplos que consideraba. En el primero de los casos, el nexo es fuerte, "deben ser". En el segundo, el nexo es débil, "pueden ser".

P. Por cierto, ¿por qué utilizas (en la propiedad de los lados) el nexo <u>deben ser</u>?

L. Porque es la característica fundamental de los paralelogramos.

P. Es que antes ibas a decir otra cosa. Al decir de los lados, habías utilizado <u>son</u> y, me parece a mi, al leer en el mapa "deben ser", has cambiado. ¿Esa obligación es necesaria?

L. Sí, porque si pongo "pueden ser", estaría hablando de otra figura y no de los paralelogramos.

El estudiante L reconoce, aparentemente sin demasiada dificultad algunas relaciones entre las propiedades de los conceptos secundarios del paralelogramo.

L. Si los lados son paralelos, los ángulos de los lados paralelos son iguales.

P. Entonces, (en el mapa de paralelogramo) conectas esto con esto ¿no?

L. Sí, (trazando la conexión)

P. ¿Cómo puedes conectar estas dos propiedades?

L. Podemos decir que, "cuando una figura tiene sus lados paralelos (dos a dos), sus ángulos son también iguales dos a dos"

P. Algo así (escribiendo la proposición anterior, sin poner el nexo)

L. Tener lados paralelos dos a dos <u>hace que</u> sus ángulos sean iguales dos a dos.

P. Este nexo, "hace que", indica una consecuencia de que si esto (paralelos dos a dos), entonces esto (ángulos iguales dos a dos)

L. Sí.

P. (de acuerdo con L) Usemos <u>entonces</u>, ¿te parece?

L. Bueno (trazando la conexión y el nexo)

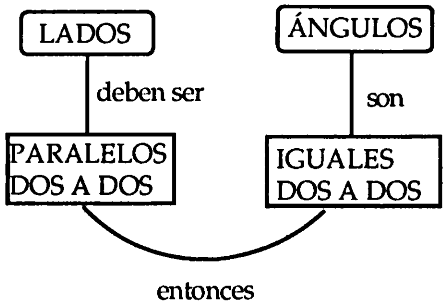
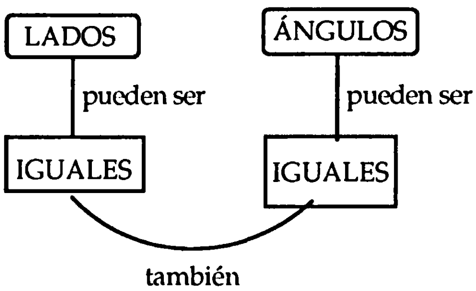


Figura X. 21 Mapa conceptual que muestra las conexiones, establecidas por el estudiante L, entre dos propiedades de dos conceptos secundarios y su significado.

L. (pensando) Bueno, lo mismo ocurre con esta: cuando los lados son iguales, los ángulos también son iguales.

Esta posible relación también la había obtenido el estudiante A, pero en un contexto diferente al que se mueve L. A, estaba en el mapa conceptual del cuadrado; L está en el mapa conceptual del paralelogramo.

P. ¿Nexo que vas a poner?
L. (trazando y escribiendo) También son iguales.



L. Vale, y ahora las diagonales... (pensando, en una pausa muy larga). Como hemos quitado "algunos", ¿pongo "siempre"? (queriendo decir que las diagonales de un paralelogramo "siempre" se cortan en el punto medio) o ¿no hace falta?
P. (Explica el significado de la propiedad que se ha establecido con anterioridad). Lo que has puesto ahí (el "paralelogramo tiene dos diagonales que se cortan en el punto medio") es una propiedad de todos estos paralelogramos que son tus ejemplos.
L. Sí (aceptando lo dicho)... Podemos decir que cuando los lados son paralelos, siempre sus diagonales son interiores (trazando la conexión entre ambas propiedades)
P. Esto es una conexión entre dos propiedades, ¿qué nexo pondrías, entonces, también?
L. Sí

P. Lo que acabas de conectar se traduce en una proposición que se enunciaría: el paralelogramo tiene dos pares de lados, que deben ser paralelos y siempre...

L. Tienen diagonales interiores...(trazando la conexión y el nexo)

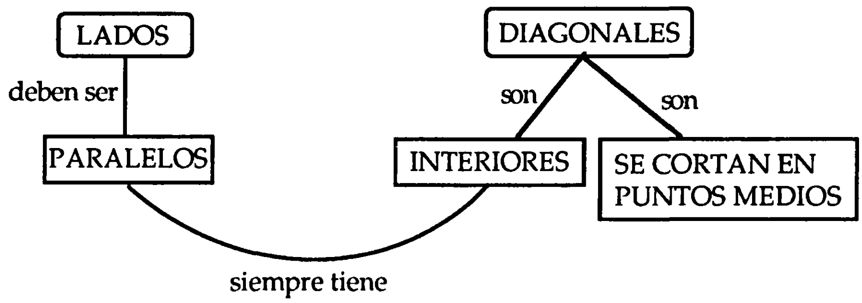


Figura X. 22 Mapa conceptual que muestra las conexiones, establecidas por el estudiante L, entre dos propiedades de dos conceptos secundarios y su significado.

P. Vale.

L. Que se cortan en el punto medio de las dos...

P. Esta consecuencia de ser paralelos (siempre) las diagonales son interiores, ¿es una consecuencia del hecho de ser los lados paralelos o se debe a otra consecuencia cualquiera? Porque has mencionado que también quieres conectar esto (punto medio de las dos)

L. Sí... (pensando)

P. Técnicamente lo puedes hacer, sacando una conexión de la que ya tienes y que relaciona el paralelismo de los lados con las diagonales interiores.

L. Sí (pensando) Entonces ¿podemos hacerlo así?

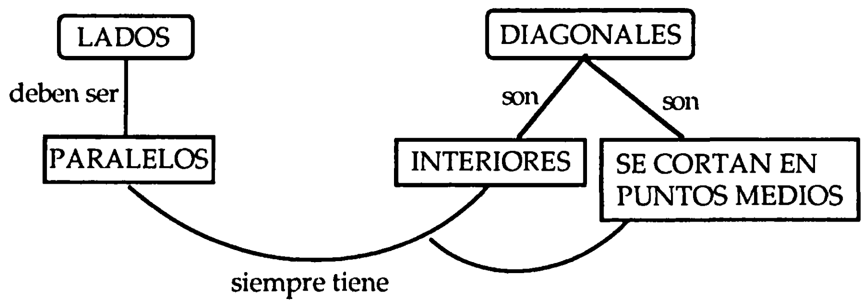


Figura X. 23 Mapa conceptual que muestra las conexiones, establecidas por el estudiante L, entre más de dos propiedades de dos conceptos secundarios y sus significados.

Independientemente del tipo de relaciones que L estaba estableciendo, por más o menos significativas para el concepto principal, L apreciaba la información que le podía proporcionar el mapa conceptual para este cometido.

P. ¿Alguna vez, con anterioridad, habías pensado que las propiedades se podrían conectar unas con otras?

L. No...

P. Entonces, el motivo de construir las conexiones que has escrito ha sido que yo te lo he dicho...

L. No, porque ahora lo veo más claro así.

P. ¿Con el mapa y los ejemplos?

L. Con el mapa

P. Esto te permite relacionar unas propiedades con otras.

L. Sí.

Al proponer a L establecer relaciones entre las propiedades de los conceptos secundarios en el mapa conceptual del cuadrado, aparece la dialéctica, que también se dio en el estudiante A, entre las propiedades de los ángulos y los lados, *iguales dos a dos* e *iguales*.

L. Vale... Sobre las diagonales del cuadrado..., pues que tiene dos diagonales (pone el nexo que falta en el mapa)... (pensando). Aquí, puede ser que son iguales o son iguales dos a dos (propiedad de los lados).

P. Tu verás...

L. ¿No la puedo incluir?

P. Sí. Entonces, ¿cambiarías esta parte de tu mapa? ¿Por qué la cambiarías? Puedes hacerlo aquí... ¿Qué quieres decir de los lados (del cuadrado)?

L. Que son iguales o que son iguales dos a dos. Es que... (queriéndose explicar)

P. ¿Qué diferencia hay, para ti, entre iguales o iguales dos a dos, en el cuadrado?

L. ... (pensando) También es válido. Se puede decir (la propiedad) de las dos formas.

P. Pero, ¿te está refiriendo a lo mismo?, ¿a la misma propiedad?

L. Sí.

P. ¿Qué propiedad es esa?

L. De los lados (del cuadrado)

P. Por ejemplo, fíjate aquí (un ejemplo de cuadrado). Si yo me refiero a que los lados son iguales dos a dos, me estoy refiriendo a que este es igual que este (señalando los pares de lados que son iguales) y que este es igual que este, en el rectángulo. Pero si quiero referirme a los cuatro lados iguales, digo que los lados son iguales, como lo tienes aquí, como tú lo has puesto (en el mapa).

L. Vale, estoy de acuerdo, lo dejamos así... (sigue leyendo el mapa)

...

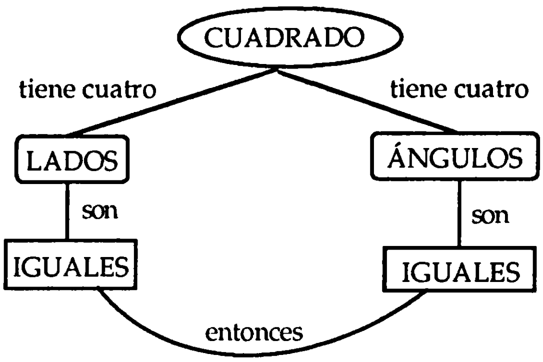
En principio, la distinción entre la propiedad general de los lados de un cuadrilátero, "iguales dos a dos", y la propiedad particular, "iguales", está actuando como un obstáculo en el razonamiento del estudiante L.

P. Tenemos pendiente establecer relaciones. ¿Conectarías algunas de las propiedades?

L. ...(pensando) Pues que "los lados iguales hacen que también los ángulos sean iguales" y "los ángulos iguales... (iba a decir algo y se arrepiente) No. Vale... (une ambas propiedades y pregunta) ¿Tengo que poner un nexo?.

P. (haciendo que L busque un nexo) Al conectarlos estás diciendo que el cuadrado tiene cuatro lados iguales, tiene cuatro ángulos... e ibas a decir algo sobre los ángulos en relación con los lados...

L. Que son iguales o deben ser iguales..., "entonces" (este es el nexo que escoge para unir ambas propiedades y lo introduce en el mapa).



La proposición válida es "lados iguales dos a dos implica ángulos iguales dos a dos", pero la restricción "lados iguales implica (entonces) ángulos iguales", mucho más intuitiva, es falsa para cualquier cuadrilátero, lo que no resulta evidente para estos estudiantes que demuestran nivel de razonamiento intermedio del nivel 3.

P. Cuando piensan en estas relaciones y dices que "el cuadrado tiene cuatro lados que son iguales y entonces los ángulos son iguales, ¿en base a qué haces estos juicios o piensas en estas relaciones? ¿Donde te fijas para ver que esto es verdad?

L. En la figura.

P. ¿Lo confirmas en la figura?

L. Sí...

Confirmar la veracidad de una proposición en un ejemplo genérico sí está descrito por el grado de adquisición del nivel 3 que demuestra este estudiante.

P. Y si te mostrara un ejemplo en el que la proposición anterior no es verdad ¿qué pasaría?

L. (sin entender demasiado la idea del contraejemplo) ¿que no se cumplieran estas propiedades?

P. No. Por ejemplo, que haya un cuadrilátero que tiene los cuatro lados iguales, pero los ángulos no todos iguales.

L. (repitiendo la propiedad anterior) .... que haya un cuadrilátero que tiene los cuatro lados iguales, pero los ángulos no todos iguales... (pensando y sin creérselo)

P. ¿Podría tener algún caso de estos?

L. ... (sonríe ante la situación creada, dando la impresión de que no tiene respuesta)...

P. ¿Recuerdas alguno?

L. No

P. Vale. Podemos seguir adelante, si no quieres decir nada más.

L. Esta barbaridad (refiriéndose a la propiedad de los lados del rectángulo)

P. ¿Por qué?

L. Porque ... El rectángulo tiene sus lados... no son todos... Bueno, (con muchas dudas) son... Si ponemos la propiedad que he dicho antes de los lados que pueden ser iguales o iguales dos a dos...

P. Estábamos hablando del cuadrado..

L. Ya, pero como tú me habías preguntado antes si me dieses una figura cuyos lados no fuesen iguales... (el contraejemplo de antes)... El rectángulo sus lados son iguales dos a dos y sus ángulos son iguales...

P. Sí, es verdad.

L. Entonces, si cogemos el nexo (por propiedad) de que son iguales dos a dos que es lo mismo que iguales, si que se cumple (el contraejemplo?)

P. Aprecio que existe una contradicción en lo que dices... Porque quieres ver la propiedad "iguales dos a dos" como "iguales" y por otra parte, "iguales dos a dos" pero "no todos iguales"... depende de algunas cosas. ¿Esto último se podría dar en el cuadrado?

L. No

P. Entonces, si miro en el cuadrado "lados iguales" he de entender que son los cuatro lados iguales. La pregunta de antes se refiere a la conexión que, en pocas palabras dice, "lados iguales implica ángulos iguales". Mi pregunta era que si podríamos encontrar algún cuadrilátero en el que todos los lados fueran iguales, pero los ángulos no todos iguales.

L... (piensa..) No (responde casi convencida)

P. No existe, no tienes ningún ejemplo...

L. No

....

En este pasaje de la entrevista se comprueba la dificultad de este estudiante por establecer la proposición verdadera, quedándose con la más intuitiva, "lados iguales implica (entonces) ángulos iguales", pero falsa.

La discusión sobre la distinción entre lados iguales dos a dos y lados iguales continua, ya que es clave en el razonamiento de este estudiante.

P. Veo que incluyes el cuadrado como rectángulo. ¿Quieres añadir algo al mapa?

L. (Leyendo)... Tiene cuatro lados que pueden ser iguales dos a dos.... (piensa)...

...

P. Fíjate en este nexo, ¿por qué pones que pueden ser (lados iguales dos a dos)?

L. Porque... (leyendo el trozo de mapa)

P. Este iguales dos a dos, ¿en qué sentido lo pones, en el del ejemplo 11 (rectángulo no cuadrado) o en el 6 (cuadrado)?

L. En el del 11... Es que se pueden tomar, creo, tanto como para el 11 como para el 6. Es que yo creo que se está diciendo lo mismo si se dice que tiene los lados iguales o iguales dos a dos.

P. ¿Se dice lo mismo o tu lo usas en ese sentido?

L... (no contesta)

P. Veamos otro caso. El rombo. ¿Que dices de los lados?

L. Que tiene cuatro lados y que son iguales (leyendo en el mapa)

P. Estos son tus ejemplos de rombo. ¿En qué sentido usas la propiedad aquí?

L. Es que en este caso del rombo es cierto decir que son iguales o iguales dos a dos. En cambio aquí, en el rectángulo, si dices que son iguales... No, tienen que ser iguales dos a dos, no pueden ser iguales. Tienen que ser iguales dos a dos. Pero, por ejemplo, en el cuadrado, da lo mismo decir que sean iguales o que sean iguales dos a dos, porque también es cierto.

P. Ya. Una de las posibilidades, a ver si logro entenderte, que tengo al leer la propiedad iguales dos a dos es que puedan ser iguales.

L. Sí.

P. Entonces, ¿tendrás que cambiar algo en tus mapas?

L. En el rombo, habrá que poner iguales dos a dos.

P. El nexo "pueden ser" ¿en qué sentido puede funcionar aquí?

L. A ver.. "tienen cuatro lados... pueden ser..."

P. En los ángulos sí que lo dices, "pueden ser iguales dos a dos o iguales". Y aquí, dices que pueden ser iguales y nada más. Entonces, ¿debo entender que pueden ser iguales dos a dos o iguales..?

L. No, es que aquí está mal. Deber ser iguales dos a dos.

P. Como una obligación.

L. Sí

P. Pues cambia el nexo tú misma.

L. (Actúa sobre el mapa, haciendo correcciones)

P. ¿Estás convencida de todo ello?

L. Sí.

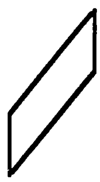
...

L. Aquí podría poner (haciéndolo) pueden ser iguales o iguales dos a dos.

P. ¿Que quieres decir ahora con iguales dos a dos? Que este es igual que este y que este es igual que este (en el ejemplo 2)

L. Sí.

P. Entonces, ¿este ejemplo es un rombo para ti? (Dibujando el romboide:



L. Si nos basamos en esta característica, sí.

P. Vale, entonces interpretas esta propiedad para estos casos, ¿no?

L. (pausa.. y no contesta)

P. (a vueltas con la distinción entre iguales dos a dos e iguales...)

.....

P. Entonces (para el rombo) los lados pueden ser iguales dos a dos o iguales, lo dejamos, ¿No? (L, asiente)

No sólo L tenía dificultades para ver qué relación existe entre una propiedad general, en los lados o en los ángulos, *iguales dos a dos* y su restricción a *iguales*, sino que mostraba ciertos errores conceptuales en relación con conceptos secundarios. Este era el caso de la simetría en los cuadriláteros.

Como podemos observar en los mapas conceptuales L_{i1}, para i= 1, 2,..., 7, la simetría no está presente en casi ninguno de ellos, si exceptuamos en el rombo. La razón, por una parte, se debió a que, en las respuestas al test escrito, no pudimos apreciar hasta qué punto L incluía la simetría y sus propiedades, fundamentalmente el número de ejes de simetría, en forma de proposiciones significativas, desde la perspectiva de L, sobre el concepto principal (ver el primer pasaje de la entrevista). De otra, porque en aquellos casos en los que sí lo hizo, la respuesta no constituía realmente una proposición que pudiera ser organizada en el mapa como hemos hecho en los casos restantes.

L. ¿Del cuadrado...? Sobre la simetría.

P. A ver, explícame esto de la simetría.

L. Pues que si se traza un eje de simetría, las figuras (las que resultan) son iguales, son simétricas.

P. ¿Son iguales o son simétricas...? ¿Qué figura es simétrica?

L. El cuadrado

P. ¿Por qué es simétrica?

L. Porque trazando un eje de simetría..., resulta una figura... (duda) que... a, doblar es la misma... (no alcanza a explicarlo, piensa)... coinciden las dos partes.

P. Entonces, el cuadrado ¿es simétrico o no lo es?

L. Sí. (incluye en su mapa, la parte correspondiente a la simetría)

P. Referente a los ejes de simetría, ¿quieres decir algo más?

L. Sí. Es simétrico si se traza un eje de simetría.

P. ¿Seguro? Si el eje de simetría no está ¿ya no se es simétrico?

L. No, también lo es.

P. Entonces, es simétrico (L. afirma con la cabeza). Entonces me podrás decir algo de los ejes de simetría... Por ejemplo, ¿cuántos tiene?

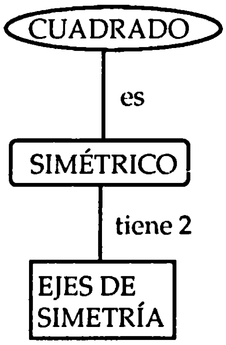
L. Dos

P. ¿Son?

L. (Dibuja las perpendiculares a los lados en los puntos medios)

P. ¿Cómo podríamos incorporar esto al mapa?

L. Construye el siguiente trozo de mapa:



Esta visión que L tiene de la simetría de algunos cuadriláteros, le impide relacionar propiedades de los conceptos secundarios diagonal y simetría. Así, por ejemplo, inicialmente L pensaba en el rombo (Mapa L_{41}, Anexo IV) como un cuadrilátero simétrico, con dos ejes de simetría que eran sus diagonales.

P. (Haciendo que se fije en el mapa que corresponde con las diagonales) ¿está de acuerdo con el nexo que hay?

L. En vez de son, pueden ser.... (incluyéndolo en el mapa) Además, falta el nexo es en la simetría.

P. En la simetría del rombo relacionas los ejes de simetría con las diagonales, ¿me lo puedes explicar?

L. Sí, que no es cierto.

P. Entonces, ¿quieres modificar algo...?

L. Pues que las diagonales no son ejes de simetría... Entonces, pongo que es simétrico y que tiene 2 ejes, pero esta conexión no es verdad.

El estudiante L organizó los cuadriláteros, antes de la entrevista, en tres niveles jerárquicos. La clase más inclusiva, Cuadrilátero contenía a las clases, disjuntas entre si, Paralelogramo, Trapecio y Trapezoide, estableciendo claramente la jerarquía al oponer al nexo "algunas veces es", con el que organiza el primer nivel jerárquico, el nexo "es" (Mapa L_{81}, Anexo IV). El segundo nivel jerárquico, con el que organiza las clases de cuadriláteros Cuadrado, Rectángulo, Rombo y Romboide, como subclases de la clase Paralelogramo, presenta una relación de inclusión en la que se oponen los nexos "siempre es", en ambos sentidos. Esta conexión en el mapa es reconocida como errónea por L.

> L. Es que eso está mal. Quería decir algunas veces es... (modificando el nexo en el mapa de relaciones)

Dejamos que L interviniese en el mapa de relaciones, modificando o introduciendo los nexos que estimase oportuno, dando lugar a los mapas L_{82} y L_{92}, que pueden verse en el Anexo IV. No llamó la atención que, inicialmente viese la clase Cuadrado y la clase Rectángulo como clases disjuntas, cuando había incluido ejemplos del cuadrado como ejemplos de rectángulo en sus mapas conceptuales. Al intervenir en el mapa L_{82}, se dio cuenta de que ambas clases de cuadriláteros no las había relacionado, por lo que las conecta e introduce el nexo "algunas veces es", en ambos sentidos.

> P. ¿Por qué conectas el cuadrado y el rectángulo con el nexo algunas veces es...? ¿Me lo puedes explicar?
> L. Depende de las característica en las que nos basemos. Porque si solamente nos basamos en los lados y en los ángulos, siempre son, tienen lo mismo el cuadrado y el rectángulo. Pero si nos fijamos en las diagonales, por ejemplo, ahí está la diferencia para que uno sea cuadrado y el otro rectángulo.
> P. Luego entonces está de acuerdo en qué algunas veces los rectángulos son cuadrados.
> L. Sí, depende de en qué te fijas. Si solamente te fijas en los lados y en los ángulos, pues sí, un cuadrado y un rectángulo tiene las mismas características en los lados y en los ángulos. Pero si te fijas en las diagonales, ves diferencias, uno es un cuadrado y el otro es un rectángulo.
> P. ¿Por eso la conexión al revés también has puesto que el cuadrado algunas veces es rectángulo.
> L. Sí.

Los dos estudiantes que nos han ayudado en nuestra investigación, presentan perfiles de razonamiento parecidos, descritos, respectivamente, por los vectores (C, C, I, N) y (C, A, I, N). Excepto por el grado de adquisición del 2º nivel de van Hiele, los demás grados de adquisición son semejantes. Este hecho no ha implicado comportamientos parecidos a lo largo de las entrevistas realizadas.

Así, el estudiante A, con un perfil de razonamiento dado por el primer vector, se ha mostrado dispuesto a mejorar en el proceso de aprendizaje que se ha producido a lo largo de la entrevista. De una parte, en su nivel de razonamiento, con la formulación de proposiciones válidas sobre los diferentes conceptos principales considerados y, de otra, en su estructura cognitiva en relación con los conceptos de cuadrilátero estudiados (Mapas A_{i2}, Anexo IV), es decir, en la manera en la que ha estructurado el conocimiento que ya poseía con el nuevo que ha construido.

Por otra parte, el estudiante L, con el segundo vector como descriptor de su perfil de razonamiento, ha usado la mayor parte de su razonamiento en la clarificación de las propiedades de los conceptos secundarios, y no tanto en el establecimiento de las relaciones válidas y significativas entre propiedades de dichos conceptos secundarios. Naturalmente que se ha producido una mejora tanto en la adquisición del nivel 2 de razonamiento y en su estructura cognitiva o en su organización del conocimiento sobre cuadriláteros, pero más como consolidación del conocimiento y del razonamiento que poseía que como ampliación y extensión de ese conocimiento.

La diferencia en los comportamientos puede explicarse o bien por el grado de adquisición del nivel 2, lo que significaría que la distinción entre adquisición Alta y Completa de un nivel de razonamiento es más significativa de lo aparentemente pueda parecer, o bien que la información que se desprende de los perfiles de razonamiento no es suficiente como para garantizar comportamientos análogos en el aprendizaje de los estudiantes que comparten perfiles de razonamiento parecidos o descritos por el mismo vector.

CAPÍTULO XI

Conclusiones acerca de las relaciones entre los niveles de van Hiele y los Mapas Conceptuales: El caso de los cuadriláteros

Conclusiones acerca de las relaciones entre los niveles de van Hiele y los Mapas Conceptuales, en el caso de los cuadriláteros.

La segunda parte de nuestra investigación tiene como objetivo prioritario analizar los niveles de van Hiele con la ayuda de los mapas conceptuales. Si éstos son una representación esquemática de la manera en la que un estudiante organiza el contenido geométrico en su mente, ¿podemos relacionar esta organización con el grado de adquisición de un nivel de razonamiento?

Uno de los puntos sobre los que se asienta la visión constructivista del aprendizaje, descritos en Romberg (1993), es el siguiente:

> "Mientras que los humanos son capaces de recordar una gran cantidad de cosas, tienen en cambio una capacidad extremadamente limitada de pensar sobre diferentes cosas al mismo tiempo. Como consecuencia de esta capacidad limitada, la información almacenada en la memoria a largo plazo debe estar organizada. La mente organiza, de manera natural, en la memoria a largo plazo repetidas experiencias semejantes, en lo que los psicólogos llaman "esquema". Los esquemas son complejas redes de conceptos, reglas y estrategias, hechos o procedimientos no aislados" (Romberg, 1993, pág. 103)

Es posible que los mapas conceptuales de los estudiantes sean representaciones de sus esquemas, sobre todo si entendemos por tales "la compleja red de conceptos, reglas y estrategias, hechos o procedimientos no aislados" que comportan. En los mapas se representan redes de conceptos y hechos no aislados para los conceptos que se presentan. La mayor o menor complejidad del mapa de un estudiante puede hacernos ver la organización de su esquema.

Del análisis de los resultados de la construcción de los mapas conceptuales de los estudiantes, en relación con los objetivos de nuestro trabajo, podemos extraer las siguientes conclusiones:

- A pesar de que los mapas conceptuales son idiosincrásicos, puede verse como un estudiante con un perfil de razonamiento dado estructura el contenido geométrico. Así, podemos decir que, para estudiantes con un perfil de razonamiento dado por su adquisición no completa de los dos primeros niveles de van Hiele, el proceso comienza con el reconocimiento de los ejemplos (válidos o no) asociados al concepto principal y con la asociación débil de una propiedad de alguno de los conceptos secundarios con el concepto principal. Esta asociación débil supone que la propiedad del concepto secundario no es relevante para discriminar ejemplos negativos del concepto principal (ver mapa del cuadrado de RL9 y E13, y del paralelogramo de E13).

A medida que el perfil de razonamiento mejora, perfil que viene dado por una adquisición alta del primer nivel y baja del segundo nivel de van Hiele, la asociación entre algunas propiedades del concepto secundario y el concepto principal es más fuerte. Esto puede suponer que dichas propiedades quedan incorporadas al esquema del estudiante y las usa para discriminar ejemplos y para decir cosas sobre el concepto principal, probablemente a partir de esos ejemplos. Así, en el cuadrado, es relevante la propiedad de la igualdad en lados, ángulos y diagonales (mapa del estudiante E6), mientras que en el paralelogramo es relevante el paralelismo de los lados, independiente de la cantidad de pares de lados paralelos, (mapa del estudiante E13).

Si el perfil de razonamiento demuestra una adquisición alta del primer nivel e intermedia, al menos, del segundo nivel de razonamiento, la capacidad de asociar propiedades de los conceptos secundarios con el concepto principal aumenta, tanto en el número de propiedades de los conceptos secundarios, como en el número de conceptos secundarios de los que se pueden decir propiedades. Por ejemplo, es posible tener en cuenta, a la vez, propiedades de los lados que se refieran al paralelismo y a la longitud; a la igualdad y medida de los ángulos; a las diagonales y el aspecto de las mismas e incluso, mencionar si poseen o no simetría. Generalmente, la manera en la que se gestionan estas propiedades, y por tanto demuestran probablemente de qué forma se estructuran en la mente de los estudiantes, queda reflejada en los nexos con los que se han representado en el mapa. Las propiedades las tienen los conceptos principales, pero se exponen diciendo cómo son los conceptos secundarios. Cuanto más inclusivo sea el concepto principal, caso del paralelogramo por ejemplo, las propiedades de los conceptos secundarios (simetría, por ejemplo) que exigen un nexo menos exigente, "pueden ser", "pueden tener", rara vez se mencionan, dando a entender que dichas propiedades no están presentes en el concepto principal. Es posible que el perfil de razonamiento deseado sea mejor que el que demuestran estos estudiantes.

Una de las habilidades de razonamiento que presentan puntos de vista diferentes entre los investigadores, es la capacidad de realizar clasificaciones inclusivas entre las distintas clases de cuadriláteros y la manera en la que dichas clasificaciones se describen en términos de nexos como "algunas veces es", "nunca es" o "siempre es". Generalmente se acepta que los estudiantes cuyo perfil de razonamiento muestra una adquisición alta o completa del nivel 2, no admiten la inclusión en clases entre diversas familias de figuras, por ejemplo con los cuadriláteros.

El análisis de los mapas de relaciones nos permite concluir lo siguiente:

- No hay una manera estándar de organizar los cuadriláteros que pueda asociarse con un perfil de razonamiento.

- En general, cuando un estudiante interpreta que entre dos clases de cuadriláteros existe alguna relación, usa los nexos "siempre es" o "algunas veces es" o "puede ser", de manera indiscriminada, para poner de manifiesto que él encuentra algún tipo de relación. En muchos casos, esos nexos no tienen el mismo significado que el que tienen para las matemáticas: "incluido en" o "se clasifica en", dándose la circunstancia de que, dependiendo de las clases de cuadriláteros que se están relacionando, los significados, para un mismo nexo, pueden ser contradictorios. Así, por ejemplo, estudiantes con un grado de adquisición bajo del nivel 2 pueden establecer relaciones de inclusión total como: «El paralelogramo *puede ser* cuadrado», a la que le sigue, «el cuadrado *siempre es* paralelogramo» y, al mismo tiempo establecer que «el cuadrado *puede ser* rombo» y que «el rombo *puede ser* cuadrado», relacionando con el nexo "nunca es" el cuadrado y el rectángulo.

- Hemos encontrado pocas evidencias de estudiantes que con un perfil de razonamiento que se caracterice por la alta adquisición de los niveles 1 y 2, hayan podido establecer relaciones de inclusión entre clases de cuadriláteros menos inclusivas que la que proporcionan los conceptos de paralelogramo y cuadrilátero, usando nexos apropiados. No resulta pues evidente que con este perfil de razonamiento se puedan establecer relaciones de inclusión entre el rectángulo y el cuadrado, y entre el cuadrado y el rombo.

Del análisis de las entrevistas clínicas llevadas a cabo, podemos extraer las siguientes conclusiones:

- Para estudiantes con un perfil de razonamiento caracterizado por la alta adquisición de los dos primeros niveles de van Hiele, el mapa conceptual se ha mostrado como una herramienta útil en la que pueden negociarse con los estudiantes conceptos, relaciones entre conceptos y significados.

- Estudiantes con perfiles de razonamiento parecidos, estructuran el contenido geométrico de maneras diferentes. Mientras que unos están dispuestos a establecer relaciones entre las propiedades de los conceptos secundarios y a negociar significados de los nexos que dan lugar a dichas relaciones, otros deben aclarar previamente el significado de las propiedades de los conceptos secundarios que establecen en relación con el concepto principal.

- Estudiantes con perfiles de razonamiento parecidos establecen diferentes relaciones de inclusión entre los cuadriláteros. Pueden mostrarse inclusivos unas veces y exclusivos en otras. Las relaciones de inclusión y exclusión dependen de las clases de cuadriláteros consideradas.

- Como consecuencia de lo anterior, el uso de los nexos que dan significados a las relaciones de inclusión o exclusión se usan de manera diferente a como lo hacen las matemáticas, sobre todo en aquellos casos en los que se relacionan clases de cuadriláteros menos inclusivas: cuadrado, rectángulo, rombo y romboide.

Respecto del test usado para la obtención de los mapas de alumnos, podemos extraer las siguientes conclusiones:

- Como se ha revelado en las entrevistas clínicas realizadas, los mapas conceptuales construidos reflejan las respuestas dadas por los estudiantes a los diferentes ítems que constituyen el test. Al menos, para los estudiantes que fueron entrevistados.

- No estamos muy seguros de que el ítem reservado para que los estudiantes construyeran proposiciones en las que se reflejaran relaciones entre las propiedades de los conceptos secundarios, fuese muy fiable. Varios pueden ser los motivos. Bien porque en el contexto en el que sitúa, junto con otro concepto secundario, la simetría, provoque que los estudiantes se fijen en éste y olviden la segunda parte, las relaciones. Bien porque, como dice la estudiante A en la entrevista clínica, "creí que en esta parte debía escribir sobre lo que no había escrito con anterioridad". Bien porque tal y como está planteada, el estudiante no entiende qué se le está pidiendo que se haga. En cualquier caso, es un ítem que debería ser revisado si en un futuro este instrumento fuese usado para la evaluación de los estudiantes.

4ª PARTE

DE LAS CONCLUSIONES FINALES Y DE LAS IMPLICACIONES

CAPÍTULO XII

Resumen de las conclusiones

XII. 1 Introducción

Dado que nuestro trabajo está dividido en dos partes, en las que se han incluido las conclusiones pertinentes derivadas de los resultados de investigación, hemos querido añadir este capítulo, a modo de resumen, con dichas conclusiones. Éstas, las hemos agrupado en tres secciones que tratan, de una parte, de dar respuesta a las preguntas que nos hicimos al inicio de nuestra investigación y, de otra, de aquéllas que surgieron de su desarrollo y que no se podían prever desde un principio. Además, para concluir nuestro trabajo, hemos incluido en este capítulo las posibles implicaciones que, a nuestro juicio se derivan de él, tanto didácticas como para futuras investigaciones.

XII. 2 Acerca de las relaciones van Hiele vs SOLO

Algunas de las conclusiones a las que hemos llegado en el estudio realizado en la primera parte de la investigación, Capítulo VII, las presentamos a continuación resumidas.

1.- Creemos que ciertamente los niveles de van Hiele puede ser analizados desde la perspectiva de la Taxonomía SOLO.

Este análisis nos permite extender los significados asociados al razonamiento, en un determinado nivel de van Hiele, con los niveles SOLO de respuesta alcanzados en un tiempo particular y en unas circunstancias particulares (ver, por ejemplo, los resultados de los superítems por perfiles y subperfiles de razonamiento).

2.- No es posible asociar un único nivel de respuesta SOLO que sea característico de los estudiantes que razonan, predominantemente, en un nivel n de van Hiele. Es decir, no creemos que tenga sentido, a la luz de nuestros resultados, en asociaciones generales del tipo, por ejemplo, Nivel 1 de van Hiele con nivel SOLO Uniestructural, o nivel 2 de van Hiele con nivel SOLO Multiestructural.

3.- Hay evidencias de la existencia de más de un nivel SOLO para un nivel de van Hiele dado. La distinción entre considerar los grados de adquisición de los niveles de razonamiento de los estudiantes y la asignación directa de un único nivel de van Hiele, nos ha permitido obtener estas evidencias.

Así, para estudiantes con un grado de adquisición alto y no completo del primer nivel de van Hiele, con o sin indicios de razonamiento del siguiente nivel, se han distinguido niveles SOLO que recorren los niveles uniestructural y multiestructural, en el caso del criterio más exigente, o los niveles uniestructural, multiestructural y relacional, con el criterio menos exigente. Recorrido que se repite, para ambos criterios, en los estudiantes con un grado de adquisición completo del primer nivel y alto del segundo nivel de van Hiele, con o sin indicios de razonamiento del siguiente nivel, y que parece acortarse, recorriendo los niveles SOLO relacional y abstracción extendida, para aquellos estudiantes que mostraron un grado de adquisición completo de los dos primeros niveles de van Hiele y sucesivos grados de adquisición del tercer nivel de van Hiele, con o sin indicios de razonamiento del cuarto nivel.

4.- Las evidencias anteriores nos han conducido a nuevas evidencias no previstas al inicio de nuestra investigación. Éstas se refieren a los ciclos de aprendizaje. Dependiendo del criterio de asignación de los niveles SOLO utilizado, la evidencia de que es posible encontrar ciclos de aprendizaje formados por la secuencia Uniestructural —> Multiestructural —> Relacional dentro de un perfil de razonamiento o, incluso, dentro de un subperfil de razonamiento, es más fuerte si el criterio usado es menos exigente.

XII. 3 Acerca de las relaciones van Hiele vs Mapas Conceptuales

Del análisis de los resultados de la construcción de los mapas conceptuales de los estudiantes, en relación con los objetivos de nuestro trabajo, hemos podido concluir que:

1.- A pesar de que los mapas conceptuales son idiosincrásicos, en ellos puede verse cómo un estudiante con un perfil de razonamiento dado estructura el contenido geométrico aprendido. Así, podemos decir que, para estudiantes con un perfil de razonamiento dado por su adquisición no completa de los dos primeros niveles de van Hiele, el proceso comienza con el reconocimiento de los ejemplos (válidos o no) asociados al concepto principal y con la asociación débil de una propiedad, de alguno de los conceptos secundarios, al concepto principal. Esta asociación débil supone que la propiedad del concepto secundario no es relevante para discriminar ejemplos negativos del concepto principal.

2.- A medida que el perfil de razonamiento mejora, perfil que viene dado por una adquisición alta del primer nivel y baja del segundo nivel de van Hiele, la asociación entre algunas propiedades del concepto secundario y el concepto principal es más fuerte. Esto puede suponer que dichas propiedades quedan incorporadas al esquema del estudiante y las usa para discriminar ejemplos y para decir cosas sobre el concepto principal, probablemente a partir de esos ejemplos. Así, en el cuadrado, es relevante la propiedad de la igualdad en lados, ángulos y diagonales, mientras que en el paralelogramo es relevante el paralelismo de los lados, independiente de la cantidad de pares de lados paralelos.

3.- Si el perfil de razonamiento demuestra una adquisición alta del primer nivel e intermedia, al menos, del segundo nivel de razonamiento, la capacidad de asociar propiedades de los conceptos secundarios al concepto principal aumenta, tanto en el número de propiedades de los conceptos secundarios, como en el número de conceptos secundarios de los que se pueden decir propiedades. Por ejemplo, es posible tener en cuenta, a la vez, propiedades de los lados que se refieran al paralelismo y a la longitud; a la igualdad y medida de los ángulos; a las diagonales y al aspecto de las mismas e, incluso, mencionar si poseen o no simetría.

Algunos investigadores[1] sugieren que los niveles de van Hiele deberían modificarse con el fin de describir con mayor precisión el razonamiento de los estudiantes. Particularmente, los niveles 2 y 3. Así, por ejemplo, se sugiere distinguir la identificación de las figuras en términos de una única propiedad, nivel 2A, de la identificación de las figuras en términos de propiedades que son vistas de manera independiente una de otra, nivel 2B.

A la vista de nuestros resultados con la construcción de los mapas conceptuales, podemos estar de acuerdo en la visión que se pretende tener del nivel 2. Hemos encontrado estudiantes que muestran capacidad de usar una única propiedad (generalmente la igualdad) de un concepto secundario (generalmente lados), relevante para el concepto principal, y otros que demuestran una capacidad mayor de usar un número mayor de propiedades, de un número mayor de conceptos secundarios, que son relevantes para el concepto principal. Esta capacidad la hemos asociado con

[1] En Pegg, 1997.

los diferentes grados de adquisición de los niveles 1 y 2 de van Hiele, como se desprende de las conclusiones 1 a 3, por lo que es posible que la distinción en subniveles que se propone no fuese necesaria si se tuviese en cuenta la noción de grados de adquisición de niveles de razonamiento, en lugar de nivel de razonamiento.

4.- Generalmente, la manera en la que se gestionan estas propiedades, y por tanto demuestran probablemente de qué forma se estructuran en la mente de los estudiantes, queda reflejada en los nexos con los que se han representado en el mapa. Las propiedades las tienen los conceptos principales, pero se exponen diciendo cómo son los conceptos secundarios. Cuanto más inclusivo sea el concepto principal, caso del paralelogramo por ejemplo, las propiedades de los conceptos secundarios (simetría, por ejemplo) que exigen un nexo menos exigente, "pueden ser", "pueden tener", rara vez se mencionan, dando a entender que dichas propiedades no están presentes en el concepto principal. Es posible que el perfil de razonamiento deseado sea mejor que el que demuestran estos estudiantes.

5.- No hay una manera estándar de organizar los cuadriláteros, ya sea en clases inclusivas o exclusivas, que pueda asociarse con un perfil de razonamiento.

Este hecho nos permite dudar de la generalización que casi siempre se establece de asociar la clasificación exclusiva con el nivel 2 y la clasificación inclusiva con el nivel 3.

6.- En general, cuando un estudiante interpreta que entre dos clases de cuadriláteros existe alguna relación, usa los nexos "siempre es" o "algunas veces es" o "puede ser", de manera indiscriminada, para poner de manifiesto que él encuentra algún tipo de relación. En muchos casos, esos nexos no tienen el mismo significado que el que tienen para las matemáticas: "incluido en" o "se clasifica en", dándose la circunstancia de que, dependiendo de las clases de cuadriláteros que se están relacionando, los significados, para un mismo nexo, pueden ser contradictorios. Así, por ejemplo, estudiantes con un grado de adquisición bajo del nivel 2 pueden establecer relaciones de inclusión como: «El paralelogramo *puede ser* cuadrado», a la que le sigue, «el cuadrado *siempre es* paralelogramo» y, al mismo tiempo, establecer que «el cuadrado *puede ser* rombo» y que «el

rombo *puede ser* cuadrado», relacionando con el nexo "nunca es" el cuadrado y el rectángulo.
7.- Hemos encontrado pocas evidencias de estudiantes que, con un perfil de razonamiento que se caracterice por la alta adquisición de los niveles 1 y 2, hayan podido establecer relaciones de inclusión entre clases de cuadriláteros menos inclusivas que la que proporcionan los conceptos de paralelogramo y cuadrilátero, usando los nexos apropiados. No resulta pues evidente que con este perfil de razonamiento se puedan establecer relaciones de inclusión entre el rectángulo y el cuadrado, y entre el cuadrado y el rombo.

Como consecuencia de las entrevistas clínicas realizadas, podemos concluir que:

8.- Para estudiantes con un perfil de razonamiento caracterizado por la alta adquisición de los dos primeros niveles de van Hiele, el mapa conceptual se ha mostrado como una herramienta útil en la que poder negociar conceptos, relaciones entre conceptos y significados.

Por otra parte, nada podemos decir de los otros perfiles de razonamiento identificados por la propia limitación de nuestro trabajo y que ya mencionamos en capítulos anteriores.

9.- Estudiantes con perfiles de razonamiento parecidos, estructuran el contenido geométrico de maneras diferentes. Mientras que unos están dispuestos a establecer relaciones entre las propiedades de los conceptos secundarios y a negociar significados de los nexos que dan lugar a dichas relaciones, otros deben aclarar previamente el significado de las propiedades de los conceptos secundarios que se establecen en relación con el concepto principal.

10.- Estudiantes con perfiles de razonamiento parecidos establecen diferentes relaciones de inclusión entre los cuadriláteros. Pueden mostrarse inclusivos unas veces y exclusivos en otras. Las relaciones de inclusión y exclusión dependen de las clases de cuadriláteros consideradas.

11.- El uso de los nexos que dan significados a las relaciones de inclusión o exclusión se usan de manera diferente a como lo hacen las matemáticas, sobre todo en aquellos casos en los que se relacionan clases de cuadriláteros como el cuadrado, el rectángulo, el rombo y el romboide.

XII. 4. Acerca de la metodología de investigación.

En relación con los instrumentos de evaluación debemos decir que:

1.- Los ítems del test con estructura de superítem, en la variante que aquí hemos presentado, ha resultado útil tanto para poder asignar niveles de razonamiento como niveles de respuesta SOLO. Los resultados de los índices que determinan los coeficientes de facilidad y de escalabilidad muestran esta utilidad del instrumento usado para nuestra evaluación, al demostrar que los ítems construidos determinaron la estructura jerárquica de las respuestas de los estudiantes, tal y como se postula en los dos marcos teóricos usados.

Respecto del test usado para la obtención de los mapas de alumnos, podemos extraer las siguientes conclusiones:

2.- Como se ha revelado en las entrevistas clínicas realizadas, los mapas conceptuales creemos que reflejan, a partir de las respuestas dadas por los estudiantes a los diferentes ítems que constituyen el test, la estructura del conocimiento aprendido. Al menos, para los estudiantes que fueron entrevistados, esta estructura fue reconocida como perteneciente a ellos.

3.- No estamos muy seguros de que el ítem reservado para que los estudiantes construyeran proposiciones en las que se reflejaran relaciones entre las propiedades de los conceptos secundarios, fuese muy fiable. Varios pueden ser los motivos. Bien porque en el contexto en el que sitúa, junto con otro concepto secundario, la simetría, provoque que los estudiantes se fijen en éste y olviden la segunda parte, las relaciones. Bien porque, como dice la estudiante A en la entrevista clínica, "Creí que en esta parte debía escribir sobre lo que no había escrito con anterioridad". Bien porque tal y como está planteada, el estudiante no entiende qué se le está pidiendo que se haga. En cualquier caso, es un ítem que debería ser revisado si en un futuro este instrumento fuese usado para la evaluación de los estudiantes.

XII. 5 Implicaciones didácticas

Nuestro trabajo ha pretendido analizar los niveles de razonamiento, descritos en el modelo de van Hiele, desde puntos de vista ajenos a él. Este análisis, nos ha conducido a los resultados y conclusiones que hemos detallado a lo largo de las páginas de esta memoria y de las cuáles queremos extraer algunas implicaciones que hemos llamado didácticas.

Una de las primeras implicaciones que podemos extraer de nuestro trabajo es que parece insuficiente describir el aprendizaje de un estudiante con la única información que se deriva de la asignación de un nivel de razonamiento. Esta afirmación la basamos en el hecho de que estudiantes a los que se les ha asignado perfiles de razonamiento descritos por el mismo vector, al ser analizados desde la Taxonomía SOLO y los Mapas Conceptuales, han demostrado comportamientos distintos. Esto significa por ejemplo que, aun teniendo los estudiantes habilidades de razonamiento parecidas: basadas en el aspecto físico de las figuras, en propiedades de las mismas, en relaciones entre propiedades o entre las figuras o en la lógica formal, la calidad de sus respuestas, analizadas en términos de niveles de respuesta SOLO, puede ser variada, produciéndose, en un mismo nivel de razonamiento, al menos un ciclo de aprendizaje formado por los niveles SOLO, Uniestructural - Multiestructural - Relacional. La consideración de los grados de adquisición de los niveles de van Hiele parece, por tanto, más adecuada para describir el proceso de aprendizaje de los estudiantes que la asignación de un único nivel de razonamiento, ya que en algunos casos esta consideración nos ha permitido identificar un nivel SOLO con un determinado grado de adquisición de los niveles de van Hiele.

Algo parecido podría decirse si el análisis se hace desde los Mapas Conceptuales. Cuando un estudiante responde a un ítem de geometría, como los que hemos usado en el test para la construcción de los mapas conceptuales de los estudiantes, éste usa de algún modo (dependiendo de su estrategia de respuesta) sus habilidades de razonamiento, sean éstas las que sean. Su respuesta indica algo más que un razonamiento. Muestra, seguramente, la manera en la que ha organizado cierto conocimiento en su mente. Esto, no lo pone de manifiesto un nivel de razonamiento o un perfil de razonamiento. Es necesario otro instrumento que interprete el aprendizaje a partir de dichas respuestas y creemos que los Mapas Conceptuales pueden cumplir con esta función.

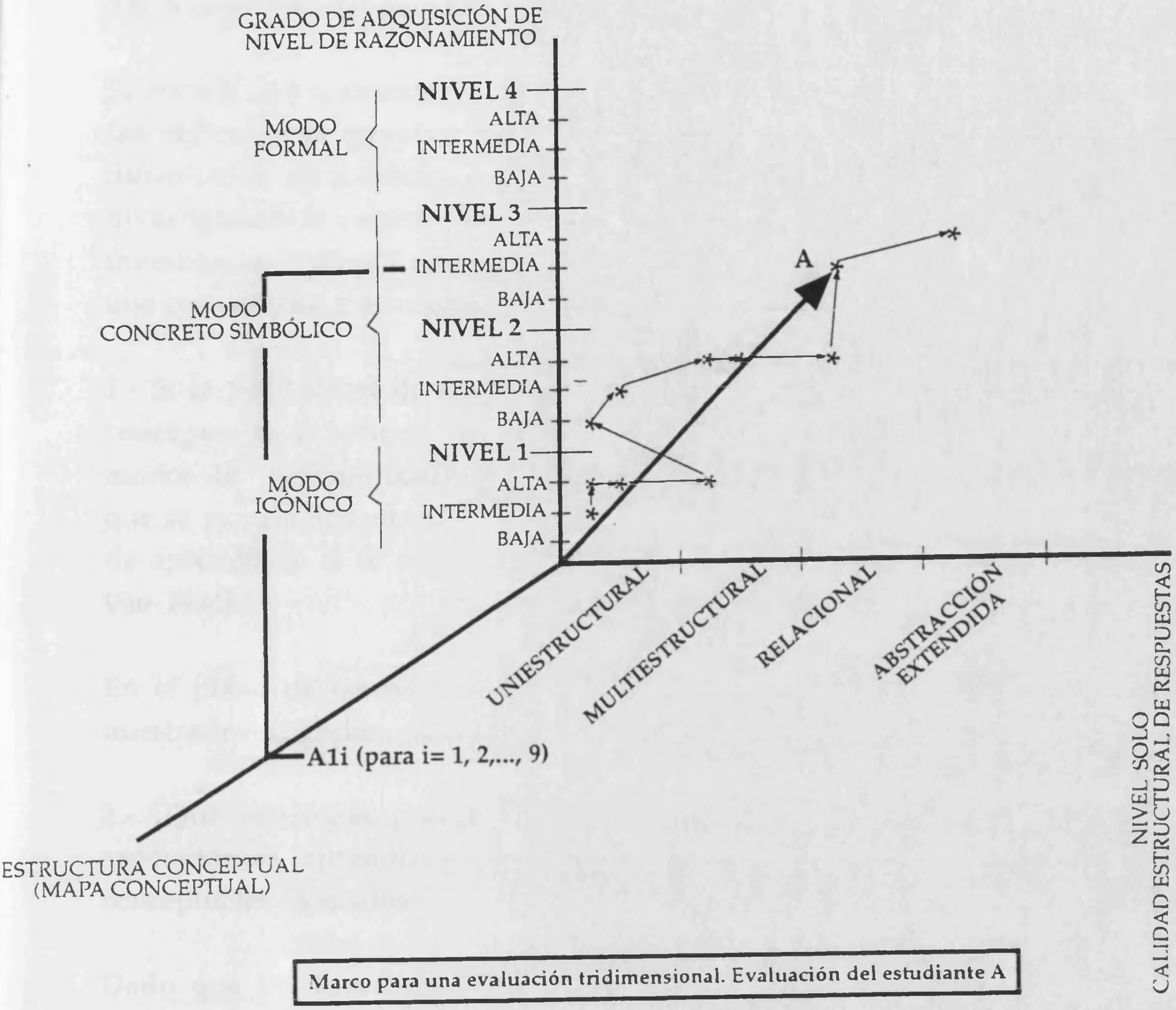
Por otra parte, en las entrevistas clínicas realizadas así nos ha parecido, el Mapa Conceptual se ha revelado como una herramienta útil con la que se pueden negociar significados de conceptos y relaciones con los estudiantes. A lo largo de esta negociación se produce algún tipo de aprendizaje que, como se ha visto en los casos de los estudiantes A y L analizados, supone, de un lado, una mejora en la estructura conceptual del estudiante, como lo demuestra la mayor riqueza de relaciones y nexos que dan significado a esas relaciones en su mapa conceptual y, de otro, incrementar el conjunto de habilidades de razonamiento que ya poseía con las nuevas, derivadas de la negociación.

Interpretar, pues, el aprendizaje de los estudiantes requiere más puntos de referencia que considerar solamente el eje en el que se sitúa el razonamiento. Nuestro trabajo conduce a la consideración de tres ejes a la hora de interpretar dicho aprendizaje. Mostremos un ejemplo. Consideremos al estudiante A. Su perfil de razonamiento está descrito por el vector (CCIN), que indica una adquisición completa de los dos primeros niveles de van Hiele y adquisición intermedia del tercer nivel, siendo nula la adquisición de las habilidades de razonamiento del nivel cuarto. Sus respuestas analizadas desde la Taxonomía SOLO están recogidas en la tabla siguiente.

Estudiante A	cuestión 1	cuestión 2	cuestión 3	cuestión 4
Superítem 1	U_1	M_1	R_0	nA
Superítem 2	U_0	M_0	R_1	nA
Superítem 3	U_1	M_1	R_0	A_1
Superítem 4	U_0	M_0	R_0	A_1
Superítem 5	U_1	M_0	R_1	A_0

Según los criterios de asignación considerados, A tendría asignado un nivel RELACIONAL con el criterio más exigente y un nivel de ABSTRACCIÓN EXTENDIDA con el criterio menos exigente. En el primero de los casos, A poseería capacidad de comprensión de la información, de manera relacional e integrada, para responder a una determinada situación relacionada con dicha información. En el segundo de los casos, A poseería capacidad de abstraer, a partir de la información que posee, para responder a una situación en la que este proceso se requiriese.

Por otro lado, la serie de mapas conceptuales construidos a partir de las respuestas que dio el estudiante A podemos verla en el Anexo IV, codificados como $A1_i$, con i= 1,..., 9). Toda esta información, que puede representarse en un gráfico como el siguiente, nos da una visión del momento en el que se encuentra el aprendizaje del estudiante A de los conceptos relativos a los cuadriláteros.



Marco para una evaluación tridimensional. Evaluación del estudiante A

Recordando ahora cual fue el origen de nuestro problema de investigación, nos gustaría hacer una última reflexión derivada de nuestro trabajo. Interpretar el proceso de enseñanza y aprendizaje basándose en un único punto de vista se ha mostrado aquí como insuficiente. Es verdad que el modelo de van Hiele nos describe como es el proceso de aprendizaje de la geometría y, asociado con él, una manera de actuar. Pero también es verdad que su descripción es parcial, en cuanto a los aspectos del aprendizaje que considera, por lo que los profesores deberían tenerlo presente como un instrumento más para recabar información sobre el aprendizaje de sus alumnos, pero no exclusivamente. Otros puntos añadidos sobre los que recabar aquella información, y que creemos que pueden ser de gran utilidad para los profesores, podrían ser la Taxonomía SOLO y los Mapas Conceptuales al igual que hemos hecho nosotros en nuestra investigación.

XII. 6 Implicaciones para futuras investigaciones

El trabajo que acabamos de desarrollar en estas páginas tiene, obviamente, las dificultades propias de cualquier trabajo de investigación. Estas dificultades, en muchos casos, se pueden convertir en posibles líneas de investigación al sugerir nuevos problemas que creemos que podrían ser investigados. Así, por ejemplo, uno de ellos viene directamente del estudio que con carácter macroscópico hemos realizado. En consecuencia:

1.- Si la posibilidad de identificar más de un ciclo de aprendizaje de los conceptos matemáticos, geométricos en particular, para cada uno de los modos de funcionar contemplados en la Taxonomía SOLO, es una hipótesis que se maneja actualmente, ¿es también posible identificar más de un ciclo de aprendizaje si se consideran los modos de funcionar como niveles de van Hiele?

En el plano de las relaciones entre los marcos teóricos considerados en nuestra investigación, podemos sugerir la siguiente línea de trabajo:

2.- ¿Qué relaciones pueden establecerse entre los ciclos de aprendizaje asociados al aprendizaje de los conceptos geométricos y los mapas conceptuales asociados?

Dado que las investigaciones que usan los Mapas Conceptuales como instrumento de evaluación de los estudiantes, en nuestra área de conocimientos al menos, son escasas y la posibilidad de tenerlos en cuenta parece que levanta un interés creciente, el campo de investigación relacionado con estas herramientas podemos considerarlo cuanto menos prometedor. Así, por ejemplo, sugerimos:

3.- Estudiar qué relación de dependencia existe entre los mapas conceptuales de los estudiantes y la manera en la que se pregunta al estudiante, en un test escrito como el que hemos usado nosotros por ejemplo, a partir de cuyas respuestas procedemos a su construcción.

4.- Estudiar qué influencia puede tener la construcción de los mapas conceptuales por parte de los estudiantes y el conocimiento allí representado.

5.- Estudiar nuevos medios posibles para la construcción de mapas conceptuales de los estudiantes como, por ejemplo, los entornos informáticos.

6.- Estudiar la posibilidad de construir criterios objetivos para el análisis de los mapa conceptuales de los estudiantes.

7.- Estudiar el efecto que se produce en el aprendizaje de las matemáticas el uso de los mapas conceptuales en un proceso continuo: evaluación - enseñanza - evaluación.

5ª PARTE

DE LA BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

REFERENCIAS

Al-Kunifed, A.; Wandersee, J., 1990, One hundred references to concept mapping, *Journal of Research in Science Teaching* vol. 27, núm. 10, págs. 1069-1075.

Assaf, S. A., 1985, *The effects of using Logo turtle graphics in teaching geometry on eighth grade students' levels of thought, attitudes toward geometry and knowledge of geometry,* [Univ. Microfilms: Ann Arbor, USA].

Ausubel, D. P., 1976, *Psicología educativa: Un punto de vista cognitivo,* [Trillas: México].

Biggs, J. B.; Collis, K. F., 1982. *Evaluating theQuality of Learning: The SOLO taxonomy.* (Academic Press: New York).

—— 1991, Multimodal Learning and the Quality of Intelligent Behavior, en Rowe, H. (Ed.) *Intelligence: Reconceptualization and Measurament.* LEA, Australian Council for Educational Research, págs. 57-76.

Bloom, B. S., ed., 1979, *Taxonomía de los objetivos de la educación* (dos tomos). [Marfil: Alcoy, España].

Bobango, J.C., 1987, *Van Hiele Levels of Geometric Thougth and Student Achievement in standard content and proof writing: the effect of phase-based instruction.* [UMI: Pennsylvania State University].

Burger, W. 1985, Geometry, *Arithmetic Teacher,* núm 32, págs. 52-56.

Burger,W. & Shaughnessy, M., 1986, Characterizing the van Hiele levels of Development in Geometry, *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 17, págs 31-48.

Campbell, K.J.; Collis, K.F. y Watson, J. M., 1995, Visual Prosessing during Mathematical Problem Solving, *Educational Studies in Mathematics,* vol. 28, págs. 177-194.

Campbell, K.J.; Watson, J. M. y Collis, K.F., 1992, Volume Measurament and Intellectual Development, en *Journal of Structural Learning,* vol. 11, núm. 3, págs. 279-298.

Castelnuovo, E., 1981, *Geometria,* [Ketrés: Barcelona].

Collis, K. F.; Biggs, J.B., 1991, Developmental determinants of qualitive aspects of school learning, en Evans, G. (Ed.): *Learning and Theaching Cognitive Skills.* Australian Council for Educational Research, págs. 185-207.

Collis, K. F.; Romberg, T. A., 1989, Assesment of Mathematical Perfomance: An Analysis of Open-Ended test items. [National Center for Research in Mathematical Science Education. Winsconsin Center for Education Research. School of Education, University of Wisconsin-Madison].

Collis, K. F., Romberg, T. A., and Jurdak, M. E., 1986, A technique for assessing mathematical problem-solving ability, *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 17, págs. 206-221.

Collis, K. F.; Watson, J. M., 1991, A Mapping Procedure for Analysing the Structure of Mathematics Responses, *Journal of Structural Learning.*, vol. 11, págs. 65-87.

Collis, K. F. ; Watson, J. M. y Campbell, K. J., 1993, Cognitive Functioning in Mathematical Problem Solving During Early Adolescence, *Mathematics Education Research Journal*, vol. 5, núm. 2, págs. 107-123.

Corberán. M. R., Huerta, M. P. y otros, 1988, *Matemáticas 1: Geometría,* [Nau Llibres: Valencia].

—— 1989, *Didáctica de la geometría: modelo van Hiele,* [Servei de Publicacions de la Universitat de València: Valencia, España].

—— 1994, *Diseño y Evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de van Hiele,* [Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia: CIDE: Madrid].

Corley, T.L., 1990, *Students' levels of thinking as related to achievement in Geometry.* [UMI: Ann Arbor, USA].

Crowley, M. L., 1987, The van Hiele Model of the development of geometric thought, en N.C.T.M., 1987, *Learning and teaching geometry, K-12,* (1987 Yearbook) [N.C.T.M.: Reston, USA], págs. 1-16.

—— 1989, *The design and evaluation of an instrument for assessing mastery van Hiele levels of thinking about quadrilaterals,* [Univ. Microfilms: Ann Arbor, USA]

—— 1990, Criterion-Referenced Reliability Indices Associated with the van Hiele Geometry Test, *Journal for Research in Mathematics Education,* vol 21, núm 3, págs. 238-241.

Davey, G.; Pegg, J., 1990, Children's Understanding of Parallelism" (paper presented at the *13th Annual MERGA Conference*). University of Tasmania, Hobart, july 1990.

—— 1992, Research in Geometry and Measurament, en Atweh, B. y Watson, J., eds., *Research in Mathematics Education in Australasia: 1988-1991* , págs. 231-247.

Denis, L. P., 1987: *Relatonships between stage of cognitive development and van Hiele level of geometric thought among Puerto Rican adolescents,* [Univ. Microfilms: Ann Arbor, USA]

De Villiers, M., 1987, Research Evidence on Hierarchical Thinking, Teaching Strategies and The van Hiele Theory: Some Critical Comments, [RUMEUS: University of Stellenbosch, South Africa], (documento de trabajo).

Fielker, J., 1983, Removing the Shackles of Euclid, en *Readings in Mathematical Education,* núm. Nov., 1983, págs. 1-56.

Freudenthal, H., 1973, *Mathematics as an Educational Task,* [D. Reidel: Dordrecht, Holanda].

Fuys, D., Geddes, D., and Tischler, R., eds., 1984, *English Translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre Marie van Hiele.* Brooklyn College of C.U.N.Y., School of Education.

Fuys, D., Geddes, D., and Tischler, R., 1988, The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents, *Journal for reseacrh in Mathematics Education,* Monográfico núm. 3, [N.C.T.M.: Reston, USA].

Guillén, G., 1997, El Modelo de van Hiele aplicado a la Geometría de los Sólidos. Observación de los procesos de aprendizaje en estudiantes de Magisterio, (Tesis Doctoral no publicada), Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València, Valencia.

Gutiérrez, A., Jaime, A., 1987, Estudio de las características de los niveles de van Hiele, en *Proceedings of the 11 th International Conference of the Pyschology of Mathematics Education,* vol. 3, págs. 131-137.

Gutiérrez, A., Jaime, A., Fortuny, J., 1991, An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels, *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 21, núm. 3, págs. 237-251.

Hart, K., 1981, *Children's Understanding of Mathematics: 11-16,* [John Murray: Londres].

Hasemann, K., 1989, Children's individuality in solving fraction problems, en *Proccedings of the 13th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 2, págs. 67-74.

—— 1995, Comunicación personal.

—— 1996, Comunicación personal.

Hasemann, K.; Mansfield, H., 1995, Concept Mapping in Research on Mathematical Knowledge Development: Background, Methods, Findings and Conclusions, *Educational Studies in Mathematics* vol. 29, págs. 45-72.

Hoffer, A., 1981, Geometry is more than proof, *The Mathematics Teacher,* vol 74, núm. 1, págs. 11-18.

Huerta, M. P. 1991, Una evaluación de los niveles de van Hiele usando la Taxonomía SOLO y los Mapas Conceptuales, en Filloy, E., Puig, L. y Gutiérrez, A., eds., *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría,* Valencia, junio de 1991, págs. 114-119.

—— 1995a, Uso de los Mapas Conceptuales para explorar conceptos y relaciones: El caso de los cuadriláteros. Taller presentado en las *II Jornades d'Educación Matemàtica de la Comunitat Valenciana,* La Safor, mayo de 1995.

—— 1995b, Using Concept Maps to Analyse Students' Relationships between Quadrilaterals, en *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of the Mathematics Education,* vol. 1, pág. 242, Recife, Brasil.

—— 1996a, Los cuadriláteros a comienzos del siglo XIX, a comienzos del siglo XX, y a finales del siglo XX, ¿qué ha cambiado?, *Suma* vol. 21, págs. 55-62.

—— 1996b, Assessment in geometry from two points of view: Levels of reasoning and SOLO levels, en *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 1 pág. 178, Valencia, España.

Jaime, A., 1993, *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento,* [Tesis doctoral: Univesidad de Valencia]

Jaime, A.; Gutierrez, A., 1990, Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele, en Llinares, S. y Sánchez, M. V., 1990, *Teoría y práctica en educación Matemática,* [Alfar: Sevilla], págs. 295-384.

—— 1994, A Model of Test Design to assess the van Hiele Levels, en *Proccedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.,* vol. 3, págs. 41-48.

Jurdak, M., 1989, Van Hiele levels and the SOLO Taxonomy, en *Proceedings. of the 13 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2, págs. 155-162.

Kilpratrick, J., 1993, The Chain and the Arrow: from the History of Mathematics Assessment, en M. Niss, ed., *Investigations into Assessment in Mathematics Education*, 1993, págs. 31-46.

Lesh, R.; Lamon, S.J., eds., 1992, *Assessment of Authentic Permomance in School Mathematics*. [AAAS Press: USA].

Lowry, J. A, 1987, *An investigation of nine-years-olds' geometrics concepts of area and perimeter*, [Univ. Microfilms: Ann Arbor, USA].

Mayberry, J., 1981, *An Investigation of the van Hiele levels of geometric thought in undergraduated preservice teachers*, [Univ. Microfilms: Ann Arbor, USA].

—— 1983, The van Hiele levels of Geometric Thought in Undergraduated Preservice Teachers, *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 14, págs. 58-69.

Mansfield, H.; Happs, J., 1989, Using concepts maps to explore students' understanding in geometry, en *Proceedings of the 13 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol 2, págs. 250-257.

Mc Clendon, M.E., 1990, *Application of the van Hiele model in evaluating elementary Teachers' understanding of geometric concepts and improving their attitudes*. [UMI: University of South Florida, Florida].

McDonald, J. L., 1989, Cognitive Development and the structuring of Geometric Content, *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 20, págs. 76-94.

Molina, D.D., 1990, *The aplicability of the van Hiele Theory to Transformational Geometry*. [UMI: Ann Arbor, USA].

Moreira, M. A., s.f, *On C-maps, V- diagrams, conceptual change, and meaningful learning*, (borrador de trabajo para Third International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics), [Departament of Education: Cornell University, USA].

Niss, M., ed., 1993, *Investigations into Assessment in Mathematics Education*. ICMI Study. [Kluwer Academic Publishers: The Netherlands].

Novak, J.D., 1989, Helping students learn how to learn: a view from a teacher-researcher, (Comunicación presentada en la sesión de apertura del 3er Congreso Internacional sobre Enseñanza e Investigación en Ciencias y Matemáticas, Santiago de Compostela. España).

Novak, J. D 1992, Comunicación personal.

—— 1995, Comunicación personal.

Novak, J.D; Gowin, D.B. y Johansen, G. T., 1983, The Use of the Concept Mapping and Knowledge Vee Mapping with Junior High School Science Students, *Science Education*, vol. 67, núm. 5, págs. 625-645.

Novak, J. D, y Gowing, D. B., 1988, *Aprendiendo a aprender*, [Martínez Roca: Barcelona].

Olive, J., 1983, A Synthesis of the SOLO Taxonomy with Skemp's Model of Mathematical Understanding within the Framwork of Skemp's Model of Intelligence, en Bergeron, J. C. & Herscovics, N., eds., *Proceedings of the 13th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education-NA*, págs. 263-270, Montreal, Canadá.

—— 1991, Logo programing and geometric understanding: An in-depth study, *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 22, núm. 2, págs. 90-111.

Olive, J., Paalz Scally, S., 1987, Learning Processes in a LOGO Enviroment and Geomteric Understanding: Are They Related?, en *LOGO and Mathematics Education*, núm. 3, págs. 61-69, Department of Mathematics, Concordia University, Montreal.

Pegg, J., 1992, Student´s Understanding of Geometry: Theoretical perspectives, en Southwell, B., Perry, B. & Owens, K., eds., *Proceedings of the 15 th Annual Conference of the MERGA*, págs. 18-35, Sidney, Australia, 4-8 July 1992.

Pegg, J., 1997, Broadering the Descriptors of van Hieles' Levels 2 and 3, (en prensa).

Pegg, J.; Davey, G., 1989, Clarifying Level Descriptors for Children´s Undestanding of some Basic 2-D Geometric Shapes, *Mathematics Education Research Journal*, vol. 1, núm. 1, págs. 16-27.

Peeg, J.; Gutiérrez, A.; Huerta, M. P., (1997), Assessing Reasoning Abilities in Geometry, (en prensa).

Puig Adam, P., 1947, *Curso de Geometría Métrica, Tomo I: Fundamentos*, (Edición de 1958), [Biblioteca Matemática: Madrid].

Puig, L., 1996, *Elementos de resolución de problemas.* [Colección MATHEMA: Granada, España].

Rey, J., Puig, P., 1928, *Elementos de Geometría,* (Edición de 1959) [Colección Elemental Intuitiva: Madrid].

Romberg, T. A., 1993, How One Comes to Know: Models and Theories of the Learning of Mathematics, en M. Niss, ed., *Investigations into Assessment in Mathematics Education,* 1993, págs. 97-111.

Romberg, T. A., Collis, K. F., y otros, 1982, The Development of Mathematical Problem-Solving Superitems. (Report on the NIE/ECS Item Development Project), [Winsconsin Center for Education Research. School of Education, University of Wisconsin-Madison].

Scally, S. P., 1987, The Effects of Learning on Ninth Grade Students' Understanding of Geometric Relations, en *Proceedings of the 11th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 2, págs. 46-52, Montreal, Canadá.

Scott, P., 1989, *Introducción a la investigación y evaluación educativa,* [U.A.C.P. y P.C.C.U.: Universidad Nacional Autónoma: México].

Senk, S.L., 1983, *Proof-writing achievment and van Hiele Levels among secondary school geometry students.* Doctoral Thesis. The University of Chicago.

—— 1984, Research and curriculum development based on the van Hiele Model of Geometric Thought, en *Proceedings of the ICME 5,* Adelaide, South Australia, págs. 351-356.

Shaughnessy, J.M.; Burger, W.F.; Gutiérrez, A.; Jaime, A.; Fuys, D., 1991, Analyzing and describing students' thinking in geometry: Continuity in the van Hiele levels, en *Proccedings of the 13th Annual Meeting of the P.M.E.-N.A.,* vol. 1, págs. 183-188.

Trafton, P. R.; Le Blanc, J. F., 1973, Informal Geometry in Grades K-6, en *Geometry in the Mathematics Curriculum,* Thirty-sixth Yearbook, [NCTM: Reston, USA].

Treffers, A., 1987, *Three dimensions,* [D. Reidel: Dordrecht, Holanda].

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry.* (Final report of the Cognitive Development and Achievement School Geometry Project), [Departament of Education, University of Chicago].

Usiskin, Z.; Senk, S.L., 1990, Evaluating a test of van Hiele levels: A Response to Crowley and Wilson, *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 21, núm. 3, págs. 242-245.

van Hiele, P. M., 1957, *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría)* (tesis doctoral), [Universidad de Utrecht: Utrecht, Holanda]. (Traducción de trabajo de la tesis doctoral realizada para el proyecto de investigación "Diseño y Evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de van Hiele", en Corberán, M. R., Huerta y otros, 1994).

—— 1959, La pensée de l'enfant et la géométrie, *Bulletin de l'A.P.M.E.P.*, núm. 198, págs. 199-205, (Traducción al inglés en Fuys, Geddes y Tischler, 1984).

van Hiele, P. M., 1986, *Structure and insight.* [Academic Press: N. York, USA].

van Hiele-Geldof, D., 1957, *The didactics of geometry in the lowest class of secondary school* (tesis doctoral), [J. B. Wolters: Groningen, Holanda]. (Traducción al inglés en Fuys, Geddes & Tischler, 1984).

Watson, J. M.; Collis, K. F., 1994, Multimodal functioning in understanging chance and data concepts, en *Proccedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.*, vol. 4, pp. 369-376. Lisboa

Watson, J. M.; Campbell, K.J y Collis, K. F., 1993, Multimodal Funtioning in Understading Fractions, *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 12, págs. 45-62.

Watson, J. M.; Collis, K. F. y Cambell, K.J, 1995, Developmental Structure in the Understanding of Common and Decimal Fractions, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 17, núm. 1, págs. 1-24.

Webb, N. L., 1993, Visualizing a Theory of the Assessment of students' knowledge of Mathematics, en M. Niss, ed.,*Investigations into Assessment in Mathematics Education*, 1993, págs. 253-256.

Wilson, M., 1990, Measuring a van Hiele Geometry Sequence: A Reanalysis, *Jounal for Research in Mathematics Education*, vol. 21, núm. 3, pp.

Wirzup, I., 1976, *Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry*, en Martin, J. L. & Bradbard, D. A., 1976, *Space and geometry* , págs. 75-97, [ERIC: Columbus, USA].

UNIVERSIDAD DE VALENCIA FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Reunido el Tribunal que suscribe, en el día de la fecha, acordó otorgar, por unanimidad, a esta Tesis doctoral de D. Manuel Pedro Huerta Palau la calificación de Apto cum laude

Valencia, a 24 de julio de 1997.

El Secretario,

El Presidente

Fdo. Adela Jaime Pastor

Fdo. Luis Puig

Universitat de València
Facultat de Matemàtiques

Departament de Didàctica de la Matemàtica

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Los niveles de van Hiele en relación con la Taxonomía SOLO y los Mapas Conceptuales

Tesis doctoral que presenta
Manuel Pedro Huerta Palau

bajo la dirección del
Dr. Angel Gutiérrez Rodríguez

Curso Académico 1996-1997

→ Matemáticas

VOLUMEN II

ANEXOS

ANEXO I
TESTS DE EVALUACIÓN

ANEXO I

1ª PARTE

SUPERÍTEMS PARA LA EVALUACIÓN DE NIVELES DE RAZONAMIENTO Y NIVELES SOLO

TEST DE GEOMETRÍA

ESTRUCTURA DE SUPERÍTEM

NIVEL ENSEÑANZA ....

Por favor, completa la información siguiente.

COLEGIO..

CURSO..

NOMBRE y EDAD..

INFORMACIÓN PARA LOS ALUMNOS

El test que vas a completar a continuación, contiene diferentes problemas de geometría que debes responder.

Está dividido en partes, de tal manera que cada parte se divide, a su vez, en un enunciado, que debes leer cuidadosamente, y en cuatro cuestiones, numeradas del 1 al 4, sobre aspectos relacionados con el enunciado.

Cada cuestión debe responderse en los espacios reservados para ello, pero si necesitas más, aprovecha los espacios en blanco o la parte posterior de la hoja.

Si una cuestión no la sabes contestar, déjala en blanco y sigue con otra.

Puedes utilizar regla, escuadra, transportador de ángulos o semicírculo graduado, si lo necesitas.

SUPERÍTEM 1

Cuando dos rectas paralelas se cortan por una línea transversal (ver figura 1), se forman 8 ángulos que tienen las siguientes propiedades:

- Los ángulos alternos-internos son iguales: B=F, G=C.
- Los ángulos alternos-externos son iguales: A=E, D=H.
- Los ángulos opuestos por el vértice son iguales: A=G, B=H, C=E y F=D.
- Los ángulos correspondientes son iguales: F=H, C=A, E=G y D=B.

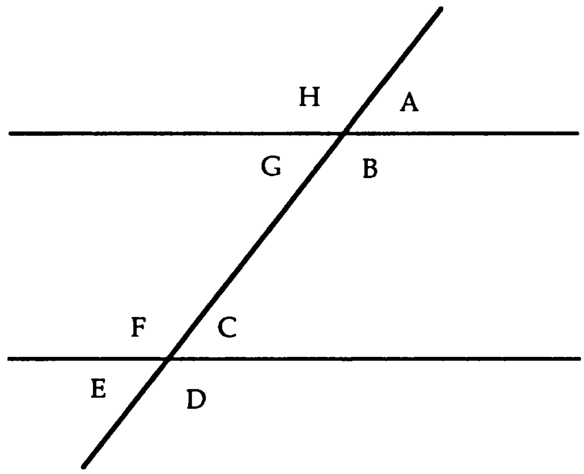


Figura 1

CUESTIONES

1. ¿Cuánto vale el ángulo G en la figura 2?

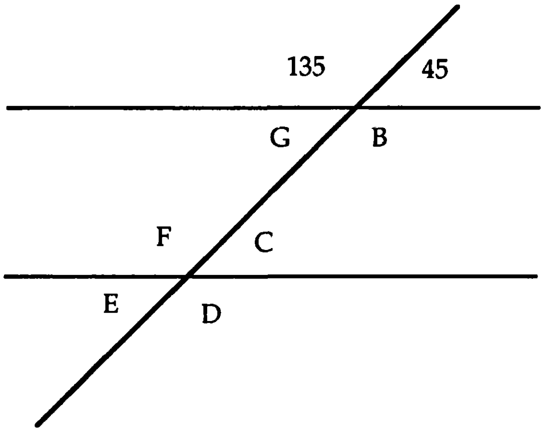


Figura 2

Respuesta:..................

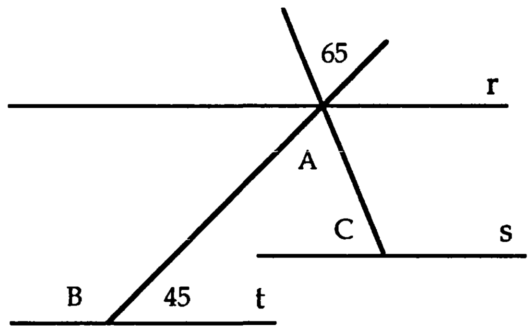
Explica por qué:
....
....
....
....

2.- ¿Cuál es el valor de los ángulos D y C en la figura 2?

Respuesta:..................

Explica por qué:
....
....
....
....

3.- En la siguiente figura, calcula el valor de los ángulos A, B y C, sabiendo que la recta **r** es paralela a la recta **s** y que la recta **s** es paralela a la recta **t**.

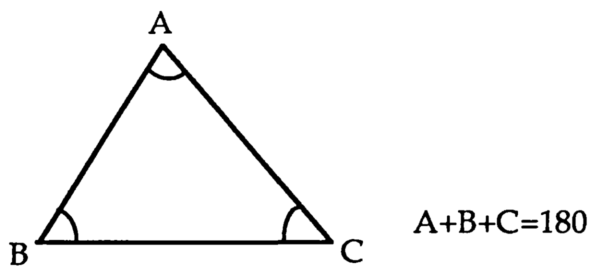


Respuesta:

A=..................
B=..................
C=..................

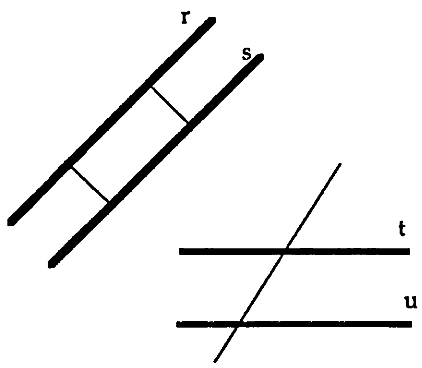
Explica por qué:
....
....
....
....

4.- Demuestra la siguiente propiedad de todos los triángulos: "La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°".

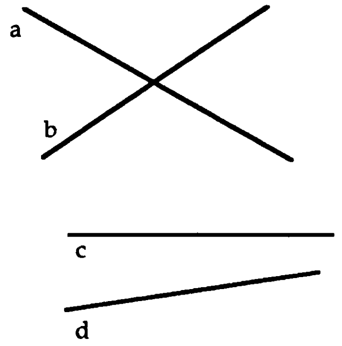


Respuesta:
....
....
....
....

SUPERÍTEM 2



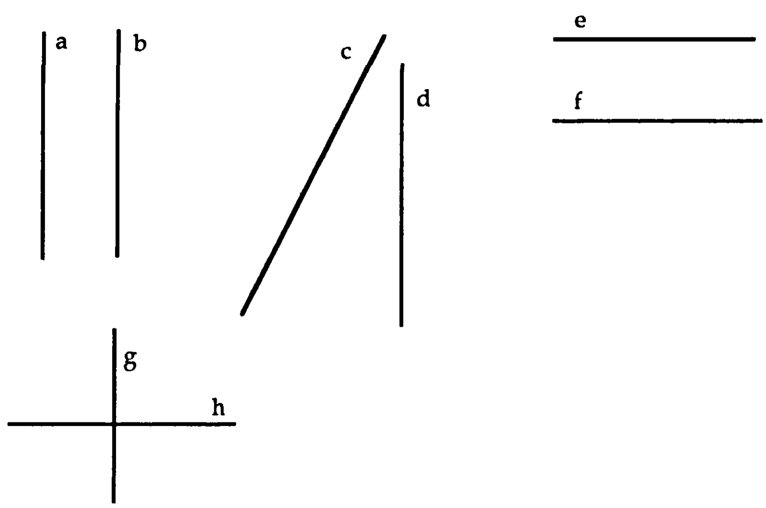
Las rectas r y s son paralelas
Las rectas t y u son paralelas



Las rectas a y b no son paralelas.
Las rectas c y d no son paralelas.

CUESTIONES

1.- ¿Cuáles de los siguientes pares de rectas son paralelas y cuáles no?



<u>Respuesta</u>:

Son paralelas:

....

No son paralelas:

....

Explica por qué:

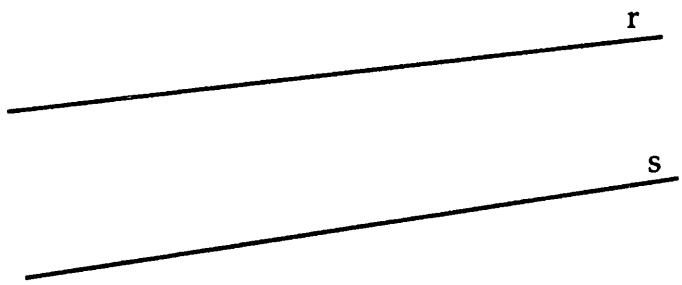
....

....

....

....

2.- Aquí tienes dos rectas, **r** y **s**. ¿Cómo puedes saber si son paralelas o no lo son?



Respuesta:

....

....

Explica por qué:

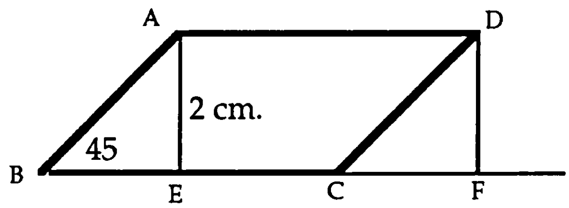
....

....

....

....

3.- Fíjate en la figura siguiente, el lado AD es paralelo al lado BC, el ángulo en el vértice B mide 45° y la altura AE mide 2 cm.



¿Qué segmento mide también 2 cm. y qué ángulo mide también 45°?

Respuesta:
.... mide .... 2 cm.
.... mide .... 45°.

Explica por qué:

....

....

....

....

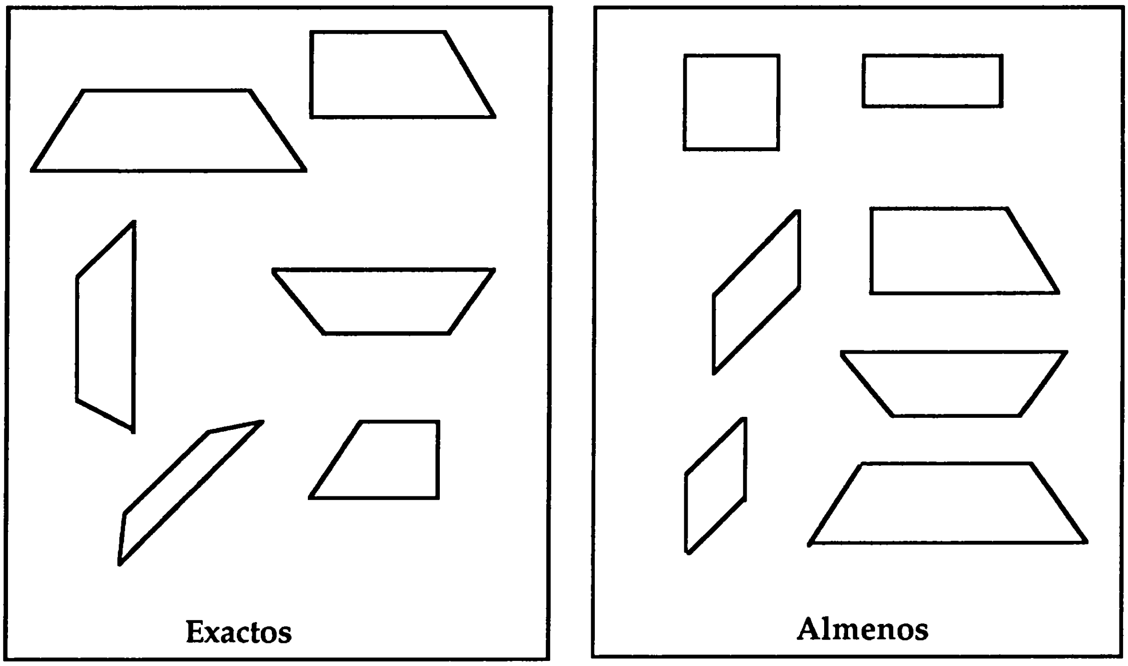
4.- Demuestra la siguiente afirmación: "Si un cuadrilátero tiene los lados paralelos dos a dos y uno de sus ángulos recto, entonces el cuadrilátero es un rectángulo".
(Puedes ayudarte de un dibujo si lo necesitas)

Respuesta:
....
....
....
....

SUPERÍTEM 3

Definición A: Un cuadrilátero con <u>exactamente</u> un par de lados paralelos se llama **exacto**.

Definición B: Un cuadrilátero con <u>al menos</u> un par de lados paralelos se llama **almenos**.



CUESTIONES

1.- Dibuja un cuadrilátero **exacto**.

DIBUJO

¿En qué te fijas para dibujar el exacto?

....

....

Explica por qué la figura que has dibujado es un exacto:

....

....

....

2.- Dibuja un cuadrilátero **almenos** que no sea **exacto**.

DIBUJO

Explica por qué el cuadrilátero **almenos** que has dibujado no es **exacto**:
....
....
....
....

3.- Si un amigo te dice que "todos los cuadriláteros llamados **exactos** son también cuadriláteros **almenos**", ¿crees que dice la verdad?

Respuesta:
....

Explica por qué:
....
....
....
....

4.- Recuerda que un trapecio es un cuadrilátero con por lo menos un par de lados paralelos y que un paralelogramo es un cuadrilátero con dos pares de lados paralelos.
Di si son verdaderas o falsas las proposiciones siguiente:

Proposición A: "Los trapecios pueden ser paralelogramos".
Proposición B: " Los paralelogramos son trapecios".

Respuesta:

La proposición A es:...

La proposición B es:...

Explica por qué (puedes dibujar si lo necesitas):
....
....
....
....

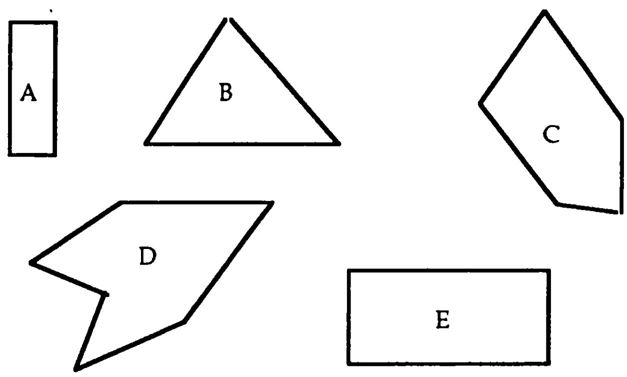
SUPERÍTEM 4

Un <u>rectángulo</u> es un figura que tiene varias propiedades. Aquí tienes algunas:

1. Tiene cuatro lados.
2. Los lados son iguales dos a dos.
3. Los lados son paralelos dos a dos.
4. Tiene cuatro ángulos rectos.
5. Tiene dos diagonales interiores.
6. Las diagonales se cortan en el punto medio de cada una de ellas.
7. Tiene por lo menos dos ejes de simetría.

CUESTIONES

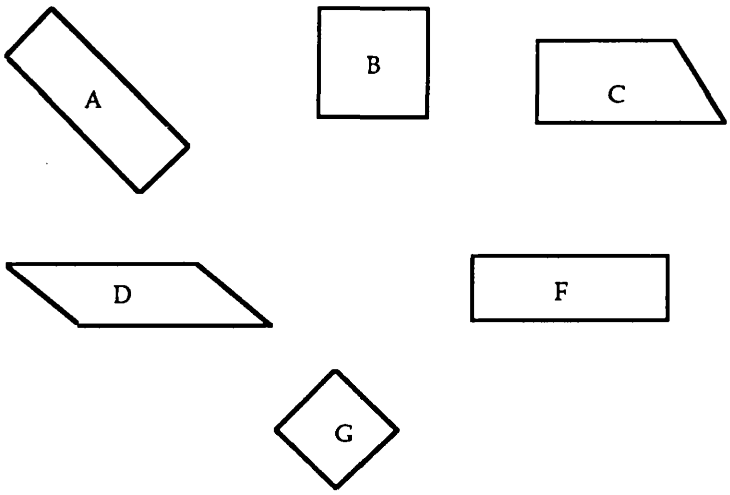
1.- ¿Cuál o cuáles de las figuras siguientes son rectángulos?



<u>Respuesta</u>:..................

Explica por qué:
....
....
....
....

2.- Fíjate en la lista de propiedades del rectángulo y di cuál o cuáles de las figuras siguientes es/son rectángulos:



Respuesta:..................

Explica por qué:

....
....
....
....

3.- Imagímate que debes escoger, de entre las 7 propiedades del enunciado, el menor número posible de ellas de manera que si una figura cumple las propiedades que has escogido, entonces es un rectángulo. ¿Cuáles escogerías?
Respuesta:..................

Explica por qué:

....
....
....
....

4.- Basándote en la cuestión anterior, trata de dar una definición del rectángulo.

Respuesta:...
....
....
....
....

SUPERÍTEM 5

Aquí tienes definiciones de algunas figuras:
Cuadrilátero: Figura plana limitada por 4 lados.
Cuadrado: Cuadrilátero con los 4 lados iguales y los 4 ángulos iguales.
Rectángulo: Cuadrilátero con los 4 ángulos iguales y los lados iguales dos a dos.
Rombo: Cuadrilátero con los 4 lados iguales y los ángulos iguales dos a dos.
Romboide: Cuadrilátero con los lados iguales dos a dos y los ángulos iguales dos a dos.

CUESTIONES

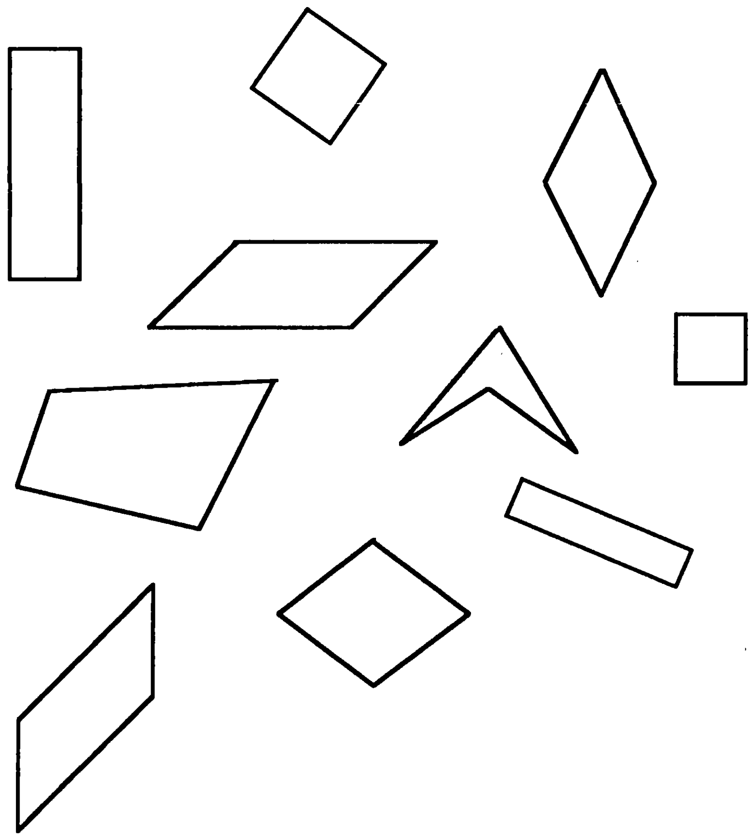
1.- Dibuja un Cuadrilátero.

DIBUJO

¿En qué te fijas para dibujar un cuadrilátero?
....
....
....
....

Explica por qué la figura que has dibujado es un cuadrilátero:
....
....
....
....

2.- En los siguientes cuadriláteros pon una **R** en los que creas que son rombos y una **T**, en los que creas que son rectángulos (Piensa en la posibilidad de que una figura pueda admitir simultáneamente R y T).



Explica por qué la/s figura/s que has seleccionado son rombos o rectángulos:

....

....

....

....

3.- Indica qué tendrías que hacer para convertir un romboide en rombo y, después, el rombo en cuadrado y explica **por qué**. (Si quieres o lo necesitas, puedes hacer dibujos)

Respuesta:

Para pasar de romboide a rombo: ....

....

Por que: ....

....

....

Después, para pasar de rombo a cuadrado: ....

....

Por que: ....

....

....

4.- Aquí tienes algunas relaciones posibles entre los cuadriláteros que hemos definido en el enunciado:

a) Todos los cuadrados son romboides especiales.

b) Algunos rombos son cuadrados.

c) Los cuadrados no son rectángulos especiales.

d) Hay romboides que pueden ser cuadrados, rectángulos o rombos.

Para cada relación, di si la consideras verdadera o falsa y **explica por qué**. (Recuerda las definiciones que hemos dado y que puedes dibujar si lo necesitas)

Respuesta:

a) Es ...., porque ....

....

....

....

b) Es ...., porque ....

....

....

....

c) Es ...., porque ....

....

....

....

d) Es ...., porque ....

....

....

....

ANEXO I

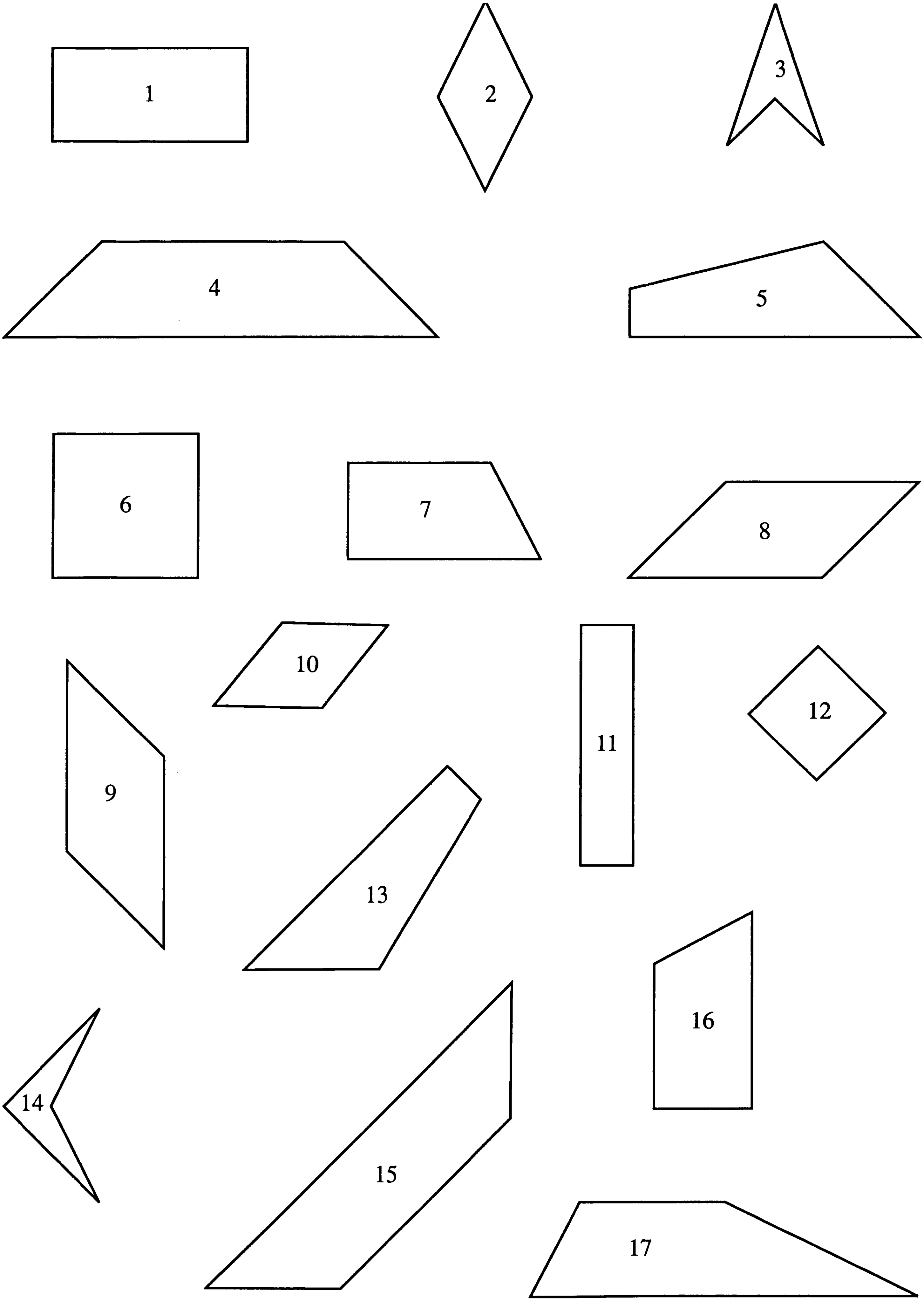
2ª PARTE

TESTS PARA LA EVALUACIÓN POR MAPAS CONCEPTUALES

LISTA DE PROPIEDADES DE LOS CONCEPTOS SECUNDARIOS Y DE NEXOS POSIBLES.

PROPIEDADES DE LOS CONCEPTOS SECUNDARIOS
IGUALES
IGUALES DOS
DESIGUALES
PARALELOS DOS A DOS
UN PAR PARALELOS
NINGÚN PAR PARALELOS
OPUESTOS IGUALES
OPUESTOS PARALELOS
ÁNGULO RECTO, AGUDO, OBTUSO
PERPENDICULARES
NO PERPENDICULARES
OBLICUAS
CORTARSE EN EL PUNTO MEDIO
INTERIOR
EXTERIOR
SIMÉTRICA (Nº DE EJES DE SIMETRÍA)
NO SIMÉTRICA
90°, 180°, 360°
MAYOR QUE 90°, MAYOR QUE 180°
MENOR QUE 90°, MENOR QUE 180°

NEXOS POSIBLES
Tiene, tienen
No tiene, no tienen
Puede tener, pueden tener
Algunos tienen
Son. Se llaman
Puede ser. Se clasifican en
Es, son
No es, no son
Como, por ejemplo...
Si..., entonces
Al menos, por lo menos.
Exactamente, únicamente, sólo.
Sin.
Con.
etc... (puedes usar los nexos que consideres, ya sea estos u otros)


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17

PARA EL CONCEPTO DE **PARALELOGRAMO**, TRATA DE ESCRIBIR EL MAYOR NÚMERO POSIBLE DE FRASES QUE CONSIDERES VERDADERAS, SOBRE CADA CONCEPTO SECUNDARIO, TOMANDO PARA ELLO LA PROPIEDAD Y EL NEXO QUE CONSIDERES APROPIADOS DE LAS LISTAS CORRESPONDIENTES.

SOBRE LOS LADOS.

1.--

2.--

3.--

4.--

SOBRE LOS ÁNGULOS.

5.--

6.--

7.--

8.--

SOBRE LAS DIAGONALES.

9.--

10.---

11.---

12.---

13.---

SOBRE SIMETRÍA y OTRAS COSAS (por ejemplo, relaciones entre frases escritas).

14.---

15.---

16.---

17.---

18.---

19.---

SOBRE LA FORMA: las figuras nº-- son **PARALELOGRAMOS.**

SOBRE SU DEFINICIÓN: Un paralelogramo es --

PARA EL CONCEPTO DE <u>**CUADRADO**</u>, TRATA DE ESCRIBIR EL MAYOR NÚMERO POSIBLE DE FRASES QUE CONSIDERES VERDADERAS, SOBRE CADA CONCEPTO SECUNDARIO, TOMANDO PARA ELLO LA PROPIEDAD Y EL NEXO QUE CONSIDERES APROPIADOS DE LAS LISTAS CORRESPONDIENTES.

<u>SOBRE LOS LADOS</u>.

1.--

2.--

3.--

4.--

<u>SOBRE LOS ÁNGULOS</u>.

5.--

6.--

7.--

8.--

<u>SOBRE LAS DIAGONALES</u>.

9.--

10.--

11.--

12.--

13.--

<u>SOBRE SIMETRÍA y OTRAS COSAS (por ejemplo, relaciones entre frases escritas)</u>.

14.--

15.--

16.--

17.--

18.--

19.--

<u>SOBRE LA FORMA</u>: las figuras nº-- son **CUADRADOS**.

<u>SOBRE SU DEFINICIÓN</u>: Un cuadrado es ---

PARA EL CONCEPTO DE RECTÁNGULO, TRATA DE ESCRIBIR EL MAYOR NÚMERO POSIBLE DE FRASES QUE CONSIDERES VERDADERAS, SOBRE CADA CONCEPTO SECUNDARIO, TOMANDO PARA ELLO LA PROPIEDAD Y EL NEXO QUE CONSIDERES APROPIADOS DE LAS LISTAS CORRESPONDIENTES.

SOBRE LOS LADOS.

1.--

2.--

3.--

4.--

SOBRE LOS ÁNGULOS.

5.--

6.--

7.--

8.--

SOBRE LAS DIAGONALES.

9.--

10.---

11.---

12.---

13.---

SOBRE SIMETRÍA y OTRAS COSAS (por ejemplo, relaciones entre frases escritas).

14.---

15.---

16.---

17.---

18.---

19.---

SOBRE LA FORMA: las figuras nº-- son RECTÁNGULOS.

SOBRE SU DEFINICIÓN: Un rectángulo es ---

PARA EL CONCEPTO DE <u>ROMBO</u>, TRATA DE ESCRIBIR EL MAYOR NÚMERO POSIBLE DE FRASES QUE CONSIDERES VERDADERAS, SOBRE CADA CONCEPTO SECUNDARIO, TOMANDO PARA ELLO LA PROPIEDAD Y EL NEXO QUE CONSIDERES APROPIADOS DE LAS LISTAS CORRESPONDIENTES.

<u>SOBRE LOS LADOS</u>.

1.--

2.--

3.--

4.--

<u>SOBRE LOS ÁNGULOS</u>.

5.--

6.--

7.--

8.--

<u>SOBRE LAS DIAGONALES</u>.

9.--

10.---

11.---

12.---

13.---

<u>SOBRE SIMETRÍA y OTRAS COSAS (por ejemplo, relaciones entre frases escritas)</u>.

14.---

15.---

16.---

17.---

18.---

19.---

<u>SOBRE LA FORMA</u>: las figuras nº---
son **ROMBOS**.

<u>SOBRE SU DEFINICIÓN</u>: Un rombo es --

PARA EL CONCEPTO DE **ROMBOIDE**, TRATA DE ESCRIBIR EL MAYOR NÚMERO POSIBLE DE FRASES QUE CONSIDERES VERDADERAS, SOBRE CADA CONCEPTO SECUNDARIO, TOMANDO PARA ELLO LA PROPIEDAD Y EL NEXO QUE CONSIDERES APROPIADOS DE LAS LISTAS CORRESPONDIENTES.

SOBRE LOS LADOS.

1.--

2.--

3.--

4.--

SOBRE LOS ÁNGULOS.

5.--

6.--

7.--

8.--

SOBRE LAS DIAGONALES.

9.--

10.---

11.---

12.---

13.---

SOBRE SIMETRÍA y OTRAS COSAS (por ejemplo, relaciones entre frases escritas).

14.---

15.---

16.---

17.---

18.---

19.---

SOBRE LA FORMA: las figuras nº-- son ROMBOIDES.

SOBRE SU DEFINICIÓN: Un romboide es ---

PARA EL CONCEPTO DE **TRAPECIO**, TRATA DE ESCRIBIR EL MAYOR NÚMERO POSIBLE DE FRASES QUE CONSIDERES VERDADERAS, SOBRE CADA CONCEPTO SECUNDARIO, TOMANDO PARA ELLO LA PROPIEDAD Y EL NEXO QUE CONSIDERES APROPIADOS DE LAS LISTAS CORRESPONDIENTES.

SOBRE LOS LADOS.

1.--

2.--

3.--

4.--

SOBRE LOS ÁNGULOS.

5.--

6.--

7.--

8.--

SOBRE LAS DIAGONALES.

9.--

10.---

11.---

12.---

13.---

SOBRE SIMETRÍA y OTRAS COSAS (por ejemplo, relaciones entre frases escritas).

14.---

15.---

16.---

17.---

18.---

19.---

SOBRE LA FORMA: las figuras nº--

son **TRAPECIOS**.

SOBRE SU DEFINICIÓN: Un trapecio es ------------------------------------

----

PARA EL CONCEPTO DE <u>**TRAPEZOIDE**</u>, TRATA DE ESCRIBIR EL MAYOR NÚMERO POSIBLE DE FRASES QUE CONSIDERES VERDADERAS, SOBRE CADA CONCEPTO SECUNDARIO, TOMANDO PARA ELLO LA PROPIEDAD Y EL NEXO QUE CONSIDERES APROPIADOS DE LAS LISTAS CORRESPONDIENTES.

<u>SOBRE LOS LADOS</u>.

1.--

2.--

3.--

4.--

<u>SOBRE LOS ÁNGULOS</u>.

5.--

6.--

7.--

8.--

<u>SOBRE LAS DIAGONALES</u>.

9.--

10.--

11.--

12.--

13.--

<u>SOBRE SIMETRÍA y OTRAS COSAS (por ejemplo, relaciones entre frases escritas)</u>.

14.--

15.--

16.--

17.--

18.--

19.--

<u>SOBRE LA FORMA</u>: las figuras nº--

son **TRAPEZOIDES.**

<u>SOBRE SU DEFINICIÓN</u>: Un trapezoide es --

RELACIONA EL NOMBRE QUE APARECE A LA IZQUIERDA CON LOS QUE APARECEN A LA DERECHA PONIENDO SOBRE LA LÍNEA DE PUNTOS, "Siempre ES", "Algunas veces ES" o "Nunca ES", SEGÚN EL CASO.

(Fíjate en los ejemplos, escribiendo eso hemos querido decir que: el PENTÁGONO "Nunca Es" o "No Es" un CÍRCULO; el PENTÁGONO "Siempre ES" o "ES" un POLÍGONO y el PENTÁGONO "Algunas veces ES" o "Puede Ser" REGULAR)

	----------CÍRCULO
PENTÁGONO	----------POLÍGONO
	----------REGULAR

1.

	----------PARALELOGRAMO
CUADRILÁTERO	----------TRAPECIO
	----------TRAPEZOIDE

2.

	----------CUADRILÁTERO
	----------RECTÁNGULO
	----------ROMBO
CUADRADO	----------ROMBOIDE
	----------PARALELOGRAMO
	----------TRAPECIO
	----------TRAPEZOIDE

3.

	----------CUADRILÁTERO
	----------CUADRADO
	----------ROMBO
RECTÁNGULO	----------ROMBOIDE
	----------PARALELOGRAMO
	----------TRAPECIO
	----------TRAPEZOIDE

4.

	----------CUADRILÁTERO
	----------CUADRADO
	----------RECTÁNGULO
ROMBO	----------ROMBOIDE
	----------PARALELOGRAMO
	----------TRAPECIO
	----------TRAPEZOIDE

5.

	----------CUADRILÁTERO
	----------CUADRADO
	----------RECTÁNGULO
ROMBOIDE	----------ROMBO
	----------PARALELOGRAMO
	----------TRAPECIO
	----------TRAPEZOIDE

6.

	----------CUADRILÁTERO
	----------CUADRADO
	----------RECTÁNGULO
PARALELOGRAMO	----------ROMBO
	----------ROMBOIDE
	----------TRAPECIO
	----------TRAPEZOIDE

7.

	----------CUADRILÁTERO
	----------CUADRADO
	----------RECTÁNGULO
TRAPECIO	----------ROMBO
	----------ROMBOIDE
	----------PARALELOGRAMO
	----------TRAPEZOIDE

8.

	----------CUADRILÁTERO
	----------CUADRADO
	----------RECTÁNGULO
TRAPEZOIDE	----------ROMBO
	----------ROMBOIDE
	----------PARALELOGRAMO
	----------TRAPECIO

ANEXO II

DESCRIPTORES DE RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES

ANEXO II

1ª PARTE

DESCRIPTORES DE RESPUESTAS PARA LA EVALUACIÓN DE NIVELES DE RAZONAMIENTO

SUPERÍTEM 1

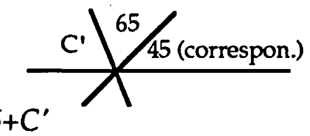
CUESTIÓN 1 (1-2)

DESCRIPTOR	EJEMPLO
Se reconoce la propiedad que resuelve la cuestión, se enuncia y se aplica correctamente: **Nivel 2, Tipo 7**	El estudiante contesta: *45°, porque los ángulos opuestos por el vértice son iguales, por lo tanto debe valer lo mismo que su opuesto por el vértice.*
Si la propiedad no se enuncia en términos de igualdad, **Nivel 2 Tipo 6.**	El estudiante contesta: *45° porque en los ángulos opuestos por el vértice pone que A=G y si A=45, pues G=45 y valen los dos lo mismo.*
Se reconoce la propiedad con una fuerte componente visual, recurriendo a la información del tronco para resolver la cuestión: **Nivel 2, Tipo 4**	El estudiante contesta: *Porque son opuestos por el vértice, porque son superpuestos y al doblarlos coinciden.*
Se reconoce la propiedad de manera visual, sin hacer mención alguna a la información que se posee: **Nivel 1.** Los tipos (>4) dependerán de la calidad de la justificación (son..., parecen..., creo que son... iguales). Si no hay justificación y la respuesta es correcta, **Tipo 3.** En otro caso, **Tipo 2**	El estudiante contesta: *45° porque el ángulo de 45 y el G son iguales.* (Tipo 7, ya que el estudiante no duda de la igualdad de los ángulos, usándola para resolver el problema).

CUESTIÓN 2 (1-2)

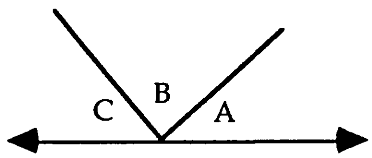
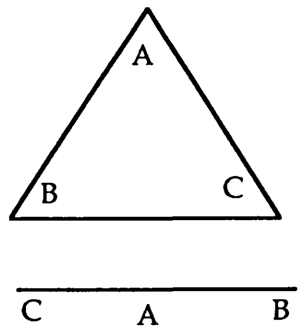
DESCRIPTOR	EJEMPLO
Se reconocen las dos propiedades que resuelven la cuestión, se enuncian y se aplican correctamente: **Nivel 2, Tipos 6/7.**	El estudiante contesta: *D=135° porque los ángulos alternos-externos son iguales. C=45° porque los ángulos correspondientes son iguales.*
Se reconoce una de las dos propiedades que resuelven la cuestión, se enuncia y se aplica. De la otra propiedad no se dice nada: **Nivel 2, Tipo 5.**	El estudiante contesta: *D=135° porque D=H (ángulos externos) y C=45°.*
Se reconocen las igualdades que resuelven la cuestión pero no se nombran las propiedades: **Nivel 1.** Los tipos dependerán de si la respuesta es correcta o no.	El estudiante contesta: *C=45°, D=135° porque G es igual que C y valen lo mismo y H es igual que D y valen lo mismo.* (Tipo 7)
Si se responde correctamente y no hay justificación, **Nivel 1, Tipo 3.**	

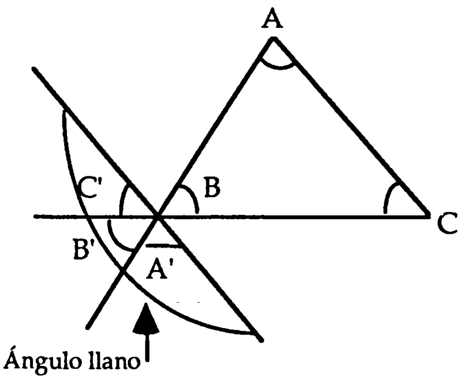
CUESTIÓN 3 (2-3)

DESCRIPTOR	EJEMPLO
El estudiante usa las relaciones entre los ángulos de una manera integrada para resolver la cuestión: **Nivel 3, Tipos 5/6/7.**	El estudiante contesta: *A=65° por opuesto por el vértice.*  *180=65+45+C'* *C'=70=C* *B=C'+65 (correp.)* *B=70+65=135.* (Tipo 6)
Se responde a la cuestión aplicando relaciones que no se justifican, **Tipos 2/3/4.**	
El estudiante usa algunas relaciones, de manera aislada y no todas las necesarias, generalmente las más visuales, incluyendo a veces otras válidas o no para completar su respuesta, lo que le permite resolver algunos ángulos, pero no todos: **Nivel 2, Tipos 5/6/7.**	El estudiante contesta: *A=65°, porque es el opuesto por el vértice de 65°. B=75° porque el ángulo plano de 120° se le resta el trozo de 45° y sale B=75°. C=110° porque es igual al ángulo resultado de la suma del ángulo de 65° y el de 45°.* (Tipo 5)
El estudiante centra su respuesta en aspectos visuales, aunque usa alguna propiedad sugerida del tronco o aportada por él: **Nivel 2, Tipos 2 /3**	El estudiante contesta: *A=65°, B=110° y C=65°, porque A y C son iguales al de 65 y B es la suma del ángulo de 65 y el de 45.* (Tipo 2)

CUESTIÓN 4 (2-4)

DESCRIPTOR	EJEMPLO
El estudiante considera que todos los ángulos son de 60°, comprobando mediante una suma que se cumple la propiedad: **Nivel 2, Tipo 2.** El estudiante considera casos particulares de triángulos con ángulos conocidos, en los que la suma de los ángulos es 180°. **Nivel 2.** Verifica un único ejemplo, **Tipo 3.** Verifica más de uno, **Tipos 5/6/7.**	Ejemplo contenido en el descriptor.

El estudiante acepta la propiedad como general de todos los triángulos y trata de justificarla por medios informales como, por ejemplo, hacer ver que si la propiedad no se cumple el triángulo no se puede construir, no es posible cerrarlo. **Nivel 3, Tipos ≤4.**	Ejemplo contenido en el descriptor (tipo <4) El estudiante contesta: *La suma de los ángulos da 180°, un ejemplo es la figura anterior* (de la cuestión 3) *y el apartado anterior* (cuestión 3)*donde se obtiene el ángulo C de restar a 180° los dos ángulos restantes.* (Tipo 4)
Si a partir de las sugerencias que le aporta el superítem traza la paralela y traslada los ángulos a un vértice donde observa que los tres ángulos dan lugar a uno llano, **Tipos 5/6/7.**	El estudiante contesta: *Si pongo tres ángulos juntos en el plano sumarán 180°* *(dibuja)*  *A+B+C=180°.* *Los ángulos interiores de un triángulo si los ponemos estirados dan 180° (incluye el siguiente dibujo):*  A+B+C=180° (Tipo 6)

El estudiante parte de las propiedades de ángulos entre paralelas, traza una paralela a uno de los lados y prolonga los otros dos, formándose tres ángulos en uno llano, demostrando que son iguales a los interiores del triángulo: **Nivel 4**. Los tipos dependerán de la claridad de las justificaciones al identificar los ángulos: **Tipos ≤4** si no siente la necesidad de enunciar las propiedades adecuadas. **Tipos 5/6/7** si sí lo hace.	El estudiante dibuja y contesta:  A+B+C=180 *Ángulo llano =180° —› C'+B'+A'=180.* *C'= C porque son ángulos correspondientes.* *A'=A porque son ángulos correspondientes.* *B=B' porque son ángulos opuestos por el vértice.* (Todo lo anterior implica que) *A+B+C=180* (Tipo 7)

SUPERÍTEM 2

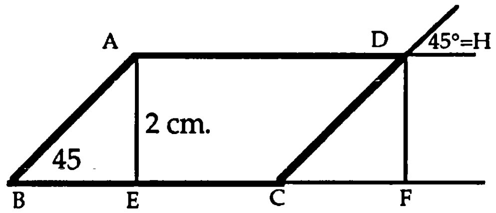
CUESTIÓN 1 (1-2)

DESCRIPTOR	EJEMPLO
El estudiante reconoce rectas paralelas y no paralelas incluyendo la propiedad visual "torcerse" o "ser diferentes", como relevante para no ser paralelas; "ir una al lado de la otra" o "ser iguales" o ir en la misma dirección, para ser paralelas. Pueden incluir, además, "cortarse" o "no cortarse". **Nivel 1, Tipos 5/6/7.**	Ejemplo en el descriptor.
El estudiante se fija sólo en los ejemplos dados y al justificarse no menciona nada más que esos ejemplos o simplemente no justifica: **Nivel 1, Tipos 2/3.** (Hay que mirar más todo el superítem para asegurarse de que su razonamiento es puramente visual y que si no menciona propiedades es porque no tiene necesidad de ello).	El estudiante dice: *paralelas ay b, e y f, no paralelas c y d, g y h; porque se ve claro en el dibujo.* (Tipo 3)
El estudiante reconoce rectas paralelas y no paralelas, incluyendo las propiedades visuales "cortarse", "no cortarse", "juntarse", "no juntarse" para justificar el paralelismo o no paralelismo de dos rectas. Pueden incluir la prolongación de las rectas o no, lo que influye en el tipo de respuesta: **Nivel 2, Tipos 2/3/4.**	El estudiante contesta: *"Porque por mucho que se prolonguen nunca se encuentran"* (Tipo 3)
El estudiante usa la propiedad de la equidistancia o de la conservación de los ángulos para justificar el paralelismo de rectas: **Nivel 2, Tipos 5/6/7.**	El estudiante contesta: *a, b y e, f son paralelas debido a que en ambos extremos de las dos existe una misma distancia; c, d y g, h no lo son porque en estos extremos no hay una misma distancia.* (Tipo 6)

CUESTIÓN 2 (1-3)

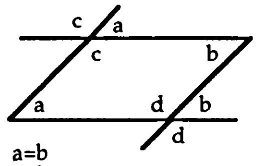
DESCRIPTOR	EJEMPLO
El estudiante no menciona la equidistancia ni la conservación de ángulos, pero usa propiedades como la posición relativa de una recta respecto de la otra, cortarse o no al prolongar las rectas, o el uso de instrumentos de dibujo, para decidir si son paralelas o no lo son: **Nivel 2, Tipos 2/3/4.**	El estudiante contesta: *No son paralelas porque la recta s está más inclinada hacia arriba que la recta r, entonces si se juntarán.* (Tipo 4)
El estudiante menciona la propiedad de la equidistancia o de la conservación de los ángulos para decir si las rectas son paralelas o no: **Nivel 2**. Si además dice como hay que obtenerla, o relaciona cortarse o juntarse con la equidistancia o la conservación de ángulos, **Tipos 5/6/7.**	El estudiante contesta: *Midiendo la distancia entre ellas en cada punto, si es siempre la misma, son paralelas.* (Tipo 7)
El alumno aporta condiciones de equidistancia y/o de conservación de ángulos, tratando de generalizar: **Nivel 3, Tipos 4/5/6/7.**	Se usa una proposición como: dos rectas son paralelas si al trazar una perpendicular a una de ellas, lo es también a la segunda, para dar el método que sirva para determinar el paralelismo de dos rectas (Tipo 6)
El **Nivel 1** y sus tipos se describen en la cuestión anterior.	

CUESTIÓN 3 (1-3)

DESCRIPTOR	EJEMPLO
El estudiante resuelve la cuestión relacionando la equidistancia y la conservación de ángulos: **Nivel 3**. Si justifica sus resultados en relación con el paralelismo y sus propiedades: **Tipos 6/7**.	El estudiante dibuja y contesta:  *H=B=45° porque son ángulos correspondientes.* *H= D porque son opuestos por el vértice.* *DF=2 cm. porque la distancia entre dos rectas paralelas (dos puntos unidos pos la perpendicular) es la misma.* (Tipo 7)
Si sólo justifica una de ellas, o cita mal las propiedades, **Tipo 5**.	
Si además de la equidistancia reconocen ángulos iguales a B pero que no es el ángulo en el vértice D: **Tipos 2/3/4**.	El estudiante contesta: *DF mide 2 cm. porque va desde la misma recta que AE en perpendicular hasta la misma recta que AE. C=45° porque es igual al ángulo formado en el vértice B, ya que son ángulos correspondientes.* (Tipo 3)
Si el estudiante mide y comprueba los que son iguales: **Nivel 2**. Los tipos dependen de la justificación.	
Si no mide y reconoce tanto la equidistancia como los ángulos que se conservan, justificándolo haciendo mención, de alguna forma, al paralelismo: **Nivel 2, Tipos 4/5/6/7**.	El estudiante contesta: *DF= 2 cm., C=45° porque los ángulos B y C son iguales. Entonces tienen que medir lo mismo y si las rectas son paralelas tienen que medir lo mismo AE que DF.* (Tipo 4)
Si no mide y reconoce la equidistancia y/o el ángulo o ángulos que miden lo mismo, justificándolo por otras propiedades ajenas al paralelismo: **Nivel 2, Tipos 2/3**.	El estudiante contesta: *DF=2 cm., porque el triángulo formado por los puntos A, B y E es el mismo que el formado por D, C y F.* No resuelve el ángulo (Tipo 2).

El estudiante encuentra una solución, pero al justificar no sabe como hacerlo y/o simplemente dice que porque son iguales: **Nivel 1**. Los tipos dependerán de si el ángulo hallado es el ADC, **Tipos 6/7**, o el DCF, **Tipos 2/3/5.**	El estudiante contesta: *DF= 2 cm. y C=45°. Porque el C es el mismo que B y DF mide lo mismo que AE.* (Tipo 3)

CUESTIÓN 4 (2-4)

DESCRIPTOR	EJEMPLO
El estudiante trata de realizar la demostración formal de la proposición, partiendo de las hipótesis, y tratando de llegar a la tesis de la proposición, mediante la aplicación de la definición de rectas paralelas o de las propiedades de rectas paralelas cortadas por una transversal: **Nivel 4**. Los tipos dependen de la calidad de la respuesta.	El estudiante parte de la primera hipótesis: lados paralelos dos a dos, lo que le proporciona las relaciones angulares siguientes:  a=b c=d c+a=180 b+d=180 y dice: "*Supongamos que a=90°, entonces c=180°-a=90°. Como a=b, entonces b=90°; d=180°-b=90°. Análogamente, cogiendo como ángulo recto inicial cualquiera de los otros restantes, tengo un cuadrilátero con los lados paralelos dos a dos y todos los ángulos rectos, entonces, un rectángulo.* (Tipo 6).
Si se intenta, a partir de las hipótesis de la proposición, llegar a la conclusión de que se trata de un rectángulo: **Tipos 5/6/7.**	Se contesta: "*Que tiene lados paralelos significa que también serán iguales los ángulos (todos o iguales dos a dos) si uno de sus ángulos es recto, todos lo serán ya que la suma ha de ser 360°. Y una figura cuyos lados son iguales dos a dos y sus ángulos son de 90° corresponde a un rectángulo*". (Tipo 6)
Si se apoya en un ejemplo genérico de rectángulo en el que trata de centrar su razonamiento, procediendo a la inversa: **Tipos 2/3/4.**	El estudiante contesta sobre un rectángulo genérico en el que están marcados los ángulos rectos y los lados que son paralelos, dice: *porque el formar un ángulo recto y tener dos lados paralelos, el 4º lado se sitúa paralelamente al que se forma al cortar los dos lados paralelos y se obtiene un rectángulo.* (Tipo 3)

El estudiante dibuja cuadriláteros para comprobar la veracidad de la afirmación: **Nivel 2, Tipos 5/6/7.**	El estudiante dibuja un rectángulo y un trapecio rectángulo indicando en éste los lados no paralelos, así como su relación con los ángulos del trapecio, diciendo que *si los lados son paralelos necesariamente tienen que ser todos sus ángulos rectos si uno de ellos lo es.* (Tipo 6).
El estudiante dibuja rectángulos pero realmente no sabe qué se le está pidiendo o discute la veracidad de la afirmación: **Nivel 2, Tipos 1/2/3.**	El estudiante dibuja varios rectángulos y dice: *Sólo es cuadrilátero cuando sus cuatro lados son iguales. Los lados del rectángulo no miden lo mismo que los horizontales.* (Tipo 2)

SUPERÍTEM 3

CUESTIÓN 1 (1-2)

DESCRIPTOR	EJEMPLO
El estudiante dibuja un exacto igual o diferente a los de la muestra, se fija en la propiedad que se deriva de la definición y la usa para justificar su dibujo: **Nivel 2, Tipos 5/6/7.**	El estudiante dibuja correctamente un exacto se fija *en que tenga solamente dos lados paralelos* y lo justifica diciendo que *solamente tienen dos lados paralelos.* (Tipo 7) El estudiante dice: *En que hayan dos lados paralelos exactamente.* Justificándolo, diciendo: *porque a y b son exactamente paralelos.* (Tipo 5) El estudiante dice: *que tenga dos lados paralelos,* justificándose en que *tienen dos lados paralelos.* (Tipo 6)
El estudiante dibuja fijándose en los cuadriláteros de la muestra y al justificar, repite la definición que se le da de los exactos: **Nivel 2, Tipo 4.**	Ejemplo contenido en el descriptor.
El estudiante dibuja un cuadrilátero confundiendo la propiedad del paralelismo por otra, o no entiende el cuantificador: **Nivel 2, Tipos 2/3.**	El estudiante dibuja un rectángulo como ejemplo de los exactos y dice que se fija en que *midan sus lados exactamente iguales,* usando la misma expresión para justificarse. (Tipo 2)
El estudiante dibuja un cuadrilátero de los de la muestra de exactos, y se justifica diciendo que es exacto porque está en el cuadro de los exactos: **Nivel 1, Tipos 5/6/7.**	El estudiante dibuja un cuadrado y dice: *es un exacto porque tiene sus lados iguales* (Tipo 5)

CUESTIÓN 2 (1-2)

DESCRIPTOR	EJEMPLO
El estudiante distingue entre **al menos** y **exactamente**, usando esta distinción para dibujar el cuadrilátero almenos no exacto, ya sea como los de la muestra o diferente, justificándose en que el dibujo tiene más de un par de lados paralelos: **Nivel 2, Tipos 6/7.**	Se dibuja un rectángulo o un cuadrado como ejemplo de almenos no exacto y se dice que es así *porque tiene más de dos lados paralelos y por eso no es exacto.* O bien se dice que *no tiene solamente dos lados paralelos, tiene dos y dos.*
El estudiante escoge para dibujar un cuadrilátero de la muestra de los almenos que no está en la muestra de los exactos y se justifica repitiendo la definición de los almenos: **Nivel 2, Tipo 4.**	El estudiante dibuja un cuadrado y dice: *El cuadrilátero no es exacto porque el dibujo tiene almenos un par de lados paralelos.*
El estudiante dibuja un cuadrilátero que no es solución de la cuestión, confundiendo la propiedad por otra, o bien no entiende lo que se le pregunta: **Tipo 1.**	Dibuja un cuadrilátero que no es almenos y dice que no es exacto *porque no todos sus lados son iguales.* (Tipo 1)
El estudiante dibuja un cuadrilátero cualquiera y dice que no es exacto porque no está en la muestra de los cuadriláteros exactos. **Nivel 1.** Los tipos dependerán de si el cuadrilátero es solución o no de la cuestión.	

CUESTIÓN 3 (2-3)

DESCRIPTOR	EJEMPLO
Se admite la inclusión de clases: **Nivel 3. Tipos 5/6/7**.	El estudiante contesta: *Sí. Supongamos que A es exacto. Entonces tiene un sólo par de lados paralelos, entonces tiene al menos un par de lados paralelos, entonces A es almenos.* (Tipo 7) Se contesta: *Sí, porque los cuadriláteros almenos también pueden tener un par de lados paralelos.* (Tipo 6)
Tipos ≤4 si, aún admitiendo la inclusión de clases, usan propiedades inapropiadas para justificarse o la justificación es muy pobre.	Se dice que *sí, porque los exactos al igual que los almenos deben de tener dos lados iguales.* (Tipo 2)
Si no se admite la inclusión en clases o duda de ella: **Nivel 2. Tipos 6/7**, si lo justifican usando correctamente un cuantificador y el otro no.	Se dice que *no, porque un exacto sólo tiene que tener 2 lados paralelos, mientras que el almenos puede tener 2 y 2.* (Tipo 6)
En cualquier otro caso, **Tipos ≤5**, teniendo en cuenta que el tipo 4 no sería posible.	El estudiante contesta: *No, porque los almenos tienen que tener almenos un par de lados paralelos y los exactos tienen que tenerlos siempre.* (Tipo 5)

CUESTIÓN 4 (2-4)

DESCRIPTOR	EJEMPLO
Si se contesta que las dos son verdaderas, por lo tanto se admite la inclusión total de los paralelogramos en los trapecios y se demuestran la primera, buscando un ejemplo de trapecio que es paralelogramo y la segunda, a partir de las definiciones: **Nivel 4**, los **tipos** dependerán de la calidad de la demostración.	El estudiante dice que las dos son verdaderas y los demuestra del modo siguiente: *A) Sea B* (dibuja un paralelogramo con un ángulos recto). *B es trapecio porque tiene un par de lados paralelos y paralelogramo porque tiene dos pares de lados paralelos. B) Sea C un paralelogramo, entonces C tiene 2 pares de lados paralelos, entonces C tiene un par de lados paralelos, entonces C es trapecio.* (Tipo 6)
Si se contesta que las dos son verdaderas, por lo tanto se admite la inclusión total de los paralelogramos en los trapecios, justificándose en términos de propiedades derivadas de las definiciones de ambas clases de cuadriláteros, **Nivel 3, Tipos 6/7**. Si se contesta que una es verdadera y la otra es falsa, por tanto se admite una inclusión parcial, **Tipos 4/5**, en función de que usen ejemplos o no, respectivamente, justificando ambos casos en relación con los pares de lados paralelos que tienen o pueden tener. **Tipos<4** si el estudiante no completa una justificación o ésta es muy pobre.	Ejemplo en el descriptor.
Si se contesta que las dos son falsas, es decir, se consideran las clases disjuntas: **Nivel 2.** Los tipos dependerán de la calidad de la justificación	Dice que las dos son falsas *porque el trapecio es con un par y el paralelogramo con dos pares de lados paralelos.* **(Tipo 5**, ya que el estudiante no repara en las definiciones que se le da, se fija en los ejemplos que posee de trapecio y paralelogramo y compara el número de lados paralelos que posee cada uno)

SUPERÍTEM 4

CUESTIÓN 1 (1-2)

DESCRIPTOR	EJEMPLO
Si se reconocen los rectángulos y se justifica la elección porque cumplen todas las propiedades citadas: **Nivel 2, Tipo 7.** (En este caso suponemos que los estudiantes han leído todas las propiedades y que de algún modo las han comprobado en las figuras dadas para escoger y descartar. En cualquier caso, hay que estar atentos a las respuestas que se den en las cuestiones siguientes).	Ejemplo en el descriptor.
Si en la siguiente cuestión escogen otros cuadriláteros (no cuadrados) además de los rectángulos, justificándose de nuevo con la lista de propiedades, **Tipo 4**, porque lo que hace es reconocerlos visualmente y asociar la lista que le damos a los rectángulos reconocidos. Si se reconocen sólo rectángulos, es que la lectura de la lista ha sido parcial, así como su comprobación, entonces **Tipos 5/6.** En cualquier otro caso **Tipos ≤3**).	Ejemplo en los distintos descriptores.
Se reconocen los rectángulos y se justifica mediante una o más de una propiedad, verdadera o no, pero poco relevante en el caso: **Tipos 2/3.** Si además incluyen otros cuadriláteros que no son rectángulos y se justifican con una única propiedad, no relevante en la elección, **Nivel 1 Tipos 5/6/7**	El estudiante escoge correctamente los rectángulos y al justificarse dice: *Porque los lados son iguales dos a dos* (Tipo 2) El estudiante contesta: *A y E, porque tienen 4 lados* (Tipo 7) *A, F y D porque tienen 4 lados* (Tipo 5)

CUESTIÓN 2 (2-3)

DESCRIPTOR	EJEMPLO
El estudiante incluye como rectángulos a los cuadrados: **Nivel 3**. Si lo justifica diciendo las propiedades necesarias que se han de cumplir, **Tipos 6/7**. (Tipo 6 si no interpretan del todo correctamente la cantidad de ejes de simetría).	Ejemplo en el descriptor.
Id., pero el estudiante al justificarse va comprobando la lista de propiedades y decide cortar: **Tipos 2/3/5**.	Ejemplo en los distintos descriptores.
Id., pero el estudiante se justifica con todo el listado de propiedades: **Nivel 2, Tipos 5/6/7**.	
El estudiante escoge sólo los rectángulos no cuadrados: **Nivel 2**. Si se justifica mediante alguna propiedad no compatible, p.ej. la igualdad de lados, **Tipos 5/6/7**.	Un estudiante escoge A y F como rectángulos y dice: *...porque cumplen todas las propiedades de rectángulo y son los únicos que sus lados son paralelos dos a dos a excepción del D, pero el D no tiene ningún ángulo recto.* (Tipo 5)
Si se incluyen en la elección otros cuadriláteros además de los rectángulos, justificándose en términos de propiedades irrelevantes, **Tipos ≤ 3**.	

CUESTIÓN 3 (2-3)

DESCRIPTOR	EJEMPLO
El estudiante admite que la lista puede hacerse más corta: **Nivel 3**, señalando aquéllas que sólo cumplen los rectángulos, **Tipos 5/6/7**. Los tipos dependerán de la cantidad y calidad de las propiedades señaladas y si el estudiante dice o no que las demás son redundantes o se pueden deducir de las escogidas.	Ejemplo en el descriptor.
Si se señala una lista más corta pero en la justificación lo que se observa es que el estudiante comprueba las que se van cumpliendo y decide cortar (generalmente las primeras), o se refiere a ellas como las más importantes o las más características, **Tipos 2/3**. Si se escoge un listado más corto pero que no define del todo, o bien no ha entendido lo que se le pregunta o bien no es posible extraer conclusiones de su repuesta, **Tipos 1/2**. (En cualquier caso, la asignación de nivel y tipo ha de ser coherente con las respuestas de los estudiantes a la cuestión anterior y siguiente) (Hay alumnos que consideran el listado como algo a comprobar para un conjunto de figuras dadas y discriminarlas unas de otras. El sentido en el que se hace la pregunta es considerarlas per se y ver si están relacionadas, en cuyo caso escojo un listado más corto. En el primero de los casos, la respuesta es de nivel 2; en el segundo, de nivel 3).	Ejemplos en los distintos descriptores.
El estudiante contesta que no puede hacerla más corta: **Nivel 2, Tipos 5/6/7**.	Se responde: *Todas, porque no sería un rectángulo aunque quitara una sola.* (Tipo 7)

CUESTIÓN 4 (2-3)

DESCRIPTOR	EJEMPLO
El estudiante hace uso de su lista anterior para definir: **Nivel 3**. Los **Tipos 5/6/7**, dependerán de la respuesta a la cuestión 3 y si mantiene la coherencia en relación con la inclusividad o exclusividad mostrada con los cuadrados.	Ejemplo en el descriptor.
Si al definir incluye alguna propiedad más de las que había señalado, o la cambia por otra, **Tipos 3/4**, ya que no está seguro de que su lista más corta defina, y se asegura con alguna propiedad más.	Ejemplo en los distintos descriptores.
Si las propiedades no definen el rectángulo, o la lista está mal construida, **Tipos 1/2**.	El estudiante escoge las propiedades 2, 4 y 3 y define rectángulo: *polígono con 4 lados, dos ejes de simetría y también todos sus lados son paralelos a otro* (Tipo 1)
El estudiante define rectángulo recitando la lista de propiedades que se le ha dado: **Nivel 2**. Los tipos van a depender de la coherencia con todo el superítem y, fundamentalmente con la cuestión anterior.	

SUPERÍTEM 5

CUESTIÓN 1 (1-2)

DESCRIPTOR	EJEMPLO
El estudiante dibuja un cuadrilátero y se fija para ello en el número de lados y en que éstos limiten una región el plano: **Nivel 2, Tipo 7/5/6**.	Ejemplo en el descriptor.
Si dibuja como representante de los cuadriláteros uno más o menos conocido, y se justifica repitiendo la definición de éste, **Tipo 4**, pues el conocimiento que tiene de los cuadriláteros es parcial y dependiente de algunos ejemplos conocidos.	El estudiante dibuja un rectángulo y contesta: *En que esté lo mejor posible y que esté mejor. Porque tiene cuatro lados y es plano* (Tipo 4)
Si al justificarse se incluye propiedades irrelevantes, **Tipos 2/3**.	Se dibuja un cuadrilátero y se dice: *En que tenga cuatro lados desiguales. Porque tiene cuatro lados desiguales* (Tipo 3)
Se dibuja un cuadrilátero conocido y se justifica atendiendo a aspecto relativos a la forma del mismo. **Nivel 1**. Los tipos dependerán de la calidad de la justificación	El estudiante dibuja un cuadrado, repite la definición y dice que es cuadrilátero: *porque tiene forma de cubo y cuatro lados iguales.* (Tipo 6)

CUESTIÓN 2 (1-3)

DESCRIPTOR	EJEMPLO
Si reconoce el rectángulo y el rombo correctamente e incluye el cuadrado en alguno de ellos o en los dos grupos, **Nivel 3**. Los **Tipos, 5/6/7,** estarán en función de la inclusión en más de una clase, en la justificación y de la respuesta a la cuestión siguiente, a la que habrá que acudir.	Ejemplo en el descriptor.
El estudiante reconoce correctamente una de las dos clases de cuadriláteros, clasificando entre ellos al cuadrado, y se justifica en términos de propiedades derivadas de sus definiciones, **Nivel 3, Tipos ≤4.**	El estudiante señala con T a los rectángulos y a los cuadrados y con R en el resto de paralelogramos (incluye rombos y romboides) y dice: ... *Son rombos porque tienen los ángulos iguales dos a dos. Los rectángulos tienen los ángulos iguales.* (Tipo 2)
Si reconoce los rectángulos y los rombos, sin incluir entre ellos el cuadrado, o se aprecia que se incluye éste por su orientación, y justifica su elección en base a propiedades derivadas de las definiciones: **Nivel 2, Tipos 6/7.**	
Id., pero al justificar repite las definiciones correspondientes, **Nivel 2 Tipo 4**. Habría que mirar todo el super-ítem para ver si el estudiante responde realmente en dos niveles consecutivos.	
El estudiante reconoce bien una de las dos clases de cuadriláteros y en su justificación incluye propiedades más o menos adecuadas, **Nivel 2 Tipos ≤3.**	El estudiante señala los rombos con R y el resto de paralelogramos con T (en ningún caso el cuadrado) y se justifica diciendo: *Porque los rectángulos tienen sus rectas paralelas y los rombos sus ángulos son iguales.* (Tipo 2)
El estudiante asigna T o R por la forma de los cuadriláteros: **Nivel 1**. El tipo dependerá de la justificación.	Un estudiante señala con T y R todos los cuadriláteros de la cuestión, de manera que se aprecia que las R están asignadas a los cuadriláteros con "apariencia" de rombo, y el resto de cuadriláteros con T, diciendo: *porque los rombos tienen una forma diferente a los rectángulos.* (Tipo 5)

CUESTIÓN 3 (1-3)

DESCRIPTOR	EJEMPLO
El estudiante parte de las definición correspondiente y observa qué propiedad ha de quedar invariante y qué propiedad ha de modificarse para conseguir la definición de la clase transformada: **Nivel 3, Tipos 5/6/7.**	Ejemplo en el descriptor.
El estudiante se apoya en el dibujo para hacer las transformaciones, indicando con propiedades los efectos de tales transformaciones: **Nivel 3, Tipos ≤4.** Usan términos como "achatar", "aplastar" la figura para obtener otra. Los tipos dependerán de la calidad de la justificación.	El estudiante contesta: Para pasar de romboide a rombo, *achatar la figura hasta que los ángulos fueran iguales dos a dos.* Para pasar de rombo a cuadrado: *seguir aplastando la figura hasta que todos los ángulos se conviertan en rectos y por lo tanto fueran todos iguales.* (Tipo 2)
El estudiante contrasta las propiedades de las figuras que ha de transformar y ve qué falta o qué ha de cambiar en una para conseguir la otra. De la propiedad invariante, no se dice nada: **Nivel 2, Tipos 5/6/7.**	Generalmente se responde: *Hacer que todos los lados sean iguales. Hacer que todos los ángulos sean iguales.* (Tipo 6)
El estudiante razona a partir de las figuras incluyendo en su razonamiento alguna propiedad suelta, **Nivel 2, Tipo 4.**	El estudiante responde: *Se tienen que alargar más los lados. Se tienen que construir ángulos rectos* (Tipo 4)
El estudiante no entiende bien lo que se le pregunta, de tal manera que al indicar las transformaciones que ha de hacer, cita propiedades que ambas clases poseen. **Nivel 2, Tipo 2/3**	
El estudiante dibuja y señala las transformaciones de una forma en otra. No habla en términos de propiedades sino de acciones, y no se separa de ellas: **Nivel 1.** Los tipos van a depender de si lo consigue o no.	Se responde: *Acortar los lados largos a más pequeños... Cambiándolo de posición* (Tipo 6) *Se tiene que alargar más dos lados... Poner un rombo de base un lado, no un vértice* (Tipo 5)

CUESTIÓN 4 (2-3)

DESCRIPTOR	EJEMPLO
El estudiante razona en términos de propiedades para justificar las relaciones de inclusión, inclusión parcial o exclusión: **Nivel 3, Tipos 5/6/7.**	El estudiante contesta: *a) Verdadera; los cuadrados tienen los ángulos y lados iguales dos a dos, pero son especiales porque los lados y ángulos son iguales. b) Verdadera; lo son si tienen sus lados y sus ángulos iguales, aunque lo seguirán teniendo iguales dos a dos. c) Falsa, porque los cuadrados tienen los cuatro ángulos iguales como los rectángulos y tienen los lados iguales 2 a 2 pero es especial porque sus lados son todos iguales aunque iguales dos a dos. d) Verdadera; porque pueden haber que tengan 4 lados iguales y 4 ángulos iguales.* (Tipo 6)
El estudiante razona en términos de propiedades para justificar algunas relaciones propuestas, siendo inclusivo unas veces y exclusivo en otras: **Tipos ≤4.**	Si se contesta: *a) Verdadera, porque tiene sus ángulos y lados iguales dos a dos. b) Falso; porque deben tener sus ángulos iguales dos a dos y los cuadrados deben tenerlos todos iguales,. c) Falso; porque se puede considerar que tienen sus lados iguales dos a dos. d) Falso; porque deben cumplir las condiciones necesarias : cuadrado, ángulos de 90° y lados iguales, no dos a dos; rectángulo, ángulos de 90° y rombos lados iguales.* (Tipo 4, ya que duda mucho al admitir la inclusividad en según que casos, de forma que algunas veces la igualdad dos a dos la puede considerar igualdad de todos y otras veces no).
El estudiante es coherente con las clasificaciones exclusivas y contesta, mayoritariamente, que las relaciones no son posibles: **Nivel 2**. Los tipos van a depender de la calidad de las respuestas en términos de propiedades derivadas de las definiciones.	El estudiante contesta: *a) Falso; el cuadrado tiene los lados y ángulos iguales. b) Verdad; los ángulos y lados de unos y otros se semejan. c) Verdad, los cuadrados tiene sus lados iguales y el rectángulo no. d) Falso, porque la construcción de este y estos no se semeja.* (Tipo 2, ya que la respuesta apenas hace uso de propiedades y al contestar comete errores o son muy pobres).

ANEXO II

2ª PARTE

DESCRIPTORES PARA LA EVALUACIÓN DE NIVELES SOLO

Superítem 1

Cuestión 1

DESCRIPTOR	EJEMPLO
Para responder a esta cuestión, el estudiante analiza la información contenida en el tronco del superítem, reconoce la propiedad que resuelve la cuestión, la enuncia, la aplica y se justifica con ella. Una respuesta de este tipo, la calificamos como **UNIESTRUCTURAL (U_0)** porque basta con usar un trozo obvio de la información que el estudiante posee para responder a la cuestión. Este trozo obvio consiste, aquí, en la propiedad enunciada en el tronco del superítem.	El estudiante responde: *45°, porque los ángulos opuestos por el vértice son iguales,* o formulaciones parecidas (por ejemplo, contestando *45° porque son ángulos opuestos por el vértice*).
Si además, tienen la necesidad de reforzar la propiedad con las igualdades, **UNIESTRUCTURAL (U_1)**	El estudiante responde: Porque *A=45° y es el mismo que G pero opuesto por el vértice.*
El estudiante se fija sólo en las igualdades: A=G, ... Reconoce que A=45°, entonces G=45. **UNIESTRUCTURAL (U_2)**	Ejemplo en el descriptor.
El estudiante responde correctamente a la cuestión, pero al justificarse o bien no lo hace, o bien proporciona una justificación en la que no se hace uso alguno de la propiedad, **UNIESTRUCTURAL (U_3)**	Ejemplo en el descriptor.
Las respuestas incorrectas serán calificadas como **NO UNIESTRUCTURAL (nU)**	

Cuestión 2

DESCRIPTOR	EJEMPLO
El estudiante reconoce las dos propiedades que resuelven la cuestión, las enuncia, las aplica y se justifica con ellas. Una respuesta de este tipo, la calificamos como **MULTIESTRUCTURAL (M_0)**, pues el estudiante únicamente necesita y usa dos trozos aislados de la información que posee para responder: las dos propiedades enunciadas en el tronco del superítem.	Se responde: *45° y 135°, porque los ángulos alternos-externos son iguales y los ángulos correspondientes son iguales.* (Puede presentarse una variante al usar las propiedades: ángulos correspondientes son iguales y ángulos opuestos por el vértice son iguales, para el cálculo de los ángulos D y C, para lo cual se implica un tercer ángulo, por ejemplo B)
Si además se apoya con las igualdades, **MULTIESTRUCTURAL (M_1)**	Se responde que: *D=H ya que ángulos alternos-externos son iguales. C=A, ya que ángulos correspondientes son iguales,* en el primer caso, *El ángulo C valdrá lo mismo que el A pues las rectas son paralelas, así que C=45°. Como las rectas son paralelas F valdrá 135 y como F y D son opuestos por el vértice se tendrá que valen ambos 135.* (puede presentarse también el caso señalado con anterioridad)
El estudiante se fija sólo en las igualdades que le resuelven la cuestión: D=H y C=A, **MULTIESTRUCTURAL (M_2)**	El estudiante responde: *D=B=H=135; C=E=G=A=45.* (Algunas respuestas encadenan dichas igualdades por lo que tendrían tendencias hacia respuestas de carácter relacional).
Se responde correctamente a la cuestión, pero al justificarse o bien no lo hace o bien proporciona una justificación en la que no se hace uso alguno de las propiedades, **MULTIESTRUCTURAL (M_3)** Respuestas incorrectas serán calificadas como **NO MULTI-ESTRUCTURAL (nM)**	

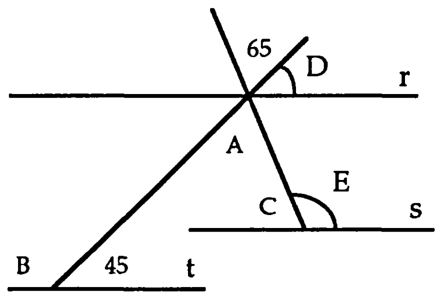
Cuestión 3

La respuesta correcta a esta cuestión puede implicar muchos trayectos diferentes desde los datos que se poseen en el problema y los que proporciona el tronco del superítem, hasta la solución. Aquí uno (o unos cuantos) en el que se resalta algunos de los elementos externos a la información que se posee, necesarios para resolver el problema:

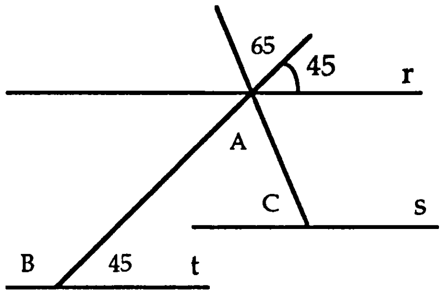
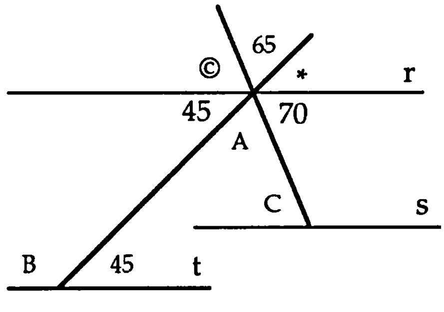
a) Deben aportarse conceptos y relaciones angulares como:
Ángulo llano (180°), ángulos adyacentes, suma y resta de ángulos.

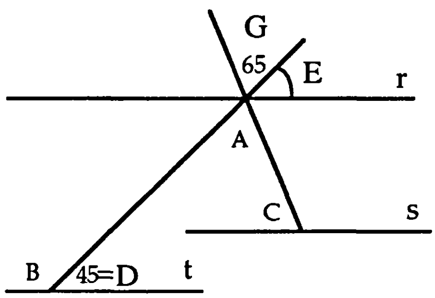
b) Generalizar las propiedades que se establecen con los ángulos entre paralelas cuando hay más de dos rectas paralelas cortadas por más de una línea transversal. Para ello, deben aportarse al problema, las siguientes relaciones:

- Si r//s y s//t, entonces r//t (Propiedad transitiva de la relación de equivalencia "ser paralelo a"). Relación que en la mayoría de los casos es implícita en el proceso de resolución y que en casos aislados se hace explícita.
- Reconocer y aplicar propiedades del paralelismo de rectas en contextos diferentes al que se usa para presentar las propiedades en el tronco del superítem, concretamente para los pares de rectas paralelas r—s, r—t, s—t, que pueden reconocerse en el dibujo del problema.

DESCRIPTOR	EJEMPLO
Una respuesta en la que se pongan en juego elementos para la solución como los descritos anteriormente, será considerada como **RELACIONAL (R_0)** pues supone una comprensión global de la información contenida en el tronco del superítem: «dos rectas paralelas cortadas por una transversal determina ángulos iguales dos a dos en cada una de ellas y entre ellas», usándose dicha información de una manera integrada para resolver la cuestión: el estudiante decide con la información que posee, la manera en la que la usa para resolver su problema.	 El estudiante, introduciendo ángulos auxiliares, responde : *A=65 porque los ángulos opuestos por el vértice son iguales.* *B=135 porque un ángulos llano mide 180° —› B=180°- 45°= 135°.* *D=45 porque los ángulos correspondientes son iguales* (aquí aplica las relaciones al par de rectas paralelas r—t) —› *65+D=E=65+45=110.* (Ahora la propiedad se usa, sin enunciar, para el par de rectas paralelas r—s) *C=180-E —› C=70.* Una variante de esta respuesta, entre muchas posibles, la proporciona el cálculo del ángulo C en el caso siguiente: A y B se resuelven y se justifican de la misma manera (práctica general en todos los casos). *C es 70, porque si B=135, C=135-65=70.*

Cuestión 3 (cont.)

DESCRIPTOR	EJEMPLO
	En otros casos, el trasladado es el ángulo de 45° de la recta t a la recta r, justificándose por ser ángulos correspondientes para el par de rectas paralelas r—t:  Entonces, la solución de C pasa por restar de 180° la suma de 65° y 45°. (Más arriba se ha mencionado que los estudiantes que resuelven esta cuestión no suelen justificar todos sus pasos haciendo mención a las propiedades descritas en el tronco del superítem. Da la impresión de que, una vez comprendida dicha información, las propiedades se convierten en herramientas de resolución y no de un razonamiento deductivo que necesita ser justificado en base a dichas propiedades) Veamos en el caso siguiente: El estudiante obtiene correctamente el valor de los ángulos A, B y C. A partir del dibujo, se justifica del modo siguiente:  *C ha de ser igual que ©. Como * vale 45°, 45+65=110, luego hasta 180° faltan 70 que es lo que valdrá C. B habrá de valer 135 pues estos son los grados que faltan hasta 180. Tenemos dos de los tres ángulos que nos hacen falta para hallar A ya determinados por ser opuestos por el vértice. La suma A+45+70 ha de ser 180. Por tanto A=65.*

DESCRIPTOR	EJEMPLO
Se resuelve la cuestión a partir de las igualdades expresadas en la figura 1, para lo cual es necesario definir ángulos auxiliares y aplicar las relaciones de igualdad, **RELACIONAL (R_2)**	(A partir del dibujo, en el que ha introducido el ángulo auxiliar E y renombrado con G y D los datos respectivos de 65° y 45°) El estudiante se justifica diciendo que *según la figura 1, sabemos que A=G=65, que E=D=45 y los cálculos para saber C están indicados (180-65-45 = 180-110=70). Para averiguar B es sólo sabiendo que el ángulo de una recta plana es de 180°.* 
El estudiante resuelve la cuestión sin hacer mención alguna a las propiedades, **RELACIONAL (R_3).**	El estudiante responde: *Porque la recta en la que está B su ángulo es 180° menos los 45° tiene que ser 135°. A porque es igual al de arriba. C porque la suma de 65+45 es igual a 110° en la recta r y como en total son 180° al restarle 110° quedan 70° que es igual al ángulo C.*
El estudiante diseña correctamente la resolución del problema, lo que supone la comprensión global e integrada de la información que posee, pero comete pequeños errores **RELACIONAL (R_4)** Las respuesta **NO RELACIONAL (nR)** a esta cuestión, se debe a las respuestas incompletas, dónde el cálculo del valor de C no se obtiene, y que generalmente supone la aplicación de una propiedad descrita en el tronco del superítem y otra sugerida (calculando así los ángulos A y B)	El estudiante al responder menciona una propiedad que no es la que se aplica, o supone que el ángulo llano vale 120° o que C *es igual al ángulo resultado de la suma del ángulo de 65° y el de 45°.*

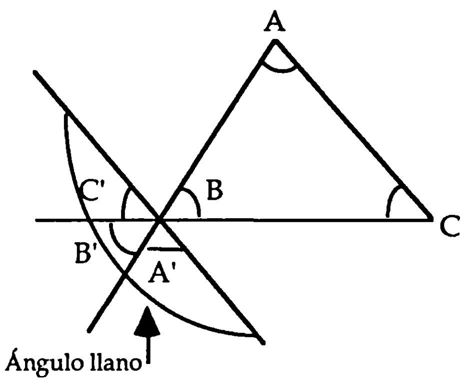
Cuestión 4

La resolución del superítem puede sugerir al estudiante el método de demostración de la propiedad de los triángulos que se pide sea demostrada. Para ello, el estudiante deberá aportar los siguientes principios generales:

a) No importa el triángulo que se considere, lo que se diga y se haga con un ejemplo genérico de ellos, será válido para la generalidad de los triángulos. (Generalizar la propiedad a todos los triángulos).

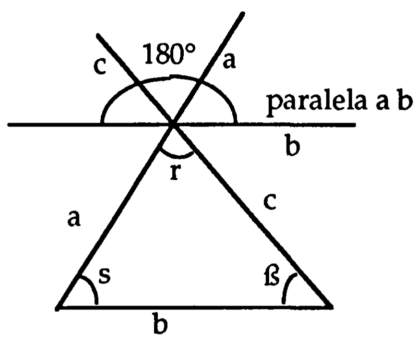
b) Ha de partir de las propiedades de los ángulos entre paralelas como hipótesis válidas para realizar su demostración.

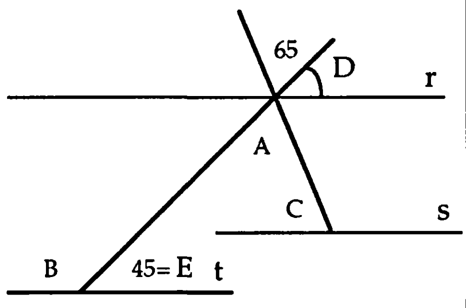
así como otros conceptos y relaciones angulares que necesita o que ya ha usado.

DESCRIPTOR	EJEMPLO
Una respuesta en la que se pongan en juego los elementos anteriores será considerada de **ABSTRACCIÓN GENERALIZADA** (**A_0**), pues en ella se puede reconocer como el estudiante no sólo usa y entiende la información contenida en el tronco del superítem de una manera global, sino que además le sugiere las hipótesis necesarias para el establecimiento de una demostración formal.	 $A+B+C=180$ El estudiante traza una paralela al lado AC, por el vértice B. Prolonga los lados BC y AB, en el vértice B. Identifica, en dicho vértice, tres ángulos que resultan ser adyacentes: A', B' y C', y que por tanto forman un ángulo llano: *Ángulo llano =180° —› $C'+B'+A'=180$.* *$C'= C$ porque son ángulos correspondientes.* *$A'=A$ porque son ángulos correspondientes.* (Fijémonos como para cada caso considera distintas transversales para el mismo par de rectas paralelas) *$B=B'$ porque son ángulos opuestos por el vértice.* (Todo lo anterior implica que) *$A+B+C=180$.*

Cuestión 4 (cont.)

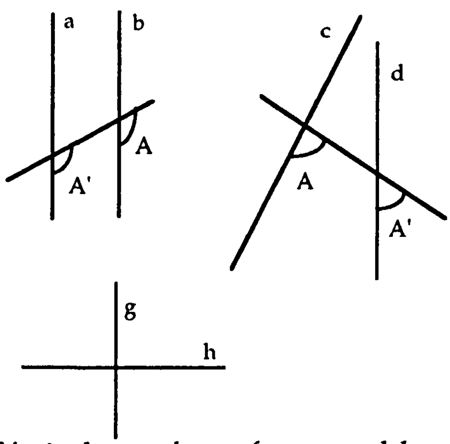
<table>
<tr><th>DESCRIPTOR</th><th>EJEMPLO</th></tr>
<tr><td>El estudiante diseña correctamente un procedimiento útil para demostrar (trazar la paralela a la base del triángulo por el vértice A), pero llega a la conclusión de que la propiedad es cierta, rápidamente, sin mediar los pasos apropiados para la justificación. Una respuesta como ésta, en la que se puede apreciar como el estudiante parece centrarse más en diseñar la manera en la que puede "ver" la propiedad que en el proceso formal de demostración, la calificaremos como de ABSTRACCIÓN GENERALIZADA (A$_1$).</td><td>El estudiante responde de esta manera: Si prolongamos las rectas que forman el triángulo y hacemos rectas paralelas al dibujar los ángulos sobre la misma recta, la suma son 180° como se aprecia en el dibujo.


</td></tr>
<tr><td>Una respuesta en la que el estudiante parece primar su razonamiento sobre un caso concreto y generalizar, antes que establecer una demostración formal que posiblemente no sea capaz de hacer o no tenga la necesidad de establecer, la clasificaremos como de ABSTRACCIÓN GENERALIZADA (A$_2$)</td><td>La resolución del superítem puede aportar medios para generalizar la propiedad a todos los triángulos, partiendo de un caso particular como el que proporciona la cuestión 3: En el ejercicio 3, vemos que al sumar los ángulos A, C y E, los ángulos son 180° y eso para cualquier "línea transversal" que cojamos. Lo que varía son los ángulos A, C y E, no su suma.


</td></tr>
<tr><td>Las respuestas que se han calificado como que no son de ABSTRACCIÓN GENERALIZADA (nA), son aquellas que, aunque se responde a la pregunta, ésta se basa en concepciones propias y previas del alumno que no están basadas directamente en la información contenida en el superítem o en su desarrollo.</td><td>Ejemplos de este tipo de respuestas son: ...porque todos los ángulos son de 60° y al sumarlos dan 180°. ...Esta propiedad es debida a que si un ángulo disminuye el otro aumenta y siempre suman 180°</td></tr>
</table>

Superítem 2

Cuestión 1

DESCRIPTOR	EJEMPLO
Una respuesta será considerada como **UNIESTRUCTURAL (U_0)** si el estudiante utiliza, para emitir sus juicios al menos una propiedad geométrica deducida de la información sugerida por el tronco, como la conservación de los ángulos o la equidistancia	Inicialmente, el estudiante reconoce las rectas paralelas y no paralelas y se justifica diciendo, respectivamente, que los son porque *aunque las prolonguemos indefinidamente no se cortan en ningún punto y si las prolongamos se cortan en un punto.* (la prolongación de las rectas puede mencionarse de manera explícita o en con el futuro del verbo cortarse. En este caso entendemos que para expresarse así, el estudiante ha prolongado las rectas y ha vista que se cortarán en un punto). Tal vez, a lo largo de la resolución del superítem, este mismo estudiante es consciente de que el paralelismo lo puede justificar por las propiedades que se pueden derivar de la información que posee en el tronco del superítem y traza las rectas transversales que se muestran a continuación, señalando los ángulos correspondientes con A y A':  Y añade: *a y b; e y f, son paralelas porque A=A'.* *c y d no son paralelas porque A=A' y g y h no son paralelas porque se cortan en un punto.*

Cuestión 1 (cont.)

DESCRIPTOR	EJEMPLO
	Pueden darse múltiples variantes de respuesta, a las que hemos asignado el mismo nivel (U_0), como: *-son paralelas porque al trazar una perpendicular a ellas o otra recta que las corte, los ángulos entre las rectas que las corta y ellas coinciden;* *- ... porque en los primeros casos* (rectas paralelas) *podemos trazar segmentos perpendiculares de la misma longitud de una recta a la otra, mientras que en c y d y en g y h no se puede:* *- ... la perpendicular (el segmento perpendicular) que une un punto de a (e) con un punto de b (f) mide lo mismo sea el punto que sea. Si no son paralelas, no se cumple. Además, si son paralelas y las cortamos por una línea transversal , ocurre lo mencionado en el superítem 1.*
El estudiante prolonga las rectas y comprueba que se cortarán en un punto: **UNIESTRUCTURAL (U_1)**	El estudiante reconoce rectas paralelas y no paralelas, justificándose en que: *aunque las prolonguemos indefinidamente no se cortan en ningún punto y si las prolongamos se cortan en un punto.* Admite múltiples formulaciones equivalentes como: *las rectas son paralelas cuando las prologamos imaginariamente no se tocan en ningún punto*: *Son paralelas porque no se cruzan y son infinitas y las que no son paralelas son aquellas que tienen un punto en común.*

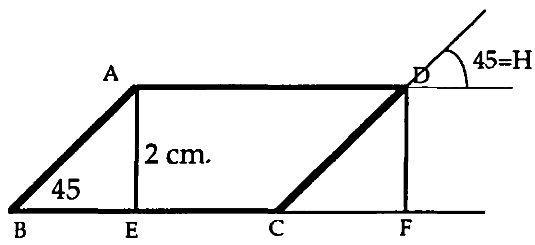
Cuestión 1 (cont.)

DESCRIPTOR	EJEMPLO
El estudiante juzga el paralelismo por la <u>posición relativa</u> entre el par de rectas considerado, **UNI-ESTRUCTURAL (U_2).**	El estudiante responde que las rectas son paralelas porque van *una encima de la otra, una enfrente de la otra, siguen rectas, son líneas totalmente rectas...* (a veces completando con no cortarse) mientras que el no paralelismo, por la prolongación y el corte o no se dice nada.
El estudiante identifica correctamente rectas paralelas y rectas no paralelas, con justificaciones poco claras, **UNIESTRUCTURAL (U_3)** pues la respuesta es dependiente de la observación visual, <u>sin centrarse en ninguna propiedad</u> del paralelismo. Se reconocen rectas paralelas y no paralelas y el estudiante no se justifica o no hay forma de incluirlas en las categorías anteriores, **UNIESTRUCTURAL (U_4)**	El estudiante justifica que las restas son paralelas porque se *ve claro en el dibujo.*

Cuestión 2

DESCRIPTOR	EJEMPLO
MULTIESTRUCTURAL (M_0): El estudiante se centra en al menos una propiedad del paralelismo: equidistancia o conservación de ángulos.	
MULTIESTRUCTURAL (M_1), si el estudiante combina los criterios de prolongación y cortarse o no cortarse con una propiedad del paralelismo.	
Las respuestas que aplican la conservación a un caso particular, porque así es *más fácil.* saber si las rectas son paralelas o no, MULTIESTRUCTURAL (M_2)	El estudiante responde que para saber si dos rectas son paralelas hay que *medir los extremos, medir el principio y el fin...* de ambas rectas
Una respuesta será considerada como No MULTIESTRUCTURAL (nM) si el estudiante no usa ninguna de las propiedades que se derivan del enunciado del superítem.	

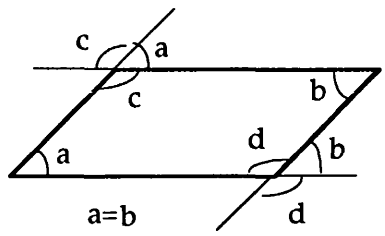
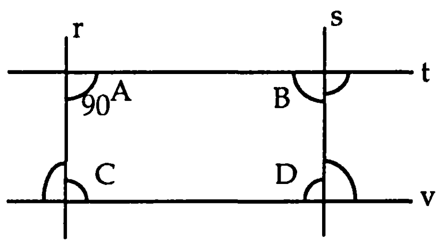
Cuestión 3

DESCRIPTOR	EJEMPLO
Una respuesta a esta cuestión se considerará **RELACIONAL (R_0)** si el estudiante justifica su respuesta en base a la equidistancia y la conservación de los ángulos formados por el corte de una transversal a un par de rectas paralelas.	El estudiante prolonga los lados del paralelogramo en el vértice D. Aparece el ángulo H y dice:  *H=B=45 porque son ángulos correspondientes.* (Aquí, el estudiante ha obviado explicar un paso previo, a saber, el ángulo DCF mide 45° por ser correspondiente con 45, al considerar los lados AB y BC paralelos cortados por el lados BC). *H=D porque son ángulos opuestos por el vértice. Luego D mide 45°.* *DF mide 2 cm. porque la distancia entre dos rectas paralelas (dos puntos unidos por la perpendicular) es la misma.* Seguiremos considerando la respuesta como RELACIONAL (R_0), aún cuando el estudiante obtenga, como ángulo que mide lo mismo, otros que no es D, pero siempre que su respuesta esté fundamentada en las propiedades que caracterizan al paralelismo: *DF=2cm. y 180°-C=45°. B y 180°-C son ángulos correspondientes. Como AD y BC son paralelas, la distancia que hay desde un punto de la recta AD perpendicularmente a la recta BC es siempre la misma.*

Cuestión 3 (cont.)

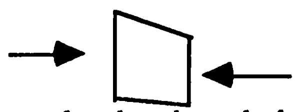
DESCRIPTOR	EJEMPLO
Si la justificación no es completa pero se aprecia que en la respuesta el estudiante aplica las propiedades que caracterizan el paralelismo en contextos diferentes al que se usó en el tronco del superítem, **RELACIONAL (R_1)**	Se contesta: *DF=2cm. y D=45°. DF porque es paralelo a AE y al prolongar la recta que contiene a BC formando un ángulo recto ,nos hallamos ante la misma distancia. Los ángulos en los vértice B y D miden lo mismo porque están formados por los segmentos AD y BC que son paralelos y AB y DC que también son paralelos.* (En el dibujo, el estudiante señala los ángulos DCF y ADC con la letra ∂).
El estudiante sabe que la respuesta es consecuencia del paralelismo de los lados pero no es capaz de construir una justificación convincente de la respuesta que da, **RELACIONAL (R_2)**	Un ejemplo de una respuesta tal es la siguiente: DF=2cm. *y D=45°. Como AD es paralelo a BC y AE es paralelo* (¿perpendicular?) *a ambos —› DF también es paralela* (¿perpendicular?) *y mide lo mismo. AD //BC y AB//DC —› originan los mismos ángulos al cortarse.*
Si el estudiante responde sin hacer uso de las propiedades que caracterizan el paralelismo y que se derivan o se pueden derivar de la información contenida en el tronco del superítem, la respuesta se considerará **NO RELACIONAL (nR).**	

Cuestión 4

DESCRIPTOR	EJEMPLO
El estudiante parte de las <u>hipótesis del enunciado</u> y trata de <u>demostrar</u> la tesis. Se apoya en el dibujo para aplicar en él las propiedades del paralelismo de las que deduce el valor de los restantes ángulos. Concluye la demostración obteniendo la tesis que persigue, **ABSTRACCIÓN GENERALIZADA (A_0)**	Razonando sobre la figura siguiente, el estudiante responde:  a=b c=d c+ a= 180° b+d=180° *Sup a=90° —› c=180°-a=90°. Como a=b —› b=90°, d=180°-b=90°. Análogamente cogiendo como ángulo recto inicial cualquiera de los otros restantes —› tengo un cuadrilátero con los lados paralelos 2 a 2 y todos los ángulos rectos —› es un rectángulo.*
El estudiante parte de las hipótesis del enunciado y trata de demostrar la tesis. Aplica condiciones de paralelismo pero tiene tendencia a <u>concluir demasiado rápido</u>, olvidando pasos en su razonamiento, o por ejemplo, aplicando propiedades particulares y no generales de los paralelogramos, **ABSTRACCIÓN GENERALIZADA (A_1)**	Se dibuja un cuadrilátero como el de la figura, en el que el estudiante sitúa los datos que dispone,  *Sup. A=90 —›B=90 (r//s, ángulos internos iguales) —› C=90 —› D=90.*
Una respuesta será considerada como **NO ABSTRACCIÓN GENERALIZADA (nA)** si en ella no se implican propiedades derivadas de la información contenida en el tronco del superítem ni se aportan aspectos abstractos relacionados con el significado matemático del término demostrar, y el estudiante se limita a discutir la veracidad de la proposición o a construir un ejemplo dónde confirmarla.	

Superítem 3

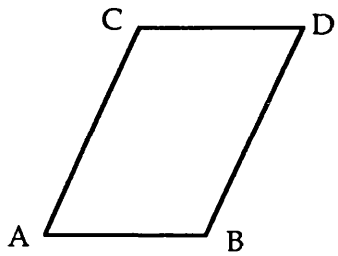
Cuestión 1

DESCRIPTOR	EJEMPLO
Si al dibujar el exacto, el estudiante menciona que se fija en ambas cosas (propiedad más cuantificador, es decir, en la definición), la respuesta se considerará como **UNIESTRUCTURAL (U_0)**	Se responde: Para dibujar un exacto me fijo *en que tenga uno y sólo un par de lados paralelos.* El cuadrilátero que he dibujado es exacto *porque tiene exactamente un par de lados paralelos.*
Un respuesta será considerada también como UNIESTRUCTURAL (U_0) si el estudiante rehusa mencionar el cuantificador "exactamente", o cualquiera de las expresiones equivalentes, sustituyéndolo por una justificación menos sofisticada	(Generalmente, el cuantificador "exactamente" se usa de manera literal en primera instancia y se explica con posterioridad, usando expresiones equivalentes como "uno y sólo un", "tiene dos y no tiene más", "solamente uno", etc. Las respuestas a las que asignamos (U_0) tratan de explicar el significado del cuantificador) Se responde que: es un exacto *porque los lados horizontales son paralelos y los otros no.*
Si sólo hace uso de la propiedad del paralelismo de los lados, y no considera el cuantificador, entonces la respuesta será considerada **UNIESTRUCTURAL (U_1)**	
Un respuesta será considerada también como **UNIESTRUCTURAL (U_1)** si el estudiante usa de manera inapropiada el cuantificador.	El estudiante contesta: Me fijo *en que hayan dos lados paralelos exactamente.* La figura que he dibujado es un exacto *porque a y b* (lados del cuadrilátero que el estudiante señala como paralelos)*son paralelos, exactamente paralelos.* El estudiante dibuja el cuadrilátero siguiente:  señalando los lados paralelos, diciendo: al dibujar el exacto me fijo *en que haya un par de lados paralelos.* La figura que he dibujado es un exacto *porque tiene un par de lados paralelos.*

Cuestión 1 (cont.)

DESCRIPTOR	EJEMPLO
El estudiante se fija en los lados paralelos, pero interpreta de manera incorrecta el cuantificador, lo que le lleva, en algunos casos, a dibujar un paralelogramo. Al justificarse, puede repetir la definición de los cuadriláteros exactos. Una respuesta como ésta será considerada como **UNIESTRUCTURAL (U_1)**	Ejemplo en el descriptor.
El estudiante se fija en el cuadro donde aparecen ejemplos de los cuadriláteros exactos y copia uno de ellos. Al explicar porqué la figura que ha dibujado es el que se le pide, repite la definición que se da en el tronco del superítem. Una respuesta como ésta será considerada como **UNIESTRUCTURAL (U_2)**	
El estudiante no se fija en la definición y sí lo hace en la muestra de los ejemplos de cuadriláteros exactos, **UNIESTRUCTURAL (U_3)**	El estudiante responde: Me fijo *en el cuadro de los exactos.* La figura que he dibujado es un exacto *porque está dentro de los exactos.*
El estudiante dibuja correctamente el cuadrilátero exacto, pero al explicar tanto en qué se fija como por qué es exacto, no sabe interpretar las condiciones "un par de lados paralelos" ni el cuantificador exactamente. Una respuesta como ésta será considerada como **UNIESTRUCTURAL (U_4)**	
Una respuesta será considerada como **NO UNIESTRUCTURAL (nU)**, si el estudiante no es capaz de dar una respuesta válida a la cuestión planteada, ni con el dibujo realizado ni con la justificación expresada	

Cuestión 2

DESCRIPTOR	EJEMPLO
El estudiante considera las dos definiciones y, al compararlas, observa que el factor que las distingue es el cuantificador que usa cada una de ellas: "exactamente" vs "al menos". Una respuesta de este tipo será considerada como **MULTIESTRUCTURAL (M_0)**	El estudiante dibuja el siguiente paralelogramo:  y contesta del siguiente modo: *Porque si fuera exacto sólo tendría 2 lados paralelos, pero al ser almenos tiene otro par de lados paralelos.* Hay que observar como en la respuesta el estudiante contrasta los dos cuantificadores: exactamente por *sólo* y almenos por *otro* (a añadir al que ya tiene) Una respuesta más precisa, ante un ejemplo similar, es la siguiente: *Porque tiene el lado AC paralelo al BD y el AB paralelo al CD. Tiene por tanto 2 pares de lados paralelos y para ser exacto tendría que tener sólo 1 par de lados paralelos.*
Si por el contrario la respuesta correcta del estudiante se basa en considerar un aspecto del cuantificador "al menos" (dos pares de lados paralelos), y no hay un contraste con el cuantificador "exactamente" (un único par de lados paralelos), la respuesta se considerará **MULTIESTRUCTURAL (M_1)**	El estudiante dibuja un rectángulo o un cuadrado, y se justifica diciendo que el cuadrilátero que ha dibujado es almenos no exacto, *porque tiene 2 pares de lados paralelos.* Una respuesta algo más precisa, es la siguiente: *porque tiene 4 lados paralelos y no dos.* O esta otra: *Porque hay más de 2 lados paralelos.* (El estudiante justifica su respuesta diciendo por qué es almenos y no es exacto, aunque sin hacer uso de los cuantificadores y sí una interpretación de los mismos)

Cuestión 2 (cont.)

DESCRIPTOR	EJEMPLO
Si el estudiante dibuja correctamente el cuadrilátero almenos no exacto y se justifica con la definición de los almenos o con que tienen almenos dos lados paralelos, se considerará como respuesta **MULTIESTRUCTURAL (M_2)** Una respuesta como la anterior pero que se justifica con otras razones que no vienen al caso o se dibuja sin justificaciones, será considerada como **MULTIESTRUCTURAL (M_3)**. Una respuesta incorrecta a esta cuestión (consistente en no dibujar el cuadrilátero pedido) será considerada como **NO MULTIESTRUCTURAL (nM)**.	Ejemplo en el descriptor

Cuestión 3

DESCRIPTOR	EJEMPLO
Si la respuesta es afirmativa, el estudiante piensa en una relación de <u>inclusión total</u> de la clases de cuadriláteros llamada exactos en la clase de cuadriláteros llamada almenos. Es decir, si A es la clase de los cuadriláteros almenos y E es la clase de los cuadriláteros exactos, E "está contenido" en A, por lo tanto, todo ejemplo de E es un ejemplo de A y, además, hay ejemplos de A que no son ejemplos de E (aunque esto último no se desprende de manera natural por mor de lo que se pregunta en la cuestión). Una respuesta de este tipo será considerada como **RELACIONAL** pues exige la comprensión global de la información contenida en el tronco del superítem.	
Si se admite la inclusión en clases con una respuesta afirmativa y se justifica partiendo de un supuesto cuadrilátero exacto que cumple las condiciones, es decir, un par de lados paralelos exactamente y trata de hacer ver que dicho cuadrilátero también es un cuadrilátero almenos porque también satisface las condiciones de éstos. Además, da a entender que dicha inclusión no es total pues puede darse el caso de que el cuadrilátero almenos tenga más lados paralelos: **RELACIONAL (R_0)**	El estudiante responde: Sí, *porque para ser exactos tienen que tener dos paralelos exactamente y no más, pero para ser almenos tienen que tener 2 lados paralelos por lo menos, aunque puede tener más lados paralelos.* (Podemos encontrarnos diferentes formulaciones de una misma respuesta, la que, en esencia, pretende confirmar que el cuantificador "exactamente" es más exigente que el cuantificador "almenos" y, por lo tanto, una definición, la de los exactos, es más restrictiva que la otra, la de los almenos)

Cuestión 3 (cont.)

DESCRIPTOR	EJEMPLO
Una respuesta será considerada como **RELACIONAL (R_1)**, si el estudiante responde <u>afirmativamente</u> a la pregunta y al explicar por qué, se fija en que ambas clases de cuadriláteros <u>comparten la misma propiedad</u>, tener un par de lados paralelos, por lo que un ejemplo de los exactos es un ejemplo de los almenos, u otras propiedades que no son las que se deducen por definición, tratando de confirmar esta <u>inclusión parcial</u> haciendo referencia, a veces, a los ejemplos mostrados en el tronco del superítem.	Ejemplo en el descriptor
Una respuesta será considerada como **NO RELACIONAL (nR)** si el estudiante no muestra con ella un comprensión completa de los cuantificadores exactamente y almenos. Su respuesta se centra en la propiedad compartida, un par de lados paralelos, por tanto en un sólo aspecto, y no aprecia la relación entre los cuantificadores	El estudiante responde: Sí, *porque todos tienen dos lados paralelos.* No se considerará relacional una respuesta como esta: *No, porque un exacto sólo tiene que tener 2 lados paralelos mientras que el almenos puede tener 2 y 2,* (pues, a pesar de que el alumno interpreta correctamente las definiciones de ambas clases de cuadriláteros, pero esta interpretación no le permite admitir la inclusión de una clase de cuadriláteros en la otra. Esto puede suponer que el estudiante no comprenda que una definición sea más restrictiva que otra, lo que dé lugar a la inclusión por la que se pregunta)

Cuestión 4

DESCRIPTOR	EJEMPLO
Si la respuesta es afirmativa para ambas proposiciones se la considerará como de **ABSTRACCIÓN GENERALIZADA (A_0)**	Un ejemplo de este tipo de respuestas es el siguiente: *Verdadera, Verdadera.* *Proposición A: Sea B un cuadrado* (que el estudiante dibuja). *B es un trapecio (porque tiene un par de lados paralelos), y paralelogramo (porque tiene 2 pares de lados paralelos).* (Así, el estudiante interpreta la relación "puede ser" como: tengo algún ejemplo de la clase T (de los trapecios) que es ejemplo de la clase P (de los paralelogramos) y lo justifica en base a las definiciones). *Proposición B: Sea C un paralelogramo —› C tiene dos pares de lados paralelos —› C tiene un par de lados paralelos —› C es trapecio.* (En este caso, la inclusión de los paralelogramos en los trapecios es demostrada viendo que si un objeto es de la clase P, entonces lo es de la clase T).
Una respuesta la calificaremos como (A_{10}) si reconoce como verdadera la proposición A y como falsa la proposición B. La justificación de la primera en base a un ejemplo que cumple las dos definiciones, el equívoco en la segundo porque entiende mal las definiciones, considerando el trapecio con un solo par de lados paralelos. Una respuesta la calificaremos como (A_{01}) si reconoce como falsa la proposición A y como verdadera la proposición B. En este caso, "dos pares —› al menos uno" y "por lo menos uno" no implica que "puedan tener dos". En otros casos, la respuesta falsa es la interpretación de "pueden ser". Una respuesta como esta entra en contradicción pues por una parte se rechaza que haya casos particulares de trapecios que sean paralelogramos y por otra, se acepta que todos los paralelogramos sean trapecios, es decir la relación de inclusión total no es entendida en el sentido matemático y las relaciones "pueden ser" y "son", se ven como relaciones independientes. Una respuesta la calificaremos como (A_{00}) si reconoce como falsas las dos relaciones. El estudiante está considerando las clases disjuntas. Las respuestas del tipo $\underline{A_{ij}}$ con i= 0, 1 y j= 0, 1, serán consideradas como de **NO ABSTRACCIÓN GENERALIZADA (nA)** pues el estudiante no admite la clasificación inclusiva de los paralelogramos en los trapecios, admitiendo en su caso clasificaciones parciales o exclusivas.	

Superítem 4

Cuestión 1

DESCRIPTOR	EJEMPLO
Una respuesta que cite o mencione todas las propiedades como justificación de la elección de los rectángulos será considerada como **UNIESTRUCTURAL (U_0)**	(En este caso, el trozo obvio de información es el listado completo, que el estudiante asocia a la palabra rectángulo después de ser reconocida entre las formas presentadas por la cuestión)
La identificación correcta de los rectángulos en la muestra de figuras geométricas supone una respuesta **UNIESTRUCTURAL (U_1)** si ésta se justifica en base a unas pocas propiedades que los describen y que están citadas en el tronco del superítem.	El estudiante escoge correctamente los rectángulos y se justifica diciendo: porque *tienen cuatro lados y las demás no.* (Es evidente que una respuesta tal es válida y coherente si el que juzga lo hace buscando propiedades de la lista dada que le sirva para discriminar una forma geométrica de otras, y tener cuatro lados discrimina las figuras A y E del resto, pero no garantiza el hecho de que sean rectángulos. Esto nos dice que el estudiante ve cada una de las propiedades de la lista como hechos aislados que cumplen una clase concreta de cuadriláteros, pero en ningún caso como hechos que se relacionan entre si y que todos juntos configuran las condiciones necesarias (aunque superabundantes) que se han de cumplir para que dicha clase sea la pedida)
Una respuesta será considerada como **UNIESTRUCTURAL (U_2)** si el estudiante responde por eliminación, eligiendo la respuesta porque las otras figuras no cumplen la primera propiedad de la lista.	
Si se justifica con propiedad irrelevantes o mediante el aspecto físico de la figura, la respuesta será considerada **UNIESTRUCTURAL (U_3)**	El estudiante escoge los rectángulos A y E y se justifica diciendo: *Porque son paralelos.*
Una respuesta será calificada como **NO UNIESTRUCTURAL (nU)**, si el estudiante no reconoce los dos rectángulos de entre las demás figuras o si lo hace, no se justifica en base a las propiedades dadas en el tronco del superítem.	

Cuestión 2

DESCRIPTOR	EJEMPLO
El estudiante responde que los rectángulos son A, B, F y G, justificándose en que las formas escogidas cumplen las 7 propiedades citadas, mientras que las formas discriminadas (D y C) no cumplen algunas de ellas. Un respuesta de este tipo será considerada como **MULTIESTRUCTURAL (M_0)**	Ejemplo en el descriptor
Una respuesta será considerada como **MULTIESTRUCTURAL (M_1)** si el estudiante sólo reconoce los rectángulos A y F, justificándose en que cumplen algunas propiedades.	Ejemplo en el descriptor
Si el estudiante reconoce los rectángulos A y F y se justifica con la lista de propiedades, **MULTIESTRUCTURAL (M_2)**	Ejemplo en el descriptor
Una respuesta será considerada como **NO MULTIESTRUCTURAL (nM)** si el estudiante incluye entre los rectángulos otras formas que no lo son, justificándose con algunas propiedades comunes o aún escogiendo correctamente, en la justificación el estudiante utiliza propiedades equivocadas.	

Cuestión 3

DESCRIPTOR	EJEMPLO
Una respuesta será considerada como **RELACIONAL (R_0)**, si el estudiante comprende que el listado de propiedades es un conjunto de condiciones necesarias, aunque superabundantes, para el concepto de rectángulo y que, por tanto, puede escoger un conjunto más pequeño de ellas que también lo caracteriza. Entonces, las demás propiedades han de ser consecuencia de las escogidas.	El estudiante responde: *1, 4. Porque (1 y 4) —› (2, 3, 5, 6, 7).*
Si el estudiante escoge un número menor y dice que con ellas sólo se puede construir un rectángulo, entonces **RELACIONAL (R_1)**.	Ejemplo en el descriptor
Si el estudiante escoge un conjunto con menos propiedades, justifica su elección en base a poseer suficiente información para saber que si una figura cumple con ellas entonces es un rectángulo, su respuesta será calificada como **RELACIONAL (R_2)**	En algunos casos, el estudiante responde que las demás se pueden averiguar. Es decir su línea de respuesta sería: *a, 4—›Rectángulo—›resto de propiedades.*
Si el estudiante es capaz de relacionar alguna o algunas de las propiedades entre si (no es una relación de implicación sino de consecuencia), pero el resto las considera como menos significativas o importantes, la respuesta será calificada como **RELACIONAL (R_3)**	
El estudiante ve las propiedades como un medio para realizar descartes de cuadriláteros y en base a ello, escoge el menor número de ellas para realizarlo. En este caso, la respuesta será calificada como **RELACIONAL (R_4)**	
Una respuesta será calificada como **NO RELACIONAL (nR)** si el estudiante no es capaz de considerar una posible reducción, no escoge la propiedad 4 para su lista reducida, o al justificar su elección habla de propiedades más conocidas, más significativas, más fáciles de identificar, más fiables, más o menos importantes, etc.	

Cuestión 4

DESCRIPTOR	EJEMPLO
El estudiante ha escogido las propiedades 1 y 4 en la cuestión anterior y define rectángulo como conjunto de condiciones necesarias y suficientes. Una respuesta como esta será calificada como de **ABSTRACCIÓN GENERALIZADA (A_0).**	El estudiante define rectángulo diciendo:*Polígono de 4 lados y cuatro ángulos rectos.*
El estudiante es coherente con la elección de propiedades en la cuestión anterior y las usa para definir el rectángulo, **ABSTRACCIÓN GENERALIZADA** **(A_i)**, dónde i=2, 3, 4, 5, 6, 7, indica el número de propiedades que incluye de la lista en la definición. Usaremos i=2 en caso de que el estudiante no use las propiedades que caracterizan la respuesta (A_0).	Ejemplo en el descriptor
Una respuesta será considerada como **NO ABSTRACCIÓN GENERALIZADA (nA)** si el estudiante no es coherente con la elección de propiedades, introduciendo más propiedades de las escogidas o no las usa para definir, o la figura que está definiendo no corresponde a un rectángulo.	

Super-ítem 5

Cuestión 1

DESCRIPTOR	EJEMPLO
Una respuesta se considerará **UNIESTRUCTURAL (U_0)** si el estudiante dibuja un cuadrilátero cualquiera y se justifica diciendo que para dibujarlo se fija en que la definición o expresiones equivalentes	El estudiante responde:*que tenga cuatro lados y que sea una figura plana* o en que *la figura está limitada por cuatro lados.*
Si el estudiante dibuja un cuadrilátero y se justifica usando parte de la definición, calificaremos la respuesta como **UNIESTRUCTURAL (U_1)**	El estudiante justifica su figura como cuadrilátero diciendo:*porque tiene cuatro lados,*
El estudiante dibuja un cuadrilátero y al justificarse dice que porque tiene cuatro lados, incluyendo alguna característica más, bien para completar su justificación, bien como justificación del cuadrilátero dibujado. Una respuesta de este tipo será calificada como **UNIESTRUCTURAL (U_2)**	
Si al justificar el cuadrilátero dibujado, el estudiante hace referencia sólo a propiedades particulares de ciertas clases de cuadriláteros, la respuesta será calificada como **UNIESTRUCTURAL (U_3).**	

Cuestión 2

DESCRIPTOR	EJEMPLO
La elección correcta de las figuras que se corresponden con las definiciones y la justificación vía la definición se corresponderá con una respuesta **MULTIESTRUCTURAL (M_0)** (incluyendo entre las figuras el cuadrado, bien como rectángulo, bien como rombo o como ambas cosas)	Ejemplo en el descriptor.
El estudiante escoge sólo los rombos y los rectángulos, justificándose con la definición de ellos, **MULTIESTRUCTURAL (M_1)**	Ejemplo en el descriptor.
El estudiante escoge correctamente las figuras que se le piden, pero al justificarse no hace referencia a las definiciones enunciadas, **MULTIESTRUCTURAL (M_2)**	Ejemplo en el descriptor.
Si el estudiante no escoge correctamente los rombos y los rectángulos, incluyendo entre ellos alguna otra forma de las que tiene en el ítem, **NO MULTIESTRUCTURAL (nM)**	

Cuestión 3

Una respuesta correcta a esta cuestión será RELACIONAL ya que el estudiante ha de manejar toda la información contenida en el tronco del superítem, analizarla y ver que es posible tener definiciones de otras clases de cuadriláteros, con sólo modificar alguna de las condiciones iniciales que definen una de ellas, manteniendo constante otras, para obtener la definición de la clase modificada.

DESCRIPTOR	EJEMPLO
Una respuesta de este tipo, será calificada como **RELACIONAL (R_0)**	El estudiante dice que: Para pasar de romboide a rombo, he de *igualar los lados, porque así tenemos definiciones iguales.* Para pasar de rombo a cuadrado, he de *igualar los cuatro ángulos* porque *así tendremos definiciones iguales.*
Una respuesta de este tipo, en la que explícitamente el estudiante no menciona la equivalencia de las definiciones, será calificada como **RELACIONAL (R_1)**	Algunas veces, la equivalencia de definiciones se establece implícitamente, como en la respuesta siguiente: *Hacer que los cuatro lados sean iguales , porque así tendríamos una figura con 4 lados iguales y ángulos iguales dos a dos —› Rombo,* respondiendo en el mismo sentido para la relación rombo-cuadrado.
Una respuesta en la que la transformación se justifica con la definición de la clase transformada será calificada como **RELACIONAL (R_2)**	El estudiante responde: *Tienes que hacer los cuatro lados iguales y los ángulos iguales dos a dos... Tienes que hacer los cuatro lados y ángulos iguales.*
Una respuesta la calificamos como **NO RELACIONAL (nR)** si el estudiante no es capaz de relacionar ambos conceptos, en al menos uno de los dos casos, bien por medios físicos bien en términos de propiedades, bien en términos de definiciones.	

Cuestión 4

DESCRIPTOR	EJEMPLO
Una respuesta será considerada como de **ABSTRACCIÓN GENERALIZADA** **(A_0)** si el estudiante reconoce como posibles (verdaderas) las relaciones de inclusión y como no posible (falsa) la única relación de exclusión planteada. (La manera en la que se justificará será en términos parecidos al mostrado en la respuesta dada a la cuestión anterior)	El estudiante contesta: *a) Verdadera; los cuadrados tienen los ángulos y lados iguales dos a dos, pero son especiales porque los lados y ángulos son iguales. b) Verdadera; lo son si tienen sus lados y sus ángulos iguales, aunque lo seguirán teniendo iguales dos a dos. c) Falsa, porque los cuadrados tienen los cuatro ángulos iguales como los rectángulos y tienen los lados iguales 2 a 2 pero es especial porque sus lados son todos iguales aunque iguales dos a dos. d) Verdadera; porque pueden haber que tengan 4 lados iguales y 4 ángulos iguales.*
Una respuesta será considerada como de **ABSTRACCIÓN GENERALIZADA** **(A_1)** si el estudiante responde como en (A_0) excepto en algún caso particular que lo juzga de manera exclusiva.	Un estudiante responde: *Verdadera, Verdadera, Falsa* a las tres primeras cuestiones de este ítem, justificándolas correctamente, pero con la última dice *Falso porque no puede ser todo a la vez.* (Esta respuesta, más que una renuncia a admitir una clasificación inclusiva supone no comprender o reparar en la estructura de la pregunta: Hay A que puede ser B, C o D)
Una respuesta será calificada como **NO ABSTRACCIÓN GENERALIZADA (nA)** si el estudiante no es capaz de aceptar las clasificaciones inclusivas propuestas por el enunciado en, al menos tres de los cuatro casos planteados, o las justificaciones que se proponen no relacionan los conceptos para justificar las inclusiones.	

ANEXO III

TABLAS DE RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO Y DE LOS NIVELES SOLO

ANEXO III

1ª PARTE

TABLAS DE RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO

Resultados de la evaluación de los niveles de van Hiele: Asignación de grados de adquisición de niveles de razonamiento y perfiles de razonamiento identificados

TABLAS DE RESULTADOS

PERFIL 1 Grados de adquisición de niveles de van Hiele.

ALUMNO	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
M1	Completa (C)	Completa (C)	Completa (C)	Alta (A)
M3	Completa (C)	Completa (C)	Alta (A)	Baja (B)
M10	Completa (C)	Completa (C)	Alta (A)	Baja (B)
M2	Completa (C)	Completa (C)	Alta (A)	Baja (B)
C18	Completa (C)	Completa (C)	Alta (A)	Nula (N)
M5	Completa (C)	Completa (C)	Alta (A)	Nula (N)
M6	Completa (C)	Completa (C)	Alta (A)	Nula (N)
M11	Completa (C)	Completa (C)	Alta (A)	Nula (N)
M8	Completa (C)	Completa (C)	Alta (A)	Nula (N)
M9	Completa (C)	Completa (C)	Alta (A)	Nula (N)
M12	Completa (C)	Completa (C)	Intermedia (I)	Baja (B)
C7	Completa (C)	Completa (C)	Intermedia (I)	Nula (N)
C8	Completa (C)	Completa (C)	Intermedia (I)	Nula (N)
C5	Completa (C)	Completa (C)	Intermedia (I)	Nula (N)
M7	Completa (C)	Completa (C)	Intermedia (I)	Nula (N)
C1	Completa (C)	Completa (C)	Baja (B)	Nula (N)
C6	Completa (C)	Completa (C)	Baja (B)	Nula (N)
C17	Completa (C)	Completa (C)	Baja (B)	Nula (N)

Tabla RH1. Grados de adqusición de los niveles de van Hiele de los estudiantes con el perfil 1

PERFIL 2 Grados de adquisición de niveles de van Hiele.

ALUMNO	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
C10	Completa (C)	Alta (A)	Intermedia (I)	Nula (N)
C12	Completa (C)	Alta (A)	Intermedia (I)	Nula (N)
M4	Completa (C)	Alta (A)	Intermedia (I)	Nula (N)
C2	Completa (C)	Alta (A)	Baja (B)	Nula (N)
C4	Completa (C)	Alta (A)	Baja (B)	Nula (N)
C9	Completa (C)	Alta (A)	Baja (B)	Nula (N)
C11	Completa (C)	Alta (A)	Baja (B)	Nula (N)
C13	Completa (C)	Alta (A)	Baja (B)	Nula (N)
C15	Completa (C)	Alta (A)	Baja (B)	Nula (N)
C16	Completa (C)	Alta (A)	Baja (B)	Nula (N)
C20	Completa (C)	Alta (A)	Baja (B)	Nula (N)
C22	Completa (C)	Alta (A)	Baja (B)	Nula (N)
E7	Completa (C)	Alta (A)	Baja (B)	Nula (N)
E15	Completa (C)	Alta (A)	Baja (B)	Nula (N)
C21	Completa (C)	Alta (A)	Nula (N)	Nula (N)
E19	Completa (C)	Alta (A)	Nula (N)	Nula (N)
E4	Completa (C)	Intermedia (I)	Baja (B)	Nula (N)
E5	Completa (C)	Intermedia (I)	Nula (N)	Nula (N)
C3	Completa (C)	Intermedia (I)	Nula (N)	Nula (N)
C19	Completa (C)	Intermedia (I)	Nula (N)	Nula (N)
E8	Completa (C)	Intermedia (I)	Nula (N)	Nula (N)
E9	Completa (C)	Intermedia (I)	Nula (N)	Nula (N)
E12	Completa (C)	Intermedia (I)	Nula (N)	Nula (N)
E14	Completa (C)	Intermedia (I)	Nula (N)	Nula (N)
E16	Completa (C)	Intermedia (I)	Nula (N)	Nula (N)
E3	Completa (C)	Baja (B)	Nula (N)	Nula (N)
E18	Completa (C)	Baja (B)	Nula (N)	Nula (N)

Tabla RH2. Grados de adqusición de los niveles de van Hiele de los estudiantes con el perfil 2

PERFIL 3 Grados de adquisición de niveles de van Hiele.

ALUMNO	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
C23	Alta (A)	Alta (A)	Baja (B)	Nula (N)
E2	Alta (A)	Intermedia (I)	Baja (B)	Nula (N)
E17	Alta (A)	Intermedia (I)	Nula (N)	Nula (N)
C14	Alta (A)	Intermedia (I)	Nula (N)	Nula (N)
E6	Alta (A)	Baja (B)	Nula (N)	Nula (N)
E10	Alta (A)	Baja (B)	Nula (N)	Nula (N)
E11	Alta (A)	Baja (B)	Nula (N)	Nula (N)
E1	Alta (A)	Baja (B)	Nula (N)	Nula (N)
E13	Intermedia (I)	Baja (B)	Nula (N)	Nula (N)

Tabla RH3. Grados de adqusición de los niveles de van Hiele de los estudiantes con el perfil 3

ESTUDIANTES DE PRIMARIA. PERFILES VAN HIELE IDENTIFICADOS

ALUMNO	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3
RL10	Intermedia (I)	Nula (N)	Nula (N)
Rl9	Intermedia (I)	Nula (N)	Nula (N)
RL3	Alta (A)	Nula (N)	Nula (N)
RL2	Alta (A)	Baja (B)	Nula (N)
RL11	Alta (A)	Baja (B)	Nula (N)
RL17	Alta (A)	Baja (B)	Nula (N)
RL18	Alta (A)	Baja (B)	Nula (N)
RL12	Alta (A)	Baja (B)	Nula (N)
RL21	Alta (A)	Baja (B)	Nula (N)
RL13	Alta (A)	Baja (B)	Nula (N)
RL14	Alta (A)	Intermedia (I)	Nula (N)
RL15	Alta (A)	Intermedia (I)	Nula (N)
RL4	Alta (A)	Intermedia (I)	Nula (N)
RL16	Alta (A)	Intermedia (I)	Baja (B)
RL6	Completa (C)	Baja (B)	Nula (N)
RL8	Completa (C)	Baja (B)	Nula (N)
RL7	Completa (C)	Baja (B)	Nula (N)
RL20	Completa (C)	Alta (A)	Nula (N)
RL19	Completa (C)	Alta (A)	Nula (N)
RL5	Completa (C)	Alta (A)	Nula (N)

Tabla RH4. Grados de adqusición de los niveles de van Hiele de los estudiantes de enseñanza primaria

ANEXO III

2ª PARTE

TABLAS DE RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN SOLO

Resultados de la evaluación SOLO: Evaluación por perfiles de razonamiento, por estudiante y por superítems

TABLAS DE RESULTADOS

Superítem 1

ALUMNO	cuestión 1	cuestión 2	cuestión 3	cuestión 4
M1	U_0	M_0	R_0	A_0
M3	U_0	M_0	R_0	A_0
M10	U_1	M_2	R_0	A_2
M2	U_2	M_2	R_2	A_1
C18	U_3	M_3	R_0	A_1
M5	U_0	M_0	nR	A_1
M6	U_0	M_0	R_0	A_1
M11	U_0	M_1	R_0	A_1
M8	U_0	M_0	R_0	A_1
M9	U_0	M_0	R_0	A_1
M12	U_0	M_0	R_4	A_0
C7	U_0	M_2	R_4	nA
C8	U_2	M_2	R_2	nA
C5	U_1	M_1	R_0	nA
M7	U_1	M_1	R_0	nA
C1	U_0	M_0	R_4	sr
C6	U_1	M_1	R_3	nA
C17	U_1	M_1	nR	nA

Tabla R11. Resultados de la evaluación SOLO de los estudiantes con el perfil 1, superítem 1

ALUMNO	cuestión 1	cuestión 2	cuestión 3	cuestión 4
C10	U_3	M_3	nR	nA
C12	U_1	nM	sr	sr
M4	U_0	M_0	nR	sr
C2	U_2	M_3	R_0	sr
C4	U_0	M_0	nR	nA
C9	U_2	M_2	nR	sr
C11	U_2	M_2	R_3	nA
C13	U_1	M_1	nR	nA
C15	U_1	M_1	nR	nA
C16	U_1	M_1	R_3	nA
C20	U_1	M_1	nR	nA
C22	U_0	M_0	R_0	nA
E7	U_2	M_2	nR	nA
E15	U_3	M_3	nR	sr
C21	U_1	M_3	nR	sr
E19	U_1	M_2	nR	nA
RL5	U_0	M_2	R_3	-----
RL19	U_0	M_3	sr	-----
RL20	U_1	M_1	nR	-----
E4	U_2	M_2	sr	nA
E5	U_1	M_1	nR	nA
C3	U_2	M_2	R_4	nA
C19	U_1	M_1	sr	nA
E8	U_3	M_3	nR	nA
E9	U_2	M_2	sr	nA
E12	U_2	M_2	nR	nA
E14	nU	M_2	sr	sr
E16	U_3	M_3	nR	nA
E3	U_2	M_1	nR	nA
E18	U_0	M_3	nR	nA
RL7	U_2	M_2	nR	-----
RL8	U_3	M_3	nR	-----
RL6	U_0	M_0	nR	-----

Tabla R12. Resultados de la evaluación SOLO de los estudiantes con el perfil 2, superítem 1

ALUMNO	cuestión 1	cuestión 2	cuestión 3	cuestión 4
C23	U_0	M_3	R_0	sr
E2	U_2	M_2	nR	sr
RL16	$U_{1,0}$	M_1	R_0	----
E17	sr	sr	sr	sr
C14	U_1	M_1	nR	nA
RL4	U_0	M_3	nR	----
RL15	U_0	M_0	nR	----
RL14	U_0	M_0	sr	----
E6	U_0	M_2	nR	nA
E10	U_2	M_0	nR	nA
E11	U_4	M_3	nR	nA
E1	U_1	sr	sr	nA
RL13	U_0	M_0	sr	----
RL21	U_0	nM	nR	----
RL12	U_2	M_2	nR	----
RL18	U_1	M_3	nR	----
RL17	nU	nM	nR	----
RL11	U_2	nM	nR	----
RL2	U_0	M_0	nR	----
RL3	nU	nM	nR	----
E13	U_3	M_3	nR	nA
RL9	nU	nM	nR	----
RL10	nU	nM	nR	----

Tabla R13. Resultados de la evaluación SOLO de los estudiantes con el perfil 3, superítem 1

RESUMEN DE LOS RESULTADOS DEL SUPERÍTEM 1

Respuestas de nivel UNIESTRUCTURAL

	UNIS. (U_0)	UNIS. (U_1)	UNIS. (U_2)	UNIS. (U_3)	NO UNIS. (nU)	SR	TOTALES
PERFIL 1	10	5	2	1	0	0	18
PERFIL 2	7	10	10	5	1	0	33
PERFIL 3	8	4	4	1	5	1	23
TOTALES	25	19	16	7	6	1	74

Tabla R111. Frecuencias de respuestas Uniestructurales del superítem 1, por perfiles de razonamiento

	UNIS. (U_0)	UNIS. (U_1)	UNIS. (U_2)	UNIS. (U_3)	NO UNIS. (nU)	SR
PERFIL 1	55.56	27.78	11.11	5.56	0	0
PERFIL 2	21.21	30.30	30.30	15.15	3.03	0
PERFIL 3	34.78	17.39	17.39	4.35	21.74	4.35
TOTALES	33.78	25.67	21.62	9.46	8.11	1.35

Tabla R112. Porcentajes de respuestas Uniestructurales del superítem 1, por perfiles de razonamiento

Respuestas de nivel MULTIESTRUCTURAL

	MULT. (M_0)	MULT. (M_1)	MULT. (M_2)	MULT. (M_3)	NO MULT. (nM)	SR	TOTALES
PERFIL 1	8	5	4	1	0	0	18
PERFIL 2	4	8	11	9	1	0	33
PERFIL 3	5	2	3	5	6	2	23
TOTALES	17	15	18	15	7	2	74

Tabla R121. Frecuencias de respuestas Multiestructurales del superítem 1, por perfiles de razonamiento

	MULT. (M_0)	MULT. (M_1)	MULT. (M_2)	MULT. (M_3)	NO MULT. (nM)	SR
PERFIL 1	44.4	27.8	22.2	5.6	0	0
PERFIL 2	12.12	24.24	33.3	27.27	3.03	0
PERFIL 3	21.74	8.69	13.64	21.74	26.09	8.69
TOTALES	22.97	20.27	24.32	20.27	9.46	2.70

Tabla R122. Porcentajes de respuestas Multiestructurales del superítem 1, por perfiles de razonamiento

Respuestas de nivel RELACIONAL

	RELA. (R_0)	RELA. (R_2)	RELA. (R_3)	RELA. (R_4)	nR	SR	TOTALES
PERFIL 1	10	2	1	3	2	0	18
PERFIL 2	2	0	3	1	21	6	33
PERFIL 3	2	0	0	0	17	4	23
TOTALES	14	2	4	4	40	10	74

Tabla R131. Frecuencias de respuestas Relacionales del superítem 1, por perfiles de razonamiento

	RELA. (R_0)	RELA. (R_2)	RELA. (R_3)	RELA. (R_4)	nR	SR
PERFIL 1	55.56	11.11	5.5	16.7	11.1	0
PERFIL 2	6.06	0	9.09	3.03	63.64	18.18
PERFIL 3	8.69	0	0	0	73.91	17.39
TOTALES	18.92	2.70	5.40	5.40	54.05	13.51

Tabla R132. Porcentajes de respuestas Relacionales del superítem 1, por perfiles de razonamiento

Respuestas de nivel ABSTRACCIÓN EXTENDIDA

	ABE. (A_0)	ABE. (A_1)	ABE. (A_2)	nA	SR	TOTALES
PERFIL 1	3	7	1	6	1	18
PERFIL 2	0	0	0	20	7	27
PERFIL 3	0	0	0	6	3	9
TOTALES	3	7	1	32	11	54

Tabla R141. Frecuencias de respuestas de Abstracción Extendida del superítem 1, por perfiles de razonamiento

	ABE. (A_0)	ABE. (A_1)	ABE. (A_2)	nA	SR
PERFIL 1	16.7	38.9	5.5	33.3	5.6
PERFIL 2	0	0	0	74.1	25.9
PERFIL 3	0	0	0	66.7	33.3
TOTALES	5.56	12.96	1.85	59.26	20.37

Tabla R142. Porcentajes de respuestas de Abstracción Extendida del superítem 1, por perfiles de razonamiento

Superítem 2

ALUMNO	cuestión 1	cuestión 2	cuestión 3	cuestión 4
M1	U_0	M_1	R_0	A_1
M3	U_1	M_2	R_2	nA
M10	U_0	M_0	R_1	A_0
M2	U_1	M_1	R_2	A_1
C18	U_1	M_2	R_1	nA
M5	U_1	M_1	nR	A_1
M6	U_1	M_2	R_0	nA
M11	U_0	M_2	nR	A_1
M8	U_1	M_2	R_0	nA
M9	U_0	M_1	nR	A_1
M12	U_1	M_2	R_0	A_1
C7	U_0	M_1	R_2	nA
C8	U_0	M_0	R_2	nA
C5	U_3	nM (U_0)	nR	nA
M7	U_1	nM (U_0)	R_1	nA
C1	U_1	M_1	R_1	nA
C6	U_1	M_1	nR	nA
C17	U_1	M_2	R_1	nA

Tabla R21. Resultados de la evaluación SOLO de los estudiantes con el perfil 1, superítem 2

ALUMNO	cuestión 1	cuestión 2	cuestión 3	cuestión 4
C10	U_1	M_1	nR	nA
C12	U_1	nM (U_0)	nR	nA
M4	U_1	M_0	R_1	nA
C2	U_1	M_1	nR	nA
C4	U_0	M_1	nR	nA
C9	U_0	M_2	nR	nA
C11	U_0	M_2	nR	nA
C13	U_0	M_0	nR	nA
C15	U_4	nM (U_5)	R_2	nA
C16	U_0	M_0	nR	nA
C20	U_0	M_1	nR	nA
C22	U_1	nM (U_5)	R_1	nA
E7	U_0	M_2	R_1	nA
E15	U_1	M_2	nR	nA
C21	U_0	M_0	nR	sr
E19	U_1	M_2	nR	nA
RL5	U_1	nM	nR	-----
RL19	U_1	nM	nR	-----
RL20	U_1	nM	nR	-----
E4	U_0	M_2	nR	nA
E5	U_2	nM (U_2)	nR	nA
C3	U_1	M_2	nR	nA
C19	U_2	nM (U_0)	nR	sr
E8	U_1	nM (U_0)	nR	nA
E9	U_1	nM (U_0)	R_2	sr
E12	U_1	nM (U_0)	nR	nA
E14	U_2	nM (U_2)	nR	sr
E16	U_0	nM (U_1)	nR	nA
E3	U_0	M_2	nR	nA
E18	U_2	M_2	nR	sr
RL7	U_1	M_1	nR	-----
RL8	U_2	nM	nR	-----
RL6	U_1	nM	nR	-----

Tabla R22. Resultados de la evaluación SOLO de los estudiantes con el perfil 2, superítem 2

ALUMNO	cuestión 1	cuestión 2	cuestión 3	cuestión 4
C23	U_0	nM (U_5)	nR	sr
E2	U_1	nM (U_2)	nR	sr
RL16	U_1	M_0	nR	-----
E17	U_1	M_2	nR	sr
C14	U_0	M_0	nR	sr
RL4	U_1	nM	nR	-----
RL15	U_1	nM	nR	-----
RL14	U_0	M_2	R_1	-----
E6	U_2	nM	nR	nA
E10	U_2	nM (U_0)	nR	sr
E11	U_4	nM	nR	nA
E1	U_2	nM	nR	sr
RL13	U_2	nM	nR	-----
RL21	U_1	nM	nR	-----
RL12	U_2	nM	nR	-----
RL18	U_2	nM	nR	-----
RL17	U_2	M_0	nR	-----
RL11	U_2	nM	nR	-----
RL2	U_4	nM	nR	-----
RL3	U_3	nM	nR	-----
E13	U_0	M_2	nR	sr
RL9	U_3	nM	nR	-----
RL10	U_3	nM	nR	-----

Tabla R23. Resultados de la evaluación SOLO de los estudiantes con el perfil 3, superítem 2

RESUMEN DE LOS RESULTADOS DEL SUPERÍTEM 2

Respuestas de nivel UNIESTRUCTURAL

	UNIS. (U_0)	UNIS. (U_1)	UNIS. (U_2)	UNIS. (U_3)	UNIS. (U_4)	TOTALES
PERFIL 1	6	11	0	1	0	18
PERFIL 2	11	16	5	0	1	33
PERFIL 3	4	6	8	3	2	23
TOTALES	21	33	13	4	3	74

Tabla R211. Frecuencias de respuestas Uniestructurales del superítem 2, por perfiles de razonamiento

	UNIS. (U_0)	UNIS. (U_1)	UNIS. (U_2)	UNIS. (U_3)	UNIS. (U_4)
PERFIL 1	33.33	61.11	0	5.56	0
PERFIL 2	33.33	48.5	15.15	0	3.03
PERFIL 3	17.39	26.09	34.78	13.04	8.70
TOTALES	28.4	44.6	17.6	5.40	4.05

Tabla R212. Porcentajes de respuestas Uniestructurales del superítem 2, por perfiles de razonamiento

Respuestas de nivel MULTIESTRUCTURAL

	MULT. (M_0)	MULT. (M_1)	MULT. (M_2)	NO MULT. (nM)	TOTALES
PERFIL 1	2	7	7	2	18
PERFIL 2	4	5	9	15	33
PERFIL 3	3	0	3	17	23
TOTALES	9	12	19	34	74

Tabla R221. Frecuencias de respuestas Multiestructurales del superítem 2, por perfiles de razonamiento

	MULT. (M_0)	MULT. (M_1)	MULT. (M_2)	NO MULT. (nM)
PERFIL 1	11.1	38.9	38.9	11.1
PERFIL 2	12.12	15.15	27.27	45.45
PERFIL 3	13.04	0	13.04	73.91
TOTALES	12.16	16.22	25.68	45.95

Tabla R222. Porcentajes de respuestas Multiestructurales del superítem 2, por perfiles de razonamiento

Respuestas de nivel RELACIONAL

	RELA. (R_0)	RELA. (R_1)	RELA. (R_2)	nR	TOTALES
PERFIL 1	4	5	4	5	18
PERFIL 2	0	3	2	28	33
PERFIL 3	0	1	0	22	23
TOTALES	4	9	6	55	74

Tabla R231. Frecuencias de respuestas Relacionales del superítem 2, por perfiles de razonamiento

	RELA. (R_0)	RELA. (R_1)	RELA. (R_2)	nR
PERFIL 1	22.2	27.8	22.2	27.8
PERFIL 2	0	9.09	6.06	84.85
PERFIL 3	0	4.3	0	95.7
TOTALES	5.40	12.16	8.11	74.32

Tabla R232. Porcentajes de respuestas Relacionales del superítem 2, por perfiles de razonamiento

Respuestas de nivel ABSTRACCIÓN EXTENDIDA

	ABE. (A_0)	ABE. (A_1)	nA	SR	TOTALES
PERFIL 1	1	6	11	0	18
PERFIL 2	0	0	22	5	27
PERFIL 3	0	0	2	7	9
TOTALES	1	6	35	12	54

Tabla R241. Frecuencias de respuestas de Abstracción Extendida del superítem 2, por perfiles de razonamiento

	ABE. (A_0)	ABE. (A_1)	nA	SR
PERFIL 1	5.6	33.3	61.1	0
PERFIL 2	0	0	81.48	18.52
PERFIL 3	0	0	22.22	77.78
TOTALES	1.85	11.11	64.81	22.22

Tabla R242. Porcentajes de respuestas de Abstracción Extendida del superítem 2, por perfiles de razonamiento

Superítem 3

ALUMNO	cuestión 1	cuestión 2	cuestión 3	cuestión 4
M1	U_0	M_1	R_0	A_0
M3	U_0	M_0	R_0	A_0
M10	U_1	M_1	R_0	A_0
M2	U_0	M_0	R_0	A_0
C18	U_0	M_0	R_0	A_{10}
M5	U_0	M_0	R_0	A_{01}
M6	U_0	M_0	R_0	A_{01}
M11	U_0	M_0	R_0	A_{01}
M8	U_0	M_0	R_0	A_0
M9	U_0	M_0	R_0	A_0
M12	U_0	M_0	R_0	A_0
C7	U_0	M_1	R_0	nA (A_{00})
C8	U_0	M_0	R_0	A_{10}
C5	U_0	M_0	R_0	A_0
M7	U_1	M_0	R_0	A_{01}
C1	U_1	nM	nR	A_{01}
C6	U_0	M_0	R_0	A_{10}
C17	U_0	M_1	R_0	A_0

Tabla R31. Resultados de la evaluación SOLO de los estudiantes con el perfil 1, superítem 3

ALUMNO	cuestión 1	cuestión 2	cuestión 3	cuestión 4
C10	U_0	M_0	R_0	A_{10}
C12	U_0	M_1	R_0	A_{10}
M4	U_0	M_0	R_0	A_0
C2	U_0	M_0	nR	A_{10}
C4	U_0	nM	R_0	A_{10}
C9	U_0	M_1	R_0	A_{10}
C11	U_0	M_0	R_0	A_{10}
C13	U_0	M_1	R_0	A_{01}
C15	U_0	M_0	R_0	A_{01}
C16	U_0	M_1	R_1	A_{10}
C20	U_1	M_0	R_0	A_{00}
C22	U_0	M_0	nR	A_{10}
E7	U_0	M_1	R_1	A_0
E15	U_0	M_1	R_0	A_{10}
C21	U_0	M_1	R_1	A_{00}
E19	U_2	nM	R_1	A_{00}
RL5	U_2	M_1	nR	-----
RL19	U_0	M_0	R_1	-----
RL20	U_2	M_1	nR	-----
E4	U_1	M_1	R_0	A_0
E5	nU	nM	R_1	A_{00}
C3	U_0	M_2	R_1	A_{00}
C19	U_0	nM	nR	A_{00}
E8	U_1	M_2	R_0	A_{10}
E9	U_0	M_1	R_0	A_{10}
E12	nU	nM	nR	A_{00}
E14	nU	nM	nR	A_0
E16	U_2	M_2	nR	A_{01}
E3	nU	nM	nR	A_{00}
E18	nU	nM	nR	A_{01}
RL7	U_1	nM	nR	-----
RL8	U_1	nM	nR	-----
RL6	U_2	M_2	nR	-----

Tabla R32. Resultados de la evaluación SOLO de los estudiantes con el perfil 2, superítem 3

ALUMNO	cuestión 1	cuestión 2	cuestión 3	cuestión 4
C23	U_0	M_1	R_0	A_{10}
E2	U_1	M_1	nR	A_{10}
RL16	U_0	M_1	nR	-----
E17	U_0	M_1	nR	A_{00}
C14	U_2	nM	sr	A_{00}
RL4	U_2	M_3	nR	-----
RL15	U_4	nM	nR	-----
RL14	U_2	nM	nR	-----
E6	U_4	nM	nR	A_{10}
E10	U_4	nM	sr	A_{01}
E11	U_4	M_3	nR	sr
E1	U_2	M_2	sr	sr
RL13	U_0	nM	R_1	-----
RL21	U_4	M_3	nR	-----
RL12	U_4	M_3	nR	-----
RL18	U_2	nM	nR	-----
RL17	nU	nM	nR	-----
RL11	U_4	M_3	nR	-----
RL2	nU	nM	nR	-----
RL3	U_2	nM	nR	-----
E13	U_0	M_1	sr	sr
RL9	U_3	nM	nR	-----
RL10	U_4	M_3	nR	-----

Tabla R33. Resultados de la evaluación SOLO de los estudiantes con el perfil 3, superítem 3

RESUMEN DE LOS RESULTADOS DEL SUPERÍTEM 3

Respuestas de nivel UNIESTRUCTURAL

	UNIS. (U_0)	UNIS. (U_1)	UNIS. (U_2)	UNIS. (U_3)	UNIS. (U_4)	nU	TOTALES
PERFIL 1	15	3	0	0	0	0	18
PERFIL 2	18	5	5	0	0	5	33
PERFIL 3	5	1	6	1	8	2	23
TOTALES	38	9	11	1	8	7	74

Tabla R311. Frecuencias de respuestas Uniestructurales del superítem 3, por perfiles de razonamiento

	UNIS. (U_0)	UNIS. (U_1)	UNIS. (U_2)	UNIS. (U_3)	UNIS. (U_4)	nU
PERFIL 1	83.3	16.7	0	0	0	0
PERFIL 2	54.54	15.15	15.15	0	0	15.15
PERFIL 3	21.74	4.35	26.09	4.35	34.78	8.70
TOTALES	51.35	12.16	14.86	1.35	10.81	9.46

Tabla R312. Porcentajes de respuestas Uniestructurales del superítem 3, por perfiles de razonamiento

Respuestas de nivel MULTIESTRUCTURAL

	MULT. (M_0)	MULT. (M_1)	MULT. (M_2)	MULT. (M_3)	NO MULT. (nM)	TOTALES
PERFIL 1	13	4	0	0	1	18
PERFIL 2	8	11	4	0	10	33
PERFIL 3	0	5	1	6	11	23
TOTALES	21	20	5	6	22	74

Tabla R321. Frecuencias de respuestas Multiestructurales del superítem 3, por perfiles de razonamiento

	MULT. (M_0)	MULT. (M_1)	MULT. (M_2)	MULT. (M_3)	NO MULT. (nM)
PERFIL 1	72.2	22.2	0	0	5.6
PERFIL 2	24.24	33.33	12.12	0	30.30
PERFIL 3	0	21.74	4.35	26.09	47.83
TOTALES	28.38	27.03	6.76	8.11	29.73

Tabla R322. Porcentajes de respuestas Multiestructurales del superítem 3, por perfiles de razonamiento

Respuestas de nivel RELACIONAL

	RELA. (R_0)	RELA. (R_1)	nR	SR	TOTALES
PERFIL 1	17	0	1	0	18
PERFIL 2	13	7	13	0	33
PERFIL 3	1	1	17	4	23
TOTALES	31	8	31	4	74

Tabla R331. Frecuencias de respuestas Relacionales del superítem 3, por perfiles de razonamiento

	RELA. (R_0)	RELA. (R_1)	nR	SR
PERFIL 1	94.4	0	5.6	0
PERFIL 2	39.39	21.21	39.39	0
PERFIL 3	4.35	4.35	73.91	17.39
TOTALES	41.89	10.81	41.89	5.40

Tabla R332. Porcentajes de respuestas Relacionales del superítem 3, por perfiles de razonamiento

Respuestas de nivel ABSTRACCIÓN EXTENDIDA

	ABE. (A_0)	NO ABE. (nA)	NO ABE. (A_{10})	NO ABE. (A_{01})	NO ABE. (A_{00})	SR	TOTALES
PERFIL 1	9	9	3	5	1	0	18
PERFIL 2	4	23	11	4	8	0	27
PERFIL 3	0	6	3	1	2	3	9
TOTALES	13	38	17	10	11	3	54

Tabla R341. Frecuencias de respuestas de Abstracción Extendida del superítem 3, por perfiles de razonamiento

	ABE. (A_0)	NO ABE. (nA)	NO ABE. (A_{10})	NO ABE. (A_{01})	NO ABE. (A_{00})	SR
PERFIL 1	50	50	16.7	27.8	5.5	0
PERFIL 2	14.8	85.2	40.7	14.8	29.6	0
PERFIL 3	0	66.6	33.3	11.1	22.2	33.3
TOTALES	24.07	70.37	31.48	18.52	20.37	5.56

Tabla R342. Porcentajes de respuestas de Abstracción Extendida del superítem 3, por perfiles de razonamiento

Superítem 4

ALUMNO	cuestión 1	cuestión 2	cuestión 3	cuestión 4
M1	U_0	M_0	R_0	A_0
M3	U_0	M_0	R_0	A_0
M10	U_0	M_0	R_0	A_4
M2	U_0	M_0	R_0	A_3
C18	U_0	M_0	R_0	A_0
M5	U_0	M_0	R_1	A_0
M6	U_0	M_0	R_0	A_4
M11	U_0	M_0	R_0	A_0
M8	U_0	M_0	R_0	A_0
M9	U_2	M_0	R_0	A_2
M12	U_1	M_0	R_0	A_2
C7	U_0	M_0	nR	nA
C8	U_0	M_1	R_3	A_3
C5	U_0	M_0	R_2	A_3
M7	U_0	M_0	R_3	A_3
C1	U_0	M_0	R_2	A_4
C6	U_0	M_2	nR	nA
C17	U_0	M_1	R_4	A_3

Tabla R41. Resultados de la evaluación SOLO de los estudiantes con el perfil 1, superítem 4

ALUMNO	cuestión 1	cuestión 2	cuestión 3	cuestión 4
C10	U_1	M_0	R_0	A_0
C12	U_0	M_0	nR	nA
M4	U_0	M_0	R_0	A_3
C2	U_0	M_2	R_0	A_4
C4	U_0	M_1	nR	A_3
C9	U_0	M_1	R_0	A_4
C11	U_0	M_1	R_2	nA
C13	U_0	M_0	R_0	A_0
C15	U_2	M_1	R_3	A_3
C16	U_0	M_0	nR	A_4
C20	U_0	M_1	R_2	A_2
C22	U_0	M_1	R_4	nA (A_4)
E7	U_0	M_0	nR	sr
E15	U_1	M_1	R_2	A_3
C21	U_0	M_0	R_2	A_3
E19	U_0	M_2	nR	nA (A_6)
RL5	U_0	M_2	R_4	A_3
RL19	U_0	M_1	R_3	nA
RL20	U_0	nM	R_3	A_3
E4	U_1	nM	nR	nA
E5	U_0	M_1	nR	nA (A_6)
C3	U_0	M_2	R_3	nA (A_3)
C19	U_0	M_2	nR	nA
E8	U_0	M_2	R_3	sr
E9	U_0	M_2	nR	nA
E12	U_0	M_2	nR	nA (A_5)
E14	U_1	M_1	R_4	A_3
E16	U_0	M_0	nR	nA
E3	nU	nM	nR	nA
E18	U_0	nM	nR	nA
RL7	U_1	M_1	nR	nA
RL8	U_3	M_1	nR	nA
RL6	U_2	M_2	nR	nA

Tabla R42. Resultados de la evaluación SOLO de los estudiantes con el perfil 2, superítem 4

ALUMNO	cuestión 1	cuestión 2	cuestión 3	cuestión 4
C23	U_1	M_1	R_0	nA (A_6)
E2	U_1	nM	R_2	A_3
E17	U_1	nM	R_2	nA
C14	U_0	nM	nR	A_4
RL4	U_0	M_2	R_4	A_4
RL15	U_1	M_0	R_4	A_3
RL14	U_1	nM	nR	nA
E6	nU	nM	nR	A_3
E10	U_1	nM	nR	nA
E11	U_0	nM	nR	nA
E1	U_0	nM	nR	nA
RL13	U_0	nM	nR	nA
RL21	U_0	M_0	nR	nA
RL12	U_1	M_1	nR	A_0
RL18	U_1	M_2	R_4	nA
RL17	U_0	M_0	nR	nA
RL11	nU	nM	nR	nA
RL2	U_1	nM	nR	nA
RL3	U_2	nM	nR	nA
E13	nU	nM	nR	nA
RL9	U_3	M_1	nR	nA
RL10	U_3	nM	nR	nA

Tabla R43. Resultados de la evaluación SOLO de los estudiantes con el perfil 3, superítem 4

RESUMEN DE LOS RESULTADOS DEL SUPERÍTEM 4

Respuestas de nivel UNIESTRUCTURAL

	UNIS. (U_0)	UNIS. (U_1)	UNIS. (U_2)	UNIS. (U_3)	NO UNIS. (nU)	TOTALES
PERFIL 1	16	1	1	0	0	18
PERFIL 2	24	5	2	1	1	33
PERFIL 3	7	10	1	2	3	23
TOTALES	47	16	4	3	4	74

Tabla R411. Frecuencias de respuestas Uniestructurales del superítem 4, por perfiles de razonamiento

	UNIS. (U_0)	UNIS. (U_1)	UNIS. (U_2)	UNIS. (U_3)	NO UNIS. (nU)
PERFIL 1	88.89	5.55	5.55	0	0
PERFIL 2	72.73	15.15	6.06	3.03	3.03
PERFIL 3	30.43	43.48	4.35	8.70	13.04
TOTALES	63.51	21.62	5.40	4.05	5.40

Tabla R412. Porcentajes de respuestas Uniestructurales del superítem 4, por perfiles de razonamiento

Respuestas de nivel MULTIESTRUCTURAL

	MULT. (M_0)	MULT. (M_1)	MULT. (M_2)	NO MULT. (nM)	TOTALES
PERFIL 1	15	2	1	0	18
PERFIL 2	8	12	9	4	33
PERFIL 3	3	4	2	14	23
TOTALES	26	18	12	18	74

Tabla R421. Frecuencias de respuestas Multiestructurales del superítem 4, por perfiles de razonamiento

	MULT. (M_0)	MULT. (M_1)	MULT. (M_2)	NO MULT. (nM)
PERFIL 1	83.3	11.1	5.5	0
PERFIL 2	24.24	36.36	27.27	12.12
PERFIL 3	13.04	17.39	8.70	60.87
TOTALES	35.13	24.32	16.22	24.32

Tabla R422. Porcentajes de respuestas Multiestructurales del superítem 4, por perfiles de razonamiento

Respuestas de nivel RELACIONAL

	RELA. (R_0)	RELA. (R_1)	RELA. (R_2)	RELA. (R_3)	RELA. (R_4)	nR	TOTALES
PERFIL 1	10	1	2	2	1	2	18
PERFIL 2	5	0	4	5	3	16	33
PERFIL 3	1	0	3	0	3	16	23
TOTALES	16	1	9	7	7	34	74

Tabla R431. Frecuencias de respuestas Relacionales del superítem 4, por perfiles de razonamiento

	RELA. (R_0)	RELA. (R_1)	RELA. (R_2)	RELA. (R_3)	RELA. (R_4)	nR
PERFIL 1	55.56	5.5	11.1	11.1	5.5	11.1
PERFIL 2	15.15	0	12.12	15.15	9.09	48.48
PERFIL 3	4.35	0	13.04	0	13.04	69.56
TOTALES	21.62	1.35	12.16	9.46	9.46	45.95

Tabla R432. Porcentajes de respuestas Relacionales del superítem 4, por perfiles de razonamiento

Respuestas de nivel ABSTRACCIÓN EXTENDIDA

	ABE. (A_0)	ABE. (A_2)	ABE. (A_3)	ABE. (A_4)	nA	SR	TOTALES
PERFIL 1	6	2	5	3	2	0	18
PERFIL 2	2	1	8	3	17	2	33
PERFIL 3	1	1	3	2	16	0	23
TOTALES	9	4	16	8	35	2	74

Tabla R441. Frecuencias de respuestas de Abstracción Extendida del superítem 4, por perfiles de razonamiento

	ABE. (A_0)	ABE. (A_2)	ABE. (A_3)	ABE. (A_4)	nA	SR
PERFIL 1	33.3	11.1	27.8	16.7	11.1	0
PERFIL 2	6.06	3.03	24.24	9.09	51.51	6.06
PERFIL 3	4.35	4.35	13.04	8.70	69.56	0
TOTALES	12.16	5.04	21.62	10.81	47.30	2.70

Tabla R442. Porcentajes de respuestas de Abstracción Extendida del superítem 4, por perfiles de razonamiento

Superítem 5

ALUMNO	cuestión 1	cuestión 2	cuestión 3	cuestión 4
M1	U_0	M_0	R_0	A_0 (A_{1111})
M3	U_0	M_0	R_0	A_0 (A_{1111})
M10	U_0	nM	R_0	A_0 (A_{1111})
M2	U_0	M_0	R_0	A_0 (A_{1111})
C18	U_0	M_1	R_1	A_0 (A_{1111})
M5	U_0	M_0	R_0	A_0 (A_{1111})
M6	U_1	M_0	R_0	A_0 (A_{1111})
M11	U_0	M_0	R_0	A_0 (A_{1111})
M8	U_1	M_0	R_0	sr (A_{1111})
M9	U_1	M_0	R_1	A_0 (A_{1111})
M12	U_0	nM	R_0	A_0 (A_{1111})
C7	U_0	M_0	R_1	nA (A_{1100})
C8	U_0	M_1	R_0	nA (A_{0000})
C5	U_0	M_0	R_1	A_1 (A_{1110})
M7	U_0	M_0	R_0	A_0 (A_{1111})
C1	U_0	nM	nR	A_0 (A_{1111})
C6	U_0	M_1	R_1	nA (A_{0000})
C17	U_1	M_1	R_1	nA (A_{0001})

Tabla R51. Resultados de la evaluación SOLO de los estudiantes con el perfil 1, superítem 5

ALUMNO	cuestión 1	cuestión 2	cuestión 3	cuestión 4
C10	U_0	M_0	R_1	A_0 (A_{1111})
C12	U_0	M_0	R_1	A_0 (A_{1111})
M4	U_0	nM	R_1	A_0 (A_{1111})
C2	U_1	M_1	R_1	nA (A_{1010})
C4	U_1	M_1	nR	nA (A_{0101})
C9	U_2	M_1	R_1	nA (A_{0000})
C11	U_0	M_1	R_1	nA (A_{0101})
C13	U_2	nM	nR	nA (A_{0011})
C15	U_0	M_1	R_1	nA (A_{0010})
C16	U_2	M_0	R_1	nA (A_{0100})
C20	U_0	M_0	R_0	nA (A_{0100})
C22	U_0	nM	R_1	nA (A_{0000})
E7	U_1	M_1	R_1	nA (A_{0000})
E15	U_2	M_1	R_1	nA (A_{0000})
C21	U_2	M_1	sr	sr
E19	U_2	M_1	nR	nA (A_{0000})
RL5	U_0	nM	nR	nA (A_{011-})
RL19	U_0	M_2	R_2	nA (A_{0000})
RL20	U_2	M_2	nR	nA (A_{0010})
E4	U_3	nM	sr	nA (A_{1100})
E5	U_2	M_1	nR	sr
C3	U_3	M_1	nR	nA (A_{0100})
C19	U_0	M_2	nR	nA (A_{0001})
E8	U_0	nM	sr	nA (A_{1110})
E9	U_0	nM	R_1	nA (A_{0001})
E12	U_2	nM	R_1	nA (A_{0100})
E14	U_1	M_1	R_1	nA (A_{0000})
E16	U_0	M_1	nR	nA (A_{0100})
E3	U_2	nM	nR	nA (A_{0100})
E18	U_2	nM	R_1	nA (A_{1111})
RL7	U_2	nM	nR	nA (A_{0110})
RL8	U_1	nM	nR	nA (A_{0110})
RL6	U_3	nM	nR	sr

Tabla R52. Resultados de la evaluación SOLO de los estudiantes con el perfil 2, superítem 5

ALUMNO	cuestión 1	cuestión 2	cuestión 3	cuestión 4
C23	U_1	M_1	sr	sr
E2	U_2	nM	sr	nA (A_{0100})
E17	sr	nM	R_1	nA (A_{0010})
C14	U_0	M_1	sr	nA (A_{0100})
RL4	U_3	nM	nR	nA (A_{0100})
RL15	U_2	nM	sr	nA (A_{1110})
RL14	U_1	sr	sr	sr
E6	U_2	nM	sr	nA (A_{0110})
E10	U_2	M_2	sr	sr
E11	U_0	nM	sr	nA (A_{0000})
E1	U_0	M_1	sr	sr
RL13	U_0	nM	R_2	sr
RL21	U_0	nM	nR	sr
RL12	U_2	M_2	nR	nA (A_{1101})
RL18	U_0	nM	nR	sr
RL17	U_1	nM	sr	sr
RL11	U_1	nM	sr	nA (A_{0010})
RL2	U_2	nM	sr	nA (A_{0010})
RL3	U_3	nM	nR	nA (A_{1011})
E13	sr	nM sr	sr	sr
RL9	U_0	nM	nR	nA (A_{0101})
RL10	U_2	nM	nR	nA (A_{0101})

Tabla R53. Resultados de la evaluación SOLO de los estudiantes con el perfil 3, superítem 5

RESUMEN DE LOS RESULTADOS DEL SUPERÍTEM 5

Respuestas de nivel UNIESTRUCTURAL

	UNIS. (U_0)	UNIS. (U_1)	UNIS. (U_2)	UNIS. (U_3)	SR	TOTALES
PERFIL 1	14	4	0	0	0	18
PERFIL 2	13	5	12	3	0	33
PERFIL 3	7	5	7	2	2	23
TOTALES	34	14	19	5	2	74

Tabla R511. Frecuencias de respuestas Uniestructurales del superítem 5, por perfiles de razonamiento

	UNIS. (U_0)	UNIS. (U_1)	UNIS. (U_2)	UNIS. (U_3)	SR
PERFIL 1	77.8	22.2	0	0	0
PERFIL 2	39.39	15.15	36.36	9.09	0
PERFIL 3	30.43	21.74	30.43	8.70	8.70
TOTALES	45.95	18.92	25.68	6.76	2.70

Tabla R512. Porcentajes de respuestas Uniestructurales del superítem 5, por perfiles de razonamiento

Respuestas de nivel MULTIESTRUCTURAL

	MULT. (M_0)	MULT. (M_1)	MULT. (M_2)	NO MULT. (nM)	SR	TOTALES
PERFIL 1	11	4	0	3	0	18
PERFIL 2	4	13	3	13	0	33
PERFIL 3	0	3	2	17	1	23
TOTALES	15	20	5	33	1	74

Tabla R521. Frecuencias de respuestas Multiestructurales del superítem 5, por perfiles de razonamiento

	MULT. (M_0)	MULT. (M_1)	MULT. (M_2)	NO MULT. (nM)	SR
PERFIL 1	64.1	22.2	0	16.7	0
PERFIL 2	12.12	39.39	9.09	39.39	0
PERFIL 3	0	13.04	8.70	73.91	4.35
TOTALES	20.27	27.03	6.76	44.59	1.35

Tabla R522. Porcentajes de respuestas Multiestructurales del superítem 5, por perfiles de razonamiento

Respuestas de nivel RELACIONAL

	RELA. (R_0)	RELA. (R_1)	RELA. (R_2)	nR	SR	TOTALES
PERFIL 1	11	6	0	1	0	18
PERFIL 2	1	15	1	13	3	33
PERFIL 3	1	0	1	7	14	23
TOTALES	13	21	2	21	17	74

Tabla R531. Frecuencias de respuestas Relacionales del superítem 5, por perfiles de razonamiento

	RELA. (R_0)	RELA. (R_1)	RELA. (R_2)	nR	SR
PERFIL 1	61.1	33.3	0	5.6	0
PERFIL 2	3.03	45.45	3.03	39.39	9.09
PERFIL 3	4.35	0	4.35	30.43	60.87
TOTALES	17.57	28.38	2.70	28.38	22.97

Tabla R532. Porcentajes de respuestas Relacionales del superítem 5, por perfiles de razonamiento

Respuestas de nivel ABSTRACCIÓN EXTENDIDA

	ABE. (A_0)	ABE. (A_1)	nA	SR	TOTALES
PERFIL 1	12	1	4	1	18
PERFIL 2	3	0	27	3	33
PERFIL 3	0	0	13	10	23
TOTALES	15	1	44	14	74

Tabla R541. Frecuencias de respuestas de Abstracción Extendida del superítem 5, por perfiles de razonamiento

	ABE. (A_0)	ABE. (A_1)	nA	SR
PERFIL 1	66.7	5.5	22.2	5.6
PERFIL 2	9.09	0	81.82	9.09
PERFIL 3	0	0	56.52	43.48
TOTALES	20.27	1.35	59.46	18.92

Tabla R542. Porcentajes de respuestas de Abstracción Extendida del superítem 5, por perfiles de razonamiento

Resultados de la evaluación SOLO: Evaluación por perfiles y subperfiles de razonamiento y por estudiante.

TABLAS DE RESULTADOS

Estudiantes con el PERFIL 1

ALUMNO	cuestión 1	cuestión 2	cuestión 3	cuestión 4
Perfil 1.1				
M1	U_0	M_0	R_0	A_0
	U_0	M_1	R_0	A_1
	U_0	M_1	R_0	A_0
	U_0	M_0	R_0	A_0
	U_0	M_0	R_0	A_0
M3	U_0	M_0	R_0	A_0
	U_1	M_2	R_2	nA
	U_0	M_0	R_0	A_0
	U_0	M_0	R_0	A_0
	U_0	M_0	R_0	A_0
M10	U_1	M_2	R_0	A_2
	U_0	M_0	R_1	A_0
	U_1	M_1	R_0	A_0
	U_0	M_0	R_0	A_4
	U_0	nM	R_0	A_0
M2	U_2	M_2	R_2	A_1
	U_1	M_1	R_2	A_1
	U_0	M_0	R_0	A_0
	U_0	M_0	R_0	A_3
	U_0	M_0	R_0	A_0
Perfil 1.2				
C18	U_3	M_3	R_0	A_1
	U_1	M_2	R_1	nA
	U_0	M_0	R_0	nA A_{10}
	U_0	M_0	R_0	A_0
	U_0	M_1	R_1	A_0
M5	U_0	M_0	nR	A_1
	U_1	M_1	nR	A_1
	U_0	M_0	R_0	nA A_{01}
	U_0	M_0	R_1	A_0
	U_0	M_0	R_0	A_0
M6	U_0	M_0	R_0	A_1
	U_1	M_2	R_1	nA
	U_0	M_0	R_0	nA A_{01}
	U_0	M_0	R_0	A_4
	U_1	M_0	R_0	A_0
M11	U_0	M_1	R_0	A_1
	U_0	M_2	nR	A_1
	U_0	M_0	R_0	nA A_{01}
	U_0	M_0	R_0	A_0
	U_0	M_0	R_0	A_0
M8	U_0	M_0	R_0	A_1
	U_1	M_2	R_0	nA
	U_0	M_0	R_0	A_0
	U_0	M_0	R_0	A_0
	U_1	M_0	R_0	sr (no justi.)

Tabla R1. Evaluación SOLO de estudiantes con el perfil 1 de razonamiento, por subperfiles de razonamiento.

ALUMNO	cuestión 1	cuestión 2	cuestión 3	cuestión 4
M9	U_0	M_0	R_0	A_1
	U_0	M_1	nR	A_1
	U_0	M_0	R_0	A_0
	U_2	M_0	R_0	A_2
	U_1	M_0	R_1	A_0
Perfil 1.3				
M12	U_0	M_0	R_4	A_0
	U_1	M_2	R_0	A_1
	U_0	M_0	R_0	A_0
	U_1	M_0	R_0	A_2
	U_0	nM	R_0	A_0
C7	U_0	M_2	R_4	nA
	U_0	M_1	R_2	nA
	U_0	M_1	R_0	nA (A_{00})
	U_0	M_0	nR	nA
	U_0	M_0	R_1	nA
C8	U_2	M_2	R_2	nA
	U_0	M_0	R_2	nA
	U_0	M_0	R_0	nA A_{10}
	U_0	M_1	R_3	A_3
	U_0	M_1	R_0	nA
C5	U_1	M_1	R_0	nA
	U_3	nM	nR	nA
	U_0	M_0	R_0	A_0
	U_0	M_0	R_2	A_3
	U_0	M_0	R_1	A_1
M7	U_1	M_1	R_0	nA
	U_1	nM	R_1	nA
	U_1	M_0	R_0	nA A_{01}
	U_0	M_0	R_3	A_3
	U_0	M_0	R_0	A_0
Perfil 1.4				
C1	U_0	M_0	R_4	sr
	U_1	M_1	R_1	nA
	U_1	nM	nR	nA A_{01}
	U_0	M_0	R_2	A_4
	U_0	nM	nR	A_0
C6	U_1	M_1	R_3	nA
	U_1	M_1	nR	nA
	U_0	M_0	R_0	nA A_{10}
	U_0	M_2	nR	nA
	U_0	M_1	R_1	nA
C17	U_1	M_1	nR	nA
	U_1	M_2	R_1	nA
	U_0	M_1	R_0	A_0
	U_0	M_1	R_4	A_3
	U_1	M_1	R_1	nA

Tabla R1. Evaluación SOLO de estudiantes con el perfil 1 de razonamiento, por subperfiles de razonamiento (continuación).

Estudiantes con el PERFIL 2.

ALUMNO	cuestión 1	cuestión 2	cuestión 3	cuestión 4
Perfil 2.1				
C10	U_3	M_3	nR	nA
	U_1	M_1	nR	nA
	U_0	M_0	R_0	nA A_{10}
	U_1	M_0	R_0	A_0
	U_0	M_0	R_1	A_0
C12	U_1	nM	sr	sr
	U_1	nM	nR	nA
	U_0	M_1	R_0	nA A_{10}
	U_0	M_0	nR	nA
	U_0	M_0	R_1	A_0
M4	U_0	M_0	nR	sr
	U_1	M_0	R_1	nA
	U_0	M_0	R_0	A_0
	U_0	M_0	R_0	A_3
	U_0	nM	R_1	A_0
Perfil 2.2				
C2	U_2	M_3	R_0	sr
	U_1	M_1	nR	nA
	U_0	M_0	nR	nA A_{10}
	U_0	M_2	R_0	A_4
	U_1	M_1	R_1	nA
C4	U_0	M_0	nR	nA
	U_0	M_1	nR	nA
	U_0	nM	R_0	nA A_{10}
	U_0	M_1	nR	A_3
	U_1	M_1	nR	nA
C9	U_2	M_2	nR	sr
	U_0	M_2	nR	nA
	U_0	M_1	R_0	nA A_{10}
	U_0	M_1	R_0	A_4
	U_2	M_1	R_1	nA
C11	U_2	M_2	R_3	nA
	U_0	M_2	nR	nA
	U_0	M_0	R_0	nA A_{10}
	U_0	M_1	R_2	nA
	U_0	M_1	R_1	nA
C13	U_1	M_1	nR	nA
	U_0	M_0	nR	nA
	U_0	M_1	R_0	nA A_{01}
	U_0	M_0	R_0	A_0
	U_2	nM	nR	nA
C15	U_1	M_1	nR	nA
	nU	nM	R_2	nA
	U_0	M_0	R_0	nA A_{01}
	U_2	M_1	R_3	A_3
	U_0	M_1	R_1	nA

Tabla R2. Evaluación SOLO de estudiantes con el perfil 2 de razonamiento, por subperfiles de razonamiento.

ALUMNO	cuestión 1	cuestión 2	cuestión 3	cuestión 4
C16	U_1	M_1	R_3	nA
	U_0	M_0	nR	nA
	U_0	M_1	R_1	nA A_{10}
	U_0	M_0	nR	A_4
	U_2	M_0	R_1	nA
C20	U_1	M_1	nR	nA
	U_0	M_1	nR	nA
	U_1	M_0	R_0	nA A_{00}
	U_0	M_1	R_2	A_2
	U_0	M_0	R_0	nA
C22	U_0	M_0	R_0	nA
	U_1	nM	R_1	nA
	U_0	M_0	nR	nA A_{10}
	U_0	M_1	R_4	nA A_4
	U_0	nM	R_1	nA
E7	U_2	M_2	nR	nA
	U_0	M_2	R_1	nA
	U_0	M_1	R_1	A_0
	U_0	M_0	nR	sr
	U_1	M_1	R_1	nA
E15	U_3	M_3	nR	sr
	U_1	M_2	nR	nA
	U_0	M_1	R_0	nA A_{10}
	U_1	M_1	R_2	A_3
	U_2	M_1	R_1	nA
Perfil 2.3				
C21	U_1	M_3	nR	sr
	U_0	M_0	nR	sr
	U_0	M_1	R_1	nA A_{00}
	U_0	M_0	R_2	A_3
	U_2	M_1	sr	sr
E19	U_1	M_2	nR	nA
	U_1	M_2	nR	nA
	U_2	nM	R_1	nA A_{00}
	U_0	M_2	nR	nA A_6
	U_2	M_1	nR	nA
RL5	U_0	M_2	R_3	-----
	U_1	nM	nR	-----
	$U_{2,3}$	$M_{1\,o\,0}$	nR	-----
	U_0	M_2	R_4	A_3
	U_0	nM	nR	nA (A_{011-})
RL19	U_0	M_3	sr	-----
	U_1	nM	nR	-----
	U_0	M_0	R_1	-----
	U_0	M_1	R_3	nA
	U_0	M_2	R_2	nA (A_{0000})
RL20	U_1	M_1	nR	-----
	U_1	nM	nR	-----
	U_2	M_1	nR	-----
	U_0	nM	R_3	A_3
	U_2	M_2	nR	nA (A_{0010})

Tabla R2. Evaluación SOLO de estudiantes con el perfil 2 de razonamiento, por subperfiles de razonamiento (continuación).

ALUMNO	cuestión 1	cuestión 2	cuestión 3	cuestión 4
Perfil 2.4				
E4	U_2	M_2	sr	nA
	U_0	M_2	nR	nA
	U_1	M_1	R_0	A_0
	U_1	nM	nR	nA
	U_3	nM	sr	nA
E5	U_1	M_1	nR	nA
	U_2	nM	nR	nA
	nU	nM	R_1	nA A_{00}
	U_0	M_1	nR	nA A_6
	U_2	M_1	nR	sr
C3	U_2	M_2	R_4	nA
	U_1	M_2	nR	nA
	U_0	M_2	R_1	nA A_{00}
	U_0	M_2	R_3	nA A_3
	U_3	M_1	nR	nA
C19	U_1	M_1	sr	nA
	U_2	nM	nR	sr
	U_0	nM	nR	nA A_{00}
	U_0	M_2	nR	nA
	U_0	M_2	nR	nA
E8	U_3	M_3	nR	nA
	U_1	nM	nR	nA
	U_1	M_2	R_0	nA A_{10}
	U_0	M_2	R_3	sr
	U_0	nM	sr	nA
E9	U_2	M_2	sr	nA
	U_1	nM	R_2	sr
	U_0	M_1	R_0	nA A_{10}
	U_0	M_2	nR	nA
	U_0	nM	R_1	nA
E12	U_2	M_2	nR	nA
	U_1	nM	nR	nA
	nU	nM	nR	nA A_{00}
	U_0	M_2	nR	nA A_5
	U_2	nM	R_1	nA
E14	nU	M_2	sr	sr
	U_2	nM	nR	sr
	nU	nM	nR	A_0
	U_1	M_1	R_4	A_3
	U_1	M_1	R_1	nA
E16	U_3	M_3	nR	nA
	U_0	nM	nR	nA
	U_2	M_2	nR	nA A_{01}
	U_0	M_0	nR	nA
	U_0	M_1	nR	nA
Perfil 2.5				
E3	U_2	M_1	nR	nA
	U_0	M_2	nR	nA
	nU	nM	nR	nA A_{00}
	nU	nM	nR	nA
	U_2	nM	nR	nA
E18	U_0	M_3	nR	nA
	U_2	M_2	nR	sr
	nU	nM	nR	nA A_{01}
	U_0	nM	nR	nA
	U_2	nM	R_1	nA

RL7	U_2	M_2	nR	-----
	U_1	M_1	nR	-----
	U_1	nM	nR	-----
	U_1	M_1	nR	nA
	U_2	nM	nR	nA (A_{0110})
RL8	U_3	M_3	nR	-----
	U_2	nM	nR	-----
	U_1	nM	nR	-----
	U_3	M_1	nR	nA
	U_1	nM	nR	nA (A_{0110})
RL6	U_0	M_0	nR	-----
	U_1	nM	nR	-----
	$U_{2,3}$	M_2	nR	-----
	U_2	M_2	nR	nA
	U_3	nM	nR	sr

Tabla R2. Evaluación SOLO de estudiantes con el perfil 1 de razonamiento, por subperfiles de razonamiento (continuación).

Estudiantes del PERFIL 3

ALUMNO	cuestión 1	cuestión 2	cuestión 3	cuestión 4
Perfil 3.1				
C23	U_0	M_3	R_0	sr
	U_0	nM	nR	sr
	U_0	M_1	R_0	nA A_{10}
	U_1	M_1	R_0	nA A_6
	U_1	M_1	sr	sr
Perfil 3.2				
E2	U_2	M_2	nR	sr
	U_1	nM	nR	sr
	U_1	M_1	nR	nA A_{10}
	U_1	nM	R_2	A_3
	U_2	nM	sr	nA
RL16	$U_{1,0}$	M_1	R_0	-----
	U_1	M_0	nR	-----
	U_0	M_1	nR	-----
	U_1	M_1	R_2	A_2
	U_1	nM	sr	sr
E17	sr	sr	sr	sr
	U_1	M_2	nR	sr
	U_0	M_1	nR	nA A_{00}
	U_1	nM	R_2	nA
	sr	nM	R_1	nA
C14	U_1	M_1	nR	nA
	U_0	M_0	nR	sr
	U_2	nM	sr	nA A_{00}
	U_0	nM	nR	A_4
	U_0	M_1	sr	nA
RL4	U_0	M_3	nR	-----
	U_1	nM	nR	-----
	U_2	M_3	nR	-----
	U_0	M_2	R_4	A_4
	U_3	nM	nR	nA (A_{0100})
RL15	U_0	M_0	nR	-----
	U_1	nM	nR	-----
	U_4	nM	nR	-----
	U_1	M_0	R_4	A_3
	U_2	nM	sr	nA (A_{1110})
RL14	U_0	M_0	sr	-----
	U_0	M_2	R_1	-----
	$U_{2,3}$	nM	nR	-----
	U_1	nM	nR	nA
	U_1	sr	sr	sr
Perfil 3.3				
E6	U_0	M_2	nR	nA
	U_2	nM	nR	nA
	U_4	nM	nR	nA A_{10}
	nU	nM	nR	A_3
	U_2	nM	sr	nA

Tabla R3. Evaluación SOLO de estudiantes con el perfil 3 de razonamiento, por subperfiles de razonamiento.

ALUMNO	cuestión 1	cuestión 2	cuestión 3	cuestión 4
E10	U_2	M_0	nR	nA
	U_2	nM	nR	sr
	U_4	nM	sr	nA A_{01}
	U_1	nM	nR	nA
	U_2	M_2	sr	sr
E11	nU	M_3	nR	nA
	U_4	nM	nR	nA
	U_4	M_3	nR	sr
	U_0	nM	nR	nA
	U_0	nM	sr	nA
E1	U_1	sr	sr	nA
	U_2	nM	nR	sr
	U_2	M_2	sr	sr
	U_0	nM	nR	nA
	U_0	M_1	sr	sr
RL13	U_0	M_0	sr	-----
	U_2	nM	nR	-----
	U_0	nM	R_1	-----
	U_0	nM	nR	nA
	U_0	nM	R_2	sr
RL21	U_0	nM	nR	-----
	U_1	nM	nR	-----
	U_4	M_3	nR	-----
	U_0	M_0	nR	nA
	U_0	nM	nR	sr
RL12	U_2	M_2	nR	-----
	U_2	nM	nR	-----
	U_4	M_3	nR	-----
	U_1	M_1	nR	A_0
	U_2	M_2	nR	nA (A_{1101})
RL18	U_1	M_3	nR	-----
	U_2	nM	nR	-----
	$U_{2,3}$	nM	nR	-----
	U_1	M_2	R_4	nA
	U_0	nM	nR	sr
RL17	nU	nM	nR	-----
	U_2	M_0	nR	-----
	nU	nM	nR	-----
	U_0	M_0	nR	nA
	U_1	nM	sr	sr
RL11	U_2	nM	nR	-----
	U_2	nM	nR	-----
	U_4	M_3	nR	-----
	nU	nM	nR	nA
	U_1	nM	sr	nA (A_{0010})

Tabla R3. Evaluación SOLO de estudiantes con el perfil 3 de razonamiento, por subperfiles de razonamiento (continuación).

ALUMNO	cuestión 1	cuestión 2	cuestión 3	cuestión 4
RL2	U_0	M_0	nR	-----
	U_4	nM	nR	-----
	nU	nM	nR	-----
	U_1	nM	nR	nA
	U_2	nM	sr	nA (A_{0010})
RL3	nU	nM	nR	-----
	U_3	nM	nR	-----
	U_2	nM	nR	-----
	U_2	nM	nR	nA
	U_3	nM	nR	nA (A_{1011})
Perfil 3.4				
E13	U_3	M_3	nR	nA
	U_0	M_2	nR	sr
	U_0	M_1	sr	sr
	nU	nM	nR	nA
	sr	nM sr	sr	sr
RL9	nU	nM	nR	-----
	U_3	nM	nR	-----
	U_3	nM	nR	-----
	U_3	M_1	nR	nA
	U_0	nM	nR	nA (A_{0101})
RL10	nU	nM	nR	-----
	U_3	nM	nR	-----
	U_4	M_3	nR	-----
	U_3	nM	nR	nA
	U_2	nM	nR	nA (A_{0101})

Tabla R3. Evaluación SOLO de estudiantes con el perfil 3 de razonamiento, por subperfiles de razonamiento (continuación).

ANEXO III

3ª PARTE

TABLAS DE RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN COMPARADA DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO Y DE LOS NIVELES SOLO

Resultados del análisis comparado de los grados de adqusición de los niveles de van Hiele y los niveles SOLO. Evaluación por perfiles de razonamiento y por estudiante.

Estudiantes del PERFIL 1

ALUMNO	Nivel v. H.	Criterio ≤1
M1	CCAA	ABE (A)
M3	CCAB	ABE (A)
M10	CCAB	ABE (A)
M2	CCAB	ABE (A)
C18	CCAN	REL (R)
M5	CCAN	MULT (M)
M8	CCAN	REL (R)
M9	CCAN	ABE (A)
M6	CCAN	REL (R)
M11	CCAN	ABE (A)
M12	CCIB	ABE (A)
C7	CCIN	REL (R)
C8	CCIN	REL (R)
M7	CCIN	REL (R)
C5	CCIN	REL (R)
C1	CCBN	UNI (U)
C6	CCBN	MULT (M)
C17	CCBN	REL (R)

Tabla C11. Asociación grados de adqusición de niveles van Hiele y niveles SOLO, estudiantes con el perfil de razonamiento 1, criterio ≤1

ALUMNO	Nivel v. H.	Criterio≤2
M1	CCAA	ABE (A)
M3	CCAB	ABE (A)
M10	CCAB	ABE (A)
M2	CCAB	ABE (A)
C18	CCAN	ABE (A)
M5	CCAN	ABE (A)
M8	CCAN	REL (R)
M9	CCAN	ABE (A)
M6	CCAN	ABE (A)
M11	CCAN	ABE (A)
M12	CCIB	ABE (A)
C7	CCIN	REL (R)
C8	CCIN	REL (R)
M7	CCIN	REL (R)
C5	CCIN	ABE (A)
C1	CCBN	REL (R)
C6	CCBN	REL (R)
C17	CCBN	REL (R)

Tabla C12. Asociación grados de adqusición de niveles van Hiele y niveles SOLO, estudiantes con el perfil de razonamiento 1, criterio ≤2

RESUMEN DE LOS RESULTADOS PARA LOS ESTUDIANTES CON EL PERFIL 1

Grad. Adqu. Nivel v. H.	UNI (U)	MULT (M)	REL (R)	ABS. EXT. (A)	TOTALES
1.1	0	0	0	1	1
1.2	0	0	0	3	3
1.3	0	1	3	2	6
1.4	0	0	4	1	5
1.5	1	1	1	0	3
TOTALES	1	2	8	7	18

Tabla C111. Frecuencias de las relaciones entre los grados de adqusición de niveles van Hiele y los niveles SOLO, estudiantes con el perfil de razonamiento 1, criterio ≤1

Grad. Adqu. Nivel v. H.	UNI (U)	MULT (M)	REL (R)	ABS. EXT. (A)	TOTALES
1.1	0	0	0	1	1
1.2	0	0	0	3	3
1.3	0	0	1	5	6
1.4	0	0	3	2	5
1.5	0	0	3	0	3
TOTALES	0	0	7	11	18

Tabla C121. Frecuencias de las relaciones entre los grados de adqusición de niveles van Hiele y los niveles SOLO, estudiantes con el perfil de razonamiento 1, criterio ≤2

Grad. Adqu. Nivel v. H.	UNI (U)	MULT (M)	REL (R)	ABS. EXT. (A)
1.1	0/0	0/0	0/0	1/1
1.2	0/0	0/0	0/0	3/3
1.3	0/0	1/0	3/1	2/5
1.4	0/0	0/0	4/3	1/2
1.5	1/0	1/0	1/3	0/0
TOTALES	1/0	2/0	8/7	7/11

Tabla C1c1. Comparación de frecuencias de las relaciones entre los grados de adqusición de niveles van Hiele y los niveles SOLO, estudiantes con el perfil de razonamiento 1

Grad. Adqu. Nivel v. H.	UNI (U)	MULT (M)	REL (R)	ABS. EXT. (A)
1.1	0	0	0	100
1.2	0	0	0	100
1.3	0	16.7	50	33.3
1.4	0	0	80	20
1.5	33.3	33.3	33.3	0
TOTALES	5.6	11.1	44.4	38.9

Tabla C112. Porcentajes de las relaciones entre los grados de adqusición de niveles van Hiele y los niveles SOLO, estudiantes con el perfil de razonamiento 1, criterio ≤1

Grad. Adqu. Nivel v. H.	UNI (U)	MULT (M)	REL (R)	ABS. EXT. (A)
1.1	0	0	0	100
1.2	0	0	0	100
1.3	0	0	16.7	83.3
1.4	0	0	60	40
1.5	0	0	100	0
TOTALES	0	0	38.9	61.1

Tabla C122. Frecuencias de las relaciones entre los grados de adqusición de niveles van Hiele y los niveles SOLO, estudiantes con el perfil de razonamiento 1, criterio ≤2

Grad. Adqu. Nivel v. H.	UNI (U)	MULT (M)	REL (R)	ABS. EXT. (A)
1.1	0/0	0/0	0/0	100/100
1.2	0/0	0/0	0/0	100/100
1.3	0/0	16.7/0	50/16.7	33.3/83.3
1.4	0/0	0/0	80/60	20/40
1.5	33.3/0	33.3/0	33.3/100	0/0
TOTALES	5.6/0	11.1/0	44.4/38.9	38.9/61.1

Tabla C1c2. Comparación de Porcentajes de las relaciones entre los grados de adqusición de niveles van Hiele y los niveles SOLO, estudiantes con el perfil de razonamiento 1.

Estudiantes del PERFIL 2

ALUMNO	Nivel v. H.	Criterio ≤1
C10	CAIN	MULT (M)
C12	CAIN	UNI (U)
M4	CAIN	REL (R)

C2	CABN	MULT (M)
C4	CABN	MULT (M)
C9	CABN	MULT (M)
C11	CABN	REL (R)
C13	CABN	MULT (M)
C15	CABN	REL (R)
C16	CABN	MULT (M)
C20	CABN	MULT (M)
C22	CABN	REL (R)
E7	CABN	MULT (M)
E15	CABN	MULT (M)

C21	CANN	MULT (M)
E19	CANN	MULT (M)
RL5	CANN	UNI (U)
RL19	CANN	MULT (M)
RL20	CANN	UNI (U)

E4	CIBN	UNI (U)
E5	CINN	UNI (U)
C3	CINN	REL (R)
C19	CINN	UNI (U)
E8	CINN	UNI (U)
E9	CINN	UNI (U)
E12	CINN	UNI (U)
E14	CINN	UNI (U)
E16	CINN	MULT (M)

E3	CBNN	PRE (P)
E18	CBNN	UNI (U)
RL7	CBNN	UNI (U)
RL8	CBNN	UNI (U)
RL6	CBNN	UNI (U)

Tabla C21. Asociación grados de adqusición de niveles van Hiele y niveles SOLO, estudiantes con el perfil de razonamiento 2, criterio ≤1

ALUMNO	Nivel v. H.	Criterio≤2
C10	CAIN	REL (R)
C12	CAIN	MULT (M)
M4	CAIN	REL (R)
C2	CABN	REL (R)
C4	CABN	MULT (M)
C9	CABN	REL (R)
C11	CABN	REL (R)
C13	CABN	MULT (M)
C15	CABN	REL (R)
C16	CABN	REL (R)
C20	CABN	REL (R)
C22	CABN	REL (R)
E7	CABN	REL (R)
E15	CABN	REL (R)
C21	CANN	MULT (M)
E19	CANN	MULT (M)
RL5	CANN	MULT (M)
RL19	CANN	MULT (M)
RL20	CANN	MULT (M)
E4	CIBN	MULT (M)
E5	CINN	MULT (M)
C3	CINN	REL (R)
C19	CINN	MULT (M)
E8	CINN	MULT (M)
E9	CINN	REL (R)
E12	CINN	UNI (U)
E14	CINN	MULT (M)
E16	CINN	MULT (M)
E3	CBNN	UNI (U)
E18	CBNN	UNI (U)
RL7	CBNN	MULT (M)
RL8	CBNN	UNI (U)
RL6	CBNN	MULT (M)

Tabla C22. Asociación grados de adqusición de niveles van Hiele y niveles SOLO, estudiantes con el perfil de razonamiento 2, criterio ≤2

RESUMEN DE LOS RESULTADOS PARA LOS ESTUDIANTES CON EL PERFIL 2

Grad. Adqu. Nivel v. H.	PRE (P)	UNI (U)	MULT (M)	REL (R)	ABS. EXT. (A)	TOTALES
2.1	0	1	1	1	0	3
2.2	0	0	8	3	0	11
2.3	0	2	3	0	0	5
2.4	0	7	1	1	0	9
2.5	1	4	0	0	0	5
TOTALES	1	14	13	5	0	33

Tabla C211. Frecuencias de las relaciones entre los grados de adqusición de niveles van Hiele y los niveles SOLO, estudiantes con el perfil de razonamiento 2, criterio ≤1

Grad. Adqu. Nivel v. H.	PRE (P)	UNI (U)	MULT (M)	REL (R)	ABS. EXT. (A)	TOTALES
2.1	0	0	1	2	0	3
2.2	0	0	2	9	0	11
2.3	0	0	5	0	0	5
2.4	0	1	6	2	0	9
2.5	0	3	2	0	0	5
TOTALES	0	4	16	13	0	33

Tabla C221. Frecuencias de las relaciones entre los grados de adqusición de niveles van Hiele y los niveles SOLO, estudiantes con el perfil de razonamiento 2, criterio ≤2

Grad. Adqu. Nivel v. H.	PRE (P)	UNI (U)	MULT (M)	REL (R)	ABS. EXT. (A)
2.1	0	1/0	1/1	1/2	0/0
2.2	0	0/0	8/2	3/9	0/0
2.3	0	2/0	3/5	0/0	0/0
2.4	0	7/1	1/6	1/2	0/0
2.5	1/0	4/3	0/2	0/0	0/0
TOTALES	1/0	14/4	13/16	5/13	0/0

Tabla C2c1. Comparación de frecuencias de las relaciones entre los grados de adqusición de niveles van Hiele y los niveles SOLO, estudiantes con el perfil de razonamiento 2

Grad. Adqu. Nivel v. H.	PRE (P)	UNI (U)	MULT (M)	REL (R)	ABS. EXT. (A)
2.1	0	33.3	33.3	33.3	0
2.2	0	0	72.7	27.3	0
2.3	0	40	60	0	0
2.4	0	77.8	11.1	11.1	0
2.5	20	80	0	0	0
TOTALES	3.03	42.42	39.39	15.15	0

Tabla C212. Porcentajes de las relaciones entre los grados de adqusición de niveles van Hiele y los niveles SOLO, estudiantes con el perfil de razonamiento 2, criterio ≤1

Grad. Adqu. Nivel v. H.	PRE (P)	UNI (U)	MULT (M)	REL (R)	ABS. EXT. (A)
2.1	0	0	33.3	66.7	0
2.2	0	0	18.2	81.8	0
2.3	0	0	100	0	0
2.4	0	11.1	66.7	22.2	0
2.5	0	60	40	0	0
TOTALES	0	12.1	48.5	39.4	0

Tabla C222. Porcentajes de las relaciones entre los grados de adqusición de niveles van Hiele y los niveles SOLO, estudiantes con el perfil de razonamiento 2, criterio ≤2

Grad. Adqu. Nivel v. H.	PRE (P)	UNI (U)	MULT (M)	REL (R)	ABS. EXT. (A)
2.1	0	33.3/ 0	33.3/33.3	33.3/66.7	0
2.2	0	0	72.7/18.2	27.3/81.8	0
2.3	0	40/0	60/100	0	0
2.4	0	77.8/11.1	11.1/66.7	11.1/22.2	0
2.5	20/0	80/60	0/40	0	0
TOTALES	3.03/0	42.42/ 12.1	39.39/48.5	15.15/39.4	0/0

Tabla C2c2. Comparación de Porcentajes de las relaciones entre los grados de adqusición de niveles van Hiele y los niveles SOLO, estudiantes con el perfil de razonamiento 2.

Estudiantes del PERFIL 3

ALUMNO	Nivel v. H.	Criterio ≤1
C23	AABN	MULT (M)

E2	AIBN	UNI (U)
RL16	AIBN	MULT (M)
C14	AINN	UNI (U)
E17	AINN	PRE (P)
RL4	AINN	UNI (U)
RL15	AINN	UNI (U)
RL14	AINN	UNI (U)

E6	ABNN	UNI (U)
E10	ABNN	UNI (U)
E11	ABNN	UNI (U)
E1	ABNN	UNI (U)
RL13	ABNN	UNI (U)
RL21	ABNN	UNI (U)
RL12	ABNN	MULT (M)
RL18	ABNN	UNI (U)
RL17	ABNN	PRE (P)
RL11	ABNN	UNI (U)
RL2	ABNN	UNI (U)
RL3	ANNN	UNI (U)

E13	IBNN	PRE (P)
RL9	INNN	UNI (U)
RL10	INNN	UNI (U)

Tabla C31. Asociación grados de adqusición de niveles van Hiele y niveles SOLO, estudiantes con el perfil de razonamiento 3, criterio ≤1

ALUMNO	Nivel v. H.	Criterio≤2
C23	AABN	REL (R)
E2	AIBN	UNI (U)
RL16	AIBN	MULT (M)
C14	AINN	MULT (M)
E17	AINN	UNI (U)
RL4	AINN	MULT (M)
RL15	AINN	UNI (U)
RL14	AINN	UNI (U)
E6	ABNN	UNI (U)
E10	ABNN	UNI (U)
E11	ABNN	MULT (M)
E1	ABNN	UNI (U)
RL13	ABNN	UNI (U)
RL21	ABNN	UNI (U)
RL12	ABNN	MULT (M)
RL18	ABNN	UNI (U)
RL17	ABNN	UNI (U)
RL11	ABNN	UNI (U)
RL2	ABNN	UNI (U)
RL3	ANNN	UNI (U)
E13	IBNN	MULT (M)
RL9	INNN	UNI (U)
RL10	INNN	UNI (U)

Tabla C32. Asociación grados de adqusición de niveles van Hiele y niveles SOLO, estudiantes con el perfil de razonamiento 3, criterio ≤2

RESUMEN DE LOS RESULTADOS PARA ... ESTUDIANTES CON EL PERFIL ...

Grad. Adqu. Nivel v. H.	PRE (1)	UNI (2)	MULT (3)	REL (4)	ABS EXT. (5)	TOTALES
3.1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	[illegible]
3.2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	[illegible]
3.3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	[illegible]
3.4	[illegible]	[illegible]	0	[illegible]	0	[illegible]
TOTALES	[illegible]	[illegible]	3	[illegible]	[illegible]	23

Tabla C31. Frecuencias ... [illegible] ... de los niveles ...

Grad. Adqu. Nivel v. H.	PRE (1)	UNI (2)	MULT (3)	REL (4)	ABS EXT. (5)	TOTALES
3.1	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3.2	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	7
3.3	0	[illegible]	2	0	0	[illegible]
3.4	0	2	1	[illegible]	0	3
TOTALES	0	10	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Tabla C32. Frecuencias ... [illegible] ... de los niveles ...

Grad. Adqu. Nivel v. H.	PRE (1)	UNI (2)	MULT (3)	REL (4)	ABS EXT (5)
3.1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0%
3.2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3.3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3.4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0%
TOTALES	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0%

Tabla C33. ... [illegible] ...

RESUMEN DE LOS RESULTADOS PARA LOS ESTUDIANTES CON EL PERFIL 3

Grad. Adqu. Nivel v. H.	PRE (P)	UNI(U)	MULT (M)	REL (R)	ABS. EXT. (A)	TOTALES
3.1	0	0	1	0	0	1
3.2	1	5	1	0	0	7
3.3	1	10	1	0	0	12
3.4	1	2	0	0	0	3
TOTALES	3	17	3	0	0	23

Tabla C311. Frecuencias de las relaciones entre los grados de adqusición de niveles van Hiele y los niveles SOLO, estudiantes con el perfil de razonamiento 3, criterio ≤1

Grad. Adqu. Nivel v. H.	PRE (P)	UNI (U)	MULT (M)	REL (R)	ABS. EXT. (A)	TOTALES
3.1	0	0	0	1	0	1
3.2	0	4	3	0	0	7
3.3	0	10	2	0	0	12
3.4	0	2	1	0	0	3
TOTALES	0	16	6	1	0	23

Tabla C321. Frecuencias de las relaciones entre los grados de adqusición de niveles van Hiele y los niveles SOLO, estudiantes con el perfil de razonamiento 2, criterio ≤2

Grad. Adqu. Nivel v. H.	PRE (P)	UNI (U)	MULT (M)	REL (R)	ABS. EXT. (A)
3.1	0/0	0/0	1/0	0/1	0/0
3.2	1/0	5/4	1/3	0/0	0/0
3.3	1/0	10/10	1/2	0/0	0/0
3.4	1/0	2/2	0/1	0/0	0/0
TOTALES	3/0	17/16	3/6	0/1	0/0

Tabla C3c1. Comparación de frecuencias de las relaciones entre los grados de adqusición de niveles van Hiele y los niveles SOLO, estudiantes con el perfil de razonamiento 2

Grad. Adqu. Nivel v. H.	PRE (P)	UNI(U)	MULT (M)	REL (R)	ABS. EXT. (A)
3.1	0	0	100	0	0
3.2	14.3	71.4	14.3	0	0
3.3	8.3	83.3	8.3	0	0
3.4	33.3	66.7	0	0	0
TOTALES	13.04	73.91	13.04	0	0

Tabla C312. Porcentajes de las relaciones entre los grados de adqusición de niveles van Hiele y los niveles SOLO, estudiantes con el perfil de razonamiento 3, criterio ≤1

Grad. Adqu. Nivel v. H.	PRE (P)	UNI (U)	MULT (M)	REL (R)	ABS. EXT. (A)
3.1	0	0	0	100	0
3.2	0	57.1	42.9	0	0
3.3	0	83.3	16.7	0	0
3.4	0	66.7	33.3	0	0
TOTALES	0	69.6	26.01	4.3	0

Tabla C322. Porcentajes de las relaciones entre los grados de adqusición de niveles van Hiele y los niveles SOLO, estudiantes con el perfil de razonamiento 3, criterio ≤2

Grad. Adqu. Nivel v. H.	PRE (P)	UNI (U)	MULT (M)	REL (R)	ABS. EXT. (A)
3.1	0	0	100/0	0/100	0
3.2	14.3/0	71.4/57.1	14.3/42.9	0	0
3.3	8.3/0	83.3/83.3	8.3/16.7	0	0
3.4	33.3/0	66.7/66.7	0/33.3	0	0
TOTALES	13.04/0	73.91/69.6	13.04/26.0	0/4.3	0

Tabla C3c2. Comparación de Porcentajes de las relaciones entre los grados de adqusición de niveles van Hiele y los niveles SOLO, estudiantes con el perfil de razonamiento 3

UNIVERSIDAD DE VALENCIA FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Reunido el Tribunal que suscribe, en el día de la fecha, acordó otorgar, por unanimidad, a esta Tesis doctoral de D. MANUEL PEDRO HUERTA PALAU

la calificación de APTO CUM LAUDE

Valencia, a 24 de julio de 1997

El Secretario,

Fdo. Adela Jaime Pastor

El Presidente

Fdo. LUIS PUIG

Universitat de València
Facultat de Matemàtiques

Departament de Didàctica de la Matemàtica

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Los niveles de van Hiele en relación con la Taxonomía SOLO y los Mapas Conceptuales

Tesis doctoral que presenta
Manuel Pedro Huerta Palau

bajo la dirección del
Dr. Angel Gutiérrez Rodríguez

Curso Académico 1996-1997

ÍNDICE

ANEXO IV

MAPAS CONCEPTUALES

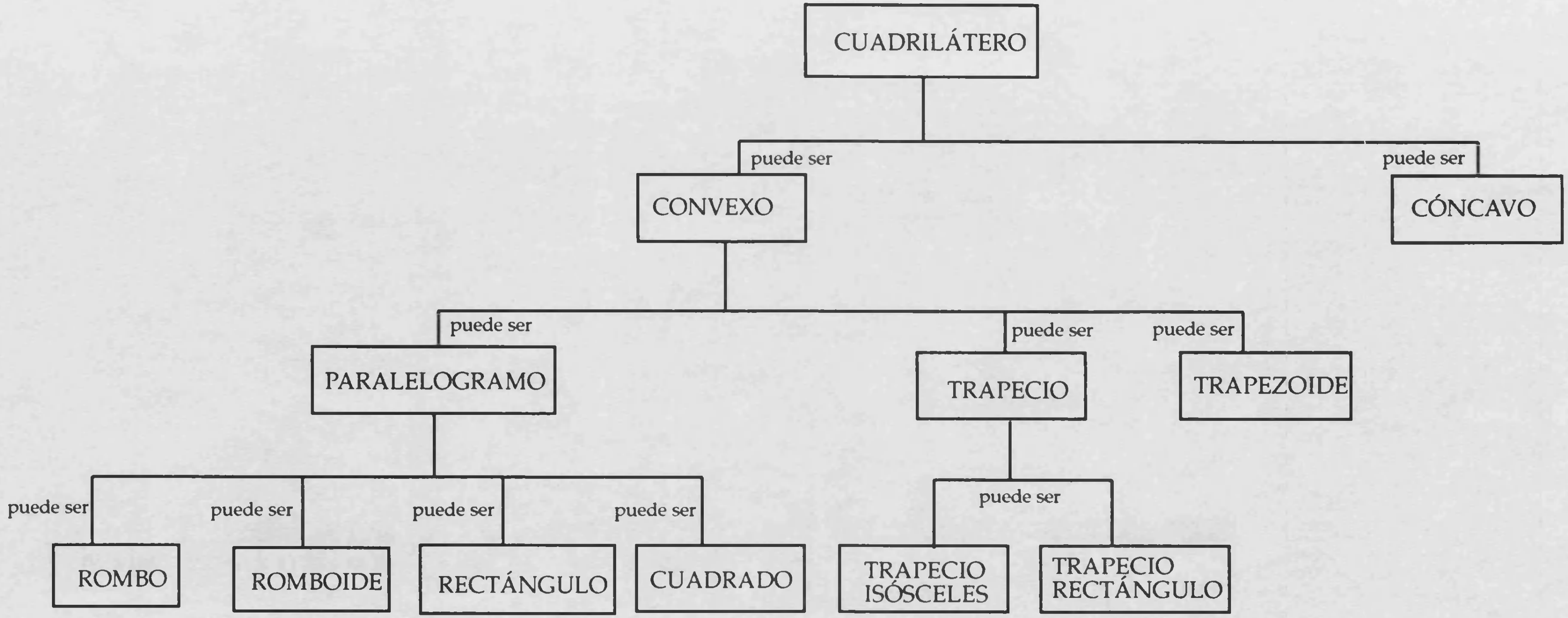
ANEXO IV

1ª PARTE

MAPAS CONCEPTUALES RELACIONES ENTRE CUADRILÁTEROS:

Mapas MC(i) (e), con i= 0, 1 y 2
Mapas MC(i) (in), con i= 0, 1, 2,..., 7

Mapa de relaciones entre cuadriláterosMC0 (e)

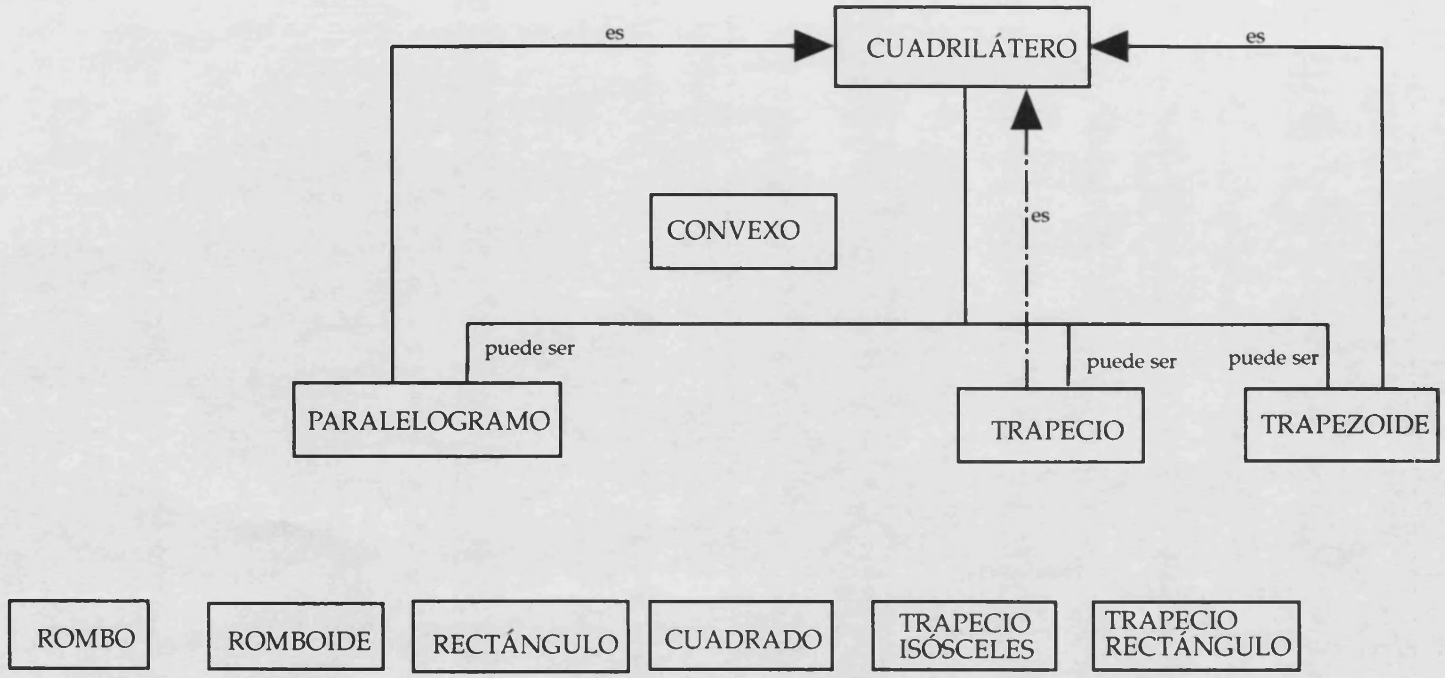


DEFINICIONES CONSIDERADAS:

CUADRILÁTERO: Polígono de cuatro lados.
C. CONVEXO: Cuadrilátero sin diagonales exteriores.
C. CÓNCAVO: Cuadrilátero con una diagonal exterior.
PARALELOGRAMO: Cuadrilátero con lados paralelos dos a dos.
TRAPECIO: Cuadrilátero con un sólo par de lados paralelos.
TAPEZOIDE: Cuadrilátero sin lados paralelos.
TRAPECIO ISÓSCELES: Trapecio con los lados no paralelos iguales.
TRAPECIO RECTÁNGULO: Trapecio con un par de ángulos rectos.
ROMBOIDE: Paralelogramo sin lados ni ángulos iguales.
ROMBO: Paralelogramo con los lados iguales y los ángulos iguales dos a dos (pero no todos iguales).
RECTÁNGULO: Paralelogramo con los ángulos iguales y los lados iguales dos a dos (contiguos desiguales).
CUADRADO: Paralelogramo con los lados y ángulos iguales.

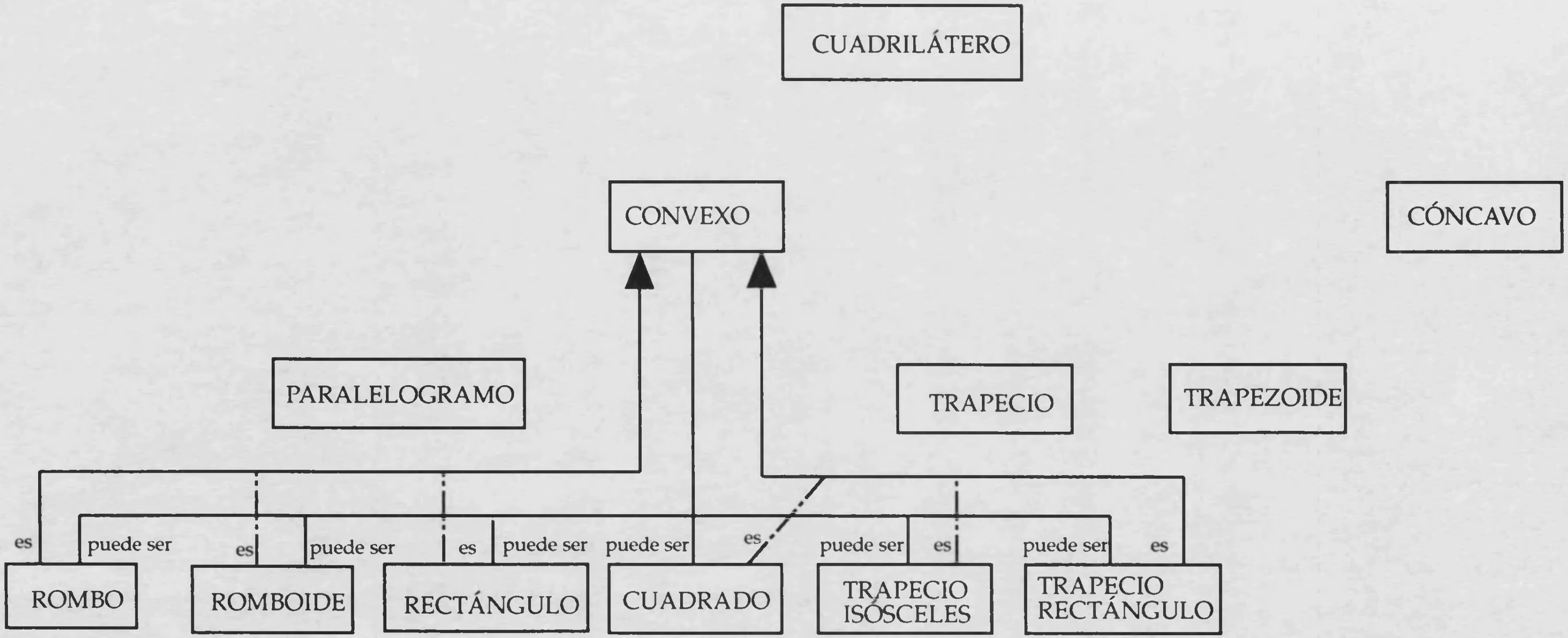
NOTA:
En este mapa, se muestran las relaciones entre cuadriláteros situados en dos niveles jerárquicos consecutivos. Son relaciones del tipo "pueden ser", leyendo el mapa de arriba a abajo, o del tipo "es", al leer el mapa de abajo arriba. En total, 22 relaciones, 11 de cada una de los tipos señalados.

Mapa de relaciones entre cuadriláteros MC1 (e)



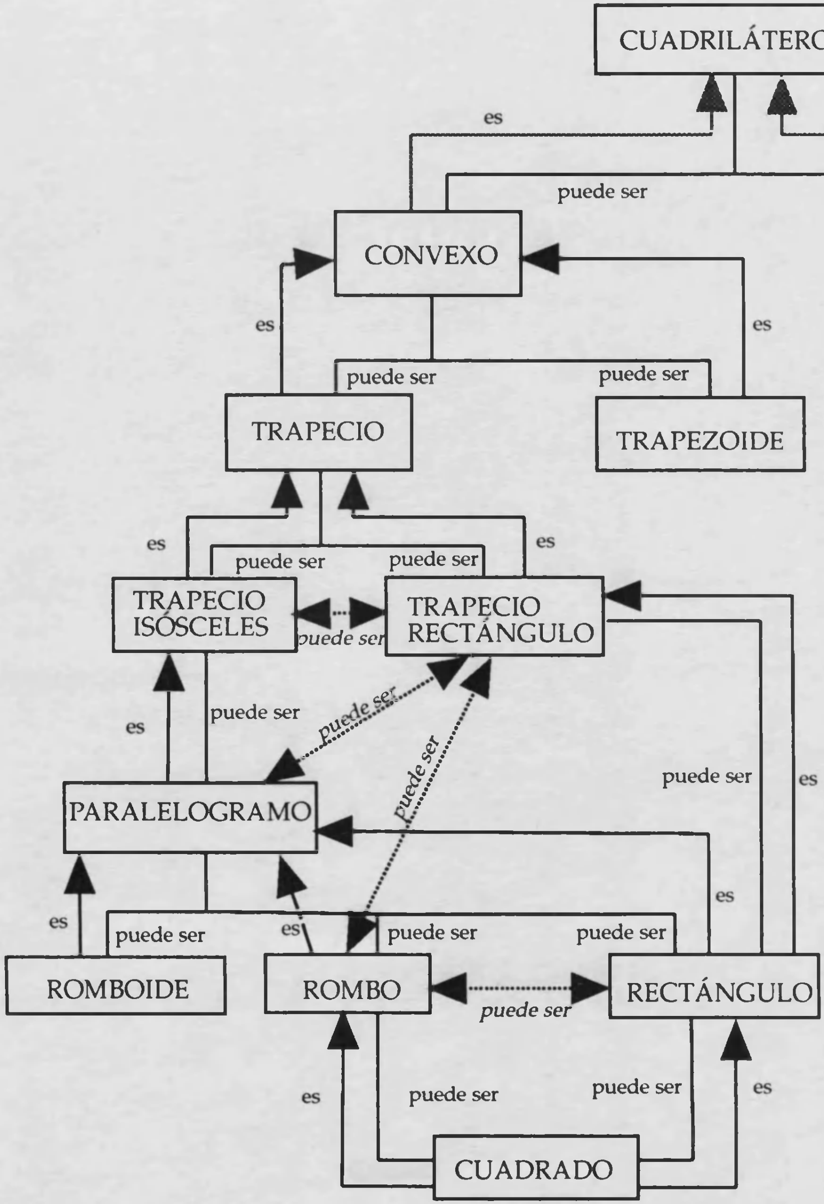
NOTA:
Teniendo como concepto más inclusivo el concepto de Cuadrilátero, este mapa da lugar a18 relaciones entre dos niveles jerárquicos no concecutivos, 9 del tipo "puede ser" y 9 del tipo "es".

Mapa de relaciones entre cuadriláteros MC2 (e)



NOTA:
Teniendo como concepto más inclusivo el de Cuadrilátero Convexo, aparecen 12 relaciones entre niveles jerárquicos no concecutivos, 6 del tipo "puede ser" y 6 del tipo "es".

Mapa de relaciones entre cuadriláteros MC0 (in)

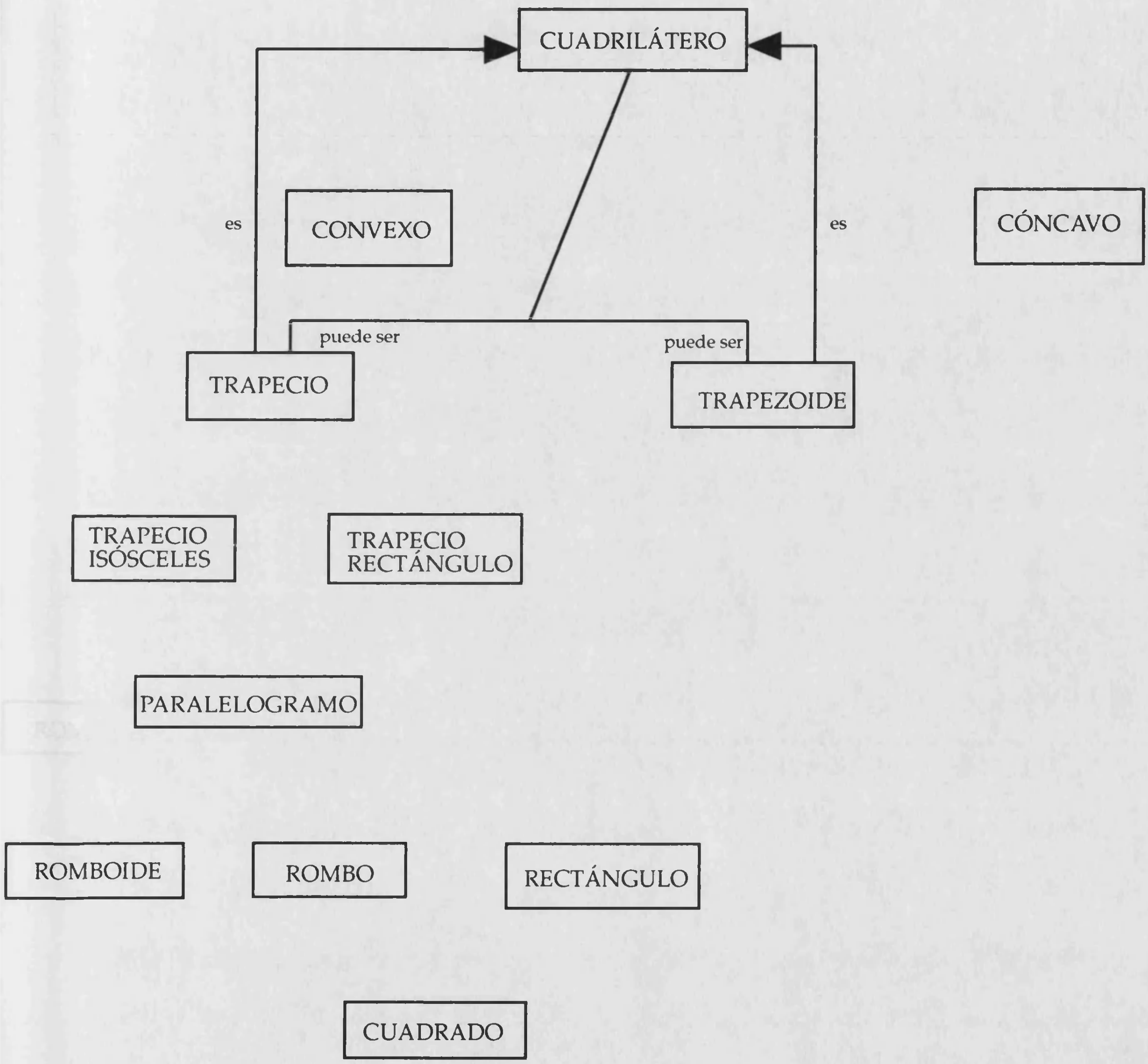


DEFINICIONES CONSIDERADAS:

CUADRILÁTERO: Polígono de cuatro lados.
C. CONVEXO: Cuadrilátero sin diagonales exteriores.
C. CÓNCAVO: Cuadrilátero con una diagonal exterior.
TRAPECIO: Cuadrilátero con, al menos, un par de lados paralelos.
TRAPEZOIDE: Cuadrilátero sin lados paralelos.
TRAPECIO RECTÁNGULO: Trapecio con, al menos, un ángulo recto.
TRAPECIO ISÓSCELES: Trapecio con, por lo menos, un par de lados iguales.
PARALELOGRAMO : Cuadrilátero con lados paralelos dos a dos.
ROMBOIDE:Cuadrilátero con no todos los lados y ángulos iguales.
ROMBO: Cuadrilátero con los lados iguales.
RECTÁNGULO: Cuadrilátero con los ángulos iguales.
CUADRADO: Cuadrilátero con los lados y ángulos iguales.

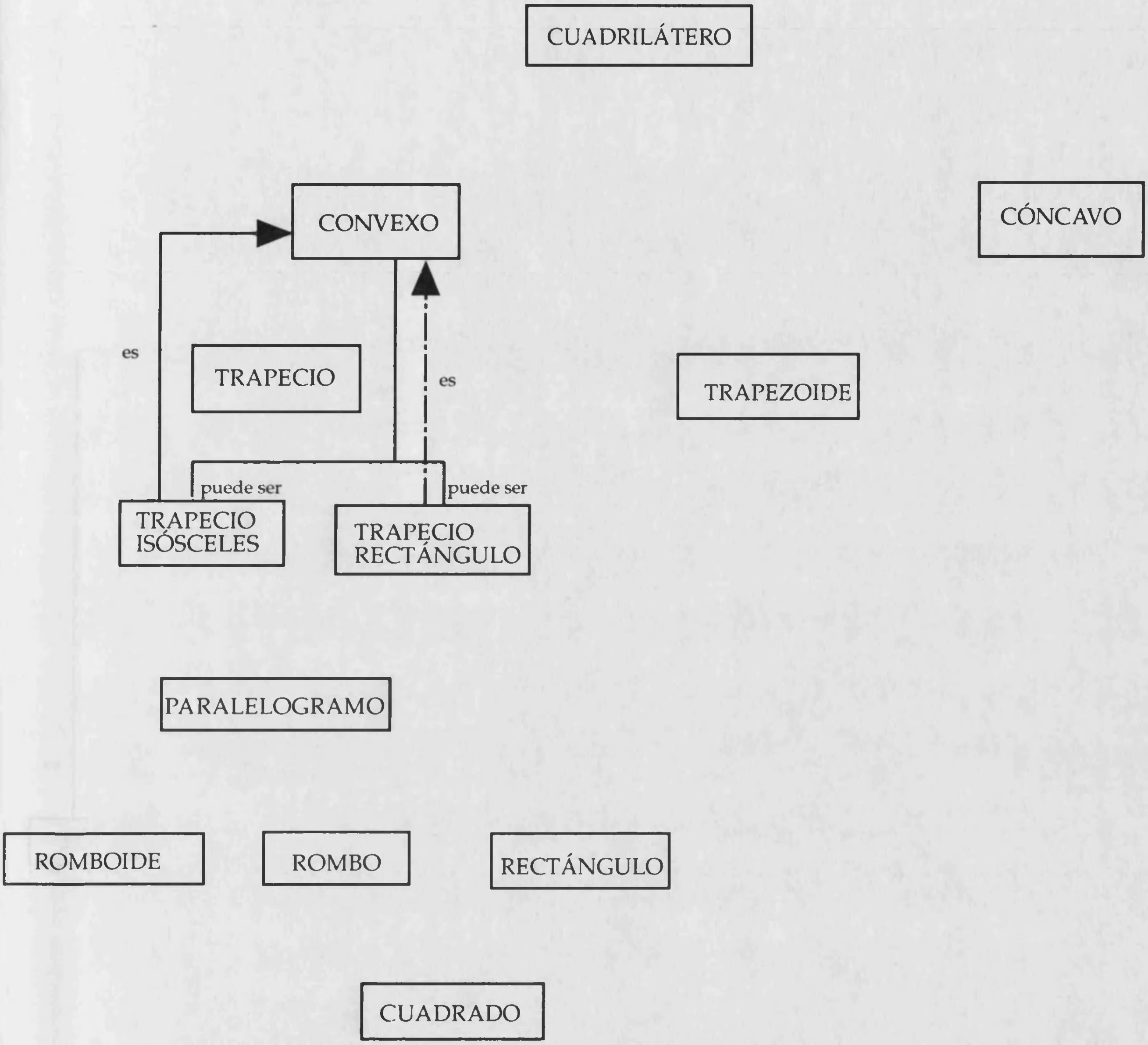
NOTA:
El número de relaciones que se hacen explícitas en el mapa, con los nexos "es" o "puede ser", de 34. Se trata de relaciones de dos tipos: a) entre dos niveles jerárquicos consecutivos y b) un mismo nivel. El resto de las relaciones deberán aparecer al aplicar las propiedades de relación de orden "estar más bajo que", para los cuadriláteros que son comparables por relación de orden "estar incluido en". Aquellas relaciones que son también del tipo "pued ser", pero que no se corresponden al comparar dos clases de cuadriláteros por la relación orden, se han incluido en el mapa con el nexo "puede ser" con efecto oblícuo.

Mapa de relaciones entre cuadriláteros MC1 (in)



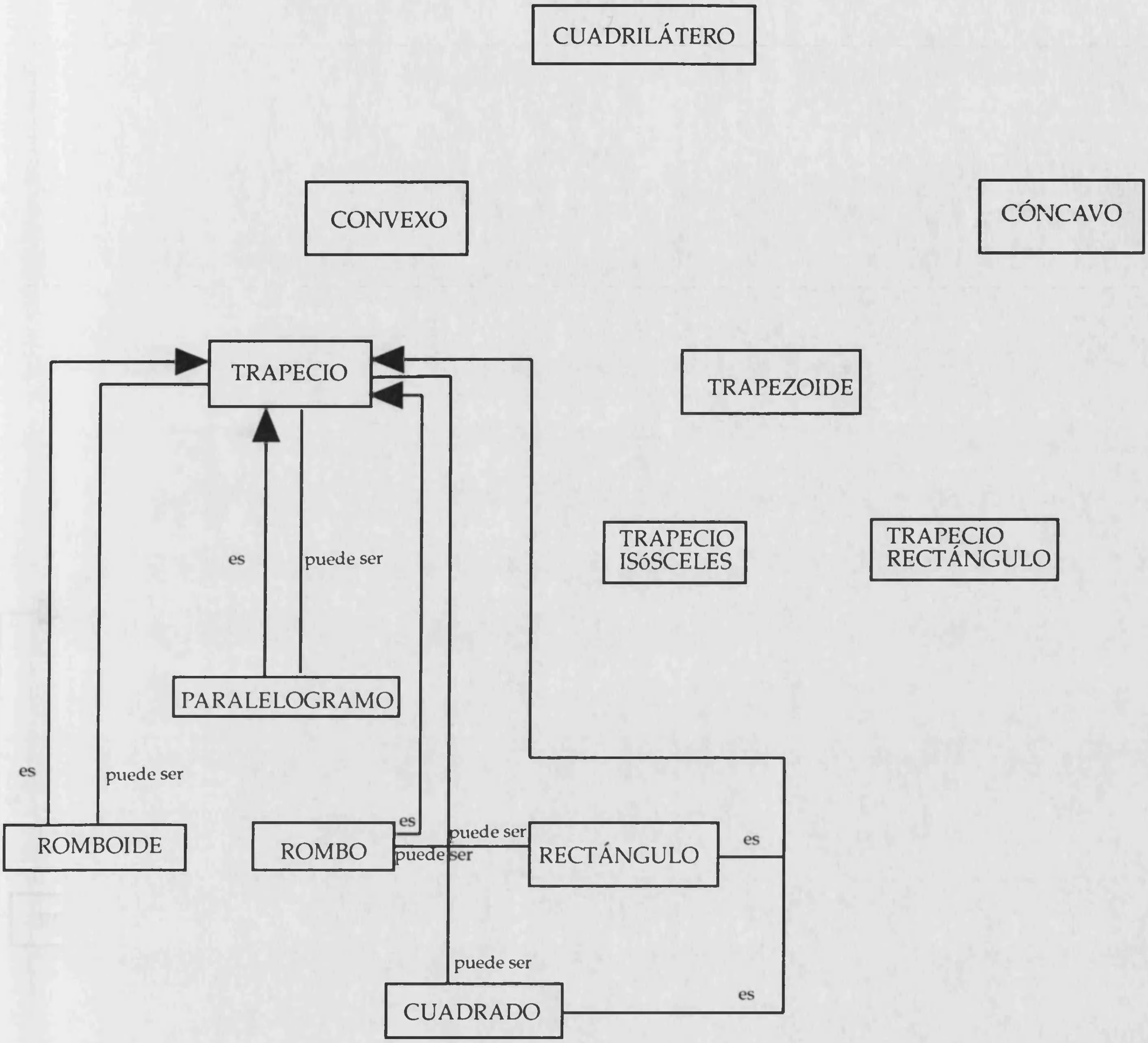
Teniendo ahora como concepto más inclusivo el concepto de Cuadrilátero, aparecen 18 relaciones, 9 del tipo "puede ser" y 9 del tipo "es" (un par por cada concepto: Trapecio, Trapezoide, Paralelogramo, Trapecio Rectángulo, Trapecio Isósceles, Romboide, Rombo, Rectángulo y Cuadrado), como las que se muestran en este mapa con Trapecio y Trapezoide, y en el mismo sentido de lectura: arriba - abajo, nexo "puede ser", y abajo - arriba, nexo "es".

Mapa de relaciones entre cuadriláteros MC2 (in)



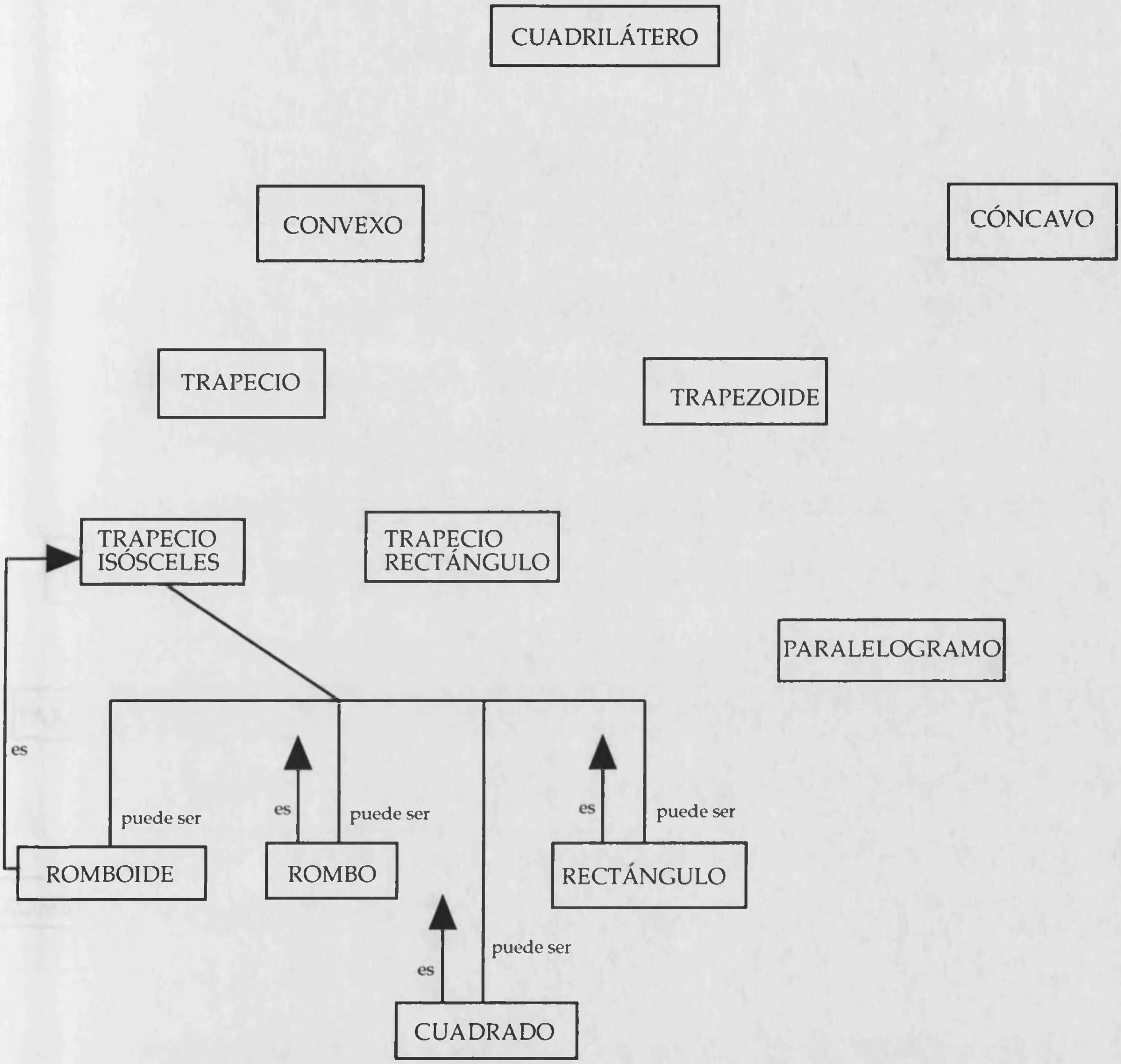
Ocurre lo mismo que en MC1 (in), teniendo ahora como concepto más inclusivo el de Cuadrilátero Convexo. Da lugar a 14 relaciones, 7 del tipo "puede ser" y 7 del tipo "es" con el mismo sentido de lectura que se indicó en MC1 (in).

Mapa de relaciones entre cuadriláteros MC3 (in)



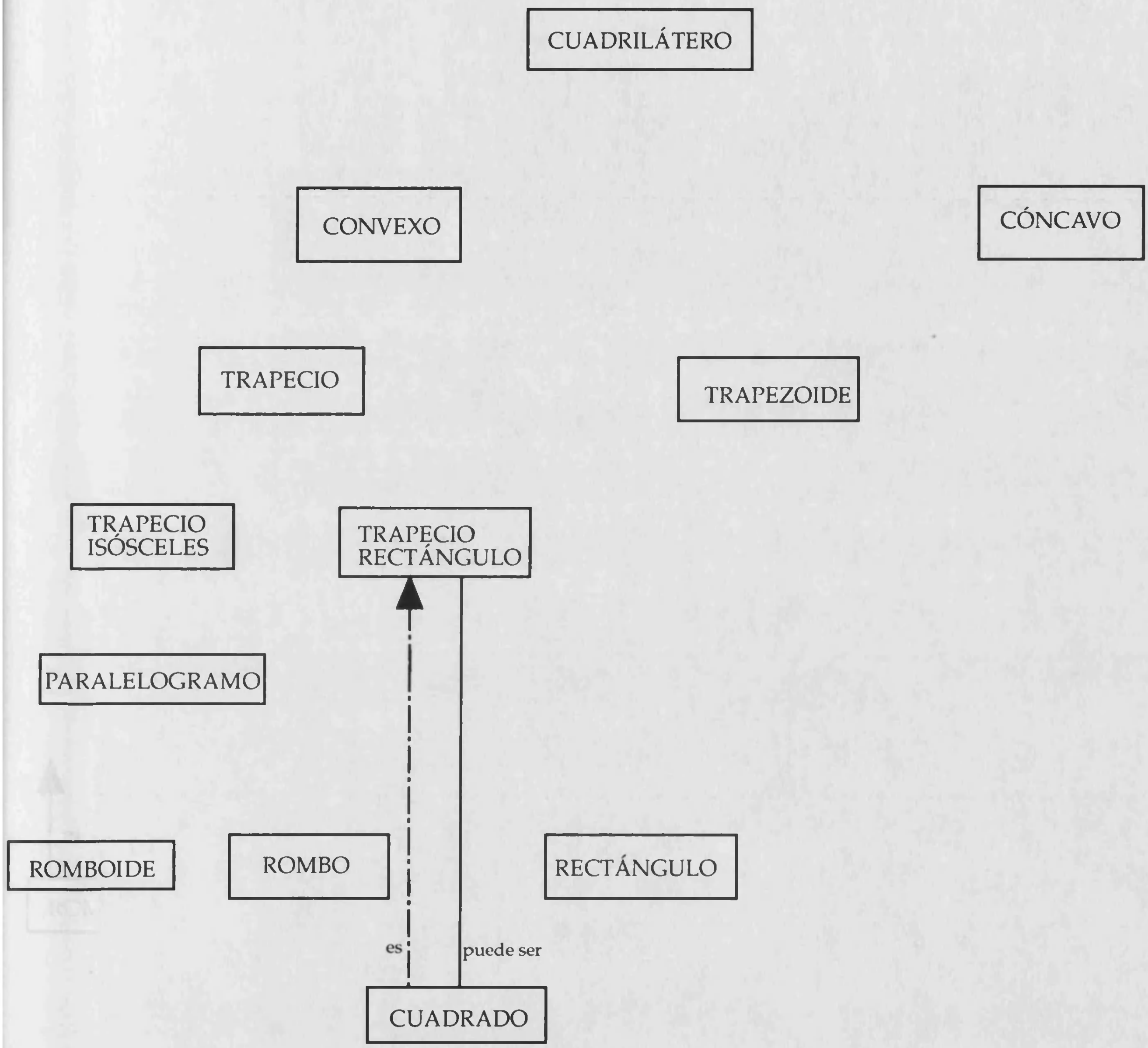
Teniendo ahora como concepto más inclusivo al Trapecio, aparecen 10 relaciones, 5 del tipo "puede ser" y 5 del tipo "es", con el mismo sentido de lectura que ya se indicó en mapas anteriores. Trapezoide no se relaciona con ningún otro nivel. Se trata de relaciones entre el 2º nivel jerárquico y el 4º, 5º y 6º nivel jerárquico, respectivamente.

Mapa de relaciones entre cuadriláteros MC4 (in)



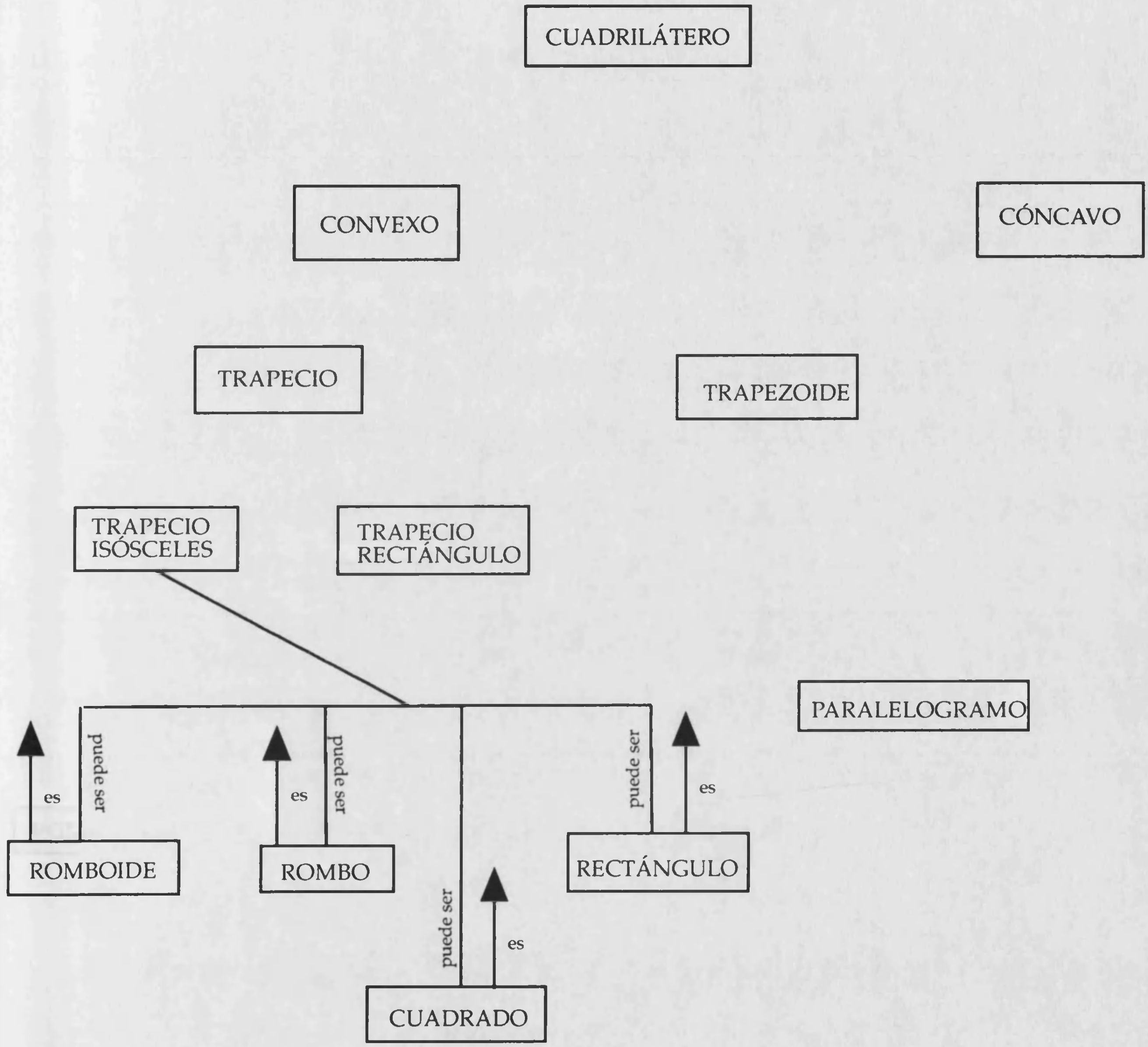
Hay un total de 8 relaciones teniendo como concepto más inclusivo al Trapecio Isósceles, 4 del tipo "puede ser" y 4 del tipo "es". Se trata de parte de las relaciones del nivel jerárquico 3º con los niveles jerárquicos 5º y 6º, respectivamente.

Mapa de relaciones entre cuadriláteros MC5 (in)



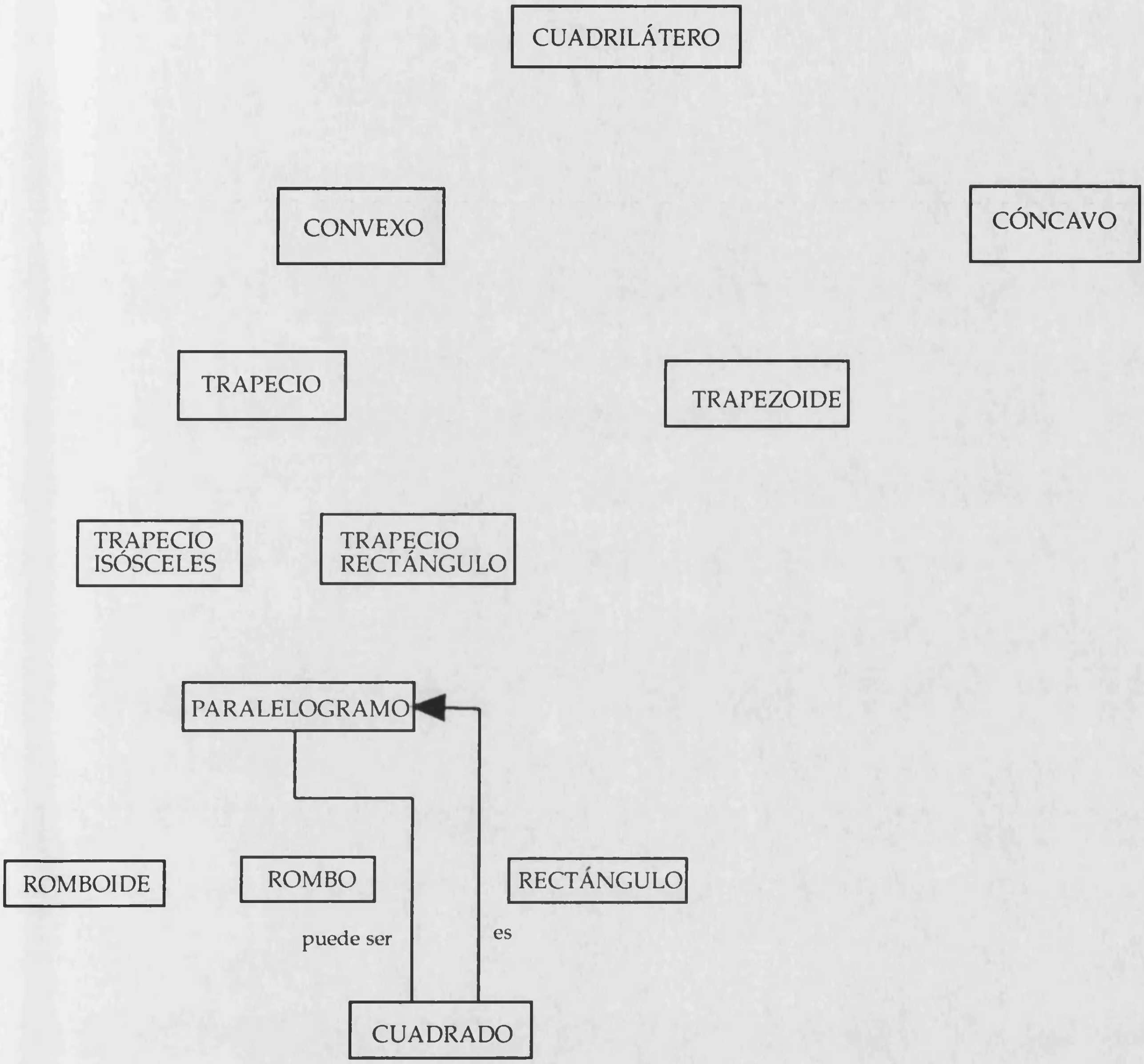
Hay un total de 2 relaciones teniendo como concepto más inclusivo el Trapecio Rectángulo, 1 del tipo "puede ser" y 1 del tipo "es". Son parte de las relaciones entre el nivel jerárquico 3º y los niveles 5º y 6º, respectivamente.

Mapa de relaciones entre cuadriláteros MC6 (in)



Hay un total de 8 relaciones teniendo como concepto más inclusivo el Trapecio Isósceles, 4 del tipo "puede ser" y 4 del tipo "es". Son parte de las relaciones entre el nivel jerárquico 3º y los niveles 5º y 6º, respectivamente.

Mapa de relaciones entre cuadriláteros MC7 (in)



Hay un total de 2 relaciones teniendo como concepto más inclusivo el Paralelogramo, 1 del tipo "puede ser" y 1 del tipo "es". Se trata de las relaciones entre los niveles jerárquicos 4º y 6º.

ANEXO IV

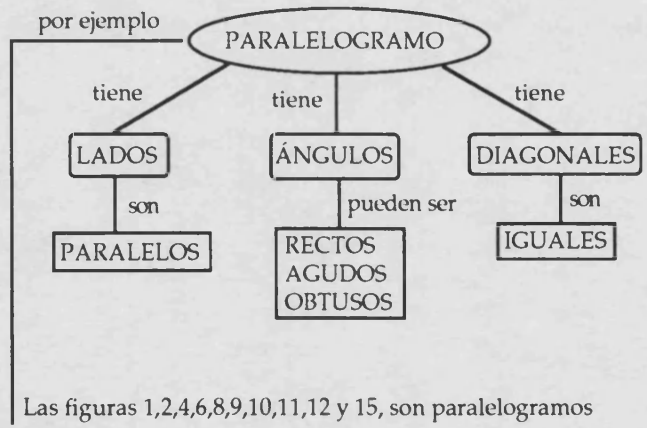
2ª PARTE

MAPAS CONCEPTUALES DE LOS ESTUDIANTES

Mapas M-i, para i= 1, 2,...., 14
Si i= 2n, con n= 1, 2, 3,..., 7, mapas conceptuales del cuadrado.
Si i=2n-1, con n= 1, 2, ..., 7, mapas conceptuales del paralelogramo.

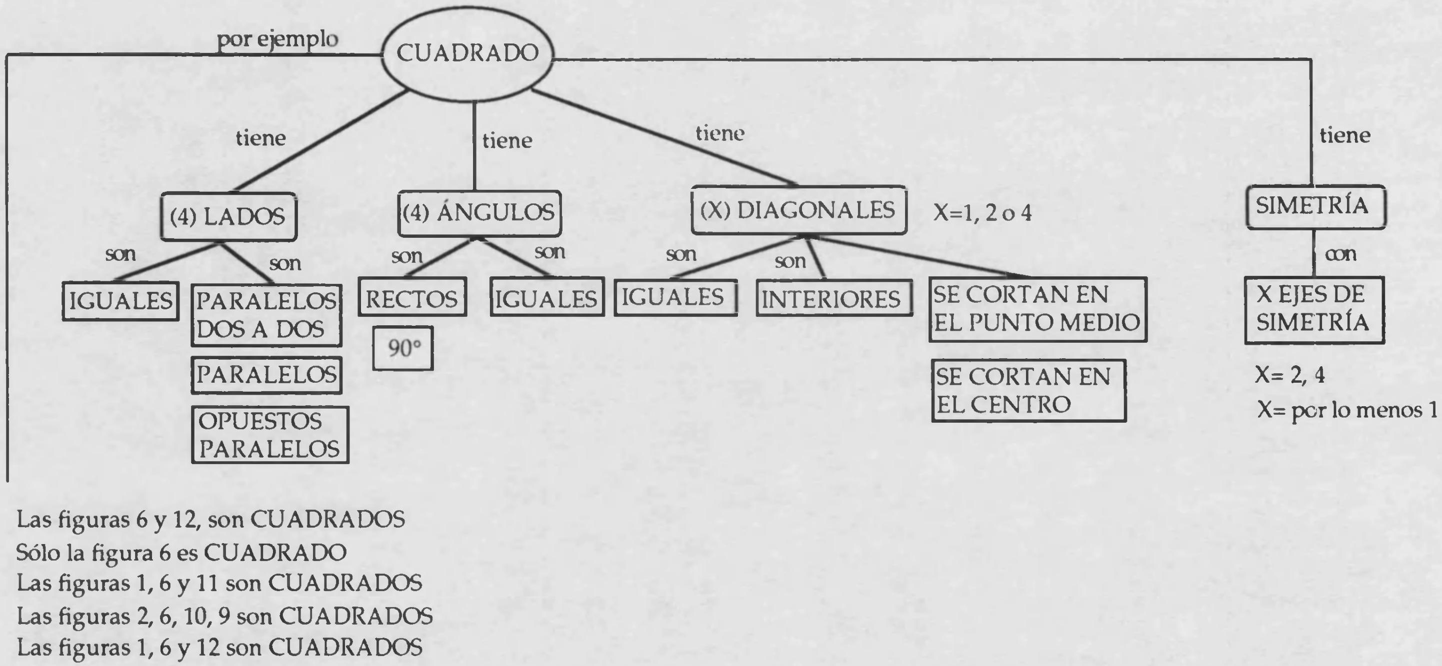
Perfil de razonamiento IBNN. Número de estudiantes analizados, 3.

Mapa conceptual del cuadrado M-1

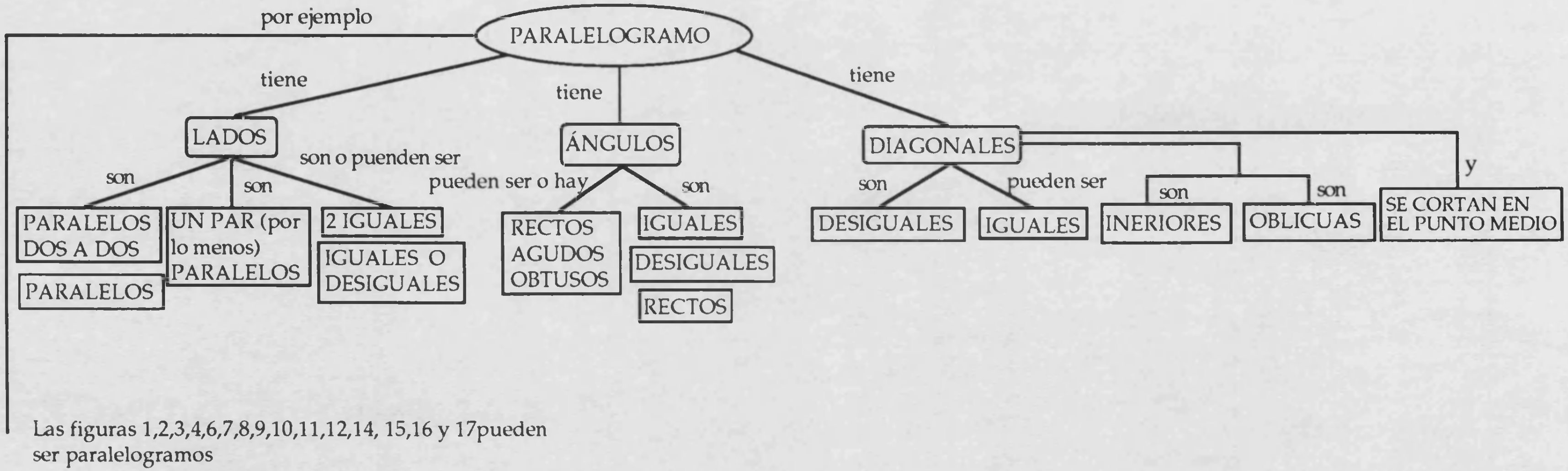


Mapa conceptual del paralelogramo M-2

Perfil de razonamiento, ABNN. Número de estudiantes analizados, 11

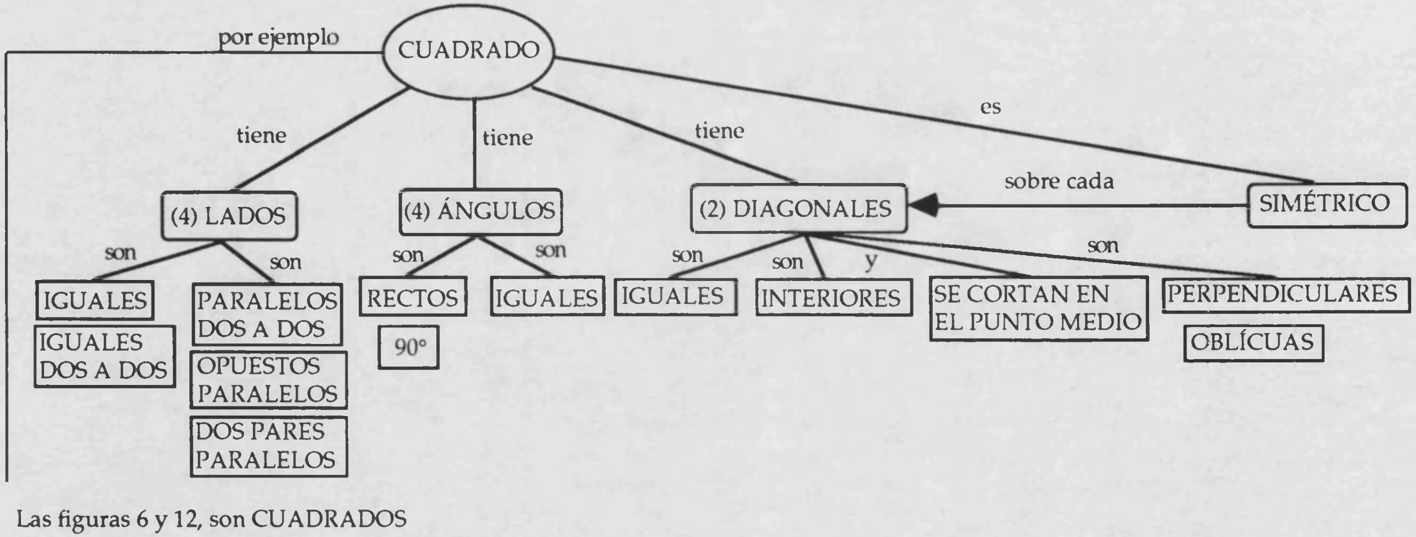


Mapa conceptual del cuadrado M-3

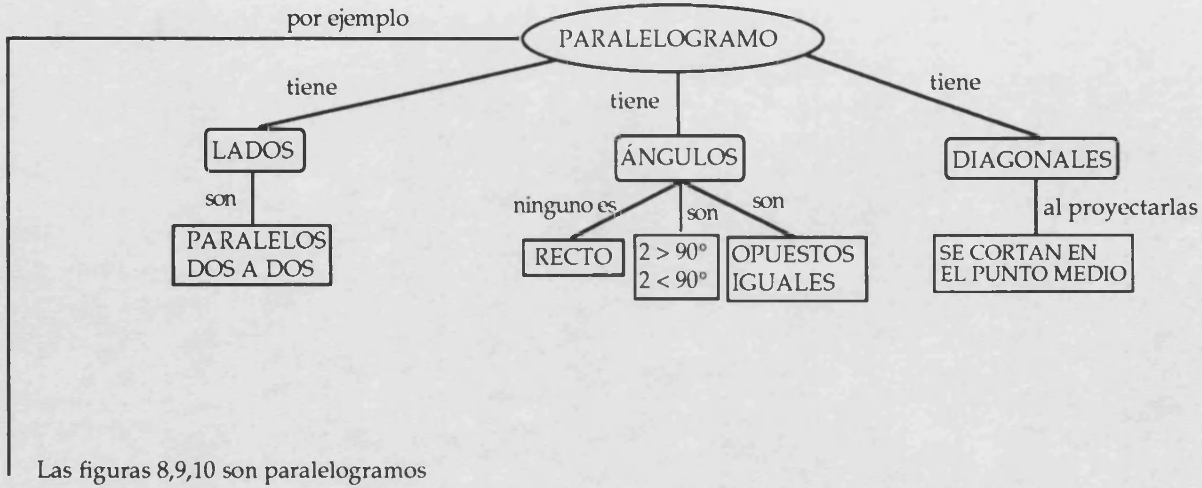


Mapa conceptual del paralelogramo M-4

Perfil de razonamiento AI#N, con #= Bajo o Nulo. Número de estudiantes analizados, 6

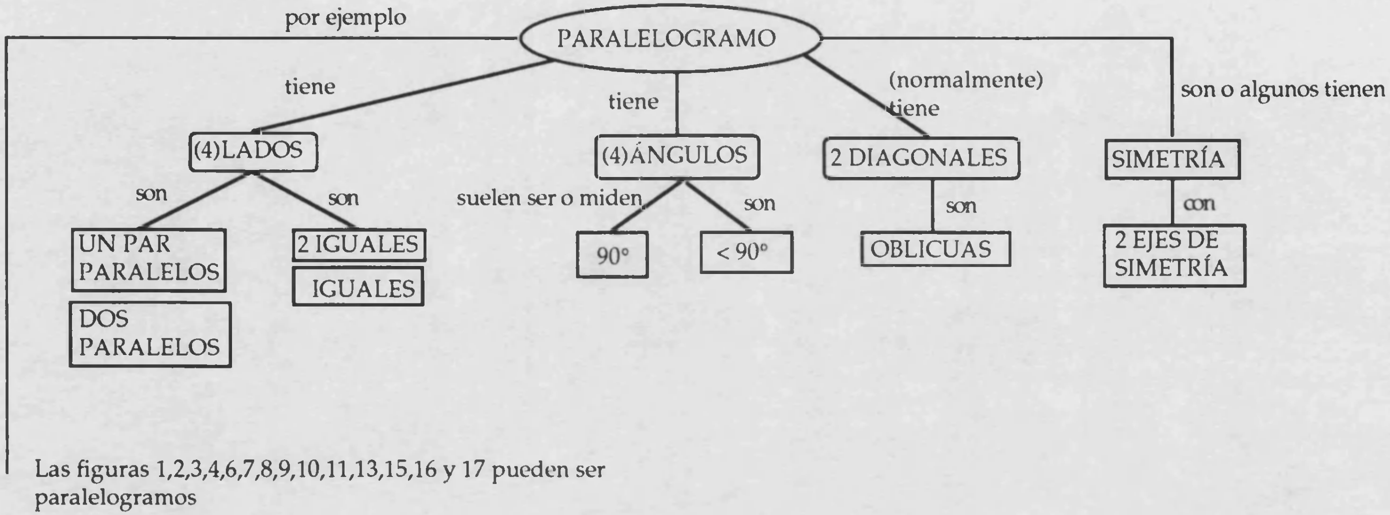


Mapa conceptual del cuadrado M-5



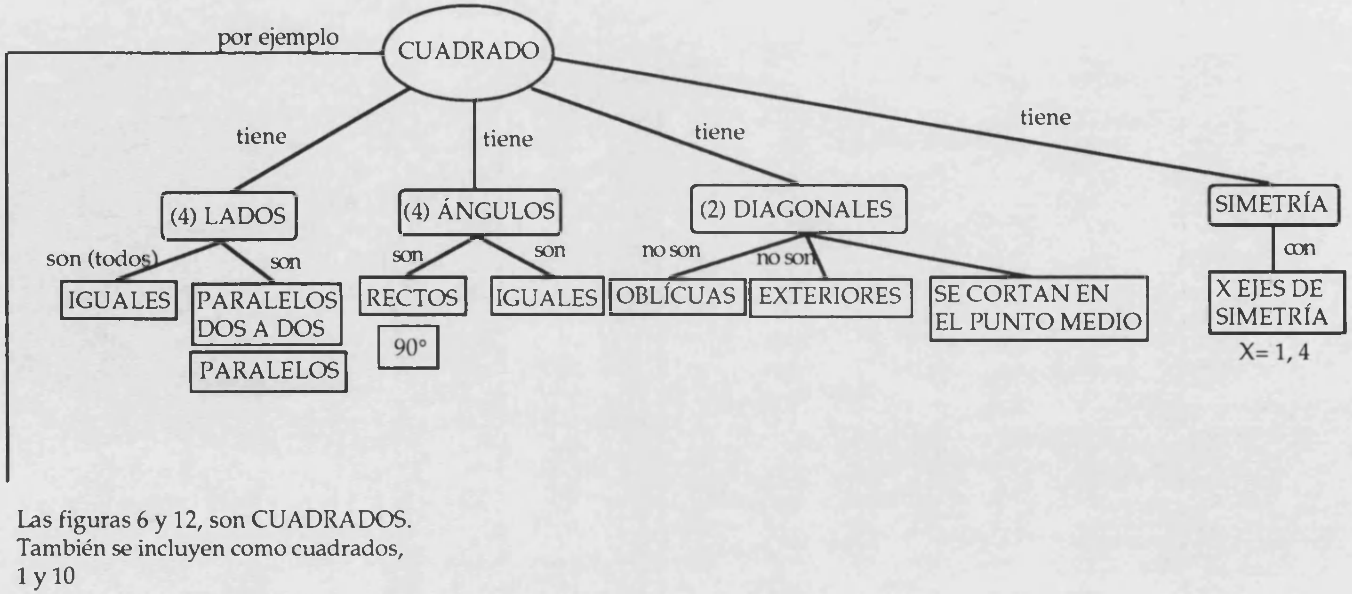
Definición: "Cuadrilátero con lados paralelos dos a dos y que no tiene ángulos rectos"

Mapa conceptual del paralelogramo M-6

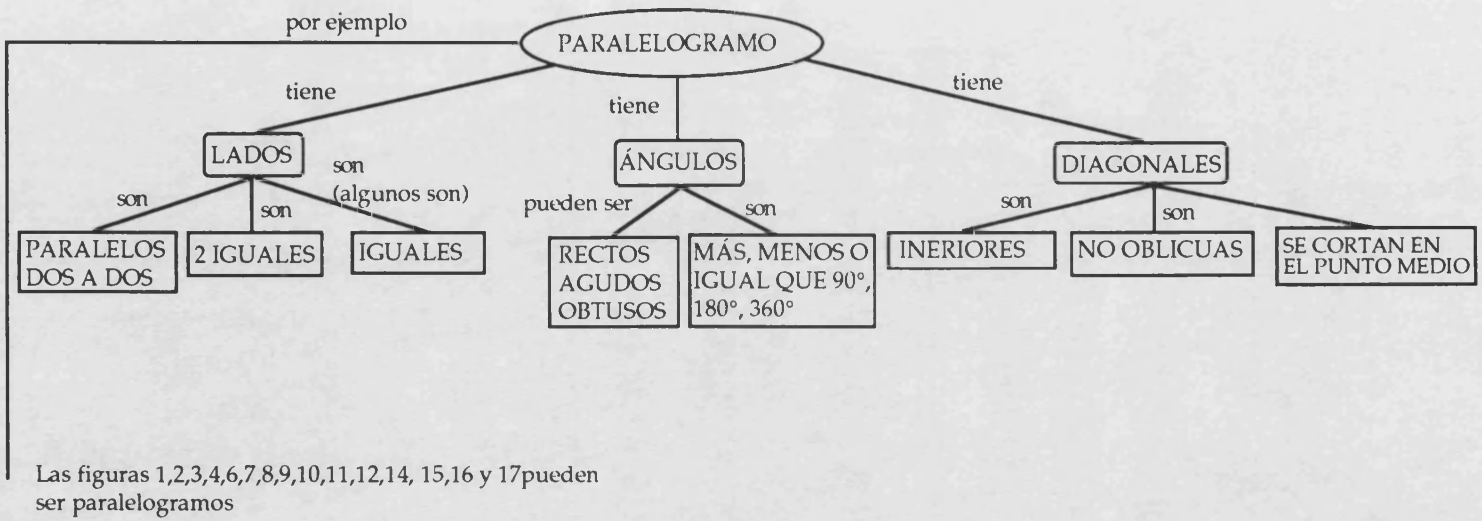


Mapa conceptual del paralelogramo M-6 bis

Perfil de razonamiento, CBNN. Número de estudiantes analizados, 4

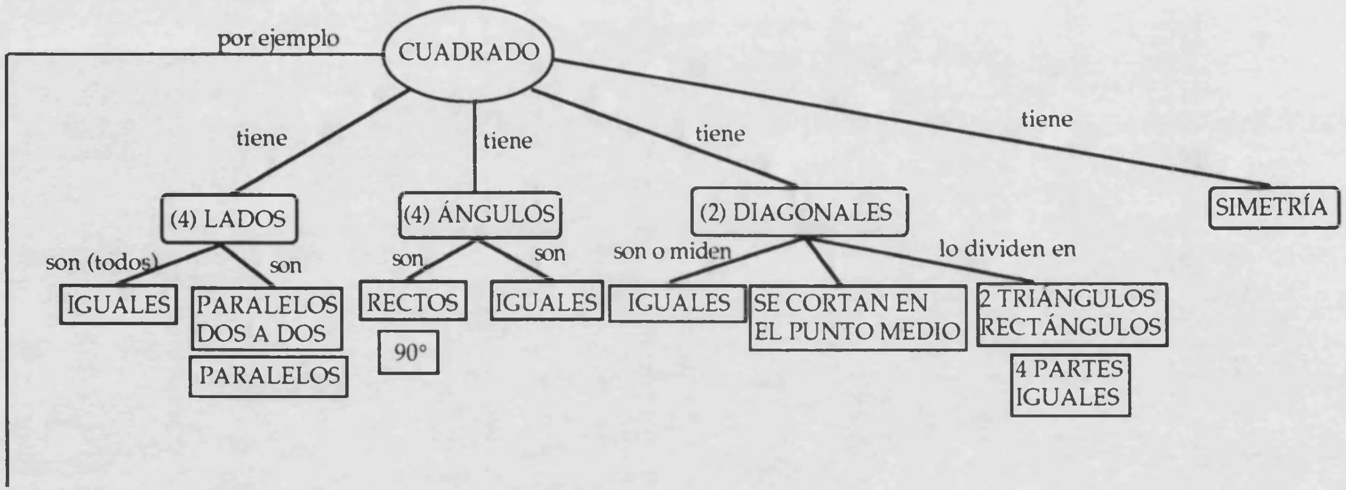


Mapa conceptual del cuadrado M-7



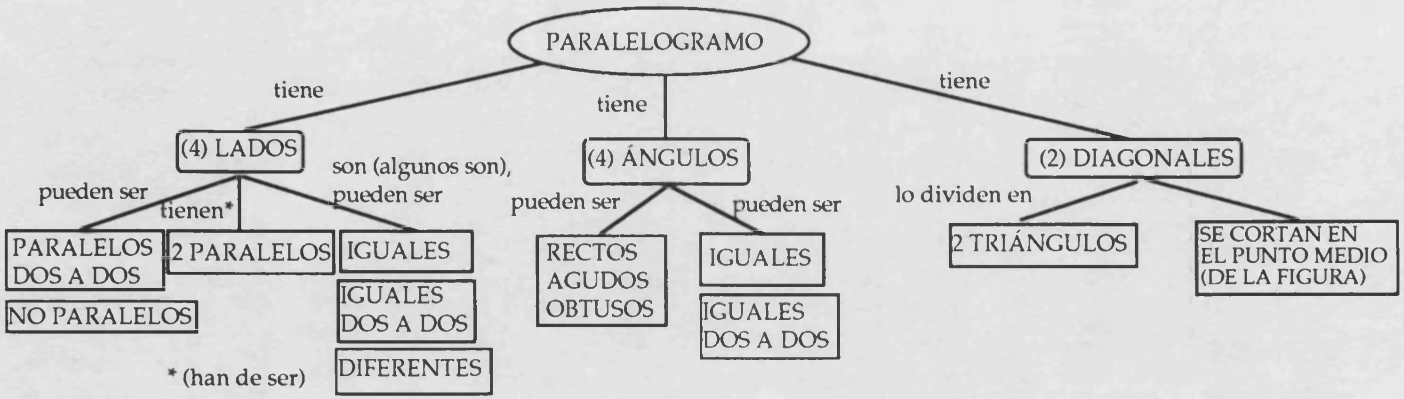
Mapa conceptual del paralelogramo M-8

Perfil de razonamiento CINN. Número de estudiantes analizados, 6



Las figuras 6 y 12, son CUADRADOS.
También se incluyen como cuadrados, 2 y 10

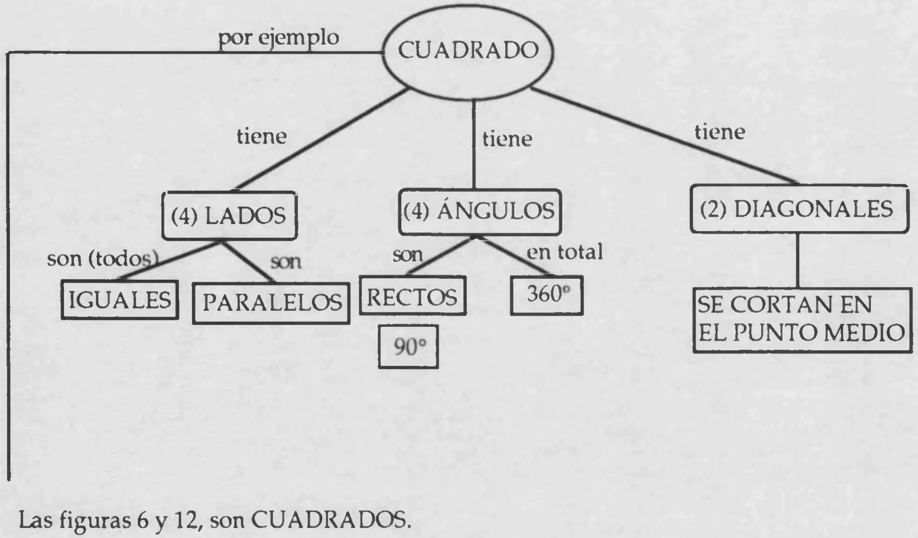
Mapa conceptual del cuadrado M-9



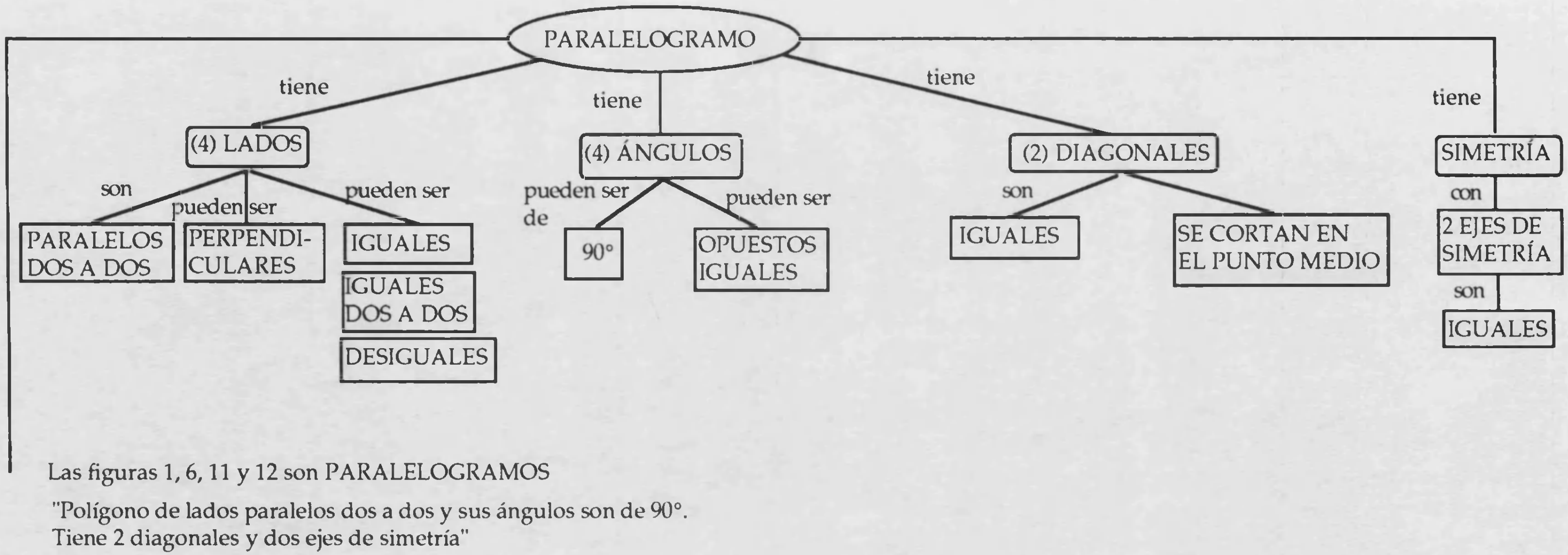
PARALELOGRAMO: Cuadrilátero con al menos dos lados paralelos.
PARALELOGRAMOS con sólo un par de lados paralelos: 3, 5, 7, 13, 14, 16 y 17 (sin incluir, entre ellos, el 4 y 15)

Mapa conceptual del paralelogramo M-10

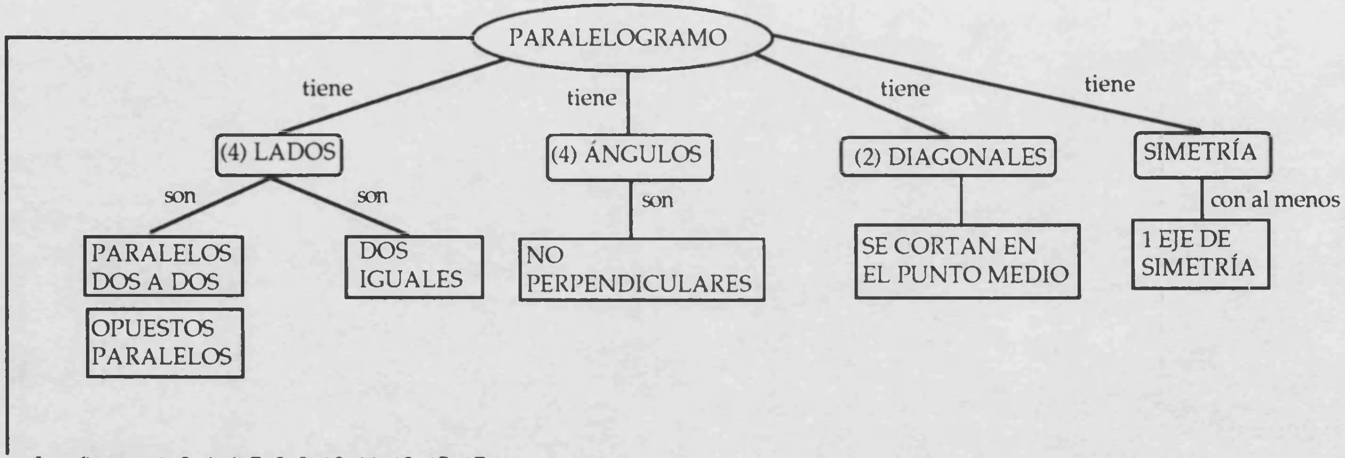
Perfil de razonamiento CANN. Número de estudiantes analizados, 2.



Mapa conceptual del cuadrado M-11



Mapa conceptual del paralelogramo M-12

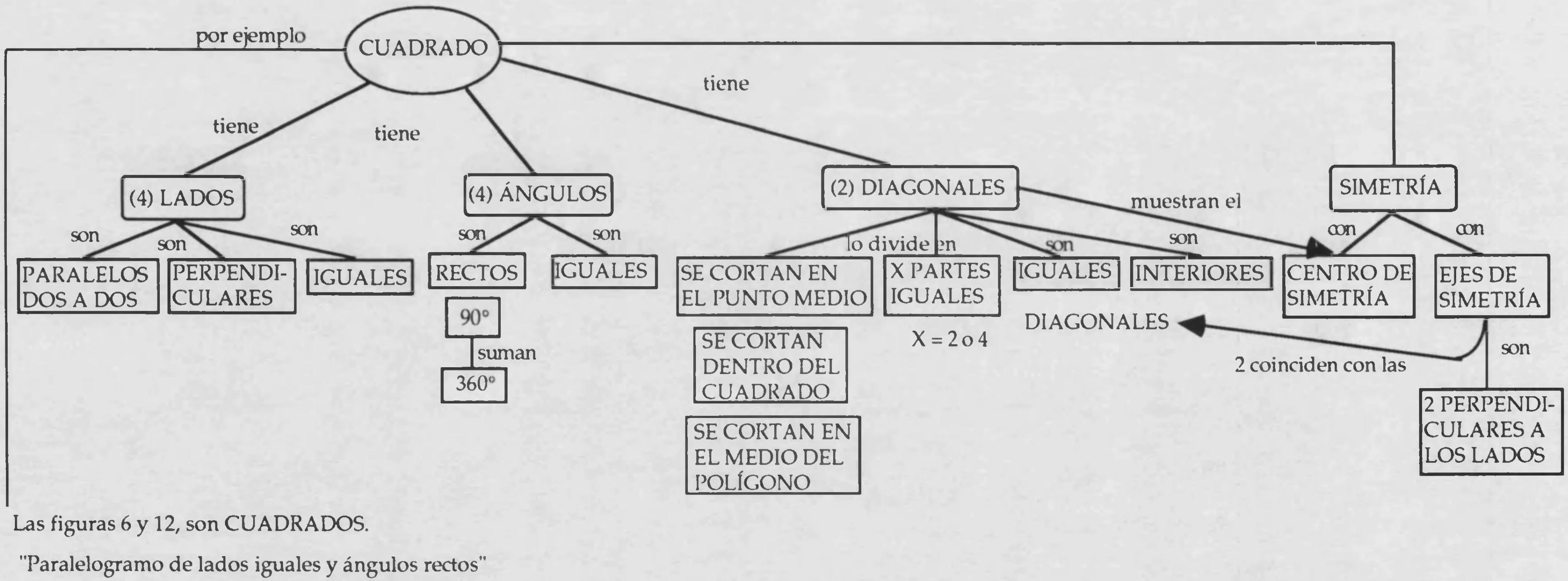


Las figuras 1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 17.

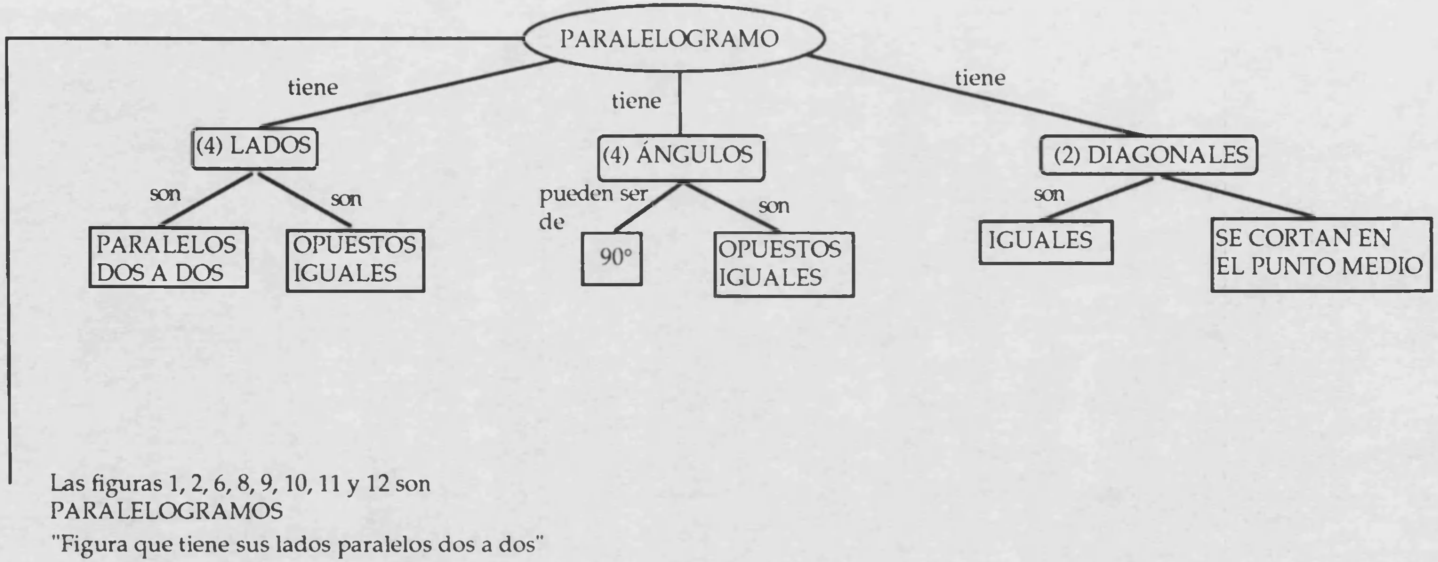
"Un polígono que tiene al menos dos lados iguales, son paralelos dos a dos y los lados opuestos también son paralelos, al menos tienen (1) eje de simetría"

Mapa conceptual del paralelogramo M-12 bis

Perfil de razonamiento, CABN. Número de estudiantes analizados, 8



Mapa conceptual del cuadrado M-13



Mapa conceptual del paralelogramo M-14

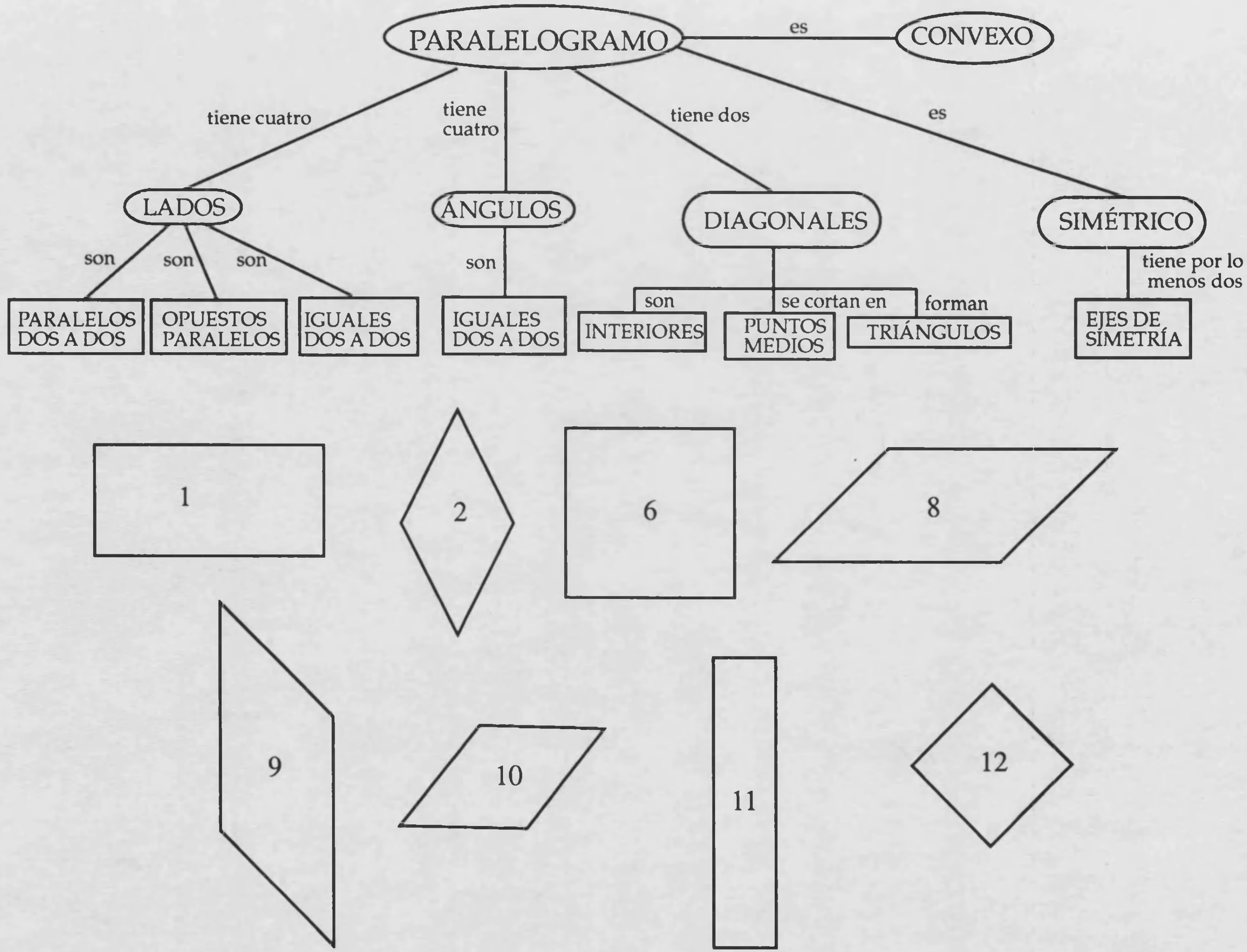
ANEXO IV

3ª PARTE

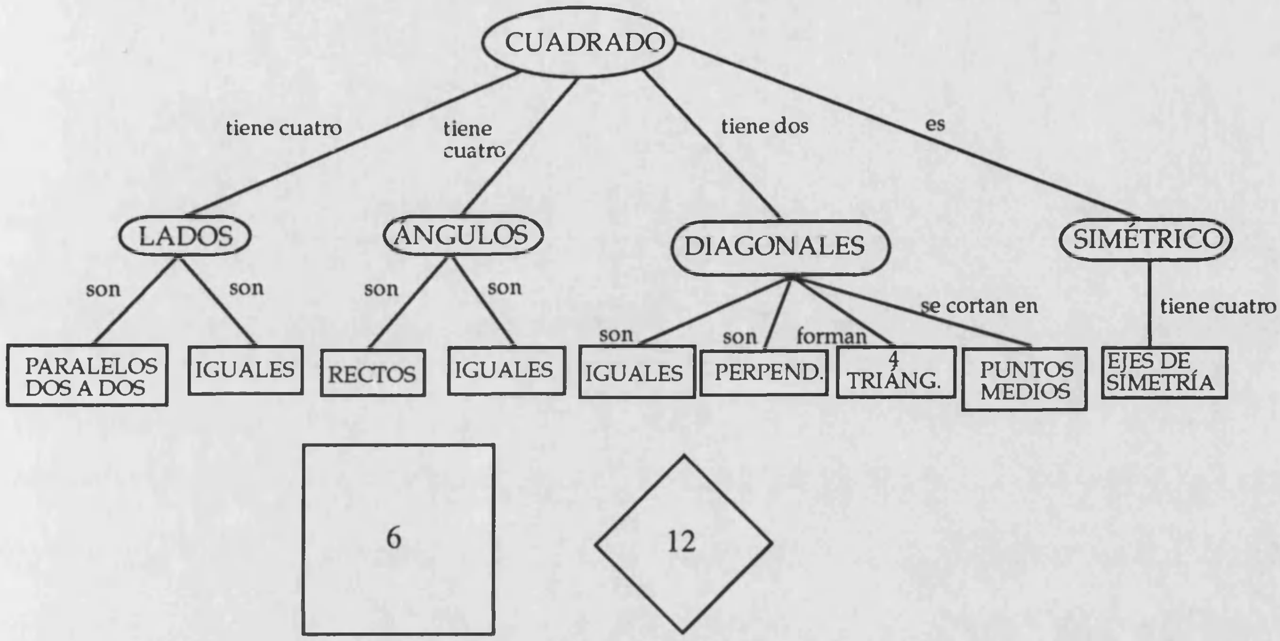
MAPAS CONCEPTUALES DE LOS ESTUDIANTES A Y L

Mapas A_{i1} y A_{i2}, para i= 1, 2,...., 9
Mapas L_{j1} y L_{i2}, para j= 1, 2,...., 9

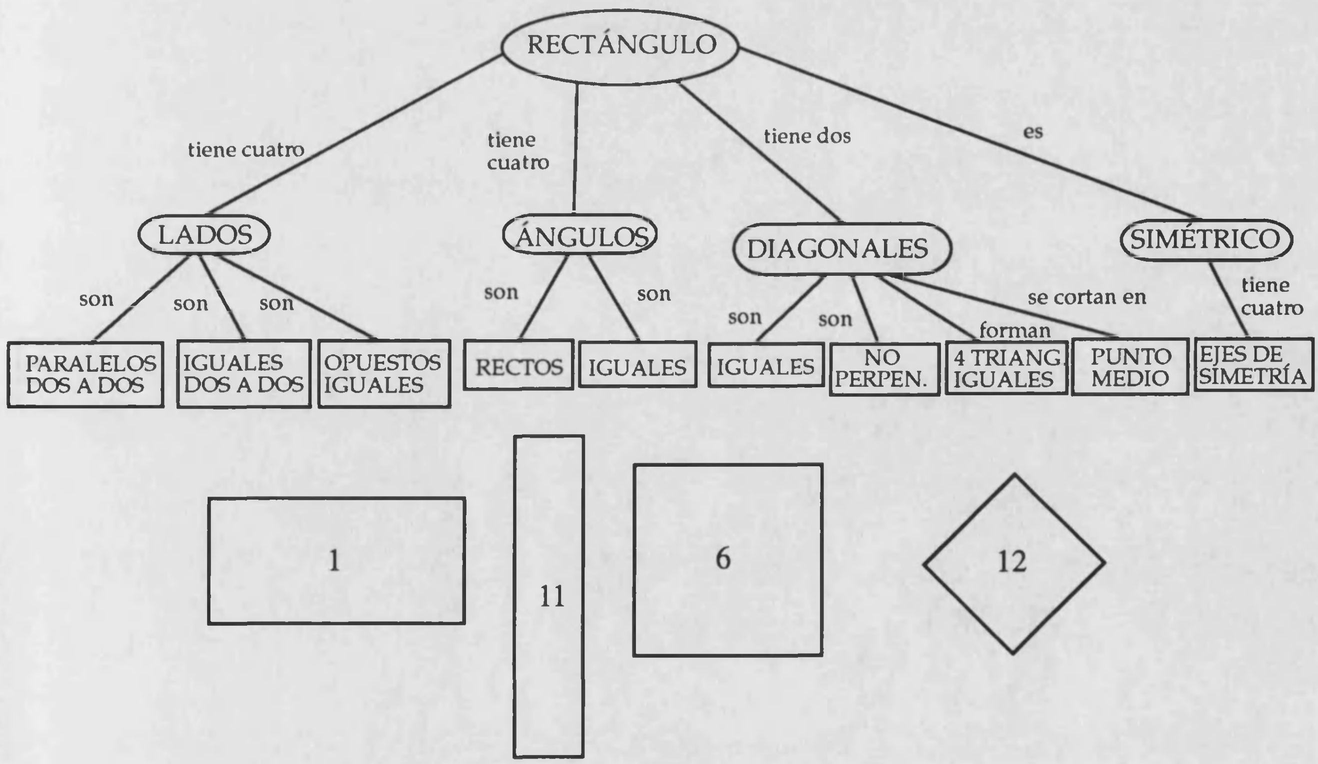
MAPA CONCEPTUAL DEL PARALELOGRAMO A11



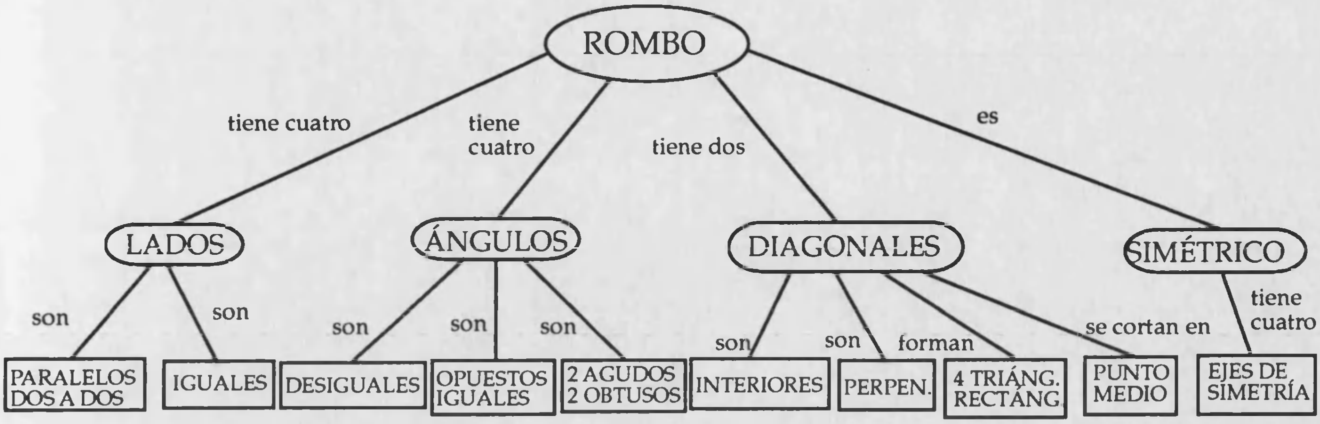
MAPA CONCEPTUAL DEL CUADRADO A21

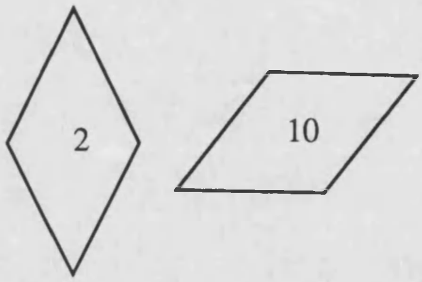


MAPA CONCEPTUAL DEL RECTÁNGULO A31

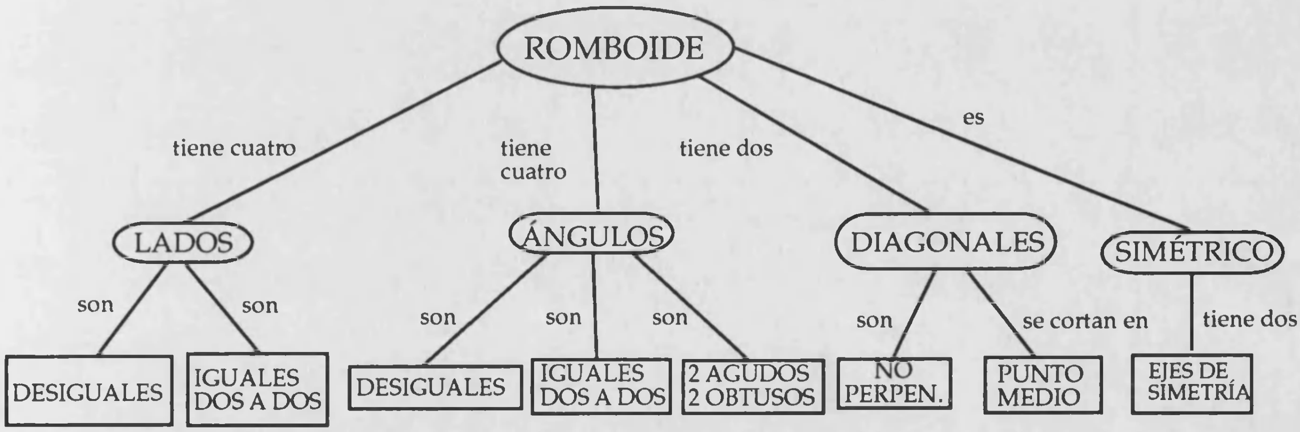


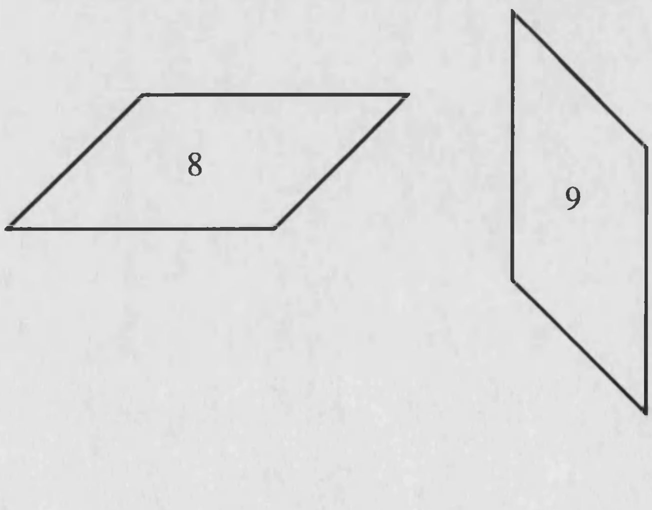
MAPA CONCEPTUAL DEL ROMBO A41



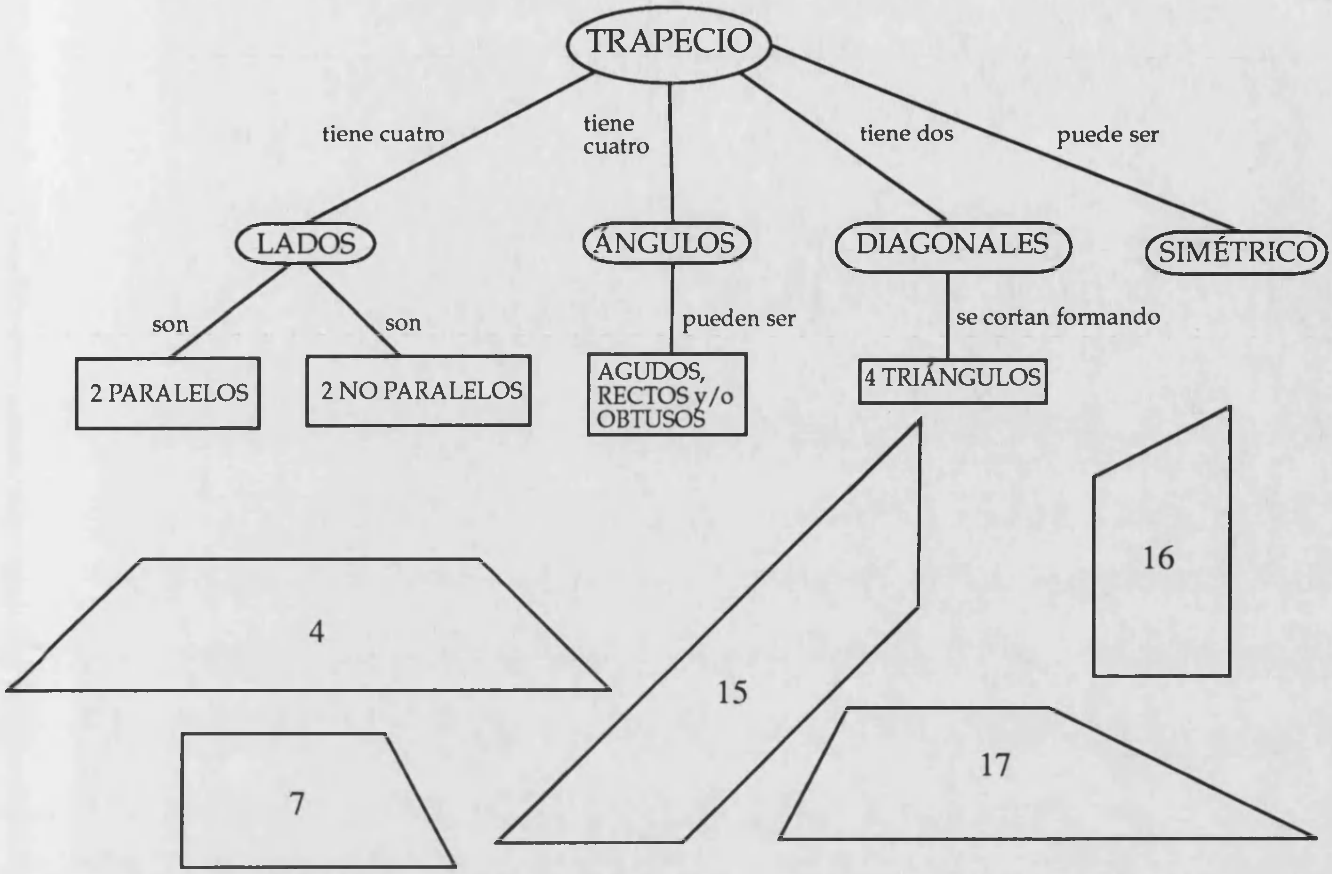


MAPA CONCEPTUAL DEL ROMBOIDE A51

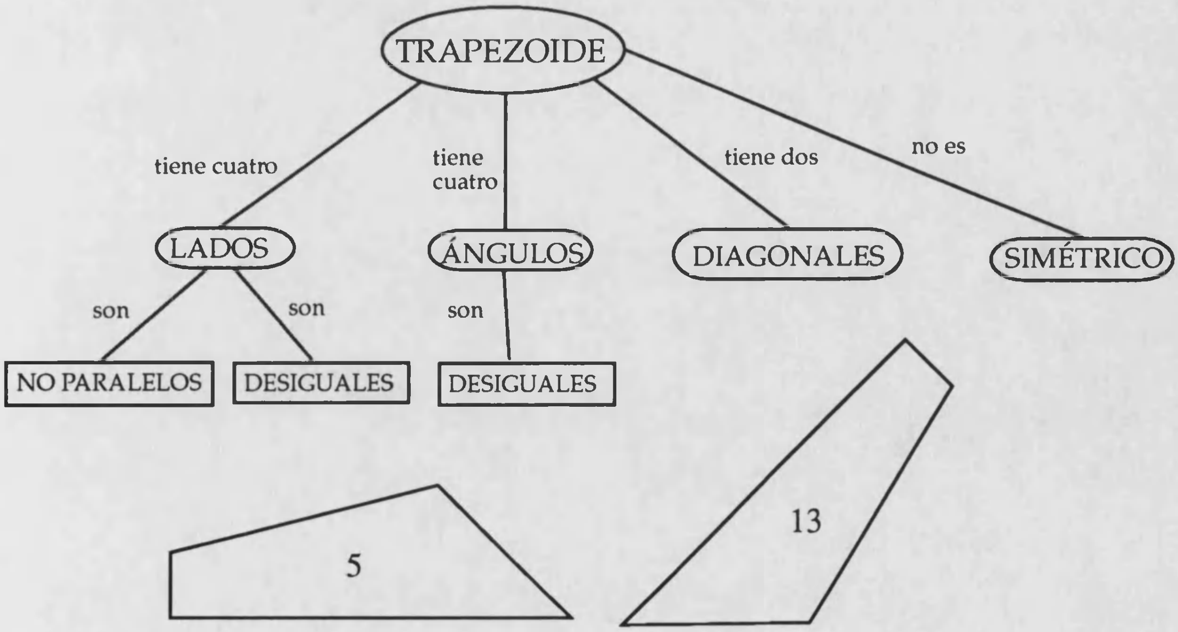




MAPA CONCEPTUAL DEL TRAPECIO A61

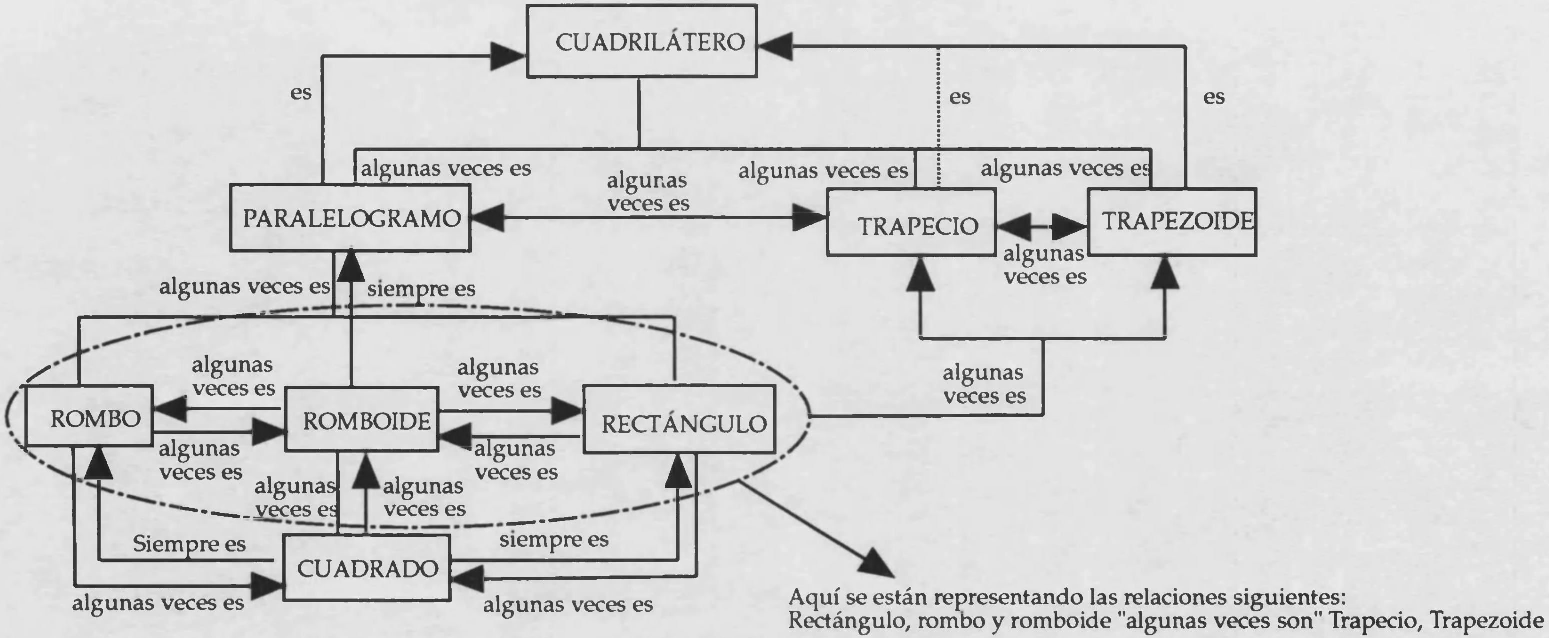


MAPA CONCEPTUAL DEL TRAPEZOIDE A71



MAPA DE RELACIONES A81

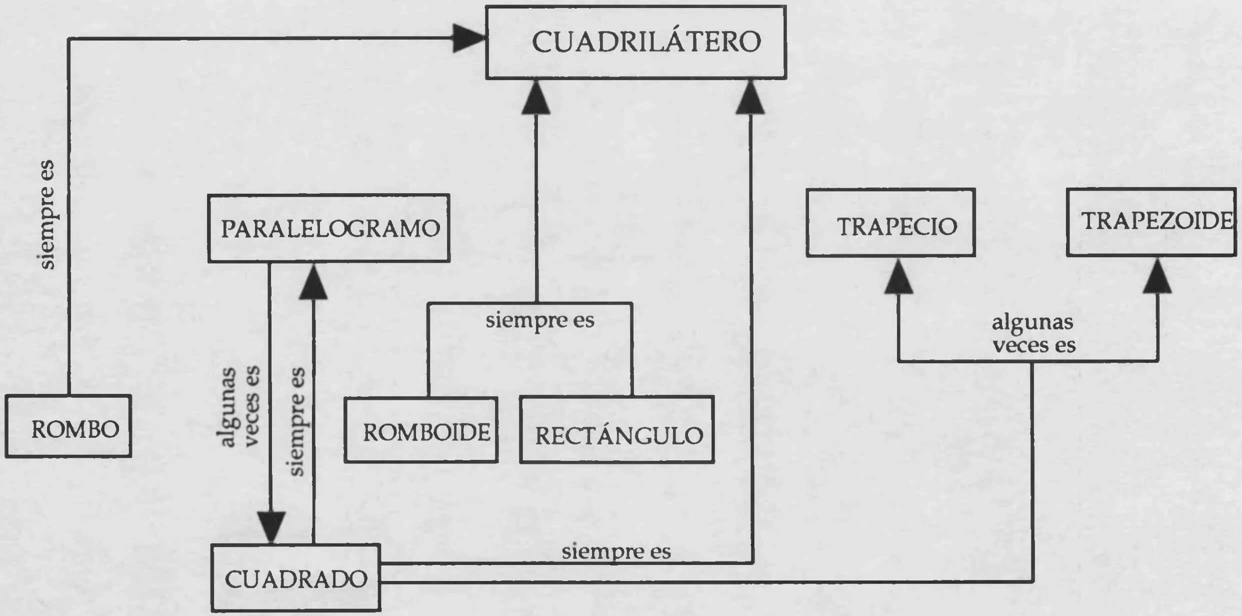
(Se muestra en él las relaciones entre dos niveles jerárquicos consecutivos)



DEFINICIONES :

PARALELOGRAMO: Cuadriláteroque tiene sus lados paralelos dos a dos.
TRAPECIO: Cuadrilátero que tiene dos lados paralelos y los otros no.
TAPEZOIDE: Un trapecio sin ningún par de lados paralelos.
ROMBOIDE: Cuadrilátero que tiene los lados y ángulos iguales 2 a 2.
ROMBO: Cuadrilátero con los 4 lados iguales y ángulos iguales dos a dos.
RECTÁNGULO: Cuadrilátero con los lados paralelos e iguales 2 a 2 y cuatro ángulos rectos.
CUADRADO: Cuadrilátero que posee cuatro lados iguales y 4 ángulos rectos.

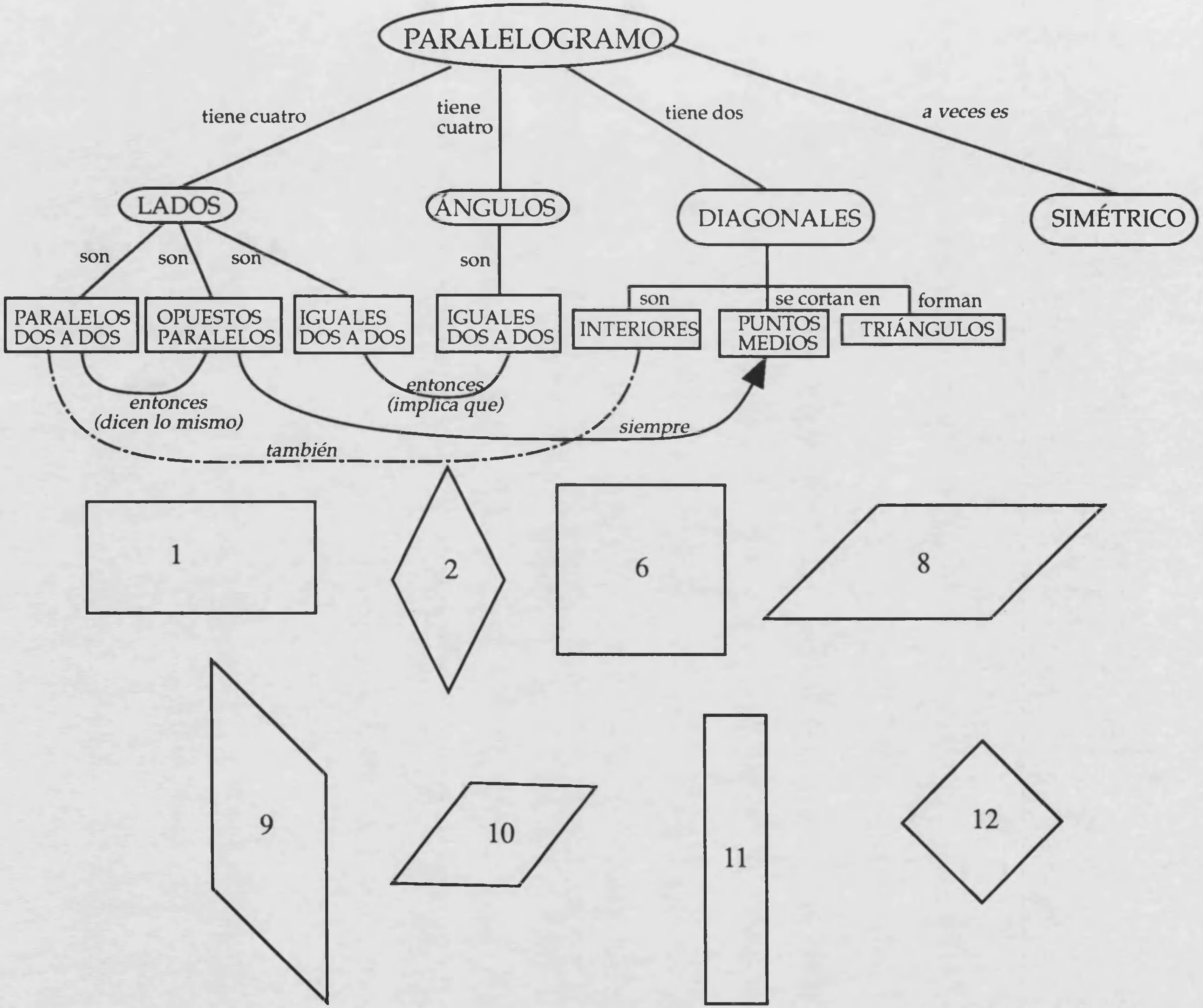
MAPA DE RELACIONES A91
(Muestra las relaciones entre niveles jerárquicos no cosecutivos)



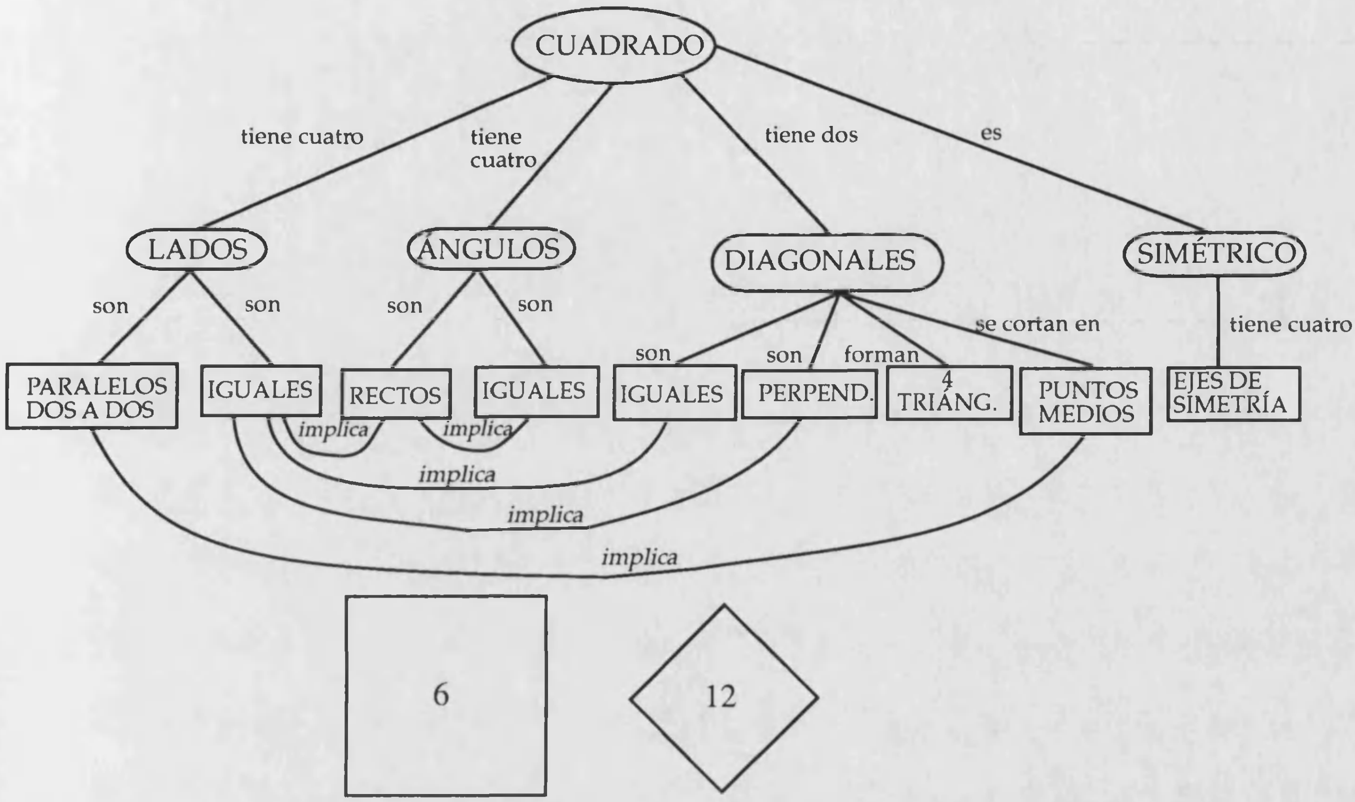
DEFINICIONES :

PARALELOGRAMO: Cuadriláteroque tiene sus lados paralelos dos a dos.
TRAPECIO: Cuadrilátero que tiene dos lados paralelos y los otros no.
TAPEZOIDE: Un trapecio sin ningún par de lados paralelos.
ROMBOIDE: Cuadrilátero que tiene los lados y ángulos iguales 2 a 2.
ROMBO: Cuadrilátero con los 4 lados iguales y ángulos iguales dos a dos.
RECTÁNGULO: Cuadrilátero con los lados paralelos e iguales 2 a 2 y cuatro ángulos rectos.
CUADRADO: Cuadrilátero que posee cuatro lados iguales y 4 ángulos rectos.

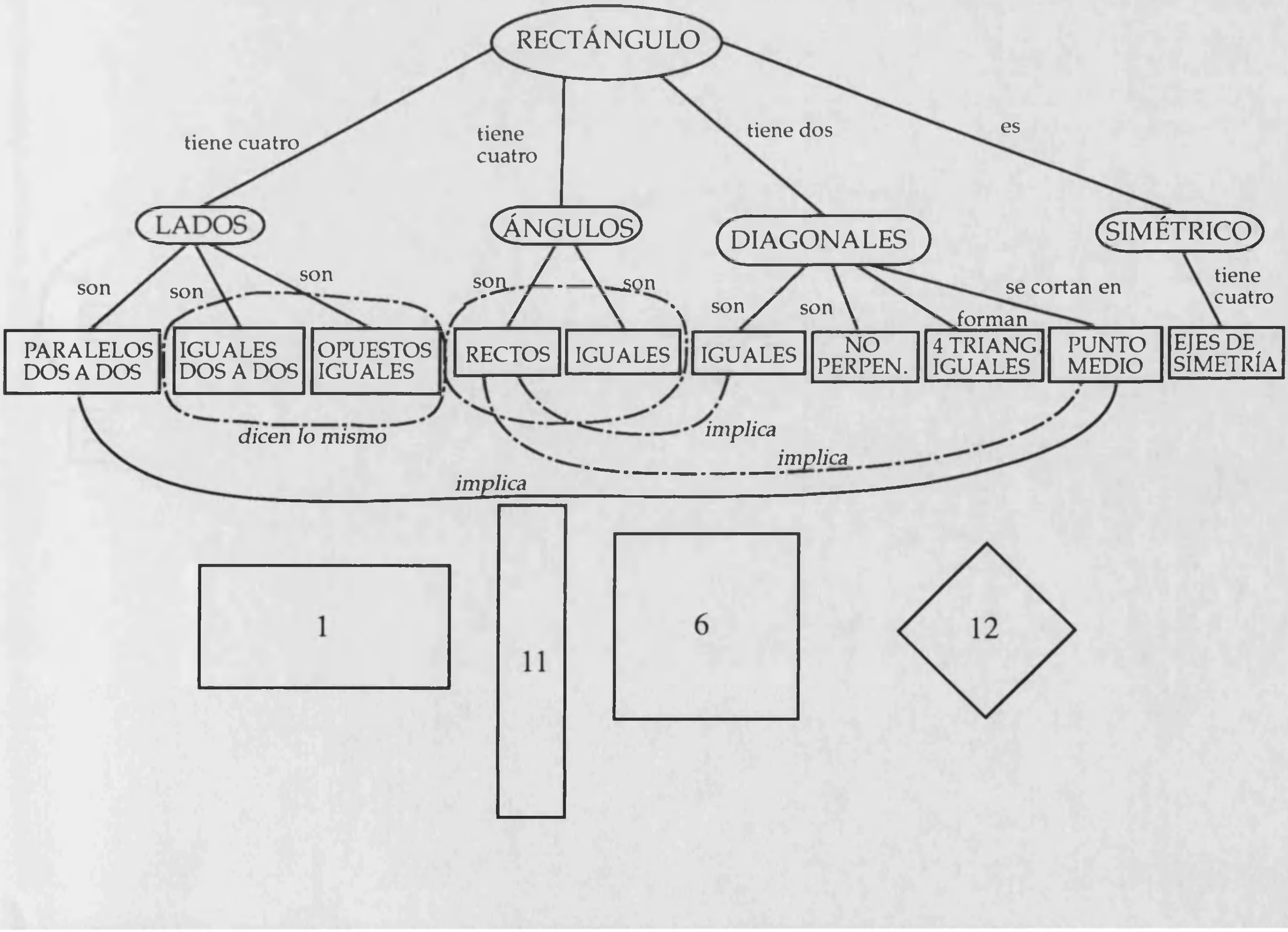
MAPA CONCEPTUAL DEL PARALELOGRAMO A12



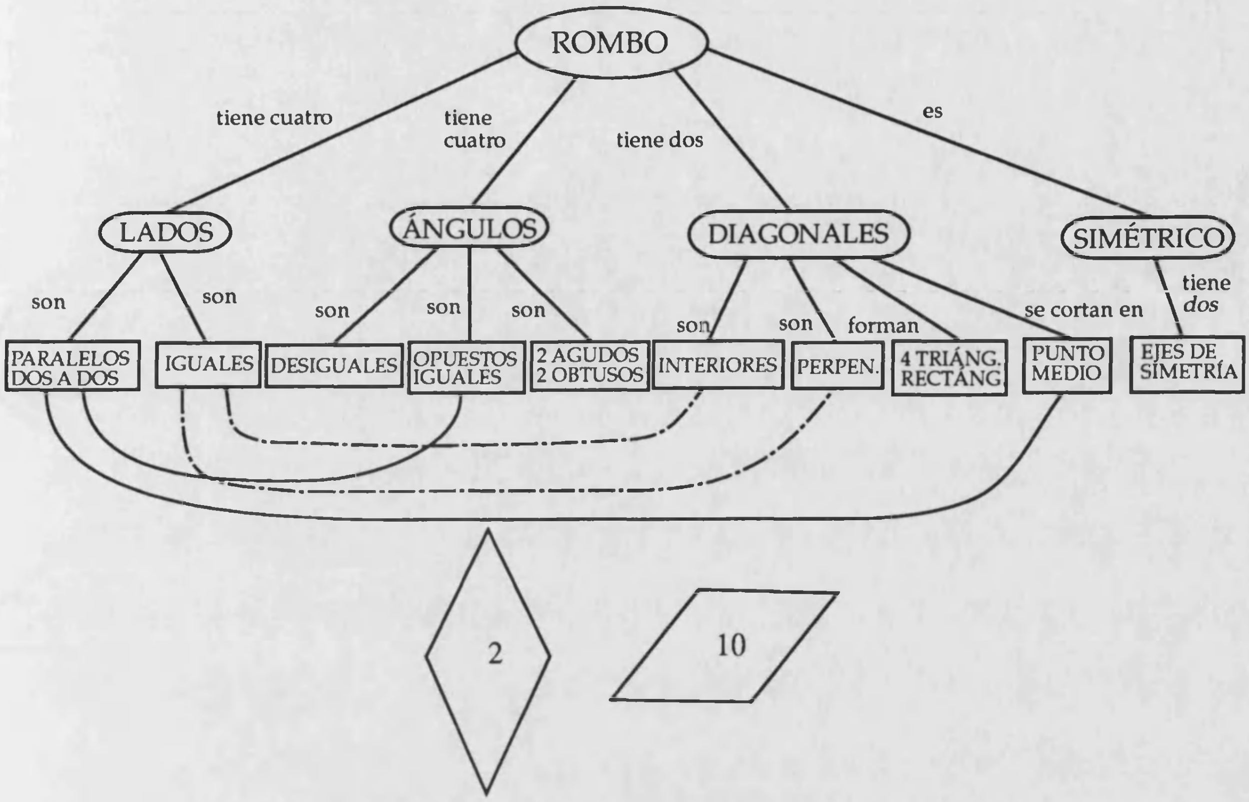
MAPA CONCEPTUAL DEL CUADRADO A22



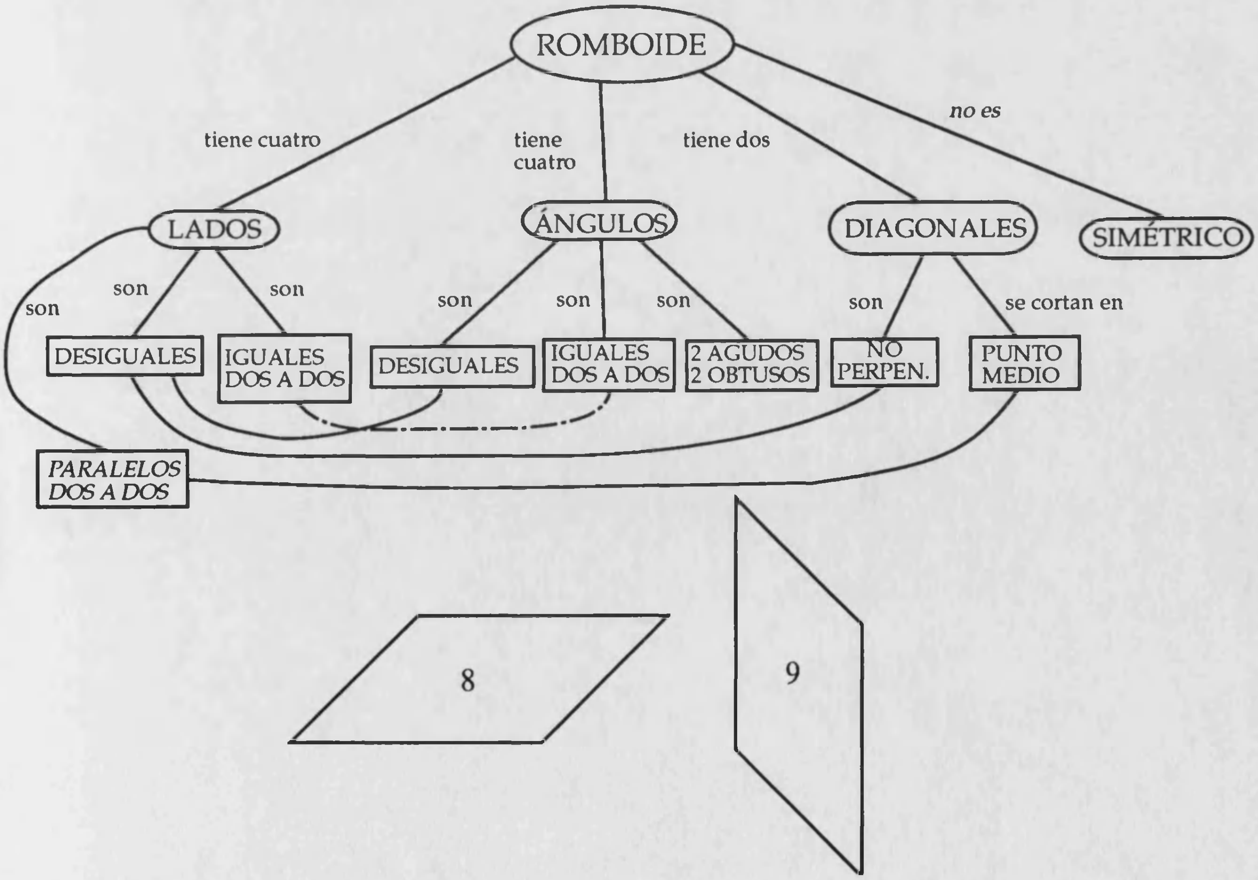
MAPA CONCEPTUAL DEL RECTÁNGULO A32



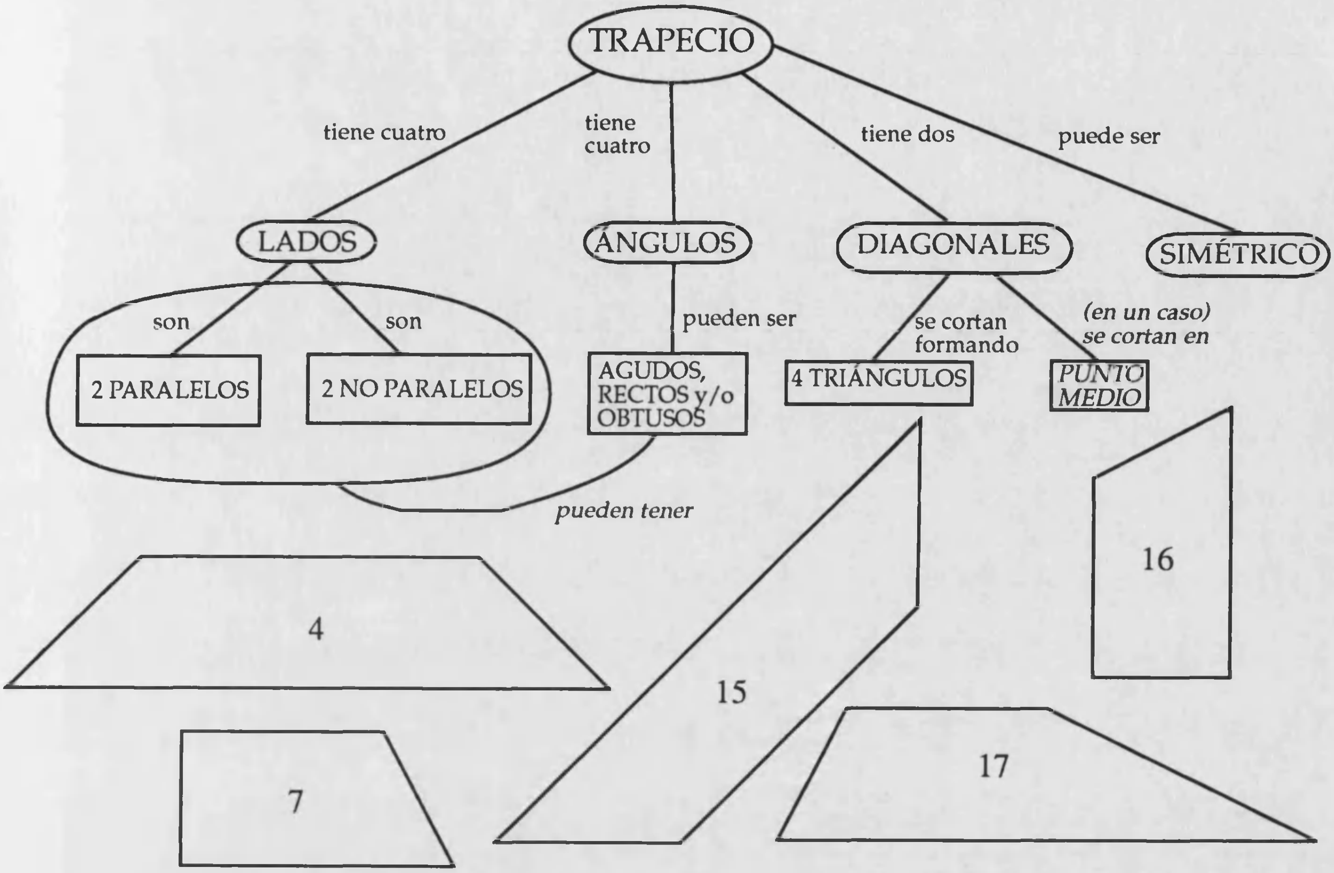
MAPA CONCEPTUAL DEL ROMBO A42



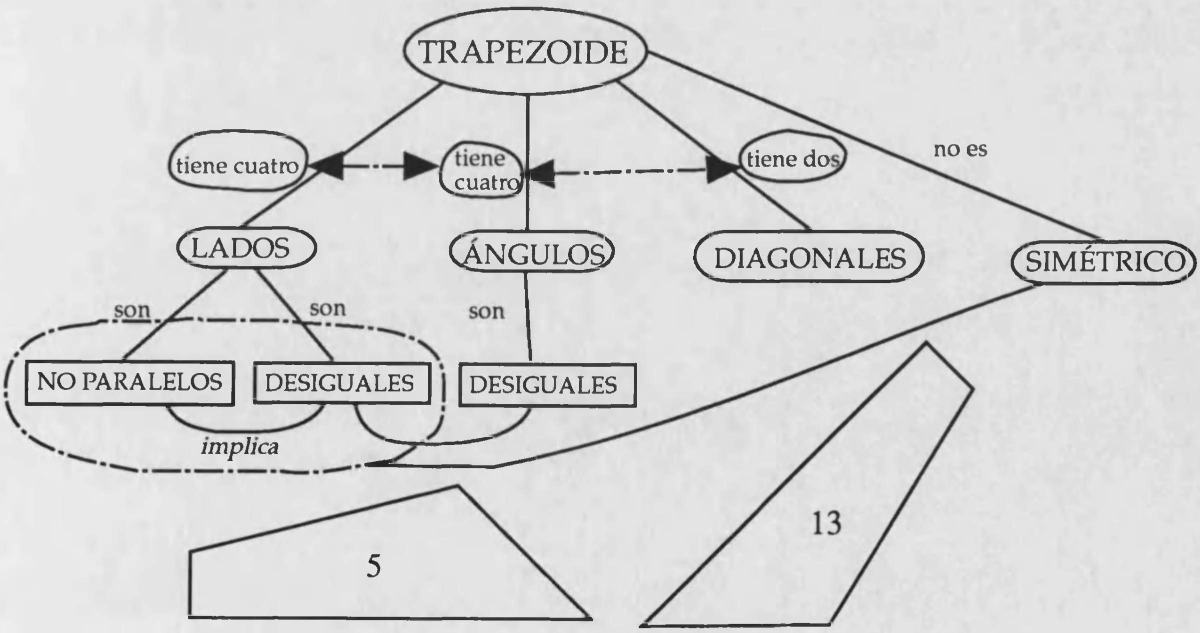
MAPA CONCEPTUAL DEL ROMBOIDE A52



MAPA CONCEPTUAL DEL TRAPECIO A62

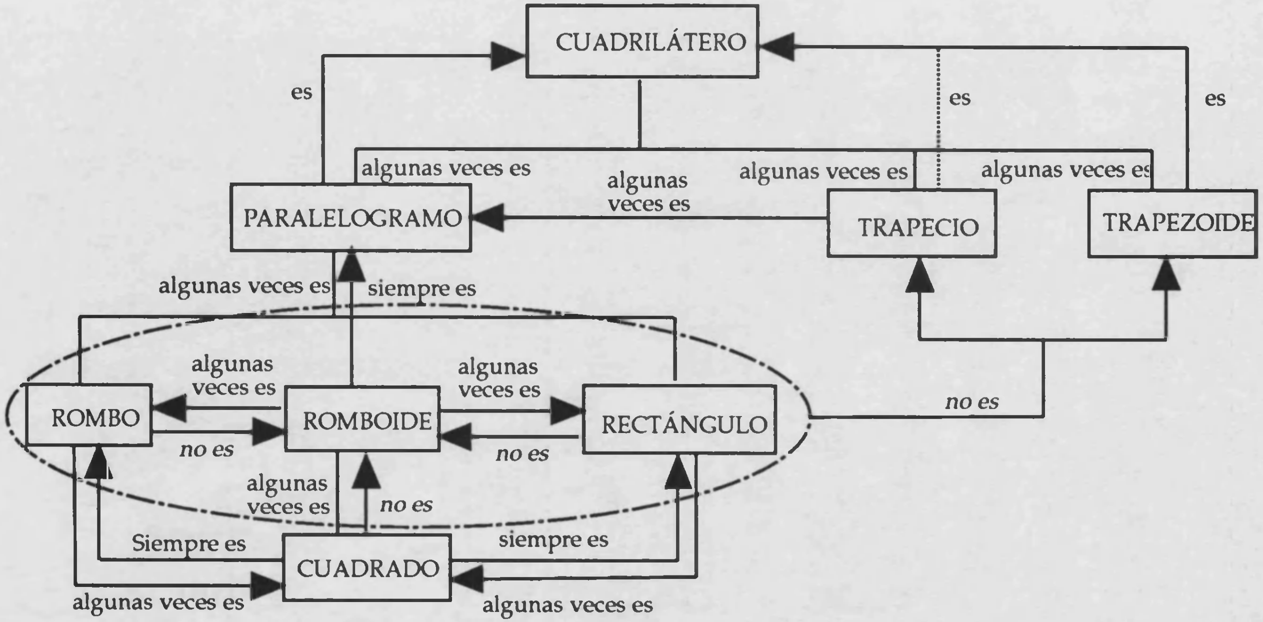


MAPA CONCEPTUAL DEL TRAPEZOIDE A72



MAPA DE RELACIONES A82

(Se muestra en él las relaciones entre dos niveles jerárquicos consecutivos)

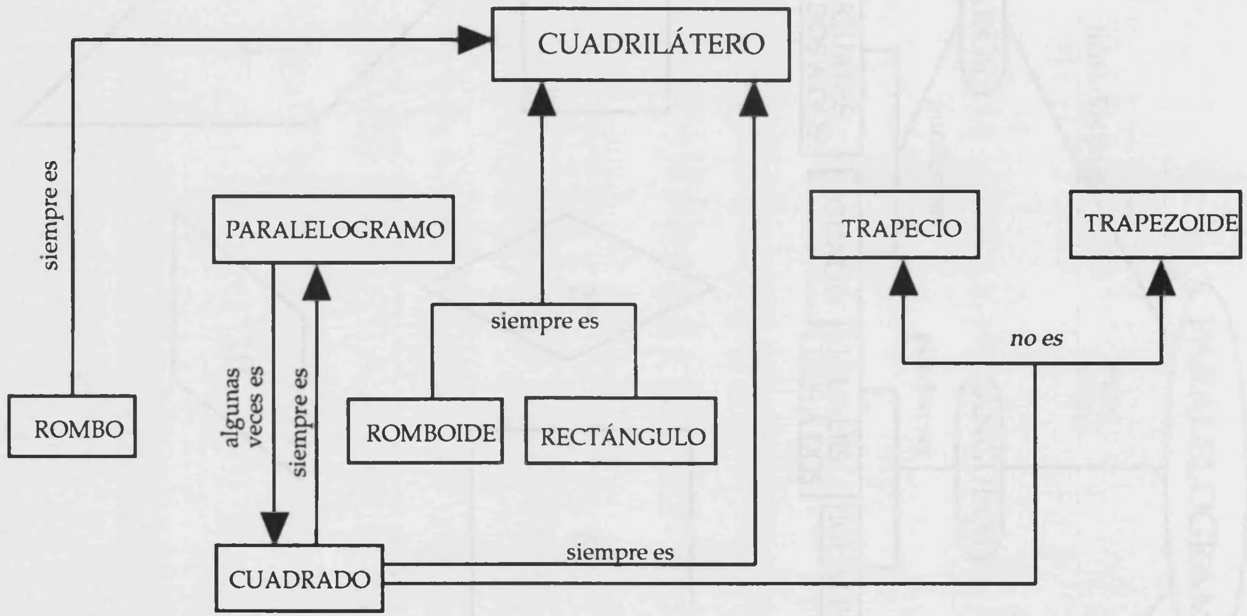


DEFINICIONES :

PARALELOGRAMO: Cuadriláteroque tiene sus lados paralelos dos a dos.
TRAPECIO: Cuadrilátero que tiene dos lados paralelos y los otros no.
TAPEZOIDE: Un *cuadrilátero* sin ningún par de lados paralelos.
ROMBOIDE: Cuadrilátero que tiene los lados y ángulos iguales 2 a 2.
ROMBO: Cuadrilátero con los 4 lados iguales y ángulos iguales dos a dos.
RECTÁNGULO: Cuadrilátero con los lados paralelos e iguales 2 a 2 y cuatro ángulos rectos.
CUADRADO: Cuadrilátero que posee cuatro lados iguales y 4 ángulos rectos.

MAPA DE RELACIONES A92

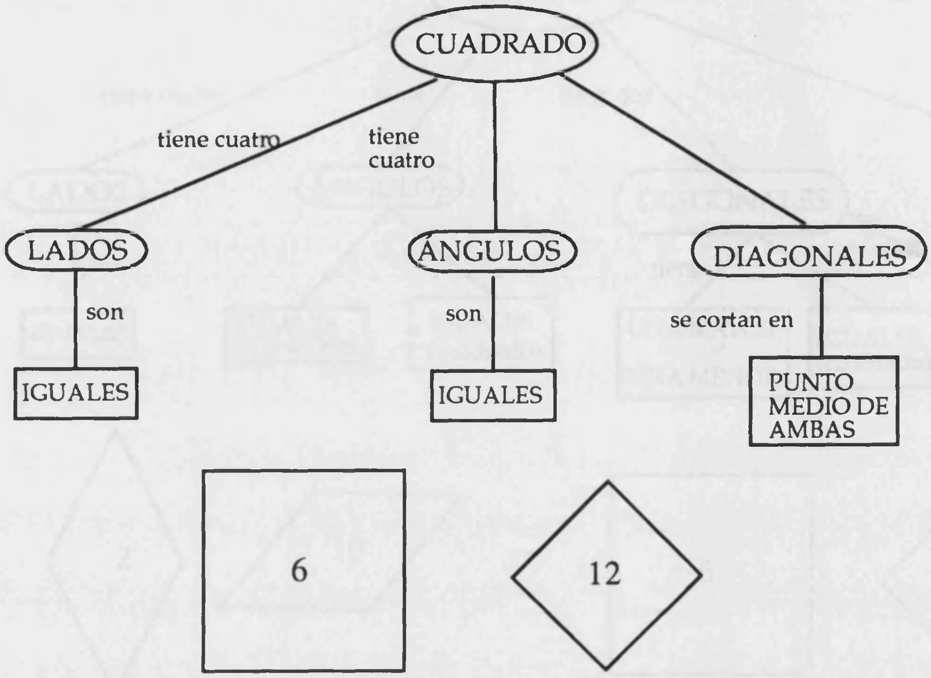
(Muestra las relaciones entre niveles jerárquicos no cosecutivos)



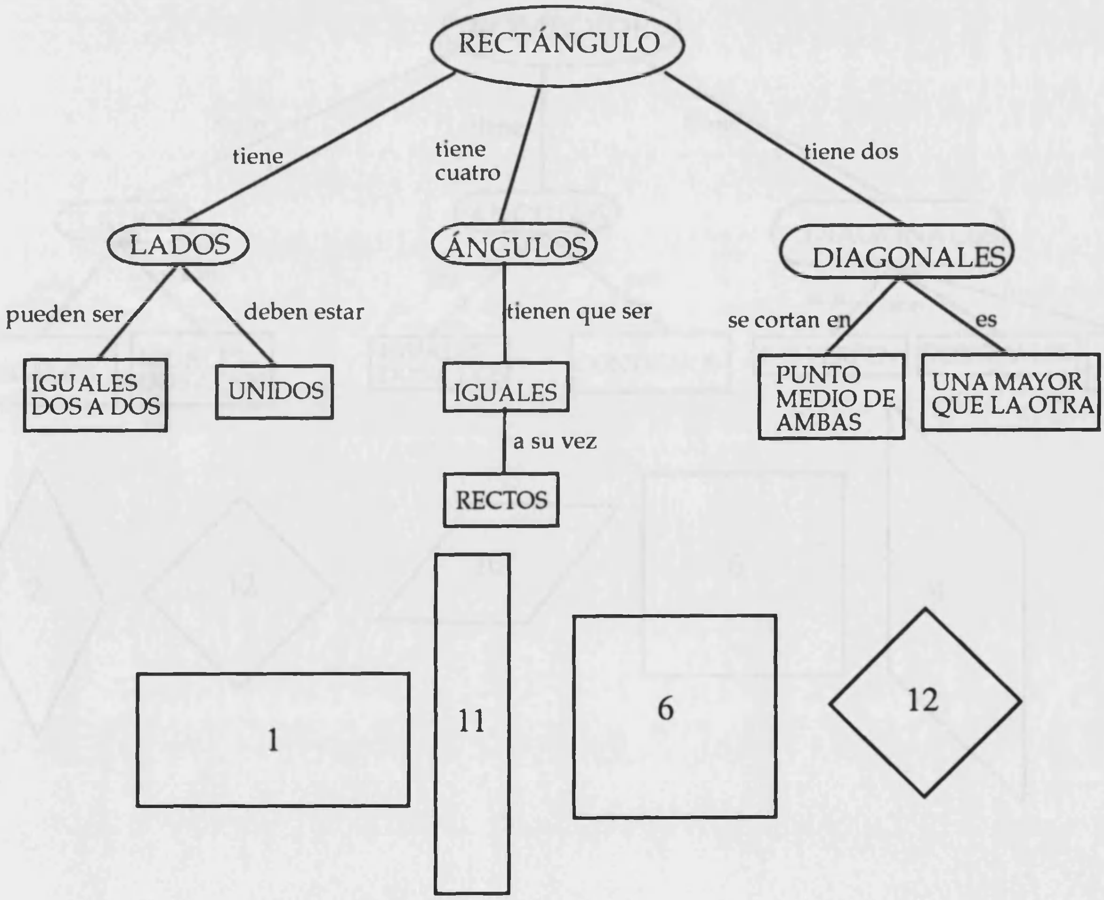
DEFINICIONES :

PARALELOGRAMO: Cuadriláteroque tiene sus lados paralelos dos a dos.
TRAPECIO: Cuadrilátero que tiene dos lados paralelos y los otros no.
TAPEZOIDE: Un *cuadrilátero* sin ningún par de lados paralelos.
ROMBOIDE: Cuadrilátero que tiene los lados y ángulos iguales 2 a 2.
ROMBO: Cuadrilátero con los 4 lados iguales y ángulos iguales dos a dos.
RECTÁNGULO: Cuadrilátero con los lados paralelos e iguales 2 a 2 y cuatro ángulos rectos.
CUADRADO: Cuadrilátero que posee cuatro lados iguales y 4 ángulos rectos.

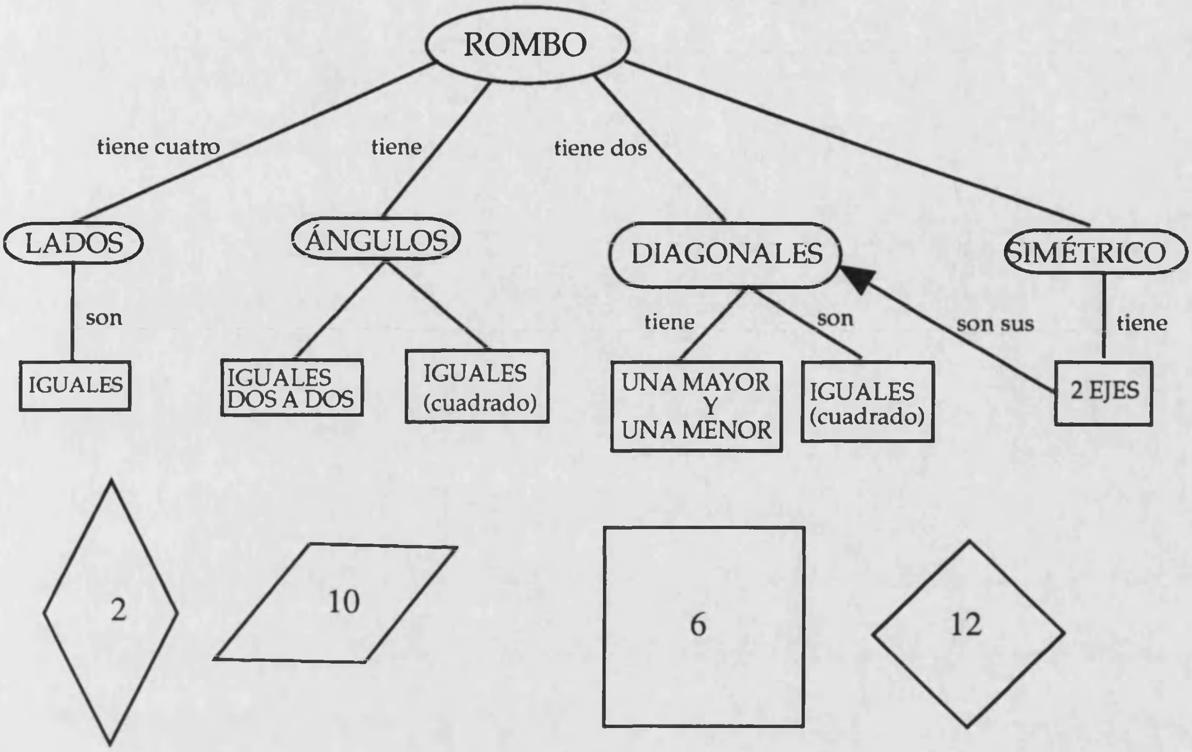
MAPA CONCEPTUAL DEL CUADRADO L21



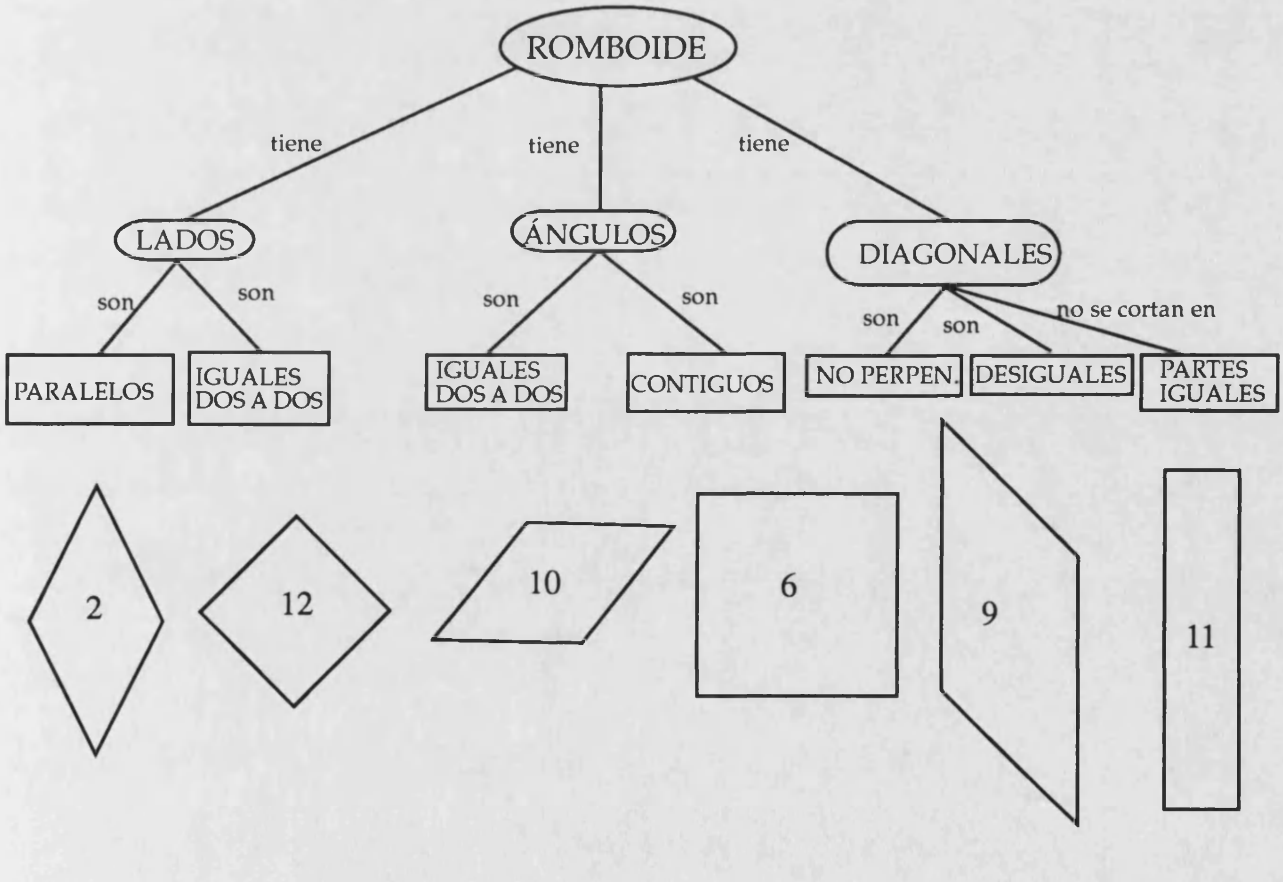
MAPA CONCEPTUAL DEL RECTÁNGULO L31



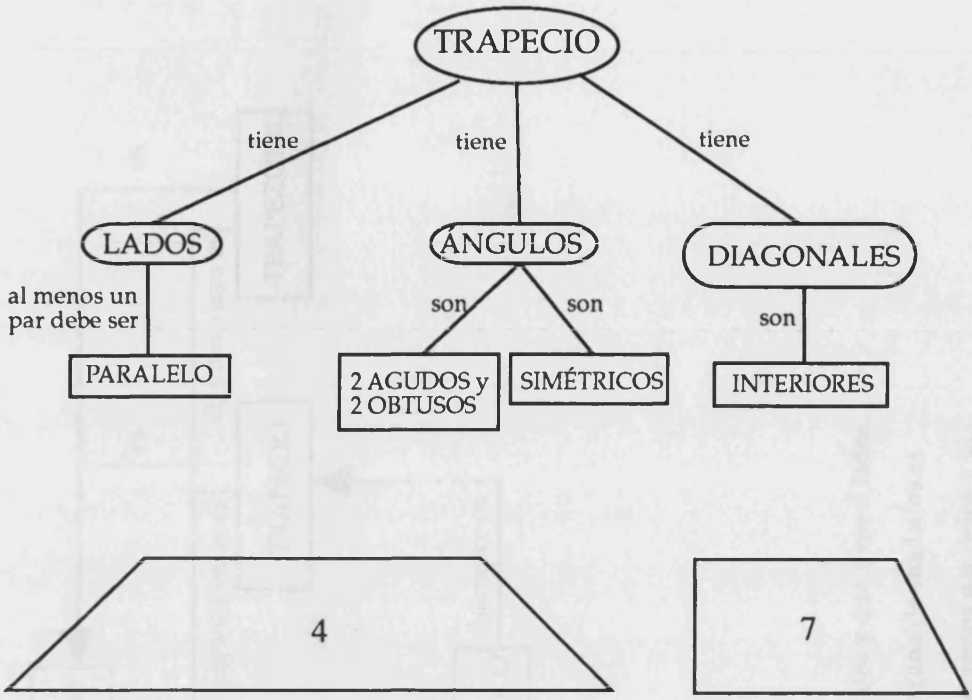
MAPA CONCEPTUAL DEL ROMBO L41



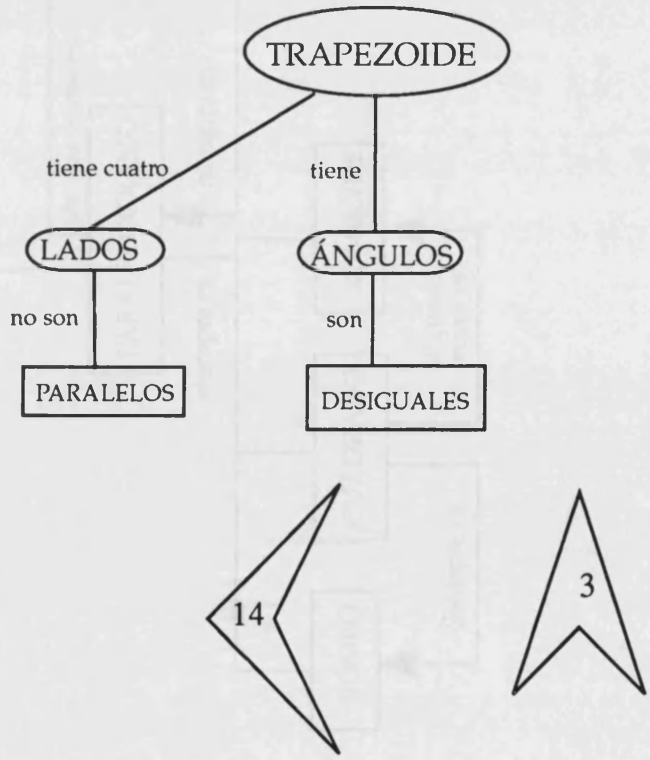
MAPA CONCEPTUAL DEL ROMBOIDE L51



MAPA CONCEPTUAL DEL TRAPECIO L61

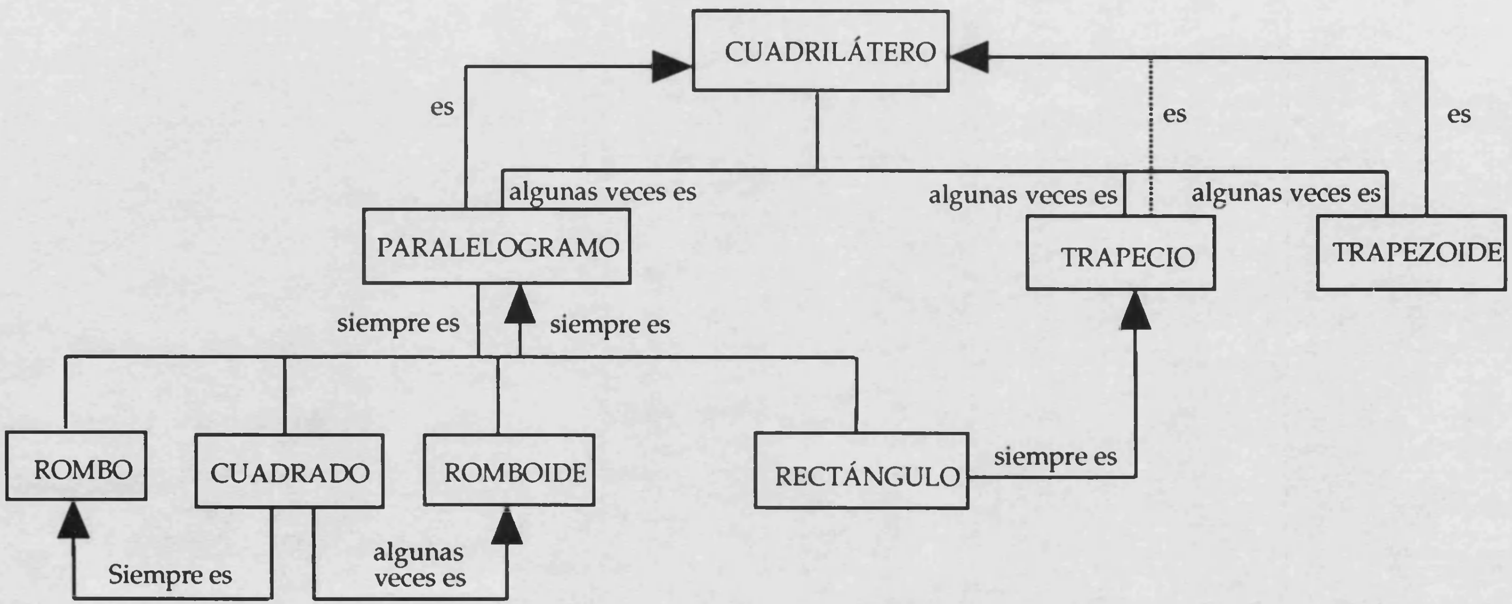


MAPA CONCEPTUAL DEL TRAPEZOIDE L71



MAPA DE RELACIONES L81

(Se muestra en él las relaciones entre dos niveles jerárquicos consecutivos)

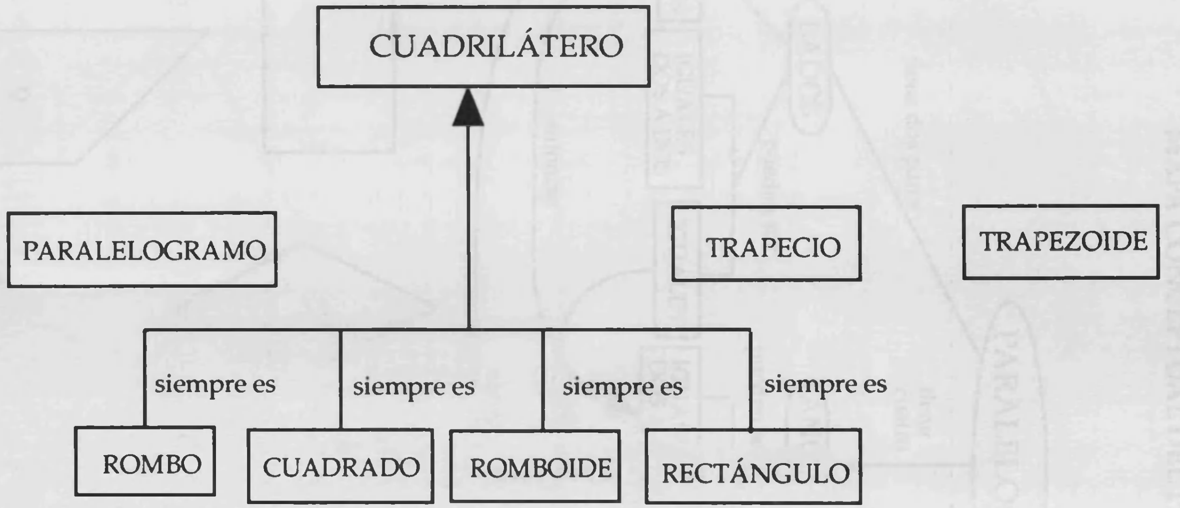


DEFINICIONES :

PARALELOGRAMO:Aquel en el que sus lados son paralelos dos a dos y que tiene 4 lados.
TRAPECIO: Cuadrilátero con sólo dos lados paralelos.
TAPEZOIDE: Un cuadrilátero con lados y ángulos desiguales y ninguno de sus lados es paralelo.
ROMBOIDE: Cuadrilátero que tiene suss lados iguales dos a dos, opuestos paralelos y sus ángulos iguales 2 a 2, contiguos.
ROMBO: Cuadrilátero con los 4 lados iguales y con ángulos iguales dos a dos.
RECTÁNGULO: Aquel que tiene sus lados iguales dos a dos y los cuatro ángulos rectos.
CUADRADO: Aquella figura que tiene cuatro lados iguales y sus ángulos también son iguales.

MAPA DE RELACIONES L91

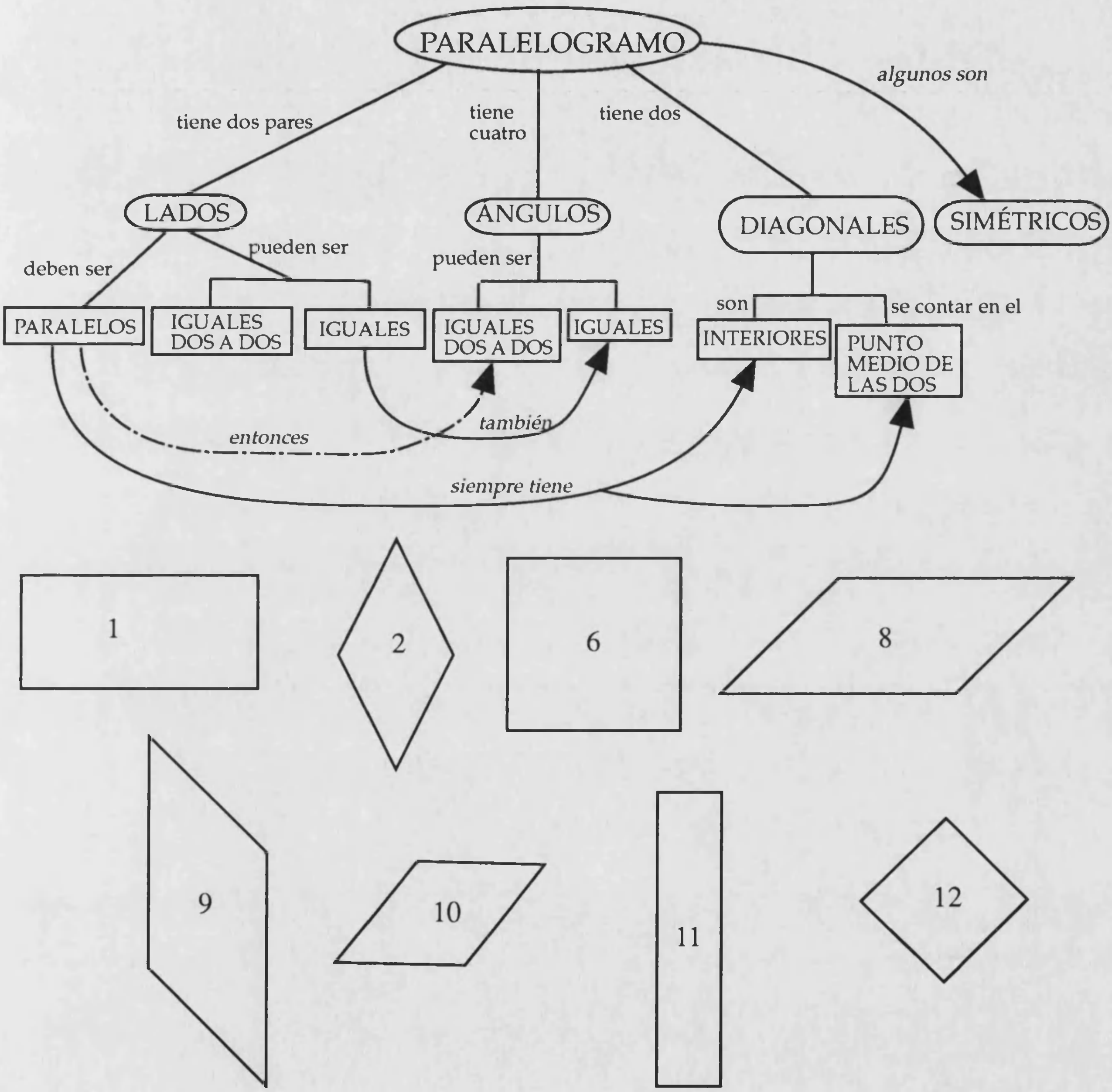
(Muestra las relaciones entre niveles jerárquicos no cosecutivos)



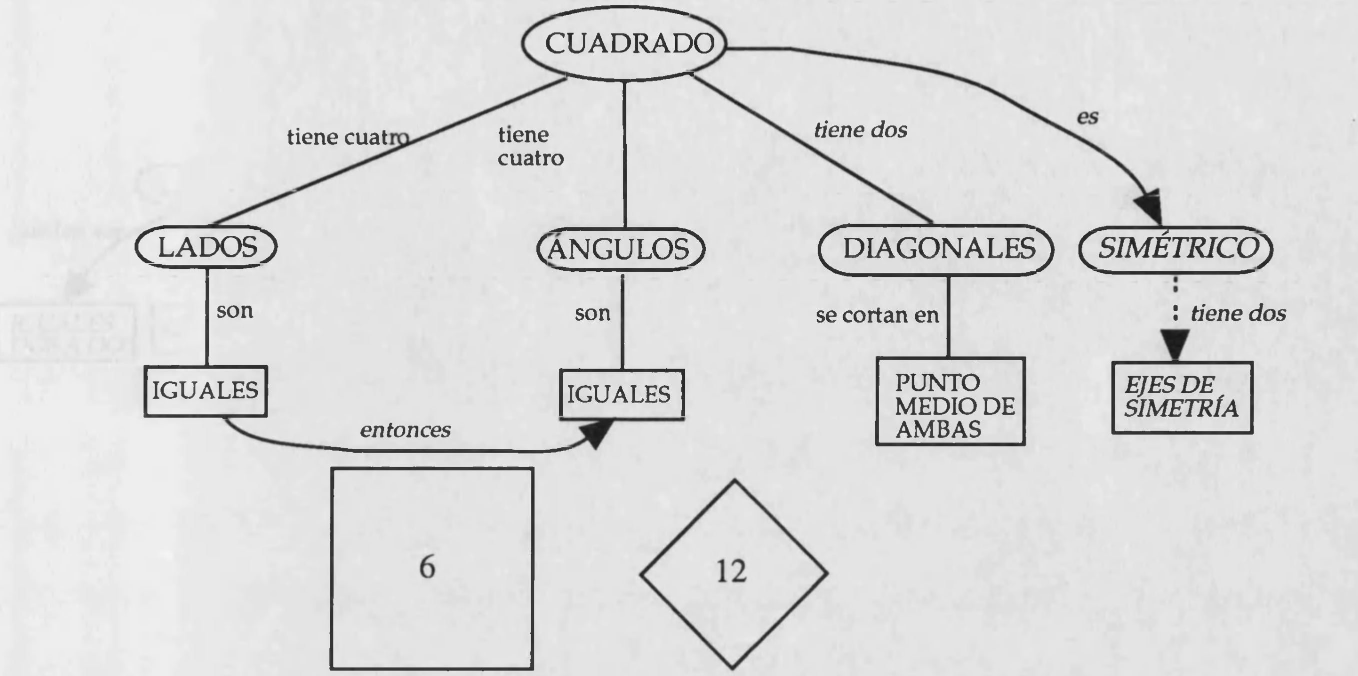
DEFINICIONES :

PARALELOGRAMO:Aquel en el que sus lados son paralelos dos a dos y que tiene 4 lados.
TRAPECIO: Cuadrilátero con sólo dos lados paralelos.
TAPEZOIDE: Un cuadrilátero con lados y ángulos desiguales y ninguno de sus lados es paralelo.
ROMBOIDE: Cuadrilátero que tiene suss lados iguales dos a dos, opuestos paralelos y sus ángulos iguales 2 a 2, contiguos.
ROMBO: Cuadrilátero con los 4 lados iguales y con ángulos iguales dos a dos.
RECTÁNGULO: Aquel que tiene sus lados iguales dos a dos y los cuatro ángulos rectos.
CUADRADO: Aquella figura que tiene cuatro lados iguales y sus ángulos también son iguales.

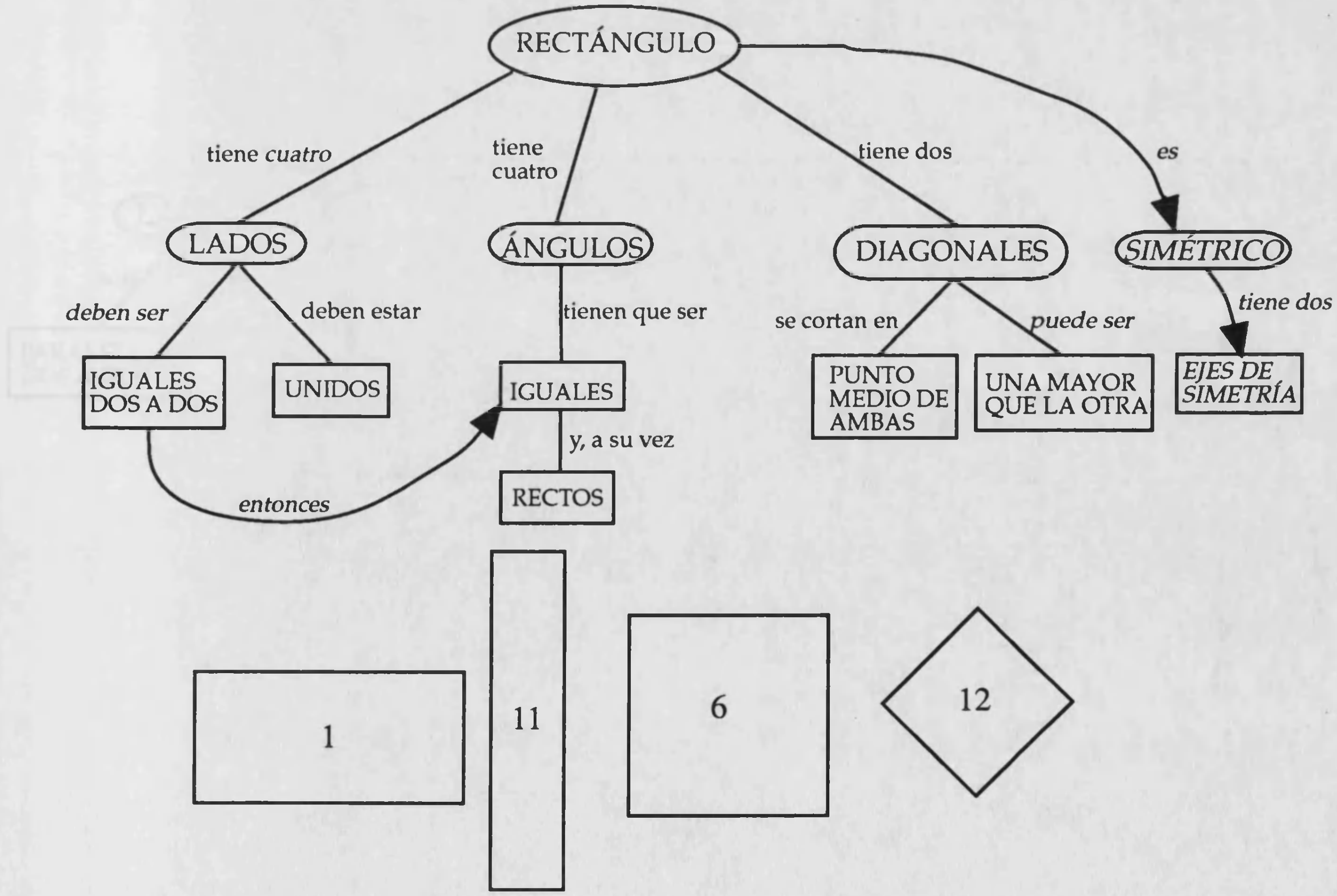
MAPA CONCEPTUAL DEL PARALELOGRAMO L12



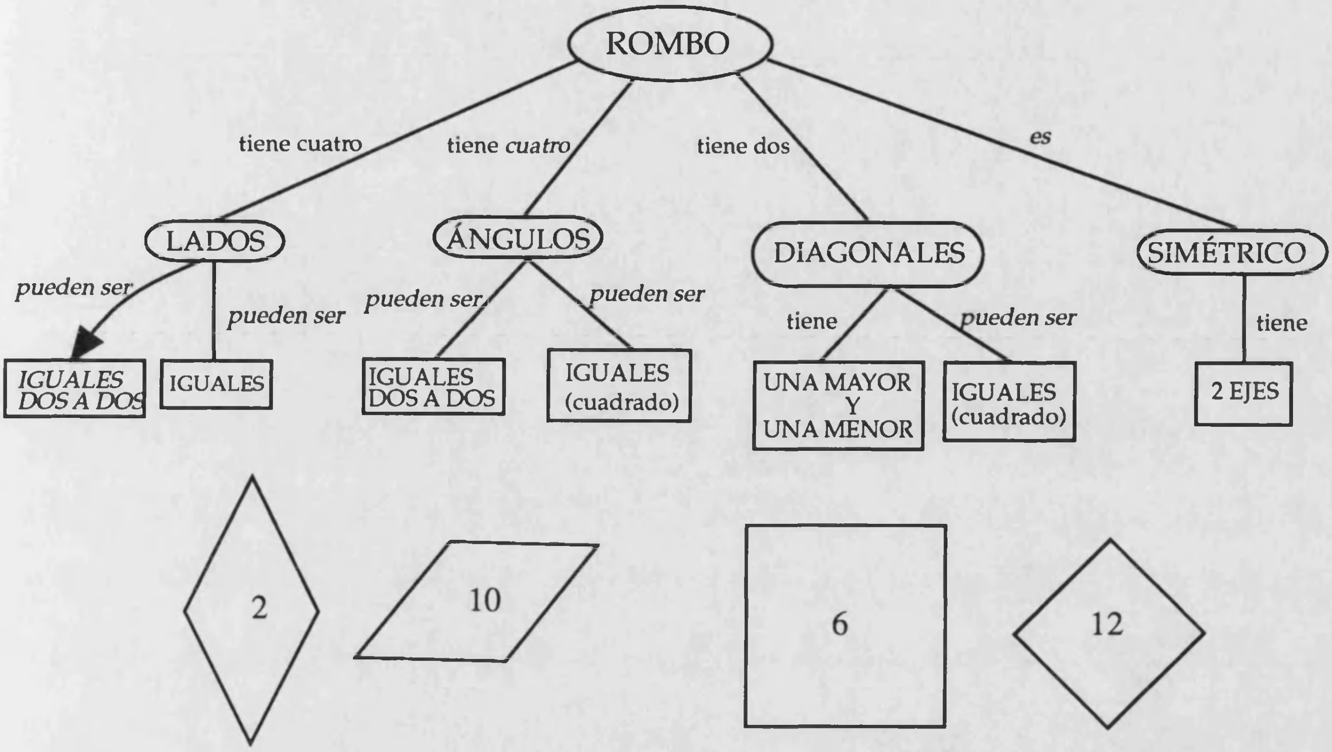
MAPA CONCEPTUAL DEL CUADRADO L22



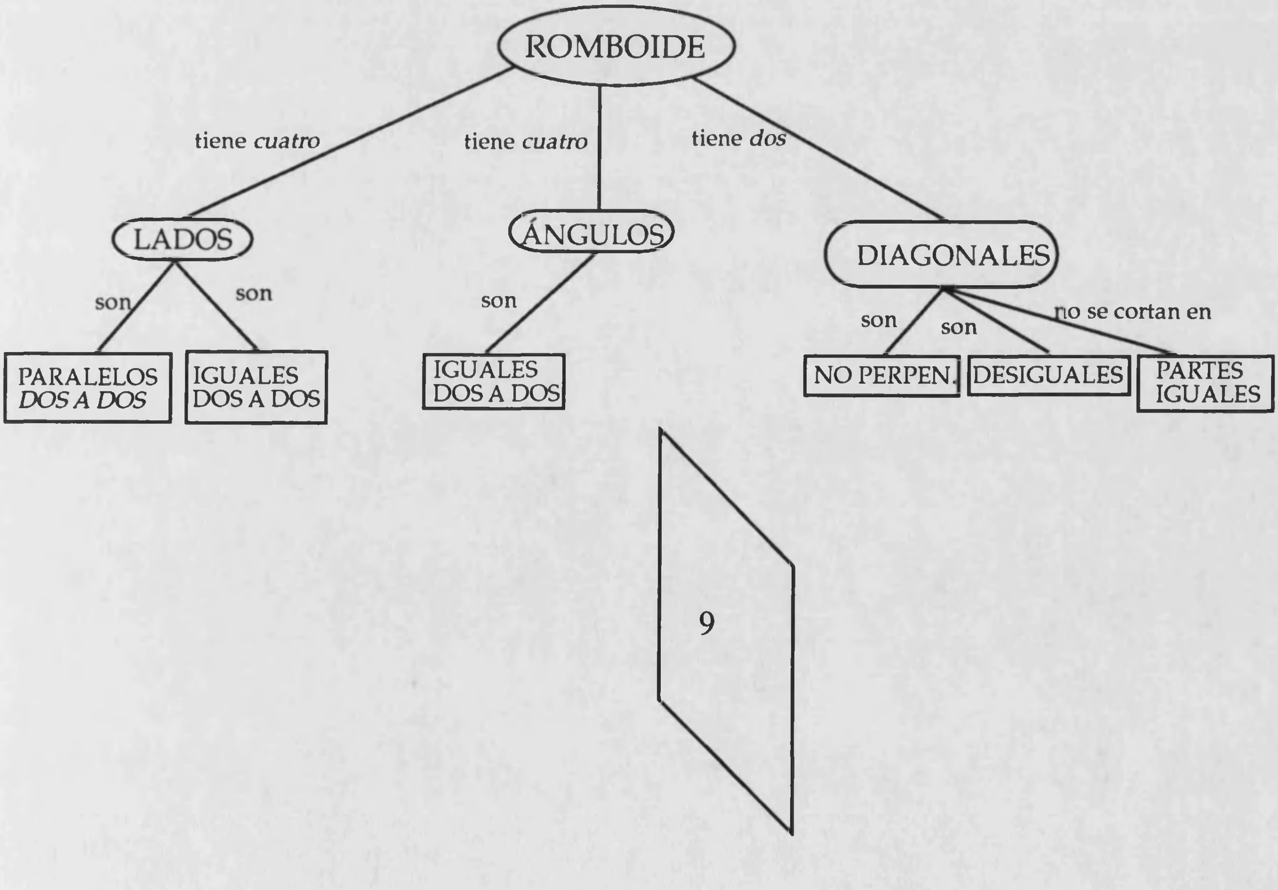
MAPA CONCEPTUAL DEL RECTÁNGULO L32



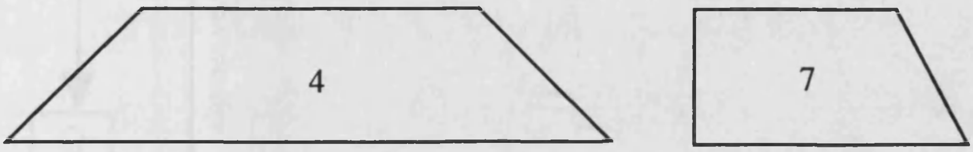
MAPA CONCEPTUAL DEL ROMBO L42



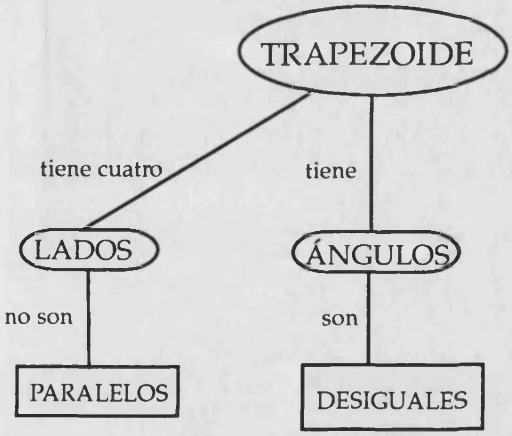
MAPA CONCEPTUAL DEL ROMBOIDE L52

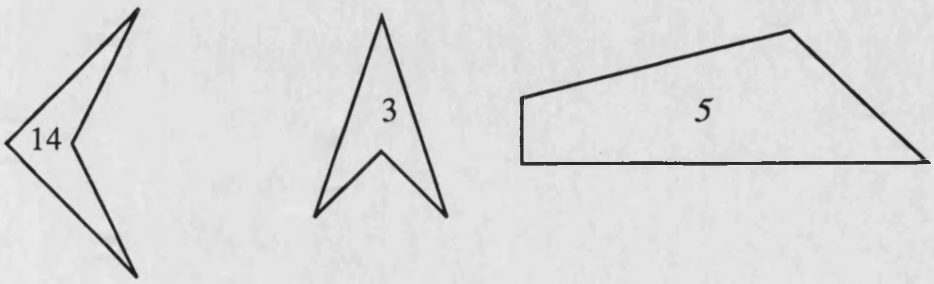


MAPA CONCEPTUAL DEL TRAPECIO L61



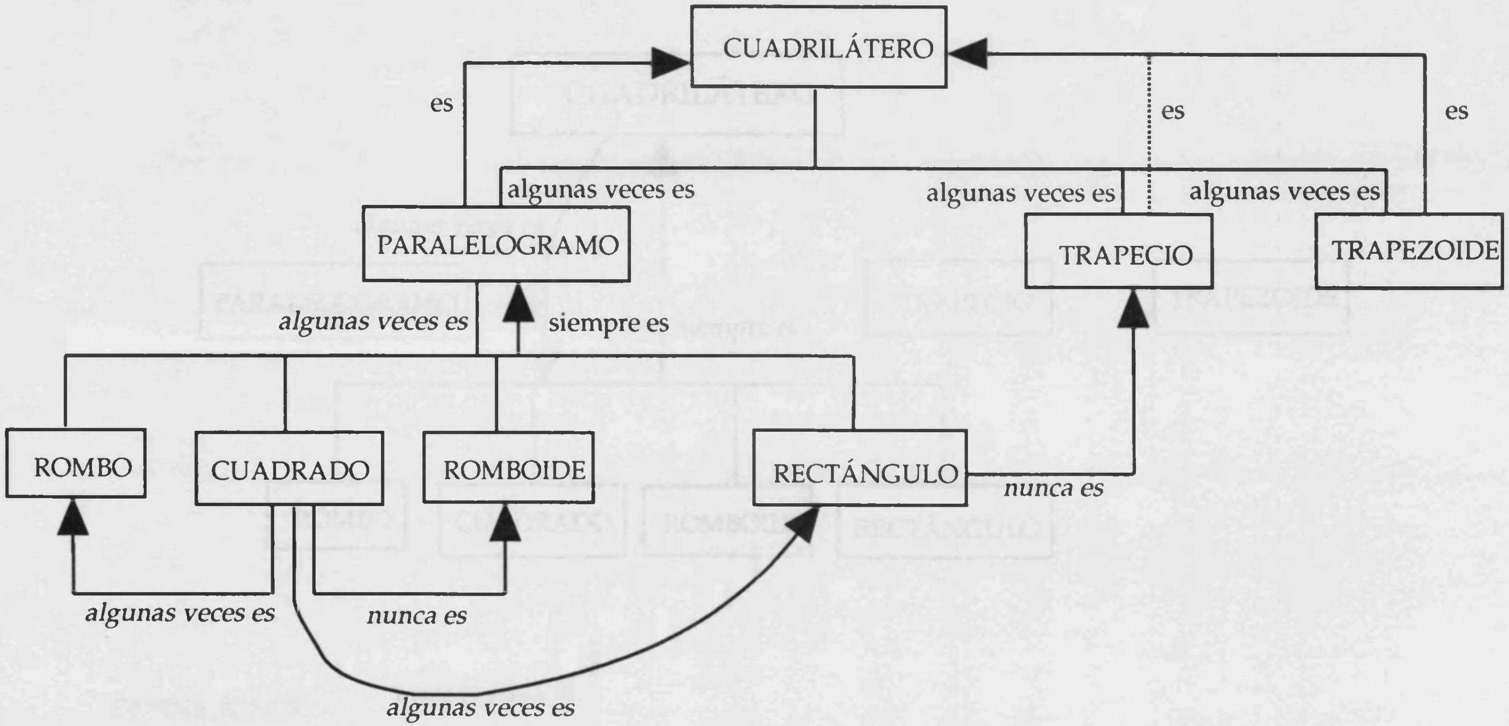
MAPA CONCEPTUAL DEL TRAPEZOIDE L72





MAPA DE RELACIONES L82

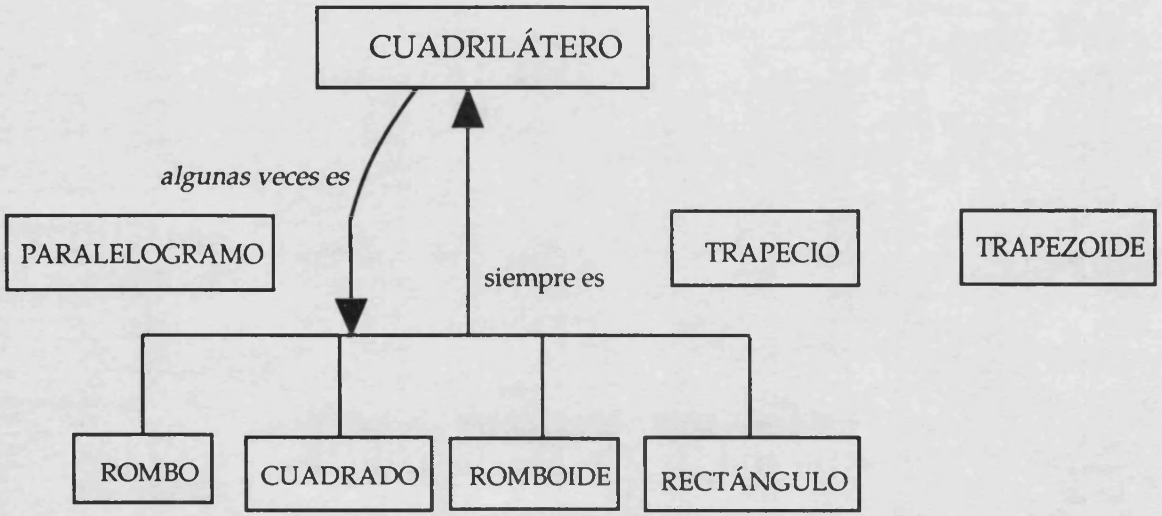
(Se muestra en él las relaciones entre dos niveles jerárquicos consecutivos)



DEFINICIONES :

PARALELOGRAMO:Aquel en el que sus lados son paralelos dos a dos y que tiene 4 lados *y 4 ángulos.*
TRAPECIO: Cuadrilátero con sólo dos lados paralelos.
TAPEZOIDE: Un cuadrilátero con lados y ángulos desiguales y ninguno de sus lados es paralelo.
ROMBOIDE: Cuadrilátero que tiene sus lados iguales dos a dos, opuestos paralelos y sus ángulos iguales 2 a 2.
ROMBO: Cuadrilátero con los 4 lados iguales y con ángulos iguales dos a dos.
RECTÁNGULO: Aquel que tiene sus lados iguales dos a dos y los cuatro ángulos rectos.
CUADRADO: Aquella figura que tiene cuatro lados iguales y sus ángulos también son iguales.

MAPA DE RELACIONES L92
(Muestra las relaciones entre niveles jerárquicos no cosecutivos)



DEFINICIONES :

PARALELOGRAMO:Aquel en el que sus lados son paralelos dos a dos y que tiene 4 lados *y 4 ángulos.*
TRAPECIO: Cuadrilátero con sólo dos lados paralelos.
TAPEZOIDE: Un cuadrilátero con lados y ángulos desiguales y ninguno de sus lados es paralelo.
ROMBOIDE: Cuadrilátero que tiene sus lados iguales dos a dos, opuestos paralelos y sus ángulos iguales 2 a 2.
ROMBO: Cuadrilátero con los 4 lados iguales y con ángulos iguales dos a dos.
RECTÁNGULO: Aquel que tiene sus lados iguales dos a dos y los cuatro ángulos rectos.
CUADRADO: Aquella figura que tiene cuatro lados iguales y sus ángulos también son iguales.

UNIVERSIDAD DE VALENCIA FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Reunido el Tribunal que suscribe, en el día de la fecha, acordó otorgar, por unanimidad, a esta Tesis doctoral de D. MANUEL PEDRO HUERTA PALAU la calificación de APTO CUM LAUDE

Valencia, a 24 de julio de 1997

El Secretario,

El Presidente

Fdo. Adolfo Jaime Pastor

Fdo. LUIS PUIG