T.D
96

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

FACULTAD DE MATEMATICAS

DEPARTAMENTO DE ANALISIS MATEMATICO

CONMUTATIVIDAD ENTRE LIMITES INDUCTIVOS Y PRODUCTOS TENSORIALES

Memoria presentada para optar
al Grado de Doctor en Ciencias
Matemáticas por

ANTONIO GALBIS VERDU

BIBLIOTECA FACULTAT VALÈNCIA CIÈNCIES MATEMÀTIQUES

UMI Number: U607793

All rights reserved

INFORMATION TO ALL USERS
The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted.

In the unlikely event that the author did not send a complete manuscript
and there are missing pages, these will be noted. Also, if material had to be removed,
a note will indicate the deletion.

UMI U607793
Published by ProQuest LLC 2014. Copyright in the Dissertation held by the Author.
Microform Edition © ProQuest LLC.
All rights reserved. This work is protected against
unauthorized copying under Title 17, United States Code.

ProQuest LLC
789 East Eisenhower Parkway
P.O. Box 1346
Ann Arbor, MI 48106-1346

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
FACULTAT DE CIÈNCIES MATEMÀTIQUES
BIBLIOTECA
Núm. Registre 4080
SIGNATURA T.D/96
C. D. U. 517.93(043)
i18954911
b16765722

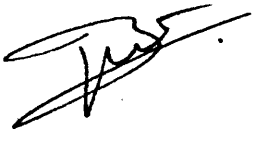
JOSE BONET SOLVES, Catedrático del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia,

CERTIFICA:

Que la presente Memoria "Conmutatividad entre límites inductivos y productos tensoriales", ha sido realizada bajo mi dirección por Antonio Galbis y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, presento ante la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universitad de Valencia la referida tesis doctoral, firmando el presente certificado.

Valencia, 16 de Febrero de 1988



Fdo. José Bonet Solves.

Mi más sincero agradecimiento al Profesor Dr. José Bonet por el interés con que ha dirigido este trabajo.

NOTACION

La notación sobre teoria general de espacios localmente convexos es estardard y se remite a los libros de G.Köthe [1] y P.Pérez Carreras -J.Bonet [1].

En lo referente a limites inductivos ponderados de espacios de funciones o sucesiones se sigue la notación de Bierstedt-Meise-Summers [1] y [2]. Véanse las definiciones correspondientes en las pág. 65-66-78 de esta memoria.

Solo una advertencia: la envoltura absolutamente convexa de un conjunto A de un espacio localmente convexo la denotamos por acx(A), salvo en el capitulo 4 donde la notación empleada es $\Gamma(A)$.

INTRODUCCION

El problema general al que está dedicado la memoria es el siguiente: determinar condiciones bajo las cuales $E \otimes_\alpha (\text{ind}F_n) = \text{ind}(E \otimes_\alpha F_n)$ topológicamente ($\alpha = \varepsilon$ ó π) o bien $E \varepsilon (\text{ind}F_n) = \text{ind}(E \varepsilon F_n)$ algebraicamente (E y F_n espacios localmente convexos). Bonet [6] prueba que si $F := \text{ind}F_n$ es un (LB) regular y E es un espacio de Fréchet entonces entonces se da la igualdad topológica $E \otimes_\pi (\text{ind}F_n) = \text{ind}(E \otimes_\pi F_n)$ si y solo si toda aplicación lineal y continua de E en F'_b es acotada (es decir transforma algún 0-entorno en E en un conjunto acotado de F'_b). Este es el motivo por el cual dedicamos un primer capítulo al estudio de la identidad $L(E,F) = LB(E,F)$.

En el capítulo 2 caracterizamos los espacios de Fréchet E tales que $E \otimes_\pi (\text{ind}F_n) = \text{ind}(E \otimes_\pi F_n)$ para cualquier límite inductivo $\text{ind}F_n$ que cumpla F_n denso en F_{n+1} ($n \in N$) y obtenemos algunos resultados parciales sobre conmutatividad cuando $\alpha = \varepsilon$ si E es una coyección, $\text{ind}F_n$ admite partición local de la unidad y cada F_n es denso en F_{n+1}. También estudiamos en este capítulo la identidad algebraica $E \varepsilon (\text{ind}F_n) = \text{ind}(E \varepsilon F_n)$.

En el capítulo tercero quedan completamente caracterizados los espacios de Fréchet E tales que $\vartheta_0 C(X,E)$ es un subespacio topológico de $\overline{CV}_0(X,E)$ (o lo que es lo mismo (Bonet [4]) $\text{ind}(C(v_n)_0(X) \otimes \varepsilon E) \cong (\text{ind}C(v_n)_0) \otimes \varepsilon E)$ para cualquier sucesión $\vartheta = (v_n)$ decreciente de pesos continuos estrictamente positivos en cualquier espacio topológico localmente compacto y σ-compacto X.

Dados un espacio topológico localmente compacto y σ-compacto X se extiende Bonet [6] para caracterizar los pares (ϑ, E)

($\mathring{v}$ sucesión decreciente de pesos continuo y positivos en X y E espacio de Fréchet) tales que $\mathring{v}_0 C(X,E)$ es un subespacio topológico de $C\overline{V}_0(X,E)$. Aquí interviene una condición de Vogt [1]

Finalmente, en el capítulo 4 se prosigue el estudio de condiciones de densidad duales (véase Bierstedt-Bonet [1,2]) en espacio co-escalonados con valores en un (DF). Este último capítulo contiene un apéndice en el que se muestra como se puede modificar la construcción de Taskinen en [1] para probar que $E'_b \hat{\otimes}_\varepsilon F'_b$ no es necesariamente (gDF) (E,F espacios de Fréchet).

Para más detalles se puede leer la introducción que figura al principio de cada capítulo.

INDICE

CAPITULO [1] "Sobre la identidad L(E,F)=LB(E,F)". pág.1

CAPITULO [2] "Conmutatividad entre límites inductivos y productos tensoriales". pág. 39

CAPITULO [3] "Descripciones proyectivas de espacios de sucesiones y funciones con valores en un espacio de Fréchet". pág. 68

CAPITULO [4] "Espacios co-escalonados con valores en un (DF)". pág. 96

CAPITULO 1

SOBRE LA IDENTIDAD L(E,F)=LB(E,F)

INTRODUCCION

En este capitulo vamos a estudiar pares de espacios (E,F) tales que toda aplicacion lineal y continua de E en F es acotada, en el sentido de que manda un entorno de 0 en E en un conjunto acotado de F.

Denotaremos por L(E,F) (resp. LB(E,F)) el espacio vectorial de las aplicaciones lineales y continuas (resp. acotadas) de E en F. Siguiendo a Defant-Floret decimos que un par (E,F) de espacios localmente convexos cumple la propiedad de localización si para cada equicontinuo H en L(E,F) existe U entorno de 0 en E tal que $H(U):=\bigcup(T(U):T\in H)$ es acotado en F (es decir, H es equiacotado).

El interés en estas cuestiones parte de los resultados de Grothendieck [2] , que aseguran que si E es un (DF) y F es Fréchet o si E es Fréchet y F es (DF), entonces el par (E,F) tiene la propiedad de localización. Estos resultados fueron de importancia, por ejemplo, en el estudio de los productos tensoriales proyectivos de espacios (DF).

Diversos autores proporcionaron extensiones de los resultados de Grothendieck (ver v.g. Ruess [1], Defant-Floret [1], S.Dierolf [1]) reemplazando las condiciones Fréchet y (DF) por otras más

BIBLIOTECA FACULTAT VALÈNCIA CIÈNCIES MATEMÀTIQUES

generales, como existencia de sucesión fundamental de conjuntos acotados, condición de acotados de Mackey o propiedad numerable de entornos. Se tiene el siguiente resultado:

TEOREMA. Cada uno de los siguientes pares (E,F) tiene la propiedad de localización:

(i) E ó F son normados

(ii) F es metrizable y E cumple la c.n.p.(=propiedad numerable de entornos, i.e., $\forall(p_n)$ seminormas continuas en E $\exists\,\lambda_n>0$, p seminorma continua en E tales que $p_n\leq \lambda_n p$, $n\in N$)

(iii) E es (DF) casi-tonelado y F cumple la c.a.M.(= condición de acotados de MACKEY, i.e., $\forall\ (B_n)$, B_n acotado en E, $\exists\,\lambda_n>0$, $n\in N$, tales que $\cup\lambda_n B_n$ es acotado)

(iiii) E es metrizable y F admite sucesión fundamental de acotados.

Debe observarse que en estas extensiones no se considera en ningún momento el caso "simétrico". Es decir, cuando E y F son ambos Fréchet o (DF). El problema de caracterizar los pares de espacios de Fréchet (E,F) tales que $L(E,F)=LB(E,F)$ o, equivalentemente, que todo equicontinuo es equiacotado, fue resuelto por Vogt [1]. Posteriormente Bonet [5] y Terzioglu [1] complementaron los resultados de Vogt, analizando, en primer lugar, hasta que punto los resultados mencionados antes son óptimos y, en segundo lugar, la incidencia en este problema de las clases de espacios de Fréchet que han venido interesando a

diversos autores: las coyecciones y los espacios que no cumplen la propiedad (*) de Bellenot y Dubinsky [1]. Véanse los articulos de Dierolf-Zarnadze [1], Moscatelli [1], Dierolf-Moscatelli [1], Bonet [2], Vogt [2], Behrends, Dierolf y Harmand [1].

El presente capitulo tiene tres secciones. La idea es ir de los resultados más generales y abstractos a situaciones más concretas.

La reiterada aparición de las coyecciones, los espacios de Fréchet sin la propiedad (*) de Bellenot y Dubinsky y los espacios localmente convexos con la propiedad numerable de entornos cuando se analizan cuestiones de optimalidad en la relación L(E,F)=LB(E,F) nos ha llevado a la introducción de dos clases de espacios que serán relevantes también en el siguiente capitulo. La primera de ellas (la clase (A) o espacios con la propiedad (A)) es una clase con "buena" estabilidad y que contiene a los espacios con la propiedad numerable de entornos y las coyecciones (incluso a los espacios con la condición de apertura de Nachbin [1]). La segunda, más amplia, denotada por (BD)', contiene también los espacios con la propiedad (BD) de Terzioglu [1] y en particular los espacios de Fréchet sin la propiedad (*).

Caracterizamos la clase (A) en términos de la identidad L(E,F)=LB(E,F) (proposición 1.1.4). Vemos la coincidencia de (A) y (BD)' si el espacio tiene la propiedad de aproximación acotada (proposición 1.1.5) y reformamos un ejemplo de Floret [1] para

obtener una coyección G con un subespacio denso propio F (que por tanto satisfacerá (BD)') que admite normas continuas pero no es normable.

En la sección 2 extendemos y complementamos el estudio abstracto de Bonet en [5] para considerar hasta qué punto ciertas condiciones en la identidad $L(E,F)=LB(E,F)$ son necesarias y suficientes. Los resultados más dignos de mención son las proposiciones 1.2.2 y 1.2.3

En la sección 3. añadimos al estudio de Vogt en [1] algunos nuevos resultados. Si E es un espacio de Fréchet nuclear se caracteriza completamente cuando $L(\lambda^p(A),E)=LB(\lambda^p(A),E), 1<p\leq\infty$, o cuando $L(E,\lambda^p(A))=LB(E,\lambda^p(A))$, $1<p\leq\infty$,(Prop. 1.3.1.1. y 1.3.1.3) También se caracterizan los pares de espacios (DF) (E,F) tales que $L(E,F)=LB(E,F)$. Esta caracterización se aplica a dos situaciones concretas que no pueden deducirse directamente de Vogt. En particular se caracteriza la identidad $L(E,\vartheta_0C(X))=LB(E,\vartheta_0C(X))$ cuando E es un (DF)-casitonelado y $\vartheta_0C(X)$ es un límite inductivo ponderado de funciones continuas para una sucesión decreciente de pesos continuos $\vartheta=(v_n)$ que sea regularmente decreciente (Teorema(1.3.2.3)).

SECCION 1.1

Bellenot y Dubinsky [1] prueban que un espacio de Fréchet separable E admite como cociente un escalonado de Köthe nuclear si y solo si E tiene la propiedad

$$(*)\quad \exists I\ \forall k\ \exists j\ :\ \sup(\|u\|_k^\circ : u \in E_I',\ \|u\|_j^\circ \le 1) = \infty$$

siendo $(\|\cdot\|_k)$ una sucesión fundamental de seminormas continuas y E'_k el espacio de Banach determinado por la norma dual $\|\cdot\|^\circ_k$ en E'.

Nachbin [1], en su estudio de factorización holomorfa, dió la siguiente definición:

Un espacio E satisface la <u>condición de apertura</u> si para cada U 0-entorno en E existe V 0-entorno en E tal que para todo W 0-entorno en E podemos encontrar $\rho>0$: $V \subseteq \rho W + \operatorname{Ker} p_U$, es decir, E/Kerp es normable para cada seminorma continua p en E.

Los espacios de Fréchet con la condición de apertura se llaman coyecciones (Bellenot-Dubinski [1]) y son precisamente los límites sobreyectivos numerables de espacios de Banach (Dineen [1;cap.6]). Las coyecciones han sido consideradas por varios autores (ver v.g. Bellenot-Dubinski [1] , Bonet [2,4,5], Dierolf-Moscatelli [1] , Dineen [1] , Grothendieck [2] , Terzioglu [1] , Vogt [2]).

Terzioglu [1], para tratar cuando toda aplicación lineal y continua entre dos espacios localmente convexos es acotada, considera también la siguiente condición sobre un espacio E :

(BD) : Para cada U 0-entorno en E existe V 0-entorno en E tal que para todo W 0-entorno en E podemos encontrar $\rho>0$ de manera que $W^0 \cap E'_{U^0} \subseteq \rho V^0$.

Si E es un espacio de Fréchet, ésta es la negación de la condición (*). Tomando polares es fácil comprobar que si un espacio satisface la condición de apertura entonces también satisface (BD), pero el recíproco no es verdad:

Behrends, Dierolf y Harmand [1] dieron un ejemplo de espacio de Fréchet no normable que admite normas continuas (luego no puede ser una coyección) y cumple (BD).

Terzioglu [1] diferencia la condición de apertura de la condición (BD) por medio de la identidad L=LB. Más concretamente, prueba las siguientes caracterizaciones:

(1) E satisface la condición de apertura si y solo si L(E,F)=LB(E,F) para cualquier espacio F que admita normas continuas.

(2) Si E satisface (BD) entonces L(E,F)=LB(E,F) para cualquier espacio tonelado F con base de Schauder y normas continuas.

(3) Si E es un espacio de Fréchet y $L(E,\lambda^1(A))=LB(E,\lambda^1(A))$ para todo Köthe nuclear $\lambda^1(A)$, entonces E satisface (BD).

Véase Bonet [5].

La siguiente condición fue implícitamente considerada por Grothendieck [1]:

Se dice que un espacio E tiene la propiedad numerable de entornos (c.n.p.) si para cada sucesión (p_n) de seminormas continuas en E existen $c_n>0$ y p seminorma continua en E tales que $p_n \leq c_n p$, $n\in N$. Todo (gDF) tiene esta propiedad (ver Bonet [3] y Floret [1] para más detalles).

Introducimos ahora una propiedad más general que la condición de apertura y la (c.n.p)

DEFINICION 1.1.1

(A) : Para cualesquiera U 0-entorno en E y (U_n) sucesión de 0-entornos en E existen V 0-entorno en E y $\lambda_n>0$ $(n\in N)$ tales que $V \subseteq \lambda_n U_n + \text{Ker } p_U$, $n\in N$.

Es decir, un espacio E tiene la propiedad (A) si E/Kerp tiene la (c.n.p) para toda seminorma continua p en E.

Tomando polares, la propiedad (A) implica la siguiente extensión natural de la condición (BD):

DEFINICION 1.1.2

(BD)' : Para cualesquiera U 0-entorno en E y (U_n) sucesión de 0-entornos en E existen V 0-entorno en E y $\lambda_n>0$, $n\in N$, tales que $E'_{U^0} \cap U_n^0 \subseteq \lambda_n V^0$, $n\in N$.

Es claro que en espacios metrizables la propiedad (A) (resp. (BD)') es equivalente a la condición de apertura (resp. (BD)).

Más adelante se verá el papel que juega la condición (BD)' en la conmutatividad entre límites inductivos y productos tensoriales.

EJEMPLOS 1.1.3. Los siguientes espacios satisfacen la condición de apertura:

(1) Espacios localmente convexos con su topología débil.

(2) C(X,F) dotado con la topología compacto-abierta, para cada espacio completamente regular X y cada espacio normado F.

(3) $L^p_{loc}(\mu,F)$ para cada medida de Radón positiva μ en un espacio topológico X, cada espacio normado F y $1\leq p\leq\infty$.

(4) $C^m(U,F)$, $1\leq m<\infty$, para cada abierto no vacío U de R^n y cada espacio normado F.

Veamos ahora la relación de la condición (A) con el hecho de que toda aplicación y continua entre dos espacios localmente convexos esté acotada.

PROPOSICION 1.1.4. Son equivalentes:

(a) El par (E,F) tiene la propiedad de localización para todo espacio metrizable F.

(b) $L(E,F)=LB(E,F)$ para todo espacio metrizable F que admita normas continuas.

(c) E tiene la propiedad (A).

Dem: (b)→(c). Sean U 0-entorno en E y (U_n) una sucesión de 0-entornos en E que cumpla $U_{n+1}+U_{n+1}\subseteq U_n\subseteq U$, $n\in N$. Denotamos por $\pi:E\longrightarrow E/Kerp_U$ la aplicación cociente. $(\pi(U_n))$ es base de 0-entornos para una topología (τ) localmente convexa y metrizable en $E/Kerp_U$. Sea $F:=(E/Kerp_U,\tau)$. Es claro que F admite normas continuas, luego $L(E,F)=LB(E,F)$ y por tanto podemos encontrar V 0-entorno en E tal que $\pi(V)$ es acotado en F, lo que significa que existen $\lambda_n>0, n\in N$, de modo que $\pi(V)\subseteq\lambda_n\pi(U_n)$, es decir, $V\subseteq\lambda_nU_n+Kerp_U$, $n\in N$.

(c)→(a). Sea H un equicontinuo en $L(E,F)$, (W_n) base de 0-entornos en F y $\|\cdot\|$ una norma continua en F. Para cada $n\in N$ sea U_n 0-entorno en E tal que $T(U_n)\subseteq W_n$ $\forall\ T\in H$ y sea U 0-entorno en E tal que $\|T(x)\|\leq 1$ para todo $x\in U, T\in H$. Por (c) encontramos V 0-entorno en E y $\lambda_n>0$ cumpliendo $V\subseteq\lambda_nU_n+Kerp_U$, $n\in N$. Pero $T(x)=0$ si $x\in Kerp_U, T\in H$ y por tanto $T(V)\subseteq\lambda_nT(U_n)\subseteq\lambda_nW_n$ para todo $n\in N, T\in H$, lo que prueba que $T\in LB(E,F)$.

Aprovechamos las técnicas de Terzioglu para probar lo siguiente:

PROPOSICION 1.1.5. Si un espacio E con la propiedad de aproximación acotada cumple (BD)' entonces también tiene la propiedad (A).

Nota: Esta afirmación no se puede probar directamente de los resultados (1) y (2) de Terzioglu (ver pág. 6) aún cuando la propiedad de aproximación acotada se sustituya por existencia de base de Schauder.

Dem: Sea $(f_\alpha:\alpha\in D)$ una red equicontinua en $L(E,E)$, formada por operadores de rango finito, que converge puntualmente a la identidad. Fijamos p seminorma continua en E. Tenemos que probar que E/Kerp tiene la (c.n.p.). Para ello, sea (A_n) una sucesión de 0-entornos absx. y cerrados en E/Kerp, y para cada $n\in N$ tomemos un 0-entorno U_n en E tal que $\pi_p(U_n)\subseteq A_n$ siendo π_p la aplicación cociente $E\longrightarrow E/Kerp$. Queremos probar que existen V 0-entorno en E, $\lambda_n>0$ tales que $\pi_p(V)\subseteq\lambda_n\pi_p(U_n)$, $n\in N$.

1.Sea q una seminorma continua en E con la propiedad $p(f_\alpha(x))\leq q(x)$ para cada $x\in E$, $\alpha\in D$. Cada f_α induce una aplicación lineal y continua $f_\alpha:E/Kerq\longrightarrow E/Kerp$, $f_\alpha(\pi_q(x)):=\pi_p(f_\alpha(x))$, y sabemos que la red $(f_\alpha(\pi_q(x):\alpha\in D)$ converge a $\pi_p(x)$ para cada $x\in E$.Sea $U:=\{x\in E:q(x)\leq 1\}$ 0-entorno en E. Para cada $n\in N$ sea V_n 0-entorno en E, $V_n\subseteq U$, tal que $f_\alpha(\pi_q(Vn))\subseteq\pi_p(U_n)$ para todo $\alpha\in D$. Por hipótesis, existen V 0-entorno en E y $\lambda_n>0$ tales que $E'_{U^0}\cap V_n^0\subseteq\lambda_n V^0$, $n\in N$.

2. Cada f_α tiene rango finito y por tanto encontramos $(\pi_p y_{n\alpha}:1\leq n\leq N_\alpha)$ sistema linealmente independiente en E/Kerp y

$(y^*_{n,\alpha}: 1\le n\le N_\alpha)\subseteq E'$ tales que

$$f_\alpha(\pi_q(z))=\sum_{n=1}^{N_\alpha} y^*_{n,\alpha}(z)\pi_p(y_{n,\alpha}) \text{ para todo } z\in E.$$

Sea $W_n:=\pi_p(U_n)$. Dados $\alpha\in D$, $x\in V$, $n\in N$ se cumple

$$p_{W_n}(f_\alpha(\pi_q(x))=\sup(|<f_\alpha(\pi_q(x),v>|: v\in W_n^0) =$$

$$\sup(|\sum_{n=1}^{N_\alpha} y^*_{n,\alpha}(x)v(\pi_p y_{n,\alpha})| : v\in W_n^0) = \sup(|<\sum_{n=1}^{N_\alpha} v(\pi_p y_{n,\alpha})y^*_{n,\alpha}, x>| :$$

$$v\in W_n^0) \le \sup(p_{V^0}(\sum_{n=1}^{N_\alpha} v(\pi_p y_{n,\alpha})y^*_{n,\alpha}) : v\in W_n^0).$$

3. Veamos que $(y^*_{n\alpha}: \alpha\in D,\ 1\le n\le N_\alpha)\subseteq E'_{U^0}$. En efecto, la norma inducida por p en E/Kerp y $\Sigma(\beta_n\pi_p y_{n\alpha}: 1\le n\le N_\alpha)\longrightarrow \sup(|\beta_n|: 1\le n\le N_\alpha)$ son dos normas equivalentes en Imf_α (pues tiene dimensión finita) y por tanto existe $C_\alpha>0$ tal que $|y^*_{n\alpha}(x)|\le C_\alpha p(f_\alpha(\pi_q x)) = C_\alpha p(f_\alpha(x))\le C_\alpha q(x)$ para todo $x\in E$, lo que nos dice que $y^*_{n\alpha}\in E'_{U^0}$.

4. De 3. y 1. deducimos

$$p_{W_n}(f_\alpha(\pi_q x))\le \sup(p_{V^0}(\sum_{n=1}^{N_\alpha} v(\pi_p y_{n,\alpha})y^*_{n,\alpha}) : v\in W_n^0)\le$$

$$\lambda_n \sup(p_{V_n^0}(\sum_{n=1}^{N_\alpha} v(\pi_p y_{n,\alpha})y^*_{n,\alpha}) : v\in W_n^0) =$$

$$\lambda_n \sup(|<\sum_{n=1}^{N_\alpha} v(\pi_p y_{n,\alpha})y^*_{n,\alpha}, z>| : v\in W_n^0,\ z\in V_n) =$$

$$\lambda_n \sup(|<v, \sum_{n=1}^{N_\alpha} y^*_{n,\alpha}(z)\pi_p y_{n,\alpha}>|: v\in W_n^0,\ z\in V_n) =$$

$$\lambda_n \sup(|<v, f_\alpha(\pi_q z)>|: v\in W_n^0,\ z\in V_n)\le \lambda_n$$

pues $f_\alpha(\pi_q(V_n)) \subseteq \pi_p(U_n) =: W_n$.

En consecuencia

$p_{W_n}(\pi_p x) \leq \lambda_n$ para cualesquiera $n \in N$, $x \in V$, lo que prueba que

$$\pi_p(V) \subset \lambda_n \overline{\pi_p(U_n)} \subset \lambda_n A_n$$

Concluimos que E/Kerp tiene la (c.n.p).

El mismo razonamiento prueba el siguiente resultado:

PROPOSICION 1.1.6. Si un espacio E con la propiedad de aproximación acotada cumple (BD) entonces también satisface la condición de apertura.

En particular, un espacio de Fréchet con la propiedad de aproximación acotada es una coyección si y solo si no tiene la propiedad (*).

Una pequeña modificación de la prueba de la proposición 1.1.5. permite probar la siguiente extensión de un resultado de Terzioglu [1] (véase (2) en pág. 6):

PROPOSICION 1.1.7. Si E cumple (BD), F admite normas continuas y tiene la propiedad de aproximación acotada entonces $L(E,F)=LB(E,F)$. Indicación: Sea $(f_\alpha : \alpha \in D)$ una red equicontinua en $L(F,F)$ formada por operadores de rango finito, que converge

puntualmente a id_F.

$f_\alpha(y) := \sum_{n=1}^{N_\alpha} y^*_{n,\alpha}(y).y_{n,\alpha}$ siendo $(y_{n,\alpha} : n \leq N_\alpha)$ un sistema linealmente independiente en $f_\alpha(F)$ y $(y^*_{n,\alpha} : 1 \leq n \leq N_\alpha) \subset F'$.

Sean $|||\ |||$ y $|\ |$ dos normas continuas en F con la propiedad $|||f_\alpha y||| \leq |y|$ para todo $\alpha \in D$, $y \in F$.

Dado $T \in L(E,F)$ existe U 0-entorno en E tal que $|T(x)| \leq p_U(x)$ para todo $x \in E$. Sea V el 0-entorno en E dado por la condición (BD). Entonces T(V) es acotado en F:

Dado A 0-entorno en F tal que $|y| \leq 1$ para todo $y \in A$ sean B 0-entorno en F, W 0-entorno en E y $\rho > 0$ tales que

a) $B \subseteq A$, $f_\alpha y \in A$ para todo $\alpha \in D$, $y \in B$

b) $T(W) \subseteq B$

c) $W^0 \cap E'_{U^0} \subseteq \rho V^0$

Se razona como en la proposición 1.1.5. para probar que

$(y^*_{n,\alpha} \circ T : 1 \leq n \leq N_\alpha) \subset E'_{U^0}$ y poder concluir con ayuda de a), b) y

c) que $T(V) \subset \rho A$

La proposición 1.1.4. es útil para establecer <u>propiedades hereditarias</u>.

<u>PROPOSICION 1.1.7</u>.

(1) La propiedad (A) es estable por cocientes

(2) Si F es denso en E y F cumple (A) entonces E también

cumple (A)

(3) Si cada E_n, $n\in N$, tiene la propiedad (A) entonces $E:=\oplus(E_n:n\in N)$ también satisface (A).

(4) Si cada E_i ($i\in I$) cumple (A) entonces $E:=\prod(E_i:i\in I)$ también cumple (A).

Dem: Nos limitaremos a (3) y (4).

(3) Sea F un espacio metrizable que admita normas continuas y fijemos $T\in L(E,F)$. Para cada $n\in N$ se tiene $TJ_n\in L(E_n,F)=LB(E_n,F)$, siendo J_n la inclusión canónica de E_n en E, luego existe U_n 0-entorno en E_n tal que $B_n:=T(J_n(U_n))$ es acotado en F. Al ser F metrizable encontramos $\sigma_n>0$, $n\in N$, tales que $B:=\cup(\sigma_n B_n:n\in N)$ es acotado en F. Pero entonces $U:=\Sigma(\sigma_n 2^{-n}J_n(U_n))$ es un 0-entorno en E y $T(U)\subseteq acx(B)$, con lo cual $T\in LB(E,F)$.

(4) Sea F metrizable con una norma continua p y $T\in L(E,F)$. Existe U 0-entorno en F tal que $p(x)\leq 1$ si $x\in U$ y en consecuencia encontramos J subconjunto finito de I de modo que $T(\prod(E_i:i\notin J))=\{0\}$.

Por (3) la restricción de T a $\prod(E_i:i\in J)$ está en $LB(\prod(E_i:i\in J),F)$ luego existe V 0-entorno en $\prod(E_i:i\in J)$ tal que T(V) es acotado en F. Pero entonces $W:=V\times\prod(E_i:i\in J)$ es un 0-entorno en E y T(W) es acotado en F.

Veamos ahora qué ocurre con la condición (BD)':

PROPOSICION 1.1.8.

(1) (BD)' es estable por cocientes y productos arbitrarios

(2) Si F es un subespacio denso de E entonces E cumple (BD)' si y solo si F cumple (BD)'

(3) (BD)' es estable por sumas directas numerables

Dem: Nos limitamos a comprobar (3). Sean E_n, $n\in N$, espacios que cumplen (BD)' y llamemos $E:=\oplus(E_n:n\in N)$. Dados U_n 0-entorno en E_n y $(U_{n,m}:m\in N)$ sucesión de 0-entornos en E_n escribimos $V_m:=\oplus(U_{n,m}:n\in N)$, $m\in N$ y $U:=\oplus(U_n:n\in N)$. Tenemos que probar que existen W 0-entorno en E y $\lambda_m>0$ tales que $E'_{U^0}\cap V_m\subseteq\lambda_m W^0$ para todo $m\in N$.

Para cada $n\in N$ existen W_n 0-entorno en E_n y $\delta_{n,m}>0$, $m\in N$, tales que

$$(E_n)'_{U_n^0}\cap(U_{n,m})^0\subset\delta_{n,m}W_n^0$$

Claramente $$E'_{U^0}\cap V_m^0\subset\prod_{n=1}^{\infty}((E_n)'_{U_n^0}\cap(U_{n,m})^0)$$

Sean $\sigma_n:=$ máx$(1,\ \delta_{n,m}:m\le n)$ y $\lambda_m:=$ máx$(1,\ \delta_{n,m}:n\le m)$. Entonces $\delta_{n,m}\le\sigma_n\delta_m$ y por tanto

$$(E_n)'_{U_n^0}\cap(U_{n,m})^0\subset\lambda_m(\sigma_n^{-1}W_n)^0,\ n,m\in N;\ \text{de donde}$$

$$E'_{U^0}\cap W_m^0\subset\prod_{n=1}^{\infty}((E_n)'_{U_n^0}\cap(U_{n,m})^0)\subset\lambda_m\prod_{n=1}^{\infty}(\sigma_n^{-1}W_n)^0\subset\lambda_m(\sum_n 2^{-n}\sigma_n^{-1}W_n)^0.$$

Es decir,

$W:=\sum_n 2^{-n}\sigma_n^{-1}W_n$ es un 0-entorno en E que cumple

$E'_{U^0}\cap V_m^0\subset\lambda_m W^0$ para todo $m\in N$

(A) y (BD)' no son estables por sumas directas no numerables pues $\oplus(R:r\in R)$ tiene la propiedad de aproximación acotada, admite normas continuas y no tiene la c.n.p.(ver S.Dierolf [1;p.16]). (A) y (BD)' tampoco son estables por subespacios cerrados:

Basta pensar en el ejemplo de subespacio cerrado reflexivo de una coyección que no es coyección (Dierolf-Zarnadze[1]) y tener en cuenta que un Fréchet reflexivo es coyección si y solo si cumple (BD) (Bellenot-Dubinski [1]).

Floret[2] dió un ejemplo de límite inductivo estricto $E:=\text{ind}E_n$ que no admite normas continuas a pesar de que cada uno de los espacios E_n es metrizable y admite normas continuas.Una reformulación de este ejemplo nos permite obtener una coyección con un subespacio denso (que necesariamente ha de satisfacer (BD)) que no cumple la condición de apertura.

EJEMPLO 1.1.9.

Sea $(E,\|.\|)$ un espacio de Banach con un subespacio cerrado L que no está complementado (ejemplo c_0 y l_∞). Sea F un complemento algebraico de L en E . Haremos uso del siguiente lema

Lema (Floret [2]): Si $L=H_1 \oplus H_2$ (topológicamente), H_2 tiene dimensión finita y $H_2 \subseteq \overline{F}$ entonces $H_1 \cap \overline{F} \neq (0)$.

Dado $L_1 := L$, por el lema anterior, encontramos $x_2 \in \overline{F} \cap L_1$, $x_2 \neq 0$. Sea L_2 un complemento topológico de $sp(x_2)$ en L_1: $L = L_1 = L_2 \oplus sp(x_2)$ topológicamente. Por inducción encontramos $(L_n : n \in N)$ subespacios cerrados y $x_n \in \overline{F}^{\|.\|} \cap L_{n-1}$, $x_n \neq 0$, tales que $L_{n-1} = L_n \oplus sp(x_n)$ topológicamente.

Sea $F_n := F \oplus sp(x_2, \ldots, x_n)$ algebraicamente, con lo cual $E = F_n \oplus L_n$ algebraicamente, $n \geq 2$, y sea q_n la norma cociente en $(E, \|.\|)/L_n$. $(E/L_n, q_n)$ es un espacio de Banach para todo $n \in N$, y además la aplicación canónica $\pi_{n,n+1} : (E/L_{n+1}, q_{n+1}) \longrightarrow (E/L_n, q_n)$ es lineal, continua y sobre. Entonces $\tilde{E} := proj((E/L_n, q_n); \pi_{n,n+1})$ es una coyección. Sea π_n la aplicación canónica $E \longrightarrow E/L_n$ y tomemos

$$\tilde{F} := ((\pi_n x : n \in N) : x \in F).$$

(1) Veamos que $\tilde{F}$ es denso en $\tilde{E}$. Para ello es suficiente comprobar que $\pi_n(F)$ es denso en $(E/L_n, q_n)$ para cada $n \in N$. Pero, dados $x \in E$ y $\varepsilon > 0$, existe un único $y \in F_n$ tal que $\pi_n x = \pi_n y$ y al ser $F_n \subseteq \overline{F}^{\|.\|}$ existe $z \in F$ cumpliendo $\|y - z\| \leq \varepsilon$, con lo cual

$$q_n(\pi_n x - \pi_n z) = q_n(\pi_n y - \pi_n z) \leq \|y - z\| \leq \varepsilon.$$

(2) Probamos ahora que $\tilde{F}$ admite normas continuas.

Sea $r_n : \tilde{E} \longrightarrow E/L_n$ la aplicación canónica. Si $x \in F$ y $q_n r_n((\pi_m x : m \in N)) = 0$ entonces $q_n(\pi_n x) = 0$, luego $x \in L_n \cap F = (0)$. Por tanto la restricción de $q_n r_n$ a $\tilde{F}$ es una norma para cada $n \in N$.

(3) Para terminar veamos que $\tilde{F}$ no es normable. En efecto,

$$q_n r_n((\pi_m x_{n+1} : m \in N)) = q_n(\pi_n x_{n+1}) = 0$$ pues $x_{n+1} \in L_n$; sin embargo

$q_{n+1}r_{n+1}((\pi_m x_{n+1} : m\in N)) = q_{n+1}(\pi_{n+1}x_{n+1}) > 0$ pues $x_{n+1}\notin L_{n+1}$, y por tanto $\{z\in\widetilde{E} : q_n r_n(z) \leq 1\}$ no es absorbido por $\{z\in\widetilde{E} : q_{n+1}r_{n+1}\leq 1\}$, con lo cual $\widetilde{E}$ no es normable y por densidad $\widetilde{F}$ no puede ser normable.

Finalmente notemos que, por (2) y (3), $\widetilde{F}$ no cumple la condición de apertura, pero $\widetilde{F}$ sí satisface (BD) pues (BD) se hereda por subespacios densos y $\widetilde{E}$ es una coyección.

SECCION 1.2.

Incluimos en esta sección algunos resultados abstractos acerca de la igualdad L=LB que extienden y/o complementan Bonet[5].

Con el mismo argumento de la proposición 1.1.4. se pueba la siguiente

PROPOSICION 1.2.1. Son equivalentes:

(a) El par (E,F) tiene la propiedad de localización para todo espacio metrizable F.

(b) L(E,F)=LB(E,F) para todo espacio metrizable F.

(c) E tiene la (c.n.p).

Recordamos que un espacio localmente convexo F cumple la condición de acotados de Mackey (c.a.M.) si para cualquier sucesión (B_n) de acotados en F existen $c_n>0$, $n\in N$, tales que

$\cup(c_nB_n:n\in N)$ es acotado en F. Esta codición ha sido usada por S. Dierolf[1] en un estudio de la conmutatividad entre límites inductivos y proyectivos y espacios de aplicaciones lineales y continuas.

PROPOSICION 1.2.2. Son equivalentes:

(a) El par (E,F) tiene la propiedad de localización para todo E (DF)-casitonelado.

(b) $L(E,F)=LB(E,F)$ para todo E (DF)-casitonelado.

(c) F cumple (c.a.M.).

Dem: (c)$\rightarrow$(a). Sean H un conjunto equicontinuo en L(E,F), (A_n) sucesión fundamental de acotados en E. Cada $H(A_n):=\cup(T(A_n):T\in H)$ es acotado y F cumple (c.a.M.) luego existen $c_n>0$, $n\in N$, tales que $B:=\cup(c_nH(A_n):n\in N)$ es acotado en F. Pero entonces $U:=\overline{\cup(c_nA_n:n\in N)}$ es un 0-entorno en E al ser E casitonelado y $T(U)\subseteq\overline{B}$ $\forall T\in H$, lo que prueba que H es equiacotado.

(b)$\rightarrow$(c).Sea (B_n) una sucesión de acotados en F, con $B_n\subseteq B_{n+1}$. Entonces $E:=\text{ind}F_{B_n}$ es un (DF)-bornológico y la inclusión $i:E\longrightarrow F$ es continua. Por hipótesis $i\in LB(E,F)$, es decir, existe U 0-entorno en E tal que i(U) es acotado en F. Sean $c_n>0$, $n\in N$, de modo que $acx(\cup(c_nB_n:n\in N))\subseteq U$. Entonces $\cup(c_nB_n:n\in N)$ es acotado en F, lo que prueba que F cumple la (c.a.M.).

PROPOSICION 1.2.3. Son equivalentes:

(a) El par (E,F) tiene la propiedad de localización para todo (LN) $E:=\text{ind}E_n$ con E_n denso en E_{n+1} $(n\in N)$.

(b) $L(E,F)=LB(E,F)$ para todo (LN) $E:=\text{ind}E_n$ con E_n denso en E_{n+1}.

(c) Para todo acotado B en F, sp(B) cumple la (c.a.M.) (con la topología inducida por F).

Nota: Si $F=G'_b$, G casitonelado, entonces (c) es equivalente a que G cumpla (BD)'.

Dem: (c)→ (a). Dado $E:=\text{ind}E_n$ (LN) con E_n denso en E_{n+1}, denotamos por τ_n la topología de E_n y por A_n la bola unidad de E_n. Sea H un conjunto equicontinuo en L(E,F). Entonces $(T|_{E_n}: T\in H)$ es un equicontinuo en $L(\text{ind}(E_1,\tau_n), F)$ y por tanto $B:=H(A_1)$ es acotado en F. Por hipótesis sp(B) cumple la (c.a.M.) y además $(H(A_n\cap E_1))$ es una sucesión de acotados en sp(B), luego podemos encontrar $c_n>0$, $n\in N$, tales que $\cup(c_nH(A_n\cap E_1): n\in N)$ es acotado en sp(B) (luego en E). Pero entonces $U:=\text{acx}(\cup c_n(A_n\cap E_1): n\in N)$ es un 0-entorno en $\text{ind}(E_1,\tau_n)$ y H(U) es acotado en F. Puesto que $\text{ind}(E_1,\tau_n)$ es un subespacio topológico denso de $\text{ind}E_n$ concluimos que H es equiacotado en L(E,F).

(b)→ (c). Sea B un conjunto acotado en F y supongamos que sp(B) no cumple la (c.a.M.). Entonces podemos encontrar una sucesión (B_n) de acotados en sp(B), $B\subseteq B_n\subseteq B_{n+1}$, $n\in N$, tal que $\cup(c_nB_n: n\in N)$ no es acotado en F para ninguna sucesión (c_n) de números positivos. Sea $E_n:=(sp(B), \text{topología inducida por } F_{B_n})$. Entonces $E:=\text{ind}E_n$ es un (LN) y cada E_n es denso en E_{n+1}. Si i denota la inclusión $E\longrightarrow F$ es claro que $i\in L(E,F)$ pero $i\notin LB(E,F)$, lo que está en contradicción con (b).

No es dificil comprobar que si $\overline{sp(B)}$ cumple la (c.a.M.) para todo acotado B en F y E es un (DF)-casitonelado con un acotado total, entonces (E,F) tiene la propiedad de localización.

PROPOSICION 1.2.4. Son equivalentes:

(a) El par (E,F) tiene la propiedad de localización para todo espacio E con un acotado total.

(b) L(E,F)=LB(E,F) para todo espacio E con un acotado total.

(c) sp(B) es normable para todo acotado B en F.

Dem:. (b)→(c). Dado B acotado en F tomamos E:=(sp(B),topologia inducida por F). Claramente E tiene un acotado total (B), luego L(sp(B),F)=LB(sp(B),F) y en particular la inclusión sp(B)⟶F es acotada, lo que quiere decir que existe U 0-entorno en sp(B) que es acotado en F, es decir, sp(B) es normable.

(c)→(a). Sea H un conjunto equicontinuo en L(E,F) y A un acotado total en E. B:=H(A) es acotado en F, luego sp(B) es normable y por tanto $(T|_{sp(A)} : T\in H)$ es equiacotado en L(sp(A),sp(B)). Sea pues U un 0-entorno en sp(A) tal que H(U) es acotado en sp(B) (luego en F). Entonces $\overline{U}$ es un 0-entorno en E y $H(\overline{U})$ es acotado en F.

PROPOSICION 1.2.5. Para un espacio tonelado E, son equivalentes:

(a) L(E,F)=LB(E,F) para todo espacio F tonelado que sea unión creciente de subespacios cerrados generados por acotados.

(b) E es casi-Baire.

Dem: (a)→(b). Si E no es casi-Baire entonces E contiene a φ complementado(Pérez Carreras-Bonet[1]) y por tanto $L(E,\varphi)\neq LB(E,\varphi)$

(b)→(a). Por hipótesis $F=\cup(F_n:n\in N)$, F_n cerrado, (F_n) creciente y $F_n=sp(B_n)$, B_n acotado absx. en F. Si $T\in L(E,F)$ y $E_n:=T^{-1}(F_n)$ entonces (E_n) es una sucesión creciente de subespacios cerrados de E y $E=\cup E_n$ luego existe $p\in N$ tal que $E=E_p$ (pues E es casi-Baire). Pero entonces $U:=T^{-1}(\overline{B}_p)$ es un tonel, luego un 0-entorno en E, y T(U) es acotado en F.

OBSERVACIONES 1.2.6.

(1). Supongamos E y F casitonelados. Entonces son equivalentes:

(a) $L(E,F'_b)=LB(E,F'_b)$

(b) $L(F,E'_b)=LB(F,E'_b)$

Dem: Por simetría basta ver que (a)→(b). Sea pues $T\in L(F,E'_b)$. Entonces ${}^tT\in L((E'_b)'_b,F'_b)$ luego ${}^tT|_E\in L(E,F'_b)=LB(E,F'_b)$, lo que quiere decir que existen U 0-entorno en E y V 0-entorno en F tales que ${}^tT(U)\subseteq V^0$, pero entonces es claro que $T(V)\subseteq U^0$ lo que prueba que $T\in LB(F,E'_b)$.

Como consecuencia, si E es (DF)-bornológico y $\vartheta=(v_n)$ es una sucesión decreciente de pesos en un conjunto de índices I, entonces $L(E,k_\infty(\vartheta))=LB(E,k_\infty(\vartheta))\Leftrightarrow L(\lambda^1(A),E'_b)=LB(\lambda^1(A),E'_b)$:

En efecto, $L(E,k_\infty(\vartheta))=LB(E,k_\infty(\vartheta))$ es claramente equivalente a $L(E,K_\infty(\overline{V}))=LB(E,K_\infty(\overline{V}))$ pues $k_\infty(\vartheta)$ y $K_\infty(\overline{V})$ tienen los mismos acotados, y esta última igualdad es equivalente a

$L(\lambda^1(A),E'_b)=LB(\lambda^1(A),E'_b)$

pues $\lambda^1(A)'_b=K_\infty(\overline{V})$ (Bierstedt-Meise-Summers[2]). Esto a su vez es equivalente a

$\forall(k(l))\uparrow \exists k\ \forall n\ \exists l_0=l_0(n), C_n>0$:

$\|u\|_h V_k(l) \le C_n \max(\|u\|_l V_{k(l)}(l) : 1\le l\le l_0)\quad \forall u\in E', l\in I$, siendo

$(\|.\|_n)$ un sistema fundamental de seminormas en E'_b.

Véase Vogt [1].

(2). Si E es casitonelado y $L(F'_b,E'_b)=LB(F'_b,E'_b)$ entonces $L(E,F)=LB(E,F)$:

Dem: Si $T\in L(E,F)$ entonces ${}^tT\in L(F'_b,E'_b)$ y por tanto existen B acotado en F y U 0-entorno en E tales que ${}^tT(B^0)\subseteq U^0$. Pero entonces $T(U)\subseteq B^{00}$ y $T\in LB(E,F)$.

Sin embargo, el reciproco de (2) no es verdad:

EJEMPLO 1.2.7. Sean $E:=\omega$ y F un espacio de Fréchet no normable que admita normas continuas y cuyo dual fuerte sea un (LB) estricto (Behrends-Dierolf-Harmand [1]). Claramente $L(E,F)=LB(E,F)$ pues E es una coyección, pero $L(F'_b,\varphi)\neq LB(F'_b,\varphi)$ pues φ es un cociente no normable de F'_b.

SECCION 1.3

Concluimos este capítulo con algunas observaciones acerca de la igualdad $L(E,F)=LB(E,F)$ para pares (E,F) de espacios de Fréchet o (DF).

1.3.1. El caso Fréchet.

Vogt [1] caracteriza la identidad $L(E,F)=LB(E,F)$ para pares (E,F) de espacios de Fréchet. Para ser precisos, sean E,F, espacios de Fréchet, $(\|.\|_k)$ (resp. $(|.|_k)$) denotará un sistema fundamental de seminormas continuas en E (resp. F). La norma dual de $\|.\|_k$ viene dada por $\|u\|'_k:=\sup\{|<u,x>| : \|x\|_k \leq 1\}$, $u\in E'$, y toma valores en $R^+\cup\{\infty\}$. Para cada $T\in L(E,F)$ escribimos

$$\|T\|_{n,k}:=\sup\{|Tx|_n : \|x\|_k \leq 1\}$$

TEOREMA (Vogt [1]). Son equivalentes:

(a) El par (E,F) tiene la propiedad de localización.

(b) $L(E,F)=LB(E,F)$.

(c) Para cualquier sucesión creciente $(k(l))$ de naturales existe un natural k tal que

para cada n natural encontramos $l_0=l_0(n)$ natural, $C_n>0$:

$\|T\|_{n,k} \leq C_n.\max(\|T\|_{l,k(l)} : 1 \leq l \leq l_0)$ para todo $T\in L(E,F)$ que cumpla $\|T\|_{l,k(l)} < \infty$ para todo $l\in N$.

(Brevemente: $\forall (k(l))\uparrow \exists k\ \forall n\ \exists l_0=l_0(n), C_n>0$:

$$||T||_{n,k} \leq C_n . \max(||T||_{l,k(l)} : 1\leq l\leq l_0)$$

$\forall T\in L(E,F) : ||T||_{l,k(l)}<\infty\ \forall l.$)

En lo que sigue $A=(a_k(i))_{i\in I, k\in N}$ es una matriz de Köthe, $0<a_k(i)\leq a_{k+1}(i)$, $v_k(i):=a_k(i)^{-1}$ y E es un espacio de Fréchet con sistema de fundamental de seminormas $(|.|_k)$.

Vogt aprovecha el teorema anterior para caracterizar, en términos de la matriz A y las seminormas (resp. normas duales) de E, la identidad $L(\lambda^1(A),E)=LB(\lambda^1(A),E)$
(resp. $L(E,\lambda^\infty(A))=LB(E,\lambda^\infty(A))$).

Veamos que las mismas caracterizaciones siguen siendo válidas para espacios escalonados de orden p, $1<p\leq\infty$, si suponemos E Fréchet-nuclear.

PROPOSICION 1.3.1.1. Sea $1<p\leq\infty$. Consideremos las dos siguientes afirmaciones:

(a) $L(\lambda^p(A),E)=LB(\lambda^p(A),E)$

(b) $\forall (k(l))\uparrow \exists k\ \forall n\ \exists l_0, C>0$:

$$|y|_n v_k(i) \leq C.\max(|y|_l v_{k(l)}(i) : 1\leq l\leq l_0) \quad \forall i\in I, y\in E.$$

Entonces:

(a) implica (b) y las dos afirmaciones son equivalentes si E es Fréchet-nuclear.

Nota: La afirmación (b) es equivalente a la identidad $L(\lambda^1(A),E)=LB(\lambda^1(A),E)$ (Vogt [1]).

Dem: (a)→(b). Se razona como en (Vogt [1;prop.1.3]). Si E es

BIBLIOTECA FACULTAT * VALÈNCIA * CIÈNCIES MATEMÀTIQUES

Fréchet-nuclear entonces (b)→(a):

1.Hagamos la prueba para $p=\infty$. E_n denotará el cociente $E/\mathrm{Ker}\,\|.\|_n$ con la norma inducida por $\|.\|_n$

$V_n:=\{y\in E: \|y\|_n\leq 1\}$. $P_m(x):=\sup(a_m(i)\,|x(i)|: i\in I)$ $\forall$ $x=(x(i))\in\lambda^\infty(A)$

Al ser E nuclear encontramos una sucesión creciente de naturales $(\overline{k}(l))$ tal que para cada l la aplicación canónica $E_{\overline{k}(l)}\longrightarrow E_l$ es absolutamente sumante, es decir,

$$\sum_{i\in J}\|y(i)\|_l \leq \sup\Big(\sum_{i\in J}|\langle y(i),u\rangle|: u\in V^0_{\overline{k}(l)}\Big)$$

para cualesquiera J subconjunto finito de I, $(y(i): i\in J)\subseteq E$.

Fijemos ahora $T\in L(\lambda^\infty(A),E)$. Por continuidad encontramos una sucesión creciente de naturales $(k(l))$ y $C_l>0$, $l\in N$, tales que $\|T(x)\|_{\overline{k}(l)}\leq C_l P_{k(l)}(x)$ para todo $x\in\lambda^\infty(A)$. Sea k el natural dado por la condición (b). Entonces $U:=\{x\in\lambda^\infty(A) : P_k(x)\leq 1\}$ es un 0-entorno en $\lambda^\infty(A)$. Vamos a probar que T(U) es acotado en E. Sea para ello $x=(x(i))\in U$. Dado $n\in N$ sean $l_0, C>0$, dados por (b). Entonces

$$\|T(x)\|_n\leq \sum_i |x(i)|\,a_k(i)\,\|T(e_i)\|_n.v_k(i)\leq \sum_i \|T(e_i)\|_n v_k(i)\leq$$

$$C.\sum_{l=1}^{l_0}\sum_i \|T(e_i)\|_l v_{k(l)}(i)\leq C.\sum_{l=1}^{l_0}\sup\Big(\sum_i |\langle Te_i,\ u\rangle| v_{k(l)}(i): u\in V^0_{\overline{k}(l)}\Big)$$

Fijemos $1\leq l\leq l_0$ y $u\in V_{\overline{k}(l)}{}^0$.

Sea $H:=\{x=(x(i))\in K^I : P_{k(l)}(x)=\sup(a_{k(l)}(i)\,|x(i)|: i\in I)<\infty\}$ dotado con la norma $P_{k(l)}$. Claramente $(\lambda^\infty(A),P_{k(l)})$ es subespacio normado de H y la aplicación $H\longrightarrow l^\infty(I)$, $(x(i))\longrightarrow (x(i)a_{k(l)}(i))$, es una isometría. uoT es una forma lineal y continua sobre $(\lambda^\infty(A),P_{k(l)})$ de norma menor o igual que

C_1, luego, por el teorema de Hahn-Banach, existe $g\in(l^\infty(I))'$ tal que $\|g\|\leq C_1$ y $\langle g, (y(i))\rangle = \langle u\circ T, (y(i)v_{k(1)}(i))\rangle$ para todo $(y(i)v_{k(1)}(i))\in\lambda^\infty(A)$. Pero $g|_{c_0(I)}\in l^1(I)$, es decir, existe $(b(i))\in l^1(I)$ tal que

$$\langle g, (x(i))\rangle = \sum_i x(i)b(i) \quad \text{para todo } (x(i))\in c_0(I) \text{ y además}$$

$$\sum_i |b(i)| \leq C_1.$$

Entonces, de las igualdades $\langle u\circ T, e_j\rangle = \langle g, a_{k(1)}(j))e_j\rangle = a_{k(1)}(j)b(j)$, $j\in I$, deducimos

$$\sum_i |\langle u\circ T, e_i\rangle| v_{k(1)}(i) = \sum_i |b(i)| \leq C_1 \text{ y por tanto ya podemos}$$

concluir que $\|T(x)\|_n \leq c\sum_{l=1}^{l_0} C_l$.

Puesto que $x\in U$ y $n\in N$ eran arbitrarios, esto nos dice que $T(U)$ es acotado en E.

2. Para $1<p<\infty$ el razonamiento es el mismo pero usando el hecho de que cada una de las aplicaciones $E_{\overline{K}(1)} \longrightarrow E_1$ es absolutamente q-sumante ($p^{-1}+q^{-1}=1$), más concretamente,

$$\left(\sum_{i\in J}(\|y(i)\|_1)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \sup\left(\left(\sum_{i\in J}|\langle u, y(i)\rangle|^q\right)^{\frac{1}{q}} : u\in V^0_{\overline{K}(1)}\right)$$

para cualesquiera J finito, $(y(i): i\in J)\subseteq E$.

Para estudiar la situación $L(E,\lambda^p(A))=LB(E,\lambda^p(A))$ necesitamos primero el siguiente

LEMA 1.3.1.2. Sea E un espacio nuclear (no necesariamente metrizable).

(a) Sean $1<p,q<\infty, p^{-1}+q^{-1}=1$. Si $T\in L(l^q,E)$ entonces $(T(e_i))\in l^p(E)$

(b) Si $T\in L(c_0,E)$ entonces $(T(e_i))\in l^1(E)$.

Dem: Probaremos solo (a) pues la prueba de (b) es análoga.

Sea r una seminorma continua en E. Al ser E nuclear existe s seminorma continua en E, $s\geq r$, tal que la aplicación canónica de E_s en E_r es absolutamente p-sumante:

$$(\sum_{i\in J}(r(x(i)))^p)^{\frac{1}{p}} \leq \sup((\sum_{i\in J}|<x(i),\ u>|^p)^{\frac{1}{p}} : u\in U_s^0)$$

para cualesquiera J finito, $(x(i) : i\in J)\subseteq E$, con lo cual

$$(\sum_{i}(r(Te_i))^p)^{\frac{1}{p}} \leq \sup((\sum_{i}|<e_i,{}^tTu>|^p)^{\frac{1}{p}} : u\in U_s^0).$$

Pero ${}^tT(U_s^0)$ es acotado en l^p, luego existe $C>0$ tal que para cada $u\in U_s^0$ existe $b=(b(i))\in l^p$ cumpliendo

$$(\sum_{i}|b(i)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \quad y \quad \sum_{i}a(i)b(i)=<a,{}^tTu> \text{ para todo } a=(a(i))\in l^q.$$

En particular $<e_i,{}^tTu>=b(i)$ y por tanto

$$(\sum_{i}|<e_i,{}^tTu>|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \quad \text{para todo } u\in U_s^0 \quad \text{lo que prueba que}$$

$\sum_{i}(r(Te_i))^p < \infty$. Concluimos que $(Te_i)\in l^p(E)$.

A partir de ahora supondremos que I=N.

PROPOSICION 1.3.1.3. Sea $1 \leq p < \infty$, E Fréchet con sistema fundamental de seminormas $(\|.\|_k)$. Cosideremos las dos afirmaciones siguientes:

(a) $L(E,\lambda^p(A)) = LB(E,\lambda^p(A))$

(b) $\forall (k(l))\uparrow \exists k\ \forall n\ \exists l_0 = l_0(n), C_n>0$:

$$\frac{\|u\|^*_k}{v_n(i)} \leq C_n.\max\left(\frac{\|u\|^*_{k(l)}}{v_l(i)} : 1 \leq l \leq l_0\right) \quad \forall i\in I,\ u\in E'.$$

Entonces:

(a) implica (b) y las dos afirmaciones son equivalentes si E es Fréchet-nuclear.

Nota. La afirmación (b) es equivalente a la identidad $L(E,\lambda^\infty(A)) = LB(E,\lambda^\infty(A))$. Véase (Vogt [1]).

Dem:Para probar (a)→(b) se razona como en (Vogt [1;prop.1.4]). Si E es Fréchet-nuclear entonces:

(b)→(a) 1. Haremos la prueba para $1<p<\infty$. Sea $1<q<\infty$ dado por $p^{-1}+q^{-1}=1$. Por la observación 1.2.6.(1) es suficiente comprobar que $L(\text{indl}^q(v_n), E'_b) = LB(\text{indl}^q(v_n), E'_b)$ (el dual fuerte de $\text{indl}^q(v_n)$ es $\lambda^p(A)$. Véase Bierstedt-Meise-Summers [2]).

Sea $T\in L(\text{indl}^q(v_n), E'_b)$. Para cada $n\in N$ $T|_{l^q(v_n)}\in L(l^q(v_n), E'_b)$ luego $(T(e_i)/v_n(i))\in l^p(E'_b)$ (lema anterior) y en consecuencia existe una sucesión creciente de naturales (K(l)) tal que

$$\sum_i \left(\left\|\frac{T(e_i)}{v_l(i)}\right\|^*_{k(l)}\right)^p \leq 2^{-1} \quad \text{(ver lema 3.2.2.)}$$

Sea k el natural dado por la condición (b) y para cada n sea también C_n dado por (b). $\omega := \inf(C_n v_n : n\in N)\in \overline{V}$ (familia de Nachbin

maximal asociada a los pesos (v_n)). Por ser I numerable existe $\bar{v}\in\bar{V}$ tal que $\bar{v}\geq\omega$ y $\bar{v}>0$ (Bierstedt-Meise-Summers [2,p.8]) con lo cual

$$\frac{\|u\|_k^*}{\bar{v}(i)} \leq \sup\left(\frac{\|u\|_{K(l)}^*}{v_{l(i)}} : l\in N \right) \quad \forall u\in E',\ i\in I.$$

Entonces

$$\sum_i \left(\left\|\frac{T(e_i)}{\bar{v}(i)}\right\|_k^*\right)^p \leq \sum_i\sum_l \left(\left\|\frac{T(e_i)}{v_l(i)}\right\|_{K(l)}^*\right)^p \leq 1.$$

Dado $x=(x(i))\in \mathrm{indl}^q(v_n)=K_q(\bar{V})$ (Bierstedt-Meise-Summers [2;p.13]) se cumple

$$\|T(x)\|_k^* \leq \sum_i |x(i)|.\|T(e_i)\|_k^* = \sum_i |x(i)|\,\bar{v}(i).\left\|\frac{T(e_i)}{\bar{v}(i)}\right\|_k^* \leq$$

$$\left(\sum_i (|x(i)|\,\bar{v}(i))^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{y concluimos que } T\in LB(\mathrm{indl}^q(v_n),\ E'_b).$$

2. Cuando $p=1$ se comprueba como antes que $L(\mathrm{indc}_0(v_n),\ E'_b) = LB(\mathrm{indc}_0(v_n),\ E'_b)$ (obsérvese que el dual de $\mathrm{indc}_0(v_n)$ es $\lambda^1(A)$ por Bierstedt-Meise-Summers [2;p.17]).

Las proposiciones 1.3.1.1. y 1.3.1.3. nos dicen que cuando E es Fréchet-nuclear las identidades $L(E,\lambda^p(A)) = LB(E,\lambda^p(A))$ y $L(\lambda^p(A),E) = LB(\lambda^p(A),E)$ no dependen de p, $1\leq p\leq\infty$.

1.3.2. El caso (DF).

Sean E un (DF) casitonelado con sucesión fundamental de acotados (A_n) y F un espacio de Fréchet con sistema fundamental de seminormas $(\|\cdot\|_k)$. $|\cdot|_n$ denotará la funcional de Minkowski de A_n^0 en E'_b, $B_k := U_k^0$ siendo $U_k := \{y \in F : \|y\|_k \leq 1\}$. (B_k) es una sucesión fundamental de acotados en F'_b. q_k denotará la norma de $(F'_b)_{B_k}$.

Por la observación 1.2.6.(1) $L(E,F'_b) = LB(E,F'_b)$ es equivalente a $L(F,E'_b) = LB(F,E'_b)$ y esto último se cumple si y solo si

$\forall (k(l))\uparrow \exists k\ \forall n\ \exists l_0 = l_0(n), C_n > 0$:

$\|A\|_{n,k} \leq C_n \max(\|A\|_{l,k(l)} : 1 \leq l \leq l_0)$ para todo $A \in L(F,E'_b)$ tal que $\|A\|_{l,k(l)} < \infty\ \forall l \in \mathbb{N}$.

Pero, si $T \in L(E,F'_b)$ y $A := {}^tT|_F \in L(F,E'_b)$ se cumple

$$\|A\|_{n,k} = \sup(|{}^tT(y)|_n : y \in F,\ \|y\|_k \leq 1) =$$

$$\sup(|\langle {}^tT(y), x\rangle| : y \in F, \|y\|_k \leq 1,\ x \in A_n) =$$

$$\sup(|\langle y, T(x)\rangle| : y \in F,\ \|y\|_k \leq 1,\ x \in A_n) =$$

$$\sup(q_k(T(x)) : x \in A_n) =: P_{n,k}(T).$$

Y también, si $A \in L(F,E'_b)$ y $T := {}^tA|_E$ entonces $\|A\|_{n,k} = P_{n,k}(T)$.

Por tanto, son equivalentes:

(a) $L(E,F'_b) = LB(E,F'_b)$

(b) $\forall (k(l))\uparrow \exists k\ \forall n\ \exists l_0 = l_0(n), C_n > 0$:

$P_{n,k}(T) \leq C_n \max(P_{l,k(l)}(T) : 1 \leq l \leq l_0)\ \forall T \in L(E,F'_b) : P_{l,k(l)} < \infty\ \forall l.$

Nuestro objetivo inmediato es probar que este resultado sigue siendo válido si sustituimos F'_b (F Fréchet) por un espacio

localmente completo con sucesión fundamental de acotados (s.f.a.)

TEOREMA 1.3.2.1. Sean E un (DF)-casitonelado con s.f.a. (A_n) y F un espacio localmente completo con s.f.a. absx. y cerrados (B_n). q_k denotará la norma de F_{B_k} y para cada $T\in L(E,F)$ escribimos

$P_{n,k}(T):=\sup(q_k(Tx) : x\in A_n)$, $n,k\in N$ (toma el valor ∞ si $T(A_n)$ no está contenido en F_{B_k}).

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(à) El par (E,F) tiene la propiedad de localización.

(b) $L(E,F) = LB(E,F)$

(c) $\forall(k(l))\uparrow\ \exists k\ \forall n\ \exists l_0=l_0(n), C_n>0$:

$P_{n,k}(T) \le C_n \max(P_{l,k(l)}(T) : 1\le l \le l_0)$ para todo $T\in L(E,F)$ tal que $P_{l,k(l)}(T) < \infty\ \forall l$.

Dem: Probemos primero (c)→(a). Sea H equicontinuo en L(E,F). Para cada $l\in N$ existe $k(l)\in N$ tal que $T(A_l)\subseteq B_{k(l)}\ \forall T\in H$ y podemos suponer que (k(l)) es creciente. Sea $k\in N$ dado por la condición (b). Puesto que $P_{l,k(l)}(T)\le 1\ \forall l\in N, T\in H$ obtenemos $P_{n,k}(T) \le C_n$ para todo $n\in N, T\in H$, es decir, $T(A_n) \subseteq C_n B_k$, $n\in N, T\in H$, con lo cual $T(\overline{acx} \cup(C_n^{-1}A_n : n\in N) \subseteq B_k$ para todo $T\in H$. Pero $U:=\overline{acx}(\cup(C_n^{-1}A_n : n\in N))$ es un 0-entorno en E y por tanto H es equiacotado en L(E,F).

(b)→(c). Fijemos una sucesión creciente (k(l)) de naturales. Sean $G:=\{T\in L(E,F) : P_{l,k(l)}(T) < \infty$ para todo $l\in N\}$, con la topología dada por las seminormas $(P_{l,k(l)} : l\in N)$

$H_k:=\{T\in L(E,F) : P_{n,k}(T) < \infty$ para todo $n\in N\}$, con la topología dada por las seminormas $(P_{n,k} : n\in N)$. La inclusión $H_k \longrightarrow H_{k+1}$ es

continua, $k\in N$.

1. G y H_k, $k\in N$, son espacios de Fréchet: Sea (T_n) una sucesión de Cauchy en G. Para cualesquiera $\varepsilon>0$, $l\in N$ existe $n_0\in N$ tal que $n,m\geq n_0$ implica $q_{k(l)}(T_nx-T_mx)\leq\varepsilon$ para todo $x\in A_l$. Entonces (T_nx) es una sucesión de Cauchy en $F_{Bk}(l)$ para todo $x\in A_l$ y al ser F localmente completo existe $Tx:=\lim T_nx$ para cualesquiera $x\in A_l$, $l\in N$ (luego para todo $x\in E$).

Es claro que T es lineal y (T_n) converge a T uniformemente en cada A_l, con lo cual $T:E_{Al}\longrightarrow F_{Bk(l)}$ es continua para cada $l\in N$. Al ser E (DF) concluimos que $T\in L(E,F)$ y además $P_{l,k(l)}(T)<\infty$ para cada $l\in N$ (con lo cual $T\in G$) y (T_n) converge a T en G. Esto prueba que G es Fréchet y se procede análogamente con cada H_k, $k\in N$.

2. $G\subseteq\cup(H_k:k\in N)$: En efecto, si $T\in L(E,F)=LB(E,F)$ existen U 0-entorno en E y $k\in N$ tales que $T(U)\subseteq B_k$. Pero entonces $P_{n,k}(T)<\infty$ para todo $n\in N$, es decir, $T\in H_k$.

3. La inclusión $G\longrightarrow \operatorname{ind}H_k$ tiene gráfica cerrada pues la convergencia en $\operatorname{ind}H_k$ (resp. en G) implica convergencia puntual.

4. Finálmente, por el teorema de factorización de Grothendieck ([3]) existe $k\in N$ tal que $G\subseteq H_k$ y la inclusión $G\longrightarrow H_k$ es continua. Pero esto último quiere decir que para todo $n\in N$ podemos encontrar $C_n>0$ y $l_0=l_0(n)\in N$ tales que $P_{n,k}(T)\leq C_n\max(P_{l,k(l)}(T) : 1\leq l\leq l_0)$ para todo $T\in G$.

Nota La hipótesis E casitonelado solo se utiliza para probar (b)$\rightarrow$(a).

Con ayuda del teorema anterior vamos a analizar algunos casos particulares.

PROPOSICION 1.3.2.2. Sean $0 < v_{n+1}(i) < v_n(i)$, $n \in N$, $i \in I$; F un espacio localmente completo con s.f.a.(B_k). q_k denotará la norma de F_{B_k}. Son equivalentes:

(a) $L(\operatorname{ind} l^1(v_n), F) = LB(\operatorname{ind} l^1(v_n), F)$

(b) $\forall (k(l)) \uparrow \exists k \ \forall n \ \exists l_0 = l_0(n), C_n > 0$:

$$\frac{q_k(y)}{v_n(i)} \leq C_n \max\left(\frac{q_{k(l)}(y)}{v_l(i)} : 1 \leq l \leq l_0 \right) \quad \text{para todo } y \in F, \ i \in I.$$

Dem: (a) $\rightarrow$ (b).

Sea $A_n := \{x = (x(i)) \in l^1(v_n) : \sum_i |x(i)| v_n(i) \leq 1\}$.

(A_n) es una s.f.a. en $\operatorname{ind} l^1(v_n)$. Por el teorema anterior

$\forall (k(l)) \uparrow \exists k \ \forall n \ \exists l_0 = l_0(n), C_n > 0$:

$$P_{n,k}(T) \leq C_n \max(P_{l,k(l)}(T) : 1 \leq l \leq l_0) \text{ para todo } T \in L(\operatorname{ind} l^1(v_n), F)$$

tal que $P_{l,k(l)} < \infty \quad \forall l$.

Pues bien, dados $i \in I$, $y \in F$, sea $T \in L(\operatorname{ind} l^1(v_n), F)$ dada por $(x(j)) \longrightarrow x(i)y$. Se cumple

$$P_{r,s}(T) = \sup(q_s(x(i)y) : \sum_j |x(j)| v_r(j) \leq 1) =$$

$$q_s(y) \sup(|x(i)| : \sum_j |x(j)| v_r(j) \leq 1) = \frac{q_s(y)}{v_r(i)}$$

para cualesquiera $s, r \in N$; lo que prueba (b).

(b) $\rightarrow$ (a). Sea A_n como antes. Dada $T \in L(\operatorname{ind} l^1(v_n), F)$ encontramos

$(k(l))$ sucesión creciente de naturales tal que $T(A_l) \subseteq B_{k(l)}$, $l \in N$. Sean k, C_n y $l_0(n)$, $n \in N$, dados por la condición (b). Si $x=(x(i)) \in A_n$ se cumple

$$q_k(Tx) \leq \sum_i |x(i)| q_k(Te_i) = \sum_i |x(i)| v_n(i) \frac{q_k(Te_i)}{v_n(i)} \leq$$

$$\sum_i |x(i)| v_n(i) C_n \max\left(\frac{q_{k(l)}(Te_i)}{v_l(i)} : 1 \leq l \leq l_0\right) \leq C_n \sum_i |x(i)| v_n(i)| \leq C_n$$

pues $q_{k(l)}(Te_i) \leq v_l(i)$ para cada $i \in I$, $l \in N$.

Entonces $U := \text{acx}(\cup(C_n^{-1} A_n : n \in N))$ es un 0-entorno en $\text{ind}\, l^1(v_n)$ y $T(U)$ es acotado en F.

El resultado anterior se deduce directamente de Vogt [1;prop.1.4] cuando F es el dual fuerte de un espacio de Fréchet. Pero no ocurre lo mismo con el siguiente

TEOREMA 1.3.2.3. Sea E un (DF)-casitonelado, $(\|\cdot\|_n)$ un sistema fundamental de seminormas continuas en E'_b. Sea X un espacio topológico localmente compacto y $\mathcal{V} := (V_n)$ una sucesión regularmente decreciente de pesos estrictamente positivos y continuos en X. Las siguientes condiciones son equivalentes :

(a) $L(E, \mathcal{V}_0 C(X)) = LB(E, \mathcal{V}_0 C(X))$

(b) $\forall (k(l)) \uparrow \exists k \ \forall n \ \exists l_0 = l_0(n), C_n > 0$:

$$\|u\|_n V_k(x) \leq C_n \max(\|u\|_l V_{k(l)}(x) : 1 \leq l \leq l_0)$$

para todo $x \in X$, $u \in E'$.

Nota: La significación y relevancia de la condición "regularmente decreciente" debe verse en Bierstedt-Meise-Summers

[1;sección 2]. Es equivalente a que $\vartheta_0 C(X)$ sea completo (luego un (LB)-regular algebraica y topológicamente isomorfo a $C\overline{V}_0(X)$).

Dem:

Sean $A_n := \{z \in E : |\langle u, z\rangle| \leq 1$ para todo $u \in E'$ que cumpla $\|u\|_n \leq 1\}$ $B_n := \{f \in C(V_k)_0(X) : \sup(V_k(x)|f(x)| : x \in X) \leq 1\}$. (A_n) (resp. (B_n)) es una s.f.a. en E (resp. $\vartheta_0 C(X)$). Para cada $f \in C(V_k)_0(X)$ se tiene $q_k(f) := \sup(V_k(x)|f(x)| : x \in X)$ y para cada $T \in L(E, \vartheta_0 C(X))$ se cumple $P_{n,k}(T) = \sup(q_k(Tz) : |\langle z, u\rangle| \leq 1$ si $\|u\|_n \leq 1)$, $n,k \in N$.

(a)$\rightarrow$(b). Por el teorema 1.3.2.1. $\forall(k(l))\uparrow\ \exists k\ \forall n\ \exists l_0 = l_0(n), C_n > 0$:

(1) $P_{n,k}(T) \leq C_n \max(P_{l,k(l)}(T) : 1 \leq l \leq l_0)$ para todo $T \in L(E, \vartheta_0 C(X))$ tal que $P_{l,k(l)}(T) < \infty\ \forall l$.

Fijemos $x \in X$, $u \in E'$. Dado U entorno abierto de x existe $\varphi_U \in C(X)$ tal que $0 \leq \varphi_U \leq 1$, $\operatorname{sop} \varphi_U$ es compacto, $\operatorname{sop} \varphi_U \subseteq U$ y $\varphi_U(x) = 1$. Sea T_U la aplicación de E en $\vartheta_0 C(X)$ dada por $z \in E \longrightarrow (y \in X \longrightarrow \varphi_U(y).\langle u, z\rangle)$. Si $r,s \in N$ se cumple

$$P_{r,s}(T_U) = \sup(\varphi_U(y)|\langle u, z\rangle| v_s(y) : y \in X,\ z \in A_r) =$$

$$\|u\|_r \sup(\varphi_U(y) v_s(y) : y \in X).$$

Por tanto, (1) nos dice

(2) $\|u\|_n \sup(\varphi_U(y) v_k(y) : y \in X) \leq C_n \max(\|u\|_l \sup(\varphi_U(y) v_{k(l)}(y) : y \in X) :$

$1 \leq l \leq l_0)$ para todo entorno abierto U de x.

Sea D el conjunto de entornos abiertos de x con la relación de orden $U_1 \leq U_2$ si y solo si $U_2 \subseteq U_1$. Se comprueba fácilmente que la red $(\sup(\varphi_U(y) v_m(y) : y \in X) : U \in D)$ converge a $v_m(x)$ para cada $m \in N$ y, en consecuencia, deducimos de (2) que

$\|u\|_n v_k(x) \leq C_n \max(\|u\|_l v_{k(l)}(x) : 1 \leq l \leq l_0)$, lo que prueba (b).

(b)→(a). Sea $T\in L(E,\mathcal{O}_0C(X))$. Existen una sucesión creciente de naturales $(k(l))$ y $D_l>0$ tales que $T(A_l)\subseteq D_lB_{k(l)}$, $l\in N$. Sean $k, l_0(n)$ y C_n, $n\in N$, dados por la condición (b).

Para probar que T es acotada encontraremos $L_n>0$ tales que $T(A_n)\subseteq L_n\overline{B}_k$, $n\in N$ (pues entonces $\overline{acx}(\cup(L_n^{-1}A_n : n\in N))$ es un 0-entorno en E cuya imagen por T está acotada). Con este fin sea $\phi\in B_k^0$ (ϕ está en $(\mathcal{O}_0C(X))'=(C\overline{V}_0(X))'$). Por Summers [1] existen $\overline{v}\in\overline{V}$ y μ medida de Radón en X, $|\mu|\leq 1$, cumpliendo

$$<\phi, g> = \int_X g\overline{v}\, d\mu \quad \text{para todo } g\in C\overline{V}_0(X).$$

1. Dado $x\in X$ sea $\delta(x)\in(\mathcal{O}_0C(X))'$, dada por $<\delta(x), g>:=g(x)$. $\delta(x)\circ T\in E'$ y $|\delta(x)\circ T|_m=\sup(|T(z)(x)| : z\in A_m)$. Por (b) se obtiene $\sup(|T(z)(x)| : z\in A_n)v_k(x)\leq C_n\max(\sup(|T(z)(x)| : z\in A_l)v_{k(l)}(x) : 1\leq l\leq l_0)$

2. Fijemos $z\in A_n$.

$$|<\phi, T(z)>| = \left|\int_X T(z)(x)\overline{v}(x)\, d\mu\right| \leq \int_X |T(z)(x)|\,\overline{v}(x)\, d|\mu| =$$

$$\int_X |T(z)(x)|v_k(x)\frac{\overline{v}(x)}{v_k(x)}\, d|\mu|$$

Pero la desigualdad obtenida en 1. y la inclusión $T(A_l)\subseteq D_lB_{k(l)}$ permiten concluir $|T(z)(x)|v_k(x)\leq C_n\max(D_l : 1\leq l\leq l_0)=: L_n$. Entonces

$$|<\phi, T(z)>|\leq L_n\int_X \frac{\overline{v}}{v_k}\, d|\mu|.$$

3. Acotemos la integral anterior. Por el teorema de

Radón-Nicodym existe h μ-medible tal que $|h|=1$ y

$$\int_X \frac{\overline{v}}{v_k} d|\mu| = \int_X \frac{\overline{v}}{v_k} h \, d\mu$$

$\overline{v}/v_k$ es acotada luego dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que: si C es μ-medible y $|\mu|(C) \leq \delta$ entonces

$$\int_X \frac{\overline{v}}{v_k} d|\mu| \leq \varepsilon$$

y por el teorema de Lusin encontramos $f \in C(X)$ tal que $|\mu|(A) < \delta$ siendo $A:=\{x \in X : f(x) \neq h(x)\}$. En consecuencia

$$\int_X \frac{\overline{v}}{v_k} h \, d|\mu| \leq \varepsilon + \int_{X \setminus A} \frac{\overline{v}}{v_k} f \, d\mu$$

Sean V abierto : $X \setminus A \subseteq V$, $|\mu|(V \setminus (X \setminus A)) < \delta$

K compacto : $K \subseteq V$, $|\mu|(V \setminus K) < \delta$

Sea $\psi \in C(X)$ con soporte compacto y contenido en V, $0 \leq \psi \leq 1, \psi(x)=1$ para todo $x \in K$. Entonces

$$\int_X \frac{\overline{v}}{v_k} h \, d\mu \leq 3\varepsilon + \int_X \frac{\overline{v}}{v_k} f\psi \, d\mu \leq \int_V \frac{\overline{v}}{v_k} f\psi \, d\mu + 4\varepsilon = \int_X \overline{v} \frac{f\psi}{v_k} \, d\mu + 4\varepsilon = \langle \phi, \frac{f\psi}{v_k} \rangle$$

Pero $f\psi/v_k \in B_k$ y $\phi \in B_k^0$ y por tanto

$$\int_X \frac{\overline{v}}{v_k} d|\mu| \leq 1$$

4. Por 2. y 3. concluimos que $|\langle \phi, T(z) \rangle| \leq L_n$ para todo $z \in A_n$, $n \in N$, y como $\phi \in B_k^0$ era arbitrario se obtiene $T(A_n) \subseteq L_n \overline{B}_k^{\vartheta_0 C(X)}$, $n \in N$. Por tanto $T \in LB(E, \vartheta_0 C(X))$.

CAPITULO 2.

CONMUTATIVIDAD DEL PRODUCTO TENSORIAL CON LIMITES INDUCTIVOS

INTRODUCCION

El propósito general de este capitulo es estudiar la incidencia del estudio de la identidad $L(E,F)=LB(E,F)$ en dos cuestiones relacionadas con la conmutatividad de los limites inductivos y los productos tensoriales.En ambos casos tomamos $F = \operatorname{ind} F_n$ un limite inductivo (regular) y un espacio localmente convexo E. La primera cuestión es la siguiente: ¿cuándo es cierto que $E \otimes_\pi F = \operatorname{ind}(E \otimes_\pi F_n)$ se cumple topológicamente?. La segunda hace referencia a la identidad algebraica de $E \varepsilon F$ y $\operatorname{ind}(E \varepsilon F_n)$.

Con respecto al primer problema, ya Grothendieck probó que si E es un espacio con la c.n.p. entonces $E \otimes_\pi F = \operatorname{ind}(E \otimes_\pi F_n)$ es cierto topológicamente (cf. Köthe § 41.6.(6)). Bonet [3] observó que si E cumple $E \otimes_\pi F = \operatorname{ind}(E \otimes_\pi F_n)$ topológicamente para un limite inductivo hiperestricto, entonces E tiene la c.n.p. y procedió a investigar el problema de la identidad topológica para espacios E que no cumplen la c.n.p., por ejemplo si cada F_n era denso en F_{n+1} o caracterizando pares de espacios (E,F), E Fréchet y F un (LB) regular, que cumplen la identidad topológica mediante

$L(E,F'_b) = LB(E,F'_b)$. Véanse los artículos Bonet [4,6], Bonet-Schmets [1]

Con respecto a la segunda cuestión Hollstein proporcionó el siguiente resultado: un espacio de Banach E es un L_∞-espacio si y solo si para cada $F = \text{ind}F_n$ se tiene que $E \otimes_\varepsilon F = \text{ind}(E \otimes_\varepsilon F_n)$ es cierto topológicamente (ver Hollstein [1]) y dió una caracterización de los límites inductivos de espacios de Banach $F = \text{ind}F_n$ tales que $E \otimes_\varepsilon F = \text{ind}(E \otimes_\varepsilon F_n)$ para todo espacio normado E (límites inductivos con partición local de la unidad: Hollstein [2]). Con respecto a la identidad algebraica Bierstedt, Meise [1] probaron que si F es compactamente regular (véase Bierstedt-Meise [3]) y E es Banach entonces $E \varepsilon F = \text{ind}(E \varepsilon F_n)$ es cierto algebraicamente. Nosotros comprobamos que si la identidad algebraica se cumple para todo espacio de Banach, entonces el límite inductivo debe ser compactamente regular (Teorema 2.2.1). Además extendemos un resultado de Floret (sin publicar), y vemos que si E es Fréchet y $F = \text{ind}F_n$ es un (LB) compactamente retractivo entonces la identidad algebraica es equivalente a $L(F'_{co}, E) = LB(F'_{co}, E)$. Además en ese caso el nuevo límite inductivo $\text{ind}(E \varepsilon F_n)$ es compactamente retractivo y por tanto sucesionalmente completo (proposición 2.2.2).

Nuestros resultados respecto del primer problema se encuentran recogidos al principio del capítulo y deseamos destacar las proposiciones 1. y 2. En el teorema 3 probamos que un espacio de Fréchet E cumple (BD) si y solo si $E \otimes_\pi F = \text{ind}(E \otimes_\pi F_n)$ topológicamente para todo límite inductivo $F = \text{ind}F_n$ con F_n denso en F_{n+1}. También se han incluido algunas observaciones acerca de

la identidad topológica de $E \otimes_\varepsilon F$ y $\mathrm{ind}(E \otimes_\varepsilon F_n)$ si E es una coyección.

En la sección 2. estudiamos las identidades algebraicas

$E \varepsilon (\mathrm{ind} F_n) = \mathrm{ind}(E \varepsilon F_n)$ y $K_p(\overline{V}, E) = \mathrm{indl}_p(v_n, E)$ (E Fréchet).

Este capitulo contiene un apéndice. La justificación es la siguiente: Valdivia probó que si un espacio G contiene un subespacio H localmente denso y bornológico entonces G es bornológico (se pueder encontrar una prueba en Pérez Carreras-Bonet[1;cap.6]). Para estudiar cuando $E \varepsilon F$ es bornológico seria interesante conocer bajo qué condiciones es $E \otimes_\varepsilon F$ localmente denso en $E \varepsilon F$. Nuestro teorema (2.3.8.) demuestra que si E es Fréchet, entonces E es de Schwartz y tiene la propiedad de aproximación acotada si y solo si, para todo espacio localmente convexo F, todo punto de $E \varepsilon F$ es limite local de una sucesión en $E \otimes_\varepsilon F$. La idea de la prueba está basada en un argumento de Behndorf [1].

SECCION 2.1

Bonet [6] prueba que si E es un espacio de Fréchet y $F=\operatorname{ind}F_n$ es un (LB) regular entonces se cumple $E\otimes_\pi F=\operatorname{ind}(E\otimes_\pi F_n)$ si y solo si $L(E,F'_b)=LB(E,F'_b)$ (y por tanto si y solo si $L(F,E'_b)=LB(F,E'_b)$ por la observación 1.2.6.(1)).

OBSERVACION 2.1.1. Sean $E:=\operatorname{ind}(E_n,\|.\|_n)$ un (LN) y F casitonelado. Son equivalentes:

(a) $E\otimes_\pi F=\operatorname{ind}(E_n\otimes_\pi F)$.

(b) El par (E,F'_b) tiene la propiedad de localización.

Nota: Si F es metrizable, (b) equivale a $L(E,F'_b)=LB(E,F'_b)$.

Dem: B_n denotará la bola unidad de $(E_n,\|.\|)$. Dado $T\in L(E,F'_b)$ sea u_T la forma lineal sobre $E\otimes F$ definida por

$$u_T(x\otimes y):=\langle T(x),\ y\rangle \quad \text{para todo } x\in E,\ y\in F.$$

(a)$\rightarrow$(b). Sea H un equicontinuo en $L(E,F'_b)$.

1. $(u_T|_{E_n\otimes_\pi F}:\ u\in H)$ es equicontinuo. En efecto, $H(B_n)$ es acotado en F'_b, luego $V_n:=T(B_n)^0$ es un 0-entorno en F. Si $x\in B_n$, $y\in V_n$, $T\in H$ se cumple $|u_T(x\otimes y)|=|\langle T(x),\ y\rangle|\leq 1$.

2. En consecuencia $(u_T:u\in H)$ es equicontinuo en $(E\otimes_\pi F)'$, luego existen U 0-entorno en E, V 0-entorno en F tales que $|u_T(x\otimes y)|\leq p_U(x)p_V(y)$ para todo $x\in E$, $y\in F$, $T\in H$. En particular $|\langle T(x),\ y\rangle|\leq 1$ si $x\in U$, $y\in V, T\in H$, lo que prueba que $H(U)\subseteq V^0$ y H es equiacotado en $LB(E,F'_b)$.

(b)$\rightarrow$(a). Puesto que la inclusión $\operatorname{ind}(E_n\otimes_\pi F)\longrightarrow E\otimes_\pi F$ es continua, es suficiente probar que todo equicontinuo en $(\operatorname{ind}(E_n\otimes_\pi F))'$ es también un equicontinuo en $(E\otimes_\pi F)'$. Sea H un equicontinuo en $(\operatorname{ind}(E_n\otimes_\pi F))'$. Para cada $u\in H$ sea $T_u:E\longrightarrow F'_b$ dada por $\langle T_u(x),\ y\rangle:=u(x\otimes y)$ para todo $x\in E$, $y\in F$.

$(u|_{E_n \otimes_\pi F} : u \in H)$ es equicontinuo, luego existe V_n 0-entorno en F tal que $|u(x \otimes y)| \leq \|x\|_n p_{V_n}(y)$ para $x \in E_n$, $u \in H$ $(n \in N)$. Entonces $T_u(B_n) \subseteq V_n^0$ para cada $u \in H$ y $(T_u|_{E_n} : u \in H)$ es equicontinuo, $n \in N$.

En consecuencia $(T_u : u \in H)$ es equicontinuo, luego equiacotado, es decir existen U 0-entorno en E y V 0-entorno en F tales que $T_u(U) \subseteq V^0$ para todo $u \in H$. Entonces $|u(x \otimes y)| \leq 1$ para cualesquiera $x \in E$, $y \in F$, $u \in H$, lo que prueba que H es un equicontinuo en $(E \otimes_\pi F)'$.

La proposición anterior y la proposición 1.2.3. nos permiten concluir:

PROPOSICION 2.1.2. Sea E casitonelado. Son equivalentes:

(a) E cumple (BD)'.

(b) $E \otimes_\pi F = \text{ind}(E \otimes_\pi F_n)$ para todo $F = \text{ind} F_n$ (LN) con F_n denso en F_{n+1}, $n \in N$.

De hecho, una de las implicaciones es un caso particular de la siguiente:

PROPOSICION 2.1.3. Si E cumple (BD)' y $F := \text{ind} F_n$, F_n denso en F_{n+1}, entonces $E \otimes_\pi F = \text{ind}(E \otimes_\pi F_n)$.

Dem: Sea H un equicontinuo en $(\text{ind}(E \otimes_\pi F_n))'$. Dados $T \in H$, $y \in F_1$, denotamos por $T(.,y)$ el elemento de E'_{U^0} que a cada $x \in E$ hace corresponder $T(x \otimes y)$.

1. $(T|_{E \otimes_\pi F_1} : T \in H)$ es un equicontinuo, luego existe U 0-entorno en E tal que $T(.,y) \in E'_{U^0}$ para cada $y \in F_1$, $T \in H$. Para

cada $n\in N$ existen U_n 0-entorno, W_n 0-entorno abierto en F_n tales que $|T(x\otimes y)|\leq 1$ para todo $x\in U_n$, $y\in W_n$, $T\in H$. Puesto que E cumple (BD)' podemos encontrar V 0-entorno en E y $C_n>0$ ($n\in N$) con la propiedad $E'_{U^0}\cap U_n{}^0\subseteq C_nV^0$, $n\in N$.

2. Fijamos $n\in N$, $y\in C_n{}^{-1}W_n$. Sea $(y_\alpha:\alpha\in D)$ una red en F_1 convergente a y en F_n y cumpliendo $y_\alpha\in C_n{}^{-1}W_n$ para todo $\alpha\in D$. Al ser $y_\alpha\in F_1$ se cumple $T(.,y_\alpha)\in E'_{U^0}$ para cada $T\in H$, $\alpha\in D$. Entonces

$$P_{V^0}(T(.,y_\alpha))\leq C_n.P_{U_n{}^0}(T(.,y_\alpha))\leq 1 \text{ pues } y_\alpha\in C_n^{-1}W_n, \text{ es decir}$$

$|T(x\otimes y_\alpha)|\leq 1$ si $x\in V$, $\alpha\in D$.

Pero si $x\in V$ entonces la aplicación $z\in F\to T(x\otimes z)$ está en F_n' y además $(y_\alpha:\alpha\in D)$ converge a y en F_n, luego
$|T(x\otimes y)|=\lim(|T(x\otimes y_\alpha)|:\alpha\in D)\leq 1$.

3. $W:=acx\cup(C_n{}^{-1}W_n:n\in N)$ es un 0-entorno en F y se cumple $|T(x\otimes y)|\leq 1$ para cualesquiera $T\in H$, $x\in V$, $y\in W$. Concluimos que H es un equicontinuo en $(E\otimes_\pi F)'$.

Sea $A=(a_n)$, $0<a_n(i)<a_{n+1}(i)$ $(n,i\in N)$, una matriz de Köthe, $v_n(i):=a_n(i)^{-1}$. Entonces

$k_p(A):=\text{indl}_p(v_n)$, $1\leq p<\infty$

$k_0(A):=\text{indc}_0(v_n)$

son ejemplos de límites inductivos $F:=\text{ind}F_n$ con F_n denso en F_{n+1}. Otro ejemplo del mismo tipo es $\vartheta_0C(X):=\text{ind}C(v_n)_0(X)$ siendo $\vartheta=(v_n)$ una sucesión decreciente de pesos estrictamente positivos y continuos en el espacio localmente compacto X.

Terzioglu [1] prueba que si E es un espacio de Fréchet que no cumple (BD) entonces existe A matriz de Köthe tal que $\lambda^1(A)$ es

nuclear y $L(E,\lambda^1(A))\neq LB(E,\lambda^1(A))$. Entonces $k_0(A):=\text{indc}_0(v_n)$ es nuclear y $(\text{indc}_0(v_n))'_b=\lambda^1(A)$ (Bierstedt-Meise-Summers [2]) con lo cual $E\otimes_\pi \text{indc}_0(v_n)\neq \text{ind}(E\otimes_\pi c_0(v_n))$.

Resumimos la información que tenemos en el siguiente

TEOREMA 2.1.4. Sea E un espacio de Fréchet. Son equivalentes:

(a) E cumple (BD).

(b) $E\otimes_\pi F=\text{ind}(E\otimes_\pi F_n)$ para todo $F=\text{ind}F_n$ con F_n denso en F_{n+1}.

(c) $E\otimes_\pi(\text{indc}_0(v_n))=\text{ind}(E\otimes_\pi c_0(v_n))$ para cualquier sucesión decreciente $\vartheta=(v_n)$ de pesos en N tal que $\text{indc}_0(v_n)$ es nuclear.

Hollstein [2] introduce los límites inductivos con partición local de la unidad y prueba que $E\otimes_\varepsilon(\text{ind}F_n)=\text{ind}(E\otimes_\varepsilon F_n)$ para todo espacio E con la c.n.p. si y solo si $\text{ind}F_n$ admite partición local de la unidad.

Bonet [4] prueba que si E es una coyección y $\vartheta=(v_n)$ es una sucesión decreciente de pesos estrictamente positivos y continuos en un espacio localmente compacto X entonces

$$E\otimes_\varepsilon \text{indC}(v_n)_0(X)=\text{ind}\,E\otimes_\varepsilon C(V_n)_0(X).$$

Bonet y Schmets [1] prueban que si X es un espacio topológico completamente regular y $F:=\text{ind}F_n$, F_n denso en F_{n+1}, entonces

$$C(X)\otimes_\varepsilon F=\text{indC}(X)\otimes_\varepsilon F_n \quad (C(X) \text{ con la topología compacto-abierta}).$$

Estos resultados nos inducen a tratar la siguiente cuestión:

Sea E un espacio de Fréchet que cumple (BD) (o al menos una coyección) y sea $F:=\operatorname{ind}F_n$ un límite inductivo con partición local de la unidad, F_n denso en F_{n+1}

¿la identidad $E\otimes_\varepsilon F=\operatorname{ind}E\otimes_\varepsilon F$ se cumple topológicamente?.

Damos a continuación algunas respuestas parciales a la pregunta anterior. En el capítulo siguiente estudiaremos el caso en que F es un límite inductivo ponderado de espacios de funciones continuas que se anulan en el infinito y E cumple (BD)'.

Recordamos que un espacio localmente convexo E es un ε-espacio si y solo si la aplicación canónica $id\otimes Q:E\otimes_\varepsilon G\longrightarrow E\otimes_\varepsilon G/H$ es abierta para cada cociente $Q:G\longrightarrow G/H$.

PROPOSICION 2.1.5. Sea E una coyección. Si $F:=\operatorname{ind}F_n$ admite partición local de la unidad y cada F_n es un ε-espacio denso en F_{n+1} entonces $E\otimes_\varepsilon \operatorname{ind}F_n=\operatorname{ind}(E\otimes_\varepsilon F_n)$.

Dem: Por hipótesis, E es el límite proyectivo estricto de una sucesión de espacios de Banach: $E=\text{s-proj}\,E_n$. Sea B_n la bola unidad de E_n y para cada $k\in N$ (resp. $n\geq k$) π_k (resp. $\pi_{n,k}$) denotará la aplicación cociente $E\longrightarrow E_k$ (resp. $E_n\longrightarrow E_k$). Sea $U_n:=\pi_n^{-1}(B_n)$, $A_n:=U_n^0$ la bola unidad de E'_n. Se puede suponer que (U_n) es base de 0-entornos en E. Dados $\Phi\in(E\otimes_\pi F)'$, $y\in F$ denotaremos por $\Phi(.,y)\in E'$ la aplicación que a $x\in E$ hace corresponder $\Phi(x\otimes y)$.

En lo que sigue se hará uso del hecho de que $E'_b:=\operatorname{ind}E'_k$ es un (LB) estricto (Dierolf-Zarnadze [1]).

La identidad $ind(E \otimes_\varepsilon F_n) \longrightarrow E \otimes_\varepsilon F$ es continua. Veamos que también es abierta. Para ello, sea W un 0-entorno absx. y cerrado en $ind(E \otimes_\varepsilon F_n)$.

1. Sea H el polar de W en B(ExF) (formas bilineales y continuas sobre ExF). Al ser E coyección y cada F_n denso en F_{n+1} sabemos que $ind(E \otimes_\pi F_n) = E \otimes_\pi F$ (proposición 2.1.3.) y por tanto H es equicontinuo en $(E \otimes_\pi F)'$. En consecuencia existe $k \in N$ tal que $\Phi(.,y) \in E'_k$ para todo $y \in F$, $\Phi \in H$.

2. Puesto que $E \otimes_\varepsilon F_n$ es un subespacio topológico de $L_b(E'_b, F_n)$ podemos encontrar una sucesión estrictamente creciente $(K(n))$ de naturales, $K(n) > k$, y V_n 0-entorno en F_n $(n \in N)$ tales que

$$\{T \in E \otimes F_n : T(A_{K(n)}) \subseteq V_n\} \subseteq W .$$

3. Para cada $n \in N$, E_k es un cociente de $E_{K(n)}$ y por tanto $\pi_{K(n),k} \otimes id : E_{K(n)} \otimes_\varepsilon F_n \longrightarrow E_k \otimes_\varepsilon F_n$ es abierta ya que F_n es un ε-espacio. Sea pues $\hat{V}_n$ un 0-entorno en F_n tal que

$$W_n := \{T \in E_k \otimes F_n : T(A_k) \subseteq \hat{V}_n\} \text{ está contenido en}$$

$$(\pi_{K(n),k} \otimes id)(\{s \in E_{K(n)} \otimes F : s(A_{K(n)}) \subseteq V_n\}).$$

Entonces $V := \{(y_n) \in \oplus(F_n : n \in N) : y_n \in 2^{-n}\hat{V}_n \text{ para todo } n \in N\}$ es un 0-entorno en $\oplus(F_n : n \in N)$ y $\hat{W} := \{T \in E \otimes \oplus(F_n : n \in N) : T(A_k) \subseteq V\}$ es un 0-entorno en $E \otimes \oplus(F_n : n \in N)$.

Sea Q la aplicación cociente de $\oplus(F_n : n \in N)$ sobre F.

4. Veamos que $\hat{W} \subseteq (id \otimes Q)^{-1}(W)$. Sean $T \in \hat{W}$, $\Phi \in H$. Podemos escribir $T = \Sigma(J_n \circ T : n \in N)$ (suma finita), siendo J_n la proyección de $\oplus(F_l : l \in N)$ sobre F_n. Llamamos $T_n := J_n \circ T$.

Si $T:=\sum_{j=1}^{p} x_j \otimes (y_j^n : n\in N)$ entonces $T_n = \sum_{j=1}^{p} x_j \otimes y_j^n$ y la aplicación

$T_n|_{E'_k} : E'_k \longrightarrow F_n$ viene dada por $u \to \sum_{j=1}^{p} \langle u, \pi_k(x_j)\rangle y_j^n$, esto es,

$$T_n|_{E'_k} = \sum_{j=1}^{p} \pi_k(x_j) \otimes y_j^n \in E_k \otimes F_n .$$

Se cumple $T_n(A_k) \subseteq 2^{-n}V_n$, luego $T_n|_{E'_k} \in 2^{-n}W_n$ y por 3. existe $\tilde{s}_n \in E_{K(n)} \otimes F_n$ tal que $\tilde{s}_n(A_{K(n)}) \subseteq 2^{-n}V_n$ y $(\pi_{K(n),k} \otimes id)(\tilde{s}_n) = T_n|_{E'_k}$.

Si $\tilde{s}_n := \sum_{j=1}^{l(n)} \pi_{K(n)}(z_j) \otimes \tilde{y}_j^n$ entonces $s_n := \sum_{j=1}^{l(n)} z_j \otimes \tilde{y}_j^n \in E \otimes F_n$ (subespacio vectorial de $L_b(E'_b, F_n)$) y cumple $s_n(A_{K(n)}) \subset 2^{-n}V_n$, $S_n|_{E'_k} = T_n|_{E'_k}$

Puesto que $\Phi(.,y) \in E'_k$ para cada $y \in F, \Phi \in H$ concluimos que $T_n \circ F = s_n \circ F$ para todo $\Phi \in H$. En consecuencia

$$|\langle (id\otimes Q)(T), \Phi\rangle| = |\langle \sum_{n=1}^{\infty} T_n, \Phi\rangle| \le \sum_{n=1}^{\infty} |\langle T_n, \Phi\rangle| = \sum_{n=1}^{\infty} |\text{traza}(T_n \circ \Phi)| =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\text{traza}(s_n \circ \Phi)| = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle s_n, \Phi\rangle| \le 1 \quad \text{pues } s_n(A_{K(n)}) \ 2^{-n}V_n$$

Esto prueba que $(id \otimes Q)(\widehat{W}) \subseteq H^0 = W$.

5. La aplicación $id \otimes Q : E \otimes_\varepsilon \oplus(F_n : n\in N) \longrightarrow E \otimes_\varepsilon F$ es un cociente pues $\text{ind}F_n$ admite partición local de la unidad (Hollstein [2]), y puesto que $(id\otimes Q)^{-1}(W)$ es un 0-entorno en $E \otimes_\varepsilon \oplus(F_n : n\in N)$ concluimos que W es un 0-entorno en $E \otimes_\varepsilon F$. Queda probado lo que queríamos.

PROPOSICION 2.1.6. Sea E un producto numerable de espacios de Banach. Si $F := \text{ind}F_n$ admite partición local de la unidad y cada F_n es denso en F_{n+1} entonces $E \otimes_\varepsilon F = \text{ind}(E \otimes_\varepsilon F_n)$.

Nota: Todo producto numerable de espacios de Banach es una coyección, pero Moscatelli [1] dió ejemplos de coyecciones que no son isomorfas a ningún producto numerable de espacios de Banach.

Dem: $E:=\Pi(E_j:j\in N)$, E_j Banach para cada $j\in N$. Al igual que antes, vamos a probar que $\mathrm{ind}(E\otimes_\varepsilon F_n)\longrightarrow E\otimes_\varepsilon F$ es abierta. Sea W un 0-entorno absx. y cerrado en $\mathrm{ind}(E\otimes_\varepsilon F_n)$.

1. Existen U 0-entorno en E y q seminorma continua en F_1 tales que $\{T\in E\otimes F_1 : q(Tu)\leq 1 \text{ para todo } u\in U^0\}\subseteq 2^{-1}W$ (nótese que $E\otimes F_1\subset L(E'_b,F_1)$). Sea $m\in N : \Pi(E_j:j>m)\subseteq U$ con lo cual $\Pi(E_j:j>m)\otimes F_1\subseteq 2^{-1}W$. Para cada $n\in N$ $\Pi(E_j:j>m)\otimes F_1$ es denso en $\Pi(E_j:j>m)\otimes_\varepsilon F_n$ y $W\cap(\Pi(E_j:j>m)\otimes F_n)$ es cerrado en $\Pi(E_j:j>m)\otimes_\varepsilon F_n$, luego $\Pi(E_j:j>m)\otimes F_n\subseteq 2^{-1}W$. Esto es, $\Pi(E_j:j>m)\otimes F\subseteq 2^{-1}W$.

2. $\Pi(E_j:j\leq m)$ es un espacio de Banach y $\mathrm{ind}F_n$ admite partición local de la unidad, luego $\Pi(E_j:j\leq m)\otimes_\varepsilon F=\mathrm{ind}(\Pi(E_j:j\leq m)\otimes_\varepsilon F_n)$ y puesto que $\mathrm{ind}(\Pi(E_j:j\leq m)\otimes_\varepsilon F_n)\longrightarrow \mathrm{ind}(E\otimes_\varepsilon F_n)$ es continua podemos encontrar V 0-entorno en $\Pi(E_j:j\leq m)$ y p seminorma continua en F tales que $\{T\in(\Pi E_j:j\leq m)\otimes F : p(Tu)\leq 1 \text{ para todo } u\in V^0\}\subseteq 2^{-1}W$.

3. Pero entonces es claro que $\{T\in E\otimes F : p(Tu)\leq 1 \text{ para todo } u\in(V\times\Pi(E_j:j>m))^0\}$ es un 0-entorno en $E\otimes_\varepsilon F$ contenido en W.

SECCION 2.2.

Vamos a tratar ahora el problema de la identidad algebraica $E\varepsilon(\mathrm{ind}F_n)=\mathrm{ind}(E\varepsilon F_n)$.

TEOREMA 2.2.1. Sea $F:=\text{ind}F_n$ un límite inductivo de espacios localmente convexos. Son equivalentes:

(a) $\text{ind}F_n$ es compactamente regular.

(b) $E\varepsilon F=\text{ind}(E\varepsilon F_n)$ algebraicamente para cualquier espacio de Banach E.

Dem: (a)→(b) es debido a Bierstedt y Meise [1].

(b)→(a). Sea K compacto en F. K^0 es un 0-entorno en $(F',\mu(F',F))$ y entonces $(F'_{(K^0)})'$ es algebraicamente isomorfo a F_K. Tomamos $E:=F'_{(K^0)}$. Entonces $E\varepsilon G=L_e(E'_{co}, G)$ para cada espacio localmente convexo G y $E'_{co}=(F_K, co(F_K, F'_{(K^0)}))$ donde $co(F_K, F'_{(K^0)})$ denota la topología de la convergencia uniforme sobre los absx. y compactos de E.

1. La inclusión $K\longrightarrow(F_K, \sigma(F_K, F'_{(K^0)}))$ es continua pues un entorno de $x_0\in K$ en $(K, \sigma(F_K, F'_{(K^0)}))$ es la intersección de K con un entorno de x_0 en $\sigma(F, F')$. Luego K es compacto en $(F_K, \sigma(F_K, F'_{(K^0)}))$, y por tanto compacto en E'_{co}.

2. * denotará polar respecto del par dual $< F_K, F'_{(K^0)} >$ y π es la aplicación cociente $F'\longrightarrow F'_{(K^0)}$. Sea U 0-entorno absx. y cerrado en F. U^0 es compacto en F'_{co}, luego $\pi(U^0)$ es compacto en $F'_{(K^0)}$. Entonces $U\cap F_K=(\pi(U^0))^*$ es un 0-entorno en $(F_K, co(F_K, F'_{(K^0)}))$. Queda probado que la inclusión $E'_{co}\longrightarrow F$ es continua. Por hipótesis debe existir $n\in N$ tal que E'_{co} se inyecta continuamente en F_n. Pero hemos comprobado que K es compacto en E'_{co} y en consecuencia K es compacto en F_n, lo que prueba que $\text{ind}F_n$ es compactamente regular.

Veamos la relación entre la identidad algebraica

$E \varepsilon F = \text{ind}(E \varepsilon Fn)$ y la identidad L=LB cuando E es un espacio de Fréchet y $\text{ind}F_n$ es un (LF)-compactamente regular.

PROPOSICION 2.2.2. Sean E un espacio de Fréchet y $F:=\text{ind}F_n$ un (LF)-compactamente regular. Son equivalentes:

(a) $E \varepsilon F = \text{ind}(E \varepsilon F_n)$ algebraicamente

(b) $L(F'_{co}, E) = LB(F'_{co}, E)$

(c) Para todo compacto H en $E \varepsilon F$ existe $m \in N$: H está contenido y es compacto en $E \varepsilon F_m$

Dem: (b)→(a). Dado $T \in L(F'_{co}, E) = E \varepsilon F$ existe B acotado en E tal que $T \in L(F'_{co}, E_B) = E_B \varepsilon F$. Pero entonces, puesto que $\text{ind}F_n$ es compactamente regular, Bierstedt-Meise [1] permite concluir que existe $n \in N$ con la propiedad $T \in E_B \varepsilon F_n \subseteq E \varepsilon F_n$

(a)→(b). Sea $T \in L(F'_{co}, E)$. Por hipótesis existe $n \in N$ de modo que $T \in L((F_n)'_{co}, E)$, pero entonces Ruess [1] nos dice que podemos encontrar un precompacto K en F_n tal que $T(K^0)$ es precompacto en E, es decir, T es un operador compacto. En particular $T \in LB(F'_{co}, E)$.

(a)→(c). (Un) será una base de 0-entornos en E. Sea H compacto en $E \varepsilon F$.

1. Para cada $n \in N$, H es compacto en $E_{(Un)} \varepsilon F$ y por tanto (Defant-Govaerts [1]) existe una sucesión creciente de naturales (k(1)) tal que H es compacto en $E_{(Un)} \varepsilon F_{k(n)}$, $n \in N$. Puesto que $E_{(Un)} \varepsilon F_{k(n)}$ es metrizable encontramos Kn absx. compacto en $E_{(Un)} \varepsilon F_{k(n)}$ tal que H es compacto en $(E_{(Un)} \varepsilon F_{k(n)})_{Kn}$. Sea $L_n := K_n(U_n^0)$ absx. compacto en $F_{k(n)}$. La aplicación

$$\psi : (E_{(Un)} \varepsilon F_{k(n)})_{Kn} \longrightarrow l_\infty(U_n^0, (F_{k(n)})_{Ln})$$

dada por $\psi_n(T) := (T(u) : u \in U_n^0)$ es lineal y continua (nótese que aquí U_n^0 es un conjunto de índices) y en consecuencia $\psi_n(H)$ es compacto en $l_\infty(U_n^0, (F_{k(n)})_{Ln})$

2. Sea $G := \{T \in L(E'_{co}, F) : T(U_n^0) \subseteq F_{Ln}, r_n(T) := \sup(q_{Ln}(Tu) : u \in U_n^0) < \infty \ \forall n \in N\}$ con la topología dada por las seminormas (r_n) (q_{Ln} es el "gauge" de Ln). G es un espacio de Fréchet:

Dada (T_m) sucesión de Cauchy en G se define facilmente una aplicación lineal $T: E'_{co} \longrightarrow F$ tal que (T_m) converge a T uniformemente sobre cada U_n^0, con lo cual $T|U_n^0$ es continua para cada $n \in N$. Puesto que E'_{co} es un (gDF) con s.f.a. (U_n^0) (ver v.g. Pérez Carreras-Bonet [1;cap.8] ó Jarchow [1; cap.12]) concluimos que $T \in L(E'_{co}, F)$ y además $T \in G$ y (T_m) converge a T en G.

3. Por hipótesis $G \subseteq \cup(E \varepsilon F_n : n \in N)$ y por el teorema de factorización de Grothendieck deducimos que existe $m \in N$ tal que

$G \subseteq E \varepsilon F_m$ y la inyección $G \longrightarrow E \varepsilon F_m$ es continua.

4. H es compacto en G. En efecto,

$r_n(T) = \sup(q_{Ln}(Tu) : u \in U_n^0) = \|\psi_n(T)\|$ (norma en $l_\infty(U_n^0, (F_{k(n)})_{Ln})$) y sabemos que $\psi_n(H)$ es compacto en $l_\infty(U_n^0, (F_{k(n)})_{Ln})$.

5. Deducimos de 3. y 4. que H es compacto en $E \varepsilon F_m$.

COROLARIO 2.2.3. (Floret).

Sean E un espacio de Fréchet, $F := \text{ind} F_n$ un (DFN). Son equivalentes:

(a) $E \hat{\otimes}_\varepsilon F = \text{ind}(E \hat{\otimes}_\varepsilon F_n)$ algebraica y topologicamente

(b) $L(E, F'_b) = LB(E, F'_b)$ y $L(F'_b, E) = LB(F'_b, E)$

Dem: Es consecuencia inmediata de las siguientes observaciones.

1. F tiene la propiedad de aproximación y podemos suponer, por paso a un espectro inductivo equivalente, que todos los F_n tienen tambiés esta propiedad. En tal caso $E\widehat{\otimes}_\varepsilon F = E\varepsilon F$ y $E\widehat{\otimes}_\varepsilon F_n = E\varepsilon F_n$. Por la proposición anterior la identidad algebraica $E\widehat{\otimes}_\varepsilon F = \mathrm{ind}(E\widehat{\otimes}_\varepsilon F_n)$ es equivalente a $L(F'_b,E) = LB(F'_b,E)$

2. Sea β la topologia hipocontinua. Claramente $(E\otimes_\pi F)' = LB(E,F'_b)$ y $(E\otimes_\beta F)' = L(E,F'_b)$ con lo cual $E\otimes_\pi F = E\otimes_\beta F$ equivale a $L(E,F'_b) = LB(E,F'_b)$ (nótese que si se da esta última igualdad entonces todo conjunto β-equicontinuo es equiacotado en $L(E,F'_b)$ y por tanto π-equicontinuo).

3. $E\otimes_\beta F = \mathrm{ind}(E\otimes_\beta F_n) = \mathrm{ind}(E\otimes_\pi F_n) = \mathrm{ind}(E\otimes_\varepsilon F_n)$ (las dos primeras igualdades por ser E, F_n espacios de Fréchet:véase v.g. Pérez Carrreras-Bonet [1;cap.11]. Para la última igualdad téngase en cuenta que $E\otimes_\varepsilon F_n \longrightarrow E\otimes_\pi F_{n+1}$ es continua al ser $F_n \longrightarrow F_{n+1}$ nuclear)

4. $\mathrm{ind}(E\otimes_\varepsilon F_n)$ es un subespacio topológico denso de $\mathrm{ind}(E\widehat{\otimes}_\varepsilon F_n)$.

Sean E Fréchet, $A=(a_n)$ una matriz de Köthe, $v_n(i) := a_n(i)^{-1}$. Por Bierstedt-Bonet [2] sabemos que la aplicación $L(\lambda^1(A),E) \longrightarrow K_\infty(\overline{V},E)$ dada por $T \longrightarrow (Te_i)_i$, es un isomorfismo algebraico (y análogamente $l_\infty(v_n,E)$ es algebraicamente isomorfo a $L(l^1(a_n),E)$) y entonces es directo comprobar que la identidad algebraica $K_\infty(\overline{V},E) = \mathrm{ind}l_\infty(v_n,E)$ equivale a $L(\lambda^1(A),E) = LB(\lambda^1(A),E)$, lo cual es a su vez equivalente a

$$\forall(k(l))\uparrow\ \exists k\ \forall n\ \exists l_0=l_0(n), C_n>0 :$$

$$\|e\|_n V_k(i) \leq C_n \max(\|e\|_l V_{k(l)}(i) : 1\leq l\leq l_0)$$

$\forall l\in N, e\in E$. (véase Vogt [1]).

PROPOSICION 2.2.4. Sean E un espacio de Fréchet, $\vartheta=(v_n)$, $1\le p\le\infty$. Son equivalentes:

(a) Para todo B acotado en $K_p(\bar{V},E)$ existe $n\in N$ tal que B es acotado en $l_p(v_n,E)$.

(b) $K_p(\bar{V},E) = \mathrm{ind} l_p(v_n,E)$ algebraicamente

(c) $\forall (k(l))\uparrow\ \exists k\ \forall n\ \exists l_0=l_0(n), C_n>0$:

$$\|e\|_n V_k(i) \le C_n \max(\|e\|_1 V_{k(l)}(i) \ : \ 1\le l\le l_0)$$

Dem: (a)$\rightarrow$(c). Sea (k(l)) una sucesión creciente de naturales. Tomamos

$$G:=\{x=(x(i))\in K_p(\bar{V},E) \ : \ \pi_l(x):=\sum_i (v_{k(l)}(i)\|x(i)\|_l)^p < \infty \ \forall l\in N\ \}$$

dotado con la topología dada por las seminormas (π_l). G es un espacio de Fréchet y por hipótesis $G\subseteq\cup(l_p(v_n,E):n\in N)$. Por tanto existe $k\in N$ tal que $G\subseteq l_p(v_n,E)$ y la inyección $G\longrightarrow l_p(v_n,E)$ es continua, lo que quiere decir que para cada $n\in N$ existen $C_n>0$ y $l_0\in N$ tales que

$$(\sum_i (v_k(i)\|x(i)\|_n)^p)^{\frac{1}{p}} \le C_n \max((\sum_i (v_{k(l)}(i)\|x(i)\|_l)^p)^{\frac{1}{p}} \ : \ 1\le l\le l_0)$$

para todo $x\in B$ y esto implica la condición (c).

(c)$\rightarrow$(a). Sea B acotado en $K_p(\bar{V},E)$. Para cada l $((\|x(i)\|_l) \ : \ (x(i))\in B)$ es acotado en $K_p(\bar{V})$ y por tanto (Bierstedt-Meise-Summers [2]) existe una sucesión creciente de naturales (k(l)) tal que

$$M_1 := \sup\left(\sum_i (v_{k(1)}(i)\,\|x(i)\|_i)^p \;:\; (x(i)) \in B\right) < \infty$$

Sean k, $C_n > 0$ y $l_0(n) \in N$ $(n \in N)$ dados por la condición (c). Entonces

$$\sum_i (v_k(i)\,\|x(i)\|_n)^p \le C_n \sum_{1=1}^{l_0} M_1$$

para cualesquiera $x \in B$ y $n \in N$, lo que quiere decir que B está contenido y es acotado en $l_p(v_n, E)$.

OBSERVACIONES 2.2.6. Sea E un espacio de Fréchet.

1. $1 < p,q < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Se puede probar que si E es nuclear entonces $K_p(\bar{V}, E)$ es algebraicamente isomorfo a $L(\lambda^q(A), E)$ y en este caso la identidad algebraica $K_p(V, E) = \text{indl}_p(v_n, E)$ es equivalente a $L(\lambda^q(A), E) = LB(\lambda^q(A), E)$. Esto explica porqué era necesaria la hipótesis E nuclear en la proposicion 1.3.1.1.

2. Si E no admite normas continuas y $\lambda^1(A)$ no es normable entonces $K_\infty(\bar{V}, E) \neq \text{indl}_\infty(v_n, E)$. En efecto, existe H subespacio cerrado de $\lambda^1(A)$ tal que $\lambda^1(A)/H$ es isomorfo a ω (Este es un resultado de Eidelheit. Se puede encontrar en Pérez Carreras-Bonet [1]) . Sean q la aplicación cociente de $\lambda^1(A)$ sobre ω y i un isomorfismo into de ω en E (E no admite normas continuas). Entonces $f := i \circ q$ está en $L(\lambda^1(A), E)$ y no es acotada y en consecuencia $K_\infty(\bar{V}, E) \neq \text{indl}_\infty(v_n, E)$.

3. Si $K_\infty(\bar{V}, E) = \text{indl}_\infty(v_n, E)$ para cualquier sucesión $\vartheta = (v_n)$ de pesos en N entonces E es Banach. En efecto , por 2. E admite normas continuas y por tanto E no es isomorfo a ningún producto $X \times \omega$ (X Banach) y por tanto (Bessaga-Pelczynski-Rolewitz [1])

existe un subespacio F de E isomorfo a un escalonado nuclear $\lambda^1(A)$ con normas continuas. Pero entonces es claro que $L(\lambda^1(A),E)\neq LB(\lambda^1(A),E)$.

PROPOSICION 2.2.7. Sean E un espacio de Fréchet con s.f.seminormas $(\|.\|_l)$, X un espacio topológico normal y $\vartheta=(v_n)$ una sucesión decreciente de pesos continuos en X. Son equivalentes:

(a) Todo acotado en $C\overline{V}(X,E)$ está contenido y es acotado en algún $C(v_n)(X,E)$

(b) $\vartheta C(X,E)=C\overline{V}(X,E)$

(c) $\forall(k(l))\uparrow\ \exists k\ \forall n\ \exists l_0=l_0(n), C_n>0$:

$$\|e\|_n V_k(x) \leq C_n \max(\|e\|_l V_{k(l)}(x) : 1\leq l\leq l_0) \quad \forall e\in E, x\in X$$

Nota: Si X es localmente compacto y σ-compacto y ϑ es regularmente decreciente entonces (c) equivale a $L(E'_b,\vartheta_0C(X))=LB(E'_b,\vartheta_0C(X))$ (véase teorema 1.3.2.3.).

Dem: (c)$\rightarrow$(a). Se razona igual que en (c)$\rightarrow$(a) proposición 2.2.4

(b)$\rightarrow$(c). Fijemos una sucesión creciente de naturales (k(l))

1. Sea $G:=\{f\in C\overline{V}(X,E) : P_l(f):=\sup(v_{k(l)}\|f(x)\|_l : x\in X)<\infty\ \forall l\}$ con la topología dada por las seminormas (P_l). G es un espacio de Fréchet.

2. Por hipótesis $G\subseteq\cup(C(v_n)(X,E) : n\in N)$ y el teorema de

factorización de Grothendieck permite concluir que existe $k\in N$ tal que $G\subseteq C(v_k)(X,E)$ y la inyección $G\longrightarrow C(v_k)(X,E)$ es continua, lo que quiere decir que para cada $n\in N$ existen $C_n>0$ y $l_0(n)\in N$ tales que $\sup(v_k(x)\,\|f(x)\|_n : x\in X)\leq C_n \max(\sup(v_{k(l)}(x)\,\|f(x)\|_l : x\in X) : 1\leq l\leq l_0)$ para todo $f\in G$.

3. Fijemos $n\in N$, $x_0\in X$, $e\in E$ con $\|e\|_n\neq 0$. Podemos suponer $\|e\|_1\neq 0$ (si $\|e\|_1=0$ razonamos con el primer $1\leq l_0(n)$ tal que $\|e\|_l\neq 0$).

$W:=\{x\in X:\sup(v_{k(l)}(x)\,\|e\|_l:\ 1\leq l\leq l0) < 2\sup(v_{k(l)}(x_0)\,\|e\|l:1\leq l_0)\}$. W es entorno abierto de x_0. Existe $g\in C(X,[0,1])$ tal que $g(x_0)=1$, $\operatorname{sop} g \subseteq W$. $g\in C(v_{k(l)})(X)$ pues

$$v_{k(l)}(z)g(z) \leq \frac{2}{\|e\|_1}\sup(v_{k(l)}(x_0)\,\|e\|_1 : 1\leq l\leq l_0) \quad \forall z\in W.$$

y claramente $f:= g\otimes e\in G$. Se cumple

$v_k(x_0)\,\|e\|_n = v_k(x_0)\,\|((g\otimes e)(x_0))\|_n \leq$

$C_n \max(\sup(v_{k(l)}(x)\,\|g(x)e\|_l : x\in X) : 1\leq l\leq l_0) \leq$

$2C_n \max(v_{k(l)}(x_0)\,\|e\|_l : 1\leq l\leq l_0)$. Queda probado (c).

APENDICE 2.3.

La conmutatividad del producto tensorial con los límites inductivos permite deducir el carácter bornológico del producto tensorial de dos espacios bornológicos. Por ejemplo, si E es un espacio de Fréchet, $F:=\operatorname{ind} F_n$ es un (DF) bornológico y $E\otimes_\varepsilon \operatorname{ind} F_n = \operatorname{ind}(E\otimes_\varepsilon F_n)$ entonces $E\otimes_\varepsilon F$ es también bornológico. De hecho, Hollstein [2] obtiene condiciones bajo las cuales el ε-producto tensorial de dos (DF) bornológicos es también

bornológico y Bonet-Schmets 1[] se sirven también de la conmutatividad para deducir que ciertos espacios del tipo $C(X) \otimes_\varepsilon E$ son bornológicos.

Muy recientemente Taskinen [2] ha dado un ejemplo de un espacio de Fréchet-Montel F con la propiedad de aproximación tal que $E:=F'_b$ cumple que $E \varepsilon E$ no es (DF). Esto implica que $E \otimes_\varepsilon E$ no es (DF). En este caso E es (DF) y bornológico.

El siguiente resultado, debido a Valdivia, se puede encontrar en Pérez Carreras-Bonet [1;cap.6]:

Lema: Si E es bornológico y localmente denso en F entonces F también es bornológico.

Para poder asegurar la densidad local de $E \otimes_\varepsilon F$ en $E \varepsilon F$ (ε-producto de Schwartz) introducimos la siguiente propiedad de aproximación:

DEFINICION 2.3.1. Un espacio E tiene la propiedad de aproximación local (p.a.l.) si existe una sucesión de operadores de rango finito $(\varphi_n : E \longrightarrow E)$ que converge a la identidad localmente en $L_{co}(E,E)$.

Notación: co denota la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos absx. y compactos de E.

PROPOSICION 2.3.2.

(a) Si E tiene la p.a.l. entonces $E \otimes_\varepsilon F$ es localmente denso en

$E \varepsilon F$ para todo espacio localmente convexo F.

(b) Si $E \otimes_\varepsilon F$ es localmente denso en $E \varepsilon F$ para todo espacio localmente convexo F y se cumple $(E'_{co})'_{co} = E$ entonces E tiene la p.a.l.

OBSERVACIONES 2.3.3.

(1) Si E es localmente completo entonces $L_{co}(E,E)$ y $L_b(E,E)$ tienen los mismos acotados.

(2) Sea E localmente completo y casitonelado. Si E tiene la p.a.l. entonces E'_b también tiene la p.a.l.

(3) Sea E localmente completo con la p.a.l. Entonces para cada acotado absx. A en E existe un acotado absx. B en E tal que la inclusión $E_A \longrightarrow E_B$ es compacta:

En efecto, sea un H un acotado absx. en $F := L_b(E,E)$ que contenga a la identidad y $(\varphi_n : n \in N)$ una sucesión en L(E,E) formada por operadores de rango finito que converge a la identidad en el espacio normado F_H. Entonces $\overline{H(A)} := \overline{acx}\{T(x) : T \in H, x \in A\}$ es un disco de Banach en E y $(\varphi_n |_{E_A} : n \in N)$ converge a la inclusión $E_A \longrightarrow E_{\overline{H(A)}}$ en $L_b(E_A, E_{\overline{H(A)}})$, lo que prueba que la inclusión $E_A \longrightarrow E_{\overline{H(A)}}$ es compacta.

De (2) y (3) se deduce la siguiente:

PROPOSICION 2.3.4. Todo espacio de Fréchet con la p.a.l. es un espacio de Schwartz.

Recordamos que un espacio de Fréchet E tiene la propiedad de

aproximación acotada (p.a.a.) si existe una sucesión $(\varphi_n: E \longrightarrow E)$ de operadores de rango finito que converge puntualmente a la identidad.

Veamos la relación que hay entre la p.a.l. y la p.a.a. en la clase de los (FS)-espacios. Para ello necesitamos primero el siguiente lema:

LEMA 2.3.5. (Compárese con Behndorf [1;lemma 1])

Sea E un (FS)-espacio. Si (A_n) es una sucesión en $L(E,E)$ que converge a 0 puntualmente entonces existe (P_k) sucesión fundamental de seminormas continuas en E con la propiedad

$$\lim_n \sup\{P_k(A_n x) : P_{k+1}(x) \leq 1\} = 0 \text{ para todo } k \in N.$$

Dem: Sea (q_k) un sistema fundamental de seminormas en E. Llamamos $q^*_k(x) := \sup\{q_k(x - A_n x) : n \in N\}$, $x \in E$. (q^*_k) es un sistema fundamental de seminormas en E pues $q_k \leq q^*_k$ y (A_n) es un equicontinuo.

Al ser E un espacio de Schwartz podemos encontrar una sucesión estrictamente creciente de naturales $(j(k))$, $j(k) > k$, tal que:

Para cada $k \in N$, $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_m\} \supseteq E$: si $q^*_{j(k)}(x) \leq 1$ entonces $q^*_k(x - x_i) \leq \varepsilon$ para algún i $(1 \leq i \leq m)$. Pero en tal caso $q_k(A_n x) \leq q_k((x - A_n x) - (x_i - A_n x_i)) + q_k(x - x_i) + q_k(A_n x_i) \leq 2\varepsilon + q_k(A_n x_i)$.

Sea $n_0 \in N$: $q_k(A_n x_i) \leq \varepsilon$ para cada $1 \leq i \leq m$ y para todo $n \geq n_0$. Entonces $n \geq n_0$ implica $q^*_k(A_n x) \leq \varepsilon$ para todo $x \in E$ tal que $q^*_{j(k)}(x) \leq 1$. Es decir, $\lim_n \sup\{q_k(A_n x) : q^*_{j(k)}(x) \leq 1\} = 0$.

Encontramos por inducción una sucesión estrictamente creciente

de naturales $(m(n))$ tal que $q^*_{j(m(n))} \leq q_{m(n+1)}$. Si $P_n := q_{m(n)}$ entonces (P_n) es un sucesión fundamental de seminormas en E y además, para cada $k \in N$, se cumple

$\lim_n \sup\{P_k(A_n x) : P_{k+1}(x) \leq 1\} \leq \lim_n \sup\{q_{m(k)}(A_n x) : q^*_{j(m(k))}(x) \leq 1\} = 0$

PROPOSICION 2.3.6. Sea E un (FS)-espacio. De toda sucesión (A_n) en $L(E,E)$ que converge puntualmente a 0 se puede extraer una subsucesión que converge a 0 localmente en $L_b(E,E)$.

Dem: Sea (P_n) dado por el lema anterior. Por inducción encontramos $(A_{n,k} : n,k \in N)$ cumpliendo:

1. $(A_{n,1} : n \in N)$ es subsucesión de $(A_n : n \in N)$
2. $(A_{n,k+1} : n \in N)$ es subsucesión de $(A_{n,k} : n \in N)$
3. $\lim_n n.\sup\{P_k(A_{n,k}x) : P_{k+1}(x) \leq 1\} = 0$ para todo $k \in N$.

Entonces $(A_{n,n} : n \in N)$ es una subsucesión de (A_n) y

$\lim_n n.\sup\{P_k(A_{n,n}x) : P_{k+1}(x) \leq 1\} = 0$ para todo $k \in N$. De aquí es claro que $(n.A_{n,n})$ converge a 0 en $L_b(E,E)$ y por tanto $(A_{n,n})$ converge a 0 localmente en $L_b(E,E)$.

COROLARIO 2.3.7. Un (FS)-espacio con la p.a.a. tiene también la p.a.l.

Los resultados anteriores se pueden resumir en el siguiente

TEOREMA 2.3.8. Sea E un espacio de Fréchet. Son equivalentes:

(a) E tiene la p.a.l.

(b) E es un espacio de Schwartz con la p.a.a.

Se deduce que los espacios de Kötke que son Schwartz y sus duales tienen la p.a.l. Es muy fácil probar la siguiente

PROPOSICION 2.3.9. La p.a.l. es estable por sumas directas numerables y por productos numerables.

También:

PROPOSICION 2.3.10. Sea E localmente completo con la p.a.l. Si $\Lambda^\infty(\alpha)$ es nuclear entonces $\Lambda^\infty(\alpha,E)$ tiene la p.a.l.

Nota: 1. $\alpha=(\alpha_n)$ es una sucesión creciente divergente a ∞, $\Lambda^\infty(\alpha)$ denota el correspondiente espacio de series de potencias de orden infinito y $\Lambda^\infty(\alpha,E) := \{(x_n)_n \subseteq E : (p(x_n))_n \in \Lambda^\infty(\alpha)$ para cada seminorma continua p en E$\}$ con la topología dada por las seminormas

$\Pi_{\delta,p}((x_n)) := \Sigma(\delta^{\alpha_n} p(x_n) : n\in N)$ $(0 < \delta < \infty,\ p\in cs(E))$.

2. Este resultado (con una prueba igual) sigue siendo válido para espacios de series de potencias de tipo finito).

Dem: Sea $(\varphi_n) \subseteq E'\otimes E$, (β_n) sucesión creciente de números reales divergente a ∞, $\beta_n \leq \alpha_n$, tales que $(\beta_n^2(\varphi_n - id_E) : n\in N)$ converge a 0 en $L_{co}(E,E)$. Sea $T_m \in L(\Lambda^\infty(\alpha,E), \Lambda^\infty(\alpha,E))$ dada por

$(x_n)_n \longrightarrow (\varphi_m x_1, \varphi_m x_2, \ldots, \varphi_m x_m, 0, 0, \ldots)$.

T_m es un operador de rango finito. Veamos que (T_m) converge a la identidad localmente en $L_{co}(\Lambda^\infty(\alpha,E),\ \Lambda^\infty(\alpha,E))$.

1. Sean $t < s < \infty$, $(x_n) \in \Lambda^\infty(\alpha,E)$

$$y_p := \sum_{n=1}^{p} s^{\alpha_n} . x_n$$

(y_p) es una sucesión de Caychy en E, luego $B := (y_p : p \in N)^{00}$ es un disco de Banach. P_B denotará la norma de E_B. Se tiene

$$P_B(\sum_{n=p}^{p+1} t^{\alpha_n} x_n) \leq (\frac{s}{t})^{-\alpha_p} . P_B(\sum_{n=p}^{p+1} (\frac{s}{t})^{\alpha_n} . t^{\alpha_n} . x_n) = (\frac{s}{t})^{-\alpha_p} . P_B(\sum_{n=p}^{p+1} s^{\alpha_n} . x_n) \leq$$

$$2 . (\frac{s}{t})^{-\alpha_p}$$

Por tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^{\alpha_n} x_n \text{ converge en } E_B \text{ (luego en E)}$$

Entonces la aplicación $\psi_p : \Lambda^{\infty}(\alpha, E) \longrightarrow E$ $(0 < t < \infty)$ dada por

$$\psi_t((x_n)) := \sum_{n=1}^{\infty} t^{\alpha_n} . x_n$$

está bien definida y es claramente lineal y continua.

2. Dados $0 < t < \infty$, B compacto en $\Lambda^{\infty}(\alpha)$ la sucesión

$$(\alpha_m \sum_{n=m+1}^{\infty} t^{\alpha_n} . |y_n| : m \in N)$$

converge a 0 uniformemente para $(y_n) \in B$:

En efecto, sean $s > t$, $\phi_k : B \longrightarrow R$ la aplicación

$$(y_n) \longrightarrow \sum_{n=k}^{\infty} s^{\alpha_n} . |y_n| \qquad (k \in N).$$

La conclusión se sigue por aplicación del teorema de Dini a la sucesión (ϕ_k) y teniendo en cuenta que

$$\alpha_n t^{\alpha_n} < s^{\alpha_n} \text{ para n suficientemente grande.}$$

3. Sean K compacto en $\Lambda^{\infty}(\alpha, E)$, $p \in cs(E)$, $\varepsilon > 0$, $0 < t < \infty$. Podemos

suponer que K tiene la siguiente propiedad:

(P) Si $(x_n)\in K$ entonces $(\delta_{n,m}x_n : n\in N)\in K$ $(m\in N)$.

Puesto que $\Lambda^\infty(\alpha)$ es nuclear existe $\delta>1$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\delta^{-\alpha_n} < \infty$$

y al ser $T_{t\delta}$ continua y $(\beta_m^2(\varphi_m - id_E) : m\in N)$ convergente a 0 en $L_b(E,E)$ podemos encontrar $q\in N$ tal que si $m\geq q$ entonces $p(\beta_m^2(\varphi_m x - x))\leq 1$ para todo $x\in T_{t\delta}(K)$, es decir, si $m \geq q$ entonces

$$\beta_m^2\, p(\varphi_m(\sum_{n=1}^{\infty}(t\delta)^{\alpha_n}.x_n) - \sum_{n=1}^{\infty}(t\delta)^{\alpha_n}.x_n) \leq 1 \quad \forall\,(x_n)\in K.$$

En particular, (P) permite concluir que

$$\beta_m^2\, p((t\delta)^{\alpha_n}.(\varphi_m x_n - x_n)) \leq 1 \text{ para cada } m \geq q,\ n\in N,\ (x_1)_1\in K.$$

Pero

$$\Pi_{t,p}(\beta_m(T_m - id)((x_n)_n) = \sum_{n=1}^{m}\beta_m\, p(\varphi_m x_n - x_n)t^{\alpha_n} + \sum_{n=m+1}^{\infty}\beta_m t^{\alpha_n} p(x_n) \leq$$

$$\sum_{n=1}^{m}\delta^{-\alpha_n}\beta_m^{-1} + \sum_{n=m+1}^{\infty}\beta_m t^{\alpha_n} p(x_n) \leq \beta_m^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\delta^{-\alpha_n} + \alpha_m\sum_{n=m+1}^{\infty}t^{\alpha_n} p(x_n).$$

Por 2. existe $m_0\in N$, $m_0\geq q$, tal que si $m\geq m_0$ entonces

$$\alpha_m\sum_{n=m+1}^{\infty}t^{\alpha_n} p(x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } (x_n)\in K, \text{ y entonces } m \geq m_0 \text{ implica}$$

$$\Pi_{t,p}(\beta_m(T_m - id)((x_n)_n)) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \beta_m^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\delta^{-\alpha_n} \quad \text{para todo } (x_n)\in K.$$

Puesto que (β_m) diverge a ∞ queda probado que $(\beta_m(T_m - id) : m\in N)$ converge a 0 en $L_{co}(\Lambda^\infty(\alpha,E), \Lambda^\infty(\alpha,E))$ y $\Lambda^\infty(\alpha,E)$ tiene la p.a.l.

EJEMPLOS 2.3.11.

Los teoremas de representación de Valdivia [1] y Vogt [3] permiten concluir que cada uno de los siguientes espacios tiene la p.a.l.:

$D(K)$ $(\cong s)$, K compacto en R^n

$D(\Omega)$ $(\cong s(N))$, Ω abierto en R^n

$D'(\Omega)$ $(\cong (s')^N)$

$C^\infty(\Omega)$ $(\cong s^N)$

O_M $(\cong s(s'))$ (tiene la p.a.l. por la proposición anterior)

El trabajo reciente de Meise-B.A.Taylor-Langenbruch permite deducir p.a.l. en algunos espacios de funciones ultradiferenciables.

El teorema 2.3.8. tiene alguna consecuencia interesante:

COROLARIO 2.3.12. Sean E un (FN) (o un (DFN)) con la p.a.a. y F un espacio bornológico. Son equivalentes:

(a) $E \otimes_\pi F$ es bornológico

(b) $E \hat{\otimes}_\pi F$ es ultrabornológico

Dem: (a)→(b). Por el teorema 2.3.8. $E \otimes F$ es localmente denso en $E \hat{\otimes}_\pi F$ (si E es (DFN) habrá que usar también la observación 2.3.3.(2)).

(b)→(a). Véase [Pérez Carreras-Bonet [1] , proposiciones 11.5.1 y 11.5.2].

Sean $A=(a_n(i))$, $B=(b_n(j))$ dos matrices de Köthe y supongamos que $\lambda^1(A)$ es Schwartz. Recordemos los siguientes hechos:

1. Krone y Vogt [1] prueban que $L_b(\lambda^1(A),\lambda^1(B))$ es ultrabornológico si y solo si

(S*) $\forall\mu\ \exists n_0,k\ \forall K,m,R>0\ \exists n,S\ \forall v,j$:

$$\frac{a_m(v)}{b_k(j)} \le \text{máx}\left(S\frac{a_n(v)}{b_k(j)},\ \frac{1}{R}\frac{a_{n_0}(v)}{b_\mu(j)}\right)$$

2. Bonet [6] prueba que $\lambda^1(A)'_b\otimes_\pi\lambda^1(B)$ es ultrabornológico si y solo si $L(\lambda^1(B),\lambda^1(A))=LB(\lambda^1(B),\lambda^1(A))$, lo que es a su vez equivalente a

(V) $\forall(K(l))\uparrow\ \exists L\ \forall m\ \exists l_0,C>0$:

$$\frac{a_m(v)}{b_L(j)} \le C\,\text{máx}\left(\frac{a_l(v)}{b_{k(l)}(j)} : 1\le l\le l_0\right)\ \forall v,j$$

3. Krone y Vogt [1] prueban que (V) implica (S*) y que el recíproco es verdad si $\lambda(B)$ cumple $(\overline{\Omega})$ y $\lambda(A)$ ó $\lambda(B)$ tiene la propiedad (DN) (véase Vogt [1 y 4] para las definiciones de (DN) y $(\overline{\Omega})$)

EJEMPLO 2.3.13.

El corolario 2.3.12. proporciona una prueba directa de que, si $\lambda^1(A)$ es nuclear, entonces $L_b(\lambda^1(A),\lambda^1(B))$ es ultrabornológico si y solo si $\lambda^1(A)'_b\otimes_\pi\lambda^1(B)$ es bornológico.

CAPITULO 3.

DESCRIPCIONES PROYECTIVAS DE LIMITES INDUCTIVOS PONDERADOS DE ESPACIOS DE SUCESIONES Y FUNCIONES CON VALORES EN UN ESPACIO DE FRECHET.

INTRODUCCION.

En este capitulo vamos a establecer condiciones necesarias y suficientes para poder obtener descripciones proyectivas, mediante una familia de Nachbin asociada a una sucesión de pesos, de un limite inductivo ponderado de espacios de funciones continuas o de espacios co-escalonados de orden p, $1 \leq p < \infty$, con valores en un espacio de Fréchet E.

El problema de la descripción proyectiva de limites inductivos ponderados de espacios de funciones continuas u holomorfas fue tratado por primera vez por Bierstedt, Meise y Summers [1]. En este articulo se trató el caso del limite inductivo $\mathcal{V}_0 C(X) := \operatorname{ind} C(v_n)_0(X)$ para una sucesión decreciente de pesos estrictamente positivos en un espacio localmente compacto X. De hecho, si V es la familia de Nachbin maximal relativa a $\mathcal{V}$, entonces $\mathcal{V}_0 C(X)$ es un subespacio topológico de su envoltura proyectiva asociada $C\overline{V}_0(X)$ y ambos espacios son iguales algebraicamente si y solo si $\mathcal{V}$ es regularmente decreciente (ver

Bierstedt-Meise-Summers [1 ;sección 2]).

En este contexto el problema general de la descripción proyectiva se formuló del siguiente modo: dados un espacio topológico separado X, una sucesión decreciente de pesos $\mathcal{V}$ sobre X y un espacio localmente convexo E, determinar condiciones para que $\mathcal{V}_0C(X,E)$ sea subespacio topológico de $C\overline{V}_0(X,E)$ y/o $\mathcal{V}_0C(X,E)=C\overline{V}_0(X,E)$ algebraicamente.

Bonet [1] extendió la técnica de (Bierstedt-Meise-Summers [1]) para demostrar que si X es localmente compacto y E satisface la c.n.p. entonces $\mathcal{V}_0C(X,E)$ es un subespacio topológico denso de $C\overline{V}_0(X,E)$ (para E normado ver Bierstedt-Meise-Summers [1;sección 1]). Además si $\mathcal{V}$ es regularmente decreciente y E es (gDF) y completo entonces se tiene también la identidad algebraica. Siguiendo a Bonet [4] decimos que un espacio localmente convexo E cumple (W) (resp $(W)_\sigma$) si $\mathcal{V}_0C(X,E)$ es un subespacio topológico de $C\overline{V}_0(X,E)$ para cualquier espacio localmente compacto X (resp. para todo espacio localmente compacto y σ-compacto X) y para cualquier sucesión decreciente $\mathcal{V}$ de pesos estrictamente positivos y continuos en X. Por Bonet [4] todo espacio con la condición de apertura (ver nuestro capítulo 1), y en particular toda coyección, cumple (W) y un espacio de Fréchet reflexivo E cumple (W) si y solo si E es una coyección.

En nuestra sección 1 veremos que si E es un espacio con la propiedad (BD)'(ver 1.1.2) entonces E cumple $(W)_\sigma$ (proposición 1) Esto permite concluir que un espacio de Fréchet cumple $(W)_\sigma$ si y solo si no satisface la propiedad (*) de Bellenot y Dubinsky (o es un (BD)-espacio (capítulo 1)). De alguna forma este es un

resultado "universal" pues caracteriza los espacio de Fréchet que admiten descripción proyectiva para toda sucesión $\mathring{v}$ de pesos estrictamente positivos y continuos en todo espacio localmente compacto y σ-compacto X. Nuestro Teorema 3, que extiende Bonet [6], caracteriza los pares $(\mathring{v},E)$ de sucesiones $\mathring{v}$ y espacios de Fréchet E tales que $\mathring{v}_0C(X,E)$ es un subespacio topológico de $C\overline{V}_0(X,E)$ para un espacio localmente compacto y σ-compacto X. Aquí interviene una condición introducida por Vogt en [1].

Los métodos de descripción proyectiva fueron utilizados con éxito por Bierstedt, Meise y Summers [2] para tratar límites inductivos ponderados de espacios co-escalonados de sucesiones de orden p, $1 \leq p \leq \infty$. Nuestra sección 2 considera los problemas correspondientes a la sección 1 en este contexto.

Introducimos ahora las definiciones necesarias.

Sea X un espacio completamente regular separado. Llamamos peso en X a toda función real no negativa en X que sea semicontinua superiormente. Un conjunto de pesos V en X se dice que es una familia de Nachbin si

(a) Dados $v_1, v_2 \in V$ y $a>0$ existe $v \in V$ tal que $av_i \leq v$ $(i=1,2)$

(b) Para cada $x \in X$ existe $v \in V$ cumpliendo $v(x) > 0$

A cada familia de Nachbin V y a cada espacio localmente convexo E se asocian los siguientes espacios de Nachbin

$CV(X,E) := \{f \in C(X,E) \mid q_{v,p}(f) := \sup(v(x)p(f(x)) : x \in X) < \infty$ para cada $v \in V$ y $p \in cs(E)\}$.

$CV_0(X,E) := \{f \in C(X,E) \mid \forall \varepsilon > 0,\ v \in V$ y $p \in cs(E)\ \exists K$ compacto en X tal que $v(x)p(f(x)) < \varepsilon$ si $x \notin K\} \subseteq CV(X,E)$

$CV(X,E)$ y $CV_0(X,E)$ son espacios localmente convexos con la topología dada por el sistema de seminormas $\{q_{v,p} : v \in V,\ p \in cs(E)\}$.

Si v es un peso estrictamente positivo en X y $V := \{av : a > 0\}$ se escribe $C(v)(X,E)$ y $C(v)_0(X,E)$ en vez de $CV(X,E)$ y $CV_0(X,E)$ respectivamente y cuando X tiene la topología discreta se escribe $K_\infty(V,E)$ y $K_0(V,E)$ en vez de $CV(X,E)$ y $CV_0(X,E)$. También se sustituye $c_0(v,E)$ por $C(v)_0(X,E)$ cuando X es discreto.

Sea $\vartheta = (v_n)$ una sucesión decreciente de pesos estrictamente positivos en X. Entonces

$\overline{V} := \{\overline{v} : X \longrightarrow R^+ \mid \overline{v}$ es semicontinua superiormente y $\sup \overline{v}/v_n < \infty$ para cada $n \in N\}$ es una familia de Nachbin en X. Se definen

$\vartheta_0 C(X,E) := \operatorname{ind} C(v_n)_0(X,E)$

$\vartheta C(X,E) := \operatorname{ind} C(v_n)(X,E)$

Es claro que $\vartheta_0 C(X,E)$ (resp. $\vartheta C(X,E)$) está continuamente inyectado en $C\overline{V}_0(X,E)$ (resp. $C\overline{V}(X,E)$).

SECCION 3.1.

Nuestro objetivo es tratar el problema de la descripción proyectiva de límites inductivos ponderados de espacios de funciones continuas que se anulan en el infinito y con valores en un espacio de Fréchet E.

PROPOSICION 3.1.1. Todo espacio E con la propiedad (BD)' tiene

también la propiedad $(W)_\sigma$.

Dem: Sea X un espacio localmente compacto y σ-compacto y (v_n) una sucesión decreciente de pesos estrictamente positivos y continuos en X. Tenemos que probar que $\vartheta_0 C(X,E)$ es un subespacio topológico de $C\overline{V}_0(X,E)$. Para ello fijemos un equicontinuo H en $(\vartheta_0 C(X,E))'$ y veamos que H es también un equicontinuo para la topología inducida por $C\overline{V}_0(X,E)$.

1.La inyección canónica $C(v_n)_0(X)\otimes_\pi E \longrightarrow C(v_n)_0(X,E)$ es continua y sabemos que $\mathrm{ind}(C(v_n)_0(X)\otimes_\pi E) \cong \vartheta_0 C(X)\otimes_\pi E$ (ver 2.1.4) con lo cual H induce (por restricción) un equicontinuo en $(\vartheta_0 C(X)\otimes_\pi E)'$ y por tanto existe U 0-entorno en E tal que $\phi(g,.)\in E'_{U^0}$ para cualesquiera $g\in\vartheta_0 C(X)$ y $\phi\in H$ ($\phi(g,.)$ denota la aplicación que a $x\in E$ hace corresponder $\phi(g\otimes x)$).

2. Para cada $n\in N$ existe p_n seminorma continua en E tal que $|\phi(f)| \le \sup(v_n(x)p_n(f(x)) : x\in X)$ para cualesquiera $f\in C(v_n)_0(X,E)$, $\phi\in H$. Sea $U_n := \{y\in E : p_n(y) \le 1\}$. Puesto que E cumple (BD)' podemos encontrar una seminorma continua r en E y $\lambda_n > 0$ $(n\in N)$ tales que

$$U_n^0 \cap E'_{U^0} \subseteq \lambda_n V^0 \text{ para todo } n\in N,$$

siendo $V := \{y\in E : r(y) \le 1\}$.

Al ser X localmente compacto y σ-compacto podemos suponer que $\overline{v} := \inf 2^n \lambda_n v_n$ es estrictamente positiva y continua (Bierstedt-Meise-Summers [1;p.112]).

3. Sean K compacto en X, $m\in N$, $(U_j : 1 \le j \le n)$ un cubrimiento abierto de K y $\varphi_j \in C_c(X)$ cumpliendo $0 \le \varphi_j \le 1$, $\mathrm{sop}\varphi \subseteq U_j$ y $\Sigma(\varphi_j : 1 \le j \le n) \le 1$. Para cada $1 \le j \le n$ sea $x_j \in U_j$ tal que $v_m(x)/v_m(x_j) < 2$ para todo $x\in U_j$. Si $(z_j : 1 \le j \le n)$ son puntos de E de modo que $\sup(\lambda_m v_m(x_j) r(z_j) : 1 \le j \le n) < 1$ entonces

$|\phi(\sum_{j=1}^{n}\varphi_j\otimes z_j)|\leq 2$ para cualquier $\phi\in H$:

En efecto,

$$|\phi(\sum_{j=1}^{n}\varphi_j\otimes z_j)|\leq\sum_{j=1}^{n}|\phi(\frac{\varphi_j}{v_m(x_j)\lambda_m},\ .\ )(\lambda_m v_m(x_j)z_j)|\leq$$

$$\sum_{j=1}^{n}P_{V^0}(\phi(\frac{\varphi_j}{\lambda_m v_m(x_j)},\ .\ ))$$

donde P_{V^0} denota la norma de E'_{V^0} (obsérvese que $\lambda_m v_m(x_j)z_j\in V$ para $1\leq j\leq n$). Al cumplirse $U_m^0\cap E'_{U^0}\subseteq\lambda_m V^0$ y

$$\phi(\frac{\varphi_j}{\lambda_m v_m(x_j)},\ .\ )\in E'_{U^0}$$

se obtiene

$$P_{V^0}(\phi(\frac{\varphi_j}{\lambda_m v_m(x_j)},\ .\ ))\leq P_{U_m^0}(\phi(\frac{\varphi_j}{v_m(x_j)},\ .\ ))$$

y por tanto

$$|\phi(\sum_{j=1}^{n}\varphi_j\otimes z_j)|\leq\sum_{j=1}^{n}P_{U_m^0}(\phi(\frac{\varphi_j}{v_m(x_j)},\ .\ ))$$

Ahora bien, si $y_j\in U_m$ $(1\leq j\leq n)$ se tiene

$$\sum_{j=1}^{n}|\phi(\frac{\varphi_j}{v_m(x_j)}\otimes y_j)|=|\phi(\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi_j}{v_m(x_j)}\otimes y_j\,\eta_j)|$$

para ciertos números η_j de módulo 1, y si g denota la función

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi_j}{v_m(x_j)}\otimes y_j\eta_j$$

se cumple

$$v_m(x)p_m(g(x)=v_m(x)p_m(\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi_j(x)}{v_m(x_j)}\eta_j y_j)\leq\sum_{j=1}^{n}\frac{v_m(x)}{v_m(x_j)}\varphi_j(x)p_m(y_j)\leq 2$$

para cada $x\in X$, de donde $|\phi(g)|\leq 2$ para cualquier $\phi\in H$. Es decir queda probado que

$$|\phi(\sum_{j=1}^{n}\varphi_j\otimes z_j)|\leq 2$$

para cualquier $\phi\in H$.

4. Supongamos ahora $f\in C_c(X,E)$ de modo que $\sup(\bar{v}(x)r(f(x)):x\in X)<1$. Dado $x\in X$ sea $n(x)\in N$ tal que $2^{n(x)}v_{n(x)}(x)\lambda_{n(x)}<2\bar{v}(x)$.

$\Omega_x:=\{y\in X: 2^{n(x)}v_{n(x)}(y)\lambda_{n(x)}<2\bar{v}(y),\ v_{n(x)}(y)<2v_{n(x)}(x),\ P_{n(x)}(f(y)-f(x))v_{n(x)}(y)<2^{-n(x)}\}$ es un entorno abierto de x.

Al ser el soporte de f compacto encontramos $x_1,\ldots,x_n\in X$ tales que $\mathrm{sop}f\subseteq\cup(\Omega_{x_j}:1\leq j\leq n)$. Sean $\varphi_j\in C_c(X)$ $(1\leq j\leq n)$ cumpliendo

$$\mathrm{sop}\varphi_j\subset\Omega_{x_j},\ 0\leq\varphi_j\leq 1,\ \sum_{j=1}^{n}\varphi_j=1 \text{ en } \mathrm{sop}f,\ \sum_{j=1}^{n}\varphi_j\leq 1 \text{ en } X$$

Tomamos

$$h:=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j\otimes f(x_j)\in C_c(X)\otimes E$$

$$I_k:=\{j=1,\ldots,n : n(x_j)=k\}\quad (k\in N)$$

Entonces

$$h=\sum_{k}(\sum_{j\in I_k}\varphi_j\otimes f(x_j))\quad \text{(suma finita)}.$$

Para cada $j\in I_k$ se cumple

$$\lambda_k v_k(x_j)r(f(x_j))=\lambda_{n(x_j)}v_{n(x_j)}(x_j)r(f(x_j))\leq 2^{-k}2v(x_j)r(f(x_j))\leq 22^{-k}$$

y por tanto, según hemos comprobado en 3.

$$|\phi(\sum_{j\in I_k}\varphi_j\otimes f(x_j))| \leq 4.2^{-k}$$

para cualesquiera $k\in N$ y $\phi\in H$.

Además

$$f = \sum_k\sum_{j\in I_k}\varphi_j f$$

y se tiene

$$P_k(\sum_{j\in I_k}\varphi_j(x)(f(x)-f(x_j)))v_k(x) \leq \sum_{j\in I_k}\varphi_j(x)P_k(f(x)-f(x_j))v_k(x) \leq 2^{-k}$$

ya que si $x\in\Omega_{xj}$ entonces

$$P_k(f(x)-f(x_j))v_k(x) = P_{n(x_j)}(f(x)-f(x_j))v_{n(x_j)}(x) < 2^{-n(x_j)} = 2^{-k}.$$

En consecuencia

$$|\phi(\sum_{j\in I_k}\varphi_j f)| \leq 2^{-k} + |\phi(\sum_{j\in I_k}\varphi_j\otimes f(x_j))| \leq 5.2^{-k} \quad \text{para cada } k\in N,\ \phi\in H$$

con lo cual

$$|\phi(f)| \leq \sum_k |\phi(\sum_{j\in I_k}\varphi_j f)| \leq 5 \quad \text{para cada } \phi\in H.$$

Queda probado que si $f\in C_c(X,E)$ y $\sup(\overline{v}(x)r(f(x)) : x\in X) < 1$ entonces $|\phi(f)| \leq 5$ para cada $\phi\in H$.

5. Supongamos finalmente $f\in C(v_n)_0(X,E)$ (n natural arbitrario) tal que $\sup(\overline{v}(x)r(f(x)) : x\in X) < 1$. Tomamos $g\in C_c(X,E)$ cumpliendo

(a) $\sup(\overline{v}(x)r(g(x)) : x\in X) < 1$

(b) $\sup(v_n(x)P_n(f(x)-g(x)) : x\in X) < 1$

(Nótese que $C_c(X,E)$ es denso en $C(v_n)_0(X,E)$ y la inyección de $C(v_n)_0(X,E)$ en $C\overline{V}_0(X,E)$ es continua). Entonces (b) implica que

BIBLIOTECA FACULTAT * VALÈNCIA * CIÈNCIES MATEMÀTIQUES

$|\phi(f)| \leq 1 + |\phi(g)|$ para todo $\phi \in H$ y (a) implica que $|\phi(g)| \leq 5$ para todo $f \in H$ (por 4.) . Por tanto $|\phi(f)| \leq 6$ para todo $\phi \in H$.

Esto prueba que H es un equicontinuo cuando en $\mathcal{V}_0 C(X,E)$ consideramos la topología inducida por $C\overline{V}_0(X,E)$ y ya podemos concluir que $\mathcal{V}_0 C(X,E)$ es un subespacio topológico de $C\overline{V}_0(X,E)$.

Bonet [4] prueba que toda coyección cumple $(W)_\sigma$ y si un espacio de Fréchet E cumple $(W)_\sigma$ entonces E no satisface la propiedad (*) de Bellenot y Dubinsky. La proposición anterior nos permite concluir el siguiente

TEOREMA 3.1.2. Un espacio de Fréchet tiene la propiedad $(W)_\sigma$ si y solo si no satisface la propiedad (*) de Bellenot y Dubinsky.

TEOREMA 3.1.3. Sean X un espacio localmente compacto y σ-compacto $\mathcal{V} = (v_n)$ una sucesión decreciente de pesos continuos estrictamente positivos en X y E un espacio de Fréchet con sistema fundamental de seminormas $(\|\cdot\|_k)$. Son equivalentes:

(a) $\mathcal{V}_0 C(X,E)$ es un subespacio topológico de $C\overline{V}_0(X,E)$.

(b) $\forall (k(l)) \uparrow \exists k \ \forall n \ \exists l_0 = l_0(n), C_n > 0$:

$$\frac{\|u\|_k^*}{v_n(x)} \leq C_n.\max\left(\frac{\|u\|_{k(l)}^*}{v_l(x)} : l=1,\dots,l_0(n)\right)$$

para cualesquiera $n\in N$, $x\in X$ y $u\in E'$.

Dem: Probemos primero (b)$\rightarrow$(a). Sea $\overline{V}' := \{\nabla : \nabla.v_1 \in \overline{V}\}$. Nótese que $C(v_n)_0(X,E) \longrightarrow C(v_n/v_1)_0(X,E)$ y $C\overline{V}_0(X,E) \longrightarrow C\overline{V}'_0(X,E)$, dadas por $f \rightarrow f.v_1$, son isomorfismos topológicos y en consecuencia $\mathrm{ind}C(v_n)_0(X,E)$ es subespacio topológico de $C\overline{V}_0(X,E)$ si y solo si $\mathrm{ind}C(v_n/v_1)_0(X,E)$ es subespacio topológico de $C\overline{V}'_0(X,E)$. Por tanto no es ninguna restricción suponer que $v_1 = 1$.

Es conocido (Bonet [4]) que (a) equivale a la identidad topológica $\vartheta_0 C(X)\otimes_\varepsilon E \cong \mathrm{ind}(C(v_n)_0(X)\otimes_\varepsilon E)$. Puesto que la inyección canónica de $\mathrm{ind}(C(v_n)_0(X)\otimes_\varepsilon E)$ en $\vartheta_0 C(X)\otimes_\varepsilon E$ es continua, todo se reduce a comprobar que en presencia de la condición (b) todo equicontinuo H en $(\mathrm{ind}(C(v_n)_0(X)\otimes_\varepsilon E))'$ es de hecho un equicontinuo en $(\vartheta_0 C(X)\otimes_\varepsilon E)'$

Fijemos pues un equicontinuo H en $(\vartheta_0 C(X)\otimes_\varepsilon E)'$. Existen $(k(l))$ sucesión estrictamente creciente de naturales y $(\mu_l^T : l\in N,\ T\in H)$ familia de medidas de Radón acotadas y positivas en X cumpliendo $\|\mu_l^T\| \leq 2^{-l}$ y

$$|T(g\otimes e)| \leq \|e\|_{k(l)}.\int_X |g|v_l\, d\mu_l^T$$

para cualesquiera $g\in C_c(X)$, $e\in E$ pues

$$\left(T_{|C(v_l)_0(X)\otimes_\varepsilon E} : T\in H\right) \text{ es un equicontinuo en } (C(v_l)_0(X)\otimes_\varepsilon E)'$$

(Summers [1]).

Sean $k\in N$ y $C_n > 0$ $(n\in N)$ los dados por la condición (b). Al ser X localmente compacto y σ-compacto podemos suponer que si

$\bar{v} := \inf C_n v_n$ entonces $\bar{v} = \inf(C_n v_n : 1 \le n \le m)$ puntualmente en K_m ((K_m) sistema fundamental de compactos en X) con lo cual se tiene, en particular, $\bar{v} > 0$ y $\bar{v}$ continua (véase Bierstedt-Meise-Summers [1;p.112]).

Fijamos un natural m. Por (b) existe $p \in N$ tal que

$$\frac{\|u\|^*_k}{C_n v_n(x)} \le \max\left(\frac{\|u\|^*_{K(1)}}{v_l(x)} : l=1,\dots,p \right)$$

para cualesquiera $u \in E'$, $x \in X$, $1 \le n \le m$, y por tanto

$$\frac{\|u\|^*_k}{\bar{v}(x)} \le \max\left(\frac{\|u\|^*_{K(1)}}{v_l(x)} : l=1,\dots,p \right)$$

para cada $u \in E'$, $x \in K_m$.

Sean $f \in C_c(X)$ con soporte contenido en K_m y $\varepsilon > 0$. Al ser v_1 acotada $(T|_{C_c(X)} \otimes E : T \in H)$ es un equicontinuo en $(C_c(X) \otimes_\pi E)'$ ($C_c(X)$ con la topología uniforme) y podemos suponer que existe $C > 0$ tal que $|T(h \otimes e)| \le C\|h\|_\infty \|e\|_1$ para cualesquiera $h \in C_c(X)$, $e \in E$ y $T \in H$ y por tanto existe $\delta > 0$ con la propiedad de que si $h \in C_c(X)$ y $\|h\|_\infty \le \delta$ entonces $\|T(h,.)\|^*_1 \le \varepsilon$ para todo $T \in H$ ($T(h,.)$ denota la aplicación $x \in E \to T(h \otimes x)$). Sea $\{\Omega_j : 1 \le j \le t\}$ un cubrimiento abierto de sopf tal que si $x, y \in \Omega_j$ entonces

$$\left|\frac{f(x)}{\bar{v}(x)} - \frac{f(y)}{\bar{v}(y)}\right| \le \delta \quad y \quad \left|f(x) - f(y).\frac{v_l(x)}{v_l(y)}\right| \le \varepsilon \text{ para cada } l=1,\dots,p$$

Sean $\{\varphi_j : 1 \le j \le t\}$ funciones en $C_c(X)$ que cumplan $0 \le \varphi_j \le 1$ $\operatorname{sop}\varphi_j \subseteq \Omega_j$ y $\Sigma(\varphi_j : 1 \le j \le t) = 1$ en sopf y fijemos $x_j \in \Omega_j$. Entonces

$$\left\|\frac{f}{\bar{v}} - \sum_{j=1}^{t} f(x_j).\frac{\varphi_j}{\bar{v}(x_j)}\right\|_\infty \le \delta, \text{ luego } \left\|T\left(\frac{f}{\bar{v}} - \sum_{j=1}^{t} f(x_j).\frac{\varphi_j}{\bar{v}(x_j)}, .\right)\right\|^*_1 \le \varepsilon$$

para todo $T \in H$ y concluimos que

$$\|T(\frac{f}{\bar{v}}\ ,\ .)\|_k^* \le \varepsilon + \|T(\sum_{j=1}^{t} f(x_j).\frac{\varphi_j}{\bar{v}(x_j)}\ ,\ .)\|_k^* \le$$

$$\varepsilon + \sum_{j=1}^{t} |f(x_j)|.\frac{\|T(\varphi_j,\ .)\|_k^*}{\bar{v}(x_j)} \le \varepsilon + \sum_{l=1}^{p}\sum_{j=1}^{t} |f(x_j)|.\|T(\frac{\varphi_j}{v_l(x_j)}\ ,\ .)\|_{k(l)}^* =$$

$$\varepsilon + \sum_{l=1}^{p}\sum_{j=1}^{t} \|T(\frac{f(x_j)\varphi_j}{v_l(x_j)}\ ,\ .)\|_{k(l)}^*$$

Dados $e_1,\dots,e_t \in E$ con $\|e_j\|_{k(l)} \le 1$ $(1 \le j \le t)$ se cumple

$$\sum_{j=1}^{t} |T((\frac{\varphi_j}{v_l(x_j)}.f(x_j) - f.\frac{\varphi_j}{v_l}) \otimes e_j)| \le$$

$$\sum_{j=1}^{t} \int_X \varphi_j(x)\,|f(x_j)\frac{v_l(x)}{v_l(x_j)} - f(x)|\,d\mu_l^T(x) \le \varepsilon\|\mu_l^T\| \le \varepsilon 2^{-l}$$

pues

$$|f(x_j)\frac{v_l(x)}{v_l(x_j)} - f(x)| \le \varepsilon \quad \text{cuando } x \in \text{sop}\varphi_j.$$

Por tanto

$$\sum_{j=1}^{t} \|T(\frac{f(x_j)\varphi_j}{v_l(x_j)}\ ,\ .)\|_{k(l)}^* \le \varepsilon 2^{-l} + \sum_{j=1}^{t} \|T(\frac{f.\varphi_j}{v_l}\ ,\ .)\|_{k(l)}^* \le \varepsilon 2^{-l} +$$

$$\sum_{j=1}^{t} \int_X |f|\varphi_j\,d\mu_l^T \le \varepsilon 2^{-l} + \int_X |f|\,d\mu_l^T$$

con lo cual

$$\|T(\frac{f}{\bar{v}}\ ,\ .)\|_k^* \le 2\varepsilon + \sum_{l=1}^{p} \int_X |f|\,d\mu_l^T$$

Queda probado que

$$\|T(\frac{f}{\bar{v}}\ ,\ .)\|_k^* \le \sum_{l=1}^{\infty} \int_X |f|\,d\mu_l^T$$

para cualesquiera $f \in C_c(X)$, $T \in H$.

Finalmente, para cada $T\in H$ definimos $\mu^T\in C_c(X)'$ dada por

$$<\mu^T,\ g> := \sum_{n=1}^{\infty} \int_X g\, d\mu_n^T$$

para toda $g\in C_c(X)$. Claramente $\|\mu^T\|\leq 1$. Entonces obtenemos

$$|T(f\otimes e)| \leq \|e\|_k . \|T\left(\frac{f\bar{v}}{\bar{v}}, .\right)\|_k^* \leq \|e\|_k . \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f|\bar{v}\, d\mu_n^T =$$

$$\|e\|_k . \int_X |f|\bar{v}\, d\mu^T$$

para cualesquiera $e\in E$, $f\in C_c(X)$ y $T\in H$, lo que prueba que H es un equicontinuo en $(\mathring{\upsilon}_0 C(X)\otimes_\varepsilon E)'$ (ver Summers [1]).

Probemos finalmente (a)$\rightarrow$(b). El argumento es análogo al de Bonet [6]. Supongamos que $\mathring{\upsilon}_0 C(X)\otimes_\varepsilon E \cong \mathrm{ind}(C(v_n)_0(X)\otimes_\varepsilon E)$ y sea dada una sucesión estrictamente creciente de naturales $(k(l))$. Sean

$$H_k := \{\ (u_x)\in E'^X \mid \sum_x \frac{\|u_x\|_k^*}{v_n(x)} < \infty\ \forall n\in N\ \}$$

$$M := \{\ (u_x)\in E'^X \mid \sum_x \frac{\|u_x\|_{k(l)}^*}{v_l(x)} < \infty\ \forall l\in N\ \}$$

H_k $(k\in N)$ y M se topologizan de manera obvia de modo que pasan a ser espacios de Fréchet y cada una de las inclusiones $H_k \longrightarrow H_{k+1}$ es continua.

Si $M\subseteq \cup(H_n : n\in N)$ entonces el teorema de factorización de Grothendieck nos asegura que existe $k\in N$ tal que $M\subseteq H_k$ con inyección continua, con lo cual para cada $n\in N$ existen $C_n>0$ y $l_0=l_0(n)$ tales que

$$\sum_x \frac{\|u_x\|_k^*}{v_n(x)} \leq C_n.\text{máx}\left(\sum_x \frac{\|u_x\|_{k(1)}^*}{v_1(x)} : 1=1,\dots,l_0\right)$$

para todo $(u_x)\in M$ y en particular

$$\frac{\|u\|_k^*}{v_n(x)} \leq C_n.\text{máx}\left(\frac{\|u\|_{k(1)}^*}{v_1(x)} : 1=1,\dots,l_0\right)$$

para cada $x\in X$, $u\in E'$.

Es decir, solo queda comprobar que $M\subseteq \cup(H_n:n\in N)$. Fijemos pues $(u_x)\in E'^X$ que cumpla

$$\sum_x \frac{\|u\|_{k(1)}^*}{v_1(x)} < \infty \quad \forall\, 1\in N$$

y veamos que ha de existir $k\in N$ con la propiedad

$$\sum_x \frac{\|u_x\|_k^*}{v_n(x)} < \infty \quad \forall\, n\in N$$

Con este fin, dado $F\subseteq X$ arbitrario introducimos $T_F:\mathring{\otimes}_0 C(X)\otimes E\longrightarrow K$ dado por

$$T_F(f\otimes e) := \sum_{x\in F} \langle u_x,\ e\rangle . f(x)$$

Dados $f\in C_c(X)$, $e\in E$, $n\in N$ se cumple

$$|T_F(f\otimes e)| \leq \sum_{x\in X} \frac{\|u_x\|_{k(n)}^*}{v_n(x)}.v_n(x).\|e\|_{k(n)}.|f(x)| = \|e\|_{k(n)}.\int_X |f|v_n d\mu_n$$

para todo $F\subseteq X$ siendo $\mu_n\in C_c(X)'$ la medida de Radón positiva y acotada dada por

$$\langle \mu_n,\ g\rangle := \sum_x \frac{\|u_x\|_{k(n)}^*}{v_n(x)} g(x) \quad \forall\, g\in C_c(X).$$

Concluimos que $(T_F: F\subseteq X)$ es un equicontinuo en $(\mathring{\otimes}_0 C(X)\otimes_\varepsilon E)'$,

con lo cual existen $k\in N$ $\mu_F\in C_c(X)'$ medida de Radón positiva y acotada, $\|\mu_F\|\leq 1$, y $C_n > 0$ tales que

$$|T(f\otimes e)| \leq \|e\|_k \cdot \int_X \bar{v}\cdot|f|\,d\mu_F \quad \forall f\in C_c(X),\ e\in E,\ F\ X$$

siendo $\bar{v}:=\inf(C_n v_n : n\in N) > 0$, $\bar{v}$ continua.

<u>En particular</u> dados $x_1,\ldots,x_m$ puntos distintos de X , $e_1,\ldots,e_m\in E$, $\|e_j\|_k \leq 1$ $(1\leq j\leq m)$ y $\varepsilon>0$ sea U_j entorno de x_j $(1\leq j\leq m)$, $U_1,\ldots,U_m$ disjuntos dos a dos y cumpliendo $\bar{v}(x)/\bar{v}(x_j)\leq 1+\varepsilon$ para todo $x\in U_j$ y tomemos $\phi_j\in C_c(X)$ de modo que $\operatorname{sop}\phi_j\subseteq U_j$, $|\phi_j|\leq 1$ y $\phi_j(x_j)=1$. Con $F:=(x_1,\ldots,x_m)$ concluimos, para ciertos δ_j de módulo 1

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{|\langle u_{x_j}, e_j\rangle|}{\bar{v}(x_j)} = \sum_{j=1}^{m}\langle u_{x_j}, e_j\rangle\frac{\delta_j}{\bar{v}(x_j)} = \sum_{j=1}^{m} T_F\left(\frac{\delta_j}{\bar{v}(x_j)}\phi_j\otimes e_j\right) \leq$$

$$\sum_{j=1}^{m}\int_X \frac{v(x)}{\bar{v}(x_j)}\phi_j(x)\,d\mu_F \leq (1+\varepsilon)\int_X\left|\sum_{j=1}^{m}\phi_j\right|d\mu_F \leq (1+\varepsilon)\|\mu_F\| \leq (1+\varepsilon)$$

Puesto que x_j, e_j $(1\leq j\leq m)$, m y $\varepsilon>0$ son arbitrarios concluimos que

$$\sum_x \frac{\|u_x\|_k^*}{\bar{v}(x)} \leq 1$$

y en consecuencia

$$\sum_x \frac{\|u_x\|_k^*}{v_n(x)} < \infty \quad \forall n\in N$$

que es lo que queríamos probar.

El teorema 3.1.3. permite dar una prueba alternativa del teorema 3.1.2.:

En efecto, sean X localmente compacto y σ-compacto, $\mathcal{V} = (v_n)$ una sucesión decreciente de pesos estrictamente positivos y continuos en X y E un espacio de Fréchet. Si E no cumple la propiedad (*) entonces E'_b es un (LB)-estricto y en consecuencia E" es una coyección (Vogt [2]). Por tanto, según probó Bonet [4], $\mathcal{V}_0C(X,E")$ es un subespacio topológico de $CV_0(X,E")$ lo que quiere decir que se satisface la condición (b) del teorema 3.1.3. con E" en lugar de E. Pero entonces es muy sencillo comprobar que también se ha de satisfacer esta condición para E y en consecuencia $\mathcal{V}_0C(X,E)$ es un subespacio topológico de $C\overline{V}_0(X,E)$.

Nótese que aunque esta última prueba es más fácil que la dada antes, solo una aproximación directa podia dejar claro cual es el verdadero papel de la negación de la condición (*).

SECCION 3.2

Estudiamos ahora los dos problemas anteriores en el contexto de los espacios de sucesiones con valores vectoriales.

Sean $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{V}=(v_n)$ una sucesión decreciente de pesos estrictamente positivos en N,
$\overline{V}:=\{\overline{v}:N\longrightarrow R_+ \mid \sup(\overline{v}(i)/v_n(i) : i\in N) < \infty \ \forall n\in N\}$ y E un espacio localmente convexo.

Se definen los siguientes espacios ponderados:

$$l_p(v_n,E):=\{x=(x(i))\in E^N \mid q_{n,r}(x):=\Big(\sum_{i=1}^{\infty}(v_n(i)r(x(i)))^p\Big)^{\frac{1}{p}}<\infty \ \forall r\in cs(E)\}$$

con la topología dada por el sistema de seminormas $(q_{n,r} : r\in cs(E))$

y también

$$K_p(\overline{V},E) := \{x=(x(i))\in E^{\mathbb{N}} \mid q_{\overline{V},r}(x) := \Big(\sum_{i=1}^{\infty}(\overline{V}(i)\,r(x(i)))^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty \ \forall\, V\in\overline{V}$$

y $\forall\, r\in cs(E)\}$

con la topología dada por $(q_{V,r}: V\in\overline{V},\ r\in cs(E))$. A $\hat{v}$ se asocia la matriz de Köthe $A=(a_n(i))$ siendo $a_n(i) := v_n(i)^{-1}$.

Para un estudio de los espacios co-escalonados de orden p se puede consultar Bierstedt-Meise-Summers [2].

Al igual que antes se tiene la siguiente

PROPOSICION 3.2.1. Sea $1\le p<\infty$. Si E cumple (BD)' entonces $indl_p(v_n,E)$ es un subespacio topológico de $K_p(\overline{V},E)$.

Dem: Haremos la prueba para $1 < p < \infty$ (para $p = 1$ hay que hacer pocos cambios). Sean $(G,t) := indl_p(v_n,E)$ y s la topología inducida por $K_p(\overline{V},E)$ en G. Es claro que t es más fina que s y por tanto nos limitaremos a probar que todo equicontinuo en $(G,t)'$ es también un equicontinuo en $(G,s)'$. Fijemos H equicontinuo en $(G,t)'$.

1. La aplicación canónica $l_p(v_n)\otimes_\pi E \longrightarrow l_p(v_n,E)$ $(n\in\mathbb{N})$ es continua y sabemos que $ind(l_p(v_n)\otimes_\pi E)$ es topológicamente isomorfo a $(indl_p(v_n))\otimes_\pi E \cong K_p\overline{V}\otimes_\pi E$ (véase la proposición 2.1.3) luego H induce (por restricción) un equicontinuo en $(K_p\overline{V}\otimes_\pi E)'$ es decir, existen $\omega\in\overline{V}$ y r seminorma continua en E tales que

$$|T(\alpha \otimes x)| \leq (\sum_{i=1}^{\infty} (\omega(i)\,|\alpha(i)|)^p)^{\frac{1}{p}} . r(x)$$

para cualesquiera $\alpha = (\alpha(i)) \in K_p \overline{V}$, $x \in E$ y $T \in H$, y en consecuencia $T(\alpha, .) \in E'_{U^0}$ para cada $\alpha \in K_p \overline{V}$, $T \in H$ siendo $U := \{x \in E : r(x) \leq 1\}$.

2. Para cada $n \in N$ $\{T|_{l_p(v_n, E)} : T \in H\}$ es un equicontinuo en $l_p(v_n, E)'$ y por tanto encontramos r_n seminorma continua en E tal que

$$|T(x)| \leq (\sum_{i=1}^{\infty} (v_n(i)\, r_n(x(i)))^p)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $x = (x(i)) \in l_p(v_n, E)$ y $T \in H$. Sea $U_n := \{x \in E : r_n(x) \leq 1\}$.

Puesto que E cumple (BD)' existen $\lambda_n > 0$ $(n \in N)$ y r seminorma continua en E cumpliendo $U_n^0 \cap E'_{U^0} \subseteq \lambda_n W^0$ para cada $n \in N$, siendo $W := \{x \in E : r(x) \leq 1\}$. Sea $\overline{v} := \inf 2^n \lambda_n v_n \in \overline{V}$

En lo que sigue $E^{(N)} := \{(x(i)) \in E^N \mid \{i \in N : x(i) \neq 0\}$ es finito$\}$

3. Sea $x = (x(i)) \in E^{(N)}$. Si

$$(\sum_i (\lambda_m v_m(i)\, r(x(i)))^p)^{\frac{1}{p}} < 1$$

entonces $|T(x)| \leq 1$ para todo $T \in H$:

En efecto, si q es el conjugado de p, es decir $p^{-1} + q^{-1} = 1$, y (e_i) son los vectores unitarios canónicos de l_p se cumple

$$|T(x)| = |T(\sum_i \frac{e_i}{v_m(i)\lambda_m} \otimes \lambda_m v_m(i)\, x(i))| \leq$$

$$\sum_i |T(\frac{1}{v_m(i)\lambda_m} . e_i, \ . \ )(\lambda_m v_m(i)\, x(i))| \leq$$

$$\sum_i P_{W^0}\left(T\left(\frac{1}{v_m(i)\lambda_m}.e_i, \ .\ \right)\right) r(\lambda_m v_m(i) x(i)) \leq$$

$$\left[\sum_i \left(P_{W^0}\left(T\left(\frac{1}{v_m(i)\lambda_m}.e_i, \ .\ \right)\right)\right)^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

Pero, por 1.

$$T\left(\frac{1}{v_m(i)\lambda_m}.e_i, \ .\right) \in E'_{U^0}$$

y por 2. sabemos que

$$P_{W^0}\left(T\left(\frac{1}{v_m(i)\lambda_m}.e_i, \ .\ \right)\right) \leq P_{U_m^0}\left(T\left(\frac{e_i}{v_m(i)}, \ .\ \right)\right)$$

con lo cual

$$|T(x)| \leq \left[\sum_i \left(P_{U_m^0}\left(T\left(\frac{e_i}{v_m(i)}, \ .\ \right)\right)\right)^q \right]^{\frac{1}{q}}.$$

Además, si $z_i \in U_m$ $(i \in N)$, tenemos, para ciertos números η_i de módulo 1,

$$\left(\sum_i \left| T\left(\frac{e_i}{v_m(i)}, \ z_i\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$\left| \sum_i T\left(\frac{e_i}{v_m(i)}, \ z_i\right).\eta_i.\left| T\left(\frac{e_i}{v_m(i)}, \ z_i\right) \right|^{q-1} \right|^{\frac{1}{q}} =$$

$$\left| \sum_i T\left(\frac{e_i}{v_m(i)}, \ \lambda_i z_i\right) \right|^{\frac{1}{q}}$$

siendo

$$\lambda_i := \eta_i \left| T\left(\frac{e_i}{v_m(i)}, \ z_i\right) \right|^{q-1}$$

con lo cual

$$(\sum_i |T(\frac{e_i}{v_m(i)},\ z_i)|^q)^{\frac{1}{q}} \le |T(\sum_i \frac{e_i}{v_m(i)} \otimes \lambda_i z_i)|^{\frac{1}{q}} \le$$

$$(\sum_i (r_m(\lambda_i z_i))^p)^{\frac{1}{pq}} \le (\sum_i (\lambda_i)^p)^{\frac{1}{pq}} =$$

$$(\sum_i |T(\frac{e_i}{v_m(i)},\ z_i)|^{p(q-1)})^{\frac{1}{pq}}$$

y en consecuencia

$$(\sum_i |T(\frac{e_i}{v_m(i)},\ z_i)|^q)^{\frac{1}{q}} \le 1.$$

Puesto que $z_i \in U_m$ ($i \in N$) eran arbitrarios, esto prueba que

$$|T(x)| \le [\sum_i (P_{U_m^0}(T(\frac{e_i}{v_m(i)},\ .\ )))^q]^{\frac{1}{q}} \le 1$$

para cada $T \in H$.

4. Supongamos ahora $x = (x(i)) \in E^{(N)}$ tal que

$$(\sum_i (\bar{v}(i) r(x(i)))^p)^{\frac{1}{p}} < 1.$$

Para cada $i \in N$ sea $n(i) \in N$ de modo que se cumpla

$$(\sum_i (2^{n(i)} \lambda_{n(i)} v_{n(i)}(i) r(x(i)))^p)^{\frac{1}{p}} < 1.$$

Sea $I_k := \{i \in N : n(i) = k\}$ ($k \in N$). Entonces

$$x = \sum_{k=1}^{m} y_k \quad \text{(suma finita)}$$

donde $y_k(i) := x(i)$ si $i \in I_k$ y $y_k(i) = 0$ si $i \notin I_k$. Al ser

$$(\sum_{i \in I_k} (2^k \lambda_k v_k(i) r(x(i)))^p)^{\frac{1}{p}} < 1$$

concluimos $|T(y_k)| \leq 2^{-k}$ para cada $T \in H$, $k \in N$ (por 3.) y por tanto $|T(x)| \leq 1$ para cualquier $T \in H$.

5. Finalmente, al ser $E^{(N)}$ denso en $indl_p(v_n,E)$, $indl_p(v_n,E) \longrightarrow K_p(\bar{V},E)$ continua y H equicontinuo en $(G,t)'$ concluimos que $|T(x)| \leq 1$ para cualesquiera $T \in H$ y $x \in indl_p(v_n,E)$ que cumplan

$$\left(\sum_i (\bar{v}(i)\, r(x(i)))^p\right)^{\frac{1}{p}} < 1.$$

lo que prueba que H es un equicontinuo en $(G,s)'$.

Para terminar este capitulo fijamos $\mathcal{V} = (v_n)$, sucesión de pesos estrictamente positivos en N, y caracterizamos los espacios de Fréchet E tales que $indl_p(v_n,E)$ es subespacio topológico de $K_p(\bar{V},E)$ $(1 \leq p < \infty)$. Al igual que ocurria con el teorema 3.1.3., la condición que se obtiene es la misma que aparece en Bonet [6].

Necesitamos alguna preparación.

En lo que sigue fijamos $1 \leq p,q < \infty$ tales que $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

LEMA 3.2.2. Sea E Fréchet con sucesión fundamental de seminormas $(\|.\|_n)$. Si M es acotado en $l_q(E'_b)$ entonces existe $k \in N$ tal que

$$\sup\left(\sum_{i=1}^{\infty} (\|u(i)\|_k^*)^q : u \in M\right) < \infty$$

Dem: De lo contrario podemos encontrar $(I_k : k \in N)$ subconjuntos finitos de N disjuntos dos a dos y $(u_k : k \in M) \subseteq M$ tales que

$$\sum_{i\in I_k}(\|u_k(i)\|_k^*)^q > k$$

y en consecuencia podemos encontrar $(x_i^k : i\in I_k) \subseteq E$ cumpliendo

$$\|x_i^k\|_k \leq 1 \quad y \quad \sum_{i\in I_k}|<u_k(i),\ x_i^k>|^q > k$$

Entonces $B:=\{ x_i^k : i\in I_k,\ k\in N\}$ es acotado en E y por tanto

$$\sup\{\sum_{i=1}^{\infty}(P_{B^0}(u(i)))^q : u\in M\} < \infty$$

Pero

$$\sum_{i=1}^{\infty}(P_{B^0}(u_k(i)))^q \geq \sum_{i\in I_k}|<u_k(i),\ x_i^k>|^q \geq k$$

lo que es una contradicción.

Análogamente se prueba que si M es acotado en $l_\infty(E'_b)$ entonces existe $k\in N$ tal que

$$\sup\{\|u(i)\|_k^* : u\in M,\ i\in N\} < \infty$$

LEMA 3.2.3. Sea $(G,t) := \mathrm{indl}_p(v_n,E)$. La aplicación

$$\phi: \lambda_q(A,E'_b) \longrightarrow (G,t)'$$

dada por

$$\phi(u)(x) := \sum_{i=1}^{\infty} <u(i),\ x(i)>$$

para todo $x=(x(i))\in G$, $u=(u(i))\in\lambda_q(A,E'_b)$, es un isomorfismo algebraico. Mas aún, $M \subseteq \lambda_q(A,E'_b)$ es acotado si y solo si $\phi(M)$ es equicontinuo en $(G,t)'$.

Dem: 1. Veamos que Φ está bien definida. Para ello fijemos $n\in N$, $u\in\lambda_q(A,E'_b)$. Puesto que $(a_n(i)u(i))\in l_q(E'_b)$, el lema anterior nos asegura que existe $k\in N$ tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty}(a_n(i)\,\|u(i)\|_k^*)^q \le 1$$

y por tanto se tiene, para cada $m\in N$ y $x\in l_p(v_n,E)$,

$$\Big|\sum_{i=1}^{m}\langle u(i),\ x(i)\rangle\Big| \le \sum_{i=1}^{m}|\langle u(i)a_n(i),\ x(i)v_n(i)\rangle| \le$$

$$\sum_{i=1}^{m}a_n(i)\,\|u(i)\|_k^*(v_n(i)\,\|x(i)\|_k \le \Big(\sum_{i=1}^{\infty}(v_n(i)\,\|x(i)\|_k)^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

lo que prueba que $\Phi(u)$ es una forma lineal bien definida y continua sobre cada $l_p(v_n,E)$, es decir $\Phi(u)\in(G,t)'$.

2. Solo queda comprobar que Φ es sobre. Sea pues $g\in(G,t)'$. Para cada $i\in N$ I_i denotará la aplicación $E\longrightarrow l_p(v_i,E), x\to(0,\ldots,x,0,0,\ldots)$ (x en la coordenada i-ésima), $u(i):=g\circ I_i\in E'$.

Dado $n\in N$ existe $k\in N$ tal que

$$|g(x)| \le \Big(\sum_{i=1}^{\infty}(v_n(i)\,\|x(i)\|_k)^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

para cualquier $x\in l_p(v_n,E)$, pues la restricción de g a $l_p(v_n,E)$ es continua.

Entonces, si $m\in N$ y $x_1,\ldots,x_m$ son puntos de E con $\|x_j\|_k \le 1$ se tiene, para ciertos δ_i de módulo 1,

$$\sum_{i=1}^{m}(a_n(i)\,|<g,\ I_i(x(i))>|)^q =$$

$$\sum_{i=1}^{m}(a_n(i))^q|<g,\ I_i(x(i))>|^{q-1}\delta_i<g,\ I_i(x(i))> =$$

$$|<g,\ \sum_{i=1}^{m}(a_n(i))^q|<g,\ I_i(x(i))>|^{q-1}\delta_i I_i(x(i))>| \le$$

$$(\sum_{i=1}^{m}(|<g,\ I_i(x(i))>|a_n(i))^{p(q-1)})^{\frac{1}{p}}$$

luego

$$\sum_{i=1}^{m}(a_n(i)\,|<u(i),\ x(i)>|)^q \le 1$$

y deducimos que

$$\sum_{i=1}^{\infty}(a_n(i)\,\|u(i)\|_k^*)^q \le 1$$

Esto prueba que $u=(u(i))\in l_q(a_n,E'_b)$ para cada $n\in N$, es decir $u\in\lambda_q(A,E'_b)$ y claramente $\phi(u) = g$.

Además, el razonamiento anterior pone de manifiesto la correspondencia entre los acotados de $\lambda_q(A,E'_b)$ y los equicontinuos en $(G,t)'$.

LEMA 3.2.4. Sean ϕ, G como antes. Sea s la topología inducida por $K_p(\bar{V},E)$ en G. Dados $M\subseteq\lambda_q(A,E'_b)$, $H:=\phi(M)$ son equivalentes:

(a) H es un equicontinuo en $(G,s)'$

(b) Existen $\bar{v}\in\bar{V}$, $\bar{v}>0$, y $k\in N$ tales que

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\,\|\frac{u(i)}{\bar{v}(i)}\|_k^*\,)^q \le 1 \quad \forall u=(u(i))\in M$$

Dem: (a)→(b). Existen $\bar{v}\in\bar{V}$, $\bar{v}>0$, y $k\in N$ tales que

$$\left|\sum_{i=1}^{m}\langle u(i),\ x(i)\rangle\right| \le \left(\sum_{i=1}^{m}(\bar{v}(i)\,\|x(i)\|_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall x\in G,\ u\in M.$$

Dados $u\in M$, $x_1,\dots,x_m\in E$ con $\|x_j\|_k \le 1$ $(1\le j\le m)$ se tiene, para ciertos δ_i de módulo 1,

$$\sum_{i=1}^{m}|\langle u(i), \frac{x(i)}{\bar{v}(i)}\rangle|^p = \left|\sum_{i=1}^{m}\langle u(i), \frac{\delta_i x(i)}{\bar{v}(i)}\,|\langle u(i), \frac{x(i)}{\bar{v}(i)}\rangle|^{q-1}\rangle\right| \le$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\left[v(i)\frac{1}{\bar{v}(i)}\,|\langle u(i), \frac{x(i)}{\bar{v}(i)}\rangle|^{p-1}\|x(i)\|_k\right]^p\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m}|\langle \frac{u(i)}{\bar{v}(i)},\ x(i)\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(téngase en cuenta que $(q-1)p = q$), luego

$$\left(\sum_{i=1}^{m}|\langle \frac{u(i)}{\bar{v}(i)},\ x(i)\rangle|^p\right)^{\frac{1}{q}} \le 1$$

y podemos deducir

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\left\|\frac{u(i)}{\bar{v}(i)}\right\|_k^*\right)^q \le 1.$$

(b)→(a) es claro pues

$$\left|\sum_{i=1}^{m}\langle u(i),\ x(i)\rangle\right| \le \sum_{i=1}^{m}\left\|\frac{u(i)}{\bar{v}(i)}\right\|_k^*(\bar{v}(i)\,\|x(i)\|_k) \le$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m}(\bar{v}(i)\,\|x(i)\|_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall u\in M,\ x\in G.$$

Ahora ya podemos concluir

PROPOSICION 3.2.5. Sean $1<p<\infty$, E Fréchet con sistema fundamental de seminormas $(\|\cdot\|_n)$. Son equivalentes:

(a) $\mathrm{indl}_p(v_n,E)$ es un subespacio topológico de $K_p(\bar{V},E)$

(b) Para cada acotado M en $\lambda_q(A,E'_b)$ existen $\bar{v}\in\bar{V}$, $\bar{v}>0$, y $k\in N$ tales que

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left\|\frac{u(i)}{\bar{v}(i)}\right\|_k^*\right)^q \leq 1 \quad \forall u\in M$$

(c) $\forall(k(l))\uparrow\ \exists k\ \forall n\ \exists l_0=l_0(n), C_n>0$:

$$\frac{\|u\|_k^*}{v_n(i)} \leq C_n.\max\left(\frac{\|u\|_{k(l)}^*}{v_1(i)}.: 1\leq l\leq l_0\right) \quad \forall i\in N,\ u\in E'$$

Dem: (a) es claramente equivalente a (b) por los lemas 3.2.3. y 3.2.4.

(b)→(c). Sea (k(l)) una sucesión estrictamente creciente de naturales.

$$F:=\{\ u\in\lambda_q(A,E'_b)\ \mid\ (\sum_{i=1}^{\infty}(a_l(i)\|u(i)\|_{k(l)}^*)^q)^{\frac{1}{q}}<\infty\quad\forall l\in N\ \}$$

$$H_k:=\{\ u\in\lambda_q(A,E'_b)\ \mid\ (\sum_{i=1}^{\infty}(a_n(i)\|u(i)\|_k^*)^q)^{\frac{1}{q}}<\infty\quad\forall n\in N\ \}$$

F y H_k ($k\in N$) son espacios de Fréchet (con sus topologías canónicas) y claramente la inyección $H_k\longrightarrow H_{k+1}$ es continua. Veamos que $\lambda_q(A,E'_b)\subseteq\cup(H_k:k\in N)$:

En efecto, si $u\in\lambda_q(A,E'_b)$ entonces existen $\bar{v}\in\bar{V}$, $\bar{v}>0$, $k\in N$ tales que

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left\|\frac{u(i)}{\bar{v}(i)}\right\|_k^*\right)^q \leq 1$$

y por tanto

$$\sum_{i=1}^{\infty}(a_n(i)\,\|u(i)\|_k^*)^q = \sum_{i=1}^{\infty}(a_n(i)\overline{v}(i)\,\|\frac{u(i)}{\overline{v}(i)}\|_k^*)^q \leq$$

$$\sup((a_n(i)\overline{v}(i))^q : i\in N) < \infty.$$

En consecuencia, el teorema de factorización de Grothendieck nos asegura que existe $k\in N$ tal que la inyección $F\longrightarrow H_k$ es continua, con lo cual para todo $n\in N$ existen $l_0=l_0(n)\in N$ y $C_n>0$ de modo que

$$(\sum_{i=1}^{\infty}(a_n(i)\,\|u(i)\|_k^*)^q)^{\frac{1}{q}} \leq C_n.\max[(\sum_{i=1}^{\infty}(a_1(i)\,\|u(i)\|_{k(1)}^*)^q)^{\frac{1}{q}} : 1\leq l\leq l_0]$$

para cualquier $u\in F$ y en particular

$$\frac{\|u\|_k^*}{v_n(i)} \leq C_n.\max(\frac{\|u\|_{k(l)}^*}{v_l(i)} : 1\leq l\leq l_0) \quad \forall i\in N,\ u\in E'$$

(c)→(b). Sea M acotado en $\lambda_q(A,E'_b)$. Por el lema 3.2.2 encontramos una sucesión estrictamente creciente de naturales $(k(l))$ tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty}(a_l(i)\,\|u(i)\|_{k(l)}^*)^q \leq \frac{1}{2^l} \quad \forall u\in M$$

Sean k el natural dado por (c) y $\overline{w}:=\inf C_n v_n\in\overline{V}$. Existe $\overline{v}\in\overline{V}$, $\overline{v}>0$, $\overline{v}\geq\overline{w}$.

Dados $u\in M$, $i\in N$ sea

$$\alpha(i,u):=\sup(a_n(i)\,\|u(i)\|_{k(n)}^* : n\in N)$$

Está claro que

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha(i,u)|^q \leq 1$$

Pero sabemos por (c) que

$$\|u(i)\|_k^* \leq \alpha(i,u)\bar{v}(i)$$

con lo cual

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\left\| \frac{u(i)}{\bar{v}(i)} \right\|_k^* \right)^q \leq 1 \quad \forall u = (u(i)) \in M$$

CAPITULO 4

ESPACIOS CO-ESCALONADOS CON VALORES EN UN (DF)

INTRODUCCION

Dados un espacio localmente compacto separado X y una sucesión decreciente $\mathcal{V} = (v_n)$ de pesos continuos en X, se cumple que el límite inductivo ponderado $\mathcal{V}_0C(X)$ es un subespacio topológico de su "envoltura proyectiva" asociada $C\overline{V}_0(X)$, y la igualdad algebraica $\mathcal{V}_0C(X) = C\overline{V}_0(X)$ (que equivale a la completitud de $\mathcal{V}_0C(X)$) se da si y solo si $\mathcal{V}$ es "regularmente decreciente" (Bierstedt-Meise-Summers [1;sección 2]).

Sin embargo, para límites inductivos ponderados $\mathcal{V}C(X)$ la situación es completamente diferente:

El límite inductivo ponderado $\mathcal{V}C(X)$ es siempre igual a su envoltura proyectiva asociada $C\overline{V}(X)$ y estos dos espacios localmente convexos tienen incluso los mismos conjuntos acotados, pero la topología límite inductivo de $\mathcal{V}C(X)$ puede ser estrictamente más fina que la topología ponderada de $C\overline{V}(X)$ (Bierstedt-Meise-Summers [1;p.126]).

Por (Bierstedt-Meise-Summers [2;p.14]), caracterizar la igualdad topológica $\mathcal{V}C(X) = C\overline{V}(X)$ para espacios co-escalonados de orden ∞ equivale a caracterizar los espacios escalonados distinguidos λ_1 (recordamos que un espacio de Fréchet es distinguido si y solo si su dual fuerte E'_b es tonelado o,

equivalentemente, bornológico).

Bierstedt y Meise [2] presentan una condición (D) sobre la matriz de Köthe suficiente para que λ_1 sea distinguido:

Definición. La matriz de Köthe $A=(a_n)$ sobre un conjunto de índices I satisface la condición (D) si y solo si existe una sucesión creciente $\mathfrak{I}=(I_m)$ de subconjuntos de I tal que

(N,J) Para cada $m\in N$ existe $n(m)\in N$ con

$\inf(a_{n(m)}(i)/a_k(i) : i\in I_m)>0$ para $k \geq n(m) + 1$

mientras que

(M,J) Para cada $n\in N$ y cada subconjunto $I_0 \subseteq I$ tal que $I_0\cap(I\setminus I_m)\neq\emptyset$ para todo $m\in N$, existe $n'=n'(n,I_0) > n$ tal que $\inf(a_n(i)/a_{n'}(i) : i\in I_0)=0$

(D) se introduce basándose en una condición de Grothendieck [2], pero sustituyendo su parte "tipo Schwartz" por una "tipo Montel".

Recientemente, Bierstedt y Bonet [1] han probado que la condición (D) es equivalente a que λ_1 sea distinguido. Para ello han desarrollado una teoría general en torno a la "condición de densidad", introducida por Heinrich [1] en su estudio de ultraproductos de espacios localmente convexos, en el contexto de los espacios localmente convexos metrizables.

Definición. Sea E un espacio localmente convexo, $\mathcal{U}(E)$ una base de entornos de cero absx. y cerrados en E y $\mathcal{B}(E)$ el sistema de

todos los conjuntos acotados en E absx. y cerrados. Se dice que E satisface la <u>condición de densidad</u> si para cualquier función $\lambda: \mathcal{U}(E) \longrightarrow R+\setminus(0)$ y cualquier $V \in \mathcal{U}(E)$ existe un subconjunto finito $\mathcal{U}$ de $\mathcal{U}(E)$ y algún $B \in \mathcal{B}(E)$ tal que $\cap(\lambda(U)U : U \in \mathcal{U}) \subseteq B+V$.

Heinrich hace notar que todo espacio casinormable (luego todo (DF)) y todo Fréchet-Montel satisface la condición de densidad y da un ejemplo de escalonado de Köthe sin la condición de densidad, que no es más que una reformulación del conocido ejemplo de Köthe-Grotendieck de escalonado no distinguido λ_1.

Es fácil ver, tomando polares, que si E es metrizable entonces la condición de densidad implica el carácter distinguido de E. Pues bien, Bierstedt-Bonet [1] prueban que un espacio metrizable E satisface la condición de densidad si y solo si todo acotado del dual fuerte E'_b es metrizable y esto a su vez es equivalente a que $l_1(E)$ sea distinguido. En particular concluyen que un espacio λ_1 es distinguido si y solo si satisface la condición de densidad (para establecer la necesidad identifican el dual fuerte $(\lambda_1(E))'_b$, E Fréchet, con $K_\infty(\overline{V}, E'_b)$ y prueban que si λ_1 es distinguido y E es Banach entonces $\lambda_1(E)$ es distinguido, con lo cual λ_1 distinguido implica $\lambda_1(l_1) \cong l_1(\lambda_1)$ distinguido).

Como consecuencia, un espacio de Fréchet E satisface la condición de densidad si y solo si $\lambda_1(E) \cong \lambda_1 \otimes_\pi E$ es distinguido (resp. tiene la condición de densidad) para cada escalonado distinguido λ_1. Finalmente prueban que λ_p $(1 \leq p < \infty)$ satisface la condición de densidad si y solo si A cumple (D) (nótese que para $1<p<\infty$ λ_p es siempre distinguido).

Gran parte de la pruebas de [1] dependen de una formulación dual de la condición de densidad, lo que llevó a Bierstedt-Bonet a emprender un estudio sistemático de "condiciones de densidad duales" en el contexto de los (DF)-espacios (Bierstedt-Bonet [2]).

Hay dos candidatos naturales para formular una versión dual de la condición de densidad:

Definiciones . Con la misma notación de la definición anterior, se dice que E satisface la condición de densidad dual fuerte (C.D.D.F.) (resp. la condición de densidad dual (C.D.D.)) si y solo si para cada función $\lambda: \mathcal{B}(E) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \setminus (0)$ y cada elemento $A \in \mathcal{B}(E)$, existen un subconjunto finito $\mathcal{B}$ de $\mathcal{B}(E)$ y $U \in \mathcal{U}(E)$ tales que

$A \cap U \subseteq \operatorname{acx}(\cup(\lambda(B)B : B \in \mathcal{B})$ (resp. $A \cap U \subseteq \operatorname{acx}(\cup(\lambda(B)B : B \in \mathcal{B}))$.

Si E es el dual fuerte de un espacio metrizable F entonces ambas condiciones en E son equivalentes a la condición de densidad en F.

En Bierstedt-Bonet [2] se prueba que la metrizabilidad de los conjuntos acotados es una condición necesaria y suficiente para que un (DF)-espacio E cumpla la condición de densidad dual, y que un (DF)-espacio E tiene la (C.D.D.) (resp. (C.D.D.F.)) si y solo si $l_\infty(E)$ es casitonelado (resp. bornológico). Estas condiciones permiten caracterizar los espacios casitonelados del tipo $K_\infty(\overline{V}, E)$, E (DF), (se prueba en (Bierstedt-Bonet [2] que estos espacios tienen la propiedad (DF)) y obtener algunos resultados

parciales acerca de espacios bornológicos del mismo tipo.

Será util recordar el siguiente resultado acerca de "descripción proyectiva":

Teorema (Bierstedt-Bonet [2])

Sean E un espacio con la propiedad numerable de entornos (por ejemplo en (gDF)) y A una matriz de Köthe. Se cumple:

(a) Si $1 \leq p < \infty$ entonces $\text{indl}_p(v_n, E)$ es algebraica y topológicamente isomorfo a $K_p(\bar{V}, E)$.

(b) Si A cumple (D) entonces $\text{indl}_\infty(v_n, E)$ es algebraica y topológicamente isomorfo a $K_\infty(\bar{V}, E)$.

Florencio y Paul [1] han estudiado, usando técnicas de Rosier, ciertas propiedades de tonelación en espacios de sucesiones con valores vectoriales. Los resultados obtenidos permiten deducir propiedades localmente convexas en espacios del tipo $K_p(\bar{V}, E)$ haciendo uso del resultado de "descripción proyectiva" de Bierstedt-Bonet ya mencionado.

En este capitulo vamos a continuar el estudio de las condiciones de densidad duales en espacios co-escalonados con valores en un (DF). También se incluye una prueba de que $K_p(\bar{V}, E)$ es (gDF) si E es (gDF), $1 \leq p \leq \infty$ (se deduce de Florencio-Paul [1] y el resultado de "descripción proyectiva" anterior que $K_p(\bar{V}, E)$ es (DF) si E es (DF) y $1 \leq p < \infty$. Veáse Bierstedt-Bonet [2] para una prueba del carácter (DF) de $K_\infty(\bar{V}, E)$ para un (DF)-espacio E) y un apéndice cuyo contenido es el siguiente:

Por el trabajo de Taskinen (ver Taskinen [1] y [2]), sabemos que existen un espacio de Fréchet E y un espacio de Fréchet-Montel F tales que $L_b(E,l_2)$ y $F'_b \hat{\otimes}_\varepsilon F'_b$ no son (DF). En este segundo ejemplo, se puede aplicar el teorema de dualidad de Buchwalter (c.f.Köthe II § 45.3) para obtener que $F'_b \hat{\otimes}_\varepsilon F'_b \cong (F \hat{\otimes}_\pi F)'_{co}$ y en consecuencia $F'_b \hat{\otimes}_\varepsilon F'_b$ es un (gDF) (c.f. Jarchow [1;Cap.12] ó Pérez Carreras-Bonet [1; Cap.,8]). Por tanto quedaban dos cuestiones sin resolver: decidir si $L_b(E,F'_b)$ y $E'_b \hat{\otimes}_\varepsilon F'_b$ han de ser necesariamente (gDF) (E,F espacios de Fréchet).

En el apéndice a este capítulo observamos que las construcciones de Taskinen en [1] se pueden adaptar para dar una respuesta negativa a estas dos cuestiones.

Empezamos estableciendo de forma precisa la dualidad entre espacios escalonados con valores en un espacio de Fréchet y espacios co-escalonados con valores en un (DF)-espacio:

Sean E un espacio de Fréchet, A una matriz de Köthe y $1<p,q<\infty$ ($p^{-1}+q^{-1}=1$). Sabemos que $\lambda_p(A)'_b = (\lambda_p(A)^X,\ \beta(\lambda_p(A)^X,\lambda_p(A))) = K_q\bar{V}$ y en consecuencia los resultados de Florencio y Paul [1; 3.5,3.6 y 3.8] permiten concluir que $(\lambda_p(A,E)'_b \cong K_q(\bar{V},E'_b)$.

Se puede razonar directamente:

LEMA 4.1. Sean E un espacio de Fréchet, $1<p<\infty$. Dado B acotado en $l_p(E)$ existe C acotado en E tal que B es acotado en $l_p(E_C)$.

Dem: Sea (r_n) un sistema fundamental de seminormas continuas en E, $U_n := \{x\in E : r_n(x)\le 1\}$. Por hipótesis

$$M_n := \sup\Big(\Big(\sum_i (r_n(x(i)))^p\Big)^{\frac{1}{p}} : x=(x(i))\in B\Big) < \infty$$

Entonces

$$C := \cap\,(2^{\frac{n}{p}} M_n U_n : n\in N)$$

es acotado en E y para cada $x=(x(i))\in B$ se cumple

$$\sum_i (P_C(x(i)))^p \le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_i (2^{\frac{-n}{p}} M_n^{-1} r_n(x(i)))^p = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} M_n^{-p} \sum_i (r_n(x(i)))^p \le 1.$$

PROPOSICION 4.2. Sean A una matriz de Köthe, $1<p<\infty$, $p^{-1}+q^{-1}=1$ y E un espacio de Fréchet. Entonces $(\lambda_p(A,E))'_b$ es algebraica y topológicamente isomorfo a $K_q(\overline{V},E'_b)$.

Dem: Recordamos que $K_q(\overline{V},E'_b)=\mathrm{indl}_q(v_n,E'_b)$ algebraica y topológicamente. En el capitulo 3 comprobamos que $(l_p(E))'=l_q(E'_b)$ y por tanto la identidad algebraica $(\lambda_p(A,E))'_b=K_q(\overline{V},E'_b)$ es clara. La dualidad viene dada por

$$<(x(i)),(u(i))>:=\sum_i <x(i),u(i)>$$

$((x(i))\in\lambda_p(A,E),\ (u(i))\in K_q(\overline{V},E'_b))$

1. $K_q(\overline{V},E'_b)\longrightarrow(\lambda_p(A,E))'_b$ es continua: En efecto sean $n\in N$ y B acotado en $\lambda_p(A,E)$. Por el lema anterior existe C_n acotado en E tal que B es acotado en $l_p(a_n,E_{C_n})$. Pero entonces, para cada $(u(i))\in l_q(v_n,E'_b)$, $(x(i))\in B$ se cumple

$$|\sum_i <u(i),x(i)>|\leq\sum_i v_n(i)P_{C_n^0}(u(i))a_n(i)P_{C_n}(x(i))\leq$$

$$(\sum_i (v_n(i)P_{C_n^0}(u(i)))^q)^{\frac{1}{q}}.\sup\{(\sum_i (a_n(i)P_{C_n}(y(i)))^p)^{\frac{1}{p}} : (y(i))\in B\}$$

lo que prueba que $l_q(v_n,E'_b)\longrightarrow(\lambda_p(A,E))'_b$ es continua para cada $n\in N$ y en consecuencia será continua la inclusión

$$K_q(\overline{V},E'_b)\longrightarrow(\lambda_p(A,E))'_b.$$

2. $(\lambda_p(A,E))'_b\longrightarrow K_q(\overline{V},E'_b)$ es continua: sea

$$W:=\{(u(i))\in K_q(\overline{V},E'_b) : (\sum_i (\overline{v}(i)P_{C^0}(u(i)))^q)^{\frac{1}{q}}\leq 1\}$$

un 0-entorno básico en $K_q(\overline{V},E'_b)$ ($\overline{v}=\inf\alpha_n a_n^{-1}\in\overline{V}$, C acotado en E). Tomamos

$$B:=\{(x(i))\in\lambda_p(A,E) \ : \ (\sum_i (a_n(i)P_c(x(i)))^p)^{\frac{1}{p}}\leq\alpha_n \ \forall n\in N\}$$

acotado en $\lambda_p(A,E)$. Es suficiente comprobar que $B^0\subseteq W$. Sean para ello $(u(i))\in B^0$, $k\in N$, $x(j)\in C$ $(1\leq j\leq k)$. Para ciertos escalares $\alpha(i)$ de módulo 1 se cumple

$$\sum_{i=1}^{k}(\bar{v}(i)\,|<u(i),\ x(i)>|)^q =$$

$$\sum_{i=1}^{k}\bar{v}(i)<u(i),\ x(i)>\alpha(i)\,(\bar{v}(i)<u(i),\ x(i)>)^{q-1} =$$

$$\sum_{i=1}^{k}<u(i),\ \alpha(i)\bar{v}(i)x(i)\,(\bar{v}(i)<u(i),\ x(i)>)^{q-1}>$$

Pero

$$(\sum_{i=1}^{k}(a_n(i)P_c(\bar{v}(i)x(i)\,(\bar{v}(i)<u(i),\ x(i)>)^{q-1}))^p)^{\frac{1}{p}}\leq$$

$$(\sum_{i=1}^{k}(a_n(i)\bar{v}(i)\,(\bar{v}(i)\,|<u(i),\ x(i)>|)^{q-1})^p)^{\frac{1}{p}}\leq$$

$$\alpha_n(\sum_{i=1}^{k}(\bar{v}(i)\,|<u(i),\ x(i)>|)^q)^{\frac{1}{p}} \ ,$$

con lo cual

$$(\alpha(i)\bar{v}(i)\,(\bar{v}(i)<u(i),\ x(i)>)^{q-1}x(i))_{i=1}^{k}$$

está en

$$(\sum_{i=1}^{k}(\bar{v}(i)\,|<u(i),\ x(i)>|)^q)^{\frac{1}{p}}.B$$

y por tanto

$$\sum_{i=1}^{k}(\bar{v}(i)\,|<u(i),\ x(i)>|)^q\leq(\sum_{i=1}^{k}(\bar{v}(i)\,|<u(i),\ x(i)>|)^q)^{\frac{1}{p}}$$

lo que quiere decir que

$$(\sum_{i=1}^{k}(\overline{v}(i)\,|<u(i),\ x(i)>|)^{q})^{\frac{1}{q}} \leq 1.$$

Al ser k y x(j) $(1 \leq j \leq k)$ arbitrarios concluimos que

$$(\sum_{i}(\overline{v}(i)P_{c_0}(u(i)))^{q})^{\frac{1}{q}} \leq 1$$

es decir, $(u(i)) \in W$.

Florencio y Paul [1;Teorema 3.22] prueban el siguiente

TEOREMA Sea $1 < p < \infty$. Para un espacio de Fréchet E y una matriz de köthe A, $\lambda_p(A,E)$ es distinguido si y solo si E es distinguido.

Este resultado también se sigue de la proposición anterior y Bierstedt-Bonet [2].

La siguiente proposición no se incluye en Florencio-Paul [1]

LEMA 4.3. Sea $1 \leq p \leq \infty$. Si E es (gDF) entonces $l_p(E)$ es (gDF)

Dem: Daremos la prueba para $1 < p < \infty$. Sea (A_n) una sucesión fundamental de acotados en E. Tomamos

$$B_n := \{(x(m)) \in E^{N} : (\sum_{m=1}^{\infty}(P_{A_n}(x(m)))^{p})^{\frac{1}{p}} \leq 1\},\ n \in N$$

1. (nB_n) es sucesión fundamental de acotados en $l_p(E)$: de lo contrario existe M acotado en $l_p(E)$ tal que

$$\sup\{\sum_{m}(P_{A_n}(x(m)))^p : (x(m))\in M\} = \infty \quad \forall n\in N$$

y encontramos (I_n) subconjuntos finitos de N disjuntos dos a dos, y puntos $(x_n(m))_m\in M$, $u_n(m)\in A_n^0$ $(n\in N,\ m\in I_n)$ tales que

$$\sum_{m\in I_n}|<u_n(m),\ x_n(m)>|>n^p.$$

Entonces $(u_n(m) : n\in N,\ m\in I_n)$ es una sucesión convergente a cero en E'_b y por tanto un equicontinuo debido al carácter (gDF) de E. Sean U 0-entorno en E tal que $(u_n(m) : n\in N,\ m\in I_n)\subseteq U^0$ y r la funcional de Minkowski de U. Entonces

$$W:=\{(x(k)) : \sum_{k}(r(x(k)))^p\leq 1\}$$

es un 0-entorno en $l_p(E)$, luego existe $\lambda>0$ con $M\subseteq\lambda W$, de donde

$$\sum_{m\in I_n}|<u_n(n),\ x_n(n)>|^p\leq\sum_{m\in I_n}(r(x_n(n)))^p\leq\lambda^p \quad \forall n\in N$$

lo que es una contradicción.

2. Sea U_n un 0-entorno absolutamente convexo en $l_p(E)$, $n\in N$. Tenemos que probar que $U:=\cap(U_n+nB_n : n\in N)$ es un 0-entorno en $l_p(E)$. Para ello, sean r_n seminorma continua en E tal que

$$W_n:=\{(x(k))\in l^p(E) : \sum_{k}(r_n(x(k)))^p\leq 1\} \quad U_n$$

y $V_n:=\{x\in E: r_n(x)\leq 1\}$.

Al ser E (gDF), $V:=\cap(V_n+A_n : n\in N)$ es un 0-entorno en E y

$$W :=\{(x(k))\in l^p(E) : \sum_{k}(r\ (x(k)))^p\leq 1\}$$

es un 0-entorno en $l_p(E)$ (r funcional de Minkowski de V). Dados $(x(k))\in W$, $n\in N$ sea $\lambda_k:=\max(r(x(k)),\ 2^{-k/p}) > 0$. Cada x(k) está en $\lambda_k V$ luego $x_k = y_k + z_k$ siendo $y_k\in\lambda_k V_n$, $z_k\in\lambda_k A_n$. Entonces

$$\sum_k (P_{A_n}(z_k))^p \leq \sum_k \lambda_k^p \leq \sum_k (r(x_k))^p + 1 \leq 2$$

luego $(z_k) \in 2^{1/p} B_n$ y en particular deducimos que $(y_k) \in l_p(E)$. Además

$$\sum_k (r_n(y_k))^p \leq \sum_k \lambda_k^p \leq 2$$

Por tanto $W \subseteq 2^{1/p}(W_n + B_n)$ para todo $n \in N$ y concluimos que U es un 0-entorno en $l_p(E)$.

PROPOSICION 4.1. Sea $1 \leq p \leq \infty$. Si E es (gDF) entonces $K_p(\overline{V}, E)$ es (gDF).

Dem: Para $1 \leq p < \infty$ se deduce directamente del lema anterior y del resultado de descripción proyectiva de Bierstedt-Bonet. Hagamos la prueba para $p = \infty$.

Sea (A_n) una sucesión fundamental de acotados absx. en E y $B_n := \{x = (x(i)) \in l_\infty(v_n, E) : v_n(i)x(i) \in An \ \forall i \in I\}$. (B_n) es una s.f.a. en $K_\infty(\overline{V}, E)$. Tenemos que probar que si (W_k) es una sucesión de 0-entornos en $K_\infty(\overline{V}, E)$ entonces $\cap(W_k + B_k : k \in N)$ es también un 0-entorno en E.

1. Para cada $k \in N$ podemos encontrar $\omega_k \in \overline{V}$ y $q_k \in cs(E)$ tales que

$$\{x \in K_\infty(\overline{V}, E) : \sup_i \omega_k(i) q_k(x(i)) \leq 1\} \subset \frac{1}{8} W_k.$$

Tomamos ahora $n \in N$

$$B_{n,k} := \{x = (x(i)) \in l_\infty(v_n, E) : v_n(i)x(i) \in A_k \ \forall i\}$$

$(B_{n,k} : k \in N)$ es una s.f.a. en E. Al ser la inyeccción $l_\infty(v_n, E) \longrightarrow K_\infty(\overline{V}, E)$ continua y $l_\infty(v_n, E)$ un (gDF) concluimos que

$$U_n := \cap((W_k \cap l_\infty(v_n, E)) + B_{n,k} : k \in N)$$

es un 0-entorno en $l_\infty(v_n, E)$ y por tanto encontramos $p_n \in cs(E)$ tal

$$\sup\Big(\sum_m (P_{A_n}(x(m)))^p \;:\; (x(m))\in M\Big) = \infty \quad \forall n\in N$$

y encontramos (I_n) subconjuntos finitos de N disjuntos dos a dos, y puntos $(x_n(m))_m \in M$, $u_n(m)\in A_n^0$ $(n\in N,\ m\in I_n)$ tales que

$$\sum_{m\in I_n} |<u_n(m),\ x_n(m)>| > n^p.$$

Entonces $(u_n(m) : n\in N,\ m\in I_n)$ es una sucesión convergente a cero en E'_b y por tanto un equicontinuo debido al carácter (gDF) de E. Sean U 0-entorno en E tal que $(u_n(m) : n\in N,\ m\in I_n) \subseteq U^0$ y r la funcional de Minkowski de U. Entonces

$$W := \{(x(k)) \;:\; \sum_k (r(x(k)))^p \le 1\}$$

es un 0-entorno en $l_p(E)$, luego existe $\lambda > 0$ con $M \subseteq \lambda W$, de donde

$$\sum_{m\in I_n} |<u_n(n),\ x_n(n)>|^p \le \sum_{m\in I_n} (r(x_n(n)))^p \le \lambda^p \quad \forall n\in N$$

lo que es una contradicción.

2. Sea U_n un 0-entorno absolutamente convexo en $l_p(E)$, $n\in N$. Tenemos que probar que $U := \cap(U_n + nB_n : n\in N)$ es un 0-entorno en $l_p(E)$. Para ello, sean r_n seminorma continua en E tal que

$$W_n := \{(x(k))\in l^p(E) \;:\; \sum_k (r_n(x(k)))^p \le 1\} \quad U_n$$

y $V_n := \{x\in E : r_n(x) \le 1\}$.

Al ser E (gDF), $V := \cap(V_n + A_n : n\in N)$ es un 0-entorno en E y

$$W := \{(x(k))\in l^p(E) \;:\; \sum_k (r\,(x(k)))^p \le 1\}$$

es un 0-entorno en $l_p(E)$ (r funcional de Minkowski de V). Dados $(x(k))\in W$, $n\in N$ sea $\lambda_k := \max(r(x(k)),\ 2^{-k/p}) > 0$. Cada x(k) está en $\lambda_k V$ luego $x_k = y_k + z_k$ siendo $y_k\in\lambda_k V_n$, $z_k\in\lambda_k A_n$. Entonces

es decir $x_j \in 2^{-(j+1)}(W_k + B_k)$. Concluimos que

$$x = \sum_{j=-1}^{k} x_j \in W_k + B_k$$

3. Finalmente ponemos

$$\bar{v} := \sup_k \bar{v}_k, \quad W := \{x \in K_\infty(\bar{V},E) : \sup_i \bar{v}(i)p(x(i)) \leq 1\}$$

Dado $n \in N$, $\bar{v}_k \leq \lambda_n v_n$ para cada $k \geq n$ mientras que existe $M > 0$ tal que $\bar{v}_k \leq M_k v_n$ para cada $1 \leq k < n$, pero entonces $\bar{v} \in \bar{V}$ y W es un 0-entorno en $K_\infty(\bar{V},E)$. Además $\bar{v}_k \leq \bar{v}$ implica $W \subseteq V_k \subseteq W_k + B_k$ para cada $k \in N$ y queda probado que $\cap(W_k + B_k : k \in N)$ es un 0-entorno en $K_\infty(\bar{V},E)$.

Veamos ahora qué ocurre con las condiciones de densidad duales

PROPOSICION 4.5. Sea E un (DF)-espacio. Sea A una matriz de Köthe y $1 \leq p < \infty$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $K_p(\bar{V},E)$ tiene la condición de densidad dual (C.D.D.)

(b) A satisface la condición (D) y E tiene la condición de densidad dual.

Dem: (compárese con Bierstedt-Bonet [2 ; 2.7]). Puesto $K_p(\bar{V})$ y E son subespacios complementados de $K_p(\bar{V},E)$, (a) implica (b) es consecuencia de Bierstedt-Bonet [2; 1.10 y 2.10]. Reciprocamente, supongamos (b).

Puesto que $K_p(\bar{V},E)$ es un (DF) (véase Bierstedt-Bonet [2;3.11]) es suficiente probar que todo acotado de $K_p(\bar{V},E)$ es metrizable (c.f.Bierstedt-Bonet [2;1.5]).

La prueba de Bierstedt-Bonet [2;3.8] revela que todo acotado de $K_p(\bar{V},E)$ está contenido en un conjunto de la forma

$B:=(x=(x(i))\in K_p(\bar{V},E):\Sigma(v_n(i)p_A(x(i)))^p\leq 1)$ donde A es un subconjunto absolutamente convexo y acotado de E. Veamos que 0 tiene una base numerable de entornos en B. Para hacer esto tomamos

$$C:=(y=(y(i))\in K^I : \sum_{i\in I}(v_n(i)|y(i)|)^p\leq 1)$$

$$D:=(z=(z(i))\in l_p(E) : \sum_{i\in I}(p_A(z(i)))^p\leq 1)$$

Por hipótesis cada mC, $m\in N$, es metrizable pues $K_p(\bar{V})$ tiene la condición de densidad dual, luego podemos encontrar una sucesión $(\bar{v}_k)$ en $\bar{V}$ con la siguiente propiedad

(1) $\forall\bar{v}\in\bar{V}$, $m\in N$ existe $k\in N$ tal que

$$mC\cap(y\in K_p(\bar{V}):\sum_{i\in I}(\bar{v}_k(i)|y(i)|)^p\leq 1\}$$

está contenido en

$$(y\in K_p(\bar{V}) : \sum_{i\in I}(\bar{v}(i)|y(i)|)^p\leq 1)$$

Por otra parte todo subconjunto acotado de E, luego de $l_p(E)$, es metrizable. Por tanto podemos encontrar una sucesión creciente (r_1) de seminormas continuas en E tal que

(2) $\forall r\in cs(E)$ $\forall M\in N$ $\exists l\in N$ tal que

$$(z\in l_p(E) : \sum_{i\in I}(r_1(z(i)))^p\leq 1)\cap MD \text{ es contenido en}$$

$$(z\in l_p(E) : \sum_{i\in I}(r(z(i)))^p\leq 1)$$

Ahora, para $\bar{v}\in\bar{V}$ y $r\in cs(E)$ ponemos

$$N_{\bar{v},r}: (x\in K_p(\bar{V},E) : \sum_{i\in I}(\bar{v}(i)r(x(i)))^p\leq 1)$$

Probamos que $\forall \bar{v}\in\bar{V}$, $r\in cs(E)$ $\exists k,l\in N$ tal que

$$N_{\bar{v}_k,r_l}\cap B \quad N_{\bar{v},r}.$$

Dado $\bar{v}\in\bar{V}$ existe $M>0$ con $\bar{v}\leq Mv_n$ (n viene dado en la definición de B).Si seleccionamos l como en (2) para M y r, podemos encontrar $m\in N$ tal que

$$(\sum_{i\in I}(v_n(i)r_l(x(i)))^p)^{\frac{1}{p}}\leq m$$

para todo $x\in B$. En consecuencia si $x\in B$, entonces $(r_l(x(i)))_{i\in I}\in mC$. Ahora seleccionamos $k\in N$ como en (1) para v y m. Supongamos ahora

$$x\in B\cap N_{\bar{v}_k,r_l}.$$

Primero $(r_l(x(i)))\in mC$ y

$$(\sum_{i\in I}(\bar{v}_k(i)r_l(x(i)))^p)^{\frac{1}{p}}\leq 1$$

De (1) se sigue

$$(\sum_{i\in I}(\bar{v}(i)r_l(x(i)))^p)^{\frac{1}{p}}\leq 1.$$

Puesto que $(\bar{v}(i)x(i))\in MD$, podemos aplicar (2) para concluir

$$(\sum_{i\in I}(\bar{v}(i)r(x(i)))^p)^{\frac{1}{p}}\leq 1.$$

COROLARIO 4.6. Sea E un espacio de Fréchet. Sea A una matriz de Köthe y $1<p<\infty$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\lambda_p(A,E)$ cumple la condición de densidad de Heinrich.

(b) A tiene la propiedad (D) y E cumple la condición de

densidad.

Dem: Se sigue de las proposiciones 4.2. y 4.5., puesto que un espacio de Fréchet cumple la condición de densidad si y solo si su dual fuerte satisface la (C.D.D.).

Ahora analizamos la condición de densidad dual fuerte de $K_p(\bar{V},E)$, E (DF).

PROPOSICION 4.7. Sea E un (DF)-espacio. Sea A una matriz de Köthe y $1\leq p<\infty$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $K_p(\bar{V},E)$ cumple la condicion de densidad dual fuerte (C.D.D.F.)

(b) A tiene la propiedad (D) y E cumple (C.D.D.F.).

Más aún, en este caso tenemos que

$l_\infty(K_p(\bar{V},E))=\text{indl}_\infty(l_p(v_n,E))$ algebraica y topologicamente.

Dem: Puesto que $K_p(\bar{V})$ y E son subespacios complementados de $K_p(\bar{V},E)$, (a) implies (b) se sigue de Bierstedt-Bonet [2;1.10 y 2.10]. Reciprocamente, supongamos (b). Dada una sucesión fundamental (A_n) de subconjuntos acotados de E, si ponemos

$$B_n:=\{x=(x(i))\in K_p(\bar{V},E) : \sum_{i\in I}(v_n(i)P_{A_n}(x(i)))^p\leq 1\},\ n\in N,$$

entonces (B_n) es una sucesión fundamental de subconjuntos acotados de $K_p(\bar{V},E)$ (Bierstedt-Bonet [2;3.8]).

Claramente $C_n := \{\alpha=(\alpha(i))\in K_p\bar{V} : \Sigma(v_n(i)|\alpha(i)|)^p\le 1\}$, $n\in N$, forman una sucesión fundamental de subconjuntos acotados de $K_p\bar{V}$.

Fijamos $p\in N$ y (λ_n) una sucesión decreciente de numeros reales, $0<\lambda_n\le 1$. Puesto que $(A_n : n\ge p)$ es una sucesión fundamental de subconjuntos acotados de E, aplicamos (C.D.D.F.) para encontrar un número $m>p$ y un 0-entorno U en E que satisfagan

$$(1)\quad U\cap A_p \subset acx(\cup(\lambda_k 2^{-k} : p\le k\le m)) \subset \sum_{k=p}^{m}\lambda_k A_k$$

Por Bierstedt-Bonet [2;2.10] $K_p(\bar{V})$ tiene (C.D.D.F.).Dada la sucesión fundamental de acotados $(C_k : k\ge m)$ de $K_p(\bar{V})$, podemos encontrar un peso $\bar{v}\in\bar{V}$ y un número natural $s>m$ tales que

$$(2)\quad \delta C_p \cap V \subset acx(\cup(\lambda_k 2^{-k}C_k : m\le k\le s)) \subset \sum_{k=m}^{s}\lambda_k 2^{-k}C_k$$

donde $\delta>0$ satisface $A_p\subseteq \lambda_p U$ y

$$V := \{\alpha=(\alpha(i))\in K_p\bar{V} : \Sigma(\bar{v}(i)|\alpha(i)|)^p\le 1\}.$$

Sea q la funcional de Minkowski de U. Ahora tomamos

$$W := \{x=(x(i))\in K_p(\bar{V},E) : \Sigma(\bar{v}(i)q(x(i)))^p\le 1\}$$

Sea $x\in W\cap B_p$. Como $(q(x(i)))\in V\cap\lambda_p C_p$ podemos aplicar (2) para obtener $\alpha_k=(\alpha^k(i))\in K_p\bar{V}$, $m\le k\le s$, tales que

$$(3)\quad (q(x(i))) = \sum_{k=m}^{s}\lambda_k 2^{-k}\alpha^k \quad y \quad \sum_i (v_k(i)|\alpha^k(i)|)^p \le 1.$$

De (1), para $i\in I$, tenemos

$$(4)\quad x(i) = (q(x(i)) + p_{A_p}(x(i)))\sum_{j=p}^{m}\lambda_j 2^{-j}z^j(i), \text{ donde } z^j(i)\in A_j.$$

De (3) y (4) podemos concluir

$$(5)\quad x = \sum_{j=p}^{m}\lambda_j 2^{-j}(z^j(i)p_{A_p}(x(i))) + \sum_{k=m}^{s}\lambda_k 2^{-k}(\sum_{j=p}^{m}\lambda_j 2^{-j}z^j(i)\alpha^k(i)).$$

Tenemos dos casos.

1. $p \le j \le m$

$$\sum_i |v_j(i) p_{A_p}(x(i)) p_{A_j}(z^j(i))|^P \le \sum_i |v_p(i) p_{A_p}(x(i))|^P \le 1, \text{ luego}$$

$$(z^j(i) p_{A_p}(x(i)))_i \in B_j.$$

2. $m \le k \le s$. Puesto que $z_j(i) \in A_j \subseteq A_k$ cuando $p \le j \le m \le k$, obtenemos

$$\sum_i |v_k(i) p_{A_k}(\sum_{j=p}^{m} \lambda_j 2^{-j} z^j(i) \alpha^k(i))|^P \le \sum_i |v_k(i) \alpha^k(i)|^P \le 1, \text{ luego}$$

$$(\sum_{j=p}^{m} \lambda_j 2^{-j} z^j(i) \alpha^k(i))_i \in B$$

Finalmente

$$W \cap B_p \subset \sum_{j=p}^{m} \lambda_j 2^{-j} B_j + \sum_{k=m}^{s} \lambda_k 2^{-k} B_k \subset 2 \sum_{j=1}^{s} \lambda_j 2^{-j} B_j$$

y queda probado lo que queríamos.

APENDICE

Como ya se ha indicado en la introducción adaptamos la construcción de Taskinen en [1] para concluir que $L_b(E,F'_b)$ y $E'_b \hat{\otimes}_\varepsilon F'_b$ no son necesariamente (gDF) (E,F espacios de Fréchet).

Sea X un espacio de Fréchet con base de 0-entornos absx. y cerrados (U_n) con $2U_{n+1} \subseteq U_n$. Denotamos por B(X) el conjunto de todos los subconjuntos acotados de X. Sea A un subconjunto saturado de B(X) cuya unión cubre X. Denotamos por τ_A la topología en X' de la convergencia uniforme sobre los elementos de A. Usando las caracterizaciones de (gDF)-espacios y un argumento standart por dualidad se obtiene

LEMA: Sea X un espacio de Fréchet. Entonces (X',τ_A) es (gDF) si y solo si para cada sucesión de subconjuntos absx. $C_n \in A$, $n \in N$, existe $C \in A$ tal que $\cup(C_n \cap U_n : n \in N) \subseteq C$.

Sean E y F espacios de Fréchet con sucesiones decrecientes de 0-entornos (W_n) y (V_n) tales que $(n^{-1}W_n)$ y $(n^{-1}V_n)$ son bases de 0-entornos en E y F respectivamente. Entonces $L_b(E,F'_b)$ es topologicamente isomorfo al dual $(E \hat{\otimes}_\pi F)'$ dotado con la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos $\overline{\Gamma(A \otimes B)}$, $A \in B(E)$, $B \in B(F)$. Entonces tenemos

COROLARIO: $L_b(E,F'_b)$ es (gDF) si y solo si para cada

$(B_n) \subseteq B(E)$, $(C_n) \subseteq B(F)$, existen $A \in B(E)$, $B \in B(F)$ tales que

$\cup(\overline{\Gamma(B_n \otimes C_n)} \cap \overline{\Gamma(2^{-n}W_n \otimes V_n)} : n \in N) \subseteq \overline{\Gamma(A \otimes B)}$, todas las clausuras tomadas en $E \hat{\otimes}_\pi F$.

Obsérvese que por simetria la condición anterior es también equivalente a que $L_b(F, E'_b)$ sea (gDF).

Usaremos las notaciones de Taskinen [1; Section 4] y tomaremos $M_n = M'_n = l_2$. Por tanto podemos suponer que las constantes de proyección $\rho(n)$ de G_n sobre M_n satisfacen

$$\sqrt{\frac{2n}{\pi}} < \rho(n) < 2\sqrt{n} \quad \text{(ver Taskinen [1;p.22])}$$

EJEMPLO 1: Existe un espacio de Fréchet E tal que $L_b(E, l_2)$ no es (gDF). Esto será consecuencia del corolario anterior una vez probemos que para $F = l_2$, V la bola unidad de F, y E el espacio de Fréchet de Taskinen [1;4.4], se cumple que

$$\overset{\circ}{\cup}(\overline{\Gamma(2^{-n}W_n \otimes V)} \cap \overline{\Gamma(W^n_{n+1} \otimes 2^{4n}V)} : n \in N)$$

no está contenido en $\overline{\Gamma(A \otimes B)}$ para todo $A \in B(E)$, $B \in B(F)$, las clausuras tomadas en $E \hat{\otimes}_\pi F$ (observese que $W^n_{n+1} \in B(E)$).

Para probar esto es suficiente ver que para cada $t_m \geq 1$, $m \in N$, el conjunto

$$\cup(\Gamma(2^{-n}W_n \otimes V) \cap \Gamma(2^{4n}W^n_{n+1} \otimes V))$$

no está contenido en la clausura de $\Gamma((\cap(t_m W_m : m \in N)) \otimes V)$ en $E \otimes_\pi F$.

Primero observemos que el lema clave 4.3. of Taskinen [1] nos dice, para $s(n) := \rho(n)/4$, que

$\Gamma(U \otimes V) \cap \Gamma(2^{5n}\tilde{U} \otimes V) \not\subseteq \Gamma((s(2^{5n})U \cap 4s\tilde{U}) \otimes V)$ para todo $n \in N$ y $s > 0$.

Entonces

$\Gamma(2^{-n}U\otimes V)\cap\Gamma(2^{4n}\tilde{U}\otimes V)\not\subseteq\Gamma(((s(2^{5n})/2^{n})U\cap 2s\tilde{U})\otimes V)$ para todo $n\in N$ y $s>0$. Puesto que $\lim \rho(n)/4n^{1/5}=\infty$, existe $n_0\in N$ tal que $s(2^{5n_0})/2^{n_0}\geq 2t_1$. Entonces $\Gamma(2^{-n_0}U\otimes V)\cap\Gamma(2^{4n_0}\tilde{U}\otimes V)$ no está contenido en $2\Gamma((t_1U\cap t_{n_0+1}\tilde{U})\otimes V)$. Puesto que $(\Gamma((\cap(t_mW_m:m\in N))\otimes V)+\Gamma(W_{n_0+1}\otimes V))\cap(E_{n_0}\otimes F)\subseteq 2\Gamma((t_1U\cap t_{n_0+1}\tilde{U})\otimes V)$ (Taskinen [1; prueba de 4.5]), $\Gamma(W_{n_0+1}\otimes V)$ es un 0-entorno en $E\otimes_\pi F$, y

$$[\Gamma(2^{-n_0}W_{n_0}\otimes V)\cap\Gamma(2^{4n_0}W^{n_0}_{n_0+1}\otimes V)]\cap(E_{n_0}\cap F)=$$

$$\Gamma(2^{n_0}U\otimes V)\cap\Gamma(2^{4n_0}\tilde{U}\otimes V)$$

se sigue la conclusión.

EJEMPLO 2: Existen un espacio de Fréchet-Schwartz F con la propiedad de aproximación acotada y un espacio de Fréchet E tales que $F'_b\hat{\otimes}_\varepsilon E'_b\cong L_b(F,E'_b)$ no es (gDF). F es el Fréchet-Schwartz y E es el espacio de Fréchet construidos en Taskinen[1;4.7]. En este caso la prueba es un poco más complicada. Usando ahora el segundo lema clave 4.8 en Taskinen [1] se puede probar que

$$\cup(\Gamma(2^{-n}W_n\otimes V_n)\cap(\cap(\Gamma(2^{4n}W^n_p\otimes V_p):p\geq n+1)):n\in N)$$

no está contenido en la clausura de $\Gamma(A\otimes B)$ en $E\otimes_\pi F$ para $A\in B(E)$ y $B\in B(F)$.

Ahora, puesto que $W^n_p=\tilde{U}$ para $p\geq n+1$, podemos aplicar el resultado positivo de Taskinen [1;3.1] para $(H,\tilde{h})$ y F para obtener para cada $n\in N$, $C_n\in B(F)$ tal que

$$\cap(\Gamma(2^{4n}W^n_p\otimes V_p):p\geq n+1)\subset\overline{\Gamma(W^n_{n+1}\otimes C_n)}$$

la clausura tomada en $E\hat{\otimes}_{\pi}F$. En consecuencia, para $(W_n^{n+1}) \subseteq B(E)$, $(C_n) \subseteq B(F)$ el conjunto

$$\cup(\overline{\Gamma(2^{-n}W_n \otimes V_n)} \cap \overline{\Gamma(W_{n+1}^n \otimes C_n)} : n\in N)$$

no está contenido en $\overline{\Gamma(A\otimes B)}$, las clausuras tomadas en $E\hat{\otimes}_{\pi}F$. La conclusión se sigue del corolario.

REFERENCIAS

BEHRENDS-DIEROLF-HARMAND [1]: "On a problem of Bellenot and Dubinsky". Aparecerá en Math. Annalen.

BELLENOT-DUBINSKY [1]: "Fréchet spaces with nuclear Köthe quotients". Trans. Amer. Math. Soc. 273, 579-594 (1982)

A.BENNDORF [1] : "On the relation of the bounded approximation property and a finite dimensional decomposition in nuclear Fréchet spaces". Studia Math. T. LXXV. (1983)

BESSAGA-PELCYNSKI-ROLEWICZ [1] : "Some properties of the space (s)". Colloq. Math.,2, 45-51, (1959)

K.BIERSTEDT-J.BONET [1] : "Stefan Heinrich's density condition for Fréchet spaces and the characterization of the distinguished Köthe echelon spaces". Aparecerá en Math. Nachr. (ver también C.R. Acad. Sci. Paris 303, Série I, nº 10 (1986))

[2] : "Dual density conditions". Preprint.

K.BIERSTEDT-R.MEISE [1] : "Distinguished echelon spaces and the projective description of weighted inductive limits of $\mathcal{O}_d C(X)$". Aspects of Mathematics and its applications, North-Holland Math. Library, vol. 34 (1986), 169-226.

[2] : Weighted inductive limits and their

J.BONET-J.SCHMETS [1] : "Bornological spaces of type $C(X) \otimes_\varepsilon E$ or C(X,E)".Funct. et Approx.

DEFANT-FLORET [1] : "The precompactness-lemma for sets of operators". Proc. Int. Sem. Funct. Anal. Holomorphy and Appr. Theory 1982 (ed. G. Zapata).

DEFANT-GOVAERTS [1] : "Bornological and Ultrabornological spaces of type C(X,F) and $E \varepsilon F$".Math. Ann., 268, 347-355, (1984)

S.DIEROLF [1] : "On spaces of continuous linear mappings between locally convex spaces". Habilitationsschrift. Universitat München 1985.

S.DIEROLF-MOSCATELLI [1] : "A note on quojections".Aparecerá en Funct. et Approximatio.

S.DIEROLF-ZARNADZE [1] : "A note on strictly regular Fréchet spaces:. Archiv. Math; Vol. 42, 549-556 (1984)

S.DINEEN [1] : "Complex Analysis in locally convex spaces". North-Holland Math. Studies 57, 1981.

FLORENCIO y PAUL [1] : "Barrelledness conditions of certain vector-valued sequence spaces". Archiv. Math. 1987.

KRONE,J.-VOGT,D. [1] : "The splitting relation for pairs of Køthe echelon spaces". Math. Z.,190,387-400, (1985)

V.B.MOSCATELLI [1] : "Fréchet spaces without continuous norms and witouth bases". Bull. London Math. Soc. 12 (1980), 63-66.

L.NACHBIN [1] : "A glance of holomorphic factorization and uniform holomorphy". Aparecerá en Func. Analysis and Approx. Theory. North. Holland.

P.PEREZ CARRERAS-J.BONET [1]: "Barrelled Locally Convex Spaces". North. Holland Math Studies 131.

W.RUESS [1] : "Compactness and Collective Compactnesds in Spaces of Compact Operators". Journal of Math. Analysis and Applications 84, 400-417 (1981)

TASKINEN,J. [1]: "Counterexamples to "Probleme des topologies" of Grothendieck".Aparecerá en Ann.Acad.Sci.Fenn.

[2]: "The projective tensor product of Fréchet-Montel spaces". Preprint.

TERZIOGLU [1] : "Unbounded continuous linear operators and quotient spaces". Doga Tr. Math. J. 1987.

VALDIVIA [1]: "Topics in locally convex spaces". North. Holland. Math. Studies. Amsterdam North Holland 1982.

projective descriptions". Doga Tr. J. Math. 10, 1 (1985), 54-82.

K.BIERSTEDT-R.MEISE-W.SUMMERS [1] : "A projective description of weightedt inductive limits". Trans. of the Amer. Math. Society. Vol. 272, 1982.

[2] : "Köthe sets and Köthe sequence spaces". Funct. Analysis, Holomorphy and Approximation theory, North. Holland Math. Studies. 71 (1982) 27-91.

J.BONET [1] : "A projective description of weighted inductive limits of vector valued continuous functions". Collectanea Mathematica. Vol. XXXIV, 1983

[2] : "quojections and projective tensor products". Archiv. Math. Vol. 45, 169-173 (1985)

[3] : "The countable neighbourhood property and tensor products". Proc. Edimburg Math. Soc. 28 (1985) 207-215

[4] : "On weighted inductive limits of spaces of continuous functions". Math, Z. 192, 9-20 (1986)

[5] : "On the identity L(E,F)=LB(E,F) for pairs of locally convex spaces E and F". Proceedings of the AMS. Vol. 99, nº2, 1987.

[6] : " Projective descriptions of inductive limits of Fréchet sequence spaces". Archiv. Math. Vol. 48, 331-336 (1987)

J.BONET-P.PEREZ CARRERAS [1] : "Some results on Barreledness in Projective Tensor Products". Math. Z. 185, 333-338 (1984)

FLORET [1] : "Some aspects of the theory of locally convex inductive limits". Functional Analysis, Surveys and Recent results II Nort. Holland Math. Studis 38 (1980) 205-237.

[2] : "Continuous norms on locally convex strict inductive limit spaces". M.Z. 84

GROTHENDIECK [1] : "Sur les espaces (F) and (DF)". Summa Brasil Math;3,57-123, (1954)

[2] : "Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires". Mem. Amer. Math. Soc. 16, (1955)

[3] : "Leçons sur les espaces vectoriels topologiques". Sao Paulo, Instituto de Matemática Pura e Aplicada Universidade de Sao Paulo, 2nd ed. 1958.

HEINRICH [1] : "Ultrapowers of locally convex spaces and applications I" Math. Nachr. 118 (1984), 285-315

HOLLSTEIN [1] : "Extension and lifting of continuous linear mappings in locally convex spaces". Math. Nachr. 108 (1982) 275-297

[2] : "$\otimes$-sequences and inductive limits with local partition of unity".Manuscr. Math. 52, 227-249, (1985)

H.JARCHOW [1] : "Locally conves spaces". B.G.Teubner Stuttgart

G.KÖTHE [1] : "Topological vector spaces II" Berlin-Heidelberg New York, Springer Verlag 1979

VOGT,D. [1] : "Fréchetraüme, zwischen denen jede stetige lineare Abbildung beschränkt ist". J.Reine Angew. Math. 345,182-200 (1983)

[2] : "On two problems of Mityagin". Preprint

[3] : "Sequence space representations of spaces of test functions and distributions"p. 405-443 in Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory. Proc.Semin. Rio de Janeiro 1979. Lecture Notes Pure Appl. Math., 83, Marcel Dekker 1983

[4] : "Subspaces and quotients of (s)" p.167-187 in Functional Analysis: Surveys and Recent Ressults (ed.:K.D.Bierstedt,B.Fuchssteiner). North Holland Math. Studies 27, 1977.

UNIVERSIDAD DE VALENCIA FACULTAD DE CIENCIAS

Reunido el Tribunal que suscribe, en el día de la
acordó otorgar, por unanimidad, a esta Tesis doctoral de
D. ANTONIO GALBIS VERDU .
la calificación de APTO CUM LAUDE

Valencia, a 23 de MARZO de 1988

El Secretario,

El Presidente