REPRESENTACIONES DE ESPACIOS DE FUNCIONES DE CLASE $\mathcal{C}^{\infty}$ CON VALORES VECTORIALES.

Memoria presentada para
optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas
por

MANUEL MAESTRE VERA

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento al Profesor Dr. Manuel Valdivia Ureña, por su constante orientación en la elaboración de esta memoria, así como por sus valiosaa sugerencias.

También quiero hacer constar mi agradecimiento a mi amigo José Bonet por su estímulo.

A mis padres, a María y a Manuel

MANUEL VALDIVIA UREÑA, Catedrático de Análisis Matemático II y Análisis Matemático III y Director del Departamento de Teoría de Funciones y Ecuaciones Funcionales de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Valencia.

CERTIFICO: Que la presente Memoria "Representaciones de espacios de funciones de clase $\mathcal{E}^{\infty}$ con valores vectoriales" ha sido realizada bajo mi dirección por D. Manuel Maestre Vera y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que así conste en cumplimiento de la Legislación vigente presento y apadrino ante la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Valencia la referida Tesis firmando el presente certificado.

Valencia, 11 de Febrero de 1.982

Firmado: Manuel Valdivia Ureña

INTRODUCCION

El profesor Valdivia viene representando en los últimos años (1.978-1.982), como puede verse en la bibliografía, una serie de espacios de funciones. Bonet en 1.980 en su tesis doctoral (1) extendió muchos de estos resultados a espacios de funciones con valores vectoriales. El profesor Valdivia, con posterioridad, representó otros espacios de funciones, entre ellos espacios de funciones de clase $\mathcal{E}^{\infty}$ usando también el espacio s de las sucesiones de decrecimiento rápido (Piestsch (12)), y nos planteó la pregunta de qué resultados obtenidos por él podían extendrese a espacios de funciones con valores vectoriales. En la memoria que se presenta se exponen los resultados que hemos logrado extender.

El capítulo I lo constituyen los preliminares, siendo fundamentalmente una recopilación de resultados conocidos que nos son útiles en el desarrollo de la memoria. Cabe destacar que en I.1. se prueba que $\lambda_p(S(E))$ es topológicamente isomorfo a $S(\lambda_p(E))$, siendo $\lambda_p(S(E))$ una generalización de los espacios de Dieudonné-Gomez. En I.2. se introducen las definiciones sobre derivación e integración de funciones con valores vectoriales, así como resultados fundamentales. En I.3. se expone una partición de la unidad de un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$, construida por Valdivia (23) y a la que añadimos ciertos elementos que nos serán de utilidad.

En el capítulo II se estudia en II.1. el espacio $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$, probándose que si E es un espacio localmente completo $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$ es topológicamente isomorfo a $\lambda_\infty(S(E))$ para un cierto espacio de sucesiones. En II.2. se estudian unos casos particulares, a saber: si Ω es un abierto que no es casi acotado entonces se prueba que $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$ es topológicamente isomorfo a $\ell_\infty(S(E))$, y si Ω es casi integrable se prueba que $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$ es topológicamente isomorfo a $S(E)$. En II.3. se estudia el espacio $\mathcal{S}(\Omega,E)$, para Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ no vacío y se prueba que $\mathcal{S}(\Omega,E)$ es topológicamente isomorfo a $S(E)$, si E es localmente completo.

En el capítulo III, en III.1. se introduce el espacio $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega,E)$ y se prueba que si E es un espacio localmente completo $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega,E)$ es topológicamente isomorfo a $\lambda_p(S(E))$. En III.2. se estudian determinados casos particulares probándose que si Ω es un abierto de $\mathbb{R}^n$ que no es casi acotado entonces $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega,E)$ es topológicamente isomorfo a $\ell^p(S(E))$, y que si es casi integrable $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega,E)$ es topológicamente isomorfo a $S(E)$.

En el capítulo IV se estudia en IV.1. el espacio $\mathcal{E}_F(Q,E)$, siendo Q un cubo de $\mathbb{R}^n$, F un cerrado en Q e $\mathrm{int}(Q\sim F)$ no vacío, probándose que si E es un espacio localmente completo $\mathcal{E}_F(Q,E)$ es topológicamente isomorfo a $S(E)$. En IV.2. se da una condición necesaria y suficiente para que exista operador de extensión lineal y continuo de $\mathcal{E}_{F_1}(Q,E)$ a $\mathcal{E}_F(\mathbb{R}^n,E)$, siendo F un cerrado de $\mathbb{R}^n$ y $F_1 = F\cap Q$. En IV.3. se estudian los espacios $\mathcal{P}_{n_F}(E)$ y $\mathcal{M}_{n_F}(E)$, se prueba que ambos son isomorfos topológicamente a $S(E)$.

En el capítulo V se estudia en V.1. el espacio $\mathcal{D}^+_F(\Omega,E)$, siendo F un cerrado en Ω , $F\neq\Omega$ y se prueba que es isomorfo topológicamente a uno de los siguientes espacios: $S(E)$, $S(E)^N$, $S(E)^{(N)}$, $S(E)^N \times S(E)^{(N)}$, $(S(E)^N)^{(N)}$. En V.2. se estudia el espacio $\mathcal{D}^+_{\Gamma,F}(E)$ para Γ un cono de $\mathbb{R}^n$, F un cerrado de $\mathbb{R}^n$ y E un espacio localmente completo, se obtiene que para determinados cerrados F, el espacio $\mathcal{D}^+_{\Gamma,F}(E)$ es isomorfo tòpolÓgicamente a uno de los siguientes espacios: $S(E)$, $S(E)^N$, $S(E)^{(N)}$, $(S(E)^N)^{(N)}$, y se estudia un quinto caso en donde para determinados espacios E y cerrados F se obtiene que $\mathcal{D}^+_{\Gamma,F}(E)$ es topolÓgicamente isomorfo a $S(E)^N \times S(E)^{(N)}$.

En el capÍtulo VI se prueba en VI.1. que si K es un compacto en una variedad n-dimensional, de clase $\mathcal{E}^\infty$, entonces $\mathcal{D}(K,E)$ es isomorfo topolÓgicamente a $S(E)$ si E es localmente completo, esto aparece ya en (4), si V es una variedad n-dimensional, de clase $\mathcal{E}^\infty$, no compacta y numerable en el infinito, entonces $\mathcal{E}(V,E)$ es topolÓgicamente isomorfo a $S(E)^N$, y $\mathcal{D}(V,E)$ es isomorfo topolÓgicamente a $S(E)^{(N)}$ si E es localmente completo. En VI.2. se hace el mismo estudio para variedades con borde, obteniÉndose resultados anÁlogos.

CAPITULO I

PRELIMINARES

En este capítulo recogemos aquellos resultados que serán muy útiles a lo largo de la memoria, es , en parte, recopilación de hechos ya conocidos.

En lo que sigue de memoria, la palabra espacio indica espacio vectorial topológico localmente convexo de Hausdorff.

Si dos espacios E y F son isomorfos topológicamente lo denotaremos $E \simeq F$.

I.1. ALGUNOS ESPACIOS DE SUCESIONES

DEFINICION 1. Dado E un espacio, denotamos por S(E) al espacio vectorial sobre $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, formado por todas las sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de E tales que

$$\lim_{n\to+\infty} n^k q(x_n) = 0$$

para cada k entero positivo y cada q seminorma continua en E, dotado de la topología localmente convexa definida por la familia de seminormas

$$Q(q,k)(x_n) = \sup\{ n^k q(x_n) : n=1,2,\ldots\}$$

$(x_n) \in S(E)$, al variar q en las seminormas continuas en E y k en los enteros no negativos. Otro sistema de seminormas que nos da la topología de S(E) será

$$\overline{Q}(q,k) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k q(x_n)$$

al variar q en las seminormas continuas en E y k en los enteros no negativos.

PROPOSICION 1. Considerado E un espacio y k entero positivo

$k \geq 1$, el espacio $S^k(E)$ es isomorfo topológicamente a $S(E)$.

Demostración: Bonet(1).

PROPOSICION 2.(Valdivia (17))a)Dados dos espacios E y F se tiene que $S(E\times F) \simeq S(E)\times S(F)$.

b)$S(E) \simeq S(E)\times E$

PROPOSICION 3. Dado E un espacio, $S(E) \simeq S(S(E))$.

TEOREMA 1.(Bonet) (1))Sea G un subespacio complementado de $S(E)$. Si existe un subespacio complementado F de G con $F \simeq S(E)$, entonces $G \simeq S(E)$.

Cuando un espacio H cumpla el teorema anterior como es el caso de $S(E)$, diremos que H posee la propiedad de complementación.

DEFINICION 2. Sea E un espacio, llamaremos $C_o(E)$ al espacio vectorial de las sucesiones de E, (x_n) convergentes al origen en E, dotado de una topología localmente convexa definida por la siguiente familia de seminormas, dado $(x_n) \in C_o(E)$

$\tilde{q}(x_n) = \sup_n q(x_n)$

al variar q en las seminormas continuas de E.

DEFINICION 3. Sea E un espacio, llamaremos $m(E) = l^\infty (E)$, al espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ formado por las sucesiones acotadas en E, dotado de una topología localmente convexa definida por la familia de seminormas: dado $(x_n) \in m(E)$

$\tilde{q}(x_n) = \sup_n q(x_n)$

al variar q en las seminormas continuas en E.

DEFINICION 4. Dado E un espacio, llamaremos $l^p(E)$ con $1 \leq p < \infty$ al espacio vectorial de las sucesiones en E que cumplen que $(q(x_n))_{n=1}^{\infty}$ está en l^p para toda q seminorma continua en E. Se le dota de topología localmente convexa mediante la familia de seminormas: dado $(x_n) \in l^p(E)$

$$q(x_n) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} q(x_n)^p\right)^{1/p}$$

al variar q en las seminormas continuas de E.

TEOREMA 2.(Bonet (1)pag.19) Si E es un espacio entonces $C_o(E)$, $m(E)$, $l^p(E)$ tienen la propiedad de complementación, es decir, dado G espacio isomorfo a un subespacio complementado de uno de estos espacios, poseyendo G un subespacio complementado isomorfo al espacio citado, entonces G es isomorfo al espacio.

TEOREMA 3.(Valdivia (24)) Dado E un espacio y J un cardinal infinito, E^J y $E^{(J)}$ tienen la propiedad de complementación, es decir, dado G espacio isomorfo a un subespacio complementado de E^J (respectivamente $E^{(J)}$), teniendo G un subespacio complementado isomorfo a E^J ($E^{(J)}$), entonces $G \simeq E^J$ ($G \simeq E^{(J)}$).

$E \otimes_\pi F$ indica el producto tensorial de los espacios E y F con la topología-π y $E \hat{\otimes} F$ su completación.

TEOREMA 4.(Valdivia (25)) Sea E un espacio de Frechet nuclear que cumple las siguientes condiciones:

1ª $E \times \mathbb{K} \simeq E$

2ª $E \times E \simeq E$

3ª $E \hat{\otimes} E \simeq E$

Sea G un subespacio complementado de $E^N \times E^{(N)}$, sea F un subespacio complementado de G. Si $F \simeq E^N \times E^{(N)}$ entonces $G \simeq E^N \times E^{(N)}$.

Demostración: sea E' el dual de E con la topología fuerte, tendremos que E' es un espacio DF, Grothendieck prueba en (8) que dada $(G_n)_{n=1}$ sucesión de espacios y H un espacio-DF entonces:

$$\bigoplus_{n=1}^{\infty} (G_n \hat{\otimes} H) \simeq \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} G_n\right) \hat{\otimes} H$$

tomando $G_n = \mathbb{K}$ $n=1,2,\ldots$ tendremos que

$$\varphi \hat{\otimes} E' = \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{K}\right) \hat{\otimes} E' \simeq \bigoplus_{n=1}^{\infty} (\mathbb{K} \hat{\otimes} E') = \bigoplus_{n=1}^{\infty} E' = (E')^{(N)}$$

por otra parte Grothendieck prueba en (8) que si $(G_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios y H un espacio

$$\prod_{i\in I}(G_i\hat{\otimes} H)\simeq(\prod_{i\in I}G_i)\hat{\otimes} H$$

luego tomado $I=\mathbb{N}$ y $G_i=\mathbb{K}$ $i=1,2,\ldots$ tendremos

$$\omega\hat{\otimes} E'\simeq(E')^{N}$$

de aquí

$$(E')^{(N)}x\ (E')^{N}\simeq(\varphi\hat{\otimes} E')\ x\ (\omega\hat{\otimes} E')\simeq(\varphi x\omega)\hat{\otimes} E'$$

Pero al ser E un espacio nuclear (8) tendremos que, si denotamos por $(E\hat{\otimes}E)'$ el dual topológico de $E\hat{\otimes}E$ con la topología fuerte, se verifica, al cumplirse (3ª)

$$E'\hat{\otimes} E'\simeq(E\hat{\otimes}E)'\simeq E'$$

luego tendremos que E' satisface las propiedades:

(i) $E'\ x\ \mathbb{K}\simeq E'$

(ii) $E'\ xE'\simeq E'$

(iii) $E'\hat{\otimes}E'\simeq E'$

(iv) $E'^{(N)}x\ E'^{N}\simeq(\varphi x\omega)\hat{\otimes}E'$

Consideremos ahora G el subespacio de la hipótesis. Sea G_1 el complemento topológico de G en $E^{N}x\ E^{(N)}$ y F_1 el complemento topológico de F en G, tendremos

$$E^{(N)}x\ E^{N}=G\oplus_t G_1 \qquad G=F\oplus F_1$$

además $E'^{(N)}x\ E'^{N}=G^{\perp}\oplus_t G_1^{\perp}$ (Köthe (10) pag.) y $G'\simeq G_1^{\perp}$ y$G_1'\simeq G^{\perp}$, entonces

$$G_1^{\perp}\simeq G'=F^{\perp}\oplus_t F_1^{\perp}$$

y además

$$F_1^{\perp}\simeq F'\simeq(E')^{(N)}x(E')^{N}\simeq(\varphi x\omega)\hat{\otimes}E'$$

tendremos por lo tanto que $G_1^{\perp}$ es un espacio isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de $(\varphi x\omega)\hat{\otimes}E'$ y $(\varphi x\omega)\hat{\otimes}E'$ es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de $G_1^{\perp}$.

Valdivia prueba en (27) que si un espacio E' satisface las propiedades (i), (ii),(iii) entonces para todo espacio H,se verifica que $H\hat{\otimes}E'$ tiene la propiedad de complementación, es decir, en nuestro caso:

$$(E')^{N}x\ (E')^{(N)}\simeq(\varphi x\omega)\hat{\otimes}E'\simeq G_1^{\perp}\simeq G'$$

pero como E es un espacio de Frechet nuclear, es reflexivo luego $E^N \times E^{(N)}$ también lo es y entonces

$G = G'' \simeq (E'')^N \times (E'')^{(N)} = E^N \times E^{(N)}$

COROLARIO 1. (Valdivia (25)) Sea E un espacio de Frechet nuclear y G un subespacio complementado de $S^N(E) \times S^{(N)}(E)$ que posee un subespacio F complementado en G e isomorfo topológicamente a $S^N(E) \times S^{(N)}(E)$, entonces $G \simeq S^N(E) \times S^{(N)}(E)$

Demostración: basta probar que S(E) es un espacio de Frechet nuclear, que es de Frechet es obvio. Para la nuclearidad ver (12).

Veamos ahora un lema de números reales que nos va a ser de utilidad.

LEMA 1. Consideremos una sucesión doble de números reales $(x_r^n)_{n,r=1}$, supongamos que $x_r^n \geq 0$ $n,r=1,2,\ldots$ y que existe $\sup_n \sup_r x_r^n < +\infty$ entonces $\sup_{n,r} x_r^n$ y $\sup_r \sup_n x_r^n$ son finitos y los tres tienen el mismo valor.

Demostración: para un n fijo tendremos $x_r^n \leq \sup_r x_r^n$ $r=1,2,\ldots$ luego tendremos $x_r^n \leq \sup_n \sup_r x_r^n$ $n,r=1,2,\ldots$, por lo tanto $\sup_{n,r} x_r^n \leq$ $\leq \sup_r \sup_n x_r^n < +\infty$, pero como $x_r^n \leq \sup_{n,r} x_r^n$ $n,r=1,2,\ldots$ tendremos

$\sup_r x_r^n \leq \sup_{n,r} x_r^n \qquad n=1,2,\ldots$

$\sup_n x_r^n \leq \sup_{n,r} x_r^n \qquad r=1,2,\ldots$

por lo tanto $\sup_n \sup_r x_r^n \leq \sup_{n,r} x_r^n$ y

$\sup_r \sup_n x_r^n \leq \sup_{n,r} x_r^n$

de donde se obtiene la conclusión.

DEFINICION 5. Considerada $(\rho_r)_{r=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales $0 < \rho_r \leq 1$ $r=1,2,...$ y E un espacio, llamaremos $\lambda_o(E)$ al espacio vectorial formado por las sucesiones (x_r) de E cumpliendo que

$$\lim_{r \to \infty} \rho_r^{-k} q(x_r) = 0$$

para cada k entero no negativo y cada q seminorma continua en E. Lo consideraremos dotado de una topología localmente convexa definida por la familia de seminormas

$$Q(k,q)(x_r)=\sup\{ \rho_r^{-m} q(x_r) \quad r=1,2,... \; 0 \leq m \leq k\}.$$

DEFINICION 6. Considerada $(\rho_r)_{r=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales verificando $0 < \rho_r \leq 1$ $r=1,2,...$, y E un espacio, llamaremos $\lambda_\infty(E)$ al espacio vectorial formado por las sucesiones (x_r) de elementos de E cumpliendo que

$$\sup_r \rho_r^{-k} q(x_r) < +\infty$$

para cada k entero no negativo y cada q seminorma continua en E. Se considera dotado de u una topología localmente convexa definida por la familia de seminormas

$$Q(k,q)(x_r)=\sup\{\rho_r^{-m} q(x_r) \quad r=1,2,... \; 0 \leq m \leq k\}$$

Valdivia en (27) hace un estudio exhaustivo de estos espacios para $E=\mathbb{K}$ y s.

PROPOSICION 4. Dado E un espacio, $(\rho_r)_{r=1}^{\infty}$ una sucesión de números estrictamente positivos, entonces $\lambda_\infty(S(E))$ es isomorfo topológicamente a $S(\lambda_\infty(E))$.

Demostración: definimos la aplicación $T: \lambda_\infty(S(E)) \text{---} S(\lambda_\infty(E)$ como sigue $T(y_m)=(z_r)_{r=1}^{\infty}$, siendo $y_n=(y_r^n)_{r=1}^{\infty}$ entonces $z_r=(y_r^n)_{n=1}^{\infty}$ $r=1,2,...$ Como $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ está en $\lambda_\infty(S(E))$ tendremos

$$\sup_n \rho_n^{-k} \sup_r r^m q(y_r^n) < +\infty$$

para cada k, m enteros no negativos y q seminorma continua en E, como $1 \geq \rho_n > 0$ n=1,2,... tendremos por el lema 1.

$$\sup_n \rho_n^{-k} \sup_r r^m q(y_r^n) = \sup_{n,r} \rho_n^{-k} r^m q(y_r^n) = \sup_r r^m \sup_n \rho_n^{-k} q(y_r^n)$$

luego la aplicación T está bien definida y al ser obviamente lineal, es continua y abierta sobre la imagen, pero tomado $z_r = (z_n^r)_{n=1}^{\infty} \in S(\lambda_\infty(E))$ r=1,2,... tendremos que $y_n = (z_n^r)_{r=1}^{\infty}$ n=1,2,..., usando el mismo proceso $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ está en $\lambda_\infty(S(E))$ y $T(y_n) = (z_r)$ de donde $\lambda_\infty(S(E)) \simeq S(\lambda_\infty(E))$.

PROPOSICION 5. $\lambda_o(S(E)) \simeq S(\lambda_o(E))$

Demostración: (4) para una prueba directa basta ver que la aplicación T definida antes, restringida a $\lambda_o(S(E))$ está bien definida y es sobre.

TEOREMA 5. Sea E un espacio y $(\rho_r)_{r=1}^{\infty}$ una sucesión con $1 \geq \rho_r > 0$ r=1,2,... Consideremos $\lambda_\infty(S(E))$ ($\lambda_o(S(E))$), y G un espacio isomorfo a un subespacio complementado de $\lambda_\infty(S(E))$ respectivamente de $\lambda_o(S(E))$, si existe F espacio isomorfo a un subespacio complementado de G y $F \simeq \lambda_\infty(S(E))$ $[F \simeq \lambda_o(S(E))]$ entonces $G \simeq \lambda_\infty(S(E))$ $[G \simeq \lambda_o(S(E))]$

Demostración: por la proposición 4 proposición 3 y el teorema 1.

DEFINICION 7. Sea E un espacio, consideremos la sucesión de números reales $(\rho_r)_{r=1}^{\infty}$ con $0 \leq \rho_r \leq 1$ para r=1,2,..., llamaremos $\lambda_p(E)$ para $p \in \mathbb{R}$ $1 \leq p < +\infty$ al espacio vectorial de las sucesiones (x_n) de elementos de E que verifican

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^{-k} q^p(x_n) < +\infty$$

para cada k entero no negativo y q seminorma continua en E. Lo dotaremos de una topología localmente convexa con la familia de seminormas siguiente

$$Q(k,q)(x_n) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^{-k} q^p(x_n)\right)^{1/p}$$

para cada k entero no negativo y q seminorma continua en E. Estos espacios son una generalización de los espacios de Dieudonné-Gomez (Köthe (10) pag. 419).

PROPOSICION 6. $\lambda_p(S(E)) \simeq S(\lambda_p(E)) \quad 1 \leq p < +\infty$

Demostración: para p=1 definimos $\Psi : \lambda_1(S(E)) \longrightarrow S(\lambda_1(E))$ como $\Psi(((x_n^r)_{n=1}^{\infty})_{r=1}^{\infty}) = ((x_n^r)_{r=1}^{\infty})_{n=1}^{\infty}$

la aplicación está bien definida ya que si x está en $\lambda_1(S(E))$ $x=(x_r)_{r=1}^{\infty}$ con $x_r=(x_r^n)_{n=1}^{\infty} \in S(E)$, para cada q seminorma continua en E, s y t enteros no negativos tendremos que

$$Q(q_s,t)(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-t} \sum_{n=1}^{\infty} n^s q(x_n^r) < +\infty$$

por ser la suma de términos positivos tendremos que

$$Q(q_s,t)(x) = \sum_{r,n=1}^{\infty} \rho_r^{-t} n^s q(x_n^r) = \sum_{n=1}^{\infty} n^s \sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-t} q(x_n^r) \qquad (*)$$

luego la aplicación Ψ está bien definida y por (*) es abierta sobre la imagen.

Definida ahora $\varphi : S(\lambda_1(E)) \longrightarrow \lambda_1(S(E))$ como $\varphi(((y_r^n)_{r=1}^{\infty})_{n=1}^{\infty}) = ((y_r^n)_{n=1}^{\infty})_{r=1}^{\infty}$, usando como antes que si existe una serie iterada de términos positivos, la serie es absolutamente sumable, existe la otra serie iterada y las tres coinciden, obtendremos que es continua e inyectiva y $\Psi \circ \varphi = 1$ $\quad \varphi \circ \Psi = 1$ luego Ψ es un isomorfismo topológico.

Si $1 < p < +\infty$, definiremos $\Psi : \lambda_p(S(E)) \longrightarrow S(\lambda_p(E))$ como sigue: si $x=(x_r) \in \lambda_p(S(E))$ tendremos $x_r=(x_n^r)_{n=1}^{\infty} \in S(E)$ $\quad r=1,2,\ldots$, definimos $\Psi(x) = (y_n)_{n=1}^{\infty}=y$, siendo $y_n=(y_r^n)_{r=1}^{\infty}$ con $y_r^n=x_n^r$. Veamos que Ψ está bien definida y es continua, al considerar $q_s(z_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^s q(z_n)$ sistema fundamental de seminormas en S(E) al variar q en las seminormas continuas en E y s en los enteros positivos, un sistema fundamental de seminormas en $\lambda_p(S(E))$ será :

$$Q(k,q_s)(x_r) = \left(\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-k}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n^s q(x_n^r)\right]^p\right)^{1/p}$$

al variar k y s en los enteros no negativos y q en las seminormas continuas en E, análogamente un sistema fundamental de seminormas en $S(\lambda_p(E))$ será

$$Q'(s,q_k)(y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^s\left[\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-k} q^p(y_r^n)\right]^{1/p}$$

si probamos que existe una constante $b > 0$ cumpliendo que

$$Q'(s,q_k)(\Psi(x_r)) \leq bQ(k,q_{s+2})(x_r)$$

tendremos que la aplicación Ψ está bien definida y es continua. Consideremos $c \in \mathbb{R}$ con $1/c+1/p = 1$, aplicando el teorema de Hölder de los espacios l^p y l^c tendremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^s\left[\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-k} q^p(x_n^r)\right]^{1/p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{s+2}}{n^2}\left(\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-k} q(x_n^r)^p\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2c}}\right)^{1/c}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{(s+2)p}\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-k} q(x_n^r)^p\right)^{1/p} \leq$$

$$\frac{\pi^2}{6}\, Q(k,q_{s+2})(x_r)$$

de donde se obtiene la conclusión, la desigualdad se obtiene del hecho de que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{(s+2)p} q(x_n^r)^p \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{s+2} q(x_n^r)\right)^p$$

Recíprocamente, considerado $(y_n) \in S(\lambda_p(E))$ con $y_n = (y_r^n)_{r=1}^{\infty}$ definimos φ operador de $S(\lambda_p(E))$ en $\lambda_p(S(E))$ como

$$\varphi(y_n) = (x_r) \quad \text{con } x_r = (x_n^r)_{n=1}^{\infty} \quad \text{y} \quad x_n^r = y_r^n$$

consideremos n_o entero positivo, por la desigualdad de

Minkowski en l^p obtendremos

$$\Big(\sum_{n=1}^{n_o} n^{(s+2)p} \sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-k} q^p(y_r^n)\Big)^{1/p} \leqslant \sum_{n=1}^{n_o} n^{s+2} \Big[\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-k} q^p(y_r^n)\Big]^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant Q'(s+2,q_k)(y_n)$$

luego

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{(s+2)p} \sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-k} q^p(y_r^n)\Big)^{1/p} \leqslant Q'(s+2,q_k)(y_n)$$

luego existe $\Big[\sum_{n,r=1}^{\infty} n^{(s+2)p} \rho_r^{-k} q^p(y_r^n)\Big]^{1/p} \leqslant Q'(s+2,q_k)(y_n)$

luego aplicando la desigualdad de Hölder obtendremos que

$$Q(k,q_s)(\varphi(y_n)) = \Big(\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-k}\Big[\sum_{n=1}^{\infty} n^s q(y_r^n)\Big]^p\Big)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_{r=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2c}}\Big)^{p/c} \sum_{n=1}^{\infty} \rho_r^{-k} n^{(s+2)p} q(y_r^n)^p\Big)^{1/p}$$

luego

$$Q(k,q_s)(\varphi(y_n)) \leqslant \Big(\frac{\pi^2}{6}\Big)^p Q'(s+2,q_k)(y_n)$$

de donde se deduce que φ está bien definida y es continua. La conclusión se obtiene ahora porque $\varphi \circ \psi = 1$ y $\psi \circ \varphi = 1$.

TEOREMA 6. Sea E un espacio, $(\rho_r)_{r=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales con $0 < \rho_r \leqslant 1$ $r=1,2,\ldots$, consideremos el espacio $\lambda_p(S(E))$. Dado G un espacio que sea isomorfo a un subespacio complementado de $\lambda_p(S(E))$ y que posea un subespacio complementado isomorfo a $\lambda_p(S(E))$, entonces $G \simeq \lambda_p(S(E))$.

Demostración: por la proposición 6 y el teorema 1.

I.2. FUNCIONES DIFERENCIABLES CON VALORES EN UN ESPACIO E. INTEGRACION DE PETTIS DE FUNCIONES CON VALORES EN UN ESPACIO E.

Considerado $(X,\mathcal{T})$ espacio topológico y $A\subset X$ un subconjunto, en toda la memoria denotaremos por $\mathring{A}$ o intA al interior de A en $(X,\mathcal{T})$, por $\overline{A}$ la clausura de A y por ∂A o FrontA la frontera de A. Todos los espacios vectoriales que se utilizan se indican sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ que es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ indistintamente, salvo $\mathbb{R}^n$ el espacio euclídeo de dimensión n.

DEFINICION 1. Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un abierto no vacío, sea E un espacio, t_o un elemento de Ω y $f:\Omega\dashrightarrow E$ una función. Decimos que existe derivada parcial i-ésima de f en t_o si existe

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t_o+he_i)-f(t_o)}{h}=D_if(t_o)$$

Diremos que f es de clase $\mathcal{C}^o(\Omega,E)$ si es continua en Ω. Diremos que es de clase $\mathcal{C}^k(\Omega,E)$ k entero positivo o $+\infty$, si existen todas las derivadas parciales hasta el orden k y son continuas.
Sea α un multiíndice $\alpha\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n$, $\alpha=(a_1,\dots,a_n)$, entenderemos $D^\alpha f=D_1^{a_1}\dots D_n^{a_n}f$ es decir, la derivada parcial de orden α. Llamaremos $|\alpha|=a_1+a_2+\dots+a_n$.

DEFINICION 2. Se llama $\mathcal{E}(\Omega,E)$ al espacio de todas las funciones $f:\Omega\longrightarrow E$ que son de clase $\mathcal{C}^\infty(\Omega,E)$, dotado de la topología definida por la siguiente familia de seminormas: dado $K\subset\Omega$ compacto, m entero positivo y q seminorma continua en E

$$Q(K,q,m)(f)=\sup\left\{ q(D^{\alpha}f(t)) : |\alpha|\leq m,\ t\in K\right\}$$

DEFINICION 3. Llamaremos $\mathcal{D}(\Omega,E)$ al espacio de todas las funciones f de $\mathcal{E}(\Omega,E)$ que verifican que el soporte de f es un compacto en Ω. Dado L un compacto incluido en Ω, llamaremos $\mathcal{D}(L,\Omega,E)$ al siguiente subespacio de $\mathcal{E}(\Omega,E)$

$$\mathcal{D}(L,\Omega,E) = \{ f\in \mathcal{E}(\Omega,E) \ / \ \text{sop } f\subset L\}$$

con la topología inducida.

Considerada $(L_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión fundamental de compactos en Ω, tomaremos $\mathcal{D}(\Omega,E)$ como el límite inductivo estricto de la familia $\{\mathcal{D}(L_n,\Omega,E) \quad n=1,2,\dots\}$. (15)

DEFINICION 4. Sea Q un compacto incluido en $\mathbb{R}^n$ regular, es decir, $\overline{\mathring{Q}} = Q$, llamaremos $\mathcal{E}(Q,E)$ a $\{f:Q\longrightarrow E \ / \ f\in \mathcal{E}(\mathring{Q},E)$ y $D^{\alpha}f$ puede extenderse continuamente a todo Q para todo multiíndice α $\}$, con la topología definida por la siguiente familia de seminormas

$$Q(q,m)(f) = \sup\left\{ q(D^{\alpha}f(x)) : |\alpha|\leq m \quad x\in Q\right\}$$

al variar q en las seminormas continuas en E, m en los enteros no negativos y entendiendo $D^{\alpha}f(x)$ $x\in Q$, como la extensión continua de $D^{\alpha}f(y)$ $y\in\mathring{Q}$.

Los siguientes resultados son conocidos:

PROPOSICION 1.a) (Regla de la cadena) Sea $g:\Omega_1\longrightarrow\mathbb{R}^n$ con $\Omega_1\subset\mathbb{R}^p$, de clase $\mathcal{E}^k$ en Ω_1, sea f de $\mathcal{E}^k(\Omega_2,E)$, donde Ω_2 es un abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que $g(\Omega_1)\subset\Omega_2$. Se cumple que $f\circ g$ está en $\mathcal{E}^k(\Omega,E)$.

b) (Fórmula de Leibnitz) Sea g de $\mathcal{E}^k(\Omega)$

y sea f de $\mathcal{E}^k(\Omega, E)$. Sea $h(x)=g(x)f(x)$ $x \in \Omega$, tomado α multiíndice

$$D^\alpha h(x) = \sum_{\beta+\delta=\alpha} c_{\beta\delta} \, D^\beta g(x) \, D^\delta f(x) \quad , x \in \Omega$$

siendo $c_{\beta\delta}$ los mismos coeficientes que en la fórmula de Leibnitz del caso escalar.

DEFINICION 5.(Rudin (14) pag. 74) Sea $Q \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible Lebesgue. Sea $f: Q \longrightarrow E$ una función, decimos que f es integrable en Q si para toda u de E', $u \circ f: Q \longrightarrow \mathbb{K}$ es integrable en Q y existe x en E tal que

$$u(x) = \int_Q u \circ f \qquad \forall\, u \in E'$$

a dicho x lo denotaremos por $\int_Q f$.

PROPOSICION 2. Sea $Q \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible, sea f de Q en E una función integrable y sea q seminorma continua en E verificando que q(f) está en $L^1(Q)$, entonces

$$q\left(\int_Q f\right) \leq \int_Q q(f)$$

Demostración: consideremos a en E, $a = \int_Q f(z)$, consideremos la envoltura lineal de a, lin(a) tiene dimensión 1, definimos la forma lineal u en lin (a)

$$u(\alpha a) = \alpha q(a) \qquad \alpha \in \mathbb{K}$$

tendremos que

$$|u(\alpha a)| = |\alpha||u(a)| = |\alpha| \, q(a) = q(\alpha a)$$

luego para todo y de lin(a), $|u(y)| \leq q(y)$. Por el teorema de Hahn-Banach existe $\tilde{u}$ en E' con $\tilde{u}(y) = u(y)$ para todo y de lin(a) y $|\tilde{u}(z)| \leq q(z)$ para todo z de E, como $\tilde{u}(a) = \int_Q \tilde{u}(f(z))dz$, tendremos

$$\tilde{u}(a) = q(a) = \int_Q \tilde{u}(f(z))dz \leq \int_Q q(f(z))dz$$

TEOREMA 1.(Rudin (14)pag. 75) Sea Q compacto $Q \subset \mathbb{R}^n$, sea $f: Q \dashrightarrow E$ una función continua de tal manera que la envoltura convexa de f(Q) es relativamente compacto, es decir, $\overline{C(f(Q))}$ es compacto. Entonces existe $\int_Q f$ y $\int_Q f$ está en $\mu(Q)\ \overline{C(f(Q))}$.

TEOREMA 2.(Bonet (3)) Sea $Q \subset \mathbb{R}^k$ un cubo, sea E un espacio localmente completo, sea $f: Q \longrightarrow E$ una función continua tal que para cada u de E', $u \circ f$ está en $\mathcal{E}^1(Q)$. Entonces existe $\int_Q f(t)dt$ y $\int_Q f(t)dt$ está en $\mu(Q) \cdot \overline{C(f(Q))}$, consecuentemente, si q es una seminorma continua en E

$$q\left(\int_Q f(t)dt\right) \leq \mu(Q) \sup \{ q(f(t)) \ : \ t \in Q \}$$

TEOREMA 3.(Bonet (3)) Sea E un espacio localmente completo, entonces $\mathcal{E}(Q,E) \simeq S(E)$.
Para el caso escalar la prueba aparece en Rolewicz (13) y Valdivia (27).

TEOREMA 4.(Bonet(1)(3)) Sea E un espacio, existe un operador lineal de extensión de $\mathcal{E}(Q,E)$ a $\mathcal{E}(\Omega,E)$ siendo Q un cubo de $\mathbb{R}^n$ y Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, con $Q \subset \Omega$.
Este resultado es una extensión del obtenido por Valdivia (17). El primero en obtener operadores de extensión fue Ogrodzka para el caso escalar.(11)

TEOREMA 5.(Bonet (3)) Dado un cubo Q en $\mathbb{R}^n$ con interior no vacío y E espacio localmente completo, se verifica que $\mathcal{D}(Q,E) \simeq S(E)$.

TEOREMA 6. (Bonet (2)) Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ no vacío y E un espacio localmente completo, entonces $\mathcal{E}(\Omega,E) \simeq S(E)^N$

Para el caso escalar ha sido probado por Valdivia (17).

TEOREMA 7. (Bonet (2)) Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y E un espacio localmente completo, entonces $\mathcal{D}(\Omega,E) \simeq S(E)^{(N)}$

Para el caso escalar este resultado se debe a Valdivia (17).

PROPOSICION 3. Sea g una función de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n,E)$ que se anula ella y todas sus derivadas en $\mathbb{R}^n \sim \mathring{Q}$, para Q cubo de $\mathbb{R}^n$ con interior no vacío $Q = \{ (x_1,x_2,\ldots,x_n) \ : a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \ i=1,\ldots,n\}$ llamemos $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, se verifica que para todo punto $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ de Q

$$g(x)=\int_{a_n}^{x_n}\left(\int_{a_{n-1}}^{x_{n-1}}\left(\ldots\left(\int_{a_1}^{x_1} D^{(1,\ldots,1)}g(y)dy_1\right)\ldots\right)dy_{n-1}\right)dy_n$$

Demostración: si probamos que

$$D^{(0,1,\ldots,1)}g(x_1,y_2,\ldots,y_n)= \int_{a_1}^{x_1} D^{(1,\ldots,1)}g(y,y_2,\ldots,y_n)dy$$

la prueba se obtendrá entonces por recurrencia.

Considerada u de E' forma lineal, tendremos

$$\int_{a_1}^{x_1} u(D^{(1,\ldots 1)}g(y,y_2,\ldots,y_n))dy =$$

$$= \int_{a_1}^{x_1} u\left(\frac{d}{dy}(D^{(0,1,\dots,1)}g(y,y_2,\dots,y_n))\right)dy =$$

$$= \int_{a_1}^{x_1} \frac{d}{dy}u(D^{(0,1,\dots,1)}g(y,y_2,\dots,y_n))dy =$$

$$= u(D^{(0,1,\dots,1)}g)(x_1,y_2,\dots,y_n) -$$

$$- u(D^{(0,1,\dots,1)}g)(a_1,y_2,\dots,y_n)$$

usando que $u(D^{(0,1,\dots,1)}g)(y,y_2,\dots,y_n):\mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{K}$ es de clase $\mathcal{C}^{\infty}$ y la regla de Barrow. La conclusión se obtiene porque $(a_1,y_2,\dots,y_n)$ no está en $\mathcal{Q}$.

TEOREMA 8.(Horwath (9)pag. 123) Consideremos E y F espacios, $X:E \longrightarrow F$, $Y:F \longrightarrow E$ aplicaciones lineales y continuas, supongamos que $X \circ Y$ es la identidad sobre F, entonces $Y \circ X:E \longrightarrow E$ es una proyección continua, Y es un isomorfismo topológico sobre la imagen, y $Y(F) = Y(X(E))$ es un subespacio complementado de E.

I.3. UNA PARTICION DE LA UNIDAD DE Ω

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ no vacío, Valdivia en el trabajo "Sobre el espacio $\mathcal{B}_o(\Omega)$" (23) construye una partición de la unidad de Ω que resulta particularmente útil en toda la memoria y por lo tanto la notación aquí dada se mantendrá a lo largo de ella.

La partición es la siguiente:

Si Ω es todo $\mathbb{R}^n$, consideraremos la familia $\mathcal{B}$ de todos los cubos de la forma

$$\{(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \ : a_j \leq x_j \leq a_{j+1} \ a_j \text{entero } j=1,\dots,n\} \ (*)$$

ordenados en una sucesión (B_r) de elementos distintos.

Si Ω no es igual a $\mathbb{R}^n$, sea $\mathcal{B}_1$ la familia de todos los cubos de la forma (*) contenidos en Ω de manera que si $Q \in \mathcal{B}_1$, la distancia de Q a $\mathbb{R}^n \sim \Omega$ es igual o mayor que $\sqrt{n}$. Procediendo por recurrencia, supuesto obtenidos $\mathcal{B}_h$ $1 \leq h \leq k$, representamos por $\mathcal{B}_{k+1}$ la colección de los cubos de la forma

$$\{(x_1,x_2,\dots,x_n) \ \mathbb{R}^n \ / \ a_j/2^k \leq x_j \leq (a_j+1)/2^k \quad a_j \text{ entero},$$
$$j=1,2,\dots,n\}$$

contenidos en Ω de manera que si Q está en $\mathcal{B}_{k+1}$ la distancia de Q a $\mathbb{R}^n \sim \Omega$ es mayor o igual que $\frac{\sqrt{n}}{2^k}$ y Q no está contenido en ningún elemento de $\mathcal{B}_h$ $1 \leq h \leq k$. Ordenemos los elementos $\mathcal{B} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}_k$ en una sucesión de cubos distintos, $(B_r)_{r=1}$

En cualquiera de los dos casos de Ω considerados tendremos que

$$B_r = \left\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \frac{a_{j(r)}}{2^{k(r)}} \leq x_j \leq \frac{a_{j(r)}+1}{2^{k(r)}} \ , \ j=1,\dots,n\right\}$$

donde $a_{j(r)}$ es entero y $k(r)$ es un entero no negativo $j=1,2,\dots,n$ $\quad r=1,2,\dots$ Sea $(\rho_r)_{r=1}$ la sucesión de las longitudes de las aristas de B_r, es decir

$$\rho_r = \frac{1}{2^{k(r)}} \qquad r=1,2,\dots$$

tomamos la familia $\mathcal{A}=(A_r)_{r=1}^{\infty}$ y $\mathcal{C}=(C_r)_{r=1}^{\infty}$ con

$$A_r=\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : \frac{a_{j(r)}}{2^{k(r)}}-\frac{1}{2^{k(r)+3}}\leq x_j\leq \frac{a_{j(r)}+1}{2^{k(r)}}+\frac{1}{2^{k(r)+3}} \quad j=1,2,\ldots n\right\}$$

$$C_r=\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : \frac{a_{j(r)}}{2^{k(r)}}+\frac{1}{3x2^{k(r)}}\leq x_j\leq \frac{a_{j(r)}+1}{2^{k(r)}}-\frac{1}{3x2^{k(r)}} \quad j=1,2,\ldots,n\right\}$$

Las pruebas de todos los enunciados están en el trabajo de M. Valdivia (23) antes citado.

NOTA 1. Es inmediato que $\bigcup_{r=1}^{\infty} B_r = \bigcup_{r=1}^{\infty} \mathring{A}_r = \Omega$

PROPOSICION 1. Sean B_{r_1}, $B_{r_2}\in\mathcal{B}$ con $r_1\neq r_2$

a) Si $B_{r_1}\cap B_{r_2}\neq\emptyset$ entonces se tiene que

$\rho_{r_1}=\rho_{r_2}$ ó $\rho_{r_1}=2\rho_{r_2}$ ó $2\rho_{r_1}=\rho_{r_2}$

b) Si $B_{r_1}\cap B_{r_2}=\emptyset$ entonces

$d(B_{r_1},B_{r_2})\geq \min(\rho_{r_1},\rho_{r_2})$

$d(B_{r_1},B_{r_2})\geq \frac{1}{2}\max(\rho_{r_1},\rho_{r_2})$

COROLARIO 1. a) $A_{r_1}\cap A_{r_2}\neq\emptyset \iff B_{r_1}\cap B_{r_2}\neq\emptyset$

b) 4^n+1 elementos distintos de $\mathcal{A}$ tienen intersección vacía y cada A_r elemento de $\mathcal{A}$ corta sólo a un elemento de $\mathcal{C}=(C_r)$

Sean:

$I=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : -1\leq x_j\leq 1, \quad j=1,2,\dots,n\}$

$J=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : -\frac{4}{15}\leq x_j\leq \frac{4}{15}, \quad j=1,2,\dots,n\}$

$L=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : -\frac{4}{5}\leq x_j\leq \frac{4}{5}, \quad j=1,2,\dots,n\}$

Sea $\varphi_r:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ aplicación definida por

$$\varphi_r(x_1,\dots,x_n)=\left(\frac{2a_1(r)+1}{2^{k(r)+1}}+\frac{5}{2^{k(r)+3}}x_1,\dots,\frac{2a_n(r)+1}{2^{k(r)+1}}+\frac{5}{2^{k(r)+3}}x_n\right)$$

se tiene que $\varphi_r(I)=A_r$, $\varphi_r(J)=C_r$, $\varphi_r(L)=B_r$ $r=1,2,\dots$

Sea φ una función real definida en $\mathbb{R}^n$, de clase $\mathcal{C}^\infty$, que sea estrictamente positiva en int(I) y cero en los demás puntos, si

$$\mu_r(x)=\frac{(\varphi\circ\varphi_r^{-1})(x)}{\sum_{j=1}^{\infty}(\varphi\circ\varphi_j^{-1})(x)} \qquad x\in\Omega$$

se tiene que (μ_r) es una partición de la unidad $\mathcal{C}^\infty$.

PROPOSICION 2. Sea $B_r\in\mathcal{B}$ con $\frac{1}{2^{k(r)}}=\rho_r<1/2$ entonces la distancia de B_r a $\mathbb{R}^n\sim\Omega$ es menor o igual que $\frac{\sqrt{n}}{2^{k(r)-2}}$.

Demostración: como la proposición 1 de (a-2)

Consideremos ahora los cubos de $\mathbb{R}^n$

$$M=\left[-1-\frac{128}{5}\sqrt{n},\ 1+\frac{128}{5}\sqrt{n}\right]^n$$

$$P=\left[-1-\frac{128}{5}\sqrt{n}-\frac{1}{5},\ 1+\frac{128}{5}\sqrt{n}+\frac{1}{5}\right]^n$$

entonces

$$\varphi_r(M) = \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{a_{j(r)}}{2^{k(r)}} - \frac{1}{2^{k(r)+3}} - \frac{16\sqrt{n}}{2^{k(r)}} \, , \, \frac{a_{j(r)+1}}{2^{k(r)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2^{k(r)+3}} + \frac{16\sqrt{n}}{2^{k(r)}} \right] = E_r$$

$$\varphi_r(P) = \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{a_{j(r)}}{2^{k(r)}} - \frac{2}{2^{k(r)+3}} - \frac{16\sqrt{n}}{2^{k(r)}} \, , \, \frac{a_{j(r)+1}}{2^{k(r)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{2^{k(r)+3}} + \frac{16\sqrt{n}}{2^{k(r)}} \right] = F_r$$

tendremos que

$J \subset L \subset I \subset M \subset P$

$C_r \subset B_r \subset A_r \subset E_r \subset F_r \qquad r=1,2,\ldots$

PROPOSICION 3.a) Dado $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $d(z, A_r) \leq 16\sqrt{n}\,\rho_r$ entonces $z \in E_r$

b) Sea $z_o \in A_r$, sea $u_o \in \mathbb{R}^n \sim \Omega$ el punto donde se alcanza la distancia de z_o a $\mathbb{R}^n \sim \Omega$, entonces $u_o \in \mathring{E}_r$ cuando $\rho_r < 1/2$

Demostración: a) Trivial.

b) Sea $z_o \in A_r$, existe un $z_1 \in B_r$ con $d(B_r, \mathbb{R}^n \sim \Omega) = d(z_1, \mathbb{R}^n \sim \Omega)$, luego sea $u_1 \in \mathbb{R}^n \sim \Omega$ con $d(z_1, \mathbb{R}^n \sim \Omega) = d(z_1, u_1)$, tendremos por definición

$d(z_o,u_o) \leq d(z_o,u_1) \leq d(z_o,z_1) + d(u_1,z_1) \leq \sqrt{n}\,\rho_r + 4\sqrt{n}\,\rho_r =$
$= 5\sqrt{n}\,\rho_r \leq 16\sqrt{n}\,\rho_r$

luego $u_o \in \mathring{E}_r$.

PROPOSICION 4. Consideremos q entero positivo y la familia $\{F_r \,/\, \rho_r = 1/2^q\} = \mathcal{F}_q$, entonces $(34n)^n+1$ elementos de $\mathcal{F}_q$ tienen intersección vacía.

Demostración: dados $F_{r_1}, F_{r_2} \in \mathcal{F}_q$, sean B_{r_1} y B_{r_2} los rectángulos asociados de la familia , tendremos que si existe $y \in F_{r_1} \cap F_{r_2}$, dados $z_1 \in B_{r_1}$, $z_2 \in B_{r_2}$, entonces

$d(z_1,z_2) \leq d(z_1,y) + d(y,z_2) \leq 2\,\rho_r\left[\frac{1}{8} + 16\sqrt{n}\right]\sqrt{n} \leq 34n\,\rho_r$

luego considerado $B_{r_1} \in \mathcal{B}_{q+1}$ podremos construir a lo más $(34n)^n$ cubos de arista ρ_r que sean de $\mathcal{B}_{q+1}$ y que disten de B_{r_1} menos de $34n\,\rho_r$.

COROLARIO 1. Tomado $q > 1$, tendremos que existe

$$\sum_{\{r \in \mathbb{N}/\ \rho_r = 1/2^q\}} \chi_{F_r}(z) \leq (34n)^n \qquad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

Demostración: inmediata.

CAPITULO II

LOS ESPACIOS $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$ Y $\mathcal{S}(\Omega,E)$

II.1. REPRESENTACION DEL ESPACIO $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$

Este capítulo es parte de un trabajo pendiente de publicación (4) bajo el título de "Representación de los espacios $\mathcal{B}_0(\Omega,E)$ y $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$", realizado en común con el Dr. José Bonet.

Sea E un espacio, el espacio $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n,E)$ fue definido por Schwartz (16) como el espacio vectorial de los elementos de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n,E)$ tales que para cada seminorma continua q en E, α multiíndice, se cumpla que $\sup\{q(D^\alpha f(x)) \ / \ x\in\mathbb{R}^n\}<+\infty$

DEFINICION 1. En (4) se define $\mathcal{B}_0(\Omega,E)$ como el espacio vectorial de todos los elementos de $\mathcal{E}(\Omega,E)$ tales que para cada $\epsilon>0$, α multiíndice y q seminorma continua en E, existe un compacto $K\subset\Omega$ cumpliendo que si x está en $\Omega\sim K$, $q(D^\alpha f(x))<\epsilon$. Se le dota de la topología localmente convexa definida por las seminormas
$Q(q,m)=\sup\{q(D^\alpha f(x)) \ / \ x\in\Omega \ |\alpha|\leq m\}$
al variar m en los enteros positivos y q en las seminormas continuas en E.

DEFINICION 2. Llamaremos $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$ al subespacio vectorial del espacio $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n,E)$ formado por las funciones que se anulan ellas y sus derivadas de cualquier orden en $\mathbb{R}^n\sim\Omega$. Le dotamos de la topología definida por las seminormas:

$$Q(m,q)(f)=\sup\{q(D^{\alpha}f(x)) : x\in\Omega, |\alpha|\leq m\}$$

al variar m en los enteros no negativos y q en las seminormas continuas en E.

Obviamente si $\Omega=\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}_1(\Omega,E)=\mathcal{B}(\mathbb{R}^n,E)$ El espacio $\mathcal{B}_1(\Omega)$ fue definido por Dierolff y estudiado por Dierolff y Voigt (5),(6) y Valdivia (27). Nosotros generalizamos las técnicas empleadas por M. Valdivia (27),(23). Nosotros vamos a exhaustivar el caso de $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$ en el presente capítulo, para las pruebas de las propiedades de $\mathcal{B}_0(\Omega,E)$ remitimos a (4).

PROPOSICION 1. La aplicación i definida de $\mathcal{B}_0(\Omega,E)$ en $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$ como sigue: dada $f\in\mathcal{B}_0(\Omega,E)$

$$i(f)(x)=\begin{cases} f(x) & x\in\Omega \\ 0 & x\notin\Omega \end{cases}$$

es un isomorfismo topológico sobre la imagen.

Demostración: en (4).

A partir de aquí, en los problemas de isomorfismos, consideraremos a $\mathcal{B}_0(\Omega,E)$ e $i(\mathcal{B}_0(\Omega,E))$ como el mismo espacio.

La representación de $\mathcal{B}_1(\Omega)$ fue obtenida por M. Valdivia en (27)

PROPOSICION 2. Sea $(\varphi_r)_{r=1}^{\infty}$ de la partición de Ω definida en I.3., sea q seminorma continua en el espacio E, α multiíndice y k y h enteros no negativos, existe una constante M positiva verificando que para toda f de $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$

$$\rho_r^{-k}\sup_{x\in I} q(D^{\alpha}f\circ\varphi_r(x))\leq M\rho_r^{h}\sup\{q(D^{\beta}f(z)) \;/\; z\in\mathbb{R}^n, |\beta|\leq h+k+|\alpha|\}$$

Demostración: distinguiremos dos casos:

a) Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, tendremos que

$$D^{\alpha}(f \circ \varphi_r)(x) = (\tfrac{5}{8})^{|\alpha|} (D^{\alpha}f)(\varphi_r(x))$$

y $\rho_r = 1$, $r=1,2,\ldots$ luego

$$\rho_r^{-k} \sup_{x\in I} q(D^{\alpha}(f \circ \varphi_r)(x)) \leq (\tfrac{5}{8})^{|\alpha|} \sup_{z\in A_r} q(D^{\alpha}f(z))$$

$$\leq (\tfrac{5}{8})^{|\alpha|} \sum_{|\beta|\leq|\alpha|+k+h} \sup_{x\in\Omega} q(D^{\beta}f(x))$$

b) Si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, determinemos un entero positivo p con $1/2^p$ arista de un cierto B_r. Sea ρ_r arista de B_r si $\rho_r \geq 1/2^p$ tendremos

$$\rho_r^{-k} \sup_{x\in I} q(D^{\alpha}(f \circ \varphi_r)(x)) = (\tfrac{5}{8})^{|\alpha|} \rho_r^{-k+|\alpha|} \sup_{z\in A_r} q(D^{\alpha}f(z))$$

$$\leq \rho_r^{-k} \sup_{z\in A_r} q(D^{\alpha}f(z)) \leq 2^{(k+h)p} \sum_{|\beta|\leq|\alpha|+k+h} \rho_r^{h} \cdot$$

$$\cdot \sup_{x\in\Omega} q(D^{\beta}f(x))$$

Si $\rho_r < 1/2^p$, por la proposición I.3.2. tendremos que la distancia de B_r a $\mathbb{R}^n \sim \Omega$ será menor o igual que $4\sqrt{n}\,\rho_r$, luego

$$\rho_r^{-k} \sup_{x\in I} q(D^{\alpha}(f \circ \varphi_r)(x)) = (\tfrac{5}{8})^{|\alpha|} \rho_r^{-k+|\alpha|} \sup_{z\in A_r} q(D^{\alpha}f(z))$$

sea z de A_r, sea z_o de $\partial\Omega$ tal que $|z-z_o| = d(z,\mathbb{R}^n\sim\Omega)$ tendremos que $[z,z_o[\subset \Omega$ y $|z-z_o| \leq 4\sqrt{n}\,\rho_r$. Sea $\eta : [0,1] \longrightarrow \Omega$, definida como $\eta(t)=z_o + t(z-z_o)$ y sea $g = (D^{\alpha}f)\circ\eta : [0,1] \longrightarrow E$. Sea u de E', puede elegirse $\delta > 0$ tal que si $t \in [-\delta, 1+\delta]$ entonces $D^{\alpha}f\circ\eta$ es $\mathcal{C}^{\infty}$ en $]-\delta, 1+\delta[$, entonces $u\circ g: [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}$ cumple las hipótesis del teorema de Taylor en $[0,1]$

$$(u\circ g)(1) - (u\circ g)(0) = (u\circ g)'(0) + \frac{1}{2!}(u\circ g)''(0) + \ldots +$$

$$\frac{1}{(k+h-1)!}\,(u\circ g)^{(k+h-1)}(0)+\int_0^1 \frac{(1-t)^{k+h-1}}{(k+h-1)!}(u\circ g)(t)dt$$

como $(u\circ g)^{(s)}(t) = u(g^{(s)}(t))$ $\quad s=0,1,\dots$ por ser u lineal, tendremos $(u\circ g)(1) = u(D^{\alpha} f(z))$. Por construcción $(u\circ g)^{(s)}(0) = u(g^{(s)}_{o}(0)) = 0$, ya que $s=0,1,\dots$

$$g^{(s)}(t) = \sum_{i_1,\dots,i_s=1}^{n} D_{i_1\dots i_s} D^{\alpha} f(z_o+t(z-z_o))(z_{i_1}-z^o_{i_1}).$$

$$.(z_{i_2}-z^o_{i_2})\dots(z_{i_s}-z^o_{i_s})$$

como $D^{\beta}f(z_o) = 0$ para todo multiíndice β entonces $g^{(s)}(0) = 0$, $s=0,1,\dots$ luego

$$u(D^{\alpha}f(z)) = \int_0^1 u\left(\frac{(1-t)^{k+h-1}}{(k+h-1)!}\, g^{(k+h)}(t)\right)dt \qquad u\in E'$$

entonces por la definición I.2.5. existe

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{h+k-1}}{(h+k-1)!}\, g^{(k+h)}(t)dt = D^{\alpha}f(z)$$

y además

$$\rho_r^{-k}\, q(D^{\alpha}f(z)) \leq \sup_{t\in[0,1]} \rho_r^{-k} q\left(\frac{(1-t)^{k+h-1}}{(k+h-1)!}\, g^{(k+h)}(t)\right)$$

$$\leq \sup_{t\in[0,1]} \rho_r^{-k} q(g^{(k+h)}(t)) \leq$$

$$\sup_{t\in[0,1]} \rho_r^{-k} \sum_{i_1,\dots,i_{k+h}=1}^{n} q(D_{i_1\dots i_{k+h}} D^{\alpha}f(z_o+t(z-z_o))).$$

$$.\ |z_{i_1}-z^o_{i_1}|\,|z_{i_2}-z^o_{i_2}| \dots |z_{i_{k+h}}-z^o_{i_{k+h}}|$$

como $|z_{i_s}-z^o_{i_s}| \leq |z-z_o|$ $\quad$ obtendremos

$$\rho_r^{-k} \sup_{x\in I} q(D^{\alpha}(f\circ\varphi_r)(x)) \leq \sum_{|\beta|\leq|\alpha|+k+h} \sup_{z\in\Omega}\{q(D^{\beta}f(z))\}.$$

$$.4^{k+h}\sqrt{n}^{k+h}\ \rho_r^{h} \leq n^{|\alpha|+k+h}4^{k+h}\sqrt{n}^{k+h}.$$

$\cdot \sup \{ D^{\beta} f(z)) \quad : \quad z \in \mathbb{R}^n \quad , \quad |\beta| \leq |\alpha| + k + h \}$

PROPOSICION 3. Sea g de $\mathcal{B}_1(\Omega, E)$, consideremos $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}$ de I.3., entonces $g(z) \sum_{j=1}^{\infty} D^{\alpha}(\varphi \circ \varphi_j^{-1})(z)$ es una función de $\mathcal{B}_1(\Omega, E)$ para todo α multiíndice.

Obsérvese que una consecuencia de esta proposición es que la función

$$h(z) = \begin{cases} g(z)\, D^{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi \cdot \varphi_j^{-1}(z) & z \in \Omega \\ 0 & z \notin \Omega \end{cases}$$

es de $\mathcal{B}_1(\Omega, E)$.

Demostración: sea q seminorma continua en E, r_o un natural y z de B_{r_o}. Sea $\mathscr{L} = \{ r \in \mathbb{N} \; / \; / \; A_r \cap A_{r_o} \neq \emptyset \}$, tendremos que card $\mathscr{L} \leq 4^n$

$$q(g(z)\, D^{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}(z)) = q(g(z)\, D^{\alpha} \sum_{r \in \mathscr{L}} (\varphi \circ \varphi_j^{-1})(z)) =$$

$$= \left(\frac{8}{5}\right)^{|\alpha|} q(g(z)) \sum_{r \in \mathscr{L}} \rho_r^{-|\alpha|} (D^{\alpha}\varphi)(\varphi_j^{-1}(z))) \leq$$

$$\leq \left(\frac{8}{5}\right)^{|\alpha|} \sup_{x \in I} |D^{\alpha} \varphi(x)| \sum_{r \in \mathscr{L}} q(g(z)\, \rho_r^{-|\alpha|})$$

$$\leq \left(\frac{8}{5}\right)^{|\alpha|} \sup_{x \in I} |D^{\alpha} \varphi(x)| \sum_{r \in \mathscr{L}} \rho_r^{-|\alpha|} \sup_{x \in I} q(g \circ \varphi_r(x)) = (*)$$

aplicando la proposición anterior tendremos que para un natural h dado existe una constante M positiva que sólo depende de $|\alpha| + h$ con

$$(*) \leq M\left(\frac{8}{5}\right)^{|\alpha|} \sum_{r \in \mathscr{L}} \rho_r^h \sup \{ q(D^{\beta} g(y)) \; / \; y \in \mathbb{R}^n \quad |\beta| \leq |\alpha| + h \}.$$

$$\cdot \sup \{ D^{\alpha} \varphi(x) \quad / \; x \in I \} \qquad (**)$$

por la proposición I.3.1. tendremos que para todo r de $\mathcal{V}$, $\rho_r \leq 2\, \rho_{r_o}$, luego

$$q(g(z)\ D^{\alpha}\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_o\varphi_j^{-1}(z)) \leq M4^n 2^h (\tfrac{8}{5})^{|\alpha|} \sup\{q(D^{\beta}g(y)\ /$$

$$/\ y \in \mathbb{R}^n \quad |\beta| \leq |\alpha|+h\}\ \sup\{D^{\alpha}\varphi(x)\ /\ x \in I\}\ \rho_{r_o}^{h} \qquad (\text{***})$$

como $\rho_{r_o} \leq 1$ para todo r_o natural, tendremos que

$g(z)\ D^{\alpha}\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_o\varphi_j^{-1}(z)$ es acotado en Ω, además tomado z_o en $\partial\Omega$ y $\varepsilon > 0$, sea $z \in B(z_o, \varepsilon) \cap \Omega$, como por definición $\sqrt{n}\,\rho_{r_o} \leq d(B_{r_o}, \mathbb{R}^n \sim \Omega) \leq \varepsilon$, si z tiende a z_o, tendremos que ρ_{r_o} tiende a cero, de (***) obtendremos que

$$\lim_{\substack{z \to z_o \\ z \in \Omega}} q(g(z)\ D^{\alpha}\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_o\varphi_j^{-1}(z)) = 0,$$ luego la función h es continua en $\mathbb{R}^n$ y acotada.

Sea γ un multiíndice y z de Ω, aplicando la fórmula de Leibnitz obtenemos

$$D^{\gamma}\Big[g(z)\ D^{\alpha}\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_o\varphi_j^{-1}(z)\Big] = \sum_{\delta+\mu=\gamma} c_{\delta\mu} D^{\delta} g(z)\ D^{\alpha+\mu}(\sum_{j=1}^{\infty}(\varphi_o\varphi_j^{-1})(z))$$

luego, si en la prueba efectuada se sustituye g por $D^{\delta}g(z) \in \mathcal{B}_1(\Omega, E)$ y el multiíndice α por $\alpha+\mu$, obtenemos que para todo multiíndice γ la función

$$h_{\gamma}(z) = \begin{cases} D^{\gamma}\Big[g(z)\ D^{\alpha}\sum_{j=1}^{\infty}(\varphi_o\varphi_j^{-1})(z) & z \in \Omega \\ 0 & z \notin \Omega \end{cases}$$

es una función continua y acotada en $\mathbb{R}^n$, por lo tanto para finalizar la prueba basta probar que para todo z de $\partial\Omega$ y para todo multiíndice γ, existe $D^{\gamma}h(z) = 0$. Hagámoslo por inducción sobre el orden de γ, para $|\gamma| = 0$ está probado. Supongámoslo cierto para todo γ

con $|\gamma| \leq m$. Sea $e_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ con el 1 en el i-ésimo lugar, sea z_o de $\partial\Omega$, veamos que existe $D^{\gamma+e_i}h(z_o) = 0$. Si z no está en Ω, $D^{\gamma}h(z) = 0$ luego tomado $z = z_o + te_i \in \Omega$ y q seminorma continua en E

$$q\left(\frac{D^{\gamma}h(z_o+te_i)-D^{\gamma}h(z_o)}{t}\right) = q\left(\frac{D^{\gamma}\left[g\, D^{\alpha}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_o\varphi_j^{-1}\right](z_o+te_i)}{t}\right)$$

aplicando (***) y la fórmula de Leibnitz

$$\sum_{\delta+\mu=\gamma}\frac{|c_{\delta\mu}|}{|t|}\, q\left[D^{\delta}g(z_o+te_i)D^{\alpha+\mu}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_o\varphi_j^{-1}\right)(z_o+te_i)\right] \leq$$

$$\sum_{\delta+\mu=\delta}\frac{|c_{\delta\mu}|}{|t|}\, M \sup\left\{ q(D^{\beta}g(y)) \ / \ |\beta| \leq |\alpha|+|\gamma|+h \ , \ y \in \mathbb{R}^n\right\}\rho_{r_o}^{h}$$

siendo r_o tal que $z_o + te_i$ está en B_{r_o} y M una constante positiva y h un natural, tomando h=2, como $|t| = |z_o + te_i - z_o|$, entonces $|t| \geq d(B_{r_o}, \mathbb{R}^n \sim \Omega)$, por la proposición I.3.1. tendremos $|t| \geq d(B_{r_o}, \mathbb{R}^n \sim \Omega) \geq \sqrt{n}\, \rho_{r_o}$ quedará

$$q\left(\frac{D^{\gamma}h(z_o+te_i)}{t}\right) \leq \sum_{\delta+\mu=\gamma}|c_{\delta\mu}|\, M \sup q(D^{\beta}g(y)) \ / \ y \in \mathbb{R}^n,$$

$$, \ |\beta| \leq |\alpha|+|\gamma|+h\} \ \rho_{r_o}$$

cuando t tiende a 0, ρ_{r_o} tiende a 0, luego

$$q\left(\frac{D^{\gamma}h(z_o+te_i)}{t}\right) \to 0$$

luego existe $D^{\gamma+e_i}h(z_o) = 0$.

PROPOSICION 4. Si f está en $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$ entonces la función $\dfrac{f}{\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_o\varphi_j^{-1}}$ está en $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$.

Demostración: la función $\dfrac{f}{\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_o\varphi_j^{-1}}$ se entiende extendida a todo $\mathbb{R}^n$, tomando el valor cero fuera de Ω. Tomado z de Ω, tendremos que dado β multiíndice, $D^{\beta}\left[\frac{f}{\sum_{j=1}^{\infty}\varphi\circ\varphi_j^{-1}}\right](z)$ será una fracción cuyo numerador es una combinación lineal de elementos de la forma

$$s = D^{\alpha}f\, D^{\gamma}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\varphi\circ\varphi_j^{-1}\right)D^{\delta}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\varphi\circ\varphi_j^{-1}\right)\ldots D^{\mu}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\varphi\circ\varphi_j^{-1}\right) \quad (\#)$$

y el denominador una potencia entera y positiva de $\sum_{j=1}^{\infty}\varphi\circ\varphi_j^{-1}$, como Valdivia (23), tomado $b=\inf\{\varphi(x)$ $x\in L\} > 0$, entonces $\sum_{j=1}^{\infty}\varphi\circ\varphi_j^{-1}(z) \geq b$ para todo z de Ω, luego dado k natural $\left(\sum_{j=1}^{\infty}\varphi\circ\varphi_j^{-1}(z)\right)^k \geq b^k$. Por la proposición 3. la extensión de (#) a $\mathbb{R}^n$ tomándola como cero en $\mathbb{R}^n\sim\Omega$, son funciones de $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$, además, si z está en Ω

$$q\left(\frac{s(z)}{\left(\sum_{j=1}^{\infty}\varphi\circ\varphi_j^{-1}(z)\right)^k}\right) \leq \sup_{z\in\mathbb{R}^n} q(s(z))\,\frac{1}{b^k}$$

luego las funciones $s_{\beta}(z)=\begin{cases} D^{\beta}\left[f\frac{1}{\sum_{j=1}^{\infty}\varphi\circ\varphi_j^{-1}}\right](z) & z\in\Omega \\ 0 & z\notin\Omega \end{cases}$

son funciones continuas en $\mathbb{R}^n$, para todo β multiíndice, entonces procediendo por inducción como en la proposición 3., usando que dado e_i, t real, z_o de $\partial\Omega$ $z_o + he_i$ de Ω

$$q\left(\frac{s(z_o+he_i)}{\left(\sum_{j=1}^{\infty}\varphi\circ\varphi_j^{-1}(z_o+he_i)\right)^k\cdot t}\right) \leq \frac{1}{b^k}\,q\left(\frac{s(z_o+he_i)}{t}\right)$$

obtendremos la conclusión.

PROPOSICION 5. La aplicación $\mathcal{X}:\mathcal{B}_1(\Omega,E)\dashrightarrow\mathcal{B}_1(\Omega,E)$

definida como

$$\mathcal{X}(f) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} \varphi_\circ\varphi_j^{-1}(z)} & z \in \Omega \\ 0 & z \notin \Omega \end{cases}$$

es lineal y continua.

Demostración: como, si z no está en Ω, la función y las parciales de cualquier orden toman el valor cero, bastará estudiar el comportamiento al variar z en Ω. Dado α multiíndice y z en Ω tendremos, llamando $g(z) = (\sum\limits_{j=1}^{\infty} \varphi_\circ\varphi_j^{-1}(z))^{-1}$

$$D^\alpha(fg)(z) = D^\alpha(f\cdot\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{\infty}\varphi_\circ\varphi_j^{-1}})(z) =$$

$$= \sum_{\mu+\eta=\alpha} c_{\mu\eta}\, D^\mu f(z)\; D^\eta(\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{\infty}\varphi_\circ\varphi_j^{-1}})(z)$$

de la proposición 4. obtenemos que $D^\alpha(fg)(z)$ será una combinación lineal de elementos de la forma

$$H(z) = D^\mu f(z)\; D^\gamma(\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_\circ\varphi_j^{-1}(z))\ldots D^\xi(\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_\circ\varphi_j^{-1}(z))g(z)^h$$

donde h es un entero positivo, llamemos a esta expresión (*). Sea r un entero positivo tal que z está en $B_r \subset \mathrm{int}(A_r)$, sea $\mathcal{L} = \{ s \in \mathbb{N} \;/\; A_r \cap A_s \neq \emptyset \}$. Sabemos que $\mathrm{card}(\mathcal{L}) \leq 4^n$, tendremos que

$$\left|D^\gamma(\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_\circ\varphi_j^{-1}(z))\right| \leq \sum_{s\in\mathcal{L}} \rho_s^{-|\gamma|} \sup_{x\in I} |D^\gamma\varphi(x)|$$

Sea t entero positivo con $t > \max\{|\gamma|, |\delta|, \ldots, |\xi|\}$ que puedan aparecer, sea m el máximo número de factores que puedan aparecer en (*). Sean

$$M_2 = \max_{|\theta|\leq t} \sup_{x\in I} |D^\theta(x)|$$

$$M_3 = \sup_{z\in\Omega} \frac{1}{(g(z))^h} > 0 \qquad \text{para los h posibles}$$

tendremos entonces que como s está en $\mathcal{L}$, $\rho_s \leq 2\,\rho_r$

$q(H(z)) \leq 4^n 2^{tm} \rho_r^{-tm} M_2^m\, M_3\, q(D^{\mu} f(z)) \leq$

aplicando la proposición 2.

$\leq 4^n 2^{tm} M_2^m\, M_3^m\, M \sup \{ q(D^{\pi} f(z))\ z \in \Omega\ ,\ \ |\pi| \leq |\mu| + tm \}$

siendo M una constante positiva, como $|\mu| \leq |\alpha|$, tendremos que tomado $M_4 = 4^n 2^{tm} M_2^m\, M_3 M$, si u es el número de términos H(z) que aparecen y z está en Ω

$$q(D^{\alpha}(fg)(z)) \leq \sum_{\mu+\eta=\alpha} M_4\, u\, \max|c_{\mu\eta}| \sup \{ q(D^{\pi} f(z)) \ / \ z \in \Omega,$$
$$, |\pi| \leq |\alpha| + tm \}$$

luego existe una constante K_{α} y una seminorma continua en $\mathcal{B}_1(\Omega, E)$, $Q(|\alpha| + tm\ , q)$ cumpliendo

$$\sup_{z \in \Omega}\ q(D^{\alpha}(fg)(z)) \leq K_{\alpha}\, Q(|\alpha| + tm\ , q)(f)$$

para toda f de $\mathcal{B}_1(\Omega, E)$, de donde la continuidad se deduce inmediatamente.

Considerado I el cubo unitario $I = [-1,1]^n$ y los espacios $\mathcal{D}(I,E)$ y $\lambda_{\infty}(\mathcal{D}(I,E))$ definidos en I.1 siendo ahora $(\rho_r)_{r=1}^{\infty}$ la sucesión de las aristas de $(B_r)_{r=1}^{\infty}$ de la partición de la unidad de Ω de I.3., sea T una aplicación entre $\lambda_{\infty}(\mathcal{D}(I,E))$ y $\mathcal{B}_1(\Omega, E)$ definida como sigue: si $(f_r)_{r=1}^{\infty}$ está en $\lambda_{\infty}(\mathcal{D}(I,E))$

$$T((f_r)) = \sum_{r=1}^{\infty} f_r \circ \varphi_r^{-1}$$

PROPOSICION 6. La aplicación T está bien definida, es lineal y continua.

Demostración: como sop $f_r \subset I$, r=1,2,... y $\varphi_r^{-1}(z)$ está en I si y sólo si z está en A_r, tendremos que por I.3. la función

$\sum_{r=1}^{\infty} f_r \circ \varphi_r^{-1}$ está definida en todo $\mathbb{R}^n$ y es obvio que si z está en $\mathbb{R}^n \sim \Omega$, $\sum_{r=1}^{\infty} f_r \circ \varphi_r^{-1}(z) = 0$. Veamos que

a) $\sum_{r=1}^{\infty} f_r \circ \varphi_r^{-1}$ está en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n, E)$

b) $\sum_{r=1}^{\infty} f_r \circ \varphi_r^{-1}$ está en $\mathcal{B}_1(\Omega, E)$

la prueba es análoga a la de la proposición 3.

Sea z de Ω, sea r_o con z en B_{r_o}, sea

$\alpha = \{ r \in \mathbb{N} \ / \ A_r \cap A_{r_o} \neq \emptyset \}$, tendremos que para todo

multiíndice $D^\alpha \sum_{j=1}^{\infty} f_j \circ \varphi_j^{-1}(z) = \sum_{r \in \alpha} D^\alpha (f_r \circ \varphi_r^{-1})(z)$

luego dada q seminorma continua en E tendremos

$$q(D^\alpha (\sum_{r=1}^{\infty} f_r \circ \varphi_r^{-1}(z))) = q(\sum_{r \in \alpha} D^\alpha (f_r \circ \varphi_r^{-1})(z)) \leq$$

$$\leq (\frac{8}{5})^{|\alpha|} \sum_{r \in \alpha} \rho_r^{-|\alpha|} q(D^\alpha f_r)(\varphi_r^{-1}(z)) \leq (\frac{8}{5})^{|\alpha|} \sum_{r \in \alpha} \rho_r^{-|\alpha|} \sup_{x \in I} q(D^\alpha f_r(x))$$

$$(*) \leq 4^n (\frac{8}{5})^{|\alpha|} \sup_{r \in \mathbb{N}} \rho_r^{-|\alpha|} \sup_{x \in I} q(D^\alpha f_r(x)) \qquad (**)$$

esta expresión es finita por definición de $\lambda_\infty(\mathcal{D}(I,E))$ la desigualdad $(*)$ puede mejorarse usando que

$(\rho_r^{-|\alpha|-2} \sup_{x \in I} q(D^\alpha f_r(x)))$ está en ℓ^∞ y quedará

$$q(D^\alpha (\sum_{r=1}^{\infty} f_r \circ \varphi_r^{-1}(z))) \leq 4^n (\frac{8}{5})^{|\alpha|} \sup_{r \in \alpha} (\rho_r^{-|\alpha|-2} \sup_{x \in I} q(D^\alpha f_r(x)) \cdot \rho_r^2$$

por la proposición I.3.1. $\rho_r \leq 2 \rho_{r_o}$, luego quedará

$$(***) \quad q(D^\alpha (\sum_{r=1}^{\infty} f_r \circ \varphi_r^{-1}(z))) \leq 4^n (\frac{8}{5})^{|\alpha|} \sup_{r \in \mathbb{N}} (\rho_r^{-|\alpha|-2} \cdot \sup_{x \in I} q(D^\alpha f_r(x))) \rho_{r_o}^2$$

cuando z tiende a $z_o \in \partial\Omega$, tendremos que ρ_{r_o} tiende a 0 luego la función

$$\begin{cases} D^{\alpha}\left(\sum_{r=1}^{\infty}(f_r \circ \varphi_r^{-1})(z)\right) & z \in \Omega \\ 0 & z \notin \Omega \end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R}^n$ para todo α multiíndice, además usando (***) y procediendo por inducción como en la proposición 3., obtenemos que $\sum_{r=1}^{\infty} f_r \circ \varphi_r^{-1}$ está en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n,E)$, entonces la desigualdad (**) nos permite afirmar que $\sum_{r=1}^{\infty} f_r \circ \varphi_r^{-1}$ está en $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$. La linealidad de T se sigue trivialmente. En cuanto a la continuidad, basta observar en la definición de $\lambda_\infty(\mathcal{D}(I,E))$ que la segunda expresión de (**) es una seminorma continua en $\lambda_\infty(\mathcal{D}(I,E))$, de donde se deduce la continuidad de T ya que un sistema fundamental de seminormas en $\lambda_\infty(\mathcal{D}(I,E))$ es, dado (f_r) de

$$\lambda_\infty(\mathcal{D}(I,E)),\quad q_{m,k}((f_r)) = \sup_r \rho_r^{-k} \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in I} q(D^{\alpha} f_r(x))$$

al variar m y k en los enteros positivos y q en las seminormas continuas en E.

Dado f de $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$, sea $(\mu_r)_{r=1}^{\infty}$ la partición de la unidad de Ω definida en I.3., tomemos la función h_r como $h_r = (f\cdot\mu_r)\circ\varphi_r$, r=1,2,..., es evidente que h_r está en $\mathcal{D}(I,E)$ r=1,2,... , tomado x de $\varphi_r^{-1}(\Omega)$ tenemos

$$h_r(x) = f(\varphi_r(x))\,\mu_r(\varphi_r(x)) =$$

$$= f(\varphi_r(x))\,\frac{\varphi_o\,\varphi_r^{-1}(\varphi_r(x))}{\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_o\varphi_j^{-1}(\varphi_r(x))} = f(\varphi_r(x)).$$

$$\cdot \frac{\varphi(x)}{\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_\circ \varphi_j^{-1}(\varphi_r(x))}$$

si x no está en I, $\mu_r(x)=0$, luego sop $h_r \subset I$, $r=1,2,\ldots$ si denotamos para z en Ω, $g(z) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_\circ \varphi_j^{-1}(z)}$, tendremos que la función que vale fg en Ω y 0 en $\mathbb{R}^n \sim \Omega$ es una función de $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$ por la proposición 5.

PROPOSICION 7. La aplicación $S: \mathcal{B}_1(\Omega,E) \dashrightarrow \lambda_\infty(\mathcal{D}(I,E))$ definida como $S(f) = (h_r)_{r=1}^{\infty}$ para cada f de $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$ es lineal y continua.

Demostración: tenemos que

$$h_r = (fg)(\varphi\,\varphi_r^{-1})\circ\varphi_r = ((fg)\circ\varphi_r).\varphi$$

luego dado α multiíndice y q seminorma continua en E y k entero positivo

$$\rho_r^{-k} \sup_{x\in I} q(D^\alpha h_r(x)) = \rho_r^{-k} \sup_{x\in I} q(D^\alpha[(fg)(\varphi_r(x))\ \varphi(x)]) \leq$$

por la fórmula de Leibnitz

$$\sum_{\delta+\beta=\alpha} |c_{\delta\beta}|\ \rho_r^{-k} \sup_{x\in I} q(D^\delta(fg)\circ\varphi_r(x)) \sup_{x\in I}|D^\beta\varphi|$$

luego (h_r) está en $\lambda_\infty(\mathcal{D}(I,E))$ por definición. Veamos que es continua, dada q seminorma continua en E, m y k enteros positivos, sea $Q(q,m,k)$ una seminorma de la familia fundamental definida en $\lambda_\infty(\mathcal{D}(I,E))$

$$Q(q,m,k)(S(f)) = Q(q,m,k,)(h_r) = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{r\in\mathbb{N}} \rho_r^{-k}\cdot$$

$$\cdot \sup_{x\in I} q(D^\alpha h_r(x)) = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{r\in\mathbb{N}} \rho_r^{-k}\sup_{x\in I} q(D^\alpha[(fg)(\varphi_r(x))\varphi(x)])\leq$$

$$\leq \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{r\in\mathbb{N}} \sum_{\delta+\beta=\alpha} |c_{\delta\beta}|\rho_r^{-k}\sup_{x\in I} q(D^\delta((fg)\circ\varphi_r)(x)) \sup_{x\in I}|D^\beta\varphi(x)|$$

tomemos $M \geq |c_{\delta\beta}| \sup_{x\in I}|D^\beta\varphi(x)|$, cuando $\delta+\beta=\alpha$ y $|\alpha|\leq m$, tendremos

$$Q(q,m,k)(h_r) \leq \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{r\in\mathbb{N}} \sum_{|\delta|\leq|\alpha|} M\, \rho_r^{-k} \sup_{x\in I} q(D^{\delta}(fg)\circ\varphi_r)(x) \leq$$

por la proposición 2. tendremos

$$\leq \quad n^m \sum_{|\delta|\leq m} M\, M_1 \sup_{z\in\mathbb{R}^n} q(D^{\delta}(fg)(z)) \qquad (**)$$

donde M_1 es una constante positiva que no depende de (fg). Como la aplicación $\chi(f) = fg$ es continua en $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$, aplicando la proposición 5., tendremos que existe una constante M_2 positiva que no depende de f y un h entero positivo con

$$(**) \leq M_2 \sup\{ q(D^{\beta}f(z)) \quad z\in\mathbb{R}^n \quad , \; |\beta|\leq h \}$$

luego la aplicación S es continua.

PROPOSICION 8. El espacio $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$ es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de $\lambda_\infty(\mathcal{D}(I,E))$.

Demostración: basta probar que T∘S de $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$ en si mismo es la identidad, entonces por el teorema I.2.8. S∘T será una proyección continua de $\lambda_\infty(\mathcal{D}(I,E))$ cuya imagen es $S(\mathcal{B}_1(\Omega,E))$ isomorfo topológicamente a $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$. Veamos la afirmación: $T\circ S(f) = T(h_r) = \sum_{r=1}^{\infty} h_r\circ\varphi_r^{-1} =$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} (f\cdot\mu_r)\circ\varphi_r\circ\varphi_r^{-1} = \sum_{r=1}^{\infty} f\cdot\mu_r = f\sum_{r=1}^{\infty}\mu_r$$

si z está en Ω, $f(z)\sum_{r=1}^{\infty}\mu_r(z) = f(z)$, y si z no está en Ω, $f(z) = 0 = f(z)\sum_{r=1}^{\infty}\mu_r(z)$.

Sea f de $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$, definimos f_r de I en E como sigue $f_r(x) = f(\varphi_r(x))$ para cada x de I, obviamente f_r está en $\mathcal{E}(I,E)$.

PROPOSICION 9. Tomado (ρ_r) como la sucesión de aristas de $(B_r)_{r=1}$ y f en $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$, entonces (f_r) está en $\lambda_\infty(\mathcal{E}(I,E))$.

Demostración: a) Si $\Omega = \mathbb{R}^n$ tendremos que $\rho_r = 1$, r=1,2,... luego $\lambda_\infty(\mathcal{E}(I,E))$ es igual a $m(\mathcal{E}(I,E))$. Como x está en I, dado multiíndice, k entero positivo y q seminorma continua en E tendremos $\rho_r^k = 1 \quad r=1,2,\dots$

$$q(D^\alpha(f \circ \varphi_r(x))) \leq q((D^\alpha f)(\varphi_r(x))) \leqslant \sup_{z\in\mathbb{R}^n} q(D^\alpha f(z))$$

para r=1,2,...

b) Si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, aplicando la proposición 2. con h=0, tendremos que la sucesión

$$\left(\rho_r^{-k} \sup_{x\in I} q(D^\alpha(f \circ \varphi_r)(x))\right)_{r=1}^{\infty}$$ es acotada, de donde la conclusión es inmediata.

Sea $J = \left[-\frac{4}{15},\frac{4}{15}\right]^n$, consideremos X de $\mathcal{E}(J,E)$ a $\mathcal{D}(I,E)$ operador de extensión lineal y continuo que existe por el teorema I.2.4. Bonet (1)(3).

PROPOSICION 10. La aplicación Y de $\lambda_\infty(\mathcal{E}(J,E))$ en $\lambda_\infty(\mathcal{D}(I,E))$, definida como $Y((f_r)) = (X(f_r))_{r=1}^{\infty}$, es lineal y continua.

Demostración: dada q seminorma continua en E y α multiíndice, como X es continua, existirá otra seminorma p continua en E, un M positivo y un entero positivo m verificando

$$\sup_{x\in I} q(D^\alpha X(f)(x)) \leqslant M \sup_{|\beta|\leqslant m} \sup_{x\in J} p(D^\beta f(x)) \qquad \forall f \in \mathcal{E}(J,E)$$

de aquí obtenemos que Y está bien definida, y es continua porque dado (f_r) de $\lambda_\infty(\mathcal{E}(J,E))$

$$\sup_{r} \rho_r^{-k} \sup_{x\in I} q(D^{\alpha}X(f_r)(x)) \leq M \sup_{|\beta|\leq m} \sup_{r} \rho_r^{-k} \sup_{x\in J}(D^{\beta}f_r(x))$$

como el segundo miembro es una seminorma continua en $\lambda_{\infty}(\mathcal{E}(I,E))$, se obtiene la conclusión buscada.

Y es inyectiva por serlo X y es fácil probar que es abierta sobre la imagen, definimos ahora $Z: \mathcal{B}_1(\Omega,E) \dashrightarrow \lambda_{\infty}(\mathcal{E}(J,E))$ del modo siguiente

$Z(f) = ((Zf)_r)_{r=1}^{\infty}$

siendo $(Zf)_r(x) = f\circ\varphi_r(x)$ para x en J, r=1,2,...

Las proposiciones 2. y 9. nos aseguran que Z es continua, la linealidad es trivial, no es inyectiva ya que tomado un r en $\mathbb{N}$ y un z en Ω con N(z) entorno de z contenido en $B_r \sim C_r$, y f de $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$ con sop f incluido en N(z) y f no nula, entonces Z(f) = 0, luego Z no es inyectiva.

Consideremos ahora la aplicación T de la proposición 6.

PROPOSICION 11. $\lambda_{\infty}(\mathcal{E}(J,E))$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$.

Demostración: tendremos que la aplicación Z.T.Y de $\lambda_{\infty}(\mathcal{E}(J,E))$ en si mismo, veamos que es la identidad. Sea (f_r) de $\lambda_{\infty}(\mathcal{E}(J,E))$

$$Z\circ T\circ Y(f_r) = Z(T(Y(f_r))) = Z(T(Xf_r)) = Z(\sum_{r=1}^{\infty}(Xf_r)\circ\varphi_r^{-1}) =$$

$= (h_s)$ por definición $h_s(x) = (\sum_{r=1}^{\infty}(Xf_r)\circ\varphi_r^{-1})\circ\varphi_s(x)$.

Como dado x de J, $\varphi_s(x)$ está en C_s para $r\neq s$, $A_r \cap C_s = \emptyset$ por la proposición I.3.1., tendremos

$$h_s(x) = (Xf_s)\circ\varphi_s^{-1}(\varphi_s(x)) = (Xf_s)(x) = f_s(x) \qquad x\in J$$

tendremos que $T\cdot Y: \lambda_{\infty}(\mathcal{E}(J,E)) \dashrightarrow \mathcal{B}_1(\Omega,E)$ y $Z: \mathcal{B}_1(\Omega,E) \dashrightarrow \lambda_{\infty}(\mathcal{E}(J,E))$ satisfaciendo $Z\circ T\circ Y = 1$ luego, por el teorema I.2.8., $(T\circ Y)\circ Z$ es una proyección

continua en $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$, $T\circ Y$ es un isomorfismo topológico sobre la imagen, Z es sobre y $T\circ Y\circ Z(\mathcal{B}_1(\Omega,E)) = $
$= T\circ Y(\lambda_\infty(\mathcal{E}(J,E))) \simeq \lambda_\infty(\mathcal{E}(J,E))$.

TEOREMA 1. Si E es un espacio localmente completo, $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$ es isomorfo topológicamente a $\lambda_\infty(S(E))$.

Demostración: si E es localmente completo tendremos, por la proposición I.2.3. Bonet (3) que $\mathcal{E}(J,E) \simeq S(E) \simeq \mathcal{D}(I,E)$, luego $\lambda_\infty(\mathcal{E}(J,E)) \simeq \lambda_\infty(S(E)) \simeq \lambda_\infty(\mathcal{D}(I,E))$. La proposición 8. nos dice que $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$ es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de $\lambda_\infty(S(E))$ y la proposición 11. nos dice que $\lambda_\infty(S(E))$ es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$, la conclusión se obtiene por el teorema I.1.5.

II.2. ALGUNOS CASOS PARTICULARES

Considerado Ω abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $(\rho_r)_{r=1}^{\infty}$ la sucesión de las aristas de los rectángulos $(B_r)_{r=1}$ de la partición de la unidad de Ω definida en I.3., sabemos que $\rho_r = 2^{-k(r)}$, $k(r) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sea E un espacio, consideremos en adelante los espacios λ_∞ y λ_0 asociados a (ρ_r) definidos en I.1.5. y I.1.6. Los siguientes resultados han sido obtenidos por Valdivia para el caso escalar en (27), y para E localmente completo por Bonet y el autor en (4).

Sea m(S(E)) definido en I.1.3. Dado (x^r) de m(S(E)) definimos $y^r = (y_n^r)_{n=1}^{\infty}$ con $x^r = (x_n^r)_{n=1}^{\infty}$ e $y_n^r = x^r_{\rho_r^{-1}n}$, obviamente $\rho_r^{-1}n \geqslant n$. Dado k entero positivo y q seminorma continua en E, $n^k q(y_n^r) = n^k q(x^r_{\rho_r^{-1}n}) \leqslant$

$\leqslant (\rho_r^{-1}n)^k q(x^r_{\rho_r^{-1}n})$, como x^r está en S(E),

$$\lim_{n\to\infty} (\rho_r^{-1}n)^k q(x^r_{\rho_r^{-1}n}) = 0 \qquad k=1,2,\ldots$$

$\lim_{n\to\infty} n^k q(y_n^r) = 0 \qquad k=1,2,\ldots$ luego y^r está en S(E) r=1,2,... Veamos que $(y^r)_{r=1}^{\infty}$ está en $\lambda_\infty(S(E))$, tendremos que dada q seminorma continua en E, k y m enteros no negativos

$$\rho_r^{-k} \sup_n n^m q(y_n^r) \leqslant \sup_n (n\,\rho_r^{-1})^{m+k} q(x^r_{\rho_r^{-1}n}) \leqslant \sup_p p^{m+k} q(x_p^r)$$

como $(x^r)_{r=1}^{\infty}$ está en m(S(E)), por definición

$\sup_r \sup_p p^{m+k} q(x_p^r) < \infty$, luego $\sup_{r\in\mathbb{N}} \rho_r^{-k} \sup_n n^m q(y_m^r) \leqslant$

$$\leqslant \sup_r \sup_p p^{m+k} q(x_p^r) \qquad (*)$$

de esta desigualdad obtenemos que $(y^r)_{r=1}^{\infty}$ está en $\lambda_\infty(S(E))$.

PROPOSICION 1. La aplicación $Z_1 : m(S(E)) \dashrightarrow \lambda_\infty(S(E))$ definida como $Z_1(x^r) = (y^r)$, es lineal y continua.

Demostración: hemos probado ya que está bien definida y trivialmente es lineal, la continuidad se deduce inmediatamente de la desigualdad (*), puesto que un sistema fundamental de seminormas en $\lambda_\infty(S(E))$ es

$$\left\{ \sup_{r\in\mathbb{N}} \rho_r^{-k} \sup_n n^m q(y_r^n) \; : \; ((y_n^r)_{n=1})_{r=1}^{\infty} \in \lambda_\infty(S(E)) \, , \right.$$

$\left. k,m=1,2,\ldots \; ,q \text{ seminorma continua en } E \right\}$

y el segundo miembro de la desigualdad es una seminorma continua en $m(S(E))$.

Dado ahora $(x^r)_{r=1}^{\infty}$ de $\lambda_\infty(S(E))$, definimos $(y^r)_{r=1}^{\infty}$ como

$$y_n^r = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ no es multiplo de } \rho_r^{-1} \\ x_p^r & \text{si } n=p\,\rho_r^{-1} \end{cases}$$

aplicando la definición, si m es un entero no negativo y q una seminorma continua en E, entonces para cada r natural tendremos:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} n^m q(y_m^r) \leq (\rho_r^{-1})^m \sup_p p^m q(x_p^r)$$

como $((x_p^r)_{p=1}^{\infty})_{r=1}^{\infty}$ está en $\lambda_\infty(S(E))$ se verifica:

$$\sup_r \sup_n n^m q(y_n^r) \leqslant \sup_r \rho_r^{-m} \sup_p p^m q(x_p^r) < +\infty \qquad (**)$$

por lo tanto:

PROPOSICION 2. Definido $U_1 : \lambda_\infty(S(E)) \dashrightarrow m(S(E))$

como $U_1(x^r) = (y^r)$, entonces U_1 es lineal y continua.

Demostración: por la desigualdad (**) tendremos que U_1 está bien definida, es trivialmente lineal, y, al variar m en los enteros positivos y q en las seminormas continuas en E, el primer miembro de (**) es un sistema fundamental de seminormas en m(S(E)) y el segundo miembro es siempre una seminorma continua en $\lambda_\infty(S(E))$, luego U_1 es continua.

PROPOSICION 3. $\lambda_\infty(S(E))$ es topológicamente isomorfo a un subespacio complementado de m(S(E)).

Demostración: probemos que $Z_1 \circ U_1 : \lambda_\infty(S(E)) \dashrightarrow \lambda_\infty(S(E))$ es la identidad, $Z_1 \circ U_1(x^r) = Z_1(y^r) = (z^r)_{r=1}^{\infty}$

con $z^r = (z^r_n)_{n=1}^{\infty}$, $z^r_n = y^r_{\rho_r^{-1} n} = x^r_n$, n,r=1,2,..

luego $Z_1 \circ U_1(x^r) = (x^r)$. Por otra parte es lineal y continua, entonces por el teorema I.2.8. (9), tendremos que $U_1 \circ Z_1$ es una proyección continua de m(S(E)) y $\lambda_\infty(S(E))$ es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de m(S(E)).

Sea t la función definida en $\mathbb{R}^n$ tal que si $\Omega = \mathbb{R}^n$, $t(x) = \infty$ para cada x de $\mathbb{R}^n$, y si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ $t(x) = \min \{ |x-y| \quad / \quad y \in \mathbb{R}^n \sim \Omega \}$

Se dice que un conjunto Ω es casi acotado si para cada , el conjunto $\{ x \in \mathbb{R}^n \quad / \quad t(x) \geqslant \varepsilon \}$ es acotado.

Un abierto Ω es casi acotado si y sólo si $\lim_{r \to \infty} \rho_r = 0$ porque si $\lim_{r \to} \rho_r = 0$, dado $\varepsilon > 0$, p natural tal que $\frac{5\sqrt{n}}{2^p} < \varepsilon$ es arista de un cierto B_r, tendremos que existe un r_o tal que si $r \geqslant r_o$, $\rho_r < 1/2^p$, luego

$x \in B_r \quad r \geq r_o \qquad t(x) \leq \sqrt{n}\,\rho_r + 4\sqrt{n}\,\rho_r = 5\sqrt{n}\,\rho_r < \varepsilon$

por lo tanto $\{x \in \mathbb{R}^n \ / \ t(x) \geq \varepsilon\} \subset \bigcup_{r \leq r_o} B_r$ que es

compacto. Recíprocamente, si para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n \ / \ t(x) \leq \varepsilon\}$ es acotado, tendremos que $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} \{B_r \ / \ \rho_r \geq 1/2^p\}$ es un conjunto acotado porque si x está en B_r, $t(x) \geq \sqrt{n}\,\rho_r$, luego $\{r \in N \ / \ \rho_r \geq 1/2^p\}$ es finito para p=0,1,2,... y de aquí $\lim_{r \to \infty} \rho_r = 0$.

Luego si Ω no es casi acotado existe una subsucesión $(\rho_{r_j})_{j=1}^{\infty}$ tal que $\rho_{r_1} = \rho_{r_2} = \ldots = \rho_{r_j} = \ldots$

PROPOSICION 4. Si Ω no es casi acotado $\lambda_\infty(S(E))$ tiene un subespacio complementado isomorfo a $m(S(E))$.

Demostración: sea $(\rho_{r_j})_{j=1}^{\infty}$ subsucesión con $\rho_{r_1} = \ldots = \rho_{r_j} = \ldots$ Sea $F_1 = \{(x^r) \in \lambda_\infty(S(E)) \ / \ x^r = 0 \quad r \neq r_j \quad j=1,2,\ldots\}$, y

$F_2 = \{(x^r) \in \lambda_\infty(S(E)) \ / \ x^r = 0 \quad r = r_j \quad j=1,2,\ldots\}$

Como la aplicación $A: \lambda_\infty(S(E)) \longrightarrow F_1$ es trivialmente lineal, continua y sobre y Ker A = F_2, tendremos que

$\lambda_\infty(S(E)) = F_1 \oplus_t \text{Ker } A = F_1 \oplus_t F_2$. F_1 es isomorfo topológicamente a $m(S(E))$ porque dada q seminorma continua en E y k y m enteros positivos, (x^r) F_1

$$\sup_{r \in \mathbb{N}} \rho_r^{-k} \sup_n n^m q(x_n^r) = \rho_{r_1}^{-k} \sup_{j \in \mathbb{N}} \sup_n n^m q(x_m^{r_j})$$

luego la aplicación $W: m(S(E)) \longrightarrow F_1$

$W((x_n^j)) = ((y_n^r)_{n=1}^{\infty})_{r=1}^{\infty}$ con

$$y_n^r = \begin{cases} 0 & r \neq r_j \quad j=1,2,\ldots \\ x_n^j & r = r_j \quad j=1,2,\ldots \end{cases}$$

es un isomorfismo topológico.

TEOREMA 1. Si Ω es un abierto de $\mathbb{R}^n$ no casi acotado, entonces $\lambda_\infty(S(E))$ es topológicamente isomorfo a $m(S(E))$.

Demostración: es una consecuencia directa de las proposiciones 3. y 4. y de que $\lambda_\infty(S(E))$ tiene la propiedad de complementación por el teorema I.1.5.

TEOREMA 2. Si E es un espacio localmente completo y es un abierto de $\mathbb{R}^n$ no casi acotado, entonces $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$ es topológicamente isomorfo a $m(S(E))$.

Demostración: consecuencia directa de los teoremas 1.1. y 2.

Valdivia ha probado en (23) que $\mathcal{B}_1(\Omega)$ es nuclear si y sólo si existe t entero positivo tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_r^t < +\infty$. Diremos que un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ es casi integrable si satisface esta condición.

Si Ω es un abierto casi integrable existe a lo sumo un número finito de términos repetidos en la sucesión (ρ_r), luego podemos considerarla ordenada como una sucesión decreciente. Por lo tanto $\lim_{r\to\infty} r\,\rho_r^t =$ $= 0$ ya que la serie es convergente. De hecho si existe t tal que $\lim_{r\to\infty} r\,\rho_r^t = 0$, entonces la serie $\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{2t} < +\infty$ luego esta condición equivale a la de ser Ω casi integrable.

PROPOSICION 5. Sea E un espacio y $\Omega \neq \emptyset$ un abierto de $\mathbb{R}^n$ casi integrable, entonces $\lambda_\infty(S(E))$ es topológicamente isomorfo a un subespacio complementado de $S(S(E))$.

Demostración: definimos $Z_2 : S(S(E)) \dashrightarrow \lambda_\infty(S(E))$ como sigue: dado $(x^r)_{r=1}^{\infty}$ de $S(S(E))$,

$$Z_2(x^r) = (y^r)_{r=1}^{\infty} \text{ con } x^r = (x_n^r)_{n=1}^{\infty} \in S(E),$$

$y^r = (y_n^r)$, $y_n^r = x^r_{\rho_r^{-1} n}$. y^r está en $S(E)$ $r=1,2,\dots$ se deduce de la desigualdad siguiente: dado m entero positivo y q seminorma continua en E

$$n^m q(y_n^r) = n^m q(x^r_{\rho_r^{-1} n}) \leq (\rho_r^{-1} n)^m q(x^r_{\rho_r^{-1} n}) \leq \sup_p p^m q(x_p^r)$$

dado ahora k entero negativo tendremos

$$\rho_r^{-k} \sup_n n^m q(y_n^r) \leq \rho_r^{-(k+m)} \sup_n n^{m+k} q(x^r_{\rho_r^{-1} n}) \leq$$

$$\sup_n (\rho_r^{-1} n)^{m+k} q(x^r_{\rho_r^{-1} n}) \leq \sup_p p^{m+k} q(x_p^r)$$

por lo tanto $\sup\limits_{r \in \mathbb{N}} \rho_r^{-k} \sup\limits_n n^m q(y_n^r) \leq \sup\limits_{r,p} p^{m+k} q(x_p^r)$

luego Z_2 está bien definida. Al ser trivialmente lineal será continua.

Definamos ahora $U_2 : \lambda_\infty(S(E)) \dashrightarrow S(S(E))$ como, $(x^r)_{r=1}^{\infty} \in \lambda_\infty(S(E))$, $U_2(x^r) = (y^r)$, $y^r = (y_n^r)$

$$y_n^r = \begin{cases} 0 & \text{si n no es múltiplo de } \rho_r^{-1} \\ x_p^r & \text{si } n = \rho_r^{-1} p \end{cases}$$

tendremos que $\sup\limits_n n^m q(y_n^r) \leq (\rho_r^{-1})^m \sup\limits_p p^m q(x_p^r) < +\infty$

para todo m entero positivo y toda q seminorma continua en E, luego y^r está en $S(E)$ para $r=1,2,\dots$ Veamos ahora que $(y^r)_{r=1}^{\infty}$ está en $S(S(E))$. Sea h entero positivo, como existe t positivo con $\lim\limits_{r\to\infty} r\,\rho_r^t = 0$ y evidentemente t se puede tomar entero positivo, existirá un r_o tal que $r \geqslant r_o$ $\ r\,\rho_r^t < 1$, luego $r < \rho_r^{-t}$ (*)

consecuentemente tendremos

$$r^h \sup_n n^m q(y_n^r) \leqslant r^h(\rho_r^{-1})^m \sup_p p^m q(x_p^r) \qquad (**)$$

para $r \geqslant r_o$ tendremos, por (*) y (**)

$$r^h \sup_n n^m q(y_n^r) \leqslant \rho_r^{-th-m} \sup_p p^m q(x_p^r) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{r\in\mathbb{N}} \rho_r^{-(th+m)} \sup_p p^m q(x_p^r) < +\infty \qquad (***)$$

puesto que (x^r) está en $\lambda_\infty(S(E))$. Si $r \leqslant r_o$

$$r^h \sup_n n^m q(y_n^r) \leqslant r_o^h\, \rho_r^{-(h+m)} \sup_p p^m q(x_p^r)$$

como $r_o \geqslant 1$, tendremos por (***) que esta desigualdad se verifica también si $r \geqslant r_o$, luego existe

$\sup\limits_{r\in\mathbb{N}} r^h \sup\limits_n n^m q(y_n^r)$ y verifica que

$$Q(q,h,m)(y^r) = \sup_{r\in\mathbb{N}} \sup_n n^m q(y_n^r) \leqslant r_o^h \sup_{r\in\mathbb{N}} \rho_r^{-(th+m)} \cdot$$

$$\cdot \sup_p p^m q(x_p^r) = r_o^h\, \tilde{Q}(q,th+m,m)(x^r) \qquad (****)$$

como la familia $Q(q,h,m)$, al variar q en las seminormas continuas en E, h y m en los enteros positivos, es un sistema fundamental de seminormas continuas en $S(S(E))$ y $\tilde{Q}(q,th+m,m)$ es una seminorma continua en $\lambda_\infty(S(E))$, tendremos que U_1 está bien definida y como es lineal, por (****) es continua. Tendremos que $Z_2 \cdot U_2 : \lambda_\infty(S(E)) \longrightarrow \lambda_\infty(S(E))$ es la identidad probándolo como en la proposición 3., luego $U_2 \circ Z_2$ es una proyección continua en $S(S(E))$, aplicando el teorema I.8. de Horvath, $\lambda_\infty(S(E))$ es isomorfo topológicamente a $U_2(\lambda_\infty(S(E))$ subespacio complementado de $S(S(E))$.

TEOREMA 3. Si E es un espacio y Ω es un abierto na vacío de $\mathbb{R}^n$ casi integrable, entonces $\lambda_\infty(S(E))$ es isomorfo topológicamente a S(E).

Demostración: la proposición 5. nos asegura que $\lambda_\infty(S(E))$ es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de $S(S(E))$ pero por el teorema I.1.3. (Bonet(1)) $S(S(E)) \simeq S(E)$. Por otra parte S(E) es siempre isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de $\lambda_\infty(S(E))$ ya que la aplicación $\pi: \lambda_\infty(S(E)) \longrightarrow \lambda_\infty(S(E))$ con $(x^r) = (x^1, 0, 0, \ldots)$, es una proyección continua trivialmente cuya imagen $\pi(\lambda_\infty(S(E)))$ es isomorfa topológicamente a S(E) como es inmediato comprobar. Entonces, por poseer S(E) la propiedad de complementación por el teorema I.1.1. (Bonet), $S(E) \simeq \lambda_\infty(S(E))$.

TEOREMA 4. Si E es un espacio localmente completo y es un abierto de $\mathbb{R}^n$ no vacío casi integrable, entonces $\mathcal{B}_1(\Omega, E)$ es isomorfo topológicamente a S(E).

Demostración: consecuencia inmediata de los teoremas 3 y 1.1.

Si Ω es acotado es sencillo comprobar que es casi integrable, en este caso tendremos que $\mathcal{B}_1(\Omega, E)$ es topológicamente isomorfo a S(E). Tampoco es difícil probar que en este caso $\mathcal{B}_0(\Omega, E) = \mathcal{B}_1(\Omega, E)$, y por lo tanto si Ω es acotado $\mathcal{B}_0(\Omega, E)$ es topológicamente isomorfo a S(E). Para una prueba directa, en (4), como ya se ha indicado, se tiene un estudio exhaustivo de $\mathcal{B}_0(\Omega, E)$.

COROLARIO 1. Si E es un espacio localmente completo y K es un compacto en $\mathbb{R}^n$ con interior no vacío, $\mathcal{D}(K,E)$ es topológicamente isomorfo a S(E).

Demostración: evidentemente $\mathcal{D}(K,E) = \mathcal{B}_1(\Omega,E) = \mathcal{B}_0(\Omega,E)$, siendo $\Omega = \text{int}(K)$ y como tiene medida finita, tendremos $\mu(\text{int}(K)) = \sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^n$, luego int(K) es casi integrable.

Este resultado aparece ya en (4) de Bonet y el autor.

II.3. EL ESPACIO $\mathcal{S}(\Omega,E)$

DEFINICION 1. Llamaremos $\mathcal{S}(\Omega,E)$, siendo E un espacio Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $F = \Omega \sim \mathbb{R}^n$, al subespacio de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n,E)$ formado por las funciones f que verifican que ellas y todas sus derivadas de cualquier orden se anulan en todo punto de F y además

$$\lim_{\|z\| \to \infty} \|z\|^r q(D^\alpha f(z)) = 0$$

para cada r entero positivo, α multiíndice y q seminorma continua en E.

Se dota a $\mathcal{S}(\Omega,E)$ de una topología localmente convexa mediante la familia de seminormas

$$q(f)_{p,r} = \sum_{|\alpha| \leq p} \sup \left\{(1+\|x\|^2)^r q(D^\alpha f(x)) \quad : \quad x \in \mathbb{R}^n\right\}$$

al variar q en las seminormas continuas en E y p y r en los enteros positivos.

Valdivia en(27,15)prueba que si $E = \mathbb{K}$, $\mathcal{S} \simeq s$, y Bonet en (1) prueba que si E es un espacio localmente completo $\mathcal{S}(E) \simeq S(E)$. Si $F = \mathbb{R}^n$ entonces $\mathcal{S}(\Omega,E) = \{0\}$, por lo tanto en lo que sigue supondremos $F \neq \mathbb{R}^n$, o lo que es lo mismo, Ω un abierto no vacío. Schwartz definió el espacio $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$.

Si $\Omega = \mathbb{R}^n \sim F$ es un abierto no vacío, sean $(B_r)_{r=1}^{\infty}$, $(A_r)_{r=1}^{\infty}$, $\varphi_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con $\varphi_r(I) = A_r$, $r=1,2,\ldots$, $\{\mu_r \ : \ r=1,2,\ldots\}$ los cubos y la partición de la unidad construidos en I.3., de la que conservamos toda la notación. Sea $M_m = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ -m \leq x_j \leq m \quad j=1,2,\ldots,n\}$. Sea ρ_r la arista del cubo B_r, como $\operatorname{int}(B_r) \cap M_m \neq \emptyset$ si y sólo si $B_r \subset M_m$, sea m(r) entero positivo con $B_r \subset M_{m(r)} \sim M_{m(r)-1}$, $M_o = \emptyset$, tomemos $a = (m(r)\rho_r^{-1})_{r=1}^{\infty}$ y E un espacio, sea $\lambda_o(\mathcal{D}(I,E))$ definido en I.1., y $C_m = \{r \ / \ B_r \subset M_m \sim M_{m-1}\}$ m=1,2,... Tomado M_m tendremos que la medida de $M_m \cap \Omega$ será $\sum \rho_r^n < +\infty$, sumando para los r de C_m, entonces si $n \geq 1$ tendremos que $\sum_{r \in C_m} \rho_r^n \leq (2m)^n - (2(m-1))^n$,

m=1,2,... luego existirá una constante b positiva que no depende de m con $(2m)^n - (2(m-1))^n \leq bm^{n-1}$, luego

$$\sum_{r\in C_m} (\rho_r \frac{1}{m})^{2n} \leq (\sum_{r\in C_m} (\rho_r \frac{1}{m})^n)^2 \leq (\frac{bm^{n-1}}{m^n})^2 \leq b^2 \frac{1}{m^2}$$

luego la familia $((m(r)\rho_r^{-1})^{-2n})_{r=1}^{\infty}$ es una serie su-

mable con $\sum_{m,r=1}^{\infty} (\frac{\rho_r}{m(r)})^{2n} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r\in C_m} (\frac{\rho_r}{m})^{2n} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b^2}{m^2} < +\infty.$

luego obtendremos, procediendo como en la demostración de la proposición 2.5. y del teorema 2.3., que $\lambda_\infty(S(E)) \simeq S(E)$.

Si el espacio E es localmente completo tendremos que $\mathcal{D}(I,E) \simeq S(E)$ por el teorema I.2.5., tomando en lo que sigue de sección $a = (m(r)^{-1}\rho_r)_{r=1}^{\infty}$

$$\lambda_\infty(\mathcal{D}(I,E)) \simeq \lambda_\infty(S(E)) \simeq S(E)$$

PROPOSICION 1. Si E es un espacio localmente completo entonces $\lambda_o(\mathcal{D}(I,E)) \simeq S(E)$.

Demostración: basta probar que $\lambda_\infty(\mathcal{D}(I,E)) = \lambda_o(\mathcal{D}(I,E))$ como conjuntos al tener ambos la misma topología. Evidentemente $\lambda_o(\mathcal{D}(I,E)) \subset \lambda_\infty(\mathcal{D}(I,E))$, recíprocamente, tomados p y k enteros positivos y q seminorma continua en E, tendremos por definición que

$$c = \sup_r \left[m(r)\rho_r^{-1}\right]^{p+1} \sum_{|\alpha|\leq k} \sup \left\{ q(D^\alpha f_r(x)) \quad x \in I \right\} < +\infty$$

para $(f_r)_{r=1}^{\infty}$ en $\lambda_\infty(\mathcal{D}(I,E))$, tendremos por lo tanto que

$$(m(r)\,\rho_r^{-1})^p \sum_{|\alpha|\leq k} \sup\{q(D^\alpha f_r(x)) \quad x\in I\} \leq c\,\rho_r \frac{1}{m(r)}$$

de donde (f_r) está en $\lambda_o(\mathcal{D}(I,E))$.

Dado ahora (f_r) de $\lambda_o(\mathcal{D}(I,E))$ definimos $T(f_r) = \sum_r f_r \circ \varphi_r^{-1}$

PROPOSICION 2. La aplicación T es lineal y continua de $\lambda_o(\mathcal{D}(I,E))$ en $\mathcal{S}(\Omega,E)$

Demostración: llamando $\tilde{\mathcal{F}}$ al espacio de sucesiones de $\mathcal{D}(I,E)$ asociado a $(\rho_r)_{r=1}^{\infty}$ tal como se define en I.1. 5, tendremos que $\lambda_o(\mathcal{D}(I,E))$ es un subespacio cerrado de $\tilde{\mathcal{F}}$, y entnces por (4) Bonet y el autor obtenemos que $T(f_r)$ está incluido en $\mathcal{B}_o(\Omega,E)$, luego $T(f_r)$ está en

$\mathcal{E}_F(E)$, es decir, es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^n$ y $D^\alpha T(f_r)(x) = 0$ para todo punto x de F y todo α multiíndice.

Considerados k y p enteros positivos y q seminorma continua en E, dado $\varepsilon > 0$ existirá un r_o cumpliendo que si $r \geq r_o$

$$\left(\frac{8}{5}\right)^p (2n)^{k+p}\, n^{k+p}\, 4^n\, (m(r)\,\rho_r^{-1})^{k+p} \max\{q(D^\alpha f_r(z)) \; : \; z\in I, \quad |\alpha|\leq p\} < \varepsilon \qquad (*)$$

Sea h entero positivo con $A_r \subset M_h$, $r=1,2,\ldots,r_o$, consideremos z en $\mathbb{R}^n$ con $\|z\| > \sqrt{n}(h+2)$, podemos suponer z de Ω. Sea $L = \{r\in \mathbb{N} \;/\; z\in A_r\}$, card$(L) \leq 4^n$ tomemos j entero positivo con z en $M_j \sim M_{j-1}$, como r está en L, z está en $A_r \cap M_j$ tendremos $B_r \cap M_{j-2} = \emptyset$, luego $j-1 \leq m(r)$, por lo tanto

$$\|z\| \leq \sqrt{n}j \leq n(m(r)+1) \leq 2n\, m(r) \qquad (**)$$

de aquí para α multíndice $|\alpha| \leq p$, tendremos

$$\|z\|^k q(D^\alpha T(f_r)(z)) \leq \|z\|^k \sum_{r\in L} q(D^\alpha(f_r \circ \varphi_r^{-1})(z)) =$$

$$= \|z\|^k (\tfrac{8}{5})^{|\alpha|} \sum_{r\in L} \rho_r^{-|\alpha|} q(D^\alpha f_r)(\varphi_r^{-1}(z)) \leq$$

$$\leq (\tfrac{8}{5})^{|\alpha|} \sum_{r\in L} (\|z\|\, \rho_r^{-1})^{k+p} \sup\{q(D^\alpha f_r(x)) : x\in I,\ |\alpha|\leq p\} \leq$$

llamemos a esta desigualdad $(***)$,

$$\leq 4^n(\tfrac{8}{5})^{|\alpha|} (2n)^{k+p} \max_{r\geq r_0} (m(r)\, \rho_r^{-1})^{k+p} \sup\{ q(D^\alpha f_r(x)) :$$

$$: x\in I,\ |\alpha| \leq p\} \qquad (***)'$$

luego aplicando $(*)$, $(**)$ y $(***)$ tendremos que para todo z de $\mathbb{R}^n$ con $\|z\| > \sqrt{n}(h+2)$ se cumple

$$\|z\|^k \max\{ D^\alpha T(f_r)(z)\ \ |\alpha| \leq p\} < \varepsilon$$

luego T está bien definida. Es continua porque si z está en Ω y $\|z\| \leq \sqrt{n}(h+2)$, sustituyendo $\|z\|^k$ por $(1+\|z\|^2)^k \leq n(h+2)^2+1 = H$, tendremos que

$$(1+\|z\|^2)^k q(D^\alpha \sum f_r \circ \varphi_r^{-1}(z)) \leq (\tfrac{8}{5})^{|\alpha|} 4^n H^p \sup_r \rho_r^{-k-p}\cdot$$

$$\cdot\sup\{q(D^\alpha f_r(x) : x\in I,\ |\alpha|\leq p\}$$

Si $\|z\| > \sqrt{n}(h+2)$ y z está en Ω

$$(1+\|z\|^2)^k < 2^k \|z\|^{2k}$$

sustituyendo en $(***)'$ $\|z\|^k$ por $2^k\|z\|^{2k}$ encontraremos que existe una constante H_1 que no depende de (f_r) con

$$(1+\|z\|^2)^k q(D^\alpha \sum f_r \circ \varphi_r^{-1}(z)) \leq H_1 \sup_r (m(r)\, \rho_r^{-1})^{k+p}$$

$$\cdot\sup\{ q(D^\alpha f_r(x) : x\in I,\ |\alpha|\leq p\}$$

de donde existirá un número H_2 positivo con

$q(T(f_r))_{p,k} \leq H_2 q(f_r)_{p,p+k}$

para todo (f_r) de $\lambda_o(\mathcal{D}(I,E))$, luego T es continua.

PROPOSICION 3. Si f está en $\mathcal{S}(\Omega,E)$ entonces $\|z\|^{2k} f(z) D^{\alpha}(\sum \varphi \circ \varphi_r^{-1})(z)$ está en $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$, k=0,1,... y α un multiíndice cualquiera.

Demostración: consecuencia inmediata de la proposición 1, al ser $\|z\|^{2k} f(z) \in \mathcal{B}_1(\Omega,E)$ para k=0,1,...

PROPOSICION 4. Si f está en $\mathcal{S}(\Omega,E)$ entonces

$\|z\|^{2k} D^{\alpha} f(z)\, D^{\beta} \sum \varphi \circ \varphi_r^{-1}(z) \ldots D^{\mu} \sum \varphi \circ \varphi_r^{-1}(z)$ es un elemento de $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$, para k=0,1,... y α, β, ..., μ multiíndices cualquiera

Demostración: aplicando reiteradamente la proposición 3.

PROPOSICION 5. Si f está en $\mathcal{S}(\Omega,E)$, entonces

$$f \frac{1}{\sum\limits_{r=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_r^{-1}} \quad \text{está en } \mathcal{S}(\Omega,E).$$

Demostración: procediendo como en la prueba de la proposición 1.4. usando ahora las proposiciones 3. y 4., obtendremos que si f está en $\mathcal{S}(\Omega,E)$, α multiíndice

$$\|z\|^{2k} D^{\alpha}\left[f(z) \frac{1}{\sum \varphi \circ \varphi_r^{-1}(z)}\right] \in \mathcal{B}_1(\Omega,E) \quad k=0,1,\ldots$$

Sea f de $\mathcal{S}(\Omega,E)$, considerada $(\mu_r)_{r=1}^{\infty}$ la partición de la unidad definida en I.3, llamamos

$h_r = (f \cdot \mu_r) \circ \varphi_r$ $r=1,2,\ldots$ Tendremos trivialmente que h_r está en $\mathcal{D}(I,E)$ $r=1,2,\ldots$, llamando

$$g(z) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}(z)} \qquad z \in \Omega,$$ tendremos que la función que vale fg en Ω y 0 en $F = \mathbb{R}^n \sim \Omega$ es una función de $\mathcal{S}(\Omega,E)$ por la proposición 5. y $h_r =$ $= ((f.\,g)\circ\varphi_r)\cdot\varphi$.

PROPOSICION 6. La aplicación R de $\mathcal{S}(\Omega,E)$ a $\lambda_0(\mathcal{D}(I,E))$, definida como $R(f)=(h_r)_{r=1}^{\infty}$ para cada f de $\mathcal{S}(\Omega,E)$, es lineal y continua.

Demostración: por la proposición 1.7., como f está en $\mathcal{S}(\Omega,E)$ entonces f está en $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$, tendremos para k y p enteros positivos, q seminorma continua en E y α multiíndice con $|\alpha| \leq p$, existe $D > 0$ que no depende de f verificando

$$\rho_r^{-k} \sup_{x\in I} \{ q(D^{\alpha} h_r(x)) \} \leq \sum_{|\delta|\leq p} D \sup \{ D^{\delta}(fg)(z) \; : \; z \in A_r \}$$

por la prueba de la proposición 1.5. obtendremos que existe una constante D_1 y un número entero positivo h que no dependen de f con

$$\rho_r^{-k} \sup_{x\in I} \{ q(D^{\alpha} h_r(x)) \} \leq D_1 \sum_{|\delta|\leq h} \sup_{z\in\Omega} \{ q(D^{\delta}(fg)(z)) \}$$

Sea z de A_r, sea m(r) el asociado, es decir, $B_r \subset M_{m(r)} \sim M_{m(r)-1}$, entonces, como z está en $M_{m(r)+1}$

$m(r)+1 \geq \frac{\|z\|}{\sqrt{n}} \geq m(r)-1$, luego

$$(m(r)\,\rho_r^{-1})^{k} \sup_{x\in I} \{ q(D^{\alpha} h_r(x)) \} \leq D_1 \sum_{|\delta|\leq h} \sup_{z\in\Omega} \{ (\|z\|^2+1)^{k} \cdot$$
$$\cdot q(D^{\delta}(f)(z)) \}$$

por lo tanto al tomar supremos en los naturales, obtenemos que está bien definida, y como es evidentemente lineal, es continua.

PROPOSICION 7. $\mathcal{S}(\Omega,E)$ es topológicamente isomorfo a un subespacio complementado de $\lambda_0(\mathcal{D}(I,E))$.

Demostración: considerada $T\circ R: \mathcal{S}(\Omega,E) \longrightarrow \mathcal{S}(\Omega,E)$ tendremos $T\circ R(f) = T(((fg)\circ\varphi_r)\varphi) =$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} fg\,.\varphi\circ\varphi_r^{-1} = f\sum_{r=1}^{\infty}\mu_r = f,$$ para todo

f de $\mathcal{S}(\Omega,E)$, luego $T\circ R$ es la identidad, por lo tanto aplicando el teorema I.2.8. tendremos que $R\circ T$ es una proyección continua y $R\circ T(\lambda_0(\mathcal{D}(I,E)) = R(\mathcal{S}(\Omega,E))$ es un subespacio complementado de $\lambda_0(\mathcal{D}(I,E))$ isomorfo a $\mathcal{S}(\Omega,E)$.

TEOREMA 1. $\mathcal{S}(\Omega,E)$, para Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y E un espacio localmente completo, es topológicamente isomorfo a $S(E)$.

Demostración: en estas hipótesis por la proposición 1. $\lambda_0(\mathcal{D}(I,E))$ es topológicamente isomorfo a $S(E)$. Por otra parte, tomados $P\subset \mathrm{int}(Q)\subset Q\subset\Omega$, cubos de $\mathbb{R}^n$, y un operador de extensión lineal y continuo $W: \mathcal{E}(P,E) \longrightarrow \mathcal{D}(Q,E)$, podemos suponer $W: \mathcal{E}(P,E) \longrightarrow \mathcal{S}(\Omega,E)$, es un isomorfismo en y $W(\mathcal{E}(P,E))$ tiene como complemento topológico el subespacio de $\mathcal{S}(\Omega,E)$ de las funciones que se anulan en P, luego como $S(E) \simeq \mathcal{E}(P,E) \simeq W(\mathcal{E}(P,E))$, tendremos que $S(E)$ es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de $\mathcal{S}(\Omega,E)$ y ahora la conclusión se obtiene de la proposición 7. y del teorema I.1.1.

CAPITULO III

LOS ESPACIOS $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega,E)$ $1 \leq p < +\infty$

DEFINICION 1. Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < +\infty$, Ω un abierto no vacío en $\mathbb{R}^n$ y E un espacio, llamaremos $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega,E)$ al espacio de funciones f de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n,E)$ que verifiquen que para todo α multiíndice y toda q seminorma continua en E se cumpla que
$q(D^\alpha f(z))^p \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $D^\alpha f(z)=0$
para todo z de $\mathbb{R}^n \sim \Omega$.

Es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, se le dota de una topología localmente convexa separada con la siguiente familia de seminormas: dada q seminorma continua en E y h entero no negativo, se define Q:

$$Q(q,h)(f) = \max_{|\alpha| \leq h} \left(\int_{\mathbb{R}^n} q(D^\alpha f(z))^p dz \right)^{1/p} =$$

$$= \max_{|\alpha| \leq h} \left(\int_{\Omega} q(D^\alpha f(z))^p dz \right)^{1/p}$$

siendo f de $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega,E)$.

Valdivia demuestra en (22) que los espacios de Schwartz $\mathcal{D}_{L^p}(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$ son topológicamente isomorfos a $\ell^p \hat{\otimes} s$ y Bonet en (3) que los espacios $\mathcal{D}_{L^p}(\mathbb{R}^n,E)$, con $1 \leq p < \infty$ y E un espacio localmente completo, son topológicamente isomorfos a $\ell^p(S(E))$.

Valdivia define en (26) el espacio $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$ para Ω un abierto cualquiera de $\mathbb{R}^n$ y prueba que $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$ es topológicamente isomorfo a $\lambda_p \hat{\otimes} s$ con $1 \leq p < +\infty$.

Nosotros obtenemos una representación de $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega,E)$ para el caso en que E sea un espacio localmente completo.

III.1. REPRESENTACION DE LOS ESPACIOS $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega,E)$ $1 \leq p < +\infty$

PROPOSICION 1. Considerados k y m enteros no negativos, α multiíndice y q seminorma continua en E, existe un número real positivo U verificando que:

$$(\rho_r^{-k} q(D^{\alpha} f(z)))^p \leq U \sum_{|\mu| \leq k+m+n} \rho_r^{(m-n)p} \int_{F_r} q(D^{\alpha+\mu} f(z))^p dz$$

para todo $z \in A_r$ con $\rho_r < 1/2$ y toda funcion $f \in \mathcal{D}_{L^p}(\Omega,E)$

Demostración: sea A_r los cubos definidos en I.3., sea z de A_r, consideremos y de $\mathbb{R}^n \sim \Omega$ cumpliendo $|z-y| = d(z,\mathbb{R}^n \sim \Omega)$, tendremos por I.3.3. que $[z,y] \subset E_r \subset F_r$, definamos h: $[0,1] \longrightarrow [z,y]$ como $h(t) = y(1-t) + tz$, como $(D^{\alpha} f) \circ h$ es de clase $\mathcal{C}^{\infty}$ en $[0,1]$ dado u de E', $u((D^{\alpha} f) \circ h): [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}$ lo es también, aplicando la fórmula de Taylor con resto integral ((7) pag.186) tendremos

$$u((D^{\alpha} f) \circ h)(1) - u((D^{\alpha} f) \circ h)(0) = u((D^{\alpha} f) \circ h)^{(1)}(0) + u((D^{\alpha} f) \circ h)^{(2)}(0) + \ldots + \frac{1}{(k+m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{k+m-1} u((D^{\alpha} f) \circ h)^{(k+m)}(t) dt$$

para $i = 1,2,\ldots,$ al ser u lineal tendremos $[u((D^{\alpha} f) \circ h)]^{(i)}(t) = u[(D^{\alpha} f) \circ h]^{(i)}(t)$, aplicando la regla de la cadena, si $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ es un multiíndice tendremos

$$[u((D^{\alpha} f) \circ h)]^{(i)}(t) = u\Big(\sum_{|\beta| = i} D^{\alpha+\beta}(f)(t(z-y)+y)(z_1-y_1)^{b_1} \ldots (z_n-y_n)^{b_n}\Big)$$

siendo $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Como para todo δ multiíndice $D^{\delta} f(y) = 0$ tendremos:

$$u(D^{\alpha} f(z)) = u((D^{\alpha} f) \circ h)(1) =$$

$$= \frac{1}{(k+m-1)!} \int_0^1 u\Big[(1-t)^{k+m-1} \sum_{|\beta| = k+m} D^{\alpha+\beta}(f)(h(t))(z_1-y_1)^{b_1} \ldots (z_n-y_n)^{b_n}\Big] dt$$

esto es cierto para cada u de E', luego por definición de integral I.2.5. tendremos que:

$$D^{\alpha} f(z) = \frac{1}{(k+m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{k+m-1} \sum_{|\beta| = k+m} D^{\alpha+\beta}(f)(h(t))(z_1-y_1)^{b_1} \ldots (z_n-y_n)^{b_n} dt$$

aplicando ahora el teorema I.2.2., dada q seminorma continua en E, k entero positivo, si $z \in A_r$:

$$\rho_r^{-k} q(D^{\alpha} f(z)) \leq \frac{1}{(k+m-1)!} \sup_{t\in[0,1]} \sum_{|\beta|\leq k+m} \rho_r^{-k} q(D^{\alpha+\beta} f(t(y-z)+y))|z-y|^{k+m}$$

luego existe un t_o en $[0,1]$ con

$$\rho_r^{-k} q(D^{\alpha} f(z)) \leq \frac{(16\sqrt{n})^{m+k}}{(k+m-1)!} \sum_{|\beta|\leq k+m} \rho_r^{m} q(D^{\alpha+\beta}(f)(t_o(y-z)+y)) \quad (\Delta)$$

como por construcción $|z-y| < 16\sqrt{n}\,\rho_r$ por la proposición I.3.3 $[z,y] \subset E_r$, luego $v_o=t_o(y-z)+y$ está en E_r.

Consideremos ahora $\theta \in \mathcal{D}(P)$ una función escalar satisfaciendo $\theta(x) > 0$ para todo x de $\overset{o}{P}$ y $\theta(x)=1$ para todo x de M, siendo P y M los rectángulos de la partición de I.3. y φ_r la aplicación allí definida. Dado z de E_r existe un único x de M con $\varphi_r(x)=z$. Llamemos x_o al vértice inferior de P, es decir, a aquel cuyas coordenadas son todas $-\frac{6}{5}-\frac{128}{5}\sqrt{n}$ puesto que θ y sus derivadas parciales de cualquier orden se anulan en toda la frontera de P, aplicando la proposición I.2.3., tenemos que dado un multiíndice δ y z de E_r

$$D^{\delta} f(z)=\theta(x)D^{\delta} f(\varphi_r(x))-\theta(x_o)D^{\delta} f(\varphi_r(x_o))$$

$$D^{\delta} f(z)=\int_{-\frac{6}{5}-\frac{128}{5}\sqrt{n}}^{x_1} \cdots \int_{-\frac{6}{5}-\frac{128}{5}\sqrt{n}}^{x_n} D^{(1,\dots,1)}\left[\theta(y)D^{\delta} f(\varphi_r(y))\right]dy_n\dots dy_1$$

como $\left[-\frac{6}{5}-\frac{128}{5}n, x_i\right]$ es un compacto, aplicando la proposición I.2.2. reiteradamente para $i=1,2,\dots,n$ dada q seminorma continua en E, tendremos

$$q(D^{\alpha} f(z)) \leq \int_{-\frac{6}{5}-\frac{128}{5}\sqrt{n}}^{x_1} \cdots \int_{-\frac{6}{5}-\frac{128}{5}\sqrt{n}}^{x_n} q(D^{(1,\dots,1)}[\theta(y)D^{\delta} f(\varphi_r(y))]dy_n\dots dy_1$$

aplicando el teorema de Fubini y después el de Leibnitz obtendremos:

$$q(D^{\alpha} f(z)) \leq \int_P q(D^{(1,\dots,1)}[\theta(y)D^{\delta} f(\varphi_r(y))]\,dy \leq$$

$$\leq \sum_{\gamma+\eta=(1,\dots,1)} |c_{\gamma\eta}| \int_P q\left[(D^{\delta+\eta} f)(\varphi_r(y))(\tfrac{5}{8})^{|\eta|} \rho_r^{|\eta|}\right] |D^{\gamma}\theta(y)|\,dy \leq$$

$$\leq \sum_{\gamma+\eta=(1,\dots,1)} |c_{\gamma\eta}| \max_{\substack{y\in P\\ |\gamma|\leq n}} |D^{\gamma}\theta(y)| \int_P q\left[(D^{\delta+\eta} f)(\varphi_r(y))\right]dy=(*)$$

Si p=1 la comclusión se obtiene usando $P=\varphi_r^{-1}(F_r)$ y $J\varphi_r^{-1}=$

$= \rho_r^{-n}(\frac{8}{5})^n$ y aplicarlo a (Δ), si $p>1$, tomemos c de $\mathbb{R}^+$ con $1/c + 1/p = 1$, aplicando la desigualdad de Hölder:

$$(*) \leq \Big(\sum_{\gamma+\eta=(1,\dots,1)} (|c_{\gamma\eta}| \max_{\substack{|\eta|\leq n \\ y\in P}} |D^{\gamma}\Theta(y)|)^c\Big)^{1/c} \cdot$$

$$\cdot \Big(\sum_{\gamma+\eta=(1,\dots,1)} \Big(\int_P q\,[(D^{\delta+\eta}f)(\varphi_r(y))]\,dy\Big)^p\Big)^{1/p}$$

llamando N al primer factor que es constante obtendremos, volviendo a aplicar la desigualdad de Hölder para integrales

$$q(D^{\delta}f(z))^p \leq N^p\Big(\sum_{|\eta|\leq n}\Big[\Big(\int_P q(D^{\delta+\eta}f(\varphi_r(y)))^p dy\Big)\Big(\int_P dy\Big)^{p/c} \leq$$

$$\leq \Big[2\Big(\frac{6}{5}+\frac{128}{5}\sqrt{n}\Big)\rho_r^n\Big]^{p/c} N^p \sum_{|\eta|\leq n}\int_P q(D^{\delta+\eta}f(\varphi_r(y)))^p dy$$

como $P=\varphi_r^{-1}(F_r)$ y el jacobiano de la transformación es $J\varphi_r^{-1} = \rho_r^{-n}(8/5)^n$ obtendremos que para z_o en E_r:

$$q(D^{\delta}f(z_o))^p \leq (8/5)^{np}N^p\Big[2\Big(\frac{6}{5}+\frac{128}{5}\sqrt{n}\Big)\rho_r\Big]^{p/c} \cdot$$

$$\cdot \sum_{|\eta|\leq n}\rho_r^{-np}\int_{F_r} q(D^{\delta+\eta}f(z))^p dz \qquad (**)$$

aplicando la desigualdad $(**)$ a (Δ) y usando la desigualdad de Hölder obtendremos:

$$z_o\in A_r \quad (\rho_r^{-k}q(D^{\alpha}f(z_o)))^p \leq \frac{(16\sqrt{n})^{(m+k)p}}{((k+m-1)!)^p}\Big(\sum_{|\beta|\leq k+m} 1\Big)^{p/c} \cdot$$

$$\cdot \sum_{|\beta|\leq k+m}(\rho_r^{mp}q(D^{\alpha+\beta}f(v_o))^p \leq \Big(\frac{(16\sqrt{n})^{m+k}}{(m+k-1)!}\Big)^p (k+m)^{np/c} \cdot$$

$$\cdot \sum_{|\beta|\leq k+m}\Big(\frac{8}{5}\Big)^{np}N^p\Big(2\Big(\frac{6}{5}+\frac{128}{5}\sqrt{n}\Big)\rho_r^n\Big)^{p/c}\sum_{|\eta|\leq n}\rho_r^{(m-n)p}\int_{F_r} q(D^{\alpha+\beta+\eta}f(z))dz$$

tomando

$$U=\Big(\frac{(16\sqrt{n})^{m+k}}{(m+k-1)!}\Big)^p(k+m)^{np/c}\sum_{|\beta|\leq k+m}\Big(\frac{8}{5}\Big)^{np}N^p\Big(2\Big(\frac{6}{5}+\frac{128}{5}\sqrt{n}\Big)\Big)^{p/c}$$

obtendremos la conclusión.

PROPOSICION 2. Dado s de $\mathbb{N}$, existe un h de $\mathbb{N}$ y una constante U positiva verificando que para todo z de A_r, f de $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega,E)$, q seminorma continua en E y α un multiíndice, se cumple:

$$(2) \qquad \rho_r^{-s}q(D^{\alpha}f(z))^p \leq U\sum_{|\mu|\leq h+n}\rho_r\int_{F_r} q(D^{\alpha+\mu}f(y))^p dy$$

Si Ω no es todo $\mathbb{R}^n$ llamando $R_1=\{r\in\mathbb{N}\ /\rho_r=1/2\}$ y procediendo como antes tendremos que

$$\sum_{r\in R_1}(\tfrac{1}{2})^{-s}\int_{A_r} q(D^{\alpha}f(z))^p dz \leqslant 4^n(\tfrac{1}{2})^{-s}\int_{\Omega} q(D^{\alpha}f(z))^p dz$$

Sea ahora h_1 el menor entero positivo mayor que 1 cumpliendo que $1/2^{h_1}$ es la arista de un cierto B_r. Sea $R_2=\{r\in\mathbb{N}\ /\ \rho_r=1/2^{h_1}\}$ no vacío. Definamos $g_2:\mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}^+$ como

$$g_2(z)=\sum_{r\in R_2}\rho_r U(\tfrac{8}{5})^n\sum_{|\mu|\leqslant h+n} q(D^{\alpha+\mu}f(z))^p\chi_{F_r}(z)$$

siendo U positivo y h los obtenidos en (2)' para el s dado. Como hay a lo más $(34n)^n$ cubos F_r que se corten, tendremos que $g_2(z)$ es una función medible y satisface

$$|g_2(z)|=g_2(z)\leqslant \rho_r U(\tfrac{8}{5})^n(34n)^n\sum_{|\mu|\leqslant h+n} q(D^{\alpha+\mu}f(z))^p \qquad \forall\ z\in\mathbb{R}^n$$

razonando como en g_o llegaremos a que g_2 está en $L^1(\mathbb{R}^n)$ y:

$$\sum_{r\in R_2}\rho_r U(\tfrac{8}{5})^n\sum_{|\mu|\leqslant h+n}\int_{F_r} q(D^{\alpha+\mu}f(z))^p dz \leqslant$$

$$(\tfrac{8}{5})^n(34n)^n U\rho_r\sum_{|\mu|\leqslant h+n}\int_{\Omega} q(D^{\alpha+\mu}f(y))^p dy$$

por inducción supongamos construidos hasta h_i naturales, sea h_{i+1} el menor natural mayor que h_i cumpliendo que $\frac{1}{2^{h_i+1}}$ es la arista de un cierto B_r.

Sea $R_i=\{r\in\mathbb{N}\ /\ \rho_r=1/2^{h_i}\leqslant(1/2^{i-1})(1/2^{h_1})\}$ no vacío para i=1,2,... construida como en el caso primero la función g_i, llegaremos a

$$\sum_{r\in R_i}\rho_r U(\tfrac{8}{5})^n\sum_{|\mu|\leqslant h+n}\int_{F_r} q(D^{\alpha+\mu}f(z))^p dz \leqslant$$

$$(\tfrac{8}{5})^n(34n)^n U\frac{1}{2^{h_i}}\sum_{|\mu|\leqslant h+n}\int_{\Omega} q(D^{\alpha+\mu}f(y))^p dy$$

aplicando la proposición 2.(2)', como $\rho_r<1$, tendremos que existe

$$\sum_{r\in R_i}\rho_r^{-s}\int_{A_r} q(D^{\alpha}f(z))^p dz \leqslant (\tfrac{8}{5}34n)^n\frac{U}{2^{h_i}}\sum_{|\mu|\leqslant h+n}\int_{\Omega} q(D^{\alpha+\mu}f(y))^p dy <+\infty$$

$$(2)' \qquad \rho_r^{-s}\int_{A_r} q(D^{\alpha}f(z))^p \leq U \sum_{|\mu|\leq h+n} \rho_r^{n+1}\left(\frac{8}{5}\right)^n \int_{F_r} q(D^{\alpha+\mu}f(y))^p dy$$

Demostración: dado s natural, existirá un k natural verificando $kp > s$, y existe m natural con $(m-n)p > 1$, para obtener (2) basta aplicar ahora la proposición 1 llamando $h=k+m$.

(2)' es consecuencia de (2) porque existe z_o en $\bar{A}_r$ con:

$$\rho_r^{-s}\int_{A_r} q(D^{\alpha}f(z))^p dz = \rho_r^{-s}\left(\frac{8}{5}\right)^n \rho_r^n q(D^{\alpha}f(z_o))^p$$

PROPOSICION 3. Dada f de $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega,E)$, α multiíndice y s entero positivo y q seminorma continua en E, entonces:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-s}\int_{A_r} q(D^{\alpha}f(z))^p dz < +\infty$$

Demostración: llamemos $R_o = \{r \in \mathbb{N} \ / \ \rho_r = 1\}$, supongamos que R_o es no vacío, definimos la función $g_o : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ como:

$$g_o(z) = \sum_{r\in R_o} q(D^{\alpha}f(z))^p \chi_{A_r}(z) = q(D^{\alpha}f(z))^p \sum_{r \ R_o} \chi_{A_r}(z)$$

es una función medible puesto que cada A_r corta como máximo a 4^n cubos de la partición, y por lo tanto

$$g_o(z) = |g_o(z)| \leq 4^n q(D^{\alpha}f(z))^p \qquad \forall\, z \in \mathbb{R}^n$$

y $q(D^{\alpha}f(z))^p$ está en $L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces (A. Weir (28) pag.109) $g_o(z)$ está en $L^1(\mathbb{R}^n)$, cumpliendo además:

$$\int g_o(z) \leq 4^n \int_{\mathbb{R}^n} q(D^{\alpha}f(z))^p dz = 4^n \int_{\Omega} q(D^{\alpha}f(z))^p dz$$

aplicando ahora el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue tendremos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_o(z) = \sum_{r\in R_o} \rho_r^{-s}\int_{\mathbb{R}^n} q(D^{\alpha}f(z))^p \chi_{A_r}(z)dz = \sum_{r\in R_o}\int_{A_r} q(D^{\alpha}f(z))^p dz \leq$$

$$\leq 4^n \int_{\Omega} q(D^{\alpha}f(z))^p dz$$

obsérvese que ρ_r vale 1 para todo r de R_o.

Si Ω es todo $\mathbb{R}^n$ tendremos que R_o es $\mathbb{N}$ y la proposición está probada.

luego usando que $\frac{1}{2^{h_i}} \lesssim \frac{1}{2^{h_1}} \cdot \frac{1}{2^{i-1}}$ tendremos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{r \in R_i} \rho_r^{-s} \int_{A_r} q(D^{\alpha} f(z))^p dz \leqslant 4^n(1+1/2^s) \int_{\Omega} q(D^{\alpha} f(z))^p dz +$$

$$+ (34n)^n (\tfrac{8}{5})^n U \frac{1}{2^{h_1}} (\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}}) \sum_{|\mu| \leqslant h+n} \int_{\Omega} q(D^{\alpha+\mu} f(z))^p dz$$

por ser una serie de têrminos positivos, por el teorema de Riemann tendremos que dado un natural s existe un nûmero positivo V y un entero positivo h con

$$\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-s} \int_{A_r} q(D^{\alpha} f(z))^p dz \leqslant V \sum_{|\mu| \leqslant h+n} \int_{\Omega} q(D^{\alpha+\mu} f(z))^p dz$$

para toda f de $\mathcal{D}_L p(\Omega, E)$ y toda q seminorma continua en E.

PROPOSICION 4. Dado s entero positivo, existe V positivo y h entero positivo cumpliendo que para cualquier α multiîndice, q seminorma continua en E y f de $\mathcal{D}_L p(\Omega, E)$ se verifica que

$$\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-s} \max_{z \in A_r} q(D^{\alpha} f(z))^p \leqslant V \sum_{|\mu| \leqslant h+n} \int_{\Omega} q(D^{\alpha+\mu} f(y))^p dy < +\infty$$

Demostraciôn: igual que la proposiciôn 3, aplicando la proposiciôn 2.(2) en lugar de la 2.(2)'.

TEOREMA 1. El espacio $\mathcal{D}_L p(\Omega, E)$ es un subespacio del espacio $\mathcal{B}_o(\Omega, E)$.

Demostraciôn: es consecuencia deirecta de la proposiciôn 4, dado $\varepsilon > 0$, tomado s=0, f de $\mathcal{D}_L p(\Omega, E)$, existirâ un r_o tal que si r es mayor o igual que r_o entonces $\max_{z \in A_r} q(D^{\alpha} f(z))^p < \varepsilon^p$ para una seminorma continua q en E y un multiîndice α dado, luego $z \notin \bigcup_{r=1}^{r_o} A_r$, tendremos que $q(D^{\alpha} f(z)) < \varepsilon$

PROPOSICION 5. Dada g de $\mathcal{D}_L p(\Omega, E)$ entonces $g(z) D^{\gamma} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}(z)$ estâ en $\mathcal{D}_L p(\Omega, E)$, siendo φ y φ_j las aplicaciones que se usan en I.3 para definir la particiôn de la unidad de Ω.

Demostración: de hecho escribir $g(z)D^{\gamma}\sum_{j=1}^{\infty} \varphi\circ\varphi_j^{-1}(z)$ supone hablar de una función definida sólo en Ω, pero en (4) de Bonet y el autor se prueba que si g está en $\mathcal{B}_0(\Omega,E)$ entonces $g(z)D^{\gamma} \varphi\circ\varphi_j^{-1}(z)$ lo está también y por lo tanto se puede extender a una función de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n,E)$ tomando el valor 0 en $\mathbb{R}^n\sim\Omega$.

Obsérvese que $g(z)D^{\gamma}\sum_{j=1}^{\infty} \varphi\circ\varphi_j^{-1}(z)=$ $=g(z)\sum_{j=1}^{\infty} D^{\gamma}(\varphi\circ\varphi_j^{-1})(z)$, para todo z de Ω y si z no está en Ω entonces $g(z)\sum_{j=1}^{\infty} D^{\gamma}(\varphi\circ\varphi_j^{-1})(z)=0$ puesto que ambos factores valen 0, por lo tanto se puede escribir de ambas formas sin temor a confusión.

Para probar que $g(z)D^{\gamma}\sum_{j=1}^{\infty} \varphi\circ\varphi_j^{-1}(z)$ está en $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega,E)$ bastará por lo tanto probar que para cada q seminorma continua en E se tiene que $q(g(z)\sum_{j=1}^{\infty} D^{\gamma}(\varphi\circ\varphi_j^{-1})(z))$ está en $L^p(\Omega)$.

Consideremos r entero positivo, sea $L_r=\{j\in\mathbb{N} / / A_r\cap A_j\neq\emptyset\}$. Sabemos por I.3 que el cardinal de L_r es menor o igual que 4^n, luego dado el cubo A_r existe $\int_{A_r} q(g(z)D^{\gamma}(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi\circ\varphi_j^{-1}(z))^p dz$ y además aplicando el teorema de Minkowski para integrales:

$$\left(\int_{A_r} q(g(z)D^{\gamma}(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi\circ\varphi_j^{-1}(z))^p dz\right)^{1/p}=$$

$$=\left(\int_{A_r} q(g(z)\sum_{j\in L_r} D^{\gamma}(\varphi\circ\varphi_j^{-1})(z))^p dz\right)^{1/p}=$$

$$= \left(\int_{A_r} \left[q(g(z)(\tfrac{8}{5})^{|\gamma|}\sum_{j\in L_r} \rho_r^{-|\gamma|}(D^{\gamma}\varphi)(\varphi_j^{-1}(z))\right]^p dz\right)^{1/p}\leq$$

$$\leq \sum_{j\in L_r}\left(\int_{A_r} q(g(z))^p \rho_j^{-|\gamma|p} |(D^{\gamma}\varphi)(\varphi_j^{-1}(z))|^p dz\right)^{1/p}(\tfrac{8}{5})^{|\gamma|}\leq$$

aplicando que $(D^{\gamma}\varphi)(\varphi_j^{-1}(z))=0$ si $z\notin A_j$ tendremos:

$$\leq \sum_{j\in L_r}\left(\int_{A_j} q(g(z))^p \rho_j^{-|\gamma|.p} |(D^{\gamma}\varphi)(\varphi_j^{-1}(z))|^p dz\right)^{1/p}(\tfrac{8}{5})^{|\gamma|}\leq$$

$$\leq \sum_{j\in L_r} \left(\int_{A_j} q(g(z))^p \max_{x\in I} |D^\gamma \varphi(x)|^p dz\right)^{1/p} \rho_j^{-|\gamma|} \left(\frac{8}{5}\right)^{|\gamma|}.$$

aplicando ahora el teorema de Hölder para sucesiones tendremos, si $p>1$

$$\left[\int_{A_r} q(g(z)D^\gamma(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi\circ\varphi_j^{-1}(z)))^p dz\right]^{1/p} \leq \left[\sum_{j\in L_r} \rho_j^{-|\gamma|\cdot p}\int_{A_j} q(g(z))^p dz\right]^{1/p}\cdot$$

$$\cdot\left[\sum_{j\in L_r} \left(\max_{x\in I} |D^\gamma \varphi(x)| \left(\frac{8}{5}\right)^{|\gamma|}\right)^c\right]^{1/c}$$

siendo c un real positivo con $1/c+1/p=1$, luego

$$\int_{A_r} q(g(z)D^\gamma(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi\circ\varphi_j^{-1}(z)))^p dz \leq$$

$$\leq 4^{np/c}\max_{x\in I} |D^\gamma \varphi(x)|^p \left(\frac{8}{5}\right)^{|\gamma|\cdot p}\sum_{j\in L_r} \rho_j^{-|\gamma|p}\int_{A_j} q(g(z))^p dz$$

llamando T a la constante que aparece y dado s natural con $s>|\gamma|.p$, tendremos

$$\int_{B_r} q(g(z)D^\gamma(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi\circ\varphi_j^{-1}(z)))^p dz \leq \int_{A_r} q(g(z)D^\gamma(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi\circ\varphi_j^{-1}(z)))^p dz \leq$$

$$\leq T\sum_{j\in L_r} \rho_j^{-s}\int_{A_j} q((g(z))^p dz$$

sea ahora $h_\gamma(z)=q(g(z)D^\gamma(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi\circ\varphi_j^{-1}(z)))^p$, tomando $C_m=\bigcup_{r=1}^{m} B_r$

tendremos que $(h_\gamma.\chi_{C_m})_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente en $L^1(\mathbb{R}^n)$ que converge puntualmente en $\mathbb{R}^n$ a $h_\gamma(z)$ (considerada como 0 fuera de Ω), por otra parte

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_\gamma.\chi_{C_m} = \sum_{r=1}^{m}\int_{B_r} |h_\gamma|^p \leq 4^n T\sum_{j=1}^{\infty} \rho_j^{-s}\int_{A_j} q(g(z))^p dz < +\infty$$

esto es cierto para $m=1,2,\ldots$ luego por el teorema de la convergencia monótona de Lebesgue h está en $L^1(\mathbb{R}^n)$. La conclusión se obtiene ahora de repetir este proceso para $D^\alpha g(z)D^\gamma\sum_{j=1}^{\infty} \varphi\circ\varphi_j^{-1}(z)$ al variar α y γ en los multiíndices puesto que las sucesivas derivadas de $g\, D^\gamma\sum_{j=1}^{\infty} \varphi\circ\varphi_j^{-1}(z)$ son combinaciones lineales de las expresiones anteriores y si $g(z)$ está en $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega,E)$ trivialmente $D^\alpha g(z)$ lo está también.

PROPOSICION 6. Si f está en $\mathcal{D}_L p(\Omega,E)$ entonces la función

$$h(z)=f(z)\frac{1}{\sum_{j=1}^{\infty}\varphi\circ\varphi_j^{-1}(z)} \quad \text{si } z\in\Omega$$

$$h(z)=0 \quad \text{si } z\notin\Omega$$

está en $\mathcal{D}_L p(\Omega,E)$.

Demostración: como hemos probado que $\mathcal{D}_L p(\Omega,E)\subset\mathcal{B}_0(\Omega,E)$ y en (4) se prueba que $h\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^n,E)$ y h está en $\mathcal{B}_0(\Omega,E)$, bastará probar que para cada q seminorma continua en E y α multiíndice $q(D^{\alpha}h)^p$ está en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Por II.1,4. podemos asegurar que $h\in\mathcal{B}_1(\Omega,E)$.

Sabemos que $\left|\frac{1}{\sum_{j=1}^{\infty}\varphi\circ\varphi_j^{-1}(z)}\right|$ está acotada superiormente, luego existe b positivo con $q(h(z))\leq bq(f(z))$ para todo z de $\mathbb{R}^n$, luego $q(h)^p\in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Aplicando las reglas de derivación obtendremos que las derivadas sucesivas son combinaciones lineales de expresiones del tipo

$$D^{\alpha}g(z)\ D^{\gamma}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi\circ\varphi_j^{-1}(z)\ldots D^{\mu}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi\circ\varphi_j^{-1}(z)$$

en el numerador, que son elementos de $\mathcal{D}_L p(\Omega,E)$ aplicando reiteradamente la proposición anterior, y en el denominador aparecerá $\sum_{j=1}^{\infty}\varphi\circ\varphi_j^{-1}(z)$ elevada a una potencia positiva, por lo tanto estará acotado el denominador por un número positivo, luego para todo β multiíndice tendremos que $q(D^{\beta}h)^p$ está en $L^1(\mathbb{R}^n)$ para toda seminorma continua en E.

PROPOSICION 7. Dado γ multiíndice, existe un entero positivo h y una constante N positiva satisfaciendo que

$$\max_{\substack{|\beta|\leq|\gamma|\\ z\in A_r}}\left|D^{\beta}\Big[\sum_{j=1}^{\infty}\varphi\circ\varphi_j^{-1}\Big]^{-1}(z)\right|\leq\rho_r^{-h}N \qquad r=1,2,\ldots$$

Demostración: dado r natural, sea $L_r=\{s\in\mathbb{N}\ /\ A_r\cap A_s\neq\emptyset\}$

si z está en A_r tendremos que

$$\left|D^{\gamma}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi\circ\varphi_j^{-1}(z)\right|=\left|\sum_{j\in L_r}D^{\gamma}(\varphi\circ\varphi_j^{-1}(z)\right|\leq$$

$$\leq\sum_{j\in L_r}\left|(D^{\gamma}\varphi)(\varphi_j^{-1}(z))\,\rho_j^{-|\gamma|}\left(\frac{8}{5}\right)^{|\gamma|}\right|\leq\sum_{j\in L_r}\max_{x\in I}\left|D^{\gamma}\varphi(x)\right|\rho_j^{-|\gamma|}\left(\frac{8}{5}\right)^{|\gamma|}$$

si $A_r \cap A_s \neq \emptyset$ entonces $\rho_s \geqslant \frac{1}{2}\rho_r$, y $\mathrm{card}(L_r) \leqslant 4^n$, tendremos

$$\max_{z\in A_r} \left| D^\gamma \sum_{j=1}^{\infty} \varphi\circ\varphi_j^{-1}(z)\right| \leqslant 4^n \max_{x\in I}|D^\gamma \varphi(x)|\ 2^{|\gamma|}\cdot\left(\frac{8}{5}\right)^{|\gamma|}\cdot \rho_r^{-|\gamma|}$$

como dado z de Ω, $D^\gamma \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{\infty} \varphi\circ\varphi_j^{-1}(z)}$ es una combinación lineal de productos de expresiones del tipo $D^\beta(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi\circ\varphi_j^{-1})(z)$ en el numerador, y en el denominador $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi\circ\varphi_j^{-1}(z)$ elevado a una potencia entera positiva y por lo tanto acotado inferiormente, tendremos que existe N positivo y h entero positivo cumpliendo que

$$\max_{\substack{z\in A_r\\ |\beta|\leqslant|\gamma|}} \left| D^\beta\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^{\infty}\varphi\circ\varphi_j^{-1}}\right)(z)\right| \leqslant \rho_r^{-h} N \qquad r=1,2,\ldots$$

Consideremos ahora los espacios $\lambda_p(E)$ definidos en el capítulo I para el caso en que la sucesión $(\rho_r)_{r=1}^{\infty}$ sea la sucesión de aristas de la partición de la unidad de Ω definida en I.3.

Recordemos que por I entendemos el cubo $[-1,1]^n$ de $\mathbb{R}^n$, y tomaremos E un espacio.

PROPOSICION 8. Considerada la sucesión $(f_r)_{r=1}^{\infty}$ con f_r en $\mathcal{D}(I,E)$ $r=1,2,\ldots$, entonces $(f_r)_{r=1}^{\infty}$ está en $\lambda_p(\mathcal{D}(I,E))$ si y sólo si $(\rho_r^{-k}\int_I q(D^\alpha f_r(x))^p dx)$ está en l^1 para cada k entero positivo, α multiíndice y q seminorma continua en E.

Demostración: considerada $(f_r)_{r=1}^{\infty}$ de $\lambda_p(\mathcal{D}(I,E))$, α multiíndice, q seminorma continua en E y k entero positivo, tendremos:

$$\int_I q(D^\alpha f_r(x))^p dx \leqslant \sup_{x\in I} q(D^\alpha f_r(x))^p \int_{\mathbb{R}^n} \chi_I = 2^n \sup_{x\, I} q(D^\alpha f_r(x))^p$$

luego

$$\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-k}\int_I q(D^\alpha f_r(x))^p dx \leqslant 2^n \sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-k} \sup_{x\in I} q(D^\alpha f_r(x))^p < +\infty$$

Reciprocamente, tomado $a=(-1,-1,\dots,-1)$ de $\mathbb{R}^n$, multiíndice, y $\beta = \alpha + (1,1,\dots,1)$, como en cualquier punto de la frontera de I todas las derivadas de f_r se anulan, $r=1,2,\dots$,tendremos que si x está en I, por I.2.3.

$$D^\alpha f_r(x)=D^\alpha f_r(x)-D^\alpha f_r(a)=\int_{-1}^{x_1}\int_{-1}^{x_2}\dots\int_{-1}^{x_n} D^\beta f_r(y)dy_n\dots dy_1$$

obtendremos aplicando n veces la proposición I.2.2. y luego la desigualdad de Hölder si $p>1$:

$$q(D^\alpha f_r(x)) \leq \int_I q(D^\beta f_r(y))dy \leq \left(\int_I dy\right)^{1/c}\left(\int_I q(D^\beta f_r(y))^p dy\right)^{1/p}$$

luego:

$$q(D^\alpha f_r(y))^p \leq 2^{np/c}\int_I q(D^\beta f_r(y))^p dy$$

siendo c un número real positivo con $1/c+1/p=1$. Si $p=1$ la desigualdad evidentemente es válida, luego:

$$\sup_{x\in I} \rho_r^{-k} q(D^\alpha f_r(x))^p \leq 2^{np/c}\int_I q(D^\beta f_r(y))^p dy \qquad p>1$$

$$\sup_{x\in I} \rho_r^{-k} q(D^\alpha f_r(x)) \leq \int_I q(D^\beta f_r(y))dy \qquad p=1$$

por lo tanto, tomando simbólicamente $c=+\infty$ y $2^{n/\infty}=1$ si $p=1$, tendremos

$$\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-k} \sup_{x\, I} q(D^\alpha f_r(x))^p \leq 2^{np/c}\sum_{r=1}^{\infty}\rho_r^{-k}\int_I q(D^\beta f_r(y))^p dy$$

Sabemos que en $\lambda_p(\mathcal{D}(I,E))$ un sistema fundamental de seminormas es

$$Q(m,k,q)(f_r)= \max_{|\alpha|\leq m}\left(\sum_{r=1}^{\infty}\rho_r^{-k}\sup_{x\in I} q(D^\alpha f_r(x))^p\right)^{1/p}$$

al variar m y k en los enteros positivos y q en las seminormas continuas de E, por la proposición anterior:

$$Q(m,k,q)(f_r)= \max_{|\alpha|\leq m}\left(\sum_{r=1}^{\infty}\rho_r^{-k}\int_I q(D^\alpha f_r(x))^p dx\right)^{1/p}$$

es también un sistema fundamental de seminormas en $\lambda_p(\mathcal{D}(I,E))$

Consideremos ahora $(\varphi_r)_{r=1}$ las funciones asociadas a la partición de la unidad de Ω definida en I.3.

PROPOSICION 9. La aplicación $V: \lambda_p(\mathcal{D}(I,E)) \longrightarrow \mathcal{D}_{L^p}(\Omega,E)$

definida como $V((f_r))=\sum_{r=1}^{\infty} f_r \circ \varphi_r^{-1}$ es lineal y continua.

Demostración: veamos que V está bien definida. Observemos que si z no está en Ω, $f_r \circ \varphi_r^{-1}(z)=0$, luego $V((f_r))(z)=0$, si probamos que la restricción de $V((f_r))$ a Ω es un elemento de $\mathcal{B}_0(\Omega,E)$, como sabemos II.1.1 que si h está en $\mathcal{B}_0(\Omega,E)$ la función $\hat{h}:\mathbb{R}^n \longrightarrow E$ definida como $\hat{h}(z)=h(z)$ si $z\in\Omega$, $\hat{h}(z)=0$ si $z\notin\Omega$, verifica que $\hat{h}\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^n,E)$, tendremos en este caso que $V((f_r))$ está en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n,E)$. Dado $\varepsilon>0$ y z en Ω, α multiíndice, tendremos que $V((f_r))$ está en $\mathcal{E}(\Omega,E)$ y

$$D^\alpha V((f_r))(z)=\sum_{r=1}^{\infty} D^\alpha(f_r\circ\varphi_r^{-1})(z)=\sum_{r\in L_z} D^\alpha(f_r\circ\varphi_r^{-1})(z)$$

y dada q seminorma continua en E, siendo $L_z=\{r\in\mathbb{N} \,/\, A_r\cap A_s\neq\emptyset$ con $z\in A_s\}$, como L_z tiene como máximo 4^n elementos, tendremos, tomado c tal que $1/c+1/p=1$, si p 1

$$(D^\alpha V((f_r))(z))^p\leq \sum_{r\in L_z} q(D^\alpha(f_r\circ\varphi_r^{-1})(z)) \leq (\sum_{r\in L_z} 1)^{p/c}\cdot$$

$$\cdot(\sum_{r\in L_z} q(D^\alpha(f_r\circ\varphi_r^{-1})(z)^p)$$

luego

$$(D^\alpha V((f_r))(z))^p\leq 4^{np/c}\sum_{r\in L_z} q(D^\alpha(f_r\circ\varphi_r^{-1})^p(z)\leq$$

$$\leq 4^{np/c}(\tfrac{8}{5})^{|\alpha|.p}\sum_{r\in L_z}\rho_r^{-|\alpha|.p}\max_{x\in I} q(D^\alpha f_r(x))^p$$

Sea k entero positivo con $|\alpha|.p<k$, por definición de $\lambda_p(\mathcal{D}(I,E))$, existe $\sum_{r\in L_z}\rho_r^{-|\alpha|p}\max_{x\in I} q(D^\alpha f_r(x))^p<+\infty$

luego existe r_0 tal que si $r\geq r_0$, la suma se hace menor que $(\frac{8}{5})^{-|\alpha|.p}\,4^{-np/c}\cdot\varepsilon^p$, tomado $K=\bigcup\{A_s \,/\, A_s\cap A_r\neq\emptyset \quad r=1,2,\ldots r_0\}$ es compacto y si z no está en K entonces trivialmente:

$$q(D^\alpha V((f_r))(z))^p\leq\varepsilon^p$$

luego $V((f_r))$ está en $\mathcal{B}_0(\Omega,E)$. Veamos ahora que $V((f_r))$ está en $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega,E)$, tendremos que tomado s entero positivo y el B_s de la partición de Ω

$$\left(\int_{B_s} q(D^{\alpha}V(f_r)(z))^p dz\right)^{1/p} \leq \left(\int_{B_s} \left(\sum_{r\in L_s} q(D^{\alpha}(f_r\circ\varphi_r^{-1})(z))\right)^p dz\right)^{1/p} \leq$$

$$\sum_{r\in L_s} \left(\int_{B_s} q(D^{\alpha}(f_r\circ\varphi_r^{-1})(z))^p dz\right)^{1/p} \leq$$

$$\sum_{r\in L_s} \left(\int_{A_r=\varphi_r(I)} q(D^{\alpha}(f_r\circ\varphi_r^{-1})(z))^p dz\right)^{1/p} =$$

$$=\sum_{r\in L_s} \left[\left(\frac{8}{5}\right)^{|\alpha|.p} \rho_r^{-|\alpha|.p} \int_{A_r} (q(D^{\alpha}f_r)(\varphi_r^{-1}(z)))^p dz\right]^{1/p} =$$

$$=\sum_{r\in L_s} \left(\frac{8}{5}\right)^{|\alpha|} \rho_r^{-|\alpha|} \left(\int_I q(D^{\alpha}f_r(x))^p \left(\frac{8}{5}\right)^n \rho_r^n \, dx\right)^{1/p}$$

luego

$$\left(\int_{B_s} q(D^{\alpha}V(f_r)(z))^p dz\right)^{1/p} \leq \sum_{r\in L_s} \left(\frac{8}{5}\right)^{|\alpha|} \rho_r^{-|\alpha|} \left(\int_I q(D^{\alpha}f_r(x))^p dx\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \sum_{r\in L_s} \left(\frac{8}{5}\right)^{|\alpha|} \rho_r^{-|\alpha|} \sup_{x\in I} q(D^{\alpha}f_r(x))\, 2^{n/p}$$

aplicando la desigualdad de Hölder para sucesiones, obtendremos entonces, si $p > 1$:

$$\left(\int_{B_s} q(D^{\alpha}V(f_r)(z))^p dz\right)^{1/p} \leq 2^{n/p}\left(\frac{8}{5}\right)^{|\alpha|} \left(\sum_{r\in L_s} 1\right)^{1/c} \cdot$$

$$\cdot\left(\sum_{r\in L_s} \rho_r^{-|\alpha| p} \sup_{x\in I} q(D^{\alpha}f_r(x))^p\right)^{1/p}$$

tomado ahora k entero positivo con $|\alpha| p < k$, tendremos:

$$\int_{B_s} q(D^{\alpha}V(f_r)(z))^p dz \leq 2^n\left(\frac{8}{5}\right)^{|\alpha|.p} (4^n)^{p/c} \sum_{r\in L_s} \rho_r^{-k} \sup_{r\in L_s} q(D^{\alpha}f_r(x))^p$$

Llamemos $M= 2^n(\frac{8}{5})^{|\alpha| p}(4^n)^{p/c}$, es una constante que sólo depende de α , luego tomado $C_m = \bigcup_{s=1}^{m} B_s$ tendremos que

$(q(D^{\alpha}V(f_r))^p . \chi_{C_m})_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de funciones en $L^1(\mathbb{R}^n)$ que converge puntualmente a $q(D^{\alpha}V(f_r))^p$, por ctra parte:

$$\int_{\mathbb{R}^n} q(D^\alpha V(f_r))^p \chi_{C_m} \leq \sum_{s=1}^{m} \int_{B_s} q(D^\alpha V(f_r)(z))^p dz \leq$$

$$M \sum_{s=1}^{m} \sum_{r\in L_s} \rho_r^{-k} \sup_{x\in I} q(D^\alpha f_r(x))^p$$

como cada B_s es cortado a lo más por 4^n A_r tendremos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} q(D^\alpha V(f_r))^p \chi_{C_m} \leq 4^n M \sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-k} \sup_{x\in I} q(D^\alpha f_r(x))^p \leq$$

$$4^n M \; Q^p(k, |\alpha|, q)((f_s)_{s=1}^{\infty})$$

luego por el teorema de la convergencia monótona de Lebesgue tendremos que $q(D^\alpha V(f_r))^p$ está en $L^1(\mathbb{R}^n)$ y

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} q(D^\alpha V(f_r))^p dz\right)^{1/p} \leq 4^{n/p} M^{1/p} Q(k, |\alpha|, q)((f_s)_{s=1}^{\infty})$$

por lo tanto V está bien definida y es continua.

Consideremos ahora $(\mu_r)_{r=1}^{\infty}$ la partición de la unidad de Ω definida en I.3.

$$\mu_r(z) = \frac{\varphi\circ\varphi_r^{-1}(z)}{\sum_{j=1}^{\infty} \varphi\circ\varphi_r^{-1}(z)} = g(z).\varphi\circ\varphi_r^{-1}(z)$$

entonces dada f de $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega,E)$ tendremos que $(f.\mu_r)\circ\varphi_r$ está en $\mathcal{D}(I,E)$ y además

$$(f.\mu_r)\circ\varphi_r(x) = f(\varphi_r(x)).\mu_r(\varphi_r(x)) = f(\varphi_r(x))g(\varphi_r(x)).$$
$$.\varphi(x) = [(f.g\circ\varphi_r).\varphi](x) .$$

PROPOSICION 10. La aplicación S definida de $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega,E)$ en $\lambda^p(\mathcal{D}(I,E))$ comc
$$S(f) = ((f.\mu_r)\circ\varphi_r)_{r=1}^{\infty}$$
es lineal y continua.

Demostración: está bien definida porque

$$\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-s} \sup_{x\in I}\{q((fg)\circ\varphi_r)^p(x)\,\varphi^p(x)\}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-s} \max_{z\in A_r}\{q(fg(z))^p\} \max_{x\in I}\{\varphi^p(x)\} < +\infty$$

para cada s entero positivo y q seminorma continua en E, por las proposiciones 6 y 4.

Análogamente, dado α multiíndice no nulo y aplicando la fórmula de Leibnitz obtendremos:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-s} \sup_{x\in I} q(D^{\alpha}[(fg\circ\varphi_r).\varphi(x)])^p =$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-s} \sup_{x\in I} q(\sum_{\delta+\eta=\alpha} c_{\delta\eta} (\tfrac{5}{8})^{|\delta|} \rho_r^{|\delta|} D^{\delta}(fg)(\varphi_r(x)) D^{\eta}\varphi(x))^p \leq$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-s} (\sum_{\delta+\eta=\alpha} c_{\delta\eta} \sup_{z\in A_r} q(D^{\delta}(fg)(z))^p)\ |\alpha|^{p/c} \max_{\substack{x\in I\\ |\eta|\leq|\alpha|}} |D^{\eta}\varphi(x)|^p < +\infty$$

esta última desigualdad se obtiene aplicando la desigualdad de Hölder y siendo c un número real con $1/c + 1/p = 1$, en el caso en que p=1, indicamos $|\alpha|^{\frac{1}{\infty}}=1$. Así S está bien definida, por otra parte por la fórmula de Leibnitz

$$\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-s} \int_I q(D^{\alpha}[(fg)(\varphi_r(x))\ \varphi(x)])^p dx =$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-s} \int_I q(\sum_{\delta+\eta=\alpha} c_{\delta\eta} D^{\delta}[(fg)\circ\varphi_r(x)]\ D^{\eta}\varphi(x))^p dx^{(1/p)p} \leq$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-s} \max_{\substack{x\in I\\ |\eta|\leq|\alpha|}} |D^{\eta}\varphi(x)|^p \Big[\sum_{\delta+\eta=\alpha} (\int_I |c_{\delta\eta}|^p q(D^{\delta}[(fg)\circ\varphi_r(x)])^p dx)^{1/p}\Big]^p \leq$$

esto último usando la desigualdad triangular en $L^p(I)$, calculando y cambiando de variable obtendremos

$$\leq \sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-s} \max_{\substack{x\in I\\ |\eta|\leq|\alpha|}} |D^{\eta}\varphi(x)|^p \Big[\sum_{\delta+\eta=\alpha} (\int_{A_r} |c_{\delta\eta}|^p \rho_r^{|\delta|p-n} (\tfrac{8}{5})^n .$$

$$.q(D^{\delta}(fg)(z))^p dz)^{1/p}\Big]^p = (++)$$

llamando $M_1 = \max\{|D^{\eta}\varphi(x)|^p (\frac{8}{5})^n \quad |\eta|\leq|\alpha|,\ x\in I\}$ y tomando si $p>1$, c real con $1/c+1/p = 1$, tendremos aplicando la desigualdad de Hölder para sucesiones

$$(++)\leq \sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-s-n} M_1 (\sum_{\delta+\eta=\alpha} |c_{\delta\eta}|^c)^{p/c}.$$

$$.(\sum_{\delta+\eta=\alpha} (\int_{A_r} q(D^{\alpha} fg(z))^p dz)^{p/p})^{p/p}$$

luego existe M_2 positiva que no depende mas que del multiíndice α y de p con:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-s}\left(\int_I q(D^{\alpha}[(fg)(\varphi_r(x)).\varphi(x)])^p dx \leq\right.$$

$$M_2 \sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-s-n} \sum_{\delta+\eta=\alpha} \int_{A_r} q(D^{\delta}(fg))^p dz$$

si p=1 entonces $M_2 = M_1 \max\{|c_{\delta\eta}| : \alpha+\eta=\alpha\}$. Por lo tanto por la proposición 7 y aplicando otra vez la fórmula de Leibnitz encontraríamos que existe un entero positivo h y N positivo que sólo dependen de α cumpliendo

$$Q(m,k,q)(S(f)) \leq \max_{|\alpha|\leq m} \left\{\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-s-n-h} M_2 N. \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{\delta+\eta=\alpha} \sum_{|\beta|\leq\delta} \int_{A_r} q(D^{\beta}f(z))^p dz\right\}^{1/p}$$

de donde se deduce la continuidad de S.

PROPOSICION 11. $\mathcal{D}_L p(\Omega,E)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\lambda_p(\mathcal{D}(I,E))$ con $1 \leq p < +\infty$.

Demostración: consideremos $V \circ S: \mathcal{D}_L p(\Omega,E) \longrightarrow \mathcal{D}_L p(\Omega,E)$ lineal y continua y

$$V \circ S(f) = V((f.\mu_r)\circ\varphi_r)_{r=1}^{\infty}) = \sum_{r=1}^{\infty} (f.\mu_r)\circ\varphi_r\circ\varphi_r^{-1} =$$

$$= f\sum_{r=1}^{\infty}\mu_r = f$$

ya que si z no está en Ω entonces f(z)=0, luego $V\circ S$ es la identidad sobre $\mathcal{D}_L p(\Omega,E)$, entonces por el teorema I.2.8. $S\circ V$ es una proyección continua de $\lambda_p(\mathcal{D}(I,E))$ en $\lambda_p(\mathcal{D}(I,E))$ cuya imagen es isomorfa topológicamente a $\mathcal{D}_L p(\Omega,E)$.

Consideremos ahora $J = \left[-\frac{4}{5},\frac{4}{5}\right]^n$ y el espacio $\lambda_p(\mathcal{E}^{\infty}(J,E))$ para $1 \leq p < +\infty$, y E un espacio.

Sea X operador de extensión lineal y continuo entre los espacios $\mathcal{E}(J,E)$ y $\mathcal{D}(I,E)$, Bonet(1)(3), definamos ahora $Y: \lambda_p(\mathcal{E}(J,E)) \dashrightarrow \lambda_p(\mathcal{D}(I,E))$ como $Y(f_r) = (Xf_r)$ para toda (f_r) de $\lambda_p(\mathcal{E}(J,E))$.

PROPOSICION 12. La aplicación Y entre el espacio $\lambda_p(\mathcal{E}(J,E))$ y el espacio $\lambda_p(\mathcal{D}(I,E))$ es lineal y continua.

Demostración: como X es continua, dado α multiíndice y q seminorma continua en E, existirá un m entero positivo y q' otra seminorma continua en E y M constante positiva satisfaciendo:

$$\sup\{q(D^{\alpha}X(f)) : x\in I\} \leq M \sup\{q'(D^{\beta}f(x)) : |\beta|\leq m,\ x\in J\}$$

para toda f de $\mathcal{E}(J,E)$, entonces Y está bien definida y es continua ya que si (f_r) está en $\lambda_p(\mathcal{E}(J,E))$

$$\left(\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-k}\sup_{x\in I} q(D^{\alpha}X(f_r))^p\right)^{1/p} \leq M \sup_{|\beta|\leq m}\left(\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-k}\sup_{x\in J} q'(D^{\beta}f_r(x))^p\right)^{1/p}$$

esto es cierto para todo entero positivo k y todo multiíndice. Como $\sup_{x\in J} q(D^{\alpha}f(x)) \leq \sup_{x\in I} q(D^{\alpha}X(f)(x))$, para todo α multiíndice y q seminorma continua en E, obtendremos que la aplicación Y es abierta sobre la imagen, es decir, es un isomorfismo topológico sobre la imagen.

PROPOSICION 13. $\mathcal{D}_L p(\Omega,E)$ tiene un subespacio complementado isomorfo a $\lambda_p(S(E))$ si E es un espacio localmente completo.

Demostración: definimos la aplicación $Z:\mathcal{D}_L p(\Omega,E) \longrightarrow \lambda_p(\mathcal{E}(J,E))$ como $Z(f) = ((Zf)_r)_{r=1}^{\infty}$ con $(Zf)_r(x) = f\circ\varphi_r(x)$ para todo x de J. Este operador está bien definido, es trivialmente lineal y es continuo como consecuencia de la proposición 4, usando que dado s entero positivo, α multiíndice y q seminorma continua en E, como $\varphi_r(J) = C_r \subsetneq A_r$, tendremos que:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-s} \max_{x\in J} q(D^{\alpha}(f\circ\varphi_r)(x))^p = \sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-s}\max_{x\in J}\left(\frac{5}{8}\right)^{|\alpha|} \rho_r^{|\alpha|} q(D^{\alpha}f(\varphi_r(x)))^p \leq$$

$$\leq \sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-s} \max_{z\in A_r} q(D^{\alpha}f(z))^p$$

Consideremos ahora la aplicación $V:\lambda_p(\mathcal{D}(I,E)) \longrightarrow \mathcal{D}_L p(\Omega,E)$ de la proposición 9, y también la aplicación $Y: \lambda_p(\mathcal{E}(J,E)) \longrightarrow \lambda_p(\mathcal{D}(I,E))$ de la proposición 12. Tendremos $V\circ Y\circ Z:\mathcal{D}_L p(\Omega,E) \longrightarrow \mathcal{D}_L p(\Omega,E)$, es una proyección continua ya que

$(V\circ Y\circ Z)^2 = (V\circ Y\circ Z)\circ(V\circ Y\circ Z) = V\circ Y\circ(Z\circ V\circ Y)\circ Z = V\circ Y\circ Z$

luego por el teorema I.2.8. tendremos que $V\circ Y$ es un isomorfismo sobre la imagen y $V\circ Y\circ Z(\mathcal{D}_{L^p}(\Omega,E)) = V\circ Y(\lambda_p(\mathcal{E}(J,E))$ es uno de los subespacios complementados de $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega,E)$. La proposición se deduce ahora de usar que si E es un espacio localmente completo tendremos $\mathcal{E}(J,E)\simeq S(E)\simeq\mathcal{D}(I,E)$, Bonet (3), luego $\lambda_p(\mathcal{E}(J,E))\simeq\lambda_p(S(E))\simeq\lambda_p(\mathcal{D}(I,E))$.

TEOREMA 2. Dado E un espacio localmente completo, Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $1\leq p<+\infty$, entonces $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega,E)\simeq\lambda_p(S(E))$.

Demostración: consecuencia inmediata de las proposiciones 11 y 13 y el teorema I.1.6.

III.2. ALGUNOS CASOS PARTICULARES

Dado Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^h$, sea $(\rho_r)_{r=1}^{\infty}$ la sucesión de aristas de los $(B_r)_{r=1}^{\infty}$ de la partición de la unidad de Ω de I.3., consideremos los espacios $\lambda^p(S(E))$ $1 \leq p < +\infty$ asociados a $(\rho_r)_{r=1}^{\infty}$, I.1.

Considerado $(x^r)_{r=1}^{\infty}$ de $l^p(S(E))$, definamos $(y^r)_{r=1}^{\infty}$ como sigue: si $x^r=(x_n^r)_{n=1}^{\infty} \in S(E)$, tomamos $y^r=(y_n^r)_{n=1}^{\infty}$ como $y_n^r = x^r_{\rho_r^{-1} n}$ igual que en II.2.1. Tendremos que y^r está en $S(E)$ para $r=1,2,\ldots.$ Vamos a probar que $(y^r)_{r=1}^{\infty}$ está en $\lambda_p(S(E))$. Dados k, s enteros positivos y q seminorma continua en E, si p=1

$$\sum_{r=1}^{r_o} \rho_r^{-k}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n^s q(y_n^r)\right]^p = \sum_{r=1}^{r_o}\sum_{n=1}^{\infty} \rho_r^{-k} n^s q(y_n^r) = \sum_{r=1}^{r_o}\sum_{n=1}^{\infty} \rho_r^{-k} n^s q(x^r_{\rho_r^{-1} n}) \leq$$

$$\leq \sum_{r=1}^{r_o}\sum_{n=1}^{\infty} n^{s+k} q(x_n^r)$$

luego

$$\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-k}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n^s q(y_n^r)\right]^p \leq \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} n^{s+k} q(x_n^r) \qquad (*)$$

si $p > 1$, sea c un número real con $1/c + 1/p = 1$. Tendremos aplicando la desigualdad de Hölder para sucesiones que

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty} n^s q(y_n^r)\right]^p \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2c}}\right)^{p/c}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{(2+s)p} q^p(y_n^r)\right]^{p/p} \leq$$

$$\leq \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^{p/c} \sum_{n=1}^{\infty} n^{(2+s)p} q^p(y_n^r)$$

luego

$$\sum_{r=1}^{r_o} \rho_r^{-k}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} n^s q(y_n^r)\right]^p \leq \sum_{r=1}^{r_o}\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^{p/c}\sum_{n=1}^{+\infty} \rho_r^{-k(s+2)p} q^p(y_n^r)$$

Sea h entero positivo con $h \geq k+(s+2)p$, tendremos que

$$\sum_{r=1}^{+\infty} \rho_r^{-k}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} n^s q(y_n^r)\right]^p \leq \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^{p/c}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} n^h q^p(x_n^r) \qquad (**)$$

PROPOSICION 14. La aplicación $Z_1 : l^p(S(E)) \longrightarrow \lambda_p(S(E))$ definida como $Z_1(x^r)=(y^r)$, siendo y^r el anteriormente definido, es lineal y continua.

Demostración: consecuencia inmediata de (*) y (**).

Dado ahora (x^r) de $\lambda_p(S(E))$, definimos (y^r) como

$$y^r = \begin{cases} 0 & \text{si n no es múltiplo de } \rho_r^{-1} \\ x_t^r & \text{si } n=t\,\rho_r^{-1} \quad t=1,2,\dots \end{cases}$$

tomado s entero positivo y q seminorma continua en E

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^s q(y_n^r) = \sum_{t=1}^{\infty} t^s \rho_r^{-s} q(x_t^r) = \rho_r^{-s} \sum_{=1}^{\infty} t^s q(x_t^r)$$

luego y^r está en S(E) $r=1,2,\dots$

$$\sum_{r=1}^{r_o} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^s q(y_n^r)\right]^p = \sum_{r=1}^{r_o} \left[\sum_{t=1}^{\infty} \rho_r^{-s} t^s q(x_t^r)\right]^p = \sum_{r=1}^{r_o} \rho_r^{-sp} \left[\sum_{t=1}^{\infty} t^s q(x_t^r)\right]^p$$

tomado k entero positivo con $k > sp$ tendremos

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^s q(y_n^r)\right]^p \leq \sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-k} \left[\sum_{t=1}^{\infty} t^s q(x_t^r)\right]^p \qquad (***)$$

PROPOSICION 15. El espacio $\lambda_p(S(E))$ es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de $l^p(S(E))$ para $1 \leq p < +\infty$.

Demostración: definida $U_1 : \lambda_p(S(E)) \longrightarrow l^p(S(E))$ como $U_1(x^r)=(y^r)$ de acuerdo con lo anterior, (***) asegura que la aplicación está bien definida y al ser trivialmente lineal, es continua. Por otra parte $Z_1 \circ U_1$ es la identidad en $\lambda_p(S(E))$, luego $U_1 \circ Z_1$ de $l^p(S(E))$ en si mismo es una proyección continua, por lo tanto, por I.2.8. tendremos que U_1 es un isomorfismo sobre la imagen y $U_1 \circ Z_1(l^p(S(E)))=U_1(\lambda_p(S(E)))$ es un subespacio complementado de $l^p(S(E))$.

TEOREMA 3. Si Ω es un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ que no es casi-acotado, entonces $\lambda_p(S(E)) \simeq l^p(S(E))$ para

$1 \leq p < +\infty$.

Demostración: por no ser casi-acotado, existe una subsucesión $(\rho_{r_j})_{j=1}^{\infty}$ con $\rho_{r_1} = \rho_{r_2} = \dots = \rho_{r_j} = \dots$, entonces resulta fácil probar como en la proposición II.2.15. que $F_1 = \{(x^r) \in \lambda_p(S(E)) \ / \ x^r=0 \quad r \neq r_j \quad j=1,\dots\}$ es isomorfo topológicamente a $l^p(S(E))$ y tiene complemento topológico $F_2 = \{(x^r) \in \lambda_p(S(E)) \ / \ x^r=0 \quad r=r_j \quad j=1,2,\dots\}$ Entonces, el teorema I.1.6., nos asegura que $l^p(S(E))$ es isomorfo a $\lambda_p(S(E))$.

TEOREMA 4. Si Ω es un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ que no es casi acotado y E es un espacio localmente completo entonces $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega,E) \simeq l^p(S(E))$.

Demostración: consecuencia inmediata de los teoremas 2 y 3.

Recordemos que un abierto Ω es casi integrable si y sólo si existe $t \in \mathbb{R}^+$ cumpliendo $\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^t < +\infty$, y entonces, supuestos ordenados de manera decreciente los ρ_r, ocurre que $\lim_{r \to +\infty} r \rho_r^t = 0$.

PROPOSICION 16. Sea E un espacio y Ω un abierto de $\mathbb{R}^h$ casi integrable, entonces $\lambda_p(S(E))$ es isomorfo a un subespacio complementado de $S(S(E))$.

Demostración: Sea $Z_2 : S(S(E)) \longrightarrow \lambda_p(S(E))$ la restricción de la aplicación Z_1 de la proposición 14 a $S(S(E))$. Evidentemente es continua por ser la topología de $l^p(S(E))$ restringida a $S(S(E))$ menos fina que la de $S(S(E))$.

Recíprocamente, definimos $U_2 : \lambda_p(S(E)) \longrightarrow S(S(E))$ como $U_2(x^r)=(y^r)$ con $y^r = (y_n^r)_{n=1}^{\infty}$ y

$$y_n^r = \begin{cases} 0 & \text{si n no es múltiplo de } \rho_r^{-1} \\ x_m^r & \text{si } n=m\rho_r^{-1} \quad \text{para } m= 1,2,\dots \end{cases}$$

Como podemos tomar t entero positivo con $\lim_{r \to +\infty} r \rho_r^t = 0$, existe un r_o tal que si $r \geqslant r_o$ entonces $r\,\rho_r^t < 1$, luego dados k y s enteros positivos y q seminorma continua en E

$$\sum_{r=1}^{r_1} r^k \Big[\sum_{n=1}^{\infty} n^s q(y_n^r)\Big] \leqslant \sum_{r=1}^{r_1} r^k \Big[\sum_{m=1}^{\infty} [m\,\rho_r^{-1}]^s q(x_m^r)\Big] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{r=1}^{r_1} r^k (\rho_r^{-1})^s \sum_{m=1}^{\infty} m^s q(x_m^r)$$

si p=1

$$\sum_{r=1}^{r_1} r^k \Big[\sum_{n=1}^{\infty} n^s q(y^r)\Big] \leqslant \sum_{r=1}^{r_1} r^k (\rho_r^{-1})^s \Big[\sum_{m=1}^{+\infty} m^s q(x_m^r)\Big]$$

Si $p > 1$, tomado $c \in \mathbb{R}^+$ con $1/c + 1/p = 1$, tendremos

$$r \geqslant r_o \quad r < \rho_r^{-t} \quad \text{luego} \quad r^{k+2} < \rho_r^{-t(k+2)} \leqslant r_o^{k+2} \rho_r^{-t(k+2)}$$

$$r \leq r_o \qquad r^{k+2} \leqslant r_o^{k+2} \rho_r^{-t(k+2)}$$

$$\sum_{r=1}^{r_1} r^k \Big[\sum_{n=1}^{\infty} n^s q(y_n^r)\Big] \leqslant \Big(\sum_{r=1}^{r_1} r^{(k+2)p} \Big[\sum_{n=1}^{\infty} n^{s+2} q(y_n^r)\Big]^p\Big)^{1/p} \cdot$$

$$\Big(\sum_{r=1}^{r_1} \frac{1}{r^{2c}}\Big)^{1/c} \leqslant \frac{\pi^2}{6} \Big(\sum_{r=1}^{r_1} r^{(k+2)p} \Big[\sum_{m=1}^{\infty} \rho_r^{-s-2} m^{s+2} q(x_m^r)\Big]^p\Big)^{1/p}$$

de donde tendremos que si $1 \leqslant p < +\infty$

$$\sum_{r=1}^{r_1} r^k \Big[\sum_{n=1}^{\infty} n^s q(y_n^r)\Big] \leqslant \frac{\pi^2}{6} r_o^{k+2} \Big(\sum_{r=1}^{r_1} \rho_r^{-t(k+2)p-(s+2)p} \cdot$$

$$\cdot \Big[\sum_{m=1}^{\infty} m^{s+2} q(x_m^r)\Big]^p\Big)^{1/p}$$

luego tendremos que tomado j entero positivo con

$t(k+2)+(s+2)\,p < j$

$$\sum_{r=1}^{\infty} r^k \Big[\sum_{n=1}^{\infty} n^s q(y_n^r)\Big] \leqslant \frac{\pi^2}{6} r_o^{k+2} \Big(\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-j} \Big[\sum_{m=1}^{\infty} m^{s+2} q(x_m^r)\Big]^p\Big)^{1/p} \qquad (\ast\ast\ast\ast)$$

luego U_2 está bien definida, y como es lineal, es continua por $(\ast\ast\ast\ast)$.

Entonces probándolo como en la proposición II.14. tendremos que $Z_2 \cdot U_2 : \lambda_p(S(E)) \longrightarrow \lambda_p(S(E))$ es la identidad, por el teorema I.2.8. tendremos que $U_2 \circ Z_2$ es una proyección continua en $S(S(E))$, $U_2 \circ Z_2(S(S(E))) = U_2(\lambda_p(S(E)))$ tiene complemento topológico y U_2 es un isomorfismo topológico sobre la imagen.

TEOREMA 5. Si Ω es un abierto casi integrable en $\mathbb{R}^n$ y E es un espacio entonces $\lambda_p(S(E)) \simeq S(E)$.

Demostración: la proposición 16 asegura que $\lambda_p(S(E))$ es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de $S(S(E)) \simeq S(E)$ por I.1.3. Por otra parte el espacio $F = \{(x^r) \in \lambda_p(S(E)) \ / \ x^r = 0 \ \ r \geq 2\}$ es evidentemente isomorfo a $S(E)$ y complementado en $\lambda_p(S(E))$ entonces por el teorema I.1.6. o teorema I.1.1. $\lambda_p(S(E)) \simeq S(E)$.

TEOREMA 6. Si E es un espacio localmente completo y Ω es un abierto de $\mathbb{R}^n$ no vacío casi integrable entonces $\mathcal{D}_L p(\Omega, E) \simeq S(E)$.

Demostración: el teorema 2 asegura que $\lambda_p(S(E)) \simeq \mathcal{D}_L p(\Omega, E)$ si E es localmente completo, luego la conclusión viene dada ahora por el teorema 5.

CAPITULO IV

CIERTOS SUBESPACIOS DE $\mathcal{E}(Q,E)$

IV.1. EL ESPACIO $\mathcal{E}_F(Q,E)$

DEFINICION 1. Sea Q un cubo cerrado de $\mathbb{R}^n$ con int(Q) no vacío, F un cerrado en Q con int($Q\sim F$) no vacío, llamaremos $\mathcal{E}_F(Q,E)$ al subespacio de $\mathcal{E}(Q,E)$ formado por las funciones que se anulan ellas y todas sus derivadas en el cerrado F, con la topología restricción.

PROPOSICION 1. $\mathcal{E}_F(Q,E)$ es isomorfo topológicamente a S(E) para cualquier cerrado F de Q con int($Q\sim F$) no vacío.

Demostración: sea J un cubo cerrado en $\mathbb{R}^n$ con $Q\subset \mathrm{int}(J)$. Veamos que $\mathcal{E}_F(Q,E)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{B}_o(\mathcal{J}\sim F,E)$. Este último, por el corolario II.5.1. o (4), es isomorfo a S(E).

Consideremos T un operador de extensión lineal y continuo del espacio $\mathcal{E}(Q,E)$ al espacio $\mathcal{E}(E)$ (1)(3). Sea φ una aplicación de clase $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ que tiene su soporte en J y vale 1 sobre Q, tendremos que $T_1=$ $=\varphi.T$ es un operador de extensión lineal y continuo del espacio $\mathcal{E}_F(Q,E)$ al espacio $\mathcal{B}_o(\mathcal{J}\sim F,E)$. Por ser un operador de extensión, la aplicación T_1 es abierta sobre la imagen, es decir, $\mathcal{E}_F(Q,E)$ es isomorfo topológicamente a $T_1(\mathcal{E}_F(Q,E))$ y éste es un subespacio complementado de $\mathcal{B}_o(\mathcal{J}\sim F,E)$, y su complemento topológico es $\mathcal{B}_o(\mathcal{J}\sim Q,E)$. Dada f de $\mathcal{E}_F(Q,E)$ y g de $\mathcal{B}_o(\mathcal{J}\sim Q,E)$, supongamos que $T(f)+g=0$, dado x de Q tendremos que $f(x)=T(f)(x)+g(x)=$ $=0$, luego f=0, y de aquí g=0, por lo tanto $\mathcal{B}_o(\mathcal{J}\sim Q,E)\cap T_1(\mathcal{E}_F(Q,E))=\{0\}$.

Por otra parte, sea h de $\mathcal{B}_o(\mathcal{G}\sim F,E)$, sea $f(x)=h(x)$ $x\in Q$, tendremos que f está en $\mathcal{E}_F(Q,E)$ y que $g=h-T_1(f)$ está en $\mathcal{B}_o(\mathcal{G}\sim Q,E)$. Esta suma directa es topológica porque considerada la aplicación

$X: \mathcal{B}_o(\mathcal{G}\sim F,E) \longrightarrow T_1(\mathcal{E}_F(Q,E))$

definida $X(h) = T_1(f)$, siendo f la anterior, es una proyección continua cuyo nucleo es Ker $X = \mathcal{B}_o(\mathcal{G}\sim Q,E)$.

Por otro lado podemos construir dos cubos H y L en $\mathbb{R}^n$ verificando $\emptyset \neq \overset{\circ}{H} \subset H \subset \overset{\circ}{L} \subset L \subset \mathrm{int}(Q\sim F)$.

Consideremos un operador de extensión U lineal y continuo de $\mathcal{E}(H,E)$ a $\mathcal{D}(L,E)$ considerando a éste como subespacio de $\mathcal{E}_F(Q,E)$, y sea W la aplicación restricción de $\mathcal{E}_F(Q,E)$ a $\mathcal{E}(H,E)$, es decir $W(g)(x) = g(x)$ para todo x de H, para toda g de $\mathcal{E}_F(Q,E)$, es lineal y continua y además $W\circ U = 1_{\mathcal{E}(H,E)}$, luego por el teorema I.2.8. tendremos que $\mathcal{E}(H,E) \simeq S(E)$[por el teorema I.2.3. (Bonet)] es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de $\mathcal{E}_F(Q,E)$.

Como S(E) tiene la propiedad de complementación, tendremos por el teorema I.1.1. que $\mathcal{E}_F(Q,E) \simeq S(E)$.

IV.2. UN OPERADOR DE EXTENSION

En el estudio de la representación del espacio $\mathcal{D}^{+}_{p,F}(E)$ (Capítulo V) se nos planteó la necesidad de averiguar cuando, dado un cubo Q de $\mathbb{R}^n$ con interior no vacío y un cerrado F de $\mathbb{R}^n$, llamando $F_1 = F \cap Q$, podíamos construir un operador de extensión lineal y continuo del espacio $\mathcal{E}_{F_1}(Q,E)$ a $\mathcal{E}_F(E)$. Si ocurriese que $\partial Q \cap F = \emptyset$ entonces simplemente construyendo un cubo Q_1 concéntrico a Q con $\mathring{Q}_1 \supset Q$ y $Q_1 \cap F = Q \cap F$, y tomada una función φ de $\mathcal{D}(Q_1)$ con $\varphi(x) = 1$ para todo x de Q, tomando T un operador lineal y continuo de $\mathcal{E}_{F_1}(Q,E)$ a $\mathcal{E}(E)$, $\varphi.T$ sería el buscado.

Análogamente, si $\partial Q \subset F$ entonces la aplicación $T: \mathcal{E}_{F_1}(Q,E) \dashrightarrow \mathcal{E}_F(E)$ definida como

$$(Tf)(x) = \begin{cases} f(x) & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$$

para toda f de $\mathcal{E}_{F_1}(Q,E)$ resuelve el problema.

Por lo tanto el caso a estudiar es cuando

(*) $\partial Q \cap F \neq \emptyset \ \wedge \ \partial Q \cap \mathbb{R}^n \sim F \neq \emptyset$

Nosotros hemos obtenido una condición necesaria y suficiente para la existencia del operador citado.

Sean $(A_r)_{r=1}^{\infty}$, $(B_r)_{r=1}^{\infty}$ las dos familias de rectángulos de la partición definida en I.3. asociada a $\mathbb{R}^n \sim F = \Omega$. Sea $\left(\mu_r = \dfrac{\varphi \circ \varphi_r^{-1}}{\sum_{r=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_r^{-1}}\right)_{r=1}^{\infty}$ la partición de la unidad, llamemos $\Lambda_o = \{ r \in \mathbb{N} \ / \ A_r \cap Q \neq \emptyset \}$

$\Lambda_1 = \{ r \in \mathbb{N} \ / \ \exists \ r_o \in \Lambda_o$ con $A_r \cap A_{r_o} \neq \emptyset \}$, $\Theta_o = \bigcup_{r \in \Lambda_o} A_r$

$\Theta_1 = \bigcup_{r \in \Lambda_1} A_r$. Mantendremos esta notación y la hipótesis (*) hasta la prueba del teorema de la condición necesaria y suficiente.

PROPOSICION 1. Si existe p entero positivo y k constante positiva cumpliendo que

$$d^p(x,F_1) \leq k\ d(x,F) \qquad \forall\ x \in \partial Q \qquad (**)$$

entonces existe otra constante k' verificando que

$$d^p(x,F_1) \leq k'\ d(x,F) \qquad \forall\ x \in \Theta_1$$

Demostración: podemos suponer que $k \geq 1$. Sea y de Θ_1, si y está en Q supongamos que $d(y,F) < 1$. Si $d(y,F) = d(y,F_1)$ no hay nada que probar. Si $d(y,F) < d(y,F_1)$ entonces sea z de F con $d(y,F) = d(y,z)$, sea $\{x\} = [y,z] \cap \partial Q$, tendremos que $d(y,F)=d(x,y)+ d(x,F)$ luego $d(x,F) < d(y,F)$. Por otra parte se verifica que $d(y,F_1) \leq d(x,y) + d(x,F_1) \leq d(y,F) + d(x,F_1)$ luego

$$d(y,F_1) \leq d(y,F) + k^{1/p}\ d^{1/p}(x,F) < d(y,F) + k^{1/p} d^{1/p}(y,F)$$

como $d(y,F) < 1$ tendremos

$$d(y,F_1) \leq (1 + k^{1/p})\ d^{1/p}(y,F) \qquad \text{luego}$$

$$d^p(y,F_1) \leq (1+ k^{1/p})^p\ d(y,F)$$

como $d(y,F_1) \geq d(y,F)$, si $d(y,F) \geq 1$ tomado

$$k_1 = \sup \{ d^p(y,F_1) \ / \ \forall\ y \in Q \text{ con } d(y,F) \geq 1\}$$

$$k_2 = \max \{((1 + k^{1/p})^p,\ k_1)\}$$

para todo y de Q se verifica $d^p(y,F_1) \leq k_2\ d(y,F)$.

Sea y que no esté en Q y sea s entero positivo con y en A_s, supongamos que $\rho_s < 1/2$, ρ_s arista de B_s, existirá un r en Λ_o con $A_r \cap A_s \neq \emptyset$, luego por la proposición I.3.1. tendremos $2\rho_s \geq \rho_r \geq 1/2\,\rho_s$ y además podemos tomarlo con z en $A_r \cap \partial Q$, tendremos que $d(y,z) \leq 3\sqrt{n}\,\rho_s$ y como z está en A_r,

$$\sqrt{n}\,\rho_r \leq d(z,F) \leq 4\sqrt{n}\,\rho_r \qquad \text{luego}$$

$$d(y,F_1) \leq d(y,z) + d(z,F_1) \leq 3\sqrt{n}\,\rho_s + k^{1/p} d(z,F) \leq 3\sqrt{n}\,\rho_s + $$

$$+ (4.2\sqrt{n}\ k)^{1/p}\,\rho_s^{1/p}$$

$d(y,F_1) < (3\sqrt{n} + 8k\sqrt{n})^{1/p} \rho_s^{1/p} \leq \left(\frac{11k\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \quad d(y,F)\right)^{1/p} \leq (11k \ d(y,F))^{1/p}$

Sea $k_3 = 11k$, consideremos el conjunto A_r con $r \in \Lambda_1$ y $\rho_r = 1$ ó $\rho_r = 1/2$, tendremos que si y está en A_r entonces $d(y,F_1) \geq d(y,F) \geq \frac{\sqrt{n}}{2}$, luego tomado

$k_4 = \sup \left\{ \frac{2}{\sqrt{n}} d^p(y,F_1) \ / \ y \in A_r \quad r \in \Theta_1 \quad \rho_r = 1/2,\ 1 \right\}$

si y está en A_r y $\rho_r \geq 1/2$ entonces $d^p(y,F_1) \leq k_4 d(y,F)$, por lo tanto, tomando $k' = \max \{k, k_1, k_2, k_3, k_4\}$ tendremos que es el buscado.

Supongamos que F es un cerrado en $\mathbb{R}^n$ y Q es un cubo cumpliendo (**) entonces

PROPOSICION 2. Sea g de $\mathcal{E}(E)$ de tal manera que se anula fuertemente en $F_1 = Q \cap F$, entonces las funciones

$$g \sum_{r \in \Lambda_1} D^{\alpha}(\varphi_\circ \varphi_r^{-1}) \qquad g \sum_{r \in \Lambda_0} D^{\alpha}(\varphi_\circ \varphi_r^{-1})$$

son de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n, E)$ y se anulan fuertemente en F.

Demostración: hagamos la prueba para Λ_1. Veamos que es una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^n$, sea x de Ω y B(x) entorno compacto de x con B(x) incluido en Ω, por ser (A_r) localmente finita tendremos que $\Lambda_x = \{ r \in \Lambda_1 \ / \ B(x) \cap A_r \neq \emptyset \}$ es finito, luego existe la derivada parcial de cualquier orden β , son continuas y, aplicando la fórmula de Leibnitz, verifican

$$D^{\beta}\Big[g \sum_{r \in \Lambda_1} D^{\alpha}(\varphi_\circ \varphi_r^{-1})\Big](x) = \sum_{\delta+\mu=\beta} c_{\delta\mu} \ D^{\delta} g(x) \sum_{r \in \Lambda_1} D^{\mu+\alpha}(\varphi_\circ \varphi_r^{-1})(x)$$

llamemos a esta igualdad (⊛). Sea x de F, puede ocurrir que x esté en Q o que no esté. Si x no está en Q, puede construirse un B(x) entorno abierto de x de tal manera que $\Lambda_x = \emptyset$. Veámoslo, consideremos m_0 entero positivo tal que para $m \geq m_o$ se cumple $B_{1/m}(x) \cap Q = \emptyset$ siendo $B_{1/m}(x)$ la bola abierta de centro x y radio $1/m$, supongamos que para todo $m \geq m_o$ existe un r_m en Λ_1 con $x_m \in \mathring{A}_{r_m} \cap B_{1/m}(x)$, como x_m está en A_{r_m} y (x_m) converge a x que está en F, tendremos que $\lim_{m \to +\infty} \rho_{r_m} = 0$, siendo ρ_{r_m} la arista de B_{r_m}. Por definición de Λ_1 y la proposición I.3.1. tendremos que existe y_m en Q con $|x_m - y_m| \leq 3\sqrt{n}\, \rho_{r_m}$ luego x está en Q, en contra de la hipótesis, luego para $y \in B(x)$, $\varphi_o \varphi_r^{-1}(y) = 0$, por lo tanto existe $D^\beta g \sum_{r \in \Lambda_1} D^\alpha(\varphi_o \varphi_r^{-1})(y) = 0$ (✻✻)

y trivialmente es continua. Obsérvese que en realidad aquí se ha probado que si $x \in \overline{\Theta}_i \sim \Theta_i$ entonces x está en $F_1 = F \cap Q$.

Sea ahora x de $Q \cap F = F_1$. Supongamos que dado m entero no negativo, para todo multiíndice β con $|\beta| \leq m$ se verifica que existe y es continua

$$D^\beta\Big[g \sum_{r \in \Lambda_1} D^\alpha(\varphi_o \varphi_r^{-1})\Big]$$

en todo $\mathbb{R}^n$ y vale cero en todo punto de F. Sea $e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ n-tupla y vector de $\mathbb{R}^n$, veamos que existe

$$D^{\beta+e_i}\Big[g \sum_{r \in \Lambda_1} D^\alpha(\varphi_o \varphi_r^{-1})\Big](x) = 0 \qquad \forall x \in F_1 \quad i=1,2,\dots,n$$

y que es continua en F_1, en $\mathbb{R}^n \sim F_1$ por (✻) y (✻✻) sabemos que existe y es continua esta derivada. Sea x de F_1 considerado h de $\mathbb{R}$ con $|h| < 1$, tenemos el cociente

$$\frac{1}{h} D^\beta \Big[g \sum_{r \in \Lambda_1} D^\alpha(\varphi_o \varphi_r^{-1})\Big](x + he_i)$$

si $x + he_i$ no está en Θ_1 este cociente vale 0, si está en Θ_1 tendremos que dada q seminorma continua en E

$$q\left(\frac{1}{h} D^{\beta}\left[g \sum_{r\in\Lambda_1} D^{\alpha}(\varphi\circ\varphi_r^{-1})\right](x+he_i)\right) \leq$$

$$\sum_{\delta+\mu=\beta} |c_{\delta\mu}| \left[q\left(\frac{D^{\delta}g(x+he_i)}{h}\right) \sum_{r\in\Lambda_1} \left|D^{\mu+\alpha}(\varphi\circ\varphi_r^{-1})(x+he_i)\right|\right]$$

tendremos que

$$D^{\mu+\alpha}(\varphi\circ\varphi_r^{-1})(x+he_i) = \left(\frac{8}{5}\right)^{|\mu+\alpha|} \rho_r^{-|\mu+\alpha|}(D^{\mu+\alpha}\varphi)(\varphi_r^{-1}(x+he_i))$$

, como $x+he_i$ está en Θ_1, existirá s entero positivo verificando que $x+he_i \in \mathring{A}_s$, podemos tomar h suficientemente pequeño para que $\rho_s < 1/2$, como A_s corta a lo más a 4^n elementos A_r cuyas aristas verifican $2\rho_s \geq \rho_r \geq \frac{1}{2}\rho_s$ luego $\left(\frac{8}{5}\right)^{|\mu+\alpha|} \leq 2^{|\mu+\alpha|}$

$$\sum_{r\in\Lambda_1} \left|D^{\mu+\alpha}(\varphi\circ\varphi_r^{-1})(x+he_i)\right| \leq 4^n\, 4^{|\mu+\alpha|}\, \rho_s^{-|\mu+\alpha|} \sup_{z\in I} \left|D^{\mu+\alpha}\varphi(z)\right|$$

$$\leq 4^n\, 4^{|\beta+\alpha|}\, \rho_s^{-|\alpha+\beta|} \sup\{|D^{\mu}\varphi(z)| \;:\; z\in I \;,\; |\mu| \leq |\beta+\alpha|\}$$

al ser $\rho_s < 1/2$, tendremos que, por la proposición I.3.2.

$$d(A_s,F) \leq 4\sqrt{n}\,\rho_s$$

$$h = |x+he_i - x| \geq d(A_s,F) \quad \text{luego} \quad \frac{1}{h} \leq \frac{1}{4\sqrt{n}}\rho_s^{-1} \leq \rho_s^{-1}$$

como $D^{\delta}g$ se anula fuertemente en F_1 y es de clase $\mathcal{E}^{\infty}$, por hipótesis existe una constante k positiva y un entero positivo p de tal manera que si $x+he_i$ está en Θ_1

$$d^p(x+he_i,F_1) \leq k\, d(x+he_i,F)$$

aplicando a $D^{\delta}g$ la fórmula de Taylor con resto integral obtendremos que existe una constante M positiva tal que

$$q(D^{\delta}g(x+he_i)) \leq M \sup\{q(D^{\gamma}g(y)) \;/\; y\in B(Q,1),\ |\gamma| \leq (|\alpha+\beta|+2)p\}\cdot$$

$$\cdot d^{(|\alpha+\beta|+2)p}(x+he_i,F_1)$$

siendo $B(Q,1) = \{y\in\mathbb{R}^n \;/\; d(y,Q) \leq 1\}$, de donde

$q(D^{\delta}g(x+he_i)) \leq M \sup\{q(D^{\gamma}g(y)) \ / \ y\in B(Q,1) \ , |\gamma| \leq (|\alpha+\beta|+2)p\} \cdot$

$\cdot \ d^{|\beta+\alpha|+2}(x+he_i,F) \ k^{|\beta+\alpha|+2}$

luego

$q(D^{\delta}g(x+he_i)) \leq M(k4\sqrt{n})^{|\alpha+\beta|+2} \sup\{q(D^{\gamma}g(y)) \ / \ y\in B(Q,1),$

$|\gamma| \leq (|\alpha+\beta|+2)p \quad \rho_s^{|\alpha+\beta|+2}$

por lo tanto para h suficientemente pequeño tendremos

$q(\frac{1}{h} D^{\beta}[g \sum_{r\in\Lambda_1} D^{\alpha}(\varphi.\varphi_r^{-1}) \ (x+he_i))\leq$

$$\leq \sum_{\delta+\mu=\beta} c_{\delta\mu}\left[M4^n(k\ 16\sqrt{n})^{|\alpha+\beta|+2}\sup\ \{q(D^{\gamma}g(y)) \ / \ y\in B(Q,1),\right.$$

$$,|\gamma| \leq (|\alpha+\beta|+2)p\}\cdot \sup\{D^{\mu}\varphi(z) \ / \ z\in I, \ |\mu|\leq\alpha+\beta\}\ \rho_s \qquad (\text{xxx})$$

cuando h tiende a 0, tendremos que ρ_s tiende a 0, de donde obtenemos que existe

$$D^{\beta+e_i}\left[g \sum_{r\in\Lambda_1} D^{\alpha}(\varphi_{\circ}\varphi_r^{-1})\right](x) = 0 \qquad x\in F_1$$

la continuidad en los puntos x de F_1 se demuestra sustituyendo en la prueba anterior β por $\beta+e_i$ y escribiendo y en lugar de $x+he_i$ y tomando $h=|x-y|$, obtendremos que para h suficientemente pequeño existe s con y en A_s y $\rho_s < 1/2$ y existe una constante N verificándose que

$$q(D^{\beta+e_i}\left[g \sum_{r\in\Lambda_1} D^{\alpha}(\varphi_{\circ}\varphi_r^{-1})\right](y)) \leq N \sup\{\ q(D^{\gamma}g(t)) \ /$$

$$/ \ t\in B(Q,1), \ \ |\gamma|\leq(|\alpha+\beta|+3)p\}\ \rho_s^2 \qquad (\text{xxxx})$$

haciendo tender h a 0 se completa la prueba ya que ρ_s tiende a 0.

Para Λ_0 la prueba es idéntica.

En la proposición anterior lo que se ha probado es que $g \sum_{r\in\Lambda_i} D^{\alpha}(\varphi_{\circ}\varphi_r^{-1})$ está en $\mathcal{B}_0(\theta_i)$, i=0,1

PROPOSICION 4. Las aplicaciones T_o y T_1 definidas entre los espacios $\mathcal{E}_{F_1}(E)$ y $\mathcal{E}_F(E)$ de la siguiente forma

$$T_i(g) = g \sum_{r\in\Lambda_i} D^{\alpha}(\varphi_o \varphi_r^{-1}) \qquad i=0,1$$

son lineales y continuas.

Demostración: están bien definidas por la proposición 3, tendremos que:

$$\text{sop } (g \sum_{r\in\Lambda_i} D^{\alpha}(\varphi_o\varphi_r^{-1})) \subset \overline{\Theta}_i \qquad i=0,1$$

de hecho si $D^{\beta}(g \sum_{r\in\Lambda_i} D^{\alpha}(\varphi_o\varphi_r^{-1}))(x) \neq 0$ entonces x está en Θ_i, para cualquier multiíndice β e i=0,1. $\overline{\Theta}_i$ i=0,1 es un compacto y para ver la continuidad, basta ver la convergencia de las funciones y sus derivadas en $\overline{\Theta}_i$ i=0,1 repectivamente. Además resulta de la prueba de (**) que si x está en $\overline{\Theta}_i \sim \Theta_i$ entonces x está en F_1, i=1,0. Sea $\{g_d,\ d\in D, \leq\}$ una red en $\mathcal{E}_{F_1}(E)$ convergente a cero, sea q una seminorma continua en E, m entero positivo, $\varepsilon > 0$ y β multiíndice con $|\beta|\leq m$. Tendremos que

$$\forall x \in F \qquad D^{\beta}\Big[g_d \sum_{r\in\Lambda_i} D^{\alpha}(\varphi_o\varphi_r^{-1})\Big](x) = 0 \qquad \forall\, d\in D$$

además de (****), dado x de $F_1 \cap \overline{\Theta}_i$ existe un entorno abierto B(x) con

$$q(D^{\beta}[g_d \sum_{r\in\Lambda_i} D^{\alpha}(\varphi_o\varphi_r^{-1})](y)) \leq N\rho_s^2 \sup\{q(D^{\gamma}g_d(u))/$$
$$/\ u\in B(Q,1)\ ,\ |\gamma| \leq (|\alpha| + m + 2)p\}$$

para todo β con $|\beta|\leq m$, para todo y de B(x) y todo d de D. Como B(Q,1) es compacto existirá un indice $d_o \in D$ tal que para todo $d \geq d_o$ se verifica

$$q(D^{\beta}[g_d \sum_{r\in\Lambda_1} D^{\alpha}\varphi_o\varphi_r^{-1}](y)) \leq \varepsilon \qquad \forall\, y\in B(x) \quad \forall \beta \;/\; |\beta|\leq m$$

Consideremos el compacto $C_i = \overline{\Theta}_i \sim (\cup\{B(x) \;/\; x\in F_1\cap\overline{\Theta}_i\})$ $i=0,1$, como $C_i\cap F = \emptyset$ tendremos que $C_i\subset\Omega$ y (A_r) es localmente finita en Ω, el conjunto

$L_i = \{ r\in\Lambda_i \;/\; A_r\cap C_i \neq \emptyset \}$ es finito $i=0,1$ luego por (⊛) tendremos

$$q(D^{\beta}[g_d \sum_{r\in\Lambda_i} D^{\alpha}(\varphi_o\varphi_r^{-1})](x)) \leq$$

$$\sum_{\delta+\mu=\beta} |c_{\delta\mu}| \,(\sum_{r\in L_i} |D^{\mu+\alpha}(\varphi_o\varphi_r^{-1})(x)|\,)\; q(D^{\delta}g_d(x))$$

como $\{\sum_{r\in L_i} | D^{\mu+\alpha}(\varphi_o\varphi_r^{-1})(x)| \;,\; x\in C_i \;\wedge\; |\mu|\leq m\}$ es un conjunto acotado llegamos a la conclusión buscada, tomando un $d_1 \geq d_o$ suficientemente grande para que

$$q(D^{\beta}[g_d \sum_{r\in\Lambda_i} D^{\alpha}(\varphi_o\varphi_r^{-1})](x)) \leq \varepsilon \qquad \forall\, x\in C_i \qquad \forall\, d\geq d_1$$

Los operadores T_o y T_1 de la proposición 4. pueden considerarse como dos aplicaciones lineales y continuas del espacio $\mathcal{E}_{F_1}(E)$ a los espacios $\mathcal{B}_o(\theta_o)$ y $\mathcal{B}_o(\theta_1)$ respectivamente.

TEOREMA 1. Sea Q un rectángulo cerrado de $\mathbb{R}^n$ con $\mathring{Q} \neq \emptyset$, sea F un cerrado de $\mathbb{R}^n$, $F \neq \mathbb{R}^n$, llamemos $\phi \neq F_1 = F\cap Q$. Existe una constante k positiva y un entero positivo p verificando $d^p(x,F_1) \leq$ $\leq k\, d(x,F)$ para todo x de ∂Q si y sólo si existe operador de extensión lineal y continuo de $\mathcal{E}_{F_1}(Q,E)$ a $\mathcal{E}_F(E)$.

Demostración: supongamos que existe una constante k positiva y un entero positivo p, satisfaciendo que $d^p(x,F_1) \leq k\, d(x,F)$ para todo x de ∂Q, con la notación de las proposiciones anteriores, sea T un operador de extensión lineal y continuo de $\mathcal{E}(Q,E)$ a $\mathcal{E}(E)$, entonces

$$U(f) = T(f) \sum_{r\in\Lambda_o} \mu_r \qquad f \in \mathcal{E}_{F_1}(Q,E)$$

es un operador de extensión lineal y continuo de $\mathcal{E}_{F_1}(Q,E)$ a $\mathcal{E}_F(E)$.

Considerado $\mathcal{B}_o(\theta_o)$ un subespacio cerrado de $\mathcal{E}_F(E)$, bastará probar que U es continuo y lineal de $\mathcal{E}_{F_1}(Q,E)$ en $\mathcal{B}_o(\theta_o)$.

Si x está en Θ_o tendremos que

$$\sum_{r=1}^{\infty} \varphi\circ\varphi_r^{-1}(x) = \sum_{r\in\Lambda_1} \varphi\circ\varphi_r^{-1}(x)$$

entonces si x está en Θ_o

$$\mu_s(x) = \frac{\varphi\circ\varphi_s^{-1}(x)}{\sum_{r=1}^{\infty} \varphi\circ\varphi_r^{-1}(x)} = \frac{\varphi\circ\varphi_s^{-1}(x)}{\sum_{r\in\Lambda_1} \varphi\circ\varphi_r^{-1}(x)} \qquad \forall s \in\Lambda_o$$

considerada la restricción de estas funciones a θ_o tendremos que $T(f) \sum_{r\in\Lambda_o} \varphi\circ\varphi_r^{-1}$ es un operador lineal y continuo entre $\mathcal{E}_{F_1}(Q,E)$ y $\mathcal{B}_o(\theta_o,E)$.

Considerado un punto x de Θ_o tendremos que existe un r_1 de Λ_1 con $x \in B_{r_1} \subset \mathring{A}_{r_1}$, siendo (B_r) y (A_r) los rectángulos de la partición definida en I.3., y como se verifica que $\varphi_r^{-1}(B_r) = L$ compacto $r=1,2,\ldots$ sea $b > 0$ el mínimo de φ en L, tendremos que

$$\forall x \in \bigcup_{r\in\Lambda_o} A_r = \Theta_o \; : \; \sum_{r\in\Lambda_1} \varphi\circ\varphi_r^{-1}(x) \geq b$$

luego tomado x de Θ_o (ó x de θ_o) y q seminorma continua en E tendremos que:

$$q\left(\frac{T(f)}{\sum_{r=1}^{\infty}\varphi_o\varphi_r^{-1}}\sum_{r\in\Lambda_o}\varphi_o\varphi_r^{-1}\right](x))\leq\frac{1}{b}q(\left[T(f)\sum_{r\in\Lambda_o}\varphi_o\varphi_r^{-1}\right](x))$$

llamemos (xxxxx) a esta desigualdad, para x de θ_o la función $T(f)\sum_{r\in\Lambda_o}\mu_r$ es, por ser (A_r) familia localmente finita en $\mathbb{R}^n \sim F$, indefinidamente derivable con continuidad y sus derivadas son un cociente cuyo numerador es una suma de expresiones del tipo:

$$[D^{\alpha}T(f)\, D^{\beta}(\sum_{r\in\Lambda_o}\varphi_o\varphi_r^{-1})\, D^{\gamma}(\sum_{r\in\Lambda_o}\varphi_o\varphi_r^{-1})\ldots D^{\mu}(\sum_{r\in\Lambda_o}\varphi_o\varphi_r^{-1}).$$

$$.D^{\beta_1}(\sum_{r\in\Lambda_1}\varphi_o\varphi_r^{-1})D^{\gamma_1}(\sum_{r\in\Lambda_1}\varphi_o\varphi_r^{-1})\ldots D^{\eta_1}(\sum_{r\in\Lambda_1}\varphi_o\varphi_r^{-1})(x)$$

usando el hecho de que si x está en θ_o

$$D^{\beta}(\sum_{r\in\Lambda_i}\varphi_o\varphi_r^{-1})(x)=\sum_{r\in\Lambda_i}D^{\beta}(\varphi_o\varphi_r^{-1})(x)\qquad i=0,1$$

tendremos por la proposición 4. que esta expresión es un operador lineal y continuo de $\mathcal{E}_F(Q,E)$ a $\mathcal{B}_o(\theta_o,E)$, como el denominador será $\sum_{r\in\Lambda_1}\varphi_o\varphi_r^{-1}$ elevado a una potencia positiva, repitiendo el proceso como (xxxxx) tendremos una acotación con seminormas luego se verifica que $U(f) = T(f)\sum_{r\in\Lambda_o}\mu_r$ es un operador de extensión lineal y continuo de $\mathcal{E}_{F_1}(Q,E)$ a $\mathcal{B}_o(\theta_o,E)$.

Pero por la proposición II.1.1 la aplicación

$i: \mathcal{B}_o(\theta_o,E) \dashrightarrow \mathcal{E}(E)$

definida como: dada h de $\mathcal{B}_o(\theta_o,E)$

$$i(h)=\begin{cases}h(x) & x\in\theta_o\\ 0 & x\notin\theta_o\end{cases}$$

es un isomorfismo topológico sobre la imagen, por lo tanto U(f) considerado de $\mathcal{E}_{F_1}(Q,E)$ a $\mathcal{E}_F(E)$ es un operador de extensión lineal y continuo.

Recíprocamente, supongamos que Q es un cubo de $\mathbb{R}^n$ con interior no vacío y sea F un cerrado en $\mathbb{R}^n$ satisfaciendo que $F_1 = Q \cap F \neq \emptyset$ y $\mathrm{int}(Q \sim F) \neq \emptyset$ Si suponemos que no existe p entero positivo y k positiva satisfaciendo que para todo x de la frontera de Q, $d^p(x,F_1) \leq k\, d(x,F)$, entonces llamando

$a_p = 2^{p2^p}$, tomando p=1, existe x_1 de ∂Q con

$d(x_1,F_1) > a_1 d(x_1,F)$

tomando p=2, existirá un x_2 en ∂Q, $x_2 \neq x_1$ con

$d^2(x_2,F_1) > a_2 d(x_2,F)$

tomando p arbitrario existirá un x_p de ∂Q con $x_p \neq x_i$

i=1,2,...,p-1 satisfaciendo

$d^p(x_p,F_1) > a_p d(x_p,F)$ $(**)$

en lo que sigue supondremos que $d(x,F_1) < 1$ para todo x de Q porque por una homotecia podemos considerar el cubo de arista menor que $1/\sqrt{n}$, y como la distancia del cubo homotético a los cerrados homotéticos es proporcional a la de los de partida, no hay pérdida de generalidad.

Como la sucesión $(x_p)_{p=1}^{\infty}$ es acotada, existirá una subsucesión $(x_{p_m})_{m=1}^{\infty}$ convergente a x_o, tomaremos $p_m \geqslant 2m$ para m=1,2,..., x_o es de F_1, si no lo fuese podríamos construir un entorno compacto $B(x_o)$ que no corte a F y tomando

$M_1 = \max \{ d(x,F_1) \ : x \in B(x_o) \} > 0$

$M_2 = \min \{ d(x,F) \ : x \in B(x_o) \} > 0$

tendremos que si y está en $B(x_o)$ entonces

$$d(y,F_1) \leq \frac{M_1}{M_2} d(y,F)$$

Sea ahora p con x_p en $B(x_o)$ y $a_p > \frac{M_1}{M_2}$, tendremos

$$d^p(x_p,F_1) < d(x_p,F_1) < a_p d(x_p,F)$$

lo cual es una contradicción.

Si el cubo Q es

$$Q = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ a_i \leq x_i \leq b_i \quad i=1,2,\ldots,n\}$$

dado y de $\partial Q \cap F_1$ siendo $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ llamaremos

$$R_y = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ x_i=y_i \quad \text{si} \quad a_i < y_i < b_i \ ,$$
$$x_i \geq y_i \quad \text{si} \quad y_i=b_i \qquad x_i \leq y_i \quad \text{si} \quad y_i=a_i \ \}$$

tomemos $F_2 = F_1 \cup (\bigcup \{R_y \ / \ y \in F \cap \partial Q\})$, es un cerrado de $\mathbb{R}^n$ y si x es de Q se cumple que $d(x,F_2) = d(x,F_1)$

En lo que sigue, seguiremos toda la notación de I.3. Sea $\Omega = \mathbb{R}^n \sim F_2$, es un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$. Consideremos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ las familias de cubos de la partición definida en I.3. asociada a Ω, ordenemos los elementos de $\mathcal{B}$ y por lo tanto los de $\mathcal{A}$ de manera que $x_{p_m} \in B_{p_m} \subset A_{p_m}$ para m=1,2,... Definamos

$$g(x) = \sum_{r=1}^{\infty} (\tfrac{1}{2} \rho_r)^r (\varphi \circ \varphi_r^{-1})(x) \qquad x \in \Omega$$

esta es una función de $\mathcal{B}_o(\Omega)$, evidentemente g está en $\mathcal{E}(\Omega)$. Sea $b = \min \{ \varphi(x) \quad x \in J\} > 0$. Llamemos $C_s = \bigcup \{ A_r \ : \ r \leq s\}$ para un s entero positivo dado. Consideremos x de Ω que no esté en C_s, sea r el menor entero positivo con x en A_r, evidentemente $r > s$ y como el conjunto L_x de los enteros positivos t con x en A_t tiene cardinal menor o igual que 4^n, tendremos que para α multiíndice dado

$$D^\alpha g(x) = \sum_{t \in L_x} \rho_t^{-|\alpha|} (\frac{\rho_t}{2})^t \ (\frac{8}{5})^{|\alpha|} \ (D^\alpha \varphi)(\varphi_t^{-1}(x))$$

luego como t está en L_x, $\frac{1}{2}\rho_r \leq \rho_t \leq 2\rho_r$, tendremos

$$|D^\alpha g(x)| \leq 4^{n+|\alpha|} \left(\frac{\rho_r}{2}\right)^{r-|\alpha|} \sup_{z\in I} |D^\alpha \varphi(z)|$$

como $\rho_r/2 < 1$ para todo r tendremos que dado $\varepsilon > 0$ existirá un s suficientemente grande cumpliendo que

$x \in \Omega \qquad x \notin C_s \qquad |D^\alpha g(x)| < \varepsilon$

Consecuentemente la función $h: Q \longrightarrow \mathbb{R}$

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & x \in Q \cap \Omega \\ 0 & x \in Q \sim \Omega \end{cases}$$

es una función de clase $\mathcal{E}^\infty$ en Q que se anula fuertemente en F_1. Además

$$h(x_{p_m}) = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\rho_r}{2}\right)^r \varphi \circ \varphi_r^{-1}(x_{p_m}) \geq \left(\frac{\rho_{p_m}}{2}\right)^{p_m} . b \qquad \text{(i)}$$

Supongamos ahora que existe $U: \mathcal{E}_{F_1}(Q) \longrightarrow \mathcal{E}_F(E)$ operador de extensión lineal y continuo. Tomemos z_{p_m} en $F \sim F_1$ con $d(x_{p_m}, F) = d(x_{p_m}, z_{p_m})$ $m=1,2,\ldots$

aplicando la fórmula de Taylor con resto integral para j entero positivo

$$h(x_{p_m}) = U(h)(x_{p_m}) - U(h)(z_{p_m}) =$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-w)^{j-1}}{(j-1)!} U^{(j)}(h)(z_{p_m} + w(x_{p_m} - z_{p_m}))dw$$

luego

$$|h(x_{p_m})| \leq n^j d^j(x_{p_m}, F) \sup_{|\beta|=j} \sup_{w\in[0,1]} |D^\beta U(h)(z_{p_m} + w(x_{p_m} - z_{p_m}))|$$

luego existe un u_m^β de $[x_{p_m}, z_{p_m}]$ verificando que

$$|h(x_{p_m})| \leq n^j d^j(x_{p_m}, F) \sup_{|\beta|=j} |D^\beta U(h)(u_m^\beta)| \qquad \text{(ii)}$$

como (x_{p_m}) tiende a x_o que no está en Ω, tendremos

(ρ_{p_m}) coverge a 0. Consideremos m_o con $m \geq m_o$ entonces $\rho_{p_m} < 1/2$ por la proposición I.3.2.

$d(x_{p_m}, F_1) = d(x_{p_m}, F_2) \leq 5\sqrt{n}\ \rho_{p_m}$

luego de (i) e (ii) obtendremos

$$\frac{b\, d^{p_m}(x_{p_m}, F_1)}{(10\sqrt{n})^{p_m}} \leq b\left(\frac{\rho_{p_m}}{2}\right)^{p_m} \leq n^j\, d^j(x_{p_m}, F).$$

$$\sup_{|\beta|=j} |D^{\beta}U(h)(u_m^{\beta})| \qquad \text{(iii)}$$

luego para $m \geq m_o$ aplicando (**) a (iii) obtendremos

$$\sup_{|\beta|=j} |D^{\beta}U(h)(u_m^{\beta})| \geq \frac{b\, a_{p_m}}{n^j (10\sqrt{n})^{p_m}}\ d^{1-j}(x_{p_m}, F)$$

como $|x_{p_m} - u_m^{\beta}| \leq d(x_{p_m}, F) \leq d(x_{p_m}, F_1) \dashrightarrow 0$

tendremos $\lim\limits_{m \to +\infty} u_m^{\beta} = x_o$ para $|\beta| = j$. Por otra parte es evidente que

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{a_{p_m}}{(10\sqrt{n})^{p_m}} = +\infty$$

tomado $j \geq 1$ fijo obtendremos

$$0 = \sup_{|\beta|=j} |D^{\beta}U(h)(x_o)| = \lim_{m \to +\infty} \sup_{|\beta|=j} |D^{\beta}U(h)(x_m^{\beta})| = +\infty$$

lo cual es absurdo, luego no existe U.

Veamos un contraejemplo. Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

sabemos que f está en $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ y se anula fuertemente en 0. Sea $F = \{(x, f(x)) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$, $Q = [0,1] \times [-1,0]$. Tendremos que $F_1 = F \cap Q = \{(0,0)\}$, y que $(x,0)$ está en ∂Q para $0 \leq x \leq 1$

$d((x,0),F_1) = x \qquad d((x,0),F) \leq e^{-1/x^2}$

Supongamos que existe un p natural, k constante positiva satisfaciendo que si (x,y) está en Q

$d^p((x,y),F_1) \leq k\, d((x,y),F)$

$d^p((x,0),F_1) - k\, d((x,0),F) \geq x^p - ke^{-1/x} \leq 0 \qquad 0 \leq x \leq 1$

luego $h(x) = \dfrac{ke^{-1/x}}{x^p} \geq 1 \qquad 0 < x \leq 1$

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{ke^{-1/x}}{x^p} = \lim_{y \to +\infty} k\, y^p\, e^{-y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{k\, y^p}{e^y}$$

aplicando la regla de L'Hôpital p veces tendremos

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{y \to +\infty} \frac{k\, p!}{e^y} = 0$$

lo cual es absurdo, luego por el teorema anterior no existe operador de extensión lineal y continuo de $\mathcal{E}_{F_1}(Q)$ en $\mathcal{E}_F(\mathbb{R}^n)$.

IV.3. LOS ESPACIOS $\mathcal{P}_{n_F}(E)$ Y $\mathcal{M}_{n_F}(E)$

DEFINICION 1. Llamaremos $\mathcal{P}_{n_F}(E)$ al espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de las funciones infinitamente diferenciables definidas en $\mathbb{R}^n$ con valores en un espacio E, que son 2π-periódicas respecto a cada una de sus variables y que se anulan ellas y todas sus derivadas en F, siendo F un cerrado contenido en $[-\pi,\pi]^n$. Lo dotamos de la topología localmente convexa definida por la siguiente familia de seminormas:

$$q(f)_r = \sum_{|\alpha|\leq r} \sup\left\{ q(D^\alpha f(x_1,\ldots,x_n)) : -\pi\leq x_j\leq \pi, 1\leq j\leq n\right\}$$

al variar q en las seminormas continuas en E y r en los enteros positivos, llamemos (*) a esta expresión.

En (27) Valdivia para el caso escalar prueba que $\mathcal{P}_n \simeq S$. Bonet, si F es vacío, prueba en (1) que $\mathcal{P}_n(E) \simeq S(E)$ en el caso en que E sea localmente completo

DEFINICION 2. Sea F un cerrado incluido en $[0,\pi]^n$, llamaremos $\mathcal{M}_{n_F}(E)$ al subespacio de $\mathcal{P}_{n_F}(E)$ formado por las funciones pares para cada variable, dotado de la topología restricción.

Supondremos en lo que sigue que $\mathrm{int}([-\pi,\pi]^n \sim F) \neq \emptyset$ para el espacio $\mathcal{P}_{n_F}(E)$ e $\mathrm{int}([0,\pi]^n \sim F) \neq \emptyset$ para el espacio $\mathcal{M}_{n_F}(E)$ porque si no se reducen al caso $\{0\}$.

Vamos a generalizar una técnica que se debe al profesor Valdivia en (27). Sea

$H = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) : -2\pi \leq x_j \leq 2\pi \quad j=1,2,\ldots,n\}$

dado F incluido en $[-\pi,\pi]^n$, f de $\mathcal{P}_{n_F}(E)$ entonces

$a = (a_1,a_2,\ldots,a_n) \in F \quad D^{\alpha}f(a+2\pi r) = 0$

para r en $\mathbb{Z}^n$, j=1,2,...,n y para cada α multiíndice, luego tomado $F_1 = \{a+2\pi r \ , \ a\in F \ \ r\in Z^n \ \ j=1,2,\ldots,n\}$ es un cerrado y evidentemente

$\mathcal{P}_{n_F}(E) = \mathcal{P}_{n_{F_1}}(E) = \mathcal{P}_{n_{F_2}}(E)$

consideremos $F_2 = F_1 \cap H$, tendremos que $\mathrm{int}(H\sim F_2) \neq \emptyset$, dado $\mathcal{E}_{F_2}(H,E)$ sea $\mathcal{F}$ el subespacio de $\mathcal{E}_{F_2}(H,E)$ de todas las funciones f que son la restricción a H de una función de $\mathcal{P}_{n_F}(E)$. $\mathcal{F}$ es isomorfo tepológicamente a $\mathcal{P}_{n_F}(E)$, para ello basta comparar las seminormas (*) con las de $\mathcal{E}_{F_2}(H,E)$ al restringirlas a $\mathcal{F}$.

Sea p de $\mathbb{Z}^n$, $p=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$. Sea $H_p =$ $= \{(x_1,\ldots,x_n) : 2p_j\pi \leq x_j \leq (2p_j+4)\pi \ , \ j=1,2,\ldots,n\}$

Sea $g_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$g_p(x) = (x_1+(2p_1+2)\pi, \ldots, x_n+(2p_n+2)\pi)$

con $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ de $\mathbb{R}^n$. g_p transforma H en H_p y llamando $F_p = F_1 \cap H_p$, transforma F_2 en F_p, obsérvese con esta notación que $F_2 = F_{-(1,\ldots,1)}$. Sea $L_p = \overline{H_p \sim F_p}$, $L = \overline{H\sim F_2}$, tendremos que $\mathcal{D}(L_p,E) = \mathcal{B}_o(\mathrm{int}(H_p\sim F_p),E)$ (4), y una función f pertenece a $\mathcal{D}(L,E)$ si y sólo si $f\circ g_p^{-1}$ pertenece a $\mathcal{D}(L_p,E)$. Obsérvese que si p y r están en $\mathbb{Z}^n$, $r=(r_1,r_2,\ldots,r_n)$

$g_{p+r}(x) = g_p(x+2\pi r) \qquad x\in\mathbb{R}^n$

PROPOSICION 1. La aplicación X definida entre $\mathcal{D}(L,E)$ y $\mathcal{P}_{n_F}(E)$ como

$$X(f) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} f\circ g_p^{-1} \qquad f\in \mathcal{D}(L,E)$$

es lineal y continua.

Demostración: veamos que está bien definida, por ser la familia H_p localmente finita $X(f)$ está en $\mathcal{E}(E)$. Dado x de $\mathbb{R}^n$, $x=(x_1,\dots,x_n)$ y $r=(r_1,\dots,r_n)$ de $\mathbb{Z}^n$ tendremos que

$$X(f)(x) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} (f\circ g_p^{-1})(x) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} (f\circ g_{p+r}^{-1})(x) =$$

$$= \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} (f\circ g_p^{-1})(x_1+2r_1\pi,\dots,x_n+2r_n\pi) = X(f)(x+2\pi r)$$

luego $X(f)$ está en $\mathcal{P}_n(E)$. Dado x de F_1, $X(f)(x) =$ $= \sum (f\circ g_p^{-1})(x)$ sumando para los p tales que x esté en H_p, pero si x está en $H_p \cap F_1 = F_p$ tendremos que $g_p^{-1}(x)$ está en F_2, y como $D^\alpha(f\, g_p^{-1})(x) = D^\alpha f(g_p^{-1}(x)) = 0$ para cada α multiíndice, luego $X(f)$ está en $\mathcal{P}_{n_F}(E)$. Como un cubo H_p corta a 5^n cubos de esta forma, entonces dado x de $\mathbb{R}^n$, pertenece a lo más a 5^n cubos y por lo tanto a lo más a 5^n elementos $\{L_p\}_{p\in\mathbb{Z}^n}$, luego dado α un multiíndice y q seminorma continua en E :

$$q(D^\alpha(Xf)(x)) = q(D^\alpha(\sum_{p\in\mathbb{Z}^n} f\circ g_p^{-1})(x)) \leq \sum q(D^\alpha f\circ g_p^{-1}(x)) \leq$$

$$\leq 5^n \sup\{\, q(D^\alpha f(y)) \ : \ y\in L\}$$

de donde se deduce la continuidad al ser X lineal.

Sea h un elemento de $\mathcal{D}(H)$ con $h(x) > 0$ $x\in \mathring{H}$, tomemos $k = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} h\circ g_p^{-1}$, tendremos que k está en

$\mathcal{P}_n$ y es estrictamente positiva en todo punto de $\mathbb{R}^n$.

Sea $\varphi = \frac{h}{k} \in \mathcal{D}(H)$, tomamos ahora $Y(f) = \varphi . f$, con f en $\mathcal{E}_{F_2}(H,E)$, $Y: \mathcal{E}_{F_2}(H,E) \dashrightarrow \mathcal{D}(L,E)$, aplicando la fórmula de Leibnitz obtenemos que Y es continua.

Sea ahora $T: \mathcal{E}_{F_2}(H,E) \dashrightarrow \mathcal{E}_{F_2}(H,E)$ definida como $T(f)(x) = (X \circ Y)(f)(x)$, evidentemente es lineal y continua.

PROPOSICION 2. T es una proyección continua de $\mathcal{E}_{F_2}(H,E)$ en si mismo con $T(\mathcal{E}_{F_2}(H,E)) = \widetilde{\mathcal{F}}$.

Demostración: tendremos que $T(\mathcal{E}_{F_2}(H,E)) \subset \widetilde{\mathcal{F}}$. Sea g de $\mathcal{P}_{n_F}(E)$, g^* la restricción de g a H, entonces $X \circ Y(g^*) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} (g^* \varphi) \circ g_p^{-1} =$

$$= \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} (g \circ g_p^{-1})(\varphi \circ g_p^{-1})$$

al ser $g \circ g_p^{-1} = g$ y $k \circ g_p^{-1} = k$ por ser g y k periódicas respecto a cada variable, tendremos:

$$X \circ Y(g^*) = g \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} \varphi \circ g_p^{-1} = g \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} \frac{h \circ g_p^{-1}}{k \circ g_p^{-1}} = g \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} \frac{h \circ g_p^{-1}}{k} = g$$

luego $Tg^* = g^*$, por lo tanto T es una proyección y $T(\mathcal{E}_{F_2}(H,E)) = \widetilde{\mathcal{F}}$.

PROPOSICION 3. $\widetilde{\mathcal{F}}$ es un subespacio complementado de $\mathcal{E}_{F_2}(H,E)$.

Demostración: tendremos por la proposición 2. que $\mathcal{E}_{F_2}(H,E) = \widetilde{\mathcal{F}} \oplus_t \text{Ker } T$.

PROPOSICION 4. Si E es un espacio localmente completo, $\mathcal{P}_{n_F}(E)$ es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de S(E).

Demostración: por la proposición 3. al ser $\mathcal{E}_{F_2}(H,E)$ topológicamente isomorfo a S(E) por IV.1.1.

PROPOSICION 5. Si E es un espacio localmente completo, S(E) es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de $\mathcal{P}_{n_F}(E)$.

Demostración: sea Q un cubo, $Q \subset \mathrm{int}([0,2]^n \sim F_2)$

$Q = \{(x_1,\ldots,x_n) \;/\; 0 < a_j \leq x_j \leq b_j < 2\pi \quad j=1,2,\ldots,n\}$

Sea M un cubo con $M \subset \mathrm{int}(Q)$, llamemos Λ a la familia de los β de $\mathbb{Z}^n$ tales que

$\beta = (b_1,\ldots,b_n) \quad b_j \leq 0 \quad j=1,\ldots,n$

$|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_n| \leq j$

definimos Q_β y M_β, $Q_\beta = 2\pi\beta + Q \qquad M_\beta = 2\pi\beta + M$,

tendremos que $Q_\beta \subset L$ para $\beta \in \Lambda$. Definimos Z de $\mathcal{E}(M,E)$ en $\widetilde{\mathcal{F}}$, tomado Z_1 un operador de extensión lineal y continuo de $\mathcal{E}(M,E)$ a $\mathcal{D}(Q,E)$, definimos

$$Zf(x) = \begin{cases} Z_1 f(x-\beta\, 2\pi) & \text{si } x \in Q_\beta \qquad \beta \in \Lambda \\ 0 & \text{si } x \notin \cup Q_\beta \end{cases}$$

como si $\beta_1 \neq \beta_2$ entonces $Q_{\beta_1} \cap Q_{\beta_2} = \emptyset$, tendremos que la aplicación está bien definida, es lineal y es continua por serlo Z_1.

Sea $U: \widetilde{\mathcal{F}} \dashrightarrow \mathcal{E}(M,E)$ con $U(f)(x)=f(x)$ la aplicación está bien definida, es lineal y continua trivialmente. Tendremos que $U \circ Z$ es la identidad sobre $\mathcal{E}(M,E)$, luego $Z \circ U$ es una proyección continua en $\widetilde{\mathcal{F}}$ y $Z \circ U(\widetilde{\mathcal{F}}) = Z(\mathcal{E}(M,E))$ isomorfo a $\mathcal{E}(M,E)$, es un subespacio complementado de $\widetilde{\mathcal{F}}$. Al ser E localmente completo tendremos por el teorema I.2.3. que $\mathcal{E}(M,E) \simeq S(E)$.

TEOREMA 1. Sea F un cerrado en $[0,2]^n$ con $\operatorname{int}([0,2]^n \sim F) \neq \emptyset$. Sea E un espacio localmente completo, entonces $\mathcal{P}_{n_F}(E) \simeq S(E)$.

Demostración: consecuencia directa de las proposiciones 4. y 5. y el teorema I.1.1.

PROPOSICION 6. $\mathcal{M}_{n_F}(E)$ es un subespacio complementado de $\mathcal{P}_{n_F}(E)$.

Demostración: como en (27), tomado G_1 el subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{P}_{n_F}(E)$ formado por las funciones que son pares respecto a la primera componente, tiene como complemento topológico a $\mathcal{H}_1$ que son las funciones de $\mathcal{P}_{n_F}(E)$ que son impares respecto a la primera componente ya que $G_1 \cap \mathcal{H}_1 = \{0\}$ trivialmente, y si f está en $\mathcal{P}_{n_F}(E)$

$$g_1(x) = \frac{1}{2}(f(x_1,x_2,\dots,x_n) + f(-x_1,x_2,\dots,x_n)) \in G_1$$

$$h_1(x) = \frac{1}{2}(f(x_1,x_2,\dots,x_n) - f(-x_1,x_2,\dots,x_n)) \in \mathcal{H}_1$$

y $f = g_1 + h_1$, que la suma directa es topológica es trivial. Por inducción supongamos que para p entero positivo $1 \leq p < n$, G_p es un subespacio complementado de $\mathcal{P}_{n_F}(E)$, sea $\mathcal{H}_{p+1}$ el subespacio de G_p de todas las funciones que son impares respecto a la variable x_{p+1}, entonces G_p es la suma directa topológica de G_{p+1} y $\mathcal{H}_{p+1}$. Luego G_{p+1} es un subespacio complementado de $\mathcal{P}_{n_F}(E)$, tomando p=n, $G_n = \mathcal{M}_{n_F}(E)$ y se obtiene la conclusión.

PROPOSICION 7. $\mathcal{M}_{n_F}(E)$ es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de S(E) si E es un espacio localmente completo.

Demostración: por las proposiciones 6. y 4.

PROPOSICION 8. $\mathcal{M}_{n_F}(E)$ tiene un subespacio complementado isomorfo topológicamente a S(E).

Demostración: si llamamos G a la restricción de las funciones de $\mathcal{M}_{n_F}(E)$ al cubo H tendremos que si

$\tilde{F} = \{(\varepsilon_1 x_1, \varepsilon_2 x_2, \ldots, \varepsilon_n x_n) \;/\; (x_1,\ldots,x_n) \in F \;,\; \varepsilon_j = \pm 1 \;,\; j=1,2,\ldots,n\}$

construido $\tilde{F}_2$ como antes, entonces $\mathcal{M}_{n_F}(E) = \mathcal{M}_{n_{F_2}}(E)$,

y además tomando como en la proposición 5.

$Q \subset \operatorname{int}([0,\pi]^n \sim \tilde{F}_2)$ un cubo con interior no vacío, M un cubo con $\emptyset \neq \operatorname{int}(M) \subset M \subset \operatorname{int}(Q)$, y si $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ $\varepsilon_j = \pm 1$ $j=1,2,\ldots,n$, definimos en $[-\pi,\pi]^n$ los cubos

$Q_\varepsilon = \{(\varepsilon_1 x_1, \varepsilon_2 x_2, \ldots, \varepsilon_n x_n) \;:\; (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in Q\}$

para f en $\mathcal{E}(M,E)$ definimos

$(Z_2 f)(\varepsilon_1 x_1,\ldots,\varepsilon_n x_n) = (Z_1 f)(x_1,\ldots,x_n)$

si $(x_1,\ldots,x_n)$ está en Q y

$(Z_2 f)(y) = 0 \qquad \text{si} \quad y \in [-\pi,\pi]^n \sim \bigcup_\varepsilon Q_\varepsilon$

tendremos que $Z_2 f$ está en $\mathcal{D}([-\pi,\pi]^n, E)$ y es par, entonces si $\tilde{Z}: \mathcal{E}(M,E) \dashrightarrow \mathcal{M}_{n_F}(E)$ con $\tilde{Z}f$ restringida a $[-\pi,\pi]^n$ la función $Z_2 f$, tendremos que por ser Z_2 lineal y continua, lo es $\tilde{Z}$, además procediendo como en la proposición 5. obtenemos la conclusión.

TEOREMA 2. $\mathcal{M}_{n_F}(E)$ es isomorfo topológicamente a $S(E)$ si E es un espacio localmente completo y F un cerrado incluido en $[0,\pi]^n$ con $\mathrm{int}([0,\pi]^n \sim F) \neq \emptyset$

Demostración: por las proposiciones 7. y 8. y el teorema I.1.1.

COROLARIO 1. Sea E un espacio localmente completo, entonces $\mathcal{M}_n(E)$ es topológicamente isomorfo a $S(E)$.

Demostración: por el teorema 2. con $F = \emptyset$.

CAPITULO V

LOS ESPACIOS $\mathcal{D}_{+F}(\Omega,E)$ Y $\mathcal{D}^{+}_{\Gamma,F}(E)$

V.1. LOS ESPACIOS $\mathcal{D}_{+F}(\Omega,E)$

DEFINICION 1. Dado Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}$ y E un espacio, sea z un punto de Ω, denotamos por $\mathcal{D}^{z}_{+}(\Omega,E)$ al subespacio de $\mathcal{E}(\Omega,E)$ cuyas funciones tienen su soporte en $[z,+\infty[\cap\Omega$, dotado de la topología inducida. Llamaremos $\mathcal{D}_{+}(\Omega,E)$ al espacio vectorial $\bigcup_{z\in\Omega}\mathcal{D}^{z}_{+}(\Omega,E)$ dotado de la topología inductiva respecto a esta familia.

DEFINICION 2. Dado Ω un abierto de $\mathbb{R}$ no vacío y E un espacio, sea F un cerrado en Ω, denotamos por $\mathcal{D}_{+F}(\Omega,E)$ al subespacio de $\mathcal{D}_{+}(\Omega,E)$ formado por las funciones tales que se anulan ellas y sus derivadas de cualquier orden en F, dotado de la topología inducida por $\mathcal{D}_{+}(\Omega,E)$.

Valdivia en (18)(25) caracteriza los espacios $\mathcal{D}_{+F}(\Omega,\mathbb{K})$, Bonet en (1) los caracteriza si F es vacío y E localmente completo, nosotros vamos a hacerlo para el caso en que F es un cerrado arbitrario y E es un espacio localmente completo.

Si $F=\Omega$, tendremos que $\mathcal{D}_{+F}(\Omega,E) = \{0\}$, por lo tanto en lo que sigue supondremos que $F\neq\Omega$.

Consideremos $(A_r)_{r=1}^{\infty}$ los intervalos que constituyen un recubrimiento localmente finito de Ω definido en I.3., sea z_o de $\Omega\sim F$, y n_o con z_o en

$\mathrm{int}(A_{n_o})$, sean $z_1 < z_o < z_2$ verificando que $[z_1,z_2] \subset \mathrm{int}(A_{n_o}) \cap (\Omega \sim F)$. Llamaremos $\mathcal{B}_1$ a la sucesión de intervalos cerrados $\{A_n \cap]-\infty,z_o] \ / \ n=1,2,\ldots\}$ que escribiremos $(J_k)_{k=1}^{\infty}$, y $\mathcal{B}_2$ a la sucesión de intervalos cerrados $\{A_n \cap [z_o,+\infty[\ / \ n=1,2,\ldots\}$, que escribiremos $(I_k)_{k=1}^{\infty}$, llamaremos $I_o = [z_o,z_2]$, las dos familias son localmente finitas en Ω.

Sea $L_2(z_o)$ el subespacio de $\mathcal{E}(\Omega \cap]z_o,+\infty[)$ formado por las funciones f tales que existe $\lim\limits_{x\to z_o^+} f^{(n)}(x)$ para cada n entero no negativo y $f^{(n)}(x) = 0$ para cada entero no negativo y cada x de $\Omega \cap]z_o,+\infty[\cap F$. Dotamos a $L_2(z_o)$ de la topología definida por la siguiente familia de seminormas: si m es un entero positivo, q es una seminorma continua en E y $\mathbb{K}$ es un compacto de $\mathbb{R}$ incluido en $[z_o,+\infty[\cap \Omega$ entonces

$$Q(m,q,k)(f) = \sum_{n\leq m} \sup \{q(f^{(n)}(x)) \ / \ x \in K\}$$

para cada f de $L_2(z_o)$, donde $f^{(n)}(z_o)$ es el $\lim\limits_{x\to z_o^+} f^{(n)}(x)$.

Consideremos b real con $z_2 < b$ y $[z_1,b] \subset \Omega \sim F$. Por el teorema I.2.4. sabemos que existe un operador de extensión lineal y continuo $T_1: \mathcal{E}([z_o,z_2],E) \dashrightarrow \mathcal{D}([z_1,b],E)$.

PROPOSICION 1. La aplicación $T: L_2(z_o) \dashrightarrow \mathcal{D}_{+F}(\Omega,E)$ definida como: dado f de $L_2(z_o)$

$$Tf(x) = \begin{cases} 0 & x \in]-\infty,z_1[\cap \Omega \\ T_1 f(x) & x \in [z_1,z_o] \\ f(x) & x \in]z_o,+\infty[\cap \Omega \end{cases}$$

es lineal y un isomorfismo en.

Demostración: como Tf está en $\mathcal{D}_+^{z_1}(\Omega,E) \cap \mathcal{D}_{+F}(\Omega,E)$ se sigue que la aplicación es lineal y continua y que es abierta sobre la imagen, al ser inyectiva se deduce la conclusión.

Llamemos $G_2(z_o) = T(L_2(z_o))$ y llamemos $G_1(z_o)$ al subespacio de $\mathcal{D}_{+F}(\Omega,E)$ formado por aquellas funciones cuyo soporte está incluido en $]-\infty,z_o]\cap\Omega$ dotados ambos con la topología inducida.

PROPOSICION 2. $\mathcal{D}_{+F}(\Omega,E) = G_1(z_o) \oplus_t G_2(z_o)$

Demostración: es evidente que $G_1(z_o) \cap G_2(z_o) = \{0\}$, además dado f de $\mathcal{D}_{+F}(\Omega,E)$, sea

$g(x) = f(x) \quad x \in]z_o,+\infty[\cap \Omega$, evidentemente g está en $L_2(z_o)$ y f-Tg está en $G_1(z_o)$, luego es suma directa algebraica.

Consideremos ahora el caso en que $F=\emptyset$, tendremos que $\mathcal{D}_+(\Omega,E) = \check{G}_1(z_o) \oplus_a \check{G}_2(z_o)$. Sea z de Ω, y $\{f_d \quad d\in D,\leq\}$ una red convergente a f en $\mathcal{D}_+^z(\Omega,E)$, tendremos que si $g_d(x) = f_d(x)$ para x en $]z_o,+\infty[\cap\Omega$, evidentemente $\{g_d : d\in D,\leq\}$ converge a g en $\check{L}_2(z_o)$, luego Tg_d converge a Tg por lo que la proyección es continua, de donde se deduce la afirmación si $F = \emptyset$.

Para $F \neq \emptyset$ obtendremos la conclusión porque $G_i(z_o) = \check{G}_i(z_o) \cap \mathcal{D}_{+F}(\Omega,E) \quad i=1,2.$

Sea $C_1 = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \;/\; int(I_n) \subset \Omega \sim F\}$

y $C_2 = \{n \in \mathbb{N} \sim \{0\} \;/\; int(I_n) \cap (\Omega \sim F) \neq \emptyset,\; int(I_n) \cap F \neq \emptyset\}$

tendremos que $C_1 \cup C_2$ no es vacío porque al menos 0 está en C_1.

PROPOSICION 3. Si E es un espacio localmente completo $G_2(z_o)$ es topológicamente isomorfo a un subespacio complementado de $S(E)^{\text{card}(C_1 \cup C_2)}$.

Demostración: denotaremos por $\mathcal{H}$ al subespacio de $\mathcal{E}(I_o,E)$ formado por aquellas funciones que se anulan ellas y sus derivadas de cualquier orden en z_2. Por IV.1. 2. $\mathcal{H} \simeq S(E)$. Definimos $R = \mathcal{H} \times \prod_{j\in C_1\sim\{0\}} \mathcal{D}(I_j,E) \times \prod_{j\in C_2} \mathcal{B}_o(\mathring{I}_j \cap (\Omega\sim F),E)$

si C_1 ó C_2 es vacío tomamos el elemento $\{0\}$. Sea $A:R \longrightarrow L_2$ definida como

$$A(f_o,(f_j)_{j\in C_1\sim\{0\}},(g_j)_{j\in C_2}) = f_o + \sum f_j + \sum g_j$$

por ser la familia $(I_k)_{k=0}^{\infty}$ localmente finita, A está bien definida y es continua.

Consideremos ahora $(\mu_k)_{k=0}^{\infty}$ definida como sigue: sea φ_o en $\mathcal{D}([z_1,z_2])$ con $\varphi_o(x) > 0$ si x está en $]z_1,z_2[$, sea φ_k de $\mathcal{D}(I_k)$ con $\varphi_k(x) > 0$ si x está en $\text{int}(I_k)$ k=1,2,... , definimos

$$\mu_k(x) = \frac{\varphi_k(x)}{\varphi_o(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)} \qquad k=0,1,\ldots \qquad x \in [z_o,+\infty[$$

Sea B definida de $L_2(z_o)$ en R como

$Bf = (f\cdot\mu_o,(f\cdot\mu_j)_{j\in C_1\sim\{0\}},(f\cdot\mu_j)_{j\in C_2})$, esta es una aplicación bien definida y lineal que al ser continua componente a componente, es continua, además es inyectiva. $A\circ B$ es la identidad en $L_2(z_o)$, luego por el teo rema I.2.8. tendremos que B.A es una proyección continua en R y $B(L_2(z_o))$ es isomorfo topológicamente a $L_2(z_o)$ y es un subespacio complementado de R. La conclusión se deduce porque por I.2.5. y por II.2.4. tendremos que R es isomorfo topológicamente a $S(E)^{\mathrm{card}(C_1 \cup C_2)}$ y por la proposición 1. $L_2(z_o)$ es topológicamente isomorfo a $G_2(z_o)$.

Si $C_1 \cup C_2$ es finito tendremos que $S(E)^{\mathrm{card}(C_1 \cup C_2)} \simeq S(E)$. Si $C_1 \cup C_2$ es infinito numerable, como $(I_k)_{k=0}^{\infty}$ se cortan a lo sumo 4 elementos, podremos extraer una sucesión de términos distintos $(j_p)_{p=1}^{\infty}$ en $C_1 \cup C_2$ tal que I_{j_p} es disjunto con I_{j_r} si $p \neq r$. Determinamos intervalos cerrados $(M_p)_{p=1}^{\infty}$ y $(H_p)_{p=1}^{\infty}$ tales que

$\emptyset \neq \mathrm{int}(H_p) \subset H_p \subset \mathrm{int}(M_p) \subset M_p \subset \mathrm{int}(I_{j_p}) \cap (\Omega \sim F)$

para p=1,2,... Sea $T_p : \mathcal{E}(H_p,E) \dashrightarrow \mathcal{D}(M_p,E)$ un operador de extensión lineal y continuo.

PROPOSICION 4. $G_2(z_o)$ tiene un subespacio complementado isomorfo a $S(E)^{\mathrm{card}(C_1 \cup C_2)}$, si E es un espacio localmente completo.

Demostración: si $\mathrm{card}(C_1 \cup C_2)$ es finito, tomemos I y J intervalos cerrados en $\mathbb{R}$ con $\emptyset \neq \mathrm{int}(J) \subset J \subset \mathrm{int}(I) \subset I \subset]z_o,+\infty[\cap (\Omega \sim F)$. Sea $\alpha : \mathcal{E}(J,E) \dashrightarrow \mathcal{D}(I,E)$ operador de extensión lineal y continuo, considerado $\alpha : \mathcal{E}(J,E) \dashrightarrow L_2(z_o)$ será un isomorfismo en y $\alpha(\mathcal{E}(J,E))$ tendrá como complemento topológico el subespacio de $L_2(z_o)$ formado por todas las funciones que se anulan en J. Como por el teorema I.2.3. si E es localmente completo $S(E) \simeq \mathcal{E}(J,E) \simeq \simeq \alpha(\mathcal{E}(J,E))$, se deduce la conclusión.

Si $card(C_1 \cup C_2)$ es infinito construyamos $U: \prod_{p=1}^{\infty} \mathcal{E}(H_p,E) \longrightarrow L_2(z_o)$ definido como $U((f_p)) = \sum_{p=1}^{\infty} T_p f_p$, y $V: L_2(z_o) \longrightarrow \prod_{p=1}^{\infty} \mathcal{E}(H_p,E)$ tal que $Vf = (f|_{H_p})_{p=1}^{\infty}$. U es trivialmente lineal y por definición de los H_p será continua. V es continua componente a componente luego es continua y lineal, como $\prod_{p=1}^{\infty} \mathcal{E}(H_p,E) \simeq S(E)^N$, la conclusión se deduce porque $V \circ U$ es la identidad, luego $U \circ V$ es una proyección continua en $L_2(z_o)$, aplicando el teorema I.2.8. se obtiene que $S(E)^N$ es isomorfo a un subespacio complementado de $L_2(z_o)$

TEOREMA 1. Si E es un espacio localmente completo, $G_2(z_o)$ es topológicamente isomorfo a $S(E)^{card(C_1 \cup C_2)}$.

Demostración: por ser $G_2(z_o) \simeq L_2(z_o)$, aplicando las proposiciones 4. y 3. y el teorema I.1.3.

Diremos que un abierto no vacío Ω incluido en $\mathbb{R}$, es conexo por la izquierda si existe x en Ω tal que $]-\infty,x] \cap \Omega$ es un conexo.

PROPOSICION 5. Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}$ conexo por la izquierda y E un espacio localmente completo.

a) Si se puede escoger z_o de modo que

$]-\infty, z_o] \cap \Omega$ sea conexo por la izquierda entonces $G_1(z_o)$ es isomorfo topológicamente a $\bigoplus_{i\in W_1 \cup W_2} S_i(E)$, siendo $S_i(E)=S(E)$ para cada i de $W_1 \cup W_2$, donde

$W_1 = \{n \in \mathbb{N} \ / \ int(J_n) \subset \Omega \sim F\}$

$W_2 = \{n \in \mathbb{N} \ / \ int(J_n) \cap (\Omega \sim F) \neq \emptyset,$

$int(J_n) \cap F \neq \emptyset\}$

b) Si para todo z_o de $\Omega \sim F$, $]-\infty, z_o] \cap \Omega$ es no conexo, entonces $G_1(z_o)$ es isomorfo topológicamente a $\prod_{i\in W_1 \cup W_2} S_i(E)$, con $S_i(E) = S(E)$ para cada i de $W_1 \cup W_2$, siendo W_1 y W_2 los mismos de a).

Demostración: sea S el espacio $\bigoplus_{i\in W_1} \mathcal{D}(J_i, E)$ x

x $\bigoplus_{k\in W_2} \mathcal{B}_o(int(J_k) \cap (\Omega \sim F), E)$, la aplicación $X: S \longrightarrow G_1(z_o)$ tal que

$X((f_i)_{i\in W_1}, (g_k)_{k\in W_2}) = \sum f_i + \sum g_k$, está bien definida, es obviamente lineal y es continua por ser la familia $(J_k)_{k=1}^{\infty}$ localmente finita en Ω.

Consideremos $\alpha_k \in \mathcal{D}(J_k)$ tal que $\alpha_k(x) > 0$ para x en $int(J_k)$ $k=1,2,\ldots$ definimos

$$\nu_k(x) = \frac{\alpha_k(x)}{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)} \qquad x < z_o, \text{ tomaremos si } z_o \in J_k$$

$\nu_k(z_o) = 1$. Llamamos $Y: G_1(z_o) \longrightarrow S$ la aplicación tal que $Yf = ((f\,\nu_i)_{i\in W_1}, (f\,\nu_k)_{k\in W_2})$, Y es lineal e inyectiva. Su continuidad se deduce del hecho de que la aplicación $\tilde{Y}: \mathcal{D}_+(\Omega,E) \longrightarrow \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{D}(J_k,E)$ tal que $\tilde{Y}(f) = (f\,\nu_k)_{k=1}^{\infty}$, de la cual Y es restricción, es continua. Como $X\circ Y$ es la identidad de $G_1(z_o)$, tendremos que $Y\circ X$ es una proyección continua en S ya que $Y\circ X(S) = Y(G_1(z_o))$ es un subespacio complementado de S isomorfo topológicamente a $G_1(z_o)$, por el teorema I.2.8., como $S \simeq S(E)^{\mathrm{card}(W_1 \cup W_2)}$, la conclusión se deduce.

Finalmente para probar que $G_1(z_o)$ tiene un subespacio complementado topológicamente isomorfo a $S(E)^{\mathrm{card}(W_1 \cup W_2)}$, basta distinguir, como se hizo en la proposición 4., que este cardinal sea finito o infinito y definir las aplicaciones tal como en la proposición 4., cambiando productos por sumas directas, los (I_p) por los (J_k) y $L_2(z_o)$ por $G_1(z_o)$.

b) Sea ahora S_1 el espacio $\prod_{i\in W_1} \mathcal{D}(J_i,E) \times \prod_{k\in W_2} \mathcal{B}_o(\mathrm{int}(J_k)\cap(\Omega \sim F),E)$, definimos la aplicación $X_1 : S_1 \longrightarrow G_1(z_o)$ tal que $X_1((f_i)_{i\in W_1},(g_k)_{k\in W_2}) = \sum f_i + \sum g_k$, es lineal y está bien definida por ser localmente finita la familia $(J_k)_{k=1}^{\infty}$. Su continuidad se deduce observando que por ser Ω conexo por la izquierda existirá un u de Ω tal que $]-\infty,u]\cap\Omega$ es conexo, de donde para cada z_o de $\Omega \sim F$ tendremos $u < z_o$, luego $G_1(z_o)$ está incluido en $\mathcal{D}^u_+(\Omega,E)$ y tiene su topología inducida, repitiendo ahora el proceso seguido en a), cambiando la suma directa por el producto, se obtiene la conclusión.

TEOREMA 2. Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}$ conexo por la izquierda, E un espacio localmente completo, entonces, conservando las notaciones anteriores, se cumplen las siguientes propiedades:

a) Si existe z_o de $\Omega \sim F$ tal que $]-\infty, z_o] \cap \Omega$ es conexo, entonces $\mathcal{D}_{+F}(\Omega, E)$ es topológicamente isomorfo a $S(E)^{(\mathrm{card}(W_1 \cup W_2))} \times S(E)^{\mathrm{card}(C_1 \cup C_2)}$.

b) Si para cada z_o de $\Omega \sim F$, $]-\infty, z_o] \cap \Omega$ no es conexo, entonces $\mathcal{D}_{+F}(\Omega, E)$ es isomorfo topológicamente a $S(E)^{\mathrm{card}(W_1 \cup W_2)} \times S(E)^{\mathrm{card}(C_1 \cup C_2)}$.

Si Ω es un abierto no vacío de $\mathbb{R}$ conexo por la izquierda entonces, en virtud del teorema anterior, obtenemos que si se da el caso a), $\mathcal{D}_{+F}(\Omega, E)$ puede ser isomorfo a $S(E)^{(N)}$, $S(E)^{(N)} \times S^N(E)$, $S^N(E)$ y $S(E)$, según sean finitos o no los cardinales de $W_1 \cup W_2$ y de $C_1 \cup C_2$. Análogamente, en el caso b), $\mathcal{D}_{+F}(\Omega, E)$ puede ser isomorfo topológicamente a $S(E)$ y $S(E)^N$.

COROLARIO 1. Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}$ conexo por la izquierda y E un espacio localmente completo, entonces $\mathcal{D}_+(\Omega, E)$ es isomorfo topológicamente a $S(E)^N \times S(E)^{(N)}$.

Demostración: como F es vacío, estamos en el caso a) del teorema 2. con $W_1 \cup W_2$ y $C_1 \cup C_2$ infinitos.

Supongamos ahora que Ω no es conexo por la izquierda. Determinado z_o de Ω, podemos escoger $x_o < z_o$ con x_o en $\partial\Omega$ tal que $]x_o,z_o] \subset \Omega$. Hecho esto, podemos extraer una sucesión de elementos de $\partial\Omega$ estrictamente decreciente $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, tal que converge al ínfimo de Ω en la recta real ampliada y tal que cumple que si $\Omega_o =]x_o,z_o]$, $\emptyset \neq \Omega_n =]x_{2n},x_{2(n-1)}[\cap \Omega$ $n=1,2,\ldots$ entonces $(\Omega_n)_{n=1}^{\infty}$ son disjuntos dos a dos y $\Omega \cap]-\infty,z_o] = \bigcup_{n=o}^{\infty} \Omega_n$. Llamemos $W_n^1 = \{k \in \mathbb{N} \ / \ \text{int}(J_k) \subset \Omega_k \sim F\}$, y

$W_n^2 = \{k \in \mathbb{N} \ / \ J_k \subset \Omega_k \quad \text{int}(J_k) \cap (\Omega_k \sim F) \neq \emptyset$, $\text{int}(J_k) \cap F \neq \emptyset\}$, por construcción $W_o^1 \cup W_o^2 \neq \emptyset$. Sea $B = \{n \in \mathbb{N} \ / \ W_n^1 \cup W_n^2 \neq \emptyset\}$.

PROPOSICION 6. Si Ω es un abierto no vacío de $\mathbb{R}$ no conexo por la izquierda, entonces $G_1(z_o)$ es topológicamente isomorfo a

$$\bigoplus_{n\in B} \prod_{i\in W_n^1 \cup W_n^2} S_i(E), \text{ con } S_i(E) = S(E)$$

para cada i de $W_n^1 \cup W_n^2$ y cada n de B.

Demostración: sea H el espacio

$$H = \bigoplus_{n\in B} \Big(\prod_{i\in W_n^1} \mathcal{D}(J_i,E) \times \prod_{h\in W_n^2} \mathcal{B}_o(\text{int}(J_h) \cap (\Omega_h \sim F),E)\Big)$$

la aplicación $V: H \longrightarrow G_1(z_o)$ tal que

$$V(((f_i)_{i\in W_n^1}, (g_h)_{h\in W_n^2})_{n\in B}) = \sum_{n\in B} \Big(\sum_{i\in W_n^1} f_i + \sum_{h\in W_n^2} g_h\Big)$$

es lineal, está bien definida y es continua por ser la familia $(J_k)_{k=1}^{\infty}$ localmente finita en Ω. Considerada

$(\nu_k)_{k=1}^{\infty}$ la partición definida en la prueba de la proposición 5., entonces la aplicación $W: G_1(z_o) \longrightarrow H$ tal que $W(f) = ((f\nu_i)_{i\in W_n^1}, (f\nu_h)_{h\in W_n^2})_{n\in B}$ es lineal e inyectiva, esta aplicación es continua, como se comprueba demostrando que la aplicación

$$W^2 : \mathcal{D}_+(\Omega, E) \longrightarrow \bigoplus_{n=o}^{\infty} \prod_{i\in W_n} \mathcal{D}(J_i, E), \text{ siendo}$$

$$W^2 f = ((f\nu_i)_{i\in W_n})_{n=1}^{\infty} \quad \text{con } W_n = \{k \in \mathbb{N} \ / \ J_k \subset \Omega_n\}$$

y W la restricción de W^2. Finalmente $V\circ W$ es la identidad sobre $G_1(z_o)$ luego $W\circ V$ es una proyección en H continua cuya imagen $W\circ V(H) = W(G_1(z_o))$ es isomorfa topológicamente a $G_1(z_o)$ y es un subespacio complementado de H, aplicando I.2.5. y II.2.4. obtendremos que H es isomorfo topológicamente a $\bigoplus_{n\in B} \prod_{i\in W_n^1 \cup W_n^2} S_i(E)$.

PROPOSICION 7. Si Ω es un abierto no vacío de $\mathbb{R}$ no conexo por la izquierda , entonces $\bigoplus_{n\in B} \prod_{i\in W_n^1 \cup W_n^2} S_i(E)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $G_1(z_o)$.

Demostración: procediendo como en la proposición 4., distinguiendo los siguientes casos:

a.1. B es finito y $W_n^1 \cup W_n^2$ es finito para cada n de B. En este caso basta probar que S(E) es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de $G_1(z_o)$.

a.2. B es finito y al menos para algún n de B, $W_n^1 \cup W_n^2$ es infinito. En este caso obteniendo una familia numerable de cubos disjuntos conveniente, es fácil ver que $S(E)^N$ es topológicamente isomorfo a un subespacio complementado de $G_1(z_o)$.

b.1. B es infinito y $W_n^1 \cup W_n^2$ es finito para cada n de B. Se prueba que $S(E)^{(N)}$ es topológicamente isomorfo a un subespacio complementado de $G_1(z_o)$.

b.2. B es infinito y $W_n^1 \cup W_n^2$ es finito para cada n de B, salvo en un número finito. Este caso se puede reducir a b.1. sin más que trasladar z_o, tomando un nuevo $\tilde{z}_o$ de $\Omega \sim F$ con $\tilde{z}_o < z_o$ y $G_1(\tilde{z}_o)$ en el caso b.1., no influye en la representación de $\mathcal{D}_{+F}(\Omega, E)$, puesto que en este caso $G_2(\tilde{z}_o) \simeq S(E)^N$.

b.3. B es infinito y $W_n^1 \cup W_n^2$ es infinito para un subconjunto de B infinito. En este caso se prueba que $(S(E)^N)^{(N)}$ es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de $G_1(z_o)$.

TEOREMA 3. Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}$ no conexo por la izquierda y E un espacio localmente completo, conservando las anteriores notaciones, se tiene que $\mathcal{D}_{+F}(\Omega, E)$ es isomorfo topológicamente a

$$\bigoplus_{n \in B} \Big(\prod_{i \in W_n^1 \cup W_n^2} S_i(E) \Big) \times \prod_{j \in C_1 \cup C_2} S_j(E)$$

donde $S_i(E) = S_j(E) = S(E)$ para cada i de $W_n^1 \cup W_n^2$ y n en B, y cada j de $C_1 \cup C_2$.

Demostración: se sigue del teorema 1. y las proposiciones 2., 6., y 7., eligiendo z_o de $\Omega \sim F$ para que el caso b.2. no se dé.

Elegido convenientemente z_o en Ω para que no se dé el caso b.2., pueden obtenerse las siguientes representaciones:

1. $C_1 \cup C_2$ finito, B finito, $W_n^1 \cup W_n^2$ finito para cada n de B

$\mathcal{D}_{+F}(\Omega,E) \simeq S(E)$

2. $C_1 \cup C_2$ finito, B finito, al menos para un n de B $W_n^1 \cup W_n^2$ es infinito

$\mathcal{D}_{+F}(\Omega,E) \simeq S(E)^N$

3. $C_1 \cup C_2$ finito, B infinito, $W_n^1 \cup W_n^2$ finito para cada n de B

$\mathcal{D}_{+F}(\Omega,E) \simeq S(E)^{(N)}$

4. $C_1 \cup C_2$ finito, B infinito, $W_n^1 \cup W_n^2$ infinito para un subconjunto infinito de B

$\mathcal{D}_{+F}(\Omega,E) \simeq (S(E)^N)^{(N)}$

5. $C_1 \cup C_2$ infinito, B finito, $W_n^1 \cup W_n^2$ finito para cada n de B

$\mathcal{D}_{+F}(\Omega,E) \simeq S(E)^N$

6. $C_1 \cup C_2$ infinito, B finito, $W_n^1 \cup W_n^2$ infinito al menos para un n de B

$\mathcal{D}_{+F}(\Omega,E) \simeq S(E)^N$

7. $C_1 \cup C_2$ infinito, B infinito, $W_n^1 \cup W_n^2$ finito para cada n de B

$\mathcal{D}_{+F}(\Omega,E) \simeq S(E)^{(N)} \times S(E)^N$

8. $C_1 \cup C_2$ infinito, B infinito, $W_n^1 \cup W_n^2$ infinito para un subconjunto infinito de B

$\mathcal{D}_{+F}(\Omega,E) \simeq (S(E)^N)^{(N)}$

COROLARIO 2. $\mathcal{D}_{+F}(\Omega,E) \simeq S(E)$ si y sólo si $\overline{\Omega \sim F}^{\Omega}$ es compacto.

Demostración: $\Omega \sim F$ es cortado por un número finito de (A_n) si y sólo si $\overline{\Omega \sim F}^{\Omega}$ es compacto.

COROLARIO 3. Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}$ no conexo por la izquierda y E un espacio localmente completo. El espacio $\mathcal{D}_{+}(\Omega,E)$ es topológicamente isomorfo a $\left(S(E)^{N}\right)^{(N)}$.

Demostración: como $F = \emptyset$, estamos en el caso 8.

Para el caso escalar estos resultados se deben a Valdivia (18). Si $F = \emptyset$, Bonet lo ha obtenido para E localmente completo en (25).

Un estudio análogo podría hacerse para el espacio $\mathcal{D}_{-}(\Omega,E)$ formado por las funciones f de $\mathcal{E}(\Omega,E)$ tales que $sop(f) \subset]-\infty, z_o] \cap \Omega$ para algún z_o de Ω.

V.2. LOS ESPACIOS $\mathcal{D}^{+}_{\Gamma,F}(E)$ Y $\mathcal{D}^{-}_{\Gamma,F}(E)$

DEFINICION 1. Consideremos un cono Γ cerrado de $\mathbb{R}^n$ con vértice en 0 e $\mathrm{int}(\Gamma) \neq \emptyset$, F un cerrado en $\mathbb{R}^n$, con $F \neq \mathbb{R}^n$ y E un espacio. Llamaremos $\mathcal{D}^{+}_{\Gamma,F}(E)$ al espacio vectorial de las funciones definidas de $\mathbb{R}^n$ en E que admiten derivadas continuas de cualquier orden y que se anulan ellas y todas sus derivadas en F y que tienen su soporte contenido en algún trasladado del cono Γ. A $\mathcal{D}^{+}_{\Gamma,\emptyset}(E)$ se le denota $\mathcal{D}^{+}_{\Gamma}(E)$. Dado z_o de $\mathbb{R}^n$, si llamamos

$\mathcal{D}^{+\,z_o}_{\Gamma,F}(E)$ al subespacio de $\mathcal{D}^{+}_{\Gamma,F}(E)$ formado por las funciones que tienen el soporte contenido en $z_o+\Gamma$, dotado de la topología de la convergencia uniforme de las funciones y sus derivadas sobre los compactos, un sistema fundamental de seminorma en $\mathcal{D}^{+\,z_o}_{\Gamma,F}(E)$ es

$$q_{m,K}(f) = \sup\left\{ q(D^{\alpha}f(x)) \ : \ |\alpha| \leq m, \quad x \in K\right\}$$

al variar q en las seminormas continuas en E, m en los enteros no negativos y K en los compactos contenidos en $z_o+\Gamma$. Tomaremos $\mathcal{D}^{+}_{\Gamma,F}(E)$ como el límite inductivo de la familia $\{\mathcal{D}^{+\,z}_{\Gamma,F}(E) \ : \ z \in \mathbb{R}^n\}$.

Se puede elegir una sucesión $(z_i)_{i=1}^{\infty}$ de puntos de $\mathbb{R}^n$ distintos dos a dos de manera que $\lim_{i \to +\infty} \|z_i\| = +\infty$ y $(z_i+\Gamma)_{i=1}^{\infty}$ sea una sucesión creciente de conos de tal forma que dado un punto z de $\mathbb{R}^n$, exista un i entero positivo verificando que $z+\Gamma \subset z_i+\Gamma$ para ello basta tomar los z_i convenientemente sobre un eje del cono, $\mathcal{D}^{+}_{\Gamma,F}(E)$ resulta ser el límite inductivo estricto de $(\mathcal{D}^{+\,z_i}_{\Gamma,F}(E))_{i=1}^{\infty}$.

DEFINICION 2. Llamamos $\mathcal{D}^{-}_{\Gamma,F}(E)$ al espacio $\mathcal{D}^{+}_{\Gamma_1,F}(E)$ siendo Γ_1 el cono simétrico a Γ.

Valdivia en (19), para valores escalares y Bonet en (1), estudian $\mathcal{D}^{+}_{\Gamma}(E)$ y prueban que es isomorfo topológicamente a $(S(E)^N)^{(N)}$. El profesor Valdivia en (25) estudia el espacio $\mathcal{D}^{+}_{\Gamma,F}(E)$ cuando $E = \mathbb{C}$ el cuerpo de los complejos y obtiene que es un espacio isomorfo topológicamente a uno de los siguientes espacios: S, $S^{(N)}$, S^N, $S^{(N)} x\, S^N$, $(S^N)^{(N)}$.

Nosotros cuando al espacio E se le exija sólo ser localmente completo, estudiamos los espacios $\mathcal{D}^{+}_{\Gamma,F}(E)$, clasificándolos en cinco tipos, cuatro de ellos isomorfos topológicamente a uno de los siguientes espacios: $S(E)$, $S(E)^{(N)}$, $S(E)^N$, $(S(E)^N)^{(N)}$, y un quinto tipo de espacio, que en general no es isomorfo a ninguno de los anteriores, que para determinados cerrados F obtenemos que es topológicamente isomorfo a $S(E)^{(N)} x\, S(E)^N$. Cuando a E se le exigen condiciones para que $S(E)^{(N)} x\, S(E)^N$ tenga la propiedad de complementación, por ejemplo si E es un espacio de Fréchet nuclear por el teorema I.1.4., entonces este tipo de espacios, sólo parcialmente representados para E localmente completo, resulta siempre isomorfo topológicamente a $S(E)^N x\, S(E)^{(N)}$.

Utilizaremos una generalización de la técnica de Valdivia (19). Consideremos las familias de cubos $\mathcal{A} = \{A_r \;:\; r=1,2,\dots\}$ y $\mathcal{B} = \{B_r \;:\; r=1,2,\dots\}$ definidas en I.3. para el caso en que el abierto sea todo $\mathbb{R}^n$. Elijamos ahora una sucesión de puntos $(z_m)_{m=1}^{\infty}$ de $\mathbb{R}^n$ con $z_1 = 0$, de manera que $\Gamma_m = z_m + \Gamma$ formen una sucesión creciente de conos verificando $\bigcup_{m=1}^{\infty} \Gamma_m = \mathbb{R}^n$ y que $\Gamma_{m+1} \sim \Gamma_m$ contenga infinitos cubos de la familia $\mathcal{A}$ para m=1,2,... y además que todos los cubos de que corten a Γ_m estén incluidos en Γ_{m+1} para m=1,2,...

Considerado F cerrado propio en $\mathbb{R}^n$, llamando $\Omega = \mathbb{R}^n \sim F \neq \emptyset$, llamaremos:

$J_1 = \{r \in \mathbb{N} \ / \ A_r \subset \Omega \cap \Gamma_1\}$

$I_1 = \{r \in \mathbb{N} \ / \ A_r \cap \Omega \cap \Gamma_1 \neq \emptyset \text{ y } A_r \cap F \cap \Gamma_1 \neq \emptyset\}$

para m $\geqslant$2 definimos:

$J_m = \{r \in \mathbb{N} \ / \ A_r \subset \Omega \cap (\Gamma_m \sim \Gamma_{m-1})\}$

$I_m = \{r \in \mathbb{N} \ / \ A_r \cap \Omega \cap (\Gamma_m \sim \Gamma_{m-1}) \neq \emptyset$ y

$A_r \cap F \cap (\Gamma_m \sim \Gamma_{m-1}) \neq \emptyset\}$

Llamemos $G_m = \prod_{j \in J_m} \mathcal{D}(A_j, E) \times \prod_{i \in I_m} \mathcal{B}_o(\mathrm{int}(A_i) \cap \Omega, E)$

en el caso en que $J_m = \emptyset$ ó $I_m = \emptyset$, tomaremos

$\prod_{j \in J_m} \mathcal{D}(A_j, E) = \{0\}$ ó $\prod_{i \in I_m} \mathcal{B}_o(\mathrm{int}(A_i) \cap \Omega, E) = \{0\}$

Llamemos μ al subconjunto de los enteros positivos con $J_m \cup I_m \neq \emptyset$, por ser $F \neq \mathbb{R}^n$ tendremos que $\mu \neq \emptyset$.

Llamemos $G = \bigoplus_{m \in \mu} G_m$ suma directa topológica, dada f_m de G_m, $f_m = ((g_j^m)_{j \in J_m}, (h_i^m)_{i \in I_m})_{m \in \mu}$, definimos

$X_m : G_m \dashrightarrow \mathcal{D}^+_{\Gamma, F}(E)$ como $X_m(f_m) = \sum_{j \in J_m} g_j^m + \sum_{i \in I_m} h_i^m$

como la familia $\mathcal{A}$ es localmente finita, la aplicación está bien definida, definamos ahora

$X : G \dashrightarrow \mathcal{D}^+_{\Gamma, F}(E)$ como $X((f_m)) = \sum_{m \in \mu} X_m(f_m) =$

$$= \sum_{m\in\mu} \Big(\sum_{j\in J_m} g_j^m + \sum_{i\in I_m} h_i^m\Big).$$

PROPOSICION 1. La aplicación X es lineal y continua.

Demostración: que está bien definida y que es lineal es trivial, para probar que es continua, basta comprobar que X_m lo es para m en μ.

Tendremos que $X_m(G_m) \subset \mathcal{D}^{+z_m}_{\Gamma,F}(E)$ y en este espacio coinciden las topologías de $\mathcal{D}^{+}_{\Gamma,F}(E)$ y de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n,E)$. Tomado K un compacto de $\mathbb{R}^n$ y q seminorma continua en E, tendremos que por ser la familia $(A_r)_{r=1}^{\infty}$ localmente finita en $\mathbb{R}^n$, existe un subconjunto finito $L_m^1 \subset J_m$ y otro conjunto finito $L_m^2 \subset I_m$ cumpliendo que si r no está en $L_m^1 \cup L_m^2$ entonces $A_r \cap K \cap \Omega = \emptyset$, luego dado α multiíndice

$$\sup_{x\in K} q\Big(D^{\alpha}\Big(\sum_{j\in J_m} g_j^m + \sum_{i\in I_m} h_i^m\Big)(x)\Big) = \sup_{x\in K} q\Big(\sum_{j\in L_m^1} D^{\alpha} g_j^m(x) +$$

$$+ \sum_{i\in L_m^2} D^{\alpha} h_i^m(x)\Big) \leq \sup\Big\{\sum_{j\in L_m^1} q(D^{\alpha} g_j^m(x)) + \sum_{i\in L_m^2} q(D^{\alpha} h_i^m(x)) \;:\; x\in K\Big\}$$

que es una seminorma continua en G_m.

Consideremos ahora $(\mu_r)_{r=1}^{\infty}$ la partición de la unidad de $\mathbb{R}^n$ definida en I.3. asociade a las familias $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, tendremos $\mu_r = \dfrac{\varphi\circ\varphi_r^{-1}}{\sum_{r=1}^{\infty} \varphi\circ\varphi_r^{-1}}$

siendo φ y φ_r las definidas en I.3. Definamos

$Y_m: \mathcal{D}^{+z_m}_{\Gamma,F}(E) \longrightarrow G_m$, para m en μ como

$Y_m(f) = ((f\cdot\mu_j)_{j\in J_m}, (f\cdot\mu_i)_{i\in I_m})$, evidentemente la

aplicación está bien definida. Definamos ahora
Y: $\mathcal{D}^{+}_{\Gamma,F}(E) \dashrightarrow G$ como $Y(f) = (Y_m(f))_{m\in\mu} =$
$= ((f\cdot\mu_j)_{j\in J_m}, (f\cdot\mu_i)_{i\in I_m})_{m\in\mu}$

PROPOSICION 2. La aplicación Y es lineal y continua.

Demostración: que es lineal resulta trivial, está bien definida porque dada f de $\mathcal{D}^{+}_{\Gamma,F}(E)$, existe m_o entero positivo con sop $f \subset \Gamma_{m_o}$ luego si m está en μ con $m > m_o$, $Y_m(f) = 0$. Para probar la continuidad de Y basta probar que para todo m de μ Y_m es continua, pero por ser G_m un producto, esto será cierto si

$$p_j \circ Y_m : \mathcal{D}^{+\,Z_m}_{\Gamma,F}(E) \dashrightarrow \mathcal{D}(A_j, E) \qquad j \in J_m$$

$$p_i \circ Y_m : \mathcal{D}^{+\,Z_m}_{\Gamma,F}(E) \dashrightarrow \mathcal{B}_o(\mathrm{int}(A_i) \cap \Omega, E) \qquad i \in I_m$$

son continuas, siendo p_i y p_j las proyecciones, pero $p_j \circ Y_m(f) = f\cdot\mu_j$, $p_i \circ Y_m(f) = f\cdot\mu_i$ son continuas, aplicando la fórmula de Leibnitz, existe M positiva con

$$\sup_{x\in A_i} q(D^{\alpha}(f\cdot\mu_i)(x)) \leq M \sup_{|\beta|\leq|\alpha|} \sup_{x\in A_i} q(D^{\beta}f(x)) \qquad i \in I_m$$

para toda f de $\mathcal{D}^{+\,Z_m}_{\Gamma,F}(E)$, análogamente para j en J_m.

PROPOSICION 3. Si E es un espacio localmente completo, $\mathcal{D}^{+}_{\Gamma,F}(E)$ es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de

$$\bigoplus_{m\in\mu} S(E)^{\mathrm{card}(I_m \cup J_m)}.$$

Demostración: sea f de $\mathcal{D}^{+}_{\Gamma,F}(E)$, se cumple que

$$(X\circ Y)(f) = X((f\cdot\mu_j)_{j\in J_m}, (f\cdot\mu_i)_{i\in I_m})_{m\in\mu} =$$

$$= f \sum_{m\in\mu}\Big(\sum_{j\in J_m}\mu_j + \sum_{i\in I_m}\mu_i\Big) = f$$

puesto que dado x de F entonces $f(x) = 0$, y si x está en Ω y $\mu_m(x) > 0$ entonces x está en $int(A_m)$, tomado $K = \bigcup \{ I_m \cup J_m \ : \ m \in \mu \}$, tendremos $\sum_{k\in K} \mu_k(x) = 1$, luego por el teorema I.2.8. $Z = Y \circ X$ será una proyección continua de $\bigoplus_{m\in\mu} G_m$ en él mismo, cuyo núcleo tiene como complemento topológico a $Y(\mathcal{D}^+_{\Gamma,F}(E))$ isomorfo topológicamente a $\mathcal{D}^+_{\Gamma,F}(E)$. Por otra parte, por el teorema I.2.7. (Bonet), $\mathcal{D}(A_j,E) \wr S(E)$ para j en J_m y m en μ, por ser A_j acotado por el corolario I.2.4. $\mathcal{B}_o(A_j,E)$ es topológicamente isomorfo a $S(E)$, de donde se deduce la proposición.

El conjunto K de la demostración de la proposición anterior puede ser finito o infinito numerable, si ocurre esto último lo consideramos ordenado $K = (r_p)_{p=1}^{\infty}$, $(A_{r_p})_{p=1}^{\infty}$ los cubos de $\mathcal{A}$. Elegida por recurrencia una sucesión de puntos $(x_p)_{p=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}^n$ con x_p en $int(A_{r_p} \cap \Omega)$ y $x_p \neq x_h$ para $p \neq h$, como $\mathcal{A}$ es localmente finita, la sucesión $(x_p)_{p=1}^{\infty}$ no tiene puntos de acumulación, entonces podemos construir una sucesión de cubos $(H_p)_{p=1}^{\infty}$ con centro en x_p y con interior no vacío, disjuntos dos a dos, contenidos en $int(A_{r_p}) \cap \Omega$ respectivamente. Consideremos $(M_p)_{p=1}^{\infty}$ otra sucesión de cubos con interior no vacío y M_p contenido en $int(H_p)$, $p=1,2,\ldots$ Si K fuese finito el proceso se puede repetir, luego hemos construido las familias $(H_j)_{j\in J_m}$, $(H_i)_{i\in I_m}$ $m\in\mu$, y

$(M_j)_{j\in J_m}, (M_i)_{i\in I_m}$ $m\in\mu$, de cubos. Consideremos operadores lineales y continuos

$T_i: \mathcal{E}(M_i,E) \dashrightarrow \mathcal{D}(H_i,E)$ $\quad i\in I_m \quad m\in\mu$

$T_j: \mathcal{E}(M_j,E) \dashrightarrow \mathcal{D}(H_j,E)$ $\quad j\in J_m \quad m\in\mu$

que existen por el teorema I.2.4.(Bonet). Llamemos N_m al espacio $\prod_{j\in J_m} \mathcal{E}(M_j,E) \times \prod_{i\in I_m} \mathcal{E}(M_i,E)$, definimos $R_m: N_m \dashrightarrow \mathcal{D}^+_{\Gamma,F}(E)$ como $R_m((g_j),(h_i)) =$

$= \sum_{j\in J_m} T_j(g_j) + \sum_{i\in I_m} T_i(h_i)$. Llamando N al espacio $\bigoplus_{m\in\mu} N_m$, definimos la aplicación $R: N \dashrightarrow \mathcal{D}^+_{\Gamma,F}(E)$ como $R(((g^m_j)_{j\in J_m},(h^m_i)_{i\in I_m})_{m\in\mu}) = \sum_{m\in\mu} R_m((g^m_j),(h^m_i))$.

PROPOSICION 4. La aplicación R está bien definida, es lineal y continua.

Demostración: por ser la familia $\mathcal{A}$ localmente finita, R está bien definida, es trivialmente lineal y evidentemente será continua si R_m es continua para todo m de μ. Como la imagen de R_m está contenida en $\mathcal{D}^{+\,z_m}_{\Gamma,F}(E)$ y aquí la topología coincide con la de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n,E)$, tomado C compacto, por ser la familia $\mathcal{A}$ localmente finita, existirá un i_o en I_m y un j_o en J_m si no son vacíos con $H_j \cap C = \emptyset$ para $j \geq j_o$ y j en J_m, y $H_i \cap C = \emptyset$ para $i \geq i_o$ e i en I_m. Luego dado α multiíndice y $((g_j),(h_i))$ de N_m, y q seminorma continua en E, $\sup_{x\in C} q(D^\alpha R_m((g_j),(h_i))(x)) \leq$

$$\leq \sup_{x\in C} \Big[\sum_{j\in J_m, j\leq j_o} q(D^\alpha T_j(g_j)(x)) + \sum_{i\in I_m, i\leq i_o} q(D^\alpha T_i(h_i)(x)) \Big]$$

de donde se deduce la conclusión, al ser cada T_j y T_i lineal y contimua.

Sea f de $\mathcal{D}^{+}_{\Gamma,F}(E)$, llamaremos g_j a la restricción de f a M_j, siendo j de J_m, y h_i a la restricción de f a M_i con i en I_m y m en μ. Con estas funciones definimos la aplicación $U: \mathcal{D}^{+}_{\Gamma,F}(E) \longrightarrow N$ como $U(f) = ((g_j),(h_i))$, obviamente está bien definida.

PROPOSICION 5. La aplicación U es lineal y continua.
Demostración: basta probar que su restricción a

$\mathcal{D}^{+ Z_r}_{\Gamma,F}(E)$ es continua para r=1,2,...

$$U(\mathcal{D}^{+ Z_r}_{\Gamma,F}(E)) \subset \bigoplus_{m\leq r, m\in\mu} N_m$$

luego bastará probar que la aplicación que a f le asocia g_j ó que le asocia h_i es continua, lo cual es trivial.

PROPOSICION 6. Si E es un espacio localmente completo $\bigoplus_{m\in\mu} S(E)^{\operatorname{card}(I_m \cup J_m)}$ es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de $\mathcal{D}^{+}_{\Gamma,F}(E)$.

Demostración: tendremos que U∘R es la identidad sobre N, luego por el teorema I.2.8. R∘U es una proyección continua de $\mathcal{D}^{+}_{\Gamma,F}(E)$ en si mismo cuyo núcleo es complemento topológico de R(N) isomorfo topológicamente a $N \simeq \bigoplus_{m\in\mu} S(E)^{\operatorname{card}(I_m \cup J_m)}$ por el teorema I.2.3.

TEOREMA 2. Sea $K = \cup \{ I_m \cup J_m \ : \ m \in \mu \}$, si card K es finito y E es un espacio localmente completo, $\mathcal{D}^+_{\Gamma,F}(E)$ es isomorfo topológicamente a S(E).

Demostración: por las proposiciones 3. y 6. y el teorema I.1.1. y la proposición I.1.1.

TEOREMA 3. Si μ es finito y card K = $\aleph_0$, y E es un espacio localmente completo, $\mathcal{D}^+_{\Gamma,F}(E)$ es topológicamente isomorfo a $S(E)^N$.

Demostración: en estas hipótesis es obvio que

$$\bigoplus_{m \in \mu} S(E)^{\mathrm{card}(I_m \cup J_m)} \simeq S(E)^N,$$ luego la conclusión se deduce aplicando las proposiciones 3. y 6. y el teorema I.1.3.

TEOREMA 4. Si card(μ) es infinito y card(K) es infinito siendo card($J_m \cup I_m$) finito para todo m de μ, entonces si E es un espacio localmente completo $\mathcal{D}^+_{\Gamma,F}(E) \simeq S(E)^{(N)}$.

Demostración: usando la proposición I.1.1. tenemos que

$S(E)^{\mathrm{card}(I_m \cup J_m)} \simeq S(E)$ para todo m de μ, luego el teorema se deduce ahora de las proposiciones 3. y 6. y el teorema I.1.3. al ser

$$S(E)^{(N)} \simeq \bigoplus_{m \in \mu} S(E)^{\mathrm{card}(I_m \cup J_m)}.$$

TEOREMA 5. Si card(μ) es infinito y existe una sucesión $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ estrictamente creciente en verificando que card($I_{m_k} \cup J_{m_k}$) es infinito para $k=1,2,\ldots$ entonces si E es un espacio localmente completo $\mathcal{D}^{+}_{\Gamma,F}(E)$ es isomorfo topológicamente a $(S(E)^{N})^{(N)}$.

Demostración: se deduce como en los teoremas anteriores porque

$$\bigoplus_{m\in\mu} S(E)^{\operatorname{card}(I_m \cup J_m)} \simeq$$

$$\simeq \bigoplus_{k=1}^{\infty} \prod_{\substack{m\in\mu \\ m_k < m \leq m_{k+1}}} S(E)^{\operatorname{card}(I_m \cup J_m)} \simeq$$

$$\bigoplus_{k=1}^{\infty} S(E)^{N} = (S(E)^{N})^{(N)}.$$

TEOREMA 6. Sea E un espacio tal que $S(E)^{(N)} \times S(E)^{N}$ tiene la propiedad de complementación, entonces si se cumple:

(*) $\operatorname{card}(\mu)$ es infinito, $\operatorname{card}(K)$ es infinito y existe un m_o en μ con $\operatorname{card}(J_m \cup I_m)$ finito para m en μ y $m \geqslant m_o$.

Entonces $\mathcal{D}^{+}_{\Gamma,F}(E)$ es isomorfo topológicamente a $S(E)^{(N)} \times S(E)^{N}$.

Demostración: tendremos que

$$\bigoplus_{m\in\mu} S(E)^{\operatorname{card}(J_m \cup I_m)} \simeq S(E)^{\operatorname{card}(\cup\{I_m \cup J_m \,:\, m<m_o,\ m\in\mu\})} \times$$

$$\times \bigoplus_{\substack{m\geqslant m_o \\ \in\mu}} S(E)^{\operatorname{card}(J_m \cup I_m)} \simeq S(E)^{N} \times S(E)^{(N)}$$

esto último usando que $\operatorname{card}(\mu)$ es infinito y la proposición I.1.1. La conclusión se obtiene ahora de las proposiciones 3. y 6.

COROLARIO 1. Si E es un espacio de Frechet nuclear y se cumple la condición (*), entonces

$$\mathcal{D}^{+}_{\Gamma,F}(E) \simeq S(E)^{N} \times S(E)^{(N)}.$$

Demostración: por el teorema I.1.4., corolario 1. y el teorema 6.

Este quinto caso es diferente de los otros cuatro puesto que si consideramos F un cerrado en $\mathbb{R}^n$ de tal manera que se cumple la condición (*), si $\mathcal{D}^{+}_{\Gamma,F}(E)$ fuese isomorfo a $S(E)$ ó $S(E)^{(N)}$ ó $S(E)^{N}$ ó $(S(E)^{N})^{(N)}$, aplicando las proposiciones 3. y 6. obtendríamos que $S(E)^{N} \times S(E)^{(N)}$ sería isomorfo topológicamente a uno de estos cuatro espacios, lo cual en general es falso.

Haremos a continuación un estudio para determinados cerrados F, siempre suponiendo que se cumple la condición (*). Como existe un m_o en $\mathbb{N}$ con $\mathrm{card}(I_m \cup J_m)$ finito para m en $\mathbb{N}$ y $m \geqslant m_o$, tendremos que $\Omega \cap (\Gamma_{m+1} \sim \Gamma_m)$ es acotado, luego podemos tomar Q un cubo de $\mathbb{R}^n$ con interior no vacío y $\Omega \cap (\Gamma_{m+1} \sim \Gamma_m) \subset \mathrm{int}(Q)$. Llamemos

$D_m = \{f \in \mathcal{D}^{+}_{\Gamma,F}(E) \ / \ \mathrm{sop}\ f \subset \Gamma_m \sim \mathrm{int}(Q)\}$

$E_m = \{f \in \mathcal{D}^{+}_{\Gamma,F}(E) \ / \ \mathrm{sop}\ f \subset \mathbb{R}^n \sim \mathrm{int}(\Gamma_{m+1} \cup Q)\}$

tomados con la topología restricción, ambos son cerrados en $\mathcal{D}^{+}_{\Gamma,F}(E)$ y $D_m \cap E_m = \{0\}$.

PROPOSICION 7. $E_m + D_m$ considerado con la topología restringida de $\mathcal{D}^{+}_{\Gamma,F}(E)$, es suma directa topológica.

Demostración: como $E_m \cap D_m = \{0\}$ $m \geqslant m_o$, tendremos que

$$E_m + D_m = E_m \oplus_a D_m$$

Considerada f de $E_m + D_m$, la función

$$(**) \qquad g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \Gamma_m \\ 0 & x \notin \Gamma_m \end{cases}$$

verifica que g está en D_m y $h(x) = f(x) - g(x)$ está en E_m, al ser $\Gamma_m \sim \mathrm{int}(Q)$ y $\mathbb{R}^n \sim \mathrm{int}(\Gamma_{m+1} \sim Q)$ cerrados disjuntos. Por otra parte, considerado C compacto contenido en Γ_m, p entero positivo y q seminorma continua en E, $V = \{f \in \mathcal{D}^+_{\Gamma,F}(E) \;/\; \sup\{q(D^\alpha f(x) : x \in C \;:\; |\alpha| \leq p\} \leq 1\}$ es un entorno absolutamente convexo del origen de $\mathcal{D}^+_{\Gamma,F}(E)$ y $V \cap D_m = \{f \in \mathcal{D}^+_{\Gamma,F}(E) \;/$ $/ \;\; \mathrm{sop}\, g \subset \Gamma_m \sim \mathrm{int}(Q), \;\; \sup\{q(D^\alpha f(x) : x \in C, \; |\alpha| \leq p\} \leq 1\}$ por lo tanto tomada $\{f_d, \; d \in D, \leq\}$ red convergente a cero en $E_m + D_m$, existe un d_o en D verificando que si d está en D con $d \geq d_o$, f_d está en $V \cap (E_m + D_m)$, luego tomada g_d construida en $(**)$, tendremos que g_d está en $V \cap D_m$ para $d \geq d_o$. Pero al variar p en los enteros positivos y q en las seminormas continuas en E, obtendremos que $\{g_d : d \in D, \leq\}$ converge a cero en $\mathcal{D}^{+\,z_m}_{\Gamma,F}(E)$, por ser $\mathcal{D}^+_{\Gamma,F}(E)$ límite inductivo estricto, $\{g_d, d \in D, \leq\}$ convergerá a cero en D_m y en $\mathcal{D}^+_{\Gamma,F}(E)$, luego $\{h_d : d \in D, \leq\}$ converge a cero en E_m.

PROPOSICION 8. Si para algún $m \geq m_o$ se puede elegir un cubo Q con $\mathrm{int}(Q) \neq \emptyset$ e $\mathrm{int}(Q)$ que incluya a $\Omega \cap (\Gamma_{m+1} \sim \Gamma_m)$, y cumpliendo que existe un p entero positivo y W cons tante positiva de manera que para todo x de ∂Q, $d^p(x, F \cap Q) \leq W\, d(x,F)$ entonces $E_m \oplus_t D_m$ tiene complemento topológico en $\mathcal{D}^+_{\Gamma,F}(E)$.

Demostración: por hipótesis, llamando $F_1 = F \cap Q \neq \emptyset$, considerado el espacio $\mathcal{E}_{F_1}(Q,E)$, por el teorema IV.2.1., existe un operador de extensión lineal y continuo $T: \mathcal{E}_{F_1}(Q,E) \longrightarrow \mathcal{E}_F(E)$, podemos tomarlo obviamente con la imagen con soporte en un cierto compacto, luego existirá un m_1 entero positivo con $T: \mathcal{E}_{F_1}(Q,E) \longrightarrow \mathcal{D}^{+\,z_{m_1}}_{\Gamma,F}(E)$, y sigue siendo un isomorfismo topológico sobre la imagen, entonces $\mathcal{D}^+_{\Gamma,F}(E) = D_m \oplus_t E_m \oplus_t T(\mathcal{E}_{F_1}(Q,E))$, ya que dada f de $\mathcal{D}^+_{\Gamma,F}(E)$, tendremos que $g(x) = f(x)$ si x está en Q verifica que g está en $\mathcal{E}_{F_1}(Q,E)$, entonces $f-Tg$ está en $E_m + D_m$, trivialmente es una suma directa algebraica. Para probar que la suma directa es topológica bastará probar que para cada p entero positivo, dada una red $(f_d : d \in D, \leq)$ convergente a cero en $\mathcal{D}^{+\,z_p}_{\Gamma,F}(E)$, es convergente a cero en $D_m \oplus_t E_m \oplus_t \oplus_t T(\mathcal{E}_{F_1}(Q,E))$, lo cual se prueba sin dificultad, al ser Q un compacto de $\mathbb{R}^n$, y tomada $g_d(x) = f_d(x)$ para x en Q y d en D, tendremos que $(g_d,\ d \in D, \leq)$ converge a cero en $\mathcal{E}_{F_1}(Q,E)$, de donde se deduce la conclusión por la continuidad de T y la proposición 7.

TEOREMA 7. Si E es un espacio localmente completo, si card(μ) es infinito y existe un m' tal que si $m \in \mu$ y $m \geq m'$, card($I_m \cup J_m$) es finito y existe un m'' en μ con $m'' \geq m'$ cumpliendo que se puede construir un cubo Q con $\emptyset \neq \mathrm{int}(Q) \supset (\Gamma_{m+1} \sim \mathrm{int}(\Gamma_m)) \cap \Omega$ y que satisface que existe p entero positivo y W constante positiva verificando que

$$d^p(x, F \cap Q) \leq W\, d(x,F) \qquad \forall x \in \partial Q$$

entonces $\mathcal{D}^+_{\Gamma,F}(E)$ es isomorfo topológicamente a $S(E)^{(N)} \times S(E)^N$.

Demostración: por la proposición 8. obtenemos que

$$\mathcal{D}^+_{\Gamma,F}(E) = E_m \oplus_t D_m \oplus_t T(\mathcal{E}_{F_1}(Q,E))$$

por la proposición IV.1.1 $\mathcal{E}_{F_1}(Q,E)$ es isomorfo topológicamente a S(E). Tendremos que $E_m =$ $= \mathcal{D}^+_{\Gamma,F_2}(E)$, siendo $F_2 = F \cup \Gamma_{m+1} \cup Q$, luego por el teorema 4., E_m es isomorfo topológicamente a $S(E)^{(N)}$, $D_m = \mathcal{D}^+_{\Gamma,F_3}(E)$, siendo $F_3 = F \cup Q \cup (\mathbb{R}^n \sim \mathrm{int}(\Gamma_m))$, luego por el teorema 3., D_m es isomorfo topológicamente a $S(E)^N$, por lo tanto $\mathcal{D}^+_{\Gamma,F}(E)$ es isomorfo topológicamente a $S(E)^N \times S(E) \times S(E)^{(N)} \simeq S(E)^N \times S(E)^{(N)}$.

Queda abierto el problema de caracterizar este quinto caso de espacios para E localmente completo y F cerrado arbitrario.

CAPITULO VI

LOS ESPACIOS $\mathcal{E}_F(V,E)$ Y $\mathcal{D}_F(V,E)$

VI.1. LOS ESPACIOS $\mathcal{E}_F(V,E)$ Y $\mathcal{D}_F(V,E)$ PARA UNA VARIEDAD DIFERENCIABLE n-DIMENSIONAL V DE CLASE $\mathcal{C}^\infty$.

DEFINICION 1. Considerada V una variedad n-dimensional $\mathcal{C}^\infty$-diferenciable. Sea $\{(U_i, \varphi_i) \ / \ i \in I\}$ un atlas en V, sea E un espacio, se dice que una aplicación $f: V \dashrightarrow E$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ si para cada i de I, $f \circ \varphi_i^{-1}$ está en $\mathcal{E}(\varphi_i(U_i), E)$. Se denota por $\mathcal{E}(V,E)$ al espacio vectorial de todas las aplicaciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ de V en E. Tomados r entero positivo, i en I y L un compacto contenido en U_i, y q seminorma continua en E, tomemos:

$$q(f)_{r,L,i} = \sum_{|\alpha| \leq r} \sup \{ q(D^\alpha f \circ \varphi_i^{-1})(x) \ : \ x \in \varphi_i(L) \}$$

esta es una familia de seminormas en $\mathcal{E}(V,E)$ y a partir de ahora se considera a $\mathcal{E}(V,E)$ dotado de la topología localmente convexa definida por ella.

Sea H un subconjunto compacto de V, denotamos por $\mathcal{D}(H,E)$ al subespacio de $\mathcal{E}(V,E)$ de todas las funciones que tienen su soporte en H. Resulta trivial que $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(\overline{\mathrm{int}(H)})$. Llamaremos $\mathcal{D}(V,E)$ al subespacio vectorial de $\mathcal{E}(V,E)$ formado por las funciones con soporte compacto dotado de la topología límite

inductivo de la familia $\mathcal{D}(H,E)$ al variar H en la fa
milia $\mathcal{H}$ de los compactos de V.

En el caso en que V sea una variedad no compacta y numerable en el infinito, Valdivia en (24) prueba que $\mathcal{E}(V) \simeq S^N$. Schwartz en (16), usando el resultado de Valdivia obtiene que si E es completo, entonces $\mathcal{E}(V,E) \simeq \mathcal{E}(V) \hat{\otimes} E \simeq S^N \hat{\otimes} E \simeq S(E)^N$, y Bonet en (2) prueba que si E es un espacio localmente completo $\mathcal{E}(V,E) \simeq S(E)^N$.

Valdivia en (24) prueba que $\mathcal{D}(V) \simeq S^{(N)}$ y Bonet en (2) prueba que $(V,E) \simeq S(E)^{(N)}$ si E es un espacio localmente completo.

Dado F cerrado de V con $F \neq \emptyset$, vamos a llamar $\mathcal{E}_F(V,E)$ al subespacio de $\mathcal{E}(V,E)$ formado por las funciones que se anulan ellas y todas sus derivadas en F, es decir, que dado z de F, considerada cualquier carta (U_i, φ_i) con z en U_i, si $x = \varphi_i(z)$ entonces $D^{\alpha}(f \circ \varphi_i^{-1})(x) = 0$ para todo multiíndice α (*)
Se puede probar usando la regla de la cadena que si $D^{\alpha}(f \circ {}_i^{-1})(x) = 0$ para un i de I y $x = \varphi_i(z)$ entonces para todo j de I tal que z está en U_j, se cumple $D^{\alpha}(f \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_j(z)) = 0$. Análogamente se define $\mathcal{D}_F(V,E)$ como el subespacio de $\mathcal{D}(V,E)$ que cumple también la condición (*), es decir, como conjuntos $\mathcal{D}_F(V,E) =$
$= \mathcal{D}(V,E) \cap \mathcal{E}_F(V,E)$, ambos espacios están considerados con la topología restricción respectiva.

Valdivia prueba en (25) que $\mathcal{E}_F(V)$ es isomorfo topológicamente a S ó S^N y $\mathcal{D}_F(V)$ lo es a $S^{(N)}$ ó S. Nosotros vamos a generalizar este resultado para E un espacio localmente completo.

Tomado i de I, a un subconjunto Q de V se le llama cubo en U_i si existen números reales $a_j < b_j$ $j=1,2,\ldots,n$ con $\varphi_i(Q) = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j \quad j=1,2,\ldots,n\}$.

PROPOSICION 1. Sea Q un cubo en V, la topología de $\mathcal{D}(Q,E)$ coincide con la definida por la familia de seminormas

$$q(f)_{r,j} = \sum_{|\alpha|\leq r} \sup \{ q(D^{\alpha} f \circ \varphi_j^{-1})(x) \quad : \quad x \in \varphi_j(Q)\}$$

siendo j de I fijo con $Q \subset U_j$ y variando r en los enteros positivos y q en las seminormas continuas en E, f en $\mathcal{D}(Q,E)$.

Demostración: sea i de I con $Q \cap U_i \neq \emptyset$, sea L un compacto en U_i y $L_i = Q \cap L$. Bastará probar que dado r entero positivo y q seminorma continua en E se verifica que existe una constante positiva N_r con

$$q(f)_{r,L_i,i} = q(f)_{r,L,i} \leq N_r \, q(f)_{r,j} \qquad (**)$$

para toda f de $\mathcal{D}(Q,E)$. La igualdad es trivial, probemos por inducción la desigualdad, si x está en $\varphi_i(L_i)$ entonces $D^{\alpha}(f \circ \varphi_i^{-1})(x) = 0$ para todo multiíndice. Dado e_k vector unitario de $\mathbb{R}^n$, $e_k = (\delta_{hk})_{h=1}^{n}$, sabemos por la regla de la cadena que, llamando $g = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$

$$D^{e_k}(f \circ \varphi_i^{-1})(x) = D^{e_k}(f \circ \varphi_j^{-1} \circ \varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(x) =$$

$$= \sum_{t=1}^{n} D^{e_t}(f \circ \varphi_j^{-1})(g(x))\ D^{e_k} g(x)$$

como g es de clase $\mathcal{C}^{\infty}$ en $\varphi_i(U_i \cap U_j))$ tendremos,

llamando $N_1 = n \max\{ |D^{e_k} g(x)| : x \in \varphi_i(L_i),\ k=1,\ldots,n\}$

$$q(\sum_{|\alpha|\leq 1} \sup \{ q(D^{\alpha} f \circ \varphi_i^{-1})(x) \quad : \quad x \in \varphi_i(L)\} = q(f)_{1,L,i} \leq$$

$$n \frac{N_1}{n} \sum_{t=1}^{n} \sup\{ q(D^{e_t}(f \circ \varphi_j^{-1})(g(x)) \qquad x \in \varphi_i(L_i)\} \leq$$

$$\leq N_1\ q(f)_{1,j}$$

por inducción, supuesto que dado r entero positivo, existe N_r positiva con

$q(f)_{r,L,i} = q(f)_{r,L_i,i} \leq N_r\ q(f)_{r,j}$ para toda q

seminorma continua en E y toda f de $\mathcal{D}(Q,E)$. Entonces tomado α multiíndice con $|\alpha| \leq r+1$, $\alpha = e_k + \beta$ con $|\beta| \leq r$, luego tomado x de $\varphi_i(L_i)$ tendremos que aplicando la fórmula de Leibnitz

$$D^{\alpha}(f \circ \varphi_i^{-1})(x) = D^{\beta}[D^{e_k}(f \circ \varphi_i^{-1})(x)] =$$

$$= D^{\beta}\Big[\sum_{t=1}^{n} D^{e_t}(f \circ \varphi_j^{-1})(g(x))\ D^{e_k} g(x)\Big] =$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \sum_{\delta+\eta=\beta} D^{\delta}[D^{e_t}(f \circ \varphi_j^{-1})(g(x))]\ D^{\eta+e_k} g(x)$$

luego

$$q(f)_{r+1,L,i} = q(f)_{r,L_i,i} = \sum_{|\alpha|\leq r+1} \sup \{ q(D^{\alpha} f \circ \varphi_i^{-1})(x) \quad :$$

$$: \quad x \in \varphi_i(L_i)\} \leq \sum_{|\beta|\leq r} \sum_{t=1}^{n} \sup_{|\alpha|\leq r+1} \{ |D^{\alpha} g(x)| \quad x \in \varphi_i(L_i)\} \cdot$$

$$\cdot \sup\{ \sum_{\delta\leq\beta} |c_{\delta\eta}|\ q(D^{\delta}[D^{e_t}(f \circ \varphi_j^{-1})(g(x)]) : \ x \in \varphi_i(L_i)\}$$

$$D^{e_t}(f\circ\varphi_j^{-1})(g(x)) = D^{e_t}(f\circ\varphi_j^{-1})(\varphi_j\circ\varphi_i^{-1})(x)$$

para x en $\varphi_i(L_i)$. La función definida como

$D^{e_t}(f\circ\varphi_j^{-1})\ \varphi_j(z)$ si z está en U_j y cero en $V\sim U_j$

pertenece a $\mathcal{D}(Q,E)$. Si y está en $\varphi_i(U_i)$, tendremos

$D^{e_t}(f\circ\varphi_j^{-1})\circ\varphi_j(\varphi_j^{-1}(y)) = D^{e_t}(f\circ\varphi_j^{-1})(y)$, luego si

y está en $\varphi_j(U_j)\sim\varphi_j(Q)$ esta función se hace cero,

aplicando la hipótesis de inducción tendremos

$$q(f)_{r+1,L,i} \leq r^n \max_{|\delta|\leq r} |c_{\delta\eta}| \cdot \sup_{|\alpha|\leq r+1} \{|D^\alpha g(x)| \quad x\in\varphi_i(L_i)\}.$$

$$\sum_{t=1}^{n} q(D^{e_t}(f\circ\varphi_j^{-1})\circ\varphi_j)_{r,L_i,i}$$

luego existe M positiva con

$$q(f)_{r+1,L,i} \leq M \sum_{t=1}^{n} N_r\ q(D^{e_t}(f\circ\varphi_j^{-1})\circ\varphi_j)_{r,j}$$

pero $D^\delta[(D^{e_t}f\circ\varphi_j^{-1})\circ\varphi_j\circ\varphi_j^{-1}] = D^\delta\ D^{e_t}(f\circ\varphi_j^{-1})$ $=$

$= D^{\delta+e_t}(f\circ\varphi_j^{-1})$ $\quad t=1,2,\dots,n\quad,\quad |\delta|\leq r$

por lo tanto $\sum_{t=1}^{n} q(D^{e_t}(f\circ\varphi_j^{-1})\circ\varphi_j)_{r,j} = q(f)_{r+1,j}$

de donde tomando $N_{r+1}= M\ N_r$ se deduce la conclusión.

Valdivia prueba en (20) que $\mathcal{D}(H)\simeq S$ si int(H) $\neq\emptyset$, y en (4) de Bonet y el autor se enuncia que si E es un espacio localmente completo $\mathcal{D}(H,E)$ es topológicamente isomorfo a S(E), la prueba que se da aquí es una generalización de la de Valdivia (27).

PROPOSICION 2. Sea P un cerrado de un cubo Q en una variedad V con int(P) $\neq \emptyset$, entonces $\mathcal{D}(P,E) \simeq \mathcal{D}(\varphi_j(P_j),E)$ siendo (U_j, φ_j) carta con $P \subset U_j$.

Demostración: definimos $X: \mathcal{D}(P,E) \longrightarrow \mathcal{D}(\varphi_j(P),E)$

$$\text{como } X(f) = \begin{cases} f \circ \varphi_j^{-1}(x) & x \in \varphi_j(U_j) \\ 0 & x \notin \varphi_j(U_j) \end{cases}$$

obviamente está bien definida, es lineal e inyectiva, y es sobre porque tomado g de $\mathcal{D}(\varphi_j(P),E)$ definimos

$$f \text{ como } \quad f(z) = \begin{cases} g \circ \varphi_j(z) & z \in U_j \\ 0 & z \notin U_j \end{cases}$$

tendremos que f está en $\mathcal{D}(P,E)$ y $X(f) = g$. X es un isomorfismo topológico, ya que dada q seminorma continua en E y r entero positivo tendremos

$$q_r(Xf) = \sum_{|\alpha| \leq r} \sup \{ q(D^\alpha Xf(x)) \ : \ x \in \mathbb{R}^n \} =$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq r} \sup \{ q(D^\alpha (f \circ \varphi_j^{-1})(x) \ : \ x \in \varphi_j(P) \} = q(f)_{r,P,j}$$

luego X es continua, y por la proposición 1. es abierta.

PROPOSICION 3. Sea E un espacio localmente completo y P un cerrado en un cubo Q de una variedad V n-dimensional con int(P) $\neq \emptyset$, entonces $\mathcal{D}(P,E) \simeq S(E)$.

Demostración: como int(P) $\neq \emptyset$ tendremos int($\varphi_j(P)) \neq \emptyset$, entonces como $\mathcal{D}(\varphi_j(P),E) \simeq \mathcal{B}_0(\text{int}(\varphi_j(P)),E) \simeq S(E)$ (4), la consecuencia se obtiene ahora de la proposición 2.

PROPOSICION 4. Si H es un compacto de una variedad n-dimensional con int(H) $\neq \emptyset$ y E es un espacio localmente completo, entonces $\mathcal{D}(H,E) \simeq S(E)$.

Demostración: como en (27) Valdivia, usando la proposición 3.

En lo que resta consideraremos V una variedad n-dimensional no compacta numerable en el infinito.

Valdivia en (27) prueba que del atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$, se puede extraer una sucesión de cartas $\{(W_r, \varphi_{i_r}) \ : \ r=1,2,\ldots\}$ cumpliendo que en cada W_r existe un cubo Q_r cumpliendo que $\{\operatorname{int}(Q_r) \ : \ r=1,2,\ldots\}$ es un recubrimiento localmente finito de V.

Para cada entero positivo r, sea h_r un elemento de $\mathcal{D}(\varphi_{i_r}(Q_r))$, con $h_r(x) > 0$ para todo x en $\operatorname{int}(\varphi_{i_r}(Q_r))$, tomada

$$\lambda_r(z) = h_r \circ \varphi_{i_r}(z) \qquad z \in W_r$$

$$\lambda_r(z) = 0 \qquad z \in V \sim W_r$$

y $k_r = \dfrac{\lambda_r}{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j}$ $\quad r=1,2,\ldots$ tendremos que $(k_r)_{r=1}^{\infty}$ es una partición de la unidad de V de clase $\mathcal{C}^{\infty}$. Consideremos ahora F un cerrado en V con $F \neq V$, sean

$$A = \{r \in \mathbb{N} \ / \ \operatorname{int}(Q_r) \subset V \sim F\}$$

$$B = \{r \in \mathbb{N} \ / \ \operatorname{int}(Q_r) \cap (V \sim F) \neq \emptyset, \ \operatorname{int}(Q_r) \cap F \neq \emptyset\}$$

PROPOSICION 5. Si E es un espacio localmente completo, $\mathcal{E}_F(V,E)$ es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de $S(E)^{\mathrm{card}(A\cup B)}$.

Demostración: consideremos $P_r = \overline{Q_r \cap V \sim F}$,

$G = \prod_{m\in A} \mathcal{D}(Q_m,E) \times \prod_{r\in B} \mathcal{D}(P_r,E)$, definimos $Z: G \dashrightarrow \mathcal{E}_F(V,E)$ como $Z((f_m),(g_r)) = \sum_{m\in A} f_m +$ $\sum_{r\in B} g_r$, la aplicación está bien definida porque si z no está en $\mathrm{int}(Q_m)$, $m \in A$, tendremos que $f_m(z) = 0$ y $D^\alpha(f \circ \varphi_{i_m}^{-1}) \circ \varphi_{i_m}(z) = 0$, luego f_m está en $\mathcal{D}_F(V,E)$ $m \in A$, por análogo razonamiento g_r está en $\mathcal{D}_F(V,E)$ y la aplicación está bien definida por ser la familia $\{\mathrm{int}(Q_r) \quad r=1,2,\ldots\}$ localmente finita, y por ser $\overline{\mathrm{int}(Q_r)} = Q_r \quad r=1,2,\ldots$ tendremos que dado H compacto en V con $H \subset U_i$ de una cierta carta (U_i, φ_i) i en I, tendremos que existe un r_o natural con $H \cap Q_r = \emptyset$ si $r \geq r_o$, luego dada q seminorma continua en E y k entero positivo:

$$q(Z((f_m),(g_r)))_{k,H,i} \leq \sum_{|\alpha|\leq r} \sup\Big\{ \sum_{m\in A_1} q(D^\alpha(f_m \circ \varphi_i^{-1})(x)) + \sum_{r\in B_1} q(D^\alpha(g_r \circ \varphi_i^{-1})(x)) \ / \ x \in \varphi_i(H) \Big\}$$

siendo $A_1 = A \cap \{1,2,\ldots,r_o\}$, $B_1 = B \cap \{1,2,\ldots,r_o\}$, luego Z es continua.

Sea $W: \mathcal{E}_F(V,E) \dashrightarrow G$, definida como $W(f) = ((f\cdot k_m)_{m\in A}, (f\cdot k_r)_{r\in B})$, está bien definida y es lineal trivialmente, para probar que es continua basta fijar un m_o de A y un r_o de B, entonces las aplicaciones $W_{m_o}(f) = f.k_{m_o}$, $W_{r_o}(f) = f.k_{r_o}$ son trivialmente continuas, de donde W es continua.

Por otra parte $Z\circ W(f) = \sum_{m\in A} f.k_m + \sum_{r\in B} f.k_r$, como si z está en F, f(z) = 0, y si z está en $V\sim F$ existe un h en $A\cup B$ con z en $int(Q_h)$, tendremos que $(\sum_{m\in A} k_m + \sum_{r\in B} k_r)(z) = 1$, luego para todo f de $\mathcal{E}_F(V,E)$, $Z\circ W(f) = f$, por lo tanto aplicando el teorema I.2.8., tendremos que $W\circ Z: G \longrightarrow G$ es una proyección cuya imagen $W\circ Z(G) = W(\mathcal{E}_F(V,E))$ es isomorfa a $\mathcal{E}_F(V,E)$ y es un subespacio complementado de G, la conclusión se deduce ahora utilizando que por la proposición 2. $\mathcal{D}(Q_m,E) \simeq S(E)$ para m en A, y para r en B $\mathcal{D}(P,E) \simeq S(E)$.

PROPOSICION 6. $\mathcal{E}_F(V,E)$, si E es un espacio localmente completo, tiene un subespacio complementado isomorfo topológicamente a $S(E)^{card(A\cup B)}$.

Demostración: procediendo como en V.2.3. se pueden encontrar los conjuntos $(L_h)_{h\in A\cup B}$, $(R_h)_{h\in A\cup B}$ cubos en V disjuntos dos a dos con $\emptyset \neq int(L_h) \subset L_h \subset int(R_h) \subset R_h$ y $R_h \subset int(Q_h)$ si h está en A y $R_h \subset int(P_h)$ si h está en B.

Dado $Y_h: \mathcal{E}(\varphi_{i_h}(L_h),E) \longrightarrow \mathcal{D}(\varphi_{i_h}(R_h),E)$ operador de extensión lineal y continuo, definimos $Z_h: \mathcal{E}(\varphi_{i_h}(L_h),E) \longrightarrow \mathcal{D}(R_h,E)$, como $Z_h f(z) = (Y_h f)\circ\varphi_{i_h}(z)$ si z está en R_h, y $Z_h f(z)=0$ si z está en $V \sim R_h$. Esta aplicación evidentemente está bien definida, es lineal y continua por la proposición 1. Por otra parte $\mathcal{D}(R_h,E) \subset \mathcal{E}_F(V,E)$ para h en $A \cup B$, porque si h está en A tendremos que $\mathcal{D}(R_h,E) \subset \mathcal{D}(Q_h,E) \subset \mathcal{E}_F(V,E)$, y si h está en B, $R_h \subset \text{int}(P_h)$ luego $\mathcal{D}(R_h,E) \subset \mathcal{E}_F(V,E)$.

Llamemos $M = \prod_{h \in A \cup B} \mathcal{E}(\varphi_{i_h}(L_h),E)$, y definamos $T:M \dashrightarrow \mathcal{E}_F(V,E)$ como $T(f_h) = \sum_{h \in A \cup B} Z_h f_h$ la aplicación T está bien definida por ser la familia $\{Q_r : r=1,2,\ldots\}$ localmente finita y evidentemente es lineal, y por la misma razón es continua, puesto que dado H compacto en V existirá un número finito $\{h_1,h_2,\ldots,h_m\}$ con $R_{h_j} \cap H \neq \emptyset$, luego

$$q(T(f_h))_{r,H,i} \leq \sum_{j=1}^{m} q(Z_{h_j}(f_{h_j}))_{r,H,i}$$

la conclusión se deduce por ser las Z_h continuas.

Sea $S_h: \mathcal{E}_F(V,E) \dashrightarrow \mathcal{E}(\varphi_{i_h}(L_h),E)$ definida como $S_h(f)(x) = f \circ \varphi_{i_h}^{-1}(x)$ para todo x de $\varphi_{i_h}(L_h)$. Evidentemente la aplicación está bien definida, es lineal y continua, luego la aplicación $S: \mathcal{E}_F(V,E) \dashrightarrow M$ definida como $S(f) = (S_h f)_{h \in A \cup B}$, está bien definida, es lineal y continua. Tendremos ahora que por ser los R_h disjuntos dos a dos para h en $A \cup B$, $S \circ T(f_h) = S(\sum_{h \in A \cup B} Z_h f_h) = (f_h)_{h \in A \cup B}$, luego por el teorema I.2.8. tendremos que $T \circ S$ de $\mathcal{E}_F(V,E)$ en sí mismo es una proyección continua y M es isomorfo topológicamente a $T \circ S(\mathcal{E}_F(V,E)) = T(M)$ que es un subespacio complementado de M, la conclusión se deduce ahora de I. 1. 3 . porque M es topológicamente isomorfo a $S(E)^{\mathrm{card}(A \cup B)}$ al ser E un espacio localmente completo.

TEOREMA 1. Sea F un cerrado en V variedad n-dimensional de clase $\mathcal{C}^{\infty}$ con $F \neq V$, entonces $\mathcal{E}_F(V,E)$ es topológicamente isomorfo a $S(E)^{\mathrm{card}(A \cup B)}$.

Demostración: si $\mathrm{card}(A \cup B)$ es finito usando I. 1. 1 . o si $\mathrm{card}(A \cup B)$ es infinito numerable usando I. 1. 3 ., entonces las proposiciones 5. y 6. nos aseguran que estamos en las hipótesis de I. 1. 1. y I. 1. 3 . respectivamente.

TEOREMA 2. Sea F un cerrado en V variedad n-dimensional de clase $\mathcal{C}^{\infty}$ con $V \neq F$, si E es un espacio localmente completo y $\overline{V \sim F}^{V}$ es un compacto $\mathcal{E}_F(V,E) \simeq S(E)$, en otro caso $\mathcal{E}_F(V,E) \simeq S(E)^{N}$

Este resultado es en particular válido si $V = \Omega$ abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$.

Demostración: es una consecuencia inmediata de que $V \sim F$ es cortado por un número finito de cubos $\{Q_r : r=1,2,\dots\}$ si y sólo si $\overline{V \sim F}^{V}$ es un compacto.

Conservando la notación de esta primera parte obtendremos tomado F cerrado en V con $F \neq V$:

PROPOSICION 7. $\mathcal{D}_F(V,E)$ es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de $S(E)^{(\mathrm{card}(A \cup B))}$, si E es localmente completo.

Demostración: llamando G_1 al espacio $\bigoplus_{m\in A} \mathcal{D}(Q_m,E) \times \bigoplus_{r\in B} \mathcal{D}(P_r,E)$ y definiendo $Z_1 : G_1 \dashrightarrow \mathcal{D}_F(V,E)$ como

$$Z_1((f_m),(g_r)) = \sum_{m\in A} f_m + \sum_{r\in B} g_r$$

evidentemente está bien definida y es lineal. La continuidad se deduce del hecho de que si H es un compacto en V , la inclusión de $\mathcal{D}(H,E)$ en $\mathcal{D}(V,E)$ es continua. Tomado $W_1 : \mathcal{D}_F(V,E) \dashrightarrow G_1$, definida como

$$W_1(f) = ((f\,k_m)_{m\in A},(f\,k_r)_{r\in B})$$

está bien definida por ser la familia $\{Q_r : r=1,2,\ldots\}$ localmente finita, y es continua porque se puede considerar la restricción de la aplicación $\tilde{W}_1$ de $\mathcal{D}(V,E)$ en $\bigoplus_{r=1}^{\infty} \mathcal{D}(Q_r,E)$ definida como $\tilde{W}_1(f) = (f\,k_r)_{r=1}^{\infty}$, que no ofrece dificultad probar que es continua. Tendremos que $W_1 \circ Z_1$ es la identidad en $\mathcal{E}_F(V,E)$, luego procediendo como en la proposición 5., se deduce la conclusión.

PROPOSICION 8. Si E es un espacio localmente completo $S(E)^{(\mathrm{card}(A\cup B))}$ es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de $\mathcal{D}_F(V,E)$.

Demostración: como en la proposición 6., manteniendo la misma notación, llamemos

$M_1 = \bigoplus_{h\in A\cup B} \mathcal{E}(\varphi_{i_h}(L_h),E)$, definimos

$T_1 : M_1 \dashrightarrow \mathcal{E}_F(V,E)$ como $T_1(f_h)_{h\in A\cup B} = \sum_{h\in A\cup B} z_h f_h$, evidentemente está bien definida, es lineal y continua por serlo Z_h: $\mathcal{E}(\varphi_{i_h}(L_h),E) \dashrightarrow \mathcal{D}_F(V,E)$. Definimos $S_1: \mathcal{D}_F(V,E) \dashrightarrow M_1$ como $S_1(f) = (S_h f)_{h\in A\cup B}$, por ser $\{Q_r : r=1,2,\ldots\}$ localmente finita, S_1 está bien definida, es trivialmente lineal y es continua por serlo S_h para h en $A\cup B$, además tendremos $S_1 \circ T_1(f) = (f_h)_{h\in A\cup B}$ luego por el teorema I.2.8. tendremos que M_1 es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de $\mathcal{D}_F(V,E)$, pero por ser E un espacio localmente completo $M_1 \simeq S(E)^{(\mathrm{card}(A\cup B))}$.

TEOREMA 3. Sea F un cerrado en V variedad n-dimensional de clase $\mathcal{E}^\infty$, no compacta, numerable en el infinito, con $V \neq F$, entonces $\mathcal{D}_F(V,E)$ es isomorfo topológicamente a $S(E)^{(\mathrm{card}(A\cup B))}$, si E es un espacio localmente completo.

Demostración: si $\mathrm{card}(A\cup B)$ es finito entonces $S(E)^{(\mathrm{card}(A\cup B))} \simeq S(E)$, si $\mathrm{card}(A\cup B)$ es infinito numerable $S(E)^{(\mathrm{card}(A\cup B))} \simeq S(E)^{(N)}$, la conclusión se deduce como en el teorema 1.

TEOREMA 4. SeaF un cerrado en V con $F \neq V$, y E un espacio localmente completo, $\mathcal{D}_F(V,E) \simeq S(E)$ si y sólo si $\overline{V\sim F}^V$ es compacto, en otro caso $\mathcal{D}_F(V,E) \simeq S(E)^{(N)}$.

Demostración: como en el teorema 3.

COROLARIO 2. Si Ω es un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y E es un espacio localmente completo, F un cerrado en Ω con $F \neq \Omega$, $\mathcal{D}_F(\Omega, E)$ es topológicamente isomorfo a $S(E)$ o a $S(E)^{(N)}$ según $\overline{\Omega \sim F}^{\Omega}$ sea compacto o no.

VI.2. ESPACIOS DE FUNCIONES DEFINIDOS EN UNA VARIEDAD CON BORDE $\mathscr{C}^{\infty}$-DIFERENCIABLE

DEFINICION 1. Llamaremos $\mathbb{R}^n_+$ al subespacio de $\mathbb{R}^n$
$\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ x_1 \geq 0\}$ con la topología restringida.

DEFINICION 2. Considerado L un compacto de $\mathbb{R}^n$ y E un espacio, representaremos por $\mathscr{D}_+(L,E)$ al espacio vectorial de las funciones definidas en $\mathbb{R}^n$ y con valores en E que son infinitamente diferenciables y tienen soporte en L.

Dado r entero positivo y q seminorma continua en E

$$Q(q,r)(f) = \sum_{|\alpha|\leq r} \sup_{x\in L} \{ q(D^{\alpha} f(x)) \} \qquad f \in \mathscr{D}_+(L,E)$$

es una familia de seminormas al variar r y q, que dotan a $\mathscr{D}_+(L,E)$ de una topología localmente convexa con la que suponemos en lo que sigue que está dotado el espacio.

Valdivia en (27) prueba si $E = \mathbb{K}$ que $\mathscr{D}_+(L) \simeq S$ si $\operatorname{int}(L) \neq \emptyset$. Nosotros vamos a generalizar el resultado, usando la misma técnica para el caso en que E es un espacio localmente completo.

Hallamos un número positivo b cumpliendo $\sup_{x\in L}\{\|x\|\} < b$. Llamaremos

$$A = \{(x_1,\ldots,x_n) : -b \leq x_j \leq b \qquad j=1,\ldots,n\}$$
$$B = \{(x_1,\ldots,x_n) : 0 \leq x_j \leq b \qquad j=1,\ldots,n\}$$
$$D = \{(x_1,\ldots,x_n) : -b \leq x_j \leq 0 \qquad j=1,\ldots,n\}$$

tomemos g un elemento de $\mathcal{D}(A)$ con $g(x) = 1$ si x está en L. Sea ν un operador de extensión lineal y continuo de $\mathcal{E}(B,E)$ en $\mathcal{E}(A,E)$, definimos $\beta f = g\,\nu\, f$ para f en $\mathcal{D}_+(L,E)$. Aplicando la fórmula de Leibnitz, se obtiene sin dificultad que β es un operador continuo, ya que evidentemente está bien definido y es lineal entre $\mathcal{D}_+(L,E)$ y $\mathcal{D}(M,E)$, siendo $M = D \cup L$.

PROPOSICION 1. $\mathcal{D}_+(L,E)$ es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de S(E), siendo E un espacio localmente completo.

Demostración: $\beta(\mathcal{D}_+(L,E))$ es un subespacio de $\mathcal{D}(M,E)$ isomorfo topológicamente a $\mathcal{D}_+(L,E)$, y entonces el subespacio de $\mathcal{D}(M,E)$ formado por aquellas funciones que se anulan en L es un complemento topológico de $\beta(\mathcal{D}_+(L,E))$ en $\mathcal{D}(M,E)$, por II.2.4. al ser M un compacto con $\mathrm{int}(M) \neq \emptyset$, $\mathcal{D}(M,E)$ es topológicamente isomorfo a S(E).

PROPOSICION 2. S(E) es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de $\mathcal{D}_+(L,E)$.

Demostración: basta tomar M y N cubos en $\mathbb{R}^n$ con $\emptyset \neq \mathrm{int}(M) \subset M \subset \mathrm{int}(N) \subset N \subset \mathrm{int}(L)$, siendo el interior de L en $\mathbb{R}^n$, y tomamos un operador de extensión lineal y continuo γ de $\mathcal{E}(M,E)$ en $\mathcal{D}(M,E)$, entonces procediendo como en la proposición IV.1.1., se obtiene que $\gamma(\mathcal{E}(M,E)) \subset \mathcal{D}_+(L,E)$ y es un subespacio complementado, además por ser γ un operador de extensión $\gamma(\mathcal{E}(M,E)) \simeq \mathcal{E}(M,E) \simeq S(E)$ por I.2.3.

TEOREMA 1. $\mathcal{D}_+(L,E)$, si E es un espacio localmente completo, es isomorfo topológicamente a S(E).

Demostración: consecuencia inmediata de las proposicio nes 1. y 2. y de I.1. 1.

Este teorema puede deducirse de IV.1.1. observando que $\mathcal{D}_{+}(L,E) = \mathcal{E}_F(B,E)$, siendo B el cubo definido y $F = \overline{\mathbb{R}^n \sim L} \cap B$, como $int(B \sim F) = int(L) \neq \emptyset$, tomando interiores en $\mathbb{R}^n$, tendremos por IV.1.1. que $\mathcal{E}_F(B,E) \simeq S(E)$.

Sea V una variedad con borde n-dimensional $\mathcal{E}^{\infty}$-diferenciable, sea $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ un atlas en V tal que $\varphi_i(U_i)$ es un abierto en $\mathbb{R}^n_+$, $i \in I$. Si z pertenece al borde de V y z está en U_i, entonces $\varphi_i(z)$ tiene la primera coordenada nula.

Se define el espacio $\mathcal{E}(V,E)$ igual que en VI.1., pero sustituyendo $\mathbb{R}^n$ por $\mathbb{R}^n_+$. Si H es un subconjunto compacto en V, se define $\mathcal{D}(H,E)$ como el subespacio de $\mathcal{E}(V,E)$ cuyas funciones tienen su soporte en H. $\mathcal{D}(V,E)$ se define igual que en VI.1. Definiendo un cubo en $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ de la misma forma que en VI.1.

PROPOSICION 3. Sea E un espacio, sea P un subconjunto cerrado de un cubo de una variedad V n-dimensional con borde, si $int(P) \neq \emptyset$ tendremos que:

a) $\mathcal{D}(P,E) \simeq \mathcal{D}_{+}(\varphi_j(P),E)$, siendo (U_j, φ_j) una carta con $P \subset U_j$.

b) Si E es localmente completo $\mathcal{D}(P,E) \simeq S(E)$.

Demostración: repitiendo la prueba de las proposiciones 1.1, 1.2., 1.3., observando que si Q es el cubo de V con $P \subset Q$, tendremos que $\varphi_j(Q)$ es un cubo en $\mathbb{R}^n_+$, tomado A un cubo de $\mathbb{R}^n$

que contenga en su interior en $\mathbb{R}^n$ a $\varphi_j(Q)$, y un operador de extensión lineal y continuo ν de $\mathcal{E}(\varphi_j(Q),E)$ en $\mathcal{D}(A,E)$, a cada $\nu(f.\varphi_j^{-1})$, siendo f de $\mathcal{D}(P,E)$, le podemos aplicar la regla de la cadena y obtener la conclusión buscada.

TEOREMA 2. Sea H un compacto en una variedad V n-dimensional $\mathcal{C}^\infty$ diferenciable con borde, supongamos $\mathrm{int}(H) \neq \emptyset$, si E es un espacio localmente completo entonces $\mathcal{D}(H,E) \simeq S(E)$.

Demostración: como la proposición 1.4., usando ahora la proposición 3.

TEOREMA 3. Si la variedad V es compacta y E es un espacio localmente completo, $\mathcal{E}(V,E) \simeq S(E)$.

Demostración: es consecuencia inmediata del teorema 2. y de la igualdad $\mathcal{E}(V,E) = \mathcal{D}(V,E)$.

Suponemos en lo que sigue de sección que V es numerable en el infinito y no es compacta.

Valdivia (27) prueba que del atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$, se puede extraer una sucesión de cartas $(W_1, \varphi_{i_1}),\dots,(W_r, \varphi_{i_r}),\dots$ de manera que en W_r existe un cubo Q_r tal que $\{\mathrm{int}(Q_r) : r=1,2,\dots\}$ es un recubrimiento localmente finito de V.

Sea F un cerrado en V con $\mathrm{int}(V\sim F) \neq \emptyset$, sea $A = \{r\in\mathbb{N} \,/\, \mathrm{int}(Q_r)\subset V\sim F\}$, sea $B = \{r\in\mathbb{N} \,/\, / \, \mathrm{int}(Q_r)\cap V\sim F \neq \emptyset \,,\wedge\, \mathrm{int}(Q_r)\cap F \neq \emptyset\}$. Sea h_r un elemento de $\mathcal{D}_+(\varphi_{i_r}(Q_r))$ con $h_r(x) > 0$ para todo x en $\mathrm{int}(\varphi_{i_r}(Q_r))$ en $\mathbb{R}^n_+$, definidos λ_r y k_r como en

VI.1., llamamos P_r a $P_r = \overline{Q_r \cap V \sim F}$ para r en B.

Procediendo como en la proposición 1.6. tomando la misma familia $(L_h)_{h\in A\cup B}$, $(R_h)_{h\in A\cup B}$ de cubos en V, las mismas aplicaciones pero sustituyendo $\mathcal{D}(\varphi_{i_h}(R_h),E)$ por $\mathcal{D}_+(\varphi_{i_h}(R_h),E)$, y usando la proposición 3. obtendremos:

PROPOSICION 4. $S(E)^{\mathrm{card}(A\cup B)}$ es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de $\mathcal{E}_F(V,E)$, si E es un espacio localmente completo.

PROPOSICION 5. Si E es un espacio localmente completo, $\mathcal{E}_F(V,E)$ es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de $S(E)^{\mathrm{card}(A\cup B)}$.

Demostración: como en la proposición 1.5.

TEOREMA 4. Sea V una variedad con borde, n-dimensional $\mathcal{C}^\infty$-diferenciable, sea F un cerrado en V $V\sim F \neq \emptyset$. Sea E un espacio localmente completo. Si V no es compacta y es numerable en el infinito, $\mathcal{E}_F(V,E)$ es topológicamente isomorfo a $S(E)^{\mathrm{card}(A\cup B)}$.

Demostración: consecuencia inmediata de las proposiciones 4. y 5. y de I.1. 1. ó I.1. 3., según que card$(A\cup B)$ sea finito o numerable.

COROLARIO 1. En las condiciones del teorema 4., $\mathcal{E}_F(V,E) \simeq S(E)$ si y sólo si $\overline{V\sim F}^V$ es un compacto, en otro caso $\mathcal{E}_F(V,E) \simeq S(E)^N$, en particular si $F = \emptyset$, $\mathcal{E}(V,E) \simeq S(E)^N$.

Demostración: como en el teorema 1.2., usando ahora el teorema 4.

Procediendo como en las proposiciones 1.7., 1.8. y el teorema 1.3. obtendremos si E es un espacio localmente completo:

PROPOSICION 6. $\mathcal{D}_F(V,E)$ es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de $S(E)^{(\mathrm{card}(A \cup B))}$.

PROPOSICION 7. $S(E)^{(\mathrm{card}(A \cup B))}$ es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de $\mathcal{D}_F(V,E)$.

TEOREMA 5. Sea V una variedad n-dimensional con borde $\mathcal{C}^{\infty}$-diferenciable, no compacta, numerable en el infinito, sea F un cerrado en V con $F \neq V$. Sea E un espacio localmente completo, entonces $\mathcal{D}_F(V,E)$ es topológicamente isomorfo a $S(E)^{(\mathrm{card}(A \cup B))}$.

COROLARIO 2. En las condiciones del teorema 5., $\mathcal{D}_F(V,E)$ es isomorfo topológicamente a S(E) si y sólo si $\overline{V \sim F}^V$ es compacto, en caso contrario $\mathcal{D}_F(V,E) \simeq S(E)^{(N)}$. En particular si $F = \emptyset$ entonces $\mathcal{D}(V,E) \simeq S(E)^{(N)}$.

Demostración: como en el corolario 1, aplicando ahora el teorema 5.

BIBLIOGRAFIA

1.- BONET, J.: Representaciones de espacios de funciones con valores vectoriales. Tesis doctoral(1980)

2.- BONET, J.: Representaciones de los espacios $\mathcal{E}^k(V,E)$ $\mathcal{D}^k(V,E)$. Pend. Publi. en R.Acad. Madrid.

3.- BONET, J.: Representaciones de los espacios $O_M(E)$ y $\mathcal{D}_{L^p}(E)$. Pend.Publi. Collectanea Mat.

4.- BONET, J. y MAESTRE, M.: Representaciones de los espacios $\mathcal{B}_o(\Omega,E)$ y $\mathcal{B}_1(\Omega,E)$. Pend. Publi. R.Re. Acad. Madrid.

5.- DIEROLF, P.: L'espace $\dot{\mathcal{B}}(\Omega)$ et les distributions sommables. C.R.Acad.Sci.Paris 288, 197-199 (1979)

6.- DIEROLF, P. y VOIGT, J.: Calculation of the bidual for some function spaces. Integrable distributions. Math.Ann.

7.- DIEUDONNE, J.: Fundamentos de Análisis moderno. Ed. Reverté (1966).

8.- GROTHENDIECK, A.: Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires. Memoirs of the A.M.S.(1955)

9.- HORVATH, J.: Topological vector spaces and distributions. Addison-Wesley Publ.Comp.Reading Massachusetts.(1966).

10.- KÖTHE, G.: Topological vector spaces I. Springer

(1969)

11.- OGRODZKA, Z.: On simultaneous extensions of infinitely differentiable functions. Studia Math. 28 (1967) 193-207.

12.- PIETSCH: Nuclear locally convex spaces. Springer (1972).

13.- ROLEWICZ, S.: Metric linear spaces. Warsawa, 1972.

14.- RUDIN, W.: Functional Analysis. Mc Grawn-Hill Comp. New York (1973).

15.- SCHWARTZ, L.: Théorie des distributions. Hermann, Paris (1978).

16.- SCHWARTZ, L.: Espaces de fonctions differentiables a valeurs vectorielles. J.Analyse Math., 4 (1954/55) 88-148.

17.- VALDIVIA, M.: Representaciones de los espacios $\mathcal{D}(\Omega)$ y $\mathcal{D}'(\Omega)$. Rev.Real.Acad.de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales 72, 385-414(1978)

18.- VALDIVIA, M.: Una representación del espacio $\mathcal{D}_+(\Omega)$. Rev.Real Acad. de Ciencias Exactas Físicas y Naturales 72, 560-571 (1978).

19.- VALDIVIA, M.: On certain infinitely differentiable function spaces. Séminaire P.Lelong, H.Skoda (Analyse), 18e et 19e année. 1978/1979.

20.- VALDIVIA, M.: A representation of the space $\mathcal{D}(K)$.

J. fur die reine und angew.Math. 320, 97-98 (1980).

21.- VALDIVIA, M.: A representation of the space O_M. Math.Z. 177, 463-478 (1981).

22.- VALDIVIA, M.: On the space $\mathcal{D}_{L}p$. Math.Anal. and Appl. Part B. Advances in Math. and supplementary studies Vol. 7B. Academic Press (1981).

23.- VALDIVIA, M.: Sobre el espacio $\mathcal{B}_o(\Omega)$. Rev.Real Acad. de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales 74, 836-863 (1980).

24.- VALDIVIA, M.:Representaciones de los espacios $\mathcal{E}^m(V)$ y $\mathcal{D}^m(V)$. Rev.Real Acad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales 75,589-596(1981).

25.- VALDIVIA, M.: Sobre espacios de funciones infinitamente diferenciables que se anulan en un cerrado. Pend. Publi.

26.- VALDIVIA, M.: Sobre el espacio $\mathcal{D}_{L}p(\Omega)$. Pend. Publi.

27.- VALDIVIA, M.: Topics in locally convex spaces. Pend. Publi. en North Holland

28.- WEIR, A.: Lebesgue integration and measure. Cambridge University Press (1973).

INDICE

UNIVERSIDAD DE VALENCIA   FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Reunido el Tribunal que suscribe en el día de la fecha, acordó otorgar, por unanimidad, a esta tesis doctoral de D. MANUEL MAESTRE VERA la calificación de SOBRESALIENTE CUM LAUDE

Valencia, a 2 de ABRIL de 1982

El Secretario,

El Presidente

UNIVERSIDAD DE VALENCIA - FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS