

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
BIBLIOTECA CIÈNCIES

Nº Registre 8017
DATA 4.10.95

SIGNATURA
158.T.D
Nº LIBS: i1895084x

o Matemáticas

b16763798

26 cms.

Rutas de Vehículos con Demanda Compartida.

M. Carmen Martínez Blázquez
Dpto. de Estadística e Investigación Operativa
Universitat de València

Junio 1995

UMI Number: U603096

All rights reserved

INFORMATION TO ALL USERS

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted.

In the unlikely event that the author did not send a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if material had to be removed, a note will indicate the deletion.



UMI U603096

Published by ProQuest LLC 2014. Copyright in the Dissertation held by the Author.
Microform Edition © ProQuest LLC.

All rights reserved. This work is protected against
unauthorized copying under Title 17, United States Code.



ProQuest LLC
789 East Eisenhower Parkway
P.O. Box 1346
Ann Arbor, MI 48106-1346

D. ENRIQUE MOTA VIDAL, profesor titular de Estadística e Investigación Operativa de la Universitat de València.

CERTIFICA: que la presente memoria *Rutas de Vehículos con Demanda Compartida* ha sido realizada bajo su dirección, en el Departamento de Estadística e Investigación Operativa por Dña. M. Carmen Martínez Blázquez, y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, presenta ante la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universitat de València, a 28 de Junio de 1995.

EL DIRECTOR

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'E. Mota Vidal', with a stylized flourish at the end.

Enrique Mota Vidal

A Jaime,

a mis padres y, a mis hermanos.

INTRODUCCIÓN

Los Problemas de Rutas de Vehículos, se incluyen dentro de la problemática de Distribución y Transporte a la que se enfrentan, diariamente, gran número de empresas, tanto públicas como privadas.

En todos ellos, es posible definir un conjunto de clientes que tienen que ser visitados por uno o varios vehículos. Si además, hay unos pesos (demandas) asignados a cada cliente y, los vehículos tienen una capacidad limitada (Q), entramos en el campo de los Problemas de Rutas de Vehículos con Capacidades (*CVRP*).

Evidentemente, hay un enorme número de situaciones reales que pueden modelizarse en términos de *VRP*'s, por ejemplo, reparto de correo, diseño de recorrido de autobuses escolares, recogida de basuras, etc La mayoría de estos problemas admiten una representación en términos de grafos mediante la identificación, de los clientes con los vértices y, de los caminos entre ellos, con las aristas; de esta manera, obtenemos una red en la que el problema que hay que resolver consiste en: diseñar un conjunto de rutas, asociadas a los vehículos disponibles, de manera que sea posible la recogida o reparto de cierta mercancía, que se encuentra localizada en los vértices.

Normalmente, el diseño de las rutas se lleva a cabo respetando la condición de que cada cliente sea visitado por un único vehículo. Si relajamos esta condición y permitimos que la demanda de cada cliente pueda ser atendida por uno o más vehículos, nos encontramos con el *Problema de Rutas de Vehículos con Demanda Compartida*, de cuyo estudio nos ocupamos en esta memoria. Nos referiremos a él utilizando las siglas *SDVRP* (del inglés, Split Delivery Vehicle Routing Problem).

Si tuviésemos que indicar qué disciplina, dentro de las Matemáticas, sería la encargada de estudiar este tipo de problemas, tendríamos que referirnos, al menos, a tres de ellas. La primera sería, evidentemente, la Teoría de Grafos. Si además, tenemos en cuenta el carácter numerable del conjunto de soluciones de estos problemas, nos encontramos con que también es posible formularlos como problemas de Optimización Combinatoria. Por último, no podemos olvidar que el objetivo que se persigue al estudiarlos no es otro que el de resolverlos. Para ello es necesario diseñar algoritmos *eficientes* que los resuelvan. Entramos así en el campo de la Complejidad Algorítmica.

La primera dificultad con la que nos encontramos a la hora de resolver el *SDVRP* es, como ocurre con la mayoría de Problemas de Rutas, que se trata de un problema *difícil*, es decir, de un problema \mathcal{NP} – *duro*. Por este motivo, la probabilidad de encontrar un algoritmo eficiente que lo resuelva es prácticamente nula.

En general, la investigación sobre los Problemas de Rutas, considerados difíciles, se ha centrado en el diseño de algoritmos heurísticos que proporcionan, rápidamente, soluciones “cercanas” a la solución óptima y en algoritmos exactos basados, bien en técnicas de Ramificación y Acotación, bien en técnicas de Planos de Corte.

El desarrollo experimentado por la Combinatoria Poliédrica, en los últimos años, ha propiciado la aparición de nuevas técnicas que combinan las técnicas de Ramificación y Acotación con las de Planos de Corte y utilizan el conocimiento de la estructura del poliedro de soluciones para resolver instancias de gran tamaño. Los algoritmos que combinan estos dos métodos se conocen como algoritmos de Branch&Cut. Se han aplicado, con éxito, para resolver, por ejemplo, instancias del *TSP* de hasta 2392 vértices (Padberg y Rinaldi (1991) [73]) e instancias del *CVRP* de hasta 135 clientes (Augerat et al. (1995) [7]).

La eficiencia de los algoritmos de Planos de Corte y, por tanto, de los de Branch&Cut, depende, en gran medida, de la calidad de las restricciones utilizadas para eliminar soluciones no enteras. Desde un punto de vista teórico, las mejores restricciones son las que inducen facetas del poliedro de soluciones asociado al problema que se está resolviendo. De ahí la importancia de conocer una descripción lineal completa del poliedro de soluciones asociado al problema de Optimización Combinatoria en estudio.

Por desgracia, conocer una descripción lineal completa del poliedro asociado al conjunto de soluciones posibles de un problema de la clase \mathcal{NP} – *duro*, es prácticamente imposible. No obstante, el inconveniente que supone trabajar con un sistema incompleto puede subsanarse detectando, de forma iterativa, desigualdades nuevas que añadir al sistema. De hecho, la experiencia ha demostrado que, en muchos problemas, es posible alcanzar la solución óptima sin necesidad de recurrir a un algoritmo de enumeración, aún disponiendo de una descripción lineal parcial del poliedro.

El Problema de Rutas de Vehículos más cercano al que tratamos en esta memoria, es el Problema de Rutas de Vehículos con Capacidades. La ventaja

que presenta el *SDVRP* frente al *CVRP* reside, principalmente, en el hecho de que “siempre” se puede encontrar una solución para cualquier instancia del problema usando el mínimo número de vehículos, circunstancia que no se da cuando trabajamos con el *CVRP*; para resolver el *CVRP* es necesario resolver, previamente, un “*Bin-Packing*” sobre las demandas de los clientes, problema que, desde el punto de vista de la Combinatoria Poliédrica, es un problema *difícil*.

Por otra parte, trabajar con el *SDVRP*, no sólo garantiza ahorros en el número de vehículos utilizados sino que, además, en algunos casos es posible encontrar soluciones óptimas en las que la distancia total recorrida es menor que la que obtendríamos al resolver el mismo problema dentro del contexto del *CVRP*.

Las ventajas expuestas, junto con el hecho de que no hemos encontrado, en la literatura científica relacionada con el tema, ningún trabajo que estudie el *SDVRP* desde el punto de vista de la Combinatoria Poliédrica, justifican el estudio del *SDVRP* desde el punto de vista poliédrico. Esto es, precisamente, lo que nos hemos propuesto conseguir con esta memoria.

El objetivo principal que nos hemos marcado es el estudio del poliedro asociado al conjunto de soluciones del *SDVRP*, al que denotaremos por P_{SDVRP} . Determinamos su dimensión y presentamos un número considerable de desigualdades válidas, muchas de las cuales inducen facetas del P_{SDVRP} . Utilizamos esta información para desarrollar un algoritmo de Planos de Corte que nos ha permitido resolver, óptimamente, instancias de hasta 51 vértices.

Presentamos a continuación la estructura de este trabajo y describimos, brevemente, el contenido de cada capítulo.

Los dos primeros capítulos sirven de introducción para detallar el contexto en el que podemos encuadrar nuestro trabajo. En el Capítulo 1, presentamos todos aquellos conceptos y resultados matemáticos que vamos a necesitar a lo largo de esta memoria y, en el Capítulo 2, introducimos algunos Problemas de Rutas que están relacionados, de una u otra manera, con el P_{SDVRP} , junto con una revisión bibliográfica de la investigación realizada sobre cada uno de ellos.

El Capítulo 3 está dedicado al estudio de las relaciones entre los problemas presentados en el Capítulo 2 y el *SDVRP*. Revisamos la literatura científica relacionada con el Problema de Rutas de Vehículos con Demanda Compartida

y dejamos constancia de los pocos trabajos sobre el tema que, hasta donde nosotros sabemos, se han desarrollado con anterioridad al que aquí presentamos.

En el Capítulo 4 introducimos dos definiciones distintas de *solución* posible del *SDVRP*. La primera de ellas contempla la posibilidad de poder visitar a los clientes sin necesidad de servirles, en cuyo caso demostramos que la envoltura convexa del conjunto de soluciones del *SDVRP* es un poliedro no acotado de dimensión completa. La segunda definición, surge cuando exigimos que cada vez que un vehículo visita a un cliente le sirva al menos una unidad de su demanda. En este caso, seguimos teniendo un poliedro pero ya no es de dimensión completa.

Puesto que la dimensión completa garantiza que para cada faceta del P_{SDVRP} hay una única desigualdad válida que la induce (salvo producto por un escalar no negativo), optamos por elegir la primera definición de solución para realizar el resto del estudio poliédrico.

Los tres capítulos siguientes están dedicados, completamente, al estudio de la estructura facial del poliedro. En el Capítulo 5, estudiamos una serie de desigualdades que aparecen, por primera vez, al estudiar los poliedros de soluciones asociados al *GTSP* (Problema del Agente Viajero Gráfico) y al *CVRP*. Para algunas de ellas damos condiciones, bajo las cuales, estas desigualdades inducen facetas del P_{SDVRP} .

En el siguiente capítulo transformamos las restricciones “*2-matching generalizadas*”, introducidas por Araque (1989) [2] para el *CVRP* con demandas unitarias, en desigualdades válidas para nuestro problema y, demostramos, que también inducen facetas de nuestro poliedro.

Por último, en el Capítulo 7 mostramos cómo las facetas presentadas en los dos capítulos anteriores no son suficientes para describir completamente el poliedro. De hecho, trabajamos con unas variables que ni tan siquiera son suficientes como para formular el problema como un problema de programación lineal entera. También obtenemos una nueva familia de facetas para el P_{SDVRP} que, a diferencia de las anteriores, no está relacionada con ningún otro Problema de Rutas de Vehículos. Son, de alguna manera, exclusivas de nuestro problema.

Finalmente, en el Capítulo 8, presentamos un informe de cuáles han sido nuestras experiencias computacionales al resolver algunas instancias del pro-

blema utilizando técnicas tanto heurísticas como exactas. Dividimos este capítulo en dos partes claramente diferenciadas: en la primera diseñamos un nuevo algoritmo heurístico para el problema y presentamos los resultados obtenidos sobre una colección de problemas test, cuyos tamaños oscilan entre 22 y 150 clientes. Nos referimos al algoritmo como “nuevo” porque en la revisión bibliográfica que hemos realizado hemos encontrado otro heurístico para el mismo problema (Dror y Trudeau (1989-90) [32], [33]) que, hasta donde nosotros sabemos, es el único a parte del que proponemos en esta memoria. En la segunda, utilizamos la descripción parcial del $PSDVRP$, obtenida en los capítulos anteriores, para diseñar un algoritmo de Planos de Corte y, presentamos los resultados obtenidos sobre una colección de problemas de hasta 100 clientes. Todos los problemas, extraídos de la literatura, con menos de 51 vértices han sido resueltos óptimamente. Si tenemos en cuenta que el único procedimiento de Planos de Corte que hay en la literatura (Dror et al. (1994) [30]) resuelve como máximo instancias con 20 vértices y, óptimamente, sólomente uno de 10 vértices, podemos concluir que, los resultados obtenidos son, desde nuestro punto de vista, muy prometedores, sobre todo, si tenemos en cuenta la complejidad del problema que estamos estudiando.

Quiero expresar mi agradecimiento a todos aquellos compañeros del Departamento de Estadística e Investigación Operativa que, en los momentos de desánimo, me han mostrado su apoyo y me han animado a continuar con este trabajo. Desde el punto de vista científico, quiero agradecer a todos los miembros del grupo de Rutas de Vehículos y, en especial, a J.M. Belenguer, sus consejos, comentarios y sugerencias que me han permitido mejorar el contenido de esta memoria. Y, por último, a Enrique Mota, por su labor de dirección, sin la cual no hubiese sido posible llevar a cabo este trabajo.

Índice General

1	Resultados Preliminares.	1
1.1	Álgebra Lineal.	1
1.2	Teoría de Grafos.	5
1.3	Teoría Poliédrica.	7
1.4	Teoría de la Complejidad Algorítmica.	9
1.5	Programación Lineal y Entera.	14
1.6	Combinatoria Poliédrica.	15
2	Problemas de Rutas relacionados.	23
2.1	Clasificación General de los Problemas de Rutas.	23
2.2	El Problema del Agente Viajero.	26
2.2.1	Formulación Matemática.	27
2.2.2	Complejidad Algorítmica.	27
2.2.3	Estrategias de Solución.	27
2.2.4	Investigación Poliédrica.	28

2.3	El Problema del Agente Viajero Gráfico.	29
2.3.1	Formulación Matemática.	29
2.3.2	Complejidad Algorítmica.	29
2.3.3	Estrategias de Solución.	30
2.3.4	Investigación Poliédrica.	30
2.4	El Problema de Rutas de Vehículos con Capacidades.	32
2.4.1	Formulación Matemática.	33
2.4.2	Complejidad Algorítmica.	34
2.4.3	Estrategias de Solución.	34
2.4.4	Investigación Poliédrica.	36
3	El Problema de Rutas de Vehículos con Demanda Compartida.	39
3.1	Introducción. Estado actual.	39
3.2	Definición del problema.	42
3.3	Relaciones y diferencias con otros problemas de Rutas por Vértices.	43
3.4	Formulaciones.	48
3.4.1	Primera relajación.	48
3.4.2	Segunda relajación.	51
3.4.3	Tercera relajación.	55
3.5	Una formulación entera.	61

3.6	Método de reconocimiento de rutas.	71
4	El poliedro del $SDVRP$.	73
4.1	Definición de solución posible.	73
4.2	El poliedro de soluciones.	74
4.3	Un caso en el que la dimensión no es completa.	83
4.4	Conclusiones.	88
5	Facetas del P_{SDVRP}.	91
5.1	Facetas relacionadas con $R1$	92
5.2	Propiedades generales.	97
5.3	Facetas relacionadas con el $GTSP$	103
5.4	Desigualdades válidas.	149
5.4.1	Desigualdades “comb”.	149
5.4.2	Desigualdades “clique tree”.	153
5.4.3	Desigualdades “path con capacidades”.	155
5.4.4	Restricciones de capacidad generalizadas.	159
5.5	Conclusiones.	161
6	Desigualdades “2-matching” generalizadas.	163
6.1	Desigualdades $2MG1$	164
6.2	Desigualdades $2MG2$	191

6.3	Dos casos especiales, $Q \doteq 4$ y $Q \doteq 5$	202
7	Una nueva familia de facetas.	205
7.1	El origen de la nueva familia.	206
7.1.1	Ejemplo de Fleischmann.	206
7.1.2	Descripción lineal completa del poliedro de soluciones asociado al ejemplo de Fleischmann.	211
7.2	Generalización de la nueva restricción.	223
7.2.1	Configuración de Fleischmann simple.	223
7.2.2	Configuración de Fleischmann ampliada.	234
7.3	Conclusiones.	258
8	Experiencias computacionales.	261
8.1	Algoritmos heurísticos para el <i>SDVRP</i>	262
8.1.1	Algoritmo heurístico de Dror y Trudeau (1990).	262
8.1.2	Un nuevo algoritmo heurístico.	265
8.2	Un algoritmo de Planos de Corte para el <i>SDVRP</i>	281
8.3	Un algoritmo exacto para el <i>SDVRP</i>	288

Índice de Figuras

3.1	Ejemplo de Fleischmann.	51
5.1	Configuración <i>path</i>	104
5.2	Configuración <i>wheelbarrow</i>	106
5.3	Configuración <i>bicycle</i>	107
5.4	Coeficientes de una desigualdad asociada a una configuración <i>path</i> . En trazo continuo representamos las aristas del esqueleto.	108
5.5	Estructura de la solución T^i en A y en Z	111
5.6	Camino asociado a P_r	112
5.7	Estructura de una de las rutas de T^i	112
5.8	Estructura de la ruta asociada al vehículo que sirve a P_i	113
5.9	Solución T^1 para demostrar la validez de las desigualdades <i>path</i>	115
5.10	Parte diferente entre T^i y T'	116
5.11	Ruta de T' que contiene a e	118
5.12	Ruta de T^i que contiene a e'	119
5.13	Solución T' , $f_e = a_e$, para $e \in (B_j^i, B_p^i)$ con $p \geq j + 2$	120

5.14	Una ruta de la solución utilizada para calcular el coeficiente de las aristas cruzadas.	122
5.15	Solución T' utilizada para calcular el coeficiente de las aristas de (A, Z)	124
5.16	Solución T^i para una configuración <i>wheelbarrow</i>	135
5.17	Primera solución para probar: $f_e = f_{e'}, \forall e \in (B_j^i, B_{j+1}^i), \forall e' \in (B_k^i, B_{k+1}^i)$	139
5.18	Segunda solución para probar: $f_e = f_{e'}, \forall e \in (B_j^i, B_{j+1}^i), \forall e' \in (B_k^i, B_{k+1}^i)$	140
5.19	Solución T^i del <i>SDVRP</i> que cumple la desigualdad asociada a una configuración <i>wheelbarrow</i>	141
5.20	Solución T^{i+1} del <i>SDVRP</i> que cumple la desigualdad asociada a una configuración <i>wheelbarrow</i> , $a = f_{b_{n_i-1}^{i-1}, b_{n_i}^i}$	142
5.21	Solución T^{i-1} del <i>SDVRP</i> que cumple la desigualdad asociada a una configuración <i>wheelbarrow</i> , $b = f_{b_{n_i}^i, b_{n_i+1}^{i+1}}$	143
5.22	Solución $T^{s'}$	145
5.23	Ejemplos.	147
5.24	Configuración <i>Comb generalizada</i>	152
5.25	Configuración <i>path con capacidades</i>	157
6.1	Configuración asociada a una desigualdad <i>2-matching generalizada</i>	165
6.2	Solución del <i>SDVRP</i> que viola las restricciones de Araque.	166
6.3	Solución que viola la desigualdad <i>2-matching generalizada</i>	166

6.4	Parte de la solución asociada a un diente con $x(\delta(T_i)) = 2$	169
6.5	Única solución con $x(\delta(T_i)) = 2$ para todo i	170
6.6	Parte de una solución asociada a un diente de grado dos.	171
6.7	Tres dientes en la configuración, dos de grado 2 y uno de grado 4.	172
6.8	Parte de una solución con $s \geq 4$ y ejemplo de solución no posible.	173
6.9	Una solución posible sobre 4 dientes.	173
6.10	$x(\delta(T_4)) = 4$, $s \geq 4$ ó $s \geq 5$	174
6.11	$x(\delta(T_2)) = 4$, $x(\delta(T_3)) = 4$	175
6.12	Dientes encadenados a través de aristas de H	176
6.13	Soluciones R_1 y R_2 para el caso 3.	178
6.14	Soluciones para el caso 4.	178
6.15	Soluciones para el caso 5.	179
6.16	Soluciones para el caso 6.	180
6.17	Soluciones para aristas <i>cruzadas</i>	181
6.18	Soluciones para aristas del <i>mango</i>	182
6.19	Soluciones para el resultado número 9.	184
6.20	Soluciones utilizadas en 10, 11 y 12.	184
6.21	Soluciones R_1 , R_2 y esquema de valores de f_e	188
6.22	Solución ampliada para $s > 4$	189
6.23	Las desigualdades <i>2-matching generalizadas</i> , $b^t x \leq b_0$, y las $2MG2$, $a^t x \geq a_0$, no son equivalentes.	193

6.24	Relación entre las estructuras de una $2MG2$ y una <i>path 2-regular</i> .	194
6.25	$\{x \in P_{GVRP} : a^t x = 3s + 1\} \subset \{x \in P_{SDVRP} : a^t x = 3s + 1\}$.	201
6.26	Soluciones que cumplen para s par $a^t x = 3s$ y, para s impar $a^t x = 3s + 1$.	203
7.1	Ejemplo de Fleischmann.	207
7.2	Una solución real en la que aparece una estructura del tipo introducida por Fleischmann.	208
7.3	Identificación de supernodos en la solución.	210
7.4	Grafo soporte inicial.	216
7.5	Solución posible que viola (1) cuando $0 \leq \alpha < 2$.	217
7.6	Grafo soporte asociado a la desigualdad (2).	218
7.7	Solución posible que nos conduce a obtener la restricción (3).	219
7.8	Grafo soporte asociado a la desigualdad (3).	219
7.9	Grafo soporte asociado a la desigualdad (4) y solución que permite obtenerla.	220
7.10	Grafo soporte asociado a la desigualdad (5) y solución que permite obtenerla.	220
7.11	Grafo soporte asociado a la desigualdad (6) y solución que permite obtenerla.	221
7.12	Grafo soporte asociado a la desigualdad (7) y solución que permite obtenerla.	222
7.13	Subgrafo del grafo soporte asociado a una <i>configuración de Fleischmann simple</i> .	224

7.14 Solución que cumple $a^t x = 2s + 2$ y que puede ser posible en algunos casos.	238
7.15 Soluciones no posibles para s par (impar) que cumplen $a^t x = 2s + 2$	239
7.16 Soluciones que cumplen $a^t x = 2(s + 2)$	243
7.17 Solución base que cumple $a^t x = 2(s + 2)$	245
7.18 Parte de las soluciones T_1 y T_2	247
7.19 $f_e = \lambda_{B_1 Z}$, $\forall e \in (B_1, Z)$	248
7.20 $\lambda_i = \lambda_j$, soluciones T_3 y T_4	249
7.21 $\lambda_{AB_1} = 3\lambda_{B_1 Z}$	250
7.22 $\lambda_{AZ} = 2\lambda$, $\forall e \in (A, Z)$	250
7.23 $\lambda_{B_1 B_i} = 2\lambda$, $\forall i = 2, \dots, s$	251
7.24 $\lambda_{B_i B_j} = 2\lambda$, $\forall e \in (B_i, B_j)$, $i, j = 2, \dots, s$, $i \neq j$	252
7.25 Solucion que cumple $a^t x = 2(s + 2)$ utilizando menos vehículos.	254
7.26 Grafo asociado a una solución del <i>SDVRP</i> sii $K \geq 6$	257

Índice de Tablas

5.1	Coeficientes de una desigualdad $a^t x \geq a_0$ <i>comb generalizada</i> . . .	153
7.1	Demandas del <i>eil33</i>	209
7.2	Soluciones minimales que violan la nueva desigualdad.	215
7.3	Valor de los coeficientes de $f^t x \geq f_0$ y de $a^t x \geq a_0$	252
8.1	Costes y número de vehículos de las soluciones de los problemas de la TSPLIB.	273
8.2	Costes y número de vehículos de las soluciones de los problemas aleatorios.	274
8.3	Distribución de tiempos en el algoritmo.	276
8.4	Distribución de tiempos atendiendo a las diferentes fases del algoritmo.	277
8.5	Comportamiento del coste en el heurístico.	279
8.6	Comportamiento del coste en el heurístico.	279
8.7	Resultados computacionales del algoritmo de planos de corte sobre algunos problemas de la TSPLIB.	285

8.8	Resultados computacionales del algoritmo de planos de corte sobre los problemas aleatorios.	287
8.9	Óptimos de algunos problemas de la TSPLIB.	290

Capítulo 1

Resultados Preliminares.

En este capítulo presentamos todos aquellos conceptos y resultados matemáticos de Álgebra Lineal, Teoría de Grafos, Teoría Poliédrica, Complejidad Algorítmica, Programación Lineal y Combinatoria Poliédrica ya conocidos y que se usarán a lo largo del desarrollo de este trabajo.

1.1 Álgebra Lineal.

Los resultados que damos en esta sección se pueden encontrar en los libros básicos de álgebra lineal, o en cualquiera de las introducciones que aparecen en los artículos y libros que tratan temas relacionados con la teoría poliédrica. Son especialmente útiles en el capítulo en el que estudiamos el poliedro de soluciones del problema que nos ocupa.

Denotamos por \mathbb{R} el conjunto de los números reales y por \mathbb{R}^n con $n > 0$, entero, el conjunto de vectores de dimensión n cuyas componentes son reales. $\mathbb{R}^{m \times n}$ representa el conjunto de las matrices reales de m filas y n columnas, con $m, n > 0$ y enteros.

Dado un número real x , $\lfloor x \rfloor$ ($\lceil x \rceil$) denota el mayor (menor) entero que no es mayor (menor) que x . Salvo que se indique lo contrario todos los vectores serán vectores columna. Si x es un vector, x^t será su traspuesto. El vector nulo, cero, lo denotaremos simplemente como 0.



A veces, trabajaremos con vectores n dimensionales cuyas componentes vienen indexadas por los elementos de un conjunto E ordenado, donde $|E| = n$. Denotaremos por \mathbb{R}^E el espacio vectorial asociado. Con $M \in \mathbb{R}^{E \times F}$ indicamos que M es una matriz de elementos reales cuyas filas están indexadas por los elementos de E y cuyas columnas se indexan en los elementos de F .

Dados $x_i \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda_i \in \mathbb{R}$ con $1 \leq i \leq m$, diremos que el vector:

$$y = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$$

es una *combinación* de los x_i 's:

- *lineal*, si los λ_i 's no están restringidos,
- *afín*, si $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$,
- *cónica*, si $\lambda_i \geq 0$, $\forall i = 1, \dots, m$, y
- *convexa*, si $\lambda_i \geq 0$, $\forall i = 1, \dots, m$ y $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$.

Dado $S \subseteq \mathbb{R}^n$, llamamos *envoltura*

- *lineal*, $Lin(S)$,
- *afín*, $Aff(S)$,
- *cónica*, $cone(S)$, y
- *convexa*, $conv(S)$

de S , al conjunto de todas las combinaciones lineales, afines, cónicas y convexas, respectivamente, de cualquier número finito de sus elementos; por convenio $Lin(\emptyset) = cone(\emptyset) = 0$ y $Aff(\emptyset) = conv(\emptyset) = \emptyset$.

- S es un *subespacio lineal* de \mathbb{R}^n sii $S = Lin(S)$,
- S es un *subespacio afín* de \mathbb{R}^n sii $S = Aff(S)$,
- S es un *cono* de \mathbb{R}^n sii $S = cone(S)$ y,

- S es un conjunto convexo de \mathbb{R}^n sii $S = \text{conv}(S)$.

Teorema 1.1

$L \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial sii
 $\exists A \in \mathbb{R}^{m \times n} / L = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$

$L \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subespacio afín sii
 $\exists A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m / L = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b\}$

Como veremos más adelante los subespacios afines más interesantes desde el punto de vista de la Combinatoria Poliédrica son aquellos de la forma:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t x = \alpha\}, \text{ con } a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ y } \alpha \in \mathbb{R}.$$

El conjunto de vectores $x_i \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq m$, es *linealmente independiente* si para cualquier combinación lineal de los mismos $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = 0$, con $\lambda_i \in \mathbb{R}$, se cumple que $\lambda_i = 0$, $1 \leq i \leq m$. En otro caso se dice que son *linealmente dependientes*. Nótese que el máximo número de vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^n es n .

Análogamente, diremos que el conjunto de puntos $x_i \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq m$, es *afínmente independiente*, si ninguno de ellos es combinación afín de los demás, o, equivalentemente, si para cualesquiera $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, cumpliendo $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = 0$ y $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 0$ se cumple que $\lambda_i = 0, \forall i$. En caso contrario se dice que son *afínmente dependientes*. En \mathbb{R}^n hay, como máximo, $n + 1$ puntos afínmente independientes. Obsérvese que la independencia lineal implica la afín.

Llamaremos *simplex* a la envoltura convexa de un número finito de puntos de \mathbb{R}^n afínmente independientes. A estos puntos los llamaremos vértices del simplex.

Teorema 1.2 Sea S un subconjunto finito de puntos de \mathbb{R}^n , son equivalentes:

1. S es afínmente independiente;
2. para cualquier $x^* \in S$, $\{x - x^* \mid x \in S, x \neq x^*\}$ es linealmente independiente;
3. para cualquier $x^* \in \mathbb{R}^n$, $\{x - x^* \mid x \in S\}$ es afínmente independiente;
4. el conjunto T de \mathbb{R}^{n+1} definido por $T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in S \right\}$ es linealmente independiente.

Dado $S \subseteq \mathbb{R}^n$, llamaremos *rango (lineal)* de S al número máximo de vectores de S linealmente independientes, lo denotaremos como $rg(S)$. Del mismo modo, llamaremos *rango afín* de S al número máximo de vectores afínmente independientes de S y lo denotaremos por $rgaf(S)$. Así, definiremos el *rango de una matriz* M como el rango del conjunto formado por sus vectores columna, que coincide con el rango del conjunto de sus vectores fila.

Teorema 1.3 Dado $S \subseteq \mathbb{R}^n$ se cumple que:

$$\begin{aligned} 0 \in Aff(S) &\longrightarrow rgaf(S) = rg(S) + 1 \\ 0 \notin Aff(S) &\longrightarrow rgaf(S) = rg(S) \end{aligned}$$

Si S es un subespacio lineal de \mathbb{R}^n , diremos que un subconjunto B de S es una *base* de S si $Lin(B) = S$. Definimos la *dimensión* de S , como $|B|$. La dimensión no depende de la base elegida.

Teorema 1.4 Si S es un subespacio afín de \mathbb{R}^n , existe un único subespacio lineal S' de manera que $S' = \{x - x^* \mid x \in S\}$ para cualquier $x^* \in S$.

Para un subconjunto arbitrario S de \mathbb{R}^n , definimos su *dimensión* como la dimensión de $Aff(S)$ y la denotaremos por $dim(S)$. Se puede comprobar que $dim(S) = rgaf(S)$. Diremos que S es de *dimensión completa* si su dimensión es igual a la del espacio al que pertenece; en el caso de \mathbb{R}^n , si contiene $n + 1$ puntos afínmente independientes.

1.2 Teoría de Grafos.

Muchos de los problemas de la vida real y, sobre todo, los relacionados con los problemas de rutas admiten una representación sencilla cuando se formulan en términos de teoría de grafos. Es más, una vez así planteados es posible resolverlos, total o parcialmente, utilizando resultados de grafos. Algunos libros clásicos en este campo son, por ejemplo, Harary (1969) [50], Berge (1973) [11] y Bondy y Murty (1976) [14].

Sea V un conjunto finito no vacío y E una familia finita de pares (i, j) de elementos de V . Llamaremos *grafo no dirigido*, con conjunto de *vértices* los elementos de V y conjunto de *aristas* los elementos de E , al par $G = (V, E)$.

Un grafo no dirigido puede representarse en el plano mediante un diagrama de puntos y líneas. Cada punto (o pequeño círculo) corresponde a un vértice del grafo y para cada arista del grafo entre dos vértices i y j hay una línea que une los dos puntos correspondientes.

Si $e = (i, j)$ es una arista de E , los vértices i y j son los extremos de la arista e . Diremos que i y j son *adyacentes* y que e es *incidente* con i y con j . Llamaremos *bucles* a las aristas de la forma (i, i) con $i \in V$. Si dos o más aristas tienen los mismos extremos se dice que son *paralelas*. Un grafo que no tiene bucles ni aristas paralelas se dice que es *simple*.

En ocasiones, por simplicidad, denotaremos las aristas por ij o i, j en lugar de (i, j) , especialmente en aquellos casos en los que las aristas se utilizan como subíndices. Por ejemplo, si la arista que une los vértices i y j se utiliza como subíndice de c escribiremos, simplemente, c_{ij} , pero si la arista une los vértices i y $j + 1$ escribiremos $c_{i,j+1}$.

El conjunto de aristas de un grafo G incidente con un vértice $i \in V$ lo representaremos como $\delta_G(i)$, si el grafo al que nos referimos queda claro por el contexto, escribiremos $\delta(i)$. Llamaremos *grado* de un vértice i a $|\delta(i)|$, i.e., al cardinal del conjunto $\delta_G(i)$ y lo representaremos como $deg(i)$. Un vértice *par* (*impar*) es un vértice de *grado par* (*grado impar*).

Teorema 1.5 *Sea G un grafo no dirigido. G contiene un número par de vértices impares.*



Teorema 1.6 *Sea G un grafo no dirigido. La suma de los grados de todos sus vértices es igual a dos veces el número de sus aristas.*

Dado un subconjunto V' de V , representaremos como $E(V')$ el conjunto de aristas de E con los dos extremos en V' . Al grafo $G' = (V', E(V'))$ lo llamaremos *subgrafo de G inducido por el conjunto de vértices V'* . Análogamente, si $E'' \subseteq E$, $V(E'')$ representa el conjunto de vértices de V que son incidentes con al menos una arista de E'' . $G'' = (V(E''), E'')$ es el *subgrafo de G inducido por el conjunto de aristas E''* .

Dados $u, v \in V$, llamaremos *camino entre u y v* a cualquier secuencia $\omega = (i_0i_1, i_1i_2, \dots, i_{k-1}i_k)$ de aristas de E con $i_0 = u$ e $i_k = v$. Diremos que ω contiene a (o pasa por) las aristas i_ji_{j+1} , con $0 \leq j \leq k-1$ y a (o pasa por) los vértices i_j , $0 \leq j \leq k$. Si no da lugar a confusiones representaremos ω como (i_0, i_1, \dots, i_k) o, como el conjunto de aristas i_ji_{j+1} , con $0 \leq j \leq k-1$. A un camino en el que no se repite ningún vértice lo llamaremos *camino simple*. Un *tour* (o camino cerrado) es un camino ω en el que $u = v$. Si la arista $i_ki_0 \in E$ y ω es un camino simple, a $(i_0i_1, i_1i_2, \dots, i_{k-1}i_k, i_ki_0)$ lo llamamos *ciclo de longitud k* . Un *ciclo Hamiltoniano* es un ciclo que contiene todos y cada uno de los vértices de G . La terminología utilizada en esta materia no es estándar por lo que, la que acabamos de dar, es solamente una de las posibles. De hecho, en muchos textos llaman cadena a lo que nosotros hemos llamado camino y, utilizan la palabra camino para referirse a una cadena en la que no se repite ningún vértice; en nuestro caso en un camino puede haber vértices (y aristas) repetidos y también en un tour; algunos autores llaman cadena cerrada a lo que nosotros hemos llamado tour.

Se dice que un grafo es *conexo* si, dados dos vértices cualesquiera del grafo, es siempre posible encontrar un camino que los une. Un grafo con un único vértice es, por convenio, conexo. Se dice que un grafo es *completo* si cualquier pareja de vértices del grafo son adyacentes.

Una *componente conexa* de un grafo G es un subgrafo conexo inducido por un subconjunto de vértices maximal (en cuanto a la cardinalidad del conjunto). Una arista e de un grafo $G = (V, E)$ se dice que es un *punte* o, una *arista de corte*, si el subgrafo inducido por el conjunto de aristas $E \setminus \{e\}$ tiene una componente conexa más que G .

Dados S y T , dos subconjuntos disjuntos de V , denotaremos por (S, T)

al conjunto de todas las aristas de G con un vértice extremo en S y otro en T . En particular, si representamos por \bar{S} a $V \setminus S$, llamaremos *cortadura* de G a (S, \bar{S}) , para cualquier $S \subseteq V$, no vacío. También representaremos a (S, \bar{S}) como $\delta(S)$. $\delta(i)$ es una cortadura de G .

Teorema 1.7 *Si ω es un tour sobre las aristas de G , entonces ω pasa un número par de veces (quizás cero) por las aristas de cualquier cortadura (S, \bar{S}) , $S \subseteq V$.*

Si $G = (V, E)$ es un grafo y $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ una función que a cada arista e le asigna un *coste* c_e , dado un subconjunto F de E , llamaremos *coste o peso de F* a $\sum_{e \in F} c_e$ y lo denotaremos por $c(F)$.

1.3 Teoría Poliédrica.

En esta sección presentamos algunas definiciones y resultados básicos de la teoría poliédrica que van a ser necesarios en los capítulos relacionados con el estudio poliédrico de nuestro problema.

Definimos un *hiperplano* de \mathbb{R}^n como el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t x = \alpha\}$, donde $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Al conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t x \leq \alpha\}$ lo llamaremos *semiespacio*. La intersección de un número finito de semiespacios es un *poliedro*, o equivalentemente, el conjunto de soluciones de un sistema de desigualdades lineales de la forma $Ax \leq b$ donde, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Si un poliedro está acotado lo llamaremos *polítopo*.

Teorema 1.8 (Weyl (1935)) *$P \subseteq \mathbb{R}^n$ es un poliedro si y solo si existen dos subconjuntos finitos, V y E , de \mathbb{R}^n de manera que $P = \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$.*

Si $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es un poliedro y $\text{Aff}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ para alguna matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$, entonces, la dimensión de P , $\dim(P)$, es $n - \text{rg}(A)$. Se dice que P es de dimensión completa si $\dim(P) = n$.

Decimos que una desigualdad $a^t x \leq \alpha$ con $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ es válida con respecto al poliedro P , si se cumple que $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t x \leq \alpha\}$; equivalentemente, si $\max \{a^t x : x \in P\} \leq \alpha$.

Se dice que una desigualdad válida es *soporte* si,

$$P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t x = \alpha\} \neq \emptyset$$

y *propia*, si es no vacía y,

$$P \not\subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t x = \alpha\}$$

A las desigualdades válidas no propias las llamaremos ecuaciones implícitas de P .

Un subconjunto F de \mathbb{R}^n es una *cara* del poliedro P si hay una desigualdad, válida para P , $a^t x \leq \alpha$, de manera que $F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t x = \alpha\}$. Se dice que la cara F está *definida* o *inducida* por la desigualdad $a^t x \leq \alpha$. Decimos que dos o más desigualdades son *equivalentes* cuando inducen la misma cara. Evidentemente cualquier poliedro es una cara de sí mismo; una cara será propia si lo es la desigualdad válida asociada.

Un *vértice* de un poliedro P es una cara no vacía y minimal con respecto a la inclusión, i.e., una cara de la forma $F = \{v\}$.

Llamaremos *faceta* a toda cara no vacía, propia y maximal con respecto a la propiedad de la inclusión.

Teorema 1.9 Sea P un poliedro de \mathbb{R}^n y F una cara no vacía de P inducida por la desigualdad $a^t x \leq \alpha$, i.e., $F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t x = \alpha\}$ y

$$Aff(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = c\}$$

con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $c \in \mathbb{R}^m$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. F es una faceta de P ;
2. $\dim(F) = \dim(P) - 1$;
3. para cualquier desigualdad $b^t x \leq \beta$ válida con respecto a P , cumpliendo que $F \subseteq P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid b^t x = \beta\}$, existen $\lambda \in \mathbb{R}^m$ y $\mu \geq 0$ de manera que:

$$b^t = \mu a^t + \lambda^t A$$

$$\beta = \mu \alpha + \lambda^t c$$

Por lo tanto, para cada una de las facetas de un poliedro de dimensión completa existe una única (salvo producto por un escalar no negativo) desigualdad válida que la define. Para demostrar que una desigualdad válida $a^t x \leq \alpha$ induce una faceta bastará con encontrar $\dim(P)$ puntos de P , afínmente independientes, que cumplan la desigualdad con igualdad.

Teorema 1.10 *Un punto de un poliedro es un vértice si y sólo si no se puede expresar como combinación conveza estricta de dos puntos distintos del poliedro.*

Si los vértices de un poliedro tienen todas sus componentes enteras, diremos que el *poliedro es entero*.

El libro de Rockafellar (1970) [78] es un buen punto de referencia para consultas sobre conceptos y resultados básicos de teoría poliédrica.

Sobre la Teoría de Poliedros y la Combinatoria Poliédrica se pueden consultar los libros de Schrijver (1987) [81] y Nemhauser y Wolsey (1988) [68], y los artículos de Bachem y Grötschel (1982) [9], Pulleyblank (1983) [76] y Padberg y Grötschel (1985) [71].

1.4 Teoría de la Complejidad Algorítmica.

En los capítulos siguientes hablaremos de la *dificultad* de los problemas con los que vamos a tratar, así como, de la *eficiencia* de los algoritmos, exactos o heurísticos, que utilizaremos para resolverlos. Es evidente pues, la necesidad de definir con claridad cuándo un problema es *fácil* o *difícil*, y qué entendemos por *eficiencia*. Es la Teoría de la Complejidad Algorítmica la que se encarga de definir estos conceptos. En el libro de Garey y Johnson (1979) [39] encontramos un riguroso y extenso tratado sobre el tema y, en Johnson y Papadimitriou (1985) [52] una buena introducción del mismo.

Normalmente cuando utilizamos la palabra *problema* nos referimos a una cuestión concreta que hay que contestar o a una tarea que hay que realizar. Pero para nuestros propósitos vamos a necesitar una definición más precisa. Entenderemos que un *problema* es una cuestión general, planteada en términos de *parámetros abiertos*, (i.e. que pueden tomar diferentes valores) a la que

hay que encontrar una *solución*. Se puede decir que un problema es, valga la redundancia, una *colección de problemas*; para definirlo necesitaremos dar la lista de los parámetros abiertos y una descripción de las propiedades que deben cumplir sus soluciones. Si damos valores concretos a los parámetros de un problema, hablaremos de una *instancia* del problema. Por ejemplo, “¿existe un vector $x \in \mathbb{R}^n$ cumpliendo $Ax \leq b$ con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$?” es un problema en el que los parámetros abiertos son A y b , mientras que, si damos un valor concreto a A y a b estamos hablando de una instancia de dicho problema.

Llamaremos *algoritmo* a cualquier procedimiento paso-a-paso que utilicemos para resolver un problema. Diremos que un algoritmo *resuelve* un problema cuando es capaz de encontrar una solución para cualquier instancia del problema a la que lo apliquemos.

A la hora de determinar la *eficiencia* de un algoritmo son muchos los aspectos computacionales que hay que tener en cuenta (tiempo de ejecución, memoria utilizada, etc...), es por ello necesario establecer con claridad qué clase de medida de complejidad algorítmica se está usando. La más extendida es la del tiempo, es decir, aquella que establece que el algoritmo más eficiente es el más rápido.

Cabe esperar que el tiempo que tarda un algoritmo en resolver una instancia dependa del *tamaño* de la misma, así pues, cuando se da el tiempo, habrá que darlo en función de su tamaño, pero, ¿qué entendemos por tamaño de una instancia?.

Si representamos las instancias de los problemas como una secuencia concisa y finita de los datos (símbolos) que necesitamos introducir en el ordenador para que un algoritmo la resuelva, llamaremos tamaño de la instancia, I , y lo denotaremos por $l(I)$, al número de símbolos que hay en esa secuencia.

Dado un problema π , A un algoritmo que lo resuelve, e I , una instancia de π , definimos el *tiempo de computación* empleado por el algoritmo A para resolver I , como el número de pasos elementales (operaciones aritméticas elementales y operaciones de lectura y escritura) realizados por el ordenador para encontrar una solución de I .

Sea f_A la función que a cada número natural n le asocia el tiempo máximo de computación requerido por el algoritmo para resolver cualquier instancia

I con $l(I) \leq n$; diremos que un algoritmo A es un *algoritmo polinómico* si existe un polinomio natural, p , de manera que $f_A = O(p(n))$ (i.e. existe una constante c de manera que $|f_A(n)| \leq c|p(n)| \forall n \in \mathbb{N}$); en cualquier otro caso diremos que A es un *algoritmo exponencial*.

Está generalmente aceptado por la comunidad científica que los algoritmos polinómicos son *buenos y eficientes* y, por tanto, los algoritmos deseables para resolver los problemas. Tanto es así que, un problema se dice *fácil* si existe un algoritmo polinómico que lo resuelve y, *difícil*, en otro caso.

Nótese que si disponemos de un algoritmo polinómico para resolver un problema, el tiempo necesario para resolver una instancia determinada aumenta polinómicamente con $l(I)$; en cualquier otro caso el tiempo de computación crecerá exponencialmente y será prácticamente imposible resolver instancias de gran tamaño.

A continuación damos una clasificación más precisa de los problemas atendiendo a su complejidad algorítmica. En primer lugar definiremos el *problema de decisión*. Llamaremos *problema de decisión* al problema cuyas instancias tienen sólo dos soluciones posibles: “sí” o “no”.

Definimos la clase \mathcal{P} como la formada por todos aquellos problemas de decisión que pueden resolverse utilizando un algoritmo polinómico. Por ejemplo:

π_1 : Dado un grafo cualquiera $G = (V, E)$, ¿contiene G algún ciclo?.

Hay otros problemas para los que no se conoce ningún algoritmo polinómico que los resuelva, el siguiente es uno de ellos:

π_2 : Dado un grafo cualquiera, ¿contiene un ciclo Hamiltoniano?.

Es más, ni tan siquiera se sabe si se podrá encontrar o no un algoritmo con esas características. Sin embargo, para cada instancia del problema π_2 , con respuesta afirmativa, podemos chequear en tiempo polinómico (en función de $l(I)$), si un ciclo Hamiltoniano dado es o no una solución de dicha instancia. Los problemas que poseen esta propiedad se dice que pertenecen a la clase \mathcal{NP} .

Es evidente que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$, pero no se sabe si la inclusión es o no estricta. Responder a la pregunta $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$? es uno de los problemas más importantes dentro de la teoría de la complejidad algorítmica, que de hecho, permanece abierto desde 1971.

Dados dos problemas π_1 y π_2 , decimos que π_1 se puede *transformar polinómicamente* en π_2 , si existe un algoritmo polinómico, que transforma cada instancia I_1 de π_1 en una instancia I_2 de π_2 , de manera que, la solución de I_1 es “si” sii la solución de I_2 es “si”.

El motivo de introducir el concepto de transformación polinómica no es otro que, el de establecer un criterio que nos permita dividir los problemas de la clase \mathcal{NP} en dos conjuntos distintos atendiendo al grado de dificultad que parecen tener. Así, diremos que un problema π que pertenece a la clase \mathcal{NP} es \mathcal{NP} – *completo* si todos los problemas de la clase \mathcal{NP} pueden transformarse polinómicamente en π . En este sentido podemos afirmar que los problemas \mathcal{NP} – *completos* son los más difíciles desde el punto de vista de la complejidad algorítmica.

Teorema 1.11 *Si $\pi^* \in \mathcal{NP}$ y existe un algoritmo polinómico que lo resuelve entonces, $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.*

La propiedad de ser *transformable en tiempo polinómico* es transitiva y es por ello que:

Teorema 1.12 *Si $\pi \in \mathcal{NP}$, $\pi^* \in \mathcal{NP}$ – completo y π^* se puede reducir polinómicamente a π , entonces $\pi \in \mathcal{NP}$ – completo.*

El resultado anterior constituye una técnica para demostrar si un problema pertenece o no a la clase de los \mathcal{NP} – *completos*. El primer problema \mathcal{NP} – *completo* conocido fué un problema de lógica, el de “*satisfiability*”, encontrado por Cook en (1971) [22]. Encontrar un ciclo Hamiltoniano en un grafo general pertenece también a esta clase.

La discusión anterior se puede extender a problemas en los que hay dos soluciones o más. Así, decimos que un problema π_1 es *Turing reducible* a otro π_2 si:

- (i) existe un algoritmo A_1 que resuelve π_1 utilizando como subrutina un algoritmo A_2 que resuelve π_2
- (ii) A_1 es un algoritmo polinómico para π_1 y A_2 lo es para π_2 .

Decimos que un problema π es \mathcal{NP} – *duro* si existe un problema de decisión que es \mathcal{NP} – *completo* y Turing reducible a π . No necesariamente son problemas de decisión.

Estas definiciones implican, de nuevo, que si un problema \mathcal{NP} – *duro* se puede resolver utilizando un algoritmo polinómico entonces, las clases \mathcal{P} y \mathcal{NP} coinciden.

Muchos problemas de optimización son \mathcal{NP} – *duros*, por tanto, si suponemos que $\mathcal{NP} \neq \mathcal{P}$, no podemos esperar encontrar ningún algoritmo polinómico que los resuelva. Tiene sentido entonces buscar, para este tipo de problemas, algoritmos que, aunque no nos proporcionen la solución óptima, encuentren rápidamente buenas soluciones para el problema. Este tipo de algoritmos se conocen con el nombre de *algoritmos heurísticos*. El hecho de que un problema sea \mathcal{NP} – *duro* no significa que no haya un determinado tipo de instancias, casos especiales, para las que si es posible encontrar algoritmos que las resuelven exactamente en tiempo polinómico.

Resumiendo, desde el punto de vista de la Complejidad Algorítmica al abordar el estudio de un nuevo problema en primer lugar conviene determinar si se trata o no de un problema resoluble en tiempo polinómico. Si lo es, el objetivo de la investigación podrá ser el diseñar un algoritmo polinómico que mejore los existentes.

En otro caso sabemos que el problema es \mathcal{NP} – *duro* y convendrá implementar buenos algoritmos heurísticos (algoritmos aproximados) que encuentren rápidamente soluciones posibles próximas a la solución óptima. Para medir la bondad de este tipo de procedimientos podemos recurrir al cálculo de cotas inferiores para el problema. En estos casos es de gran importancia encontrar una formulación entera del mismo o, al menos, una descripción lineal parcial del conjunto de soluciones, en caso de que éste sea un poliedro. Trabajar con cualquiera de estas aproximaciones puede proporcionar, en el mejor de los casos, la solución óptima de algunas instancias de nuestro problema o, al menos, una cota inferior para el mismo. También es interesante determinar si hay o no algún tipo especial de instancias que se puedan resolver de forma eficiente

y, en su caso, caracterizarlas.

1.5 Programación Lineal y Entera.

El problema que vamos estudiar se puede formular como un problema de programación lineal entera, por este motivo presentamos en esta sección un breve resumen de definiciones y conceptos básicos en esta disciplina.

Llamaremos *problema de programación lineal* al problema de minimizar (maximizar) una función lineal $f(x) = c^t x$, $c \in \mathbb{R}^n$ sobre un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Lo denotaremos por PL . A la función $f(x)$ la llamaremos *función objetivo* y, a cualquier punto $x \in P$, *solución posible* del problema. Si una solución posible x^* cumple que $c^t x^* \leq c^t x \forall x \in P$, diremos que x^* es la *solución óptima* para el problema de minimización.

El siguiente es un teorema fundamental de programación lineal.

Teorema 1.13 *Si el poliedro P tiene al menos un vértice y $\min_{x \in P} c^t x$ es finito entonces, existe al menos un vértice $x^* \in P$ de manera que:*
$$c^t x^* = \min_{x \in P} c^t x$$

Es más, para cada vértice x de P existe un vector $c \in \mathbb{R}^n$ para el que x es la única solución óptima del problema de minimización asociado a c .

Nótese que el conjunto de soluciones óptimas de un problema de maximización (minimización) es una cara de P .

Si a las soluciones de un problema de programación lineal les exigimos que tengan todas sus componentes enteras nos encontramos con el problema de *programación lineal entera*, al que no referiremos como PLE . Recíprocamente, asociado a cualquier PLE encontramos el problema de programación lineal resultante de eliminar la condición de integridad de sus variables, conocido como *relajación lineal* del correspondiente PLE .

Obsérvese que el coste de la solución óptima del problema relajado proporciona una cota inferior del coste de la solución óptima del problema lineal

entero asociado; si además, dicha solución es entera, será una solución óptima del *PLE*.

Cuando se intenta resolver un problema de programación lineal entera resulta casi ineludible recurrir a algoritmos de programación lineal, que funcionan como subrutinas, dentro de los algoritmos de programación lineal entera.

El interés de las observaciones anteriores reside en el hecho de que el *PLE* es un problema \mathcal{NP} -duro desde el punto de vista de la complejidad algorítmica, Cook (1971) [22], mientras que, según demostró Khachian (1979) [54] el *PL* pertenece a la clase \mathcal{P} . De ahí la utilización de uno para resolver el otro.

En 1972 Klee y Minty [55] demostraron que el algoritmo del *simplex* desarrollado por Dantzig en 1963 [27] para la resolución de problemas de programación lineal no era un algoritmo polinómico; en 1979, con el algoritmo de las elipsoides, queda demostrada la pertenencia del *PL* a la clase \mathcal{P} .

A pesar de todo, hoy por hoy, el algoritmo del *simplex* sigue siendo el más utilizado en el ámbito de la programación lineal, ello es debido a que, pese a ser teóricamente no polinómico, en la práctica se comporta como si lo fuera, llegando a ser más eficiente, incluso, que el algoritmo de las elipsoides.

Bibliografía recomendada relacionada con el tema de la programación lineal y la programación lineal entera son los trabajos de Chvátal (1983) [21], Dantzig (1963) [27], Garfinkel y Nemhauser (1972) [40] y Schrijver (1986) [80].

1.6 Combinatoria Poliédrica.

La Optimización Combinatoria es la rama de las matemáticas que se encarga de estudiar la siguiente clase de problemas:

dado un conjunto \mathcal{O} formado por un número finito de objetos, \mathcal{S} (un conjunto ordenado) y, una función "objetivo" $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{S}$, que asocia a cada objeto un coste, valor, peso, distancia o similar, el *problema de optimización combinatoria*, que denotaremos por *POC*, consiste en encontrar un elemento de \mathcal{O} cuyo coste sea mínimo (máximo) con respecto a algún criterio previamente establecido.

Puesto que \mathcal{O} es un conjunto finito la solución óptima del problema se puede encontrar evaluando el coste de todos y cada uno de sus objetos, seleccionando después el mejor. Esta técnica es conocida como *enumeración completa*.

Por tanto, la tarea de la Combinatoria Poliédrica no es otra que la de probar que, para un *POC* dado, el algoritmo de enumeración es el mejor que existe, o, por el contrario, diseñar algoritmos más eficientes para resolver el problema.

En sus orígenes, los problemas tratados por la Optimización Combinatoria procedían del campo de la investigación operativa, aplicaciones militares, ingeniería, etc ..., pero no es aquí únicamente donde podemos encontrarlos, sino que también aparecen en la biología, la física, la química, la arqueología, etc

El amplio campo de aplicaciones junto con la dificultad intrínseca a la mayoría de los problemas de la vida real ha motivado el gran desarrollo experimentado por esta teoría en los últimos años.

Muchos de los problemas de optimización combinatoria a los que nos enfrentamos pueden expresarse de la siguiente manera:

Sea E un conjunto finito y \mathcal{F} una familia de subconjuntos de E a la que llamaremos conjunto de soluciones posibles del problema. Sea $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ una función objetivo, el *POC* consiste en encontrar una solución posible $F^* \in \mathcal{F}$ cumpliendo:

$$\sum_{e \in F^*} c_e = \min \left\{ \sum_{e \in I} c_e : I \in \mathcal{F} \right\}$$

El problema que nos ocupa en este trabajo admite, precisamente, esta representación. E será el conjunto de aristas del grafo y \mathcal{F} el conjunto formado por los vectores asociados a las soluciones de nuestro problema.

Cuando nos enfrentamos a una instancia pequeña de un problema de optimización combinatoria puede ser fácil resolverla utilizando simplemente una técnica de enumeración completa, pero, dicha técnica deja de ser eficiente cuando el tamaño de la instancia aumenta, en estos casos necesitaremos recurrir a otro tipo de procedimientos.

Básicamente hay dos métodos que nos permiten resolver los llamados *pro-*

blemas difíciles de la optimización, los conocidos como métodos de Branch&Bound y los de Planos de Corte.

La idea básica de los algoritmos de Branch&Bound, ramificación y acotación, no es otra que la de enumerar de forma “inteligente” el conjunto de todas las soluciones posibles.

La enumeración se lleva a cabo particionando, en cada paso, el conjunto de soluciones posibles en subconjuntos disjuntos, en cada uno de ellos se calcula una cota inferior y una superior a la mejor solución. Suponiendo que estamos minimizando, cuando el valor de la cota inferior sea mayor que el coste de la mejor solución encontrada hasta el momento, dejaremos de considerar las soluciones de este subconjunto en lo que resta del método de enumeración. De esta manera vamos reduciendo el número de soluciones que tenemos que considerar. En caso contrario, particionamos el conjunto y continuamos con los nuevos subconjuntos creados. El problema de esta técnica está en que, “a priori”, no tenemos garantías de que no vayamos a evaluar todas y cada una de las soluciones.

Es evidente, pues, que la calidad de un Branch&Bound depende de la estrategia elegida para realizar la partición y de la calidad de las cotas que se aplican. Tanto es así que, durante los primeros años, los esfuerzos, a nivel científico, se centraron en la búsqueda de métodos computacionales capaces de encontrar buenas cotas en tiempos razonables.

Los métodos de Planos de Corte son aquellos que utilizan la programación lineal para resolver problemas de optimización combinatoria. Se trata de asociar a cada uno de estos problemas uno de programación lineal, de manera que las soluciones con coordenadas enteras del *PL* sean precisamente las soluciones del *POC*. Una vez conseguido esto, para resolver el *POC*, bastará con resolver el *PL*.

Dada una instancia (E, \mathcal{F}, c) de un problema de optimización combinatoria π , asociamos a E el espacio vectorial \mathbb{R}^E , y, a cada elemento $e \in E$, la variable x_e (componente de un vector $x \in \mathbb{R}^E$ indexada por el elemento e). Dado $T \subseteq E$, definimos el *vector de incidencia* $x^T \in \mathbb{R}^E$ como el vector cuyas componentes, x_e , indican el número de veces que aparece el elemento e en el subconjunto T . Sea entonces,

$$P_{\mathcal{F}} = \text{conv} \{ x^I \in \mathbb{R}^E : I \in \mathcal{F} \}$$

es decir, la envoltura convexa de los vectores de incidencia asociados a los elementos de \mathcal{F} . Si $|\mathcal{F}|$ es finito, $P_{\mathcal{F}}$ es un polítopo, pero, si es infinito puede que ni tan siquiera sea un poliedro. Sin embargo, para la mayoría de los *POC*'s, sí que lo es y así lo supondremos de ahora en adelante.

Cada solución del problema de optimización combinatoria está asociada a un elemento de $P_{\mathcal{F}}$ y cada vértice de $P_{\mathcal{F}}$ corresponde a un elemento de \mathcal{F} . Por tanto, dada una instancia (E, \mathcal{F}, c) de π podemos resolverla resolviendo el siguiente problema:

$$\min \{ c^t x : x \in P_{\mathcal{F}} \}$$

que, en virtud del teorema de Weyl es un problema de programación lineal, ya que, para cualquier poliedro $P_{\mathcal{F}}$ existe una matriz finita de enteros A y un vector de enteros b de manera que:

$$P_{\mathcal{F}} = \{ x \in \mathbb{R}^E : Ax \leq b \}$$

Hemos asociado de forma natural un problema de programación lineal a cada problema de optimización combinatoria.

Desafortunadamente, A y b no suelen ser conocidos y la dificultad a la que nos enfrentamos ahora reside en encontrar un sistema de igualdades y desigualdades lineales que describa completamente a $P_{\mathcal{F}}$.

Dado que esta descripción no tiene porque ser ser única interesará que el sistema encontrado sea minimal, i.e., que no contenga ecuaciones y/o inecuaciones redundantes. Las desigualdades que permiten conseguir una descripción completa y minimal del poliedro son, precisamente, aquellas que inducen caras del mismo.

No obstante, incluso para problemas que pertenecen a la clase \mathcal{P} , el número de filas en A puede ser considerablemente elevado y, aunque las conozcamos, es imposible, a nivel computacional, trabajar con la matriz A al completo. Además, la esperanza de encontrar sistemas lineales que describan completamente a los poliedros asociados a problemas \mathcal{NP} -completos es, prácticamente, nula.

El inconveniente que supone trabajar con un sistema incompleto, tanto por desconocido como por tamaño, puede subsanarse, en parte, detectando de forma iterativa desigualdades nuevas que añadir al sistema; para ello, es preciso

resolver el siguiente problema, conocido como *Problema de Identificación de Facetas*. Antes de definirlo, queremos hacer notar que, para muchos problemas, es suficiente con una descripción parcial del poliedro de soluciones asociado para encontrar la solución óptima.

Definición 1.1 *Dado un $\bar{x} \in \mathbb{R}^E$ y un poliedro $P_{\mathcal{F}}$, el “Problema de Identificación de Facetas” consiste en, encontrar una desigualdad lineal $a^t x \leq \alpha$ que defina una faceta de $P_{\mathcal{F}}$ y que sea violada por \bar{x} ($a^t \bar{x} > \alpha$) o, probar que tal desigualdad no existe.*

Estamos en condiciones de dar un esquema general de los algoritmos de Planos de Corte que permitirá resolver, utilizando un código de programación lineal (algoritmo del simplex, de las elipsoides...), los problemas de optimización combinatoria. Se trata del *Algoritmo de Relajación para Problemas de Optimización* de Padberg y Grötschel (1985) [71].

1. **Inicialización.** Sea PL_0 una relajación lineal del *POC* que queremos resolver. Hacer $i := 0$.
2. **Resolución del PL .** Resolver el PL_i . Sea x^i la solución óptima obtenida.
3. **Identificación de facetas.** Resolver el problema de identificación de facetas para el punto x^i y el poliedro $P_{\mathcal{F}}$.
 - 3.1 Si se encuentra una o más desigualdades (que inducen facetas de $P_{\mathcal{F}}$) violadas por x^i , añadir las al sistema que define PL_i . Llamar PL_{i+1} al nuevo problema y hacer $i := i + 1$. Ir al paso 2.
 - 3.2 Si no se encuentra ninguna, parar.

Si conocemos una descripción completa de $P_{\mathcal{F}}$ y en el segundo paso utilizamos un código de programación lineal finito, el algoritmo terminará en el paso 3.2 proporcionándonos la solución óptima del problema.

Ahora bien, en el caso en que sólo disponemos de una descripción parcial de $P_{\mathcal{F}}$ cuando llegamos al punto 3.2 puede ser, o bien porque no hemos sabido encontrar ninguna desigualdad violada por x^i o bien, porque en realidad no existe ninguna.

En este último caso, si x^i es entera y pertenece al poliedro, x^i será la solución óptima. En cualquier otro caso podemos recurrir a un algoritmo de tipo Branch&Bound utilizando como ímput el nuevo sistema. Si hemos pasado con éxito por el punto 3.1 en al menos una ocasión, el sistema de igualdades y desigualdades actual se aproxima mejor a la descripción del $P_{\mathcal{F}}$. Esto aumentará la probabilidad de llegar a una solución óptima con el algoritmo de ramificación y acotación.

Es evidente que la parte más importante del procedimiento anterior es, precisamente, la del problema de identificación de facetas, de ahí la importancia del diseño de “buenos” algoritmos exactos o heurísticos para llevar a cabo dicha identificación.

Los trabajos de Grötschel (1982) [44], Bachem y Grötschel (1982) [9] Padberg y Grötschel (1985) [71], son una muestra de cómo combinando las técnicas de Programación Lineal con las de Branch&Bound o las de Planos de Corte se pueden obtener algoritmos eficientes que tienen en cuenta la estructura facial de los poliedros considerados.

El método descrito anteriormente presenta los dos inconvenientes siguientes:

- La fase de Branch&Bound y la de Planos de Corte actúan separadamente y por tanto, el conocimiento de nueva información sobre la descripción parcial del poliedro no se puede tener en cuenta en el algoritmo de enumeración.
- Cuando el algoritmo de Branch&Bound termina con una solución que no es una solución posible del POC , es necesario recurrir de nuevo a otro procedimiento que nos permita obtener la solución óptima.

En los últimos años se han combinado las dos técnicas anteriores, Planos de Corte y Branch&Bound para dar paso a una nueva generación de algoritmos conocidos con el nombre de Branch&Cut. La novedad consiste en incorporar el algoritmo de Planos de Corte en el proceso de Enumeración. En realidad lo que se hace es resolver el problema de identificación de facetas en cada uno de los nudos no saturados del árbol de Branch&Bound. La ventaja reside en el hecho de que, al ser los cortes generados facetas del poliedro de soluciones, se pueden usar en cualquier otro nudo del árbol, reforzando así, paso a paso, la descripción lineal de la que partíamos.

Las últimas tendencias en Combinatoria Poliédrica se centran en el diseño de algoritmos de Branch&Cut y algoritmos de identificación de facetas, tanto exactos como heurísticos, para los diferentes problemas de Optimización Combinatoria.

Excelentes artículos sobre Branch&Cut son los debidos a Padberg y Rinaldi (1989,1991) [72], [73].

Capítulo 2

Problemas de Rutas relacionados.

El problema que estudiamos en esta memoria pertenece a una clase general de problemas conocidos como *Problemas de Rutas*. El objetivo de este capítulo es introducir aquellos Problemas de Rutas que, de una u otra manera, muestran alguna relación con el *Problema de Rutas de Vehículos con Demanda Compartida*.

Atendiendo a la revisión bibliográfica que hemos realizado daremos, para cada uno de ellos, una formulación del mismo como un problema de optimización sobre un grafo, a continuación hablaremos de su complejidad algorítmica y de las diferentes técnicas, tanto exactas como heurísticas, que se han utilizado para resolverlo. Por último, nos centraremos de forma especial en los resultados que se han conseguido sobre el poliedro de soluciones asociado.

2.1 Clasificación General de los Problemas de Rutas.

Los dos problemas que planteamos a continuación son los Problemas de Rutas “más sencillos” que nos podemos encontrar en la literatura.

El Problema del Agente Viajero. (*The Traveling Salesman Problem - TSP*)

Un agente comercial tiene que visitar, exactamente una vez, una serie de

ciudades. El agente sale de su casa y debe regresar a la misma. Encontrar la secuencia en la que debe visitar las ciudades para que la distancia total recorrida sea lo menor posible.

El Problema del Cartero Chino. (*The Chinese Postman Problem - CPP*)

Un cartero parte de su oficina, reparte el correo recorriendo las calles y regresa de nuevo. ¿ En qué orden debe recorrer las calles para que la distancia total recorrida sea mínima ?.

Si representamos cada ciudad como un vértice y asociamos una arista a cada uno de los caminos (carreteras) entre ciudades, cuyo coste es la distancia entre ellas, obtenemos un grafo que nos permite resolver el *TSP* como un problema matemático. Resolverlo consistirá en encontrar un *ciclo Hamiltoniano*, de coste mínimo, sobre el grafo que acabamos de describir. Del mismo modo, asociando un vértice a cada cruce entre calles y una arista a cada calle, cuyo coste sea la longitud de la calle, el *CPP* consistirá en encontrar un camino cerrado de coste mínimo que recorra todas las aristas del grafo asociado, al menos una vez.

Podemos decir que, en el *TSP*, la “demanda del servicio” se da en los vértices, mientras que en el *CPP* en las aristas. Esta diferencia, en cuanto a localización de la demanda, es la que permite establecer la primera gran clasificación dentro de los Problemas de Rutas:

Definición 2.1 *Llamaremos Problemas de Rutas por Vértices a aquellos que tienen las demandas localizadas en los vértices.*

Definición 2.2 *Llamaremos Problemas de Rutas por Arcos (aristas) a aquellos que tienen las demandas localizadas en las aristas.*

En 1974 Orloff [69] unificó estos dos tipos de problemas definiendo el llamado *Problema General de Rutas* (General Routing Problem - *GRP*), en el cual, la demanda puede estar localizada, tanto en los vértices, como en las aristas.

La clasificación que acabamos de dar no es la única que encontramos en la literatura; en Bodin y Golden (1981) [12], por ejemplo, los problemas de

rutas aparecen clasificados atendiendo a características muy especiales de los mismos: naturaleza de las demandas, i.e. si son estocásticas o deterministas, caracter del grafo, dirigido, no dirigido o mixto, capacidad del vehículo, etc . . . Schrage (1981) [79], Bodin et al. (1983) [13] y Assad (1988) [6], dan otro tipo de clasificaciones.

Por último, mencionar el trabajo de Desrochers et al. (1990) [29] en el que los autores proponen un esquema de clasificación para los Problemas de Rutas de Vehículos y Secuenciación. La mayoría de los modelos considerados en la literatura pueden clasificarse atendiendo a dicho esquema. El objetivo del artículo es el de proporcionar una herramienta que permita clarificar las características de un problema dado, consiguiendo así establecer cierta uniformidad dentro de la vasta literatura sobre el tema.

Desde que apareció el artículo "*Solution of a large-scale travelling salesman problem*", de Dantzig et al. [28] en la revista "Journal of the Operations Research Society of America" en 1954, han transcurrido cuarenta años en los que no han cesado de aparecer nuevos trabajos y resultados relativos a los Problemas de Rutas.

El interés despertado por este tipo de problemas dentro de la comunidad científica obedece principalmente a dos motivos. Por un lado tenemos que gran cantidad de situaciones reales pueden modelizarse en términos de Problemas de Rutas. Por ejemplo, el diseño de rutas de autobuses escolares, reparto de correo y periódicos, diseño de rutas aéreas, distribución de combustible, etc. . . . Por otra parte, el hecho irrefutable de que su estudio ha conducido a la obtención de importantes resultados teóricos dentro de la Combinatoria Poliédrica, contribuyendo de este modo al enriquecimiento de la misma.

Además, el desarrollo experimentado por la informática, tanto a nivel de *software* como de *hardware*, ha facilitado la implementación de algoritmos de rutas específicos, los cuales tienen en cuenta multitud de restricciones propias de los problemas de la vida real. Este tipo de aplicaciones se han desarrollado con la finalidad de resolver problemas muy concretos, que han surgido en el seno de compañías, tanto públicas como privadas. Golden y Assad (1986) [43] dan un gran número de referencias de las aplicaciones de rutas que han aparecido en la literatura, así como, de los nombres de las empresas que los han aplicado y de los ahorros de coste que se han conseguido utilizándolas.



En Bodin et al. (1983) [13], encontramos un excelente resumen sobre los problemas de rutas y secuenciación, incluyendo referencias a distintas formulaciones y a técnicas generales de resolución. Benavent et al. (1983) [10] proporcionan una panorámica general de los Problemas de Rutas por Arcos. Magnanti (1981) [61], revisa la utilización de métodos de optimización combinatoria para la resolución exacta de los problemas de rutas, la contrasta con el uso de técnicas heurísticas y analiza en qué casos interesan unos u otras. Por último mencionar el estudio sobre la complejidad algorítmica de los Problemas de Rutas realizado por Lenstra y Rinnooy Kan (1981) [59].

A partir de ahora nos centraremos en resultados específicos sobre aquellos Problemas de Rutas por Vértices que, antes o después, van a ir apareciendo a lo largo de esta memoria. Todos ellos están, de alguna manera, relacionados con el problema que nos ocupa en este trabajo.

2.2 El Problema del Agente Viajero.

Consideremos el primer problema planteado en el apartado anterior: diseñar la ruta de menor recorrido que debe realizar un agente de ventas que parte de su ciudad, visita una serie de ciudades y regresa de nuevo al punto de partida.

El planteamiento clásico de este problema, en términos de teoría de grafos, consiste en calcular un ciclo Hamiltoniano de coste mínimo sobre un grafo en el que los vértices representan las ciudades y las aristas representan los caminos que las unen. El coste de cada arista es la longitud del camino correspondiente, esto es, la distancia entre las dos ciudades que une.

La importancia de este problema no obedece únicamente al gran campo de aplicaciones asociado, sino al hecho de que se ha convertido en uno de los problemas clásicos de la Combinatoria Poliédrica. Sorprenden en él la facilidad y sencillez de su planteamiento y la dificultad que entraña resolverlo óptimamente.

“The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization” (1985) [58] es, hoy por hoy, el mejor tratado sobre el tema que se conoce. Da diferentes formulaciones del problema, estudia su complejidad algorítmica, el poliedro de soluciones asociado y las técnicas utilizadas para resolverlo, tanto aproximada como óptimamente. Además, el libro contiene una

larga lista de referencias que permite realizar una buena revisión bibliográfica de los resultados obtenidos con anterioridad al momento de su publicación.

2.2.1 Formulación Matemática.

Dado un grafo completo y no dirigido $G = (V, E)$ con un coste asociado a cada arista $e \in E$, el *Problema del Agente Viajero* consiste en encontrar un ciclo Hamiltoniano en G de coste total mínimo.

A partir de ahora denotaremos el problema con las siglas *TSP*.

2.2.2 Complejidad Algorítmica.

En 1972, Karp [53], demuestra que el *TSP* es un problema de la clase \mathcal{NP} – *duro*. Unos años más tarde, en 1977, Papadimitriou [75] prueba que el resultado sigue siendo cierto aunque los costes de las aristas representen distancias euclídeas.

Como ya comentamos en la sección dedicada a la Complejidad Algorítmica, el hecho de que un problema sea “difícil” no significa que no existan clases especiales de instancias que se puedan resolver con algoritmos polinómicos; para ver estos casos especiales, en el entorno del *TSP*, se puede consultar el artículo de Gilmore et al. (1985) [41].

2.2.3 Estrategias de Solución.

Como ya hemos mencionado anteriormente, el *TSP* ha sido, y sigue siendo, uno de los problemas de rutas que más atención ha despertado dentro de la Combinatoria Poliédrica. Esto hace prácticamente imposible resumir aquí el enorme número de estrategias, tanto exactas como heurísticas, que se han desarrollado para resolverlo. En Bodin et al. (1983) [13], podemos encontrar un buen resumen sobre las mismas.

Las últimas tendencias en cuanto a diseño de algoritmos heurísticos apuntan hacia la utilización de métodos de búsqueda tabú, Glover (1993) [42]. Knox (1994) [56] presenta un algoritmo de estas características para resolver el *TSP*.

En cuanto a la obtención de soluciones óptimas, tradicionalmente el problema se ha formulado como un problema de programación lineal entera y se ha recurrido después a algoritmos de ramificación y acotación. Utilizando este tipo de técnicas se han resuelto en tiempos de computación razonables instancias de cien vértices como máximo, [41].

El desarrollo de la Combinatoria Poliédrica ha propiciado la aparición de nuevas técnicas que utilizan el conocimiento de la estructura del poliedro de soluciones para resolver instancias de gran tamaño. Durante los primeros años se trataba, básicamente, de algoritmos de Planos de Corte con los que se resolvieron óptimamente instancias de hasta 300 vértices, como en Crowder y Padberg (1980) [26]. Pero, ha sido la combinación de las técnicas de Branch&Bound con las de Planos de Corte la que ha permitido resolver el *TSP* sobre un grafo de 2392 vértices, Padberg y Rinaldi (1991) [73].

2.2.4 Investigación Poliédrica.

Grötschel y Padberg (1979a) [45] estudian el poliedro de soluciones asociado al *TSP* y demuestran que su dimensión es $|E| - |V|$. En el mismo trabajo encontramos los primeros resultados sobre desigualdades válidas que inducen facetas de este poliedro. En un segundo artículo, los mismos autores (1979b) [46], dan teoremas constructivos y condiciones bajo las cuales es posible asegurar que una desigualdad que define una faceta para un *TSP* de tamaño $|V| = n$, también induce una faceta para uno de tamaño $|V| = n + m$. En cualquier estudio poliédrico pueden encontrarse resultados de estas características, dentro de la Combinatoria Poliédrica se conocen con el nombre de teoremas de *lifting*. Para un estudio más detallado del poliedro de soluciones, ver Padberg y Grötschel (1985) [71].

Los artículos que acabamos de mencionar no son los únicos que encontramos en la literatura científica con relación al poliedro del *TSP*; en los últimos años no han cesado de aparecer trabajos con nuevas desigualdades que han permitido aumentar el conocimiento de la descripción parcial del poliedro de soluciones asociado. Mencionaremos aquí solamente algunos de ellos: Cornuéjols et al. (1985) [23], Grötschel y Pulleyblank (1986) [48], Fleischmann (1988) [37], Fonlupt y Naddef (1992) [38], Naddef y Rinaldi (1991, 1992, 1993) [64], [66] y [67].

2.3 El Problema del Agente Viajero Gráfico.

En la mayoría de las aplicaciones del Agente Viajero, furgonetas de reparto, rutas de autobuses escolares, etc . . . , el grafo original que representa la red de calles no tiene porqué ser completo, puede incluso que no contenga ningún ciclo Hamiltoniano. Este inconveniente desaparece si se completa el grafo con aristas que representan los caminos más cortos entre cada par de vértices no adyacentes; los caminos se calculan sobre el grafo original. Ahora bien, completar el grafo implica, por un lado, aumentar el número de variables que hay que utilizar para resolver el problema utilizando técnicas de Programación Lineal, ya que normalmente se asigna una variable a cada arista; por otra parte, nos encontramos con el hecho de que, en ocasiones, el grafo presenta una estructura especial que permite el diseño de algoritmos polinómicos para resolver el *TSP* y si lo completamos perdemos dicha ventaja.

Estos inconvenientes son los que han motivado que algunos autores se planteen el estudio de un nuevo problema que surge de forma natural cuando se intenta resolver un *TSP* sobre un grafo no completo. Nos referimos al problema del Agente Viajero Gráfico.

2.3.1 Formulación Matemática.

Dado un grafo $G = (V, E)$, no necesariamente completo, y un coste asociado a cada arista, el *Problema del Agente Viajero Gráfico (GTSP)* consiste en encontrar un tour en G que pase por cada vértice de V al menos una vez.

La definición anterior es la que dan Cornuéjols et al. (1985) [23]. Paralelamente Fleischmann (1985) [36] define también el mismo problema pero relajando la condición de que todos los vértices han de ser visitados, con lo que sólo se visitarán obligatoriamente un subconjunto de vértices requeridos.

2.3.2 Complejidad Algorítmica.

Cornuéjols et al. (1985) demuestran que el *GTSP* es un problema \mathcal{NP} – duro ya que, si existiese un algoritmo polinómico para resolver el *GTSP* podríamos

contestar, en tiempo polinómico, a la pregunta de si un grafo conexo, G , cualquiera, contiene o no un ciclo Hamiltoniano; sin embargo se sabe que éste es un problema \mathcal{NP} – completo, Karp (1972) [53], y, por tanto, lo anterior no puede ser cierto a no ser que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

Si el grafo es completo y los costes de las aristas cumplen la desigualdad triangular el $GTSP$ es equivalente al TSP , Fonlupt y Naddef (1992) [38]. Esto constituye otra prueba del carácter \mathcal{NP} – duro del $GTSP$.

2.3.3 Estrategias de Solución.

En la revisión bibliográfica que hemos realizado sólo hemos encontrado un trabajo, Fleischmann (1985) [36], en el que se aborda la resolución de algunas instancias del $GTSP$. Se trata de un algoritmo de Planos de Corte en el que se utilizan, además de Planos de Corte de Gomory, un tipo especial de cortes específicos para este problema, las restricciones β -star. Los tamaños de las instancias que se resuelven son de hasta 120 vértices, para problemas clásicos de la literatura y, de hasta 292, para problemas en los que los grafos representan redes reales de carreteras.

2.3.4 Investigación Poliédrica.

Pese a tratarse de un problema relativamente nuevo ya hay en la literatura resultados teóricos bastante interesantes sobre el tema. Sin duda, el hecho de que el poliedro de soluciones asociado sea de dimensión completa ha favorecido la proliferación de este tipo de resultados.

Por otro lado, la estrecha relación que hay entre el poliedro de soluciones del $GTSP$ y el del TSP ha abierto una nueva vía para profundizar en el estudio poliédrico del TSP . Nótese que el $GTSP$ no es más que una relajación del TSP y, por tanto, el poliedro de soluciones asociado al TSP estará contenido en el poliedro de soluciones asociado al $GTSP$; además, las desigualdades válidas para el $GTSP$ también lo serán para el TSP , pero no podemos afirmar lo mismo en lo referente a desigualdades que inducen facetas.

Como acabamos de mencionar, en 1985, Fleischmann [36] introduce un tipo

de desigualdades válidas para el $GTSP$, las “ 3 -star”. Ese mismo año aparece el artículo de Cornuéjols et al. [23] en el que se estudia la dimensión del poliedro de soluciones asociado y se definen, por primera vez, las desigualdades “ $path$ ”, “ $wheelbarrow$ ” y “ $bicycle$ ”. Demuestran que las desigualdades “ $path$ ” inducen facetas del poliedro del $GTSP$, y también las “ $wheelbarrow$ ” y las “ $bicycle$ ”. Finalmente, muestran que todas ellas, en conjunto, generalizan todas las desigualdades “ $comb$ ” del TSP , ver Grötschel y Padberg (1985) [47] para una completa descripción de estas desigualdades.

El motivo que nos ha llevado a detallar el contenido de este artículo, tal y como lo hemos hecho, obedece a que en el Capítulo 5, todas las desigualdades anteriores serán objeto de un profundo estudio en el contexto de nuestro problema.

Más tarde, en 1988, Fleischmann [37] encuentra una nueva clase de desigualdades conocidas como “ $star$ ”, esta clase contiene como casos especiales a las desigualdades “ $comb$ ”, “ $path$ ”, y “ 3 -star”. Si se imponen determinadas condiciones también inducen facetas del poliedro del $GTSP$, aunque no se puede afirmar lo mismo con respecto al poliedro del TSP .

En Naddef y Rinaldi (1993) [67] se estudia con profundidad la relación entre los poliedros de soluciones asociados al $GTSP$ y al TSP . Este estudio se basa en el siguiente resultado: “*Toda faceta no trivial del poliedro del TSP es intersección de $n + 1$ facetas del $GTSP$, de las cuales, n son las desigualdades de grado*”.

Para completar la bibliografía existente sobre el tema, podemos citar los artículos de Naddef y Rinaldi (1991) [64] y Fonlupt y Naddef (1992) [38].

2.4 El Problema de Rutas de Vehículos con Capacidades.

El *Problema de Rutas de Vehículos (VRP)* es un nombre genérico que se utiliza para referirse a una amplia clase de problemas en los que un conjunto de clientes tienen que ser visitados por vehículos.

La visita puede obedecer a diferentes motivos: el cliente necesita que le sirvan una determinada mercancía (reparto de cajas de bebidas a bares), que la recojan (recogida de basura) o, ni una cosa ni la otra, sino que simplemente necesita de algún tipo de servicio (revisión de instalaciones eléctricas).

Los ejemplos anteriores muestran claramente que la naturaleza de los vehículos y de las mercancías no es única. Un “vehículo” puede representar un camión, un cartero, un inspector de instalaciones eléctricas, etc Del mismo modo, la mercancía puede ser objetos, personas, o nada, en el caso de que el problema no consista en repartir ni en recoger personas ni ninguna clase de objetos.

Es evidente que hay un enorme número de situaciones reales que pueden modelizarse en términos de *VRP's*, aunque cada una de estas situaciones puede necesitar un tipo distinto de restricciones y/o de objetivos. Por ejemplo, si el problema consiste en repartir mercancías a diferentes comercios una restricción lógica podría ser la de exigir que el reparto se realice dentro de los horarios de apertura , mientras que, si se trata del reparto del correo esta restricción puede no resultar tan importante. Lo mismo ocurre con las funciones objetivo, en algunos problemas podemos estar interesados en minimizar la longitud total de las rutas, o, puede que sea un objetivo prioritario minimizar el número total de vehículos utilizados, por ejemplo, en aquellos casos en los que el coste de “adquirir” uno nuevo sea muy elevado.

Ésto hace que nos enfrentemos a una gran variedad de problemas. Nos centraremos en uno muy concreto, el de Rutas de Vehículos con Capacidades que definiremos a continuación.

En Bodin et al. (1983) [13] y Christofides (1985) [17] encontramos un resumen de la investigación llevada a cabo en esta área. Golden y Assad (1986) [43] recopilan una serie de situaciones reales en las que se han aplicado con éxito diferentes paquetes comerciales de rutas diseñados para problemas

muy concretos.

2.4.1 Formulación Matemática.

El *Problema de Rutas de Vehículos con Capacidades*, (*CVRP*), surge cuando hay que repartir (o recoger) una determinada mercancía a una serie de clientes utilizando K vehículos que se encuentran localizados en un depósito central. La demanda de cada cliente se supone conocida y la capacidad de los vehículos es fija. Cada cliente debe asignarse “exactamente” a una ruta, la demanda total de los clientes asignados a una ruta no puede exceder la capacidad del vehículo. El objetivo es minimizar la distancia total recorrida.

En términos de teoría de grafos podemos formular el problema de la siguiente manera, Cornuéjols y Harche (1993) [24]:

Sea $G = (V, E)$ un grafo completo no dirigido, donde $|V| = n + 1$, y sea $v_0 \in V$ un vértice especial al que llamaremos *depósito*, el resto de vértices serán los *clientes*. Consideraremos además un vector de costes $c \in \mathbb{R}^E$ indexado en las aristas de E y un vector de demandas $d \in \mathbb{R}_+^{V \setminus \{v_0\}}$ indexado en el conjunto de clientes. Finalmente, consideramos K vehículos idénticos de capacidad $Q \geq 0$.

Un conjunto de aristas T , no necesariamente distintas, se dice que es un K -tour simple si se puede particionar en K subconjuntos no vacíos, T_1, T_2, \dots, T_K , cumpliendo:

- 1.- $G(T_i)$ es un ciclo (simple) y $v_0 \in V(T_i), \forall i = 1, 2, \dots, K$.
- 2.- Cada $j \in V \setminus \{v_0\}$ pertenece exactamente a uno y sólo un $V(T_i), 1 \leq i \leq K$.
- 3.- $\sum_{j \in V(T_i)} d_j \leq Q, \forall i = 1, 2, \dots, K$.

A cada uno de los subconjuntos T_i lo llamaremos ruta i -ésima.

Dado un grafo G completo el *CVRP* consiste en encontrar un K -tour simple de coste total mínimo.

2.4.2 Complejidad Algorítmica.

La tercera condición de la definición anterior garantiza que la suma de las demandas de los clientes asignados a una ruta no excede la capacidad del vehículo. Comprobar si se puede o no cumplir esta condición es un problema de “*Bin Packing*” en el que los “ítems” son de “tamaño” d_i y la capacidad de las cajas es Q . Por lo tanto, dado que el *Bin Packing* es un problema \mathcal{NP} – duro, ver Garey y Johnson (1979) [39], el problema es también \mathcal{NP} – duro.

2.4.3 Estrategias de Solución.

Como ocurre con la mayoría de los problemas considerados “difíciles” los primeros esfuerzos para resolver el *CVRP* se centraron en la búsqueda de buenas soluciones heurísticas.

No es nuestra intención recopilar aquí todos los algoritmos que han aparecido en la literatura para este problema, pero sí queremos mencionar algunos de ellos.

Fisher y Jaikumar (1981) [35] desarrollan un procedimiento en el que primero se resuelve un problema de asignación, encuentran una asignación de clientes a vehículos respetando la restricción de no exceder la capacidad de los vehículos. A continuación resuelven un *TSP* sobre cada uno de los conjuntos de clientes asociados a los vehículos. El artículo permite revisar las técnicas que aparecieron con anterioridad a 1981.

Stewart y Golden (1984) [82] implementan un algoritmo heurístico basado en la relajación Lagrangiana. Haimovich y Rinnooy Kan (1985) [49] obtienen cotas superiores e inferiores para el óptimo basadas en el cálculo de una solución del *TSP* sobre el conjunto de clientes y dan nuevos heurísticos para el problema. En Dror y Levy (1986) [31] podemos encontrar métodos que permiten mejorar las soluciones no óptimas del *CVRP* mediante operaciones de intercambio de clientes entre rutas distintas. Paessens (1988) [74] revisa la bibliografía relativa a técnicas heurísticas para el *CVRP* y da una serie de reglas generales que se pueden aplicar en el diseño de heurísticos.

En los últimos años, al igual que ha ocurrido con el *TSP* y otros problemas

de optimización, la aplicación de las técnicas de búsqueda tabú al problema que nos ocupa también ha dado buenos resultados. Dentro de esta línea encontramos los trabajos de Taillard (1993) [83], Osman (1993) [70] y Campos y Mota (1994) [15].

Debido a la complejidad del problema, los esfuerzos para resolverlo óptimamente han sido, sobre todo en los primeros años, mas bien escasos. Podemos destacar el artículo de Laporte y Nobert (1987) [57] que constituye una excelente recopilación de los algoritmos de optimización utilizados para resolver *VRP*'s. Araque (1989), (1990) [2] [3] estudia el poliedro de soluciones del Problema de Rutas de Vehículos con idéntica capacidad y cargas unitarias (todos los vértices tienen demanda igual a uno). Utilizando la información poliédrica desarrolla un Branch&Bound con el que llega a resolver óptimamente problemas de 48 ciudades, Araque (1990) [4].

Basándose en una formulación del *CVRP* como un problema de “*set partitioning*”, Agarwal et al. (1989) [1] implementan un algoritmo exacto para resolver el problema. Los problemas tests que utilizan no superan los 25 vértices.

Más recientemente tenemos que destacar el trabajo de Cornuéjols y Harche (1993) [24] que, aunque se centra en el aspecto poliédrico del problema, también resuelve una instancia de 50 vértices utilizando un algoritmo de Planos de Corte y un Branch&Bound para alcanzar, finalmente, la solución óptima.

Mingozi et al. (1994) [63] implementan un algoritmo de Branch&Bound para resolver óptimamente el problema basándose en la formulación del mismo como un problema de partición de conjuntos. Los problemas tests que utilizan involucran hasta 75 vértices, sólo resuelven óptimamente instancias con 25 clientes como máximo.

Finalmente destacar el algoritmo de Ramificación y Acotación desarrollado por Fisher (1994) [34]. Resuelve el problema buscando un “*K-árbol*” de peso mínimo, dualiza las restricciones de capacidad y de grado para obtener un problema Lagrangiano que le permite calcular cotas inferiores para utilizarlas en el árbol de ramificación. Resuelve óptimamente una instancia de tamaño 100 y algunas otras cuyo número de vértices oscila entre 25 y 71.

Bajo el soporte del programa *SCIENCE* de la *CEE*, un equipo formado por investigadores de diferentes países se ha dedicado durante los últimos tres

años al desarrollo e implementación de un algoritmo de Branch&Cut para el *CVRP*, Augerat et al. (1995) [7]. Han llegado a resolver una instancia de 135 vértices, pero hay instancias de tamaño 75 que todavía no han conseguido resolver óptimamente.

2.4.4 Investigación Poliédrica.

Contrariamente a lo que ha ocurrido con el *TSP* el poliedro de soluciones del *CVRP* se ha estudiado poco. De hecho, sólo hemos encontrado en la literatura unos cuantos trabajos que estudian el problema desde el punto de vista poliédrico.

Uno de ellos es el debido a Araque (1989) [2], el autor formula el problema de rutas de vehículos con idéntica capacidad y demandas unitarias como un problema lineal entero. Estudia con detalle la estructura facial del polítopo de soluciones asociado y presenta un gran número de nuevas desigualdades que definen facetas del mismo. En un trabajo posterior Araque et al. (1990) [5] estudian la relación entre los poliedros asociados a dos problemas estrechamente relacionados: el *CVRP* con clientes idénticos (demandas iguales) y la versión con capacidades del problema del árbol generador de mínimo peso.

Con relación a la versión en la que las demandas pueden ser distintas tenemos que destacar el artículo de Cornuéjols y Harche (1993) [24] que jugará un papel fundamental en el desarrollo de esta tesis. En este trabajo introducen un nuevo problema en el que un cliente puede ser visitado, pero no servido, por más de un vehículo, el *CVRP* gráfico, abreviadamente *GVRP*, y lo utilizan como una relajación del *CVRP*. El objetivo que persiguen en este estudio es extender los resultados poliédricos conocidos sobre el *TSP* y el *GTSP* al contexto del *CVRP* y el *GVRP*. Por ejemplo, ven cómo las desigualdades de eliminación de subtours, entre otras, pueden generalizarse y definir facetas de los poliedros asociados al *CVRP* y al *GVRP*. La ventaja de trabajar con la versión gráfica es la misma que la que presentaba el *GTSP* con respecto al *TSP*, es decir, el poliedro de soluciones asociado es de dimensión completa lo cual facilita el estudio del poliedro asociado.

Sin duda, el motivo por el cual estos autores se han dedicado a estudiar el aspecto poliédrico del problema obedece a los resultados sorprendentes que se han conseguido resolviendo el *TSP* utilizando algoritmos de Branch&Cut,

Padberg y Rinaldi (1989) [72]. Como es sabido, el éxito de estos algoritmos reside básicamente en dos aspectos. Por un lado, en el conocimiento de una “buena” representación lineal del problema, es decir, en el conocimiento teórico de su estructura poliédrica; en segundo lugar en el desarrollo de algoritmos que resuelven eficientemente el problema de separación.

En los dos trabajos que acabamos de mencionar los autores resuelven con éxito algunos ejemplos a pesar de que la fase de identificación de restricciones violadas es manual.

Por último, mencionar que el grupo de la *CEE* al que aludíamos en la sección anterior también se ha centrado en el estudio del poliedro de soluciones del *CVRP* y en el desarrollo de técnicas de identificación de facetas violadas. Como resultado se han encontrado nuevas desigualdades válidas para el problema y, en algunos casos, se dan condiciones bajo las cuales estas desigualdades inducen facetas del poliedro asociado, Augerat y Pochet (1995) [8].

Capítulo 3

El Problema de Rutas de Vehículos con Demanda Compartida.

En este capítulo introducimos una nueva versión del Problema de Rutas de Vehículos con Capacidades, concretamente aquella que resulta de permitir que la demanda de un cliente pueda ser servida por más de un vehículo. En la primera parte resumimos cual es el estado actual de la investigación llevada a cabo en relación con este tema. También estudiaremos qué relación hay entre este problema y los problemas de Rutas de Vehículos a los que nos hemos referido en el capítulo anterior. A continuación daremos una definición formal del problema y propondremos una formulación entera para el mismo.

3.1 Introducción. Estado actual.

En el capítulo anterior hemos realizado una completa revisión de los resultados que hay en la literatura referentes a una serie de problemas que están, en mayor o menor medida, relacionados con el *Problema de Rutas de Vehículos con Demanda Compartida*. Este problema surge de forma natural cuando en el *CVRP* eliminamos la condición de que cada cliente debe ser asignado exactamente a una única ruta, es decir, cuando permitimos que la demanda del mismo sea atendida por uno o más vehículos.

El objetivo que perseguimos en esta sección es dejar constancia de cual es

el estado actual del problema.

La primera referencia que hemos encontrado es debida a Schrage (1981) [79] en su trabajo de clasificación general. Dos años después, Bodin et al. (1983) [13] afirman que “permitir o no dividir la demanda” es una de las características que hay que tener en cuenta a la hora de establecer una clasificación general de los Problemas de Rutas.

De nuevo, en el esquema de clasificación planteado por Desrochers et al. (1990) [29], se considera la posibilidad de servir un cliente con varios vehículos (o realizando varias visitas) como un elemento para la clasificación. Plantean situaciones en las que compartir es algo necesario, por ejemplo, en aquellos problemas en los que la demanda es estocástica. Es posible que cuando el “repartidor” visite al cliente se encuentre con que la demanda es superior a lo que se esperaba y no pueda ser atendida completamente, siendo entonces necesario realizar una segunda visita.

Podemos mencionar otros casos en los que es preferible aplicar esta versión del *CVRP* en lugar de la clásica, por ejemplo, aquellos en los que hay clientes cuya demanda supera la capacidad del vehículo.

Al contrario de lo que ocurre con el *TSP* o el *CVRP*, el Problema de Rutas de Vehículos con Demanda Compartida se ha estudiado muy poco, de hecho, sólo conocemos de la existencia de un algoritmo heurístico para el problema y de uno de Planos de Corte basado en una formulación entera del mismo. En la revisión bibliográfica que hemos realizado no hemos encontrado ningún trabajo que estudie este problema desde el punto de vista de la Combinatoria Poliédrica.

En 1989, Dror y Trudeau (1989-90) [32] [33] introducen el “*Split Delivery Vehicle Routing Problem*” (*SDVRP*) y muestran cómo esta versión del *CVRP* permite conseguir importantes ahorros, tanto en lo referente a distancia total recorrida, como al número de vehículos utilizados.

Pese a ser una relajación del *CVRP*, el *SDVRP* es todavía un problema \mathcal{NP} – duro, ver Dror y Trudeau (1990) [33]. Nótese que si tenemos un único vehículo cuya capacidad es mayor o igual que la suma de las demandas de los clientes y, la matriz de distancias satisface la desigualdad triangular, el *TSP* se puede reducir polinomialmente al *SDVRP*. Esta reducción demuestra por sí sola que el *SDVRP* pertenece a la clase \mathcal{NP} ya que, el *TSP* pertenece a la

misma clase, ver Garey y Johnson (1979) [39].

Este hecho es el que lleva a los autores a enfrentarse al problema utilizando técnicas heurísticas para resolverlo. Diseñan un algoritmo basado en una clase de intercambios de vértices que explotan la posibilidad de dividir la demanda. Partiendo de una solución posible del *CVRP* intentan reducir el coste de la solución actual mediante el reparto de la demanda de algún cliente entre varias rutas. Cuando no es posible conseguir ningún ahorro utilizando esta técnica, aplican un segundo procedimiento que intenta reducir el coste total mediante la adición de un nuevo vehículo; el objetivo de añadir un nuevo vehículo no es otro que el de permitir que algún cliente, que actualmente es servido por más de uno, pase a ser servido por uno sólo. Cada vez que se consigue una mejora realizan una nueva iteración del algoritmo.

Comparan los resultados obtenidos, sobre una colección de problemas cuyo tamaño oscila entre 75 y 150 vértices, con los resultados que se obtienen si se prohíbe dividir la demanda. La conclusión a la que llegan es: “dividir” es recomendable en problemas en los que las demandas de los clientes están por encima del 10% de la capacidad del vehículo. En estos casos se consiguen importantes ahorros en la distancia total recorrida y en el número de vehículos utilizados.

Debido a que en el Capítulo 8 desarrollamos un nuevo heurístico para el problema, no profundizaremos aquí en las características del procedimiento de Dror y Trudeau, ya lo haremos en el momento oportuno.

Como ya hemos mencionado, el segundo trabajo relevante en lo que se refiere al *SDVRP* se debe, de nuevo, a Dror et al. (1994) [30]. En esta ocasión presentan una formulación lineal entera para el problema, introducen diferentes clases de desigualdades válidas y estudian las relaciones jerárquicas entre ellas. Algunas de estas restricciones se tienen en cuenta para desarrollar un algoritmo de Planos de Corte que permite obtener una cota inferior para el problema. La idea es, por un lado, contrastar la bondad de la cota superior obtenida mediante el algoritmo heurístico y, por otro, combinar ambas cotas para acelerar la búsqueda de la solución óptima mediante un procedimiento de Branch&Bound.

Los resultados computacionales que presentan responden sólo a la primera fase, es decir, se limitan a dar el valor de la cota inferior obtenida al aplicar el procedimiento de Planos de Corte a un conjunto de problemas cuyos

tamaños varían entre 10 y 20 vértices, no hay ningún tipo de información sobre cómo funciona el algoritmo de Branch&Bound. La diferencia entre la cota inferior y la superior (proporcionada por su heurístico), con respecto a la superior, varía entre el 0% y el 9% en todos los problemas tests. En ninguna instancia llegan a ramificar en el Branch&Bound, es decir, se quedan en el nudo cero del árbol de ramificación. De hecho, sólo resuelven óptimamente un problema con diez clientes.

3.2 Definición del problema.

Definición 3.1 Sea $G = (V, E)$ un grafo completo, no dirigido, donde, $V = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ y $E = \{(i, j), i, j \in V, i < j\}$ son, respectivamente, el conjunto de vértices (clientes) y el conjunto de aristas (camino entre clientes) del grafo. Sea c una función de costes que asocia a cada arista $e = (i, j)$ un real positivo, que interpretaremos como la distancia entre los vértice i y j ; y d una función que a cada vértice le asocia una demanda no negativa.

$$\begin{array}{ll}
 c: E & \longrightarrow \mathbb{R}^+ & d: V & \longrightarrow \mathbb{Z}^+ \\
 e = (i, j) & \longmapsto c_e \geq 0 & i & \longmapsto \begin{cases} d_i > 0 & i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ d_i = 0 & i = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

El vértice cero es un vértice especial que representa un depósito en el que tenemos localizada una flota de K vehículos idénticos de capacidad Q .

El "Problema de Rutas de Vehículos con Demanda Compartida" consiste en encontrar un conjunto de K rutas que minimicen la distancia total recorrida, de manera que:

- *Cada cliente esté asignado a al menos una ruta, i.e., al menos una ruta debe visitarlo.*
- *La demanda de todos los clientes debe ser atendida completamente.*
- *La demanda de un cliente pueda ser cubierta por uno o más vehículos.*
- *Visitar a un cliente no implica servirle.*
- *Cada ruta debe visitar a al menos un cliente.*

- Cada ruta comience y termine en el depósito.
- El total de la demanda servida por cada una de las rutas no supere la capacidad del vehículo.

Nótese que, a diferencia del *CVRP*, en el *SDVRP* es muy sencillo calcular el mínimo número de vehículos necesario para cubrir la demanda de todos los clientes. Si la capacidad de los vehículos es Q y la demanda total es $\sum_{i \in V} d_i$, basta con $\lceil \frac{\sum_{i \in V} d_i}{Q} \rceil$ vehículos para encontrar una solución posible del problema.

Una consecuencia inmediata que se deriva de esta observación es la siguiente: si obligamos a que todas y cada una de las rutas visiten a al menos un cliente, cuando trabajemos con un número de vehículos superior al mínimo, es posible que haya rutas que, aunque visiten a algunos clientes, la demanda total que sirven sea nula. En este caso estaremos incurriendo en un coste extra no necesario, concretamente en el asociado a dichas rutas. Ahora bien, obsérvese que, las únicas rutas que pueden aparecer en una solución óptima, cumpliendo lo anterior, serán rutas de ida y vuelta al cliente más cercano al depósito. Entonces, bastará con eliminarlas para conocer la solución óptima de la versión del problema en la que, sí que se admiten rutas vacías i.e., rutas que no visitan a ningún cliente.

Otro detalle, que probablemente merezca la pena resaltar, es el de porqué admitimos visitas en las que no se sirve nada de la demanda. La respuesta es sencilla, obligar a que un vehículo sirva al menos una unidad cada vez que visita a un cliente, es una condición que permite definir, por sí sola, una nueva versión del problema. Como veremos en el Capítulo 4, esta versión requerirá un tratamiento completamente distinto del problema.

3.3 Relaciones y diferencias con otros problemas de Rutas por Vértices.

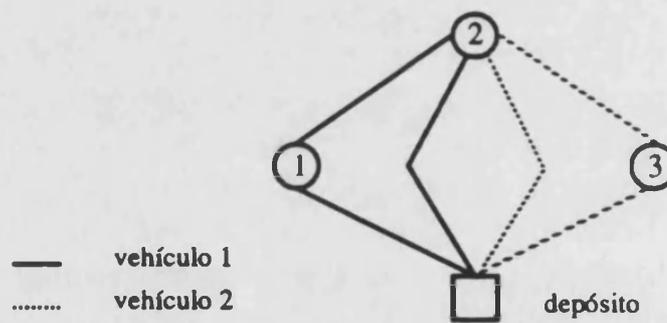
A continuación presentamos una serie de ejemplos que nos permiten ilustrar la relación entre las soluciones del *SDVRP* y las de algunos de los problemas introducidos en el capítulo anterior. También veremos otros que ponen de manifiesto las ventajas de utilizar esta nueva versión del *VRP*.

Por otra parte, algunos ejemplos nos servirán para ilustrar las características y posibles variantes que se pueden plantear con relación al *SDVRP*.

Veamos, en primer lugar, las relaciones entre las soluciones del *SDVRP* y las de los problemas *CVRP*, *GVRP* y *GTSP*.

Como demuestra el siguiente ejemplo, propuesto con otros fines por Dror y Trudeau (1989) [32], toda solución del *GVRP* (o del *CVRP*) es una solución del *SDVRP*, pero el recíproco no es cierto.

Ejemplo 3.1 Supongamos que tenemos tres clientes cuyas demandas son: $d_1 = 3$, $d_2 = 4$ y $d_3 = 3$ y se dispone de dos vehículos idénticos de capacidad $Q = 5$. Dada la solución:



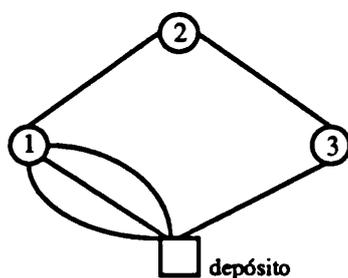
No es posible encontrar ninguna solución del *GVRP*, ni tampoco del *CVRP*, que utilice sólo las aristas del grafo anterior. Nótese que el cliente número dos necesariamente tiene que ser servido por los dos vehículos.

Una de las posibles soluciones del *SDVRP* que utilice sólo las aristas del grafo anterior podría ser aquella en la que el vehículo 1 sirve completamente al cliente número 3 y dos unidades de la demanda del cliente número 2, el resto de la demanda es servida por el otro vehículo.

Toda solución posible del *SDVRP* lo es del *GTSP* pero, el recíproco tampoco es cierto.

Ejemplo 3.2 Consideremos los datos del ejemplo anterior y la solución representada en la siguiente figura. En ella tenemos un conjunto de aristas que

no permite obtener ninguna solución posible del SDVRP (un vehículo debería servir 7 unidades), pero que sí define una solución del GTSP.

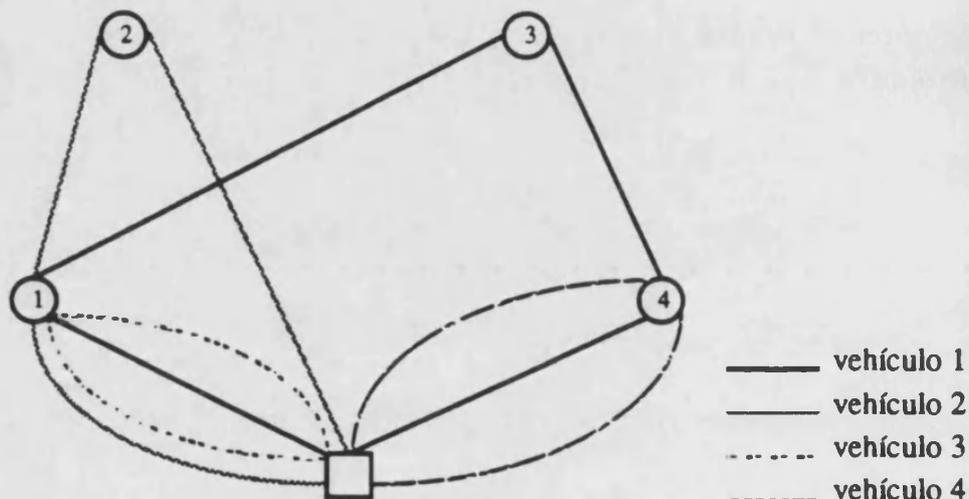


Los siguientes ejemplos nos van a permitir ilustrar algunas de las ventajas relacionadas con la posibilidad de compartir la demanda, como, el hecho de poder reducir el número de vehículos necesarios y la distancia total recorrida.

Ejemplo 3.3 Sean $d_1 = 3$, $d_2 = 4$ y $d_3 = 3$, las demandas de tres clientes y, $c_{0i} = 10$, $i = 1, 2, 3$, $c_{12} = c_{23} = 5$ y $c_{13} = 10$, las distancias entre cada par de puntos, incluyendo el depósito. La capacidad de los vehículos es idéntica e igual a 5. La solución óptima del problema, cuando no se permite compartir la demanda, requiere tres vehículos, uno para cada cliente, y el coste total es de 60 unidades. Si se divide la demanda sólo se necesitan dos y el coste es de 50 unidades.

Otro inconveniente que se supera si se permite compartir la demanda es el de poder encontrar soluciones a instancias que no son posibles en el contexto del CVRP. En ocasiones, con el número de vehículos disponible, no es posible encontrar una solución a no ser que se permita compartir la demanda. Otras veces, hay clientes cuya demanda es mayor que la capacidad de cualquiera de los vehículos, en estos casos tampoco es posible encontrar una solución del tipo CVRP. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.4 Sean $d_1 = 15$, $d_2 = 6$, $d_3 = 7$ y $d_4 = 12$ las demandas de cuatro clientes, $K = 4$ y $Q = 10$. Nótese que la demanda total es 40, luego los cuatro vehículos deben ir completos. Como las demandas del primer y cuarto vértice son estrictamente mayores que la capacidad del vehículo, no podemos encontrar ninguna solución posible a no ser que compartamos la demanda. Si compartimos, la siguiente es una solución del problema:

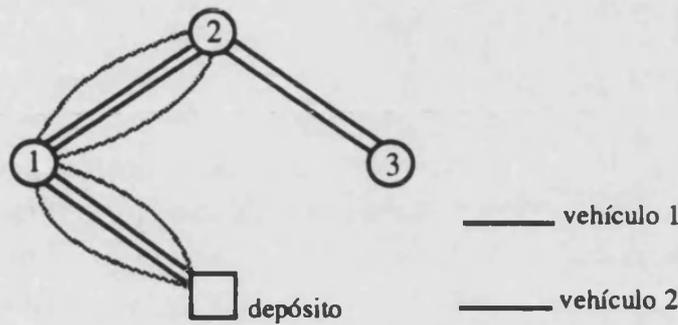


La siguiente tabla muestra qué cantidad de demanda sirve cada vehículo a cada cliente.

VEHÍCULO	CLIENTES			
	1	2	3	4
1	1	0	7	2
2	4	6	0	0
3	10	0	0	0
4	0	0	0	10

Por último, veamos un ejemplo en el que la única manera de obtener la solución óptima es utilizando una determinada arista exactamente dos veces por cada uno de los vehículos. Tendrá sentido pues utilizar en la formulación del problema variables que indiquen el número de veces que se utiliza una arista en la solución en lugar de una variable binaria que sólo nos indique si se utiliza o no.

Ejemplo 3.5 Si en el primer ejemplo tomamos las siguientes distancias: $c_{01} = 1$, $c_{02} = 3$, $c_{03} = 4$, $c_{12} = 1$, $c_{13} = 3$, y $c_{23} = 1$. La solución óptima es la siguiente:



VEHÍCULO	CLIENTES		
	1	2	3
1	3	2	0
2	0	2	3

Como hemos podido observar, dependiendo de si se permite o no compartir la demanda, de si se admiten o no rutas vacías, de si se fija o no el número de vehículos e, incluso, de si se admiten o no clientes cuyas demandas sean mayores que la capacidad de los vehículos, nos encontramos con diferentes versiones de *VRP*'s.

La única manera de poder realizar un estudio poliédrico de uno de estos problemas es estableciendo unas hipótesis de trabajo, es por ello que, a partir de ahora y salvo que indiquemos lo contrario, supondremos que:

$$Q \geq \max \{d_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}\} \text{ y } K = \lceil \frac{\sum_{i \in V} d_i}{Q} \rceil$$

En la mayoría de los problemas de rutas, la matriz de distancias satisface la desigualdad triangular, por lo que, la hipótesis sobre las demandas de los clientes no es demasiado restrictiva. Nótese que si hubiese clientes con demanda mayor que la capacidad de los vehículos, resolveríamos el problema destinando un vehículo, de ida y vuelta al depósito, para servir, exclusivamente, una parte de la demanda (de cada uno de estos clientes) igual a la capacidad del vehículo. A continuación resolveríamos el problema con los mismos clientes pero considerando las demandas "residuales".

En cuanto a suponer que disponemos únicamente del mínimo número de vehículos, ya hemos comentado al principio que, en caso de tener un número superior, siempre es posible ampliar la solución con rutas que van y vuelven a un cliente desde el depósito.

3.4 Formulaciones.

Como en la mayoría de los problemas combinatorios, especialmente en los \mathcal{NP} – *duros*, encontrar un conjunto de desigualdades lineales cuyas soluciones enteras coincidan con el conjunto de soluciones del *SDVRP* no es nada sencillo. De hecho, conseguir una formulación entera para el problema nos ha llevado a tener que recurrir a la utilización de un número considerable de distintos tipos de variables. Realizar un estudio poliédrico basándose en una formulación complicada del problema es una tarea prácticamente imposible. Tanto en el *TSP* como en el *CVRP* se han conseguido resultados importantes estudiando el poliedro de soluciones asociado basándose en un conjunto de desigualdades lineales que no definían una formulación entera de estos problemas sino de una versión relajada de los mismos. Los éxitos obtenidos a nivel poliédrico para el *TSP* y el *CVRP* utilizando este enfoque es lo que nos ha incitado a hacer lo mismo en el caso del *SDVRP*.

En esta sección vemos cómo, definiendo las variables de diferentes maneras, podemos conseguir distintas relajaciones del *SDVRP*. Discutiremos los “pros” y los “contras” de cada una de ellas, elegiremos una para realizar el estudio poliédrico que nos proponemos y justificaremos los motivos de la elección.

Finalmente, daremos la formulación entera para el *SDVRP* a la que nos hemos referido al principio.

3.4.1 Primera relajación.

A partir de la definición del problema dada en la Sección 3.2:

Definición 3.2 Definimos x_{ij} como el número de veces que se usa la arista (i, j) en una solución del *SDVRP* y, R_1 , como el siguiente problema de programación lineal entera:

$$\begin{aligned}
& \text{Min } \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} \\
& \text{s.a :} \\
& \sum_{i=1}^n x_{0i} \geq 2K \quad \text{y par} \quad (1) \\
& \sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{ij} \geq 2 \quad \text{y par} \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \quad (2) \\
& \sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij} \geq 2 \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil \quad \begin{cases} \forall S \subseteq V \setminus \{0\} \\ 2 \leq |S| \leq n-1 \end{cases} \quad (3) \\
& x_{ij} \geq 0 \quad \text{y enteras} \quad \forall (i,j) \in E \quad (4)
\end{aligned}$$

Es fácil comprobar que el vector de incidencia asociado a cualquier solución posible del *SDVRP* satisface todas y cada una de las restricciones anteriores.

- (1) indica que el número de aristas incidentes con el depósito es par y al menos hay $2K$; como todas las rutas deben comenzar y terminar en el depósito esta restricción se cumple ya que necesariamente han de utilizarse todos los vehículos.
- (2) obliga a que todos los clientes sean visitados por al menos una ruta y a que todo vehículo que llegue a un vértice lo abandone.
- (3) indican que dado un subconjunto S cualquiera, la cortadura (S, \bar{S}) debe ser atravesada al menos $2 \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil$ veces. Esto es evidente si tenemos en cuenta que $\lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil$ es exactamente el mínimo número de vehículos necesario para poder abastecer toda la demanda del subconjunto de vértices S y que cualquier vehículo que visite a algún vértice de S debe regresar al depósito utilizando alguna arista de la cortadura. A partir de ahora nos referiremos a ellas como las *restricciones de capacidad*.
- (4) son las restricciones de no negatividad e integralidad.

Si sustituimos $\lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil$ por 1, para cualquier subconjunto de vértices S , y hacemos $K = 1$, en el conjunto de desigualdades anterior, obtenemos la formulación propuesta en Cornuéjols et al. (1985) [23] para el *GTSP*.

Sustituyendo en (1) y (2) las desigualdades por igualdades, K por la solución del problema de *Bin Packing* que definen las demandas de los clientes y,

por $2R(S)$, el término de la derecha de las restricciones de capacidad, obtenemos la formulación dada por Cornuéjols y Harche (1993) [24] para el *CVRP*. $R(S)$ es el mínimo número de veces que es atravesada la cortadura (S, \bar{S}) cuando consideramos todas las soluciones posibles del *CVRP*. Es evidente que el cómputo de $R(S)$ es prácticamente imposible, es por ello que los autores relajan las condiciones y utilizan el mismo término independiente que nosotros. A pesar de la relajación que supone sustituir $R(S)$ por $\lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil$ siguen teniendo una formulación entera de su problema.

Como ya mencionamos en un capítulo anterior, Cornuéjols y Harche estudian el poliedro asociado al conjunto de soluciones del *CVRP* basándose en los resultados poliédricos que obtienen para una versión relajada del mismo, el *GVRP*. La formulación que proponen para estudiar este problema es la misma que la que acabamos de dar nosotros. Básicamente la diferencia con respecto a la nuestra reside en el hecho de que, en su caso, el verdadero término independiente de (3) es $2R(S)$ pero, como en la práctica no es posible trabajar con este valor, lo sustituyen por el que utilizamos nosotros. Para el *SDVRP* el término independiente correcto es $2\lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil$.

El principal inconveniente de trabajar con las variables x_{ij} está en que, dada una solución del *PLE* anterior, tenemos que decidir qué aristas son utilizadas por cada uno de los vehículos. En el caso del *CVRP* este problema no aparece, el grado dos de los clientes y el grado $2K$ del depósito obliga a que el conjunto de aristas asociado a las variables $x_{ij} > 0$ determine unívocamente K rutas que comienzan y terminan en el depósito. Esto no ocurre si trabajamos con el *SDVRP* o con el *GVRP*, de hecho, el conjunto de soluciones enteras del sistema de desigualdades anterior contiene estrictamente al conjunto de soluciones de los dos problemas. El siguiente ejemplo presentado por Fleischmann sirve para ilustrar las dos situaciones.

Ejemplo 3.6 *Consideremos el problema en el que se dispone de dos vehículos idénticos de capacidad $Q = 4$ y en el que las demandas de los clientes son: $d_1 = 4$, $d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = 1$. El conjunto de aristas siguientes cumple todas y cada una de las restricciones de *R1* y, sin embargo, no es posible construir ninguna solución del *GVRP* que utilice únicamente las aristas que aparecen en este grafo. Ni tan siquiera es posible encontrar una del *SDVRP*.*

Decidir realizar nuestro estudio poliédrico utilizando este sistema de desigualdades implica enfrentarse a un nuevo problema, el de *reconocimiento de*

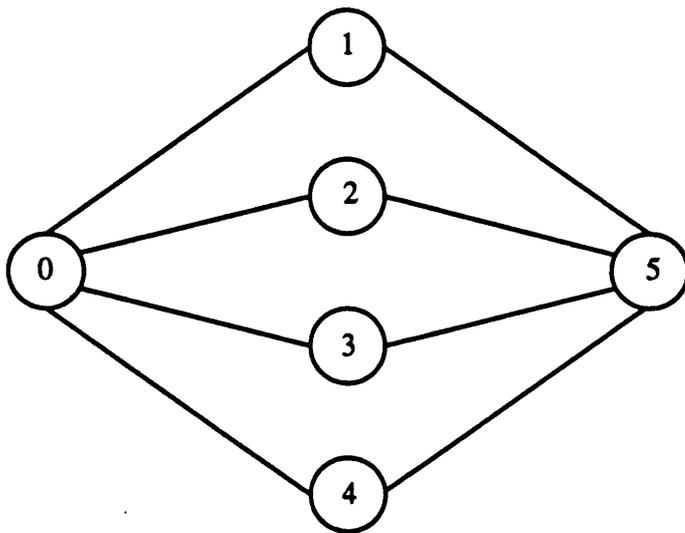


Figura 3.1: Ejemplo de Fleischmann.

rutas, es decir, tendremos que diseñar un método que nos permita contestar a la pregunta de si hay o no una solución del *SDVRP* asociada a una solución posible del problema anterior. En caso de que la respuesta sea afirmativa, tendremos que ser capaces de decir cuáles son las rutas y cómo se ha de realizar el reparto o, equivalentemente, decidir qué rutas sirven a cada cliente y qué parte de la demanda le sirven.

Este inconveniente es el que, en principio, nos incitó a buscar otras formulaciones para el *SDVRP*.

3.4.2 Segunda relajación.

Uno de los principales inconvenientes a la hora de trabajar con las formulaciones de los problemas combinatorios es que, a pesar de la capacidad de cálculo de los ordenadores actuales, cuando el número de variables es muy elevado, al aumentar el tamaño de las instancias puede llegar a ser imposible trabajar con ellos; no únicamente se complica el trabajo a nivel computacional sino que también resulta más complicado el desarrollo de resultados teóricos.

Una de las formas más económicas, en cuanto a número de variables, de mejorar la formulación anterior podría consistir en añadir un nuevo tipo de variables que nos indiquen si una ruta sirve o no parte de la demanda de cada uno de los clientes y, en su caso, qué cantidad. De esta manera sólo aumentamos en $2K(|V| - 1)$ el número de variables.

Definición 3.3 *Definimos las variables:*

$$\begin{aligned}
 x_{ij} &= \text{número de veces que se usa la arista } (i, j), \forall (i, j) \in E \\
 y_i^h &= \begin{cases} 1 & \text{si } h \text{ sirve parte de } d_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \forall i \in V \setminus \{0\}, h = 1, \dots, K \\
 d_i^h &= \text{demanda de } i \text{ servida por } h, \forall i \in V \setminus \{0\}, h = 1, \dots, K
 \end{aligned}$$

Llamaremos R2 al siguiente problema:

$$\begin{aligned}
 \text{Min } & \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} \\
 \text{s.a : } & \\
 & \sum_{h=1}^K y_i^h \geq 1 \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \quad (1) \\
 & \sum_{i=1}^n y_i^h \geq 1 \quad h = 1, \dots, K \quad (2) \\
 & d_i^h \leq d_i y_i^h \quad \begin{cases} \forall i \in V \setminus \{0\} \\ h = 1, \dots, K \end{cases} \quad (3) \\
 & d_i^h \geq y_i^h \quad \begin{cases} \forall i \in V \setminus \{0\} \\ h = 1, \dots, K \end{cases} \quad (4) \\
 & \sum_{h=1}^K d_i^h = d_i \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \quad (5) \\
 & \sum_{i=1}^n d_i^h \leq Q \quad h = 1, \dots, K \quad (6) \\
 & \sum_{i=1}^n x_{0i} \geq 2K \quad \text{y par} \quad (7) \\
 & \sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{ij} \geq 2 \sum_{h=1}^K y_i^h \quad \text{y par} \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \quad (8) \\
 & \sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij} \geq 2 \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil \quad \begin{cases} \forall S \subseteq V \setminus \{0\} \\ 2 \leq |S| \leq n-1 \end{cases} \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij} \geq \frac{2(\sum_{h \in I_1} y_{v_1}^h + \dots + \sum_{h \in I_r} y_{v_r}^h)}{\begin{cases} \forall S \subseteq V \setminus \{0\} \\ v_1, \dots, v_r \in S \\ I_1, \dots, I_r \text{ cualquier} \\ \text{partición de } \{1, \dots, K\} \end{cases}} \quad (10)$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ y entera} \quad \forall (i, j) \in E \quad (11)$$

$$d_i^h \geq 0 \text{ y entera} \quad \begin{cases} \forall i \in V \setminus \{0\} \\ h = 1, \dots, K \end{cases} \quad (12)$$

$$y_i^h \in \{0, 1\} \quad \begin{cases} \forall i \in V \setminus \{0\} \\ h = 1, \dots, K \end{cases} \quad (13)$$

Es evidente que todas las soluciones del *SDVRP* satisfacen todas y cada una de las restricciones anteriores, no obstante vamos a comentar lo que significan cada una de ellas. Nótese que:

- (1) garantiza que todos los clientes son asignados a al menos un vehículo.
- (2) que todo vehículo es utilizado para servir parte de la demanda de algún cliente.
- (3) que la parte de la demanda de un cliente servida por cada vehículo no excede la demanda del cliente. Por otra parte sirve para asegurarnos de que si le sirve algo, la variable y_i^h toma el valor correcto, es decir 1.
- (4) obliga a que si un vehículo no le sirve nada a un cliente, y_i^h valga cero, y a que, si y_i^h vale 1, el vehículo h debe servir a i al menos una unidad.
- (5) garantiza que todos los clientes son servidos completamente.
- (6) obliga a que ningún vehículo sirva más de lo que le está permitido, es decir, Q unidades.
- (7)-(9) juegan el mismo papel que en *R1*. Son las restricciones de grado, paridad y capacidad.
- (10) indican que cualquier cortadura es atravesada, al menos, un número de veces igual a dos veces el número de vehículos distintos que entran en el conjunto S para servir, total o parcialmente, a un subconjunto de sus clientes. Sin embargo, estas restricciones no bastan para garantizar que

los vehículos que entran en S sean apropiados para poder obtener una solución posible de nuestro problema. Este tipo de restricciones han sido introducidas por el Profesor E. Benavent para el *CVRP*.

A pesar de todo seguimos sin tener una formulación entera de nuestro problema ya que, aunque cualquier solución del *SDVRP* cumpla todas y cada una de las restricciones anteriores, el recíproco no es cierto. Podemos utilizar de nuevo el ejemplo de Fleischmann para ilustrar esta situación:

Ejemplo 3.7 *En el grafo asociado al ejemplo de Fleischmann tomamos:*

$$\begin{aligned} x_{ij} &= 1 \text{ para todas las aristas que aparecen en la solución} \\ y_1^1 &= 1, y_i^1 = 0, i = 2, 3, 4, 5 \\ y_1^2 &= 0, y_i^2 = 1, i = 2, 3, 4, 5 \\ d_1^1 &= 4, d_i^1 = 0, i = 2, 3, 4, 5 \\ d_1^2 &= 0, d_i^2 = 1, i = 2, 3, 4, 5 \end{aligned}$$

*Los valores que acabamos de asignar a estas variables corresponden a una solución entera de $R2$, pero no definen ninguna solución posible del *SDVRP*.*

En este caso, reconocer si existe o no un conjunto de K rutas asociadas a una solución (\bar{x}, \bar{y}) del problema anterior consistirá en encontrar una solución posible, x_{ij}^h , del siguiente problema:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{ij} &= \sum_{h=1}^K x_{ij}^h && \forall (i, j) \in E \\ \sum_{i=1}^n x_{0i}^h &\geq 2 \text{ y par} && h = 1, 2, \dots, K \\ \sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{ij}^h &\geq 2\bar{y}_i^h \text{ y par} && \forall i \in V \setminus \{0\}, h = 1, 2, \dots, K \\ \sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij}^h &\geq 2 \max_{i \in S} \{\bar{y}_i^h\} \text{ y par} && \forall S \subseteq V \setminus \{0\}, h = 1, 2, \dots, K \\ x_{ij}^h &\geq 0 \text{ enteras} && \forall (i, j) \in E, h = 1, 2, \dots, K \end{aligned}$$

Nótese que, dado un subconjunto S cualquiera, si un vehículo h no sirve a ningún cliente de S , $\max_{i \in S} \{\bar{y}_i^h\} = 0$, y en este caso la restricción:

$$\sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij}^h \geq 2 \max_{i \in S} \{\bar{y}_i^h\}$$

se cumple trivialmente. Si, por el contrario, h sirve algo de la demanda de alguno de los clientes de S , $\max_{i \in S} \{\bar{y}_i^h\} = 1$ y, la ruta asociada a ese vehículo tendrá que atravesar la cortadura (S, \bar{S}) al menos dos veces, lo cual queda garantizado por la restricción anterior.

Resumiendo, salvo el hecho de que con estas variables y este conjunto de desigualdades obtenemos un reparto posible de la demanda de los clientes, en lo que se refiere al reconocimiento de las rutas estamos como al principio, seguimos sin tener información suficiente como para reconocerlas en un tiempo “razonable”. Nótese además que (3), (4) y (12) obligan a que los vehículos sólo pueden repartir cantidades enteras de la demanda de los clientes.

3.4.3 Tercera relajación.

A la vista de las dos formulaciones anteriores parece evidente que la forma más sencilla de resolver el problema de identificación de rutas es utilizando un tipo de variables que nos indique cuál es el vehículo que utiliza cada arista y el número de veces que la utiliza.

Definición 3.4 Definimos x_{ij}^h como el número de veces que el vehículo h utiliza la arista (i, j) en una solución y, $R3$, como el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{h=1}^K \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}^h \\ \text{s.a. :} \quad & \sum_{i=1}^n x_{0i}^h \geq 2 \quad \text{y par} \quad h = 1, 2, \dots, K \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{ij}^h \geq 0 \quad \text{y par} \quad \forall i \in V \setminus \{0\}, h = 1, 2, \dots, K \quad (2)$$

$$\sum_{h=1}^K \sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{ij}^h \geq 2 \quad \text{y par} \quad \forall i \in V \setminus \{0\}, \quad (3)$$

$$\sum_{h=1}^K \sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij}^h \geq 2 \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil \quad \begin{cases} \forall S \subseteq V \setminus \{0\} \\ 2 \leq |S| \leq n-1 \end{cases} \quad (4)$$

$$x_{ij}^h \geq 0 \quad \text{y enteras} \quad \forall (i, j) \in E, \quad \forall h = 1, 2, \dots, K \quad (5)$$

Cualquier solución del $SDVRP$ cumple las restricciones anteriores. Además, dada una solución de $R3$, sabemos qué aristas son utilizadas por cada uno de

los vehículos, sólo nos queda decidir qué cantidad de la demanda de cada cliente es servida por cada uno de ellos, para ello bastará con encontrar una solución posible del siguiente sistema lineal:

$$\sum_{h \in I_i} d_i^h = d_i$$

$$\sum_{i \in R_h} d_i^h \leq Q$$

donde:

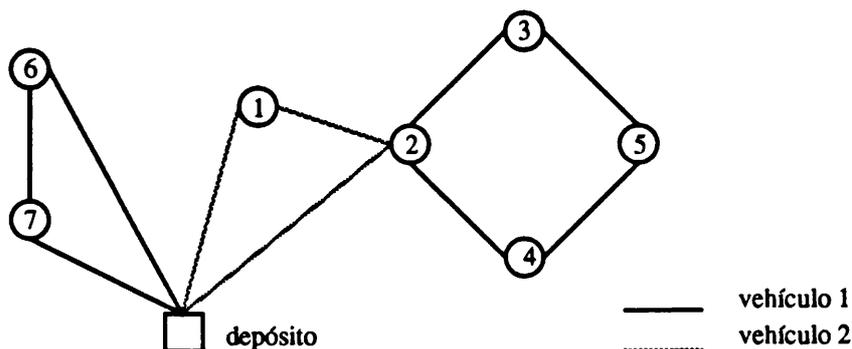
$$I_i = \{h : \sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{ij}^h \geq 2\} \quad \forall i \in V \setminus \{0\}$$

$$R_h = \{i : \sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{ij}^h \geq 2\} \quad h = 1, 2, \dots, K$$

En este caso contestar a la pregunta de si la solución obtenida es o no una solución del *SDVRP* es fácil, basta con resolver el problema anterior. Sabemos que esto se puede hacer en tiempo polinómico ya que se trata, simplemente, de resolver un problema de programación lineal.

Desgraciadamente, seguimos sin tener una formulación entera para nuestro problema, hay soluciones de *R3* que no corresponden a ninguna solución posible del *SDVRP*. Por ejemplo, nos encontramos con que el conjunto de desigualdades que hemos dado no garantiza que las rutas que aparecen sean conexas. El siguiente ejemplo ilustra esta situación:

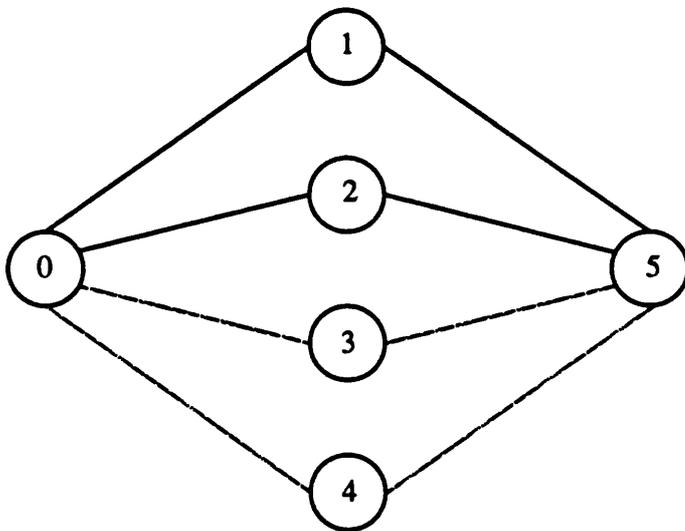
Ejemplo 3.8 Supongamos que tenemos dos vehículos cuya capacidad es igual a 6 y que la demanda de los clientes es: $d_1 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = d_7 = 1$ y $d_2 = 2$.



La desconexión de las rutas se produce porque aunque tengamos asegurado que cualquier cortadura es atravesada al menos $2\lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil$ veces, no tenemos la garantía de que las aristas correspondan a los vehículos adecuados.

Seguimos sin impedir que salga como solución la del ejemplo de Fleischmann. Nótese que no existe ninguna relación entre las aristas incidentes con un vértice y el hecho de que la ruta asociada sirva o no parte de su demanda, es decir, no tenemos garantías de que el problema lineal que acabamos de plantear tenga solución posible.

Ejemplo 3.9 Recordar que las demandas de los clientes eran todas igual a 1 excepto la del primero que era igual a 4. Se tenían dos vehículos con $Q = 4$.



No es posible asignar demandas de clientes a vehículos sin que se viole la capacidad y, de forma que los vehículos sigan las rutas dibujadas en el grafo.

Podemos conseguir que en S entren tantos vehículos distintos como son necesarios introduciendo en la formulación la siguiente familia de restricciones, para cada subconjunto S de $V \setminus \{0\}$,

$$\sum_{h=1}^K \sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij}^h \geq 2\lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil - 2p + \sum_{h \in \Pi} \sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij}^h \quad (6)$$

$$\forall \Pi \subseteq \{1, \dots, K\}, |\Pi| = p$$

$$p = 0, 1, 2, \dots, \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil - 1$$

Nótese que si $p \neq 0$, la restricción anterior puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \sum_{h=1, h \notin \Pi}^K \sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij}^h &\geq 2 \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil - 2p \\ \forall \Pi \subseteq \{1, \dots, K\}, |\Pi| &= p \\ p &= 0, 1, 2, \dots, \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil - 1 \end{aligned}$$

La idea que permite demostrar la validez de la restricción es la siguiente: si p , de los $\lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil$ vehículos que deben atravesar la cortadura (S, \bar{S}) , pertenecen al conjunto Π , el resto de vehículos que deben atravesar dicha cortadura no pertenecerán a Π . Además, controla que se trata de vehículos distintos.

Proposición 3.1 *La familia de desigualdades anterior asegura que, en una solución de R3, la cortadura (S, \bar{S}) , con $S \subseteq V \setminus \{0\}$, es atravesada, al menos, por $\lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil$ vehículos distintos.*

Demostración

Sea S un subconjunto de vértices cualquiera. Si $p = 0$, la restricción resultante es:

$$\sum_{h=1}^K \sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij}^h \geq 2 \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil$$

que no es mas que la restricción de capacidad asociada a S , ((4) Definición 3.4), es decir, aquella que indica que la cortadura (S, \bar{S}) debe ser atravesada, al menos, un número de veces mayor o igual que dos veces el mínimo número de vehículos necesario para servir completamente a todos los clientes de S . Evidentemente la cumplen todas las soluciones posibles del $SDVRP$.

Si $p = 1$, tenemos la siguiente familia de restricciones:

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^K \sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij}^h &\geq 2 \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil - 2 + \sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij}^1 \\ \sum_{h=1}^K \sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij}^h &\geq 2 \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil - 2 + \sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij}^2 \\ &\vdots \\ \sum_{h=1}^K \sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij}^h &\geq 2 \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil - 2 + \sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij}^K \end{aligned}$$

Si no hay ninguna arista en la cortadura (S, \bar{S}) utilizada por el vehículo r la restricción asociada es redundante, ya que $\sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij}^r = 0$ y por tanto estará dominada por la restricción que teníamos para $p = 0$.

Si por el contrario $\sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij}^r > 0$, nos queda:

$$\sum_{h=1, h \neq r}^K \sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij}^h \geq 2 \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil - 2$$

y como el mínimo número de vehículos necesario para servir a S es $\lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil$, tiene que haber al menos otro vehículo, distinto de r , que atraviese la cortadura.

Si $\lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil \geq 3$, la cardinalidad de los subconjuntos, Π , que permiten definir las restricciones, sólo podrá ser igual a cero, uno o dos. Si $|\Pi| = 0$ o $|\Pi| = 1$, las restricciones que obtenemos son las que acabamos de estudiar. Hemos visto el papel que juegan y que, evidentemente, son válidas. Veamos qué ocurre cuando $|\Pi| = 2$.

$$\sum_{h=1, h \neq r, h \neq s}^K \sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij}^h \geq 2 \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil - 4$$

Para cualquier pareja de vehículos r y s del conjunto $\{1, 2, \dots, K\}$ que no utilizan ninguna arista de la cortadura asociada a S , la desigualdad está dominada por la restricción de capacidad correspondiente.

Si sólo uno de los dos vehículos, por ejemplo r , utiliza aristas de la cortadura nos queda:

$$\sum_{h=1, h \neq r}^K \sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij}^h \geq 2 \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil - 4$$

que está dominada por la restricción asociada a r en el caso $p = 1$.

Por último, si los dos utilizan aristas de la cortadura, tenemos:

$$\sum_{h=1, h \neq r, h \neq s}^K \sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij}^h \geq 2 \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil - 4$$

que evidentemente obliga a que un tercer vehículo entre en S .

Dado $\lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil$ fijo, si razonamos análogamente para todos y cada uno de los p , desde $p = 0$ hasta $p = \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil - 1$, obtenemos el resultado. \diamond

Las restricciones anteriores aseguran que en un subconjunto S cualquiera que no incluya al depósito entran tantos vehículos distintos como son necesarios, pero, seguimos teniendo soluciones en las que aparecen rutas disconexas. El problema reside en que en la formulación hay que reflejar la siguiente condición:

$$\sum_{(i,j) \in E(S)} x_{ij}^h > 0 \longrightarrow \sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij}^h > 0$$

Esto se puede conseguir añadiendo la siguiente restricción:

$$\sum_{(i,j) \in E(S)} x_{ij}^h \leq M \sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij}^h$$

donde M es una constante positiva suficientemente grande.

El problema de incluir este tipo de restricciones es que requiere establecer cotas superiores para las variables, esto es, no se pueden utilizar tantas veces como se quiera. Tendríamos que exigir, por ejemplo, que:

$$x_{ij}^h \leq 4 \quad \forall (i,j) \in E, \quad h = 1, 2, \dots, K$$

En esta formulación utilizamos $K|E|$ variables y un número demasiado elevado de restricciones.

Si analizamos las dos últimas relajaciones vemos que, si hacemos una mixtura de ellas, posiblemente obtengamos una formulación entera para el *SDVRP*, es decir, un conjunto de igualdades y desigualdades lineales cuyo conjunto de soluciones enteras sea el conjunto de soluciones del *SDVRP*. Precisamente es de esto de lo que nos ocupamos en la siguiente sección.

3.5 Una formulación entera.

Las variables que vamos a definir a continuación nos van a permitir dar una formulación entera para el problema. Dror et al. (1994) [30] ya proponen una, definiendo otro tipo de variables y suponiendo que el número de vehículos no es fijo. El principal inconveniente de su formulación está en que dan una serie de restricciones, para prevenir las rutas desconectadas del depósito, que resultan algo ambiguas. Lo mismo ocurre con las restricciones de eliminación de subtour. Otro detalle que merece la pena remarcar es que trabajan sobre un grafo dirigido.

En primer lugar obsérvese que no hay pérdida de generalidad en suponer que las aristas que aparecen en la solución no lo hacen más de M veces, donde M es un entero positivo suficientemente grande.

Definición 3.5 Definimos x_{ij}^h como el número de veces que el vehículo h utiliza la arista (i, j) en la solución, $\forall (i, j) \in E, h = 1, \dots, K$;

$$y_i^h = \begin{cases} 1 & \text{si el vehículo } h \text{ visita al cliente } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$\forall i \in V \setminus \{0\}, h = 1, \dots, K$ y d_i^h como la parte de la demanda del cliente i servida por el vehículo h para $i = 1, \dots, n$ y $h = 1, \dots, K$.

Sea P el siguiente problema de Programación Lineal Entera:

$$\text{Min } \sum_{h=1}^K \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}^h$$

s.a :

$$\sum_{h=1}^K y_i^h \geq 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i^h \geq 1 \quad h = 1, \dots, K \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{0i}^h \geq 2 \quad \text{y par } h = 1, \dots, K \quad (3)$$

$$\sum_{j=0, j \neq i}^n x_{ij}^h \geq 2y_i^h \quad \begin{cases} \text{y par } i = 1, \dots, n \\ h = 1, \dots, K \end{cases} \quad (4)$$

$$x_{ij}^h \leq M y_i^h \quad \begin{cases} \forall (i, j) \in E \\ i = 1, \dots, n, h = 1, \dots, K \end{cases} \quad (5)$$

$$\sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij}^h \geq 2y_r^h \quad \begin{cases} \forall S \subseteq V \setminus \{0\} \\ 2 \leq |S| \leq n-1 \\ \forall r \in S \\ h = 1, \dots, K \end{cases} \quad (6)$$

$$\sum_{h=1}^K \sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij}^h \geq 2 \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil \quad \begin{cases} \forall S \subseteq V \setminus \{0\} \\ 2 \leq |S| \leq n-1 \end{cases} \quad (7)$$

$$d_i^h \leq d_i y_i^h \quad \begin{cases} h = 1, \dots, K \\ i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (8)$$

$$\sum_{h=1}^K d_i^h = d_i \quad i = 1, \dots, n \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^n d_i^h \leq Q \quad h = 1, \dots, K \quad (10)$$

$$x_{ij}^h \geq 0 \text{ y enteras} \quad \begin{cases} h = 1, \dots, K \\ \forall (i, j) \in E \end{cases} \quad (11)$$

$$y_i^h \in \{0, 1\} \quad \begin{cases} h = 1, \dots, K \\ i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (12)$$

$$d_i^h \geq 0 \text{ y enteras} \quad \begin{cases} h = 1, \dots, K \\ i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (13)$$

Proposición 3.2 *Toda solución posible del SDVRP es una solución de (P) y recíprocamente.*

Demostración

Si tenemos una solución del SDVRP, conocemos el recorrido de cada uno de los vehículos y la parte de la demanda que sirven a cada uno de los clientes visitados. Podemos, por tanto, definir:

- x_{ij}^h = número de veces que el vehículo h va de i a j , o de j a i en la solución.
- $M = \max\{\max\{x_{ij}^h, (i, j) \in E\}, h = 1, \dots, K\}$
- $y_i^h = 1$ si el vehículo h visita al cliente i , $y_i^h = 0$ si no.
- d_i^h = parte de la demanda del cliente i servida por el vehículo h .

Las restricciones (1) se cumplen trivialmente ya que todos los clientes son visitados por al menos un vehículo.

Supongamos que para algún h , (2) no se cumple, entonces existirá algún vehículo que no visitará a ningún cliente, $y_i^h = 0, \forall i \in V \setminus \{0\}$. Esto significa que en la solución se utilizan, a lo sumo, $K - 1$ vehículos, contradiciendo el hecho de que $K = \lceil \frac{d(V)}{Q} \rceil$ es el mínimo número de vehículos.

(3) es evidente ya que todos los vehículos parten y regresan al depósito; todas las rutas utilizan al menos dos aristas incidentes con el depósito, o, utilizan la misma arista dos veces. La paridad está garantizada por el hecho de que estamos hablando de rutas posibles y cada ruta es un tour.

Razonando análogamente probamos que se cumple (4), ya que, si un vehículo h visita a un cliente i , necesariamente $y_i^h = 1$ y (4) es análoga a (3).

Supongamos que el cliente i no pertenece a la ruta h , esto es, $y_i^h = 0$; esto significa que no hay ninguna arista incidente con i utilizada por el vehículo h , es decir, $x_{ij}^h = 0, \forall j \in V \setminus \{i\}$, y por tanto (5) se cumple.

Si por el contrario, el vértice i es visitado por el vehículo h , $y_i^h = 1$, seguro que h utiliza alguna arista $(i, j) \rightarrow x_{ij}^h \geq 1$, pero, atendiendo a la definición de

M que hemos dado ningún vehículo utiliza la misma arista más de M veces y (5) se cumplirá.

Sea $S \subseteq V \setminus \{0\}$, $2 \leq |S| \leq n - 1$. Si $r \in S$ e $y_r^h = 0$, (6) se cumple trivialmente. Supongamos que $y_r^h = 1$, (6) $(\sum_{(i,j) \in (S,\bar{S})} x_{ij}^h \geq 2)$ indica que la cortadura (S, \bar{S}) es atravesada por el vehículo h al menos una vez; esto es evidente si tenemos en cuenta que $y_r^h = 1$ significa que hay un cliente de S que es visitado por el vehículo h , la única manera de que el vehículo alcance el depósito es atravesando (S, \bar{S}) .

Las restricciones (7) indican que en un subconjunto S el número de aristas en la cortadura asociada es al menos 2 veces el número mínimo de vehículos necesarios para servir la demanda del conjunto. Es evidente que cualquier solución posible del *SDVRP* las cumplirá.

Si un vehículo visita a un cliente $y_i^h = 1 \rightarrow d_i^h \leq d_i$, y las restricciones (8) indican que la parte de la demanda del cliente servida por el vehículo no puede ser superior a la demanda, lo cual es evidente. Si h no visita a i , $y_i^h = 0$, h no servirá nada de la demanda de i y la restricción $d_i^h \leq 0$ se cumplirá.

(9) indica que todos los clientes son completamente servidos y (10) que ningún vehículo excede su capacidad. Evidentemente cualquier solución del *SDVRP* cumple ambas restricciones así como (11), (12) y (13).

Veamos que el recíproco también es cierto, es decir, que un conjunto de variables enteras cumpliendo las restricciones (1), ..., (13) definen una solución del *SDVRP*.

Dada una solución entera de (P) los valores de d_i^h , definidos en el apartado anterior, garantizan que hay una asignación posible de las demandas de los clientes a los vehículos. Todos los clientes son completamente servidos,

$$\sum_{h=1}^K d_i^h = d_i, \quad i = 1, \dots, n$$

y ningún vehículo excede su capacidad:

$$\sum_{i=1}^n d_i^h \leq Q, \quad h = 1, \dots, K$$

Si en dicha asignación, el cliente i es servido, total o parcialmente, por el vehículo h :

$$\sum_{h=1}^K d_i^h = d_i \stackrel{(9)}{\rightarrow} d_i^h > 0, \text{ para algún } h \stackrel{(8)}{\rightarrow} y_i^h = 1 \stackrel{(4)}{\rightarrow} \sum_{j=0, j \neq i}^n x_{ij}^h \geq 2 \text{ y par}$$

existen un número par de aristas incidentes con el cliente i que pertenecen a la ruta h ; el grafo inducido por las aristas asociadas a las variables x_{ij}^h positivas es un tour que incluye al depósito ya que, si no fuese así, se violaría alguna de las restricciones (6) o (3).

Obsérvese que las restricciones aseguran que sólo aquellos vehículos que visitan a un cliente pueden servir parte de su demanda. En efecto, dado i , si

$$x_{ij}^h = 0 \quad \forall j \neq i \stackrel{(4)}{\rightarrow} y_i^h = 0 \stackrel{(8)}{\rightarrow} d_i^h = 0$$

Por otra parte, el hecho de que un vehículo visite a un cliente no obliga a servir.

$$x_{ij}^h > 0 \stackrel{(5)}{\rightarrow} y_i^h = 1 \stackrel{(4)}{\rightarrow} \sum_{j=0, j \neq i}^n x_{ij}^h \geq 2 \text{ y par} \stackrel{(8)}{\rightarrow} 0 \leq d_i^h \leq d_i$$

◇

Nota 3.1 Para demostrar la segunda parte de la proposición anterior no hemos necesitado ninguna de las restricciones (1), (2) o (7).

Veamos que si K es el mínimo número de vehículos estas restricciones son redundantes.

- (9) \rightarrow (1), pues todos los clientes deben ser servidos.

$$\sum_{h=1}^K d_i^h = d_i > 0 \rightarrow d_i^h > 0 \stackrel{(8)}{\rightarrow} y_i^h = 1 \rightarrow \sum_{h=1}^K y_i^h \geq 1, \quad i = 1, \dots, n$$

- (10) \rightarrow (2), puesto que, para no violar las restricciones de capacidad deben utilizarse todos los vehículos.

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n d_i^h \leq Q \\ K = \lceil \frac{d(V)}{Q} \rceil \end{array} \right\} \rightarrow \sum_{i=1}^n y_i^h \geq 1, \quad h = 1, \dots, K$$

- (6) \rightarrow (7), para probar esto necesitamos algunos resultados preliminares.

Nota 3.2 Para cada $S \subseteq V \setminus \{0\}$, $2 \leq |S| \leq n - 1$ y $h \in \{1, 2, \dots, K\}$, definimos:

$$H_S = \{h \in \{1, 2, \dots, K\} : \text{para algún } i \in S, y_i^h = 1\}$$

$$S_h = \{i \in S : y_i^h = 1\}$$

de lo que deducimos lo siguiente:

Proposición 3.3 Dada una solución de (P), si $x_{ij}^h > 0$, entonces:

$$“(i, j) \in (S_h, \bar{S}_h) \longleftrightarrow (i, j) \in (S, \bar{S})”$$

Demostración

Si $(i, j) \in (S_h, \bar{S}_h)$, como $S_h \subseteq S$, $i \in S$, y

$$j \in \bar{S} \cup (S \setminus S_h) \begin{cases} \text{si } j \in \bar{S} & \rightarrow (i, j) \in (S, \bar{S}) \\ \text{si } j \in S \setminus S_h & \rightarrow y_j^h = 0 \stackrel{(5)}{\Rightarrow} x_{ij}^h = 0 \quad \# \end{cases}$$

Luego, $(i, j) \in (S, \bar{S})$.

Supongamos ahora que $(i, j) \in (S, \bar{S})$, como $S_h \subseteq S$, $\bar{S} \subseteq \bar{S}_h$ tenemos que: $j \in \bar{S}_h$, y, teniendo en cuenta que:

$$x_{ij}^h > 0 \stackrel{(5)}{\Rightarrow} y_i^h = 1 \rightarrow i \in S_h$$

tenemos lo que queríamos, $(i, j) \in (S_h, \bar{S}_h)$.

Hemos demostrado que en el grafo inducido por las aristas utilizadas por un determinado vehículo h , las cortaduras asociadas a S y a S_h coinciden. \diamond

Nota 3.3 Si $\lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil = p$ ($d(S) > (p-1)Q$), entonces la demanda de los clientes en S debe estar asignada a al menos p vehículos diferentes, en otro caso,

existirán q vehículos ($q \leq p - 1$), no hay pérdida de generalidad en suponer que son los q primeros, que servirían toda la demanda de S , pero:

$$\sum_{h=1}^q \sum_{i \in S} d_i^h \leq qQ \leq (p-1)Q < d(S) \quad \#$$

Como $|H_S|$ es el número de vehículos que visitan S , necesariamente, $|H_S| \geq p$. Además, para cada $h \in H_S$, habrá un vértice $i \in S$ de manera que $\sum_{j=0, j \neq i}^n x_{ij}^h \geq 2 = 2y_i^h$.

$$\text{Como } S_h \subseteq V \setminus \{0\} \xrightarrow{(6)} \sum_{(i,j) \in (S_h, \bar{S}_h)} x_{ij}^h \geq 2y_r^h, \quad \forall r \in S_h$$

Ahora bien, los $r \in S_h$ cumplen que $y_r^h = 1$, por tanto:

$$\sum_{(i,j) \in (S_h, \bar{S}_h)} x_{ij}^h \geq 2, \quad \forall h \in H_S$$

Por otra parte, por la Proposición 3.3,

$$\sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij}^h = \sum_{(i,j) \in (S_h, \bar{S}_h)} x_{ij}^h$$

de lo cual se deduce que:

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^K \sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij}^h &\geq \sum_{h \in H_S} \sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij}^h = \\ &= \sum_{h \in H_S} \sum_{(i,j) \in (S_h, \bar{S}_h)} x_{ij}^h \geq 2|H_S| \geq 2p = 2 \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil \end{aligned}$$

Resumiendo, (6) \rightarrow (7), y podemos eliminar de la formulación las restricciones, (1), (2) y (7). Por tanto, si K es el mínimo número de vehículos la

formulación de (P) quedará como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{h=1}^K \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}^h \\ \text{s.a. :} \quad & \sum_{i=1}^n x_{0i}^h \geq 2 \text{ y par} \quad h = 1, \dots, K \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sum_{j=0, j \neq i}^n x_{ij}^h \geq 2y_i^h \quad \begin{cases} \text{par } i = 1, \dots, n \\ h = 1, \dots, K \end{cases} \quad (2)$$

$$x_{ij}^h \leq M y_i^h \quad \begin{cases} \forall (i, j) \in E \\ i = 1, \dots, n, h = 1, \dots, K \end{cases} \quad (3)$$

$$\sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij}^h \geq 2y_r^h \quad \begin{cases} h = 1, \dots, K \\ \forall S \subseteq V \setminus \{0\} \\ 2 \leq |S| \leq n - 1 \\ \forall r \in S \end{cases} \quad (4)$$

$$d_i^h \leq d_i y_i^h \quad \begin{cases} h = 1, \dots, K \\ i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (5)$$

$$\sum_{h=1}^K d_i^h = d_i \quad i = 1, \dots, n \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^n d_i^h \leq Q \quad h = 1, \dots, K \quad (7)$$

$$x_{ij}^h \geq 0 \text{ y enteras} \quad \begin{cases} h = 1, \dots, K \\ \forall (i, j) \in E \end{cases} \quad (8)$$

$$y_i^h \in \{0, 1\} \quad \begin{cases} h = 1, \dots, K \\ i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (9)$$

$$d_i^h \geq 0 \text{ y enteras} \quad \begin{cases} h = 1, \dots, K \\ i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (10)$$

El número de variables que hemos tenido que introducir para conseguir un conjunto de desigualdades lineales cuyo conjunto de soluciones enteras coincida con las soluciones del SDVRP ha sido $K(|E| + 2(|V| - 1))$.

La tabla siguiente muestra cómo varía el número de variables dependiendo del tamaño de la instancia y de la relajación escogida para representar el

problema. La última columna corresponde al número de variables necesarias en la formulación que acabamos de introducir.

n	K	$R1$	$R2$	$R3$	P
		$ E $	$ E + 2K(V - 1)$	$K E $	$K E + 2K(V - 1)$
10	2	55	95	110	150
	4	55	135	220	300
	6	55	175	330	450
20	2	210	290	420	500
	4	210	370	840	1000
	6	210	450	1260	1500
30	2	465	585	930	1050
	4	465	705	1860	2100
	6	465	825	2790	3150
50	2	1275	1475	2550	2750
	4	1275	1675	5100	5500
	6	1275	1875	7650	8250
100	2	5050	5450	10100	10500
	4	5050	5850	20200	21000
	6	5050	6250	30300	31500

El número de variables en P es $K + \frac{4K}{|V|}$ veces el número de variables utilizadas en $R1$; en $R2$ es $1 + \frac{4K}{|V|}$ veces el número de variables de $R1$ y, en $R3$, K veces el de $R1$.

Si mantenemos fijo el valor de K en $R1$ y $R2$, al aumentar $|V|$, el número de variables utilizadas es prácticamente el mismo en las dos relajaciones.

La ventaja de utilizar la tercera relajación en lugar de la primera está en que dada una solución de $R3$, no hay que resolver el problema de identificación de rutas asociado; el precio que hay que pagar es el de que por cada restricción del tipo $\sum_{(i,j) \in (S,\bar{S})} x_{ij} \geq 2 \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil$ en $R1$, tenemos que introducir K restricciones del tipo $\sum_{(i,j) \in E(S)} x_{ij}^h > 0 \rightarrow \sum_{(i,j) \in (S,\bar{S})} x_{ij}^h > 0$ en $R3$, para garantizar la conexión de las rutas. Esto no soluciona todo el problema sino que, si además queremos asegurar que en cada subconjunto S entren $\lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil$ vehículos distintos, el número de restricciones aumenta aún más y de forma considerable. La pregunta es, ¿cuál de las dos relajaciones es mejor?. Evidentemente la primera es más sencilla y a la hora de realizar un estudio poliédrico resulta más manejable. Si diseñamos un procedimiento para reconocer las rutas a

partir de una solución entera de $R1$, podremos trabajar con $R1$, en lugar de con $R3$.

Nótese que en el $CVRP$ se han resuelto instancias en las que $|V| = 51$ como máximo. Suponiendo que seamos capaces de resolver instancias del $SDVRP$ con el mismo número de vértices, el número de variables que tenemos que manejar utilizando $R1$, es bastante inferior al que deberíamos considerar en $R3$, lo mismo ocurre con las restricciones.

Si comparamos la primera y la segunda relajación observamos que ambas aportan prácticamente la misma información en cuanto al reconocimiento de rutas; la diferencia entre una y otra es que en una solución de $R2$ conocemos qué vehículos sirven a cada cliente y qué parte de la demanda le sirven, pero seguimos sin tener garantías sobre la existencia o no de un conjunto de K rutas que utilicen únicamente las aristas presentes en la solución.

En el $CVRP$, trabajar con el conjunto de desigualdades que aparecen en $R1$ ha dado buenos resultados desde el punto de vista de la Combinatoria Poliédrica. Como ya mencionamos anteriormente, el conjunto de soluciones enteras de este sistema se ajusta mejor al conjunto de soluciones del $SDVRP$ que al del $CVRP$. Esto, junto con el menor número de variables y de restricciones que tenemos que utilizar es lo que nos ha llevado a elegir a $R1$ para realizar el estudio poliédrico de nuestro problema.

3.6 Método de reconocimiento de rutas.

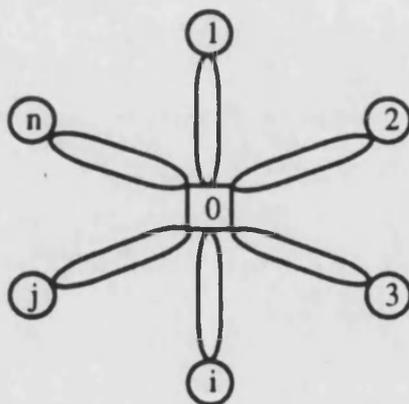
Proposición 3.4 Contestar a la pregunta de si una solución de $R1$ corresponde o no a una solución del $SDVRP$ es un problema que pertenece a la clase \mathcal{NP} .

Demostración

Supongamos que la solución obtenida es:

$$x_{0i} = 2, i = 1, \dots, n$$

con n suficientemente grande con respecto a K y d_i las demandas de los clientes.



Contestar a la pregunta de si hay o no una solución del $SDVRP$ que utilice sólo las aristas anteriores es equivalente a averiguar si es posible encontrar una solución del problema de *Bin Packing* asociado a las demandas de los clientes utilizando K vehículos de capacidad Q . Notar que con esta solución ningún cliente puede ser servido por más de un vehículo.

Como el problema de *Bin Packing* es un problema de la clase \mathcal{NP} , Garey y Johnson (1979) [39], el problema de reconocimiento de las rutas también lo será ¹. ◇

El método que damos a continuación permite reconocer si la solución entera obtenida resolviendo el problema relajado es o no una solución del $SDVRP$.

¹Quiero agradecer al Profesor E. Benavent su ayuda en la obtención de este resultado.

Este método permite validar el estudio poliédrico que realizamos en los capítulos siguientes ya que, eligiendo M apropiadamente en (P) , disponemos de una herramienta que, al menos desde el punto de vista teórico, permite resolver el problema de identificación de rutas.

MÉTODO DE RECONOCIMIENTO DE RUTAS

Paso 1.- Sea \bar{X} una solución de $R1$.

Paso 2.- Plantear el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
 (P1) \quad & \text{Min } 1 \\
 & \text{s.a :} \\
 & \quad (1) - (10) \\
 & \quad (11) \quad \sum_{h=1}^k x_{ij}^h = \bar{X}_{ij} \quad \forall (i, j) \in E
 \end{aligned}$$

Paso 3.- Si $P1$ tiene solución, entonces \bar{X} es una solución del $SDVRP$; en otro caso no existe una descomposición del conjunto de aristas asociadas a \bar{X} que proporcione una solución posible del $SDVRP$.

Hemos puesto una función objetivo constante porque en realidad lo único que nos importa es saber si el sistema planteado tiene solución o no.

A partir de una solución entera del problema relajado y a efectos prácticos se puede definir M como el número de veces que aparece la arista más utilizada en la solución.

Capítulo 4

El poliedro del *SDVRP*.

En primer lugar, definiremos formalmente lo que vamos a entender por *solución* posible del *SDVRP* y, a continuación, demostraremos que la envoltura convexa de los vectores de incidencia asociados con las soluciones posibles del problema es un poliedro no acotado de dimensión completa. En lo sucesivo, y siempre que no de lugar a confusión, hablaremos indistintamente de soluciones posibles o de vectores de incidencia asociados a las mismas. Como ya se dijo en la Proposición 1.9, la ventaja principal que proporciona la dimensión completa reside en el hecho de que la representación de una faceta por medio de una desigualdad lineal es única, salvo el producto por un escalar no negativo, y esto facilita el estudio poliédrico del problema. La definición de solución del *SDVRP* deberá contemplar la posibilidad de visitar a los clientes sin necesidad de servirles. En otro caso, como veremos en la Sección 4.3, el poliedro de soluciones asociado resultará ser un poliedro acotado de dimensión no completa.

4.1 Definición de solución posible.

Definición 4.1 Diremos que un conjunto T de aristas, no necesariamente distintas, es “una solución del *SDVRP*” si T admite una partición en K subconjuntos T_h , a los que nos referiremos como rutas h -ésimas, tales que:

1. El grafo inducido por cada T_h , $G(T_h) = (V(T_h), T_h)$ es un tour que contiene al depósito.

2. Es posible asociar, a cada vértice, i , y a cada ruta, h , unos d_i^h que indican la parte de la demanda del vértice i que es servida por el vehículo h , de manera que:

cada vértice de $V \setminus \{\text{depósito}\}$ está asignado a, al menos, una ruta,

$$V = \bigcup_{h=1}^K V(T_h),$$

estar asignado no implica que $d_i^h > 0$ pero,

$$\text{si } i \notin V(T_h) \rightarrow d_i^h = 0,$$

$$\sum_{h=1}^K d_i^h = d_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ y,}$$

$$\sum_{i \in V(T_h)} d_i^h \leq Q \quad \forall h \in \{1, 2, \dots, K\}.$$

Nota 4.1 Recordar que dada una familia T de aristas, no necesariamente distintas, el vector de incidencia asociado es un vector de \mathbb{R}^E cuyas coordenadas indican el número de veces que aparece una arista e en el conjunto T . Lo representábamos como x^T .

Nótese que todo vector de incidencia asociado a una solución del SDVRP determina unívocamente un conjunto de aristas T asociadas a, al menos, una solución del SDVRP y viceversa.

4.2 El poliedro de soluciones.

Nuestro objetivo en este apartado es demostrar que la envoltura convexa de los vectores de incidencia asociados a las soluciones del SDVRP es un poliedro no acotado de dimensión completa. Lo representaremos de la siguiente manera:

$$P_{SDVRP} = \text{conv}\{x^T \in \mathbb{R}^E \mid T \text{ es una solución del SDVRP}\}.$$

Sea

$$\mathcal{T}_n = \{x^T \in \mathbb{R}^E \mid T \text{ es una solución del SDVRP}\}.$$

Como $|\mathcal{T}_n|$ no es finito no podemos deducir directamente que P_{SDVRP} sea un poliedro (Weyl 1935). Para demostrarlo necesitamos encontrar dos conjuntos

A y D tales que:

$$\text{conv}(\mathcal{T}_n) = \text{conv}(A) + \text{cone}(D)$$

A partir de ahora nos centraremos en la búsqueda de estos dos conjuntos.

Proposición 4.1 *En una solución óptima del SDVRP, el número máximo de veces que se repite una arista $e \in E$ es $2K$.*

Demostración

En efecto, supongamos que T es una solución del SDVRP en la que la arista e aparece m veces, $m > 2$, en una ruta T_h . Es fácil comprobar que el siguiente conjunto de rutas define una solución T' del SDVRP cuyo coste es, a lo sumo, el coste de la solución T .

$$\{T'_l = T_l, l \neq h, l = 1, \dots, K, T'_h\}$$

El conjunto T'_h está formado por el conjunto de aristas de la ruta T_h menos $2m_e$ copias de la arista e , con m_e igual a $p - 1$ si $m = 2p$ o a p si $m = 2p + 1$, con $p \geq 1$ y entero. Así, en T'_h la arista e aparece como máximo dos veces.

Repitiendo el proceso para todas aquellas aristas con más de dos copias en alguna ruta llegaremos a una solución T' de coste menor o igual que T en la que ninguna arista aparecerá más de $2K$ veces. \diamond

Proposición 4.2 *Si $\mathcal{T}_n^* = \{x^T \in \mathcal{T}_n \mid x_e^T \leq 2K \ \forall e \in E\}$, $\text{conv}(\mathcal{T}_n^*)$ es un polítopo.*

Demostración

Por el Teorema de Weyl (1935) 1.8, sabemos que la envoltura convexa de un número finito de puntos es un poliedro, como además todas las componentes de estos puntos son menores o iguales que $2K$, se trata de un poliedro acotado, es decir, de un polítopo. \diamond



Definición 4.2 Definimos D como el siguiente conjunto de vectores:

$$D = \left\{ d(e) \in \mathbb{R}^E \mid d(e)_{e'} = 0 \text{ si } e' \neq e \text{ y } d(e)_{e'} = 2 \text{ si } e' = e \right\}$$

i.e.:

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Cuando no sea relevante conocer explícitamente la arista e , denotaremos a $d(e)$ simplemente como d .

En el Lema 4.1 demostraremos que los elementos de D son direcciones de \mathcal{T}_n , es decir, que para cualquier $x^T \in \mathcal{T}_n$ y para cualquier $N \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$x^{T'} = x^T + N \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_n$$

Este resultado se puede extender (Lema 4.2) a los elementos de $\text{conv}(\mathcal{T}_n)$.

Por último, en el Lema 4.3, demostraremos que el vector de incidencia de cualquier solución de \mathcal{T}_n se puede expresar como suma del vector de incidencia asociado a un elemento de \mathcal{T}_n^* más una combinación no negativa de elementos de D .

Utilizando estos resultados llegaremos a que:

$$\text{conv}(\mathcal{T}_n) = \text{conv}(\mathcal{T}_n^*) + \text{cone}(D)$$

alcanzando así el objetivo que nos habíamos marcado en este capítulo, probar que P_{SDVRP} es, efectivamente, un poliedro.

Lema 4.1 Si $x^T \in \mathcal{T}_n$ y $d \in D \longrightarrow x^T + Nd \in \mathcal{T}_n \forall N \in \mathbb{N}$.

Demostración

Si $x^T \in \mathcal{T}_n$, sabemos que existe una partición del conjunto de aristas de T en K subconjuntos T_1, T_2, \dots, T_K , de manera que cada uno de ellos representa una ruta, y el conjunto de todos ellos una solución del *SDVRP*. Como $d \in D$, existirá una arista $e' \in E$ de manera que:

$$d_e = \begin{cases} 0 & \text{si } e \neq e' \\ 2 & \text{si } e = e' \end{cases}$$

Veamos que el conjunto de aristas, T' , asociado al vector de incidencia $x^T + Nd$, permite obtener una solución del *SDVRP*.

Teniendo en cuenta el número de copias de la arista e' nos podemos encontrar con una de las siguientes situaciones:

- 1.- Existe al menos una de las K rutas, por ejemplo T_{h_0} , conteniendo al menos una copia de la arista e' . En este caso, la nueva solución T' vendrá definida por:

$$\{T'_h = T_h, h \neq h_0, h = 1, \dots, K, T'_{h_0}\},$$

donde T'_{h_0} es el conjunto de aristas de la ruta T_{h_0} más $2N$ copias extras de la arista e' , y la misma asignación de demandas que en T .

Es evidente que la nueva solución es posible para el *SDVRP* ya que sólo se diferencia de T en que uno de los vehículos que utiliza la arista e' la recorrerá $2N$ veces más, pero sin servir nada a sus extremos.

- 2.- Ninguna de las K rutas utiliza la arista e' .

A.- La arista $e' = (u, v)$ con u, v distintos del depósito.

A1.- Si u y v estaban en una misma ruta T_{h_0} , la nueva solución T' se define como en el caso anterior; u y v se visitan consecutivamente N veces, pero sin cambiar las rutas que los servían ni la cantidad de la demanda que servían en T cada una de ellas.

A2.- No existe ninguna ruta $h \in \{1, 2, \dots, K\}$ a la que pertenezcan los dos extremos de la arista e' . Sea T_{h_0} una de las rutas que visita a u , i.e. $u \in V(T_{h_0})$. La solución se construye como en los casos anteriores. Observar que lo que en realidad estamos haciendo en T' es asignar el vértice v a una nueva ruta que no le servirá nada de su demanda, i.e. $d_{h_0}^v = 0$

B.- La arista $e' = (0, u)$ para algún u distinto del depósito. Sea T_{h_0} una de las rutas que visita a u , construimos la misma solución, pero ahora habrá una ruta que visitará a u desde el depósito N veces extra.

Es evidente, pues, que en todos los casos $x^{T'} = x^T + Nd \in \mathcal{T}_n$. \diamond

Lema 4.2 Si $x^T \in \text{conv}(\mathcal{T}_n)$ entonces, $x^T + \sum_{e \in E_1} N_e d(e) \in \text{conv}(\mathcal{T}_n)$, donde:

$$\begin{aligned} E_1 &\subseteq E \\ d(e) &\in D, e \in E_1 \\ N_e &\in \mathbb{N}, e \in E_1 \end{aligned}$$

Demostración

Si $x^T \in \text{conv}(\mathcal{T}_n)$, existirá un subconjunto finito de índices I de manera que:

$$\begin{aligned} \lambda_i &\geq 0, \forall i \in I; \sum_{i \in I} \lambda_i = 1 \\ \text{y para cada } i \in I, &\exists x^{T(i)} \in \mathcal{T}_n \end{aligned}$$

$$x^T = \sum_{i \in I} \lambda_i x^{T(i)}$$

De donde,

$$\begin{aligned} x^T + \sum_{e \in E_1} N_e d(e) &= \sum_{i \in I} \lambda_i x^{T(i)} + \sum_{e \in E_1} (\sum_{i \in I} \lambda_i) N_e d(e) \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_i \underbrace{(x^{T(i)} + \sum_{e \in E_1} N_e d(e))}_{\in \mathcal{T}_n} \in \text{conv}(\mathcal{T}_n) \end{aligned}$$

\diamond

Lema 4.3 Dado $x^T \in \mathcal{T}_n$, $\exists x^{T^*} \in \mathcal{T}_n^*$ y $\exists n$ $N_1, N_2, \dots, N_{|E|} \in \mathbb{N}$ tales que:

$$x^T = x^{T^*} + \sum_{e \in E} N_e d(e)$$

Demostración

La demostración es constructiva, vamos a ver cómo calcular los enteros a los que nos referimos en el enunciado. Distinguiamos dos casos:

- 1.- $\forall e \in T$ con un número de copias menor o igual que $2K$, hacemos $N_e = 0$.
- 2.- Para las aristas $e \in T$ con un número de copias estrictamente mayor que $2K$ procedemos como se explica a continuación.

Dado que $x^T \in \mathcal{T}_n$, existirá una partición del conjunto T en K subconjuntos (rutas) T_1, T_2, \dots, T_K , de manera que, en algún T_h , la arista e aparecerá al menos tres veces.

Sean $T_{h_1}, T_{h_2}, \dots, T_{h_r}$ los subconjuntos de T en los que el número de copias de la arista e es igual o superior a tres.

Sean $N_{h_1}^e, N_{h_2}^e, \dots, N_{h_r}^e$ enteros positivos tales que si eliminamos de T_{h_j} , $2N_{h_j}^e$ copias de la arista e , para $j = 1, 2, \dots, r$, el número de copias resultante es uno o dos. Definimos entonces,

$$N_e = \sum_{j=1}^r N_{h_j}$$

Es evidente que $x^T - N_e d(e) \in \mathcal{T}_n$ y que el número de copias de la arista e en la nueva solución no es superior a $2K$.

El proceso no depende de la arista elegida, así pues, repitiéndolo para cada arista con un número de copias superior a $2K$ en T , podemos calcular todos los N_e , y llegaremos a que:

$$\begin{aligned} x^{T^*} &= x^T - \sum_{e \in E} N_e d(e) \\ x_e^{T^*} &\leq 2K \quad \forall e \in E \end{aligned}$$

de lo que deducimos que:

$$x^T = x^{T^*} + \sum_{e \in E} N_e d(e), \text{ con } x^{T^*} \in \mathcal{T}_n^*$$

◇

Teorema 4.1

$$\text{conv}(\mathcal{T}_n) = \text{conv}(\mathcal{T}_n^*) + \text{cone}(D)$$

Demostración

(\rightarrow)

Si $x^T \in \text{conv}(\mathcal{T}_n)$ existen un número finito de elementos, $x^{T(i)}$, $i \in I$, $|I| < \infty$, en \mathcal{T}_n , y de escalares $\lambda_i \geq 0$, $i \in I$, $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ tales que:

$$x^T = \sum_{i \in I} \lambda_i x^{T(i)}$$

con $x^{T(i)} \in \mathcal{T}_n$. Aplicando el Lema 4.3 a cada uno de los $x^{T(i)}$, $i \in I$:

$$\begin{aligned} \exists x^{T^*(i)} \in \mathcal{T}_n^* \\ \text{para cada } e \in E \quad \exists N_e(i) \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

cumpliendo:

$$x^{T(i)} = x^{T^*(i)} + \sum_{e \in E} N_e(i) d(e)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x^T &= \sum_{i \in I} \lambda_i x^{T^*(i)} + \sum_{i \in I} \lambda_i \left(\sum_{e \in E} N_e(i) d(e) \right) \\ &= \underbrace{\sum_{i \in I} \lambda_i x^{T^*(i)}}_{\in \text{conv}(\mathcal{T}_n^*)} + \underbrace{\sum_{e \in E} \left(\sum_{i \in I} \lambda_i N_e(i) \right) d(e)}_{\substack{\geq 0 \\ \in \text{cone}(D)}} \end{aligned}$$

(\leftarrow)

Si $x^T \in \text{conv}(\mathcal{T}_n^*) + \text{cone}(D)$, entonces:

$$\begin{aligned} \exists n \quad I, J \text{ tales que } |I| < \infty, |J| \leq |E| \\ \exists n \quad x^{T^*(i)} \in \mathcal{T}_n^* \text{ para cada } i \in I \\ \exists n \quad \lambda_i \geq 0, \text{ para cada } i \in I, \sum_{i \in I} \lambda_i = 1 \\ \mu_j \geq 0, \text{ para cada } j \in J \\ d(j) \in D \end{aligned}$$

cumpliendo:

$$\begin{aligned}
 x^T &= \underbrace{\sum_{i \in I} \lambda_i x^{T^*(i)}}_{\in \text{conv}(\mathcal{T}_n^*) \subseteq \text{conv}(\mathcal{T}_n)} + \sum_{j \in J} \mu_j d(j) \\
 &= \underbrace{x^{T^*}}_{\in \text{conv}(\mathcal{T}_n)} + \sum_{j \in J} \mu_j d(j)
 \end{aligned}$$

Nótese que si $\mu_j = 0, \forall j \in J$, como $x^{T^*(i)} \in \mathcal{T}_n^* \subseteq \mathcal{T}_n$, obtenemos el resultado que buscábamos, es decir, $x^T \in \text{conv}(\mathcal{T}_n)$.

Si por el contrario $\exists j \in J$, tal que $\mu_j > 0$, el resultado sigue siendo cierto pero necesitaremos algunos pasos más para demostrarlo.

Sea \mathcal{C} el simplex de \mathbb{R}^E cuyos vértices son:

$$\{(N_1, N_2, \dots, N_{|E|}) \mid N_j \in \{\lfloor \mu_j \rfloor, \lceil \mu_j \rceil\}\}$$

es decir, los puntos de componentes enteras $\lfloor \mu_j \rfloor$ ó $\lceil \mu_j \rceil$. Evidentemente, \mathcal{C} contendrá al punto $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{|E|})^t$.

No hay pérdida de generalidad en suponer que $|E| = |J|$, i.e., que para cada $e \in E, \exists \mu_j \geq 0, j \in J$, ya que si no existiese podríamos tomar $\mu_j = 0$.

Luego, dado $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{|E|})^t$,

\exists 'n $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, no negativos cumpliendo $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$

\exists 'n $(N_1^i, N_2^i, \dots, N_{|E|}^i)^t \in \mathcal{C}$, tales que:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_{|E|} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \begin{pmatrix} N_1^i \\ N_2^i \\ \vdots \\ N_{|E|}^i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 x^T &= x^{T^*} + \sum_{j \in E} \mu_j d(j) \\
 &= x^{T^*} + \sum_{j \in E} \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i N_j^i \right) d(j)
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^r \alpha_i (x^{T^*} + \underbrace{\sum_{j \in E} N_j^i d(j)}_{\in \text{conv}(\mathcal{T}_n)})$$

Por tanto, $x^T \in \text{conv}(\mathcal{T}_n)$. ◇

Teorema 4.2 P_{SDVRP} es un poliedro no acotado de dimensión completa.

Demostración

Que el P_{SDVRP} es un poliedro, se deduce directamente del Teorema 4.1 y del Teorema de Weyl 1.8.

Veamos que no es acotado. Si fuese un poliedro acotado, existiría un $M \in \mathbb{N}$ cumpliendo,

$$\|x^T\| < M \quad \forall x^T \in \mathcal{T}_n,$$

lo cual, tomando N suficientemente grande, contradice el resultado obtenido en el Lema 4.1.

Evidentemente se trata de un poliedro no vacío pues siempre podremos construir una solución del $SDVRP$ que utilice exactamente K vehículos. Sea T una de estas soluciones, a partir de ella construimos $|E|$ soluciones distintas, definiendo, para cada $e \in E$, y $d(e) \in D$, $x^{T(e)} = x^T + d(e) \in \mathcal{T}_n$.

Hemos construido un conjunto $\{x^T, \{x^{T(e)}\}_{e \in E}\}$ de $|E|+1$ puntos del P_{SDVRP} , afínmente independientes. Por tanto, P_{SDVRP} es un poliedro de dimensión completa. ◇

4.3 Un caso en el que la dimensión no es completa.

En la Sección 4.1 hemos definido las soluciones del *SDVRP* dejando abierta la posibilidad de que los vehículos sirvan o no parte de la demanda de los clientes a los que visitan. Esta condición nos ha permitido demostrar que la envoltura convexa del conjunto de soluciones posibles del *SDVRP* es un poliedro no acotado de dimensión completa. Alguién podría plantearse qué ocurre cuando obligamos a que, cada vez que un vehículo visite a un cliente, le sirva al menos una unidad de su demanda. Responder a esta pregunta es lo que ha motivado la inclusión de esta sección.

Es evidente que la condición “visitar obliga a servir” restringe considerablemente el conjunto de soluciones posibles de nuestro problema. Por ejemplo, los clientes cuya demanda sea igual a uno sólo podrán visitarse una vez, en el grafo inducido por una solución del *SDVRP* los vértices asociados sólo serán incidentes con dos aristas. En general, una arista (i, j) se podrá utilizar a lo sumo $2 \min\{d_i, d_j\}$ veces. Nótese que cada vez que se usa (i, j) es porque un vehículo visita a los dos extremos de la arista y en cada visita se les debe servir al menos una unidad. Veremos que las soluciones del *SDVRP* que cumplen esta condición dan lugar a un poliedro acotado de dimensión no completa.

En primer lugar modificaremos la Definición 4.1 de manera que quede reflejado el hecho de que cualquier vehículo que visite a un cliente le sirva, en cada visita, al menos una unidad de su demanda .

Definición 4.3 Diremos que un conjunto T de aristas, no necesariamente distintas, es “una solución del *SDVRP*” si T admite una partición en K subconjuntos T_h , a los que nos referiremos como rutas h -ésimas, tales que:

1. El grafo inducido por cada T_h , $G(T_h) = (V(T_h), T_h)$ es un tour que contiene al depósito.
2. Es posible asociar, a cada vértice, i , y a cada ruta, h , unos d_i^h que indican la parte de la demanda del vértice i que es servida por el vehículo h , de manera que:

Cada vértice de V , salvo el depósito, está asignado a al menos una ruta; estar asignado significa que si un vehículo h visita a un cliente i entonces debe servirle una unidad al menos por cada una de las veces que lo visite i.e., d_i^h es mayor o igual que el número de veces que h visita a i y, además:

$$V = \bigcup_{h=1}^K V(T_h),$$

$$\text{si } i \notin V(T_h) \rightarrow d_i^h = 0,$$

$$\sum_{h=1}^K d_i^h = d_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ y,}$$

$$\sum_{i \in V(T_h)} d_i^h \leq Q \quad \forall h \in \{1, 2, \dots, K\}.$$

Evidentemente el conjunto de vectores de incidencia asociado a las soluciones que cumplen la definición anterior es un conjunto finito. Nótese que cada componente indicará el número de veces que se utiliza cada arista en la solución, por lo tanto, su valor estará acotado superiormente por $2 \min\{d_i, d_j\}$ y, consecuentemente, la envoltura convexa será un poliedro acotado. En el siguiente teorema probaremos que se trata de un poliedro de dimensión no completa.

Teorema 4.3 Si en el SDVRP imponemos la condición de que “visitar obliga a servir”, la dimensión del poliedro de soluciones asociado es igual a $|E| - n + r$, donde $r = |\{i \in V \mid d_i > 1\}|$.

Demostración

Sea P el poliedro de soluciones que nos interesa y $G = (V, E)$ el grafo que permite modelizar nuestro problema. No hay pérdida de generalidad en suponer que los clientes cuya demanda es mayor estricta que uno vienen representados por los r primeros vértices del grafo, i.e., $\{d_i > 1, \text{ si } i = 1, \dots, r\}$ y $\{d_i = 1, \text{ si } i = r + 1, \dots, n - r\}$.

Evidentemente, los vectores de incidencia asociados a cualquiera de las soluciones del problema deben cumplir con igualdad las restricciones de grado para cada uno de los vértices de demanda igual uno. Es decir, si T es una solución del SDVRP:

$$\sum_{j=0, i \neq j}^n x_{ij}^T = 2, \quad \forall i = r + 1, \dots, n - r$$

Es sencillo comprobar que la matriz de coeficientes asociada a estas restricciones tiene rango $n - r$ luego, $\dim(P) \leq \frac{n(n+1)}{2} - (n - r)$ es decir, $\dim(P) \leq \frac{n(n-1)}{2} + r$. Si logramos encontrar $\frac{n(n-1)}{2} + r + 1$ soluciones afínmente independientes, podremos concluir que el menor o igual es en realidad una igualdad, demostrando así el resultado que nos proponíamos. Para ello, construiremos una solución asociada a cada una de las aristas (i, j) con $1 \leq i < j \leq n$, lo cual supone, en total, $\frac{n(n-1)}{2}$ soluciones que completaremos con r soluciones adicionales, una por cada una de las aristas $(0, i)$ con $i = 1, 2, \dots, r$. Definiremos una última solución que, junto con las que acabamos de indicar, nos permitirá concluir el resultado sobre la dimensión que venimos persiguiendo.

1. Para cada arista (i, j) con $1 \leq i < j \leq n$ tomamos $x_{0u} = 2d_u, \forall u \neq i$ y $u \neq j$. Nótese que el grado de los vértices distintos de i y de j es igual a $2d_u$, garantizamos así que estos vértices se visitan como máximo d_u veces y, por lo tanto, que en cada visita se puede servir al menos una unidad de su demanda. En particular, si se trata de un vértice cuya demanda es igual a uno, $x_{0u} = 2$, con lo que u sólo se visita una vez.

Completaremos la solución de diferentes maneras dependiendo de si, $d_i + d_j \leq Q$ o, no.

- Si $d_i + d_j \leq Q$, vemos que $Q \geq 2$ y los vértices i y j pueden servirse completamente utilizando un único vehículo. Tomamos entonces $x_{0i} = x_{0j} = x_{ij} = 1$ y, $x_e = 0$ para el resto de aristas.

No es difícil comprobar que con $K = \lceil \frac{d(V)}{Q} \rceil$ vehículos siempre hay una solución (Definición 4.3) del *SDVRP* asociada al conjunto de aristas que acabamos de describir. Además, como $Q \geq 2$, seguro que cualquier vehículo puede servir, en caso de que sea necesario, al menos dos unidades, que pueden pertenecer, según interese, al mismo cliente o a clientes distintos.

- Si $d_i + d_j > Q$ construiremos cuatro tipos de soluciones distintas que corresponderán, respectivamente, a cada uno de los cuatro casos siguientes:

$$\begin{aligned} d_i < Q \quad \text{y} \quad d_j < Q, \\ d_i < Q \quad \text{y} \quad d_j = Q, \\ d_i = Q \quad \text{y} \quad d_j < Q \quad \text{o} \\ d_i = Q \quad \text{y} \quad d_j = Q \end{aligned}$$

En el primer caso, como $1 \leq d_i < Q$, seguro que $Q \geq 2$ y al menos uno de los dos vértices, i ó j , debe tener una demanda mayor

estrictamente que uno pues, en otro caso, la suma de las demandas sería dos y se violaría la hipótesis. No hay pérdida de generalidad en suponer que $d_j \geq 2$, por lo que j puede visitarse dos veces y, por lo tanto, seguro que podemos construir una solución del *SDVRP* con K vehículos que utilice solamente las aristas que hemos indicado al principio más $x_{0i} = 1$, $x_{0j} = 3$ y $x_{ij} = 1$.

En el segundo caso, las aristas que tenemos que añadir a las iniciales son $x_{0i} = 1$, $x_{0j} = 3$ y $x_{ij} = 1$; en el tercero, $x_{0i} = 3$, $x_{0j} = 1$ y $x_{ij} = 1$. Por último, si se da la cuarta situación tomaremos $x_{0i} = 3$, $x_{0j} = 3$ y $x_{ij} = 1$.

En cualquier caso las aristas asociadas a estos valores de x_e admiten una partición en K subconjuntos que definen una solución del *SDVRP*.

2. Para cada arista $(0, i)$, $i = 1, \dots, r$, consideramos una nueva solución, que se obtiene a partir de las aristas indicadas por los siguientes valores: $x_{0i} = 2$, $x_{0j} = 4$ para cada $j = 1, \dots, r$ con $j \neq i$ y $x_{0u} = 2$ para todo $u = r + 1, \dots, n - r$.

Nótese que, como los vértices $u \in \{1, \dots, r\}$ tienen demandas mayores estrictas que uno, seguro que se pueden visitar como mínimo dos veces, por el mismo vehículo o por vehículos distintos. Su grado puede ser igual a cuatro. De nuevo, se puede comprobar fácilmente que es posible particionar el conjunto de aristas de manera que se obtenga una solución del *SDVRP*.

3. Obtenemos la última solución que nos falta a partir de $x_{0i} = 4$, para todo $i = 1, \dots, r$ y, $x_{0i} = 2$ para todo $i = r + 1, \dots, n - r$.

Demostremos que las soluciones que acabamos de describir son linealmente independientes. Para ello comprobaremos que si las representamos como columnas de una matriz, ordenando adecuadamente las filas obtenemos una submatriz regular de rango $\frac{n(n-1)}{2} + r + 1$.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1 \frac{n(n-1)}{2}} & 2 & \dots & 4 & \dots & 4 & 4 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{i \frac{n(n-1)}{2}} & 4 & \dots & 2 & \dots & 4 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rj} & \dots & a_{r \frac{n(n-1)}{2}} & 4 & \dots & 4 & \dots & 2 & 4 \\ 2 & \dots & 2 & \dots & 2 & 2 & \dots & 2 & \dots & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

El orden utilizado para las filas es el mismo que el utilizado para las columnas y es el siguiente:

$$(1, 2), \dots, (i, j), \dots, (n-1, n), (0, 1), \dots, (0, i), \dots, (0, r), (0, r+1), \dots$$

Nótese que la matriz anterior admite la siguiente descomposición en bloques:

$$\begin{pmatrix} I_{\frac{n(n-1)}{2}} & 0_{\frac{n(n-1)}{2} \times r} & 0 \\ \hline A_r \times \frac{n(n-1)}{2} & B_r \times r & 4 \mathbf{1}_r \\ \hline 2 \mathbf{1}'_{\frac{n(n-1)}{2}} & 2 \mathbf{1}'_r & 2 \end{pmatrix}$$

dónde, $\mathbf{1}_r$, es un vector columna de r componentes, todas iguales a uno.

Aplicando resultados de álgebra matricial, Mardia et al. (1979) [62], sabemos que:

$$|S| = \left| I_{\frac{n(n-1)}{2}} \right| \left| \begin{pmatrix} B_r \times r & 4 \mathbf{1}_r \\ 2 \mathbf{1}'_r & 2 \end{pmatrix} \right|$$

y,

$$\left| \begin{pmatrix} B_r \times r & 4 \mathbf{1}_r \\ 2 \mathbf{1}'_r & 2 \end{pmatrix} \right| = 2 \left| B_r \times r - 4 \mathbf{1}_r \frac{1}{2} 2 \mathbf{1}'_r \right|$$

pero como:

$$\left(B_r \times r - 4 \mathbf{1}_r \frac{1}{2} 2 \mathbf{1}'_r \right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -2 \end{pmatrix}$$

concluimos que:

$$|S| = 2(-2)^r \neq 0$$

y, por tanto, las $\frac{n(n-1)}{2} + r + 1$ soluciones que hemos descrito son linealmente independientes. Queda así demostrado que la dimensión de P es exactamente $\frac{n(n-1)}{2} + r$, tal y como queríamos demostrar. \diamond

4.4 Conclusiones.

En este capítulo hemos introducido dos definiciones distintas de *solución* del *SDVRP*. La diferencia entre las dos reside en la imposición o no de la condición de que “cada vez que un vehículo visita a un cliente debe servirle como mínimo una unidad de su demanda”. Como hemos visto, la primera de las definiciones, en la que no se impone la condición anterior, conduce a un poliedro de dimensión completa, mientras que, si optamos por la segunda, la dimensión disminuye en tantas unidades como clientes con demanda igual a uno tengamos. Esto es lo que nos ha llevado a seleccionar la primera de las definiciones para realizar el estudio poliédrico del problema que nos ocupa.

La idea de que un vehículo visite a un cliente sin servirle parte de su demanda no es, en absoluto, descabellada, sino que, por el contrario, muchos problemas de la vida real se modelizan contemplando esta posibilidad. Piénsese, por ejemplo, en un problema en el que no hay un camino entre todas las parejas de clientes, probablemente la única manera de poder acceder a un vértice i desde otro j sea atravesando un tercer cliente u que, a lo mejor, ya ha sido abastecido completamente. Cuando el grafo que permite modelizar el problema no es completo se suele añadir una arista entre cada par de vértices no adyacentes, el coste de esa arista es el coste del camino más corto entre sus extremos, calculado sobre el grafo original. Cuando se consigue una solución sobre el grafo completo, la traducción a una solución del problema inicial se

hace, de forma natural, sustituyendo cada una de las aristas *ficticias* por el camino más corto asociado; en este caso, seguro que aparecen visitas de vehículos a clientes en las que no se realiza ningún servicio.

Por otra parte, si la matriz de distancias entre vértices no cumple la desigualdad triangular puede tener sentido visitar clientes sin servirles nada de su demanda; nótese que en estos casos el camino más corto entre dos vértices no tiene porqué corresponder a la arista que los une.

Creemos que los motivos que acabamos de exponer justifican suficientemente nuestra elección.

Nótese, por último, que todos los resultados que hemos introducido en este capítulo son válidos cuando trabajamos con K vehículos idénticos de capacidad Q , siendo $K = \lceil \frac{d(V)}{Q} \rceil$. Si tuviésemos una flota ilimitada de vehículos o K fuese mayor estricto que $\lceil \frac{d(V)}{Q} \rceil$ obtendríamos los mismos resultados puesto que las demostraciones que hemos hecho siguen siendo válidas añadiendo, simplemente, la posibilidad de que haya rutas vacías, i.e., vehículos que no visitan a ningún cliente. La importancia de la apreciación que acabamos de hacer radica en que, el estudio poliédrico que vamos a realizar en los capítulos siguientes se ha desarrollado paralelamente contemplando las dos opciones, flota limitada/ilimitada de vehículos. Los resultados referentes a los casos en que $K > \lceil \frac{d(V)}{Q} \rceil$ los presentaremos como corolarios del caso $K = \lceil \frac{d(V)}{Q} \rceil$, que es el más restrictivo.

Capítulo 5

Facetas del P_{SDVRP} .

Dedicaremos este capítulo, junto con los dos siguientes, al estudio de distintos tipos de desigualdades válidas para el $SDVRP$. La mayoría de las restricciones que vamos a presentar inducen facetas del poliedro de soluciones asociado, aunque, en algunos casos, hemos tenido que imponer condiciones suficientes para poder demostrarlo.

En primer lugar, veremos que todas las desigualdades presentes en la formulación $R1$, introducida en el Capítulo 3, definen facetas del P_{SDVRP} .

A continuación, presentaremos una serie de características comunes a todas las desigualdades válidas del P_{SDVRP} . Estableceremos una clasificación de las facetas del poliedro basándonos en una de estas características.

El segundo tipo de desigualdades que estudiaremos, están asociadas a unas configuraciones conocidas como *path*, *wheelbarrow* y *bicycle* que fueron introducidas por Cornuéjols et al. (1985) [23] para el poliedro de soluciones del $GTSP$. Más tarde, Cornuéjols y Harche (1993) [24] demuestran que, bajo determinadas condiciones, estas desigualdades también inducen facetas del poliedro asociado al $GVRP$. Probaremos que es posible llegar a un resultado similar para el P_{SDVRP} .

Finalmente, dedicamos la Sección 5.4 a una serie de restricciones, relacionadas con los poliedros del TSP y del $CVRP$, que aunque son válidas para el problema de rutas de vehículos con demanda compartida, todavía no sabemos si inducen o no facetas del P_{SDVRP} .

5.1 Facetas relacionadas con $R1$.

La demostración de la mayor parte de los resultados de este capítulo se basa en la siguiente apreciación.

Como el poliedro de soluciones asociado al Problema de Rutas de Vehículos con Demanda Compartida es de dimensión completa (Teorema 4.2), sabemos que no habrá ninguna ecuación implícita en su descripción lineal, lo cual, nos permite afirmar lo siguiente (ver Nemhauser y Wolsey (1988) [68]):

Para cada faceta del P_{SDVRP} hay una única (salvo producto por una constante no negativa) desigualdad válida que la induce. Para demostrar que una desigualdad $a^t x \geq a_0$ define una faceta bastará con encontrar $|E|$ soluciones afínmente independientes cuyos vectores de incidencia cumplan $a^t x^T = a_0$. Otra alternativa es demostrar que, si $f^t x \geq f_0$ es una faceta del P_{SDVRP} y:

$$\{x \in P_{SDVRP} \mid a^t x = a_0\} \subseteq \{x \in P_{SDVRP} \mid f^t x = f_0\}$$

entonces, existe un escalar λ no negativo, que cumple $f_e = \lambda a_e$, $\forall e \in E$ y $f_0 = \lambda a_0$.

Nota 5.1 *Sea T una solución posible del $SDVRP$ y $p \in \mathbb{N}$, sin pérdida de generalidad y siempre que sea posible, utilizaremos la notación $T \pm p e$ para indicar que al conjunto de aristas T le añadimos/quitamos p copias de la arista e .*

Cuando hablemos de eliminar una arista, salvo que indiquemos lo contrario, nos referiremos a que eliminamos la arista y todas sus copias.

Tal y como hemos indicado al principio, en esta sección demostraremos que todas y cada una de las restricciones presentes en la formulación asociada a $R1$, (ver Definición 3.2), definen facetas del poliedro que nos ocupa.

$$\sum_{i=1}^n x_{0i} \geq 2K \quad \text{y par}$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{ij} \geq 2 \quad \text{y par} \quad \forall i \in V \setminus \{0\}$$

$$\sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij} \geq 2 \lceil \frac{d(S)}{q} \rceil \quad \begin{cases} \forall S \subseteq V \setminus \{0\} \\ 2 \leq |S| \leq n-1 \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{y enteras} \quad \forall (i,j) \in E$$

Proposición 5.1 Sea $G = (V, E)$ un grafo completo y no dirigido sobre $n + 1$ vértices. Si $K = \lceil \frac{d(V)}{Q} \rceil$, entonces $x_e \geq 0$ induce una faceta del $PSDVRP$, $\forall e \in E$ y $\forall n \geq 2$.

Demostración

Como $K = \lceil \frac{d(V)}{Q} \rceil$, seguro que se puede construir una solución T del $SDVRP$ utilizando este número de vehículos.

Evidentemente, $x_e \geq 0$ es una desigualdad válida para el $SDVRP$, pues x_e indica el número de veces que se utiliza la arista e en una solución del problema. Demostrar que es propia, i.e., que no todas las soluciones del $SDVRP$ la cumplen con igualdad, es sencillo, si T es una solución en la que $x_e^T = 0$, por el Lema 4.1 del Capítulo 4, sabemos que $x^T + d(e)$, con $d(e) \in D$, es el vector de incidencia asociado a una nueva solución posible del $SDVRP$, T' , en la que la arista e aparece dos veces, $x_e^{T'} > 0$.

Para demostrar que la desigualdad induce una faceta del poliedro sólo nos falta encontrar $|E|$ soluciones afínmente independientes que la cumplan con igualdad. Construiremos estas soluciones a partir de una solución posible cualquiera del $SDVRP$.

Sea T dicha solución. Si $x_e^T = 0$, basta tomar, para cada $e' \in E$, $e' \neq e$, la solución cuyo vector de incidencia es $x^T + d(e')$, no es necesario reasignar las demandas. Evidentemente, el conjunto, $\{x^T, x^T + d(e'), e' \in E, e' \neq e\}$ está formado por $|E|$ soluciones afínmente independientes.

Si $p = x_e^T > 0$, construimos, a partir de T , una nueva solución, T' , en la que no se utiliza la arista e y, a partir de ella, $|E|$ soluciones, procediendo como en el paso anterior, cuyos vectores de incidencia asociados son afínmente independientes. Veamos cómo hacerlo:

Supongamos que $e = (i, j)$, $i, j \in V \setminus \{0\}$, en este caso la nueva solución será $T' = T - pe + p(0, i) + p(0, j)$. Nótese que la arista e puede aparecer más de una vez.

Si $e = (0, i)$, $i \in V \setminus \{0\}$, como $n \geq 2$, seguro que $\exists j \in V \setminus \{0\}$, $j \neq i$. Sin modificar la asignación de demandas en T , construimos $T' = T - pe + p(i, j) + p(0, j)$. \diamond

Proposición 5.2 Dado un grafo $G = (V, E)$ completo y no dirigido sobre $n+1$ vértices, si $K = \lceil \frac{d(V)}{Q} \rceil$, las restricciones de capacidad:

$$\sum_{e \in (S, \bar{S})} x_e \geq 2 \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil \quad \forall S \subseteq V \setminus \{0\}, 1 \leq |S| \leq n$$

inducen facetas del P_{SDVRP} .

Demostración

La validez de las desigualdades es evidente ya que cualquier cortadura (S, \bar{S}) debe ser atravesada, como mínimo, dos veces por cada uno de los vehículos que visitan a S y, el mínimo número de vehículos que tienen que visitar S , para poder servir completamente a todos los clientes, es $\lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil$.

A continuación, vamos a construir $|E|$ soluciones afínmente independientes que cumplen la restricción con igualdad. Si vemos después que la desigualdad es propia habremos probado el resultado.

Sea C_S un ciclo Hamiltoniano en S . Para cada arista $e \in (S, \bar{S})$, $e = (i, j)$ tomamos $2 \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil$ copias de cada una de las aristas del ciclo y añadimos $2 \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil$ copias de la arista (i, j) y otras tantas de $(0, j)$, si j no es el depósito. Este conjunto de aristas se puede distribuir en $\lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil$ rutas distintas que permiten servir completamente a todos y cada uno de los vértices de S .

Si añadimos $2K$ copias de las aristas de un ciclo Hamiltoniano C_S en \bar{S} , obtenemos una solución del $SDVRP$ que cumple la restricción de capacidad con igualdad. Ésto se puede repetir para cada una de las aristas de la cortadura, con lo que tendremos $|(S, \bar{S})|$ soluciones afínmente independientes que cumplen la desigualdad con igualdad.

Elegimos ahora una de las soluciones anteriores y, a partir de ella, construimos otra para cada una de las aristas e que no pertenece a (S, \bar{S}) .

Sea T la solución elegida, las nuevas soluciones son las siguientes:

$$\{T + 2e \mid e \in E \setminus (S, \bar{S})\}$$

Veamos que las $|E| = |(S, \bar{S})| + |E \setminus (S, \bar{S})|$ soluciones así construidas son afínmente independientes.

Supongamos establecido el siguiente orden en E : si $|(S, \bar{S})| = m$ no hay pérdida de generalidad en suponer que las aristas de la cortadura son las m primeras. Sean $x^{T_1}, x^{T_2}, \dots, x^{T_m}$ las soluciones asociadas y supongamos que las $|E| - m$ soluciones restantes se han construido a partir de x^{T_1} .

Como las aristas $e \in E \setminus (S, \bar{S})$ ocupan las posiciones $m + 1, m + 2, \dots, |E|$ en la ordenación de E , para simplificar la demostración llamaremos, $d(i)$, $i = m + 1, \dots, |E|$ a los elementos de D asociados. Las soluciones restantes serán, por tanto:

$$\{x^{T_1} + d(i), i = m + 1, \dots, |E|\}$$

Supongamos que \exists n $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{|E|}$ escalares tales que:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i x^{T_i} + \sum_{i=m+1}^{|E|} \alpha_i (x^{T_1} + d(i)) = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{|E|} \alpha_i = 0 \quad (2)$$

La única arista de la cortadura utilizada por cada x^{T_i} , $i = 1, \dots, m$, es la i -ésima, que se utiliza $2 \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil = d_S$ veces y, por $x^{T_1} + d(i)$, $i = m + 1, \dots, |E|$, es la primera. Luego, de (1):

$$\alpha_1 d_S + \sum_{i=m+1}^{|E|} \alpha_i d_S = 0 \quad (3)$$

$$\alpha_2 d_S = 0$$

\vdots

$$\alpha_m d_S = 0$$

Por tanto, $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_m = 0$ y por (2):

$$\alpha_1 = - \sum_{i=m+1}^{|E|} \alpha_i$$

sustituyendo en (1):

$$\alpha_1 x^{T_1} + \sum_{i=m+1}^{|E|} \alpha_i (x^{T_1} + d(i)) =$$

$$- (\sum_{i=m+1}^{|E|} \alpha_i) x^{T_1} + \sum_{i=m+1}^{|E|} \alpha_i (x^{T_1} + d(i)) =$$

$$\sum_{i=m+1}^{|E|} \alpha_i d(i) = 0$$

y como $\{d(i), i = m + 1, \dots, |E|\}$ es un sistema linealmente independiente, necesariamente $\alpha_i = 0, \forall i = m + 1, \dots, |E|$, entonces $\alpha_1 = 0$.

Por tanto, hemos visto que si (1) y (2) se cumplen, entonces $\alpha_i = 0, \forall i = 1, \dots, |E|$, con lo queda demostrada la independencia afín de las soluciones.

Para demostrar que la desigualdad es propia basta con duplicar una de las aristas utilizadas en cualquiera de las soluciones anteriores. \diamond

La demostración anterior es análoga a la que hacen Cornuéjols y Harche para demostrar que este resultado es cierto para el P_{GVRP} .

Proposición 5.3 *Dado un grafo $G = (V, E)$ completo y no dirigido sobre $n+1$ vértices, la restricción:*

$$\sum_{i=1}^n x_{0i} \geq 2K$$

induce una faceta del P_{SDVRP} .

Demostración

Si $|S| = n$ tenemos:

$$S = V \setminus \{0\}$$

$$\sum_{e \in (S, \bar{S})} x_e = \sum_{i=1}^n x_{0i}$$

$$2K = 2 \lceil \frac{d(V)}{Q} \rceil = 2 \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil$$

Luego el resultado se deduce directamente de la proposición anterior. \diamond

Proposición 5.4 *Dado un grafo $G = (V, E)$ completo y no dirigido sobre $n+1$ vértices, las restricciones:*

$$\sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{ij} \geq 2, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

inducen facetas del P_{SDVRP} .

Demostración

Si razonamos como en la proposición anterior pero teniendo en cuenta que si $|S| = 1$ entonces:

$$S = \{i\} \text{ para algún } i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{e \in (S, \bar{S})} x_e = \sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{ij}$$

$$2 = 2 \lceil \frac{d_i}{Q} \rceil = 2 \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil$$

el resultado es evidente. \diamond

5.2 Propiedades generales.

Los resultados que introducimos en esta sección afectan, tanto a las restricciones que aparecerán en el resto del capítulo y, en los capítulos siguientes, como, a las que han aparecido en la sección anterior.

En primer lugar, describiremos la “sintaxis” general de las desigualdades válidas del P_{SDVRRP} .

Proposición 5.5 *Todas las desigualdades válidas para el P_{SDVRRP} son de la forma:*

$$\sum_{e \in E} a_e x_e \geq a_0, \text{ con } a_e \geq 0, \forall e \in E$$

Demostración

Es evidente que cualquier desigualdad válida para el P_{SDVRRP} se puede expresar de la forma:

$$\sum_{e \in E} a_e x_e \geq a_0$$

ya que, si fuese del tipo “ \leq ” bastaría con multiplicarla por -1 para conseguirlo.

Supongamos que hay una arista $e \in E$ cumpliendo $a_e < 0$. Como cualquier vehículo puede visitar a cualquier vértice sin necesidad de servirle nada, siempre será posible construir una solución T , del $SDVRRP$, en la que la arista

e se utilice al menos una vez. Dada esa solución y , tomando el $d(e) \in D$ correspondiente, por el Lema 4.1 del Capítulo 4, tenemos que $x^T + Nd(e)$ es una solución del $SDVRP \ \forall N \in \mathbb{N}$.

Como $a^t x \geq a_0$ es válida para nuestro poliedro, deberán cumplirla todos los vectores de incidencia asociados a cualquiera de las soluciones posibles del $SDVRP$, en particular:

$$\begin{aligned} a^t(x^T + Nd(e)) &= a^t x^T + 2Na_e \geq a_0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \\ &\quad \downarrow \\ 2Na_e &\geq a_0 - a^t x^T \quad \forall N \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Ahora bien, si $a_e < 0$, tomando $N > \frac{a_0 - a^t x^T}{2a_e}$ se violaría la desigualdad, contradiciendo el hecho de que es válida. Por tanto $a_e \geq 0, \ \forall e \in E$. \diamond

Proposición 5.6 *Las únicas restricciones distintas de las triviales, i.e., distintas de $x_e \geq 0, \ \forall e \in E$, que definen facetas del $PSDVRP$ son de la forma:*

$$\sum_{e \in E} a_e x_e \geq a_0,$$

con $a_0 > 0$ y $a_e \geq 0, \ \forall e \in E$.

Demostración

Si tenemos una restricción que define una faceta del poliedro, como se trata de una desigualdad válida, por la proposición anterior sabemos que se puede escribir de la siguiente manera:

$$\sum_{e \in E} a_e x_e \geq a_0, \text{ con } a_e \geq 0, \ \forall e \in E$$

Nótese que no hay pérdida de generalidad en suponer que al menos un a_e es mayor estricto que cero, y concretamente que $a_e \geq 1$, ya que si hubiese algún coeficiente fraccionario, multiplicando toda la desigualdad por el mínimo común múltiplo de los denominadores, obtendríamos una restricción equivalente en la que todos los a_e son enteros.

Si $a_0 < 0$, como:

$$\sum_{e \in E} a_e x_e \geq a_e x_e \geq \underbrace{x_e}_{\geq 0} \geq 0 \geq a_0,$$

la restricción, o bien es $x_e \geq 0$, o bien está dominada por ella y en este caso no puede definir una faceta del poliedro. \diamond

El concepto de desigualdad *triangular ajustada* fué introducido por Naddef y Rinaldi (1993) [67] para el *GTSP*, se trata de una característica común a la mayoría de las restricciones que definen facetas del P_{GTSP} .

Definición 5.1 Sea $G = (V, E)$ un grafo completo y no dirigido. Se dice que una desigualdad $a^t x \geq a_0$ definida en \mathbb{R}^E es “*triangular ajustada*”, o está expresada en forma “*triangular ajustada*”, si se cumplen las siguientes condiciones:

- (a) Los coeficientes a_e cumplen la desigualdad triangular, i.e.: $a_{ik} \leq a_{ij} + a_{jk}$ para cualquier terna i, j, k de vértices distintos de V .
- (b) $\Delta_a(j) = \{(i, k) \in E \mid i \neq j, k \neq j, a_{ik} = a_{ij} + a_{jk}\} \neq \emptyset, \forall j \in V$.

Esta propiedad les permitió establecer la siguiente clasificación:

Si $a^t x \geq a_0$ induce una faceta del poliedro de soluciones del *GTSP* entonces:

- 1.- o es una desigualdad trivial, $x_e \geq 0 \quad \forall e \in E$,
- 2.- o es una desigualdad de grado, $x(\delta(i)) \geq 2 \quad \forall i \in V$,
- 3.- o se trata de una desigualdad “*triangular ajustada*”.

A parte de permitir clasificar las facetas del poliedro del *GTSP*, este tipo de desigualdades permiten simplificar considerablemente las demostraciones de los resultados que las involucran.

Cornuéjols y Harche (1993) [24] llegan a la misma clasificación cuando estudian el poliedro de soluciones asociado al $GVRP$.

En la siguiente proposición demostramos que, en el caso del $SDVRP$, también podemos particionar las desigualdades que inducen facetas del P_{SDVRP} en dos clases, formadas, respectivamente, por las desigualdades triviales y por aquellas cuyos coeficientes cumplen la desigualdad triangular.

Proposición 5.7 *Si $a^t x \geq a_0$ es una desigualdad válida para el P_{SDVRP} que define una faceta del mismo, entonces, o bien se trata de una desigualdad trivial, i.e. $x_e \geq 0 \quad \forall e \in E$, o bien sus coeficientes satisfacen la desigualdad triangular.*

Demostración

Supongamos que $a^t x \geq a_0$ define una faceta del P_{SDVRP} . Por inducir una faceta habrá soluciones del problema que cumplen la restricción con igualdad. Si los coeficientes $\{a_e \mid e \in E\}$ no cumplen la desigualdad triangular, habrá tres vértices distintos i, j, k cumpliendo: $a_{ik} > a_{ij} + a_{jk}$. Veamos que necesariamente se trata de una desigualdad trivial. Dada la arista (i, k) consideramos los dos siguientes casos:

- Que para toda solución T del $SDVRP$, cumpliendo $a^t x^T = a_0$, se cumpla $x_{ik} = 0$, en cuyo caso

$$\{x^T \in P_{SDVRP} \mid a^t x^T = a_0\} \subseteq \{x^T \in P_{SDVRP} \mid x_{ik}^T = 0\}$$

y las dos desigualdades inducen la misma faceta, o

- que, por el contrario, haya al menos una solución T del $SDVRP$, cumpliendo $a^t x^T = a_0$, que utilice la arista (i, k) . A partir de ella construiremos una nueva solución T' , cuyo vector de incidencia violará la desigualdad $a^t x \geq a_0$, contradiciendo así el hecho de que es válida para el P_{SDVRP} .

Si T contiene a (i, k) , no hay pérdida de generalidad en suponer que es el vehículo h el que utiliza esta arista. Dado que está permitido visitar un vértice sin necesidad de servir nada de su demanda, podemos construir :

$$T' = T - (i, k) + (i, j) + (j, k)$$

que será una nueva solución del problema en la que todos los vehículos, excepto h , realizan el mismo recorrido que en T y h visita (o vuelve a visitar) al vértice k , pero sin servirle nada de su demanda, a no ser que ya lo hiciera en T . Por tanto:

$$a^t x^{T'} = a^t x^T + (a_{ij} + a_{jk} - a_{ik})$$

pero como, $a_{ik} > a_{ij} + a_{jk}$, tenemos que $a_{ij} + a_{jk} - a_{ik} < 0$ y entonces:

$$a^t x^{T'} < a^t x^T = a_0$$

lo que contradice la hipótesis de que la desigualdad era válida.

Y, como consecuencia, el resultado del enunciado se cumple. \diamond

El siguiente ejemplo nos permite asegurar que no podemos establecer que una faceta, cuyos coeficientes satisfacen la desigualdad triangular, o es una restricción de grado, o es una desigualdad triangular ajustada.

Ejemplo 5.1 En el Capítulo 7 presentaremos la siguiente desigualdad (7.1):

$$a^t x \geq 12$$

donde:

$$a_e = \begin{cases} 3 & \text{si } e \in (A, B_1) \\ 1 & \text{si } e \in (A, B_i) \quad i = 2, 3, 4 \\ 2 & \text{si } e \in (A, Z) \\ 1 & \text{si } e \in (B_i, Z) \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ 2 & \text{si } e \in (B_i, B_j) \quad i = 1, 2, 3, j = 2, 3, 4, i < j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En el mismo capítulo, demostramos que esta desigualdad induce una faceta del P_{SDVRP} .

La restricción está asociada a una configuración que se define a partir de una partición del conjunto de vértices en subconjuntos no vacíos:

$$\{A, Z, B_1, B_2, B_3, B_4\}, \text{ con } 0 \in A$$

que cumplen:

$$\lceil \frac{d(B_1)+d(B_i)}{Q} \rceil = 2 \quad \forall i = 2, 3, 4$$

$$\lceil \frac{d(Z)+\sum_{i=2}^4 d(B_i)}{Q} \rceil = 1$$

$$d(B_i) \leq Q, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad \text{y} \quad d(Z) \leq Q$$

Para ilustrar nuestros propósitos podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que cada uno de los subconjuntos que definen la estructura contienen un único vértice. Nos referiremos a ellos utilizando el nombre del conjunto asociado, pero en minúsculas.

Es evidente que los coeficientes de la restricción cumplen la desigualdad triangular y, también, que no se trata de ninguna restricción de grado. Sin embargo, demostraremos que tampoco es una desigualdad triangular ajustada, ya que $\Delta_a(b_1) = \emptyset$.

$$\Delta_a(b_1) = \{(i, k) \in E \mid i \neq b_1, k \neq b_1, a_{ik} = a_{ib_1} + a_{b_1k}\}$$

Los coeficientes de las aristas incidentes con b_1 son:

$$a_e = \begin{cases} 1 & \text{si } e = (b_1, z) \\ 2 & \text{si } e = (b_1, b_i), \quad i = 2, 3, 4 \\ 3 & \text{si } e = (a, b_1) \end{cases}$$

Se puede comprobar fácilmente que, sea cuál sea la arista $e = (i, k)$ elegida:

$$a_{ik} < a_{ib_1} + a_{b_1k}.$$

$$e = (a, z) \rightarrow a_e = 2 < 3 + 1$$

$$e = (a, b_i), \quad i = 2, 3, 4 \rightarrow a_e = 1 < 3 + 2$$

$$e = (b_i, b_j), \quad i, j = 2, 3, 4, \quad i \neq j \rightarrow a_e = 2 < 2 + 2$$

$$e = (z, b_i), \quad i = 2, 3, 4 \rightarrow a_e = 1 < 1 + 2$$

Proposición 5.8 Si $a^t x \geq a_0$ es una desigualdad válida para el $PSDVRP$ y sus coeficientes cumplen la desigualdad triangular entonces, para cualquier arista $e \in E$ podemos encontrar una solución T del $SDVRP$, que utiliza la arista e y que cumple $a^t x^T = a_0$.

Demostración

Supongamos que no hay ninguna solución del problema que, cumpliendo la restricción con igualdad, utilice una determinada arista e . Entonces:

$$\{x^T \in P_{SDVRP} \mid a^t x^T = a_0\} \subseteq \{x^T \in P_{SDVRP} \mid x_e^T = 0\}$$

y la restricción es, en realidad, una restricción de no negatividad, lo cual contradice el hecho de que los coeficientes satisfacen la desigualdad triangular, luego el resultado es cierto. \diamond

5.3 Facetas relacionadas con el $GTSP$.

Ya vimos que $P_{SDVRP} \subseteq P_{GTSP}$, de lo que se deduce directamente que cualquier desigualdad válida para el $GTSP$, también lo es para el $SDVRP$. Resulta lógico plantearse si las desigualdades que inducen facetas del poliedro del *Problema del Agente Viajero Gráfico* también definen facetas de nuestro poliedro, o, si por el contrario, esto no ocurre.

Las primeras desigualdades que vamos a estudiar son las asociadas a las configuraciones “*path*, *wheelbarrow* y *bicycle*” introducidas por Cornuéjols et al. (1985) [23] para el $GTSP$. También han sido estudiadas por Cornuéjols y Harche (1993) [24] para el $GVRP$ y el $CVRP$, con resultados similares a los que se obtuvieron para el $GTSP$, al menos en lo que se refiere a las configuraciones “*path*”. Sin embargo, eso sí, la complejidad de las condiciones que hay que introducir para poder demostrar que siguen siendo facetas del $GVRP$ es tan considerable que, de hecho, son prácticamente imposibles de comprobar en situaciones reales.

Como:

$$P_{GVRP} \subseteq P_{SDVRP} \subseteq P_{GTSP}$$

cabe esperar que el resultado siga siendo cierto para nuestro problema. Veremos que así es, pero que, en nuestro caso, el tipo de condiciones que hay que establecer son más sencillas de comprobar.

Cornuéjols et al. definen las configuraciones anteriores para grafos no necesariamente completos, en ese caso es necesario establecer condiciones adicionales sobre los conjuntos que forman parte de la estructura; remitimos al

lector al artículo correspondiente para cualquier consulta. Nosotros damos la definición para grafos completos.

Definición 5.2 Sea $G = (V, E)$ un grafo completo no dirigido. s un entero, $s \geq 3$ e impar y $n_i \geq 2$, $n_i \in \mathbb{N} \quad \forall i = 1, 2, \dots, s$. Dada una partición $\{A, Z, B_j^i, i = 1, \dots, s, j = 1, \dots, n_i\}$ del conjunto de vértices V , a la siguiente estructura la llamaremos configuración "path":

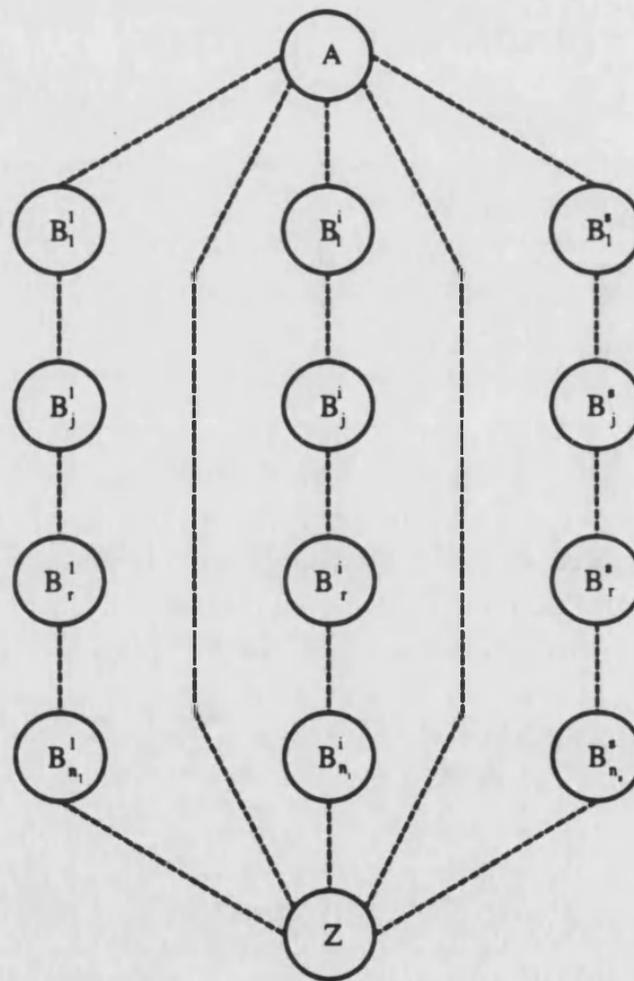


Figura 5.1: Configuración *path*.

Definimos la restricción asociada a una configuración "path" como aquella

desigualdad $a^t x \geq a_0$ cuyos coeficientes son:

$$a_e = \begin{cases} 1 & \text{para } e \in (A, Z) \\ \frac{|j-p|}{n_i-1} & \text{para } e \in (B_j^i, B_p^i), j \neq p \\ & \text{y } |j-p| \leq n_i, i = 1, \dots, s \\ \max\left\{\frac{p}{n_r-1} - \frac{j-2}{n_i-1}, \frac{j}{n_i-1} - \frac{p-2}{n_r-1}\right\} & \text{para } e \in (B_j^i, B_p^r), i \neq r \\ & j = 1, \dots, n_i, p = 1, \dots, n_r \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y el término independiente es:

$$a_0 = 1 + \sum_{i=1}^s \frac{n_i + 1}{n_i - 1}$$

Si $Z = \emptyset$, hablaremos de configuraciones (restricciones asociadas) "wheelbarrow", y si $A = Z = \emptyset$, de configuraciones (restricciones) "bicycle".

Si $n_i = p \geq 2, \forall i = 1, \dots, s$, las configuraciones asociadas se dice que son p -regulares.

- Por convenio $A = B_0^i$ y $Z = B_{n_i+1}^i, i = 1, \dots, s$. También utilizaremos la notación $B_{n_i+1}^{s+1} = B_{n_i}^1$.
- Nótese que todos los subconjuntos de la partición se suponen no vacíos y, por tanto, también lo serán las cortaduras definidas por cada pareja de subconjuntos de la misma. Los únicos coeficientes de la restricción no nulos son aquellos que corresponden a las aristas de estas cortaduras.
- A partir de este momento utilizaremos la siguiente notación

$$P_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} B_j^i \text{ para } i = 1, \dots, s$$

para representar el conjunto de vértices de cada uno de los s caminos que hay en la configuración uniendo A con Z .

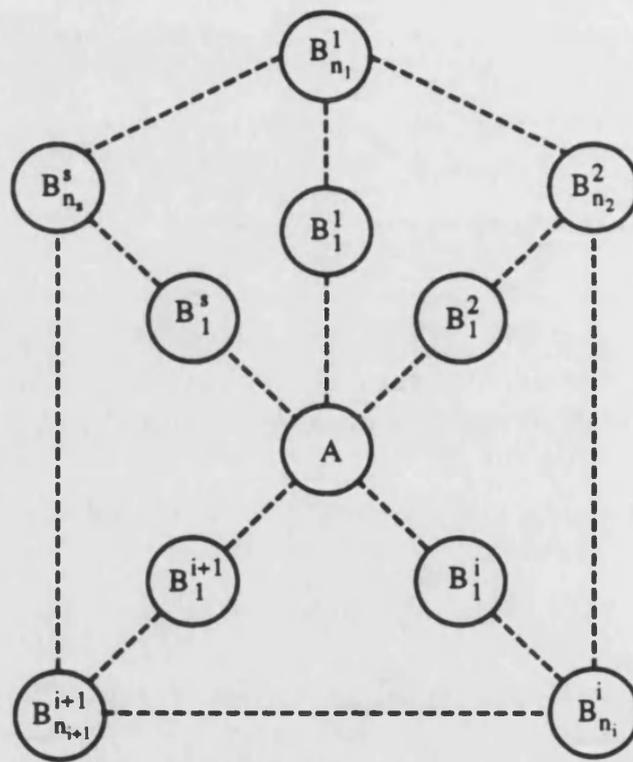


Figura 5.2: Configuración *wheelbarrow*.

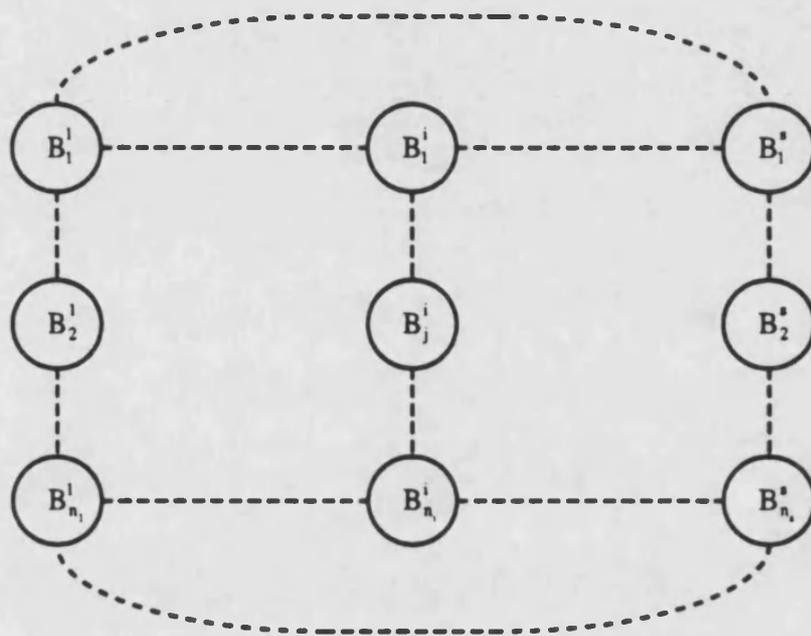


Figura 5.3: Configuración *bicycle*.

Cornuéjols et al. (1985), definen el *esqueleto* de una configuración *path* como el conjunto de aristas de (B_j^i, B_{j+1}^i) , $i = 1, \dots, s$, $j = 0, \dots, n_i$ y, las aristas con los dos extremos en B_j^i , $i = 1, \dots, s$, $j = 0, \dots, n_i + 1$. En la Figura 5.4 presentamos los coeficientes de una configuración *path* con, $s = 3$ caminos y $n_1 = 2$, $n_2 = 3$ y $n_3 = 2$.

Los resultados que vemos a continuación guardan cierto paralelismo con los que presentan Cornuéjols y Harche (1993) [24] para el *GVRP* y el *CVRP*. Concretamente, aquellos en los que se demuestra que las desigualdades asociadas a las configuraciones que acabamos de describir inducen facetas del *PSDVRP*. La principal diferencia reside en el tipo de condiciones que se imponen para demostrarlos. Las nuestras son mucho más sencillas, por lo que, resulta más fácil comprobar que se cumplen. El motivo es, como siempre, el hecho de que, compartir la demanda, permite calcular el mínimo número de vehículos necesario para servir la demanda de cualquier subconjunto de vértices, muy fácilmente.

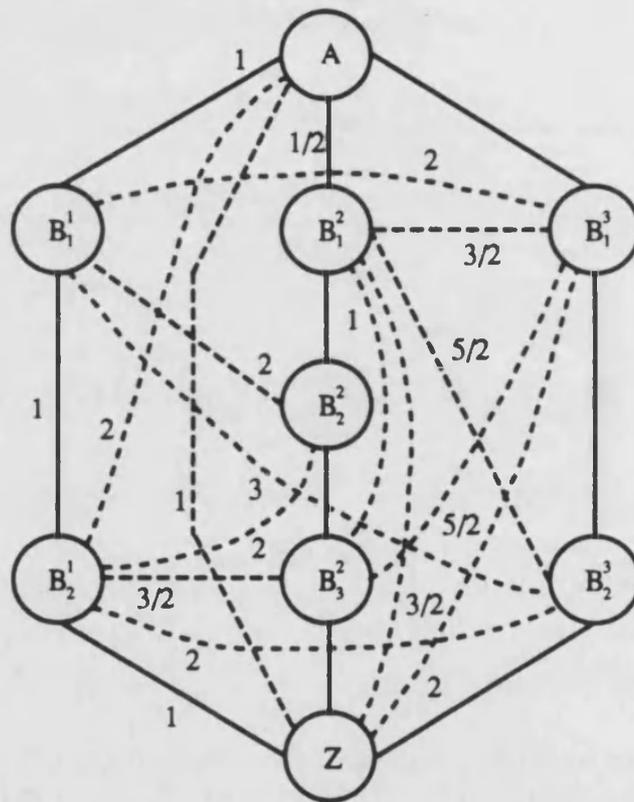


Figura 5.4: Coeficientes de una desigualdad asociada a una configuración *path*. En trazo continuo representamos las aristas del esqueleto.

Proposición 5.9 *Las desigualdades asociadas a las configuraciones “path”, “wheelbarrow” y “bicycle” son válidas para el SDVRP.*

Demostración

Como toda solución posible del SDVRP, lo es del GTSP, el resultado se deduce directamente de los Teoremas 3.1 y 3.4 de Cornuéjols et al. (1985) [23], en los que se demostraba que cualquier solución del GTSP cumplía las desigualdades asociadas a dichas configuraciones. \diamond

Una vez demostrada la validez de estas desigualdades nos plantearemos estudiar si definen, o no, facetas del P_{SDVRP} . Para ello, será necesario distinguir varias situaciones dependiendo de si el depósito pertenece, o no, a A , a Z o a un B_j^i . Otro detalle, que tendremos que tener en cuenta, es el número de vehículos necesario para servir la demanda de todos los clientes que no pertenecen al subconjunto que contiene al depósito.

Proposición 5.10 *Dados K vehículos de capacidad Q y el depósito $0 \in A$, las configuraciones “path” inducen facetas del P_{SDVRP} si:*

- i.- $K \geq \frac{s-1}{2}$,
- ii.- $\frac{Q}{3} \geq \max\{d(P_i), i = 1, \dots, s\}$, y
- iii.- $Q \geq 2 \lceil \frac{d(Z) + \sum_{i=1}^s d(P_i)}{s-1} \rceil$

o, equivalentemente:

- i'.- $K \geq \frac{s-1}{2}$, y
 - ii'.- $Q \geq \max\{d(P_{s-2}) + d(P_{s-1}) + d(P_s), 2 \lceil \frac{d(Z) + \sum_{i=1}^s d(P_i)}{s-1} \rceil\}$
- suponiendo que $d(P_1) \leq d(P_2) \leq \dots \leq d(P_s)$

Demostración

Por la Proposición 5.9, $a^t x \geq a_0$ es válida para el *SDVRP*, independientemente de si se cumplen o no las condiciones anteriores sobre el número de vehículos y la capacidad de los mismos.

Cualquiera de las soluciones que vamos a dar a continuación sirven para demostrar que se trata de una desigualdad soporte; si añadimos dos copias extras de una de las aristas con coeficiente estrictamente positivo obtenemos una solución que cumple la desigualdad con mayor estricto, demostramos así que que también se trata de una desigualdad propia.

En primer lugar asociamos a cada uno de los subconjuntos de la partición un vértice que utilizaremos como *representante* del mismo. Sean:

$$\begin{aligned} b_0^i &= 0 \in A, \quad i = 1, \dots, s \\ b_j^i &\in B_j^i, \quad i = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, n_i \\ b_{n_i+1}^i &= z \in Z, \quad i = 1, \dots, s \end{aligned}$$

Definimos, a continuación, una solución T^i para cada uno de los caminos P_i , $i = 1, \dots, s$.

Solución i -ésima.

Para construir T^i tomamos:

$x_{0v} = 2K$, $\forall v \in A$. Nótese que ésto significa que todos los vértices de A pueden ser visitados por todos y cada uno de los K vehículos de los que disponemos, basta con asignar dos de las aristas incidentes con v a cada vehículo.

$x_e = \frac{s-1}{2}$, $\forall e \in C$, donde C un ciclo Hamiltoniano en Z . Los vértices de Z pueden ser visitados por $\frac{s-1}{2}$ vehículos distintos, asignando una copia de cada arista a cada uno de ellos. Véase la Figura 5.5.

$x_e = 1$, $\forall e = (b_j^r, b_{j+1}^r)$, $j = 0, \dots, n_r$ y $r = 1, \dots, s$, $r \neq i$. De esta manera aseguramos, para cada uno de los caminos, P_r , que vamos desde el depósito b_0^r hasta z utilizando sólo aristas consecutivas de $E(P_r)$,

$x_{b_j^r v} = 2$, $\forall v \in B_j^r$, $j = 1, \dots, n_r$, $r = 1, \dots, s$, $r \neq i$. Garantiza que todos los vértices de B_j^r son visitados por un vehículo, concretamente aquél que entra en el subconjunto.

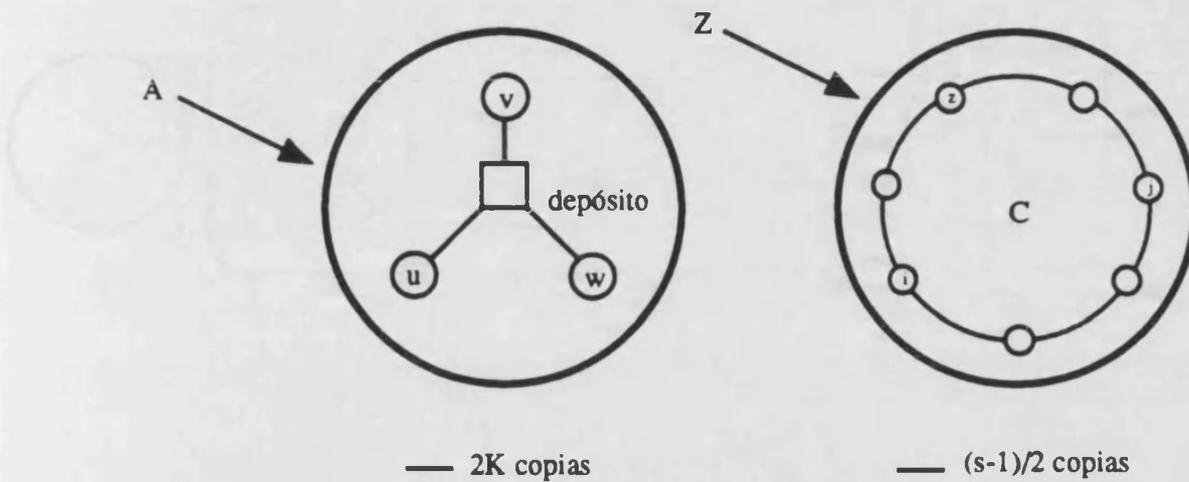


Figura 5.5: Estructura de la solución T^i en A y en Z .

Nótese que, para cada $r = 1, \dots, s$, $r \neq i$, hemos construido un camino, como el que aparece en la Figura 5.6, que va desde el depósito hasta z visitando todos los vértices de P_r . También visita a todos los de A y a todos los de Z .

Construimos ahora $\frac{s-1}{2} - 1$ tours distintos uniendo los caminos que acabamos de describir, dos a dos. A cada uno de estos tours le asociamos un vehículo, ésto puede hacerse porque, por hipótesis, $K \geq \frac{s-1}{2}$. Con esta asignación, la demanda de los dos P_r 's que definen cada una de las rutas es servida por el mismo vehículo; no se viola, por el momento, ninguna restricción de capacidad ya que por hipótesis:

$$\frac{Q}{3} \geq \max\{d(P_i), i = 1, \dots, s\} \text{ ó,}$$

$$Q \geq \max\{d(P_{s-2}) + d(P_{s-1}) + d(P_s), 2\lceil \frac{d(Z) + \sum_{i=1}^s d(P_i)}{s-1} \rceil\}$$

lo que significa que la demanda de dos, incluso tres, P_r 's cualesquiera puede ser abastecida por un único vehículo.

Hemos construido $\frac{s-1}{2} - 1$ rutas distintas cuya estructura es la que aparece en la Figura 5.7.

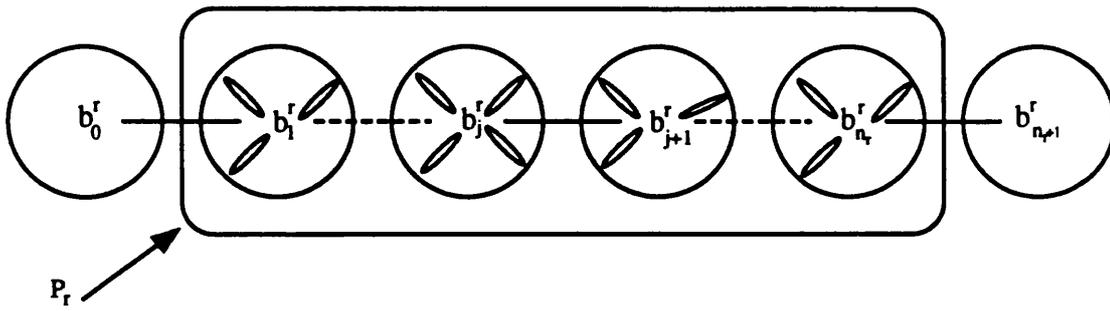


Figura 5.6: Camino asociado a P_r .

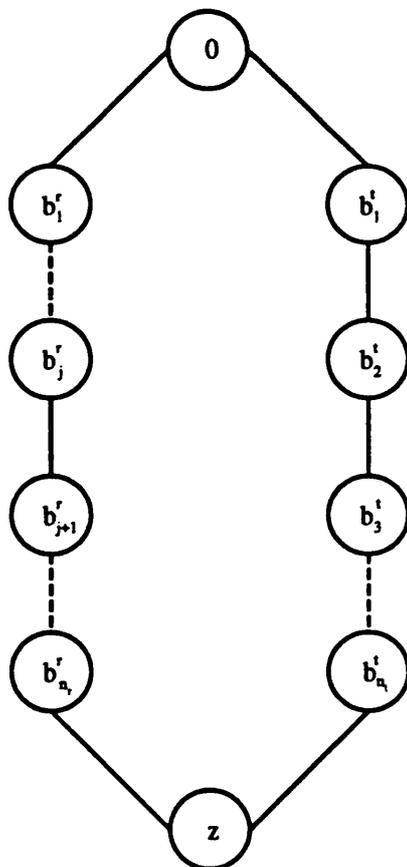


Figura 5.7: Estructura de una de las rutas de T^i .

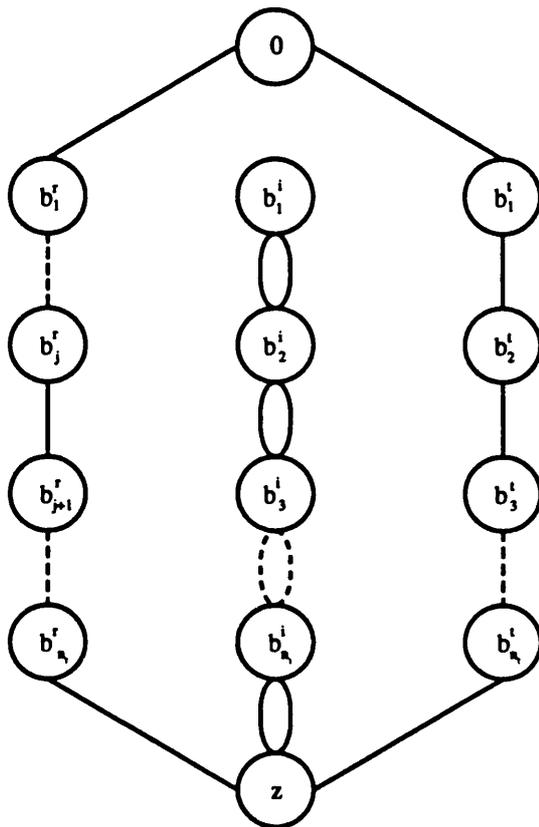


Figura 5.8: Estructura de la ruta asociada al vehículo que sirve a P_i .

Nos queda un tour que completaremos para construir una última ruta, que servirá a los tres P_r 's restantes, incluyendo a P_i . Para ello tomamos, $x_{b_j^i b_{j+1}^i} = 2$, $j = 1, \dots, n_i$, nótese que no utilizamos la arista (b_0^i, b_1^i) (ver Figura 5.8). El vehículo asociado a esta ruta debe servir completamente la demanda de tres de los caminos entre A y Z , lo cual sigue siendo posible en virtud de la hipótesis que hemos realizado sobre la capacidad de los vehículos.

Nótese que en Z entran $\frac{s-1}{2}$ vehículos distintos, aquellos que sirven la demanda de los P_r , $r = 1, \dots, s$, y que todos y cada uno de ellos visitan a todos

los vértices de Z . La demanda total servida por estos vehículos es:

$$\sum_{i=1}^s d(P_i)$$

Como pueden llegar a servir $Q \frac{s-1}{2}$ unidades en total, todavía tienen una capacidad de servicio igual a:

$$Q \frac{s-1}{2} - \sum_{i=1}^s d(P_i) \underset{\substack{\geq \\ \text{por iii}}}{\geq} d(Z)$$

luego, seguro que hay una asignación posible de las demandas de los vértices de Z a estos vehículos. Finalmente, como en A los K vehículos visitan a todos los clientes, repartiendo convenientemente las demandas, la solución a la que hemos llegado es una solución posible del $SDVRP$. Dado que el procedimiento que hemos seguido no depende del P_i elegido, tenemos s soluciones distintas. La Figura 5.9 corresponde a T^1 .

Veamos que estas soluciones cumplen la restricción con igualdad.

Para cada $P_r \neq P_i$, utilizamos $n_r + 1$ aristas de coeficiente $\frac{1}{n_r-1}$ y para P_i $2n_i$ aristas de coeficiente $\frac{1}{n_i-1}$, luego:

$$a^t x^{T^i} = \sum_{r=1, r \neq i}^s \frac{n_r+1}{n_r-1} + \frac{2n_i}{n_i-1} = \sum_{r=1, r \neq i}^s \frac{n_r+1}{n_r-1} + \frac{n_i+1+n_i-1}{n_i-1} =$$

$$1 + \sum_{r=1}^s \frac{n_r+1}{n_r-1} = a_0$$

Para demostrar que la desigualdad induce una faceta del P_{SDVRP} utilizaremos el método indirecto, i.e., supondremos que hay una desigualdad $f^t x \geq a_0$ que define una faceta del poliedro y que cumple:

$$\{x \in P_{SDVRP} \mid a^t x = a_0\} \subseteq \{x \in P_{SDVRP} \mid f^t x = a_0\}$$

y veremos que $f_e = a_e, \forall e \in E$.

- $f_e = a_e = 0, \forall e \in E(B_j^i)$ para cualquier pareja i, j , arbitraria pero fija, con $i = 1, \dots, s, j = 0, \dots, n_i + 1$.

Sea $e \in E(B_j^i)$. Dada una solución cualquiera T^i de las que hemos construido anteriormente, si $d(e)$ es el elemento de D asociado a la arista

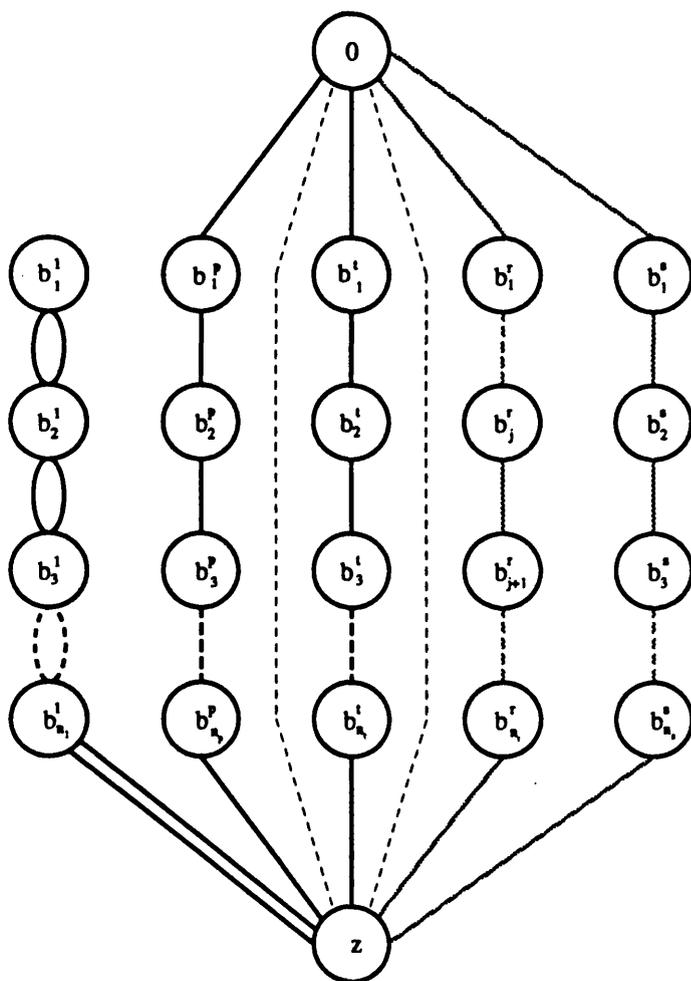


Figura 5.9: Solución T^1 para demostrar la validez de las desigualdades *path*.

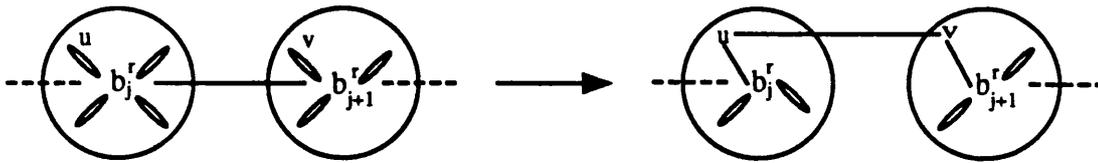


Figura 5.10: Parte diferente entre T^i y T' .

e , i.e., aquél cuyas componentes son todas nulas excepto la asociada a la arista e que vale 2, sabemos que $x^{T^i} + d(e)$ es una solución del *SDVRP* y, como $a^t(x^{T^i} + d(e)) = a^t x^{T^i} + 2a_e = a_0$, pues $a^t x^{T^i} = a_0$ y $a_e = 0$, entonces $f^t(x^{T^i} + d(e)) = a_0$. Luego, $f^t x^{T^i} + 2f_e = a_0$, de lo que deducimos que $f_e = 0$, ya que $f^t x^{T^i} = a_0$.

- Para cada r , $r = 1, \dots, s$, todas las aristas de la cortadura (B_j^r, B_{j+1}^r) tienen el mismo coeficiente en f , para cada j arbitrario pero fijo, entre 0 y n_r .

Sea $e = (u, v)$ una arista cualquiera de la cortadura (B_j^r, B_{j+1}^r) . A partir de T^i , con $i \neq r$, en dónde sabemos que se utiliza exactamente una vez la arista (b_j^r, b_{j+1}^r) , construimos otra solución en la que esta deja de utilizarse y en su lugar aparecerá e . La nueva solución es, (ver Figura 5.10):

$$T' = T^i - (b_j^r, b_{j+1}^r) - (b_j^r, u) + (u, v) - (v, b_{j+1}^r)$$

que cumplirá con igualdad la restricción $a^t x = a_0$, ya que, como:

$$\begin{aligned} (b_j^r, u) &\in E(B_j^r), \text{ y} \\ (v, b_{j+1}^r) &\in E(B_{j+1}^r) \end{aligned}$$

los correspondientes coeficientes en a valen cero y $a_{uv} = \frac{1}{n_r - 1}$.

Luego, $f^t x^{T'} = a_0$ y, por tanto:

$$\begin{aligned} f^t x^{T'} &= f^t x^{T^i} - f_{b_j^r b_{j+1}^r} - f_{b_j^r u} + f_{uv} - f_{v b_{j+1}^r} = a_0 \\ f^t x^{T^i} &= a_0 \end{aligned}$$

Restando, respectivamente, los términos de la derecha y de la izquierda de las dos ecuaciones anteriores tenemos:

$$-f_{b_j^r b_{j+1}^r} - f_{b_j^r u} + f_{uv} - f_{v b_{j+1}^r} = 0$$

y, como acabamos de demostrar en el apartado anterior que,

$$f_{b_j^r u} = f_{v b_{j+1}^r} = 0$$

concluimos que:

$$f_{uv} = f_{b_j^r b_{j+1}^r}, \forall (u, v) \in (B_j^r, B_{j+1}^r)$$

Como el resultado no depende de la cortadura elegida, será cierto para cualquiera de ellas bastará con elegir apropiadamente la solución T^i .

- Para cualquier $i = 1, \dots, s$, $f_e = f_{e'} \forall e \in (B_j^i, B_{j+1}^i)$ y $\forall e' \in (B_k^i, B_{k+1}^i)$, donde: $j, k \in \{0, \dots, n_i\}$, $j \neq k$.

No hay pérdida de generalidad en suponer que:

$$\begin{aligned} e &\in (B_0^i, B_1^i) \\ e' &\in (B_1^i, B_2^i) \end{aligned}$$

ya que, si esto no ocurriera, bastaría con modificar adecuadamente la solución T^i y la T' que vamos a definir.

Nótese que, de este modo, la arista e no aparece en T^i ninguna vez, mientras que e' lo hace dos veces. Evidentemente, $T' = T^i - 2e' + 2e$ es una nueva solución que sigue cumpliendo con igualdad la restricción $a^t x = a_0$, luego también cumplirá $f^t x^{T'} = a_0$ (ver Figuras 5.11 y 5.12) y, por tanto:

$$\left. \begin{aligned} f^t x^{T^i} &= a_0 \\ f^t x^{T'} &= a_0 \end{aligned} \right\} \longrightarrow f^t x^{T^i} - f^t x^{T'} = f^t x^{T^i} - f^t x^{T^i} - 2f_{e'} + 2f_e = 0$$

$$\downarrow$$

$$f_{e'} = f_e$$

Hemos demostrado que todas las aristas de cualquiera de las cortaduras definidas por dos subconjuntos “consecutivos” en un mismo camino P_i tienen el mismo coeficiente en f , luego f_e sólo depende de $i = 1, \dots, s$. Sea $f_e = \pi_i$ dicho valor.

Como todas las soluciones T^i cumplen $a^t x^{T^i} = a_0$, también cumplirán $f^t x^{T^i} = a_0$. Sustituyendo en $f^t x = a_0$ todas y cada una de ellas obtene-

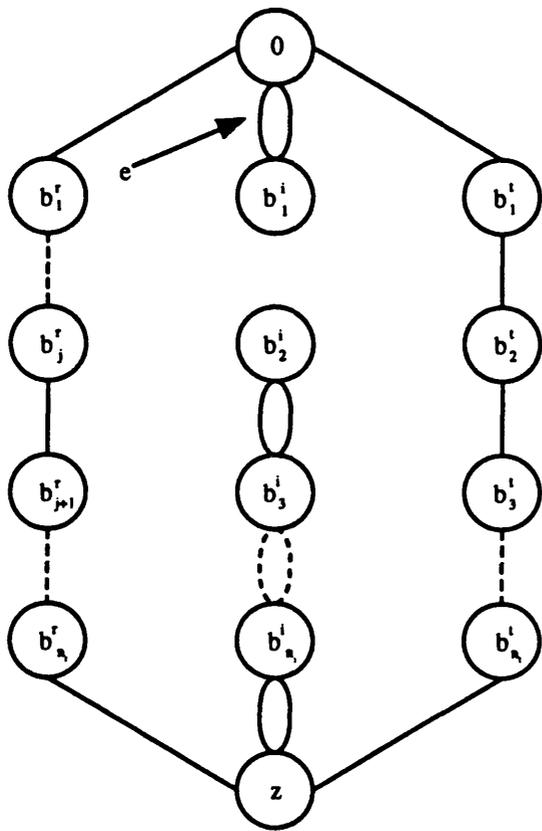


Figura 5.11: Ruta de T' que contiene a e .

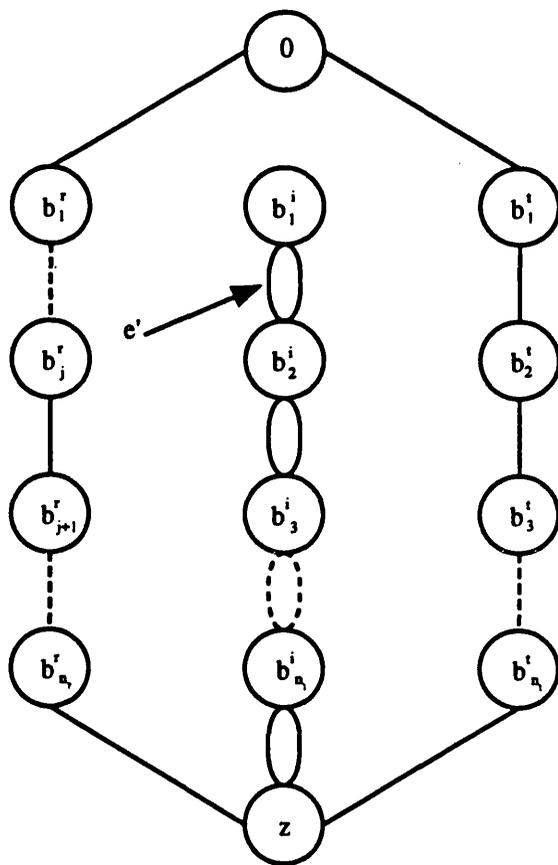


Figura 5.12: Ruta de T^i que contiene a e' .

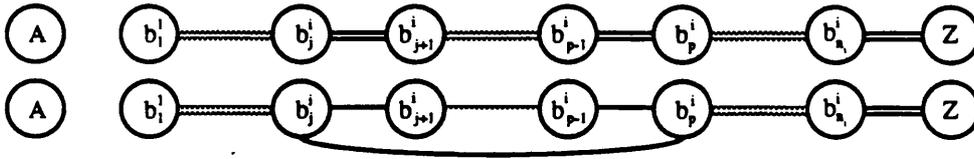


Figura 5.13: Solución T' , $f_e = a_e$, para $e \in (B_j^i, B_p^i)$ con $p \geq j + 2$.

mos el siguiente sistema de s ecuaciones con s incógnitas π_1, \dots, π_s :

$$\begin{aligned}
 2n_1\pi_1 + (n_2 + 1)\pi_2 + \dots + (n_{s-1} + 1)\pi_{s-1} + (n_s + 1)\pi_s &= a_0 \\
 (n_1 + 1)\pi_1 + 2n_2\pi_2 + \dots + (n_{s-1} + 1)\pi_{s-1} + (n_s + 1)\pi_s &= a_0 \\
 &\vdots \\
 (n_1 + 1)\pi_1 + \dots + (n_{i-1} + 1)\pi_{n_{i-1}} + 2n_i\pi_i + \\
 (n_{i+1} + 1)\pi_{n_{i+1}} + \dots + (n_s + 1)\pi_s &= a_0 \\
 &\vdots \\
 (n_1 + 1)\pi_1 + \dots + (n_i + 1)\pi_{n_i} + \dots + 2n_s\pi_s &= a_0
 \end{aligned}$$

cuya única solución es:

$$\pi_i = \frac{1}{n_i - 1}, \quad i = 1, \dots, s$$

lo que finalmente demuestra que $f_e = a_e$, $\forall e \in (B_j^i, B_{j+1}^i)$, para todo $j = 0, \dots, n_i$ y para cada $i = 1, \dots, s$.

- Dado un $i = 1, \dots, s$ arbitrario, $f_e = a_e$ para cualquier arista $e \in (B_j^i, B_p^i)$ con $p \geq j + 2$.

No hay pérdida de generalidad en suponer que $j \geq 1$ ya que, si no lo fuese, modificaríamos apropiadamente T^i de manera que la siguiente operación sea válida, en el sentido de que siga proporcionando una solución posible del *SDVRP*. (Ver figura 5.13).

$$T' = T^i - \sum_{\tau=0}^{p-j-1} (b_{j+\tau}^i, b_{j+\tau+1}^i) + (b_j^i, b_p^i)$$

Es fácil comprobar que $a^t x^{T'} = a_0$, por lo que también se cumplirá que $f^t x^{T'} = a_0$, es decir:

$$\underbrace{f^t x^{T'}}_{=a_0} - \sum_{r=0}^{p-j-1} \frac{1}{n_i - 1} + f_{b_j^i b_p^i} = a_0$$

Luego,

$$-\frac{p-j}{n_i - 1} + f_{b_j^i b_p^i} = 0 \longrightarrow f_{b_j^i b_p^i} = \frac{p-j}{n_i - 1}$$

con lo que queda demostrado lo que queríamos, i.e.:

$$\begin{aligned} f_e &= a_e, \forall e \in (B_j^i, B_p^i) \\ i &= 1, \dots, s, \text{ fijo} \\ j &\neq p, p \geq j + 2, n_i \geq p - j \geq 2 \\ j &= 0, \dots, n_i - 1 \end{aligned}$$

- Veamos que $f_e = a_e$ para cualquier arista *cruzada*, i.e., $e \in (B_j^i, B_p^r)$ con $i \neq r$, $1 \leq j \leq n_i$ y $1 \leq p \leq n_r$.

Para demostrarlo construiremos una solución T' , que compararemos con T^i y que, por supuesto, cumplirá la restricción $a^t x \geq a_0$ con igualdad.

Las aristas que forman parte de la solución T' coinciden con las que se utilizan en T^i salvo en lo que se refiere a las aristas de los caminos P_i y P_r . Para estos caminos tomamos:

$$\begin{aligned} x_{b_j^i b_p^r} &= 1 \\ x_{b_d^i b_{d+1}^i} &= 1, d = 0, \dots, j - 1 \\ x_{b_d^r b_{d+1}^r} &= 2, d = 0, \dots, p - 2 \\ x_{b_{j+d}^i b_{j+d+1}^i} &= 2, d = 1, \dots, n_i - j \\ x_{b_{p+d}^r b_{p+d+1}^r} &= 1, d = 0, \dots, n_r - p \end{aligned}$$

La solución que acabamos de dar contiene la ruta que presentamos en la Figura 5.14.

No hay pérdida de generalidad en suponer que:

$$a_e = \max\left\{\frac{p}{n_r - 1} - \frac{j - 2}{n_i - 1}, \frac{j}{n_i - 1} - \frac{p - 2}{n_r - 1}\right\} = \frac{j}{n_i - 1} - \frac{p - 2}{n_r - 1}$$

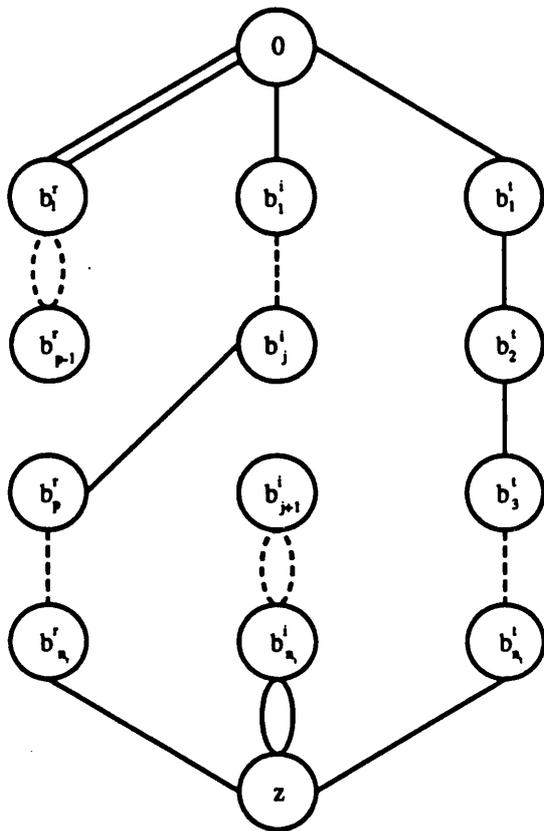


Figura 5.14: Una ruta de la solución utilizada para calcular el coeficiente de las aristas cruzadas.

Veamos que T' cumple la ecuación $a^t x = a_0$.

$$\begin{aligned}
 a^t x^{T'} &= \\
 \sum_{q \neq i, q \neq r} \frac{n_q+1}{n_q-1} + \frac{j}{n_i-1} + \frac{j}{n_i-1} - \frac{p-2}{n_r-1} + 2 \frac{p-1}{n_r-1} + \frac{n_r+1-p}{n_r-1} + 2 \frac{n_i-j}{n_i-1} &= \\
 \sum_{q \neq i, q \neq r} \frac{n_q+1}{n_q-1} + \frac{j+j+2n_i-2j}{n_i-1} + \frac{-p+2+2p-2+n_r+1-p}{n_r-1} &= \\
 \sum_{q \neq i, q \neq r} \frac{n_q+1}{n_q-1} + \frac{n_i+1+n_i-1}{n_i-1} + \frac{n_r+1}{n_r-1} = \sum_{q=1}^s \frac{n_q+1}{n_q-1} + \frac{n_i-1}{n_i-1} &= \\
 1 + \sum_{q=1}^s \frac{n_q+1}{n_q-1} &= a_0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto también cumplirá la ecuación $f^t x^{T'} = a_0$ y, entonces:

$$f^t x^{T^i} - f^t x^{T'} = 0$$

$$f^t x^{T^i} - f^t x^{T'} = \frac{2n_i}{n_i-1} + \frac{n_r+1}{n_r-1} - \left[\frac{j}{n_i-1} + 2 \frac{n_i-j}{n_i-1} + f_e + 2 \frac{p-1}{n_r-1} + \frac{n_r+1-p}{n_r-1} \right]$$

↓

$$f_e = \frac{2n_i-j-2n_i+2j}{n_i-1} + \frac{n_r+1-2p+2-n_r-1+p}{n_r-1} =$$

$$\frac{j}{n_i-1} - \frac{p-2}{n_r-1} = a_e$$

- Nos falta demostrar que el coeficiente de cualquier arista $e \in (A, Z)$ vale uno.

El resultado se obtiene directamente a partir de una cualquiera de las soluciones T^i y T' , donde:

$$T' = T^i - \sum_{r=1}^{n_i} (b_r^i, b_{r+1}^i) + (b_0^i, b_1^i) + (0, z)$$

Ver la Figura 5.15.

Es fácil comprobar que $a^t x^{T'} = \frac{n_i+1}{n_i-1} + 1 + \sum_{r \neq i} \frac{n_r+1}{n_r-1} = a_0$, luego:

$$f^t x^{T^i} - f^t x^{T'} = 0 \rightarrow \frac{2n_i}{n_i-1} - \frac{n_i+1}{n_i-1} - f_e = 0$$

y por tanto:

$$f_e = \frac{2n_i - n_i - 1}{n_i - 1} = \frac{n_i - 1}{n_i - 1} = 1 = a_e$$

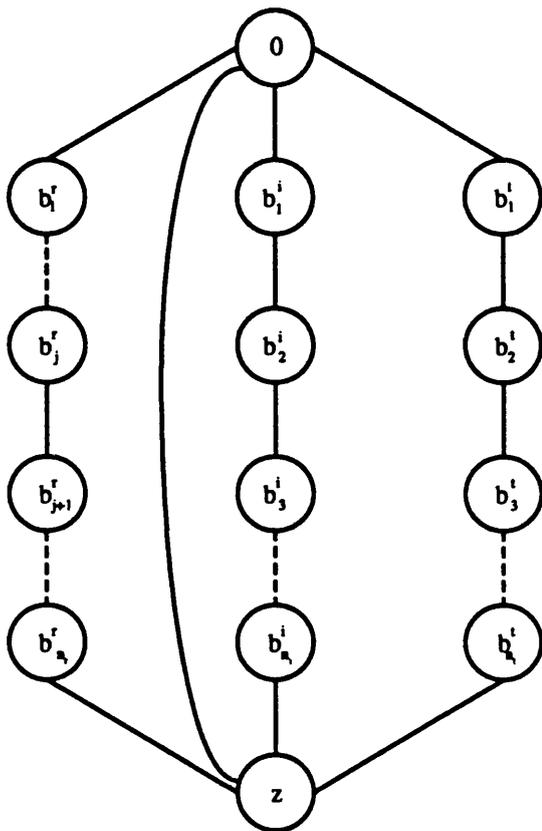


Figura 5.15: Solución T' utilizada para calcular el coeficiente de las aristas de (A, Z) .

Hemos visto que $a_e = f_e$ para cualquier arista $e \in E$, luego las desigualdades asociadas a las configuraciones *path* inducen facetas del P_{SDVRP} . \diamond

Notar que los papeles jugados por A y por Z son intercambiables, por lo que:

Corolario 5.1 *Si en la proposición anterior el depósito, en lugar de pertenecer a A , pertenece a Z , el resultado sigue siendo cierto.*

Queda por analizar qué pasa cuando el depósito pertenece a cualquier otro subconjunto de la partición, i.e., cuando $0 \in B_j^i$ con $i = 1, \dots, s$ y $j = 1, \dots, n_i$. Cornuéjols y Harche (1993) [24] distinguen, claramente, dos situaciones dependiendo de si $\lceil \frac{\sum_{v \in V \setminus B_j^i} d_v}{Q} \rceil = 1$ o no.

En caso de que sólo se necesite un vehículo para servir la demanda de $V \setminus B_j^i$, la demostración de que las desigualdades asociadas a las configuraciones *path*, *wheelbarrow* y *bicycle*, inducen facetas del P_{GVRP} , se deduce directamente del hecho de que definen facetas del P_{GTSP} . Sin embargo, cuando se necesitan más vehículos, tienen que imponer unas condiciones, bastante más complejas, para poder llegar al mismo resultado. En nuestro problema no es fácil encontrar condiciones, relativamente sencillas y razonables, que permitan garantizar este resultado, de hecho, hay determinadas situaciones, como veremos más adelante, en las que ni tan siquiera podemos asegurar que las desigualdades *path* sigan siendo soporte.

Si $a^t x \geq a_0$ es una desigualdad asociada a una cualquiera de las tres configuraciones, definidas en la Definición 5.2, la siguiente nota nos permitirá concluir, sin necesidad de demostrarlo, que $a^t x \geq a_0$ define una faceta del P_{SDVRP} cuando el depósito pertenece a un B_j^i para el que $\lceil \frac{d(V \setminus B_j^i)}{Q} \rceil = 1$.

Nota 5.2 *En primer lugar, vamos a ver que cualquier tour que defina una solución del GTSP se puede completar, con aristas de coeficiente igual a cero en $a^t x$, para obtener una solución del SDVRP. Por lo tanto, si el tour original cumplía $a^t x = a_0$, la solución del SDVRP que obtengamos a partir de él también lo cumplirá.*



En efecto, sea $C_{B_j^i}$ un ciclo Hamiltoniano en B_j^i . El tour que define la solución del GTSP recorrerá, evidentemente, todos los vértices del grafo, si le añadimos $K - 1$ copias de cada una de las aristas del ciclo Hamiltoniano, obtendremos un tour en el que todos los vehículos pueden visitar todos los vértices de B_j^i y hay solamente uno que visita los vértices del complementario. Como $\lceil \frac{\sum_{v \in V \setminus B_j^i} d_v}{Q} \rceil = 1$ significa que todos los clientes de $V \setminus B_j^i$ pueden ser servidos por un único vehículo, seguro que hay una asignación posible de demandas de clientes a vehículos de manera que el conjunto de aristas que acabamos de dar define una solución del SDVRP. Nótese que $\forall e \in C_{B_j^i}, a_e = 0$.

Cornuéjols et al. (1985) demuestran, en el Teorema 3.2 de [23], que las desigualdades *path* definen facetas del GTSP. Utilizan el método indirecto para probar el resultado que, como sabemos, sólo precisa de un número suficiente de soluciones distintas, cumpliendo $a^t x = a_0$, para poder concluir que la desigualdad induce una faceta del poliedro correspondiente.

En virtud de la nota anterior, sabemos que todas las soluciones utilizadas por Cornuéjols et al. se podrán transformar en soluciones del SDVRP sin modificar ninguna arista de $E \setminus E(B_j^i)$, luego, la demostración del siguiente resultado será exactamente la misma que la del Teorema 3.2 en [23].

Proposición 5.11 *Dada una configuración “path”, “wheelbarrow” o “bicycle”, si el depósito pertenece a un B_j^i cualquiera y $\lceil \frac{\sum_{v \in V \setminus B_j^i} d_v}{Q} \rceil = 1$, la desigualdad $a^t x \geq a_0$ asociada, induce una faceta del P_{SDVRP} .*

Demostración

El resultado se deduce directamente de la nota anterior y de la demostración del Teorema 3.2 de [23], dada por Cornuéjols et al.

Procediendo análogamente con los tours utilizados por Cornuéjols et al. [23] en el Teorema 3.5 obtenemos el resultado para las desigualdades asociadas a las configuraciones *wheelbarrow*.

Para las desigualdades asociadas a las configuraciones *bicycle* utilizamos los tours dados por Naddef y Rinaldi (1991) [65] para el GTSP. \diamond

A continuación presentamos los resultados que hemos obtenido cuando no se cumple la condición $\lceil \frac{d(V \setminus B_1^i)}{Q} \rceil = 1$.

Proposición 5.12 *Si el depósito pertenece a B_1^i , para algún $i = 1, \dots, s$ y el número de vehículos necesario para servir la demanda de los vértices de $V \setminus B_1^i$ es al menos tres, las desigualdades "path" no son soporte del $PSDVRP$.*

Demostración

Sea $a^t x \geq a_0$ una desigualdad asociada a una configuración *path*. Supongamos que T es una solución del $SDVRP$ cuyo vector de incidencia minimiza el término de la izquierda de la restricción y veamos que con las hipótesis establecidas $a^t x^T > a_0$.

En primer lugar, demostraremos que no hay pérdida de generalidad en suponer que las aristas de T , que pertenecen a (B_1^i, \bar{B}_1^i) , son aristas de $(A, B_1^i) \cup (B_1^i, B_2^i)$, cuyo coeficiente, a_e , en la restricción es, $\frac{1}{n_i - 1}$.

Si en T hay una arista $e \in (B_1^i, B_j^i)$, $3 \leq j \leq n_i + 1$, es fácil obtener una nueva solución T' que no utiliza dicha arista y que cumple $a^t x^T = a^t x^{T'}$. Basta con sustituir cada una de las posibles copias de $e = (u, v)$ por el camino $u - b_2^i - \dots - b_r^i - b_{r+1}^i - \dots - b_{j-1}^i - v$, que tiene el mismo peso en la expresión $a^t x$ que la arista e .

Si en T hay alguna arista $e \in (B_1^i, B_p^r)$, $r \neq i$, $p \geq 1$, su coeficiente, en a , es:

$$a_e \geq \frac{p}{n_r - 1} - \frac{1 - 2}{n_i - 1} = \frac{p}{n_r - 1} + \frac{1}{n_i - 1}$$

Sea T' la solución que se obtiene eliminando la arista $e = (u, v)$ de T y añadiendo la arista (u, b_0^i) y el camino $b_0^i = b_0^r - b_1^r - \dots - b_j^r - \dots - b_{p-1}^r - v$. La contribución de la nueva arista y del camino al término izquierdo de la desigualdad es: $\frac{1}{n_i - 1} + \frac{p}{n_r - 1}$, por lo que $a^t x^T \geq a^t x^{T'}$. Notar, que en T' ha desaparecido la arista e de (B_1^i, B_p^r) y en su lugar tenemos una de (A, B_1^i) .

Basaremos la demostración del resultado en las siguientes observaciones:

- A partir de una solución cualquiera del $SDVRP$ en la que una arista e aparece más de dos veces, siempre podemos conseguir una solución del

GTSP, en la que dicha arista se utiliza, a lo sumo, dos veces. Basta con eliminar:

$2p$ copias, si hay $2p + 1$, $p \geq 1$, copias de e
 $2(p - 1)$ copias, si hay $2p$, $p \geq 2$, copias de e .

- Las desigualdades asociadas a las configuraciones *path* son válidas para el *GTSP*.

Supongamos que las únicas aristas de la cortadura (B_1^i, \bar{B}_1^i) que hay en T son aristas de $(A, B_1^i) \cup (B_1^i, B_2^i)$, si no lo fueran, aplicando un número finito de veces el procedimiento que hemos descrito anteriormente, podríamos obtener una solución T' que cumple la condición y que sigue minimizando $a^t x$.

Como el depósito pertenece a B_1^i y el número de vehículos que necesitamos para servir la demanda de $V \setminus B_1^i$ es:

$$\bar{k} = \lceil \frac{d(V \setminus B_1^i)}{Q} \rceil$$

la cortadura (B_1^i, \bar{B}_1^i) debe ser atravesada al menos $2\bar{k}$ veces utilizando aristas que sólo pueden pertenecer a (A, B_1^i) o a (B_1^i, B_2^i) y que estarán distribuidas de una cualquiera de las siguientes maneras:

(A, B_1^i)	(B_1^i, B_2^i)	Eliminando	Quedan
$2k$	0	$(2k - 2, 0)$	$(2, 0)$
$2k - 1$	1	$(2k - 2, 0)$	$(1, 1)$
$2k - 2$	2	$(2k - 4, 0)$	$(2, 2)$
$2k - 3$	3	$(2k - 4, 2)$	$(1, 1)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\bar{k}	\bar{k}	Si k es par $(k - 2, k - 2)$ Si \bar{k} es impar $(\bar{k} - 1, \bar{k} - 1)$	$(2, 2)$ $(1, 1)$

Dado \bar{k} , fijo, siempre podemos eliminar al menos $2(\bar{k} - 2)$ aristas de la cortadura (B_1^i, \bar{B}_1^i) de manera que seguimos teniendo un tour que recorre todos y cada uno de los vértices de V . Este tour es una solución del *GTSP*.

Sea T' la solución obtenida después de aplicar el método que acabamos de describir; $a^t x^{T'} = a^t x^T - \frac{2(\bar{k}-2)}{n_i-1}$, ya que hemos eliminado $2(\bar{k} - 2)$ aristas

cuyos coeficientes valen $a_e = \frac{1}{n_i - 1}$. Como $a^t x \geq a_0$ es válida para el *GTSP*, T' deberá cumplir:

$$a^t x^{T'} = a^t x^T - \frac{2(\bar{k} - 2)}{n_i - 1} \geq a_0$$

y entonces:

$$a^t x^T \geq a_0 + \frac{2(\bar{k} - 2)}{n_i - 1}$$

Como:

$$\frac{\bar{k} \geq 3}{2(\bar{k} - 2) \geq 2} \longrightarrow a^t x^T \geq a_0 + \frac{2}{n_i - 1} > a_0 \longrightarrow a^t x^T > a_0$$

Luego, si se dan las condiciones establecidas en la hipótesis de la proposición, la desigualdad asociada a una configuración *path* no es soporte del P_{SDVRP} . \diamond

Proposición 5.13 Si el depósito pertenece a B_1^i para algún $i = 1, \dots, s$ y $\lceil \frac{d(V \setminus B_1^i)}{Q} \rceil = 2$, entonces, en cualquier solución del *SDVRP* que cumpla con igualdad la restricción asociada a una configuración "path" hay una única ruta que sirve toda la demanda de $V \setminus P_i$, i.e. $\lceil \frac{d(V \setminus P_i)}{Q} \rceil = 1$.

Demostración

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el depósito pertenece a B_1^1 . Sea $a^t x \geq a_0$ la desigualdad asociada a la correspondiente configuración *path*. Demostraremos que si $\lceil \frac{d(V \setminus B_1^1)}{Q} \rceil = 2$ las únicas soluciones, T , del *SDVRP*, que cumplen $a^t x^T = a_0$, son aquellas en las que, con un único vehículo, se puede servir toda la demanda de $V \setminus P_1$.

Si $\lceil \frac{d(V \setminus B_1^1)}{Q} \rceil = 2$, cualquier solución del *SDVRP* debe atravesar la cordadura (B_1^1, \bar{B}_1^1) al menos cuatro veces. Razonando como en la proposición anterior, podemos afirmar que cualquier solución del *SDVRP* que minimice el término de la izquierda de la desigualdad $a^t x \geq a_0$, sólo utilizará aristas de $(A, B_1^1) \cup (B_1^1, B_2^1)$. Más aún, cualquiera de estas soluciones puede modificarse de manera que las aristas, que tienen asociado un coeficiente positivo en a , tengan como vértices extremos los representantes de cada uno de los subconjuntos que forman parte de la configuración *path*.

Nótese que si en T hubiese más de cuatro aristas, eliminando un número adecuado de copias, podríamos obtener una solución T' del $GTSP$ cumpliendo $a^t x^T \geq a^t x^{T'}$ y, haríamos la siguiente demostración utilizando T' en lugar de T . La conclusión a la que llegaríamos sería la misma.

Supongamos pues que $|(B_1^1, \bar{B}_1^1) \cap T| = 4$. En este caso las cuatro aristas sólo pueden estar distribuidas de una de las siguientes maneras:

- Las cuatro pertenecen a (A, B_1^1) o a (B_1^1, B_2^1) . En este caso, si eliminamos dos de ellas (nótese que en realidad se trata de cuatro copias de una misma arista), obtenemos una solución T' del $GTSP$ que cumple:

$$\begin{aligned} a^t x^{T'} &= a^t x^T - \frac{2}{n_1-1} \geq a_0 \\ &\quad \downarrow \\ a^t x^T &> a_0 \end{aligned}$$

Luego, una solución con estas características no puede cumplir la restricción $a^t x \geq a_0$ con igualdad.

- Una pertenece a (A, B_1^1) y las otras tres a (B_1^1, B_2^1) o, equivalentemente, tres a (A, B_1^1) y una a (B_1^1, B_2^1) . En cualquiera de los dos casos, si eliminamos dos copias de la arista que aparece tres veces, obtenemos una solución del $GTSP$ que nos permite demostrar, igual que en el apartado anterior, que ninguna de estas soluciones puede cumplir con igualdad la restricción.
- Dos aristas pertenecen a (A, B_1^1) y las otras dos a (B_1^1, B_2^1) . Vamos a distinguir varios casos dependiendo del vehículo al que pertenecen cada una de ellas.

- Si cada uno de los dos vehículos utiliza una arista de cada una de las cortaduras, las dos rutas que hay en la solución tendrán la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \text{Ruta 1} &\longrightarrow \text{depósito} = b_1^1 - b_0^1 - b_j^i - \dots - b_q^p - b_2^1 - b_1^1 = \text{depósito} \\ \text{Ruta 2} &\longrightarrow \text{depósito} = b_1^1 - b_0^1 - b_i^r - \dots - b_x^u - b_2^1 - b_1^1 = \text{depósito} \end{aligned}$$

Eliminando las dos aristas de (A, B_1^1) , una de cada ruta, nos queda:

$$b_0^1 - b_j^i - \dots - b_q^p - b_2^1 - \text{depósito} - b_2^1 - b_x^u - \dots - b_i^r - b_0^1$$

De nuevo, hemos construido una solución del *GTSP* que nos permite asegurar que la solución de la que partíamos no puede cumplir la restricción con igualdad.

- Sólo nos queda por analizar qué pasa cuando un único vehículo es el que utiliza las dos aristas de la cortadura (A, B_1^1) y el otro las de (B_1^1, B_2^1) . Sea T una solución cumpliendo lo anterior. En (P_1, \bar{P}_1) hay, al menos, dos aristas que pertenecen a T . Si exactamente hay dos,

$$|T \cap \delta(P_1)| = 2 \longrightarrow \lceil \frac{d(V \setminus P_1)}{Q} \rceil = 1$$

y el resultado al que queríamos llegar se cumple. Si $|T \cap \delta(P_1)| > 2$, como ha de ser par, al menos valdrá cuatro, es más, para nuestros propósitos bastará con suponer que es exactamente cuatro.

Distinguiremos varios casos:

- * Que las dos nuevas aristas de la cortadura pertenezcan a $(B_{n_1}^1, Z)$. En ese caso, por razones de conectividad y paridad, sólo pueden ocurrir dos cosas, que la ruta asociada a este vehículo utilice al menos dos aristas de cada (B_j^1, B_{j+1}^1) , $j = 2, \dots, n_1$, o que para alguna de estas cortaduras no haya ninguna arista en la solución que sea utilizada por este vehículo. En el primer caso, eliminando una copia de cada una de las cortaduras, otra de (A, B_1^1) y añadiendo una de (A, Z) , obtenemos una solución, T' , del *GTSP*; la nueva solución cumple $a^t x \geq a_0$, luego:

$$a^t x^{T'} = a^t x^T - \frac{n_1+1}{n_1-1} + 1 =$$

$$a^t x^T + \frac{n_1-1-n_1-1}{n_1-1} \geq a_0$$

$$a^t x^T \geq a_0 + \frac{2}{n_1-1}$$

Por lo que T no puede ser una solución del *SDVRP* que cumpla la restricción asociada a la respectiva configuración *path* con igualdad.

En el segundo caso, lo que en realidad está ocurriendo es que un único vehículo visita a \bar{P}_1 , y la tesis se cumple, es decir, si $a^t x^T = a_0$, entonces $\lceil \frac{d(V \setminus P_1)}{Q} \rceil = 1$.

- * Que de las dos nuevas aristas, sólo una de la cortadura (P_1, \bar{P}_1) pertenezca a $(B_{n_1}^1, Z)$ y la otra a (B_p^1, B_q^1) para algún $2 \leq p \leq n_1$, $i \neq 1$, $1 \leq q \leq n_i$.

Nuevamente podemos distinguir dos situaciones:

en una de ellas, un vehículo utiliza dos aristas de cada una de las cortaduras (B_j^1, B_{j+1}^1) , $j = 2, \dots, p-1$, la arista (b_p^1, b_q^1) , una de cada (B_j^1, B_{j+1}^1) , $j = p, \dots, n_1-1$ y otra de $(B_{n_1}^1, Z)$ y; en la otra, hay una cortadura (B_j^1, B_{j+1}^1) , $j = 2, \dots, p-1$, de la que no se utiliza ninguna arista. El segundo caso responde a una situación en la que $\lceil \frac{d(V \setminus P_1)}{Q} \rceil = 1$, tal y como queríamos demostrar. Centrémonos en la primera situación.

Si eliminamos una arista de cada (B_j^1, B_{j+1}^1) , $j = 0, \dots, p-1$, la arista (b_p^1, b_q^1) y añadimos una arista por cada (B_j^1, B_{j+1}^1) , $j = 0, \dots, q-1$, obtenemos una solución T' del $GTSP$ cuyo coste es:

$$a^t x^T = a^t x^{T'} + \frac{p}{n_1-1} + a_{b_p^1 b_q^1} - \frac{q}{n_i-1}$$

$$a^t x^T \geq a_0 + \frac{p}{n_1-1} + a_{b_p^1 b_q^1} - \frac{q}{n_i-1}$$

Ahora bien, como $a_{b_p^1 b_q^1} \geq \frac{q}{n_i-1} - \frac{p-2}{n_1-1}$, tenemos que:

$$a^t x^T \geq a_0 + \frac{p}{n_1-1} + \frac{q}{n_i-1} - \frac{p-2}{n_1-1} - \frac{q}{n_i-1}$$

$$\downarrow$$

$$a^t x^T \geq a_0 + \frac{2}{n_1-1} > a_0$$

Y, por tanto, T no puede ser una de las soluciones que cumplen la restricción $a^t x \geq a_0$ con igualdad.

- * Que las dos nuevas aristas de la cortadura (P_1, \bar{P}_1) pertenezcan a (B_p^1, B_q^1) para algún $2 \leq p \leq n_1$, $i \neq 1$, $1 \leq q \leq n_i$.

Como $|T \cap \delta(P_1)| = 4$, en T no hay ninguna arista que pertenezca a ninguna de las cortaduras (B_j^1, Z) , $j = 1, \dots, n_1$. Por lo tanto, debido a las condiciones de conectividad y paridad que deben satisfacer cualquiera de las soluciones del $SDVRP$, podemos asegurar que en T hay al menos dos aristas por cada una de las cortaduras (B_j^1, B_{j+1}^1) para $j = p, \dots, n_1-1$. Lo mismo ocurrirá para cada una de las cortaduras con $j = 2, \dots, p-1$, salvo, a lo sumo, para una de ellas que puede ser vacía. Nótese que, si no se utiliza ninguna arista de una de las cortaduras (B_j^1, B_{j+1}^1) , con $j = 2, \dots, p-1$, en ese caso, el único vehículo que visita a $V \setminus P_1$ es el que utilizaba las dos aristas de la cortadura (A, B_1^1) y el resultado que queremos demostrar sigue siendo cierto.

Si, por el contrario, en T hay al menos dos aristas de todas y cada una de las cortaduras anteriores, T no podrá cumplir la

restricción con igualdad. Veámoslo.

Construimos T' eliminando una copia de cada una de las aristas de (B_j^1, B_{j+1}^1) , $j = 0, \dots, p-1$, otra de la arista (b_p^1, b_q^1) y añadimos otra por cada una de las cortaduras (B_j^i, B_{j+1}^i) , $j = 0, \dots, q-1$. Evidentemente T' es una solución del $GTSP$ y, por tanto, cumplirá $a^t x^{T'} \geq a_0$, luego,

$$a^t x^T = a^t x^{T'} + \frac{p}{n_1 - 1} - \frac{q}{n_i - 1} + \frac{q}{n_i - 1} - \frac{p-2}{n_1 - 1}$$

de donde,

$$a^t x^T = a^t x^{T'} + \frac{2}{n_1 - 1} \geq a_0 + \frac{2}{n_1 - 1} > a_0$$

Nos queda por analizar qué ocurre cuando dos aristas de la cortadura (P_1, \bar{P}_1) pertenecen a (A, B_1^1) y las otras a dos cortaduras (B_p^1, B_q^i) , y $(B_{p'}^1, B_{q'}^{i'})$, distintas, con $q \in \{1, \dots, n_i\}$ y $q' \in \{1, \dots, n_{i'}\}$. La demostración es análoga a la que acabamos de hacer en el último caso, hay que transformar T del mismo modo, por lo que el resultado al que queríamos llegar queda demostrado.

◇

La proposición anterior establece una condición necesaria para que la desigualdad asociada a una configuración *path* induzca una faceta del P_{SDVRP} , cuando el depósito pertenece a uno de los extremos de un camino P_i . Sin embargo, el caso en el que el depósito pertenece a un B_j^i , con $1 < j < n_i$ no ha sido estudiado por el momento.

Por lo tanto, algunas de las preguntas que quedan abiertas, son las siguientes:

- Si $\lceil \frac{d(V \setminus B_i^i)}{Q} \rceil = 2$ y $\lceil \frac{d(V \setminus P_i)}{Q} \rceil = 1$, ¿ las desigualdades *path* inducen facetas del P_{SDVRP} ? Si lo hacen, ¿qué condiciones necesitamos imponer?.
- Si tenemos en cuenta las hipótesis de la Proposición 5.12 y aumentamos el término independiente de las desigualdades asociadas a las configuraciones *path* en $\frac{2(K-2)}{n_i-1}$ unidades, la desigualdad resultante sí que será soporte del P_{SDVRP} pero, ¿inducirá una faceta del mismo?.

- ¿Podemos obtener algún resultado para el resto de casos que han quedado por estudiar?.

La respuesta a estas y otras preguntas es uno de los temas que quedan abiertos para futuras investigaciones.

A continuación presentamos los resultados que hemos obtenido relacionados con las desigualdades asociadas a las configuraciones *wheelbarrow* y a las *bicycle*.

Proposición 5.14 *Dados K vehículos de capacidad Q y el depósito $0 \in A$, las configuraciones “wheelbarrow” inducen facetas del P_{SDVRP} , si:*

$$K \geq \frac{s-1}{2}, \text{ y}$$

$$\frac{Q}{3} \geq \max\{d(P_i), i = 1, \dots, s\}$$

o, equivalentemente:

$$K \geq \frac{s-1}{2}, \text{ y}$$

$$Q \geq d(P_{s-2}) + d(P_{s-1}) + d(P_s) \\ \text{suponiendo que } d(P_1) \leq d(P_2) \leq \dots \leq d(P_s)$$

Demostración

Ya hemos visto en una proposición anterior que, independientemente del número de vehículos que utilicemos, las desigualdades son válidas para nuestro problema.

Recurriremos, de nuevo, al método indirecto para hacer la demostración. En primer lugar vamos a dar una solución asociada a cada uno de los caminos P_i .

El proceso de construcción de estas soluciones es exactamente el mismo que el que hemos seguido en el caso de las *path*, con la única excepción de que cuando uníamos dos caminos, por ejemplo P_r y P_s , lo hacíamos a través de Z , es decir, utilizando las aristas $(b_{n_r}^r, z)$ y $(z, b_{n_s}^s)$; como ahora Z es vacío iremos directamente de $B_{n_r}^r$ a $B_{n_s}^s$ utilizando la arista $(b_{n_r}^r, b_{n_s}^s)$.

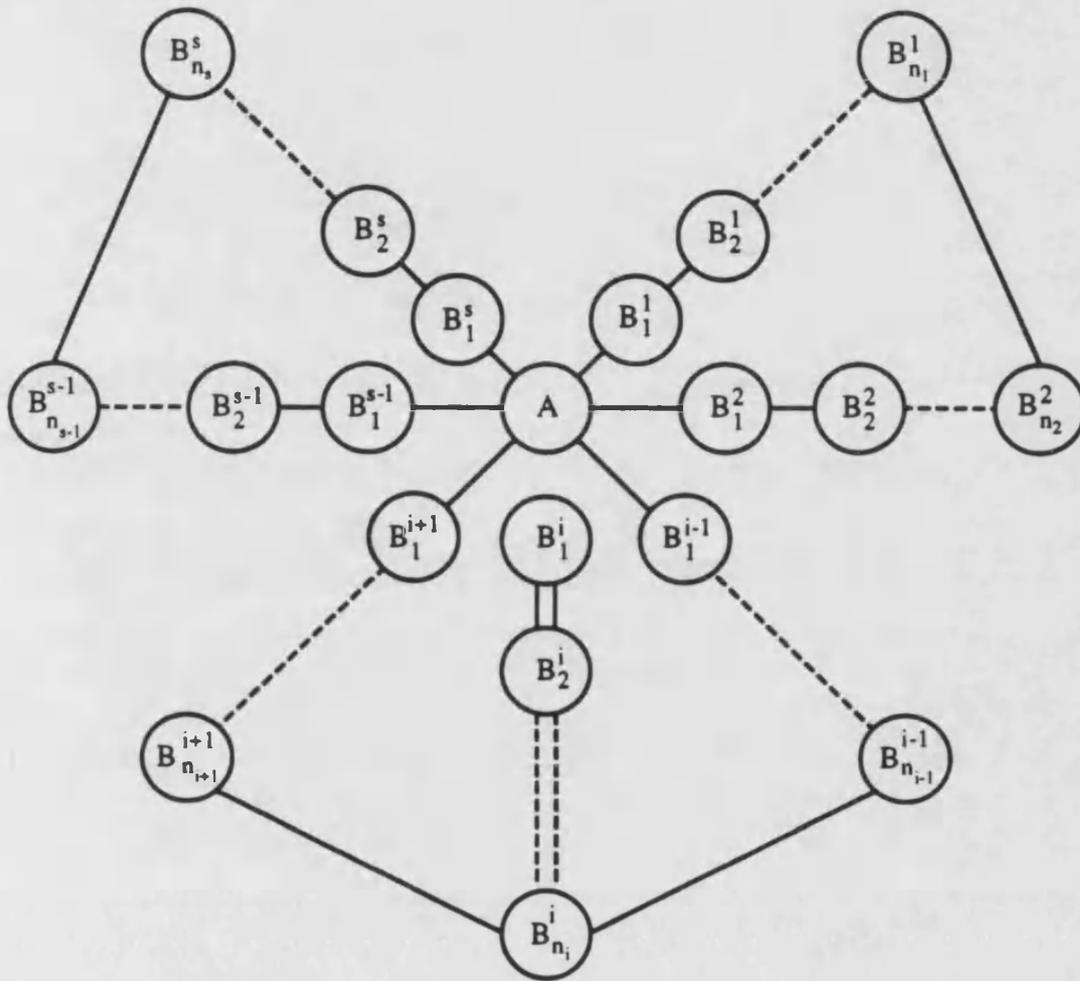


Figura 5.16: Solución T^i para una configuración *wheelbarrow*.

El resto de las aristas que forman parte de la solución siguen siendo las mismas. Razonando como antes se puede ver fácilmente que hay una asignación posible de las demandas de los clientes a los vehículos de manera que $\frac{s-1}{2} - 1$ parejas de P_r 's se sirven, cada una de ellas, utilizando un único vehículo y los tres caminos restantes, incluyendo a P_i , por otro. Como todos los vehículos visitan a todos los vértices de A , la solución así construida es una solución posible del *SDVRP*. En la Figura 5.16 presentamos la solución asociada al camino P_i , la llamaremos T^i .

Veamos que T^i cumple la restricción con igualdad, con lo que tendremos demostrado que la desigualdad *wheelbarrow* asociada es soporte. Duplicando una cualquiera de las aristas con coeficiente estrictamente positivo, tendre-

mos una solución que cumple la desigualdad con mayor estricto, demostrando así que la desigualdad es propia.

Las únicas aristas en la solución con coeficiente no nulo son aquellas que sirven para unir dos B_p^r 's consecutivos en cada uno de los caminos P_r , con $r = 1, \dots, s$ y, las que utilizamos para unir parejas de caminos P_r y P_{r+1} . No hay pérdida de generalidad en demostrar que T^{s-1} cumple la restricción con igualdad; para el resto de soluciones T^i la demostración es análoga.

Agrupamos dos a dos, empezando por el primero y en orden ascendente, los caminos P_{2r} y P_{2r-1} que se suponen servidos por el mismo vehículo, con $r = 1, \dots, \frac{s-3}{2}$; en cada uno de ellos se utilizan, n_r aristas de peso $\frac{1}{n_r-1}$ y una arista de peso $\frac{n_{2r}}{n_{2r}-1} - \frac{n_{2r-1}-2}{n_{2r-1}-1}$, además se necesitan $2(n_{s-1}-1)$ aristas de peso $\frac{1}{n_{s-1}-1}$ para recorrer los vértices de P_{s-1} , n_{s-2} aristas de peso $\frac{1}{n_{s-2}-1}$, n_s aristas de peso $\frac{1}{n_s-1}$, una arista para unir P_{s-2} con P_{s-1} y, otra, para unir este último con P_s .

Nótese que el coeficiente de las aristas que unen los supernudos finales de dos caminos cualesquiera P_{2r-1} y P_{2r} es:

$$\max\left\{\frac{n_{2r}}{n_{2r}-1} - \frac{n_{2r-1}-2}{n_{2r-1}-1}, \frac{n_{2r-1}}{n_{2r-1}-1} - \frac{n_{2r}-2}{n_{2r}-1}\right\}$$

y en este caso especial este máximo es único, veámoslo:

$$\begin{aligned} \frac{n_{2r}}{n_{2r}-1} - \frac{n_{2r-1}-2}{n_{2r-1}-1} &= \frac{n_{2r}(n_{2r-1}-1) - (n_{2r}-1)(n_{2r-1}-2)}{(n_{2r}-1)(n_{2r-1}-1)} = \\ &= \frac{n_{2r}n_{2r-1} - n_{2r} - n_{2r}n_{2r-1} + n_{2r-1} + 2n_{2r} - 2}{(n_{2r}-1)(n_{2r-1}-1)} = \\ \frac{n_{2r} + n_{2r-1} - 2}{(n_{2r}-1)(n_{2r-1}-1)} &= \frac{n_{2r-1}n_{2r} - n_{2r-1} - n_{2r-1}n_{2r} + n_{2r} + 2n_{2r-1} - 2}{(n_{2r}-1)(n_{2r-1}-1)} = \\ \frac{n_{2r-1}(n_{2r}-1) - (n_{2r-1}-1)(n_{2r}-2)}{(n_{2r}-1)(n_{2r-1}-1)} &= \frac{n_{2r-1}}{n_{2r}-1} - \frac{n_{2r}-2}{n_{2r}-1} \end{aligned}$$

Además, se puede comprobar que el máximo es igual a:

$$\frac{1}{n_{2r}-1} + \frac{1}{n_{2r-1}-1}$$

Luego,

$$a^t x^{T^{s-1}} = \sum_{r=1, r \neq s-1}^s \frac{n_r}{n_{r-1}} + \sum_{r=1}^{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{n_{2r}}{n_{2r-1}} - \frac{n_{2r-1}-2}{n_{2r-1}-1} \right) + \frac{n_s}{n_{s-1}} - \frac{n_{s-1}-2}{n_{s-1}-1} + \frac{2n_{s-1}-2}{n_{s-1}-1}$$

es decir,

$$\begin{aligned} a^t x^{T^{s-1}} &= \sum_{r=1}^s \frac{n_r}{n_{r-1}} + \sum_{r=1}^{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{n_{2r}}{n_{2r-1}} - \frac{n_{2r-1}-2}{n_{2r-1}-1} \right) + \frac{n_s}{n_{s-1}} = \\ &= \sum_{r=1}^{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{n_{2r}}{n_{2r-1}} + \frac{n_{2r-1}}{n_{2r-1}-1} + \frac{n_{2r}}{n_{2r-1}} - \frac{n_{2r-1}-2}{n_{2r-1}-1} \right) + \frac{2n_s}{n_{s-1}} = \\ &= \sum_{r=1}^{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{n_{2r}}{n_{2r-1}} + \frac{n_{2r-1}}{n_{2r-1}-1} + \frac{n_{2r}(n_{2r-1}-1) - (n_{2r-1})(n_{2r-1}-2)}{(n_{2r-1})(n_{2r-1}-1)} \right) + \frac{2n_s}{n_{s-1}} \stackrel{*}{=} \\ &= \sum_{r=1}^{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{n_{2r}}{n_{2r-1}} + \frac{n_{2r-1}}{n_{2r-1}-1} + \frac{1}{n_{2r-1}} + \frac{1}{n_{2r-1}-1} \right) + \frac{2n_s}{n_{s-1}} = \\ &= \sum_{r=1}^{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{n_{2r}+1}{n_{2r-1}} + \frac{n_{2r-1}+1}{n_{2r-1}-1} \right) + \frac{2n_s}{n_{s-1}} = \\ &= 1 + \sum_{r=1}^s \frac{n_r+1}{n_{r-1}} \end{aligned}$$

La igualdad marcada con * se cumple por la unicidad del máximo.

A continuación, demostramos que la desigualdad asociada a una configuración *wheelbarrow* induce una faceta del P_{SDVRP} . Supongamos que hay una desigualdad $f^t x \geq a_0$ que define una faceta del poliedro y que cumple:

$$\{x \in P_{SDVRP} \mid a^t x = a_0\} \subseteq \{x \in P_{SDVRP} \mid f^t x = a_0\}$$

y veamos que $f_e = a_e, \forall e \in E$.

La demostración de los dos casos siguientes es análoga a la que hemos hecho para las desigualdades asociadas a las configuraciones *path* pero utilizando la solución que hemos descrito para las configuraciones *wheelbarrow*.

- $f_e = a_e = 0, \forall e \in E(B_j^i)$ para cualquier pareja i, j , arbitraria pero fija, con $i = 1, \dots, s, j = 0, \dots, n_i$.

- Para cada r , $r = 1, \dots, s$ todas las aristas de la cortadura (B_j^r, B_{j+1}^r) tienen el mismo coeficiente en f , para cada j arbitrario pero fijo, con $j = 0, \dots, n_r - 1$.
- Para cualquier $i = 1, \dots, s$, $f_e = f_{e'} \forall e \in (B_j^i, B_{j+1}^i)$ y, $\forall e' \in (B_k^i, B_{k+1}^i)$ donde: $j, k \in \{0, \dots, n_i - 1\}$, $j \neq k$. Para demostrarlo basta con comparar las soluciones de las Figuras 5.17 y 5.18 siguientes teniendo en cuenta que los vectores de incidencia asociados cumplen la restricción con igualdad.

Luego, para cada i , $i = 1, \dots, s$, $f_e = \pi_i, \forall e \in (B_j^i, B_{j+1}^i)$, $j \in \{0, \dots, n_i - 1\}$. Es fácil comprobar que los tres tours (ver Figuras 5.19, 5.20 y 5.21) utilizados por Cornuéjols et al. (1985) en el Teorema 3.5 corresponden, en virtud de las hipótesis que hemos establecido sobre el número de vehículos y su capacidad, a soluciones del *SDVRP* que cumplen la restricción $a^t x \geq a_0$ con igualdad, por lo que también cumplirán $f^t x = a_0$; sean T^{i-1}, T^i y T^{i+1} dichas soluciones, sustituyendo en la restricción tenemos:

$$\begin{aligned} f^t x^{T^i} &= f^t x^{T^{i-1}} \\ f^t x^{T^i} &= f^t x^{T^{i+1}} \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} n_{i-1}\pi_{i-1} + 2(n_i - 1)\pi_i + f_{b_{n_{i-1}}^{i-1}, b_{n_i}^i} + f_{b_{n_i}^i, b_{n_{i+1}}^{i+1}} + n_{i+1}\pi_{i+1} &= \\ 2n_{i-1}\pi_{i-1} + n_i\pi_i + f_{b_{n_i}^i, b_{n_{i+1}}^{i+1}} + n_{i+1}\pi_{i+1} & \\ n_{i-1}\pi_{i-1} + 2(n_i - 1)\pi_i + f_{b_{n_{i-1}}^{i-1}, b_{n_i}^i} + f_{b_{n_i}^i, b_{n_{i+1}}^{i+1}} + n_{i+1}\pi_{i+1} &= \\ n_{i-1}\pi_{i-1} + f_{b_{n_{i-1}}^{i-1}, b_{n_i}^i} + n_i\pi_i + 2n_{i+1}\pi_{i+1} & \\ \downarrow & \\ (n_i - 2)\pi_i + f_{b_{n_{i-1}}^{i-1}, b_{n_i}^i} + f_{b_{n_i}^i, b_{n_{i+1}}^{i+1}} &= \\ n_{i-1}\pi_{i-1} + f_{b_{n_i}^i, b_{n_{i+1}}^{i+1}} & \\ (n_i - 2)\pi_i + f_{b_{n_{i-1}}^{i-1}, b_{n_i}^i} + f_{b_{n_i}^i, b_{n_{i+1}}^{i+1}} &= \\ n_{i+1}\pi_{i+1} + f_{b_{n_{i-1}}^{i-1}, b_{n_i}^i} & \end{aligned}$$

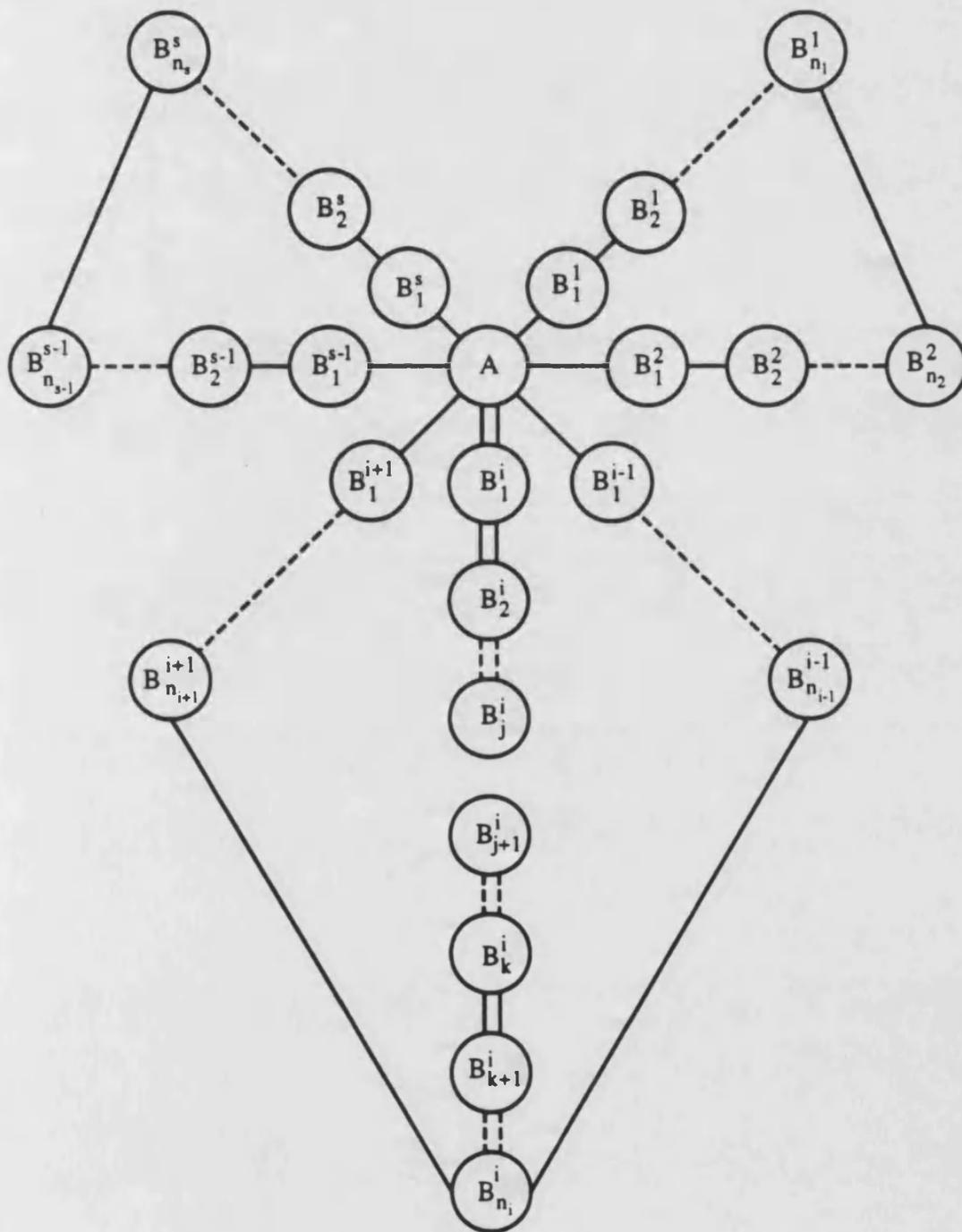


Figura 5.17: Primera solución para probar: $f_e = f_{e'}, \forall e \in (B_j^i, B_{j+1}^i), \forall e' \in (B_k^i, B_{k+1}^i)$.

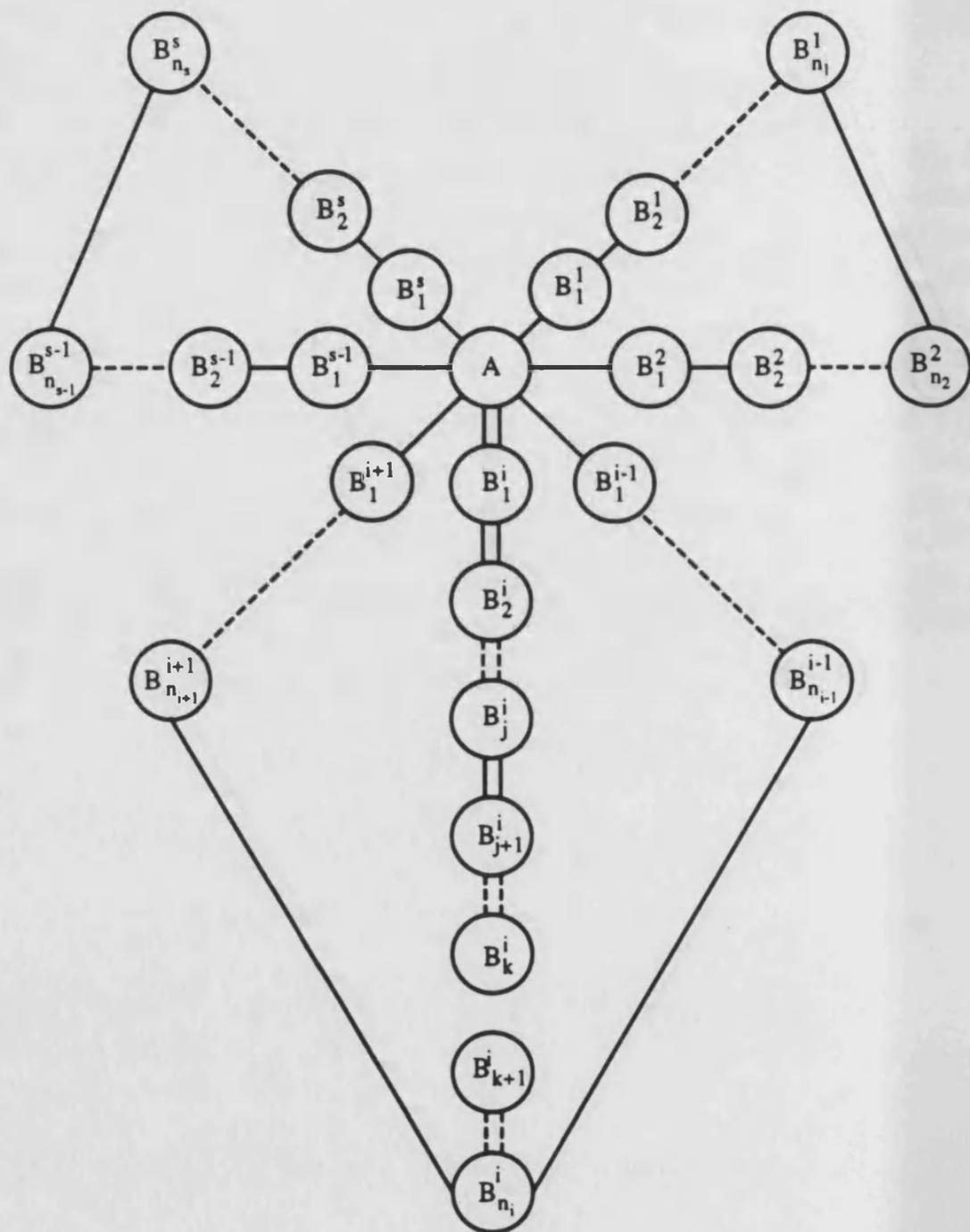


Figura 5.18: Segunda solución para probar: $f_e = f_{e'}, \forall e \in (B_j^i, B_{j+1}^i), \forall e' \in (B_k^i, B_{k+1}^i)$.

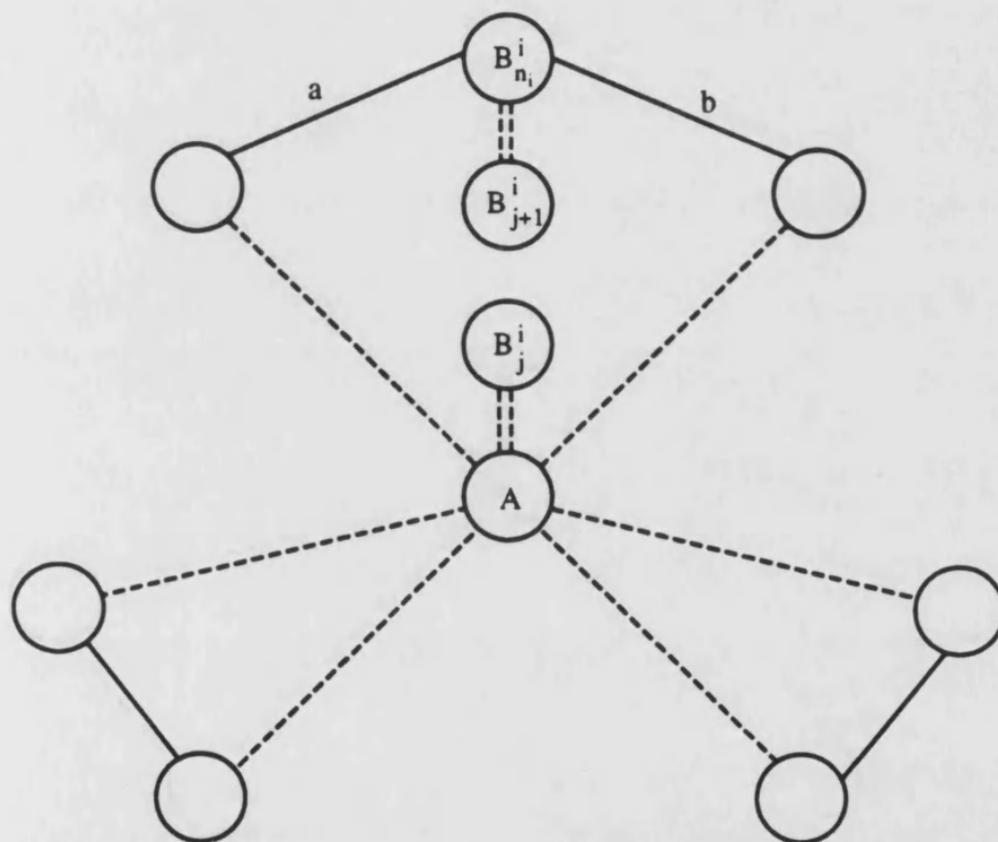


Figura 5.19: Solución T^i del *SDVRP* que cumple la desigualdad asociada a una configuración *wheelbarrow*.

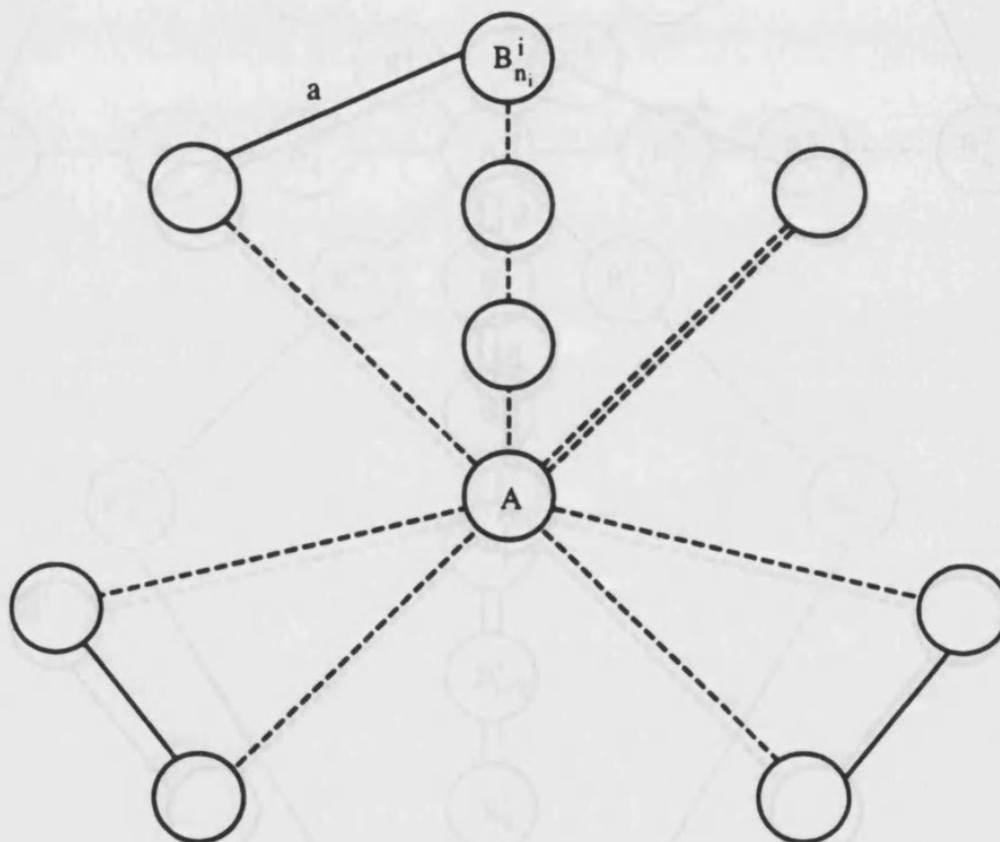


Figura 5.20: Solución T^{i+1} del $SDVRP$ que cumple la desigualdad asociada a una configuración *wheelbarrow*, $a = \int_{b_{n_i-1}^{i-1}}^{b_{n_i}^i}$.

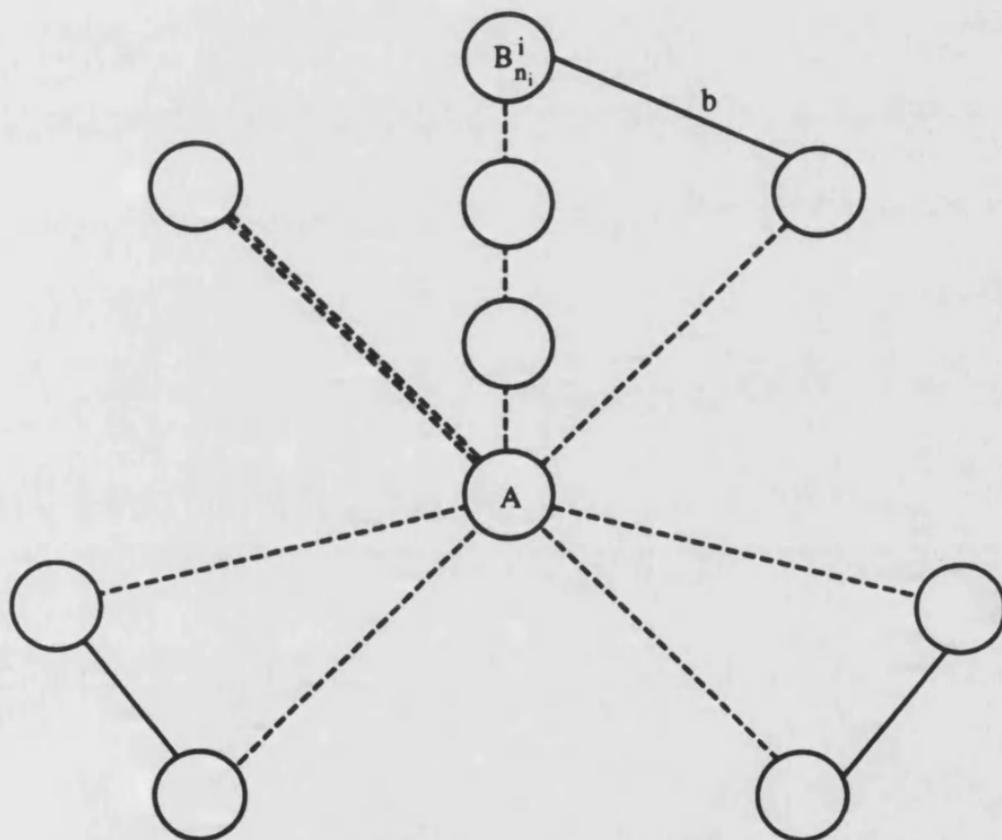


Figura 5.21: Solución T^{i-1} del *SDVRP* que cumple la desigualdad asociada a una configuración *wheelbarrow*, $b = f_{b_{n_i}^i, b_{n_{i+1}}^{i+1}}$.

Si aplicamos lo anterior para $i = 2, \dots, s - 1$ obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned}
(n_2 - 2)\pi_2 + f_{b_{n_1}^1 b_{n_2}^2} + f_{b_{n_2}^2 b_{n_3}^3} &= n_1\pi_1 + f_{b_{n_2}^2 b_{n_3}^3} \\
(n_2 - 2)\pi_2 + f_{b_{n_1}^1 b_{n_2}^2} + f_{b_{n_2}^2 b_{n_3}^3} &= n_3\pi_3 + f_{b_{n_1}^1 b_{n_2}^2} \\
&\vdots \\
(n_i - 2)\pi_i + f_{b_{n_{i-1}}^{i-1} b_{n_i}^i} + f_{b_{n_i}^i b_{n_{i+1}}^{i+1}} &= n_{i-1}\pi_{i-1} + f_{b_{n_i}^i b_{n_{i+1}}^{i+1}} \\
(n_i - 2)\pi_i + f_{b_{n_{i-1}}^{i-1} b_{n_i}^i} + f_{b_{n_i}^i b_{n_{i+1}}^{i+1}} &= n_{i+1}\pi_{i+1} + f_{b_{n_{i-1}}^{i-1} b_{n_i}^i} \\
&\vdots \\
(n_{s-1} - 2)\pi_{s-1} + f_{b_{n_{s-2}}^{s-2} b_{n_{s-1}}^{s-1}} + f_{b_{n_{s-1}}^{s-1} b_{n_s}^s} &= n_{s-2}\pi_{s-2} + f_{b_{n_{s-1}}^{s-1} b_{n_s}^s} \\
(n_{s-1} - 2)\pi_{s-1} + f_{b_{n_{s-2}}^{s-2} b_{n_{s-1}}^{s-1}} + f_{b_{n_{s-1}}^{s-1} b_{n_s}^s} &= n_s\pi_s + f_{b_{n_{s-2}}^{s-2} b_{n_{s-1}}^{s-1}}
\end{aligned}$$

cuya solución es:

$$\begin{aligned}
\pi_i &= \frac{h}{n_{i-1}} \\
f_{b_{n_i}^i b_{n_{i+1}}^{i+1}} &= \frac{h}{n_{i-1}} + \frac{h}{n_{i+1}-1} i = 1, \dots, s
\end{aligned}$$

Sustituyendo en $f^t x$ el vector de incidencia asociado a T^{s-1} y teniendo en cuenta que ha de ser igual a a_0 , tenemos:

$$f^t x^{T^{s-1}} = \sum_{r=1}^{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{n_{2r} h}{n_{2r} - 1} + \frac{n_{2r-1} h}{n_{2r-1} - 1} + \frac{h}{n_{2r} - 1} + \frac{h}{n_{2r-1} - 1} \right) + \frac{2n_s h}{n_s - 1}$$

de donde,

$$f^t x^{T^{s-1}} = h \left(1 + \sum_{r=1}^s \frac{n_r + 1}{n_r - 1} \right) = h a_0 = a_0$$

luego, $h = 1$; los coeficientes de las aristas que estamos considerando coinciden en a y en f .

- Veamos que $f_e = a_e$ para cualquier arista *cruzada*, i.e., $e \in (B_j^i, B_p^r)$ con $i \neq r$, $1 \leq j \leq n_i$ y $1 \leq p \leq n_r$.

No hay pérdida de generalidad en hacer la demostración para una arista de la cortadura $e \in (B_j^{s-2}, B_p^{s-1})$. Veamos que la solución del *SDVRP* que damos en la Figura 5.22, $T^{s'}$, cumple $a^t x^{T^{s'}} = a_0$ con igualdad, por lo que también cumplirá $f^t x^{T^{s'}} = a_0$.

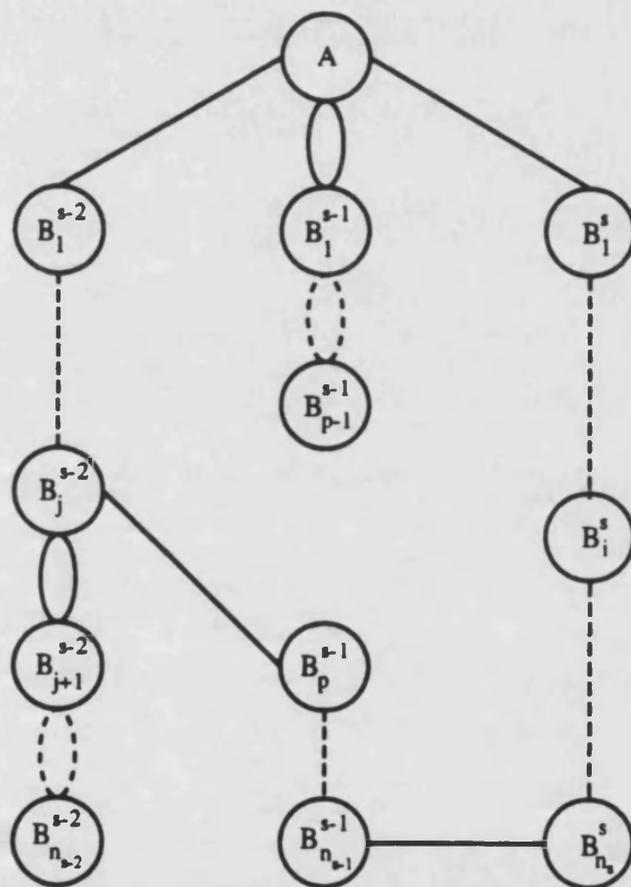


Figura 5.22: Solución T^s .

En efecto:

$$\begin{aligned}
a^t x^{T''} &= \sum_{r=1}^{s-3} \frac{n_r+1}{n_{r-1}} + \frac{n_{s-2}-j}{n_{s-2}-1} + \frac{n_{s-2}}{n_{s-2}-1} + \\
&\frac{j}{n_{s-2}-1} - \frac{p-2}{n_{s-1}-1} + \frac{2(p-1)}{n_{s-1}-1} + \frac{n_{s-1}-p}{n_{s-1}-1} + \\
&\frac{1}{n_{s-1}-1} + \frac{1}{n_{s-1}} + \frac{n_s}{n_{s-1}} = \\
&\sum_{r=1}^{s-3} \frac{n_r+1}{n_{r-1}} + \frac{n_{s-2}-j+n_{s-2}+j}{n_{s-2}-1} + \frac{-p+2+2p-2+n_{s-1}-p+1}{n_{s-1}-1} + \frac{1+n_s}{n_{s-1}} = \\
&\sum_{r=1}^{s-3} \frac{n_r+1}{n_{r-1}} + \frac{n_{s-2}-1}{n_{s-2}-1} + \frac{n_{s-1}-1}{n_{s-1}-1} + \frac{1+n_s}{n_{s-1}} = \\
&\sum_{r=1}^{s-3} \frac{n_r+1}{n_{r-1}} + \frac{n_{s-2}+1+n_{s-2}-1}{n_{s-2}-1} + \frac{n_{s-1}+1}{n_{s-1}-1} + \frac{n_s+1}{n_{s-1}} = \\
&1 + \sum_{r=1}^s \frac{n_r+1}{n_{r-1}} = a_0
\end{aligned}$$

como consecuencia,

$$f^t x^{T''} - a^t x^{T''} = f_e - a_e = 0 \longrightarrow f_e = a_e$$

Y, por tanto, las desigualdades asociadas a las configuraciones *wheelbarrow* inducen facetas del P_{SDVRP} .

Proposición 5.15 *Dada una configuración "bicycle" 2-regular donde, $s = 3$ y el depósito pertenece a B_j^i para algún $i \in \{1, 2, 3\}$ y algún $j \in \{1, 2\}$, si $\lceil \frac{d(V \setminus P_i)}{Q} \rceil = 2$ la desigualdad asociada, $a^t x \geq a_0$, está dominada por $a^t x \geq a_0 + 2$.*

Demostración

Como el depósito pertenece a B_j^i y $\lceil \frac{d(V \setminus P_i)}{Q} \rceil = 2$, para servir la demanda de $V \setminus P_i$ necesitamos dos vehículos; cada uno de ellos debe atravesar la cortadura (P_i, \bar{P}_i) dos veces, por lo que, en cualquier solución T del $SDVRP$ debe haber al menos cuatro aristas que pertenezcan a dicha cortadura.

Consideremos el grafo inducido por las aristas de T ; por un resultado básico de teoría de grafos (Capítulo 1), sabemos que:

$$\sum \text{grados de los vértices} = 2 \text{ número de aristas}$$

luego, en T habrá al menos siete aristas ya que:

$$\sum \text{grados de los vértices} \geq 14$$

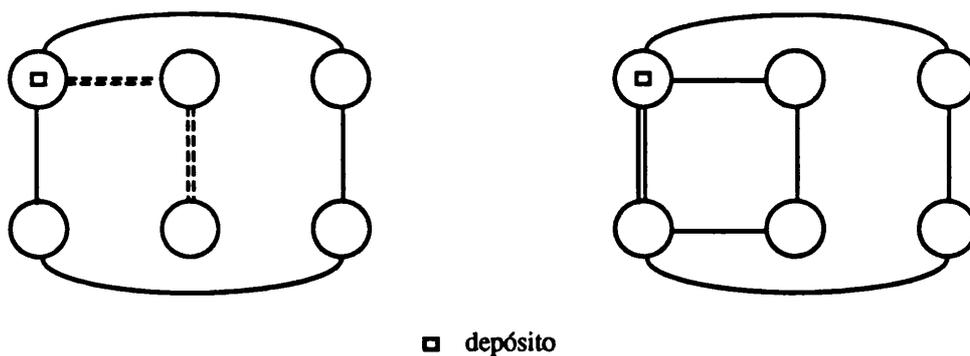


Figura 5.23: Ejemplos.

pues el grado del supernodo que contiene al depósito B_j^i es al menos cuatro y el de los otros cinco supernodos de la configuración debe ser al menos dos.

Hemos dicho que cuatro de ellas deben pertenecer a la cortadura (P_i, \bar{P}_i) y, como el coeficiente en a de estas aristas es como mínimo igual a dos, tenemos,

$$\sum_{e \in T \cap (P_i, \bar{P}_i)} a_e x_e^T \geq 8$$

Si la desigualdad fuese soporte debería cumplirse lo siguiente:

$$a^t x^T = \sum_{e \in E(P_i)} a_e x_e^T + \sum_{e \in T \cap (P_i, \bar{P}_i)} a_e x_e^T + \sum_{e \in E(\bar{P}_i)} a_e x_e^T = a_0 = 10$$

Se necesitan como mínimo tres aristas más para poder completar una solución del *SDVRP*. Como para estas aristas $a_e \geq 1$, tenemos que:

$$a^t x^T \geq 8 + 3 = 11 > a_0$$

◇

Nota 5.3 Si aumentamos el RHS de la desigualdad en dos unidades los siguientes ejemplos muestran que hay casos en los que la desigualdad es soporte.

Nota 5.4 ¿Podemos generalizar la demostración anterior a una configuración “bicycle” s -regular con $s \geq 5$?

La respuesta es que no, ya que:

$$\text{número aristas} = \frac{\sum \text{grados vértices}}{2} \geq \frac{4+2(2s-1)}{2} = 2 + (2s - 1) = 2s + 1$$

$$a^t x^T \geq 8 + ((2s + 1) - 4) = 2s + 5$$

y como $a_0 = 3s + 1$ tenemos que:

$$2s + 5 > 3s + 1 \Leftrightarrow 4 > s$$

5.4 Desigualdades válidas.

En esta sección presentamos distintos tipos de desigualdades que sabemos son válidas para el P_{SDVRP} , sin embargo, se desconoce si inducen o no facetas del mismo. Todas ellas se obtuvieron, por primera vez, para poliedros asociados a otros problemas; por ejemplo, las desigualdades *comb* y las *clique-tree* se descubrieron estudiando el P_{TSP} y, las restricciones de capacidad generalizada, surgieron al estudiar el P_{CVRP} . En la mayoría de los casos, tampoco se sabe si inducen o no facetas de los poliedros “originales”.

5.4.1 Desigualdades “comb”.

Cornuéjols y Harche (1993) [24] generalizan las desigualdades *comb* del TSP (Chvátal, 1973 [20]) para el $CVRP$ y demuestran su validez para este problema. La desigualdad que ellos definen está expresada de la forma $a^t x \leq a_0$, por lo que, como ya vimos en la Proposición 5.5, no puede ser una desigualdad válida del P_{SDVRP} . Sin embargo, transformándola adecuadamente podemos obtener una desigualdad que sí va a ser válida para nuestro problema.

Dados $S, T \subseteq V$, denotamos por:

$$\begin{aligned} x(\delta(S)) &= \sum_{e \in (S, \bar{S})} x_e \\ x(E(S)) &= \sum_{e \in E(S)} x_e \\ x((S, T)) &= \sum_{e \in (S, T)} x_e \end{aligned}$$

Entonces:

$$x(\delta(S)) + 2x(E(S)) = \sum_{i \in S} x(\delta(i))$$

Definición 5.3 Sea $G = (V, E)$ un grafo completo no vacío y W_0, W_1, \dots, W_s subconjuntos de vértices de V no vacíos que cumplen:

1. $s \geq 3$ y entero,
2. $|W_i \setminus W_0| \geq 1$, $i = 1, 2, \dots, s$,
3. $|W_i \cap W_0| \geq 1$, $i = 1, 2, \dots, s$,

$$4. |W_i \cap W_j| = 0, 1 \leq i < j \leq s,$$

A las siguientes desigualdades las llamaremos “*comb generalizadas*” para el *SDVRP*:

$$\sum_{i=0}^s x(\delta(W_i)) \geq 3s + 1$$

Nota 5.5 Las restricciones “*comb*” del *TSP* son:

$$\sum_{i=0}^s x(E(W_i)) \leq \sum_{i=0}^s |W_i| - \frac{3s + 1}{2}$$

y están definidas a partir de una configuración como la que acabamos de dar en la definición anterior.

Veamos cómo, aplicando simplemente la relación que hemos dado al principio de esta sección, podemos obtener las *comb generalizadas* del *SDVRP* a partir de las *comb* del *TSP*. Este procedimiento ha sido utilizado, entre otros, por Fleischmann (1988) [37] con la finalidad de obtener nuevas desigualdades válidas para el *R-TSP* a partir de las ya conocidas para el *TSP*.

Como en cualquier solución del *SDVRP* el grado de cualquier vértice es al menos dos, para cada $i = 0, 1, \dots, s$, podemos afirmar lo siguiente:

$$x(\delta(W_i)) + 2x(E(W_i)) = \sum_{v \in W_i} x(\delta(v)) \geq 2|W_i|$$

de donde:

$$x(E(W_i)) \geq |W_i| - \frac{x(\delta(W_i))}{2}$$

Sumando a ambos lados de la desigualdad obtenemos:

$$\sum_{i=0}^s x(E(W_i)) \geq \sum_{i=0}^s |W_i| - \sum_{i=0}^s \frac{x(\delta(W_i))}{2}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\sum_{i=0}^s |W_i| - \frac{3s+1}{2}}_{\text{comb}} &\geq \sum_{i=0}^s x(E(W_i)) \geq \sum_{i=0}^s |W_i| - \sum_{i=0}^s \frac{x(\delta(W_i))}{2} \\
 &\downarrow \\
 -\frac{3s+1}{2} &\geq -\sum_{i=0}^s \frac{x(\delta(W_i))}{2} \\
 &\downarrow \\
 \underbrace{\sum_{i=0}^s x(\delta(W_i))}_{\text{comb generalizada}} &\geq 3s + 1
 \end{aligned}$$

Proposición 5.16 *Las desigualdades “comb generalizadas” son válidas para el PSDVRP.*

Demostración

Si tomamos:

$$B_1^i = W_0 \cap W_i, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

$$B_2^i = W_i \setminus W_0, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

$$A = W_0 \setminus \bigcup_{i=1}^s W_i, \quad \text{cuando } W_0 \setminus \bigcup_{i=1}^s W_i \neq \emptyset \text{ y,}$$

$$Z = V \setminus \bigcup_{i=1}^s W_i, \quad \text{cuando } \bigcup_{i=0}^s W_i \neq V$$

obtenemos una configuración *path*, una *wheelbarrow* ó una *bicycle 2-regular* cuya restricción asociada, $a^t x \geq a_0$, coincide con la *comb generalizada*. Véase la Figura 5.24.

El término independiente,

$$a_0 = 1 + \sum_{i=1}^s \frac{n_i + 1}{n_i - 1} = 3s + 1$$

ya que, en el caso particular de una configuración *2-regular* $n_i = 2, \forall i = 1, 2, \dots, s$, luego, los términos independientes de ambas desigualdades coinciden.

Veamos que también coinciden los coeficientes.

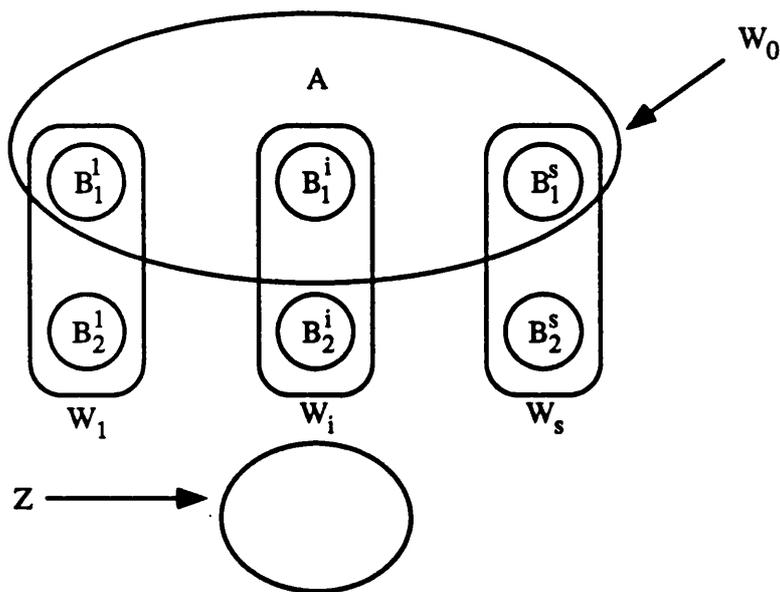


Figura 5.24: Configuración *Comb generalizada*.

Como x_e indica el número de veces que se utiliza la arista e en una solución del *SDVRP*, para determinar el coeficiente de cualquier arista en $\sum_{i=0}^s x(\delta(W_i))$ sólo tenemos que contar el número de cortaduras (W_i, \bar{W}_i) en las que dicha arista aparece, este número coincidirá con su coeficiente. La Tabla 5.1 recoge estos valores, que coincide con los coeficientes de la Definición 5.2.

Habiendo probado esta equivalencia tenemos demostrada la proposición y algunos resultados referentes a si definen o no facetas del poliedro, ya que, precisamente de esto es de lo que trataba la sección anterior. \diamond

$e \in \text{CONJUNTO}$	CORTADURAS EN DÓNDE APARECE	a_e
$E(A)$	0	0
$E(Z)$	0	0
$E(B_j^i)$	0	0
(A, Z)	$x(\delta(W_0))$	1
(A, B_1^i)	$x(\delta(W_i))$	1
(B_2^i, Z)	$x(\delta(W_i))$	1
(A, B_2^i)	$x(\delta(W_i)) \quad x(\delta(W_0))$	2
(B_1^i, Z)	$x(\delta(W_i)) \quad x(\delta(W_0))$	2
$(B_1^i, B_1^j) \quad i \neq j$	$x(\delta(W_i)) \quad x(\delta(W_j))$	2
$(B_2^i, B_2^j) \quad i \neq j$	$x(\delta(W_i)) \quad x(\delta(W_j))$	2
$(B_1^i, B_2^j) \text{ ó a } (B_1^i, B_2^i) \quad i \neq j$	$x(\delta(W_i)) \quad x(\delta(W_j)) \quad x(\delta(W_0))$	3

Tabla 5.1: Coeficientes de una desigualdad $a^t x \geq a_0$ comb generalizada.

5.4.2 Desigualdades “clique tree”.

Las desigualdades *clique tree*, Grötschel y Padberg (1985) [47], se definen a partir de unos subconjuntos de vértices H_1, H_2, \dots, H_r (los *mangos*) y T_1, T_2, \dots, T_s (los *dientes*) que cumplen:

1. $T_i \cap T_j = \emptyset$, para cualquier pareja $i, j, i \neq j$,
2. $H_i \cap H_j = \emptyset$, para cualquier pareja $i, j, i \neq j$,
3. $2 \leq |T_i| \leq n - 3, \forall i = 1, 2, \dots, s$ y $|T_i \setminus \bigcup_{j=1}^s H_j| \geq 1$,
4. Cada mango intersecta con un número impar de dientes que, como mínimo, es tres.
5. Si $|T_j \cap H_i| \neq \emptyset$, la intersección es una articulación del *clique-tree*, es decir, si eliminamos los vértices de la intersección se obtiene una componente conexa más.

La desigualdad *clique-tree* del TSP es:

$$\sum_{i=1}^r x(E(H_i)) + \sum_{j=1}^s x(E(T_j)) \leq \sum_{i=1}^s |H_i| + \sum_{j=1}^s (|T_j| - t_j) - \frac{(s+1)}{2}$$

donde t_j es el número de mangos que intersectan con el diente T_j .

Al igual que ocurría con las desigualdades *comb* estas restricciones no pueden ser válidas para el *SDVRP* ya que, son desigualdades del tipo " \leq "; Fleischmann (1988) [37] las transforma aplicando la relación que dimos en la sección anterior y obtiene unas desigualdades válidas para el *R-TSP*. Como cualquier solución del *SDVRP* es una solución del *R-TSP*, tenemos garantizado que las desigualdades *clique tree* transformadas también serán válidas para nuestro poliedro. Vamos a hacer esta transformación y expresaremos la desigualdad de la forma adecuada para que se cumpla la validez.

Dada una desigualdad *clique-tree*,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r x(E(H_i)) + \sum_{j=1}^s x(E(T_j)) &\leq \sum_{i=1}^r |H_i| + \sum_{j=1}^s (|T_j| - t_j) - \frac{(s+1)}{2} \\ &\quad \downarrow \\ -2 \sum_{i=1}^r x(E(H_i)) - 2 \sum_{j=1}^s x(E(T_j)) &\geq \\ -2 \sum_{i=1}^r |H_i| - 2 \sum_{j=1}^s (|T_j| - t_j) + (s+1) & \end{aligned}$$

si aplicamos la relación $x(\delta(S)) + 2x(E(S)) = \sum_{v \in S} x(\delta(v))$ a cada uno de los mangos y a cada uno de los dientes, después de sumar y despejar obtenemos:

$$\begin{aligned} -2 \sum_{i=1}^r x(E(H_i)) &= \sum_{i=1}^r x(\delta(H_i)) - \sum_{i=1}^r \sum_{v \in H_i} x(\delta(v)) \\ -2 \sum_{j=1}^s x(E(T_j)) &= \sum_{j=1}^s x(\delta(T_j)) - \sum_{j=1}^s \sum_{v \in T_j} x(\delta(v)) \end{aligned}$$

Estas desigualdades pueden sustituirse en la desigualdad anterior para obtener:

$$\sum_{i=1}^r x(\delta(H_i)) + \sum_{j=1}^s x(\delta(T_j)) \geq \begin{cases} \sum_{i=1}^r \sum_{v \in H_i} x(\delta(v)) + \\ \sum_{j=1}^s \sum_{v \in T_j} x(\delta(v)) \\ -2 \sum_{i=1}^r |H_i| - 2 \sum_{j=1}^s (|T_j| - t_j) + (s+1) \end{cases}$$

y, como el grado de cualquier vértice en una solución del *SDVRP* debe ser al menos dos nos queda:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{v \in H_i} x(\delta(v)) + \sum_{j=1}^s \sum_{v \in T_j} x(\delta(v)) \geq \begin{cases} 2 \sum_{i=1}^r |H_i| + 2 \sum_{j=1}^s |T_j| \\ -2 \sum_{i=1}^r |H_i| - 2 \sum_{j=1}^s (|T_j| - t_j) + (s+1) \end{cases}$$

Es decir,

$$\sum_{i=1}^r x(\delta(H_i)) + \sum_{j=1}^s x(\delta(T_j)) \geq 2 \sum_{j=1}^s t_j + s + 1 = 2r + 2s - 2 + s + 1 = 2r + 3s - 1$$

Nótese que $\sum_{j=1}^s t_j$ es el número total de intersecciones ya que t_j indica el número de mangos que intersectan con el diente T_j y dos dientes distintos intersectan, a lo sumo, con un mismo mango. Si sustituimos cada mango y cada diente por un único vértice y por cada intersección ponemos una arista entre el mango y el diente asociado obtenemos un árbol (un grafo sin ciclos y conexo) en el que las aristas representan precisamente el número de intersecciones en el grafo asociado a una configuración *clique-tree*, como el número de aristas en un árbol es el número total de vértices menos uno, el número total de intersecciones será $r + s - 1$.

5.4.3 Desigualdades “path con capacidades”.

Un nuevo tipo de desigualdades para el *GVRP* y el *CVRP*, en las que juega un papel fundamental la capacidad de los vehículos, fué introducida por Cornuéjols y Harche (1993) [24]. No tiene sentido definirlas en el contexto del *TSP*, sin embargo vamos a comprobar que sí que son válidas para nuestro problema. Como siempre, supondremos que estamos trabajando con un grafo $G = (V, E)$ completo por lo que, no es necesario establecer algunas de las condiciones necesarias dadas por Cornuéjols y Harche para definir estas configuraciones.

Definición 5.4 Una configuración “path con capacidades” se define a partir de un entero $s \geq 2K + 1$ y de una partición del conjunto de vértices V en subconjuntos A, R, Z, B_1^i , para $i = 2K, \dots, s$ y B_2^i para $i = 1, \dots, s$ que, estableciendo la notación:

$$\begin{aligned} A &\equiv B_0^i \text{ para } i = 1, \dots, s \\ R &\equiv B_1^i \text{ para } i = 1, \dots, 2K - 1 \text{ y,} \\ Z &\equiv B_3^i \text{ para } i = 1, \dots, s, \end{aligned}$$

cumplen:

$$0 \in R, \left\lceil \frac{d(V \setminus (R \cup B_2^i))}{Q} \right\rceil = K, \text{ para } i = 1, \dots, 2K - 1.$$

Definimos la restricción asociada a una configuración "path con capacidades" como aquella desigualdad $a^t x \geq a_0$ cuyos coeficientes son:

$$a_e = \begin{cases} 1 & \text{para } e \in (A, Z), \text{ o} \\ & e \in (B_j^i, B_{j+1}^i) \text{ } i = 1, \dots, s, j = 0, 1, 2 \\ 2 & \text{para } e \in (B_j^i, B_{j+2}^i) \text{ } i = 1, \dots, s, j = 0, 1, \text{ o} \\ & e \in (B_j^i, B_j^h), \text{ } i \neq h \text{ y } j = 1, 2 \\ 3 & \text{para } e \in (B_1^i, B_2^h), \text{ } i \neq h \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y el término independiente es:

$$a_0 = 3s - 2K + 3$$

Si $Z = \emptyset$, hablaremos de configuraciones (restricciones asociadas) "wheelbarrow con capacidades" y si $A = Z = \emptyset$, de configuraciones (restricciones) "bicycle con capacidades".

La demostración del resultado que damos a continuación es exactamente la misma que la que dan Cornuéjols y Harche en su artículo.

Proposición 5.17 Las desigualdades asociadas a las configuraciones "path con capacidades" son válidas para el PSDVRP.

Demostración

Sea T una solución del SDVRP que minimiza el lado izquierdo de una desigualdad $a^t x \geq a_0$ asociada a una configuración path con capacidades.

Si en T hay alguna arista e con coeficiente $a_e > 1$, es decir, $a_e = 2$ o $a_e = 3$, siempre podemos conseguir otra solución T' que sigue minimizando el término de la izquierda de la desigualdad pero en la que las únicas aristas que se utilizan tienen coeficiente $a_e \leq 1$.

En efecto, las únicas aristas cuyo coeficiente vale 2 pertenecen a (B_j^i, B_{j+2}^i) , $i = 1, \dots, s, j = 0, 1, 2$, o a (B_j^i, B_j^h) $i \neq h$ y $j = 1, 2$. En el primer caso siempre

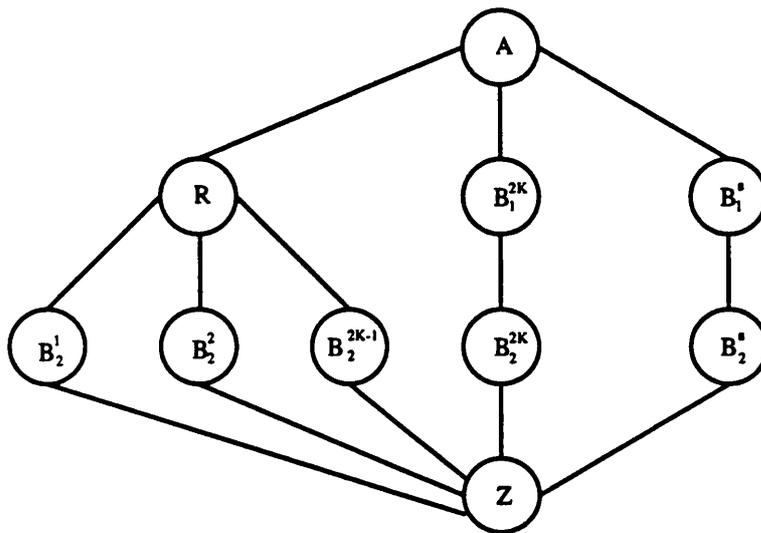


Figura 5.25: Configuración *path* con capacidades.

podemos sustituirla por una arista que va de B_j^i a B_{j+1}^i más otra que va de B_{j+1}^i a B_{j+2}^i . Si la arista pertenece a (B_j^i, B_j^h) , con $j = 1$, la sustituiremos por una que va de B_1^i a A más otra de A a B_1^h y, si $j = 2$, por una de B_2^i a Z más otra de Z a B_2^h .

Si la arista tiene un coeficiente igual a 3 es porque pertenecerá a (B_1^i, B_2^h) , en ese caso la sustituiremos por un camino $B_1^i - A - B_1^h - B_2^h$

A partir de este momento supondremos que $a_e \leq 1, \forall e \in T$.

Como los subconjuntos B_1^i, B_2^i y $B_1^i \cup B_2^i$ deben cumplir las restricciones de eliminación de subtour para cada $i \in \{2K, \dots, s\}$ podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} x^T(\delta(B_1^i)) &= x^T((B_1^i, B_2^i)) + x^T((A, B_1^i)) \geq 2 \\ x^T(\delta(B_2^i)) &= x^T((B_1^i, B_2^i)) + x^T((Z, B_2^i)) \geq 2 \\ x^T(\delta(B_1^i \cup B_2^i)) &= x^T((B_1^i, A)) + x^T((B_2^i, Z)) \geq 2 \end{aligned}$$

Sumando a ambos lados de la desigualdad obtenemos:

$$\begin{aligned} 2x^T((B_1^i, B_2^i)) + 2x^T((B_1^i, A)) + 2x^T((B_2^i, Z)) &\geq 6 \\ &\downarrow \\ x^T((B_1^i, B_2^i)) + x^T((B_1^i, A)) + x^T((B_2^i, Z)) &\geq 3 \end{aligned}$$

$\forall i = 2K, \dots, s$.

Además, para $i = 1, \dots, 2K - 1$,

$$\begin{aligned} x^T((\delta(B_2^i))) &\geq 2 \\ &\downarrow \\ x^T((B_2^i, Z)) + x^T((B_2^i, R)) &\geq 2 \end{aligned}$$

Y, sumando $\forall i = 1, \dots, 2K - 1, 2K, \dots, s$ obtenemos:

$$\begin{aligned} a^t x^T &\geq 3(s - 2K + 1) + 2(2K - 1) + x^T(A, Z) + x^T(A, R) \\ &\downarrow \\ a^t x^T &\geq 3s - 2K + 1 + x^T((A, Z)) + x^T((A, R)) \end{aligned}$$

Como el depósito pertenece a R , si para algún B_2^i , $i = 1, \dots, 2K - 1$ se cumple que $x^T(\delta(B_2^i)) > 2$ necesariamente $x^T(\delta(B_2^i)) \geq 4$ y entonces,

$$a^t x^T \geq 3s - 2K + 1 + x^T(A, Z) + x^T((A, R)) + 2 \geq 3s - 2K + 3$$

luego T cumple la desigualdad.

Si, por el contrario, $x^T(\delta(B_2^i)) = 2$, $\forall i = 1, \dots, 2K - 1$, necesariamente $x^T((A, R)) > 0$. En efecto, supongamos que no es cierto, es decir, que $x^T((A, R)) = 0$ y llegaremos a una contradicción.

Como $\lceil \frac{d(R \cup B_2^i)}{Q} \rceil = K$, $i = 1, \dots, 2K - 1$, de $R \cup B_2^i$ deben salir necesariamente $2K$ aristas, como B_2^i sólo es incidente con dos $\forall i$ y estamos suponiendo que las únicas aristas que se utilizan en T son aquellas cuyo coeficiente es menor o igual que 1, necesariamente cada una de las rutas asociadas a los K vehículos deben entrar y salir de R utilizando un B_2^i distinto cada vez, cada ruta atraviesa al menos dos de estos B_2^i 's, como hay $2K - 1$ conjuntos distintos a lo sumo podemos tener $K - 1$ rutas distintas lo que contradice que el mínimo número de vehículos necesario sea K ; por tanto $x^T((A, R))$ debe ser mayor estricto que cero.

Si $x^T((A, R)) \geq 2$ entonces,

$$a^t x^T \geq 3s - 2K + 1 + x^T((A, Z)) + x^T((A, R)) \geq 3s - 2K + 3$$

y el resultado se cumple.

Si $x^T((A, R)) = 1$ entonces, como $x^T(\delta(A)) \geq 2$ y par, necesariamente $x^T((A, Z)) \geq 1$ y ya estaría demostrado el resultado o,

$$x^T((A, B_1^i)) + x^T((B_1^i, B_2^i)) + x^T((B_2^i, Z)) \geq 4$$

para algún $i = 2K, \dots, s$ y la desigualdad también será válida. \diamond

5.4.4 Restricciones de capacidad generalizadas.

Las restricciones que presentamos en esta sección son un caso particular de las *restricciones de capacidad generalizadas* introducidas por Harche y Rinaldi (1991) [51] para el *CVRP*.

Sean $\Omega = \{W_i, i \in I\}$ una partición del conjunto $V \setminus \{0\}$ e $I' \subseteq I$ el conjunto de índices de aquellos subconjuntos W_i cuya demanda es mayor estricto que uno (son, en realidad, los vértices cuya demanda puede ser abastecida entre varios vehículos). Definimos $r(\Omega)$ como la solución del problema de *Bin Packing* en el que la capacidad de las cajas es igual a Q y el conjunto de ítems y sus pesos se definen de la siguiente manera, para cada W_i , con $i \in I$:

- si $d(W_i) \leq Q$, incluimos un ítem de peso $d(W_i)$
- en otro caso, incluimos $\lceil \frac{d(W_i)}{Q} \rceil - 1$ ítems de peso Q y otro de peso,

$$d(W_i) - \left(\lceil \frac{d(W_i)}{Q} \rceil - 1 \right) Q$$

Entonces, como la siguiente desigualdad es válida para el *CVRP*, también será válida para el *SDVRP*:

$$\sum_{i \in I'} x(\delta(W_i)) \geq 2 \sum_{i \in I'} \lceil \frac{d(W_i)}{Q} \rceil + 2(r(\Omega) - K)$$

ya que, como los vértices de demanda mayor estricto que uno se pueden servir utilizando varios vehículos, podemos tratarlos como si fuesen subconjuntos de vértices del *CVRP*.

Nótese que si $r(\Omega) < K$, estas restricciones están dominadas por las restricciones de capacidad. En otro caso, podemos explicar la validez de la siguiente manera: suponiendo que $d(W_i) \leq Q$, $\forall i \in I'$, lo cual no supone pérdida de generalidad alguna, si $r(\Omega) = K + 1$ es porque, al menos uno de los conjuntos de vértices, sea W_j , se visita al menos dos veces, luego $x(\delta(W_j)) \geq 4$. Intuitivamente lo que significa es que por cada unidad en la que $r(\Omega)$ excede a K , al menos una de las cortaduras asociadas a los W_i debe ser atravesada dos veces más ya que, la demanda de W_i deberá abastecerse entre dos vehículos o más.

Aplicando la misma idea a un subconjunto W de $V \setminus \{0\}$, obtenemos un caso especial de las desigualdades "path-bin" introducidas por Augerat y Pochet (1995) [8] para el *CVRP*, las cuales, a su vez, son una especialización de las de capacidad generalizadas.

Dado $W \subseteq V \setminus \{0\}$, sean $\Omega = \{W_i, i \in I\}$ una partición de W e I' definido como antes. Si $r(W, \Omega)$ es la solución del problema de *Bin-Packing* definido sobre Ω , se obtiene la siguiente desigualdad:

$$x(\delta(W)) + \sum_{i \in I'} x(\delta(W_i)) \geq 2 \sum_{i \in I'} \lceil \frac{d(W_i)}{Q} \rceil + 2r(W, \Omega)$$

La validez de estas desigualdades para el *SDVRP*, al igual que ocurría con las anteriores, deriva directamente del hecho de que son válidas para subconjuntos de vértices del *CVRP*.

El siguiente ejemplo ayuda a entender mejor la idea que dió origen a estas restricciones y permite ilustrar, brevemente, cual sería la metodología en la demostración de la validez.

Ejemplo 5.2 Sea $W \subseteq V \setminus \{0\}$ y $\{W_1, \dots, W_t\}$ una partición de dicho conjunto, donde los W_i cumplen:

- $d(W_i) \leq Q$, $\forall i = 1, \dots, t$
- $d(W_i) + d(W_j) > Q$, $\forall i \neq j$
- $\lceil \frac{d(W)}{Q} \rceil = t - 1$

la desigualdad para una instancia con estas características sería:

$$x(\delta(W)) + \sum_{i=1}^t x(\delta(W_i)) \geq 2(t-1) + 2t + 2$$

Evidentemente cualquier solución el SDVRP debe cumplir la restricción anterior. La demostración es muy sencilla. Las restricciones de capacidad asociadas a cualquier subconjunto de vértices nos permiten deducir lo siguiente:

$$\begin{aligned} x(\delta(W)) &\geq 2(t-1) \\ x(\delta(W_i)) &\geq 2, \forall i = 1, \dots, t \end{aligned}$$

sumando para todo i :

$$x(\delta(W)) + \sum_{i=1}^t x(\delta(W_i)) \geq 2(t-1) + 2t$$

Ahora bien, si $x(\delta(W_i)) = 2$ para todos y cada uno de los subconjuntos W_i , como $d(W_i) + d(W_j) > Q$, podemos asegurar que dos subconjuntos cualesquiera no pueden abastecerse completamente con un único vehículo y por lo tanto tenemos garantizado que en W entran exactamente t vehículos, luego:

$$x(\delta(W)) \geq 2(t-1) + 2$$

Si hay al menos un i de manera que $x(\delta(W_i)) > 2$ la paridad de las cortaduras obliga a que $x(\delta(W_i)) \geq 4$, en cualquier caso concluimos que la restricción de capacidad generalizada así definida es válida para el PSDVRP.

5.5 Conclusiones.

Como indicamos al final del Capítulo 4, todos los resultados que hemos visto en este capítulo, siguen siendo válidos para el PSDVRP cuando trabajamos con una flota ilimitada de vehículos.

Nótese que, siempre que existan, podremos eliminar las hipótesis relativas a la necesidad de tener un número de vehículos superior a $\lceil \frac{d(V)}{Q} \rceil$, en todos aquellos resultados en los que las hayamos establecido. El carácter ilimitado de la flota es lo que nos permite hacer esta apreciación.

Por otro lado, queremos hacer notar que todas las desigualdades del tipo " \geq " que sean válidas para el *CVRP* tienen una probabilidad muy alta de ser también válidas para el Problema de Rutas de Vehículos con Demanda Compartida. Esto es lo que ocurre con las restricciones de capacidad generalizadas estudiadas en la última sección. Tendremos por tanto que tener muy presentes todos los trabajos relacionados con el *PCVRP* que aparezcan en el futuro, sin descuidar por ello cualquier estudio que sea específico del *PSDVRP*.

Capítulo 6

Desigualdades “2-matching” generalizadas.

En este capítulo presentamos una serie de desigualdades válidas para el *SDVRP* que han sido deducidas, directamente, a partir de las desigualdades *2-matching generalizadas* introducidas por Araque (1989) [2] para el *CVRP* con demandas unitarias.

En el problema estudiado por Araque, la capacidad de los vehículos indica el número máximo de clientes que pueden ser servidos por un único vehículo; explotando esta idea y, teniendo en cuenta que las desigualdades válidas para nuestro problema deben estar expresadas de la forma $a^t x \geq a_0$, hemos obtenido restricciones diferentes dependiendo de la capacidad del vehículo.

Si Q es tal que tres clientes cualesquiera pueden servirse con un único vehículo, pero nunca cuatro, obtenemos unas restricciones que no han aparecido todavía en el desarrollo de esta memoria y demostramos que inducen facetas del P_{SDVRP} . Estas desigualdades dejan de ser válidas cuando Q aumenta de manera que es posible servir completamente a cuatro clientes cualesquiera, pero no a cinco o, a cinco, pero nunca a seis.

Si aumentamos la capacidad del vehículo hasta que éste pueda servir cualquier subconjunto de seis clientes, al menos, obtenemos otro tipo de restricciones que, en realidad, resultan ser desigualdades asociadas a configuraciones *path* o a configuraciones *wheelbarrow*. Araque también obtiene diferentes desigualdades dependiendo de si $Q = 3$ o $Q \geq 6$ pero, no da ningún resultado

para los casos intermedios, $Q = 4$ y $Q = 5$.

Notar que estamos expresando la capacidad del vehículo en función del número mínimo de clientes que podemos servir con un único vehículo, esto nos permite dar una serie de condiciones, bajo las cuales, las restricciones asociadas inducen facetas de nuestro poliedro. Estas condiciones son, de alguna manera, más ajustadas que las que dimos en el capítulo anterior; estudiaremos las relaciones entre los dos tipos de condiciones.

Dedicaremos las dos primeras secciones de este capítulo a estudiar los dos tipos de restricciones a los que acabamos de referirnos. En la última sección, veremos que, cuando la capacidad *es igual* a 4 ó, a 5, obtenemos de nuevo las desigualdades asociadas a configuraciones *path*, *wheelbarrow* o *bicycle*, con la diferencia de que, para estos valores de Q , estas restricciones están dominadas por las de capacidad y no inducen, por tanto, facetas del $PSDVRP$.

Para ganar simplicidad en las demostraciones de este capítulo conviene introducir la siguiente notación:

- $Q \doteq p$, $p \in \mathbb{N}$ indicará que la capacidad del vehículo (Q), es tal que p clientes cualesquiera pueden servirse con un único vehículo, pero nunca $p + 1$.
- $Q \succeq p$, $p \in \mathbb{N}$, significa que con un único vehículo podemos servir cualquier subconjunto de p clientes.

6.1 Desigualdades $2MG1$.

En el contexto del $CVRP$ con demandas unitarias, Araque (1989) da la siguiente definición de desigualdades *2-matching generalizadas*:

Sea $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 6$ y $Q = 3$, sean $H, T_1, \dots, T_s \subseteq V$. Si cumplen:

- $|T_i| = 2$, $|H \cap T_i| = 1$, $T_i \cap T_j = \emptyset$ para $1 \leq i < j \leq s$.
- $|H| = s$ y $s \geq 3$

las desigualdades *2-matching generalizadas* se definen de la siguiente manera:

$$x(E(H)) + \sum_{i=1}^s x(E(T_i)) \leq s$$

El autor demuestra que estas desigualdades inducen facetas del P_{CVRP} con demandas unitarias. En la Figura 6.1 presentamos un croquis de una configuración sobre la que se pueden definir las desigualdades anteriores.

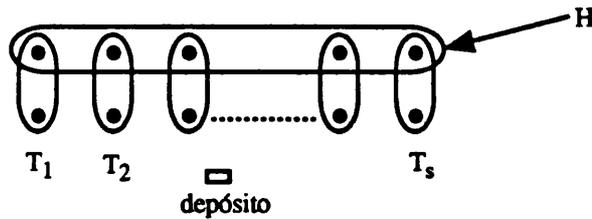


Figura 6.1: Configuración asociada a una desigualdad *2-matching generalizada*.

Utilizando la relación:

$$\begin{aligned} x(\delta(S)) + 2x(E(S)) &= \sum_{i \in S} x(\delta(i)), \quad S \subseteq V \\ &\downarrow \\ 2x(E(S)) &= \sum_{i \in S} x(\delta(i)) - x(\delta(S)) \geq 2|S| - x(\delta(S)) \\ &\downarrow \\ x(\delta(S)) - 2|S| &\geq -2x(E(S)) \end{aligned}$$

podemos transformar las desigualdades *2-matching generalizadas* de manera que es posible obtener un nuevo tipo de desigualdades válidas para el $SDVRP$.

$$\begin{aligned} x(E(H)) + \sum_{i=1}^s x(E(T_i)) &\leq s \\ &\downarrow \\ -2x(E(H)) - \sum_{i=1}^s 2x(E(T_i)) &\geq -2s \\ &\downarrow \\ x(\delta(H)) - 2|H| + \sum_{i=1}^s (x(\delta(T_i)) - 2|T_i|) &\geq -2s \\ &\downarrow \\ x(\delta(H)) + \sum_{i=1}^s x(\delta(T_i)) &\geq -2s + 2|H| + \sum_{i=1}^s 2|T_i| \end{aligned}$$

Ahora bien, como

$$\left. \begin{array}{l} |H| = s \\ |T_i| = 2 \quad \forall i \end{array} \right\} \longrightarrow x(\delta(H)) + \sum_{i=1}^s x(\delta(T_i)) \geq -2s + 2s + 4s = 4s$$

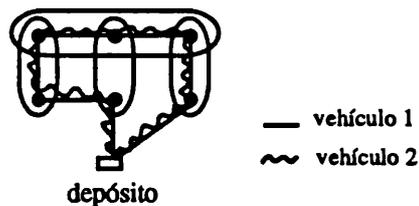


Figura 6.2: Solución del *SDVRP* que viola las restricciones de Araque.

Las desigualdades “2-matching generalizadas” y, las que hemos obtenido después de la transformación, no son equivalentes cuando consideramos el conjunto de soluciones posibles del *SDVRP*. Tal y como muestra la solución dada en la Figura 6.2 hay soluciones del *SDVRP* que violan la primera pero no la segunda.

Por otra parte, queremos insistir en la necesidad de asegurarse de que ningún subconjunto de cuatro clientes puede ser servido por un único vehículo, si esto ocurriera podríamos encontrar soluciones que violarían la desigualdad. Véase el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.1 *Supongamos que tenemos 6 clientes con demandas $d_1 = 2$ y $d_i = 1$, $i = 2, \dots, 6$ y, dos vehículos de capacidad $Q = 4$. La solución que damos en la Figura 6.3 viola la desigualdad “2-matching generalizada” asociada ya que, $x(\delta(H)) + \sum_{i=1}^3 x(\delta(T_i)) = 4 + 2 + 2 + 2 = 10 < 12$.*

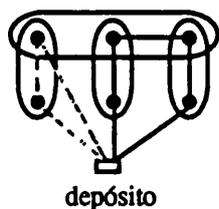


Figura 6.3: Solución que viola la desigualdad 2-matching generalizada.

El vértice de demanda igual a dos es , evidentemente, uno cualquiera de los dos que pertenecen a la ruta que contiene solamente dos clientes.

Después de las consideraciones que acabamos de hacer estamos en condiciones de dar la siguiente definición:

Definición 6.1 Dado $G = (V, E)$ un grafo completo no dirigido, con $n \geq 6$ y $|V| = n + 1$, definimos las desigualdades "2-matching generalizadas tipo 1" para el SDVRP de la siguiente manera:

$$x(\delta(H)) + \sum_{i=1}^s x(\delta(T_i)) \geq 4s$$

donde:

- (i) $H, T_1, \dots, T_s \subseteq V \setminus \{0\}$
- (ii) $|T_i| = 2, |H \cap T_i| = 1, T_i \cap T_j = \emptyset$ para $1 \leq i < j \leq s$.
- (iii) $Q \doteq 3, |H| = s$ y $s \geq 3$

y las denotaremos por 2MG1.

Nota 6.1 En la mayoría de los textos en los que aparecen configuraciones tipo "2-matching", a H se le suele llamar "mango" y, a los subconjuntos T_i , "dientes". A partir de ahora utilizaremos esta notación.

Proposición 6.1 Si $s \geq 3$ las desigualdades 2MG1 son válidas para el PSDVRP.

Demostración

Sea $a^t x \geq a_0$ una desigualdad 2MG1 y sea $C = \bigcup_{i=1}^s T_i$.

Es sencillo comprobar que los coeficientes de las aristas en esta desigualdad son:

$$a_e = \begin{cases} 1 & e \in E(T_i), i = 1, \dots, s \\ 1 & e \in (T_i \setminus H, V \setminus C), i = 1, \dots, s \\ 2 & e \in E(H) \\ 2 & e \in (H, V \setminus C) \\ 2 & e \in (T_i \setminus H, T_j \setminus H), i \neq j \\ 3 & e \in (H \cap T_i, T_j \setminus H), i \neq j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y que cumplen la desigualdad triangular.

Para demostrar la validez veremos que el vector de incidencia asociado a una solución cualquiera del *SDVRP*, x , cumple que $a^t x$ vale, como mínimo, a_0 .

Observar que si la solución que tenemos utiliza alguna arista de cualquiera de las cortaduras $(T_i \setminus H, T_j \setminus H)$, $(H \cap T_i, T_j \setminus H)$ ó $(H, V \setminus C)$, podemos construir otra solución, x' , en la que sólo se utilizan aristas de $E(H)$, de $E(T_i)$ ó, de $(T_i \setminus H, V \setminus C)$, cuyo vector de incidencia cumple $a^t x = a^t x'$. El hecho de poder visitar a los clientes sin necesidad de servirles nada de su demanda es lo que nos permite obtener este resultado.

- Si $x_e > 0$ y $e \in (T_i \setminus H, T_j \setminus H)$, $e = (u, v)$, podemos sustituir cada una de las copias de e por una copia del camino u – depósito – v ; suponiendo que sólo hay una copia construimos $x' = x - e + (u, 0) + (0, v)$ y, evidentemente, $a^t x' = a^t x - a_e + a_{u0} + a_{0v} = a^t x - 2 + 1 + 1 = a^t x$. Si hubiese más copias sustituiríamos todas y cada una de ellas por uno de estos caminos hasta llegar a x' .
- Si $x_e > 0$ y $e \in (H \cap T_i, T_j \setminus H)$, con $e = (u, v)$, podemos construir $x' = x - e + (u, w) + (w, 0) + (0, v)$ donde, $w \in T_i \setminus H$. Como $a_e = 3$ y las tres aristas que añadimos tienen coeficiente igual a uno, $a^t x = a^t x'$.
- Si $x_e > 0$ y $e \in (H, V \setminus C)$, $e = (u, 0)$, sustituimos e por el camino $u - v - 0$ donde $(u, v) \in T_i$ para algún i . El coeficiente de las dos aristas que hemos añadido es igual a 1 y el de la que quitamos es 2, con lo que la nueva solución tiene el mismo “peso” que la original pero deja de utilizar la arista e .

Después de lo que acabamos de demostrar podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la solución del *SDVRP* que tenemos sólo utiliza aristas con coeficiente igual a uno y aristas del mango.

Es evidente que todos los dientes deben ser visitados por, al menos, un vehículo, por lo que $\delta(T_i)$ debe ser atravesada al menos dos veces, para cada $i = 1, \dots, s$.

Vamos a hacer la demostración distinguiendo dos casos que dependen del valor de estas cortaduras.

- $x(\delta(T_i)) = 2, \forall i = 1, \dots, s$, esto significa que cada diente es servido por un único vehículo, por lo que, una solución que cumpla esta condición debe utilizar necesariamente la arista de $E(T_i)$, para cada i . En la Figura 6.4 presentamos las únicas configuraciones posibles en las que la cortadura asociada a un *diente* vale dos. Teniendo en cuenta la hipótesis que hemos hecho al principio, en la solución que nos ocupa sólo nos podemos encontrar con una configuración de los tipos **C**, **D** o **E**. Nótese que en lo referente a la cortadura $\delta(T_i)$ las estructuras **E** y **C** son equivalentes; por lo que, podemos suponer que en la solución que estamos considerando no hay ninguna estructura tipo **C** ya que, si la hubiera, haríamos la transformación descrita gráficamente en la Figura 6.4, (el cambio se puede hacer porque el grado 2 del diente asegura que las dos aristas del mango pertenecen al mismo vehículo).

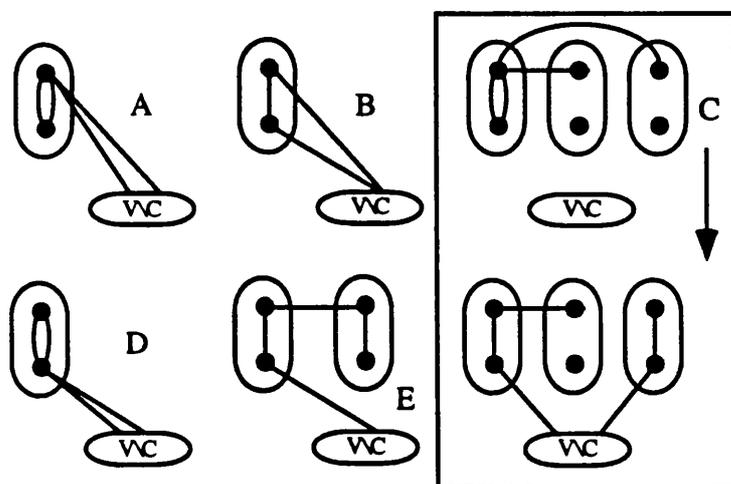


Figura 6.4: Parte de la solución asociada a un diente con $x(\delta(T_i)) = 2$.

Si se da **E**, significa que un vehículo visita a dos dientes distintos, ahora bien, como la capacidad del vehículo impide servir completamente a cuatro vértices, el segundo diente tendrá que volver a ser visitado por otro vehículo (será un diente con demanda compartida), y $x(\delta(T_j)) \geq 4$, contradiciendo así la hipótesis de que $x(\delta(T_i)) = 2, \forall i = 1, \dots, s$.

La única solución posible, si se da la situación **D**, es la de la Figura 6.5

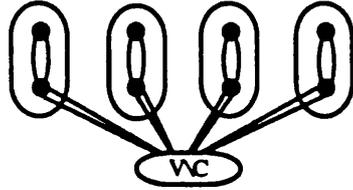


Figura 6.5: Única solución con $x(\delta(T_i)) = 2$ para todo i .

que evidentemente cumple la restricción, ya que:

$$x(\delta(H)) + \sum_{i=1}^s x(\delta(T_i)) = 2s + 2s = 4s$$

- $x(\delta(T_i)) > 2$, para algún $i = 1, \dots, s$. Si todos los dientes son visitados por al menos dos vehículos, $x(\delta(T_i)) \geq 4$, $\forall i = 1, \dots, s$, es obvio que $a^t x \geq a_0$ para una solución con estas características.

Supongamos entonces que la solución que tenemos contiene al menos un diente cuya cortadura es exactamente igual a dos.

Si todos los dientes que son visitados por un único vehículo responden a la estructura dada en \mathbf{D} , cada uno de ellos contribuye, con dos unidades, a $\delta(H)$ y es sencillo comprobar que, en este caso, la solución cumple la desigualdad. Veámoslo, supongamos que los únicos dientes para los que la cortadura asociada es igual a dos son los t primeros, i.e., $x(\delta(T_i)) = 2$, $\forall i = 1, \dots, t$ y $x(\delta(T_i)) \geq 4$, $\forall i = t + 1, \dots, s$, entonces:

$$a^t x = x(\delta(H)) + \sum_{i=1}^t x(\delta(T_i)) + \sum_{i=t+1}^s x(\delta(T_i)) \geq 2t + 2t + 4(s - t) = 4s$$

Por otra parte, a la hora de demostrar la validez, podemos olvidarnos de los dientes “de grado dos” que se visitan siguiendo el esquema dado en \mathbf{D} pues, suponiendo que son los t primeros, se cumple lo siguiente:

$$a^t x = \underbrace{\sum_{i=1}^t x(\delta(T_i)) + x(\delta(H \cap (\cup_{i=1}^t T_i)))}_{\geq 4t} + \sum_{i=t+1}^s x(\delta(T_i)) + x(\delta(H \cap (\cup_{i=t+1}^s T_i)))$$

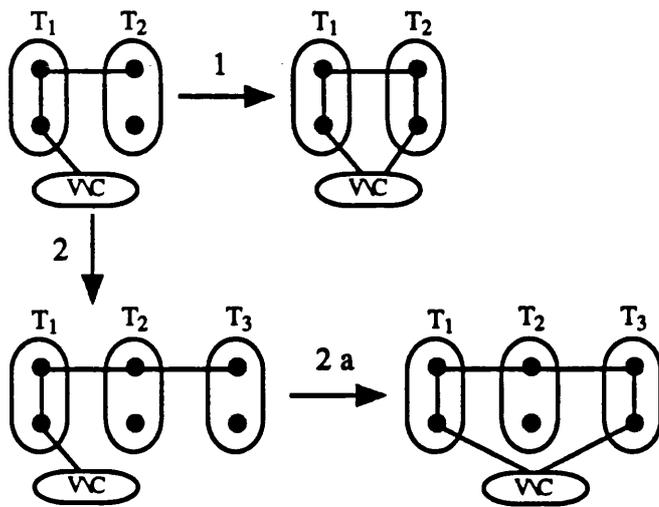


Figura 6.6: Parte de una solución asociada a un diente de grado dos.

y, por lo tanto, bastará con demostrar que:

$$\sum_{i=t+1}^s x(\delta(T_i)) + x(\delta(H \cap (\cup_{i=t+1}^s T_i))) \geq 4(s - t)$$

para concluir que $a^t x \geq a_0$. Si comprobamos que la aportación media por cada uno de los $s - t$ dientes restantes a $a^t x$ es de 4 unidades, tendremos el resultado.

Supongamos entonces que hay un diente, T_1 , para el que $x(\delta(T_1)) = 2$ pero que, el vehículo que lo visita, lo hace según se indica en la Figura 6.6.

La arista del mango incidente con T_1 nos conecta a un nuevo diente, sea T_2 . Como $Q \doteq 3$, necesariamente $x(\delta(T_2)) \geq 4$ pues, si fuese igual a dos, significaría que los dos dientes se sirven con un único vehículo y esto no es posible pues, un vehículo no puede servir completamente la demanda de cuatro clientes.

1. Si en nuestra solución no hay ninguna otra arista de $\delta(T_2)$ que pertenezca al mango, la contribución de los dos dientes a $a^t x$ es de, al menos, 8 unidades. Nótese que $x(\delta(T_1)) = 2$, $x(\delta(T_2)) \geq 4$ y, como en el mango se ha entrado utilizando una arista de $E(T_1)$,



Figura 6.7: Tres dientes en la configuración, dos de grado 2 y uno de grado 4.

habrá que abandonarlo utilizando una de $E(T_2)$; esto implica que los dos dientes que tenemos aportan dos unidades a $x(\delta(H))$ y en total 8 como mínimo a $a^t x$. En la Figura 6.6 mostramos como se va formando la solución.

2. Si T_2 es incidente con otra arista del mango como $x(\delta(T_1)) = 2$ tendremos un tercer diente, sea T_3 , conectado con los dos anteriores de la forma dada en la Figura 6.6.

El nuevo diente debe ser incidente con un número par de aristas, al menos dos.

Distinguiremos dos casos:

- (a) Si $x(\delta(T_3)) = 2$, no queda otra alternativa que servirlo utilizando las aristas que damos en la Figura 6.6. Si resulta que $x(\delta(T_2)) \geq 6$ tendremos tres dientes que aportan como mínimo 12 unidades a $a^t x$.

Si $x(\delta(T_2)) = 4$ y no hay más dientes en la configuración, las únicas rutas que cumplen las suposiciones realizadas hasta el momento, i.e., $x(\delta(T_1)) = 2 = x(\delta(T_3))$, son las dos dibujadas en la Figura 6.7. Nótese que la primera de ellas no corresponde a ninguna solución posible del *SDVRP* ya que, hay una ruta que sirve completamente a 5 clientes. En la segunda, tenemos tres dientes que contribuyen con 12 unidades a $a^t x$.

Si hubiese más dientes en la configuración tendríamos otra alternativa, véase la Figura 6.8. Aumentamos así el número de dientes encadenados, observar de nuevo que, como dos dientes con cortadura igual a dos no pueden ser visitados por el mismo vehículo, la única posibilidad es que tengamos las dos rutas que hemos dibujado.

Además, estamos obligados a que el nuevo diente sea incidente con al menos cuatro aristas, esto es, necesariamente debe ser un diente cuya demanda sea servida entre dos o más vehículos, ya

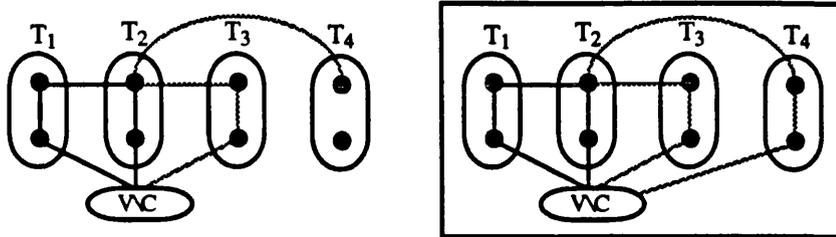


Figura 6.8: Parte de una solución con $s \geq 4$ y ejemplo de solución no posible.

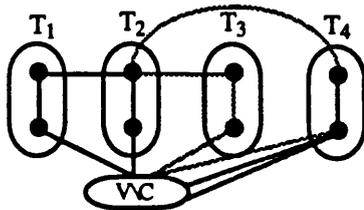


Figura 6.9: Una solución posible sobre 4 dientes.

que está en una ruta en la que ya se ha servido completamente la demanda de dos vértices y, por tanto, no se puede servir completamente a dos más. Si esto no fuese así, tendríamos la estructura que hemos encuadrado en la Figura 6.8.

Tenemos, por tanto, 4 dientes conectados, dos con cortadura igual a 2, uno con cortadura igual a 4 y el último, T_4 , con $x(\delta(T_4)) \geq 4$. Si $x(\delta(T_4)) \geq 6$, las cortaduras de los cuatro dientes aportan, al menos, 14 unidades a $a^t x$, y además hay 3 aristas que salen del mango luego, globalmente, los cuatro aportan, al menos, 17 unidades al total.

Si $x(\delta(T_4)) = 4$ y no hay más dientes en la configuración la única posibilidad es la solución de la Figura 6.9. Esta solución cumple que $a^t x \geq 16 = a_0$.

En otro caso, la cortadura de T_4 puede ser igual a 4 pero, involucrando a uno o a dos dientes más, las únicas configuraciones posibles las presentamos en la Figura 6.10.

En la primera de ellas nos encontramos con cuatro dientes cuyas cortaduras suman 12 y que aportan 5 unidades a $x(\delta(H))$, en total 17 unidades de $a^t x$. El nuevo diente puede ser un diente con cortadura igual a dos, aunque sea el último de la cadena;

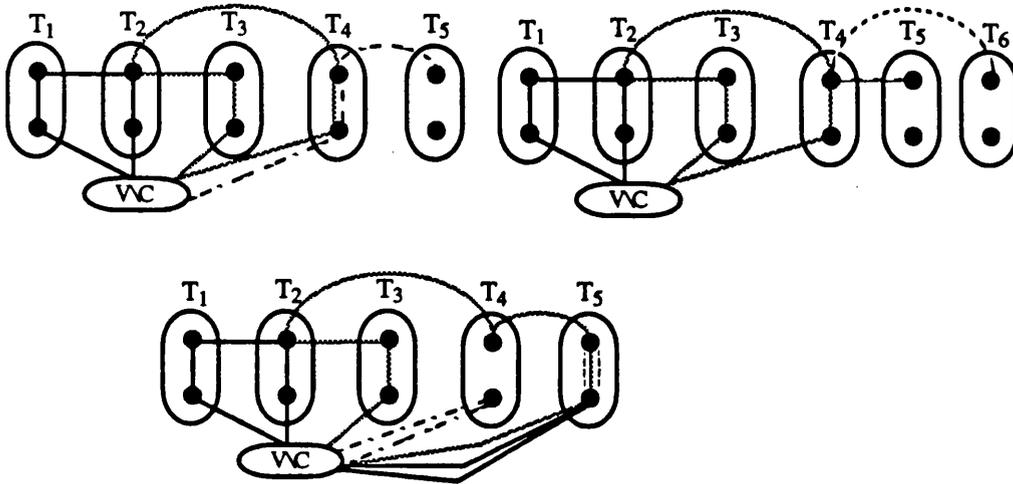


Figura 6.10: $x(\delta(T_4)) = 4$, $s \geq 4$ ó $s \geq 5$.

notar que aporta como mínimo 3 unidades, luego tendremos 5 dientes que aportan 20.

En la segunda, los cuatro dientes aportan 16 unidades al total y, en la última, sólomente 15. Ahora bien, en este último caso el nuevo diente debe ser obligatoriamente uno de demanda compartida, ya que lo visita una ruta que ya ha servido completamente a 3 vértices. Si el nuevo diente es el último, tendremos 5 dientes que cumplen $a^t x \geq 19$ pero, como $a^t x$ es suma de cortaduras pares, $a^t x$ es seguro mayor o igual que 20.

- (b) Si $x(\delta(T_3)) \geq 4$ y $x(\delta(T_2)) \geq 6$ o $x(\delta(T_3)) \geq 6$ y $x(\delta(T_2)) \geq 4$ tenemos tres dientes que aportan como mínimo 12 unidades al término izquierdo de la desigualdad.

Si $x(\delta(T_2)) = 4$ y $x(\delta(T_3)) = 4$, las únicas alternativas para construir las rutas son las de la Figura 6.11.

En todas, excepto en la segunda, la aportación mínima de los tres dientes a $a^t x$ es igual a 12. Ahora bien, la segunda no puede ser una estructura que forme parte de una solución del *SDVRP*, ya que implicaría que un vehículo sirve a cuatro clientes completamente, lo que contradice la hipótesis de que $Q \doteq 3$.

Notar que en un conjunto de dientes encadenados por aristas del mango entre dos dientes con cortadura igual a dos sólo puede haber dientes con cortadura mayor o igual que cuatro; si la cadena contiene

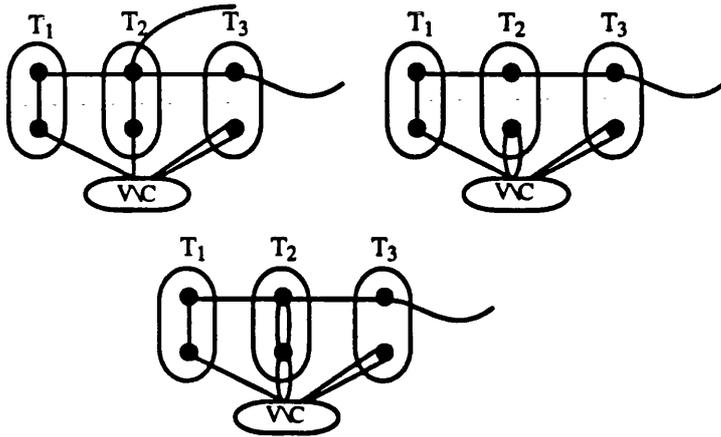


Figura 6.11: $x(\delta(T_2)) = 4$, $x(\delta(T_3)) = 4$.

r dientes, entonces:

$$\sum_{i=1}^r x(\delta(T_i)) \geq 4(r-2) + 2 + 2 = 4r - 4$$

pero, como al menos tenemos tres clientes en el mango, si las únicas aristas que salen del mango fuesen las de los dos dientes de grado dos se violaría una restricción de capacidad, ver Figura 6.12, pues en el mango deben entrar al menos dos vehículos. Por lo tanto, debe haber alguna arista más, incidente con alguno de los dientes de grado cuatro, es decir, los r dientes contribuyen al valor de $a^t x$ con al menos $4r - 4 + 2 + 2$ unidades.

Como el número de dientes es finito llegará un momento en que no quedará más remedio que volver al depósito porque no habrá más dientes que visitar. Entonces, o se terminará en un diente cuya cortadura vale 2 o, en uno, con cortadura mayor o igual que 4.

La observación que acabamos de hacer, junto con la casuística estudiada a lo largo de la demostración, nos permiten concluir que las desigualdades *2-matching generalizadas tipo 1* son válidas para el P_{SDVRP} .

◇



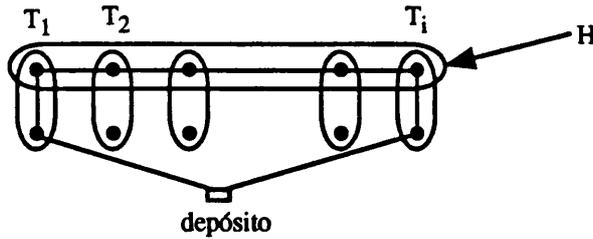


Figura 6.12: Dientes encadenados a través de aristas de H .

Nota 6.2 La validez de las desigualdades $2MG1$ no depende de si el número de vehículos es o no fijo. Si lo es, la única matización que debemos hacer es que la solución de la Figura 6.5 sólo es una solución posible del $SDVRP$ cuando $K \geq s$ pues, si $K < s$, en cualquier solución posible habrá siempre al menos un diente con demanda compartida.

Proposición 6.2 Si $K \geq \max\{3, \lceil \frac{d(V)}{Q} \rceil\}$, $Q \doteq 3$ y $s = 3$, las desigualdades $2MG1$ inducen facetas del P_{SDVRP} .

Demostración

Para simplificar la notación, supongamos que $H = \{1, 2, 3\}$ y que $T_1 = \{1, 4\}$, $T_2 = \{2, 5\}$, $T_3 = \{3, 6\}$ y el depósito es el vértice 0.

Si $C = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ y $a^t x \geq 12$ es una desigualdad $2MG1$, sabemos que $a_e = 0$ para cualquier arista de $E(V \setminus C)$. Además, como para cualquier arista $e = (u, v)$ de $\delta(C)$, se cumple que $a_{uv} = a_{u0} + a_{0v}$, no hay pérdida de generalidad en suponer que las únicas aristas de $\delta(C)$ utilizadas por cualquier solución del $SDVRP$ son aristas de $(\{0\}, C)$.

Por la Proposición 6.1, sabemos que $a^t x \geq 12$ es válida para el P_{SDVRP} independientemente del número de vehículos que utilicemos. Para ver que se trata de una desigualdad soporte basta con considerar la solución dada en la Figura 6.5 y ampliarla a $V \setminus C$ tomando $2K$ copias de cada una de las aristas de un tour Hamiltoniano sobre $V \setminus C$, de esta manera garantizamos que todos los vehículos visitan a todos los clientes y, consecuentemente, que la solución es posible.

Cualquier conjunto de aristas, que defina una solución parcial del $SDVRP$

sobre el conjunto de vértices de C , se puede ampliar al resto de clientes de V siguiendo el método que acabamos de enunciar. Esto es lo que nos va a permitir a partir de ahora describir las soluciones diciendo sólo cómo son sobre C . Obsérvese que como $a_e = 0, \forall e \in E(V \setminus C)$, si las aristas de la solución parcial contribuyen con 12 unidades al valor de $a^t x$ entonces, la solución ampliada cumplirá $a^t x = 12$.

Para demostrar que $a^t x \geq 12$ induce una faceta aplicaremos el método indirecto, i.e., supondremos que $f^t x \geq f_0$ es una desigualdad que define una faceta del poliedro del $SDVRP$ para la que:

$$\{x \in P_{SDVRP} : a^t x = 12\} \subseteq \{x \in P_{SDVRP} : f^t x = f_0\}$$

y demostraremos que $f = \alpha a$ y $f_0 = 12\alpha$ para algún $\alpha \geq 0$.

(1) $f_{0j} = 0 = a_{0j} \forall j > 6$.

En efecto, si R es una solución que cumple $a^t x^R = 12, R' = R + 2(0, j)$ sigue siendo una solución del $SDVRP$ y $a^t x^{R'} = a^t x^R + 2a_{0j} = 12$, luego:

$$\left. \begin{array}{l} f^t x^R = f_0 \\ f^t x^{R'} = f_0 \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f^t x^{R'} - f^t x^R = f^t x^R + 2f_{0j} - f^t x^R = 0 \\ \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ \qquad \qquad \qquad f_{0j} = 0 \end{array} \right.$$

(2) $f_{ij} = 0 = a_{ij} \forall (i, j) \in E(V \setminus C)$.

El razonamiento es el mismo de antes. A partir de una solución R cualquiera que cumpla la restricción con igualdad, como todos los vehículos visitan a i y a j , para cualquier pareja $i, j \in (V \setminus C)$, podemos construir $R' = R + 2(i, j)$, que será otra solución del $SDVRP$ en la que un vehículo visita dos veces a i y a j ; R' también cumple $a^t x = 12$ por lo que, a partir de aquí, razonamos como en el apartado 1.

(3) $f_{ij} = f_{0i} \forall i \in H, \forall j > 6$.

Para llegar a este resultado comparamos las soluciones R_1 y R_2 dadas en la Figura 6.13, ambas cumplen:

$$\begin{array}{l} a^t x^{R_1} = 12 \longrightarrow f^t x^{R_1} = f_0 \\ a^t x^{R_2} = 12 \longrightarrow f^t x^{R_2} = f_0 \\ \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ 0 = f^t x^{R_1} - f^t x^{R_2} = f_{01} - f_{1j} - f_{0j} \underbrace{=}_{\text{por (1)}} f_{01} - f_{1j} \\ \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ f_{01} = f_{1j}, \forall j > 6 \end{array}$$

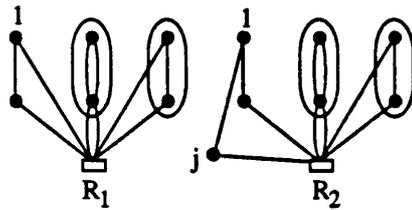


Figura 6.13: Soluciones R_1 y R_2 para el caso 3.

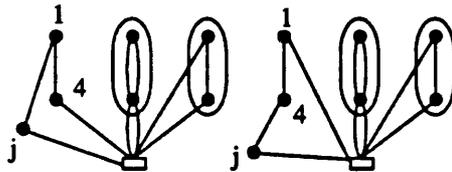


Figura 6.14: Soluciones para el caso 4.

Las soluciones que hemos utilizado se pueden definir, análogamente, para cualquier otra pareja de dientes, por lo que el resultado también es cierto para f_{02} y f_{03} .

(4) $f_{ij} = f_{0i} \forall i \in C \setminus H, \forall j > 6$.

Las soluciones que necesitamos en este apartado son las de la Figura 6.14. Ambas cumplen $a^t x = 12$, y también $f^t x = f_0$, luego:

$$f_{04} + f_{1j} = f_{4j} + f_{01}, \text{ por (3)}$$

$$\downarrow$$

$$f_{04} = f_{4j}$$

Análogamente se demuestra que $f_{5j} = f_{05}, \forall j > 6$ y $f_{6j} = f_{06}, \forall j > 6$.

A partir de este momento tendremos en cuenta que $f_{ij} = f_{0i}, \forall i \in C$ y $\forall j > 6$, por lo que, únicamente trabajaremos con aristas $(0, i), i \in C$.

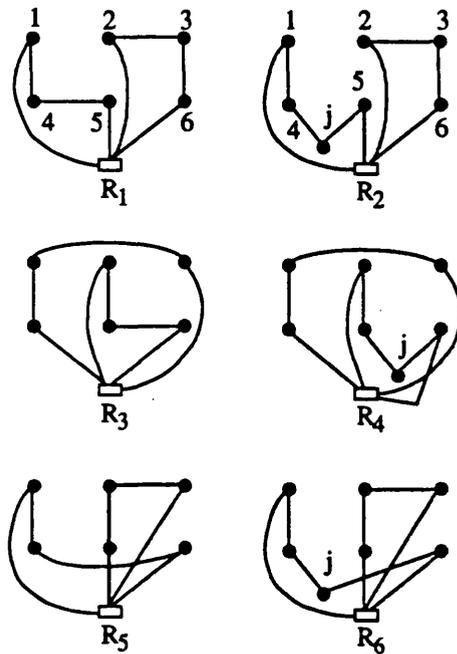


Figura 6.15: Soluciones para el caso 5.

(5) $f_{45} = f_{4j} + f_{5j}$, $f_{46} = f_{4j} + f_{6j}$ y $f_{56} = f_{5j} + f_{6j}$, $\forall j \in V \setminus C$.

En la Figura 6.15, tenemos las soluciones que nos hacen falta para demostrar este resultado. Todas ellas cumplen $a^t x = 12$ y, por tanto, $f^t x = f_0$. Restando respectivamente los términos de la izquierda de la desigualdad asociados a cada pareja de soluciones nos queda:

$$\begin{aligned}
 f^t x^{R_1} &= f^t x^{R_2}, \\
 f_{14} + f_{45} + f_{05} + f_{01} &= f_{14} + f_{4j} + f_{5j} + f_{05} + f_{01}, \\
 \longrightarrow f_{45} &= f_{4j} + f_{5j}, \forall j > 6, \text{ ó } j = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f^t x^{R_3} &= f^t x^{R_4}, \\
 f_{25} + f_{56} + f_{06} + f_{02} &= f_{25} + f_{5j} + f_{6j} + f_{06} + f_{02}, \\
 \longrightarrow f_{56} &= f_{5j} + f_{6j}, \forall j > 6, \text{ ó } j = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f^t x^{R_5} &= f^t x^{R_6}, \\
 f_{14} + f_{46} + f_{06} + f_{01} &= f_{14} + f_{4j} + f_{6j} + f_{06} + f_{01}, \\
 \longrightarrow f_{46} &= f_{4j} + f_{6j}, \forall j > 6, \text{ ó } j = 0
 \end{aligned}$$

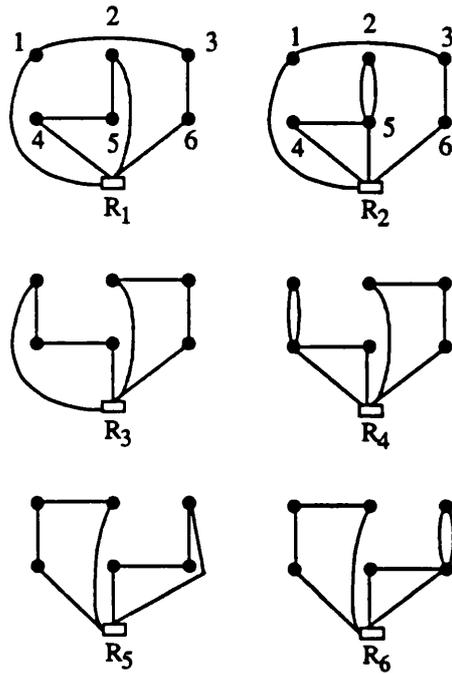


Figura 6.16: Soluciones para el caso 6.

(6) $f_{1j} = f_{14} + f_{4j}$, $f_{2j} = f_{25} + f_{5j}$ y $f_{3j} = f_{36} + f_{6j}$, $\forall j \in V \setminus C$.

Véanse las soluciones de la Figura 6.16.

Análogamente a los casos anteriores deducimos, usando (4), que:

$$\begin{aligned}
 f^t_{x^{R_1}} &= f^t_{x^{R_2}} \\
 f_{45} + f_{25} + f_{02} + f_{04} &= 2f_{25} + f_{45} + f_{04} + f_{05} \\
 f_{2j} &= f_{25} + f_{5j}, \forall j \in V \setminus C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f^t_{x^{R_3}} &= f^t_{x^{R_4}} \\
 f_{14} + f_{45} + f_{05} + f_{01} &= 2f_{14} + f_{45} + f_{04} + f_{05} \\
 f_{1j} &= f_{14} + f_{4j}, \forall j \in V \setminus C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f^t_{x^{R_5}} &= f^t_{x^{R_6}} \\
 f_{05} + f_{56} + f_{36} + f_{03} &= 2f_{36} + f_{56} + f_{05} + f_{06} \\
 f_{3j} &= f_{36} + f_{6j}, \forall j \in V \setminus C
 \end{aligned}$$

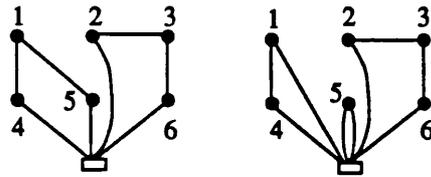


Figura 6.17: Soluciones para aristas *cruzadas*.

(7) $f_{ij} = f_{ir} + f_{rj}$, para cualquier arista “cruzada” y $r \in V \setminus C$.

Las soluciones que necesitamos para f_{15} por ejemplo son las de la Figura 6.17.

Comparándolas, deducimos que $f_{15} = f_{1j} + f_{5j}$, $\forall j \in V \setminus C$, ya que:

$$f_{14} + f_{04} + f_{15} + f_{05} = 2f_{05} + f_{14} + f_{04} + f_{01} \longrightarrow f_{15} = f_{05} + f_{01}$$

Procediendo análogamente con cada una de las parejas de soluciones asociadas a cada arista **cruzada** llegamos a que:

7.1	$f_{15} = f_{1j} + f_{5j}$	7.2	$f_{16} = f_{1j} + f_{6j}$
7.3	$f_{24} = f_{2j} + f_{4j}$	7.4	$f_{26} = f_{2j} + f_{6j}$
7.5	$f_{34} = f_{3j} + f_{4j}$	7.6	$f_{35} = f_{3j} + f_{5j}$

(8) $f_{13} = 2f_{5j} + f_{1j} - f_{3j}$, $f_{12} = 2f_{4j} + f_{2j} - f_{1j}$ y $f_{23} = 2f_{5j} + f_{3j} - f_{2j}$, $\forall j \in V \setminus C$.

Compararemos dos a dos las soluciones de la Figura 6.18.

Para las dos primeras:

$$f_{15} = f_{13} + f_{25} - f_{02} + f_{03}$$

y, por (7.1),

$$f_{15} = f_{01} + f_{05}$$

igualando,

$$f_{13} + f_{25} - f_{02} + f_{03} = f_{01} + f_{05}.$$

Ahora, por el resultado número (6), $f_{25} = f_{02} - f_{05}$, sustituyendo,

$$f_{13} + f_{02} - f_{05} - f_{02} + f_{03} = f_{01} + f_{05},$$

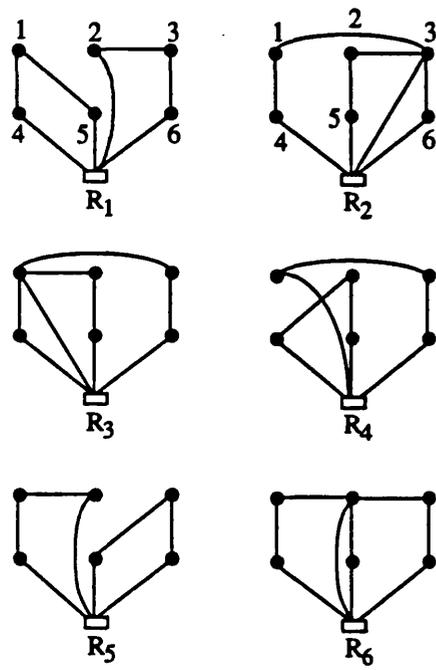


Figura 6.18: Soluciones para aristas del *mango*.

y despejando:

$$f_{13} = 2f_{05} + f_{01} - f_{03}.$$

Comparando las dos siguientes:

$$f_{12} = f_{24} - f_{14}$$

por (7.3) $f_{24} = f_{2j} + f_{4j}$, sustituyendo,

$$f_{12} = f_{02} + f_{04} - f_{14}$$

y, como $f_{14} = f_{01} - f_{04}$ tenemos:

$$f_{12} = 2f_{04} + f_{02} - f_{01}$$

Finalmente, para la tercera arista del mango:

$$f_{35} = f_{23} + f_{25} \longrightarrow f_{23} = f_{35} - f_{25}$$

por (7.6), $f_{35} = f_{3j} + f_{5j}$, sustituyendo,

$$f_{23} = f_{3j} + f_{5j} - f_{25}$$

y como $f_{25} = f_{02} - f_{05} \longrightarrow f_{23} = 2f_{05} + f_{03} - f_{02}$.

Resumiendo, para todo $j \in V \setminus C$:

8.1	$f_{13} = 2f_{05} + f_{01} - f_{03}$
8.2	$f_{12} = 2f_{04} + f_{02} - f_{01}$
8.3	$f_{23} = 2f_{05} + f_{03} - f_{02}$

(9) $f_{1j} = f_{3j} \forall j \in V \setminus C$.

Comparando las dos soluciones de la Figura 6.19 obtenemos lo siguiente:

$$(*) \quad f_{13} + f_{1j} = f_{2j} + f_{23} \longrightarrow f_{13} - f_{23} = f_{2j} - f_{1j}$$

Y, teniendo en cuenta:

$$\left. \begin{array}{l} (8.1) \quad f_{13} = 2f_{05} + f_{01} - f_{03} \\ (8.3) \quad f_{23} = 2f_{05} + f_{03} - f_{02} \end{array} \right\} \longrightarrow f_{13} - f_{23} = f_{1j} + f_{2j} - 2f_{3j}$$

Igualando, $f_{2j} - f_{1j} = f_{1j} + f_{2j} - 2f_{3j}$, tenemos $-2f_{1j} = -2f_{3j}$ y entonces:
 $f_{1j} = f_{3j}, \forall j \in V \setminus C$.

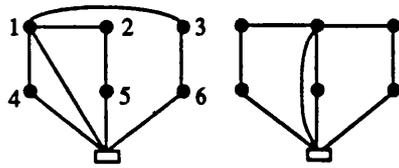


Figura 6.19: Soluciones para el resultado número 9.

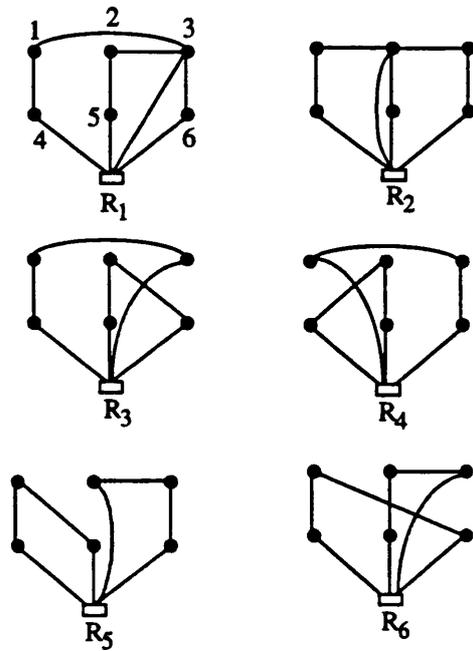


Figura 6.20: Soluciones utilizadas en 10, 11 y 12.

$$(10) \quad f_{12} = f_{23}.$$

Basta comparar las soluciones R_1 y R_2 , dadas en la Figura 6.20, y aplicar las relaciones obtenidas en el apartado anterior.

$$(*) \quad \left. \begin{array}{l} f_{13} + f_{3j} = f_{12} + f_{2j} \\ f_{13} + f_{1j} = f_{23} + f_{2j} \\ f_{1j} = f_{3j} \end{array} \right\} \longrightarrow f_{12} = f_{23}$$

$$(11) \quad \underline{f_{4j} = f_{5j} = f_{6j} \quad \forall j \in V \setminus C.}$$

En primer lugar, comprobaremos que $f_{4j} = f_{6j}$. Si comparamos las soluciones R_3 y R_4 , de la Figura 6.20, teniendo en cuenta el resultado obtenido en el apartado (6), i.e., $f_{1j} = f_{14} + f_{4j}$ y $f_{3j} = f_{36} + f_{6j}$, llegamos a que $f_{26} + f_{6j} = f_{24} + f_{4j}$, ahora bien por:

$$\left. \begin{array}{l} (7.3) \quad f_{24} = f_{2j} + f_{4j} \\ (7.4) \quad f_{26} = f_{2j} + f_{6j} \end{array} \right\} \longrightarrow f_{2j} + f_{6j} + f_{6j} = f_{2j} + f_{4j} + f_{4j}$$

$$\downarrow$$

$$f_{6j} = f_{4j}$$

Para concluir el resultado enunciado vemos ahora que $f_{6j} = f_{5j}$.

En este caso utilizamos los vectores de incidencia asociados a las soluciones R_5 y R_6 de la Figura 6.20. Aplicando, de nuevo, el resultado (6), $f_{03} = f_{36} + f_{06}$, tenemos $f_{15} + f_{5j} = f_{16} + f_{6j}$ y de:

$$\left. \begin{array}{l} (7.1) \quad f_{15} = f_{1j} + f_{5j} \\ (7.2) \quad f_{16} = f_{1j} + f_{6j} \end{array} \right\} \longrightarrow f_{1j} + f_{5j} + f_{5j} = f_{1j} + f_{6j} + f_{6j}$$

$$\downarrow$$

$$f_{6j} = f_{5j}$$

$$(12) \quad f_{15} = f_{35}, \quad f_{16} = f_{34}, \quad f_{16} = f_{15} \quad \text{y} \quad f_{24} = f_{26}.$$

$$\left. \begin{array}{l} (7.1) \quad f_{15} = f_{1j} + f_{5j} \\ (7.6) \quad f_{35} = f_{3j} + f_{5j} \\ (9) \quad f_{1j} = f_{3j} \end{array} \right\} \longrightarrow f_{15} = f_{35}$$

$$\left. \begin{array}{l} (7.2) \quad f_{16} = f_{1j} + f_{6j} \\ (7.5) \quad f_{34} = f_{3j} + f_{4j} \\ (9) \quad f_{1j} = f_{3j} \\ (11) \quad f_{6j} = f_{4j} \end{array} \right\} \longrightarrow f_{16} = f_{34}$$

$$\left. \begin{array}{l} (7.2) \quad f_{16} = f_{1j} + f_{6j} \\ (7.1) \quad f_{15} = f_{1j} + f_{5j} \\ (11) \quad f_{6j} = f_{5j} \end{array} \right\} \longrightarrow f_{16} = f_{15}$$

$$\left. \begin{array}{l} (7.3) \quad f_{24} = f_{2j} + f_{4j} \\ (7.4) \quad f_{26} = f_{2j} + f_{6j} \\ (11) \quad f_{6j} = f_{4j} \end{array} \right\} \longrightarrow f_{24} = f_{26}$$

(13) $f_{1j} = f_{2j} = f_{3j} \forall j \in V \setminus C$.

$$\left. \begin{array}{l} (8.2) \quad f_{12} = 2f_{04} + f_{02} - f_{01} \\ (8.3) \quad f_{23} = 2f_{05} + f_{03} - f_{02} \\ (9) \quad f_{1j} = f_{3j} \\ (11) \quad f_{5j} = f_{4j} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Restando, } f_{12} - f_{23} = 2f_{2j} - 2f_{1j} \\ \text{Y, por (10) } f_{12} = f_{23} \rightarrow f_{2j} = f_{1j} \end{array} \right.$$

Por (9) sabemos que $f_{1j} = f_{3j}$, luego:

$$f_{1j} = f_{2j} = f_{3j} \forall j \in V \setminus C$$

(14) Todas las aristas “cruzadas” tienen el mismo coeficiente.

$$\left. \begin{array}{l} (7.4) \quad f_{26} = f_{2j} + f_{6j} \\ (7.2) \quad f_{16} = f_{1j} + f_{6j} \\ (13) \quad f_{1j} = f_{2j} \end{array} \right\} \longrightarrow f_{26} = f_{16}$$

De (12), deducimos que $f_{34} = f_{16} = f_{15} = f_{35}$ y $f_{24} = f_{26}$, y como acabamos de ver que $f_{26} = f_{16}$, cerramos la cadena de igualdades, concluyendo así que todas las aristas **cruzadas** tienen el mismo coeficiente.

(15) Todas las aristas de $E(H)$ tienen el mismo coeficiente.

$$\left. \begin{array}{l} (8.1) \quad f_{13} = 2f_{05} + f_{01} - f_{03} \underbrace{=}_{(9)} 2f_{05} \\ (8.3) \quad f_{23} = 2f_{05} + f_{03} - f_{02} \underbrace{=}_{(13)} 2f_{05} \end{array} \right\} \longrightarrow f_{13} = f_{23}$$

Por (10), sabemos que $f_{12} = f_{23}$, por lo que:

$$f_{13} = f_{23} = f_{12}$$

y obtenemos el resultado que queríamos.

(16) El coeficiente de las aristas de $E(T_i)$, $i = 1, 2, 3$, no depende del diente elegido.

En efecto,

$$\begin{array}{l} \text{Por (6)} \\ \text{Por (11)} \\ \text{Por (13)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} f_{14} = f_{1j} - f_{4j} \\ f_{25} = f_{2j} - f_{5j} \\ f_{36} = f_{3j} - f_{6j} \\ f_{4j} = f_{5j} = f_{6j} \\ f_{1j} = f_{2j} = f_{3j} \end{array} \right\} \longrightarrow f_{14} = f_{25} = f_{36}$$

(17) $f_{45} = f_{46} = f_{56}$.

$$\begin{array}{l} \text{Por (5)} \\ \text{Por (11)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} f_{45} = f_{4j} + f_{5j} \\ f_{46} = f_{4j} + f_{6j} \\ f_{56} = f_{5j} + f_{6j} \\ f_{4j} = f_{5j} = f_{6j} \end{array} \right\} \longrightarrow f_{45} = f_{46} = f_{56}$$

A continuación, veremos que a partir de los resultados subrayados, es posible expresar todos los coeficientes de $f^t x$ en función de un escalar α no negativo y, finalmente, que $(f^t, f_0) = \alpha(a^t, 12)$.

Sea $\alpha = f_{4j}$. Por la Proposición 5.5 sabemos que $f_e \geq 0$, $\forall e \in E$ luego, $\alpha \geq 0$. Teniendo en cuenta la cadena de igualdades obtenida en (11), tenemos $\alpha = f_{4j} = f_{5j} = f_{6j}$ y, a partir de (5), deducimos que $f_{45} = f_{56} = f_{46} = 2\alpha$. Por otra parte, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en (15), deducimos que $f_{13} = f_{23} = f_{12} = 2\alpha$.

Sea $\beta = f_{1j} \geq 0$. Por (13), $f_{1j} = f_{2j} = f_{3j} = \beta$. Esto último, junto con (6), nos lleva a $f_{14} = \beta - \alpha$ y, por (16), $f_{14} = f_{25} = f_{36} = \beta - \alpha$. Por último, de (7) y (14), $f_{15} = f_{16} = f_{24} = f_{26} = f_{34} = f_{35} = \beta + \alpha$.

En la Figura 6.21 presentamos un esquema del valor actual de los coeficientes en f y dos soluciones que nos permiten establecer la relación entre α y β dado que, ambas cumplen con igualdad $a^t x = 12$ y, por tanto $f^t x = f_0$.

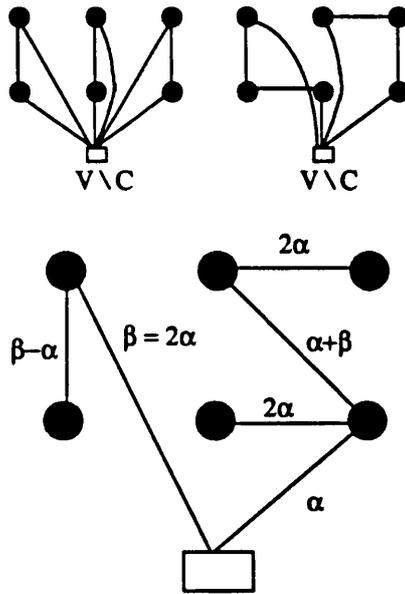


Figura 6.21: Soluciones R_1, R_2 y esquema de valores de f_e .

$$\left. \begin{aligned} f^t x^{R_1} &= 3(\beta - \alpha + \alpha + \beta) = f_0 \\ f^t x^{R_2} &= \beta + \beta - \alpha + 2\alpha + \alpha + \beta + 2\alpha + \beta - \alpha + \alpha = f_0 \end{aligned} \right\} \rightarrow 6\beta = 4\beta + 4\alpha$$

luego, $\beta = 2\alpha$ y $f_0 = 12\alpha$. Después de lo que acabamos de ver, es fácil comprobar que efectivamente,

$$(f^t, f_0) = \alpha(a^t, 12)$$

lo que permite concluir la demostración. \diamond

Proposición 6.3 Si $K \geq \max\{s, \lceil \frac{d(V)}{Q} \rceil\}$, $Q \doteq 3$ y $s \geq 4$, las desigualdades $2MG1$ inducen facetas del P_{SDVRP} .

Demostración

Por la Proposición 6.2, sabemos que el resultado es cierto para $s = 3$. Sea $a^t x \geq a_0$ una desigualdad $2MG1$ con $s \geq 4$. A partir de cualquiera de las

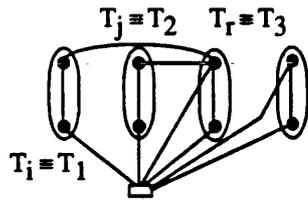


Figura 6.22: Solución ampliada para $s > 4$.

soluciones utilizadas en la demostración de la proposición anterior, podemos conseguir una solución del *SDVRP* que cumpla $a^t x = a_0$. El procedimiento que hay que seguir es el siguiente: elegimos tres dientes cualesquiera T_i , T_j , y T_r y los servimos del mismo modo en que, la solución que estamos considerando, sirve a los dientes de la configuración con $s = 3$. Para el resto de dientes utilizamos un vehículo distinto para cada uno de ellos. Nótese que esto es posible porque $K \geq s$. El resto de vértices del grafo $(V \setminus C)$ son visitados por todos los vehículos y la solución en $E(V \setminus C)$ será como la que describimos en la Proposición 6.2. En la Figura 6.22 podemos ver una de estas soluciones, concretamente, la asociada a la solución R_1 de la Figura 6.20.

Es evidente que las soluciones así construidas cumplen:

$$a^t x = 12 + \sum_{p=1, p \neq i, j, r}^s 4 = 12 + 4(s - 3) = 4s$$

Recurriremos de nuevo al método indirecto para hacer la demostración. Supongamos que $f^t x \geq f_0$ es una desigualdad que define una faceta del poliedro del *SDVRP* para la que:

$$\{x \in P_{SDVRP} : a^t x = 4s\} \subseteq \{x \in P_{SDVRP} : f^t x = f_0\}$$

y demostremos que $f = \alpha a$ y $f_0 = \alpha 4s$ para algún $\alpha \geq 0$.

Supongamos que $H = \{1, 2, \dots, s\}$ y $T_i = \{i, s + i\}$, $\forall i = 1, \dots, s$.

Dados tres dientes cualesquiera, T_i , T_j y T_r , podemos identificarlos, uno a uno, con los de una configuración con $s = 3$. A continuación, construimos las soluciones ampliadas asociadas a todas y cada una de las soluciones que

han aparecido en la Proposición 6.2. Llegado este punto podemos reproducir exactamente la misma demostración y concluir que:

$$f_e = \begin{cases} \alpha & e \in E(T_i) \cup E(T_j) \cup E(T_r) \\ \alpha & e = (u, v) \text{ con } u \in \{s+i, s+j, s+r\} \text{ y } v \in V \setminus C \\ 2\alpha & e \in \{(i, j), (i, r), (j, r)\} \\ 2\alpha & e = (u, v) \text{ con } u \in \{i, j, r\} \text{ y } v \in V \setminus C \\ 2\alpha & e \in \{(s+i, s+j), (s+i, s+r), (s+j, s+r)\} \\ 3\alpha & e \text{ es una arista } \textit{cruzada} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ahora bien, como el resultado obtenido no depende de los dientes elegidos, si mantenemos T_i fijo y repetimos el proceso para todas las posibles parejas restantes llegaremos a que los coeficientes de $f^t x$ son en realidad:

$$f_e = \begin{cases} \alpha & e \in E(T_i), i = 1, \dots, s \\ \alpha & e \in (T_i \setminus H, V \setminus C), i = 1, \dots, s \\ 2\alpha & e \in E(H) \\ 2\alpha & e \in (H, V \setminus C) \\ 2\alpha & e \in (T_i \setminus H, T_j \setminus H), i \neq j \\ 3\alpha & e \in (H \cap T_i, T_j \setminus H), i \neq j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es decir, $f = \alpha a$.

Sustituyendo ahora el vector de incidencia, de una cualquiera de las soluciones en la desigualdad obtenemos, $f^t x = \alpha 4s = f_0$ luego, $f_0 = \alpha 4s$. \diamond

Corolario 6.1 Si el número de vehículos no es fijo, $Q \doteq 3$ y $s \geq 3$, las desigualdades 2MG1 inducen facetas del P_{SDVRP} .

Demostración

La validez de las desigualdades 2MG1 para el $SDVRP$ con un número ilimitado de vehículos es evidente, como vimos en la Nota 6.2. Es fácil comprobar que también inducen facetas del P_{SDVRP} , puesto que las demostraciones de las proposiciones 6.2 y 6.3 son igualmente válidas para un número ilimitado de vehículos. \diamond

6.2 Desigualdades 2MG2.

Cuando la capacidad del vehículo es mayor estricto que 3, Araque introduce, para el *CVRP* con demandas unitarias, la siguiente definición de desigualdades *2-matching generalizadas*. Es distinta a la que da para $Q = 3$.

Sea $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 6$ y $H, T_1, \dots, T_s \subseteq V$, que cumplen:

- (i) $|T_i| = 2$, $|H \cap T_i| = 1$, $T_i \cap T_j = \emptyset$ para $1 \leq i < j \leq s$.
- (ii) $s \geq 3$ impar y, o $Q \geq \max\{\frac{2(|H|+s)}{s-1}, 7\}$ cuando $H \setminus \bigcup_{i=1}^s T_i \neq \emptyset$, o $Q \geq 6$ cuando $H \setminus \bigcup_{i=1}^s T_i = \emptyset$

las desigualdades *2-matching generalizadas* se definen de la siguiente manera:

$$x(E(H)) + \sum_{i=1}^s x(E(T_i)) \leq |H| + s - \lceil \frac{s}{2} \rceil$$

Deduciremos unas restricciones válidas para el P_{SDVRP} a partir de las anteriores aplicando, de nuevo, la misma transformación que ya utilizamos para conseguir las 2MG1. Como,

$$|H| + s - \lceil \frac{s}{2} \rceil \geq x(E(H)) + \sum_{i=1}^s x(E(T_i))$$

y,

$$x(E(H)) + \sum_{i=1}^s x(E(T_i)) \geq |H| - \frac{x(\delta(H))}{2} + \sum_{i=1}^s \left(|T_i| - \frac{x(\delta(T_i))}{2} \right)$$

tenemos:

$$s - \lceil \frac{s}{2} \rceil \geq -\frac{x(\delta(H))}{2} + 2s - \sum_{i=1}^s \frac{x(\delta(T_i))}{2}$$

$$x(\delta(H)) + \sum_{i=1}^s x(\delta(T_i)) \geq 4s - 2s + 2\lceil \frac{s}{2} \rceil$$

$$x(\delta(H)) + \sum_{i=1}^s x(\delta(T_i)) \geq 2s + 2\lceil \frac{s}{2} \rceil$$

lo cual nos permite introducir la siguiente definición:

Definición 6.2 Dado $G = (V, E)$ un grafo completo no dirigido, con $n \geq 6$ y $|V| = n + 1$, definimos las desigualdades "2-matching generalizadas tipo 2" para el SDVRP de la siguiente manera:

$$x(\delta(H)) + \sum_{i=1}^s x(\delta(T_i)) \geq 2s + 2\lceil \frac{s}{2} \rceil$$

donde:

- (i) $H, T_1, \dots, T_s \subseteq V \setminus \{0\}$
- (ii) $|T_i| = 2, |H \cap T_i| = 1, T_i \cap T_j = \emptyset$ para $1 \leq i < j \leq s$.
- (iii) $s \geq 3$ e impar y,

$$\begin{aligned} \text{si } H \setminus (\cup_{i=1}^s T_i) \neq \emptyset &\rightarrow Q \succeq \max\left\{\frac{2d(C)}{s-1}, 7\right\}, \text{ donde } C = \cup_{i=1}^s T_i \cup H \\ \text{si } H \setminus (\cup_{i=1}^s T_i) = \emptyset &\rightarrow Q \succeq 6 \end{aligned}$$

y las denotaremos por $2MG2$.

Explicaremos a continuación cómo hemos llegado a establecer la condición (iii) de la definición anterior. Según Araque:

- $Q \geq 6$ cuando los únicos vértices del mango son los de los dientes; para demandas unitarias, decir que $Q \geq 6$ es decir que la demanda de tres dientes cualesquiera puede ser servida por un único vehículo ya que $|T_i| = 2$ para todo i . La traducción inmediata de esta condición al campo del SDVRP consiste en asegurarse que, 6 clientes cualesquiera, pueden ser servidos completamente por un único vehículo y esto se consigue tomando $Q \succeq 6$.
- $Q \geq \max\left\{\frac{2(|H|+s)}{s-1}, 7\right\}$, cuando $H \setminus \cup_{i=1}^s T_i \neq \emptyset$. Nótese que si el mango contiene algún vértice que no pertenece a ningún diente, asegurarse de que $Q \geq \frac{2(|H|+s)}{s-1}$, implica que la capacidad de los vehículos es tal que $|H| + s$ clientes se pueden servir con $\frac{s-1}{2}$ vehículos. En el CVRP con demandas unitarias $|H| + s = d(C)$, por lo tanto, la condición que hemos establecido para nuestro problema no es otra cosa que la traducción inmediata al caso de demandas cualesquiera de la condición establecida por Araque.

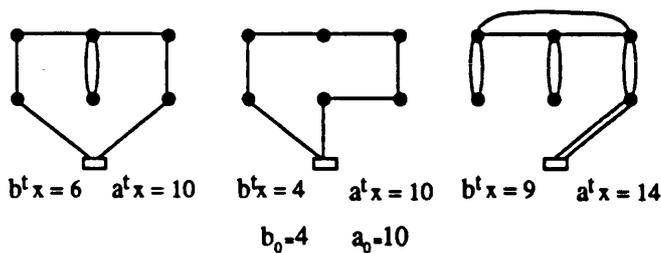


Figura 6.23: Las desigualdades *2-matching generalizadas*, $b^t x \leq b_0$, y las *2MG2*, $a^t x \geq a_0$, no son equivalentes.

A pesar de que las restricciones *2MG2* se obtienen de forma natural a partir de las desigualdades *2-matching generalizadas*, éstas no son equivalentes para el conjunto de soluciones del *SDVRP*: hay soluciones de nuestro problema que cumplen las dos con igualdad, otras que no cumplen ninguna de las dos con igualdad y, otras, que cumplen una con igualdad, pero no la otra. En la Figura 6.23 damos ejemplos que muestran lo que acabamos de decir.

Al principio de este capítulo indicamos que encontraríamos dos tipos de desigualdades distintas, son las *2MG1* y las *2MG2*. También apuntamos que las segundas no serían una nueva familia de desigualdades sino que, en realidad, corresponderían a un caso particular de unas desigualdades que ya han sido estudiadas con anterioridad en la memoria. En la siguiente proposición demostramos precisamente este resultado.

Proposición 6.4 *Las desigualdades 2MG2 son restricciones asociadas a una configuración:*

- "path 2-regular", si $H \setminus (\cup_{i=1}^s T_i) \neq \emptyset$,
- "wheelbarrow 2-regular", si $H \setminus (\cup_{i=1}^s T_i) = \emptyset$.

Demostración

Supongamos que $a^t x \geq a_0$ es una restricción *2MG2* con s dientes y que $f^t x \geq f_0$ es una desigualdad asociada a un configuración *path* o *wheelbarrow 2-regular* con el mismo número de caminos. Demostraremos que $a = f$ y que $a_0 = f_0$, independientemente de cual sea la capacidad de los vehículos.

Que los términos independientes coinciden es evidente ya que, si s es impar

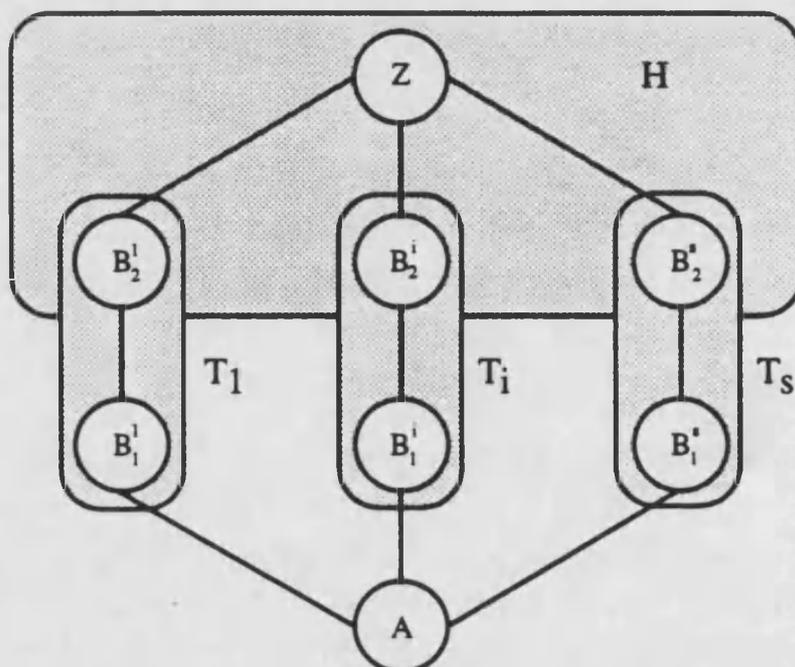


Figura 6.24: Relación entre las estructuras de una $2MG2$ y una $path$ 2-regular.

entonces $s = 2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ y,

$$a_0 = 2s + 2 \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil = 2s + 2 \left\lceil \frac{2p + 1}{2} \right\rceil = 2s + 2(p + 1) = 2s + \underbrace{2p + 1}_{=s} + 1 = 3s + 1 = f_0$$

Veamos ahora cómo, a partir de los subconjuntos que permiten definir las desigualdades $2MG2$, podemos construir una configuración $path$ 2-regular o una $wheelbarrow$ 2-regular, dependiendo de si el mango contiene, o no, algún vértice que no pertenezca a ningún diente. En primer lugar, como el depósito no pertenece a C tenemos garantizado que A , tal y como lo definimos a continuación, es no vacío.

$$\begin{aligned} A &= V \setminus C \neq \emptyset, \text{ ya que } 0 \in A \\ B_1^i &= T_i \setminus H \neq \emptyset \\ B_2^i &= T_i \cap H \neq \emptyset \\ Z &= H \setminus (\cup_{i=1}^s T_i) \end{aligned}$$

En la Figura 6.24 podemos ver la equivalencia entre las estructuras asociadas a los dos tipos de desigualdades que nos ocupan. Como ya hemos mencio-

nado en alguna ocasión, los coeficientes de las aristas en $a^t x$ coinciden con el número de cortaduras a las que pertenece dicha arista y que forman parte de $a^t x$. Veamos que, con los conjuntos que acabamos de definir, $a_e = f_e, \forall e \in E$. Los coeficientes de $f^t x$ se pueden ver en la Definición 5.2.

- $e \in E(A) \cup E(Z) \cup \left(\bigcup_{i,j} E(B_j^i) \right)$.

Ya vimos que, para este tipo de aristas, $f_e = 0$ y como no pertenecen a ninguna de las cortaduras que forman parte de $a^t x$, $a_e = 0$, por lo tanto $a_e = f_e$.

- $e \in (A, Z)$.

Si $H \setminus (\bigcup_{i=1}^s T_i) \neq \emptyset$ entonces, $(A, Z) \neq \emptyset$ y $f_e = 1$. En la restricción $2MG2$ estas aristas pertenecen a $((V \setminus C), H \setminus (\bigcup_{i=1}^s T_i))$, i.e., son aristas que sólo se contabilizan en la cortadura asociada al mango ya que no tienen ningún extremo en ningún T_i , por lo tanto, $a_e = 1 = f_e$.

- $e \in (B_j^i, B_p^i), j \neq p$ y $|j - p| \leq 2, i = 1, \dots, s$.

Los coeficientes de estas aristas en $f^t x \geq f_0$ son todos iguales a $|j - p|$. Comprobaremos que valen lo mismo en $a^t x \geq a_0$ distinguiendo entre las posibles cortaduras que cumplen la condición:

- si $e \in (B_0^i, B_2^i)$, entonces $e \in (V \setminus C, H \cap T_i)$. Se trata de una arista que se contabiliza, tanto en la cortadura asociada a H , como en la asociada a T_i , su coeficiente en $2MG2$ es $a_e = 2 = f_e$.
- si $e \in (B_3^i, B_1^i)$, entonces $e \in (H \setminus (\bigcup_{i=1}^s T_i), T_i \setminus H)$. Suponiendo que hay aristas de este tipo, es evidente que se trata de aristas que pertenecen a $\delta(T_i)$ y a $\delta(H)$, por tanto $a_e = 2 = f_e$.
- si $e \in (B_2^i, B_1^i) = (H \cap T_i, T_i \setminus H)$, son aristas que pertenecen a $E(T_i)$, luego sólo se contabilizarán en la cortadura asociada al mango, i.e., $a_e = 1 = f_e$.
- si $e \in (B_1^i, B_0^i) = (T_i \setminus H, V \setminus C)$, e sólo forma parte de $\delta(T_i)$, luego $a_e = 1 = f_e$.
- si $e \in (B_3^i, B_2^i) = (H \setminus (\bigcup_{i=1}^s T_i), H \cap T_i)$, e sólo forma parte de $\delta(T_i)$, ya que es una arista del mango que tiene un único extremo en uno de los dientes, luego, $a_e = 1 = f_e$.

- $e \in (B_j^i, B_p^i), i \neq l, j, p \in \{1, 2\}$. Independientemente de los valores de i y de l , sabemos que $f_e = \max\{p - j + 2, j - p + 2\}$. Distinguiremos de nuevo cada una de las posibilidades:

- si $e \in (B_1^i, B_1^l) = (T_i \setminus H, T_l \setminus H)$, se trata de una arista que tiene cada extremo en un diente diferente, pero ninguno en H , luego, se contabilizará en las dos cortaduras asociadas a esos dos dientes, $a_e = 2$. En este caso, el máximo que define f_e es único e igual a 2.
- si $e \in (B_1^i, B_2^l) = (T_i \setminus H, H \cap T_l)$, la arista tiene un extremo en un diente y el otro en la intersección del mango con otro diente distinto; se trata de una arista cruzada y, por tanto, interviene en tres cortaduras, la de los dos dientes y la del mango, $a_e = 3$. $f_e = \max\{1 - 2 + 2, 2 - 1 + 2\} = 3$.
- si $e \in (B_2^i, B_2^l) = (H \cap T_i, H \cap T_l)$, es una arista del mango pero cuyos extremos pertenecen a dos dientes distintos; e se contabilizará en las cortaduras asociadas a estos dos dientes, por lo tanto $a_e = 2$. De nuevo el máximo que permite calcular f_e es único, e igual a 2.

Luego, tal y como habíamos comentado al principio, las desigualdades $2MG2$ son en realidad casos particulares de las desigualdades *path* ó *wheelbarrow*. \diamond

Corolario 6.2 Si $s \geq 3$ e impar las desigualdades $2MG2$ son válidas para el $SDVRP$.

Demostración

Acabamos de demostrar en la proposición anterior que las desigualdades $2MG2$ con, $s \geq 3$ e impar, son, en realidad, desigualdades asociadas a configuraciones *path* o, a configuraciones *wheelbarrow*.

Como en la Proposición 5.9 demostramos que estas restricciones eran válidas para el $SDVRP$, independientemente del número de vehículos y de su capacidad, concluimos el resultado que acabamos de plantear. \diamond

Proposición 6.5 Si tenemos un número par de dientes, las desigualdades $x(\delta(H)) + \sum_{i=1}^s x(\delta(T_i)) \geq 3s$ son válidas para el $SDVRP$, pero no inducen facetas del poliedro asociado.

Demostración

Supongamos que s es par y que $T_i = \{i, s + i\}$, $i = 1, \dots, s$. Consideremos la siguiente desigualdad:

$$x(\delta(H)) + \sum_{i=1}^s x(\delta(T_i)) \geq 3s$$

Como $s - 1$ es impar, por el Corolario 6.2, sabemos que todas las soluciones del *SDVRP* satisfacen las restricciones *2MG2* para un número impar de dientes. En particular la que resulta cuando tomamos $H' = H \setminus \{s\}$ y los $s - 1$ primeros dientes, la restricción asociada será:

$$x(\delta(H')) + \sum_{i=1}^{s-1} x(\delta(T_i)) \geq 3s - 2$$

Sea $C = \cup_{i=1}^s T_i \cup H$.

Es evidente que:

$$\begin{aligned} x(\delta(H)) + \sum_{i=1}^s x(\delta(T_i)) &= \\ x(\delta(H')) + x(\delta(s)) - 2x(H', \{s\}) + \sum_{i=1}^{s-1} x(\delta(T_i)) + x(\delta(T_s)) &= \\ x(\delta(H')) + \sum_{i=1}^{s-1} x(\delta(T_i)) + x(\delta(s)) - 2x(H', \{s\}) + x(\delta(T_s)) &\geq \\ 3s - 2 + x(\delta(s)) - 2x(H', \{s\}) + x(\delta(T_s)) \end{aligned}$$

pero como:

$$x(\delta(T_s)) = x(\delta(s)) + x(\delta(2s)) - 2x(\{s\}, \{2s\})$$

y,

$$x(\delta(s)) = x(\{s\}, \{2s\}) + x(\{s\}, V \setminus C) + x(\{s\}, H') + \sum_{i=1}^{s-1} x(\{s\}, T_i \setminus H)$$

$$x(\delta(2s)) = x(\{s\}, \{2s\}) + x(\{2s\}, V \setminus C) + x(\{2s\}, H') + \sum_{i=1}^{s-1} x(\{2s\}, T_i \setminus H)$$

tenemos:

$$\begin{aligned} x(\delta(T_s)) &= x(\{s\}, V \setminus C) + x(\{s\}, H') + \sum_{i=1}^{s-1} x(\{s\}, T_i \setminus H) + \\ x(\{2s\}, V \setminus C) + x(\{2s\}, H') + \sum_{i=1}^{s-1} x(\{2s\}, T_i \setminus H) + \\ 2x(\{s\}, \{2s\}) - 2x(\{s\}, \{2s\}) \end{aligned}$$

luego:

$$\begin{aligned}
& x(\delta(s)) - 2x(H', \{s\}) + x(\delta(T_s)) = \\
& x(\{s\}, \{2s\}) + x(\{s\}, V \setminus C) + x(\{s\}, H') + \\
& \sum_{i=1}^{s-1} x(\{s\}, T_i \setminus H) - 2x(H', \{s\}) + \\
& x(\{s\}, V \setminus C) + x(\{s\}, H') + \\
& \sum_{i=1}^{s-1} x(\{s\}, T_i \setminus H) + \\
& x(\{2s\}, V \setminus C) + x(\{2s\}, H') + \\
& \sum_{i=1}^{s-1} x(\{2s\}, T_i \setminus H)
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
& x(\delta(H)) + \sum_{i=1}^s x(\delta(T_i)) \geq \\
& 3s - 2 + \frac{x(\{s\}, \{2s\})}{2} + x(\{s\}, V \setminus C) + \\
& \sum_{i=1}^{s-1} x(\{s\}, T_i \setminus H) + \\
& x(\{s\}, V \setminus C) + \\
& \sum_{i=1}^{s-1} x(\{s\}, T_i \setminus H) + \\
& \frac{x(\{2s\}, V \setminus C) + x(\{2s\}, H') + \\
& \sum_{i=1}^{s-1} x(\{2s\}, T_i \setminus H)}{2} = \\
& 3s - 2 + \underbrace{x(\delta(2s))}_{\geq 2} + \\
& \underbrace{2x(\{s\}, V \setminus C) + 2 \sum_{i=1}^{s-1} x(\{s\}, T_i \setminus H)}_{\geq 0} \geq 3s
\end{aligned}$$

Luego $x(\delta(H)) + \sum_{i=1}^s x(\delta(T_i)) \geq 3s$ son válidas y están dominadas por una combinación lineal positiva de las $2MG2$, de las de grado y de las restricciones de no negatividad, por lo que no inducirán facetas del P_{SDVRP} . \diamond

Las condiciones establecidas sobre los conjuntos que permiten definir las restricciones 2 -*matching generalizadas* para el $CVRP$, junto con las impuestas sobre la capacidad de los vehículos, son suficientes para que dichas desigualdades induzcan facetas del poliedro de soluciones asociado. Este resultado sigue siendo válido para las desigualdades definidas en la Definición 6.2 para el $SDVRP$. Podemos enunciar entonces la siguiente proposición:

Proposición 6.6 *Supongamos que las demandas de los clientes están ordenadas de menor a mayor i.e., $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ entonces, las desigualdades*

2MG2 inducen facetas del P_{SDVRP} , si:

$$\begin{aligned} & - K \geq \max \left\{ \frac{s-1}{2}, \lceil \frac{d(V)}{Q} \rceil \right\}, \quad s \geq 3, \text{ e impar} \\ & - Q \geq \sum_{i=0}^5 d_{n-i} \text{ cuando } H \setminus \bigcup_{i=1}^s T_i = \emptyset \text{ o,} \\ & Q \geq \max \left\{ 2 \frac{\sum_{i \in H \cup (\bigcup_{j=1}^s T_j)} d_i}{s-1}, \sum_{i=0}^5 d_{n-i} \right\} \text{ cuando } H \setminus \bigcup_{i=1}^s T_i \neq \emptyset \end{aligned}$$

Demostración

Por la Proposición 6.4, sabemos que las restricciones 2MG2 son, en realidad, desigualdades asociadas a configuraciones *path* o *wheelbarrow*. Por tanto, si cumplen las condiciones suficientes establecidas en las Proposiciones 5.10 y 5.14, inducirán facetas del P_{SDVRP} .

Veamos que las hipótesis de esta proposición son precisamente las mismas que las de los resultados a los que nos acabamos de referir.

Si $H \setminus \bigcup_{i=1}^s T_i = \emptyset$ entonces, la restricción 2MG2 es una desigualdad asociada a una configuración *wheelbarrow*. Por hipótesis, $Q \geq \sum_{i=0}^5 d_{n-i}$ luego, un único vehículo puede servir completamente a tres dientes cualesquiera y, por tanto, $Q \geq d(P_{s-2}) + d(P_{s-1}) + d(P_s)$ ya que, $P_i = T_i$, $i = 1, \dots, s$. Aplicando la Proposición 5.14 concluimos que las desigualdades 2MG2 definen facetas del P_{SDVRP} .

Si $H \setminus \bigcup_{i=1}^s T_i \neq \emptyset$ entonces, la restricción 2MG2 es una desigualdad asociada a una configuración *path*. Para este caso,

$$Q \geq \max \left\{ \sum_{i=0}^5 d_{n-i}, 2 \frac{\sum_{i \in H \cup (\bigcup_{j=1}^s T_j)} d_i}{s-1} \right\}$$

es decir, con $\frac{s-1}{2}$ vehículos distintos podemos servir completamente la demanda de todos los dientes y del mango. Como las condiciones para que las desigualdades asociadas a las *path* indujeran facetas del P_{SDVRP} eran:

$$Q \geq \max \left\{ d(P_{s-2}) + d(P_{s-1}) + d(P_s), 2 \lceil \frac{d(Z) + \sum_{i=1}^s d(P_i)}{s-1} \rceil \right\}$$

si suponíamos que:

$$d(P_1) \leq d(P_2) \leq \dots \leq d(P_s)$$

y, las condiciones que hemos establecido las implican, podemos concluir que las restricciones 2MG2 inducen facetas del P_{SDVRP} . \diamond

En el siguiente ejemplo mostramos que:

$$\{x \in P_{CVRP} : a^t x = 3s + 1\} \subset \{x \in P_{SDVRP} : a^t x = 3s + 1\}$$

y que:

$$\{x \in P_{GVRP} : a^t x = 3s + 1\} \subset \{x \in P_{SDVRP} : a^t x = 3s + 1\}$$

es decir, que aunque la desigualdad sea la misma para los tres poliedros las caras que inducen son distintas.

Ejemplo 6.2 Supongamos que $d_i = 3, \forall i \in \cup_{i=1}^s T_i$, y para todos los clientes del mango, salvo para el que hemos representado por un cuadrado que tiene demanda 2. Disponemos de 2 vehículos de capacidad $Q = 25$.

$$\max \left\{ \sum_{i=0}^5 d_{n-i}, 2 \frac{\sum_{i \in HU(\cup_{i=1}^s T_i)} d_i}{s-1} \right\} = \max \left\{ 18, \frac{50}{2} \right\} = 25$$

y $a_0 = 16$.

La solución que presentamos en la Figura 6.25 cumple con igualdad la restricción $a^t x = 16$ y es una solución posible del SDVRP.

Observar que ninguno de los dos vehículos puede servir ni una unidad menos de lo que indica su capacidad pues la demanda total es igual a 50. Tanto en el CVRP, como en el GVRP, no se puede abastecer la demanda de ningún cliente con más de un vehículo, por lo que el cliente del mango con demanda igual a 2 debe estar asignado a un único vehículo, aunque lo visite más de uno. Ahora bien, la capacidad libre de este vehículo será solamente de 23 unidades, esto indica que, a lo sumo, podrá servir 7 clientes de demanda 3, quedarán otros 9 clientes de demanda igual a 3 que deberán servirse con el otro vehículo, contradiciendo así el hecho de que $Q = 25$. Lo cual garantiza que, con las condiciones que hemos establecido, hay soluciones del SDVRP que cumplen la desigualdad con igualdad y que, sin embargo, no es posible encontrar ninguna solución del GVRP, ni del CVRP, que la cumpla, ya que:

$$\{x \in P_{CVRP} : a^t x = 3s + 1\} = \emptyset = \{x \in P_{GVRP} : a^t x = 3s + 1\}$$

En realidad, $P_{CVRP} = \emptyset = P_{GVRP}$.

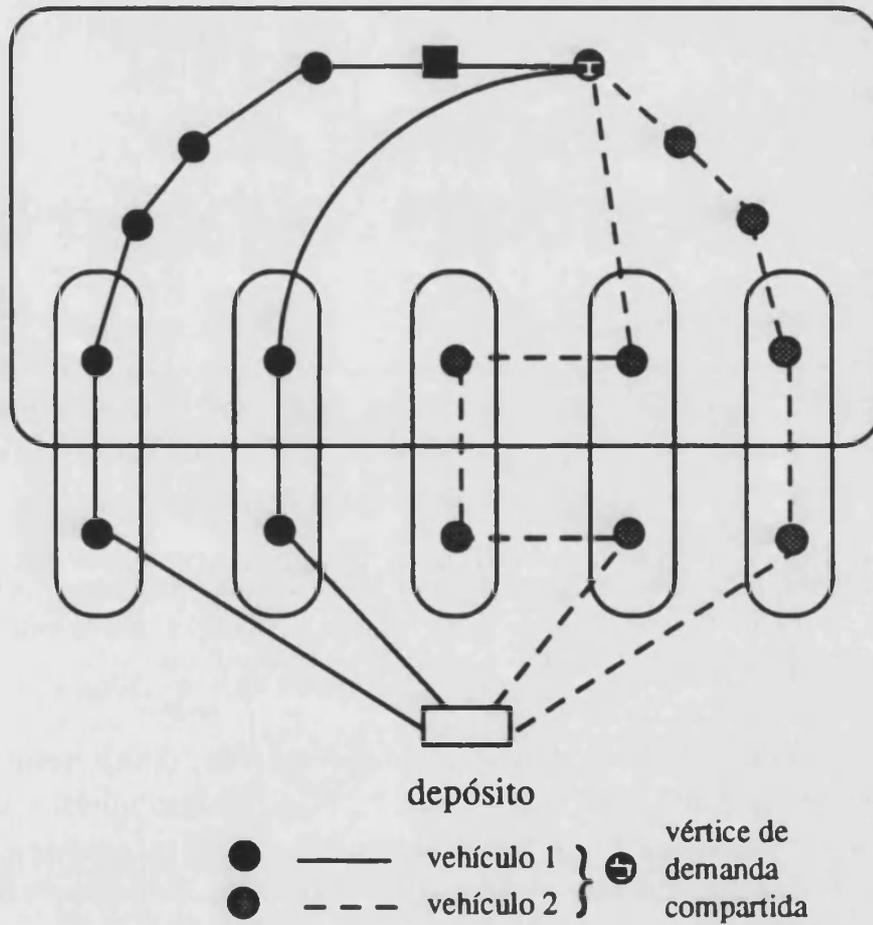


Figura 6.25: $\{x \in P_{GVRP} : a^t x = 3s + 1\} \subset \{x \in P_{SDVRP} : a^t x = 3s + 1\}$.

No hemos dicho nada sobre lo que ocurre cuando la capacidad del vehículo cumple $4 \preceq Q \preceq 5$. Puesto que la validez de las desigualdades asociadas a las configuraciones *path* y *wheelbarrow* no dependía, ni del número de vehículos, ni de su capacidad, sabemos que seguirán siendo válidas para estos valores de Q . Ahora bien, ¿seguirán induciendo facetas?, responderemos a esta pregunta en la siguiente sección.

6.3 Dos casos especiales, $Q \doteq 4$ y $Q \doteq 5$.

En este apartado estudiamos qué ocurre con las desigualdades *2-matching generalizadas* cuando aumentamos la capacidad de los vehículos de manera que, cada uno de ellos, puede servir completamente a cuatro clientes cualesquiera, pero nunca a cinco ($Q \doteq 4$) o, a cinco, pero no a seis ($Q \doteq 5$).

En los trabajos de Araque que hemos estudiado no hemos encontrado ningún resultado sobre el *CVRP*, con demandas unitarias, en el que se tengan en cuenta los casos $Q = 4$ y $Q = 5$.

En principio, cabe esperar que aumentar Q revierta, como hemos visto en la sección anterior, en una disminución del término independiente de la desigualdad. A mayor capacidad, menos vehículos se necesitarán para abastecer la demanda de todos los clientes y menor será el valor de las cortaduras que definen el lado izquierdo de la restricción.

Al enfrentarnos al estudio de los casos $Q \doteq 4$ y $Q \doteq 5$ nos encontramos con el hecho de que son, de alguna manera, dos estados *transitorios* entre dos tipos de desigualdades que inducen facetas del *PSDVRP*, las *2MG1* y las *2MG2*. Cuando K no es fijo o, si lo es, cuando es mayor o igual que un determinado valor, hay soluciones que violan las desigualdades *2MG1* con estos valores de Q .

El siguiente esquema aclara el motivo por el cual hemos llamado estados *transitorios* a los casos $Q \doteq 4$ y $Q \doteq 5$.

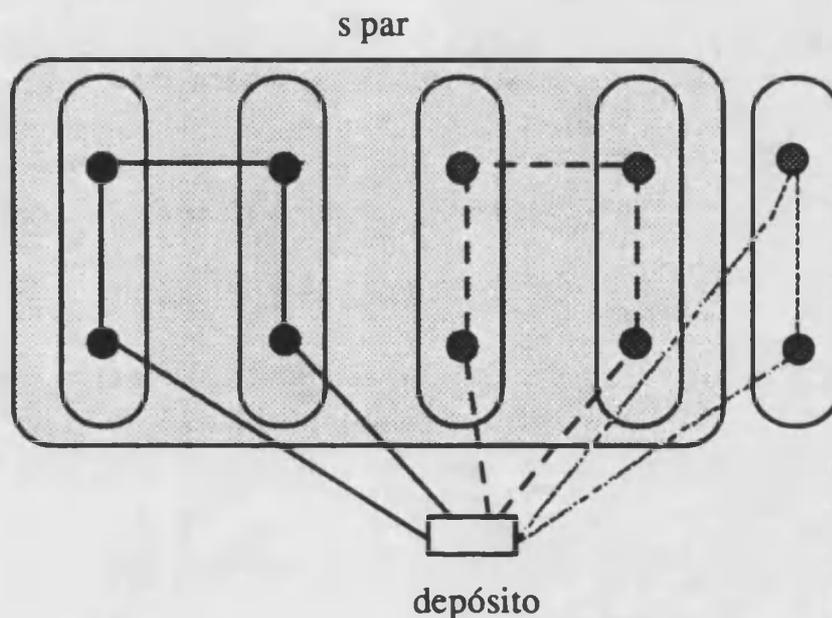


Figura 6.26: Soluciones que cumplen para s par $a^t x = 3s$ y, para s impar $a^t x = 3s + 1$.

$\underbrace{Q \doteq 3}$	$\underbrace{Q \doteq 4 \text{ ó } Q \doteq 5}$	$\underbrace{Q \geq 6}$
$a^t x \geq 4s$	¿ dominadas?	$a^t x \geq 3s + 1$
facetas		facetas

Tanto si $Q \doteq 4$, como si $Q \doteq 5$, encontramos soluciones que para s par cumplen $a^t x = 3s$ y para s impar $a^t x = 3s + 1$, véase la Figura 6.26. Estas soluciones violan, evidentemente, $a^t x \geq 4s$.

El resultado anterior no es sorprendente si tenemos en cuenta la equivalencia demostrada en la Proposición 6.4 entre las estructuras asociadas a las *2-matching generalizadas* y las configuraciones *path* o *wheelbarrow*. Esto permite asegurar que las desigualdades $x(\delta(H)) + \sum_{i=1}^s x(\delta(T_i)) \geq 3s + 1$ son válidas para s impar ya que, tal y como demostramos en la Proposición 5.9, la validez no depende, ni del número de vehículos, ni de la capacidad de los mismos. Por el mismo motivo las desigualdades $x(\delta(H)) + \sum_{i=1}^s x(\delta(T_i)) \geq 3s$ con s par están dominadas, véase la Proposición 6.5.

Pero ..., si s es impar, ¿seguirán induciendo facetas del P_{SDVRP} ? Por el momento no hemos encontrado una respuesta satisfactoria a esta pregunta. Sin embargo, al intentar demostrar, utilizando el método indirecto, que las desigualdades $2MG2$ son facetas si $Q \doteq 4$, no hemos podido encontrar ninguna solución que cumpla con igualdad la restricción y que utilice aristas de la cortadura $(T_i \setminus H, T_j \setminus H)$, $i \neq j$. Esto nos induce a hacer la siguiente conjetura:

$$\{x^T \in P_{SDVRP} \mid a^t x^T = 3s + 1\} \subseteq \{x^T \in P_{SDVRP} \mid x_{ij}^T = 0\}$$

donde $(i, j) \in (T_i \setminus H, T_j \setminus H)$, $i \neq j$. Si este resultado fuese cierto podríamos concluir que las desigualdades $2MG2$ están dominadas para $Q \doteq 4$, por lo que cabría esperar entonces que sucediese lo mismo para el caso $Q \doteq 5$.

Capítulo 7

Una nueva familia de facetas.

En este capítulo nos ocupamos del estudio del poliedro del *SDVRP* asociado a la instancia del problema de rutas de vehículos introducida por Fleischmann (Ejemplo 3.6), la cual servía como ejemplo para demostrar que el conjunto de desigualdades presentadas hasta ahora no constituía una formulación entera de nuestro problema.

El motivo de plantearnos este estudio no ha sido otro que, intentar averiguar qué clase de desigualdades necesitamos añadir a nuestro sistema de desigualdades para conseguir que toda solución del problema lineal entero corresponda, al menos, una solución del *SDVRP*.

La investigación que hemos realizado culminó con el descubrimiento de una nueva familia de facetas para el P_{SDVRP} . La importancia de estas desigualdades reside, principalmente, en que no se han obtenido a partir de ninguna otra familia ya conocida, ni para el *SDVRP*, ni para ningún otro problema de rutas de vehículos. Se trata de restricciones nuevas en el más estricto sentido de la palabra.

Describiremos brevemente la estructura de este capítulo esperando conseguir con ello transmitir una idea general de su contenido. En primer lugar obtendremos la descripción lineal completa del poliedro de soluciones asociado al ejemplo de Fleischmann. Como veremos más adelante, las restricciones que la forman son todas conocidas, salvo una, que es la que nos permitirá encontrar las nuevas desigualdades, de hecho, la generalizaremos para una estructura en la que los vértices del grafo asociado a la instancia introducida por Fleisch-

mann pueden ser supernodos, i.e., subconjuntos de vértices. Demostraremos que, en este caso, siguen induciendo facetas del P_{SDVRP} . Finalmente presentaremos un ejemplo que demuestra que, en general, aunque incluyamos dichas restricciones, seguimos sin tener una descripción lineal completa del poliedro en estudio. La descripción lineal del P_{SDVRP} se ve reforzada pero sigue siendo incompleta, ni tan siquiera nos sirve para conseguir una formulación lineal entera del problema con las variables x_{ij} .

7.1 El origen de la nueva familia.

7.1.1 Ejemplo de Fleischmann.

Como ya hemos mencionado en alguna ocasión a lo largo de esta memoria, la instancia presentada en la Figura 7.1 satisface todas las desigualdades válidas para el P_{SDVRP} introducidas hasta el momento. Sin embargo, es imposible descomponer el conjunto de aristas de la figura en dos rutas que permitan abastecer la demanda de todos los clientes sin que se viole alguna de las restricciones de capacidad asociadas a los vehículos.

Debido a la importancia crucial del ejemplo de Fleischmann en el desarrollo de este capítulo, creemos oportuno recordar aquí cual era la estructura de la instancia asociada.

INSTANCIA

$$\begin{aligned}
 V &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\
 d_0 &= 0, \quad d_1 = 4, \quad d_2 = 1, \quad d_3 = 1, \quad d_4 = 1, \quad d_5 = 1 \\
 K &= 2 \text{ y } Q = 4
 \end{aligned}$$

Cuando uno ve este ejemplo por primera vez, puede pensar que fue introducido, en el contexto del $GVRP$, para ilustrar la deficiencia de la formulación introducida en la Definición 3.2, pero que, en la práctica, sería extremadamente improbable encontrarse con una estructura de esas características. Sin embargo, sorprendentemente, durante las experiencias computacionales que hemos realizado, nos hemos encontrado con una solución en la que aparece

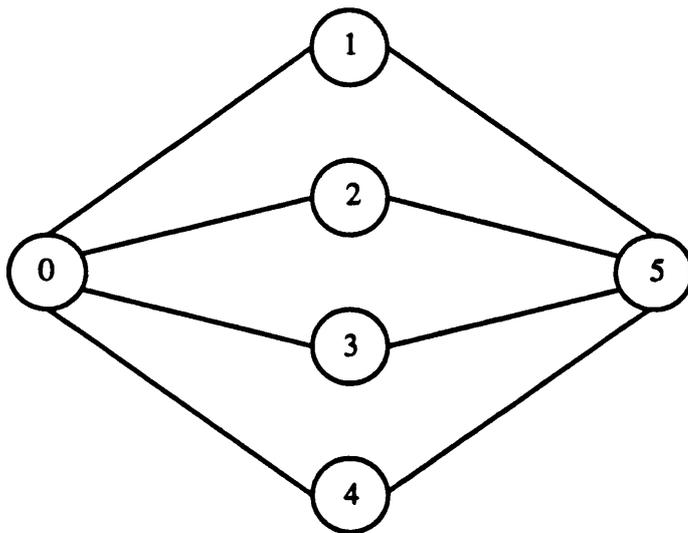


Figura 7.1: Ejemplo de Fleischmann.

dicha estructura. En la Figura 7.2 presentamos esa solución, corresponde a uno de los problemas ya clásicos de la literatura, el *eil33* (ver Christofides y Eilon (1969) [18]).

En este ejemplo se dispone de cuatro vehículos idénticos cuya capacidad es $Q = 8000$. El depósito es el vértice 1. En la Tabla 7.1 presentamos las demandas de los 32 vértices del *eil33*.

A la vista de las aristas que aparecen en la solución deducimos que hay determinados subconjuntos de clientes que deben ser servidos completamente por un mismo vehículo; son los siguientes:

$$B_1 = \{14, 18, 26, 25, 24, 23, 21, 22, 20, 19, 11, 10\}, d(B_1) = 7850$$

$$B_2 = \{3, 13, 12, 33, 9\}, d(B_2) = 4050$$

$$B_3 = \{4, 6, 7\}, d(B_3) = 520$$

$$B_4 = \{5\}, d(B_4) = 1200$$

$$B_5 = \{30, 17, 29, 28, 27, 16, 2\}, d(B_5) = 7950$$

$$B_6 = \{31, 15, 32\}, d(B_6) = 5800$$

Por el contrario, el vértice número 8 está asociado a un cliente cuya demanda puede ser abastecida entre dos vehículos distintos.

2	700	10	600	18	550	26	1400
3	400	11	750	19	650	27	4000
4	400	12	1500	20	200	28	600
5	1200	13	150	21	400	29	1000
6	40	14	250	22	300	30	500
7	80	15	1600	23	1300	31	2500
8	2000	16	450	24	700	32	1700
9	900	17	700	25	750	33	1100

Tabla 7.1: Demandas del *eil33*.

Si condensamos el grafo de la solución con la que estamos trabajando nos queda la estructura reflejada en la Figura 7.3.

Es evidente que el supernodo B_5 debe asignarse a un único vehículo que, por cuestiones de capacidad ($Q = 8000$), no podrá servir a ningún otro cliente, ni total, ni parcialmente.

Lo mismo ocurre con el supernodo B_1 . Sin embargo, la única manera de conseguir una ruta que lo contenga, utilizando las aristas de esta solución, es haciendo que dicha ruta contenga también a alguno de los supernodos B_2 , B_3 , o B_4 . Ahora bien, el hecho de que en la solución las cortaduras de estos supernodos sean exactamente igual a dos, significa que deben ser servidos completamente por un único vehículo, situación que, por otra parte, resulta incompatible con el hecho de estar asignados a la misma ruta que B_1 pues:

$$d(B_1) + d(B_i) > Q, \quad i = 2, 3, 4$$

Concluimos así que es imposible encontrar una solución del *SDVRP* que utilice sólo las aristas que estamos considerando. Si observamos la parte sombreada en la Figura 7.2 nos damos cuenta de que en realidad se trata de una estructura idéntica a la introducida por Fleischmann.

Tendrá sentido por tanto plantearse la búsqueda de algún tipo de desigualdad que permita eliminar este tipo de soluciones. Esto es precisamente de lo que nos ocuparemos en la siguiente sección.

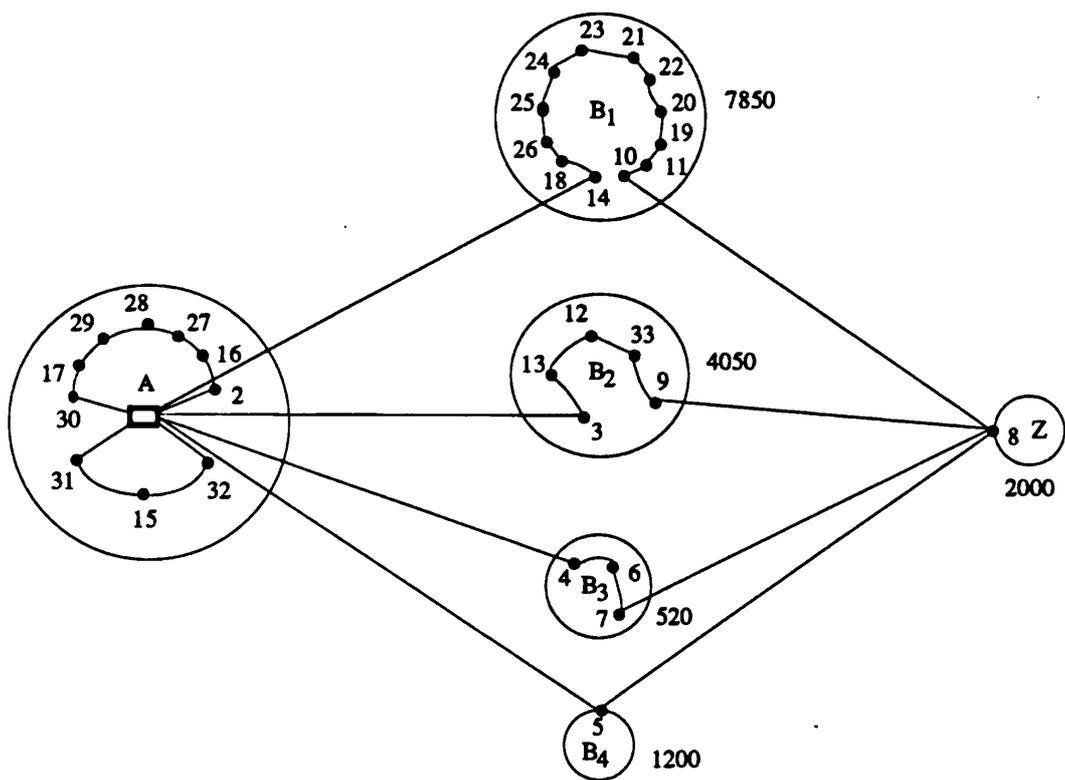


Figura 7.3: Identificación de supernodos en la solución .

7.1.2 Descripción lineal completa del poliedro de soluciones asociado al ejemplo de Fleischmann.

El objetivo que nos hemos marcado en este apartado es encontrar un conjunto de desigualdades lineales cuyas soluciones enteras sean, precisamente, el conjunto de soluciones posibles de la instancia del *SDVRP* que hemos descrito anteriormente.

Sabemos que todo poliedro admite dos representaciones distintas, una de ellas consiste en describirlo como la envoltura convexa de un determinado conjunto de puntos más, la envoltura cónico-convexa de un conjunto de vectores y, la otra, como el conjunto de soluciones de un sistema de igualdades y desigualdades lineales. Por lo tanto, conocida una de las dos representaciones será posible, al menos desde un punto de vista teórico, obtener la otra mediante una transformación de aquella que conocemos.

Por otra parte, cuando nos enfrentamos a una instancia pequeña de determinados problemas combinatorios, es posible generar un subconjunto de soluciones de cardinalidad reducida que, junto con un conjunto de direcciones adecuado, nos permite caracterizar el poliedro de soluciones asociado vía la primera representación. Esto es precisamente lo que vamos a hacer con la instancia asociada al ejemplo de Fleischmann. A continuación, utilizando un algoritmo de transformación conocido con el nombre de PORTA [16], obtendremos la descripción lineal completa del poliedro de soluciones asociado.

PORTA (*P*OLYhedron *R*epresentation *T*ransformation *A*lgorithm) es un algoritmo que se encuentra en una de las cuentas de libre disposición de la red Ethernet. Entre otras cosas, el algoritmo contiene una función que proporciona la descripción lineal completa de un poliedro que se le ha dado como envoltura convexa de un conjunto de puntos más, la envoltura cónico convexa de un conjunto de vectores. Otra de sus funciones devuelve el conjunto de puntos, de coordenadas enteras, que pertenecen a un poliedro descrito mediante un sistema de desigualdades lineales.

Para poder aplicarlo necesitaremos conocer todas las soluciones del problema o, al menos, un subconjunto de ellas que junto con el conjunto de direcciones nos permita generar el total. Como el número de soluciones posibles crece exponencialmente con relación al número de aristas que estamos dispuestos a utilizar, resulta evidente que, la única forma de conseguir un subconjunto

de dimensiones adecuadas para aplicar el algoritmo es, utilizando sólomente un subconjunto de aristas E^* . Nosotros hemos elegido 9 del total de 15 que configuran el grafo completo, concretamente, las 8 que aparecen en la solución introducida por Fleischmann mas la arista que une el depósito con el vértice 5.

El inconveniente de trabajar con un subgrafo está en que, para cada una de las desigualdades que forman parte de la descripción lineal completa del poliedro, necesitaremos hacer un lifting sobre las aristas no consideradas. El objetivo del proceso de liftado no es otro que el de deducir, para cada restricción, los coeficientes asociados a cada una de las aristas que no habíamos tenido en cuenta.

Puesto que sólo disponemos de dos vehículos, es evidente que, en una solución *minimal*, en cuanto a número de aristas utilizadas, un vehículo no utilizará más de dos veces una misma arista. Si lo hiciera, correspondería a una solución que, en el poliedro, estaría sobre el rayo generado por una de las soluciones minimales y la dirección $(0, \dots, 2, \dots, 0)^t$ (el 2 correspondería a la componente asociada a dicha arista). Una vez hecha esta observación es evidente que si x es el vector de \mathbb{R}^9 cuyas coordenadas indican el número de veces que aparece cada arista en una solución, para generar todas las soluciones posibles bastará con considerar únicamente aquellos vectores de \mathbb{R}^9 cuyas componentes sólo pueden tomar los valores $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ (recordar que $K = 2$) y chequear, a continuación, cuáles corresponden realmente a vectores de incidencia de soluciones del *SDVRP*. A partir de ellos y añadiendo las direcciones obtendremos todas las soluciones de nuestro problema.

Detallamos a continuación el procedimiento seguido.

En primer lugar, obtenemos todos los vectores enteros cuyas componentes toman uno cualquiera de los valores mencionados y seleccionamos aquellos que cumplen todas las restricciones de grado, paridad, eliminación de subtours y capacidad asociadas a nuestra instancia, es decir:

$$\begin{array}{l}
\left. \begin{array}{l}
\sum_{i=1}^5 x_{0i} \geq 4 \quad \text{y par} \\
x_{0i} + x_{i5} \geq 2 \quad \text{y par} \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\} \\
\sum_{i=0}^4 x_{i5} \geq 2 \quad \text{y par}
\end{array} \right\} \text{ grado y paridad} \\
\sum_{(i,j) \in (S,\bar{S})} x_{i,j} \geq 2 \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil \quad \forall S \in \mathcal{S}^* \quad \text{capacidad} \\
x_{ij} \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad \forall e = (i, j), e \in E^* \quad \text{integridad}
\end{array}$$

donde \mathcal{S}^* es el conjunto minimal de subconjuntos de V que genera todas las desigualdades necesarias para evitar la existencia de subtours.

$$\mathcal{S}^* = \left\{ \begin{array}{l}
\{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{4, 5\} \\
\{1, 2, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\} \\
\{1, 2, 3, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}
\end{array} \right\}$$

y,

$$2 \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil = \begin{cases} 2 & \text{si } S \in \{\{2, 5\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}\} \\ 4 & \text{si } S \in \mathcal{S}^* \setminus S \end{cases}$$

El resto de restricciones de eliminación de subtours y capacidad no se consideran pues vienen implicadas directamente por las restricciones de grado y por la estructura del grafo.

A continuación, utilizando el procedimiento descrito en la Sección 3.6 comprobamos, para cada uno de los vectores obtenidos, si existe o no una descomposición del conjunto de aristas asociado en dos rutas que definan una solución posible del problema.

Las soluciones del *SDVRP* obtenidas después del proceso de reconocimiento de rutas no tienen porque ser minimales, de hecho, no lo son. Es por ello que sometemos cada uno de los vectores de incidencia asociados a un test de *minimalidad*, reduciendo así el conjunto de soluciones posibles mediante la eliminación de aquellas que no lo superan.

Evidentemente, la envoltura convexa de los puntos de \mathbb{R}^9 que han superado todas las pruebas anteriores más la envoltura cónico-convexa de las direcciones

asociadas a las 9 aristas con las que estamos trabajando describen el poliedro de soluciones asociado a la instancia que estamos estudiando. Aplicando ahora el algoritmo PORTA, obtenemos la descripción lineal completa de este poliedro que damos a continuación:

$$\underbrace{3x_{01} + \sum_{i=2}^4 x_{0i} + 2x_{05} + \sum_{i=1}^4 x_{i5}}_{\text{nueva desigualdad}} \geq 12$$

$$\sum_{i=1}^5 x_{0i} \geq 4$$

$$x_{01} + x_{15} \geq 2$$

$$x_{02} + x_{25} \geq 2$$

$$x_{03} + x_{35} \geq 2$$

$$x_{04} + x_{45} \geq 2$$

$$\sum_{i=0}^4 x_{i5} \geq 2$$

$$\sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij} \geq 2 \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil \quad \forall S \in \mathcal{S}^*$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall e = (i, j) \in E^*$$

Cualquier solución entera del problema lineal definido por el conjunto de restricciones anterior, es una solución del problema de rutas de vehículos con demanda compartida asociado al ejemplo de Fleischmann, cuando consideramos solamente las aristas de E^* .

Las únicas soluciones que cumplen todas las restricciones de grado, paridad, eliminación de subtours y capacidad, pero violan la nueva desigualdad, se dan en la Tabla 7.2. La primera es la solución dada por Fleischmann y las otras cuatro son nuevas, desconocidas hasta el momento.

Una vez conseguida la nueva desigualdad nos planteamos realizar un lifting secuencial sobre el resto de aristas del poliedro, con vistas a conseguir una desigualdad válida para el poliedro asociado a la instancia en la que se utilizan

x_{01}	x_{02}	x_{03}	x_{04}	x_{05}	x_{15}	x_{25}	x_{35}	x_{45}
1	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	2	1	1	1
0	2	1	1	0	2	2	1	1
0	1	2	1	0	2	1	2	1
0	1	1	2	0	2	1	1	2

Tabla 7.2: Soluciones minimales que violan la nueva desigualdad.

todas las aristas.

Nota 7.1 *Supongamos que queremos liftar la desigualdad $c^t x \geq c_0$ para introducir una nueva arista e .*

El lifting consiste en encontrar el mayor valor posible de una constante α de manera que la desigualdad $c^t x + \alpha x_e \geq c_0$ sea válida y, además, exista una solución del problema que utilice la nueva arista e y que la cumpla con igualdad.

Algunos comentarios y observaciones al respecto:

- *α no puede ser negativa ya que, si lo fuese, a partir de la solución que cumple la restricción con igualdad podríamos construir otra nueva, duplicando la arista e las veces que sea necesario, que violaría la desigualdad, contradiciendo así la validez de la desigualdad liflada.*
- *El valor máximo que puede tomar la constante α es el del valor del camino más corto para ir de un extremo a otro de la arista e , calculado sobre el grafo soporte de la desigualdad, sin considerar la mencionada arista. El grafo soporte de una desigualdad es el inducido por las aristas de coeficiente estrictamente positivo en $c^t x$. El peso de las aristas para calcular el camino más corto es igual al coeficiente de cada una de ellas en c . Si α tomase un valor superior al coste del camino más corto, tomando una solución que use la arista e y que cumpla $c^t x + \alpha x_e = c_0$ y sustituyendo e por el camino más corto, obtendríamos una solución que cumpliría $c^t x + \alpha x_e < c_0$ y la desigualdad no sería, por tanto, válida.*

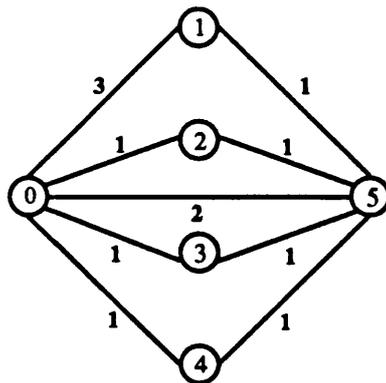


Figura 7.4: Grafo soporte inicial.

- *El orden de las aristas en un lifting secuencial influye en el resultado final ya que, cuanto más tarde se lifta una arista, más alto tiende a ser el valor del coeficiente asociado. Es posible, por tanto, que diferentes ordenaciones generen diferentes desigualdades. Aquellas aristas que dan como valor de la constante α el valor del camino más corto, pueden ser consideradas como buenas ya que, éso indica que el valor de α no depende de la ordenación elegida. Si ésto ocurre en todas las aristas de la ordenación, la desigualdad obtenida es única, salvo el producto por un escalar positivo.*

LIFTING

Partimos de la desigualdad:

$$3x_{01} + x_{02} + x_{03} + x_{04} + 2x_{05} + x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} \geq 12$$

y consideramos el grafo soporte asociado, véase la Figura 7.4.

1.- Lifting sobre la arista $e = (1, 2)$. Tenemos que encontrar el mayor valor de α de manera que:

$$3x_{01} + x_{02} + x_{03} + x_{04} + 2x_{05} + x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + \alpha x_{12} \geq 12 \quad (1)$$

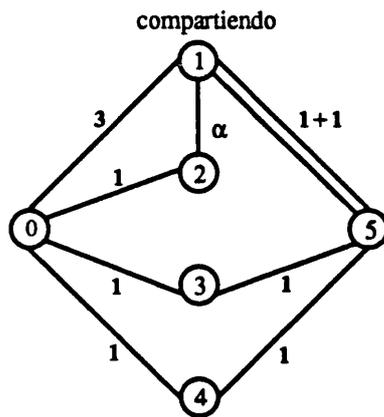


Figura 7.5: Solución posible que viola (1) cuando $0 \leq \alpha < 2$.

sea válida y exista una solución para nuestro problema que la cumpla con igualdad y que utilice la arista $(1, 2)$. Nótese que la longitud del camino más corto calculado sobre el grafo anterior para ir del vértice 1 al 2 es 2. Luego:

$$0 \leq \alpha \leq 2$$

Si tomamos $0 \leq \alpha < 2$, la solución dada en la Figura 7.5 es una solución posible que viola la desigualdad.

Tomando $\alpha = 2$ la solución cumple (1) con igualdad, luego éste es el valor del coeficiente asociado a la arista $e = (1, 2)$.

La nueva desigualdad es:

$$3x_{01} + x_{02} + x_{03} + x_{04} + 2x_{05} + x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + 2x_{12} \geq 12 \quad (2)$$

El grafo soporte asociado es ahora el de la Figura 7.6.

2.- Lifting sobre la arista $e = (1, 3)$. La desigualdad que queremos encontrar es:

$$3x_{01} + x_{02} + x_{03} + x_{04} + 2x_{05} + x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + 2x_{12} + \alpha x_{13} \geq 12$$

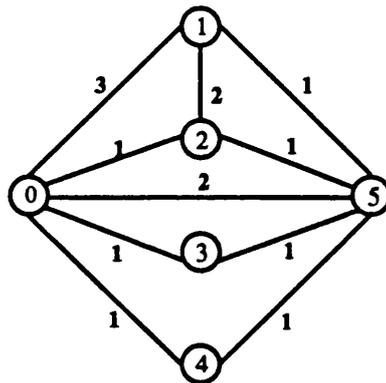


Figura 7.6: Grafo soporte asociado a la desigualdad (2).

Razonando como en el paso anterior y considerando ahora la solución dada en la Figura 7.7 tenemos que $\alpha = 2$.

Obtenemos:

$$3x_{01} + \sum_{i=2}^4 x_{0i} + 2x_{05} + \sum_{i=1}^4 x_{i5} + 2x_{12} + 2x_{13} \geq 12 \quad (3)$$

cuyo grafo soporte es el dibujado en la Figura 7.8.

3.- Arista $e = (1,4)$. En la Figura 7.9 presentamos la solución que nos permite obtener la restricción (4) y el grafo soporte asociado.

$$3x_{01} + \sum_{i=2}^4 x_{0i} + 2x_{05} + \sum_{i=1}^4 x_{i5} + 2x_{12} + 2x_{13} + 2x_{14} \geq 12 \quad (4)$$

4.- Arista $e = (2,3)$. Con la solución representada en la Figura 7.10 obtenemos la siguiente desigualdad cuyo grafo soporte aparece en la misma figura.

$$3x_{01} + \sum_{i=2}^4 x_{0i} + 2x_{05} + \sum_{i=1}^4 x_{i5} + 2 \sum_{i=2}^4 x_{1i} + 2x_{23} \geq 12 \quad (5)$$

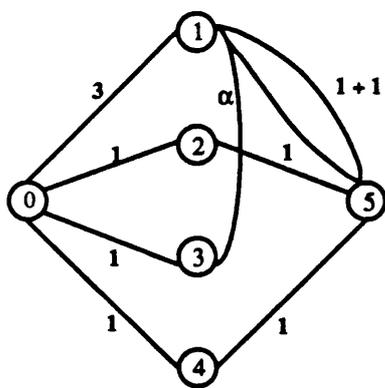


Figura 7.7: Solución posible que nos conduce a obtener la restricción (3).

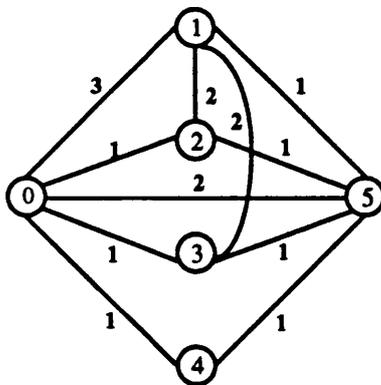


Figura 7.8: Grafo soporte asociado a la desigualdad (3).

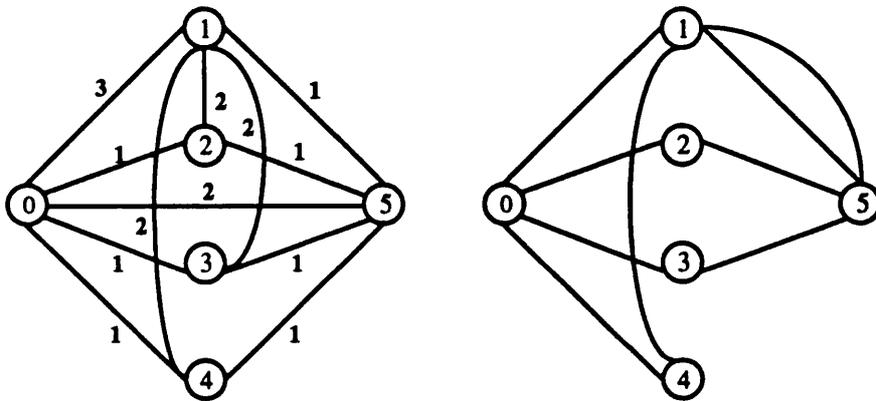


Figura 7.9: Grafo soporte asociado a la desigualdad (4) y solución que permite obtenerla.

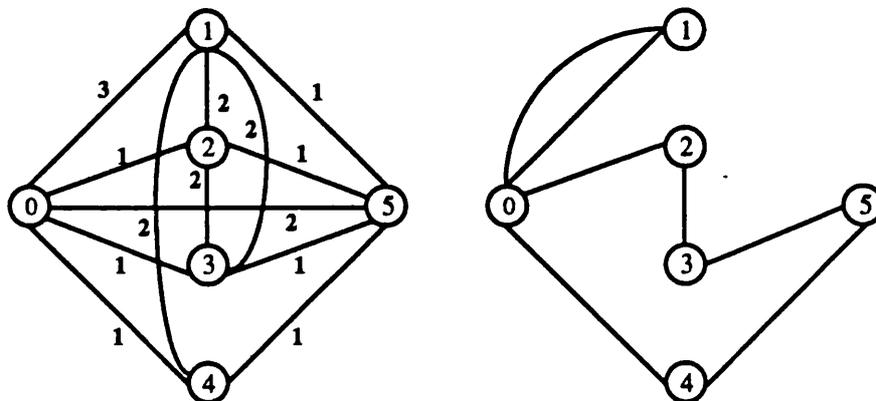


Figura 7.10: Grafo soporte asociado a la desigualdad (5) y solución que permite obtenerla.

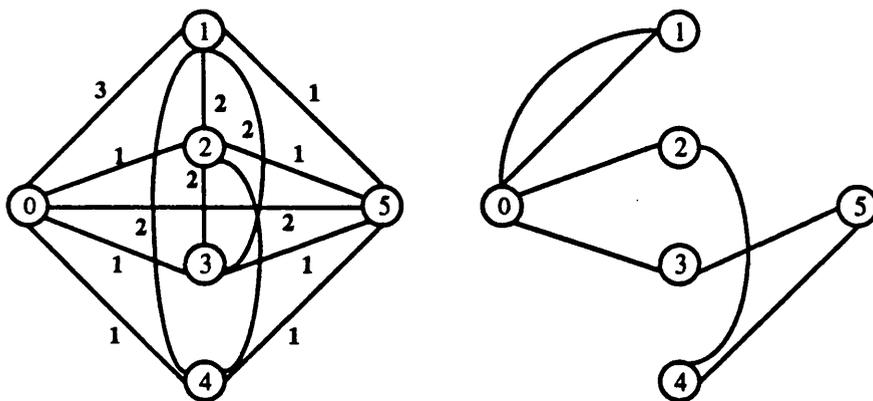


Figura 7.11: Grafo soporte asociado a la desigualdad (6) y solución que permite obtenerla.

5.- Arista $e = (2,4)$. La solución que tenemos que considerar y el grafo soporte asociado a la restricción resultante se dan en la Figura 7.11. La desigualdad es la siguiente:

$$3x_{01} + \sum_{i=2}^4 x_{0i} + 2x_{05} + \sum_{i=1}^4 x_{i5} + 2 \sum_{i=2}^4 x_{1i} + 2x_{23} + 2x_{24} \geq 12 \quad (6)$$

6.- Arista $e = (3,4)$. Por último, consideramos la solución de la Figura 7.12, la cual nos proporciona la siguiente desigualdad válida para el poliedro asociado al conjunto de soluciones sobre el grafo completo:

$$3x_{01} + \sum_{i=2}^4 x_{0i} + 2x_{05} + \sum_{i=1}^4 x_{i5} + 2 \sum_{i=2}^4 x_{1i} + 2x_{23} + 2x_{24} + 2x_{34} \geq 12 \quad (7)$$

En la misma figura aparece también el grafo soporte resultante para la desigualdad (7).

Notar que el valor de todos los coeficientes corresponde, respectivamente, al del camino más corto entre los extremos de la arista asociada, luego, en virtud del último apartado de la Nota 7.1, sabemos que la desigualdad es única.

Podemos concluir que el siguiente sistema de desigualdades lineales describe completamente el poliedro de soluciones asociado al ejemplo de Fleischmann.

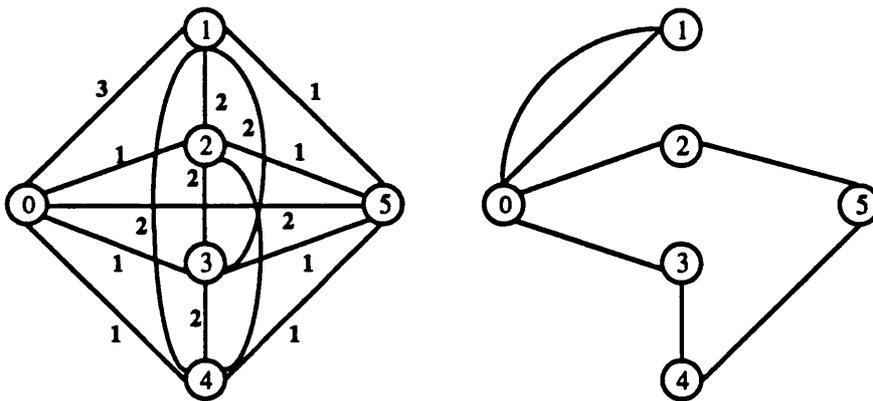


Figura 7.12: Grafo soporte asociado a la desigualdad (7) y solución que permite obtenerla.

$$\left[\begin{array}{l}
 3x_{01} + \sum_{i=2}^4 x_{0i} + 2x_{05} + \sum_{i=1}^4 x_{i5} + 2 \sum_{i=2}^4 x_{1i} + 2x_{23} + 2x_{24} + 2x_{34} \geq 12 \\
 \sum_{i=1}^5 x_{0i} \geq 4 \text{ y par} \\
 \sum_{i \neq j, j=0}^5 x_{ij} \geq 2 \text{ y par } \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \\
 \sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{i,j} \geq 2 \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil \forall S \in V \setminus \{0\} \\
 x_{ij} \geq 0 \forall e = (i, j), e \in E
 \end{array} \right]$$

7.2 Generalización de la nueva restricción.

7.2.1 Configuración de Fleischmann simple.

A continuación planteamos la desigualdad obtenida en un contexto más general y demostramos que, para una determinada estructura y bajo determinadas condiciones sobre las demandas, la desigualdad sigue siendo válida e induce una nueva faceta del poliedro de soluciones asociado. Ésta es la nueva familia a la que nos referíamos al principio del capítulo.

Definición 7.1 *Llamaremos “configuración de Fleischmann simple” a aquella que viene dada por una partición del conjunto de vértices en subconjuntos no vacíos:*

$$\{A, Z, B_1, B_2, B_3, B_4\}, \text{ con } 0 \in A$$

que cumplen:

$$\lceil \frac{d(B_1) + d(B_i)}{Q} \rceil = 2, \quad \forall i = 2, 3, 4$$

$$\lceil \frac{d(Z) + \sum_{i=2}^4 d(B_i)}{Q} \rceil = 1$$

$$d(B_i) \leq Q, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad \text{y} \quad d(Z) \leq Q$$

Definimos la desigualdad asociada a esta configuración de la siguiente manera:

$$a^t x \geq 12$$

donde:

$$a_e = \begin{cases} 3 & \text{si } e \in (A, B_1) \\ 1 & \text{si } e \in (A, B_i) \quad i = 2, 3, 4 \\ 2 & \text{si } e \in (A, Z) \\ 1 & \text{si } e \in (B_i, Z) \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ 2 & \text{si } e \in (B_i, B_j) \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 2, 3, 4, \quad i < j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En la Figura 7.13 vemos parte del grafo soporte de una de estas configuraciones.

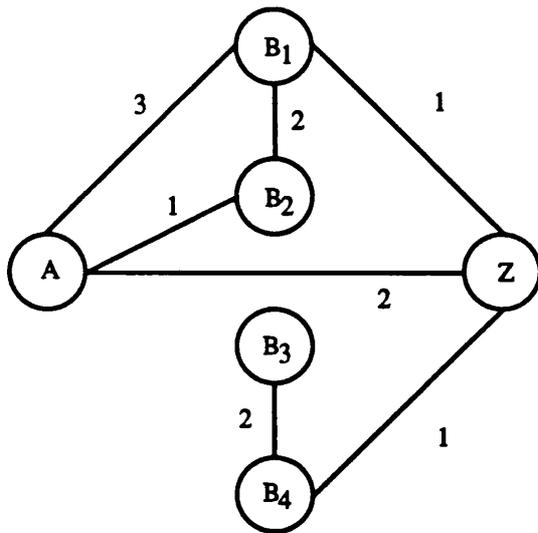


Figura 7.13: Subgrafo del grafo soporte asociado a una configuración de Fleischmann simple.

El *SDVRP* ofrece la posibilidad de abastecer la demanda de cada cliente utilizando uno o más vehículos, esta situación nos permite establecer una equivalencia entre vértices y conjuntos de vértices. Las condiciones sobre las demandas de los subconjuntos que definen una configuración de Fleischmann simple derivan precisamente de esta observación.

Nótese que en el ejemplo de Fleischmann había un cliente cuya demanda era igual a la capacidad del vehículo pero, lo realmente importante era que ese cliente era incompatible con cualquiera de los otros tres, es decir, un único vehículo no podía abastecer completamente la demanda de ninguna de las parejas de vértices $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ ó $\{1,4\}$. En la definición anterior hemos reflejado esta situación a través de la condición $\lceil \frac{d(B_1)+d(B_i)}{Q} \rceil = 2, \forall i = 2,3,4$.

Otra característica a tener en cuenta era que los vértices $\{2,3,4\}$ y $\{5\}$ podían servirse completamente con un único vehículo luego, con dos, se podía abastecer la demanda total. De alguna manera, esto garantizaba que las aristas presentes en la solución bastaban para que las restricciones de grado y capacidad asociadas no se violaran. La condición que hemos establecido en el caso general es que $\lceil \frac{d(Z)+\sum_{i=2}^4 d(B_i)}{Q} \rceil = 1$, lo cual implica que con dos vehículos

se puede servir completamente $d(V \setminus A)$.

Proposición 7.1 *Las desigualdades $a^t x \geq 12$, asociadas a una configuración de Fleischmann simple, son válidas para el $PSDVRP$.*

Demostración

Supongamos que T es una solución del $SDVRP$ que minimiza el término de la izquierda de la desigualdad y sea x^T el vector de incidencia asociado. Veamos que no hay pérdida de generalidad en suponer que T sólo utiliza aristas de:

$$\bigcup_{i=1}^4 ((A, B_i) \cup (B_i, Z))$$

En efecto, supongamos que en T hay una arista e que no pertenece a ninguna de las cortaduras indicadas anteriormente, entonces, si:

1. $e = (u, v)$, $e \in (A, Z)$, como está permitido atravesar un vértice sin necesidad de servir algo de su demanda, eligiendo un $w \in B_i$, $i = 2, 3, 4$ y sustituyendo la arista e por el camino $u - w - v$ obtenemos una solución T' que cumplirá $a^t x^T = a^t x^{T'}$, pues $a_e = 2$ y $a_{uw} + a_{wv} = 1 + 1$.
2. $e = (u, v)$, $e \in (B_1, B_i)$, $i = 2, 3, 4$, elegimos un $w \in Z$ y sustituimos la arista por el camino $u - w - v$. Nótese que $a_e = 2 = a_{uw} + a_{wv}$.
3. $e = (u, v)$, $e \in (B_i, B_j)$, $i < j$, $i, j = 2, 3, 4$, sustituimos la arista e por el camino $u - \text{“depósito”} - v$.

En cualquiera de los casos enumerados, llegamos a una solución que minimiza el lado izquierdo de la desigualdad y que no contiene aristas de:

$$E \setminus \left(\bigcup_{i=1}^4 ((A, B_i) \cup (B_i, Z)) \right)$$

A continuación probamos que $a^t x^T \geq 12$.

Las desigualdades de grado obligan a que el vector de incidencia x , asociado a cualquier solución, cumpla:

$$x(\delta(B_i)) \geq 2 \text{ y par, } \forall i = 1, 2, 3, 4$$

Teniendo en cuenta el tipo de aristas que forman parte de T , sabemos que:

$$\delta_{|T}(B_i) \cap \delta_{|T}(B_j) = \emptyset \quad \forall i, j = 1, 2, 3, 4, i < j$$

donde $\delta_{|T}(B_i)$ representa el conjunto de aristas de $\delta(B_i)$ que pertenecen a T , contando con la multiplicidad en la solución de cada una de ellas. Entonces,

$$a^t x^T |_{\bigcup_{i=2}^4 \delta(B_i)} \geq 6.$$

De nuevo, y con la intención de ganar simplicidad en la demostración, hemos utilizado la notación $a^t x^T |_{\bigcup_{i=2}^4 \delta(B_i)}$ para representar el siguiente sumatorio:

$$\sum_{e \in \bigcup_{i=2}^4 \delta(B_i)} a_e x_e^T.$$

Nótese que $x^T(\delta(B_1)) \geq 2$, pero como en el grafo soporte de la desigualdad las aristas incidentes con B_1 , que forman parte de T , puede que tengan coeficientes distintos, el valor de $a^t x^T$ dependerá del tipo de aristas utilizadas. Analizaremos todas las posibilidades:

- $|\delta_{|T}(B_1)| = 2$

- $|\delta_{|T}(B_1) \cap (A, B_1)| = 2$, como $a_e = 3$, tenemos:

$$a^t x^T \geq a^t x^T |_{\delta(B_1)} + a^t x^T |_{\bigcup_{i=2}^4 \delta(B_i)} \geq 6 + 6 = 12 = a_0$$

y, por tanto, se cumple la desigualdad.

- $|\delta_{|T}(B_1) \cap (A, B_1)| = 1 \rightarrow |\delta_{|T}(B_1) \cap (Z, B_1)| = 1$; en este caso, lo que ocurre es que un único vehículo visita y sirve, completamente, a B_1 . La suposición hecha al principio sobre el tipo de aristas que pueden formar parte de T obliga a que la ruta asociada a este vehículo se conecte con el depósito a través de uno de los caminos $A - B_i - Z$, $i = 2, 3, 4$. Ahora bien, como:

$$\lceil \frac{d(B_1) + d(B_i)}{Q} \rceil = 2, \quad \forall i = 2, 3, 4$$

el supernodo B_i tendrá que volver a ser visitado por otro vehículo ya que, aunque el primero le haya servido parte de la demanda, la

condición anterior nos garantiza que no habrá sido servido completamente. Luego, $x^T(\delta(B_i)) \geq 4$, por lo que,

$$a^t x^T \geq a^t x^T|_{\delta(B_1)} + a^t x^T|_{\bigcup_{i=2}^4 \delta(B_i)} \geq 4 + 8 = 12 = a_0$$

y, en consecuencia $a^t x^T \geq a_0$.

- $|\delta_{|T}(B_1) \cap (A, B_1)| = 0 \rightarrow |\delta_{|T}(B_1) \cap (Z, B_1)| = 2$; la única manera de completar una ruta de estas características es utilizando aristas de un camino “depósito- B_i - Z ”, para algún $i = 2, 3, 4$, dos veces, o bien, utilizando aristas de dos caminos distintos “depósito- B_i - Z ”, “depósito- B_j - Z ”, $i \neq j$, $i, j = 2, 3, 4$, una vez. De nuevo, por la condición establecida sobre la incompatibilidad de servir completamente con un sólo vehículo a B_1 y a cualquier otro B_i , estos supernodos deberán volver a ser visitados por otro vehículo que acabe de servirlos completamente. Resumiendo, o bien $x^T(\delta(B_i)) \geq 6$, para algún $i = 2, 3, 4$, o bien, $x^T(\delta(B_i)) \geq 4$ y $x^T(\delta(B_j)) \geq 4$ para $i, j = 2, 3, 4$, $i \neq j$. En cualquiera de los dos casos:

$$a^t x^T \geq a^t x^T|_{\delta(B_1)} + a^t x^T|_{\bigcup_{i=2}^4 \delta(B_i)} \geq 2 + 10 = 12 = a_0$$

y, consecuentemente, $a^t x^T \geq a_0$.

- $|\delta_{|T}(B_1)| > 2 \rightarrow |\delta_{|T}(B_1)| \geq 4$

- $|\delta_{|T}(B_1) \cap (A, B_1)| \geq 2$; repitiendo el razonamiento para el caso igual a 2, obtenemos que la desigualdad es válida.
- $|\delta_{|T}(B_1) \cap (A, B_1)| = 1 \rightarrow |\delta_{|T}(B_1) \cap (Z, B_1)| \geq 3$; en este caso, el peso de las aristas incidentes con B_1 es de, al menos, 6 unidades, ya que el coeficiente de la arista de (A, B_1) es 3 y el de cada una de las aristas de (Z, B_1) es 1. Por tanto:

$$a^t x^T \geq a^t x^T|_{\delta(B_1)} + a^t x^T|_{\bigcup_{i=2}^4 \delta(B_i)} \geq 6 + 6 = 12 = a_0$$

y $a^t x^T \geq a_0$.

- $|\delta_{|T}(B_1) \cap (A, B_1)| = 0 \rightarrow |\delta_{|T}(B_1) \cap (Z, B_1)| \geq 4$. Si en T existe algún B_i , $i = 2, 3, 4$ con $|\delta_{|T}(B_i)| \geq 4$, o, $|\delta_{|T}(B_1) \cap (Z, B_1)| \geq 6$ la desigualdad es evidentemente válida, ya que:

$$a^t x^T \geq a^t x^T|_{\delta(B_1)} + a^t x^T|_{\bigcup_{i=2}^4 \delta(B_i)} \geq 4 + 8 = 12 = a_0$$

en el primer caso, y:

$$a^t x^T \geq a^t x^T |_{\delta(B_1)} + a^t x^T |_{\bigcup_{i=2}^4 \delta(B_i)} \geq 6 + 6 = 12 = a_0$$

en el segundo. El único caso que nos queda por estudiar es aquel en el que:

$$\begin{aligned} x^T(\delta(B_i)) &= 2, \quad \forall i = 2, 3, 4 \\ x^T(\delta(B_1)) &= 4, \quad \text{con } |\delta_{|T}(B_1) \cap (Z, B_1)| = 4 \end{aligned}$$

y puede comprobarse que es imposible construir dos rutas posibles cumpliendo estas condiciones: nótese que, si las cuatro aristas incidentes con B_1 corresponden a un único vehículo, el grado de alguno de los B_i , $i = 2, 3, 4$, debería ser cuatro. Si pertenecen a rutas distintas, deberíamos tener la posibilidad de acceder al depósito utilizando cuatro caminos $(A, B_i) \cup (B_i, Z)$ aristo-disjuntos, y solo disponemos de tres.

Podemos por tanto concluir que la desigualdad es válida para el P_{SDVRP} . \diamond

Proposición 7.2 *Las desigualdades $a^t x \geq 12$, asociadas a una "configuración de Fleischmann simple", inducen facetas del P_{SDVRP} .*

Demostración

La validez de la desigualdad la hemos probado en la proposición anterior. Demostraremos que la desigualdad induce una faceta utilizando el método indirecto. Si suponemos que $f^t x \geq f_0$ es una faceta del P_{SDVRP} que cumple:

$$\{x \in P_{SDVRP} : a^t x = a_0\} \subseteq \{x \in P_{SDVRP} : f^t x = f_0\}$$

tenemos que demostrar que:

$$\exists \lambda \geq 0 : f = \lambda a \text{ y } f_0 = \lambda a_0$$

En primer lugar describimos una técnica general para obtener soluciones posibles del problema a partir de una solución definida, únicamente, sobre el grafo inducido por los supernodos y las aristas del grafo soporte de la desigualdad. A este grafo nos referiremos como al grafo comprimido. Esta técnica ya ha sido utilizada en otras ocasiones a lo largo de la memoria.

Puesto que todos los subconjuntos que definen la configuración son no vacíos, es posible elegir un vértice de cada uno de ellos como representante. Llamaremos b_i al representante de B_i , para cada $i = 1, 2, 3, 4$, z al representante del supernodo Z y 0 al del supernodo A .

En cada uno de los subconjuntos construimos un ciclo Hamiltoniano que recorre todos los vértices del supernodo. Los denotaremos como C_A , C_Z y C_{B_i} , $i = 1, 2, 3, 4$, respectivamente.

Dada una solución sobre el grafo soporte de la desigualdad, no hay pérdida de generalidad en suponer que los extremos de las aristas utilizadas son, para cada una de ellas, los *representantes* de cada uno de los supernodos. Si no fuese así cambiaríamos de representante.

Nótese que, de las condiciones establecidas en la definición de la configuración se deduce:

$$\lceil \frac{d(V)}{Q} \rceil \geq 2 \rightarrow K \geq 2$$

es decir, disponemos de dos vehículos como mínimo.

La manera de inducir una solución en el grafo expandido a partir de una del grafo comprimido es la siguiente:

Tomamos $2K$ copias de cada una de las aristas del ciclo C_A .

Si un supernodo, distinto de A , es incidente con dos aristas, entonces es que es visitado por un único vehículo; en ese caso tomamos sólo una copia de las aristas del ciclo asociado. Si es incidente con cuatro o más aristas, podemos suponer, si es necesario, que se están utilizando dos vehículos a lo sumo, ya que:

$$\lceil \frac{d(Z) + \sum_{i=1}^4 d(B_i)}{Q} \rceil = 2.$$

En este caso tomaremos dos copias de cada una de las aristas del ciclo asociado.

De esta manera aseguramos que todos los vehículos visitan a todos los vértices de A y que en cada supernodo distinto del que contiene al depósito, todos los clientes son visitados por tantos vehículos como lo es el supernodo

asociado. Esta “técnica” asegura que si el conjunto de aristas definía una solución sobre el grafo comprimido, las aristas originales más las copias que hemos mencionado de cada uno de los ciclos, inducen una solución en el grafo expandido. A partir de ahora, salvo que sea inevitable, trabajaremos siempre sobre el grafo soporte de la desigualdad.

Supongamos establecida la siguiente ordenación sobre el conjunto de aristas:

$$\begin{array}{cccccc} 1 : (A, B_1) & 2 : (A, B_2) & 3 : (A, B_3) & 4 : (A, B_4) & 5 : (A, Z) \\ 6 : (B_1, B_2) & 7 : (B_1, B_3) & 8 : (B_1, B_4) & 9 : (B_1, Z) & 10 : (B_2, B_3) \\ 11 : (B_2, B_4) & 12 : (B_2, Z) & 13 : (B_3, B_4) & 14 : (B_3, Z) & 15 : (B_4, Z) \end{array}$$

la cual nos permitirá tratar las soluciones dando simplemente el vector de incidencia de las mismas.

Evidentemente, la desigualdad es soporte ya que la solución cuyo vector de incidencia es:

$$x = (2, 1, 1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$$

cumple $a^t x = 12$ y utiliza como mucho dos vehículos para servir $V \setminus A$. Duplicando en esta solución, una cualquiera de las aristas con coeficiente estrictamente positivo en a , obtenemos una nueva solución que cumple la restricción con mayor estricto; la desigualdad es, por lo tanto, propia.

Veamos pues, que es faceta del P_{SDVRP} .

- $f_e = 0, \quad \forall e \in E(A) \cup E(Z) \cup (\cup_{i=1}^4 E(B_i)).$

Evidente, dada una arista e cualquiera de la unión, $x' = x + d(e)$ define una solución posible del $SDVRP$, que cumple:

$$\left. \begin{array}{l} a^t x' = a_0 \\ f^t x = f_0 \\ f^t x' = f_0 \end{array} \right\} \rightarrow f^t x - f^t x' = 2f_e = 0 \rightarrow f_e = 0$$

- $f_e = f_{e'} = \lambda_{AB_1}, \quad \forall e, e' \in (A, B_1) \quad e \neq e'.$

Si $e = (u, v)$ no hay pérdida de generalidad en suponer que “depósito” = u , y $b_1 = v$. Supuesto ésto, consideramos la siguiente solución:

$$x = (2, 1, 1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$$

Suponiendo que $e' = (u', v')$, consideramos otra solución en la que los representantes de A y B_1 sean: “depósito” = u' , y $b_1 = v'$ respectivamente. En el resto de supernodos los representantes son los mismos en las dos soluciones. Así:

$$x' = (2, 1, 1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$$

Tanto x como x' cumplen $a^t x = a_0$ y, por tanto, también cumplirán $f^t x = f_0$. Luego:

$$f^t x - f^t x' = 0 \rightarrow 2f_e - 2f_{e'} = 0 \rightarrow f_e = f_{e'}$$

Utilizando las siguientes soluciones y razonando del mismo modo, llegamos a que el resultado es cierto para cualquiera de las cortaduras. Es decir, el coeficiente de todas las aristas, pertenecientes a una misma cortadura, no depende de la arista elegida.

(A, B_2)	$x = (2, 2, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$	λ_{AB_2}
(A, B_3)	$x = (2, 1, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$	λ_{AB_3}
(A, B_4)	$x = (2, 1, 1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$	λ_{AB_4}
(A, Z)	$x = (0, 3, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$	λ_{AZ}
(B_1, B_2)	$x = (1, 3, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$	$\lambda_{B_1 B_2}$
(B_1, B_3)	$x = (1, 1, 3, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$	$\lambda_{B_1 B_3}$
(B_1, B_4)	$x = (1, 1, 1, 3, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$	$\lambda_{B_1 B_4}$
(B_1, Z)	$x = (0, 3, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$	$\lambda_{B_1 Z}$
(B_2, B_3)	$x = (2, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1)$	$\lambda_{B_2 B_3}$
(B_2, B_4)	$x = (2, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1)$	$\lambda_{B_2 B_4}$
(B_2, Z)	$x = (0, 3, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$	$\lambda_{B_2 Z}$
(B_3, B_4)	$x = (2, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1)$	$\lambda_{B_3 B_4}$
(B_3, Z)	$x = (2, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1)$	$\lambda_{B_3 Z}$
(B_4, Z)	$x = (0, 3, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$	$\lambda_{B_4 Z}$

- $\lambda_{AB_i} = \lambda_{B_i Z}, \quad \forall i = 2, 3, 4.$

Basta con utilizar que $f^t x = f_0$ y $f^t x' = f_0$, para cada una de las siguientes parejas de soluciones.

$$\begin{aligned}
 B_2 &\rightarrow x = (2, 2, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1) \\
 &\quad x = (2, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 1, 1) \quad \lambda_{AB_2} = \lambda_{B_2 Z} = \lambda_2 \\
 B_3 &\rightarrow x = (2, 1, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1) \\
 &\quad x = (2, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 2, 1) \quad \lambda_{AB_3} = \lambda_{B_3 Z} = \lambda_3 \\
 B_4 &\rightarrow x = (2, 1, 1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0) \\
 &\quad x = (2, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 2) \quad \lambda_{AB_4} = \lambda_{B_4 Z} = \lambda_4
 \end{aligned}$$

- $\lambda_{AB_1} = \lambda_{AZ} + \lambda_{B_1Z}$. Se demuestra comparando las dos soluciones siguientes.

$$\begin{aligned} x &= (1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 2, 1) \\ x &= (2, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 2, 1) \end{aligned}$$

- $\lambda_{B_1Z} = \lambda_i = \lambda$, $i = 2, 3, 4$. Utilizaremos la siguiente solución y la compararemos con una asociada a cada uno de los λ_i , $i = 2, 3, 4$.

$$x = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$$

Esta solución es posible si tenemos en cuenta que B_1 y Z pueden compartir.

$$\begin{aligned} \lambda_2 \quad x &= (1, 3, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1) \\ \lambda_3 \quad x &= (1, 1, 3, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1) \\ \lambda_4 \quad x &= (1, 1, 1, 3, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1) \end{aligned}$$

- $\lambda_{AZ} = 2\lambda$. Utilizar las dos soluciones siguientes:

$$\begin{aligned} x &= (1, 2, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1) \\ x &= (1, 3, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1) \end{aligned}$$

- $\lambda_{AB_1} = 3\lambda$. Es una consecuencia de los tres apartados anteriores:

$$\lambda_{AB_1} = \lambda_{AZ} + \lambda_{B_1Z} = \lambda_{AZ} + \lambda = 3\lambda$$

En este momento la situación en cuanto a los coeficientes en f es la siguiente:

$$f_e = \begin{cases} 3\lambda & \text{si } e \in (A, B_1) \\ \lambda & \text{si } e \in (A, B_i) \\ 2\lambda & \text{si } e \in (A, Z) \\ \lambda & \text{si } e \in (B_i, Z) \\ 0 & \text{si } e \in E(A) \cup E(Z) \cup (\cup_{i=1}^4 E(B_i)) \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 2, 3, 4 \\ i = 1, 2, 3, 4 \end{matrix}$$

Nos falta por averiguar cuánto valen los coeficientes de las aristas en las cortaduras (B_i, B_j) , $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3, 4$.

- $\lambda_{B_1B_j} = 2\lambda$, $j = 2, 3, 4$. Para ello comparar, respectivamente,

$$x = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$$

con cada una de las siguientes soluciones asociadas a B_i , $i = 2, 3, 4$.

$$B_2 \quad x = (1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$$

$$B_3 \quad x = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$$

$$B_4 \quad x = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$$

- $\lambda_{B_i B_j} = 2\lambda$, $i, j = 2, 3, 4$, $i < j$. Por último compararemos la solución:

$$x = (2, 1, 1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$$

con cada una de las siguientes, en vistas a obtener los respectivos resultados:

$$\lambda_{B_2 B_3} \quad x = (2, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1)$$

$$\lambda_{B_2 B_4} \quad x = (2, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1)$$

$$\lambda_{B_3 B_4} \quad x = (2, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0)$$

- $f_0 = 12\lambda$. Evidente, basta sustituir en $f^t x \geq f_0$ cualquiera de las soluciones que hemos utilizado, ya que:

$$f_e = \begin{cases} 3\lambda & \text{si } e \in (A, B_1) \\ \lambda & \text{si } e \in (A, B_i) \quad i = 2, 3, 4 \\ 2\lambda & \text{si } e \in (A, Z) \\ \lambda & \text{si } e \in (B_i, Z) \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ 2\lambda & \text{si } e \in (B_i, B_j) \quad i \neq j, \quad i = 2, 3, 4, \quad j = 2, 3, 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por tanto $f = \lambda a$, y $f_0 = \lambda a_0$ para algún $\lambda \geq 0$.

La desigualdad $a^t x \geq a_0$ induce una faceta del P_{SDVRP} . \diamond

La cuestión ahora es saber si las restricciones que acabamos de encontrar, junto con las ya conocidas, son o no suficientes para describir el conjunto de soluciones de nuestro problema. La respuesta va a ser negativa. En la siguiente sección vemos cómo llegar a esta conclusión.

7.2.2 Configuración de Fleischmann ampliada.

A la vista de los resultados que acabamos de obtener, nos planteamos la posibilidad de generalizar la Definición 7.1 para un número de supernodos B_i 's superior a 4. A continuación definimos una desigualdad que se deduce de forma natural de la restricción encontrada para romper la estructura planteada por Fleischmann. Demostraremos que es válida para el P_{SDVRP} y que, si se cumplen ciertas condiciones, también induce una faceta de dicho poliedro.

Finalmente, presentamos un ejemplo que demuestra la existencia de soluciones enteras que cumplen todas las desigualdades válidas para el P_{SDVRP} conocidas pero que, salvo que impongamos una cota inferior sobre el número de vehículos con el que trabajamos, no son soluciones posibles del problema.

Definición 7.2 *Llamaremos "configuración de Fleischmann ampliada", a aquella que viene dada por una partición del conjunto de vértices en subconjuntos no vacíos:*

$$\{A, Z, B_1, \dots, B_s\}, \text{ con } 0 \in A \text{ y } s \geq 5$$

que cumplen:

$$\lceil \frac{d(B_1) + d(B_i)}{Q} \rceil = 2, \quad i \in \{2, \dots, s\}$$

$$\lceil \frac{d(Z) + d(B_{i_1}) + d(B_{i_2}) + d(B_{i_3})}{Q} \rceil = 1, \quad i_1, i_2, i_3 \in \{2, \dots, s\}$$

$$\lceil \frac{d(B_1) + d(B_{i_1}) + d(B_{i_2}) + d(B_{i_3}) + d(B_{i_4})}{Q} \rceil = 3, \quad i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{2, \dots, s\}$$

$$d(B_i) \leq Q, \quad i = 1, 2, \dots, s \quad \text{y} \quad d(Z) \leq Q$$

Definimos la desigualdad asociada a esta configuración de la siguiente manera:

$$a^t x \geq 2(s + 2)$$

donde:

$$a_e = \begin{cases} 3 & \text{si } e \in (A, B_1) \\ 1 & \text{si } e \in (A, B_i) \quad i = 2, \dots, s \\ 2 & \text{si } e \in (A, Z) \\ 1 & \text{si } e \in (B_i, Z) \quad i = 1, \dots, s \\ 2 & \text{si } e \in (B_i, B_j) \quad 1 \leq i < j \leq s \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La demostración del siguiente enunciado es la misma que la de la Proposición 7.1, salvo un pequeño detalle en la última parte de la prueba. Marcaremos en **negrita** el apartado al que nos estamos refiriendo.

Proposición 7.3 *Una desigualdad, asociada a una “configuración de Fleischmann ampliada”, es válida para el $PSDVRP$.*

Demostración

Sea $a^t x \geq 2(s + 2)$ la desigualdad que queremos estudiar y T una solución del $SDVRP$ que minimiza el término de la izquierda. Demostraremos que $a^t x^T \geq 2(s + 2)$. En primer lugar observar que no hay pérdida de generalidad en suponer que las únicas aristas utilizadas por T son aristas de las cortaduras:

$$\bigcup_{i=1}^s ((A, B_i) \cup (B_i, Z))$$

en otro caso, razonaríamos como en la Proposición 7.1.

Como $\delta_{|T}(B_i) \cap \delta_{|T}(B_j) = \emptyset$, $1 \leq i < j \leq s$ y $x^T(\delta(B_i)) \geq 2$, $\forall i = 2, \dots, s$ se cumplirá:

$$a^t x^T|_{\bigcup_{i=2}^s \delta(B_i)} \geq 2(s - 1)$$

ya que los coeficientes a_e de estas aristas son todos iguales a 1.

$x^T(\delta(B_1))$ también debe ser mayor ó igual que 2 pero, como el coeficiente de las aristas de $\delta(B_1)$ es distinto dependiendo de, si pertenecen a (A, B_1) o a (B_1, Z) , distinguiremos varios casos.

- $|\delta_{|T}(B_1)| = 2$

– $|\delta_{|T}(B_1) \cap (A, B_1)| = 2$; como $a_e = 3$, tenemos:

$$a^t x^T \geq a^t x^T|_{\delta(B_1)} + a^t x^T|_{\bigcup_{i=2}^s \delta(B_i)} \geq 6 + 2(s-1) = 2s + 4 = a_0$$

por tanto, T cumple la desigualdad.

– $|\delta_{|T}(B_1) \cap (A, B_1)| = 1 \rightarrow |\delta_{|T}(B_1) \cap (Z, B_1)| = 1$; en este caso, lo que ocurre es que un único vehículo visita y sirve, completamente, a B_1 . La suposición hecha al principio sobre el tipo de aristas que pueden formar parte de T obliga a que la ruta asociada a este vehículo se conecte con el depósito a través de uno de los caminos $A - B_i - Z$, $i = 2, \dots, s$. Ahora bien, como:

$$\lceil \frac{d(B_1) + d(B_i)}{Q} \rceil = 2, \quad \forall i = 2, \dots, s$$

el supernodo B_i tendrá que volver a ser visitado por otro vehículo ya que, aunque el primero le haya servido parte de la demanda, la condición anterior nos garantiza que no habrá sido servido completamente. Luego, $x^T(\delta(B_i)) \geq 4$, por lo que,

$$a^t x^T \geq a^t x^T|_{\delta(B_1)} + a^t x^T|_{\bigcup_{i=2}^s \delta(B_i)} \geq 4 + 2(s-2) + 4 = a_0$$

y, en consecuencia, $a^t x^T \geq a_0$.

– $|\delta_{|T}(B_1) \cap (A, B_1)| = 0 \rightarrow |\delta_{|T}(B_1) \cap (Z, B_1)| = 2$; la única manera de completar una ruta de estas características es utilizando aristas de un camino “depósito – B_i – Z ”, para algún $i = 2, \dots, s$, dos veces, o bien, utilizando aristas de dos caminos distintos “depósito – B_i – Z ”, “depósito – B_j – Z ”, $i \neq j$, $i, j = 2, \dots, s$, una vez. De nuevo, por la condición establecida sobre la incompatibilidad de servir completamente con un sólo vehículo a B_1 y a cualquier otro B_i , estos supernodos deberán volver a ser visitados por otro vehículo que acabe de servirlos completamente. Resumiendo, o bien $x^T(\delta(B_i)) \geq 6$, para algún $i = 2, \dots, s$, o bien, $x^T(\delta(B_i)) \geq 4$ y $x^T(\delta(B_j)) \geq 4$ para $i, j = 2, \dots, s$, $i \neq j$. En cualquiera de los dos casos:

$$a^t x^T \geq a^t x^T|_{\delta(B_1)} + a^t x^T|_{\bigcup_{i=2}^s \delta(B_i)} \geq 2 + 2(s-1) + 4 = a_0$$

y, consecuentemente, $a^t x^T \geq a_0$.

• $|\delta_{|T}(B_1)| > 2 \rightarrow |\delta_{|T}(B_1)| \geq 4$

– $|\delta_{|T}(B_1) \cap (A, B_1)| \geq 2$; repitiendo el razonamiento para el caso igual a 2, obtenemos que la desigualdad es válida.

– $|\delta_{|T}(B_1) \cap (A, B_1)| = 1 \rightarrow |\delta_{|T}(B_1) \cap (Z, B_1)| \geq 3$; en este caso, el peso de las aristas incidentes con B_1 es de, al menos, 6 unidades, ya que el coeficiente de la arista de (A, B_1) es 3 y el de cada una de las aristas de (Z, B_1) es 1. Por tanto:

$$a^t x^T \geq a^t x^T|_{\delta(B_1)} + a^t x^T|_{\bigcup_{i=2}^s \delta(B_i)} \geq 6 + 2(s-1) = 2(s+2)$$

y $a^t x^T \geq a_0$.

– $|\delta_{|T}(B_1) \cap (A, B_1)| = 0 \rightarrow |\delta_{|T}(B_1) \cap (Z, B_1)| \geq 4$. Si en T hay algún B_i , $i = 2, \dots, s$ con $|\delta_{|T}(B_i)| \geq 4$, o, $|\delta_{|T}(B_1) \cap (Z, B_1)| \geq 6$ la desigualdad es evidentemente válida, ya que:

$$a^t x^T \geq a^t x^T|_{\delta(B_1)} + a^t x^T|_{\bigcup_{i=2}^s \delta(B_i)} \geq 4 + 2(s-1) + 2 = 2(s+2)$$

en el primer caso, y:

$$a^t x^T \geq a^t x^T|_{\delta(B_1)} + a^t x^T|_{\bigcup_{i=2}^s \delta(B_i)} \geq 6 + 2(s-1) = 2(s+2)$$

en el segundo. El único caso que nos queda por estudiar es aquel en el que:

$$\begin{aligned} x^T(\delta(B_i)) &= 2, \quad \forall i = 2, \dots, s \\ x^T(\delta(B_1)) &= 4, \quad \text{con } |\delta_{|T}(B_1) \cap (Z, B_1)| = 4 \end{aligned}$$

y puede comprobarse que es imposible construir dos rutas posibles cumpliendo estas condiciones: nótese que, si las cuatro aristas incidentes con B_1 corresponden a un único vehículo, el grado de alguno de los B_i , $i = 2, \dots, s$ debería ser cuatro. **Si pertenecen a rutas distintas es porque los dos vehículos que visitan a B_1 recorren cuatro caminos $(A, B_1) \cup (B_i, Z)$ aristo-disjuntos. Veamos que una de las condiciones establecidas en la definición impide que esto pueda ocurrir.** La situación que tendríamos sería la reflejada en la Figura 7.14. Ahora bien, si esto ocurriese sería porque la demanda de B_{i_1} y B_{i_2} , es abastecida completamente por un único vehículo y, la de B_{i_3} y B_{i_4} , por otro. Además, entre los dos vehículos deberían servir completamente a

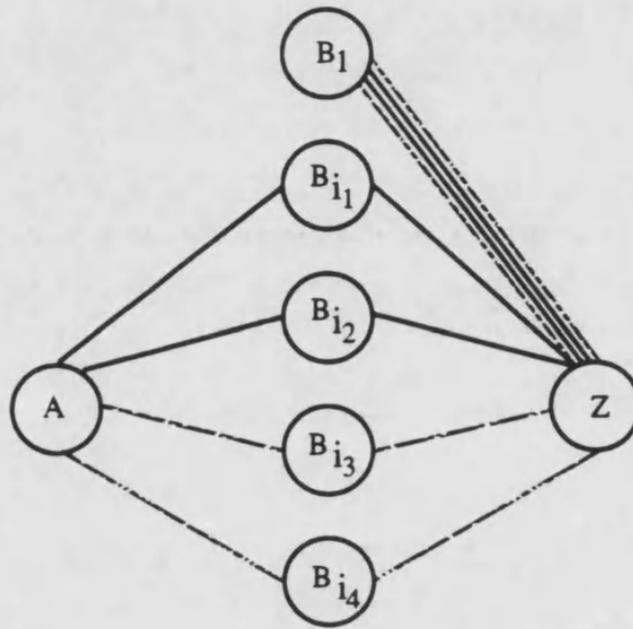


Figura 7.14: Solución que cumple $a^t x = 2s + 2$ y que puede ser posible en algunos casos.

B_1 y, probablemente, algo de Z , aunque no necesariamente. Esto contradice la hipótesis de que:

$$\left\lceil \frac{d(B_1) + d(B_{i_1}) + d(B_{i_2}) + d(B_{i_3}) + d(B_{i_4})}{Q} \right\rceil = 3$$

para cualesquiera $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{2, \dots, s\}$.

Por lo tanto concluimos que la desigualdad es válida.

◇

A primera vista, podríamos pensar que la tercera hipótesis de trabajo, introducida en la Definición 7.2, no es más que un artificio que nos permite demostrar la validez de $a^t x \geq 2(s + 2)$; si la elimináramos, encontraríamos soluciones que podrían ser posibles para el *SDVRP* y que nos proporcionarían un término independiente menor, véase la Figura 7.14.

Si desaparece esta condición podemos reducir el término independiente hasta $2s + 2$, pero nos encontramos con soluciones como las de la Figura 7.15

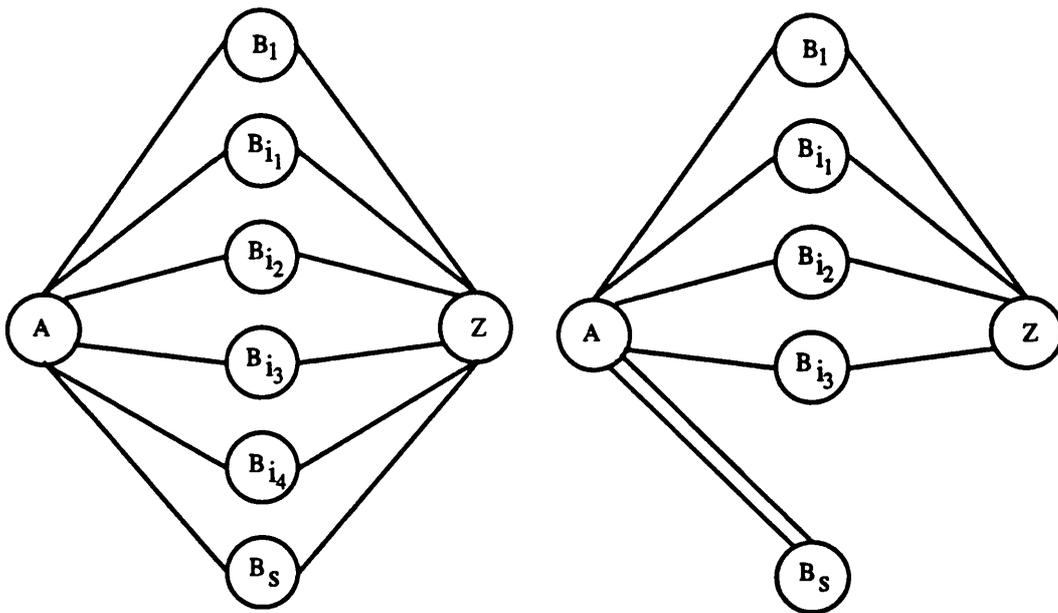


Figura 7.15: Soluciones no posibles para s par (impar) que cumplen $a^t x = 2s + 2$.

que no son soluciones posibles del *SDVRP*, ya que, si lo fueran, un único vehículo debería servir completamente a B_1 y a un B_i , $i = 2, \dots, s$.

Las soluciones presentadas para s (par o impar) cumplen todas las restricciones de grado, paridad y capacidad asociadas. Antes de comprobarlo queremos hacer notar que no hay pérdida de generalidad alguna en suponer que A sólo contiene al depósito y que cada uno de los subconjuntos que configuran la estructura están formados por un único cliente.

Que no se viola ninguna restricción de grado ni de paridad es evidente; veamos entonces qué pasa con las de capacidad.

Supongamos que s es par e igual a $2p$ con $p \geq 3$.

Dado $W \subseteq V \setminus \{0\}$ distinguiremos dos casos dependiendo de si W contiene o no a Z .

- Si $Z \notin W$, entonces es evidente que $x(\delta(W)) = 2|W|$. Por hipótesis, la demanda total de cada uno de los supernodos es menor o igual que la capacidad de los vehículos, luego $\lceil \frac{d(W)}{Q} \rceil \leq |W|$, por tanto:

$$x(\delta(W)) = 2|W| \geq 2\lceil \frac{d(W)}{Q} \rceil$$

y se cumple la restricción de capacidad asociada a W .

- Si $Z \in W$, es sencillo comprobar que $x(\delta(W)) = s$. Como,

$$\lceil \frac{d(B_{i_1}) + d(B_{i_2}) + d(B_{i_3}) + d(Z)}{Q} \rceil = 1,$$

tres B_i 's cualesquiera, con $i \geq 2$, y Z pueden servirse completamente con un único vehículo. Como mucho se necesitarán $\lceil \frac{2p-1}{3} \rceil$ vehículos distintos para servir la demanda $\sum_{i=1}^s d(B_i) + d(Z)$. Aunque utilicemos otro vehículo para servir $d(B_1)$ tenemos garantizado que:

$$\lceil \frac{2p-1}{3} \rceil + 1 \geq \lceil \frac{d(V \setminus A)}{Q} \rceil$$

Distinguiendo si s es o no un múltiplo de tres, tenemos:

$$\lceil \frac{2p-1}{3} \rceil = \begin{cases} \lceil \frac{3(2t)-1}{3} \rceil = 2t & \text{si } p = 3t \\ \lceil \frac{3(2t)+1}{3} \rceil = 2t + 1 & \text{si } p = 3t + 1 \\ \lceil \frac{3(2t+1)}{3} \rceil = 2t + 1 & \text{si } p = 3t + 2 \end{cases}$$

donde $t \geq 1$. En cualquier caso:

$$s = 2p \geq 2(\lceil \frac{2p-1}{3} \rceil + 1) \geq 2\lceil \frac{d(V \setminus A)}{Q} \rceil$$

luego:

$$x(\delta(W)) \geq 2\lceil \frac{d(W)}{Q} \rceil$$

pues es evidente que $2\lceil \frac{d(V \setminus A)}{Q} \rceil \geq 2\lceil \frac{d(W)}{Q} \rceil$.

Supongamos ahora que s es impar, $s = 2p + 1$ con $p \geq 2$.

Si $s = 5$ es sencillo comprobar que se cumplen las restricciones de capacidad asociadas. Veamos qué ocurre en el caso general $s \geq 7$, teniendo en cuenta que $x(\delta(W))$ depende de si W contiene o no a Z .

- Si $Z \notin W$, entonces $x(\delta(W)) = 2|W|$ y razonando como en el caso anterior tenemos garantizado que:

$$x(\delta(W)) = 2|W| \geq 2 \lceil \frac{d(W)}{Q} \rceil$$

luego se cumple la restricción de capacidad.

- Si $Z \in W$ distinguiremos dos nuevos casos:
 - $B_s \in W$, entonces $x(\delta(W)) = s + 1$.
 - $B_s \notin W$, entonces $x(\delta(W)) = s - 1$.

Bastará con demostrar que no se viola la restricción de capacidad asociada para el caso $s - 1$.

$$\text{Si } p = \begin{cases} 3t \rightarrow s - 1 = 6t \geq 2 \left(\lceil \frac{s-1}{3} \rceil + 1 \right) = 4t + 2 \\ 3t + 1 \rightarrow s - 1 = 6t + 2 \geq 2 \left(\lceil \frac{s-1}{3} \rceil + 1 \right) = 4t + 4 \\ 3t + 2 \rightarrow s - 1 = 6t + 4 \geq 2 \left(\lceil \frac{s-1}{3} \rceil + 1 \right) = 4t + 6 \end{cases}$$

Nótese que las desigualdades anteriores se cumplen porque $t \geq 1$ luego, $x(\delta(W)) \geq 2 \lceil \frac{d(W)}{Q} \rceil$, es decir, la restricción de capacidad asociada no se viola.

Resumiendo, la desigualdad $a^t x \geq 2(s + 2)$ corta más soluciones enteras, que no son soluciones del *SDVRP*, que $a^t x \geq 2s + 2$. Este motivo nos ha parecido suficientemente válido como para incluir la condición:

$$\lceil \frac{d(B_1) + d(B_{i_1}) + d(B_{i_2}) + d(B_{i_3}) + d(B_{i_4})}{Q} \rceil = 3$$

en la definición de la estructura que estamos estudiando.

Proposición 7.4 *Cualquier desigualdad asociada a una “configuración de Fleischmann ampliada” define una faceta del $PSDVRP$ si el número de vehículos disponibles es mayor o igual que $\lceil \frac{s-1}{3} \rceil + 1$.*

Demostración

Acabamos de demostrar la validez de la restricción independientemente de cual sea el número de vehículos y de si es o no fijo. Para probar que la desigualdad es soporte distinguiremos varios casos dependiendo de si s es o no múltiplo de 3. En la Figura 7.16 presentamos los tres modelos de soluciones que nos permiten probar que hay soluciones del $SDVRP$ que cumplen $a^t x = 2(s + 2)$.

$$\underline{s = 3p, p \geq 2}$$

Sea T la solución de la Figura 7.16 asociada a este caso, T cumple:

$$a^t x^T = 6 + 6 \frac{s-3}{3} + 4 = 2(s+2)$$

y es una solución posible del $SDVRP$. Nótese que hay $\frac{s-3}{3}$ grupos distintos de tres B_i 's, cada una de estas ternas está asociada a una ruta. Podemos suponer también que cada una de las rutas corresponde a un vehículo distinto, lo cual es posible gracias a que:

$$\lceil \frac{d(B_{i_1}) + d(B_{i_2}) + d(B_{i_3}) + d(Z)}{Q} \rceil = 1$$

para cualesquiera $i_1, i_2, i_3 \in \{2, \dots, s\}$; B_1 no forma parte de ninguna de estas ternas.

Si suponemos que los dos B_i 's que quedan están asignados a otro vehículo distinto y que lo mismo ocurre con B_1 , utilizamos como mucho $\frac{s-3}{3} + 2$ vehículos distintos. La hipótesis establecida, junto con las condiciones presentes en la definición de la estructura, garantizan que las rutas así definidas son posibles y que no utilizamos más vehículos de los que disponemos.

Estamos tratando los supernodos como si fuesen clientes en lugar de conjuntos de vértices. La manera de ampliar este tipo de soluciones cuando alguno, o todos, los supernodos contienen más de un cliente es, como hemos hecho en otras demostraciones, utilizando ciclos Hamiltonianos en cada uno de los macrovértices.

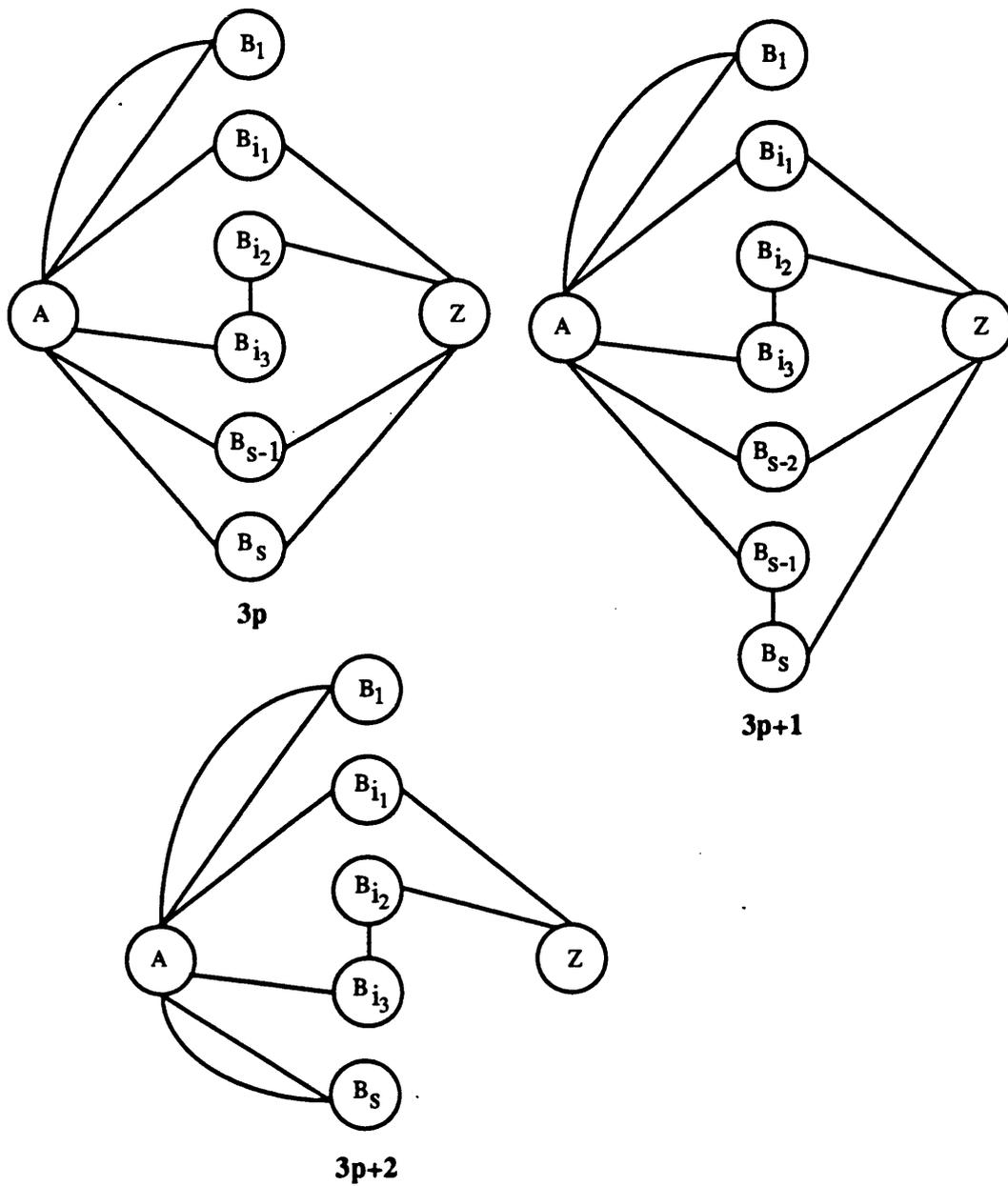


Figura 7.16: Soluciones que cumplen $a^t x = 2(s + 2)$.

$$\underline{s = 3p + 1}$$

En este caso también se cumple que $a^t x^T = 6 + 6\frac{s-1}{3} = 2(s+2)$. Veamos que la solución es posible para el *SDVRP*.

Tenemos $\frac{s-1}{3}$ ternas asociadas cada una de ellas a vehículos distintos, y otra que sirve a B_1 , en total utilizamos $\frac{3p}{3} + 1$ vehículos i.e., $\lceil \frac{s-1}{3} \rceil + 1$.

$$\underline{s = 3p + 2, p \geq 1}$$

La solución que tenemos ahora utiliza $\frac{s-2}{3}$ vehículos que sirven, respectivamente, a $\frac{s-2}{3}$ ternas distintas de B_i 's, otro vehículo para cubrir la demanda de B_1 y el último para servir el otro B_i que queda. En total, $\lceil \frac{s-1}{3} \rceil + 1$. Tenemos una solución posible, que también cumple la restricción con igualdad, ya que $a^t x^T = 6 + 6\frac{s-2}{3} + 2 = a_0$.

Nótese que, en todas las soluciones con las que hemos trabajado los únicos clientes que probablemente sean servidos por más de un vehículo pertenecerán a A o a Z .

Duplicando en las soluciones anteriores cualquiera de las aristas con coeficiente positivo en la restricción, demostramos que es propia, i.e., que hay soluciones del *SDVRP* que cumplen, con mayor estricto, la desigualdad.

Mostraremos que define una faceta utilizando el método indirecto. Si suponemos que $f^t x \geq f_0$ es una faceta del P_{SDVRP} que cumple:

$$\{x \in P_{SDVRP} : a^t x = a_0\} \subseteq \{x \in P_{SDVRP} : f^t x = f_0\}$$

tenemos que demostrar que:

$$\exists \lambda \geq 0 : f = \lambda a \text{ y } f_0 = \lambda 2(s+2)$$

Es sencillo comprobar que la solución de la Figura 7.17 es una solución posible del *SDVRP*, que cumple la restricción con igualdad y, que no utiliza más de $\lceil \frac{s-1}{3} \rceil + 1$ vehículos. La llamaremos T .

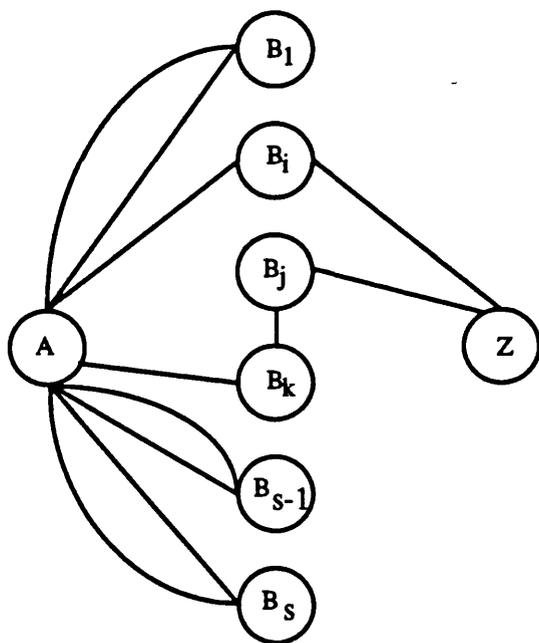


Figura 7.17: Solución base que cumple $a^t x = 2(s + 2)$.

- $f_e = 0, \forall e \in E(A) \cup \left(\bigcup_{i=1}^s B_i\right) \cup E(Z)$.

Si en T duplicamos una cualquiera de las aristas de:

$$E(A) \cup \left(\bigcup_{i=1}^s B_i\right) \cup E(Z),$$

obtenemos una nueva solución T' que sigue cumpliendo $a^t x^{T'} = a_0$ luego, $f^t x^{T'} = f_0$, y entonces $f^t x^T = f^t x^{T'}$, de donde deducimos que $2f_e = 0$.

- $f_e = \lambda_{AB_1}, \forall e \in (A, B_1)$.

Dadas $e = (u_1, v_1)$ y $e' = (u_2, v_2)$ dos aristas de la cortadura (A, B_1) , las soluciones, T_1 y T_2 , que se obtienen modificando adecuadamente la solución de la Figura 7.17, nos permiten deducir que el coeficiente f_e no depende de la arista elegida. En la Figura 7.18 mostramos como debemos modificar T .

$$\begin{array}{l} a^t x^{T_1} = 2(s+2) \rightarrow f^t x^{T_1} = f_0 \\ a^t x^{T_2} = 2(s+2) \rightarrow f^t x^{T_2} = f_0 \\ \text{Restando} \quad \quad \quad f_e - f_{e'} = 0 \rightarrow f_e = f_{e'} = \lambda_{AB_1} \end{array}$$

- $f_e = \lambda_{B_1 Z}, \forall e \in (B_1, Z)$.

Este resultado se obtiene, de la misma manera que el anterior, pero trabajando con la solución del *SDVRP* de la Figura 7.19 que cumple con igualdad $a^t x \geq a_0$.

- $f_e = \lambda_{AB_i}, \forall e \in (A, B_i), i = 2, \dots, s$.

Si elegimos la solución base T apropiadamente, i.e., de manera que contenga al menos una arista de la cortadura (A, B_i) , procediendo análogamente al primer caso, obtenemos el resultado.

- $f_e = \lambda_{B_i Z}, \forall e \in (B_i, Z), i = 2, \dots, s$.

Se demuestra como antes, pero asegurándonos de que T se ha definido de manera que se utiliza al menos una arista de la cortadura que estamos estudiando. Esto se consigue eligiendo adecuadamente la terna de B_i 's que, junto con Z , son servidos por un mismo vehículo.

- $\lambda_i = \lambda_{AB_i} = \lambda_{B_i Z}, \forall i = 2, \dots, s$.

Si elegimos apropiadamente T de manera que contenga dos aristas de la cortadura (A, B_i) , obtenemos T' eliminando estas aristas y añadiendo dos de (B_i, Z) . T' sigue siendo posible para el *SDVRP* y cumple $a^t x^{T'} = a_0$, luego, $f^t x^{T'} = f_0$ y, por tanto, $\lambda_{AB_i} = \lambda_{B_i Z}$.

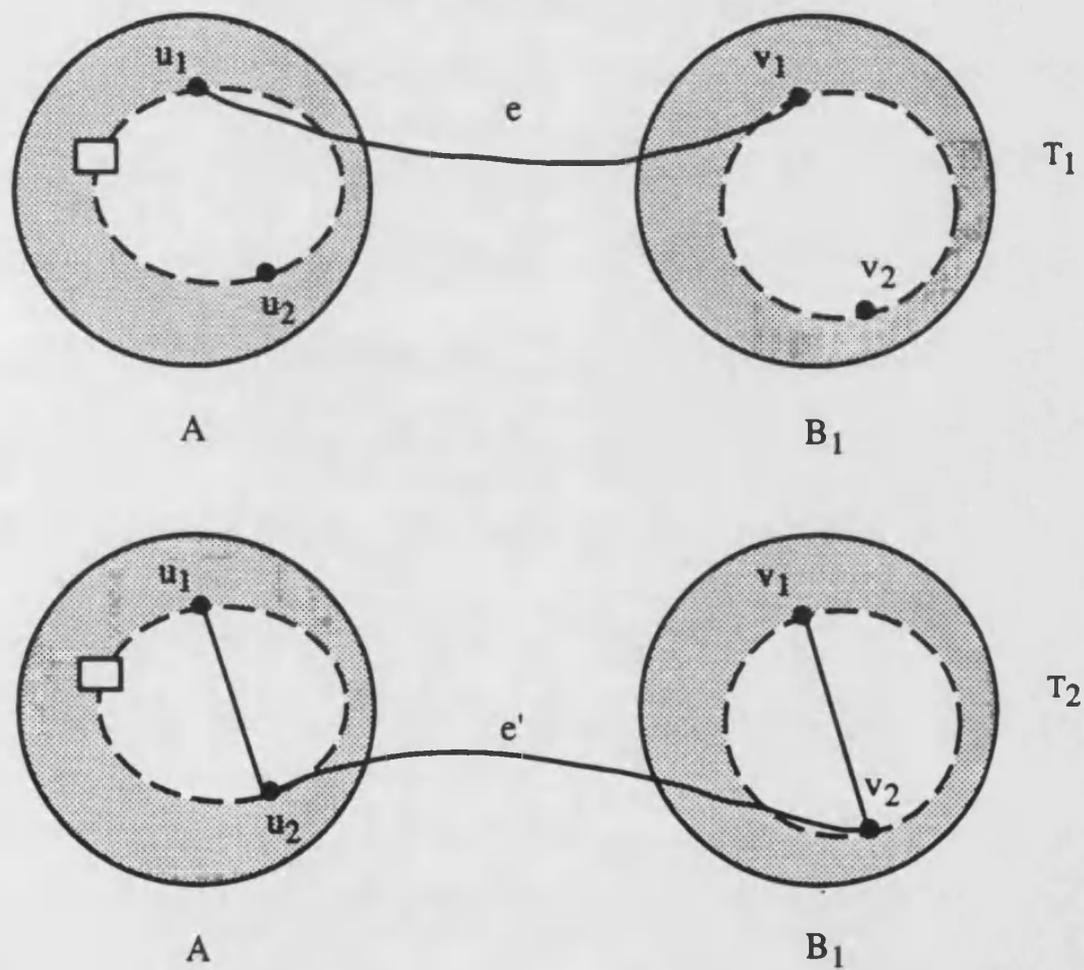


Figura 7.18: Parte de las soluciones T_1 y T_2 .

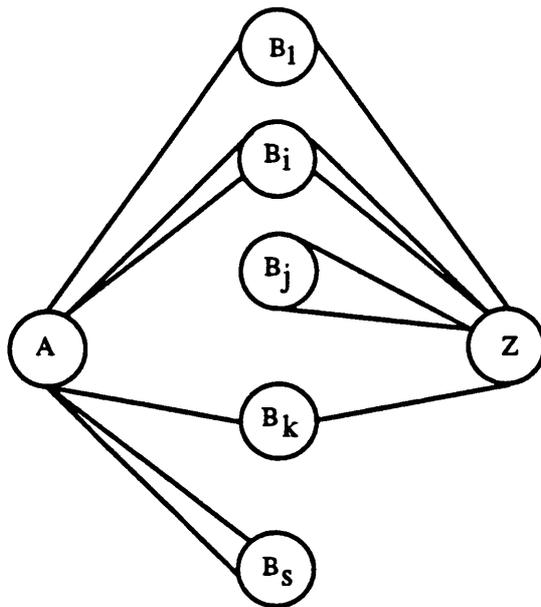


Figura 7.19: $f_e = \lambda_{B_1 Z}$, $\forall e \in (B_1, Z)$.

- $\lambda = \lambda_i = \lambda_j$, $\forall i, j \in \{2, \dots, s\}$, $i \neq j$.

Eligiendo apropiadamente B_i y B_j y, comparando las dos soluciones, T_3 y T_4 de la Figura 7.20, obtenemos:

$$\begin{array}{ll} a^t x^{T_3} = 2(s+2) & \rightarrow f^t x^{T_3} = f_0 \\ a^t x^{T_4} = 2(s+2) & \rightarrow f^t x^{T_4} = f_0 \\ \text{Restando} & \lambda_{B_1 Z} + 2\lambda_i = \lambda_{AB_1} \end{array}$$

luego:

$$\lambda_i = \frac{\lambda_{AB_1} - \lambda_{B_1 Z}}{2}$$

para cualquier $i = 2, \dots, s$, y por tanto $\lambda_i = \lambda_j$.

- $\lambda_{AB_i} = 3\lambda_{B_1 Z} = 3\lambda$.

Para demostrar el resultado que acabamos de enunciar nos basta con comparar la solución base T , y la solución de la Figura 7.21. Ambas cumplen con igualdad $a^t x \geq a_0$ y, por lo tanto, también $f^t x \geq f_0$; restando respectivamente los términos de $f^t x = f_0$ asociados a las dos soluciones, obtenemos el resultado.

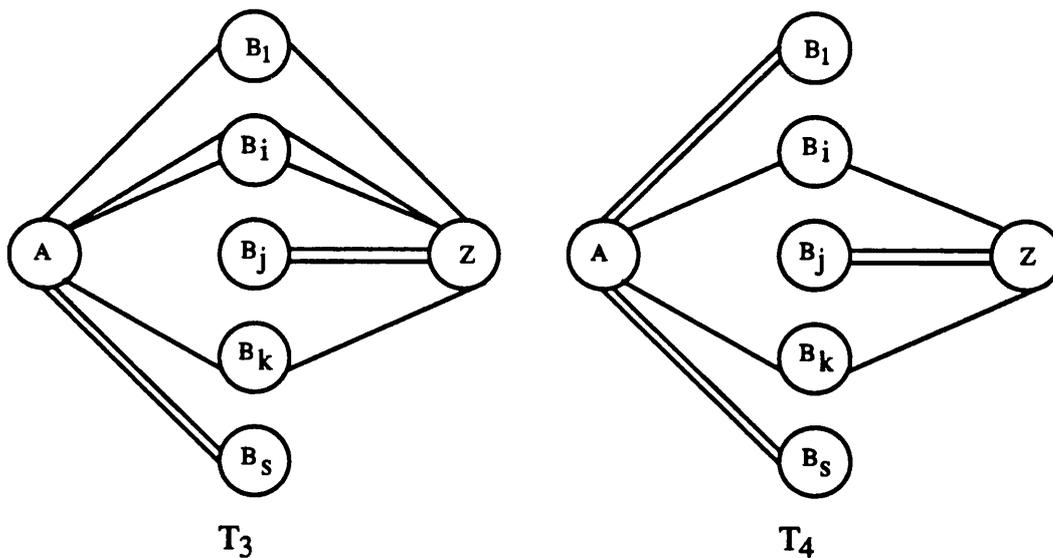


Figura 7.20: $\lambda_i = \lambda_j$, soluciones T_3 y T_4 .

Nótese que la solución es posible porque con dos vehículos podemos servir completamente a Z , a B_1 y a tres B_i 's cualesquiera $i = 2, \dots, s$. La demanda de B_1 deberá ser abastecida, obligatoriamente, entre dos vehículos.

De los dos resultados anteriores deducimos que:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_i = \frac{\lambda_{AB_1} - \lambda_{B_1Z}}{2} \\ \lambda_{AB_1} = 3\lambda_{B_1Z} \end{array} \right\} \longrightarrow \lambda_i = \lambda, \forall i = 2, \dots, s$$

- $f_e = 2\lambda, \forall e \in (A, Z)$.

En primer lugar, deberíamos demostrar que el coeficiente f_e es constante para las aristas de la cortadura (A, Z) y, a continuación, ver que efectivamente es el doble de la constante λ . Para ello utilizaremos las dos soluciones de la Figura 7.22. Con la primera de ellas y razonando como en otras ocasiones es sencillo comprobar que $f_e = \lambda_{AZ}$. La segunda parte se deduce directamente del hecho de que ambas cumplen con igualdad la restricción.

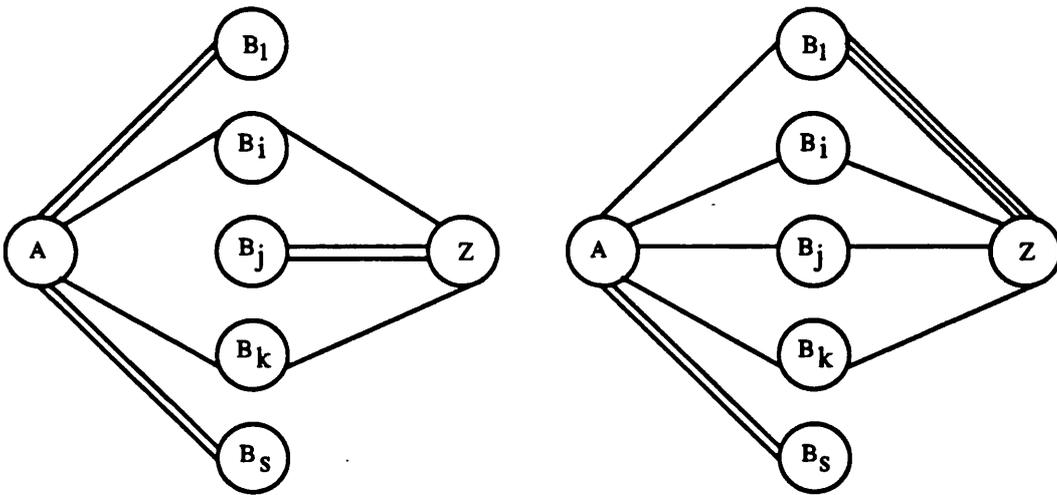


Figura 7.21: $\lambda_{AB_1} = 3\lambda_{B_1Z}$.

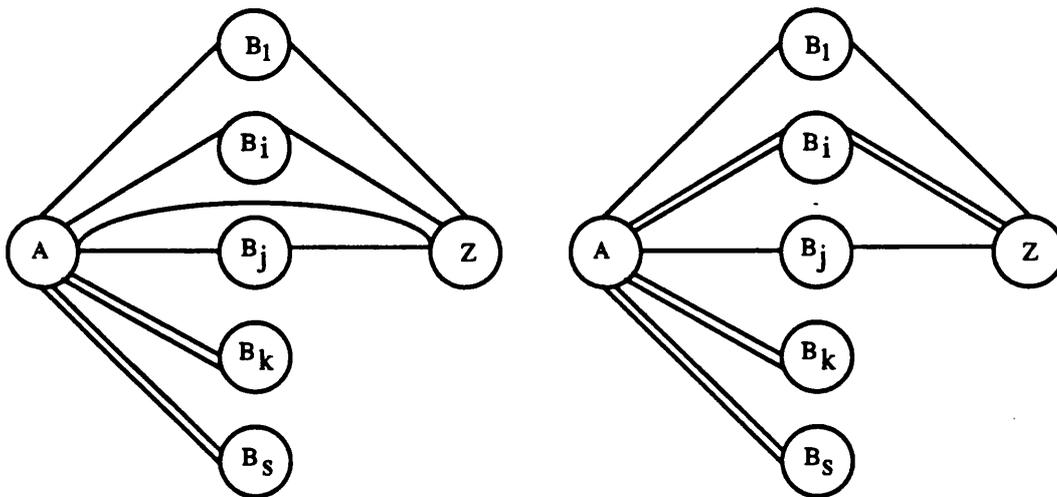


Figura 7.22: $\lambda_{AZ} = 2\lambda, \forall e \in (A, Z)$.

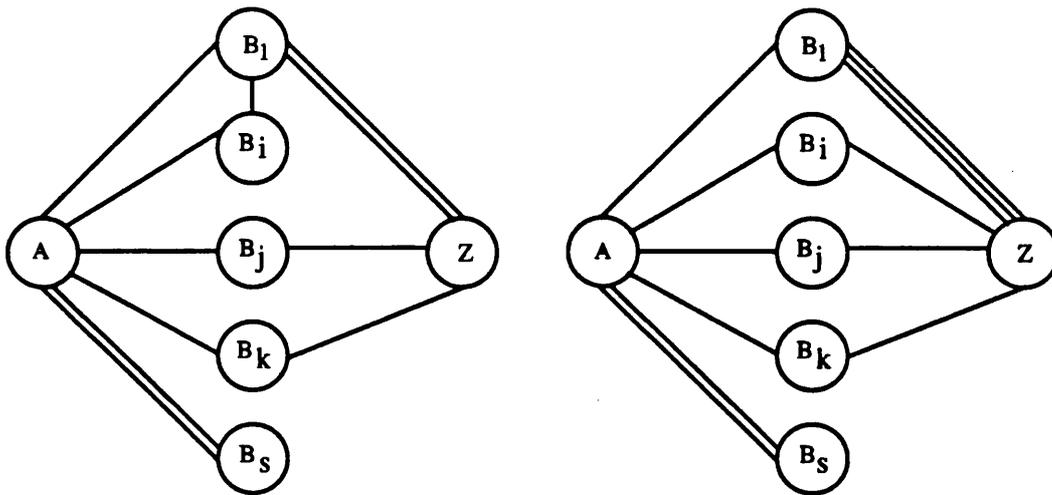


Figura 7.23: $\lambda_{B_1 B_i} = 2\lambda, \forall i = 2, \dots, s$.

- $f_e = \lambda_{B_1 B_i} = 2\lambda, \forall e \in (B_1, B_i), i = 2, \dots, s$.

Las soluciones que se necesitan para la comprobación de este resultado aparecen en la Figura 7.23.

- $f_e = \lambda_{B_i B_j} = 2\lambda, \forall e \in (B_i, B_j), i, j = 2, \dots, s, i \neq j$.

En la Figura 7.24 presentamos las dos soluciones que hemos de comparar para obtener este resultado.

En la Tabla 7.3 resumimos los resultados obtenidos.

Queda demostrado, por tanto, que $a^t x \geq 2(s + 2)$ induce una faceta del P_{SDVRP} . \diamond

La cota inferior establecida sobre el número de vehículos del problema es, en realidad, una condición suficiente que nos permite encontrar bastantes soluciones distintas como para demostrar que las desigualdades en estudio definen facetas del P_{SDVRP} . La cuestión de si es o no una condición necesaria, en general, queda abierta. Lo único que sabemos por el momento es que, si eliminamos la tercera condición de la Definición 7.2, para determinadas

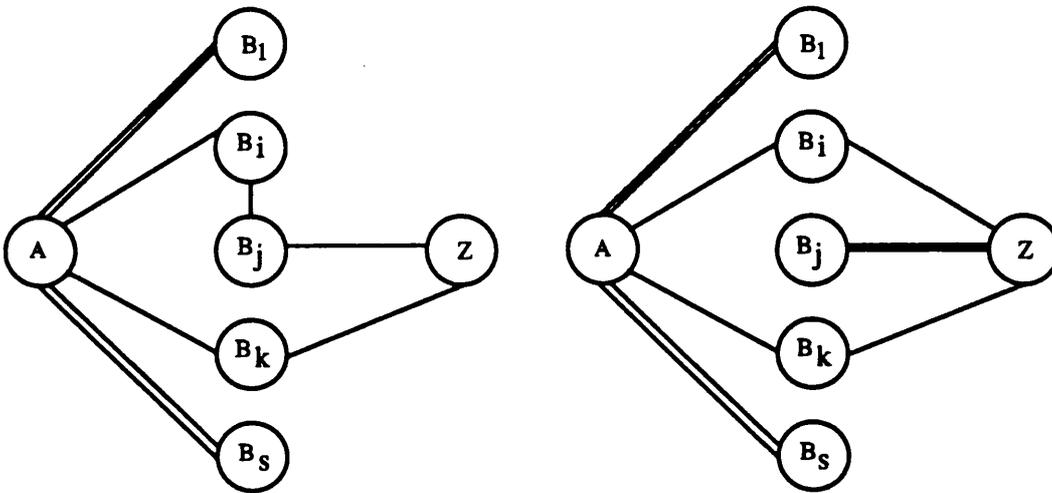


Figura 7.24: $\lambda_{B_i, B_j} = 2\lambda, \forall e \in (B_i, B_j), i, j = 2, \dots, s, i \neq j$.

CORTADURA	a_e	f_e
(A, B_1)	3	3λ
(B_1, Z)	1	λ
(A, B_i)	1	λ
(B_i, Z)	1	λ
(A, Z)	2	2λ
(B_i, B_j)	2	2λ
OTRO CASO	0	0
RHS	$2(s+2)$	$2(s+2)\lambda$

Tabla 7.3: Valor de los coeficientes de $f^t x \geq f_0$ y de $a^t x \geq a_0$.

instancias no es necesario establecer $K \geq \lceil \frac{s-1}{3} \rceil + 1$ para conseguir soluciones posibles que cumplan $a^t x \geq 2(s+2)$ con igualdad. El siguiente ejemplo ilustra lo que acabamos de decir:

Ejemplo 7.1 *Se dispone de tres vehículos idénticos de capacidad $Q = 4$, y de nueve clientes cuyas demandas son:*

$$d_1 = 4, d_i = 1, \forall i = 2, \dots, 9$$

El depósito es el vértice cero.

La solución de la Figura 7.25 es una solución posible para el SDVRP con tres vehículos, que cumple $a^t x = 20$ y, sin embargo:

$$\lceil \frac{s-1}{3} \rceil + 1 = 4 > 3 = K$$

También hemos encontrado instancias en las que la desigualdad $a^t x \geq 2(s+2)$ no induce una faceta del P_{SDVRP} a no ser que impongamos la condición $K \geq \lceil \frac{s-1}{3} \rceil + 1$.

Ejemplo 7.2 *Considerar la instancia presentada en la Figura 7.26, notar que $s = 11$ y:*

$$d(B_1) = 13, d(Z) = 1,$$

$$d(B_i) = 5, i = 2, \dots, 11$$

y, si $Q = 16$ se cumple:

$$\lceil \frac{d(B_1)+d(B_i)}{Q} \rceil = \lceil \frac{18}{16} \rceil = 2, i \in \{2, \dots, 11\}$$

$$\lceil \frac{d(Z)+d(B_{i_1})+d(B_{i_2})+d(B_{i_3})}{Q} \rceil = \lceil \frac{16}{16} \rceil = 1, i_1, i_2, i_3 \in \{2, \dots, 11\}$$

$$\lceil \frac{d(B_1)+d(B_{i_1})+d(B_{i_2})+d(B_{i_3})+d(B_{i_4})}{Q} \rceil = \lceil \frac{33}{16} \rceil = 3, i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{2, \dots, 11\}$$

es decir, se cumplen todas las condiciones necesarias para definir una "configuración de Fleischmann ampliada".

Nótese que como la capacidad del vehículo es $Q = 16$ el mínimo número de vehículos necesario para abastecer completamente la demanda de todos ellos es:

$$\lceil \frac{d \text{ TOTAL}}{Q} \rceil = \frac{64}{16} = 4$$

Evidentemente, en cualquier solución en la que $K = 4$, los cuatro deben servir/recoger las dieciséis unidades que indica su capacidad. Además, seguro que hay al menos un vértice, que tiene que ser abastecido entre dos o más vehículos ya que la solución del problema de Bin Packing asociado a esta instancia es igual a 5. Es sencillo comprobar que necesariamente será uno de los clientes cuya demanda es mayor estricto que 1.

Como ha ocurrido en otras ocasiones, la posibilidad de visitar un cliente sin necesidad de servirle nada de su demanda, nos permite suponer que una solución que minimice $a^t x$ sólo utilizará aristas de:

$$(A, Z) \cup \left(\bigcup_{i=1}^s ((A, B_i) \cup (B_i, Z)) \right)$$

Veremos que cualquier solución, T , cuyo vector de incidencia cumpla $a^t x^T = 2(s + 2)$, no puede utilizar la arista que va del depósito al vértice de demanda igual a 1. Demostraremos de esta manera que, para esta instancia:

$$\{x \in P_{SDVRP} : a^t x = 2(s + 2)\} \subset \{x \in P_{SDVRP} : x_e = 0\}, \quad e = (0, 12)$$

suponiendo que $A = \{0\}$ y que $Z = \{12\}$, lo cual significa que la restricción que nos ocupa está dominada.

Si en T hay dos vértices, con $d_i > 1$, con demanda compartida, como cada una de las aristas de T contribuye con al menos una unidad al valor de $a^t x^T$, tenemos que:

$$a^t x^T \geq 2(s - 2) + 8$$

Si en T hay alguna copia de la arista $e = (0, 12)$, como e no es incidente con ningún otro vértice, estamos seguros de poder afirmar:

$$a^t x^T \geq 2(s - 2) + 8 + 2 = 2(s + 2) + 2$$

lo cual contradice la hipótesis de que T minimizaba $a^t x \geq 2(s + 2)$. Por lo tanto, $x_e^T = 0$.

Si sólo hay un vértice con demanda compartida, será uno cuya demanda es igual a 5 o el único de demanda igual a 13. Se puede comprobar que, en este caso, el grado de este vértice debe ser igual a 6, luego:

$$a^t x^T \geq 2(s-1) + 6$$

y, de nuevo, podemos asegurar que $x_e^T = 0$, pues en caso contrario:

$$a^t x^T \geq 2(s-1) + 6 + 2 > 2(s+2)$$

Por lo tanto la restricción asociada a la "configuración de Fleischmann ampliada" definida por esta instancia está dominada salvo que establezcamos la hipótesis de que $K \geq \lceil \frac{s-1}{3} \rceil + 1 = 5$.

Por último nos planteamos la siguiente pregunta, si añadimos estas restricciones al sistema de desigualdades planteado en la Definición 3.2, ¿tendremos una formulación entera del *SDVRP* en la que sólo se utilizan las variables que contabilizan el número de veces que se utiliza cada arista en una solución?, la respuesta a esta pregunta es negativa. Aunque impongamos esta condición sigue habiendo soluciones enteras que cumplen todas las restricciones conocidas hasta el momento pero que, no son soluciones posibles del *SDVRP*, a no ser que dispongamos de un determinado número de vehículos.

En efecto, el grafo de la Figura 7.26 representa una solución entera que cumple todas las restricciones planteadas en *R1* (Definición 3.2) y también $a^t x \geq 2(s+2)$, pero que cuando trabajamos con $K = \lceil \frac{11-1}{3} \rceil + 1 = 5$ vehículos, no puede estar asociada a ninguna solución posible del *SDVRP*. Si $K = 6$ sí que sería una solución posible.

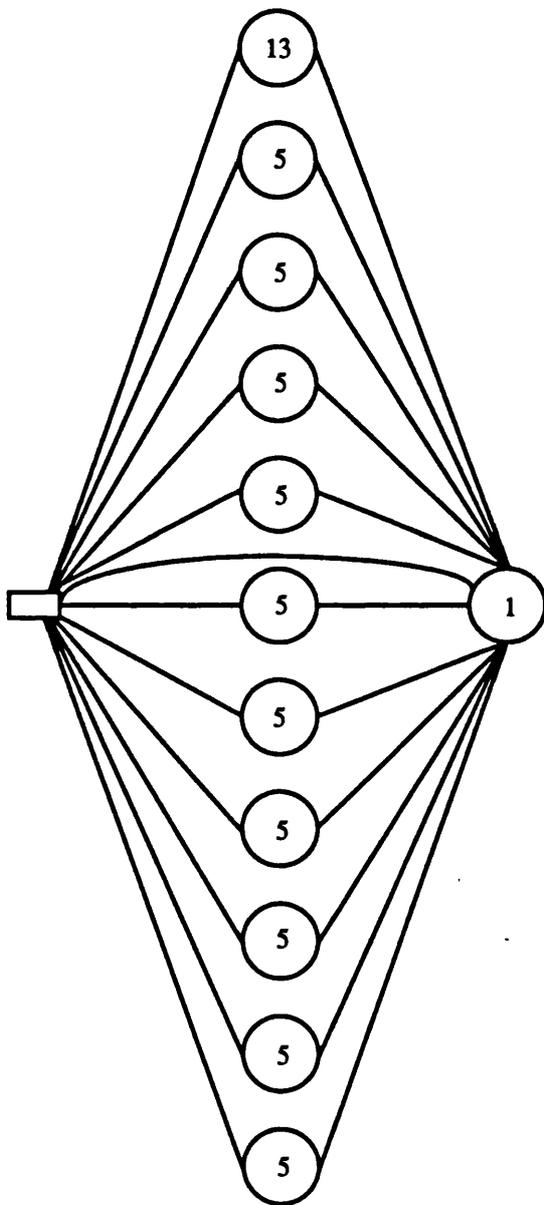


Figura 7.26: Grafo asociado a una solución del *SDVRP* sii $K \geq 6$.

7.3 Conclusiones.

Partiendo de la instancia planteada por Fleischmann y del conjunto de aristas que la definían, hemos conseguido fortalecer la relajación $R1$ introducida en el Capítulo 4 gracias al descubrimiento de una nueva familia de facetas. Introducir estas restricciones permite cortar una serie de soluciones, desconocidas por el momento, que no correspondían a ninguna solución posible del $SDVRP$.

A continuación, hemos visto que es posible asociar las nuevas desigualdades a estructuras más generales y que, modificando adecuadamente el RHS de las restricciones, se siguen obteniendo nuevas facetas para nuestro poliedro.

Por último, hemos presentado un ejemplo que muestra que todavía no disponemos de suficientes restricciones como para tener una formulación lineal entera del $SDVRP$ que utilice, sólomente, las variables que contabilizan el número de veces que se utiliza cada arista en una solución.

Partiendo de la instancia descrita en el Ejemplo 7.2 podríamos reproducir el estudio realizado en este capítulo y obtener unas restricciones que corten este tipo de soluciones. Ahora bien, aunque desde el punto de vista teórico la dificultad de realizar este estudio sea la misma que la que hemos tenido con el ejemplo de Fleischmann, en la práctica no es cierto.

Las dimensiones de la nueva instancia complican la parte algorítmica del trabajo. Nótese que el número de soluciones distintas aumenta considerablemente y, consecuentemente, el número de restricciones que tenemos que generar para poder aplicar el proceso de reconocimiento de rutas descrito en la Sección 3.6. Un ejemplo de cual puede llegar a ser el grado de complejidad es el hecho de que el número de restricciones de eliminación de subtours que tenemos que generar ahora es del orden de 2^{12} , concretamente:

$$\sum_{i=2}^{11} \binom{12}{i}$$

El número de vectores (de componentes enteras) con el que iniciamos el estudio que acabamos de realizar era de 5^9 , de ellos, sólomente 259 se utilizaron como input del algoritmo PORTA. En el ejemplo que acabamos de ver necesitaríamos partir de 5^{23} .

Por otro lado, la mayor parte de la implementación del algoritmo de identificación de soluciones se realizó específicamente para estudiar la instancia de Fleischmann. Un algoritmo capaz de tratar con instancias de mayor tamaño requeriría un diseño completamente distinto y sin duda más complejo.

El Ejemplo 7.2 es, sin duda, un nuevo punto de partida para continuar con el estudio de la descripción lineal del $PSDVRP$.¹

¹Quiero expresar, mi más sincero agradecimiento, al Profesor Giovanni Rinaldi del I.A.S.I. por las sugerencias e ideas que me permitieron desarrollar, íntegramente, el contenido de este capítulo, durante mi estancia en el Istituto dei Analisi ed Sistemi del C.N.R. en Roma.

Capítulo 8

Experiencias computacionales.

En los capítulos anteriores hemos presentado los resultados que hemos obtenido al estudiar el Problema de Rutas de Vehículos con Demanda Compartida desde un punto de vista teórico.

Es evidente que cualquier trabajo sobre un problema de Optimización Combinatoria resulta incompleto si los resultados teóricos no se justifican con los computacionales. Es por ello que, a pesar del contenido predominantemente teórico de esta memoria, hemos considerado oportuno incluir un informe sobre las experiencias computacionales que hemos llevado a cabo.

Al ser el *SDVRP* un problema *difícil*, queda plenamente justificada la búsqueda de buenas soluciones mediante técnicas heurísticas. En esto consiste precisamente la primera parte de este capítulo, en la descripción de un algoritmo heurístico para el problema. Se trata de un algoritmo de descenso diseñado para ser incluido, posteriormente, en un contexto más amplio de búsqueda tabú.

A continuación presentamos un algoritmo de planos de corte y los resultados obtenidos para una pequeña colección de problemas de la literatura sobre el *CVRP*.

En la revisión bibliográfica llevada a cabo, no hemos encontrado trabajos que nos permitan analizar la bondad de los algoritmos que hemos diseñado. En el momento de redactar esta memoria tampoco se conocen, que sepamos, las soluciones óptimas de los problemas a los que nos hemos referido en el párrafo

anterior, claro está, óptimos de la versión con demanda compartida. Por este motivo hemos desarrollado también un algoritmo que nos ha permitido resolver óptimamente algunas de las instancias utilizadas como problemas tests.

8.1 Algoritmos heurísticos para el *SDVRP*.

Tal y como mencionamos en el Capítulo 3 en la literatura científica hay sólomente un algoritmo heurístico para obtener soluciones del *SDVRP*, Dror y Trudeau (1990) [33]. Lo primero que vamos a hacer es describir, en líneas generales, la estructura de este algoritmo, con la finalidad de que queden patentes las características que lo diferencian del nuestro.

Después presentaremos, y discutiremos con detalle, nuestro algoritmo. Terminaremos dando los resultados computacionales que hemos obtenido para una colección de problemas tests.

Hemos utilizado el lenguaje de programación C para implementar todos los algoritmos que han aparecido, y aparecerán, en la memoria y, hemos utilizado una estación de trabajo Sun SPARC 2 para ejecutarlos.

8.1.1 Algoritmo heurístico de Dror y Trudeau (1990).

En primer lugar queremos hacer notar que Dror y Trudeau también suponen que ninguna de las demandas es superior a la capacidad del vehículo y que está permitido visitar a los clientes sin necesidad de servirles nada de su demanda. Sin embargo, una condición que difiere de nuestro planteamiento es que la flota de vehículos con la que trabajan es ilimitada. El número de vehículos utilizados es una de las variables cuyo valor tienen que determinar en la solución.

La siguiente definición, debida a Dror y Trudeau, permite introducir una característica que cumplen algunas de las soluciones óptimas del *SDVRP*.

Definición 8.1 Se define un “ciclo h -partido” como un subconjunto de h vértices, p_1, \dots, p_h , de manera que hay h rutas cumpliendo que: la primera contiene a p_1 y a p_2 ; la segunda a p_2 y a $p_3 \dots$; la $h - 1$ a p_{h-1} y a p_h y, la ruta h , a p_h y a p_1 .

La característica a la que nos referíamos es la siguiente: si la matriz de distancias cumple la desigualdad triangular, tiene que haber al menos una solución óptima en la que no haya ningún ciclo h -partido (para ningún h). En particular, en una solución óptima, dos rutas cualesquiera no podrán tener más de un vértice en común.

El esquema del heurístico planteado por Dror y Trudeau es una adaptación de un procedimiento de mejora de rutas diseñado por Dror y Levy (1986) [31] para el *CVRP*. La extensión consiste, básicamente, en incluir la posibilidad de dividir las demandas de los clientes. La calidad de las soluciones del *CVRP*, alcanzadas con dicho algoritmo, no parecía depender de la calidad de la solución inicial por lo que, cabría esperar que ocurriera lo mismo cuando se comparte la demanda. Es por ello que el algoritmo para el *SDVRP* parte de una solución cualquiera del *CVRP* (recuérdese que toda solución del *CVRP* lo es del *SDVRP*). A continuación intentan mejorar la solución inicial alternando dos tipos de procedimientos. Uno de ellos consiste en eliminar un vértice de una ruta e incluirlo en dos o más rutas de manera que, entre todos los vehículos asociados, puedan abastecer completamente su demanda. En esta fase se puede reducir el número de vehículos. A este tipo de intercambios los llaman *h-intercambios*, siendo h el número de rutas que contienen al vértice que está siendo estudiado en cada caso. Después comprueban, para cada uno de los vértices con demanda compartida, si es o no posible reducir la distancia total recorrida mediante la adición de un nuevo vehículo (ruta de ida y vuelta), que lo sirva exclusivamente. En caso de que así sea, se añade el vehículo. Cada vez que se realiza una de estas iteraciones, i.e., cada vez que se aplican los dos procedimientos anteriores (con, o sin éxito), reoptimizan, por separado, cada una de las rutas, mediante cambios del orden en el que visitan a sus clientes.

La solución del *SDVRP* alcanzada con este procedimiento cumple una de las características propias de las soluciones óptimas, concretamente la de no contener ciclos *2-partidos*.

Queremos remarcar aquí los dos aspectos que distinguen, principalmente, este algoritmo del nuestro. Son, por un lado, el hecho de que nosotros traba-

jaremos con un número de vehículos fijo a lo largo de todo el procedimiento, exactamente con $\lceil \frac{d_{total}}{Q} \rceil$ y, por otro, que no necesitamos ninguna solución del *CVRP* para aplicar el algoritmo. Explotamos desde el principio la posibilidad de compartir la demanda, de hecho, en la solución inicial ya puede haber vértices con demanda compartida.

Aunque lo hemos intentado en varias ocasiones, no nos ha resultado posible conseguir la colección de problemas utilizada por Dror y Trudeau para ilustrar la eficacia de su algoritmo. Evidentemente tampoco hemos conseguido su código. Ante la imposibilidad de comparar los resultados que proporcionan ambos procedimientos, consideramos que no merece la pena analizar con detalle los resultados que presentan en su artículo. Sin embargo, sí que los comentaremos.

El estudio computacional que presentan consiste en comparar los resultados obtenidos para su colección de problemas, dependiendo de si se resuelven como si fuesen instancias del *CVRP* o como si lo fuesen del *SDVRP*.

Las conclusiones a las que llegan son, de alguna manera, aquellas que cabía esperar. En media, el porcentaje de ahorro en la distancia total recorrida para instancias con demandas comprendidas entre $[0.7Q]$ y $[0.9Q]$ es del 11.24% mientras que, si pertenecen al intervalo $[[0.01Q], [0.1Q]]$ el ahorro que se consigue compartiendo la demanda no es significativo. En cuanto a número de vehículos, la reducción media que se consigue varía entre un 0%, para los problemas con demandas pequeñas, comparadas con la capacidad, y un 25.8%, para las instancias en las que las demandas pertenecen a $[[0.7Q], [0.9Q]]$.

Así pues, decidimos probar nuestro heurístico sobre una colección de problemas generada por nosotros mismos, así como sobre algunas instancias extraídas de la librería de libre disposición TSPLIB [77].

8.1.2 Un nuevo algoritmo heurístico.

DESCRIPCIÓN

El algoritmo presentado en la sección anterior parte de una solución posible del *CVRP*. Como una de las principales ventajas del *SDVRP*, con respecto al *CVRP*, es, precisamente, la de poder obtener soluciones con un número menor de vehículos, desde nuestro punto de vista, comenzar con una solución del *CVRP* puede revertir en la obtención de resultados peores.

Sabemos que para cubrir una determinada demanda total d_{total} con vehículos de capacidad Q se necesitan, como mínimo, $\lceil \frac{d_{total}}{Q} \rceil$ vehículos. Cuando no se permite compartir la demanda, el número de vehículos necesario es la solución del problema de *Bin Packing* asociado a las demandas de los clientes y a cajas de capacidad igual a Q . En muchos casos la solución de este problema es un número estrictamente mayor que $\lceil \frac{d_{total}}{Q} \rceil$.

El algoritmo que nosotros presentamos explota desde el principio la ventaja de poder trabajar con el menor valor de K posible. El procedimiento de construcción de la solución inicial genera K rutas en las que, desde el primer momento es posible que haya clientes con demanda compartida. Después de obtener diferentes soluciones alternativas, se selecciona la de menor coste, la cual se someterá a una serie de intercambios, que se aplican sucesivamente hasta que no es posible encontrar uno que proporcione una solución mejor que la actual. Como vemos a continuación, se trata de la estructura típica de un algoritmo de descenso.

ALGORITMO DE DESCENSO

Paso 1.- CONSTRUCCIÓN DE LA SOLUCIÓN INICIAL.

Sea $K = \lceil \frac{d_{total}}{Q} \rceil$.

Obtener aleatoriamente una solución de la instancia del *TSP* en la que los vértices que hay que recorrer son los n clientes y el depósito.

A partir del tour de la solución del *TSP* generar, secuencialmente, K rutas de manera que los vehículos asociados van sirviendo, secuencialmente,

a los clientes según el orden establecido por el tour. Si es necesario abastecer a un cliente con dos vehículos distintos, se hace. Observar que de esta forma hay $K - 1$ vehículos que sirven el 100% de lo que les permite su capacidad, mientras que el último sirve:

$$(d_{total}) - (K - 1)Q$$

En la obtención de la solución inicial está contemplada la posibilidad de trabajar sólo con un porcentaje de la capacidad de los vehículos, siempre y cuando con este porcentaje sea posible abastecer completamente la demanda total.

Paso 2.- GENERACIÓN DE SOLUCIONES ALTERNATIVAS.

Si en el paso anterior se ha trabajado con un porcentaje de Q inferior al 100%, actualizar la capacidad de manera que, a partir de este momento, vuelva a ser igual a Q .

El usuario del algoritmo puede decidir entre, generar o no, soluciones iniciales alternativas. Básicamente estas soluciones se obtienen utilizando una o varias de las siguientes opciones:

- Las rutas se construyen a partir del tour resultante de reoptimizar el original aplicándole el algoritmo de Lin y Kernighan (1973) [60]. Si la nueva solución del *SDVRP* es mejor que la que teníamos hasta el momento, nos quedamos con la nueva.
- Si i_1, i_2, \dots, i_n es la secuencia en la que hemos recorrido los vértices en la solución actual, comprobamos si recorrerlos en sentido contrario, i.e., en el orden $i_n, i_{n-1}, \dots, i_2, i_1$, nos conduce a una solución del *SDVRP* mejor. Si el resultado es afirmativo, actualizamos de nuevo la solución.
- A partir del tour del *TSP* que proporciona la solución del *SDVRP* actual, generamos distintas soluciones alternativas modificando el origen de construcción de las rutas. Por ejemplo, supongamos de nuevo que el tour es i_1, i_2, \dots, i_n ; la primera solución la obtenemos comenzando a formar la primera ruta a partir del vértice i_2 . Si la nueva solución mejora la anterior, la actualizamos. A continuación, repetimos el proceso pero, a partir de i_3 , después a partir de i_4 y, así sucesivamente hasta llegar a i_n .

Al final de este paso se habrá elegido aquel tour que proporcione el conjunto de rutas de coste mínimo entre todas las examinadas. Ésta será la solución del *SDVRP* que utilizaremos para aplicar los intercambios.

Paso 3.- FASE DE MEJORA.

Mejorar la solución obtenida mediante intercambios de vértices entre rutas distintas. Seleccionar una de las dos estrategias disponibles para aplicar los intercambios:

- Estrategia 1: mientras sea posible mejorar la solución aplicando sólomente intercambios del tipo $1 - 0$, aplicarlos. Después se realizarán todos los intercambios del tipo $1 - 1$ que generen soluciones que permitan conseguir algún ahorro en cuanto a distancia total recorrida.

Se terminará cuando ya no sea posible disminuir el coste de la solución actual. En ese caso, ir a la FASE DE REOPTIMIZACIÓN FINAL DE LAS RUTAS.

- Estrategia 2:

A: si se encuentra un intercambio $1 - 0$ que mejore la solución, aplicarlo. En cualquier caso, ir a B.

B: si se encuentra un intercambio $1 - 1$ que mejore la solución, aplicarlo. En caso contrario, si en A tampoco se encontró ninguno, ir a la FASE DE REOPTIMIZACIÓN FINAL DE LAS RUTAS.

Si no, ir a A.

Paso 4.- FASE DE REOPTIMIZACIÓN FINAL DE LAS RUTAS.

Aplicar Lin y Kernighan (1973) a todas y cada una de las rutas.

El algoritmo que acabamos de describir ofrece la posibilidad de fijar un parámetro que contabiliza el número de veces que está permitido cambiar de solución sin reoptimizar las rutas. Cuando este número coincide con el valor del parámetro se aplica el algoritmo de Lin y Kernighan a todas y cada una de las rutas y se vuelve a inicializar a cero el contador.

Hemos hablado de dos tipos de intercambios que son habituales en el contexto del *VRP* ($1 - 0$ y $1 - 1$). Definirlos para el *SDVRP* es inmediato en el primer caso, pero no ocurre lo mismo con los intercambios $1 - 1$. Un intercambio $1 - 1$ consiste en intercambiar dos clientes distintos que están en rutas distintas; en el *SDVRP* tenemos que hacer tratamientos diferentes dependiendo de si los clientes involucrados en el cambio son abastecidos por uno o más vehículos. En caso de que alguno de ellos esté asignado a más de una ruta, habrá que tener en cuenta la relación entre las mismas, de lo contrario,

podría darse el caso, por ejemplo, de incluir el mismo vértice en una misma ruta, pero en posiciones distintas.

En el *CVRP* un intercambio 1 – 0 consiste en trasladar un vértice de una ruta a otra, como hay una relación biunívoca entre vértices y rutas no hay ningún tipo de ambigüedad en la descripción de los mismos. Sin embargo, en el *SDVRP* un cliente puede estar asignado a r rutas distintas lo que, aparentemente, puede complicar la definición del intercambio. Ahora bien, podemos suponer sin pérdida de generalidad, que un vértice “compartido” se puede particionar en r vértices distintos e identificar, respectivamente, cada una de las partes con cada una de las rutas que lo visitan. Entonces, un intercambio 1 – 0 consistirá en pasar cualquiera de estas *partes del vértice* de la ruta original a otra distinta. A continuación enumeramos las situaciones que nos pueden conducir a un intercambio de este tipo, teniendo en cuenta que nuestro algoritmo produce soluciones en las que cada vértice se sirve, a lo sumo, utilizando dos vehículos.

Nos gustaría remarcar que se trata de una definición de intercambio 1 – 0 propuesta por nosotros por lo que, no descartamos la posibilidad de modificarla en caso de que surjan alternativas más razonables.

Un *intercambio* 1 – 0 consiste en obtener, a partir de una solución del *SDVRP*, una nueva solución realizando uno cualquiera de los cuatro movimientos siguientes:

- A.- Eliminar un vértice, que no compartía la demanda, de la ruta en la que se encuentra antes del momento del intercambio y asignarlo totalmente a una nueva ruta.
- B.- Eliminar un vértice, que compartía la demanda, de una de las dos rutas asociadas a los vehículos que lo abastecían y asignarlo a una tercera ruta cuyo vehículo asociado no le servía nada.
- C.- Eliminar un vértice, de demanda compartida, de una de las dos rutas (asociadas a los vehículos que lo servían) y asignarlo a la otra, cuyo vehículo asociado lo servirá, ahora, completamente.
- D.- Eliminar un vértice de demanda compartida de las dos rutas que lo visitaban y asignarlo a una tercera ruta cuyo vehículo asociado no le servía nada antes del intercambio.

Nótese que en cualquiera de los movimientos que acabamos de describir se elimina un vértice, o parte de un vértice, de una ruta y se asigna a otra que probablemente ya lo contenía. En los casos C y D un vértice “compartido” deja de serlo, mientras que en el caso A, el vértice continúa sin compartir su demanda.

Como ya hemos mencionado antes, los intercambios 1 – 1 involucran, total o parcialmente, a dos vértices distintos. En el contexto del *SDVRP* hay multitud de situaciones que podrían conducir a uno de estos movimientos, sin embargo, los únicos casos que hemos implementado son aquellos en los que todas las rutas que intervienen en el intercambio son diferentes. Concretamente los que describimos a continuación:

- A.- Supongamos que u y v son dos vértices distintos cuyas demandas las abastecen completamente dos vehículos diferentes, i.e., los clientes pertenecen a r_u y r_v , respectivamente. Supongamos además que si eliminamos a u de r_u , y a v de r_v , el vehículo asociado a r_v puede abastecer completamente la demanda de u y, el asociado a r_u , la de v . Si se realiza el cambio de manera que cuando u y v se incluyen en la mejor posición en sus nuevas rutas, la solución del *SDVRP* resultante tiene un coste menor que la original, decimos que tenemos un intercambio 1 – 1 posible.
- B.- Sea u un vértice cuya demanda es cubierta por dos vehículos distintos, sean r_u y r'_u las rutas asociadas, y v un vértice que es abastecido completamente por un único vehículo asociado a la ruta r_v . Supongamos que si se elimina v de r_v es posible servir completamente a u utilizando el vehículo asociado a r_v y, si eliminamos a u de las dos rutas a las que pertenecía, el vehículo asociado a r'_u puede abastecer completamente la demanda de v . Cuando sea posible realizar estos cambios consiguiendo un ahorro global en la distancia total recorrida decimos que tenemos un intercambio 1 – 1 posible.
- C.- Se trata de la misma situación descrita en el caso anterior, pero ahora es el vehículo asociado a r_u , en lugar del asociado a r'_u , quien puede abastecer completamente a v .
- D.- De nuevo, contemplamos la misma situación pero la demanda de v se servirá entre los dos vehículos asociados a r_u y a r'_u ya que, aunque hayamos eliminado a u de las dos rutas, ninguno de los dos vehículos asociados tiene capacidad suficiente como para poder servir completamente a v .

E.- Tanto u como v son vértices de demanda compartida. r_u, r'_u y r_v, r'_v son, respectivamente, las parejas de rutas cuyos vehículos abastecen d_u y d_v . En esta situación es posible plantear multitud de intercambios 1–1 diferentes. Por cuestiones de complejidad computacional sólo hemos contemplado los que se derivan de las situaciones siguientes:

- Eliminando a v de r_v y de r'_v podemos servir completamente a u utilizando los dos vehículos o, sólo, el asociado a r_v . v se servirá utilizando los dos vehículos asignados a r_u y a r'_u de donde, previamente, habremos eliminado a u .
- v se elimina de las dos rutas asignadas a los dos vehículos que lo servían pero, ahora, su demanda será servida completamente por un único vehículo, el representado por r_u . El tratamiento que sufre el vértice u es el mismo que el del caso anterior.

Si los casos anteriores los planteamos intercambiando v por u , r_v por r_u y r'_v por r'_u , obtenemos tres situaciones análogas a A, B y C. En el algoritmo corresponden, respectivamente, a los casos F, G y H.

En cualquiera de las situaciones descritas por el momento, el intercambio 1 – 1 sólo se considera admisible cuando realizarlo revierte en una disminución del coste global de la solución.

Nótese que las soluciones alcanzadas por el algoritmo son soluciones en las que un vértice es servido, a lo sumo, por dos vehículos distintos. Esta característica no tiene porqué ser precisamente buena, por lo que sería un aspecto que valdría la pena estudiar. Por otra parte, la fase de intercambios puede producir soluciones en las que ningún vértice comparta la demanda; una vez se alcanza una solución de estas características no se puede volver a generar una con vértices con demanda compartida. Esto supone, sin duda, un grave inconveniente ya que, cuando el algoritmo cae en el poliedro de soluciones del *CVRP*, es incapaz de salir de él; si la solución óptima del problema que se está resolviendo pertenece a $P_{SDVRP} \setminus P_{CVRP}$ no podremos alcanzarla nunca y, puede que no podamos acercarnos a ella a través de soluciones en las que no se comparte la demanda.

RESULTADOS COMPUTACIONALES

En este apartado presentamos los resultados obtenidos con nuestro algoritmo sobre un conjunto de problemas extraídos de la librería TSPLIB, así como, sobre una colección de problemas aleatorios que han sido generados siguiendo el procedimiento utilizado por Dror y Trudeau en su artículo.

En total generamos 10 problemas en cada uno de los grupos que describimos a continuación. Debido al escaso nivel de desarrollo actual de nuestro algoritmo, la única pretensión que tenemos por el momento es la de ilustrar la existencia de instancias del *VRP* que proporcionan mejores soluciones cuando se permite compartir la demanda. Por este motivo, presentamos sólo los resultados obtenidos sobre una muestra que permite analizar toda la casuística con la que nos hemos encontrado.

Las coordenadas de estos problemas son las mismas para todas las instancias con el mismo número de clientes y coinciden con las de los problemas que damos a continuación:

$$\text{Número de clientes} = \begin{cases} 50 \text{ Christofides y Eilon, 1969[18]} & (eil51) \\ 75 \text{ Christofides y Eilon, 1969} & (eil76) \\ 100 \text{ Christofides y Eilon, 1969} & (eil101) \\ 150 \text{ Christofides et al., 1979[19]} & (c6) \end{cases}$$

Hemos generado las demandas aleatoriamente en distintos intervalos cuyos extremos dependen de Q ($Q = 160$ en todos los casos).

Así, para problemas en cuyo nombre aparece la palabra:

$$\begin{array}{ll} D1 & d_i \in [[0.01Q], [0.1Q]] \\ D2 & d_i \in [[0.1Q], [0.3Q]] \\ D3 & d_i \in [[0.1Q], [0.5Q]] \\ D4 & d_i \in [[0.1Q], [0.9Q]] \\ D5 & d_i \in [[0.3Q], [0.7Q]] \\ D6 & d_i \in [[0.7Q], [0.9Q]] \end{array}$$

Dependiendo de la estrategia de intercambios seleccionada y de las soluciones alternativas que contemplemos tendremos versiones distintas del procedimiento. Para decidir cuál de ellas podría ser la mejor hemos resuelto los

problemas de la librería del *TSP* combinando todas las opciones posibles. La conclusión a la que hemos llegado es la siguiente: aplicar la segunda estrategia de intercambios sobre la mejor solución obtenida después de generar todas las soluciones alternativas posibles, es la combinación que proporciona el menor coste en el mayor número de casos. Hemos resuelto los problemas tests utilizando sólo esta opción y trabajando con el 100% de la capacidad de los vehículos.

En la Tabla 8.1 presentamos los resultados que hemos obtenido y los comparamos con los que se conseguirían si los hubiésemos resuelto, heurísticamente, como instancias del *CVRP*. Esta comparación no es demasiado apropiada, ya que comparamos los resultados de dos algoritmos distintos que están diseñados para obtener soluciones de instancias de problemas diferentes. Ahora bien, como hemos dicho antes, lo que queremos es mostrar que nos podemos encontrar con cualquier tipo de resultados. Hay problemas para los que las soluciones obtenidas cuando se resuelven como *CVRP*'s tienen un coste inferior que el de las soluciones obtenidas al resolverlos como *SDVRP*'s, pero también puede ocurrir lo contrario. Es posible encontrarse con soluciones del *CVRP* de coste inferior a las del *SDVRP* pero que sin embargo necesitan más vehículos para poder alcanzarlas o soluciones del *SDVRP* que, utilizando menos vehículos, tienen un coste asociado menor que la solución que se hubiese alcanzado al resolverlo como un *CVRP*.

La primera columna de la Tabla 8.1 contiene el nombre del problema y la segunda el número de clientes. La tercera y la cuarta corresponden, respectivamente, al coste de la mejor solución obtenida utilizando un algoritmo *tabú* desarrollado por Campos y Mota (1995) [15] para el *CVRP*, y al número de vehículos utilizados en la solución. Las dos columnas siguientes contienen el coste de la mejor solución obtenida con nuestro heurístico y el número de vehículos utilizado.

Como los problemas de la TSPLIB los hemos resuelto utilizando todas las posibles versiones del heurístico, el coste que damos en la tabla correspondiente es el mejor que hemos encontrado entre todas ellas. Hemos marcado con † aquellos problemas resueltos con una combinación de opciones distinta a la que hemos considerado como la mejor.

Los costes marcados con un * corresponden a soluciones en las que ningún vértice comparte la demanda.

Nombre	n	$CVRP$	K_{CVRP}	$SDVRP$	K_{SDVRP}
<i>eil22</i>	21	375	4	375 *	4
<i>eil23</i>	22	569	3	576	3
<i>eil30</i> †	29	534	3	516	3
<i>eil33</i>	32	835	4	838	4
<i>eil51</i>	50	521	5	532*	5
<i>eilA76</i>	75	838	10	873	10
<i>eilB76</i>	75	1038	14	1060	14
<i>eilC76</i>	75	740	8	763*	8
<i>eilD76</i> †	75	687	7	736*	7
<i>eilA101</i>	100	817	8	874	8
<i>eilB101</i> †	100	1096	14	1132*	14

Tabla 8.1: Costes y número de vehículos de las soluciones de los problemas de la TSPLIB.

El *eil30* nos sirve para ilustrar que, en ocasiones, y utilizando el mismo número de vehículos, el coste de la solución óptima del $SDVRP$ es menor que el de la óptima del $CVRP$, que es precisamente 534; no obstante, los costes también coinciden en algunos casos, como ocurre con el *eil22*, cuya solución óptima, cuando se resuelve como una instancia del $SDVRP$, no tiene ningún vértice con demanda compartida, como veremos en la próxima sección.

En el resto de problemas, el coste obtenido con el heurístico del $CVRP$ es mejor que el nuestro. Ahora bien, no hay que olvidar que usando el mismo número de vehículos:

$$\text{coste para el } SDVRP \leq \text{coste para el } CVRP$$

lo cual no significa que no puedan llegar a ser iguales. Por otra parte, si tenemos en cuenta que el algoritmo que estamos utilizando para el $CVRP$ es un algoritmo de tipo *tabu* mucho más complejo y depurado que el nuestro, que es un simple algoritmo de descenso, los resultados que acabamos de ver no son tan desalentadores. Cabe esperar que cuando incluyamos nuestro procedimiento como fase de descenso en un algoritmo *tabu* específico para el $SDVRP$, los resultados obtenidos mejorarán considerablemente. En el momento de redactar esta memoria no disponemos todavía de una versión de búsqueda tabú para nuestro problema. Su diseño forma parte de lo que consideramos futuras líneas de investigación sobre el tema.

Nombre	n	$CVRP$	K_{CVRP}	$SDVRP$	K_{SDVRP}
S50P3D1	50	468	3	464*	3
S50P2D2	50	757	9	754	9
S50P3D3	50	985	15	990	15
S50P0D4	50	1684	30	1677	27
S50P5D5	50	1435	26	1440	23
S50P0D6	50	$2 \sum_{i=1}^{50} c_{0,i}$	50	2327	41
S75P2D1	75	594	4	626*	4
S75P9D2	75	1132	16	1147	15
S75P5D3	75	1512	23	1541	23
S75P2D4	75	2285	40	2257	37
S100P3D1	100	717	5	735*	5
S100P6D2	100	1429	20	1437	20
S100P1D3	100	1970	32	1975	31
S100P3D5	100	3140	54	2915	48
S150P0D1	150	968	8	954	8
S150P1D2	150	1986	31	1983	30
S150P3D3	150	2801	46	2783	45
S150P2D6	150	$2 \sum_{i=1}^{150} c_{0,i}$	150	6458	119

$c_{0,i}$ es la distancia del depósito al cliente i .

Tabla 8.2: Costes y número de vehículos de las soluciones de los problemas aleatorios.

En la Tabla 8.2 presentamos los resultados obtenidos sobre un subconjunto de la colección de problemas aleatorios que hemos generado.

Observamos que en algunos problemas la solución obtenida con el algoritmo del $SDVRP$ es mejor que la que proporciona el algoritmo *tabu* del $CVRP$, veáanse los problemas S50P2D2 y S50P0D4, en los que hay clientes que comparten la demanda; sin embargo, esto no sucede siempre y, en algunos casos, como ocurre con el S100P3D1, nos encontramos con que nuestro algoritmo llega a una solución del $CVRP$ peor que la obtenida con el algoritmo *tabu*. Como ya hemos comentado, el algoritmo no está preparado para generar una solución con clientes que compartan la demanda a partir de una en la que no los hay; esto podría explicar el hecho de que no se encuentre una solución mejor.

Tenemos otros problemas en los que la solución del *CVRP* es mejor que la del *SDVRP*, aunque la diferencia en coste queda, de alguna manera, penalizada por el hecho de que en el primero se utilizan más vehículos que en el segundo, como por ejemplo el S100P1D3.

Por último, remarcar que si se intentan resolver los problemas del grupo *D6* como si fuesen instancias del *CVRP*, es imposible encontrar una solución que utilice menos vehículos que clientes, ya que, al no poder compartir la demanda necesitamos un vehículo para cada vértice. Es evidente que utilizar el *SDVRP* para este tipo de problemas supone un gran ahorro, tanto en lo que se refiere al número de vehículos utilizados, como a distancia total recorrida. Ver por ejemplo, el S50P0D6.

Hemos visto que en algunos problemas el coste al resolverlos como si se tratasen de *CVRP*'s es menor que si los resolvemos como *SDVRP*'s pero, el número de vehículos necesario es mayor. La pregunta inmediata que uno se plantea es cuál de las dos versiones es más apropiada, la respuesta es evidente, depende de cuál sea el objetivo, minimizar coste o, minimizar el número de vehículos utilizados. Obsérvese que en determinadas situaciones el coste que supone adquirir un vehículo extra puede que no compense el ahorro en cuanto a distancia total recorrida que se conseguiría utilizándolo.

En las Tablas 8.3 y 8.4 presentamos los tiempos en segundos de CPU consumidos por el algoritmo para cada una de las instancias estudiadas, columna T_8 . El resto de tiempos corresponden a cada una de las fases en las que se divide el procedimiento, concretamente:

- T_1 indica el tiempo consumido para construir la solución inicial.
- T_2 tiempo invertido en aplicar el algoritmo de Lin y Kernighan en la reoptimización del tour inicial y en la construcción de la solución asociada.
- T_3 tiempo de construcción de la solución recorriendo el tour (asociado a la solución actual) en sentido contrario.
- T_4 tiempo empleado para obtener las soluciones modificando el origen de construcción de las rutas.
- T_5 tiempo consumido por la fase de mejora cuando se aplica la primera estrategia.



Nombre	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
<i>eil22</i>	0.09	0.40	0.07	0.00		0.35	0.05	0.96
<i>eil23</i>	0.17	1.07	0.11	5.39		0.15	0.11	7.00
<i>eil30</i>	0.40	0.00	0.00	17.73	1.13		0.27	19.53
<i>eil33</i>	0.68	1.67	0.39	14.58		0.67	0.22	18.21
<i>eil51</i>	0.45	2.98	0.45	20.95		1.30	0.28	26.41
<i>eilA76</i>	0.53	23.90	0.57	49.32		1.78	0.38	76.48
<i>eilB76</i>	0.43	26.18	0.54	37.50		0.88	0.32	65.85
<i>eilC76</i>	0.80	24.26	0.82	0.00		4.34	0.40	30.62
<i>eilD76</i>	0.48		0.80			17.13	0.39	18.80
<i>eilA101</i>	1.50	47.56	1.91	152.79		0.28	0.82	204.86
<i>eilB101</i>	0.60		0.62	70.39		16.73	0.31	88.65

Tabla 8.3: Distribución de tiempos en el algoritmo.

- T_6 tiempo consumido por la fase de mejora cuando se aplica la segunda estrategia.
- T_7 tiempo invertido en la fase de reoptimización de las rutas de la última solución.
- T_8 tiempo total.

Como ya hemos mencionado, hemos aplicado el algoritmo calculando todas las posibles soluciones alternativas antes de entrar en la fase de intercambios, la capacidad de los vehículos con la que hemos obtenido la primera solución es igual a Q y cada vez que mejoramos la solución actual aplicamos el algoritmo de Lin y Kernighan a cada una de las rutas.

Si el parámetro que indica cuándo hay que aplicar el algoritmo de Lin y Kernighan es igual a 1, en la fase de reoptimización final no es posible reducir el coste de la solución, por lo que, en realidad, la mejor solución se obtiene en $T_8 - T_7$ segundos de CPU.

Todos los problemas con un número de clientes inferior a 75 se han resuelto en menos de 77 segundos, a excepción del S75P2D1, que ha necesitado 161.02, y de ellos, 125.92 se consumen generando las soluciones alternativas que se obtienen modificando el origen de construcción de las rutas.

Nombre	T_1	T_2	T_3	T_4	T_6	T_7	T_8
S50P3D1	1.27	3.33	0.76	43.46	2.86	0.37	52.05
S50P2D2	0.32	2.84	0.29	14.72	0.60	0.21	18.98
S50P3D3	0.22	2.52	0.20	10.45	0.41	0.16	13.96
S50P0D4	0.11	2.50	0.10	5.39	0.12	0.12	8.34
S50P5D5	0.13	2.73	0.11	6.46	0.10	0.14	9.67
S50P0D6	0.05	2.80	0.05	1.96	0.67	0.03	5.56
S75P2D1	1.94	26.13	1.48	125.92	4.92	0.63	161.02
S75P9D2	0.32	23.6	0.45	34.74	0.82	0.33	60.26
S75P5D3	0.27	25.00	0.33	23.51	0.19	0.28	49.58
S75P2D4	0.15	23.68	0.20	14.68	0.69	0.19	39.59
S100P3D1	2.63	48.18	1.94	235.89	2.28	1.08	292.00
S100P6D2	0.56	47.28	0.48	57.56	2.37	0.4	108.65
S100P1D3	0.39	47.63	0.41	38.49	2.91	0.34	90.17
S100P3D5	0.26	47.63	0.25	24.86	0.57	0.21	73.78
S150P0D1	2.44	186.58	5.26	665.52	0.75	2.02	862.57
S150P1D2	0.85	160.63	0.95	147.89	2.95	0.71	313.98
S150P3D3	0.67	156.27	0.71	105.27	5.02	0.55	268.49
S150P2D6	0.13	160.85	0.15	21.32	13.91	0.14	196.5

Tabla 8.4: Distribución de tiempos atendiendo a las diferentes fases del algoritmo.

La media de los tiempos totales es de 111.65 segundos. Observar que sólomente 5 de los 29 problemas resueltos tienen unos tiempos asociados por encima de los 200 segundos.

La fase de construcción de soluciones variando el vértice inicial en el que se comienza a construir las rutas, es la parte del algoritmo que consume el porcentaje del tiempo del total más elevado. La siguiente fase más costosa corresponde a la columna T_2 . Observamos que los tiempos de la fase de intercambios son muy pequeños comparados con T_2 y T_4 .

Una posible salida para conseguir tiempos mejores podría consistir en eliminar la generación de las soluciones alternativas e intentar diseñar otro tipo de intercambios que contemplen situaciones más generales y que sean capaces, por lo tanto, de proporcionar mejores soluciones. Estos intercambios deberían diseñarse de forma que corrigiesen las deficiencias del algoritmo detectadas anteriormente.

En las Tablas 8.5 y 8.6 presentamos el coste de las soluciones que tenemos antes y después de aplicar los intercambios e incluimos el porcentaje de reducción conseguido vía intercambios. También podemos ver el número de intercambios que se realizan y los tiempos empleados para aplicarlos. Si consideramos las instancias que se han resuelto con las mismas opciones del heurístico, observamos que el problema que más tiempo consume es el S150P2D6, que necesita 13.91 segundos.

Los tiempos en la fase de intercambios de los problemas *eilD76* y *eilB101* son, respectivamente, 17.13 y 16.73 pero obsérvese que estos problemas se han resuelto con unas opciones distintas, de hecho, el número de intercambios que se aplican es mucho mayor que el del resto de problemas; este resultado queda plenamente justificado si tenemos en cuenta que la solución con la que iniciamos la fase de intercambios es mucho peor que la del resto de problemas.

Nombre	Antes	Heur.	%	Cambios	Tiempo
<i>eil22</i>	422	375	11.14	7	0.35
<i>eil23</i>	604	576	4.64	1	0.15
<i>eil30</i>	575	516	10.26	7	1.13
<i>eil33</i>	845	838	0.83	4	0.67
<i>eil51</i>	572	532	0.70	6	1.30
<i>eilA76</i>	900	873	3.00	15	1.78
<i>eilB76</i>	1084	1060	2.21	7	0.88
<i>eilC76</i>	850	763	10.24	24	4.34
<i>eilD76</i>	767	736	4.04	105	17.13
<i>eilA101</i>	874	874	0	1	0.28
<i>eilB101</i>	1160	1132	2.41	178	16.73

Tabla 8.5: Comportamiento del coste en el heurístico.

Nombre	Antes	Heur.	%	Cambios	Tiempo
S50P3D1	477	464	2.73	5	2.86
S50P2D2	769	754	1.95	5	0.60
S50P3D3	1031	990	3.98	8	0.41
S50P0D4	1677	1677	0.00	0	0.12
S50P5D5	1440	1440	0.00	0	0.10
S50P0D6	2329	2327	0.06	1	0.67
S75P2D1	655	626	4.43	10	4.92
S75P9D2	1154	1147	0.61	3	0.82
S75P5D3	1548	1541	0.45	3	0.19
S75P2D4	2260	2257	0.13	3	0.69
S100P3D1	741	735	0.81	4	2.28
S100P6D2	1470	1437	2.24	11	2.37
S100P1D3	1989	1975	0.07	5	2.91
S100P3D5	2915	2915	0.00	0	0.57
S150P0D1	954	954	0.00	0	0.75
S150P1D2	1994	1983	0.55	5	2.95
S150P3D3	2811	2783	1.00	9	5.02
S150P2D6	6479	6458	0.32	6	13.91

Tabla 8.6: Comportamiento del coste en el heurístico.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos nos hacen pensar que merece la pena seguir trabajando con esta nueva versión del problema de Rutas de Vehículos. Cabe esperar que sumergir nuestro algoritmo dentro de un contexto de búsqueda tabú dará buenos resultados para un gran número de problemas, sobre todo si diseñamos un procedimiento que nos permita salir del P_{CVRP} en aquellas situaciones en las que, de esta manera, sea posible mejorar la solución actual. Creemos que, tal y como lo hemos implementado, no debe resultar excesivamente complicado hacer una versión tabú del mismo.

Como se muestra en los ejemplos, el heurístico no únicamente funciona bien para problemas con demandas muy ajustadas a la capacidad del vehículo, sino que también da buenos resultados en problemas con demandas generadas en un intervalo del tipo:

$$d_i \in [[0.01Q], [0.1Q]]$$

Por otra parte, es evidente su utilidad en problemas no euclídeos o en aquellos en los que hay clientes cuya demanda excede la capacidad del vehículo.

Sin duda, subsanar los *defectos* del algoritmo que hemos detectado, y probablemente otros que irán apareciendo, conducirá a una mejoría de la calidad de las soluciones obtenidas. De nuevo, esto constituye por sí sólo una nueva línea relacionada con el tema en la que se puede seguir trabajando. Por el momento el procedimiento que hemos diseñado nos permite, en ocasiones, rebajar la cota superior para el $SDVRP$ que proporcionan las soluciones del $CVRP$.

En la siguiente sección presentamos un algoritmo de planos de corte que nos servirá para contrastar la cota superior que proporciona el heurístico.

8.2 Un algoritmo de Planos de Corte para el *SDVRP*.

En la Sección 3.1 hicimos una revisión bibliográfica de las publicaciones relacionadas con el *SDVRP*. En una de ellas, concretamente en Dror et al. (1994) [30], se propone un algoritmo de planos de corte para el problema.

Las restricciones utilizadas para formular el primer subproblema lineal, con el que comienza el algoritmo, se extraen de una formulación lineal entera del *SDVRP* propuesta en el mismo trabajo.

Las características principales de esta formulación son las siguientes:

- se trata de una modelización del problema sobre un grafo dirigido,
- el número de vehículos no es fijo. Su valor se determina a posteriori, después de resolver el problema,
- utilizan dos tipos de variables: unas asociadas a la utilización o no de un arco por cada uno de los vehículos y otras que controlan la proporción de la demanda de cada cliente servida por cada uno de ellos.

El tipo de cortes que se añaden en cada iteración del algoritmo están formados, básicamente, por las variables asociadas a los arcos.

Si el algoritmo termina encontrando una solución, que no es la óptima del problema que se está resolviendo, se acude a un Branch&Bound en el que, cada vez que se encuentra una solución entera no posible para el *SDVRP*, se procede a identificar ciertas restricciones violadas. Si se encuentra alguna, se añade al subproblema asociado y se continúa con el esquema de Branch&Bound.

La cota superior inicial en el procedimiento de ramificación y acotación es la que proporciona el heurístico de Dror y Trudeau (1989-90), [32], [33].

Aunque los autores hablan de un Branch&Bound, los resultados computacionales que presentan en el trabajo parecen responder, únicamente, al nudo cero del árbol de ramificación puesto que, no dan, por ejemplo, ningún resultado en torno al número de nudos explorados.

Las dimensiones de las instancias con las que trabajan son $n = 10$, $n = 15$ y $n = 20$. Como desconocen los óptimos de los problemas, utilizan el porcentaje que se desvía la cota inferior con respecto a la superior para estimar el GAP, cuya variación oscila entre el 0% y el 9% en todos los problemas tests. Sólo toma el valor 0 en un problema con diez vértices. No presentan ningún resultado relativo a los tiempos.

En esta sección, proponemos un nuevo algoritmo de planos de corte para el *SDVRP* que tiene en cuenta las restricciones de la relajación R1, propuesta en la Definición 3.2 y, un caso particular de las restricciones de capacidad generalizadas, introducidas en la Sección 5.4.4.

Antes de describir nuestro algoritmo, necesitamos introducir el concepto de *grafo solución* asociado a una solución x de la relajación lineal del problema correspondiente a la formulación R1. Llamaremos *grafo solución* asociado a una solución x , al grafo inducido por las aristas para las que $x_e > 0$ y lo denotaremos por $G(x)$.

ALGORITMO DE PLANOS DE CORTE

Paso 1.- INICIALIZACIÓN. Hacer $i := 0$. Sea PL_i el problema de programación lineal siguiente:

$$\begin{aligned} & \text{Min } c^t x \\ & \text{s.a :} \\ & \quad x(\delta(0)) \geq 2 \lceil \frac{d(V)}{Q} \rceil \\ & \quad x(\delta(i)) \geq 2, \quad \forall i = 1, \dots, n \\ & \quad x_e \geq 0 \quad \forall e \in E \end{aligned}$$

Paso 2.- RESOLUCIÓN DEL PL_i . Resolver, utilizando un código de programación lineal, el problema PL_i . Sea x^i su solución óptima.

Paso 3.- IDENTIFICACIÓN DE RESTRICCIONES VIOLADAS.

Paso 3.1.- Identificar sobre $G(x^i)$ restricciones de capacidad violadas. Si se encuentra alguna, ir al Paso 4.

Paso 3.2.- Identificar sobre $G(x^i)$ posibles restricciones de capacidad generalizada violadas. Si no se detecta ninguna PARAR.

Paso 4.- ACTUALIZACIÓN DEL PL_i . Añadir al conjunto de restricciones de PL_i las restricciones encontradas en el paso anterior. Llamar PL_{i+1} al problema resultante, hacer $i := i + 1$ e ir al Paso 2.

Si la solución que se obtiene es entera, se podría recurrir al algoritmo de reconocimiento de rutas, presentado en la Sección 3.6, para averiguar si corresponde a una solución del $SDVRP$. En cualquier caso, el valor $c^t x^i$ de la última solución es una cota inferior del óptimo del $SDVRP$.

Todo el procedimiento, incluida la fase de identificación, es completamente automático. Los algoritmos utilizados para identificar las restricciones de capacidad y capacidad generalizada violadas, son una adaptación al problema del $SDVRP$ de algunos algoritmos heurísticos diseñados para identificar este tipo de restricciones en el contexto del $CVRP$, ver Augerat et al. (1995) [7] para más detalles.¹

Queremos remarcar que los algoritmos que hemos adaptado son, precisamente, los que se utilizaron en una fase inicial para resolver el $CVRP$. En realidad, las experiencias computacionales sobre el $CVRP$ indican que los algoritmos utilizados, en el artículo que hemos mencionado, funcionan mucho mejor en el $CVRP$ que los originales que son, precisamente, los que nosotros hemos adaptado. Cabe esperar, por tanto, que su adaptación al $SDVRP$ proporcione mejores resultados. Estos algoritmos explotan el hecho de que el grado de los vértices es exactamente igual a dos, por lo que, implementar una versión que se pueda aplicar al $SDVRP$ no es una tarea sencilla.

Como las ideas que han permitido implementar la fase de identificación no nos pertenecen, nos limitaremos a describir, brevemente, qué es lo que hacen los algoritmos que hemos aplicado. Todos ellos se aplican sobre el grafo solución $G(x^i)$, que se obtiene a partir de la última solución del algoritmo de planos de corte.

Buscan, siguiendo diferentes estrategias, subconjuntos de vértices para los cuales se comprueba la violación de la restricción de capacidad, o capacidad generalizada, asociada tanto a ellos como a sus complementarios.

¹Quiero agradecer a mi compañero de departamento J.Manuel Belenguer la ayuda prestada a la hora de adaptar el algoritmo al que hemos aludido en el párrafo anterior. Sin su colaboración no hubiese sido posible obtener estos resultados con tiempo suficiente para incluirlos en la memoria.

ALGORITMOS HEURÍSTICOS DE IDENTIFICACIÓN DE RESTRICCIONES
VIOLADAS.

- *1^{er} Procedimiento.* Identificación de las componentes conexas del grafo solución $G(x^i)$. Nótese que cada una de las componentes conexas que no contienen al depósito tienen asociada una restricción de capacidad violada.
- *2^o Procedimiento.* Considerar los subconjuntos de vértices formados por cada una de las componentes conexas que resultan cuando se elimina el depósito en el grafo $G(x^i)$.
- *3^{er} Procedimiento.* Para cada $v \in V \setminus \{0\}$ definir $S = \{v\}$ y construir, mientras sea posible, los conjuntos:

$$S := S \cup V(\delta(S))$$

Para cada uno de ellos chequear si la restricción de capacidad asociada:

$$x(\delta(S)) \geq \lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil$$

se cumple o no.

- *4^o Procedimiento.* Sea $S \subseteq V \setminus \{0\}$, y sea:

$$F(S) = x(\delta(S)) - 2\frac{d(S)}{Q}$$

Harche y Rinaldi (1991) [51] sugieren un procedimiento exacto basado en el cálculo de un flujo máximo para encontrar el conjunto S para el que $F(S)$ es mínimo. Si $F(S) < 0$ entonces, tanto la restricción de capacidad asociada a S como la restricción de capacidad fraccionaria,

$$x(\delta(S)) \geq 2\frac{d(S)}{Q}$$

se violan. Si $F(S) \geq 0$, la restricción de capacidad fraccionaria no se viola pero, sí podría violarse la correspondiente cortadura de capacidad:

$$x(\delta(S)) \geq 2\lceil \frac{d(S)}{Q} \rceil$$

Nombre	C. Sup.	PL_0	C. Inf.	Iter.	Cortes	GAP
<i>eil22</i>	375	257	375	7	83	0.00
<i>eil23*</i>	569	403	569	3	18	0.00
<i>eil30*</i>	510	317	508	12	114	0.39
<i>eil33*</i>	835	523	831.667	11	237	0.40
<i>eil51*</i>	521	392	513	17	377	1.54
<i>eilA76</i> †	873	535	777.0791	26	992	10.99
<i>eilB76</i> †	1060	559	924.8713	22	1017	12.75
<i>eilC76</i> †	763	523	705.115	32	965	7.59
<i>eilD76</i>	736	517	659.155	36	750	10.44
<i>eilA101</i> †	874	619	767.1667	12	581	12.22
<i>eilB101</i> †	1132	667	915.3214	11	547	19.14

Tabla 8.7: Resultados computacionales del algoritmo de planos de corte sobre algunos problemas de la TSPLIB.

- *5^o Procedimiento.* Se comprueba si la partición de $V \setminus \{0\}$ que se obtiene al tomar como W_i cada una de las componentes conexas resultantes en $G(x^i)$ al eliminar el depósito, cumple o no la restricción de capacidad generalizada (presentada en la Sección 5.4.4), asociada.

En las Tablas 8.7 y 8.8 presentamos los resultados obtenidos al aplicar el algoritmo de planos de corte sobre la colección de problemas tests que venimos estudiando a lo largo de este capítulo. Sólo hemos tenido en cuenta aquellos problemas para los que $n \leq 100$.

La cota superior que presentamos en la primera columna es el coste de la solución obtenida con nuestro algoritmo heurístico, excepto para aquellos problemas marcados con *. Para éstos, el valor que damos es, en realidad, el coste de la solución óptima, ocurre lo mismo con el *eil22* pero, para este problema, alcanzamos el óptimo con nuestro heurístico. Los valores de la segunda columna son los valores óptimos de los PL_0 's mientras que la tercera contiene los obtenidos en la última iteración del algoritmo de planos de corte. Completamos las tablas con el número total de iteraciones del algoritmo y el total de cortes que se han añadido. La última columna contiene el porcentaje de alejamiento de la cota inferior con respecto a la superior.

Observar que la solución obtenida con el heurístico para el *eil22* es la solución óptima de este problema. Como no contiene ningún vértice con demanda compartida, coincidirá con la solución óptima que se hubiese obtenido si hubiésemos resuelto el problema como un *CVRP*.

El GAP medio es 10.81, ahora bien, para todos los problemas con menos de 50 vértices está por debajo de 11.26. Sin embargo, nótese que si nos fijamos únicamente en los resultados de la Tabla 8.7, el GAP de los problemas con este tamaño no supera el 1.54, lo cual nos hace pensar que, a poco que mejoremos la cota inferior, seremos capaces de resolver óptimamente estos problema.

Recordar que el GAP alcanzado por Dror y Trudeau era menor o igual que 9 para problemas con un número de clientes inferior a 20. Nosotros hemos resuelto óptimamente las únicas dos instancias de 21 y 22 clientes que hemos estudiado. El GAP obtenido para el *eil30* es de 0.39 y el del *eil33* de 0.4.

Por otra parte, como ya hemos mencionado, cuando es posible encontrar soluciones del *CVRP* utilizando el mínimo número de vehículos, el coste de estas soluciones es una cota superior para el *SDVRP*. Hemos observado que, en algunos problemas, utilizando esta cota superior, en lugar de la proporcionada por nuestro heurístico, se consigue reducir el GAP entre un 2 y un 3%, en general, llegando incluso a un 6%.

Hemos marcado con el símbolo † todos aquellos problemas en los que el algoritmo terminó porque se encontró con problemas de memoria. Concretamente, CPLEX no tenía, en ningún caso, suficiente espacio para almacenar la traspuesta de la matriz de coeficientes. Éste es uno de los motivos por los que no hemos aplicado el algoritmo a problemas con más de 100 vértices. Obsérvese además que, precisamente, éstos son los problemas para los que el GAP superaba el 15% por lo que, cabe pensar que si solucionamos el problema de la memoria podremos mejorar considerablemente estos valores.

Notar que el número de coeficientes no nulos en la matriz de restricciones es muy elevado y esto aumenta considerablemente la dificultad para resolver instancias a partir de un determinado tamaño. De hecho, para obtener las cotas de los problemas con más de 50 clientes tuvimos que fijar, en 50, el número máximo de cortaduras de capacidad violadas que se podían añadir en cada iteración del algoritmo. Al intentar resolver el *eil51* ya nos encontramos con problemas de memoria y con un número de cortes cuyos coeficientes superaban los límites internos del CPLEX en cuanto a elementos no nulos admisibles.

Nombre	C. Sup.	PL_0	C. Inf.	Iter.	Cortes	GAP
S50P3D1	464	384	454.333	13	228	2.08
S50P2D2	754	408	677.428	21	588	10.16
S50P3D3	990	432	904.055	32	960	8.68
S50P0D4	1677	480	1521.168	53	1510	9.29
S50P5D5	1440	464	1277.787	50	1490	11.26
S50P0D6	2327	536	2112.153	60	1701	9.23
S75P2D1	626	499	583.625	11	279	6.77
S75P9D2 †	1147	565	955.2365	20	988	16.72
S75P5D3 †	1541	613	1237.003	20	986	19.73
S75P2D4 †	2257	697	1800.232	22	1185	20.24
S100P3D1	735	595	701.189	17	528	4.60
S100P6D2 †	1437	715	1091.664	13	648	24.03
S100P1D3 †	1975	803	1486.261	13	648	24.75
S100P3D5 †	2915	939	2120.523	13	649	27.25

Tabla 8.8: Resultados computacionales del algoritmo de planos de corte sobre los problemas aleatorios.

En cualquier caso, los resultados obtenidos no son en absoluto desalentadores. Utilizando la librería de funciones del CPLEX en lugar del CPLEX interactivo y, gestionando adecuadamente los límites en cuanto a elementos no nulos y número de restricciones que se pueden añadir en cada iteración, junto con la posibilidad de trabajar utilizando sólo un subconjunto de variables, conseguiremos mejores resultados para todas aquellas instancias en las que se terminó a causa de la falta de memoria.

8.3 Un algoritmo exacto para el *SDVRP*.

Como no conocemos de la existencia de ningún algoritmo exacto para el *SDVRP* pensamos que sería adecuado diseñar alguno que nos permitiese encontrar las soluciones óptimas de los problemas que estamos estudiando. Precisamente de esto es de lo que nos vamos a ocupar en esta sección.

Dror et al. (1994) [30], presentan un esquema de Branch&Bound para resolver el *SDVRP* utilizando la formulación del problema que proponen en el mismo trabajo. Cada vez que la solución óptima de uno de los subproblemas del árbol de ramificación es entera, someten dicha solución a un proceso de identificación de restricciones violadas y las añaden al conjunto de restricciones originales del problema asociado a ese nudo.

El motivo por el cual se plantean la búsqueda de restricciones violadas sólomente cuando encuentran soluciones enteras no es otro que el de simplificar el proceso de identificación. Nosotros también hemos utilizado la misma idea a la hora de diseñar el algoritmo que vamos a describir a continuación.

No obstante, antes de continuar, queremos hacer hincapié en el hecho de que en el artículo de Dror y Trudeau no hay ningún tipo de resultados computacionales relacionados con su Branch&Bound.

ALGORITMO EXACTO

Paso 1.- *Inicialización*. Sea PL_0 el problema lineal que se obtiene al final del algoritmo de planos de corte descrito en la sección anterior y x su solución óptima. Si x es entera hacer $i := 0$, $x^i = x$ e ir al Paso 2.

En otro caso resolver el problema lineal entero que se obtiene al añadir la condición de integridad de las variables al problema PL_0 . Sea x^0 su solución óptima. Hacer $i := 0$ e ir al Paso 2.

Paso 2.- *Test de posibilidad*. Resolver el problema de identificación de restricciones violadas sobre el grafo $G(x^i)$. Si no se encuentra ninguna desigualdad violada, la solución x^i es la solución óptima del *SDVRP*.

En otro caso, añadir todas las restricciones encontradas al conjunto de restricciones del PL_i y llamar PL_{i+1} al problema resultante. Hacer $i := i + 1$.

Paso 3.- *Resolución del PL_i* . Resolver utilizando un código de programación lineal entera el PL_i después de añadir las restricciones de integridad de las variables. Sea x^i su solución óptima. Ir al Paso 2.

Observar que, si fuésemos capaces de resolver exactamente el problema de identificación (Paso 2), el esquema algorítmico que acabamos de plantear sería un procedimiento exacto para resolver el $SDVRP$.

Desafortunadamente esto no es posible, en primer lugar porque el problema de identificación es, por sí sólo, un problema *difícil*² y, en segundo lugar, porque no conocemos una formulación lineal entera del $SDVRP$ que utilice únicamente las variables de la formulación R1.

Por lo tanto, tendremos que conformarnos con una versión relajada del mismo, lo que tendremos entonces no es un algoritmo exacto sino un procedimiento nuevo que nos permitirá mejorar la cota inferior. Para ello sustituiremos el Paso 2 por el siguiente:

Paso 2'.- Si no se detecta ninguna restricción violada sobre el grafo $G(x^i)$, ir al Paso 4.

En otro caso, añadir al conjunto de restricciones del PL_i todas las que se hayan encontrado. Llamar PL_{i+1} al nuevo problema lineal e ir al Paso 3.

Paso 4.- Si es posible encontrar un conjunto de rutas asociado a x^i que defina una solución del $SDVRP$, x^i será la solución óptima de nuestro problema y su coste, el valor óptimo del $SDVRP$.

En otro caso el coste asociado a x^i es una cota inferior del óptimo del $SDVRP$.

Evidentemente la versión que hemos utilizado para resolver nuestros problemas es la relajada.

El código de programación lineal entera que hemos utilizado es el de CPLEX [25]. La fase de identificación de restricciones y reconocimiento de rutas la hemos llevado a cabo manualmente.

²Harche y Rinaldi (1991) [51] demuestran que identificar las restricciones de capacidad violadas en el $CVRP$ es un problema \mathcal{NP}

Nombre	Coste	Iter.	Cortes
<i>eil30</i>	510	10	10
<i>eil33</i>	835	17	17
<i>eil51</i>	521	25	57

Tabla 8.9: Óptimos de algunos problemas de la TSPLIB.

En la Tabla 8.9 presentamos los resultados obtenidos sobre la colección de problemas de la TSPLIB con $n \leq 50$. Todas las soluciones alcanzadas han resultado ser soluciones posibles del *SDVRP* y por lo tanto óptimas. Además, éstas son, junto con el *eil22* y el *eil23* las instancias del *SDVRP* que hemos resuelto óptimamente y, hasta donde sabemos, las únicas resueltas por el momento.

Obsérvese que en cada iteración se resuelve un Branch&Bound, esto implica que la complejidad para resolver los problemas aumenta exponencialmente con respecto al tamaño de las mismas.

El siguiente objetivo debería ser diseñar un algoritmo de Branch&Cut que nos permita mejorar la cota inferior actual y obtener soluciones enteras del problema. No obstante, no podemos olvidar el hecho de que las variables x con las que estamos trabajando no nos permiten garantizar que cualquiera de las soluciones enteras obtenidas utilizando un Branch&Cut sea la solución óptima del *SDVRP*.

Recordar que las restricciones conocidas por el momento (que utilizan sólo las variables x), no definen una formulación lineal entera de nuestro problema.

Llegado este punto podríamos plantearnos abandonar la relajación con la que estamos trabajando, sin embargo, comparando los resultados que hemos obtenido con los que presentan Dror y Trudeau podemos permitirnos descartar esta idea.

Obsérvese que, pese a que ellos trabajan con una formulación lineal entera del problema, no obtienen mejores resultados que nosotros, el tamaño de las instancias que resuelven óptimamente no pasa de los 10 clientes y sólo la aplican

a instancias con menos de 20.

La decisión de implementar un algoritmo de Branch&Cut basada en la relajación R1 tiene sentido si tenemos en cuenta que para problemas cuyos tamaños no son excesivamente grandes el problema de reconocimiento de las rutas se podrá resolver fácilmente, incluso, visualmente.

Por otro lado, si mejoramos el algoritmo heurístico presentado en la sección anterior, dispondremos de una cota superior que cuando coincida con el valor alcanzado aplicando el Branch&Cut al mismo problema, nos permitirá conocer, al menos, el valor del óptimo del problema que estemos resolviendo.

Completando los dos algoritmos anteriores con un procedimiento heurístico de reconocimiento de rutas podremos enfrentarnos con problemas de tamaños más grandes. Recordar que el método de reconocimiento de rutas diseñado en la Sección 3.6 consistía en resolver un problema lineal entero. Resolverlo puede llegar a ser tan difícil como resolver el problema original, lo que justifica, de nuevo, la búsqueda de algoritmos heurísticos para encontrar soluciones posibles.

Bibliografía

- [1] **Y. Agarwal, K. Mathur y H. M. Salkin.** “A Set Partitioning-Based Exact Algorithm for the Vehicle Routing Problem”. *Networks* 19(7), pág. 731–749. (1989).
- [2] **J. R. Araque.** “A Polyhedral Approach to Vehicle Routing”. Comunicación presentada en ORSA/TIMS Meeting, New York. (1989).
- [3] **J. R. Araque.** “Lots of Combs of Different Sizes for Vehicle Routing”. Technical Report 90-74. CORE, Louvain La Neuve. (1990).
- [4] **J. R. Araque.** “Solution of a 48-City Vehicle Routing Problem by Branch and Cut”. Technical Report 90-19. CORE, Louvain La Neuve. (1990).
- [5] **J. R. Araque, L. Hall y T. Magnanti.** “Capacitated Trees, Capacitated Routing and Associated Polyhedra”. Technical Report 90-61. CORE, Louvain La Neuve. (1990).
- [6] **A. A. Assad.** “Modeling and Implementation Issues in Vehicle Routing”. En B. L. Golden y A. A. Assad, eds., *Vehicle Routing: Methods and Studies*, pág. 7–45. North Holland, Amsterdam. (1988).
- [7] **P. Augerat, J. M. Belenguer, E. Benavent, A. Corberán, D. Naddef y G. Rinaldi.** “Computational Results with a Branch and Cut Code for the Vehicle Routing Problem”. En preparación. (1995).
- [8] **P. Augerat y Y. Pochet.** “New Valid Inequalities for the Vehicle Routing Problem”. En preparación. (1995).
- [9] **A. Bachem y M. Grötschel.** “New Aspects of Polyhedral Theory”. En B. Korte, ed., *Modern Applied Mathematics, Optimization and Operations Research*, pág. 51 – 106. North-Holland, Amsterdam. (1982).

- [10] **E. Benavent, V. Campos, A. Corberán y E. Mota.** “Problemas de Rutas por Arcos”. *Quaderns d’Estadística, Sistemes, Informàtica i Investigació Operativa (Qüestió)* 7, pág. 479–490. (1983).
- [11] **C. Berge.** *Graphs and Hypergraphs*. North-Holland, Amsterdam. (1973).
- [12] **L. D. Bodin y B. L. Golden.** “Classification in Vehicle Routing and Scheduling”. *Networks* 11, pág. 97–108. (1981).
- [13] **L. D. Bodin, B. L. Golden, A. A. Assad y M. O. Ball.** “Routing and Scheduling of Vehicles and Crews: The State of the Art”. *Computers and Operations Research* 10, pág. 63–211. (1983).
- [14] **J. A. Bondy y U. S. R. Murty.** *Graph Theory with Applications*. The Macmillan Press Ltd., London. (1976).
- [15] **V. Campos y E. Mota.** “Obtaining Feasible Solutions for the VRP in a Branch and Cut Scheme”. Comunicación presentada en EURO XIII, Glasgow (UK). (1994).
- [16] **T. Christof y A. Loebel.** “PORTA (POLYhedron Representation Transformation Algorithm)”. Programa de libre disposicion en la red Ethernet (porta@ares.iwr.uni-heidelberg.de).
- [17] **N. Christofides.** “Vehicle Routing”. En E. L. Lawler, J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan y D. B. Shmoys, eds., *The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization*, pág. 431–448. Wiley, Chichester. (1985).
- [18] **N. Christofides y S. Eilon.** “An Algorithm for the Vehicle-Dispatching Problems”. *Operations Research Quarterly* 20, pág. 309–318. (1969).
- [19] **N. Christofides, A. Mingozzi y P. Toth.** “The Vehicle Routing Problem”. En N. Christofides, A. Mingozzi, P. Toth y C. Sandi, eds., *Combinatorial Optimization*, pág. 318–338. John Wiley, Chichester. (1979).
- [20] **V. Chvátal.** “Edmonds Polytopes and Weakly Hamiltonian Graphs”. *Mathematical Programming* 5, pág. 29–40. (1973).
- [21] **V. Chvátal.** *Linear Programming*. Freeman, San Francisco. (1983).
- [22] **S. A. Cook.** “The Complexity of Theorem-Proving Procedures”. En *Proceedings of the Third annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pág. 151–158. ACM. (1971).

- [23] **G. Cornuéjols, J. Fonlupt y D. Naddef.** “The Traveling Salesman Problem on a Graph and some Related Integer Polyhedra”. *Mathematical Programming* 33, pág. 1–27. (1985).
- [24] **G. Cornuéjols y F. Harche.** “Polyhedral Study of the Capacitated Vehicle Routing Problem”. *Mathematical Programming* 60, pág. 21–52. (1993).
- [25] **CPLEX Optimization, Inc.** “Using the *CPLEXTM Callable Library* and *CPLEXTM Mixed Integer Library*”. 930 Tahoe Blvd., Bldg. 802, Incline Village, NV 89451-9436, USA. (1992).
- [26] **H. P. Crowder y M. W. Padberg.** “Solving Large-Scale Symmetric Traveling Salesman Problems to Optimality”. *Management Science* 26, pág. 495–509. (1980).
- [27] **G. B. Dantzig.** *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey. (1963).
- [28] **G. B. Dantzig, D. R. Fulkerson y S. M. Johnson.** “Solution of a Large-Scale Traveling-Salesman Problem”. *Operations Research* 2, pág. 393–410. (1954).
- [29] **M. Desrochers, J. K. Lenstra y M. W. P. Savelsbergh.** “A Classification Scheme for Vehicle Routing and Scheduling Problems”. *European Journal of Operational Research* 46, pág. 322–332. (1990).
- [30] **M. Dror, G. Laporte y P. Trudeau.** “Vehicle Routing with Split Deliveries”. *Discrete Applied Mathematics* 50, pág. 239–254. (1994).
- [31] **M. Dror y L. Levy.** “A Vehicle Routing Improvement Algorithm Comparison of a “greedy” and a Matching Implementation for Inventory Routing”. *Computers and Operations Research* 13(1), pág. 33–45. (1986).
- [32] **M. Dror y P. Trudeau.** “Savings by Split Delivery Routing”. *Transportation Science* 23, pág. 141–145. (1989).
- [33] **M. Dror y P. Trudeau.** “Split Delivery Routing”. *Naval Research Logistics* 37, pág. 383–402. (1990).
- [34] **M. Fisher.** “Optimal Solution of Vehicle Routing Problems using Minimum K-Trees”. *Operations Research* 42(4), pág. 626–642. (1994).

- [35] **M. L. Fisher y R. Jaikumar.** “A Generalized Assignment Heuristic for Vehicle Routing”. *Networks* 11, pág. 109–124. (1981).
- [36] **B. Fleischmann.** “A Cutting Plane Procedure for the Travelling Salesman Problem on Road Networks”. *European Journal of Operational Research* 21, pág. 307–317. (1985).
- [37] **B. Fleischmann.** “A New Class of Cutting Planes for the Symmetric Travelling Salesman Problem”. *Mathematical Programming* 40, pág. 225–246. (1988).
- [38] **J. Fonlupt y D. Naddef.** “The Traveling Salesman Problem in Graphs with some Excluded Minors”. *Mathematical Programming* 53, pág. 147–172. (1992).
- [39] **M. R. Garey y D. S. Johnson.** “*Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*”. Freeman, San Francisco. (1979).
- [40] **R. S. Garfinkel y G. L. Nemhauser.** *Integer Programming*. Wiley, New York. (1972).
- [41] **P. C. Gilmore, E. L. Lawler y D. B. Shmoys.** “Well-solved Special Cases”. En E. L. Lawler, J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan y D. B. Shmoys, eds., *The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization*, pág. 87–143. Wiley, Chichester. (1985).
- [42] **F. Glover, E. Taillard y D. de Werra.** “A User’s Guide to Tabu Search”. *Annals of Operations Research* 41, pág. 3–28. (1993).
- [43] **B. L. Golden y A. A. Assad.** “Perspectives on Vehicle Routing: Exciting new Developments”. *Operations Research* 34, pág. 803–810. (1986).
- [44] **M. Grötschel.** “Approaches to Hard Combinatorial Optimization Problems”. En B. Korte, ed., *Modern Applied Mathematics: Optimization and Operations Research*, pág. 437–515. North-Holland, Amsterdam. (1982).
- [45] **M. Grötschel y M. W. Padberg.** “On the Symmetric Travelling Salesman Problem I: Inequalities”. *Mathematical Programming* 16, pág. 265–280. (1979).
- [46] **M. Grötschel y M. W. Padberg.** “On the Symmetric Travelling Salesman Problem II: Lifting theorems and facets”. *Mathematical Programming* 16, pág. 281–302. (1979).

- [47] **M. Grötschel y M. W. Padberg.** “Polyhedral Theory”. En E. L. Lawler, J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan y D. B. Shmoys, eds., *The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization*, pág. 251–305. Wiley, Chichester. (1985).
- [48] **M. Grötschel y W. R. Pulleyblank.** “Clique Tree Inequalities and the Symmetric Traveling Salesman Problem”. *Mathematics of Operations Research* 11(4), pág. 537–569. (1986).
- [49] **M. Haimovich y A. H. G. Rinnooy Kan.** “Bounds and Heuristics for Capacitated Routing Problems”. *Mathematics of Operations Research* 10(4), pág. 527–542. (1985).
- [50] **F. Harary.** *Graph Theory*. Addison Wesley, Reading, MA. (1969).
- [51] **F. Harche y G. Rinaldi.** “Vehicle Routing”. Comunicación Privada. (1991).
- [52] **D. S. Johnson y C. H. Papadimitriou.** “Computational Complexity”. En E. L. Lawler, J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan y D. B. Shmoys, eds., *The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization*, pág. 37–86. Wiley, Chichester. (1985).
- [53] **R. M. Karp.** “Reducibility Among Combinatorial Problems”. En R. E. Miller y J. W. Thatcher, eds., *Complexity of Computer Computations*, pág. 85–103. Plenum Press, New York. (1972).
- [54] **L. G. Khachian.** “A Polynomial Algorithm in Linear Programming”. *Soviet Mathematics Doklady* 20, pág. 191–194. (1979).
- [55] **V. Klee y G. J. Minty.** “How good is the simplex algorithm?”. En O. Shisha, ed., *Inequalities III*, pág. 159–175. Academic Press, New York. (1972).
- [56] **J. Knox.** “Tabu Search Performance on the Symmetric Traveling Salesman Problem”. *Computers and Operations Research* 21, pág. 867–876. (1994).
- [57] **G. Laporte y Y. Nobert.** “Exact Algorithms for the Vehicle Routing Problem”. *Annals of Discrete Mathematics* 31, pág. 147–184. (1987).
- [58] **E. L. Lawler, J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan y D. Shmoys,** eds. *The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization*. Wiley, Chichester. (1985).

- [59] **J. K. Lenstra y A. H. G. Rinnooy Kan.** “Complexity of Vehicle Routing and Scheduling Problems”. *Networks* 11, pág. 221–227. (1981).
- [60] **S. Lin y B. W. Kernighan.** “An Effective Heuristic Algorithm for the Traveling Salesman Problem”. *Operations Research* 21, pág. 498–516. (1973).
- [61] **T. Magnanti.** “Combinatorial Optimization and Vehicle Fleet Planning: Perspectives and Prospects”. *Networks* 11, pág. 179–213. (1981).
- [62] **K. V. Mardia, J. T. Kent y J. M. Bibby.** *Multivariate Analysis*. Academic Press, London. (1979).
- [63] **A. Mingozzi, N. Christofides y E. Hadjiconstantinou.** “An Exact Algorithm for the Vehicle Routing Problem based on the Set Partitioning Formulation”. Junio. (1994).
- [64] **D. Naddef y G. Rinaldi.** “The Symmetric Traveling Salesman Polytope and its Graphical Relaxation: Composition of Valid Inequalities”. *Mathematical Programming* 51, pág. 359–400. (1991).
- [65] **D. Naddef y G. Rinaldi.** “The Symmetric Traveling Salesman Polytope: New Facets from the Graphical Relaxation”. Technical Report 248. Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica del CNR, Roma. (1991).
- [66] **D. Naddef y G. Rinaldi.** “The Crown Inequalities for the Symmetric Traveling Salesman Polytope”. *Mathematics of Operations Research* 17, pág. 308–326. (1992).
- [67] **D. Naddef y G. Rinaldi.** “The Graphical Relaxation. A new Framework for the Symmetric Traveling Salesman Polytope”. *Mathematical Programming* 58, pág. 53–88. (1993).
- [68] **G. L. Nemhauser y L. A. Wolsey.** *Integer and Combinatorial Optimization*. Wiley, New York. (1988).
- [69] **C. S. Orloff.** “A Fundamental Problem in Vehicle Routing”. *Networks* 4, pág. 35–64. (1974).
- [70] **I. H. Osman.** “Metastrategy Simulated Annealing and Tabu Search Algorithms for the Vehicle Routing Problem”. *Annals of Operations Research* 41, pág. 421–451. (1993).

- [71] **M. W. Padberg y M. Grötschel.** “Polyhedral Computations”. En E. L. Lawler, J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan y D. B. Shmoys, eds., *The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization*, pág. 307–360. Wiley, Chichester. (1985).
- [72] **M. W. Padberg y G. Rinaldi.** “A Branch and Cut Approach to a Traveling Salesman Problem with Side Constraints”. *Management Science* 35, pág. 1393–1412. (1989).
- [73] **M. W. Padberg y G. Rinaldi.** “A Branch and Cut Algorithm for the Resolution of Large-Scale Symmetric Traveling Salesman Problems”. *SIAM Review* 33(1), pág. 60–100. (1991).
- [74] **H. Paessens.** “The Savings Algorithm for the Vehicle Routing Problem”. *European Journal of Operational Research* 34, pág. 336–344. (1988).
- [75] **C. H. Papadimitriou.** “The Euclidean Traveling Salesman Problem is NP-Complete”. *Theor. Comput. Sci.* 4, pág. 237–244. (1977).
- [76] **W. R. Pulleyblank.** “Polyhedral Combinatorics”. En M. Grötschel A. Bachem y B. Korte, eds., *Mathematical Programming: The State of the Art*, pág. 312–345. Springer, Berlin. (1983).
- [77] **G. Reinelt.** “TSPLIB - A Traveling Salesman Problem Library”. *ORSA Journal of Computing* 3, pág. 376–384. (1991).
- [78] **T. Rockafellar.** *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey. (1970).
- [79] **L. Schrage.** “Formulation and Structure of More Complex/Realistic Routing and Scheduling Problems”. *Networks* 11, pág. 229–232. (1981).
- [80] **A. Schrijver.** *Theory of Linear and Integer Programming*. Wiley, Chichester. (1986).
- [81] **A. Schrijver.** *Polyhedral Combinatorics*. Wiley, New York. (1987).
- [82] **W. R. Stewart y B. L. Golden.** “A Lagrangean Relaxation Heuristic for Vehicle Routing”. *European Journal of Operational Research* 15, pág. 84–88. (1984).
- [83] **E. Taillard.** “Parallel Iterative Search Methods for Vehicle Routing Problems”. *Networks* 23, pág. 661–674. (1993).



Reunido el Tribunal que suscribe, en el día de la fecha,
acordó otorgar, por unanimidad, a esta Tesis doctoral de

D. M. Carmen Martínez Blázquez

la calificación de APTO EVM LAUDE

Valencia, a 15 de septiembre de 1995

El Secretario,

El Presidente



