

TESIS DOCTORAL

Nº 302

26/9/97

**UNIVERSITAT DE VALÈNCIA**  
DEPARTAMENT D'ÒPTICA

Física

302

T.D



**Estudio de los Láseres de Gas  
Bombeados Ópticamente en Cavidad  
Fabry-Perot**

Tesis presentada por  
Fernando Silva Vázquez  
para optar al grado de  
Doctor en Física

Septiembre de 1997

UMI Number: U607737

All rights reserved

INFORMATION TO ALL USERS

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted.

In the unlikely event that the author did not send a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if material had to be removed, a note will indicate the deletion.



UMI U607737

Published by ProQuest LLC 2014. Copyright in the Dissertation held by the Author.  
Microform Edition © ProQuest LLC.

All rights reserved. This work is protected against  
unauthorized copying under Title 17, United States Code.



ProQuest LLC  
789 East Eisenhower Parkway  
P.O. Box 1346  
Ann Arbor, MI 48106-1346

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA  
BIBLIOTECA CIÈNCIES

→ Físicas

Nº REGISTRE 11498

DATA 12-1-98

SIGNATURA  
302.T.D

Nº LIBRE:

11498-569

D. Ramón Vilaseca Alavedra, Catedrático de Física Aplicada de la  
Universitat Politècnica de Catalunya

CERTIFICA que la presente memoria: **“Estudio de los láseres de gas  
bombeados ópticamente en cavidad Fabry-Perot”**,  
resume el trabajo de investigación realizado, bajo su  
dirección, por D. Fernando Silva Vázquez y constituye su  
Tesis para optar al Grado de Doctor en Ciencias Físicas.

Y para que conste y en cumplimiento de la legislación vigente, firma  
el presente certificado en Valencia, a seis de Junio de mil novecientos  
noventa y siete



**Fdo: Dr. Ramon Vilaseca Alavedra**



*A Carmen, Fernando y Julio José*



## **Agradecimientos**

Esta Tesis Doctoral supone la culminación de un trabajo de investigación que empezó hace años y que ha sufrido muchos avatares. La satisfacción de su realización la debo en todo momento a muchas personas que me han ayudado y alentado. Sin ellas, hubiera sido imposible llegar hasta aquí.

Deseo agradecer en primer lugar al Dr. Ramón Vilaseca su apoyo, su ayuda y la paciencia que ha tenido conmigo. Su dirección es para mí, motivo de orgullo y satisfacción.

También quiero agradecer al Dr. Ramón Corbalán, Dr. Josep Lluís Font, Dr. Eugenio Roldán y Dr. Germán de Valcárcel, sus charlas, comentarios y sugerencias, así como su amistad y su apoyo, también extensibles a D. Javier Redondo, que estuvo a mi lado en los momentos menos gratos del trabajo y D. Víctor Sánchez, compañero también de fatigas e ilusiones.

A los miembros del Departamento de Óptica de la Universitat de València les debo mi gratitud por el cariño con que me acogieron y la amistad que en todo momento me demostraron, tanto en mis labores como becario, técnico y profesor ayudante. Sus directores sucesivos, Dr. Carlos Ferreira y Dra. Amparo Pons depositaron en mí su confianza y se hicieron valedores de mis ilusiones. Especialmente, deseo agradecer la ayuda que para la realización de este trabajo me facilitaron el Dr. Pedro Andrés, el Dr. Alvaro Pons, y los técnicos y administrativos del Departamento.

De forma particular, quiero mencionar la especial amistad y apoyo del Dr. Manuel Martínez, con quien comparto ilusiones y “problemillas”. Su aliento para continuar mi trabajo fue decisivo en ciertos momentos. Aliento que debo también al Dr. Juan Carlos Barreiro y al Dr. Genaro Saavedra.

Y por supuesto a mi mujer e hijos, a los que he tenido que sustraer horas de ocio, y mis padres y hermano que me hubieran querido ayudar más de lo que podían.



Time drops in decay  
Like a candle burnt out,  
And the mountains and woods  
Have their day, have their day;  
But, kindly old rout  
Of the fire-born moods,  
You pass not away

“The Celtic Twilight” W.B. Yeats (1893)

“¿No es extraño cómo cambia este castillo al recordar que Hamlet vivió en él? Como científicos, creemos que un castillo es una simple construcción de piedra y admiramos al arquitecto que lo proyectó. Las piedras, el tejado verde con su pátina, las tallas de la capilla, es lo que forma al castillo. Nada debería cambiar por el hecho de que Hamlet viviera en él y, sin embargo, cambia totalmente. De pronto, muros y almenas hablan otro lenguaje... Y, en definitiva, de Hamlet sólo sabemos que su nombre figura en una crónica del siglo XIII... pero nadie ignora los interrogantes que Shakespeare le atribuye, los arcanos de la naturaleza humana que con él nos abre, y para ello tenía que situarle en un lugar al sol, aquí en Kronberg.”

Niels Bohr ante el castillo de Kronberg, según cuenta Werner Heisenberg

“¿Tan sólo una ilusión?” Ilya Prigogine



	1
<b>Introducción</b>	<b>3</b>
0.1 Los láseres de gas bombeados ópticamente	3
0.2 Contenidos del presente trabajo	10
<b>1 Emisión estacionaria en LGBO con cavidad Fabry-Perot y bombeo unidireccional.</b>	<b>13</b>
1.1 Introducción	13
1.2 Modelo teórico	13
1.3 El láser MIR de NH <sub>3</sub>	18
1.3.1 Régimen de altas presiones	20
1.3.2 Régimen de presiones medias	27
1.3.3 Ganancia versus presión	29
1.4 El láser dímero de Na <sub>2</sub>	32
<b>2 Emisión estacionaria en láseres FIR con cavidad Fabry-Perot y bombeo bidireccional</b>	<b>39</b>
2.1 Introducción	39
2.2 El láser FIR de CH <sub>3</sub> OH. Aumento de la ganancia	41
2.3 El "Lamb-dip" transferido	48
<b>3 Inestabilidades y caos en un láser de 2 niveles con cavidad Fabry-Perot.</b>	<b>51</b>
3.1 Introducción.	51
3.2 Ecuaciones de Maxwell-Block.	52
3.3 Soluciones estacionarias y análisis lineal de estabilidad	58
3.3.1 Sistema resonante	62
3.3.2 Sistema cerrado y desintonizado	65
3.4 Resolución numérica del sistema.	65
<b>4 LGBO con cavidad en anillo y emisión bidireccional</b>	<b>77</b>
4.1 Introducción	77
4.2 Modelo teórico	78

2

4.3	El láser FIR de $\text{NH}_3$	86
4.4	Estudio de la estabilidad del sistema	88
4.5	Estados dinámicos	95
	<b>Conclusiones</b>	<b>107</b>
	<b>APÉNDICE I.- Teoría del átomo vestido</b>	<b>113</b>
	<b>APÉNDICE II.- Aspectos computacionales en el modelo de LGBO FIR con onda generada bidireccional</b>	<b>121</b>
	<b>APÉNDICE III.- Ecuaciones del LGBO en cavidad Fabry-Perot</b>	<b>129</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>133</b>

# Introducción

## 1 Los láseres de gas bombeados ópticamente

Cuando Maiman construyó en 1960 el primer láser, acrónimo inglés que identifica el dispositivo para la producción de luz (entendida ésta en un espectro amplio, desde el ultravioleta al infrarrojo lejano) por emisión estimulada, puso uno de los puntos cruciales en el desarrollo tecnológico y científico del presente siglo; al demostrar la posibilidad de utilización de uno de los procesos básicos de interacción radiación-materia que se habían predicho en la primera mitad del siglo para el desarrollo de nuevas fuentes de luz, intensas y coherentes; las cuales han dado paso a infinidad de aplicaciones técnicas y al descubrimiento de nuevos fenómenos de interacción entre la radiación y la materia.

Para que el desarrollo de los láseres tuviera lugar, se han investigado todos los aspectos que en su construcción intervienen: medio activo, bombeo y resonador, aportándose multitud de soluciones para cada caso, según el tipo de radiación que se precisara tener: continua o pulsada, con diferentes duraciones del pulso; monomodo o multimodo y según la longitud de onda deseada; según la intensidad, la sintonizabilidad, etc.

En nuestro trabajo, utilizaremos como medio activo un gas, que ha constituido un medio muy versátil para poder satisfacer muchas de las necesidades arriba expresadas, a la vez que da pie a modelos muy ilustrativos sobre la interacción radiación-materia, permitiéndonos ahondar en el conocimiento de nuevos fenómenos naturales.

Al ser un medio gaseoso, generalmente a no muy alta presión, sus transiciones tienen anchuras espectrales mucho más pequeñas que aquellas que aparecen en, por ejemplo, los medios activos sólidos; por tanto, resulta más fácil conseguir radiación monocromática y estable. Además, dada la variedad de transiciones posibles, se puede conseguir ésta radiación en cualquier parte del espectro de luz, como veremos después.

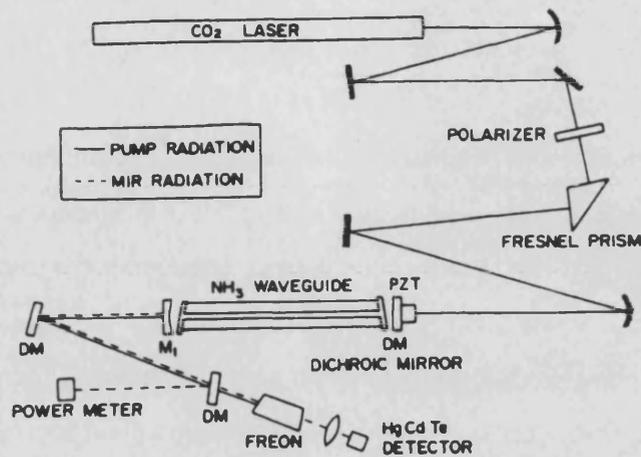
Por otra parte, esta pequeña anchura espectral supone un cierto problema para

el bombeo, haciendo, por ejemplo, muy ineficiente la utilización de lámparas de descarga (como en los láseres de medio activo sólido), ya que al ser estas descargas de espectro continuo, hace insignificante la fracción de energía que puede aprovecharse para la inversión de población en los niveles gaseosos. De esta forma, se suele emplear en los láseres de gas un bombeo por descarga eléctrica, que produce un choque entre electrones y átomos o moléculas, cuyo resultado final es la inversión de población requerida. Es, no obstante, un método sólo moderadamente eficaz, al ser poco selectivo, como cualquier otro método incoherente (químico, expansión supersónica, etc.). Para los láseres bombeados incoherentemente, resulta suficiente su descripción a partir de un medio activo con dos niveles de energía y una onda electromagnética.

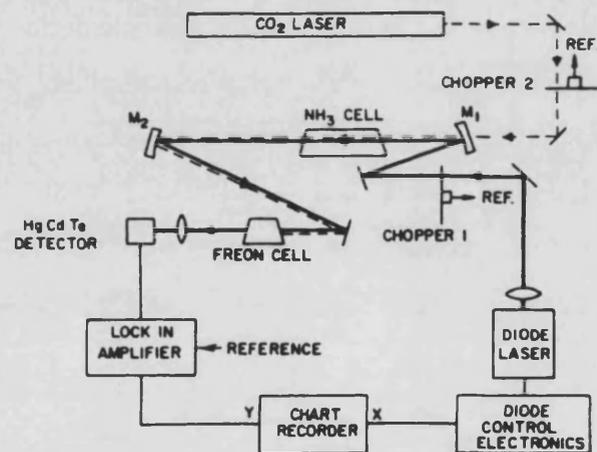
A partir del desarrollo de láseres monocromáticos, intensos y sintonizables (dentro de un cierto rango), como el de  $CO_2$  o el de colorante, surgió la posibilidad de efectuar un bombeo mucho más selectivo: con un haz monocromático proveniente de un láser, se efectuaba el bombeo con una longitud de onda tal que resuena con una determinada transición del medio gaseoso. Cuando el nivel superior de dicha transición, sobre el cual se transfiere población de manera coherente, constituye también el nivel superior de otra transición del medio gaseoso, puede emitirse una nueva radiación acoplada a esta segunda transición. De esta forma, tenemos un nuevo tipo de bombeo, más eficiente en muchos casos, más selectivo y más versátil, hasta el punto de aparecer con este método, multitud de nuevas líneas espectrales a lo largo de todo el espectro de luz, a las que era prácticamente imposible acceder con otros tipos de generación de luz [Chang et al, 1970] . Estos láseres son los denominados láseres de gas bombeados ópticamente (LGBO).

Un esquema experimental típico de LGBO es el de la Figura 0.1 [Rolland et al, 1984,3] , en el cual el bombeo se realiza mediante un láser de  $CO_2$  y el medio amplificador es  $NH_3$ , en el cual se genera radiación en el infrarrojo medio o MIR. En éste ejemplo, la cavidad óptica es tipo guía de onda, con espejos en configuración Fabry-Perot, que hace que se genere una onda estacionaria en la cavidad.

La figura 0.2 muestra otro ejemplo de esquema experimental parecido, pero en el



**Figura 0.1.-** Dispositivo experimental de un láser de  $\text{NH}_3$  en cavidad Fabry-Perot bombeado por un láser de  $\text{CO}_2$



**Figura 0.2.-** Dispositivo experimental de una célula de  $\text{NH}_3$  bombeada por un láser de  $\text{CO}_2$  donde una "onda de prueba" proveniente de un diodo laser sirve para medir la ganancia de la emisión copropagante generada

cual no existen espejos que formen una cavidad para el láser de  $\text{NH}_3$  [Rolland et al, 1983] . Se trata de un montaje para medir la ganancia del láser para la generación de una onda propagante de una determinada frecuencia. Para ello se irradia la célula que contiene  $\text{NH}_3$  mediante una "onda de prueba" propagante generada por un diodo láser.

Otras características interesantes de los LGBO, son por ejemplo la posibilidad de obtener curvas de ganancia más estrechas que la anchura Doppler, ya que la resonancia entre el bombeo y la emisión se produce para un conjunto de desintonías de las ondas de bombeo y generadas tales que sólo para un estrecho margen de frecuencias se produce una contribución apreciable a la ganancia a partir de un determinado rango de velocidades moleculares. También son característicos de los LGBO los procesos Raman (absorción de un fotón de bombeo y emisión de un fotón de la onda generada, lejos de resonancia del nivel intermedio), permitiendo haces generados sintonizables con la variación de la frecuencia del haz de bombeo. Son también características las anisotropías que se producen en la emisión cuando la onda generada es copropagante (o “forward”-F-) o contrapropagante (o “backward”-B-) con respecto a la onda de bombeo.

Los LGBO se describen considerando tres niveles energéticos para el medio material utilizado, produciéndose el bombeo sobre la transición de dos de los niveles por medio de la luz emitida por otro láser en la frecuencia adecuada, y la emisión sobre la transición formada por uno de los niveles anteriores y el tercer nivel considerado. Cualesquiera de los fenómenos implicados en los LGBO han resultado ser muy sensibles a la razón entre los números de onda  $k_{10}$  y  $k_{20}$  de las ondas generada y de bombeo, respectivamente. Según esto, podemos dividir los LGBO en los siguientes tipos:

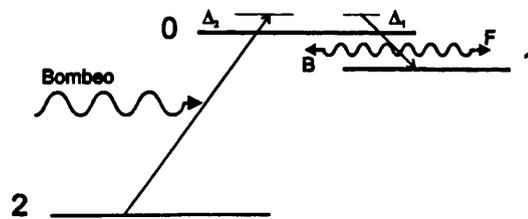


Figura 0.3.-

- Láseres que emiten en el infrarrojo lejano (FIR), como el de  $NH_3$ ,  $CH_3OH$  y  $CH_3F$ , emitiendo desde  $30 \mu m$  hasta  $1 mm$ . Forman una configuración fuertemente Stokes, es decir, con  $k_{20} \gg k_{10}$ , ya que el bombeo está acoplado a una

transición vibracional, mientras que la onda generada se acopla a una transición rotacional (Figura 0.3)

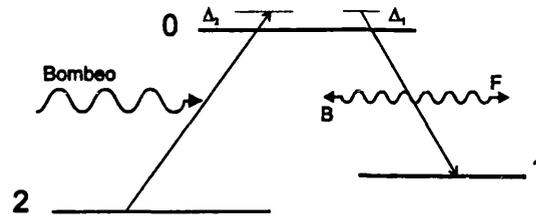


Figura 0.4.-

- Láseres que emiten en el infrarrojo medio (MIR). Forman una configuración Stokes moderada:  $k_{20} \gtrsim k_{10}$ , ya que bombeo y onda generada se acoplan ambas a transiciones ro-vibracionales (los niveles 1 y 2 suelen diferir únicamente en el número cuántico de rotación) -Figura 0.4-
- Láseres de dímero, que emiten en el infrarrojo cercano y visible, como el de  $K_2$  con 6 líneas entre los 700 nm y los 720 nm, o el de  $I_2$ , con 30 líneas entre los 580 nm y los 1300 nm, o el de  $Na_2$ , etc. Forman una configuración Stokes moderada como la anterior, pero sobre transiciones vibrónicas (los estados 1 y 2 sólo difieren en los números cuánticos de vibración y rotación) -Figura 0.4-

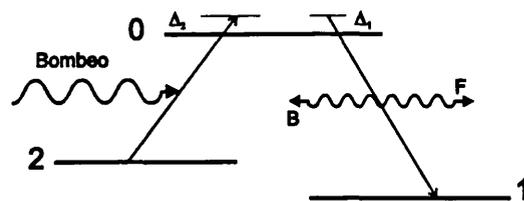


Figura 0.5.-

- Láseres atómicos como el de  $Ne$ , con configuración anti-Stokes:  $k_{20} \lesssim k_{10}$ , donde ambas transiciones son electrónicas (dominio de visible o próximo a él) -Figura 0.5-

Y respecto a la última parte del dispositivo láser que queda por definir en nuestro trabajo, el resonador, utilizaremos básicamente una cavidad Fabry-Perot, que permite la existencia de una onda estacionaria en el medio activo, si bien haremos continuas comparaciones con los resultados de una cavidad en “anillo”, que sólo permite una onda generada viajera. El hecho de utilizar esta cavidad no sólo responde al hecho de que es la más utilizada entre los resonadores láser, sino porque es la que permite la existencia de más fenómenos de interacción radiación materia, hasta el punto de hacerse mucho más complicada su descripción que la de la cavidad en anillo. Ello es debido a la existencia de dos ondas generadas, la copropagante y la contrapropagante, lo cual, por una parte, introduce una modulación espacial longitudinal (existencia de nodos y vientres) que afecta a todas las variables del láser, y, por otra parte, permite la aparición de nuevos fenómenos multifotónicos, y cada uno con un diferente tipo de promediado Doppler. En cambio, la explicación teórica del comportamiento de los láseres de cavidad en anillo es más simple y se conoce ya con cierto detalle. Los estudios de LGBO con cavidad Fabry-Perot sólo se han efectuado de forma precisa para el láser de *Ne* [Laguarta et al, 1985,1] y el láser FIR [Laguarta et al, 1985,2] [Laguarta et al, 1986], faltando los estudios para láseres MIR y de dímerno, estudios de los que nos ocuparemos en este trabajo.

Otro aspecto muy interesante a estudiar en los LGBO es su comportamiento dinámico. Efectivamente, un láser de gas puede dejar de tener una emisión continua y en determinadas circunstancias, tener una emisión pulsante sin necesidad de ningún dispositivo óptico diseñado para tal fin (y sin necesidad, en particular, de modular el bombeo). Es lo que se denomina emisión autopulsante, pues depende de la dinámica propia del sistema. En especial, el láser de gas de dos niveles, con bombeo incoherente y ensanchamiento homogéneo, sirvió de modelo a Haken [Haken, 1975] para descubrir la analogía que existía entre dicho sistema y las ecuaciones de Lorenz, desarrolladas para un modelo meteorológico, y que por su sencillez, constituían un paradigma dentro de la dinámica no lineal [Lorenz, 1963].

En el modelo de Haken, el láser era descrito por tres ecuaciones (isomorfas al modelo de Lorenz), permitiendo la existencia de comportamiento caótico, pero si las

constantes de relajación de las poblaciones y la coherencia (o polarización inducida) son muy grandes comparadas con las pérdidas de la cavidad se pueden eliminar sus dos ecuaciones correspondientes (principio de eliminación adiabática) y el modelo describiría un láser con la sola posibilidad de emisión continua estable. Son los denominados láseres de *Clase A* (He-Ne, Ar, Kr, colorante...). Si sólo se puede eliminar la coherencia, quedan dos ecuaciones, pudiendo tener ya el láser un comportamiento autopulsante periódico. Son los láseres de *Clase B* (Rubí, Nd, CO<sub>2</sub>). Sólo en el caso de un láser con las tres constantes de relajación del mismo orden de magnitud, puede obtenerse un comportamiento autopulsante caótico. Son los láseres de *Clase C*, un ejemplo de los cuales son los láseres FIR.

En realidad, existe una condición adicional para encontrar un rico comportamiento dinámico en el modelo de Haken: estriba en el cumplimiento de la condición de mala cavidad (“bad cavity condition”): las pérdidas de la cavidad deben ser más grandes que las sumas de las constantes de relajación de las poblaciones y la polarización. Ello exige una ganancia muy alta para que el láser pueda funcionar.

También, el umbral de inestabilidad (denominado también “segundo umbral” del láser) o nivel de excitación para que se produzcan inestabilidades, es mucho más alto que el nivel de emisión (llamado “primer umbral” del láser), que marca la excitación en la que empieza a emitir el láser. Todo ello hace que el comportamiento dinámico complejo (caótico) sólo pueda observarse en láseres de clase C y condiciones de alta ganancia y alto bombeo.

Dichas condiciones, no obstante, se han conseguido precisamente mediante el bombeo coherente, en LGBO con emisión en el FIR. En particular se ha conseguido en primer lugar en un láser de NH<sub>3</sub>, en el que el ensanchamiento de sus niveles es debido a la presión, y como trabajan a baja presión, dicho ensanchamiento será pequeño, cumpliéndose la condición de mala cavidad sin pérdidas muy grandes de la misma y por tanto con ganancias no excesivamente grandes. Así, en 1986, Weiss y Brock [Weiss et al, 1986] obtuvieron la primera observación experimental de caos de tipo Lorenz-Haken en un LGBO FIR de NH<sub>3</sub>, de 81.5  $\mu\text{m}$ , bombeado por un láser de N<sub>2</sub>O. Sin embargo, un LGBO está descrito teóricamente por un modelo más

complicado que el de Lorenz-Haken, lo cual a suscitado cierta controversia sobre la descripción de los mismos por un sistema tan simple de ecuaciones, controversia que se ha cerrado en estos últimos años, con una serie de trabajos sobre el comportamiento dinámico de los LGBO en el FIR, con cavidad en anillo y ensanchamiento inhomogeneo (Doppler) [Weiss et al, 1991] [Roldán et al, 1997] .

Lo que queda por conocer es cómo es el comportamiento dinámico autopulsante en el caso de un láser con cavidad Fabry-Perot. Prácticamente todos los estudios existentes han considerado sólo el caso de la cavidad en anillo, con la salvedad del estudio del Xe por Casperson [Casperson, 1978] [Casperson, 1980] [Casperson, 1988] [Weiss et al, 1991] y algún estudio del láser de estado sólido [Weiss et al, 1991] . Sorprendentemente, el caso fundamental del láser de dos niveles con bombeo incoherente y ensanchamiento homogéneo (y cavidad Fabry-Perot) no había sido estudiado; sólo Chenkosol y Casperson, en los últimos años, han realizado un estudio, si bien de alcance limitado [Chenkosol et al, 1993] .

Por supuesto, el caso más complejo de los LGBO con cavidad Fabry-Perot, o bien con cavidad en anillo y emisión bidireccional (donde también se generan dos ondas contrapropagantes), tampoco han sido estudiados desde el punto de vista dinámico. En todos estos láseres en los que existen dos ondas contrapropagantes generadas, la riqueza dinámica debería ser aún mayor que la que se ha observado en los láseres en anillo con emisión unidireccional.

## **2 Contenidos del presente trabajo**

En el presente trabajo hemos tratado de comprender y profundizar en el conocimiento de los LGBO que presentan dos modos generados contrapropagantes, en especial formando una sola onda estacionaria en una cavidad tipo Fabry-Perot.

De esta forma en el Capítulo 1 estudiamos la emisión estacionaria en los LGBO con cavidad Fabry-Perot cuando el bombeo es unidireccional. Se consideran láseres MIR y de dímero, completando los resultados obtenidos con los ya conocidos en láseres FIR y Anti-Stokes.

En el Capítulo 2 estudiamos la emisión estacionaria de un láser FIR cuando el

bombeo es bidireccional (método propuesto por nosotros), comprobando las diferencias con el bombeo unidireccional. Veremos como, gracias a un fenómeno de compensación de los “light shift” producidos por cada componente de la onda de bombeo, se logra una gran ganancia en estos láseres, la cual ha sido comprobada experimentalmente recientemente [Corbalán et al, 1997] . Además, este tipo de bombeo nos ha permitido estudiar por primera vez desde el punto de vista teórico, el fenómeno del “Lamb-dip transferido”.

En el Capítulo 3 estudiamos el comportamiento dinámico de un láser de gas en cavidad Fabry-Perot y ensanchamiento homogéneo, el cual comparamos con el ya bien conocido de los láseres en anillo y emisión unidireccional.

Por último, en el Capítulo 4 analizamos la dinámica de un LGBO con cavidad en anillo y emisión bidireccional, sobre el que existen estudios experimentales recientes [Tang et al, 1996,1] [Tang et al, 1996,2] . Únicamente el comportamiento dinámico (autopulsante) de los LGBO con cavidad Fabry-Perot, que constituiría el último eslabón para un conocimiento completo de los casos posibles relacionados con la temática de esta Tesis Doctoral, quedaría para un futuro trabajo, a realizar el próximo año. En el Apéndice III exponemos, no obstante, las ecuaciones del modelo que lo considera.

En cualquiera de estos estudios, se ha empleado el modelo semiclásico de matriz densidad para mezcla estadística de estados, para describir el medio activo; y la formulación clásica del campo eléctrico para describir los campos en la cavidad. Esta formulación se ha tomado de manera que interprete de forma sustancial la estructura de las ondas en la cavidad, despreciando efectos espaciotemporales que terminan afectando poco en los láseres que nos ocupan y que nos permiten una notable simplificación del modelo.

Utilizamos de esta forma la “Aproximación del modo único”: El campo puede ser descrito sin las inhomogeneidades transversales a la cavidad que presentan la aparición de varios modos transversales. Ésto se consigue fácilmente con una emisión  $TEM_{00}$ , que, por otra parte, permite aproximar la descripción del campo en forma de onda plana, con una notable veracidad. Constituye la “Aproximación de la onda

plana". Por otra parte, podemos considerar que la amplitud del campo no varía a lo largo de la cavidad (aparte de la estructura de nodos y vientres), lo cual es posible si las pérdidas de la misma se encuentran distribuidas uniformemente a lo largo de la cavidad. Ello es una muy buena aproximación para cavidades sin imperfecciones locales y con muy altas reflectividades en los espejos, lo que es posible conseguir. Constituye la "Aproximación del campo uniforme". Respecto a la variación frecuencial de la onda plana, puede considerarse que la variación temporal de la amplitud es mucho más lenta respecto a la que presenta la fase, pudiéndose eliminar sus derivadas temporales de segundo orden y simplificar notablemente las expresiones de variación del campo. Es la "Aproximación de variación lenta de la envolvente" o "Slowly varying envelope approximation"-SVEA-. De la misma forma, podemos desprestigiar los términos que, en los cálculos, presentan sumas de las frecuencias básicas frente a los términos que presentan diferencias de frecuencias, al dar lugar a unos efectos que promediados sobre intervalos cortos de tiempo, no afectan a las interacciones. Es la "Aproximación de la onda rotante" o "Rotating wave approximation"-RWA-.

En los cálculos numéricos se han empleado diferentes programas escritos en FORTRAN y compilados en diferentes computadores y con diferentes compiladores con la solvencia adecuada. Se ha trabajado en doble precisión y con los controles de error que consideramos convenientes en cada caso. Este punto se explicará con más detenimiento en el Apéndice II.

Para la descripción de los distintos fenómenos de interacción radiación-materia, se ha empleado la Teoría del "Átomo vestido", que se explica de forma sumaria y cualitativa en el Apéndice I.

# Capítulo 1

## Emisión estacionaria en LGBO con cavidad Fabry-Perot y bombeo unidireccional.

### 1 Introducción

Como se ha indicado en la Introducción general anterior, hace unos años se conocía bien desde el punto de vista teórico y conceptual la emisión de los LGBO solamente en el caso de cavidades en anillo, donde únicamente existen dos ondas, la de bombeo y la generada, propagándose en la cavidad. Esto no era así para cavidades tipo Fabry-Perot, donde tenemos dos ondas generadas contrapropagantes, que interactúan entre ellas a través del medio material, produciendo nuevos fenómenos de competencia y acoplo.

En el caso de cavidad Fabry-Perot, solo se había estudiado el láser FIR de  $CH_3OH$  [Laguarta et al, 1985,1] y el láser atómico de  $Ne$  [Laguarta et al, 1985,2]. Nuestro análisis, se ha centrado en otros tipos de LGBO con cavidad Fabry-Perot no consideradas anteriormente: los láseres MIR (infrarrojo medio) y de dímero, considerando en particular sus ejemplos más conocidos: los láseres de  $NH_3$  ( $12 \mu m$ ) y de  $Na_2$ , respectivamente. El estudio del primero se había iniciado ya durante nuestros trabajos de Tesis de Licenciatura. El estudio de los láseres MIR ha sido publicado en la Ref. [Silva et al, 1992]

### 2 Modelo teórico

Utilizamos el modelo teórico desarrollado en [Vilaseca et al, 1984]. El medio activo del LGBO se describe mediante la matriz densidad para una mezcla estadística de estados, de elementos de matriz  $\rho_{i,j}(v, z, t)$ , donde  $i, j = 0, 1, 2$ , representan los tres niveles implicados, el intermedio, el de final y el fundamental; y se cumple que  $\rho_{ij} = \rho_{ji}^*$ . Los campos de bombeo y de la onda generada, se describen por su expresión clásica, es decir:

$$\vec{E}_2(z, t) = \frac{1}{2} E_2(t) (\vec{e}_2 e^{-i(\Omega_2 t + k_2 z)} + c.c.) \quad (1.1)$$

para la onda de bombeo, donde  $E_2(t)$  es la amplitud de dicha onda,  $\Omega_2$  su frecuencia y  $k_2$  su número de onda. El término *c.c.* hace referencia a la expresión complejo conjugada de la escrita en el mismo paréntesis. Y

$$\vec{E}_1(z, t) = \frac{1}{2} (E_1(t) \vec{e}_1 e^{-i(\Omega_1 t + k_1 z)} + c.c.) + \frac{1}{2} (E'_1(t) \vec{e}_1 e^{-i(\Omega_1 t - k_1 z)} + c.c.) \quad (1.2)$$

para la onda generada, con expresión de sus componentes copropagante y contrapropagante respectivamente, con la onda de bombeo; siendo  $E_1(t)$  y  $E'_1(t)$  sus respectivas amplitudes (que en el caso de una cavidad Fabry-Perot se supondrán iguales entre sí),  $\Omega_1$  su frecuencia y  $k_1$  su número de onda. Suponemos pues un modelo de onda plana uniforme para los campos de bombeo y generados.

La evolución temporal de los elementos de la matriz densidad nos la da la ecuación de Schrödinger:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} \right) \rho = -\frac{i}{\hbar} [H_a - \vec{\mu} \vec{E}, \rho] + \Gamma \rho \quad (1.3)$$

donde  $H_a$  corresponde al hamiltoniano atómico o molecular sin interacción con campo eléctrico y  $\vec{\mu} \vec{E}$  a dicha interacción, siendo  $\vec{\mu}$  el momento dipolar, verificándose  $\vec{\mu}_{0i} \equiv \langle 0 | \vec{\mu} | i \rangle \equiv \mu_{0i} \vec{e}_{0i}$  para  $i = 1, 2$  y  $\vec{\mu}_{12} = 0$ , es decir, no existe interacción electromagnética directa entre los niveles 1 y 2.  $\Gamma \rho$  hace referencia la influencia de la relajación, es decir, de la emisión espontánea y las colisiones intermoleculares. Elegiremos la fase de los estados 0, 1, 2 de forma que  $\vec{\mu}_{0i}$  sean reales, es decir,  $\vec{\mu}_{0i} = \vec{\mu}_{i0}$

En esta ecuación, para la variación del elemento de la matriz densidad  $\rho_{ij}$  tendremos

$$-\frac{i}{\hbar} [H_a, \rho]_{ij} = -\frac{i}{\hbar} (W_i - W_j) \rho_{ij} = -i \omega_{ij} \rho_{ij} \quad (1.4)$$

donde  $W_i$  es la energía del nivel  $i$  y por tanto  $\omega_{ij}$  la frecuencia angular de la transición entre los niveles  $i$  y  $j$ . Asimismo

$$\begin{aligned} -\frac{i}{\hbar} [-\vec{\mu} \vec{E}, \rho]_{ij} &= -i \sum_k \left( -\frac{1}{\hbar} (\vec{\mu} \vec{E})_{ik} \rho_{kj} + \frac{1}{\hbar} (\vec{\mu} \vec{E})_{kj} \rho_{ik} \right) \\ &= -i \sum_k (V_{ik} \rho_{kj} - V_{kj} \rho_{ik}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

donde  $V_{ij} = -\frac{1}{\hbar} (\vec{\mu} \vec{E})_{ij}$  puede tomar los valores siguientes:

$$V_{01} = -\frac{1}{\hbar} \mu_{01} \frac{1}{2} E_1(t) (\vec{e}_{01} \vec{e}_1 e^{-i(\Omega_1 t + k_1 z)} + c.c.) \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\hbar}\mu_{01}\frac{1}{2}E_1'(t) (\vec{e}_{01}\vec{e}_1 e^{-i(\Omega_1 t - k_1 z)} + c.c.) \\
& = -\alpha^-(t) e^{-i(\Omega_1 t + k_1 z)} - \alpha^+(t) e^{-i(\Omega_1 t - k_1 z)} \\
V_{02} & = -\frac{1}{\hbar}\mu_{02}\frac{1}{2}E_2(t) (\vec{e}_{02}\vec{e}_2 e^{-i(\Omega_2 t + k_2 z)} + c.c.) \\
& = -\beta(t) e^{-i(\Omega_2 t + k_2 z)}
\end{aligned}$$

habiéndose definido las Frecuencias de Rabi  $\alpha^+$ ,  $\alpha^-$  y  $\beta$  (complejas para la onda generada) en la forma:

$$\alpha^-(t) = \mu_{01} \frac{E_1(t)}{2\hbar} \vec{e}_{01} \cdot \vec{e}_1, \quad \alpha^+(t) = \mu_{01} \frac{E_1'(t)}{2\hbar} \vec{e}_{01} \cdot \vec{e}_1, \quad \beta(t) = \mu_{02} \frac{E_2(t)}{2\hbar} \vec{e}_{02} \cdot \vec{e}_2 \quad (1.7)$$

y se han despreciado las aportaciones de los términos complejo conjugados al corresponder a frecuencias muy alejadas de resonancia en las interacciones, y que por tanto dan un resultado despreciable en los promedios temporales. (Aproximación de la onda rotante -R.W.A-).

Respecto al término de influencia de la relajación  $\Gamma\rho$ , puede ponerse

$$\begin{aligned}
(\Gamma\rho)_{ii} & = -\gamma_i \rho_{ii} + \sum_k \gamma_{ik} \rho_{kk} + \lambda_i \quad si \ j = i \quad (1.8) \\
(\Gamma\rho)_{ij} & = -\left(\frac{1}{2}(\gamma_i + \gamma_j) + \Gamma_{ij}^c\right) \rho_{ij} = \Gamma_{ij} \rho_{ij} \quad si \ j \neq i
\end{aligned}$$

para los elementos de la matriz densidad que describen las poblaciones y para los elementos que definen las coherencias. En estas expresiones,  $\gamma_i$  corresponde a las pérdidas del nivel  $i$  hacia los otros niveles del sistema o hacia cualquier otro nivel molecular,  $\gamma_{ij}$  a las perdidas del nivel  $i$  hacia el nivel  $j$ ,  $\lambda_i$  al bombeo incoherente sobre el nivel  $i$ ,  $\Gamma_{ij}^c$  a la influencia de las colisiones desfasantes sobre la fase de la coherencia  $\rho_{ij}$ , y entonces  $\Gamma_{ij}$  a la relajación total de la coherencia  $ij$ .

Quedan entonces las ecuaciones de evolución temporal de los 6 elementos independientes de la matriz densidad en la forma:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial z}\right) \rho_{00} & = -\gamma_0 \rho_{00} + \gamma_{01} \rho_{11} + \gamma_{02} \rho_{22} + \lambda_0 \quad (1.9) \\
& \quad -i(V_{01} \rho_{10} - V_{10} \rho_{01} + V_{02} \rho_{20} - V_{20} \rho_{02}) \\
\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial z}\right) \rho_{11} & = -\gamma_1 \rho_{11} + \gamma_{10} \rho_{00} + \gamma_{12} \rho_{22} + \lambda_1 \\
& \quad -i(V_{10} \rho_{01} - V_{01} \rho_{10}) \\
\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial z}\right) \rho_{22} & = -\gamma_2 \rho_{22} + \gamma_{20} \rho_{00} + \gamma_{21} \rho_{11} + \lambda_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -i(V_{20}\rho_{02} - V_{02}\rho_{20}) \\
\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial z}\right)\rho_{10} &= -i\omega_{10}\rho_{10} - \Gamma_{10}\rho_{10} \\
& -i(V_{10}\rho_{00} - V_{10}\rho_{11} - V_{20}\rho_{12}) \\
\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial z}\right)\rho_{20} &= -i\omega_{20}\rho_{20} - \Gamma_{20}\rho_{20} \\
& -i(V_{20}\rho_{00} - V_{10}\rho_{21} - V_{20}\rho_{22}) \\
\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial z}\right)\rho_{12} &= -i\omega_{12}\rho_{12} - \Gamma_{12}\rho_{12} \\
& -i(V_{10}\rho_{02} - V_{02}\rho_{10})
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones no tienen solución analítica exacta y en todo caso, su resolución numérica se efectuará posteriormente a lo largo de este trabajo. Podemos no obstante estudiar su solución estacionaria, considerando nula la variación espacial o temporal de los elementos de la matriz densidad y unas frecuencias de Rabi fijas tanto para la onda de bombeo como para la generada. Para conseguir esta solución, desarrollamos en serie de Fourier espacial los elementos de la matriz densidad, para dar cuenta de los efectos periódicos que se producen en la cavidad por el hecho de aparecer una onda estacionaria. Añadimos además en las coherencias un factor de oscilación rápido, que da cuenta de la frecuencia con que son forzadas. Tendremos así:

$$\begin{aligned}
\rho_{00}(v, z, t) &= \sum_p R_{00}^p(v, t) e^{ipkz} & (1.10) \\
\rho_{11}(v, z, t) &= \sum_p R_{11}^p(v, t) e^{ipkz} \\
\rho_{22}(v, z, t) &= \sum_p R_{22}^p(v, t) e^{ipkz} \\
\rho_{10}(v, z, t) &= e^{i\Omega_1 t} \sum_p R_{10}^p(v, t) e^{ipkz} \\
\rho_{20}(v, z, t) &= e^{i\Omega_2 t} \sum_p R_{20}^p(v, t) e^{ipkz} \\
\rho_{12}(v, z, t) &= e^{i(\Omega_1 - \Omega_2)t} \sum_p R_{12}^p(v, t) e^{ipkz}
\end{aligned}$$

donde  $k = \frac{k_1}{a} = \frac{k_2}{b}$  corresponde a un número de onda fundamental, divisor común de  $k_1$  y  $k_2$ , siendo pues  $a$  y  $b$  dos enteros adecuadamente escogidos.

Podemos considerar también las ecuaciones estacionarias en ausencia de campo, que nos darían directamente las densidades de población en tal estado. De ahí

obtenemos:

$$\lambda_i(v) = -\gamma_i \rho_{ii}^0(v) + \sum_k \gamma_{ik} \rho_{kk}^0(v) \quad (1.11)$$

donde  $v$  es la proyección de la velocidad a lo largo del eje  $z$ . Al no considerar colisiones que modifiquen la  $v$ , los diferentes grupos de velocidades atómicas o moleculares pueden tratarse independientemente, sumándose las contribuciones de cada uno posteriormente para obtener la solución final. Si suponemos distribuciones Maxwellianas de velocidad, tendremos

$$\rho_{ii}^0(v) = N_i^0 W(v) \quad (1.12)$$

donde  $W(v)$  es la función de distribución de velocidades Maxwellianas,

$$W(v) = (\sqrt{\pi}u)^{-1} e^{-\frac{v^2}{u^2}} \quad u = \sqrt{\frac{2k_b T}{m}} \quad (1.13)$$

siendo  $u$  la velocidad más probable.

Asimismo, definimos las desintonías de las ondas como

$$\Delta_i = \Omega_i - \omega_{0i} \quad i = 1, 2 \quad (1.14)$$

y sobre los coeficientes de las series de Fourier, la diferencia de poblaciones

$$D_i^p = R_{00}^p - R_{ii}^p \quad (1.15)$$

pudiendo eliminar los coeficientes  $R_{10}^p$  y  $R_{20}^p$  haciendo

$$\begin{aligned} R_{10}^p &= iL_{10}^p \left( -\beta R_{12}^{p-b} + \alpha^+ D_1^{p+a} + \alpha^- D_1^{p-a} \right) \\ R_{20}^p &= iL_{20}^p \left( \beta D_2^{p-b} - \alpha^+ P_{21}^{p+a} - \alpha^- P_{21}^{p-a} \right) \end{aligned} \quad (1.16)$$

donde

$$(L_{j1}^p)^{-1} = \gamma_{j1} + i((\Delta_j - \Delta_1) + pkv) \quad (1.17)$$

quedando de esta forma solamente las variables  $D_1^p$ ,  $D_2^p$ ,  $R_{12}^p$ ,  $R_{21}^p$  en expresiones que pueden ponerse como

$$G_p^{-1} X^{p-2a} + F_p^0 X^p + G_p^1 X^{q+2a} = J^0 \delta_{p,0} \quad (1.18)$$

con  $X^p$  y  $J^0$ , vectores de 4 componentes definidos como

$$\begin{aligned} X^p &= \left( D_1^p, D_2^p, P_{12}^{p+a-b}, P_{21}^{p-a+b} \right) \\ J^0 &= (\Lambda_1, \Lambda_2, 0, 0) \end{aligned} \quad (1.19)$$

donde  $\Lambda_i = M_i^0 \lambda_0 - M_0^0 \lambda_i$  con  $M_j^p = \gamma_j - \sum_{k \neq j} \gamma_{jk} + ipkv$  o bien

$$\Lambda_i = A_i (N_0^0 - N_1^0) W(v) + B_i (N_0^0 - N_2^0) W(v) \quad (1.20)$$

donde los coeficientes  $A_i$  y  $B_i$  dependen únicamente de los parámetros de relajación de las poblaciones del sistema de 3 niveles. Los elementos de las matrices de dimensión 4,  $F_p^0$  y  $G_p^{\pm 1}$  se encuentran detallados en [Roso 1981] , [Vilaseca et al, 1984] .

Las soluciones para (1.18) serán

$$\begin{aligned} X^0 &= (G_0^{-1} Z_{-2a}^{-1} + F_0^0 + G_0^1 Z_{2a}^1)^{-1} J^0 \\ X^p &= Z_p^{\pm 1} X^{p \mp 2a} \end{aligned} \quad (1.21)$$

donde  $Z_p^{\pm 1}$  son matrices complejas de dimensión 4 dadas por

$$Z_p^{\pm 1} = - (F_p^0 + G_p^{\pm 1} Z_{p \pm 2a}^{\pm 1})^{-1} G_p^{\mp 1} \quad (1.22)$$

y constituyendo por tanto un cociente recurrente de matrices que solamente se puede evaluar de forma numérica, truncando el denominador hasta conseguir la precisión deseada en  $X^0$ . Constituye un método de fracciones continuadas de matrices, rápidamente convergente para cualquier intensidad de las ondas consideradas.

A partir de este cálculo podemos conocer  $P_{01}^{\pm a}$ , y de ahí, la susceptibilidad eléctrica (en el sistema MKS),

$$\chi_1 = \frac{\vec{\mu}_{01} \vec{e}_1}{\varepsilon_0 E_1} \int W(v) P_{01}^{+a} dv + \frac{\vec{\mu}_{01} \vec{e}_1}{\varepsilon_0 E_1'} \int W(v) P_{01}^{-a} dv \quad (1.23)$$

La magnitud macroscópica más característica que utilizaremos es la "ganancia", definida como la energía ganada o absorbida por unidad de tiempo y volumen del medio activo, y que podemos expresar a partir del teorema de Poynting en la forma:

$$G_{\pm} = -2\hbar\Omega_1\alpha^{\pm} \int W(v) P_{01}^{\pm a} dv \quad (1.24)$$

(si separamos las contribuciones de cada modo generado). Y normalizando a la intensidad de la onda generada  $I_{\pm} = \varepsilon_0 c (E_{\pm})^2$

$$g_{\pm} = \frac{G_{\pm}}{I_{\pm}} = -\frac{\Omega_1}{c} \chi_{\pm 1} = -\frac{\Omega_1}{c} \frac{\mu_{01}}{\varepsilon_0 E_{\pm}} \int W(v) P_{01}^{\pm a} dv \quad (1.25)$$

### 3 El láser MIR de $NH_3$

Estudiamos a continuación el láser MIR de  $NH_3$  desarrollado en [Rolland et al, 1984,2] y [Rolland et al, 1984,3] , donde la utilización de cavidades en guía de ondas permite una emisión en forma de onda estacionaria, con un bombeo con onda viajera. Este mismo laser, con resonador en anillo, es el utilizado en [Rolland et al, 1982] , [Rolland et al, 1983] , [Wazen et al, 1983] y [Julien et al, 1983] .

Se utiliza la emisión de  $12.08 \mu m$  de la transición  $sP(7,0)$  del  $NH_3$  bombeada por la línea  $9R(30)$  del láser de  $CO_2$ , de  $9.22 \mu m$ , la cual actúa sobre la transición  $sR(5,0)$ . Las características de este láser se exponen en [Rolland et al, 1984,1] y son:

- $k_2/k_1 = 4/3$  por tanto  $b = 4$ ,  $a = 3$ .
- $\mu_{10} = \mu_{20} = 0.8 \times 10^{-30} Cm$
- $N_0 = 0.116 \times 10^{-3} N$
- $N_1 = 7.160 \times 10^{-3} N$
- $N_2 = 18.20 \times 10^{-3} N$
- $N/p = 3.54 \times 10^{22} m^{-3} Torr^{-1}$
- $\gamma_1/p = \gamma_2/p = 99.3 \times 10^6 s^{-1} Torr^{-1}$
- $\gamma_0/\gamma_1 = 0.234$
- $\Gamma_{12}/\gamma_1 = 1$ .
- $\Gamma_{01}/\gamma_1 = \Gamma_{02}/\gamma_1 = 0.617$
- $k_1 u p / \gamma_1 = 2.781 Torr$ .
- $\Delta_2 p / \gamma_1 \simeq 0 - 12 Torr$ , equivalente a trabajar entre 0 y 190 MHz.
- $\beta p / \gamma_1 \simeq 1 - 3 Torr$ , correspondiendo a intensidades entre 10 y 200  $W/cm^2$
- $\alpha^\pm p / \gamma_1 \simeq 0.01 - 3 Torr$ , para intensidades de 0.1  $W/cm^2$  a 200  $W/cm^2$

En estos datos,  $p$  representa la presión del gas, que suele ser de 0.5 a 1 Torr, aunque estudiaremos un rango más amplio.  $N$  es la densidad molecular a 300K.

En [Rolland et al, 1985] se corrige el valor de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , afectados por una cierta indeterminación desde el primer momento:

- $\gamma_1/p = \gamma_2/p = 25.0 \times 10^6 s^{-1} Torr^{-1}$

No obstante, las consideraciones aducidas para este cambio permiten suponer que el primero es un valor correspondiente a un caso más general de ensanchamiento del nivel energético, por lo que será el utilizado por nosotros. El cambio, además, no modifica de forma significativa los resultados

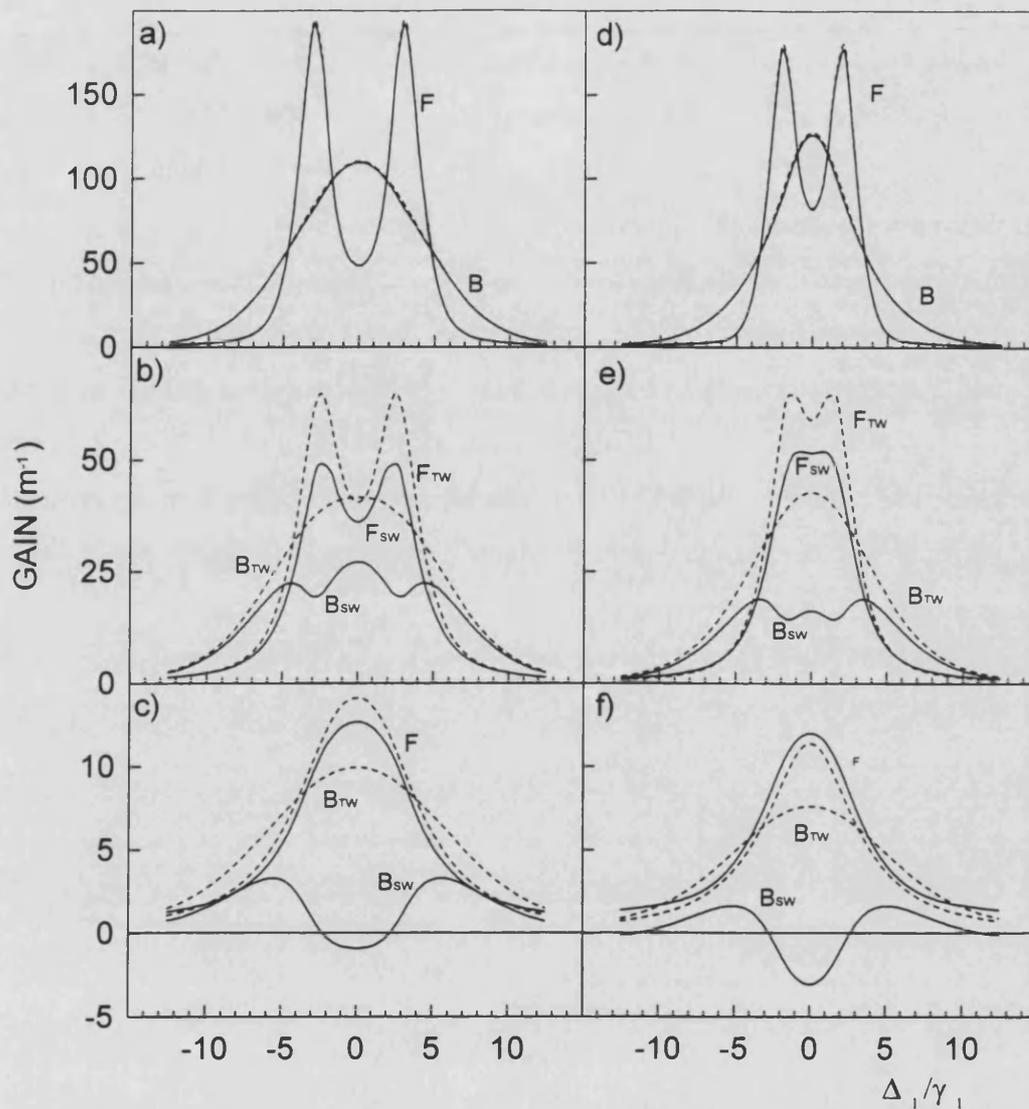
Un esquema de este láser se muestra en [Rolland et al, 1984,3] , (ver figura 1.1) donde el dispositivo experimental mide la intensidad de la onda generada de forma directa y en una sola de las direcciones. Para medidas más exactas de la ganancia, se utiliza el dispositivo señalado en [Rolland et al, 1983] : se mide la amplificación o absorción de una onda de prueba proveniente de un diodo láser sintonizable, al pasar por la cavidad (ver figura 1.2).

### 3.1 Régimen de altas presiones

Podemos considerar en primer lugar,  $p = 1 \text{ Torr}$  como un caso de funcionamiento normal a alta presión. Estudiemos la ganancia de las ondas generadas co- y contrapropagantes ( $g^-$  y  $g^+$  respectivamente) en función de la desintonía de la onda generada, y comparémosla con la que tendría el láser en ausencia de uno de los modos de la onda generada ( $g_{TW}^\pm$ ), es decir, como onda viajera (“Travelling Wave”). La figura 1.1 presenta estas curvas obtenidas para bombeo resonante ( $\Delta_2 = 0$ ) y distintas intensidades de bombeo y de onda generada.

En (a) ( $\beta/\gamma_1 = 3.$ ,  $\alpha/\gamma_1 = 0.1$  ) estamos en un régimen de baja señal. El acoplamiento entre las ondas generadas copropagante (o “forward”,  $F$  ) y contrapropagante (o “backward”,  $B$  ) es prácticamente nulo, y no hay diferencia con el comportamiento del láser en cavidad en anillo. El perfil que se exhibe es la típica anisotropía entre la ganancia de las ondas  $F$  y  $B$  debido al efecto ac-Stark dinámico producido por la fuerte onda de bombeo en la transición  $2 - 0$ . En nuestro caso, la anchura entre los dos picos resulta ser de  $2\beta/\gamma_1$  dado que  $k_1 u/\gamma_1 \simeq 3$ , en lugar de  $4(\beta/\gamma_1) \sqrt{k_1(k_2 - k_1)}/k_2$  como se demostró en [Feuillade et al, 1984] válido en el límite  $k_1 u/\gamma_1 \gg 1$ ,  $\beta/\gamma_1 \gg 1$ ,  $\alpha^-/\gamma_1 \ll 1$ .

La teoría del átomo vestido, nos da una visión muy clara de lo que ocurre en este caso. En la figura 1.2 tenemos una representación de la ganancia en función de la desintonía de la onda de prueba -que ahora es la onda generada- y la velocidad



**Figura 1.1.-** Espectro de ganancia para las ondas copropagante (o “forward”, F) y contrapropagante (o “backward”, B) del campo generado, estacionario (o “standing wave”, SW) -línea continua- o viajero (“travelling wave”, TW) -línea discontinua- para bombeo resonante ( $\Delta_2/\gamma_1 = 0.$ ), presión de 1 Torr y amplitud del campo de bombeo de  $\beta/\gamma_1 = 3.$  para (a,b,c) y  $\beta/\gamma_1 = 2.$  para (d,e,f), y amplitudes del campo generado de  $\alpha/\gamma_1 = 0.1$  para (a,d),  $\alpha/\gamma_1 = 1.$  para (b,e) y  $\alpha/\gamma_1 = 3.$  para (c,f).

molecular, para la molécula vestida por la onda de bombeo, como se explicó previamente. El “corte” que cada onda de prueba produce, es el perfil cuya integración en velocidades nos da la ganancia para la desintonía considerada. En esta figura puede observarse claramente el efecto ac-Stark dinámico.

Si incrementamos la intensidad de la onda generada con  $\alpha/\gamma_1 = 1$ . (Figura 1.1,b) y con  $\alpha/\gamma_1 = 3$ . (Figura 1.1,c) la saturación afecta de forma importante a las ganancias de todas las ondas consideradas ya que disminuyen en un factor  $\sqrt{1+2G}$ , con  $G = 4\alpha^2/\gamma_0\gamma_1$  el parámetro de saturación para cada onda. Además, aparecen dos fenómenos no lineales adicionales:

En primer lugar, la ganancia para cada onda decrece con respecto a su correspondiente onda viajera, debido a la competición que se produce entre las dos ondas al interactuar sobre las mismas moléculas. Ya que entonces la intensidad es el doble que en el caso de onda viajera, la saturación es mayor ( $g^\pm < g_{TW}^\pm$ ). Ésto es particularmente importante en  $\Delta_1 = \pm\beta$ , donde resuenan ambas ondas simultáneamente con las moléculas de velocidad nula, mediante procesos paso a paso  $2 \xrightarrow{\beta} 0 \xrightarrow{\alpha^\pm} 1$  y Raman  $2 \xrightarrow{\beta\alpha^\pm} 1$  (efecto tipo Lamb-dip).

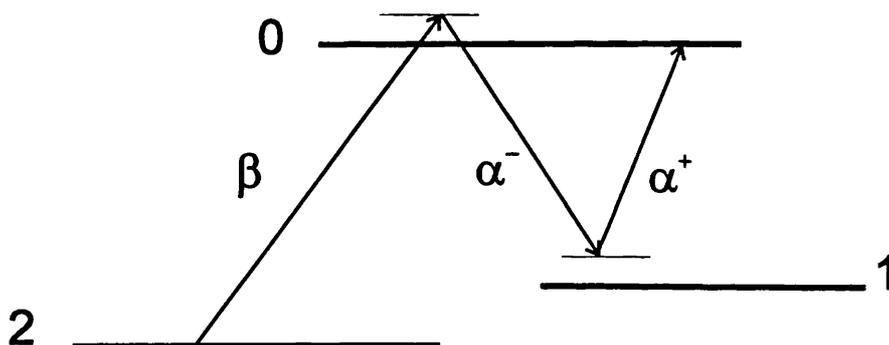


Figura 1.2.-

Y en segundo lugar, la menor disminución de la ganancia de la componente copropagante frente a la contrapropagante, llegando a hacerse esta última negativa y alcanzando la primera los valores de su respectiva viajera. Este fenómeno se explica a través de procesos a 3 fotones  $\beta\alpha^-\alpha^+$  (absorción de un fotón  $\beta$ , emisión de un fotón  $\alpha^-$  y absorción de un fotón  $\alpha^+$ ), figura 1.2, que suponen de hecho un bombeo de la onda  $F$  a expensas de la  $B$ . Estos procesos, al ser bastante resonantes (el proceso intermedio  $\beta\alpha^-$  es resonante) presentan un carácter mixto “paso a paso” y “coherente”. Por supuesto, existe también el proceso a 3 fotones contrario  $\beta\alpha^+\alpha^-$  pero es mucho menos importante, pues sus etapas intermedias son

menos resonantes y, además, el promedio Doppler (contribución de las diferentes velocidades moleculares) hace que las resonancias asociadas a este proceso estén más ensanchadas en frecuencia y por tanto tengan menor magnitud. También pueden participar procesos a 5 fotones  $\beta\alpha^-\alpha^+\alpha^-\alpha^+$  y superiores, si bien su magnitud es menor.

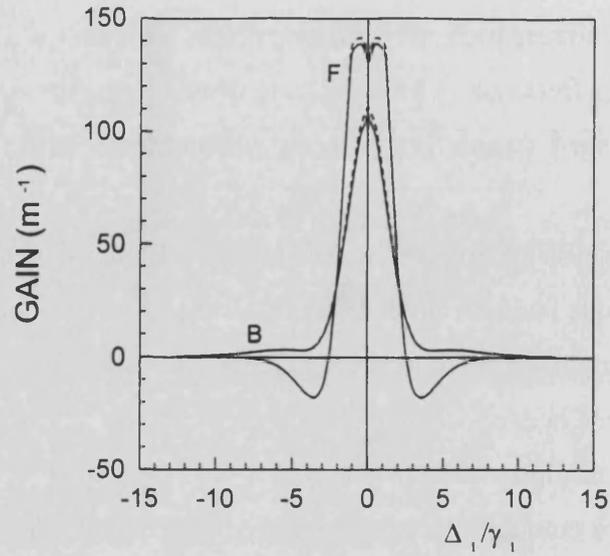
No ocurre así con su equivalente simétrico  $\beta\alpha^+\alpha^-$ , que se ve menos propiciado por la anisotropía que la dirección de bombeo presenta en la resonancia con el nivel 0, ya que, por ejemplo, ocurre donde los procesos  $\beta\alpha^-$  son más intensos. De igual forma es equivalente la explicación para interacciones con 5 ó más fotones.

Analogamente, la figura 1.2 nos sirve para ver estos dos procesos, cuando las ondas generadas ya comienzan a intervenir en el vestimiento de la molécula. Así, sobre los niveles grafiados en la figura, las ondas generadas interactúan en la forma señalada para los grupos de velocidad y las desintonías en las cuales existe una resonancia con esos niveles.

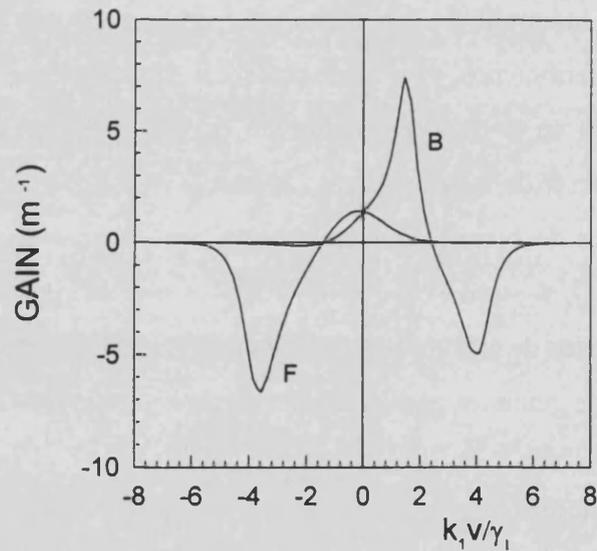
Si disminuimos la amplitud de bombeo a  $\beta/\gamma_1 = 2$ . (Figura 1.2,d,e,f), encontramos los mismos fenómenos, y las diferencias son solamente cuantitativas, aunque significativas, como en el caso (f), donde  $g^- > g_{TW}^-$  para cualquier valor de la desintonía  $\Delta_1$  y a pesar de la saturación existente.

Para intensidades de bombeo aún menores aparecen nuevos efectos, como en la figura 1.3, para  $\beta/\gamma_1 = 1$ . y  $\alpha/\gamma_1 = 0.1$ . Los efectos de saturación son casi nulos y aparecen pozos de absorción para  $F$  a desintonías no nulas ( $\Delta_1/\gamma_1 \approx \pm 4$ ) y unos ligeros picos de ganancia para  $B$  a desintonías algo mayores que las anteriores ( $\Delta_1/\gamma_1 \approx 5$ ).

Para entender esto estudiamos el perfil no integrado ganancia vs.  $k_1v/\gamma_1$  en el pozo de absorción que aparece para  $\Delta_1/\gamma_1 = 4$  (Figura 1.4). Vemos de ganancia negativa para  $F$  en  $k_1v/\gamma_1 \approx -4$  producida por la absorción de la onda por las moléculas que se encuentran en el nivel 1, que está relativamente poblado en los láseres MIR por encontrarse este nivel no mucho más alto que el nivel fundamental. Por otra parte, el bombeo desde el nivel 2, se encuentra para esas moléculas fuera de resonancia, no incorporando población al nivel 0 (ni produciendo efecto Raman



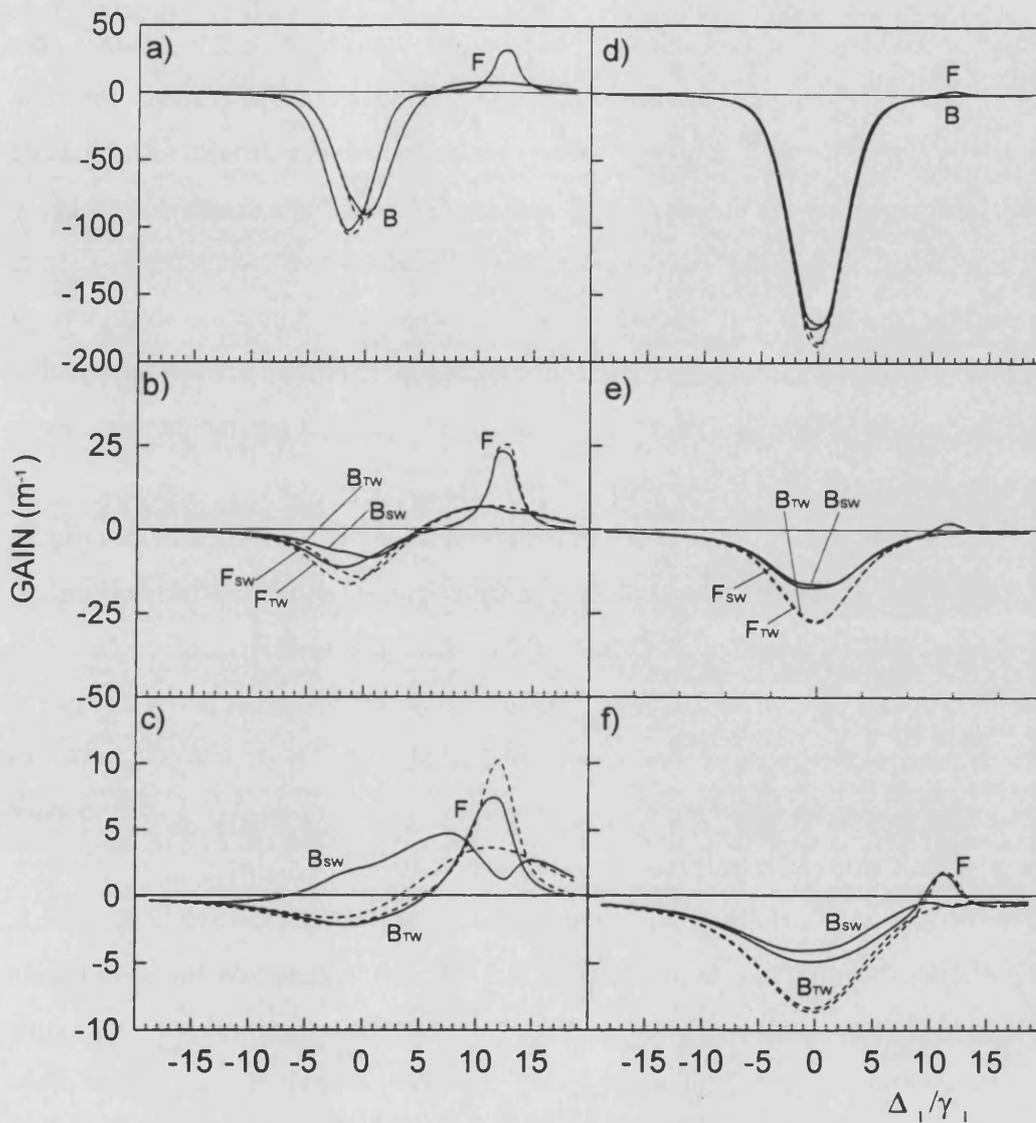
**Figura 1.3.-** Lo mismo que la figura anterior, pero con un bombeo de  $\beta/\gamma_1 = 1$ . para  $\alpha/\gamma_1 = 0.1$



**Figura 1.4.-** Curvas de ganancia en función de la velocidad molecular para un campo generado de desintonía  $\Delta_1/\gamma_1 = 4$ . con los mismos parámetros que la figura anterior.

apreciable), y por tanto, no contrarrestando este efecto. Lo contrario ocurre para el equivalente pozo de la onda  $B$ , en  $k_1 v/\gamma_1 \approx 4$ , que se ve contrarrestando con el bombeo debido a procesos Raman  $2 \xrightarrow{\beta\alpha^\pm} 1$ , que produce un pico en la ganancia. De esta forma,  $F$  resultará con ganancia negativa y  $B$  con ganancia ligeramente

positiva.



**Figura 1.5.-** Como en la figura 1.1.- pero para una onda de bombeo muy desintonizada:  $\Delta_2/\gamma_1 = 12.$  ( $= 3.2 k_2 u$ ). Amplitud del campo de bombeo:  $\beta/\gamma_1 = 3.$  para (a,b,c) y  $\beta/\gamma_1 = 1.$  para (d,e,f). Amplitudes del campo generado:  $\alpha/\gamma_1 = 0.1$  para (a,d),  $\alpha/\gamma_1 = 1.$  para (b,e),  $\alpha/\gamma_1 = 3.$  para (c) y  $\alpha/\gamma_1 = 2.$  para (f)

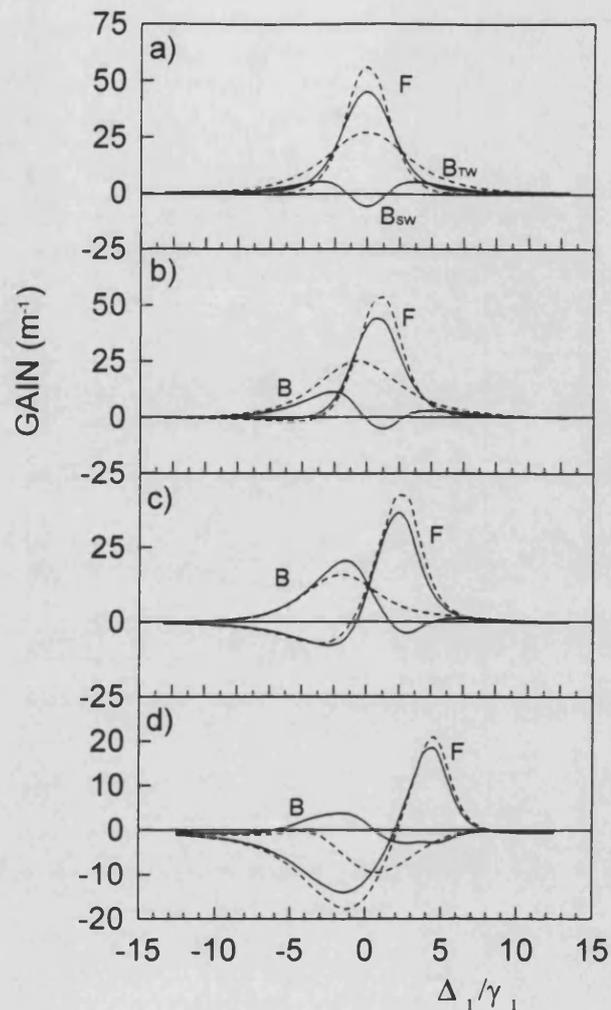
En la figura 1.5 hemos aumentado la desintonía del bombeo a  $\Delta_2/\gamma_1 = 12.$ , para la cual las resonancias aparecen más separadas en la gráfica en función de  $\Delta_1$ . El pozo de absorción en  $\Delta_1/\gamma_1 \approx 0.$  es producido por los procesos de absorción  $1 \xrightarrow{\alpha^\pm} 0,$  sin que el bombeo pueda contrarrestarlos, al estar fuera de resonancia. Este bombeo

en cambio, es el responsable del pico en  $\Delta_1/\gamma_1 \approx \Delta_2/\gamma_1 = 12$ . por los procesos Raman conocidos. Se observa la distinta anchura y amplitud de esta resonancia para  $F$  y  $B$ , debido al distinto número de grupos de velocidades que resuena con cada onda, por la anisotropía que la onda de bombeo introduce. La distinta naturaleza de todos éstos procesos explica su cambio ante las distintas intensidades de bombeo y emisión. Para  $\beta/\gamma_1 = 3$ . y  $\alpha/\gamma_1 = 0.1$  (Figura 1.5a), no existe saturación. Esta se incrementa para  $\alpha/\gamma_1 = 1$ . (Figura 1.5b), sobre todo para el pozo de absorción, ya que los procesos Raman, al tratarse de procesos no resonantes en su nivel intermedio, están lejos de la saturación. Para  $\alpha/\gamma_1 = 3$ . (Figura 1.5c), la saturación empieza ya a afectar incluso al pico de ganancia Raman.

El hecho más destacable de acoplo entre las ondas  $\alpha^+$  y  $\alpha^-$  en el caso de la Figura 1.5 es que para el valor de  $\Delta_2$  considerado, los procesos dominantes (más resonantes) son los  $\beta\alpha^+\alpha^-$  (en lugar de los  $\beta\alpha^-\alpha^+$  del caso anterior), lo cual significa que ahora es la onda contrapropagante la que se ve amplificada, a expensas de la copropagante. Este fenómeno se observa sobre todo en la Figura 1.5c (los procesos a 3 fotones indicados precisan lógicamente que  $\alpha$  sea grande), alrededor de  $\Delta_1/\gamma_1 \approx 0$ ., y hace que la onda B resulte amplificada en lugar de absorbida.

También cuando disminuimos la intensidad de la onda de bombeo, a  $\beta/\gamma_1 = 1$ . (Figura 1.5d,e,f), con las mismas intensidades de la onda generada que en la Figura 1.5a,c,e prácticamente, los cambios son acorde a la naturaleza de cada fenómeno. Disminuye la ganancia del pico correspondiente a los procesos Raman, menos probables ahora, y aumenta el pozo de los procesos paso a paso al poder ser menos contrarrestados por el bombeo.

La influencia de la desintonía de la onda de bombeo se muestra también, con pasos más graduales, en la Figura 1.6, donde  $\beta$  y  $\alpha$  están fijos ( $\beta/\gamma_1 = \alpha/\gamma_1 = 1$ .) y  $\Delta_2$  se ha variado tomando valores 0 (a), 1 (b), 2.5 (c), y 5 (d). Vemos así como el pico de ganancia de  $F$  se encuentra siempre en  $\Delta_1 = \Delta_2$ , teniendo cada vez más un carácter de transición Raman al separarse de los procesos “paso a paso”. Vemos también como va cambiando la estructura alrededor de  $\Delta_1 \approx 0$  : del dominio de los procesos  $\beta\alpha^-\alpha^+$  que favorecen la onda F a expensas de la B (Figura 1.6a) al caso

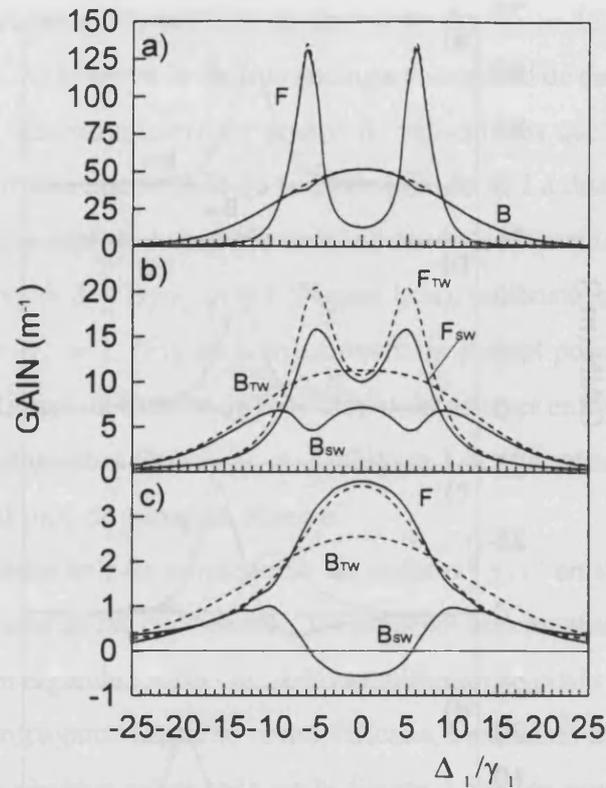


**Figura 1.6.-** Curvas espectrales de ganancia para unos valores fijos de los campos:  $\beta/\gamma_1 = \alpha/\gamma_1 = 1$ . (resto de parámetros como en la figura 1.1.-) y diferentes desintonías de bombeo:  $\Delta_2/\gamma_1 = 0$  (a),  $\Delta_2/\gamma_1 = 1$  (b),  $\Delta_2/\gamma_1 = 2.5$  (c),  $\Delta_2/\gamma_1 = 5$  (d).

totalmente opuesto de dominio de los procesos  $\beta\alpha^+\alpha^-$  (Figura 1.6d) como ocurría también en la Figura 1.5c.

### 3.2 Régimen de presiones medias

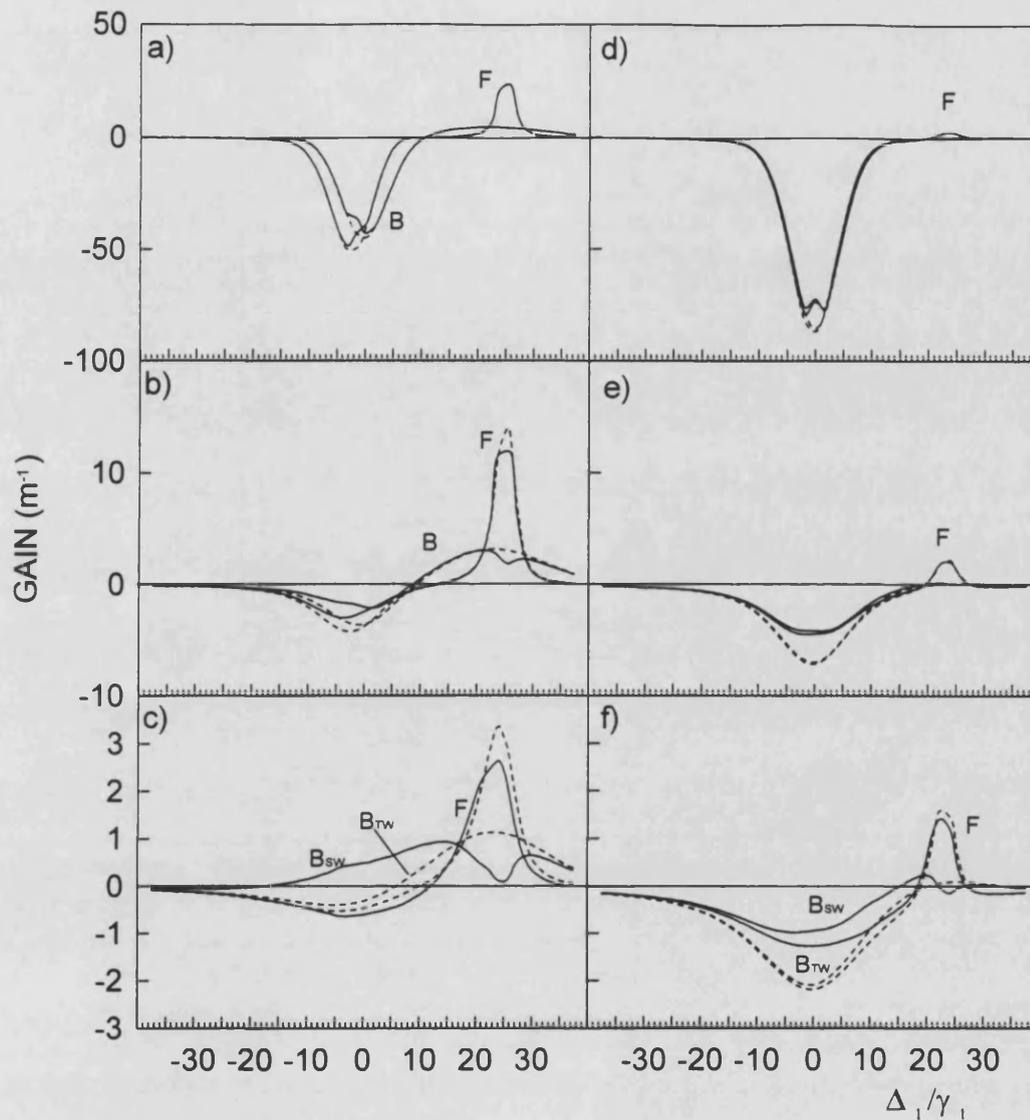
Bajar la presión de 1 Torr a 0.5 Torr supone reducir a la mitad la densidad molecular y las relajaciones. Los otros parámetros ( $\Delta_2$ ,  $\Delta_1$ ,  $k_1v_{\pm}$ ,  $\alpha^{\pm}$ ), debido a su normalización a  $\gamma_1$  se verán incrementados en un factor 2. Esto repercutirá en la separación entre los picos de  $F$  producidos por el efecto ac-Stark dinámico inducido por la onda



**Figura 1.7.-** Como en la figura 1.1.- pero con un presión de 0.5 Torr. Quedan así:  $\beta/\gamma_1 = 6$ . y  $\alpha/\gamma_1 = 0.2$  (a),  $\alpha/\gamma_1 = 2$ . (b),  $\alpha/\gamma_1 = 6$ . (c)

de bombeo, en la saturación, y en la fuerza de los procesos de competencia y acoplo entre  $F$  y  $B$ . Podemos ver ésto claramente en la figura 1.7, comparándola con la columna izquierda de la figura 1.1, ya que corresponde al resto de parámetros iguales. Aparece un aumento de la separación entre picos, debido al aumento en el valor de  $\beta/\gamma_1$  indicado. El aumento de la saturación se pone de manifiesto en la escala de valores de las ganancias, y los efectos de acoplo y competencia aparecen incrementados con nuevos pozos y picos a lo largo de la curva de ganancia (debido a procesos de orden superior al 3°)

Analogamente podemos comparar la figura 1.8 con su equivalente, la figura 1.5. La particular importancia de esta emisión Raman justifica que el láser sea destacado en los diferentes experimentos por éste motivo.

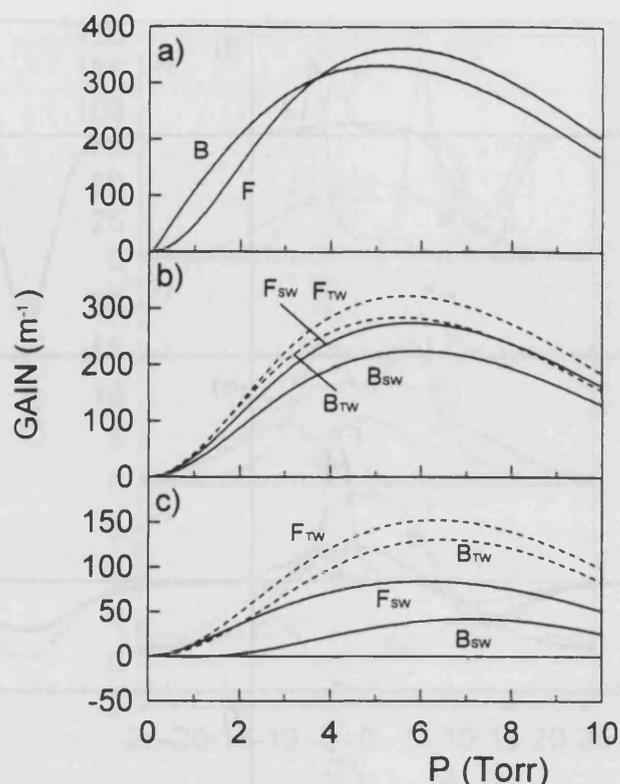


**Figura 1.8.-** Análoga a la figura 1.4.- pero con una presión de 0.5 Torr

### 3.3 Ganancia versus presión

Podemos estudiar también la variación de la ganancia para un amplio intervalo de presiones como tenemos en la figura 1.9, para  $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ . y diferentes intensidades de las ondas de bombeo y generada.

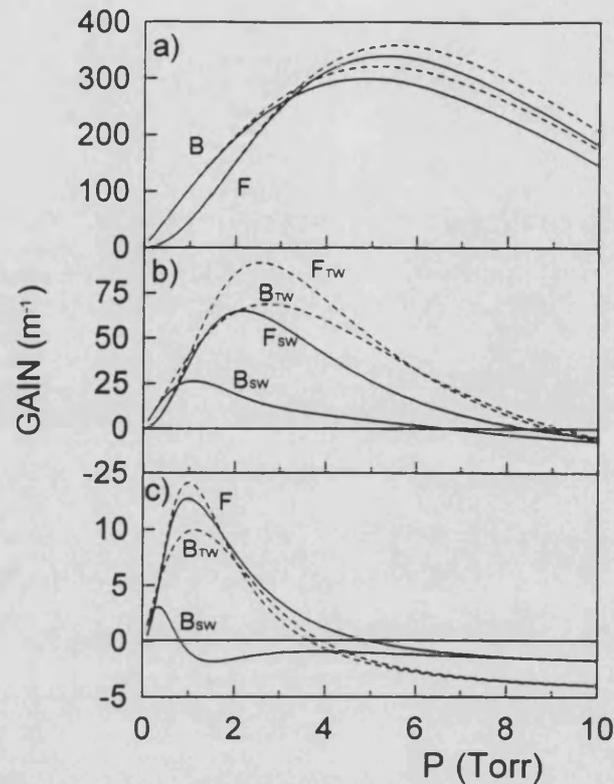
Estudiamos un intervalo de presiones comprendido entre 0 y 10 Torr, presiones que se pueden alcanzar con el láser en guía de ondas [Rolland et al, 1984,1]. En todos los casos el bombeo es de  $200 \text{ W/cm}^2$ , independientemente de la presión, lo



**Figura 1.9.-** Espectro de ganancia para las ondas copropagante (F) y contrapropagante (B) del campo generado SW y TW en función de la presión. La intensidad de bombeo es de  $200 \text{ W/cm}^2$  ( $\beta p/\gamma_1 = 3 \text{ Torr}$ ) y las amplitudes de las ondas generadas se suponen fijas e independientes de la presión del gas:  $\alpha p/\gamma_1 = 0.1 \text{ Torr}$  (a),  $\alpha p/\gamma_1 = 1. \text{ Torr}$  (b),  $\alpha p/\gamma_1 = 3. \text{ Torr}$  (c)

que equivale a  $\beta/\gamma_1 = 3/p$ . La intensidad de la onda generada se supone constante en los tres casos, b, c) e independientemente de la presión. La amplitud del campo es de  $\alpha/\gamma_1 = 0.1/p$  (Figura 1.9a),  $1/p$  (Figura 1.9b) y  $3/p$  (Figura 1.9c) donde  $p$  indica el valor numérico de la presión medida en Torr.

En cambio, en la Figura 1.10 la intensidad de la onda generada se supone crece linealmente con la presión, siendo  $\alpha/\gamma_1 = 0.1 \text{ Torr}$  (Figura 1.10a),  $1. \text{ Torr}$  (Figura 1.10b),  $3. \text{ Torr}$  (Figura 1.10c). En todos los casos se aprecia el fenómeno de saturación cuando  $\alpha$  se acerca a  $\beta$ , y en todos los casos las ondas viajeras tienen un comportamiento similar: a bajas presiones, con el aumento de  $p$ , sube la ganancia al aumentar la densidad molecular, para alcanzar un máximo y descender al aumentar las relajaciones por colisiones, hasta llegar a hacerse negativa a muy altas presiones,



**Figura 1.10.-** Mismos valores que el caso anterior pero ahora la amplitud de las ondas generadas se incrementan linealmente con  $p$ :  $\alpha/\gamma_1 = 0.1$  (a),  $\alpha/\gamma_1 = 1$ . (b),  $\alpha/\gamma_1 = 3$ . (c)

al dominar los procesos de absorción. A bajas presiones,  $g_{TW}^- < g_{TW}^+$ , debido al efecto ac-Stark dinámico, mientras que a altas presiones, esta desigualdad se invierte, como cabría esperar dada la anisotropía que produce  $\beta^-$ . Sin embargo, hay un intervalo de altas presiones en que se vuelve a dar  $g_{TW}^- < g_{TW}^+$  (b,c) debido a los cambios que en los diagramas de niveles produce un bombeo y una emisión fuertes. Este hecho, que aparece en el caso TW) no había sido conocido con anterioridad. Respecto de onda estacionaria, los fenómenos de competencia y acoplo se manifiestan de forma clara a lo largo del dominio de presiones. Los primeros (es decir, los efectos de saturación debido a la presencia de las dos ondas  $\alpha^+$  y  $\alpha^-$ ) se manifiestan en una disminución de las ganancias de las ondas estacionarias frente a sus respectivas viajeras cuando  $\alpha$  aumenta. Los segundos implican que la diferencia entre  $g^-$  y  $g^+$  sea mayor que la diferencia entre  $g_{TW}^-$  y  $g_{TW}^+$ , y en que el comportamiento a diferentes presiones es muy distinto entre  $F$  y  $B$ : en los casos

de mayor acoplo hay intervalos de presiones en los que  $g^-$  crece mientras que  $g^+$  decrece, tomando valores negativos.  $g^-$  puede incluso sobrepasar a  $g_{TW}^-$  a pesar del efecto de saturación.

#### 4 El láser dímero de $\text{Na}_2$

El láser de  $\text{Na}_2$  constituye un buen ejemplo de láser de dímero, bien estudiado y de características conocidas. En [Wellegehausen, 1979] se citan las diferentes líneas espectrales, centrándose posteriormente el estudio en la línea más intensa de 525 nm, bombeado por un láser de argón en 488 nm. En [Luhs et al, 1983] el mismo láser se estudia muy desintonizado, en su emisión Raman, y en [Man et al, 1983] se estudia su emisión en 539 nm, en un resonador que permitiría una estructura de onda generada estacionaria, aunque no desarrollan el tema.

De esta forma, en [Wellegehausen, 1979] se dan los siguientes parámetros para esta línea de emisión del láser:

- $k_2/k_1 \simeq 30/28$ , y por tanto  $a = 28$ ,  $b = 30$

A la temperatura de funcionamiento del láser ( 800K ) tendremos:

- $N_2/p = 4 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3} \overline{Torr}^{-1}$ ,  $N_0 = 0.$ ,  $N_1 = 0.074N_2$
- $\mu_{10} = 2.99 \times 10^{-28} \text{ Cm}$ ,  $\mu_{20} = 2.17 \times 10^{-28} \text{ Cm}$
- $\gamma_1/p = \gamma_2/p = 100. \times 10^6 \text{ s}^{-1} \overline{Torr}^{-1}$
- $\gamma_0/\gamma_1 = 6.51$
- $\Gamma_{01}/\gamma_1 = 0.19$ ,  $\Gamma_{02}/\gamma_1 = 0.10$
- $k_{1up}/\gamma_1 = ak_{up}/\gamma_1 = 64.4 \overline{Torr}$
- $\beta p/\gamma_1 = 3.8 - 6.6 \overline{Torr}$ , correspondiendo a intensidades entre 100 y 500  $\text{W}/\text{cm}^2$

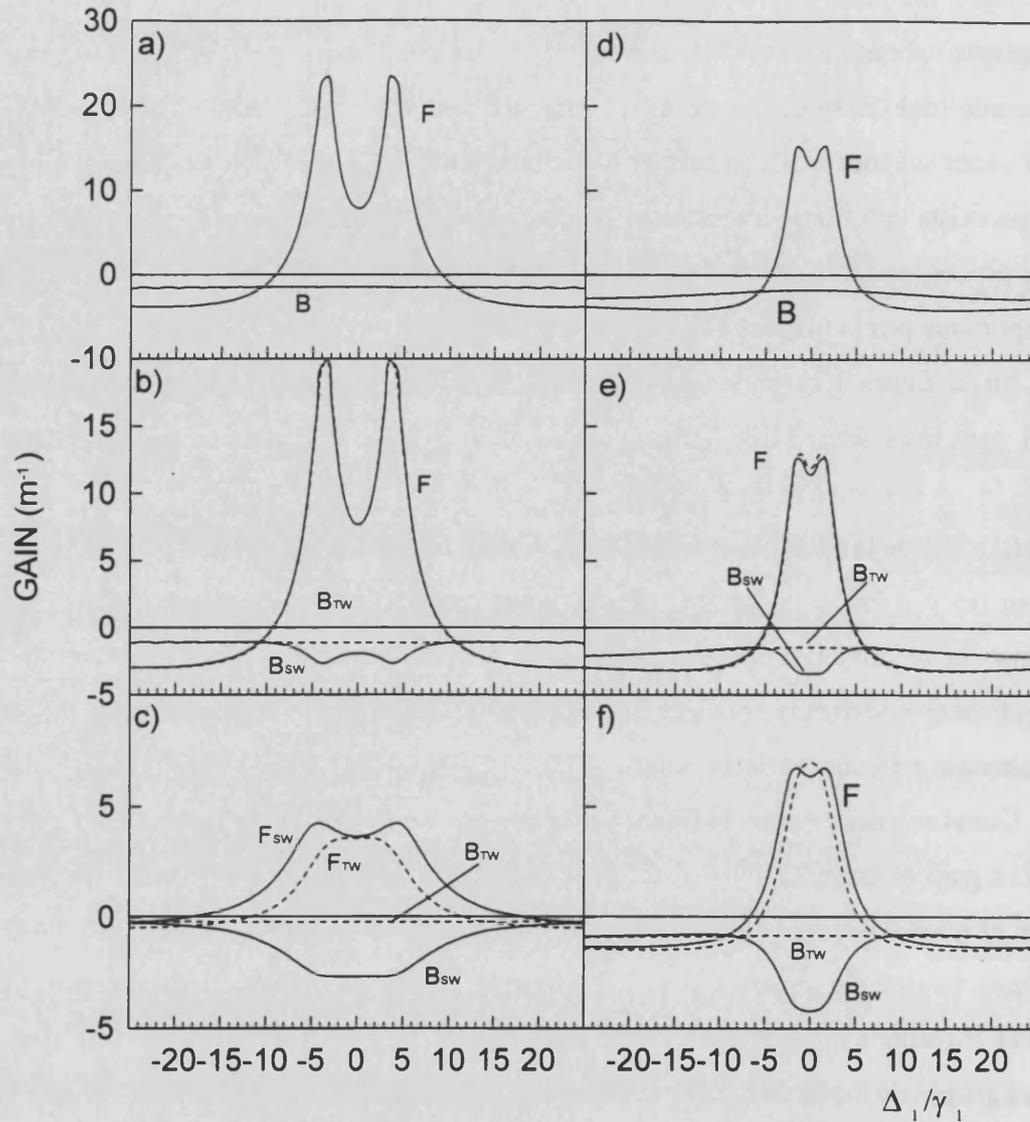
Trabajando bien para presiones típicas de 8.8  $\text{Torr}$ , los valores anteriores corresponden a esta presión, por tanto  $\overline{Torr} = \text{Torr}/8.8$ .

Las principales diferencias con el láser MIR son los altos valores de  $a$  y  $b$ , y su cociente cercano a la unidad, al tratarse de dos frecuencias próximas; un  $ku$  más elevado (del orden de 2.5 veces mayor) ya que emite en el visible, y una  $\gamma_0$  unas 30 veces mayor. Los dos primeros factores permitirán que para desintonías muy altas exista una fuerte interacción, favoreciendo los procesos Raman, mientras que los procesos paso a paso no resonantes acabarán en absorción, efecto notablemente importante por la última característica señalada.

En la figura 1.11 podemos ver una serie de gráficas equivalentes a la figura 1.1 para los láseres MIR. Tenemos, para  $P = 8.8 \text{ Torr}$  y bombeo en resonancia ( $\Delta_2/\gamma_1 = 0.$ ) amplitudes de la onda de bombeo de  $\beta/\gamma_1 = 7$  en (a,b,c) y  $\beta/\gamma_1 = 3$  en (d,e,f) y de la onda generada de  $\alpha/\gamma_1 = 0.1$  en (a,d),  $\alpha/\gamma_1 = 1.$  en (b,e),  $\alpha/\gamma_1 = 7$  en (c) y  $\alpha/\gamma_1 = 3$  en (d). Observamos como efectivamente los procesos de ganancia negativa son predominantes, tanto para ondas viajeras como estacionarias. Realmente podríamos concluir que el láser de dimero solo emitiría en un rango realmente estrecho de desintonías.

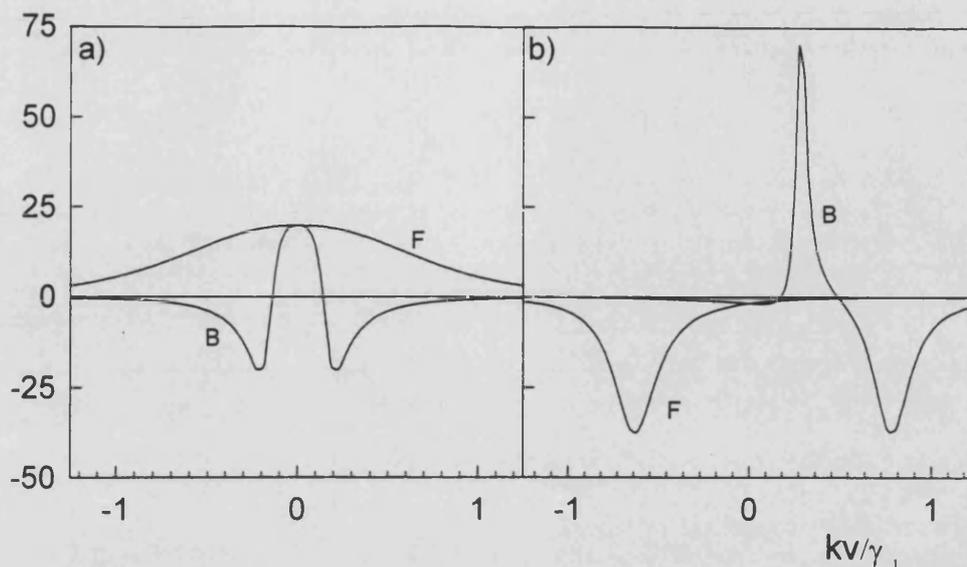
Como se puede ver en la figura 1.12a que reproduce las condiciones de la figura 1.11a para el corte  $\Delta_1/\gamma_1 = 0.$ , la onda  $F$ , que para desintonías bajas, resuena con el nivel 0 desdoblado por efecto ac-Stark, a través de procesos Raman y paso a paso, tendrá una ganancia positiva; mientras que en las mismas circunstancias, la onda  $B$  resuena predominantemente por procesos paso a paso, y solo se amplifica para grupos de moléculas con velocidades tales que resuenan con el nivel de bombeo ( $k_1 v \approx 0.$ ), resultando fuertemente absorbida para el resto de grupos de velocidades, ya que debido a que  $\gamma_0$  es muy grande, aun se encuentra con el nivel 0 vestido, pero con poca población, por lo que se produce un efecto de absorción neta por parte de la población en 1. Este último efecto absoritivo predomina para desintonías altas de la onda generada, como puede verse en la figura 1.12b, donde la onda  $F$  no llega a resonar con el bombeo y donde la resonancia Raman de  $B$  con el mismo no es suficiente para contrarrestar la absorción del resto, si bien sí para tener una ganancia negativa menor que la onda  $F$ .

El hecho de que la onda  $B$  resulte con ganancia negativa en todo el espectro



**Figura 1.11.-** Espectro de ganancia para las componentes del campo generado SW -línea continua- o TW -línea discontinua- para bombeo resonante ( $\Delta_2/\gamma_1 = 0$ ), presión de 8.8 Torr y amplitud del campo de bombeo de  $\beta/\gamma_1 = 7$  para (a,b,c) y  $\beta/\gamma_1 = 3$  para (d,e,f), y amplitudes del campo generado de  $\alpha/\gamma_1 = 0.1$  para (a,d),  $\alpha/\gamma_1 = 1$  para (b,e),  $\alpha/\gamma_1 = 7$  para (c) y  $\alpha/\gamma_1 = 3$  para (f)

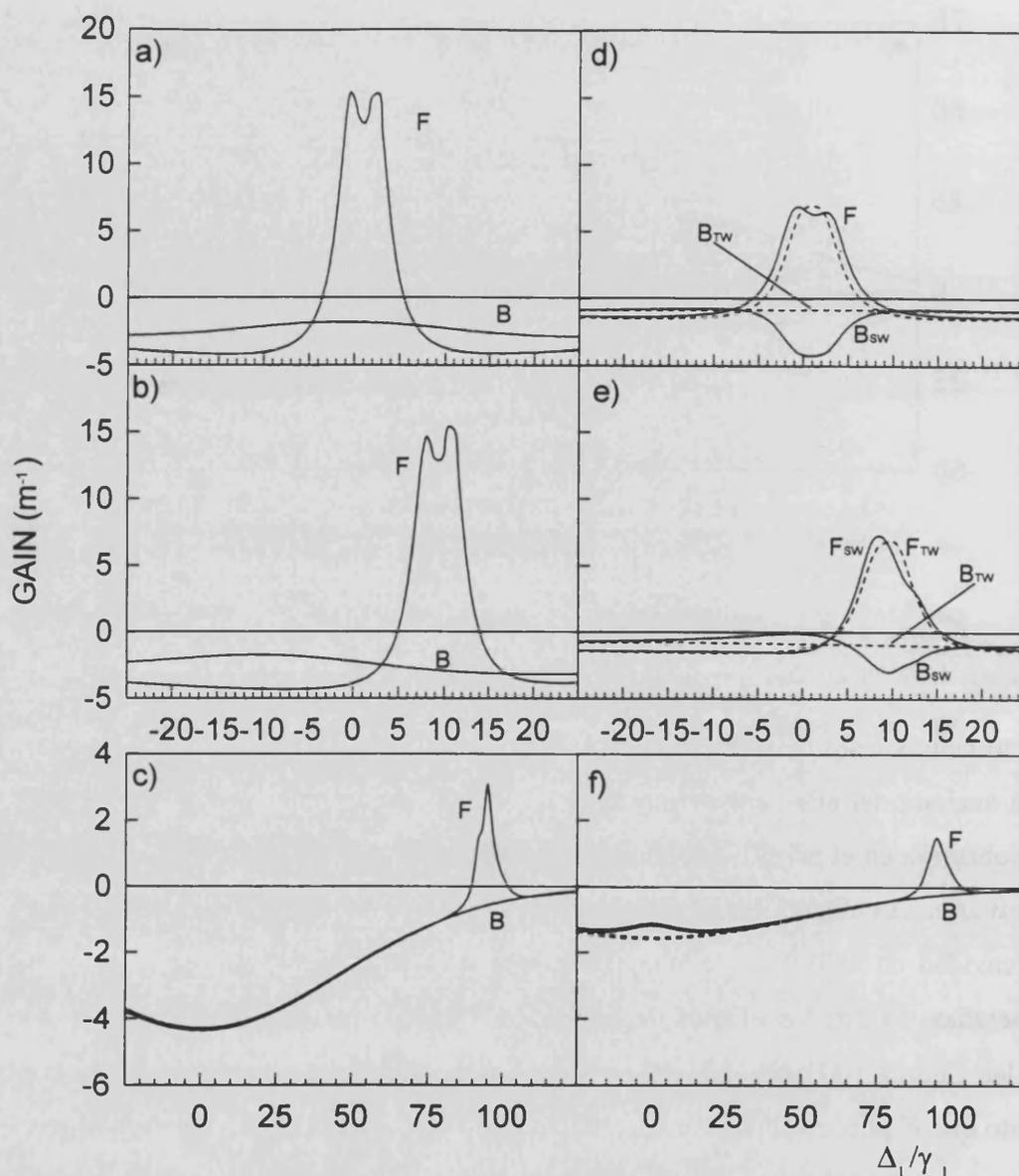
permite obtener un laser con cavidad en anillo y emisión en un solo sentido sin necesidad de otros dispositivos ópticos discriminadores (aunque el estudio completo de la cavidad en anillo exigiría considerar también casos con  $\alpha^+ \neq \alpha^-$ ). Ésto es mencionado ya en [Wellegehausen, 1979], apuntando la existencia de población en el nivel 1 y el cociente de frecuencias cercano a 1 como causas del mismo, si bien,



**Figura 1.12.-** Curvas de ganancia en función de la velocidad molecular para un campo generado de desintonía  $\Delta_1/\gamma_1 = 0$ . (a) y  $\Delta_1/\gamma_1 = 20$ . (b), para el caso a) de la figura 1.10.-

como hemos visto también son determinantes la alta tasa de relajación del nivel 0 y la anchura del ensanchamiento inhomogeneo. Como vimos, en los láseres MIR la población en el nivel 1 es porcentualmente mayor y el efecto de absorción no es tan fuerte. Asimismo, la imposibilidad de obtener emisión bidireccional (en caso de cavidad en anillo) se ve aumentada para un acoplamiento mayor de las ondas generadas, ya que los efectos de saturación y acoplo que se aprecian claramente en las figuras 1.11b,c y 1.11e,f, ahondan en la diferencia entre  $F$  y  $B$ , hasta el punto que  $F$  puede sobrepasar en ganancia a su equivalente onda viajera, y  $B$  tener una ganancia negativa de casi igual magnitud que  $F$ . En caso de cavidad Fabry-Perot, esto introducirá una asimetría apreciable entre las componentes co- y contra-propagante. Sólomente [Man et al, 1983] presenta un láser dimer con cavidad en anillo donde se consigue emisión  $B$ , pero la ganancia es 10 veces menor que el caso en que el láser emite una onda  $F$ ; ello se consigue en otra transición menos potente, donde las tasas de relajación varían y se aminora el efecto absoritivo.

Como ya se señaló, el cociente de número de ondas cercano a 1 entre el bombeo y el campo generado, unido a una anchura inhomogenea relativamente grande, permite que a muy altas desintonías de la onda de bombeo, exista una acusada resonancia

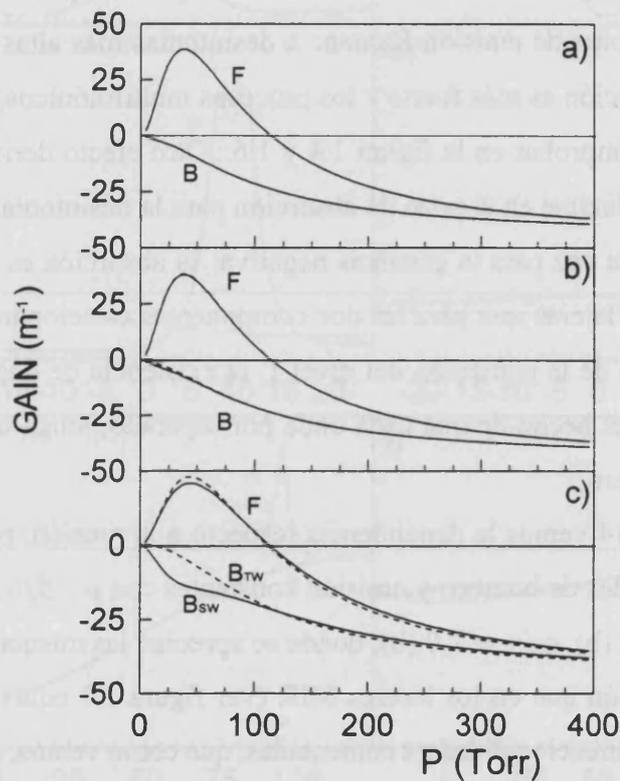


**Figura 1.13.-** Curvas espectrales de ganancia para unos valores fijos de los campos:  $\beta/\gamma_1 = 3$ .  $\alpha/\gamma_1 = 0.1$  (a,b,c) y  $\alpha/\gamma_1 = 3$ . (d,e,f) (resto de parámetros como en la figura 1.10.-) y diferentes desintonías de bombeo:  $\Delta_2/\gamma_1 = 1$  (a,d),  $\Delta_2/\gamma_1 = 10$ . (b,e),  $\Delta_2/\gamma_1 = 100$ . (c,f)

Raman con la onda generada para determinado valor de su desintonía. Esto lo podemos ver en la figura 1.13, donde en las condiciones de la figura 1.11d-(a,b,c)- y de la figura 1.11f-(d,e,f)-, desintonizamos el bombeo en  $\Delta_2/\gamma_1 = 1$ . (a,d),  $\Delta_2/\gamma_1 = 10$ . (b,e),  $\Delta_2/\gamma_1 = 100$ . (c,f). En cualquier caso, el pico de ganancia positiva se produce para  $\Delta_1/\gamma_1 \approx \Delta_2/\gamma_1$ , pudiendo alcanzar muy altas desintonías del bombeo

(en [Luhs et al, 1983] se señala haber conseguido hasta 45 *Ghz* en otra línea de emisión del dímero de sodio, pero de características similares). Podemos recalcar además el hecho de que tal pico de emisión se produce solamente para la componente copropagante y que en  $\Delta_1/\gamma_1 = 0$ . permanece un gran pozo de ganancia negativa, resultado del proceso de absorción de la población del nivel 1. También se aprecia que en el acoplamiento de las dos componentes contrapropagantes, los efectos de saturación y acoplo ya mencionados en láser MIR aparecen produciendo una falta de simetría en el pico de emisión Raman: a desintonías más altas del espectro de emisión, la interacción es más fuerte y los procesos multifotónicos, más probables, como se puede comprobar en la figura 1.4 y 1.6. Otro efecto derivado de la saturación parece producirse en el pozo de absorción para la desintonía nula de la onda generada, pero esta vez para la ganancia negativa: la absorción es mas fuerte para las componentes viajeras que para las dos componentes estacionarias: al competir sobre la absorción de la población del nivel 1, la existencia de dos ondas provoca una saturación, y el hecho de que cada onda por separado, tenga una absorptividad mayor siendo viajera.

En la figura 1.14 vemos la dependencia respecto a la presión, para unas condiciones de amplitudes de bombeo y emisión constantes con  $p : \beta/\gamma_1 = 7$ . y  $\alpha/\gamma = 0.1$  (a),  $\alpha/\gamma = 1.0$  (b),  $\alpha/\gamma = 7.0$  (b), donde se aprecian las mismas características respecto a la presión que en los láseres MIR (ver figura 1.9 equivalente), con las salvedades de unidireccionalidad ya comentadas, que como vemos, se extiende para un larga serie de parámetros.



**Figura 1.14.-** Espectro de ganancia para las ondas copropagante (F) y contrapropagante (B) del campo generado SW y TW en función de la presión para  $\beta p/\gamma_1 = 7 \text{ Torr}$  y  $\alpha p/\gamma_1 = 0.1 \text{ Torr}$  (a),  $\alpha p/\gamma_1 = 1. \text{ Torr}$  (b),  $\alpha p/\gamma_1 = 7. \text{ Torr}$  (c)

## Capítulo 2

# Emisión estacionaria en láseres FIR con cavidad Fabry-Perot y bombeo bidireccional

### 1 Introducción

Nuestra experiencia en el estudio de láseres con ondas estacionarias nos ha llevado a idear un nuevo método para incrementar la ganancia de un LGBO. Consiste en bombear el mismo mediante una onda estacionaria, de forma que cada componente de la misma se introduce por un extremo opuesto de la cavidad. De esta forma, como se ha indicado en la introducción, esperamos que se produzca una compensación entre los “light shifts” inducidos por ambas componentes de la onda estacionaria. Todo ello se describe en el presente capítulo, donde también se estudia el fenómeno conocido como el “Lamb-dip transferido”. Los resultados aquí obtenidos han sido publicados en la ref. [Silva et al, 1995].

Teóricamente, nuestro modelo para este láser supone añadir una onda electromagnética contrapropagante en la ecuación (1.1), lo que conlleva una notable complejidad añadida en (1.9) y en la resolución del sistema de ecuaciones que nos determina la solución estacionaria. No obstante, podremos usar nuestro modelo teórico si nos damos cuenta que en determinadas condiciones, el sistema de cuatro ondas puede simularse como un sistema de tres ondas.

En efecto, en el caso  $k_1 \ll k_2$  (caso, por ejemplo, de los láseres FIR de longitud de onda larga bombeados mediante láser de  $\text{CO}_2$ ), la separación entre nodos de la onda estacionaria generada es grande comparada con la distancia que recorre una molécula durante su vida media en los niveles 0 ó 1. Por lo tanto, puede considerarse que, aproximadamente, cada molécula se encuentra en una posición determinada con respecto a la onda generada y, por tanto, “ve” a la misma como si fuese una onda monocromática de una determinada amplitud, la cual dependerá de la posición de la molécula (amplitud máxima en los vientres de la onda y progresivamente menor a medida que nos acercamos a los nodos de la onda). En estas condiciones, nuestro

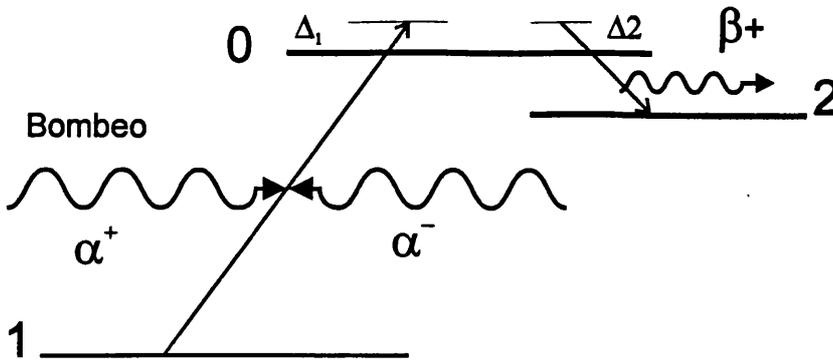


Figura 2.1.-

modelo en que consideramos una onda estacionaria (que ahora será la de bombeo) y una onda propagante (que ahora será la que represente el valor de la onda generada en un determinado punto del espacio), podrá ser aplicado. En la figura 2.1 se muestra el cambio de notación que debemos efectuar en nuestro caso, para poder utilizar las mismas fórmulas matemáticas que en el Capítulo anterior. Observar que ahora las ondas  $\alpha^+$  y  $\alpha^-$  son las de bombeo y  $\beta$  es la onda generada.

Por supuesto, deberemos considerar ahora la contribución a la ganancia que proviene de cada molécula, según su posición en el espacio, y sumar todas estas contribuciones. Así pues, en nuestro caso  $k_1 \gg k_2$ , la ganancia podrá expresarse como:

$$g (m^{-1}) = \frac{G_{total}}{I_{total}} = \frac{\frac{2\hbar\Omega_2 N_2}{\gamma_2} \sum_{i=1}^m \beta_i^2 \cdot IMS_i}{\frac{\epsilon_0 c^4 \hbar^2}{\mu_{02}^2} \sum_{i=1}^m \beta_i^2} \quad (2.1)$$

donde

$$IMS_i = \frac{1}{N_2 \beta / \gamma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} [\text{Im } P_{20}^+ + \text{Im } P_{20}^-] dv \quad (2.2)$$

y

$$\beta_i = 2\beta_{m\acute{a}x} \cdot \sin\left(\frac{z_i \pi}{2m}\right) \quad (2.3)$$

siendo  $\beta_{m\acute{a}x}$  la máxima que puede alcanzar en la cavidad en un vientre y  $z_i : 0 \rightarrow m$  la coordenada longitudinal. Es decir, simplificamos la onda estacionaria existente en una onda viajera, con una ganancia que sería la suma ponderada de las presumibles contribuciones de las distintas moléculas con las que se encontraría la onda estacionaria. Esto puede hacerse así si  $u/\gamma \ll \lambda/2$ , es decir, para  $\lambda$  grandes

o presiones elevadas, lo que ocurre sin problemas, como hemos indicado, en los láseres FIR.

Por supuesto, nuestro modelo también se aplica al caso de bombeo bidireccional de un láser con cavidad en anillo, siempre que en el interior de la cavidad exista un elemento que permita la amplificación de radiación propagándose únicamente en una dirección (co- o contra-propagante). En este caso, por supuesto no hay que efectuar ningún promedio espacial de la ganancia.

## 2 El láser FIR de CH<sub>3</sub>OH. Aumento de la ganancia

Utilizamos el láser FIR de CH<sub>3</sub>OH como ejemplo para experimentar nuestro modelo. Es un láser ya conocido [Laguarta et al, 1985,1], del que sabemos bien sus parámetros y su comportamiento ante distintas condiciones de utilización con bombeo de una sola onda viajera.

Esos parámetros, para la emisión de 118  $\mu m$ , bombeada por la línea 9P(36) del láser de CO<sub>2</sub> son los siguientes (con el cambio de nomenclatura ya explicado):

- $k_2/k_1 = 1/12$  por tanto  $b = 1, a = 12$ .
- $\mu_{10} = 4 \times 10^{-31} Cm$
- $\mu_{20} = 1.75 \times 10^{-30} Cm$
- $N_0 = N_2 = 0$ .
- $N_1 = 2.16 \times 10^{-4} N$
- $N/p = 2.45 \times 10^{20} m^{-3} Pa^{-1}$
- $\gamma_2/p = \gamma_0/p = 0.69 \times 10^6 s^{-1} Pa^{-1}$
- $\gamma_1/\gamma_2 = 2.27$
- $k_2up/\gamma_1 = 30.5 Pa$ .
- $\alpha p/\gamma_1 = 24 Pa$

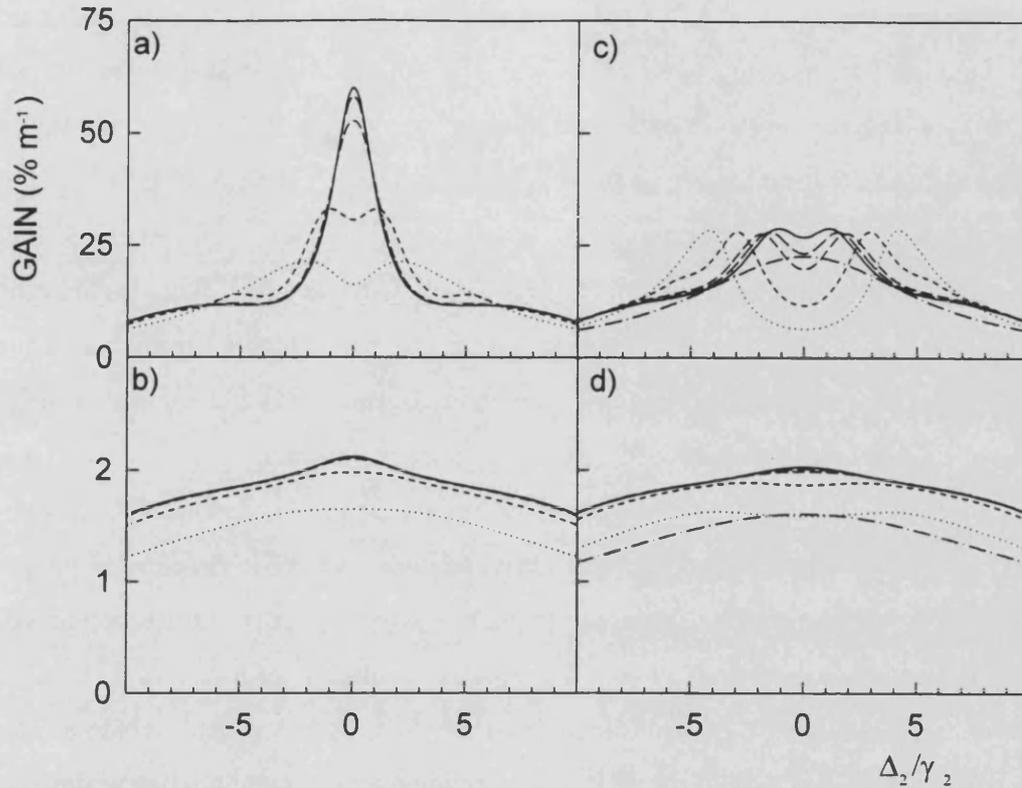
Además de este caso, en el que  $k_1 = 12$  y  $k_2 = 1$ , también consideraremos el caso  $k_2 = 0$ . (los demás parámetros sin cambiar), el cual nos indicará qué sucederá en láseres FIR de mayor longitud de onda (por ejemplo  $\lambda \sim 200$  a  $1000 \mu m$ ).

Variaremos los parámetros de forma análoga a como se hace en [Laguarta et al, 1985,1] ya que son las presuntas condiciones más interesantes a estudiar. Tendremos así dos presiones:  $20 Pa.$  y  $5 Pa.$ , lo que nos darán unos campos de bombeo de amplitud  $\alpha/\gamma_1 = 1.2$  y  $4.8$  respectivamente; y utilizaremos  $\beta/\gamma_1 = 0.1$  y  $\beta/\gamma_1 = 3.0$  como amplitudes del campo generado.

Un primer punto interesante de estudiar es la comparación del bombeo estacionario con otro viajero y con otros posibles “mixtos”, es decir cuando una de las dos ondas contrapropagantes es de distinta amplitud a la otra. Veámos qué pasa cuando  $\alpha^+ = \alpha^-$  (bombeo estacionario),  $\alpha^+ = 0.9\alpha^-$ ,  $\alpha^+ = 0.8\alpha^-$ ,  $\alpha^+ = 0.5\alpha^-$  (bombeos mixtos) y  $\alpha^+ = 0$ . ó  $\alpha^- = 0$ . (bombeos unidireccionales), manteniendo siempre una misma intensidad total de la onda de bombeo. Así, en la figura 2.2 comprobamos para  $\Delta_1/\gamma_2 = 0.$ ,  $P = 5 Pa$  ( $\alpha/\gamma_2 = 4.8$ ) la ganancia espectral de la onda generada para  $\beta/\gamma_2 = 0.1$  (a,c) y  $\beta/\gamma_2 = 3.0$  (b,d) en el caso de gran longitud de onda,  $k_2/\gamma_2 = 0$  (a,b) y el caso de  $\lambda = 118 \mu m$ ,  $k_2/\gamma_2 = 1$  (c,d). La línea continua representa el caso de bombeo equilibrado o perfectamente estacionario ( $\alpha^+ = \alpha^-$ ), la línea discontinua larga, el caso  $\alpha^+ = 0.9\alpha^-$ , la mediana el caso  $\alpha^+ = 0.8\alpha^-$ , la corta el caso  $\alpha^+ = 0.5\alpha^-$  y la punteada y la discontinua raya-punto a los dos casos de bombeo con onda viajera.

Se ha de señalar en las figuras 2.2a,b el campo generado se ha supuesto estacionario, mientras que en las Figuras 2.2c,d se ha supuesto viajero. Debido al fenómeno de “hole-burning”, las ganancias para cada componente del campo estacionario generado son algo menores que las de un campo viajero de la misma intensidad.

Analizando la Figura 2.2, observamos, en primer lugar, que una característica del bombeo bidireccional es la de eliminar la anisotropía que se producía entre las dos ondas generadas contrapropagantes. Esto se ve claramente en la figura (c), donde con un átomo vestido exclusivamente por la onda de bombeo, al incrementar la desigualdad entre las dos componentes de la onda de bombeo, aparece en el perfil de



**Figura 2.2.-** Espectro de ganancia para la onda generada  $\beta^+$ , con bombeo resonante ( $\Delta_1 = 0$ .) y una presión, considerada baja, de  $p = 5 Pa$ . para dos intensidades de la onda generada:  $\beta^+/\gamma_2 = 0.1$  (a,c) y  $\beta^+/\gamma_2 = 3$ . (b,d). Para (a,b)  $k_2/\gamma_2 = 0$ . y el campo generado es una onda estacionaria con  $\beta^+ = \beta^-$  y para (c,d)  $k_1/k_2 = 12$ . y el campo generado es viajero ( $\beta^-/\gamma_2 = 0$ .). Las diferentes curvas corresponden a diferentes condiciones de bombeo, de igual intensidad todas: bombeo estacionario puro ( $\alpha^+/\gamma_2 = \alpha^-/\gamma_2 = 4.8$ ) para la línea continua, mezcla de estacionario y viajero ( $\alpha^+/\gamma_2 = 0.9\alpha^-/\gamma_2$ ) para la línea quebrada larga, mayor desequilibrio en el bombeo ( $\alpha^+/\gamma_2 = 0.8\alpha^-/\gamma_2$ ) para la línea quebrada mediana, aun mayor ( $\alpha^+/\gamma_2 = 0.5\alpha^-/\gamma_2$ ) para la línea quebrada corta, puro bombeo con onda viajera ( $\alpha^+/\gamma_2 = 0$ .) para la línea de puntos e idem ( $\alpha^-/\gamma_2 = 0$ .) para la línea quebrada con puntos.

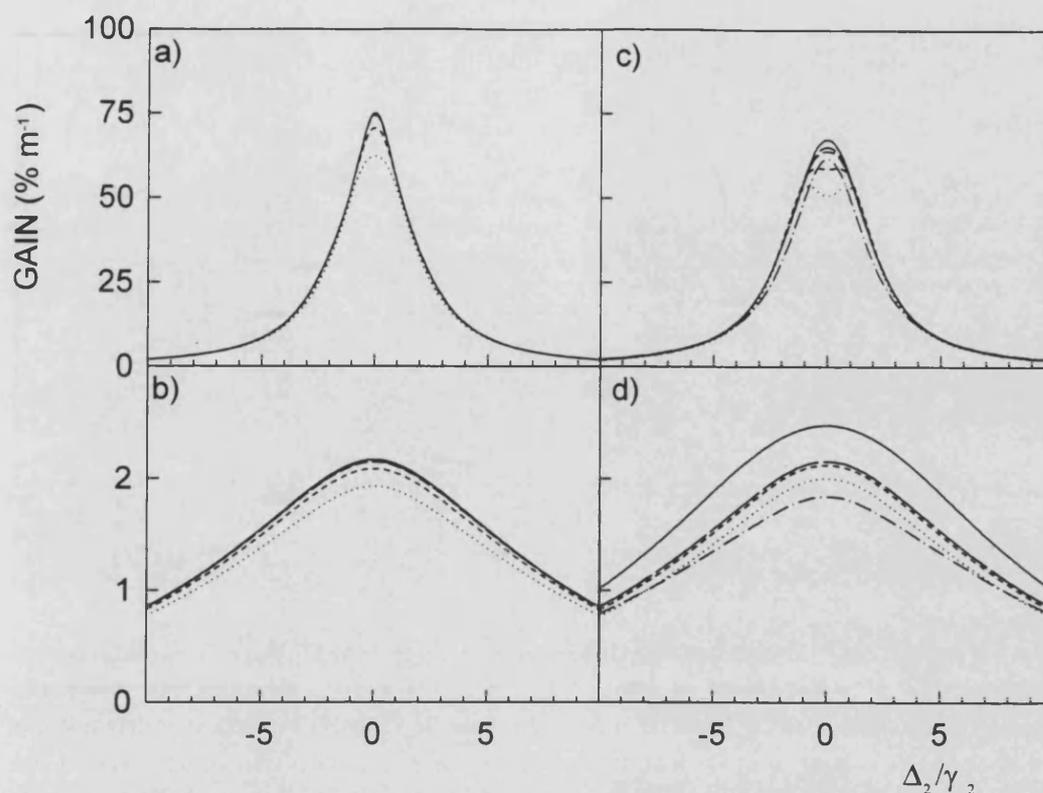
ganancia la típica figura de dos picos para la onda copropagante con la de bombeo predominante y de perfil suave para la contrapropagante, debido al efecto ac-Stark.

En segundo lugar y como resultado más importante, se observa en todos los casos, que en resonancia, la onda generada con bombeo bidireccional tiene una ganancia mucho mayor, siendo mayor cuanto más equilibrado sea este bombeo entre las dos ondas contrapropagantes, es decir, cuanto más estacionario sea el campo. Este aumento de la ganancia para un sistema de bombeo estacionario es el resultado

buscado y se puede explicar fácilmente a partir de la teoría del átomo vestido (véase el Apéndice I para una concisa explicación). Para un caso de átomo vestido por dos ondas contrapropagantes en resonancia como el que queda ilustrado en la figura III.3, una onda de prueba de pendiente  $b = 0$  (como sería el caso ideal  $k_2/\gamma_2 = 0$  mencionado, o el caso aproximado de cualquier láser FIR) resonará con el subnivel  $|0, q = 0, n\rangle$  para una desintonía nula, en todo el rango de velocidades posible; de este modo, la ganancia que exhiba será mucho mayor para sintonía central que la que exhibiría el mismo láser bombeado por una onda viajera; onda viajera que al vestirlo, producirá el desplazamiento ac-Stark que impedirá tal resonancia. De hecho, lo que sucede en el caso de onda de bombeo estacionaria es que los desplazamientos ac-Stark producidos por cada componente de dicha onda se compensan entre sí, ya que son de signo contrario. Con esta explicación, es como si solamente existieran procesos incoherentes paso a paso  $1 \rightarrow 0 \rightarrow 2$  y participaran de ellos todas las moléculas, excepto aquellas con  $v = 0$  (que sí participarían de otros procesos). Debido a esto, los casos con  $k_2/\gamma_2 = 0$  (a,b), tienen una ganancia mayor que aquellos reales con  $k_2/\gamma_2 = 1$  (c,d). Asimismo, el aumento de ganancia más destacado aparece en (a), para una amplitud de onda generada baja frente a la amplitud de la onda de bombeo, ya que es cuando esta última viste más claramente a la molécula y se establece el diagrama de niveles explicado.

Estudiando más detenidamente este caso, vemos que el pico de resonancia central es de anchura  $\gamma_1$ , como cabría esperar en niveles vestidos por la onda de bombeo, apareciendo después unas mesetas para desintonía mayores que corresponden a las resonancias con el nivel que se establece por las moléculas con  $v = 0$  (segmento vertical en el diagrama de la figura III.3 según esten en el nodo o vientre de la onda estacionaria, llegando a  $\Delta_2/\gamma_2 = \pm\alpha/\gamma_2 = \pm 4.8$ . Esto desaparece para intensidades de onda generada altas al complicarse la distribución de niveles y promediarse los distintos efectos: el pico anterior se ensancha y el perfil se uniformiza más (Figura 2.2b).

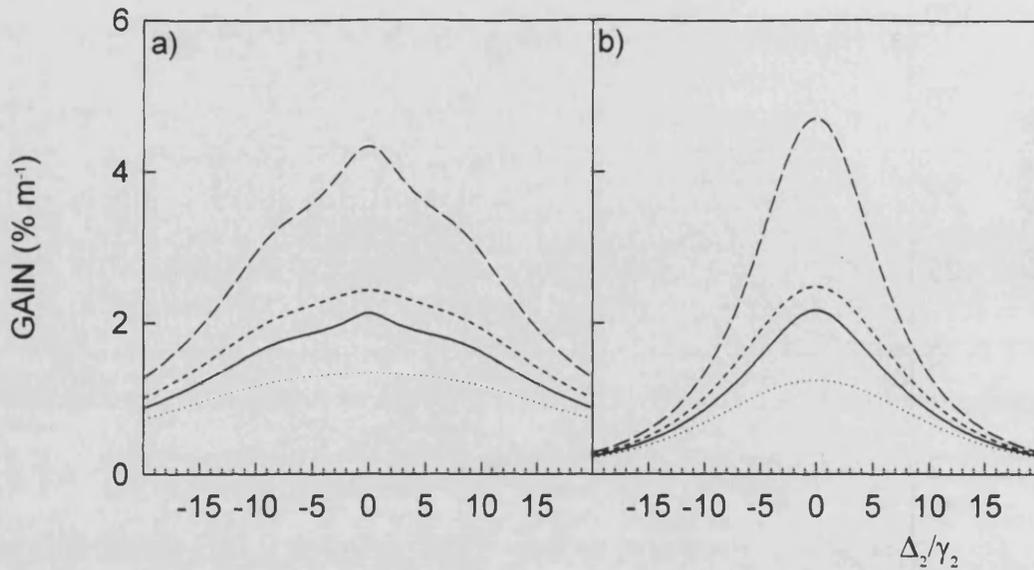
A altas presiones (figura 2.3, con mismos casos anteriores, pero  $P = 20 Pa$ , lo que para un bombeo fijo significa ahora una  $\alpha/\gamma_2 = 1.2$ ), las semejanzas son



**Figura 2.3.-** Lo mismo que en la figura anterior, pero para una presión  $p = 20 \text{ Pa}$ . ( $\alpha^+/\gamma_2 = \alpha^-/\gamma_2 = 1.2$ )

grandes entre los casos  $k_2 = 0$  ( $\lambda$  grande) y  $k_2 = 1$  ( $\lambda = 118 \mu\text{m}$ ), como cabría esperar al desdibujarse en cierto grado la estructura de niveles del átomo vestido, dado que ahora la intensidad de bombeo es más baja ( $\alpha^+ = \alpha^- = 1.2\gamma_2$ ). Se produce de esta forma un promediado entre los diferentes efectos multifotónicos que proporciona un perfil de ganancia poco sensible a tener  $k_2/\gamma_2 = 0$  ó  $k_2/\gamma_2 = 1$ . Incluso desaparece la anisotropía por el efecto ac-Stark para un bombeo desequilibrado. En cambio, el hecho de una ganancia mayor para bombeo estacionario, sigue siendo apreciable, al mantenerse en cierta medida los procesos que le dieron origen.

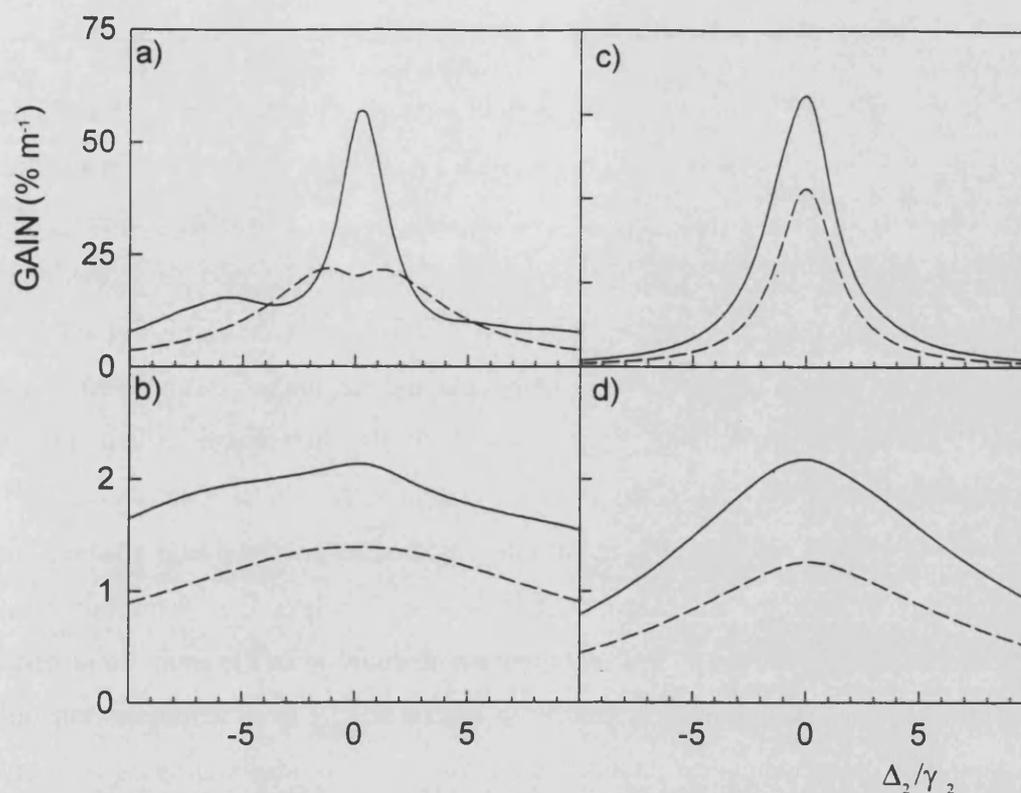
A continuación, comparamos las curvas de ganancia de nuestro láser, en el caso de generar una onda estacionaria, con las que obtendríamos de un láser bombeado bidireccionalmente y generando una sola onda viajera (figura 2.4). En ambos casos consideramos  $k_2/\gamma_2 = 0$ . y resonancia ( $\Delta_1/\gamma_2 = 0$ .) y realizamos los cálculos para dos presiones distintas ( $p = 5 \text{ Pa}$  y  $p = 20 \text{ Pa}$ ). Las curvas representan la



**Figura 2.4.-** Espectro de ganancia para la onda generada  $\beta^+$ , con bombeo bidireccional resonante ( $\Delta_1 = 0.$ ) y una presión de  $p = 5 Pa$  (a) y  $p = 20 Pa$  (b). La línea continua corresponde a una onda estacionaria de  $\beta^+/\gamma_2 = \beta^-/\gamma_2 = 3$  (si bien la ganancia indicada se refiere a la que corresponde a la componente  $\beta^-$ ), La línea quebrada larga, a una emisión en onda viajera con  $\beta^+/\gamma_2 = 3.$ , la línea quebrada corta a la emisión TW con  $\beta^+/\gamma_2 = 3\sqrt{2}$ , y la línea punteada a la emisión TW con  $\beta^+/\gamma_2 = 6.$

ganancia en la emisión en onda viajera del láser, suponiendo que la amplitud de la misma tome los siguientes valores:  $\beta^+/\gamma_2 = 3., 3\sqrt{2}$ , y  $6.$ , y la comparamos con el caso de onda generada estacionaria con  $\beta^+ = \beta^- = 3.0\gamma_1$ . Observar que la onda viajera con  $\beta^+/\gamma_2 = 3\sqrt{2}$  presenta la misma intensidad total que la onda estacionaria. Si comparamos precisamente estos dos casos, vemos que existe un proceso de saturación en el caso de la onda generada estacionaria, lo que es debido al fenómeno de “hole-burning” de la onda estacionaria, fenómeno que no exhibe la onda viajera por su homogeneidad espacial.

Otra cuestión que estudiamos es ver qué pasaría ante una ligera desintonía de la onda de bombeo. En la figura 2.5 se muestran los espectros de ganancia de la onda estacionaria generada por un bombeo bidireccional y un bombeo unidireccional, en el caso de  $\lambda$  grande ( $k_2/\gamma_2 = 0.$ ), con  $p = 5 Pa$  (a,b) y  $p = 20 Pa$  (c,d) y dos intensidades de la onda generada:  $\beta/\gamma_2 = 0.1$  (a,c) y  $\beta/\gamma_2 = 3.$  (b,d), para una desintonía de bombeo de  $\Delta_1/\gamma_1 = 2.$



**Figura 2.5.-** Curvas de ganancia para bombeo estacionario (línea continua) o viajero (línea quebrada) donde en (a,b) tenemos las mismas condiciones que la figura 2.1.- (a,b) respectivamente y en (c,d) las mismas que en la figura 2.2.- (a,b). La desintonía de bombeo es ahora de  $\Delta_1/\gamma_2 = 2$ .

Puede observarse que el cambio con respecto a los resultados anteriores (Figuras 2.2 y 2.3) es mínimo, afectando a las desintonías más extremas de la cavidad. Aparece una ligera asimetría de la curva y un corrimiento del pico central, no obstante, mucho más pequeño que  $\Delta_1/\gamma_1$ . Ello es debido a las distorsiones que sufre el nivel fundamental del átomo vestido, para pequeños valores de  $v$  [Pujol et al, 1985], distorsiones que en mayor grado, pueden apreciarse en la figura III.5. Este hecho, también puede considerarse positivo frente a un láser FIR con bombeo unidireccional.

Los resultados teóricos aquí presentados [Silva et al, 1995] motivaron el estudio experimental, publicado en [Corbalán et al, 1997], que corrobora estos resultados.

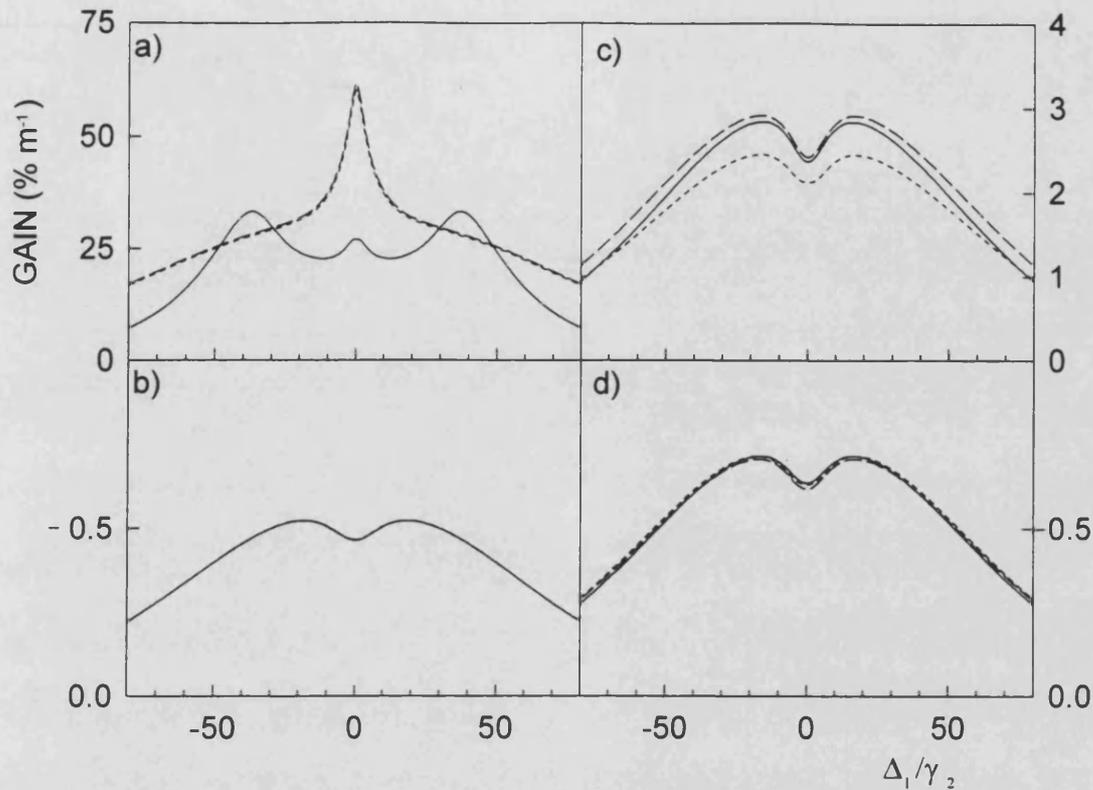
### 3 El “Lamb-dip” transferido

El “Lamb-dip” es el hoyo que se forma en el espectro de absorción o ganancia de una onda estacionaria cuando dicha onda se hace resonante con la transición a la que está acoplada. Ello es debido a que en dichas condiciones, las dos componentes contra-propagantes de dicha onda resuenan con el mismo grupo de velocidades moleculares (las moléculas con velocidad  $v = 0$  en la dirección de propagación de las ondas) y por tanto, la absorción o ganancia total de la onda se satura. Resulta así un método extraordinariamente preciso para comprobar la resonancia de una onda respecto una transición.

En un láser de 3 niveles, el bombeo bidireccional resonante puede producir un Lamb-dip en el espectro de absorción de la onda de bombeo. Esta disminución en la absorción puede provocar a su vez una disminución en la ganancia de la onda generada, la cual se denomina “Lamb-dip transferido”. Este fenómeno tan útil para calibrar la frecuencia de emisión de un láser, ha sido observado y es utilizado experimentalmente [Koepp et al, 1978] [Inguscio et al, 1979], pero no ha sido descrito teóricamente ni analizado.

Apoyándonos en el láser FIR anteriormente utilizado, presentamos los resultados de la ganancia, en función de la desintonía de la onda de bombeo (cuya variación es la que produce el efecto), en la figura 2.6 para  $P = 5 Pa$  ( $\alpha = 4.8\gamma_2$ ) y en la figura 2.7 para  $P = 20 Pa$  ( $\alpha = 1.2\gamma_2$ ). En ambos casos se muestran en la parte superior la ganancia de la onda generada, y en la inferior, la correspondiente absorción de la onda de bombeo. En (a, b) es  $\beta^- = 0.1\gamma_2$  y en (c,d) es  $\beta^- = 3\gamma_2$ . Las diferentes líneas corresponden a la onda SW generada por el láser FIR con  $k_2 = 1$  ( $\lambda = 118 \mu m$ )-línea continua-, y a las TW(SW) generadas por un láser con  $k_2 = 0$  ( $\lambda$  grande), tal y como explicamos en el apartado anterior (líneas a trazos largos y líneas a trazos cortos respectivamente).

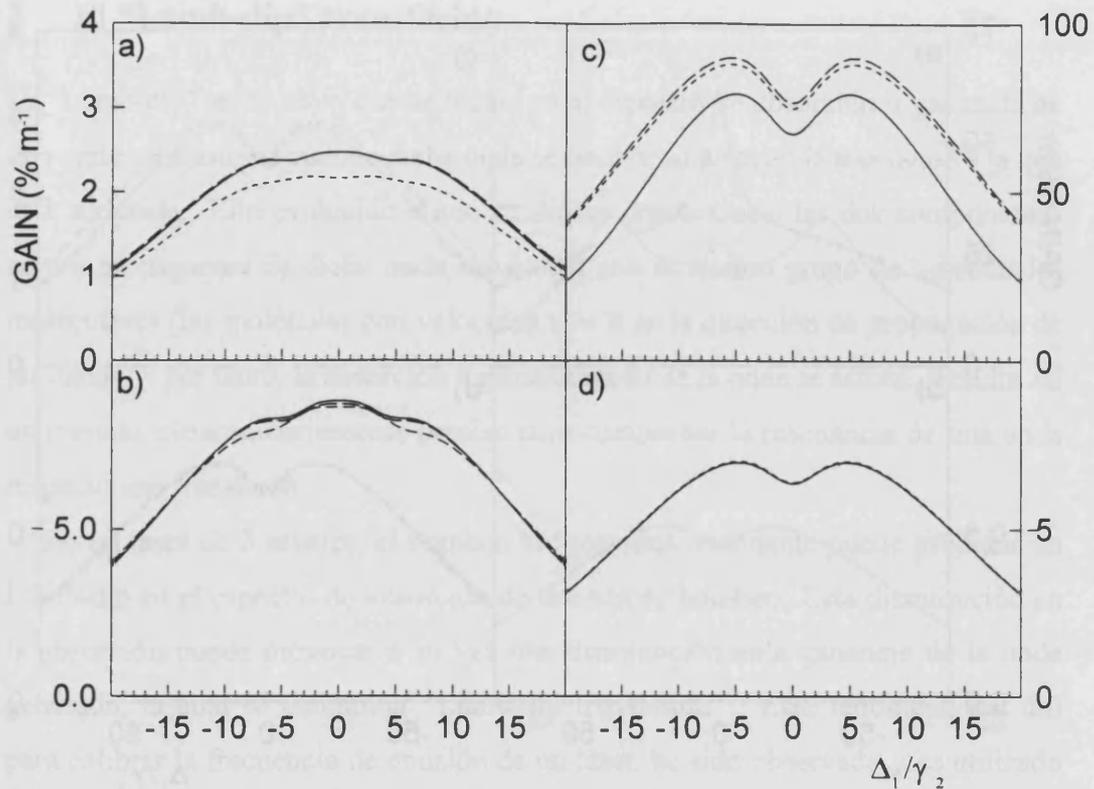
Si observamos primero la absorción de la onda de bombeo (2ª fila en las figuras 2.6 y 2.7), vemos que aparece el Lamb dip en todos los casos, salvo en la figura 2.6a, donde la onda de bombeo es débil ( $\alpha = 1.2\gamma_2$ ) y la generada es fuerte ( $\beta^- = 3\gamma_2$ ), produciendo un desdoblamiento de los niveles (por efecto Stark dinámico) tan fuerte



**Figura 2.6.-** Espectros de ganancia de la onda generada (a,c) y perfiles de absorción de la onda de bombeo (c,d) versus desintonía de bombeo para  $p = 5 Pa.$ ,  $\Delta_2/\gamma_2 = 0$ . Las líneas continuas corresponden a  $k_1/k_2 = 12$ . La línea quebrada larga corresponde al caso con  $k_2/\gamma_2 = 0$ . y campo generado TW, y la línea quebrada corta igual, con campo generado SW. En (a,b) la amplitud de la onda generada es de  $\beta/\gamma_2 = 0.1$  y en (c,d) de  $\beta/\gamma_2 = 3$ .

que este efecto domina sobre el del Lamb dip en la absorción de la onda de bombeo.

Observando a continuación la ganancia de la onda láser (1ª fila en las figuras 2.6 y 2.7), vemos que se produce una transferencia del Lamb dip sólo en los casos en que ambas ondas (la de bombeo y la generada) son de intensidad comparable (Figuras 2.6c y 2.7c). En cambio, en la Figura 2.6a que corresponde a un caso de presión débil y  $\alpha$  grande ( $\alpha = 4.8\gamma_2$ ), la transferencia del Lamb-Dip desaparece para una onda generada débil ( $\beta^- = 0.1\gamma_2$ ), apareciendo un pico en lugar de un pozo. Esto es debido a la contribución simultánea en la amplificación de muchos grupos de velocidad (todos para el caso  $k_2/\gamma_2 = 0$ .) por la resonancia con el nivel fundamental del átomo vestido por dos ondas contrapropagantes, tal como se ha descrito en la Sección 2. En la Figura 2.7a, el mismo factor indicado antes es el



**Figura 2.7.-** Igual que la figura anterior, pero con  $p = 20$  Pa. En (a,b)  $\beta/\gamma_2 = 3$ . y en (c,d)  $\beta/\gamma_2 = 0.1$

responsable de la ausencia de Lamb dip transferido.

Concluimos de ésta manera que el Lamb-Dip se transfiere cuando tanto las ondas de bombeo como las generadas, son del mismo orden, es decir cuando se mezclan sus efectos sobre el nivel intermedio. En los casos en que una onda prevalece sobre otra, los procesos coherentes producidos dominan sobre tal transferencia, destruyendo el efecto.

Este proceso es además relativamente insensible a una desigualdad en la amplitud de las dos componentes de la onda estacionaria de bombeo ( $\alpha^+ \neq \alpha^-$ ) y a una desintonía ligera de la onda generada, teniendo practicamente las mismas curvas de ganancia que en las figuras 2.6 y 2.7 [Silva et al, 1995].

# **Capítulo3**

## **Inestabilidades y caos en un láser de 2 niveles con cavidad Fabry-Perot.**

### **1 Introducción.**

En este capítulo consideramos no sólo la emisión estable de los láseres con cavidad Fabry-Perot, sino también su comportamiento dinámico dependiente del tiempo. Consideramos el bombeo constante, y estudiamos las inestabilidades y caos que pueden aparecer en el sistema. Así pues, a diferencia de los capítulos anteriores, donde sólo calculábamos la ganancia del sistema para un determinado campo generado de amplitud constante, aquí introducimos también una ecuación dinámica para la amplitud del campo generado dentro de la cavidad, y calculamos el valor que adopta en cada caso.

Si bien el objetivo fundamental de esta tesis es el estudio de los láseres de gas bombeados ópticamente, en este capítulo consideraremos el caso más fundamental de láser Fabry-Perot: el láser de dos niveles, con bombeo incoherente y con ensanchamiento homogéneo. Su comportamiento dinámico ha sido estudiado sólo por Casperson y Chenkosol [Chenkosol et al, 1993], si bien su estudio es de alcance limitado. Precisamente, Casperson [Casperson, 1980] [Casperson, 1988] [Chenkosol et al, 1993] había analizado la dinámica de un láser de dos niveles en cavidad Fabry-Perot, para el láser de Xe, el cual posee ensanchamiento inhomogéneo (por efecto Doppler)

Cualquier estudio de la dinámica de un láser bombeado ópticamente con cavidad Fabry-Perot (o con cavidad en anillo y emisión bidireccional, que será el caso a considerar en el próximo capítulo) se beneficiará del conocimiento previo del caso más simple y básico que aquí vamos a considerar.

Es por tanto un sistema de 2 niveles sin ensanchamiento Doppler, donde se ha tenido en cuenta la influencia de los mecanismos de relajación no considerados en la mayoría de estudios previos de dinámica láser:

- tasas de relajación diferentes de los dos niveles hacia el exterior del sistema
- tasa de relajación entre ambos niveles (desde el superior al inferior)

En el caso de láser en anillo, estas condiciones, se han tenido en cuenta sólo en [Tomás et al, 1995] . En el láser en cavidad Fabry-Perot, Chenkosol y Casperson [Chenkosol et al, 1993] las han tenido ya en cuenta sólo en un caso particular.

Nuestro trabajo, extendiéndose más allá de lo desarrollado por Chénkosol y Cásper-son, ha consistido en el hallazgo de una solución analítica para la emisión estacionaria, así como una expresión en forma de serie de potencias, mediante un procedimiento de ecuaciones recurrentes, la cual permite un análisis lineal de estabilidad en un amplio rango de condiciones; y por último, un extenso análisis del comportamiento temporal del sistema. Este trabajo ha sido recientemente publicado en [Font et al, 1997] ; los cálculos analíticos han sido desarrollados principalmente por J.L.Font, habiéndonos ocupado nosotros principalmente del estudio numérico.

## 2 Ecuaciones de Maxwell-Block.

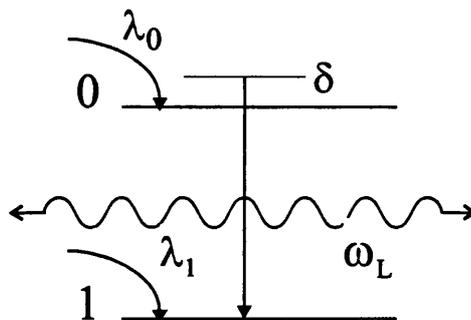


Figura 3.1.-

El bombeo se produce de forma incoherente y la emisión se genera entre los dos niveles considerados, tanto en sentido copropagante como contrapropagante en la dirección del eje  $z$ .

Nuestros campos corresponderán a un modo de la cavidad y en la aproximación

de la onda plana serán de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\vec{E}(z, t) &= \frac{1}{2} (E(t) \vec{e} e^{-i(\Omega t - kz)} + c.c.) \\ \vec{E}'(z, t) &= \frac{1}{2} (E'(t) \vec{e} e^{-i(\Omega t + kz)} + c.c.)\end{aligned}\quad (3.1)$$

para las ondas generadas, copropagante y contrapropagante respectivamente. El término *c.c.* hace referencia a la expresión complejo conjugada de la escrita en el mismo paréntesis; siendo  $E(t)$  y  $E'(t)$  sus respectivas amplitudes complejas.  $k$  es su número de onda.  $\Omega$  es una frecuencia de referencia constante para la emisión del láser. Si  $E(t)$  es complejo,  $E(t) = |E(t)| e^{-i\varphi(t)}$ , la frecuencia instantánea de la onda  $\vec{E}(z, t)$  será  $\Omega_L(t) = \Omega + \dot{\varphi}(t)$ .

Si esos campos se sitúan en una cavidad Fabry-Perot, de longitud  $l$ , deberán cumplir las condiciones de contorno:

$$\vec{E}(0, t) + \vec{E}'(0, t) = 0 \quad \vec{E}(l, t) + \vec{E}'(l, t) = 0 \quad (3.2)$$

donde, si  $kl = n\pi$ , tendremos la solución

$$E(t) = -E'(t)$$

y por tanto nuestro campo, dentro de la cavidad se puede expresar en la forma

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}(z, t) + \vec{E}'(z, t) = E(t) \vec{e} \cos \Omega_L t \sin kz \quad (3.3)$$

Para llegar a esta conclusión, hemos supuesto que:

- Que toda la dependencia espacial de los campos se encuentra en los términos  $e^{\pm ikz}$  y por tanto las amplitudes son independientes de la posición en la cavidad. Esto es cierto para un amplio rango de reflectividad de los espejos de la cavidad, para reflectividades bajas de alfunos de los espejos, se inducirían desigualdades en las ondas contrapropagantes y por tanto patrones longitudinales espaciales, que corresponderían a la excitación de modos longitudinales de la cavidad adyacentes, caso que aquí no consideraremos. Es equivalente a la "aproximación de modo único" (o "improved single-mode approximation") introducida por Lugiato et al. [Lugiato et al, 1986] para un láser en anillo
- Y que las amplitudes de los campos permanecen constantes a lo largo de la cavidad, es decir, las pérdidas en la misma, representadas por el parámetro  $\sigma_c$  son

uniformes a lo largo de ésta. Esto se da para valores altos de la reflectividad de los espejos y ganancias no excesivamente grandes. Es el equivalente de la "aproximación de campo uniforme" en los láseres en anillo.

Por otra parte, la materia se describe a partir de los elementos de la matriz densidad  $\rho_{ij}(v, z, t)$  ( $i, j = 0, 1$ ) que nos describen tanto las poblaciones de los dos niveles,  $\rho_{ii}$  como las coherencias entre ellos  $\rho_{12}$ . Su evolución temporal nos la da la ecuación de Schrödinger:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = -\frac{i}{\hbar} [H_a - \vec{\mu} \vec{E}, \rho] + \Gamma \rho$$

donde  $H_a$  corresponde al hamiltoniano atómico sin interacción con campo eléctrico y  $\vec{\mu} \vec{E}$  a dicha interacción, siendo  $\vec{\mu}$  el operador momento dipolar, verificándose  $(\vec{\mu})_{01} \equiv \langle 0 | \vec{\mu} | 1 \rangle \equiv \mu_{01} \vec{e}_{01}$  suponiendo que este elemento de matriz es real. El término  $\Gamma \rho$  hace referencia a la influencia de la relajación. Asimismo, no se ha considerado la velocidad de las moléculas del medio al estudiar nuestro sistema sin ensanchamiento inhomogeneo.

En esta ecuación, para la variación del elemento de la matriz densidad  $\rho_{ij}$  tendremos

$$-\frac{i}{\hbar} [H_a, \rho]_{ij} = -\frac{i}{\hbar} (W_i - W_j) \rho_{ij} = -i \Omega_{01} \rho_{01} \quad \text{si } i \neq j, \quad 0 \quad \text{si } i = j \quad (3.4)$$

donde  $W_i$  es la energía del nivel  $i$  y por tanto  $\Omega_{01}$  la frecuencia de la transición entre los niveles 0 y 1. Asimismo

$$-\frac{i}{\hbar} [-\vec{\mu} \vec{E}, \rho]_{ij} = -i \sum_k \left( -\frac{1}{\hbar} (\vec{\mu} \vec{E})_{ik} \rho_{kj} + \frac{1}{\hbar} (\vec{\mu} \vec{E})_{kj} \rho_{ik} \right)$$

donde

$$-\frac{1}{\hbar} (\vec{\mu} \vec{E})_{ij} = -2\alpha(t) \cos \Omega_L t \sin kz \quad \text{si } i \neq j, \quad 0 \quad \text{si } i = j \quad (3.5)$$

con

$$\alpha(t) = \mu_{01} \frac{E_1(t)}{2\hbar} \vec{e}_{01} \vec{e} \quad (3.6)$$

es la frecuencia de Rabi de la transición.

Respecto al término de relajación  $\Gamma \rho$ , para su elemento  $ij$ , puede ponerse

$$(\Gamma \rho)_{ii} = -\gamma_i \rho_{ii} + \sum_k \gamma_{ik} \rho_{kk} + \lambda_i \quad \text{si } j = i \quad (3.7)$$

es decir, para los elementos de la matriz densidad que describen las poblaciones de los niveles; y

$$(\Gamma\rho)_{ij} = -\left(\frac{1}{2}(\gamma_i + \gamma_j) + \Gamma_{ij}^c\right)\rho_{ij} = \Gamma_{ij}\rho_{ij} \quad \text{si } j \neq i \quad (3.8)$$

es decir, para los elementos que definen las coherencias. En estas expresiones,  $\gamma_i$  corresponde a las pérdidas del nivel  $i$  hacia fuera del sistema,  $\gamma_{ij}$  a las pérdidas del nivel  $i$  hacia el nivel  $j$ ,  $\lambda_i$  al bombeo incoherente sobre el nivel  $i$ ,  $\Gamma_{ij}^c$  a la influencia de las colisiones desfasantes sobre la coherencia entre los niveles  $i$  y  $j$ , y entonces  $\Gamma_{ij}$  a las pérdidas totales de la coherencia  $ij$ .

Quedan entonces las ecuaciones de evolución temporal en la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\rho_{ij} &= -\frac{i}{\hbar}\left[H_a - \vec{\mu}\vec{E}, \rho\right]_{ij} + (\Gamma\rho)_{ij} \\ &= -\frac{i}{\hbar}[H_a, \rho]_{ij} - \frac{i}{\hbar}\left[-\vec{\mu}\vec{E}, \rho\right]_{ij} + (\Gamma\rho)_{ij} \\ &= -i\Omega_{ij}\rho_{ij} - i\sum_k\left(-\frac{1}{\hbar}\left(\vec{\mu}\vec{E}\right)_{ik}\rho_{kj} + \frac{1}{\hbar}\left(\vec{\mu}\vec{E}\right)_{kj}\rho_{ik}\right) + (\Gamma\rho)_{ij} \end{aligned} \quad (3.9)$$

que para cada elemento  $i, j = 0, 1$  nos da:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{00} &= -\gamma_0\rho_{00} + \gamma_{01}\rho_{11} + \lambda_0 - i\left(-\frac{1}{\hbar}\left(\vec{\mu}\vec{E}\right)_{01}\rho_{10} + \frac{1}{\hbar}\left(\vec{\mu}\vec{E}\right)_{10}\rho_{01}\right) \\ &= -\gamma_0\rho_{00} + \gamma_{01}\rho_{11} + \lambda_0 + i2\alpha(t)\cos\Omega_L t \sin kz(\rho_{10} - \rho_{01}) \\ \dot{\rho}_{11} &= -\gamma_1\rho_{11} + \gamma_{10}\rho_{00} + \lambda_1 - i\left(-\frac{1}{\hbar}\left(\vec{\mu}\vec{E}\right)_{10}\rho_{01} + \frac{1}{\hbar}\left(\vec{\mu}\vec{E}\right)_{01}\rho_{10}\right) \\ &= -\gamma_1\rho_{11} + \gamma_{10}\rho_{00} + \lambda_1 - i2\alpha(t)\cos\Omega_L t \sin kz(\rho_{10} - \rho_{01}) \\ \dot{\rho}_{01} &= -i\Omega_{01}\rho_{01} - \Gamma_{01}\rho_{01} - i\left(-\frac{1}{\hbar}\left(\vec{\mu}\vec{E}\right)_{01}\rho_{11} + \frac{1}{\hbar}\left(\vec{\mu}\vec{E}\right)_{01}\rho_{00}\right) \\ &= -i\Omega_{01}\rho_{01} - \Gamma_{01}\rho_{01} + i2\alpha(t)\cos\Omega_L t \sin kz(\rho_{11} - \rho_{00}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dada la forma de las ecuaciones, podemos definir nuevas variables para la materia: la suma y diferencia de poblaciones  $M(z, t)$ ,  $D(z, t)$ , y la parte real y la imaginaria de la coherencia,  $C(z, t)$  y  $S(z, t)$ ; en la forma

$$\begin{aligned} \rho_{00}(z, t) &= \frac{1}{2}(M(z, t) + D(z, t)) \\ \rho_{11}(z, t) &= \frac{1}{2}(M(z, t) - D(z, t)) \\ \rho_{01}(z, t) &= \frac{1}{2}(C(z, t) + iS(z, t))e^{-i\Omega_L t} \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde se introduce el factor  $e^{-i\Omega_L t}$  para dar cuenta de la oscilación en la coherencia

producida por la frecuencia de la transición. Así quedan las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2\dot{M} &= -(\gamma_0 + \gamma_1) M - (\gamma_0 - \gamma_1) D + (\gamma_{01} + \gamma_{10}) M + (\gamma_{01} - \gamma_{10}) D + 2(\lambda_0 + \lambda_1) \\ 2\dot{D} &= -(\gamma_0 - \gamma_1) M - (\gamma_0 + \gamma_1) D + (\gamma_{01} - \gamma_{10}) M + (\gamma_{01} + \gamma_{10}) D + 2(\lambda_0 - \lambda_1) \\ &\quad + 8\alpha(t) \cos \Omega_L t \sin kz (C \sin \Omega_L t + S \cos \Omega_L t) \end{aligned}$$

$$\dot{C} + \Omega_L S = \Omega_{10} S - \Gamma_{10} C + 4\alpha(t) \cos \Omega_L t \sin \Omega_L t \sin kz D$$

$$\dot{S} - \Omega_L C = -\Omega_{10} C - \Gamma_{10} S - 4\alpha(t) \cos^2 \Omega_L t \sin kz D$$

si hacemos  $\sin \Omega_L t \cos \Omega_L t = \frac{1}{2} \sin 2\Omega_L t$  y  $\cos^2 \Omega_L t = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\Omega_L t)$  podremos eliminar los términos con la frecuencia  $2\Omega_L$  al ser ésta muy elevada y dar promedios nulos cuando integramos sobre un intervalo de tiempo adecuado, que puede ser por ejemplo el tiempo necesario para efectuar una medida (Aproximación de la onda rotante o “Rotating Wave Aproximation”)

Tendremos así el conjunto de ecuaciones para la materia:

$$\begin{aligned} \dot{M} &= -\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1 - \gamma_{01} - \gamma_{10}) M - \frac{1}{2}(\gamma_0 - \gamma_1 - \gamma_{01} + \gamma_{10}) D + (\lambda_0 + \lambda_1) \\ \dot{D} &= -\frac{1}{2}(\gamma_0 - \gamma_1 - \gamma_{01} + \gamma_{10}) M - \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1 - \gamma_{01} - \gamma_{10}) D + (\lambda_0 - \lambda_1) + 2\alpha S \sin kz \\ \dot{C} &= -\Gamma_{10} C + (\Omega_{10} - \Omega_L) S \\ \dot{S} &= -\Gamma_{10} S - (\Omega_{10} - \Omega_L) C - 2\alpha D \sin kz \end{aligned} \quad (3.12)$$

Respecto a las ecuaciones del campo, si partimos de la expresión derivada de las ecuaciones de Maxwell

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \vec{E} = \sigma_c \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P} \quad (3.13)$$

donde

$$P(z, t) = NTr[\rho\mu] = N(\rho_{01}\mu_{10} + c.c.) \quad (3.14)$$

y según las expresiones de  $\vec{E}$  y  $\rho_{01}$ , multiplicando por  $\sin kz$ , integrando entre 0 y  $l$  y despreciando las derivadas temporales segundas de  $E$  y las segundas de  $S$  y  $C$  (aproximación de la envolvente lentamente variable con el tiempo -SVEA-) obtenemos para las partes real e imaginaria:

$$\begin{aligned} \dot{E} + \frac{\sigma_c}{2\epsilon_0} E &= -\frac{N\mu}{2\epsilon_0} \Omega_L \frac{\int S \sin kz dz}{\int \sin^2 kz dz} \\ \Omega_L^2 &= \frac{\Omega_c^2}{1 + \frac{N\mu}{\epsilon_0 E} \frac{\int C \sin kz dz}{\int \sin^2 kz dz}} \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde  $\Omega_c = \frac{k}{c}$  equivale a la frecuencia de la cavidad. La última expresión la podemos desarrollar hasta el primer término de su expansión binomial, y con la introducción de la frecuencia de Rabi, quedarían

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} + \frac{\sigma_c}{2\varepsilon_0}\alpha &= -\frac{1}{2} \frac{N\mu^2\Omega_L}{2\hbar\varepsilon_0} \frac{\int S \sin kz dz}{\int \sin^2 kz dz} \\ \Omega_L &= \Omega_c - \frac{1}{2} \frac{N\mu^2\Omega_L}{2\hbar\varepsilon_0} \frac{1}{\alpha} \frac{\int C \sin kz dz}{\int \sin^2 kz dz}\end{aligned}\quad (3.16)$$

Nos queda de esta forma el siguiente conjunto de ecuaciones que describen el láser de dos niveles con cavidad Fabry-Perot:

$$\begin{aligned}\dot{M} + \gamma_s M &= \lambda_s - \gamma_d D \\ \dot{D} + \gamma_s D &= \lambda_d + 2\alpha_R S \sin(kz) - \gamma_d M \\ \dot{C} + C &= \Delta S \\ \dot{S} + S &= -\Delta C - 2\alpha_R D \sin(kz) \\ \dot{\alpha}_R + \sigma \alpha_R &= -\frac{g}{2} \bar{S} \\ \Delta &= \omega_{01} - \omega_L = \frac{g}{2\alpha_R} \bar{C} - (\omega_c - \omega_{01})\end{aligned}\quad (3.17)$$

Donde relajaciones, bombeos y frecuencias se han normalizado a  $\Gamma_{10}$ , derivándose respecto una nueva variable temporal  $\tau = \Gamma_{10} t$ . Los parámetros que aparecen en (3.17) tienen el siguiente significado:

- $\gamma_s = \frac{\gamma_0 + \gamma_1}{2\Gamma_{10}}$  y  $\gamma_d = \frac{\gamma_0 - \gamma_1}{2\Gamma_{10}}$  corresponden a la suma y diferencia de relajaciones de los niveles 0 y 1.
- $\lambda_s = \frac{\lambda_0 + \lambda_1}{\Gamma_{10}}$  y  $\lambda_d = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\Gamma_{10}}$  la suma y diferencia de los bombeos incoherentes.
- $\sigma = \frac{\sigma_c}{2\varepsilon_0\Gamma_{10}}$  corresponde a las pérdidas de la cavidad.
- $g = \frac{N\mu^2\Omega_L}{2\hbar\varepsilon_0} \frac{1}{\Gamma_{10}^2}$  Es el factor de ganancia en ausencia de saturación.
- $\alpha_R(t) = \frac{1}{2} \frac{\mu E(t)}{\hbar\Gamma_{10}}$  es la frecuencia de Rabi normalizada. Por simplicidad la denominaremos  $\alpha$  de aquí en adelante.
- $\bar{S}(t) = \frac{\int_0^l S(z,t) \sin(kz) dz}{\int_0^l \sin^2(kz) dz}$

- $\bar{C}(t) = \frac{\int_0^L C(z,t) \sin(kz) dz}{\int_0^L \sin^2(kz) dz}$
- $\omega_c = \frac{\Omega_c}{\Gamma_{10}}$  la frecuencia de la cavidad
- $\omega_{01} = \frac{\Omega_{01}}{\Gamma_{10}}$  la frecuencia de la transición
- $\omega_L = \frac{\Omega_L}{\Gamma_{10}}$  la frecuencia de emisión del láser
- $\delta = \omega_c - \omega_{01}$  corresponde a la desintonía. Si  $\delta = 0$ , el sistema es resonante.

Si  $\gamma_d = 0$  el sistema es “cerrado”, la ecuación de evolución temporal de  $M$  es independiente del resto y nos da una magnitud exponencialmente decreciente con el tiempo. Además, el parámetro  $\lambda_s$  deja de ser operativo para el resto de ecuaciones. Puede definirse entonces

$$r = \frac{\lambda_d}{\sigma \gamma_s} \quad (3.18)$$

en lugar de  $\lambda_d$ , y que correspondería a un parámetro que nos mediría la razón entre bombeos y pérdidas.

### 3 Soluciones estacionarias y análisis lineal de estabilidad

El primer paso para estudiar la dinámica de este sistema es calcular y caracterizar (estudiando su estabilidad) las soluciones estacionarias del mismo. El sistema de ecuaciones (3.19) posee una solución estacionaria “trivial”, de intensidad de luz emitida nula, que es la que se nos presentaría en el caso de que ningún fotón inicial desencadenara el proceso de amplificación por emisión estimulada. En la práctica, la emisión espontánea siempre nos proporciona el primer fotón necesario. La solución estacionaria con intensidad no nula del láser es la siguiente (desarrollada principalmente por J.L.Font)[Font et al, 1997] :

$$\begin{aligned} \tilde{S}(z) &= -\frac{2\tilde{\alpha} \sin(kz) A}{1 + 4F \sin^2(kz)} \\ \tilde{D}(z) &= \frac{\tilde{D}_N}{1 + 4F \sin^2(kz)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde  $\tilde{D}_N$  es la diferencia de población en puntos con  $kz = n\pi$  y por tanto insatu-

rada:

$$\tilde{D}_N = \frac{\lambda_d \gamma_s - \lambda_s (\gamma_d + \gamma_{10})}{(\gamma_s - \gamma_d) (\gamma_s + \gamma_d + \gamma_{10})} \quad (3.20)$$

y se han definido los parámetros auxiliares

$$A = \frac{\tilde{D}_N}{1 + \tilde{\Delta}^2} \quad (3.21)$$

$$F = \frac{\tilde{\alpha}^2 \gamma_s}{(1 + \tilde{\Delta}^2) (\gamma_s - \gamma_d) (\gamma_s + \gamma_d + \gamma_{10})}$$

Estas soluciones estacionarias se han marcado con la tilde.

De (3.19) podemos deducir la estructura espacial de los estados estacionarios.  $\tilde{S}$  es real, impar y periódico, pudiéndose expresar en serie de Fourier en la forma:

$$\tilde{S}(z) = 2 \sum_{p=1}^{+\infty} S_{2p-1} \sin((2p-1) kz) \quad (3.22)$$

lo que nos da como soluciones de los coeficientes en la solución estacionaria:

$$-\tilde{\alpha}A = S_1 - F(-3S_1 + S_3), \quad 0 = S_{2p-1} - F(S_{2p-1} - 2S_{2p+1} + S_{2p+3}) \quad p = 1, 2, \dots \quad (3.23)$$

Donde la segunda expresión corresponde a un conjunto de ecuaciones recurrentes homogéneas y lineales de coeficientes constantes. Su resolución puede hacerse como en [Casperson, 1980], o como en la primera parte de nuestro trabajo, a base de fracciones continuadas, o de forma más exacta, ya que no requiere truncamiento, en forma de soluciones del tipo  $S_p = H\lambda^p$ , con  $H$  una constante a determinar. La solución con sentido físico para  $\lambda$  es

$$\varepsilon = \lambda^2 = \frac{2F + 1 \pm \sqrt{(2F + 1)^2 - 4F^2}}{2F} \quad (3.24)$$

o también

$$F = \frac{\varepsilon}{(1 - \varepsilon)^2} \quad (3.25)$$

De esta forma en la primera ecuación de (3.23), como  $S_3 = H\lambda^3 = S_1\varepsilon$ , podemos tener

$$S_1 = -\frac{\tilde{\alpha}A(1 - \varepsilon)^2}{1 + \varepsilon} \quad (3.26)$$

La convergencia de (3.22) requiere que  $\varepsilon$  sea un número real entre 0 y 1 y permite utilizarlo como un parámetro indicador de nuestro estado estacionario, al poderse expresar todas las variables en función de  $\varepsilon$ .

De la expresión (3.22) se deduce  $\langle \tilde{S} \rangle = 2S_1$ , que en la solución estacionaria de  $\dot{\alpha}$  en la ecuación (3.17) nos permite poner el coeficiente auxiliar

$$A = \frac{\sigma(1+\varepsilon)}{g(1-\varepsilon)^2} \quad (3.27)$$

y la solución estacionaria para  $S$  queda

$$\tilde{S}(z) = 2\tilde{\alpha} \frac{\sigma}{g} \sum_{p=1}^{+\infty} \varepsilon^{p-1} \sin((2p-1)kz) \quad (3.28)$$

De (3.21) y (3.27), podemos definir el parámetro adimensional de bombeo  $r$  como

$$r \equiv \frac{\sigma}{g} \tilde{D}_N = \left(1 + \tilde{\Delta}^2\right) \frac{1 + \varepsilon}{(1 - \varepsilon)^2} \quad (3.29)$$

teniendo el mismo significado que en (3.18), pero para casos no tan restrictivos, y en cualquier caso equivale al parámetro de bombeo  $r$  definido en el modelo de Lorenz-Haken.

Análogamente  $\langle \tilde{C} \rangle = -2\tilde{\alpha}\tilde{\Delta}\sigma/g$  y en la solución estacionaria de  $\omega_L$  en (3.17) nos queda

$$\tilde{\omega}_L = \frac{\sigma\omega_{10} + \omega_c}{\sigma + 1}$$

resultado conocido como efecto "pulling" de la frecuencia, es válido para cualquier intensidad de bombeo, e idéntico a la expresión obtenida para un láser en anillo. Esto no es más que la consecuencia natural de que tal efecto sea independiente de la intensidad del campo en los láseres en anillo, y por tanto, parece lógico pensar que sea insensible a las variaciones espaciales de la intensidad del campo en un resonador Fabry-Perot.

Análogamente a  $\tilde{S}(z)$ , podemos expresar el resto de ecuaciones en la misma forma paramétrica:

$$\begin{aligned} \tilde{S}(z) &= -2\tilde{\alpha} \frac{\sigma}{g} \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon^{p-1} \sin(2p-1)kz & (3.30) \\ \tilde{C}(z) &= \tilde{\Delta}\tilde{S}(z) \\ \tilde{D}(z) &= \tilde{D}_N \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \left(1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon^p \cos 2pkz\right) \\ \tilde{M}(z) &= \frac{\lambda_s}{\gamma_s} - \frac{\gamma_d}{\gamma_s} \tilde{D}(z) \\ I &= \tilde{\alpha}^2 = \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2} \frac{(\gamma_s - \gamma_d)(\gamma_s + \gamma_d + \gamma_{10})}{\gamma_s} (1 + \tilde{\Delta}^2) \end{aligned}$$

$$\tilde{\Delta} = \frac{\omega_{10} - \omega_c}{\sigma + 1}$$

donde, como hemos indicado, el parametro  $r$  que se ha definido tiene exactamente el mismo significado que su homónimo definido en el Modelo de Lorenz-Haken para un láser en anillo.

El láser comienza a emitir en  $\varepsilon = 0$  ( $r = 1 + \tilde{\Delta}^2$ ) y para  $\varepsilon \rightarrow 1$ ,  $r \rightarrow \infty$  y por tanto  $I \rightarrow \infty$ .

Podemos comparar la intensidad de la solución estacionaria obtenida con la bien conocida que se obtiene en el caso de un láser con cavidad en anillo en el que se genera una onda propagante:

$$\begin{aligned} I_R &= \frac{\gamma_s^2 - \gamma_d^2}{\gamma_s} (r - 1 - \tilde{\Delta}^2) \\ I_{FP} &= \frac{\varepsilon}{(1 - \varepsilon)^2} \frac{\gamma_s^2 - \gamma_d^2}{\gamma_s} (1 - \tilde{\Delta}^2) \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde  $I_R$  se refiere a la intensidad en el caso del láser en anillo e  $I_{FP}$  a la intensidad de nuestro láser Fabry-Perot. Se puede apreciar que en resonancia, el umbral de emisión es el mismo en ambos tipos de láser:  $r = 1$ , pero mientras que en el láser en anillo la intensidad de emisión tiene una dependencia exactamente lineal con  $r$ , en el láser con cavidad Fabry-Perot tiene una dependencia diferente. El cociente entre las pendientes de las curvas  $I_{FP}(r)$  e  $I_R(r)$  es  $1/3$  en el umbral de emisión y va creciendo suavemente hasta  $1/2$  para  $r \rightarrow \infty$ .

Pasemos a continuación a estudiar la estabilidad de las soluciones estacionarias obtenidas. Para ello, se añaden a las mismas una pequeña perturbación en la forma:

$$\begin{aligned} S(z, t) &= \tilde{S}(z) + s(z, \tau) \\ D(z, t) &= \tilde{D}(z) + d(z, \tau) \\ C(z, t) &= \tilde{C}(z) + c(z, \tau) \\ M(z, t) &= \tilde{M}(z) + m(z, \tau) \\ \alpha(z, t) &= \tilde{\alpha}(z) + a(z, \tau) \\ \Delta(t) &= \tilde{\Delta} + \delta(\tau) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Introduciendo estas expresiones en (3.17) nos llevan al conjunto de ecuaciones lin-

eales:

$$\begin{aligned}
\dot{s} + s &= -2(\tilde{\alpha}d + \tilde{D}a) \sin(kz) - (\tilde{\Delta}c + \tilde{C}\delta) & (3.33) \\
\dot{c} + c &= \tilde{\Delta}s + \tilde{S}\delta \\
\dot{d} + (\gamma_s + \gamma_{10})d &= 2(\tilde{\alpha}s + \tilde{S}a) \sin(kz) - (\gamma_d + \gamma_{10})m \\
\dot{m} + \gamma_s m &= -\gamma_d d \\
\dot{a} + \sigma a &= -\frac{g}{2}\langle s \rangle \\
\delta &= \frac{g}{2\alpha}\langle \tilde{C} \rangle \left( \frac{\langle c \rangle}{\langle \tilde{C} \rangle} - \frac{a}{\tilde{\alpha}} \right)
\end{aligned}$$

que no tienen una solución analítica general por lo que en los apartados siguientes las estudiaremos para diferentes condiciones.

### 3.1 Sistema resonante

Consideramos primero un sistema resonante, es decir, con  $\omega_c = \omega_{01}$ . Las ecuaciones para  $c$  y  $\delta$  se pueden eliminar del sistema, al aportar soluciones que caen exponencialmente a 0.

Tomando soluciones del tipo  $s(z, \tau) = s(z) e^{\beta\tau}$ ,  $d(z, \tau) = d(z) e^{\beta\tau}$ ,  $m(z, \tau) = m(z) e^{\beta\tau}$ ,  $a(\tau) = a e^{\beta\tau}$  tendremos

$$s(z) = -\frac{2B\tilde{D} \sin(kz) + 4\tilde{S}A \sin^2(kz)}{1 + 4F \sin^2(kz)} \quad (3.34)$$

definidos los coeficientes auxiliares como  $B = a/(\beta + 1)$ ,  $A = \tilde{\alpha}a/(Q(\beta + 1))$ ,  $F = \tilde{\alpha}^2/(Q(\beta + 1))$ ,  $Q = \beta + \gamma_s + \gamma_{10} - \gamma_d(\gamma_d + \gamma_{10})/(\beta + \gamma_s)$ . Como esta expresión es impar y periódica, podemos tratar de desarrollarla en serie de Fourier espacial

$$s(z) = 2 \sum_{p=1}^{\infty} s_p \sin((2p-1)kz) \quad (3.35)$$

e introduciendola en (3.34) junto con las expresiones de  $\tilde{S}$  y  $\tilde{D}$  de (3.30) llegamos al sistema de ecuaciones:

$$-\left(B\tilde{D}_0(1-\varepsilon) + A\tilde{S}_1(-3+\varepsilon)\right) = X_1 - F(-3X_1 + \varepsilon X_3) \quad (3.36)$$

$$-\left(B\tilde{D}_0(1-\varepsilon) + A\tilde{S}_1 \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon}\right) = X_{2p-1} - F\left(\frac{1}{\varepsilon}X_{2p-3} - 2X_{2p-1} + \varepsilon X_{2p+1}\right)$$

donde  $X_{2p-1} = s_{2p-1}/\varepsilon^{p-1}$ ,  $\tilde{D}_0 = \sigma/(g(1-\varepsilon))$  y  $\tilde{S}_1 = \sigma\tilde{\alpha}/g$ . La resolución de

la segunda ecuación, recurrente, lineal, inhomogénea y de coeficientes constantes; teniendo en cuenta la primera, nos da

$$s_1 = \frac{-\left(B\tilde{D}_0(1-\varepsilon) + A\tilde{S}_1(-3+\varepsilon)\right) + PF\varepsilon(1-\mu)}{1+3F-F\varepsilon\mu} \quad (3.37)$$

donde  $P = \left(B\tilde{D}_0(1-\varepsilon) + A\tilde{S}_1(1-\varepsilon)^2/\varepsilon\right) / \left(F(1-\varepsilon)^2/(\varepsilon-1)\right)$ ,  $\mu = (1+2F \pm \sqrt{1+4F}) / (2F\varepsilon)$ , y dado que  $\langle s \rangle = 2s_1$ , en (3.33) tendremos

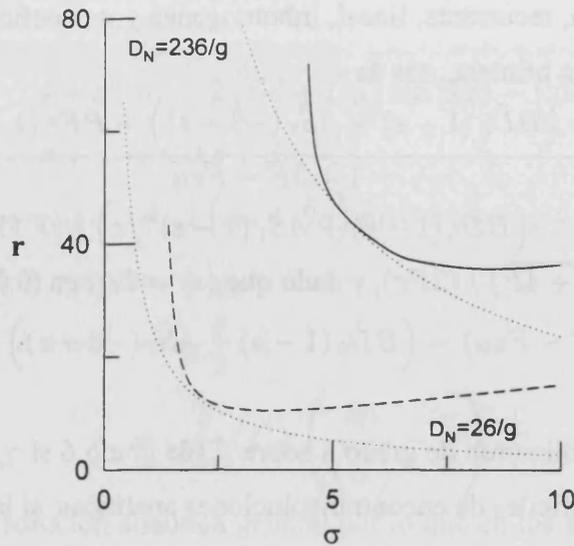
$$a(\beta + \sigma)(1+3F-F\varepsilon\mu) = \left(B\tilde{D}_0(1-\varepsilon) + A\tilde{S}_1(-3+\varepsilon)\right) - PF\varepsilon(1-\mu) \quad (3.38a)$$

que constituye un polinomio de grado 8 sobre  $\beta$ , (de grado 6 si  $\gamma_d = 0$  y  $\gamma_{10} = 0$ ) debiendo ser muy difíciles de encontrar soluciones analíticas, si las hay. Evaluando numéricamente las 8 soluciones, sólo 4 cumplen la condición  $|\mu| < 1$ , dos de ellas definen la “bifurcación de pitchfork” que definen el primer umbral de emisión del láser. Las otras dos soluciones son complejo-conjugadas. Para pequeños bombeos, su parte real es negativa. Cuando éste aumenta, pasa a ser positiva, definiendo una bifurcación de Hopf que desestabiliza la emisión estacionaria (segundo umbral del láser). Al seguir aumentando el bombeo, la parte real crece hasta alcanzar un máximo para a continuación decrecer y tomar valores negativos de nuevo, definiendo una segunda bifurcación de Hopf y entrando en una nueva región de estabilidad. Este comportamiento es diferente al del láser de 2 niveles, donde sólo encontramos la primera bifurcación, y no existe esa segunda región de estabilidad.

En la figura 3.2 se comparan los umbrales de inestabilidad entre un láser en cavidad en anillo y nuestra cavidad Fabry-Perot, para  $\gamma_s = 0.25$  y  $\gamma_d = 0$ . (típicos para un láser FIR [Weiss et al, 1991]), asociados ambos a una bifurcación de Hopf. Para el láser en anillo [Weiss et al, 1991], aparece este umbral para

$$r_{HB} = \sigma \frac{\sigma + \gamma_s + 3}{\sigma - \gamma_s - 1} \quad (3.39)$$

Claramente, el dominio de estabilidad para un láser en cavidad Fabry-Perot es mayor, se necesita alcanzar bombeos mucho más altos para encontrar inestabilidades. La distribución espacial de los campos en la cavidad Fabry-Perot produce un efecto de promediado que reduce drásticamente las inestabilidades temporales. Para la figura 3.2 el valor más pequeño que aparece en nuestra cavidad es  $r = 39$  ( $\sigma =$

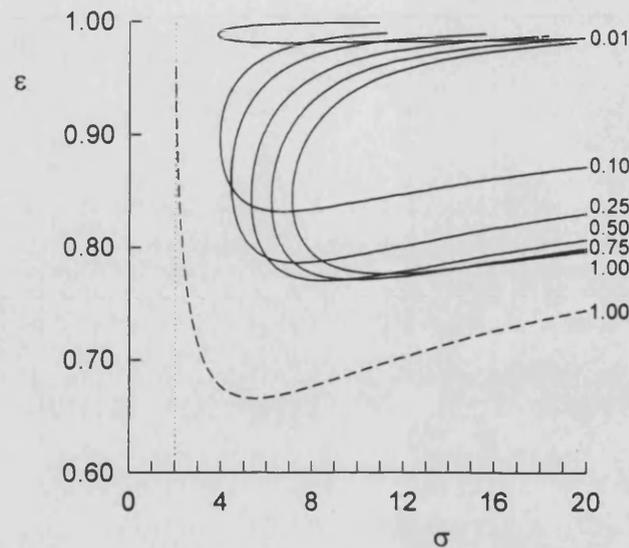


**Figura 3.2.-** Umbral de inestabilidad (bifurcación de Hopf) para un láser en cavidad Fabry-Perot (línea continua) y en anillo (línea quebrada) en el plano de parámetros  $r$  (tasa de bombeo),  $\sigma$  (pérdidas de la cavidad) para  $\gamma_d = 0.$ ,  $\gamma_{10} = 0.$ ,  $\delta = 0.$  y  $\gamma_s = 0.25$ . Las líneas punteadas representa los lugares de inversión de población insaturada  $D_N = \sigma r/g$  para los valores  $D_N = 26/g$  y  $D_N = 236/g$

7.3). en términos de la inversión de población insaturada  $D_N = r\sigma/g$ , directamente relacionada con el bombeo, necesitamos llegar a  $D_N = 236g$  en  $\sigma = 5$ , frente a  $D_N = 26g$  en  $\sigma = 2$  para un láser en anillo con los mismos parámetros. El umbral se encuentra 9 veces más alto.

Se ha deducido la existencia de una segunda bifurcación de Hopf para bombeos muy elevados, como claramente aparece en la figura 3.3, para varios valores de  $\gamma_s$ , si bien esos valores son tan elevados que resultan inalcanzables por la tecnología actual. Sin embargo, disminuyendo  $\sigma$  con cavidades de  $Q$  muy alto, como las que se están empezando a diseñar actualmente), podría intentarse saltar a tales áreas.

Debido a esa segunda bifurcación, la condición de “bad cavity” del láser en anillo para encontrar inestabilidades ( $\sigma > 1 + \gamma_s$ ) es ahora más restrictiva, en el sentido de que se necesitan alcanzar pérdidas mayores para encontrar inestabilidades, al alcanzar la recta vertical tangente a la curva del umbral de inestabilidad (Figura 3.3), valores de  $\sigma$  del orden de 7 para  $\gamma_s = 1$ , frente a  $\sigma = 2$  del láser en anillo (línea a trazos) y  $\sigma \approx 4$  para  $\gamma_s \gtrsim 0$ , frente a  $\sigma = 1$ .



**Figura 3.3.-** Umbrales de inestabilidad (bifurcaciones de Hopf) en el plano de parámetros  $\sigma, \epsilon$  (relacionado con el bombeo) para  $\gamma_d = 0.$ ,  $\gamma_{10} = 0.$ ,  $\delta = 0.$  y varios valores de  $\gamma_s$ . La línea quebrada corresponde al mismo umbral para un láser con cavidad en anillo y la línea punteada su “bad cavity condition”.

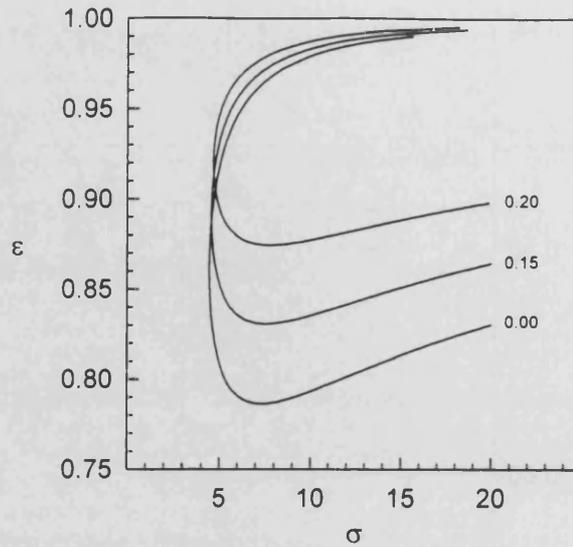
En la figura 3.4 se muestran las curvas de inestabilidad para  $\gamma_s = 0.25$ ,  $\gamma_{10} = 0$  y diferentes valores de  $\gamma_d$ , mostrando como los umbrales de inestabilidad crecen conforme crece  $|\gamma_d|$

### 3.2 Sistema cerrado y desintonizado

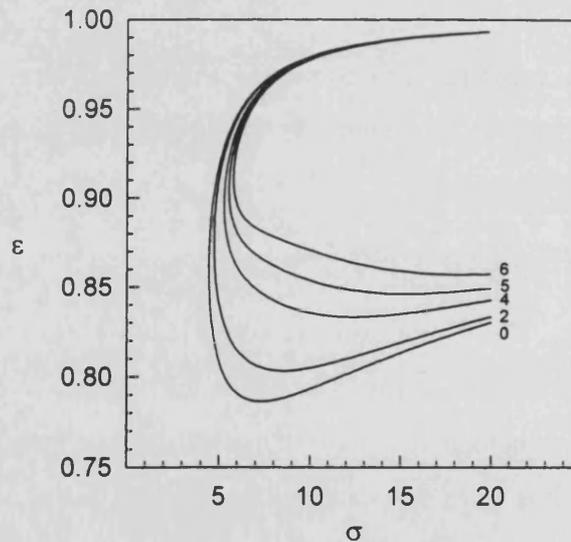
Ahora  $\delta = \omega_c - \omega_{ab} \neq 0$  y por tanto se complica el estudio del análisis lineal de estabilidad ya que solo se anula la ecuación correspondiente a  $m$  en (3.33). Resolviendo de forma análoga al apartado anterior, aparece un polinomio de grado 10, cuya resolución nos lleva a ecuaciones recurrentes más complicadas y cuya resolución numérica aparece en la figura 3.5. para  $\gamma_s = 0.25$ ,  $\gamma_d = 0.$ ,  $\gamma_{10} = 0.$ , y diferentes  $\delta$ . Se ve claramente como al aumentar  $\delta$ , las curvas se desplazan hacia valores más altos de  $\sigma$  y  $\epsilon$ , aumentando el dominio estable, de esta forma, al igual que en los láseres en cavidad en anillo, desintonizarlo equivale a aumentar su estabilidad.

## 4 Resolución numérica del sistema.

El resto de estudios del sistema se ha efectuado viendo la evolución temporal del



**Figura 3.4.-** Como en la figura 3.2.- con  $\gamma_s = 0.25$ ,  $\gamma_{10} = 0.$ ,  $\delta = 0.$  y diferentes valores de  $\gamma_d$ .



**Figura 3.5.-** Como en la figura 3.2.-  $\gamma_s = 0.25$ ,  $\gamma_{10} = 0.$ ,  $\gamma_d = 0$  y diferentes valores de  $\delta$ .

mismo para un conjunto fijo de parámetros. Para ello, hemos de efectuar la integración de las ecuaciones (3.17) respecto al tiempo, pero debido a su dependencia espacial, hemos de modificarlas para evitar trabajar con dos variables. Análogamente a como hicimos en las soluciones estacionarias y el análisis lineal de estabilidad,

podemos desarrollarlas en serie de Fourier espacial:

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{-\infty}^{+\infty} S_q e^{iqkz} \\
 C &= \sum_{-\infty}^{+\infty} C_q e^{iqkz} \\
 D &= \sum_{-\infty}^{+\infty} D_q e^{iqkz} \\
 M &= \sum_{-\infty}^{+\infty} M_q e^{iqkz}
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Donde sus coeficientes son complejos. Descomponiéndolos en parte real e imaginaria tendremos:  $S_q = S_q^r + iS_q^i$ ,  $C_q = C_q^r + iC_q^i$ ,  $D_q = D_q^r + iD_q^i$ , y  $M_q = M_q^r + iM_q^i$ .

Al ser reales las magnitudes, sus coeficientes de Fourier son hermiticos ( $F_q = F_{-q}^*$ ) y por tanto sus partes reales son pares en  $q$  ( $F_q^r = F_{-q}^r$ ), y sus partes imaginarias impares en  $q$  ( $F_q^i = -F_{-q}^i$ ).

Podemos poner pues de forma equivalente:

$$\begin{aligned}
 S &= S_0^r + 2 \sum_1^{+\infty} (S_q^r \cos qkz - S_q^i \sin qkz) \\
 C &= C_0^r + 2 \sum_1^{+\infty} (C_q^r \cos qkz - C_q^i \sin qkz) \\
 D &= D_0^r + 2 \sum_1^{+\infty} (D_q^r \cos qkz - D_q^i \sin qkz) \\
 M &= M_0^r + 2 \sum_1^{+\infty} (M_q^r \cos qkz - M_q^i \sin qkz)
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Expresión que nos sirve para evaluar la magnitud global, conocidos sus coeficientes de Fourier.

De estas expresiones obtenemos  $\bar{S} = -2S_1^i$ , y  $\bar{C} = -2C_1^i$ , al multiplicar  $S$  y  $C$  por  $\sin kz$  e integrar entre 0 y  $l$ , y normalizar.

Si sustituimos las expresiones anteriores en las ecuaciones de Maxwell-Block, obtenemos un nuevo juego de ecuaciones más fácilmente integrables al desaparecer cualquier dependencia espacial, ya que el término  $\sin kz$ , en forma exponencial, multiplicando los exponentes de las expresiones anteriores  $e^{iqkz}$ , equivalen a considerar el armónico superior o inferior al estudiado ( $e^{i(q+1)kz}$ ,  $e^{i(q-1)kz}$ ), produciéndose

un acoplamiento de las distintas ecuaciones.

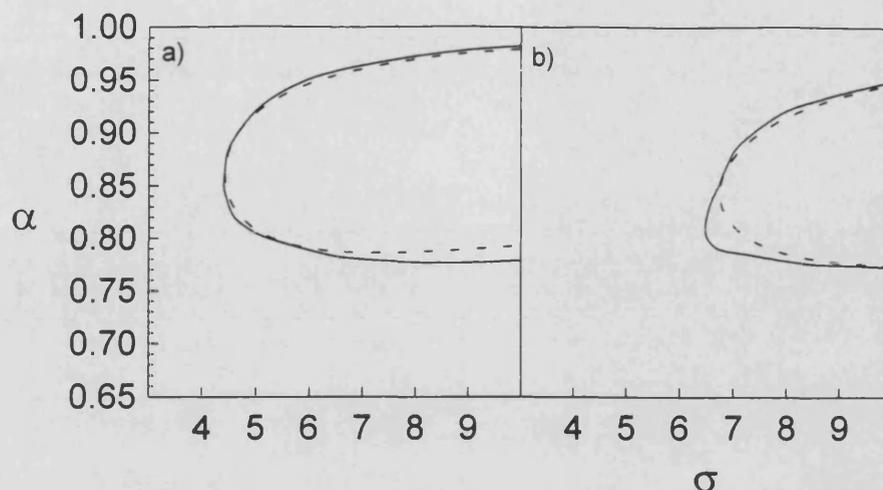
Quedan así todas, divididas en parte real e imaginaria:

$$\begin{aligned}
\dot{S}_q^r + S_q^r &= -\alpha_R(D_{q-1}^i - D_{q+1}^i) - \Delta C_q^r & (3.42) \\
\dot{S}_q^i + S_q^i &= \alpha_R(D_{q-1}^r - D_{q+1}^r) - \Delta C_q^i \\
\dot{C}_q^r + C_q^r &= \Delta S_q^r \\
\dot{C}_q^i + C_q^i &= \Delta S_q^i \\
\dot{D}_q^r + \gamma_s D_q^r &= \lambda_d \delta_{q,0} + \alpha_R(S_{q-1}^i - S_{q+1}^i) \\
\dot{D}_q^i + \gamma_s D_q^i &= -\alpha_R(S_{q-1}^r - S_{q+1}^r) - \gamma_d M_q^i \\
\dot{M}_q^r + \gamma_s M_q^r &= \lambda_s \delta_{q,0} - \gamma_d D_q^r \\
\dot{M}_q^i + \gamma_s M_q^i &= -\gamma_d D_q^i \\
\dot{\alpha}_R + \sigma \alpha_R &= g S_1^i \\
\Delta &= -\frac{g}{\alpha_R} C_1^i - \delta
\end{aligned}$$

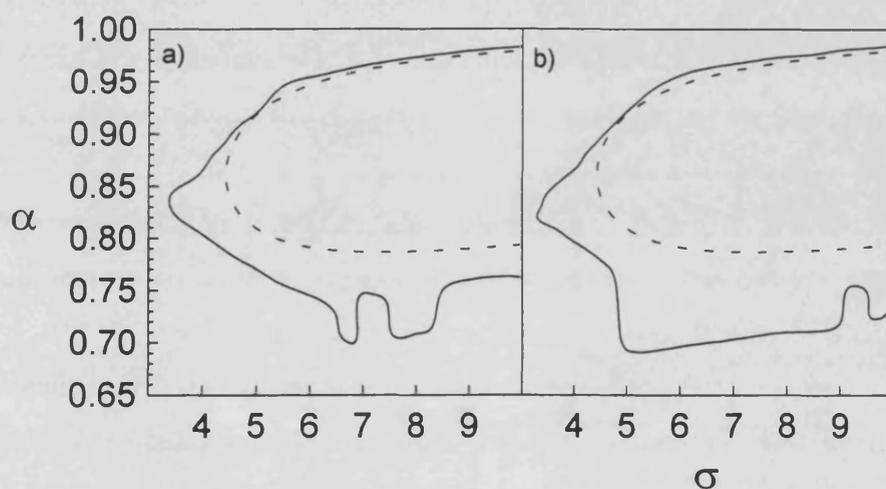
Este sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, se resuelve por medio de un método de Runge-Kutta de 7<sup>o</sup>-8<sup>o</sup> orden, para un número de armónicos suficientemente elevado para que un corte final haga aceptable el redondeo. Del resultado final de los distintos armónicos se restaura el valor de las variables materiales, evaluándose para  $kz = \pi/2$  según (3.41).

De esta manera, hemos realizado un estudio numérico bastante detallado de los umbrales de inestabilidad fijándonos en el umbral de inestabilidad para el “hard-mode excitation” (cuando se introduce el bombeo bruscamente, en un instante dado  $-t=0-$ ). Encontramos que en general, ese límite se encuentra muy próximo al umbral que nos viene dado por el análisis lineal de estabilidad del apartado anterior, el cual corresponde a la desestabilización por perturbaciones infinitesimalmente pequeñas (desestabilización a través de la bifurcación de Hopf subcrítica descrita antes), como cabe esperar de una bifurcación de Hopf subcrítica, tal y como se muestra en la figura 3.6 para  $\gamma_s = 0.25$  (a),  $\gamma_s = 0.9$  (b),  $\gamma_d = 0$ ,  $\gamma_{10} = 0$  y  $\delta = 0$ .

Sin embargo, para determinados valores de  $\delta$ , el umbral para “Hard mode excitation” está mucho más bajo que el definido por la primera bifurcación de Hopf de



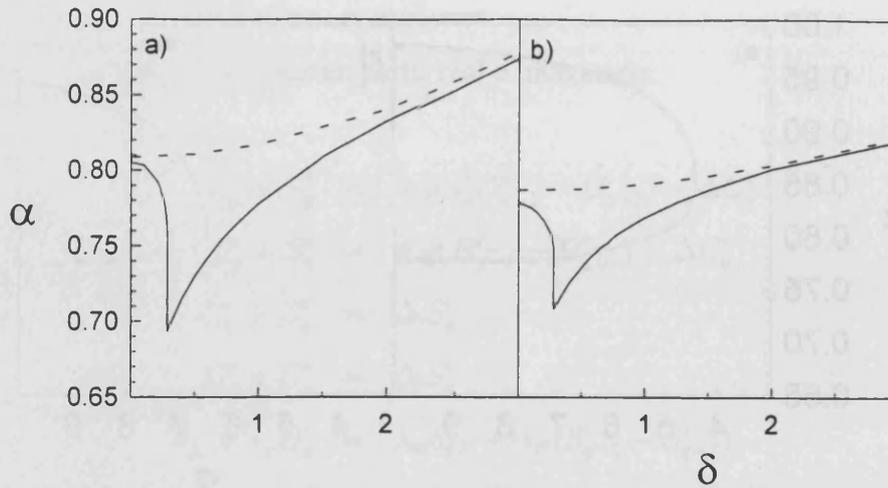
**Figura 3.6.-** Umbral de “Hard Mode Excitation” -línea continua- junto con el umbral de estabilidad -línea quebrada- para  $\gamma_s = 0.25$  (a),  $\gamma_s = 0.9$  (b),  $\gamma_d = 0.$ ,  $\gamma_{10} = 0.$  y  $\delta = 0$



**Figura 3.7.-** Igual que en la figura anterior, pero para  $\gamma_s = 0.25$ ,  $\gamma_d = 0.$ ,  $\gamma_{10} = 0.$  y  $\delta = 0.227$  (a) ó  $\delta = 0.289$  (b).

nuestro modelo. La figura 3.7 muestra esta curva para  $\delta = 0.227$  (a) y  $\delta = 0.289$  (b) (con  $\gamma_s = 0.25$  y el resto de parámetros iguales que la anterior). Ahora la curva tiene el límite comparable a un láser en anillo (para (b),  $\sigma \approx 5.25$ ,  $\varepsilon \approx 0.69$ , equivale a  $r \approx 17$ ).

Este comportamiento es especialmente sensible con  $\delta$ , como se aprecia en la figura 3.8, cambiando no solamente su forma (comparar con la figura 3.6), sino



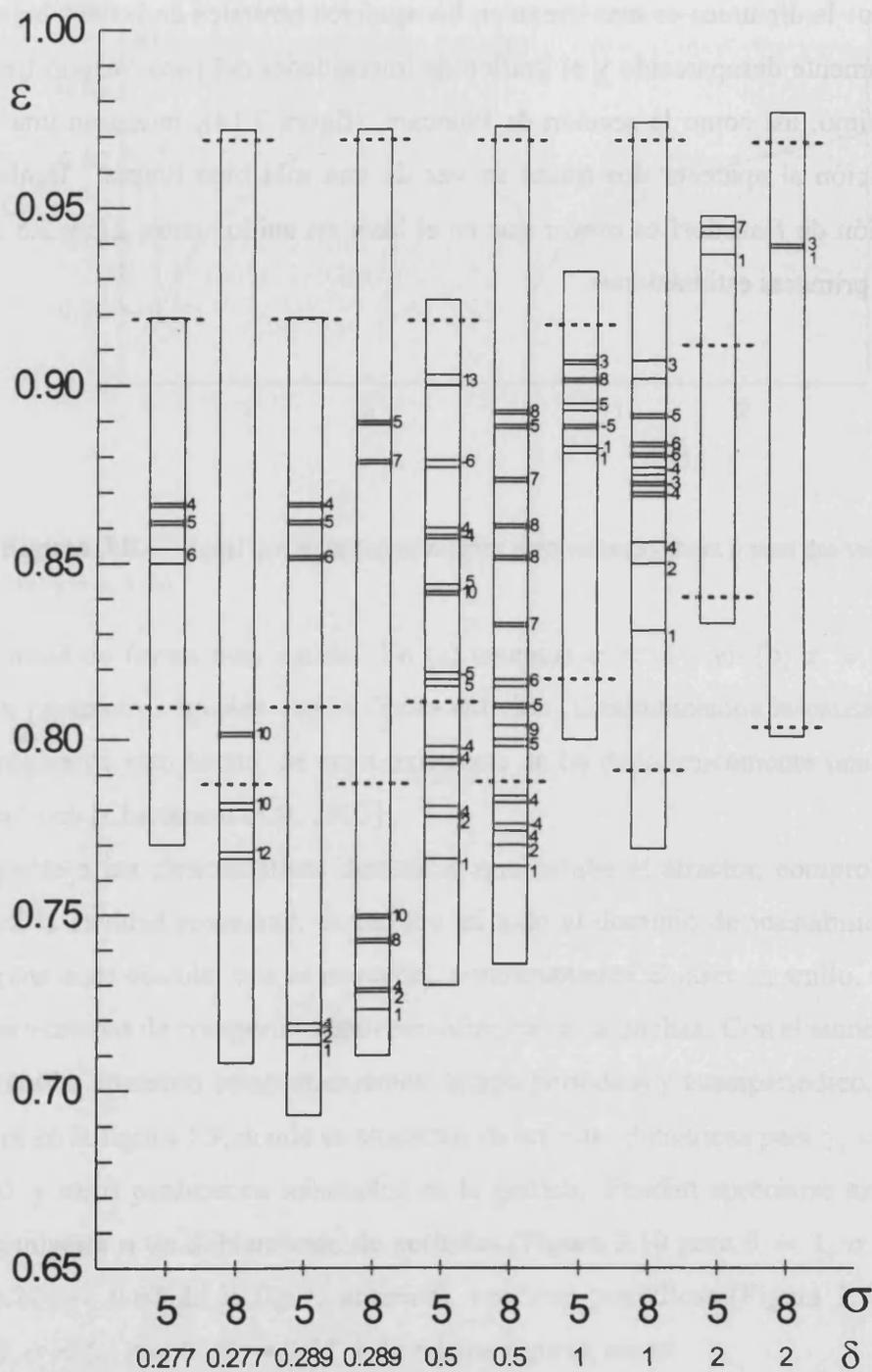
**Figura 3.8.-** Igual que en la figura anterior pero variando ahora  $\delta$  para dos valores de  $\sigma$ :  $\sigma = 5$  (a) y  $\sigma = 8$  (b)

su magnitud de forma muy aguda. En (a) tenemos  $\sigma = 5$  y en (b)  $\sigma = 8$  y el resto de parámetros iguales que la figura anterior. Desconocemos la causa física o topológica de este hecho, de cuya existencia se ha dado únicamente una ligera indicación en [Chenkosol et al, 1993] ..

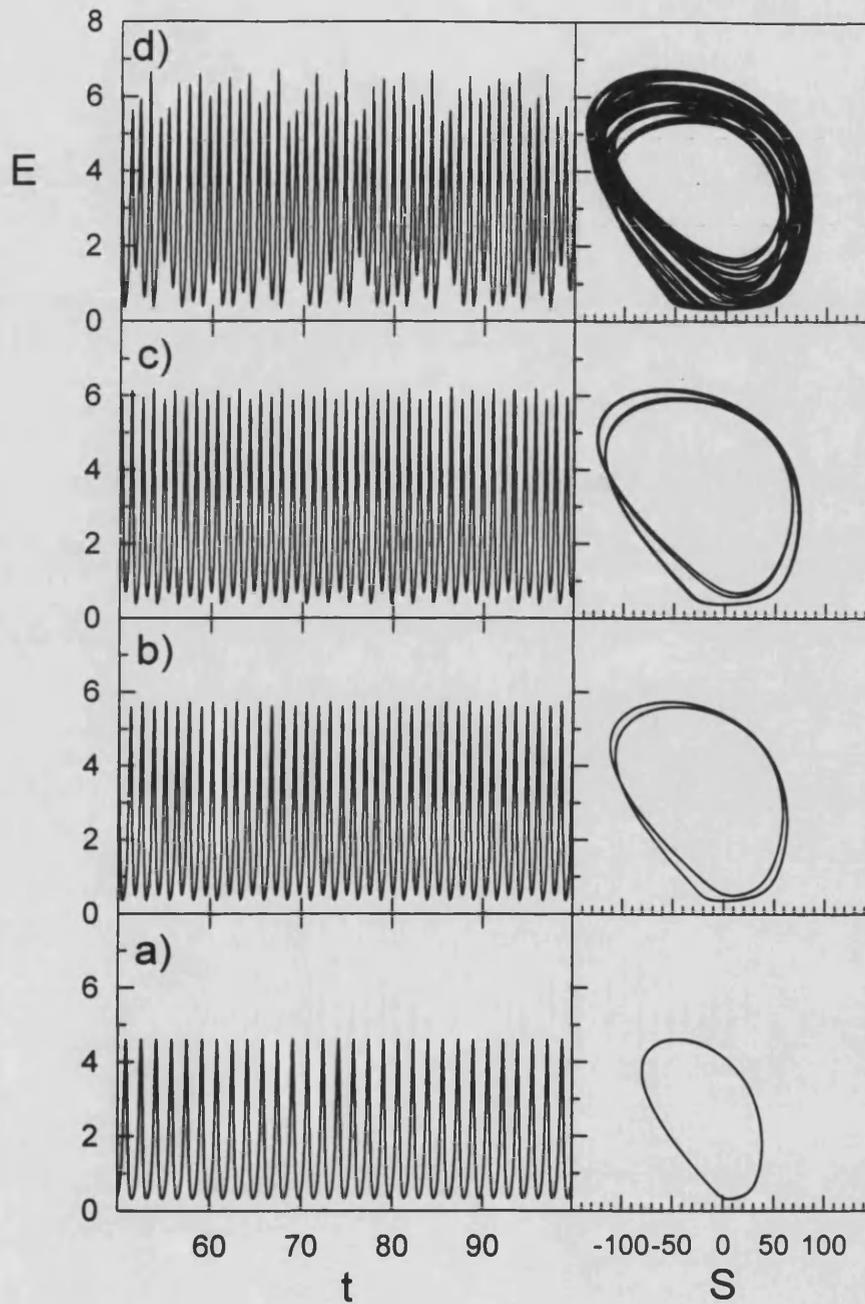
Respecto a las características dinámicas que exhibe el atractor, comprobamos que para la cavidad resonante, es caótico en todo el dominio de inestabilidad (si hay alguna zona estable, ésta es pequeña), contrariamente al láser en anillo, el cual presenta ventanas de comportamiento periódico bastante anchas. Con el aumento de la desintonía, aparecen comportamientos de tipo periódico y cuasiperiódico, como se ilustra en la figura 3.9, donde se muestran varias rutas dinámicas para  $\gamma_s = 0.25$ ,  $\gamma_d = 0$ . y otros parámetros mostrados en la gráfica. Pueden apreciarse así rutas de Feigenbaum o de doblamiento de periodos (Figura 3.10 para  $\delta = 1$ ,  $\sigma = 8$ .,  $\varepsilon = 0.77 \rightarrow 0.87$  de la figura anterior), ventanas periódicas (Figura 3.11 para  $\delta = 0.5$ ,  $\sigma = 5$ .,  $\varepsilon = 0.80 \rightarrow 0.83$  de la misma figura), etc.

La forma del atractor caótico aparece en la figura 3.12 para  $\gamma_s = 0.25$ ,  $\gamma_d = 0$ .,  $\sigma = 6$ ,  $\delta = 0$  y  $\varepsilon = 0.8$ ., mostrándose una figura tridimensional con  $E$ ,  $S$ ,  $D$  en los ejes. y las correspondientes proyecciones en cada plano coordenado en la figura 3.13. Muestra importantes diferencias respecto al atractor de Lorenz del láser

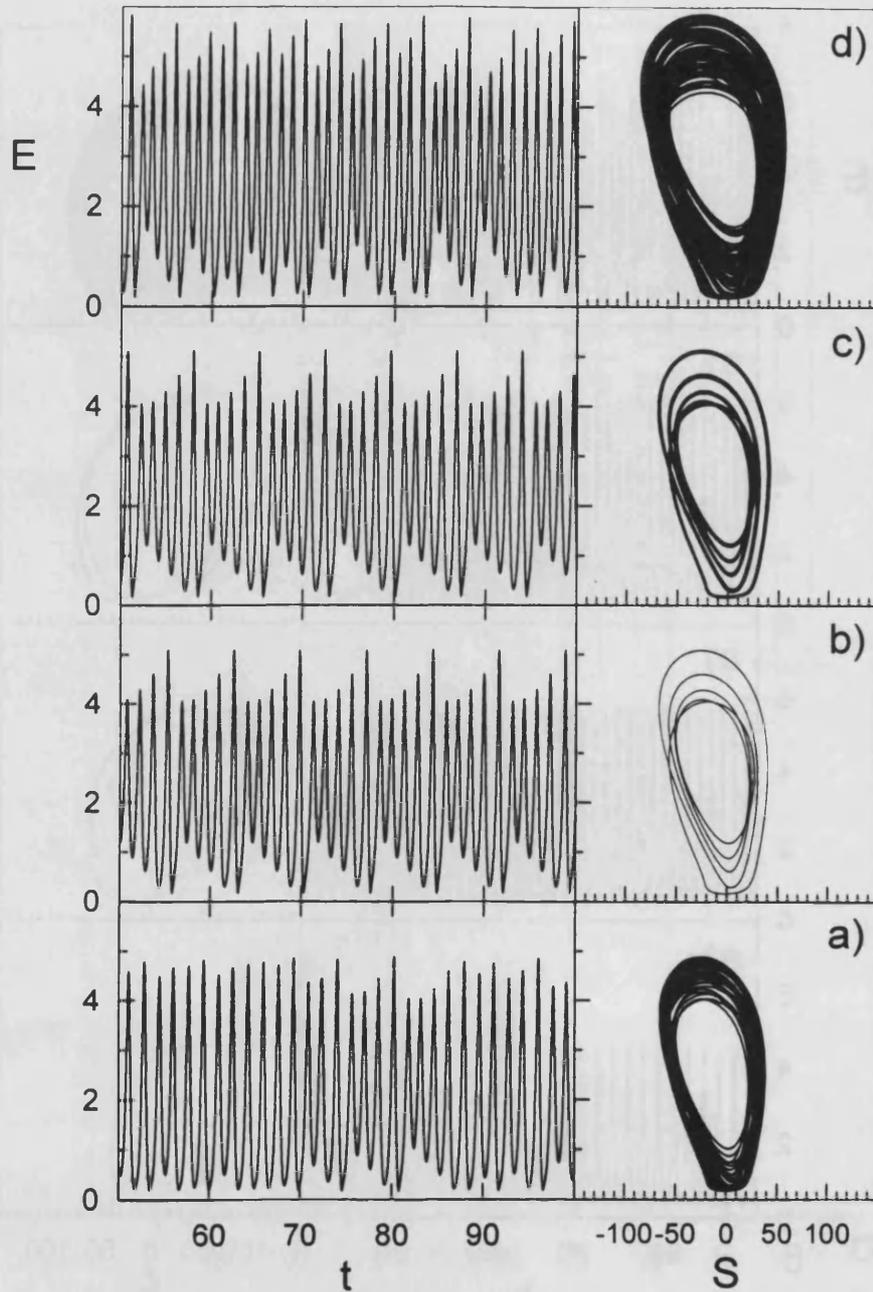
en anillo: la dinámica es mas irregular, los agujeros centrales de las dos hojas han practicamente desaparecido y el gráfico de intensidades del pico  $i$ -ésimo frente al  $(i+1)$ -ésimo, así como la sección de Poincaré, (figura 3.14), muestran una cierta indefinición al aparecer dos trazas en vez de una sola bien limpia. También la dimensión de Hausdorff es mayor que en el láser en anillo: entre 2.2 y 2.5 según nuestra primeras estimaciones.



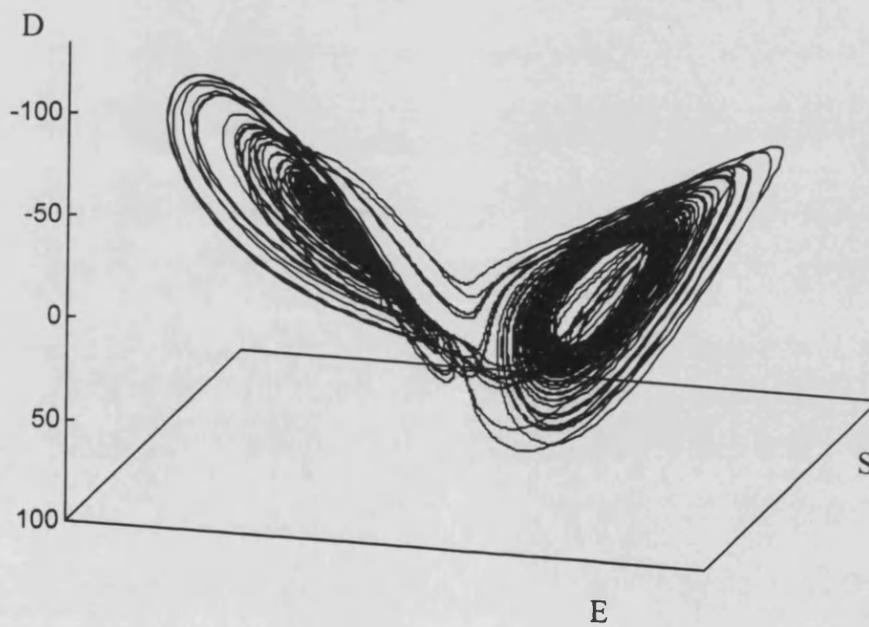
**Figura 3.9.-** Esquemas de rutas dinámicas para  $\gamma_s = 0.25$ ,  $\gamma_d = 0$  y distintos parámetros representados en cada ruta. Los espacios sin numerar corresponden a episodios caóticos, los numerados corresponden a periódicos (con su periodo correspondiente) y los numerados negativos a episodios cuasiperiódicos. Las líneas quebradas señalan los umbrales de inestabilidad dados por el análisis lineal de estabilidad



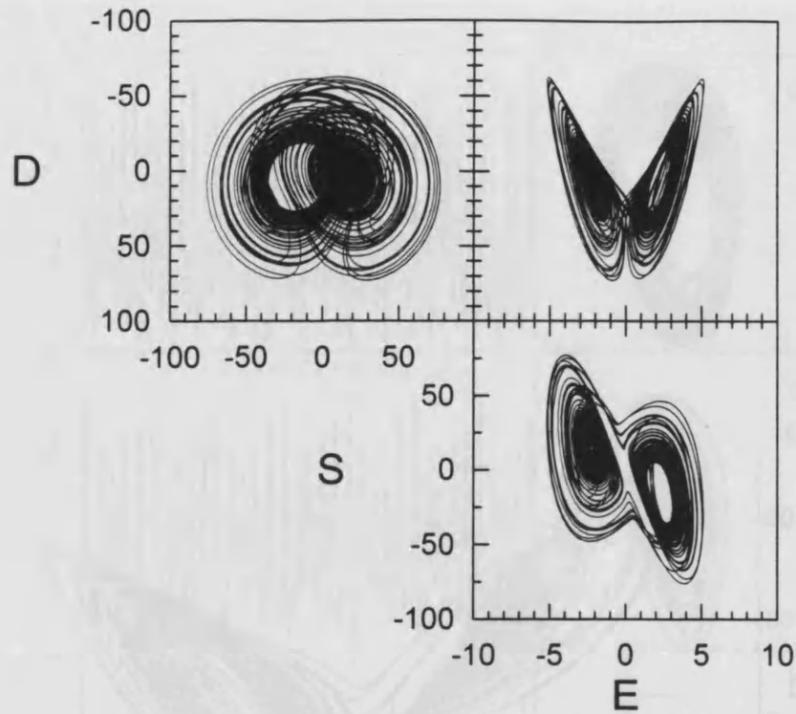
**Figura 3.10.-** Ruta de Feigenbaum o desdoblamiento de periodos para  $\gamma_s = 0.25$ ,  $\gamma_d = 0.$ ,  $\delta = 1.$ ,  $\sigma = 8$  y  $\epsilon = 0.8$  (a),  $\epsilon = 0.84$  (b),  $\epsilon = 0.852$  (c), y  $\epsilon = 0.86$  (d); mostrando episodios de periodo 1, 2, 4 y caótico respectivamente. Se representa el campo eléctrico de la onda generada en función del tiempo y de  $S$



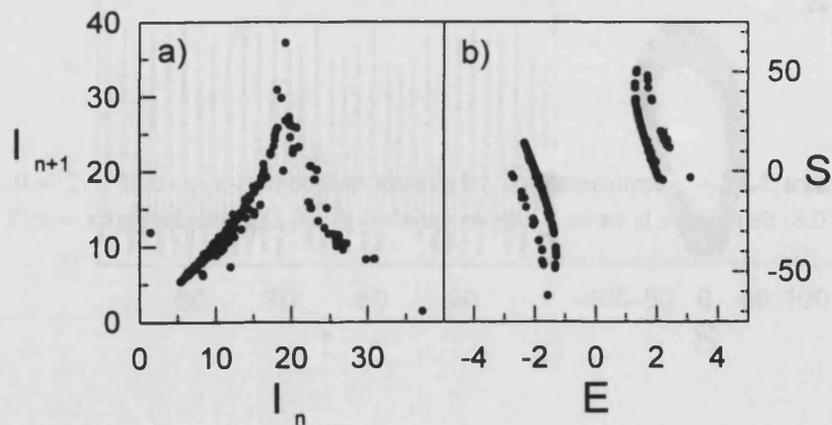
**Figura 3.11.-** Análogo a la figura anterior pero para  $\delta = 0.5$ ,  $\sigma = 5$  y  $\epsilon = 0.81$  (a),  $\epsilon = 0.817$  (b),  $\epsilon = 0.818$  (c), y  $\epsilon = 0.84$  (d); aparece ahora una ventana periódica en medio de una gran secuencia caótica, con un episodio de periodo 5 (b), que se vuelve ruidoso (c), entre episodios de caos (a y d).



**Figura 3.12.-** Representación del atractor caótico para  $\gamma_s = 0.25$ ,  $\gamma_d = 0$ ,  $\sigma = 6$ ,  $\delta = 0$  y  $\varepsilon = 0.8$ . Se muestra la variación de las variables  $E$ ,  $S$ ,  $D$  evaluadas en  $kz = \pi/2$



**Figura 3.13.-** Proyecciones del atractor anterior en los distintos planos coordenados.



**Figura 3.14.-** Mapa de retorno de máximos de intensidad (a) y sección de Poincaré (b) para el plano  $D = 0$  del espacio de fases  $E, S, D$  del atractor de la figura anterior (corresponde a trayectorias que cruzan "hacia abajo" el plano  $D = 0$  de la figura anterior)

# Capítulo 4

## LGBO con cavidad en anillo y emisión bidireccional

### 1 Introducción

Otro tipo de láser en que también se generan dos ondas contrapropagantes es el del láser con cavidad en anillo y emisión bidireccional. La diferencia con los láseres con cavidad Fabry-Perot considerados en los capítulos anteriores es que, en el primer caso, la amplitud de las dos ondas contrapropagantes generadas no tiene por que ser la misma. Ello nos lleva a la existencia de dos variables complejas para el campo (en vez de una, en los Fabry-Perot), que corresponden a las amplitudes complejas de dichas dos ondas.

El interés de los láseres bidireccionales es doble. Por una parte, por sus aplicaciones en giroscopios láser. Y por otra parte, por la gran riqueza dinámica de comportamientos que pueden presentar, pues además de las inestabilidades que puede presentar cada una de las ondas generadas por si misma, hay que añadir las que pueden derivarse de los fenómenos de competencia entre dichas dos ondas, los cuales pueden producir cambios bruscos (“switching”) en la dirección de emisión y dinámica “antifase”.

Desde el punto de vista teórico, la dinámica de los láseres con emisión bidireccional ha sido estudiada en [Zeghlache et al, 1988] y [Hoffer et al, 1988] en los casos de láseres de dos niveles y clase B con bombeo incoherente y ensanchamiento homogéneo. Sin embargo, en estos últimos años se han realizado experimentos con LGBO FIR de  $\text{NH}_3$  (81.5 y 153  $\mu\text{m}$ ) con emisión bidireccional [Abraham et al, 1988], [Tang et al, 1996,1], [Tang et al, 1996,2] (en [Tang et al, 1996,1] se estudia la dinámica de antifase y en [Tang et al, 1996,2] la sincronización de estados dinámicos).

Si bien algunos rasgos de los resultados ya se explican cualitativamente con el simple modelo de [Zeghlache et al, 1988], [Hoffer et al, 1988], la existencia de un

bombeo óptico unidireccional, así como la existencia de ensanchamiento Doppler (factores no considerados en dicho modelo) pueden aportar nuevos fenómenos cuya posible existencia nos proponemos estudiar en este capítulo.

## 2 Modelo teórico

Para describir el LGBO FIR con onda generada bidireccional, partimos del modelo del Capítulo 1 pero permitiendo que los dos modos de la onda generada puedan tener amplitudes diferentes entre sí. Introduciremos como variables las dos amplitudes de estas ondas, de forma que podremos calcular la intensidad que adquiere cada una de ellas. Además consideraremos la influencia del efecto Doppler, todo lo cual nos llevará al establecimiento de un modelo con un número muy elevado de ecuaciones, que resolveremos numericamente para los valores de los parámetros correspondientes al LGBO FIR de  $\text{NH}_3$  ( $153 \mu\text{m}$ ).

El medio material se describe por 3 niveles en  $\Lambda$  con onda de bombeo unidireccional entre los niveles 2-0 y onda generada bidireccional entre los niveles 0-1.

Nuestros campos, con las simplificaciones ya mencionadas en la Introducción, serán de la forma siguiente:

$$\vec{E}_2(z, t) = \frac{1}{2} E_2(t) (\vec{e}_2 e^{-i(\Omega_2 t - k_2 z)} + c.c.) \quad (4.1)$$

para la onda de bombeo, donde  $E_2(t)$  es la amplitud de dicha onda,  $\Omega_2$  su frecuencia y  $k_2$  su número de onda. El término *c.c.* hace referencia a la expresión complejo conjugada de la escrita en el mismo paréntesis. Y

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(z, t) &= \frac{1}{2} (E_1(t) \vec{e}_1 e^{-i(\Omega_c t - k_1 z)} + c.c.) \\ \vec{E}'_1(z, t) &= \frac{1}{2} (E'_1(t) \vec{e}_1 e^{-i(\Omega_c t + k_1 z)} + c.c.) \end{aligned} \quad (4.2)$$

para las ondas generadas, copropagante y contrapropagante respectivamente, con la onda de bombeo; siendo  $E_1(t)$  y  $E'_1(t)$  sus respectivas amplitudes complejas, de fases  $\varphi_1$  y  $\varphi'_1$ , y  $\Omega_c + \dot{\varphi}_1$  y  $\Omega_c + \dot{\varphi}'_1$  sus frecuencias, tomándose la frecuencia de la cavidad  $\Omega_c$  como referencia, por comodidad en los cálculos.  $k_1$  es ahora su número de onda.

La materia se describe a partir de los elementos de la matriz densidad  $\rho_{ij}(v, z, t)$  ( $i, j = 0, 1, 2$ ) que nos describen tanto las poblaciones de los tres niveles ( $\rho_{ii}$ ) como

las coherencias entre ellos ( $\rho_{ij}, i \neq j$ ). Su evolución temporal nos la da la ecuación de Schrödinger:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} \right) \rho = -\frac{i}{\hbar} [H_a - \vec{\mu} \vec{E}, \rho] + \Gamma \rho$$

donde  $H_a$  corresponde al hamiltoniano atómico sin interacción con campo eléctrico y  $\vec{\mu} \vec{E}$  a dicha interacción, siendo  $\vec{\mu}$  el momento dipolar, verificándose  $(\vec{\mu})_{0i} \equiv \langle 0 | \vec{\mu} | i \rangle \equiv \mu_{0i} \vec{e}_{0i}$  para  $i = 1, 2$  y  $(\vec{\mu})_{ji} = 0$  si  $j \neq 0$ , es decir, no existe interacción electromagnética dipolar entre el nivel de bombeo y el de emisión.  $\Gamma \rho$  hace referencia la influencia de la relajación.

En esta ecuación, para la variación del elemento de la matriz densidad  $\rho_{ij}$  tendremos

$$-\frac{i}{\hbar} [H_a, \rho]_{ij} = -\frac{i}{\hbar} (W_i - W_j) \rho_{ij} = -i\omega_{ij} \rho_{ij}$$

donde  $W_i$  es la energía del nivel  $i$  y por tanto  $\omega_{ij}$  la frecuencia de la transición entre los niveles  $i$  y  $j$ . Asimismo

$$-\frac{i}{\hbar} [-\vec{\mu} \vec{E}, \rho]_{ij} = -i \sum_k \left( -\frac{1}{\hbar} (\vec{\mu} \vec{E})_{ik} \rho_{kj} + \frac{1}{\hbar} (\vec{\mu} \vec{E})_{kj} \rho_{ik} \right)$$

donde  $-\frac{1}{\hbar} (\vec{\mu} \vec{E})_{ij} \equiv V_{ij}$  puede tomar los valores siguientes, según  $\vec{\mu}$  y  $\vec{E}$ :

$$V_{01} = -\frac{1}{\hbar} \mu_{01} \frac{1}{2} E_1(t) (\vec{e}_{01} \vec{e}_1 e^{-i(\Omega_c t - k_1 z)} + c.c.) = -A(t) e^{-i(\Omega_c t - k_1 z)} \quad (4.3)$$

$$V'_{01} = -\frac{1}{\hbar} \mu_{01} \frac{1}{2} E'_1(t) (\vec{e}_{01} \vec{e}_1 e^{-i(\Omega_c t + k_1 z)} + c.c.) = -A'(t) e^{-i(\Omega_c t + k_1 z)}$$

$$V_{02} = -\frac{1}{\hbar} \mu_{02} \frac{1}{2} E_2(t) (\vec{e}_{02} \vec{e}_2 e^{-i(\Omega_2 t - k_2 z)} + c.c.) = -\beta(t) e^{-i(\Omega_2 t - k_2 z)}$$

habiéndose definido las Frecuencias de Rabi  $A$ ,  $A'$  y  $\beta$  (complejas para la onda generada) en la forma:

$$A(t) = \mu_{01} \frac{E_1(t)}{2\hbar} \vec{e}_{01} \cdot \vec{e}_1, \quad A'(t) = \mu_{01} \frac{E'_1(t)}{2\hbar} \vec{e}_{01} \cdot \vec{e}_1, \quad \beta(t) = \mu_{01} \frac{E_2(t)}{2\hbar} \vec{e}_{02} \cdot \vec{e}_2 \quad (4.4)$$

y donde, como en el Capítulo 1, se ha aplicado la aproximación de la onda rotante (R.W.A.). Queda así la interacción:

$$-\frac{i}{\hbar} [-\vec{\mu} \vec{E}, \rho]_{ij} = -i \sum_k (V_{ik} \rho_{kj} - V_{kj} \rho_{ik}) \quad (4.5)$$

Respecto al término de relajación  $\Gamma \rho$ , actúa exactamente igual que en el Capítulo

1. Quedan entonces las ecuaciones de evolución temporal en la forma:

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} \right) \rho_{ij} &= -\frac{i}{\hbar} [H_a - \vec{\mu} \vec{E}, \rho]_{ij} + (\Gamma \rho)_{ij} \\
 &= -\frac{i}{\hbar} [H_a, \rho]_{ij} - \frac{i}{\hbar} [-\vec{\mu} \vec{E}, \rho]_{ij} + (\Gamma \rho)_{ij} \\
 &= -i\omega_{ij}\rho_{ij} - i \sum_k (V_{ik}\rho_{kj} - V_{kj}\rho_{ik}) + (\Gamma \rho)_{ij}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

que para cada elemento  $i, j = 0, 1, 2$  nos da:

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} \right) \rho_{00} &= -\gamma_0 \rho_{00} + \gamma_{01} \rho_{11} + \gamma_{02} \rho_{22} + \lambda_0 \\
 &\quad -i(V_{01}\rho_{10} + V'_{01}\rho_{10} - V_{10}\rho_{01} - V'_{10}\rho_{01} + V_{02}\rho_{20} - V_{20}\rho_{02}) \\
 \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} \right) \rho_{11} &= -\gamma_1 \rho_{11} + \gamma_{10} \rho_{00} + \gamma_{12} \rho_{22} + \lambda_1 \\
 &\quad -i(V_{10}\rho_{01} + V'_{10}\rho_{01} - V_{01}\rho_{10} - V'_{01}\rho_{10}) \\
 \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} \right) \rho_{22} &= -\gamma_2 \rho_{22} + \gamma_{20} \rho_{00} + \gamma_{21} \rho_{11} + \lambda_2 \\
 &\quad -i(V_{20}\rho_{02} - V_{02}\rho_{20}) \\
 \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} \right) \rho_{10} &= -i\omega_{10}\rho_{10} - \Gamma_{10}\rho_{10} \\
 &\quad -i(V_{10}\rho_{00} + V'_{10}\rho_{00} - V_{10}\rho_{11} - V'_{10}\rho_{11} - V_{20}\rho_{12}) \\
 \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} \right) \rho_{20} &= -i\omega_{20}\rho_{20} - \Gamma_{20}\rho_{20} \\
 &\quad -i(V_{20}\rho_{00} - V_{10}\rho_{21} - V'_{10}\rho_{21} - V_{20}\rho_{22}) \\
 \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} \right) \rho_{12} &= -i\omega_{12}\rho_{12} - \Gamma_{12}\rho_{12} \\
 &\quad -i(V_{10}\rho_{02} + V'_{10}\rho_{02} - V_{02}\rho_{10})
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Para ver ahora la evolución de los distintos elementos de la matriz densidad y poder computar esa variación, suponemos por una parte, una dependencia temporal armónica, de cada coherencia, con la frecuencia de la onda electromagnética con la cual se acopla, y por otra, dada la existencia de las frecuencias espaciales  $k_1$ , (co y contra-propagante), y  $k_2$ , podemos efectuar una descomposición de la función en serie de Fourier respecto a los armónicos de frecuencia espacial  $k = \frac{k_1}{a} = \frac{k_2}{b}$  siendo  $a$  y  $b$  dos enteros adecuadamente escogidos. Tendríamos así:

$$\begin{aligned}
 \rho_{00}(v, z, t) &= \sum_p R_{00}^p(v, t) e^{ipkz} \\
 \rho_{11}(v, z, t) &= \sum_p R_{11}^p(v, t) e^{ipkz}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{22}(v, z, t) &= \sum_p R_{22}^p(v, t) e^{ipkz} \\
\rho_{10}(v, z, t) &= e^{i\Omega_c t} \sum_p R_{10}^p(v, t) e^{ipkz} \\
\rho_{20}(v, z, t) &= e^{i\Omega_2 t} \sum_p R_{20}^p(v, t) e^{ipkz} \\
\rho_{12}(v, z, t) &= e^{i(\Omega_c - \Omega_2)t} \sum_p R_{12}^p(v, t) e^{ipkz}
\end{aligned}$$

En las ecuaciones de evolución temporal, con las expresiones de los elementos de interacción y definiendo las desintonías de bombeo y de la onda generada,

$$\Delta_2 = \Omega_2 - \omega_{02}, \quad \Delta_1 = \Omega_c - \omega_{01} \quad (4.9)$$

quedan las ecuaciones:

$$\dot{R}_{00}^p(v, t) = (-\gamma_0 - ipkv) R_{00}^p(v, t) + \gamma_{01} R_{11}^p(v, t) + \gamma_{02} R_{22}^p(v, t) \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned}
&-i(+A^*(t) R_{01}^{p+a}(v, t) - A(t) R_{10}^{p-a}(v, t)) \\
&-i(+A'^*(t) R_{01}^{p-a}(v, t) - A'(t) R_{10}^{p+a}(v, t)) \\
&-i(+\beta(t) R_{02}^{p+b}(v, t) - \beta(t) R_{20}^{p-b}(v, t)) \\
&+\lambda_0 \delta(p, 0)
\end{aligned}$$

$$\dot{R}_{11}^p(v, t) = (-\gamma_1 - ipkv) R_{11}^p(v, t) + \gamma_{10} R_{00}^p(v, t) + \gamma_{12} R_{22}^p(v, t)$$

$$\begin{aligned}
&-i(-A^*(t) R_{01}^{p+a}(v, t) + A(t) R_{10}^{p-a}(v, t)) \\
&-i(-A'^*(t) R_{01}^{p-a}(v, t) + A'(t) R_{10}^{p+a}(v, t)) \\
&+\lambda_1 \delta(p, 0)
\end{aligned}$$

$$\dot{R}_{22}^p(v, t) = (-\gamma_2 - ipkv) R_{22}^p(v, t) + \gamma_{20} R_{00}^p(v, t) + \gamma_{21} R_{11}^p(v, t)$$

$$\begin{aligned}
&-i(-\beta(t) R_{02}^{p+b}(v, t) + \beta(t) R_{20}^{p-b}(v, t)) \\
&+\lambda_2 \delta(p, 0)
\end{aligned}$$

$$\dot{R}_{10}^p(v, t) = (-\Gamma_{10} - i(\Delta_1 + pkv)) R_{10}^p(v, t)$$

$$\begin{aligned}
&+iA^*(t) (R_{00}^{p+a}(v, t) - R_{11}^{p+a}(v, t)) \\
&+iA'^*(t) (R_{00}^{p-a}(v, t) - R_{11}^{p-a}(v, t)) \\
&-i\beta(t) R_{12}^{p+b}(v, t)
\end{aligned}$$

$$\dot{R}_{20}^p(v, t) = (-\Gamma_{20} - i(\Delta_2 + pkv)) R_{20}^p(v, t)$$

$$\begin{aligned}
& -i (A^* (t) R_{21}^{p+a} (v, t) + A'^* (t) R_{21}^{p-a} (v, t)) \\
& + i\beta (t) (R_{00}^{p+b} (v, t) - R_{22}^{p+b} (v, t)) \\
\dot{R}_{12}^p (v, t) = & (-\Gamma_{12} - i ((\Delta_1 - \Delta_2) + pkv)) R_{12}^p (v, t) \\
& -i (-A^* (t) R_{02}^{p+a} (v, t) - A'^* (t) R_{02}^{p-a} (v, t)) \\
& -i\beta (t) R_{10}^{p-b} (v, t)
\end{aligned}$$

Descomponemos los elementos de la matriz densidad en parte real e imaginaria en la forma  $R_{ij}^p (v, t) = X_{ij}^p (v, t) + iY_{ij}^p (v, t)$  y las amplitudes de la onda generada como  $A(t) = X(t) + iY(t)$  y  $A'(t) = X'(t) + iY'(t)$ . Como además, por definición de los elementos de la matriz densidad,  $\rho_{ij} = \rho_{ji}^*$ , tendremos para sus coeficientes:  $R_{ij}^p = (R_{ji}^{-p})^*$ . Haciendo uso de ello, y agrupando términos queda finalmente:

$$\begin{aligned}
\dot{X}_{00}^p (v, t) = & -\gamma_0 X_{00}^p (v, t) + pkv Y_{00}^p (v, t) + \gamma_{01} X_{11}^p (v, t) + \gamma_{02} X_{22}^p (v, t) \quad (4.11) \\
& -X(t) (Y_{10}^{-p-a} (v, t) + Y_{10}^{p-a} (v, t)) - Y(t) (X_{10}^{-p-a} (v, t) + X_{10}^{p-a} (v, t)) \\
& -X'(t) (Y_{10}^{-p+a} (v, t) + Y_{10}^{p+a} (v, t)) - Y'(t) (X_{10}^{-p+a} (v, t) + X_{10}^{p+a} (v, t)) \\
& -\beta(t) (Y_{20}^{-p-b} (v, t) + Y_{20}^{p-b} (v, t)) \\
& +\lambda_0 \delta(p, 0) \\
\dot{Y}_{00}^p (v, t) = & -\gamma_0 Y_{00}^p (v, t) - pkv X_{00}^p (v, t) + \gamma_{01} Y_{11}^p (v, t) + \gamma_{02} Y_{22}^p (v, t) \\
& -X(t) (X_{10}^{-p-a} (v, t) - X_{10}^{p-a} (v, t)) + Y(t) (Y_{10}^{-p-a} (v, t) - Y_{10}^{p-a} (v, t)) \\
& -X'(t) (X_{10}^{-p+a} (v, t) - X_{10}^{p+a} (v, t)) + Y'(t) (Y_{10}^{-p+a} (v, t) - Y_{10}^{p+a} (v, t)) \\
& -\beta(t) (X_{20}^{-p-b} (v, t) - X_{20}^{p-b} (v, t)) \\
\dot{X}_{11}^p (v, t) = & -\gamma_1 X_{11}^p (v, t) + pkv Y_{11}^p (v, t) + \gamma_{10} X_{00}^p (v, t) + \gamma_{12} X_{22}^p (v, t) \\
& +X(t) (Y_{10}^{-p-a} (v, t) + Y_{10}^{p-a} (v, t)) + Y(t) (X_{10}^{-p-a} (v, t) + X_{10}^{p-a} (v, t)) \\
& +X'(t) (Y_{10}^{-p+a} (v, t) + Y_{10}^{p+a} (v, t)) + Y'(t) (X_{10}^{-p+a} (v, t) + X_{10}^{p+a} (v, t)) \\
& +\lambda_1 \delta(p, 0) \\
\dot{Y}_{11}^p (v, t) = & -\gamma_1 Y_{11}^p (v, t) - pkv X_{11}^p (v, t) + \gamma_{10} Y_{00}^p (v, t) + \gamma_{12} Y_{22}^p (v, t) \\
& +X(t) (X_{10}^{-p-a} (v, t) - X_{10}^{p-a} (v, t)) - Y(t) (Y_{10}^{-p-a} (v, t) - Y_{10}^{p-a} (v, t)) \\
& +X'(t) (X_{10}^{-p+a} (v, t) - X_{10}^{p+a} (v, t)) - Y'(t) (Y_{10}^{-p+a} (v, t) - Y_{10}^{p+a} (v, t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{X}_{22}^p(v, t) &= -\gamma_2 X_{22}^p(v, t) + pkv Y_{22}^p(v, t) + \gamma_{20} X_{00}^p(v, t) + \gamma_{21} X_{11}^p(v, t) \\ &\quad + \beta(t) \left( Y_{20}^{-p-b}(v, t) + Y_{20}^{p-b}(v, t) \right) \\ &\quad + \lambda_2 \delta(p, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{Y}_{22}^p(v, t) &= -\gamma_2 Y_{22}^p(v, t) - pkv X_{22}^p(v, t) + \gamma_{20} Y_{00}^p(v, t) + \gamma_{21} Y_{11}^p(v, t) \\ &\quad + \beta(t) \left( X_{20}^{-p-b}(v, t) - X_{20}^{p-b}(v, t) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{X}_{10}^p(v, t) &= -\Gamma_{10} X_{10}^p(v, t) + (\Delta_1 + pkv) Y_{10}^p(v, t) \\ &\quad - X(t) \left( Y_{00}^{p+a}(v, t) - Y_{11}^{p+a}(v, t) \right) + Y(t) \left( X_{00}^{p+a}(v, t) - X_{11}^{p+a}(v, t) \right) \\ &\quad - X'(t) \left( Y_{00}^{p-a}(v, t) - Y_{11}^{p-a}(v, t) \right) + Y'(t) \left( X_{00}^{p-a}(v, t) - X_{11}^{p-a}(v, t) \right) \\ &\quad + \beta(t) Y_{12}^{p+b}(v, t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{Y}_{10}^p(v, t) &= -\Gamma_{10} Y_{10}^p(v, t) - (\Delta_1 + pkv) X_{10}^p(v, t) \\ &\quad + X(t) \left( X_{00}^{p+a}(v, t) - X_{11}^{p+a}(v, t) \right) + Y(t) \left( Y_{00}^{p+a}(v, t) - Y_{11}^{p+a}(v, t) \right) \\ &\quad + X'(t) \left( X_{00}^{p-a}(v, t) - X_{11}^{p-a}(v, t) \right) + Y'(t) \left( Y_{00}^{p-a}(v, t) - Y_{11}^{p-a}(v, t) \right) \\ &\quad - \beta(t) X_{12}^{p+b}(v, t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{X}_{20}^p(v, t) &= -\Gamma_{20} X_{20}^p(v, t) + (\Delta_2 + pkv) Y_{20}^p(v, t) \\ &\quad - X(t) Y_{12}^{-p-a}(v, t) - Y(t) X_{12}^{-p-a}(v, t) \\ &\quad - X'(t) Y_{12}^{p+a}(v, t) - Y'(t) X_{12}^{p+a}(v, t) \\ &\quad - \beta(t) \left( Y_{00}^{p+b}(v, t) - Y_{22}^{p+b}(v, t) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{Y}_{20}^p(v, t) &= -\Gamma_{20} Y_{20}^p(v, t) - (\Delta_2 + pkv) X_{20}^p(v, t) \\ &\quad - X(t) X_{12}^{-p-a}(v, t) + Y(t) Y_{12}^{-p-a}(v, t) \\ &\quad - X'(t) X_{12}^{p+a}(v, t) + Y'(t) Y_{12}^{p+a}(v, t) \\ &\quad + \beta(t) \left( X_{00}^{p+b}(v, t) - X_{22}^{p+b}(v, t) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{X}_{12}^p(v, t) &= -\Gamma_{12} X_{12}^p(v, t) + ((\Delta_1 - \Delta_2) + pkv) Y_{12}^p(v, t) \\ &\quad + X(t) Y_{20}^{-p-a}(v, t) + Y(t) X_{20}^{-p-a}(v, t) \\ &\quad + X'(t) Y_{20}^{p+a}(v, t) + Y'(t) X_{20}^{p+a}(v, t) \\ &\quad + \beta(t) Y_{10}^{p-b}(v, t)\end{aligned}$$

$$\dot{Y}_{12}^p(v, t) = -\Gamma_{12} Y_{12}^p(v, t) - ((\Delta_1 - \Delta_2) + pkv) X_{12}^p(v, t)$$

$$\begin{aligned}
& +X(t) X_{20}^{-p-a}(v, t) - Y(t) Y_{20}^{-p-a}(v, t) \\
& +X'(t) X_{20}^{-p+a}(v, t) - Y'(t) Y_{20}^{-p+a}(v, t) \\
& -\beta(t) X_{10}^{p-b}(v, t)
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones para las variables de la materia deben completarse con las ecuaciones para las amplitudes del campo generado, para las cuales utilizamos las ecuaciones de autoconsistencia:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E_1(t) + \kappa E_1(t) &= i \frac{\Omega_c}{2\epsilon_0} P_1(t) \\
\frac{d}{dt} E'_1(t) + \kappa E'_1(t) &= i \frac{\Omega_c}{2\epsilon_0} P'_1(t)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

donde  $\kappa$  es el coeficiente de pérdidas de la cavidad y  $P_1(t)$ ,  $P'_1(t)$  (tal como se definen más adelante). El cálculo de la polarización del medio se efectúa a través de la expresión:

$$\begin{aligned}
P(z, t) &= N \int W(v) Tr[\rho\mu] dv \\
&= N \int W(v) (\rho_{10}\mu_{01} + \rho_{20}\mu_{02} + \rho_{01}\mu_{10} + \rho_{02}\mu_{20}) dv
\end{aligned} \tag{4.13}$$

donde  $W(v)$  es la función distribución Maxwellianade velocidades, debidas al efecto Doppler ( $v$  es la componente de la velocidad en la dirección de propagación de las ondas). De aquí podemos extraer la aportación de la transición  $0 - 1$  :

$$\begin{aligned}
P_1(z, t) &= N \int W(v) (\rho_{10}\mu_{01} + \rho_{01}\mu_{10}) dv \\
&= N \int W(v) \left( \mu_{01} e^{i\Omega_c t} \sum_p R_{10}^p(v, t) e^{ipkz} + \mu_{10} e^{-i\Omega_c t} \sum_p R_{01}^p(v, t) e^{ipkz} \right) dv \\
&= \mu_{01} e^{i\Omega_c t} N \int W(v) \sum_p R_{10}^p(v, t) e^{ipkz} dv \\
&\quad + \mu_{10} e^{-i\Omega_c t} N \int W(v) \sum_p (R_{10}^{-p})^*(v, t) e^{ipkz} dv.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Como podemos suponer la polarización una función de la forma:

$$P_1(z, t) = \frac{1}{2} (P_1(t) e^{-i(\Omega_c t - k_1 z)} + c.c.), \quad P_1(z, t) = \frac{1}{2} (P'_1(t) e^{-i(\Omega_c t + k_1 z)} + c.c.) \tag{4.16}$$

para la formación del campo copropagante y contrapropagante respectivamente, Comparando con la expresión anterior, obtenemos,

$$\begin{aligned} P_1(t) &= 2\mu_{10}N \int W(v) R_{10}^{-a*}(v, t) dv & (p = -a) \\ P'_1(t) &= 2\mu_{10}N \int W(v) R_{10}^{a*}(v, t) dv & (p = a) \end{aligned} \quad (4.17)$$

que introducidas en las ecuaciones de autoconsistencia (4.12), queda:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_1(t) + \kappa E_1(t) &= i \frac{\Omega_c}{2\epsilon_0} 2\mu_{10}N \int W(v) R_{10}^{-a*}(v, t) dv \\ \frac{d}{dt}E'_1(t) + \kappa E'_1(t) &= i \frac{\Omega_c}{2\epsilon_0} 2\mu_{10}N \int W(v) R_{10}^{a*}(v, t) dv \end{aligned} \quad (4.18)$$

Con las definiciones de las frecuencias de Rabi (4.4), obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{A}(t) + \kappa A(t) &= ig \int W(v) R_{10}^{-a*}(v, t) dv \\ \dot{A}'(t) + \kappa A'(t) &= ig \int W(v) R_{10}^{a*}(v, t) dv \end{aligned} \quad (4.19)$$

haciendo  $g = \frac{\Omega_c \mu_{10}^2 N}{2\epsilon_0 \hbar}$ , el factor de ganancia.

Separándolas en parte real e imaginaria, quedan finalmente las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) + \kappa X(t) &= g \int W(v) Y_{10}^{-a}(v, t) dv \\ \dot{Y}(t) + \kappa Y(t) &= g \int W(v) X_{10}^{-a}(v, t) dv \\ \dot{X}'(t) + \kappa X'(t) &= g \int W(v) Y_{10}^a(v, t) dv \\ \dot{Y}'(t) + \kappa Y'(t) &= g \int W(v) X_{10}^a(v, t) dv \end{aligned} \quad (4.20)$$

que junto con las ecuaciones (4.11), forma el conjunto final de ecuaciones de evolución del LGBO con onda generada bidireccional.

Tenemos así en el caso más general un total de 12 ecuaciones por grupo de velocidad y armónico para la materia y 4 más para el campo. Si por ejemplo, desarrollamos 5 armónicos por variable y 100 grupos de velocidad, tendríamos que estudiar 6004 ecuaciones diferenciales acopladas, lo que resulta analíticamente inviable.

La solución numérica pasa por realizar la integración de todas esas ecuaciones con un algoritmo de tipo Runge-Kutta, que nos da la evolución temporal de las mismas.

Obtendremos así la intensidad de la onda generada copropagante (o “forward”,

en la literatura anglosajona),  $I_F$ , y la intensidad de la onda contrapropagante (o “backward”),  $I_B$ , como:

$$\begin{aligned} I_F(t) &= X(t)^2 + Y(t)^2 \\ I_B(t) &= X'(t)^2 + Y'(t)^2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

### 3 El láser FIR de $NH_3$

Utilizamos en nuestro modelo un láser de  $NH_3$  con emisión en  $153 \mu m$ . El bombeo utiliza la emisión  $10R(18)$  de  $10.8 \mu m$ . de un láser de  $^{13}CO_2$  sobre la transición  $\nu_2 - aQ(5,4)$  y genera dos modos contrapropagantes en la transición  $aR(4,4)$  del  $^{15}NH_3$ .

La razón de frecuencias  $k_1/k_2$  nos da un cociente aproximado de  $a/b \simeq 1/15$  y una frecuencia espacial, de base  $k = k_1/a = k_2/b = 41067 \text{ m}^{-1}$

La población  $n_i$ , en un nivel considerado, viene dado por la fórmula

$$\frac{n_i}{n} = \frac{(2J+1) S(K) e^{-E_i(\nu, J, K)/k_b T}}{Z} \quad (4.22)$$

donde  $n$  es la densidad de moléculas de un gas a presión  $P$  y temperatura  $T$  (para  $T = 273K$ ,  $n = 2.414 \times 10^{20} \cdot P \text{ m}^{-3}$ ). Los números cuánticos  $\nu, J, K$ , determinan respectivamente, su nivel vibracional, momento angular y proyección del momento angular sobre el eje principal de la molécula. Para nuestro caso, el nivel 2, de bombeo, tendría  $\nu = 0, J = 5, K = 4$ . La función de partición  $Z$  toma el valor  $Z = 580$  para el amoniaco, y  $S(K) = 4$  si  $K = 0$  ó múltiplo de 3, y  $S(K) = 2$  en cualquier otro caso. Y la función

$$E_i(\nu, J, K) = BJ(J+1) + (C-B)K^2 + \dots \quad (4.23)$$

si toda la energía es debida a procesos rotacionales ( $\nu = 0$ ). Aquí  $B = 9.94 \text{ cm}^{-1}$  y  $(C-B) = -3.36 \text{ cm}^{-1}$  para el amoniaco.

Con todo ello,

$$n_2 = 2.835 \times 10^{18} \cdot P \text{ m}^{-3}.$$

Para el resto de niveles, podemos deducir de la expresión anterior:

$$\frac{n_i}{n_j} = \frac{2J_i + 1}{2J_j + 1} e^{-i\hbar\omega_{ij}/k_b T} \quad (4.24)$$

y por tanto tendremos

$$n_0 = 0.0117 \cdot n_2 \quad (J = 5)$$

$$n_1 = 0.0131 \cdot n_2 \quad (J = 4)$$

Las relajaciones toman los valores:

$$\Gamma_{01} = \Gamma_{02} = \Gamma_{12} = \gamma_2 \equiv \gamma_{\perp} = 0.68 \times 10^6 \cdot P \quad s^{-1}$$

$$\gamma_0 = \gamma_1 \equiv \gamma_{\parallel} = 0.28 \cdot \gamma_{\perp} = 0.19 \times 10^6 \cdot P \quad s^{-1}$$

siendo nulas el resto.

Los bombeos incoherentes, (según la relación  $\lambda_i = n_i \gamma_i$ ):

$$\lambda_0 = 0.0033 \cdot n_2 \cdot \gamma_{\perp}$$

$$\lambda_1 = 0.0037 \cdot n_2 \cdot \gamma_{\perp}$$

$$\lambda_2 = n_2 \cdot \gamma_{\perp}$$

Y los parámetros  $g$  y  $\kappa$  :

$$g = \frac{\Omega_c \mu_{10}^2 N}{2 \epsilon_0 \hbar} = 2.408 \times 10^{16} \cdot P \quad s^{-2} = 52077 \cdot \gamma_{\perp}^2 \cdot P^{-1}$$

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{\Omega_c}{Q_c} = 9.75 \times 10^6 \quad s^{-1} = 14.34 \cdot \gamma_{\perp} \cdot P^{-1}$$

Dado que  $\Omega_c = 12.315 \times 10^{12} \quad s^{-1}$  es la frecuencia de la transición 0-1,  $\mu_{10} = 0.34 \quad D$  es el momento dipolar, y  $N = 2.905 \times 10^{18} \cdot P \quad m^{-3}$  es el número total de moléculas activas en nuestro sistema ( $n_2 + n_0 + n_1$  de nuestro cálculo anterior).

Y

$$Q_c = \frac{\Omega_c L}{ct}$$

siendo  $L$  la longitud de la cavidad ( $2 \text{ m.}$ ) y  $t$  las pérdidas de la misma, que pueden situarse en torno al 13%. No obstante, podemos tomar para  $g$ , 1/3 de su valor contando con todos los efectos que pueden producir una disminución en dicha ganancia y en particular la atenuación de la onda de bombeo al ir penetrando en la cavidad [Corbalán et al, 1989]

Asimismo, el Efecto Doppler, afectará a la población de las moléculas según la distribución

$$W(v) = (\sqrt{\pi}u)^{-1} e^{-\frac{v^2}{u^2}} \quad u = \sqrt{\frac{2k_b T}{m}}$$

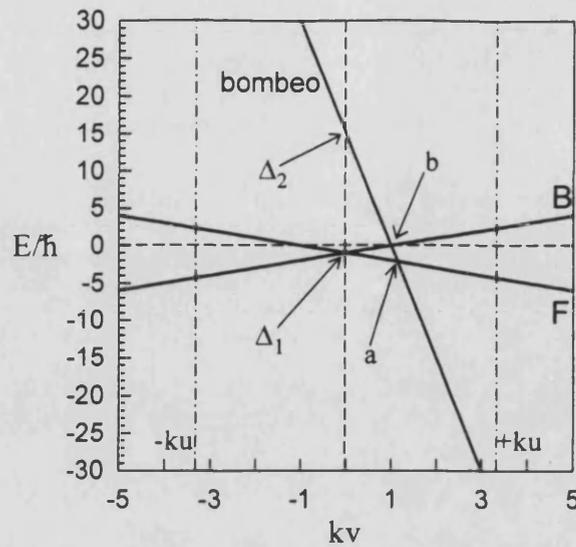
correspondiendo a  $u$ , la “velocidad más probable”, y siendo  $m$  la masa molecular del gas. En nuestro caso,  $m = 2.8 \times 10^{-26} \text{ Kg}$ , y por tanto  $u = 541.62 \text{ ms}^{-1}$  y

$$k \cdot u = 32.7 \cdot \gamma_{\perp} \cdot P^{-1}.$$

#### 4 Estudio de la estabilidad del sistema

El primer elemento a tener en cuenta en nuestro sistema es la anisotropía que la onda viajera de bombeo introduce en la emisión. Sus consecuencias las podemos intuir a partir en la figura 4.1, donde están representados los estados fundamentales del láser FIR en un diagrama  $\langle E/\hbar, kv \rangle$  para desintonías de bombeo y de la onda generada de  $\Delta_2$  y  $\Delta_1$  respectivamente, tal y como vemos en la teoría del átomo vestido. En general, debido a su mayor paralelismo, la onda generada copropagante resonará más con la onda de bombeo en un dominio mayor de velocidades moleculares que la onda generada contrapropagante. En la figura 4.1 se aprecia como la integración alrededor de (a) producirá una contribución mayor, debido al motivo indicado y dado que se encuentran en zona de velocidades moleculares muy probables ( $kv < ku$ ). Ello permite predecir que, en general, la onda generada copropagante presentará mayor intensidad que la contrapropagante, la cual incluso podría desaparecer como resultado de la competición entre ambas ondas. Sin embargo, esto prodrá no suceder así en tres casos: (i) para altas desintonías de bombeo, donde es la contrapropagante la que resuena en grupos de velocidades más probables -alrededor de (b)-, dado que la copropagante resonará en zona de velocidades moleculares con menos población. (ii) Para desintonías de la cavidad  $\Delta_1 \simeq -\Delta_2 k_1/k_2$  (con  $\Delta_2 \neq 0$ ), para las cuales la onda contrapropagante es resonante con la transición 0-1 (resonancia que ocurre para las moléculas con  $v = \Delta_2 k_1/k_2$ ), mientras que la onda copropagante sólo resuena por efecto Raman, para moléculas con velocidades algo superiores a las anteriores. Y (iii) también cerca del umbral de emisión, para bajas desintonías de bombeo, donde se produce un fenómeno de biestabilidad (como indicamos a continuación).

Empecemos mostrando el comportamiento del láser para amplitudes de bombeo bajas, figura 4.2. El umbral de emisión ocurre en  $\beta = 0.09\gamma_{\perp}$  en el ejemplo mostrado, y la emisión que aparece es contrapropagante. Al llegar a  $\beta = 0.33\gamma_{\perp}$  la emisión cambia bruscamente de dirección (“switching”), pasando a copropagante. Si ahora se sigue el camino inverso, decreciendo el bombeo, se produce un fenómeno de

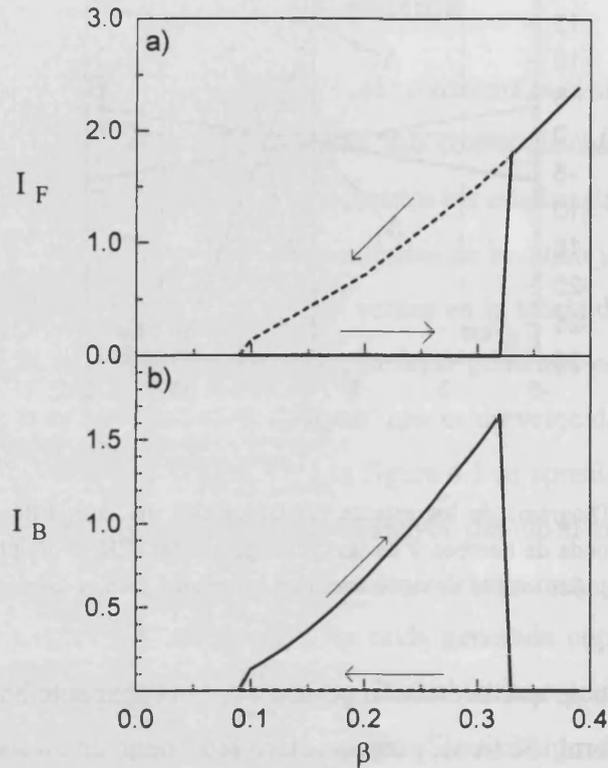


**Figura 4.1.-** Diagrama de los estados fundamentales del láser FIR de  $\text{NH}_3$  con el nivel de resonancia de la onda de bombeo y de las ondas generadas (F,B) a desintonías  $\Delta_2$  y  $\Delta_1$  respectivamente. Se señalan los límites de velocidades más probables  $\pm ku$ , y las resonancias de F y B con el bombeo (a) y (b).

histéresis, en el sentido de que la emisión permanece copropagante hasta que desaparece al cruzar el umbral. Se tiene, pues, un claro fenómeno de biestabilidad entre las dos direcciones de emisión.

La preferencia por la emisión contrapropagante (cuando se incrementa el bombeo), la cual es contraria a la norma señalada anteriormente, puede explicarse por el hecho de que, cuando la onda de bombeo es débil ( $\beta = 0.1\gamma_{\perp}$  en la figura 4.2) produce un “vestimiento” de la molécula algo distinto al habitual (desdoblamiento de los niveles por efecto Stark dinámico), que ocurre para  $\beta \gtrsim \gamma_{\perp}$ . Dicho “vestimiento” conlleva que la onda contrapropagante resuena en un dominio de velocidades moleculares algo más ancho que el correspondiente a la onda copropagante. En cambio, para bombeos más altos ( $\beta > 0.35\gamma_{\perp}$  en la figura 4.2) ya observamos el comportamiento normal, con dominio de la onda copropagante, desapareciendo totalmente la onda-contrapropagante. En realidad, no hemos encontrado ninguna situación en que las dos ondas coexistan, en régimen estacionario estable. Sólo coexisten las dos ondas en regímenes dinámicos (dependientes del tiempo) como veremos.

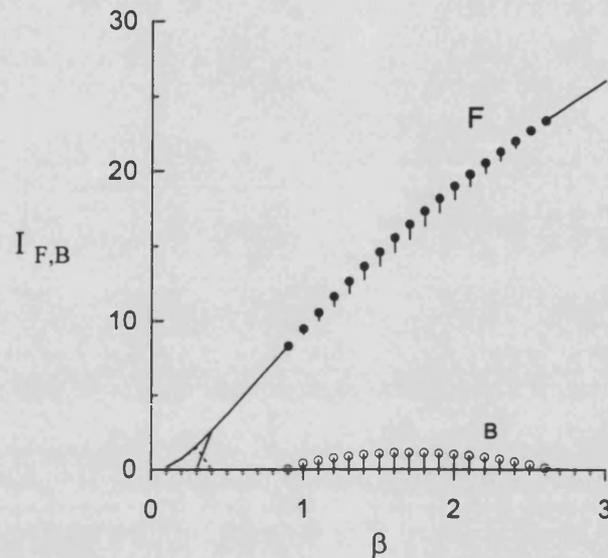
El fenómeno descrito de cambio brusco de la dirección de la emisión (“switch-



**Figura 4.2.-** Curvas de intensidades de la onda generada copropagante (a) y contrapropagante (b) al aumentar adiabáticamente el bombeo  $\beta$  -líneas continuas- y al disminuir el mismo -líneas discontinuas-. Corresponde al caso de bombeo y emisión resonantes ( $\Delta_2 = \Delta_1 = 0$ ).

ing”) para un determinado valor de la amplitud de bombeo  $g_b$  podría tener aplicaciones prácticas y no aparece en el modelo simplificado de [Zeghlache et al, 1988] y [Hoffer et al, 1988]. En dicho modelo, que corresponde al caso de un láser con bombeo incoherente y ensanchamiento homogéneo, existe biestabilidad, pero el salto entre los dos estados de dirección no ocurre determinísticamente para un determinado valor del bombeo, sino que solamente puede ser inducido por ruido o señales inyectadas (o bien ocurre en regímenes dependientes del tiempo). El fenómeno de biestabilidad encontrado ocurre para un gran rango de desintonías de la onda de bombeo, hasta que es tal que comienza a beneficiar netamente a la onda contrapropagante. En nuestros cálculos, hemos comprobado que se produce hasta  $\Delta_2 = 9\gamma_1$  y  $\Delta_1 = \pm 1.2\gamma_1$ .

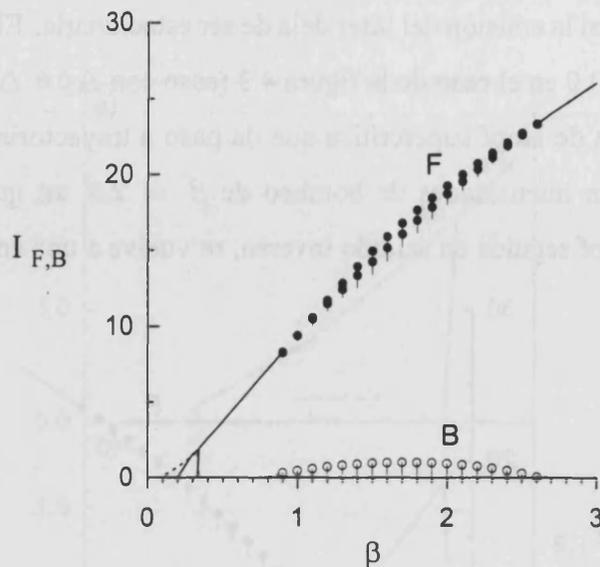
Si incrementamos el bombeo, llegamos al segundo umbral o umbral de inestabilidad, a partir del cual la emisión del láser deja de ser estacionaria. El segundo umbral aparece para  $\beta \simeq 0.9$  en el caso de la figura 4.3 (caso con  $\Delta_2 = \Delta_1 = 0$ ). Consiste en una bifurcación de Hopf supercrítica que da paso a trayectorias periódicas que se mantienen hasta intensidades de bombeo de  $\beta = 2.6$ , en que mediante otra bifurcación de Hopf seguida en sentido inverso, se vuelve a una emisión estable.



**Figura 4.3.-** Intensidades de emisión de la onda F -línea continua y puntos negros- y la onda B -línea discontinua y puntos blancos- en función de la amplitud de la onda de bombeo. Las líneas representan estados de emisión estable y los puntos corresponden a los máximos de intensidad de estados pulsados, cuya amplitud está representada por los segmentos sobre los que se apoyan. El cruce de líneas de  $\beta \simeq 0.3 \gamma_{\perp}$  representa la biestabilidad del primer umbral. El caso corresponde a bombeo y emisión resonantes ( $\Delta_2 = \Delta_1 = 0$ ).

La emisión copropagante está representada por la línea continua (emisión estable) y los puntos negros (máximos de emisión pulsante) y la emisión contrapropagante por la línea discontinua, prácticamente nula en la zona de emisión estable, y los puntos blancos (máximos de emisión pulsante). Vemos así la biestabilidad del primer umbral y la bifurcación de Hopf del segundo umbral, así como la segunda bifurcación de Hopf que da lugar a una emisión estable a altas intensidades de bombeo. La onda B emite solamente en el periodo de inestabilidad, y de forma despreciable frente a la onda F. La amplitud de las pulsaciones está representada por los segmentos

que se apoyan en los puntos.

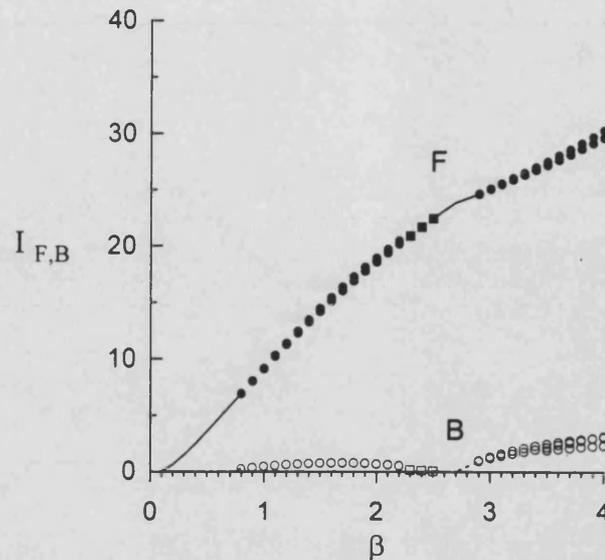


**Figura 4.4.-** Idem a la figura anterior pero con  $\Delta_1 = \gamma_1$ . La emisión inestable pasa a ser de periodo 2, representado por los máximos correspondientes en cada valor de  $\beta$ .

Esta descripción no cambia para desintonías no nulas (moderadas) de la onda generada, como puede verse en la figura 4.4 para bombeo resonante y  $\Delta_1 = \gamma_1$ . Se mantiene la biestabilidad en el primer umbral, así como en el segundo umbral y la segunda bifurcación de Hopf para sus respectivas amplitudes del campo de bombeo. Sólo cambiará el estado dinámico del periodo de inestabilidad, al pasar a ser una doble pulsación.

Para desintonías de la onda generada más elevadas, como el de la figura 4.5, con  $\Delta_1 = 3\gamma_1$ , aparece antes el segundo umbral y la segunda bifurcación de Hopf. Para bombeos más elevados (del orden de  $\beta \simeq 2.9$  en este caso) vuelve a desestabilizarse la emisión, mediante una tercera bifurcación de Hopf, dando paso a un régimen pulsante de periodo 3, donde la emisión de la onda B adquiere valores medios apreciablemente más altos que en la primera zona de inestabilidad. La biestabilidad se reduce a una zona entre  $\beta \simeq 0.1$  y  $\beta \simeq 0.2$

Cuando la desintonía de bombeo aumenta, nos encontramos en una situación como la mostrada en la figura 4.6 para  $\Delta_2 = 9\gamma_1$  donde además  $\Delta_1 = -0.6\gamma_1$ . Ahora los distintos umbrales se alcanzan para amplitudes del campo de bombeo

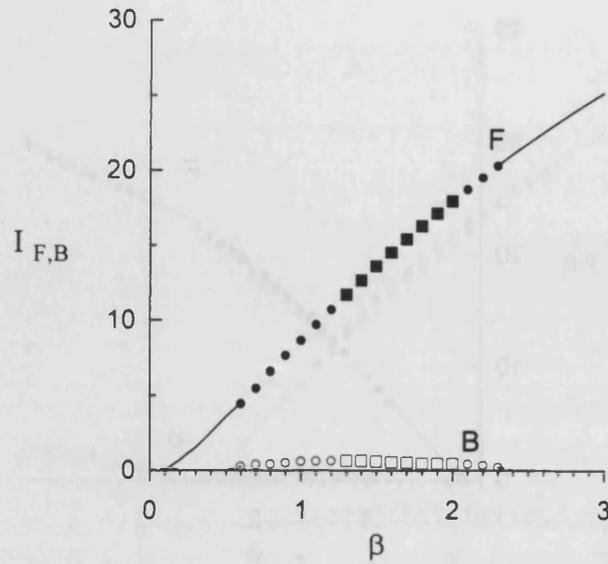


**Figura 4.5.-** Análogo a las figura anteriores, pero ahora  $\Delta_1 = 3\gamma_1$ . Aparecen estados dinámicos cuasiperiódicos para bombeos altos en la primera zona de inestabilidad (cuadros negros para la onda F y blancos para la onda B, que representan la emisión media de tales estados) y en la segunda zona de inestabilidad, los tres círculos blancos de cada estado en la onda B corresponden a los máximos del estado pulsante de periodo 3. No se representan ahora las amplitudes de los estados pulsantes, que no han variado en magnitud respecto a las figura anteriores.

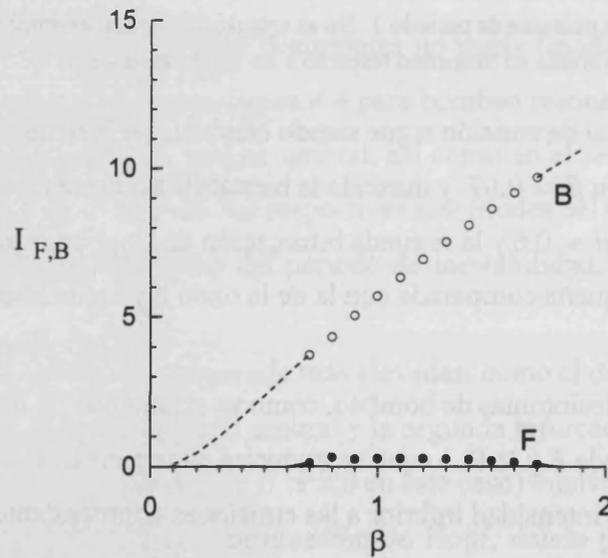
inferiores. El umbral de emisión sigue siendo biestable (si bien de forma más débil), iniciándose ahora en  $\beta = 0.07$ , y durando la biestabilidad hasta  $\beta \simeq 0.2$ . El segundo umbral aparece en  $\beta = 0.6$  y la segunda bifurcación de Hopf en  $\beta = 2.3$ . La emisión de la onda B es pequeña comparada con la de la onda F y sigue restringida a la zona de inestabilidad.

Para muy altas desintonías de bombeo, como ya señalamos, se invierte la relación de favor entre la onda F y la B, lo que se traducirá en una emisión contrapropagante del láser, si bien de intensidad inferior a las emisiones copropagantes de desintonías bajas. En la figura 4.7 se muestra la situación para  $\Delta_2 = 30\gamma_1$  y  $\Delta_1 = -1.\gamma_1$ , apreciándose la inversión que se produce en la emisión y el comportamiento estable respecto a los casos anteriormente estudiados.

El paso de una emisión predominantemente copropagante a contrapropagante no es sencillo de sistematizar. Para desintonía de la onda de bombeo intermedias, entre  $10\gamma_1 \lesssim \Delta_2 \lesssim 30\gamma_1$ , se produce emisión de ambas ondas, pero en régimen



**Figura 4.6.-** Como en las figura anteriores pero para  $\Delta_2 = 9\gamma_1$  y  $\Delta_1 = -0.6\gamma_1$ . Los círculos representan ahora la media de emisión de estados periódicos, describiéndose en el texto sus características.



**Figura 4.7.-** Igual que en las gráficas anteriores pero con  $\Delta_2 = 30\gamma_1$  y  $\Delta_1 = -1.\gamma_1$ . Los círculos representan la emisión media de estados pulsantes periódicos.

dependiente del tiempo. Para amplios rangos de desintonías y amplitudes de bombeo existen intermitencias en las que ambas ondas llegan a tener la misma intensidad media de emisión, contrariamente a lo que pasaba en los casos anteriores. El primer

y segundo umbral se suelen mantener alrededor de los valores ya mencionados pero cualquier otra sistematización parece compleja: pequeñas variaciones de la desintonía y la amplitud de bombeo hace que sea una u otra la onda que resulta finalmente amplificada. Este punto se ampliará más adelante.

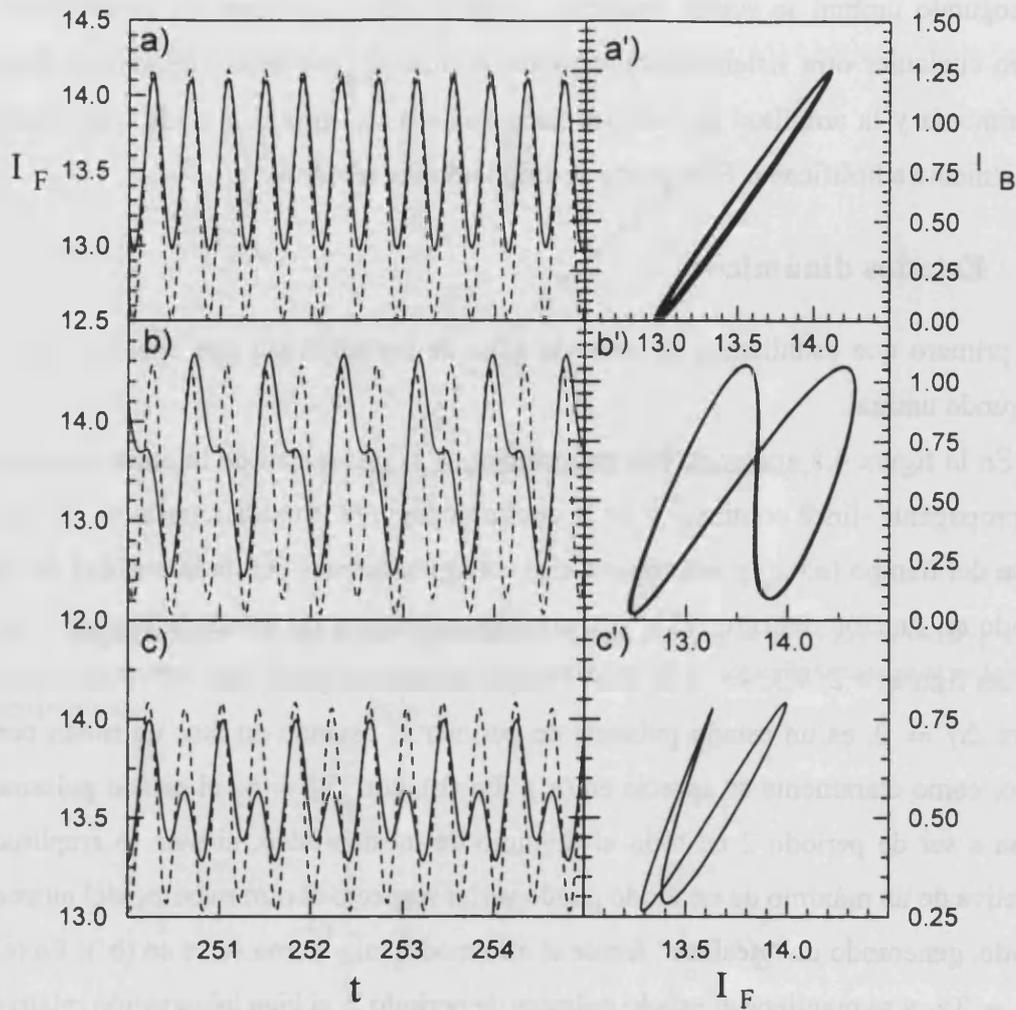
## 5 Estados dinámicos

El primero que estudiamos es sobre la zona de inestabilidad que aparece tras el segundo umbral.

En la figura 4.8 aparecen tres trayectorias de la intensidad de la onda generada copropagante -línea continua- y de la contrapropagante -línea discontinua- en función del tiempo (a,b,c) y sus trayectorias correspondientes con la intensidad de un modo en función del otro (a',b',c'), correspondientes a las zonas de inestabilidad de las figuras 4.2, 4.3, 4.4, ( $\Delta_2 = 0$ .) respectivamente; para  $\beta = 1.5$ . Así, en (a), para  $\Delta_1 = 0$ , es un estado pulsante de periodo 1, estando en fase un modo con otro, como claramente se aprecia en (a'). En (b), con  $\Delta_1 = \gamma_1$  el estado pulsante pasa a ser de periodo 2 en todo el dominio de inestabilidad, si bien la amplitud relativa de un máximo de un modo puede variar respecto al otro máximo del mismo modo, generando un "desfase" frente al otro modo, tal y como se ve en (b'). En (c)  $\Delta_1 = 3\gamma_1$  y se mantiene el estado pulsante de periodo 2, si bien la variación relativa de los máximos no genera el desfase anteriormente comentado, de esta forma, en (c') aparecen dos siluetas estrechas, mostrando que ambos modos mantienen la fase en la pulsación.

Sin embargo, en la zona dinámica en consideración en el estado de la figura 4.4, aparece para bombeos altos unos estados cuasiperiódicos, mostrados en la figura 4.9 para  $\beta = 2.3$ . Estos estados provienen de forma gradual del estado periódico anteriormente explicado, y con el aumento del bombeo, terminan en un estado estable.

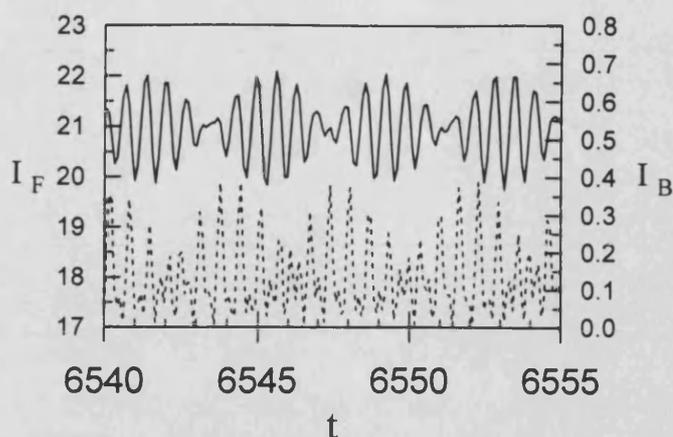
Asimismo, en la ruta de la figura 4.4, aparece una segunda zona dinámica con trayectorias de periodo 3, como en la figura 4.10 para  $\beta = 3.6$ , que se manifiestan sobre todo en la onda contrapropagante ya que en la copropagante, uno de los máximos parece haber sido "absorbido" por el pico de otro de los máximos, dando



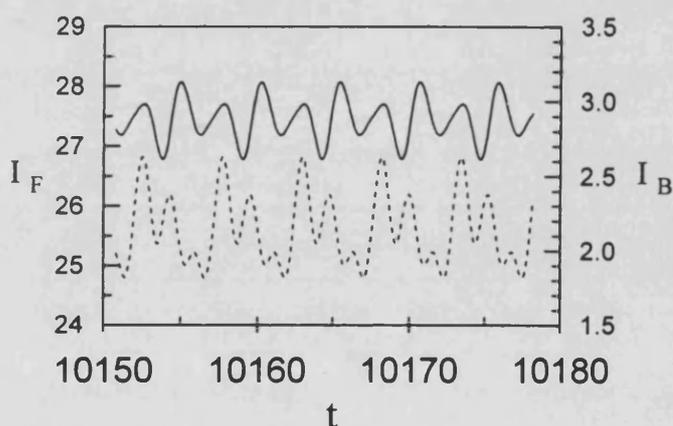
**Figura 4.8.-** Trayectorias periódicas para  $\Delta_2 = 0$  y  $\beta = 1.5$ , variando la desintonía de la onda generada en  $\Delta_1 = 0$  (a,a'),  $\Delta_1 = \gamma_1$  (b,b') y  $\Delta_1 = 3\gamma_1$  (c,c'). En (a,b,c) se representan las intensidades de la onda generada F -línea continua, eje izquierdo- y B -línea discontinua, eje derecho- respecto al tiempo, en unidades de  $\gamma_1$ . En (a',b',c') se representan la intensidad de la onda B en ordenadas, respecto a la intensidad de la onda F, en abcisas. Notese que las escalas de los ejes de (a',b',c') coinciden con los ejes de ordenadas de (a,b,c).

el aspecto de un periodo 2 con un pico poco simétrico. Este hecho, similar al que ocurría en la figura 4.8(b) da la sensación que un modo está “desfasado” respecto al otro.

Para la ruta de la figura 4.6, el dominio dinámico tiene una evolución más completa, como se muestra en la figura 4.11, análoga a la figura 4.8, pero todos los casos con  $\Delta_2 = 9\gamma_1$ ,  $\Delta_1 = -0.6\gamma_1$  y amplitudes de la onda de bombeo de  $\beta = 0.8$

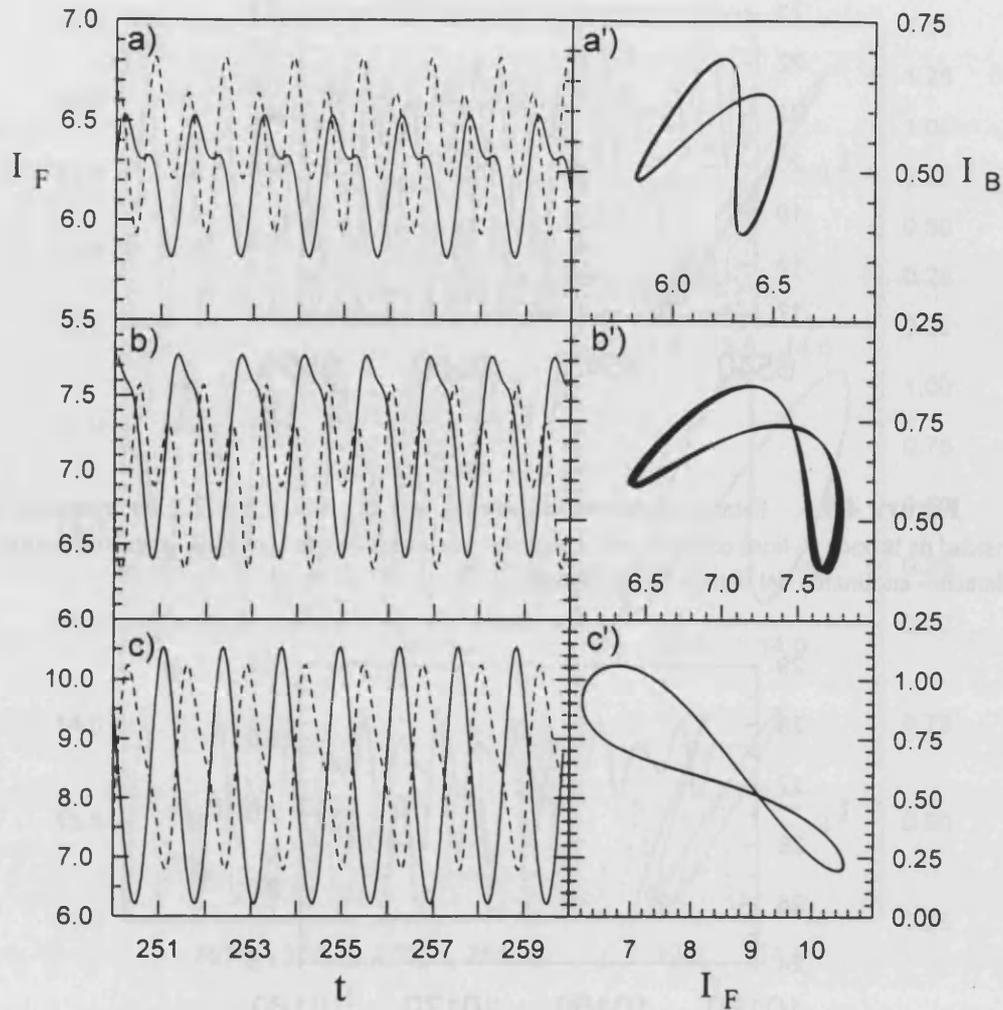


**Figura 4.9.-** Estado cuasiperiódico para  $\Delta_2 = 0$ ,  $\Delta_1 = 3$ , y  $\beta = 2.3$ . Se representa la intensidad de la onda F-linea continua, eje izquierdo- y la intensidad de la onda B -linea discontinua, eje derecho- en función del tiempo, en unidades  $\gamma_1$ .



**Figura 4.10.-** Como en la figura anterior, pero ahora es un estado periódico para  $\beta = 3.6$

(a,a'),  $\beta = 0.9$  (b,b') y  $\beta = 1.0$  (c,c'). En estos casos, partiendo del periodo 2 en ambos modos (a), relativamente desfasados, se va "absorbiendo" uno de los picos con el aumento del bombeo, primero en la onda copropagante (b) y después en la contrapropagante (c), mostrando entonces unas pulsaciones de periodo 1 en antifase. Este comportamiento en antifase es bien comprobado. Podemos comparar esta última gráfica con el resultado experimental de la figura 4.12 correspondiente a la figura 4.a de [Tang et al, 1996,1]

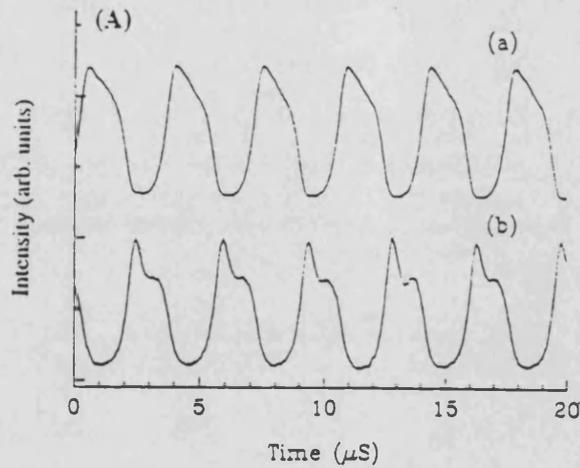


**Figura 4.11.-** Análogo a la figura 4.8.-, pero con  $\Delta_2 = 9\gamma_1$  y  $\Delta_2 = -0.6\gamma_1$  y diversas amplitudes de bombeo:  $\beta = 0.8$  (a,a'),  $\beta = 0.9$  (b,b') y  $\beta = 1$ . (c,c')

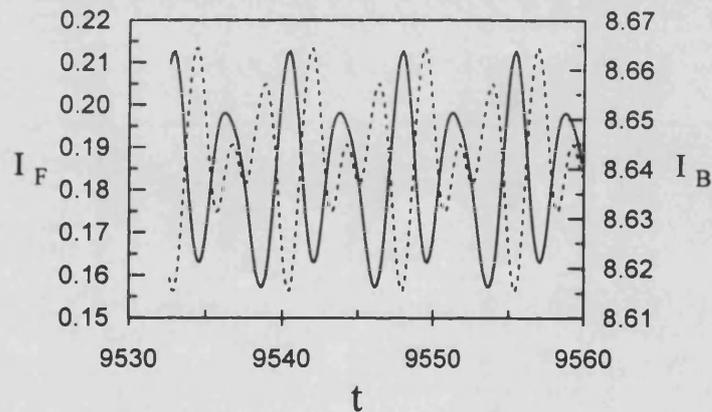
El resto del dominio inestable está ocupado por estados cuasiperiódicos análogos al de la figura 4.9, si bien cambian de nuevo a estados de periodo 2 antes de estabilizarse la emisión.

Para desintonías muy altas de la onda de bombeo, hemos encontrado una dinámica con trayectorias pulsantes de periodo 2 y 3, como se aprecia en la figura 4.13 para  $\Delta_2 = 30\gamma_1$ ,  $\Delta_1 = 10\gamma_1$  y  $\beta = 1.5$ , de manera análoga a la figura 4.10, si bien en antifase para los picos más significativos.

Por último, mostramos el estudio para desintonías de bombeo medias, del orden de  $\Delta_2 \approx 15\gamma_1$ . Como ya indicamos, para tales desintonías se produce la interacción



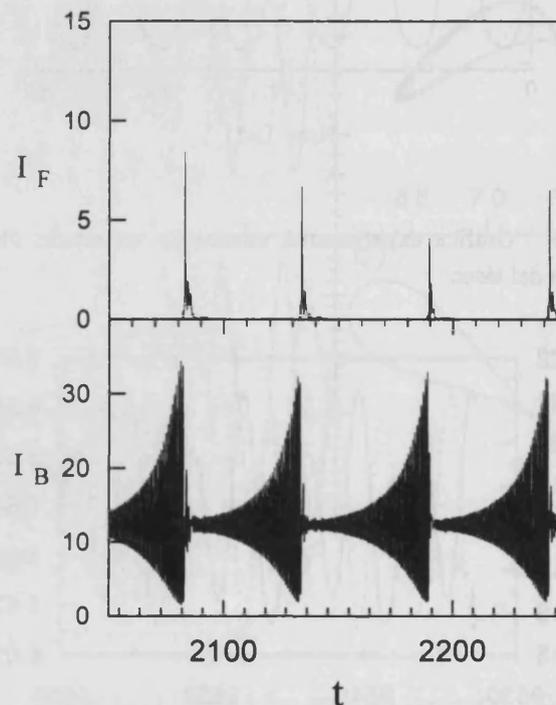
**Figura 4.12.-** Gráfica experimental mostrando un estado dinámico en antifase de ambas ondas generadas del láser.



**Figura 4.13.-** Análoga a la figura 4.10.- pero con  $\Delta_2 = 30\gamma_1$ ,  $\Delta_1 = 10\gamma_1$ ,  $\beta = 1.5$

más fuerte entre los dos modos de la onda generada, ya que ambos se ven igualmente favorecidos en la resonancia con la onda de bombeo. De esta forma conseguimos los comportamientos dinámicos más ricos del láser. De ellos destacamos las intermitencias que se producen cuando el modo contrapropagante emite en forma de espirales como las del modelo de Lorenz. Comprobamos que el modo copropagante, menos favorecido en la interacción (para desintonías cercanas a  $\Delta_1 \simeq -\Delta_2 k_1/k_2$ ), permanece apagado salvo cuando el primero alcanza el valor máximo de la se-

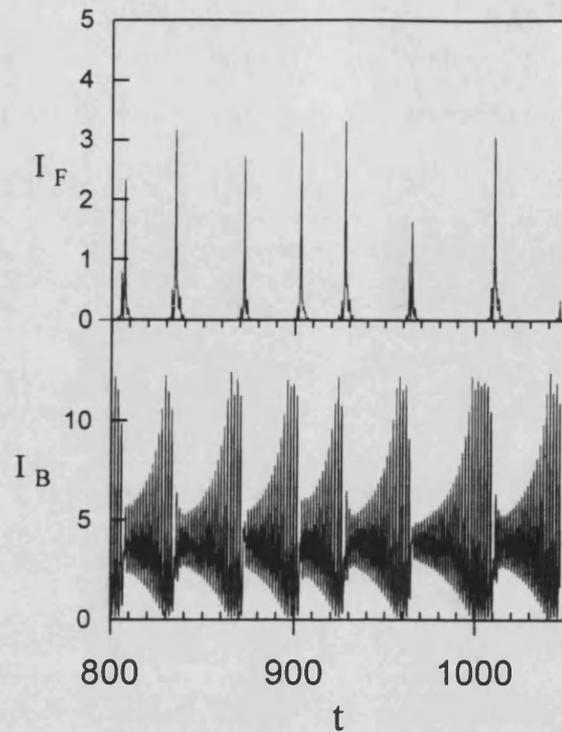
cuencia espiral, momento en el cual emite en dirección copropagante un pulso de luz, comenzando una nueva secuencia espiral el modo contrapropagante. Esto se aprecia claramente en la figura 4.14, para  $\Delta_2 = 15\gamma_1$ ,  $\Delta_1 = -0.9\gamma_1$  y  $\beta = 0.9$ . Es de señalar que si la onda copropagante no apareciera, la onda contrapropagante permanecería en un estado caótico de tipo Lorenz [Roldán et al, 1997]. Estos resultados coinciden bien con las observaciones experimentales [Abraham et al, 1988] [Tang et al, 1992]



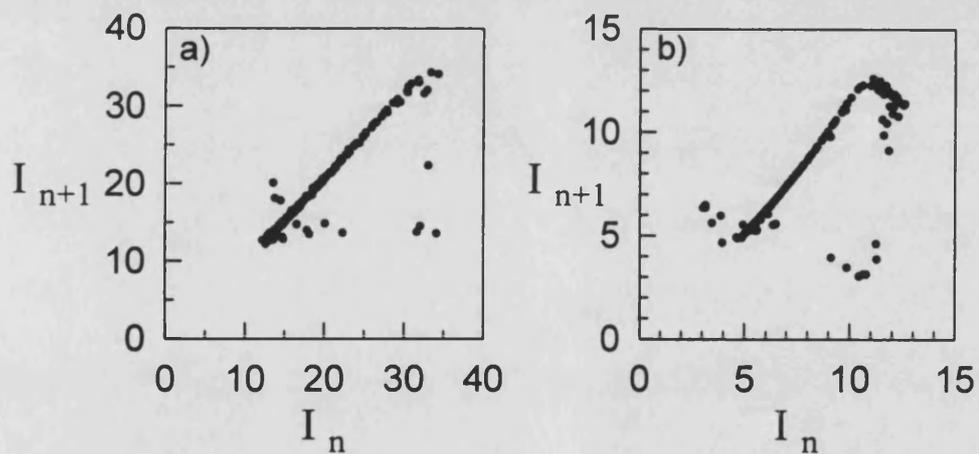
**Figura 4.14.-** Estado caótico para  $\Delta_2 = 15\gamma_1$ ,  $\Delta_1 = -0.9\gamma_1$ ,  $\beta = 0.9$ . Se representan las intensidades de la onda F y B en función del tiempo en unidades  $\gamma_1$ .

La figura 4.15 muestra una secuencia similar para  $\Delta_2 = 12\gamma_1$ ,  $\Delta_1 = -4\gamma_1$  y  $\beta = 0.4$ , pero con unas secuencias espirales más cortas y unos pulsos del modo copropagante más intensos. Aparece entonces un retardo en la aparición de la siguiente secuencia espiral, hecho también señalado en la bibliografía. [Weiss et al, 1991]

El carácter cercano al Lorenziano de este tipo de comportamiento dinámico de la onda contrapropagante se refleja en la figura 4.16, donde se presentan dos gráficas de máximos de intensidad de la onda contrapropagante de los casos anteriores. Tenemos



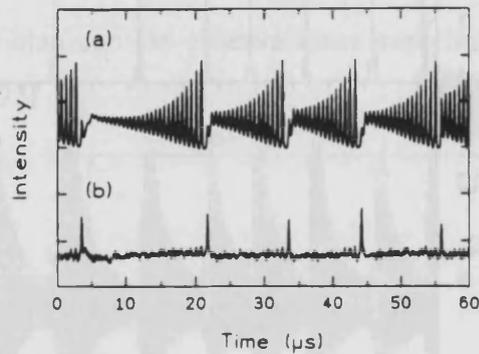
**Figura 4.15.-** Análogo a la figura anterior para  $\Delta_2 = 12\gamma_1$ ,  $\Delta_1 = -4\gamma_1$  y  $\beta = 0.4$



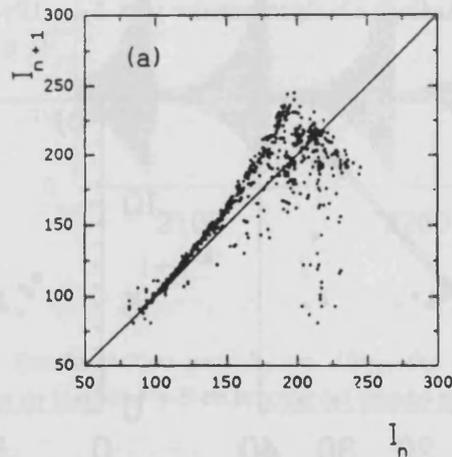
**Figura 4.16.-** Máximos de intensidad de las trayectorias espirales de las figuras 4.13 (a) y 4.14 (b). Se presenta la intensidad del pico  $i+1$ -ésimo frente a la del  $i$ -ésimo.

la intensidad del máximo  $i$ -ésimo en abscisas y el  $i+1$ -ésimo en ordenadas. En ambos casos se aprecia claramente la cúspide del modelo de Lorenz, si bien de forma no tan “limpia”, debido a la irrupción pulsante de la onda copropagante, la cual

altera la evolución de la onda contrapropagante. Podemos comparar estos estados con el obtenido experimentalmente en [Tang et al, 1992] y del que presentamos una secuencia temporal (figura 4.17) y el mapa de máximos de intensidad  $\langle I_{i+1}, I_i \rangle$  (figura 4.18)



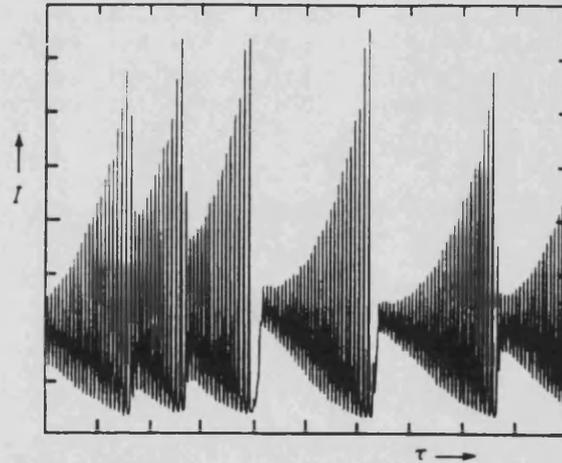
**Figura 4.17.-** Gráfica experimental con un estado caótico similar al de Lorenz -onda contrapropagante-mientras la onda copropagante exhibe un estado de intermitencias.



**Figura 4.18.-** Mapa de máximos ( $I_{i+1}$  en función de  $I_i$ ) obtenido de la onda contrapropagante de la figura experimental anterior.

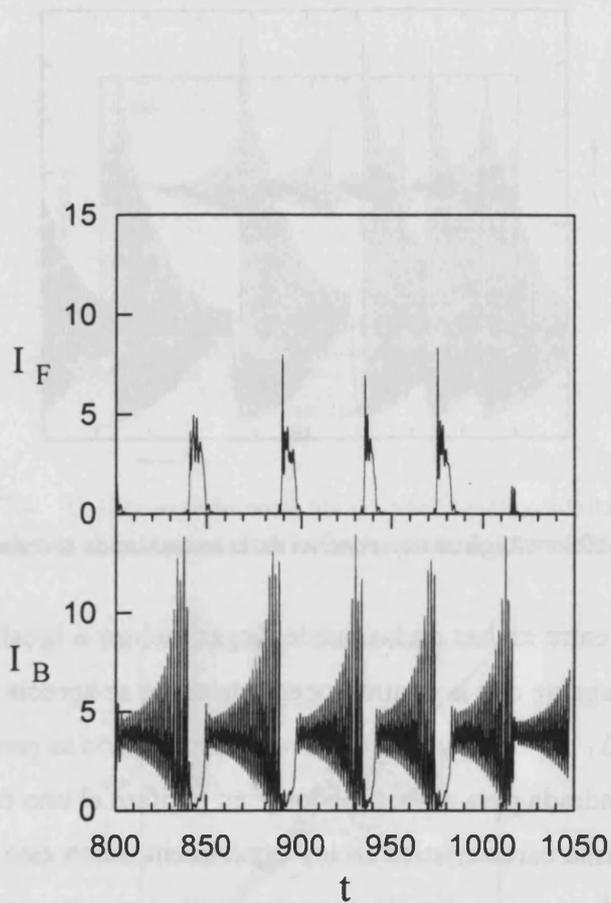
Aumentar la interacción entre los dos modos supone favorecer más la onda copropagante y por tanto obtener pulsos más largos en dicha onda. Esto queda de manifiesto en las figuras 4.20 para  $\Delta_2 = 15\gamma_1$ ,  $\Delta_1 = -2\gamma_1$  y  $\beta = 0.4$  y 4.21 para

$\Delta_2 = 16\gamma_1$ ,  $\Delta_1 = -2\gamma_1$  y  $\beta = 0.7$  teniendo registros experimentales análogos para la onda contrapropagante, como el mostrado en la figura 4.19 tal y como aparece en [Weiss et al, 1991] .

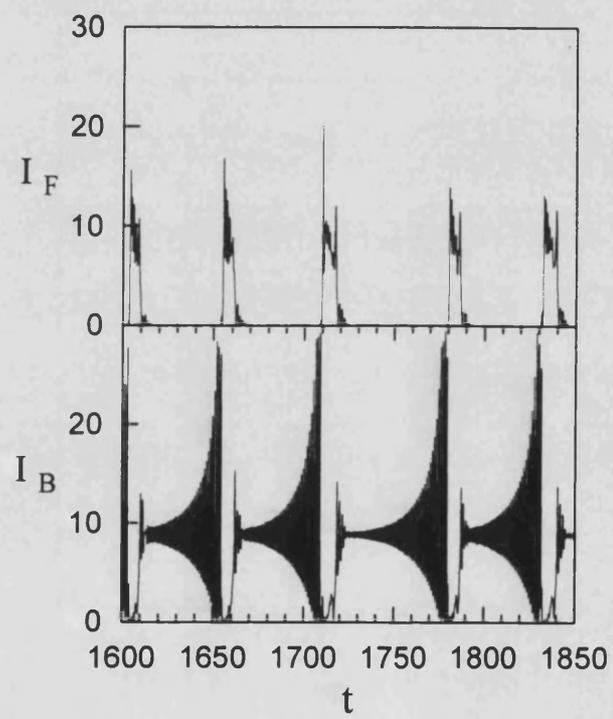


**Figura 4.19.-** Registro experimental de la intensidad de la onda contrapropagante.

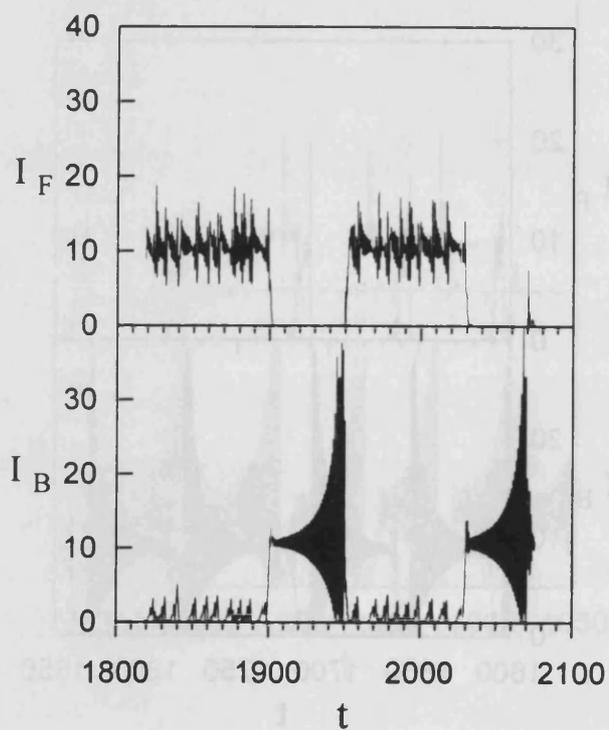
La interacción entre ambas ondas puede llegar incluso a igualar la duración de la emisión copropagante con la contrapropagante como se aprecia en la figura 4.22, para  $\Delta_2 = 13\gamma_1$ ,  $\Delta_1 = -4\gamma_1$  y  $\beta = 0.8$ . Este último estado se parece a una serie de pulsos en onda cuadrada para ambos modos y en antifase el uno con el otro, estado que aparece de forma característica en los experimentos con este láser [Tang et al, 1996,1] y que no hemos conseguido, reproducir exactamente con nuestro modelo.



**Figura 4.20.-** Trayectorias temporales de la intensidad de las ondas F y B en el caso  $\Delta_2 = 15\gamma_1$ ,  $\Delta_1 = -2\gamma_1$  y  $\beta = 0.4$ . Obsérvese la diferencia de escala en ordenadas en las dos gráficas.



**Figura 4.21.-** Análogo a la figura anterior pero con  $\Delta_2 = 16\gamma_1$ ,  $\Delta_1 = -2\gamma_1$  y  $\beta = 0.7$



**Figura 4.22.-** Igual a la figura anterior pero para  $\Delta_2 = 13\gamma_1$ ,  $\Delta_1 = -4\gamma_{11}$  y  $\beta = 0.8$

## Conclusiones

Nos hemos ocupado a lo largo de este trabajo del estudio del comportamiento estacionario y dinámico de láseres de gas que emiten en dos modos contrapropagantes de la misma frecuencia, ya sea en el caso de cavidad Fabry-Perot, en el que se forma una onda estacionaria, ya sea en el caso de cavidad en anillo y emisión bidireccional. Hemos extendido los conocimientos existentes en este campo considerando una serie de nuevos problemas que se han tratado en los capítulos anteriores. Hemos utilizado un modelo semiclásico de tres niveles con ensanchamiento inhomogeneo (Doppler), que interactúan con tres ondas electromagnéticas: una de bombeo y dos generadas. Este modelo básico, basado en el formulismo de la matriz densidad, se ha modificado para tener en cuenta los distintos desarrollos experimentales que se han tratado de estudiar.

Se ha tenido en cuenta el “modelo del átomo vestido” como una potente herramienta para entender las distintas interacciones de las ondas con el medio molecular.

De esta forma, en el Capítulo 1, hemos caracterizado la emisión estacionaria del láser MIR de  $\text{NH}_3$  [Rolland et al, 1984,2] [Rolland et al, 1984,3] y el de dímero de  $\text{Na}_2$  [Wellegehausen, 1979] [Man et al, 1983] con cavidad Fabry-Perot. Estos estudios, junto con los ya efectuados para el láser FIR de  $\text{CH}_3\text{OH}$  en [Laguarta et al, 1985,1] y el láser atómico anti-Stokes de  $\text{Ne}$  en [Laguarta et al, 1985,2], permiten tener un conocimiento profundo del comportamiento de los LGBO con bombeo unidireccional y cavidad Fabry-Perot existentes hasta el momento.

En el primero de ellos, hemos estudiado la ganancia de la onda estacionaria, en las componentes copropagante y contrapropagante a la onda de bombeo para distintas condiciones físicas, como la intensidad de las ondas implicadas (a través de sus frecuencias de Rabi), la presión del medio y la desintonía de bombeo. Hemos comparado los resultados obtenidos con los que produciría las mismas ondas en una cavidad en anillo.

Con todo ello, se han explicado los fenómenos de saturación y acoplo entre las dos ondas generadas, que caracterizan a los LGBO en cavidad Fabry-Perot. El primero

de ellos, debido a la presencia de dos ondas actuando sobre las mismas moléculas, produce una caída de la ganancia respecto a la sola existencia de una onda viajera. El segundo, producto de la anisotropía que la onda de bombeo unidireccional genera en el medio, se basa en la transferencia de fotones de una onda a otra de las ondas generadas a partir de una serie de procesos multifotónicos, que son resonantes para ciertas condiciones de operación. Como resultado de ello, una de las ondas generadas tiene una ganancia mayor que la otra, llegando a sobrepasar su equivalente viajera.

Los resultados de estas investigaciones se publicaron en [Silva et al, 1992]

Respecto al láser de dímero de  $\text{Na}_2$ , y sobre la base de estudio empleada en el láser anterior, se han destacado los procesos de absorción por parte de la población del nivel fundamental de la onda generada debido a la presencia apreciable de población en tal nivel, así como la notable anchura del nivel intermedio de emisión, como los responsables de una fuerte anisotropía en la emisión, que evita de hecho la emisión en dirección contrapropagante para las condiciones en que se ha estudiado nuestro sistema. También se ha caracterizado bien la emisión para muy altas desintonías de la onda de bombeo y generada, donde el bombeo se produce por efecto Raman y siendo posible por el cociente próximo de los números de onda de los campos de bombeo y emisión, además de por su ensanchamiento inhomogeneo, relativamente grande.

En el Capítulo 2 se ha considerado un LGBO en cavidad Fabry-Perot o anillo bombeado por dos ondas contrapropagantes en vez de una sola. En el caso de la cavidad Fabry-Perot, la complejidad que el modelo de cuatro ondas presenta, prácticamente irresoluble, nos lleva a considerar una aproximación de tres ondas, de forma que la emisión puede ser emulada por una sola onda de amplitud variable a lo largo de la cavidad, a condición de sumar las contribuciones a la ganancia que provienen de cada punto de la cavidad. Esta aproximación nos restringe su uso a los láseres de razones de número de onda muy grandes, como son los FIR. Hemos estudiado la influencia del número de ondas y hemos realizado comparaciones con los casos de una onda generada viajera (en cavidad en anillo) y de onda de bombeo

viajera, las cuales han sido muy ilustrativas.

Se ha constatado que el bombeo bidireccional produce un aumento de la ganancia respecto al bombeo viajero, al desaparecer los “light shifts” que la onda de bombeo produce sobre el nivel 0 (se compensan entre sí los “light shifts” producidos por cada componente contrapropagante de la onda de bombeo)y, por tanto, poder resonar la onda generada con el nivel 0 sin perturbar. Esta resonancia, se produce para la práctica totalidad de los grupos de velocidades de las moléculas del medio. El interés de este resultado, publicado en [Silva et al, 1995] , ha llevado inmediatamente a una verificación experimental del mismo [Corbalán et al, 1997] .

Además de las curvas de espectros de ganancia, donde se da el valor de la misma para diferentes desintonías de la onda generada, típicos de esta serie de estudios, hemos investigado el espectro de ganancia cuando se varía la desintonía de la onda de bombeo, lo cual da lugar al fenómeno del Lamb-dip para la ganancia de la onda de bombeo y al del Lamb-dip transferido cuando éste efecto se transfiere a las ondas generadas. Hemos explicado y analizado teóricamente, por primera vez, este último fenómeno, habiendo establecido las condiciones en que tiene lugar. Hemos observado que se presenta generalmente, cuando existe un acoplo notable entre las ondas generadas y de bombeo; destruyéndose el efecto cuando las intensidades de ambas ondas son dispares. Estos estudios se han publicado también en [Silva et al, 1995] .

En el Capítulo 3 se ha abordado el estudio del láser de dos niveles con cavidad Fabry-Perot, tanto en el estudio de sus soluciones estacionarias como en la descripción de su dinámica. Para las soluciones estacionarias y el análisis lineal de estabilidad de las mismas hemos partido de los estudios de J.L.Font y R.Vilaseca, los cuales hemos completados y, sobre todo, extendido para abarcar los regímenes dependientes del tiempo. El análisis lineal de estabilidad muestra la existencia de dos bifurcaciones de Hopf, a diferencia del láser con cavidad en anillo unidireccional (modelo de Haken-Lorenz, donde sólo aparece una. La primera bifurcación de Hopf aparece para bombeos más altos que la correspondiente al láser en anillo, mostrando por tanto un comportamiento más estable que el de dicho láser. La segunda bifur-

cación de Hopf se produce a muy altos bombeos y hace que el láser vuelva a ser estable. Se ha caracterizado este umbral para distintas condiciones de operación del láser (pérdidas de la cavidad, desintonía de la misma, etc).

Basándonos en el análisis de estabilidad, hemos estudiado distintos aspectos de la dinámica del sistema. El umbral por el que el láser pasa de una emisión estable a una emisión pulsante (asociada al atractor originado por una explosión homoclínica) mediante una gran perturbación se encuentra para bombeos mucho más bajos que el la bifurcación de Hopf correspondiente, presentando una acusada dependencia con la desintonía de la cavidad, de forma que para determinada desintonía dicho umbral se hace tan bajo como el del láser con cavidad en anillo.

Se ha caracterizado asimismo la dinámica del sistema a través de varias rutas para distintos parámetros, encontrándose rutas de Feigenbaum y ventanas periódicas. Se ha efectuado una descripción del atractor caótico y se ha hecho una primera estimación de su dimensión de Hausdorff.

Este trabajo se ha publicado en [Font et al, 1997]

Por último, hemos considerado el estudio dinámico del LGBO FIR de  $\text{NH}_3$  con cavidad en anillo y emisión bidireccional. Se han desarrollado las ecuaciones teóricas del modelo de acuerdo con las condiciones del mismo láser. Dada la imposibilidad de efectuar un estudio de las soluciones estacionarias y un análisis lineal de estabilidad de forma analítica, se ha efectuado el estudio de estas soluciones de forma numérica, viendo la evolución temporal del sistema para diferentes valores de los parámetros. Conforme a este planteamiento, hemos considerado diferentes desintonías de la onda de bombeo y de la onda generada y, en cada caso, hemos aumentado gradualmente el bombeo desde valores de la amplitud del mismo cercanos a cero.

De esta forma, se ha estudiado el primer umbral del láser, descubriéndose que presenta una biestabilidad para resonancia y desintonías de bombeo no muy elevadas, explicándose este hecho en términos de la anisotropía que la onda viajera de bombeo introduce en la ganancia del sistema. Este mismo hecho, explica además que sea la onda copropagante la que resulta favorecida en un amplio rango de desintonías, de

manera que la emisión es realmente monomodo tras el primer umbral. Esta relación se invierte para desintonías muy altas de la onda de bombeo donde la resonancia con la onda copropagante es para velocidades moleculares con poca población, prevaleciendo la resonancia con la onda contrapropagante. En régimen estacionario, pues, la emisión del láser es siempre unidireccional (jamás bidireccional), ya sea co- o contra-propagante, según las condiciones indicadas. Se ha comprobado que para desintonías de bombeo intermedias, la interacción es muy fuerte entre ambas ondas generadas, produciéndose emisión autopulsante (no estacionaria) con continuos cambios entre ellas.

Se ha comprobado, asimismo, en los casos de desintonía de bombeo nula o pequeña, la existencia de un segundo umbral en la emisión del láser, a partir del cual la onda generada es pulsante, apareciendo tanto uno como otro modo, con comportamiento en fase o en antifase. Este periodo acaba en otro umbral, a partir del cual el láser vuelve a ser estable. Sólo para desintonías altas de la onda generada aparece una segunda zona de inestabilidad para bombeos muy elevados.

En el régimen pulsante, con baja interacción entre las dos ondas generadas, se ha caracterizado la dinámica de las zonas de inestabilidad, comprobándose la existencia estados periódicos, con distintos estados de fase la pulsación de un modo respecto a otro; y de estados cuasiperiódicos [Tang et al, 1996,1] .

Y en el régimen pulsante con gran interacción entre ambas ondas generadas, se han presentado resultados de caos tipo Lorenz en la onda contrapropagante acompañados de intermitencias de tipo on-off en la copropagante, explicando con ello diversos resultados experimentales [Abraham et al, 1988] ,[Tang et al, 1992] .

Para terminar, comentar tan sólo las perspectivas de futuro que deja abierta este trabajo. Aparte de las posibles complicaciones que podemos considerar en nuestro modelo (presencia de más modos, consideración de diferentes polarizaciones, etc.) queda el completar los distintos resultados experimentales obtenidos para este láser, como es un estudio más completo de la dinámica de antifase[Tang et al, 1996,1] y la sincronización de estados caóticos[Tang et al, 1996,2] , explorando otras condiciones de operación, y la posibilidad de efectuar un análisis más detallado de las intermiten-

cias on-off. Podemos asimismo completar el tema de nuestro trabajo, considerando ambos modos interactuando en una cavidad Fabry-Perot, (las ecuaciones del modelo se encuentran en el Apéndice III). También podemos avanzar en la técnica y la herramientas de interpretación de los distintos fenómenos: aumentando el número de armónicos, mejorando los cálculos de dimensiones multifractales de los atractores caóticos, etc.

Para terminar, podemos comentar que con los trabajos aquí desarrollados y las extensiones que acabamos de indicar creemos que hemos logrado un conocimiento bastante profundo y completo del comportamiento estacionario y dinámico de los láseres de gas que emiten dos ondas contrapropagantes, y en particular sobre los LGBO, dentro del marco de las aproximaciones del campo uniforme y onda plana. Nuevas fenomenologías podrían aparecer en el caso de considerar emisión a varios modos longitudinales o transversos de la cavidad, lo cual llevaría a dependencias espaciales nuevas y a la posible formación de "patterns" (patrones espaciales). También podría aportar nuevos comportamientos la consideración de los subniveles magnéticos de los niveles atómicos o moleculares, lo cual permitiría considerar la dinámica de la polarización de la radiación láser generada. En este estudio, probablemente sería factible en el caso de ensanchamiento homogéneo, el cual podría presentarse, por ejemplo, en casos de láseres basados en haces atómicos o "átomos enfriados", de mucho interés actual.

## APÉNDICE I.- Teoría del átomo vestido

Denominamos átomo vestido al sistema formado por el átomo o molécula y los campos con los que interacciona, tratados ambos cuánticamente (si bien, dado el elevado número de fotones involucrados en los procesos que vamos a estudiar permite un tratamiento semiclásico prácticamente equivalente). De esta forma, la cuantización del campo nos permitirá obtener una interpretación sencilla de los resultados obtenidos en la resolución exacta del modelo semiclásico. En particular, permite distinguir la contribución en las curvas de ganancia de los distintos procesos multifotónicos implicados. La aproximación del átomo vestido nos proporciona un adecuado tratamiento de la interacción radiación-materia entre las moléculas de gas, representadas por los niveles entre los que se producen las distintas transiciones y las ondas existentes en el medio. Consideramos un sistema de 3 niveles como el de la figura 4.4 que interactúa con un campo propagante ( $\beta$ ) y uno en forma de onda estacionaria ( $\alpha^+$ ,  $\alpha^-$ ). Supongamos que algunas de las ondas presentan saturaciones apreciables ( $\alpha^\pm, \beta \gg \gamma_i, i = 0, 1, 2$ ; con  $2\alpha^\pm, 2\beta$  las frecuencias de Rabi de cada uno de los campos). Sea  $|i; n^+, n^-, n\rangle$  el estado correspondiente a la molécula en el nivel  $i = 0, 1, 2$  en presencia de  $n^+$ ,  $n^-$  y  $n$  fotones de los haces de luz existentes. En la aproximación de la onda rotante, la interacción entre la molécula y los campos lleva a una cadena infinita de acoplamientos entre los estados no perturbados [Roso et al, 1983] :

$$\begin{aligned} \dots |0; n^+ - 1, n^- + 1, n\rangle \xleftrightarrow{\alpha} & |1; n^+, n^- + 1, n\rangle \xleftrightarrow{\alpha} |0; n^+, n^-, n\rangle \xleftrightarrow{\alpha} \dots \\ & \dots \xleftrightarrow{\alpha} |0; n^+, n^-, n\rangle \xleftrightarrow{\alpha} |1; n^+ + 1, n^-, n\rangle \xleftrightarrow{\alpha} |0; n^+ + 1, n^- - 1, n\rangle \dots \\ & |0; n^+, n^-, n\rangle \xleftrightarrow{\beta} |2; n^+, n^-, n + 1\rangle \end{aligned}$$

Dada la simetría existente respecto  $n^+$  y  $n^-$  podemos representar estos estados en una forma abreviada:

$$\begin{aligned} |0; n^+ - m, n^- + m, n\rangle & \equiv |0; q = 2m, n\rangle \equiv |0; q, 0\rangle \\ |1; n^+ - m, n^- + m + 1, n\rangle & \equiv |1; q = 2m + 1, n\rangle \equiv |1; q, 0\rangle \\ |2; n^+ - m, n^- + m, n + 1\rangle & \equiv |2; q = 2m, n + 1\rangle \equiv |2; q, 1\rangle \\ m & = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Y diagonalizando la matriz de dimensión infinita asociada a los acoplamientos anteriores, obtenemos los niveles de energía perturbados de la molécula, "vestida" por el haz.

El caso más general, con todas las ondas saturantes y desintonías arbitrarias presenta gran complejidad y solo pueden presentarse resultados comprensibles en una serie de casos particulares:

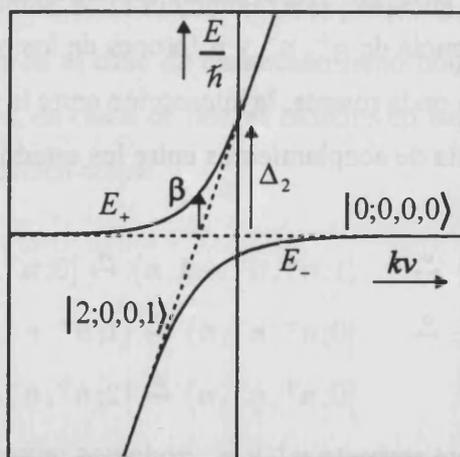
- **La onda viajera es la única saturante:**

Tenemos entonces la situación de la figura I.1. Los estados no perturbados serán los niveles  $|0;0,0\rangle$  y  $|2;0,1\rangle$  y los niveles de energía perturbados vienen descritos por las dos ramas hiperbólicas

$$E_{\pm} = -\frac{\hbar}{2} \left( \Delta_2 + k_2 v \pm \sqrt{(\Delta_2 + k_2 v)^2 + 4\beta^2} \right)$$

centradas en  $k_2 v = -\Delta_2$  y separadas una distancia mínima  $(E_+ - E_-) / \hbar = 2\beta$ .  $v$  es la componente de la velocidad molecular en la dirección de propagación de los campos (en concreto, el campo  $\alpha^+$ ).

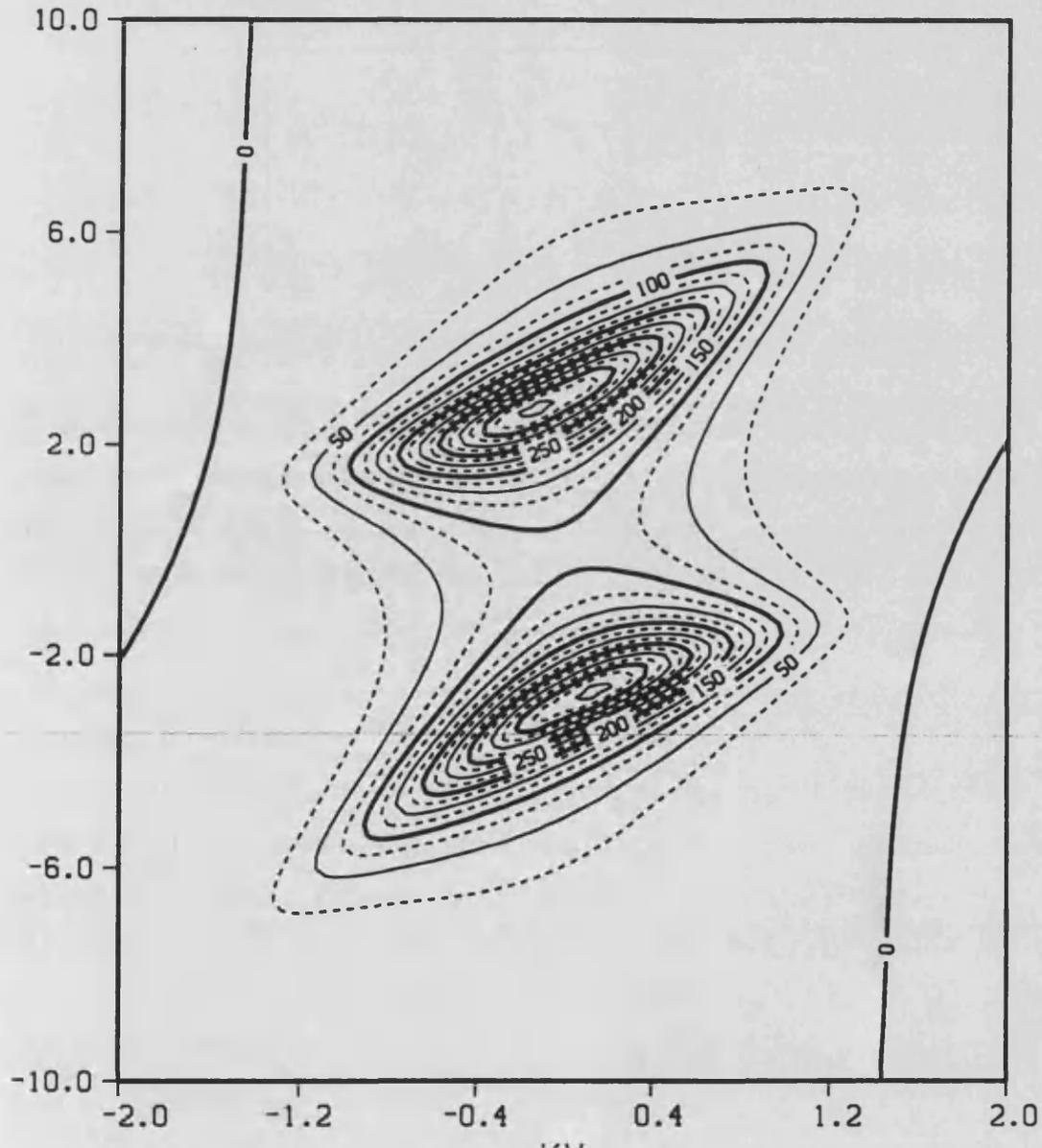
Este anticruzamiento constituye el efecto Stark dinámico lineal.



**Figura I.1.-** Esquema de niveles del átomo vestido por una onda viajera. Se ha supuesto que la onda  $\beta$  se propaga en la misma dirección que la onda  $\alpha^-$ . Se ha tomado la energía del estado  $|0;0,0,0\rangle$  como origen de energías.

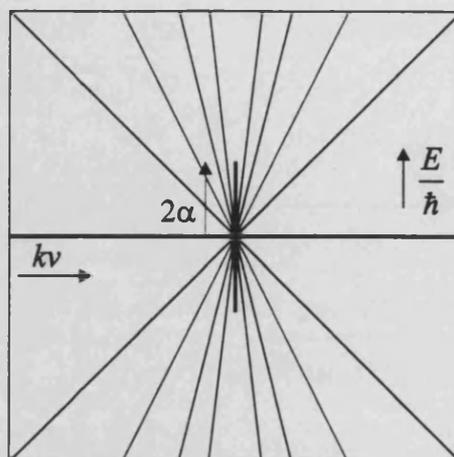
El resto de las ondas actuarán como "prueba", ya que al no modificar la distribución energética del átomo o molécula, su resonancia con los niveles energéticos nos

dará una indicación de la separación de los mismos. Una gráfica donde se muestra ésta situación en forma de curvas de nivel que indican la ganancia que se produce en cada punto del plano de la figura I.1 (es decir, cuando la desintonía de dicha onda es tal que resuena entre dicho punto y el nivel 1) es la figura I.2 para un láser MIR con intensidad de bombeo muy alta.



**Figura I.2.-** Curvas de ganancia (en unidades arbitrarias) para un láser MIR vestido por la onda de bombeo viajera. En abscisas se representa  $kv$  y en ordenadas  $E/\hbar$

- La onda estacionaria es más saturante que la viajera:



**Figura I.3.-** Esquema de niveles de un átomo vestido por una onda estacionaria

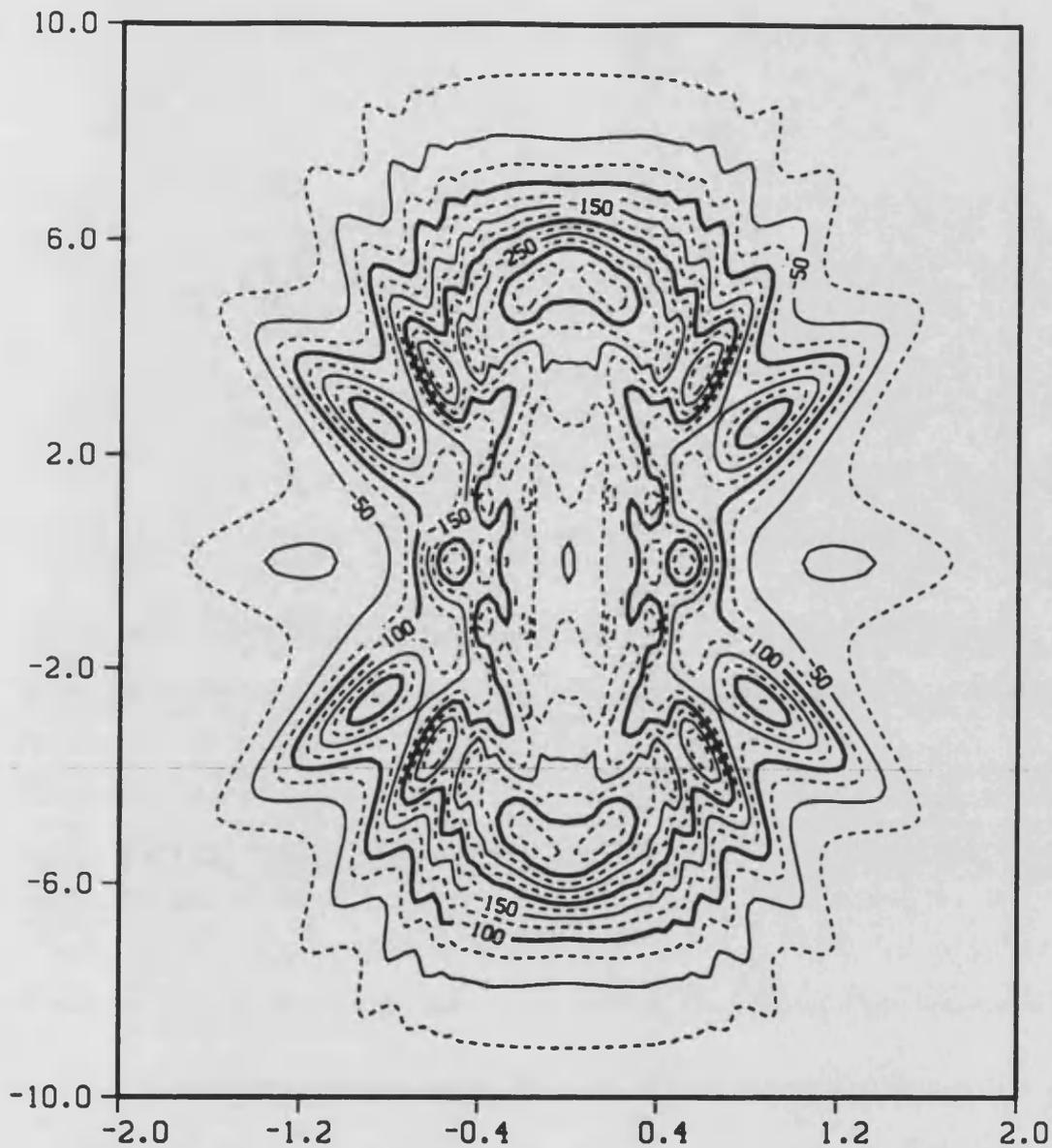
Si ambas ondas resuenan con su correspondiente transición, el problema se puede resolver analíticamente. En la figura I.3 se muestran los niveles del átomo vestido, en función, como antes, de la velocidad molecular a lo largo de la dirección de propagación, tomando el estado  $|0; q = 0, 0\rangle$  como el origen.

Para  $v \neq 0$ , los estados son idénticos a los no perturbados (líneas rectas de pendientes  $\pm 1, \pm 2, \dots$ ), debido a la compensación exacta entre los desplazamientos producidos por el efecto ac Stark, inducidos por los dos haces contrapropagantes que constituyen la onda estacionaria. En  $v = 0$ , las energías cubren un intervalo continuo entre  $-2\alpha$  y  $2\alpha$ , debido a la inhomogeneidad espacial del efecto ac Stark en las moléculas estacionarias, según se encuentren en los nodos, en los antinodos, o en una posición intermedia.

En la figura I.4 tenemos esta situación para el láser MIR del Capítulo 1.

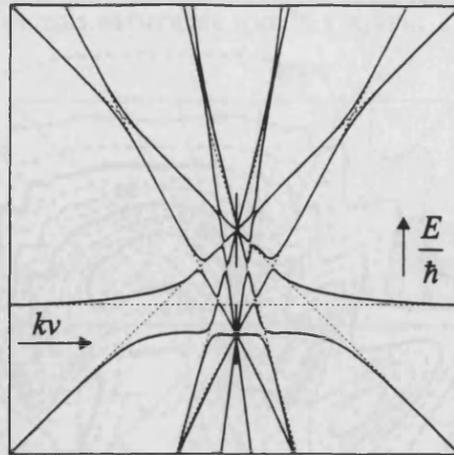
Si la onda estacionaria no resuena con la transición, tendremos una situación como la representada en la figura I.5. Aparecen ahora dos haces de niveles no perturbados (líneas discontinuas), produciéndose anticruzamientos en las intersecciones de estos distintos niveles

Si en este marco, consideramos el haz viajero, acoplado a la transición 0-2 su-



**Figura I.4.-** Curvas de ganancia en el plano  $(kv, E/\hbar)$  para un laser MIR vestido por una onda estacionaria resonante

ficientemente débil como para no cambiar los niveles del átomo, ya vestido, ni el nivel 2 de la molécula, nos encontramos con un haz de prueba que nos indicará el estado de la molécula vestida por las otras ondas, según la intensidad de su interacción con el mismo. En las figuras I.3 e I.5 aparecería representado por la recta de pendiente  $-k_2/k_1$  (con  $k_1$  y  $k_2$  los números de ondas de las ondas intensas y de prueba, respectivamente) y ordenada en el origen  $\Delta_2$ , representando la energía



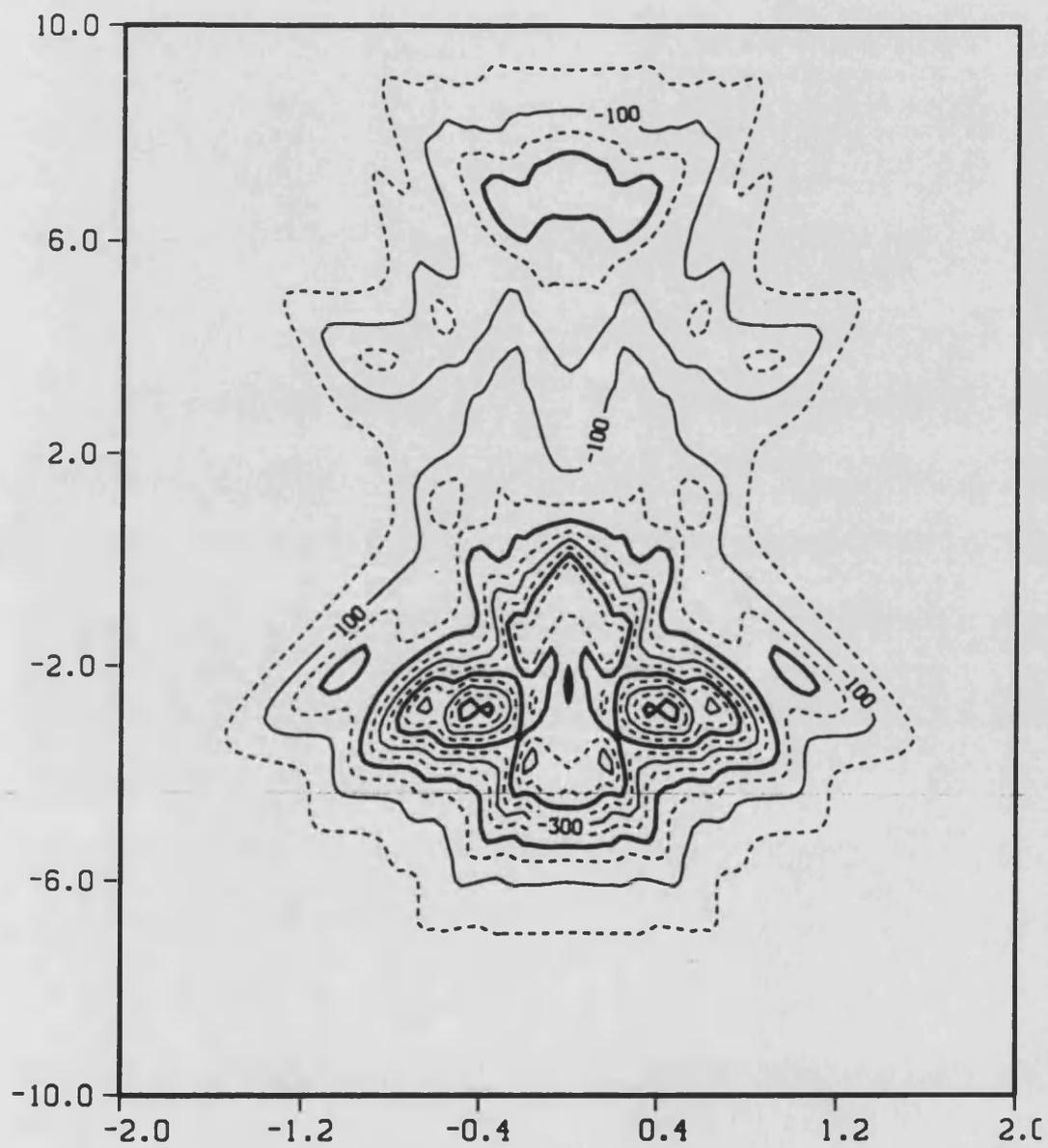
**Figura I.5.-** Esquema de niveles del átomo vestido por una onda estacionaria desintonizada

del nivel  $|2; q = 0, n + 1\rangle$ . Como todos los niveles moleculares del átomo vestido tienen proyecciones en  $|0; q = 0, n\rangle$ , las intersecciones con el nivel que representa la onda de prueba corresponden a resonancias del campo de prueba con las ondas contrapropagantes que visten al átomo. Así, la intersección con un nivel de pendiente  $q$  corresponde a una transición multifotónica desde el nivel 1 ( $q$  impar) o el 0 ( $q$  par) al nivel 2, utilizando  $q$  fotones de la onda estacionaria (de forma alternada:  $\alpha^+, \alpha^+\alpha^-, \alpha^-\alpha^+, \alpha^+\alpha^-\alpha^+, \alpha^-\alpha^+\alpha^-, \dots$ ) y un fotón de la onda de prueba ( $\beta$ ).

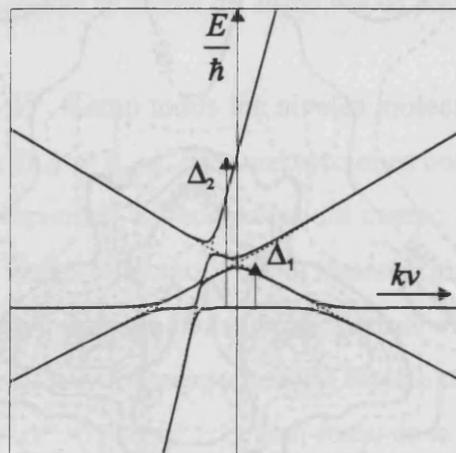
En la Figura I.6 mostramos las curvas de ganancia en un láser MIR en esta situación.

- **Las ondas del medio saturan todas de forma análoga y moderada:**

Consideramos entonces los niveles “fundamentales”, correspondientes a los procesos más probables, figura I.7, tanto en su representación no perturbada (líneas discontinuas), como perturbada (líneas continuas), que se ajustan a los primeros, pero con anticruzamientos en los puntos de corte de los diferentes niveles, donde resuenan los distintos procesos multifotónicos, de forma análoga al caso anterior, paso a paso, cuando es cercano al nivel fundamental, y Raman en caso contrario.



**Figura I.6.-** Curvas de ganancia en el plano  $(kv, E/\hbar)$  para un láser MIR vestido por una onda estacionaria desintonizada



**Figura 1.7.-** Esquema básico de niveles de un átomo vestido por 3 ondas viajeras

## **APÉNDICE II.- Aspectos computacionales en el modelo de LGBO FIR con onda generada bidireccional**

La integración de las ecuaciones de evolución del láser FIR con ensanchamiento inhomogeneo y onda generada bidireccional suponen una ardua tarea computacional. Un cálculo ligero nos indica que si utilizamos 100 grupos de velocidad molecular, con armónicos hasta orden 25 (positivos y negativos) incluyendo las 12 ecuaciones, más las 4 ecuaciones de los campos, supondrían 60004 ecuaciones por cada punto de integración temporal. Por nuestra experiencia, tal cálculo, en un computador con CPU Pentium Pro de 200 Mhz y usando un compilador FORTRAN de 32 bits, con código optimizado para ejecutar lo más rápidamente posible el programa de integración, que utiliza una potente y rápida rutina de Runge-Kutta de 7<sup>o</sup>-8<sup>o</sup> orden, supone un tiempo exclusivo de CPU de 1 hora por cada 1000 puntos de integración. Teniendo en cuenta que las series normales requerirían entre 5000 y 10000 puntos para definir el estado dinámico y evitar los transitorios; y que se requerirían muchas de estas series para trazar rutas dinámicas y determinar la estabilidad del sistema, es facil darse cuenta de la imposibilidad de hacer un estudio detallado del modelo sin hacer una drástica optimización del código y bajar así el número de ecuaciones. Afortunadamente, no es difícil tal reducción del número de ecuaciones si analizamos detenidamente el modelo. Podemos observar que la complejidad del modelo estriba en el enorme acoplo existente entre las ecuaciones. La evaluación de una de las variables produce llamadas al valor de otras 13 variables, correspondiendo algunas a distintos armónicos de la misma magnitud física. Estos valores habrán requerido otras 13 llamadas cada uno de ellos, y así sucesivamente. Si partiendo de los armónicos fundamentales seguimos el rastro a la secuencia de llamadas, comprobaremos no obstante no sólo que no todos los armónicos son precisos, sino que existe una pauta de regularidad que nos permite singularizar los armónicos que necesitamos, sin tener que incluir todos en el cálculo. Si deseamos calcular la evolución temporal de la intensidad de las ondas de bombeo, necesitaremos los armónicos +1 y -1 de la

coherencia 0 – 1. Estos a su vez necesitarán otros, y así sucesivamente hasta obtener un cierto grado de precisión en nuestros cálculos, pues por la convergencia de la serie de Fourier, cada armónico de orden mayor contribuirá en menor medida y podremos cortar la serie, suponiendo que la siguiente llamada es a una variable que vale 0. De esta forma, hemos adoptado el criterio de permitir hasta 4 llamadas sucesivas cortando para la siguiente serie de variables cuyo valor no se haya requerido hasta entonces. Esto significa que se van a utilizar los armónicos mostrados en la Tabla 1 para cada variable. El número dentro de la tabla corresponde al orden que ocupa en la lista de ecuaciones, para la parte real y la imaginaria de cada variable, siendo este orden un dato absolutamente arbitrario.

	$R_{11}^q$	$R_{11}^q$	$R_{22}^q$	$R_{01}^q$	$R_{02}^q$	$R_{12}^q$
$q = 18$						35,36
16						31,32
14						33,34
12						37,38
4	5,6	11,12				
3				21,22		
2	3,4	9,10	15,16			
1				17,18		
0	1,2	7,8	13,14			
-1				19,20		
-2	3,4	9,10	15,16			
-3				23,24		
-4	5,6	11,12				
-13					27,28	
-15					25,26	
-17					29,30	

Tabla 1.-

Incluso podemos eliminar tres más por la hermiticidad de las poblaciones dejándonos 38 ecuaciones. Además, la parte imaginaria de los armónicos de orden 0 de las poblaciones serán nulos. Nos queda por tanto un total de 35 ecuaciones por grupo de velocidad lo que supone una notable simplificación.

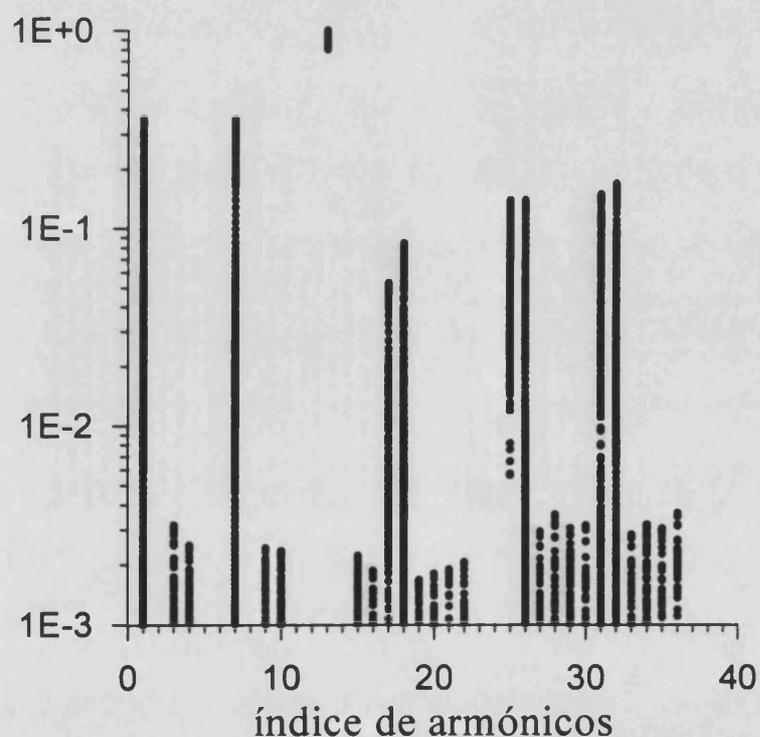
Otra forma de efectuar esta descripción es la consideración del armónico de orden  $q$  como elemento descriptivo de la interacción multifotónica de frecuencia  $qkz$  (donde recordamos que  $k = \frac{k_1}{a} = \frac{k_2}{b}$ ). Por ejemplo, la existencia de la ecuación de la

coherencia  $R_{12}^{b+a}$  equivale a calcular la intensidad del proceso

$$2 \xrightarrow{\beta} 0 \xrightarrow{\alpha} 1$$

por lo que en nuestro láser de  $\text{NH}_3$ , con  $b = 15$ ,  $a = 1$ , tenemos las ecuaciones que representan los procesos multifotónicos más básicos. No tienen así sentido variables como la  $R_{00}^{\pm 1}$ , que tendrá un valor nulo, no contribuyendo a la interacción global.

Esta descripción del sistema, rebaja a 3504 el número total de ecuaciones para 100 grupos de velocidad, lo que supone disminuir un factor 17 el tiempo de integración, lo que nos permite ya un trabajo aceptable ( $\sim 5$  minutos cada 1000 puntos) si bien todavía insuficientes si queremos hacer una estadística de estados dinámicos de intermitencias que requerirían millones de puntos de integración temporal.

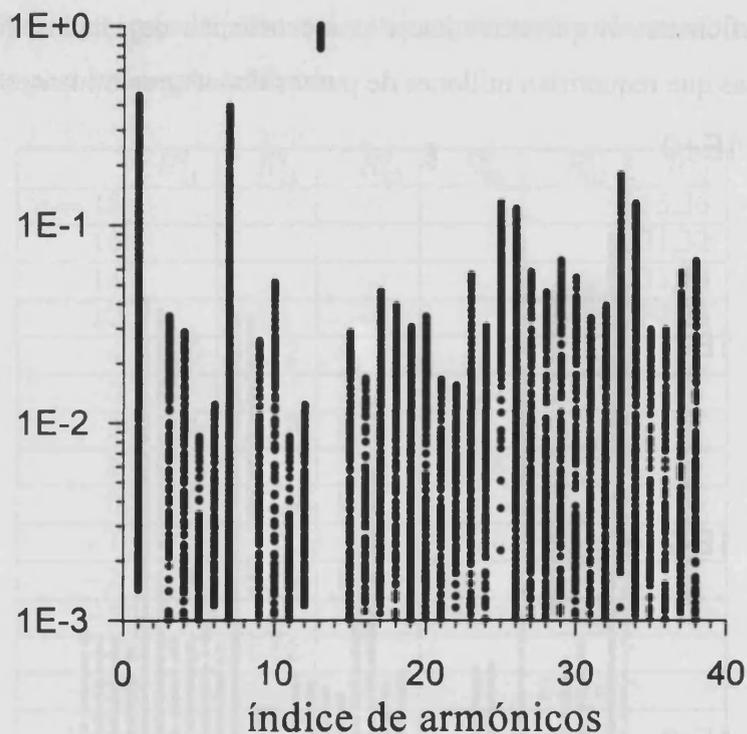


**Figura H.1.-** Intensidad de los distintos armónicos utilizados, representados por un número de orden dado en la Tabla 1. Cada punto representa el valor correspondiente para un determinado grupo de velocidad.

La exactitud de éste truncamiento la comprobaremos para cada fenómeno en particular, ya que en una misma serie temporal, según la interacción entre las ondas existentes, se producirán efectos multifotónicos de distintas intensidades y cuando

los términos eliminados tienen una intensidad del mismo orden de magnitud que el término correspondiente anterior, se está produciendo una descripción falsa del sistema físico en cuestión. La mayoría de los procesos estudiados por nosotros resultan descritos de forma correcta por el número de armónicos anterior, como se puede ver en la figura II.1, donde se da la intensidad de las distintas variables en función del orden señalado en la Tabla 1.

Se comprueba así que sólo los armónicos de orden fundamental contribuyen de forma apreciable a la interacción que en ese instante se está produciendo.



**Figura II.2.-** Análogo a la figura anterior pero para un acoplamiento más fuerte de las distintas ondas en el medio.

No obstante, hay casos en los que convendría introducir más ecuaciones para describir otros procesos multifotónicos, como se aprecia en la figura II.2, para un caso donde la interacción entre las distintas ondas es muy fuerte, estando los armónicos considerados, con intensidades del mismo orden de magnitud. Hemos eliminado, por tanto, elementos que tendrán un papel, sin duda, apreciable en este proceso dinámico.

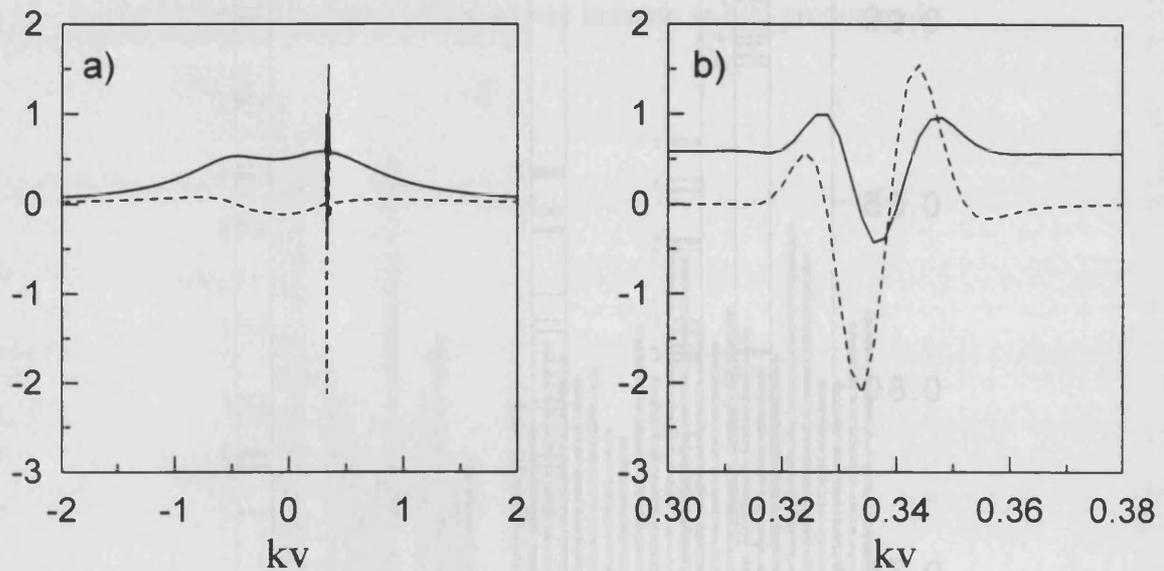


**Figura II.3.-** Ejemplo de ruta dinámica en el laser de dos niveles con ensanchamiento homogéneo en cavidad Fabry-Perot para distintos armónicos utilizados en la computación. Las zonas no marcadas corresponden a una dinámica caótica, las numeradas a periodos y las negativas a cuasiperiodos.

Otra situación similar se da en el Capítulo 3, pero el hecho de tratarse de un sistema de 2 niveles con ensanchamiento homogéneo reduce drásticamente el número de ecuaciones y podemos considerar sin problema mayor número de armónicos, de

esta forma podemos ver en la figura II.3 cómo variaría una misma ruta dinámica cuando consideramos distinto número de armónicos. Podemos comprobar que utilizar menos de 25 armónicos supone un serio peligro a la hora de describir el sistema

De aquí podemos extraer sin duda otra conclusión, en cavidad Fabry-Perot, los efectos de acoplo entre las ondas son tales, que hacen posible la existencia de procesos multifotónicos que involucran un gran número de fotones, lo cual supone un gran problema para abordar el láser FIR en cavidad Fabry-Perot.



**Figura II.4.-** Representación del valor de los armónicos 1 ( $\text{Re } R_{00}^0$ ) -línea continua- y 33 ( $\text{Re } R_{10}^0$ ) -línea discontinua-, para una anchura Doppler cercana a  $2ku$  (a) y una ampliación para los grupos de velocidades donde se produce la fuerte resonancia (b)

Otro problema diferente es el del ensanchamiento Doppler, que exige considerar la integración de todas las ecuaciones para grupos de velocidades integrando el resultado en el cálculo de la intensidad de la onda generada. La integración se produce para grupos de velocidades entre, al menos,  $-ku$  y  $+ku$ . en un número suficiente como para que la integración sea representativa, lo cual exige en la mayoría de los casos no bajar de los 100 grupos de velocidades. Sin embargo, a altas intensidades de las distintas ondas que intervienen ( $\beta \simeq 3.0 \sim 4.0$ ) la molécula queda vestida por varias ondas, generando resonancias muy intensas y en muy cortos intervalos de velocidades, como sabemos de la teoría del átomo vestido (Apéndice I) tal y como

aparece en la figura II.4, donde se representan las intensidades de los armónicos 1 y 33 (en número de orden) en función de la velocidad molecular, apareciendo un pico en un punto donde la resonancia empieza a ser muy fuerte entre las distintas ondas. Con 100 grupos de velocidades no tendríamos resolución suficiente para que la integración sea correcta y se aprecien los detalles. De esta forma se han necesitado 1000 grupos de velocidades para tener la precisión que se muestra en la parte b) de la figura. Este hecho nos vuelve a complicar la velocidad de integración temporal, al dilatar 10 veces más el mismo periodo, lo cual nos limita mucho el estudio a altas intensidades de bombeo.

Una solución a este problema es considerar distintas zonas de integración con distintas amplitudes de muestreo. Es efectivo (funciona bien elevando los grupos de integración solo a 200) pero requiere de un análisis muy cuidadoso por que el cambio dinámico del perfil de interacción en velocidades hace que pueda aparecer el pico de resonancia en un intervalo de velocidades no cubierto por la zona de integración de mayor precisión.

En definitiva, tratamos de considerar el modelo más perfecto posible, con el mínimo coste computacional, estando actualmente, con las condiciones explicadas, en el límite de poderse efectuar un estudio cómodo, de ahí que dudemos que un modelo de LGBO con ensanchamiento inhomogeneo, en cavidad Fabry-Perot, en el que pensamos que necesitaríamos más armónicos y grupos de velocidades por las interacciones más fuertes, sea posible de estudiar con gran detalle.



## APÉNDICE III.- Ecuaciones del LGBO en cavidad Fabry-Perot

Para desarrollar las ecuaciones del LGBO en cavidad Fabry-Perot, nos basamos en la emisión bidireccional. Ahora los dos modos están acoplados formando una estructura de onda estacionaria, es decir, con una sola amplitud y una relación de fase que da sentido a las condiciones de contorno de la cavidad. De esta forma, los campos en el medio serán ahora:

$$\vec{E}_2(z, t) = \frac{1}{2} E_2(t) (\vec{e}_2 e^{-i(\Omega_2 t - k_2 z)} + c.c.) \quad (III.1)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(z, t) &= \frac{1}{2} E_1(t) \vec{e}_1 (e^{-i(\Omega_c t - k_1 z)} + c.c. + e^{-i(\Omega_c t + k_1 z)} + c.c.) \\ &= E_1(t) \vec{e}_1 \cos \Omega_c t \cos k_1 z \end{aligned} \quad (III.2)$$

donde se ha considerado la ecuación de los campos generados en el LGBO bidireccional con amplitudes iguales. El que aparezca un coseno y no un seno, indica tan solo que el origen de nuestro sistema de coordenadas no está centrado en uno de los límites de la cavidad, sino situado en un vientre de la onda estacionaria.

El hecho de exigir que ambas amplitudes sea la misma, no implica otro cambio en las ecuaciones materiales del láser. Haciendo

$$A(t) = \mu_{01} \frac{E_1(t)}{2\hbar} \vec{e}_{01} \cdot \vec{e}_1 \quad (III.3)$$

la frecuencia "compleja" de Rabi y descomponiendo en parte real e imaginaria:

$A(t) = X(t) + iY(t)$ . Y para los armónicos de los elementos de la matriz densidad:

$R_{ij}^p(v, t) = X_{ij}^p(v, t) + iY_{ij}^p(v, t)$ , queda entonces

$$\begin{aligned} \dot{X}_{00}^p(v, t) &= -\gamma_0 X_{00}^p(v, t) + pkv Y_{00}^p(v, t) + \gamma_{01} X_{11}^p(v, t) + \gamma_{02} X_{22}^p(v, t) \quad (III.4) \\ &\quad -X(t) (Y_{10}^{-p-a}(v, t) + Y_{10}^{p-a}(v, t) + Y_{10}^{-p+a}(v, t) + Y_{10}^{p+a}(v, t)) \\ &\quad -Y(t) (X_{10}^{-p+a}(v, t) + X_{10}^{p+a}(v, t) + X_{10}^{-p-a}(v, t) + X_{10}^{p-a}(v, t)) \\ &\quad -\beta(t) (Y_{20}^{-p-b}(v, t) + Y_{20}^{p-b}(v, t)) \\ &\quad +\lambda_0 \delta(p, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{00}^p(v, t) &= -\gamma_0 Y_{00}^p(v, t) - pkv X_{00}^p(v, t) + \gamma_{01} Y_{11}^p(v, t) + \gamma_{02} Y_{22}^p(v, t) \\ &\quad -X(t) (X_{10}^{-p-a}(v, t) - X_{10}^{p-a}(v, t) + X_{10}^{-p+a}(v, t) - X_{10}^{p+a}(v, t)) \end{aligned}$$

$$+Y'(t) (Y_{10}^{-p+a}(v,t) - Y_{10}^{p+a}(v,t) + Y_{10}^{-p-a}(v,t) - Y_{10}^{p-a}(v,t)) \\ -\beta(t) (X_{20}^{-p-b}(v,t) - X_{20}^{p-b}(v,t))$$

$$\dot{X}_{11}^p(v,t) = -\gamma_1 X_{11}^p(v,t) + pkv Y_{11}^p(v,t) + \gamma_{10} X_{00}^p(v,t) + \gamma_{12} X_{22}^p(v,t) \\ +X(t) (Y_{10}^{-p-a}(v,t) + Y_{10}^{p-a}(v,t) + Y_{10}^{-p+a}(v,t) + Y_{10}^{p+a}(v,t)) \\ +Y(t) (X_{10}^{-p+a}(v,t) + X_{10}^{p+a}(v,t) + X_{10}^{-p-a}(v,t) + X_{10}^{p-a}(v,t)) \\ +\lambda_1 \delta(p,0)$$

$$\dot{Y}_{11}^p(v,t) = -\gamma_1 Y_{11}^p(v,t) - pkv X_{11}^p(v,t) + \gamma_{10} Y_{00}^p(v,t) + \gamma_{12} Y_{22}^p(v,t) \\ +X(t) (X_{10}^{-p-a}(v,t) - X_{10}^{p-a}(v,t) + X_{10}^{-p+a}(v,t) - X_{10}^{p+a}(v,t)) \\ -Y(t) (Y_{10}^{-p-a}(v,t) - Y_{10}^{p-a}(v,t) + Y_{10}^{-p+a}(v,t) - Y_{10}^{p+a}(v,t))$$

$$\dot{X}_{22}^p(v,t) = -\gamma_2 X_{22}^p(v,t) + pkv Y_{22}^p(v,t) + \gamma_{20} X_{00}^p(v,t) + \gamma_{21} X_{11}^p(v,t) \\ +\beta(t) (Y_{20}^{-p-b}(v,t) + Y_{20}^{p-b}(v,t)) \\ +\lambda_2 \delta(p,0)$$

$$\dot{Y}_{22}^p(v,t) = -\gamma_2 Y_{22}^p(v,t) - pkv X_{22}^p(v,t) + \gamma_{20} Y_{00}^p(v,t) + \gamma_{21} Y_{11}^p(v,t) \\ +\beta(t) (X_{20}^{-p-b}(v,t) - X_{20}^{p-b}(v,t))$$

$$\dot{X}_{10}^p(v,t) = -\Gamma_{10} X_{10}^p(v,t) + (\Delta_1 + pkv) Y_{10}^p(v,t) \\ -X(t) (Y_{00}^{p+a}(v,t) - Y_{11}^{p+a}(v,t) + Y_{00}^{p-a}(v,t) - Y_{11}^{p-a}(v,t)) \\ +Y(t) (X_{00}^{p+a}(v,t) - X_{11}^{p+a}(v,t) + X_{00}^{p-a}(v,t) - X_{11}^{p-a}(v,t)) \\ +\beta(t) Y_{12}^{p+b}(v,t)$$

$$\dot{Y}_{10}^p(v,t) = -\Gamma_{10} Y_{10}^p(v,t) - (\Delta_1 + pkv) X_{10}^p(v,t) \\ +X(t) (X_{00}^{p+a}(v,t) - X_{11}^{p+a}(v,t) + X_{00}^{p-a}(v,t) - X_{11}^{p-a}(v,t)) \\ +Y(t) (Y_{00}^{p+a}(v,t) - Y_{11}^{p+a}(v,t) + Y_{00}^{p-a}(v,t) - Y_{11}^{p-a}(v,t)) \\ -\beta(t) X_{12}^{p+b}(v,t)$$

$$\dot{X}_{20}^p(v,t) = -\Gamma_{20} X_{20}^p(v,t) + (\Delta_2 + pkv) Y_{20}^p(v,t) \\ -X(t) (Y_{12}^{-p-a}(v,t) + Y_{12}^{-p+a}(v,t)) \\ -Y(t) (X_{12}^{-p-a}(v,t) + X_{12}^{-p+a}(v,t)) \\ -\beta(t) (Y_{00}^{p+b}(v,t) - Y_{22}^{p+b}(v,t))$$

$$\begin{aligned}
\dot{Y}_{20}^p(v, t) &= -\Gamma_{20} Y_{20}^p(v, t) - (\Delta_2 + pkv) X_{20}^p(v, t) \\
&\quad - X(t) (X_{12}^{-p-a}(v, t) + X_{12}^{-p+a}(v, t)) \\
&\quad + Y(t) (Y_{12}^{-p-a}(v, t) + Y_{12}^{-p+a}(v, t)) \\
&\quad + \beta(t) (X_{00}^{p+b}(v, t) - X_{22}^{p+b}(v, t)) \\
\dot{X}_{12}^p(v, t) &= -\Gamma_{12} X_{12}^p(v, t) + ((\Delta_1 - \Delta_2) + pkv) Y_{12}^p(v, t) \\
&\quad + X(t) (Y_{20}^{-p-a}(v, t) + Y_{20}^{-p+a}(v, t)) \\
&\quad + Y(t) (X_{20}^{-p-a}(v, t) + X_{20}^{-p+a}(v, t)) \\
&\quad + \beta(t) Y_{10}^{p-b}(v, t) \\
\dot{Y}_{12}^p(v, t) &= -\Gamma_{12} Y_{12}^p(v, t) - ((\Delta_1 - \Delta_2) + pkv) X_{12}^p(v, t) \\
&\quad + X(t) (X_{20}^{-p-a}(v, t) + X_{20}^{-p+a}(v, t)) \\
&\quad - Y(t) (Y_{20}^{-p-a}(v, t) + Y_{20}^{-p+a}(v, t)) \\
&\quad - \beta(t) X_{10}^{p-b}(v, t)
\end{aligned}$$

Respecto a la evolución del campo, partimos de la ecuación de autoconsistencia

$$\frac{d}{dt} E_1(t) + \kappa E_1(t) = i \frac{\Omega_c}{2\epsilon_0} P_1(t)$$

donde calculando

$$P_1(z, t) = N \int W(v) (\rho_{10}\mu_{01} + \rho_{01}\mu_{10}) dv \quad (\text{III.5})$$

$$\begin{aligned}
&= \mu_{01} e^{i\Omega_c t} N \int W(v) \sum_p R_{10}^p(v, t) e^{ipkz} dv + \\
&\quad \mu_{10} e^{-i\Omega_c t} N \int W(v) \sum_p (R_{10}^{-p})^*(v, t) e^{ipkz} dv. \quad (\text{III.6})
\end{aligned}$$

y suponiendo que la polarización es de la forma

$$P_1(z, t) = \frac{1}{2} P_1(t) (e^{-i(\Omega_c t - k_1 z)} + e^{-i(\Omega_c t + k_1 z)} + c.c) \quad (\text{III.7})$$

llegamos, a

$$P_1(t) = 2\mu_{10} N \int W(v) (R_{10}^{-a*}(v, t) + R_{10}^{a*}(v, t)) dv \quad (\text{III.8})$$

y por tanto en la ecuación de autoconsistencia:

$$\frac{d}{dt} E_1(t) + \kappa E_1(t) = i \frac{\Omega_c}{2\epsilon_0} 2\mu_{10} N \int W(v) (R_{10}^{-a*}(v, t) + R_{10}^{a*}(v, t)) (v, t) dv \quad (\text{III.9})$$

que con las definiciones anteriores y descomponiendo en parte real e imaginaria

quedaría la ecuación de evolución del campo:

$$\dot{X}(t) + \kappa X(t) = g \int W(v) (Y_{10}^{-a} + Y_{10}^a)(v, t) dv \quad (\text{III.10})$$

$$\dot{Y}(t) + \kappa Y(t) = g \int W(v) (X_{10}^{-a} + X_{10}^a)(v, t) dv$$

quedando definidas las 14 ecuaciones para el LGBO en cavidad Fabry-Perot, siendo equivalentes a forzar que las amplitudes de los modos contrapropagantes generados del modelo bidireccional, sean iguales y sumando ambas contribuciones en las ecuaciones de los campos.

## Bibliografía

- N.B.Abraham, D.Dangoisse, P.Glorieux, P.Mandel *Journal of the Optical Society of America* **B 2**, 23 (1985)
- N.B.Abraham, C.O.Weiss *Optics Communications* **68**, 437 (1988)
- L.W.Casperson *IEEE Journal of Quantum Electronics* **QE-14** (1978)
- L.W.Casperson *Applied Optics* **19**, 422 (1980)
- L.W.Casperson *Journal of the Optical Society of America* **B 5**, 958 (1988)
- T.Y.Chang, T.J.Bridges *Optics Communications*, **1** (1970)
- P.Chenkosol, L.W.Casperson *Journal of the Optical Society of America* **B 10**, 817 (1993)
- R.Corbalán, F.Laguarta, J.Pujol, R.Vilaseca *Optics Communications* **71**, 290 (1989)
- R.Corbalán, A.N.Pisarchik, V.N.Chizhevsky, R.Vilaseca *Optics Communications* **133**, 225 (1997).
- C.Feuillade, P.R.Berman *Physical Review* **A29**, 1236 (1984)
- J.L.Font, F.Silva, R.Vilaseca *Optics Communications* **138**, 403 (1997)
- H.Haken *Physics Letters*, **53A** 77 (1975)
- L.W.Hillman, J.Krasinski, R.W.Boyd, C.R.Stroud *Physical Review Letters* **52**, (1984)
- L.M.Hoffer, G.L.Lippi, N.B.Abraham, P.Mandel *Optics Communications* **66**, 4 (1988)
- M.Inguscio, A.Moretti, F.Estrumia *Optics Communications* **30**, 355 (1979)
- F.Julien, P.Wazen, J.M.Lourtioz, T.A.Temple *IEEE Journal of Quantum Electronics* **QE-19**, 1654 (1983)
- G.A.Koepf, K.Smith *IEEE Journal of Quantum Electronics*, **QE-13**, (1978)
- F.Laguarta, R.Corbalán, R.Vilaseca *Optics Communications* **55**, 353 (1985)
- F.Laguarta, R.Vilaseca, R.Corbalán *Optics Communications*, **53**, 329 (1985)
- F.Laguarta, G.Merkle, J.Heppner, R.Corbalán, R.Vilaseca *Physical Review Letters* **57**, 831 (1986)
- E.N.Lorenz *Journal of Atmospheric Sciences* **20**, 130 (1963)
- L.Lugiato, L.M.Narduci, D.K.Bandy, J.R.Tredice *Physical Review A* **33**, 1109 (1986)
- W.Luhs, B.Wallegehausen *Optics Communications* **46** (1983)
- C.N.Man, A.Brillet *Optics Communications* **45** (1983)

- J.Pujol, R.Vilaseca: *Optics Communications* **53**, 104 (1985)
- E.Roldán, G.J. de Valcárcel, R.Vilaseca, R.Corbalán, V.J.Martínez, R.Gilmore *Quantum Semiclassical Optics* **9**, R1 (1997)
- C.Rolland, B.K.Garside, J.Reid *Applied Physics Letters* **40**, 8 (1982)
- C.Rolland, J.Reid, B.K.Garside, P.E.Jessop y H.D.Morrison *Optics Letters* **8**, 1 (1983)
- C.Rolland, J.Reid, B.K.Garside, H.D.Morrison y P.E.Jessop *Applied Optics* **23**, 87 (1984)
- C.Rolland, J.Reid, B.K.Garside *Applied Physics Letters* **44**, 4 (1984)
- C.Rolland, J.Reid y B.K.Garside *Applied Physics Letters* **44**, 8 (1984)
- C.Rolland, B.K.Garside y J.Reid *Applied Optics* **24**, 1 (1985)
- L. Roso *Tesis Doctoral* (1981)
- L.Roso, R.Corbalán, G.Orriols, R.Vilaseca, E.Arimondo *Applied Physics B* **31**, 115 (1983)
- F.Silva, R.Vilaseca, R.Corbalán *Optics Communications* **94**, 589 (1992)
- F.Silva, R.Corbalán, R. Vilaseca *Optics Communications* **114**, 519 (1995)
- D.YTang, C.O.Weiss, E.Roldán, G.J.de Valcárcel *Optics Communications* **89**, 97 (1992)
- D.YTang, R.Dykstra, N.R.Heckenberg *Optics Communications* **126**, 318 (1996)
- D.YTang, R.Dykstra, N.R.Heckenberg *Physical Review A* **54**, 6 (1996)
- M.J.Tomás, E.Roldán, G.J.de Valcarcel, R.Vilaseca *Optics Communications* **114**, 111 (1995)
- R.Vilaseca, G.Orriols, L.Roso, R.Corbalán, E.Arimondo *Applied Physics B* **34**, 73(1984)
- R.Vilaseca, J.Martorell, R.Corbalán, F.Laguarta *Optics Communications* **70**, 131 (1989)
- C.O. Weiss, W.Klische *Optics Communications* **50**, 413 (1984)
- C.O. Weiss, J.Brock *Physics Review Letters* **57**, 2804 (1986)
- C.O. Weiss, R.Vilaseca *Dynamics of Lasers* VCH, Weinheim, (1991)
- P.Wazen, J.M.Lourtioz *Optics Communications* **47**, 2 (1983)
- B. Wellegehausen *IEEE Journal of Quantum Electronics* **QE-18**, 10 (1979)
- H.Zeghlache, P.Mandel, N.B.Abraham, L.M.Hoffer, G.L.Lippi, T.Mello. *Physical*

*Review A, 37, 2 (1988)*

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

FACULTAD DE CIÈNCIES FÍSQUES

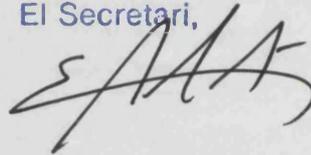
Reunit el Tribunal que subscriu, en el dia de la data,  
acordà d'atorgar, per unanimitat, a aquesta Tesi Doctoral  
d'En/ Na/ N' Fernando Silva Vázquez  
la qualificació d' Apte Cum Laude

València a 26 de Setembre de 1997

El President,



El Secretari,





UNIVERSITAT DE VALÈNCIA  
S.I.B.  
SECCIÓ DE PRÉSTEC INTERBIBLIOTECARI  
La Nave, 2  
46003 - VALENCIA

Préstamo nº

**PRÉSTAMO INTERBIBLIOTECARIO**

AUTOR FERNANDO SILVA VAZQUEZ SIGNATURA FISIQVES T.D. 302  
TÍTULO ESTUDIO DE LOS LASERES DE GAS BOMBEADOS OPTICAMENTE (...)  
DURACIÓN DEL PRÉSTAMO 12-4-98 (Préstamo para  
consulta en sala)

**COMPROMISO**

(A rellenar por el lector)

AUTOR FERNANDO SILVA VAZQUEZ SIGNATURA FISIQUEST.D. 302  
TÍTULO: ESTUDIO DE LOS LASERES DE GAS BOMBEADOS OPTICAMENTE  
EN CAVIDAD FABRY-PEROT.

**BIBLIOTECA QUE PIDE PRESTADO:**

Consultaré la tesis que se me presta para uso estrictamente personal, con fines de estudio e investigación. Si me refiero a ella en mis publicaciones personales, lo haré precisando la fuente y el nombre del autor. Por otra parte, no haré más que breves citas y siempre entrecomilladas.

FECHA 13-4-98 APELLIDOS, NOMBRE BLANCA PALLARRO ANTONIO  
DIRECCIÓN AVDA DE GUERRITA, 1, 5º 4 14005 (C.º. D.º. 6)  
FIRMA

