

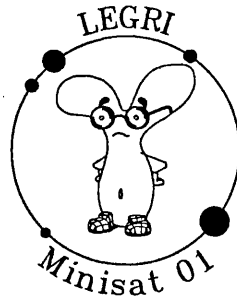
29-11-96

Fisicas

285

T.O

DESARROLLO DE TÉCNICAS DE OBTENCIÓN DE IMÁGENES
EN ASTRONOMÍA γ USANDO SISTEMAS
DE MÁSCARA CODIFICADA.
APLICACIÓN AL TELESCOPIO
LEGRI



UMI Number: U607732

All rights reserved

INFORMATION TO ALL USERS

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted.

In the unlikely event that the author did not send a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if material had to be removed, a note will indicate the deletion.



UMI U607732

Published by ProQuest LLC 2014. Copyright in the Dissertation held by the Author.
Microform Edition © ProQuest LLC.

All rights reserved. This work is protected against
unauthorized copying under Title 17, United States Code.



ProQuest LLC
789 East Eisenhower Parkway
P.O. Box 1346
Ann Arbor, MI 48106-1346

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
BIBLIOTECA CIÈNCIES

b físics

Nº Registre 9982

DATA 30-I-97

SIGNATURA

285.T.D

Nº LIBIS:

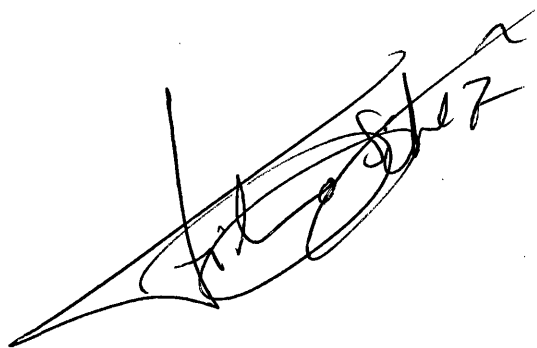
19769064

FILOMENO SÁNCHEZ MARTÍNEZ, Colaborador Científico del Consejo Superior de Investigaciones Científicas

CERTIFICO: Que la presente Memoria "Desarrollo de Técnicas de Obtención de Imágenes en Astronomía y Usando Sistemas de Máscara Codificada. Aplicación al Telescopio LEGRI" ha sido realizada bajo mi dirección en el Instituto de Física Corpuscular de Valencia (Centro Mixto Universidad de Valencia-CSIC) por Fernando Jesús Ballesteros Roselló y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente, presento ante la Facultad de Físicas de la Universidad de Valencia la referida Tesis, firmando el presente certificado en

Burjassot - Valencia, 18 de Octubre de 1996

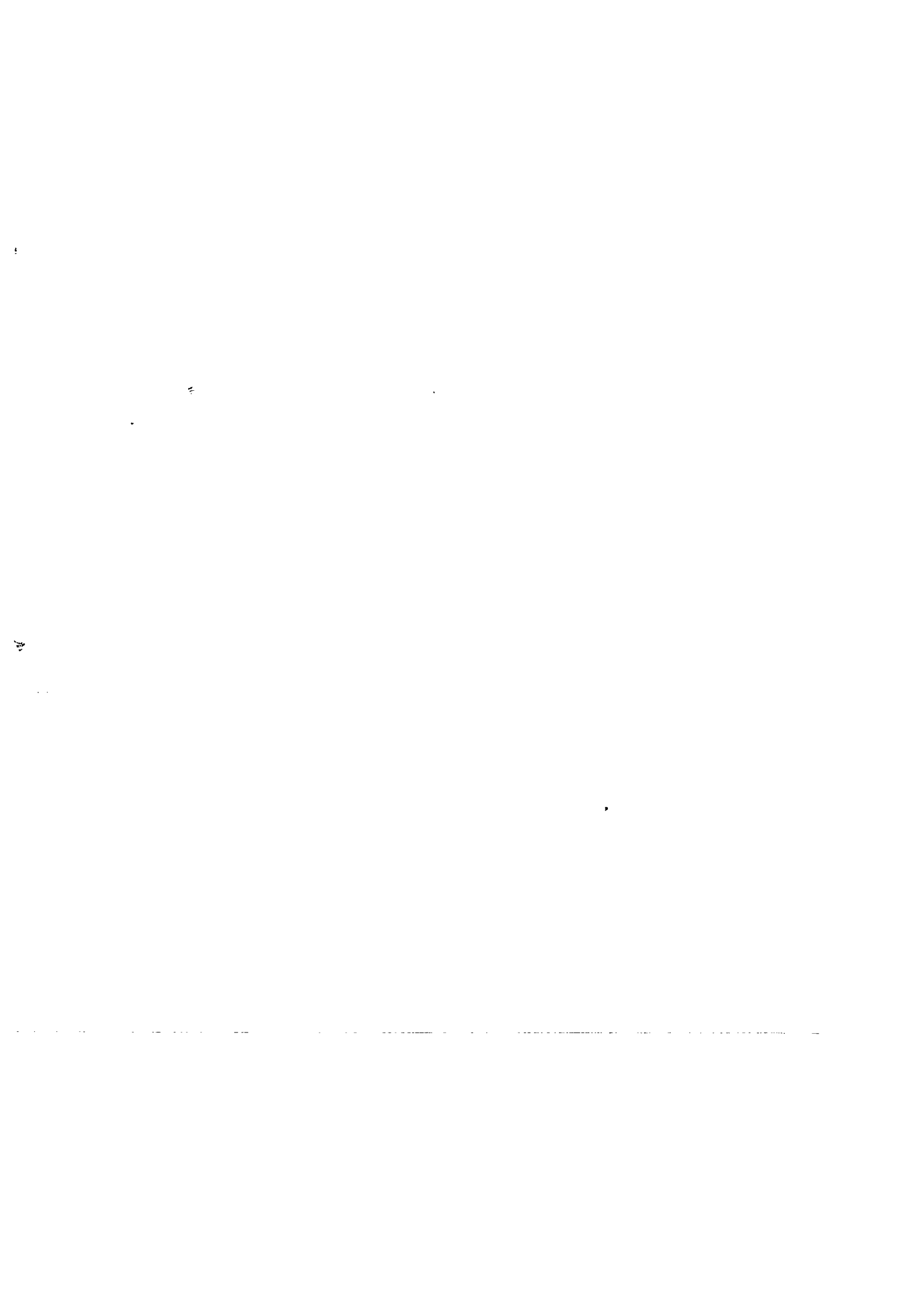
A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Filomeno Sánchez Martínez', written in a cursive style with a large, sweeping flourish at the end.

"Hay muchas más cosas en el cielo y la tierra,
Horacio, de cuantas se sueñan en nuestra filosofía"

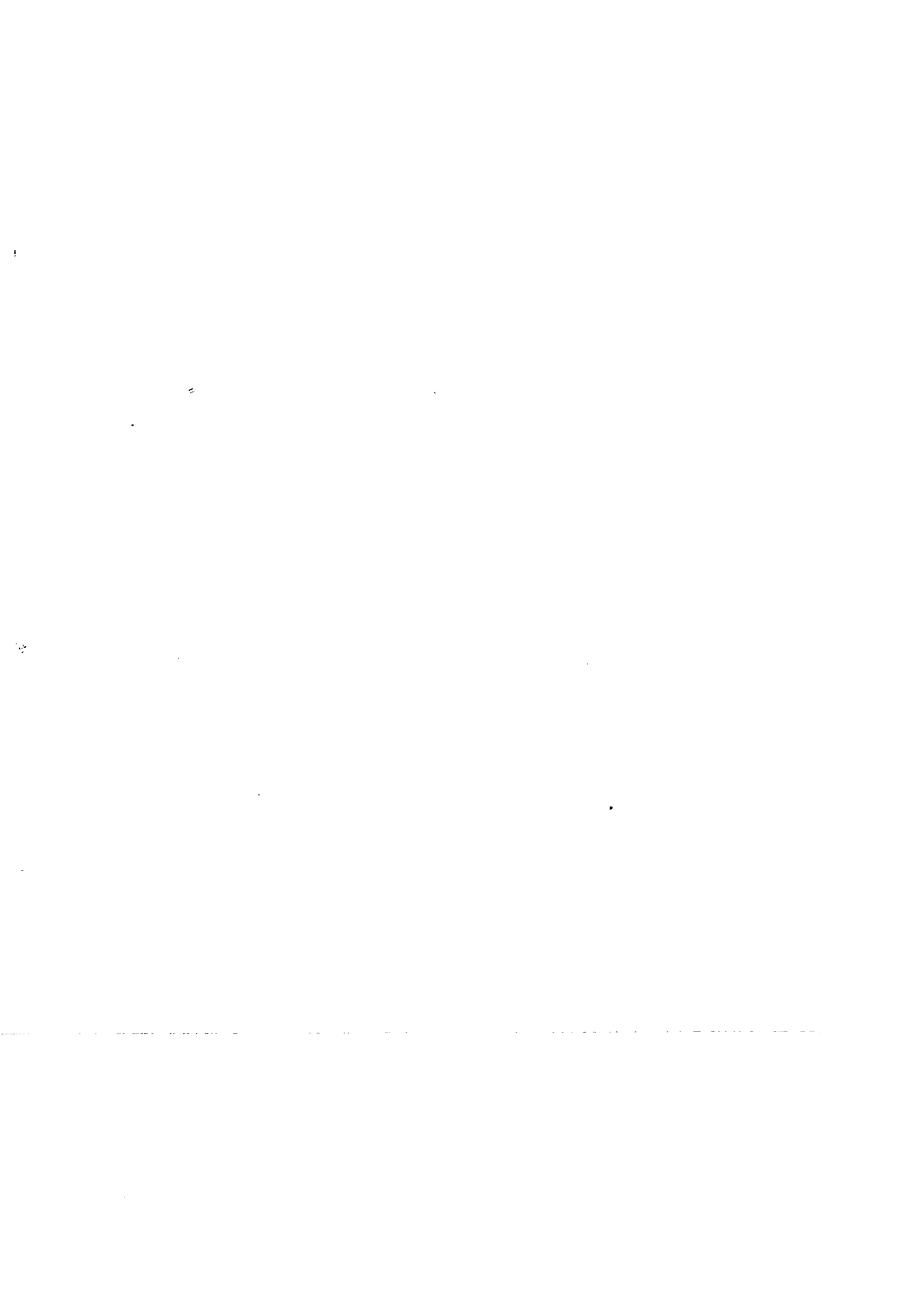
SHAKESPEARE, Hamlet

"Que haya luz de estrellas en su sendero. Que
camine en la belleza"

*TRADICIONAL, primeras palabras
oídas por un bebe navajo.*



*A un montón de pecas
muy especial para mí.*



Índice

Exordio	1
Capítulo 1: La misión	5
1.1 Isagoge	5
1.2 El programa Minisat	6
1.3 Objetivos científicos de LEGRI	10
1.4 Objetivos tecnológicos de LEGRI	12
1.5 Descripción de LEGRI	14
1.6 Órbita de LEGRI	19
1.6.1 Ruido inducido el LEGRI	20
1.6.2 Telemetría	22
1.7 El equipo científico	23
1.7.1 El <i>Science Operation Center</i> (S.O.C.) de LEGRI	23
1.7.2 La colaboración LEGRI	24
Capítulo 2: Teoría de máscaras. Fundamentos	27
2.1 Proemio	27
2.2 Sistema de coordenadas	28
2.3 Las máscaras codificadas	32
2.4 Las placas zonales Fresnel	34
2.5 Sistemática	36
2.6 En busca de la reconstrucción perdida	40
2.7 Sistemas cíclicos	45
2.8 Elección del patrón de la máscara	49
2.8.1 Máscaras aleatorias	49
2.8.2 <i>Non-Redundant Arrays</i> (NRA) o conjuntos no redundantes	49
2.8.3 <i>Uniformly Redundant Arrays</i> (URA) o conjuntos uniformemente redundantes	50
2.8.4 <i>Modified Uniform Redundant Arrays</i> (MURA) o conjuntos uniformes redundantes modificados	55
2.8.5 Nuevos patrones	56

2.9 Elección de G	56
2.9.1 Correlación balanceada	57
2.9.2 Correlación balanceada de muestreo fino (CBMF)	61
2.9.3 Decodificación δ	63
2.10 Transformadas de Fourier	65
2.11 Blindajes y colimadores	67
2.11.1 Colimadores	67
2.11.2 Blindajes	70
2.12 Otros métodos de reconstrucción	71
2.12.1 Inversión de funciones	72
2.12.2 Máxima entropía	73
2.12.3 El algoritmo EM	76
2.12.4 Métodos de maximización versus inversión de funciones	82
Capítulo 3: Otras consideraciones	83
3.1 Prefacio	83
3.2 Criterio de errores	83
3.2.1 En reconstrucciones basadas en la correlación	83
3.2.2 En métodos iterativos	86
3.3 Mapeado del cielo	87
3.4 Simuladores	90
Capítulo 4: Resultados. Estudio de los métodos de reconstrucción	95
4.1 Introito	95
4.2 Criterios de convergencia	95
4.2.1 Convergencia del algoritmo EM	95
4.2.2 Convergencia del método de máxima entropía	98
4.3 Reconstrucción de una fuente puntual	109
4.3.1 Estudio de los simuladores	109
4.3.2 Reconstrucción	111

4.4	Movimiento de la fuente	116
4.5	Resolución angular	119
4.6	Fantasmas	123
4.7	Efecto del colimador	127
4.8	Efecto del ruido	130
4.8.1	Ruido constante	130
4.8.2	Ruido con estructura	134
4.8.3	Ampliando el espacio fuente	135
4.8.4	Mejorando lo presente	140
4.9	Fuentes extensas	147
4.9.1	Múltiples apuntados	149
4.10	Patrones no cíclicos	154
4.11	Plano detector dañado	156
Capítulo 5: Resultados. Respuesta real de LEGRI		161
5.1	Preámbulo	161
5.2	Respuesta de los detectores	162
5.3	Corrigiendo los datos	166
5.4	Ruido y sensibilidad	169
5.4.1	Ruido	169
5.4.2	Sensibilidad	170
5.5	Formación de imágenes	176
5.6	Errores	183
Conclusiones		187
Agradecimientos		193
Apéndices		195
Apéndice I:	Relación entre un área y su proyección ortogonal	195
Apéndice II:	Errores	200
Referencias		205

Exordio

Por el mero hecho de mirar al cielo, ya nos vemos implicados en la astronomía. Posiblemente son muy pocas las personas que no han contemplado nunca las estrellas y meditado un poco en los misterios del Universo y en el lugar que en él ocupa el hombre. La astronomía refiere una historia fascinante, que comenzó hace milenios, cuando nuestros antepasados homínidos alzaron por primera vez la vista al cielo y quedaron perplejos ante la contemplación de aquellos fuegos desconcertantes.

La ciencia de la astronomía nos ha descubierto horizontes insospechados, y gracias a ella conocemos nuestro lugar en el Universo. La Tierra, sobre cuya superficie vivimos, es un simple miembro de una familia de planetas que giran alrededor del Sol, el cual es una de tantas estrellas del enorme sistema estelar que es nuestra galaxia. A su vez, la Vía Láctea es tan sólo un punto de luz en medio de la infinitud de galaxias y cúmulos de galaxias que se extienden por los confines del universo observable, algunas de ellas tan lejanas que su luz tarda miles de millones de años en llegarnos; el universo observable tiene una extensión del orden de 10^{23} kilómetros. En medio de esta vastedad, la Tierra y el hombre parecen, ciertamente, insignificantes.

No obstante, si miramos al otro extremo de la escala, el hombre ya no nos parece tan pequeño. El átomo tiene un diámetro del orden de 10^{-10} metros, mientras que el núcleo, formado por protones y neutrones, es diez mil veces menor (10^{-14} m). Pero precisamente la explicación de los gigantescos y sorprendentes fenómenos que se observan en el escenario astronómico proviene de aquí, de la física de lo muy pequeño. El hecho de que esto sea así ha permitido abrir nuevas ventanas de observación del Cosmos, además de la ya clásica de la astronomía óptica. Tal es el caso de la radioastronomía (que se inició a principios de los años 30), o de la astronomía de altas energías (rayos X y γ); esta última, sin duda, es la rama que más ha contribuido a nuestro conocimiento del Universo en los últimos 30 años.

El desarrollo de las técnicas de detección de los rayos X y γ provenientes de fuentes celestes tuvo lugar después de la II Guerra Mundial, cuando

comenzó a desarrollarse la tecnología adecuada, y tras la aparición de la posibilidad de situar instrumentación fuera de la atmósfera (globos sonda y satélites principalmente). Aquí cabe citar que es imposible realizar astronomía de rayos γ desde tierra firme, pues, para energías no muy altas, los fotones interactúan de forma significativa con la parte alta de la atmósfera, siendo incapaces de alcanzar la superficie terrestre; tal es así que, por ejemplo, a una altura aproximada de 40 km -la altura típica de trabajo de los globos sonda-, los fotones de 100 keV ya han sido absorbidos en un factor $1/e$.

En los 60 fueron lanzados a bordo de globos estratosféricos y cohetes los primeros detectores de rayos X, que ya midieron flujos de radiación de alta energía de origen extraterrestre; se descubrió que el Sol emitía radiación X, y, en 1962, se descubrió Scorpio X-1, la fuente de rayos X más brillante del cielo. En 1970 fue lanzado el primer satélite dedicado a la astronomía de rayos X: el Uhuru. El Uhuru reveló la existencia de un gran número de fuentes de alta energía, insospechadas hasta entonces, y se confeccionaron los primeros catálogos y mapas del cielo en estas frecuencias. Este descubrimiento cambió radicalmente la concepción que hasta ese momento se había tenido del Universo; era mucho más violento de lo que hasta entonces se había supuesto.

Debido a la naturaleza muy energética de los rayos γ (y X duros), las técnicas de focalización convencionales por medio de lentes son del todo imposibles. Este fenómeno retrasó la aparición de la astronomía de rayos γ , pues fue necesario desarrollar nuevas técnicas para la formación de imágenes en este rango del espectro. Estas técnicas surgieron por fin cuando se desarrolló el concepto de máscara codificada, que nos proporcionó una nueva herramienta para formar imágenes y, con ello, hacer astronomía.


Así aparecieron recientemente misiones de rayos γ que usaban teoría de máscaras codificadas, como la misión francesa SIGMA, a bordo de la plataforma rusa GRANAT, que, puesta en órbita en 1989, fue la primera misión de rayos γ operando en el espacio, o el GRO (Gamma Ray Observatory). Tales misiones mejoraron significativamente nuestro conocimiento del Universo en este rango energético e impulsaron el desarrollo de nuevas misiones. Este mismo espíritu anima al proyecto LEGRI (Low Energy Gamma Ray Imager)

cuyo objetivo es la astronomía de rayos γ blandos (20 - 100 keV). LEGRI volará a bordo de la plataforma Minisat 01, la primera misión del programa Minisat del I.N.T.A. (Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial "Esteban Terradas"), y será lanzado en 1996.

En este trabajo se describe el proyecto LEGRI y someramente el programa Minisat. Se hace un estudio en profundidad de la teoría de máscaras, y se analizan y desarrollan **técnicas de reconstrucción de imágenes** (principal objetivo de este trabajo), aplicándolas al caso concreto del telescopio LEGRI y estudiando otros efectos asociados que afectan a la reconstrucción de la imagen.

Capítulo 1: La misión

1.1 Isagoge

os resultados suministrados en los últimos años por misiones de rayos gamma han hecho posible un significativo avance de nuestro conocimiento del Universo en el campo de la astronomía de rayos γ [1]. Resulta de interés el resumir aquí brevemente los puntos que pueden tener consecuencias importantes en lo referente al desarrollo de futuras misiones en este campo:

a) Las fuentes de rayos X duros y rayos γ muestran un elevado grado de variabilidad, en número e intensidad.

b) Aunque el número de fuentes γ es relativamente bajo, existen regiones del cielo (p. ej. el Centro Galáctico) donde la relativamente elevada densidad de emisores γ da lugar a problemas a la hora de poder identificar tales fuentes y relacionarlas con sus homólogos en otras longitudes de onda.

c) Los espectros de muchas de las fuentes γ celestes conocidas actualmente indican la presencia de rasgos característicos para cada una de ellas, a la vez que una gran variabilidad en la intensidad de las mismas.

Esto puede traducirse en tres requerimientos clave para las futuras misiones que estudien las fuentes γ celestes:

- 1) Capacidad de formación de imágenes con buena resolución angular.
- 2) Buena resolución energética, de forma que se puedan estudiar los espectros emitidos por las fuentes celestes.
- 3) Mejora de la sensibilidad respecto de misiones anteriores, para localizar fuentes desconocidas.

El proyecto **LEGRI** surge así, nacido de una colaboración entre diversas instituciones españolas y británicas, como una misión que pretende cubrir estos objetivos, realizando astronomía de rayos γ en el rango de 20 a 100 keV (justo en la frontera de los rayos X y γ), y, principalmente, como una misión de demostración tecnológica en la que se pretenden probar los nuevos detectores de yoduro de mercurio, HgI_2 , y telurio de cadmio dopado con zinc, CdZnTe , en condiciones de espacio en vistas a su viabilidad en futuras misiones.

La colaboración **LEGRI** propuso, pues, al Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial (I.N.T.A.), un telescopio de rayos γ que hace uso de una máscara codificada como sistema de formación de imágenes, y una matriz 10x10 de detectores de HgI_2 y CdZnTe como detectores de posición, como carga útil para la primera misión del programa **Minisat**. Está previsto que **LEGRI** vuele a bordo de **Minisat 01** en 1996, en una misión de dos años de duración.

1.2 El programa **Minisat**

Los sistemas convencionales de satélites están compuestos de dos partes, formando un conjunto inseparable: el módulo de servicio (o plataforma) y la carga útil. Todas y cada una de las partes del módulo de servicio están exclusivamente creadas para la misión que van a realizar, y esto encarece notablemente los costos de fabricación. Tanto es así que el situar un satélite en el espacio queda fuera del alcance de la mayoría de los países, y sólo es posible costearlo colaborando diversas entidades y países entre sí y, por lo general, disponiendo de la ayuda de la financiación estatal. Esto crea situaciones muy inestables, pues si una fuente de financiación desaparece o un miembro de la colaboración se retira, todo el proyecto corre el peligro de desaparecer y es necesario reajustes y concesiones a la economía para que éste pueda seguir adelante.

El Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial, que es el organismo oficial español encargado de las investigaciones y desarrollo en el campo aeroespacial, ideó el programa **Minisat** para evitar esto. En lugar de desarrollar un módulo de servicio diferente para cada misión, se desarrollaría una plataforma única

y estándar a la cual deberá adaptarse la carga útil. Esto permite que el costo de su fabricación, al realizarse en serie, resulte muy inferior al de un satélite convencional. Con este programa, España es el primer país en ofrecer minisatélites de menor costo y mayores prestaciones, a los que podrán acceder fácilmente universidades y empresas al no estar ya unida intrínsecamente el módulo de servicio a la carga útil.

Minisat es una plataforma multipropósito inscrita dentro del segmento de los minisatélites (masas comprendidas entre 100 y 500 kg). Minisat y sus subsistemas son de diseño modular, y tiene unas interfaces estándar con el módulo de carga útil. Asimismo, al producirse en serie, Minisat presenta una mejora muy significativa en la capacidad en tiempo para preparar una misión: 2 años (típicamente, una misión convencional requiere un tiempo de preparación de unos 10 años).

En la figura 1.1 podemos ver un dibujo de la plataforma Minisat, con la explicación de cada una de sus partes.

- 1) Plataforma superior
- 2) Sensor solar
- 3) Unidad de control de potencia
- 4) Unidad de distribución de potencia
- 5) Batería
- 6) Magnetopar
- 7) Electrónica del volante
- 8) Volante de inercia
- 9) Ordenador
- 10) Transpondedor
- 11) Plataforma inferior
- 12) Magnetómetros
- 13) Paneles exteriores
- 14) Soportes

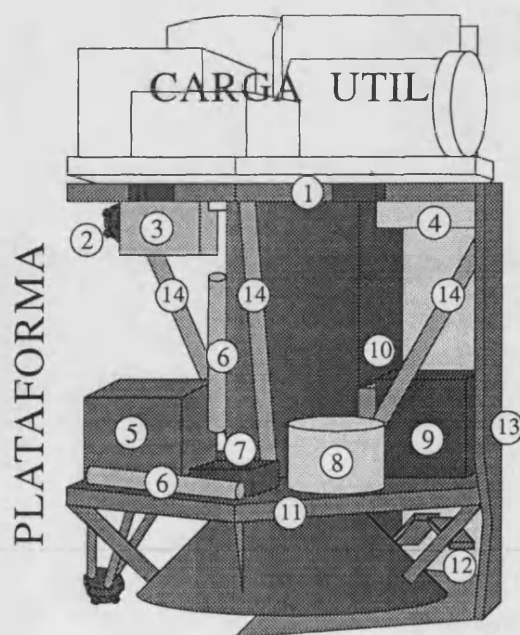


Figura 1.1: Plataforma Minisat 01.

Minisat también será innovador y económico en cuanto a su sistema de puesta en órbita, aprovechando el hecho de ser un minisatélite, y por tanto de poco peso. En lugar de ser puesto en órbita con un lanzador convencional que despegue desde tierra (ej.: Ariane, Protón, Space Shuttle, etc...) será puesto en órbita con un misil balístico lanzado desde el fuselaje de un avión de carga (el proceso se explica en la figura 1.2). El lanzador que portará el satélite en la primera misión Minisat será un cohete Pegasus XL, pero para las subsiguientes misiones Minisat, el I.N.T.A. ha desarrollado uno propio: el Capricornio.

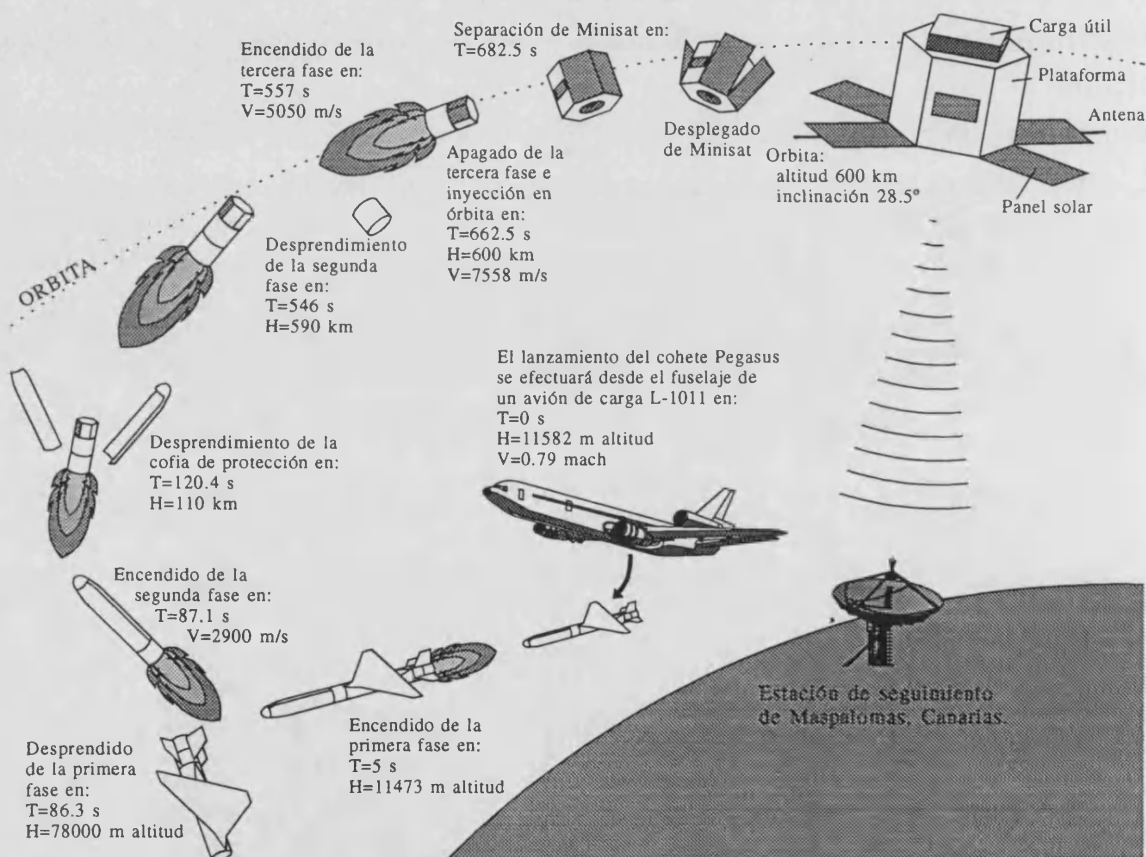


Figura 1.2: Lanzamiento de Minisat 01.

Las características generales de la misión Minisat 01 son las siguientes:

Masa

- Módulo básico: 100 kg.
- Cargas útiles: 100 kg.
- Total: 200 kg.

Potencia

- Bus no regulado: 28 V.
- Potencia por panel: 45 W.
- Número de paneles solares: 4
- Consumo del módulo básico: 60 W.
- Consumo de la carga útil: 40 W.

Datos

- Módulos de memoria: 32 Mb.
- Memoria total: 32 Mb.
- Velocidad de transmisión a tierra: 1 Mbps.
- Banda de telemetría: S
- Potencia del transpondedor: 5 W.

Actitud

- Estabilización: 3 ejes.
- Error de apuntamiento: 3°

Órbita

- Altitud: 600 km
- Inclinação: 28.5°
- Periodo: 96 min.

La carga útil del Minisat 01 constará de:

- **EURD:** Estudia la radiación difusa del medio interestelar en el extremo ultravioleta, el cual está siendo desarrollado por un equipo científico internacional compuesto por el I.N.T.A. (España), y la Universidad de Berkeley, California (EEUU).
- **CPLM:** Estudia el comportamiento de puentes líquidos en microgravedad y está siendo desarrollado por la Universidad Politécnica de Madrid.

- **LEGRI (Low Energy Gamma Ray Imager):** Estudia la radiación γ de baja energía (20 - 100 keV) de diversas fuentes. Utiliza detectores HgI_2 y CdZnTe .

1.3 Objetivos científicos de LEGRI

Como ya hemos indicado en el punto 1.1, una capacidad de formación de imágenes precisa, así como una alta sensibilidad, es un requerimiento primordial para la astronomía de rayos γ . La localización precisa de los emisores γ es crucial para poder identificar sus homólogos en otras longitudes de onda [2].

Existen numerosos escenarios celestes [3] que son objeto de estudio de la astronomía de rayos X duros - rayos γ , y por tanto de LEGRI:

- Púlsares, como el de la nebulosa del Cangrejo.
- Binarias conteniendo un objeto compacto (estrella de neutrones o agujero negro), cuyas emisiones provienen del disco de acreción de materia, que cae a gran velocidad sobre el objeto compacto proveniente de la estrella vecina.
- Novas o supernovas, que producen chorros de rayos γ .
- Estallidos de rayos γ , al parecer provenientes de estrellas de neutrones en nuestra galaxia, si bien también se sugiere que puedan ser de origen extragaláctico. De interés es también averiguar si vienen acompañados de estallidos en el visible.
- El centro galáctico, un lugar donde parece haber un objeto compacto enormemente masivo, pues entre otros indicios aparecen fuertes líneas de 511 keV, provenientes casi con seguridad de una única fuente. El centro galáctico es un lugar especialmente interesante, pues en sus cercanías (en el entorno de unos pocos grados en su dirección)

encontramos fuentes X y γ variables en el tiempo en un factor 2 ó 3, si bien los datos de GRANAT sugieren que tal vez incluso en factores mucho mayores.

- Radiación difusa γ de fondo, de origen aún desconocido.
- La emisión difusa galáctica y fuentes extensas proveen un medio para conocer la composición del medio interestelar, a través de:

i) Emisión de líneas γ provenientes de la desintegración de los radioisótopos producidos durante la nucleosíntesis estelar (ver tabla I).

Cadena de desintegración	Vida media (años)	Emisión (keV)
$^{57}\text{Co} \Rightarrow ^{57}\text{Fe}$	0.742	14, 122, 136
$^{44}\text{Ti} \Rightarrow ^{44}\text{Sc} \Rightarrow ^{44}\text{Ca}$	47.3	68, 78, 511, 1157
$^{60}\text{Fe} \Rightarrow ^{60}\text{Co} \Rightarrow ^{60}\text{Ni}$	$1.44 \cdot 10^5$	59, 1173, 1332

Tabla I: Emisiones γ del medio interestelar.

ii) Emisión de líneas γ procedente de las desexcitaciones nucleares tras la interacción de materia interestelar con rayos cósmicos.

iii) Inyección de elementos pesados debido a la explosión de supernovas.

- Galaxias de núcleo activo.

En este marco, la región de 20 a 100 keV tiene particular importancia [4]. Información astrofísica única relativa a excitación nuclear, radioactividad, emisión de ciclotrón y formación de líneas se halla contenida en esta región del espectro electromagnético. Para muchos objetos astronómicos, es muy

importante determinar el fin de sus colas en rayos X, y al revés, determinar la posible prolongación en rayos X de objetos γ -emisores bien conocidos. La extensión de los espectros de las galaxias de núcleo activo (AGN) de la región de rayos X a mayores energías es fundamental para entender tan poderosos emisores.

Pero, a pesar de la importancia de esta región energética, un significativo hueco aparece actualmente en la región de 20 a 100 keV. La eficiencia de los actuales detectores X y nuevas generaciones de CCD que actúan en esta región, cae abruptamente al llegar a los 20 keV. Y muchos instrumentos basados en centelleadores están limitados a operar por encima de los 100 keV. Este hueco pretende ser llenado ahora por LEGRI.

1.4 Objetivos tecnológicos de LEGRI

La detección eficaz de radiación requiere materiales con un número atómico efectivo alto (alto poder de frenado), tanto mayor cuanto más energética sea ésta (como es el caso de la radiación γ). La búsqueda de detectores semiconductores eficaces para estas energías, de alto número atómico efectivo, con buena resolución energética, y que trabajen a temperatura ambiente (es decir, que tengan un *gap* ancho, del orden de algunos eV) ha mostrado que el HgI₂ y el CdZnTe (en realidad Cd_{0.9}Zn_{0.1}Te, es decir, un cristal de CdTe en el que el 10% de los átomos de Cd ha sido sustituido por átomos de Zn) se encuentran entre los mejores candidatos [5]; el compromiso alcanzado entre propiedades de detección y posibilidades tecnológicas los sitúan como unas de las opciones más interesantes de la actualidad.

Si comparamos estos nuevos materiales frente a los semiconductores clásicos de Ge o Si, **i)** presentan un gran número atómico efectivo (mayor en el caso del HgI₂); **ii)** no necesitan sistemas criogénicos, pues trabajan eficazmente a temperatura ambiente (la energía de *gap* para el HgI₂ es de 2.2 eV, y de 1.5 eV para el CdZnTe); **iii)** su enorme resistividad ($>10^9 \Omega \text{ cm}$) y baja capacidad hacen que la corriente de fuga sea lo suficientemente baja como para presentar una aceptable relación señal-ruido, situando la resolución alcanzable en valores

muy aceptables, intermedios entre los centelleadores de NaI y los semiconductores de Ge (~ 0.38 keV para el HgI₂ y ~ 0.5 keV para el CdZnTe, para una energía de 5.9 keV y temperatura ambiente).

Estos detectores presentan una resistencia a daños producidos por radiación superior a la de sus competidores (mayor en el caso del HgI₂), propiedad de gran utilidad en condiciones de espacio. Los HgI₂ [5] se han probado bajo dosis de fotones de 40 keV con tasas de contaje mayores de 10^{12} fotones $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ sin ningún deterioro; asimismo se ha demostrado que estos detectores resisten sin daño dosis de 10^{14} protones cm^{-2} de 10 MeV. Tampoco se han presentado problemas de empeoramiento interno en los HgI₂ durante periodos de siete años trabajando a temperatura ambiente de forma eficiente, ya que, al no ser la polarización un fenómeno intrínseco de este detector, presenta una vida útil más larga. Por su parte, los CdZnTe [6] no presentan fenómeno de deriva con el tiempo, y han sido expuestos a flujos neutrones de energías de varios MeV, en cantidades de 10^{10} neutrones/ cm^2 , encontrándose una pequeña cantidad de activación, pero sin degradación de la respuesta del detector. Además el crecimiento de dicho material es más sencillo que el de los HgI₂.

De esta forma, el principal objetivo tecnológico del proyecto LEGRI es probar el comportamiento en el espacio de un telescopio, de rayos γ basado en estos detectores, con capacidad de realización de imágenes en el rango de los 20-100 keV, y hacer un estudio comparativo en igualdad de condiciones de estos dos detectores. El instrumento tiene también un marcado carácter de demostración de tecnología cara a futuras misiones de astronomía γ . En definitiva, se pretende:

- Demostrar la viabilidad tecnológica de construir telescopios de rayos γ de nueva generación, optimizados para la zona 20 - 100 keV, utilizando detectores de HgI₂ o CdZnTe.
- Probar la capacidad de estos detectores para operar eficientemente en condiciones de espacio.

- Estudiar la capacidad de supervivencia en condiciones de espacio y evaluar los factores de degradación de la respuesta con el tiempo.
- Realizar un estudio comparativo de prestaciones y resistencia en estas condiciones de ambos materiales.

1.5 Descripción de LEGRI

El sistema LEGRI (Low Energy Gamma Ray Imager) está compuesto de las siguientes unidades:

- Un detector de rayos γ sensible a la posición, formado por una matriz de 10x10 unidades detectoras (80 de HgI₂ y 20 de CdZnTe), con una separación entre centros de detectores de 1.2 cm, un colimador y un blindaje pasivo.
- Una máscara codificada, formada por elementos de tungsteno antepuesta al detector y paralela a él, localizada a 54 cm del plano detector.
- Un sensor estelar que indica con precisión y de forma continua la dirección de apuntado del sistema.
- Una unidad de proceso digital y potencia extra que actuará como interfaz con la plataforma para transmisión de potencia y datos.
- Una fuente de alto voltaje.
- El equipo de soporte y seguimiento en tierra (el *Science Operation Center* o S.O.C.), situado en Valencia (ver apartado 1.7).

La disposición del instrumental del proyecto LEGRI a bordo de la plataforma Minisat 01 podemos verla en la figura 1.3.

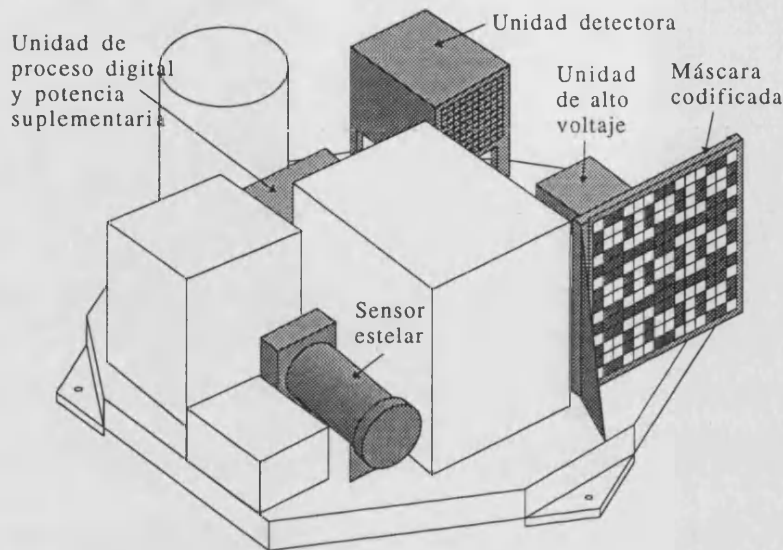


Figura 1.3: Unidades del sistema LEGRI a bordo de Minisat 01.

La posición de la instrumentación a bordo de la plataforma es tal que la dirección de apuntado tanto del telescopio como del sensor estelar sea **siempre** ortogonal a la dirección donde se encuentra el Sol (eje solar).

La base del sistema la forman la unidad detectora y la máscara; juntos constituyen el telescopio de rayos γ (ver fig. 1.4).

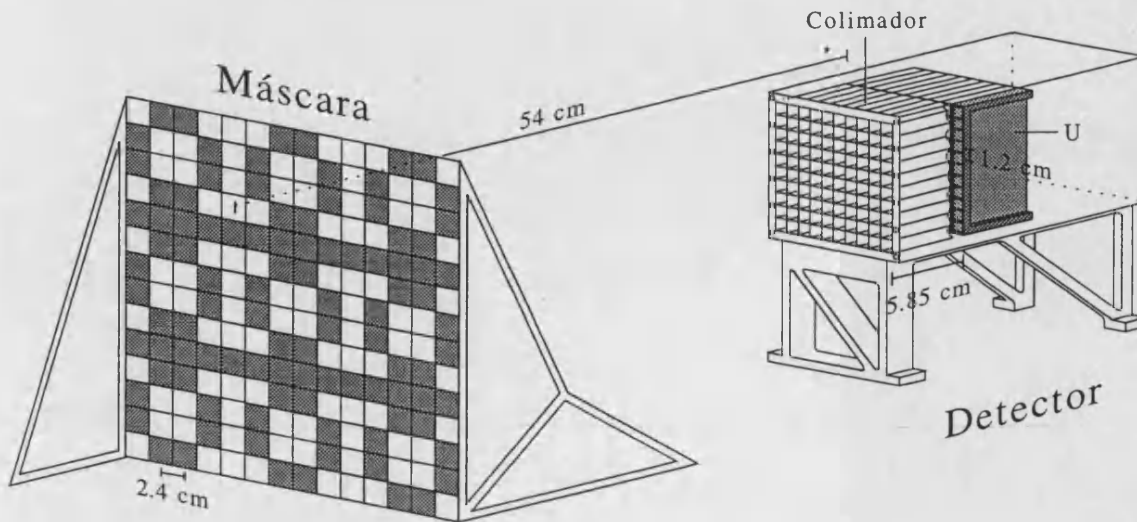


Figura 1.4: Máscara y unidad detectora.

El detector es una caja rectangular unida a la plataforma por cuatro soportes de aluminio. El detector está constituido por:

- Un blindaje pasivo (las paredes de la caja), para impedir la llegada de radiación a los detectores, exceptuando de la dirección de apuntado del telescopio. El blindaje consta de varias capas (de dentro a fuera, 1 mm de hierro, 0.5 mm de estaño, 0.25 mm de tántalo y 2 mm de plomo) e impide el paso de radiación γ por debajo de 100 keV. Protege asimismo la electrónica de interferencias electromagnéticas provenientes de otros sistemas electrónicos a bordo del satélite.
- Un colimador de tántalo de 5,85 cm de longitud y paredes de 0.25 mm de grosor (ver fig. 1.4), colocado encima del plano detector, limitando el campo de visión de tal forma que el plano detector reciba tan sólo radiación que previamente haya atravesado la máscara. Para proteger los detectores de la luz visible, al fondo del colimador hay una ventana de 50 micras de *kaptan*, transparente a la radiación gamma.
- El plano detector, formado por 80 monocristales de HgI_2 de 0.5 mm de grosor, cada uno de ellos con un área útil de $\sim 0.25 \text{ cm}^2$, y 20 CdZnTe de 1 mm de grosor y un área útil de 1 cm^2 . Están dispuestos formando una retícula regular de 10×10 elementos, cuyos centros equidistan $1.2 \times 1.2 \text{ cm}$. Concretamente, la retícula está formada por 10 estructuras de soporte en forma de U, cada una de ellas con 10 detectores (ver en la fig. 1.4, en sombreado, una de las "ues"). Cada una de las "ues" lleva incorporada una tarjeta de electrónica analógica, común a los diez detectores que porta, con lo que cada "u" (cada grupo de una tarjeta y diez detectores) conforman una unidad de detección independiente. Esto añade modularidad y flexibilidad al experimento. Dado que la electrónica es común, en cada "u" los 10 detectores deberán tener características electrónicas similares. Las "ues" se disponen de forma vertical, para evitar posibles deformaciones durante el despegue.
- La electrónica asociada a los detectores. Como hemos dicho, la electrónica analógica irá incorporada en las estructuras en forma de U

que conforman el plano detector. Pero es necesaria una electrónica digital que actúe como interfaz entre las señales analógicas recibidas por el detector y la unidad de proceso digital. Esta electrónica digital se halla situada en el fondo de la caja del detector y no se muestra en el dibujo.

La máscara codificada es la que permite al detector obtener imágenes (ver capítulo 2) y consiste en un conjunto de elementos opacos a la radiación, hechos de tungsteno, situados en una estructura de panal de abeja o *honeycomb* (ver fig. 1.5). El *honeycomb* es una estructura hexagonal hecha en Nomex (cierto tipo de resina sintética), con una forma similar a la de un panal, de gran resistencia a la tracción y deformación, y que al mismo tiempo garantiza una gran transparencia a la radiación (por estar hueco) frente a otros materiales de soporte. Los elementos de tungsteno se sitúan en huecos excavados en el *honeycomb* y se cubren ambos lados por una piel de fibra de carbono, como se ve en la figura 1.5, a fin de conseguir la rigidez mecánica adecuada.

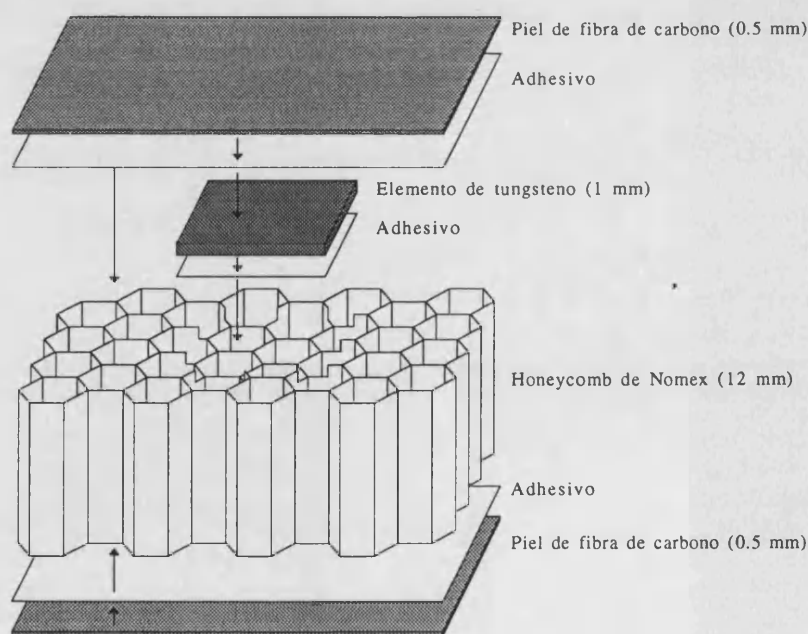


Figura 1.5: Estructura de la máscara codificada.

El tamaño de los elementos de tungsteno es de $2.4 \times 2.4 \times 0.1 \text{ cm}^3$, y están dispuestos formando una retícula de rellenos (lugares donde hay tungstenos) y huecos (lugares donde no los hay) de 14×14 elementos (ver fig. 1.4), cuyos

centros equidistan 2.4x2.4 cm, es decir, justo el doble de la distancia que hay entre los centros de los elementos del plano detector.

El patrón de elementos transparentes y opacos de la máscara es un patrón MURA (Modified Uniform Redundant Array, ver apartado 2.8.4 y figuras 1.4 y 2.23) 5x5, repetido en mosaico para llenar los 14x14 elementos de la máscara. Dado que la separación entre centros de los elementos de la máscara es el doble que la que hay entre los elementos del plano detector, 2x2 elementos del plano detector equivalen, en tamaño, a un elemento de la máscara, es decir, el tamaño del patrón base MURA 5x5 coincide con el tamaño del plano detector (10x10).

En cuanto al sensor estelar, es una cámara formada por una matriz de 310x287 fotodiodos (cada uno de 0.0196x0.016 mm²) y un sistema de lentes ordinario, dando un campo de visión de 7° con una resolución de 1'. Cada cierto tiempo da una imagen en el óptico de los píxeles (estrellas) más brillantes del campo de visión, lo que permite al S.O.C. conocer con precisión la dirección de apuntado del sistema (por comparación de la imagen con mapas estelares).

En la tabla II se muestran las principales características del sistema LEGRI.

Rango de energías	20-100 keV
Sensibilidad en el continuo	3 mCrab a 30 keV y 10 ⁵ s (3σ)
Resolución espectral	$\Delta E/E = 0.13$ a 30 keV
Capacidad de localización de fuentes puntuales	20'
Campo de visión	16°
Masa	30 kg
Potencia	20 W

Tabla II: Características de LEGRI

1.6 Órbita de LEGRI

De los tres instrumentos a bordo de Minisat 01, tan sólo LEGRI requiere una dirección de apuntado, con lo que LEGRI, en principio, será el que decida la orientación de Minisat 01. Dado que la dirección de apuntado de LEGRI debe ser ortogonal al eje solar (y se mantendrá el satélite bajo esta restricción), el apuntado se hará rotando el satélite alrededor de este eje. Esto implica que una zona celeste dada será accesible tan sólo durante unos pocos días, en intervalos de 6 meses (ver fig. 1.6; en realidad, aunque no se refleje en la figura, el eje solar es perpendicular al plano de la plataforma, de tal forma que los paneles reciban el máximo de luz).

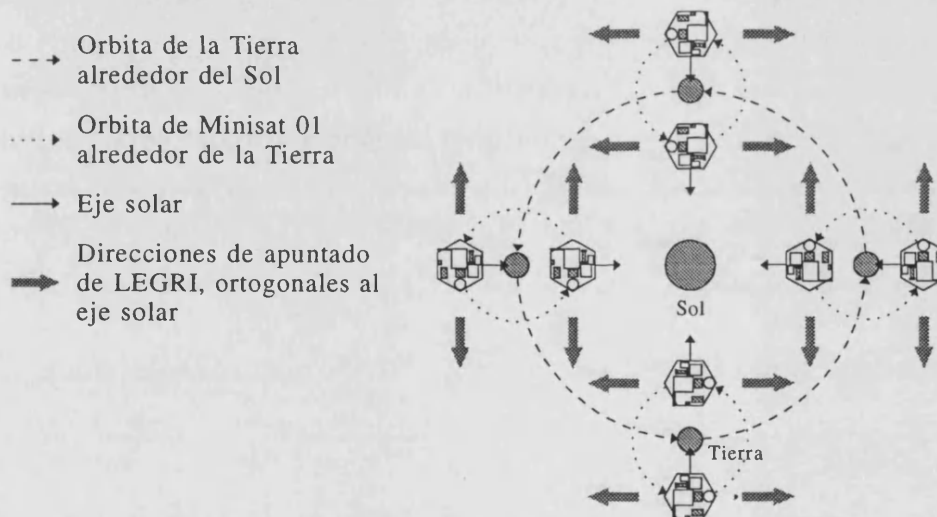


Figura 1.6: Órbita de Minisat 01 alrededor del Sol y la Tierra.

Los parámetros de la órbita de Minisat 01 se muestran en la tabla III:

Excentricidad	0
Altitud	600 km (error de inyección ± 50 km a 3σ)
Inclinación	28.5° (error de inyección $\pm 0.2^\circ$ a 3σ)
Periodo	96.69 minutos
Velocidad	7558 m/s
Órbitas por día	14.89

Tabla III: Parámetros orbitales de Minisat 01

1.6.1 Ruido inducido en LEGRI

Dado que los cinturones de radiación de Van Allen no comienzan hasta los 1000 km de altura, la órbita de Minisat 01 hace que LEGRI no pase por éstos, con lo que no se verá afectado por esta importante fuente de ruido. Sin embargo, existe una fuerte anomalía del campo magnético terrestre a alturas inferiores que sí va a influir en LEGRI, la Anomalía del Atlántico Sur (AAS), donde queda atrapada radiación (electrones y protones principalmente) de energías superiores a 30 keV. La órbita de Minisat atraviesa la AAS, como se puede ver en las figuras 1.7, 1.8 y 1.9.

Al pasar por la AAS, los protones atrapados en ésta, principalmente, inducirán una radiación en el material de LEGRI que irá creciendo con cada pasada hasta saturarse y alcanzar un máximo, debida a la desintegración de isótopos de vida larga; los isótopos de vida corta producirán una radiación mucho mayor, pero al ser de corta duración (y dado que los datos tomados por LEGRI durante el tránsito por la AAS no se considerarán) ésta no influirá, por haber desaparecido cuando LEGRI vuelva a tomar datos útiles.

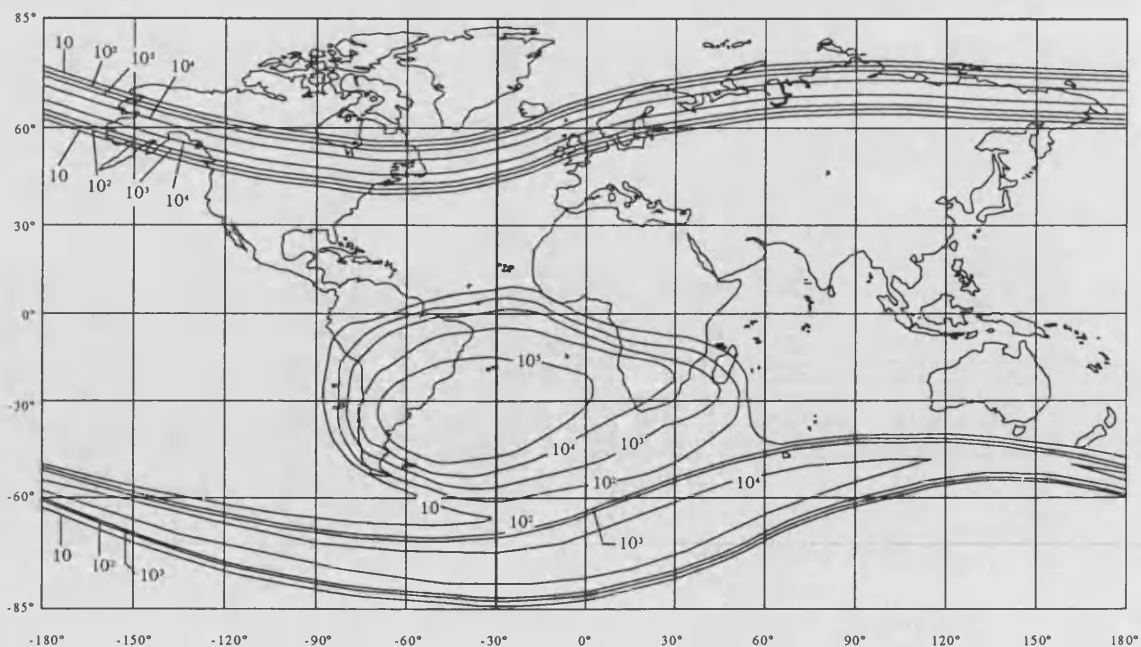


Figura 1.7: Anomalía del Atlántico Sur. Contornos de flujo omnidireccional en electrones $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$. $E > 1 \text{ MeV}$. Altitud 500 km.

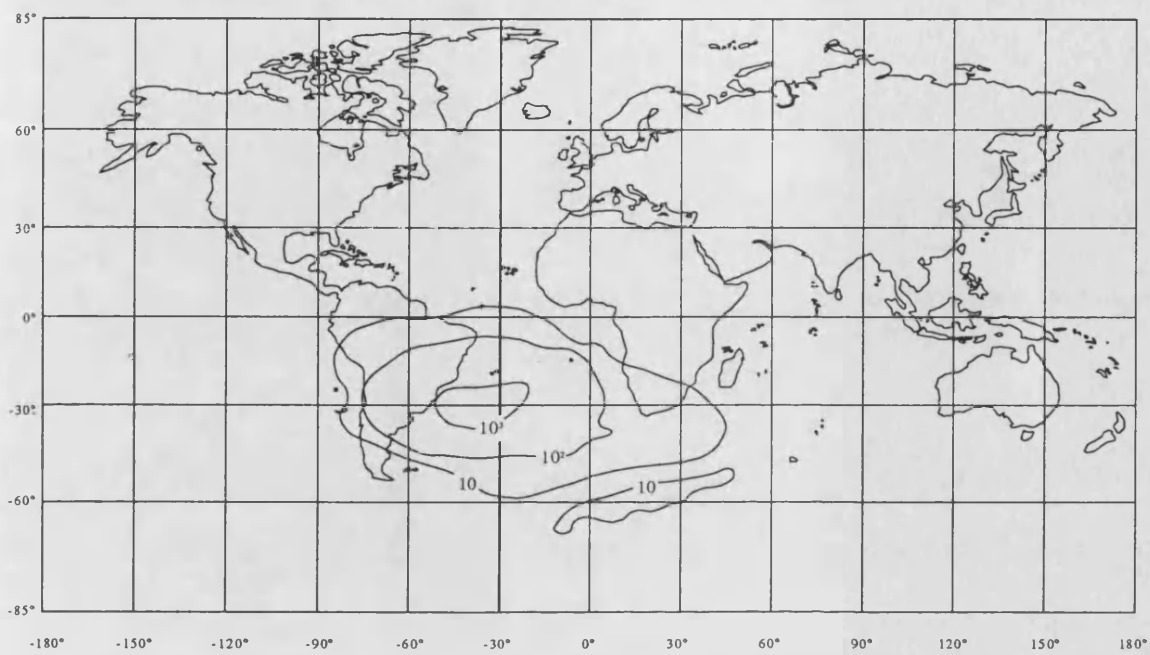


Figura 1.8: Anomalia del Atlántico Sur. Contornos de flujo omnidireccional en protones $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$. $E > 30 \text{ MeV}$. Altitud 500 km.

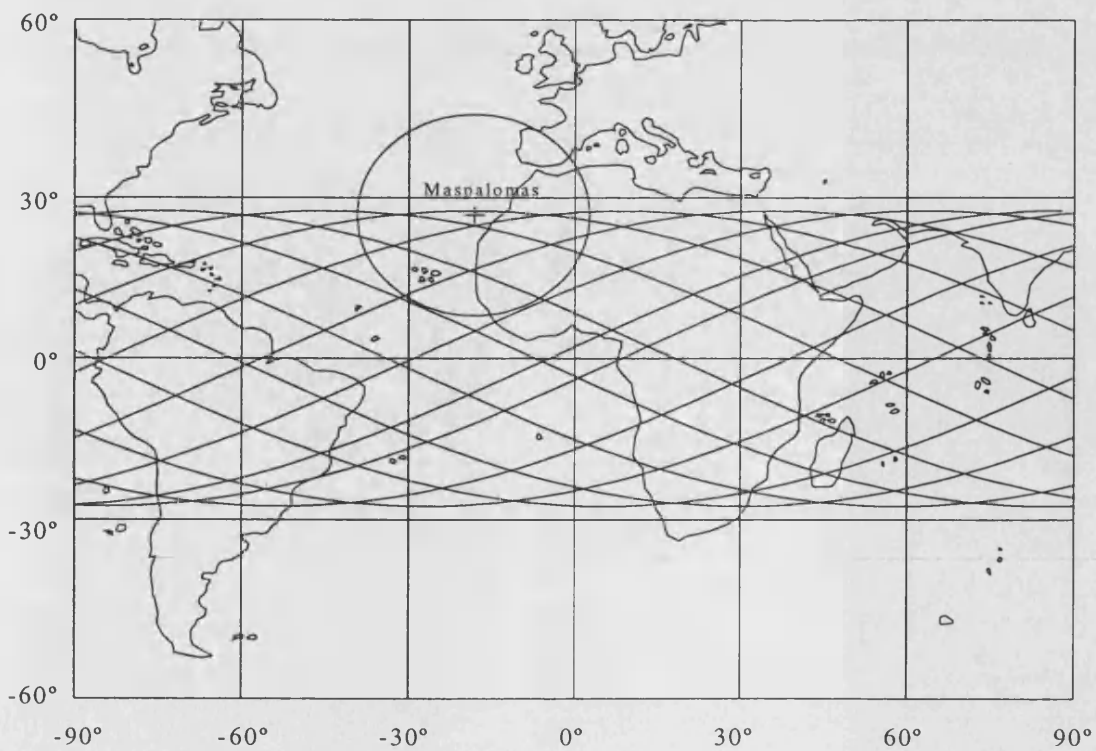


Figura 1.9: Trayectoria orbital de Minisat 01 en un día. Altitud 600 km.

La radiación producida por estos isótopos de vida larga [7] (inducidos a su vez por los protones atrapados en la AAS) producen en LEGRI un ruido del orden de $5 \cdot 10^{-3}$ cuentas $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{keV}^{-1}$. También existen otras fuentes de ruido, como son los protones cósmicos, que dejan alguna señal en los detectores, y también inducen isótopos (aunque su contribución es despreciable frente a la de los protones atrapados); y la radiación difusa de fondo de rayos γ , que ya mencionamos en el apartado 1.3, y que siguen la ley [8]:

$$\frac{dN}{dE} = 1.098 \cdot 10^3 \cdot E^{-2.3} \text{ fotones } s^{-1} \text{ keV}^{-1} \text{ cm}^{-2}$$

Sin embargo, la contribución principal al ruido es con mucho la debida a la radioactividad inducida por los protones atrapados en la AAS.

1.6.2 Telemetría

En la tabla IV se muestra el análisis de visibilidad de Minisat 01. Se dice que Minisat es visible cuando es detectable desde la estación en tierra de Maspalomas y es posible el intercambio de información entre ambos.

Pasos al día (elevación sobre el horizonte $> 20^\circ$)	5 (49% de las veces) 4 (51% de las veces)
Duración del contacto	max. 8.5 min min. 6.5 min media 8.1 min
Pasos cenitales (elevación sobre el horizonte $> 85^\circ$)	17% de los pasos

Tabla IV: Resultados de visibilidad

Dado que el experimento EURD a bordo de Minisat 01 (por las condiciones del experimento) tan sólo puede funcionar en eclipse (la Tierra tapando el Sol), y dado que, por falta de potencia en Minisat 01, no es posible que LEGRI y EURD funcionen a la vez, como resultado tenemos que LEGRI

sólo funcionará en insolación (exceptuando los casos en que EURD no trabaje en absoluto). En esta órbita de 96.69 minutos, un eclipse medio dura 33.75 min. y una insolación media, 62.94 min. con lo que aproximadamente las 2/3 partes del tiempo de observación estarán disponibles para LEGRI.

La capacidad de memoria disponible para los experimentos a bordo de Minisat 01 es de 15.5 Mbytes. La necesidad de memoria de LEGRI es de 0.83 Mbytes/hora, esto es, 0.87 Mbytes/órbita. La de EURD es de 0.71 Mbytes/hora, que son 0.40 Mbytes/órbita (el tercer experimento, el CPLM, funciona sólo una vez al mes). En total 1.27 Mbytes órbita, con lo que la memoria de 15.5 Mbytes habrá que vaciarla (esto es, transferir sus datos a tierra) cada 12.2 órbitas *como mucho*. Es decir, prácticamente una vez al día.

Los datos científicos que enviará la unidad detectora del sistema LEGRI a tierra son:

- Coordenadas x e y de la señal detectada (es decir, detector).
- Energía depositada (en realidad altura de pico).
- Tiempo de impacto (en "clicks" del reloj interno).

Los datos que enviará el sensor estelar son:

- Coordenadas x e y de los 12 píxeles más brillantes del campo de visión, o de las 6 estrellas más brillantes, dependiendo de si está conectado el software de reconocimiento estelar o no.
- Intensidades de lo anterior.

1.7 El equipo científico

1.7.1 El *Science Operation Center* (S.O.C.) de LEGRI

La operaciones científicas de LEGRI serán dirigidas por el S.O.C., que es responsabilidad de la Universidad de Valencia y se hallará situado en el campus de Burjassot. El S.O.C. actuará de interfaz entre Minisat y los seis

equipos investigadores de la colaboración LEGRI. Las tareas principales del S.O.C. son:

- Realización de las calibraciones en vuelo del sistema (preoperacional y operacional).
- Creación del software estándar necesario para el análisis de los datos.
- Diseño del Programa de Observación, a partir de las indicaciones del equipo científico y los grupos investigadores.
- Realizar un análisis rápido de los datos del detector a fin de poder tomar decisiones sobre cambios de apuntado o modificaciones del programa, con tiempos de reacción inferiores a 24 horas.
- Enviar a los grupos investigadores los datos del detector.
- Mantener los archivos centrales de LEGRI (fichero de apuntado -a partir de los datos del sensor estelar-, ficheros de datos en bruto, fichero de calibración de los detectores, fichero histórico de imágenes etc...).

El S.O.C. recibirá del centro de control de Minisat 01 los datos del detector y sensor estelar una vez al día. Asimismo las instrucciones del S.O.C. para LEGRI serán enviadas al centro de control de Minisat 01 una vez al día.

1.7.2 La colaboración LEGRI

LEGRI ha sido diseñado y construido por un consorcio de universidades y laboratorios, incluyendo:

- Universidad de Valencia/CSIC
Control global del proyecto; integración y ensamblaje del detector; responsable de los detectores de CdZnTe; diseño y construcción de la máscara codificada y de la estructura mecánica del detector; S.O.C.

- CIEMAT
Manufactura y test de los HgI_2 ; ensamblaje de la matriz de detectores y la electrónica.

- INTA
Dirección; control térmico; integración y test.


- RAL
Electrónica; unidad de alto voltaje; sensor estelar.

- Universidad de Birmingham
Unidad de proceso digital y potencia extra; calibración en tierra.

- Universidad de Southampton
Equipos de soporte técnico en tierra (EGSE).

Capítulo 2: Teoría de máscaras. Fundamentos

2.1 Proemio

a posibilidad de obtener imágenes en rayos X y γ es de una gran utilidad en diversos campos de investigación. Efectivamente, en medicina puede ser preciso conocer la distribución en el interior del cuerpo de los isótopos emisores de radiación que previamente el médico ha suministrado al paciente, con fines de diagnóstico o curación de un cáncer. En física nuclear, por ejemplo, en un reactor experimental de fusión nuclear puede ser útil conocer la distribución del plasma (emisor de radiación) y sus evoluciones en el interior del toroide contenedor. Para la astronomía (a la cual vamos a restringir el ámbito de este trabajo), la motivación ha sido ya ampliamente explicada en el capítulo anterior.

En todos estos casos es necesario obtener una imagen de la zona emisora de radiación X o γ , y conseguir esto es un problema, como ya comentamos en el exordio, pues los telescopios clásicos basados en lentes o espejos son inútiles, debido a la naturaleza muy energética de la radiación considerada [9]; los fotones de rayos X poco energéticos, al contrario que los fotones de luz visible, tienen suficiente energía para arrancar electrones de los átomos de las lentes o espejos, con lo que son absorbidos por éstos. Por contra, los fotones X muy energéticos y fotones γ pueden incluso atravesar limpiamente la lente, mas no sufren desviación significativa, con lo que es inútil utilizar una lente para focalizarlos y formar una imagen.

Existe un método, conocido como *Grazing-incident reflection* o reflexión tangencial [10], que permite la focalización de los rayos X de poca energía, haciéndolos incidir en múltiples superficies reflectantes, de forma casi tangencial. Esta técnica implica superficies cuya normal se encuentra, respecto del origen de la fuente de radiación, a altos ángulos de incidencia, mayores que el ángulo crítico de la superficie del material, de forma que la radiación no penetre en él y se refleje. Esto desvía los rayos X hacia un foco, que se halla en

la superficie detectora, con lo que con este sistema podemos formar una imagen de la fuente X de una forma casi "clásica". Sin embargo, esta técnica se hace más ineficaz según incrementemos la energía de la radiación incidente, pues los ángulos en los cuales la reflexión ocurre se acercan demasiado a 90° . Así, un telescopio de rayos X muy energéticos (o de radiación γ), al precisar de ángulos muy cercanos a 90° para reflejar la radiación, requeriría de enormes superficies para poder disponer de una apertura razonable, y disponerlas con una enorme precisión para que el conjunto funcionara; esto resulta prohibitivamente caro. Como resultas, esta técnica se vuelve impracticable para energías mayores de 10 keV.

Por tanto es obvio que se necesita un sistema de formación de imágenes por completo diferente para energías mayores de 10 keV. Este sistema lo hallamos en el uso de máscaras codificadas.

2.2 Sistemas de coordenadas

Previamente a introducirnos en los fundamentos de formación de imágenes por medio de máscaras, vamos a explicar el sistema de coordenadas que usaremos en las siguientes descripciones, pues, además de los usuales, empleamos uno más adecuado a la problemática de formación de imágenes.

Como todo sistema de coordenadas en astronomía, este es un sistema fundamentalmente de **direcciones**. Los objetos astronómicos se encuentran demasiado lejos como para que valga la pena considerar un radio. Así que sólo se considerarán las otras dos coordenadas, que son angulares. Por ejemplo, en coordenadas esféricas (ampliamente usadas en astronomía) tan sólo se considera θ y ϕ , que según el sistema que se use se llamará ascensión recta y declinación, o altura y acimut, por citar algunos ejemplos.

En nuestro caso, el sistema de referencia lo definirá el telescopio (esto es, el conjunto detector-máscara), coincidiendo el eje z del sistema con el eje de simetría del telescopio. De esta forma, cualquier objeto que se halle en el centro del campo de visión del telescopio tendrá coordenadas (0,0). Esto, por supuesto,

es independiente de cuales sean las coordenadas celestes reales del objeto, pues nos estamos refiriendo a algo unido intrínsecamente al telescopio, y éste puede variar su apuntado sin variar su sistema de referencia propio. Las coordenadas de cualquier objeto en el campo de visión del telescopio, respecto de su centro de visión, vendrán dadas por dos ángulos, (α, β) (ver fig. 2.1).

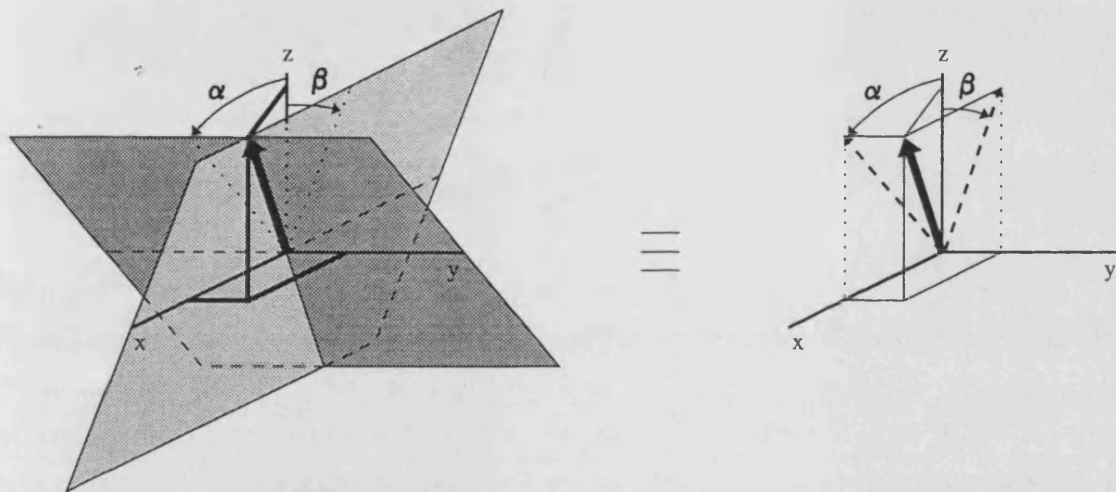


Figura 2.1: Definición de las coordenadas de un objeto celeste respecto del sistema telescópico.

El ángulo α define un plano que pasa por el eje y y que forma un ángulo α con el eje z . Análogamente, el ángulo β define un plano que pasa por el eje x y que forma un ángulo β con el eje z . La intersección de ambos planos es una recta cuyo vector indica la dirección del objeto celeste. Otra forma de verlo es: dado un vector dirección, que apunta a un cuerpo celeste, la proyección del vector sobre el plano xz forma un ángulo α con el eje z , y análogamente la proyección del vector dirección sobre el plano yz forma un ángulo β con el eje z . Estos ángulos α y β son las coordenadas del objeto. De esta forma definimos una trama cuadrada bidimensional y uniforme de ángulos, que se halla centrada en el centro del campo de visión del telescopio.

Las leyes de transformación entre este sistema de coordenadas, el cartesiano, y el de coordenadas esféricas son fáciles de deducir a partir de la figura 2.1, y vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
 u_x &= \operatorname{sen}\theta \cos\phi = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + 1}} \\
 u_y &= \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + 1}} \\
 u_z &= \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + 1}}
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

o también:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}\alpha &= \operatorname{tg}\theta \cos\phi \\
 \operatorname{tg}\beta &= \operatorname{tg}\theta \operatorname{sen}\phi
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

En la figura 2.2 hemos representado las curvas $\theta=\text{cte}$ y $\phi=\text{cte}$ en el sistema de coordenadas (α,β) , para poder comparar ambos. La curva $\theta=90^\circ$ equivale al borde (cuadrado) del sistema de coordenadas, y las curvas $\phi=0^\circ$, $\phi=90^\circ$, $\phi=180^\circ$ y $\phi=270^\circ$ equivalen a los ejes α y β . Como toda representación de una esfera en un plano, se produce una deformación de la imagen que aumenta conforme nos alejamos del centro de visión. Sin embargo, para los campos de visión de esta clase de telescopios (típicamente menores de 20°), la deformación es totalmente despreciable, como podemos comprobar al observar la zona central de la citada figura.

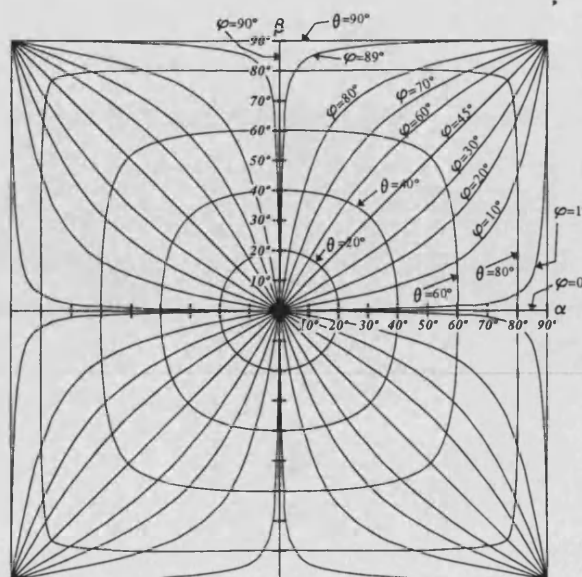


Figura 2.2: Coordenadas (α,β) frente a coordenadas (θ,ϕ) .

De hecho, para ángulos menores de 20° , estas coordenadas angulares se comportan de forma muy aproximada como las coordenadas cartesianas (p.ej.: $\beta/\alpha \approx \text{tg}(\phi)$, $\alpha^2 + \beta^2 \approx \theta^2$), y podremos usar con ellas sus leyes de transformación (rotación, traslación, etc...). Hay que hacer notar también que, si representamos una imagen siguiendo el criterio de signos de los ejes α y β que se muestra en la figura 2.2 (que por otro lado es el que podría parecer más lógico), se obtiene que la imagen se halla invertida especularmente respecto a lo que realmente se observa, como puede comprobarse viendo la figura 2.3.

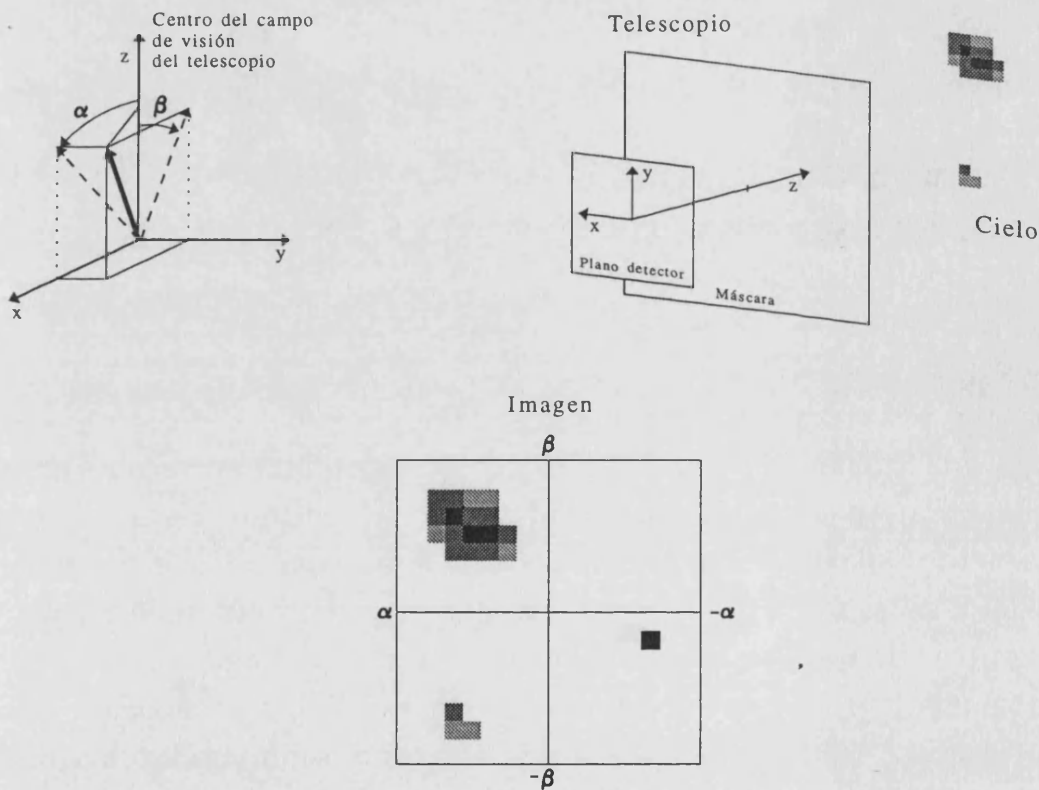


Figura 2.3: Cuando en la representación se usa para los ángulos un criterio de signos "lógico", la imagen aparece invertida especularmente.

Una imagen con el criterio de signos de la fig. 2.2 sería como si la viéramos desde *fuera* de la bóveda celeste. Por tanto tendremos que invertir el eje α para obtener la imagen real (vista desde *dentro* de la bóveda celeste). Este mismo fenómeno ocurre en los mapas estelares ordinarios; si se observa la carta celeste de una región, se puede comprobar que la Ascensión Recta aumenta de derecha a izquierda, y no al revés. No obstante, ya que conocemos este hecho y sabemos cómo corregirlo, representaremos de todas formas las imágenes siguiendo el criterio de signos de la fig. 2.2, por sencillez en el software.

2.3 Las máscaras codificadas

La idea que hay tras el concepto de máscara codificada es la misma que la que se halla detrás de la conocida "cámara oscura" o "cámara de agujero" (figura 2.4); se trata de una placa opaca que permite el paso de radiación por determinadas zonas, interpuesto entre la fuente y el plano detector, de tal forma que modula (codifica) la señal que llega de la fuente. De hecho, la cámara de agujero se puede considerar como el caso más elemental de máscara codificada.

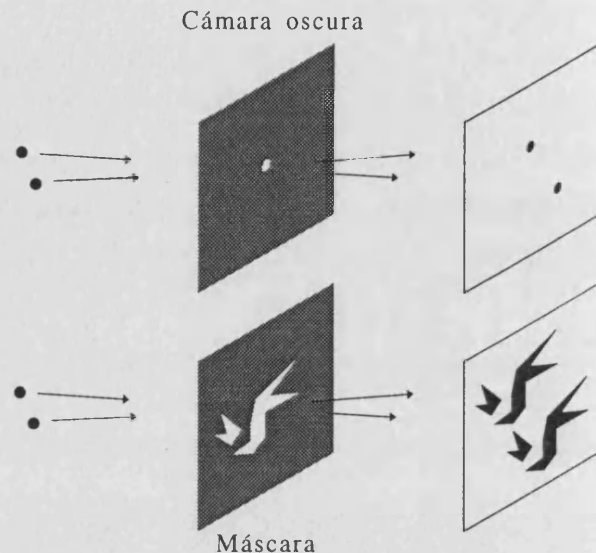


Figura 2.4: Comparación de la cámara oscura con un sistema de máscara codificada.

Pero la cámara de agujero, que nos da inmediatamente una imagen (invertida y levemente borrosa) del objeto estudiado, tiene el grave inconveniente de tener una transmisividad muy baja, ya que, de toda la radiación que llega a la placa opaca, tan sólo pasa a través de la misma un muy bajo porcentaje de luz. Cuanto más pequeño sea el agujero, más nítida será la imagen, menos borrosa, pero también más débil, y teniendo en cuenta que las fuentes celestes suelen ser muy débiles, esto resulta un inconveniente; proveniente de una fuente celeste típica, en una hora sólo pasaría un fotón a través de un agujero de 1 mm de diámetro [9]. Y dado que el ruido de fondo que llega al detector (debido a rayos cósmicos) es mucho mayor que un fotón por hora, obtenemos una relación señal/ruido (SNR) realmente mala, con lo que este sistema elemental de formación de imágenes no es útil para hacer astronomía. La solución a este problema es evidente: incrementar la transmisividad, aumentando el número y/o el tamaño de los agujeros. Como resultado de esto, aparece el concepto de máscara codificada: un cuerpo opaco, con un *cierto patrón* transparente antepuesto al plano detector, que codifica la señal recibida, y que permite un mayor paso de radiación y una mejor relación señal/ruido de lo que es posible con una cámara de agujero.

Por desgracia (aparentemente), como se ilustra en la figura 2.4, al emplear una máscara codificada no se obtiene una imagen directa de la fuente, como ocurre al usar una cámara de agujero, sino una distorsión de la misma, que depende directamente del patrón de la máscara (de hecho, es su sombra). **Aquí** reside la clave de la reconstrucción de imágenes para esta clase de sistemas; en que, dado el patrón de la máscara, y conocida la imagen distorsionada detectada, podemos en principio reconstruir la imagen fuente.

A *grosso modo* se puede decir que lo que hacemos es buscar la sombra del patrón de nuestra máscara en el plano detector, y a partir de ello inferir la posición (e intensidad) de las fuentes celestes. Se deduce de esto que nuestro plano detector debe ser sensible al lugar de incidencia de los fotones; es decir, el plano detector debe ser un detector sensible a la posición, como una cámara Anger, una cámara de multihilos, una matriz de detectores discretos (centelleadores, semiconductores, etc...), o incluso una película fotográfica. La elección depende principalmente del rango de energías que estemos estudiando.

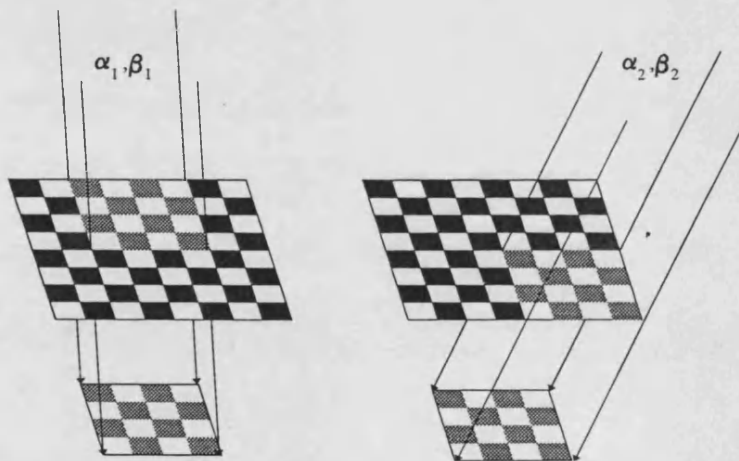


Figura 2.5: Proyección de dos sombras idénticas provenientes de direcciones distintas en el plano detector, usando una máscara de tipo tablero de ajedrez.

La elección de una máscara adecuada es un factor importante, pues no todas ellas son igualmente buenas para formar imágenes; el truco está en elegir la adecuada. Dado que nuestro método de reconstrucción de imágenes consiste en buscar la(s) sombra(s) producida(s) por la máscara en el plano detector (y de ahí inferir la posición de las fuentes), esta sombra debe ser lo más diferenciable posible. Por ejemplo, una máscara como la de la figura 2.5 no

sería útil, pues nos proyecta el mismo patrón sobre el plano detector para una gran cantidad de ángulos celestes α y β ; en efecto, en el dibujo se aprecia que dos direcciones totalmente diferentes, (α_1, β_1) y (α_2, β_2) nos dan exactamente la misma sombra en el plano detector. En esta máscara tenemos una gran incertidumbre en cuanto a la dirección en la que se halla la fuente productora de la señal. Existen varias direcciones posibles (degeneradas), y si pretendiéramos usar esta máscara para reconstruir una imagen, independientemente del método de reconstrucción que se usara, esa degeneración aparecería en la imagen reconstruida, pues todas las direcciones que produzcan el mismo patrón son igualmente válidas, al no disponer de información adicional para diferenciarlas, obteniendo una multiplicidad de fuentes reconstruidas donde en realidad sólo existe una, como podemos ver en la figura 2.6.

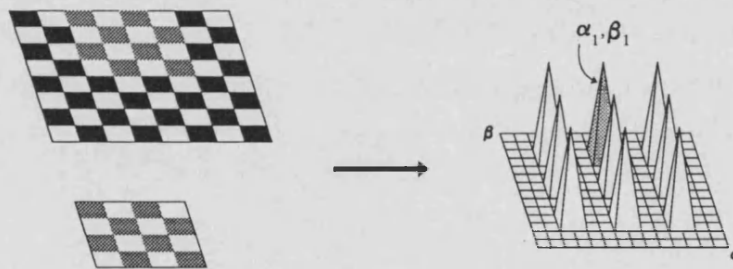


Figura 2.6: Reconstrucción a partir de la sombra detectada usando una máscara con patrón tipo tablero de ajedrez.

Así pues, nuestro patrón debe ser lo más diferenciable posible. Es decir, la sombra producida por una fuente celeste situada en una dirección debe ser diferente de la que produciría de estar en otra dirección.

2.4 Las placas zonales Fresnel

El primer método de formación de imágenes usando un tipo de máscara fue propuesto por Mertz y Young [11], y lo mencionamos aquí por motivos históricos y de completitud. El dispositivo recogía las sombras proyectadas desde un campo de fuentes al atravesar una placa zonal Fresnel [12] que era usada como máscara patrón (figura 2.7).

El principio de Huygens-Fresnel nos dice que la intensidad en un punto P de un frente de ondas se puede obtener por la contribución de todas las ondas secundarias generadas desde los puntos de una superficie anterior H, por la que ha pasado la onda. Esta superficie anterior (que no tiene por qué tener una existencia real, y que puede ser una simple entelequia matemática -por ejemplo, un frente de ondas anterior-) la podemos subdividir en zonas (las zonas Fresnel) que distan del punto P una distancia $r_0 + n \cdot (\lambda/2)$ siendo n un entero, o lo que es lo mismo, las ondas secundarias emitidas desde esas zonas llegan al punto P con una diferencia de fase de π , esto es, en interferencia constructiva. Según elijamos un r_0 distinto tendremos un conjunto de zonas Fresnel distinto (a no ser que $r_0' = r_0 + m \cdot (\lambda/2)$ -m entero-, con lo que obtendríamos el mismo conjunto). Si integramos la contribución de toda la superficie H (es decir, todas las zonas Fresnel posibles), las distintas zonas Fresnel posibles se compensan entre sí (entre ellas están en interferencia destructiva, en mayor o menor grado), y la resultante en P coincide con lo que la ley de propagación de la onda predice para su frente de ondas.

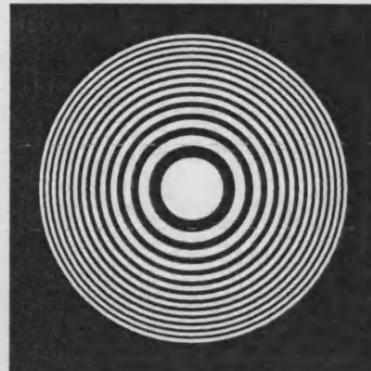


Figura 2.7: Placa zonal Fresnel.

¿Qué ocurre si impedimos de algún modo esa integración sobre toda la superficie H?, es decir, si seleccionamos que en P sólo contribuyan unas zonas Fresnel y no otras. Básicamente esto es lo que ocurre al usar una placa zonal Fresnel como la del dibujo. En la placa zonal son transparentes únicamente las zonas cuya diferencia de caminos entre la fuente origen de la onda y el punto P son del tipo $x + n \cdot (\lambda/2)$; es decir, toda la luz proveniente de la fuente que llega al punto P lo hace en interferencia constructiva. Como asombrosa consecuencia de este proceder obtenemos que la placa zonal Fresnel se comporta como una lente (de hecho, también se la conoce por el nombre de lente zonal), y que es capaz de generar directamente (sin método de reconstrucción alguno) imágenes de pequeños objetos.

Sin embargo, este sistema de formación de imágenes presenta dos inconvenientes. El primero es que, como podemos deducir fácilmente de la explicación, la lente zonal está optimizada para una cierta longitud de onda λ .

El segundo es que la lente zonal hace uso de los fenómenos de difracción de la luz, y estos efectos, provenientes de la interacción de la luz con los átomos de la materia, son despreciables para radiación tan energética como la que estamos considerando, de forma análoga a lo que nos ocurría con las lentes normales. Por tanto, si usamos una lente zonal como sistema de formación de imágenes, cada fuente γ en el campo de visión produce una sombra de la placa zonal Fresnel sobre el plano detector, superpuesta y desplazada. El método de reconstrucción a seguir en este caso consiste en generar una réplica transparente de la imagen detectada (por ejemplo, en película fotográfica), e iluminar una de las caras de la réplica con una fuente de luz monocromática cuya longitud de ondas sea la λ de la lente zonal (tal que ahora sí que hacemos uso de las propiedades de difracción de la lente zonal). Y, por arte de magia, lo que obtenemos es, directamente, una imagen de las fuentes celestes originales.

Por desgracia, aunque correcto en teoría, este sistema presenta la grave desventaja de generar una gran cantidad de ruido en la reconstrucción, siendo otros tipos de máscaras (con las que se obtienen mejores resultados y una mejor SNR) más útiles para astronomía, y no lo mencionaremos más en lo sucesivo.

2.5 Sistemática

Al contrario que con las placas zonales Fresnel, en las que se usa un método de reconstrucción óptico, la mayoría de máscaras que se usan requieren el uso del ordenador para la reconstrucción de la imagen. Tales métodos de reconstrucción son el objeto de estudio de este trabajo. Por ello, antes que nada, sistematizaremos explícitamente cómo se produce la sombra de una máscara en el plano detector [13]. Nos centraremos principalmente en máscaras rectangulares con patrón cuadrado (es decir, compuesta de elementos cuadrados, como la de la figura 2.8, donde mostramos un patrón generado de forma aleatoria), salvo que se especifique lo contrario.

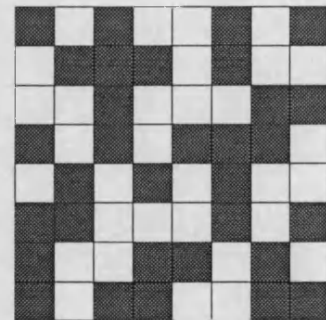


Figura 2.8: Máscara de patrón cuadrado aleatorio.

Describamos explícitamente ahora cómo se efectúa la detección de un conjunto de fuentes celestes en el plano detector. Consideremos un plano celeste con fuentes emisoras (ver fig. 2.9), definido por $O(\alpha, \beta)$, que nos indica la intensidad (fotones recibidos por cm^2 y unidad de tiempo) proveniente de la dirección (α, β) , siendo α y β las coordenadas angulares de la fuente; sea $D(x, y)$ el número de fotones recibidos sobre el plano detector en la posición (x, y) ; y sea $M(x', y')$ el patrón de la máscara, es decir, la transmisividad de la posición (x', y') de la máscara (1 si hay un agujero, y 0 si hay un elemento opaco). Tanto (x, y) como (x', y') vienen en unidades de longitud. Por último, sea f la distancia máscara-detector, b la distancia fuente-máscara (infinito en astronomía), y c el lado de un elemento cuadrado de la máscara.

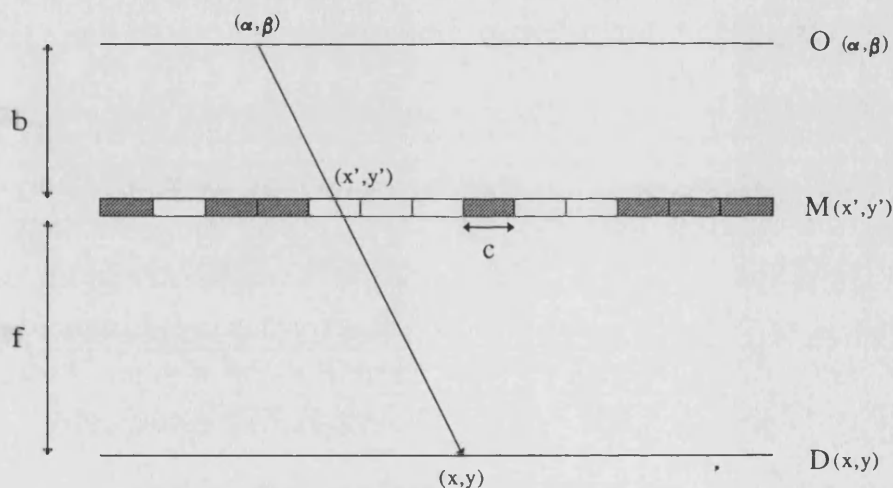


Figura 2.9: Efecto de la máscara en el proceso de detección.

Como se deduce de la figura 2.9, x' e y' son función de x e y , de α y β , y de f . En concreto, y habida cuenta que en este tipo de telescopios el campo de visión casi siempre es menor de 20° (esto es, 0.35 rad; y $\text{tg}(0.35) = 0.365 \approx 0.35$), tendremos que:

$$\begin{aligned} x' &= x + f \cdot \text{tg}\alpha \approx x + f \cdot \alpha \\ y' &= y + f \cdot \text{tg}\beta \approx y + f \cdot \beta \end{aligned} \quad (2.3)$$

Por tanto, las cuentas detectadas en un cierto punto (x, y) del plano detector vienen dadas por:

$$D(x,y) = \int O(\alpha,\beta) M(x',y') d\alpha d\beta = \int O(\alpha,\beta) M(f\cdot\alpha+x, f\cdot\beta+y) d\alpha d\beta \quad (2.4)$$

Esto no es otra cosa más que la forma matemática de una correlación. La última ecuación se puede volver discreta, siguiendo la literatura (p. ej. [13]), de la forma que se describe a continuación (esto nos facilitará el manejo de la misma -y el procesado por ordenador-). Pasamos el plano celeste y el plano detector a fracciones discretas y, siguiendo [13], también la máscara. Esta sistemática es especialmente adecuada para máscaras de patrón cuadrado, y es algo limitada e inexacta. Sin embargo, es la que se encuentra más a menudo en la literatura, y también en la que se fundamentan los métodos tradicionales de reconstrucción basados en correlaciones discretas.

Continuemos siguiendo los pasos del método explicado en [13]. Para ello se divide el plano fuente $O(\alpha,\beta)$ en píxeles de tamaño $\Delta\alpha \times \Delta\beta$, siendo $\Delta\alpha = \Delta\beta = \arctg(c/f) \approx c/f$, es decir, el tamaño que subtiende un elemento de la máscara visto desde el plano detector; el plano de la máscara se divide en píxeles de tamaño $c \times c$ (que de hecho ya lo está por construcción), y el plano detector se divide también en píxeles $c \times c$ (de esto se infiere que el plano detector debe poder ser divisible en elementos de tamaño $c \times c$). Con esto tendremos:

$$\begin{aligned} O(\alpha,\beta) &\Rightarrow O_{ij} \\ D(x,y) &\Rightarrow D_{kl} \\ M(f\alpha+x, f\beta+y) &\Rightarrow M_{i+k, j+l} \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde M es una matriz bidimensional cuyos elementos, como ya se ha indicado, serán ceros cuando se trate de un elemento opaco y unos cuando se trate de un agujero. Con esto, la ecuación 2.4 queda:

$$D_{kl} = \sum_{ij} O_{ij} M_{i+k, j+l} \equiv O * M \quad (2.6)$$

que es la forma discreta de la correlación.

Generalizando, podemos añadir un término de ruido, que no está codificado (no está modulado por la máscara):

$$D_{kl} = \sum_{ij} O_{ij} M_{i+k, j+l} + B_{kl} \Rightarrow D = O * M + B \quad (2.7)$$

Esta ecuación, a parte de ser el punto de partida de los métodos clásicos de reconstrucción, como ya hemos mencionado, nos es bastante útil para simular el comportamiento de un telescopio determinado; es decir, dada una máscara M y un cielo O (discreto), usando esta ecuación podemos averiguar qué detectaríamos en el plano detector D . Sin embargo, para este fin, más exacta es la siguiente "discretización", que de hecho es la que nosotros usamos cuando realizamos nuestras simulaciones. De forma análoga al caso anterior, hacemos:

$$\begin{aligned} O(\alpha, \beta) &\Rightarrow O_{\alpha\beta} \\ D(x, y) &\Rightarrow D_{kl} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$M(x + f \operatorname{tg}(\alpha), y + f \operatorname{tg}(\beta)) \Rightarrow \Phi_{kl}^{\alpha\beta}$$

donde $O_{\alpha\beta}$ es una matriz discreta (el análogo de O_{ij}), que indica la intensidad del campo celeste en el píxel (α, β) ; ahora tenemos la ventaja de que los índices (α, β) (no enteros) denotan explícitamente las coordenadas celestes del píxel que tratamos, y no son unos simples índices numerales enteros entre 0 y N , como sí ocurría en el caso anterior. Además, el tamaño de los píxeles en que se subdivide el cielo $O_{\alpha\beta}$ puede ser cualquiera; no tiene por qué estar limitado al ángulo que subtiende un elemento de la máscara. Φ es una función que nos da el flujo (en realidad el tanto por 1) proveniente del píxel celeste (α, β) , visto desde el píxel del plano detector (k, l) . Φ tiene valores entre 0 y 1, no sólo ceros o unos como ocurría con la matriz discreta M , y tiene en cuenta más factores que pueden modular la señal además de la máscara (que era lo único que considerábamos en el caso anterior), como pueden ser blindajes, colimadores, eficiencias, etc... Por otra parte, al ser Φ una función, tampoco se impone hacer discreta la máscara, ni que sea ésta de patrón cuadrado (aunque el cálculo de Φ es más sencillo si ésta lo es). Esto nos permite manejar un caso más general y de forma más exacta.

Tendremos, por tanto, que lo detectado en D_{kl} nos vendrá ahora dado por:

$$D_{kl} = \sum_{\alpha\beta} O_{\alpha\beta} \Phi_{kl}^{\alpha\beta} + B_{kl} \quad (2.9)$$

Volveremos más adelante sobre esta ecuación.

2.6 En busca de la reconstrucción perdida

Una vez que entendemos cómo se produce la detección de un campo de fuentes en el telescopio, nuestro objetivo es reconstruir este campo incógnita original a partir de los datos experimentales obtenidos. Veamos ahora las claves para obtener esta reconstrucción.

Como hemos visto en la ecuación 2.7 (que repetimos aquí por comodidad en la argumentación), podemos sistematizar el proceso de detección mediante:

$$D = O * M + B \quad (2.10)$$

donde M , B , D y O son matrices bidimensionales, en principio de tamaño diferente, salvo D y B , que deben serlo del mismo.

El método de reconstrucción se basará en la búsqueda de una matriz de reconstrucción G tal que, al correlacionarla con la matriz D , que son los datos experimentales, se obtenga la matriz fuente original O [13]. Es decir, lo que buscamos es una G tal que:

$$D * G = O \quad (2.11)$$

En general, sin embargo, lo que tendremos para una G dada es:

$$\tilde{O} = D * G = O * M * G + B * G \quad (2.12)$$

donde \tilde{O} representa la fuente reconstruida, y que en el caso ideal debería coincidir con la fuente real O .

Por tanto, los requisitos que debe cumplir G , en la medida de lo posible, es que M^*G sea una función delta, tal que $O^*(M^*G) = O$, y que B^*G sea lo más cercano posible a cero. En la primera condición se halla la posibilidad de formar imágenes, y en la segunda, el eliminar o reducir el ruido para mejorar la SNR. Concretamente, para la primera condición (que es la que más nos importa) se debe cumplir que:

$$(M^*G)_{ij} = \delta_{0i} \delta_{0j} \tag{2.13}$$

es decir, que cuando tengamos $i=0$ y $j=0$ la correlación valga 1, y en caso contrario, valga 0, ya que así tenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{O}_{ij} &= \sum_{kl} D_{kl} G_{k+i \ l+j} = \sum_{i'j'} \sum_{kl} O_{i'j'} M_{i'+k \ j'+l} G_{k+i \ l+j} = \\ &= \sum_{i'j'} O_{i'j'} \sum_{kl} M_{k+i' \ l+j'} G_{k+i \ l+j} = \left\| \begin{array}{l} a \equiv k+i' \\ b \equiv l+j' \end{array} \right\| = \\ &= \sum_{i'j'} O_{i'j'} \sum_{ab} M_{ab} G_{a+(i-i') \ b+(j-j')} = \sum_{i'j'} O_{i'j'} \delta_{0 \ i-i'} \delta_{0 \ j-j'} = O_{ij} \end{aligned} \tag{2.14}$$

o sea, una reconstrucción perfecta de nuestro cielo (ver fig. 2.10).

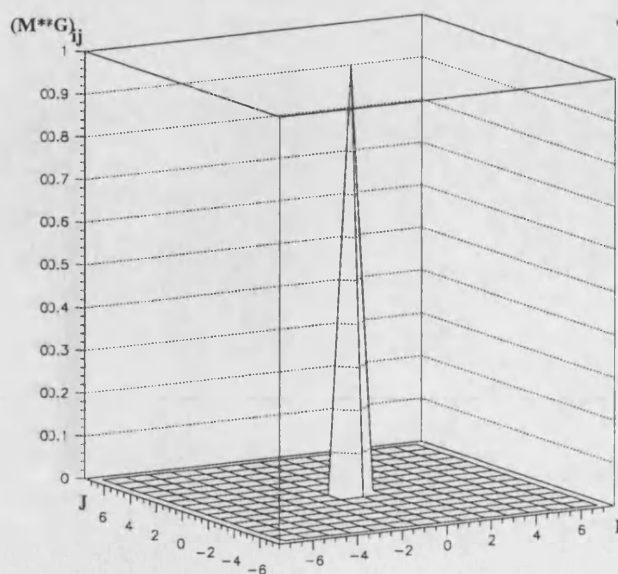


Figura 2.10: Caso ideal. $(M^*G)_{ij} = \delta_{0i} \delta_{0j}$

Dado que buscamos una G que cumpla que M^*G sea una función delta, como se muestra en la fig. 2.10, parece obvio que G va a estar muy condicionada por la forma de M . De hecho, en general G va a ser una modificación de M . Incluso la propia M es una buena candidata a ser usada como matriz de reconstrucción, obteniéndose resultados aceptables. La usaremos como punto de partida para encontrar nuestra G reestructora.

Efectivamente, si autocorrelacionamos una máscara consigo misma (por ejemplo, la de la figura 2.8) obtenemos una función *al estilo* de una delta. Veámoslo: sea A_{ij} la autocorrelación de M , es decir:

$$A_{ij} = \sum_{kl} M_{kl} M_{k+i \ l+j} \quad (2.15)$$

Cuando $i=0$ y $j=0$ se tiene una plena coincidencia entre los dos patrones, o sea, la correlación es máxima (ver fig. 2.11), y por tanto A_{00} coincide con el número de agujeros de la máscara. En cualquier otro caso, los patrones se hallan desplazados entre sí, y la coincidencia entre agujeros (*unos*) es menor, disminuyendo (de forma aproximada) el número de coincidencias conforme i y j se alejan de cero, hasta llegar al punto en que los dos patrones no solapan entre sí, y el número de coincidencias (y por tanto el valor de A_{ij}) es cero.

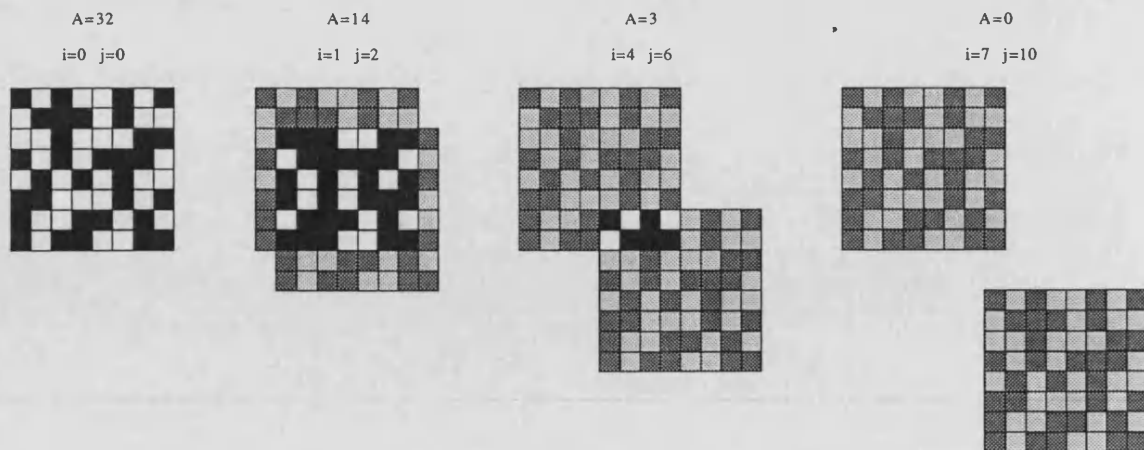


Figura 2.11: Autocorrelación de la máscara de la figura 2.8.

Lo que obtenemos al proceder así, es algo aproximadamente similar a lo que mostrábamos en la figura 2.10. En la fig. 2.12 se muestra el resultado de

la autocorrelación para el patrón de máscara aleatorio de la figura 2.8.

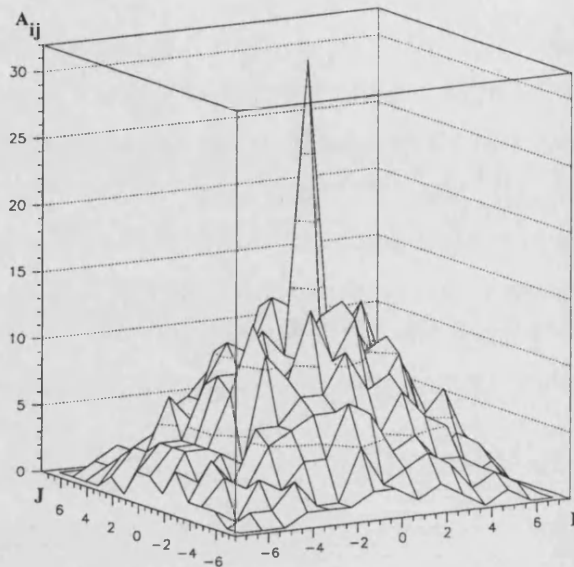


Figura 2.12: Autocorrelación de la máscara de la figura 2.8. Resultado.

Como se ve en dicha figura, tenemos un pico para $i=0$ y $j=0$ (igual a 32, el número de agujeros de nuestra máscara, en vez de 1) y un fondo que, desgraciadamente, no es plano, sino que decrece conforme i y j se alejan de 0, pero que sí es menor que nuestro pico.

Si consideramos un plano detector que tenga las mismas dimensiones que el patrón de nuestra máscara, la autocorrelación descrita se convierte en la reconstrucción de una fuente de intensidad unidad situada en el centro del campo de visión (y en ausencia de ruido). En efecto, si M y D tienen las mismas dimensiones, y tenemos una fuente de intensidad la unidad situada en $(\alpha=0, \beta=0)$, la sombra proyectada por la máscara en D es exactamente el patrón de la máscara (y, en ausencia de ruido, eso será lo que detectemos). Y si consideramos a M como nuestra matriz de reconstrucción G , entonces:

$$M * M = D * G \quad (2.16)$$

Es decir, su reconstrucción. En este caso, una fuente puntual de intensidad I , en ausencia de ruido, sería reconstruida como una fuente de intensidad

$I \cdot (n^\circ \text{ de agujeros})$ más un fondo no plano que deformaría la señal, y que no tiene nada que ver con el ruido de fondo. Éste es un ruido debido únicamente al proceso de reconstrucción, al que denominaremos **ruido de reconstrucción**.

La situación mejoraría un poco si el ruido de reconstrucción fuera más o menos plano, pues sería más sencillo de tratar. Para ello, vamos a considerar una variante de correlación diferente a la anteriormente descrita, que es la correlación cíclica [14]. En ella, al calcular M^*M no realizamos tan sólo el producto $M_{kl} \cdot M_{k+i, l+j}$ en la zona de solapamiento de los dos patrones, como ilustrábamos en la figura 2.11, sino que, al desplazar los dos patrones una cantidad ij , uno de ellos se permuta cíclicamente, con lo que el producto $M_{kl} \cdot M_{k+i, l+j}$ se realiza para toda la máscara. Es decir, para un ij dado, multiplicamos la máscara por una versión permutada cíclicamente de la misma (ver fig. 2.13).

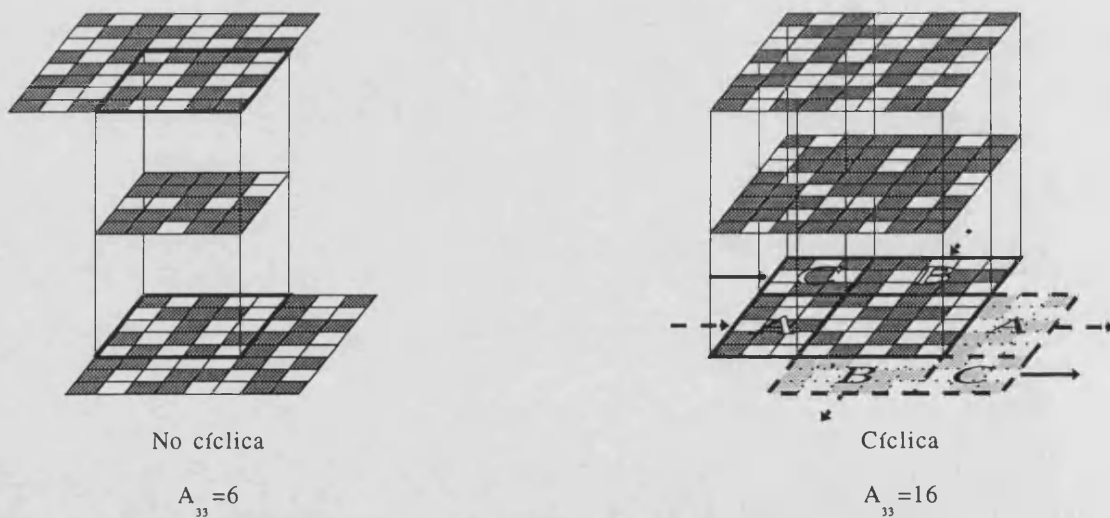


Figura 2.13: Correlación no cíclica frente a correlación cíclica.

Esto se expresa de forma matemática como:

$$A_{ij} = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} M_{kl} M_{(k+i) \bmod m, (l+j) \bmod n} \quad (2.17)$$

donde $m \times n$ es el tamaño del patrón de la máscara (8x8 en el ejemplo de la fig. 2.8), y $i \bmod m$ es el **resto** de dividir i entre m . A modo de ejemplo:

$$1 \bmod 3 = 1 ; \quad 2 \bmod 3 = 2 ; \quad 3 \bmod 3 = 0 ; \quad 4 \bmod 3 = 1$$

Con esto obtenemos un fondo más plano *en promedio*, aunque cierto es que también más elevado y caótico, como podemos ver en la figura 2.14 (en este ejemplo, el caso de la máscara de la fig. 2.8, el fondo está aproximadamente centrado en 16, con un pico de 32 en $i=0, j=0$). Mas no nos asustemos por tan molesto resultado, pues la situación mejorará en breve.

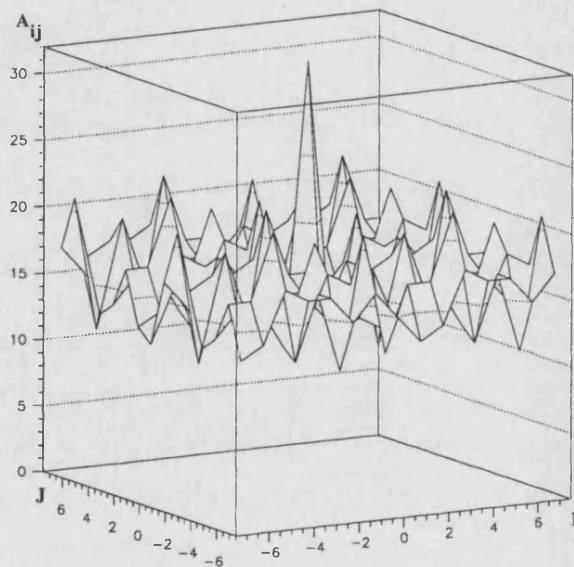


Figura 2.14: Autocorrelación cíclica de una máscara de patrón aleatorio.

2.7 Sistemas cíclicos

El hecho de que podamos usar un tipo u otro de correlación viene dado fundamentalmente por la estructura **física** del telescopio [15]. En la figura 2.15 podemos ver dos tipos diferentes de telescopio; uno es un sistema simple, no cíclico, con una máscara del mismo tamaño que el plano detector. El segundo es un sistema cíclico, en el cual la máscara, en lugar de tener un simple patrón como el caso anterior, tiene repetido el mismo en un mosaico (2x2 en el caso del ejemplo), siendo el patrón base de la máscara del mismo tamaño que el plano detector. Todos estos sistemas usualmente se hallan blindados y/o colimados para impedir que llegue al plano detector radiación no codificada por la máscara.

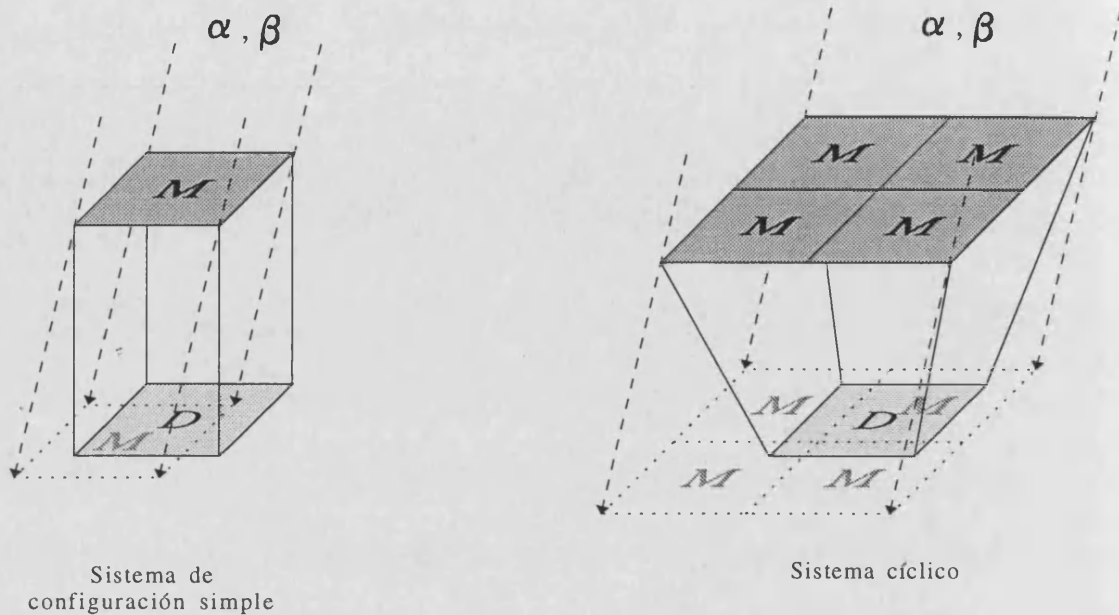


Figura 2.15: Sistema de configuración simple frente a sistema cíclico.

Como se ve en el dibujo, para una dirección dada de la fuente (α, β), el primer sistema produce una sombra de la máscara que se sale del plano detector, con lo que tan solo detectaremos una porción de su sombra. En este caso nos vemos obligados a usar para reconstruir una correlación no cíclica, pues tan sólo podremos correlacionar la zona de intersección entre sombra y detector con el patrón de nuestra máscara. Sin embargo, esto no es así en el segundo caso. Lo que se detecta en este caso en el plano detector es una versión permutada cíclicamente y *completa* del patrón principal de la máscara, lo que nos va a permitir el usar la correlación cíclica (podríamos usar también la correlación no cíclica, considerando en este caso **toda** la máscara en lugar de su patrón base, pero el resultado que obtendríamos sería exactamente el mismo, y por contra tendríamos que realizar más cálculos).

Aunque no haya sido obvio en absoluto en el punto 2.6, los sistemas cíclicos son los que nos van a dar mejores resultados usando los métodos tradicionales de reconstrucción basados en la correlación, con el empleo de una máscara adecuada (como veremos en breve), además de recibir mayor iluminación; por ello vamos a restringirnos principalmente a estos sistemas (otro motivo de actuar así es el hecho de que LEGRI es a su vez un sistema cíclico,

como se puede deducir de la descripción dada del mismo en el apartado 1.5).

Existe una degeneración intrínseca en los sistemas cíclicos, que viene dada por construcción, como podemos comprobar si miramos la figura 2.16, pues, por ejemplo, en el caso que se muestra en la figura 2.15, justo en el borde del campo de visión se tiene una degeneración de direcciones:

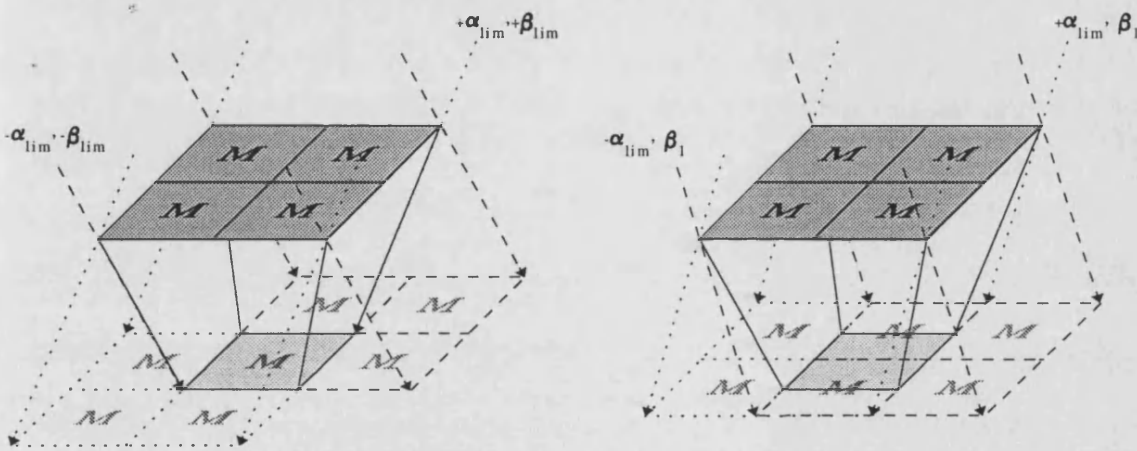


Figura 2.16: Degeneración de direcciones en el borde del campo de visión en sistemas cíclicos.

Efectivamente, si se define α_{lim} y β_{lim} como los ángulos límites desde los cuales se proyecta en el detector el patrón de la máscara (sin permutación), se tiene que las direcciones $(\alpha_{lim}, \beta_{lim})$, $(-\alpha_{lim}, \beta_{lim})$, $(\alpha_{lim}, -\beta_{lim})$ y $(-\alpha_{lim}, -\beta_{lim})$ proyectan el mismo patrón sobre el detector. Es decir, los cuatro vértices del campo de visión están degenerados, y si se halla situada una fuente en uno de ellos, no se podrá diferenciar en cual de los cuatro se hallará. Asimismo, las direcciones (α_{lim}, β_1) y $(-\alpha_{lim}, \beta_1)$ proyectan el mismo patrón, e idénticamente las direcciones (α_1, β_{lim}) y $(\alpha_1, -\beta_{lim})$, siendo α_1 y β_1 dos valores cualesquiera.

Sin embargo no hay que preocuparse, pues es bastante fácil de manejar esta degeneración, ya que se limita al borde del campo de visión, y existen diferentes formas de romperla. Una de ellas es por medios físicos: reducir el propio campo de visión del telescopio, de tal forma que no consideremos esos píxeles degenerados del borde, por ejemplo con el uso de colimadores o eliminando parte de la máscara (los elementos más exteriores). Otra forma, de no ser posible la limitación por construcción del campo de visión, es operativa,

y consiste en variar la dirección de apuntado del telescopio, para obtener más información sobre la localización real de la fuente. Este procedimiento se halla ilustrado en la figura 2.17.

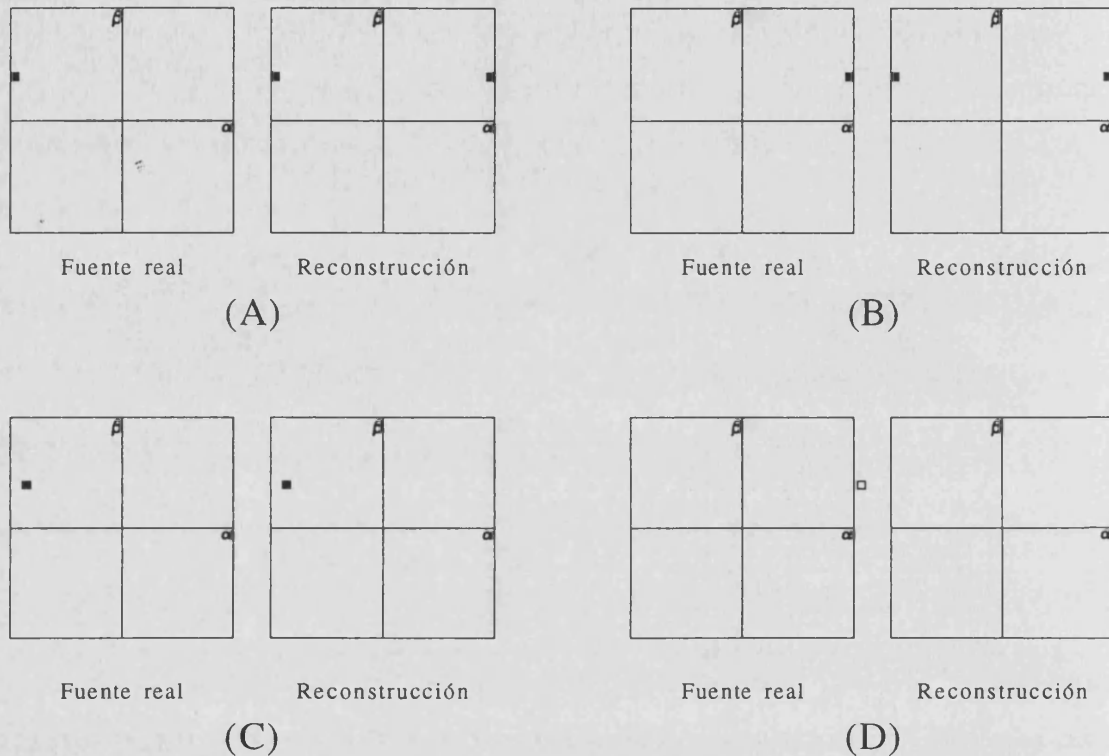


Figura 2.17: Eliminación de la degeneración de los bordes en sistemas cíclicos, variando la dirección de apuntado del telescopio (hacia la izquierda en este ejemplo).

En los casos (A) y (B) se tiene dos fuentes situadas en el borde del campo de visión, a la izquierda y derecha, respectivamente. Ambos dan el mismo patrón sobre el plano detector (como veíamos en la fig. 2.16), y por tanto, al ser indistinguibles, el proceso de reconstrucción reconstruye ambas posibilidades y aparecen dos fuentes donde sólo hay una. Para poder diferenciar ambos casos, el proceso a seguir es variar ligeramente el apuntado (hacia la izquierda, en el ejemplo); entonces el caso (A) se convierte en el (C), y la fuente deja de estar en el borde, siendo reconstruida correctamente. Sin embargo, el caso (B) se convierte en el (D), y la fuente se sale del campo de visión del telescopio, con lo que no se detectará nada en el plano detector, reconstruyendo por tanto un campo vacío de fuentes.

2.8 Elección del patrón de la máscara

Como hemos puntualizado ya varias veces, el uso de una máscara adecuada es primordial. Ésta debe ser lo más diferenciable posible, y no debe haber degeneración dirección-sombra; es decir, que dos direcciones diferentes **no** deben proyectar sobre el plano detector idéntica sombra. Y tras aprender a tratar con la degeneración intrínseca de los sistemas cíclicos, el paso siguiente es buscar máscaras cuyas permutaciones cíclicas sean perfectamente distinguibles entre sí. Además, buscaremos que su autocorrelación sea un pico en (0,0) con un fondo plano (cero, a ser posible).

2.8.1 Máscaras aleatorias

Las primeras propuestas fueron (obviamente) que el patrón de la máscara debía ser aleatorio, para generar esta distinguibilidad buscada. Este caso ya lo hemos visto cuando hablábamos de correlaciones cíclicas y no cíclicas; y de hecho este tipo de máscaras dan bastante buenos resultados. Sin embargo, como hemos podido comprobar (fig. 2.14), el fondo que se genera es fluctuante (incluso cuando se usan técnicas de supresión del ruido de reconstrucción, como es la correlación balanceada, que trataremos en breve).

2.8.2 *Non-Redundant Arrays* (NRA) o conjuntos no' redundantes

En 1971, Golay propuso un tipo de máscara cuyas propiedades eran muy similares a las deseables para una reconstrucción perfecta [16]. Estos conjuntos matemáticos se obtienen imponiendo que no haya dos pares de agujeros cualesquiera de la máscara que tengan el mismo vector de separación (distancia horizontal y vertical entre agujeros, en número de elementos) con la excepción de separación cero. La autocorrelación (no cíclica) de estos conjuntos nos da un pico central, y un fondo plano, hasta llegados a una cierta distancia donde el valor cae a cero (o uno). El tener este fondo plano es debido al hecho de que el vector separación entre pares de agujeros es único (no redundante).

Por desgracia, las restricciones matemáticas que se imponen a los NRA son tantas que los conjuntos así obtenidos no son muchos, y no suelen tener

tampoco muchos agujeros; una de las mayores máscaras NRA posibles (de 30x30 elementos) tiene únicamente 27 agujeros, dando una transparencia (*área abierta/área total*) de tan sólo 0.03. Esto nos da una SNR muy mala, lo que reduce su interés en astronomía (si bien sí ha encontrado aplicaciones en medicina).

2.8.3 *Uniformly Redundant Arrays* (URA) o conjuntos uniformemente redundantes

Considerado en términos de autocorrelación cíclica, obtenemos la solución matemática a nuestro problema con los conjuntos URA. Los URA son patrones no aleatorios, cuyo vector separación entre un par de agujeros se repite en la máscara un **número constante** de veces, igual para todo otro vector separación (distinto de cero). Esta restricción es menor que la impuesta a los NRA, lo que nos permite tener una mayor variedad de patrones disponibles, y con una transparencia también mayor. Los URA se basan en unas entidades matemáticas llamadas *conjuntos de diferencia cíclica* (CDC) [9]. Para explicarlas, usaremos el siguiente ejemplo: sean los números enteros entre 1 y 15 (ambos inclusive); de ellos vamos a marcar de forma especial los números 1, 2, 3, 5, 6, 9 y 11, los cuales tienen la curiosa relación entre sí de que si permutamos cíclicamente el conjunto de números del 1 al 15 y lo enfrentamos consigo mismo sin permutar, independientemente de la permutación, siempre obtendremos que el número de coincidencias entre números marcados (elementos del conjunto) es el mismo (ver figura 2.18).

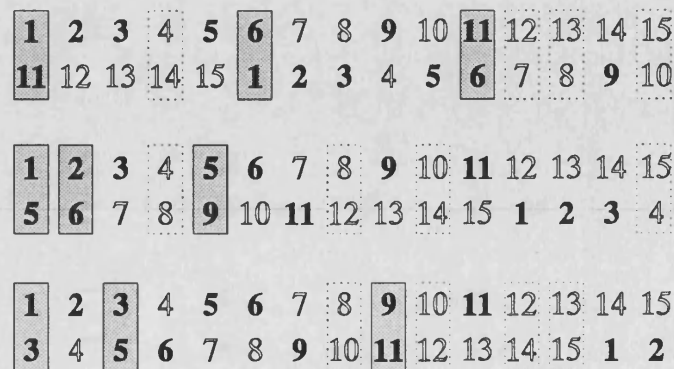


Figura 2.18: Conjunto de diferencia cíclica de base 15.

Como se ve, siempre hay tres elementos del conjunto de números que coinciden entre sí al confrontar la versión permutada con la sin permutar, excepto cuando no permutamos, en que coinciden 7. Asimismo, tenemos que en el conjunto complementario de números siempre coinciden entre sí cuatro elementos, excepto cuando no permutamos, en que coinciden 8. Es decir, el complementario de un CDC también es un CDC.

A partir de un conjunto de diferencia cíclica podemos construir una máscara URA siguiendo el siguiente procedimiento [9]: 15 es el producto de los números primos 3 y 5, así pues generamos una matriz rectangular de tamaño 3×5 y situamos en ella los números del 1 al 15, pero de forma diagonal; luego identificamos cada número perteneciente al CDC, por ejemplo, con un elemento opaco del patrón, dejando los restantes transparentes (como veremos luego, conviene tener un número par de agujeros). Es decir:

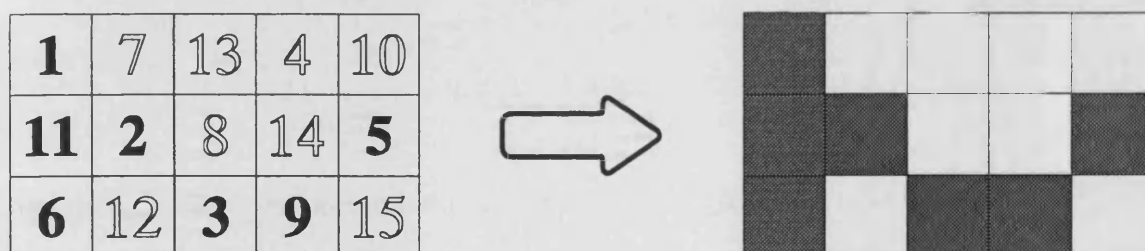


Figura 2.19: Generación de un patrón URA usando un conjunto de diferencia cíclica.

Esta disposición mantiene las características del CDC al hallar su autocorrelación; cuando $i=0, j=0$, para esta máscara, tenemos que coinciden entre sí los 7 elementos del CDC, esto es, los 7 elementos opacos de nuestra máscara (o lo que es lo mismo, los 8 agujeros, con lo cual la autocorrelación de esta máscara para $i=0, j=0$ es 8), y en cualquier otra permutación cíclica, coincidirán entre sí 3 elementos opacos (4 agujeros, con lo que tenemos que el valor de la autocorrelación cíclica es 4 para i y j distintos de cero). Esto es válido para cualquier URA; el valor de su autocorrelación *cíclica* es un pico central, de valor el número de agujeros de la máscara, y un fondo completamente plano.

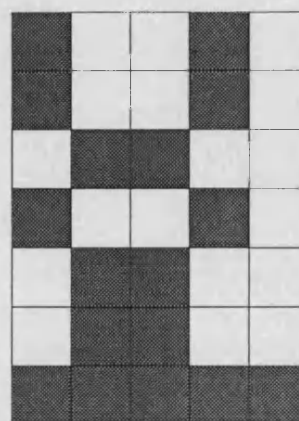


Figura 2.20: URA 5×7 .

En la figura 2.20 vemos un patrón URA 5x7, y en la figura 2.21 podemos ver su autocorrelación.

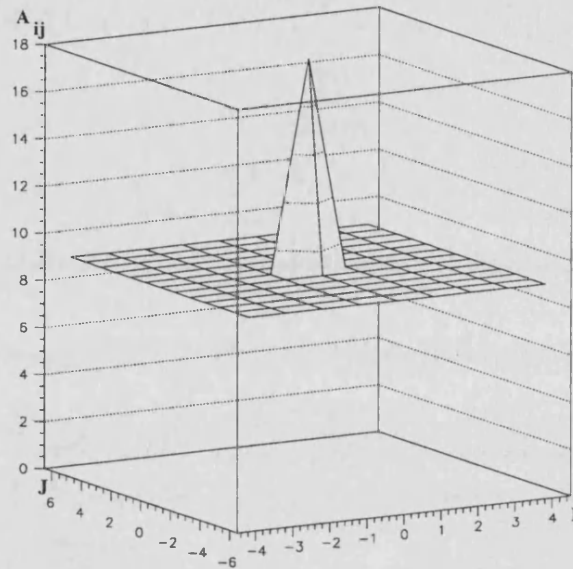


Figura 2.21: Autocorrelación de la URA de la figura 2.20.

Existen diversas familias de URA, dependiendo de los métodos de generación y de las familias de CDC usadas. Un mismo URA, además, puede pertenecer a más de una clasificación. Si consideramos un CDC de base N (15, en el ejemplo de la figura 2.18), conteniendo K elementos (7 elementos en el citado ejemplo) y con λ soluciones pares (es decir, el número de elementos del conjunto que coinciden al permutarlo cíclicamente; 3 en el ejemplo), se puede ver [17] que:

$$\lambda = \frac{K(K-1)}{N-1} \quad (2.18)$$

con lo que podemos caracterizar un CDC con tan sólo dos números, N y K , y con ello también el URA generado con él (N el número de elementos de la máscara y K el número de elementos opacos o transparentes, según la elección que hagamos).

Considerado de un modo simplista, podemos identificar K con la señal y λ con el ruido de reconstrucción, por lo cual desearemos que la diferencia entre K y λ sea tan grande como sea posible. Esto se consigue con los conjuntos de diferencia de Hadamard, donde se cumple que:

$$\begin{aligned} N &= 4m - 1 \\ K &= 2m - 1 \\ \lambda &= m - 1 \end{aligned} \tag{2.19}$$

siendo m un entero. Estos conjuntos se pueden clasificar en:

- Primos gemelos: $N = p \cdot (p+2)$ donde tanto p como $p+2$ son primos. Tal es el caso de los ejemplos de las figuras 2.19 (3x5) y 2.20 (5x7). La forma de generar el patrón M_{ij} de estos URA [13] es la siguiente:

$$\begin{aligned} M_{ij} &= 0 \text{ si } i=0 \\ M_{ij} &= 1 \text{ si } j=0, i \neq 0 \\ M_{ij} &= 1 \text{ si } C_i(p) \cdot C_j(p+2) = +1 \\ M_{ij} &= 0 \text{ si } C_i(p) \cdot C_j(p+2) = -1 \end{aligned}$$

donde $C_i(p) = 1$ si i es un residuo cuadrático mod p , y -1 si no lo es. Es decir, si existe un entero n tal que $n^2 \bmod p = i$. Para $p = 5$, por ejemplo, tenemos:

$$\begin{aligned} 1 \bmod 5 &= 1; & 4 \bmod 5 &= 4; & 9 \bmod 5 &= 4; & 16 \bmod 5 &= 1; & 25 \bmod 5 &= 0 \\ 36 \bmod 5 &= 1; & 49 \bmod 5 &= 4; & 64 \bmod 5 &= 4; & 81 \bmod 5 &= 1; & \text{etc...} \end{aligned}$$

En este ejemplo, 1 y 4 serían los residuos cuadráticos mod 5, es decir, $C_1(5)=1$, $C_2(5)=-1$, $C_3(5)=-1$ y $C_4(5)=1$.

- Secuencias pseudoruido o secuencias m : $N = 2^m - 1$ (m un entero). El ejemplo de la figura 2.19 también se puede ajustar a este caso.
- Residuos cuadráticos donde N es primo, y el conjunto viene dado por los cuadrados de los primeros $((N+1)/2) \bmod N$. No son aplicables a

máscaras cuadradas, pero sí a máscaras hexagonales como las de la figura 2.22, llamadas HURA (Hexagonal URA). Estas máscaras tienen la peculiaridad de que, al girarlas 60° , obtenemos el patrón complementario (salvo por el elemento central).

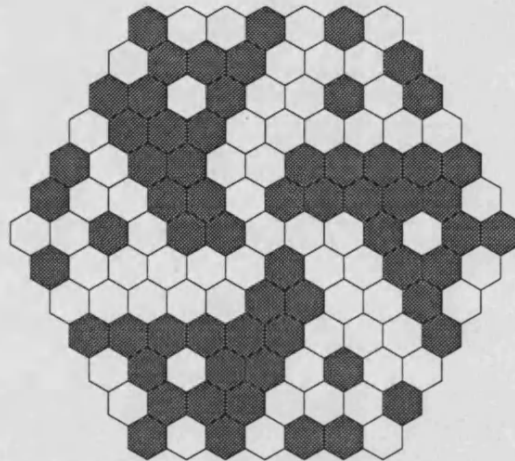


Figura 2.22: Patrón hexagonal HURA.

Los conjuntos Singer son otro grupo de CDC donde se cumple que

$$\begin{aligned} N &= \frac{t^{m+1} - 1}{t - 1} \\ K &= \frac{t^m - 1}{t - 1} \\ \lambda &= \frac{t^{m-1} - 1}{t - 1} \end{aligned} \quad (2.20)$$

siendo t un número primo. Cuando $t=2$, obtenemos las secuencias m , arriba mencionadas.

El número de conjuntos URA disponibles está limitado por la "población" de números primos, con lo que la adaptación de una máscara que sea adecuada a un determinado detector requiere cuidadoso estudio. Por lo general, resulta más adecuado proceder a la inversa; es decir, elegir una máscara con las características requeridas, y a partir de ella definir el detector que sea adecuado (y con ello, el telescopio).

2.8.4 Modified Uniform Redundant Arrays (MURA) o conjuntos uniformes redundantes modificados

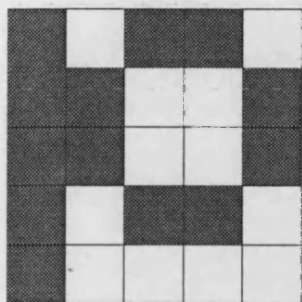


Figura 2.23: MURA 5x5.

Gottesman y Fenimore [18], en 1989 propusieron otra forma de máscara codificada que exhibía ciertas características de los URA, y que permitía tener una todavía mayor variedad de patrones disponibles. Estos patrones son los MURA, y como su nombre indica, son una modificación de los patrones URA.

Como hemos dicho, en los URA generados por primos gemelos, tenemos que $N = p \cdot q$, donde tanto p como q son números primos, y $p - q = 2$. Pero el conjunto dado por $p - q = 0$ también es de sumo interés para formación de imágenes, y nos permite tener patrones de máscara cuadrados. Estos son los patrones MURA. El modo de generación de estos MURA es idéntico al descrito arriba para los URA, solo que ahora $N = p \cdot p$. Es decir:

$$\begin{aligned} M_{ij} &= 0 \text{ si } i=0 \\ M_{ij} &= 1 \text{ si } j=0, i \neq 0 \\ M_{ij} &= 1 \text{ si } C_i(p) \cdot C_j(p) = +1 \\ M_{ij} &= 0 \text{ si } C_i(p) \cdot C_j(p) = -1 \end{aligned}$$

Como hemos visto, para el caso $p = 5$, los números 1 y 4 son residuos cuadráticos mod 5, y siguiendo la receta para obtener los valores M_{ij} del patrón MURA de la máscara, obtendremos el patrón de la figura 2.23. El elemento (0,0) es el situado abajo a la izquierda. Este patrón es el patrón base de la máscara de LEGRI, como podemos comprobar si volvemos a mirar las figuras 1.3 y 1.4. En la figura 2.24 se observa su autocorrelación cíclica.

Como se puede comprobar en esta figura, el fondo ahora no es plano, como ocurría con las URA; aunque tampoco fluctúa de manera caótica como en las máscaras aleatorias, sino de una forma que nos va a ser muy fácil corregir, como comprobaremos en el apartado 2.9.1.

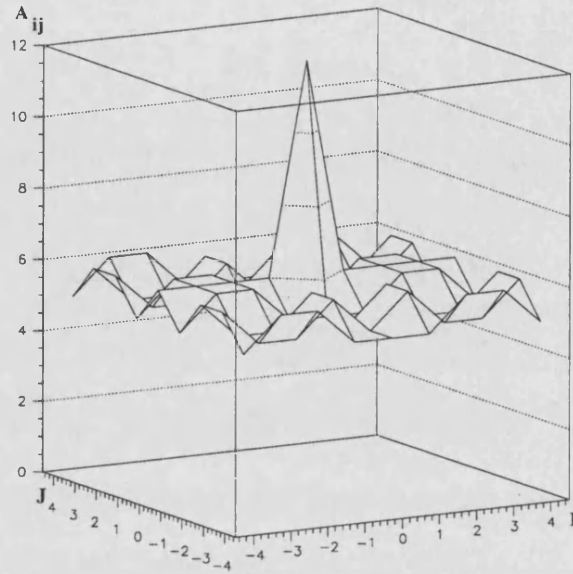


Figura 2.24: Autocorrelación del patrón MURA 5x5 de la figura 2.23.

2.8.5 Nuevos patrones

Recientemente ha sido sugerida la aplicación en astronomía de unos nuevos patrones que tienen perfectas propiedades autocorrelativas, al igual que los URA. Genéricamente se conocen como Perfect Binaries Arrays (PBA), y tanto los URA como los MURA se pueden considerar como un caso particular de los mismos. Sus propiedades de formación de imágenes son las mismas que las de los URA y MURA, y todo lo dicho hasta ahora es aplicable a ellos; su principal ventaja reside en que existe una mayor variedad de patrones disponibles. Para saber más se remite al lector a las referencias [19], [20], [21] y [22].

2.9 Elección de G

Como explicamos en el capítulo 2.6, buscamos una matriz de reconstrucción G que cumpla que M^*G sea en la medida de lo posible una función delta, es decir, repitiendo la ec. 2.13, que

$$(M^*G)_{ij} = \delta_{0i} \delta_{0j} \quad (2.21)$$

y hemos dicho también que G va a ser una modificación de M . En el mejor de los casos, lo que vamos a obtener va a ser:

$$(M^*G)_{ij} = (n^\circ \text{ agujeros}) \delta_{0i} \delta_{0j} \quad (2.22)$$

(es decir, un factor de escala), y esto, efectivamente, se cumplirá en el caso de tener como patrón un URA o un MURA (o un PBA) y elegir la G adecuada. Dicho sea de paso, se define [13] la *System Point Spread Function* (SPSF) como:

$$SPSF = M * G \quad (2.23)$$

es decir, la respuesta del sistema para una fuente puntual en el centro del campo de visión y en ausencia de ruido (como ya vimos en el punto 2.6 para el caso particular $M=G$), y nos da una idea de la "bondad" de la reconstrucción, dadas una máscara M y una matriz de reconstrucción G .

2.9.1 Correlación balanceada

La correlación balanceada [23] es el método habitualmente usado para reconstrucción de imágenes por medio de una correlación. Consiste en definir la matriz de reconstrucción G_{ij} como:

$$\begin{aligned} G_{ij} &= 1 \text{ si } M_{ij} = 1 \\ G_{ij} &= -1 \text{ si } M_{ij} = 0 \end{aligned}$$

Esto compensa de forma considerable la existencia del ruido de reconstrucción que aparecía si hacíamos la reconstrucción usando como matriz de reconstrucción la matriz M . De hecho, en el caso de los URA, este ruido de reconstrucción se suprime totalmente si el número de agujeros (de unos en la matriz M) es par, pues dado que la correlación cíclica de M con G es:

$$\tilde{O}_{ij} = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} M_{kl} G_{(k+i) \bmod m, (l+j) \bmod n} \quad (2.24)$$

para un (i,j) distinto de $(0,0)$, M^*G será un sumatorio de valores 1 y -1, tantos como unos (agujeros) tenga M (y si éste número es impar, es imposible que los

1 y los -1 se compensen totalmente entre sí para darnos un valor cero).

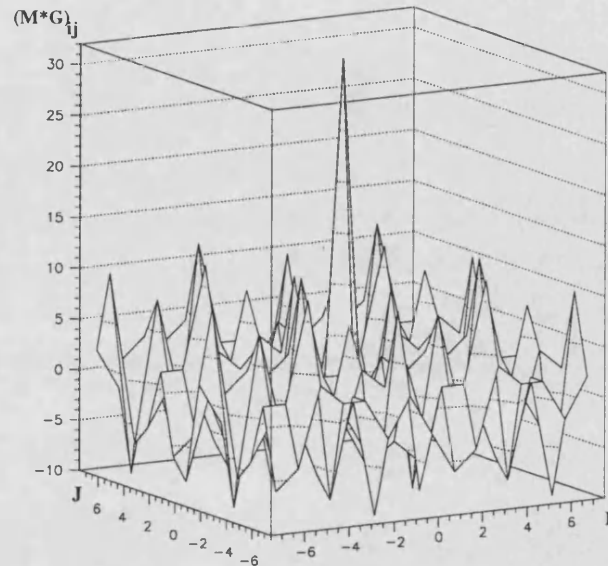


Figura 2.25: Reconstrucción balanceada del patrón aleatorio de la figura 2.8.

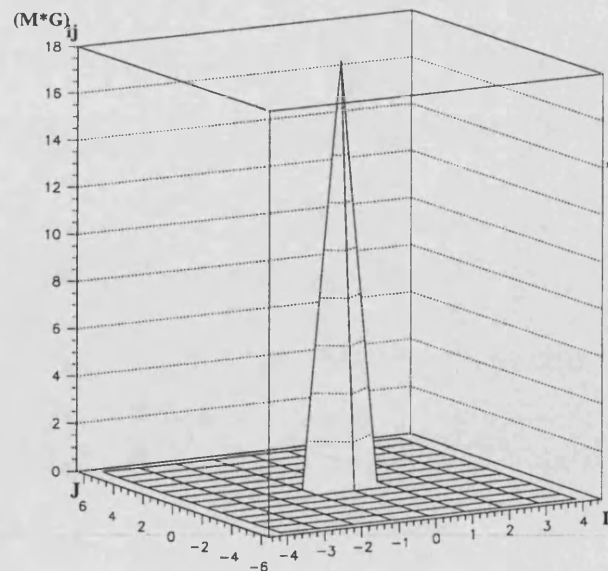


Figura 2.26: Reconstrucción balanceada de una URA 5x7.

En la figura 2.25 podemos ver el efecto de la correlación balanceada aplicada a la máscara aleatoria de la figura 2.8, y en la 2.26 podemos ver el efecto en la URA de la figura 2.20; si comparamos estas figuras con las que

obteníamos al usar la autocorrelación cíclica como método de reconstrucción (es decir, usando la propia matriz M como matriz de reconstrucción, figuras 2.14 y 2.21), vemos, para el caso de la máscara aleatoria, cómo el fondo ha sido suprimido considerablemente, estando ahora éste centrado en cero en lugar de en 16, mientras el pico conserva la misma altura; y cómo, en el caso de la URA, el fondo es plano y de valor **cero**.

Por contra, si aplicamos la correlación balanceada sin más al MURA de la figura 2.23, aunque obtenemos una importante supresión del ruido de reconstrucción (de análoga forma a lo que ocurría en el caso del patrón aleatorio), no obtenemos un fondo plano de valor cero como sería deseable, sino lo que aparece en la figura 2.27:

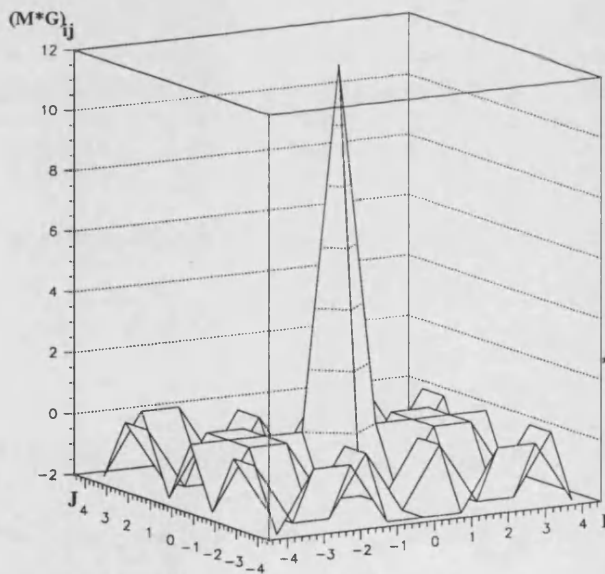


Figura 2.27: Reconstrucción balanceada de una MURA 5x5.

Pero no hay que preocuparse, pues ya se dijo en el punto 2.8.4. que éste es un efecto que es muy sencillo de corregir. Para lograrlo, tan sólo deberemos hacer una pequeña modificación en nuestra matriz G [18], consistente en cambiar el elemento $(0,0)$, que ahora es un -1 (pues en el patrón M de la máscara, es un cero), por un $+1$. Al usar esta particular versión de la correlación balanceada, obtenemos el siguiente resultado:

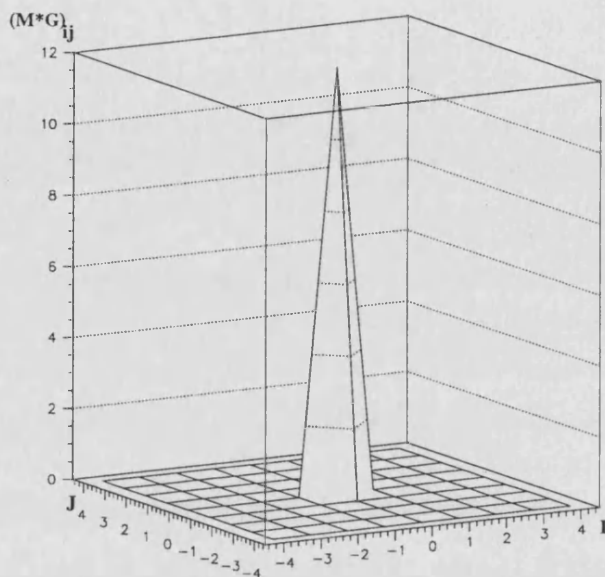


Figura 2.28: Reconstrucción balanceada de una MURA 5x5 una vez modificada G .

Es decir, un fondo plano de valor cero, tal y como deseábamos; idéntico resultado al que obteníamos en las URA.

Como se desprende del punto 2.5, la resolución de estos telescopios (o lo que es lo mismo, el tamaño de los píxeles de la imagen reconstruida) viene dada por:

$$\text{resolución} = \arctg\left(\frac{c}{f}\right) \quad (2.25)$$

donde c es el tamaño de un elemento de la máscara y f la distancia de ésta al plano detector, siendo la resolución, por tanto, el ángulo que subtiende un elemento de la máscara visto desde el plano detector, y es la misma que se obtendría con una cámara de agujero con una apertura de idéntico tamaño.

A partir de estos resultados satisfactorios, al usar métodos de reconstrucción basados en la correlación, se puede definir el **telescopio óptimo** [14] como aquel en el que el diseño es tal que no existen errores de codificación; es decir, se obtiene una reconstrucción óptima sin ruido de reconstrucción (el ruido es debido únicamente a los datos). Esto se logra usando diseños de máscara

cíclicos basados en patrones URA o MURA (o PBA), y asegurando que la sombra proyectada en el detector es un número entero de ciclos del patrón de la máscara. Típicamente se usa una máscara conteniendo $(Nx+1) \cdot (Ny+1)$ ciclos, y un detector de tamaño igual a $Nx \cdot Ny$ ciclos. Un caso muy usado es $Nx=Ny=1$. LEGRI se aproxima a este caso, pues la máscara consta de $2.8 \cdot 2.8$ ciclos del patrón MURA base, y el detector tiene un tamaño de $1 \cdot 1$ ciclos. Ello es así porque se deseó un campo de visión (ver el apartado 2.11) lo mayor posible y se usó el máximo tamaño de máscara y de detector que permitieron el resto de los instrumentos de la plataforma Minisat 01.

Hemos mencionado aquí el caso más usado de correlación balanceada. Por completitud diremos que se puede tratar un caso más general [17] si definimos la matriz de reconstrucción G según:

$$\begin{aligned} G_{ij} &= A \text{ si } M_{ij} = 1 \\ G_{ij} &= -\alpha \text{ si } M_{ij} = 0 \end{aligned}$$

Jugando con estos dos valores podemos favorecer determinadas características de la imagen reconstruida frente a otras; conservación de flujo entre la imagen detectada y la reconstruida, eliminación del ruido en la imagen reconstruida, etc... En la práctica, todas estas posibilidades son incompatibles entre sí, y si en una reconstrucción favorecemos una característica es a costa de empeorar otras. A nuestro ver, el caso $A=\alpha=1$ es el más interesante de todos (además del más usado), si bien esto se deja a juicio del lector, que podrá encontrar una detallada discusión sobre el efecto de estos valores en [17].

2.9.2 Correlación balanceada de muestreo fino (CBMF)

En el punto 2.9.1 hemos supuesto implícitamente que el plano detector tenía el mismo tamaño que un ciclo de la máscara, y que éste era subdivisible en píxeles del mismo tamaño que los elementos de la máscara. Pero puede ocurrir que el plano detector tenga mejor resolución espacial y pueda subdividirse aún más finamente. Esto es lo que ocurre por ejemplo en el caso de LEGRI, en el que un elemento de la máscara equivale a 2×2 elementos del plano detector, o lo que ocurriría en un detector continuo sensible a la posición,

en que cada elemento de la máscara equivaldría a $n \times n$ elementos del plano detector, siendo n el entero que se quisiera (en la práctica esta subdivisión tendrá un límite, pues un detector de posición *realmente* continuo no existe). Cuando se dé este caso, podremos mejorar la imagen que obteníamos en el apartado anterior usando una modificación de la correlación balanceada descrita, a la que llamaremos correlación balanceada de muestreo fino [23]. La explicaremos usando el caso de LEGRI.

Cada elemento de la máscara equivaldrá a una matriz 2×2 de elementos de detección; por tanto subdividiremos la propia matriz M (ver fig. 2.29) para que cada elemento de la máscara se corresponda con uno del plano detector (como resultas, esto se corresponderá con subdividir a su vez la imagen reconstruida en píxeles más pequeños).

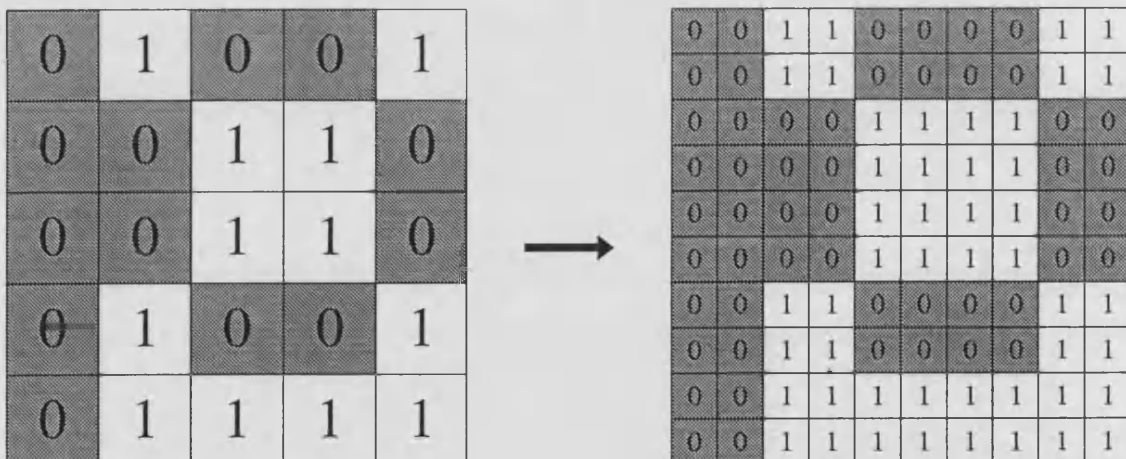


Figura 2.29: Subdivisión de la matriz M en elementos más pequeños, del mismo tamaño que los elementos que conforman el plano detector.

Una vez hecho esto, se procede de idéntica manera a lo descrito en el apartado 2.9.1; es decir:

$$G_{ij} = 1 \text{ si } M_{ij} = 1$$

$$G_{ij} = -1 \text{ si } M_{ij} = 0$$

y, en el caso de los patrones MURA, las subdivisiones del elemento (0,0) de la máscara serán 1, en lugar de -1, de manera análoga a lo visto en el punto 2.9.1 (ver fig. 2.31). Ahora tanto M como G tendrán un mayor número de elementos

que en el caso anterior (al igual que la imagen reconstruida).

La respuesta en este caso no va a ser una función delta, como ocurría en la correlación balanceada; el muestreo más fino da suficiente resolución para resolver la delta del caso anterior en una estructura piramidal (fig. 2.30, en dos representaciones distintas), con una FWHM igual a:

$$\text{FWHM} = \arctg\left(\frac{c}{f}\right) \quad (2.26)$$

es decir, igual a la resolución (ecuación 2.25). Sin embargo, pese a que la resolución angular es la misma, al ser más pequeños los píxeles de la imagen reconstruida (hay más, para el mismo campo de visión), podremos posicionar más finamente (más exactamente) las fuentes, y obtener una imagen mejor.

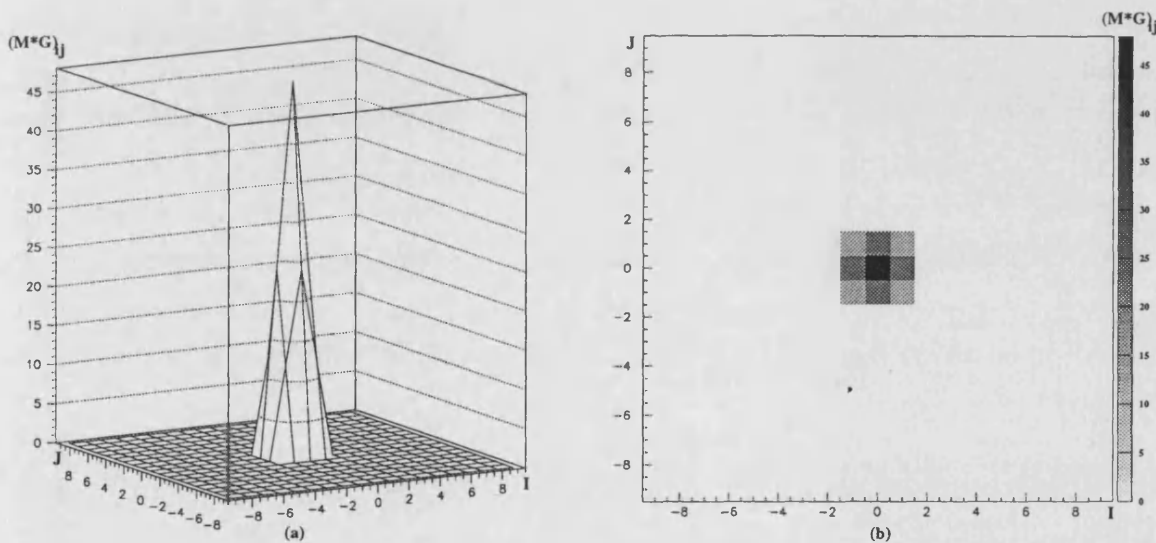


Figura 2.30: $M*G$ usando correlación balanceada de muestreo fino.

2.9.3. Decodificación δ

La decodificación δ [23] es un método para minimizar la aparición de la estructura *no-delta* que aparecía en la reconstrucción al usar la CBMF (es decir, para mejorar el contraste). Es similar a la CBMF, pues también subdivide la matriz M de la máscara para equipararla con la resolución espacial del plano detector. Pero ahora, la matriz G se define de forma ligeramente diferente; lo veremos mejor en la figura 2.31.

-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Correlación balanceada
finamente muestreada

-1	0	1	0	-1	0	-1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	0	-1	0	1	0	1	0	-1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	0	-1	0	1	0	1	0	-1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	0	1	0	-1	0	-1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Decodificación delta

Figura 2.31: Comparación entre las matrices de reconstrucción G usadas en la correlación balanceada de muestreo fino y en la decodificación δ , para el caso del patrón de LEGRI.

Es decir, en cada elemento de la máscara, en lugar de convertir todas sus subdivisiones en valores 1 o -1 (como se hacía en CBMF), tan sólo lo haremos con una de ellas (a elegir, pero en cada subdivisión la misma; en la fig. 2.31 se ha elegido la de arriba a la izquierda), siendo las restantes 0. Este procedimiento mejora el contraste de la imagen, pues ahora la respuesta no es una pirámide, sino una función caja (bidimensional), de anchura total igual a la resolución dada en la ec. 2.25 (fig. 2.32; la reconstrucción tiene un tamaño de 2x2 píxeles).

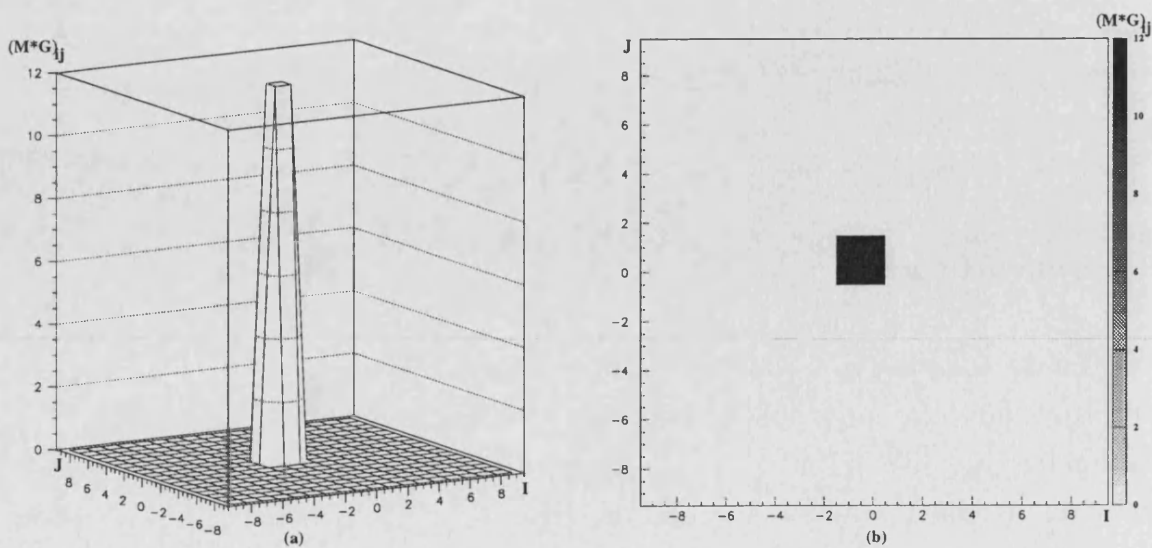


Figura 2.32: $M*G$ usando decodificación δ .

Al igual que la CBMF, por tener un tamaño de píxel menor, permite posicionar mejor las fuentes, aunque se introduce un desplazamiento intrínseco, dependiendo de dónde situemos los 1 y -1 en la matriz G . Si es posible subdividir cada elemento de la máscara en $n \times n$ elementos, siendo n un *impar* (no es éste el caso de LEGRI), haciendo que el elemento distinto de cero sea el **central** lograremos que no exista un desplazamiento en la posición de las fuentes reconstruidas.

2.10 Transformadas de Fourier

Como se ha dicho repetidamente, el método de reconstrucción consiste en hallar la correlación de la matriz de datos D con la matriz de reconstrucción G . Esto es, $\tilde{O} = D * G$, que escrito de forma explícita, tiene la siguiente forma:

$$\tilde{O}_{ij} = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} D_{kl} G_{(k+i) \bmod m \ (l+j) \bmod n} \quad (2.27)$$

Sin embargo, la implementación de esta ecuación en telescopios en los que m y n son números grandes (o sea, que tanto D como G tiene un gran número de elementos), nos lleva a realizar un enorme número de cálculos; $m \cdot n$ multiplicaciones por cada píxel (i, j) del cielo, y, dependiendo de m y n , puede ser impracticable realizar estos cálculos en un plazo de tiempo adecuado. Éste no va a ser el caso de LEGRI, pues $n=m=10$, y por tanto se realizan tan sólo 100 multiplicaciones por cada píxel de la imagen reconstruida, realizándose la reconstrucción de toda la imagen en menos de un segundo (en una máquina SUN Sparc 20); pero, por completitud, vamos a mencionar un método alternativo para calcular la correlación de la ec. 2.27 con mayor rapidez. Para ello haremos uso de las transformadas discretas de Fourier.

Se define la transformada de Fourier de una función $h(t)$ como:

$$H(v) = \mathcal{F}[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{2\pi i v t} dt \quad (2.28)$$

y asimismo, se define la transformada inversa como:

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(v)] = \int_{-\infty}^{\infty} H(v) e^{-2\pi i v t} dv \quad (2.29)$$

Usualmente se suele decir que $h(t)$ es la representación en el espacio de tiempos de la función, y $H(v)$ la representación en el espacio de frecuencias. De forma análoga, si en lugar de una función continua tenemos un conjunto discreto (una matriz) de datos h_k , se define su transformada discreta [24] como:

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi i k n / N} \quad (2.30)$$

y su inversa como:

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n e^{-2\pi i k n / N} \quad (2.31)$$

Sean a y b dos matrices discretas de tamaño m cuya correlación, c , que es otra matriz, nos interesa hallar (en nuestra ecuación 2.27 a y b corresponderían a D y G). Sea $c_k = (a * b)_k$ el elemento k de la correlación de ambas matrices. Y sean A y B las matrices transformadas de Fourier de a y b . El teorema de correlación discreta [24] nos dice que:

$$\begin{aligned} a * b &= \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(a) \cdot \mathcal{F}(b)^*] \\ c_k = (a * b)_k &\leftrightarrow A_n \cdot B_n^* = C_n \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde $*$ representa el complejo conjugado; o sea, lo que en el espacio de tiempos corresponde a una correlación entre matrices (que implica m productos para cada elemento), en el espacio de frecuencias corresponde a un simple producto. Es decir, para hallar el elemento c_k de la correlación necesito multiplicar entre sí los m elementos de a y b (desplazados entre sí k unidades), mientras que para hallar el elemento C_n de la transformada de Fourier de c , tan sólo he de multiplicar entre sí los elementos n -ésimos de las matrices A y B .

Sin embargo, por contrapartida ahora tenemos operaciones adicionales, que es el realizar las transformadas de Fourier; para minimizar el número de operaciones, existe un algoritmo para hallar las transformadas de Fourier de

conjuntos discretos de datos, conocido como transformada rápida de Fourier, o *Fast Fourier Transform* (FFT) [24]. Sin embargo, aunque rápida, sufre la limitación de que, para que sea realmente eficaz, el número de datos N debe ser una potencia entera de 2; es decir, $N = 2^l$ donde l es un entero. Si éste no es el caso, hay que rellenar los datos con ceros hasta llegar a una potencia entera de 2 (o, para tal fin, subdividirlos si es posible, de forma análoga al procedimiento usado en la CBMF) [24] [14].

2.11 Blindajes y colimadores

Como se ha dicho ya, estos telescopios suelen hallarse blindados y/o colimados, de tal suerte que se impida la llegada al plano detector de radiación no codificada por la máscara. Ambos sistemas presentan sus ventajas e inconvenientes.

2.11.1 Colimadores

Cuando se usan colimadores (ej. el caso de LEGRI), se limita el campo de visión de cada unidad detectora, de tal forma que, por ejemplo, tan sólo sean capaces de ver máscara (fig. 2.33). Esta disposición tiene la ventaja de que todos los elementos del plano detector tienen el mismo campo de visión, independientemente de su situación en el

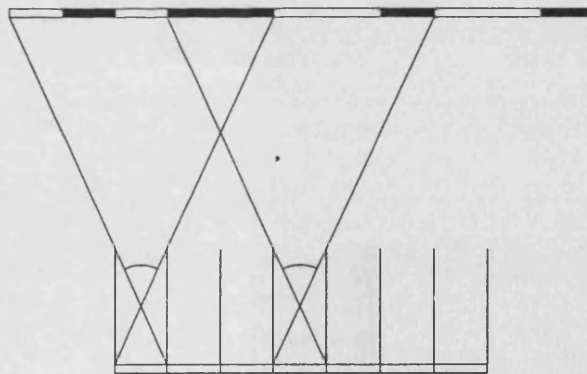


Figura 2.33: Limitación del campo de visión de los elementos del plano detector usando un colimador.

plano detector. Esto quiere decir que, si existe un colimador, éste es el que define el campo de visión del telescopio.

Sin embargo el colimador produce un efecto indeseable en la señal detectada; cuanto más se aleje la fuente del centro de visión del telescopio, menor será el flujo que detectemos, como puede comprobar el lector si observa la figura 2.34.

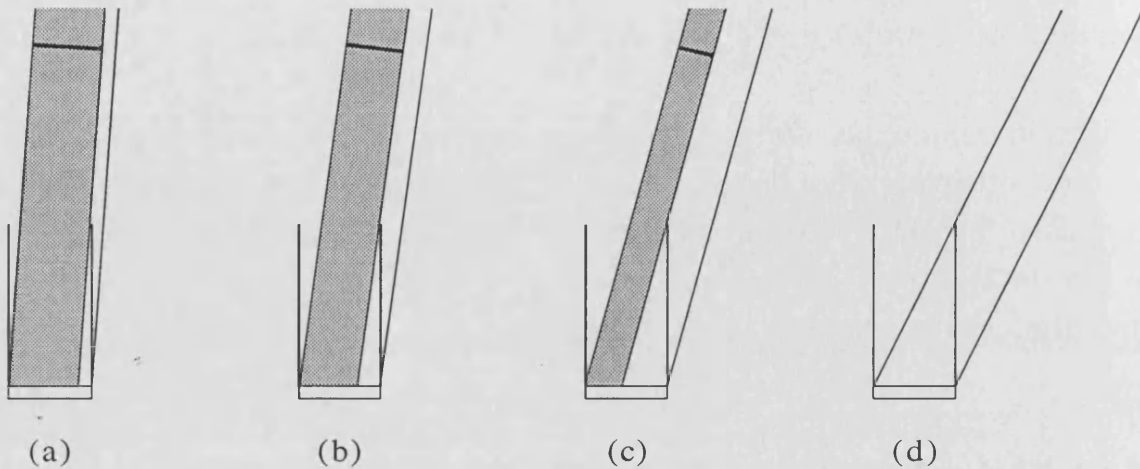


Figura 2.34: Efecto del colimador en la señal detectada; cuanto mayor sea el ángulo desde el que se recibe la señal, mayor será la absorción de la misma producida por el colimador.

La respuesta varía con el ángulo de iluminación, dado que las unidades detectoras reciben diferente flujo dependiendo de éste, y la respuesta del colimador es prácticamente triangular, con un máximo cuando el ángulo es cero y decreciendo casi linealmente hasta llegar a un ángulo límite (que sería el caso (d) de la figura 2.34) a partir del cual la respuesta vale cero. Sistematicémoslo: sea H la altura del colimador, $L \times L$ el área de la unidad detectora y α el ángulo desde el cual observamos la fuente, como vemos en la fig. 2.35(a).

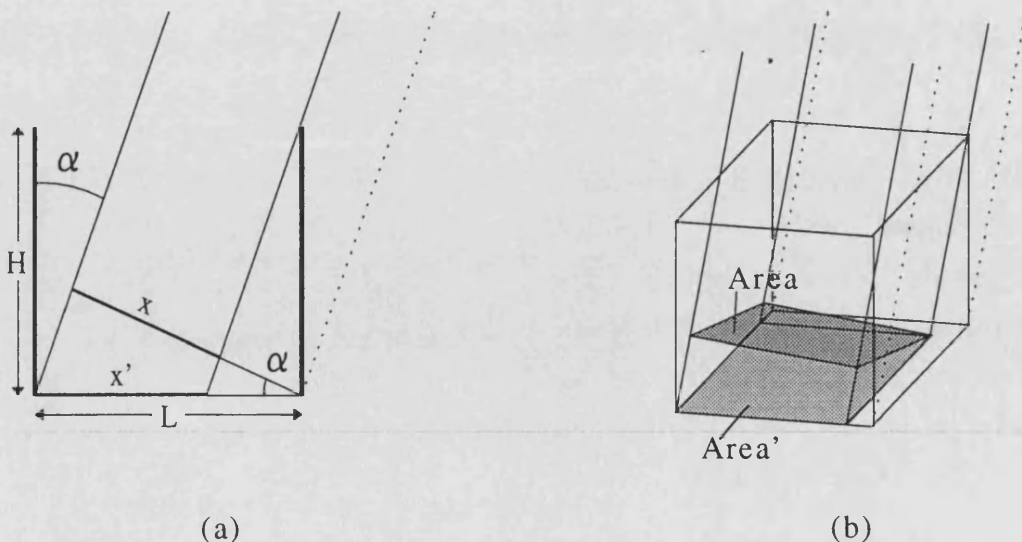


Figura 2.35: Efecto del colimador en la respuesta del detector en (a) 2 y (b) 3 dimensiones.

Tenemos que x' es la zona del detector iluminada, que viene dada por:

$$x' = L - H \cdot \operatorname{tg}|\alpha| \quad (2.33)$$

y x la proyección ortogonal a la dirección α , que es:

$$x = x' \cos\alpha = \frac{x'}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}} \quad (2.34)$$

(éste es un efecto geométrico, debido a que el detector está "girado" respecto de la dirección de procedencia de la fuente, y surge siempre, independientemente de la existencia o no de un colimador). Con esto, definimos el flujo que permite ver el colimador (en realidad el tanto por uno) como:

$$\Phi(\alpha) = \frac{x}{L} = \cos\alpha - \frac{H}{L} \operatorname{sen}|\alpha| \quad (2.35)$$

Generalizando esto al caso tridimensional (fig. 2.35(b)), tendremos que $Area'$ es la zona del detector iluminada, dada por:

$$\begin{aligned} x' &= L - H \cdot \operatorname{tg}|\alpha| \\ y' &= L - H \cdot \operatorname{tg}|\beta| \\ Area' &= x' \cdot y' \end{aligned} \quad (2.36)$$

y $Area$ la proyección ortogonal a la dirección (α, β) , que, generalizando la ecuación 2.34 (ver apéndice I), es:

$$Area = \frac{Area'}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + 1}} \quad (2.37)$$

y el flujo visto a través del colimador, de forma análoga a la ec. 2.35, es:

$$\Phi(\alpha, \beta) = \frac{Area}{L^2} \quad (2.38)$$

Las anteriores expresiones tienen sentido físico siempre que x' e y' sean mayores que cero (es decir, que la fuente realmente ilumine el detector). Esto se cumplirá siempre que:

$$\operatorname{tg}|\alpha| \leq \frac{L}{H} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg}|\beta| \leq \frac{L}{H} \quad (2.39)$$

2.11.2 Blindajes

Los blindajes son una estructura opaca a la radiación que envuelve el sistema detector-máscara de tal forma que no llegue al plano detector radiación que no haya atravesado previamente la máscara (fig. 2.36). Este sistema, frente al colimador, presenta la desventaja de que cada elemento del plano detector tiene un campo de visión distinto; sin embargo, tiene la gran ventaja de no disminuir la señal conforme la fuente se aleja del centro de visión del telescopio; tan sólo existe la pequeña disminución, ya comentada, debida a que el detector se halla girado con respecto a la dirección de la fuente, y cuyo efecto mostrábamos en las ecuaciones 2.34 y 2.37 para 2 y 3 dimensiones respectivamente. Sin embargo, este efecto es muy pequeño frente al del colimador.

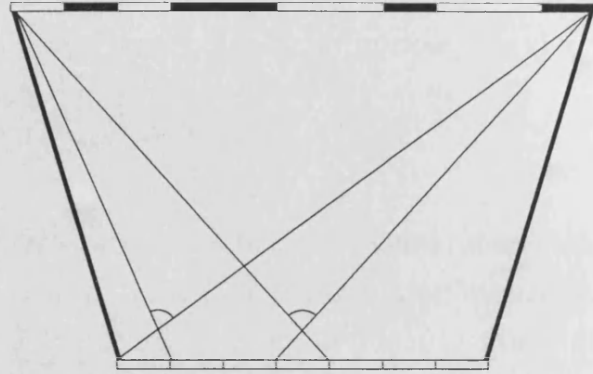


Figura 2.36: Limitación del campo de visión del plano detector usando un blindaje.

Si el sistema no presenta colimador (o si existe, pero éste no limita el campo de visión a la máscara), se pueden definir diferentes campos de visión [25], de acuerdo con la figura 2.37.

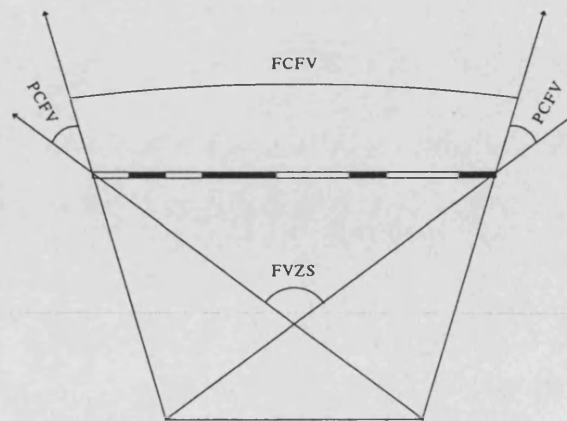


Figura 2.37: Campos de visión de un telescopio de apertura codificada.

FCFV (*Fully Coded Field of View*) o campo de visión completamente codificado hace referencia al campo celeste desde el cual una fuente proyecta en el detector un ciclo completo de la máscara, mientras que FVZS (*Field of View at Zero Sensitivity*) es la zona celeste desde la cual una fuente proyecta en el detector algún tipo de sombra de la máscara (bien sea un ciclo completo o una parte); por ende, a ángulos mayores el detector no ve nada. El PCFV (*Partly Coded Field of View*) sería el complementario entre ambos (fig. 2.37).

2.12 Otros métodos de reconstrucción

Hasta ahora hemos tratado en detalle los métodos de reconstrucción de imágenes basados en la correlación; esto es, que se basan en la ecuación 2.7. En cierta forma, estos métodos lo que hacen es aplicar la función inversa (la matriz G) al espacio de datos para obtener el espacio fuente, en los casos en los que la inversa analítica existe (cuando usamos un URA o MURA en un sistema cíclico), o una aproximación razonable de la misma, cuando no (por ejemplo, si la máscara es aleatoria). Como ya se dijo, la ecuación 2.7, aun siendo una útil parametrización del proceso de detección, era inexacta, pues no tenía en cuenta ciertos factores, como el efecto de los colimadores o la eficiencia de los detectores, por citar algunos ejemplos. También dijimos que el proceso de detección estaba mejor representado por la ecuación 2.9, que volvemos a mostrar aquí:

$$D_{kl} = \sum_{\alpha\beta} O_{\alpha\beta} \Phi_{kl}^{\alpha\beta} + B_{kl} \quad (2.40)$$

donde Φ incluye todos los efectos que pueden actuar sobre la señal (máscara, colimadores, eficiencias, etc...).

Vamos a tratar ahora de métodos de reconstrucción que sí tienen en cuenta estos efectos (de tal forma que es de esperar una reconstrucción más realista), y que no se basan en la correlación sino en técnicas de maximización; esto es, se buscan los estimadores \tilde{O} , compatibles con los datos a través de la ec. 2.40, que maximizan una cierta magnitud. Por desgracia, nos vamos a encontrar con que estos procedimientos son mucho más lentos que los tratados hasta ahora, y que para telescopios muy complejos pueden ser inaplicables.

2.12.1 Inversión de funciones

Antes de comenzar con la descripción de estos métodos, vamos a aclarar algunos conceptos relacionados con la inversión de funciones, pues como acabamos de decir, las técnicas de reconstrucción de imágenes están directamente relacionadas con este problema; se tiene una función que relaciona el espacio fuente O (se puede incluir el ruido B como parte del espacio fuente, aunque por claridad en nuestra argumentación no lo haremos) con el espacio de datos D , y se quiere hallar la función inversa que nos dé el espacio fuente, a partir del espacio de datos conocido; pero esta función inversa puede *no existir*, y el problema se ve además empeorado por la incompletitud e inexactitud de nuestros datos [26].

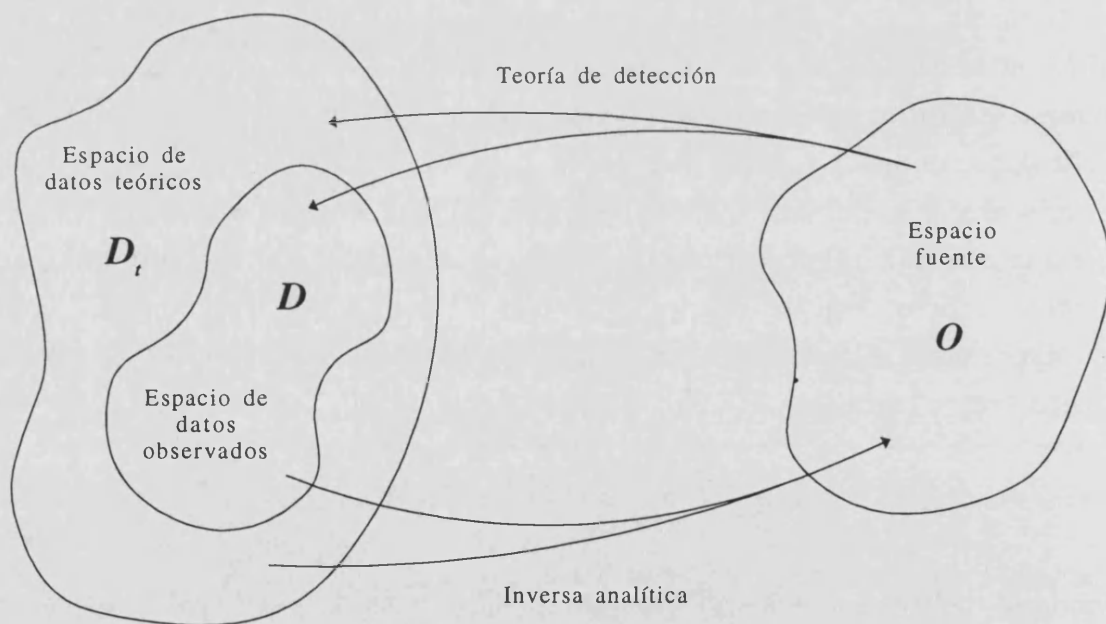


Figura 2.38: Relaciones entre el espacio fuente y los espacios de datos observados y teóricos.

En principio es deseable que el espacio fuente que queremos reconstruir tenga un tamaño de píxel tan finamente pequeño como queramos. En la práctica, éste tendrá un límite, debido a que nuestros datos experimentales son finitos. Nos referiremos al conjunto de nuestros datos como el espacio de datos observados D y llamaremos O a nuestro espacio fuente. Los datos nunca serán

tan completos como quisiéramos, debido a las limitaciones intrínsecas del detector (p. ej. tamaño de píxel finito). Podemos, por tanto, pensar en un espacio de datos teóricos D_t constituido por todo el infinito número de observaciones que podemos concebir, sin las limitaciones de un detector real (fig. 2.38). De él, tan sólo un pequeño fragmento (D) es disponible.

Nótese que *aun en el caso de existir la inversa analítica*, y estar unívocamente definida, ésta nos lleva en realidad de D_t a O , no del subconjunto de datos D a O . El paso de D a O no está unívocamente definido; si aplicamos la inversa analítica a D asumiendo valores para los datos perdidos, lo que obtenemos es una estimación de las fuentes, \tilde{O} , que no tiene por qué ser la mejor, ya que existirá un gran número de estimaciones **compatibles** con nuestros datos D . Por tanto, hemos de imponer criterios a \tilde{O} para seleccionar cuál, de todas las estimaciones compatibles, es la preferible.

2.12.2 Máxima entropía

Éste es uno de los métodos más exitosos en reconstrucción de imágenes usado en astronomía [27], y es aplicable a todo proceso de detección que pueda sistematizarse por una ecuación del estilo:

$$D_k = R_k(f) + B_k \quad (2.41)$$

[28] donde D_k son los datos detectados, B_k el ruido, $\{f_i\}$ es la fuente de señal (nuestra incógnita) y $R_k(f)$ es la función de respuesta del sistema de detección. Como se puede ver, la analogía con la ecuación 2.40 es total; basta con identificar f con O y $R(f)$ con $\Sigma O\Phi$. La única limitación con la que trabajamos es que las magnitudes f sean aditivas [26].

Para explicar en qué consiste el método de máxima entropía, usaremos el *argumento del mono* [29]: supongamos un mapa celeste dividido en celdas discretas, y un equipo de monos que se dedica a tirar bolitas (fotones) al azar dentro de estas celdas, de modo que generan diversos mapas celestes prueba; de hecho, dado que nuestros monos tienen una paciencia que para sí la quisiera el diablo de Maxwell, generan todos los mapas posibles, repitiéndose muchos de ellos. Luego aplicamos a todos estos mapas la función de respuesta del

detector, $R_k(f)$ y los comparamos con nuestros datos experimentales; casi todos los mapas prueba f_i serán inconsistentes con los datos D_k , pero habrá varios mapas que sean coherentes con los resultados y sus errores, y nos quedaremos con ellos descartando los otros. Dado que entre éstos habrá muchos mapas repetidos, los ordenaremos por montones (cada mapa diferente en un montón diferente) y nos quedaremos con el mapa del montón más alto. Es decir, el mapa consistente con los datos más frecuentemente producido por los monos.

Este proceder produce el mapa, consistente con los datos, más uniforme, más suave. Es decir, es la imagen factible de mayor entropía. Esta imagen representa la mínima cantidad de estructura impuesta por los datos. O lo que es lo mismo, cualquier estructura que veamos debe provenir única y exclusivamente de la imagen fuente real.

Dado que poner a trabajar a un equipo de monos no es factible, formularemos una definición de la entropía y la maximizaremos, bajo la restricción que los datos experimentales imponen. Existen diferentes definiciones de la entropía (en [30] se pueden ver varias), y los diferentes autores no se ponen de acuerdo en cuál de ellas debe usarse. Nosotros en esto seguiremos a [29] y usaremos como entropía:

$$S = -\sum_{\alpha\beta} O_{\alpha\beta} \cdot \log O_{\alpha\beta} \quad (2.42)$$

Si halláramos los $O_{\alpha\beta}$ que maximizan 2.42, obtendríamos una imagen totalmente llana, sin estructura alguna. Por ello tenemos que maximizarla con la restricción de que los $O_{\alpha\beta}$ sean consistentes con nuestros datos. Esto lo logramos definiendo una función Q de la forma:

$$Q = -\sum_{\alpha\beta} O_{\alpha\beta} \cdot \log O_{\alpha\beta} - \lambda \sum_{ij} \frac{(\tilde{D}_{ij} - D_{ij})^2}{\sigma_{ij}^2} \quad (2.43)$$

donde el segundo término, salvo por el valor λ (que actúa como un multiplicador de Lagrange) es una distribución χ^2 de los datos. Al maximizar Q respecto a $O_{\alpha\beta}$, obtenemos la estimación de O que andábamos buscando:

$$\tilde{O}_{\alpha\beta} = e^{-1-2\lambda \sum_{ij} \Phi_{ij}^{\alpha\beta} \frac{(\tilde{D}_{ij}-D_{ij})}{\sigma_{ij}^2}} \quad (2.44)$$

una de cuyas ventajas más evidentes es que compara los datos experimentales, D_{ij} , con la estimación de los mismos, que viene dada por:

$$\tilde{D}_{ij} = \sum_{\alpha\beta} \tilde{O}_{\alpha\beta} \Phi_{ij}^{\alpha\beta} \quad (2.45)$$

[31] y bajo la restricción de nuestro error experimental, σ_{ij} . La otra gran ventaja que presenta es la no negatividad de la imagen reconstruida, asegurada por la exponencial, con lo que no es necesario controles adicionales para asegurar que no existan píxeles con intensidades negativas.

Pero, debido a la ec. 2.45, tenemos que nuestra solución de máxima entropía dada por ec. 2.44, es una ecuación **trascendental**, sin solución analítica, ya que \tilde{O} se halla a ambos lados de la igualdad y no se puede despejar. Hemos de recurrir por tanto a técnicas numéricas para resolverla. Podemos usar la propia ecuación 2.44 de forma iterativa para hallar la solución, iniciando con un campo \tilde{O}^0 uniforme, evaluando el lado izquierdo de la ec. 2.44 y obteniendo un valor \tilde{O}^1 , que volveremos a meter en el lado izquierdo, etc...

Por desgracia, la aplicación directa de 2.44 no da un resultado convergente. Como solución a esto, en [31] se sugiere usar una media pesada de iteraciones consecutivas de la forma:

$$\tilde{O}_{\alpha\beta}^{n+1} = (1-\gamma)\tilde{O}_{\alpha\beta}^n + \gamma e^{-1-2\lambda \sum_{ij} \Phi_{ij}^{\alpha\beta} \frac{(\tilde{D}_{ij}^n - D_{ij})}{\sigma_{ij}^2}} \quad (2.46)$$

donde γ controla la "memoria" del algoritmo. Los propios autores sugieren el valor $\gamma=1/3$ por sus buenos resultados. Aun así, el uso de 2.46 no asegura que, si $\tilde{O}_{\alpha\beta}$ converge, lo haga a la solución correcta. En [29] se indica como procedimiento adecuado promediar las iteraciones sucesivas para obtener la convergencia.

De todas formas, sea el método que usemos para resolver la ecuación 2.44, tenemos el incordio adicional del parámetro libre λ , que, de hecho, es tan

libre, que de una iteración a otra puede cambiar (y cambia) de valor (¡existen expresiones de la entropía -p. ej. en [31]- que tienen aún más parámetros libres!). Para mantener los $O_{\alpha\beta}$ de cada iteración en valores adecuados, siguiendo a los diferentes autores, se elige la λ^n (la λ de la iteración n) de tal guisa que los O^{n+1} que generemos den una χ^2 del orden del número de datos.

2.12.2 El algoritmo EM

El algoritmo EM es un algoritmo iterativo de maximización que descubrimos por casualidad en un artículo médico [32], aplicado a la tomografía por emisión. Enseguida vimos que su formalismo era análogo y totalmente exportable a la problemática de las máscaras codificadas y podría proporcionarnos una herramienta más para nuestra tarea de reconstrucción de imágenes.

El algoritmo EM (cuyo nombre viene de valor Esperado y Maximización) es un algoritmo para computar estimadores de máxima verosimilitud iterativamente [33] a partir de datos incompletos. La idea es la siguiente: Supongamos que los datos observados en un experimento es un vector aleatorio y , que tiene una función de probabilidad condicional $g(y | \phi)$ donde ϕ es un conjunto de parámetros desconocidos a estimar; es decir, g representa la probabilidad de que obtengamos los datos y dados los parámetros ϕ . Nuestro objetivo será hallar el conjunto de parámetros ϕ^{\max} que maximicen $g(y | \phi)$, y que será el mejor estimador del valor real de los parámetros ϕ . En general será difícil maximizar $g(y | \phi)$ respecto a ϕ , así que, en lugar de trabajar en el espacio de datos observados (e incompletos), que siguiendo la terminología de [33] vamos a llamar \mathbf{Y} (el equivalente de \mathbf{D} en el punto 2.12.1), trabajaremos en el espacio mayor de datos teóricos completos, que llamaremos \mathbf{X} (lo que en 2.12.1 llamábamos \mathbf{D}_i), donde la optimización nos será más fácil de realizar (continuando la analogía, nuestros parámetros ϕ a estimar serán los O del espacio fuente). Los datos de este espacio teórico, x , no son observables directamente; sólo indirectamente a través de los datos y .

Asumimos que hay un "mapeo" (no unívoco) $x \rightarrow s(x)$ de \mathbf{X} a \mathbf{Y} , y que los x pueden ser conocidos sólo si se hallan incluidos en $\mathbf{X}(y)$; esto es, el subconjunto de \mathbf{X} determinado por la ecuación $y=s(x)$. Postulamos para los datos completos

x una función de probabilidad condicional $f(x|\phi)$. Bajo estas suposiciones, es posible volver a obtener $g(y|\phi)$ a partir de $f(x|\phi)$ mediante:

$$g(y|\phi) = \int_{x(y)} f(x|\phi) dx \quad (2.47)$$

donde la integral se convertirá en un sumatorio en el caso de tratar con variables discretas (y las funciones de probabilidad en probabilidades). Nótese que en general habrá varias especificaciones $f(x|\phi)$ que puedan generar $g(y|\phi)$. En algunos casos habrá una elección natural de f que será obvia, y en otros habrá varios caminos diferentes para definirla.

Cada iteración $n+1$ del algoritmo EM consiste de dos pasos; hallar un valor esperado (paso **E**) y maximizarlo (paso **M**):

•Paso E: Se forma el valor esperado condicional

$$E(\log f(x|\phi) | y, \phi^n) \quad (2.48)$$

donde ϕ^n representa el vector de parámetros estimados en la iteración n (de valor ya conocido).

•Paso M: Para hallar el nuevo vector de parámetros ϕ^{n+1} , se maximiza ec. 2.48 respecto a ϕ , manteniendo los ϕ^n (que ya obtuvimos en la iteración anterior y es nuestra actual estimación) constantes.

La idea intuitiva es que nos gustaría hallar los parámetros ϕ que maximizaran $\log f(x|\phi)$. Dado que no conocemos $\log f(x|\phi)$, en su lugar maximizamos *su valor esperado* en la iteración actual, dados los datos y y la estimación actual de los parámetros, ϕ^n .

Consideremos ahora la función:

$$H(\phi|\phi^n) = E(\log f(x|\phi) | y, \phi^n) - \log g(y|\phi) \quad (2.49)$$

Esta función [33] tiene la peculiaridad de que

$$H(\phi' | \phi) \leq H(\phi | \phi) \quad (2.50)$$

Y a partir de 2.49, se tiene que:

$$\begin{aligned} \log g(y | \phi^{n+1}) - \log g(y | \phi^n) = \\ [E(\log f(x | \phi^{n+1}) | y, \phi^n) - E(\log f(x | \phi^n) | y, \phi^n)] \\ + [H(\phi^n | \phi^n) - H(\phi^{n+1} | \phi^n)] \end{aligned} \quad (2.51)$$

Dado que ϕ^{n+1} maximiza ec. 2.48, manteniendo ϕ^n constante, el primer corchete a la derecha del signo igual en ec. 2.51 será ≥ 0 . Y esto mismo ocurre con el segundo corchete, gracias a la propiedad 2.50. Con lo cual se obtiene que:

$$\log g(y | \phi^{n+1}) \geq \log g(y | \phi^n) \quad \leftrightarrow \quad g(y | \phi^{n+1}) \geq g(y | \phi^n) \quad (2.52)$$

siendo estrictamente mayor en muchos casos. Es decir, el algoritmo EM está diseñado para incrementar la verosimilitud en cada iteración.

¿Convergen la secuencia de ϕ^n al ϕ^{\max} que estamos buscando, que maximiza $g(y | \phi)$? Por desgracia, la demostración de convergencia desarrollada por Dempster *et al.* [33] es incorrecta, al utilizar en uno de los pasos incorrectamente la desigualdad triangular. En [34] y [35] se intenta remediar esta situación, aunque sin cubrir todos nuestros problemas.

Afortunadamente, Lange y Carson [32] demuestran que, en el caso concreto estudiado por ellos (tomografía por emisión -que es completamente análogo al nuestro, como se muestra a continuación-), sí existe la convergencia requerida, gracias a la *estricta concavidad* de la función $\log g(y | \phi)$ en el modelo estudiado, que se basa en la estadística poissoniana.

La tomografía por emisión trabaja cambiando de posición un único detector (que enfoca al paciente), y realizando medidas de la radiación que emite éste (ya que, previamente, se le ha suministrado una sustancia radiactiva) viéndolo desde diferentes posiciones (proyecciones). Siguiendo a [32], se define:

- i : índice de proyección
 j : índice de píxel de la imagen reconstruida
 I_i : conjunto de píxeles que contribuyen a la proyección i
 J_j : conjunto de proyecciones a las cuales el píxel j contribuye
 λ_j : intensidad de la fuente del píxel j (parámetros a estimar)
 c_{ij} : probabilidad de que un fotón que sale del píxel j alcance la proyección i
 Y_i : número de fotones detectados en la proyección i

Se tiene por tanto que:

$$Y_i = \sum_{j \in I_i} C_{ij} \lambda_j \quad (2.53)$$

que es una ecuación análoga a 2.40. Aplicado el algoritmo EM, se obtiene la solución iterativa para estimar los parámetros λ que podemos ver en la ecuación 2.54:

$$\tilde{\lambda}_j^{n+1} = \frac{\tilde{\lambda}_j^n}{\sum_{i \in J_j} C_{ij}} \sum_{i \in J_j} \frac{C_{ij} Y_i}{\sum_{k \in I_i} C_{ik} \tilde{\lambda}_k^n} \quad (2.54)$$

Pasemos ahora de la tomografía a las máscaras codificadas. Si ahora equiparamos cada una de las proyecciones del detector que realiza la tomografía con una unidad detectora diferente de nuestro plano detector (o lo que es lo mismo, es equivalente poner un sólo detector en diferentes posiciones -proyecciones- y realizar una medida en cada una de ellas, que tener muchos detectores en diferentes posiciones y realizar una sola medida con cada uno), la analogía que indicábamos hace un momento se revela aún más clara, y podemos concluir que la solución del algoritmo EM al problema de formación de imágenes usando máscaras codificadas, y de forma análoga a la ecuación 2.40, es:

$$\tilde{O}_{\alpha\beta}^{n+1} = \frac{\tilde{O}_{\alpha\beta}^n}{\sum_{ij} \Phi_{ij}^{\alpha\beta}} \sum_{ij} \frac{\Phi_{ij}^{\alpha\beta} D_{ij}}{\sum_{\alpha'\beta'} \tilde{O}_{\alpha'\beta'}^n \Phi_{ij}^{\alpha'\beta'}} \quad (2.55)$$

que, poniéndolo de una forma más elegante, resulta:

$$\tilde{O}_{\alpha\beta}^{n+1} = \tilde{O}_{\alpha\beta}^n \frac{\sum_{ij} \Phi_{ij}^{\alpha\beta} \left(\frac{D_{ij}}{\tilde{D}_{ij}^n} \right)}{\sum_{ij} \Phi_{ij}^{\alpha\beta}} \quad (2.56)$$

siendo:

$$\tilde{D}_{ij}^n = \sum_{\alpha\beta} \tilde{O}_{\alpha\beta}^n \Phi_{ij}^{\alpha\beta} \quad (2.57)$$

de idéntica forma a la ec. 2.45.

La ecuación iterativa 2.56 tiene una gran ventaja respecto a las que obteníamos usando el método de máxima entropía: la total ausencia de parámetros libres; la ecuación es robusta y no requiere de continuos y molestos controles en cada iteración para ajustar ningún parámetro (o conjunto de) que frenan el proceso. Además, dado que la descripción de la función probabilidad $g(y|\phi)$ se fundamenta en la naturaleza aleatoria del fenómeno de detección (al usar la estadística de Poisson), es de esperar una reconstrucción mejor y más natural que con el método de máxima entropía. Otra virtud es la no negatividad de la imagen reconstruida. Al igual que con máxima entropía, no es necesario imponer restricciones adicionales para asegurarla, pues viene implícita. La única que se necesita es que los parámetros iniciales sean positivos; es decir $\tilde{O}^0 \geq 0$. Esto no excluye la posibilidad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{O}_{\alpha\beta}^n = 0$$

Además, EM converge al apropiado estimador de máxima verosimilitud, independientemente del valor inicial, como se demuestra en [32]. Nosotros tomaremos por parámetros iniciales \tilde{O}^0 un campo uniforme de valor 1 para todo

(α, β) . Con esto no introduciremos de antemano ninguna estructura en la imagen, que tan sólo serviría para retrasar la convergencia.

Su excelente convergencia puede intuirse viendo a simple vista la ecuación 2.56. En efecto, en el caso en que nuestros parámetros estimados \tilde{O}^n fueran los correctos, tendremos que D y nuestra estimación del mismo coincidirán, de tal forma que la fracción entre paréntesis en ec. 2.56 valdrá 1, y por tanto también la fracción entre sumatorios, con lo que tendré que $\tilde{O}^n = \tilde{O}^{n+1}$.

Por curiosidad, y enlazando con los métodos basados en la correlación, obsérvese que, tras la primera iteración, dado que $\tilde{O}^0 = 1$, y en virtud de ec. 2.56 y 2.57, lo que tenemos es:

$$\tilde{O}_{\alpha\beta}^1 = \frac{\sum_{ij} \Phi_{\alpha\beta}^{ij} \cdot \left(\frac{D_{ij}}{\sum_{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta}^{ij}} \right)}{\sum_{ij} \Phi_{\alpha\beta}^{ij}} \quad (2.59)$$

y si definimos Φ como se definía la matriz M_{ij} (es decir, $\Phi=1$ si el detector (i, j) mira por un agujero al mirar hacia (α, β) y $\Phi=0$ si mira a un elemento opaco), se tiene que:

$$\sum_{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta}^{ij} = N_A$$

$$\sum_{ij} \Phi_{\alpha\beta}^{ij} = N_C$$

donde N_A =número total de agujeros de la máscara y N_C =número de agujeros en un ciclo. Con ello, se tiene que ec. 2.59 queda:

$$\tilde{O}_{\alpha\beta}^1 = \frac{1}{N_A N_C} \sum_{ij} \Phi_{\alpha\beta}^{ij} D_{ij} \equiv \tilde{O}^1 = \frac{1}{N_A N_C} (D * M)$$


Es decir, la primera iteración es en cierto modo equivalente a los métodos basados en la correlación descritos anteriormente.

2.12.3 Métodos de maximización versus inversión de funciones

Hay que hacer notar que tanto el método de máxima entropía como el algoritmo EM solventan elegantemente el problema de la inversión de funciones indicado en 2.12.1. Como dijimos, la función respuesta del detector (en nuestro caso Φ) relaciona el espacio fuente O con el espacio de datos D . El camino "obvio" para hallar los parámetros O a partir de los datos D sería aplicar la función inversa; pero como ya hemos visto ésta no está definida unívocamente (por la incompletitud de nuestros datos), o peor aún, puede no existir la inversa. Tanto el algoritmo EM como los métodos de máxima entropía usan tan sólo la función de respuesta del detector, Φ , y **nunca** su inversa, para pasar los mapas prueba del espacio fuente al de datos y compararlos con los datos experimentales.

Capítulo 3: Otras consideraciones

3.1 Prefacio

n el capítulo 2 hemos estudiado diferentes métodos de reconstrucción de imágenes, necesarios cuando se usa un sistema de máscara codificada para la formación de imágenes. Esto es lo que hemos dado en llamar *teoría de máscaras*. Sin embargo, antes de adentrarnos en el capítulo de resultados, resulta conveniente explicar previamente en este capítulo algunos apartados adicionales que, sin ser exactamente teoría de máscaras, se hallan relacionados con ésta.

3.2 Criterio de errores

3.2.1 En reconstrucciones basadas en la correlación

Siguiendo a [36], según la ecuación 2.10 tenemos que, dada una matriz O que representa a la fuente, dada una matriz M que representa la máscara, y un ruido de fondo B , el plano detector, representado por la matriz D , vendrá dado por:

$$D = O * M + B$$

y la reconstrucción, por:

$$\tilde{O} = D * G$$

o lo que es lo mismo:

$$\tilde{O}_{ij} = \sum_{kl} D_{kl} G_{k+i, l+j} \quad (3.1)$$

Como se muestra en [37], por propagación cuadrática de errores, el error estadístico estimado en cada término de la forma $d \cdot g$ viene dado por

$$\varepsilon^2(dg) = d^2 \varepsilon^2(g) + g^2 \varepsilon^2(d) \quad (3.2)$$

donde d y g corresponden respectivamente a los elementos de D y G en 3.1. Todos los términos de la matriz de reconstrucción G son constantes (p. ej. con la correlación balanceada y variantes son 1 o -1), por tanto su error asociado es $\varepsilon(g)=0$. Esto nos lleva a:

$$\varepsilon^2(dg) = g^2 \varepsilon^2(d) \quad (3.3)$$

Usando la correlación balanceada, tendremos que $g^2=1$. Es decir, podemos escribir el error asociado a los píxeles de la imagen reconstruida como:

$$\varepsilon^2(\tilde{O}_{ij}) = \sum_{kl} \varepsilon^2(D_{kl}) \quad (3.4)$$

Y dado que las cuentas detectadas en D tienen carácter poissoniano, el error de D_{kl} viene dado por

$$\varepsilon(D_{kl}) = \sqrt{D_{kl}} \quad (3.5)$$

con lo que

$$\varepsilon^2(\tilde{O}_{ij}) = \sum_{kl} \left(\sqrt{D_{kl}} \right)^2 = \sum_{kl} D_{kl} = T_D \quad (3.6)$$

siendo T_D el número total de cuentas detectado en el plano detector, e **independiente**, por tanto, del elemento ij considerado.

Aplicando esto al caso particular de LEGRI, consideremos la correlación balanceada: tenemos un patrón 5x5 en la máscara y un plano detector de idéntico tamaño (agruparemos los detectores en grupos 2x2 para que los elementos de ambas matrices tengan también igual tamaño). Sea una fuente de intensidad 100 fotones/unidad de área (a lo largo de un tiempo Δt arbitrario). Por simplicidad supongamos ausencia de ruido, de tal forma que en cada detector iluminado se detecten ~100 fotones (salvo fluctuación estadística), y, por tanto, en cada grupo de 2x2 se detectarán ~400 fotones (y en los no iluminados 0). Dado que el patrón de la máscara (fig. 2.23) consta de 12 elementos transparentes y 13 opacos, habrán 12 grupos 2x2 iluminados, con lo que tendré $T_D \sim 4800$ cuentas detectadas, y un error de $\sqrt{4800} \approx 70$ en cada uno de los píxeles de la imagen reconstruida.

Considerando la posición ij del cielo donde se halla la fuente, y usando la ec. 3.1, tengo que cada 1 de la matriz G multiplicará un detector iluminado (que ha detectado ~ 400 cuentas), y cada -1 un detector no iluminado (de 0 cuentas). Esto es, $12 \times 400 - 13 \times 0 = 4800$ cuentas en el pico de la imagen reconstruida, con un error de ± 70 ; es decir, exactamente lo que correspondería a su error estadístico si fuera una medida directa. Y el resto de la imagen será un fondo de valor ~ 0 (ver fig. 2.28), con un error de ± 70 en cada uno de los píxeles. Sin embargo, si tuviera en el campo de visión dos fuentes de intensidad 100, detectaría ~ 9600 cuentas (salvo efecto del colimador), con lo que el error para todos los píxeles de la imagen reconstruida sería 100. Es decir, la misma fuente del caso anterior, que es reconstruida con la misma altura (4800) (debido a la forma de la ecuación 2.14, pues el valor de la intensidad de un píxel no depende de los demás píxeles de la imagen), tendría un *error mayor*, por el mero hecho de hallarse presente otra fuente en el campo de visión.

Si usamos CBMF o decodificación δ (de respuesta piramidal o cuadrada, respect.) aparece además un error sistemático, debido al hecho de que, aun en el mejor de los casos (detector ideal y con ausencia de ruido) se reconstruyen fuentes donde no las hay. Si vemos la figura 2.30 (usándose CBMF), en que la fuente real está en el centro, vemos que aparece una estructura, una corona alrededor de la señal verdadera que no corresponden a ninguna estructura real. En el caso de que la fuente fuera de 100 fotones/unidad.de área, obtendría:

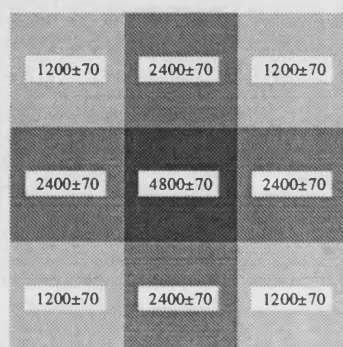


Figura 3.1: Señal obtenida usando CBMF (ampliación). Se muestra la intensidad del píxel y su error.

Los píxeles de esa estructura, que debían valer cero, tienen un valor bastante alto, y un error estadístico demasiado pequeño, con lo que el valor real de cero no se halla incluido en el intervalo de error. Por tanto nos hallamos ante un error sistemático, que surge al usar CBMF y decodificación δ .

3.2.2 En métodos iterativos

El encontrar un criterio para asignar un error a un resultado obtenido mediante un proceso iterativo (como es el caso de los algoritmos EM y de Máxima Entropía) no ha sido nada fácil, pues la bibliografía relativa a temas de probabilidad y estadística no suele considerar procesos iterativos, y aquellos sitios en los que se trata tales procesos suelen ser libros o artículos de orientación matemática en los que no se suele tener en cuenta los errores experimentales. Afortunadamente, encontramos un libro de estadística [38] en el que, en un par de páginas, se considera un proceso iterativo y se da un criterio para asignar un error al resultado del mismo. Aunque en [38] se trata un caso diferente al nuestro, la analogía es completa y hemos tomado su criterio para asignar errores a nuestros resultados.

Este criterio consiste en, una vez el algoritmo ha alcanzado la convergencia deseada, digamos en la iteración $n+1$, estimamos el error de los píxeles por propagación cuadrática de errores [37], a partir de la formula iterativa estimada en la iteración n . Si consideramos como magnitudes con error las cuentas detectadas D_{ij} , y la matriz de respuesta del detector Φ , pues en ella, a parte de factores geométricos (que son un factor de error -en la posición de los detectores, en la distancia plano detector-máscara, en la altura de los colimadores, etc...-), también se pueden incluir otras magnitudes (como la eficiencia, la transparencia de las partes no opacas de la máscara, etc...) que también son fuente de error, tenemos que el error (al cuadrado) asignado al píxel (α,β) vendrá dado, según la propagación cuadrática de errores, por:

$$\varepsilon^2(\bar{O}_{\alpha\beta}^{n+1}) = \sum_{kl} \left[\left(\frac{\partial \bar{O}_{\alpha\beta}^{n+1}}{\partial D_{kl}} \right)_n^2 \cdot \varepsilon^2(D_{kl}) + \left(\frac{\partial \bar{O}_{\alpha\beta}^{n+1}}{\partial \Phi_{kl}^{\alpha\beta}} \right)_n^2 \cdot \varepsilon^2(\Phi_{kl}^{\alpha\beta}) + \sum_{\gamma\delta \neq \alpha\beta} \left(\frac{\partial \bar{O}_{\alpha\beta}^{n+1}}{\partial \Phi_{kl}^{\gamma\delta}} \right)_n^2 \cdot \varepsilon^2(\Phi_{kl}^{\gamma\delta}) \right] \quad (3.7)$$

donde el subíndice n hace referencia a que las derivadas parciales deben ser

estimadas con los valores de la iteración n . Para un estudio más en detalle de los errores, ver apéndice II.

3.3 Mapeado del cielo

El resultado de una única operación de reconstrucción es una trama reticular de píxeles, una imagen o mapa, que representa las intensidades celestes de una zona concreta del cielo, cuyo centro es la dirección hacia la que apuntamos. A lo largo del tiempo la dirección de apuntado variará, para poder estudiar diferentes zonas del firmamento. Cada uno de nuestros mapas concretos es un elemento de un mosaico con cuya unión realizaremos el mapeado del cielo. Para ello, nos interesa poder pasar de nuestras coordenadas (α, β) , que son coordenadas relativas a la dirección de apuntado (o centro del campo de visión) del telescopio (como se explicó en el apartado 2.2) a las coordenadas Ascensión Recta y Declinación ($a.r.$, $dec.$), que son las coordenadas absolutas usadas en astronomía.

Ambos sistemas se hallan relacionados entre sí mediante rotaciones tridimensionales, que nos vienen definidas por los ángulos de Euler ψ_1, ψ_2 y ψ_3 , que determinan tres rotaciones que nos permiten pasar del eje z_1 paralelo a la dirección de apuntado del telescopio, al eje z_3 paralelo al eje de rotación de la Tierra, como se muestra en la figura 3.2.

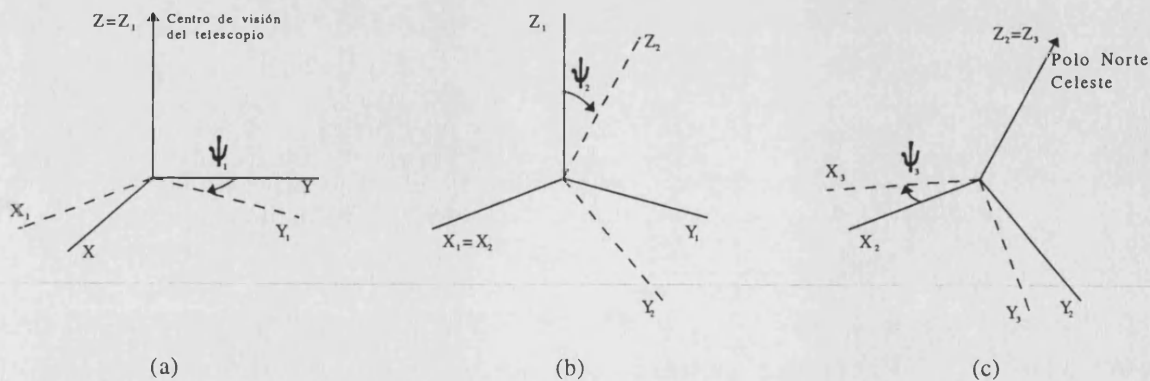


Figura 3.2: Definición de los ángulos de Euler.

En nuestro caso, estos ángulos de Euler los podemos obtener a partir de los datos del sensor estelar (ver fig. 3.3), de la siguiente forma:

- ψ_1 es el ángulo formado entre el eje α de la imagen y el paralelo celeste que pasa por el centro del campo de visión (CCV).
- ψ_2 es el ángulo entre el centro del campo de visión y el norte celeste, y se relaciona con la declinación del CCV según $\psi_2 = -(90^\circ - \text{dec.})$, ya que el signo de esta rotación (tal como la hemos definido) es negativo.
- ψ_3 son los grados a girar hasta el origen de ascensiones rectas, y viene dado según $\psi_3 = 270^\circ - \text{a.r.}$ (en grados, pues la a.r. se mide en horas).

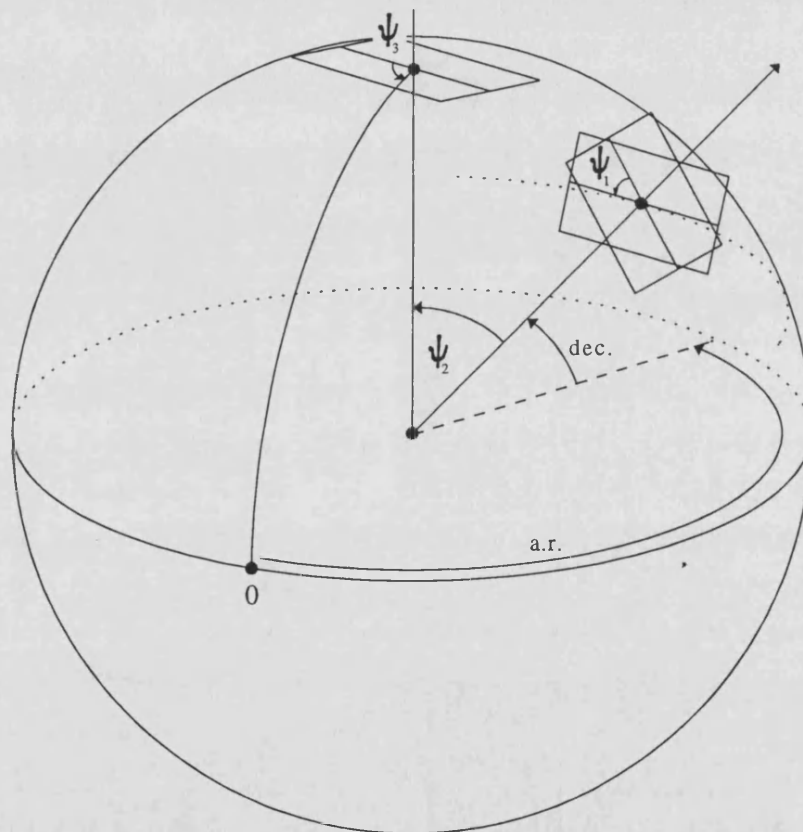


Figura 3.3: Ángulos de Euler que relacionan el sistema de coordenadas intrínseco al telescopio con el sistema de coordenadas celestes estándar.

Así pues, dado un objeto, que se halle en nuestra imagen en las coordenadas (α, β) , primero obtengo sus correspondientes (θ, ϕ) (referidas al centro del campo de visión) usando la ecuación 2.2. Calcular las nuevas coordenadas esféricas (θ_1, ϕ_1) tras la primera rotación (a) de la fig. 3.2 es trivial, y viene dado por:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \theta \\ \phi_1 &= \phi - \psi_1\end{aligned}\tag{3.8}$$

En la segunda rotación, etiquetada (b) en la figura 3.2, no nos va a ser tan fácil determinar las nuevas coordenadas angulares (θ_2, ϕ_2) , así que recurriremos a las coordenadas cartesianas como ayuda:

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 \\ y_2 &= y_1 \cdot \cos(\psi_2) + z_1 \cdot \sin(\psi_2) \\ z_2 &= z_1 \cdot \cos(\psi_2) - y_1 \cdot \sin(\psi_2)\end{aligned}$$

Y dado que:

$$\begin{aligned}x_1 &= R \cdot \sin(\theta_1) \cdot \cos(\phi_1) & x_2 &= R \cdot \sin(\theta_2) \cdot \cos(\phi_2) \\ y_1 &= R \cdot \sin(\theta_1) \cdot \sin(\phi_1) & y_2 &= R \cdot \sin(\theta_2) \cdot \sin(\phi_2) \\ z_1 &= R \cdot \cos(\theta_1) & z_2 &= R \cdot \cos(\theta_2)\end{aligned}$$

tenemos la relación entre ángulos:

$$\begin{aligned}\sin(\theta_2) \cdot \cos(\phi_2) &= \sin(\theta_1) \cdot \cos(\phi_1) \\ \cos(\theta_2) &= \cos(\theta_1) \cdot \cos(\psi_2) - \sin(\theta_1) \cdot \sin(\phi_1) \cdot \sin(\psi_2) \\ \sin(\theta_2) \cdot \sin(\phi_2) &= \sin(\theta_1) \cdot \sin(\phi_1) \cdot \cos(\psi_2) + \cos(\theta_1) \cdot \sin(\psi_2)\end{aligned}\tag{3.9}$$

a partir de la cual se puede determinar fácilmente las nuevas coordenadas esféricas tras la rotación (b) de la fig. 3.2. En cuanto a la rotación (c), es análoga a la (a), con lo que viene dada por:

$$\begin{aligned}\theta_3 &= \theta_2 \\ \phi_3 &= \phi_2 - \psi_3\end{aligned}\tag{3.10}$$

Las coordenadas (θ_3, ϕ_3) básicamente son ya la declinación y ascensión recta (respect.) del objeto que teníamos en nuestra imagen; tan sólo queda pasar ϕ_3 de grados a horas para obtener la **a.r.** y hacer **dec** = $90^\circ - \theta_3$, con lo que obtendremos las coordenadas celestes correctas.

3.4 Simuladores

Para desarrollar nuestro *software* de reconstrucción de imágenes, previamente ha sido necesario crear unos programas que simulen la respuesta de nuestro telescopio LEGRI frente a las fuentes celestes, con los cuales "crear" datos útiles sobre los que aplicamos nuestro software de reconstrucción para intentar reconstruir la imagen, y poder así comparar entre los diferentes métodos.

Los simuladores considerados han sido dos: un modelo basado en el método de Monte Carlo [39] de todo el detector, con plena descripción de los materiales componentes y de los procesos físicos envueltos en la detección, usando el paquete de simulación GEANT-3 [40]; y un simulador geométrico que describiremos a continuación. El primero es más exacto y más fiel a la realidad, pero mucho más lento, mientras que el segundo, aunque quizá no tan exacto, es muchísimo más rápido. A la hora de desarrollar nuestro software y de estudiar las características de los distintos métodos de reconstrucción se ha usado este último, utilizando el primero para comprobar si la aproximación que hacemos al usar el simulador geométrico es lo bastante buena. Con ambos lo que se busca es, dado un campo celeste fuente, obtener la imagen detectada en el plano detector del telescopio. El método de Monte Carlo lo hace "lanzando" fotones (en número proporcional a la intensidad de la fuente) provenientes de la dirección (α, β) en que se encuentre la fuente, que interaccionan con la materia mediante efecto fotoeléctrico y efecto Compton (en el rango energético en que nos hallamos no hay producción de pares) y siendo finalmente detectados por las unidades del plano detector. Como es de esperar, este proceso es lento y más aún si consideramos muchas fuentes o una fuente extensa. El simulador geométrico calcula analíticamente la matriz Φ de la ecuación 2.9, que nos da la respuesta del detector. Además de más veloz, este simulador presenta la ventaja adicional de hallar *explícitamente* los factores de flujo Φ , necesarios, no tan sólo para simular el detector, sino para la reconstrucción cuando se usan los métodos de maximización (ver ec. 2.44 y 2.56). Con el Monte Carlo se pueden calcular, pero no explícitamente; habría que realizar una simulación por cada dirección (α, β) y luego dividir las cuentas detectadas en cada detector entre los fotones lanzados por unidad de área.

Pasemos ahora a describir brevemente el algoritmo usado en el simulador geométrico para hallar los factores de flujo Φ . Lo que se quiere obtener es, para una fuente de intensidad I que se halle en la dirección arbitraria (α, β) , qué tanto por uno de la intensidad detectará el detector ij , teniendo en cuenta la posición de los tungstenos en la máscara y el colimador. Para ello, proyectamos en el plano de la máscara el cuadrado definido por el detector ij y el definido por el borde de su correspondiente colimador, como se ve en la figura 3.4, y hallamos el rectángulo que viene dado por la intersección de ambos.

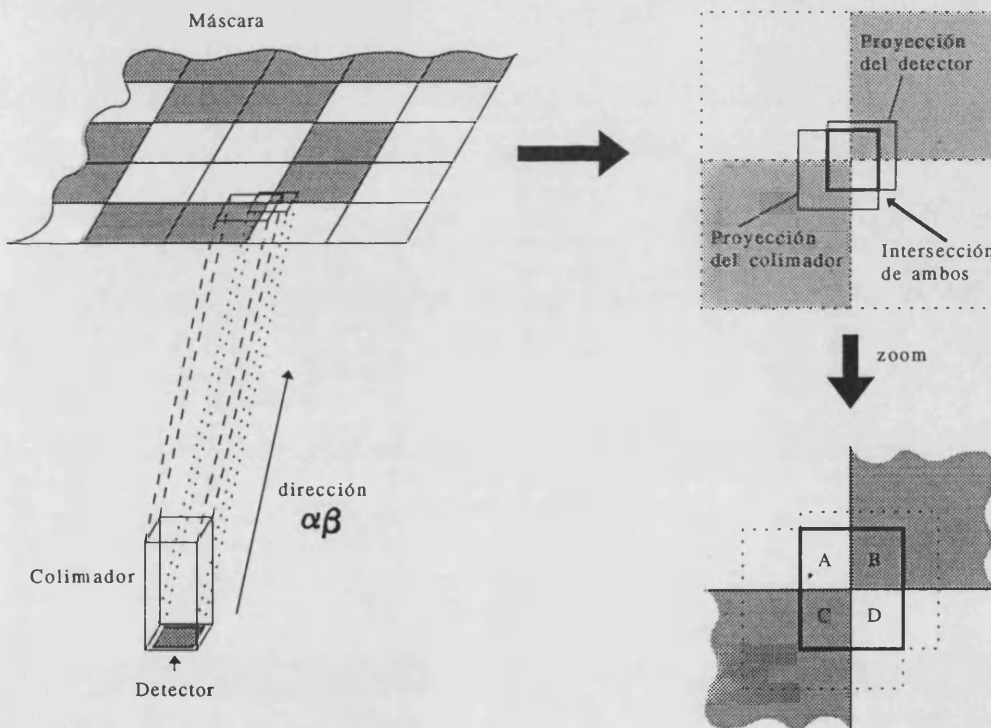


Figura 3.4: Cálculo del flujo proveniente de la dirección (α, β) visto por una unidad detectora, teniendo en cuenta el efecto del colimador y de la máscara.

Luego calculamos la intersección de *este* rectángulo con la máscara en sí; existen cuatro casos posibles: que el rectángulo caiga dentro de un elemento de la máscara (bien transparente, bien opaco), entre dos elementos, o entre cuatro (este último caso es el que se muestra en la figura 3.4), definiendo, respectivamente, una, dos o cuatro subáreas. Multiplicando cada subárea por 1 si se trata de un agujero, o por 0 si se trata de un tungsteno, y hallando la suma total, obtenemos la superficie de la unidad detectora que es, en efecto, iluminada por

la hipotética fuente en (α, β) . La intuición nos dice que, para hallar nuestro flujo buscado Φ , ya tan sólo hemos de dividir esta área por el área de nuestro detector. Casi; queda únicamente dividir además por el factor geométrico debido a que el detector se halla girado respecto a la dirección de procedencia de la radiación, como vimos en el punto 2.11.1 en la ecuación 2.37. Con esto, el flujo de cielo visto por el detector ij proveniente de la dirección (α, β) nos queda:

$$\Phi_{ij}^{\alpha\beta} = \frac{\sum_{n=1}^{n^{\circ} \text{ subáreas}} M_n \cdot A_n^{\text{subdiv}}}{A_{ij}^{\text{total}} \cdot \sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha + \text{tg}^2 \beta}} \quad (3.11)$$

En las figuras 3.5 y 3.6 hemos representado este flujo gráficamente, para una unidad detectora que se halla en el centro del plano detector y para otra que se halla en una esquina del mismo, respectivamente. Cada una de las gráficas se muestra en dos representaciones distintas: en (a) el tono de gris es proporcional al valor del flujo, y en (b) lo es la altura.

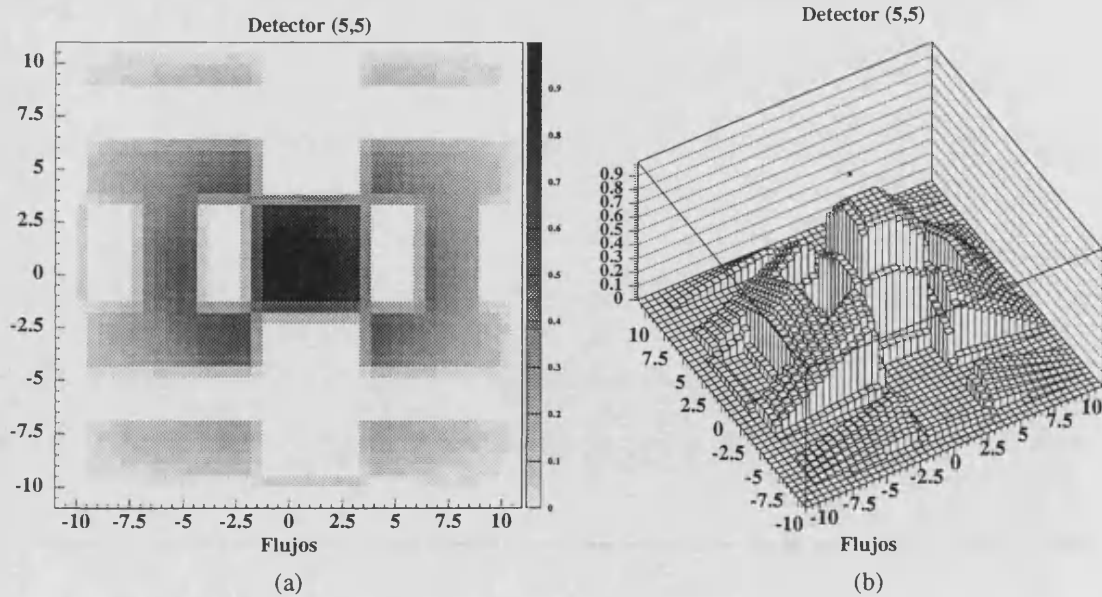


Figura 3.5: Factores de flujo del detector (5,5)

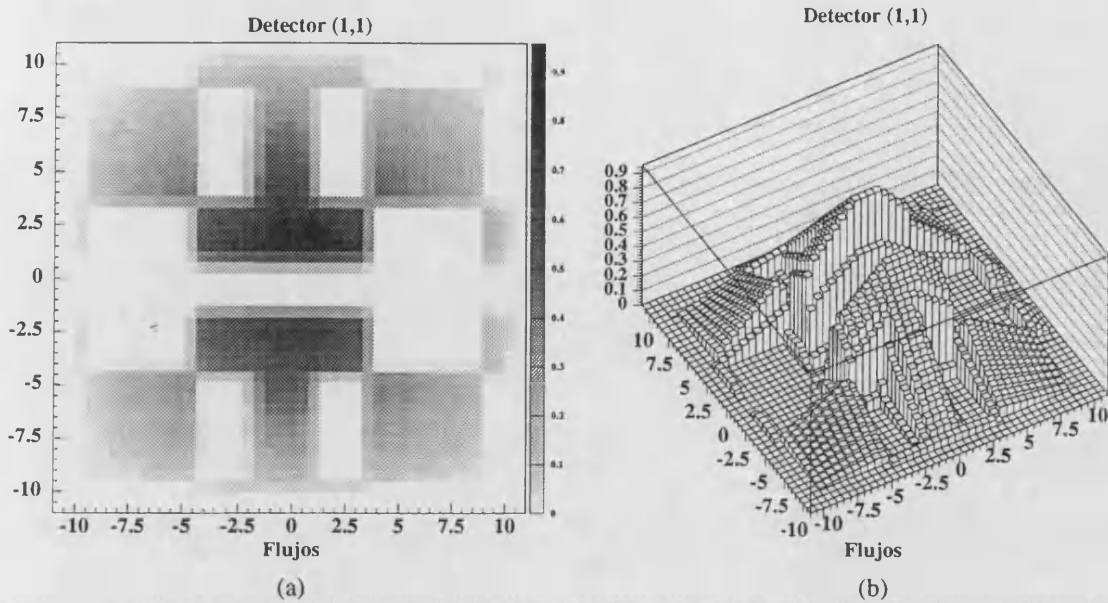


Figura 3.6: Factores de flujo del detector (1,1)

A la luz de estas figuras podemos decir que la respuesta de una unidad detectora se puede describir aproximadamente como una función piramidal (que es el efecto del colimador, tal como explicábamos en el apartado 2.11.1) como se aprecia más claramente en las fig. 3.5 (b) y 3.6 (b), multiplicada por la parte del patrón de la máscara que tiene sobre sí la unidad detectora, como se aprecia mejor en las fig. 3.5 (a) y 3.6 (a).

Capítulo 4: Resultados. Estudio de los métodos de reconstrucción

4.1 Introito

A lo largo de este capítulo van a ser expuestos los resultados obtenidos tras el estudio en detalle de los diferentes métodos de reconstrucción de imágenes, previamente descritos, aplicados a LEGRI. Se estudiarán las principales características de ellos, se harán diferentes consideraciones, se efectuará un análisis comparativo de los mismos, y se estudiarán los efectos que sobre la imagen tienen fenómenos externos al proceso de reconstrucción.

4.2 Criterios de convergencia

Cuando generamos una imagen por medio de un método iterativo, como es el caso de máxima entropía o el algoritmo EM, hemos de detener el proceso en un momento dado y aceptar el producto de esa última iteración como la imagen generada por el método en cuestión. Por tanto, antes de proseguir y empezar a reconstruir imágenes por diferentes métodos, hemos de estudiar si los métodos iterativos que estudiamos convergen, y, si lo hacen, saber cuándo debemos detenerlos. Por ello vamos a realizar un estudio previo sobre la convergencia de los mismos e imponer criterios de parada al proceso iterativo.

4.2.1 Convergencia del algoritmo EM

Como dijimos en el apartado 2.12.3, el algoritmo EM tiene una excelente convergencia al estimador de máxima probabilidad deseado. Además, la convergencia es monótona y sin oscilaciones, como se verá en breve. Podemos usar esta propiedad para elegir el criterio de parada del algoritmo. Sin embargo, este es un criterio sobre la convergencia en sí del proceso, no sobre la convergencia al resultado correcto (aunque en este caso sí que converge al resultado correcto). Podemos imponer otros criterios, por ejemplo basados en

la estadística, para detener el algoritmo. Nosotros vamos a usar para el algoritmo EM dos criterios, que pasamos a definir a continuación.

Si nos basamos en la estadística, podemos exigir que el algoritmo se detenga en el momento en que la estimación de los datos del plano detector (obtenida a su vez a partir de la estimación en curso de la fuente celeste) sea indistinguible de los datos experimentales obtenidos, por caer el valor de los estimadores dentro del error experimental de los datos reales. Es decir, puedo decidir detener el algoritmo en la iteración n -ésima si se cumple:

$$\tilde{D}_{ij}^n (= \sum_{\alpha\beta} \Phi_{ij}^{\alpha\beta} \tilde{O}_{\alpha\beta}^n) \in (D_{ij} - \sigma_{ij}, D_{ij} + \sigma_{ij}) \quad (4.1)$$

siendo $\sigma_{ij} = \sqrt{D_{ij}}$

Esto nos asegura que la reconstrucción que hemos realizado es una buena reconstrucción. Más no le podemos exigir a la reconstrucción. Sin embargo, esto no tiene por qué ocurrir; la solución del algoritmo (a infinitas iteraciones) podría no cumplir en ningún caso el requisito exigido en la ecuación 4.1. Para estos casos, y usando la propiedad de convergencia monótona del algoritmo, impondremos que el algoritmo se detenga cuando la diferencia entre las imágenes de dos iteraciones sucesivas sea *muy* pequeña. ¿Cómo definimos ese *muy* y esa diferencia?

Vamos a definir una magnitud a la que vamos a llamar δ^n , según:

$$\delta^n = \frac{\left(\sum_{\alpha\beta} \Delta \tilde{O}_{\alpha\beta}^n \right)}{\left(\sum_{\alpha\beta} \tilde{O}_{\alpha\beta}^n \right)} \quad (4.2)$$

siendo $\Delta \tilde{O}_{\alpha\beta}^n = |\tilde{O}_{\alpha\beta}^n - \tilde{O}_{\alpha\beta}^{n-1}|$

Cuanto más similares sean dos imágenes consecutivas, más pequeña será δ^n . Podemos definir que la parada del algoritmo sea cuando δ^n sea del orden de 10^{-4} (que es aproximadamente el valor que suele adquirir cuando se cumple la condición de la ec. 4.1). En la práctica, usaremos como condición de parada del algoritmo la que se dé antes de las dos.

Aplicando esto a un caso, se ha usado el algoritmo EM sobre los datos D obtenidos al ser sometido el telescopio a una fuente, centrada en el campo de visión, de intensidad 100 fotones/cm², más un ruido aleatorio con valor medio de 30 cuentas/detector (se ha usado el simulador geométrico descrito en 3.4).

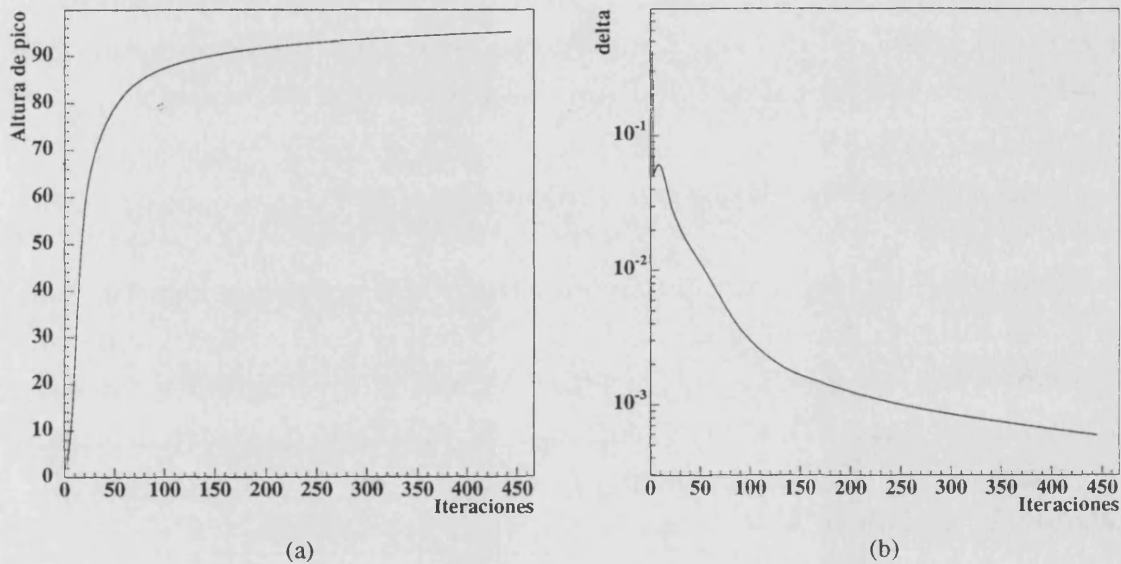


Figura 4.1: Convergencia del algoritmo EM

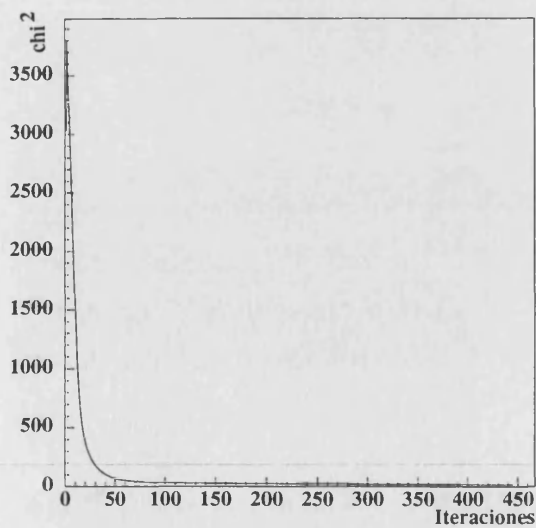


Figura 4.2: Valor de χ^2 .

En la figura 4.1 (a) se muestra la altura del pico que aparece en el píxel central de la imagen reconstruida (la intensidad estimada de la fuente), y en la figura 4.2 (b) el valor de δ^n . El criterio de parada que se ha usado ha sido el definido por la ec. 4.1. Por completitud, se muestra en la fig. 4.2 el valor de χ^2 correspondiente a la estimación de los datos en cada iteración.

El algoritmo se detuvo en la iteración 445. El valor de la estimación de la fuente obtenido es de 95.1 fotones/cm² y el valor de δ^n es $6 \cdot 10^{-4}$. Como es de esperar, por cumplirse la ec. 4.1, y dado que χ^2 viene definido por:

$$\chi^2 = \sum_{ij} \frac{(D_{ij} - \tilde{D}_{ij})^2}{\sigma_{ij}^2} \quad (4.3)$$

el valor final de χ^2 no puede ser mayor que el número de unidades detectoras (100 en nuestro caso), pues cada cociente es menor (o igual) que 1; en efecto, el valor es de 18.4. El tiempo de ejecución fue de 1 minuto y 25 segundos en una Sun Sparc 20 de 120 Megabytes de RAM (sistema operativo Solaris 2.4).

4.2.2 Convergencia del método de máxima entropía

Dado que la solución de máxima entropía que veíamos en la ec. 2.44 necesita ser resuelta por métodos iterativos, y dado que, al contrario que con el algoritmo EM, la convergencia no está asegurada (y si converge, no está asegurado que lo haga a la solución correcta), es necesario que introduzcamos un *test* adicional a los anteriores para estimar la bondad de la solución. Siguiendo a [31], definimos un residuo R^n definido por:

$$R^n = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{\alpha\beta} \left[\frac{\left(\tilde{O}_{\alpha\beta}^n - e^{-1-2\lambda^n \sum_{ij} \Phi_{ij}^{\alpha\beta} \frac{\tilde{D}_{ij}^n - D_{ij}}{\sigma_{ij}^2}} \right)^2}{\tilde{O}_{ij}^{n2}} \right]} \quad (4.4)$$

donde se comparan ambos lados de la ecuación 2.44. Cuanto más cerca se halle \tilde{O}^n de la solución correcta, más pequeño será R^n . De hecho en algunos casos puede resultar más práctico usar la ecuación 4.4 como criterio de parada del algoritmo, imponiendo, por ejemplo, que $R^n \leq 0.1$, tal y como sugieren los autores de [31] (o una cota más estricta).

En cualquier método de iteración que usemos, hemos de imponer (como se dijo en 2.12.2 y como sugieren varios autores) que el χ^2 de la estimación de los datos de la iteración siguiente ($n+1$) sea del orden de los grados de libertad del sistema (100 en nuestro caso), eligiendo el λ^n adecuado para que esto ocurra. En general esto no va a ser posible, sobre todo en las iteraciones iniciales,

y podemos encontrarnos con casos en que, para cualquier λ^n que escojamos, el χ^2 esté incluso dos órdenes de magnitud por encima del número de grados de libertad. Por tanto (y dado que el número de grados de libertad que tenemos no es muy alto -sobre todo comparado con otros telescopios de rayos γ -), en cada iteración elegiremos el λ^n que minimice χ^2 (buscando en un cierto rango de valores de λ^n), bajo la presunción que un χ^2 del orden de, por ejemplo, 20 (como obteníamos para el algoritmo EM en el apartado anterior) al final del proceso se pueda considerar *del orden* del número de grados de libertad.

Estudiemos ahora los diferentes métodos de iteración del método de máxima entropía para hallar la solución de la ecuación 2.44. El primero que se le ocurre a uno es iterar la propia ecuación 2.44, es decir:

$$\tilde{O}_{\alpha\beta}^{n+1} = e^{-1-2\lambda^n \sum_{ij} \Phi_{ij}^{\alpha\beta} \frac{\tilde{D}_{ij}^n - D_{ij}}{\sigma_{ij}^2}} \quad (4.5)$$

$$\text{y } \tilde{D}_{ij}^n = \sum_{\alpha'\beta'} \Phi_{ij}^{\alpha'\beta'} \tilde{O}_{\alpha'\beta'}$$

(hay que tener cuidado cuando $\sigma_{ij}=0$, sustituyéndola, por ejemplo, por el valor medio $\bar{\sigma}_{ij}$, para evitar divisiones por cero).

Lamentablemente, este método no converge en absoluto, como se puede ver en la figura 4.3. Hemos iterado el proceso 445 veces (ignorando el valor de δ^n), para poder compararlo con el resultado obtenido con el algoritmo EM. Por desgracia, el comportamiento era *tan* caótico que la gráfica resultante parecía talmente un encefalograma y era imposible ver nada. Por ello hemos mostrado únicamente las 50 últimas iteraciones que son *totalmente* representativas de todo el proceso. En la fig. 4.3 (a) se muestra la estimación de la intensidad del píxel central de la imagen reconstruida, para la misma fuente celeste que usamos en el apartado anterior para el algoritmo EM. Se puede apreciar que la intensidad estimada oscila alternativamente entre los 0 y los aprox. 100 fotones/cm². En la fig. 4.3 (b) se muestra el valor de χ^2 para la estimación de los datos en cada iteración. Como se ve, rara vez se halla por debajo de 1000, y esto es más cierto para las 10 primeras iteraciones, en que se alcanza fácilmente valores del orden de 10000. La causa de esta inestabilidad es la exponencial, que magnifica pequeñas fluctuaciones en el exponente.

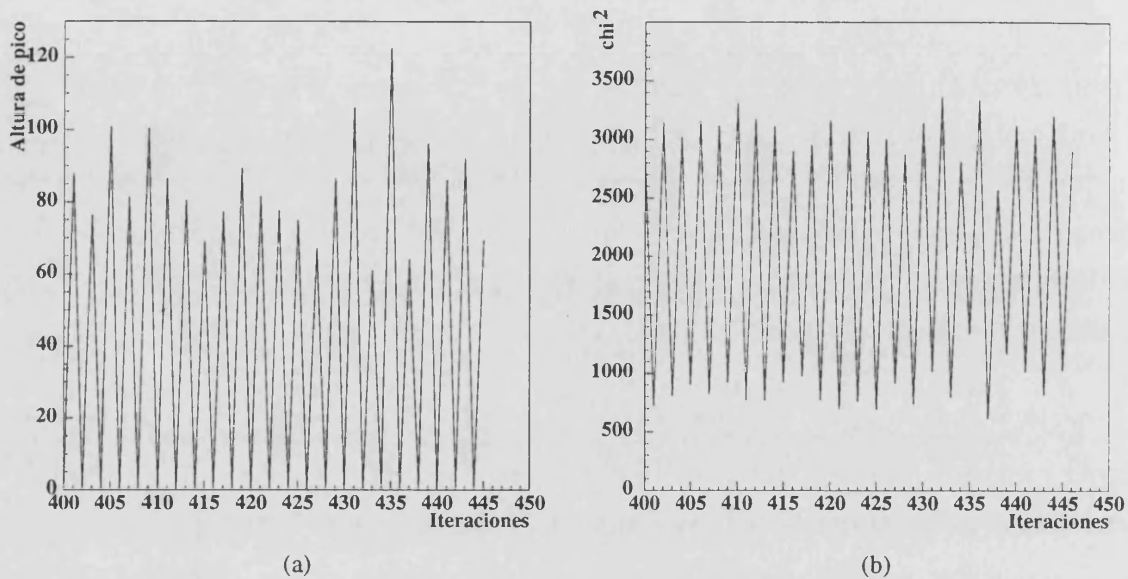


Figura 4.3: Convergencia del método de máxima entropía usando la ec. 4.5

El tiempo de ejecución para las 445 iteraciones, debido a la necesidad de minimizar χ^2 respecto a λ en cada iteración, fue de 4 horas y 15 minutos.

Se puede obtener una pequeña mejoría si usamos el procedimiento descrito por [31], que ilustrábamos en la ec. 2.46, la cual volvemos a poner aquí:

$$\tilde{O}_{\alpha\beta}^{n+1} = (1-\gamma)\tilde{O}_{\alpha\beta}^n + \gamma e^{-1-2\lambda^{\alpha\beta} \sum_j \Phi_{ij}^{\alpha\beta} \frac{(\tilde{D}_{ij}^n - D_{ij})}{\sigma_{ij}^2}} \quad (4.6)$$

donde γ es la "memoria" del algoritmo del resultado en la iteración anterior. Esto suaviza la oscilación de las iteraciones sucesivas. Por decirlo burdamente, el sumar el resultado de la iteración anterior hace que se recuerden los resultados exitosos anteriores, y que la exponencial sirva para "mejorarlos" en la siguiente iteración. El suavizado es mayor cuanto menor sea γ , con lo que la fluctuación disminuirá, pero, por contra, puede llegar a parar de forma efectiva el algoritmo (aun cuando las iteraciones prosigan) si el valor es excesivamente pequeño. En [31] se indica como valor adecuado $\gamma=1/3$. Sin embargo, podemos ver en la figura 4.4 que el comportamiento del algoritmo sigue siendo altamente caótico, y la mejora obtenida es más bien pequeña. De nuevo se muestra, para las 50 últimas iteraciones, la intensidad del píxel central en la imagen reconstruida y la correspondiente χ^2 de cada iteración (fig. 4.4).

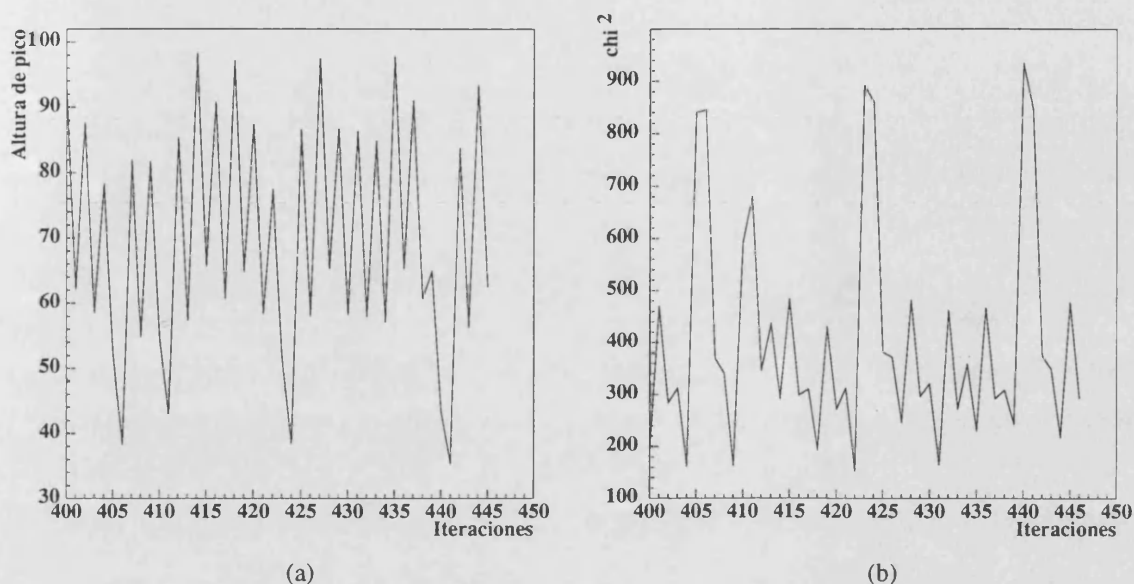


Figura 4.4: Convergencia del método de máxima entropía usando la ec. 4.6

Ahora la fluctuación del algoritmo no es tan grande como en el caso anterior, aunque tampoco es pequeña. El valor de la intensidad se halla ahora comprendido principalmente entre 60 y 100 fotones/cm², con algunos valores espúreos llegando hasta los 40 fotones/cm². El χ^2 es bastante menor, y se centra en torno a 300. Por otro lado, aunque no lo mostremos en ninguna gráfica, el valor del residuo R^n (cuyo comportamiento en el caso anterior era extremadamente errático) se halla comprendido entre 0.4 y 0.05. El tiempo de ejecución es algo mayor que en el caso anterior, pero comparable: 4 horas 40 minutos. Es en este caso, así como en el anterior, donde puede resultar una buena idea usar R^n como criterio de parada, con la esperanza de que, en alguna iteración, la fluctuación del valor de R^n sea menor que un cierto valor, y obtengamos una buena estimación de la imagen. No obstante, sería más cómodo poder usar algún algoritmo que converja de forma razonable a la solución de la ec. 2.44.

Basándonos en la sugerencia dada en [29] de promediar las sucesivas iteraciones para obtener convergencia (si bien en [29] no se explica cómo debe hacerse), hemos desarrollado un nuevo método de "suavizado" para mejorar la convergencia. Supongamos que, tomando como *input* un cierto \tilde{O}^{n-1}_{bis} (llamémoslo así por ahora), usamos la ecuación 4.5 tal cual para obtener \tilde{O}^n . Es decir:

$$\tilde{O}^n = e^{-1-2\lambda^{n-1}\sum\Phi\frac{\tilde{D}^{n-1}(\tilde{O}_{bis}^{n-1})-D}{\sigma^2}} \quad (4.7)$$

donde hemos omitido los índices de píxel y detector para mayor claridad. A partir de este \tilde{O}^n generamos un \tilde{O}_{bis}^n según:

$$\tilde{O}_{bis}^n = \frac{\tilde{O}^n + \tilde{O}^{n-1} + \dots + \tilde{O}^1}{n} \quad (4.8)$$

Es decir, nuestro nuevo *input* al algoritmo será la media de todos los *outputs* anteriores de la ec. 4.5 (no consideramos \tilde{O}^0 que no es un resultado del algoritmo, sino que es el campo inicial -y de hecho el primer *input* del algoritmo- y cuyos valores son todos 1). Si iteramos el algoritmo, obtenemos a partir de este valor un nuevo resultado \tilde{O}^{n+1} , que viene dado por la ec. 4.8 y es:

$$\begin{aligned} \tilde{O}_{bis}^{n+1} &= \frac{\tilde{O}^{n+1} + \tilde{O}^n + \dots + \tilde{O}^1}{n+1} = \\ &= \frac{\tilde{O}^{n+1}}{n+1} + \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\tilde{O}^n + \tilde{O}^{n-1} + \dots + \tilde{O}^1}{n} = \\ &= \frac{1}{n+1} \tilde{O}^{n+1} + \frac{n}{n+1} \tilde{O}_{bis}^n \end{aligned} \quad (4.9)$$

Sustituyamos ahora \tilde{O} por su valor, según la ecuación 4.7, y renombramos \tilde{O}_{bis} como \tilde{O} , y lo que obtenemos es (escribiéndolo de una forma análoga a la ec. 4.6) la siguiente ecuación iterativa:

$$\tilde{O}_{\alpha\beta}^{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right) \tilde{O}_{\alpha\beta}^n + \left(\frac{1}{n+1}\right) e^{-1-2\lambda^n \sum_{ij} \Phi_{ij}^{\alpha\beta} \frac{(\tilde{D}_{ij}^n - D_{ij})}{\sigma_{ij}^2}} \quad (4.10)$$

Por así decirlo, en esta ecuación el factor de "suavizado" γ de la ecuación 4.6 no es constante, al contrario de lo sugerido por Willingale [31], sino que decrece con el número de iteraciones, siendo inicialmente 1 (para obtener \tilde{O}^1 , $n=0$ -ver ec. 4.10-). Es decir, inicialmente se da más importancia al resultado en curso del algoritmo que a los anteriores, y según crece el número de iteraciones, esta situación se va invirtiendo (podríamos decir que la "memoria" del algoritmo aumenta con la experiencia).

Como podemos ver en la figura 4.5, la capacidad de convergencia se ha incrementado **notablemente** respecto al caso anterior.

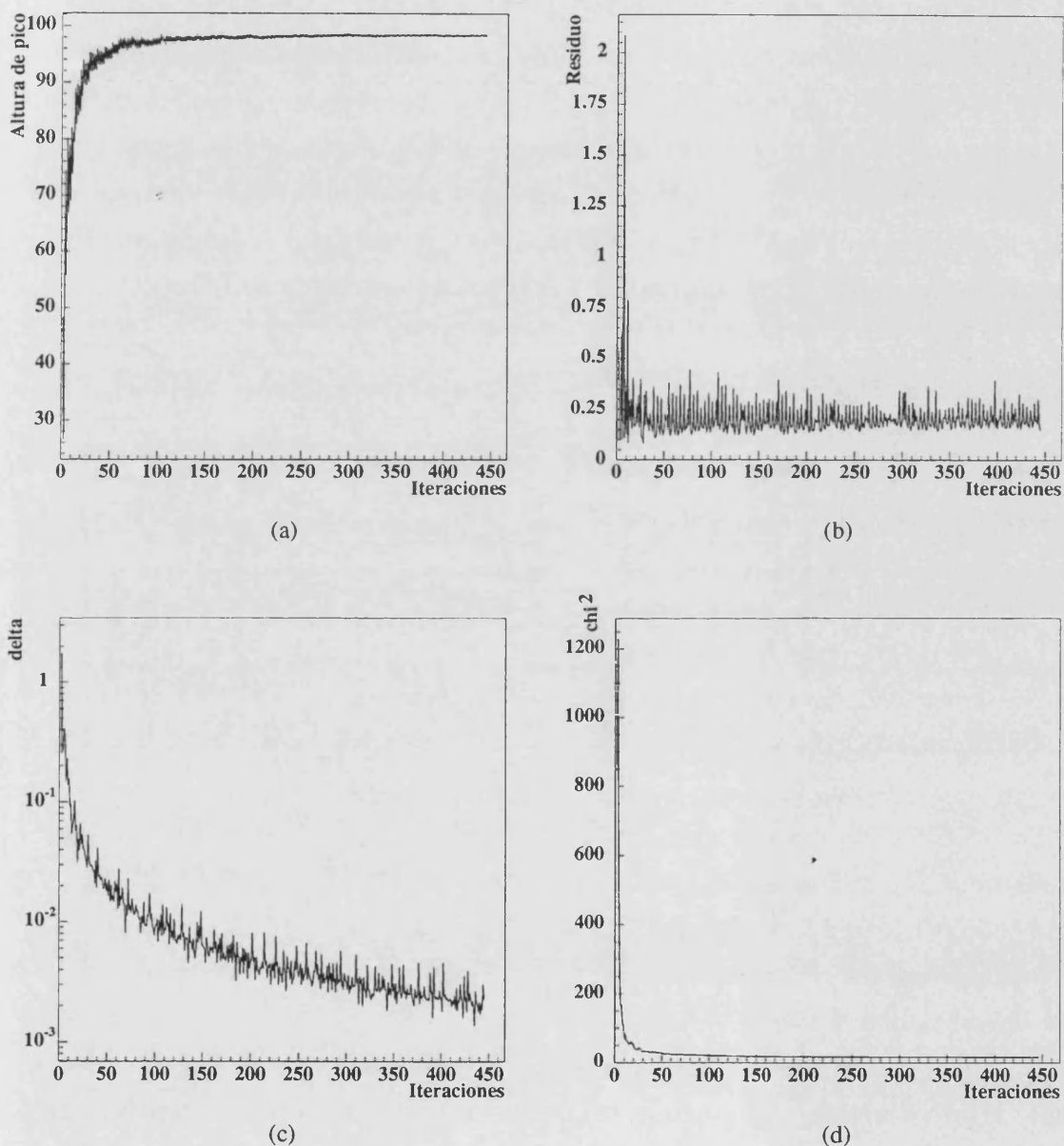


Figura 4.5: Convergencia del método de máxima entropía usando la ec. 4.10

¡Ahora sí que se puede hablar de convergencia! si bien existen todavía algunas pequeñas fluctuaciones. La intensidad de la fuente (fig. 4.5 (a)) reconstruida es de 98.3 fotones/cm². El valor del residuo R^n (fig. 4.5 (b)) se centra en torno a 0.2. La δ^n que definíamos en la ec. 4.2 (fig. 4.5 (c)) y que nos da una medida de la convergencia, es de $2 \cdot 10^{-3}$. Y el valor de χ^2 alcanzado (fig. 4.5 (d))

es de 15.8. El tiempo de ejecución del programa es de nuevo de 4 horas y 40 minutos. Como se ve, este es un muy buen resultado, comparable al obtenido con el algoritmo EM. De todas formas el valor del residuo R^n (que nos indica cuán cerca de la solución de la ecuación 2.44 estamos), es algo alto, y esto nos indica que, aunque cerca, la solución obtenida no es todavía la solución correcta de la ec. 2.44. Obsérvese que en la fig. 4.5 (a) nos hemos estado centrando tan sólo en el valor de un único píxel del campo celeste reconstruido (el central, donde se halla nuestra fuente). Pero la solución en realidad reconstruye todo el campo celeste a la vez, y aunque la intensidad de ese píxel sea más correcta, tal vez no lo sea el resto de la imagen y aparezcan estructuras falsas.

Antes de proseguir, estudiemos el comportamiento de λ^n a lo largo de cada iteración. En la fig. 4.6 se representa el valor de λ^n que minimiza χ^2 en cada iteración. El rango de búsqueda de λ^n en todos los casos explicados ha sido de 0 a 1000 (suficientemente generoso). Como se ve, en este caso, el valor de λ^n aumenta, digamos que linealmente con el número de iteraciones, pero también aumentan las fluctuaciones. En la fig. 4.6 se muestra también un ajuste lineal de λ^n . Uno puede estar tentado a usar ese ajuste lineal como los valores de λ^n en cada iteración, sin tener que hacer una búsqueda del mismo. Por desgracia, este método falla estrepitosamente, debido a que la exponencial magnifica las pequeñas variaciones del parámetro λ^n (sobre todo en las primeras iteraciones).

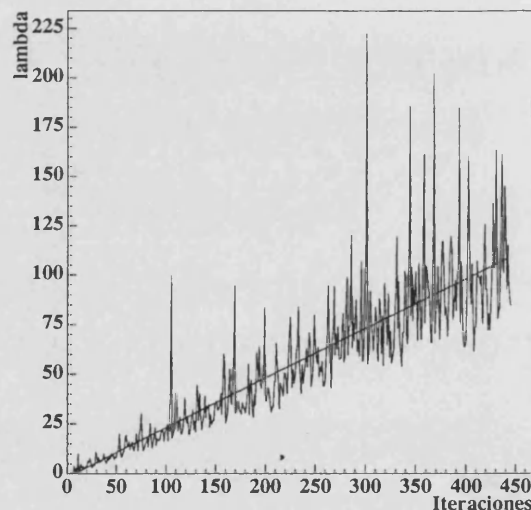
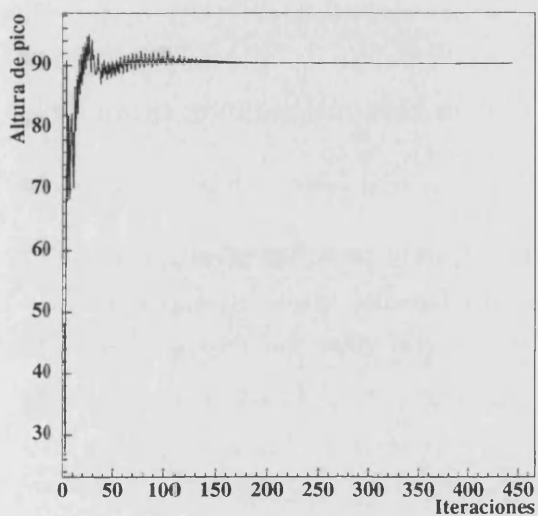


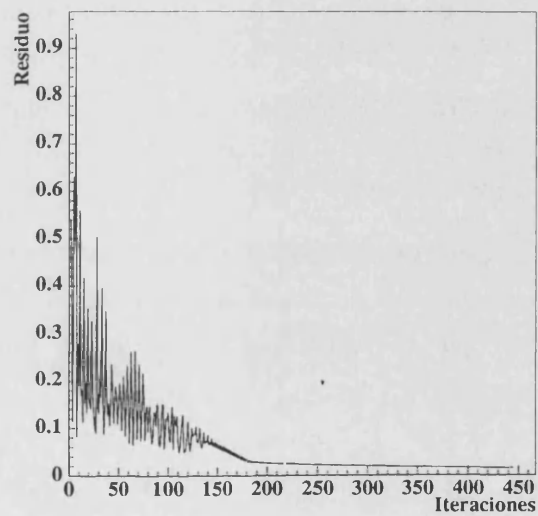
Figura 4.6: λ^n que minimiza χ^2 en cada iteración, usando la ec. 4.10.

Por contra, podemos ver en la fig. 4.5 (a) que a partir de la iteración 200, el algoritmo prácticamente ha convergido, y las brutales oscilaciones de λ^n que podemos observar a partir de 200 en la fig. 4.6, ¡no afectan a la convergencia! Es decir, a más iteraciones, más insensible a λ^n se vuelve el algoritmo. Esto nos sugiere un método para aumentar la velocidad del algoritmo, y es que, a partir

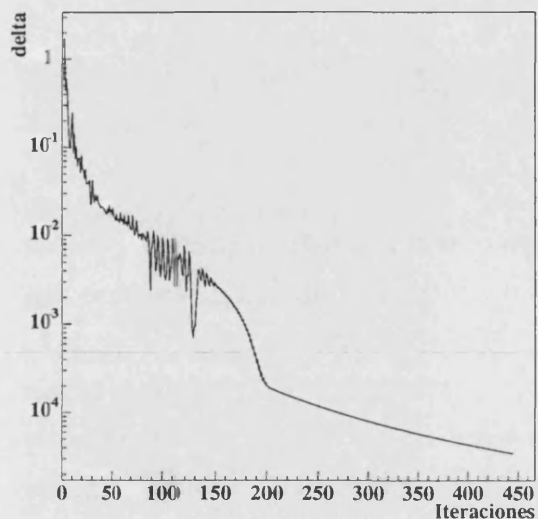
de cierto momento en que el algoritmo se halle más o menos cerca de la convergencia, podemos fijar el valor de λ^n . Por ejemplo, a partir de la iteración 60, podemos ver en la fig. 4.5 (a) que el valor de la intensidad se halla bastante cerca de su valor final. También vemos en la fig. 4.6 que, hasta la iteración 60, el valor de λ^n se halla comprendido entre 0 y 10. Pero por hallarse mayormente centrado en 5 vamos a hacer el experimento de permitir que λ^n oscile sólo entre 0 y 5, y a partir de la iteración 60, fijar su valor a 5. Los resultados los podemos ver en la figura 4.7:



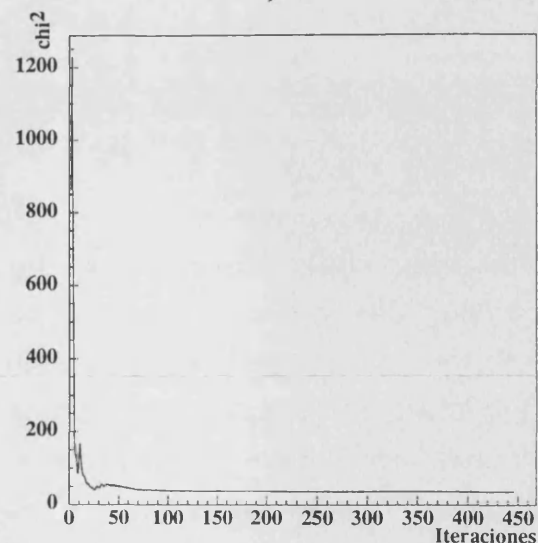
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.7: Convergencia del método de máxima entropía usando la ec. 4.10 y limitando λ^n entre 0 y 5

Como se ve en la fig. 4.7 (a), el algoritmo oscila un poco más ahora al principio (debido a que forzamos a λ^n a oscilar entre 0 y 5: esto no ocurriría si oscilara entre 0 y 10; ¡pero tarda la mitad!). De todas formas, la convergencia es mejor; el valor final de δ^n es ahora de ¡ $3 \cdot 10^{-5}$! En contra de lo que pudiera parecer, el limitar λ^n entre 0 y 5 para las 60 primeras iteraciones (y fijarlo a 5 para las siguientes) ha mejorado la convergencia enormemente. Pero ¿converge a la solución requerida? Ahora, por desgracia, la intensidad reconstruida de la fuente es de 90.0 fotones/cm², lo que puede parecer un empeoramiento. ¡Sin embargo no es así! La siguiente agradable e inesperada sorpresa con la que nos topamos es que el valor final del residuo R^n es de ¡¡0.015!! ¡Un orden de magnitud por debajo del caso anterior! Es decir, a pesar de que la intensidad de la fuente esté ahora subestimada, esta solución está mucho más cerca de la solución de la ec. 2.44, y es por tanto más **correcta**.

Y sin embargo, no debería sorprendernos que esta solución más correcta no se acerque tanto a la intensidad real de la fuente, pues si usáramos la fuente celeste real como estimación de nuestros parámetros (¡una excelente estimación, de hecho!) nos encontraríamos con que ésta **NO** es solución de la ecuación 2.44. En efecto, si en ausencia de ruido introduzco el mapa celeste real $O_{\alpha\beta}$ como estimación $\tilde{O}_{\alpha\beta}$ del mismo, en la ecuación 2.44, obtengo:

$$\begin{aligned} \text{si } \tilde{O}_{\alpha\beta} &= O_{\alpha\beta} = \text{fuente real} \\ &\Rightarrow \tilde{D}_{ij} = D_{ij} \\ &\Rightarrow O_{\alpha\beta} = e^{-1 - 2\lambda \sum_{ij} \Phi_{ij}^{\alpha\beta} \frac{\tilde{D}_{ij} - D_{ij}}{\sigma_{ij}^2}} \\ &= e^{-1} = 0.368 \quad \forall \alpha\beta!! \end{aligned}$$

Es decir, cualquier estimación del mapa que reproduzca *exactamente* las cuentas medidas en el plano detector, no es solución matemática de la ecuación 2.44. Ni tampoco lo pretende, pues en el caso real (con ruido), una reconstrucción que ajustara *exactamente* los datos ($\chi^2=0$) introduciría estructuras falsas en el mapa, provenientes tan sólo del ruido de los datos; el método de máxima entropía protege contra esto (o lo intenta), evitando que sea imposible un ajuste al 100% de los datos. Precisamente, el hecho de fijar λ^n en un momento dado hace que no podamos acercarnos mucho a valores de χ^2 cercanos a cero; por ello

obtenemos un valor menor de R^n . Efectivamente, tenemos que el valor de χ^2 es ahora 36.3, un valor mayor que en el caso anterior. El tiempo de ejecución, como era de esperar, se ha reducido a 38 minutos (el reducir el rango de búsqueda de λ^n acelera el algoritmo); otro resultado a favor de fijar en un momento dado el valor de λ^n .

Como conclusión preliminar, y a la vista de los resultados de los apartados 4.2.1 y 4.2.2, podemos decir que EM reconstruye mejor las intensidades reales que la solución de máxima entropía, dada por la solución de la ec. 2.44.

No obstante, no conviene fijar λ^n demasiado pronto. Estudiemos los siguientes resultados; si repetimos la operación fijando el valor de λ^n a partir de la iteración 40, obtenemos:

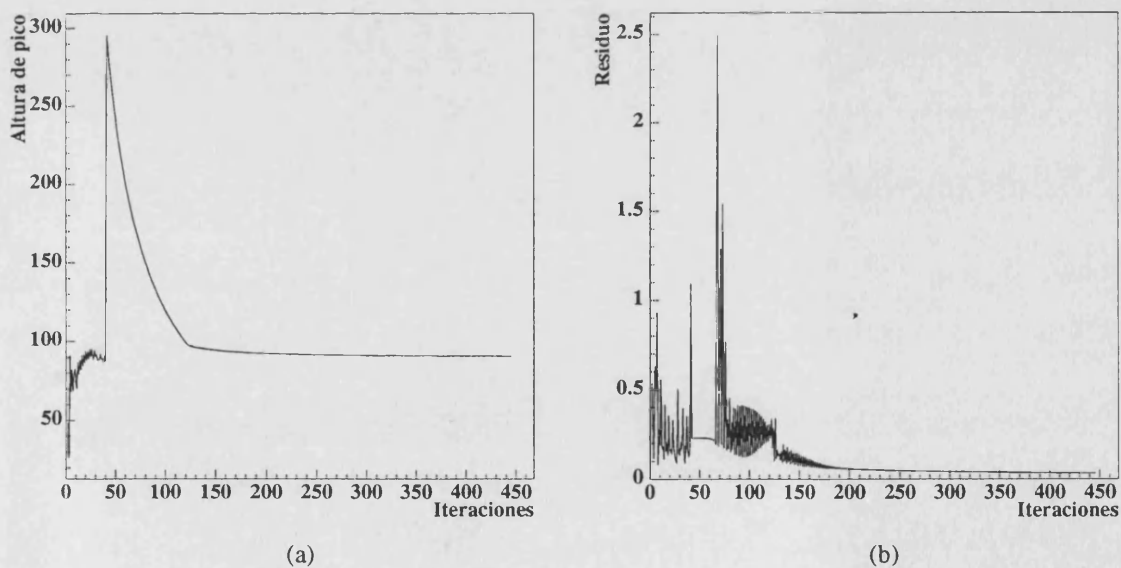


Figura 4.8: Ídem que la fig. 4.7, pero fijando el valor de λ^n a 5 a partir de la iteración 40

Vemos que a partir de la iteración 40 la convergencia se altera brutalmente, si bien vuelve a recuperarse poco a poco hasta llegar a la iteración 120 donde vuelve a converger suavemente; la δ^n al final del proceso es de $2.5 \cdot 10^{-5}$. La intensidad reconstruida de la fuente es ahora de 90.6 fotones/cm², y el residuo final es de 0.032 (algo mayor). La χ^2 es ahora de 36.4, prácticamente la misma que el caso anterior. El tiempo de ejecución es de 25 minutos.

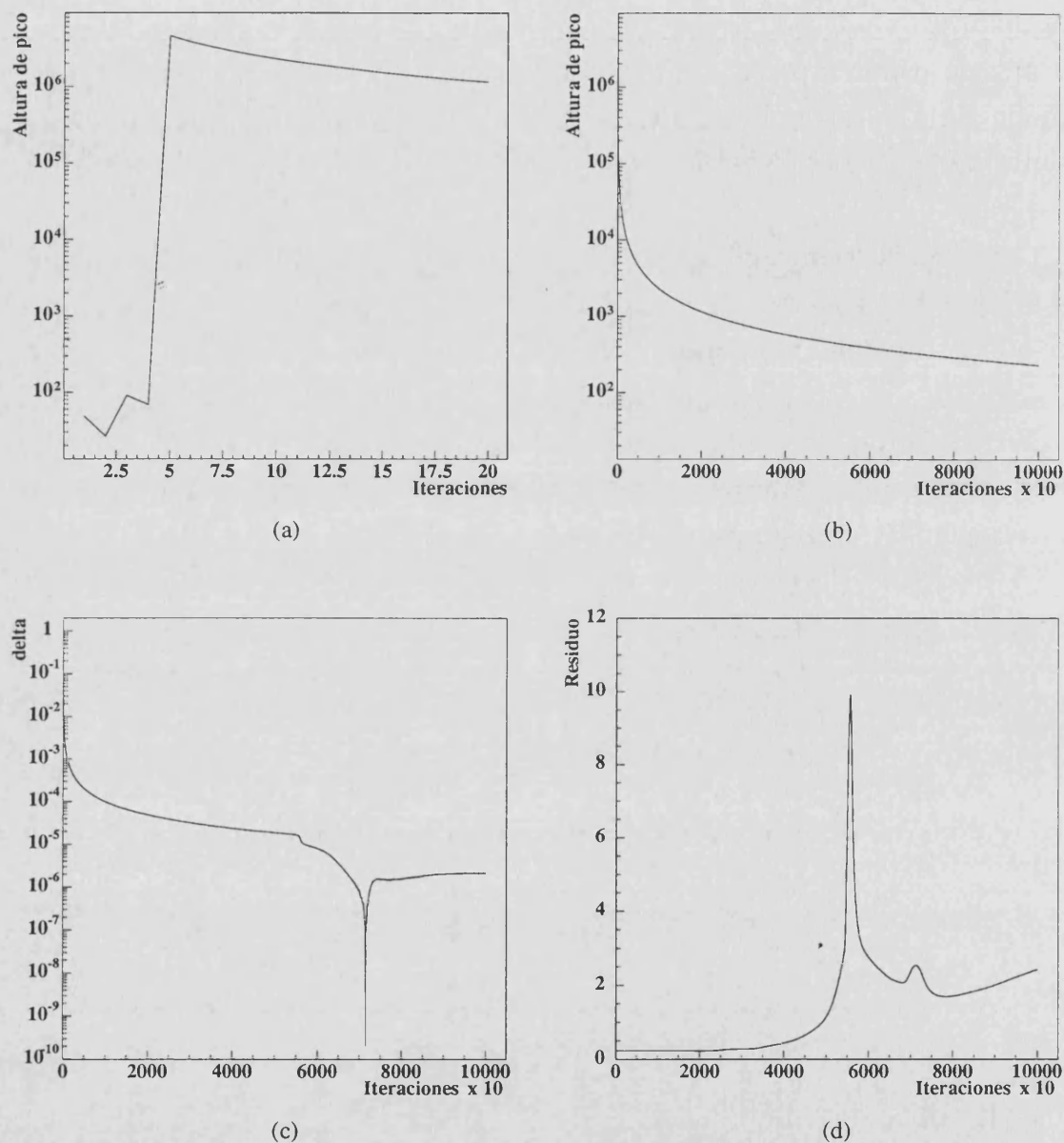


Figura 4.9: Ídem que la fig. 4.7, pero fijando el valor de λ^n a partir de la iteración 5

Cuanto más pronto fijemos el valor de λ^n , tanto peor será la posterior convergencia. De hecho es crucial que en las primeras iteraciones el parámetro λ^n sea aquél que minimice χ^2 . En la figura 4.9 hemos repetido el proceso, pero esta vez hemos fijado el valor de λ^n a partir de la iteración 5. En este caso hemos iterado el proceso 10^5 veces. La fig. 4.9 (a) es una ampliación de la fig. 4.9 (b) de las 20 primeras iteraciones. Como se ve, a partir de la iteración 5 en que hemos fijado el valor de λ^n , se produce una alteración brutal en el valor de

la estimación de la intensidad de la fuente, de 5 órdenes de magnitud. Poco a poco éste va disminuyendo, pero en la iteración 10^5 , en que detuvimos el proceso (después de 5 horas y media de tiempo de cálculo), el valor era todavía de 230 fotones/cm². El proceso de convergencia es tan lento, que de iteración a iteración la imagen apenas cambia, como se ve por lo pequeño del valor de la δ^n en la fig. 4.9 (c), que se halla siempre muy cercano a cero ($2.1 \cdot 10^{-6}$ es el valor final, aunque es menor de 10^{-3} desde la iteración 200 aprox.). **Sin embargo**, obsérvese que ahora el algoritmo **no** converge a la solución de la ec. 2.44, como ocurría en el caso anterior, si no al contrario; diverge de ella, como se desprende del extraño comportamiento de R^n que se ve en la fig. 4.9 (d), El valor de R^n al acabar el proceso era de 2.4 y creciendo. El de χ^2 también era muy alto, y era de 3327 en el momento en que detuvimos el proceso.

Nosotros elegiremos un compromiso entre **tiempo** de ejecución y **resultados**, y calcularemos la solución de la ec. 2.44 usando el método iterativo descrito en la ec. 4.10, y buscando λ^n entre 0 y 5 para las 60 primeras iteraciones y fijándolo a partir de la 60. Esos valores se hallan, para nuestro caso, en el límite del *buen comportamiento*. Variar λ^n entre 0 y 10 para esas 60 primeras iteraciones no conlleva casi diferencia en el resultado final a hacerlo entre 0 y 5. Pero rangos menores ya alteran demasiado el resultado de las iteraciones iniciales. De igual forma, fijar su valor en iteraciones posteriores a 60 no lleva en absoluto a importantes mejoras en el resultado final (y sí lo deceleran bastante) mientras que ya sabemos qué pasa si lo fijamos antes.

4.3 Reconstrucción de una fuente puntual

4.3.1 Estudio de los simuladores

Una vez fijados criterios sobre cómo reconstruir imágenes, vamos a pasar a obtenerlas usando los diferentes métodos explicados. Para empezar, haremos un estudio sobre el caso más sencillo; la reconstrucción de una fuente puntual (de intensidad 100 fotones/cm²) en el centro del campo de visión, y en ausencia de ruido (fig. 4.10). Someteremos los dos simuladores descritos en el apartado 3.4 a esta fuente, para compararlos entre sí. A partir de ello estudiaremos si

podemos limitarnos a usar tan sólo el simulador geométrico (mucho más rápido) para desarrollar el software y realizar el estudio de las características de los distintos métodos de reconstrucción considerados.

El resultado lo podemos ver en la figura 4.11: en la fig. 4.11 (a) se muestra la señal detectada en el plano detector de LEGRI al usar el simulador geométrico, y en la fig. 4.11 (b) la señal detectada en el Monte Carlo realizado con GEANT-3, lanzando fotones de una energía de 100 keV, ya que el rango energético cubierto por LEGRI es de 20-100 keV:

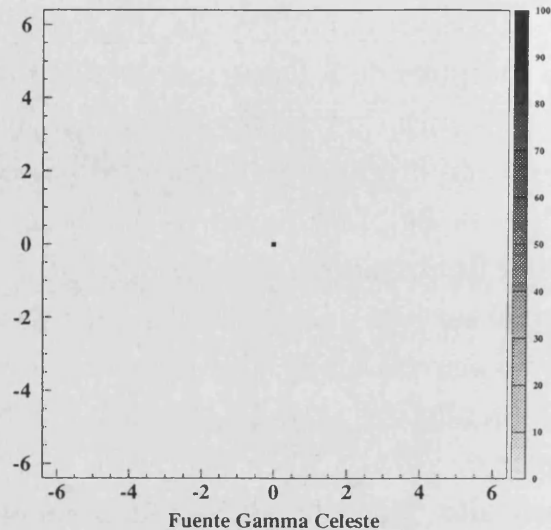


Figura 4.10: Fuente de 100 fotones/cm² en el centro del campo de visión.

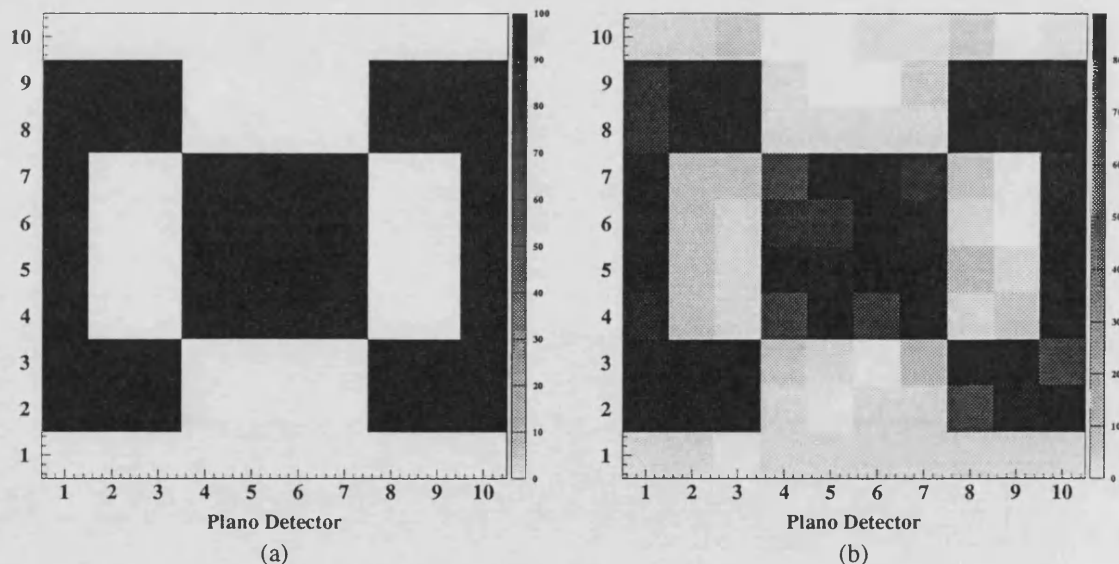


Figura 4.11: Detección de la fig. 4.10 usando (a) el simulador geométrico y (b) el Monte Carlo

Como se ve, el resultado que se obtiene en ambos casos es similar. La diferencia estriba en que el resultado obtenido con el método de Monte Carlo tiene fluctuaciones, debido a la naturaleza aleatoria del proceso de detección (si bien la fluctuación será menor conforme aumente el número de cuentas), y

en que la cantidad de cuentas medida es menor (alrededor de 80 cuentas/cm² en promedio frente a las 100 exactas del simulador geométrico) debido a que la eficiencia de los detectores que se obtiene en el Monte Carlo no es de 1 (en el simulador geométrico sí se ha tomado un valor de 1). Los fotones detectados en unidades del plano detector, que en principio no debían detectar señal al hallarse "a la sombra" de los tungstenos, son debidos a fotones dispersados por el material pasivo del telescopio, y funcionan como un ruido adicional.

Tanto la fluctuación estadística como la eficiencia menor que 1 son fenómenos fáciles de "implementar" en el simulador geométrico, y podremos por tanto prescindir de usar el método de Monte Carlo. De todas formas, aunque sí introduciremos la fluctuación estadística, en todo el capítulo 4 vamos a continuar usando una eficiencia de detección igual a 1, ya que el usar uno u otro valor de la eficiencia tan sólo introduce un factor de escala, y la eficiencia que nos da el modelo de Monte Carlo tampoco no coincide con la real de LEGRI (debido a la electrónica). Adelantamos ahora que en el capítulo 5 realizaremos simulaciones usando las eficiencias reales, medidas y no simuladas, que nos darán un resultado más realista. Pero lo único pretendido en este capítulo es el análisis del comportamiento de los métodos de reconstrucción en sí.

4.3.2 Reconstrucción

Las imágenes detectadas, que se muestran en la fig. 4.11, son el punto de partida a partir del cual hay que reconstruir la imagen, que debe ser lo más parecida posible a la imagen fuente (fig. 4.10). Usando los métodos de reconstrucción descritos, y aplicándolos a esas dos imágenes detectadas, obtenemos las reconstrucciones de la figura 4.12. En la columna (a) de la izquierda tenemos la reconstrucción obtenida a partir de la imagen detectada por el simulador geométrico; en la columna (b) de la derecha, la reconstrucción a partir de la imagen obtenida por el modelo de Monte Carlo. De arriba a abajo, el método de reconstrucción ha sido, respectivamente, Correlación Balanceada de Muestreo Fino (CBMF), decodificación δ , máxima entropía y el algoritmo EM (enlazando momentáneamente con el apartado 4.2, el tiempo de ejecución de los programas de reconstrucción por CBMF y decodificación δ apenas llega a las 2 décimas de segundo).

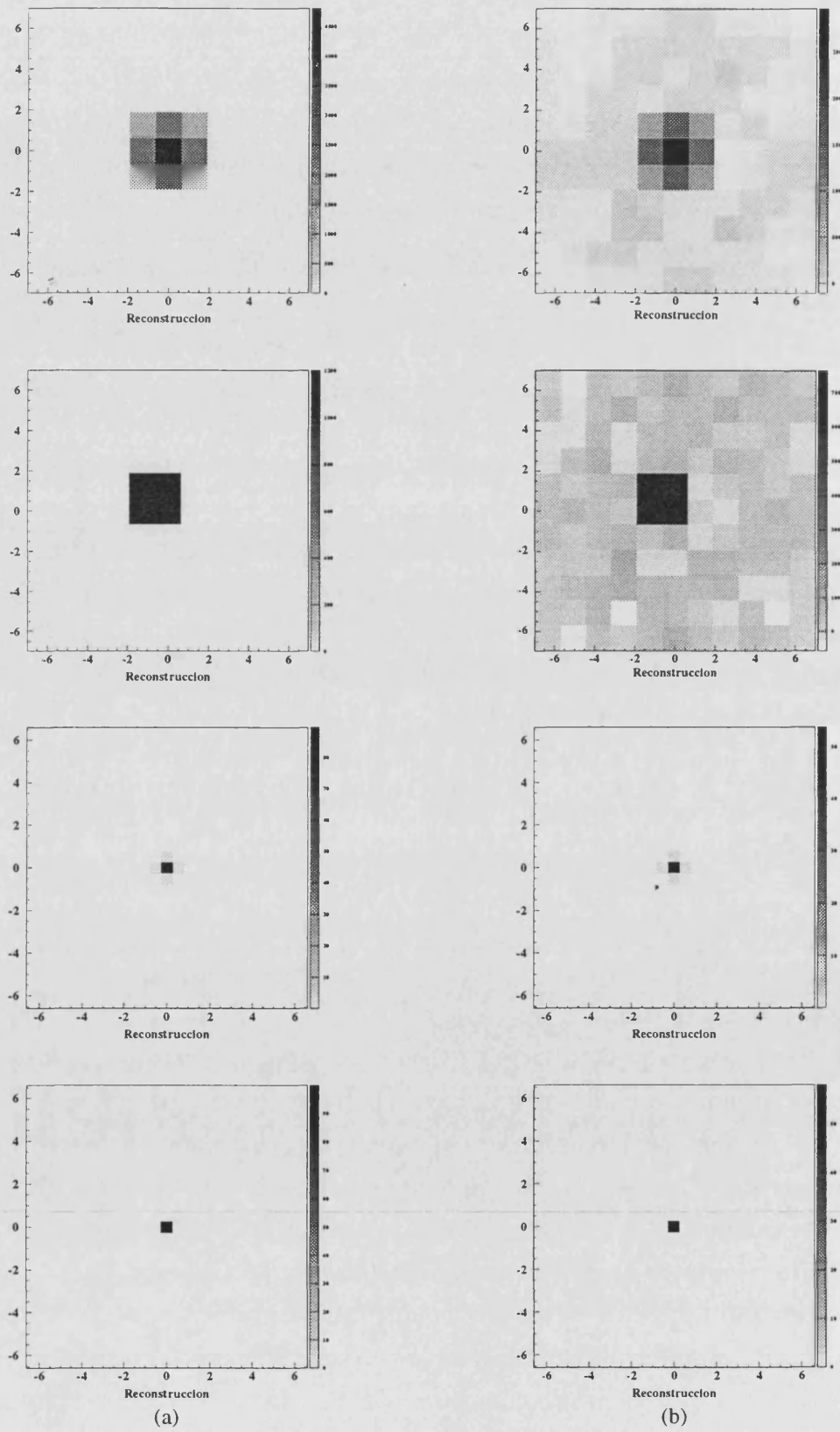


Figura 4.12: Reconstrucciones de las imágenes detectadas en la fig. 4.11

El primer punto que cabe destacar es que, usando decodificación δ , la imagen reconstruida no sale centrada en el campo de visión, sino desplazada (hacia arriba a la izquierda en este caso). Esto es debido, como dijimos en el apartado 2.9.3, a que la subdivisión no nula en cada elemento de la matriz G (fig. 2.31) no está centrada; en nuestro caso es imposible, porque no podemos subdividir los elementos de la máscara un número impar de veces de tal forma que haya una subdivisión central, sino tan sólo 2x2 veces. Eligiendo una subdivisión no nula diferente (la misma para todos los elementos de G) obtenemos una reconstrucción diferente (véase figura 4.13), donde la subdivisión no nula elegida es: (a) $\begin{bmatrix} 1 & \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1 & \rightarrow & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & \rightarrow & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y (d) $\begin{bmatrix} 1 & \rightarrow & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (esto es para el caso de un agujero; para un elemento opaco, cámbiese 1 por -1).

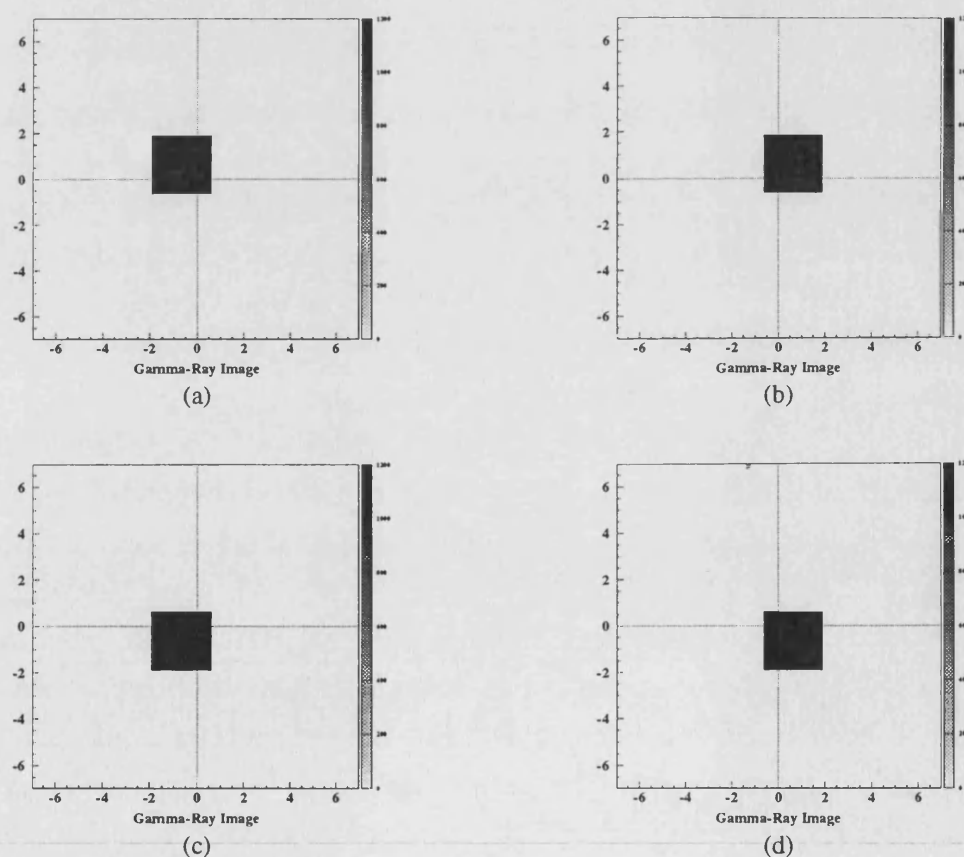


Figura 4.13: Variaciones de decodificación δ para la imagen detectada en la fig. 4.11 (a)

Estas variaciones de decodificación δ se han aplicado a la imagen detectada con el simulador geométrico, y por supuesto, la primera imagen coincide con la segunda de la columna (a) de la fig. 4.12. Por la forma de la ecuación 3.1,

que nos da la reconstrucción usando la correlación, y por las definiciones de las matrices G para CBMF y decodificación δ que vimos en la fig. 2.31, podemos darnos cuenta también de que CBMF no es otra cosa que la suma de todas las posibles elecciones de decodificación δ que podemos hacer, y en efecto, si sumamos entre sí las imágenes de la fig. 4.13, obtenemos la figura 4.14.

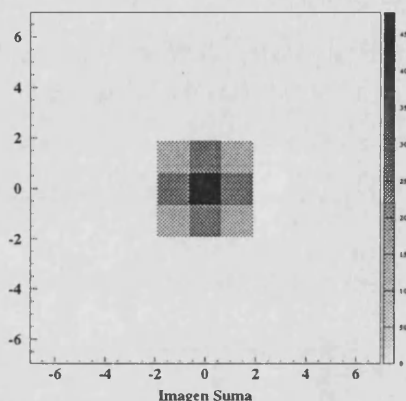


Figura 4.14: Suma de las imágenes de la fig. 4.13

que es idéntica a la imagen que obteníamos con CBMF (fig 4.12 (a), primera imagen). Es decir, podemos pasar de una imagen obtenida con decodificación δ a la equivalente de CBMF de forma trivial (y también viceversa, aunque no tan trivialmente), pues son equivalentes.

El siguiente punto en que nos vamos a fijar es en la intensidad de la fuente reconstruida. Para las imágenes de la fig. 4.12 (a) (las obtenidas a partir del simulador geométrico), las intensidades reconstruidas son: para CBMF, en el píxel central, 4800 fotones/cm² (=100 fotones/cm² * 48, pues hay 48 unos en la matriz G), para decodificación δ 1200 fotones/cm² (=100 * 12), para máxima entropía 89.73 fotones/cm² y para el algoritmo EM 99.99 fotones/cm². En el caso de CBMF y decodificación δ vemos que la imagen está multiplicada por un factor, que es el número de unos que tiene la matriz de reconstrucción ($N_U = 12$ para decodificación δ y 48 para CBMF en nuestro caso), como dijimos en el apartado 2.9, y basta con dividir *a posteriori* por el mismo para obtener una estimación más real de las intensidades. En realidad, aunque por claridad de exposición no se dijo en el apartado 2.9, esto se puede hacer implícitamente, incluyendo ese factor en G . Es decir, cada 1 ó -1 de la matriz de reconstrucción lo podemos sustituir por $1/N_U$ y $-1/N_U$ (con lo que, en realidad, sí es posible

obtener el caso "ideal" de la ec. 2.21). Las imágenes que se muestren en los sucesivos con estos dos métodos habrán sido ya corregidas con este factor. En cuanto a los otros dos, podemos ver claramente que el algoritmo EM reconstruye la intensidad mejor que el método de máxima entropía.

Para las imágenes de la fig. 4.12 (b) (las obtenidas a partir del modelo de Monte Carlo), las intensidades reconstruidas son: 2966 fotones/cm² para CBMF (qué dividido entre 48 nos da 61.8), 762 fotones/cm² para decodificación δ (que dividido entre 12 nos da 63.5), 55.6 fotones/cm² para máxima entropía y 57 fotones/cm² para el algoritmo EM. Vemos claramente que el principal efecto de la eficiencia menor que 1 que se obtiene en el Monte Carlo es un cambio de escala; es decir, es como si detectáramos una fuente de intensidad menor. Esto será fácilmente corregible, dividiendo por la eficiencia la señal reconstruida (o incluyéndolo en la matriz G , de forma análoga a lo que explicábamos en el párrafo anterior). En cuanto a máxima entropía y el algoritmo EM también se corregirá fácilmente incluyendo la eficiencia en la matriz Φ .

El otro efecto que se observa es que la fluctuación estadística empeora la imagen en los métodos por correlación (que son métodos analíticos que *no* consideran tal fluctuación). El fondo de la imagen (donde no hay fuente) presenta un ruido mayor del que se observa en los métodos de maximización (si bien esto es *en parte* debido al menor tamaño de píxel que hemos elegido en estos últimos), y que oscila entre -110 y 166 para CBMF y entre -57 y 85 para decodificación δ ; es decir, tenemos píxeles con intensidades negativas, debido a que la fluctuación estadística no permite que se cancelen entre sí los 1 con los -1 en la matriz G de reconstrucción. En los métodos basados en la correlación, el tamaño de píxel está fijado, como indicábamos en el apartado 2.5. Para correlación balanceada, el tamaño del píxel viene dado por la resolución nominal del telescopio ($\Delta\alpha \times \Delta\alpha$, con $\Delta\alpha = \arctg(c/f) = 2.54^\circ$, siendo c el tamaño de un elemento de la máscara y f la distancia máscara-plano detector). Para CBMF y decodificación δ , al subdividir la máscara, también se subdivide el tamaño del píxel (aunque la resolución, como ya dijimos en 2.9.2 y 2.9.3, sigue siendo la misma). En nuestro caso, en que dividimos por la mitad, el tamaño de píxel será $(\Delta\alpha/2) \times (\Delta\alpha/2)$. En cambio, los métodos de maximización no tienen tamaño de píxel definido y puede, en principio, ser tan pequeño como

queramos. Decíamos en el párrafo anterior que el menor tamaño del píxel, en parte, disminuye el nivel de ruido en el resto de la imagen, porque las cuentas de ruido asignadas a una región del cielo se reparten, como en un histograma, en "canales" más pequeños, con lo que tocan menos cuentas a cada canal (a más píxeles en la misma zona, el ruido reconstruido se reparte, y menos cuentas de ruido salen en cada píxel). No obstante, el ruido *absoluto* en la imagen reconstruida es ciertamente menor. Si reconstruimos la imagen con el mismo número de píxeles que tienen las imágenes obtenidas con los métodos basados en la correlación (11x11), obtenemos que el ruido en la imagen del fondo oscila entre 0.004 y 0.75 para máxima entropía, y entre $8 \cdot 10^{-4}$ y 1.25 para el algoritmo EM. Desde luego mucho menor, y **no** negativo.

El hacer que el tamaño de píxel sea tan pequeño como queramos en los métodos de maximización permite también que la fuente reconstruida en la fig. 4.12 sea tan "puntual" como queramos, permitiéndonos que se parezca más a la fuente real (fig. 4.10). Pero no nos engañemos. Esto es debido a que la fuente se halla situada de tal forma que la sombra que proyecta coincide con la posición de los detectores y podemos verla bien. Si la sombra proyectada no coincide bien con las unidades del plano detector, la reconstrucción no será puntual, por muy pequeño que sea el tamaño de píxel, como vamos a ver a continuación. Esto nos va a imponer un límite práctico al tamaño del píxel.

4.4 Movimiento de la fuente

Vamos a ver a continuación el efecto que tiene el mover la fuente respecto del centro del campo de visión, de tal forma que la sombra que proyecte no coincida exactamente con la posición de las unidades detectoras. La anterior fuente de 100 fotones/cm² en ausencia de ruido la vamos a desplazar de $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ a $(\alpha, \beta) = (1.27, 1.27)$, en que la sombra que proyecte volverá a coincidir con la posición de las unidades detectoras, pasando por las posiciones intermedias (0.32, 0.32), (0.64, 0.64) y (0.95, 0.95), como vemos en la figura 4.15. Se muestran los resultados para CBMF, máxima entropía y el algoritmo EM. No se muestra el caso $(\alpha, \beta) = (0, 0)$, pues puede verse en la fig. 4.12. Se ha usado el simulador geométrico.

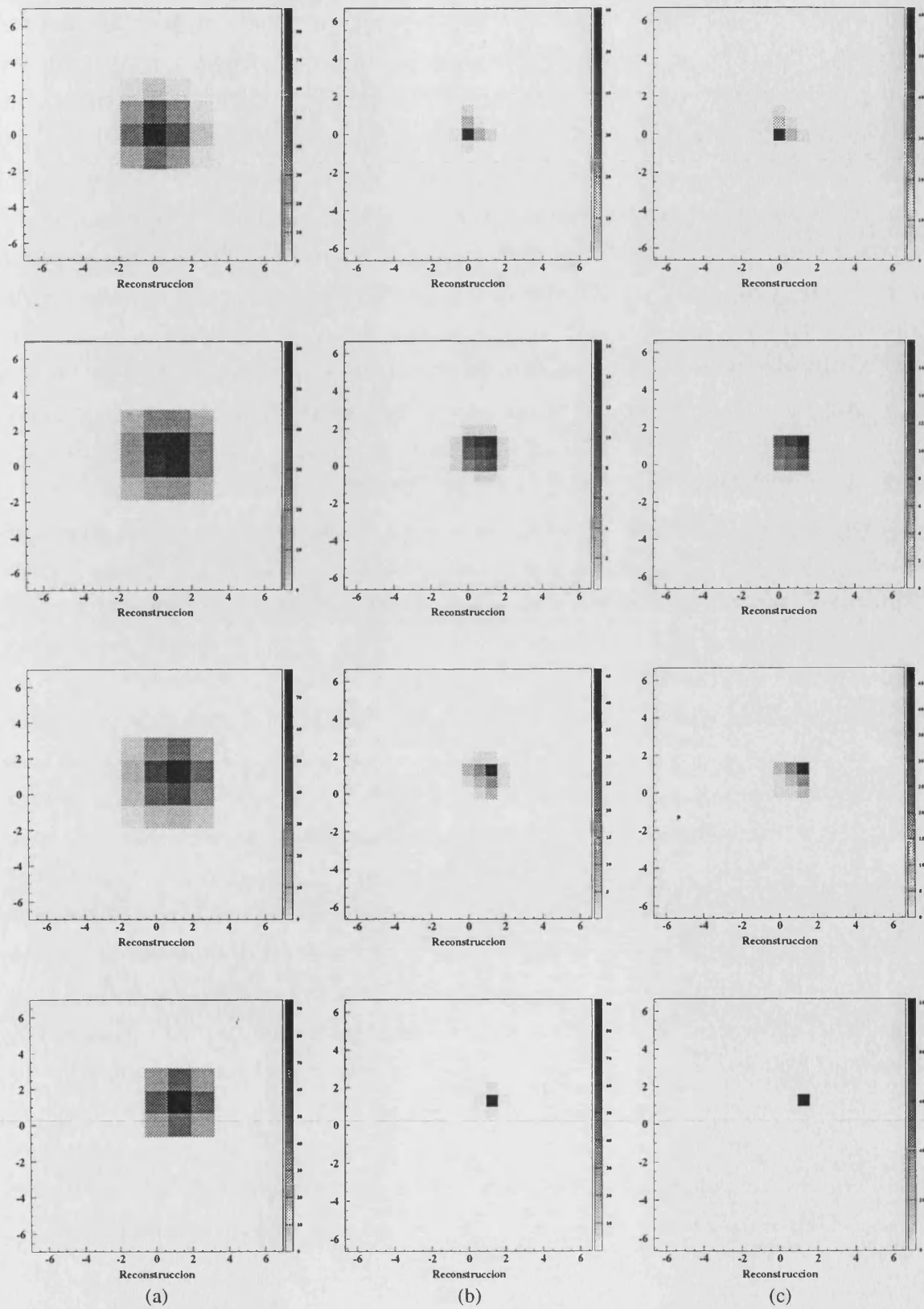


Figura 4.15: Efecto del movimiento de la fuente en la reconstrucción.

En la columna (a) vemos la reconstrucción usando CBMF; en (b) la reconstrucción usando máxima entropía y en (c) la reconstrucción usando el algoritmo EM. De arriba a abajo, la posición real de la fuente en grados es, respectivamente, (0.32,0.32), (0.64,0.64), (0.95,0.95) y (1.27,1.27), respecto al centro del campo de visión del telescopio.

Cuando la sombra proyectada y la posición de los detectores no coincide, existe una incertidumbre a la hora de localizar la fuente, debido a que el plano detector no es capaz de ver con claridad el patrón de la máscara. Esto se traduce, como podemos ver en los tres casos, en un esparcimiento de la señal, que abarca toda la zona donde se puede hallar la fuente. Al repartirse la misma señal por una zona mayor, las intensidades que se reconstruyen son también menores, obteniendo la intensidad real con la integración de toda la zona (esto es un poco más difícil en CBMF y decodificación δ , debido a que la imagen reconstruida, en el mejor de los casos, nunca se limita a un píxel, sino que ocupa varios píxeles, con lo que hay un solapamiento). Cuando la fuente vuelve a hallarse en una posición que proyecta una sombra que coincide con los detectores, la reconstrucción vuelve a ser óptima, como podemos ver en las imágenes de la parte inferior de la fig. 4.15.

Como vemos en las imágenes, en los casos (0.32,0.32) y (0.95,0.95), es decir cuando la fuente se halla a 0.32° de una posición en la que proyecte una sombra que coincida con la posición de los detectores, la reconstrucción es bastante "puntual", y la imagen puede inducirnos (erróneamente) a creer que la posición real de la fuente viene dada por la posición del píxel más brillante en la imagen reconstruida (cuando la fuente se halla en (0.64,0.64) la fuente está demasiado difuminada para asignarla a una fuente puntual). Con esto cometemos un error de apreciación en la posición de la fuente puntual de 0.32° , esto es, $20'$ de arco, que es la capacidad de localización de fuentes puntuales de nuestro telescopio, tal como mostrábamos en la tabla II.

Como dato adicional a destacar, vemos que el algoritmo EM es el que produce menos dispersión de la señal de los tres métodos considerados.

4.5 Resolución angular

Vamos a estudiar la respuesta teórica de LEGRI al someter a nuestro simulador al campo de fuentes de la fig. 4.16; cuatro fuentes, todas de intensidad 100 fotones/cm², situadas no precisamente al azar, sino en posiciones estratégicas: (0,0), (0.64,0.64), (-1.27,-1.27) y (2.54,-2.54). Como ya se ha dicho, la resolución nominal de nuestro telescopio, dada por el ángulo que subtende una unidad de la máscara vista desde el plano detector, es de 2.54°. La mitad, 1.27°, es la distancia angular mínima que debemos desplazar una fuente celeste para que la sombra que ésta proyecta vuelva a coincidir con la posición de los detectores. En cuanto a 0.64°, que es nuevamente la mitad, es una posición por lo demás incómoda, porque la sombra que se proyecta cae a caballo entre varios detectores, con lo que no es posible resolverla bien en el plano detector. La imagen detectada se muestra en la fig. 4.17.

Dado que la resolución de nuestro telescopio es de 2.54°, es de esperar que tan sólo la fuente que se halla en (2.54,-2.54) pueda resolverse separada de las demás, mientras que las demás se confunden entre sí, por estar separadas una distancia angular menor que la resolución de nuestro telescopio; vemos los resultados en la fig. 4.18.

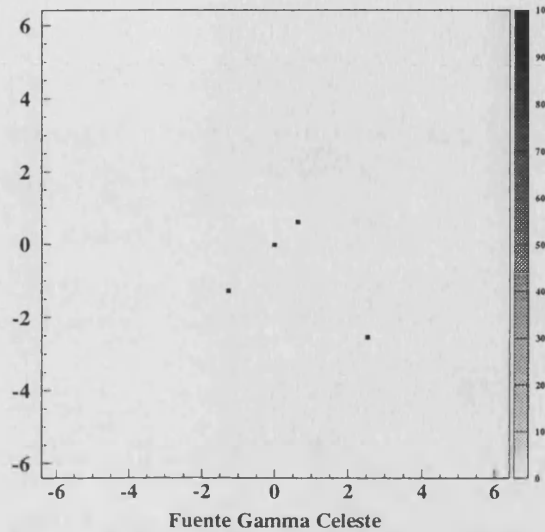


Figura 4.16: Campo con cuatro fuentes de intensidad 100 fotones/cm² situadas en (0,0), (0.64,0.64), (-1.27,-1.27) y (2.54,-2.54).

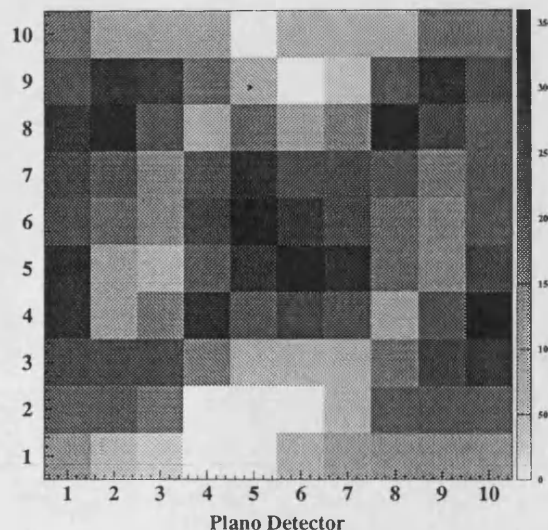


Figura 4.17: Imagen detectada en el plano detector al ser iluminado el telescopio por las fuentes de fig. 4.16.

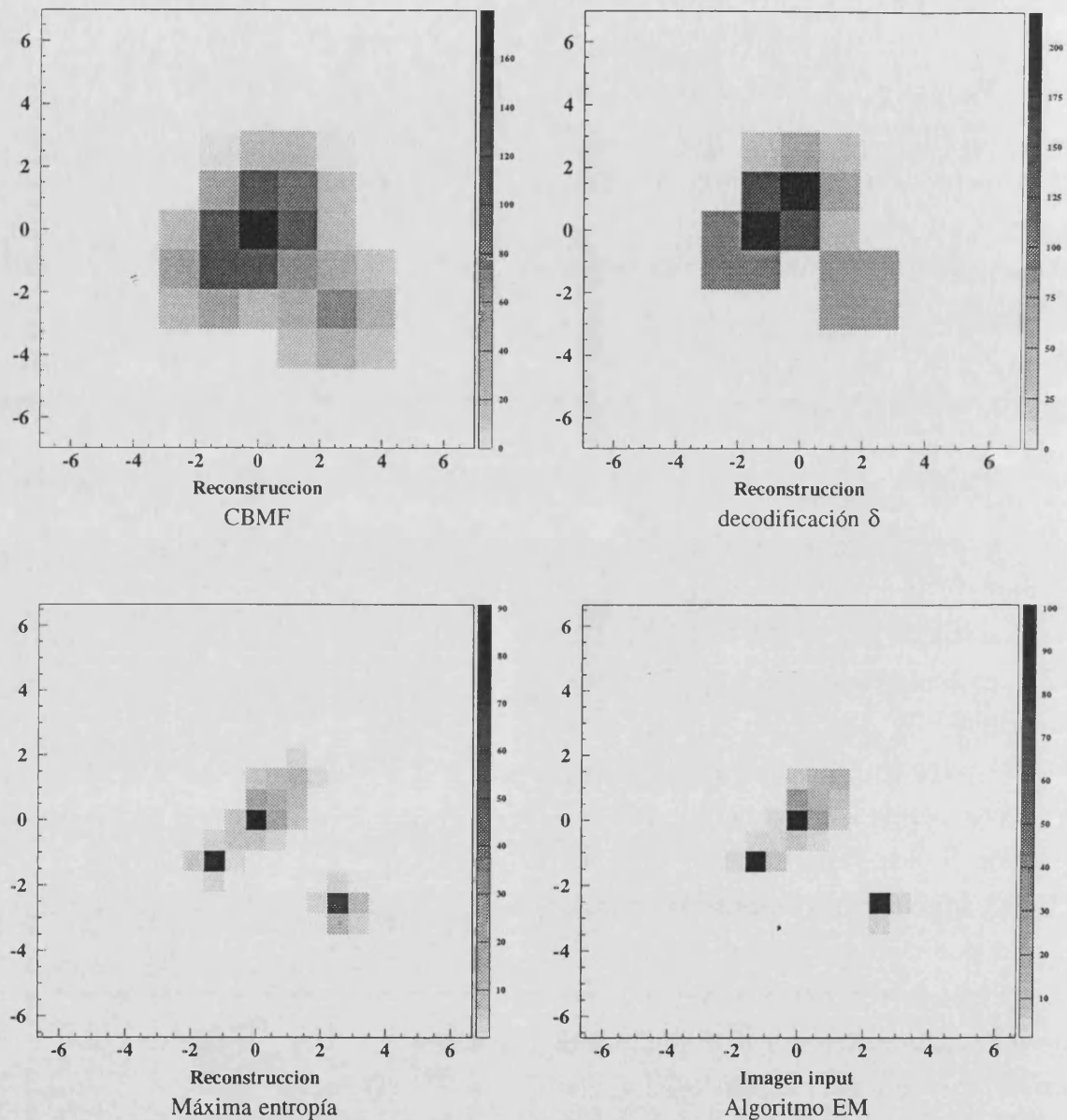


Figura 4.18: Reconstrucciones a partir de la imagen detectada en la fig. 4.17.

Vemos que, efectivamente, en CBMF y decodificación δ , en el centro de la imagen tenemos un "batiburrillo" difícil de resolver, pues las imágenes reconstruidas de fuentes en $(0,0)$ y $(-1.27,-1.27)$ se solapan, y la de la fuente en $(0.64,0.64)$ se esparce empeorando el resultado. La única que se puede diferenciar es la que se halla en $(2.54,-2.54)$, sobre todo con decodificación δ (con CBMF se solapa un poco con la fuente central).

Pero, ¡vaya!, en las imágenes reconstruidas con el método de máxima entropía y el algoritmo EM, tenemos la agradable sorpresa de que, no sólo la imagen de la fuente en (2.54,-2.54) se halla claramente diferenciada, más que en los métodos anteriores, sino ¡también la que se halla en (-1.27,-1.27), que se ve con toda claridad! La única que no se ve claramente, y que solapa en parte con la que se halla en (0,0), es la que está en (0.64,0.64), que está difuminada (pues como hemos dicho está en una posición particularmente incómoda).

Conclusión importante, por tanto: Los métodos de correlación obtienen una resolución angular que coincide con la nominal. Sin embargo, la verdadera resolución del aparato **no** es la nominal, sino, en nuestro caso, la mitad, 1.27°, que es la obtenida con los métodos de maximización. En realidad, la resolución de un telescopio de máscara codificada, a la luz de este resultado, no viene dada por la ec. 2.25, que repetimos aquí:

$$\text{resolución} = \arctg\left(\frac{c}{f}\right)$$

donde c es el tamaño de un elemento de la máscara y f la distancia máscara - plano detector, sino por:

$$\text{resolución} = \arctg\left(\frac{d}{f}\right) \quad (4.11)$$

donde d es el tamaño de un **elemento del plano detector**. Es decir, la resolución angular real de un telescopio de máscara codificada, viene dada por la resolución espacial de su plano detector, y no por el tamaño de los elementos de la máscara.

Con los métodos basados en la correlación, hay implícita una *pérdida de información* en la imagen reconstruida, información que se recupera al usar los métodos de maximización (con los que obtenemos la verdadera resolución angular). La única excepción se tendrá cuando los elementos del plano detector tengan el mismo tamaño que los elementos de la máscara, en que ambas resoluciones coincidirán.

Los resultados del apartado 4.4 y de éste dejan claro que, a pesar de que en los métodos de maximización podemos hacer tan pequeño como queramos el píxel en la imagen reconstruida, hay un límite práctico al tamaño del mismo (como apuntábamos en el apartado 2.12.1), pues nuestros datos son finitos y no se puede sacar más información de la que hay en los mismos. Además, cuantos más píxeles tenga la imagen, tanto más tiempo tardará ésta en ser calculada. Nosotros usaremos para los métodos de maximización un tamaño de píxel de $0.64^\circ \times 0.64^\circ$; la mitad de la resolución angular de nuestro telescopio (tal y como se ha hecho en las imágenes mostradas hasta ahora).

Otra importante conclusión que cabe destacar, si comparamos las imágenes de la figura 4.18, concretamente la fuente situada en $(-1.27, -1.27)$, con las de la figura 4.15, en concreto con las de abajo del todo, correspondientes a una única fuente situada en $(1.27, 1.27)$, es que la intensidad de la fuente reconstruida en un píxel es bastante independiente de la presencia o ausencia de otras fuentes en el campo de visión (aunque se ve afectada). Este hecho se halla implícito en los métodos basados en la correlación, como se vio en el apartado 3.2.1, en los que es del todo independiente, pero no en los métodos de maximización; de estos dos, es en el algoritmo EM en el que se ve menos afectada la intensidad reconstruida de una fuente por la presencia de otras.

De hecho, en realidad la presencia de otras fuentes afecta, pero no tanto *a la imagen final* como *al número de iteraciones* necesarias para obtenerla; el hecho de que la imagen fuente sea más compleja se traduce en que frena algo la obtención de la imagen reconstruida (es más difícil hacer que cumpla los requisitos de parada del algoritmo que se expusieron en el apartado 4.2).

4.6 Fantasmas

Hasta ahora hemos limitado el campo de visión de las imágenes reconstruidas a un ciclo de la máscara, es decir, el campo comprendido en 2×2 veces el patrón base de la máscara (ver fig. 2.15), que es de $(\pm 6.34^\circ) \times (\pm 6.34^\circ)$. Pero recordemos que la máscara de LEGRI está formada por 2.8×2.8 veces el patrón base, y el colimador no limita el campo de visión de los detectores a un ciclo;

es decir, nuestro campo de visión es mayor, y fuentes fuera de esos $\pm 6.34^\circ$ darán una señal modulada en el plano detector. Este hecho generará fantasmas, de los que se habló en el capítulo 2; habrá diferentes posiciones posibles de la fuente que generen la misma sombra en el plano detector, y eso se reflejará en la imagen reconstruida. Lo podremos comprobar si en lugar de limitarnos al campo de un ciclo, reconstruimos la imagen correspondiente al campo de visión total, que viene dado tan sólo por la altura del colimador y que es $(\pm 10.53^\circ) \times (\pm 10.53^\circ)$, o también si ponemos una fuente fuera del campo definido por un ciclo y en la reconstrucción nos limitamos a un ciclo (con lo que se obtiene una fuente reconstruida *dentro* del campo de visión). De hecho, como ya dijimos en el apartado 2.7, tendremos fantasmas aun cuando nos estemos limitando a un ciclo de la máscara, pues el borde del campo de visión está degenerado (véase fig. 2.17), y cualquier fuente en el borde del mismo aparecerá también en el borde opuesto (y si estuviera en una esquina, aparecería en las cuatro esquinas).

Trabajemos con todo el campo de visión de nuestro telescopio y sometámoslo al campo fuente de la figura 4.19, consistente en tres fuentes de intensidad 100 fotones/cm² y situadas en (0,0), (5.08,0) y (-5.08,-5.08). En esta ocasión se ha añadido un ruido aleatorio al plano detector, con una media de 30 cuentas/cm². Si reconstruimos la imagen con CBMF, decodificación δ , máxima entropía y el algoritmo EM, extendiéndolos a todo el campo de visión de nuestro instrumento, obtenemos los resulta-

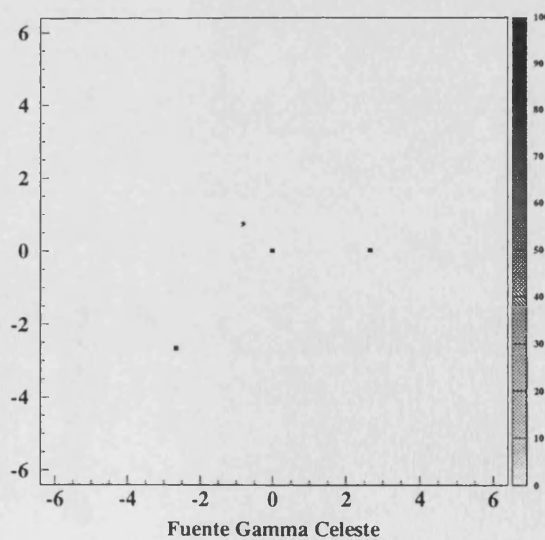


Figura 4.19: Fuente celeste

dos que podemos ver en la página siguiente. En los dos últimos métodos se han usado dos representaciones distintas: mapa de tonos (cada tono de gris es una intensidad) y mapa de superficies (la intensidad está representada por la altura).

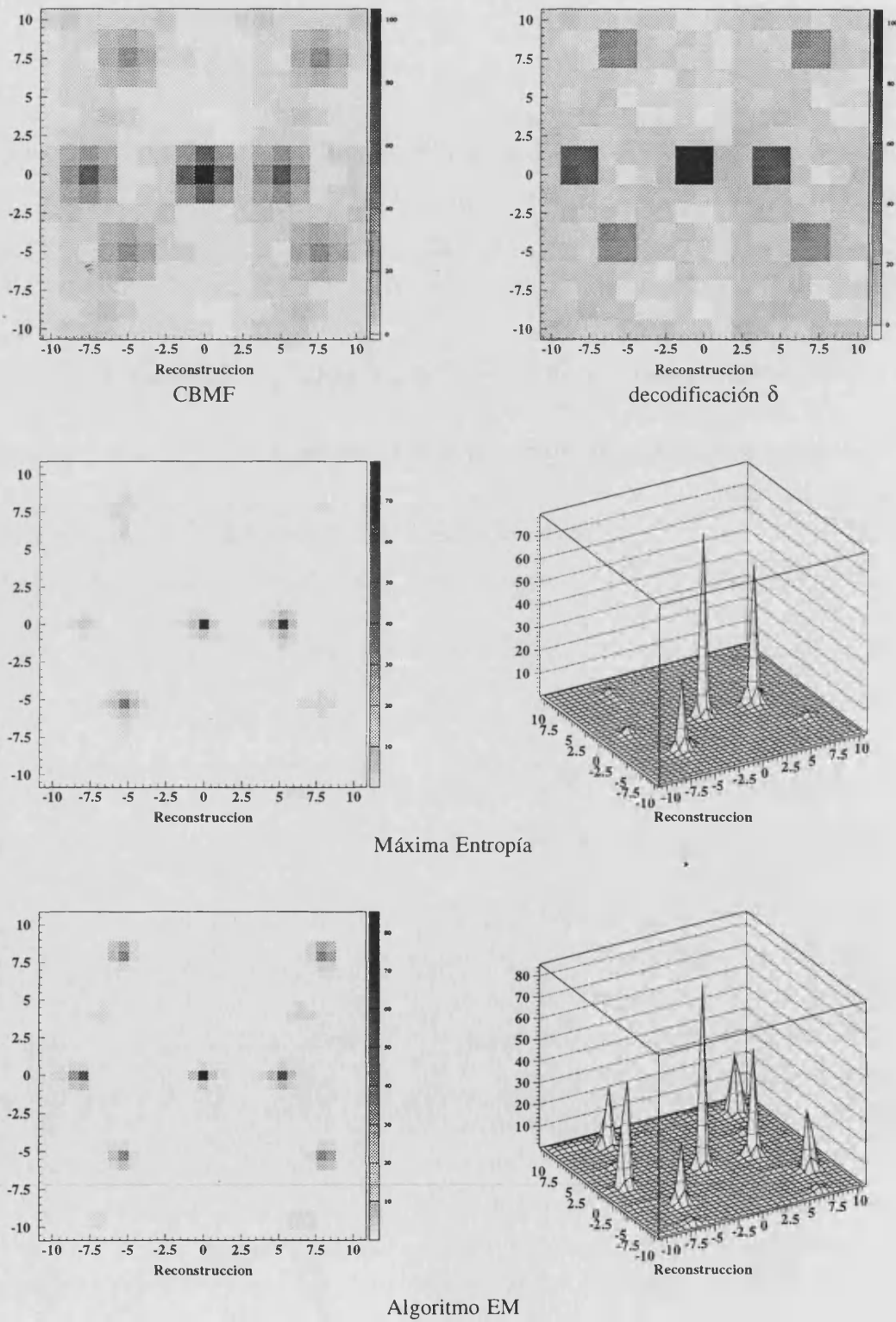


Figura 4.20: Reconstrucciones de la fig. 4.19

Como podemos ver, toda fuente que no esté muy cerca del centro del campo de visión del telescopio producen fantasmas en las otras direcciones donde se pueda ver el mismo patrón; la fuente en $(5.08,0)$ produce un fantasma en $(-7.59,0)$, y la fuente en $(-5.08,-5.08)$ produce tres fantasmas en $(-5.08,7.59)$, $(7.59,-5.08)$ y $(7.59,7.59)$.

En los métodos basados en la correlación, estos fantasmas son *exactamente* lo mismo, pues la correlación es *cíclica*. En esos píxeles del cielo, los datos del plano detector son correlacionados por la misma permutación de la matriz de reconstrucción G y por tanto lo que obtenemos es exactamente lo mismo. Algo similar ocurre con el algoritmo EM aunque no es exactamente lo mismo, pues el algoritmo EM (como el método de máxima entropía) no reconstruye el cielo píxel a píxel, como ya se ha dicho, sino *todo* él a la vez. Una de las características sorprendentes que hemos encontrado a nuestro algoritmo EM es que reconstruye todos los fantasmas prácticamente con igual intensidad.

Sin embargo, si comparamos la reconstrucción con el método de máxima entropía (fig. 4.20) con la fuente original (fig. 4.19), vemos que, precisamente las tres fuentes reconstruidas ¡¡corresponden con las fuentes reales!! mientras que los fantasmas están muy suprimidos. ¿Cómo es posible? Si todos los fantasmas proyectan el mismo patrón de la máscara en el plano detector (salvo por una diferencia de la intensidad detectada debida al colimador) ¿cómo puede el método de máxima entropía averiguar cuál de todas las posibles es la real? Bueno, bueno, no nos asustemos; la realidad es que **no puede**. El algoritmo de máxima entropía lo que en realidad hace es favorecer la fuente/fantasma que está más cercano al centro del campo de visión, como podemos comprobar si en lugar de usar la imagen fuente de la figura 4.19, utilizamos la de la figura 4.21 (a), donde hemos quitado la fuente en $(5.08,0)$ y hemos puesto en su lugar otra (también de 100 fotones/cm²) en $(-7.59,0)$, es decir, el lugar donde debería aparecer el fantasma. En la figura 4.21 (b) podemos ver la reconstrucción con máxima entropía, representada en mapa de superficies. Como vemos, la fuente se reconstruye nuevamente en $(5.08,0)$, a pesar de que ahora está realmente en $(-7.59,0)$, es decir, se reconstruye el fantasma/fuente que está más cerca del centro del campo de visión.

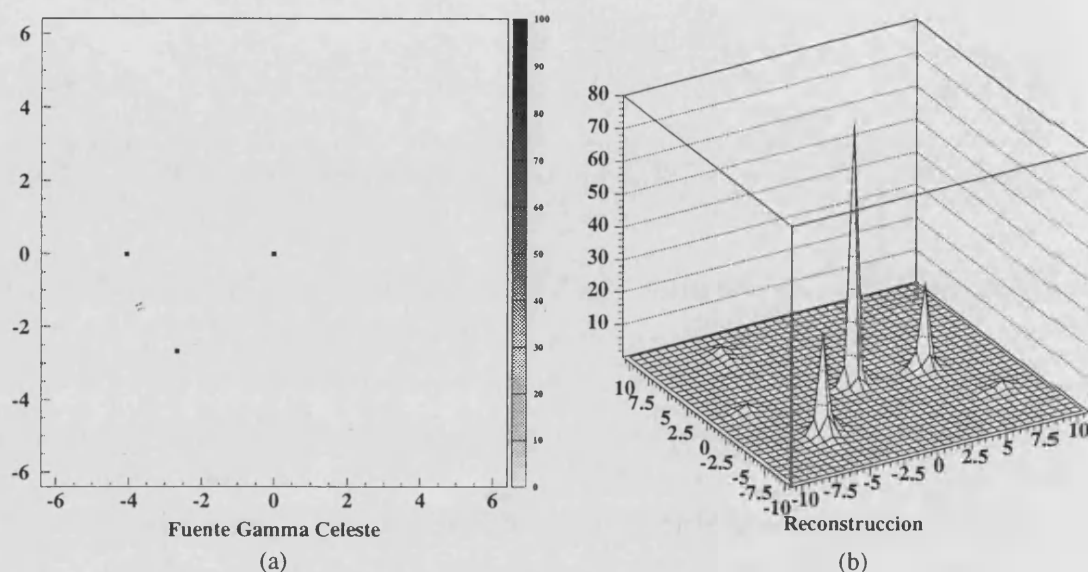


Figura 4.21: Fuente celeste (a) y reconstrucción (b) con el método de máxima entropía

Naturalmente, siempre se puede determinar qué fantasma es la fuente real por procedimientos operativos, como se explicó en el apartado 2.7, variando el apuntado del telescopio, si bien en LEGRI este modo de operar está un tanto limitado debido al requerimiento de que la dirección de apuntado de LEGRI sea siempre ortogonal al eje solar. Esto lleva a que uno de los ejes (llamémoslo α) solamente varíe conforme LEGRI gira alrededor del Sol; es decir, 360° en 365 días (aprox. varía un grado por día), mientras que toda la libertad de variar el apuntamiento la tenemos en el otro eje (β).

Además, dado que la máscara de LEGRI no está formada por 2×2 ciclos, los fantasmas no se limitan al borde del campo de visión, como se explicaba en el apartado 2.7, sino que entran bastante dentro del mismo: una fuente que se halle cerca del borde del campo de visión telescopio, por ejemplo en $\alpha = 10.1^\circ$, producirá un fantasma en $\alpha = -2.54^\circ$, ya que el patrón que proyectan ambas direcciones en el plano detector es el mismo, por lo que el procedimiento operacional descrito en el apartado 2.7 necesitaría ser más exhaustivo. No obstante, como se verá en el apartado 5.5, esto no resultará necesario... mas no adelantemos acontecimientos.

4.7 Efecto del colimador

Estudiemos ahora la disminución de la intensidad de los picos reconstruidos de la figura 4.20, conforme estos se alejan del centro del campo de visión. Comencemos con el caso de CBMF y decodificación δ ; como se ve, las fuentes que están más alejadas de la posición central son más débiles, a pesar de que las tres fuentes originales eran de idéntica intensidad. Esto es debido al efecto supresor que tiene el colimador. Los valores reconstruidos en la imagen, son, con CBMF: 103.3 fotones/cm² para la fuente central, 60.7 fotones/cm² para la fuente en (5.08,0) (y su fantasma), y de 34,8 fotones/cm² para la situada en (-5.08,-5.08) (y sus cuatro fantasmas). Análogamente, para decodificación δ , estos valores son: 104.2 fotones/cm² para la fuente central, 59.8 fotones/cm² para la fuente en (5.08,0), y de 42,7 fotones/cm² para la situada en (-5.08,-5.08).

Si substraemos el fondo (que se halla sumado a los píxeles donde se hallan las fuentes, y que, tras dividir por el número de unos en la matriz G , es del orden de 2.5) y dividimos estas intensidades por el valor de supresión del colimador (que para las tres posiciones indicadas es de 1, 0.565 y 0.32 respectivamente -ver apartado 2.11.1-) se obtiene que la intensidad así corregida es de ~100. Es decir, la supresión que vemos es debida, en efecto, al colimador.

El lector sagaz puede preguntarse por qué no se incluye esta corrección en el algoritmo, para que la imagen muestre las fuentes ya corregidas. Bueno, en efecto, es posible (y fácil) hacerlo, aunque consideramos que no es conveniente, por las razones que se exponen a continuación: el corregir dividiendo por el factor supresor del colimador afecta, no sólo a los píxeles donde hay fuentes, sino a todos, incluyendo los del fondo. Esto hace que el fondo (que puede ser debido a ruido en el plano detector, o a la fluctuación estadística de las cuentas detectadas, o a una incorrecta reconstrucción -debida, por ejemplo, a detectores que no funcionan, como veremos en el apartado 4.11-), que es aproximadamente plano y distinto de cero, cuando corregimos de este modo deja de serlo, y crece conforme nos alejamos del centro (en píxeles cercanos al borde, por ejemplo, en $(\alpha,\beta)=(10.8,0)$, el factor de supresión del colimador es de 0.024, siendo su inverso de 42; el fondo en esta zona de la imagen reconstruida es 42 veces mayor que en el centro); es decir, introducimos una estructura que nos puede

dificultar ver las fuentes que haya en la imagen. Es por esto que creemos que es mejor corregir la intensidad *a posteriori* una vez identificadas las fuentes.

Para el algoritmo EM, la disminución que se observa en los picos más alejados no es debida a la existencia del colimador, ya que el algoritmo tiene en cuenta su efecto, buscando el mapa más coherente con los datos, sino al hecho de que aparecen fantasmas. En efecto, centrándonos en la fuente en (5.08,0), las cuentas esperadas en el plano detector vienen dadas por la intensidad de este pico (49.1 fotones/cm²) multiplicado por el factor del colimador correspondiente (0.565) más la intensidad del fantasma en (-7.59,0), que es de 51.3 fotones/cm² multiplicado por el factor del colimador correspondiente (0.305) (sumamos las intensidades de los fantasmas debido al hecho de que el mapa es reconstruido en conjunto; esto no es correcto hacerlo con los métodos correlativos debido a que éstos reconstruyen el mapa píxel a píxel). Este procedimiento nos da un número de cuentas esperado en el plano detector, correspondiente a la fuente y su fantasma, de $49.1 * 0.565 + 51.3 * 0.305 = 43.4$ cuentas/cm², lo que equivaldría a una fuente situada en (5.08,0) de intensidad 77 fotones/cm² ($77 * 0.565 = 43.5$; y en efecto, esta es la intensidad que nos da el algoritmo EM si reconstruimos los datos y nos limitamos al campo de visión de un ciclo de la máscara, eliminando así los fantasmas -o la fuente verdadera, en caso de que se hallara fuera del campo de visión-).

Es decir, el colimador ha tenido, en efecto, un efecto supresor en la intensidad de la fuente reconstruida; pero en realidad es debido a que ha disminuido el SNR (*Signal to Noise Ratio*). Es decir, el ruido es en proporción más grande que cuando la fuente se halla centrada. En ausencia de ruido, la fuente es reconstruida con una intensidad mayor (véase el siguiente apartado para el efecto del ruido en la altura del pico). Aparte de eso, el efecto principal es que la intensidad de la fuente real se "reparte" entre los fantasmas reconstruidos (y esto no es un efecto del colimador, sino de que la máscara sea cíclica), y cuantos más fantasmas haya, menos cuentas corresponderán a cada fuente reconstruida. Por completitud, la intensidad del píxel central es de 87.2 fotones/cm², y en la reconstrucción en (-5.08,-5.08) y sus tres fantasmas es de ~28 fotones/cm² en cada uno.

Para el método de máxima entropía, las intensidades reconstruidas son de 79.6 fotones/cm² para el píxel central, 68.3 fotones/cm² para la fuente en (5.08,0) y de 40.7 fotones/cm² para la que se halla en (-5.08,-5.08).

Vemos que aparece una supresión debida al colimador. Parte de este efecto, al igual que en el algoritmo EM, es debido al aumentar el ruido relativo a la señal, que hace que el pico reconstruido se ensanche y disminuya de intensidad (véase apartado 4.8); sin embargo la supresión que observamos es mayor de la que cabría esperar, y no se debe únicamente al aumento del SNR, sino al colimador en sí, y aparece de todos modos *aun en ausencia de ruido* (cosa que no ocurre con el algoritmo EM; tampoco se puede asociar con la aparición de fantasmas, ya que éstos son casi inexistentes en el método de máxima entropía).

Es decir, a pesar de que en el algoritmo, efectivamente, se tiene en cuenta (en Φ) el efecto del colimador (de análoga forma al algoritmo EM), la reconstrucción de los píxeles lejanos del centro del campo de visión es, misteriosamente, peor de lo que se podría esperar, y parece a simple vista como si no se hubiera *implementado* el efecto del colimador. Es difícil explicar este extraño proceder, inesperado en un principio, pero que pese a ello surge cuando se realiza la reconstrucción; es como si el método de máxima entropía, al observar menos cuentas correspondientes a ese píxel celeste, se mostrara más inseguro en su respuesta y diera un valor de su intensidad más cauto. Ello tal vez, en parte, es debido a que este método busca el mapa compatible con los datos más suave posible y con mínimo de estructura.

En cuanto a capacidad de formación de imágenes se refiere, el método de máxima entropía, por favorecer los fantasmas más cercanos al centro de la imagen (cosa que ocurre tanto si nos limitamos a un ciclo como si reconstruimos el campo completo), es equivalente al algoritmo EM cuando lo limitamos al campo de visión de un ciclo. No obstante, en lo que a reconstrucción de la intensidad de la fuente, el algoritmo EM se muestra mejor.

Pero por otro lado, si miramos la fig. 4.20, vemos que, en el algoritmo EM, el fondo de la imagen es más fluctuante que en el método de máxima entropía, en que, salvo por los fantasmas, es extraordinariamente plano. Es decir, el algoritmo EM ha generado pequeñas fuentes ficticias donde no las hay, provenientes únicamente de la estructura del ruido en el plano detector. Esto no ha ocurrido con el método de máxima entropía. Estudiemos el efecto del ruido con más detalle en el siguiente apartado.

4.8 Efecto del ruido

Como acabamos de ver, el ruido en el plano detector añadido a la señal puede generar no sólo ruido de fondo en la imagen reconstruida, sino también alterar la forma de la señal y generar estructuras inexistentes. Por ello es importante no confundir una fuente debida solo a la estructura del ruido con una real. Vamos a someter a nuestro simulador a una fuente celeste constante y a diferentes niveles de ruido en el plano detector. Con ello estudiaremos la sensibilidad de cada método de reconstrucción al ruido, y estudiar cómo podemos mejorar la calidad de la imagen. En principio es de esperar que el método de máxima entropía, (por ser de *máxima entropía*), sea más insensible al ruido que los otros y genere el mínimo de estructuras compatible con los datos; es decir, que sea la imagen más plana compatible con estos, y por ello que el fondo de la imagen no presente apenas fluctuaciones. Vamos a encontrar que la respuesta a esto es *sí* y *no*.

4.8.1 Ruido constante

Se ha sometido a nuestro simulador a un ruido constante en el plano detector y una fuente central de 100 fotones/cm². Los resultados se muestran en la figura 4.22; de izquierda a derecha, se muestra la reconstrucción con CBMF, máxima entropía y el algoritmo EM. De arriba a abajo, la imagen reconstruida corresponde a datos obtenidos con un ruido, respectivamente, de 10, 100, 1000 y 10000 cuentas/cm² en el plano detector, constante salvo por la fluctuación estadística de los datos (sorteados según una gaussiana de anchura la raíz cuadrada de las cuentas detectadas).

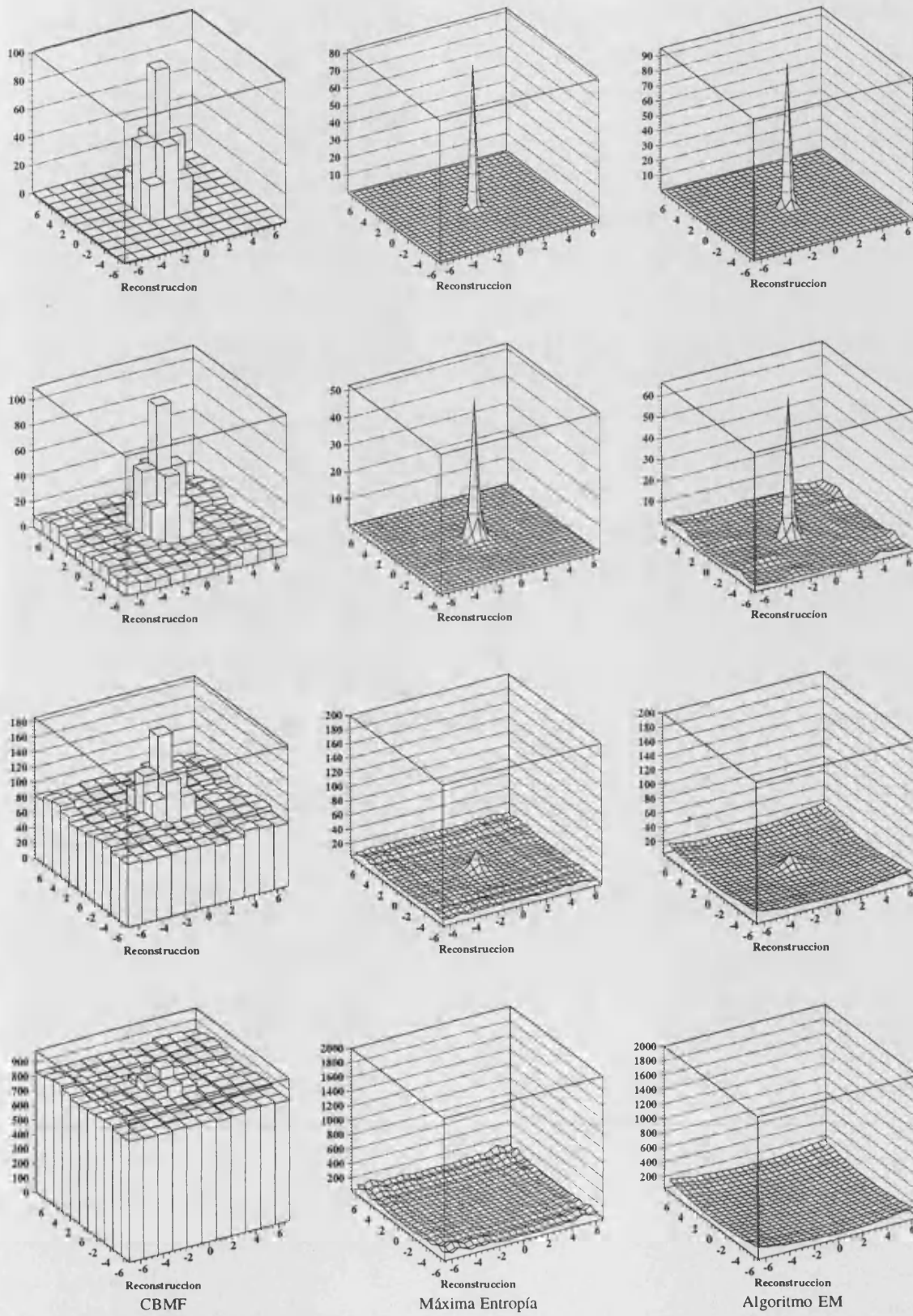


Figura 4.22: Efecto de aumentar el nivel del ruido en la señal.

El principal efecto que tiene el ruido sobre la imagen reconstruida con CBMF es que, conforme aumenta el nivel de ruido en el plano detector, la fuente reconstruida (de ~ 100 fotones/cm²) aparece "flotando" sobre un fondo fluctuante cada vez mayor, como una pequeña isla flotante en un mar cada vez más proceloso, sumada al fondo reconstruido (aun con niveles de ruidos muy altos es todavía posible ver una fuente en el centro). Para destacar este fenómeno, en lugar de usar la representación en mapas de superficies, se ha usado una variante de la misma, que es la representación *lego* (la representación en mapa de superficies asigna un punto -un cruce de la rejilla- por cada píxel de la imagen, mientras que la representación en *lego* asigna un cuadrado completo; en ambos casos la altura es proporcional a la intensidad).

En cuanto a los métodos de maximización, el fenómeno que se observa es que, conforme aumenta el ruido (y disminuye la significancia estadística de la señal), la fuente reconstruida se ensancha, y disminuye su altura. Efectivamente, para un ruido de 10, 100 y 1000 cuentas/cm², la intensidad reconstruida del píxel central es, para el método de máxima entropía, de 82.1, 52.1 y 31.5 fotones/cm², respectivamente, mientras que para el algoritmo EM es de 95.1, 66.4 y 21 fotones/cm²; en ambos casos la señal está más ensanchada (ocupa más píxeles); para un ruido de 10000 cuentas/cm², no es posible apreciar ninguna fuente (**nota:** en los caso de un ruido de 1000 y 10000, hemos puesto un límite superior en la altura máxima de la representación, para máxima entropía y el algoritmo EM, de 0.2 veces el orden de las cuentas detectadas en el plano detector; es decir, respectivamente, 200 y 2000. Si asignamos las cuentas detectadas como correspondientes a una señal proveniente de una fuente real, es de esperar que la intensidad de emisión de dicha fuente sea del orden de la señal detectada; si no apareciera ningún pico, es que lo detectado sería, principalmente, ruido).

En general, la capacidad de detectar la existencia o ausencia de una fuente dependerá de si las cuentas que genera la fuente real se confunden con el ruido de fondo o no. La fluctuación estadística del ruido viene dada, (estadística poissoniana), por la raíz cuadrada del número de cuentas debidas al ruido; por tanto si la intensidad de la fuente es menor que esta fluctuación, la fuente se confundirá con la fluctuación del ruido del plano detector, y no será

posible reconstruirla. Es decir, nuestro límite práctico para detectar una fuente vendrá dado por:

$$Intensidad \leq \sqrt{Ruido} \quad (4.12)$$

El método obvio de mejorar nuestra capacidad de detección, será, por supuesto, aumentar el tiempo de medida, aumentando así el número de cuentas (tanto de ruido como de la fuente) pero mejorando (disminuyendo) la fluctuación de los datos (la fluctuación del ruido aumenta con \sqrt{B} , pero las cuentas aumentan con B , por tanto la fluctuación relativa disminuye con $1/\sqrt{B}$). Esto nos puede permitir ver fuentes que antes estaban ocultas por la fluctuación estadística del ruido y que, al aumentar las cuentas ya no lo están (ver una discusión más detallada sobre sensibilidad en el capítulo 5).

En cuanto a la aparición de estructuras en el fondo, vemos que para un ruido de 10 cuentas/cm², el fondo es muy plano en todos los casos. Con un ruido de 100 cuentas/cm², el fondo más plano es el del método de máxima entropía, como en principio era de esperar, mientras que para el algoritmo EM aparecen algunas estructuras, de forma análoga al apartado anterior; el fondo con CBMF simplemente oscila. **Pero** observamos que, al aumentar el ruido (1000, 10000), la situación *se invierte*, y aparecen inesperadamente fluctuaciones en el fondo de la imagen en el caso del método de máxima entropía, mientras que se ha suavizado el fondo en el caso del algoritmo EM (CBMF sigue oscilando).

Para el algoritmo EM, al aumentar el número de cuentas (disminuyendo por tanto la fluctuación de los datos y aproximándose más a un caso plano -sin fluctuación-), disminuye también las fluctuaciones en la imagen reconstruida, y con ello las imágenes falsas; en el caso del ruido de 10 cuentas/cm² la fluctuación está ahí, pero por ser tan débil el fondo, éste es despreciable frente a la fuente de 100 fotones/cm² reconstruida y no se aprecia, mientras que en el caso de considerar un ruido de 100 cuentas/cm² ambos son comparables. Justamente al contrario que el método de máxima entropía, en el que la estructura debida al ruido que aparece en la imagen aumenta al aumentar el nivel de ruido.

4.8.2 Ruido con estructura

Demos otra vuelta de tuerca, y forcemos los métodos un poco más. Hemos supuesto que el ruido en el plano detector, salvo por la fluctuación estadística, es constante; pero esto no tiene por qué ser así. Por ejemplo, el propio telescopio puede convertirse en una fuente de ruido debido a la radiación a la que será sometido en el espacio (como efectivamente ocurrirá; ver apartado 1.6.1), y los elementos estructurales se pueden convertir en una fuente que dará en el plano detector un ruido no uniforme (por ejemplo, el blindaje que rodea la unidad detectora). Para simular tal efecto en LEGRI, hemos generado en nuestro simulador un ruido en el plano detector decreciendo desde los bordes del plano detector (más cercanos al blindaje) hasta el centro. Concretamente, hemos generado un ruido fluctuante de ~ 300 cuentas/cm² para los detectores más exteriores, de ~ 200 para los inmediatamente interiores, ~ 100 para el siguiente nivel y ~ 50 cuentas/cm² para los cuatro detectores centrales (estos valores no se han obtenido de ningún sitio y son un simple ejercicio). Hemos añadido una fuente situada centralmente de 100 fotones/cm². El resultado detectado en el plano detector se muestra en la figura 4.23.

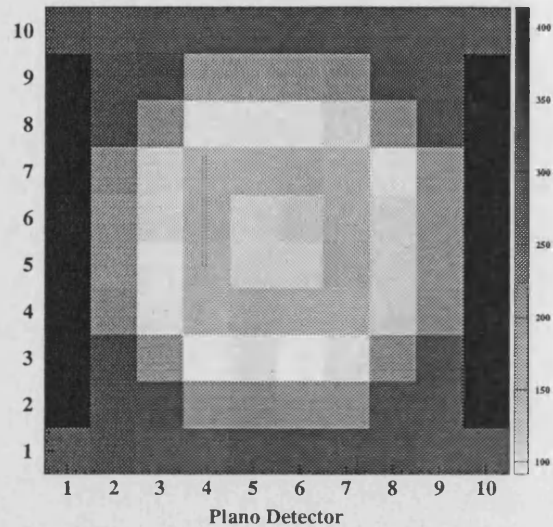


Figura 4.23: Señal en el plano detector con ruido variable más una fuente centrada de 100 fotones/cm².

La reconstrucción de este decorativo plano detector, usando, de izquierda a derecha, CBMF, máxima entropía y el algoritmo EM, lo podemos ver en la figura 4.24. Se observa para todos los casos la aparición de dos lóbulos simétricos respecto a la fuente central, que no corresponden a ninguna estructura real y que son debidos a la forma del ruido en el plano detector. La conclusión obvia a la que llegamos es que no podemos ignorar *en absoluto* el efecto del ruido, y que es muy importante conocerlo bien, e incluir de algún modo esta información en los métodos de reconstrucción.

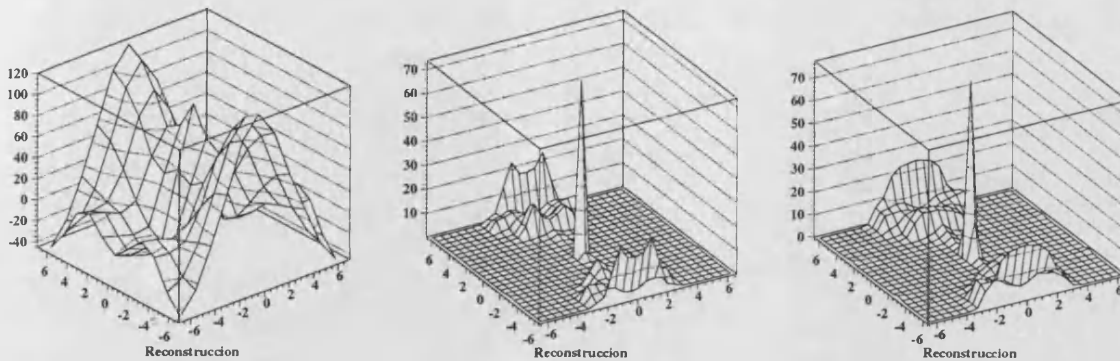


Figura 4.24: Reconstrucciones con ruido variable en el plano detector

4.8.3 Ampliando el espacio fuente

Una manera de intentar mejorar la imagen que se nos puede ocurrir, si desconocemos la estructura del ruido, consiste en ampliar el espacio fuente (ver apartado 2.12.1) e incluir el ruido como otro parámetro más a estimar a partir de los datos. Esto podremos hacerlo tan sólo en los métodos de maximización.

Si suponemos que el ruido en el plano detector es constante, podemos extender la ec. 2.45 para incluir este ruido como incógnita a estimar, según:

$$\tilde{D}_{ij} = \sum_{\alpha\beta} \tilde{O}_{\alpha\beta} \Phi_{ij}^{\alpha\beta} + B \quad (4.13)$$

La entropía se definirá ahora, como:

$$S = -\sum_{\alpha\beta} O_{\alpha\beta} \cdot \log O_{\alpha\beta} - B \cdot \log B \quad (4.14)$$

y la solución de máxima entropía vendrá ahora dada por la ecuación 4.15.

$$\begin{aligned} \tilde{O}_{\alpha\beta} &= e^{-1-2\lambda \sum_{ij} \Phi_{ij}^{\alpha\beta} \frac{(\tilde{D}_{ij}-D_{ij})}{\sigma_{ij}^2}} \\ \tilde{B} &= e^{-1-2\lambda \sum_{ij} \frac{(D_{ij}-D_{ij})}{\sigma_{ij}^2}} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Para el algoritmo EM, la solución iterativa quedará como se muestra en la ecuación 4.16.

$$\tilde{O}_{\alpha\beta}^{n+1} = \tilde{O}_{\alpha\beta}^n \frac{\sum_{ij} \Phi_{ij}^{\alpha\beta} \left(\frac{D_{ij}}{\tilde{D}_{ij}^n} \right)}{\sum_{ij} \Phi_{ij}^{\alpha\beta}} \quad (4.16)$$

$$\tilde{B}^{n+1} = \tilde{B}^n \frac{\sum_{ij} \left(\frac{D_{ij}}{\tilde{D}_{ij}^n} \right)}{100}$$

donde 100 hace referencia al número de unidades del plano detector. Aplicando ambos algoritmos a los casos de ruido en el plano detector constante, de 100 y 1000 cuentas/cm², más una fuente de 100 fotones/cm², que estudiamos en el apartado 4.8.2, obtenemos las reconstrucciones de la figura 4.25.

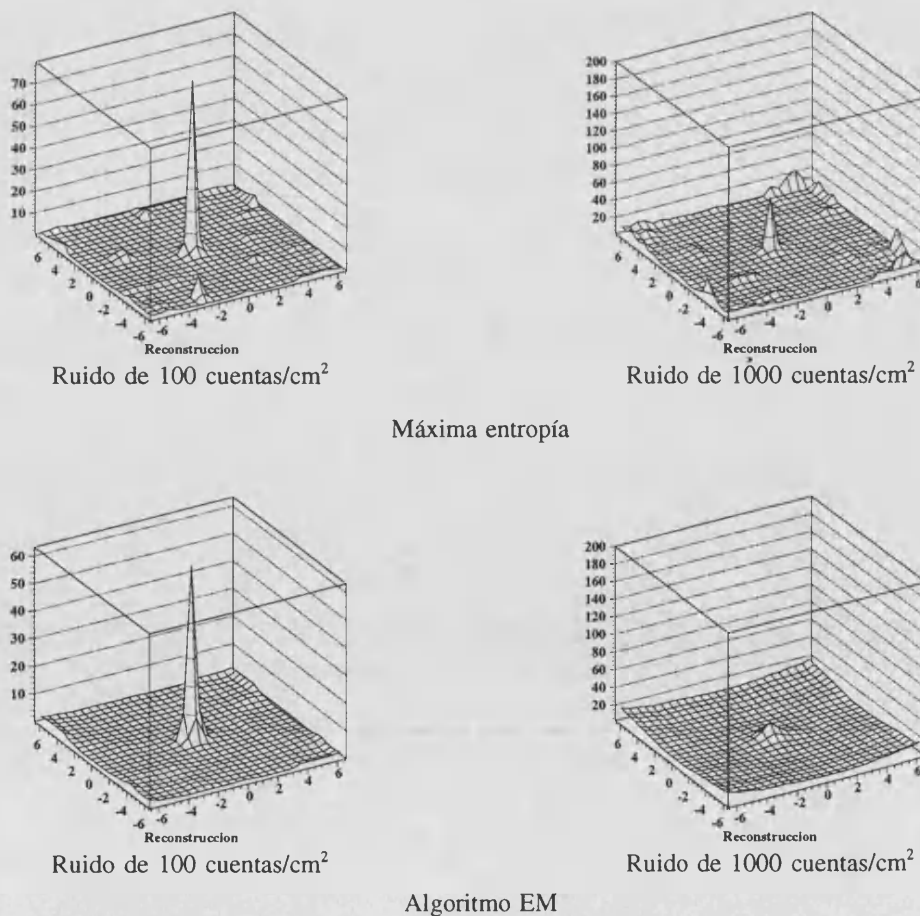


Figura 4.25: Reconstrucciones estimando un ruido constante B

Podemos apreciar que han aparecido ahora estructuras indeseables en las imágenes obtenidas con el método de máxima entropía, que no corresponden a ninguna fuente real, aunque no obstante la reconstrucción de la intensidad de la fuente central ha mejorado ciertamente. La estimación de la fuente central, cuando el plano detector se halla sometido a un ruido de 100 cuentas/cm², es ahora de 79.9 fotones/cm² (frente a la anterior que era de 52.1), y el ruido estimado por el algoritmo es de 7 cuentas/cm² en el plano detector (no muy buena). En el caso en que el plano detector se halle sometido a un ruido de 1000 cuentas/cm², la intensidad reconstruida será de 63.6 fotones/cm² (frente al caso anterior en que era 31.5), y el ruido estimado, de 600 cuentas/cm² (bastante mejor estimación que para el caso previo).

En cuanto al algoritmo EM, el único resultado que merece destacarse es que las fluctuaciones del fondo han disminuido (en ese aspecto, la imagen ciertamente ha mejorado), mientras que la intensidad reconstruida es básicamente la misma: para un ruido en el plano detector de 100 cuentas/cm², la estimación de la intensidad de la fuente central es de 63.3 fotones/cm² (antes era de 66.4), con una estimación del ruido de 0.8 cuentas/cm²; para un ruido en el plano detector de 1000 cuentas/cm², la estimación de la fuente es de 21.5 fotones/cm² (antes era de 21) y la estimación del ruido que da el método es de 6.5 cuentas/cm².

Claro está que este método solo lo podremos aplicar cuando tengamos buenas razones para creer que el ruido en el plano detector es plano y podamos "parametrizarlo" por un único B . Por ejemplo, en el caso anterior en el cual el ruido crecía desde el interior del plano detector hacia el borde del mismo (fig. 4.23) no es aplicable hacer esta aproximación.

Por ello vamos a extender la ecuación 4.13 y vamos a considerar un ruido variable B_{ij} como incógnita adicional a estimar. Con ello, 4.13 quedará ahora como:

$$\tilde{D}_{ij} = \sum_{\alpha\beta} \tilde{O}_{\alpha\beta} \Phi_{ij}^{\alpha\beta} + B_{ij} \quad (4.17)$$

Con esta ampliación de las incógnitas a estimar, la entropía se definirá ahora, como:

$$S = -\sum_{\alpha\beta} O_{\alpha\beta} \cdot \log O_{\alpha\beta} - \sum_{ij} B_{ij} \cdot \log B_{ij} \quad (4.18)$$

y la solución de máxima entropía vendrá ahora dada por la ecuación 4.19.

$$\begin{aligned} \tilde{O}_{\alpha\beta} &= e^{-1-2\lambda \sum_{ij} \Phi_{ij}^{\alpha\beta} \frac{(\tilde{D}_{ij} - D_{ij})}{\sigma_{ij}^2}} \\ \tilde{B}_{ij} &= e^{-1-2\lambda \frac{(\tilde{D}_{ij} - D_{ij})}{\sigma_{ij}^2}} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Análogamente al caso anterior, la solución iterativa del algoritmo EM quedará como puede verse en la ecuación 4.20.

$$\begin{aligned} \tilde{O}_{\alpha\beta}^{n+1} &= \tilde{O}_{\alpha\beta}^n \frac{\sum_{ij} \Phi_{ij}^{\alpha\beta} \left(\frac{D_{ij}}{\tilde{D}_{ij}^n} \right)}{\sum_{ij} \Phi_{ij}^{\alpha\beta}} \\ \tilde{B}_{ij}^{n+1} &= \tilde{B}_{ij}^n \left(\frac{D_{ij}}{\tilde{D}_{ij}^n} \right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Vamos a aplicar estas nuevas modificaciones de los algoritmos a los casos ya descritos en los apartados 4.8.1 y 4.8.2, en los que el telescopio está iluminado por una fuente de intensidad 100 fotones/cm² y el plano detector se halla sometido a un ruido **(a)** constante de ~100 cuentas/cm², **(b)** constante de ~1000 cuentas/cm² y **(c)** variable, de ~300 cuentas/cm² en el borde, decreciendo hasta ~50 cuentas/cm² en el centro. En las figuras 4.26 y 4.27 se muestran los resultados: la columna de la izquierda corresponde al caso (a), la central al caso (b) y la de la derecha al caso (c). La fig. 4.26 corresponde al método de máxima entropía (la primera fila muestra la estimación de las intensidades celestes y la segunda la estimación del ruido en el plano detector), y análogamente, la fig. 4.27 corresponde al algoritmo EM.

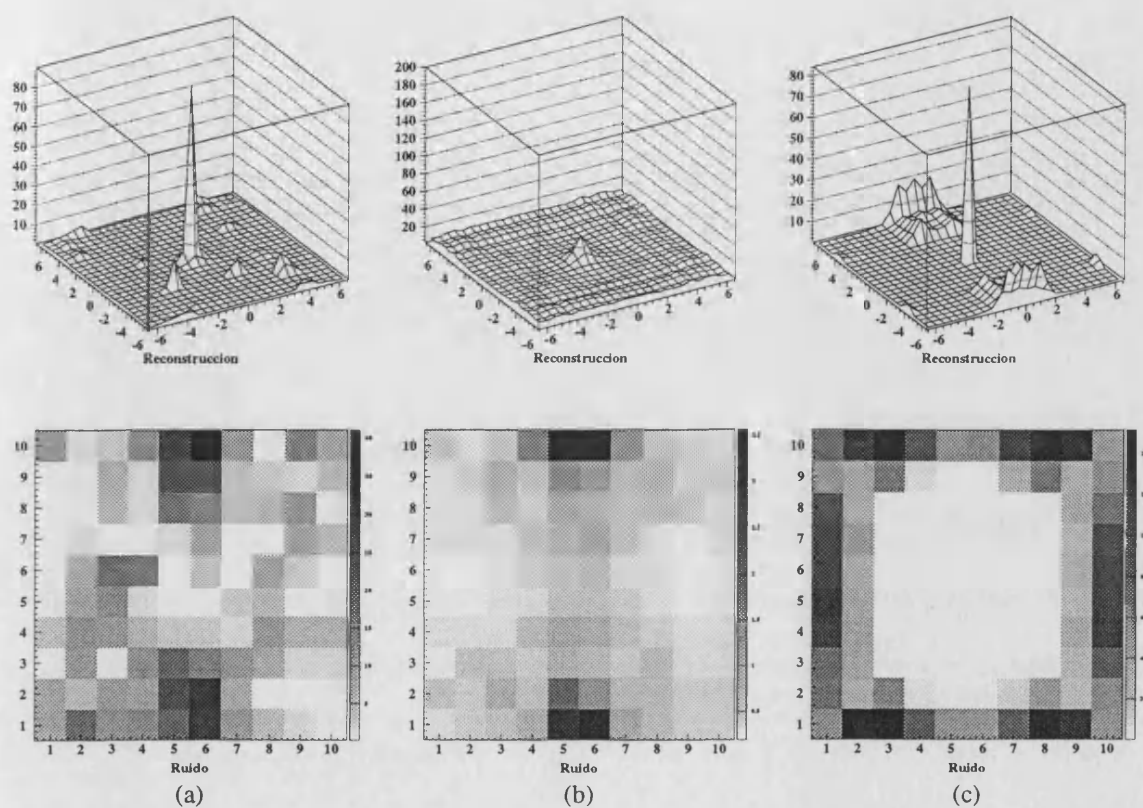


Figura 4.26: Reconstrucciones estimando un ruido variable B_{ij} y estimación del ruido en el plano detector

Empezando con el método de máxima entropía, vemos que el efecto que produce el aumentar los grados de libertad introduciendo la estimación del ruido como parte del problema es similar al caso anterior, en que estimábamos un ruido constante B : aparecen estructuras indeseables en la imagen, pero la estimación de las intensidades es mejor, en general (aunque la verdad es que, en el caso (b) la diferencia con el método original -ignorando el ruido- no es muy grande). Las intensidades reconstruidas son, para (a), de 90 fotones/cm², para (b), de 32 fotones/cm², y para (c) (ruido variable) de 84.4 fotones/cm². Se puede observar que la estimación del ruido es relativamente buena, y reproduce a *grosso modo* con más o menos acierto la estructura del mismo (si bien no la intensidad). Es decir, si no tenemos medio alguno de conocer la estructura del ruido en nuestro plano detector, ésta puede ser una buena herramienta para tener una primera estimación.

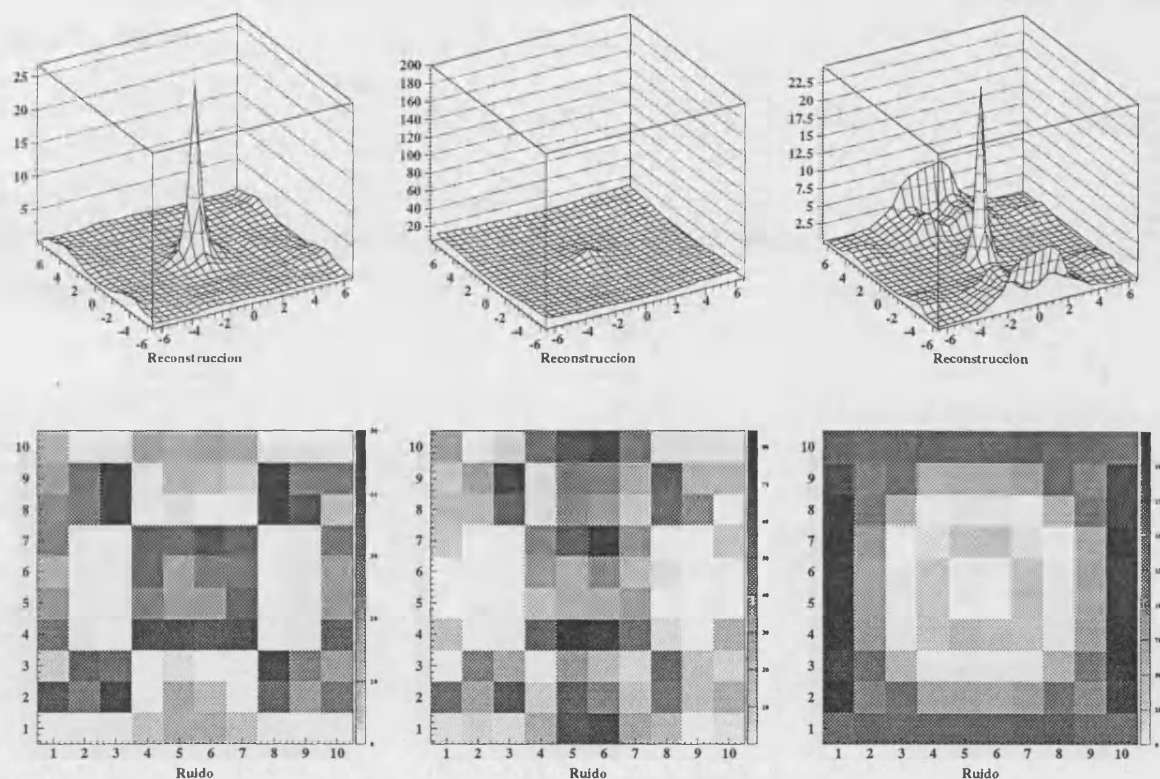


Figura 4.26: Reconstrucciones estimando un ruido variable B_{ij} y estimación del ruido en el plano detector.

En cuanto al algoritmo EM, el fracaso es total. El pico se ha ensanchado más, la intensidad reconstruida ha empeorado (para (a) es de 26.7 fotones/cm², para (b) es de 15.8 fotones/cm² y para (c) es de 24.8) y han aparecido estructuras en el fondo que antes no existían. Esto es debido a la mala costumbre que tiene el algoritmo EM de que la mejor estimación del ruido en el plano detector sea una *que reproduzca la forma del plano detector*; y efectivamente, si comparamos las estimaciones del ruido de los casos (a) y (b) con la figura 4.11 y la estimación del ruido del caso (c) con la figura 4.23, vemos que reproducen, no la estructura del ruido, sino **la señal detectada**. El introducir esas cuentas que copian la señal detectada en la estimación del ruido, resta información para la estimación de las fuentes celestes, con lo que se empobrece la imagen. Podemos intentar mejorar la imagen poniendo como valor inicial del ruido una estimación más realista (por ejemplo, el valor medio del plano detector). Pero esto no altera nada el resultado; tanto un método como el otro convergerán al mismo resultado final.

4.8.4 Mejorando lo presente

Los métodos explicados en el apartado 4.8.3 pueden ser de utilidad para mejorar la imagen si no conocemos la estructura del ruido. No obstante, siempre será muchísimo mejor conocer bien la estructura del ruido y tener un buen modelo del mismo, que intentar averiguarlo por estos métodos, que siempre nos dejarán con cierta incertidumbre. Es posible estudiar y conocer la estructura del ruido en el plano detector, simplemente estudiando zonas del cielo en las que no existen fuentes gamma (o que si existen son demasiado débiles para ser detectadas por nuestro aparato) durante el tiempo suficiente, lo que nos dará un buen modelo del ruido esperado en el plano detector, que nos servirá para corregir las mediciones cuando tomemos datos en presencia de fuentes. Esto es posible porque, como dijimos en el apartado 1.6.1, el ruido dominante en LEGRI vendrá dado por la radiactividad inducida en el telescopio por la Anomalía del Atlántico Sur, que alcanzará un punto de saturación, con lo que tendremos a partir de ese momento un ruido aproximadamente constante (en el tiempo) en el plano detector.

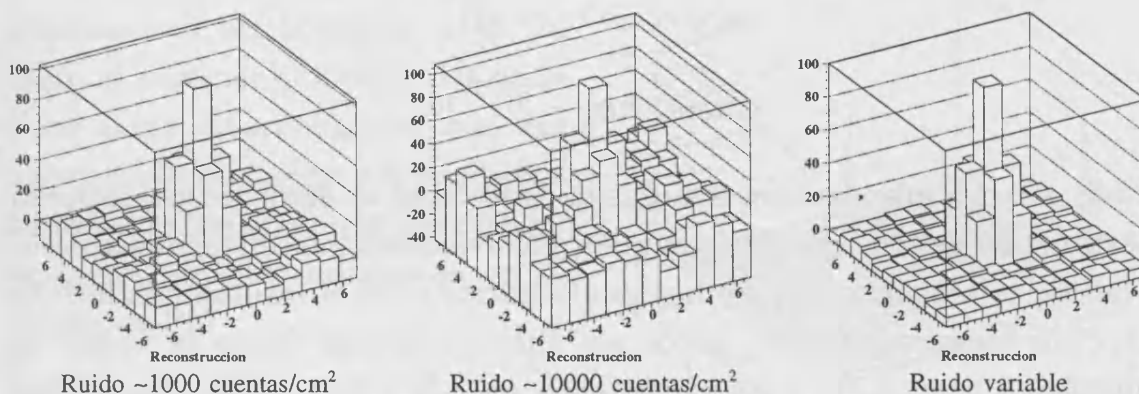


Figura 4.28: Reconstrucción con CBMF una vez eliminado del plano detector un modelo del ruido

Una vez que tengamos un buen modelo del ruido del plano detector, el primer método que se le ocurre a uno para corregir su efecto en las mediciones es, simplemente, restar el modelo; sustraer a la medición tomada en el plano detector nuestro modelo de ruido, e introducir ese plano detector corregido como *input* de nuestros métodos de reconstrucción. Esto dará buenos resultados en los métodos de correlación, pero no en los métodos de maximización, aunque

por diferentes motivos. En la figura 4.28 se muestra la reconstrucción con CBMF de los casos en que había en el detector un ruido de ~ 1000 cuentas/cm², ~ 10000 cuentas/cm² y un ruido con estructura (el descrito en el apartado 4.8.2), habiéndose substraído del plano detector un modelo del ruido antes de hacer la reconstrucción. El modelo que hemos substraído es, respectivamente, 1000 cuentas/cm², 10000 cuentas/cm² y, para el tercero, 300 cuentas/cm² en los detectores exteriores hasta 50 cuentas/cm² en los interiores; es decir, el ruido que previamente habíamos introducido, pero sin fluctuación estadística. Como se ve, la imagen ha mejorado muchísimo. Si hacemos lo mismo con los métodos de maximización, es decir, sustraer al plano detector un modelo del ruido e introducir el resultado de la resta como *input* del algoritmo, el método falla, tal como hemos dicho. En el caso del método de máxima entropía, esto es, sencillamente, porque hacemos las cosas mal, pues ahora la ec. 2.44 se convertirá en:

$$\tilde{O}_{\alpha\beta} = e^{-1-2\lambda \sum_{ij} \Phi_{ij}^{\alpha\beta} \frac{(\tilde{D}_{ij}-D'_{ij})}{\sigma'_{ij}}} \quad (4.21)$$

con $D'_{ij} = D_{ij} - B_{ij}^{modelo}$

pero como $\sigma_{ij} = \sqrt{D_{ij}}$

entonces $\sigma'_{ij} = \sqrt{D'_{ij}}$!!

es decir, cuando introducimos a ciegas nuestro *input* en el algoritmo, estamos subestimando los errores experimentales, y nuevamente introducimos estructuras falsas en la imagen [29]. Pero para el algoritmo EM el resultado es incluso peor, pues nuestro *input* D'_{ij} puede ser ahora ¡negativo! (como se ve por la definición en la ec. 4.21), y por tanto (véase ec. 2.56 y 2.57), la no negatividad de la solución puede quedar seriamente alterada; y no sólo eso, ¡sino la propia convergencia de la serie! Como podemos ver en la figura 4.29, donde mostramos la convergencia de la intensidad reconstruida del píxel central de la imagen y la χ^2 , la buena convergencia del método que podíamos apreciar en el apartado 4.2.1 se ha destruido por completo, y aparecen valores de la intensidad **negativos**. El ejemplo para el cual se ha estudiado la convergencia (que es el que se muestra en la figura 4.29) es el caso con ruido variable en el plano detector, al cual se ha substraído un modelo del mismo previamente a su introducción en el algoritmo.

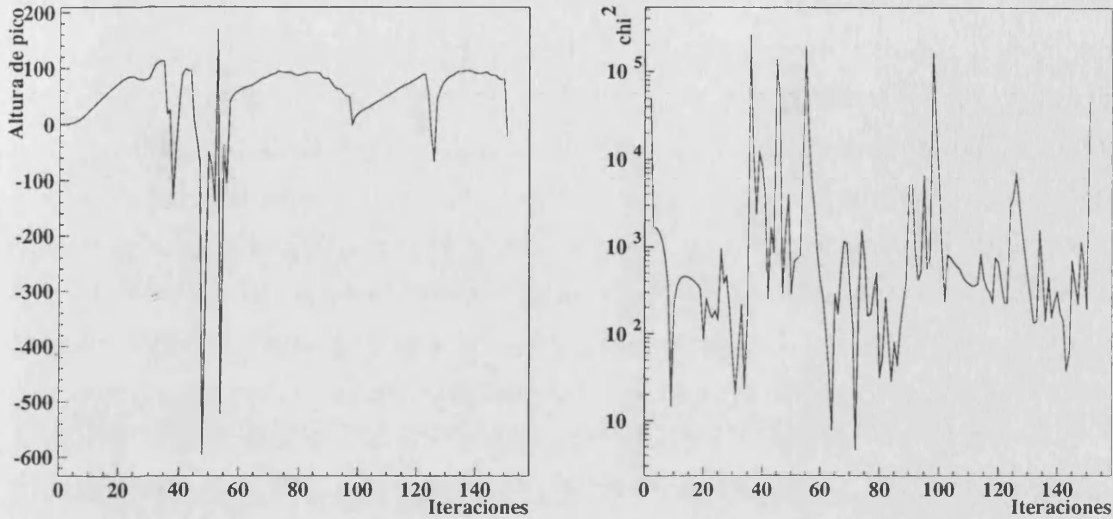


Figura 4.29: Convergencia del algoritmo EM de la intensidad del píxel central y de la χ^2 cuando se sustrae el modelo del ruido a los datos experimentales antes de la reconstrucción.

La imagen reconstruida (por llamarla así) con el algoritmo EM la podemos ver en la figura 4.30. Es decir, el sustraer el modelo del ruido a los datos experimentales, que tan buen resultado nos ha producido con los métodos basados en la correlación, es completamente desastroso en el algoritmo EM.

Sin embargo, no todo está perdido; podemos incluir el modelo del ruido en el algoritmo como parte de la **respuesta del detector**. Es decir, en lugar de modificar nuestros datos experimentales D_{ij} , modificaremos la estimación de los mismos (que, recordemos, venía dada por la ec. 2.45) de la forma que sigue:

$$\tilde{D}_{ij} = \sum_{\alpha\beta} \tilde{O}_{\alpha\beta} \Phi_{ij}^{\alpha\beta} + B_{ij}^{\text{modelo}} \quad (4.22)$$

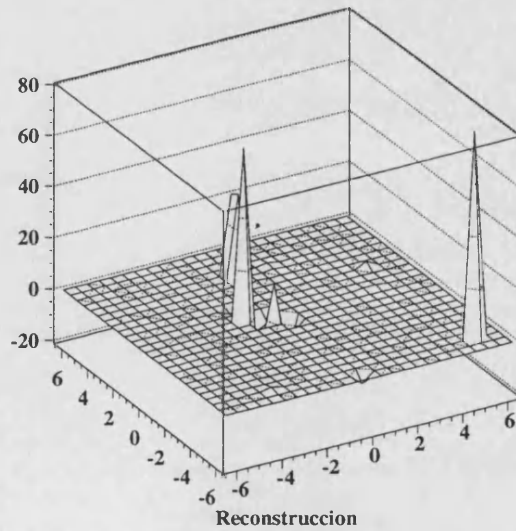


Figura 4.30: Imagen reconstruida con el algoritmo EM cuando se sustrae el modelo del ruido de los datos, antes de la reconstrucción.

Si hacemos esto con el método de máxima entropía, vemos que hemos corregido el pequeño fallo que cometimos en la ec. 4.21, pues, en el sumatorio del exponente, el numerador permanece inalterado, ya que antes restábamos el modelo del ruido a los datos y ahora lo sumamos a la estimación; pero como ambos están restados entre sí, el resultado final es el mismo. Sin embargo en el denominador, al no haber corregido las cuentas del plano detector, tengo el valor correcto del error experimental. En cuanto al algoritmo EM, ahora vuelvo a recuperar la no negatividad del resultado, pues todo es positivo (y el algoritmo vuelve a converger). Los resultados que obtenemos ahora hablan por si mismos: en la figura 4.31 se muestra (de izquierda a derecha) la reconstrucción, una vez incluido el modelo del ruido como parte de la respuesta del detector, para los casos conocidos de un ruido en el plano detector de ~ 100 cuentas/cm², ~ 1000 cuentas/cm² y ruido variable. En la parte superior se muestran las reconstrucciones correspondientes al método de máxima entropía, y en la inferior al algoritmo EM.

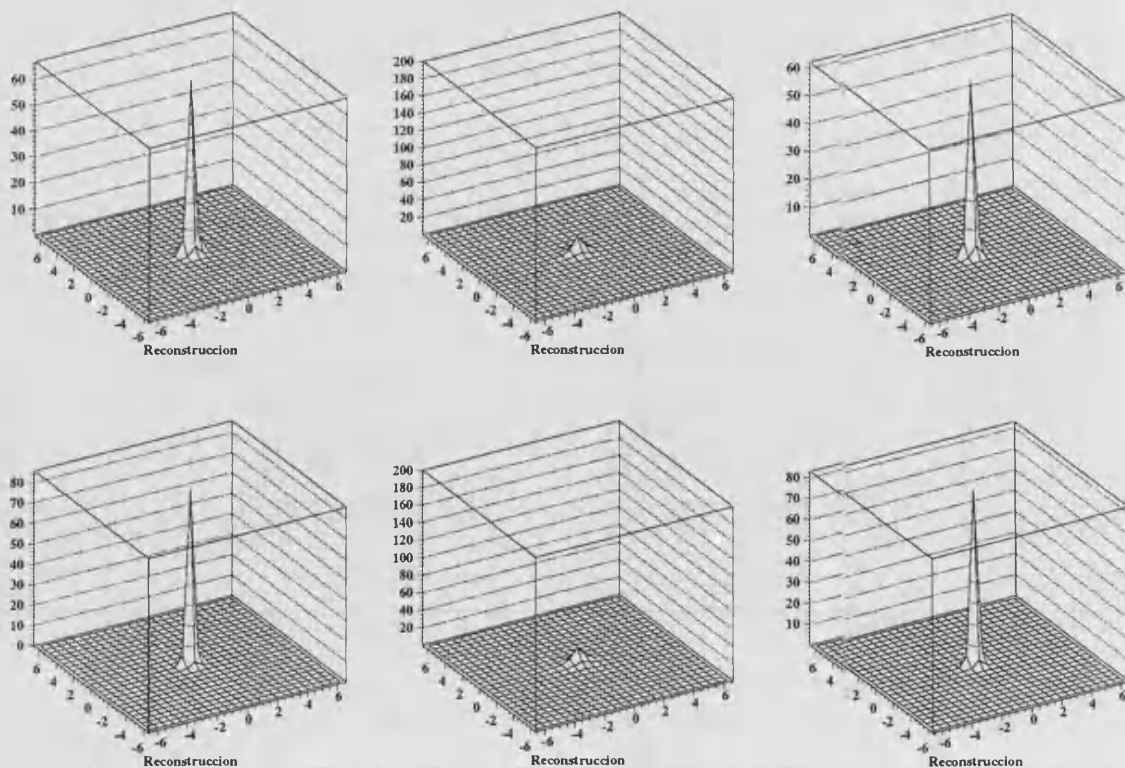


Figura 4.31: Reconstrucciones incluyendo el modelo de ruido como parte de la respuesta del detector.

Como se ve, ahora se han eliminado **por completo** las estructuras que surgían en la imagen en los casos anteriores, y se muestra claramente un pico sobre fondo plano. Las intensidades reconstruidas, para el caso de máxima entropía son de: 66.8 fotones/cm² (para un ruido de ~100), 19.3 fotones/cm² (para un ruido de ~1000) y 62.31 fotones/cm² (para un ruido variable), y, respectivamente, para el algoritmo EM son de: 85.7 fotones/cm², 18.9 fotones/cm² y 83.22 fotones/cm². Como se ve, para el algoritmo EM este es sin lugar a dudas el mejor método; y si bien en el caso del método de máxima entropía se obtenía una mejor reconstrucción de la intensidad de los picos cuando estimábamos B_{ij} , surgían estructuras indeseables, principalmente en el caso de ruido variable, en que era más grave (los lóbulos que surgían si ignorábamos el ruido permanecían cuando permitíamos que el método estimara el valor del ruido, a pesar de que se obtuviera una estimación razonable del mismo).

¿Pero realmente se han eliminado por completo las estructuras debidas al ruido? ¿o tan sólo han disminuido, y en presencia de una señal real ésta domina y no las podemos apreciar? es decir, una vez que tenemos un buen modelo del ruido ¿qué observaremos al reconstruir una señal en la que tan sólo haya ruido?

Para ello se ha sometido al telescopio a un ruido con fluctuación estadística de intensidad ~100 cuentas/cm² y otro de ~10000 cuentas/cm², ambos en ausencia de señal alguna. Se ha reconstruido la señal, *implementando* el modelo del ruido en el algoritmo, y el resultado lo podemos ver en la fig. 4.32; en la parte superior, el método de máxima entropía, y en la inferior el algoritmo EM; de izquierda a derecha, para un ruido de ~100 y de ~10000 cuentas/cm².

Dado que, para que una señal sea detectable por encima del ruido, ésta debe ser mayor que la fluctuación estadística del mismo (que viene dada por la raíz cuadrada de su valor), hemos usado la raíz cuadrada del ruido como valor máximo de la representación, es decir, respectivamente, 10 y 100, pues de ser detectable una señal, este será el orden de la intensidad esperada en la reconstrucción (esta es una restricción mayor que poner 0.2 veces el orden de las cuentas detectadas en el plano detector que hemos usado antes, con lo que, si hay alguna estructura, se verá más claramente que antes).

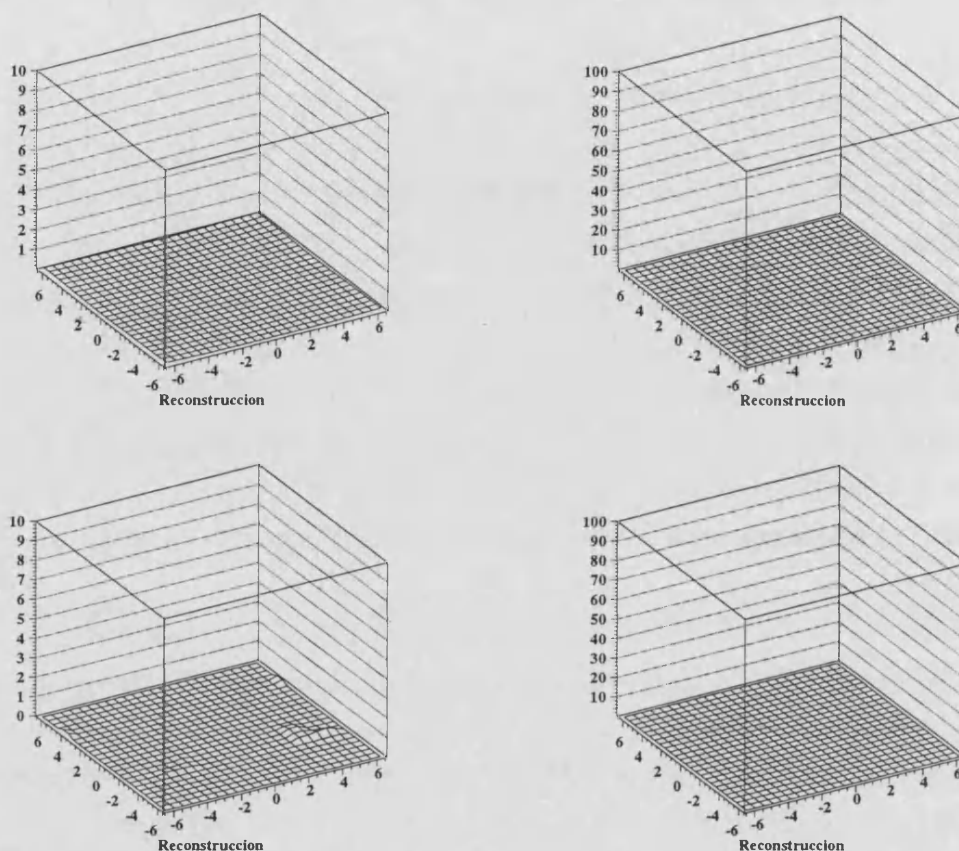


Figura 4.32: Reconstrucción en ausencia de señal y presencia de ruido, usando un modelo del mismo

Se puede ver que, para el caso del algoritmo EM, cuando el ruido es de ~ 100 cuentas/cm², aparecen algunas pequeñas estructuras (con una intensidad del orden de 0.3 fotones/cm²) debidas a la fluctuación estadística del ruido que desaparecen cuando éste es más intenso y la fluctuación menor (lo cual se consigue simplemente aumentando el tiempo de medida). En los restantes casos no se aprecia estructura que nos pueda llevar a pensar que nos hallamos ante una fuente celeste real; es decir, un buen conocimiento del ruido suprime fuentes fantasmas debidas a la estructura del mismo (no obstante, cualquier fuente que pueda aparecer en la imagen reconstruida puede ser identificada como perteneciente al cielo real o al ruido, sencillamente cambiando la dirección de apuntado del telescopio; si es una fuente real, la fuente reconstruida cambiara de posición en concordancia al cambio de apuntamiento. De todas formas, aunque con este método podamos descartar fuentes ficticias, siempre será mejor tener una imagen lo más limpia posible).

Por tanto, como conclusión, y siguiendo la vieja máxima de "si no puedes con tu enemigo, únete a él", el mejor método de tratar con el ruido y evitar su nefasta influencia es estudiarlo para conocerlo bien (estudiando zonas del firmamento ausentes de fuentes), y luego sustraer su influencia en los datos.

Lo que hemos hecho en este apartado no es más que un caso particular de fijar el valor de ciertos píxeles y mantenerlos invariantes en cada iteración; en este caso, siguiendo la idea del apartado 4.8.3 en el que incluíamos al ruido entre los parámetros a estimar, hemos fijado el valor de los "píxeles" correspondientes al ruido con un valor determinado (el de nuestro modelo del ruido). El fijar un conjunto de píxeles con un valor determinado para que no cambie al estimar los restantes podremos hacerlo siempre, y de hecho lo hemos hecho implícitamente cuando hemos limitado el tamaño de la imagen reconstruida al campo definido por un ciclo de la máscara ($\pm 6.34^\circ$), en el cual hemos fijado el valor de los píxeles fuera de este campo a cero. Esta técnica puede usarse si fuera necesario para mejorar una imagen (por ejemplo, si sabemos a ciencia cierta que en cierto píxel existe una fuente de intensidad conocida, podemos fijarlo a ese valor e iterar el resto para mejorar la imagen restante).

4.9 Fuentes extensas

Hasta el momento hemos estudiado el comportamiento del telescopio ante fuentes puntuales (una o varias), y si bien es cierto que una fuente extensa puede considerarse formada por multitud de fuentes puntuales muy próximas (cuando discretizamos el cielo), también es cierto, como hemos comprobado, que las fuentes muy cercanas sufren solapamientos en la reconstrucción, y dispersión cuando la sombra de la máscara que proyecta sobre el plano detector no coincide bien con la posición de las unidades detectoras. Así que ¿cómo se las compondrá el telescopio cuando se las vea con una fuente extensa? ¿Será posible reconstruir su forma? ¿y qué decir de sus intensidades de emisión?

Para comprobarlo, hemos generado una fuente celeste, que se muestra en la figura 4.33 (a), en forma de letra **A** mayúscula (en ausencia de ruido). En la fig. 4.33 (b) vemos la señal detectada en el plano detector, y a partir de la

cual se realizarán las reconstrucciones (fig. 4.33 (c) correspondiente a CBMF, (d) a decodificación δ , (e) al método de máxima entropía y (f) al algoritmo EM).

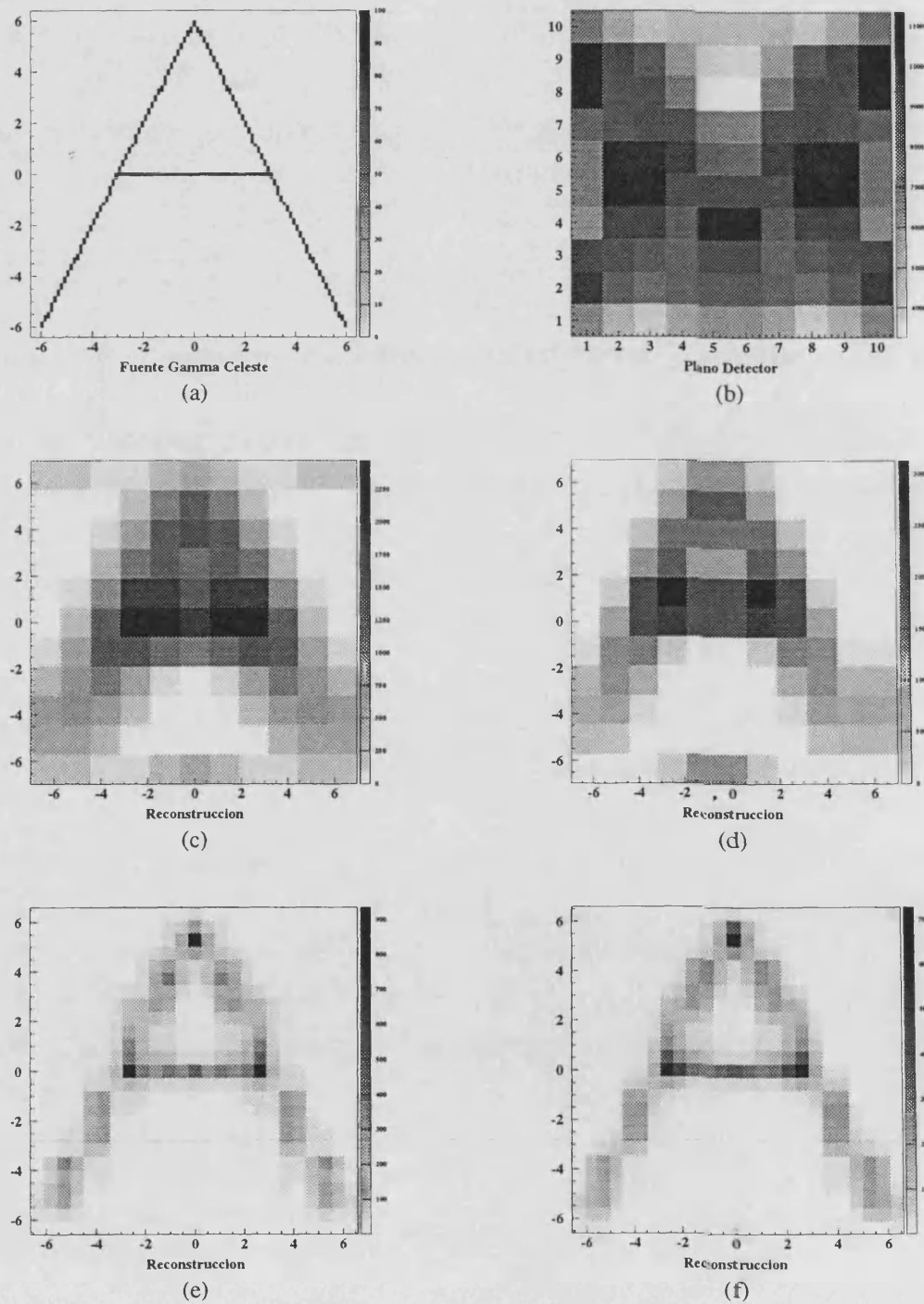


Figura 4.33: Detección y reconstrucción de una fuente extensa en forma de A mayúscula

En estas imágenes nos hemos limitado al campo de visión definido por un ciclo de la máscara. Como vemos, CBMF reconstruye algo que se asemeja a la fuente, aunque francamente es muy borroso; la imagen mejora con decodificación δ , ya que tiene más contraste. Pero el mejor resultado lo obtenemos con los métodos de maximización, que dan resultados muy parecidos.

Nótese que todos los píxeles de la imagen fuente inicial tienen una misma intensidad de 100 fotones/cm²; sin embargo, vemos que la intensidad de la imagen reconstruida no es en absoluto uniforme, sino que se favorecen claramente unos píxeles sobre otros; en concreto, aquellas posiciones que proyectan sobre el plano detector una sombra de la máscara que casa bien con las unidades detectoras, amén del efecto del colimador sobre los píxeles más periféricos.

4.9.1 Múltiples apuntados

Si queremos mejorar los resultados, necesitamos obtener más información sobre la fuente. Al principio de la lectura de este trabajo, el lector curioso puede haberse preguntado por qué no se han tenido en consideración métodos más clásicos, probados con éxito en otras clases de problemas, como por ejemplo el método de mínimos cuadrados. Estos métodos ajustan unos pocos parámetros a una multitud de datos, que en principio siguen la misma ley; es decir, tenemos pocas incógnitas para muchos datos. Aquí el problema es justo el contrario; hagamos un balance de incógnitas y variables: nuestras incógnitas, los píxeles celestes, dependerán de cuán finamente lo subdividamos, pero por ejemplo, para los resultados que hemos estado dando hasta ahora, cuando nos limitamos al campo definido por un ciclo ($\pm 6.34^\circ$), dividido en píxeles de 0.64° , son $20 \times 20 = 400$ píxeles, 400 incógnitas (eso si no tenemos en cuenta el ruido en cada detector, que serían otras 100 incógnitas); nuestros datos son las medidas de cada unidad detectora, es decir, 100 datos.

O sea, tenemos 100 datos para 400 incógnitas; obviamente no se puede aplicar un método de mínimos cuadrados... ¿O sí?

Pues sí. Podemos incrementar el número de datos que poseemos,

realizando diferentes apuntados de la misma zona del cielo. Es decir, realizar una medida durante un cierto tiempo, variar ligeramente la dirección de apuntado, volver a medir, etc... con lo que en cada apuntado, obtenemos un conjunto de datos diferente. Por ejemplo, con nueve apuntados de la zona obtenemos 900 datos para 400 incógnitas. Las cuentas detectadas en el detector ij durante el apuntado p , vendrá dada por la ecuación 4.23.

$$D_{ijp} = \sum_{\alpha\beta} O_{\alpha\beta} \Phi_{ijp}^{\alpha\beta} \quad (4.23)$$

Es decir, la misma ecuación de siempre, pero con un índice más. Pero ¿qué son α y β ? ya que hasta ahora hemos dicho que las coordenadas (α, β) venían definidas por el telescopio y eran intrínsecas a él; por cada apuntado deberemos tener un sistema diferente de coordenadas. Bueno, lo que hay que hacer es elegir **uno** de los apuntados como referencia y tomarlo como sistema maestro de coordenadas, y referir los otros apuntados a éste (ver figura 4.34).

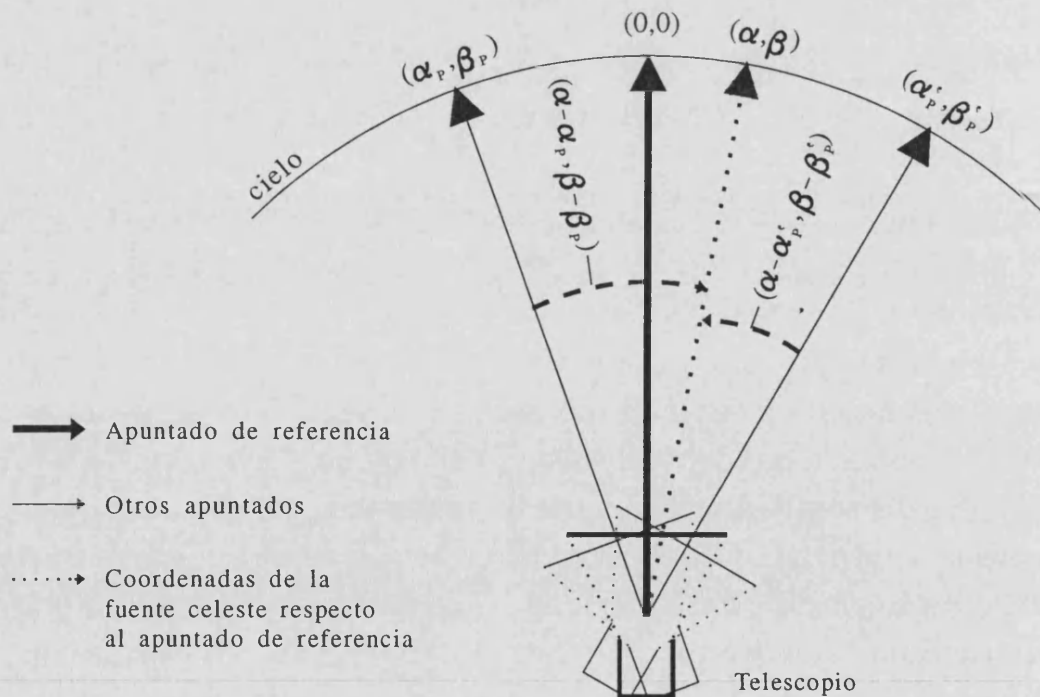


Figura 4.34: Diferentes apuntados de la misma zona del cielo. Uno de ellos se toma como sistema de referencia maestro.

Las coordenadas de la fuente celeste, (α, β) , se toman respecto al apuntado de referencia. Asimismo, (α_p, β_p) , el centro del campo de visión de otro apuntado, también se toma respecto del sistema de coordenadas del apuntado

de referencia. Por tanto, las coordenadas (α, β) de la fuente celeste respecto del apuntado p vendrán dadas por $(\alpha - \alpha_p, \beta - \beta_p)$ (esto no es del todo exacto, pero para apuntados no rotados entre sí ni muy separados del apuntado de referencia -digamos $\alpha_p, \beta_p < 10^\circ$, es una excelente aproximación); o lo que es lo mismo:

$$\Phi_{ijp}^{\alpha\beta} = \Phi_{ij}^{\alpha - \alpha_p, \beta - \beta_p} \quad (4.24)$$

con lo que la ecuación 4.23 queda, definitivamente, como:

$$D_{ijp} = \sum_{\alpha\beta} O_{\alpha\beta} \Phi_{ij}^{\alpha - \alpha_p, \beta - \beta_p} \quad (4.25)$$

Esta ecuación es equivalente en forma a la ecuación lineal siguiente

$$y^i = a_1 \cdot x_1^i + \dots + a_k \cdot x_k^i \quad (4.26)$$

simplemente realizando la equivalencia $y=D$, $x=\Phi$ y $a=O$. Tomando varios apuntados, para tener más datos que incógnitas, podemos intentar estimar los parámetros a mediante un ajuste por mínimos cuadrados. Aplicándola al problema que nos ocupa (la **A** mayúscula de la figura 4.33 (a)), se han realizado 9 apuntados de la fuente celeste, en una rejilla 3x3 (y sin rotación entre ellos; es decir, los ejes α y β de todos los apuntados son paralelos entre sí). El apuntado central se ha tomado como sistema de referencia, y los (α_p, β_p) de los ocho restantes apuntados (respecto del central) son:

-1, 1	0, 1	1, 1
-1, 0	0, 0 (sistema maestro)	1, 0
-1,-1	0,-1	1,-1

Para el ajuste por mínimos cuadrados de los datos así obtenidos, se ha usado un *software* estándar de cálculo matemático muy usado en física, que son las librerías matemáticas del CERN (o cernlib [41]). En concreto, la subrutina usada ha sido LINSQ, que realiza ajustes por mínimos cuadrados de funciones lineales. Previamente se ha probado la subrutina en problemas de ajuste de funciones más típicos, comprobándose que proporciona buenos resultados.

El decepcionante resultado del ajuste para los parámetros a (esto es, O), se muestra en la figura 4.35, aunque es posible vislumbrar la forma de la A .

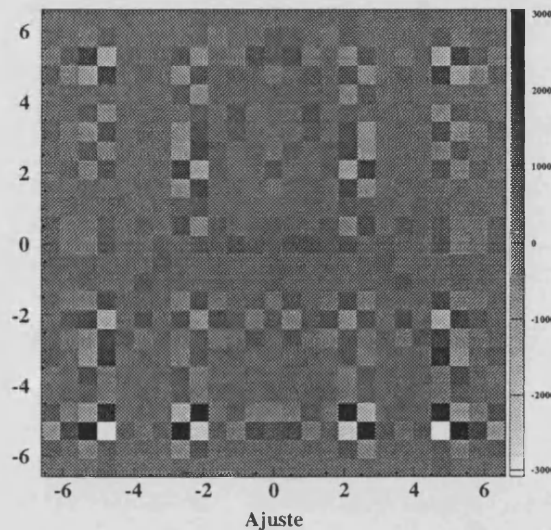


Figura 4.35; Reconstrucción de fig. 4.31 (a) usando un ajuste por mínimos cuadrados y nueve apuntados.

Conclusión: es posible aplicar un método de ajuste por mínimos cuadrados, pero mejor no hacerlo.

No obstante, no hay que olvidar que, al usar varios apuntados de la misma zona, hemos obtenido más información de la fuente que la que obteníamos con un único apuntado, y esto quiere decir que, en principio, debemos poder obtener una reconstrucción mejor. Por tanto, vamos a intentar sacar provecho de eso generalizando nuestros métodos de maximización para tener en cuenta los múltiples apuntados. Esto va a ser muy fácil usando como punto de partida la ecuación 4.25, con lo que la generalización de la solución iterativa de máxima entropía, que venía dada por la ec. 4.10, nos quedará:

$$\bar{O}_{\alpha\beta}^{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)\bar{O}_{\alpha\beta}^n + \left(\frac{1}{n+1}\right)e^{-1-2\lambda^n \sum_{ijp} \Phi_{ij}^{\alpha-\alpha_p, \beta-\beta_p} \frac{(\bar{D}_{ijp}^n - D_{ijp})}{\sigma_{ijp}^2}} \quad (4.27)$$

Y análogamente, la generalización del algoritmo EM, que venía dado por la ec. 2.56, es ahora:

$$\tilde{O}_{\alpha\beta}^{n+1} = \tilde{O}_{\alpha\beta}^n \frac{\sum_{ijp} \Phi_{ij}^{\alpha-\alpha_p, \beta-\beta_p} \left(\frac{D_{ijp}}{\tilde{D}_{ijp}^n} \right)}{\sum_{ijp} \Phi_{ij}^{\alpha-\alpha_p, \beta-\beta_p}} \quad (4.28)$$

Aplicando estos nuevos algoritmos a los nueve apuntados que hemos realizado a la fuente de la fig. 4.33 (a), obtenemos el resultado de la figura 4.36 (izquierda con el método de máxima entropía, y derecha con el algoritmo EM).

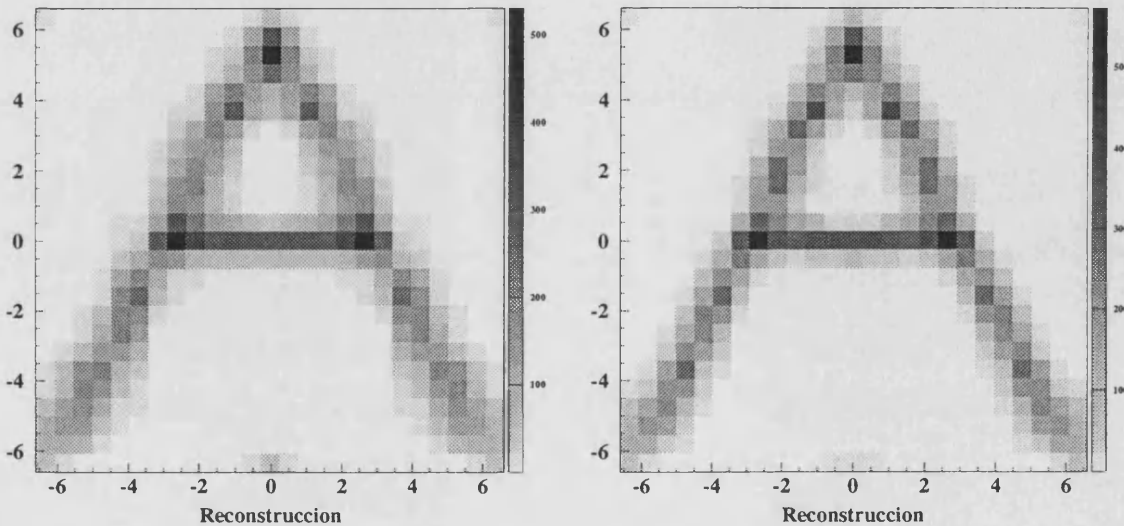


Figura 4.36: Reconstrucciones con el método de máxima entropía y el algoritmo EM haciendo uso de nueve apuntados de la imagen fuente de la fig. 4.33 (a)

Ahora sí que podemos decir ¡eureka! La imagen reconstruida es mucho mejor que la que obteníamos con un solo apuntado (véase fig. 4.33). Al aumentar el número de apuntados y aumentar la información que tenemos sobre el objeto, mejoramos definitivamente la reconstrucción. El contrapunto lo tenemos en que ahora la reconstrucción es mucho más lenta; en el caso del algoritmo EM, nueve veces más lenta. Pero en el método de máxima entropía la cosa es peor; el valor absoluto del sumatorio de la exponencial (que tarda nueve veces más que antes en ser calculado) es también del orden de nueve veces más grande que antes, con lo que pequeñas variaciones del valor de λ^n , producen, en virtud del poder magnificador de la exponencial, fluctuaciones

mucho mayores de antes, que deben ser contrarrestadas realizando un muestreo de λ^n más fino (típicamente, de unas nueve veces más fino que antes), ya que, de otro modo, puede no converger. Es decir, que ahora el método de máxima entropía es unas $9 \times 9 = 81$ veces más lento que antes.

Hay que decir también que si la anchura de la rejilla de apuntados es de 1.27° , en lugar de 1° , no obtenemos información adicional sino la misma, permutad  (recuérdese que 1.27° es lo que subtiende un elemento del plano detector desde la máscara), y la reconstrucción que se obtiene en ese caso es *exactamente* la misma que con un único apuntado.

4.10 Patrones no cíclicos

Como hemos podido ver, el hecho de usar un patrón de máscara cíclico era una buena idea a la hora de reconstruir una imagen usando métodos correlativos, gracias a las propiedades autocorrelativas de los patrones URA y MURA cuando se hallaba su autocorrelación cíclicamente. Pero en realidad no hemos usado para nada esta propiedad cuando hemos usado los métodos de reconstrucción de maximización (que ya hemos visto que dan mejores resultados, y que para telescopios simples como LEGRI pueden resultar totalmente competitivos), y de hecho hemos encontrado más inconvenientes que ventajas con una máscara de este tipo a la hora de usar estos métodos; principalmente la aparición de fantasmas (que en el caso del algoritmo EM suponía un debilitamiento de la fuente, al repartirse la intensidad entre los fantasmas). Por ello vamos a probar en este apartado a usar máscaras no cíclicas, para estudiar su comportamiento, y ver si serían preferibles para LEGRI.  Podr a esto suponer un resurgimiento de las máscaras aleatorias para telescopios sencillos?

A este fin, se han estudiado tres máscaras aleatorias 14×14 y un patrón MURA 19×19 (del cual se ha extraído un trozo 14×14), y se han sometido a las fuentes de la fig. 4.19 (en ausencia de ruido). En la figura 4.37 se muestra, en cada fila, a la izquierda el patrón usado (el de la fila inferior corresponde al patrón MURA), en el centro la reconstrucción con el método de máxima entropía, y a la derecha la reconstrucción con el algoritmo EM.

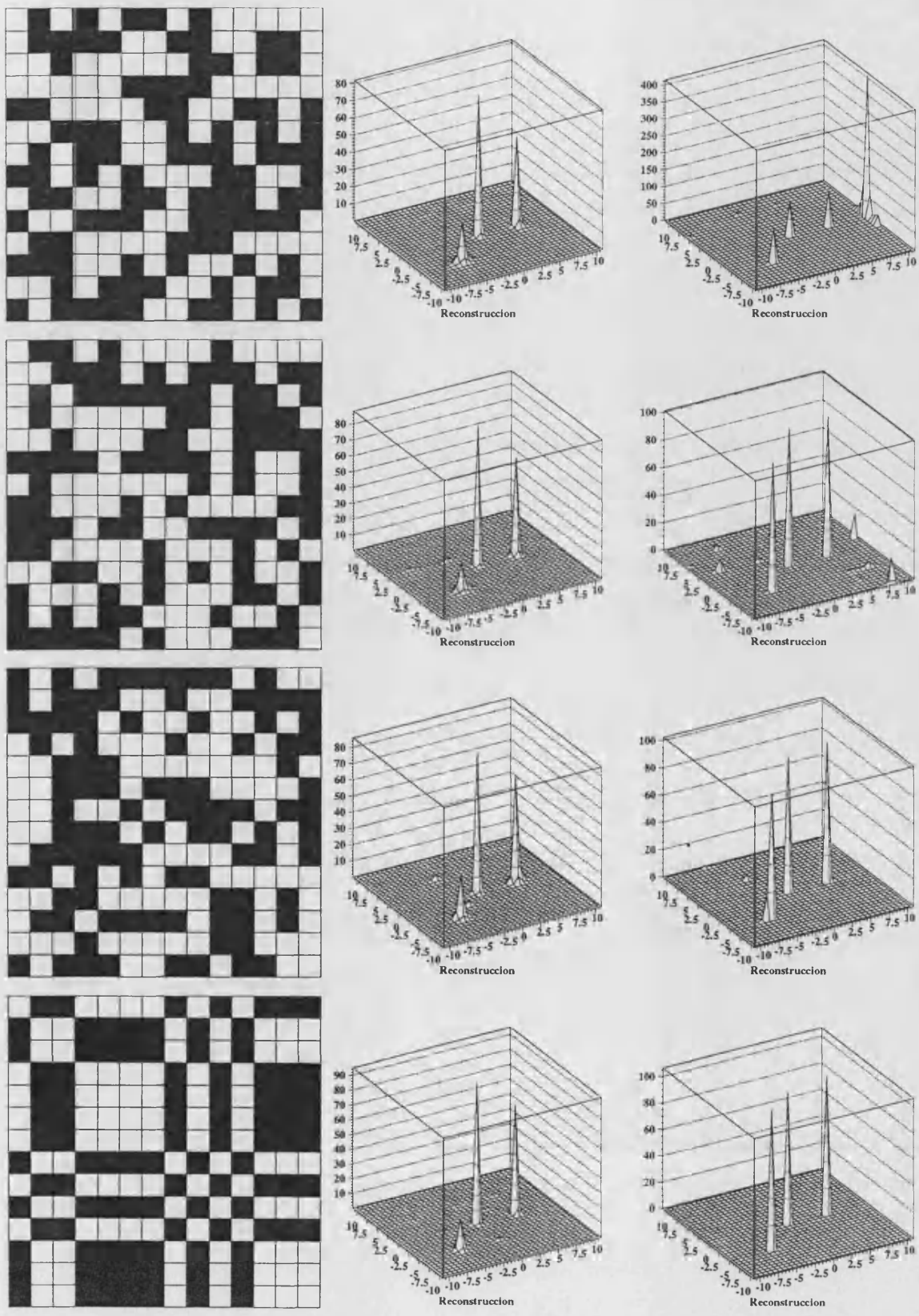


Figura 4.37: Reconstrucciones usando diferentes patrones de la máscara

En esta ocasión, como en el apartado 4.6, se ha reconstruido la imagen usando el campo total del telescopio. Como se puede ver, comparando con el apartado 4.6, en general ahora no se producen fantasmas; o casi. En el caso del algoritmo EM, en la reconstrucción de la primera máscara se observa una estructura anómala a la derecha, sobre la posición (10,0); la reconstrucción de la segunda máscara produce pequeñas estructuras en toda la imagen, y la tercera es la que mejor resultado produce de las aleatorias. Sin embargo, es con el patrón MURA cuando obtenemos un maravilloso fondo plano sin estructuras. No obstante, en las cuatro reconstrucciones con el algoritmo EM, las intensidades de los picos son correctamente reconstruidas a ~ 100 fotones/cm².

Mejor comportamiento ante las estructuras fantasmas lo tiene el método de máxima entropía; en todos los casos se obtiene una imagen similar, con pequeñísimas fluctuaciones del fondo, que en el caso del primer patrón aleatorio son menores (el fondo es prácticamente plano). Sin embargo, a pesar de esto, nuevamente es el patrón MURA el que nos da el mejor resultado, ya que reconstruye mejor la intensidad de las fuentes que los otros tres casos (nótese de todas formas que, al contrario que con el algoritmo EM, el efecto del colimador es importante en este método, como ya se indicó en el apartado 4.7).

Concluyendo el apartado, y dado que los métodos de maximización tienen más ventajas que inconvenientes en nuestro caso, sería preferible que LEGRI tuviera una máscara no cíclica a una cíclica. Y a pesar de que se pueden obtener buenos resultados con un patrón aleatorio, se obtienen mejores con patrones URA y MURA, ya que en un patrón aleatorio se pueden producir subpatrones semejantes (por puro azar) en diferentes partes de la máscara, que nos producirían fantasmas.

4.11 Plano detector dañado

¿Qué ocurriría si el plano detector sufriera algún daño y parte de los detectores quedaran inutilizados? ¿Se perdería la capacidad de formación de imágenes? Para averiguarlo, hemos simulado este efecto "desconectando" varios detectores de nuestro plano detector. En concreto, y dado que la electrónica es

común a cada fila de 10 detectores (a cada "U" del plano detector), suponiendo un daño en la electrónica, hemos desactivado las Ues 1, 4 y 8. Además, para simular un daño en detectores particulares, hemos desactivado los detectores (2,5), (2,9), (3,1), (3,8), (6,4), (7,2), (9,7) y (10,2); es decir, un total de 38 detectores (¡una pérdida importante!). Sometiendo el telescopio a las fuentes de la fig. 4.16 (que se usó en el apartado 4.5), en lugar del plano detector que se obtenía (ver fig. 4.17), lo que obtenemos ahora es el plano detector que se puede apreciar en la figura 4.38.

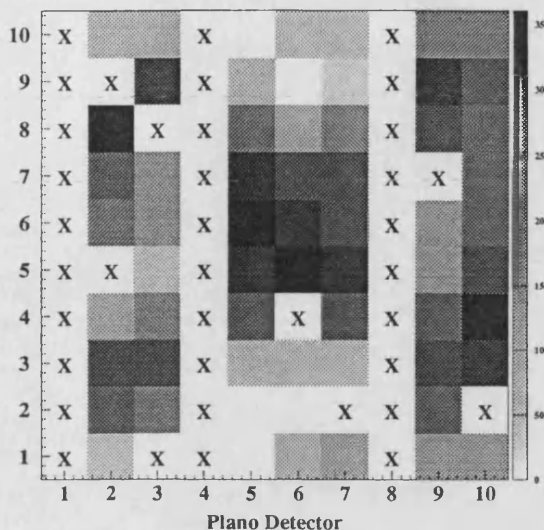


Figura 4.38: Plano detector con 38 unidades detectoras desconectadas, que han sido marcadas con una X.

Si reconstruimos la fuente a partir de estos datos, obtenemos las imágenes de la figura 4.39, de izquierda a derecha, para CBMF, máxima entropía y el algoritmo EM. En este ejemplo, al igual que en el del apartado 4.5, no se ha introducido ruido, para poder comparar con las reconstrucciones que se obtenían con el plano detector en perfectas condiciones. ,

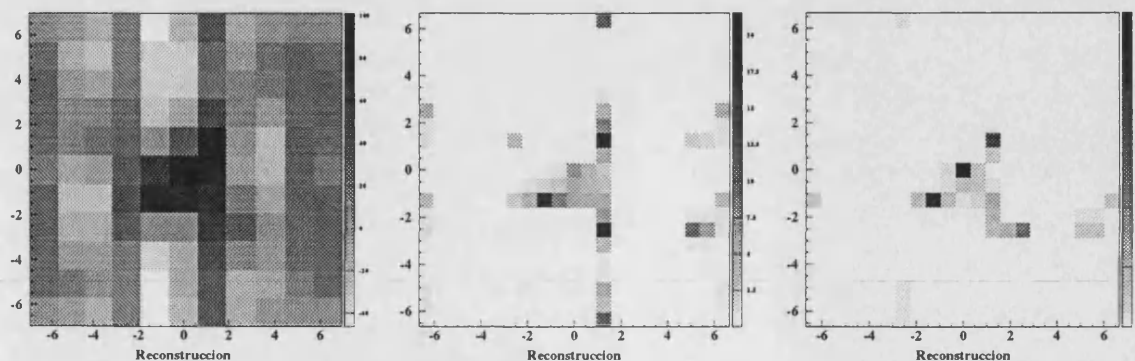


Figura 4.39: Reconstrucciones a partir de los datos obtenidos con 38 detectores estropeados.

Podemos observar que, en el caso de CBMF, se han destruido por completo las propiedades autocorrelativas de la máscara MURA, que nos permitían tener un fondo plano en zonas donde no hubiera fuentes (compárese esta imagen con la figura 4.18). Esto es debido a que no podemos contar con todos los detectores y no se pueden compensar correctamente los 1 y los -1 de la matriz G . En la imagen que obtenemos apenas se puede distinguir nada.

Algo mejor es el resultado obtenido con el método de máxima entropía, aunque, de todas formas, surgen en la imagen estructuras que no corresponden a ninguna fuente, a la par que la intensidad reconstruida de las fuentes (antes, con todo el plano detector en funcionamiento, típicamente de ~ 90 fotones/cm²) es bastante menor, del orden de ~ 20 fotones/cm². El mejor resultado lo obtenemos con el algoritmo EM, donde aparecen menos estructuras y la intensidad es reconstruida mejor, y la intensidad de las fuentes (antes de ~ 95 fotones/cm²), es ahora reconstruida a un valor de ~ 50 fotones/cm².

Pero no tenemos por qué conformarnos con esto. Podemos intentar mejorar el resultado. El problema principal está en que estamos contando el valor de las unidades detectoras que no funcionan (0) como información válida; es decir, estamos engañando al algoritmo y no le informamos de que las cuentas (mejor dicho, la ausencia de cuentas) de esos detectores "no valen". Por tanto, lo que hemos de hacer es sustituir, en las ecuaciones 2.56 y 4.10, el sumatorio que se extendía a todos los detectores por uno que sólo tenga en cuenta los detectores que funcionan. Es decir:

$$\sum_{i,j} \rightarrow \sum_{i,j \notin \text{detectores estropeados}}$$

¿Y que ocurre con la correlación? Bueno, no hace falta hacer esta especie de *by pass*, pues se hace *automáticamente* y el resultado que se obtendría haciéndolo es exactamente el mismo que el que se obtiene sin hacerlo; si miramos la ecuación 3.1 vemos que, precisamente los elementos del plano detector que queremos evitar por contener información errónea, se "evitan" ellos mismos, pues D_{kl} tiene valor cero y el producto $D_{kl} G_{k+i, l+j}$ no se añade al sumatorio.

Esto mismo parece que ocurre en el caso del algoritmo EM con el denominador de la ec 2.56; aunque si introducimos la respuesta (la falta de respuesta) de los detectores que no funcionan en la matriz Φ , tendremos que todos los Φ_{ij} pertenecientes a detectores ij inoperantes serán 0 para todo (α, β) , con lo que la estimación de D_{ij} (que aparece dividiendo a D_{ij}) será cero; es decir que tendríamos $0/0$ si no hiciéramos el *by pass*. El resultado que se obtiene al evitar los detectores que no funcionan se puede apreciar en la figura 4.40 (izquierda para el método de máxima entropía y derecha para el algoritmo EM).

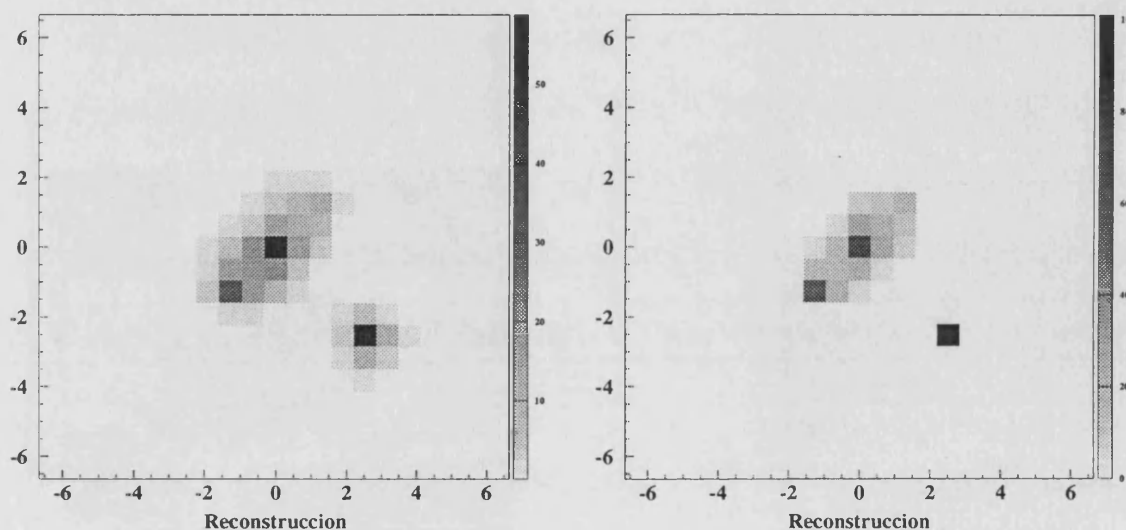


Figura 4.40: Reconstrucciones, una vez corregido el efecto de las unidades, detectoras no operativas.

Como se ve, en el caso del método de máxima entropía la imagen ha mejorado muchísimo, y se han eliminado las estructuras anómalas que aparecían en la imagen. La intensidad reconstruida también se ha incrementado, siendo ahora de ~ 60 fotones/cm². Otro tanto ocurre con el algoritmo EM. La imagen se asemeja mucho a la que se obtenía con el plano detector en correcto estado (ver fig. 4.18), y la intensidad reconstruida también ha mejorado notablemente, siendo ahora de ~ 100 fotones/cm² (aunque antes las intensidades de las fuentes eran más similares entre sí y ahora no tanto). Este es un gran éxito para los métodos de maximización, pues téngase en cuenta que se ha perdido casi el 40% del área detectora y somos capaces de generar con estos métodos imágenes de bastante calidad. Frente a casos como este, los métodos correlativos fallan estrepitosamente en comparación.

Como contrapartida, con la pérdida de detectores somos más sensibles al efecto del ruido y a generar estructuras falsas, debido a la pérdida de información que conlleva; cuanto más información se pierda, más factible es que la propia estructura del telescopio surja en la imagen reconstruida. Por supuesto, si se pierde demasiada información, llega un momento en que es imposible hacer nada. En un caso extremo, en el que tan sólo funciona un detector, el (5,6), la "reconstrucción" que se obtiene es la que se puede apreciar en la figura 4.41, para máxima entropía (izquierda) y el algoritmo EM (derecha).

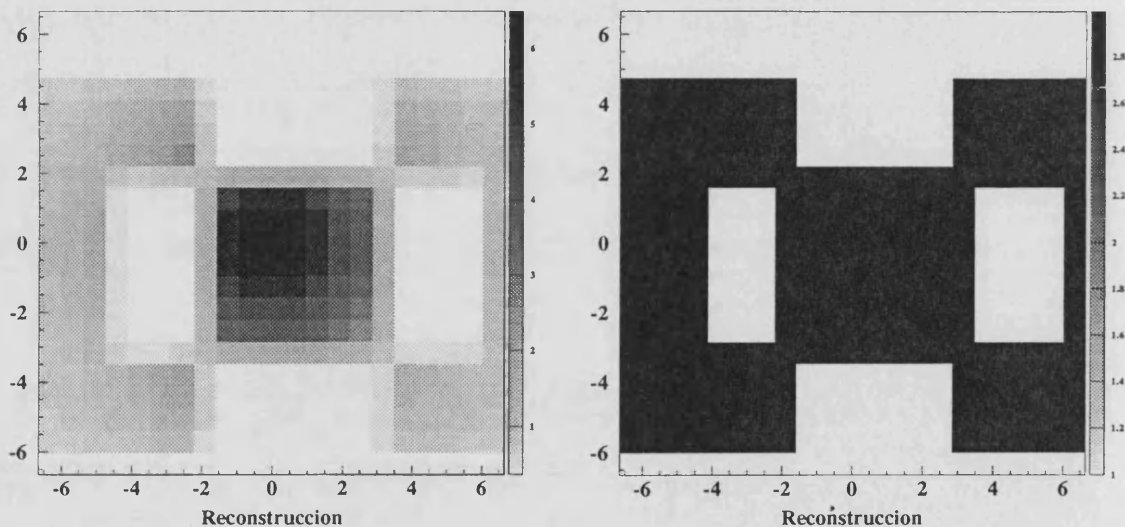



Figura 4.41: Reconstrucciones con un solo detector operativo.

Es decir, la presencia de cuentas en el único detector en activo lleva a los algoritmos a deducir que existe una fuente en cualquiera de aquellas direcciones desde donde puede recibir señal (esto es, desde los agujeros de la máscara); por tanto, dado que todos ellos son posibles fuentes, todos ellos aparecen en la imagen reconstruida. Es decir, la imagen reproduce el patrón de la máscara que el detector tiene sobre sí.

Capítulo 5: Resultados. Respuesta real de LEGRI

5.1 Preámbulo

odos los resultados que se han mostrado en el capítulo 4 han sido obtenidos para un LEGRI idealizado, con detectores de idéntico tamaño (1 cm^2) y eficiencia 1, y siendo los elementos no opacos de la máscara totalmente transparentes. Sin embargo, como se dijo en el capítulo 1, LEGRI es sobre todo un experimento de demostración de una nueva tecnología (la de los HgI_2 y CdZnTe ; para el experimento en conjunto, lo más importante es estudiar el comportamiento de los detectores en condiciones de espacio).

Con esto queremos decir que los yoduros de mercurio fueron hechos artesanalmente (no existe, por el momento, una cadena de producción en serie de los mismos) y no hay dos iguales; cada uno tiene un tamaño diferente (problema que no surge con los 20 CdZnTe , pues son comerciales) y la respuesta de cada detector también es diferente, debido en parte a problemas con la electrónica de vuelo, de comportamiento más conflictivo que la electrónica de tierra, pues debe estar diseñada para soportar el lanzamiento y las condiciones de espacio, a la vez que compacta y de poco peso, lo cual limita mucho la eficacia de la misma. De hecho, hay 15 unidades detectoras inoperantes; el primer detector de cada U, debido a que la electrónica produce demasiado ruido electrónico en los mismos, y otros 5 detectores que están totalmente "ciegos".

Además, el *honeycomb* o estructura de soporte de los tungstenos de la máscara no es totalmente transparente, sino que absorbe (especialmente a baja energía) parte de los fotones y que lo atraviesan. En este último capítulo se han *implementado* las características reales del instrumento (la transparencia del *honeycomb*, el tamaño real de cada unidad detectora y su eficiencia, etc...) en el simulador geométrico que describimos en el apartado 3.4, para estudiar cómo se ven afectados los resultados del capítulo 4, además de mostrar la respuesta real de los detectores (eficiencia, sensibilidad, respuesta espectral...).

5.2 Respuesta de los detectores

Cuando tenemos como plano detector un conjunto discreto de detectores (o incluso un detector de posición continuo), la respuesta de las diferentes partes del plano detector frente a la misma señal no es la misma. En un detector discreto esto se traduce en que dos unidades detectoras diferentes del plano detector, ante idéntica fuente (y en idénticas circunstancias), harán diferentes medidas; esto se magnifica en nuestro caso por el hecho de que nunca tendremos esas "idénticas circunstancias", ya que no tenemos dos detectores iguales, como se puede ver en la figura 5.1, donde se muestra una foto del plano detector (a *grosso modo*, los HgI_2 tienen un tamaño en torno a $5 \times 5 \text{ mm}^2$, aunque bastante variable, siendo los CdZnTe de $10 \times 10 \text{ mm}^2$).

Se define la **eficiencia** como la fracción "cuentas detectadas en el detector" frente a "fotones que llegan al detector". El caso ideal, cuando se detectan tantas cuentas como fotones llegan al detector, sería el de eficiencia 1. En la realidad la eficiencia siempre será menor que uno debido principalmente a dos motivos:

i) El detector (a no ser que sea muy grande y/o masivo) no detendrá todos los fotones γ que le lleguen, sino que habrá fotones que lo atraviesen sin depositar energía (y, dado que en nuestro caso los detectores son semiconductores, sin producir pares electrón-hueco). Esto hace que la eficiencia intrínseca del detector sea menor que la unidad. Esta es la eficiencia que se obtiene con simulación Monte Carlo, usando el código GEANT-3 que describimos en el apartado 3.4, donde consideramos como *suceso detectado* a todos aquellos fotones que depositan energía en el detector (por encima de cierto umbral).

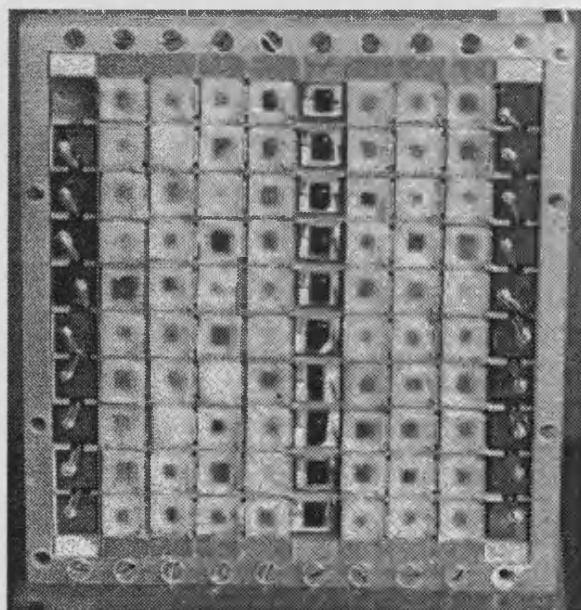


Figura 5.1: Fotografía del plano detector de LEGRI, sin el colimador.

ii) Aún así, el detector real no dará una señal para todos los fotones que depositen energía, debido a la electrónica asociada, que no procesará correctamente **todos** los sucesos. Es decir, dos detectores idénticos, con igual poder de frenado de la radiación, pero distinta electrónica, darán una eficiencia diferente dependiendo de la electrónica de procesado de la señal asociada a cada uno de ellos. No solo eso, sino que la electrónica puede producir (y producirá) cuentas fantasmas que no corresponden a fotones reales (el ruido electrónico), amén de producirse otros efectos, como interferencias entre canales, etc...

En nuestro caso, obteníamos resultados **mucho** mejores con la electrónica de tierra, estándar, que con la de vuelo, que por ser compacta y de poco peso (y resistente a la aceleración y radiación), debe sacrificar muchas de las buenas cualidades de la electrónica de tierra necesarias para una óptima detección: las simulaciones con GEANT-3 nos daban una eficiencia de en torno a ~0.8 entre 20 y 100 keV para ambos tipos de detectores, resultado muy similar a la que se obtiene con la electrónica

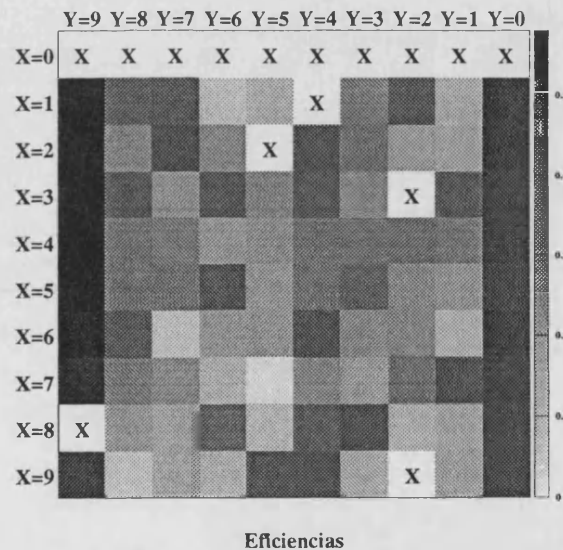


Figura 5.2: Eficiencia de detección de LEGRI

de tierra estándar; por otro lado, la eficiencia medida con la electrónica de vuelo es de ~0.3 para los HgI_2 y de ~0.5 para los $CdZnTe$, que es, claramente, mucho peor. En la figura 5.2 se muestra la eficiencia del plano detector de LEGRI en el rango 20 - 100 keV para fotones; las coordenadas X e Y que se muestran corresponden a las que usa internamente LEGRI; la equivalencia con las que hemos usado en el capítulo 4 (p. ej. en la fig. 4.17) sería $i=10-Y, j=10-X$. Se puede apreciar que el primer detector de cada U (todos los indicados con $X=0$) no funciona, así como otros 5 (todos ellos marcados con un aspa); mientras que hay otros (como por ejemplo el $X=7, Y=5$) que también son casi inoperantes. Los 20 $CdZnTe$ corresponden a las coordenadas $X=0-9, Y=0$ y $X=0-9, Y=9$.

El usar la electrónica de vuelo no implica tan sólo un decremento de la eficiencia de detección, sino que la capacidad de realizar espectroscopía también se ha visto claramente mermada. En la figura 5.3 se muestran cuatro espectros típicos (número de canal frente a número de cuentas) que se tomaron durante la calibración de LEGRI (superpuesto se muestra el ruido de fondo, detectado en ausencia de fuente); los dos superiores fueron tomados con un CdZnTe y los inferiores con un HgI₂. Las fuentes usadas han sido, de izquierda a derecha, Cd 109 y Am 241. En la página siguiente, en la tabla V se pueden ver las características de la emisión de estas fuentes [42].

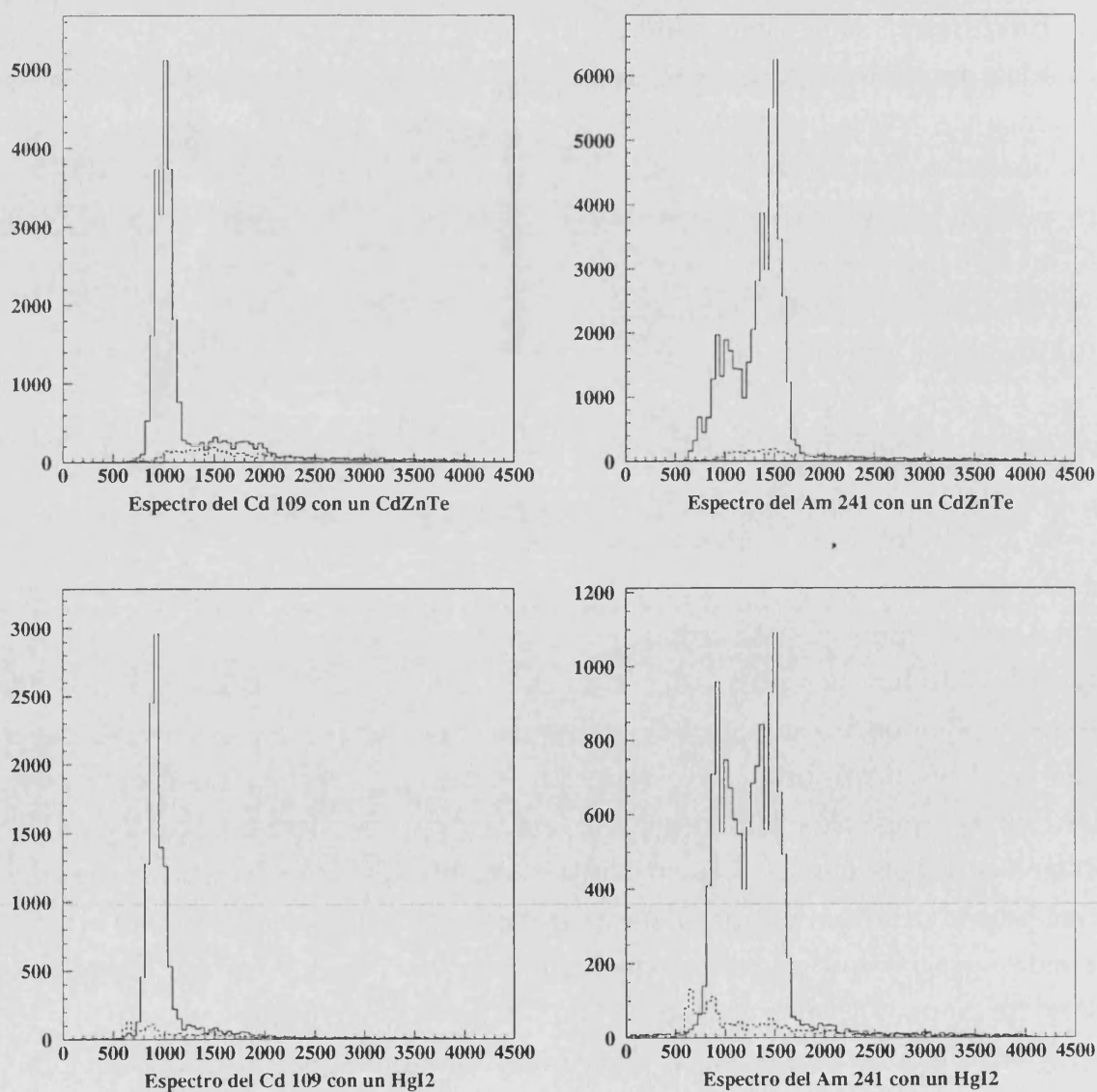


Figura 5.3: Espectros detectados en LEGRI.

Fuente	Desintegr.	Vida media	Radiación	Energía	% de emisión
Cd 109	Captura Electr.	463 días	γ (X K)	23 keV	102.1
	Captura Electr.		γ	88.0 keV	3.61
Am 241	α	432 años	γ (X L)	16 keV	38.0
	α		γ	59.5 keV	35.9
	α		γ	26.3 keV	2.41

Tabla V: Fuentes radiactivas usadas en la calibración de LEGRI

Las líneas de 22.6 keV del Cd 109 y de 16 keV del Am 241 corresponden a un multiplete de rayos X (de las capas K y L respectivamente), de diferentes energías, pero próximas entre sí (por lo que es difícil resolverlas bien), con lo que se muestra un valor promedio en energía e intensidad de porcentaje de emisión. No debe sorprendernos que obtengamos porcentajes mayores de 100, ya que eso refiere al número de fotones que se producen por cada 100 desintegraciones del núcleo, y algunas desintegraciones pueden crear más de un fotón.

Como se puede ver, la resolución espectral de los detectores de LEGRI con la electrónica de vuelo no es muy buena; por ejemplo, los picos de 16 y de 59.5 keV del Am 241 se hallan muy próximos entre sí; la FWHM (*Full Width at Half Maximum*) o anchura de los picos es del orden de ~ 40 keV, y además, no todos los detectores presentan picos, sino que hay otros que tan sólo muestran un continuo; o el ruido electrónico resulta dominante (cuanto más cerca de la posición $X=0$, más ruidosos suelen ser). Este hecho, junto con la falta de tiempo debida a problemas que surgieron durante el calibrado, que supusieron un importante retraso en el programa de calibración (al someter a los detectores a un vacío térmico que emulara las condiciones del espacio se produjo una desgasificación de los detectores, con lo que hubo que detener la calibración y someterlos a un encapsulado para evitar el contacto de los mismos con el vacío), y a la necesidad de entregar LEGRI al I.N.T.A. según el calendario previsto para su ensamblaje con los restantes módulos, ha hecho que

no haya sido posible un estudio en detalle de cuál es la eficiencia de LEGRI en función de la energía (ya que en principio, la eficiencia no tiene por qué ser la misma para fotones de diferente energía) y nos hayamos tenido que conformar con los datos que se tomarno, obteniendo finalmente una eficiencia integrada al rango nominal de LEGRI (20 a 100 keV), que es la que se ha mostrado en la fig. 5.2. Esta matriz de eficiencias es la llamada **matriz de calibración**, que es el punto de partida de las posteriores calibraciones que se realizarán en vuelo usando fuentes γ celestes bien conocidas (como p. ej. el púlsar de la Nebulosa del Cangrejo), las cuales conllevarán sucesivas modificaciones y mejoras de la matriz de calibración (es decir, la matriz de calibración irá siendo actualizada a lo largo de la vida de la misión).

5.3 Corrigiendo los datos

Dado que lo ideal sería tener un plano detector que diera una respuesta uniforme, hemos de corregir los datos en el plano detector para contrarrestar su **in**uniformidad, que conocemos a través de la matriz de calibración. En el caso de los métodos correlativos, podemos realizar la corrección según:

$$D_{ij}^c = \frac{D_{ij}}{\varepsilon_{ij} Tr} \cdot \frac{1 \text{ cm}^2}{A_{ij}} = \frac{D_{ij}}{\varepsilon'_{ij} Tr} \quad (5.1)$$

donde ε_{ij} es la eficiencia de detección del detector ij , Tr la transparencia del *honeycomb* (con ambas correcciones hallamos los fotones que realmente le han llegado) y A_{ij} es su área (con la que corregimos para obtener los fotones que llegan por cm^2); con esto normalizamos todos los detectores para obtener D^c , una versión corregida del plano detector, la cual usaremos como *input*. Este método es muy similar al *flat fielding* [36] consistente en:

$$D_{ij}^c = D_{ij} \left(\frac{T_c/N}{C_{ij}} \mu \right) \quad (5.2)$$

donde C_{ij} es una matriz correspondiente a las cuentas medidas en la unidad ij al ser iluminado el plano detector por una fuente uniforme, T_c es el número total de cuentas medido en todo el plano detector, N es el número total de

detectorres (con lo que T_c/N es la media esperada de cuentas por unidad detectorra) y μ es un factor de normalización que se puede introducir para asegurar conservación de flujo (es decir, que el número total de cuentas en D y en D^c sea el mismo).

Con ambos métodos se logra un plano detector uniforme. De hecho, uno es proporcional al otro. El problema es que *flat fielding*, aunque mejora la imagen y elimina estructuras, falsea la reconstrucción en intensidad, ya que la nueva uniformidad del plano detector es relativa a las demás unidades detectoras y se calcula mediante las cuentas detectadas, mientras que la corrección realizada con la eficiencia se hace mediante los fotones que realmente llegan (den o no señal); esto se calcula fácilmente conociendo la actividad de la fuente y el ángulo sólido que subtiende el detector desde la misma, si hablamos de calibración en tierra, o, si se realiza con fuentes celestes, conociendo la intensidad de la misma (fotones que llegan por unidad de área y tiempo) y el área iluminada de los detectores. Es decir, la uniformidad del plano detector se hace así de forma **absoluta**, mientras que con *flat fielding* se hace de forma **relativa**. No obstante, si es imposible o muy difícil medir la eficiencia de los detectorres, *flat fielding* es una alternativa razonable a la desesperación.

Este plano detector corregido mediante la eficiencia, podría ser usado sin problemas como *input* de nuestros métodos de maximización (no produce valores negativos; aunque hay que andarse con ojo con el error experimental que se introduce en el método de máxima entropía). No obstante es preferible introducir toda la información sobre el proceso de detección en la matriz Φ de respuesta del detector, como la eficiencia, el hecho de tener una transparencia en la máscara distinta del 100%, y el tener detectores de diferente tamaño (lo que conlleva, por ejemplo, que cada detector, en virtud a su colimador, tenga un campo de visión diferente -en este caso el campo de visión del telescopio vendrá definido por el detector que más campo de visión tenga-). El *implementar* un tamaño (¡y forma!) diferente para cada detector es bastante sencillo y es una simple generalización del método que explicamos en el apartado 3.4; sencillamente, se proyecta la forma real del detector en el plano de la máscara, y como se ilustra en la fig. 3.4, se halla su intersección con la proyección del colimador, (o sea, como antes, sólo que ahora la intersección será un rectángulo

distinto al caso anterior, pero el resto del algoritmo es igual). De igual forma que hicimos en la ec. 5.1, normalizando con el área para que todos los detectores tengan idéntica respuesta ante un flujo dado, haremos ahora lo mismo, multiplicando Φ por $A_{ij}/1 \text{ cm}^2$ (porque p. ej. en el caso ideal en que Φ sea 1 -pasa todo el flujo por un agujero de la máscara y no es afectado por el colimador- un detector de la mitad de tamaño que otro ¡deberá detectar la mitad de cuentas!). Con esto, la nueva matriz de respuesta Φ' del detector será:

$$\Phi'_{ij}{}^{\alpha\beta} = \Phi_{ij}{}^{\alpha\beta} \cdot Tr \cdot \epsilon'_{ij} \quad (5.3)$$

siendo Tr la transparencia de la máscara, Φ el flujo hallado según la ec. 3.11 (y la fig. 3.4) pero teniendo en cuenta ya la existencia de detectores de diversos tamaños, y ϵ'_{ij} la eficiencia del detector ij normalizada al área, que ya introdujimos en la ec. 5.1. Esta nueva Φ' la usaremos para nuestros métodos de maximización exactamente del mismo modo que usamos Φ en el capítulo 4, y para simular la respuesta de LEGRI frente a las fuentes celestes.

Los valores de la transparencia se obtuvieron usando fuentes de Am 241 y Cd 109 colimadas, y midiendo con un detector de Ge tipo n. Se tomaron medidas interponiendo entre la fuente y el detector el *honeycomb* y midiendo sin éste interpuesto. La fracción entre ambas mediciones nos da la transparencia del *honeycomb*, cuyo resultado podemos ver en la tabla VI.

Energía	Transparencia
17 keV	62 %
21.5 keV	74 %
26 keV	84 %
31 keV	89 %
35 keV	92 %
60 keV	95 %

Tabla VI: Transparencia de la máscara

Ya que el rango de operación de LEGRI es de 20 a 100 keV, el valor que tomaremos para los resultados que siguen es el correspondiente a una energía de ~30 keV (~90 %), por considerarlo suficientemente representativo.

5.4 Ruido y sensibilidad

5.4.1 Ruido

Como se dijo en el apartado 1.6.1 y como se desprende de [7], la principal contribución al ruido esperado en el plano detector de LEGRI viene de la radioactividad inducida en el material que compone LEGRI por los protones atrapados en la Anomalía del Atlántico Sur. Esta radioactividad, al desintegrarse, produce radiación γ , β^+ y β^- , de la cual sólo será detectable la γ y la β^- (la radiación β^+ libera positrones que se desintegran al contacto con el medio generando dos fotones de 511 keV, que caen fuera del rango de medida de LEGRI). La radiación que se genera en la máscara apenas contribuye, y la principal contribución viene del blindaje de LEGRI (de fuera a dentro, Pb, Ta, Sn y Fe, de los cuales la contribución principal viene del plomo y del tántalo), del colimador y de los detectores en sí [7]. En todos los casos, salvo en el de los detectores, tan sólo la radiación γ llega a los detectores, mientras que la β^- es absorbida por el material pasivo de LEGRI. La única radiación β^- que se detecta en los detectores de LEGRI procede de los propios detectores (y además no es dominante, sino que es aproximadamente una cuarta parte de la radiación que generan los detectores). Es decir, las cuentas de ruido que induce la A.A.S. en LEGRI procede mayoritariamente de fotones γ procedentes de desintegraciones del material de LEGRI.

En [7] E. Porrás ha calculado mediante modelos Monte Carlo el ruido esperado en LEGRI debido a la A.A.S. al año de vuelo, hallando que éste oscila en torno a $5 \cdot 10^{-3}$ cuentas $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{keV}^{-1}$, dando un número total de cuentas para el intervalo de 20 a 100 keV, de 0.4 cuentas $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$. Sin embargo, el LEGRI real, por tener en cada detector un área diferente de 1 cm^2 (que es la que tenían en el modelo Monte Carlo estudiado) y una eficiencia menor de la esperada, no detectará un ruido de 0.4 cuentas por cm^2 y segundo, sino menor:

el área detectora total de LEGRI es de 35.8 cm^2 (bastante lejos de los 100 cm^2 del modelo estudiado); la eficiencia total de LEGRI en promedio para fotones (cuentas totales detectadas frente a fotones que llegan a todos los detectores) es de 0.346. Dado que la gran mayoría de las cuentas de ruido provienen de fotones, podremos usar la eficiencia para fotones para estimar el número de cuentas de ruido esperado, en todo el plano detector, en el caso real:

$$0.4 \text{ cuentas cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \cdot 35.8 \text{ cm}^2 \cdot 0.346 = 4.95 \text{ cuentas/s} \approx 5 \text{ cuentas/s}$$

5.4.2 Sensibilidad

La sensibilidad se define como el mínimo flujo debido a una fuente que es detectable por el aparato (es distinguible por encima del ruido y la fluctuación estadística) con un determinado nivel de significancia. Para desarrollar este apartado vamos a basarnos en los razonamientos de [43] (los cuales se basan a su vez en [44]).

Sea f el flujo (fotones $\text{cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$) que llega proveniente de una fuente celeste. Se define S como el número total de cuentas detectado proveniente de la fuente durante un cierto tiempo. Ambas magnitudes se relacionan por la exposición, X , según la ecuación 5.4.

$$S = X \cdot f \quad (5.4)$$

Por tanto, se define la exposición como:

$$X = A_{on} \cdot T_{obs} \cdot t \cdot \epsilon \quad (5.5)$$

donde A_{on} es el área total del plano detector iluminada por la fuente (es decir, aquella en la que los elementos opacos no proyectan sombra), T_{obs} es el tiempo total de observación, t es la transmisión debida a material residual entre la fuente y el detector (en nuestro caso, principalmente es afectada por la absorción debida al *honeycomb* de la máscara y al colimador) y ϵ la eficiencia total del instrumento. Asimismo, definimos el ruido N como el número total de cuentas debido al fondo. Éste lo podemos subdividir en:

$$N = N_{on} + N_{off} \quad (5.6)$$

donde N_{on} es el número de cuentas debidas al fondo en el área del plano detector iluminada por la fuente y N_{off} el número de cuentas debidas al fondo en el área no iluminada. Llamaremos al cociente entre ambos α :

$$\alpha = \frac{N_{on}}{N_{off}} \quad (5.7)$$

el cual, si se tiene un plano detector con detectores de idéntica respuesta y un ruido uniforme por unidad de área, es también igual a:

$$\alpha = \frac{A_{on}}{A_{off}} \quad (5.8)$$

es decir, el cociente entre las áreas iluminada y no iluminada, que, para detectores de idéntico tamaño es igual a la fracción entre elementos abiertos y cerrados de la máscara (y dependiendo de la máscara puede ser aprox. igual a 1; en el caso de la máscara de LEGRI, ese cociente sería de $12/13 = 0.92$).

Siguiendo con las definiciones, llamamos C_{on} al número de cuentas detectadas en el área iluminada por la fuente y análogamente, C_{off} al número de cuentas detectadas en el área no iluminada. Se tiene, por tanto:

$$\begin{aligned} C_{on} &= S + N_{on} \\ C_{off} &= N_{off} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Una estimación de S vendrá dada, entonces, por:

$$S = C_{on} - \alpha C_{off} \quad (5.10)$$

y su error asociado, por propagación cuadrática de errores, será:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \left(\frac{\partial S}{\partial C_{on}} \right)^2 \varepsilon^2(C_{on}) + \left(\frac{\partial S}{\partial C_{off}} \right)^2 \varepsilon^2(C_{off}) = \\ &= \left(\frac{\partial S}{\partial C_{on}} \right)^2 (\sqrt{C_{on}})^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial C_{off}} \right)^2 (\sqrt{C_{off}})^2 \\ &\rightarrow \sigma = \sqrt{C_{on} + \alpha^2 C_{off}} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Si definimos N' como:

$$N' = N_{on} + \alpha^2 N_{off} \quad (5.12)$$

entonces tenemos que el valor del error de S viene dado por:

$$\sigma = \sqrt{S + N'} \quad (5.13)$$

N' es aproximadamente igual a N si α es cercano a 1. Es más, a partir de las ecuaciones 5.6, 5.7 y 5.12, tenemos la siguiente relación entre N y N' :

$$\begin{aligned} N' &= N_{on} + \alpha^2 N_{off} = N_{on} + \alpha(\alpha N_{off}) = \\ &= (\alpha N_{off}) + \alpha(N_{on}) = \alpha(N_{on} + N_{off}) \\ N' &= \alpha N \end{aligned} \quad (5.14)$$

con lo que, conocido α , es fácil pasar de N a N' .

Por último, se define la significancia n como el cociente entre la medida y su error:

$$n = \frac{S}{\sigma} \quad (5.15)$$

es decir, el número de veces que la señal es más grande que su error. Típicamente, una fuente se considera detectada si su significancia es mayor o igual a 3. A partir de las ec. 5.4 y 5.13, tenemos que la significancia es:

$$n = \frac{S}{\sqrt{S + N'}} = \frac{fX}{\sqrt{fX + N'}} \quad (5.16)$$

El mínimo flujo detectable con un nivel de significancia n, f_n , vendrá dado por la siguiente ecuación transcendental:

$$f_n = \frac{n\sqrt{f_n X + N'}}{X} \quad (5.17)$$

La solución de la ec. 17 viene dada por el siguiente desarrollo en serie:

$$f_n = \frac{n\sqrt{N'}}{X} \left[1 + \frac{n}{2\sqrt{N'}} + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2\sqrt{N'}} \right)^2 + O(4) \right] \quad (5.18)$$

La sensibilidad se define como el flujo mínimo detectable con un nivel de significancia n . Usaremos la ecuación 5.17 con $n=3$ para hallar la sensibilidad de LEGRI. Por desgracia no conocemos N' porque dado que el plano de LEGRI es tan desigual, el factor α (la fracción entre el ruido en el área iluminada y en el área no iluminada) dependerá mucho de la posición de la fuente (y por tanto de qué área ilumine) y de la estructura del ruido. De igual forma, en la ecuación 5.5 donde se define la exposición X , A_{on} depende también de la posición de la fuente.

No obstante, para hallar una estimación de la sensibilidad de LEGRI, vamos a calcularla para el caso en que la fuente se halla centrada en el campo de visión, de tal forma que el colimador no afecte a t (la transmisión) y ésta podamos considerarla igual a la transparencia del *honeycomb* de la máscara (a ~30 keV -como valor representativo de todo el rango- es $t = 90\% = 0.9$). Para este caso, tenemos que A_{on} , el área iluminada por la fuente (la suma del área de todos los detectores iluminados) es de 24.6 cm²; dado que el área total del plano detector es de 35.8 cm², tenemos (suponiendo un ruido uniforme por unidad de área) que $\alpha = A_{on}/A_{off} = 2.21$ (este valor de α tan lejano a 1 es debido a que, con la fuente en (0,0), casi todos los CdZnTe, de área igual a 1 cm², están iluminados). Con esto, tenemos que:

$$A_{on} = 24.6 \text{ cm}^2$$

$$t = 0.9$$

$$T_{ob} = \text{tomémoslo de } 10^5 \text{ s (algo más de un día)}$$

$$\varepsilon = 0.346$$

que nos lleva (ver ec. 5.5) a una exposición de $X = 7.66 \cdot 10^5 \text{ cm}^2 \text{ s}$. Con este valor de X , con un ruido de 5 cuentas/s (véase apartado 5.4.1), que para el tiempo de medida será $N=5 \cdot 10^5$ cuentas, y por tanto $N'=\alpha \cdot N=1.1 \cdot 10^6$ cuentas, y con un valor de $n=3$, tenemos que la sensibilidad de LEGRI, con una signifi-

cancia de 3σ , durante 10^5 segundos de tiempo de medición, y en el intervalo de 20 a 100 keV, es de:

$$f_3 = 4.12 \cdot 10^{-3} \text{ fotones cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

Para hallar el valor promedio por keV, dividamos esto entre 80 (=100-20), con lo que obtenemos:

$$f_3 = 5.15 \cdot 10^{-5} \text{ fotones cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ keV}^{-1}$$

De análoga forma, para un tiempo de exposición de 10^6 segundos (aprox. de una semana), $f_3 = 1.3 \cdot 10^{-3}$ fotones $\text{cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ (o lo que es lo mismo, $1.625 \cdot 10^{-5}$ fotones $\text{cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ keV}^{-1}$). Es decir, aumentando el tiempo de medida, aumentamos la sensibilidad del telescopio (podemos ver fuentes más débiles). La sensibilidad aumenta aproximadamente con la raíz cuadrada del tiempo de exposición. Es decir, para ver fuentes 10 veces más débiles hemos de medir durante tiempos 100 veces más largos.

Estudieemos un caso más desfavorable, en el que los CdZnTe no estén tan bien iluminados, como por ejemplo si la fuente se halla en (2.54,0). El área iluminada que obtenemos ahora es $A_{on}=19.14 \text{ cm}^2$; α es ahora igual a 1.15 (más cercano a 1 que antes) con lo que N' para 10^5 segundos será $5.75 \cdot 10^5$ cuentas. Ahora sí que hay que incluir el efecto del colimador en la transparencia (el efecto del colimador es diferente en cada detector por ser cada detector de un tamaño distinto, pero el valor promedio con que afecta -suprime- a la señal es de 0.75). Con esto, $t = 0.9 \cdot 0.75 = 0.675$. Esto nos da un valor para la exposición de $X = 4.47 \cdot 10^5 \text{ cm}^2 \text{ s}$. Llevando todos estos valores a la ec. 5.18, el valor de la sensibilidad es ahora de:

$$f_3 = 5.08 \cdot 10^{-3} \text{ fotones cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

y, por keV, da un valor promedio de:

$$f_3 = 6.35 \cdot 10^{-5} \text{ fotones cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ keV}^{-1}$$

que no es muy diferente del anterior. Es decir, con esto dos resultados concluimos que la sensibilidad de LEGRI en 10^5 s y a 3σ , para el rango de 20 a 100 keV es del orden de $\sim 5 \cdot 10^{-3}$ fotones $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ (o $\sim 6 \cdot 10^{-5}$ fotones $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{keV}^{-1}$ en promedio). Dado que el púlsar de la nebulosa del Cangrejo emite en el rango de 20 a 100 keV aproximadamente 0.4 fotones $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$, podemos decir que la sensibilidad de LEGRI en 10^5 s es de 14 mCrab (donde 1 mCrab es una intensidad 1000 veces menor a la del pulsar de la nebulosa del Cangrejo -Crab Nebulae-); es decir, LEGRI es capaz de detectar fuentes 72 veces más débiles que el pulsar de la nebulosa del Cangrejo con una significancia de 3σ en un tiempo de exposición de 10^5 segundos.

Esto pone dentro del rango de estudio de LEGRI una buena parte de las fuentes emisoras de rayos X y γ conocidas. En la tabla VII se muestran algunos ejemplos de fuentes de rayos X y γ . La emisión que se muestra es la emisión de la fuente integrada entre 20 y 100 keV, en fotones $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$.

Candidatos a agujero negro		Binarias de Rayos X		Galaxias de Núcleo Activo	
Nombre	Emisión	Nombre	Emisión	Nombre	Emisión
Cygnus X-1	0.7	0834-430	0.1	NGC 4151	$8.8 \cdot 10^{-3}$
Nova Muscae	0.17	GRO 1948+32	$1.6 \cdot 10^{-2}$	3C273	$5 \cdot 10^{-3}$
SMC X1	$1.3 \cdot 10^{-2}$	0115+63 MISO	$1.6 \cdot 10^{-2}$	IC4329a	$3.6 \cdot 10^{-3}$
1E1740.7-2942	$2.6 \cdot 10^{-2}$	0521+373	$8.1 \cdot 10^{-3}$		

Tabla VII: Algunas fuentes de rayos X y γ [45]

Como se ve, hay diversos candidatos a agujero negro visibles por LEGRI, así como binarias de rayos X, estando 0521+373 ya cerca del valor de la sensibilidad de LEGRI; no hay tanta suerte con las galaxias con núcleo activo (AGN) que rondan el límite de la sensibilidad del telescopio (3C273) o están por debajo, como IC4329a, que sería detectable sólo con una significancia de $n \sim 2$.

5.5 Formación de imágenes

¿Cómo puede afectar el tener en el plano detector unidades detectoras de diferente tamaño y distinta eficiencia a las conclusiones que obtuvimos en el capítulo 4 para la formación de imágenes? ¿Afectarán de algún modo, o todo lo dicho para el caso ideal seguirá siendo válido ahora?

Si en algo afecta, es de esperar que uno de los efectos sea un cambio en la intensidad de la señal reconstruida, ya que el principal efecto de la eficiencia es una reducción en la intensidad de la señal detectable en el caso ideal (aunque, como la eficiencia es diferente en cada detector, no se puede equiparar a un cambio de escala). Para estudiarlo, se ha iluminado el plano detector con una fuente en (0,0) de intensidad 100 fotones/cm² (fig. 5.4). Compárese esta figura con la fig. 4.11; se aprecia

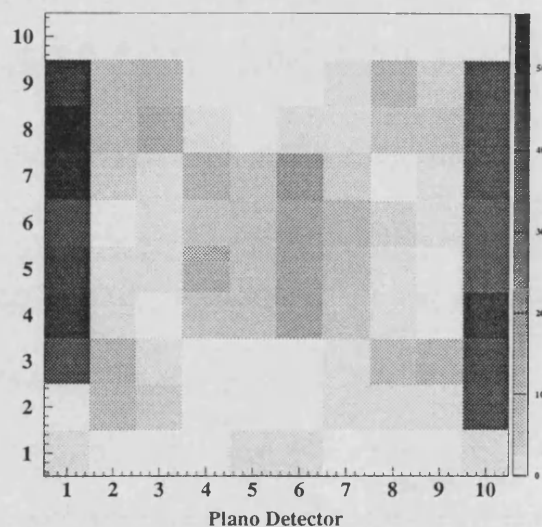


Figura 5.4: Plano detector de LEGRI.

claramente el efecto de las diferentes eficiencia y área, y cómo, por ello, los CdZnTe miden muchas más cuentas que los HgI₂. También se aprecian, si bien no muy claramente, los 15 detectores inoperantes (en blanco, sin ningún tono de gris).

Si reconstruimos, corrigiendo previamente los datos de la fig. 5.4 según se explicó en la ec. 5.1 si usamos métodos correlativos, o usando la Φ' definida en la ec. 5.3 para los métodos de maximización, obtenemos que la intensidad de la fuente reconstruida no ha empeorado significativamente, como podemos apreciar en la figura 5.5, donde se muestra, de izquierda a derecha, la reconstrucción con CBMF, con el método de máxima entropía y con el algoritmo EM.

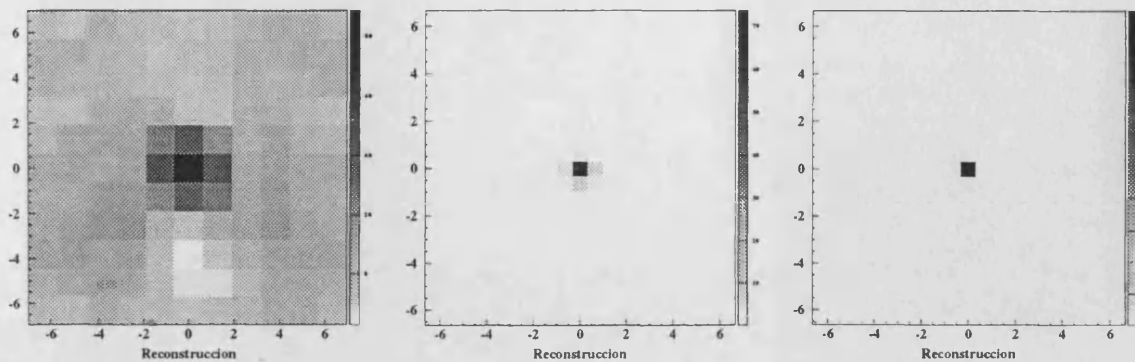


Figura 5.5: Reconstrucciones a partir de la fig. 5.4

De hecho la variación de la intensidad de la fuente que se aprecia para CBMF es debida, no al hecho de tener diferentes eficiencias en cada detector, sino a no poder disponer de todos los detectores del plano detector; efectivamente, el detector $i=1, j=2$ (fig. 5.4) no funciona y su ausencia hace que la intensidad estimada sea menor.

En realidad, el ejemplo de la figura 5.4 en el que la fuente está en el centro del campo de visión puede considerarse un caso afortunado, ya que, salvo por un detector, toda el área que ilumina la fuente es operativa. ¿Variará el resultado que se aprecia en la fig. 5.5 en una situación más desafortunada?. Para averiguarlo, ahora hemos puesto nuestra fuente de intensidad 100 fotones/cm² en la posición $(-2.54, -1.27)$, que genera el plano detector que podemos apreciar en la fig. 5.6.

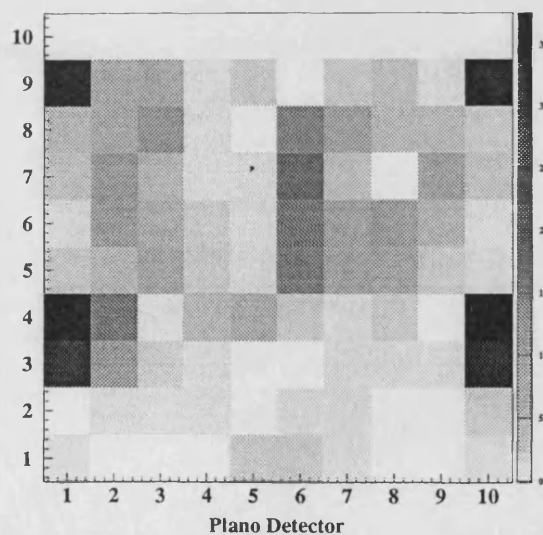


Figura 5.6: Detección de una fuente en $(-2,54,-1,27)$

Este caso, como se ve, es bastante más desfavorable que el anterior; ahora la fuente ilumina 7 detectores inoperantes (casi la mitad de ellos), en lugar de sólo uno. Reconstruyendo ahora la imagen, obtenemos los resultados que se observan en la figura 5.7. Nuevamente, de izquierda a derecha, la reconstruc-

ción con CBMF, el método de máxima entropía y el algoritmo EM.

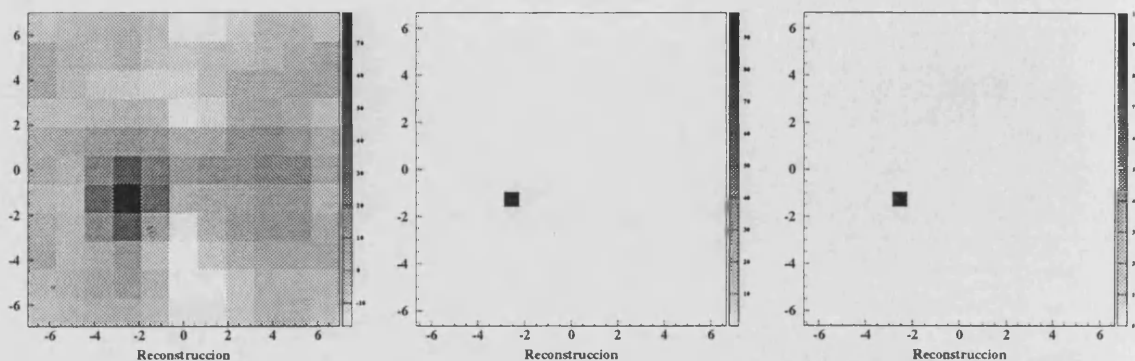


Figura 5.7: Reconstrucciones a partir de la fig. 5.6

De nuevo obtenemos buenos resultados con los métodos de maximización (incluso podría decirse que algo mejores que en el caso anterior) y el resultado con CBMF es similar, aunque el fondo parece tener algo más de estructura, y la intensidad de la fuente es menor, en parte por el colimador, en parte porque ahora son 7 los detectores que no contribuyen en la correlación.

Conclusión: Respecto de los resultados del capítulo 4, apenas se observan cambios en lo que a intensidad reconstruida de la fuente se refiere para los métodos de maximización, mientras que se observa un ligero empeoramiento en los métodos correlativos, si bien es debido principalmente a no poder disponer de todos los detectores del plano detector (ver apartado 4.11).

No obstante, en este caso se han estudiado tan sólo dos casos particulares de fuentes puntuales, colocadas por así decirlo, estratégicamente. Tendremos una mejor comprensión de la capacidad de formación de imágenes si estudiamos una fuente extensa. Por ello vamos a someter a este LEGRI más realista a la fuente de la fig. 4.33 (a) (la **A** mayúscula) y compararemos el resultado que se obtiene con el que se obtuvo en su momento en el capítulo 4. El resultado se muestra en la figura 5.8, siendo el método empleado, de izquierda a derecha, decodificación δ , el método de máxima entropía y el algoritmo EM.

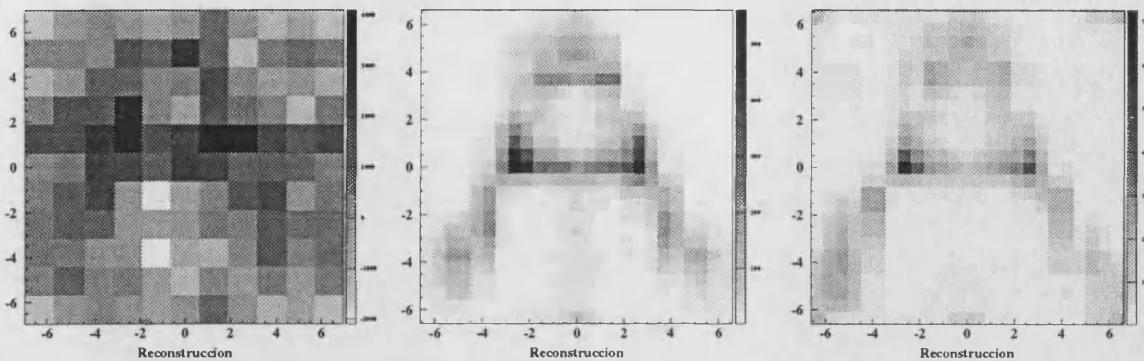


Figura 5.8: Reconstrucciones de la fuente de la fig. 4.33 (a)

Ahora si que se aprecia que hay un empeoramiento en la capacidad de formación de imágenes respecto al detector ideal (fig. 4.33), aunque no es crítico y la imagen que se obtiene con los métodos de maximización es bastante aceptable (no así la que se obtiene con decodificación δ que es totalmente irreconocible). De todas formas, igual que en el capítulo anterior, es posible mejorar la imagen obteniendo más información sobre la misma con el método de múltiples apuntados. Usando la misma secuencia de apuntados que se explicó en el apartado 4.9.1 y aplicándolo al problema que nos ocupa, obtenemos el resultado que se muestra en la figura 5.9, aplicado al algoritmo EM (no se ha aplicado al método de máxima entropía debido al larguísimo tiempo que tarda en obtenerse el resultado, como se explica al final del apartado 4.9.1, y a que es de esperar un resultado similar al del algoritmo EM).

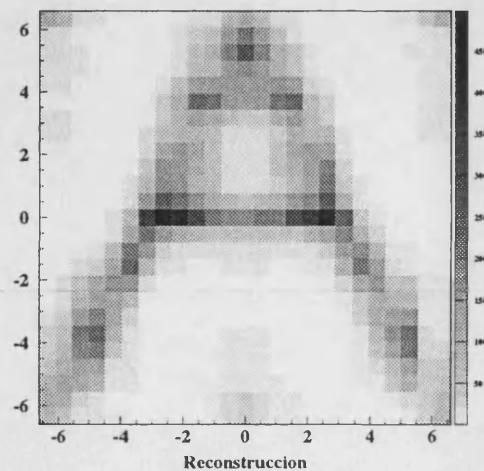


Figura 5.9: Aplicación de múltiples apuntados al algoritmo EM.

Y efectivamente, la calidad de la imagen ha mejorado sustancialmente, a pesar de que no es tan buena como la que se muestra en la fig. 4.36.

Otro de los efectos esperables se refiere a los fantasmas. En el capítulo anterior, todos los detectores tenían el mismo campo de visión, limitado por el colimador, por lo que cualquier fuente que se encontrara en cualquier posición dentro del campo de visión afectaba por igual a todos los detectores (salvo que la presencia de la máscara ocultara la fuente a algunos de ellos). Ahora no ocurre lo mismo, ya que al tener cada detector un tamaño diferente, tiene también cada uno un campo de visión distinto (ver fig. 5.10), y además en muchos casos rectangular (es decir, distinto en el eje x y y). Es decir, habrá posiciones en el campo de visión en las que una fuente podrá ser vista por unos detectores pero no por otros (independientemente de la presencia de la máscara), mientras que en otras será vista por todos (cuanto más cerca del centro del campo de visión se halle, más detectores la verán, mientras que cerca del borde del campo de visión, tan sólo los CdZnTe, más grandes, podrán ver la fuente).

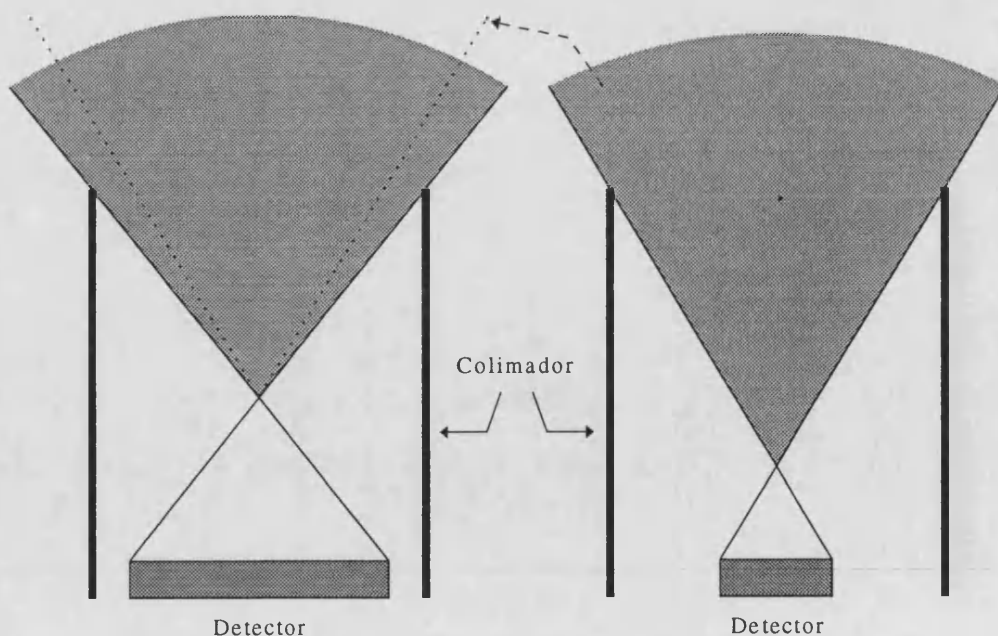


Figura 5.10: Efecto del tamaño del detector en el campo de visión del mismo.

¿Afectará esto a los resultados que sobre la aparición de fantasmas obtuvimos en el apartado 4.6? Vamos a comprobarlo sometiendo LEGRI al campo fuente de la figura 4.19 y reconstruyendo la imagen usando todo el campo de visión del telescopio, que viene definido, como se ha dicho, por el campo de visión de los CdZnTe, ya que son los más grandes. Se ha sometido también el plano detector a un ruido uniforme de 30 cuentas/cm² (que, multiplicando por la eficiencia de cada detector y normalizando a su área real, da un ruido no uniforme, al contrario de lo que ocurría en el capítulo 4). *Implementando* un modelo del ruido en la reconstrucción, el resultado que se obtiene se muestra en la figura 5.11, usando, de izquierda a derecha, CBMF, el método de máxima entropía, y el algoritmo EM. Se ha usado una representación en mapa de superficies para los métodos de maximización, pero no para la CBMF, en que la imagen que se obtenía con esta representación era hartó confusa; por ello se ha optado por usar una representación en mapa de tonos de grises.

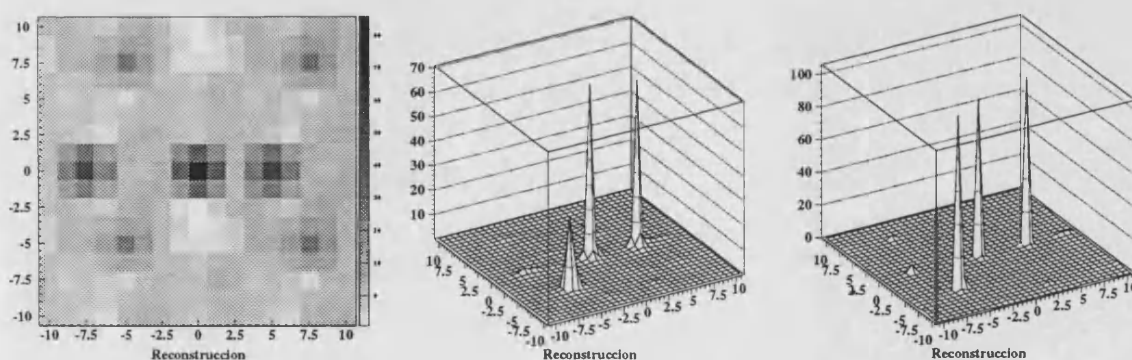


Figura 5.11: Reconstrucciones de la fig. 4.19

La reconstrucción con CBMF no da nada sorprendente, ya que (como dijimos en el apartado 4.6) al ser la correlación cíclica, obtenemos los fantasmas cíclicamente; son exactamente lo mismo, repetido al cabo de un ciclo de la máscara. Pero sí que nos llevamos una sorpresa (agradable) al ver la reconstrucción con los otros dos métodos: ¡los fantasmas han desaparecido! Es decir, el hecho de que cada detector tenga un campo de visión diferente basta para romper la degeneración que teníamos originalmente: dos direcciones que en el detector ideal producían la misma sombra en el plano detector, no la producen ahora, con lo que podremos diferenciar ambos casos. Mas ¿no puede ocurrir que

en realidad estemos favoreciendo el fantasma más cercano al centro del campo de visión, como ocurría en el capítulo 4 con máxima entropía? Para demostrar que no es así, someteremos al simulador a las fuentes de la figura 4.21 (a). El resultado se muestra en la fig. 5.12 (de izquierda a derecha, con CBMF -por completitud-, máxima entropía y el algoritmo EM).

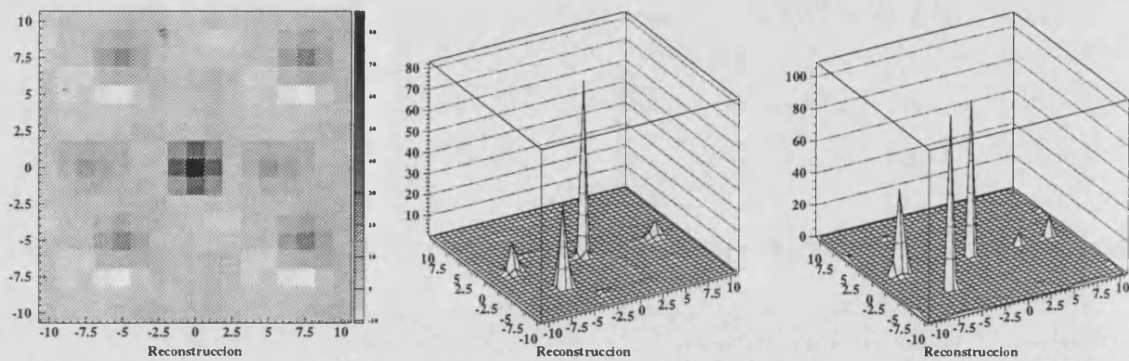


Figura 5.12: Reconstrucciones de la figura 4.21 (a)

Como se ve (sobre todo en el caso del algoritmo EM), ahora la fuente está en el otro lado, es decir, ahora la fuente se reconstruye donde realmente se halla, sin fantasmas. No obstante la reconstrucción de la fuente que hemos cambiado de sitio es peor ya que ahora está más cerca del borde del campo de visión del telescopio, y por tanto son menos los detectores que ven la fuente, con lo que la información recibida es menor.

Por otro lado es necesario usar un buen modelo del ruido para tener una buena reconstrucción (véase apartado 4.8.4), ya que ahora el sistema es mucho más sensible al ruido que antes; en las reconstrucciones que mostrábamos en el apartado 4.6, el plano detector se había sometido a un ruido de 30 cuentas/detector además de la fuente, y la reconstrucción era muy buena. Ahora ha sido necesario incluir un buen modelo del ruido en el algoritmo para obtener un buen resultado, ya que si no se modeliza el mismo e ignoramos su existencia, obtenemos el resultado que se muestra en la figura 5.13, en el que aparecen muchas estructuras inexistentes en la fuente real.

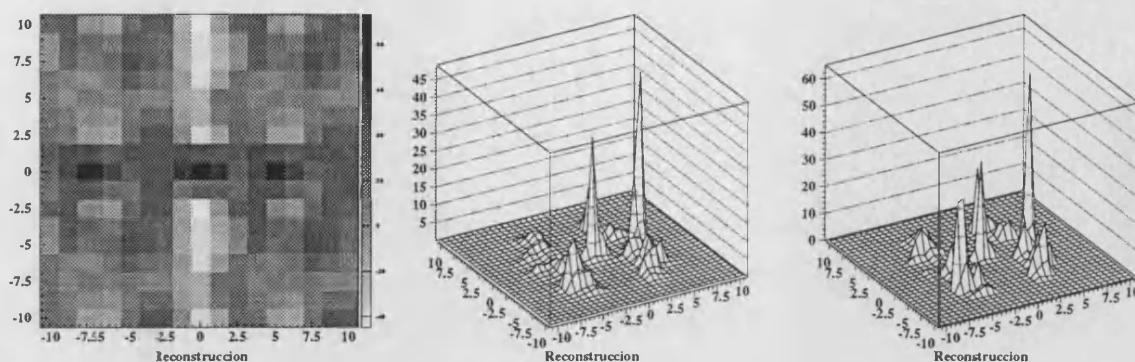


Figura 5.13: Reconstrucciones de la figura 4.21 (a), ignorando el ruido

Conclusiones, por tanto: en el modelo más realista de LEGRI, que incluye detectores de diferentes tamaños y eficiencias, 15 de los cuales no funcionan, y una transparencia de los elementos no opacos de la máscara distinta del 100%, se aprecia un empeoramiento de la imagen, aunque no es crítico, sobre todo en los métodos de maximización; se observa una mayor sensibilidad al ruido, que se contrarresta incluyendo un modelo realista del mismo en los algoritmos de reconstrucción, y se tiene la buena noticia de la desaparición de los fantasmas en la reconstrucción.

5.6 Errores

Por último, concluyendo este capítulo, vamos a hacer un estudio de los errores asociados a las imágenes formadas. Dado que este estudio sólo tiene pleno significado para el LEGRI real (pues serán sus datos los que serán usados), hemos esperado a realizar el estudio en este capítulo, en lugar de en el anterior en el que se trataba un LEGRI ideal.

Lo que fue dicho para los métodos correlativos en el apartado 3.2.1 sigue siendo básicamente válido; el error en los píxeles de la imagen reconstruida sigue siendo **el mismo para todos**, si bien ahora ya no es tan sólo la raíz cuadrada del número total de cuentas detectado, como se muestra en el apéndice II, en la ecuación A.16 (se muestra el error al cuadrado).

Aplicando el criterio de errores de la ecuación A.16 a los ejemplos que se muestran en éste capítulo, tenemos que la fig. 5.5 obtenida con CBMF tiene un error para todos los píxeles de la imagen de 5; por tanto, el píxel central, donde se halla situada la imagen, tiene un valor de la intensidad de 92 ± 5 fotones/cm². De igual forma, para la fig. 5.7 tenemos un valor del error, para todos los píxeles de la imagen, de 6, y la intensidad reconstruida de la fuente, es por tanto de 79 ± 6 fotones/cm² (que se aleja más del valor real de la intensidad). Para las tres fuentes de la figura 5.11, el error es de ± 9 para todas ellas. Por último, para la reconstrucción de la **A** que se muestra en la fig. 5.8, se tiene un error de ± 80 para todos los píxeles. De igual forma que en el caso ideal (según se explicó en el apartado 3.2.1), cuantas más fuentes hayan en el campo de visión (y más cuentas en el plano detector), el error es mayor, si bien ahora la relación no es tan lineal como era antes.

En cuanto a los métodos de maximización, el emplear el criterio de usar los valores de la penúltima iteración para hallar los errores de la última (como se indica en [38]), nos lleva a las ecuaciones para el error que pueden verse deducidas en el apéndice II (la ec. A.13 es la del algoritmo EM, y la ec. A.14 la del método de máxima entropía).

Como se ve, la fórmula de error para la intensidad \tilde{O}^{n+1} del algoritmo EM es aproximadamente proporcional al valor de \tilde{O}^n que, una vez alcanzada la convergencia, debe ser muy similar a \tilde{O}^{n+1} , y por tanto, es aproximadamente proporcional a \tilde{O}^{n+1} . Es decir, salvo por el factor incluido en el corchete de la ec. A.13 (que es una raíz cuadrada), el error de cada píxel de la imagen reconstruida debe ser aproximadamente proporcional a la intensidad del mismo.

Por otro lado, como se puede en la ec. A.14, para el método de máxima entropía, el error es aproximadamente proporcional al segundo sumando de la ecuación iterativa 4.10, que se usa para hallar la solución de máxima entropía. Es decir, no es proporcional a la intensidad de la imagen reconstruida \tilde{O}^{n+1} , sino a la diferencia entre iteraciones consecutivas, $\tilde{O}^{n+1} - \tilde{O}^n$ (pues para n grande, $n/n+1$ es prácticamente 1). En la figura 5.14 se muestra el error de las reconstrucciones de la fig. 5.8 para el método de máxima entropía (izquierda) y para el algoritmo EM (derecha).

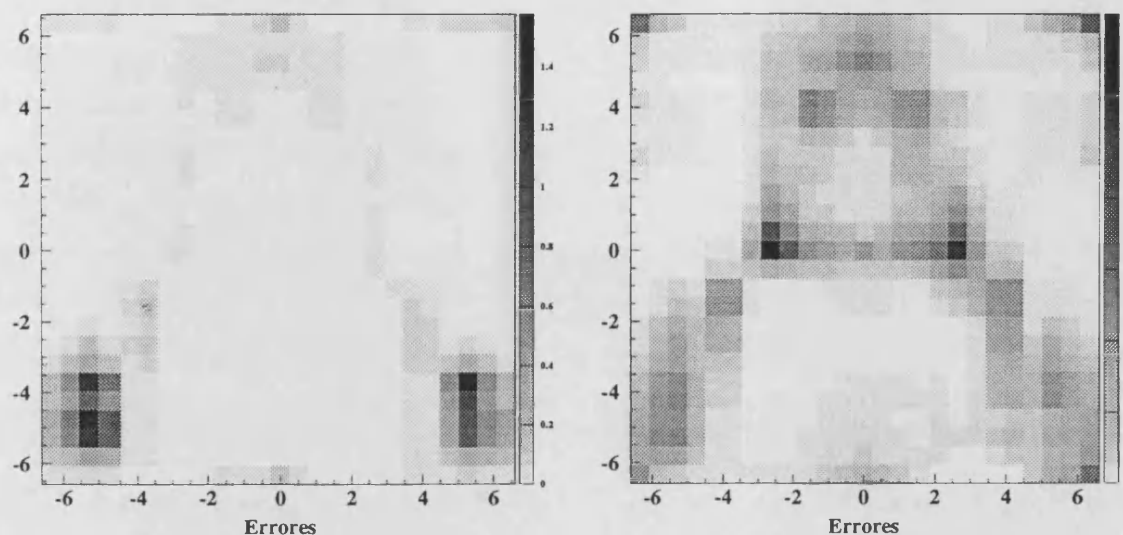


Figura 5.14: Errores asociados a las reconstrucciones de la fig. 5.8

Como se ve, efectivamente, el error asociado a los píxeles de la imagen en el algoritmo EM reproducen la forma de la imagen original (si bien, por supuesto son mucho más pequeños que las intensidades en ésta). No ocurre lo mismo con el método de máxima entropía, en que el error no se asemeja a la imagen final, sino a la diferencia entre ésta y la de la iteración anterior.

En el estudio del error encontramos otro argumento a favor de fijar el valor de λ^n en un momento dado; como dijimos en el apartado 4.2.2, si dejamos λ^n libre, la imagen fluctúa más que si se fija en un momento dado (compárense los tramos finales de las figuras 4.5.(c) y 4.7.(c), en los que se muestra la δ^n , la cual nos indica la diferencia entre iteraciones consecutivas). Dado que el error es aproximadamente proporcional a la diferencia entre iteraciones consecutivas, el error será menor si fijamos λ^n en un momento dado que si la dejamos libre (a pesar de que el resultado final sea el mismo). En efecto, para el caso de la reconstrucción de la fuente central de intensidad 100 fotones/cm² que se muestra en la fig. 5.5, el error es de ± 3 (casualmente, el mismo que da para este caso el algoritmo EM); sin embargo, si dejamos λ^n libre, por ser mayor la fluctuación, el error que obtenemos es de ± 60 !

No obstante, también fijando λ^n encontramos problemas, pues, al ser mayor la convergencia, y al ser el error proporcional a la diferencia entre iteraciones consecutivas, si nuestro criterio de convergencia fuera más estricto, el error sería también más pequeño (y también se tardaría más tiempo en llegar al resultado final). De hecho, esperando el tiempo suficiente podríamos hacer el error tan pequeño como quisiéramos, lo cual tampoco resulta realista. Esto nunca ocurrirá con el algoritmo EM.

Conclusiones

En la realización de este trabajo, los principales resultados y conclusiones pueden resumirse en los siguientes puntos:

- 1) Se ha presentado el telescopio de rayos γ LEGRI (*Low Energy Gamma Ray Imager*), que trabaja en el intervalo energético de 20 a 100 keV y que tiene un campo de visión de $\pm 10.53^\circ$, describiéndose su estructura, y objetivos, así como las características de su órbita.
- 2) Se ha expuesto la necesidad del uso de máscaras codificadas para formar imágenes a energías mayores de 10 keV y se han descrito los fundamentos de la teoría asociada al uso de las mismas, describiéndose varias técnicas para reconstruir la imagen a partir de los datos codificados.
- 3) Se han desarrollado dos simuladores, uno geométrico, con dos versiones (una más idealizada y otra más próxima al detector real) y un Monte Carlo, con los que se ha estudiado la respuesta esperada del telescopio. Estos simuladores han servido también para generar los factores de flujo Φ (que indican el tanto por uno de flujo que recibe determinado detector desde determinada dirección del cielo), necesarios para reconstruir la imagen usando métodos de maximización.
- 4) Se han aplicado para LEGRI dos sistemas de reconstrucción basados en la correlación balanceada, que son la correlación balanceada de muestreo fino (o CBMF) y la decodificación δ .
- 5) Se ha aplicado para LEGRI un método de reconstrucción de máxima entropía. Dado que la solución del mismo es una ecuación trascendente, es necesario hallar la solución por un método iterativo. Se han estudiado los métodos iterativos que se muestran en la literatura para hallar la solución de este problema y se ha visto que su convergencia no es la deseada. Por tanto, se ha desarrollado un método nuevo de convergencia que produce mejores resultados que los precedentes y que converge a la solución del método de máxima entropía.

- 6) El método iterativo que hemos desarrollado tiene un parámetro λ^n libre. Se ha encontrado que se obtienen mejores resultados si se deja variar solamente durante las primeras iteraciones el valor de λ^n de forma que el valor del estadístico χ^2 sea del orden del número de grados de libertad, fijándose su valor posteriormente.
- 7) Se ha aplicado el algoritmo EM, que es un método de máxima verosimilitud, a la problemática de las máscaras codificadas y se ha usado como método de reconstrucción. Esta es la primera vez que se usa este método en astronomía de rayos γ . Se ha visto que sus propiedades de convergencia en este contexto son excelentes y converge a un resultado correcto.
- 8) Hemos comprobado que, para telescopios no muy complejos, como es el caso de LEGRI, las reconstrucciones con métodos como el algoritmo EM y el de máxima entropía (que llamamos genéricamente métodos de maximización) son lo suficientemente rápidos para competir con los métodos correlativos. De ambos métodos de maximización, el algoritmo EM es muchísimo más rápido que el de máxima entropía.
- 9) Se ha visto que, cuando la fuente proyecta una sombra del patrón de la máscara que no coincide bien con la posición de los detectores, la fuente reconstruida sufre una dispersión, independientemente del método de reconstrucción usado.
- 10) Se ha comprobado que la intensidad de las fuentes es reconstruida mejor con los métodos correlativos y con el algoritmo EM, siendo en general el método de máxima entropía el que peor resultado produce en reconstrucción de la intensidad de la fuente. Asimismo se ha visto que la intensidad de un píxel en la imagen reconstruida es independiente de los restante en los métodos correlativos, y bastante independiente en los métodos de maximización. No obstante, para una buena reconstrucción de la intensidad de la fuente, los métodos correlativos necesitan del funcionamiento de todo el plano detector para dar óptimos resultados, y cuando esto no es posible, los mejores resultados se obtienen sin ningún

género de duda con los métodos de maximización.

- 11) Se ha constatado que los métodos de maximización tienen mejor resolución angular que los métodos correlativos (de estos últimos, el método de decodificación δ tiene mayor contraste). De hecho, en los métodos correlativos hay implícita una pérdida de información que se recupera con los métodos de maximización, obteniéndose que la resolución angular del telescopio está directamente relacionada con la resolución espacial del plano detector (y siendo ésta, para el caso de LEGRI, de 1.27°). De ambos métodos de maximización, el algoritmo EM tiene un mejor contraste.
- 12) Se ha visto que una máscara no cíclica es la mejor opción para los métodos de maximización, ya que así se evita la producción de fantasmas en la imagen reconstruida. Asimismo se ha visto que, cuando hay fantasmas de una fuente real, el algoritmo EM reconstruye todos ellos con idéntica intensidad, mientras que el método de máxima entropía favorece el fantasma más cercano al centro del campo de visión.
- 13) Se ha observado que el ruido en el plano detector genera fuentes falsas en la imagen reconstruida, y es necesario un buen conocimiento de la estructura del mismo para poder eliminarlas de la imagen reconstruida. Asimismo se ha visto que el ruido tiene el efecto adicional de ensanchar la señal reconstruida en los métodos de maximización, haciéndola más ancha y débil.
- 14) Se ha visto que, para los métodos de correlación, el error es el mismo para todos los píxeles de la imagen. Por otro lado, en el algoritmo EM el error de un píxel es a *grosso modo* lineal con el valor del mismo. En cuanto al método de máxima entropía, el valor del error de un píxel está relacionado con la diferencia de los valores de la iteración final con los de la iteración anterior. Esto lleva a que, cuanto más parecidas sean estas imágenes, menor será el error.

- 15) Se ha estudiado la capacidad de los diferentes métodos de reconstrucción para estudiar fuentes extensas, viéndose que los mejores resultados se obtienen con los métodos de maximización. Asimismo, si es posible realizar diferentes apuntados de la fuente, se obtiene más información de la misma y es posible una mejor reconstrucción de la estructura de la fuente emisora.
- 16) Se han aplicado los métodos de reconstrucción estudiados a la configuración real de LEGRI, que dispone de 15 detectores inoperantes y en el que cada unidad detectora es de diferente tamaño. Se ha visto que los puntos anteriores siguen siendo en general aplicables, aunque se aprecia un leve empeoramiento de la imagen (mayor para los métodos correlativos). La excepción la constituye la afortunada desaparición de los fantasmas, debido a la existencia de detectores de diferentes tamaños.
- 17) Se ha estimado la sensibilidad de LEGRI con una significancia de 3σ , obteniéndose que ésta es del orden de $6 \cdot 10^{-5}$ fotones $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{keV}^{-1}$.
- 18) Se ha visto que el algoritmo EM, por cuanto a tiempo de ejecución, robustez, resolución angular, capacidad de reconstrucción de la intensidad, facilidad para adaptarse a circunstancias difíciles (varios detectores inoperantes, múltiples apuntados) es, en términos globales, el que ofrece mejores resultados y prestaciones de todos los métodos estudiados.



Agradecimientos

En primer lugar quiero dar las gracias a mi jefe Filomeno Sánchez, *capo di capi*, porque se lo ha "currao" más que nadie. Por estar ahí siempre que me ha hecho falta, incluso cuando una gripe galopante amenazaba con recluirlo en la cama. Por su ayuda, por sus siempre atinados comentarios, por sus siempre acertadas collejas mentales en el momento oportuno, por saber poner los puntos sobre las íes, por aguantarme (¡que no es poco!), por su hábil dirección y por invitarme a café cuando iba corto de suelto.

También quiero dar las gracias a Victor Reglero por darme tema donde trabajar. Creo sinceramente que el trabajar en el proyecto LEGRI es una de esas experiencias en la vida que no se olvida fácilmente (tal vez sólo pueda remotamente compararse a trabajar en INTEGRAL, o a hablar durante un rato con Carmen Sevilla). También quiero darle las gracias por su inestimable ayuda, y por todas las veces que se ha reído cuando he contado chistes malos ¡y encima pedirme más!

Un lugar especial lo ocupan Ana Marín, Amparo Gil y Miguel Angel G. Jareño, excelentes amigos y buenos compañeros de trabajo. Su ayuda ha sido vital para mí en muchas ocasiones en que me hallaba atorado, y no exagero un ápice si digo que sin ellos este trabajo habría sido muy distinto.

Debo dar las gracias también por su ayuda a G. K. Skinner, por todo lo que aprendí bajo su égida en Birmingham. Él me abrió los ojos a un mundo nuevo, y aún sigo parpadeando. Gracias a Paul H. Connell por su continua ayuda, por estar al otro lado de ordenador siempre que me ha hecho falta ayuda y consejo en este mundo de máscaras, y por su desinteresada amistad. Gracias también a P. Mandrou por su amable ayuda en Toulouse, y muy especialmente a P. B. Fernandez, el cual me iluminó el camino en un momento muy oscuro de mi tesis.

Gracias a mis padres por todo su apoyo y soporte, por todo su cariño, comprensión y ayuda infatigable, y me da lo mismo que suene cursi.

Gracias a las secretarías del departamento y del I.F.I.C. por toda su ayuda. Muy especialmente a Tere, que me ha ayudado muchísimo a sobrevivir en la jungla burocrática en la que vivimos.

A mis compis del GACE también quiero agradecerles el estar ahí; hacen que el trabajar sea casi hasta agradable. Nanos, perdonad que estos últimos meses haya estado asocial e intratable, y gracias por aguantarme.

Gracias a todos mis amigos en conjunto, que me han animado en mis horas bajas. Y ellos soon (en estricto orden alfabético, pa que la peña no se mosquee): Amelia, Begoña, Belén, Carmen, Cristina, Dani, Dani, Eugenio, Eva, quien yo me sé, Javi, Jesús, Juan, Juan Carlos, Juan Carlos, Merche, Mónica, Montse, Oscar, Pablo, Santi, Trino, Waldo (mira que casarse) y Younis.

Gracias a la peña de bailes de salón, que permiten que me desahogue todos los jueves por la tarde y que me perdonan todos mis pisotones del 45.

Y por último, pero no por ello menos importante, a Pollux. Una Sun Sparc 20 como la copa de un pino, que se ha calentado el tarro por mí. Lo único que he echado de menos son una buena tanda de juegos; pero Solaris es así.

Apéndices

Apéndice I: Relación entre un área y su proyección ortogonal

En el apartado 2.11.1 se indicó que la relación entre un área y su proyección ortogonal a una dirección dada (α, β) (véase figura 2.35) venía dada por la ecuación 2.37, que repetimos aquí:

$$Area = \frac{Area'}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + 1}}$$

donde $Area'$ era el área en cuestión y $Area$ la proyección ortogonal.

En este apéndice vamos a demostrar esta relación. Para ello, observemos la figura A.1, que es básicamente la misma que fig. 2.35, aunque con la inclusión de más leyendas.

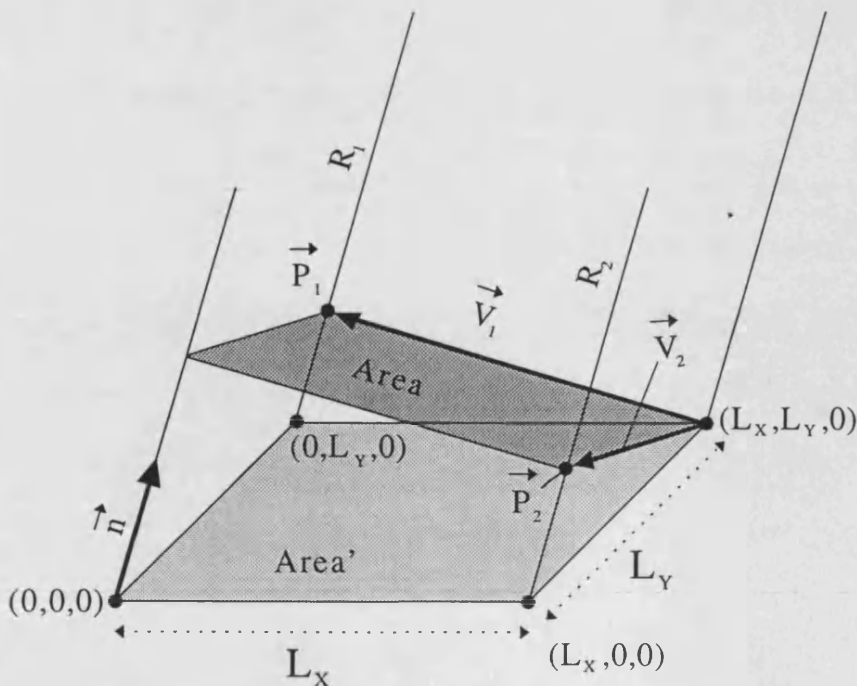


Figura A.1: Proyección ortogonal de $Area'$ en una dirección (α, β)

El origen de coordenadas en la figura se ha tomado en el vértice inferior izquierda de *Area'*. L_X y L_Y son los lados del área cuya proyección vamos a calcular, y así tendremos que:

$$Area' = L_X \cdot L_Y. \quad (A.1)$$

El vector \vec{n} es un vector unitario en la dirección (α, β) . Como se puede deducir a partir de la figura 2.1, tendremos que:

$$\frac{x}{z} = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\frac{y}{z} = \operatorname{tg}\beta$$

$$\frac{z}{z} = 1$$

Por tanto, el vector unitario en esa dirección será proporcional a $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ y 1 y vendrá dado por:

$$\vec{n} = (\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha^2 + \operatorname{tg}\beta^2 + 1}} \quad (A.2)$$

tal y como se mostraba en la ecuación 2.1.

Area es la proyección ortogonal de *Area'* en la dirección (α, β) ; por ser ortogonal a esta dirección, *Area* se hallará inscrita en un plano P que es perpendicular a \vec{n} y pasa por el punto $(L_X, L_Y, 0)$, cuya ecuación es:

$$P: (\operatorname{tg}\alpha)x + (\operatorname{tg}\beta)y + z - (\operatorname{tg}\alpha)L_X - (\operatorname{tg}\beta)L_Y = 0 \quad (A.3)$$

R_1 y R_2 son dos rectas paralelas a \vec{n} , y que pasan por $(0, L_Y, 0)$ y $(L_X, 0, 0)$ respectivamente. Sus ecuaciones vienen dadas por:

$$\begin{aligned} R_1: & \begin{cases} x = z \operatorname{tg}\alpha \\ y = z \operatorname{tg}\beta + L_Y \end{cases} \\ R_2: & \begin{cases} x = z \operatorname{tg}\alpha + L_X \\ y = z \operatorname{tg}\beta \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Las intersecciones de R_1 y R_2 con P definen los puntos \vec{P}_1 y \vec{P}_2 :

$$\begin{aligned} \vec{P}_1 &= \left(\frac{\operatorname{tg}^2\alpha \cdot L_X}{(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + 1)}, L_Y + \frac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot L_X}{(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + 1)}, \frac{\operatorname{tg}\alpha \cdot L_X}{(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + 1)} \right) \\ \vec{P}_2 &= \left(L_X + \frac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot L_Y}{(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + 1)}, \frac{\operatorname{tg}^2\beta \cdot L_Y}{(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + 1)}, \frac{\operatorname{tg}\beta \cdot L_Y}{(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + 1)} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Asimismo, se definen \vec{V}_1 y \vec{V}_2 como los vectores que van del punto $(L_X, L_Y, 0)$ a los puntos \vec{P}_1 y \vec{P}_2 , respectivamente:

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 &= \left(\frac{\operatorname{tg}^2\alpha \cdot L_X}{(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + 1)} - L_X, \frac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot L_X}{(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + 1)}, \frac{\operatorname{tg}\alpha \cdot L_X}{(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + 1)} \right) \\ \vec{V}_2 &= \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot L_Y}{(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + 1)}, \frac{\operatorname{tg}^2\beta \cdot L_Y}{(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + 1)} - L_Y, \frac{\operatorname{tg}\beta \cdot L_Y}{(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + 1)} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Como se puede apreciar en la figura A.1, tendremos que *Area* (la magnitud que nos interesa calcular) vendrá dada por el módulo del producto vectorial de \vec{P}_1 y \vec{P}_2 . Es decir:

$$\text{Area} = |\vec{V}_1 \times \vec{V}_2| \quad (\text{A.7})$$

Si llamamos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) a las componentes de los vectores \vec{P}_1 y \vec{P}_2 , respectivamente, tendremos que el módulo al cuadrado del producto vectorial de ambos viene dado por:

$$\begin{aligned} Area^2 = |\vec{V}_1 \times \vec{V}_2|^2 = & y_1^2 z_2^2 + z_1^2 y_2^2 - 2y_1 z_2 z_1 y_2 \\ & + x_2^2 z_1^2 + z_2^2 x_1^2 - 2x_2 z_1 z_2 x_1 + x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2 - 2x_1 y_2 y_1 x_2 \end{aligned} \quad (A.8)$$

Usando los valores que se muestran en la ec. A.6, obtenemos:

$$\begin{aligned} Area^2 = & \frac{tg^2 \alpha tg^2 \beta L_X^2}{(tg^2 \alpha + tg^2 \beta + 1)^2} \frac{tg^2 \beta L_Y^2}{(tg^2 \alpha + tg^2 \beta + 1)^2} + \\ & \frac{tg^2 \alpha L_X^2}{(tg^2 \alpha + tg^2 \beta + 1)^2} \left(\frac{tg^4 \beta L_Y^2}{(tg^2 \alpha + tg^2 \beta + 1)^2} + L_Y^2 - 2 \frac{tg^2 \beta L_Y^2}{(tg^2 \alpha + tg^2 \beta + 1)} \right) - \\ & 2 \frac{tg \alpha tg \beta L_X}{(tg^2 \alpha + tg^2 \beta + 1)} \frac{tg \beta L_Y}{(tg^2 \alpha + tg^2 \beta + 1)} \frac{tg \alpha L_X}{(tg^2 \alpha + tg^2 \beta + 1)} \left(\frac{tg^2 \beta L_Y}{(tg^2 \alpha + tg^2 \beta + 1)} - L_Y \right) + \\ & \frac{tg^2 \alpha tg^2 \beta L_Y^2}{(tg^2 \alpha + tg^2 \beta + 1)^2} \frac{tg^2 \alpha L_X^2}{(tg^2 \alpha + tg^2 \beta + 1)^2} + \\ & \frac{tg^2 \beta L_Y^2}{(tg^2 \alpha + tg^2 \beta + 1)^2} \left(\frac{tg^4 \alpha L_X^2}{(tg^2 \alpha + tg^2 \beta + 1)^2} + L_X^2 - 2 \frac{tg^2 \alpha L_X^2}{(tg^2 \alpha + tg^2 \beta + 1)} \right) - \\ & 2 \frac{tg \alpha tg \beta L_Y}{(tg^2 \alpha + tg^2 \beta + 1)} \frac{tg \alpha L_X}{(tg^2 \alpha + tg^2 \beta + 1)} \frac{tg \beta L_Y}{(tg^2 \alpha + tg^2 \beta + 1)} \left(\frac{tg^2 \alpha L_X}{(tg^2 \alpha + tg^2 \beta + 1)} - L_X \right) + \\ & \left(\frac{tg^4 \alpha L_X^2}{(tg^2 \alpha + tg^2 \beta + 1)^2} + L_X^2 - \frac{2tg^2 \alpha L_X^2}{(tg^2 \alpha + tg^2 \beta + 1)} \right) \left(\frac{tg^4 \beta L_Y^2}{(tg^2 \alpha + tg^2 \beta + 1)^2} + L_Y^2 - \frac{2tg^2 \beta L_Y^2}{(tg^2 \alpha + tg^2 \beta + 1)} \right) \\ & \frac{tg^2 \alpha tg^2 \beta L_X^2}{(tg^2 \alpha + tg^2 \beta + 1)^2} \frac{tg^2 \alpha tg^2 \beta L_Y^2}{(tg^2 \alpha + tg^2 \beta + 1)^2} - \\ & 2 \left(\frac{tg^2 \alpha L_X}{(tg^2 \alpha + tg^2 \beta + 1)} - L_X \right) \left(\frac{tg^2 \beta L_Y}{(tg^2 \alpha + tg^2 \beta + 1)} - L_Y \right) \frac{tg \alpha tg \beta L_X}{(tg^2 \alpha + tg^2 \beta + 1)} \frac{tg \alpha tg \beta L_Y}{(tg^2 \alpha + tg^2 \beta + 1)} \end{aligned}$$

Desarrollando esta expresión, obtenemos la siguiente, aún más engorrosa:

$$\begin{aligned}
 Area^2 = & \frac{tg^2\alpha tg^4\beta L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)^4} + \frac{tg^2\alpha tg^4\beta L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)^4} + \frac{tg^2\alpha L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)^2} - \\
 & 2 \frac{tg^2\alpha tg^2\beta L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)^3} - 2 \frac{tg^2\alpha tg^4\beta L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)^4} + 2 \frac{tg^2\alpha tg^2\beta L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)^3} + \\
 & \frac{tg^4\alpha tg^2 L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)^4} + \frac{tg^4\alpha tg^2\beta L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)^4} + \frac{tg^2\beta L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)^2} - \\
 & 2 \frac{tg^2\alpha tg^2\beta L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)^3} - 2 \frac{tg^4\alpha tg^2\beta L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)^4} + 2 \frac{tg^2\alpha tg^2\beta L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)^3} + \\
 & \frac{tg^4\alpha tg^4\beta L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)^4} + \frac{tg^4\alpha L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)^2} - 2 \frac{tg^4\alpha tg^2\beta L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)^3} + \frac{tg^4\beta L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)^2} + \\
 & L_X^2 L_Y^2 - 2 \frac{tg^2\beta L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)} - 2 \frac{tg^2\alpha tg^4\beta L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)^3} - 2 \frac{tg^2\alpha L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)} + \\
 & 4 \frac{tg^2\alpha tg^2\beta L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)^2} + \frac{tg^4\alpha tg^4\beta L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)^4} - 2 \frac{tg^4\alpha tg^4\beta L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)^4} + \\
 & 2 \frac{tg^4\alpha tg^2\beta L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)^3} + 2 \frac{tg^2\alpha tg^4\beta L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)^3} - 2 \frac{tg^2\alpha tg^2\beta L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)^2}
 \end{aligned}$$

Simplificando términos entre sí y reagrupando, esto nos da:

$$\begin{aligned}
 Area^2 = & \frac{(tg^2\alpha + tg^2\beta)L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)^2} + \frac{(tg^4\alpha + tg^4\beta)L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)^2} + L_X^2 L_Y^2 - \\
 & 2 \frac{(tg^2\alpha + tg^2\beta)L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)} + 2 \frac{tg^2\alpha tg^2\beta L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)^2}
 \end{aligned}$$

y sacando factor común, nos queda:

$$\begin{aligned}
 Area^2 = & \frac{L_X^2 L_Y^2}{(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)^2} \cdot [tg^2\alpha + tg^2\beta + tg^4\alpha + tg^4\beta + (tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)^2 - \\
 & 2(tg^2\alpha + tg^2\beta) \cdot (tg^2\alpha + tg^2\beta + 1) + 2tg^2\alpha tg^2\beta] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{L_X^2 L_Y^2}{(\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + 1)^2} \cdot [\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^4 \alpha + \operatorname{tg}^4 \beta + \operatorname{tg}^4 \alpha + \operatorname{tg}^4 \beta + 1 + \\
&\quad 2\operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta + 2\operatorname{tg}^2 \alpha + 2\operatorname{tg}^2 \beta - 2\operatorname{tg}^4 \alpha - 2\operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta - 2\operatorname{tg}^2 \alpha - \\
&\quad 2\operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta - 2\operatorname{tg}^4 \beta - 2\operatorname{tg}^2 \beta + 2\operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta] = \\
&= \frac{L_X^2 L_Y^2}{(\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + 1)^2} \cdot [\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + 1] = \frac{L_X^2 L_Y^2}{(\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + 1)}
\end{aligned}$$

Y dado que $Area'$ es igual a $L_X \cdot L_Y$, se tiene por tanto que:

$$Area^2 = \frac{Area'^2}{(\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + 1)} \quad (A.9)$$

o lo que es lo mismo:

$$Area = \frac{Area'}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + 1}} \quad (A.10)$$

tal y como se quería demostrar.

Esta relación, que en la demostración se ha aplicado a un área cuadrada de la forma $L_X \cdot L_Y$, es también válida en su forma diferencial; es decir, se puede aplicar al diferencial de área $dL_X \cdot dL_Y$. Por tanto, podremos subdividir un área de la forma que se quiera en áreas diferenciales rectangulares (o cuadradas) e, integrando para toda el área, obtenemos que la ecuación A.10, que relaciona un área con su proyección ortogonal a la dirección (α, β) continúa siendo válida.

Apéndice II: Errores

En el apartado 3.2.2 se indicó que el criterio a seguir para los métodos de maximización era que, de análoga forma a [38], una vez el algoritmo ha alcanzado el resultado deseado (en la iteración $n+1$), el error de los píxeles de la imagen se estima por propagación cuadrática de errores a partir de la fórmula iterativa estimada en la iteración n .

Obrando de esta forma, tendremos que el error (al cuadrado) en la estimación de la intensidad en el píxel (α, β) (considerando como magnitudes con error las cuentas detectadas D_{ij} , y la matriz de respuesta del detector Φ) venía dada por la ecuación (3.7), que mostramos de nuevo aquí:

$$\varepsilon^2(\tilde{O}_{\alpha\beta}^{n+1}) = \sum_{kl} \left[\left(\frac{\partial \tilde{O}_{\alpha\beta}^{n+1}}{\partial D_{kl}} \right)_n^2 \cdot \varepsilon^2(D_{kl}) + \left(\frac{\partial \tilde{O}_{\alpha\beta}^{n+1}}{\partial \Phi_{kl}^{\alpha\beta}} \right)_n^2 \cdot \varepsilon^2(\Phi_{kl}^{\alpha\beta}) + \sum_{\gamma\delta \neq \alpha\beta} \left(\frac{\partial \tilde{O}_{\alpha\beta}^{n+1}}{\partial \Phi_{kl}^{\gamma\delta}} \right)_n^2 \cdot \varepsilon^2(\Phi_{kl}^{\gamma\delta}) \right]$$

donde el subíndice n significa que las derivadas parciales son estimadas con los valores de la iteración n .

En el caso del algoritmo EM, a partir de la ec. 2.56, tenemos que las derivadas parciales serán:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{O}_{\alpha\beta}^{n+1}}{\partial D_{kl}} \right)_n &= \tilde{O}_{\alpha\beta}^n \frac{\Phi_{kl}^{\alpha\beta} \frac{1}{\tilde{D}_{kl}^n}}{\sum_{ij} \Phi_{ij}^{\alpha\beta}} \\ \left(\frac{\partial \tilde{O}_{\alpha\beta}^{n+1}}{\partial \Phi_{kl}^{\gamma\delta}} \right)_n &= -\tilde{O}_{\alpha\beta}^n \cdot \tilde{O}_{\gamma\delta}^n \frac{\Phi_{kl}^{\alpha\beta} \frac{D_{kl}}{(\tilde{D}_{kl}^n)^2}}{\sum_{ij} \Phi_{ij}^{\alpha\beta}} \quad (A.11) \\ \left(\frac{\partial \tilde{O}_{\alpha\beta}^{n+1}}{\partial \Phi_{kl}^{\alpha\beta}} \right)_n &= \tilde{O}_{\alpha\beta}^n \left(\frac{\frac{D_{kl}}{\tilde{D}_{kl}^n} - \tilde{O}_{\alpha\beta}^n \Phi_{kl}^{\alpha\beta} \frac{D_{kl}}{(\tilde{D}_{kl}^n)^2}}{\sum_{ij} \Phi_{ij}^{\alpha\beta}} - \frac{\sum_{ij} \Phi_{ij}^{\alpha\beta} \frac{D_{ij}}{\tilde{D}_{ij}^n}}{\left(\sum_{ij} \Phi_{ij}^{\alpha\beta} \right)^2} \right) \end{aligned}$$

De análoga forma, para el método de máxima entropía, a partir de la ecuación 4.10, tenemos que las derivadas parciales serán:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \tilde{O}_{\alpha\beta}^{n+1}}{\partial D_{kl}}\right)_n &= \left(\frac{1}{n+1}\right) \left[e^{-1-2\lambda^n \sum_{ij} \Phi_{ij}^{\alpha\beta} \left(\frac{\tilde{D}_{ij}^n - D_{ij}}{\sigma_{ij}^2}\right)} \right] \frac{(2\lambda^n)}{\sigma_{kl}^2} \Phi_{kl}^{\alpha\beta} \\
\left(\frac{\partial \tilde{O}_{\alpha\beta}^{n+1}}{\partial \Phi_{kl}^{\gamma\delta}}\right)_n &= \left(\frac{1}{n+1}\right) \left[e^{-1-2\lambda^n \sum_{ij} \Phi_{ij}^{\alpha\beta} \left(\frac{\tilde{D}_{ij}^n - D_{ij}}{\sigma_{ij}^2}\right)} \right] \frac{(-2\lambda^n)}{\sigma_{kl}^2} \Phi_{kl}^{\alpha\beta} \tilde{O}_{\gamma\delta}^n \\
\left(\frac{\partial \tilde{O}_{\alpha\beta}^{n+1}}{\partial \Phi_{kl}^{\alpha\beta}}\right)_n &= \left(\frac{1}{n+1}\right) \left[e^{-1-2\lambda^n \sum_{ij} \Phi_{ij}^{\alpha\beta} \left(\frac{\tilde{D}_{ij}^n - D_{ij}}{\sigma_{ij}^2}\right)} \right] \frac{(-2\lambda^n)}{\sigma_{kl}^2} (\tilde{D}_{kl}^n + \Phi_{kl\alpha\beta} \tilde{O}_{\alpha\beta}^n)
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Aplicando A.11 y A.12 a la ec. 3.7, sacando factor común, y llamando σ_{kl} al error de D_{kl} , se tiene, para el algoritmo EM:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\tilde{O}_{\alpha\beta}^{n+1}) &= \frac{\tilde{O}_{\alpha\beta}^n}{\sum_{ij} \Phi_{ij}^{\alpha\beta}} \left[\sum_{kl} \left(\frac{\Phi_{kl}^{\alpha\beta}}{\tilde{D}_{kl}^n} \right)^2 \sigma_{kl}^2 + \right. \\
&\left. \sum_{kl} \left(\frac{D_{kl}}{\tilde{D}_{kl}^n} - \tilde{O}_{\alpha\beta}^n \Phi_{kl}^{\alpha\beta} \frac{D_{kl}}{(\tilde{D}_{kl}^n)^2} - \frac{\sum_{ij} \Phi_{ij}^{\alpha\beta} \frac{D_{ij}}{\tilde{D}_{ij}^n}}{\sum_{ij} \Phi_{ij}^{\alpha\beta}} \right)^2 \varepsilon^2(\Phi_{kl}^{\alpha\beta}) + \right. \\
&\left. \sum_{kl} \sum_{\gamma\delta \neq \alpha\beta} \left(\tilde{O}_{\gamma\delta}^n \Phi_{kl}^{\alpha\beta} \frac{D_{kl}}{(\tilde{D}_{kl}^n)^2} \right)^2 \varepsilon^2(\Phi_{kl}^{\gamma\delta}) \right]^{1/2}
\end{aligned} \tag{A.13}$$

y para el método de máxima entropía:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\tilde{O}_{\alpha\beta}^{n+1}) = & \left(\frac{1}{n+1} \right) \left[e^{-1-2\lambda^n \sum_{ij} \Phi_{ij}^{\alpha\beta} \left(\frac{D_{ij}^n - D_{ij}}{\sigma_{ij}^2} \right)} \right] (2\lambda^n) \left[\sum_{kl} \left(\frac{\Phi_{kl}^{\alpha\beta}}{\sigma_{kl}^2} \right)^2 \sigma_{kl}^2 + \right. \\ & \sum_{kl} \left(\frac{\tilde{D}_{kl}^n}{\sigma_{kl}^2} + \tilde{O}_{\alpha\beta}^n \Phi_{kl}^{\alpha\beta} \frac{1}{\sigma_{kl}^2} \right)^2 \varepsilon^2(\Phi_{kl}^{\alpha\beta}) + \\ & \left. \sum_{kl} \sum_{\gamma\delta \neq \alpha\beta} \left(\tilde{O}_{\gamma\delta}^n \Phi_{kl}^{\alpha\beta} \frac{1}{\sigma_{kl}^2} \right)^2 \varepsilon^2(\Phi_{kl}^{\gamma\delta}) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

En cuanto a los métodos correlativos, extendiendo lo que se dijo en el apartado 3.2.1, se tiene que una reconstrucción, una vez corregimos por el número de unos de la matriz G (N_U), por la eficiencia y área de los detectores, y la transparencia de la máscara, vendrá dada por:

$$\tilde{O}_{ij} = \frac{1}{N_U} \sum_{kl} \frac{D_{kl}}{\varepsilon_{kl} \text{Tr} A_{kl}} \cdot G_{k+i \ l+j} \quad (\text{A.15})$$

Tanto N_U como G son constantes numéricas, y por tanto sin error. Dado además que G es igual a ± 1 (o también además 0 en decodificación δ), al elevar al cuadrado perdemos toda información sobre la estructura de la máscara (que se halla contenida en los ± 1), y por tanto, de igual forma que se dijo en el apartado 3.2.1, el error para todos los píxeles de la imagen reconstruida será exactamente el mismo; si bien ahora no se corresponderá exactamente con la raíz cuadrada del total de cuentas detectadas, sino que, por propagación cuadrática de errores, será:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(\tilde{O}_{ij}) = & \frac{1}{N_U^2} \sum_{kl} G_{k+i \ l+j}^2 \left[\left(\frac{\varepsilon(D_{kl})}{\varepsilon_{kl} \text{Tr} A_{kl}} \right)^2 + \left(\frac{D_{kl}}{\text{Tr} A_{kl}} \cdot \frac{\varepsilon(\varepsilon_{kl})}{\varepsilon_{kl}^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. \left(\frac{D_{kl}}{\varepsilon_{kl} A_{kl}} \cdot \frac{\varepsilon(\text{Tr})}{\text{Tr}^2} \right)^2 + \left(\frac{D_{kl}}{\varepsilon_{kl} \text{Tr}} \cdot \frac{\varepsilon(A_{kl})}{A_{kl}^2} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Referencias

- [1] "Recent Advances in High Energy Astronomy. Proceedings. Toulouse International Colloquium on Recent Advances in High Energy Astronomy. Toulouse (France), 17-20 Mar 1992". P. Mandrou et al. *Astron. Astr. Suppl.* 97 (1993) 1.
- [2] "Future Goals for Imaging". A. J. Dean. *Exp. Astr.* vol. 6 no. 4 (1995) 77.
- [3] "Gamma-Ray Astronomy - A status report". S. S. Holt. *Astroph. Jour. Suppl. Series* 92 (1994) 693.
- [4] "Low Energy Gamma Ray Imager (LEGRI)". F. J. Ballesteros et al. *Exp. Astr.* vol. 6 no. 4 (1995) 183.
- [5] "Empleo de HgI_2 como detector de radiación γ ". J. M. Perez. Tesis doctoral. Director P. Olmos. Facultad de C. Físicas, U. Complutense de Madrid.
- [6] "9th International Workshop on Room Temperature Semiconductors X and gamma-ray Detectors, Associated Electronics and Applications". September 18-22th (1995) Grenoble (France), abstracts of the proceedings.
- [7] "Proton induced background in LEGRI". E. Porras et al. Accepted for publication in N.I.M. B.
- [8] "Background in Space-Born Low-Energy Gamma-Ray Telescopes". A. J. Dean, F. Lei & P. T. Knight. *Space Sci. Rev.* 57 (1991) 109.
- [9] "X-Ray Imaging with Coded Mask". G. K. Skinner, *Scientific American*. August (1988).
- [10] "Design Parameters of Paraboloid-Hyperboloid Telescopes for X-Ray Astronomy". L. P. Van Speybroeck, R. C. Chase. *Appl. Opt.* Vol 11 (1972) 440.
- [11] "Fresnel Zone Plate Imaging of Gamma Rays; Theory". H. H. Barrett & F. A. Horrigan. *Appl. Opt.* Vol 12 (1973) 2686.
- [12] "Optica". J. Casas. Ed. Librería Pons (Zaragoza) (1985) 243.
- [13] "Coded Aperture Imaging with Uniformly Redundant Arrays" E. E. Fenimore & T. M. Cannon. *Appl. Opt.* Vol 17 (1978) 337.
- [14] "Techniques for the Analysis of Data from Coded-Mask X-Ray Telescopes". G. K. Skinner et al. *Astroph. & Space Science* 136 (1987) 337.
- [15] "Imaging with Coded Aperture Mask" G. K. Skinner. *N.I.M.* 221 (1984) 33.
- [16] "Point Arrays Having Compact, Nonredundant Autocorrelations". M. J. E. Golay. *J. Opt. Soc. Amer.* 61 (1971) 272.

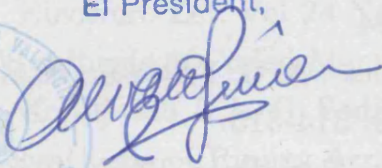
-
- [17] "On the Properties of Images from Coded-Masks Telescopes". G. K. Skinner & T. J. Ponman. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 267 (1994) 518.
- [18] "New Family of Binary Arrays for Coded Aperture Imaging". S. R. Gottesman & E. E. Fenimore. *Appl. Opt.* Vol 28 (1989) 4344.
- [19] "Infinite Families of Perfect Binary Arrays". P. Wild. *Electron. Let.* Vol 24 No 14 (1988) 845.
- [20] "Constructing New Perfect Binary Arrays". J. Jedwab & C. Mitchell. *Electron. Let.* Vol 24 No 11 (1988) 650.
- [21] "Synthesis of Coded Masks for Gamma-Ray and X-Ray Telescopes". L. E. Kopilovich & L. G. Sodin. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 266 (1994) 357.
- [22] "Synthesis of Binary Arrays with Perfect Correlation Properties - Coded Aperture Imaging". K. Byard. *N.I.M. A* 336 (1993) 262.
- [23] "Uniformly Redundant Arrays: Digital Reconstruction Methods". E. E. Fenimore & T. M. Cannon. *Appl. Opt.* Vol 20 (1981) 1858.
- [24] "Numerical Recipes: the Art of Scientific Computing". W. H. Press et al. Ed. Cambridge University Press (1986) 389 y ss.
- [25] "Statistical Analysis for Coded Aperture γ -Ray Telescopes". G. Ducros & R. Ducros. *N.I.M.* 221 (1984) 49.
- [26] "Image Restoration and Processing Methods". G. J. Daniell. *N.I.M.* 221 (1984) 67.
- [27] "Maximum Entropy Image Processing in Gamma-Ray Astronomy". J. Skilling et al. *Mon. Not. R. Astr. Soc.* 187 (1979) 145.
- [28] "Maximum Entropy Image Reconstruction: General Algorithm". J. Skilling & R. K. Bryan. *Mon. Not. R. Astr. Soc.* 211 (1984) 111.
- [29] "Image Reconstruction from Incomplete and Noisy Data". S. F. Gull & G. J. Daniell. *Nature* Vol 272 (1978) 686.
- [30] "Maximum Entropy Methods". T. J. Ponman. *N.I.M.* 221 (1984) 72.
- [31] "Use of the Maximum Entropy Method in X-Ray Astronomy". R. Willingale. *Mon. Not. R. Astr. Soc.* 194 (1981) 359.
- [32] "EM Reconstruction Algorithms for Emission and Transmission Tomography". K. Lange & R. Carson. *J. Comput. Assist. Tomogr.* Vol 8 No 2 (1984) 306.
- [33] "Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm". A. P. Dempster et al. *J. R. Statist. Soc. B* 39 (1977) 1.
- [34] "On the Convergence Properties of the EM Algorithm". C. F. J. Wu. *Ann.*

- Statist. Vol 11 No 1 (1983) 95.
- [35] "On the Convergence of the EM Algorithm". R. A. Boyles. J. R. Statist. Soc. B 45 (1983) 47.
- [36] "Correction for Detector Uniformity of a Gamma-Ray Telescope using Coded Aperture Imaging" Ph. Laudet & J. P. Roques. N.I.M. A 267 (1988) 212.
- [37] "Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments". W. R. Leo. Ed. Spriger-Verlag Berlin Heidelberg (1987) 94.
- [38] "Probability and Statistics in Particle Physics". A. G. Frodesen et al. Ed. Reklametrukk A.S. Bergen, Norway (1979) 314-315.
- [39] "Monte Carlo Theory & Practice". F. James. Rep. Prog. Phys. 43 (1980) 1145.
- [40] "GEANT-Detector Description and Simulation Tool". Application Software Group. Computing and Network Division. CERN, Geneve, Suiza (1994).
- [41] "CERN Program Library". Varios. CERN computer centre, CH-1211 Geneve 23, Suiza (1988).
- [42] "Table of Isotopes". C. M. Lederer & V. S. Shirley. Ed. John Wiley & sons, Inc. New York (1978).
- [43] "Science Performance Report". P. Mandrou. Internal Report for INTEGRAL Spectrometer, CESR, Centre National de la Recherche Scientifique-Université Paul Sabatier, Ref: SPI-NS-0-9758-CSCI, 23/05/96.
- [44] "Proceedings of the 19th ICRC, La Jolla". R. Staubert. Vol 3, OG 9.5-10 (1985) 477.
- [45] V. Reglero, Internal Report on the LEGRI scientific team.

Reunit el Tribunal que subscriu, en el dia de la data,
acordà d'atorgar, per unanimitat, a aquesta Tesi Doctoral
d'En/ Na/ N' Fernando Ballesteros Rosello
la qualificació d' Apto. COM LAUDE per unanimitat

València a 29 d. Noviembre de 19.96

El President,



El Secretari,

