UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

DEPARTAMENT DE FÍSICA TEÒRICA



# FLUIDS PERFECTES I CAMPS ELECTROMAGNÈTICS EN RELATIVITAT



Memòria presentada per
Joan J. Ferrando Bargues
per a optar al grau
de Doctor

Burjassot, juliol 1987

Yo, Bartolomé Coll Durán, investigador C.N.R.S. del "Département de Mécanique Relativiste" de la Universidad de Paris VI (Francia),

CERTIFICO que la presente Memoria, titulada "Fluids perfectes i camps electromagnètics en Relativitat", ha sido realizada bajo mi dirección.

Y para que así conste, firmo la presente en Paris, a 20 de Junio de 1987.

Fdo: Bartolomé Coll Durán

*...regulae ad directionem ingenii*:

1. Per començar, agafa un problema obert i enuncia'l amb claredat.
2. Pensa amb el teu propi cap: Sigues amo de la literatura, no el seu esclau.
3. No seguesques la moda.
4. No permetesques que la política o l'administració interferesca amb la teua investigació.
5. Diverteix-te amb el teu treball.

M.Bunge

Vull agrair els consells, les crítiques i l'amistat a tots els qui han compartit amb mi la vida o el treball durant el període de realització d'aquesta tesi: a Tolo, per la seua dedicació, pels seus estímuls i, sobretot, pels bons moments que hem passat junts parlant de física i d'altres coses; a Joaquín, amb qui vaig començar el treball de recerca científica; a J.A.Morales, el meu company de fatigues; a Miquel, José Mª i els altres companys del(s) departament(s) i a Paco Fayos, que m'han animat i aconsellat en tot moment; a Fernando, Maite i Pilar, pel calor que han donat a les meues estades a Paris; al departament de Mecanique Relativiste de Paris VI, per la seua acollida; a Encarna, per les seues puntualitzacions i la seua amistat; a Empar per la correcció lingüística del manuscrit i per moltes altres coses més importants per a mi;...

al meu pare

als homens i als pobles
que lluiten per la llibertat

# INTRODUCCIÓ

Aquesta memòria està dedicada a l'anàlisi de propietats generals dels *fluids perfectes* i dels *camps electromagnètics* en Relativitat, així com a l'estudi d'algunes estructures geomètriques lligades a aquestes distribucions energètiques bàsiques.

En els capítols destinats al camp electromagnètic tractem, en primer lloc, el problema de la *permanència del camp electromagnètic de radiació pura*: Fem una anàlisi detallada de la bibliografia existent sobre el tema i obtenim condicions generals de permanència. En segon lloc, *interpretem i generalitzem les relacions de Teukolsky-Press*, posant de relleu el paper jugat per l'estructura geomètrica subjacent en una solució regular de les equacions de Maxwell.

En la segona part analitzem els possibles moviments d'un fluid perfecte. Comencem classificant i caracteritzant les *velocitats d'un fluid perfecte baròtrop*. Després, tractem el cas dels fluids perfectes amb termodinàmiques generals, presentant una *teoria "à la Rainich" per al fluid perfecte termodinàmic*. Per últim, examinem els *fluids holònoms*, mostrant que el concepte d'holonomia és essencialment cinemàtic.

La tercera part d'aquest treball la dediquem a examinar i clarificar algunes estructures geomètriques que poden tenir aplicació en diversos camps de la Física Teòrica. Introduïm les *k-àlgebres graduades* com a generalització de la teoria de les àlgebres graduades, i definim i estudiem *el sobrant d'un operador*. Per últim, comprovem que el *claudàtor de Schouten* és el sobrant de la divergència en l'àlgebra exterior, i estudiem la relació que té amb les equacions de Maxwell.

# 1

a) Les equacions de Maxwell no garanteixen la permanència dels camps electromagnètics de radiació pura: un camp de Maxwell que és radiació pura en un instant, pot no ser-ho en instants posteriors. Aleshores, es planteja el problema de determinar sota quines condicions queda garantida la propietat de ser radiació pura per a una solució de les equacions de Maxwell.

En els resultats més significatius sobre aquesta qüestió (Mariot, 1954b; Lichnerowicz, 1960), trobem dues insuficiències bàsiques. D'una banda, no caracteritzen explícitament, en equacions per al propi camp electromagnètic, la classe de solucions de les equacions de Maxwell per a les quals és garantida la permanència. D'altra banda, no permeten detectar tots els camps de Maxwell de radiació pura.

Per tal de resoldre la primera dificultat presentem un mètode covariant per a l'obtenció de les direccions principals d'un camp electromagnètic. A part de les aplicacions que hi fem, aquest mètode pot tenir-ne unes altres, ja que permet de caracteritzar intrínsecament els camps electromagnètics que admeten alguna direcció principal amb una propietat donada.

El mateix Mariot (1954a) demostrà que la direcció principal d'un camp de Maxwell de radiació pura és geodèsica. Aleshores, la segona dificultat queda resolta amb el teorema de permanència que presentem, ja que generalitza els resultats anteriors de forma que inclou la classe dels camps de Maxwell que admeten una direcció principal geodèsica.

b) A causa de les dificultats d'integració de les equacions d'Einstein, l'obtenció de solucions numèriques aproximades apareix com una alternativa cada vegada més usual. El formalisme utilitzat és el formalisme evolutiu: hom integra les equacions de lligadura d'Einstein en un instant inicial i, a continuació, hom obté la dependència temporal d'aquestes solucions a partir de les equacions d'evolució d'Einstein.

Però, en cas d'interessar-se per solucions d'un tipus concret de Petrov-Bel, s'hauran d'integrar simultàniament, en la primera etapa, les equacions de lligadura d'Einstein i aquelles altres que garantesquen el tipus fixat per a les dades inicials. Aquestes darreres han estat obtingudes per B.Coll (1980), però un problema que encara està per resoldre i que incideix en la segona etapa d'integració, és la delimitació de les condicions que asseguren la permanència d'una determinada classe de Petrov-Bel.

Aquesta ha estat una de les raons que ens ha motivat l'estudi de la permanència del camp electromagnètic de radiació pura. En efecte, pensem que els resultats relatius al camp electromagnètic poden suggerir, com en altres qüestions, el camí a seguir per tal de completar els resultats existents sobre el camp gravitacional (Le Than Phong, 1964). I no sols per a resoldre la permanència del cas radiatiu, sinò per a estudiar la possible "regeneració" de qualsevol tipus (algebraicament especial) de Petrov-Bel.

c) Un altre domini en el qual poden influir els resultats que presentem sobre la permanència del camp electromagnètic, és en l'estudi de la radiació electromagnètica. Un teorema de permanència per al camp singular és també, per complementarietat, un teorema de permanència per a una classe de camps electromagnètics regulars. Aleshores, utilitzant mètodes de transformacions conformes per a l'estudi de propietats asimptòtiques, el comportament a l'infinit, radiatiu o no, d'un camp regular, podria detectar-se per la verificació (local) de les hipòtesis del teorema de permanència.

d) La integració de les equacions de Maxwell en Relativitat General és fonamental per tal d'arribar a comprendre millor diversos fenòmens físics (camps magnètics en púlsars, camps electromagnètics al voltant de forats negres, etc...) i pot resultar útil també de cara a l'estudi local del camp gravitatori i de la seua mesura a través dels efectes sobre camps electromagnètics de prova.

Tanmateix, aquesta integració no és fàcil i les solucions conegudes s'han aconseguit imposant fortes "simetries". Així, de cara a ampliar les famílies de solucions, és interessant qualsevol generalització dels resultats que han facilitat la integració.

A partir de les relacions de Teukolsky-Press ha estat possible d'integrar, per separació de variables, les equacions de Maxwell en geometries de Kerr perturbades. Açò ha fet possible l'estudi detallat del problema de les perturbacions d'un forat negre de Kerr per ones electromagnètiques incidents (Chandrasekhar, 1983). La generalització de les relacions de Teukolsky-Press es presenta, aleshores, com un possible camí per tal d'examinar situacions físiques semblants en altres contexts geomètrics. Però en intentar estudiar les condicions sota les quals aquestes relacions són generalitzables a altres espais-temps, es planteja el problema de la seua difícil interpretació.

Aquí donem una interpretació geomètrica rigorosa de les relacions de Teukolsky-Press, que mostra el paper bàsic jugat pel caràcter maxwellià dels 2-plans principals d'un espai-temps de buit tipus D. Després, una vegada clarificada la seua connexió amb les equacions de Maxwell, presentem la seua generalització a espais-temps arbitraris.

e) El concepte d'estructura maxwelliana (estructura quasi-producte 2+2 associada a un camp de Maxwell regular) apareix, per primera vegada, en la teoria de Rainich, la qual caracteritza les mètriques d'Einstein-Maxwell. La interpretació que presentem de les relacions de Teukolsky-Press mostra que aquest concepte geomètric és d'utilitat en la recerca de solucions prova de les equacions de Maxwell. Assenyalem que ha estat també utilitzat a l'hora d'integrar les equacions d'Einstein-Maxwell, en particular, per tal de trobar famílies de *solucions paral·leles* en geometries de tipus D de Petrov-Bel (Debever, McLenaghan 1987; Plebansky, 1979).

f) Remarquem que els resultats que hom pot obtenir relatius al camp electromagnètic, no sols poden ser interessants per si mateix, sinò que, a més, pot plantejar-se la seua generalització a qualsevol teoria de camp, la projecció del qual sobre l'espai-temps, siga una 2-forma. Per exemple, s'ha donat una generalització del teorema de Mariot-Robinson per a camps de Yang-Mills (A.Trautman, 1983). En aquesta línia, té sentit plantejar-se si una geometria maxwelliana té associada una solució (regular) de Yang-Mills.

2

a) La recerca de models cosmològics i estelars compatibles amb la Relativitat General ha motivat nombrosos estudis sobre els fluids relativistes i, en particular, l'obtenció de solucions de les equacions d'Einstein interpretables com a tals.

Els fluids perfectes han estat un important tema d'investigació en el camp de la Relativitat ja que representen la distribució material més adeqüada per a la descripció de determinades situacions físiques (per exemple, els models d'univers compatibles amb el principi cosmològic d'homogeneïtat i isotropia). Però la raó fonamental per la qual els fluids perfectes són els medis continus més coneguts és que l'estudi dels fluids generals presenta molts més problemes. Així, per exemple, encara no està resolt quin és el mètode adeqüat d'associar-los una termodinàmica. A més a més, com que representen més variables que els fluids perfectes, les dificultats d'integració de les equacions d'Einstein són majors.

Nogensmenys, l'anàlisi de determinats problemes on no són menyspreables els efectes dissipatius o de viscositat (interior d'estrelles no estàtiques, evolució d'esferes que radien, col·lapse estelar anisòtrop), exigeix considerar fluids no perfectes. Com a conseqüència, el seu estudi ha augmentat considerablement durant els darrers anys. Tanmateix, a causa de la ja esmentada dificultat d'integració de les equacions d'Einstein, moltes vegades hom ha de recórrer a mètodes indirectes per a l'obtenció de solucions (generació per transformacions conformes de solucions conegudes o reinterpretació d'aquestes (Carot, 1987)).

En aquest context, l'estudi dels moviments perfectes d'un fluid i de les velocitats holònomes pot contribuir al càlcul de solucions de les equacions d'Einstein interpretables com a fluid (perfecte o no). D'altra banda, la caracterització dels fluids termodinàmics pot ser útil per a dotar de significat físic algunes solucions conegudes.

**b)** La conservació del tensor impuls-energia d'un fluid perfecte condueix a un sistema d'equacions per a la velocitat u, la densitat total d'energia $\rho$ i la pressió p. De l'anàlisi d'aquest sistema resulta que, donat un camp u, no sempre existeixen funcions $\rho$ i p de forma que la terna $(u,\rho,p)$ el verifique; és a dir, no tot camp unitari representa el "moviment perfecte" d'un fluid. Aleshores, hom pot plantejar de trobar les condicions necessàries i suficients que ha de satisfer un camp u perquè siga la velocitat unitària d'un fluid perfecte.

A part de l'interès que pot tenir el coneixement dels possibles "moviments perfectes", aquesta caracterització pot incidir en el càlcul de solucions de les equacions d'Einstein. El procediment estàndard d'integració consisteix a abordar directament les equacions en cartes locals adaptades a u. La caracterització intrínseca de les velocitats d'un fluid perfecte fa possible tenir una visió distinta del problema: en una primera etapa, hom pot dedicar-se a traduir aquestes equacions en condicions sobre les components de la mètrica en una carta adaptada a u; sobre les solucions $g_{\alpha\beta}$ d'aquestes equacions s'imposarà, en una segona etapa, que u siga auto-vector del Ricci corresponent; per últim, amb el sistema ja parcialment integrat, hom considerarà la resta de les equacions d'Einstein en $\rho$ i p.

Assenyalem que aquest mètode d'integració per etapes per a la determinació de solucions fluid perfecte de les equacions d'Einstein, pot usar-se també per al càlcul de solucions més generals. En efecte, davant les dificultats que presenten aquestes, ens podem restringir a l'estudi de fluids que mantenen, parcialment, les propietats d'un fluid perfecte. Així, la caracterització de les velocitats d'un fluid perfecte serà d'utilitat en el càlcul de solucions no perfectes però amb "moviment perfecte". Per exemple, si ens preocupem per fluids anisòtrops sense conducció de calor, haurem de mantenir les dues primeres etapes d'integració i considerar, en la tercera, la resta d'equacions d'Einstein en $\rho$, p i el tensor de pressions anisòtropes.

c) Treciokas i Ellis (1971) analitzen, en un interessant article, certes restriccions cinemàtiques a què estan sotmeses les solucions de les equacions d'Einstein-Boltzman. Aquest treball suggereix que el tensor impuls-energia d'una solució exacta d'aquestes equacions pot ser de fluid perfecte solament en circumstàncies molt restrictives. Els mateixos autors conjecturen en l'article esmentat: *Si una solució de les equacions d'Einstein-Liouville (o, fins i tot, d'Einstein-Boltzman amb un terme de col·lisions raonable) té un tensor impuls-energia fluid perfecte, aleshores el moviment és sense distorsió* ($\sigma=0$) *i admet un potencial d'acceleració* ($a=\perp(u)d\alpha$).

Aquestes restriccions de la teoria cinètica han motivat la recerca de solucions de les equacions d'Einstein fluid perfecte amb distorsió nul·la (veure referències de l'article de Barnes (1983)). Paral·lelament s'han demostrat una sèrie de resultats que posen de relleu les restriccions cinemàtiques addicionals a què estan sotmeses aquestes solucions. Treciokas i Ellis (1971) arriben a conjecturar en el treball abans esmentat que *tota solució fluid perfecte amb* $\sigma=0$, *en expansió i amb una equació d'estat* $p=p(\rho)$, *és necessàriament sense rotació*. Aquests autors ho proven per a $p=\rho/3$ i King i Ellis (1973), completant resultats parcials anteriors (Gödel, 1950; Benerji, 1968) demostren la conjectura per a espais-temps espacialment homogenis. També s'ha demostrat aquesta suposició quan la velocitat i el vector rotació són paral·lels (White, Collins, 1984) i sota determinades restriccions del tensor de Weyl (Collins, 1984).

La verificació o no d'aquesta segona conjectura de Treciokas-Ellis pot tenir importants conseqüències. Per exemple, desprès de l'estudi global de les solucions que la verifiquen (Collins, 1985) i suposant certa aquesta hipòtesi, s'ha especulat sobre la unicitat dels models cosmològics de Friedmann-Robertson-Walker (Collins, 1987). Tanmateix, malgrat el seu interès, no coneguem cap intent d'anàlisi genèrica d'aquest problema.

La nostra caracterització i classificació de les velocitats d'un fluid perfecte baròtrop completa l'estudi a nivell de fluid prova i aporta elements que poden ser útils per a l'examen general de la conjectura: mostra que les restriccions a què està sotmès el moviment baròtrop d'un fluid perfecte, no sols depenen dels coeficients cinemàtics de la velocitat, sinó també de les seues primeres i segones derivades; permet de comprovar si els resultats parcials que suporten la conjectura depenen solament de la conservació del tensor impuls-energia o també de la resta de les equacions d'Einstein; posa de relleu que la condició de distorsió nul·la està íntimament lligada a aquestes darreres equacions, ja que no juga cap paper en el nostre estudi. Assenyalem per últim que a partir d'aquesta anàlisi de les velocitats baròtropes, hom pot comprovar fàcilment que la conjectura no se satisfà a nivell de fluid prova, és a dir, existeixen solucions baròtropes de $\delta T=0$ sense distorsió, en expansió i amb rotació.

d) La conservació del tensor impuls-energia d'un fluid perfecte és equivalent a un sistema d'equacions, indeterminat des del punt de vista evolutiu, que pot tancar-se amb la condició de barotropicitat $\rho=\rho(p)$. Però aquesta hipòtesi resulta molt restrictiva en l'estudi de determinats fenòmens físics (recordem, per exemple, les limitacions cinemàtiques a què estan sotmeses les solucions baròtropes).

El mètode més general de tancar el sistema és mijançant la introducció d'una termodinàmica. Aleshores, sembla natural que ens plantegem el problema de determinar els fluids en els quals és possible definir un esquema termodinàmic.

La caracterització dels fluids perfectes termodinàmics pot facilitar la interpretació de famílies de solucions de les equacions d'Einstein que hagen estat obtingudes sense imposar, en vistes a facilitar la integració, cap restricció prèvia que implique un significat físic concret.

La teoria de Rainich caracteritza els espais-temps d'Einstein Maxwell; la caracterització que hi presentem dels fluids perfectes termodinàmics ens permet de construir una teoria semblant per a aquests. La nostra teoria "à la Rainich" serà d'utilitat, en particular, per a comprovar si una mètrica donada és interpretable com a fluid perfecte termodinàmic i permetrà l'obtenció de les possibles termodinàmiques associades.

e) Els medis holònoms foren introduïts per Lichnerowicz (1955) per tal de generalitzar a la Relativitat els moviments isontròpics clàssics. Aquells com aquests tenen associats invariants integrals (en el sentit de Poincaré); però els anàlegs relativistes de la velocitat (invariant relatiu) i del seu rotacional (invariant absolut), no són la velocitat unitària u i la seua diferencial exterior, sinó el corrent C=Fu i la seua diferencial. Així, en els invariants que hom pot definir en un medi holònom hi ha un component (l'índex d'holonomia F) que no és, en principi, cinemàtic.

És del tot evident l'interés físic dels medis holònoms com a generalització relativista d'unes propietats clàssiques d'invariància. Tanmateix, l'avantatge del seu estudi està basat, fonamentalment, en una propietat ja enunciada per Lichnerowicz: *Les línies de corrent d'un moviment holònom són geodèsiques per a una mètrica conforme a la de l'espai-temps considerat.* Aquesta classe de congruències s'anomenen *conformement geodèsiques.*

Nosaltres mostrem que aquesta propietat de les velocitats holònomes no sols és necessària, sinó també suficient i, per tant, l'holonomia és en realitat una característica purament cinemàtica. A més a més, les congruències conformement geodèsiques estan caracteritzades per l'existència d'un potencial d'acceleració i, en conseqüència, per exigències de la teoria cinètica (recordem la primera conjectura de Treciokas-Ellis), caldrà considerar medis holònoms per a descriure determinades situacions físiques.

A partir de les congruències conformement geodèsiques hom pot definir les coordenades normals conformes (Schmidt, 1986), les quals són una generalització de les coordenades normals. Així, a l'hora d'integrar les equacions d'Einstein en un referencial adaptat al medi, el càlcul de solucions holònomes serà més senzill pel fet de treballar en un sistema de coordenades privilegiat.

3

a) És del tot evident l'interés que té el concepte de derivada de Lie per a la caracterització de propietats d'invariància existents en un determinat sistema físic. El claudàtor de Schouten generalitza la derivada de Lie i, per tant, és convenient una anàlisi detallada de les seues propietats. Aquest claudàtor mesura la variació mútua entre dos tensors donats i permet, en particular, de caracteritzar els tensors (simètrics) de Killing, els quals, com passa amb els vectors de Killing, tenen associats constants del moviment.

Des d'aquesta perspectiva, el claudàtor de Schouten pot ser l'eina adeqüada per a l'estudi de possibles invariàncies associades a un camp electromagnètic i, en particular, del significat de la propietat d'auto-invariància en el cas d'una solució de les equacions de Maxwell.

Però a l'hora d'escometre aquesta tasca ens trobem amb algunes dificultats. En efecte, malgrat haver estat utilitzat per a caracteritzar les estructures de Jacobi (Lichnerowicz, 1977), hi ha algunes qüestions relatives al claudàtor de Schouten per a p-tensors (contravariants antisimètrics) que encara estan per resoldre: ¿és l'àlgebra de Schouten una àlgebra de Lie graduada?; estant el claudàtor de Schouten i la divergència (amb la qual s'expressen les equacions de Maxwell) definits tots dos sobre els p-tensors, ¿hi ha alguna relació entre ells?; ¿existeix una expressió global per al claudàtor de Schouten independent de la seua actuació sobre les p-formes?

La resposta d'aquests interrogants ens permetrà comprendre bé la relació entre el claudàtor de Schouten i les equacions de Maxwell i, així, assolir l'objectiu abans esmentat.

b) El claudàtor de Schouten d'un a-tensor i un b-tensor és un (a+b-1)-tensor, és a dir, aquest claudàtor és una operació de grau -1. D'altra banda verifica una anticommutativitat i una identitat de Jacobi de tipus graduat. Però en la teoria estàndard sobre àlgebres de Lie graduades sols es treballa amb operacions d'ordre zero. Aleshores, per a respondre al primer interrogant cal generalitzar la teoria d'àlgebres graduades per a poder considerar operacions de grau arbitrari k. Aquesta qüestió queda resolta amb la teoria de k-àlgebres que presentem.

Un endomorfisme d'una àlgebra graduada és una derivació si verifica una regla de Leibnitz de tipus graduat; així s'ha de satisfer una certa equació per a cada parella d'elements de l'àlgebra. Aleshores, quan un endomorfisme no és una derivació, defineix en l'àlgebra una nova operació que nosaltres anomenem *sobrant de l'endomorfisme en l'àlgebra* considerada.

De l'estudi que fem dels sobrants se segueix que, sota determinades condicions verificades per l'àlgebra i l'endomorfisme (de grau p), el sobrant fixat per aquests defineix una estructura de p-àlgebra de Lie graduada. Aquestes condicions se satisfan per al cas de l'àlgebra exterior contravariant i l'operador divergència; així, una vegada demostrat que el sobrant corresponent coincideix amb el claudàtor de Schouten, resulta que aquest defineix en els p-tensors una estructura de (-1)-àlgebra de Lie graduada. A més a més, tindrem una expressió per al claudàtor que depén solament de productes exteriors i de l'operador divergència, amb la qual cosa donem resposta als interrogants plantejats.

L'objectiu d'aquesta introducció ha estat donar una visió general dels problemes que tractem tot seguit, insistint sobretot en els possibles camps d'aplicació. A més a més, dediquem la primera secció de cada capítol a exposar els objectius plantejats i els resultats obtinguts.

# ÍNDEX DE MATÈRIES

*Segona part:* ***FLUID PERFECTE***

## III.MOVIMENTS BARòTROPS D'UN FLUID PERFECTE



## IV.FLUID PERFECTE TERMODINAMIC; LA SEUA TEORIA "A LA RAINICH"



## V.FLUIDS HOLòNOMS

*Tercera Part:* ***ESTRUCTURES SUBJACENTS***

## VI.K-ALGEBRES GRADUADES, SOBRANT D'UN OPERADOR



## VII.EL CLAUDATOR DE SCHOUTEN

*Primera part*

---

# *CAMP ELECTROMAGNÈTIC*

Capítol I

---

# PERMANÈNCIA DEL CAMP ELECTROMAGNÈTIC

## 1. MOTIVACIÓ I OBJECTIUS

a) Entre els problemes, encara oberts, relatius a les equacions de Maxwell, tenim el de les *condicions de permanència* del camp electromagnètic de radiació pura. És conegut que les equacions de Maxwell no garanteixen que un camp electromagnètic, que és radiació pura en un instant, continue essent radiació pura en instants posteriors. Les úniques condicions de permanència conegudes són les de Mariot-Lichnerowicz que estudiarem amb detall a la secció següent i que estableixen que *entre la classe dels camps electromagnètics de tipus integrable, els camps de radiació pura són permanents.*

El resultat anterior és interessant però té alguns inconvenients. Un d'aquests és que no se sap formular explícitament, en termes del propi camp electromagnètic, quina és la classe que admet una direcció principal integrable; és a dir, no se sap escriure el sistema diferencial respecte del qual, segons el teorema, la radiació pura és permanent. Potser però, el principal inconvenient siga el seu caràcter parcial: el resultat de Mariot-Lichnerowicz no permet de detectar els camps de radiació pura permanents que no tenen cap direcció principal integrable.

b) Com que la literatura sobre el tema és bastant confusa, concretarem en una primera etapa, en la secció 2, la naturalesa del problema de permanència de la radiació pura, el paper que juga el resultat anterior i les possibles generalitzacions que en podem esperar.

En la secció 3 resoldrem covariantment el problema algebraic d'obtenció de les direccions principals d'un camp electromagnètic arbitrari amb la introducció d'uns concomitants, del camp electromagnètic i de la mètrica, que projecten qualsevol direcció temporal sobre les direccions principals.

Finalment, en la secció 4, generalitzarem el teorema de Mariot-Lichnerowicz de forma que incloga *tots* els camps radiació pura, i utilitzarem els resultats de la secció anterior per a formular explícitament el sistema diferencial respecte al qual en són permanents. Per últim, comprovarem que, sota la nostra condició de permanència de la radiació pura, la propietat d'admetre fronts d'ona és també permanent

c) Els resultats d'aquest capítol han estat exposats als E.R.E.-86 i a les "Journées Relativistes 87" (B.Coll, J.J.Ferrando, 1986, 1987a), i són el tema d'un article (B.Coll, J.J.Ferrando, 1987b).

## 2. SITUACIÓ DEL PROBLEMA

a) Anomenarem camp de Maxwell a un camp electromagnètic F que verifica les equacions de Maxwell de buit:

$$\delta F = 0 \,, \qquad \delta {*F} = 0 \tag{M}$$

on $\delta$ i $*$ són, respectivament, els operadors codiferenciació i dual ($* \equiv (\eta, .)$, on $\eta$ és l'element de volum i $(B,A)$ denota el producte interior amb la mètrica g; en components locals, $p!\,(B,A)_q = B_{qp}\, A^p$ i $(\delta P)_p = -\nabla_\rho P^\rho{}_p$, on p i q com a índex són $p = \beta_1 \ldots \beta_p$, $q = \alpha_1 \ldots \alpha_q$). Des del punt de vista evolutiu, aquestes equacions es divideixen, respecte a una direcció (temporal) d'evolució u, en un *sistema d'evolució*

$$\perp(u)\delta F = 0 \,, \qquad \perp(u)\delta {*F} = 0 \tag{E}$$

i un *sistema de lligadures*

$$i(u)\delta F = 0 \,, \qquad i(u)\delta {*F} = 0 \tag{L}$$

on $\perp(u)$ és el projector espacial respecte a u, i $i(u)$ és la u-projecció (producte interior).

En un domini $\Omega$ de l'espai-temps $(V_4, g)$, un *instant* és una hipersuperfície espacial de $\Omega$. Resulta que el sistema de Maxwell $\{M\} = \{E\} \cup \{L\}$ és *involutiu*: si F és una solució de {E} en un domini i verifica {L} en un instant, aleshores F és solució de {L} en el domini. En aquest cas es diu que {L} és *permanent* per a {E}.

Totes les consideracions d'aquest capítol són de caràcter local. N'és la causa que els espais-temps no admeten (en general) instants globals, que les equacions de Maxwell són hiperbòliques (i la hiperbolicitat és intrínsecament local), i que les seues solucions no són, genèricament, globalment contínues (i, en conseqüència, els problemes d'evolució estan mal plantejats). Així, ens limitarem a dominis on els camps electromagnètics considerats siguen suficientment diferenciables, i sobreentendrem que l'entorn d'un instant és l'inclòs al seu domini d'influència.

b) Un camp electromagnètic F es diu *radiació pura o singular* si els seus invariants $\phi \equiv (F, *F)$ i $\psi \equiv (F, F)$ són nuls:

$$\phi^2 + \psi^2 = 0 \tag{S}$$

i es diu *regular* en cas contrari. No insistirem en el significat físic dels camps de radiació pura ja que és ben conegut; el fet que ens interessa ací és que el sistema (S), al contrari del que ocurreix amb el sistema (L), no és permanent per al (E) o, en altres paraules, que

*PROPOSICIÓ I.1: Un camp de Maxwell, que és radiació pura en un instant, pot no ser radiació pura en instants immediats.*

Aquesta proposició contradiu un antic resultat de L.Mariot (1954b). Per aquesta raó, i ja que constitueix el punt de partida d'aquest capítol, ens detindrem en la seua demostració. Aquesta pot fer-se per anàlisi qualitativa del sistema (M)∪(S) però, essent interessant, resulta llarga i delicada; la demostració que presentem aquí, més senzilla, consisteix a construir explícitament un exemple d'un tal camp singular no permanent. Siguen **e** i **h**, respectivament, els camps elèctric i magnètic que caracteritzen F per a un observador inercial a l'espai-temps de Minkowski; els sistemes (E), (L) and (S) s'escriuen, respectivament,

$$\partial \mathbf{e}/\partial t = -\operatorname{rot} \mathbf{h} \ , \qquad \partial \mathbf{h}/\partial t = \operatorname{rot} \mathbf{e} \ ,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{e} = 0 \ , \qquad \operatorname{div} \mathbf{h} = 0$$

i

$$\mathbf{e}^2 - \mathbf{h}^2 = 0 \ , \qquad \mathbf{e}.\mathbf{h} = 0$$

Per derivació temporal del darrer, resulta, tenint en compte el primer,

$$\begin{aligned} &\mathbf{h}.\operatorname{rot} \mathbf{e} + \mathbf{e}.\operatorname{rot} \mathbf{h} = 0 \\ &\mathbf{e}.\operatorname{rot} \mathbf{e} - \mathbf{h}.\operatorname{rot} \mathbf{e} = 0 \end{aligned} \tag{I.1}$$

Però {M} és involutiu i {E} ben posat (en el sentit de Cauchy), és a dir, a cada parella $(\mathbf{e}_o,\mathbf{h}_o)$ que verifica {L} *en un instant*, correspon una única solució de {M} al domini d'influència d'aqueix instant. Considerem, a l'instant $t=t_o$, els camps:

$$\mathbf{e}_o(x^i) = (x,y,0) \ , \qquad \mathbf{h}_o(x^i) = (0,0,r)$$

on $x^i \equiv \{x,y,z\}$ (coordenades cartesianes) i $r^2 \equiv x^2+y^2$. És fàcil comprovar que aquests camps verifiquen les relacions de radiació pura donades per {S} i el sistema de lligadures {L} i, per tant, generen al voltant de $t_o$ una solució única de {M}. Tanmateix, pot comprovar-se per substitució, que aquesta solució no verifica les relacions (I.1) en $t_o$ i, en conseqüència, li correspon un camp de Maxwell, radiació pura en $t_o$, que és regular en un entorn, la qual cosa demostra la proposició.

Convé destacar que la verificació del sistema de primer ordre (I.1) per les dades inicials $(\mathbf{e}_o,\mathbf{h}_o)$ no garanteix el caràcter radiació pura fora de $t_o$: si derivem temporalment (I.1) i utilitzem {E}, obtenim un sistema d'equacions de segon ordre sobre $t_o$ que tampoc serà, en general, verificat per les solucions del sistema $\{L\} \cup \{S\} \cup \{(I.1)\}$. La continuació d'aquest procés a qualsevol ordre finit de derivació condueix sistemàticament al mateix resultat negatiu.

c) Un camp electromagnètic que és regular en un instant és necessàriament regular, per continuïtat, al voltant d'aqueix instant. La proposició I.1 mostra que, en general, no ocurreix el mateix per a un camp radiació pura, de forma que arribem naturalment a plantejar-nos el següent

***PROBLEMA:*** *Trobar sota quines condicions addicionals a les equacions de Maxwell, els camps electromagnètics radiació pura són permanents.*

L'única resposta coneguda a aquest problema és el teorema de Mariot-Lichnerowicz. Recordem que les *direccions principals* d'un camp electromagnètic F són les direccions pròpies comunes a F i $*F$, i són necessàriament *isòtropes*. F té *dues* direccions principals simples o *una* doble segons siga, respectivament, regular o radiació pura. Un camp electromagnètic s'anomena de *tipus integrable* si una de les seues direccions principals, siga $l$, *és integrable:* $l \wedge dl = 0$. Els camps radiació pura de *tipus integrable* són els propagats per fronts d'ona, essent aquests fronts, les hipersuperfícies equipotencials $\theta$ = ctant de $l = \lambda d\theta$. Aleshores tenim:

***TEOREMA (Mariot-Lichnerowicz):*** *Si un camp de Maxwell de tipus integrable és radiació pura en un instant, és radiació pura al voltant d'aqueix instant.*

Aquest enunciat, amb una senzilla demostració a partir de l'equació de direccions pròpies, es deu a A.Lichnerowicz (1960). Anteriorment, L.Mariot (1955) va publicar una deducció obtinguda en referencial mòbil adaptat; però aquesta prova, parcialment basada en un resultat previ erroni (L.Mariot, 1954b), és incompleta i l'enunciat, per la mateixa raó, conté elements incorrectes. Malgrat aquests errors, li deguem la formulació d'aquesta propietat de permanència i la demostració d'una altra propietat fonamental del camp electromagnètic de radiació pura (L.Mariot, 1954a).

d) Un inconvenient que presenta el teorema de Mariot-Lichnerowicz és que, d'acord amb la seua definició, els camps electromagnètics F de tipus integrable són aquells per als quals existeix una funció $\theta$ tal que

$$i(d\theta)F \wedge d\theta = 0 \,, \qquad i(d\theta){*F} \wedge d\theta = 0 \quad ; \qquad \text{(I.2)}$$

Per tant, és aquest sistema (I.2) d'equacions per a F el que, unit al de Maxwell {M}, assegura la permanència del caràcter radiació pura de les seues solucions. Però, mentre que {M} és un sistema diferencial en F, (I.2) és un sistema mixt, explícitament algebraic i implícitament diferencial, dependent d'una funció de gradient isòtrop que alhora depén diferenciablement de F: l'anàlisi d'un sistema d'aquest tipus no és fàcil de fer. Seria desitjable substituir les equacions (I.2) pel seu sistema diferencial en F equivalent, "solució" de $\theta$ en aquelles. En la secció següent introduirem els element algebraics necessaris per a fer-ho.

Però l'inconvenient més important del teorema de Mariot-Lichnerowicz és el domini restringit de la seua validesa: no informa sobre la permanència dels camps radiació pura que no siguen de tipus integrable. La gran varietat d'aquests camps, solucions radiatives no coherents, fa desitjable un teorema de permanència que els abaste. L'obtindrem en la secció última.

e) Aclarim ara tres aspectes que considerem importants sobre el problema plantejat. El primer està lligat al caràcter *no involutiu* del sistema {E}∪{S}: *no* és possible trobar *condicions inicials* que garantesquen la permanència de la radiació pura *en general*. En altres paraules: no existeix cap conjunt de relacions comunes a tots els camps radiació pura (i, eventualment, a alguns camps regulars) la verificació de les quals en *un* instant implique, per a un camp radiació pura en aqueix instant, el caràcter radiació pura en el seu entorn. Tanmateix, açò *no* implica la no existència de condicions inicials que garantesquen la permanència d'alguna classe *particular* de camps radiació pura; així, per exemple, les donades en un referencial inercial de Minkowski per $\{\nabla e_0 = 0,\ \nabla h_0 = 0\}$, encara que sense interés físic, mostren que "els camps de Maxwell que en un instant són radiació pura i constants, són radiació pura en instants veïns".

Així doncs, les condicions que permeten seleccionar, d'entre els camps maxwellians, *tots* els de radiació pura permanent, hauran d'exigir-se en *tot* el domini considerat (com és el cas del teorema de Mariot-Lichnerowicz). En altres paraules: es tracta, necessàriament, de completar, de forma convenient, el sistema de les equacions de Maxwell en un domini, amb un altre sistema en F, de manera que les solucions *comunes* a ambdós sistemes siguen o radiació pura, o regulars quasi per totes parts (= no existeix cap instant en el domini sobre el qual siga de radiació pura en *tot* ell). Un teorema de permanència per a tota radiació pura serà doncs *també* un teorema de permanència (regularitat quasi per totes parts) per a certa classe de camps regulars. Aleshores, és clar que l'interés d'un teorema de permanència per a la radiació pura està lligat a l'interés de la classe de camps de Maxwell regulars per als quals és també teorema de permanència. Aquest és el segon aspecte del problema que volíem assenyalar. Així, per exemple, no considerarem *bon* criteri de permanència l'obtingut completant el sistema d'equacions de Maxwell {M} amb el sistema

$$d(F,F) = 0 \,, \qquad d(*F,F) = 0 \qquad (I.3)$$

és a dir, seleccionant les solucions de radiació pura permanent entre la classe de camps de Maxwell amb invariants constants: l'interés físic dels camps regulars d'aquesta classe és mediocre.

Finalment, el tercer aspecte que creiem important remarcar sobre el problema plantejat, per ser freqüentment motiu de confusió, és la seua independència respecte del teorema de Robinson (1961); completant un resultat de Mariot (1954a), aquest teorema estableix que *una congruència és geodèsica i sense distorsió si, i sols si, és direcció principal d'un camp de Maxwell radiació pura*. Sabem que, o l'espai-temps no és de tipus 0 de Petrov-Bel, i el teorema de Goldberg-Sachs generalitzat assegura que, com a molt, hi ha dues congruències isòtropes i sense distorsió, o l'espai-temps és de tipus 0, i aleshores la distorsió $D$ de tota congruència isòtropa geodèsica verifica la llei de transport $i(l)\nabla D = -\mathrm{tr}L.D$, on $L \equiv \pounds(l)g$ és la derivada de Lie de $g$ al llarg de la direcció isòtropa $l$; així, en ambdós casos (encara que per mètodes diferents), el caràcter geodèsic i sense distorsió d'una congruència isòtropa pot obtenir-se a partir de dades inicials. Tanmateix, els camps radiació pura, l'existència dels quals queda garantida pel teorema de Robinson, *no són seleccionables per condicions inicials* entre tots els camps radiació pura que tenen com a direcció principal *en un instant* la congruència donada. Aquestes congruències donen lloc també a camps de Maxwell que són regulars fora d'aqueix instant; en la darrera secció d'aquest capítol veurem que aquests camps regulars s'aparten necessàriament, fora de l'instant, de la congruència donada.

## 3. DIRECCIONS PRINCIPALS DEL CAMP ELECTROMAGNÈTIC

a) El tensor d'energia associat a cada 2-forma F ve donat per $T \equiv 1/2(F^2+(*F)^2)$, on $F^2 = F \times F$, $\times$ indicant la contracció del producte tensorial sobre els índex adjacents. Recíprocament, un tensor simètric T és el tensor d'energia d'alguna 2-forma si, i sols si, verifica les condicions algebraiques $\mathrm{tr}T=0$, $T^2=\chi^2 g$ (Rainich, 1925); les corresponents 2-formes estan relacionades per una rotació de dualitat, i són radiació pura si, i sols si, $\chi=0$. Recordem que els polinomis característics de F i $*F$ són, respectivament,

$$P(\lambda) = (\lambda^2 - \alpha^2)(\lambda^2 + \beta^2), \qquad P^*(\lambda) = (\lambda^2 + \alpha^2)(\lambda^2 - \beta^2); \tag{I.4}$$

així, si $l_\pm$ són les direccions principals de F, tenim

$$i(l_\pm)F = \pm\, \alpha l_\pm\,, \qquad i(l_\pm)*F = \mp\, \beta l_\pm\,. \tag{I.5}$$

Definim

$$\begin{aligned} P_\pm(\lambda) &\equiv (\lambda \mp \alpha)^{-1}\, P(\lambda) = (\lambda \pm \alpha)(\lambda^2 + \beta^2) \\ P_\pm^*(\lambda) &\equiv (\lambda \mp \beta)^{-1}\, P^*(\lambda) = (\lambda \pm \beta)(\lambda^2 + \alpha^2)\ ; \end{aligned} \tag{I.6}$$

el teorema de Cayley-Hamilton implica que $P_\pm(F)$ (resp. $P_\pm^*(*F)$) és auto-tensor de F (resp. de $*F$) amb auto-valor $\pm\alpha$ (resp. $\pm\beta$), que commuta amb F (resp. amb $*F$).

A partir de les conegudes identitats

$$\begin{aligned} F^2 - (*F)^2 &= (\alpha^2 - \beta^2)\ g \\ F \times *F = *F \times F &= -\,\alpha\beta\ g\ , \end{aligned} \tag{I.7}$$

pot provar-se que els auto-tensors anteriors són de la forma

$$\begin{array}{ll} P_+(F) = \alpha\, \boldsymbol{F}\ , & P_-(F) = -\,\alpha\, {}^t\boldsymbol{F} \\ P_-^*(*F) = -\,\beta\, \boldsymbol{F}\ , & P_+^*(*F) = \beta\, {}^t\boldsymbol{F}\ , \end{array} \qquad (I.8)$$

on $\boldsymbol{F}$ és el tensor definit per

$$\boldsymbol{F} \equiv \alpha\, F - \beta\, *F + T + \chi\, g \qquad (I.9)$$

i ${}^t\boldsymbol{F}$ denota la seua transposada.

*DEFINICIÓ: Anomenarem* concomitants principals *d'una 2-forma F als auto-tensors $\boldsymbol{F}$ i ${}^t\boldsymbol{F}$.*

b) Analitzem algunes propietats d'aquests concomitants. L'expressió (I.9) mostra que $\boldsymbol{F}$ no es redueix mai a una 2-forma, i que sols és simètric si $\boldsymbol{F} = T$, és a dir, si F és radiació pura. En aquest cas és conegut que $T \times F = F \times T = 0$ ; ara obtindrem una relació anàloga per al cas regular. Quan F no és radiació pura, almenys un dels seus auto-valors, siga $\alpha$, no és nul; aleshores, com que $P^*(F)$ són auto-tensors de F que commuten amb aquesta, de la primera de les relacions (I.8), resulta

$$\boldsymbol{F} \times F = F \times \boldsymbol{F} = \alpha\, \boldsymbol{F} \qquad (I.10)$$

i, tenint en compte la segona identitat de (I.7),

$$\boldsymbol{F} \times *F = *F \times \boldsymbol{F} = -\,\beta\, \boldsymbol{F} \qquad (I.11)$$

De (I.10), (I.11) i les seues relacions transposades, resulta que $\mathrm{Im}\boldsymbol{F}$ i $\mathrm{Im}\,{}^t\boldsymbol{F}$ són les direccions principals de F. Aleshores, podem escriure:

$$\boldsymbol{F} = l_+ \times l_- \qquad (I.12)$$

Aleshores és fàcil comprovar:

*PROPOSICIÓ I.2: Els concomitants principals d'una 2-forma* F *són, salvant un factor, els únics auto-tensors de* F *i* *F *que commuten amb aquestes.*

Un endomorfisme $\boldsymbol{G}$ és un *generador* d'una parella de direccions, siguen $\{l_\pm\}$, si $\mathrm{Im}\boldsymbol{G} = \{l_+\}$ i $\mathrm{Im}^t\boldsymbol{G} = \{l_-\}$. Aleshores, l'anterior resultat pot ser enunciat com segueix:

*PROPOSICIÓ I.2': Un endomorfisme $\boldsymbol{G}$ és el generador de les direccions principals d'una 2-forma* F *sii coincideix, salvant un factor constant, amb un concomitant principal de* F.

Ara bé, de (I.12) resulta que $\mathrm{Ker}\boldsymbol{F}$ i $\mathrm{Ker}^t\boldsymbol{F}$ no tenen direccions temporals; així, arribem a la regla següent d'obtenció de les direccions principals:

*TEOREMA I.1: Les direccions principals $l_\pm$ d'una 2-forma* F *estan donades per*

$$l_+ = \boldsymbol{F}(x) \qquad , \qquad l_- = {}^t\boldsymbol{F}(x) \qquad\qquad (I.13)$$

*on* x *és una direcció temporal arbitrària i $\boldsymbol{F}$ és el concomitant principal de* F *donat per (I.9).*

Aquest teorema condensa el mètode de resolució covariant del problema de les direccions principals d'un camp electromagnètic. En (I.13), $\boldsymbol{F}(x) \equiv i(x)^t\boldsymbol{F}$; per exemple, la primera expressió s'escriu, en coordenades locals, $l_+^\alpha = \boldsymbol{F}^\alpha{}_\beta\, x^\beta$.

c) Les relacions algebraiques de Rainich (1925) són les condicions necessàries i suficients perquè un tensor simètric T siga el tensor d'energia d'un camp electromagnètic; vegem ara les relacions corresponents per a $\mathcal{F}$. De (I.12) se segueix $\mathcal{F} \times {}^t\mathcal{F} = {}^t\mathcal{F} \times \mathcal{F} = 0$; recíprocament, si un tensor $\mathcal{F}$ verifica aquestes relacions, $\mathrm{Im}\mathcal{F}$ i $\mathrm{Im}{}^t\mathcal{F}$ són direccions isòtropes, és a dir, $\mathcal{F}$ s'escriu com (I.12). En conseqüència, cada 2-forma F que té aquestes direccions principals admet $\lambda\mathcal{F}$ com concomitant principal. Però, la part sense traça de $\mathcal{F}$ és un tensor d'energia que verifica les condicions algebraiques de Rainich i, de (I.9), $\mathrm{tr}\mathcal{F} = 4\chi \geqslant 0$. Així, tenim:

*PROPOSICIÓ I.3: Les condicions necessàries i suficients que ha de verificar un 2-tensor $\mathcal{F}$ perquè siga concomitant principal d'una 2-forma són*

$$\mathcal{F} \times {}^t\mathcal{F} = {}^t\mathcal{F} \times \mathcal{F} = 0 \ , \qquad \mathrm{tr}\mathcal{F} \geqslant 0 \qquad \text{(I.14)}$$

*Aleshores $\mathcal{F}$ determina F salvant una rotació de dualitat.*

És més, es pot provar fàcilment que:

*PROPOSICIÓ I.4: Suposem $\mathcal{F}$ verificant les relacions (I.14). Si $\mathrm{tr}\mathcal{F}=0$, siga*

$$F_o \equiv |z|^{-1}\{i^2(x)\mathcal{F}\}^{-1/2} i(x)\mathcal{F} \wedge z \quad ,$$

*on x i y són vectors temporals sotmesos a la condició que el vector $z \equiv \mathcal{F}(x,y)x - \mathcal{F}(x,x)y$ no siga zero. Si $\mathrm{tr}\mathcal{F} > 0$, siga*

$$F_o \equiv (2\mathrm{tr}\mathcal{F})^{-1/2}(\mathcal{F} - {}^t\mathcal{F}) \ .$$

*Aleshores, les 2-formes F per a les quals $\mathcal{F}$ és un concomitant principal estan donades per*

$$F = \cos\mu\, F_o + \sin\mu\, {*F_o} \quad , \qquad \forall\, \mu \in \mathbb{R} .$$

d) Completem l'estudi algebraic indicant la caracterització covariant dels 2-plans invariants, siguen $\pi$ i $\pi^{\perp}$, d'una 2-forma F.

Quan F és regular, $P = \chi^{-1}T$ defineix una (2+2)-estructura quasi-producte. siga $\pi$ el 2-pla temporal i G la 2-forma element de volum sobre $\pi$; aleshores $*G$ és la 2-forma element de volum sobre el 2-pla (espacial) ortogonal $\pi^{\perp}$, i F pot escriure's $F = \alpha\, G + \beta\, *G$. Recíprocament, l'element de volum G ve donat per $G = (2\chi)^{-1}(\alpha\, F - \beta\, *F)$, on $2\chi = \alpha^2 + \beta^2$. Per altra part, siguen v i h respectivament les mètriques induïdes sobre $\pi$ i $\pi^{\perp}$; es verifica $v + h = g$ i $v - h = \chi^{-1}T$; així,

$$v = (2\chi)^{-1}(T + \chi g) \quad , \qquad h = (2\chi)^{-1}(T - \chi g) \qquad \text{(I.15)}$$

Considerem un vector temporal arbitrari x no contingut en $\pi$ ($*G(x)\neq 0$); aleshores,

$$v(x) \in \pi \quad , \qquad G(x) \in \pi \qquad \text{(I.16)}$$

$$h(x) \in \pi^{\perp} \quad , \qquad *G(x) \in \pi^{\perp} \qquad \text{(I.17)}$$

Essent x temporal i $G^2\neq 0$, G(x) no és zero ni isòtrop, i $v(x)=G[G(x)]$ no és colineal amb G(x); per raons similars, i essent $*G(x)$ no nul, els vectors h(x) i $*G(x)$ són independents. Així, els vectors donats per (I.16) (resp. per (I.17)) generen el 2-pla $\pi$ (resp. $\pi^{\perp}$). Aleshores, tenint en compte (I.15), resulta

*PROPOSICIÓ I.5: Els 2-plans invariants, $\pi$ i $\pi^{\perp}$, d'una 2-forma regular* F *estan donats, respectivament, per*

$$\pi \equiv \{i(x)\mathcal{F}_{\lambda,\mu}\} \quad , \qquad \pi^{\perp} \equiv \{i(x)\mathcal{F}_{\lambda,\mu}^{\perp}\} \quad ,$$

*on* x *és un vector temporal tal que* $T(x) \neq \chi x$, *i els concomitants biparamètrics de* F, $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ *i* $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}^{\perp}$, $\lambda,\mu \in \mathbf{R}$, *vénen donats per*

$$\mathcal{F}_{\lambda,\mu} \equiv \lambda(T + \chi g) + \mu(\alpha F - \beta *F) \quad , \qquad \mathcal{F}_{\lambda,\mu}^{\perp} \equiv \lambda(T - \chi g) + \mu\,(\beta F + \alpha *F)$$

Indiquem que $\pi$ (resp. $\pi^\perp$) és un espai propi de F, amb valor propi zero quan F és espacial (resp. temporal), és a dir, quan $\alpha = 0$ (resp. $\beta = 0$).

Si F és singular, els 2-plans invariants són isòtrops, contenen la direcció principal de F i estan definits per $\pi \equiv \{ p \ / \ p \wedge F = 0 \}$ i $\pi^\perp \equiv \{ q \ / \ q \wedge *F = 0 \}$. Siga x un vector temporal arbitrari; tenim que $x \notin \pi \cup \pi^\perp$ i, aleshores, $i(x)F \neq 0$, $i(x)*F \neq 0$. A més, com en aquest cas es verifica $F\ F = F\ *F = 0$, resulta $i(x)F \in \pi$ i $i(x)*F \in \pi'$. El concomitant principal $\mathcal{F}$ es redueix en aquest cas a T i, per tant, tenim

*PROPOSICIÓ I.6: Els 2-plans invariants, $\pi$ and $\pi^\perp$, d'una 2-forma singular* F *estan donats per*

$$\pi \equiv \{i(x)(\lambda T + \mu F),\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}\}\ ,\quad \pi^\perp \equiv \{i(x)(\lambda T + \mu * F),\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}\}$$

*on* x *és un vector temporal arbitrari.*

e) Per a les 2-formes singulars, $\mathcal{F}$ i ${}^*\mathcal{F}$ es redueixen al tensor d'energia; en el cas oposat, per a les *2-formes completament regulars* ($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$), $\mathcal{F}$ i ${}^*\mathcal{F}$ coincideixen amb els covariants de Frobenius (1896) de la matriu associada a F. Però, en tant que funcions algebraiques regulars sobre l'espai de (*totes*) les 2-formes, els concomitants principals $\mathcal{F}$ i ${}^*\mathcal{F}$ de F sembla que no han estat considerats amb anterioritat.

Assenyalem que aquest mètode de "resolució covariant" del problema de direccions pròpies d'una 2-forma, pot estendre's a tensors arbitraris. La seua extensió, en particular, a tensors simètrics ha estat feta recentment (C.Bona, B.Coll, J.A.Morales, 1987).

## 4. PERMANÈNCIA DE LA RADIACIÓ PURA

a) Els concomitants principals d'una 2-forma F permeten de formular les equacions diferencials que aquesta ha de verificar perquè alguna de les seues direccions principals tinga una propietat diferencial donada.

Pel Teorema I.1, per a tota 1-forma temporal x, $l = \mathcal{F}(x)$ és una direcció principal de F. Així, la integrabilitat de $l$, $l \wedge dl = 0$, pot escriure's $\mathcal{F}(x) \wedge d\mathcal{F}(x) = 0$. Considerat com endomorfisme de l'espai de les 1-formes, $\mathcal{F}$ és un $\Lambda^1$-valuat camp vectorial; quan aparega en operacions d'àlgebra exterior, entendrem que aquestes actuen sobre "la seua part 1-forma" (sobre el primer índex de la seua expressió local). Així, com que l'expressió anterior en $\mathcal{F}$ de la integrabilitat de $l$ és vàlida per a tot x, és fàcil mostrar que

*PROPOSICIÓ I.7: Un camp electromagnètic* F *és* de tipus integrable *si, i sols si, el seu concomitant principal* $\mathcal{F}$ *verifica*

$$\mathcal{F} \wedge d\mathcal{F} = 0 \tag{I.18}$$

Amb aquest resultat, podem enunciar el teorema de Mariot-Lichnerowicz com a propietat d'un sistema diferencial per a F:

*TEOREMA (Mariot-Lichnerowicz): Per als camps electromagnètics* F *solució del sistema diferencial*

$$dF = d{*}F = \mathcal{F} \wedge d\mathcal{F} = 0 \tag{I.19}$$

*la propietat de ser radiació pura és permanent.*

b) Una base isòtropa $\{l,n,p,q\}$, amb productes escalars no nuls $l.n = -p^2 = -q^2 = 1$, defineix una estructura quasi-producte donada pels 2-plans $\pi(l,n)$ i $\pi(p,q)$; siga P, $P^2 = g$, el corresponent *tensor d'estructura*. Un senzill càlcul algebraic prova que:

***LEMA I.1:*** *Siga l una direcció principal d'un tensor simètric* T *que verifica les condicions algebraiques de Rainich. Respecte a una base isòtropa* $\{l,n,p,q\}$*,* T *pot escriure's*

$$T = k^2 l \otimes l + \chi P + r l \tilde{\otimes} p + s l \tilde{\otimes} q \qquad (I.20)$$

*on P és el tensor d'estructura de la tetrada,* $r^2 + s^2 = k^2\chi$*, i* $\tilde{}$ denota simetrització.

De (I.20), amb $P = 2n\tilde{\otimes}l - g$, i recordant que $i(l)^t\nabla l = 0$, tenim

$$tr(T\times\nabla l) = \chi\delta l + \{2i(n) + ri(p) + si(q)\}i(l)\nabla l \quad ,$$

i, així:

***LEMA I.2:*** *Si la direcció isòtropa l del Lema I.1 és geodèsica,* $i(l)\nabla l = \gamma l$*, resulta*

$$tr(T\times L) = 2\chi(2\gamma + \delta l) \qquad (I.21)$$

*on* $L\equiv\mathcal{L}(l)g$ *és la derivada de Lie de* g *al llarg de l.*

Prenent ara la divergència en $i(l)T = \chi l$, equació de valors propis de T, tenim, després de (I.21),

***LEMA I.3:*** *La variació de* $\chi$ *al llarg de la direcció principal geodèsica l de* T *està donada per*

$$\mathcal{L}(l)\chi = 2\chi(\delta l + \gamma) - i(l)\delta T \qquad (I.22)$$

Quan $\delta T = 0$, (I.22) esdevé un sistema de propagació homogeni de primer ordre per a $\chi$; així tenim

*PROPOSICIÓ I.8: Siga* T *un tensor conservatiu que verifica les condicions algebraiques de Rainich i amb una direcció principal geodèsica. Si* $T^2$ *s'anul·la en un instant, aleshores s'anul·la en un entorn.*

A causa de la biunivocitat, salvant rotació de dualitat, entre T i F, se segueix:

*TEOREMA I.2: Siga* F *un camp de Maxwell admetent una direcció principal geodèsica. Si* F *és singular en un instant, és singular en un entorn.*

Com que la direcció principal de tot camp radiació pura és geodèsica (L.Mariot, 1954a), el Teorema I.2 permet d'obtenir *tots* els camps de radiació pura que són permanents. Notem que en la demostració sols hem utilitzat la meitat de les equacions de Maxwell: aquelles que imposen la conservació de T; així, el teorema segueix verificant-se per a les anomenades estructures pre-maxwellianes (R,Debever, 1976). Remarquem també que l'equació (I.22) és una *llei de transport*; en conseqüència, els camps electromagnètics del Teorema I.2 són tals que, si són singulars en un punt, seran singulars sobre la corba integral de $l$ que passa per aquest punt.

Que la direcció principal $l$ és geodèsica s'expressa, amb independència de la parametrització de la seua congruència integral, per l'equació $l \wedge i(l)\nabla l = 0$ o, tenint en compte el Teorema I.1, per $F(x) \wedge i[F(x)]\nabla F(x) = 0$; la validesa d'aquesta expressió per a tot x temporal condueix a la següent

*PROPOSICIÓ I.9: Un camp electromagnètic F té un direcció principal geodèsica si, i sols si, el seu concomitant principal* $\mathcal{F}$ *verifica*

$$H \equiv \mathcal{F} \wedge i(\mathcal{F})\nabla\mathcal{F} = 0 \qquad \text{(I.23)}$$

Quan F és singular, la conservació de T implica (I.23). Quan F és regular es prova fàcilment que (I.23) és equivalent a $\mathrm{tr}H = 0$, essent tr la contracció del primer índex covariant i el primer índex contravariant. (En components locals, $H$ és de la forma $H_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu\sigma}$; l'antisimetria en $\alpha\beta$ es deu al producte exterior de formes, mentre que la simetria en $\lambda\mu\sigma$ és conseqüència de la identitat $\mathcal{F} \wedge \mathcal{F} = 0$, que resulta de (I.12). Així tenim

*PROPOSICIÓ I.10: La condició necessària i suficient perquè una solució F de les equacions de Maxwell tinga una direcció principal geodèsica és*

$$\mathrm{tr}H = 0$$

*on $H$ és el concomitant diferencial de F donat per (I.23).*

Aleshores, el Teorema I.2 pot enunciar-se de la forma següent:

*TEOREMA I.2': Per als camps electromagnètics F solució del sistema diferencial*

$$dF = d{*}F = \mathrm{tr}[\mathcal{F} \wedge i(\mathcal{F})\nabla\mathcal{F}] = 0 \qquad \text{(I.24)}$$

*la propietat de ser radiació pura és permanent.*

Assenyalem que, com ja hem indicat a la Secció 2(e), aquest resultat és també una propietat de permanència per al caràcter regular:

si F verifica (I.24) en un domini i és regular sobre un instant, aleshores és regular en el domini. Aquest Teorema I.2' és la generalització buscada del teorema de Mariot-Lichnerowicz.

c) Siga $w \equiv *(v \wedge dv)$ la *rotació* de v i denotem per $D \equiv i(v)\nabla$ la derivada direccional; tenim les identitats

$$[*, D] = 0 \quad , \qquad [d, D]v = {}^t\nabla v \times dv + dv \times \nabla v \quad , \tag{I.25}$$

i, per a cada 2-forma A i cada 2-tensor K,

$$*(A \times K + {}^tK \times A) = \mathrm{tr}\, K.*A - (*A \times {}^tK + K \times *A) \tag{I.26}$$

Aleshores, aplicant (I.25) i (I.26) a la definició de w, tenim

$$\begin{aligned} Dw &= *D(v \wedge dv) = *\{Dv \wedge dv + v \wedge Ddv\} = \\ &= *d(v \wedge Dv) + i(v)*\{{}^t\nabla v \times dv + dv \times \nabla v\} = \\ &= *d(v \wedge Dv) + i(v)\{-*dv \times {}^t\nabla v - \nabla v \times *dv + \mathrm{tr}\nabla v.*dv\} = \\ &= *d(v \wedge Dv) + *(v \wedge dv) \times {}^t\nabla v - i(Dv)*dv + \delta v.*(v \wedge dv) \quad , \end{aligned}$$

és a dir,

$$Dw = i(w){}^t\nabla v + \delta v.w + \mathcal{K}(v, \nabla v) \tag{I.27}$$

on $$\mathcal{K}(v, \nabla v) = *\{d(v \wedge Dv) + Dv \wedge dv\}$$

Quan $\mathcal{K}(v, \nabla v)$ depén de la rotació w i s'anul·la amb aquesta, (I.27) constitueix un sistema de propagació homogeni per a w; així, per als camps geodèsics ($v \wedge Dv = 0$) resulta $\mathcal{K} = \lambda w$ i podem enunciar:

*PROPOSICIÓ I.11: Siga* v *un camp geodèsic en un domini. Si* v *no és tangent a un instant i és integrable en aquest, és integrable sobre el domini.*

D'aquest resultat i del Teorema I.2 es dedueix el refinament següent del teorema de Mariot-Lichnerowicz:

*TEOREMA I.3: Si un camp electromagnètic* F *és solució de* (I.24) *en un domini i és de tipus integrable en un instant, aleshores és de tipus integrable en el domini.*

El teorema de Mariot-Lichnerowicz assegura la permanència dels camps de radiació pura *dintre* dels camps de tipus integrable; el Teorema I.3 assegura la permanència dels camps de radiació pura de tipus integrable *dintre* dels camps de radiació pura.

Capítol II

# INTERPRETACIÓ I GENERALITZACIÓ DE LES RELACIONS DE TEUKOLSKY-PRESS

## 1. PROBLEMES OBERTS I SOLUCIONS PROPOSADES

a) Siguen $\phi_0$, $\phi_1$, $\phi_2$, les components del camp electromagnètic F respecte a la tètrade isòtropa principal en un espai-temps de buit tipus D. Anomenarem ací *relacions de Teukolsky-Press* al conjunt següent d'equacions en derivades parcials de segon ordre en les components $\phi_0$, $\phi_2$:

$$\mathrm{T}_0:\quad \tau_0\, \phi_0 = 0 \quad , \qquad \mathrm{T}_2:\quad {}^*\tau_0\, \phi_2 = 0$$

$$\mathrm{I}_0:\quad \mathcal{I}_0\, \phi_0 + \mathcal{I}_2\, \phi_2 = 0 \quad , \qquad \mathrm{I}_2:\quad {}^*\mathcal{I}_0\, \phi_2 + {}^*\mathcal{I}_2\, \phi_0 = 0 \qquad \text{(II.1)}$$

on els operadors $\tau$ són donats, en notació de Newman-Penrose (1962), per les expressions:

$$\mathrm{T}_0 \equiv (D-\epsilon+\epsilon^*-2\rho-\rho^*)(\Delta+\mu-2\gamma) - (\delta-\beta-\alpha^*-2\tau+\pi^*)(\delta^\bullet+\pi-2\alpha)$$

$$\mathfrak{T}_0 \equiv (\delta^\bullet+3\pi-\beta^*-\alpha)(\delta^\bullet+\pi-2\alpha) \ , \quad \mathfrak{T}_2 \equiv (D+3\rho+\epsilon-\epsilon^*)(D-\rho+2\epsilon) \tag{II.2}$$

on $^\bullet$ és l'operador que permuta separadament els vectors reals i complexes de la tètrade isòtropa, i on $^*$ denota el complexe conjugat. Les dues equacions desacoblades de (II.1), $\mathrm{T}_0$ i $\mathrm{T}_2$, foren donades per Teukolsky (1973); les altres dues, $\mathfrak{T}_0$ i $\mathfrak{T}_2$, per Teukolsky i Press (1974).

A partir de les relacions de Teukolsky-Press s'ha provat que les equacions de Maxwell poden ser integrades per separació de variables en geometries perturbades de Kerr (Teukolsky-Press, 1974). Per aquesta raó, juguen un paper important en alguns problemes plantejats en aquests espais-temps. Així tenim, en particular, el problema de les perturbacions d'un forat negre de Kerr per ones electromagnètiques incidents. Aquest problema, considerat en primer lloc per Starobinsky i Churilov (1973), ha estat després estudiat amb detall (Chandrasekhar, 1983).

Malgrat la seua senzilla deducció, aquestes relacions resulten difícils d'interpretar; en efecte, derivades a partir de les equacions de Maxwell, hom ignora, inversament, fins quin punt les impliquen.

D'altra banda, alguns autors (R.G.Crossman, E.D.Fakerell, 1980; V.Bellezza, V.Ferrari, 1984) han donat relacions del tipus Teukolsky-Press en espais-temps de Kerr-Newman, però les condicions precises sota les quals les relacions de Teukolsky-Press poden ser generalitzades per a altres espais-temps, no són ni de molt clares.

En aquest capítol resolem ambdós problemes: trobem una interpretació geomètrica rigorosa de les relacions de Teukolsky-Press que clarifica llur conexió amb les equacions de Maxwell, i donem la generalització per a tètrades isòtropes arbitràries en espais-temps completament generals.

b) Per tal d'acomplir aquesta tasca, necessitem dues nocions importants: la d'*estructura maxwelliana* i la de *sistema condicional* associat a un sistema diferencial donat.

És conegut que un camp electromagnètic (2-forma arbitrària) selecciona algebraicament, en cada punt de l'espai-temps, una parella de 2-plans ortogonals que, per al cas regular, defineix una 2+2 estructura quasi-producte (Rainich, 1925; Debever, 1959; Le Than Phong, 1964). Les *estructures maxwellianes* són les 2+2 estructures quasi-producte definides per les solucions regulars de les equacions de Maxwell de buit.

D'altra banda, siguen $D_1(\phi_0,\phi_1,\phi_2)$ i $D_2(\phi_0,\phi_2)$ dos sistemes diferencials. Direm que $D_2$ és un *sistema condicional* per a $D_1$ si les seues solucions $(\phi_0,\phi_2)$ poden completar-se a solucions $(\phi_0,\phi_1,\phi_2)$ de $D_1$ i si, recíprocament, totes les solucions $(\phi_0,\phi_1,\phi_2)$ de $D_1$ són tals que $(\phi_0,\phi_2)$ són solució de $D_2$.

Comprovarem en aquest capítol que *les equacions de Maxwell admeten sempre un sistema condicional en* $(\phi_0,\phi_2)$ que és, genèricament de tercer ordre. A més a més, *aquest sistema degenera a un sistema de segon ordre si, i sols si, l'estructura naturalment associada a la tètrade isòtropa base, és maxwelliana*.

La tètrade isòtropa principal d'un espai-temps de buit de tipus D té associada una estructura maxwelliana. En conseqüència, el sistema condicional que admetran les equacions de Maxwell en aquest cas serà de segon ordre. Aleshores la seua comparació amb les equacions (II.1) i (II.2) prova que, llevat d'una equació absent, *les relacions de Teukolsky-Press en un espai-temps de buit de tipus D són precisament el sistema condicional en ($\phi_0,\phi_2$) admés per les equacions de Maxwell.*

L'equació absent en les relacions de Teukolsky-Press és idènticament verificada per les solucions de les equacions de Maxwell que són invariants sota el grup d'isometries de la mètrica de Kerr. Potser és aquesta la raó per la qual aqueixa equació ha estat omesa fins ara: les solucions de Maxwell usualment considerades en aquest context pertanyen bàsicament a aquesta classe.

A partir dels resultats precedents, la generalització de les relacions de Teukolsky-Press per a qualsevol tètrade isòtropa en un espai-temps arbitrari vindrà donada pel sistema condicional en ($\phi_0,\phi_2$) associat a les equacions de Maxwell en el cas considerat.

Aleshores, és fàcil caracteritzar les solucions interiors tipus D en les quals les dues primeres relacions de Teukolsky-Press estan també desacoblades.

c) Un sistema condicional en ($\phi_0,\phi_2$) per a les equacions de Maxwell ens dóna les condicions necessàries i suficients d'integrabilitat local per a la component $\phi_1$. Per a les solucions en variables separables de les relacions de Teukolsky-Press en mètrica de Kerr, Chanrasekhar (1983) ha obtingut les expressions explícites de $\phi_1$ en termes de les funcions factors de $\phi_0$ i $\phi_2$. Però el seu mètode és laboriós i exigeix, a més a més, la verificació de la compatibilitat de les seues expressions.

El formalisme dels *potencials de Debye* per a les equacions de Maxwell ha estat emprat en espais-temps algebraicament especials per Cohen i Kegeles (1974). Ací nosaltres l'utilitzarem per a l'estudi de les solucions en variables separables en mètrica de Kerr perturbada. Aquest estudi ens duu a: i) Obtenció simple i directa de les relacions de Teukolsky-Press de manera que ens mostra llur compatibilitat i llur caràcter necessari i suficient per a l'existència de $\phi_1$. ii) Obtenció senzilla i directa de $\phi_1$ en termes dels factors de $\phi_0$ i $\phi_2$ com solució efectiva (sense necessitat de verificació) de les equacions de Maxwell.

**d)** La resta de seccions d'aquest capítol estan organitzades de la forma següent: en la secció 2 introduïm "à la Rainich" la noció d'estructura maxwelliana i donem la seua versió en formalisme vectorial complexe. La secció 3 està dedicada a trobar els sistemes condicionals en $(\phi_0,\phi_2)$ admesos per les equacions de Maxwell i la secció 4 a explicitar llur expressió en funció dels coeficients de spin. En la secció 5 comparem els sistemes condicionals obtinguts en la secció anterior amb les relacions de Teukolsky-Press i discutim la resta de resultats enunciats al paràgraf (b). Finalment, en la secció 6, desenrotllarem el que hem enunciat en (c).

Els resultats d'aquest capítol han estat exposats als E.R.E.-85 (B.Coll, F.Fayos, J.J.Ferrando, 1985b) i a les "Jounées Relativistes 1985" (B.Coll, F.Fayos, J.J.Ferrando, 1987a, 1987b) i han donat lloc a dos articles (B.Coll, F.Fayos, J.J.Ferrando, 1985a; 1987c).

## 2. ESTRUCTURES MAXWELLIANES

a) Com hem dit en el capítol anterior, si T és el tensor d'energia associat a una 2-forma regular F, $P = \chi^{-1}T$ és el tensor d'estructura d'una 2+2 estructura quasi-producte. Siga G la 2-forma simple i unitària que caracteritza el camp de 2-plans temporals de l'estructura:

$$1/2 \ \mathrm{tr}\ G^2 = 1 \ , \qquad \mathrm{tr}\ {*G} \times G = 0 \ , \qquad P = G^2 + (*G)^2 \tag{II.3}$$

on tr és l'operador traça; aleshores, el 2-pla espacial està caracteritzat per $*G$, i així:

$$F = exp(\phi + *\psi)\ G = exp(\phi)(cos\,\psi\ G + sin\,\psi\ *G) \tag{II.4}$$

La notació exponencial és deguda a Misner i Wheeler (1957) i els escalars $\phi$ i $\psi$ estan relacionats amb els valors propis de F per les expressions $\alpha = \phi\ cos\,\psi$ , $\beta = \phi\ sin\,\psi$ ($\rightarrow 2\phi = ln\ 2\chi$). Cada 2-forma regular F està biunívocament caracteritzada per les seues *components* $(G, \phi, \psi)$. La *component geomètrica* G i la *component energètica* $\phi$ determinen els valors i els vectors propis de T i, per tant, el caracteritzen. Finalment, la *component de Rainich* selecciona, mitjançant una rotació de dualitat, una 2-forma F entre totes les associades a un T donat.

b) En termes d'aquestes components, les equacions de Maxwell de buit per a F:

$$\delta F = 0 \quad , \quad \delta {*F} = 0 \tag{II.5}$$

poden escriure's (Debever, 1959):

$$d\phi = \boldsymbol{\phi} \quad , \quad d\psi = \boldsymbol{\psi} \tag{II.6}$$

on les 1-formes $\boldsymbol{\phi}$ i $\boldsymbol{\psi}$ depenen solament de la component geomètrica G:

$$\boldsymbol{\phi} \equiv *(\delta G \wedge *G + \delta *G \wedge G) \ , \qquad \boldsymbol{\psi} \equiv *(\delta G \wedge G - \delta *G \wedge *G) \tag{II.7}$$

De (II.6) se segueix el *teorema de Rainich* (1925): Una 2-forma simple i unitària G és la component geomètrica d'un camp (local) de Maxwell si, i sols si, verifica les equacions

$$d\boldsymbol{\phi} = 0 \quad , \quad d\boldsymbol{\psi} = 0 \tag{II.8}$$

Les estructures quasi-producte definides per les 2-formes simples i unitàries solució de (II.8) són anomenades *estructures maxwellianes*.

A cada estructura maxwelliana, siga G, la primera de les relacions (II.6), $d\phi = \boldsymbol{\phi}$, li associa una família (a un paràmetre additiu) de components energètiques $\phi$, caracteritzant així, una família (homotètica) de tensors d'energia T. De forma semblant, la segona de les relacions (II.6), $d\psi = \boldsymbol{\psi}$, associa a G una família (a un paràmetre additiu) de components de Rainich $\psi$, caracteritzant (salvant una homotècia) una família de 2-formes F relacionades per una rotació de dualitat constant. Aleshores, el conjunt $\{G, \phi, \psi\}$ defineix la família a dos paràmetres de camps de Maxwell que admeten la mateixa estructura quasi-producte.

De fet, es pot provar que la primera relació de (II.6) és estrictament equivalent a l'equació de conservació $\delta T = 0$ i, per tant, caracteritza les anomenades estructures pre-maxwellianes (Debever, 1976). Al mateix temps, la segona relació és estrictament equivalent a l'equació de complexió de Rainich. En efecte, resulta que la 1-forma $\psi$ de (II.7) s'escriu, en funció de T (Le Than Phong, 1964):

$$\psi(T) = 6(\mathrm{tr}T^2)^{-1}.*(\nabla T \times T) \qquad \text{(II.9)}$$

Així, hom pot enunciar el teorema de Rainich en termes de T:

***TEOREMA (Rainich):*** *Un tensor simètric* T *és el tensor d'energia d'un camp de Maxwell regular si, i sols si, verifica les condicions algebraiques* $\mathrm{tr}T = 0$, $T^2 = \chi^2 g$, $\chi \neq 0$, *i les equacions diferencials*

$$\delta T = 0 \quad , \quad d\psi(T) = 0 \qquad \text{(II.10)}$$

És interessant remarcar, des d'un punt de vista epistemològic, que la facilitat de fer mesures de camps elèctrics i magnètics, amb la conseqüent abundància de resultats experimentals permeteren a Maxwell de postular, cap a mitjan segle XIX, les lleis de l'electromagnetisme amb equacions per a aquestes magnituds, equacions que resulten ser de primer ordre i lineals en el camp electromagnètic F. Tanmateix, si hagués estat possible de fer experiències que relacionassen densitats i fluxes d'energia electromagnètics i, en conseqüència, s'haguessen postulat unes lleis involucrant-los, les equacions resultants haurien estat, com se segueix de (II.9) i (II.10), de segon ordre i no lineals en T. Això, a més de la dificultat de trobar directament a partir de dades experimentals aquestes equacions, possiblement hauria endarrerit els avanços posteriors en l'estudi dels fenòmens electromagnètics.

c) Utilitzant el formalisme vectorial complexe (Cahen, Debever, Defrise, 1967), es pot obtenir fàcilment la forma (II.6) per a les equacions de Maxwell. Considerem les 2-formes complexes $Z^I$ (I = 0,1,2) donades per:

$$Z^0 = \bar{m} \wedge n \quad , \quad Z^1 = n \wedge l - \bar{m} \wedge m \quad , \quad Z^2 = l \wedge m \, ,$$

on $\{l, n, m, m^*\}$ és una tètrade isòtropa complexa; com que les 2-formes $Z^I$ són auto-duals, $*Z^I = i\, Z^I$, la base $\{Z^I,\ Z^{I*}\}$ de les 2-formes complexes separa de forma invariant les parts auto-dual i anti-auto-dual de cada 2-forma $V$: $V = V_I Z^I + \underline{V}^I Z^{I*}$. En particular, per a cada 2-forma real $F$, la 2-forma complexa $\mathsf{F} \equiv F - i{*}F$ és auto-dual i les seues components en la base $\{Z^I\}$ són designades per $\phi^I$: $\mathsf{F} = \phi^I Z^I$ $(I = 0,1,2)$.

Les *equacions de Maxwell generals* $\delta F = J$, $\delta{*}F = 0$, poden ser escrites en la forma

$$J = \delta\mathsf{F} = \delta\{\phi_1 Z^1\} = \phi_1\, \delta Z^1 - i(d\phi_1)Z^1 + \delta H$$

Contraient amb $Z^1$ i tenint en compte que $Z^1 \times Z^1 = g$, resulta que *les equacions generals de Maxwell són equivalents al sistema*

$$d\phi_1 = \phi_1\, h + \omega \tag{II.11}$$

on

$$h \equiv i(\delta Z^1)Z^1 \quad , \quad \omega \equiv i(\delta H - J)Z^1 \quad , \quad H \equiv \phi_0 Z^0 + \phi_2 Z^2 \tag{II.12}$$

Per tal de formular el teorema de Rainich en aquest formalisme, considerem l'estructura quasi-producte associada a la tètrade isòtropa, estructura definida per l'element $Z^1$ de la corresponent base auto-dual, $Z^1 = G - i{*}G$. La 2-forma $G$ és la component geomètrica de les 2-formes $F_0$ que s'expressen com (II.4) i per a les quals tenim $\mathsf{F}_0 = \phi_1{}^0 Z^1$ amb $\phi_1{}^0 = exp(\phi + i\psi)$, és a dir, $H = 0$; aleshores, les equacions de Maxwell de buit per a $F_0$ són:

$$d\ln \phi_1{}^0 = h \tag{II.13}$$

i la seua condició (local) d'integrabilitat és:

$$dh = 0 \tag{II.14}$$

Si expressem $Z^1$ en termes de G en la definició (II.12) de h, i tenint en compte que $*(v \wedge A) = -(-1)^p\, i(v)*A$ per a cada 1-forma v i cada p-forma A, resulta $h = \phi + i *\psi$ on $\phi$ i $\psi$ són els funcionals de G donats per (II.7). Aleshores tenim:

*PROPOSICIÓ II.1 (Teorema de Rainich): Una estructura quasi-producte* $Z^1$ *és (localment) maxwelliana sii la 1-forma* $h \equiv i(\delta Z^1)Z^1$ *és tancada:* $dh = 0$.

Considerem la component $(dh)_1$ de dh en la base $\{Z^I, Z^{I*}\}$. De la identitat $(A, dv) = \delta i(v)A + i(v)\delta A$ i essent

$$(Z^0, Z^2) = 1 \quad , \quad (Z^1, Z^1) = -2 \qquad \text{(II.15)}$$

els únics productes escalars de les $Z^I$ no nuls, tenim:

$$-2\,(dh)_1 = (Z^1, dh) = \delta i(h)Z^1 + i(h)\delta Z^1 = \delta^2 Z^1 + i^2(\delta Z^1)Z^1 = 0$$

i així podem enunciar:

*PROPOSICIÓ 2: El sistema diferencial* $dh = 0$ *que caracteritza les estructures maxwellianes està constituït per cinc equacions complexes de segon ordre en* $Z^1$.

Aquestes equacions són de primer ordre considerades com equacions per als coeficients de spin d'una tetrada isòtropa complexa compatible amb l'estructura maxwelliana; la seua expressió explícita ha estat obtinguda per Debever i McLenaghan (1981).

## 3. SISTEMES CONDICIONALS PER A LES EQUACIONS DE MAXWELL

a) El sistema diferencial (II.8) que defineix les estructures maxwellianes és verificat per la component G de cada solució $(G, \phi, \psi)$ de les equacions de Maxwell de buit (II.6) i, recíprocament, cada una de les seues solucions G pot ser completada per solucions $(G, \phi, \psi)$ de les equacions de Maxwell. En altres paraules, perquè les equacions de Maxwell, considerades com un sistema (sobre-determinat) en les incògnites $\phi$ i $\psi$, siguen compatibles, és necessari i suficient que el sistema (II.8) en G es verifique. Açò ens indueix a donar la definició següent:

> ***DEFINICIÓ:*** *Siguen* $D_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *i* $D_2(\mathbf{y})$ *dos sistemes diferencials en p incògnites* $\mathbf{x}$ *i q incògnites* $\mathbf{y}$*; siguen* $S_1 \subset \mathbb{F}^{p+q}$ *i* $S_2 \subset \mathbb{F}^q$ *llurs corresponents espais de solucions, i siga* $\pi: \mathbb{F}^{p+q} \to \mathbb{F}^q$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to \mathbf{y}$ *la projecció natural. Direm que* $D_2$ *és un sistema condicional en les* $\mathbf{y}$ *per a* $D_1$ *si* $\pi(S_1) = S_2$.

Així, el teorema de Rainich pot enunciar-se dient que *les equacions de Maxwell admeten un sistema condicional de segon ordre en G.*

b) Considerem les equacions de Maxwell generals (II.11) en les incògnites $\phi_1$. Per diferenciació, tenim

$$0 = d\phi_1 \wedge h + \phi_1 \, dh + d\omega$$

d'on, tenint en compte (II.11), se segueix:

$$\Omega + \phi_1\, dh = 0 \tag{II.16}$$

on

$$\Omega \equiv d\omega + \omega \wedge h \tag{II.17}$$

Així, quan dh no s'anul·la, una condició necessària per a l'existència de $\phi_1$ és que les 2-formes $\Omega$ i dh siguen proporcionals:

$$\Omega \otimes dh = dh \otimes \Omega \tag{II.18}$$

En aquest cas, les condicions suficients s'obtindran imposant que el factor de proporcionalitat entre les dues 2-formes siga efectivament una solució de l'equació (II.11). Aquestes condicions són equacions de primer ordre en $\Omega$ o, després de (II.17), equacions de tercer ordre en $(\phi_0, \phi_2)$. Quan dh s'anul·la, tenim (localment) $h = d\ln \phi_1^0$ i les equacions (II.11) poden escriure's $d(\phi_1/\phi_1^0) = \omega/\phi_1^0$, les condicions d'integrabilitat de les quals són $\Omega = 0$. Així, hem provat:

> ***TEOREMA II.1:*** *Les equacions de Maxwell sempre admeten un sistema condicional en* $(\phi_0, \phi_2)$. *Aquest és, genèricament, un sistema de tercer ordre que es redueix a un de segon ordre si, i sols si, l'estructura quasi-producte associada a la base auto-dual és maxwelliana:* dh = 0. *En aquest cas, el sistema està donat per*
>
> $$\Omega(\phi_0, \phi_2) = 0 \tag{II.19}$$

Per a cada solució $(\phi_0, \phi_2)$ de (II.19), existeix una família de funcions que completa solucions de les equacions de Maxwell. Si $\phi_1$ n'és una ,totes les altres són de la forma $\phi_1 + \phi_1^0$ on $\phi_1^0$ és la solució general dels camps de Maxwell que admeten Z' com a component geomètrica complexa.

c) Considerem ara una geometria base no maxwelliana ($dh \neq 0$) i siga $X$ qualsevol 2-forma tal que $(X, dh) \neq 0$. Si es verifica l'equació (II.18), d'acord amb (II.16), tenim:

$$\phi_1 = -\ (\Omega, X)/(dh, X) \qquad \text{(II.20)}$$

i, les equacions (II.11) impliquen:

$$(\Omega, X)\ d(dh, X) - (dh, X)\ d(\Omega, X) = -\ (\Omega, X)(dh, X)h + (dh, X)^2\,\omega\ .$$

Després de reagrupar termes, aquestes equacions poden escriure's de la forma

$$\begin{aligned} & i(X)i'(X)\{\Omega \otimes \nabla dh - dh \otimes \nabla\Omega + \Omega \otimes h \otimes dh - dh \otimes \omega \otimes dh\} + \\ & + \{i(\Omega)i'(dh) - i(dh)i'(\Omega)\}(X \otimes \nabla X) = 0 \end{aligned} \qquad \text{(II.21)}$$

on i( ) i i'( ) denoten, respectivament, contracció sobre la primera o la darrera parella antisimètrica d'index. De les equacions (II.18) i de llurs derivacions covariants, se segueix que el terme en $X \otimes \nabla X$ és nul i que el tensor entre claudàtors, que està en $\Lambda^2 \otimes T^* \otimes \Lambda^2$, és simètric en les seues components antisimètriques. Així, com que (II.21) ha de verificar-se per a cada 2-forma $X$, tenim:

***TEOREMA 2:*** *El sistema condicional de tercer ordre en $(\phi_0, \phi_2)$ per a les equacions de Maxwell està donat per*

$$\Omega \otimes \nabla dh - dh \otimes \{\nabla\Omega - h \otimes \Omega + \omega \otimes dh\} = 0 \qquad \text{(II.22)}$$

A cada solució $(\phi_0, \phi_2)$ d'aquest sistema li correspon una única solució $(\phi_0, \phi_1, \phi_2)$ de les equacions de Maxwell, estant la $\phi_1$ donada per (II.20).

## 4. EL SISTEMA CONDICIONAL DE SEGON ORDRE EN EL FORMALISME DELS COEFICIENTS DE SPIN

a) Siguen $\{\Omega^I, \bar{\Omega}^I\}$ les components d'una 2-forma $\Omega$ respecte a la base auto-dual elegida $\{Z^I, Z^{I*}\}$. De les propietats d'ortogonalitat (II.15) i de la definició (II.17) de $\Omega$, tenim, per a la component $\Omega_1$:

$$-2\Omega_1 = (Z^1,\Omega) = (Z^1,\ \omega\wedge h) + (Z^1,\ d\omega) = -i(\omega)i(h)Z^1 + \delta i(\omega)Z^1 + i(\omega)\delta Z^1$$

on hem tingut en compte el caràcter adjunt de $i(\ )$ (resp. $\delta$) respecte a $\wedge$ (resp. d). Però, de $Z^1 \times Z^1 = g$, i de la definició (II.12) de h i $\omega$, se segueix $i(h)Z^1 = \delta Z^1$ i $i(\omega)Z^1 = \delta H - J$, és a dir, tenim:

$$-2\Omega_1 = -i(\omega)\delta Z^1 + \delta(\delta H - J) + i(\omega)\delta Z^1 = 0$$

Considerem ara les components $\Omega_0$ i $\Omega_2$: els termes de segon ordre en $\phi_0$ i $\phi_2$ vénen de $d\omega$ o, després de les definicions (II.12) de $\omega$ i H, i d'acord amb les propietats d'ortogonalitat (II.15), de l'antisimetrització de $\nabla d\phi_0 \times Z^0 + \nabla d\phi_2 \times Z^2$; però $Z^0 \times Z^0 = Z^2 \times Z^2 = 0$, $\Omega_0 \equiv (\Omega, Z^2)$ i $\Omega_2 \equiv (\Omega, Z^0)$, és a dir, $\Omega_0$ (resp. $\Omega_2$) no depén de les segones derivades de $\phi_2$ (resp. $\phi_0$). Per altra part, és clar que $\Omega$ depén, com a molt, de les primeres derivades de J. Recordem que $*$ denota l'operador que permuta, separadament, els vectors reals i complexes de la tetrada isòtropa, $\#^2 = \mathrm{Id.}$, $*Z^1 = -Z^1$, $*Z^0 = -Z^2$. Aleshores, $*J = J$, $*\phi_0 = -\phi_2$, és a dir, de les definicions (II.12) de h i $\omega$, se segueix $*h = h$ i $*\omega = -\omega$ i, en conseqüència, $*\Omega = -\Omega$.

Tenint en compte tots aquests resultats, *PROPOSICIÓ II.3: El sistema condicional de segon ordre en* $(\phi_0, \phi_2)$ *per a les equacions de Maxwell generals en base maxwelliana és de la forma:*

$$- \Omega_0 \equiv \mathbb{D}_0\, \phi_0 + \mathbb{D}_2\, \phi_2 + \mathcal{J}_0 = 0, \quad - \underline{\Omega}_0 \equiv \underline{\mathbb{D}}_0\, \phi_0 + \underline{\mathbb{D}}_2\, \phi_2 + \mathcal{J}_2 = 0$$

$$1/2\ (\Omega_1 + \underline{\Omega}_1) \equiv \mathbb{D}_1\, \phi_2 - {}^*\mathbb{D}_1\, \phi_0 - \mathcal{J}_1 = 0 \qquad \text{(II.23)}$$

$$\Omega_2 \equiv {}^*\mathbb{D}_0\, \phi_2 + {}^*\mathbb{D}_2\, \phi_0 - {}^*\mathcal{J}_0 = 0, \quad \underline{\Omega}_2 \equiv {}^*\underline{\mathbb{D}}_2\, \phi_2 + {}^*\underline{\mathbb{D}}_2\, \phi_0 - {}^*\mathcal{J}_2 = 0$$

*on* $\mathbb{D}_2$ *és un operador de primer ordre i les* $\mathcal{J}_i$ *són funcions de* J *i de les seues primeres derivades.*

b) Per tal d'obtenir l'expressió explícita per a les components (II.23) de la 2-forma $\Omega$, en termes dels coeficients de spin i de les derivades direccionals associades a la tètrade isòtropa, necessitem algunes expressions fàcilment avaluables a partir del treball de Cahen, Debever i Defrise (1967). La codiferencial dels $Z^i$, dóna:

$$\delta Z^0 = 2i(\sigma_1)Z^0 + i(\sigma_2)Z^1$$

$$\delta Z^1 = - 2i(\sigma_0)Z^0 + 2i(\sigma_2)Z^2$$

$$\delta Z^2 = - i(\sigma_0)Z^0 + 2i(\sigma_2)Z^2$$

on les $\sigma_i$ denoten les 1-formes:

$$\sigma_0 = \tau l + \kappa n - \rho m - \sigma m^*$$

$$\sigma_1 = \gamma l + \epsilon n - \alpha m - \beta m^*$$

$$\sigma_2 = \nu l + \pi n - \lambda m - \mu m^*$$

La codiferencial de les 1-formes de la tètrade base és:

$$\delta l = -(\epsilon + \epsilon^*) + (\rho + \rho^*) \quad , \quad \delta n = (\gamma + \gamma^*) - (\mu + \mu^*)$$

$$\delta m = -\pi^* + \tau + \alpha^* - \beta \quad , \quad \delta \bar{m} = -\pi + \tau^* + \alpha - \beta^*$$

i l'acció del operador $*$ sobre les $\sigma_i$ és

$$*\sigma_1 = -\sigma_1 \quad , \quad *\sigma_0 = -\sigma_2 \quad .$$

Seguint Crossman i Fackerell (1980), escrivim:

$$\begin{aligned} D_{pq}{}^{rs} &= D + (p-1)\epsilon - (q+1)\rho + (r-1)\epsilon^* - s\rho^* \\ \delta_{pq}{}^{rs} &= \delta + (p-1)\beta - (q+1)\tau - (r-1)\alpha^* + s\pi^* \end{aligned} \qquad \text{(II.24)}$$

i denotem per $\Delta_{pq}{}^{rs}$ i $\delta^*{}_{pq}{}^{rs}$, respectivament, els transformats de $D_{pq}{}^{rs}$ i $\delta_{pq}{}^{rs}$ per l'operador $*$.

Si tenim en compte totes les expressions anteriors, no és difícil computar les relacions (II.23); denotant per

$$\Upsilon_0 = \delta_{01}{}^{21}\, \delta^*{}_{30}{}^{10} - D_{01}{}^{21}\, \Delta_{30}{}^{10} \quad , \quad \mathcal{I}_2 = -\, D_{22}{}^{00}\, D_{30}{}^{10} \quad ,$$

$$\mathcal{I}_0 = \delta^*{}_{22}{}^{00}\, \delta^*{}_{30}{}^{10} \quad , \quad \Upsilon_1 = D_{21}{}^{20}\, \delta_{30}{}^{10} - (\tau + \pi^*)\, D_{30}{}^{10} \quad ,$$

els operadors de segon ordre que actuen sobre les $\phi_1$, el resultat és:

*TEOREMA II.3: En qualsevol espai-temps, el sistema condicional en* $(\phi_0, \phi_2)$ *per a les equacions de Maxwell generals,* $\Omega = 0$, *és de la forma* (II.23), *on*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}_0 &= \tau_0 - \kappa\nu + \sigma\lambda \ , \\
\mathrm{D}_2 &= -2\kappa\, \delta_{3/2,1/2}{}^{3/2,1/2} + 2\sigma\, D_{3/2,1/2}{}^{3/2,1/2} - \delta\kappa + D\sigma \ , \\
\mathbb{D}_0 &= \mathcal{T}_0 - \lambda\, D_{22}{}^{00} - \sigma^*\, \Delta_{30}{}^{10} - \kappa^*\nu - D\lambda \ , \\
\mathbb{D}_2 &= \mathcal{T}_2 - \kappa\, \delta^*{}_{22}{}^{00} - \kappa^*\, \delta_{30}{}^{10} - \sigma\sigma^* - \delta^*\kappa \ , \\
\mathrm{D}_1 &= \tau_1 + \kappa\, \Delta_{21}{}^{20} + \sigma(\pi + \tau^*) + \Delta\kappa \ , \\
\mathcal{J}_0 &= \kappa J^1 + \delta_{01}{}^{21} J^2 + \sigma J^3 + D_{01}{}^{21} J^4 \ , \\
\mathcal{J}_2 &= \kappa^* J^1 + \delta^*{}_{22}{}^{00} J^2 - D_{22}{}^{00} J^3 - \sigma^* J^4 \ , \\
\mathcal{J}_1 &= D_{21}{}^{20} J^1 + \Delta_{21}{}^{20} J^2 + (\pi^* + \tau) J^3 - (\pi + \tau^*) J^4 \ ,
\end{aligned}
\tag{II.25}
$$

## 5. LES RELACIONS DE TEUKOLSKY-PRESS I LLURS GENERALITZACIONS

a) Considerem, en un espai-temps de buit tipus D, *la tètrade isòtropa principal*, és a dir, la tètrade associada a les direccions de Bel (1960). En el formalisme dels coeficients de spin (Newman, Penrose, 1962), tenim

$$\psi_0 = \psi_1 = \psi_3 = \psi_4 = 0 \ , \qquad \kappa = \nu = \sigma = \lambda = 0 \quad , \tag{II.26}$$

i les identitats de Bianchi s'escriuen:

$$d\psi_2 = 3\psi_2 . h \tag{II.27}$$

Aleshores resulta dh = 0 i així, d'acord amb la proposició II.1, l'estructura quasi-producte associada a la tètrade principal és maxwelliana.

Per aquests espais-temps, les relacions de Teukolsky-Press poden ser escrites de la forma (II.1) amb els valors (II.2) per als operadors $\tau$. Per altra part, l'avaluació de les equacions (II.23) sota les hipòtesis (II.26), condueix, *en el cas sense fonts* J = 0, a les equacions:

$$\Omega_A = T_A \quad , \qquad \underline{\Omega}_A = \underline{T}_A \tag{II.28}$$

per a $A = 0,2$ i

$$1/2\ (\Omega_1 + \underline{\Omega}_1) = \tau_1\, \phi_2 - {}^*\tau_1\, \phi_0 = 0 \tag{II.29}$$

per a $A = 1$. Així, tenim:

*TEOREMA II.4: En espais-temps de buit tipus* D, *el sistema condicional en* $(\phi_0, \phi_2)$ *per a les equacions de Maxwell sense fonts, associat a la tètrade isòtropa principal, està constituït per les relacions de Teukolsky-Press* (II.1) *completat amb la relació* (II.29).

A partir de (II.23) i (II.25) és fàcil provar que (II.28) es verifica sii les relacions (II.26) es verifiquen. Aleshores, per a *qualsevol* espai-temps tipus D, tenim:

*PROPOSICIÓ II.4: Les dues primeres relacions de Teukolsky-Press* $T_0$ *i* $T_2$ *resulten desacoblades si, i sols si, les direccions de Bel de l'espai-temps són geodèsiques, sense distorsió, i determinen una estructura maxwelliana.*

**b)** En el cas particular de la mètrica de Kerr, les dues primeres equacions (II.1), a més de ser desacoblades en $\phi_0$ i $\phi_2$, poden separar-se en parts radial i angular (relatives a les coordenades de Boyer-Lindquist (1967)) per als camps electromagnètics que són invariants sota l'acció del grup d'isometries 2-dimensional (també si són conformement invariants amb factor de conformitat de la forma $exp\{i(\sigma t+m\varphi)\}$ (Chandrasekhar, 1983)). Per a aquests camps, la cinquena equació (II.29) se satisfà idènticament quan les altres quatre equacions (II.28) es verifiquen. És tal vegada per açò que l'equació (II.29) no ha estat (aparentment) considerada fins ara. Tanmateix, en el mateix context geomètric, a l'hora de considerar, per exemple, camps electromagnètics amb dependència temporal no periòdica, l'equació (II.29) s'haurà d'afegir necessàriament a les usuals relacions de Teukolsky-Press (II.28) per tal d'assegurar l'existència de $\phi_1$.

c) El teorema II.4 prova que, *una vegada completat, la generalització geomètrica natural de les relacions de Teukolsky-Press és el sistema condicional en* $(\phi_0, \phi_2)$ estudiat en seccions anteriors. Aquesta és una generalització múltiple: el sistema condicional de segon ordre (II.23) estén la validesa de les relacions de Teukolsky-Press a camps no invariants, a tètrades no principals, a equacions de Maxwell amb fonts i a espais-temps arbitraris. Finalment, quan elegim una tètrade isòtropa que no és maxwelliana, en compte del sistema condicional de segon ordre, caldrà utilitzar el de tercer ordre (II.22).

## 6. POTENCIALS DE DEBYE I RELACIONS DE TEUKOLSKY-PRESS

a) Siga A un potencial de Lorentz, $\delta A = 0$, associat a una solució F de les equacions de Maxwell de buit (II.5). S'anomenen *potencials de Hertz* (H. Hertz, 1889; J.M. Cohen, L.S. Kegeles, 1974; F. Fayos, E. LLanta, L. Llosa, 1986) les 2-formes $\Pi$ tals que $\delta \Pi = A$.

S'ha demostrat (Cohen, Kegeles, 1974) que en els espais-temps algebraicament especials existeixen potencials de Hertz $\Pi$, amb geometria fixada (lligada a la direcció principal de Bel-Debever), que generen totes les solucions de les equacions de Maxwell. Així, cada camp electromagnètic particular apareix determinat per una única funció (complexa) $\psi$, que s'anomena *potencial de Debye* (A. Nisbet, 1955; F. Fayos, E. LLanta, L. LLosa, 1986).

En el cas dels espais-temps de buit de tipus D, les equacions de Maxwell per al potencial de Debye $\psi$ es redueixen a l'equació (Cohen, Kegeles, 1974)

$$\{\Delta_{0,-1}{}^{21}\, D_{3,-2}{}^{10} - \delta^{*}{}_{0,-1}{}^{21}\, \delta_{3,-2}{}^{10}\}\, \psi = 0 \qquad \text{(II.30)}$$

i el camp electromagnètic $F \equiv (\phi_0, \phi_1, \phi_2)$ associat a $\psi$ està donat per

$$\begin{aligned} \phi_0{}^{*} &= -\, D_{20}{}^{00}\, D_{3,-2}{}^{10}\, \psi \\ \phi_1{}^{*} &= \{-\, D_{2,-1}{}^{20}\, \delta_{3,-2}{}^{10} + (\pi^{*} + \tau)\, D_{3,-2}{}^{10}\}\, \psi \qquad \text{(II.31)} \\ \phi_2{}^{*} &= -\, \delta_{20}{}^{00}\, \delta_{3,-2}{}^{10}\, \psi \end{aligned}$$

on els operadors que actuen sobre $\psi$ estan donats en (II.24).

Situem-nos ara en mètrica de Kerr, coordenades locals de Boyer-Lindquist (1967) i tetrada principal de Kinnersley (1969). Aleshores resulta que, per als potencials de Debye de la forma

$$\psi = \int d\sigma \, exp\{-i\sigma t\} \, \Sigma_m \, P_{m\sigma}(r) \, T_{m\sigma}(\theta) \, exp\{im\phi\} \quad , \tag{II.32}$$

l'equació (II.30) és separable; de fet , aquesta equació és equivalent per a les funcions $P \equiv P_{m\sigma}(r)$ i $T \equiv T_{m\sigma}(\theta)$, a les equacions diferencials ordinàries:

$$\{\Delta \, \mathcal{D}_0^{\dagger} \, \mathcal{D}_0 - 2i\sigma r\} \, P = \lambda \, P \tag{II.33}$$

$$\{\mathcal{L}_0 \, \mathcal{L}_1^{\dagger} + 2a\sigma \, cos\,\theta\} \, T = - \lambda \, T \tag{II.34}$$

on $\lambda$ és la constant de separació i, seguint a Chandrasekhar (1983), hem posat

$$\mathcal{D}_n = \partial_r + iK/\Delta + 2n(r-M)/\Delta \quad , \qquad \mathcal{L}_n = \partial_\theta + Q + n \, cotg\,\theta \quad ,$$

$$K = am - (r^2 + a^2)\sigma \quad , \qquad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2 \quad , \tag{II.35}$$

$$Q = m \, cosec\,\theta - a\sigma \, sin\,\theta \quad ,$$

i on l'operador $^{\dagger}$ intercanvia $\sigma$ per $-\sigma$ i m per $-$m.

b) Les components $\phi_I$ (I = 0,1,2) del camp electromagnètic corresponent a la forma (II.32) dels potencials de Debye $\psi$ admeten l'expressió

$$\phi_I = \int d\sigma \, exp\{-i\sigma t\} \, \Sigma_m \, f_I \, \phi_I^{m\sigma}(r,\theta) \, exp\{im\phi\} \quad ,$$

amb $f_0 = 1$, $f_1 = (r + ia\ cos\ \theta)/2^{1/2}$ $f_2 = f_1{}^2$, i amb les expressions següents per a les funcions $\phi_1(r,\theta) \equiv \phi_1{}^{a\prime}(r,\theta)$:

$$\phi_0(r,\theta) = -\ (\mathcal{D}_0\ \mathcal{D}_0\ P^{*\prime})\ T^{\prime}, \qquad \phi_2(r,\theta) = -\ (\mathcal{L}_0\ \mathcal{L}_1\ T^{\prime})\ P^{*\prime}, \tag{II.36}$$

$$2^{1/2}\ f_1{}^*\ \phi_1(r,\theta) = \{(1 - 2^{1/2}\ f_1{}^*\ \mathcal{D}_0)\ \mathcal{L}_1 + ia\ sin\ \theta\ \mathcal{D}_0\}\ (P^{*\prime}\ T^{\prime}), \tag{II.37}$$

on, tenint en compte les relacions (II.33-34-35), les funcions $P^{*\prime}$ i $T^{\prime}$ són solució de les equacions diferencials:

$$\begin{aligned} \{\Delta\ \mathcal{D}_0{}^{\dagger}\ \mathcal{D}_0 - 2i\sigma r\}\ P^{*} &= \lambda\ P^{*\prime} \\ \{\mathcal{L}_0{}^{\dagger}\ \mathcal{L}_1 - 2a\sigma\ cos\,\theta\}\ T^{\prime} &= -\ \lambda\ T^{\prime} \end{aligned} \tag{II.38}$$

Les expressions (II.36) mostren que $\phi_0$ i $\phi_2$ són separables, és a dir, existeixen dues funcions $R_{\pm 1}$, $S_{\pm 1}$ tals que

$$\phi_0(r,\theta) = R_{+1}(r)\ S_{+1}(\theta) \quad , \quad \phi_2(r,\theta) = R_{-1}(r)\ S_{-1}(\theta)$$

Si tenim en compte (II.36), aquestes noves funcions han de verificar les equacions:

$$\begin{aligned} -\ (\mathcal{D}_0\ \mathcal{D}_0\ P^{*\prime})/R_{+1} &= S_{+1}/T^{\prime} = k_1 \\ -\ P^{*\prime}/R_{-1} &= S_{-1}/(\mathcal{L}_0\ \mathcal{L}_1\ T^{*\prime}) = k_2 \end{aligned} \tag{II.39}$$

on $k_1$ i $k_2$ són constants.

En els problemes físics concrets, hom està interessat per les solucions acotades de (II.34). Si T n'és una, també ho serà $T^{\prime}$ i, després de la primera equació de (II.39), $S_{+1}$ haurà de ser també normada. Fixem aquestes normes per les relacions:

$$\int_0^\pi T^2 \sin\theta \, d\theta = \int_0^\pi S_{+1}^2 \sin\theta \, d\theta = 1$$

Aleshores, les constants $k_1$ i $k_2$ de (II.39) prenen els valors

$$k_1 = 1 \quad , \quad k_2 = C^{-1} \tag{II.40}$$

on $C = [\lambda^2 - 4\sigma a(a\sigma - m)]^{1/2}$ és precisament la *constant de Starobinsky* (1973).

c) Per als valors (II.40) d'aquestes constants, les equacions (II.39) s'escriuen

$$\begin{aligned} S_{+1} &= T^\dagger \, , & R_{-1} &= - C\, P^{*\dagger} \\ C\, S_{-1} &= \mathcal{L}_0 \mathcal{L}_1 T^\dagger \, , & R_{+1} &= - \mathcal{D}_0 \mathcal{D}_0 P^{*\dagger} \end{aligned} \tag{II.41}$$

I eliminant $P^{*\dagger}$ i $T^\dagger$, tenim

$$C\, R_{+1} = \mathcal{D}_0 \mathcal{D}_0 R_{-1} \quad , \quad C\, S_{-1} = \mathcal{L}_0 \mathcal{L}_1 S_{+1} \tag{II.42}$$

on les funcions $R_{-1}$ i $S_{+1}$, essent proporcionals respectivament a $P^{*\dagger}$ i $T^\dagger$, hauran de verificar les mateixes equacions diferencials (II.38), és a dir:

$$\begin{aligned} \{\Delta\, \mathcal{D}_0^\dagger \mathcal{D}_0 - 2i\sigma r\}\, R_{-1} &= \lambda\, R_{-1} \quad , \\ \{\mathcal{L}_0^\dagger \mathcal{L}_1 - 2a\sigma \cos\theta\}\, S_{+1} &= - \lambda\, S_{+1} \end{aligned} \tag{II.43}$$

Recíprocament, si $R_{-1}$ i $S_{+1}$ són solució de les equacions (II.43), resultarà que les funcions $P \equiv - C^{-1} R_{-1}^{*\dagger}$ i $T \equiv S_{+1}^{*\dagger}$ seran solució de (II.33-34), i definiran un potencial de Debye de la forma

$\psi \equiv exp(i(m\phi - \sigma t)).P(r)\ T(\theta)$. Aleshores, si $\phi_0$ i $\phi_2$ són les components del camp electromagnètic associat a $\psi$, les funcions $\Phi_0 = \phi_0$ i $\Phi_2 = f_2^{-1}\ \phi_2$ són separables sota la forma $\Phi_0 = R_{+1}\ S_{+1}$ i $\Phi_2 = R_{-1}\ S_{-1}$, on $R_{+1}$ i $S_{-1}$ s'obtenen a partir de (II.42). Així, resulta:

*PROPOSICIÓ II.5: L'espai de solucions perturbatives de les equacions de Maxwell en mètrica de Kerr perturbada està biunívocament determinat per l'espai de solucions del sistema* (II.43).

Aleshores, la substitució directa de les dues primeres equacions de (II.41) en (II.37), ens dóna

$$- C\ 2^{1/2}\ f_1^*\ \Phi_1(r,\theta) = (1 - 2^{1/2}\ f_1^*\ \mathcal{D}_0)\ R_{-1}\ \mathcal{L}_1\ S_{+1} + ia\ sin\,\theta\ S_{+1}\ \mathcal{D}_0\ R_{-1} \quad ,$$

amb la qual cosa queda determinada la component $\phi_1$.

*Segona part*

---

# *FLUID PERFECTE*

Capítol III

# MOVIMENTS BARÒTROPS D'UN FLUID PERFECTE

## 1. EL PROBLEMA DE LES VELOCITATS D'UN FLUID BARÒTROP

a) En Relativitat, un fluid perfecte està caracteritzat per un tensor impuls-energia T de la forma $T = (\rho+p)u\otimes u - pg$, on $\rho$ és la *densitat total d'energia*, p la *pressió*, u la *velocitat* del fluid i g la mètrica de l'espai-temps en qüestió.

La conservació de T condueix a un sistema d'equacions en $(u,\rho,p)$ que, des del punt de vista evolutiu, no és determinista. Per ser físicament interessant en molts casos, el "tancament" determinista del sistema s'obté a vegades imposant la *hipòtesi de barotropicitat* $\rho = \rho(p)$; així completat, aquest sistema s'anomena *sistema fonamental de la hidrodinàmica baròtropa*.

b) En un espai-temps donat, trobar un fluid perfecte baròtrop serà doncs trobar un camp de vectors unitari u(x), una relació $\rho = \rho(p)$ i una funció p(x) que verifique el sistema fonamental precedent. Localment, siga $\mathcal{U}$ el conjunt dels camps de vectors unitaris u, $\mathcal{R}$ el conjunt de les funcions d'una variable $\rho = \rho(p)$ i $\mathcal{F}$ el de les funcions p sobre l'obert en qüestió de l'espai-temps; l'espai de les solucions del sistema fonamental definirà un paral·lelepípede $\mathcal{U}_b \times \mathcal{R}_b \times \mathcal{F}_b$ de $\mathcal{U} \times \mathcal{R} \times \mathcal{F}$.

De l'anàlisi del problema de Cauchy corresponent al sistema fonamental, resulta $\mathcal{R}_b = \mathcal{R}$ o, en altres paraules, per a *tota* relació de barotropicitat $\rho(p)$, existeix sempre solució al sistema fonamental, Tanmateix, és clar que $\mathcal{U}_b$ és, necessàriament, un subconjunt estricte d'$\mathcal{U}$, és a dir, *no tot camp unitari de vectors pot ser velocitat d'algun fluid baròtrop*. Així, prescindint d'una elecció particular de relació baròtropa en $\mathcal{R}$, és natural plantejar-se el problema següent: ¿és possible caracteritzar intrínsecament el subespai $\mathcal{U}_b$? o, en altres paraules, ¿és possible obtenir, solament en termes d'u i les seues derivades, les condicions necessàries i suficients perquè u siga la velocitat unitària d'un fluid perfecte baròtrop?. L'objectiu d'aquest capítol és analitzar aquest problema.

c) Des d'un punt de vista formal, el sistema diferencial en u definidor de l'espai $\mathcal{U}_b$, és el *sistema condicional* en u associat al sistema fonamental de la hidrodinàmica baròtropa. En un context diferent (camp electromagnètic) ja hem revelat l'interés conceptual d'aquests sistemes (veure capítol II).

¿Quin és aquí, en hidrodinàmica, l'interés concret de la caracterització intrínseca de les velocitats baròtropes? Pensem que aquesta caracterització que nosaltres presentem pot ser d'utilitat, almenys, en tres dominis.

El primer és el de la integració del sistema fonamental de la hidrodinàmica baròtropa; aquest pot veure's, des de la nostra caracterització, amb d'una òptica diferent: obtenir una solució fluid baròtrop (de prova) $(u, \rho, p)$ en un espai-temps donat té ara dues etapes clarament diferenciades: (i) *seleccionar* un camp u de $\mathcal{U}_b$ i (ii) *calcular* a partir d'aquest la (o les) relació(ns) baròtropa(-es) $\rho = \rho(p)$ associada(-es) a u.

El segon domini és el de la integració de les pròpies equacions d'Einstein per a un espai-temps fluid perfecte baròtrop. El procediment estàndard consisteix a abordar directament, en cartes locals adaptades a u, les equacions d'Einstein i/o les seues primeres condicions d'integrabilitat; però les dificultats que apareixen per la presència simultània de p, $\rho(p)$ i u en aqueixes equacions són ben conegudes. La nostra caracterització intrínseca de $\mathcal{U}_b$ permet de relegar a una última (tercera) etapa l'enfrontament amb les variables p i $\rho(p)$. Una primera etapa pot dedicar-se a traduir les equacions de definició de $\mathcal{U}_b$ en condicions sobre les components $g_{\alpha\beta}$ de la mètrica en una carta adaptada a u; limitada així la forma de les $g_{\alpha\beta}$ i avaluat el seu Ricci, en una segona etapa s'imposarà que u en siga auto-vector. Aleshores, una vegada aconseguidda la integració parcial del sistema, es considerarà la resta de les equacions d'Einstein en $\rho(p)$ i p.

Finalment, un altre domini en el qual la caracterització intrínseca de $\mathcal{U}_b$ ha d'incidir d'una manera important, és el de l'estudi de propietats genèriques dels moviments baròtrops, com la conjectura de Lichnerowicz (Avez, 1964; Rozoy, 1985), la conjectura de Ellis-Treciokas (Treciokas, Ellis, 1971; White, Collins, 1984), etc... La raó és evident: des del punt de vista de l'existència de termodinàmiques baròtropes, el nombre de variables queda reduït únicament a les tres corresponents a un camp de direccions unitàries.

**d)** El capítol consta d'aquesta i tres seccions més, distribuïdes de la forma següent:

En la secció 2 escrivim el sistema fonamental de la hidrodinàmica baròtropa fent l'estudi complet de les velocitats dels fluids de pressió constant i arribant, per al cas de pressió no constant, a la caracterització en la velocitat u i l'índex d'holonomia $\pi$.

La caracterització en la sola variable u del sistema fonamental de la hidrodinàmica baròtropa, per al cas de pressió no constant, la tractem en la secció 3. Hi mostrem que les equacions que ens donen aquesta caracterització depenen de certes condicions per als coeficients cinemàtics de la velocitat, condicions que indueixen una classificació de les velocitats baròtropes.

Per últim, en la secció 4, estudiem quan les velocitats de la classificació anterior tenen associades algun tipus particular d'equació de barotropia (pressió o densitat constants, pressió i densitats invariants per la velocitat u, politròpica) i, sobretot, aprofundim en el cas polítrop.

## 2. FLUID PERFECTE BARÒTROP

**a)** Des del punt de vista algebraic, el moviment perfecte d'un fluid està descrit per un tensor simètric T de característica de Segré (1,(1,1,1)). Aquest tensor defineix una estructura quasi-producte 3+1, caracteritzada pel vector propi temporal unitari u, i dos camps escalars diferents $\rho$ i $-p$, valors propis associats, respectivament, a u i al 3-pla espacial ortogonal. Aleshores,

$$T = (\rho+p)\, u\otimes u - p\, g \quad , \qquad \rho + p \neq 0 \tag{III.1}$$

Així, T està biunívocament caracteritzat per la *velocitat unitària u*, *la densitat total d'energia* $\rho$ i la *pressió* p: $T\equiv(u,\rho,p)$.

Pel que fa a les condicions diferencials, seran les derivades de la conservació de T:

$$\delta T = 0 \tag{III.2}$$

Tenint en compte les seues components paral.lela i normal, (III.2) s'escriu per a les varibles $(u,\rho,p)$:

$$dp = (\rho+p)\, a + \dot{p}\, u \tag{III.3}$$

$$\theta + \dot{\rho}/(\rho+p) = 0 \tag{III.4}$$

on $a = i(u)\nabla u$ és l'*acceleració*, $\theta \equiv -\delta u$ la *dilatació* i on, per a una funció arbitrària f, $\dot{f} \equiv \mathcal{L}(u)f$.

Anomenarem *fluid perfecte* a una terna $T\equiv(u,\rho,p)$ que verifica les equacions (III.3-4). Es diu que el fluid és *baròtrop* si existeix una relació funcional entre $\rho$ i $p$ (o si són constants), és a dir, si se satisfà:

$$d\rho \wedge dp = 0 \qquad \text{(III.5)}$$

b) Considerem la classe particular de fluids baròtrops amb pressió constant: $dp = 0$ . Aleshores, les equacions de conservació (III.3-4) s'escriuen:

$$a = 0 \quad , \quad \theta + \dot{\rho}/(\rho+p_1) = 0 \qquad \text{(III.6)}$$

on $p_1$ és una constant.

Per altra part, donat u (i per tant $\theta$), la segona equació de (III.6) admet, per a cada $p_1$ tantes solucions $\rho$ com funcions f invariants per u ($\dot{f}= 0$). Així:

*PROPOSICIÓ III.1: Tot fluid perfecte amb pressió constant té una velocitat unitària* u *geodèsica. I, recíprocament, a cada* u *geodèsic podem associar-li un fluid perfecte amb pressió constant, depenent d'un paràmetre constant i d'una funció invariant per* u.

*Quan* u *és geodèsica i té dilatació* $\theta$, *per a cada constant* $p_1$ i cada funció f *invariant per* u, *si* $\rho$ *és una solució de l'equació* $\theta + \dot{\rho}/(\rho+p_1) = 0$, *aleshores la terna* $(u, \exp(f)(\rho+p_1)-p_1, p_1)$ *és un fluid perfecte.*

c) Estudiat el cas de pressió constant, considerem ara la *barotropicitat estricta*, és a dir, es verifica (III.5), amb

$$dp \neq 0 \qquad \text{(III.7)}$$

A partir d'ara, i mentre no diguem expressament una altra cosa, entendrem per *fluid baròtrop* una terna $(u, \rho, p)$ que té per sistema fonamental de la hidrodinàmica el conjunt d'equacions (III.3-4,5,7).

Per (III.5), la 1-forma $dp/(\rho+p)$ és tancada, és a dir, existeix una funció $\pi$, anomenada *índex d'holonomia* (veure Capítol V), tal que

$$dp = (\rho+p)\, d\pi \qquad \text{(III.8)}$$

Ara comprovarem que un fluid baròtrop queda caracteritzat per unes equacions per a la parella $(u, \pi)$.

En efecte, de (III.1) i (III.8), resulta

$$p = p(\pi) \quad , \qquad p'(\pi) = \rho + p \neq 0 \qquad \text{(III.9)}$$

i de (III.3) i (III.7),

$$d\pi = a + \dot{\pi}\, u \neq 0 \qquad \text{(III.10)}$$

Però (III.9) ens diu que $\rho$ i $p$ són funció de $\pi$. Aleshores,

$$\dot{\rho}/(\rho+p) = [\rho'(\pi)/(\rho+p)]\, \dot{\pi} = (p''(\pi) - p'(\pi))/p'(\pi)$$

i (III.4) esdevé:

$$\theta = g(\pi)\, \pi^{\bullet} \qquad \text{(III.11)}$$

amb $$g(\pi) = 1 - (\ln p'(\pi))' \qquad \text{(III.12)}$$

Recíprocament, si es verifica (III.10) per a alguna funció $\pi$, considerem una funció arbitrària $p = p(\pi)$ i siga

$$\rho = \rho(\pi) = p'(\pi) - p(\pi)$$

Aleshores $d\pi = p'(\pi)\cdot dp = (\rho+p)\cdot dp$ i $p^{\bullet} = (\rho+p)\cdot\pi^{\bullet}$, d'on resulten (III.3) i (III.5). Si, a més, imposem que $p = p(\pi)$ siga una solució de l'equació (III.12) (que sempre existeix), on $g(\pi)$ està determinat per (III.11), es verificarà també (III.4). Així, hem demostrat:

> *PROPOSICIÓ III.2: Un fluid baròtrop és estrictament equivalent a una parella* $(u,\pi)$ *verificant*
>
> $$d\pi = a + \pi^{\bullet} u \neq 0 \quad , \quad \theta = g(\pi)\, \pi^{\bullet} \qquad \text{(III.10-11)}$$
>
> *Quan* $(u,\pi)$ *verifica* (III.10-11), *per a cada solució* $p(\pi)$ *de l'equació* $g(\pi) = 1 - (\ln p'(\pi))'$, *si* $\rho = p'(\pi) - p$, *la terna* $(u,\rho,p)$ *és un fluid baròtrop.*

d) Siga $g(\pi)$ associada per (III.11) a una solució $(u,\pi)$ de (III.10-11). Considerem dues solucions $p$ i $p_o$ de (III.12) i siguen $\rho = p'(\pi) - p$, $\rho_o = p_o'(\pi) - p_o$. Aleshores,

$$(\ln p(\pi)')' = (\ln p_o'(\pi))' \quad \rightarrow \quad p_o = k_1\, p + k_2 \quad , \quad k_1 \geq 0 \,,$$

$$\rho_o = k_1 p'(\pi) - k_1 p - k_2 = k_1 \rho - k_2 \quad .$$

Així, si $(u,\rho,p)$ és un fluid baròtrop associat a la solució $(u,\pi)$ de (III.10-11), també ho seran

$$(u,\ k_1\rho-k_2,\ k_1p+k_2)\quad,\quad k_1,\ k_2\ \text{constants},\ k_1 > 0 \tag{III.13}$$

Aquesta família respon al fet que els transformats de T per un factor constant o per l'addició d'un tensor homotètic a g són també conservats i defineixen fluids perfectes baròtrops amb la mateixa velocitat unitària i el mateix índex d'holonomia.

e) Siga $(u,\pi)$ tal que $\pi^{\bullet} = 0$. Aleshores (III.10-11) impliquen $da = 0$, $\theta = 0$. Així, si $(u,\pi)$ és solució de (III.10-11) que verifica $da \neq 0$ o $\theta \neq 0$, resulta $\beta = \pi^{\bullet} \neq 0$. Però (III.10) és localment equivalent a la condició de ser tancada la 1-forma $b = a + \beta u$ i (III.11) ens diu que $\theta/\beta$ és funció del potencial corresponent. és a dir,

*PROPOSICIÓ III.3: Un camp temporal unitari* u *tal que* $\theta\cdot da \neq 0$ *és la velocitat unitària d'un fluid baròtrop si, i sols si, existeix una funció* $\beta \neq 0$ *tal que*

$$db = 0 \quad,\quad d(\theta/\beta)\wedge b = 0 \tag{III.14}$$

*on* $\quad b = a + \beta\, u$

*Aleshores, per a cada solució* $\beta$ *de* (III.14), *l'índex d'holonomia queda determinat, salvant una constant, per* $d\pi = b$.

## 3. CLASSIFICACIÓ I CARACTERITZACIÓ DE LES VELOCITATS BARÒTROPES

**a)** Siga u un camp unitari integrable, és a dir, de rotació nul·la: $w = *(u \wedge du) = 0$. Aleshores,

$$du = u \wedge a \qquad \text{(III.15)}$$

Siguen t, s, dos potencials de la 1-forma u i $\tau$, $\sigma$, els factors integrants corresponents:

$$u = \tau\, dt = \sigma\, ds \qquad \text{(III.16)}$$

Aleshores, el quocient $\tau/\sigma$ és una funció de t. Recíprocament, si $\tau$ és factor integrant i $\tau/\sigma$ és funció de t, $\sigma$ és també factor integrant.

Si diferenciem la primera igualtat de (III.16) i contraiem amb u, resulta:

$$d\boldsymbol{\tau} = a + \dot{\boldsymbol{\tau}}u \quad , \qquad \boldsymbol{\tau} = -\mathit{ln}\,\tau \qquad \text{(III.17)}$$

Siga $\pi$ tal que verifica (III.10); aleshores, tenint en compte (III.17),

$$d(\pi - \boldsymbol{\tau}) = (\dot{\pi} - \dot{\boldsymbol{\tau}})\, u \quad \longrightarrow \quad d(\pi - \boldsymbol{\tau}) \wedge dt = 0 \quad ,$$

és a dir,

$$\pi = \boldsymbol{\tau} + H(t) \qquad \text{(III.18)}$$

i, per tant, $\mathit{exp}(-\pi)$ serà un factor integrant. Així, *PROPOSICIÓ III.4: Siga* u *integrable. La condició necessària i suficient perquè* $\pi$ *verifique* (III.10) *és que* $exp(-\pi)$ *siga un factor integrant de u.*

Suposem da = 0 i $u = \sigma\, ds$. Aleshores de la proposició anterior resulta:

$$0 = d[(ln\,\sigma)^{\cdot}u] = d[(ln\,\sigma)_{s}{}'\,ds] \quad \rightarrow \quad (ln\,\sigma)_{s}{}' = H(s) \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \sigma = h(s)\,\tau, \qquad \text{on } \tau \text{ és tal que } \tau^{\cdot} = 0.$$

Així, si a més a més tenim en compte la relació entre dos factors integrants, podem donar la caracterització en u per tal que un dels seus factors integrants siga invariant per u:

***LEMA** III.1: Siga* u *integrable. Aleshores, són equivalents:*
*i)* $u = \tau\, dt$, *tal que* $\tau^{\cdot} = 0$.
*ii)* $u = \tau\, dt$, *amb* $\tau^{\cdot} \neq 0$, *però existeix* h(t) *tal que* $(h.\tau)^{\cdot} = 0$.
*iii)* da = 0.

Siga u tal que $w = 0$, $\theta = 0$. Aleshores, després de la proposició III.4, a partir dels factors integrants tenim determinats els índex $\pi$ solució de (III.10), els quals, essent $\theta = 0$, verifiquen també (III.11) en prendre $g(\pi) = 0$ (o si $\pi^{\cdot} = 0$). Així:

*PROPOSICIÓ III.5: Si* $w = 0$, $\theta = 0$, u *és la velocitat unitària dels fluids baròtrops amb índex d'holonomia* $\pi = -ln\,\tau$, *on* $\tau$ *és un factor integrant arbitrari.*

b) Si $w = 0$ i $\theta \neq 0$, ens trobem sota les hipòtesis de la proposició III.3. Considerem el cas $a = 0$. Aleshores (III.15) implica que existeix una funció $t$ tal que $u = dt$. En conseqüència, la primera equació de (III.14) s'escriu:

$$d\beta \wedge u = 0 \qquad \text{(III.19)}$$

d'on resulta la segona equivalent a:

$$d\theta \wedge u = 0 \qquad \text{(III.20)}$$

Les equacions (III.19-20) expressen que $\beta$ i $\theta$ són funció de t: $\beta = \beta(t)$ i $\theta = \theta(t)$. Aleshores, com que $d\pi = b = \beta\, dt$, l'índex d'holonomia serà qualsevol funció de t. Per tant,

***PROPOSICIÓ III.6:*** *Si* $w = 0$, $\theta \neq 0$, $a = 0$, *la condició necessària i suficient perquè* u *siga la velocitat unitària d'algun fluid baròtrop és que* $d\theta \wedge u = 0$.

*L'índex d'holonomia associat a* u *és qualsevol funció* $\pi = \pi(t)$, *on* t *és tal que* $u = dt$.

c) Considerem ara una velocitat unitària u que verifique les condicions:

$$w = 0 \quad , \quad \theta \cdot a \neq 0 \quad , \quad \text{æ} \equiv a \wedge da = 0 \qquad \text{(III.21)}$$

Aleshores,

$$da = k\, u \wedge a \quad , \quad k = i(a_{*})i(u)da \qquad \text{(III.22)}$$

on $a_* = (1/a^2)a$. Siga, per a una funció f, $f^* = \mathcal{L}(a_*)f$. Com es verifiquen les hipòtesis de la proposició III.3, estudiem, sota les condicions (III.21), el sistema (III.14), és a dir, les equacions:

$$da + d\beta \wedge u + \beta\, du = 0 \quad , \quad d(\theta/\beta) \wedge (a + \beta\, u) = 0 \qquad \text{(III.14)'}$$

Multiplicant la primera (resp. la segona) d'aquestes equacions, interiorment i exterior, per u (resp. per $a_*$), resulta que (III.14) és equivalent al sistema:

$$(\theta/\beta)^{*}(a + \beta u) - \beta\, d(\theta/\beta) = 0 \qquad \text{(III.23)}$$

$$d(\theta/\beta) \wedge u \wedge a = 0 \qquad \text{(III.24)}$$

$$i(a_*)da + \beta^* u + \beta\, i(a_*)du = 0 \qquad \text{(III.25)}$$

$$d\beta \wedge u \wedge a = 0 \qquad \text{(III.26)}$$

De (III.24,26) se segueix:

$$d\theta \wedge u \wedge a = 0, \qquad \text{(III.27)}$$

equació que, amb (III.26), implica (III.24).

D'altra banda, de (III.15,22), resulta l'equivalència entre (III.25) i l'equació:

$$\beta^* = \beta + k \qquad \text{(III.28)}$$

i per (III.24), (III.23) és equivalent a:

$$(\theta/\beta)^{*} = \beta\, (\theta/\beta)^{*} \quad ,$$

Però aquesta darrera equació és, verificada (III.28), substituïble per:

$$\beta^{\cdot} = \beta^2(1 - \theta^{\bullet}/\theta) + \beta\,(k + \theta^{\cdot}/\theta) \qquad \text{(III.29)}$$

Així, hem demostrat:

***PROPOSICIÓ III.7:*** *Sota les hipòtesis* (III.21), *el sistema* (III.14) *és equivalent al conjunt d'equacions:*

$$d\theta \wedge u \wedge a = 0 \quad , \quad d\beta \wedge u \wedge a = 0 \qquad \text{(III.26-27)}$$

$$\beta^{\bullet} = \beta + k \quad , \quad \beta^{\cdot} = \beta^2\, s + \beta\, q \qquad \text{(III.28-29)}$$

*on*

$$k = i(a_{\bullet})i(u)da, \quad s = 1 - \Theta^{\bullet}, \quad q = k + \Theta^{\cdot}, \quad \Theta = \ln\theta \qquad \text{(III.30)}$$

**d)** Estudiem el sistema, en $\beta$, (III.28-29). Si f és una funció el gradient de la qual està al 2-pla {u,a}:

$$df \wedge u \wedge a = 0 \quad , \quad df = f^{\cdot}u + f^{\bullet}a \ , \qquad \text{(III.31)}$$

tindrem:

$$\begin{aligned} f^{\cdot}u \wedge a &= df \wedge a \ , & f^{\bullet}u \wedge a &= -df \wedge u \\ df^{\cdot} \wedge u \wedge a &= 0 \ , & df^{\bullet} \wedge u \wedge a &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(III.32)}$$

és a dir, $f^{\cdot}$ i $f^{\bullet}$ tenen el gradient al mateix 2-pla. Aleshores, de la segona expressió de (III.31) se segueix, tenint en compte (III.15,22) i (III.32):

$$f^{\cdot\bullet} - f^{\bullet\cdot} = f^{\cdot} + k f^{\bullet} \qquad \text{(III.33)}$$

A més, de (III.22) resulta: $dk \;\; u \;\; a = 0$ , la qual cosa implica, amb (III.26-27) i després de (III.32), que $\beta$ i els coeficients (III.30) del sistema (III.28-29) tenen el gradient al 2-pla {u,a}, és a dir, són funció dels potencial de u i a (que, recordem (III.21), són integrables).

Una condició necessària d'integrabilitat per al sistema (III.28-29) és, després de (III.33),

$$\beta^{\cdot\bullet} - \beta^{\bullet\cdot} - \beta^{\cdot} - k\,\beta^{\bullet} = 0 \qquad \text{(III.34)}$$

la qual cosa implica, tenint de nou en compte (III.28-29),

$$A\beta^2 + B\beta + C = 0 \qquad \text{(III.35)}$$

on, després de (III.31,33),

$$A \equiv \Theta^{\bullet\bullet} , \qquad B \equiv \Theta^{\bullet\cdot} - k^{\bullet} - k\,\Theta^{\bullet} , \qquad C \equiv k\,\Theta^{\cdot} - k^{\cdot} \qquad \text{(III.36)}$$

**e)** Siga u tal que verifica (III.21) amb $A^2 + B^2 = 0$. Aleshores, a causa de (III.35), serà $C = 0$ i la condició necessària d'integrabilitat (III.34) es verifica idènticament.

Comprovem que, en aquest cas, el sistema (III.28-29) té sempre solució. Ens plantegem un problema de condicions inicials i considerem (III.28) com equació de lligadura. Siga $L \equiv \beta^{\bullet} - \beta - k$. Aleshores, de (III.29,34), resulta:

$$L^{\cdot} = (2\beta s + q - k)\, L + A\beta^2 + B\beta + C$$

és a dir, essent $A = B = C = 0$, $L'$ s'anul·la amb $L$. Així, el sistema és involutiu i, en conseqüència, a cada $\beta$ verificant (III.28) en un instant, l'equació (III.29) li farà correspondre una solució única en un entorn. Però (III.28), com equació de lligadura, admet una solució cada vegada que fixem $\beta$ en un punt. Així, podem enunciar:

***PROPOSICIÓ III.8:*** *Si* $\theta \cdot a \neq 0$, $w^2 + \ae^2 + A^2 + B^2 = 0$, $u$ *és la velocitat unitària d'un fluid baròtrop sii* $d\theta \;\; u \;\; a = 0$, $C = 0$.

*Aleshores* (III.28-29) *admet una família a un paràmetre de solucions* $\beta_\lambda = \beta_\lambda[u]$. *Per a cada una d'aquestes, la 1-forma* $b_\lambda = a + \beta_\lambda[u]$ *és tancada i l'index d'holonomia queda determinat, salvant una constant, per* $d\pi_\lambda = b_\lambda$.

f) Siga $u$ tal que verifica (III.21) amb $A^2 + B^2 \neq 0$. Si $A \neq 0$, de (III.35) resulta que, una condició necessària perquè (III.2-29) tinga solució és que

$$\Delta \equiv B^2 - 4AC \geq 0 \quad , \qquad \text{(III.37)}$$

Aleshores, si $\beta$ és solució, serà $\beta = \beta_\pm[u]$, amb

$$\beta_\pm[u] = (1/2A)(-B \pm \Delta^{1/2}) \qquad \text{(III.38)}$$

Si, pel contrari, $A = 0$ ($\rightarrow B \neq 0$), resultarà $\beta = \beta_0[u]$, amb

$$\beta_0[u] = -C/B \qquad \text{(III.39)}$$

En conseqüència, podem enunciar:

*PROPOSICIÓ III.9: Si* $\theta\cdot a \neq 0$, $w^2 + æ^2 = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$, u *és la velocitat unitària d'un fluid baròtrop sii verifica:*
*i)* (III.26,28-29,37) *on* $\beta = \beta_\pm[u]$ *si* $A \neq 0$.
*ii)* (III.26,28-29) *on* $\beta = \beta_0[u]$ *si* $A = 0$.

*Aleshores, quan* $A \neq 0$ *(resp.* $A = 0$*), la 1-forma* $b_\pm = a + \beta_\pm u$ *(resp.* $b_0 = a + \beta_0 u$*) és tancada i l'índex d'holonomia queda determinat, salvant una constant, per* $d\pi = b_\pm$ *(resp.* $d\pi = b_0$*).*

g) Siga u tal que $w = 0$, $\theta\cdot æ \neq 0$. En aquest cas, verificant-se (III.15), si multipliquem exteriorment les equacions (III.14) per l'acceleració a, tindrem:

$$a \wedge da + d\beta \wedge u \wedge a = 0$$
$$d(\theta/\beta) \wedge u \wedge a = 0 \qquad \text{(III.40)}$$

i, essent $\theta\cdot\beta \neq 0$, (III.40) implica:

$$\beta\, d\beta \wedge u \wedge a = -\,\theta\, a \wedge da \qquad \text{(III.41)}$$

Però $x = -*(d\theta \wedge u \wedge a)$ és diferent de zero i ortogonal a u. Així, $x^2 \neq 0$ i, en conseqüència, $\beta = \beta_1[u]$, amb

$$\beta_1[u] = (1/x^2)\, \theta\, i(x)*(a \wedge da) \quad , \qquad x = -*(d\theta \wedge u \wedge a) \qquad \text{(III.42)}$$

Per tant, podem enunciar:

*PROPOSICIÓ III.10: Si* $w = 0$, $\theta\cdot æ \neq 0$, u *és la velocitat unitària d'un fluid baròtrop sii verifica* (III.14) *amb* $\beta = \beta_1[u]$.

*Aleshores, l'índex d'holonomia queda determinat, salvant una constant, per* $d\pi = 0$.

h) Una vegada estudiades totes les velocitat unitàries integrables, considerem el cas $w \neq 0$. Suposem, en primer lloc, que $da = 0$. Diferenciant (III.10) i multiplicant exteriorment per u, resulta:

$$u \wedge da + \pi^{\cdot}\, u \wedge du = 0$$

és a dir, $\pi^{\cdot} = 0$. I, després de (III.11), $\theta = 0$.

Recíprocament, essent $da = 0$, siga $\pi$ tal que $d\pi = a$. Aleshores, si $\theta = 0$, $\pi$ és solució de (III.10-11). Així:

*PROPOSICIÓ III.11: Si* $w \neq 0$, $da = 0$, $u$ *és la velocitat unitària d'un fluid baròtrop sii* $\theta = 0$.

*Aleshores, l'índex d'holonomia queda determinat, salvant una constant, per* $d\pi = a$.

i) Per últim, considerem una velocitat unitària u tal que $w \neq 0$, $da \neq 0$. Com ens trobem sota les hipòtesis de la proposició III.3, de (III.14) resulta:

$$u \wedge da + \beta\, u \wedge du = 0 \ .$$

Aleshores, essent $w \neq 0$ i espacial, $w^2 \neq 0$ i, en conseqüència, $\beta = \beta_2[u]$, amb

$$\beta_2[u] = -(1/w^2)\, i(w) * (u \wedge da) \qquad \text{(III.43)}$$

Així, podem enunciar:

*PROPOSICIÓ III.12:* Si $w \otimes da \neq 0$, *u és la velocitat unitària d'un fluid baròtrop sii verifica* (III.14) *amb* $\beta = \beta_2[u]$.

*Aleshores, l'índex d'holonomia queda determinat, salvant una constant, per* $d\pi = b$.

j) El conjunt de resultats d'aquesta secció caracteritzen les velocitats baròtropes. Les equacions que donen aquesta caracterització no són genèriques sinò que depenen, com hem vist, de certes condicions sobre els coeficients cinemàtics de la velocitat, condicions que indueixen una classificació de les velocitats baròtropes. Aleshores, podem donar la següent

*DEFINICIÓ: Direm que un camp unitari temporal és de classe* $C_i$ *si verifica:*

$C_1 \equiv w = 0,\ \theta = 0.$

$C_2 \equiv w = 0,\ \theta \neq 0,\ a = 0.$

$C_3 \equiv w = 0,\ \theta \neq 0,\ a \neq 0,\ a \wedge da = 0,\ A^2 + B^2 = 0.$

$C_4 \equiv w = 0,\ \theta \neq 0,\ a \neq 0,\ a \wedge da = 0,\ A^2 + B^2 \neq 0,\ A = 0.$

$C_5 \equiv w = 0,\ \theta \neq 0,\ a \neq 0,\ a \wedge da = 0,\ A^2 + B^2 \neq 0,\ A \neq 0.$

$C_6 \equiv w = 0,\ \theta \neq 0,\ a \neq 0,\ a \wedge da \neq 0.$

$C_7 \equiv w \neq 0,\ da = 0.$

$C_8 \equiv w \neq 0,\ da \neq 0.$

*on* $w = *(u \wedge du)$, $\quad \theta = -\delta u$, $\quad a = i(u)\nabla u$,

$A \equiv \Theta^{\bullet\bullet}$, $\quad B \equiv \Theta^{\bullet\cdot} - k^{\cdot} - k\Theta^{\bullet}$, $\quad C \equiv k\Theta^{\cdot} - k^{\cdot}$

$k = i(a_{\bullet})i(u)da$, $\quad \Theta = \ln\theta$

*i, per a una funció* f, $f^{\cdot} = \pounds(u)f$, $f^{\bullet} = (1/a^2)\pounds(a)f$.

Aleshores, tenint en compte els resultats d'aquesta secció, podem enunciar:

***TEOREMA III.1 (de caracterització de les velocitats baròtropes):*** *Un camp unitari temporal de classe* $C_1$ *és la velocitat d'un fluid perfecte baròtrop sii verifica el sistema diferencial* $C_{bi}$ *següent:*

| | | |
|---|---|---|
| $C_{b1}$ | $\varnothing$ | |
| $C_{b2}$ | $d\theta \wedge u = 0$ | |
| $C_{b3}$ | $d\theta \wedge u \wedge a = 0$ | |
| $C_{b4}$ | $d\theta \wedge u \wedge a = 0$<br>$\beta^{\bullet} = \beta + \not{k}$<br>$\beta^{\circ} = \beta^2(1-\Theta^{\bullet}) + \beta(\not{k}+\Theta^{\circ})$ | $\beta = \beta_0[u] = -C/B$ |
| $C_{b5}$ | $d\theta \wedge u \wedge a = 0$<br>$\beta^{\bullet} = \beta + \not{k}$<br>$\beta^{\circ} = \beta^2(1-\Theta^{\bullet}) + \beta(\not{k}+\Theta^{\circ})$ | $\beta = \beta_{\pm}[u] = (1/2A)(-B \pm \Delta^{1/2})$ |
| $C_{b6}$ | $d(a + \beta u) = 0,$<br>$d(\theta/\beta) \wedge (a + \beta u) = 0$ | $\beta = \beta_1[u] = (1/x^2)\theta i(x) * (a \wedge da)$<br>$x = - *(d\theta \wedge u \wedge a)$ |
| $C_{b7}$ | $\theta = 0$ | |
| $C_{b8}$ | $d(a + \beta u) = 0,$<br>$d(\theta/\beta) \wedge (a + \beta u) = 0$ | $\beta = \beta_2[u] = -(1/w^2) i(w) * (u \wedge da)$ |

***TEOREMA** III.2: Per a una velocitat baròtropa* u *de classe* $C_{bi}$, *els índex d'holonomia* $\pi$ *vénen donats per:*

$C_{b1}$ ............ $\pi = -\ln\tau + h(t)$ , $(u = \tau dt)$

$C_{b2}$ ............ $\pi = \pi(t)$ , $(u = \tau dt)$

$C_{b3}$ ............ $d\pi_\lambda = a + \beta_\lambda u$, *on* $\beta_\lambda$ *és la família a un paràmetre de solucions del sistema*
$\beta^\bullet = \beta + k$, $\beta^\circ = \beta^2(1-\Theta^\bullet) + \beta(k+\Theta^\circ)$,

$C_{b4}$ ............ $d\pi_0 = a + \beta_0 u$

$C_{b5}$ ............ $d\pi_\pm = a + \beta_\pm u$

$C_{b6}$ ............ $d\pi_1 = a + \beta_1 u$

$C_{b7}$ ............ $d\pi = a$

$C_{b8}$ ............ $d\pi_2 = a + \beta_2 u$

*Aleshores existeix una funció* $g(\pi)$ *tal que* $\theta = g(\pi)\,\pi^\circ$ *i, posant*

$$p(\pi) = \int exp\{\int[1-g(\pi)]d\pi\}d\pi, \qquad \rho(\pi) = p'(\pi) - p,$$

*la terna* $(u,\rho,p)$ *és un fluid perfecte baròtrop.*

Els dos darrers teoremes i la definició prèvia resumeixen els resultats d'aquesta secció i poden sintetitzar-se en l'esquema de la plana següent.

- $w = 0$ $(u=\tau dt)$
  - $\theta = 0$ — $\boxed{\phantom{x}}$ — $\pi = -\ln\tau + h(t)$, (I)
  - $\theta \neq 0$
    - $a = 0$ — $\boxed{d\theta \wedge u = 0}$ — $\pi = \pi(t)$ (II)
    - $a \neq 0$
      - $a \wedge da = 0$
        - $A^2 + B^2 = 0$ — $\boxed{d\theta \wedge u \wedge a = 0}$ — $d\pi_\lambda = a + \beta_\lambda u$ (III)
        - $A^2 + B^2 \neq 0$
          - $A = 0$ — $\boxed{d\theta \wedge u \wedge a = 0,\ (III,28\text{-}29),\ \beta=\beta_0[u]}$ — $d\pi_0 = a + \beta_0 u$ (IV)
          - $A \neq 0$ — $\boxed{d\theta \wedge u \wedge a = 0,\ \Delta \geqslant 0,\ (III,28\text{-}29),\ \beta=\beta_\pm[u]}$ — $d\pi_\pm = a + \beta_\pm u$ (V)
      - $a \wedge da \neq 0$ — $\boxed{(III.14),\ \beta=\beta_1[u]}$ — $d\pi_1 = a + \beta_1 u$ (VI)
- $w \neq 0$
  - $da = 0$ — $\boxed{\theta = 0}$ — $d\pi = a$ (VII)
  - $da \neq 0$ — $\boxed{(III.14),\ \beta=\beta_2[u]}$ — $d\pi_2 = a + \beta_2 u$ (VIII)

## 4. ALGUNS MOVIMENTS BARÒTROPS PARTICULARS. EL CAS POLÍTROP.

a) En aquesta secció veurem quan les diferents classes de velocitats unitàries estudiades en la secció anterior admeten particulars, però significatives, equacions de barotropia. A més, donarem la caracterització de les velocitats unitàries de cadascun d'aquests fluids baròtrops.

Considerem els casos següents: ($\alpha$) Pressió constant: $dp = 0$; ($\beta$) densitat constant: $d\rho = 0$ ; ($\gamma$) Invariància per u: $p^{\bullet} = \rho^{\bullet} = 0$; ($\delta$) Politropia: $p = (\gamma-1)\rho$, $\gamma \neq 1$.

En l'epígraf 2.d) hem estudiat el cas ($\alpha$). Perquè a més es verifique una de les condicions ($\beta$), ($\gamma$), ($\delta$), ha de ser, necessàriament, $\theta = 0$. I, recíprocament, si $\theta = 0$, qualsevol funció $\rho$ invariant per u serà solució de la segona equació de (III.6) i ens trobarem al cas ($\gamma$). En particular podem tenir qualsevol valor constant per a $\rho$, és a dir, solucions tipus ($\beta$) i ($\gamma$). Així, tenint present la proposició III.1, podem enunciar:

*PROPOSICIÓ III.13: La condició necessària i suficient perquè* u *siga la velocitat unitària d'un fluid perfecte amb pressió constant i tal que verifica una de les condicions ($\beta$), ($\gamma$), ($\delta$) és que* $a = 0 = \theta$.

b) Vegem ara en quins casos, essent $dp \neq 0$, es verifica una de les condicions ($\beta$), ($\gamma$), ($\delta$). A l'epígraf 2.d) hem vist que, a cada solució de les equacions (III.10-11), podem associar-li la família de fluids baròtrops (III.13), on $\rho = p'(\pi) - p$ i p és una solució de

(III.12). D'aquesta equació se segueix que l'equació de barotropia $\rho = \rho(p)$ depén de la funció $g(\pi)$. És més,

$$\rho'(p) = \rho'(\pi)/p'(\pi) = -g(\pi(p)) \qquad \text{(III.44)}$$

Així, en particular, $g(\pi)$ serà constant sii $\rho$ és lineal en p i, en conseqüència, les barotropies dels tipus ($\beta$) i ($\delta$) queden caracteritzades per:

*PROPOSICIÓ III.14: La condició necessària i suficient perquè* u *siga la velocitat unitària d'un fluid perfecte amb* $d\rho = 0$, $dp \neq 0$, *és que* $\theta = 0$ *i que existesca una funció* $\pi$ *tal que* $d\pi = a + \pi^{\bullet} u$.

*PROPOSICIÓ III.15: La condició necessària i suficient perquè* u *siga la velocitat unitària d'un fluid politrop amb índex* $\gamma$ *és que existesca una funció* $\pi$ *tal que* $(u,\pi)$ *siga solució de* (III.10-11) *amb* $g(\pi)=(1-\gamma)^{-1}$.

c) Per al cas ($\gamma$), essent $\rho^{\bullet} = p^{\bullet} = 0$, resulta $\pi^{\bullet} = 0$, és a dir, després de (III.10-11), $\theta = 0$, $da = 0$. Recíprocament, si u verifica aquestes dues condicions, siga $\pi$ tal que $d\pi = a$. Aleshores $\pi^{\bullet} = 0$ i, per a tota funció $g(\pi)$, es verificarà (III.10-11). En conseqüència:

*PROPOSICIÓ III.16: La condició necessària i suficient perquè* u *siga la velocitat unitària d'un fluid perfecte amb* $\rho^{\bullet} = p^{\bullet} = 0$ *és que* $\theta = 0$, $da = 0$.

*Aleshores, l'índex d'holonomia queda determinat, salvant una constant, per* $d\pi = a$.

Si $(u,\pi)$ verifiquen les condicions de la proposició anterior, per a qualsevol funció $p = p(\pi)$, si $\rho = p'(\pi) - p$, la terna $(u,\rho,p)$ és un fluid baròtrop tal que $\rho^{\bullet} = p^{\bullet} = 0$. Així, és admissible qualsevol equació $\rho = \rho(p)$.

Remarquem que la caracterització dels fluids baròtrops invariants per u, concretada en la proposició III.16, engloba també el cas $dp = 0$, el qual es donaria, després de la proposició III.13, quan $a = 0$.

d) Analitzem ara en quins casos, les diferents classes de velocitats unitàries del quadre de la pàgina 74, admeten les barotropicitats ($\beta$), ($\gamma$), ($\delta$):

Els fluids associats a les velocitats unitàries de les classes (VII) i (I) (amb $da = 0$) són, després de la proposició III.16, de tipus ($\gamma$) i , en conseqüència, admeten qualsevol relació $\rho = \rho(p)$.

Els fluids de les classes (I) (amb $da \neq 0$) i (VIII) (amb $\theta = 0$) són amb densitat constant.

Els fluids de la classe (VIII) (resp.(VI)), admetran una equació de tipus polítrop si $\theta \neq 0$ i $\theta/\beta_2 =$ ctant (resp. $\theta/\beta_1 =$ ctant).

Per a les classes (III), (IV) i (V), la politropia implica que existeix una constant $\chi$ tal que $\beta = \chi \cdot \theta$ és solució de (III.28-29), és a dir, $k/(\theta-\theta^{\bullet}) =$ ctant.

Per últim, la classe (II) admetrà qualsevol índex de politropia ja que, essent l'índex d'holonomia qualsevol funció del potencial de la velocitat unitària u, podem prendre aquest proporcional, amb constant de proporcionalitat arbitrària, a una primitiva de $\theta(t)$.

e) Les proposicions III.1 i III.16 caracteritzen, en equacions per a u, els tipus de barotropicitat ($\alpha$) i ($\gamma$), mentre que les proposicions III.14 i III.15 caracteritzen, en $\{u,\pi\}$, els tipus ($\beta$) i ($\delta$). A l'epígraf anterior hem vist els casos en que, les classes de velocitats unitàries baròtropes de la secció anterior, poden ser-ho de barotropies tipus ($\beta$) i ($\gamma$). Però és possible, com ara veurem, donar una caracterització en u d'aquestes barotropies, independent d'aquestes classes.

Considerem el cas ($\beta$) estricte: $d\rho = 0$, $dp \neq 0$. Siga u amb $\theta = 0$. Si, a més, $w = 0$, resulta de la proposició III.4 que, per a cada factor integrant, existeix una $\pi$ que verifica $d\pi = a + \pi^{\cdot}u$. Si $w \neq 0$ i $da = 0$, tenim l'índex $\pi$ tal que $d\pi = 0$. Si $w \neq 0$ i $da \neq 0$, ens trobem al cas estudiat en l'epígraf 3.i); així, u haurà de verificar $d(a + \beta_2 u) = 0$ amb $\beta_2$ donat per (III.43). Resumint:

***TEOREMA III.3:*** *La condició necessària i suficient perquè* u *siga la velocitat unitària d'un fluid perfecte amb* $dp \neq 0$, $d\rho = 0$, *és que* $\theta = 0$ *i es verifique una de les següent condicions: i)* $w = 0$; *ii)* $w \neq 0$, $d(a + \beta_2 u) = 0$, *on* $\beta_2 = \beta_2[u]$.

*Si (i), tindrem tants índex d'holonomia com factors integrants* $\tau$: $\pi = -\ln \tau$. *Si (ii), l'índex d'holonomia queda determinat, salvant una constant, per* $d\pi = a + \beta_2 u$.

*En ambdós casos, per a cada* $\pi$ *i cada parella de constants* $k_o$, $\rho_o$, *si* $p = k_o \cdot \exp(\pi) - \rho_o$, *la terna* $(u, \rho_o, p)$ *és un fluid perfecte.*

f) De la proposició III.15 se segueix que u és la velocitat unitària d'un politrop d'índex $\gamma$ sii existeix una funció $\pi$ tal que

$$d\pi = a + \chi\,\theta\,u \quad , \qquad \chi = 1 - \gamma \tag{III.45}$$

Però aquesta equació és (localment) equivalent a

$$da + \chi\, d(\theta u) = 0 \qquad \text{(III.46)}$$

és a dir, da = 0 sii d(θu) = 0 i, en aquest cas, (III.46) es verifica per a tot $\chi$.

Si da ≠ 0, resulta per a tota 2-forma X tal que (X,da) ≠ 0:

$$\chi = -\,(X,da)/(X,d(\theta u)) \qquad \text{(III.47)}$$

Si diferenciem aquesta darrera expressió, tenim:

$$i(X)i'(X)\{d(\theta u) \otimes {}^{t}\nabla da - da \otimes {}^{t}\nabla d(\theta u)\} +$$

$$+ \{i(d(\theta u)i'(da) - i(da)i'(d(\theta u))\}\, X \otimes {}^{t}\nabla X = 0$$

Com que aquesta equació es verifica per a tot X, serà nul cada claudàtor. I, recíprocament, si aquests són nuls, da i d(θu) seran proporcionals, amb coeficient de proporcionalitat constant. Així:

***TEOREMA** III.4: La condició necessària i suficient perquè* u *siga la velocitat unitària d'un polítrop és que verifique una de les condicions següents:*

*i)* $da = d(\theta u) = 0$

*ii)* $da \otimes d(\theta u) = d(\theta u) \otimes da \neq 0, \qquad da \otimes \nabla d(\theta u) = d(\theta u) \otimes \nabla da$

*Si (i), tindrem qualsevol índex de politropia* $\gamma = 1-\chi,\ \chi \neq 0$.
*Si (ii), l'índex de politropia vindrà donat per* (III.47) *on* X *és qualsevol 2-forma no ortogonal a* da.

*En ambdós casos, la 1-forma* $b = a + \chi\,\theta\,u$ *és tancada i l'índex d'holonomia queda determinat per a cada* $\chi$, *salvant una constant, per* $d\pi = b$. *Aleshores, posant* $p(\pi) = k_0\, exp(\pi\cdot\gamma/(\gamma-1))$ *si* $\chi \neq 1$, *i* $p(\pi) = k_2\pi$ *si* $\chi = 1$, *la terna* $(u, \rho, p)$ *és un polítrop amb índex* $\gamma$.

Capítol IV

# FLUID PERFECTE TERMODINÀMIC. LA SEUA TEORIA "À LA RAINICH"

## 1. PLANTEJAMENTS I OBJECTIUS

a) Des del punt de vista evolutiu, el sistema en $(u,\rho,p)$, equivalent a l'equació de conservació del tensor impuls-energia d'un fluid perfecte, $\delta T=0$, està indeterminat. La condició de barotropicitat $\rho=\rho(p)$, estudiada al capítol anterior, és la manera algebraica de tancar aquest sistema. Tanmateix, essent acceptable en molts casos, aquesta hipòtesi resulta massa restrictiva per a altres situacions físiques interessants.

La manera general de tancar aqueix sistema (de tipus diferencial), és introduir un esquema termodinàmic que generalitza els fluids perfectes clàssics no necessàriament baròtrops.

És clar que no tot fluid perfecte és baròtrop. De la mateixa manera, solament un subconjunt de solucions de $\delta T=0$ admetrà un esquema termodinàmic. Aleshores, és desitjable conèixer les condicions addicionals en $(u,\rho,p)$ que s'han de verificar perquè estiga garantida l'existència d'una termodinàmica.

b) A l'hora de calcular solucions fluid perfecte de les equacions d'Einstein hom pot imposar, des d'un principi, certes condicions per tal que la solució tinga un significat físic particular (amb certa equació d'estat prefixada, normalment baròtropa). Tanmateix, a causa de la dificultat d'integració d'aquestes equacions, el càlcul de moltes famílies de solucions ha estat possible obviant aquesta restricció prèvia. Aleshores es planteja el problema de determinar, a posteriori, el possible significat físic d'aquestes solucions. És clar que una caracterització dels fluids admetent un esquema termodinàmic pot facilitar aquesta interpretació.

c) La teoria de Rainich resol el problema de la caracterització de tots els espais-temps d'Einstein-Maxwell, és a dir, dóna el sistema d'equacions que ha de verificar una mètrica perquè corresponga a una distribució energètica de camp electromagnètic; el seu interés, tant teòric com pràctic és ben conegut. Fins ara no s'ha construït una teoria anàloga per al fluid perfecte termodinàmic; aquest és el principal objectiu del present capítol. A efectes pràctics, la nostra teoria "à la Rainich" permetrà, en particular, de determinar per simple substitució, si una mètrica donada és interpretable com un fluid perfecte termodinàmic i facilitarà l'obtenció de les possibles termodinàmiques associades.

d) Per tal de centrar el tema començarem recordant, en la secció 2, les nocions bàsiques de l'esquema termodinàmic d'Eckart particularitzat per a fluids perfectes. Aquest és el que generalment s'adopta en la literatura i ha estat desenvolupat essencialment per Taub i Lichnerowicz.

En la secció 3 ens plantegem el problema de l'existència de termodinàmiques i donem la caracterització corresponent dels fluids $(u, \rho, p)$ que les admeten.

Per últim, en la secció 4, completem els resultats algebraics existents per tal de donar una caracterització "à la Rainich" per al fluid perfecte termodinàmic general i particularitzem per al cas baròtrop.

## 2. VARIABLES TERMODINAMIQUES

a) La conservació de T és equivalent al sistema (III.3-4) de 4 equacions per a les 5 variables $(u,\rho,p)$ que, per tant, serà incomplet des del punt de vista evolutiu. La seua solució està doncs indeterminada en el sentit de Cauchy i necessitarem una altra equació per a tancar-lo.

Una manera usual (algebraica) de tancar el sistema és imposar una equació que lligue $\rho$ i p: $\rho = \rho(p)$. Aquest és el cas dels fluids baròtrops que hem estudiat al capítol anterior. Tanmateix, ara ens interessa estudiar la manera genèrica de tancar el sistema, és a dir, mitjançant la introducció d'una termodinàmica de forma que, el cas baròtrop aparega com un cas particular.

Clàssicament, una termodinàmica ve determinada per una equació fonamental que relaciona el camp de densitats r, l'energia interna específica $\epsilon$ i l'entropia específica s. Si $\epsilon = \epsilon(s,r)$ és l'equació fonamental energètica, hom identifica $-\epsilon_v'$ $(v=1/r)$ amb la pressió termodinàmica p i $\epsilon_s'$ amb la temperatura $\Theta$, és a dir, tindrem $\Theta ds = d\epsilon + pdv$. Aleshores, s'anomenen equacions d'estat, les equacions que, relacionant tres variables termodinàmiques, contenen parcialment la informació de l'equació fonamental.

b) En relativitat, a conseqüència de l'equivalència entre massa i energia, no té sentit parlar de massa inercial. En canvi té sentit la introducció d'una *densitat de matèria* r, obtinguda com a balanç màssic del nombre de partícules d'un element de volum donat. Aleshores, essent $\rho$ la *densitat total d'energia*, haurà de ser $\rho \geq r$ , i la diferència

$E = \rho - r$ s'anomena *densitat d'energia interna* del fluid. L'*energia interna especifica* és $\epsilon = E/r$. És a dir:

$$\rho = r(1+\epsilon) \qquad \text{(IV.1)}$$

Suposem coneguda una equació d'estat, funció de classe $C^2$ que solament depén de l'estructura interna del fluid:

$$\epsilon = \epsilon(p, r) \qquad \text{(IV.2)}$$

Siga $v = 1/r$ el *volum específic*; de (IV.2) resulta que la 1-forma $d\epsilon + pdv$ és integrable. Aleshores, la comparació amb la termodinàmica clàssica, ens duu a identificar un dels divisors integrants amb la *temperatura absoluta* $\Theta$ del fluid i *l'entropia específica* queda definida, salvant una constant, per

$$\Theta ds = d\epsilon + pdv \qquad \text{(IV.3)}$$

De la definició de r com a balanç màssic del nombre de partícules, resulta natural imposar, per als processos d'evolució sense creació o aniquilació de partícules, la hipòtesi de conservació de la matèria mitjançant *l'equació de continuïtat*:

$$\delta(ru) = 0 \qquad \text{(IV.4)}$$

Les equacions de conservació (III.2) i (IV.4) amb la relació (IV.2) constitueixen, després de la definició (IV.1), un sistema tancat per a les incògnites u, p, r, $\epsilon$; és l'anomenat *sistema fonamental d'evolució de la hidrodinàmica relativista*.

Tenint en compte la relació termodinàmica (IV.3), la segona de les equacions de conservació (III.4) pot escriure's:

$$\delta(ru) = [r\Theta/f]\cdot\pounds(u)s \qquad \text{(IV.5)}$$

on $f$ = 1+ε+pv és l'*índex d'entalpia* del fluid (Lichnerowicz, 1967). Aleshores, essent r, Θ i $f$ positius, l'equació de continuïtat (IV.4) implica el caràcter localment adiabàtic del moviment i, recíprocament, perquè siga possible un moviment localment adiabàtic (la qual cosa és d'esperar per a un fluid perfecte sense conducció de calor), és necessari imposar la conservació de la massa.

c) Assenyalem que en Termodinàmica Clàssica, a causa de la no equivalència entre massa i energia, per a cada definició experimental de la massa (de fet, es tracta quasi exclusivament de la massa inert), l'energia interna està solament determinada salvant una constant additiva.

Per altra part, en Termodinàmica Relativista, tal i com acabem d'introduir-la, l'energia interna està unívocament determinada per a cada definició de densitat material r que donem. En efecte, mentre que en la teoria clàssica l'energia interna total d'un sistema està determinada salvant una constant additiva, en la teoria relativista l'energia total del fluid està fixada sense ambigüitat, i són la resta de les variables termodinàmiques les que s'obtenen a partir d'aquesta, de p i de la definició elegida de r.

Nogensmenys, aquesta situació no ens ha de fer pensar que el zero de l'energia interna en Relativitat està fixat sense ambigüitat: en haver desprovist la densitat material r del seu caràcter inercial, r està determinada salvant un factor constant i, per tant, resulta de

(IV.1) que tindrem encara indeterminació per una constant additiva de l'energia interna: en efecte, siguen $r$ i $r'=kr$ dues definicions de densitat material; de (IV.1) tenim:

$$\rho = r(1+\epsilon)\ , \quad \rho = r'(1+\epsilon') = kr(1+\epsilon') = r(1+k\epsilon'+k-1)\ ,$$

és a dir, $\epsilon = k\epsilon'+(k-1)$. Denotant per $\boldsymbol{\epsilon}$ i $\boldsymbol{\epsilon}'$ les energies totals internes del mateix element de volum V, i $\mathbf{M}$ i $\mathbf{M}'$ els balanços màssics totals realitzats amb cadascun dels criteris, tenim:

$$r = \mathbf{M}/V\ , \quad r' = \mathbf{M}'/V \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}' = k\mathbf{M}$$

Però, com que $\epsilon = \boldsymbol{\epsilon}/\mathbf{M}$, $\epsilon' = \boldsymbol{\epsilon}'/\mathbf{M}'$, resulta:

$$\boldsymbol{\epsilon}/\mathbf{M} = k\boldsymbol{\epsilon}'/k\mathbf{M} + (k-1) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}' + \mathbf{M}(k-1)$$

## 3. SOBRE L'EXISTÈNCIA DE TERMODINAMIQUES

a) No tot fluid perfecte $T \equiv (u,\rho,p)$ solució de (III.3-4) admet un esquema termodinàmic. En efecte, per a l'existència d'una termodinàmica associada a $T$ s'ha de verificar l'equació (IV.4) per a una funció $r$ que complesca una equació d'estat del tipus (IV.2) amb la funció $\epsilon$ definida per (IV.1). És a dir, l'equació en $r$

$$r^{\cdot} + r\theta = 0 \qquad \text{(IV.6)}$$

ha d'admetre alguna solució de la forma

$$r = r(\rho,p) \qquad \text{(IV.7)}$$

I, recíprocament, si existeix una funció $r$ que verifique (IV.6) i (IV.7), aleshores la 1-forma $\Gamma \equiv 1/r\,[d\rho + (\rho+p)dr]$ és integrable. A més, si $v = 1/r$ i $\epsilon = \rho v - 1$,

$$d\epsilon + pdv = \Gamma \quad , \qquad \text{(IV.8)}$$

Així, d'acord amb (IV.3), podem identificar cada divisor integrant de $\Gamma$ amb la temperatura absoluta $\Theta$ i l'entropia específica queda definida per $\Theta ds = \Gamma$. Aleshores, podem enunciar (B.Coll, 1980):

***LEMA IV.1:*** *La condició necessària i suficient perquè un fluid perfecte* $(u,\rho,p)$ *admeta un esquema termodinàmic és que l'equació en* $r$, $r^{\cdot} + r\theta = 0$, *admeta solucions de la forma* $r = r(\rho,p)$. *Aleshores, a cada parella* $\{r,\Theta\}$, *on* $\Theta$ *és un divisor integrant de la 1-forma* $1/r\,[d\rho + (\rho+p)dr]$, *li correspon una termodinàmica.*

b) Siga $(u,\rho,p)$ un fluid perfecte que admet un esquema termodinàmic. L'equació (IV.7) pot escriure's:

$$dr = f(\rho,p)\, d\rho + g(\rho,p)\, dp \qquad \text{(IV.9)}$$

d'on resulta:

$$\dot{r} = f\,\dot{\rho} + g\,\dot{p} \qquad \text{(IV.10)}$$

Però eliminant $\theta$ entre les equacions (III.4) i (IV.6), tenim que $\dot{r}/r = \dot{\rho}/(\rho+p)$, és a dir, després de (IV.10),

$$f\,\dot{\rho} + g\,\dot{p} = r\dot{\rho}/(\rho+p) \qquad \text{(IV.11)}$$

Si $\dot{\rho} = 0$, se segueix de (IV.11) que, o bé $\dot{p} = 0$ i tota funció arbitrària $r = r(\rho,p)$ verifica (IV.6), o bé $g \equiv 0$ i , aleshores, resulta que qualsevol funció $r = r(\rho)$ n'és solució.

Siga $\dot{\rho} \neq 0$. Si $g \equiv 0$, tindrem, per (IV.11), $f = r/(\rho+p)$; però (IV.9) implica $r = r(\rho)$ i, en conseqüència, $p = p(\rho)$ i el fluid és baròtrop. Per últim, si $g \neq 0$, de (IV.11) tenim:

$$\dot{p}/\dot{\rho} = [1/g(\rho,p)]\,\{r/(\rho+p) - f(\rho,p)\} \qquad \text{(IV.12)}$$

és a dir, $\dot{p}/\dot{\rho}$ és una funció d'estat:

$$\dot{p}/\dot{\rho} \equiv \chi(\rho,p) \qquad \text{(IV.13)}$$

Recíprocament, si es verifica (IV.13), plantegem l'equació en derivades parcials de primer ordre:

$$r_\rho'\,\chi(\rho,p) + r_p' = r/(\rho+p) \qquad \text{(IV.14)}$$

Aleshores, cada solució $r = r(\rho, p)$ de (IV.14) (sempre existeix) és, després de (III.4) i (IV.10), solució de (IV.6). Així, podem enunciar:

*TEOREMA IV.1: La condició necessària i suficient perquè un fluid perfecte* $(u, \rho, p)$, *amb* $\rho^{\cdot} \neq 0$, *admeta un esquema termodinàmic és que el quocient* $p^{\cdot}/\rho^{\cdot}$ *siga una funció d'estat, és a dir,* $p^{\cdot}/\rho^{\cdot} \equiv \chi(\rho, p)$. *Quan* $\rho^{\cdot} = 0$ *el fluid admet sempre una termodinàmica.*

c) En determinades ocasions pot ocòrrer que, en estudiar un fluid perfecte, siga còmode treballar amb altres variables que depenen funcionalment de $\rho$ i de $p$. Aleshores, la caracterització termodinàmica del fluid pot donar-se en aquestes variables. En efecte, si $\lambda = \lambda(\rho, p)$, $\mu = \mu(\rho, p)$, siga $J = J(\lambda, \mu; \rho, p)$ el Jacobià de la transformació. Si $\rho^{\cdot} \neq 0$ i $\mu^{\cdot} \neq 0$, un càlcul senzill condueix a:

$$d(\lambda^{\cdot}/\mu^{\cdot}) \wedge d\lambda \wedge d\mu = (\rho^{\cdot}/\mu^{\cdot})^2 \cdot J^2 \cdot d(p^{\cdot}/\rho^{\cdot}) \wedge d\rho \wedge dp$$

Per altra part, quan $J \neq 0$, si $\rho^{\cdot} = 0$ (resp. $\mu^{\cdot} = 0$), resulta que $\lambda^{\cdot}/\mu^{\cdot}$ (resp. $p^{\cdot}/\rho^{\cdot}$) és funció de $\lambda$ i $\mu$ (resp. $\rho$ i $p$). En conseqüència, del teorema IV.1 resulta:

*COROL·LARI IV.1: Siga* $(u, \rho, p)$ *un fluid perfecte i considerem una transformació invertible* $\lambda = \lambda(\rho, p)$, $\mu = \mu(\rho, p)$. *Quan* $\mu^{\cdot} \neq 0$, *el fluid admet un esquema termodinàmic sii*

$$d(\lambda^{\cdot}/\mu^{\cdot}) \wedge d\lambda \wedge d\mu = 0$$

*Quan* $\mu^{\cdot} = 0$, *el fluid admet sempre termodinàmica.*

# 4. TEORIA "À LA RAINICH" DEL FLUID PERFECTE TERMODINAMIC

a) Una solució de les equacions d'Einstein-Maxwell és una parella $(g,F)$ tal que $g$ és una solució de les equacions d'Einstein per a una distribució energètica de tipus electromagnètic determinada per un camp de Maxwell $F$.

Hom pot preguntar-se per l'existència d'un sistema diferencial en l'única incògnita $g$ que caracteritze totes les mètriques solució del sistema d'Einstein-Maxwell. Aquesta qüestió fou resolta per Rainich (1925) per al cas de les solucions regulars: les condicions algebraiques que asseguren que $T = Ric(g)-(1/2)\mathbf{r}\cdot g$ ($\mathbf{r} = trRic(g)$) pot escriure's de la forma $T = (1/2)[F^2+(*F)^2]$, són $\mathbf{r} = 0$, $Ric^2 = \chi^2 g$, i les condicions diferencials que ens diuen que $F$ és un camp de Maxwell (regular) són $d\psi(Ric) = 0$, on $\psi(Ric)$ està donat per l'expressió (II.9).

b) Una solució fluid perfecte de les equacions d'Einstein és una quarteta $(g,u,\rho,p)$ que verifica

$$Ric(g)-(1/2)\mathbf{r}\cdot g = T\ , \qquad \mathbf{r} = trRic(g) \tag{IV.14}$$

$$T = (\rho+p)\ u\otimes u - pg \tag{IV.15}$$

Completant resultats parcials anteriors (Taub, 1967), s'ha donat en un treball recent (C.Bona, B.Coll, J.A.Morales, 1987), la caracterització "à la Rainich" dels espais temps fluid perfecte verificant la condició dominant d'energia. Aquesta caracterització està constituïda per les condicions algebraiques (en Ric(g)) que garanteixen una descomposició tipus (IV.15) per al tensor (IV.14) i que asseguren la verificació de les desigualtats (Plebansky, 1964):

$$\rho \geqslant p > -\rho \qquad \text{(IV.16)}$$

La condició dominant d'energia (IV.16) s'afegeix a (IV.14-15) per tal de considerar solucions amb significat físic. Però aquest queda encara incomplet si el fluid no admet un esquema termodinàmic. Així, és desitjable trobar quines equacions en g haurem d'afegir perquè quede garantida l'existència de termodinàmica. Després de la caracterització en $(u,\rho,p)$ del teorema IV.1, aquestes condicions addicionals seran diferencials en Ric(g).

c) Siguen $\mathbf{R} = \mathrm{Ric}(g)$, $\mathbf{r} = \mathrm{tr}\mathbf{R}$ i $\mathbf{s} = \mathrm{tr}\mathbf{R}^2$. De les expressions de $\rho$ i p en funció de $\mathbf{r}$ i $\mathbf{s}$ i, verificant-se la condició dominant d'energia, tenim $J(\rho,p;\mathbf{r},\mathbf{s}) = 6(\rho+p) \neq 0$. Aleshores, del corol·lari IV.1, resulta que el fluid perfecte admetrà un esquema termodinàmic sii el quocient $\dot{\mathbf{s}}/\dot{\mathbf{r}}$ és una funció de $\mathbf{r}$ i $\mathbf{s}$ (o si $\dot{\mathbf{r}} = 0$).

Però aquesta darrera condició no és completament explícita en g ja que apareix la derivada al llarg de la velocitat u. Per altra part (veure treball de Bona, Coll, Morales (1987)), la direcció u és la imatge de l'endomorfisme $U \equiv \mathbf{R} + \frac{1}{4}(\mathbf{t}-\mathbf{r})g$ ($\mathbf{t} = [(1/3)(4\mathbf{s}-\mathbf{r}^2)]^{1/2}$), i $\dot{\mathbf{r}} = i(u)d\mathbf{r}$ és no nul sii $d\mathbf{r}$ no està en el nucli d'U. Així, si $\dot{\mathbf{r}} \neq 0$, $u = \lambda i(d\mathbf{r})U$ i, en conseqüència,

$$\dot{\mathbf{s}}/\dot{\mathbf{r}} = i(d\mathbf{r})i(d\mathbf{s})U/i^2(d\mathbf{r})U$$

Aleshores, podem enunciar:

***TEOREMA IV.2 ("à la Rainich" per al fluid perfecte termodinàmic):*** *Una mètrica* g *és una solució fluid perfecte termodinàmic que verifica la condició dominant d'energia sii satisfà:*

*i)* $R^2 - (1/4)\mathbf{s}\cdot g \propto R - (1/4)\mathbf{r}\cdot g$

*ii)* $\mathbf{s} \geqslant \mathbf{r}^2$

*iii)* $i^2(x)R > \mathbf{r} + \mathbf{t}$

*iv)* o $i^2(d\mathbf{r})U = 0$,

o $i^2(d\mathbf{r})U \neq 0$ i $d[i(d\mathbf{r})i(d\mathbf{s})U/i^2(d\mathbf{r})U] \wedge d\mathbf{r} \wedge d\mathbf{s} = 0$

*per a un camp temporal unitari arbitrari* x *i, on*

$R = Ric(g)$ , $\mathbf{r} = trR$ , $\mathbf{s} = trR^2$ ,

$\mathbf{t} = [(1/3)(4\mathbf{s}-\mathbf{r}^2)]^{1/2}$ , $U \equiv R + \frac{1}{4}(\mathbf{t}-\mathbf{r})g$

*Aleshores, la densitat* $\rho$*, la pressió* p *i la velocitat* u *del fluid estan donades per:*

$\rho = \frac{1}{4}(3\mathbf{t} - \mathbf{r})$ , $p = \frac{1}{4}(\mathbf{t} + \mathbf{r})$ , $u = \lambda_x i(x)U$

Les tres primeres condicions d'aquest teorema han estat donades (en equacions per a T) per Bona, Coll, Morales (1987) i són algebraiques en Ric(g). La condició (iv), diferencial en Ric(g), completa la caracterització del fluid perfecte termodinàmic.

d) Considerem el cas particular dels moviments baròtrops. Si tenim en compte que el jacobià de la transformació que relaciona $(\rho,p)$ amb $(\mathbf{r},\mathbf{s})$ és no nul, la condició de barotropicitat $d\rho \wedge dp = 0$ és equivalent a $d\mathbf{r} \wedge d\mathbf{s} = 0$. Així:

*COROL·LARI IV.2: Una mètrica* g *és una solució fluid perfecte baròtrop que verifica la condició dominant d'energia sii satisfà les condicions (i), (ii), (iii) del teorema anterior i l'equació* $d\mathbf{r} \wedge d\mathbf{s} = 0$.

Si el fluid perfecte és un polítrop amb índex $\gamma$, $p=(\gamma-1)\rho$, resulta de la transformació $(\rho,p)\to(\mathbf{r},\mathbf{s})$,

$$\mathbf{s} = c\,\mathbf{r}^2\,, \qquad c = [3(\gamma-1)^2+1]/(3\gamma-4)^2$$

Així, podem enunciar:

*COROL·LARI IV.3: Una mètrica* g *és una solució fluid perfecte polítrop que verifica la condició dominant d'energia sii satisfà les condicions (i), (ii), (iii) del teorema anterior i l'equació* $d(\mathbf{s}/\mathbf{r}^2) = 0$. *Aleshores, si* $\mathbf{s}/\mathbf{r}^2 = c$, *l'índex de politropia ve donat per*

$$\gamma = \{4c-1+[(4c-1)/3]^{1/2}\}/(3c-1)$$

Capítol V

# FLUIDS HOLÒNOMS

## 1. LA NOCIó D'HOLONOMIA

a) És conegut que la velocitat d'un moviment isontròpic clàssic és un invariant integral relatiu (en el sentit de Poincaré) i, per Stokes, el seu rotacional resulta ser un invariant integral absolut.

En un intent de generalitzar a la relativitat aquesta propietat, Lichnerowicz (1955) defineix els medis holònoms com aquells que tenen també invariants integrals associats. Tanmateix, els anàlegs relativistes de la velocitat i el rotacional clàssics *no* són la velocitat unitària i la seua diferencial exterior, sinò el corrent C = Fu i la seua diferencial, on F és l'anomenat *índex d'holonomia* del medi.

Així, encara que els medis holònoms es comporten, des del punt de vista dels invariants integrals, de manera semblant als moviments isontròpics clàssics, hi ha un component (l'índex F) que no és purament cinemàtic en els invariants associats als primers. Aquest apareix també afectant a altres variables termodinàmiques (com el volum dinàmic), la qual cosa condueix a diferències entre els resultats clàssics i el relativistes en estudiar, per exemple, les ones de xoc (A.Lichnerowicz, 1967) i els fronts de combustió (B.Coll, 1976) en hidrodinàmica.

b) El mateix Lichnerowicz (1955) desenvolupa àmpliament la teoria dels medis holònoms. En particular, caracteritza els moviments holònoms irrotacionals i estudia allò que ell anomena moviment permanent (quan l'espai-temps és estacionari i hi ha invariància del medi holònom al llarg del Killing temporal). A més, enuncia una propietat general que, com veurem en aquest capítol, pot considerar-se l'eix sobre el qual descansa el concepte d'holonomia: *les línies de corrent d'un moviment holònom són els extremals de la integral* $\int F ds$. Açò significa que la velocitat d'un medi holònom és una geodèsica per a una mètrica conforme a la de l'espai-temps considerat. Una congruència amb aquesta propietat s'anomena conformement *geodèsica*.

Les congruències conformement geodèsiques són, per a les estructures conformes (conjunt de mètriques conformement relacionades), allò que les geodèsiques són per a les estructures mètriques. En efecte, en una estructura conforme es pot considerar un sistema d'equacions diferencials ordinàries que generalitzen l'equació de les geodèsiques i les solucions de les quals no depenen de la mètrica elegida en la classe conforme. A partir d'aquestes geodèsiques conformes poden definir-se les *coordenades normals conformes* com una generalització de les coordenades normals (B.G.Schmidt, 1986). Aquestes coordenades han estat recentment utilitzades en relativitat (H.Friedrich, B.G.Schmidt, 1987) per tal d'estudiar solucions asimptòtiques.

Per tant, és clar que, amb independència del seu interés físic com a generalització relativista de certes propietats clàssiques, els fluids holònoms poden tenir interés a l'hora de la integració de les equacions d'Einstein. En efecte, essent les seues velocitats conformement geodèsiques, treballar en referencial adaptat al medi implica considerar un sistema de coordenades privilegiat de l'espai-temps que generalitza les coordenades normals, i en el qual pot ser més senzilla la integració.

c) En aquest capítol, després de recordar les nocions bàsiques sobre holonomia (secció 2), estudiem i caracteritzem les congruències conformement geodèsiques amb equacions per al seu camp tangent unitari (secció 3). A continuació (secció 4) mostrem que la dependència en variables termodinàmiques de la holonomia és sols aparent ja que, la propietat de ser conformement geodèsica demostrada per Lichnerowicz per al corrent d'un medi holònom, no és sols necessària, sinó també suficient i, en conseqüència, l'holonomia depén exclusivament de la cinemàtica; analitzem també un tipus particular d'holonomia que inclou els fluids perfectes baròtrops. Per últim (secció 5), comprovem que la propietat d'holonomia per a la velocitat d'un fluid perfecte no implica necessàriament la barotropicitat d'aquest.

## 2. FLUIDS HOLÒNOMS

a) Tot tensor impuls-energia T pot descompondre's de la forma:

$$T = m\, u\otimes u + \Pi \qquad (V.1)$$

La conservació de T, $\delta T = 0$, s'escriu per a les variables $(u, m, \Pi)$:

$$a = \perp(u)V\ , \qquad \theta = i(u)V - M^{\cdot} \qquad (V.2)$$

on $V = (1/m)\delta\Pi$, $M = ln\, m$.

*Un tensor impuls-energia* T *s'anomena holònom si per a una descomposició del tipus (V.1), existeix una funció* F *tal que*

$$\delta\Pi = m\, ln\, F \qquad (V.3)$$

és a dir, V és el gradient d'una funció. Aleshores, les funcions m i F s'anomenen, respectivament, *pseudo-densitat* i *índex d'holonomia* del fluid T.

Per a un fluid holònom, si $\pi = ln\, F$, les equacions de conservació (V.2) s'escriuran:

$$a = d\pi - \pi^{\cdot} u \qquad (V.4)$$

$$\theta = \pi^{\cdot} - M^{\cdot} \qquad (V.5)$$

b) Considerem l'anomenat *corrent del fluid holònom* $C = Fu$. Lichnerowicz (1955) demostrà que C és un invariant integral relatiu (en el sentit de Poincaré) al llarg de les línies de corrent i que, en conseqüència, dC és un invariant integral absolut. És a dir, si D és una 2-cadena transversal a les línies de corrent, i D' és la cadena transformada per aquestes, resulta:

$$\int_{\partial D} C = \int_{\partial D'} C \,, \qquad\qquad \int_{D} dC = \int_{D'} dC \tag{V.6}$$

No és difícil comprovar la versió diferencial d'aquestes propietats. En efecte, serà suficient veure que dC és invariant al llarg de les línies de corrent, és a dir, $\mathcal{L}(\mu u)dC = 0$ per a tot $\mu$. Però,

$$\mathcal{L}(\mu u)dC = \mu i(u)d(Fu) = \mu F i(u)[d\pi \wedge u + a] = \mu F[\pi^{\bullet} - d\pi + a] = 0$$

a conseqüència de l'equació (V.4).

Com mostrarem més avant, una manera alternativa d'enunciar aquestes propietats és dient que les línies de corrent d'un fluid holònom són conformement geodèsiques. En la secció següent estudiem aquestes i les caracteritzem en equacions per al seu camp tangent unitari.

## 3. VELOCITATS CONFORMEMENT GEODÈSIQUES

a) Les conguències conformement geodèsiques han estat estudiades, en el marc de les anomenades estructures conformes, com solucions d'un sistema d'equacions diferencials ordinari invariant per conformitat de la mètrica i que inclou com cas particular l'equació de les geodèsiques (H. Friedrich, B.G. Schmidt, 1987). En canvi ací ens interessa un punt de vista diferent. Més que una caracterització d'aquestes com congruències de corbes, és desitjable obtenir les equacions equivalents en termes del camp tangent unitari per a la mètrica en qüestió i, així, poder-ho aplicar a la velocitat (unitària) d'un fluid.

Amb aquesta idea, siga u un camp unitari temporal de l'espai-temps (V,g). Considerem la mètrica conforme $g' = exp(2\alpha)g$. En ella, la 1-forma $u' = exp(\alpha)u$ és unitària. Aleshores, les corresponents acceleracions estan relacionades per:

$$a' = a - d\alpha + \dot{\alpha} u \tag{V.7}$$

Perquè u siga conformement geodèsica, haurà de ser geodèsica per a una mètrica conforme. Així, u vindrà caracteritzat per l'existència d'una funció $\alpha$ per a la qual el segon membre de (V.7) és nul, és a dir,

*PROPOSICIÓ V.1: Una velocitat unitària u és conformement geodèsica sii existeix una funció $\alpha$ (potencial d'acceleració) tal que*

$$d\alpha = a + \dot{\alpha} u \tag{V.8}$$

b) Mostrarem ara que els u conformement geodèsics poden caracteritzar-se amb equacions per a la sola variable u. Aquestes seran, després de la proposició anterior, les condicions necessàries i suficients (en u) perquè existesca una funció $\alpha$ que verifique (V.8).

Aquesta equació és (localment) equivalent a

$$da + d\alpha^{\bullet} \wedge u + \alpha^{\bullet}\, du = 0$$

d'on se segueix

$$u \;\; da + \alpha^{\bullet}\, u \wedge du = 0 \qquad \text{(V.9)}$$

Si u no és integrable, és a dir, si $w = *(u \wedge du) \neq 0$, resulta que

$$\alpha^{\bullet} = \beta[u] = -\,(1/w^2)\; i(w) * (u \wedge da) \qquad \text{(V.10)}$$

i, aleshores, s'haurà de verificar:

$$d(a + \beta u) = 0 \qquad \text{(V.11)}$$

I, recíprocament, si es compleix (V.11) amb $\beta$ donat per (V.10), existirà una funció $\alpha$ tal que $d\alpha = a + \beta u$ i, a més, haurà de ser $\alpha^{\bullet} = \beta$.

Si $w = 0$, tindrem $u = \tau\, dt$. Aleshores, resulta:

$$d\boldsymbol{\tau} = a + \boldsymbol{\tau}^{\bullet} u\ , \qquad \boldsymbol{\tau} = -\,\mathit{ln}\,\tau \qquad \text{(V.12)}$$

és a dir, després de la proposició V.1, u és conformement geodèsica. Per altra part, si $\alpha$ verifica (V.8), de (V.12) resulta $d(\alpha-\boldsymbol{\tau}) \wedge u = 0 \leftrightarrow$ $\leftrightarrow \;\; \alpha-\boldsymbol{\tau} = H(t) \;\; \leftrightarrow \;\; \tau \cdot exp(-\alpha) = h(t)$, és a dir, $exp(\alpha)$ és un factor integrant. En conseqüència, podem enunciar:

*PROPOSICIÓ V.2: i) Tot camp temporal unitari integrable és conformement geodèsic. ii) Si* u *no és integrable, la condició necessària i suficient perquè siga conformement geodèsic és que verifique*

$$d(a + \beta u) = 0 \tag{V.13}$$

*on*
$$\beta = -(1/w^2)\, i(w) * (u \wedge da) \tag{V.14}$$

Per altra part, les conformitats que fan geodèsic un camp u conformement geodèsic (potencials d'acceleració) queden caracteritzats per l'enunciat següent:

*PROPOSICIÓ V.3: Siga* u *conformement geodèsic. i) Quan* $w = 0$, *a cada factor integrant* $\tau$ *li correspon un potencial d'acceleració* $\boldsymbol{\tau} = -\ln \tau$. *Així, si* $\boldsymbol{\tau}$ *n'és un i* t *és un potencial d'u, tots els altres seran* $\alpha = \boldsymbol{\tau} + H(t)$. *ii) Quan* $w \neq 0$, *el potencial d'acceleració* $\alpha$ *queda determinat, salvant una constant, per* $d\alpha = a + \beta u$, *on* $\beta$ *està donat en (V.14).*

c) Les equacions (V.13-14) són les condicions necessàries i suficients que garanteixen l'existència d'una funció $\alpha$ que verifica l'equació (V.8). Ens podem plantejar el problema invers: què ha de verificar una funció $\alpha$ per tal de ser el potencial d'acceleració d'una geodèsica conforme? La resposta és fàcil. En efecte, donada una funció arbitrària $\alpha$, siga g la mètrica de l'espai-temps. Aleshores, qualsevol geodèsica temporal de la mètrica conforme $g' = \exp(2\alpha) g$ és tal que el seu camp tangent unitari (en g) verifica (V.8). Així, tota funció $\alpha$ és el potencial d'acceleració d'una família de geodèsiques conformes.

## 4. FLUIDS HOLÒNOMS I VELOCITATS CONFORMEMENT GEODÈSIQUES

a) Recordem que les equacions de conservació per a un fluid holònom estan donades en les variables $(u,\pi,m)$ per les expressions (V.4-5). Després de la proposició V.1, la primera d'aquestes equacions ens diu que $u$ és conformement geodèsic amb potencial d'acceleració igual a l'índex d'holonomia $\pi$.

Recíprocament, donat un $u$ conformement geodèsic, per a cada potencial d'acceleració $\pi$ solució de (V.8), ens podem plantejar l'equació en $m$ (V.5). Aquesta té sempre solució i $m$ queda determinada salvant un factor invariant per $u$.

Considerem una solució $(u,\pi,m)$ de (V.4-5) i un tensor $T$ conservatiu, i siga $\Pi = T - m\, u\otimes u$. Aleshores,

$$\delta\Pi = \delta T + m^{\circ}u + m\,\theta - m\,a = m\,[\,(m^{\circ} + \theta)u - a\,] = m\,d\pi$$

és a dir, $T$ és holònom amb velocitat $u$, índex d'holonomia $\pi$ i pseudodensitat $m$.

Resulta doncs que *un camp unitari* $u$ *és conformement geodèsic sii* $u$ *és la velocitat d'algun fluid holònom conservatiu*. És més, tenint també en compte la proposició V.3, podem enunciar:

*PROPOSICIÓ V.4: A tota velocitat* u *conformement geodèsica podem associar-li una família de ternes* {(u, $\pi$, m)} *solució del sistema d'equacions (V.4-5) amb les propietats següents:*

*i) Si* $w \neq 0$, *la funció* $\pi$ *està definida salvant una constant, i, si* $w = 0$, salvant una funció del potencial d'u.

*ii) Per a cada parella* (u, $\pi$), *la funció* m *està determinada salvant un factor invariant per* u.

*iii) Per a cada terna* (u, $\pi$, m), *tot* T *conservatiu pot interpretar-se com un fluid holònom de velocitat unitària* u, *índex d'holonomia* $\pi$ *i pseudo-densitat* m.

b) La proposició V.4 ens mostra que la propietat d'holonomia per a un tensor impuls-energia conservat T no és en realitat una propietat de T sinó de la seua velocitat unitària u. En efecte, cada T conservatiu esdevé holònom en considerar com velocitat unitària una geodèsica conforme, i com índex d'holonomia i pseudo-densitat la parella de funcions ($\pi$, m) solució de (V.4-5). Aleshores, a les geodèsiques conformes les anomenarem, en el context de la teoria de fluids, *velocitats holònomes*.

Açò ens condueix a replantejar-nos el concepte de fluid holònom. Haurem de considerar com a tal una terna (u.$\pi$, m) solució de (V.4-5). Aleshores, una distribució energètica T podrà interpretar-se com un medi holònom en la mesura que la descomposició $\Pi = T - m\, u \otimes u$ tinga una certa interpretació física.

c) Abans de continuar amb l'estudi de les velocitats holònomes remarquem que aquestes queden caracteritzades per diverses propietats enunciades ja al llarg del capítol. En concret, tenim:

*PROPOSICIÓ V.5: Totes les afirmacions següents són equivalents:*

*i) La velocitat* u *és geodèsica conforme.*

*ii) Existeix una funció* $\pi$ *tal que* $a = d\pi - \pi^{\cdot}u$.

*iii) Existeix una funció* F *tal que* $C = Fu$ *és invariant integral relatiu.*

*iv) Existeix una funció* F *tal que* $d(Fu)$ *és invariant integral absolut.*

*v) O* u *és integrable o* u *és solució del sistema (V.13-14).*

*vi)* u *és la velocitat unitària d'algun fluid holònom.*

**d)** Siga $(u,\rho,p)$ un fluid perfecte baròtrop. Aleshores, la 1-forma $(\rho+p)^{-1}dp$ és tancada, és a dir, existeix una funció $\pi$ tal que verifica $dp = (\rho+p)d\pi$. Així, essent $T = (\rho+p)u\otimes u - pg$, resulta que T és holònom amb pseudo-densitat $\rho+p$ i índex $\pi$. A més, $\pi$ i $\rho+p$ tenen dependència funcional.

Es pot generalitzar aquesta propietat amb la definició següent: *Anomenem fluid baròtrop a un fluid holònom* $(u,\pi,m)$ *tal que* $d\pi\wedge dm = 0$.

Quan la barotropicitat és trivial, és a dir, si $d\pi = 0$, resulta de (V.4) que $a = 0$ i, per (V.5), la pseudo-densitat m quedarà determinada, salvant un factor invariant per u, per $(\ln m)^{\cdot} = -\theta$. En conseqüència:

*PROPOSICIÓ V.6: La velocitat d'un fluid holònom d'índex constant és geodèsica. I recíprocament, si* u *és geodèsica podem associar-li una família de ternes holònomes* $\{(u,\pi_0,m)\}$, *on* $\pi_0$ *és una constant arbitrària i* m *queda determinat, salvant un factor invariant per* u, *per* $(\ln m)^{\cdot} = -\theta$.

Quan $d\pi \neq 0$, essent $d\pi \wedge dm = 0$, l'equació (V.5) esdevé:

$$\theta = \pi^{\cdot} - M^{\cdot} = \pi^{\cdot}[1 - M'(\pi)] = g(\pi)\pi^{\cdot} \qquad (V.15)$$

Recíprocament, si l'índex d'holonomia solució de (V.4) verifica també (V.15) per a alguna funció $g(\pi)$, siga $M(\pi)$ una solució de l'equació $M'(\pi) = 1 - g(\pi)$. Aleshores $(u,\pi,m)$ és una solució de (V.4-5) tal que $d\pi \quad dm = 0$, és a dir, és un fluid baròtrop. Així, tenim:

***PROPOSICIÓ V.7:*** *La condició necessària i suficient perquè un camp temporal unitari siga la velocitat d'un fluid baròtrop (velocitat baròtropa) és que existesca una funció $\pi$ tal que*

$$a = d\pi - \pi^{\cdot} u \ , \qquad \theta = g(\pi)\pi^{\cdot} \qquad (V.16)$$

*Per a cada parella* $(u,\pi)$ *solució de (V.16) , considerem la funció* $m = exp\{\int[1- g(\pi)]d\pi\}$. *Aleshores, la terna* $(u,\pi,m)$ *és un fluid baròtrop.*

e) A la proposició V.2 hem caracteritzat els camps unitaris conformement geodèsics, és a dir, les *velocitats holònomes*. De la mateixa manera podem estudiar les condicions necessàries i suficients (en u) per tal que existesca una funció $\pi$ que verifique (V.16). Així tindrem caracteritzades les *velocitats baròtropes.*

En estudiar al capítol III els fluids perfectes baròtrops vam comprovar que les equacions de conservació (III.3-4) eren equivalents (veure proposició III.12) a un sistema del tipus (V.16). És a dir, les *velocitats baròtropes* coincideixen exactament amb les *velocitats dels fluids perfectes baròtrops*, i aquestes han estat àmpliament estudiades al capítol tercer.

## 5. FLUIDS PERFECTES I HOLONOMIA

a) Ja hem mostrat a l'apartat (d) de la secció anterior que un fluid perfecte baròtrop $T \equiv (u,\rho,p)$ és holònom amb pseudo-densitat $\rho+p$. A més, s'hi verifica el recíproc. En efecte, si T és holònom amb pseudo-densitat $\rho+p$, tenim $\Pi = -pg$. Aleshores, si $\pi$ és l'índex d'holonomia, $(\rho+p)d\pi = \delta\Pi = dp$, és a dir, $d\rho \wedge dp = 0$ i T és baròtrop. Per tant, hem demostrat:

*PROPOSICIÓ V.8: La condició necessària i suficient perquè un fluid perfecte* $(u,\rho,p)$ *siga holònom amb pseudo-densitat* $\rho+p$ *és que siga baròtrop.*

Com que els fluids perfectes baròtrops ja han estat estudiats al capítol III, considerem ara el cas de fluids perfectes no baròtrops però admetent una velocitat holònoma.

b) La component ortogonal a u de la conservació de T pot escriure's:

$$Qdp = a + Qp^{\cdot}u\ , \qquad Q = (\rho+p)^{-1} \tag{V.17}$$

d'on, diferenciant i multiplicant exteriorment per u, resulta:

$$dQ \wedge dp \wedge u = u \wedge da + Qp^{\cdot}\, u \wedge du \tag{V.18}$$

Considerem, en primer lloc, la velocitat u integrable: $u = \tau dt$. En aquest cas sabem, per la proposició V.2, que u és conformement geodèsica amb índex $\boldsymbol{\tau} = -ln\,\tau$:

$$a = d\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}^{\cdot}u \tag{V.19}$$

De (V.1-2-3) resulta que, o bé el fluid és baròtrop, o les funcions t i $\boldsymbol{\tau}$ tenen el gradient en el 2-pla determinat per $d\rho$ i $dp$. Vegem en quins casos el fluid (no baròtrop) admet un esquema termodinàmic.

Quan $a \neq 0$, $\tau$ i t són independents i $\Pi(d\rho, dp) \equiv \Pi(dt, d\tau) \equiv \Pi(u, a)$. Tindrem aleshores que $J(\rho, p; t, \tau) \neq 0$ i, aplicant el corol·lari IV.1, el fluid admetrà termodinàmica sii $d(\tau^{\bullet}/t^{\bullet}) \wedge dt \wedge d\tau = 0$. Però, com que u és unitari, $t^{\bullet} = \tau^{-1}$ i, la condició anterior és equivalent a la relació $d\tau^{\bullet} \wedge dt \wedge d\tau = 0$ , és a dir, $d\boldsymbol{\tau}^{\bullet} \wedge dt \wedge d\tau = d\boldsymbol{\tau}^{\bullet} \quad u \quad a = 0$. Però de (V.19), resulta:

$$da + d\boldsymbol{\tau}^{\bullet} \wedge u + \boldsymbol{\tau}^{\bullet} du = 0 \ ,$$

i, essent u integrable, $a \wedge da = d\boldsymbol{\tau}^{\bullet} \wedge u \wedge a$. Així, podem enunciar:

> ***PROPOSICIÓ V.9:*** *Un fluid perfecte* $(u, \rho, p)$ *amb velocitat* u *integrable i no geodèsica admet un esquema termodinàmic sii l'acceleració a és integrable, és a dir,* $a \wedge da = 0$.
>
> *Aleshores, els potencials de la velocitat* u *i l'acceleració* a *i l'índex d'holonomia són funcions d'estat.*

Quan $a = 0$, $u = dt$ i de (V.17) resulta $dp = p^{\bullet} dt$, és a dir, $p^{\bullet} = p'(t)$. Per tant, $p^{\bullet}/\rho^{\bullet}$ serà una funció de $\rho$ i p sii ho és $\rho^{\bullet}$. En conseqüència, tenint present (III.4) i el teorema IV.1, tenim:

> ***PROPOSICIÓ V.10:*** *Un fluid perfecte* $(u, \rho, p)$ *amb velocitat* u *integrable i geodèsica admet un esquema termodinàmic sii* $d\theta \wedge d\rho \wedge dp = 0$.

c) Considerem ara un fluid perfecte $(u,\rho,p)$ amb velocitat conformement geodèsica no integrable. Siga $\pi$ l'índex d'holonomia. De (V.4) i (V.17) resulta que, si $\pi$ i $p$ són funcionalment independents, $u$ i $a$ determinen un 2-pla integrable, i si $\pi = \pi(p)$ amb $a \neq 0$, tindrem $\pi'(p) = (\rho+p)^{-1}$ i el fluid perfecte és baròtrop. Així:

*PROPOSICIÓ V.11: Siga* $(u,\rho,p)$ *un fluid perfecte amb velocitat* $u$ *holònoma. Si* $\{u,a\}$ *és un 2-pla no integrable, el fluid és necessàriament baròtrop.*

Per altra part, hem vist en la secció 3 que, essent $u$ no integrable però conformement geodèsic (holònom), l'índex d'holonomia $\pi$ és tal que $\pi^{\cdot} = \beta[u]$, donat per (V.14). Però de (V.18), resulta:

$$\pi^{\cdot} = -(1/w^2)\, i(w) * (u \wedge da) = -(1/w^2)\, i(w) * (dQ \wedge dp \wedge u) + Qp^{\cdot}$$

Però eliminant l'acceleració $a$ entre (V.4) i (V.17), tenim:

$$d\pi = Qdp - \mu u\ , \qquad \text{amb} \quad \mu = (1/w^2) * (w \wedge u \wedge dQ \wedge dp)\ , \tag{V.20}$$

és a dir, la 1-forma $Qdp - \mu u$ és tancada. Recíprocament, si ho és, siga $\pi$ el potencial. Aleshores, de (V.17-18) resulta que $\pi$ verifica (V.4) i $u$ és holònom. Per tant,

*PROPOSICIÓ V.12: Siga* $(u,\rho,p)$ *un fluid perfecte amb velocitat* $u$ *no integrable. La condició necessària i suficient perquè* $u$ *siga holònom és que la 1-forma* $Qdp - \mu u$, *on* $\mu = (1/w^2) * (w \wedge u \wedge dQ \wedge dp)$, *siga tancada.*

De la proposició V.12 resulta que les 1-formes $w$ i $*(u \wedge d\rho \wedge dp)$ són proporcionals, és a dir, per a un fluid perfecte amb velocitat $u$ holònoma, aquesta és rotacional en la mesura que s'aparta del 2-pla $\{d\rho, dp\}$.

Hem vist (proposició V.9) que, quan $u$ és integrable, l'índex d'holonomia $\pi$ és una funció d'estat, és a dir, depén de $\rho$ i $p$. Per al cas de $u$ no integrable no existeix, genèricament, aquesta dependència funcional. És més, si $\pi$ és una funció d'estat, de (V.20) se segueix que $u$ està al 2-pla $\{d\rho, dp\}$, és a dir, $\mu = 0$ i, en conseqüència, $\pi = \pi(p)$ i el fluid serà baròtrop. Així, hem demostrat:

*PROPOSICIÓ V.13: Els únics fluids perfectes amb velocitat holònoma no integrable i amb índex $\pi = \pi(\rho, p)$ són els baròtrops.*

*Tercera part*

# *ESTRUCTURES SUBJACENTS*

Capítol VI

---

# K-ÀLGEBRES GRADUADES.

# SOBRANT D'UN OPERADOR

## 1. ANTECEDENTS I OBJECTIUS

a) L'estudi de les àlgebres graduades s'ha desenvolupat ràpidament en els darrers anys a conseqüència de les seues aplicacions a la Física Teòrica. El concepte d'àlgebra graduada és bàsic en la teoria de supervarietats (D.A.Leites, 1980), en la qual es basen diversos intents de fer una teoria unificada de les distintes forces de la natura. Des dels inicis de la dècada dels 60 (Berezin, 1961), les àlgebres de Lie graduades han estat utilizades per intentar resoldre problemes de la segona quantificació.

Les àlgebres de Lie graduades apareixen en la literatura matemàtica en el context de la teoria de deformacions (Nijenhuis, Richardson, 1964), encara que els primers exemples es remunten als treballs de Nijenhuis (1955) i Frölicher i Nijenhuis (1956).

En un treball de Corwin (1975) podem trobar un ampli resum de la teoria d'àlgebres graduades i de les seues aplicacions físiques. Per a un tractament més matemàtic tenim els treballs de M.Scheunert (1978, 1983). Un resum sobre l'estat actual de les investigacions sobre supersimetries i supergravetats pot trobar-se en un "Physics Reports" editat per M.Jacob (1986).

b) La bibliografia sobre àlgebres graduades que nosaltres coneguem sempre considera operacions de grau zero, és a dir, operacions tals que el grau de l'element resultant és la suma dels graus dels elements operants. Com veurem, serà convenient generalitzar el concepte d'àlgebra graduada per a poder incloure operacions de grau arbitrari $k$. Aquest és un dels objectius del capítol present amb la introducció de les $k$-àlgebres graduades.

Aquesta generalització ens permetrà de considerar l'àlgebra de Schouten com un (-1)-àlgebra de Lie graduada. En efecte, alguns autors, en considerar les propietats del claudàtor de Schouten (1954), afirmen amb lleugeresa que aquest dóna estructura d'àlgebra de Lie graduada als tensors contravariants completament antisimètrics. Nogensmenys, aquest claudàtor és una operació de grau -1 i, a més, no satisfà les propietats estàndard que defineixen una estructura d'àlgebra de Lie graduada.

c) És conegut que, en una àlgebra graduada associativa, el commutador graduat de dos elements defineix (si no és commutativa) una nova operació que dóna, al mòdul graduat, estructura d'àlgebra de Lie graduada. Aquí presentarem un mètode anàleg de "generar" àlgebres (de Lie) graduades a partir d'una àlgebra donada i dels seus endomorfismes: Si un endomorfisme graduat no és una derivació, defineix també una operació, les propietats de la qual depenen de les de l'àlgebra inicial i l'endomorfisme. A més, el grau de la nova operació coincideix amb el grau de l'endomorfisme. Per tant, d'aquesta manera, podem generar k-àlgebres graduades. Al capítol següent comprovarem que la mateixa àlgebra de Schouten queda definida així per l'operador divergència a l'àlgebra exterior.

d) En la secció 2 d'aquest capítol resumim algunes propietats de les àlgebres de Lie graduades i exposem diversos problemes que se'ns poden plantejar en considerar operacions de grau arbitrari.

En la secció 3 reconsiderem alguns dels conceptes que apareixen en la teoria d'àlgebres graduades (tals com derivació graduada, operació commutativa o associativa, etc), per tal de tenir en compte el grau k de l'operació i de forma que es redueixen a les definicions usuals en fer k igual a zero. Veurem que aquestes generalitzacions resolen els problemes esmentats a la secció anterior i ens permeten de construir, en particular, una teoria de k-àlgebres de Lie graduades amb propietats semblants a la teoria estàndard d'àlgebres de Lie graduades i que es redueix a ella en anul·lar k.

Per últim, en la secció 4, introduïm el concepte de *sobrant d'un operador respecte d'una operació* i estudiem les seues propietats. Mostrem que, en una k-àlgebra graduada, el sobrant d'un endomorfisme respecte de l'operació de l'àlgebra, és una operació que ens dóna una nova estructura de k-àlgebra graduada (k-àlgebra residual). Analitzem amb detall el cas de les p-àlgebres residuals generades per endomorfismes p-graduats (amb unes propietats donades) d'una àlgebra graduada associativa i commutativa. Aquest estudi ens permetrà, en particular, de presentar, al capítol següent, l'àlgebra de Schouten com una àlgebra residual, i d'avaluar, en termes del claudàtor de Schouten i de la diferencial exterior, el laplacià d'un producte exterior.

## 2. UNES NOTES SOBRE ALGEBRES DE LIE GRADUADES

a) Una àlgebra de Lie sobre un anell commutatiu $\mathbf{A}$ és un $\mathbf{A}$-mòdul $G$ amb una aplicació bilineal $(A,B) \longrightarrow [A,B]$ (és a dir, una àlgebra) que verifica l'anticommutativitat i la identitat de Jacobi.

Per exemple, si $(E,\circ)$ és una àlgebra associativa, aleshores E amb l'aplicació $(A,B) \longrightarrow A\circ B-B\circ A$ té estructura d'àlgebra de Lie.

Per a un $\mathbf{A}$-mòdul E, el conjunt dels endomorfismes de E, que designem per $\mathrm{End}_{\mathbf{A}}E$, és una àlgebra associativa amb la composició d'aplicacions. En conseqüència, si $[\,,\,]$ és el commutador, $(\mathrm{End}_{\mathbf{A}}E,[\,,\,])$ és una àlgebra de Lie sobre $\mathbf{A}$.

Siga $(E,\circ)$ una $\mathbf{A}$-àlgebra. Una derivació és un element de $\mathrm{End}_{\mathbf{A}}E$ que verifica la regla de Leibnitz. Com que el commutador de dues derivacions és una derivació, el conjunt $\mathrm{Der}_{\mathbf{A}}(E,\circ)$ és una subàlgebra de Lie de $\mathrm{End}_{\mathbf{A}}E$.

Siga $G$ una àlgebra de Lie. Per a cada $A \in G$, l'aplicació $\mathrm{ad}A: G \rightarrow G$; $\mathrm{ad}A(B) = [A,B]$, és una derivació. Aleshores, $A \rightarrow \mathrm{ad}A$ és un homomorfisme de $G$ en l'àlgebra de Lie $\mathrm{Der}(G,[\,,\,])$. Per altra part, resulta que si $D \in \mathrm{Der}(G,[\,,\,])$, $[D,\mathrm{ad}A] = \mathrm{ad}(DA)$, és a dir, $\{\mathrm{ad}A,\ A \in G\}$ és un ideal.

Totes aquestes propietats de les àlgebres de Lie passen a ser, com ara veurem, propietats graduades en la teoria de les àlgebres de Lie graduades.

b) Una àlgebra de Lie graduada sobre l'anell **A** és un **A**-mòdul graduat $G = \oplus G_a$ amb una aplicació bilineal $(A,B) \rightarrow [A,B]$ tal que:

$$[G_a, G_b] < G_{a+b} \qquad \text{(VI.1)}$$

(és a dir, és una àlgebra graduada), que verifica, a més a més, l'*anticommutativitat* graduada,

$$[A,B] = -(-1)^{ab}[B,A] \qquad \text{(VI.2)}$$

i la *identitat de Jacobi* graduada,

$$\mathrm{Per}\{(-1)^{ac}[[A,B],C]\} = 0 \qquad \text{(VI.3)}$$

Per exemple, si $(E,\circ)$ és una àlgebra graduada associativa, aleshores E amb l'aplicació $(A,B) \rightarrow A\circ B-(-1)^{ab}B\circ A$ té estructura d'àlgebra de Lie graduada. Quan aquesta nova operació és idènticament nul·la, $(E,\circ)$ és *commutativa*.

c) Siga $E = \oplus E_a$ un **A**-mòdul graduat i designem per $\mathrm{End}_A E$ els endomorfismes graduats de E; tindrem $\mathrm{End}_A E = \oplus \mathrm{End}_{A,p} E$, on $P \in \mathrm{End}_{A,p} E$ és tal que $P(E_a) < E_{a+p}$. Resulta que, si $Q \in \mathrm{End}_{A,q} E$, $P.Q \in \mathrm{End}_{A,p+q} E$ i, en conseqüència, $\mathrm{End}_A E$ és una àlgebra graduada associativa amb la composició d'aplicacions. Per tant, el *commutador graduat*:

$$[P, Q] = P.Q - (-1)^{pq}Q.P \qquad \text{(VI.4)}$$

dóna a $\mathrm{End}_A E$ estructura d'àlgebra de Lie graduada.

Siga $(E,\circ)$ una **A**-àlgebra graduada. Una derivació de grau r és un element $D \in \mathrm{End}_{A,r} E$ que verifica la *regla de Leibnitz* graduada:

$$D(A \circ B) = DA \circ B + (-1)^{ar} A \circ DB \tag{VI.5}$$

Com que el commutador de dues derivacions és una derivació, el conjunt $\mathrm{Der}_A(E, \circ)$ és una subàlgebra de Lie de $\mathrm{End}_A E$.

d) Siga $G$ una àlgebra de Lie graduada. Per a cada $A \in G$, l'aplicació $\mathrm{ad}A: G \to G$; $\mathrm{ad}A(B) = [A,B]$, és una derivació (graduada): $\mathrm{ad}A \in \mathrm{Der}_a G$, és a dir,

$$\mathrm{ad}A([B,C]) = [\mathrm{ad}A(B),C] + (-1)^{ab}[B,\mathrm{ad}A(C)] \tag{VI.6}$$

Aleshores, $\mathrm{ad}A: G \to \mathrm{Der}G$; $A \to \mathrm{ad}A$ és un homomorfisme d'àlgebres de Lie graduades:

$$\mathrm{ad}[A,B] = [\mathrm{ad}A,\mathrm{ad}B] \tag{VI.7}$$

Per tant, $\mathrm{ad}G$ és una subàlgebra de Lie graduada de $\mathrm{Der}G$. És més, resulta ser un ideal ja que, per a tot $D \in \mathrm{Der}G$,

$$[D,\mathrm{ad}A] = \mathrm{ad}(DA) \tag{VI.8}$$

e) Siga E un mòdul graduat en el qual tenim definida una operació bilineal tal que:

$$E_a \circ E_b \subset E_{a+b+k} \tag{VI.1'}$$

Aleshores, podem preguntar-nos si es poden mantenir les propietats d'àlgebres graduades enunciades en aquesta secció amb aquesta modificació de la condició (VI.1).

En la teoria d'àlgebres de Lie (graduades) juguen un paper fonamental les propietats de l'aplicació adjunta (ad$G$ és un ideal de Der$G$). Aleshores, en considerar una operació que verifica (VI.1)', se'ns planteja un primer problema: Amb aquesta condició (si k és imparell) i amb (VI.2-3) i la definició (VI.5) de derivació, no podem reproduir aquestes propietats de l'adjunta. Veurem que aquesta qüestió es resol k-graduant l'anticommutativitat i el concepte de derivació.

L'associativitat i la commutativitat són propietats compatibles i poden donar-se simultàniament en una mateixa àlgebra (en canvi, no ho són l'associativitat i l'anticommutativitat). El mateix passa amb les àlgebres graduades: l'associativitat estàndard és compatible amb la commutativitat graduada $A \circ B = (-1)^{ab} B \circ A$. Nogensmenys, en considerar operacions de grau k (que verifiquen (VI.1)'), per tal de mantenir la compatibilitat, cal k-graduar, tant la commutativitat com l'associativitat.

Per últim, un altre concepte en el qual hem de tenir en compte el grau k de l'operació, és el d'homomorfisme. Aquesta modificació es fa necessària si treballem en àlgebres commutatives (o anticommutatives).

Ací hem vist com es transformen una sèrie de conceptes en passar d'àlgebres a àlgebres graduades. A la secció següent presentem una nova generalització: les *k-àlgebres graduades*. En els tres casos anomenem aquests conceptes de la mateixa forma; però açò no ens ha d'induir a error. En cada una de les teories (àlgebres, àlgebres graduades, k-àlgebres graduades), els conceptes tenen un significat precís i, en cada teoria, generalitzen els corresponents de l'anterior.

## 3. K-ALGEBRES DE LIE GRADUADES

**a)** Siga $E = \oplus E_a$ un grup graduat. Una *operació de grau k* en E és una aplicació $\circ : E \times E \rightarrow E \ / \ E_a \circ E_b < E_{a+b+k}$. Si E és un **A**-mòdul i l'operació és bilineal direm que $(E, \circ)$ és una *k-àlgebra graduada* sobre l'anell **A**.

Direm que la k-àlgebra graduada $(E, \circ)$ és commutativa (resp. anti-commutativa) si verifica:

$$A \circ B = \epsilon (-1)^{ab+k} B \circ A \qquad \text{(VI.9)}$$

amb $\epsilon = 1$ (resp. $-1$). Direm que és una k-àlgebra graduada associativa si satisfà:

$$A \circ (B \circ C) = (-1)^{ak+k} (A \circ B) \circ C \qquad \text{(VI.10)}$$

***DEFINICIÓ:*** *Una k-àlgebra de Lie graduada és una k-àlgebra graduada $(G, [\,,\,])$ anticommutativa i que verifica la identitat de Jacobi graduada, és a dir,*

$$[G_a, G_b] < G_{a+b+k} \qquad \text{(VI.11)}$$

$$[A, B] = -(-1)^{ab+k} [B, A] \qquad \text{(VI.12)}$$

$$\mathrm{Per}\{(-1)^{ac} [[A, B], C]\} = 0 \qquad \text{(VI.13)}$$

**b)** Siga $(E, \circ)$ una k-àlgebra graduada associativa. Aleshores, si E no és commutativa, l'aplicació $(A, B) \rightarrow [A, B] = A \circ B - (-1)^{ab+k} B \circ A$ és una operació bilineal de grau k. A més,

$$[A,B] = A\circ B-(-1)^{ab+k}B\circ A = -(-1)^{ab+k}(B\circ A-(-1)^{ab+k}B\circ A) = -(-1)^{ab+k}[B,A]$$

és a dir, $[,]$ és anticommutativa. Per altra part, de l'associativitat (VI.10) de $\circ$, resulta que $[,]$ verifica (VI.13). Per tant, podem enunciar:

***PROPOSICIÓ VI.1:*** *Si* $(E,\circ)$ *és una k-àlgebra graduada associativa, siga* $[,]:E\times E \to E$; $(A,B) \to A\circ B-(-1)^{ab+k}B\circ A$. *Aleshores,* $(E,[,])$ *és una k-àlgebra de Lie graduada.*

c) Siga $E = \oplus E_a$ un **A**-mòdul graduat i designem per $End_A E$ els endomorfismes graduats de E; tindrem $End_A E = \oplus End_{A,p} E$, on $P \in End_{A,p} E$ és tal que $P(E_a) \subset E_{a+p}$. Resulta que, si $Q \in End_{A,q} E$, $P.Q \in End_{A,p+q} E$ i, en conseqüència, $End_A E$ és una 0-àlgebra graduada associativa amb la composició d'aplicacions. Per tant, de la proposició VI.1 resulta que el *commutador graduat*:

$$[P,Q] = P.Q - (-1)^{pq}Q.P \qquad \text{(VI.14)}$$

dóna a $End_A E$ estructura de 0-àlgebra de Lie graduada.

La definició següent generalitza per a *k-àlgebres el concepte de derivació graduada:*

***DEFINICIÓ:*** *Siga* $(E,\circ)$ *una k-àlgebra graduada sobre* **A**. *Una derivació de grau r és un element* $D \in End_{A,r} E$ *que verifica:*

$$(-1)^{rk}D(A\circ B) = DA\circ B + (-1)^{ar}A\circ DB \qquad \text{(VI.15)}$$

Com més avant comprovarem el commutador de dues derivacions és una derivació. Per tant, el conjunt $Der_A(E,\bullet)$ de les derivacions graduades d'una k-àlgebra graduada és una sub-àlgebra de Lie de $End_A E$.

d) Siga $G$ una k-àlgebra de Lie graduada. No és difícil comprovar que les condicions (VI.11-12) impliquen que la identitat de Jacobi (VI.13) pot escriure's:

$$(-1)^{k(a+k)}[A,[B,C]] = [[A,B],C] + (-1)^{(a+k)b}[B,[A,C]] \qquad \text{(VI.16)}$$

Per a cada element A de $G$, s'anomena *adjunta de* A a l'endomorfisme $adA: G \rightarrow G$; $adA(B) \rightarrow [A,B]$. Aleshores, comparant (VI.16) amb la definició (VI.15), podem enunciar:

> *PROPOSICIÓ VI.2: Siga G una k-àlgebra de Lie graduada. Per a cada* $A \in G$, *l'aplicació* adA *és una derivació de grau* $a+k$, *és a dir, se satisfà*:

$$(-1)^{(a+k)k}adA([B,C]) = [adA(B),C] + (-1)^{(a+k)b}[B,adA(C)] \qquad \text{(VI.17)}$$

e) Siguen $(E,\bullet)$, $(F,\#)$ dues k-àlgebres de Lie graduades sobre **A**, (de graus k i k+p respectivament), i $P: E \rightarrow F$ una aplicació **A**-lineal de grau p ($P(E_a) \subset E_{a+p}$). Direm que $P$ és un *homomorfisme de k-àlgebres de Lie graduades* si es verifica:

$$P(A\bullet B) = (-1)^{p(a+k)}P(A)\#P(B) \qquad \text{(VI.18)}$$

Aleshores, com que de l'expressió (VI.16) se segueix:

$$(-1)^{k(a+k)}ad[A,B] = adA.adB - (-1)^{(a+k)(b+k)}adB.adA \ ,$$

de la definició d'homomorfisme de k-àlgebres de Lie graduades, resulta que la proposició VI.2 és equivalent al següent enunciat:

*PROPOSICIÓ VI.3: Siga $G$ una k-àlgebra de Lie graduada. L'aplicació* $\mathrm{ad}\colon G \longrightarrow \mathrm{Der}G$; $A \longrightarrow \mathrm{ad}A$, *és un homomorfisme de k-àlgebres de Lie graduades:*

$$\mathrm{ad}[A,B] = (-1)^{k(a+k)}[\mathrm{ad}A,\mathrm{ad}B] \qquad \text{(VI.19)}$$

La relació (VI.19) ens diu que el commutador de dos elements de la imatge de l'homomorfisme ad és també un element de la imatge. Així,

*COROL·LARI VI.1:* $\mathrm{ad}G = \{\mathrm{ad}A,\ A\in G\}$ *és una sub-k-àlgebra de Lie graduada de* $\mathrm{Der}G$.

Per altra part, siga $D$ un element arbitrari de $\mathrm{Der}G$ i r el seu grau. Aleshores:

$$(-1)^{rk}D[A,B] = [DA,B] + (-1)^{ra}[A,DB] \ ,$$

és a dir, $$(-1)^{rk}D(\mathrm{ad}A(B)) = \mathrm{ad}(DA)(B) + (-1)^{ra}\mathrm{ad}A(DB) \ ,$$

i tenim el resultat següent:

*PROPOSICIÓ VI.4:* $\mathrm{ad}G$ *és un ideal de* $\mathrm{Der}G$. *És més, si* $D\in\mathrm{Der}G$ *és de grau r, se satisfà:*

$$[D,\mathrm{ad}A] = (-1)^{rk}\mathrm{ad}(DA) \qquad \text{(VI.20)}$$

## 4. SOBRANT D'UN OPERADOR RESPECTE D'UNA OPERACIÓ: ALGEBRES RESIDUALS

a) Siga $E = \oplus E_a$ un grup graduat. Considerem en E una operació de grau k, $\circ : E \times E \to E$; $E_a \circ E_b \subset E_{a+b+k}$. Per a cada operador $\mathcal{P}$ de grau p, definim:

$$R_{\mathcal{P}}\langle\circ\rangle : E\times E \to E;\ (A,B) \to R_{\mathcal{P}}\langle\circ\rangle(A,B) \in E_{a+b+k+p}\ ,$$

$$R_{\mathcal{P}}\langle\circ\rangle(A,B) = \mathcal{P}(A)\circ B + (-1)^{pa}A\circ\mathcal{P}(B) - (-1)^{kp}\mathcal{P}(A\circ B) \qquad \text{(VI.21)}$$

Aleshores, o $\mathcal{P}$ verifica la regla de Leibnitz (k-graduada) respecte a l'operació $\circ$ ($R_{\mathcal{P}}\langle\circ\rangle = 0$), o $R_{\mathcal{P}}\langle\circ\rangle$ és una operació de grau p+k en E; aquesta nova operació l' anomenarem *sobrant de l'operador $\mathcal{P}$ respecte de l'operació $\circ$*.

Si $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ són dos operadors graduats, el seu commutador, definit per (VI.14) és un operador de grau p+q. Aleshores:

***TEOREMA VI.1 (fonamental del sobrants):*** *El sobrant del commutador de dos operadors està relacionat amb el sobrant de cadascú per:*

$$R_{[\mathcal{P},\mathcal{Q}]}\langle\circ\rangle = R_{\mathcal{P}}\langle R_{\mathcal{Q}}\langle\circ\rangle\rangle - (-1)^{pq}R_{\mathcal{Q}}\langle R_{\mathcal{P}}\langle\circ\rangle\rangle \qquad \text{(VI.22)}$$

Dem: $R_{\mathcal{P}}\langle\circ\rangle$ i $R_{\mathcal{Q}}\langle\circ\rangle$ són, respectivament, operacions d'ordre p+k i q+k. Aleshores, aplicant la definició (VI.21), tenim:

$$(-1)^{k(p+q)}[\mathcal{P},\mathcal{Q}](A\circ B) = (-1)^{k(p+q)}\{\mathcal{P}\mathcal{Q}(A\circ B) - (-1)^{pq}\mathcal{Q}\mathcal{P}(A\circ B)\} =$$

$$= (-1)^{pk}\mathcal{P}\{\mathcal{Q}A\circ B + (-1)^{qa}A\circ\mathcal{Q}B - R_{\mathcal{Q}}\langle\circ\rangle(A,B)\} -$$

$$- (-1)^{q(k+p)}\mathcal{Q}\{\mathcal{P}A\circ B + (-1)^{pa}A\circ\mathcal{P}B - R_{\mathcal{P}}\langle\circ\rangle(A,B)\} =$$

$$= PQA\circ B + (-1)^{p(q+a)}QA\circ PB - R_P\langle\bullet\rangle(QA,B) +$$

$$+ (-1)^{qa}\{PA\circ QB + (-1)^{pa}A\circ PQB - R_P\langle\bullet\rangle(A,QB)\} -$$

$$- (-1)^{pk}P\{R_Q\langle\bullet\rangle(A,B)\} - (-1)^{pq}QPA\circ B - (-1)^{qa}PA\circ QB +$$

$$+ (-1)^{pq}R_Q\langle\bullet\rangle(PA,B) - (-1)^{p(q+a)}\{QA\circ PB + (-1)^{qa}A\circ QPB -$$

$$- R_Q\langle\bullet\rangle(A,PB)\} + (-1)^{q(k+p)}Q\{R_P\langle\bullet\rangle(A,B)\} =$$

$$= [P,Q]A\circ B + (-1)^{a(p+q)}A\circ[P,Q]B - R_P\langle\bullet\rangle(QA,B) -$$

$$- (-1)^{qa}R_P\langle\bullet\rangle(A,QB) - (-1)^{pk}P\{R_Q\langle\bullet\rangle(A,B)\} + (-1)^{pq}R_Q\langle\bullet\rangle(PA,B) +$$

$$+ (-1)^{p(q+a)}R_Q\langle\bullet\rangle(A,PB) + (-1)^{q(k+p)}Q\{R_P\langle\bullet\rangle(A,B)\} =$$

$$= [P,Q]A\circ B + (-1)^{a(p+q)}A\circ[P,Q]B -$$

$$- \{R_P\langle\bullet\rangle(QA,B) + (-1)^{qa}R_P\langle\bullet\rangle(A,QB) - (-1)^{q(p+k)}Q\{R_P\langle\bullet\rangle(A,B)\}\} -$$

$$- (-1)^{pq}\{R_Q\langle\bullet\rangle(PA,B) + (-1)^{pa}R_Q\langle\bullet\rangle(A,PB) - (-1)^{p(q+k)}P\{R_Q\langle\bullet\rangle(A,B)\}\}$$

la qual cosa demostra el teorema. Per altra part, si $P$ és un operador de grau p, $P^2 = P.P$ serà de grau 2p. Aleshores, del teorema anterior resulta:

*COROL·LARI VI.2: Si* $P$ *és un operador de grau imparell,*

$$R_{P^2}\langle\bullet\rangle = R_P\langle R_P\langle\bullet\rangle\rangle$$

b) Siga $(E,\circ)$ una k-àlgebra graduada sobre l'anell **A**, i $P\in End_A E$; aleshores, essent $\circ$ bilineal i $P$ lineal, resulta que el sobrant $R_P\langle\bullet\rangle$ serà bilineal. Tindrem així:

*PROPOSICIÓ VI.5: Si* $(E,\circ)$ *és una k-àlgebra graduada sobre l'anell* **A** *i* $\mathcal{P} \in \mathrm{End}_A E$, *aleshores* $(E, R_{\mathcal{P}}\langle\circ\rangle)$ *és una (k+p)-àlgebra graduada sobre* **A**. *L'anomenarem* ***àlgebra residual*** *generada per* $\mathcal{P}$ *en* $(E,\circ)$.

Si $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ són dos endomorfismes, el teorema VI.1 ens diu que el sobrant del commutador $[\mathcal{P},\mathcal{Q}]$ en $(E,\circ)$ és igual a la diferència (graduada) entre el sobrant de $\mathcal{P}$ en l'àlgebra residual $(E, R_{\mathcal{Q}}\langle\circ\rangle)$ i el sobrant de $\mathcal{Q}$ en l'àlgebra residual $(E, R_{\mathcal{P}}\langle\circ\rangle)$.

Per altra part, és clar que $\mathcal{P} \in \mathrm{Der}(E,\circ)$ si, i sols si, $R_{\mathcal{P}}\langle\circ\rangle \equiv 0$. Aleshores, del teorema VI.1 i del corol·lari VI.2, resulta:

*PROPOSICIÓ VI.6: i)* $\mathcal{P},\mathcal{Q} \in \mathrm{Der}(E,\circ) \longrightarrow [\mathcal{P},\mathcal{Q}] \in \mathrm{Der}(E,\circ)$.

*Quan p és imparell:*

*ii)* $\mathcal{P} \in \mathrm{Der}(E,\circ) \longrightarrow \mathcal{P}^2 \in \mathrm{Der}(E,\circ)$.

*iii) Si* $\mathcal{P}$ *no és derivació:*

$\mathcal{P}^2 \in \mathrm{Der}(E,\circ)$ *sii* $\mathcal{P} \in \mathrm{Der}(E, R_{\mathcal{P}}\langle\circ\rangle)$

Remarquem que d'aquesta proposició se segueix que $\mathcal{P}^2$ pot ser derivació sense ser-ho $\mathcal{P}$. De la mateixa forma, $[\mathcal{P},\mathcal{Q}]$ pot ser derivació sense ser-ho $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$: és suficient que $\mathcal{P}$ siga derivació en $(E, R_{\mathcal{Q}}\langle\circ\rangle)$ i $\mathcal{Q}$ en $(E, R_{\mathcal{P}}\langle\circ\rangle)$.

c) Considerem una k-àlgebra graduada commutativa o anticommutativa $(E,\circ)$. Siga $\mathcal{P} \in \mathrm{End}_A E$ i designem per $\circledast$ el sobrant de $\mathcal{P}$ en $(E,\circ)$: $\circledast = R_{\mathcal{P}}\langle\circ\rangle$. Aleshores,

$$A \circledast B = \mathcal{P}A \circ B + (-1)^{pa} A \circ \mathcal{P}B - (-1)^{kp} \mathcal{P}(A \circ B) =$$

$$= \epsilon\,(-1)^{k}\{(-1)^{b(p+a)} B \circ \mathcal{P}A + (-1)^{ab} \mathcal{P}B \circ A - (-1)^{kp+ab} \mathcal{P}(A \circ B)\} =$$

$$= \epsilon\ (-1)^{ab+k}\{\mathcal{P}B\circ A + (-1)^{pb}B\circ\mathcal{P}A - (-1)^{kp}\mathcal{P}(B\circ A)\} =$$

$$= \epsilon\ (-1)^{ab+k}B\circledast A = \epsilon'\ (-1)^{ab+(k+p)}B\circledast A\ ,$$

on $\epsilon' = \epsilon\ (-1)^{p}$, i $\epsilon = 1$ (resp. $-1$) si l'àlgebra és commutativa (resp. anticommutativa). Així, com que $\circledast$ és una operació de grau k+p, podem enunciar:

*PROPOSICIÓ VI.7: Siga* $(E,\circ)$ *una k-àlgebra graduada commutativa (resp. anticommutativa), i* $\mathcal{P}\in$ EndE. *Si p és parell,* $(E,R_{\mathcal{P}}\langle\circ\rangle)$ *és una (k+p)-àlgebra graduada commutativa (resp. anticommutativa). Si p és imparell,* $(E,R_{\mathcal{P}}\langle\circ\rangle)$ *és una (k+p)-àlgebra graduada anticommutativa (resp. commutativa).*

Suposem ara $(E,\circ)$ associativa. Aleshores ($\circledast = R_{\mathcal{P}}\langle\circ\rangle$):

$$(A\circledast B)\circ C = \{\mathcal{P}A\circ B + (-1)^{pa}A\circ\mathcal{P}B - (-1)^{pk}\mathcal{P}(A\circ B)\}\circ C = (\mathcal{P}A\circ B)\circ C +$$

$$+ (-1)^{pa}(A\circ\mathcal{P}B)\circ C - (-1)^{pk}(A\circ B)\circledast C + (-1)^{p(a+b)}(A\circ B)\circ\mathcal{P}C -$$

$$- \mathcal{P}[(A\circ B)\circ C] = (-1)^{k(p+a)+k}\mathcal{P}A\circ(B\circ C) + (-1)^{a(p+k)+k}A\circ(\mathcal{P}B\circ C) -$$

$$- (-1)^{pk}(A\circ B)\circledast C + (-1)^{ka+p(a+b)+k}A\circ(B\circ\mathcal{P}C) - (-1)^{ak+k}\mathcal{P}[A\circ(B\circ C)]$$

$$A\circledast(B\circ C) = \mathcal{P}A\circ(B\circ C) + (-1)^{pa}A\circ\mathcal{P}(B\circ C) - (-1)^{pk}\mathcal{P}[A\circ(B\circ C)] = \mathcal{P}A\circ(B\circ C) +$$

$$+ (-1)^{p(a+k)}A\circ\{\mathcal{P}B\circ C + (-1)^{pb}B\circ\mathcal{P}C - B\circledast C\} - (-1)^{pk}\mathcal{P}[A\circ(B\circ C)]$$

Si multipliquem la primera expressió per $(-1)^{k(p+a)+k}$ i restem, resulta:

*PROPOSICIÓ VI.8: Siga* $(E,\circ)$ *una k-àlgebra graduada associativa. Siguen* $\mathcal{P}\in$ EndE i $\circledast = R_{\mathcal{P}}\langle\circ\rangle$. Aleshores:

$$(-1)^{k(p+k+a)}A\circledast(B\circ C) - (A\circledast B)\circ C = (-1)^{kp}(A\circ B)\circledast C - (-1)^{a(p+k)+k}A\circ(B\circledast C)$$

## 5. ALGUNES PROPIETATS D'ALGEBRES RESIDUALS

a) En aquesta secció $(E,\circ)$ serà una 0-àlgebra graduada associativa i commutativa sobre un anell $\mathbf{A}$, i denotarem $\{,\}$ el sobrant de $P \in \mathrm{End}_{\mathbf{A}}E$ en $(E,\circ)$: $\{A,B\} = R_P\langle\circ\rangle(A,B)$. Expressarem per $\mathrm{ad}\{A\}$ l'adjunta de l'element $A$ en l'àlgebra residual $(E,\{,\})$: $\mathrm{ad}\{A\}(B) = \{A,B\}$.

Tenint en compte la proposició VI.7 i que $(E,\circ)$ és commutativa, l'expressió de la proposició VI.8 s'escriu per a $k = 0$,

$$\{A,B\circ C\} - \{A,B\}\circ C = (-1)^{c(a+b)}[\{C,A\circ B\} - (-1)^{a(c+p)}A\circ\{C,B\}]$$

és a dir, per la definició (VI.21) de sobrant,

$$(-1)^{b(a+p)}B\circ\{A,C\} - R_{\mathrm{ad}(A)}\langle\circ\rangle(B,C) =$$

$$= (-1)^{c(a+b)}[\{C,A\}\circ B - R_{\mathrm{ad}(C)}\langle\circ\rangle(A,B)]$$

Però la commutativitat implica $B\circ\{A,C\} = (-1)^{b(a+c+p)+ac}\{C,A\}\circ B$ i, en conseqüència, podem enunciar:

*PROPOSICIÓ VI.9: Amb les hipòtesis del primer paràgraf de 5(a),*

$$R_{\mathrm{ad}(A)}\langle\circ\rangle(B,C) = (-1)^{c(a+b)}R_{\mathrm{ad}(C)}\langle\circ\rangle(A,B)$$

és a dir, $\mathrm{ad}\{A\}$ verifica la regla de Leibnitz sobre $(B,C)$ sii $\mathrm{ad}\{C\}$ la verifica sobre $(A,B)$.

b) Suposem ara que el submòdul $E_1$ és un generador de l'àlgebra $(E,\circ)$, és a dir, qualsevol element de $E = \oplus E_a$ és suma de productes (amb l'operació $\circ$) d'elements de $E_1$. Aleshores, es pot demostrar:

*LEMA VI.1: Siga* $(E,\circ)$ *una àlgebra graduada associativa generada per* $E_1$. *Siga* $Q \in \mathrm{End}E$ *que verifica la regla de Leibnitz sobre* $E_1 \times E$. *Aleshores* $Q \in \mathrm{Der}(E,\circ)$.

Dem: És senzilla la demostració per inducció. Suposem verificada la regla de Leibnitz per a elements de grau a-1. Tot element de grau a és suma de termes que poden escriure's de la forma $A = X\circ C$, $C \in E_{a-1}$, $X \in E_1$. Aleshores:

$$Q(A\circ B) = Q[(X\circ C)\circ B] = Q[X\circ(C\circ B)] = QX\circ(C\circ B) - X\circ Q(C\circ B) =$$

$$= QX\circ(C\circ B) - X\circ[QC\circ B + (-1)^{a-1}C\circ QB] = [QX\circ C - X\circ QC]\circ B +$$

$$+ (-1)^{a}(X\circ C)\circ QB = QA\circ B + (-1)^{a}A\circ QB\ ,$$

i el lema queda demostrat.

Situem-nos, una altra vegada, sota les hipòtesis del primer paràgraf de 5(a), i suposem $\mathrm{ad}(X) \in \mathrm{Der}(E,\circ)$, per a cada $X \in E_1$. Aleshores $R_{\mathrm{ad}(X)}\langle\circ\rangle \equiv 0$ i, de la proposició VI.9, resulta $R_{\mathrm{ad}(A)}\langle\circ\rangle(B,X)=0$ per a tota parella $A,B \in E$. Així:

*LEMA VI.2: Amb les hipòtesis del primer paràgraf de 5(a), si per a* $X \in E_1$, $\mathrm{ad}(X) \in \mathrm{Der}(E,\circ)$, *aleshores, per a cada* $A \in E$, $\mathrm{ad}(A)$ *verifica la regla de Leibnitz sobre* $E_1 \times E$.

Dels dos lemes anteriors, resulta:

***PROPOSICIÓ VI.10:*** *Siga* $(E,\bullet)$ *una àlgebra graduada commutativa i associativa generada per* $E_1$. *Siguen* $P \in \mathrm{End}E$, $\{,\} = R_P\langle\bullet\rangle$ *i* $\mathrm{ad}\{\}$ *l'aplicació adjunta en l'àlgebra residual* $(E,\{,\})$. *Si per a cada* $X \in E_1$, $\mathrm{ad}\{X\} \in \mathrm{Der}(E,\circ)$, *aleshores,* $\mathrm{ad}\{A\} \in \mathrm{Der}(E,\circ)$ *per a cada* A *de* E.

c) No és difícil comprovar que l'expressió (VI.20) es verifica amb independència que l'àlgebra graduada considerada siga de Lie. Per tant, si $P \in \mathrm{Der}(E,\{,\})$, és a dir, $P$ és una derivació de l'àlgebra residual induïda pel mateix $P$ en $(E,\bullet)$, tindrem:

$$[P,\mathrm{ad}\{A\}] = (-1)^p \mathrm{ad}\{PA\} \ .$$

Aleshores, del teorema VI.1, resulta:

$$(-1)^p R_{\mathrm{ad}(PA)}\langle\bullet\rangle = R_{[P,\mathrm{ad}A]}\langle\bullet\rangle = R_P\langle R_{\mathrm{ad}(A)}\langle\bullet\rangle\rangle - (-1)^{p(a+p)} R_{\mathrm{ad}A}\langle R_P\langle\bullet\rangle\rangle =$$

$$= R_P\langle R_{\mathrm{ad}(A)}\langle\bullet\rangle\rangle - (-1)^{p(a+p)} R_{\mathrm{ad}A}\langle\{,\}\rangle,$$

i, per tant:

***LEMA VI.3:*** *Siga* $\{,\} = R_P\langle\bullet\rangle$, *de forma que* $P \in \mathrm{Der}(E,\{,\})$. *Si* $\mathrm{ad}\{A\}$, $\mathrm{ad}\{PA\} \in \mathrm{Der}(E,\circ)$, *aleshores,* $\mathrm{ad}\{A\} \in \mathrm{Der}(E,\{,\})$.

D'aquest lema i de la proposició anterior, resulta:

***PROPOSICIÓ VI.11:*** *Siga* $(E,\bullet)$ *una àlgebra graduada commutativa i associativa generada per* $E_1$. *Siguen* $P \in \mathrm{End}E$, $\{,\} = R_P\langle\bullet\rangle$ *i* $\mathrm{ad}\{\}$ *l'aplicació adjunta en l'àlgebra residual* $(E,\{,\})$. *Si per a cada* $X \in E_1$, $\mathrm{ad}\{X\} \in \mathrm{Der}(E,\circ)$, *i si* $P \in \mathrm{Der}(E,\{,\})$, *aleshores, per a cada* $A \in E$, $\mathrm{ad}\{A\} \in \mathrm{Der}(E,\{,\})$.

Si p és imparell, la proposició VI.6 afirma que $P \in \mathrm{Der}(E,\{,\})$ si i sols si, $P^2 \in \mathrm{Der}(E,\circ)$. Per altra part, de la proposició VI.7 resulta que, essent $(E,\circ)$ commutativa, $(E,\{,\})$ serà una àlgebra graduada anticommutativa; però sota aquesta condició, la identitat de Jacobi és equivalent a $\mathrm{ad}\{A\} \in \mathrm{Der}(E,\{,\})$ per a cada $A \in E$. Amb tot açò, i tenint present la proposició VI.11, tindrem:

***TEOREMA VI.2:*** *Siga* $(E,\circ)$ *una àlgebra graduada commutativa i associativa generada per* $E_1$. *Siguen* $P \in \mathrm{End}E$, $\{,\}=R_P\langle\circ\rangle$ *i* $\mathrm{ad}\{\}$ *l'aplicació adjunta en l'àlgebra residual* $(E,\{,\})$. *Si per a cada* $X \in E_1$, $\mathrm{ad}\{X\} \in \mathrm{Der}(E,\circ)$, *si* $P^2 \in \mathrm{Der}(E,\circ)$, *i si p és imparell, aleshores,* $(E,\{,\})$ *és una p-àlgebra de Lie graduada.*

Capítol VII

---

# EL CLAUDATOR DE SCHOUTEN

## 1. PROBLEMES OBERTS I OBJECTIUS

a) Schouten (1940) va introduir un concomitant diferencial de primer ordre associat a dos tensors contravariants arbitraris. Si P i Q són d'ordres p+1 i q+1, el concomitant de Schouten és el tensor contravariant d'ordre p+q+1 de components:

$$
\begin{aligned}
&\Sigma^{p}_{i=0}\, P^{(\alpha_0,,,\alpha_{i-1}/\mu/\alpha_i,,,\alpha_{p-1}}\, \partial_\mu\, Q^{\alpha_p,,,\alpha_{p+q})} \; + \\
&+ \Sigma^{p}_{i=0}(-1)^{i}\, P^{[\alpha_0,,,\alpha_{i-1}/\mu/\alpha_i,,,\alpha_{p-1}}\, \partial_\mu\, Q^{\alpha_p,,,\alpha_{p+q}]} \; - \\
&- \Sigma^{q}_{j=0}\, Q^{(\alpha_0,,,\alpha_{j-1}/\mu/\alpha_j,,,\alpha_{q-1}}\, \partial_\mu\, P^{\alpha_q,,,\alpha_{p+q})} \; - \\
&- \Sigma^{q}_{j=0}(-1)^{pq+p+q+j}\, Q^{[\alpha_0,,,\alpha_{j-1}/\mu/\alpha_j,,,\alpha_{q-1}}\, \partial_\mu\, P^{\alpha_q,,,\alpha_{p+q}]} \; .
\end{aligned}
\qquad \text{(VII.1)}
$$

on ( ) i [ ] expressen, respectivament, simetrització i antisimetrització dels índex que contenen (llevat d'aquells que són entre barres).

L'expressió (VII.1) defineix una operació en el conjunt dels tensors contravariants, el claudàtor de Schouten, les propietats de la qual van ser estudiades amb detall per Nijenhuis (1955). Entre elles remarquem que el claudàtor de dos tensors simètrics (respect. antisimètrics) és simètric (resp. antisimètric).

Aquest claudàtor, que denotarem $\{,\}$, generalitza el concepte de derivada de Lie (Schouten, 1954; Dolan, 1983). En aquest sentit, per exemple, un tensor de Killing K (simètric) d'una varietat riemanniana de mètrica g, està caracteritzat per l'equació $\mathcal{L}(K)g = \{K,g\} = 0$.

b) El claudàtor de Schouten sobre els tensors contravariants completament antisimètrics (p-tensors), al qual dediquem aquest capítol, ha estat utilitzat per a estudiar les estructures de Jacobi, que són la generalització contravariant de les estructures de Poisson i de contacte (Lichnerowicz, 1977). Sobre els p-tensors, el concomitant (VII.1), queda definit per la seua acció sobre les formes tancades (Lichnerowicz, 1985): Si A, B són d'ordres a i b, respectivament, el claudàtor de Schouten $\{A,B\}$ és el (a+b-1)-tensor tal que, per a cada (a+b-1)-forma $\gamma$, verifica:

$$i(\{A,B\})\gamma = (-1)^{ab+b} i(A)di(B)\gamma + (-1)^{a} i(B)di(A)\gamma \qquad \text{(VII.2)}$$

Una primera qüestió que ens podem plantejar és clarificar l'estructura algebraica que tenen el p-tensors amb aquesta operació. En efecte, mentre que els tensors simètrics tenen estructura d'àlgebra de Lie amb el claudàtor de Schouten, sobre els tensors antisimètrics loperació {,} verifica una anticommutativitat i una identitat de Jcobi de tipus graduat. Tanmateix, açò no implica una estructura etàndard d'àlgebra de Lie graduada. Mostrarem aquí que, essent una oeració de grau -1, el claudàtor de Schouten dóna als p-tensors etructura de (-1)-àlgebra de Lie graduada (en el sentit que s'ha dfinit al capítol anterior).

La teoria dels sobrants, estudiada també al capítol anterior, ens prmet de presentar el claudàtor de Schouten com el sobrant de loperador divergència a l'àlgebra exterior contravariant, i l'àlgebra d Schouten com l'àlgebra residual corresponent. Així, obtenim una epressió del claudàtor de Schouten independent de la seua actuació sbre les formes, demostrem les seues propietats conegudes de forma imediata i, a més, n'obtenim d'altres noves que poden resultar dutilitat pràctica. Entre aquestes, remarquem l'expressió que ens dóna lactuació de l'operador laplacià sobre el producte exterior de p-frmes.

Ja que el claudàtor de Schouten queda definit com el sobrant de l. divergència i, al mateix temps, generalitza la derivada de Lie, smbla natural preguntar-se en quin sentit les equacions de Maxwell, $\delta = \delta{*}F = 0$, estan expressant propietats d'auto-invariància dels camps eectromagnètics F i *F. Mostrarem que un camp de Maxwell és auto-ivariant en la mesura que són constants els seus invariants escalars, i provarem que una estructura maxwelliana defineix una estructura (omplexa) de Jacobi.

c) Per tal de demostrar, en la secció 2, que el claudàtor de Shouten és el sobrant de la divergència a l'àlgebra exterior cntravariant necessitarem algunes propietats de les àlgebres exteriors (ovariant i contravariant) que seran exposades a la mateixa secció.

En la secció 3, a la llum de la teoria dels sobrants, comprovarem que l'àlgebra de Schouten és una (-1)-àlgebra de Lie graduada i deduirem les propietats del claudàtor de Schouten i d'alguns operadors que actuen sobre les p-formes en una varietat riemanniana.

Per últim, en la secció 4, estudiarem la relació entre les equacions de Maxwell i el claudàtor de Schouten, i reinterpretarem les equacions que caracteritzen una geometria maxwelliana.

## 2. CLAUDATOR DE SCHOUTEN I DIVERGÈNCIA

a) Designem per $G^pM$ (resp. $G^{*p}M$) el conjunt dels camps de p-formes (resp. p-tensors) sobre la varietat diferencial M, és a dir, els tensors covariants (resp. contravariants) totalment antisimètrics.

Aleshores, $G = GM = \oplus G^pM$ (resp. $G^* = G^*M = \oplus G^{*p}M$), amb l'operació producte exterior, és una àlgebra graduada associativa i commutativa sobre l'anell de les funcions $\chi = \chi(M)$: és la coàlgebra (resp. contra-àlgebra) exterior o de Grassman. Escriurem $\alpha$, $\beta$, $\gamma \in G$, i A, B, $C \in G^*$, que considerarem, respectivament, de graus a, b, c.

En les propietats que resumim en els apartats (a) i (b) d'aquesta secció, són intercanviables els papers de G i $G^*$.

Siguen A i $\beta$ tals que $a \leq b$. S'anomena *producte interior* de A per $\beta$ a la (b-a)-forma, denotada $i(A)\beta$ (o també $(A,\beta)$), de components:

$$[i(A)\beta]_{b-a} = (1/a!)A^a\beta_{a,b-a} \qquad \text{(VII.3)}$$

De manera semblant, la contracció en les a components de la dreta de $\beta$ serà denotada $(\beta, A)$; aleshores:

$$(\beta, A) = (-1)^{a(b-a)}(A,\beta) \qquad \text{(VII.4)}$$

Quan a = 1, tenim el conegut producte interior per un vector. En aquest cas, si $X \in G^{*1}$, tenim:

$$i(X)(\alpha \quad \beta) = i(X)\alpha \wedge \beta + (-1)^a \alpha \wedge i(X)\beta \qquad \text{(VII.5)}$$

és a dir, $i(X) \in Der_x(G, \ )$ i és de grau -1.

En canvi, per a $a>1$, $i(A) \in End_{x,-a}G$, però no és una derivació graduada. Així, per exemple, si F és un 2-tensor,

$$\{R_{i(F)}\langle\Lambda\rangle\}_{a+b-2} = [1/(a-1)!(b-1)!]\,{}_{,}\delta_{a+b-2}{}^{a-1,b-1}(\alpha \times F \times \beta)_{a-1,b-1} \tag{VII.6}$$

Tanmateix, es verifiquen genèricament les propietats següents:

Si $c = a+b-1$,

$$(\gamma, A \wedge B) = ((A,\gamma),B) + (-1)^{ab}((B,\gamma),A) \tag{VII.7}$$

Si $c \geq a+b$,

$$(A \wedge B, \gamma) = (B,(A,\gamma)) \;, \qquad (\gamma, A \wedge B) = ((\gamma,B),A) \tag{VII.8}$$

b) Suposem M orientable i de dimensió n. Donat un element de volum $\P$, siga $\P^*$ l'element de volum contravariant tal que:

$$\P_{p,n-p}\P^{*p',n-p} = [\epsilon/(n-p)]\;\delta_p{}^{p'} \;, \quad \epsilon = \pm 1 \;, \tag{VII.9}$$

Aleshores, podem definir els operadors de dualitat:

$$\begin{aligned} &*: G^{*a} \longrightarrow G^{n-a} \;, && *: G^{a} \longrightarrow G^{*n-a} \\ &*A = (\P, A) \;, && *\alpha = (\P^*, \alpha) \end{aligned} \tag{VII.10}$$

de forma que, per (VII.9), $**A = \epsilon(-1)^{a(n-a)}A$, és a dir,

$$*^2 = \epsilon(-1)^{a(n-a)} \tag{VII.11}$$

A més, si $a+b \leq n$, resulta de (VII.8):

$$*(A \wedge B) = (*B, A) = (-1)^{ab}(*A, B) \tag{VII.12}$$

d'on se segueix, tenint present (VII.11), per a a≥b:

$$*A \wedge \beta = *(\beta, A) \qquad \text{(VII.13)}$$

c) Els nombres reals **R** són un subanell del conjunt $\chi$ de les funcions definides sobre M. Per tant, G i $G^*$ poden considerar-se, tant $\chi$-àlgebres, com **R**-àlgebres.

L'operador diferencial exterior, $d: G^a \to G^{a+1}$, és lineal sobre **R** i verifica la regla de Leibnitz graduada; així, $d \in Der_{\mathbf{R}}(G, \wedge)$.

A partir de la diferencial exterior i d'un element de volum, podem definir l'operador codiferencial exterior $\delta: G^{*a} \to G^{*a-1}$:

$$\delta = \epsilon(-1)^{na} * d * \qquad \text{(VII.14)}$$

que coincideix amb la divergència canviada de signe i que verifica:

$$\begin{aligned} *\delta &= -(-1)^{n-a} d* , & \delta * &= (-1)^{a} * d , \\ d &= -\epsilon(-1)^{n(a+1)} * \delta * , & \delta^2 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(VII.15)}$$

A més a més, tenim la propietat següent:

***LEMA VII.1:*** *Siguen* $\beta \in G$ *i* $A \in G^*$ *tal que* a-b>0. *Aleshores:*

$$(\beta, \delta A) = (d\beta, A) + (-1)^{b} \delta(\beta, A) \qquad \text{(VII.16)}$$

Dem: Siga r = a-b. Si tenim present les propietats (VII.4-11-12-13-14), resulta:

$$(\beta, \delta A) = (-1)^{b(r-1)} (\delta A, \beta) = \epsilon(-1)^{an+b(r-1)} (*d*A, \beta) =$$

$$= \epsilon(-1)^{an+b(r-1)} * [\beta \wedge d * A] = \epsilon(-1)^{an+b(r-1)+b} * [d(\beta \wedge * A) - d\beta \wedge * A] =$$

$$= \epsilon(-1)^{an+br}[(-1)^{b(n-a)} * d * (\beta, A) - (-1)^{(n-a)(b+1)} ** (d\beta, A)] =$$

$$= (-1)^{b}\delta(\beta, A) - (-1)^{an+b+n(b+1)+a+(r+1)(n+1)}(d\beta, A) =$$

$$= (-1)^{b}\delta(\beta, A) + (d\beta, A)$$

la qual cosa demostra el lema. Si tenim en compte de nou (VII.4), (VII.16) s'escriu també:

$$\delta(A, \beta) = (\delta A, \beta) + (-1)^{r}(A, d\beta) , \qquad r=a-b \qquad \text{(VII.16)'}$$

**d)** Per altra part, essent $*$ $\chi$-lineal i d **R**-lineal, $\delta$ és **R**-lineal, és a dir, $\delta \in End_{\mathbf{R}}G^{*}$. Tanmateix, $\delta$ no és derivació; per exemple, és conegut que, per a dos camps vectorials X, $Y \in G^{*1}$,

$$\delta(X \wedge Y) = (\delta X)Y - (\delta Y)X - [X, Y] \qquad \text{(VII.17)}$$

on $[X, Y] = \pounds(X)Y$. En conseqüència, podem considerar el sobrant de $\delta$ en la contraàlgebra exterior: $\mathbf{R}_{\delta}\langle \wedge \rangle$. Essent $\delta$ de grau -1 i el producte exterior una operació de grau 0, $\mathbf{R}_{\delta}\langle \wedge \rangle$ serà una operació de grau -1. Aleshores, $\mathbf{R}_{\delta}\langle \wedge \rangle(A, B)$ serà, el (a+b-1)-tensor:

$$\mathbf{R}_{\delta}\langle \wedge \rangle(A, B) = \delta A \wedge B + (-1)^{a} A \wedge \delta B - \delta(A \wedge B) \qquad \text{(VII.18)}$$

Calculem l'acció de $\mathbf{R}_{\delta}\langle \wedge \rangle(A, B)$ sobre una (a+b-1)-forma $\gamma$; tenint en compte (VII.7-8-16), resulta:

$$(\gamma, \mathbf{R}_{\delta}\langle \wedge \rangle(A, B)) = (\gamma, \delta A \wedge B) + (-1)^{a}(\gamma, A \wedge \delta B) - (\gamma, \delta(A \wedge B)) =$$

$$= ((\gamma, B), \delta A) + (-1)^{a}(\delta B, (A, \gamma)) - (d\gamma, A \wedge B) -$$

$$- (-1)^{a+b-1}\delta(\gamma, A \wedge B) = [(d(\gamma,B),A) + (-1)^{a-1}\delta((\gamma,B),A)] +$$

$$+ (-1)^{a}[\delta(B,(A,\gamma)) + (B,d(A,\gamma))] - (d\gamma, A \quad B) +$$

$$+ (-1)^{a+b}\delta[((A,\gamma),B) + (-1)^{ab}((B,\gamma),A)] =$$

$$= (d(\gamma,B),A) + (-1)^{ab}(d(\gamma,A),B) - (d\gamma, A \wedge B)$$

Si comparem aquesta darrera expressió amb l'acció (VII.2) del claudàtor de Schouten sobre les formes tancades, podem enunciar:

***TEOREMA VII.1:*** *L'àlgebra de Schouten* $(G^*, \{,\})$ *és l'àlgebra residual generada per l'operador* $\delta$ *en la contra-àlgebra exterior* $(G^*, \wedge)$. *És a dir,*

$$\{A,B\} = \delta A \wedge B + (-1)^{a} A \wedge \delta B - \delta(A \wedge B) \qquad \text{(VII.19)}$$

Així, *el claudàtor de Schouten és el sobrant de l'operador -divergència respecte del producte exterior*: $\{A,B\} \equiv R_\delta\langle\wedge\rangle(A,B)$. És més, de la demostració del teorema anterior resulta que l'acció de $\{A,B\}$ sobre una $(a+b-1)$-forma *arbitrària* $\gamma$ ve donada per:

$$i(\{A,B\})\gamma = (d(\gamma,B),A) + (-1)^{ab}(d(\gamma,A),B) - (d\gamma, A \wedge B) \,, \qquad \text{(VII.20)}$$

expressió que generalitza (VII.2) i podem trobar en el treball de Dolan (1983).

## 3. PROPIETATS DE L'ALGEBRA DE SCHOUTEN

a) L'expressió (VII.17) ens diu, tenint en compte (VII.19), que el claudàtor de Lie de dos camps vectorials coincideix amb el claudàtor de Schouten. No és difícil comprovar que si $X \in G^{*1}$ i $A \in G^*$,

$$\{X, A\} = (\delta X)A - X \wedge \delta A - \delta(X \wedge A) = \mathcal{L}(X)A\,, \qquad \text{(VII.21)}$$

és a dir, el claudàtor de Schouten generalitza la derivada de Lie. Aleshores, l'adjunta en l'àlgebra de Schouten $(G^*, \{,\})$ d'un element $A$ el denotarem $\mathcal{L}(A)$: $\mathcal{L}(A) = \{A, B\}$.

És conegut que la derivada de Lie ordinària $\mathcal{L}(X)$, $X \in G^{*1}$, és una derivació de la contraàlgebra exterior: $\mathcal{L}(X) \in Der_{\mathbf{R}}(G^*, \wedge)$. Aleshores, com que $(G^*, \wedge)$ és una àlgebra graduada associativa i commutativa, i l'operador $\delta \in End_{\mathbf{R}}G$ és de grau -1 i verifica $\delta^2 = 0$, del teorema VI.2, resulta:

***TEOREMA VII.2:*** *L'àlgebra de Schouten $(G^*, \{,\})$ és un (-1)-àlgebra de Lie graduada sobre $\mathbf{R}$, és a dir: el conjunt dels tensors contravariants totalment antisimètics verifica, amb el claudàtor de Schouten:*

$$\{G^{*a}, G^{*b}\} \subset G^{*a+b-1} \qquad \text{(VII.22)}$$

$$\{A, B\} = (-1)^{ab}\{B, A\} \qquad \text{(VII.23)}$$

$$Per[\,(-1)^{ac}\{\{A, B\}, C\}\,] = 0 \qquad \text{(VII.24)}$$

Aleshores, de les proposicions VI.2-3-4, es deriva:

*PROPOSICIÓ VII.1: i)* $\mathcal{L}(A) \in \mathrm{Der}(G^*, \{,\})$, *és a dir:*

$$(-1)^{a+1}\mathcal{L}(A)\{B,C\} = \{\mathcal{L}(A)B,C\} + (-1)^{b(a+1)}\{B,\mathcal{L}(A)C\} \qquad \text{(VII.25)}$$

*ii)* $\mathcal{L}: G^* \longrightarrow \mathrm{Der}(G^*, \{,\})$; $A \longrightarrow \mathcal{L}(A)$ *és un homomorfisme de k-àlgebres de Lie graduades, és a dir:*

$$\mathcal{L}(\{A,B\}) = -(-1)^{a}[\mathcal{L}(A),\mathcal{L}(B)] \qquad \text{(VII.26)}$$

*iii)* $\mathcal{L}(G^*)$ és un ideal de $\mathrm{Der}(G^*, \{,\})$: *Si* $D \in \mathrm{Der}(G^*, \{,\})$ *és de grau r, es verifica:*

$$[D,\mathcal{L}(A)] = (-1)^{r}\mathcal{L}(DA) \qquad \text{(VII.27)}$$

b) Podem deduir fàcilment altres propietats del claudàtor de Schouten de l'estudi de les àlgebres residuals de les seccions VI.4-5. En efecte, essent $\delta \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}G$ tal que $\delta^2 = 0$, de l'apartat (iii) de la proposició VI.6, resulta que $\delta \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(G,\wedge)$. Per altra part, $(G^*, \ )$ verifica les hipòtesis de la proposició VI.10 i, en conseqüència, $\mathcal{L}(A)$ serà una derivació d'aquesta àlgebra. Més en concret:

*PROPOSICIÓ VII.2: i)* $\delta \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(G^*, \{,\})$:

$$-\delta\{A,B\} = \{\delta A,B\} + (-1)^{a}\{A,\delta B\} \qquad \text{(VII.28)}$$

*ii)* $\mathcal{L}(A) \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(G^*,\wedge)$:

$$\mathcal{L}(A)(B\wedge C) = \mathcal{L}(A)B\wedge C + (-1)^{b(a-1)}B\wedge\mathcal{L}(A)C \qquad \text{(VII.29)}$$

De la primera afirmació de la proposició anterior i de la tercera de la proposició VII.1, tenim la generalització següent per al commutador de la codiferencial i la derivada de Lie:

$$[\delta, \mathcal{L}(A)] \equiv \delta\mathcal{L}(A) + (-1)^{a}\mathcal{L}(A)\delta = -\mathcal{L}(\delta A) \qquad \text{(VII.30)}$$

Tenint en compte la definició de commutador graduat, resulta que l'expressió (VII.16) ens dóna el valor del commutador dels operadors graduats $i(\beta)$ ($(-b)$-graduat per a una b-forma $\beta$) i $\delta$:

$$[i(\beta), \delta] = i(d\beta) \qquad \text{(VII.31)}$$

En particular, quan considerem una 1-forma $\omega$, $i(\omega) \epsilon Der_{x}(G^{*}, \wedge)$. En canvi, $i(\omega)$ no és una derivació de l'àlgebra de Schouten. En efecte, del teorema VI.1 i de (VII.31), resulta:

***PROPOSICIÓ VII.3:*** *Si $\omega$ és una 1-forma arbitrària, es verifica:*

$R_{i(\omega)}\langle\{,\}\rangle = R_{i(d\omega)}\langle\wedge\rangle$ *és a dir,*

$$\begin{aligned}\{i(\omega)A, B\} + (-1)^{a}\{A, i(\omega)B\} + i(\omega)\{A, B\} &= \\ i(d\omega)A \wedge B + A \wedge i(d\omega)B + i(d\omega)(A \wedge B)&\end{aligned} \qquad \text{(VII.32)}$$

D'aquesta proposició s'hi deriva que el sobrant de $i(\omega)$ a l'àlgebra de Schouten ve donat per una expressió semblant a (VII.6).

c) Considerem ara l'àlgebra exterior covariant $(G, \wedge)$. Tenim, si $X \in G^{*\prime}$, que $i(X)$, $d \in Der_{R}(G, \wedge)$ i el seu commutador és la derivada de Lie:

$$[d, i(X)] \equiv di(X) + i(X)d = \mathcal{L}(X) \qquad \text{(VII.33)}$$

Situem-nos ara en una varietat pseudo-riemanniana $(M, g)$. Aleshores podem fer la identificació $G \equiv G^{*}$. Considerem la codiferencial exterior definida segons (VII.14) a partir de l'element de volum induït per g. L'operador laplacià no és altra cosa que el commutador graduat de d i $\delta$:

$$[d,\delta] \equiv d\delta + \delta d = \Delta \qquad \text{(VII.34)}$$

És conegut que $\Delta$ no és una derivació de l'àlgebra exterior. Quan val el seu sobrant? La proposició següent ens el relaciona amb el sobrant de la diferencial exterior a l'àlgebra de Schouten. En efecte, essent d una derivació de l'àgebra exterior i $\{,\} = R_\delta\langle\wedge\rangle$, del teorema VI.1, resulta:

*PROPOSICIÓ VII.4:* $R_\Delta\langle\wedge\rangle = R_d\langle\{,\}\rangle$, *és a dir,*

$$\begin{aligned}\Delta\alpha\wedge\beta + \alpha\wedge\Delta\beta - \Delta(\alpha\wedge\beta) &= \\ &= \{d\alpha,\beta\} + (-1)^a\{\alpha,d\beta\} + d\{\alpha,\beta\}\end{aligned} \qquad \text{(VII.35)}$$

## 4. CLAUDATOR DE SCHOUTEN I EQUACIONS DE MAXWELL

a) Si F és una 2-forma arbitrària en un espai-temps 4-dimensional (V, g), de l'expressió (VII.19) resulta:

$$
\begin{aligned}
\{F,F\} &= 2\,\delta F \wedge F + *d(F,*F) \\
\{*F,*F\} &= 2\,\delta *F \wedge *F - *(F,*F) \qquad \text{(VII.36)} \\
\{F,*F\} &= \{*F,F\} = \delta F \wedge *F + \delta *F \wedge F - *d(F,F)
\end{aligned}
$$

Ja que el claudàtor de Schouten generalitza la derivada de Lie, direm que B *és invariant per* A *si* $\pounds(A)B = \{A,B\} = 0$. Resulta així de (VII.36) i gràcies a (VII.11-12):

***PROPOSICIÓ VII.5:*** *i) Una 2-forma F és auto-invariant* ($\pounds(F)F = 0$) *sii* $d(F,*F) = i(\delta F)*F$.

*ii) Una 2-forma deixa invariant el seu dual* ($\pounds(F)*F = 0$) *sii* $d(F,F) = i(\delta F)F - i(\delta *F)*F$.

b) Siga F un camp de Maxwell ($\delta F = \delta *F = 0$). Aleshores (VII.36) s'escriu:

$$
\begin{aligned}
\{F,F\} &= -\{*F,*F\} = *d(F,*F) \\
\{F,*F\} &= \{*F,F\} = -*d(F,F)
\end{aligned}
\qquad \text{(VII.37)}
$$

D'aquestes expressions resulta:

*PROPOSICIÓ VII.6: La condició necessària i suficient perquè un camp de Maxwell tinga els seus invariants escalars constants* ($d(F,F) = d(F,*F) = 0$) *és que* $\pounds(F)F = \pounds(F)*F = \pounds(*F)*F = 0$.

Siga F una 2-forma que verifica (VII.37). Aleshores de (VII.36) se segueix:

$$\delta F\wedge F = \delta *F\wedge *F = 0 \ , \qquad \delta F\wedge *F + \delta *F\wedge F = 0 \qquad \text{(VII.38)}$$

equacions que resulten, tenint en compte (VII.11-12), equivalents a:

$$i(\delta F)*F = i(\delta *F)F = 0 \ , \quad i(\delta F)F - i(\delta *F)*F = 0 \qquad \text{(VII.39)}$$

Però per les expressions (I.7), quan F és regular $((F,F)^2+(F,*F)^2 \neq 0)$, (VII.39) implica $\delta F = \delta *F = 0$. Així podem enunciar:

*PROPOSICIÓ VII.7: Una 2-forma regular* F *és un camp de Maxwell sii verifica*

$$\begin{aligned} &\pounds(F)F = -\pounds(*F)*F = *d(F,*F) \ , \\ &\pounds(F)*F = *d(F,F) \end{aligned} \qquad \text{(VII.40)}$$

Les equacions (VII.40) són, formalment, un sistema d'equacions *no lineals* per a una 2-forma F. La proposició VII.7 ens diu que aquest sistema és completament equivalent a les equacions *lineals* de Maxwell quan F és regular. En canvi, si F és un camp de radiació pura, les equacions (VII.40) esdevenen: $\pounds(F)F = \pounds(*F)*F = \pounds(F)*F = 0$. No és difícil comprovar que no tota solució d'aquestes equacions és un camp de Maxwell. Aquest resultat ens ha obert un camí per tal de postular, en un trebal actualment en preparació, unes equacions per a l'electromagnetisme, el conjunt de solucions de les quals contenen els camps de Maxwell regulars i una família de camps singulars que no tenen necessàriament la direcció principal de distorsió nul·la (com passa en les solucions singulars de les equacions de Maxwell). Un resultat d'aquest tipus és interessant ja que, en espais-temps no conformement plans (on, com a màxim, hi ha dues direccions isòtropes geodèsiques i sense distorsió), es fa necessària una generalització dels camps electromagnètics singulars (Bel, Lapiedra, Montserrat, 1965).

c) Les equacions de Maxwell (II.6-7) per a les components geomètrica G, energètica $\phi$ i de Rainich $\psi$ d'un camp electromagnètic regular, poden escriure's, tenint en compte (VII.36) i ja que els invariants escalars associats a G són constants,

$$d\phi = *\{G,*G\} \,, \qquad d\psi = (1/2)[\{G,G\} + \{*G,*G\}] \qquad \text{(VII.41)}$$

D'aquestes equacions se segueix que, si G i *G són auto-invariants i *G és invariant per G, $\phi$ i $\psi$ són constants. Aleshores, (F,F) i (F,*F) seran constants ja que $(F,*F) = \phi^2 \sin 2\psi$, $(F,F) = -\phi^2 \cos 2\psi$. A més, com que $\{G,G\} + \{*G,*G\}$ és nul sii ho és cada sumand, es verificarà també el recíproc. Per tant, podem ampliar el resultat de la proposició VII amb el següent enunciat:

*PROPOSICIÓ VII.8: Per a una 2-forma* F *són equivalents:*

*i) La component geomètrica* G *de* F *verifica*

$$\mathcal{L}(G)G = \mathcal{L}(*G)*G = \mathcal{L}(G)*G = 0$$

*ii)* F *és un camp de Maxwell amb invariants escalars constants:*

$$d(F,F) = d(F,*F) = 0$$

*iii)* F *és un camp de Maxwell tal que*

$$\mathcal{L}(F)F = \mathcal{L}(F)*F = \mathcal{L}(*F)*F = 0$$

d) Siga $\mathbf{F}$ una 2-forma complexa auto-dual ($*\mathbf{F} = i\,\mathbf{F}$). La primera equació de (VII.36) s'escriu en aquest cas:

$$\{\mathbf{F},\mathbf{F}\} = 2\,\delta\mathbf{F}\wedge\mathbf{F} + i\,*\mathrm{d}(\mathbf{F},\mathbf{F}) \qquad \text{(VII.42)}$$

Si $\mathbf{F}$ és un camp de Maxwell ($\delta\mathbf{F} = 0$), se segueix de l'anterior expressió:

$$\{\mathbf{F},\mathbf{F}\} = i\,*\mathrm{d}(\mathbf{F},\mathbf{F}) \qquad \text{(VII.43)}$$

Així, la proposició 2 pot enunciar-se, en el formalisme vectorial complexe:

***PROPOSICIÓ VII.6'***: *Siga $\mathbf{F} = F - i{*}F$ un camp de Maxwell ($\delta\mathbf{F} = 0$). La condició necessària i suficient perquè $\mathbf{F}$ siga auto-invariant ($\pounds(\mathbf{F})\mathbf{F} = 0$) és que $\mathrm{d}(\mathbf{F},\mathbf{F}) = 0$.*

Quan $\mathbf{F}$ és regular, $\mathbf{F}\times\mathbf{F}$ és proporcional a la mètrica g i, en conseqüència, $\delta\mathbf{F} = 0$ sii $\delta\mathbf{F}\wedge\mathbf{F} = -\,i\,*\mathrm{i}(\delta\mathbf{F})\mathbf{F} = 0$. Aleshores, tenim el següent enunciat alternatiu per a la proposició VII.3:

***PROPOSICIÓ VII.7'***: *Una 2-forma auto-dual regular $\mathbf{F}$ és un camp de Maxwell sii verifica $\pounds(\mathbf{F})\mathbf{F} = i\,*\mathrm{d}(\mathbf{F},\mathbf{F})$*

e) Siga Z la 2-forma unitària auto-dual associada a una estructura quasi-producte 2+2. Essent de mòdul constant, l'equació (VII.42) s'escriu per a Z:

$$\{Z,Z\} = 2\,\delta Z\wedge Z \qquad \text{(VII.44)}$$

D'aquesta expressió i de (VII.28) resulta:

$$2\{\delta Z, Z\} = \delta\{Z,Z\} = -2 *d*(\delta Z \wedge Z) = -2i *di(\delta Z)Z \qquad \text{(VII.45)}$$

D'altra banda, recordem que una estructura de Jacobi és una parella $(E,F)$ tal que $\{F,F\} = 2E \wedge F$, $\{E,F\} = 0$. La parella $(Z,\delta Z)$ verifica, per (VII.44), la primera condició; a més, després de (VII.45), verificarà també la segona sii $dh = 0$, amb $h = i(\delta Z)Z$. Així, si tenim en compte la proposició II.1, hem demostrat:

***PROPOSICIÓ VII.9:*** *Una estructura quasi-producte Z és maxwelliana sii la parella (Z,δZ) defineix una estructura de Jacobi.*

# BIBLIOGRAFIA

AVEZ,A., 1964, Ann. Ins. Henri Poincaré, I, nº3, p.291-300

BENERJI,S., 1968, Prog. Theor. Phys., 39, p.365.

BARNES,A., 1983, *Shear-free Flows of a Perfect Fluid*, Proc. Conf. on Class. Gen. Rel., ed. Bonnor,Islam, McCallum, (London).

BEL,L., 1960, Thèse, Paris.

BEL,L., LAPIEDRA,R., MONTSERRAT,A., 1965, Cah. de Phys,, 182, p.433-43.

BELLEZA,V., FERRARI,V., 1984, J. Math. Phys., 25, p.1985-90.

BONA,C., COLL,B., MORALES,J.A., 1987, *Caracterización algebraica de un 2-tensor simétrico*, Actas de los E.R.E.-86. (Publicacions de la Universitat de València, València).

BOYER,R.H., LINDQUIST,R.W., 1967, J. Math. Phys., 8, p.265-81.

CAROT,J., 1987, Tesi Doctoral, Palma.

CAHEN,M., DEBEVER,R., DEFRISE,L., 1967, J. Math. Mec., **16**, p.761-85.

CARMINATI,J., WAINWRIGTHT,J., 1984, Gen. Rel. Grav., **17**, p.853-67.

CHANDRASEKHAR,S., 1983, *The Mathematical Theory of Black Holes*, (Oxford Univ. Press., New York)

COHEN,J.M., KEGELES,L.S., 1974, Phys. Rew. D, **10**, p.1070-84.

COLL,B., 1976, Ann. I.H.P., **25**, p.363-91.

COLL,B., 1980, Thèse d'état, Paris.

COLL,B., FAYOS,F., FERRANDO,J.J., 1985a, Comp. Rend. Acad. Sc. Paris, **300**, Sér.I, p.699-702.

COLL,B., FAYOS,F., FERRANDO,J.J., 1985b, *Sobre la geometria del camp electromagnètic*, Actas Encuentros Relativistas 1985, Maó. (Servei de publicacions de l'E.T.S.E.I.B., Barcelona)

COLL,B., FAYOS,F., FERRANDO,J.J., 1987a, *Sur les potentiels de Debye et les relations de Teukolsky*, en GEOMETRIE ET PHYSIQUE, "Travaux en Cours" nº21, Ed. Hermann, Paris.

COLL,B., FAYOS,F., FERRANDO,J.J., 1987b, *Sur le champ électromagnétique et les relations de Teukolsky*, en GEOMETRIE ET PHYSIQUE, "Travaux en Cours" nº21, Ed. Hermann, Paris.

COLL,B., FAYOS,F., FERRANDO,J.J., 1987c, J. Math. Phys., **28**, p.1075-9.

COLL,B., FERRANDO,J.J., 1986, *Sobre la permanencia de los campos electromagnéticos de radiación pura* , Actas de los E.R.E.-86. (Publicacions de la Universitat de València, València).

COLL,B., FERRANDO,J.J., 1987a, *Sur la permanence du champ électromagnétique singulier*, "Journées Relativistes 1987", Chambery.

COLL,B., FERRANDO,J.J., 1987b, Gen. Rel. Grav., (en premsa).

COLLINS, C.B., 1984, J. Math. Phys., **25**, p.995-1000.

COLLINS, C.B., 1985, J. Math. Phys., **26**, p.2009-17.

COLLINS, C.B., 1987, Gen. Rel. Grav., **19**, p.493-97.

CROSSMAN,R.G., FACKERELL,E.D., 1980, *Proc. Summer School on Gravitational Radiation*, ed. C.Edwards, (Springer-Verlag, Berlin)

DEBEVER,R., 1959, *Coll. Théorie de la Relativité*,. C.B.R.M., Bruxelles.

DEBEVER,R., 1976, Bull. Acad. R. Belgi., Class Sciences **62**, p.662-77.

DEBEVER,R., McLENAGHAN,R.G., 1981, J. Math. Phys., **22**, p.1711-26.

DOLAN,P., 1983, *A Generalization of the Lie Derivative*, Proc. Conf. on Class. Gen. Rel.,ed. Bonnor, Islam, McCallum, (London).

ECKART,C., 1940, Phys. Rev., **38**, p.919.

FAYOS,F., LLANTA,E., LLOSA,J., 1985, Ann. Inst. Henri Poincaré, **43**, p.195-209.

FRIEDRICH,H., SCHMIDT,B.G., 1987, preprint.

FROBENIUS,G., 1896, Sitzungsberg d. preuss. Akad. d. Wissensch, p.601-14

FRöLICHER,A., NIJENHUIS,A., 1956, Indag. Math., **17**, p.540-64.

GöDEL,K., 1950, Proc. Int. Cong. Math., **1**, p.175.

HERTZ,H., 1889, Ann. Phys. Leipz., **36**, p.1-22.

JACOB,M.,ed., 1986, *Supersymmetry and Supergravity*, A reprint volume of Physics Reports. Noth Holland/World Scientific.

KING,A.R., ELLIS,G.F.R., 1973, Commun. Math. Phys., **31**, p.209-242.

KINNERSLEY,W., 1969, J. Math. Phys., **19**, p.1195-203.

LEITES,D.A., 1980, Rassian Math. Surveys, **35**, p.1-64.

LE THAN PHONG, 1964, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **14**, p.269-344.

LICHNEROWICZ,A., 1955, *Théories Relativistes de la Gravitation et de l'Électromagnétisme*, (Masson, Paris).

LICHNEROWICZ,A., 1960, *Ondes et radiations electromagnétiques et gravitationelles en Relativité Générale*, Ann. di Mat. pura ed app., **50**, p.1-96.

LICHNEROWICZ,A., 1966a, Comm. Math. Phys., **1**, p.328-73.

LICHNEROWICZ,A., 1966b, Ann. I.H.P., **5**, p.37-75.

LICHNEROWICZ,A., 1967, *Relativistic Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics*, (W.A.Benjamin,Inc., New York).

LICHNEROWICZ,A., 1977, C. R. Acad. Sc. Paris, **285**, p.455-9.

LICHNEROWICZ,A., 1985, Suppl. Rendiconti Circ. Mat. Palermo, SerII, nº8, p.193-203.

MARIOT,L., 1954a, C.R.A.S. Paris, **238**, p.2055-6.

MARIOT,L., 1954b, C.R.A.S. Paris, **239**, p.1189-90.

MARIOT,L., 1955, C.R.A.S. Paris, **241**, p.175-6.

NEEWMAN,E., PENROSE,R., 1962, J. Math. Phys., **3**, p.566-578.

NIJENHUIS,A., 1955, Proc. K. Ned. Adad. Wet., **A58**, p.390-403.

NIJENHUIS,A., RICHARDSON R,W., 1964, Bull. Am. Math. Soc., **72**, p.406.

NISBET,A., 1955, Proc. Roy. Soc., **A231** p.250-63.

PLEBANSKY,J., 1964, Acta Phys.Pol., **26**, p.963-.

PLEBANSKY,J., 1979a, J. Math. Phys., **20**, p.1004-10.

PLEBANSKY,J., 1979b, J. Math. Phys., **20**, p.1946-62.

RAYNICH,G.Y., 1925, Trans. Am. Math. Soc. **27**, p.106-36.

ROBINSON,I., 1961, Jour. Math. Phys., **2**, p.290-1.

ROZOY,L., 1985, C. R. Acad. Sc. Paris, **300**, p.181-4.

SCHMIDT,B.G., 1986, *Conformal Geodesics*, en A.O. Barut, Ed. H.-D.Doebner, (Springer, Berlin).

SCHOUTEN,J.A., 1940, Proc. Kon. Ned. Akad. Amst., **43**, p.449-52.

SCHOUTEN,J.A., 1954, Conv. Int. Geom. Diff., Roma Cremanese, p.1-7.

STAROBINSKY,A.A., CHURILOV,S.M., 1973, Sov. Phys., J.E.T.P., **38**, p.1-5.

TAUB,A.H., 1948, Phys. Rev., **74**, p.328-34.

TAUB,A.H., 1963, *Hydrodynamics and General Relativity*, Ed.R.Wasserman/C.P.Wells, (Ac.P., New York).

TAUB,A.H., 1967, *Relativistic Hydrodynamics*, Lect. in App. Math., **8**, A.M.S.

TEUKOLSKY,S.A., 1973, Ap. J., **185**, p.635-47.

TEUKOLSKY,S.A., PRESS,W.H., 1974, Ap. J., **193**, p.443-61.

TRECIOKAS,R., ELLIS,G.F.R., 1971, Commun. Math. Phys., **23**, p.1-22.

WHITE,A.J., COLLINS,C.B., 1984, J. Math. Phys., **25**, p.332-7.

UNIVERSITAT DE VALENCIA — FACULTAT DE CIENCIES FISIQUES

Reunit el Tribunal que subscriu, en el dia de la data, acordà d'atorgar, per unanimitat, a aquesta Tesi Doctoral d'En/ Na/ N' Joan J. Ferrando Bargues la qualificació d' apte cum laude

València a 25 de setembre de 1987

El Secretari,

El President,